

**DESEMBARAÇAMENTO DE ESPECTROS  
ESTELARES MÚLTIPLOS**

Kelly Beatriz Vieira Torres

Abril 2008

KELLY BEATRIZ VIEIRA TORRES

**Desembaraçamento de Espectros Estelares  
Múltiplos**

Tese submetida à UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS  
GERAIS como requisito parcial para a obtenção do grau de  
Doutor em Física

Área de Concentração: ASTROFÍSICA

Orientador: Dr. Luiz Paulo Ribeiro Vaz (UFMG)

Co-orientador: Dr. Herman Hensberge (Royal Observatory of Belgium)

Departamento de Física - ICEX - UFMG

2008

# Agradecimentos

Agradeço sinceramente às seguintes pessoas e instituições que contribuíram para realização desse trabalho:

- a DEUS por TUDO ...
- aos meus pais, SÍLVIO e CLEUSA e ao meu irmão MICHEL pelo amor, companhia, e carinho;
- ao meu esposo OLIVIER pelo amor, apoio intenso e paciência;
- ao meu orientador LUIZ PAULO RIBEIRO VAZ pela orientação, incentivo, paciência, amizade e pelo conhecimento adquirido;
- ao meu co-orientador HERMAN HENSBERGE pela orientação, incentivo, paciência, conhecimento adquirido, além de, conjuntamente com sua esposa, ENEIDA, todo o apoio e amizade durante a minha permanência na Bélgica;
- ao Dr. SASA ILIJIĆ, pela contribuição ao trabalho e hospitalidade em Zagreb e Viena, e ao Dr. KRESEMIR PAVLOVSKI, pelo apoio financeiro e hospitalidade em Zagreb.
- a todos os meus amigos e professores do laboratório de astrofísica pela amizade e carinho;
- aos funcionários do Departamento de Física da UFMG pela contribuição anônima;
- aos funcionários e pesquisadores do Observatório Real da Bélgica pela hospitalidade e a oportunidade de realizar meu doutorado sanduíche;
- ao CNPQ pelo apoio financeiro tanto no Brasil quanto no exterior;
- à FAPEMIG pelo suporte financeiro dado pela aquisição de computadores.

# Acknowledgements

I thank sincerely the following persons and institutions that collaborated for the accomplishment of this work

- GOD for ALL ...
- my parents, SÍLVIO and CLEUSA and my brother MICHEL for their love, companionship, and care;
- my husband OLIVIER for his love, intense support and patience;
- my adviser LUIZ PAULO RIBEIRO VAZ for the supervision, advise, encouragement, patience, friendship and the knowlegde;
- my co-adviser HERMAN HENSBERGE for the supervision, encouragement, patience, knowlegde, besides, with his wife, ENEIDA, all the support and friendship during my stay in Belgium;
- Dr. SASA ILIJIĆ, for the contribution to the work and hospitality in Zagreb and Vienna, and Dr. KRESEMIR PAVLOVSKI, for the financial support and hospitality in Zagreb.
- all my friends and teachers of Astrophysics Laboratory for their friendship and care;
- the staff of Physics Departament – UFMG – for their anonymous contributions;
- the staff and researchers of the Royal Observatory of Belgium for the hospitality and opportunity of doing my relationship in this institution;
- CNPQ for the financial support during the whole course, including my stay in Belgium;
- FAPEMIG for financial support given to acquisition of computers.

# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Separação Espectral</b>	<b>10</b>
2.1	Modelo Matemático . . . . .	10
2.2	Princípios da Separação Espectral no Espaço de Velocidade . . . . .	12
2.3	Princípios da Separação Espectral no Espaço de Fourier . . . . .	15
2.4	Equivalência da Separação Espectral nos Espaços de Velocidade e de Fourier	18
2.4.1	Efeito de Bordas . . . . .	18
2.4.2	Definição do tamanho do pixel . . . . .	21
2.5	Formulação geral das equações de separação no espaço de Fourier . . . . .	22
2.5.1	Aplicação a sistemas duplos e triplos e análise de indeterminâncias e instabilidades numéricas . . . . .	23
2.5.1.1	Modo Zero de Fourier . . . . .	26
2.5.1.2	Modos de Fourier de Frequência mais Baixas . . . . .	28
2.5.1.3	Modos de Fourier de Frequências Altas . . . . .	30
2.6	Método no Espaço de Velocidade . . . . .	33
2.7	Espectros de Entrada com Viés (“Bias”) . . . . .	33
2.7.1	Tendências Relacionadas com a Fase Orbital . . . . .	34
2.7.2	Viés nas linhas . . . . .	38
2.7.3	Viés Constantes no Espaço de Velocidade . . . . .	38
2.8	Eliminação de Padrões Espúrios nos Espectros das Componentes . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Sistemas Binários: análise detalhada</b>	<b>44</b>
3.1	Solução Analítica no espaço de Fourier . . . . .	44
3.2	Singularidade das Equações . . . . .	47
3.3	Exemplos Ilustrativos com Poucos Pixels . . . . .	51
3.3.1	Caso 1: 3 fases $(\beta_{kj})_{j=1,3}^{k=1,2}$ . . . . .	53
3.3.1.1	Análise no espaço de Fourier . . . . .	53
3.3.1.2	Análise no espaço de velocidade . . . . .	54
3.3.1.3	Discussão: Espaço de Fourier versus Velocidade . . . . .	60
3.3.2	Caso 2: 4 fases $(\beta_{kj})_{j=1,4}^{k=1,2}$ . . . . .	62
3.3.2.1	Análise no espaço de velocidade . . . . .	62
3.3.2.2	Análise no espaço de Fourier . . . . .	64
3.3.3	Caso 3: Combinação de 3 fases $(\beta_{kj})_{j=1,3}^{k=1,2}$ . . . . .	66
3.3.3.1	Análise no espaço de velocidade . . . . .	66
3.3.3.2	Análise no espaço de Fourier . . . . .	67
3.3.4	Discussão: Amplitude dos padrões espúrios . . . . .	67

<b>4</b>	<b>Tempo Computacional no Espaço de Velocidade</b>	<b>70</b>
4.1	Fatores que interferem no tempo computacional . . . . .	70
4.2	Procedimento para redução do tempo computacional . . . . .	72
4.2.1	Princípios Básicos . . . . .	72
4.2.2	Tempo Computacional para grandes intervalos espectrais . . . . .	75
4.2.3	Como concatenar as subregiões . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Aplicação a um Sistema Real</b>	<b>81</b>
5.1	O Sistema Triplo Eclipsante RV Crateris . . . . .	81
5.1.1	Fotometria: observações e análise . . . . .	82
5.1.2	Espectroscopia Coudé e Aplicação da Técnica de Correlação Cruzada	83
5.1.3	Espectroscopia Échelle . . . . .	85
5.1.4	Combinação dos Métodos de Análise de Curva de Luz e Desem- baraçamento Espectral . . . . .	87
5.1.5	Escolha das Regiões Espectrais e Fases Orbitais . . . . .	89
5.1.5.1	Regiões Espectrais . . . . .	89
5.1.5.2	Fases Orbitais . . . . .	91
5.1.6	Intensidades Relativas das Componentes no Espectro Reconstruído	95
5.1.6.1	Contribuição da Primária . . . . .	95
5.1.6.2	Cálculo do Bloqueio de Linha e da Luminosidade Normal- izada da Primária . . . . .	96
5.1.6.3	Cálculo do Bloqueio de Linha, Contribuição ao Contínuo e Luminosidades Normalizadas da Secundária e Terciária .	98
5.1.6.4	Cálculo das variáveis Observáveis e Procedimento . . . . .	99
5.1.7	Aplicação do Código KOREL . . . . .	103
5.1.8	Cálculo do Número de Condição . . . . .	111
5.1.9	Estudo no Espaço de Velocidade: CRES . . . . .	112
5.1.9.1	Comparação dos Métodos no Espaço de Fourier e Velocidade	114
5.1.10	Renormalização e eliminação de padrões espúrios . . . . .	119
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>123</b>
6.1	Trabalhos Futuros . . . . .	128
	<b>Apêndices</b>	<b>130</b>
A.1	Estimativa da Informação de Velocidade Radial Contida num intervalo Es- pectral . . . . .	130
A.1.1	Introdução . . . . .	130
A.1.2	Caso I: Binárias Espectroscópicas SB1 . . . . .	132
A.1.3	Caso II: Binárias Espectroscópicas SB2 . . . . .	134
A.1.4	Caso III: Sistemas Triplos . . . . .	136
A.1.4.1	Aplicação: o sistema triplo eclipsante RV Cr	137
A.2	Aplicação da Técnica de Correlação Cruzada nos Espectros obtidos pelo KOREL . . . . .	140
A.2.1	Procedimento . . . . .	142
A.2.2	Resultados . . . . .	142
A.3	Contribuição dos diferentes modos de Fourier . . . . .	146
A.4	Trabalhos Publicados . . . . .	149

A.4.1	On the separation of component spectra in binary and higher-multiplicity stellar systems: bias progression and spurious patterns . . .	149
A.4.2	Comparison of different spectral disentangling techniques applied to a triple system . . . . .	172
A.4.3	Methods of spectral separation: analyse of spurious patterns and bias in the reconstructed spectra of multiple systems. . . . .	173
A.4.4	Study of the Spectral Disentangling Code – Korel – in eclipsing triple systems. Application to RV Crt . . . . .	175
A.4.5	Study of the RV Crt using the Spectral Disentangling Code – Korel	179
A.4.6	Estudo e aplicação do código de desembaraçamento espectral - Korel - em sistemas triplos . . . . .	180
A.4.7	Spectral Disentangling Applied to Triple Systems: RV Crt . . . . .	181

**Referências**

# Lista de Figuras

---

2.1	Estrutura da equação matricial que descreve a separação espectral no espaço de velocidade. . . . .	14
2.2	Matriz projeto mostrando a equivalência da separação espectral no espaço de velocidade e Fourier. . . . .	19
2.3	Espectro desembaraçado de uma das componentes de um sistema binário tardio mostrando os efeitos de borda. . . . .	20
2.4	Melhoramento do número de condição devido a inclusão de uma fase em eclipse para um sistema binário. . . . .	27
2.5	Aumento do número de condição ao considerar a terceira componente de um sistema triplo (RV Cr1). . . . .	29
2.6	Indeterminações dos modos de Fourier para um sistema binário onde $K_2 = K_1$ , $K_2 = 2K_1$ , e $K_2 = 3K_1$ . . . . .	32
2.7	Viés adicionados ao contínuo dos espectros de entrada e sua progressão sobre os espectros de saída. . . . .	35
2.8	“Tendências” adicionadas no contínuo dos espectros de entrada e sua progressão sobre os espectros de saída. . . . .	37
2.9	Viés induzidos nos espectros reconstruídos devido a variabilidade da intensidade das linhas da secundária com relação à fase orbital. . . . .	39
2.10	Viés induzidos durante a reconstrução espectral devido à presença de uma absorção estática que não pertence aos espectros intrínsecos das componentes. . . . .	40
3.1	Exemplo de um sistema binário, mostrando a indeterminação o bloqueio de linha em cada espectro das componentes devido à não-variabilidade em luz das mesmas. . . . .	49
3.2	Esquema mostrando a relação $\lambda(x_{2,i}) = \lambda(x_{1,i+1})$ . . . . .	56
3.3	Solução no espaço de velocidade para o Caso 1. . . . .	59
3.4	Presença de padrões espúrios sobre os espectros reconstruídos de um sistema binário cujos espectros observados são contínuo puro. . . . .	60
3.5	Redução da amplitude de padrões espúrios, induzida pela DVS, superposta no contínuo dos espectros reconstruídos. . . . .	68
4.1	Tempo computacional observado em segundos versus o predito pela teoria. . . . .	72
4.2	Esquema mostrando a determinação do “intervalo de confiança” que contém linhas das componentes presentes em todas as fases orbitais, para um sistema binário. . . . .	74
4.3	Esquema mostrando as subregiões e o “intervalo confiável” para um grande região. . . . .	76



4.4	Espectros das componentes de RV Crt reconstruídos no espaço de velocidade usando o procedimento para redução do tempo computacional. . . . .	78
5.1	Curva de luz $y$ e $(o - c)$ . . . . .	82
5.2	Curvas de correlação entre RV Crt e $\pi^3$ Ori. . . . .	84
5.3	Processo de interação entre o modelo de Curvas de Luz – WD e o método de Desembaraçamento espectral . . . . .	88
5.4	Desvio médio padrão e espectros médios de diferentes amostras. . . . .	90
5.5	Espectros de RV Crt na região de Na I (5890 Å) . . . . .	91
5.6	Estimativa da mudança na contribuição relativa da primária para cada região espectral contida no intervalo de 4000 Å a 6000 Å, para 4 fases orbitais mais próximas da fase de totalidade primário. . . . .	93
5.7	Estimativa da mudança na contribuição relativa da primária contida no intervalo de 4000 a 6000 Å, para 4 fases orbitais que julgamos mais próximas da fase de totalidade primário. . . . .	94
5.8	Cálculo de $T_{\text{eff},3}$ e $\frac{R_2}{R_1}$ . . . . .	100
5.9	Espectros de RV Crt na região de Na I (5890 Å) . . . . .	101
5.10	Primeiros espectros desembaraçados pelo KOREL com efeitos de uma função de baixa freqüência superposta ao contínuo. . . . .	104
5.11	Curva de velocidade radial dos espectros mostrados na Fig. 5.10. . . . .	105
5.12	Espectros individuais de RV Crt obtidos pelo KOREL nas regiões espectrais: 4420.410 a 4503.431 Å, 5438.397 a 5540.538 Å, e 5725.210 a 5832.738 Å. . . . .	106
5.13	Espectros individuais de RV Crt obtidos pelo KOREL nas regiões espectrais: 5828.551 a 5938.019 Å, 5925.779 a 6037.074 Å, e 6070.973 a 6184.994 Å. . . . .	107
5.14	Espectros desembaraçados das componentes de RV Crateris. . . . .	108
5.15	Curva de velocidade radial de RV Crt. . . . .	110
5.16	Logarítmo do número de condição para RV Crt. . . . .	112
5.17	Cálculo do número de condição para RV Crt, considerando a presença de uma fase em eclipse secundário. . . . .	113
5.18	Espectros normalizados das componentes de RV Crt obtidos pelo KOREL e CRES e as diferenças entre ambos no intervalo de 4420.410 a 4503.431 Å. . . . .	115
5.19	Espectros normalizados das componentes de RV Crt obtidos pelo KOREL e CRES e as diferenças entre ambos no intervalo de 5725.210 a 5832.738 Å. . . . .	116
5.20	Espectros normalizados das componentes de RV Crt obtidos pelo KOREL e CRES e as diferenças entre ambos no intervalo de 5828.551 a 5938.019 Å. . . . .	117
5.21	Espectros normalizados das componentes de RV Crt obtidos pelo KOREL e CRES e as diferenças entre ambos no intervalo de 6070.973 a 6184.994 Å. . . . .	118
5.22	Espectros de RV Crt reconstruídos pelo código KOREL no intervalo de aproximadamente 6071 Å a 6185 Å, mostrando efeitos de baixa freqüência. . . . .	120
5.23	Redução da amplitude de padrões induzidos pela DVS, sobrepostos ao contínuo dos espectros reconstruídos, por uma correção na normalização dos espectros observados. . . . .	121
5.24	Redução da amplitude de padrões induzidos pela DVS, sobreposta ao contínuo dos espectros reconstruídos, por uma correção através da definição de “corredor”. . . . .	122

A.1	Informação sobre a velocidade radial das componentes de RV Crt para duas regiões espectrais (R13 e R16) em função da fase orbital. . . . .	137
A.2	Comparação entre os valores de $\sigma_2$ para a região 13 de RV Crt usando a Eq(A.37) e a aproximação (A.41). . . . .	140
A.3	Velocidades radiais obtidas pelo KOREL e pela <b>correlação cruzada</b> entre os espectros observados e os reconstruídos por ele, para o sistema triplo elipsante RV Crt e para o conjunto de 3 regiões espectrais contendo 512 pontos. . . .	143
A.4	Velocidades radiais obtidas pelo KOREL e pela <b>correlação cruzada</b> entre os espectros observados e os reconstruídos por ele, para o sistema triplo elipsante RV Crt e para o conjunto de 5 regiões espectrais contendo 1024 pontos. . .	144
A.5	Velocidades radiais obtidas pelo KOREL e pela <b>correlação cruzada</b> entre os espectros observados e os reconstruídos por ele, para o sistema triplo elipsante RV Crt e para o conjunto de 6 regiões espectrais contendo 2046 pontos. . .	145
A.6	Velocidades radiais obtidas pelo KOREL e pela <b>correlação cruzada</b> entre os espectros observados e os reconstruídos por ele, para o sistema triplo elipsante RV Crt e para o conjunto de 11 regiões espectrais contendo 4096 pontos. .	146
A.7	Velocidades radiais obtidas pela <b>correlação cruzada</b> entre os espectros observados e os reconstruídos pelo KOREL, para o sistema triplo elipsante RV Crt e para cada um dos intervalos espectrais do conjunto de 6 regiões contendo 2048 pontos. . . . .	147

# Lista de Tabelas

---

1.1	Exemplos de sistemas estelares múltiplos reais estudados usando as técnicas de reconstrução espectral, nas últimas duas décadas. . . . .	5
1.2	Aplicações recentes da separação espectral ou desembaraçamento espectral, entre os anos de 2004 e 2007. . . . .	6
2.1	Velocidades radiais por fase orbital para as componentes do sistema estelar duplo artificial do tipo <b>B1 V</b> . . . . .	31
3.1	Solução no espaço de Fourier . . . . .	54
3.2	Solução no espaço de Fourier para o Caso 1. . . . .	61
3.3	Padrões espúrios sobre os espectros reconstruídos das componentes quando os espectros observados contém 6 pixels ao invés de 8. . . . .	63
3.4	Solução no Espaço de Fourier para o Caso 2 . . . . .	65
3.5	Número de colunas na matriz padrão para cada componente – Caso 3 . . . .	66
4.1	Tempo computacional gasto no processo de separação espectral no espaço de velocidade. . . . .	71
5.1	Exposições de RV Crt obtidas com o FEROS. . . . .	86
5.2	Regiões espectrais usadas na análise de RV Crt. . . . .	92
5.3	Parâmetros Estelares Fundamentais de RV Crt. . . . .	109
A.1	Fatores de luz das componentes de RV Crt e sinal sobre ruído para duas regiões espectrais (R13 e R16). . . . .	138
A.2	Estimativa do erro do ruído aleatório da velocidade radial das componentes de RV Crt em 24 regiões espectrais. . . . .	139

## Resumo

Sistemas binários são fonte importante de parâmetros estelares fundamentais precisos e, conseqüentemente, proporcionam vínculos empíricos sobre os processos de formação e evolução estelar. Métodos potentes de separação espectral e determinação simultânea das dimensões absolutas de sistemas múltiplos têm sido usados para reconstruir os espectros das componentes. Sistemas anteriormente insolúveis por técnicas tradicionais, como a correlação cruzada, podem agora, com a aplicação desses métodos, ser resolvidos completa e consistentemente. Essa aplicação tem vantagens claras em situações em que as medidas diretas dos desvios Doppler das componentes são impedidas pela mistura das linhas nos espectros compostos (como ocorre freqüentemente para espectros do tipo tardio). Além disso, os espectros finais, obtidos por essas técnicas, possuem qualidade suficiente para serem usados na determinação de abundâncias, temperatura e gravidade. Esses métodos têm sido desenvolvidos para operar sobre as componentes de Fourier dos espectros, ou, alternativamente, sobre pixels em velocidade (em escala logarítmica do comprimento de onda). Ambos algoritmos são equivalentes, exceto no que diz respeito às condições de contorno e ao processo de adoção de pesos. Usamos os códigos `KOREL` e `FDBinary` como representantes dos métodos no domínio de Fourier e o código `CRES` no domínio de velocidade. Um dos objetivos deste estudo é discutir como evitar ou, pelo menos, como reconhecer padrões espúrios nos espectros reconstruídos das componentes, se são devidos à quasi-degenerescência das equações ou se aparecem como conseqüência de viés nos espectros observados. Pretendemos, também, guiar usuários dessas técnicas para obter conjuntos apropriados de observações conduzindo a uma reconstrução mais eficiente e vincular a transferência de erros sistemáticos para os espectros de saída. Analisamos, analiticamente, as equações de separação espectral nos domínios de Fourier e de velocidade, especialmente para sistemas binários e triplos, e usamos dados artificiais e reais para ilustrar e discutir degenerescências e transferência de viés para os espectros reconstruídos das componentes. Vimos que a quasi-degenerescência das equações dependem (a) da distribuição das observações sobre as fases orbitais, (b) da variabilidade nos fatores de luz relativos das componentes, (c) da presença de componente(s) muito fraca(s) e (d) do comprimento do intervalo espectral em unidades do máximo desvio Doppler das componentes. Quando espectros em eclipse são usados e, possivelmente, diferentes pesos são adotados para os modos de Fourier mais baixos e mais altos, a quasi-degenerescência pode ser removida. Se os espectros observados são enviesados sistematicamente com relação à fase orbital (por exemplo, devido a erros no processo de normalização), os viés são fortemente transferidos para o espectro reconstruído e, o que é pior, principalmente para a(s) componente(s) mais fraca(s) e/ou para a estrela com menor amplitude de velocidade. Variações despercebidas nas intensidades das linhas conduzem a viés que é maior nas regiões espectrais com alta densidade de linhas. Mais importante ainda, os viés, em todos os espectros reconstruídos, são acoplados de uma maneira única e previsível. Esse acoplamento nos permite remover padrões espúrios dos espectros reconstruídos.

O sistema triplo eclipsante RV Crateris foi analisado com essas técnicas, baseado no estudo teórico descrito acima, em ambos domínios de Fourier e de velocidade. Alguns resultados preliminares são apresentados nesse estudo. Além disso, sugerimos um processo para redução do tempo computacional no domínio de velocidade, que foi aplicado em RV Crt para estudar a diferença entre as duas aproximações (Fourier e velocidade) com relação à reconstrução espectral. Este estudo é uma contribuição para o entendimento do processo de reconstrução espectral em ambos domínios, Fourier e velocidade, e como evitar ou lidar com viés nos espectros reconstruídos por essas técnicas. Isso abre um novo campo de pesquisa, uma vez que cada componente em um sistema múltiplo pode ser tratado como uma estrela isolada, tornando possível a determinação precisa de suas abundâncias e parâmetros estelares.

## Abstract

Binaries are an important source of precise fundamental stellar parameters and, hence, in providing empirical constraints on stellar formation and evolution. Powerful methods of spectral separation and of simultaneous determination of the absolute dimensions in multiple systems have been used to reconstruct the spectra of the components. Systems formerly insoluble using traditional techniques, as cross-correlation, can now, with application of these methods, be solved complete and consistently. This application has clear advantages in situations where the direct measurement of the components' Doppler-shift is hampered by the blending of spectral lines in the observed spectra (as it often happens in systems with late-type components, for example). Furthermore, the final spectra obtained has enough quality so that they can be used to derive abundances, temperature and gravity. These methods have been developed in order to operate either on Fourier components of the spectra or, alternatively, on the velocity bins (in scale of logarithm of wavelength). Both types of algorithms are equivalent, except for boundary conditions and in the applicability of weighting schemes. We used the `KOREL` and `FDBinary` codes as representatives of methods in Fourier domain and `CRES` code for the velocity domain. One of the aims of this work is to discuss how to avoid or, at least, how to recognize spurious patterns in the reconstructed component spectra, if they are due to quasi-degeneracy of the equations or if they appear as a consequence of bias in the observed spectra. We intend, also, to guide potential users of these techniques to obtain the appropriate observation sets in the most efficient way, and to constrain the transfer of systematic errors to the output quantities. We analysed, analitically, the spectral separation equations in Fourier and velocity domains, especially for binary and triple systems, and used both real and artificial data sets to illustrate and discuss the degeneracies and the transfer of bias to the reconstructed component spectra. We find that the quasi-degeneracy of the equations depends on (a) the distribution of the observations over the orbital phases, (b) the time-variability in the relative light-factors of the components, (c) on the presence of very faint stellar component(s) and (d) on the length of the spectral interval in units of maximum Doppler shifts of the components. When spectra in eclipse are used, and possibly different weights are adopted for them, taking into account differently low and higher modes, the quasi-degeneracies can be removed. If the observed spectra are biased in a systematic way with relation to the orbital phase (for example, due to errors on the normalisation procedure), the bias is strongly transferred into the reconstructed spectra and, what is worse, mainly for the faintest components and/or for the star with the lowest velocity amplitude. Unrecognized variations in line strength lead to bias that is larger in spectral regions with high line-density. Most importantly, the bias in all reconstructed spectra is coupled in a unique, predictable way. This coupling allows us to remove the spurious patterns of the reconstructed spectra. The eclipsing triple system `RV Crt` was analysed with these techniques, based in the theoretical studies described above, in both Fourier and velocity domains. Some preliminary results are presented here.

Besides, we suggest a procedure scheme to reduce the computational time in the velocity domain, which was applied to RV Crt in order to study the difference between the two approaches in respect to the spectral reconstruction. This work is a contribution to the understanding of spectral reconstruction in both Fourier and velocity domains and about how to avoid or deal with bias in the reconstructed spectra. This opens a new field of research, since each component in a multiple system can be treated as a single star, making possible precise determination of their abundances and stellar parameters.

# Capítulo 1

---

## Introdução

Desde a descoberta das estrelas binárias, observações sistemáticas de sistemas múltiplos e a determinação de suas órbitas têm sido a maior fonte de dados para testes de modelos de estrutura e evolução estelar.

As estrelas binárias, quando também eclipsantes, fornecem, entre outros, dados fundamentais sobre massas e raios estelares, através do estudo de seu movimento orbital juntamente com a análise das curvas de luz. Precisamos, ainda, obter informações sobre a temperatura efetiva, gravidade e abundância química para investigar o processo de evolução estelar. A análise dos espectros estelares proporciona a obtenção desses parâmetros se pudermos extrair, separadamente, as características espectrais de cada componente. De fato, essa “separação espectral” pode ser facilmente obtida em certos casos especiais, como por exemplo: (1) para sistemas binários com componentes quentes e frias e com um único padrão espectral; (2) sistemas do tipo linha dupla (SB2), com os desvios Doppler orbitais maiores que a largura das linhas das componentes e (3) sistemas eclipsantes, que possuem eclipse total, onde o espectro de uma das componentes é completamente determinado nessa fase. Infelizmente, muitos dos sistemas múltiplos espectroscópicos não possuem essas qualidades ideais, e gostaríamos de obter os espectros intrínsecos de suas componentes, a partir de exposições onde suas linhas podem estar tanto muito misturadas quanto bem separadas.

Gradualmente, tem-se observado um aumento no número de novas técnicas desenvolvidas para lidar com esse “problema” da reconstrução espectral. Aplicações se estendem a sistemas duplos, triplos e até quádruplos, formados por componentes quentes e frias, do tipo espectral variando entre **O** a **G** (exemplos podem ser encontrados em Gies 2004, Holmgren 2004 e Hensberge & Pavlovski 2006).

A separação espectral consiste na determinação dos espectros de cada uma das componentes de um sistema múltiplo, usando como parâmetros de entrada as velocidades radiais das componentes e suas contribuições em luz para cada fase orbital. Por outro lado, o desembaraçamento espectral consiste na decomposição dos espectros do sistema e a determinação simultânea das velocidades radiais das componentes, usando como espectro “gabarito” o próprio espectro reconstruído para cada componente.

O desembaraçamento espectral pode ser visto como uma extensão tanto da correlação



cruzada, para a determinação das velocidades radiais (Simkin 1974, Hill 1982 e Tonry & Davis 1979) como da separação Tomográfica, para determinação dos espectros das componentes (Bagnuolo & Gies 1991). As correlações cruzadas bidimensionais (Zucker & Mazeh 1994 e Zucker 2004) e tridimensionais (Zucker et al. 1995), e as técnicas que aplicam a função de alargamento (Rucinski 1992, 2002), devem também ser citadas nesse contexto.

O desembaraçamento representa um significativo avanço na análise de sistemas múltiplos, pois tanto as velocidades radiais quanto a determinação da órbita são resolvidas de maneira autoconsistente. Graças ao desenvolvimento de detectores mais sensíveis, a técnica tem suas qualidades salientadas, utilizando todas as informações presentes nos espectros digitais, e permitindo ainda a detecção de sinais fracos, tais como espectros de componentes estelares fracas, além de contribuir para o estudo de sistemas binários nas galáxias vizinhas, como a Pequena e a Grande Nuvem de Magalhães (veja Tab. 1.1), M31 (Ribas et al. 2005) e M33 (Bonanos et al. 2006).

As primeiras tentativas para separar os espectros das estrelas a partir do espectro composto observado data de, pelo menos, 1952 por Wright. Mais tarde, uma série de trabalhos foram iniciados por Griffin & Griffin (1986) para sistemas consistindo de uma gigante fria e uma estrela quente na seqüência principal. O procedimento consistia em determinar um espectro “gabarito” apropriado para a gigante fria e reconstruir o espectro da componente quente subtraindo, do espectro composto observado, o espectro da gigante deslocado em comprimento de onda devido ao seu movimento orbital. Como mostrado em Griffin (2002) o método falha quando a gigante fria é peculiar, ou, em outras palavras, quando não há uma coincidência muito boa entre o espectro gabarito e o das componentes em questão. Esse fato veio comprovar a necessidade de técnicas que não dependem do conhecimento prévio da forma das linhas espectrais das componentes. Com base nessa nova filosofia, vários métodos foram desenvolvidos requerendo o conhecimento do número de componentes do sistema.

A primeira separação espectral foi desenvolvida por Bagnuolo & Gies (1991), denominada *separação tomográfica*, que utiliza a Técnica Iterativa de Mínimos Quadrados (TIMQ) para obter a solução. Este método usa a curva de velocidade radial das estrelas binárias e a sua contribuição em fluxo no contínuo para a reconstrução do espectro individual. O método é baseado na equivalência matemática entre o processo de separação espectral e o de reconstrução de imagens em exames Tomográficos da medicina. A superposição dos desvios Doppler dos espectros das componentes, em diferentes fase orbitais, pode ser tratada como a projeção de dois objetos lineares paralelos vistos de diferentes ângulos. De acordo com Hadrava (2004b), essa técnica poderia ser combinada iterativamente com o método de correlação cruzada para a determinação simultânea das velocidades radiais, solução dos parâmetros orbitais e decomposição espectral, sem a utilização de espectros “gabaritos”.

A segunda aproximação foi introduzida por Simon & Sturm (1994), onde o princípio do desembaraçamento espectral (determinação simultânea dos parâmetros da órbita e espectros individuais das componentes) foi aplicado pela primeira vez de maneira autoconsistente. O método consiste em resolver a equação matricial sobre-determinada  $Ax = b$ , onde  $A$  possui elementos matriciais correspondendo aos desvios Doppler de cada estrela,  $x$  contém os espectros compostos das duas componentes, e  $b$  os espectros compostos observados, também concatenados. Além disso, supõe que as contribuições em luz das componentes não variem com o tempo. Os parâmetros orbitais são determinados pela

minimização do  $\chi^2$  dos resíduos entre os espectros observados e o modelo reconstruído, enquanto que o problema é linear com relação às intensidades das componentes. O método utiliza a Decomposição do Valor Singular (DVS)<sup>1</sup> para tratar sistemas que são super-determinados e deficientes de “rank” (para uma descrição matemática mais detalhada sobre a DVS vide Willian 1992 ou 2008). Este método foi testado usando dados reais (Sturm & Simon 1994 e Simon 1994) e dados artificiais (Hynes & Maxted 1998). Ilijic (2004b e 2006), desenvolveu um código de *separação espectral*, denominado **CRES**, que também trabalha no espaço de velocidades e utiliza a DVS. Contudo, a diferença entre o código **CRES** e o desenvolvido por Simon & Sturm é que esse faz o *desembarçamento espectral*, ou seja, além de separar os espectros (*separação espectral*) também determina os parâmetros da órbita. O código **CRES** encontra se disponível em Ilijic (2006) e utiliza os pacotes científicos do **GSL** (GNU Scientific Library).

O terceiro, e atualmente o mais utilizado, é o método de desembarçamento espectral, denominado **KOREL**, baseado na transformada rápida de Fourier (FFT, em inglês). Esse método foi desenvolvido por Hadrava (1995, 1997, 2004a, 2004b e 2004c), mostrando que um elegante sistema de equações lineares pode ser formado ao aplicar a transformada de Fourier no espectro composto, expresso como convoluções dos espectros individuais das componentes. Seu código encontra se disponível em Hadrava (2004c). O tempo computacional, em relação à aproximação desenvolvida por Simon & Sturm, é enormemente reduzido em virtude da diminuição do número de equações a serem resolvidas. No domínio de velocidades, o número de equações corresponde ao número de pixels no espectro observado multiplicado pelo número de exposições, enquanto que no domínio de Fourier são resolvidas  $K$  (número total de componentes do sistema) equações para cada um dos  $\frac{N_{pixels}}{2} + 1$  modos de Fourier (onde  $N_{pixels}$  corresponde ao número total de pixels no espectro composto). O método utiliza o **SIMPLEX** para otimizar os elementos orbitais e a minimização do  $\chi^2$  para a determinação dos espectros das componentes. O código **KOREL** não requer qualquer conhecimento a priori do sistema em estudo para determinar as velocidades radiais. Uma reformulação deste método, para um sistema binário e um triplo (o método **KOREL** pode ser aplicado a sistemas múltiplos com até 5 componentes), foi desenvolvido por Ilijic et al. (2004a e 2006), denominado **FDBinary**. Esse método utiliza o algoritmo de DVS e a transformada simples de Fourier (não requer que os espectros compostos sejam amostrados em uma rede fixa de  $2^n$  pixels) e se encontra disponível em Ilijic (2006).

O quarto método foi introduzido por Harries et al. (2003) que ajusta o espectro composto para um sistema binário usando um algoritmo de Mínimos Quadrados Não-Linear (MQNL) para um dado conjunto de parâmetros orbitais. Em seguida, usa-se um algoritmo genético (Holland 1975) para encontrar os parâmetros orbitais que minimiza os resíduos entre o espectro composto observado e o espectro composto reconstruído. De acordo com Harries et al. (2003) esta aproximação produz bons resultados se comparada com a DVS.

Um quinto método, desenvolvido por González & Levato (2006), utiliza um processo iterativo, originalmente criado por Marchenko et al. (1998), que permite determinar os

---

<sup>1</sup>Em álgebra linear, a decomposição de valor singular corresponde à fatorização de uma matriz retangular real ou complexa, com várias aplicações em processamento de sinais e estatística. A DVS é uma ferramenta potente para lidar com conjuntos de equações ou matrizes que são singulares ou numericamente quasi-singulares. Além disso, o algoritmo permite diagnosticar o problema para uma dada matriz e determina uma solução numérica mais plausível.

espectros e as velocidades radiais das duas componentes de um sistema binário espectroscópico. A idéia básica é usar, alternativamente, o espectro de uma componente para prever o espectro da outra. Em cada passo, o espectro calculado de uma estrela é usado para remover suas características espectrais do espectro observado. Os espectros resultantes dessa subtração, (chamaremos de espectros “subtração”) irão conter linhas da outra componente que serão usados para calcular (1) seus desvios Doppler (via correlação cruzada) e conseqüentemente, (2) seu espectro intrínseco, através da combinação apropriada entre os espectros “subtração” e o seu espectro intrínseco, deslocado de acordo com o seu desvio Doppler.

A Tab. 1.1 se baseia na revisão feita por Gies (2004) mostrando exemplos da aplicação das técnicas de decomposição espectral em sistemas não-evoluídos (índices 1 a 24), evoluídos (índices 25 a 48) e sistemas múltiplos (índices 49 a 59). A lista, para cada um dos três conjuntos, está em ordem decrescente de massa do sistema. As colunas mostram o nome dos autores, o algoritmo usado, a identificação do sistema e comentários. Esses estudos conduziram à determinação da razão de fluxos, temperaturas efetivas, gravidades superficiais, velocidades rotacionais projetadas, abundâncias químicas e, para sistemas eclipsantes, a determinação de massas, raios e distância. O primeiro conjunto de dados (índices 1 a 24), da Tab. 1.1 contém 16 sistemas galáticos, 3 sistemas pertencentes à Pequena Nuvem de Magalhães e 3 pertencentes à Grande Nuvem de Magalhães. Muitos dos sistemas são compostos por estrelas jovens e as massas determinadas para sistemas eclipsantes estão, em geral, de acordo com as massas esperadas teoricamente para estrelas isoladas de mesma temperatura e gravidade. De acordo com Gies (2004), a eficiência do método está comprovada, entre outras coisas, na detecção de componentes muito fracas, como é o caso de HD 53975, onde a secundária contribui com apenas 5% da luz total do sistema (Gies et al. 1994).

O segundo conjunto da Tab. 1.1, correspondente aos índices 25 a 48, mostra 14 sistemas Galáticos e 7 binárias pertencentes à Pequena Nuvem de Magalhães, cujas componentes se encontram em estágio mais evoluído. Este conjunto tem uma grande diversidade de amostra, incluindo sistemas em contato, semi-contato, pós-extravasamento do seu Lobe de Roche (*Post-Roche lobe overflow*) e etc. O sistema HD 115071 (Penny et al. 2002) é um exemplo de um sistema na fase de pós-extravasamento do Lobe de Roche (ou sistema do tipo Algol quente), no qual as componentes são submassivas ou supermassivas para seus tipos espectrais. O sistema HD 47129 (Bagnuolo et al. 1992) é composto por supergigantes do tipo espectral O com componentes de aproximadamente  $51M_{\odot}$  e  $43 M_{\odot}$ , caracterizando esse sistema binário como um dos mais massivos da Galáxia.

O terceiro conjunto (índices 49 a 59) da Tab. 1.1, mostra alguns exemplos de sistemas triplos e um quádruplo (Lorentz, 1998). A maioria foi estudada por interferometria e, em alguns dos casos, os espectros foram reconstruídos para as componentes. Os estudos preliminares do sistema triplo eclipsante RV Cr1 (Torres et al. 2004) não revelaram uma reconstrução espectral de confiança, o que motivou o presente trabalho. Os resultados para os espectros e curvas de velocidades radiais das componentes, obtidos por Torres et al. (2004), são apresentados na Sec. 5.1.7, para efeito de comparação com a nova solução (agora mais coerente).

A Tab. 1.2 se baseia na revisão feita por Hensberge & Pavlovski (2006), contendo recentes aplicações dos métodos de separação e desembaraçamento espectral de sistemas múltiplos, publicadas desde as revisões feitas por Gies (2004) e Holmgren (2004). As aplicações incluem sistemas binários, triplos e quádruplos espectroscópicos de estrelas do

**Tabela 1.1:** Exemplos de sistemas estelares múltiplos reais estudados usando as técnicas de reconstrução espectral, nas últimas duas décadas. A tabela é baseada na revisão feita por Gies (2004). Aqueles identificados como OGLE(n), representam a identificação da estrela de número “n” no catálogo OGLE (Optical Gravitational Lensing Experiment). Códigos: TF: Transformada de Fourier; DVS: Decomposição no espaço de velocidade usando DVS; TIMQ: Técnica Iterativa de Mínimos Quadrados/Tomografia, MQNL: Mínimos Quadrados Não-Linear, DD: Decomposição Direta. PNM: Pequena Nuvem de Magalhães, GNM: Grande Nuvem de Magalhães, UV: ultravioleta, IUE: *International Ultraviolet Explorer Satellite*, HST: *Hubble Space Telescope*, SPB: estrelas do tipo espectral **B** que pulsam lentamente (do inglês, *slowly pulsating B stars*).

índice	Estudos	Código	Sistema	Tipo Espectral	Comentário
01	Sturm & Simon (1994)	DVS	DH Cep	O6 V + O7 V	Ótico
02	Penny et al. (1997)	TIMQ	DH Cep	O6 V + O7 V	UV
03	Williams et al. (2001)	TIMQ	HD 199579	O6 V + B1-2 V	Secundária fraca
04	Gies et al. (2002)	TIMQ	HD 101131	O6.5 V + B8.5 V	IC 2944
05	Gies et al. (1994)	TIMQ	HD 53975	O7.5 V + B3 V	$\Delta m = 3.3$
06	Hill et al. (1994)	TIMQ	CC Cas	O8.5 III + B0.5 V	Eclipsante
07	Harries et al. (2003)	MQNL	OGLE(5 038089)	B0 + B0.2	PNM
08	Harries et al. (2003)	MQNL	OGLE(6 215965)	B0.5 + B0.5	PNM
09	Harries et al. (2003)	MQNL	OGLE(11 57855)	B0.5 + B1	PNM
10	Simon et al. (1994)	DVS	Y Cyg	B0 V + B0 V	Eclipsante
11	Hill & Holmgren (1995)	TIMQ	Y Cyg	B0 V + B0 V	Eclipsante
12	Simon & Sturm (1994)	DVS	V453 Cyg	B0.5 V + B0.5 V	Eclipsante
13	Fitzpatrick et al. (2003)	TF	HV 5936	B0.5 V + B2 III	GNM
14	Holmgren et al. (1997)	TF	$\beta$ Sco A	B0.5 IV-V + B1.5 V	
15	Fitzpatrick et al. (2002)	TF	HV 982	B1 IV-V + B1 IV-V	GNM
16	Hensberge et al. (2000)	TF	V578 Mon	B1 V + B	NGC2244
17	Harmanec et al. (1997)	TF	V436 Per	B2 V + B2 V	Eclipsante
18	Janík et al. (2003)	TF	V436 Per	B2 V + B2 V	Eclipsante
19	Ribas et al. (2002)	TF	EROS 1044	B2 IV-V + B2 III-IV	GNM
20	Yakut et al. (2003)	TF	V497 Cep	B3 + B	NGC160
21	Holmgren et al. (1999)	TF	AR Cas	B4 V + A6 V	Eclipsante
22	De Cat et al. (2004)	TF/DVS	HD 140873	B8 III + A	SPB
23	De Cat et al. (2004)	TF/DVS	HD 123515	IV + A	SPB
24	Hill et al. (1993b)	TIMQ	HR 104	A2 V + F0 V	
25	Bagnuolo et al. (1992)	TIMQ	HD 47129	O7.5 I + O6 I	UV
26	Bagnuolo & Barry (1996)	TIMQ	HD 47129	O7.5 I + O6 I	Óptico
27	Penny et al. (1999)	TIMQ	HD 152248	O7 I + O7 I	UV
28	Bagnuolo et al. (1994)	TIMQ	UW CMA29	O7.5 Iab + O9.7 Ib	UV
29	Bagnuolo et al. (2001)	TIMQ	$\iota$ Ori	O9 III + B1 III	
30	Gies et al. (1993)	TIMQ	$\iota$ Ori	O9 III + B1 III	H $\alpha$
31	Bagnuolo & Gies (1991)	TIMQ	AO Cas	O9.5 III + O8 V	UV
32	Penny et al. (2002)	TIMQ	HD 115071	O9.5 V + B0.2 III	Algol quente
33	Harries et al. (2003)	MQNL	OGLE(5 202153)	O9.5 + B0.5	PNM
34	Harries et al. (2003)	MQNL	OGLE(5 316725)	O9+ O9	PNM
35	Harries et al. (2003)	MQNL	OGLE(6 077224)	O9.5 + B0.5	PNM
36	Harries et al. (2003)	MQNL	OGLE(6 158118)	B0.2 + B1	PNM
37	Harries et al. (2003)	MQNL	OGLE(7 243913)	O9.5 + B1.5	PNM
38	Harries et al. (2003)	MQNL	OGLE(9 175323)	O6.5 + O5 III (f)	PNM
39	Harries et al. (2003)	MQNL	OGLE(11 30116)	B0.5 + 22	PNM
40	Lorentz et al. (1999)	TF	V606 Cen	B0-0.5 V + B2-3 V	Eclipsante
41	Thaller et al. (1995)	TIMQ	$\phi$ Per	B0.5 III-Ve + sdO	UV (IUE)
42	Gies et al. (1998)	TIMQ	$\phi$ Per	B0.5 III-Ve + sdO	UV (HST)
43	Hill et al. (1997)	TIMQ	V360 Lac	B3e + F9 IV	Algol
44	Barai et al. (2004)	TIMQ	RY Perac	B4 V + F7 II-II	Algol
45	Hill & Khalessheh (1993a)	TIMQ	V1425 Cyg	B5 V + B9 V	Eclipsante
46	Bisikalo et al. (2000)	TRF	$\beta$ Lyr	B6-8 II + B	Comp. fraca
47	Ferluga et al. (1997)	DD	IZ Per	B8	Algol
48	Griffin (2002)	TRF	$\theta$ Leo	F8 m + Am	Abundâncias
49	Harvin (2002a)	TIMQ	HD 206267	O6.5 V + B0 V, O8 V	SB2 + Spkl.
50	Penny et al. (2001)	TIMQ	$\delta$ Cir	O7 III-V + O9.5 V, B0.5	UV
51	Lorentz et al. (1998)	TF	SZ Cam	O9 IV + B0.5 V	Quádruplo
52	Harvin et al. (2002b)	TIMQ	$\delta$ Ori	O9.5 II + B0.5 III	UV
53	McSwain (2003)	TIMQ	HD 16429A	O9.5 II + O8 III-V	SB1 + Spkl.
54	Iljić et al. (2004c)	TF	AC Vel	B3 IV + B	Eclipsante
55	Zverko et al. (1997)	TF	AR Aur	B9.5 V + A	Eclipsante
56	Liu et al. (1997)	TIMQ	55 UMa	A1 V + A2 V, A1 V	SB2 + Spkl.
57	Koubský et al. (2004)	TF	b Per	A2 V	
58	Fremat et al. (2004)	TF	DG Leo	A8 V	
59	Torres et al. (2004)	TF	RV Crt	G0 + K7 + F6	Eclipsante

tipo espectral **O** até **G**. Muitos dos sistemas estudados não tiveram a curva de velocidade radial de suas componentes bem determinadas, ao usar as técnicas tradicionais. Algumas das componentes contribuem com menos de 10% da luz total do sistema. Em várias aplicações, os dados espectroscópicos são combinados com dados fotométricos e/ou as-

**Tabela 1.2:** Aplicações recentes da separação espectral ou desembaraçamento espectral. As fontes de índices 1 a 25 são descritas em Hensberge & Pavlovski (2006). Códigos: TF: Transformada de Fourier; DVS: Decomposição no espaço de velocidade usando DVS ; TIMQ: Técnica Iterativa de Mínimos Quadrados/Tomografia, MQNL: Mínimos Quadrados Não-Linear, DD: Decomposição Direta.

índice	Estudos	Código	Sistema	Comentário
01	Harmanec et al. 2004	TF	$\alpha$ And	Be, 3 comp. desemb.; órbita
02	Budovičvá et al. 2005	TF	$\kappa$ Sco	NRP $\beta$ Cep
03	Zwahlen et al. 2005	TF	Atlas	distância até Pleiades
04	Frémat et al. 2005	TF	DG Leo	(Am+Am)+A8 $\delta$ Sct;abund.
05	Hilditch et al. 2005	DVS/MQNL	PNM	40 Bin.Ecl. tipo OB; param. fund.
06	Lehmann & Hadrava 2005	TF	55 Uma	Sist.trip.; param. fund; 1300 exp.
07	Ribas et al. 2005	TF	EB na M31	param. fund.; (TODCOR+Sep.esp.)
08	Pavlovski & Hensberge 2005	TF	V578 Mon	Abud.; tipo B; NGC2244
09	Saad et al. 2005	TF	$\kappa$ Dra	Be, emiss.; secund. indetec.
10	Uytterhoeven et al. 2005	TF	$\kappa$ Sco	NRP $\beta$ Cep, 700 exp.
11	Ausseloos et al. 2006	TF	$\beta$ Cen	NRP $\beta$ Cep, 400 exp; param. fund.
12	Bakiş et al. 2006	TF	$\delta$ Lib	Estr. tipo Algol
13	Boyajian et al. 2006	TIMQ	HD 1383	B0.5Ib+B0.5Ib; param. fund.
14	De Becker et al. 2006	DD	HD 15558	IC 1805, secund. detec. 07V
15	González & Levato 2006	DD	HD 143511	param. fund.; deter. ecl. exp.; BpSi
16	González et al. 2006	DD	AO Vel	quadruplo; primaria BpSi
17	Hensberge et al. 2006	TF	RV Crt	param. fund.; Pre-SP
18	Hillwig et al. 2006	TIMQ	Cas OB6	13 estr. tipo O; param. fund.
19	Hubrig et al. 2006	DD	AR Aur	variacion. perf. linha; B9(HgMn)
20	Linnell et al. 2006	TF	V360 Lac	rot. critica Be; param. fund.
21	Martins et al. 2006	DD	GCIRS16SW	Centro Galx. Hel2.1 $\mu$ m
22	Pavlovski et al. 2006	TF/DVS	V 453 Cyg	Abund. He
23	Chadima et al. 2006	TF	$\beta$ Lyr	estr.distorcida+disco acréscimo
24	Lampens et al. 2007	TF	$\theta^2$ Tau	$\delta$ Sct em Hyades; órbita
25	Pavlovski & Tamajo 2007	TF	CWCep, V478CYg	Abund. He

trométricos. Outras aplicações, envolvem uma quantidade impressionante de centenas e até milhares de espectros observados. Intervalos em comprimento de onda, tanto grandes como pequenos, foram bem reconstruídos.

Esses estudos levaram à (a) determinação de razão de fluxos, (b) detecção de componentes espectroscópicas, (c) análise de parâmetros atmosféricos, com qualidade comparável ao que, normalmente, somente é feito para estrelas isoladas, (d) determinação de abundâncias peculiares, (e) detecção de mudanças na órbita de sistemas binários devido à presença de um terceiro corpo, (f) determinação da variabilidade dos perfis de linha para certas componentes e seus estudos livres dos efeitos de diluição de outras componentes e (g) determinação de massas e distâncias (como por exemplo, Pleiades e grupos locais de galáxias).

Muitos dos programas científicos utilizaram exposições de alta qualidade (relação sinal-ruído e resolução espectral), com o objetivo de estudar a composição química de atmosferas estelares. A determinação de abundância de He, por exemplo, é importante para estudos de mistura rotacional de estrelas massivas durante sua vida na seqüência principal. Pavlovski & Hensberge (2005), obtiveram abundância de vários elementos químicos de sistemas eclipsantes, pertencentes ao aglomerado NGC 2244, que estão na fase de idade zero da seqüência principal. A determinação precisa das gravidades superficiais e razão de temperaturas das componentes destes sistemas possibilitou a obtenção mais coerente da composição química.

A primeira determinação direta da massa de uma estrela do tipo BpSi <sup>2</sup> foi obtida por González et al. (2006), ao estudar o sistema AO Vel. Dentre os sistemas múltiplos estudados, que proporcionaram indícios sobre as relações entre pulsação, rotação, peculiaridades químicas e binaridade (considerando estrelas de massas intermediárias e tipo espectral em torno de **A**), citamos DG Leo, que é um sistema triplo, formado por estrelas contendo linhas metálicas e uma companheira pulsante e distante do par, de massa equivalente às de suas companheiras.

Muitas das aplicações lidam com estrelas variáveis do tipo  $\beta$  Cep, revelando a utilidade das técnicas de reconstrução espectral, mesmo em situações que infringem o requerimento básico da não-variabilidade dos perfis de linhas. O sucesso desses estudos é, em parte, devido à utilização de um grande número de espectros que, efetivamente, decorrelacionam variabilidade da forma das linhas e fase orbital, ou ainda, o processo usado para desembaraçar os espectros interpreta a variabilidade meramente como um “ruído aleatório” extra, relacionado com a fase orbital. Nesse caso, o distúrbio de uma companheira sobre as variações dos perfis de linha de componentes pulsantes pode ser removido para facilitar a identificação dos modos de pulsação. É importante ressaltar, que esse processo não é garantido quando período de pulsação e período orbital, embora muito diferentes, podem, acidentalmente, serem, mutuamente, “aliases”. Além disso, este procedimento também não é válido para sistemas em semi-contato, caracterizados por variações nos perfis de linha e onde as mudanças são fixas com relação à fase orbital, conduzindo ao aparecimento de padrões espúrios (Bakiş et al. 2006).

Hadrava (2004a e 2004b) descreve (a) como generalizar a técnica de desembaraçamento espectral em certos casos de variabilidade estelar intrínseca e (b) como investigar a atmosfera estelar, analisando espectros obtidos nas fases de eclipses parciais, especialmente na presença do efeito Schlesinger–Rossiter (Schlesinger 1909a, 1909b e Rossiter 1924), onde o perfil das linhas do espectro da componente eclipsada varia no tempo, em função da diferença de velocidade entre as partes eclipsadas e visíveis. O desenvolvimento de tais algoritmos generalizados poderia ampliar, de forma significativa, o conjunto de sistemas para os quais as técnicas de reconstrução podem ser aplicadas com confiança.

Várias aplicações lidam com parâmetros fundamentais de estrelas massivas, algumas delas altamente desenvolvidas, como é o caso da associação de estrelas Cas OB6 (incluindo o aglomerado aberto IC 1805) no centro galáctico e indo além de nossa Galáxia. A importância do estudo de sistemas múltiplos em outras galáxias é contribuir para a calibração da escala de distância. A mais extensa aplicação, desde as últimas revisões, foi desenvolvida por Hilditch, Howarth & Harries (2005), destinada à Pequena Nuvem de Magalhães. Incluindo trabalhos anteriores (Harries, Hilditch & Howarth 2003), foram desembaraçados espectros das componentes de 50 binárias eclipsantes. As amostras compreendem sistemas binários separados, em semi-contato e em contato. Ribas et al. (2005) e Bonanos et al. (2006) estudaram binárias eclipsantes em M31 e M33, respectivamente.

Normalmente, observações de baixa qualidade, por exemplo com baixa relação sinal-

---

<sup>2</sup>Uma estrela Bp é uma estrela do tipo espectral **B** cujo espectro é quimicamente peculiar (por isso o índice p). Geralmente essa peculiaridade está relacionada com a concentração de hélio que pode ser baixa, alta ou variável. Normalmente essas estrelas possuem um campo magnético elevado e abundâncias anômalas distribuídas sobre uma superfície não-homogênea. Os elementos em superabundância varia de uma Bp para outra e podem levar seu símbolo, como é o caso do sistema estudado por González et al. (2006) em que a primária é do tipo BpSi com superabundância de Si II. Estrelas Bp podem ser consideradas como um subconjunto quente de estrelas do tipo Ap.

ruído, contribuem para esforços adicionais no processo de desembaraçamento espectral (embora Ribas et al. 2005 teve sucesso ao desembaraçar espectros com parâmetros orbitais fixos). Mas é importante investigar se a limitação é devida ao baixo sinal sobre ruído ou aos viés (do inglês *bias*) contidos nos dados de entrada, causados, por exemplo, pela incorreta normalização, manchas no detector e/ou bandas interestelares. Hensberge (2004), por exemplo, discute quais são os requisitos básicos para uma análise precisa, com relação ao processo de reconstrução espectral, de sistemas do tipo SB2.

Em vários estudos apresentados pelo grupo de Ondřejov, as linhas telúricas são separadas das componentes estelares no espaço de Fourier. Essa aproximação é boa, desde que as linhas telúricas não se movam através do gradiente espectral estelar. Hadrava (2006) mostrou que a variabilidade na intensidade das linhas espectrais pode ser usada para desembaraçar uma componente da outra, mesmo na ausência de desvio Doppler. Desta forma, ele separou as linhas telúricas das linhas de uma estrela usando um conjunto de espectros obtidos num pequeno intervalo de tempo. O mesmo trabalho discute uma extensão do desembaraçamento incluindo componentes com espectros conhecidos como, por exemplo, o espectro de linhas telúricas ou espectro interestelar. Esse procedimento evita a introdução de uma grande quantidade de parâmetros, aumentando a robustez da análise. A primeira aplicação deste conceito é mostrado em Hadrava (2007).

Todas as técnicas de reconstrução espectral, cujas aplicações foram discutidas acima, envolvem um grande número de parâmetros correspondentes à soma do número de pixels nos espectros intrínsecos das componentes. Apesar do fato de a suposição, que a melhor representação (no sentido da definição dos mínimos quadrados) do espectro observado em termos de todos esses parâmetros determina os verdadeiros parâmetros orbitais e espectros intrínsecos das componentes, não ter sido provada matematicamente até então, experiências práticas e testes com dados artificiais (Hynes & Maxted 1998, Ilijić et al. 2001 e González & Levato 2006) têm mostrado sua validade. Contudo, a demonstração desta validade é restrita à capacidade de reconstruir formas de baixas-frequências dos espectros das componentes (escalas muito menores que os desvios Doppler), no caso de fatores de luz das componentes quase-constantes. Esse efeito foi também observado por Simon & Sturm (1994), mesmo incluindo, na análise, uma fase em eclipse total.

Muitos dos estudos realizados até então usam as técnicas de reconstrução espectral para a determinação dos parâmetros da órbita e informações gerais sobre velocidade rotacional e tipo espectral das componentes de um sistema múltiplo. Infelizmente, padrões espúrios de baixa-freqüência, sobrepostos em extensos espectros reconstruídos, inibem pesquisadores a utilizá-los, com confiança, para uma análise detalhada (inclusive linhas largas de hidrogênio), embora as linhas espectrais individuais fracas sejam ricas em informações sobre estrutura, temperatura, gravidade e composição química da atmosfera estelar. Com relação aos esforços para se obter espectros reconstruídos de alta qualidade, várias questões importantes foram levantadas com relação ao processo de estabilidade da solução e sua dependência com viés presentes nos espectros observados. Podemos enumerar as seguintes questões:

- Como avaliar a estabilidade e a confiabilidade do processo de solução a partir dos espectros observados?
- Como planejar o processo de observação para coletar exposições que aumentam a estabilidade e a confiabilidade da solução?
- Como os viés, presentes nos espectros de entrada, são transferidos para os parâmetros

orbitais e espectros reconstruídos e como são suas formas?

- Qual é a relação entre viés nos parâmetros orbitais e espectros reconstruídos?
- Como a progressão de viés, nos espectros reconstruídos e parâmetros orbitais, e instabilidades numéricas dependem dos métodos?

O objetivo desse estudo é identificar a origem dos padrões espúrios nos espectros reconstruídos, dando indicações de como diminuir esses efeitos em alguns casos. As questões levantadas acima serão respondidas através do estudo das equações de separação espectral, não incluindo discussões com relação ao melhor ajuste dos parâmetros orbitais. Damos mais ênfase à análise para sistemas duplos e triplos, utilizando dados reais e artificiais. Esperamos que o presente estudo contribua para uma análise mais confiável dos espectros reconstruídos pelas técnicas de separação espectral, além de possibilitar à comunidade científica uma melhor identificação das situações que exigem cuidados. Além disso, o conhecimento em detalhes dos algoritmos de desembaraçamento espectral, tanto no espaço de velocidade (comprimento de onda) como no de Fourier, nos permite o conhecimento necessário para uma futura implementação dos dois algoritmos num único método.

No Cap. 2, apresentamos o estudo teórico do processo de separação espectral, nos domínios de Fourier e de velocidade, discutindo em quais condições são observadas instabilidades numéricas (degenerescências das equações de separação espectral) e o mecanismo de transferência de viés para o espectro reconstruído. No Cap. 3, mostramos, explicitamente, os cálculos analíticos e numéricos das equações de separação espectral nos domínios de Fourier e de velocidade, para um sistema duplo artificial simples. No Cap. 4, discutimos um procedimento alternativo para a redução do tempo computacional ao usar métodos de separação no espaço de velocidade, para sistemas múltiplos. No Cap. 5, discutimos a aplicação dos métodos de desembaraçamento/separação espectral nos espaços de Fourier e velocidade, para o sistema triplo eclipsante RV Cr1, além do estudo da instabilidade numérica da solução. No Cap. 6, apresentamos a conclusão do trabalho e perspectivas para o futuro. Nos Apêndices mostramos (a) como podemos estimar a informação da velocidade radial das componentes de um sistema, contida num intervalo espectral (Apêndice A.1); (b) o resultado da aplicação da técnica de correlação cruzada unidimensional sobre os espectros reconstruídos pelo KOREL, para o sistema triplo eclipsante RV Cr1 (Apêndice A.2) e (c) as equações que relacionam as contribuições das informações contidas nos pixels para cada modo de Fourier (Apêndice A.3). No Apêndice A.4 listamos os trabalhos publicados e apresentados durante o presente estudo.



# Capítulo 2

---

## Separação Espectral

Este capítulo tem como objetivo estudar e discutir em quais circunstâncias a separação espectral é eficiente no sentido de se obter, com a maior exatidão possível, os espectros reconstruídos das componentes não resolvidas de sistemas estelares binários e múltiplos hierárquicos. Na Sec. 2.1 apresentamos o modelo matemático em que é baseado a reconstrução espectral. Nas Secs. 2.2 e 2.3 discutimos os métodos e a solução numérica no espaço de velocidade e Fourier, respectivamente. Na Sec. 2.4 mostramos em quais circunstâncias as duas aproximações são equivalentes. Na Sec. 2.5 desenvolvemos as equações de separação espectral no espaço de Fourier, com aplicações a sistemas duplos e triplos, discutindo singularidades e instabilidades numéricas através do conceito de número de condição. A Sec. 2.6 trata do mesmo assunto porém para o espaço de velocidade. Padrões espúrios sobre o contínuo dos espectros das componentes, devido à presença de viés nos espectros observados, são discutidos na Sec. 2.7. Finalmente, na Sec. 2.8 mostramos como reconsiderar e eliminar os padrões espúrios dos espectros reconstruídos, de uma maneira consistente.

### 2.1 Modelo Matemático

Para um sistema estelar múltiplo com  $K$  componentes, podemos escrever o espectro composto normalizado,  $y_j(\ln \lambda)$ , nos tempos  $t_j$  ( $j = 1, \dots, J$ ), como sendo uma soma ponderada dos espectros normalizados das componentes,  $x_k$  ( $k = 1, \dots, K$ ), que se deslocam, de acordo com seu desvio Doppler, de  $v_{kj}$ :

$$y_j(\ln \lambda) = \sum_{k=1}^K \ell_{kj} x_k(\ln \lambda - v_{kj}/c) + \text{ruído}, \quad (2.1)$$

onde  $\ell_{kj}$  são os fatores de luz, ou as contribuições individuais normalizadas (contribuições relativas de cada componente) ao fluxo total ( $\sum_{k=1}^K \ell_{kj} = 1$ ), e  $v_{kj}/c$  é a velocidade, em unidades da velocidade da luz, para a componente  $k$  no tempo  $j$ .

Na prática, os espectros compostos observados são discretizados em um conjunto de elementos, denominados *pixels*, expressos em escala logarítmica (natural) de comprimento

de onda,  $y_{ji} = \ln \lambda_{ji} (i = 1, \dots, I_j)$ , onde  $I_j$  é o número total de pixels no espectro composto observado no tempo  $t_j$ . Cada  $y_{ji}$  tem sua incerteza  $\sigma_{ji}$ , podendo possuir ainda uma discretização diferente em relação aos outros espectros (mas cobrindo aproximadamente o mesmo intervalo em comprimento de onda). A vantagem de se expressar  $x_k$  em escala logarítmica, é que o efeito Doppler ( $\lambda = \lambda_0(1 + v/c)$ ) passa a ser expresso de forma aditiva ( $\ln \lambda = \ln \lambda_0 + \ln(1 + v/c)$ ), preservando os perfis de linha.

Neste modelo, os perfis das linhas não podem variar durante a órbita, exceto em intensidade (causada por variabilidade intrínseca das componentes ou por eclipse total). Isso significa que observações tomadas durante as fases de eclipse parciais não devem, em princípio, ser usadas devido à variação nos perfis das linhas do espectro da componente que está sendo ocultada (denominado efeito Schlesinger-Rossiter; Schlesinger 1909a, 1909b, Rossiter 1924), ou ainda, a variações nos perfis por elipticidade das componentes ou variação das condições físicas sobre a superfície estelar. Rigorosamente falando, efeitos com natureza multiplicativa tais como linhas telúricas, absorções interestelares e eclipses cromosféricos não podem ser tratados. No entanto, Hadrava (2004a, e 2006) discute como estender o método em situações mais complicadas como, por exemplo, a possibilidade de utilizar fases em que os perfis das linhas das componentes não são mais constantes devido a pulsação e rotação, a remoção de linhas telúricas dos espectros compostos observados e a possibilidade de se considerar o espectro composto como a integral das intensidades monocromáticas sobre as partes visíveis da superfície estelar de cada componente.

No caso em que os fatores de luz das componentes são constantes, ou seja,  $\ell_{kj} = \ell_k$ , o conjunto de soluções  $\{\ell_k, x_k(\ln \lambda), v_{kj}\}$ , para os fatores de luz, espectros intrínsecos e velocidades radiais das componentes, não será único, uma vez que

$$\left\{ \ell'_k, 1 - \frac{\ell_k}{\ell'_k} (1 - x_k(\ln \lambda)) v_{kj} \right\} \quad (2.2)$$

também é solução do problema, ou seja, podemos combinar diferentes valores de  $\ell'_k$  com espectros intrínsecos apropriados,  $1 - \frac{\ell_k}{\ell'_k} (1 - x_k(\ln \lambda))$ , de forma que qualquer uma dessas soluções representa muito bem o espectro composto observado:

$$\sum_{k=1}^K \ell'_k \left( 1 - \frac{\ell_k}{\ell'_k} (1 - x_k) \right) = \sum_{k=1}^K \ell'_k - \sum_{k=1}^K \ell_k + \sum_{k=1}^K \ell_k x_k = \sum_{k=1}^K \ell_k x_k. \quad (2.3)$$

Observe que somente a forma das linhas, e não sua intensidade, é bem reconstruída para qualquer valor de  $\ell_k$  (veja exemplo mostrado na Fig. 3.1). Neste caso, informações adicionais são requeridas para transformar esses “quasi-espectros” em espectros verdadeiros.

Para sistemas contendo  $K$  componentes, a Eq. (2.2) pode ser generalizada. Considere  $L$  subconjuntos formados por  $K_l$ ,  $l = 1, \dots, L$  componentes, de forma que  $\sum_{l=1}^L K_l = K$ . Para cada subconjunto,  $K_l$ , o fator de luz é constante. O conjunto de soluções mais geral é, dentro de cada subconjunto  $K_l$ ,

$$\left( \ell'_{kj}, 1 - \frac{\ell_{kj}}{\ell'_{kj}} (1 - x_k(\ln \lambda)), v_{kj} \right), \quad (2.4)$$

com  $\frac{\ell_{kj}}{\ell'_{kj}} = r_k$  e  $\sum_{k \in K_l} \ell'_{kj} = \sum_{k \in K_l} \ell_{kj}$ , reduzindo a uma solução única somente quando  $K_l$  contém apenas uma componente. Exemplificando, considere um sistema triplo eclipsante formado por 3 componentes esféricas: as componentes 1 e 2 formam um par eclipsante e

a componente 3 orbita em torno do par. Como a componente 2 é a única, das três, que é eclipsada, o fator de luz  $\frac{\ell_1}{\ell_3}$  é constante mas  $\frac{\ell_1}{\ell_2}$  e  $\frac{\ell_2}{\ell_3}$  não o são. Assim, como  $K = 3$  e  $L = 2$ ,  $K_1$  é o conjunto contendo 2 componentes (1,3), cujo fator de luz é constante e  $K_2$  é o conjunto formado pela componente 2, cujo o espectro será unicamente determinado, ao contrário das componentes 1 e 3 que terão um problema intrínseco de normalização, descrito pela Eq. (2.4), pois a solução não será única. Concluindo, em um sistema que inclui componentes mostrando variabilidade em luz, a solução não será única para qualquer subconjunto de componentes cuja razão de fatores de luz mútuos entre elas seja constante, ou seja,  $r_{kk'} = \ell_{kj}/\ell_{k'j}$ .

Apenas um conjunto de soluções será aceitável, desde que o espectro tenha intensidades positivas em todos os comprimentos de onda. A escolha de intervalos espectrais com linhas profundas ajuda a resolver a indeterminação do nível do contínuo para o caso em que os fatores de luz das componentes são constantes (veja por exemplo, Griffin 2002 e Frémat, Lampens, & Hensberge 2005). Além disso, conhecimentos físicos adicionais do sistema podem ajudar, como por exemplo: (a) a presença de uma janela (região do espectro estelar) onde o contínuo é bem definido e/ou (b) de uma maneira indireita, impor que a abundância química de um determinado elemento, seja a mesma tanto para linhas fortes como para linhas fracas.

Informações fotométricas podem dar indícios da variabilidade dos fatores de luz das componentes, porém os valores determinados não serão rigorosamente corretos, pois os filtros fotométricos respondem diferentemente dos espectrógrafos. Esse procedimento, descrito na Sec. 5.1.6, foi adotado para a análise de RV Cr1, que possibilitou além da melhor determinação dos espectros das componentes, uma diminuição considerável dos efeitos de baixa-freqüência sobrepostos ao contínuo, como mostrado na Sec. 5.1.7 (compare a Fig. 5.10 com as Figs. 5.12 e 5.13). De acordo com Hadrava (1997), informações sobre os fatores de luz podem ser obtidas pela reconstrução espectral, requerendo que os  $\ell_{kj}$  sejam mantidos livres durante a convergência. Esse procedimento pode conduzir à detecção, espectroscopicamente, de eclipses, como foi o caso de Holgrem et al. (1997) e González & Levato (2006).

No caso de uma variabilidade de luz mais sutil, a precisão obtida pela análise fotométrica pode exceder aquela obtida pela espectroscopia. O ponto chave é que qualquer deslocamento do contínuo provoca uma mudança aparente da profundidade das linhas no espectro. Esse deslocamento pode estar relacionado com a mistura das linhas espectrais das componentes, que varia devido ao seu movimento orbital fazendo com que as janelas de contínuo mudem, e com ss diferentes razões sinal sobre ruído dos espectros observados. Os efeitos de deslocamento do contínuo são mais pronunciados em componentes cujas linhas espectrais são menos profundas no espectro observado. Os efeitos da presença de vies nos espectros normalizados observados, serão discutidos na Sec. 2.7.

## 2.2 Princípios da Separação Espectral no Espaço de Velocidade

Para determinar o espectro das componentes,  $x_k(\ln \lambda)$ , a Eq. (2.1) deve ser resolvida de forma analítica. Para isso, as intensidades normalizadas dos espectros das componentes,  $x_{kn}$ ,  $n = 1, \dots, N_k$  ( $N_k$  é o número de pixels no espectro da componente  $k$ ), devem ser interpoladas linearmente em um conjunto discreto de pixels expressos em uma grade de

pontos em logarítmo de comprimento de onda:  $\ln \lambda_{kn}$ .

Cada componente pode ser amostrada em uma grade diferente, e nenhuma regularidade rigorosa na amostragem em  $\ln \lambda$  é requerida. A resolução natural que vem do detector pode ser usada, sem a necessidade de reamostrar os dados, ou ainda, pixel em escala de  $\ln \lambda$  pode ter desvios Doppler correspondentes a uma fração de pixel em diferentes espectros, ou pode ter uma ligeira diferença de tamanho em diferentes espectros ou ordens espectrais. No entanto, as características espectrais devem ser amostradas suficientemente bem e, de tal maneira, que a interpolação aplicada não produza viés significativos nos dados. Além disso, as grades de amostragem devem, ainda, cobrir um intervalo em comprimento de onda amplo o suficiente para incluir os valores extremos que aparecem no argumento de  $x_k$  da Eq. (2.1). Sob essas condições, podemos escrever:

$$x_k(\ln \lambda_{ji} - \frac{v_{kj}}{c}) = (1 - f_{jik}) x_{kn_{jik}} + f_{jik} x_{k(n_{jik}+1)}, \quad (2.5)$$

onde o coeficiente de interpolação linear ( $f_{jik}$ ) é:

$$f_{jik} = \frac{\ln \lambda_{ji} - \frac{v_{kj}}{c} - \ln \lambda_{kn_{jik}}}{\ln \lambda_{k(n_{jik}+1)} - \ln \lambda_{kn_{jik}}}, \quad (2.6)$$

e o pixel  $n_{jik}$  está relacionado com

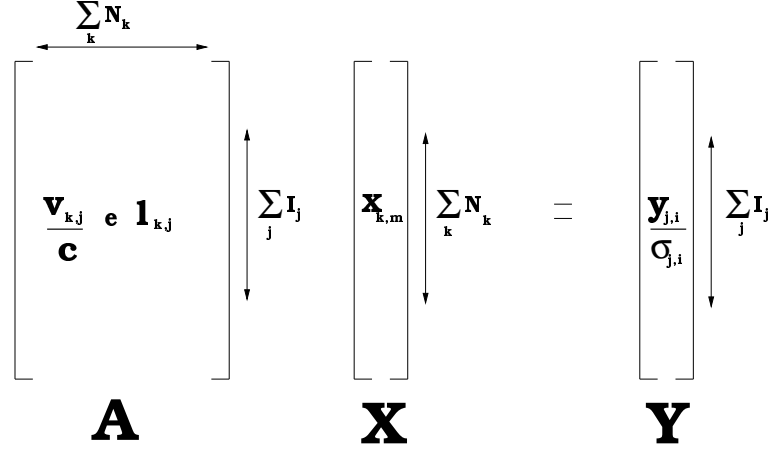
$$\ln \lambda_{kn_{jik}} \leq \ln \lambda_{ji} - \frac{v_{kj}}{c} \leq \ln \lambda_{k(n_{jik}+1)}. \quad (2.7)$$

Substituindo a Eq. (2.5) na Eq. (2.1) encontramos:

$$\frac{y_{ji}}{\sigma_{ji}} = \frac{1}{\sigma_{ji}} \sum_{k=1}^K \ell_{kj} \left[ (1 - f_{jik}) x_{kn_{jik}} + f_{jik} x_{k(n_{jik}+1)} \right]. \quad (2.8)$$

No total, são  $\sum_{j=1}^J I_j$  equações lineares com  $\sum_{k=1}^K N_k$  valores desconhecidos  $x_{kn}$  ( $I_j$  é o número total de pixels no espectro composto observado no tempo  $t_j$ ). O termo relacionado com o ruído foi omitido por simplicidade.  $\sigma_{ji}$  representa a incerteza na medida do pixel  $i$  e fase  $j$ , podendo ainda servir como máscara dando peso nulo ou pequeno para pixels defeituosos devido a manchas no detector, raios cósmicos ou outros efeitos físicos não incluídos no modelo (Eq. 2.1). Podemos escolher peso nulo para os pixels afetados por linhas telúricas e/ou interestelares. Esse seria o procedimento mais indicado para eliminar os efeitos de componentes multiplicativas, e não aditivas, que afetam o espectro composto estelar. Contudo, Hadrava (2006) mostra que essas componentes multiplicativas podem ser consideradas, com boa aproximação, como componentes aditivas durante o processo de separação espectral de certos casos específicos. Isso é aplicável quando as linhas telúricas ou interestelares são superpostas, em nível comparável ao das intensidades normalizadas das linhas estelares, por toda extensão do espectro estelar sendo analisado. No entanto, um procedimento mais rígido é necessário, por exemplo, no caso de estrelas do tipo espectral **F** que têm uma componente interestelar superposta a uma linha forte de Na I D que se move durante o ciclo orbital por um intervalo Doppler da ordem da largura dessas linhas ou maior.

A Eq. (2.8) pode ser escrita na forma matricial da seguinte forma: concatenar os valores de  $\frac{y_{ji}}{\sigma_{ji}}$  no lado esquerdo da matriz em um vetor  $\mathbf{Y}$  de comprimento  $\sum_{j=1}^J I_j$ , e



**Figura 2.1:** Estrutura da equação matricial que descreve a separação espectral no espaço velocidade (vide o texto para mais detalhes).

as intensidades dos espectros das componentes ( $x_{kn}$ ) em um vetor  $\mathbf{X}$  de comprimento  $\sum_{k=1}^K N_k$ . O sistema de equações será do tipo  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$ , onde  $\mathbf{A}$ , denominada matriz projeto (*design*), tem dimensões  $\sum_j I_j$  por  $\sum_k N_k$  (veja Fig. 2.1).  $\mathbf{A}$  é uma matriz esparsa que consiste de blocos  $A_{kj}$ , que transforma  $X$  em  $Y$  usando as quantidades  $\frac{v_{kj}}{c}$  e  $\ell_{kj}$ , que são valores supostamente conhecidos. As submatrizes  $A_{kj}$  possuem elementos iguais a 1, afastados da diagonal principal por um número de pixels correspondendo aos valores de  $\frac{v_{kj}}{c}$  e multiplicadas por  $\ell_{kj}$  e  $\sigma_{ji}$ :

$$A_{kj} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Na Sec. 3.3 damos exemplos explícitos da equação matricial  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$ , para um sistema binário e espectros teóricos com poucos pixels.

Alternativamente, podemos obter a solução minimizada para a Eq. (2.8) resolvendo o sistema  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Y}$ , onde a matriz quadrada  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  é denominada matriz normal. Em geral, este sistema de equações lineares é “sobre-determinado” (ou seja,  $\sum_{j=1}^J I_j > \sum_{k=1}^K N_k$ ).

Para lidar com situações em que a matriz projeto é mal-condicionada ou singular, a aplicação de um algoritmo iterativo que aplica o método da Decomposição de Valor Singular é indicada (para a definição da DVS ver, por exemplo, Willian *et al.* 1992, 2008). A princípio a DVS pode ser aplicada tanto na matriz projeto como na matriz normal, minimizando o vetor  $\mathbf{X}$ , respectivamente da seguinte forma:  $\chi^2 = |\mathbf{Y} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}|^2$  ou  $\chi^2 = |\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Y} - \mathbf{A}^T \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}|^2$ . No entanto, apesar da solução baseada na equação normal demandar menos tempo computacional, a aplicação da DVS na equação projeto sofre menos instabilidades numéricas.

Como exemplos de métodos que aplicam a decomposição espectral no espaço de comprimento de onda, podemos citar aqueles desenvolvidos por Simon & Sturm (1994), desembaraçamento espectral e Ilijic (2004b), separação espectral.

## 2.3 Princípios da Separação Espectral no Espaço de Fourier

O método de decomposição espectral no espaço de Fourier consiste simplesmente em resolver os espectros das componentes e sua órbita no espaço de Fourier, reduzindo drasticamente o tempo computacional em relação à solução no espaço de velocidade. Neste formalismo, os pixels dos espectros estão equidistantes em  $\ln \lambda$ , ou ainda em velocidade radial  $v_p$  (como adotado no espaço de velocidade)

$$\frac{v/c}{N-1} = \frac{\Delta\lambda/\lambda_0}{N-1} \simeq \frac{\Delta \ln \lambda}{N-1} \quad \text{ou, fazendo } v_p = \frac{v}{N-1},$$

$$\frac{v_p}{c} \simeq \frac{\Delta \ln \lambda}{N-1}. \quad (2.10)$$

A formulação em termos da transformada discreta de Fourier (DFT) nos leva a considerar os espectros observados e os das componentes como sendo

$$\tilde{y}_{jm} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_{jn} e^{-2\pi i m n/N} \quad \text{e} \quad \tilde{x}_{km} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_{kn} e^{-2\pi i m n/N}. \quad (2.11)$$

Uma vez que os espectros  $x_{kn}$  e  $y_{jn}$  são reais, as amplitudes  $\tilde{y}_{jm}$  e  $\tilde{x}_{km}$  para os modos de Fourier  $\pm m$  são o complexo conjugado umas das outras. Assim, é suficiente resolver as equações para  $m = 0 \dots N/2$ , caso N seja par, ou  $m = 0 \dots \frac{N-1}{2}$ , caso N seja ímpar. De acordo com o teorema da convolução (Weisstein, 2007), uma mudança em  $x_{kn}$  de  $\beta$  pixels numa escala constante em  $\ln \lambda$  equivale a multiplicar  $\tilde{x}_{km}$  por  $e^{-2\pi i m \beta_{kj}/N}$ , considerando que o espectro composto observado,  $y_{ji}$ , seja dado pela convolução entre o espectro da componente,  $x_{kn}$ , e a função delta de Dirac,  $\delta(\ln \lambda_{ji} - \beta_{kj})$ . Levando em consideração esse fato e a Eq. (2.11), podemos escrever a Eq. (2.1), como

$$\frac{\tilde{y}_{jm}}{\sigma_{jm}} = \frac{1}{\sigma_{jm}} \sum_{k=1}^K \ell_{kj} \tilde{x}_{km} e^{-2\pi i m \beta_{kj}/N}, \quad (2.12)$$

onde  $\beta_{kj} = v_{kj}/v_p$ , para valores inteiros de  $\beta_{kj}$ . Considerando, valores não-inteiros de pixels, uma aproximação é requerida e o termo  $e^{-2\pi i m \beta_{kj}/N}$  pode ser aproximado pela interpolação

$$e^{-2\pi i m \beta_{kj}/N} = (\beta_{kj}^+ - \beta_{kj}) e^{-2\pi i m \beta_{kj}^-/N} + (\beta_{kj} - \beta_{kj}^-) e^{-2\pi i m \beta_{kj}^+/N}, \quad (2.13)$$

com a qual obtemos uma equação análoga à Eq. (2.8) no espaço de Fourier

$$\frac{\tilde{y}_{j,m}}{\sigma_{j,m}} = \frac{1}{\sigma_{j,m}} \sum_{k=1}^K \ell_{kj} [(\beta_{kj}^+ - \beta_{kj}) e^{-2\pi i m \beta_{kj}^-/N} + (\beta_{kj} - \beta_{kj}^-) e^{-2\pi i m \beta_{kj}^+/N}] \tilde{x}_{k,m}, \quad (2.14)$$

onde  $\beta_{kj}^\pm$  são os inteiros mais próximos, ou seja,  $\beta_{k,j}^+ = \text{int}(\beta_{k,j}) + 1$  e  $\beta_{k,j}^- = \text{int}(\beta_{k,j})$ . Nesse novo formalismo, teremos para *cada modo* de Fourier, apenas J equações lineares *desacopladas*, com K incógnitas. Note que os sistemas de equações correspondendo a  $m = 0$  e a  $m = N/2$  (para N par) são reais, e para os outros modos as equações são complexas. Exemplificando, considere um sistema binário com  $J=10$  espectros compostos de entrada

contendo 1024 pixels cada um. Usando o espaço de velocidade teríamos  $10 \times 1024$  equações lineares acopladas com  $2 \times 1024$  incógnitas, já no espaço de Fourier teríamos 10 equações lineares desacopladas com 2 variáveis para cada um dos 512 modos de Fourier.

O termo  $\sigma_{jm}$  representa a incerteza nos espectros observados na fase  $j$  e modo  $m$ , que pode atuar como uma máscara nos primeiros estágios de otimização dos parâmetros. Na Sec. 2.5.1.1, discutiremos sua utilidade, principalmente para os baixos modos de Fourier, que estão relacionados com os efeitos de ondulações sobrepostos ao contínuo dos espectros reconstruídos.

Levando em consideração o modelo descrito pela Eq. (2.12), para valores inteiros de  $\beta_{kj}$ , o sistema de equações pode ser escrito, para cada modo de Fourier, como  $\mathbf{F}_m \cdot \tilde{\mathbf{x}}_m = \tilde{\mathbf{Y}}_m$ , onde  $\mathbf{F}_m$  é uma matriz retangular de dimensões  $J \times K$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}_m$  é um vetor contendo os elementos  $\tilde{x}_{km}$ ,  $\tilde{\mathbf{Y}}_m$  é um vetor contendo os elementos  $\tilde{y}_{jm}/\sigma_{jm}$ :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_m(1, 1) & \mathbf{F}_m(1, 2) & \dots & \mathbf{F}_m(1, K) \\ \mathbf{F}_m(2, 1) & \mathbf{F}_m(2, 2) & \dots & \mathbf{F}_m(2, K) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{F}_m(J, 1) & \mathbf{F}_m(J, 2) & \dots & \mathbf{F}_m(J, K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_{1,m} \\ \tilde{x}_{2,m} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{K,m} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma_{jm}} \begin{pmatrix} \tilde{y}_{1,m} \\ \tilde{y}_{2,m} \\ \vdots \\ \tilde{y}_{J,m} \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

onde,

$$\mathbf{F}_m(j, k) = \frac{\ell_{kj}}{\sigma_{jm}} e^{-2\pi i \frac{m}{N} \beta_{k,j}}. \quad (2.16)$$

A solução será a minimização da expressão

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^J \frac{1}{\sigma_{jm}^2} \left| \tilde{y}_{jm} - \sum_{k=1}^K \ell_{kj} \tilde{x}_{km} e^{-2\pi i m \beta_{kj}/N} \right|^2, \quad (2.17)$$

ou, matricialmente,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m(1, 1) & \mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m(1, 2) & \dots & \mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m(1, K) \\ \mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m(2, 1) & \mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m(2, 2) & \dots & \mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m(2, K) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m(K, 1) & \mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m(K, 2) & \dots & \mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m(K, K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_{1,m} \\ \tilde{x}_{2,m} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{K,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{Y}_m(1) \\ \tilde{Y}_m(2) \\ \vdots \\ \tilde{Y}_m(K) \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

com a matriz Hermitiana

$$\mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m(k, k') = \sum_{j=1}^J \frac{1}{\sigma_{jm}^2} \ell_{kj} \ell_{k'j} e^{2\pi i \frac{m}{N} (\beta_{k,j} - \beta_{k',j})}, \quad (2.19)$$

e o vetor

$$\tilde{Y}_m(k) = \sum_{j=1}^J \ell_{kj} \tilde{y}_{j,m} e^{2\pi i \frac{m}{N} \beta_{k,j}}. \quad (2.20)$$

O uso da transformada discreta de Fourier, no contexto da separação espectral, foi primeiramente desenvolvido por Hadrava (1995, 2004c e 2004b). Seu código KOREL, pode ser usado para um sistema hierárquico com até 5 componentes. O método contém pelo menos duas limitações: (a) que todos os  $J$  espectros observados e os espectros individuais das componentes devam conter o mesmo passo em velocidade ( $v_p$ ) e (b) o número  $N$  de pixels deve ser uma potência de 2 ( $2^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ). Os espectros das componentes

são considerados funções periódicas de  $\ln \lambda$  e têm período igual ao tamanho do espectro. Todos os espectros possuem incertezas dependentes somente das fases orbitais,  $\sigma_j$ , e não dos modos de Fourier. Por outro lado, é possível fazer uma “filtragem”, eliminando os modos mais baixos, que é um procedimento adequado para melhorar a determinação da curva de velocidade radial das componentes (como sugerido também por González & Levato 2006). Entretanto, cuidados devem ser tomados, pois os modos mais baixos são os responsáveis pela retificação dos espectros, e sua filtragem pode impedir uma boa reconstrução espectral. A situação ainda é pior quando os espectros observados não são bem normalizados e retificados, gerando padrões espúrios sobre os contínuos dos espectros reconstruídos. Como veremos na Sec. 2.5.1.2, adotar pesos aos modos mais baixos ajuda a eliminar viés que aparecem no contínuo dos espectros reconstruídos pelo método.

Um aspecto importante, que não é mencionado por Hadrava em seus manuais do KOREL, é como são tratadas as velocidades radiais das componentes. Ao invés de aplicar qualquer interpolação, ele arredonda as velocidades radiais para o inteiro mais próximo, quando resolve as equações para qualquer modo no espaço de Fourier. É claro que a estratégia do KOREL de algum jeito requer uma grade de velocidades cujas células sejam pequenas com relação às amplitudes de velocidades orbitais, requerendo um aumento da densidade dos dados nos espectros de entrada (veja a Sec. 3.3, Caso 2, onde mostramos que para o caso em que as velocidade das componentes são números não-inteiros de pixels, um aumento na densidade dos dados nos espectros compostos é requerida).

Outro aspecto importante a ressaltar é que o código não calcula as contribuições das componentes para o modo zero,  $\tilde{x}_{k0}$ . Esse modo, conforme as equações da transformada discreta de Fourier, é o valor médio do espectro intrínseco da componente  $k$

$$\tilde{x}_{k0} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_{kn}, \quad (2.21)$$

e está relacionado com a quantidade que as linhas espectrais absorveram do contínuo (denominado bloqueio de linha, descrito matematicamente por  $b = 1 - \langle x_k \rangle$ ). Esse bloqueio de linha é que determina a posição do ponto zero no espectro normalizado das componentes. O que o código faz é adicionar 1 nos espectros reconstruídos considerando que eles possuem média 1.

O código `FDBinary`, desenvolvido por Ilijic (2003 e 2006) resolve as equações de separação espectral usando a DVS, ao contrário do KOREL que usa mínimos quadrados. Além disso, os espectros observados não precisam conter  $2^n$  pixels, ao custo de demandar mais tempo computacional. Por outro lado, a exponencial da Eq. (2.12) é aproximada por

$$e^{-2\pi i m \beta_{kj}/N} = (\beta_{kj}^+ - \beta_{kj}) e^{-2\pi i m \beta_{kj}^-/N} + (\beta_{kj} - \beta_{kj}^-) e^{-2\pi i m \beta_{kj}^+/N} \quad (2.22)$$

onde  $\beta_{k,j}^+ = \text{int}(\beta_{k,j}) + 1$  e  $\beta_{k,j}^- = \text{int}(\beta_{k,j})$ . A função  $\text{int}()$  toma a menor parte inteira (“floor”) do seu argumento e é equivalente à solução no espaço de velocidade (veja Sec. 2.4). Experimentos com diferentes estratégias foram feitas nas versões mais novas do `FDBinary`, mas estes não serão discutidos em detalhes aqui.



## 2.4 Equivalência da Separação Espectral nos Espaços de Velocidade e de Fourier

A separação espectral no espaço de Fourier pode reproduzir o mesmo resultado no espaço de velocidade, desde que a matriz de separação seja redefinida apropriadamente. Contudo, ao utilizar os códigos disponíveis que usam as duas técnicas, diferenças foram observadas nos espectros reconstruídos. Essas diferenças se devem ao fato de que os espectros, no espaço de Fourier, são considerados como funções periódicas e que as informações contidas nas bordas dos espectros estão conectadas entre si. Além disso, cada código trata diferentemente a forma como os dados são amostrados e as equações envolvidas no processo de separação.

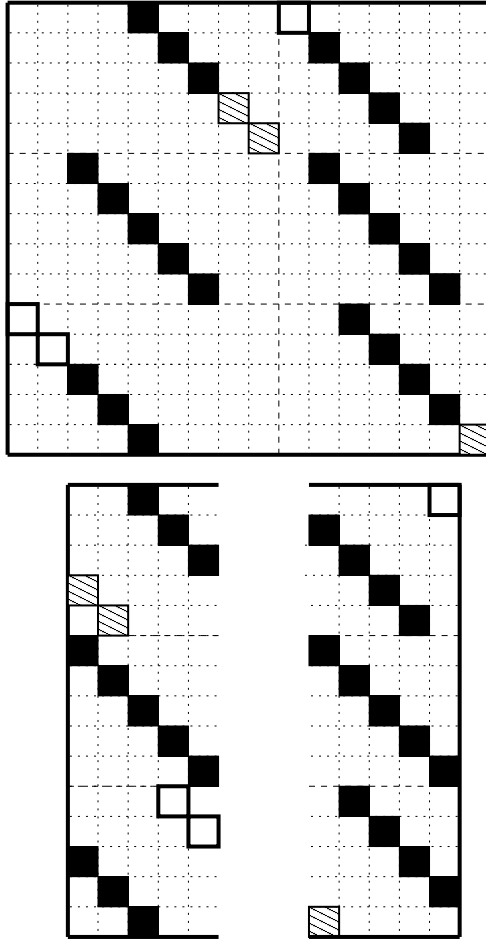
A Fig. 2.2 mostra a matriz projeto para um sistema estelar duplo cujas componentes possuem as seguintes velocidades radiais:  $\beta_{1j} = (-2, 0, 2)$  and  $\beta_{2j} = (1, 0, -1)$  nas fases  $j = 1, 2, 3$ . A parte superior representa a matriz projeto para o algoritmo no espaço de velocidade (agora denominada MPV) e a inferior para o algoritmo no espaço de Fourier (agora denominada MPF), que produz os mesmos resultados mas opera no espaço de velocidade. Na MPV, o número de colunas da submatriz para cada componente é estendido para um intervalo além do comprimento do espectro de entrada. Essa extensão está diretamente relacionada com a velocidade orbital de cada estrela, onde se vê, claramente, o deslocamento da diagonal de cada sub-bloco para o vermelho e azul. Por outro lado, na MPF as colunas não são estendidas, permanecendo com o número igual ao número de pixels do espectro de entrada. As informações contidas dentro deste intervalo que sofrem mudança Doppler para fora do mesmo, em alguma fase orbital, são deslocadas para o outro lado do intervalo em logaritmo do comprimento de onda. Testes com dados artificiais contendo poucos pixels foram realizados, mostrando que o algoritmo equivalente para o espaço de Fourier (painel inferior da Fig. 2.2), que opera no espaço de velocidade, é equivalente à solução no espaço de Fourier.

### 2.4.1 Efeito de Bordas

Devido ao movimento Doppler das componentes, e dependendo da fase orbital, a informação sobre o fluxo das componentes em um determinado comprimento de onda contido na borda do intervalo de interesse pode “aparecer” ou “desaparecer” (ou seja, entrar ou sair do espectro medido). Conseqüentemente, a separação espectral é comprometida próxima das bordas dos intervalos espectrais, principalmente em situações onde não existem regiões com suficiente contínuo. A situação é pior para sistemas cujas componentes possuem uma densidade considerável de linhas em seus espectros ou possuem velocidade rotacional elevada, impedindo “visualizar” se o perfil da linha está totalmente contido dentro do intervalo espectral.

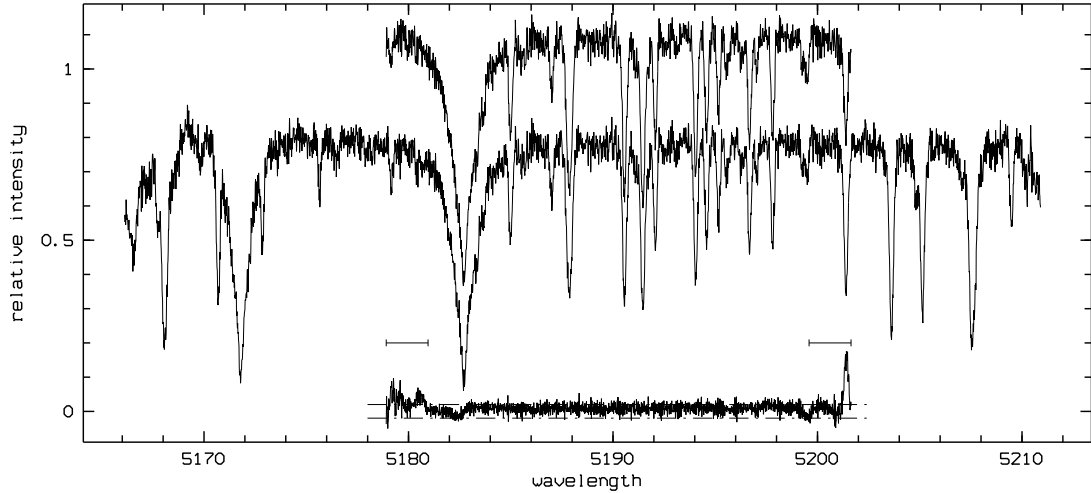
Em casos em que o sistema contém uma componente fraca, é difícil estimar se esta possui linhas fortes nas bordas do intervalo, podendo resultar numa reconstrução imperfeita, em que tal linha pareceria mais fraca do que é na realidade.

Com linhas espectrais atravessando as bordas durante o ciclo orbital, alguns dos espectros observados têm uma intensidade normalizada na extremidade mais no azul que difere daquela mais no vermelho. A representação de Fourier mostra então o fenômeno de Gibbs, que é um padrão ondulatório que desvia das funções verdadeiras e viaja dentro do intervalo considerado com uma amplitude que decresce rapidamente. Infelizmente, a escolha



**Figura 2.2:** Matriz projeto para um algoritmo no espaço de velocidade (painel superior) e um equivalente para o espaço de Fourier que opera no espaço de velocidade (inferior), considerando um sistema binário com 3 fases orbitais e velocidades  $\beta_{1j} = (-2, 0, 2)$  and  $\beta_{2j} = (1, 0, -1)$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Somente os elementos representados por quadrados com linhas tracejadas, preenchidas ou não, possuem valores diferentes de 0. Os quadrados vazios e com linhas tracejadas representam o desvio Doppler das componentes  $\beta_{kj}$ , respectivamente, para o vermelho e para o azul. Esses elementos são posicionados em torno da matriz projeto equivalente à representação no espaço de Fourier. Observe que esse efeito não ocorre para a matriz projeto no espaço de velocidade (painel superior). Na matriz superior, as 9 primeiras colunas referem-se à componente 1 (C1) e as outras 7 à componente 2 (C2). São necessários 4 colunas a mais para C1 e 2 a mais para C2 para simular o movimento orbital das componentes (observe o deslocamento das diagonais devido a tal efeito). No espaço de Fourier, as colunas da matriz projeto são menores, possuindo o mesmo tamanho do intervalo do espectro de entrada (vide texto para maiores detalhes). O intervalo em branco mostrado na matriz projeto para o espaço de Fourier foi feito propositalmente para alinhar as colunas correspondentes à matriz no espaço de velocidade.

das bordas é vinculada pela implementação dos algoritmos que usam a Transformada Rápida de Fourier (FFT), a qual requer a condição de que o número de pixels do comprimento espectral tenha que ser, necessariamente, potência de 2 (veja na Sec. 5.1.5 como determinamos as regiões espectrais do sistema triplo eclipsante RV CrI, seguindo essa condição). Não é possível seguir, com rigidez matemática, a propagação do fenômeno de Gibbs através do processo de solução. Experimentos sugerem que as características caem rapidamente em direção ao centro, onde os desvios são preservados. Na prática, o que pode ser feito é averiguar a representação dos espectros observados no espaço de Fourier



**Figura 2.3:** Espectro desembaraçado de uma das componentes de um sistema binário tardio mostrando efeitos de borda devido à escolha de um intervalo espectral cujas extremidades contém linhas espectrais. Foram utilizados 37 espectros de baixo sinal sobre ruído e duas regiões espectrais contendo, respectivamente, 2048 e 4096 bins centradas em 5190 Å. Os espectros estão dispostos, por simplicidade, em intensidade relativa. Na parte inferior mostramos a diferença entre os dois resultados que são limitados por uma linha ponto-tracejada correspondendo a 2% do nível total. Note que os máximos de desvios observados se encontram nas extremidades correspondendo a um intervalo aproximadamente igual à soma da amplitude máxima de velocidade das componentes  $K_1 + K_2$  (mostrado em barras horizontais). Observe, ainda, que a linha centrada em  $\sim 5202$  Å tem sua intensidade reduzida quando usando um intervalo de comprimento de onda mais curto. Isso é uma consequência da análise no espaço de Fourier tratar o comprimento de onda como funções periódicas, conectando a informação dos pixels nas extremidades do intervalo espectral.

no sentido de obter uma interpretação astrofísica das intensidades das linhas próximas às bordas.

Devido à periodicidade da FFT, as informações contidas nas bordas são conectadas. Assim, para uma reconstrução espectral satisfatória, é necessário que essas contenham no mínimo um intervalo igual à soma da máxima amplitude de velocidade das componentes durante sua órbita (veja exemplo da Fig. 2.3, onde mostramos a má reconstrução das linhas perto das bordas do intervalo). Pela Fig. 2.3 vemos que a influência dos tratamentos não-físicos das bordas se espalha sobre o intervalo inteiro: estruturas nos desvios (parte inferior da Fig. 2.3), dados pela diferença entre o espectro reconstruído sobre o intervalo espectral pequeno e grande, são apenas vistas próximo às bordas do menor intervalo, equivalente a duas vezes a soma das amplitudes de velocidade das componentes. Na parte central do menor intervalo espectral o RMS é 0,0012 (com uma diferença de nível entre os espectros reconstruídos de 0,008) e nenhuma estrutura foi detectada. O espalhamento do RMS esperado, considerando uma soma ponderada dos espectros observados, é 0,008 e, levando-se em consideração que a componente contribui com 64% da luz total observada, o RMS relacionado com o ruído esperado para o espectro reconstruído é 0,012.

No espaço de velocidade, somente a parte dos espectros observados que não inclui as bordas (pelo menos uma vez a soma das amplitudes máximas de velocidade das componentes) contribui para a reconstrução espectral do espectro composto. As equações que relacionam o fluxo reconstruído, em pixels próximos às extremidades, com o fluxo em

pixels que nunca sofreram desvio Doppler, dentro do intervalo observado em  $\ln \lambda$ , estão faltando. Nenhuma informação “falsa” é estendida, mas o conjunto de equações ainda está incompleto.

Estimativas da presença dos efeitos de bordas, na prática, podem ser obtidas mais facilmente aplicando os métodos nos espaços de velocidade e Fourier, de forma que as regiões espectrais a serem analisadas sejam superpostas com diferentes tamanhos de bordas.

Concluindo, no caso em que alguns espectros observados tenham linhas próximas às bordas do intervalo espectral a ser analisado, ou que as componentes sejam muito fracas, é recomendado que a análise do espectro reconstruído seja limitada a uma região que se distancie das extremidades por uma distância correspondente a uma ou duas vezes a soma da amplitude máxima de velocidade das componentes. Isso é aconselhado para análises astrofísicas que dependam da intensidade das linhas.

## 2.4.2 Definição do tamanho do pixel

Os métodos de separação espectral requerem que os espectros de entrada sejam amostrados em passos constantes em velocidade. Erros são produzidos ao reamostrar dados expressos em comprimento de onda para velocidade, principalmente ao se usar a técnica de interpolação de dados que resultará em espectros cujos perfis de linhas não correspondem ao perfil real.

Do ponto de vista observacional, a amostragem natural dos dados é definida pelo tamanho do pixel do detector. Em muitos dos espectrógrafos échelle, o tamanho do pixel expresso em velocidade é praticamente constante sobre um intervalo longo de comprimento de onda. Assim, é preferível que espectros obtidos por esse espectrógrafo sejam amostrados diretamente em velocidade, que fazê-lo em comprimento de onda e em seguida reamostrá-los em velocidade para se usar os códigos de separação espectral. Tal prática poderá introduzir erros correlacionados em pixels adjacentes e uma progressão desnecessária de erros. Cabe lembrar que o estudo de estimativa de erros e o uso do método de mínimos quadrados pressupõem que os erros de cada pixel sejam independentes.

Ao definir-se a amostragem dos espectros de entrada, automaticamente define-se a resolução das velocidades radiais, se nenhuma nova reamostragem é feita internamente no código de separação espectral utilizado. Assim, em situações onde o tamanho do pixel não é suficiente para determinar as velocidades orbitais das componentes, uma superamostragem nos dados (considerar que os espectros possuem uma rede mais fina) pode ser requerida para se obter resultados melhores. Veja na Sec. 3.3 um exemplo de espectros de entrada superamostrados (Eq. 3.92), para um sistema hipotético, que produziram os resultados esperados após aplicação dos códigos de desembaraçamento no espaço de Fourier. A opção de se usar espectros observados com um tipo de resolução que seja diferente (maior ou menor) daquela para os espectros reconstruídos é mais bem sucedida no espaço de velocidade que no espaço de Fourier. Isto é vantajoso para componentes que possuem velocidade rotacional elevada em um sistema com baixa amplitude de velocidades radiais.

## 2.5 Formulação geral das equações de separação no espaço de Fourier

A formulação das equações de separação espectral no espaço de Fourier nos possibilita, mais facilmente, analisar com mais profundidade em quais situações as equações podem ser singulares ou mal-condicionadas, mesmo usando espectros observados com ruído nulo, produzindo uma reconstrução espectral de má qualidade.

A DVS de uma matriz projeto  $\mathbf{F}_m$  com  $J$  linhas e  $K$  colunas ( $K < J$ ) é obtida como o produto de três outras matrizes, ou seja:

$$\mathbf{F}_m = \mathbf{U}_m \cdot \mathbf{W}_m \cdot \mathbf{V}_m^\dagger \quad (2.23)$$

onde  $\mathbf{U}_m$  ( $J \times K$ ) e  $\mathbf{V}_m$  ( $K \times K$ ) são matrizes unitárias ( $\mathbf{U}_m^\dagger \mathbf{U}_m = \mathbf{V}_m^\dagger \mathbf{V}_m = 1$ ) e  $\mathbf{W}_m$  ( $K \times K$ ) é uma matriz diagonal cujos elementos  $w_{m,k}$  representam os valores singulares. A solução para o conjunto de equações  $\mathbf{F}_m \cdot \tilde{x}_m = \tilde{Y}_m$ , que produz o vetor solução com menor comprimento, é, então,

$$\tilde{x}_m = \mathbf{V}_m \cdot [\text{diag}(1/w_{m,k})] \cdot \mathbf{U}_m^\dagger \cdot \tilde{Y}_m, \quad (2.24)$$

onde  $1/w_{m,k}$  torna-se zero se  $w_{m,k} = 0$ . De acordo com Hadamard (1902), modelos matemáticos de fenômenos físicos devem ter as propriedades da existência de uma solução que seja única e que dependa continuamente dos dados. Um problema cuja solução seja extremamente sensível às mudanças nos dados finais é considerado mal-condicionado (do inglês *ill-conditioned*). E podemos dizer, ainda, que um conjunto de equações é mal-condicionado se  $w_{m,k}$  é muito pequeno ou praticamente nulo. Problemas que são bem-condicionados poderão se tornar mal-condicionados quando sofrem instabilidades numéricas causadas por precisão finita ou devido a um pequeno erro numérico nos dados iniciais (resultando em grandes erros na solução final). Quanto menor o resíduo  $|\mathbf{F}_m \tilde{x}_m - \tilde{Y}_m|$ , melhor a solução.

Um indicador de quanto é bem-condicionado um determinado problema é denominado *número de condição* ( $\mathfrak{C}$ ), que é definido como a razão entre o maior e o menor valor singular ( $\omega_+/\omega_-$ ). O valor de  $\log(\mathfrak{C})$  na base  $b$  é uma estimativa de quantos dígitos  $b$  são perdidos ao resolver o sistema de equações. Um sistema é chamado singular se  $\mathfrak{C}$  tende a infinito e mal-condicionado se o valor de  $\mathfrak{C}$  é muito grande. Mal-condicionado significa, grosseiramente falando, que o  $\log(\mathfrak{C})$  é maior ou igual a precisão das matrizes de entrada (Lichtblau & Weisstein, 2008).

Os valores singulares da matriz normal  $\mathbf{F}_m \mathbf{F}_m^\dagger$  são iguais a  $w_{m,k}^2$ , desde que:

$$\mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m = \mathbf{V}_m \cdot \mathbf{W}_m^\dagger \cdot \mathbf{U}_m^\dagger \mathbf{U}_m \cdot \mathbf{W}_m \cdot \mathbf{V}_m^\dagger = \mathbf{V}_m \cdot \mathbf{W}_m^2 \cdot \mathbf{V}_m^\dagger \quad (2.25)$$

Assim, o número de condição associado com a matriz projeto é a raiz quadrada do número de condição associado com a matriz normal. Um alto valor do número de condição para a matriz normal determina um aumento na instabilidade numérica, assim a DVS é melhor aplicada na matriz projeto. Os valores singulares podem ser determinados resolvendo a equação característica  $\det(\mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m - \omega^2 \mathbf{I}) = 0$ , que pode ser escrita como

$$\begin{aligned} &(\omega^2)^K - \text{Tr}(\mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m)(\omega^2)^{K-1} + \text{Tr}_2(\mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m)(\omega^2)^{K-2} + \dots \\ &+ (-1)^{K-1} \text{Tr}_{K-1}(\mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m) \omega^2 + (-1)^K \det(\mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m) = 0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde  $\text{Tr}(\mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m)$  é o traço da matriz normal (dado pela soma dos elementos da diagonal da matriz  $K \times K$ ),  $\text{Tr}_2$  é o traço de segunda ordem (definido como a soma dos determinantes formados por todas as combinações das matrizes  $2 \times 2$  pertencentes à matriz  $K \times K$ ) e  $\text{Tr}_{K-1}$  é o traço de ordem  $K - 1$  (definido como a soma dos determinantes formados por todas as combinações das matrizes  $K - 1 \times K - 1$  pertencentes à matriz  $K \times K$ ).

Para determinar  $\det(\mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m)$  utilizamos um lema geral (Thrall & Tornheim, 1963) sobre o determinante de duas matrizes retangulares  $\mathbf{G}(K \times J)$  e  $\mathbf{H}(J \times K)$  com  $K < J$ :

$$\det(\mathbf{GH}) = \sum_{(j_1 < j_2 < \dots < j_K) \in (1, \dots, J)} \det(\mathbf{G}'_{j_1, \dots, j_K}) \det(\mathbf{H}'_{j_1, \dots, j_K}), \quad (2.27)$$

onde o somatório seleciona todas as escolhas de  $K$  diferentes índices de  $J$ .  $\mathbf{G}'_{j_1, \dots, j_K}$  é uma matriz quadrada de grau  $K$  obtida a partir de  $\mathbf{G}$  mantendo as linhas  $j_1, \dots, j_K$  e  $\mathbf{H}'_{j_1, \dots, j_K}$  é também uma matriz quadrada de grau  $K$  obtida a partir de  $\mathbf{H}$  mantendo as correspondentes colunas  $j_1, \dots, j_K$ . No nosso caso,  $\mathbf{G}$  corresponde a  $\mathbf{F}_m^\dagger$  e  $\mathbf{H}$  a  $\mathbf{F}_m$ , onde  $\mathbf{F}_m$  é definido pela Eq. (2.16). Assim, o determinante será

$$\det(\mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m) = \sum_{(j_1 < j_2 < \dots < j_K) \in (1, \dots, J)} \det(\mathbf{F}_m^{\dagger'}) \det(\mathbf{F}_m'), \quad (2.28)$$

onde cada determinante é formado por uma *soma* de termos do tipo:

$$\sum_{(j_1 < j_2 < \dots < j_K) \in (1, \dots, J)} (-1)^s \frac{\ell_{k_1 j_1}}{\sigma_{j_1, m}} \frac{\ell_{k_2 j_2}}{\sigma_{j_2, m}} \dots \frac{\ell_{k_K j_K}}{\sigma_{j_K, m}} e^{\pm 2\pi i \frac{m}{N} (\beta_{k_1 j_1} + \beta_{k_2 j_2} + \dots + \beta_{k_K j_K})}, \quad (2.29)$$

incluindo todas as permutações das componentes, com o sinal do termo determinado pelo número  $s$  de mudanças necessárias para restaurar  $(k_1, k_2, \dots, k_K)$  para a ordem natural  $(1, 2, \dots, K)$ . O sinal da exponencial depende se estamos considerando  $\mathbf{F}_m'$  ou  $\mathbf{F}_m^{\dagger'}$  ( $\mathbf{F}_m^{\dagger'}$  é o complexo conjugado de  $\mathbf{F}_m^{\dagger}$ ). A Eq. (2.29) é válida para um sistema com  $K$  componentes. Uma vez determinada a equação geral, estamos aptos a analisar, explicitamente, o determinante para um sistema duplo e triplo, através do conceito de número de condição, que será descrito na próxima seção.

### 2.5.1 Aplicação a sistemas duplos e triplos e análise de indeterminâncias e instabilidades numéricas

A equação característica, Eq. (2.26), aplicada a um sistema duplo ( $K = 2$ ), nos fornece diretamente a solução analítica para os valores singulares  $w$ ,

$$\omega^4 - \sum_{j=1}^J \frac{\ell_{1j}^2 + \ell_{2j}^2}{\sigma_{j,m}^2} \omega^2 + \det(\mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m) = 0. \quad (2.30)$$

Para determinar o  $\det(\mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m)$  usaremos a Eq. (2.28), resultando em uma soma de números positivos

$$\sum_{j_2=2}^J \sum_{j_1=1}^{j_2-1} \frac{1}{\sigma_{j_1, m}^2 \sigma_{j_2, m}^2} \det \begin{pmatrix} \ell_{1, j_1} e^{+2\pi i \frac{m}{N} \beta_{1, j_1}} & \ell_{1, j_2} e^{+2\pi i \frac{m}{N} \beta_{1, j_2}} \\ \ell_{2, j_1} e^{+2\pi i \frac{m}{N} \beta_{2, j_1}} & \ell_{2, j_2} e^{+2\pi i \frac{m}{N} \beta_{2, j_2}} \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} \ell_{1, j_1} e^{-2\pi i \frac{m}{N} \beta_{1, j_1}} & \ell_{2, j_1} e^{-2\pi i \frac{m}{N} \beta_{2, j_1}} \\ \ell_{1, j_2} e^{-2\pi i \frac{m}{N} \beta_{1, j_2}} & \ell_{2, j_2} e^{-2\pi i \frac{m}{N} \beta_{2, j_2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{j_2=2}^J \sum_{j_1=1}^{j_2-1} \frac{\Delta \ell_{12j_1j_2}^2 + 2L_{12j_1j_2} \left(1 - \cos 2\pi \frac{m}{N} \delta_{12j_1j_2}\right)}{\sigma_{j_1,m}^2 \sigma_{j_2,m}^2}, \quad (2.31)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta \ell_{12j_1j_2} &= \ell_{1j_1} \ell_{2j_2} - \ell_{1j_2} \ell_{2j_1} \\ &= \ell_{1j_1} - \ell_{1j_2} \quad \text{desde que} \quad \ell_{1j} + \ell_{2j} = 1 \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$L_{12j_1j_2} = \ell_{1j_1} \ell_{1j_2} \ell_{2j_1} \ell_{2j_2} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \delta_{12j_1j_2} &= (\beta_{2j_2} - \beta_{1j_2}) - (\beta_{2j_1} - \beta_{1j_1}) \\ &= (\beta_{1j_1} - \beta_{1j_2}) - (\beta_{2j_1} - \beta_{2j_2}). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Nas expressões deduzidas acima, levamos em consideração que as contribuições em luz das componentes são normalizadas,  $\sum_{k=1}^K \ell_{kj} = 1$ .

O número de condição é calculado para cada modo de Fourier. Seu valor associado com a matriz  $\mathbf{F}_m$  é

$$C_m = \frac{\omega_{m+}}{\omega_{m-}} = \frac{\omega_{m+}^2}{\det^{\frac{1}{2}}(\mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m)}, \quad (2.35)$$

onde,  $\omega_{m+}$  e  $\omega_{m-}$  são as raízes com valor mais alto e mais baixo, respectivamente, obtidas a partir da Eq. (2.30),

$$\begin{aligned} C_m &= z_m + \sqrt{z_m^2 - 1}, \quad \text{onde} \\ z_m &= \frac{\sum_{j=1}^J \frac{\ell_{1j}^2 + \ell_{2j}^2}{\sigma_{jm}^2}}{2 \det^{\frac{1}{2}}(\mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m)} = \frac{\sum_{j=1}^J \frac{1 + (\ell_{1j} - \ell_{2j})^2}{\sigma_{jm}^2}}{4 \det^{\frac{1}{2}}(\mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m)}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Aplicando a Eq. (2.26) para um sistema triplo ( $K = 3$ ) tem-se

$$\omega^6 - \sum_{j=1}^J \frac{\ell_{1j}^2 + \ell_{2j}^2 + \ell_{3j}^2}{\sigma_{j,m}^2} \omega^4 + Tr_2(\mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m) \omega^2 - \det(\mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m) = 0, \quad (2.37)$$

onde  $Tr_2(\mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m)$  é dado por

$$\sum_{k_1=1}^3 \left( \sum_{j_2=2}^J \sum_{j_1=1}^{j_2-1} \frac{\Delta \ell_{k_2k_3j_1j_2}^2 + 2L_{k_2k_3j_1j_2} \left(1 - \cos 2\pi \frac{m}{N} \delta_{k_2k_3j_1j_2}\right)}{\sigma_{j_1,m}^2 \sigma_{j_2,m}^2} \right), \quad (2.38)$$

onde  $k_2 = k_1 + 1$  módulo 3 e  $k_3 = k_1 + 2$  módulo 3. A Eq. (2.38) representa a soma de três determinantes formados pela combinação 2 a 2 de um sistema com 3 componentes. O determinante  $\det(\mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m)$  para um sistema triplo é:

$$\det(\mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m) = \sum_{(j_1 < j_2 < j_3) \in (1, \dots, J)} \frac{1}{\sigma_{j_1,m}^2 \sigma_{j_2,m}^2 \sigma_{j_3,m}^2} \det(\mathbf{F}_m^{\dagger'}) \det(\mathbf{F}_m'), \quad (2.39)$$

onde

$$\mathbf{F}_m' = \begin{pmatrix} \ell_{1,j_1} e^{-2\pi i \frac{m}{N} \beta_{1,j_1}} & \ell_{2,j_1} e^{-2\pi i \frac{m}{N} \beta_{2,j_1}} & \ell_{3,j_1} e^{-2\pi i \frac{m}{N} \beta_{3,j_1}} \\ \ell_{1,j_2} e^{-2\pi i \frac{m}{N} \beta_{1,j_2}} & \ell_{2,j_2} e^{-2\pi i \frac{m}{N} \beta_{2,j_2}} & \ell_{3,j_2} e^{-2\pi i \frac{m}{N} \beta_{3,j_2}} \\ \ell_{1,j_3} e^{-2\pi i \frac{m}{N} \beta_{1,j_3}} & \ell_{2,j_3} e^{-2\pi i \frac{m}{N} \beta_{2,j_3}} & \ell_{3,j_3} e^{-2\pi i \frac{m}{N} \beta_{3,j_3}} \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Simplificando a expressão acima, chegamos ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m) &= \sum_{(j_1 < j_2 < j_3) \in (1, \dots, J)} \frac{\left( \sum_{k_1=1}^3 \ell_{k_1 j_1} \Delta \ell_{k_2 k_3 j_2 j_3} \right)^2}{\sigma_{j_1, m}^2 \sigma_{j_2, m}^2 \sigma_{j_3, m}^2} \\
&+ 2 \sum_{k_1=1}^3 \sum_{j_1 \neq j_2, j_3} \frac{\ell_{k_1 j_1}^2}{\sigma_{j_1, m}^2} \sum_{j_3=2}^J \sum_{j_2=1}^{j_3-1} \frac{L_{k_2 k_3 j_2 j_3} \left( 1 - \cos 2\pi \frac{m}{N} \delta_{k_2 k_3 j_2 j_3} \right)}{\sigma_{j_2, m}^2 \sigma_{j_3, m}^2} \\
&- 2 \sum_{j_1 \neq j_2, j_3} \sum_{j_2 \neq j_3} \sum_{j_3=1}^J \frac{L_{123 j_1 j_2 j_3} \left( 1 - \cos 2\pi \frac{m}{N} \delta_{123 j_1 j_2 j_3} \right)}{\sigma_{j_1, m}^2 \sigma_{j_2, m}^2 \sigma_{j_3, m}^2}, \tag{2.41}
\end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}
L_{123 j_1 j_2 j_3} &= \ell_{1 j_2} \ell_{1 j_1} \ell_{2 j_1} \ell_{2 j_3} \ell_{3 j_3} \ell_{3 j_1}, \\
\delta_{123 j_1 j_2 j_3} &= (\beta_{2 j_1} - \beta_{1 j_1}) + (\beta_{1 j_2} - \beta_{3 j_2}) + (\beta_{3 j_3} - \beta_{2 j_3}) \\
&= (\beta_{1 j_2} - \beta_{1 j_1}) + (\beta_{2 j_1} - \beta_{2 j_3}) + (\beta_{3 j_3} - \beta_{3 j_2}).
\end{aligned}$$

Os termos  $\Delta \ell_{k_2 k_3 j_2 j_3}$ ,  $L_{k_2 k_3 j_2 j_3}$  e  $\delta_{k_2 k_3 j_2 j_3}$  são descritos pelas equações de (2.32) a (2.34) (somente a primeira linha de  $\Delta \ell_{k_2 k_3 j_2 j_3}$  é considerada). As seguintes relações existem entre as velocidades relativas, na expressão para o determinante:

$$\begin{aligned}
\delta_{k_1 k_2 j_1 j_2} &= \delta_{k_1 k_3 j_1 j_2} + \delta_{k_3 k_2 j_1 j_2} \quad (k_1 \neq k_2 \neq k_3), \\
\delta_{123 j_1 j_2 j_3} &= \delta_{13 j_2 j_3} + \delta_{12 j_3 j_1} \\
&= \delta_{12 j_1 j_2} + \delta_{23 j_2 j_3} \\
&= \delta_{23 j_3 j_1} + \delta_{13 j_1 j_2}.
\end{aligned}$$

A soma externa do primeiro termo da Eq. (2.41) representa todas as combinações possíveis, sem repetição, das  $J$  observações em subconjuntos contendo 3 elementos ( $C_3^J$ ). Usando o fato de que  $\sum_{k=1}^3 \ell_{k j} = 1$ , o primeiro termo da Eq. (2.41) pode ser simplificado, resultando em

$$\sum_{(j_1 < j_2 < j_3) \in (1, \dots, J)} \frac{(\Delta \ell_{k_1 k_2 j_1 j_2} + \Delta \ell_{k_1 k_2 j_2 j_3} + \Delta \ell_{k_1 k_2 j_3 j_1})^2}{\sigma_{j_1, m}^2 \sigma_{j_2, m}^2 \sigma_{j_3, m}^2}, \tag{2.42}$$

onde  $k_1, k_2$  representa qualquer escolha de duas das três componentes. O número de condição associado com a matriz  $\mathbf{F}_m$  é

$$C_m = \frac{\omega_{m+}}{\omega_{m-}} = \frac{\omega_{m+}^2 + \omega_{m0}}{\det^{\frac{1}{2}}(\mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m)}, \tag{2.43}$$

onde  $\omega_{m+} \geq \omega_{m0} \geq \omega_{m-}$  e  $\omega_{m0}$  foram considerados diferentes de zero para obter o lado direito da Eq. (2.43). Dificuldades foram encontradas em obter de forma mais clara e simples uma expressão analítica para  $C_m$  que nos possibilitasse analisar em que circunstâncias as equações são indeterminadas. Sugerimos que o cálculo de  $C_m$  para sistemas com multiplicidade maior que 2 seja feito numericamente e analisado separadamente para cada modo de Fourier.



### 2.5.1.1 Modo Zero de Fourier

Os elementos da matriz projeto para  $m = 0$  não dependem das velocidades radiais, mas somente dos fatores de luz das componentes,  $l_{kj}$ , e de  $\sigma_{j,m}$ . A expressão para  $K$  componentes é, então, definida como

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{F}_0^\dagger \mathbf{F}_0) &= \sum_{(j_1 < j_2 < \dots < j_K) \in (1, \dots, J)} \det^2(\mathbf{F}'_{0(j_1, j_2, \dots, j_K)}) \\ &= \sum_{(j_1 < j_2 < \dots < j_K) \in (1, \dots, J)} \frac{1}{\sigma_{j_1, m}} \frac{1}{\sigma_{j_2, m}} \dots \frac{1}{\sigma_{j_K, m}} \det^2 \begin{pmatrix} \ell_{1, j_1} & \ell_{2, j_1} & \ell_{3, j_1} & \dots & \ell_{K, j_1} \\ \ell_{1, j_2} & \ell_{2, j_2} & \ell_{3, j_2} & \dots & \ell_{K, j_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \ell_{1, j_K} & \ell_{2, j_K} & \ell_{3, j_K} & \dots & \ell_{K, j_K} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

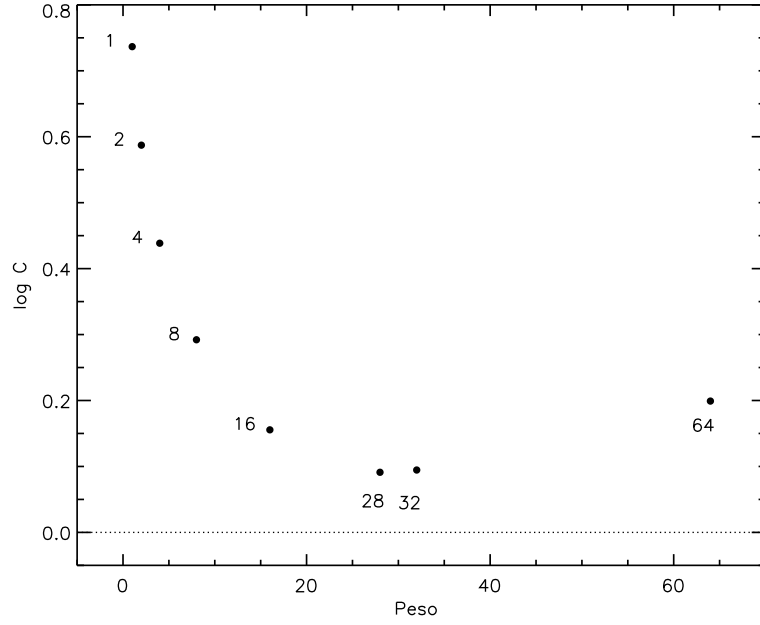
Para os casos  $K = 2$  e  $K = 3$ , apenas o primeiro termo das Eqs. (2.31) e (2.41) permanecem, podendo ser escritos de forma simplificada nas Eqs. (2.32) e (2.42).

A matriz projeto é singular somente se pelo menos um dos pares das componentes  $(k_1, k_2)$  com razão de fatores de luz mútuos iguais a  $r_{k_1 k_2 j} = \ell_{k_1 j} / \ell_{k_2 j}$  for constante para qualquer valor de  $j$ , ou seja, independente da fase orbital. Se nenhum dos fatores  $r_{k_1 k_2 j}$  depende de  $j$  teremos, então,  $K - 1$  valores singulares iguais a zero. Isso pode ser visto explicitamente, por exemplo, para o caso  $K = 3$ : aplicando a Eq. (2.37) para  $m = 0$  e considerando  $\det(\mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m) = 0$ , encontramos de imediato que uma das soluções é  $\omega^2 = 0$ . As outras 2 soluções dependem do  $Tr_2(\mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m)$ . Se  $Tr_2(\mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m) = 0$ , teremos no total 2 valores singulares iguais a zero (lembre-se que  $Tr_2(\mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m)$  representa a soma do determinante para a combinação de duas compontes: (1, 2), (1, 3) e (2, 3), que são diretamente relacionadas, respectivamente, com  $r_{12}$ ,  $r_{13}$  e  $r_{23}$ . Assim se  $Tr_2(\mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m) = 0$  significa que  $r_{12}$ ,  $r_{13}$  e  $r_{23}$  são constantes no tempo. Se  $Tr_2(\mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m) \neq 0$ , temos no total apenas um valor singular igual a zero, significando também que pelo menos um valor de  $r_{k_1 k_2 j}$  é constante.

A singularidade implica em uma constante aditiva (independente do comprimento de onda) no nível do contínuo dos espectros reconstruídos. Esse fator adicional em cada espectro intrínseco não é independente para cada componente, mas é interligado de acordo com a razão de luz entre elas. A Fig. 3.1 mostra, por exemplo, que essa singularidade pode acarretar em espectros intrínsecos com profundidade incorreta das linhas.

Para garantir a renormalização dos espectros, é necessário que haja uma significativa variação dos fatores de luz (ou seja,  $\det(\mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m) \neq 0$ ), determinando também a reconstrução do coeficiente de bloqueio de linha total sobre o intervalo espectral observado. Mesmo que um subconjunto de componentes de um sistema tenha uma razão de luz constante entre elas, as outras componentes terão seus espectros renormalizados corretamente se a equação do modo zero é resolvida usando DVS. Sistemas binários eclipsantes representam um exemplo em que os fatores de luz mútuos das componentes, muitas vezes, são bem diferentes entre si, garantindo a renormalização dos espectros reconstruídos.

A Fig. 2.4 mostra como a inclusão de um espectro em eclipse elimina a singularidade da equação do modo zero e como o uso de um peso para tal espectro aumenta a regularidade do conjunto de equações. Para esse cálculo, determinamos o peso ideal  $w_{opt}$  associado com um espectro na fase de eclipse total de um sistema binário com  $J$  observações de mesma qualidade, estas fora do eclipse e com nenhuma variabilidade em luz. Consideramos  $l_{1j} = 1$  e  $l_{2j} = 0$  para  $j = 1$ , e  $\sigma_1^{-2} = w\sigma_{j>1}^{-2}$  para  $m = 0$ . Qual seria o valor ideal de  $w$  que minimiza o valor do número de condição para o modo 0? Como  $C_0$  é uma função



**Figura 2.4:** Número de condição em função do peso adotado para uma fase em eclipse total. Os dados usados são do sistema triplo RV Crt, considerando apenas o par eclipsante. Foram utilizados 41 espectros de entrada bem distribuídos sobre o intervalo espectral, incluindo uma fase na totalidade. As contribuições em luz das componentes (fora do eclipse) foram consideradas constantes e iguais a  $l_1 = 0,826$  e  $l_2 = 0,174$ . Fora do eclipse, a estrela que é eclipsada contribui com 82,6% da luz total. O número de condição melhora aproximadamente um fator de 5 quando o espectro na fase de eclipse total tem um peso em torno de 28. No entanto, para valores acima deste  $w_{opt}$ , o valor do número de condição piora.

monotônica de  $z_0$  (Eq. 2.36), basta fazer nula a derivada de  $z_0$  com relação a  $w$ . Usando as considerações acima,  $z_0$  é definido como

$$z_0 = \frac{w + (J - 1)(\ell_1^2 + \ell_2^2)}{2\ell_2\sqrt{J - 1}\sqrt{w}}. \quad (2.45)$$

Assim, o valor ideal de  $w$  será

$$w_{opt} = (J - 1)(\ell_1^2 + \ell_2^2). \quad (2.46)$$

Substituindo essa expressão na Eq. (2.45) e usando a Eq. (2.36), temos

$$C_{0,opt} = \frac{\ell_1}{\ell_2} + \sqrt{1 + \frac{\ell_1^2}{\ell_2^2}}. \quad (2.47)$$

Veja que o número de condição ideal não depende do tamanho do conjunto de dados, mas pode variar com o comprimento de onda, caso as estrelas tenham uma distribuição de fluxo que dependa do comprimento de onda. Como

$$z_0(w = 1) = \frac{1 + w_{opt}}{2\sqrt{w_{opt}}} z_{0,opt} \quad \text{e} \quad w_{opt} \propto J - 1,$$

vemos que o uso de um peso ideal tem um impacto considerável sobre o número de condição para um conjunto de observações com poucas fases em eclipses. Podemos obter

equações semelhantes às descritas acima para o caso de eclipses parciais. Considerando  $\ell_{1e} = \ell_{1j}$  e  $\ell_{2e} = \ell_{2j}$  para  $j = 1$  e  $\sigma_1^{-2} = w\sigma_{j>1}^{-2}$ , a Eq. (2.45) passa a ser:

$$z_0 = \frac{w(\ell_{1e}^2 + \ell_{2e}^2) + (J-1)(\ell_1^2 + \ell_2^2)}{2(\ell_{1e}\ell_2 - \ell_1\ell_{2e})\sqrt{J-1}\sqrt{w}}, \quad (2.48)$$

onde, o índice “e” se refere aos fatores de luz das componentes na fase de eclipse parcial. A condição de minimização para  $z_0$  conduz ao valor ideal de  $\omega$  igual a

$$w_{\text{opt}} = \frac{(J-1)(\ell_1^2 + \ell_2^2)}{\ell_{1e}^2 + \ell_{2e}^2}, \quad (2.49)$$

e, conseqüentemente,

$$C_{0,\text{opt}} = \frac{\frac{\ell_1}{\ell_2} \frac{\ell_{1e}}{\ell_{2e}} + 1 + \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^2\right) \left(1 + \left(\frac{\ell_{1e}}{\ell_{2e}}\right)^2\right)}}{\left|\frac{\ell_{1e}}{\ell_{2e}} - \frac{\ell_1}{\ell_2}\right|}. \quad (2.50)$$

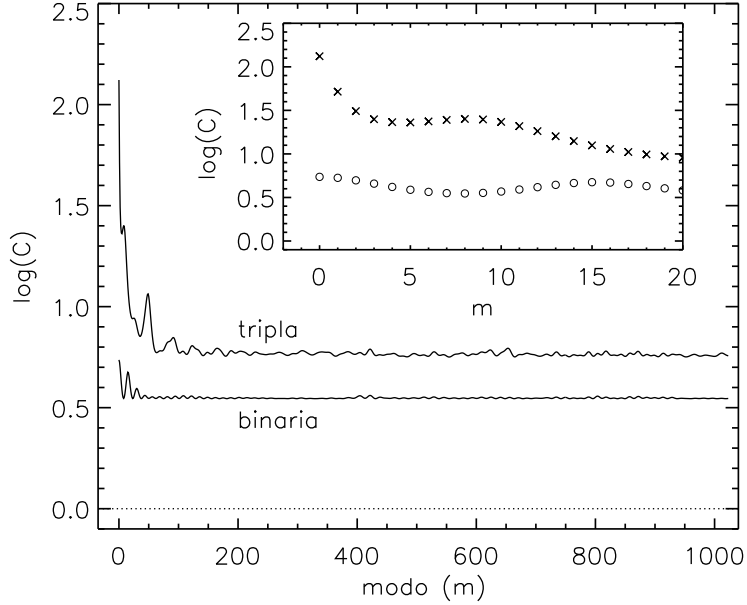
Podemos ver que um valor alto de  $\omega$  é necessário, para melhorar o número de condição em relação ao caso com eclipse. Para eclipses parciais rasos ( $\frac{\ell_{1e}}{\ell_{2e}} \approx \ell_1/\ell_2$ ), os efeitos são muito pequenos e o conjunto de equações continuará mal-condicionado (eclipse raso no sentido de que os efeitos de variação da diluição sobre as linhas espectrais não é maior que a incerteza na posição do nível do contínuo dos espectros observados). Da mesma forma, a variabilidade intrínseca de sistemas não-eclipsantes só poderá ajudar na solução da equação do modo zero, se as amplitudes das variações em luz são grandes o suficiente.

Quando pesos são adotados levando-se em conta o ruído nos espectros, e quando um grande número de espectros fora do eclipse é utilizado, a informação contida na variação da diluição das linhas espectrais durante o eclipse é tomada com baixo peso. Normalmente, excetuando-se eclipses totais, a inclusão de fases em eclipse não é aconselhável devido à mudança da forma dos perfis de linha no espectro da estrela eclipsada quando parte do seu disco é ocultado. A aproximação de Fourier nos possibilita adotar um peso alto nos espectros em eclipse para os modos de frequência mais baixos e pesos baixos ou nulos para os modos de frequência mais altos. Desta maneira, a diluição das linhas espectrais durante o eclipse é usada para estabilizar a solução para as frequências mais baixas, não interferindo na forma das linhas espectrais. É por essa razão que sugerimos que os pesos dependam também do modo de Fourier  $m$ .

### 2.5.1.2 Modos de Fourier de Frequência mais Baixas

O determinante para baixos modos não-nulos de Fourier contém termos (1) que dependem somente dos fatores de luz das componentes, como no caso para  $m = 0$  e (2) termos positivos que dependem, além de  $l_{kj}$ , das velocidades radiais das componentes,  $\beta_{kj}$ . Assim, se o modo zero é bem-condicionado, todos os outros modos também o serão, desde que seu determinante não seja menor que o determinado para  $m = 0$ . Para sistemas em que os fatores de luz não variam muito, indeterminações podem ocorrer nos modos mais baixos, e é nesse aspecto que iremos concentrar nossa discussão.

Na Fig. 2.5 mostramos um exemplo para RV Crt, onde o número de condição aumenta, quando levamos em consideração a presença da terceira componente não-eclipsante e que



**Figura 2.5:** Cálculo do número de condição para um sistema triplo, RV Cr1, ao considerar a presença ou não da terceira componente ('tripla' e 'binária', respectivamente, no gráfico). Um aumento no número de condição é observado quando a terciária está presente. Isso ocorre pois a razão de luz entre a terciária e a secundária (componente do par binário) varia ligeiramente devido à forma elipsoidal desta última. O número de condição desvia da unidade, pois  $\frac{t_1}{t_2} \approx 4,75$  fora do eclipse. Os dados usados compreendem uma das regiões escolhidas (Tab. 5.2, região 2) contendo 2048 pixles ( $\approx 26(K_1 + K_2)$ ). Na figura mais interna, mostramos com mais detalhe os vinte primeiros modos de Fourier. Para os modos  $m = 0$  e  $m = 1$  o número de condição passa a ser 24 e 10 vezes maior, respectivamente.

órbita em torno de um sistema binário eclipsante (onde uma fase no eclipse primário é incluída ao conjunto de dados de entrada). Essa terceira componente contribui com aproximadamente 45% da luz total e sua órbita é muito maior que a do par eclipsante. A presença da terceira componente, embora dominante no espectro, desestabiliza a solução para os modos mais baixos, pois seu fator de luz varia pouco com relação ao fator de luz da componente não-eclipsante do sistema binário (a variabilidade dessa componente se deve exclusivamente à sua forma elipsoidal).

Se  $\cos 2\pi \frac{m}{N} \delta_{12j_1j_2} \approx 1$  para todo conjunto  $(j_1, j_2)$ , no caso  $K = 2$ , ou  $\cos 2\pi \frac{m}{N} \delta_{k_1k_2j_1j_2} \approx 1$  para todo  $(j_1, j_2)$ , no caso  $K = 3$ , então o conjunto de equações será mal-condicionado para um determinado  $m$ . Isso pode ser avaliado quantitativamente ao calcular o valor do número de condição para cada  $m$  (o qual, se elevado, indica que a solução é mal-condicionada). Situações onde os valores de  $\frac{m}{N}$  (modos de Fourier mais baixos) e de velocidades relativas são baixos indicam soluções mal-condicionadas, induzindo à presença de padrões espúrios sobre os espectros reconstruídos das componentes. Para tais situações é recomendado o uso da DVS para obter soluções mais consistentes. Esses vies de padrões de baixa-freqüência costumam aparecer nos espectros intrínsecos sobre um intervalo de comprimento de onda maior que o intervalo em deslocamento Doppler das componentes. Devemos nos lembrar que os vies observados nos espectros das componentes estão interligados entre si, de forma que sua combinação é cancelada ao reproduzir o espectro composto. A remoção destes padrões deve levar em conta este aspecto, não

sendo aconselhável tratá-los independentemente para cada componente (veja Fitzpatrick et al. 2002, por exemplo, onde os autores “renormalizaram” independentemente os espectros das componentes, produzindo  $\chi^2$  elevado).

A identificação e conhecimento dos modos mal-condicionados define a forma dos possíveis padrões espúrios que, combinada com a aparente janela de contínuo, pode ajudar a obter uma normalização apropriada, caso a solução obtida pela DVS não seja satisfatória. Na prática, pode ser que nenhuma das formas dos padrões espúrios produzam resultados satisfatórios, indicando que o modelo ou os espectros observados possuem viés. O caso em que os espectros observados estão influenciados por viés será discutido na Sec. 2.7, e um processo alternativo para renormalização dos espectros reconstruídos, obtidos por soluções mal-condicionadas, será discutido nas Sec. 2.8.

### 2.5.1.3 Modos de Fourier de Frequências Altas

O conjunto de equações para os modos de frequência mais altos é mal-condicionado em casos onde os espectros observados cobrem uma distribuição específica de velocidades. Isso ocorre mais facilmente quando se tem um conjunto pequeno de observações e quando as velocidades (em unidades de pixels) são arredondadas para o inteiro mais próximo.

Para estudar o problema, idealizamos um sistema binário simples, descrevendo uma órbita circular cujas componentes possuem o mesmo espectro do tipo **B1 V**<sup>1</sup>. A região analisada compreende um intervalo de 672 pixels (4581,9771 a 4668,8784 Å). As velocidades radiais das componentes, para as 16 fases orbitais, estão descritas na Tab. 2.1, e foram escolhidas de forma a obter uma boa cobertura orbital. Três casos foram analisados (considerando diferentes valores da máxima amplitude de velocidade radial da segunda componente):  $K_2 = K_1$ ,  $K_2 = 2K_1$ , e  $K_2 = 3K_1$ , para  $K_1 = 12$  pixels.

A Fig. 2.6 mostra os 16 espectros observados e o número de condição em função dos modos de Fourier, para cada um dos casos citados acima. Cada caso mostra um padrão de singularidade diferente, variando tanto no número de singularidades como em quais modos são indeterminados, incluindo aqueles de frequências mais altas. A origem destas indeterminações vem (a) do termo  $|(\beta_{2j_2} - \beta_{1j_2}) - (\beta_{2j_1} - \beta_{1j_1})|$ , para todas as fases de índices  $j_1$  e  $j_2$ , que são múltiplos 2, 3 e 4 (para cada conjunto analisado:  $K_1 = 12$ ,  $K_2 = 12, 24, 36$ ) e (b) do número de pixels nos espectros reconstruídos (672), que são também múltiplos de 2, 3 e 4 (veja mais discussões na Sec. 3.3.1.3, para casos hipotéticos simples). A solução obtida com o DVS mostra que as amplitudes dos padrões de alta-freqüência são muito menores que aquelas dos padrões de baixa-freqüência (que na prática, têm maior importância para o processo de separação espectral). Isso vem do fato de que, para uma distribuição regular de velocidades sobre o intervalo orbital, as amplitudes dos padrões espúrios diminuem quando o intervalo espectral aumenta (na Sec. 3.3.4 discutiremos esse efeito com mais detalhe, baseado em cálculos analíticos para um sistema hipotético simples).

Para sistemas que possuem uma componente que contribui muito pouco em todos os espectros, observamos que as equações para todos os modos de Fourier são mal-condicionadas. Podemos demonstrar quantitativamente esse fato, considerando um sistema binário com boa cobertura orbital, espectros de qualidade, valor esperado para a soma do termo do cosseno, na Eq. (2.31), igual a zero e  $\sigma_{j,m}$  e  $\ell_{kj}$  independentes da fase

<sup>1</sup>Este espectro foi obtido no telescópio do ESO de 3.6m usando o espectrógrafo échelle CASPEC, para a estrela número 201 do aglomerado NGC 2244. Antes de combiná-lo adequadamente, o ruído foi “removido” e consideramos pequenas janelas de contínuo nas extremidades, para evitar efeitos de bordas.

**Tabela 2.1:** Velocidades radiais por fase orbital para as componentes do sistema estelar duplo artificial do tipo **B1 V**. As velocidades radiais para a componente 1,  $v_1$ , são dadas em unidade de pixel e são definidas de acordo com a sua amplitude máxima de velocidade  $K_1 = 12$  pixels. A velocidade radial da componente 2,  $v_2$ , está relacionada com o valor definido para  $K_1$ , podendo variar entre três casos diferentes:  $K_2 = K_1$ ,  $K_2 = 2K_1$ , e  $K_2 = 3K_1$ . As fases orbitais foram determinadas a partir da velocidade radial das componentes em cada fase orbital, fase =  $\frac{1}{2\pi} \arcsin\left(\frac{v_k}{K_k}\right)$ , para  $k = 1, 2$ .

fase	$v_1$ (pixel)	$v_2$ (pixel)
-0,25000	$-K_1$	$K_2$
-0,18457	$-\frac{11}{12}K_1$	$\frac{11}{12}K_2$
-0,13497	$-\frac{3}{4}K_1$	$\frac{3}{4}K_2$
-0,09913	$-\frac{7}{12}K_1$	$\frac{7}{12}K_2$
-0,08333	$-\frac{1}{2}K_1$	$\frac{1}{2}K_2$
-0,06840	$-\frac{5}{12}K_1$	$\frac{5}{12}K_2$
-0,05409	$-\frac{1}{3}K_1$	$\frac{1}{3}K_2$
-0,01328	$-\frac{1}{12}K_1$	$\frac{1}{12}K_2$
0	0	0
0,02665	$\frac{1}{6}K_1$	$-\frac{1}{6}K_2$
0,04022	$\frac{1}{4}K_1$	$-\frac{1}{4}K_2$
0,06840	$\frac{5}{12}K_1$	$-\frac{5}{12}K_2$
0,11614	$\frac{2}{3}K_1$	$-\frac{2}{3}K_2$
0,15679	$\frac{5}{6}K_1$	$-\frac{5}{6}K_2$
0,18457	$\frac{11}{12}K_1$	$-\frac{11}{12}K_2$
0,25000	$K_1$	$-K_2$

orbital. Para este caso, o determinante será

$$\det(\mathbf{F}_m^\dagger \mathbf{F}_m) = \frac{J(J-1)}{2} \frac{2\ell_1^2 \ell_2^2}{\sigma_m^{-4}}, \quad (2.51)$$

contendo  $\frac{J(J-1)}{2}$  elementos do segundo termo da Eq. (2.31). Como  $\ell_1 + \ell_2 = 1$  podemos reescrever

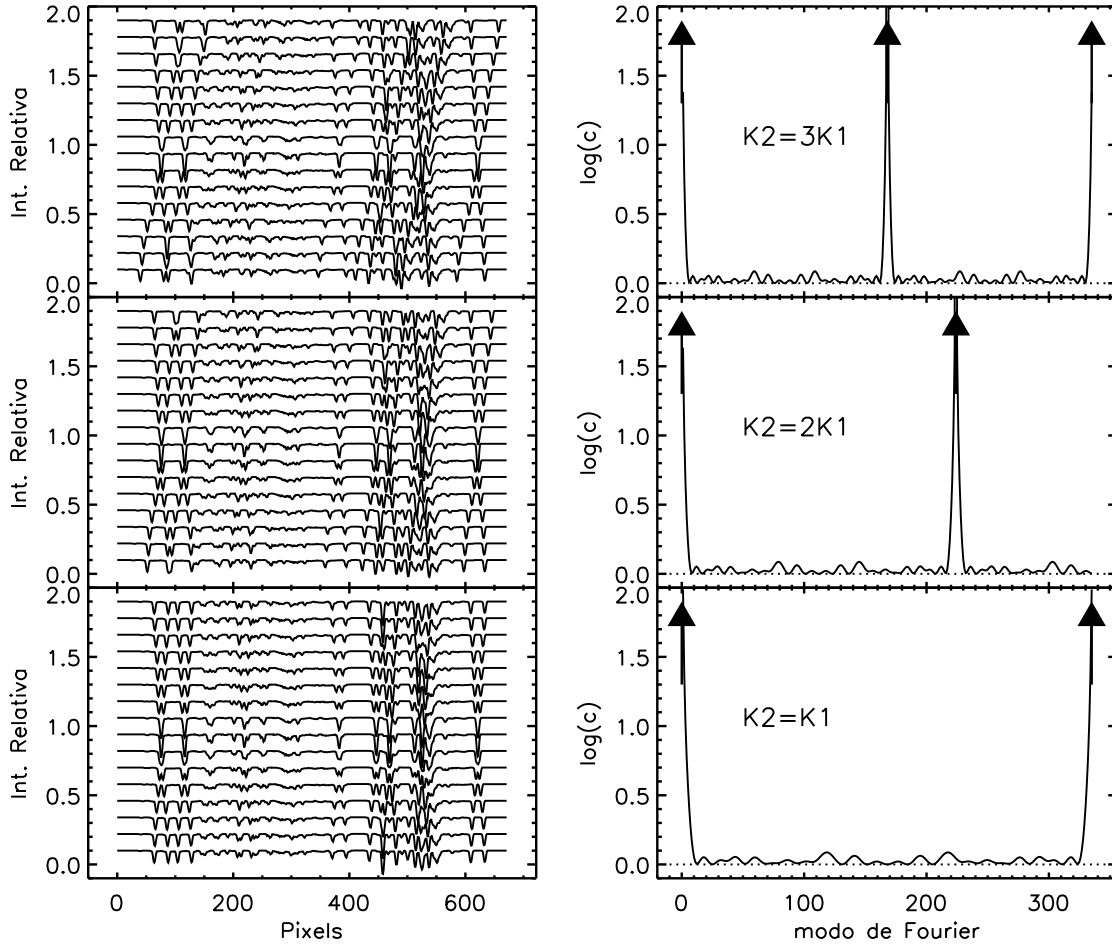
$$\begin{aligned} \ell_1 &= \frac{1}{2} \left( 1 + (\ell_1 - \ell_2) \right), \\ \ell_2 &= \frac{1}{2} \left( 1 - (\ell_1 - \ell_2) \right), \end{aligned} \quad (2.52)$$

conduzindo ao seguinte valor esperado para  $z_m$ :

$$z_m = \sqrt{\frac{J}{J-1} \frac{1 + (\ell_1 - \ell_2)^2}{1 - (\ell_1 - \ell_2)^2}}. \quad (2.53)$$

Considerando  $\frac{J}{(J-1)} \approx 1$ , o número de condição será

$$C_m \approx \ell_1 / \ell_2 \quad (2.54)$$



**Figura 2.6:** Indeterminações dos modos de Fourier para um sistema binário onde  $K_2 = 3K_1$ ,  $K_2 = 2K_1$ , e  $K_2 = K_1$ . Os painéis da coluna da esquerda representam os 16 espectros observados e os da direita o logaritmo do número de condição (apenas para os modos positivos), para cada um dos casos citados acima, respectivamente. Os modos de Fourier  $m = 0$ , e  $|m| = 336$  e/ou  $|m| = 168$  (painel superior) e/ou  $|m| = 224$  (painel intermediário) são mal-condicionados (as flechas indicam quando o número de condição tende a infinito). Observe que os modos vizinhos também são indeterminados.

Conseqüentemente, para uma binária cujas componentes possuem a mesma luminosidade o número de condição se aproxima de um. Por outro lado, se a componente secundária é muito fraca, todos os modos de Fourier serão mal-condicionados. Isso nos mostra simplesmente que a componente não pode ser reconstruída se o espectro observado não contém informação sobre ela. A Eq. (2.54) determina que a degradação da separação espectral para cada componente de um sistema binário não-eclipsante, é inversamente proporcional a sua fração de contribuição em luz. Quanto mais fraca é a componente, pior é o conjunto de equações que a determina, refletindo a dificuldade em reconstruir o espectro de tais componentes. Enquanto um baixo valor de ruído randômico (ou ainda, um grande número de espectros de entrada) é um pré-requisito para a reconstrução espectral de componentes fracas, o número de condição indica que até mesmo um baixo ruído pode ser insuficiente para tal procedimento.

## 2.6 Método no Espaço de Velocidade

Devido à complexidade das equações no espaço de velocidade (que são numerosas e acopladas), a análise sobre singularidades e indeterminações dessas equações não serão feitas aqui. No entanto, a solução analítica e numérica para dados simples de sistemas artificiais (veja Cap. 3) nos possibilita o estudo das equações no espaço de velocidade, além de comparar os resultados com os obtidos pela análise feita no espaço de Fourier. Desta forma, foi observado que, se um problema é mal-condicionado no espaço de Fourier, certamente o será no espaço de velocidade, contudo, o inverso não é válido (veja exemplos numéricos para casos hipotéticos simples na Sec. 3.3.1). Essa vantagem na aproximação de Fourier é devida à suposição de que os espectros observados são periódicos. Essa hipótese não é baseada na física do problema, mas constitui uma mera consequência da metodologia usada.

Como mencionado na Sec. 2.5.1.2, o conhecimento dos modos mal-condicionados de Fourier ajuda a determinar teoricamente a forma dos padrões espúrios das componentes. É claro que no espaço de velocidade esse conhecimento não é tão evidente, pois os valores singulares estão relacionados com equações acopladas. No entanto, este ponto deve ser avaliado dentro do contexto de que a presença de viés nos espectros de entrada (que será discutido na Sec. 2.7) pode invalidar a forma predita no espaço de Fourier.

## 2.7 Espectros de Entrada com Viés (“Bias”)

Simon & Sturm (1994) constataram padrões de baixa frequência (ondulações) sobrepostos ao contínuo dos espectros das componentes reconstruídos pelo método de desembaraçamento espectral no espaço de velocidade. A causa de tal efeito, segundo os autores, estaria associada à existência de defeitos nos espectros observados e/ou a uma resolução espectral insuficiente para se determinar as formas dos perfis de linha. Mais tarde, Hensberge (2004), mostrou que efeitos de baixa amplitude presentes no contínuo de espectros échelle introduzem viés de alta amplitude no contínuo dos espectros reconstruídos das componentes. Segundo Hensberge, tais efeitos estão relacionados com erros sistemáticos, dependentes da fase orbital.

Assim, a utilização das técnicas de desembaraçamento ou separação espectral fica sujeita à qualidade da redução dos dados, o que significa dizer que uma redução imperfeita produz padrões espúrios sobre o contínuo dos espectros intrínsecos das componentes. A situação é delicada quando se trata de espectros do tipo échelle, onde viés podem ser adicionados nos espectros observados ao combinar as ordens espectrais, propagando-se sobre os espectros reconstruídos. Além disso, a redução automática de dados (tipo “pipe line”) implementada nos telescópios modernos não oferece, em geral, resultados consistentes para um mesmo comprimento de onda em diferentes ordens espectrais (em termos de mudanças de baixa-freqüência do fluxo com relação ao comprimento de onda). Isso introduz informação inconsistente no espectro global ou pode levar o pesquisador a tentar determinar o contínuo estelar para cada ordem espectral separadamente, um procedimento claramente frágil e problemático.

Mesmo que se consiga evitar ou eliminar completamente esses processos imprecisos na redução, que podem comprometer a separação espectral, o processo de normalização para sistemas múltiplos é sempre bem mais delicado que para estrelas isoladas. Isso



se deve ao fato de que, além dos sistemas envolverem duas ou mais componentes, seus espectros individuais também se deslocam no tempo devido ao movimento orbital. Assim a posição e o número de janelas de contínuo (se existem) mudam com o tempo, gerando uma dependência com a fase orbital e, simultaneamente, introduzindo uma correlação entre viés e fase orbital na normalização. Esses viés serão transferidos para o contínuo dos espectros das componentes, através do modelo matemático da separação espectral.

O objetivo desta seção é discutir os viés correlacionados com a fase orbital e sua propagação sobre os espectros intrínsecos. Assim, utilizamos dados artificiais para o sistema duplo sintético descrito na Sec. 2.5.1.3, e analisamos em que circunstâncias os viés são intensificados nos espectros reconstruídos. Alguns casos específicos de viés estáticos serão discutidos. Os dados não possuem ruído, pois apesar de sua introdução complicar a determinação do contínuo observado e aumentar sua incerteza, ele não aumenta a correlação dos viés com a fase orbital, exceto quando o próprio nível de ruído se correlaciona com a fase.

### 2.7.1 Tendências Relacionadas com a Fase Orbital

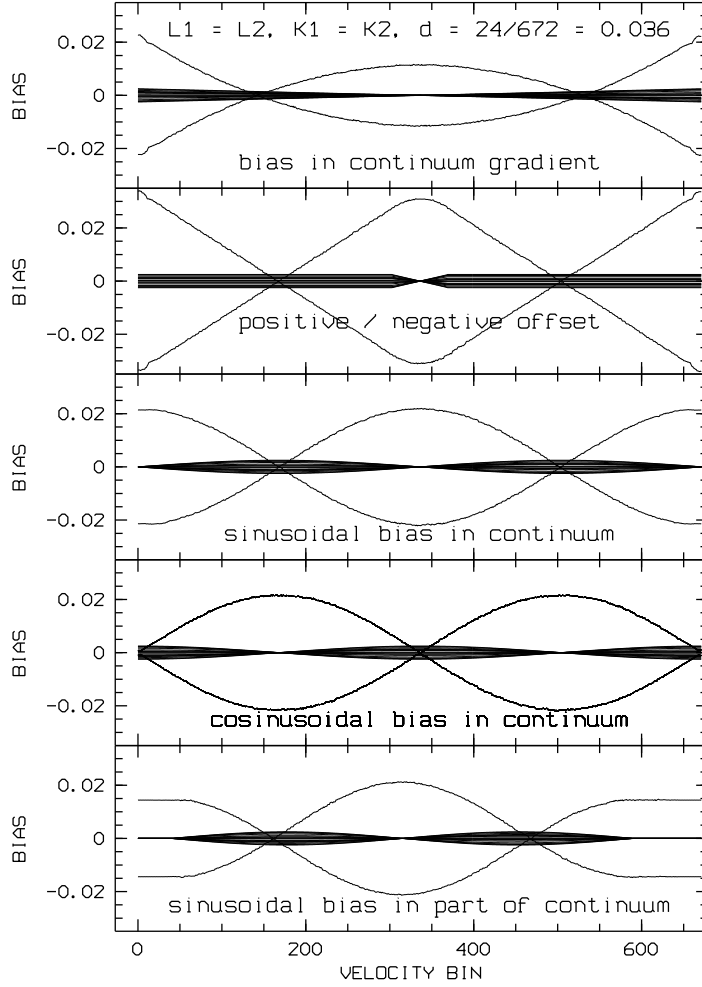
Para estudar a influência dos viés relacionados com a fase orbital nos espectros reconstruídos pela separação espectral, utilizamos os 16 espectros de entrada definidos na Sec. 2.5.1.3, que tiveram seu contínuo modificado, como mostraremos adiante. Na Tab. 2.1, as informações sobre as fases orbitais e velocidades radiais das componentes são sumarizadas.

O intervalo espectral analisado corresponde a  $c\Delta \ln \lambda$  discretizado em  $N$  pixels e a amplitude máxima de velocidade para uma das componentes ( $K_1$ ) é mantida fixa, durante todo o processo de separação. Em nosso estudo, variamos (a) o tipo de viés aplicado ao contínuo, (b) a razão de amplitude máxima das componentes,  $K_1/K_2 = 1$  ou 3, (c) o comprimento Doppler relativo ao intervalo espectral,  $d = (K_1 + K_2)/(c\Delta \ln \lambda)$ , e (d) os fatores de luz das componentes,  $\ell_1/\ell_2 = 1$  ou 3. Os fatores de luz são considerados invariantes com relação ao tempo, exceto quando introduzimos um espectro na fase de eclipse total.

Os viés  $\epsilon_j(\ln \lambda)$  aplicados ao contínuo dependem do comprimento de onda, de forma que suas amplitudes são proporcionais à fase orbital, atingindo o valor máximo de 0,0025 na fase  $|0, 25|$  e sendo nulas na fase onde a velocidade das componentes também são nulas. Nossa escolha se baseia no fato de que fases nas quais as componentes possuem a mesma velocidade radial (igual à do sistema) são, teoricamente, mais fáceis de normalizar (pelo fato de não ocorrerem misturas devido ao efeito Doppler). Assim, o espectro de entrada  $y_j(\ln \lambda)$  passa a ser  $y'_j(\ln \lambda)$ , obedecendo a seguinte relação

$$\begin{aligned} y_j(\ln \lambda) \rightarrow y'_j(\ln \lambda) &= \frac{y_j(\ln \lambda)}{1 - \epsilon_j(\ln \lambda)} \\ &\approx (1 + \epsilon_j(\ln \lambda)) y_j(\ln \lambda). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Para simular os viés,  $\epsilon_j(\ln \lambda)$ , sobrepostos ao contínuo dos espectros observados, determinamos 5 funções diferentes, que serão mostradas em cada painel da Fig. 2.7, além dos viés induzidos sobre o contínuo dos espectros reconstruídos. Esses viés,  $\epsilon_{j,i}$ , sobrepostos ao contínuo dos espectros observados são definidos, analiticamente, a seguir, e dependem da fase  $j$  e pixel  $i$ :



**Figura 2.7:** Viés adicionados ao contínuo dos 16 espectros de entrada correlacionadas com a fase orbital e sua progressão sobre os espectros de saída depois da aplicação da separação espectral. Cada painel se refere a um tipo diferente de viés, simulando situações práticas (veja texto para maiores detalhes) para um sistema duplo onde as contribuições em luz e amplitude de velocidade das componentes são iguais e constantes,  $K_1/K_2 = \ell_1/\ell_2 = 1$ . Cada uma das curvas com amplitude mais alta representa o padrão observado no contínuo do espectro reconstruído, de cada uma das componentes. Os viés são expressos em intensidade de fluxo do contínuo e os pixels são expressos em velocidade.

1. inclinação superposta ao contínuo (primeiro painel da Fig. 2.7), que simula padrões inclinados devido à má determinação do nível do contínuo nos espectros compostos observados. Analiticamente,

$$\epsilon_{j,i} = 0,01j \left( \frac{2i}{N-1} - 1 \right), \quad (2.56)$$

onde  $N = 672$  corresponde ao número total de pixels nos espectros de entrada e de saída,  $i = 0, \dots, N - 1$  é o índice dos pixels e  $j = -0,25, \dots, 0,25$  é o índice das fases orbitais (de acordo com a Tab. 2.1).

2. constante, com sinal oposto em ambos os lados do centro, e linearmente conectada em torno do ponto central do intervalo, (segundo painel da Fig. 2.7). Esse viés, representa erros ao agupar diferentes ordens espectrais de um espectro échelle. Analiticamente

$$\epsilon_{j,i} = \begin{cases} -0,01j & \text{para } i = 0, \dots, n-1 \\ +0,01j \left( \frac{2(i-n)}{N-n-1} - 1 \right) & \text{para } i = n, \dots, N-n-1 \\ +0,01j & \text{para } i = N-n, \dots, N-1 \end{cases} \quad (2.57)$$

onde  $n = 300$  e corresponde ao intervalo em pixels onde o viés é constante ( $i$ ,  $j$  e  $N$  são definidos no item 1).

3. função senoidal de  $\ln \lambda$  com período igual ao comprimento do espectro (terceiro painel da Fig. 2.7), representando padrões ondulatórios sobre o contínuo dos espectros de entrada devido à má determinação do mesmo. Analiticamente,

$$\epsilon_{j,i} = 0,0025 \sin(2\pi j) \sin \left( 2\pi \frac{i}{N-1} \right), \quad (2.58)$$

onde  $i$ ,  $j$  e  $N$  são definidos no item 1.

4. função cosenoidal (quarto painel da Fig. 2.7), simulando (como no item 3) padrões ondulatórios sobre o contínuo dos espectros observados. Analiticamente, tem-se

$$\epsilon_{j,i} = 0,0025 \sin(2\pi j) \cos \left( 2\pi \frac{i}{N-1} \right), \quad (2.59)$$

onde  $i$ ,  $j$  e  $N$  são definidos no item 1.

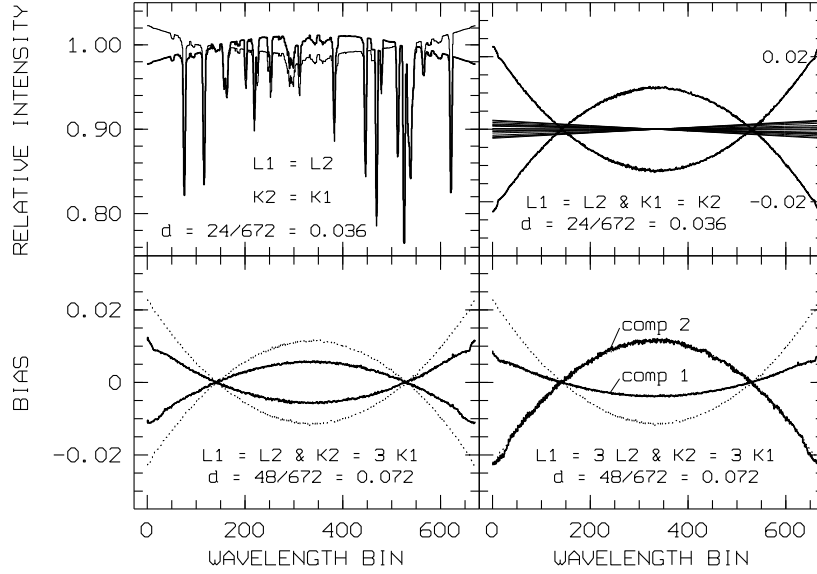
5. função senoidal de  $\ln \lambda$  com período menor (quinto painel da Fig. 2.7) que o comprimento do espectro, simulando, também, padrões ondulatórios sobre o contínuo dos espectros observados. Analiticamente, tem-se

$$\epsilon_{j,i} = \begin{cases} 0,0025 \sin(2\pi j) \sin \left( 2\pi \frac{i-n}{N-2n-1} \right) & \text{para } i = n, \dots, N-n-1 \\ 0 & \text{para } i \neq n, \dots, N-n-1 \end{cases} \quad (2.60)$$

onde  $n=50$ , e  $i$  e  $j$  são definidos no item 1.

Pela Fig. 2.7, vemos claramente que o viés presente nos espectros compostos é amplificado nos espectros reconstruídos durante o processo da reconstrução espectral (cada uma das curvas com amplitude mais alta representa o padrão observado ao contínuo dos espectros reconstruídos das componentes). Essa amplificação pode ser compreendida da seguinte maneira: considere que o espectro observado  $y_j$  contenha um viés aditivo  $\eta_j b(\ln \lambda)$ , onde  $\eta_j \in [-1, +1]$  é proporcional à velocidade radial instantânea e  $b(\ln \lambda)$  é uma função suave. Para reproduzir os viés, para um arbitrário valor de  $\eta_j$ , um viés igual a  $\pm B(\ln \lambda)/\ell_k$  é necessário no espectro das componentes, ou seja

$$\begin{aligned} \eta b(\ln \lambda) &= \ell_1 \left[ \frac{1}{\ell_1} B \left( \ln \lambda + \eta \frac{K_1}{c} \right) \right] + \ell_2 \left[ \frac{-1}{\ell_2} B \left( \ln \lambda - \eta \frac{K_2}{c} \right) \right] \\ &= \eta \frac{K_1 + K_2}{c} \frac{d}{d \ln \lambda} B(\ln \lambda), \end{aligned} \quad (2.61)$$



**Figura 2.8:** “Tendências” (do tipo gradiente) correlacionadas com a fase orbital, adicionadas ao contínuo de 16 espectros de entrada e sua progressão sobre os espectros de saída depois da aplicação da separação espectral. O painel superior esquerdo mostra os espectros reconstruídos para o caso em que  $l_1 = l_2$  e  $K_1 = K_2$  e o painel superior direito, os padrões observados no contínuo dos espectros reconstruídos das componentes (curvas com amplitudes mais altas) e os padrões adicionados ao contínuo das observações. Os dois painéis inferiores seguem a mesma estrutura do superior direito para dois casos diferentes (observe as legendas nas figuras). Por simplicidade, os resultados do painel superior direito são mostrados como linhas pontilhadas nos painéis inferiores. Note que (1) a amplitude dos padrões espúrios é inversamente proporcional à soma das amplitudes de velocidade das componentes com relação ao intervalo total (compare painéis superior direito com o inferior esquerdo); (2) a amplitude dos padrões espúrios é maior para a componente mais fraca (compare os painéis inferior direito com o inferior esquerdo).

ou ainda,

$$B(\ln \lambda) = \frac{c}{K_1 + K_2} \int^{\ln \lambda} b(x) dx . \quad (2.62)$$

Fazendo uma mudança de variável igual a  $\xi = 2(\ln \lambda - x_0)/(\Delta \ln \lambda)$ , onde  $x_0$  é  $\ln \lambda$  no meio do intervalo  $\Delta \ln \lambda$  considerado, podemos reescrever a Eq. (2.62) como:

$$B(\xi) - B(0) = \frac{c \Delta \ln \lambda}{2(K_1 + K_2)} \int_0^\xi b(x') dx' = \frac{1}{2d} \int_0^\xi b(x') dx' \quad (2.63)$$

A Eq. (2.63) nos fala que o viés observado nos espectros reconstruídos ( $B$ ) é a integral dos viés adicionados nos espectros de entrada. Assim, podemos entender o por quê dos padrões observados: um viés linear na entrada resulta num viés parabólico na saída; um viés constante resulta num viés linear; um viés senoidal resulta num viés cosenoidal (e vice-versa). Além disso, nos mostra que há uma dependência entre  $l_j^{-1}$  e  $d^{-1}$  com a amplitude observada no contínuo dos espectros intrínsecos, veja Fig. 2.8 (uma figura semelhante a essa, para o caso de um viés do tipo senoidal é encontrado em Hensberge & Pavlovski 2006). Dessa forma, a amplitude dos viés é mais acentuada sobre o contínuo da componente mais fraca e diminui com o aumento da soma da amplitude máxima das componentes sobre o intervalo total.

Os testes realizados aqui foram construídos de forma que a média dos viés para cada espectro de entrada é zero. Tais viés passam “despercebidos” durante a separação espectral devido à não variação do bloqueio de linha nos espectros observados. A Eq. (2.63) nos mostra que  $B$  tem, em todos os casos estudados aqui, o mesmo valor nas extremidades do intervalo reconstruído, conduzindo à mesma resposta tanto no espaço de velocidade quanto no de Fourier. Contudo, de acordo com Ilijic (2004b), se o viés correlacionado com a fase, descrito por  $b$ , tem valor médio diferente de zero, sobre um certo intervalo espectral, os viés nos espectros reconstruídos podem ser diferentes para os dois algoritmos.

## 2.7.2 Viés nas linhas

Imagine uma situação em que a intensidade das linhas de uma das componentes de um sistema binário varia de acordo com a fase orbital do sistema. Qual seria o efeito produzido pela separação espectral nos espectros reconstruídos? Para responder a essa pergunta, consideramos o sistema artificial descrito na Sec. 2.5.1.3, onde alteramos a profundidade das linhas  $d_2$ , de todas as linhas espectrais da componente 2, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_{2j}(\ln \lambda - v_{2j}/c) &= 1 - \frac{2}{3}d_2(\ln \lambda - v_{2j}/c) \quad \text{for } v_{2j} > \frac{K_2}{2} \\ x_{2j}(\ln \lambda - v_{2j}/c) &= 1 - \frac{4}{3}d_2(\ln \lambda - v_{2j}/c) \quad \text{for } v_{2j} < -\frac{K_2}{2} \\ x_{2j}(\ln \lambda - v_{2j}/c) &= 1 - d_2(\ln \lambda - v_{2j}/c) \quad \text{for } |v_{2j}| \leq \frac{K_2}{2} \end{aligned}$$

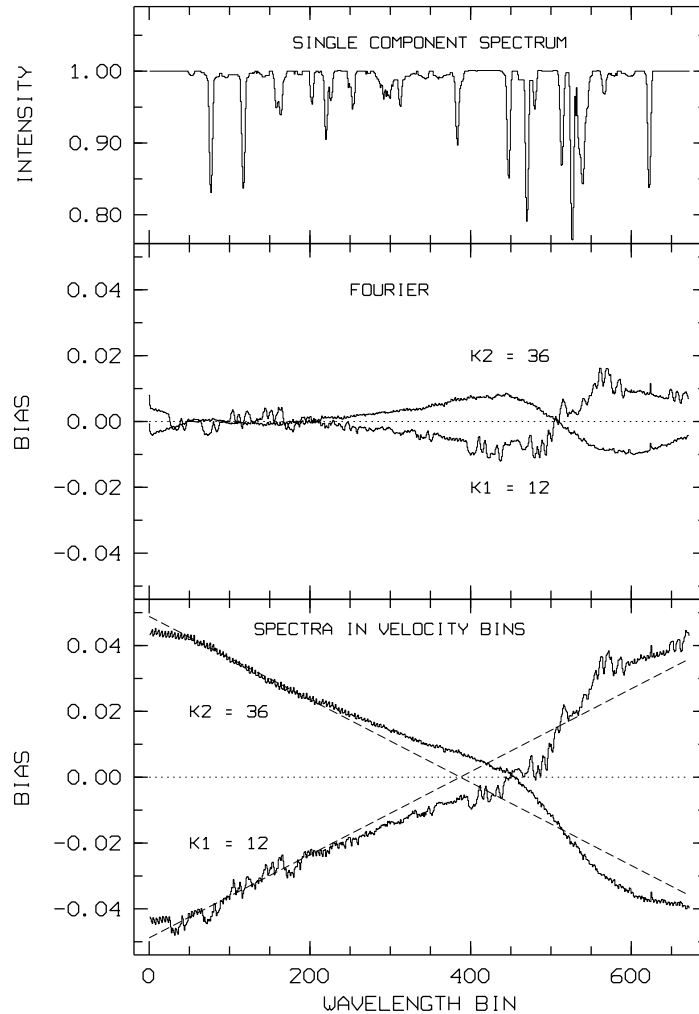
onde  $x_{2j}$ ,  $j = 1 \dots 16$  são os espectros de entrada e  $d_2$  é a profundidade das linhas (desviada do contínuo) no  $\ln \lambda$  quando  $v_{2j} = 0$ . Assim, as linhas da secundária são duas vezes mais profundas nos espectros que se deslocam para o azul que para o vermelho. Esse tipo de efeito poderia ocorrer em sistemas que possuem uma ou mais componentes com superfície não-homogênea, mas com rotação sincronizada com a órbita. Veja que tal efeito poderia passar despercebido nos espectros observados.

A Fig. 2.9 mostra que o impacto sobre os espectros reconstruídos não é muito grande. A amplitude dos viés sobre o contínuo das componentes é pequeno, sendo maior no intervalo espectral que possui maior densidade de linhas (pixels 380 à 672). Além disso a resposta aos viés usando o espaço de Fourier, à primeira vista, é diferente daquela obtida no espaço de velocidade (compare os painéis intermediário e inferior). No espaço de velocidade, o impacto da variabilidade das linhas produz uma linha reta crescente para uma componente e decrescente para a outra, enquanto que no espaço de Fourier observamos um padrão ondulatório de sinal oposto entre as componentes (confirmando o que foi obtido por Ilijic 2004b). No entanto, observe a similaridade entre o viés no espaço de Fourier e a diferença do viés e a linha pontilhada no espaço de velocidade.

Concluindo, pequenas variações na intensidade das linhas não prejudicam seriamente a reconstrução espectral das componentes, pelo menos em média, no caso de uma razoável cobertura em fase orbital (considerando que os perfis das linhas não mudem com o tempo).

## 2.7.3 Viés Constantes no Espaço de Velocidade

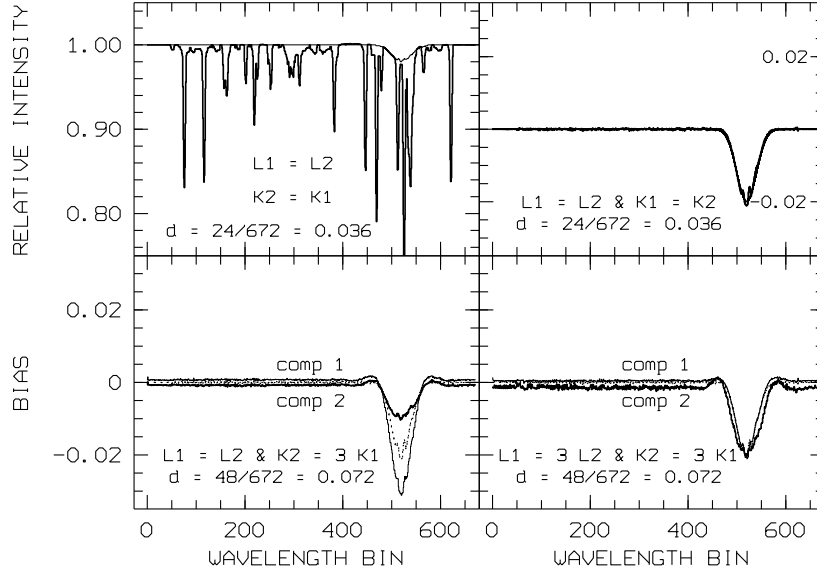
Efeitos estáticos como presença de linhas telúricas, absorções devido a presença de uma componente fraca não-detectável, manchas devido a defeitos no detector, linhas



**Figura 2.9:** Viés induzidos nos espectros reconstruídos devido à variabilidade da intensidade das linhas da secundária com relação à fase orbital. O painel superior mostra o espectro verdadeiro para as duas componentes (que possuem o mesmo espectro) na fase em que a velocidade radial é nula. O painel intermediário e inferior representam os viés nos espectros reconstruídos depois da aplicação, respectivamente, da separação no espaço de Fourier e velocidade. Para o último caso, os espectros reconstruídos foram mudados por  $+0,04$  e  $-0,04$  em intensidade para mostrar os resultados num intervalo menor de intensidades.

interestelares e, até mesmo, campo-plano imperfeito ou incorretamente processado, todos podem estar presentes nos espectros compostos. Qual será o impacto sobre os espectros reconstruídos, depois da aplicação da separação espectral, ao usar exposições contendo esses efeitos?

Para estudar isso, introduzimos uma absorção estática em velocidade de 2% de profundidade na região mais no vermelho do intervalo espectral para formar os 16 espectros compostos descritos na Sec. 2.5.1.3 (veja Fig. 2.10, painel superior esquerdo) e, em seguida, aplicamos a separação espectral a fim de obter os espectros reconstruídos. A diferença entre os espectros verdadeiros e os reconstruídos, para os casos em que  $\ell_1/\ell_2 = 1$  ou 3 e  $K_1/K_2 = 1$  ou 3 (discutidos na Sec. 2.5.1.3), é mostrada na Fig. 2.10.



**Figura 2.10:** Viés induzidos durante a reconstrução espectral devido à presença de uma absorção estática de 2% de profundidade nos espectros compostos que não pertence aos espectros intrínsecos das componentes. Os viés são mostrados como a diferença entre os espectros reconstruídos e o espectro verdadeiro. O painel superior esquerdo mostra o espectro composto na fase em que a velocidade é nula, além da função que descreve a absorção estática. Os outros três painéis mostram os viés para três casos diferentes, descritos em suas respectivas legendas.

Observamos que os efeitos estáticos são mais pronunciados (e ligeiramente deformados) sobre a componente do sistema que possui menor contribuição em luz e/ou menor amplitude de velocidade. Ao comparar o painel inferior esquerdo com o superior direito, vemos que a amplitude do padrão espúrio aumenta para a componente com menor amplitude de velocidade (componente 1). Da mesma forma, ao comparar o painel inferior direito com o inferior esquerdo, vemos que a amplitude do padrão espúrio aumenta para a componente mais fraca (componente 2). Além disso, observamos que os contínuos das duas componentes não se encontram no mesmo nível, para todo o intervalo espectral, nos painéis inferiores, onde  $L_1/L_2$  e  $K_1/K_2$  são diferentes de 1.

## 2.8 Eliminação de Padrões Espúrios nos Espectros das Componentes

Esta seção se destina a discutir como padrões espúrios, mostrados anteriormente, podem ser reconsiderados ou eliminados dos espectros reconstruídos pela separação espectral. Será discutido com mais detalhe o que pode ser feito no caso de padrões de baixa-freqüência, já que os de alta-freqüência podem ser evitados por um processo observacional apropriado, de forma que o argumento da exponencial da Eq. (2.29),  $|(\beta_{k_1 j_1} + \beta_{k_2 j_2} + \dots + \beta_{k_K j_K})|$ , para todas as fases de índices  $j_1, \dots, j_K$ , não seja múltiplo do número de pixels do espectro composto, para um sistema com  $K$  componentes. Ou ainda, que os termos  $|(\beta_{2 j_2} - \beta_{1 j_2}) - (\beta_{2 j_1} - \beta_{1 j_1})|$ , para todas as fases de índices  $j_1$  e  $j_2$ , para um sistema binário e  $|(\beta_{1 j_2} - \beta_{1 j_1}) + (\beta_{2 j_1} - \beta_{2 j_3}) + (\beta_{3 j_3} - \beta_{3 j_2})|$ , para todas as fases de índices  $j_1, j_2$  e  $j_3$ ,

para um sistema triplo, não sejam múltiplos do número de pixels do espectro composto.

Indicações sobre se a solução é única ou não, e o tipo de viés (se presente) nos espectros observados podem ser obtidas com a determinação do número de condição para cada modo de Fourier, ou ainda pela inspeção dos dados reconstruídos.

O cálculo do bloqueio de linha observado,  $b_{obs,j}$ , sobre um intervalo espectral em diferentes fases orbitais pode nos indicar se há efeitos temporais de diluição das linhas espectrais das componentes sobre o contínuo observado, como pode ser visto na equação abaixo para um sistema duplo,

$$b_1 \ell_{1,j} + b_2 \ell_{2,j} = b_{obs,j}, \quad (2.64)$$

onde  $b_1$  e  $b_2$  são os bloqueios de linhas intrínsecos das componentes. Num sistema que não possui variabilidade em luz,  $b_{obs,j}$  deve ser constante no tempo dentro de incertezas devido ao ruído ou à entrada e a saída das linhas das componentes de dentro do intervalo espectral em razão do desvio Doppler<sup>2</sup> (caso as bordas não contenham suficiente contínuo). A consequência disso é que, com a hipótese de um sistema onde os fatores de luz são constantes, podemos determinar o nível correto do contínuo requerendo explicitamente um bloqueio de linha constante.

Na maioria dos casos de sistemas onde os fatores de luz variam no tempo e as componentes possuem diferentes bloqueios de linha, os bloqueios de linha medidos nos espectros observados podem indicar se a variabilidade em luz está correlacionada com a fase orbital ou não. Uma análise mais detalhada pode, ainda, dar indício se a presença ou não de eclipses, ou a forma das componentes (esférica ou não), ou a luz intrínseca ou a variação da intensidade da linha espectral ou até mesmo uma posição incorreta do contínuo, podem ser responsáveis pela variação do bloqueio de linha.

Se os bloqueios de linha, calculados por fase orbital, indicam uma diluição temporal, então é interessante a adoção de pesos, como discutido na Sec. 2.5.1.1, para estabilizar as equações de baixa-frequência. Assim, os espectros que apresentam maior diluição terão um peso mais alto, desde que a variação não seja causada pela má redução dos dados. Contudo, a utilização deste processo, para cada caso específico, deve ser analisada antes de ser adotada. A vantagem é que esse processo reduz o nível de indeterminação das soluções e a transferência de viés para os espectros das componentes, no caso em que exposições com peso mais alto são mais fáceis de renormalizar (como no caso de fases em eclipse total). Porém, a desvantagem é que os espectros que possuem pesos mais altos terão o ruído amplificado nos espectros reconstruídos. Esse efeito pode ser diminuído obtendo observações nestas fases com mais tempo de exposição ou adotando um espectro médio a partir de várias exposições com tempo menor. No caso de eclipses parciais, seu uso será inválido, uma vez que os métodos assumem invariância dos perfis das linhas nos espectros de entrada. Sua utilização pode produzir espectros cuja reconstrução não seja confiável.

A reconstrução de regiões espectrais de tamanho comparável com o intervalo correspondente ao movimento orbital das componentes resulta em espectros de saída sem ondulações e na indeterminação somente do modo zero de Fourier (na ausência de viés). Já a reconstrução de intervalos maiores é vantajosa na ausência de muitas janelas de contínuo, correndo o risco de aparecer padrões de baixa-frequência sobre os espectros de

---

<sup>2</sup>Normalmente, essas incertezas se tornam muito pequenas em relação à sensibilidade dos bloqueios de linha para posicionar o contínuo.



saída. Caso isso ocorra, os fatores de luz das componentes deverão ser tomados como dependentes do comprimento de onda (esse procedimento foi adotado para a análise do sistema triplo eclipsante RV Crt, veja Sec. 5.1.6).

Na prática, viés nos espectros observados e no modelo utilizado podem afetar todos os modos de Fourier. Em ambos casos, um método empírico que preserva o  $\chi^2$  e reduz termos não-físicos é sugerido abaixo. Esse processo leva em conta a presença de janelas de contínuo e quão plano é o contínuo normalizado.

Considere  $p_k(\ln \lambda)$ , como sendo o pseudo-espectro obtido pela separação espectral, e  $x_k(\ln \lambda)$  o espectro verdadeiro, que diferem entre si segundo a equação

$$p_k(\ln \lambda) = x_k(\ln \lambda) + \frac{1}{\ell_k} z_k(\ln \lambda). \quad (2.65)$$

O padrão espúrio  $z_k(\ln \lambda)$  é um função mais lisa que os espectros e o seu valor para cada uma das componentes obedece à condição de que  $\sum_k z_k(\ln \lambda) = 0$ . Para preservar o  $\chi^2$  o aumento no espalhamento dos resíduos será devido somente ao desvio Doppler de  $z_k(\ln \lambda)$ .

Para um sistema binário,  $p_{1,2} = x_{1,2} \pm z/\ell_{1,2}$ , a função

$$\pm \ell_{1,2} (p_{1,2}(\ln \lambda) - 1) = \pm \ell_{1,2} (x_{1,2}(\ln \lambda) - 1) + z(\ln \lambda) \quad (2.66)$$

determina o “corredor” que define a forma do “contínuo” em um deslocamento  $z$ , com as linhas de absorção de  $x_1$  aparecendo abaixo do contínuo e as linhas de absorção de  $x_2$  aparecendo acima do contínuo invertidas como se fossem linhas de emissão. Assim, ao definir a função  $z$ , correções do tipo  $\mp \frac{z}{\ell_{1,2}}$  podem ser aplicadas nos pseudo-espectros  $p_{1,2}$ .

Qualquer conhecimento de janelas de contínuo nos espectros das componentes pode ajudar a definir o nível local e a forma dos padrões espúrios. Na ausência de viés nos espectros de entrada, a forma é definida pelos modos de frequência mais baixos e são aproximadamente senoidais. Se, para definir a forma dos padrões espúrios, há necessidade de modos de Fourier mais altos, isso indica que as observações possuem viés ou que o modelo usado não está adequado.

Para sistemas com multiplicidade mais alta, se há um grupo de estrelas que possuem fatores de luz constantes entre elas, o método acima pode ser aplicado. Por exemplo, as componentes 1 e 2, de um sistema qualquer, possuem  $r_{12} = \ell_{1j}/\ell_{2j}$  constante no tempo e a Eq. (2.66) será usada, considerando  $\ell_1 = \ell_{1j}$  e  $\ell_2 = \ell_{2j}$ .

Se, por outro lado, mais estrelas possuem fatores de luz constantes entre elas, o processo deve ser aplicado passo a passo. Primeiro, considerando uma componente  $p_k$  em relação à combinação dos pseudo-espectros de todas as outras componentes juntas, ou seja

$$\ell_k (x_k(\ln \lambda) - 1) + z_k(\ln \lambda) \quad \text{e} \quad - \sum_{k' \neq k} \ell_{k'} (x_{k'}(\ln \lambda) - 1) + z_k(\ln \lambda),$$

definindo, desta forma, o intervalo de “contínuo” e o valor de  $z_k$ . Depois de aplicada a correção aditiva a todos os pseudo-espectros, o mesmo processo deve ser repetido com as  $K - 1$  componentes  $p_{k'}$  em relação aos  $K - 2$  pseudo-espectros que restam. Sugerimos, no caso de sistemas com multiplicidade maior que 2, que o processo seja iniciado pelas componentes mais fracas ou aquelas que possuem muitos pixels com fluxo de contínuo.

Para sistemas em que os fatores de luz variam muito pouco com o tempo, tais que as equações permanecem mal-condicionadas nos modos mais baixos, o processo acima pode ser aplicado usando a média dos fatores de luz das componentes.

Caso o processo empírico não seja adequado, sugerimos um outro mais rigoroso no sentido de melhorar a normalização dos espectros das componentes. Este processo consiste em identificar, após a primeira separação espectral, o tipo de viés sobreposto ao contínuo das componentes, aplicar esse padrão sobre os espectros compostos e realizar novamente a separação espectral. A Fig. 2.7 mostra alguns tipos de viés mais freqüentes que podem aparecer nos espectros das componentes e que podem ser usados no processo de identificação. Como dito anteriormente, efeitos de baixa-freqüência podem produzir padrões senoidais nos espectros das componentes, caso pelo menos um par deste sistema possua razão de fator luz que não varie consideravelmente no tempo.

Na Sec. 5.1.10 mostraremos, como exemplo, a aplicação das correções dos padrões espúrios, discutidas neste seção, para o sistema triplo eclipsante RV Cr.

# Capítulo 3

---

## Sistemas Binários: análise detalhada

Para melhor compreensão do processo de separação nos domínios de Fourier e de velocidade, cálculos analíticos foram realizados para um sistema binário fictício simples. Esse estudo foi de vital importância para o entendimento teórico do processo de separação espectral e nos códigos usados aqui: `KOREL` e `FDBinary` (domínio de Fourier) e `CRES` (domínio de velocidade), desenvolvidos, respectivamente, por Hadrava (1995) e Ilijic (2004a e 2004b). Na Sec. 3.1 desenvolvemos as equações que nos permitem obter a solução geral para os espectros das componentes; na Sec. 3.2 discutimos em quais circunstâncias a solução para esses espectros é indeterminada e na Sec. 3.3 apresentamos alguns exemplos de testes realizados analiticamente e numericamente (usando `KOREL`, `FDBinary` e `CRES`) para um sistema duplo com poucos pixels e fases orbitais.

### 3.1 Solução Analítica no espaço de Fourier

Considerando  $\sigma_{jm} = 1$ , a Eq. (2.17) para um sistema binário se torna

$$\sum_{j=1}^J \left| \tilde{y}_{j,m} - \ell_{1,j} \tilde{x}_{1,m} e^{-2\pi i \frac{m\beta_{1,j}}{N}} - \ell_{2,j} \tilde{x}_{2,m} e^{-2\pi i \frac{m\beta_{2,j}}{N}} \right|^2. \quad (3.1)$$

Nesta seção, as seguintes notações serão adotadas para simplificar as equações

$$\tilde{y}_{j,m} = u_{j,m} + iU_{j,m} \quad u, U \in \mathbf{R} \quad (3.2)$$

$$\tilde{x}_{k,m} = v_{k,m} + iV_{k,m} \quad v, V \in \mathbf{R}; \quad k = 1, 2 \quad (3.3)$$

$$r(t) = \cos(2\pi t) = \frac{1}{2}(e^{2\pi it} + e^{-2\pi it}) \quad (3.4)$$

$$q(t) = \sin(2\pi t) = \frac{1}{2i}(e^{2\pi it} - e^{-2\pi it}) \quad (3.5)$$

$$L_1 = \sum_j \ell_{1,j}^2 \quad (3.6)$$

$$L_2 = \sum_j \ell_{2,j}^2 \quad (3.7)$$

$$R(t) = \sum_j \ell_{1,j} \ell_{2,j} r(t) \quad (3.8)$$

$$Q(t) = \sum_j \ell_{1,j} \ell_{2,j} q(t) \quad (3.9)$$

A Eq. (3.1) pode ser minimizada para qualquer modo  $m$ , considerando as derivadas com relação à  $v_{k,m}$  e  $V_{k,m}$  ( $k = 1, 2$ ) ou as derivadas com relação as variáveis  $\tilde{x}_{k,m}$  e  $\tilde{x}_{k,m}^*$  (Eq. 2.15) para  $k = 1, 2$ . Desenvolveremos as equações considerando a primeira opção, conduzindo a

$$\frac{\partial F_m}{\partial v_{k,m}} = \frac{\partial F_m}{\partial V_{k,m}} = 0, \quad (3.10)$$

com

$$F_m = \sum_{j=1}^J \left( u_{j,m} - \ell_{1,j} f_1 \left( \frac{m\beta_{1,j}}{N} \right) - \ell_{2,j} f_2 \left( \frac{m\beta_{2,j}}{N} \right) \right)^2 + \sum_{j=1}^J \left( U_{j,m} + \ell_{1,j} g_1 \left( \frac{m\beta_{1,j}}{N} \right) + \ell_{2,j} g_2 \left( \frac{m\beta_{2,j}}{N} \right) \right)^2, \quad (3.11)$$

e

$$f_1(z) = v_{1,m} r(z) + V_{1,m} q(z) \quad (3.12)$$

$$f_2(z) = v_{2,m} r(z) + V_{2,m} q(z) \quad (3.13)$$

$$g_1(z) = v_{1,m} q(z) - V_{1,m} r(z) \quad (3.14)$$

$$g_2(z) = v_{2,m} q(z) - V_{2,m} r(z) \quad (3.15)$$

Como exemplo, se calcularmos as derivadas parciais em relação à  $v_{1,m}$  e tomarmos esse resultado como sendo nulo, teremos

$$\sum_{j=1}^J \left[ \ell_{1,j} r \left( \frac{m\beta_{1,j}}{N} \right) \left( u_{j,m} - \ell_{1,j} f_1 \left( \frac{m\beta_{1,j}}{N} \right) - \ell_{2,j} f_2 \left( \frac{m\beta_{2,j}}{N} \right) \right) \right] = \sum_{j=1}^J \left[ \ell_{1,j} q \left( \frac{m\beta_{1,j}}{N} \right) \left( U_{j,m} + \ell_{1,j} g_1 \left( \frac{m\beta_{1,j}}{N} \right) + \ell_{2,j} g_2 \left( \frac{m\beta_{2,j}}{N} \right) \right) \right]. \quad (3.16)$$

Rearranjando os termos referentes à mesma variável, temos

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^J \left[ \ell_{1,j} \left( u_{1,m} r \left( \frac{m\beta_{1,j}}{N} \right) - U_{1,m} q \left( \frac{m\beta_{1,j}}{N} \right) \right) \right] = \\ & v_{1,m} \sum_{j=1}^J \ell_{1,j}^2 \left( r^2 \left( \frac{m\beta_{1,j}}{N} \right) + q^2 \left( \frac{m\beta_{1,j}}{N} \right) \right) \\ & + v_{2,m} \sum_{j=1}^J \ell_{1,j} \ell_{2,j} \left( r \left( \frac{m\beta_{1,j}}{N} \right) r \left( \frac{m\beta_{2,j}}{N} \right) + q \left( \frac{m\beta_{1,j}}{N} \right) q \left( \frac{m\beta_{2,j}}{N} \right) \right) \\ & + V_{2,m} \sum_{j=1}^J \ell_{1,j} \ell_{2,j} \left( r \left( \frac{m\beta_{1,j}}{N} \right) q \left( \frac{m\beta_{2,j}}{N} \right) - q \left( \frac{m\beta_{1,j}}{N} \right) r \left( \frac{m\beta_{2,j}}{N} \right) \right), \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde, evidentemente,

$$r^2(z) + q^2(z) = 1. \quad (3.18)$$

Fórmulas básicas de trigonometria, usando soma e diferença de ângulos, implicam que

$$\begin{aligned} r(z_1)r(z_2) + q(z_1)q(z_2) &= r(z_2 - z_1) \quad \text{e} \\ r(z_1)q(z_2) - q(z_1)r(z_2) &= q(z_2 - z_1), \end{aligned} \quad (3.19)$$

tal que a Eq. (3.17) pode ser reduzida, usando as notações definidas nas Eqs. (3.4) e (3.5), a

$$\begin{aligned} v_{1,m} \sum_{j=1}^J \ell_{1,j}^2 + v_{2,m} \sum_{j=1}^J \ell_{1,j} \ell_{2,j} r \left( \frac{m(\beta_{2,j} - \beta_{1,j})}{N} \right) + V_{2,m} \sum_{j=1}^J \ell_{1,j} \ell_{2,j} q \left( \frac{m(\beta_{2,j} - \beta_{1,j})}{N} \right) \\ = \sum_{j=1}^J \ell_{1,j} \left( u_{1,m} r \left( \frac{m\beta_{1,j}}{N} \right) - U_{1,m} q \left( \frac{m\beta_{1,j}}{N} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Usando a Eq. (2.11), cada termo na soma do lado direito da Eq. (3.20) pode ser escrito como

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_{n,j} \ell_{1,j} \left( r \left( \frac{mn}{N} \right) r \left( \frac{m\beta_{1,j}}{N} \right) + q \left( \frac{mn}{N} \right) q \left( \frac{m\beta_{1,j}}{N} \right) \right), \quad (3.21)$$

ou

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_{n,j} \ell_{1,j} r \left( \frac{m(\beta_{1,j} - n)}{N} \right). \quad (3.22)$$

Aplicando as mesmas regras para as outras derivadas e usando as Eqs. (3.6) à (3.9), obtemos a seguinte equação matricial

$$\begin{pmatrix} L_1 & R & 0 & Q \\ R & L_2 & -Q & 0 \\ 0 & -Q & L_1 & R \\ Q & 0 & R & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,m} \\ v_{2,m} \\ V_{1,m} \\ V_{2,m} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^J y_{n,j} \ell_{1,j} r \left( \frac{m(\beta_{1,j} - n)}{N} \right) \\ \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^J y_{n,j} \ell_{2,j} r \left( \frac{m(\beta_{2,j} - n)}{N} \right) \\ \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^J y_{n,j} \ell_{1,j} q \left( \frac{m(\beta_{1,j} - n)}{N} \right) \\ \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^J y_{n,j} \ell_{2,j} q \left( \frac{m(\beta_{2,j} - n)}{N} \right) \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Na matriz, o argumento de  $R$  e  $Q$ ,  $\frac{m(\beta_{2,j} - \beta_{1,j})}{N}$ , foi suprimido, por simplicidade.

As primeiras duas equações se separam completamente das outras duas, no caso em que  $Q = 0$ . Esta condição é obviamente satisfeita quando (a)  $m = 0$ , (b) quando não há variabilidade em luz e (c) quando, para uma fase com mudanças em velocidades ( $\beta_1, \beta_2$ ), existe uma fase correspondente tal que suas velocidades sejam  $(-\beta_1, -\beta_2)$ , de forma a cancelar termo a termo no argumento de  $Q$ .

No caso em que  $Q \neq 0$ , o conjunto de equações pode ser resolvido da seguinte forma: as primeiras duas equações lineares da Eq. (3.23) podem ser usadas para expressar  $V_{k,m}$ ,  $k = 1, 2$  em termos de  $v_{k,m}$ ,  $k = 1, 2$  e serem substituídas na terceira e quarta, resultando em uma equação com apenas uma variável (os termos contendo  $v_{1,m}$  se cancelam na terceira e aqueles contendo  $v_{2,m}$  se cancelam na quarta).

Aplicando um processo similar, começando das duas últimas equações, resulta na solução para  $V_{2,m}$  e  $V_{1,m}$ , respectivamente vindas da primeira e segunda equações. Apenas os cálculos para  $v_{1,m}$  serão mostrados com mais detalhes. Realizando o processo descrito acima, a quarta equação será

$$\begin{aligned} Qv_{1,m} + R \left( \frac{R}{Q} v_{1,m} + \frac{L_2}{Q} v_{2,m} - \frac{1}{QN} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^J y_{n,j} \ell_{2,j} r \left( \frac{m(\beta_{2,j} - n)}{N} \right) \right) + \\ L_2 \left( -\frac{L_1}{Q} v_{1,m} - \frac{R}{Q} v_{2,m} + \frac{1}{QN} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^J y_{n,j} \ell_{1,j} r \left( \frac{m(\beta_{1,j} - n)}{N} \right) \right) = \\ = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^J y_{n,j} \ell_{2,j} q \left( \frac{m(\beta_{2,j} - n)}{N} \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

O coeficiente de  $v_{2,m}$  é nulo. Conseqüentemente,

$$v_{1,m} = \frac{1}{N} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^J y_{n,j} (L_2 r(z_{1,j}) - Qq(z_{2,j}) - Rr(z_{2,j}))}{L_1 L_2 - R^2 - Q^2}, \quad (3.25)$$

onde

$$z_{k,j} = \frac{m(\beta_{k,j} - n)}{N}. \quad (3.26)$$

Seguindo o mesmo procedimento, as soluções para as 3 outras variáveis são:

$$V_{1,m} = \frac{1}{N} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^J y_{n,j} (L_2 q(z_{1,j}) - Rq(z_{2,j}) + Qr(z_{2,j}))}{L_1 L_2 - R^2 - Q^2} \quad (3.27)$$

$$v_{2,m} = \frac{1}{N} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^J y_{n,j} (L_1 r(z_{2,j}) + Qq(z_{1,j}) - Rr(z_{1,j}))}{L_1 L_2 - R^2 - Q^2} \quad (3.28)$$

$$V_{2,m} = \frac{1}{N} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^J y_{n,j} (L_1 q(z_{2,j}) - Rq(z_{1,j}) - Qr(z_{1,j}))}{L_1 L_2 - R^2 - Q^2} \quad (3.29)$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier nas Eqs. (3.25), (3.27), (3.28) e (3.29), podemos obter facilmente o espectro intrínseco das componentes para qualquer sistema duplo com  $N$  pixels e  $J$  fases orbitais. Lembramos que as equações desenvolvidas aqui levam em consideração que as velocidades radiais das componentes são números *inteiros* de pixels.

## 3.2 Singularidade das Equações

Em um sistema do tipo  $A \cdot X = B$ , para que  $X$  seja bem determinado, a matriz  $A$  deve ser não-singular, ou seja, seu determinante deve ser diferente de zero. Sendo singular, tal matriz de transformação pode fazer com que  $X$  não tenha solução ou que apresente várias soluções. Vamos analisar aqui em que condições a matriz do lado esquerdo da Eq. (3.23) apresenta singularidades. O determinante de tal matriz é facilmente calculado por

$$D = (L_1 L_2 - R^2 - Q^2)^2. \quad (3.30)$$

Vemos que  $D$  depende da *distribuição* dos espectros observados em fase orbital, mas não da *forma* dos espectros. Em outras palavras, a singularidade das equações não depende da forma dos espectros. Escrevendo o produto e quadrados que aparecem na Eq. (3.30), explicitamente, temos

$$\begin{aligned} L_1 L_2 &= \sum_{j=1}^J \ell_{1,j}^2 \ell_{2,j}^2 + \sum_{j'=1}^{j-1} \sum_{j=2}^J (\ell_{1,j}^2 \ell_{2,j'}^2 + \ell_{1,j'}^2 \ell_{2,j}^2), \\ R^2 &= \sum_{j=1}^J \ell_{1,j}^2 \ell_{2,j}^2 r^2 \left( \frac{m}{N} (\beta_{2,j} - \beta_{1,j}) \right) \\ &\quad + 2 \sum_{j'=1}^{j-1} \sum_{j=2}^J \ell_{1,j} \ell_{1,j'} \ell_{2,j} \ell_{2,j'} r \left( \frac{m}{N} (\beta_{2,j} - \beta_{1,j}) \right) r \left( \frac{m}{N} (\beta_{2,j'} - \beta_{1,j'}) \right) \quad e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q^2 &= \sum_{j=1}^J \ell_{1,j}^2 \ell_{2,j}^2 q^2 \left( \frac{m}{N} (\beta_{2,j} - \beta_{1,j}) \right) \\
&\quad + 2 \sum_{j'=1}^{j-1} \sum_{j=2}^J \ell_{1,j} \ell_{1,j'} \ell_{2,j} \ell_{2,j'} q \left( \frac{m}{N} (\beta_{2,j} - \beta_{1,j}) \right) q \left( \frac{m}{N} (\beta_{2,j'} - \beta_{1,j'}) \right). \quad (3.31)
\end{aligned}$$

Considerando o fato de que as contribuições em luz das componentes são normalizadas ( $\ell_{1,j} + \ell_{2,j} = 1$ , para  $j$  e  $j'$ ) e o fato de que apenas os termos em  $j' \neq j$  permanecem,  $D^{\frac{1}{2}}$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
D^{\frac{1}{2}} &= \sum_{j'=1}^{j-1} \sum_{j=2}^J \left( \ell_{1,j}^2 \ell_{2,j'}^2 + \ell_{1,j'}^2 \ell_{2,j}^2 - 2 \ell_{1,j} \ell_{1,j'} \ell_{2,j} \ell_{2,j'} \cos 2\pi \frac{m}{N} (\beta_{2,j} - \beta_{1,j} - \beta_{2,j'} + \beta_{1,j'}) \right) \\
&= \sum_{j'=1}^{j-1} \sum_{j=2}^J (\ell_{1,j} \ell_{2,j'} - \ell_{1,j'} \ell_{2,j})^2 \\
&\quad + 2 \sum_{j'=1}^{j-1} \sum_{j=2}^J \ell_{1,j} \ell_{1,j'} \ell_{2,j} \ell_{2,j'} \left( 1 - \cos 2\pi \frac{m}{N} (\beta_{2,j} - \beta_{1,j} - \beta_{2,j'} + \beta_{1,j'}) \right) \\
&= \sum_{j'=1}^{j-1} \sum_{j=2}^J (\ell_{1,j} - \ell_{1,j'})^2 \\
&\quad + 2 \sum_{j'=1}^{j-1} \sum_{j=2}^J \ell_{1,j} \ell_{1,j'} \ell_{2,j} \ell_{2,j'} \left( 1 - \cos 2\pi \frac{m}{N} (\beta_{2,j} - \beta_{1,j} - \beta_{2,j'} + \beta_{1,j'}) \right). \quad (3.32)
\end{aligned}$$

Essa expressão é uma soma de números positivos. O determinante pode ser zero apenas quando *todos* os termos na soma são nulos. Conseqüentemente, no sentido analítico, o conjunto de equações (3.23) é não-singular para qualquer binária com fatores de luz de suas componentes dependentes do tempo, ou seja, ( $\ell_{1,j}$  e  $\ell_{2,j}$  dependentes de  $j$ ). Para uma binária com fatores de luz constantes a Eq. (3.32) simplifica, tornando-se

$$D^{\frac{1}{2}} = 2 \ell_1^2 \ell_2^2 \sum_{j'=1}^{j-1} \sum_{j=2}^J \left( 1 - \cos 2\pi \frac{m}{N} (\beta_{2,j} - \beta_{1,j} - \beta_{2,j'} + \beta_{1,j'}) \right). \quad (3.33)$$

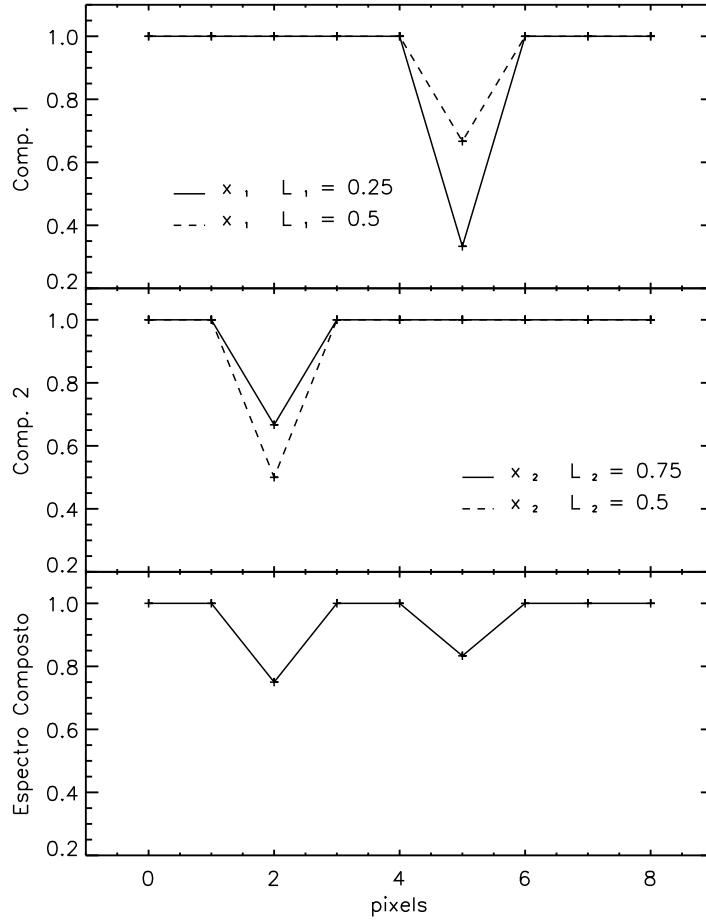
Note que  $D = 0$ , para qualquer combinação ( $j, j'$ ) onde o cosseno é 1. Isto acontece para o modo *zero* (veja Eq. 3.33), mas não para qualquer outro modo, a menos que os desvios Doppler nos espectros sigam um padrão muito específico. Finalmente, o conjunto de equações será quase-singular se todos os desvios Doppler são pequenos em relação a  $\frac{N}{m}$  (e se, além disso, os fatores de luz não variam significativamente). Isto acontece mais facilmente para regiões espectrais analisadas contendo grande número de pixels (altos valores de  $N$ ) e modos de Fourier de freqüências mais baixas (pequenos valores de  $m$ ).

Para o modo 0, a Eq. (3.23) se reduz a (assumindo constante os fatores de luz das componentes)

$$\ell_1 v_{1,0} + \ell_2 v_{2,0} = \frac{1}{JN} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^J y_{n,j} \quad (3.34)$$

$$\ell_1 V_{1,0} + \ell_2 V_{2,0} = 0 \quad (3.35)$$

Para determinar os valores reais dos espectros das componentes, a solução da Eq. (3.35) é  $V_{1,0} = V_{2,0} = 0$ . A Eq. (3.34) expressa que apenas a combinação linear dos valores médios



**Figura 3.1:** Exemplo de um sistema binário, mostrando a indeterminação do bloqueio de linha em cada espectro das componentes devido à não-variabilidade em luz das mesmas. Os painéis superior e intermediário mostram, respectivamente, duas possíveis soluções para os espectros reconstruídos ( $x_k$ ,  $k = 1, 2$ ) e fatores de luz ( $\ell_k$ ,  $k = 1, 2$ ) para as componentes 1 e 2 e, no painel inferior, o espectro composto de entrada para uma determinada fase orbital. Vemos que  $\ell_1 x_1 + \ell_2 x_2$  produz o mesmo espectro composto de entrada que  $\ell'_1 x'_1 + \ell'_2 x'_2$ . Note que a linha forte de absorção em  $x_1$ , que contribui com uma fração mais baixa de luz ( $\ell_1$ ), produz a mesma contribuição ao espectro composto como se fosse uma componente com linha de absorção mais fraca (espectro  $x'_1$ ), contribuindo com fração mais alta de luz ( $\ell'_1$ ).

dos espectros das componentes está relacionada com a média dos espectros compostos de entrada. Ou, equivalentemente, a fração da luz bloqueada pelas linhas espectrais nos dois espectros das componentes está relacionada com o bloqueio de linha observado, mas as equações não permitem determinar unicamente o bloqueio de linha em cada espectro das componentes. De fato, uma componente com fortes linhas de absorção contribuindo com uma fração mais baixa de luz produzirá a mesma contribuição ao espectro composto como se ela fosse uma componente com linhas de absorção mais fracas, contribuindo com uma fração mais alta de luz (veja exemplo mostrado na Fig. 3.1).

A indeterminação nos fatores de luz pode ser evitada quando ambas componentes têm uma linha espectral que é completamente saturada (100% de absorção). Não há necessidade de se ter a mesma linha espectral nas duas componentes, mas quando diferentes linhas espectrais são envolvidas, a razão dos fatores de luz das componentes deve ser



idêntica nos dois comprimentos de onda. Se o valor do fator de luz de uma componente (com uma contribuição muito fraca) for fisicamente inconsistente, o seu espectro poderá produzir uma linha de absorpção na qual o seu centro tem fluxo negativo. Contudo, um limite superior para a contribuição em luz pode ser determinado se apenas uma componente tem uma linha de absorpção profunda.

As considerações acima implicam que é importante escolher cuidadosamente a região em comprimento de onda a ser analisada. Em particular, para um sistema composto por estrelas frias cujas as contribuições em luz são constantes, é útil incluir regiões espectrais em torno das linhas de Ca II K & H, em 393 nm e 397 nm, ou em torno das linhas de Na I, em 589 nm e 590 nm.

Note que esta indeterminação não ocorre quando  $\frac{\ell_1}{\ell_2}$  varia durante a órbita, por exemplo, quando a binária é eclipsante. Neste caso, as equações para o modo 0 são:

$$\begin{aligned} v_{1,0} \sum_{j=1}^J \ell_{1,j}^2 + v_{2,0} \sum_{j=1}^J \ell_{1,j} \ell_{2,j} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^J \ell_{1,j} y_{n,j}, \\ v_{1,0} \sum_{j=1}^J \ell_{1,j} \ell_{2,j} + v_{2,0} \sum_{j=1}^J \ell_{2,j}^2 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^J \ell_{2,j} y_{n,j}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

conduzindo às soluções

$$\begin{aligned} v_{1,0} &= \frac{1}{N} \frac{\sum_{j=1}^J \ell_{2,j}^2 \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^J \ell_{1,j} y_{n,j} - \sum_{j=1}^J \ell_{1,j} \ell_{2,j} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^J \ell_{2,j} y_{n,j}}{\sum_{j=1}^J \ell_{1,j}^2 \sum_{j=1}^J \ell_{2,j}^2 - \left( \sum_{j=1}^J \ell_{1,j} \ell_{2,j} \right)^2}, \\ v_{2,0} &= \frac{1}{N} \frac{\sum_{j=1}^J \ell_{1,j} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^J \ell_{2,j} y_{n,j} - \sum_{j=1}^J \ell_{1,j} \ell_{2,j} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^J \ell_{1,j} y_{n,j}}{\sum_{j=1}^J \ell_{1,j}^2 \sum_{j=1}^J \ell_{2,j}^2 - \left( \sum_{j=1}^J \ell_{1,j} \ell_{2,j} \right)^2}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

que são bem determinadas quando os fatores de luz variam significativamente. Isto define, de forma unívoca, a normalização dos espectros das componentes.

Para  $m \neq 0$ , no caso de *não variabilidade em luz* das componentes, a singularidade ocorre apenas se, para todas as combinações  $(j, j')$ ,

$$\frac{m}{N} (\beta_{2,j} - \beta_{1,j} - \beta_{2,j'} + \beta_{1,j'}) \in \mathbf{Z}, \quad (3.38)$$

onde  $\mathbf{Z}$  é o conjunto dos números inteiros positivos. Escrevendo as velocidades como fração das amplitudes de velocidades  $K_1$  e  $K_2$  expressas em pixels, isto é,  $\beta_{1,j} = f_j K_1$  e  $\beta_{2,j} = f_j K_2$ , a condição (3.38) transforma em

$$\frac{m}{N} (K_2 - K_1) (f_j - f_{j'}) \in \mathbf{Z}. \quad (3.39)$$

A Eq. (3.39) indica que a singularidade é mais facilmente encontrada quando

- um pequeno número de espectros de entrada é usado, pois quanto menor é o número de espectros de entrada usados maiores são as chances de se obter combinações de  $(f_j, f_{j'})$  que são números inteiros;
- os espectros de entrada correspondem a fases espaçadas por intervalos exatamente iguais e constantes em velocidade. Essa condição, como discutido em Torres (2002), não acrescenta nenhuma informação útil sobre o movimento Doppler das componentes, aumentando as chances de singularidades. A situação mais favorável é que as fases sejam espaçadas em valores aproximadamente iguais em velocidade.

A singularidade aparece mais facilmente nos modos com baixos valores de  $|m|$ . A Eq. (3.39) indica, ainda, que um conjunto de modos  $\pm m_0, \pm 2m_0, \pm 4m_0, \dots$  pode ser singular, se  $m_0$  é o modo positivo mais baixo, que é singular, e os múltiplos envolvidos são números pares.

Para pequenas velocidades, com relação a  $\frac{N}{m}$ , e considerando fatores de luz constantes,  $D^{\frac{1}{2}}$  é aproximadamente (usando as Eqs. (3.30) e (3.32) com  $\cos t \simeq 1 - t^2$ )

$$D^{\frac{1}{2}} \simeq 8\pi^2 \left(\frac{m}{N}\right)^2 \ell_1^2 \ell_2^2 \sum_{j'=1}^{j-1} \sum_{j=2}^J (\beta_{2,j} - \beta_{1,j} - \beta_{2,j'} + \beta_{1,j'})^2. \quad (3.40)$$

Fatores de luz muito diferentes da unidade abaixam o valor do determinante. Em casos reais, calculados com dados encontrados na literatura, obtemos  $\ell_1 \ell_2 \gg 10^{-2}$ ,  $N < 10^4$  e  $\sum_{j'=1}^{j-1} \sum_{j=2}^J (\beta_{2,j} - \beta_{1,j} - \beta_{2,j'} + \beta_{1,j'})^2 \gg 100$ ; em outras palavras  $D^{\frac{1}{2}} \gg 8\pi^2 m^2 10^{-10} > 3 \times 10^{-8}$  (para altos modos de Fourier). Embora isto seja significativamente maior do que erros computacionais de truncamento em cálculos em precisão dupla, cuidados devem ser tomados ao estudar sistemas com companheiras muito fracas, pequenos desvios Doppler e poucos espectros de entrada. Note que a versão padrão (distribuída) do código KOREL trabalha em precisão simples. Casos mais comuns (por exemplo com  $\ell_1 \ell_2 \simeq 10^{-1}$ ,  $N \simeq 10^3$ , e  $\sum_{j=2}^J (\beta_{2,j} - \beta_{1,j} - \beta_{2,j'} + \beta_{1,j'})^2 \simeq 10^4$ ) resultam em  $D^{\frac{1}{2}} \simeq 10^{-4}$  para  $|m| = 1$  tal que a singularidade (numérica) das equações para baixos modos é, em geral, de pouco interesse prático. Concluimos que as ondulações de baixa-freqüência observadas nos espectros dessembaraçados não podem ser explicadas, de forma fácil, por uma quase-singularidade das equações no espaço de Fourier. Na Sec. 2.7 mostramos que tais efeitos são naturalmente produzidos por espectros compostos de entrada influenciados por viés.

Resumindo, a variabilidade dos fatores de luz garante a não-singularidade das equações. Para binárias onde os fatores de luz das componentes são independentes do tempo, a equação para o modo 0 é sempre singular. Baixos modos, diferentes de zero, podem ser quase-singulares em casos extremos, combinando espectros com grande número de pixels, pequenos deslocamentos em velocidade e componentes fracas. Modos de Fourier de alta freqüência podem ser singulares para casos patológicos de distribuição das observações sobre as fases orbitais, incluindo conjunto de dados com pouca quantidade de espectros de entrada. Na Sec. 3.3 será mostrado explicitamente casos mais realistas e com poucos pixels. Para avaliar o risco de singularidades e instabilidades numéricas, é recomendado inspecionar o valor do determinante para todos os modos de Fourier e resolver as equações usando a decomposição de valor singular (DVS).

### 3.3 Exemplos Ilustrativos com Poucos Pixels

Para estudar algumas limitações intrínsecas dos métodos, um caso simples será discutido com mais detalhe, cujas características são

- espectro intrínseco das componentes: primeira componente ( $x_{1,i}$ ) com contínuo unitário, exceto um pixel com intensidade igual a  $\frac{2}{3}$ , e segunda componente ( $x_{2,i}$ ) com contínuo unitário,  $\frac{1}{3}$  no pixel precedente à linha de absorção na primeira componente (o índice  $i$  refere-se ao pixel):

$$x_{k,i} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{2}{3} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

- contribuição em luz das componentes:  $\ell_1 = \frac{3}{4}$ ,  $\ell_2 = \frac{1}{4}$
- número de fases orbitais: 3 ou 4 com deslocamentos Doppler, *em pixel*, iguais a

$$\beta_{kj} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0,5 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

para  $k = 1, 2$  e  $j = 1, \dots, 4$ . Todas as sub-combinações com três fases são analisadas, mas em particular uma com a última fase será discutida com mais detalhe. Note que na quarta fase, o deslocamento Doppler da segunda componente é uma fração de um pixel. Todas as outras fases têm velocidades com valores inteiros de pixels.

O número de pixels considerado ( $N=8$ ) é o mínimo requerido para não ter os efeitos de borda no espaço de Fourier: devido à suposição de que os padrões espectrais são periódicos, os pixels extremos têm necessariamente que estar, em qualquer fase, no nível do contínuo.

No espaço de velocidade o método do DVS é adotado. O tamanho da matriz depende (a) da amplitude máxima de velocidade por pixel,  $\beta_{kj}$ , de cada componente quando essa se desloca para o azul e (b) para o vermelho e (c) do número de pixels no espectro composto (5 nesse caso). Conseqüentemente, 9 ( $=5+2+2$ ) colunas serão usadas para traçar a informação relacionada com a primeira componente e mais 7 ( $=5+1+1$ ) para a segunda.

Assim, os espectros compostos de entrada são

- Espaço de Fourier

$$(y_{1,i})_{i=0,\dots,7} = \left[ 1, 1, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{6}, 1, 1, 1 \right] \quad (3.43)$$

$$(y_{2,i})_{i=0,\dots,7} = \left[ 1, 1, 1, \frac{5}{6}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1 \right] \quad (3.44)$$

$$(y_{3,i})_{i=0,\dots,7} = \left[ 1, 1, \frac{5}{6}, 1, 1, 1, \frac{3}{4}, 1 \right] \quad (3.45)$$

$$(y_{4,i})_{i=0,\dots,7} = \left[ 1, 1, 1, \frac{2}{3}, \frac{11}{12}, 1, 1, 1 \right] \quad (3.46)$$

O Código KOREL irá subtrair o valor médio,  $\frac{91}{96}$ , antes de aplicar a transformada de Fourier.

- Espaço de velocidade:

$$(y_{1,i})_{i=2,\dots,6} = \left[ \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{6}, 1, 1 \right] \quad (3.47)$$

$$(y_{2,i})_{i=2,\dots,6} = \left[ 1, \frac{5}{6}, \frac{3}{4}, 1, 1 \right] \quad (3.48)$$

$$(y_{3,i})_{i=2,\dots,6} = \left[ \frac{5}{6}, 1, 1, 1, \frac{3}{4} \right] \quad (3.49)$$

$$(y_{4,i})_{i=2,\dots,6} = \left[ 1, \frac{2}{3}, \frac{11}{12}, 1, 1 \right] \quad (3.50)$$

A formulação matricial do problema é  $A_{kj} \cdot X_k = Y_j$  ( $k = 1, 2$ ;  $j = 1, \dots, 4$ ):

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \\ A_{13} & A_{23} \\ A_{14} & A_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_4 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

$$A_{11} = \ell_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{21} = \ell_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

$$A_{12} = \ell_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{22} = \ell_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

$$A_{13} = \ell_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{23} = \ell_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

$$A_{14} = \ell_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{24} = \ell_2 \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ \vdots \\ x_{1,9} \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_{2,1} \\ \vdots \\ x_{2,7} \end{pmatrix} \quad Y_j = \begin{pmatrix} y_{j,2} \\ \vdots \\ y_{j,6} \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

Note que a submatriz  $A_{24}$  é bidiagonal como uma consequência de deslocamentos não-inteiros de pixels do espectro da segunda componente.

### 3.3.1 Caso 1: 3 fases $(\beta_{kj})_{j=1,3}^{k=1,2}$

#### 3.3.1.1 Análise no espaço de Fourier

Uma vez que o valor médio no espectro de entrada, Eqs. (3.43)–(3.46), foi escolhido como sendo nulo, o modo 0 não precisa ser resolvido (pois representa exatamente o valor médio no espectro de entrada). Note que, nesse caso particular,  $Q = 0$  independe dos modos  $m$  e  $N$ , devido à simetria nas fases orbitais, tal que a Eq. (3.23) se separa em dois conjuntos mais simples de equações

$$\begin{pmatrix} \ell_1^2 K & R \\ R & \ell_2^2 K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,m} \\ v_{2,m} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \eta_{1,m} \\ \eta_{2,m} \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

e

$$\begin{pmatrix} \ell_1^2 K & R \\ R & \ell_2^2 K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{1,m} \\ V_{2,m} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \eta_{3,m} \\ \eta_{4,m} \end{pmatrix}, \quad (3.58)$$

onde a definição dos  $\eta$ 's é óbvia pela comparação com Eq. (3.23). A Tab. 3.1 lista os valores numéricos das quantidades que aparecem na Eq. (3.23), os valores dos  $\eta$ 's e a solução dos  $v_{km}$  e  $V_{km}$  dada pelas Eqs. (3.25), (3.27)–(3.29). A transformada de Fourier inversa de  $v_{1m}$ ,  $v_{2m}$ ,  $V_{1m}$  e  $V_{2m}$  conduz exatamente ao espectro composto de entrada  $X_1$  e  $X_2$ .

**Tabela 3.1:** Quantidades numéricas e solução no espaço de Fourier (veja as Eqs. (3.8), (3.9), (3.23), (3.57) e (3.58) para a definição de cada variável descrita na tabela).  $\eta_{1,m}$  e  $\eta_{2,m}$  terão o mesmo valor para os modos  $\pm m$ , porém  $\eta_{3,m}$  e  $\eta_{4,m}$  terão o mesmo valor *absoluto* para  $\pm m$ , mas  $\eta_{3,m} = -\eta_{3,-m}$  e  $\eta_{4,m} = -\eta_{4,-m}$ , para  $m = 1, 2, 3$ .

	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$\eta_{1,m}$	$\frac{3}{4} \frac{7+\sqrt{2}}{12}$	$-\frac{3}{4} \frac{9}{12}$	$\frac{3}{4} \frac{7-\sqrt{2}}{12}$	$-\frac{3}{4} \frac{11}{12}$
$\eta_{2,m}$	$\frac{1}{4} \frac{3}{12}$	$-\frac{1}{4} \frac{3}{12}$	$\frac{1}{4} \frac{3}{12}$	$\frac{1}{4} \frac{9}{12}$
$\eta_{3,m}$	$\frac{3}{4} \frac{-2+\sqrt{2}}{12}$	$-\frac{3}{4} \frac{2}{12}$	$\frac{3}{4} \frac{2+\sqrt{2}}{12}$	0
$\eta_{4,m}$	$\frac{1}{4} \frac{3\sqrt{2}}{12}$	$-\frac{1}{4} \frac{6}{12}$	$+\frac{1}{4} \frac{3\sqrt{2}}{12}$	0
R	$\frac{3}{16}(1-\sqrt{2})$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}(1+\sqrt{2})$	$-\frac{3}{16}$
$v_{1m}$	$\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{24}$
$V_{1m}$	0	0	0	0
$v_{2m}$	$\frac{\sqrt{2}}{24}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{24}$	$\frac{1}{12}$
$V_{2m}$	$\frac{\sqrt{2}}{24}$	$-\frac{1}{12}$	$+\frac{\sqrt{2}}{24}$	0

### 3.3.1.2 Análise no espaço de velocidade

Para esse caso a equação matricial é

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \\ A_{13} & A_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_3 \end{pmatrix}, \quad (3.59)$$

com os símbolos definidos nas Eqs. (3.47)–(3.49), (3.52)–(3.54) e (3.56). Apenas poucas variáveis aparecem em cada equação, o que pode ser visto escrevendo-as explicitamente:

$$\frac{3}{4}x_{1,i} + \frac{1}{4}x_{2,i-4} = y_{i-3,1} \quad (i = 5, \dots, 9) \quad (3.60)$$

$$\frac{3}{4}x_{1,i} + \frac{1}{4}x_{2,i-1} = y_{i-1,2} \quad (i = 3, \dots, 7) \quad (3.61)$$

$$\frac{3}{4}x_{1,i} + \frac{1}{4}x_{2,i+2} = y_{i+1,3} \quad (i = 1, \dots, 5) \quad (3.62)$$

A primeira solução a ser pensada é a minimização do comprimento do vetor:  $A \cdot X - Y$ . No código **CRES**, a solução é encontrada através do **DVS** da matriz do lado esquerdo da Eq. (3.59). O **DVS** não é resolvido facilmente de forma analítica, conseqüentemente os valores singulares são determinados com o **CRES** e a relação com a solução clássica será discutida.

Minimizando o quadrado do comprimento  $A \cdot X - Y$

$$L^2 = \sum_{i=5}^9 \left( \frac{3}{4}x_{1,i} + \frac{1}{4}x_{2,i-4} - y_{i-3,1} \right)^2 + \sum_{i=3}^7 \left( \frac{3}{4}x_{1,i} + \frac{1}{4}x_{2,i-1} - y_{i-1,2} \right)^2 + \sum_{i=1}^5 \left( \frac{3}{4}x_{1,i} + \frac{1}{4}x_{2,i+2} - y_{i+1,3} \right)^2, \quad (3.63)$$

e calculando

$$\frac{\partial L^2}{\partial x_{k,r_k}} = 0, \quad (3.64)$$

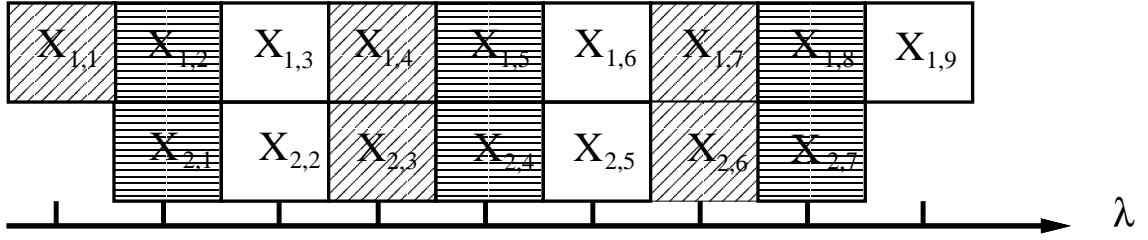
encontraremos as 16 equações normais resultantes (com  $k = 1, 2$ ;  $r_1 = 1, \dots, 9$ ;  $r_2 = 1, \dots, 7$ ) que podem ser escritas na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \\ x_{1,4} \\ x_{1,5} \\ x_{1,6} \\ x_{1,7} \\ x_{1,8} \\ x_{1,9} \\ x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \\ x_{2,4} \\ x_{2,5} \\ x_{2,6} \\ x_{2,7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ 4 \\ 4 \\ \frac{11}{3} \\ 9 \\ 4 \\ \frac{11}{3} \\ 4 \\ 4 \\ 3 \\ 8 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad (3.65)$$

As linhas consecutivas correspondem às derivadas parciais para as componentes consecutivas dos vetores  $X_1$  e  $X_2$ , respectivamente, na Eq. (3.51).

Rearranjando as colunas na matriz (isto é, mudando a ordem das componentes no vetor  $X_k$ ) e então rearranjando as linhas (mudando a ordem das componentes no vetor  $Y_j$ ), conduz a:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_a & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,4} \\ x_{1,7} \\ x_{2,3} \\ x_{2,6} \\ x_{1,2} \\ x_{1,5} \\ x_{1,8} \\ x_{2,1} \\ x_{2,4} \\ x_{2,7} \\ x_{1,3} \\ x_{1,6} \\ x_{1,9} \\ x_{2,2} \\ x_{2,5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{11}{3} \\ \frac{11}{3} \\ 10 \\ 8 \\ 4 \\ 9 \\ 4 \\ 3 \\ 11 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad (3.66)$$



**Figura 3.2:** Esquema mostrando a relação  $\lambda(x_{2,i}) = \lambda(x_{1,i+1})$ . Cada quadrado, representa os pixels  $x_{1,i}$ , para  $i = 1, \dots, 9$  para componente 1 e  $x_{2,i}$  para  $n = 1, \dots, 7$  para a componente 2. Os três diferentes desenhos indicam cada um dos três conjuntos da Eq. (3.68).

onde  $\mathbf{0}$  são matrizes nulas com as mesmas dimensões das matrizes sub-blocos  $\mathbf{M}_a$ ,  $\mathbf{M}_b$  e  $\mathbf{M}_c$ , e

$$\mathbf{M}_a = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_b = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_c = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

A Eq. (3.66) mostra que o problema é separado em 3 problemas distintos com um conjunto independente de variáveis. Note que o determinante de cada submatriz é zero. Resolvendo cada conjunto independente pelo método clássico, encontramos o conjunto triplamente infinito de soluções

$$\begin{aligned} x_{1,1} &= x_{1,4} = x_{1,7} = \frac{4 - x_{2,6}}{3} = \frac{10 - 3x_{2,3}}{9}, \\ x_{1,2} &= x_{1,8} = x_{1,5} + \frac{1}{3} = \frac{4 - x_{2,1}}{3} = \frac{4 - x_{2,4}}{3} = \frac{4 - x_{2,7}}{3}, \\ x_{1,3} &= x_{1,6} = x_{1,9} = \frac{4 - x_{2,2}}{3} = \frac{4 - x_{2,5}}{3}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Vemos que cada subconjunto tem infinitas soluções e aquela fisicamente correta é encontrada apenas quando colocamos um valor de contínuo igual a 1 em cada subconjunto, por exemplo,  $x_{1,4} = x_{1,6} = x_{1,8} = 1$ . As variáveis  $x_{1,5}$  e  $x_{2,3}$  são as que esperamos que contenham a linha, respectivamente, para cada componente.

A Fig. 3.2 mostra esquematicamente a posição dos pixels das componentes em função do comprimento de onda, para o conjunto de soluções definido pela Eq. (3.68). Note que os pixels de ambas componentes que possuem o mesmo comprimento de onda,  $\lambda(x_{2,i}) = \lambda(x_{1,i+1})$ , estão contidos no mesmo subconjunto de soluções.

O quê, exatamente, faz o DVS quando aplicado às equações normais? Três valores singulares são exatamente zero. Isto obviamente corresponde à indeterminação em cada um dos três subconjuntos de equações. De fato, a matrix  $A_{kj}$  da Eq. (3.51) pode ser dividida da mesma maneira como mostrado em (3.66)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,4} \\ x_{1,7} \\ x_{2,3} \\ x_{2,6} \\ x_{1,2} \\ x_{1,5} \\ x_{1,8} \\ x_{2,1} \\ x_{2,4} \\ x_{2,7} \\ x_{1,9} \\ x_{1,3} \\ x_{1,6} \\ x_{2,5} \\ x_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{11}{3} \\ \frac{11}{3} \\ 10 \\ 8 \\ 4 \\ 9 \\ 4 \\ 3 \\ 11 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad (3.69)$$

onde,

$$\mathbf{M}_d = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \mathbf{M}_e = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \mathbf{M}_f = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

O código numérico que usamos aplica DVS somente em matrizes quadradas ou retangulares, onde o número de linhas é maior que o número de colunas. A matriz projeto correspondente ao exemplo discutido acima tem 15 linhas e 16 colunas. Portanto, o cálculo numérico foi feito estendendo o conjunto de dados com mais um pixel contendo contínuo em cada fim do intervalo espectral, ou seja, o índice  $i$  nas Eq. (3.60)–(3.62) vai de  $5, \dots, 11$ ;  $3, \dots, 9$  and  $1, \dots, 7$ , respectivamente. A matriz projeto tem então 20 linhas e colunas, mas isso não implica em mudanças essenciais.

A solução sem qualquer renormalização, é

$$X_1 = \left[ \frac{36}{31}, \frac{34}{31}, \frac{109}{90}, \frac{36}{31}, \frac{34}{31}, \frac{109}{90} - \frac{1}{3}, \frac{36}{31}, \frac{34}{31}, \frac{109}{90}, \frac{36}{31}, \frac{34}{31} \right] \quad (3.71)$$

$$X_2 = \left[ \frac{22}{31}, \frac{11}{30}, \frac{16}{31}, \frac{22}{31} - \frac{2}{3}, \frac{11}{30}, \frac{16}{31}, \frac{22}{31}, \frac{11}{30}, \frac{16}{31} \right]$$

ou, escrita de outra forma,

$$X_1 = 1 + \left[ \frac{5}{31}, \frac{3}{31}, \frac{19}{90}, \frac{5}{31}, \frac{3}{31}, \frac{19}{90} - \frac{1}{3}, \frac{5}{31}, \frac{3}{31}, \frac{19}{90}, \frac{5}{31}, \frac{3}{31} \right] \quad (3.72)$$

$$X_2 = 1 - 3 \left[ \frac{3}{31}, \frac{19}{90}, \frac{5}{31}, \frac{3}{31} + \frac{2}{9}, \frac{19}{90}, \frac{5}{31}, \frac{3}{31}, \frac{19}{90}, \frac{5}{31} \right]$$

Observe que as Eqs. (3.71) e (3.72) são dispostas de forma que os valores dos pixels das componentes correspondem ao mesmo comprimento de onda, (veja exemplo da Fig. 3.2).

A partir da solução acima para os espectros  $X_1$  e  $X_2$ , vemos que:

- (a) DVS não seleciona a solução fisicamente correta no nível do contínuo;



- (b) foram escolhidos três valores diferentes nos três subconjuntos:  $\frac{36}{31}$ ,  $\frac{34}{31}$  e  $\frac{109}{90}$  (veja Eq. 3.71);
- (c) os valores nos pixels de  $X_1$  e  $X_2$ , pertencentes ao mesmo subconjunto de equações, estão relacionados como descrito na Eq. (3.68).

A solução escolhida pelo DVS é tal que minimiza o comprimento do vetor em cada subconjunto

$$T_1 = \sum_{j=0}^3 x_{1,3j+1}^2 + \sum_{j=1}^3 x_{2,3j}^2, \quad (3.73)$$

$$T_2 = \sum_{j=0}^3 x_{1,3j+2}^2 + \sum_{j=0}^2 x_{2,3j+1}^2, \quad (3.74)$$

$$T_3 = \sum_{j=1}^3 x_{1,3j}^2 + \sum_{j=0}^2 x_{2,3j+2}^2, \quad (3.75)$$

Note que os pixels representando as linhas são, agora,  $x_{1,6}$  e  $x_{2,4}$ . Usando as considerações da Eq. (3.68), as Eqs. (3.73)–(3.75) podem ser expressas em termos de  $x_{1,1}$ ,  $x_{1,2}$  e  $x_{1,3}$

$$\begin{aligned} T_1 &= 4x_{1,1}^2 + 3x_{2,3}^2 = \\ &= 4x_{1,1}^2 + 3(4 - 3x_{1,1})^2 = \\ &= 31x_{1,1}^2 - 72x_{1,1} + 48, \end{aligned} \quad (3.76)$$

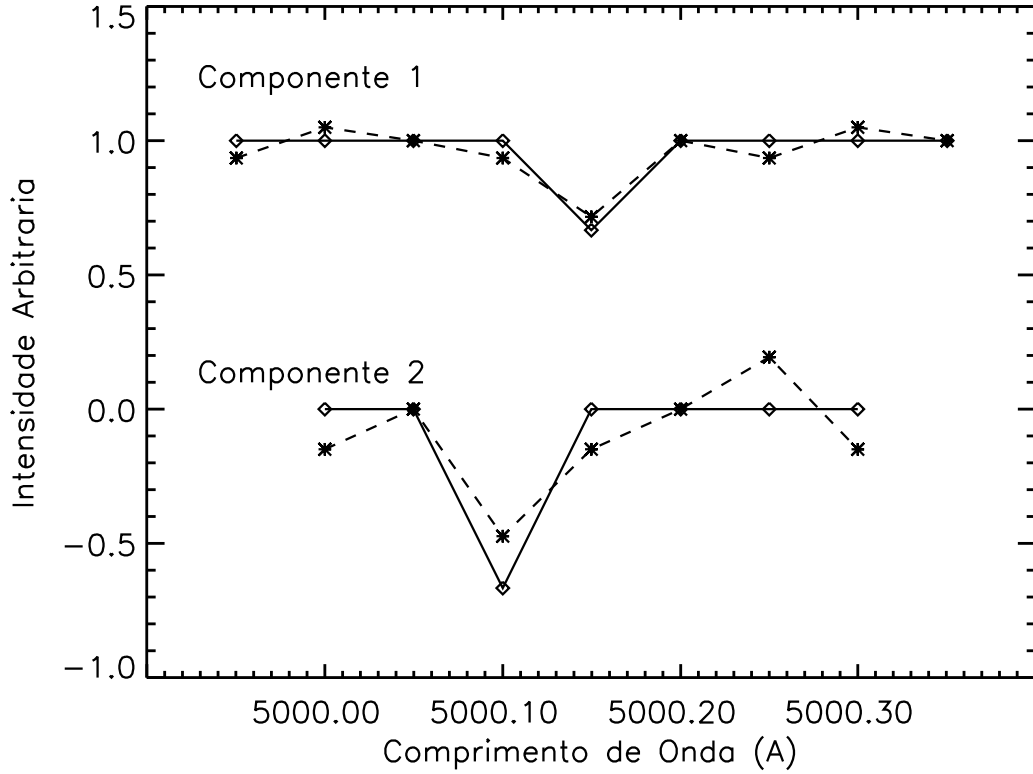
$$\begin{aligned} T_2 &= 4x_{1,2}^2 + 2x_{2,1}^2 + x_{2,4}^2 = \\ &= 4x_{1,2}^2 + 2(4 - 3x_{1,2})^2 + \left(\frac{10}{3} - 3x_{1,2}\right)^2 = \\ &= 31x_{1,2}^2 + 68x_{1,2} + \frac{388}{9}, \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} T_3 &= 2x_{1,3}^2 + x_{1,6}^2 + 3x_{2,2}^2 = \\ &= 2x_{1,3}^2 + \left(x_{1,3} - \frac{1}{3}\right)^2 + 3(4 - 3x_{1,3})^2 = \\ &= 30x_{1,3}^2 - \frac{218}{3}x_{1,3} + \frac{433}{9}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

A condição de mínimo do comprimento para a solução dos vetores ( $\frac{\partial T_1}{\partial x_{1,1}} = \frac{\partial T_2}{\partial x_{1,2}} = \frac{\partial T_3}{\partial x_{1,3}} = 0$ ) implica que  $x_{1,1} = \frac{36}{31}$ ,  $x_{1,2} = \frac{34}{31}$  e  $x_{1,3} = \frac{109}{90}$ , explicando o resultado da Eq. (3.71).

A Fig. 3.3 ilustra que o DVS superpõe sobre o espectro das componentes uma função espúria com uma periodicidade de 3 pixels, uma característica altamente perturbadora. A periodicidade corresponde ao fator comum mais alto a todos os  $|\beta_{2j} - \beta_{1j} - \beta_{2j'} + \beta_{1j'}|$ .

No sentido matemático, a solução proporcionada pelo DVS é bem determinada mas impossibilita a reconstrução espectral correta em se tratando de equações degeneradas. A forma dos padrões espúrios depende da diferença de tamanho dos sub-blocos das matrizes  $\mathbf{M}_a$ ,  $\mathbf{M}_b$  e  $\mathbf{M}_c$  e da forma dos espectros das componentes. Dos testes realizados, notamos

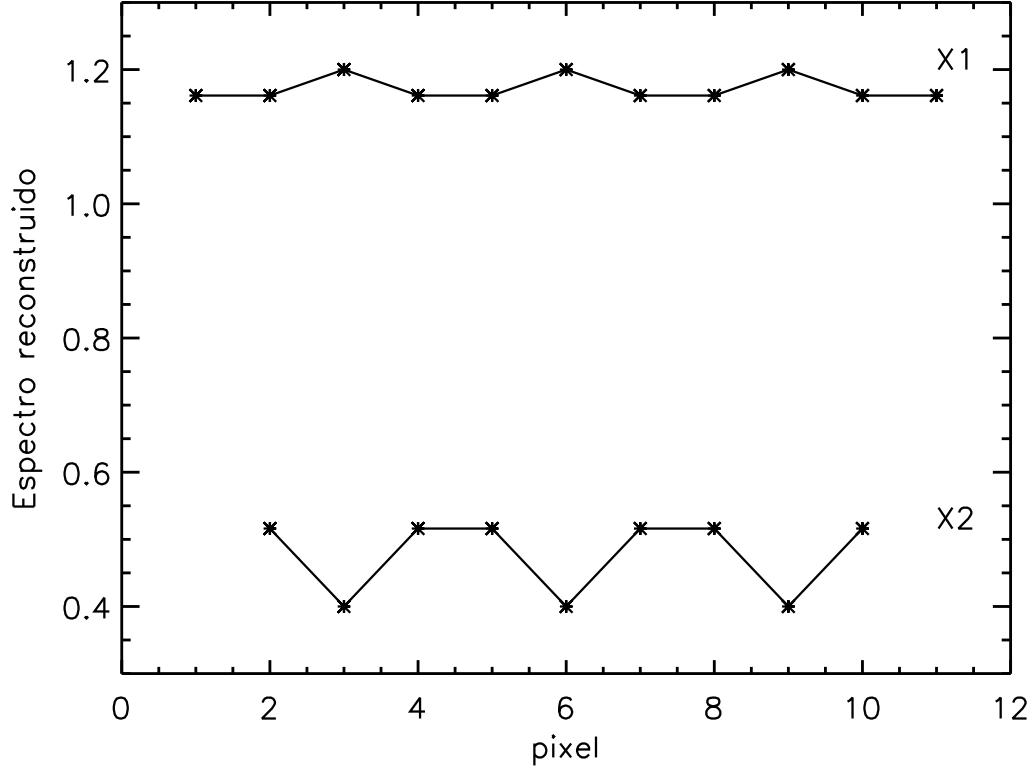


**Figura 3.3:** Comparação entre os espectros renormalizados das componentes, obtidos pelo CRES (linha tracejada) e o espectro correto (linha contínua) como definido pela Eq. (3.41). Vemos claramente a presença de uma função espúria com uma periodicidade de 3 pixels superposta ao espectro reconstruídos das componentes. A renormalização foi adotada para colocar o contínuo, em média, no nível correto (por simplicidade, o espectro da secundária foi deslocado de uma unidade).

que um padrão poderia ser detectado mesmo se os espectros observados fossem contínuo puro. Para o caso desenvolvido aqui, 2 dos 3 subseqüentes pixels poderiam ter valores idênticos, desde que qualquer dois dos três sub-blocos,  $\mathbf{M}_a$ ,  $\mathbf{M}_b$  e  $\mathbf{M}_c$ , tenham o mesmo tamanho. Ou seja, se os 3 espectros compostos (com 7 pixels) fossem contínuo puro, a solução obtida seria semelhante a Eq. (3.68) e igual a

$$\begin{aligned}
 x_{1,1} &= x_{1,4} = x_{1,7} = x_{1,10} = \frac{4 - x_{2,3}}{3} = \frac{4 - x_{2,6}}{9} = \frac{4 - x_{2,9}}{3}, \\
 x_{1,2} &= x_{1,8} = x_{1,5} = x_{1,11} = \frac{4 - x_{2,1}}{3} = \frac{4 - x_{2,4}}{3} = \frac{4 - x_{2,7}}{3}, \\
 x_{1,3} &= x_{1,6} = x_{1,9} = \frac{4 - x_{2,2}}{3} = \frac{4 - x_{2,5}}{3} = \frac{4 - x_{2,8}}{3}.
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

As matrizes  $\mathbf{M}_a$  e  $\mathbf{M}_b$  terão 7 colunas e  $\mathbf{M}_c$  6 colunas, produzindo um padrão espúrio de periodicidade 3. Usando das Eqs. (3.73) à (3.75) e requerendo seu mínimo, encontramos que:  $x_{1,1} = x_{1,2} = \frac{36}{31}$ ,  $x_{1,3} = \frac{6}{5}$ ,  $x_{2,1} = x_{2,3} = \frac{16}{31}$  e  $x_{2,2} = \frac{2}{5}$ . A Fig. 3.4 mostra como seriam os espectros reconstruídos (no caso, simples contínuo)  $X_1$  e  $X_2$ .



**Figura 3.4:** Presença de padrões espúrios sobre os espectros reconstruídos de um sistema binário cujos espectros observados são contínuo puro.  $X_1$  e  $X_2$  referem-se aos espectros reconstruídos das componentes. Vide texto para maiores detalhes.

### 3.3.1.3 Discussão: Espaço de Fourier versus Velocidade

Por que há problemas quando o Caso 1 é resolvido no espaço de velocidade e o mesmo não ocorre quando se usa o espaço de Fourier, se ambos os métodos são equivalentes? A explicação é encontrada na suposição implícita da periodicidade dos dados de entrada com relação ao tamanho do intervalo. Qualquer periodicidade que seja incompatível com o valor do comprimento do intervalo ( $N=8$ ), causa o “*não-aparecimento*” do padrão espúrio, uma vez que os dados sobre o pixel  $N + p$  devem ser idênticos àqueles sobre o pixel  $p$ , para todos os valores de  $p$ .

Mas o que acontece se as velocidades das componentes (em pixels) são escolhidas tais que o maior fator comum em relação a todos  $|\beta_{2j} - \beta_{1j} - \beta_{2j'} + \beta_{1j'}|$  seja compatível com  $N$ ? Para responder a essa pergunta, 2 novos conjuntos de velocidades radiais para as componentes foram considerados:

$$(\beta_{1j})_{j=1,\dots,3} = -(\beta_{2j})_{j=1,\dots,3} = [-1, 0, 1] \quad (3.80)$$

ou

$$(\beta_{kj})_{j=1,\dots,3} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.81)$$

Note que o valor máximo para  $|\beta_{2j} - \beta_{1j} - \beta_{2j'} + \beta_{1j'}|$ , considerando todas as combinações  $(j, j')$ , para os casos das Eqs. (3.80) e (3.81) são, respectivamente, 2 e 4. Como

**Tabela 3.2:** Espectros das componentes desembaraçados no espaço de Fourier usando os códigos **FDBinary** e **KOREL**, para  $\frac{\beta_1}{\beta_2} = -3$  (as duas colunas mais para a esquerda) e  $\frac{\beta_1}{\beta_2} = -1$  (as duas colunas mais para a direita). Os espectros foram renormalizados usando o valor médio conhecido dos espectros artificiais das componentes (um menos o bloqueio de linha, em termos astrofísicos).

<b>FDBinary</b>			
$X_1(-3)$	$X_2(-3)$	$X_1(-1)$	$X_2(-1)$
$1 + 0,076389$	$1 - 3(0,076389)$	$1 + 0,034722$	$1 - 3(0,034722)$
$1 - 0,006944$	$1 + 3(0,006944)$	$1 - 0,034722$	$1 + 3(0,034722)$
$1 - 0,006944$	$1 + 3(0,006944)$	$1 + 0,034722$	$1 - 3(0,034722)$
$1 - 0,062501$	$1 + 3(0,062501) - \frac{2}{3}$	$1 - 0,034722$	$1 + 3(0,034722) - \frac{2}{3}$
$1 + 0,076389 - \frac{1}{3}$	$1 - 3(0,076389)$	$1 + 0,034722 - \frac{1}{3}$	$1 - 3(0,034722)$
$1 - 0,006944$	$1 + 3(0,006944)$	$1 - 0,034722$	$1 + 3(0,034722)$
$1 - 0,006944$	$1 + 3(0,006944)$	$1 + 0,034722$	$1 - 3(0,034722)$
$1 - 0,062501$	$1 + 3(0,062501)$	$1 - 0,034722$	$1 + 3(0,034722)$

<b>KOREL</b>			
$X_1(-3)$	$X_2(-3)$	$X_1(-1)$	$X_2(-1)$
$1 + 0,04736$	$1 - 3(0,04736)$	$1 + 0,03075$	$1 - 3(0,03075)$
$1 - 0,29023$	$1 + 3(0,29023)$	$1 - 0,03075$	$1 + 3(0,03075)$
$1 + 0,00927$	$1 - 3(0,00927)$	$1 + 0,03075$	$1 - 3(0,03075)$
$1 + 0,23358$	$1 - 3(0,23358) - \frac{2}{3}$	$1 - 0,03075$	$1 - 3(0,03075) - \frac{2}{3}$
$1 + 0,04736 - \frac{1}{3}$	$1 - 3(0,04736)$	$1 + 0,03074 - \frac{1}{3}$	$1 - 3(0,03075)$
$1 - 0,29023$	$1 + 3(0,29023)$	$1 - 0,03075$	$1 + 3(0,03075)$
$1 + 0,00927$	$1 - 3(0,00927)$	$1 + 0,03075$	$1 - 3(0,03075)$
$1 + 0,23358$	$1 - 3(0,23358)$	$1 - 0,03075$	$1 + 3(0,03075)$

previsto, em todos os casos um padrão espúrio periódico foi encontrado nos espectros das componentes obtidos com o **KOREL** e **FDBinary** (veja Tab. 3.2 para os resultados). Observe que a amplitude do padrão espúrio sobreposto ao espectro da segunda componente é exatamente 3 vezes maior que para a primeira e com sinal oposto (isto reflete os fatores de luz entre elas).

A comparação das transformadas de Fourier dos espectros das componentes encontradas pelo **FDBinary** e **KOREL** com seus valores corretos, dada pela Eq. (3.41), mostra que a solução do modo 4 é incorreta no caso da Eq. (3.80), assim como ambas soluções dos modos 2 e 4 em (3.81). As expressões mostradas no Apêndice A.3 (relacionadas com a contribuição dos modos de Fourier a cada pixel) ilustram quais seriam os modos responsáveis por tais padrões vistos nos espectros. Observando os resultados mostrados na Tab. 3.2, constatamos que os padrões espúrios exibidos nos espectros reconstruídos das componentes possuem o seguinte caráter alternativo:  $\frac{1}{8}[\delta v_4, -\delta v_4, \delta v_4, -\delta v_4, \delta v_4, -\delta v_4, \delta v_4, -\delta v_4]$ , para o caso em que as velocidades das componentes obedecem a Eq. (3.80) (as duas colunas mais à direita na Tab. 3.2) e  $\frac{1}{4}[\delta v_2 + \frac{1}{2}\delta v_4, -\delta v_2 - \frac{1}{2}\delta v_4,$

$-\delta v_2 + \frac{1}{2}\delta v_4, \delta V_2 - \frac{1}{2}\delta v_4, \delta v_2 + \frac{1}{2}\delta v_4, -\delta V_2 - \frac{1}{2}\delta v_4, -\delta v_2 + \frac{1}{2}\delta v_4, \delta V_2 - \frac{1}{2}\delta v_4]$ , para o caso em que as velocidades das componentes obedecem a Eq. (3.81) (as duas colunas mais à esquerda na Tab. 3.2).

O resultado é facilmente compreendido ao calcular os valores de  $\frac{m}{N}(\beta_{2,j} - \beta_{1,j} - \beta_{2,j'} + \beta_{1,j'})$  para todas combinações de  $(j \neq j')$ . Arranjando os resultados na ordem  $(j, j') = (1, 2), (1, 3), (2, 3)$ , o caso da Eq. (3.80) para  $m = 4, N = 8$  resulta em 1, 2, 1 e o caso da (3.81) para  $m = 4, N = 8$  resulta em 2, 4, 2 e para  $m = 2, N = 8$  resulta em 1, 2, 1. Em ambos os casos, e apenas nestes, o determinante da matrix é nulo, como mostrado pela condição (3.38).

Os desvios no caso do **FDBinary** são explicados pelo requerimento da minimização do comprimento do vetor solução requerido pelo **DVS**. Para  $\frac{\beta_1}{\beta_2} = -1$ , a equação para o modo 4 é mostrada explicitamente:

$$\frac{9}{4}v_{1,4} + \frac{3}{4}v_{2,4} = -\frac{1}{32}. \quad (3.82)$$

O vetor a ser minimizado é  $E = v_{1,4}^2 + v_{2,4}^2$ . Substituindo a Eq. (3.82) em  $E$ , e tomando  $\frac{\partial E}{\partial v_{1,4}} = 0$ , encontramos  $v_{1,4} = -\frac{1}{80}$ .

Para  $\frac{\beta_1}{\beta_2} = -3$ , as equações para os modos 4 e 2 são

$$\frac{9}{4}v_{1,4} + \frac{3}{4}v_{2,4} = -\frac{1}{32}, \quad (3.83)$$

$$\frac{9}{4}v_{1,2} + \frac{3}{4}v_{2,2} = -\frac{3}{32}, \quad (3.84)$$

$$\frac{9}{4}V_{1,2} + \frac{3}{4}V_{2,2} = -\frac{1}{16}. \quad (3.85)$$

Fazendo o mesmo procedimento descrito anteriormente, encontramos  $v_{1,4} = -\frac{1}{80}$ ,  $v_{1,2} = -\frac{3}{80}$  e  $V_{1,2} = -\frac{3}{40}$ .

Se considerarmos que as componentes tenham velocidades determinadas pela Eq. (3.42) (para  $j=1,3$ ), ao invés das Eqs. (3.80) ou (3.81), e que os espectros compostos possuem 6 pixels (ou qualquer outro valor múltiplo de 3) ao invés de 8, ambos algoritmos no espaço de Fourier e velocidade produzirão padrões espúrios nos espectros reconstruídos (veja resultado na Tab. 3.3). Da mesma forma, para todos os valores  $|\beta_{2j} - \beta_{1j} - \beta_{2j'} + \beta_{1j'}|$  que são múltiplos de 4 e intervalos espectrais iguais a  $2^n$ , os padrões espúrios estarão presentes ao usar ambos algoritmos.

### 3.3.2 Caso 2: 4 fases $(\beta_{kj})_{j=1,4}^{k=1,2}$

#### 3.3.2.1 Análise no espaço de velocidade

Como feito no Caso 1, para o espaço de velocidade, a solução será obtida minimizando o comprimento do vetor  $A \cdot X - Y$ . Além das 15 equações (3.60–3.62), mais 5 são adicionadas por conta da presença da quarta fase orbital:

$$\frac{3}{4}x_{1,l} + \frac{1}{8}(x_{2,l-3} + x_{2,l-2}) = y_{l-2,4} \quad (i = 4, \dots, 8) \quad (3.86)$$

e  $L^2$  se estende agora a

$$L^2 = \sum_{i=5}^9 \left(\frac{3}{4}x_{1,i} + \frac{1}{4}x_{2,i-4} - y_{i-3,1}\right)^2 + \sum_{i=3}^7 \left(\frac{3}{4}x_{1,i} + \frac{1}{4}x_{2,i-1} - y_{i-1,2}\right)^2 + \sum_{i=1}^5 \left(\frac{3}{4}x_{1,i} + \frac{1}{4}x_{2,i+2} - y_{i+1,3}\right)^2 + \sum_{i=4}^8 \left(\frac{3}{4}x_{1,i} + \frac{1}{8}(x_{2,i-3} + x_{2,i-2}) - y_{i-2,4}\right)^2. \quad (3.87)$$

**Tabela 3.3:** Padrões espúrios sobre os espectros reconstruídos das componentes quando os espectros observados contém 6 pixels ao invés de 8. A análise é feita tanto no espaço de velocidade quanto no de Fourier.  $X_1$  corresponde ao espectro da componente 1 e  $X_2$  da componente 2. As intensidades dos pixels de cada componente, nos dois domínios, estão dispostos de forma que cada linha corresponde ao mesmo comprimento de onda.

Espaço de velocidade		Espaço de Fourier	
$X_1$	$X_2$	$X_1$	$X_2$
$1 + 0$	-	-	-
$1 + \frac{19}{90}$	$1 - \frac{19}{30}$	-	-
$1 + \frac{1}{5}$	$1 - \frac{3}{5}$	$1 + \frac{1}{5}$	$1 - \frac{3}{5}$
$1 + 0$	$\frac{1}{3} - 0$	$1 + \frac{10}{60}$	$\frac{1}{3} - \frac{10}{20}$
$\frac{2}{3} + \frac{19}{90}$	$1 - \frac{19}{30}$	$\frac{2}{3} + \frac{13}{60}$	$1 - \frac{13}{20}$
$1 + \frac{1}{5}$	$1 - \frac{3}{5}$	$1 + \frac{1}{5}$	$1 - \frac{3}{5}$
$1 + 0$	$1 - 0$	$1 + \frac{1}{5}$	$1 - \frac{3}{5}$
$1 + \frac{19}{90}$	$1 - \frac{19}{30}$	$1 + \frac{13}{60}$	$1 - \frac{13}{20}$
$1 + \frac{1}{5}$	$1 - \frac{3}{5}$	-	-
$1 + 0$	-	-	-

O requerimento que  $\frac{\partial L^2}{\partial x_c, w_c} = 0$  produz 16 equações lineares

$$\begin{pmatrix}
 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 3/8 & 3/8 & 3/4 & 0 & 0 & 3/4 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/6 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/6 & 1/6 & 1/3 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 3/2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 5/4 & 1/4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 3 & 3/2 & 3/2 & 3 & 0 & 0 & 1/4 & 5/2 & 1/4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 3 & 0 & 0 & 3 & 3/2 & 3/2 & 3 & 0 & 0 & 1/4 & 7/2 & 1/4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3/2 & 3/2 & 3 & 0 & 0 & 1/4 & 7/2 & 1/4 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3/2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 7/2 & 1/4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 9/4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \\ x_{1,4} \\ x_{1,5} \\ x_{1,6} \\ x_{1,7} \\ x_{1,8} \\ x_{1,9} \\ x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \\ x_{2,4} \\ x_{2,5} \\ x_{2,6} \\ x_{2,7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 4 \\ 4 \\ 34/9 \\ 35/4 \\ 35/9 \\ 34/9 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \\ 34/3 \\ 79/6 \\ 89/6 \\ 16 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (3.88)$$

Todas essas equações estão agora acopladas. Usando as 9 primeiras para expressar  $x_{1,1}$  a  $x_{1,9}$  em termos de  $x_{2,1}$  a  $x_{2,7}$ , e substituindo aquelas relações para os  $x_{1,r_1}$  nas sete últimas equações, somos conduzidos a um conjunto de 7 equações em  $x_{2,1}, \dots, x_{2,7}$ , que é resolvido pelo método clássico de eliminação progressiva de variáveis. O resultado é

$$\begin{aligned}
 x_{1,1} &= x_{1,2} = x_{1,3} = x_{1,4} = \frac{1}{3} + x_{1,5} = x_{1,6} = x_{1,7} = x_{1,8} = x_{1,9} = \frac{4 - x_{2,1}}{3} = \frac{4 - x_{2,2}}{3} \\
 &= \frac{10 - 3x_{2,3}}{9} = \frac{4 - x_{2,4}}{3} = \frac{4 - x_{2,5}}{3} = \frac{4 - x_{2,6}}{3} = \frac{4 - x_{2,7}}{3}. \quad (3.89)
 \end{aligned}$$

Conseqüentemente, temos um conjunto infinito de soluções, como esperado no caso de fatores de luz constantes ( $\ell_1, \ell_2$ ). A solução fisicamente correta é encontrada quando determinamos o valor do contínuo igual a 1, por exemplo, adotando  $x_{1,1} = 1$ . Usando o

DVS encontramos apenas um valor singular igual a zero. A solução é:

$$\begin{aligned} X_1 &= 1 + \frac{1}{216}[31, 31, 31, 31, \quad 31 - 72, 31, 31, 31, 31], \\ X_2 &= 1 - \frac{1}{72} [31, 31, 31 + 48, 31, \quad 31, 31, 31], \end{aligned}$$

mostrando que há apenas uma constante diferente da unidade no nível do contínuo e, novamente, 3 vezes maior em  $x_2$  que em  $x_1$  e de sinal oposto. Essa constante que aparece no contínuo é reproduzida pela condição da minimização do comprimento do vetor solução,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^9 x_{1,k} + \sum_{k=1}^7 x_{2,k} &= 8x_{1,1}^2 + (x_{1,1} - \frac{1}{3})^2 + 6(4 - 3x_{1,1})^2 + (\frac{10}{3} - 3x_{1,1})^2 \\ &= 72x_{1,1}^2 - \frac{494}{3}x_{1,1} + \frac{965}{9}, \end{aligned}$$

conduzindo a  $x_{1,1} = \frac{247}{216}$ . Observe que nenhum padrão espúrio é observado nos espectros reconstruídos e que a presença de uma fase com mudança de velocidade correspondendo à sub-pixel faz com que a matriz padrão não possa ser mais subdividida em blocos. Testes feitos com espectros observados contendo 7 pixels (ao invés de 5) comprovam os mesmos resultados.

### 3.3.2.2 Análise no espaço de Fourier

A análise no espaço de velocidade lida com sub-pixels de velocidade para a segunda componente na quarta fase orbital introduzindo uma bi-diagonal na matriz padrão. Trabalhar com sub-pixels de velocidade no espaço de Fourier torna-se um problema. Uma vez que para um número par de pixels, o modo mais alto  $\frac{N}{2}$  não tem qualquer contrapartida negativa,  $-\frac{N}{2}$ , sua transformada inversa não é real para sub-pixels de velocidade. A Tab. 3.4 mostra os valores numéricos das quantidades descritas na Eq. (3.23) e a solução dada pelas Eqs. (3.25) a (3.29). O valor médio dos espectros de entrada, Eqs. (3.43) a (3.46), foi escolhido como sendo zero. Note que a parte imagiária  $Q$  para o modo 4 é diferente de zero.

Para tratar casos em que os deslocamentos Doppler da(s) componente(s) correspondem a sub-pixel de velocidade usamos a aproximação definida pela Eq. (2.22), implementada no código `FDBinary`. Os espectros reconstruídos por esse código concordam perfeitamente com os esperados, definidos pela Eq. (3.41).

O código `KOREL`, como mencionado na Sec. 2.3, arredonda as velocidades para inteiros, utilizando  $\text{int}(|v_{k,j}| + 0.5)$ . Em nosso exemplo,  $v_{2,4} = 1.0$  ou  $v_{2,4} = 0.0$  dependendo da precisão na qual a fase orbital é especificada. Resolvendo analiticamente para  $v_{2,4} = 1.0$  e  $v_{2,4} = 0.0$ , respectivamente, os seguintes espectros das componentes são obtidos:

- $v_{2,4} = 1.0$

$$\begin{aligned} X_1 &= 1 + \frac{1}{1224}[-3, -11, 18, -12, \quad -408 - 31, 45, -18, 12], \\ X_2 &= 1 - \frac{3}{1224}[12, -18, 45, 272 - 31, -12, \quad 18, -11, -3], \end{aligned} \quad (3.90)$$

enquanto que os valores esperados nos vetores acima são  $[0, 0, 0, 0, -408, 0, 0, 0]$  e  $[0, 0, 0, 272, 0, 0, 0, 0]$ , respectivamente.

**Tabela 3.4:** Quantidades numéricas relevantes e solução no espaço de Fourier para o Caso 2, em que uma das fases tem valor não-inteiro de velocidade (em pixels), para a segunda componente. Os cálculos foram feitos considerando a solução apresentada pela Eq. (3.23) e Eqs. (3.43) a (3.46). Note que  $Q \neq 0$  para o modo 4 e a transformada inversa de  $v_{1,m}$ ,  $V_{1,m}$ ,  $v_{2,m}$  e  $V_{2,m}$  não são reais.

	$m = \pm 1$	$m = \pm 2$	$m = \pm 3$	$m = 4$
$\eta_{1,m}$	0,13668	-0,13542	0,09249	-0,14583
$\eta_{2,m}$	0,05682	-0,00915	-0,00326	0,09375
$\eta_{3,m}$	-0,01347	-0,01042	0,02820	0
$\eta_{4,m}$	0,08668	-0,09933	0,03787	0,03125
R	-0,03153	0,29289	1,49033	-1
Q	0,92388	0,70711	-0,38268	-1
$v_{1m}$	0,04124	-0,04055	0,03808	-0,04365
$V_{1m}$	0,05788	-0,00112	-0,04743	0,06548
$v_{2m}$	0,00012	-0,00165	0,00563	-0,00595
$V_{2m}$	0,05810	-0,07746	0,04250	-0,00595

- $v_{2,4} = 0.0$

$$\begin{aligned}
 X_1 &= 1 + \frac{1}{146664}[-1349, 1259, 19, -1525, -48888 + 5035, -3781, -989, 1331], \\
 X_2 &= 1 - \frac{3}{146664}[-1349, 1331, -989, 32592 - 3781, 5035, -1525, 19, 1259], \quad (3.91)
 \end{aligned}$$

enquanto que os valores esperados nos vetores acima são  $[0, 0, 0, 0, -48888, 0, 0, 0]$  e  $[0, 0, 0, 32592, 0, 0, 0, 0]$ , respectivamente.

No caso do KOREL o arredondamento das velocidades radiais de 0,5 pix para 1 ou 0, produzirá erros de até 3,5% perto das linhas de absorção, e não mais que 1% nos pixels não adjacentes à essas linhas. Os desvios da solução correta são uma consequência direta da perda de resolução quando deslocamentos de velocidades, em pixels não-inteiros, ocorrem. No nosso exemplo, a linha da secundária é “diluída” em dois pixels na quarta fase do espectro composto. Este efeito aparece em linhas espectrais finas de espectros reconstruídos (que apresentam-se mais largas e menos profundas) e algumas estruturas espúrias, aparecem no contínuo.

Os espectros das componentes serão perfeitamente reproduzidos se os pixels dos espectros de entrada forem duas vezes menores ( $N=16$ ). Por exemplo, o espectros compostos, definidos pelas Eqs. (3.43) a (3.46), passariam a ser

$$\begin{aligned}
 (y_{1,i})_{i=0,\dots,15} &= \left[ 1, 1, 1, 1, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \right], \\
 (y_{2,i})_{i=0,\dots,15} &= \left[ 1, 1, 1, 1, 1, 1, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \right], \\
 (y_{3,i})_{i=0,\dots,15} &= \left[ 1, 1, 1, 1, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1 \right], \\
 (y_{4,i})_{i=0,\dots,15} &= \left[ 1, 1, 1, 1, 1, 1, \frac{3}{4}, \frac{7}{12}, \frac{5}{6}, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \right]. \quad (3.92)
 \end{aligned}$$



Um aspecto importante deve ser ressaltado: o código KOREL adiciona 1 à solução final dos espectros ao invés de calcular o modo 0. Então, para todos os cálculos realizados aqui, subtraímos, dos espectros reconstruídos das componentes, 1– o valor médio dos seus espectros “esperados”, o que é equivalente a dizer que subtraímos o valor do bloqueio de linha dos espectros “esperados” das componentes ( $\frac{1}{24}$ , para a primeira e  $\frac{1}{12}$  para a segunda). Assim, adotando esse procedimento de renormalização, os espectros das componentes resultam em

$$X_1 = \left[ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \right], \quad (3.93)$$

$$X_2 = \left[ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \right]. \quad (3.94)$$

### 3.3.3 Caso 3: Combinação de 3 fases $(\beta_{kj})_{j=1,3}^{k=1,2}$

Avaliamos o processo de separação espectral para as seguintes possíveis combinações de fases orbitais:

$$\text{Caso A : } j = 1, 3, 4 \quad \beta_{kj} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0, 5 \end{pmatrix} \quad (3.95)$$

$$\text{Caso B : } j = 1, 2, 4 \quad \beta_{kj} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0, 5 \end{pmatrix} \quad (3.96)$$

$$\text{Caso C : } j = 2, 3, 4 \quad \beta_{kj} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0, 5 \end{pmatrix} \quad (3.97)$$

#### 3.3.3.1 Análise no espaço de velocidade

Para resolver as equações usamos o mesmo procedimento descrito para o Caso 1. Note que o número de colunas da matriz  $A$ , na Eq. (3.59), depende da amplitude de velocidade nas fases orbitais (como foi explicado na introdução da Sec. 3.3). O número de colunas para cada componente é, em cada caso, descrito na Tab. 3.5.

**Tabela 3.5:** Número de colunas na matriz padrão para cada componente. “5” é o número de pixels do espectro de entrada. Os números adicionais em cada caso referem-se ao número máximo de pixels que devem ser adicionados à direita e/ou esquerda da matriz  $A$ , para simular o deslocamento Doppler das componentes em cada fase. Veja as Eqs. (3.95) a (3.97) que definem as velocidades radiais de cada componente em cada caso.

	Caso A	Caso B	Caso C
Comp. 1	5+2+2	5+2	5+2+1
Comp. 2	5+1+1	5+1	5+2

Obtemos, em todos os casos, um conjunto de 15 equações lineares (5 pixels  $\times$  3 fases). Nos casos B e C, o número de equações normais originadas pela condição definida pela Eq. (3.64) são, respectivamente, 13 e 15. Para esses dois casos encontramos, aplicando a solução clássica e o DVS, a Eq. (3.89), mostrando a presença de um valor singular. No entanto, o caso A apresenta 16 variáveis para 15 equações lineares, esta solução é indeterminada e não pode ser resolvida, a menos que uma interpolação para um número menor de colunas da matriz A (ou, correspondentemente, um número menor de variáveis) seja adotado. Neste caso, os espectros reproduzidos não serão mais descritos pela Eq. (3.89).

### 3.3.3.2 Análise no espaço de Fourier

Da mesma forma que os resultados apresentados pelo caso 2, ao aplicar o FDBinary encontramos a solução descrita na Eq. (3.89) e a solução correta, dada pela Eq. (3.41), é obtida após renormalizar adequadamente os espectros das componentes (podendo ser usado o procedimento descrito em Ilijić (2006) ). Por outro lado, ao aplicar o código KOREL, a solução correta será obtida somente se a densidade de pontos no espectro composto de entrada for duas vezes maior.

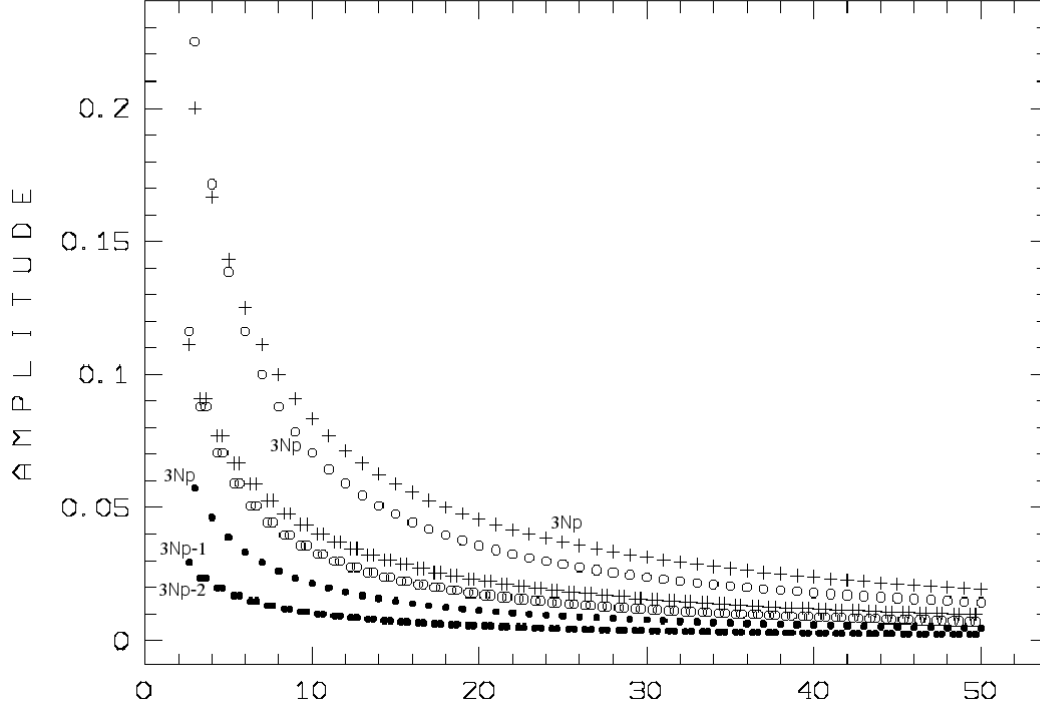
### 3.3.4 Discussão: Amplitude dos padrões espúrios

Os estudos realizados aqui são bem simples, concentrando-se numa amostra contendo poucas observações de intervalo espectral relativamente pequeno, em comparação com as velocidades orbitais. A questão que surge é se há a possibilidade de se obter espectros reconstruídos tão diferentes, como mostrado nas seções anteriores (Secs. 3.3.1, 3.3.2 e 3.3.3), numa situação com mais espectros observados e maior intervalo espectral.

É evidente que a separação da matriz projeto em sub-blocos independentes é menos provável quando o algoritmo é capaz de lidar com desvios Doppler correspondendo a valores não-inteiros de pixels (como pode ser visto nas exemplos trabalhados nas Secs 3.3.2 e 3.3.3 onde nenhum padrão espúrio foi encontrado, a não ser uma indeterminação do nível do contínuo). Além disso, se os espectros são rigorosamente distribuídos em intervalos constantes de velocidade, observa-se que a amplitude dos padrões espúrios tende a zero à medida em que o comprimento do intervalo espectral aumenta. Por exemplo, considere 3 espectros de entrada contendo somente contínuo, velocidades definidas pela Eq. (3.42), para  $j = 1, 2, 3$ , e intervalo espectral com  $N$  pixels, tal que a matriz padrão terá  $2N + 6$  colunas e  $3N$  linhas. A solução da DVS será:

para  $N = 3N_p$ :

$$\begin{aligned} x_{1,1} &= \frac{\ell_1}{\ell_1^2 + \ell_2^2 + \frac{2\ell_2^2}{N_p}} \neq x_{1,2} = x_{1,3} = \frac{\ell_1}{\ell_1^2 + \ell_2^2} \\ x_{2,1} = x_{2,2} &= \frac{\ell_2}{\ell_1^2 + \ell_2^2} \neq x_{2,3} = \frac{\ell_2}{\ell_1^2 + \ell_2^2 - \frac{2\ell_1^2}{2+N_p}}, \end{aligned} \quad (3.98)$$



**Figura 3.5:** Redução da amplitude de padrões espúrios (induzida pela DVS) superposta no contínuo dos espectros reconstruídos em função do aumento do intervalo espectral (em unidades da periodicidade) para dois casos:  $\ell_1 = \ell_2 = 0,5$  (+) e  $\ell_1 = 0,75, \ell_2 = 0,25$  (círculos preenchidos correspondem à componente mais luminosa, círculos abertos à componente mais fraca). Neste caso particular, o padrão espúrio é mais pronunciado quando  $N$  é múltiplo da periodicidade ( $N = 3N_p$ ). Os valores mostrados no gráfico correspondem a diferença com relação a  $x_1$ .

para  $N = 3N_p - 1$ :

$$\begin{aligned}
 x_{1,1} = x_{1,3} &= \frac{\ell_1}{\ell_1^2 + \ell_2^2 + \frac{\ell_2^2}{N_p}} \neq x_{1,2} = \frac{\ell_1}{\ell_1^2 + \ell_2^2} \\
 x_{2,1} &= \frac{\ell_2}{\ell_1^2 + \ell_2^2} \neq x_{2,2} = x_{2,3} = \frac{\ell_2}{\ell_1^2 + \ell_2^2 - \frac{\ell_1^2}{1+N_p}}, \quad (3.99)
 \end{aligned}$$

para  $N = 3N_p - 2$ :

$$\begin{aligned}
 x_{1,1} = x_{1,2} &= \frac{\ell_1}{\ell_1^2 + \ell_2^2 + \frac{\ell_2^2}{N_p}} \neq x_{1,3} = \frac{\ell_1}{\ell_1^2 + \ell_2^2} \\
 x_{2,1} = x_{2,3} &= \frac{\ell_2}{\ell_1^2 + \ell_2^2 - \frac{\ell_1^2}{1+N_p}} \neq x_{2,2} = \frac{\ell_2}{\ell_1^2 + \ell_2^2}, \quad (3.100)
 \end{aligned}$$

onde  $N_p$  é o maior inteiro igual ou menor que  $N/3$  e em todos os casos as outras componentes do vetor  $x_{ki}$  são definidas por  $x_{k,i} = x_{k,i+3}$ . Em todos os 3 casos mencionados acima, quando  $N$  (ou  $N_p$ ) tende a infinito a amplitude do padrão espúrio tende a zero. A Fig. 3.5 mostra os resultados para duas escolhas particulares de fatores de luz.

Com espectros observados que diferem do contínuo puro, os três valores de  $x_{k,j}$  poderão diferir entre si, como na Eq. (3.68), devido aos diferentes bloqueios de linha observados em cada conjunto  $x_{k,j+3i}$ . No entanto, os resultados para a diminuição da amplitude dos padrões espúrios para grandes intervalos espectrais permanecem. Além disso, concluímos, também, que os padrões espúrios causados pelo espaçamento regular dos desvios Doppler são de importância prática para a reconstrução espectral de pequenos intervalos (linhas isoladas).

## Capítulo 4

---

# Tempo Computacional no Espaço de Velocidade

O tempo computacional constitui em uma das diferenças entre os métodos de separação espectral nos espaços de velocidade e Fourier, sendo muito maior no domínio de velocidade que no de Fourier. A razão consiste no numeroso conjunto de equações lineares acopladas  $\sum_{j=1}^J I_j$  contendo  $\sum_{k=1}^K N_k$  valores desconhecidos ( $I_j$  corresponde ao número total de pixels no espectro composto observado no tempo  $j$  e  $N_k$  é o número total de pixels no espectro reconstruído da componente  $k$ ). Por outro lado, no espaço de Fourier são resolvidos  $\frac{N}{2} + 1$  subconjuntos de  $K$  equações complexas com  $K$  termos desconhecidos, onde  $K$  é o número total de componentes e  $N$  é o número total de pixels no espectro composto de entrada<sup>1</sup>.

Devido às vantagens que o método no espaço de velocidade também oferece (como por exemplo, a possibilidade de dar pesos individuais a cada pixel), estudamos as componentes que interferem no aumento de seu tempo computacional, na Sec. 4.1, e oferecemos um procedimento para reduzi-lo, na Sec. 4.2.

O estudo da redução do tempo computacional e a aplicação desse procedimento no sistema triplo eclipsante RV CrT (cujos resultados são discutidos na Sec. 5.1.9) se encontra em Torres et al. (2007).

### 4.1 Fatores que interferem no tempo computacional

Para estudar como se relaciona o tempo computacional (TC) com os diversos fatores que nele interferem, usamos um conjunto de dados observacionais do sistema triplo eclipsante RV CrT (a ser tratado em detalhes no Cap. 5), assim como os parâmetros orbitais e as contribuições em luz determinadas pela análise conjunta dos códigos KOREL e WD (Sec. 5.1.4). Avaliamos o TC aproximado gasto pela CPU na execução de testes usando o comando `time` do UNIX.

---

<sup>1</sup>No uso da transformação discreta de Fourier, DFT, os dados de entrada e saída possuem a mesma dimensão, portanto  $N$  pode ser tanto o número de pixels nos espectros observados como nos espectros reconstruídos das componentes.

**Tabela 4.1:** Tempo computacional gasto, em segundos, para  $J$  diferentes valores totais de fases orbitais,  $N$  pixels nos espectros de entrada e  $N_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) pixels nos espectros reconstruídos das componentes. Estes resultados são baseados no cálculo da separação espectral das 3 componentes do sistema triplo eclipsante RV Crt (exceto no caso de índice 11 que se refere somente ao par eclipsante deste sistema). “ $t_c$ ” é o tempo computacional calculado, dado por  $\frac{JN}{512} \cdot \left(\frac{N_1+N_2+N_3}{3 \cdot 512}\right)^2$ , e “ $t_o$ ” é o tempo computacional da CPU, estimado com o comando UNIX `time`.

índice	$N$	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$J$	$t_c$	$t_o$ (s)
1	25	25	25	25	41	0,005	0,13
2	49	50	50	50	41	0,037	0,87
3	201	200	200	200	10	0,599	29,1
4	201	200	200	200	20	1,198	59,7
5	201	200	200	200	30	1,797	139,6
6	201	200	200	200	41	2,456	166,6
7	100	300	300	300	41	2,749	321,8
8	172	228	272	172	41	2,636	490,9
9	300	300	300	300	41	8,248	1800,0
10	316	372	416	316	41	13,072	3548,4
11	672	696	744	0	16	18,457	5286,0
12	600	600	600	600	41	65,982	16595,0

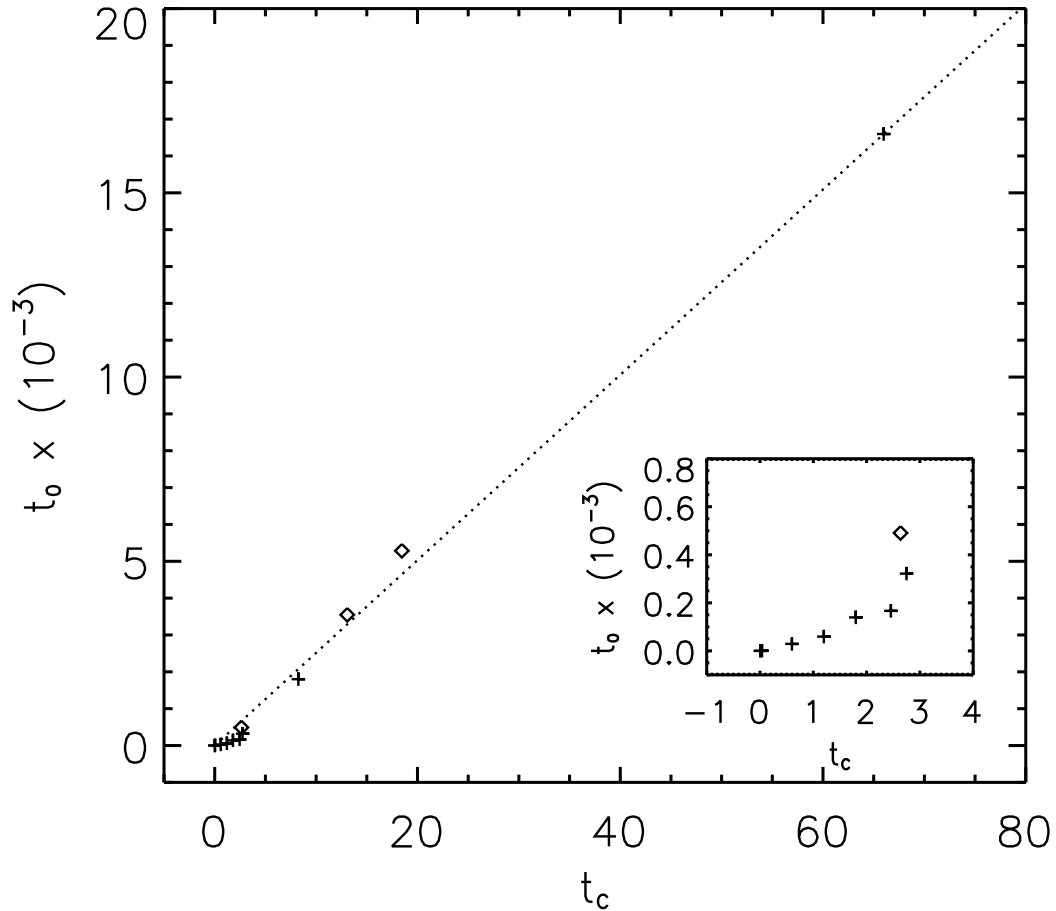
A Tab. 4.1 mostra os resultados considerando  $J$  observações, com  $N$  pixels, e  $N_k$  pixels para cada um dos espectros reconstruídos da componente  $k$  ( $k = 1, 2, 3$ ). Em comparação com a resolução dos espectros de entrada, os espectros reconstruídos poderão ter a mesma resolução (índices 8, 10 e 11 da Tab. 4.1) ou uma resolução diferente (índices 1 a 7, 9 e 12 da Tab. 4.1).

Os dados da Tab. 4.1 são mostrados na Fig. 4.1. Vemos que há uma dependência linear entre  $t_c$  e  $t_o$ , para valores de  $t_c$  maiores que  $\approx 5$ , e quadrática, para  $t_c < 5$ . Para  $t_c > 5$ , a dependência com o tempo parece ser linear com respeito a  $J$  e  $N$  e quadrática com  $\sum_{k=1}^K N_k$ . O valor de  $N_k$  está relacionado com o desvio Doppler máximo ( $\max|\beta_{k,j}|$ ) da componente  $k$ , ou seja:  $N_k = N + \max|\beta_{k,j}|$ . Como mostrado na Fig. 2.1, o termo  $\sum_{k=1}^K N_k$  representa o número de colunas da matriz padrão. A dependência quadrática com  $\sum_{k=1}^K N_k$  está relacionada com o número de multiplicações feita pela DVS quando multiplica as matrizes  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}^\dagger$  e  $\mathbf{W}$ . Para  $t_c < 5$  não entendemos muito bem o que acontece. Como o tempo é muito curto, poucos cálculos são feitos e pode ser que as inicializações de memória, acesso a disco (para leitura dos dados) e outros aspectos não relacionados diretamente com nosso problema, se tornem mais importantes.

Considerando  $t_o$  proporcional a  $t_c$ , temos que

$$t \propto JN \left( \sum_{k=1}^K N_k \right)^2. \quad (4.1)$$

Devido à dependência de  $t$  com  $N$  e  $N_k$ , desenvolvemos um procedimento que ajuda a obter uma solução no espaço de velocidade em um menor tempo possível. Nossa estratégia é dividir a região espectral a ser analisada em pequenos intervalos, realizar a separação



**Figura 4.1:** Tempo computacional observado ( $t_o$ ), em segundos (tempo de CPU estimado com o comando UNIX `time`) versus o predito pela teoria ( $t_c$ ). Os valores de  $t_o$  mostrados são multiplicados por  $10^{-3}$ . Os símbolos “+” representam os dados referentes aos índices 1 a 7, 9 e 12 da Tab. 4.1 e “◊” os índices 8, 10 e 11 da mesma tabela. O painel mais interno é uma amplificação do gráfico para os valores de  $t_c < 5$ . Observe que para  $t_c > 5$ , a relação entre  $t_c$  e  $t_o$  é linear.

para cada um deles e, depois de obtida a solução, concatená-los, a fim de obter a região espectral inicial. Nosso procedimento requer que as pequenas regiões se sobreponham, para garantir que todas as linhas espectrais das componentes estejam incluídas. Todo o procedimento será discutido na próxima seção.

## 4.2 Procedimento para redução do tempo computacional

### 4.2.1 Princípios Básicos

Devido aos desvios Doppler, as linhas espectrais das componentes de um sistema múltiplo se deslocam em comprimento de onda em consequência do seu movimento or-

bital. Assim, para que os espectros das componentes tenham uma reconstrução confiável e de qualidade, devemos levar em consideração tais efeitos, garantindo que nenhuma informação útil seja perdida.

Considere um intervalo espectral  $[-L, L]$  em coordenadas de velocidade com o ponto zero no comprimento de onda  $\lambda_0$  e passo constante em velocidade (igual a 1). Considere, ainda, que as velocidades Doppler tenham valores inteiros e sejam expressas em  $\text{km}(\text{spix})^{-1}$ . Na fase  $j_1$  o espectro da componente 2 é deslocado para o azul por um fator de  $-v_{2,j_1}$  e, conseqüentemente, o da componente 1 é deslocado para o vermelho por  $v_{1,j_1} = qv_{2,j_1}$ . Por outro lado, na fase  $j_2$  o espectro da componente 2 é deslocado para o vermelho por  $v_{2,j_2}$  e o da componente 1 é deslocado para o azul por  $v_{1,j_2} = -qv_{2,j_2}$ . Nas outras fases, os desvios Doppler são menores, em valor absoluto. A informação no intervalo  $[-L, L]$  é deslocada de acordo com

- para  $j_1$

$$\begin{aligned} [-L + qv_{2,j_1}, L + qv_{2,j_1}] & \text{ comp. 1,} \\ [-L - v_{2,j_1}, L - v_{2,j_1}] & \text{ comp. 2,} \end{aligned}$$

- para  $j_2$

$$\begin{aligned} [-L - qv_{2,j_2}, L - qv_{2,j_2}] & \text{ comp. 1,} \\ [-L + v_{2,j_2}, L + v_{2,j_2}] & \text{ comp. 2,} \end{aligned}$$

onde  $v_{2,j_1} \geq 0$  e  $v_{2,j_2} \geq 0$ . O “intervalo confiável”, expresso em velocidade, que contém informações sobre todas as linhas das componentes, abrange os seguintes valores

$$[-L + \max(qv_{2,j_1}, v_{2,j_2}), L - \max(qv_{2,j_2}, v_{2,j_1})] \quad (4.2)$$

Esse intervalo é independente da fase orbital e estará sempre contido dentro de  $[-L, L]$ . Seu comprimento é definido por:

$$2L_0 = 2L - s, \quad (4.3)$$

onde,

$$s = \max(qv_{2,j_1}, v_{2,j_2}) + \max(qv_{2,j_2}, v_{2,j_1}) \quad (4.4)$$

Observe que linhas que se encontram dentro do intervalo mais no vermelho, expresso por  $\max(qv_{2,j_1}, v_{2,j_2})$ , e mais no azul,  $\max(qv_{2,j_2}, v_{2,j_1})$  podem estar presentes numa fase e ausentes em outra, devido ao movimento orbital. É por essa razão que não aconselhamos considerar esses intervalos. Na Fig. 4.2 mostramos um exemplo numérico simples para ilustrar o que foi discutido acima.

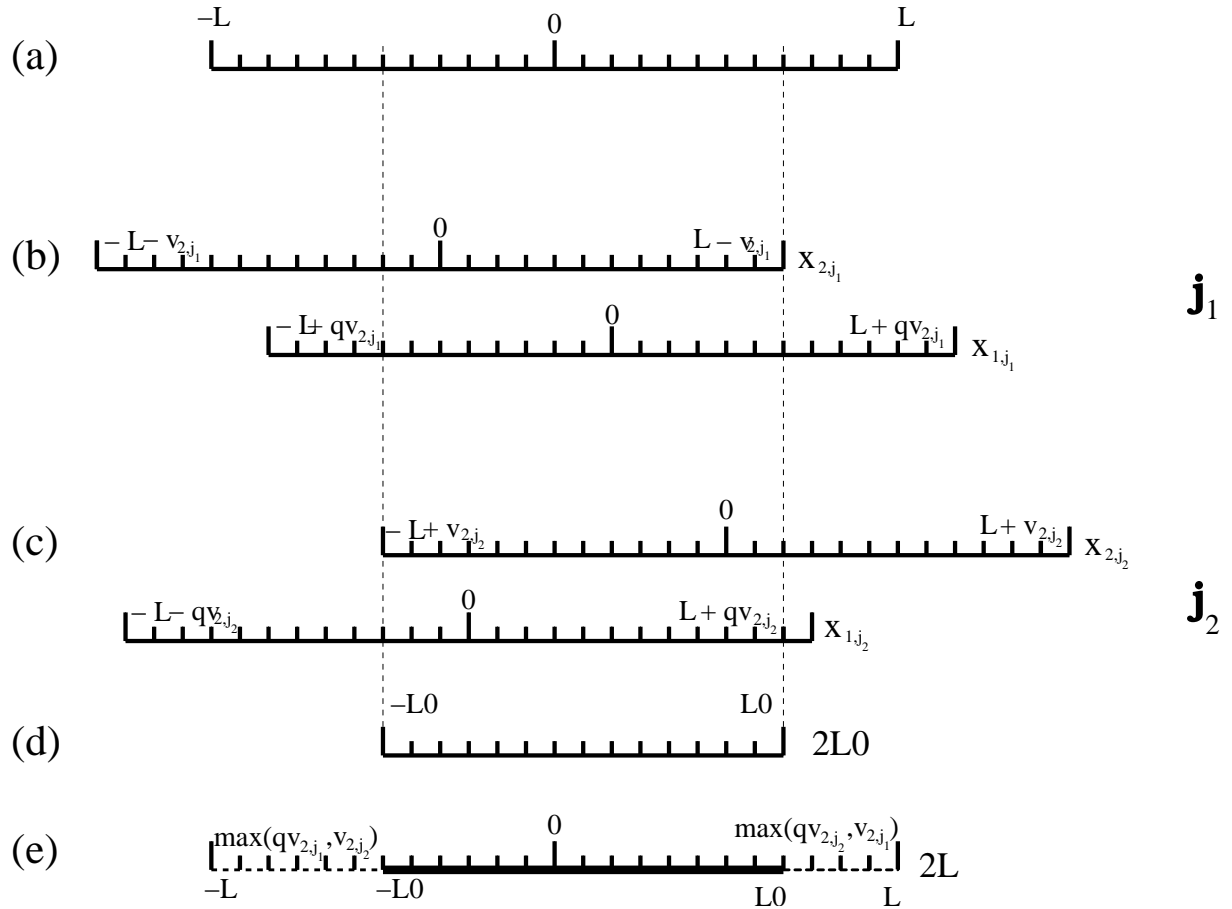
Assim, o “intervalo confiável” depende do máximo de amplitude das componentes,

1. quando  $qv_{2,j_1} \leq v_{2,j_2}$ , e  $qv_{2,j_2} \leq v_{2,j_1}$ , isto é,  $q \leq \min(\frac{v_{2,j_2}}{v_{2,j_1}}, \frac{v_{2,j_1}}{v_{2,j_2}})$ , então

$$2L_0 = 2L - (v_{2,j_2} + v_{2,j_1}). \quad (4.5)$$

Ou seja, os desvios Doppler na componente com maior amplitude de velocidade determinam o intervalo. Este é o caso quando se tem fases orbitais próximas à máxima amplitude de velocidade.





**Figura 4.2:** Esquema mostrando a determinação do “intervalo de confiança” que contém linhas das componentes presentes em todas as fases orbitais, para um sistema binário. As figuras mostram intervalos expressos em coordenada de velocidade, cujos passos são constantes e sempre iguais a 1. O painel (a) representa o espectro intrínseco das componentes de comprimento  $L = 12$  pixels. Os espectros das componentes deslocados devido ao movimento orbital são mostrados nos painéis (b) e (c) como  $x_{1,j}$  (componente 1) e  $x_{2,j}$  (componente 2), para duas fases correspondentes a máxima amplitude de velocidade radial ( $j_1$  e  $j_2$ ). As velocidades das componentes são expressas em  $\text{km}(\text{s pix})^{-1}$  e são dadas por  $v_{2,j_1} = 4$ ,  $qv_{2,j_1} = 2$ ,  $v_{2,j_2} = 6$  e  $qv_{2,j_2} = 3$ . O painel (d) representa o “intervalo confiável”  $[-L_0, L_0]$  onde  $L_0 = 7$  e  $s = 10$ , veja as Eqs. (4.3) e (4.4). No intervalo correspondente ao espectro observado  $[-L, L]$ , painel (e), o “intervalo” de interesse terá as coordenadas  $[-6, 8]$ , onde os extremos (com linha tracejada) correspondem aos valores máximos das amplitudes de velocidade das componentes. Note que  $[-L_0, L_0]$  está dentro de  $[-L, L]$  e corresponde à interseção entre os espectros deslocados das componentes, devido ao movimento orbital.

- quando  $q > \frac{v_{2,j_2}}{v_{2,j_1}}$ , isto é, quando existem fases em que o espectro da componente 2 se desloca mais para o azul, o “intervalo confiável” será

$$2L_0 = 2L - (qv_{2,j_1} + v_{2,j_1}) = 2L - (v_{1,j_2} + v_{2,j_1}). \quad (4.6)$$

- da mesma forma, quando existem fases em que o espectro da componente 2 se desloca mais para o vermelho ( $q > \frac{v_{2,j_1}}{v_{2,j_2}}$ ), o “intervalo confiável” será

$$2L_0 = 2L - (v_{2,j_2} + qv_{2,j_2}) = 2L - (v_{2,j_2} + v_{1,j_1}). \quad (4.7)$$

Nesses três casos, o “intervalo confiável” é centrado, respectivamente, em  $\frac{1}{2}(v_{2,j_2} - v_{2,j_1})$ ,  $\frac{1}{2}(v_{1,j_2} - v_{2,j_1}) < 0$  ou  $\frac{1}{2}(v_{2,j_2} - v_{1,j_1}) > 0$

Ao construir a matriz projeto para a separação espectral no espaço de velocidade, levando em consideração a ampliação (do inglês, *padding*), o intervalo  $[-L, L]$  precisa ser estendido para:

$$\begin{aligned} [-L - qv_{2,j_2}, L + qv_{2,j_1}] & \text{ para comp. 1,} \\ [-L - v_{2,j_1}, L + v_{2,j_2}] & \text{ para comp. 2,} \end{aligned}$$

resultando em

$$\begin{aligned} \text{int}(2L + q(v_{2,j_2} + v_{2,j_1})) & \text{ colunas para comp. 1,} \\ \text{int}(2L + v_{2,j_1} + v_{2,j_2}) & \text{ colunas para comp. 2.} \end{aligned}$$

Caso os valores das velocidades das componentes não sejam inteiros, pode-se tomar a parte inteira mais alta

$$\begin{aligned} \text{int}\left(\frac{2L + q(v_{2,j_2} + v_{2,j_1})}{\Delta v}\right) & \text{ colunas para comp. 1,} \\ \text{int}\left(\frac{2L + v_{2,j_1} + v_{2,j_2}}{\Delta v}\right) & \text{ colunas para comp. 2,} \end{aligned}$$

onde  $\Delta v$  é o tamanho de cada pixel em km/s (considerando o tamanho do pixel constante) e igual a  $\frac{\ln \lambda_f - \ln \lambda_i}{N-1}$ .

O tempo computacional, para um sistema binário cujas componentes possuem valores não-inteiros de velocidade, pode ser estimado usando a Eq. (4.1)

$$t \propto 2JL \left( \frac{4L + (1+q)(v_{2,j_1} + v_{2,j_2})}{\Delta v} \right)^2. \quad (4.8)$$

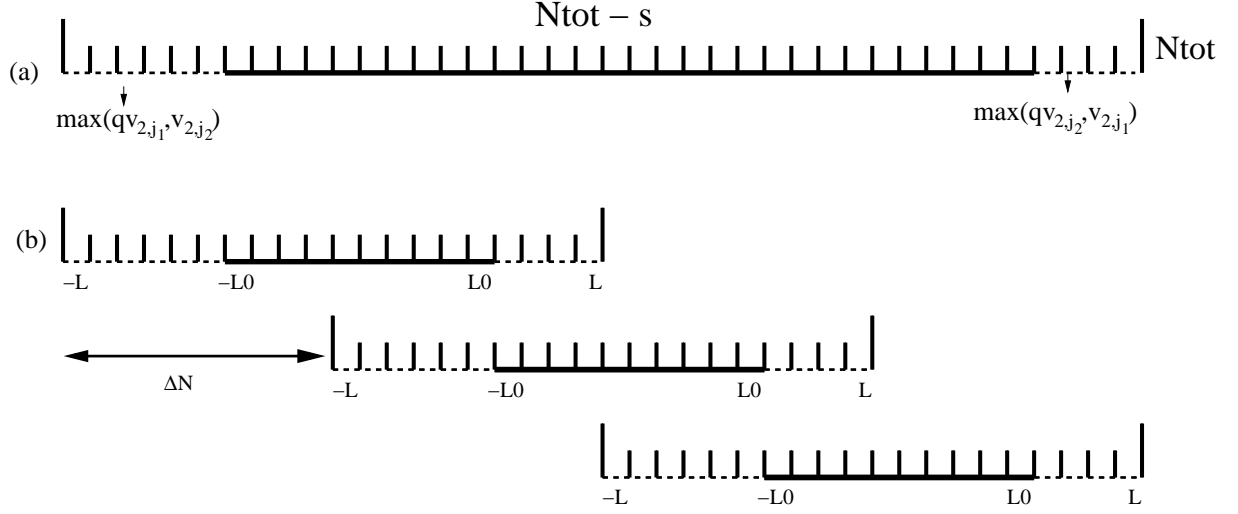
Observe que o tempo computacional dependerá, também, do número total de fases, do comprimento do intervalo  $L$  e da máxima amplitude de velocidade/pixel das componentes.

Na próxima seção mostraremos como fazer para dividir uma região espectral em sub-intervalos de forma que preserve as informações úteis das componentes e otimize o tempo computacional.

## 4.2.2 Tempo Computacional para grandes intervalos espectrais

Considere uma grande região espectral com  $N_{tot}$  pixels, em velocidade, que poderão ser tratados como uma sucessão de  $r$  intervalos de entrada com comprimento  $2L$ . Apenas os pixels correspondentes ao intervalo  $N_{tot} - s$  contém linhas espectrais de ambas componentes em todas as fases orbitais (veja o painel (a) da Fig. 4.3). Quanto tempo computacional seria gasto se o intervalo espectral  $N_{tot} - s$  fosse dividido em  $r$  sub-regiões com  $2L_0$  pixels, considerando que essas sub-regiões sejam superpostas por uma quantidade  $s$ ? Definindo  $r$  como

$$r = \frac{N_{tot} - s}{2L_0}, \quad (4.9)$$



**Figura 4.3:** Esquema mostrando as subregiões e o “intervalo confiável”, em negrito, para uma região contendo  $N_{tot} = 40$  pixels. Usando os dados da Fig. 4.2, encontramos que  $s = 10$ ,  $2L_{min} = 20$ ,  $2L_{0,min} = 10$ ,  $r_{min} = 3$  e que  $\Delta N = 10$ . Observe como as sub-regiões se interpolam e a conexão entre os “intervalos de interesse” da região de 40 pixels com os “intervalos de interesse” das sub-regiões de 20 pixels.

encontramos, usando a Eq. (4.3), a expressão matemática para  $N_{tot}$

$$N_{tot} = 2L + (r - 1) \cdot 2L_0. \quad (4.10)$$

O tempo computacional total,  $t_{tot}$ , deste intervalo, que será dividido em  $r$  subregiões, será a soma dos tempos para cada intervalo  $r$ . Com o auxílio da Eq. (4.8), temos

$$\begin{aligned} t_{tot} &\propto r \cdot t \\ &\propto \frac{N_{tot}}{2L_0} \cdot 2JL \left( \frac{4L + (1+q)(v_{2,j_1} + v_{2,j_2})}{\Delta v} \right)^2, \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde  $r$  foi considerado  $\approx \frac{N_{tot}}{2L_0}$  para  $N_{tot} \gg s$ . Substituindo a Eq.(4.3) na Eq.(4.11), encontramos

$$t_{tot} \propto \frac{2JLN_{tot}}{2L - s} \cdot \left( \frac{4L + (1+q)(v_{2,j_1} + v_{2,j_2})}{\Delta v} \right)^2. \quad (4.12)$$

Para um dado conjunto de fases orbitais,  $t_{tot}$  é mínimo quando  $\frac{\partial t_{tot}}{\partial L} = 0$ , ou seja, o menor tempo computacional será quando o comprimento de cada subregião,  $L_{min}$ , for igual a

$$L_{min} = \frac{3s}{8} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4(1+q)(v_{2,j_1} + v_{2,j_2})}{s}} \right), \quad (4.13)$$

onde  $s$  é definido na Eq. (4.4). Assim,  $L_{min}$  é o máximo comprimento de uma subregião que minimiza o tempo computacional para uma região espectral contendo  $N_{tot}$  pixels. Nos casos mais comuns,  $s = v_{2,j_1} + v_{2,j_2}$ , e a Eq. (4.13) é simplificada

$$L_{min} = \frac{3}{8}(v_{2,j_1} + v_{2,j_2}) \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{9}(1+q)} \right).$$

Usando a Eq. (4.3)

$$2L_{0,min} = 2L_{min} - s, \quad (4.14)$$

e, com a Eq. (4.9), encontramos o valor máximo de intervalos espectrais contidos na região espectral

$$r_{min} = \frac{N_{tot} - s}{2L_{0,min}}. \quad (4.15)$$

Com a ajuda da Fig. 4.3, observamos que a distância entre os subintervalos,  $\Delta N$ , é dada por

$$\Delta N = 2L_{0,min}, \quad (4.16)$$

que é exatamente o “intervalo de interesse”.

Gostaríamos de ressaltar que todas as equações são expressas em coordenadas de velocidade. Se deseja lidar com pixels é importante dividir as equações pelo passo constante em velocidade ( $\Delta v$ ) e depois, sugerimos tomar o valor inteiro.

Resumindo, um procedimento alternativo pode ser adotado, para reduzir o tempo computacional, ao separar os espectros das componentes de um sistema múltiplo. Esse procedimento consiste em dividir a região espectral, a ser analisada, em intervalos menores onde será aplicada, independentemente, o algoritmo de separação espectral. Os passos necessários para se obter os subintervalos de uma região espectral com  $N_{tot}$  pixels (considerando o que foi mencionado no parágrafo anterior) é:

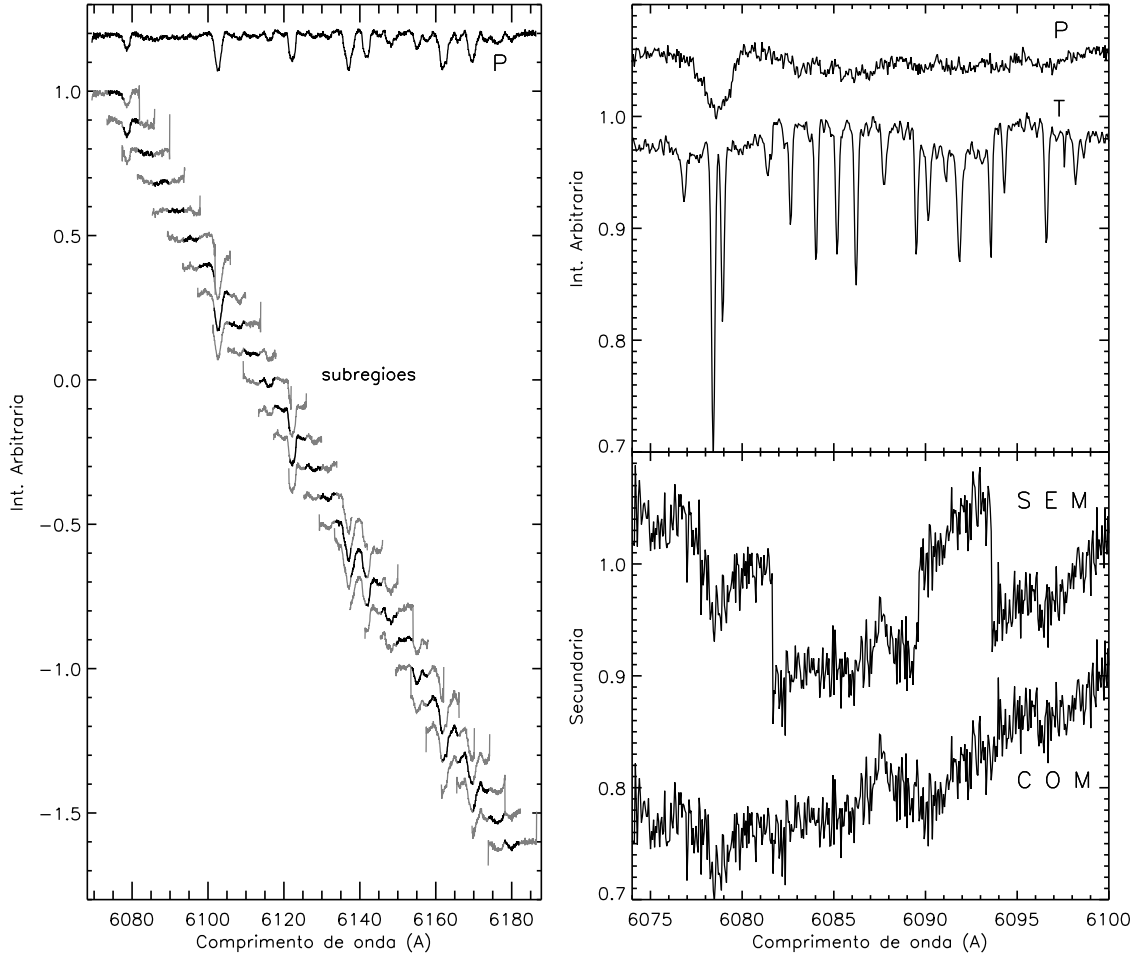
1. Determinar  $s$  usando a Eq.(4.4);
2. Determinar  $int(\frac{L_{min}}{\Delta v})$  usando a Eq. (4.13);
3. Determinar  $int(\frac{L_{0,min}}{\Delta v})$  usando a Eq. (4.14);
4. Determinar  $r_{min}$  usando a parte inteira da Eq. (4.15) ;
5. Determinar  $\Delta N$  usando a parte inteira da Eq. (4.16).

Em seguida, depois de obtida a solução para os subintervalos, esses devem ser concatenados, a fim de obter a região espectral com seu tamanho original. Esse procedimento será discutido na próxima seção.

### 4.2.3 Como concatenar as subregiões

Após resolver cada subregião separadamente no domínio de velocidade, devemos concatená-las para obter o espectro total com  $N_{tot}$  pixels. Aparentemente, essa é uma tarefa simples, uma vez que basta somente retirar a quantidade  $s$  de cada subregião e concatená-las adequadamente de acordo com a Fig. 4.3. Porém, cada subregião pode apresentar contínuo com níveis diferentes, diferença essa que pode ser mais pronunciada na componente mais fraca.

Para exemplificar um método de concatenar as subregiões, utilizaremos os espectros compostos do sistema triplo eclipsante RV Crt, para uma região espectral contendo 2048 pontos (6071 a 6185 Å), cujos parâmetros orbitais foram bem determinados pela análise conjunta das curvas de luz *uvby* e velocidades preditas pelo código KOREL (Sec. 5.1.4). Em



**Figura 4.4:** “Intervalos de interesse” e espectros das componentes de RV Crt reconstruídos no espaço de velocidade usando o procedimento para redução do tempo computacional. A região analisada vai de 6071 a 6185 Å, contendo 2048 pixels. No painel esquerdo nós mostramos, em intensidade arbitrária, as 27 subregiões (172 pixels) analisadas separadamente com o código CRES e seus respectivos “intervalos de interesse” em preto (72 pixels), para a componente mais brilhante do par eclipsante (primária). A junção destes intervalos acrescido da quantidade  $s$  formam seu espectro, mostrado no topo (P). Os painéis da direita mostram, para um região de 27 Å, os “intervalos de interesse” para cada uma das componentes: primária (P) e terciária (T), painel superior e secundária “COM” e “SEM” correção nos desníveis das subregiões. Para uma boa visualização, os espectros da primária e terciária foram deslocados, respectivamente, por +0,06 e -0,04, no painel superior direito; e o espectro da secundária : “COM” e “SEM” foram deslocados, respectivamente, por +0,08 e +0,1, no painel inferior direito.

seguida, aplicamos o código CRES (Ilijć 2004b) e o método descrito na Sec. 4.2.1 para redução do tempo computacional.

Para RV Crt, o tempo computacional total é dado por

$$t_{tot} \propto \frac{2JLN_{tot}}{2L - s} \cdot \left( \frac{2L + q(v_{2,j_2} + v_{2,j_1}) + 2L + (v_{2,j_2} + v_{2,j_1}) + 2L}{\Delta v} \right)^2 \quad (4.17)$$

onde o terceiro comprimento  $2L$ , no numerador do termo quadrático, se refere ao número de colunas, na matriz de separação, correspondente à terciária. A velocidade dessa componente foi considerada nula, pois ainda não havíamos detectado quaisquer desvios Doppler

nos espectros do sistema, e portanto,  $N_3 = N$  (veja Sec. 4.1). Mesmo depois de termos conseguido evidenciar o movimento orbital da terciária em torno do par eclipsante, essa continua sendo uma ótima aproximação. Assim, para esse caso específico,

$$L_{min} = \frac{3}{8}(v_{2,j_1} + v_{2,j_2}) \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{8}{27}(1 + q)} \right),$$

onde  $s = v_{2,j_1} + v_{2,j_2} = 100$  pixels. Foram resolvidas separadamente 27 subregiões contendo cada uma delas 172 pixels, dos quais somente 72 correspondem ao “intervalo de interesse”. Como o intervalo orbital tem uma boa cobertura em velocidade,  $\max(qv_{2,j_1}, v_{2,j_2}) \approx \max(qv_{2,j_2}, v_{2,j_1}) = 50$  pixels (em cada extremo do intervalo de 172 pixels). O tempo computacional total para essa região foi de 3,6 horas, aproximadamente.

O painel esquerdo da Fig. 4.4 mostra as 27 subregiões para o espectro da primária e seus respectivos “intervalos de interesse” (em preto). A junção de cada um desses intervalos determina o espectro da primária mostrado no topo (P). Os painéis da direita mostram os espectro das componentes resultantes da junção do “intervalo de interesse” em 27 Å. Observe como as subregiões do espectro da secundária (painel inferior da direita) mostram desníveis entre elas (designado por ‘SEM’), o que não é percebido visualmente para a primária (P) e a terciária (T), no painel superior direito.

A origem desse efeito vem do fato de que a DVS seleciona valores fisicamente incorretos para cada um dos “intervalos de interesse”. Como a separação espectral foi processada independentemente para cada “intervalo de interesse”, é óbvio que cada um desses intervalos irão resultar num valor diferente para os modos de frequências mais baixas, explicando os desníveis, sobretudo mais pronunciados, no espectro da componente mais fraca (como discutido na Sec. 2.7).

Para corrigir o problema, simplesmente “renormalizamos” as subregiões ( $r$ ) adicionando a elas uma constante,  $C(r)$ , dada por

$$\begin{aligned} C(r) &= \left( \sum_{r=1}^r \Delta z_{r-1,r} \right) - \overline{\Delta z}, \quad \text{para } r \geq 1, \text{ e} \\ C(0) &= -\overline{\Delta z}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde,

$$\begin{aligned} \overline{\Delta z} &= \frac{1}{R} \sum_{l=1}^{R-1} (R-l) \Delta z_{l-1,l}, \\ \Delta z_{r-1,r} &= \langle [+L_0 - c_1, +L_0 + c_1] \rangle_{r-1} - \langle [-L_0 - c_1, -L_0 + c_1] \rangle_r. \end{aligned}$$

$R$  é o número total de subregiões;  $\Delta z_{r-1,r}$  representa a diferença entre o valor médio de um intervalo específico  $[+L_0 - c_1, +L_0 + c_1]$  para a subregião  $r - 1$ , e o valor médio de  $[-L_0 - c_1, -L_0 + c_1]$ , para a subsequente subregião ( $r$ );  $c_1$  pode ser escolhido arbitrariamente: no presente caso, aplicado à RV Crt, escolhemos  $c_1 = 25$ . Aplicamos este procedimento às componentes primária e secundária, e exigimos que  $C(r)$  para a terciária estivesse relacionado com os valores para as componentes do par eclipsante da seguinte forma

$$\ell_3 C_3(r) + \ell_2 C_2(r) + \ell_1 C_1(r) = 0, \quad (4.19)$$

ou

$$C_3(r) = -\frac{\ell_2 C_2(r) + \ell_1 C_1(r)}{\ell_3}. \quad (4.20)$$

$\ell_k$  para  $k = 1, 2, 3$  foram tomados como os valores médio para todas as fases orbitais fora do eclipse primário. O resultado deste procedimento para o espectro da secundária é mostrado no painel inferior direito da Fig. 4.4 (designado por “COM”). Caso o sistema seja duplo, pode-se determinar  $C_1(r)$  usando a Eq. (4.19) e depois requerer que  $C_2(r) = -\frac{\ell_1}{\ell_2}C_1(r)$ .

# Capítulo 5

---

## Aplicação a um Sistema Real

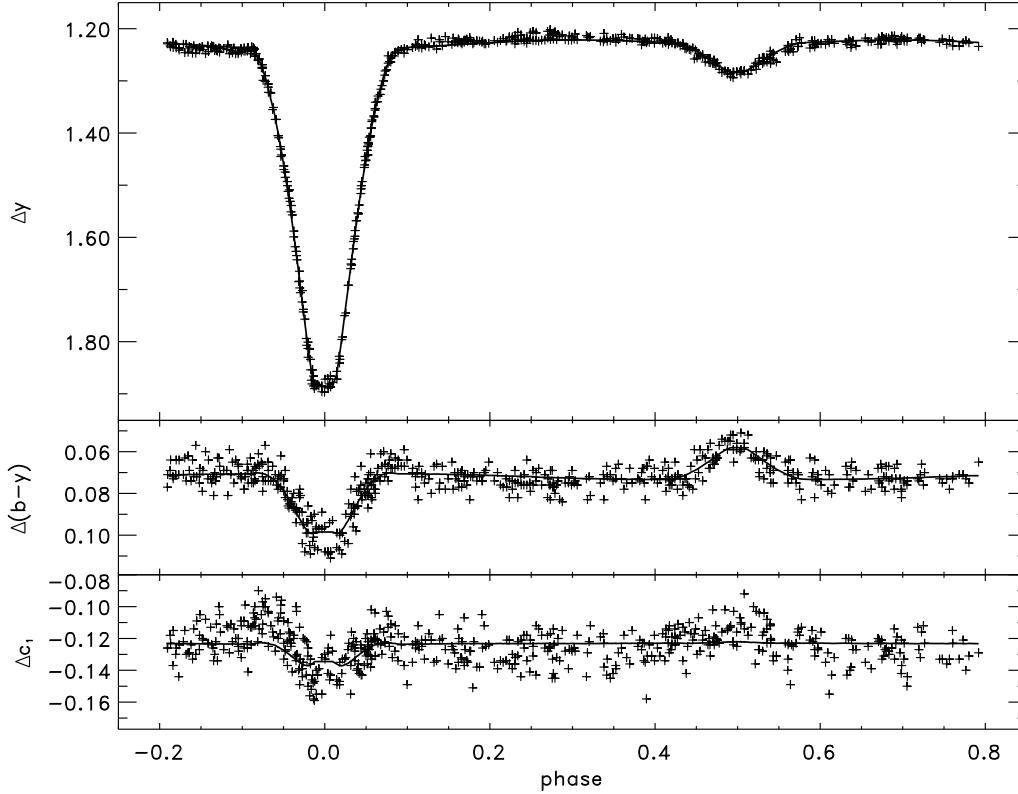
### 5.1 O Sistema Triplo Eclipsante RV Crateris

RV Crateris (HD 98412; SAO 156604;  $V=9^m$  e  $i = 89, 9^\circ$ ) é um sistema triplo eclipsante do tipo espectral médio **F8**, cuja componente secundária eclipsante se localiza acima da seqüência principal (demasiado luminosa para sua massa, ou, de forma equivalente, possui raio grande demais para sua temperatura), provavelmente se encontrando na fase de pré-seqüência principal. Uma análise preliminar (Machado 1997) de curvas de luz fotoelétricas de alta precisão (filtros Strömgren *uvby*) obtidas com o *Strömgren Automatic Telescope*, SAT, ESO, La Silla, Chile, e curvas de velocidade radial (espectros obtidos com CCD e o espectrógrafo Coudé do telescópio de 1,6 m no Observatório do Pico dos Dias, LNA, Brasil) indicou duas possíveis soluções para os elementos orbitais das componentes. A presença de uma grande quantidade de terceira luz nas curvas de luz e nos espectros, associada à rápida rotação das componentes eclipsantes (devido à sincronização orbital e ao período curto  $P=1^d,17050239$ ), tornou difícil a identificação das linhas espectrais da componente eclipsante mais fraca.

Como a técnica de correlação cruzada, usada por Machado (1997), não foi suficiente para determinar a velocidade radial da componente mais fraca, foi proposta a utilização da técnica de desembaraçamento espectral no espaço de Fourier, KOREL (Hadrava, 1995 e 2004b), para determinar não só a velocidade radial da secundária como também os espectros individuais das componentes para posterior estudo de abundâncias e parâmetros atmosféricos.

O presente capítulo destina-se à aplicação das técnicas de desembaraçamento e/ou separação espectral do sistema triplo eclipsante RV Cr, baseando-se no estudo teórico do processo de separação espectral, mencionado no Cap. 2. Nas Secs. 5.1.1 e 5.1.2, descrevemos brevemente os resultados obtidos por Machado (1997) em sua análise, respectivamente, fotométrica e espectroscópica (detalhes podem ser vistos em Machado 1997 ou em Vaz et al. 2008). Na Sec. 5.1.3, descrevemos as novas observações obtidas com o FEROS, para serem analisadas via os métodos de desembaraçamento espectral. Na Sec. 5.1.4, descrevemos como essas observações foram usadas para a análise conjunta do KOREL





**Figura 5.1:** Curva de luz  $y$  e curva dos índices de cor  $b - y$  e  $u - b$  (sistema instrumental) para RV Cr. As curvas sólidas mostram nossa presente solução para RV Cr.

com o modelo de curvas de luz *WD*, de Wilson & Devinney (Wilson & Devinney 1971, Wilson 1993), com extensas e profundas modificações introduzidas por Vaz (em Vaz et al. 1995, 2008; Casey et al. 1997; Stassun et al. 2004, entre outras). Nas Secs. 5.1.5 e 5.1.6 descrevemos, respectivamente, como foram selecionadas as regiões espectrais, e determinadas as intensidades relativas em cada fase orbital e região espectral, para serem usadas nos códigos de desembaraçamento espectral. Na Sec. 5.1.7 mostramos os resultados preliminares da aplicação do código no espaço de Fourier, *KOREL*, e na Sec. 5.1.9 a aplicação do código no espaço de velocidade, *CRES* (Ilijć, 2006). Na Sec. 5.1.8, mostramos, através do conceito de número de condição, o quanto a solução obtida pelo código *KOREL*, para algumas regiões de RV Cr, é bem condicionada ou não. Na Sec. 5.1.10, mostramos a aplicação do processo de renormalização dos espectros, sobre uma região específica de RV Cr, discutida, teoricamente, na Sec. 2.8.

### 5.1.1 Fotometria: observações e análise

Neste trabalho, usamos as mesmas observações fotométricas utilizadas por Machado (1997). Essas observações foram realizadas em 1987, 1988 e 1989 (entre janeiro de 1987 a maio de 1989), no telescópio dinamarquês SAT (Ströngem Automatic Telescope) de 50cm no ESO, La Silla, Chile, com o fotômetro de 4 canais utilizando o sistema descrito por

Gronbech et al. (1976), e com um fotômetro de 2 canais ( $H_\beta$ ) descrito por Gronbech & Olsen (1977). Assim, foram obtidas curvas de luz de alta precisão, *wby*, contendo 529 pontos em cada cor, durante 43 noites.

A redução dos dados e obtenção da curva de luz foi feita pelos Drs. Jens Viggo Clausen (Niels Bohr Institute for Astronomy, Physics and Geology, Dinamarca) e Luiz Paulo Vaz (UFMG). Detalhes sobre o processo de observação e redução dos dados podem ser obtidas em Machado (1997) e Vaz et al. (2008). A curva de luz na cor *y* e as curvas de índices de cor ( $b-y$ ) e  $c_1$  são mostradas na Fig. 5.1. As curvas de luz mostram eclipses bastante desiguais indicando que as componentes possuem temperaturas diferentes. O eclipse primário mostra um nível constante de luz, o que indica uma ocultação total que dura aproximadamente 25 minutos. A região fora dos eclipses mostra pouca variação significativa, ou seja, há poucos efeitos de proximidade nas curvas de luz. É evidente uma pequena assimetria ao fundo do mínimo primário bem como no seu ramo descendente, esta última bem clara na curva do índice de cor  $c_1$ .

### 5.1.2 Espectroscopia Coudé e Aplicação da Técnica de Correlação Cruzada

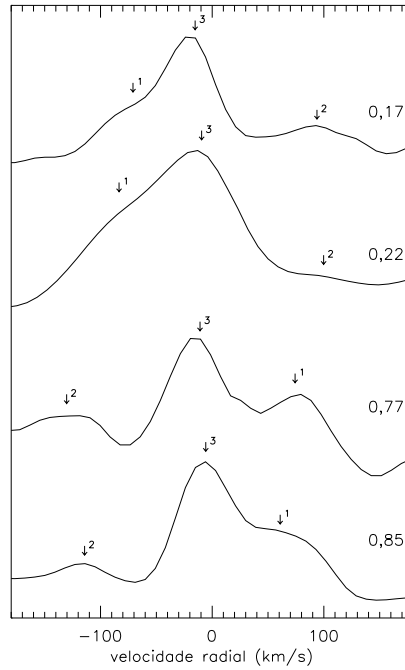
Antes de se perceber a necessidade de espectros de maior resolução e cobertura espectral, para uma análise mais consistente de RV Crt, uma grande quantidade de espectros foi obtida entre 1989 e 2002 com o espectrógrafo Coudé e o telescópio de 1,6m do Observatório do Pico dos Dias, LNA-MCT, Brazópolis, MG. O tempo de exposição desses espectros foi de  $\sim 15$  min, com  $S/R > 10$  e cobertura espectral da ordem de 150 a 200 Å. A redução desses espectros foi realizada com um programa desenvolvido por Vieira (1991) na linguagem C para micro-computadores e, posteriormente, traduzido e aprimorado para a linguagem IDL por Vaz. Esses programas fazem uso do algoritmo de extração ótima desenvolvido por Horne (1986). Parte desses espectros foi utilizada no trabalho de Mestrado de Machado (1997).

A curva de luz de RV Crt (Fig. 5.1) mostra que as componentes possuem luminosidades superficiais bem distintas, tendo a componente secundária uma luminosidade superficial bem menor que a primária<sup>1</sup>. É de se esperar, portanto, que, se as linhas espectrais de ambas componentes fossem detectadas num mesmo espectro, as linhas correspondentes à secundária deveriam aparecer mais fracas, caso as componentes fossem relativamente normais, ainda na fase de Sequência Principal, cuja razão de luminosidade total não difere muito da razão de luminosidades superficiais (essencialmente dependentes das temperaturas efetivas e dos raios das componentes). Contudo, observou-se que é muito difícil a localização e identificação das linhas das componentes, especialmente as linhas da secundária, ainda mais do que seria de se esperar pela diferença de profundidade dos mínimos (Popper, 1996).

O sistema apresenta um período relativamente curto (1,17d) e parte da dificuldade poderia estar associada com a alta velocidade de rotação intrínseca, uma vez que as componentes quase certamente devem estar sincronizadas com o movimento orbital. Para dificultar ainda mais o quadro, a componente primária (de maior brilho superficial e, portanto, a de temperatura efetiva mais alta) é de tipo espectral tardio (F6V), com um

---

<sup>1</sup>Nesse texto utilizaremos a nomenclatura comum na análise de curvas de luz de sistemas binários eclipsantes, onde, por definição, a componente primária é a de maior brilho superficial, eclipsada no mínimo mais profundo.



**Figura 5.2:** Curvas de correlação entre RV CrT e  $\pi^3$  Ori. As fases correspondentes de RV CrT estão mostradas à direita na figura.

grande número de linhas espectrais. Como a secundária possui menor temperatura efetiva (pelo menor brilho superficial), essa componente deve possuir uma densidade de linhas espectrais ainda maior. Apresentando muitas linhas, com amplo desvio Doppler (devido ao curto período orbital) e, certamente, alargadas (pela sincronização com o movimento orbital), os métodos mais imediatos de medida individual dos centros das linhas espectrais não são eficientes, devido à enorme probabilidade de mistura entre as linhas das duas componentes, o que acarretaria em grandes erros na determinação final das velocidades radiais.

Devido a essas dificuldades, Machado (1997) usou o método de correlação cruzada na determinação da curva de velocidades radiais, usando  $\pi^3$  Ori (HD30652, F6V,  $v \sin i = 10$  km/s) como espectro gabarito. Sua velocidade radial é  $v_r = 24,3$  km/s (Andersen & Nordström 1983, Duquennoy et al. 1991). Para maximizar a probabilidade de se detectar os desvios Doppler das componentes, a correlação cruzada foi realizada evitando fases próximas à conjunção das componentes eclipsantes e, ao mesmo, tempo certificando-se de que os intervalos em comprimento de onda dos espectros a serem correlacionados fossem os mesmos. Machado (1997) observou nas curvas de correlação, veja a Fig. (5.2), que o pico de correlação mais intenso permanecia praticamente na mesma velocidade, independente da fase em que o sistema se encontrava. Notou também, inicialmente, um pico menos intenso, bem misturado ao primeiro, mas que mostrava um movimento coerente com o período determinado na análise da curva de luz.

O pico imóvel indicou a presença de uma terceira componente nos espectros. Exatamente as linhas espectrais mais nítidas no espectro composto não provém das componentes eclipsantes, mas de uma terceira estrela, praticamente tão luminosa quanto o próprio par eclipsante, que domina a luz do sistema, diluindo-a tanto na espectroscopia quanto na

fotometria. Devido à sua aparente imobilidade em velocidade nos espectros analisados, não foi possível estabelecer se tratava-se de um sistema triplo fisicamente ligado com um período muito longo, ou se essa estrela formava apenas um par óptico com o sistema eclipsante. O segundo pico de velocidade observado seria, então, relativo à componente primária do par eclipsante. Machado não detecta com confiabilidade, de suas curvas de correlação, a componente secundária, devido a sua baixa luminosidade em relação à primária e, principalmente, devido à componente que não participa dos eclipses, que se mostrava tão luminosa quanto a primária eclipsante (as mesmas dificuldades foram encontradas por Popper, 1996).

A análise não foi conclusiva, mas levou a duas soluções possíveis, sendo que uma delas é mais provável que a outra. A solução mais provável indicava uma razão das massas do par eclipsante,  $M_2/M_1$ , igual a  $0,66 \pm 0,06$  e uma pequena excentricidade,  $e = 0,04 \pm 0,06$ , provavelmente espúria. Estes números, juntamente com a solução preliminar das curvas de luz, revelaram massas bastante pequenas,  $M_1 \sim 0,6 M_\odot$  e  $M_2 \sim 0,4 M_\odot$ , indicando que as componentes eclipsantes, principalmente a secundária, não se encontram na seqüência principal e devido à suas baixas massas, elas provavelmente estariam na pré-seqüência principal. A outra solução, também possível com a análise disponível e também com a secundária sendo a componente de menor massa, indicava que as componentes estariam também fora da seqüência principal, mas evoluídas para além dela, no ramo das gigantes. Como as massas indicadas por essa segunda possibilidade ainda eram pequenas, ficava a dificuldade de explicar (a) como poderiam ter evoluído para além da seqüência principal com tão pouca massa, e (b) como a secundária, de massa menor, estava mais evoluída que a primária. O segundo problema poderia ser explicado por uma inversão de massas devida à transferência de massa da secundária para a primária por extravasamento do lobo de Roche, mas não haviam evidências disso (emissão de rádio, raios X, etc.).

Tudo isso evidenciou a necessidade de se aprimorar a análise espectroscópica, pois nem o método clássico de medida individual das linhas, nem o de correlação cruzada, haviam sido eficientes em encontrar uma solução plausível. A possibilidade do sistema ainda estar na fase pré-seqüência principal precisava ser estudada, dada a importância e raridade de dados para estrelas de tão pouca massa na literatura.

A disponibilidade de se usar os métodos de desembaraçamento espectral para um estudo mais detalhado de RV Crt apareceu como a única saída viável, mas acarretava na exigência de espectros de maior qualidade, com grande cobertura e resolução espectral, além de melhor relação sinal – ruído (S/R). Sendo assim, empreendemos um estudo das características do método KOREL (Hadrava, 1995, 2004c e 2004b), efetuado na dissertação de Mestrado de Torres (2002) e continuado no presente trabalho. Além disso, nosso grupo empreendeu a realização de novas observações espectroscópicas, que serão discutidas com mais detalhe na Sec. 5.1.3.

### 5.1.3 Espectroscopia Échelle

Durante 7 noites de fevereiro de 2003, 51 espectros de alta resolução (20 minutos de exposição) foram obtidos usando o espectrógrafo échelle FEROS instalado no telescópio de 2,2-m do European Southern Observatory, ESO, em La Silla, Chile, e um espectro na fase de eclipse total primário (20 minutos de exposição) foi obtido em março de 2001 (veja Tab. 5.1). Seis destes espectros se encontram em fase de eclipse primário, sendo um durante a totalidade e quatro outros em fase de eclipse secundário, sendo um muito

**Tabela 5.1:** Exposições de RV Crt obtidas com o FEROS. As observações marcadas com “\*” foram usadas na análise com os códigos de desembaraçamento espectral, totalizando 41 observações, onde apenas uma se encontra no eclipse total primário e o restante em fases fora do eclipse. A fase orbital foi calculada usando as efemérides descritas pela Eq. (5.2).

índice	DJH - 2.440.000	fase orbital	Obs.	índice	DJH - 2.440.000	fase orbital	Obs.
1	51979,335116	0,7464	telesc. 1,5m	27*	52683,842732	0,1996	
2	52680,664302	0,4841	ecl. sec. prof.	28	52683,858439	0,2130	
3*	52680,773533	0,5775	ecl. sec.?	29	52683,874146	0,2264	
4*	52680,838421	0,6329		30*	52684,608213	0,8535	
5*	52681,607574	0,2900		31*	52684,623931	0,8670	
6*	52681,623269	0,3034		32*	52684,639638	0,8804	
7*	52681,670448	0,3437		33*	52684,655357	0,8938	
8*	52681,686178	0,3572		34*	52684,671098	0,9073	
9*	52681,701896	0,3706		35	52684,761832	0,9848	ecl. pri. prof.
10*	52681,717627	0,3840		36*	52684,779842	0,0002	ecl. pri. total
11	52681,733368	0,3975		37	52684,871398	0,0784	ecl. pri.
12	52681,749411	0,4112		38*	52685,726734	0,8091	
13	52681,835758	0,4849	ecl. sec. prof.	39*	52685,749291	0,8284	
14	52681,853792	0,5004	ecl. sec. total	40*	52685,764998	0,8418	
15*	52682,726514	0,2459		41*	52685,780728	0,8553	
16	52683,592094	0,9854	ecl. prim. prof.	42*	52685,796446	0,8687	
17	52683,609839	0,0006	ecl. prim. prof.	43*	52686,729931	0,6662	
18	52683,701278	0,0787	ecl. prim.	44*	52686,745626	0,6796	
19*	52683,716996	0,0922		45*	52686,761344	0,6930	
20*	52683,732726	0,1056		46*	52686,777074	0,7065	
21*	52683,748422	0,1190		47*	52686,792804	0,7199	
22*	52683,764117	0,1324		48*	52686,814819	0,7387	
23*	52683,779859	0,1459		49*	52686,830503	0,7521	
24*	52683,795589	0,1593		50*	52686,846221	0,7656	
25*	52683,811307	0,1727		51*	52686,861963	0,7790	
26*	52683,827037	0,1862		52*	52686,877670	0,7924	

perto do máximo de ocultação. Algumas exposições de RV Crt (12 espectros FEROS) foram gentilmente obtidas, a nosso pedido, pelo Dr. Celso Batalha e seus colaboradores do Observatório Nacional/MCT, Brasil. Infelizmente, as observações originais (arquivos de trabalho para tratamento de viés, campo plano, calibração, etc.) não puderam ser recuperadas para uma redução mais apropriada, e, como as reduções automáticas (“pipe lined”) não se prestam ao nosso tipo de trabalho, as mesmas não foram utilizadas aqui.

O FEROS é um espectrógrafo de bancada alimentado por fibra óptica (“fiber fed”), com  $R=48.000$ , intervalo de comprimento de onda de 425 nm a 800 nm e equipado pelo detector EEV CCD com  $2000 \times 4000$  pixels afinado e iluminado por trás (“thinned and backside illuminated”). No intervalo de 425 nm a 800 nm quase todos os espectros têm relação sinal ruído entre 100 e 150, decrescendo rapidamente para regiões de comprimento de onda mais baixo, atingindo 50 em 390 nm e 25 em 380 nm (valores que dependem fortemente das condições atmosféricas).

Devido à presença de uma componente que contribui muito pouco em luz ao espectro composto (secundária eclipsante) e às recomendações sobre erros sistemáticos nos espectros obtidos pelo uso das técnicas de desembaraçamento espectral (Ilijic 2004b, Hensberge 2004), um processo mais preciso de redução de dados foi necessário, indo muito além da redução padrão do “pipeline”. O objetivo foi assegurar a consistência entre todos os espectros, impondo um processo de redução diferencial, garantindo a superposição correta

das ordens, removendo os efeitos temporais de “vignetting” e variações da função “blaze” antes de combinar as ordens e evitando a introdução de efeitos temporais da calibração nos espectros. Durante o processo de extração das ordens, devido às características dos métodos de separação e desembaraçamento espectral, os espectros foram calibrados em  $\ln \lambda$ .

Alguns espectros obtidos nas primeiras duas noites das observações de 2003 foram afetados pelo mau funcionamento do obturador na frente do CCD, causando perda da luz nos cantos do detector. A quantidade de luz perdida variou erraticamente de uma exposição para outra de tal maneira que algumas delas foram afetadas de forma irreversível. Das exposições consideradas úteis, apenas parte das ordens espectrais com comprimentos de onda maiores foi afetada no final do espectro ( $\lambda > 670$  nm), embora haja suficiente superposição das ordens nos comprimentos de onda menores para evitar os dados próximos dos cantos do detector. Como consequência, a retificação em um número de pequenos intervalos de comprimento de onda maiores que 670 nm requereu um tratamento não padrão, sendo provavelmente menos preciso em muitos dos espectros afetados. Maiores detalhes do processo de redução, do qual participei muito pouco, será descrita no artigo final sobre a análise de RV Crt.

#### 5.1.4 Combinação dos Métodos de Análise de Curva de Luz e Desembaraçamento Espectral

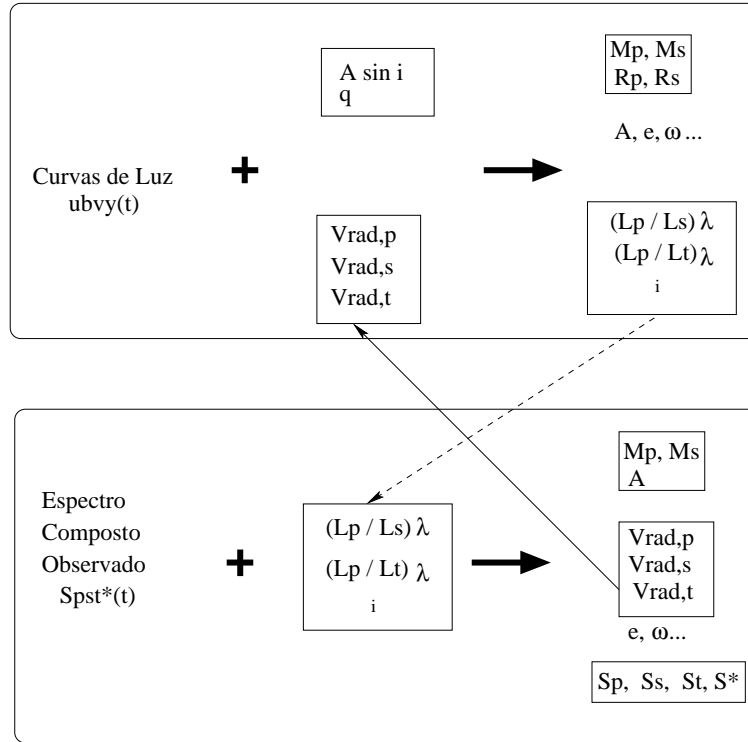
A combinação de diferentes ferramentas de análise, para determinar as características individuais e orbitais das componentes de sistemas múltiplos eclipsantes a partir da espectroscopia e fotometria, conduz a resultados mais precisos, consistentes e completos dos sistemas em estudo.

Sabe-se que alguns parâmetros, ou certas combinações deles, são fortemente vinculados pela variação de luz, ou curvas de luz, enquanto outros são atrelados à variação na velocidade radial, ou curvas de velocidade radial (ver, entre outros, Vaz 1984 e Torres 2002). Por exemplo, o raio em unidades de semi-eixo maior, é determinado de forma robusta da análise das curvas de luz; enquanto que o próprio tamanho da órbita, ou seu semi-eixo maior,  $a$ , pode ser determinado pela análise conjunta das curvas de luz e de velocidades radiais. A razão das temperaturas efetivas pode ser determinada pela análise das curvas de luz, ou ainda, de forma mais exata, a partir da análise do espectro estelar. No caso de sistemas múltiplos, que trata de espectros compostos de várias componentes, isso é possível somente com a aplicação das técnicas de desembaraçamento ou separação espectral, onde o espectro de cada componente pode ser analisado individualmente.

As ferramentas usadas para extrair as velocidades radiais e deduzir as características orbitais e estelares dependem umas das outras. Cada uma delas pode ser beneficiada pelas informações proporcionadas por outras e, então, um processo iterativo é necessário.

Para a análise de RV Crt, seguimos um procedimento semelhante ao utilizado por Hensberge et al (2000) em que o método de desembaraçamento espectral (no nosso caso o código KOREL) é usado interativamente com o método de análise de curva de luz (no nosso caso o WD) .

A Fig. 5.3 é um esquema representativo desse processo em que a parte superior é o modelo usado para analisar as variações na luz e velocidade radial causada pelo movimento orbital. Enquanto a variabilidade fotométrica é medida diretamente, as velocidades radiais podem ser mais difíceis de se obter dos espectros compostos, especialmente nas fases



**Figura 5.3:** Processo de interação entre o modelo de Curvas de Luz – WD e o método de Desembaraçamento Espectral – KOREL. Os índices p, s e t referem-se às componentes primária secundária e terciária. O símbolo “\*” refer-se à contribuição interestelar, circunstelar ou das linhas telúricas ao espectro estelar observado (indicado por “S”).

orbitais onde as diferenças nas velocidades de cada componente são pequenas. A falta de precisão da velocidade nessas fases aumenta a imprecisão dos valores da excentricidade e longitude do periastro. No entanto, os métodos de desembaraçamento espectral produzem velocidades mais precisas (e que, no caso de sistemas como RV Crt não podem ser obtidas de outro modo) e, então, esses dados são usados como entrada para a segunda parte integrante desse processo de iteração (parte inferior da figura 5.3).

O WD é utilizado para modelar geométrica e fisicamente o sistema eclipsante e, como sub-produto do processo de análise, pode determinar, além das curvas de luz e de velocidades radiais, as contribuições de cada componente ao contínuo em cada fase orbital, em função do comprimento de onda central de cada região espectral escolhida para a análise (usando os procedimentos que serão discutidos na Seção 5.1.6). Por sua vez, essas contribuições individuais ao contínuo não podem ser obtidas pelos métodos de separação espectral e, de fato, são determinantes para a unicidade da solução (como discutido no Cap. 2). Estes resultados são, portanto, implementados no código KOREL, e mantidos fixos durante a convergência (são ajustados pelo método a excentricidade, longitude do periastro e razão das massas), produzindo novas curvas de velocidade radial para cada região espectral designada (Tab. 5.2, Sec. 5.1.5). Em seguida, uma curva de velocidade radial média é obtida e, de forma iterativa, usada no WD como dado de entrada. O processo se repete até que uma solução auto-consistente seja obtida. O programa KOREL foi implementado com diversas modificações para ser adaptado a esse processo iterativo para a solução de RV Crateris, assim como vários outros programas auxiliares e procedimentos

(“scripts”) UNIX.

Os valores das contribuições em luz das componentes ao contínuo, implementados no arquivo de entrada do KOREL, serão mantidos fixos durante a convergência dos parâmetros orbitais. A solução auto-consistente requer que várias iterações sejam feitas no sentido de reduzir o valor do desvio padrão dos parâmetros (maiores detalhes são descritos em Torres, 2002). O procedimento é sistemático e implementamos uma maneira de torná-lo semi-automático, utilizando programas e arquivos de roteiro escritos em FORTRAN, AWK (Dougherty 1997) e IDL.

## 5.1.5 Escolha das Regiões Espectrais e Fases Orbitais

### 5.1.5.1 Regiões Espectrais

A escolha das regiões espectrais está vinculada aos fatos de que (1) o código KOREL requer espectros com  $2^n$  pixels e (2) que a transformada de Fourier irá considerá-los como funções periódicas, exigindo que ambos os cantos das regiões espectrais devam conter o mesmo nível no contínuo. O procedimento aqui descrito para selecionar regiões espectrais adequadas para nosso estudo segue, em linhas gerais, uma sugestão feita por Hensberge & Pavlovski (2000, Sec. 6.1).

Um estudo do desvio médio padrão, pixel a pixel, das médias de 4 amostras diferentes de espectros retificados, desde 3904,949 Å a 8866,186 Å, foi feito no sentido de melhor “visualizar” em que partes do espectro inteiro a componente mais fraca (secundária) exibiria seu movimento orbital em torno das linhas fortes da componente que não se move (terciária). Tal desvio médio padrão foi calculado como

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (S_i - \bar{S})^2}{N - 1}}, \quad (5.1)$$

onde  $S$  representa o espectro composto em cada fase  $i$ ,  $\bar{S}$  é o espectro médio de cada amostra (definida abaixo) e  $N$  é o número de pixels contido em cada intervalo espectral estudado. Cada amostra contém:

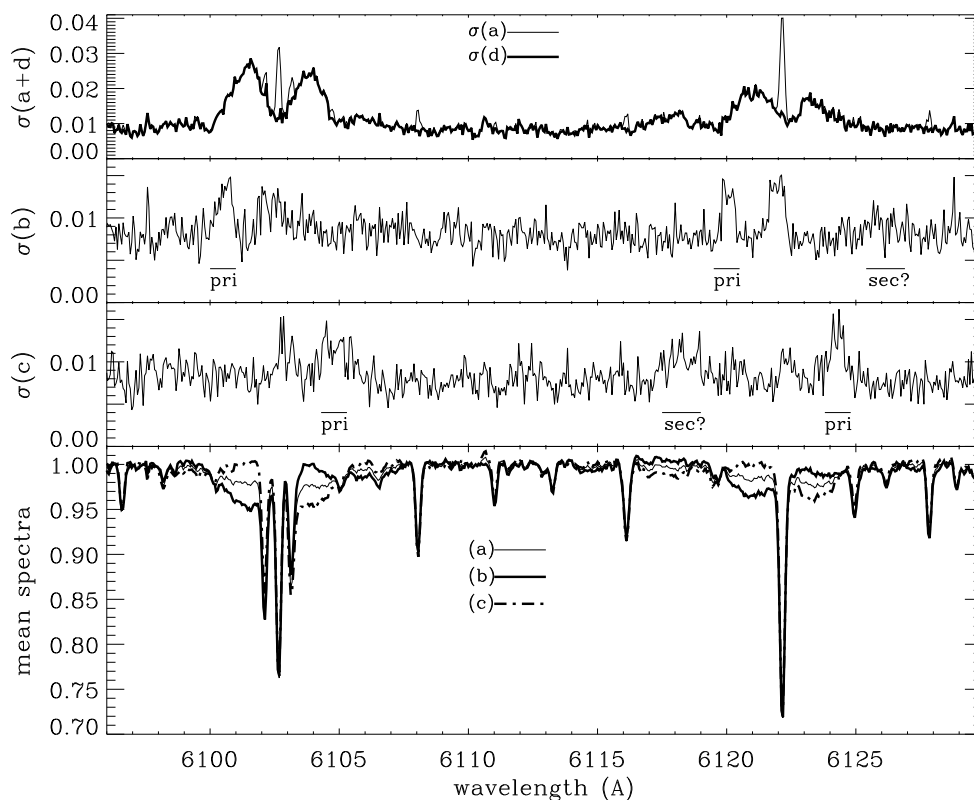
- (a) todos os espectros fora do eclipse mais um espectro durante a totalidade;
- (b) todos os espectros fora do eclipse onde a primária está se aproximando do observador (entre as fases  $0^P, 0$  e  $0^P, 5$ );
- (c) todos os espectros fora do eclipse onde a primária está se afastando do observador (entre as fases  $0^P, 5$  e  $1^P, 0$ );
- (d) todos os espectros fora do eclipse.

A Fig. 5.4 mostra uma região onde vemos claramente que a terciária contribui para o valor de  $\sigma$  apenas quando o espectro na totalidade é incluído na média – amostra (a). Isso ocorre devido à mudança no nível do contínuo causada pela ocultação da primária.

Os intervalos onde o valor de  $\sigma$  é pequeno e constante não possuem qualquer informação sobre o movimento orbital, por isso são propícios para determinar o início e o fim da região espectral.

Na região de 6100 Å à 6105 Å, por exemplo, vemos claramente a influência da primária eclipsante em torno das linhas da terciária (painel superior), informando-nos seu movimento orbital, ora se deslocando para o azul, ora para o vermelho (veja também os painéis



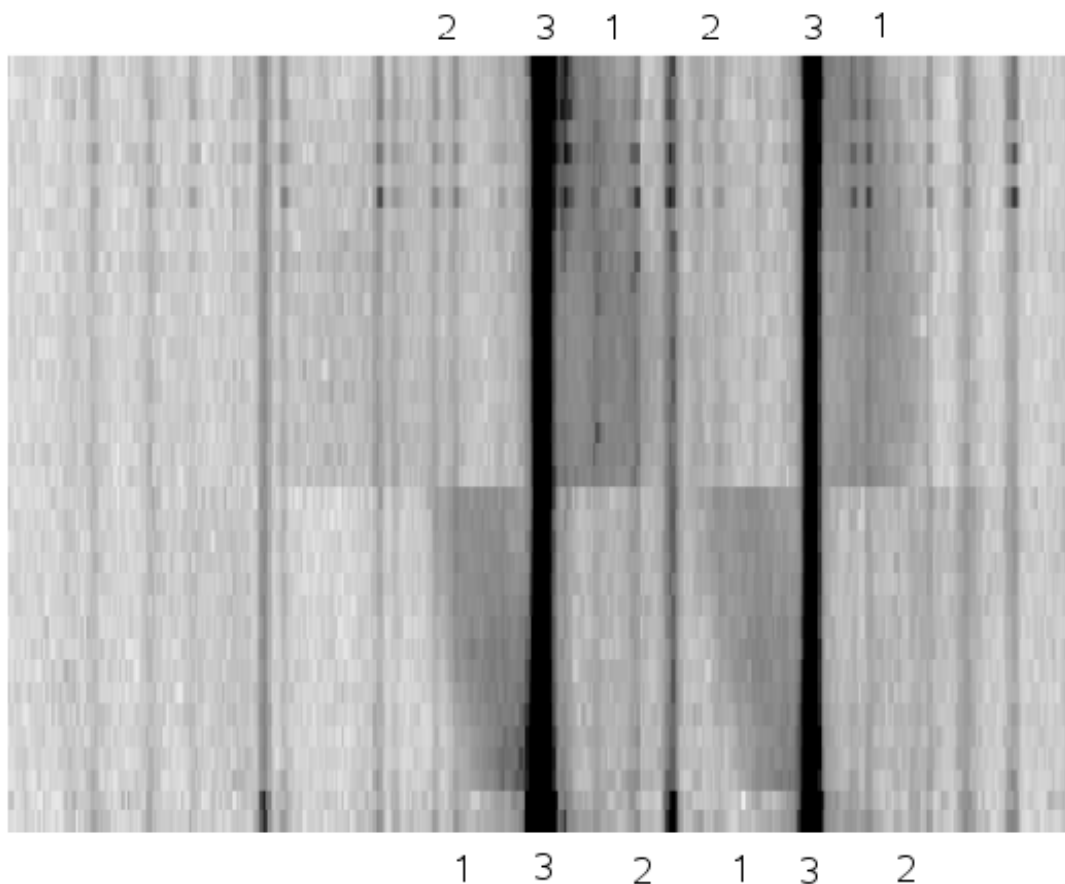


**Figura 5.4:** Desvio médio padrão e espectros médios de diferentes amostras. O painel superior mostra o desvio médio padrão para a amostra (a) (linha fina contínua) e para a amostra (d) (linha grossa contínua), veja o texto para maiores detalhes. Os painéis intermediários mostram o desvio médio padrão usando a amostra de espectros quando as linhas da primária eclipsante se desloca para o azul,  $\sigma(b)$ , e para o vermelho,  $\sigma(c)$ . O painel inferior mostra os espectros médios: (a) linha fina contínua, (b) linha grossa contínua e (c) linha grossa tracejada.

intermediários). Porém, os sinais da secundária são dificilmente detectáveis, mesmo na região do duplete de Na I (Fig. 5.5) que está entre uma das linhas mais intensas em tais estrelas frias. No entanto, entre 6117–6127 Å vemos possíveis sinais da secundária (“sec?”, nos painéis intermediários da Fig. 5.4). Observe que o “pico” próximo a 6117–6118 Å (“sec?”, no terceiro painel, de cima para baixo, da Fig. 5.4) é mais pronunciado que o seu correspondente, mais no vermelho, no painel superior. A possível causa para isso é que “sec?” nesse intervalo está influenciado, simultaneamente, pelo desvio para o azul da linha forte próxima a 6122 Å (devido ao deslocamento do espectro da secundária) e pelo desvio para o vermelho da linha fraca próxima a 6116 Å (devido ao deslocamento do espectro da primária).

Depois de uma cuidadosa análise, 25 regiões foram selecionadas (Tab. 5.2), respeitando-se as limitações do código KOREL (2<sup>n</sup> pixels em cada espectro e início e fim do intervalo espectral com aproximadamente o mesmo nível de contínuo). O intervalo entre 6732 Å e 8481 Å, aproximadamente, não foi selecionado devido à grande probabilidade de contaminação dos espectros por linhas telúricas.

No Apêndice A.1, mostramos como obter uma estimativa da informação de velocidade radial contida num intervalo espectral para as componentes de um sistema múltiplo, e a aplicação dos resultados para as regiões espectrais selecionadas de RV Crt (Tab. 5.2).



**Figura 5.5:** Espectros de RV Crt nas proximidades do dubleto de Na I (5890 Å). As linhas da primária são indicas por 1, as da secundária por 2 e as da terciária por 3. Vê-se claramente o deslocamento das linhas da primária em torno da terciária, mas o mesmo não é tão evidente para a secundária.

### 5.1.5.2 Fases Orbitais

As fases orbitais (descritas na Tab. 5.1) foram calculadas usando as seguintes efemérides para a primária

$$\text{Min I} : \text{DJH } 2\,447\,583,73022 + 1^d 17050239 E, \quad (5.2)$$

onde  $E$  representa o número de ciclos até o momento em que se obteve a observação. Posteriormente, Luiz Paulo Vaz redeterminou novas efemérides para RV Crt utilizando dados disponíveis na literatura e os observados por ele, totalizando 152 tempos de mínimo, onde 114 se referem à primária, cobrindo um total de 89 anos de observação. Recentemente, foi constatado, por nosso grupo, uma pequena, mas significativa, discordância em fase entre as curvas de luz observadas em diferentes épocas, ao utilizar o período determinado pelo conjunto de 152 tempos de mínimo, indicando efeito de tempo de luz<sup>2</sup> e, conseqüentemente, a certeza de que a terciária é componente fisicamente ligada ao sistema.

<sup>2</sup>Tempo de luz é observado quando há um deslocamento na posição aparente do objeto celestial em relação a sua posição verdadeira (ou posição geométrica), conduzindo a valores de tempos diferentes em que a luz levará para chegar a Terra. Em sistemas onde uma terceira componente está ligada fisicamente

**Tabela 5.2:** 25 regiões espectrais selecionadas depois do estudo do desvio médio padrão dos espectros desde 3904,949 Å a 8866,186 Å. "R" refere-se ao índice da região (as marcadas com \* são as que possuem linhas telúricas),  $\lambda_i$  e  $\lambda_f$  são, respectivamente, os comprimentos de onda inicial e final em Å, e "N" representa o número de pixels. Note que há algumas regiões que se superpõem.

R	$\lambda_i$	$\lambda_f$	N	R	$\lambda_i$	$\lambda_f$	N
1	3911,593	4059,940	4096	14*	5828,551	5938,019	2048
2	4010,241	4162,329	4096	15*	5925,779	6037,074	2048
3	4139,238	4296,219	4096	16	6070,973	6184,994	2048
4	4277,864	4317,830	1024	17	6045,531	6274,808	4096
5	4277,087	4439,295	4096	18*	6375,017	6616,789	4096
6	4420,410	4503,431	2048	19	6654,790	6685,774	512
7	4505,602	4676,477	4096	20*	6507,040	6753,820	4096
8	4675,967	4719,652	1024	21	6669,446	6731,754	1024
9	4727,982	4907,291	4096	22*	8482,486	8521,979	512
10	4907,380	5093,492	4096	23*	8619,676	8700,204	1024
11	5093,446	5286,615	4096	24	8700,125	8781,406	1024
12	5438,397	5540,538	2048	25	8796,585	8837,540	512
13	5725,210	5832,738	2048				

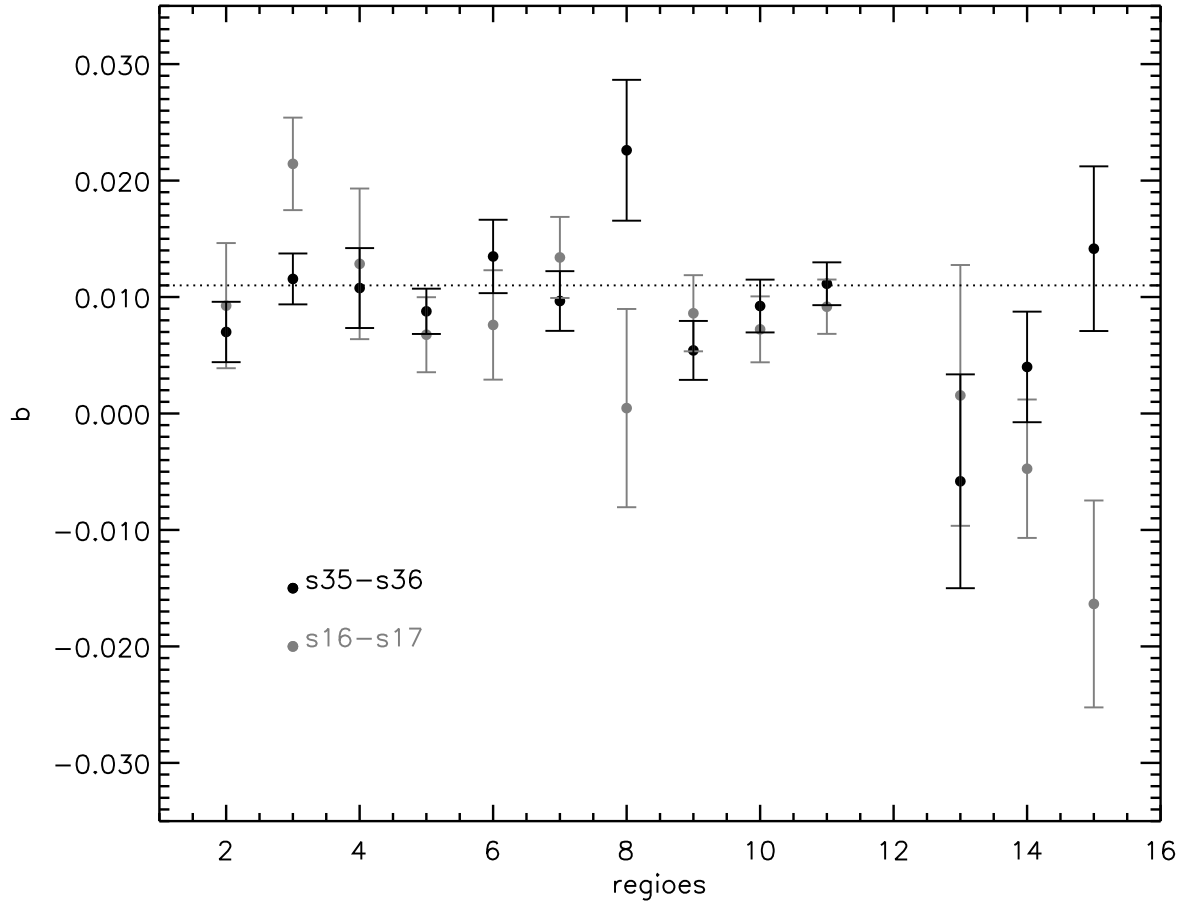
Até então, toda a análise envolvendo os códigos de desembaraçamento espectral, foi realizada considerando as efemérides descritas pela Eq. (5.2). Assim, os resultados apresentados aqui serão preliminares e a solução final de RV Crt será processada e publicada (em Vaz et al. 2008), após levar em consideração o efeito de tempo de luz.

Acreditamos que a solução final não irá divergir muito da que mostraremos na Sec. 5.1.7 e para investigar se a fase que usamos no código de desembaraçamento espectral continua em eclipse total, estudamos 4 espectros nos dias julianos heliocêntricos– DJH: 52684,779842 (denominado s36), 52683,609839 (denominado s17), 52684,761832 (denominado s35) e 52683,592094 (denominado s16). Usando a Tab. 5.1, vemos que os espectros s16 e s17 foram observados numa mesma noite e s35 e s36 na noite seguinte. Porém, de um lado, s36 e s17 e de outro, s35 e s16, estão quase na mesma fase orbital, com uma diferença de poucos minutos, enquanto que o intervalo de tempo entre as observações dos espectros foi de 25 minutos.

Nossa estratégia foi determinar em qual dos 4 espectros, próximos à totalidade, a profundidade das linhas da terciária difere significativamente, uma vez que o contínuo da primária dilui a profundidade das linhas da terciária. Como o estudo de uma única linha espectral não é suficiente para detectar tal diferença, fizemos uma análise estatística incluindo todas as linhas dos 4 espectros para cada região espectral separadamente, descrita na Tab. 5.2, e uma análise incluindo todas as linhas de todas as regiões ao mesmo tempo. O estudo abrange somente as regiões entre 4000 Å a 6000 Å, evitando aquelas com alta densidade de linhas, ou seja, em comprimento de onda mais baixos, e aquelas que possivelmente contém linhas telúricas. Nosso método consiste em encontrar uma relação entre

$$Y = S_{obs}(t_1) - S_{obs}(t_2) \quad e$$

a um par eclipsante faz com que as observações dos tempos de mínimo do sistema binário varie com o tempo, devido ao movimento do par eclipsante em torno da terciária, se uma correção de tempo de luz não é aplicada.

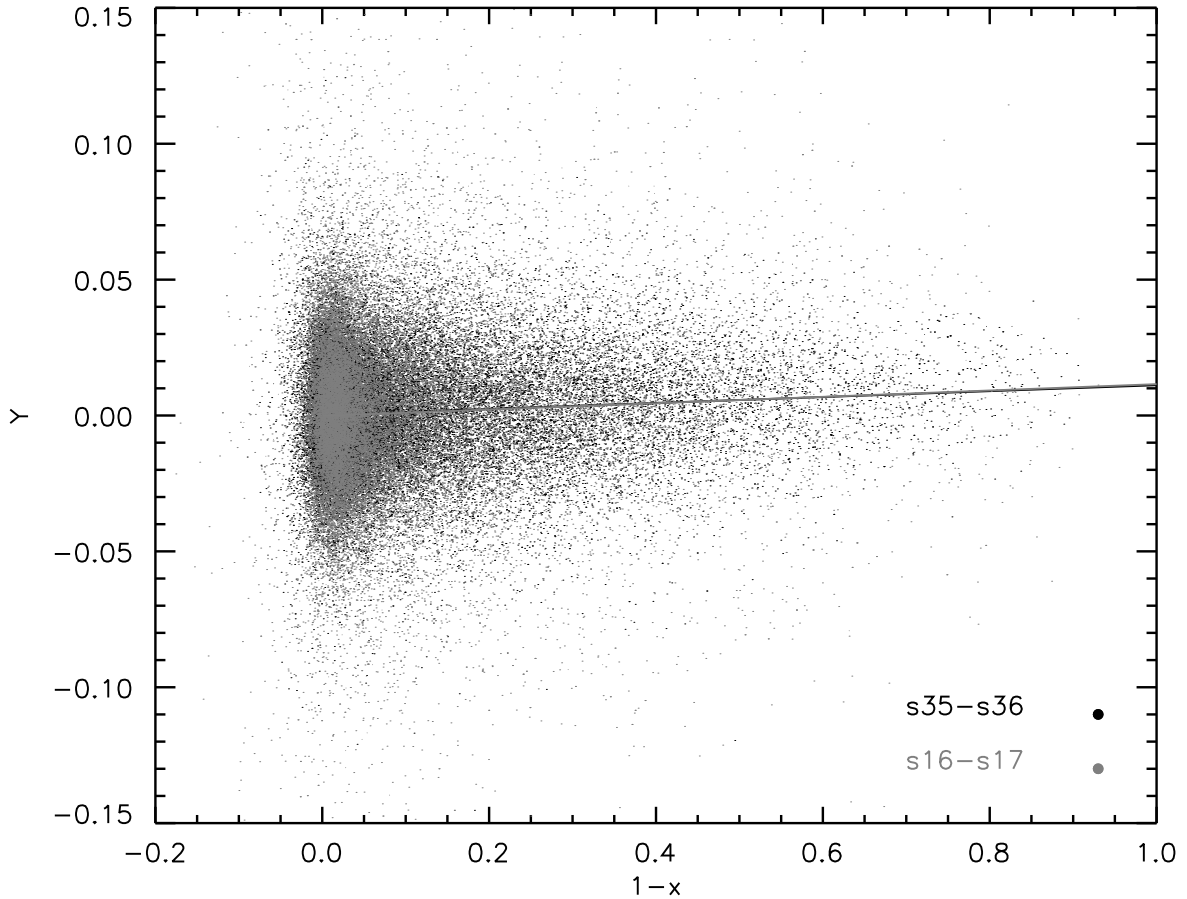


**Figura 5.6:** Estimativa da mudança na contribuição relativa da primária, “ $b$ ”, para cada região espectral contida no intervalo de 4000 Å a 6000 Å, para 4 fases orbitais que julgamos mais próximas da fase de totalidade primário. Os valores de  $b$  são mostrados, juntamente com a barra de erros, para cada região espectral e cada conjunto de exposições, (s35 - s36), em “●” preto e (s16 - s17) em “●” cinza. As barras de erros cujas extremidades são mais largas correspondem ao conjunto (s35 - s36) e aquelas mais finas correspondem ao conjunto (s16 - s17). Veja texto para maiores detalhes.

$$x = \frac{S_{obs}(t_1) + S_{obs}(t_2)}{2}, \quad (5.3)$$

onde o conjunto formado por  $[t_1, t_2]$  pode ser tanto os espectros [s35, s36] como os espectros [s16, s17]. Ajustamos uma função do tipo  $Y = a + b(1 - x)$  e esperamos encontrar  $a = 0$ , o que significa dizer que o contínuo tem um nível consistente em ambos os espectros  $S_{obs}(t_1)$  e  $S_{obs}(t_2)$ . Se  $b > 0$ , as linhas da terciária são mais fortemente diluídas no tempo  $t_1$  e se  $b < 0$ , elas são mais fortemente diluídas no tempo  $t_2$ . No caso de RV Crt,  $b$  é uma estimativa útil da mudança na contribuição relativa em luz da primária.

A Fig. 5.6, mostra o resultado de  $b$  para cada região separadamente, com barras de erro para cada conjunto analisado [s35, s36] e [s16, s17]. Todos os resultados estão apontando, consistentemente, para um valor de  $b$  positivo, e para muitos deles  $b$  é significativamente positivo. A detecção é menos clara próximo ao comprimento de onda 4600 Å, onde o erro de  $b$  é maior devido a uma densidade de linha menor nessa região e possivelmente à presença, ainda, de linhas telúricas nos espectros. Para todas as regiões o valor de  $a$  é



**Figura 5.7:** Estimativa da mudança na contribuição relativa da primária contida no intervalo de 4000 a 6000 Å ( $\approx 38.000$  pontos), para 4 fases orbitais que julgamos mais próximas da fase de totalidade primário. Todos os pontos para cada conjunto de exposições, (s35 - s36) e (s16 - s17) e o ajuste linear para cada conjunto (linhas preta tracejada e contínua cinza) são mostrados na figura. Veja texto para maiores detalhes.

insignificativamente diferente de zero, confirmando a consistência nos níveis de contínuo dentro de 0,001.

A Fig. 5.7 mostra a combinação dos dados de todas as regiões (aproximadamente 38.000 pontos) resultando em  $b = 0,0109 \pm 0,0007$  para [s35, s36] e  $b = 0,0117 \pm 0,0012$  para [s16, s17]. Isso indica uma diminuição de 1% na contribuição relativa da primária à luz total no tempo  $t_2$ , quando comparado com o tempo  $t_1$ . A linha horizontal na Fig. 5.6 indica o valor obtido quando consideramos a análise com os dados de todas as regiões.

Espectroscopicamente falando, vemos que os espectros s17 e s36 estão mais próximos da totalidade que os espectros s16 e s37. Assim, como somente o espectro s36 foi usado na nossa análise precedente, podemos concluir que (1) a Eq. (5.2) é considerada uma boa aproximação, no caso específico de usar as 41 exposições mostradas na Tab. 5.1 para a análise preliminar de RV Crt, e (2) os resultados apresentados na Sec. 5.1.7 não devem diferir consideravelmente daqueles obtidos após a determinação das novas efemérides levando em consideração os efeitos de tempo de luz.

É importante ressaltar que o objetivo maior deste trabalho é estudar o processo de

desembaraçamento espectral, compreendendo os códigos disponíveis, para sua aplicação mais eficiente e confiante.

### 5.1.6 Intensidades Relativas das Componentes no Espectro Reconstruído

Em RV Crt, a primária e a secundária formam o par eclipsante e a terciária é a componente que não participa dos eclipses, mas que contribui em luz quase tanto quanto o par eclipsante. A primária é mais quente e menor e a secundária é a mais fria e maior que a primária. Isso é um dos indícios de que pelo menos a secundária não se encontra na fase de seqüência principal, se considerarmos válida a hipótese de que ambas componentes foram formadas juntas e, portanto devem ter a mesma idade física (mesmo tempo de existência, não confundir com estágio evolutivo; “*coeval*”, em inglês).

Sabendo destas características, podemos determinar equações que poderão nos indicar a contribuição em luz da primária através do estudo dos espectros compostos e o espectro em eclipse total, onde a primária é ocultada.

Para fazer o desembaraçamento dos espectros corretamente através do KOREL, devemos informar a contribuição do contínuo intrínseco das três componentes em cada região e em cada fase.

Sejam, para  $i=1$  (primária), 2 (secundária) e 3 (terciária):

- $C_{it}$ : contribuição em luz, fracional, para o espectro composto na fase  $t$  (a contribuição não-normalizada denominaremos como  $c_{it}$ );
- $S_{obs,t}$ : os espectros compostos observados na fase  $t$ ;
- $b_i$ : bloqueio de linha, que representa a quantidade que as linhas espectrais absorveram do contínuo. Essa quantidade pode ser descrita matematicamente como  $b_i = 1 - \langle S_i \rangle$ . Onde  $\langle S_i \rangle$  é o valor médio do espectro individual da componente  $i$ ;
- $L_{it}$ : luz integrada da componente  $i$  na fase  $t$ , afetada da deformação, iluminação externa, bloqueios de linha, etc. (a contribuição não-normalizada denominaremos como  $F_{it}$ ).

Vamos considerar em nossa análise, as hipóteses fisicamente plausíveis de que os bloqueios de linha das três componentes, o contínuo não-normalizado e a contribuição em luz da terciária não dependem do tempo. A dependência do comprimento de onda está implícita em todas as equações.

#### 5.1.6.1 Contribuição da Primária

O espectro normalizado em qualquer fase, pode ser escrito como

$$S_{obs,t} = \frac{c_{1t}(1 - b_1) + c_{2t}(1 - b_2) + c_3(1 - b_3)}{c_{1t} + c_{2t} + c_3} = 1 - b_{obs,t}. \quad (5.4)$$

No eclipse primário ( $t=0$ ), temos

$$S_{obs,0} = \frac{c_{20}(1 - b_2) + c_3(1 - b_3)}{c_{20} + c_3} = 1 - b_{obs,0}, \quad (5.5)$$

onde  $c_{10} = 0$  e  $b_{obs,0} = c_{20}b_2 + c_3b_3$ . Como a primária não contribui na fase  $t = 0$ , por estar totalmente eclipsada, e a terciária representa uma contribuição constante no tempo,

podemos remover os perfis de linha da terciária, representados por  $b_3$ , se subtrairmos de cada espectro composto observado na fase  $t$  o espectro na fase de eclipse multiplicado por um fator, dado por

$$K_t = \frac{c_{20} + c_3}{c_{1t} + c_{2t} + c_3}. \quad (5.6)$$

Ou seja,

$$S_{sub,t} = S_{obs,t} - K_t S_{obs,0} = \frac{c_{1t}(1 - b_1) + (c_{2t} - c_{20})(1 - b_2)}{c_{1t} + c_{2t} + c_3}, \quad (5.7)$$

não possui qualquer contribuição de linhas da terciária ( $b_3$ ). O fator  $K_t$  pode ser calculado empiricamente para cada espectro observado na fase  $t$ . Da Eq. (5.6) podemos escrever

$$1 - K_t = \frac{c_{1t} + (c_{2t} - c_{20})}{c_{1t} + c_{2t} + c_3} = \frac{c_{1t}}{c_{1t} + c_{2t} + c_3} + \delta_{c_{2t}0}, \quad (5.8)$$

onde

$$\delta_{c_{2t}0} = \frac{(c_{2t} - c_{20})}{c_{1t} + c_{2t} + c_3}. \quad (5.9)$$

Assim, a contribuição fracional (em luz) do contínuo para a primária é:

$$C_{1t} = \frac{c_{1t}}{c_{1t} + c_{2t} + c_3} = 1 - K_t - \delta_{c_{2t}0}. \quad (5.10)$$

Da Eq. (5.10), podemos ver que  $C_{1t}$  ainda depende da contribuição fracional da secundária para o contínuo na fase  $t$  em relação ao eclipse, e também, do nível de contínuo absoluto da terciária,  $c_3$ . Contudo,  $\delta_{c_{2t}0}$  pode ser estimado com o auxílio das curvas teóricas do WD. Como inicialmente temos os parâmetros do sistema bem determinados, podemos aproximar a contribuição do contínuo para a secundária pela luminosidade calculada pelo WD, para o comprimento de onda desejado. O modelo WD depende de cálculos de modelos de atmosferas estelares para gerar os fluxos superficiais das componentes. Entretanto, nossa escolha de regiões espectrais para análise com o KOREL foi baseada somente na evidência de presença da assinatura espectral das componentes (Seção 5.1.5), e não possuímos tabelas de cores fotométricas sintéticas para essas regiões. Porém, o WD apresenta a possibilidade de usar a função de Planck, que usaremos para nossos cálculos de  $\delta_{c_{2t}0}$ :

$$\delta_{c_{2t}0} = \frac{(c_{2t} - c_{20})}{c_{1t} + c_{2t} + c_3} \approx \frac{(L_{2t} - L_{20})}{L_{1t} + L_{2t} + L_3}, \quad (5.11)$$

onde  $L_{it}$  é a luz integrada para a componente  $i$  na fase  $t$ , calculada pelo WD e corrigida dos efeitos de deformação estelar, iluminação externa e etc. Infelizmente, a Eq. (5.11) necessita da contribuição da terciária ( $L_3$ ) e somos, ainda, forçados a estimá-la (Seção 5.1.6.3). Mas como a quantidade  $L_{2t} - L_{20}$  é relativamente pequena, a influência de  $L_3$  nos cálculos é diminuída.

### 5.1.6.2 Cálculo do Bloqueio de Linha e da Luminosidade Normalizada da Primária

Das Eqs. (5.4) e (5.5) podemos escrever:

$$b_{obs,t} = \frac{(c_{1t}b_1 + c_{2t}b_2 + c_3b_3)}{c_{1t} + c_{2t} + c_3}, \quad (5.12)$$

$$b_{obs,0} = \frac{c_{20}b_2 + c_3b_3}{c_{20} + c_3}, \quad (5.13)$$

$$b_{obs,t} - K_t b_{obs,0} = \frac{c_{1t}b_1}{c_{1t} + c_{2t} + c_3} + \delta_{c_{2t0}}b_2. \quad (5.14)$$

Adicionando e subtraindo  $\delta_{c_{2t0}}b_1$  na Eq.(5.14) e usando a Eq.(5.8), temos:

$$\begin{aligned} b_{obs,t} - K_t b_{obs,0} &= \frac{c_{1t}b_1}{c_{1t} + c_{2t} + c_3} + \delta_{c_{2t0}}b_1 - \delta_{c_{2t0}}b_1 + \delta_{c_{2t0}}b_2 \\ &= (1 - K_t - \delta_{c_{2t0}})b_1 - \delta_{c_{2t0}}b_2. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Então, para  $b_1$ , temos

$$b_1 = \frac{b_{obs,t} - K_t b_{obs,0}}{1 - K_t - \delta_{c_{2t0}}} - b_2 \frac{\delta_{c_{2t0}}}{1 - K_t - \delta_{c_{2t0}}}. \quad (5.16)$$

A Eq. (5.16) mostra que  $b_1$  depende do observável  $K_t$  e  $b_{obs,t}$  (incluindo  $t=0$ ), mas que, na prática, é dependente também de  $\delta_{c_{2t0}}$  e de  $b_2$ . Como os  $b_i$  para as três componentes devem ser constantes, a Eq. (5.16) não representa a melhor maneira para calcular  $b_1$  pois ela depende do tempo. Para calcular os  $b_i$  sugerimos um processo que utiliza os valores médios das grandezas observáveis, descrito na Sec. 5.1.6.4.

As contribuições fracionais fotométricas,  $L_{it}$  podem ser escritas como

$$L_{it} = \frac{c_{it}(1 - b_i)}{c_{1t} + c_{2t} + c_3 - (b_1c_{1t} + b_2c_{2t} + b_3c_3)}. \quad (5.17)$$

Usando a Eq. (5.12), temos:

$$L_{it} = \frac{c_{it}}{c_{1t} + c_{2t} + c_3} \frac{(1 - b_i)}{1 - b_{obs,t}} = C_{it} \frac{(1 - b_i)}{1 - b_{obs,t}}, \quad (5.18)$$

e logo, para  $i=1$ ,

$$L_{1t} = \frac{c_{1t}}{c_{1t} + c_{2t} + c_3} \frac{(1 - b_1)}{1 - b_{obs,t}} = C_{1t} \frac{(1 - b_1)}{1 - b_{obs,t}}, \quad (5.19)$$

ou seja, as Eqs. (5.10), (5.11) e (5.16) podem ser usadas para resolver  $L_{1t}$ .

Com os valores preliminares de  $C_{1t}$ ,  $b_1$  e  $L_{1t}$ , podemos calcular os valores de  $b_2$ ,  $b_3$ ,  $C_{2t}$ ,  $C_{3t}$ ,  $L_{2t}$  e  $L_{3t}$  e introduzi-los nas Eqs. (5.10), (5.11), (5.16) e (5.18), através de um processo iterativo. As condições de normalização devem ser satisfeitas a todo instante:

$$\begin{aligned} L_{1t} + L_{2t} + L_{3t} &= 1, \\ C_{1t} + C_{2t} + C_{3t} &= 1. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Note que  $C_{3t}$  e  $L_{3t}$  são dependentes do tempo, em consequência da dependência temporal de  $c_{1t}$  e  $c_{2t}$ :

$$C_{3t} = \frac{c_3}{c_{1t} + c_{2t} + c_3} \quad \text{e} \quad L_{3t} = C_{3t} \frac{(1 - b_3)}{1 - b_{obs,t}}. \quad (5.21)$$

A seguir descreveremos sucintamente como calcular os valores de  $b_2$ ,  $b_3$ ,  $C_{2t}$ ,  $C_{3t}$ ,  $L_{2t}$  e  $L_{3t}$ .



### 5.1.6.3 Cálculo do Bloqueio de Linha, Contribuição ao Contínuo e Luminosidades Normalizadas da Secundária e Terciária

Da Eq. (5.18), temos

$$L_{2t}(1 - b_{obs,t}) = C_{2t}(1 - b_2). \quad (5.22)$$

Se usarmos o WD para calcular, através das curvas de luz sintéticas, a razão teórica entre  $L_{2t}$  e  $L_{1t}$ , definida como

$$f_{L_{21t}} = \frac{F_{2t}}{F_{1t}} = \frac{L_{2t}}{L_{1t}}, \quad (5.23)$$

podemos calcular  $L_{2t}$  das Eqs. (5.19) e (5.23):

$$L_{2t} = f_{L_{21t}}L_{1t} = f_{L_{21t}}C_{1t}\frac{(1 - b_1)}{1 - b_{obs,t}}. \quad (5.24)$$

Da condição de normalização, Eq. (5.21),  $L_{3t}$  pode ser calculada

$$L_{3t} = 1 - L_{1t} - L_{2t}. \quad (5.25)$$

Para continuar, temos de estimar ou  $b_3$ , ou  $C_{3t}$ . Devido à semelhança, tanto em luminosidade como em tipo espectral, entre as componentes primária e terciária, como demonstrado em nossos estudos (Hensberge *et al.* 2008) podemos considerar que essas estrelas são parecidas entre si. Como supomos que os bloqueios de linha são constantes no tempo, uma hipótese razoável é que a razão entre  $b_3$  e  $b_1$  seja pouco dependente da região espectral. Considerando,  $b_3 = f_{b_{31}}b_1$ , podemos, junto com as Eqs. (5.18) e (5.25) para  $L_{3t}$ , obter  $C_{3t}$

$$C_{3t} = L_{3t}\frac{1 - b_{obs,t}}{1 - b_3}. \quad (5.26)$$

Usando a condição de normalização, Eq. (5.21), podemos calcular  $C_{2t}$

$$C_{2t} = 1 - C_{1t} - C_{3t}. \quad (5.27)$$

Finalmente,  $b_2$  pode ser calculado com as Eqs. (5.18), (5.24) e (5.27)

$$b_2 = 1 - \frac{L_{2t}}{C_{2t}}(1 - b_{obs,t}). \quad (5.28)$$

Com esta nova estimativa para  $b_2$ , dada pela Eq. (5.28), podemos introduzi-la na Eq. (5.16) para melhorar as estimativa para  $b_1$ , repetindo todo o processo iterativamente. De fato, os valores iniciais para o processo podem ser obtidos com os valores médios de todas as fases fora do eclipse (veja Sec. 5.1.6.4).

#### Estimativa da contribuição da terciária

O nível de contribuição da primária ao contínuo,  $C_1$ , pode ser calculado dos espectros, sem qualquer outro tipo de informação extra, somente pela Eq. (5.10). Entretanto, de modo a recalculer  $b_1$  da Eq. (5.16), precisamos das contribuições fracionais fotométricas

$L_i$  (lembre-se que  $\delta_{c2t0}$  depende de  $L_i$ ). A única forma de se obter os  $L_i$  diretamente é através das soluções WD para as curvas de luz *uvby*, pois não temos curvas de luz para outras bandas. Além disso, existe o problema de não termos cálculos de modelos de atmosferas para as regiões espectrais escolhidas. Podemos utilizar as opções existentes no WD de corpo negro (função de Planck) ou de uma aproximação do modelo de atmosfera de Carbon-Gingerich (Carbon & Gingerich, 1969). Utilizando os dados para *uvby*, podemos utilizar uma dessas opções para extrapolar  $L_3/L_1$  para os comprimentos de onda de nossas regiões espectrais selecionadas.

Isso pode ser feito através do uso da função de Planck,  $B(\lambda, T)$ , para estimar o fluxo monocromático em um certo comprimento de onda para uma dada temperatura efetiva, considerando uma razão de raios,  $R_3/R_1$ , conveniente. O processo pode ser formulado iterativamente, de forma que os valores mais adequados de  $T_{\text{eff},3}$  e  $R_3/R_1$  sejam calculados por um ajuste automático.

O ajuste se processa nos seguintes passos:

1. para cada um dos comprimentos de onda efetivos das cores *uvby*, calcula-se o valor da razão de funções de Planck,  $r(T_{\text{eff},3}, j) = B(\lambda_j, T_{\text{eff},3})/B(\lambda_j, T_{\text{eff},1})$ , ( $j=uvby$ ), onde  $T_{\text{eff},1}$  é o valor da temperatura efetiva da primária na solução corrente. Com o valor de  $(T_{\text{eff},3}, j)$  e os valores correntes do WD para cada curva de luz (*uvby*), calcula-se o correspondente valor da razão de raios, uma vez que espera-se que

$$\frac{L_3}{L_1} = \frac{B(\lambda_j, T_{\text{eff},3})}{B(\lambda_j, T_{\text{eff},1})} \left(\frac{R_3}{R_1}\right)^2 \quad \text{e} \quad \left(\frac{R_3}{R_1}\right)^2 = \frac{L_3}{L_1} \frac{B(\lambda_j, T_{\text{eff},1})}{B(\lambda_j, T_{\text{eff},3})}. \quad (5.29)$$

2. calcula-se o valor médio e sua variância para os 4 valores de  $\left(\frac{R_3}{R_1}\right)_j^2$
3. com o valor médio de  $\left(\frac{R_3}{R_1}\right)^2$  (para cada  $T_{\text{eff},3}$ ) e o da razão das funções de Planck (para cada curva *uvby*), calcula-se a diferença entre os valores de  $L_3/L_1$ , obtidos diretamente das curvas de luz teóricas do WD, e aquele calculado com a aproximação da Eq. (5.29) para as 4 cores, calculando-se, em seguida, a variância dessas diferenças.
4. traça-se um gráfico das variâncias calculadas nos passos 2 e 3 em função de  $T_{\text{eff},3}$  e selecionam-se os valores de  $T_{\text{eff},3}$  e  $\frac{R_3}{R_1}$  que correspondem ao mínimo das variâncias.

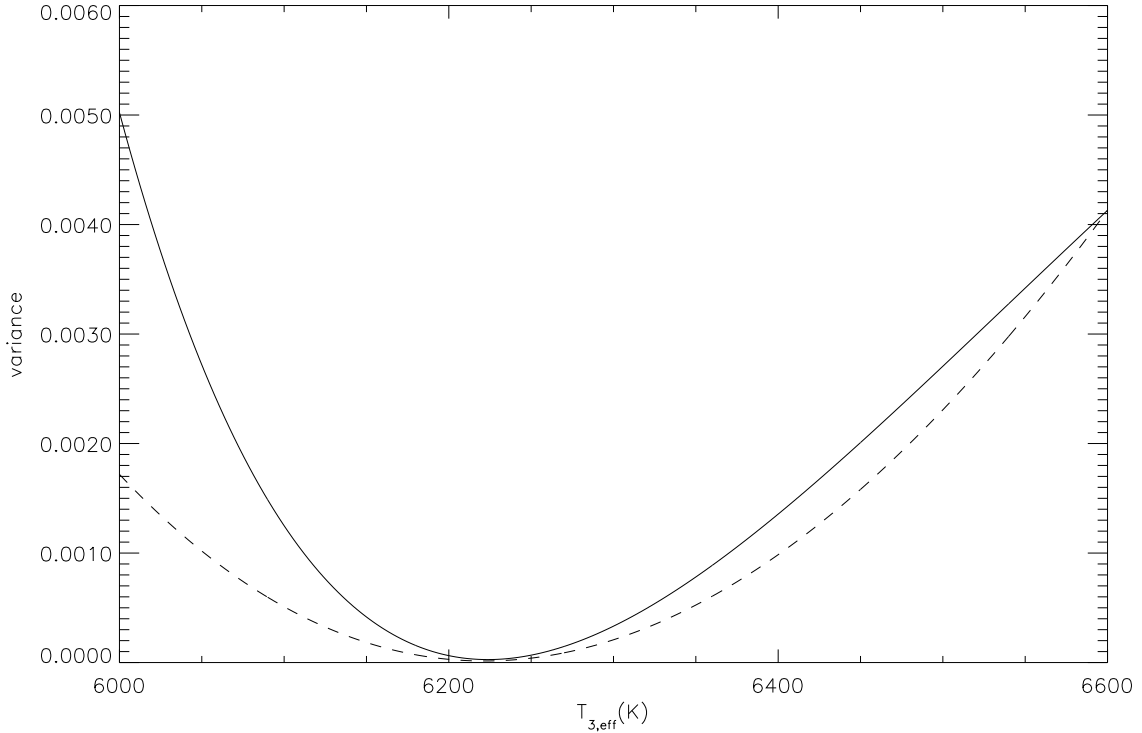
O resultado final é representado na Fig. (5.8).

Uma vez obtidos os valores de  $T_{\text{eff},3}$  e da razão de raios,  $R_3/R_1$ , voltamos aos valores teóricos dados pela solução corrente do WD para os comprimentos de onda centrais de nossas 25 regiões (Tabela 5.2) com os quais calculamos os valores correspondentes do parâmetro  $\mathcal{L}_3$  (luz extra de uma componente física ou óptica; informação requerida pelo WD), necessário para os cálculos de  $C_{it}$ ,  $b_i$  e  $L_{it}$ . O resultado é mostrado na Fig. 5.9.

#### 5.1.6.4 Cálculo das variáveis Observáveis e Procedimento

Como variáveis espectroscópicas observáveis temos:

1.  $b_{obs,t}$ , descrita pela Eq. (5.12), calculada diretamente para todas as exposições (incluindo  $t = 0$ ) e regiões espectrais;



**Figura 5.8:** Cálculo de  $T_{\text{eff},3}$  e  $\frac{R_3}{R_1}$ . A curva sólida representa a variância no valor de  $\left(\frac{R_3}{R_1}\right)^2$  enquanto que a curva tracejada representa a variância na diferença entre os valores teóricos (obtidos do WD) e os valores calculados para a correspondente temperatura efetiva da terciária. Note que ambas variâncias têm seu mínimo para o mesmo valor de  $T_{\text{eff},3} \approx 6220\text{K}$ .

2.  $K_t$ , descrita pela Eq. (5.6), calculada pela minimização da influência de  $b_3$  em  $S_{sub,t}$ , usando uma “máscara” do espectro observado no eclipse (Eq.(5.7)). Essa “máscara” é obtida evitando a região do contínuo (para diminuir o ruído) e regiões contendo linhas telúricas;. É determinado um espectro mediano,  $S_{sub,ti}^{\text{mediana}}$  (onde o índice  $i$  refere-se ao pixel), através de uma suavização pela passagem de um filtro mediana por  $S_{sub,t}$ , com um intervalo (“boxcar”) de 20 pixels, utilizando a mesma “máscara” do espectro em eclipse mencionada anteriormente;

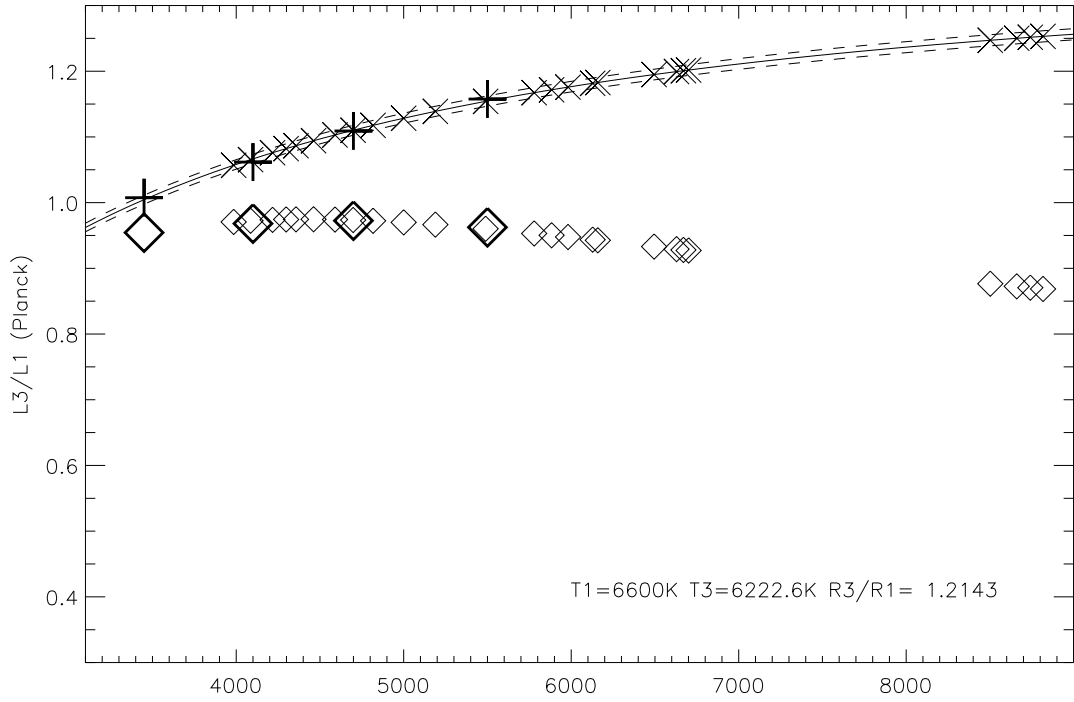
Tomando a média dos espectros fora do eclipse, temos como variáveis espectroscópicas observáveis

3.  $b_{obs,out}$  definida como  $1 - \overline{S_{obs,t \neq 0}}$ ;
4.  $\overline{K}$  calculada pela minimização da influência de  $b_3$  em  $\overline{S_{obs,t \neq 0}}$ , com uma “máscara” do espectro observado no eclipse. De  $\overline{S_{obs,t \neq 0}}$  é determinado um espectro mediano  $S_{sub,ti}^{\text{mediana}}$  (o procedimento adotado aqui é semelhante àquele descrito no tópico 2);

Para determinar tanto  $K_t$  como  $\overline{K}$  usamos os critérios de desvio médio padrão ( $\sigma_{std}$ ) e de desvio quadrático ( $\sigma_4$ ), definidos como

$$\sigma_{std} = \frac{\sqrt{\sum_i^N (S_{sub,i} - S_{sub,i}^{\text{mediana}})^2}}{N - 1} \quad \text{e} \quad (5.30)$$

$$\sigma_4 = \frac{\sqrt{\sum_i^N (S_{sub,i} - S_{sub,i}^{\text{mediana}})^4}}{N - 1}, \quad (5.31)$$



**Figura 5.9:** Cálculo de  $L_3/L_1$  em função do comprimento de onda. Os símbolos + grandes e traçados com linha mais grossa representam as determinações do WD para as bandas *uvby*. As linha sólida representa a razão  $B(\lambda, T_3)/B(\lambda, T_1)$  multiplicada por  $(R_3/R_1)^2$  para os valores de  $T_{\text{eff},1}$  obtido da solução de WD, e de  $T_{\text{eff},3}$  e  $(R_3/R_1)^2$  obtida pelo processo de ajuste. As linhas tracejadas representam limites com incerteza de 1% no valor da razão de raios. Os símbolos  $\diamond$  grandes e grossos representam os parâmetros  $\mathcal{L}_3$  intrínsecos, usados pelo WD nos cálculos para as curvas de luz *uvby* e atmosferas de Kurucz. Os símbolos  $\diamond$  menores e mais finos representam os cálculos de  $\mathcal{L}_3$  para nossas 25 regiões na aproximação de Planck. Os símbolos  $\times$  finos correspondem aos valores de  $L_3/L_1$  para nossas 25 regiões calculados com a presente aproximação.

dando preferência a  $\sigma_4$ , que é mais sensível a valores elevados de  $S_{\text{sub},i} - S_{\text{sub},i}^{\text{mediana}}$ .

Cálculos de  $K_t$  para cada fase orbital das 25 regiões espectrais selecionadas (Tab. 5.2) revelaram que seus valores desviavam bastante de  $\overline{K}$ , principalmente nas regiões onde os sinais da “presença” do par eclipsante eram fracos. Independente desse efeito ( $K_t$  variando consideravelmente com o tempo), a Eq. (5.16) evidencia a dependência temporal de  $b_1$ , o que não é razoável considerando o fato de que os  $b_i$  devem ser constantes no tempo. Portanto, um novo procedimento que utiliza valores médios das variáveis observáveis foi adotado e será descrito com mais detalhe a seguir.

### Cálculo do valor médio do bloqueio de linha da primária

Podemos utilizar as equações desenvolvidas nas seções anteriores para determinar  $b_1$ . Mais especificamente, o espectro médio fora do eclipse ( $\overline{S_{\text{obs},t \neq 0}}$ ), Eq. (5.4), pode ser escrito

como

$$\overline{S_{obs,t \neq 0}} = \frac{\overline{c_1}(1 - b_1) + \overline{c_2}(1 - b_2) + c_3(1 - b_3)}{\overline{c_1} + \overline{c_2} + c_3} = 1 - b_{obs,out}, \quad (5.32)$$

onde  $c_3$ , que é a contribuição absoluta não-normalizada da terciária ao contínuo, é independente do tempo. Da mesma forma,  $\overline{K}$  pode ser escrita como

$$\overline{K} = \frac{\overline{c_{20}} + c_3}{\overline{c_1} + \overline{c_2} + c_3}. \quad (5.33)$$

Com isso, podemos calcular  $\overline{C_1}$  (contribuição média fracional da primária ao contínuo),

$$\overline{C_1} = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_1} + \overline{c_{2t}} + c_3} = 1 - \overline{K} - \overline{\delta_{c_{2t0}}}, \quad (5.34)$$

onde,  $\overline{\delta_{c_{2t0}}}$  pode ser estimado com as soluções teóricas do WD e é definido por

$$\overline{\delta_{c_{2t0}}} = \frac{(\overline{c_2} - c_{20})}{\overline{c_1} + \overline{c_2} + c_3} \approx \frac{(\overline{F_2} - F_{20})}{\overline{F_1} + \overline{F_2} + F_3}. \quad (5.35)$$

Então, a contribuição média fracional da primária ao contínuo é

$$\overline{C_1} \approx 1 - \overline{K} - \frac{(\overline{F_2} - F_{20})}{\overline{F_1} + \overline{F_2} + F_3}. \quad (5.36)$$

Semelhantemente às Eqs. (5.12), (5.13) e (5.14),

$$b_{obs,out} = \frac{(\overline{c_1}b_1 + \overline{c_2}b_2 + c_3b_3)}{\overline{c_1} + \overline{c_2} + c_3} \quad (5.37)$$

e

$$b_{obs,out} - \overline{K}b_{obs,0} = \overline{C_1}b_1 + \overline{\delta_{c_{2t0}}}b_2, \quad (5.38)$$

de onde obtemos

$$b_1 \approx \frac{b_{obs,out} - \overline{K}b_{obs,0}}{\overline{C_1}} - \frac{(\overline{F_2} - F_{20})}{\overline{F_1} + \overline{F_2} + F_3} \frac{b_2}{\overline{C_1}}. \quad (5.39)$$

Novamente, como na Eq. (5.16),  $b_1$  depende muito pouco de  $b_2$ . Isto será resolvido iterativamente. Inicialmente vamos considerar o segundo termo do lado direito da Eq. (5.39) como nulo, obtendo um valor inicial estimado para  $b_1$ .

Com  $\overline{C_1}$  e  $b_1$ , podemos calcular  $\overline{L_1}$  ( $= \overline{C_1} \frac{1-b_1}{1-b_{obs,t}}$ ). Do WD, obtemos  $\overline{f_{L_{21t}}}$ , como a Eq. (5.23)

$$\overline{f_{L_{21t}}} = \frac{\overline{F_2}}{\overline{F_1}} \quad (5.40)$$

e, conseqüentemente,  $\overline{L_2} = \overline{f_{L_{21t}}L_1}$ . Da condição de normalização, obtemos

$$\overline{L_3} = 1 - \overline{L_2} - \overline{L_1}. \quad (5.41)$$

Podemos, com a Eq. (5.41), estimar a contribuição da terceira luz ( $\mathcal{L}_3$ ) para o WD gerar as curvas de luz teóricas em cada região espectral. Usando o fato de que  $b_3 = f_{b_{31}}b_1$  e o valor para  $\overline{C_3}$ ,

$$\overline{C_3} = \overline{L_3} \left( \frac{1 - b_{obs,out}}{1 - b_3} \right) = \overline{L_3} \left( \frac{1 - b_{obs,out}}{1 - f_{b_{31}}b_1} \right), \quad (5.42)$$

e, usando, a condição de normalização, obtemos

$$\overline{C}_2 = 1 - \overline{C}_1 - \overline{C}_3. \quad (5.43)$$

Finalmente, obtemos  $b_2$

$$b_2 = 1 - \frac{\overline{L}_2}{\overline{C}_2}(1 - b_{obs,out}), \quad (5.44)$$

que pode ser introduzido na Eq. (5.39) e o processo das Eqs. (5.39) a (5.44) iterege até a convergência ser atingida, encontrando os valores de  $b_i, i = 1, 2, 3$ .

Com a estimativa da contribuição da terceira luz,

$$\mathcal{L}_3 = \frac{F_3}{\overline{F}_1 + \overline{F}_2} = \frac{F_3}{1 - F_3} \approx \frac{L_3}{1 - L_3} \quad (5.45)$$

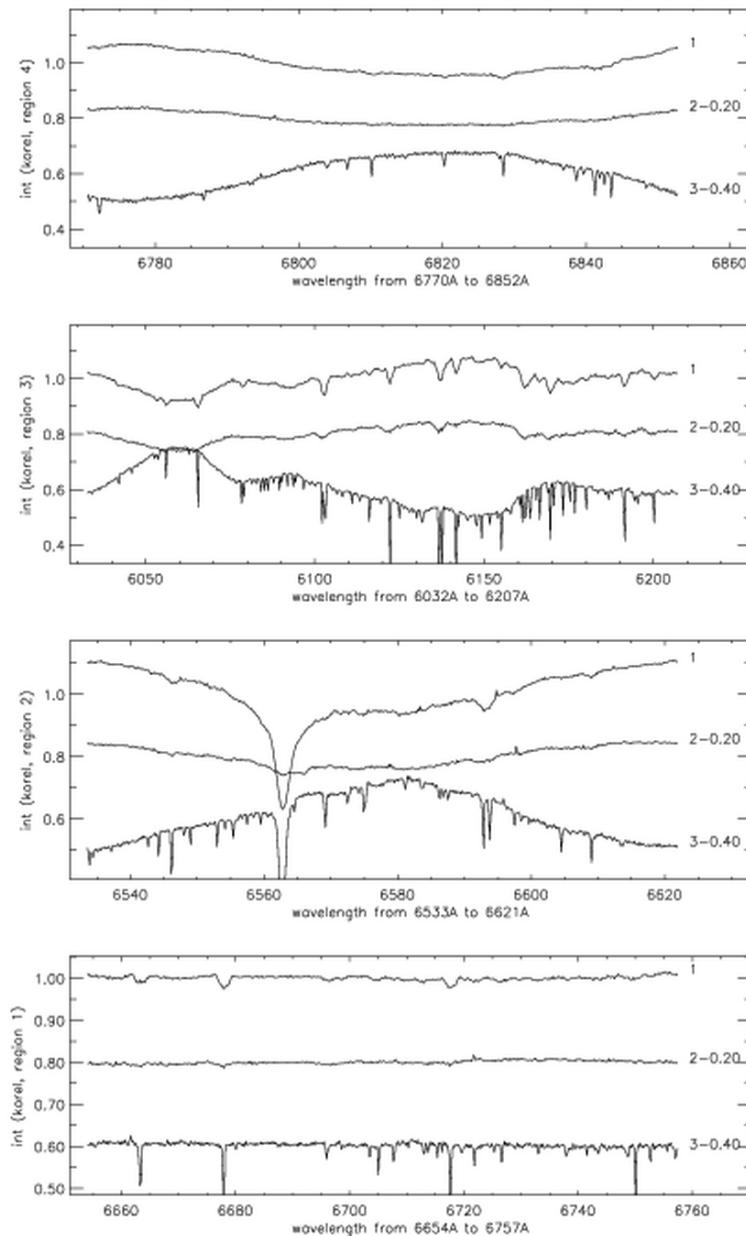
obtida para todas as 25 regiões espectrais (procedimento descrito na Sec. 5.1.6.3) podemos introduzi-las no WD para gerar cada uma das 25 curvas de luz teóricas. A partir dessas curvas podemos facilmente determinar os  $L_{it}$  que conjuntamente com os valores dos  $b_i$ , obtidos anteriormente, determinarão os valores dos  $C_{it}$  (usando a Eq. (5.18)) que serão introduzidos no código KOREL (ou qualquer outro código de desembaraçamento espectral).

### 5.1.7 Aplicação do Código KOREL

Inicialmente, e em continuação aos estudos realizados por Torres e apresentados na Dissertação de Mestrado (Torres 2002), muitos experimentos foram realizados com o KOREL usando dados sintéticos para simular um sistema semelhante a RV Crt possibilitando um estudo das potencialidades e limitações do código. Em seguida, usamos os dados reais de RV Crt que produziram curvas de velocidade radial aceitáveis e consistentes, mas com espectros desembaraçados com grandes ondulações, principalmente nos da secundária, mas também notáveis nos das outras duas componentes. Podemos ver isso claramente nos espectros reconstruídos das componentes para 4 regiões espectrais analisadas pelo KOREL, mostrados na Fig. 5.10, e na correspondente curva de velocidade radial, Fig. 5.11. Esses resultados foram discutidos e apresentados por Torres et al. (2004). Nesse estudo, usamos 36 espectros em cada região onde 2 deles foram considerados como espectros no eclipse primário. A razão para estes efeitos ondulatorios está relacionada com a normalização dos espectros, pois usamos a aproximação, demasiadamente simples, de considerar que as três componentes estavam contribuindo igualmente em luz para o nível do contínuo do espectro composto em todas as fases, em clara contradição com os resultados da análise das curvas de luz com o WD.

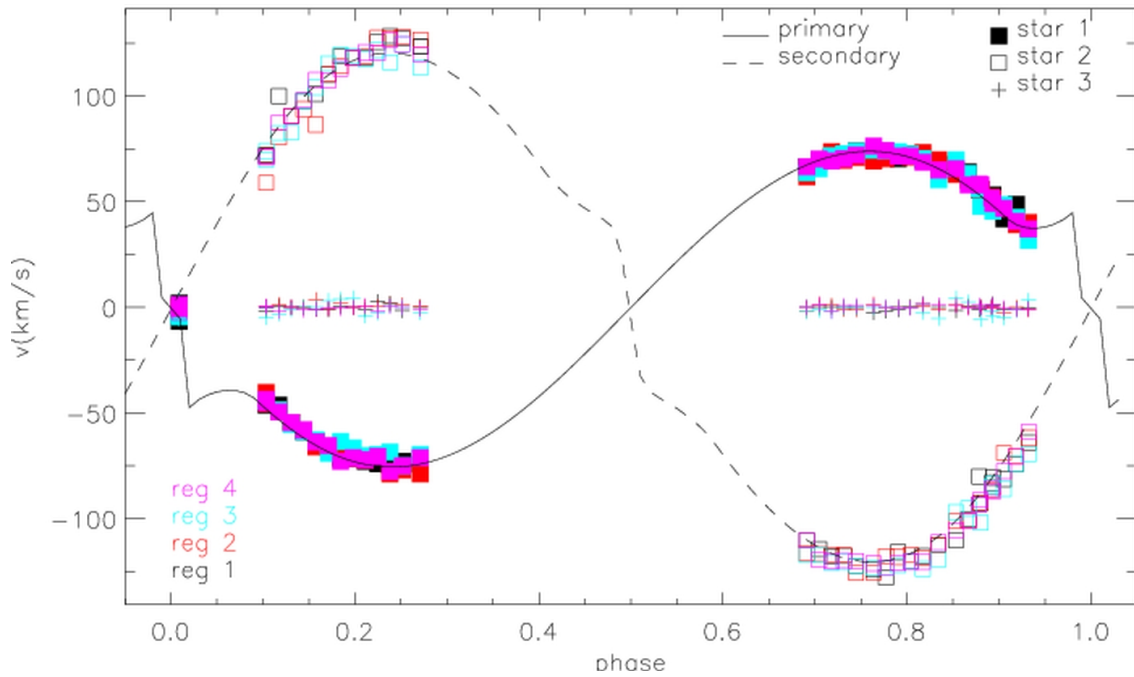
Como conseguimos obter uma exposição exatamente durante a curta totalidade (de aproximadamente 25 minutos) do eclipse primário, foi possível estimar a contribuição das três componentes em todas as regiões espectrais e fases orbitais. Para isso, combinamos os espectros na fase de eclipse total primário e aqueles fora do eclipse, com a informação da curva de luz e sua análise relacionada com a contribuição individual das componentes em luz em cada fase orbital e comprimento de onda (esse procedimento foi descrito nas Secs. 5.1.4 e 5.1.6).

Para atender nossas necessidades, o código KOREL foi alterado em vários aspectos, tendo seu código sofrido uma completa revisão com o auxílio da ferramenta “NAGWARE Compilers and Tools, Fortran Tools, Release 4.0”. As modificações estruturais foram controle de



**Figura 5.10:** Primeiros espectros desembarçados pelo KOREL (Torres et al. 2004), mostrando os efeitos de baixa frequência sobrepostos ao contínuo. As intensidades estão em escala arbitrária e os espectros da secundária (2) e terciária (3) foram deslocados por -0.20 e -0.40, respectivamente, para evitar superposição. Usamos 36 espectros em cada região analisada separadamente, incluindo 2 espectros em fase de eclipse primário.

variáveis não inicializadas (sempre uma armadilha perigosa em Fortran) e a transformação de todo o código para operar com cálculos em precisão dupla. As modificações necessárias ao nosso estudo foram no sentido de preparar o KOREL para trabalhar com mais regiões espectrais, até 25 (a versão original de 1999 trabalhava somente com 5 regiões), com regiões de até 4096 pixels (a versão original trabalhava somente com regiões de 512 pixels), e, finalmente, com mais espectros compostos de entrada, até 1250 espectros (isto é, número



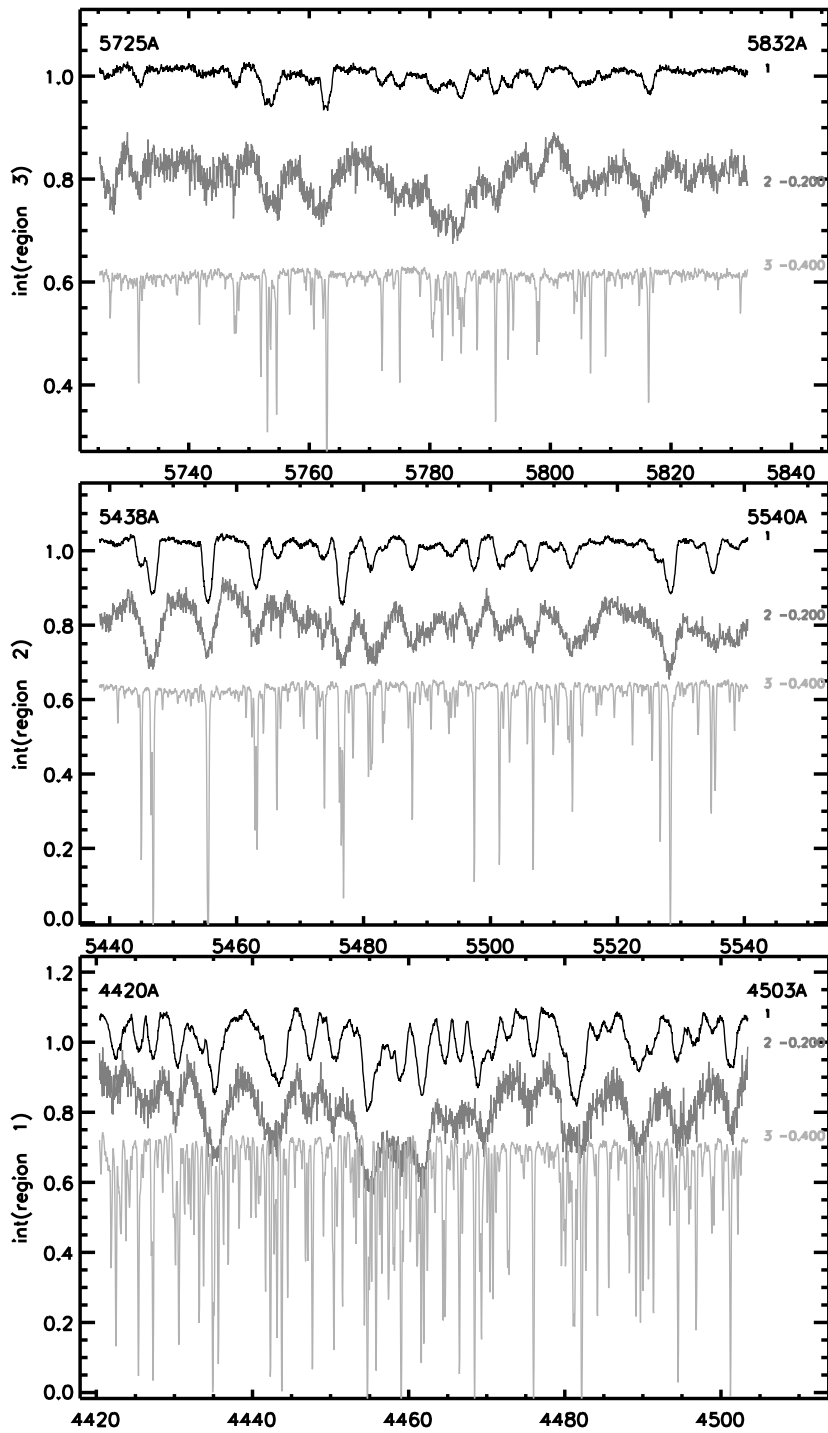
**Figura 5.11:** Curva de velocidade radial dos espectros mostrados na Fig. 5.10. As quatro regiões são mostradas com cores diferentes. A primária e a secundária e a terciária são representadas pelos símbolos ■, □ and + , respectivamente. A solução pelo código WD, obtida em análise simultânea com a curva de luz gerada pelo KOREL está sobreposta com linha sólida (primária) e tracejada (secundária).

de espectros por região vezes o número de regiões; a versão original trabalhava somente com 99 espectros de entrada).

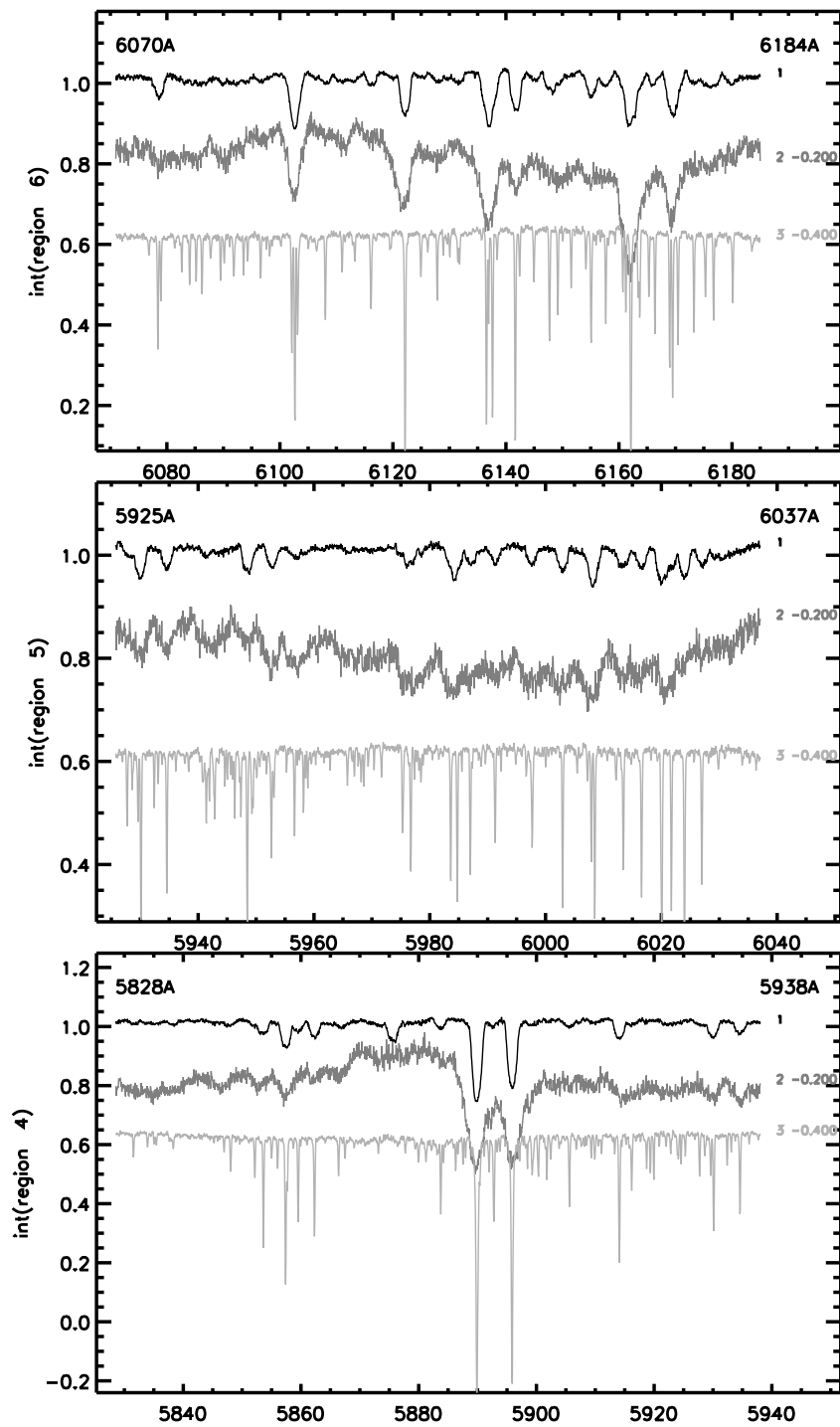
Das 52 exposições obtidas com o FEROS selecionamos 41, onde uma delas se encontra na fase de eclipse primário total e o restante em fases fora do eclipse (veja Tab. 5.1 para a descrição das fases obtidas com o FEROS). Em seguida, vários testes foram feitos usando as regiões descritas na Tab. 5.2, combinando-as em grupos com o mesmo número de pixels. Para poder utilizar regiões menos extensas com regiões maiores, usamos o artifício de replicar as regiões até igualar o tamanho das regiões maiores. Isso é possível pelo fato do KOREL tratar os espectros como funções periódicas e por estarmos representando os espectros em termos de  $\ln \lambda$ .

Apresentamos a seguir os resultados obtidos para as 6 regiões espectrais de 2048 pixels, analisadas através da combinação WD e KOREL, descrito na Sec. 5.1.4 (esses resultados foram apresentados em Hensberge et al. 2008). As Figs. 5.12 e 5.13 mostram os espectros individuais reconstruídos, para cada região espectral.

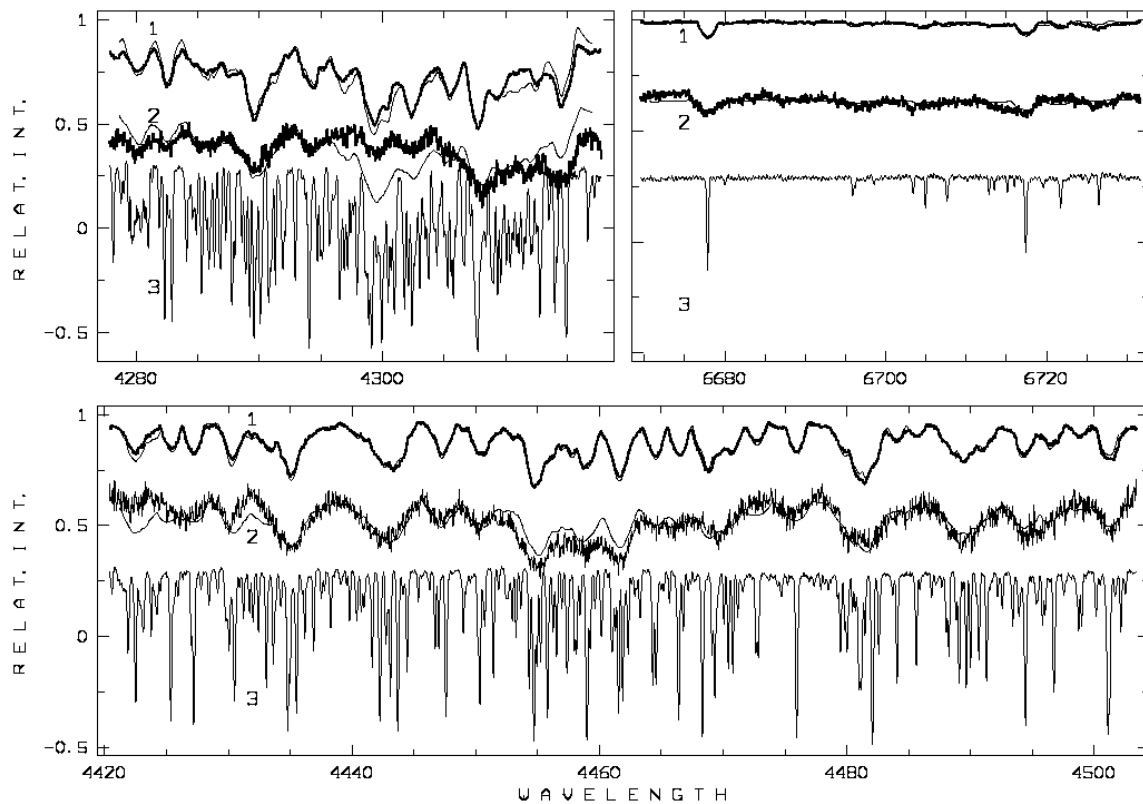




**Figura 5.12:** Espectros individuais desembaraçados de RV Cr1 obtidos pelo KOREL para as regiões indicadas em cada painel. Os espectros de cada painel representam, respectivamente, a componente primária (cor preta), secundária (cinza) e terciária (cinza claro), deslocados de uma quantidade arbitrária para evitar superposição. Os espectros produzidos pelo KOREL e mostrados aqui possuem média unitária e não foram renormalizados ao contínuo.



**Figura 5.13:** O mesmo que a Fig. 5.12, para as regiões espectrais indicadas nos painéis (de 5828.551 a 5938.019 Å, de 5925.779 a 6037.074 Å, e de 6070.973 a 6184.994 Å).



**Figura 5.14:** Espectros desembarcados das componentes de RV Crateris em intensidade arbitrária (deslocamento de  $-0.35$  para a secundária e  $-0.7$  para a terciária). Os espectros da primária, secundária e terciária são representados, respectivamente, por “1”, “2” e “3”. Os espectros do par eclipsante (linhas grossas) são comparados com o espectro da terciária alargado rotacionalmente de uma certa quantidade em km/s (linha fina), supondo rotação sincronizada com o período orbital. A velocidade rotacional (em relação à terciária) é de  $49$  km/s para a primária e  $73$  km/s para a secundária. Observe a similaridade entre os espectros da primária e da terciária alargado.

Podemos notar que as componentes eclipsantes apresentam linhas muito mais largas que a terciária, que são mais profundas e mais finas. Vemos, ainda, que a componente secundária possui uma velocidade rotacional maior que a primária, pois suas linhas se mostram mais largas devido ao seu tamanho maior.

A Fig. 5.14 mostra como o espectro da primária se assemelha ao espectro alargado da terciária devido a uma velocidade rotacional requerida para sincronização da órbita. Essa similaridade é uma forte indicação de que o processo de desembarçamento espectral é eficaz, lembrando que o método é puramente matemático e que os espectros intrínsecos das componentes são considerados apenas funções matemáticas. O valor estimado para a velocidade rotacional,  $v \sin i$ , (relativa à terciária) é  $49$  km/s para a primária e  $73$  km/s para a secundária.

A primária e a terciária contribuem igualmente à luz total do sistema em  $4000 \text{ \AA}$  e suas razões de luz dependem ligeiramente do comprimento de onda, por exemplo a terciária é  $10\%$  mais brilhante em  $5500 \text{ \AA}$ . O espectro da secundária é mais ruidoso que das outras componentes, como consequência direta de sua baixa luminosidade. A sua contribuição em luz (em relação a luz total do sistema) fora do eclipse varia de  $\approx 4\%$  em  $4000 \text{ \AA}$  a  $\approx 16\%$

em 8800 Å. As diferentes intensidades das linhas no espectro da secundária concordam qualitativamente com sua baixa temperatura ( $T_{eff}=4200$  K enquanto que a terciária e a primária possuem  $T_{eff}=6600$  K; veja Tab. 5.3 para os parâmetros fundamentais do par eclipsante). Em 4300 Å, observa-se possíveis presenças de peculiaridades (espectro da secundária), linhas em absorção que deve ser um sinal de uma banda-G de CH fraca, provando a eficiência dos métodos de separação espectral sem o conhecimento *a priori* das características espectrais do sistema.

Comparando os espectros individuais reconstruídos pelo KOREL, com espectros padrão, podemos estimar que a primária seria do tipo espectral F6, a terciária do tipo F8 e a secundária do tipo M2. O estudo espectral, incluindo um estudo de abundâncias, ambos baseados nos espectros desembaraçados produzidos pelo KOREL, constitui um dos nossos objetivos que será cumprido após determinar a solução final.

Na Tab. 5.3, apresentamos os parâmetros estelares. Um fato interessante é observado, a componente mais fria possui menos massa e é a maior (secundária), por outro lado, a mais quente é a mais massiva, mas é a menor (primária). Isso, inicialmente, nos indica que esse sistema não se encontra na fase de seqüência principal (SP). Existem duas possibilidades: (a) o sistema é muito jovem e a componente secundária ainda não chegou à SP ou, (b) o sistema é muito evoluído e a secundária já saiu da SP. A massa das componentes

**Tabela 5.3:** Parâmetros Estelares Fundamentais de RV Crt para o par eclipsante.

Parâmetros	Primária	Secundária
Massa	0,76 $M_{\odot}$ (0,01)	0,41 $M_{\odot}$ (0,006)
Raio	1,13 $M_{\odot}$ (0,019)	1,51 $M_{\odot}$ (0,01)
log g	4,21 (0,01)	3,69 (0,01)
log L	0,34 (0,03)	-0,21 (0,05)
$T_{eff}$	6600 K (120)	4200 K (120)

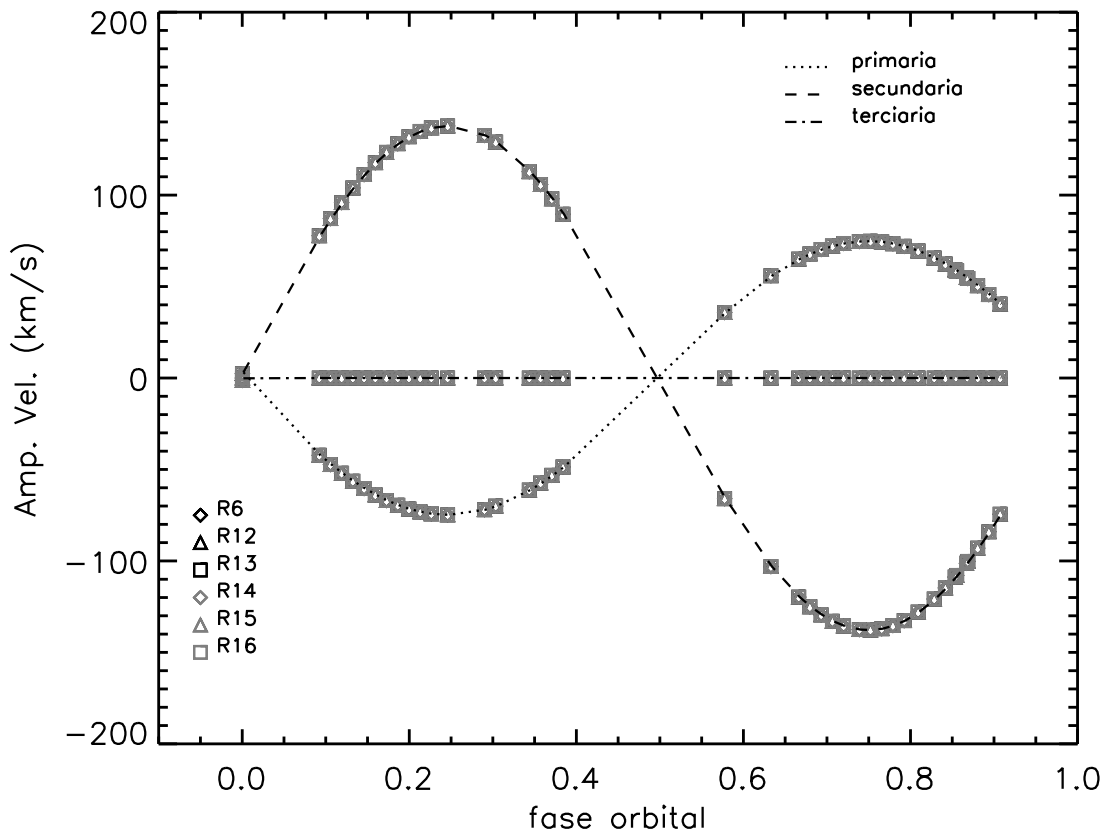
eclipsantes é muito pequena, especialmente a da secundária, que ainda por cima é menor que a massa da primária. A terciária, aparentemente, não mostra sinais de evolução, a não ser pela presença da linha de Li em 6708 Å em seu espectro, também aparentemente presente no espectro da primária eclipsante. O cenário do sistema ser muito evoluído poderia ser alcançado com a atual secundária tendo transferido massa para a primária, como aconteceu, por exemplo, em Sírius, cuja componente B, que evoluiu para o estágio de anã-branca, possui 1 massa solar, massa menor que sua companheira do tipo espectral A1, ainda na SP. Essa transferência de massa pouco afetaria a terciária, que deveria estar, também, evoluindo para fora da SP. Alguma evidência disso poderia ser encontrada dos resultados da Sec. 5.1.6.3 (Estimativa da Contribuição da Terciária), pois encontramos que a terciária parece ser um pouco mais fria e maior que a primária.

O outro cenário, do sistema ser muito jovem, também pode ser explicado pelo fato da secundária ainda não ter tido tempo de atingir a SP, devido à sua pequena massa, enquanto que as outras duas já poderiam ter alcançado a estabilidade da SP. Existe uma

clara evidência da linha de Li ( $6708\text{\AA}$ ) no espectro de linhas finas da terciária, mas isso não garante a juventude do sistema, uma vez que estrelas do tipo F intermediário costumam preservar Li na SP.

Somente o estudo com modelos teóricos de evolução estelar, provavelmente com o refinamento de nossas soluções, poderá dar mais peso a um ou outro cenário. Este é o nosso objetivo e os estudos foram iniciados.

A Fig. 5.15 mostra a curva de velocidade radial para todas as componentes do sistema. A primária tem uma semi-amplitude projetada de sua velocidade radial igual a  $74,7\text{ km/s}$  enquanto que a secundária apresenta velocidade igual a  $137,0\text{ km/s}$ . A razão das massas é, portanto, igual a  $0,545 (\pm 0,003)$ . Podemos notar a excelente concordância dos resultados



**Figura 5.15:** Curvas de velocidade radial para as três componentes de RV Crt, obtidas pelo KOREL para as 6 regiões espectrais mostradas nas Figs. 5.12 e 5.13. A curva pontilhada representa a média dos valores para a primária, enquanto que as curvas tracejadas e traço-ponto representam as médias correspondentes para a secundária e terciária, respectivamente. Cada região espectral é tracada com intensidades (preto e cinza) e símbolos diferentes, conforme indicado na figura. Os índices “R”, seguido de um número, referem-se aos mesmos índices dos intervalos espectrais descritos na Tab. 5.2

para todas as regiões, pois os símbolos estão todos sobrepostos. Devido a essa excelente, portanto intrigante, concordância, resolvemos aplicar a correlação cruzada unidimensional usando os espectros reconstruídos e a curva de velocidade radial determinadas pelo KOREL, para cada componente. Os resultados mostram que não existe uma concordância tão

perfeita, entre os valores obtidos para cada região espectral, como aqueles determinados pelo KOREL. As diferenças entre os valores obtidos pelo KOREL e aqueles determinados pela correlação cruzada estão em torno de unidades de km/s para a primária e dezenas de km/s para a secundária. Todo o procedimento para a determinação das velocidades radiais via correlação cruzada e a discussão dos resultados se encontra no Apêndice A.2.

### 5.1.8 Cálculo do Número de Condição

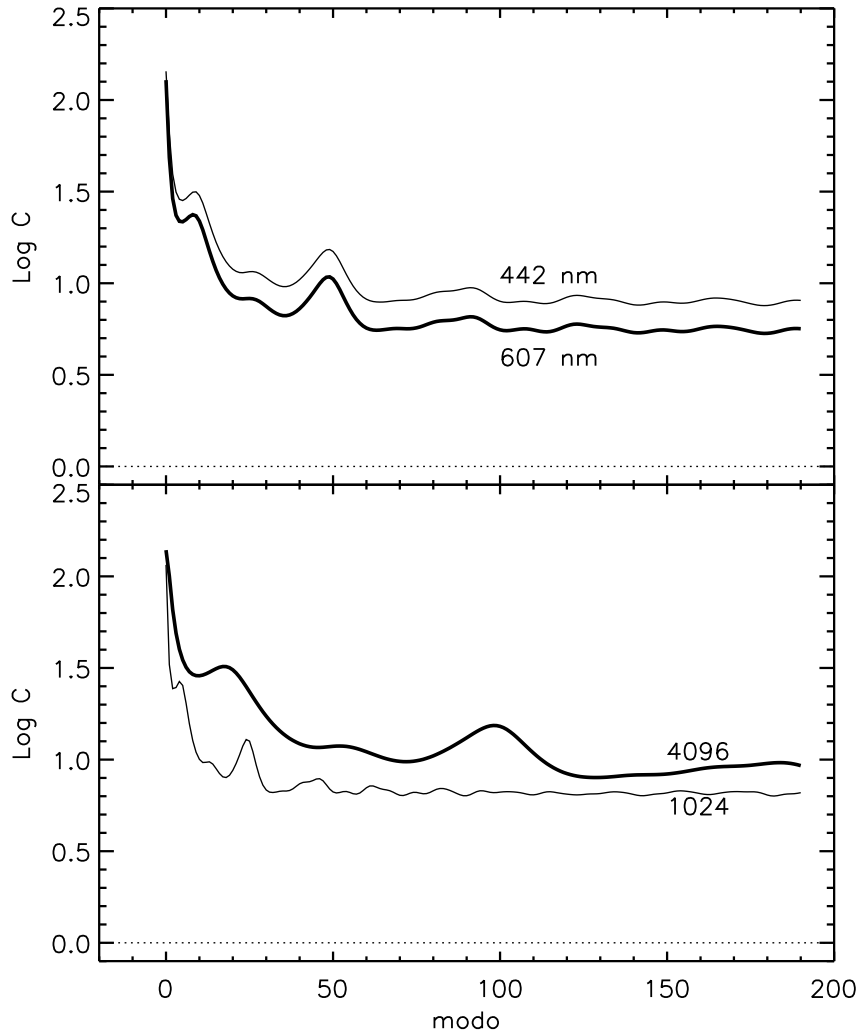
Das 25 regiões selecionadas (descritas na Tab. 5.2) escolhemos o conjunto de 6 regiões com espectros contendo 2048 pontos, cujos resultados são apresentados na Sec. 5.1.7, para fazer o estudo do número de condição e conseqüentemente investigar se as soluções foram bem determinadas ou não. Utilizamos 40 espectros fora do eclipse, além de uma fase em que a componente mais brilhante do par eclipsante é completamente eclipsada. Os fatores de luz das componentes, em fases fora do eclipse, variam ligeiramente durante o ciclo orbital, devido exclusivamente à forma elipsoidal do par eclipsante.

De acordo com a Eq. (2.10), as seguintes informações são necessárias para calcular o número de condição: contribuição em luz normalizada e velocidades radiais (km/s) das componentes em cada fase orbital, número total de pixels do espectro observado e seu passo em velocidade  $v_p$ .

A Fig. 5.16 mostra o logaritmo do número de condição ( $C$ ) para os modos de frequência mais baixos. O primeiro painel se refere aos resultados para as regiões R= 6 e 16 da Tab. 5.2, correspondendo, respectivamente, a um comprimento de onda inicial de 4420 Å e 6070 Å. Observe que, para a região mais no azul a solução é mais mal-condicionada que para a região mais no vermelho. Os resultados obtidos para as outras 4 regiões de 2048 pontos estão limitados entre as duas curvas. Isto nos mostra que a baixa contribuição em luz, no azul, da componente mais fraca faz com que o número de condição aumente (ao contrário do que ocorre para região mais para o vermelho).

O segundo painel da Fig. 5.16 mostra resultados para um outro grupo de regiões, não pertencente ao grupo de 6 regiões com 2048 pontos, mas considerando intervalos que possuem o mesmo comprimento de onda inicial, porém com números de pixels diferentes: um com 1024 pontos e a outro com 4096 (R=4 e 5, respectivamente, da Tab. 5.2. As fases são as mesmas 41 usadas para o cálculo com o grupo de 6 regiões com 2048 pontos). Isto nos mostra a possibilidade de se usar regiões com número de pixels maiores. Além disso, um intervalo quatro vezes maior em torno de um mesmo comprimento de onda central, faz com que a curva de  $\log C$  seja reescalada por um fator 4, apresentando os mesmos padrões de número de condição para valores de modos quatro vezes mais altos. Observe a semelhança do “pico” próximo a  $m \approx 100$  no caso de 4096 pixels com aquele próximo a  $m \approx 25$ , no caso de 1024 pontos.

Finalmente, estudamos qual seria o efeito sobre o  $\log C$ , ao adicionar uma fase em que a componente secundária é eclipsada (passando-se a ter um total 42 fases orbitais). Os resultados mostrados na Fig. 5.17 revelam que a sua utilização reduziria o  $\log C$  para os modos mais baixos, diminuindo mais ainda se pesos fossem adotados para ela. Para fazer esse cálculo consideramos as curvas de luz e intensidades relativas das componentes, obtidas pelo KOREL, para o conjunto de 6 regiões com 2048 pontos, e introduzimos *artificialmente* uma fase de eclipse secundário (que não estava contida nos cálculos com o KOREL), para determinar o número de condição e estudar qual o efeito sobre o  $\log C$ , ao adicionar tal fase.

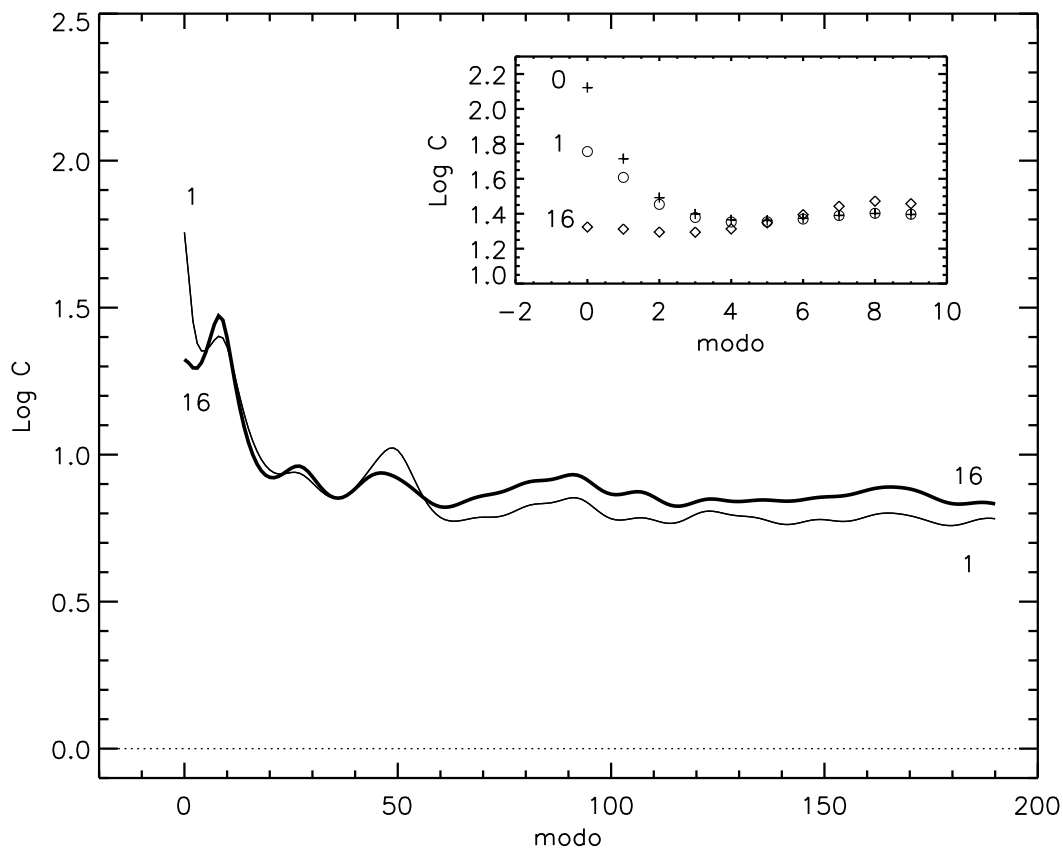


**Figura 5.16:** Logarítmo do número de condição ( $\log C$ ) para RV Cr1. O painel superior mostra os resultados para duas regiões espectrais de 2048 pontos, separadas pelo código KOREL: linha fina corresponde a um comprimento de onda inicial de 4420 Å e linha grossa a um comprimento de onda inicial de 6070 Å. Note que as equações são mal-condicionadas na região mais azul devido à baixa contribuição da componente mais fraca. O painel inferior mostra dois intervalos espectrais centrados em um mesmo comprimento de onda, mas que possuem números totais de pixels diferentes: 4096 e 1024. Note que a característica que aparece na curva de 1024 em  $m \approx 25$  aparece quatro vezes mais adiante na de 4096 em  $m \approx 100$ .

### 5.1.9 Estudo no Espaço de Velocidade: CRES

O código **CRES**, desenvolvido por Ilijić (2004b, 2006), é um código de separação espectral que trabalha no espaço de velocidades (em contraposição ao espaço de sua transformada de Fourier) e necessita como parâmetros de entrada os fatores de luz e velocidades das componentes em cada fase orbital. Esse código se encontra disponível na **WEB**, Ilijić (2006) e utiliza os pacotes científicos do **GSL** (GNU Scientific Library).

A versão do **CRES** utilizada aqui não é oficial (é semelhante à versão 2.2) e foi modificada



**Figura 5.17:** Cálculo do número de condição para RV Crt, considerando a presença de uma fase em eclipse secundário. A região analisada tem como comprimento de onda inicial 5725 Å. Os painéis mostram o efeito de adicionar uma fase no eclipse secundário: com peso igual a 1 (linha fina e “o” no painel interno), com peso 16 (linha grossa e “◊” no painel interno) e sem o espectro do eclipse secundário (“+” no painel interno). Observe, no painel mais externo, que há uma inversão das curvas para os modos mais altos. Isto é uma indicação de que a adoção de pesos maiores para as fases em eclipse é vantajosa somente para os primeiros modos de frequência (neste exemplo os pesos adotados não dependem do modo de Fourier, somente da fase orbital).

pelo autor a nosso pedido, possibilitando escolher em manter ou não a mesma resolução entre os espectros de entrada e saída, uma necessidade evidenciada por nossos estudos. O código utiliza a DVS, que é o método mais indicado para tratar sistemas singulares ou quase singulares, podendo ser aplicado tanto à matriz projeto de separação espectral quanto à normal (a solução a partir das equações normais são mais rápidas que a partir das equações padrões, porém, são mais instáveis). Além disso, a decomposição do valor singular poderá ainda ser processada usando (a) o algoritmo de DVS Golub-Reinsch (processo padrão), (b) o algoritmo modificado Golub-Reinsch, que é mais rápido para matrizes retangulares onde o número de colunas é bem maior que o número de linhas ou (c) a ortonormalização unilateral de Jacobi. Testes foram feitos pelo autor usando as seis combinações possíveis (variando entre o tipo de matriz que será decomposta e os tipos de algoritmos de DVS), constatando que não há qualquer diferença significativa nos espectros de saída. Algumas pequenas, mas importantes, modificações foram feitas no código, de forma que o número



de pixels dos espectros reconstruídos fossem calculados mais consistentemente (quando é escolhida a opção de manter a resolução espectral dos espectros de saída). Em todos os cálculos, escolhemos manter a resolução espectral dos espectros das componentes e utilizar o algoritmo de DVS Golub-Reinsch sobre a matriz padrão de separação espectral.

Inicialmente aplicamos o desembaraçamento espectral no espaço de Fourier KOREL (Hadrava, 1995, 2004c e 2004b) adaptado às nossas necessidades por Vaz et al. (2008). A determinação dos parâmetros orbitais envolveu o processo iterativo descrito na Sec. 5.1.4, que utiliza a análise das curvas de luz *ubvy* pelo WD e as velocidades radiais preditas pelo KOREL. Em seguida, aplicamos o código CRES e o método descrito no Cap. 4 para redução do tempo computacional.

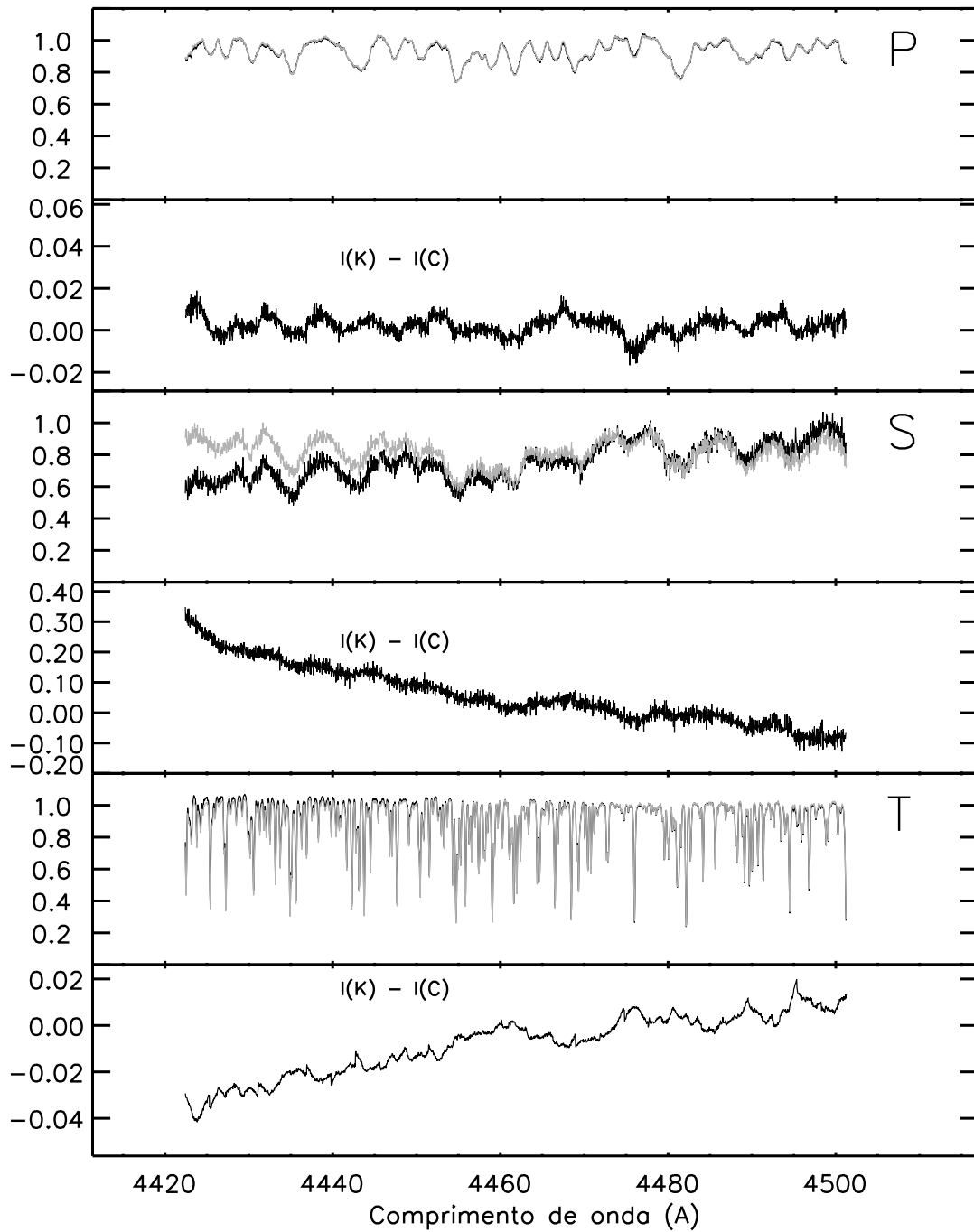
A separação espectral, no espaço de velocidade, foi processada em quatro das 25 regiões espectrais descritas na Tab. 5.2: R6, R13, R14 e R16, pertencentes ao conjunto de 6 regiões contendo 2048 pontos e cuja solução, no espaço de Fourier, foi apresentada na Sec. 5.1.7. Os resultados serão mostrados na Sec. 5.1.9.1 onde faremos, simultaneamente, uma discussão sobre a separação em ambos os domínios: de Fourier, através do KOREL, e de velocidade, através do CRES.

### 5.1.9.1 Comparação dos Métodos no Espaço de Fourier e Velocidade

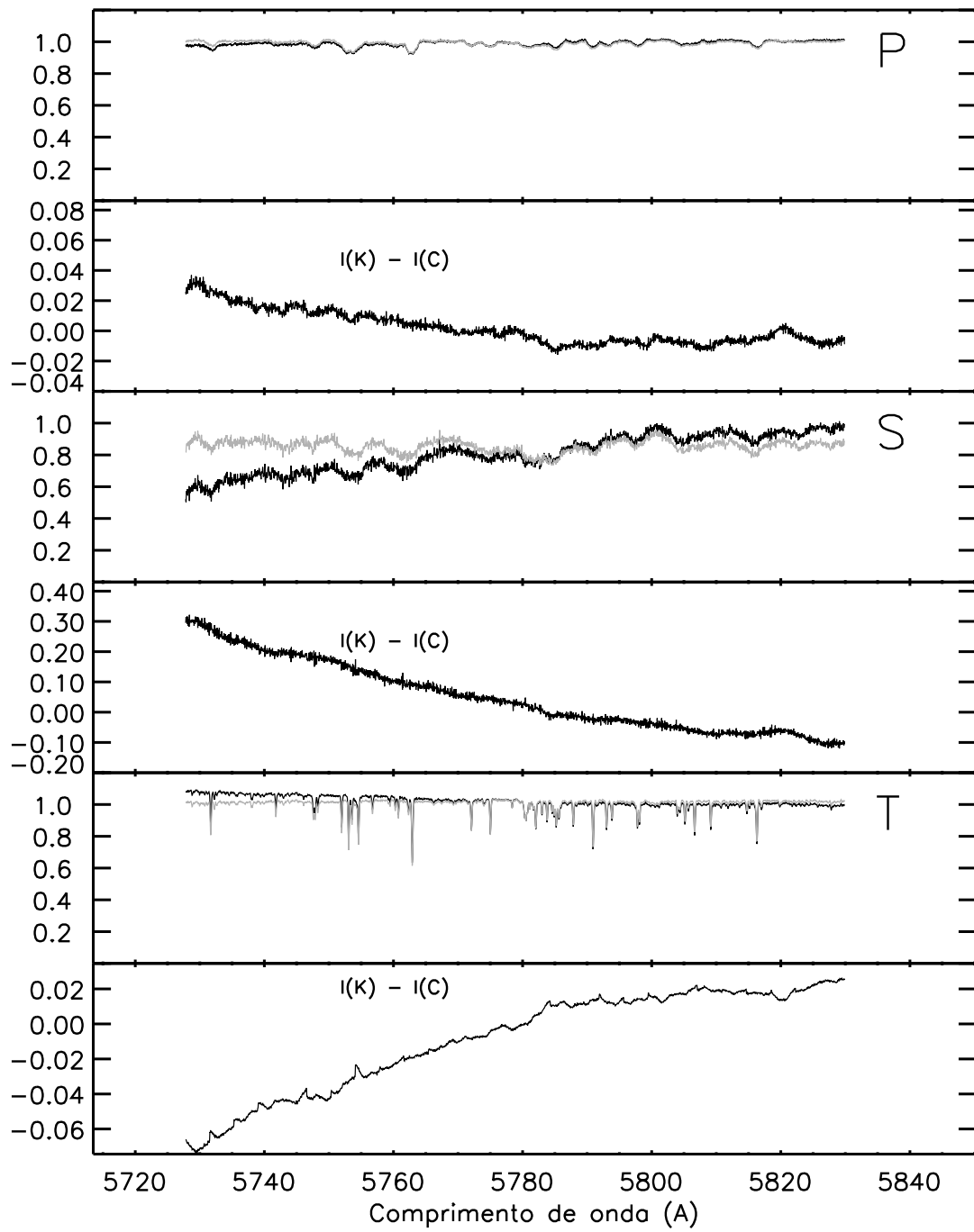
As Figs. 5.18, 5.19, 5.20 e 5.21 apresentam os resultados da separação espectral através do uso dos códigos CRES e KOREL para cada uma das componentes de RV Crt e para 4 diferentes regiões espectrais (respectivamente, as regiões R6, R13, R14 e R16, veja Tab. 5.2 para maiores informações dessas regiões). As contribuições relativas das componentes do par eclipsante variam nos 4 intervalos entre 43% e 41% para a primária e 6,5% e 9,2% para a secundária. A componente que não participa dos eclipses (terciária) contribui com metade da luz total, mas, devido à elipicidade e efeitos de reflexão no par eclipsante, sua contribuição relativa varia ligeiramente com a fase orbital. A contribuição em luz da terciária, nestes intervalos, está entre 5,4% e 6,7% mais brilhante que a primária.

A separação espectral com diferentes técnicas resultam em espectros similares para as componentes, com exceção de comportamentos de baixa frequência sobre os contínuos das mesmas. O contínuo dos espectros reconstruídos no espaço de Fourier possuem ondulações (devido ao fato dos espectros serem considerados como funções periódicas), enquanto que no espaço de velocidade o contínuo dos espectros são “inclinados”. Como visto na Sec. 2.5.1.1, as componentes de baixa-frequência são mais facilmente construídas para as componentes eclipsadas, neste caso a primária. Observe o contínuo plano desta componente em todas as quatro regiões espectrais e como o valor de  $I(K) - I(C)$  é praticamente constante. As diferenças  $I(K) - I(C)$  para a secundária têm sinal contrário em relação ao valor correspondente para a terciária, em todas as regiões analisadas. Além disso, a diferença é mais pronunciada no espectro da secundária do que no da terciária, por causa das diferenças entre os fatores de luz entre elas. Isso concorda com os estudos sobre a progressão de viés sobre os espectros reconstruídos, mostrados na Sec. 2.7.

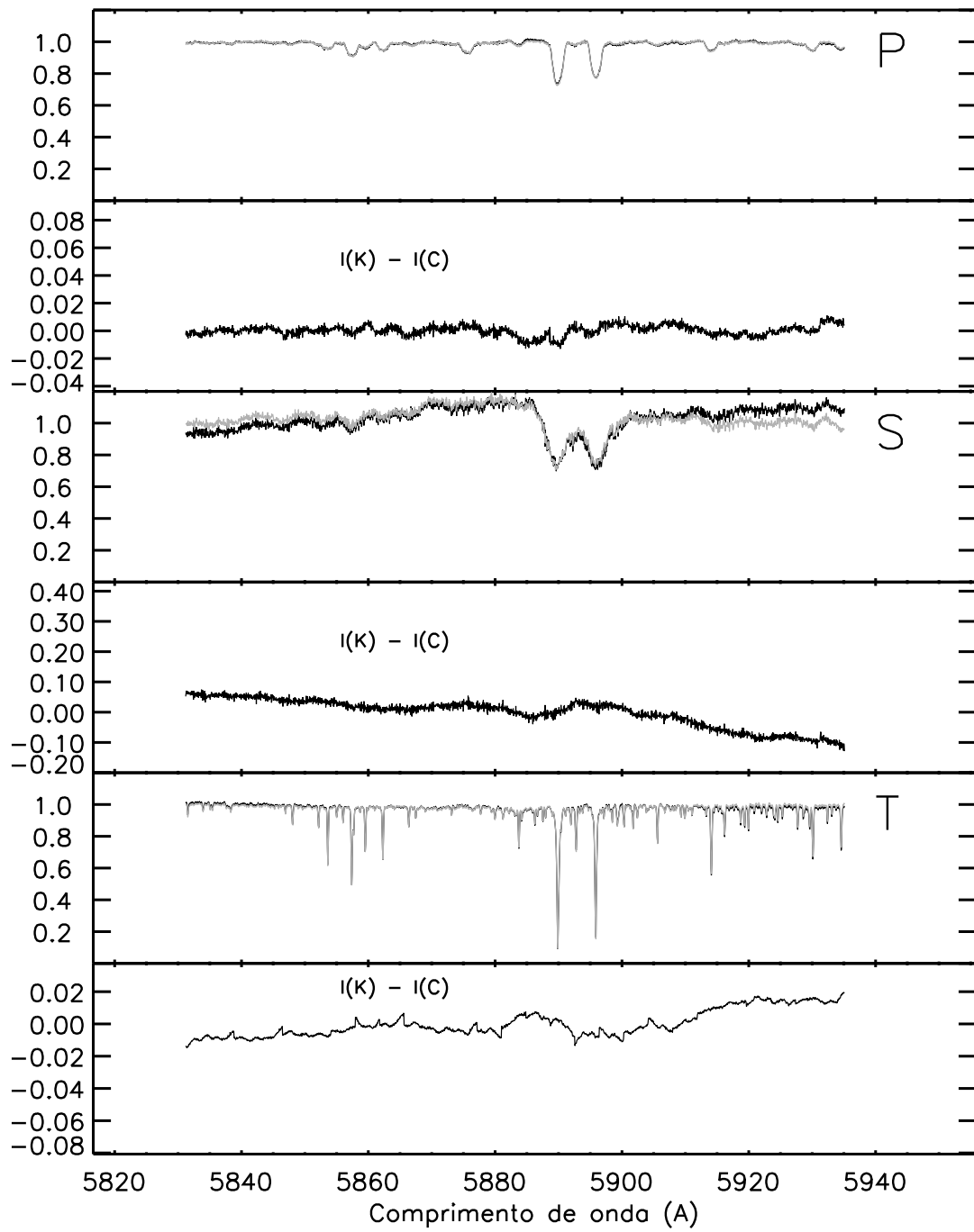
Concluindo, ambas as técnicas reagem de maneira diferente a um mesmo efeito. Isto não quer dizer que elas estejam incorretas, mas, ao contrário, nos mostra possíveis defeitos decorrentes de uma incorreta determinação do contínuo ou do processo de redução dos dados, além da grande vantagem de se usar todas as ferramentas em conjunto na análise de sistemas complicados como RV Crt.



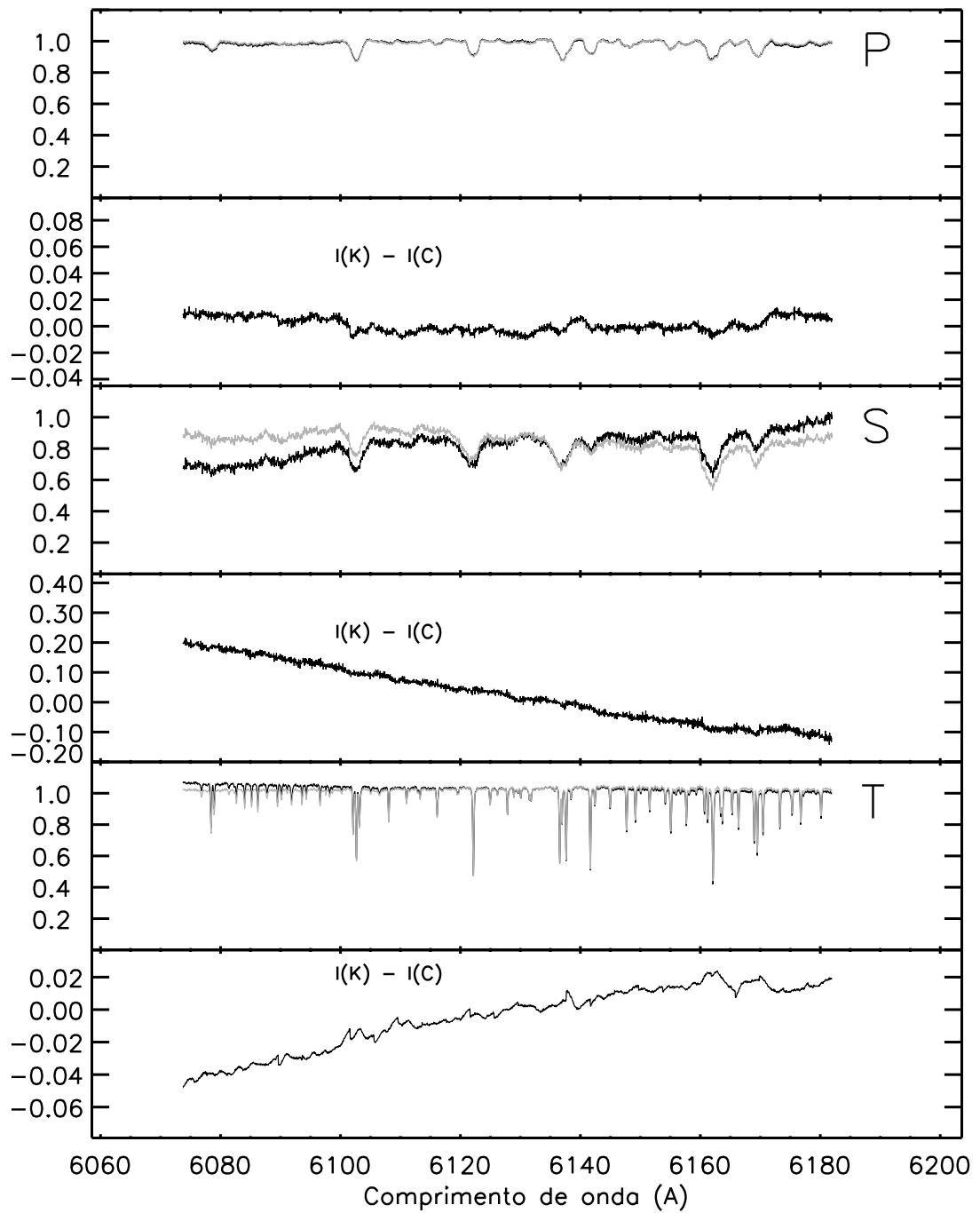
**Figura 5.18:** Espectros normalizados das componentes de RV CrT (“P” primária, “S” secundária e “T” terciária), obtidos pelo KOREL (em cinza) e pelo CRES (em preto). Em cada painel são mostrados os espectros das componentes e as diferenças entre os espectros obtidos pelo KOREL e os obtidos pelo CRES,  $I(K) - I(C)$  para a região R6.



**Figura 5.19:** O mesmo que a Fig. 5.18 para a região R13 indicada no painel (de 5725.210 a 5832.738 Å).



**Figura 5.20:** O mesmo que a Fig. 5.18 para a região R14 indicada no painel (de 5828.551 a 5938.019 Å).



**Figura 5.21:** O mesmo que a Fig. 5.18 para a região R16 indicada no painel (de 6070.973 a 6184.994 Å).

### 5.1.10 Renormalização e eliminação de padrões espúrios

Devido às características dos espectros obtidos para a análise de RV Crt, como, por exemplo, a presença de uma fase no eclipse total, não esperávamos, inicialmente, obter efeitos de baixa-freqüência sobrepostos ao contínuo dos espectros reconstruídos, e de forma mais pronunciada no da componente mais fraca (secundária). Estudos posteriores (descritos no Cap. 2) revelaram que esses efeitos são decorrentes da separação espectral de exposições afetadas por viés e/ou devido à singularidade das equações. Além disso, sistemas cujos fatores de luz são constantes ou praticamente constantes interferem na determinação dos modos de freqüência mais baixas responsáveis pela determinação da posição do contínuo.

Em RV Crt, a presença da fase em eclipse total primário possibilita a determinação, de forma muito precisa, do nível de contínuo da primária. Contudo, a ligeira variação da razão de luminosidade entre a secundária e a terciária (devido à forma elipsoidal do par eclipsante) promove o surgimento de ondulações sobrepostas ao contínuo dos espectros destas componentes, ao usar as técnicas de separação no espaço de Fourier. A Fig. 5.22 mostra tais efeitos numa região com presença de Ca I, analisada na Sec. 5.1.7 (região R16 da Tab. 5.2).

Na tentativa de eliminar ou reduzir esses efeitos ondulatorios, foi aplicada aos espectros observados uma correção senoidal dependente da fase orbital, antes de refazer a separação espectral, dada por:

$$\epsilon_j(\ln \lambda) = \alpha \sin 2\pi\phi_j \cos 2\pi\frac{n}{2048} \quad (5.46)$$

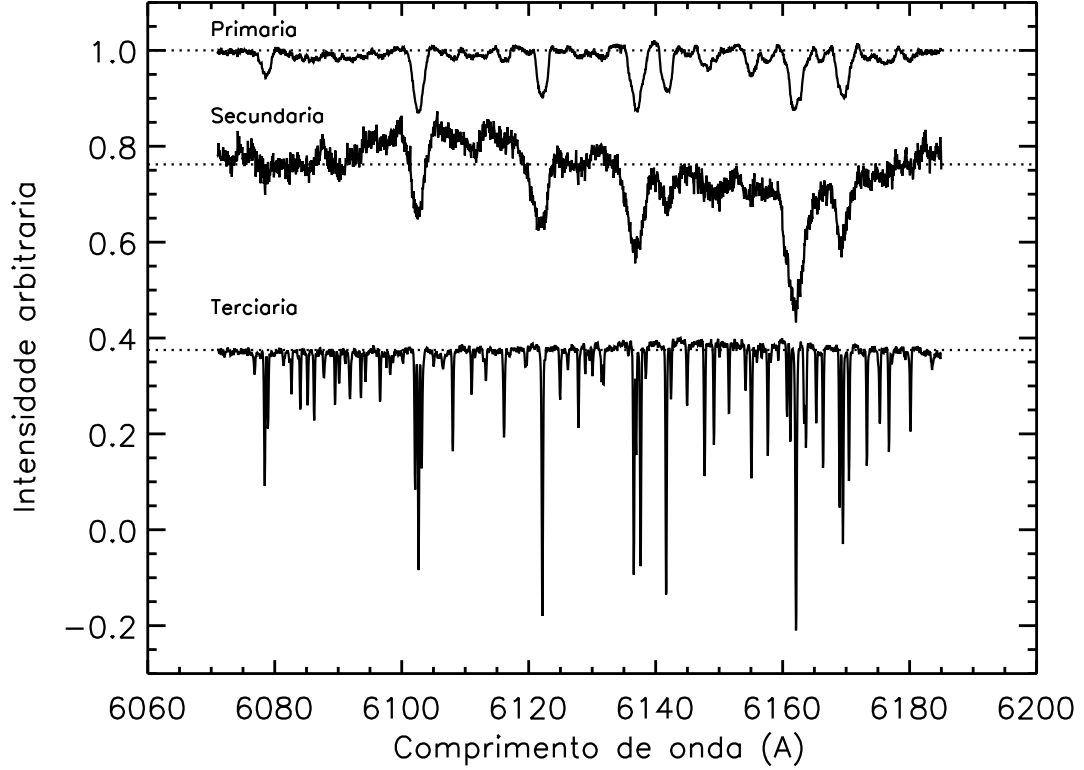
onde o pixel de índice  $n = 1, \dots, 2048$  cobre o intervalo espectral analisado;  $\phi$  é a fase orbital e  $\alpha$  é a amplitude da correção senoidal aplicada às intensidades. Uma correção deste tipo supõe que o espectro no eclipse total tenha sido normalizado corretamente. Contudo, erros foram introduzidos involuntariamente no processo de normalização, em razão (a) das linhas da secundária serem largas (provavelmente devido a uma grande velocidade rotacional desta componente) e (b) do movimento Doppler do par eclipsante.

O valor adotado para  $\alpha$  foi de  $10^{-3}$ , mostrando que a mudança no contínuo por um fator de 0,1% resulta num outro contínuo mais plano para todos os espectros reconstruídos, sem aumentar os resíduos dos espectros observados. A Fig. 5.23 nos mostra os espectros da secundária e terciária após as correções (painéis intermediário e inferior, respectivamente) além dos efeitos da correção senoidal sobre o contínuo das três componentes (painel superior). Observe o efeito ondulatorio mais pronunciado no espectro da secundária em relação ao da terciária e que as amplitudes,  $a_k$  para  $k = 1, 2, 3$ , das ondulações das componentes são acopladas da seguinte forma

$$a_1 < \ell_1 > + a_2 < \ell_2 > + a_3 < \ell_3 > = 0, \quad (5.47)$$

onde  $\ell_k$  indica a contribuição relativa à luz total média, da componente  $k$ , sobre todos os espectros de entrada. No nosso caso, isso significa dizer que a razão da amplitude da ondulação sobre os espectros reconstruídos da secundária com relação à terciária são proporcionais a razão  $\frac{0,5}{0,092} \approx 5,5$ .

É importante ressaltar que, após aplicar o KOREL nos espectros compostos corrigidos senoidalmente, determinamos, independentemente, usando a DVS, as componentes do modo zero para cada estrela ( $\tilde{x}_{k,0}$ ) e subtraímos, do resultado obtido pelo KOREL, a quantidade



**Figura 5.22:** Espectros de RV Crt reconstruídos pelo código KOREL no intervalo de aproximadamente 6071 Å a 6185 Å (região R16 da Tab. 5.2). Observe que as ondulações sobrepostas ao contínuo do espectro da secundária são mais pronunciadas que no caso da terciária, e que as mesmas são de sinal contrário uma em relação à outra. O efeito é mais pronunciado no espectro da componente mais fraca, como previsto pela teoria (veja discussão na Sec. 2.7.1).

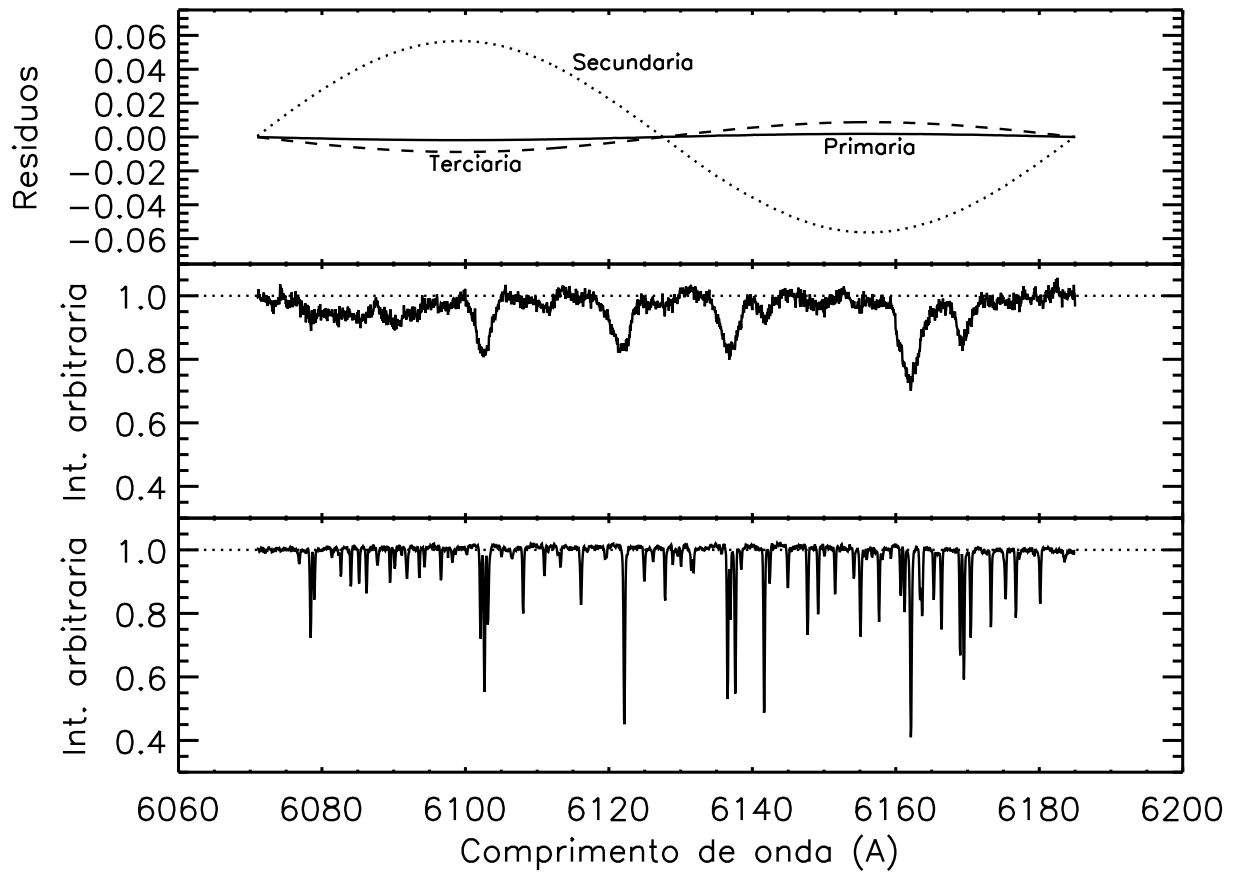
$1 - \tilde{x}_{k,0}$  (lembramos que este código não calcula o modo zero). Contudo, a DVS não encontrou a solução fisicamente correta para o contínuo dos espectros da secundária e terciária. Assim, adotamos um outro processo, impondo que

$$x_2 = p_2 + \eta_2 \quad \text{e} \quad x_3 = p_3 + \eta_3, \quad (5.48)$$

onde os índices 2 e 3 se referem à secundária e terciária, respectivamente;  $x_k$  são os espectros verdadeiros;  $p_k$  os espectros obtidos pelo KOREL depois de aplicada a correção  $1 - \tilde{x}_k$  e  $\eta_k$  são constantes que devem obedecer a relação  $\eta_2 l_2 + \eta_3 l_3 = 0$ . Adotamos  $\eta_2 = 0,115$  e, consequentemente,  $\eta_3 = -\eta_2 \frac{l_2}{l_3}$  para  $l_2=0,0943$  e  $l_3=0,4989$  constantes em fase orbital. Os resultados são apresentados na Fig. 5.23.

Um outro método de renormalização descrito na Sec. 2.8 baseado num corredor de contínuo, foi aplicado para RV Crt. A Fig. 5.24 mostra a forma da função  $z(\ln \lambda)$  obtida pela Eq. (2.66) considerando os fatores de luz da secundária e terciária constantes no tempo e iguais a  $l_2=0,0943$  e  $l_3=0,4989$ , respectivamente. Os espectros corrigidos serão obtidos através da Eq. (2.65), ou seja,

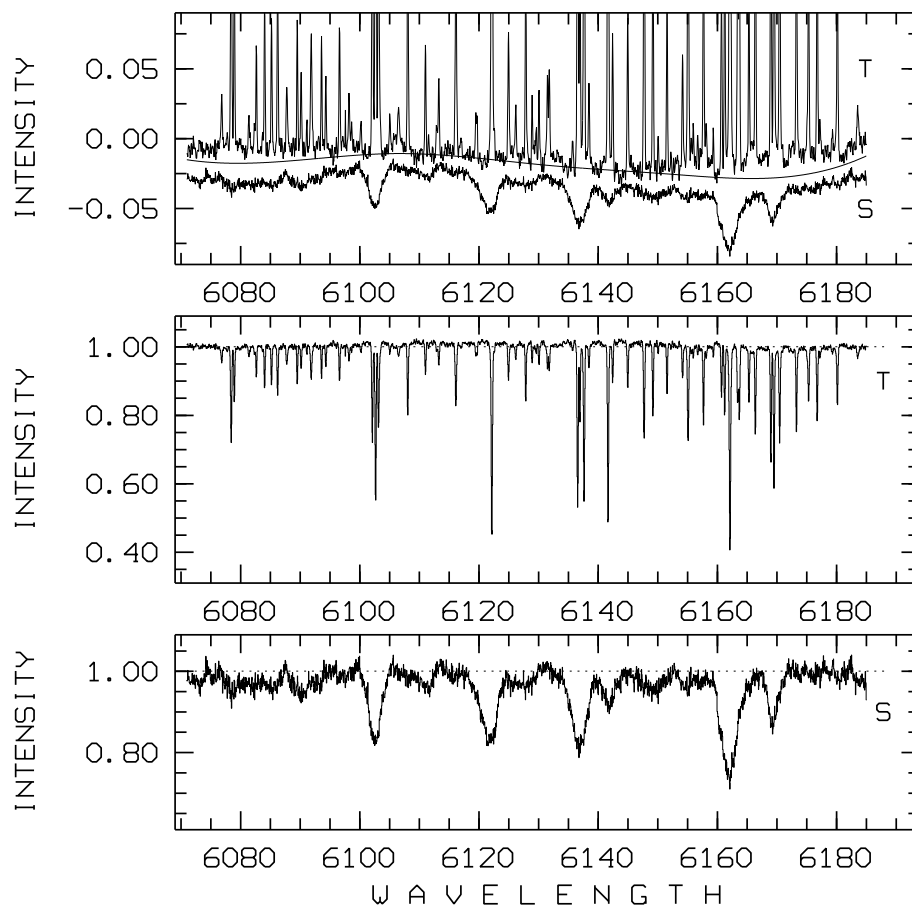
$$\begin{aligned} x_2 &= p_2 - Z(l_2 + l_3)/l_2 \quad \text{e} \\ x_3 &= p_3 + Z(l_2 + l_3)/l_3. \end{aligned} \quad (5.49)$$



**Figura 5.23:** Redução da amplitude de padrões induzidos pela DVS, sobrepostos ao contínuo dos espectros reconstruídos, por uma correção na normalização dos espectros observados. O painel superior mostra os efeitos da correção senoidal sobre o contínuo das componentes (diferença entre os espectros com e sem correção). Os painéis intermediário e inferior mostram os espectros reconstruídos depois de corrigidos senoidalmente e de renormalizados (vide texto para maiores detalhes).

A escolha de  $Z$  é definida pelos dados da componente mais fraca, pois a correção a ser aplicada ao espectro reconstruído é amplificado por um fator de  $(l_2 + l_3)/l_2$ . Observe que os espectros retificados usando os dois métodos são praticamente os mesmos (compare as Figs. 5.23 e 5.24).





**Figura 5.24:** Redução da amplitude de padrões induzidos pela DVS, sobreposta ao contínuo dos espectros reconstruídos, por uma correção através da definição de “corredor”, descrita na Sec. 2.8. O painel superior mostra as funções que definem o corredor. Estas foram mudadas, por simplicidade, por um fator de +0,01 para a terciária e -0,01 para a secundária para colocar o ruído fora do corredor. Os painéis inferiores mostram o espectro resultante, de cima para baixo, da terciária (T) e da secundária (S).

# Capítulo 6

---

## Conclusões

Nesse capítulo, apresentamos a conclusão geral do nosso trabalho, que contribui com o estudo teórico do processo de reconstrução espectral, nos espaços de Fourier e velocidade, visando obter espectros de maior qualidade e confiabilidade. Além disso, oferece aos usuários dos códigos de desembaraçamento/separação espectral orientações sobre em quais circunstâncias a reconstrução espectral é ideal, a origem dos padrões espúrios e como eliminá-los ou reduzi-los dos espectros reconstruídos.

A importância de tal estudo se justifica na vantagem do uso dos espectros reconstruídos por essas técnicas, para a análise das componentes de um sistema múltiplo como se fossem estrelas isoladas. Assim, temperatura efetiva, gravidade, rotação estelar, abundâncias, parâmetros atmosféricos podem ser determinados sem a interferência das linhas espectrais de outra(s) componente(s) do sistema. Além disso, se a órbita é resolvida conjuntamente com os espectros das componentes, a determinação de massa e raio estelares é feita de forma mais robusta, contribuindo para testes de modelos de estrutura e evolução estelar.

No Cap. 2 e no Cap. 3 estudamos teoricamente (e com auxílio de dados tanto reais como artificiais) as equações que regem o processo de separação espectral com o objetivo de compreender sob quais circunstâncias as soluções são bem determinadas, e quais conjuntos de espectros compostos são importantes para garantir a reconstrução espectral. Foi mostrado (Sec. 2.4) que os algoritmos agindo sobre as componentes de Fourier dos espectros compostos ou sobre os espectros em coordenadas de velocidade são equivalentes. As diferenças existentes entre as duas aproximações se baseiam (1) na flexibilidade em lidar com a amostragem dos espectros e com os efeitos de borda (Sec. 2.4.1), (2) na forma dos padrões espúrios (Sec. 2.7.2), (3) no peso dado aos espectros de entrada (em coordenadas de velocidade o peso pode ser dado para cada pixel individualmente, enquanto que no espaço de Fourier o peso é dado a cada exposição) e (4) no tempo computacional (Sec. 2.3). Essas diferenças estão relacionadas em como as aproximações respondem à reconstrução espectral, não implicando em dizer que estão incorretas. Ao contrário, o uso simultâneo das duas aproximações auxilia no estudo de sistemas mais complicados como é o caso de RV Crt. Considerando que os espectros compostos contêm somente ruído aleatório, podemos enumerar as seguintes conclusões:

- o fato de que as equações de separação espectral são bem determinadas ou não depende (a) da distribuição dos espectros em fase orbital, sendo favorável o caso em que esses são distribuídos em passos constantes em velocidade (Secs. 2.5.1.3 e 3.2) e (b) dos fatores de luz das componentes, ou seja, quanto mais significativa for a variabilidade em luz, mais bem determinada é a solução, principalmente para os modos de frequência de Fourier mais baixos (Secs. 2.5.1.1 e 3.2). Nessas condições, o usuário dos métodos de separação espectral deve planejar suas observações de modo que possa melhor se beneficiar dos resultados obtidos;
- a DVS conduz à solução mais correta matematicamente, no entanto, essa não deve ser considerada como a única solução, fisicamente falando (na Sec. 3.3.1 discutimos como a DVS determina a solução para um sistema binário hipotético simples). Conhecimentos externos de física para espectros de estrelas isoladas, como por exemplo, janelas de contínuo, abundâncias de linhas fortes e fracas consistentes para um mesmo elemento químico e requerimento de que o espectro não pode ter intensidades negativas, tudo isso (e possivelmente mais) pode indicar uma outra solução matematicamente aceitável que seja diferente daquela obtida pela DVS. Conseqüentemente, é importante o conhecimento de quando a solução não é única, por razões matemáticas, e escolher das disponíveis aquelas que são fisicamente mais aceitáveis. No final da Sec. 5.1.10 mostramos um exemplo, para RV Crt, em que a solução obtida pela DVS não correspondia, fisicamente, com o esperado e um processo alternativo, baseado na janela de contínuo, foi adotado com sucesso;
- as soluções podem ser degeneradas para os modos mais altos de Fourier, nos casos em que o sistema possui uma componente muito fraca ou uma distribuição muito específica do conjunto de dados de entrada sobre o ciclo orbital (como discutido na Sec. 2.5.1.3). As soluções são degeneradas para os modos mais baixos de Fourier quando a razão das contribuições relativas para cada par de componentes não varia significativamente (Sec. 2.5.1.2). Conseqüentemente, espectros em eclipses são úteis para estabilizar a solução para os modos de frequência mais baixos (Sec. 2.5.1.1);
- como visto na Secs. 2.5.1.1 e 3.2, na ausência de efeitos de diluição variáveis no tempo, ou seja, quando as contribuições relativas em luz das componentes são constantes no tempo, o modo zero de frequência de Fourier é indeterminado (isto é, a posição do nível do contínuo dos espectros reconstruídos é indeterminada). Nesse caso, regiões com linhas de absorção profundas, conhecimento de janelas de contínuo ou informações sobre as profundidades das linhas nos espectros das componentes, podem ajudar a determinar o nível do contínuo;
- definitivamente, espectros em fase de eclipse *total* são úteis. Rigorosamente falando, espectros nas fases em eclipse *parcial* não deveriam ser usados no processo de separação espectral, devido ao efeito Schlesinger-Rossiter, de variação da forma dos perfis das linhas espectrais durante a ocultação. No entanto, tais espectros podem ser usados para extrair a solução fisicamente correta para as componentes espectrais de baixa frequência, desconsiderando-os para todos os outros modos de Fourier. Baseado nisso, um esquema que adota pesos dependentes, não só da fase orbital, mas também dos modos de Fourier é sugerido;
- de acordo com a Sec. 2.5.1.1, pesos podem ser atribuídos aos espectros em fases de eclipse (parcial e total) para  $m = 0$ . No caso de modos mais baixos (que são diferentes de zero) é conveniente adotar pesos, desde que se observe um melhoramento

do número de condição,  $C_m$ , para aquele modo de Fourier. O caso específico de RV Crt, Fig. 5.16, e de um sistema artificial, descrito em Hensberge & Pavlovski (2006) Fig. 8, mostram que os valores de  $m$  entre 1 e 5 (ou 7) são influenciados pela presença de fases em eclipse. As Eqs. (2.47) e (2.49) determinam, respectivamente, um peso otimizado, para  $m = 0$ , no caso de fases em eclipses totais e parciais;

- em sistemas hierarquicamente mais complicados, o estudo do número de condição pode ser usado para verificar se a solução espectral obtida é bem condicionada ou não (a solução da Eq. (2.30) para os valores singulares pode ser usada no cálculo do número de condição para um sistema contendo  $K$  componentes). Uma expressão para  $C_m$ , para sistemas duplos e triplos, é descrita, respectivamente, pelas Eqs. (2.36) e (2.43).

Mesmo aplicando um processo elaborado para a redução de dados, os espectros compostos não estão totalmente livres de erros sistemáticos. A progressão de viés (correlacionados com a fase orbital) sobre os espectros reconstruídos das componentes, devido à erros de normalização, foi discutida na Sec. 2.7 e concluímos que

- é observado uma grande amplificação de qualquer viés sobre os espectros reconstruídos de um sistema, cujos fatores de luz são constantes. As amplitudes desses viés são mais altas para as componentes mais fracas em comparação com as outras mais fortes, e suas amplitudes aumentam linearmente com o comprimento do intervalo espectral reconstruído, em unidades da soma do desvio Doppler para cada par de componentes;
- os viés sobrepostos ao contínuo dos espectros das componentes obedecem a Eq. (2.63) e dependem dos viés presentes nos espectros de entrada;
- os algoritmos nos espaços de Fourier e velocidade reagem de maneira similar, mas não idêntica, aos viés nos espectros observados, devido ao requerimento de que no espaço de Fourier esses espectros são considerados funções periódicas;
- características quase estáticas (Sec. 2.7.3), como por exemplo, presença de linhas telúricas, absorções devido à presença de uma componente fraca não-detectável, manchas devidas a defeitos no detector, linhas interestelares e campo-plano imperfeito ou incorretamente processado, se não estiverem incluídas no modelo de separação espectral, podem ser transferidas aos espectros reconstruídos das componentes, preservando sua forma. O mesmo pode ocorrer quando viés nas intensidades das linhas são correlacionados com a fase orbital.

Na Sec. 2.8, procedimentos foram sugeridos para eliminar ou reduzir os padrões espúrios, devidos a equações mal-condicionadas ou à presença de viés nos espectros observados, bem como um processo mais elaborado que consiste em melhorar a normalização dos espectros compostos e re-iterar o processo de reconstrução espectral (veja na Sec. 5.1.10 a renormalização dos espectros de RV Crt, seguindo o procedimento da Sec. 2.8). A necessidade de uma correção acoplada é enfatizada, garantindo que o bloqueio de linha observado seja preservado na combinação do espectro reconstruído (veja Eq. (5.47) para RV Crt).

De maneira geral, podemos dizer que os algoritmos de reconstrução espectral são mais potentes quando aplicados a sistemas binários eclipsantes, pois o efeito de diluição variável no tempo determina completamente a intensidade das linhas espectrais nos espectros reconstruídos.

Um contínuo plano normalizado com nível bem determinado é reconstruído, naturalmente, quando as observações possuem uma boa cobertura orbital e quando as contribuições relativas em luz das componentes variam significativamente.

As extremidades dos intervalos reconstruídos, correspondentes ao comprimento (em unidades de velocidade)  $K_1 + K_2$  e possivelmente até duas vezes esse valor, devem ser evitados quando se usa algoritmos que *wrap-around* os dados (como é o caso de algoritmos que operam no espaço de Fourier). Com exceção destes intervalos, todo o restante da região espectral reconstruída pode ser analisada, com confiança, como se fosse o espectro de uma estrela isolada. Assim, parâmetros atmosféricos e composição química podem ser determinados com precisão.

Em muitas situações, informações externas são necessárias para determinar o nível do contínuo. Além disso, a presença de padrões espúrios de baixa-freqüência pode fazer com que a forma das linhas espectrais largas pareça distorcida. Para estudos relacionados com linhas espectrais finas, é fácil estimar o contínuo local e qualquer incerteza na determinação do nível do contínuo tem muito menos influência sobre a interpretação da intensidade e forma exata das linhas, do que no caso de um espectro com linhas alargadas. Nesse sentido, as distorções discutidas nesse estudo são de menor importância prática.

No entanto, para componentes fracas e com padrões espúrios atingindo altos níveis, e para estrelas que possuem velocidade rotacional elevada (onde a determinação do nível do contínuo tem um grande impacto) e linhas intrinsecamente muito alargadas (como é o caso das linhas de hidrogênio em estrelas quentes ou linhas de Ca I em estrelas frias), a qualidade da análise é mais sensível à determinação do contínuo. Desta forma, é interessante considerar as aproximações descritas nesse estudo. Uma recente aplicação é descrita em Pavlovski & Hensberge (2005), mostrando que as abundâncias das principais espécies químicas de uma estrela jovem do tipo espectral B podem ser determinadas com uma precisão melhor que 0,1 dex para velocidades rotacionais em torno de 100 km/s.

Em nossa opinião, os efeitos de baixa-freqüência sobre os espectros reconstruídos, além de serem um obstáculo na reconstrução de grandes intervalos espectrais, são, também, uma barreira contra uma reconstrução espectral de confiança. Além disso, o fato de que os padrões impostos sobre diferentes componentes de um sistema múltiplo são interrelacionados, possibilita um vínculo de grande utilidade no sentido de utilizar as verdadeiras contribuições de baixa-freqüência das componentes.

É claro que novas aplicações das técnicas de reconstrução espectral em uma variedade de sistemas mostrará que mais informações significantes podem ser obtidas através dos espectros reconstruídos do que se tem conseguido até hoje. Até então, aplicações dos espectros recostruídos têm abrangido estudos sobre (a) abundâncias químicas, (b) estudos detalhados da variação da forma das linhas espectrais em estrelas pulsantes pertencentes a sistemas múltiplos espectroscópicos, (c) coexistência de componentes espectroscópicas peculiar e normal em sistemas múltiplos e seus estudos detalhados sobre um grande intervalo de comprimento de onda, (d) razão de fluxos, (e) temperatura efetiva, (f) gravidade, (g) velocidades rotacionais projetadas (h) massa, (i) raio e (j) distância.

Dentro de um contexto mais abrangente do desembaraçamento espectral envolvendo a determinação dos parâmetros orbitais, esforços devem ser dirigidos ao estudo do aparecimento de possíveis viés nos espectros reconstruídos devidos à presença de erros (viés) nos parâmetros orbitais. Esse tipo de progressão de erro não está incluído nesse estudo. Intuitivamente, tais erros podem alterar a forma das características espectrais ao invés de sua intensidade, provavelmente pela combinação de um padrão espúrio alargado e as-

simétrico. Em contraste aos tipos de fontes que distorcem os modos de frequência mais baixos nos espectros das componentes, parâmetros orbitais errados podem afetar os modos de frequência mais altos. No entanto, os métodos de desembaraçamento espectral são capazes de usar as informações sobre as velocidades radiais em fases orbitais não acessíveis por métodos clássicos e não dependem de espectros gabaritos, de forma que erros nas velocidades Doppler são pequenos para um conjunto de dados bem determinados. Apesar de tudo, uma análise quantitativa pode contribuir para a estimativa correta das incertezas sobre os parâmetros astrofísicos derivados da reconstrução espectral.

No Cap. 4 discutimos um procedimento alternativo para a redução do tempo computacional no espaço de velocidade, baseado na reconstrução de pequenos intervalos da região espectral a ser analisada, preservando todas as informações úteis das linhas espectrais das componentes. O procedimento é eficaz quanto ao tempo ganho no processo computacional, assim como no procedimento para concatenar as sub-regiões para formar a região espectral original. O procedimento foi aplicado, com sucesso, no sistema triplo eclipsante RV Crt (descrito na Sec. 5.1.9). A comparação dos resultados, com aqueles obtidos pelo código que opera no espaço de Fourier, mostra claramente que os métodos respondem de maneira similar à reconstrução espectral (veja Sec. 5.1.9.1), como previsto por Ilijic (2004b) e na Sec. 2.7.2 deste estudo.

Com base nos estudos teóricos dos métodos de separação espectral, tanto no espaço de Fourier quanto no espaço de velocidade, a análise de RV Crt vem sendo processada. Resultados preliminares são apresentados nesse estudo e serão em breve publicados em Vaz et al. 2008 (para determinação dos parâmetros orbitais e estágio evolutivo). O processo de redução de dados e os espectros reconstruídos deste sistema serão descritos em outra publicação, cuja redação também está em andamento. Esse sistema triplo é composto por um par eclipsante, com período de 1,17 dias e uma terceira componente que predomina no espectro observado e que, hoje, sabemos com certeza que faz parte fisicamente do sistema (devido aos efeitos de tempo de luz, vagamente mencionado nesse estudo – Sec. 5.1.5). Felizmente, possuímos um espectro de RV Crt em fase de eclipse total, o que ajuda bastante na eliminação de efeitos de baixa-frequência nos espectros reconstruídos. No entanto, padrões espúrios, provenientes de uma “insuficiente” determinação do contínuo (durante o processo de redução dos dados), foram transferidos para os espectros das componentes, e com alta amplitude para a componente mais fraca (secundária). Os procedimentos descritos na Sec. 2.8 foram usados para renormalização dos espectros reconstruídos e os resultados são apresentados na Sec. 5.1.10. Tendo em vista, a sensibilidade do processo de reconstrução espectral em relação a variabilidade em luz das componentes do sistema, o procedimento descrito na Sec. 5.1.4 tem se mostrado, em boa aproximação, eficiente para a determinação das contribuições em luz das componentes via um modelo de curvas de luz (no nosso caso o código WD de Wilson & Devinney, Wilson & Devinney 1971, Wilson 1993, com extensas e profundas modificações introduzidas por Vaz, 1995, 1997, 2004, entre outras).

RV Crt tem-se revelado um sistema com características interessantes com relação ao par eclipsante, a componente mais fria possui menos massa e é a maior (secundária), por outro lado, a mais quente é a mais massiva, mas é a menor (primária). Além disso, as massas do par eclipsante são muito pequenas, especialmente a da secundária, que é menor que a da primária. Isso nos indica duas possibilidades (1) que o sistema é evoluído e a secundária saiu da seqüência principal ou (2) que o sistema é muito jovem e que a secundária ainda não atingiu a fase de seqüência principal. A terciária não apresenta sinais

de evolução, mas possui uma nítida presença da linha de Li em 6708 Å (normalmente um indicador de juventude ou de evolução avançada, em gigantes). Somente após finalizada a solução de RV Crt através da análise conjunta do código WD e desembaraçamento espectral (KOREL, FDBinary) e/ou separação espectral (CRES) é que poderemos avaliar, com modelos teóricos de evolução estelar, em quais dos dois cenários RV Crt se encontra. Posteriormente, depois de estabelecida a órbita do par eclipsante, uma nova análise, envolvendo dados espectroscópicos de 1997 obtidos por Machado (1997) e os recentes obtidos por nós, descritos nesse estudo, poderá nos dar uma indicação da órbita da terciária em torno da primária.

Os resultados preliminares mostram que a razão das massas das componentes eclipsantes é  $q=0,545\pm 0,003$ , e a semi-amplitude projetada da primária e secundária são, respectivamente,  $K_1=74,7$  km/s e  $K_2=137,0$  km/s, conseqüentemente as massas das componentes são  $M_1=(0,749\pm 0,009) M_\odot$  e  $M_2=(0,417\pm 0,006) M_\odot$ , e as temperaturas efetivas são  $T_1=6600$  K (adotada, incerteza de  $\sim 120$  K) e  $T_2=4180$  K (da solução).

## 6.1 Trabalhos Futuros

As técnicas de reconstrução espectral e determinação simultânea da órbita de sistemas estelares múltiplos têm se mostrado eficientes e com ampla aplicação, como descrito por Gies (2004), Holmgren (2004) e Hensberge & Pavlovski (2006). Continuando com os estudos sobre o processo de desembaraçamento espectral, que vem sendo feito por nosso grupo, as seguintes atividades são propostas:

- implementação da DVS ao código KOREL que, de acordo com nosso estudo, é o algoritmo mais indicado para tratar sistemas singulares ou quase singulares;
- integração do desembaraçamento no espaço de comprimento de onda ao código KOREL, possibilitando um estudo completo e mais coerente de sistemas múltiplos. Para a solução no espaço de velocidade, o procedimento descrito no Cap. 4 poderá ser usado para a redução do tempo computacional;
- implementação de pesos dependentes da fase orbital e modo de Fourier no código KOREL (atualmente os pesos dependem somente da fase orbital), contribuindo para a análise espectral separada em diferentes modos de Fourier e com a possível adoção de pesos mais altos para as fases em eclipse;
- estudo da progressão de erros sobre os espectros observados devido à presença de viés nos parâmetros orbitais.

Com relação à análise de sistemas reais:

- finalização da análise de RV Crt com a determinação precisa das dimensões absolutas das componentes eclipsantes, estudos de estágio evolutivo e abundâncias.
- aplicação dos modelos e métodos, já aprimorados, ao sistema binário eclipsante RW Lacertae. Esse sistema, observado pelos Drs. Claud Lacy (fotometria) e Guillermo Torres (espectroscopia) foi analisado com a participação de meu orientador Luiz Paulo R. Vaz (Lacy et al. 2005). Os autores das observações gentilmente cederam-nas para estudos usando os métodos de desembaraçamento espectral (a descrição desse trabalho não foi mencionada nesse estudo por razões práticas). O sistema

demonstra evidência de ser, também, triplo. Infelizmente, devido à não presença de fases em eclipse, efeitos de baixa-frequência de alta amplitude foram sobrepostos ao contínuo dos espectros reconstruídos. Já foi solicitado aos autores a obtenção de fases em eclipse, para uma análise mais correta.

- aplicação desses mesmos modelos e métodos a outros sistemas, especialmente os “complicados” (como RV Crt), mas interessantes, para a determinação precisa e robusta de suas dimensões absolutas e conseqüente controle dos modelos de formação, estrutura e evolução estelares.



# Apêndices

## A.1 Estimativa da Informação de Velocidade Radial Contida num intervalo Espectral

Depois de escolher as 25 regiões de RV Crt (Sec. 5.1.5), quais intervalos seriam mais apropriados para obter a razão das massas ( $q$ ) do par eclipsante, isto é, para quais regiões as velocidades radiais seriam obtidas com mais exatidão, ao aplicar as técnicas de desembaraçamento espectral? A incerteza em  $q$  é obviamente dominada pela incerteza na velocidade radial (VR) da componente mais fraca que além disso, possui as linhas mais alargadas, em comparação com as outras componentes. Conseqüentemente, nós queremos quantificar a informação sobre a VR das componentes em cada região.

Uma das possibilidades é estimar, a partir do espectro composto observado e dos espectros reconstruídos das componentes, o erro na medida do ruído aleatório do desvio Doppler das linhas espectrais. De acordo com Verschueren (1981), o erro no ruído aleatório ( $\sigma$ ) sobre uma única medida da correlação cruzada depende das características do espectro (comprimento do intervalo, forma das linhas e densidade das linhas dentro do intervalo), da resolução (em Å/pixel) e a relação sinal-ruído (S/R). Para sistemas múltiplos, podemos adicionar, ainda, a dependência de informações sobre as contribuições relativas das componentes.

Baseados nos estudos para uma estrela (Brown, 1990), derivamos uma estimativa de  $\sigma$  para cada componente de um sistema espectroscópico qualquer com  $n$  estrelas e aplicamos este procedimento a um sistema do tipo SB1, SB2 e triplo (Secs. A.1.2, A.1.3 e A.1.4). Em particular, usamos os dados disponíveis para RV Crt e calculamos, para cada região espectral descrita na Tab. 5.2, as estimativas da informação da velocidade radial das três componentes (Sec. A.1.4.1).

É importante ressaltar que consideramos o ruído nos espectros como sendo aleatório e que adotamos as velocidades radiais das componentes determinadas pela correlação cruzada. Portanto, a estimativa de  $\sigma$ , desenvolvida aqui, representa o limite inferior das incertezas na velocidade radial, ou em outras palavras, nos dá um limite inferior da estimativa da qualidade da medida da velocidade radial de um espectro, dentro de um intervalo espectral particular.

### A.1.1 Introdução

Suponha que, na ausência de quaisquer fontes de ruído, a intensidade no espectro estelar seja  $I_\lambda$ , medida em unidades de fótons detectados por pixel (ou em  $\lambda$ ) e por unidade de tempo. Na prática, isso pode ser reproduzido tomando o espectro médio de vários espectros ruidosos e, se necessário, aplicando sobre ele uma função que o suaviza, diminuindo seu efeito ruidoso. Ao deslocar este espectro por um incremento infinitesimal em comprimento de onda,  $\Delta$ , a intensidade resultante pode ser expressa em termos de uma expansão de primeira ordem em séries de Taylor:

$$I_{\lambda+\Delta} = I_\lambda + \Delta I'_\lambda, \quad (\text{A.0})$$

onde  $I'_\lambda = \frac{dI_\lambda}{d\lambda}$ .

Se considerarmos um sistema múltiplo composto por  $K$  componentes, os espectros intrínsecos  $I_i$  ( $i = 1, \dots, K$ ), deslocados de  $\Delta_i$ , decorrentes do movimento orbital serão

$$I_{i,\lambda+\Delta_i} = I_{i,\lambda} + \Delta_i I'_{i,\lambda}. \quad (\text{A.1})$$

Esta aproximação é válida se o deslocamento  $\Delta_i$  for pequeno em relação à largura das linhas no espectro intrínseco da componente, tal que a intensidade pode ser localmente aproximada como sendo linear em comprimento de onda (os deslocamentos Doppler se restringem a pequenas frações de pixels). Por estas razões, trabalhos como Brown (1990) e Bouchy, Pepe, & Queloz (2001), restringem a discussão para o caso de detecção de planetas.

Contudo, a validade da Eq. (A.1) pode ser razoavelmente estendida para lidar com deslocamentos maiores. No caso de sistemas múltiplos, o deslocamento Doppler de uma componente  $i$  pode ser considerado como a soma de dois termos:  $\Delta\lambda_i = \Delta\lambda_{0i} + \Delta_i$ .  $\Delta\lambda_{0i}$  tem um valor alto que pode ser facilmente estimado, por exemplo, através da técnica de correlação cruzada (visualmente ou pela estimativa do inteiro mais próximo do pico de correlação). O valor de  $\Delta_i$  é pequeno e sua determinação resulta de um processo mais delicado, podendo ser no máximo da ordem de um pixel, tal que a aproximação linear da Eq. (A.1) seja razoável para linhas suficientemente amostradas com densidade maior.

Assim, o espectro  $I_{i,\lambda}$  representará os espectros normalizados das componentes ( $0 \leq I_{i,\lambda} \leq 1$ ) que já foram *anteriormente deslocados* por  $\Delta\lambda_{0i}$  e que estão sujeitos a um deslocamento  $\Delta_i$ . Neste formalismo, o espectro composto observado  $S_\lambda$  será definido como

$$S_\lambda = N_\lambda + C_\lambda \sum_{i=1}^K \ell_i (I_{i,\lambda} + \Delta_i I'_{i,\lambda}), \quad (\text{A.2})$$

onde  $N_\lambda$  é o ruído do fóton;  $C_\lambda$  é o fluxo do contínuo de  $S_\lambda$  em contagem de fótons, antes da normalização, e  $\ell_i$  ( $\sum_{i=1}^K \ell_i = 1$ ) é o fator de luz da componente  $i$ . Podemos expressar  $S_\lambda$  mais facilmente como

$$S_\lambda = C_\lambda s_\lambda, \quad (\text{A.3})$$

onde

$$s_\lambda = \frac{N_\lambda}{C_\lambda} + \sum_{i=1}^K \ell_i (I_{i,\lambda} + \Delta_i I'_{i,\lambda}) \quad (\text{A.4})$$

é o espectro composto normalizado ( $0 \leq s_\lambda \leq 1$ ).

Agora, podemos considerar  $I_{i,\lambda+\Delta_i}$  como sendo o modelo matemático que descreve o espectro da componente  $i$  (com  $n$  parâmetros) o qual será ajustado pela minimização do  $\chi^2$  ao espectro observado  $S_\lambda$  e, portanto, levando à determinação do desvio em comprimento de onda,  $\Delta_i$ . O valor esperado da variância de cada intensidade medida é igual a  $I_{i,\lambda}$ . Logo, devemos escolher  $\Delta_i$  que minimize a função

$$Z = \sum_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \frac{[S_\lambda - C_\lambda \sum_{i=1}^K \ell_i (I_{i,\lambda} + \Delta_i I'_{i,\lambda})]^2}{C_\lambda \sum_{i=1}^K \ell_i I_{i,\lambda}}. \quad (\text{A.5})$$

O denominador da Eq. (A.5) não foi considerado como sendo  $C_\lambda \sum_{i=1}^K \ell_i (I_{i,\lambda} + \Delta_i I'_{i,\lambda})$  devido à discussão sobre a linearidade de  $I_{i,\lambda+\Delta_i}$  apresentada no início dessa seção. Conseqüentemente, obtemos uma expressão mais simples para  $Z$ . Substituindo a Eq. (A.3) na

Eq. (A.5), encontramos

$$Z = \sum_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \frac{[C_\lambda(s_\lambda - \sum_{i=1}^K \ell_i(I_{i,\lambda} + \Delta_i I'_{i,\lambda}))]^2}{C_\lambda \sum_{i=1}^K \ell_i I_{i,\lambda}}. \quad (\text{A.6})$$

Ao requerer que  $\frac{\delta Z}{\delta \Delta_i} = 0$  definimos, na forma matricial, um sistema com  $K$  equações lineares

$$\begin{pmatrix} \ell_1 \mathbf{F}_{11} & \ell_2 \mathbf{F}_{12} & \dots & \ell_K \mathbf{F}_{1K} \\ \ell_1 \mathbf{F}_{12} & \ell_2 \mathbf{F}_{22} & \dots & \ell_K \mathbf{F}_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \ell_1 \mathbf{F}_{1K} & \ell_2 \mathbf{F}_{2K} & \dots & \ell_K \mathbf{F}_{KK} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{G}_K \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

onde,

$$\mathbf{F}_{ij} = \sum_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \frac{C_\lambda I'_{i,\lambda} I'_{j,\lambda}}{T_\lambda}, \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{G}_i = \sum_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \frac{C_\lambda [s_\lambda - \sum_{i=i}^K \ell_i I_{i,\lambda}]}{T_\lambda} I'_{i,\lambda}, \quad \text{e} \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{T}_\lambda = \sum_{i=1}^K \ell_i I_{i,\lambda}. \quad (\text{A.10})$$

Nas próximas seções aplicaremos a Eq. (A.7) para (a) o caso de uma única estrela perceptível no espectro observado, (b) para sistemas binários e para (c) sistemas com multiplicidade até três, a fim de determinar o desvio médio padrão de  $\Delta_i$  e, conseqüentemente, a estimativa da informação da velocidade radial de cada componente dentro de um determinado intervalo espectral.

## A.1.2 Caso I: Binárias Espectroscópicas SB1

Para o caso de binárias espectroscópicas de linha única, em que vemos somente o deslocamento Doppler das linhas do espectro de somente uma das componentes, a Eq. (A.7) para  $\Delta_1=1$  se reduz a uma única equação linear

$$\mathbf{F}_{11} = \Delta_1 \mathbf{G}_1, \quad (\text{A.11})$$

onde

$$\Delta_1 = \frac{\sum_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} C_\lambda (s_\lambda - I_{1,\lambda}) \frac{I'_{1,\lambda}}{I_{1,\lambda}}}{\sum_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} C_\lambda \frac{(I'_{1,\lambda})^2}{I_{1,\lambda}}}. \quad (\text{A.12})$$

Supondo que o espectro  $I_{1,\lambda}$  inclua agora a sua exata velocidade radial, de forma que  $\Delta_1$  tende a zero, isso faz com que a minimização de  $Z$  corresponda somente aos efeitos do ruído sobre o espectro. Logo, as Eqs. (A.3) e (A.4), neste limite, conduzem a

$$N_\lambda = C_\lambda (s_\lambda - I_{1,\lambda}), \quad (\text{A.13})$$

e, conseqüentemente, a uma nova expressão para  $\Delta_1$ :

$$\Delta_1 = \frac{\sum_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} N_{\lambda} \frac{I'_{1,\lambda}}{I_{1,\lambda}}}{\sum_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} C_{\lambda} \frac{(I'_{1,\lambda})^2}{I_{1,\lambda}}}. \quad (\text{A.14})$$

Como se supõe que o ruído é aleatório, o valor esperado de  $N_{\lambda}$ , denotado por  $E(N_{\lambda})$ , é nulo e o valor esperado de  $N_{\lambda}^2$ , denotado por  $E(N_{\lambda}^2)$ , é definido como

$$E(N_{\lambda_1} N_{\lambda_2}) = \delta_{\lambda_1, \lambda_2} C_{\lambda} \sum_{i=1}^K \ell_i I_{i,\lambda}, \quad (\text{A.15})$$

onde,

$$\delta_{\lambda_1, \lambda_2} = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ (ruído não correlacionado)} \\ 1 & \text{se } \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

Conseqüentemente, o valor esperado de  $\Delta_1$  será nulo. Podemos agora determinar o desvio padrão de  $\Delta_1$  ( $\sigma_1$ ), que nos indica o quão longe o valor de  $\Delta_1$  está do valor esperado. Seu valor é

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sqrt{E[(\Delta_1 - \underbrace{E(\Delta_1)}_0)]^2} = \sqrt{E(\Delta_1^2)} \\ &= \sqrt{E\left(\frac{\sum_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} N_{\lambda} \frac{I'_{1,\lambda}}{I_{1,\lambda}}}{\sum_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} C_{\lambda} \frac{(I'_{1,\lambda})^2}{I_{1,\lambda}}}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{\sum_{\lambda} E(N_{\lambda}^2) \left[\frac{I'_{1,\lambda}}{I_{1,\lambda}}\right]^2 + 2 \sum_{\lambda_1 \neq \lambda_2} \frac{E(N_{\lambda_1} N_{\lambda_2}) I'_{1,\lambda_1} I'_{1,\lambda_2}}{I_{1,\lambda_1} I_{1,\lambda_2}}}}{\sum_{\lambda} C_{\lambda} \frac{(I'_{1,\lambda})^2}{I_{1,\lambda}}}. \end{aligned}$$

Como as variáveis  $N_{\lambda_1}$  e  $N_{\lambda_2}$  são aleatórias e independentes, a condição expressa pela Eq. (A.15) conduz a  $E(N_{\lambda_1} N_{\lambda_2}) = 0$  e  $E(N_{\lambda}^2) = C_{\lambda} I_{1,\lambda}$ , simplificando a equação acima para

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{\sum_{\lambda} C_{\lambda} \frac{(I'_{1,\lambda})^2}{I_{1,\lambda}}}}. \quad (\text{A.16})$$

Esta equação prediz o erro teórico, em Å, da influência do ruído aleatório dos fótons na medida do deslocamento Doppler das linhas espectrais ( $\sigma_{1,A}$ ). Podemos expressar a Eq. (A.16) em pixels ( $\sigma_{1,p}$ ), bastando para isso impor as condições

$$\sigma_{1,p} = \sigma_{1,A} \frac{dp}{d\lambda} \quad (\text{A.17})$$

e

$$\frac{dI_{1,\lambda}}{d\lambda} = \frac{dI_{1,\lambda}}{dp} \frac{dp}{d\lambda}, \quad (\text{A.18})$$

onde  $\frac{dp}{d\lambda}$  define o tamanho do pixel em  $\text{\AA}$  (em  $\text{\AA}/\text{pixel}$ ). Note que  $\frac{dp}{d\lambda}$  é o mesmo para o espectro intrínseco da componente. Substituindo as Eqs. (A.17) e (A.18) na Eq. (A.16) encontramos

$$\sigma_{1,p} = \frac{1}{\sqrt{\sum_p \frac{C_\lambda}{I_{1,\lambda}} \left(\frac{dI_{1,\lambda}}{dp}\right)^2}}. \quad (\text{A.19})$$

Se considerarmos  $C_\lambda$  independente do comprimento de onda com valor constante e igual a  $(S/R)^2$  do espectro observado, podemos reescrever a Eq. (A.19) como

$$\sigma_{1,p} = \frac{1}{S/R \sqrt{\sum_p \frac{1}{I_{1,\lambda}} \left(\frac{dI_{1,\lambda}}{dp}\right)^2}}. \quad (\text{A.20})$$

Observe que  $S/R$  aqui se refere somente às contribuições do ruído do fóton, excluindo qualquer outro tipo.

Resumindo, para se obter a estimativa da informação da velocidade radial, devido ao movimento Doppler da componente, contida num intervalo espectral, a Eq. (A.20) poderá ser usada, bastando, para isso, que se tenha informações sobre a forma do espectro ( $I_{1,\lambda}$ ) e o número de fótons observados ( $S/R$ ).

### A.1.3 Caso II: Binárias Espectroscópicas SB2

Para o caso de sistemas binários onde podemos identificar as linhas espectrais de ambas componentes, podemos determinar o desvio médio padrão para cada uma delas ( $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ ) a fim de estimar a informação de suas respectivas velocidades radiais em um determinado intervalo em comprimento de onda. Aplicando a Eq. (A.7) para  $K=2$ , encontramos o sistema de equações lineares

$$\begin{pmatrix} \ell_1 \mathbf{F}_{11} & \ell_2 \mathbf{F}_{12} \\ \ell_1 \mathbf{F}_{12} & \ell_2 \mathbf{F}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.21})$$

cuja solução é expressa por

$$\Delta_i = \frac{1}{\ell_i} \frac{\mathbf{G}_i \mathbf{F}_{jj} - \mathbf{G}_j \mathbf{F}_{ij}}{\text{Det}(\mathbf{F})}, \quad (\text{A.22})$$

onde os índices (i,j) são (1,2) para  $\Delta_1$  e (2,1) para  $\Delta_2$  e  $\text{Det}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}_{11}\mathbf{F}_{22} - \mathbf{F}_{12}^2$ .

Como na Sec. A.1.2, no limite em que os  $\Delta_i$  (para  $i=1$  e  $2$ ) tendem a zero, ou seja, quando somente os efeitos do ruído sobre os espectros são levados em consideração, encontramos

$$N_\lambda = C_\lambda \left( s_\lambda - \sum_{i=1}^2 \ell_i I_{i,\lambda} \right),$$

que, ao ser substituído nas expressões para  $\mathbf{G}_i$  e  $\mathbf{G}_j$ , leva a  $E(\Delta_i) = 0$  (em virtude da natureza aleatória de  $N_\lambda$ ,  $E(N_\lambda) = 0$ ). Então, o desvio médio padrão  $\sigma_i$  (para  $i=1$  e  $2$ ) pode ser facilmente obtido,

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sqrt{E(\Delta_i^2)} \\ &= \sqrt{E \left( \frac{1}{\ell_i} \frac{\mathbf{G}_i \mathbf{F}_{jj} - \mathbf{G}_j \mathbf{F}_{ij}}{\text{Det}(\mathbf{F})} \right)^2} \\ &= \frac{1}{\ell_i \text{Det}(\mathbf{F})} \left[ \mathbf{F}_{jj}^2 E(\mathbf{G}_i^2) + \mathbf{F}_{ij}^2 E(\mathbf{G}_j^2) - 2\mathbf{F}_{jj}\mathbf{F}_{ij} E(\mathbf{G}_i \mathbf{G}_j) \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Nos termos  $E(\mathbf{G}_i^2)$ ,  $E(\mathbf{G}_j^2)$  e  $E(\mathbf{G}_i\mathbf{G}_j)$ , apenas aqueles que possuem o mesmo  $\lambda$  nas duas somas permanecem. Devido à condição descrita pela Eq. (A.15), tem-se:

$$E(\mathbf{G}_i^2) = \sum_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \frac{E(N_\lambda^2)}{\mathbf{T}_\lambda^2} I'_{i,\lambda}{}^2 = \sum_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \frac{C_\lambda \mathbf{T}_\lambda}{\mathbf{T}_\lambda^2} I'_{i,\lambda}{}^2 = \mathbf{F}_{ii}, \quad (\text{A.24})$$

$$E(\mathbf{G}_j^2) = \sum_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \frac{E(N_\lambda^2)}{\mathbf{T}_\lambda^2} I'_{j,\lambda}{}^2 = \sum_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \frac{C_\lambda \mathbf{T}_\lambda}{\mathbf{T}_\lambda^2} I'_{j,\lambda}{}^2 = \mathbf{F}_{jj}, \quad (\text{A.25})$$

$$E(\mathbf{G}_i\mathbf{G}_j) = \sum_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \frac{E(N_\lambda^2)}{\mathbf{T}_\lambda^2} I'_{i,\lambda} I'_{j,\lambda} = \sum_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \frac{C_\lambda \mathbf{T}_\lambda}{\mathbf{T}_\lambda^2} I'_{i,\lambda} I'_{j,\lambda} = \mathbf{F}_{ij}. \quad (\text{A.26})$$

Substituindo as equações anteriores na Eq. (A.23) e reorganizando os termos, encontramos

$$\sigma_{i,A} = \left[ \frac{\mathbf{F}_{jj}}{\ell_i^2 \text{Det}(\mathbf{F})} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.27})$$

expressa em unidade de Å. Para se obter a expressão anterior em pixels, basta usar as condições definidas pelas Eqs. (A.17) e (A.18) na Eq. (A.27), encontrando

$$\sigma_{i,p} = \left[ \frac{\mathbf{f}_{jj}}{\ell_i^2 \text{Det}(\mathbf{f})} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.28})$$

onde,

$$\mathbf{f}_{ii} = \sum_{p_{min}}^{p_{max}} \frac{C_\lambda}{\mathbf{T}_\lambda} \left( \frac{dI_{i,\lambda}}{dp} \right)^2, \quad (\text{A.29})$$

$$\mathbf{f}_{jj} = \sum_{p_{min}}^{p_{max}} \frac{C_\lambda}{\mathbf{T}_\lambda} \left( \frac{dI_{j,\lambda}}{dp} \right)^2 \quad (\text{A.30})$$

$$\mathbf{f}_{ij} = \sum_{p_{min}}^{p_{max}} \frac{C_\lambda}{\mathbf{T}_\lambda} \frac{dI_{i,\lambda}}{dp} \frac{dI_{j,\lambda}}{dp}, \quad \text{e} \quad (\text{A.31})$$

$$\text{Det}(\mathbf{f}) = \mathbf{f}_{ii}\mathbf{f}_{jj} - \mathbf{f}_{ij}^2. \quad (\text{A.32})$$

Quais são os limites da Eq. (A.28), em termos dos gradientes  $\mathbf{f}_{ii}$ ,  $\mathbf{f}_{jj}$  e  $\mathbf{f}_{ij}$ ? O gradiente de uma linha espectral cresce até o ponto da largura máxima à meia-altura da linha e decrece até zero no ponto mais profundo da linha espectral. Os termos  $\mathbf{f}_{ii}$ ,  $\mathbf{f}_{jj}$  e  $\mathbf{f}_{ij}$  são todos positivos, então, para produzir valores reais de  $\sigma_i(p)$ , requeremos que  $\mathbf{f}_{ii}\mathbf{f}_{jj} \geq \mathbf{f}_{ij}^2$ . Mas, se a correlação entre os espectros das componentes for

1. máxima,  $\mathbf{f}_{ii}\mathbf{f}_{jj} = \mathbf{f}_{ij}^2$  e  $\sigma_{i,p} \rightarrow \infty$ . Isto significa que não poderemos distinguir a medida da velocidade radial das componentes;
2. mínima (ou tende ao infinito),  $\mathbf{f}_{ij} = 0$  (ou tende a 0). Então,  $\sigma_{i,p} \approx \left[ \frac{1}{\ell_i \mathbf{f}_{ii}} \right]^{\frac{1}{2}}$ . Assim, podemos estimar  $\sigma_{i,p}$  para cada componente separadamente.

Considerando que a correlação entre os espectros das componentes seja mínima e que o contínuo do espectro composto observado  $C_\lambda$  seja constante e igual a  $S/R$ , a Eq. (A.28) se torna

$$\sigma_{i,p} = \frac{1}{\ell_i \cdot S/R \sqrt{\sum_p \sum_i \ell_i I_{i\lambda} \left( \frac{dI_{i\lambda}}{dp} \right)^2}}. \quad (\text{A.33})$$

Observe que a equação acima é uma generalização da Eq. (A.20) para o caso de um sistema binário espectroscópico do tipo SB1, e que a estimativa da informação da velocidade radial de cada componente contida num intervalo espectral depende da forma do espectro intrínseco das componentes, do número de fótons observados e de seus fatores de luz.

### A.1.4 Caso III: Sistemas Triplos

Para  $K = 3$  a Eq. (A.7) conduz a

$$\begin{pmatrix} \ell_1 \mathbf{F}_{11} & \ell_2 \mathbf{F}_{12} & \ell_3 \mathbf{F}_{13} \\ \ell_1 \mathbf{F}_{12} & \ell_2 \mathbf{F}_{22} & \ell_3 \mathbf{F}_{23} \\ \ell_1 \mathbf{F}_{13} & \ell_2 \mathbf{F}_{23} & \ell_3 \mathbf{F}_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{G}_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.34})$$

cuja solução é dada por

$$\Delta_i = \frac{1}{\ell_i} \left[ \frac{\mathbf{G}_i(\mathbf{F}_{jj}\mathbf{F}_{kk} - \mathbf{F}_{jk}^2) + \mathbf{G}_j(\mathbf{F}_{jk}\mathbf{F}_{ik} - \mathbf{F}_{ij}\mathbf{F}_{kk}) + \mathbf{G}_k(\mathbf{F}_{jk}\mathbf{F}_{ij} - \mathbf{F}_{ik}\mathbf{F}_{jj})}{\text{Det}(\mathbf{F})} \right], \quad (\text{A.35})$$

onde os índices (i,j,k) são (1, 2, 3) para  $\Delta_1$ , (2, 3, 1) para  $\Delta_2$ , e (3, 2, 1) para  $\Delta_3$ . O  $\text{Det}(\mathbf{F})$  é o determinante da matriz  $3 \times 3$  da Eq. (A.34) sem os fatores de luz  $\ell_i$ .

Como discutido nos casos anteriores, no limite em que  $\Delta_i$  tende a zero, o valor do desvio médio padrão para cada uma das componentes  $i$  é dado por

$$\begin{aligned} \sigma_{i,A} &= \sqrt{E(\Delta_i^2)} \\ &= \left[ \frac{\mathbf{F}_{jj}\mathbf{F}_{kk} - \mathbf{F}_{jk}^2}{\ell_i^2 \text{Det}(\mathbf{F})} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Lembre-se que os termos que permanecem na soma são aqueles que possuem o mesmo comprimento de onda (Eq. A.15). As Eqs. (A.24) a (A.26) foram usadas, e é fácil ver que  $E(\mathbf{G}_k^2) = \mathbf{F}_{kk}$ ,  $E(\mathbf{G}_i\mathbf{G}_k) = \mathbf{F}_{ik}$  e  $E(\mathbf{G}_j\mathbf{G}_k) = \mathbf{F}_{jk}$ . Para transformar a Eq. (A.36) em unidades de pixel, aplicamos as Eqs. (A.17) à Eq. (A.18), encontrando

$$\sigma_{i,p} = \left[ \frac{\mathbf{f}_{jj}\mathbf{f}_{kk} - \mathbf{f}_{jk}^2}{\ell_i^2 \text{Det}(\mathbf{f})} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.37})$$

Os termos  $\mathbf{f}_{ii}$ ,  $\mathbf{f}_{jj}$  e  $\mathbf{f}_{ij}$  são, respectivamente, as Eqs. (A.29), (A.30) e (A.31). Os outros termos relacionados com a terceira componente são

$$\mathbf{f}_{kk} = \sum_{p_{min}}^{p_{max}} \frac{C_\lambda}{\mathbf{T}_\lambda} \left( \frac{dI_{k,\lambda}}{dp} \right)^2, \quad (\text{A.38})$$

$$\mathbf{f}_{ik} = \sum_{p_{min}}^{p_{max}} \frac{C_\lambda}{\mathbf{T}_\lambda} \frac{dI_{i,\lambda}}{dp} \frac{dI_{k,\lambda}}{dp}, \quad (\text{A.39})$$

$$\mathbf{f}_{jk} = \sum_{p_{min}}^{p_{max}} \frac{C_\lambda}{\mathbf{T}_\lambda} \frac{dI_{j,\lambda}}{dp} \frac{dI_{k,\lambda}}{dp}. \quad (\text{A.40})$$

Considerando  $C_\lambda$  como constante e igual a  $(S/R)^2$ , e o caso em que a correlação entre os espectros é mínima ( $\mathbf{f}_{ii}$ ,  $\mathbf{f}_{jj}$  and  $\mathbf{f}_{kk}$  são maiores que  $\mathbf{f}_{ij}$ ,  $\mathbf{f}_{ik}$  e  $\mathbf{f}_{jk}$ ), a Eq. (A.37) será

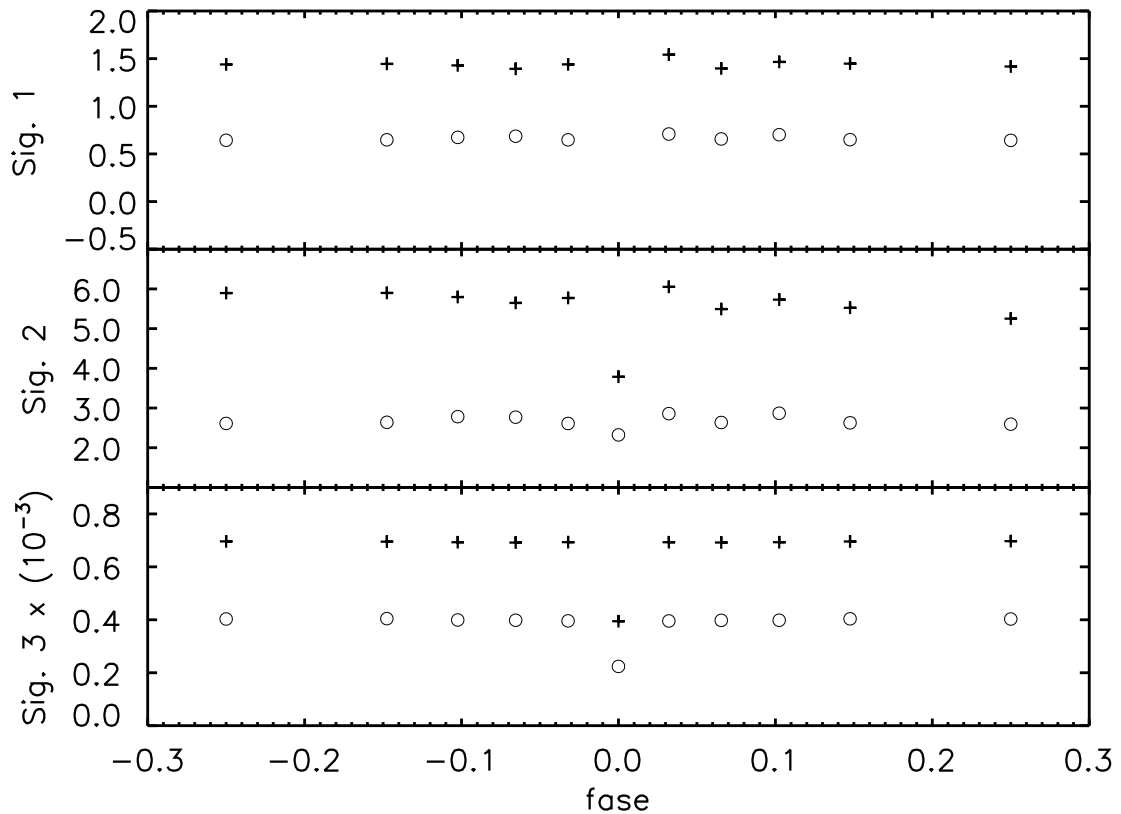
$$\sigma_{i,p} = \frac{1}{\ell_i \cdot S/R \cdot \sqrt{\mathbf{f}_{ii}}}$$

$$= \frac{1}{\ell_i \cdot S/R \sqrt{\sum_p \frac{\ell_i}{\sum_i \ell_i I_{i,\lambda}} \left( \frac{dI_{i,\lambda}}{dp} \right)^2}}, \quad (\text{A.41})$$

que é exatamente a mesma expressão obtida para os sistemas SB1 e SB2.

Nesta aproximação, podemos dizer que a Eq. (A.41) é válida para qualquer sistema múltiplo com  $K$  componentes. A partir dela podemos estimar a informação da velocidade radial da componente  $i$  contida num intervalo espectral e, assim, utilizá-las para a derivação dos parâmetros da órbita ao aplicar as técnicas de desembaraçamento espectral.

#### A.1.4.1 Aplicação: o sistema triplo eclipsante RV Crt



**Figura A.1:** Informação sobre a velocidade radial das componentes de RV Crt contida na região 13 (“+”) e 16 (“o”) em função da fase orbital. Os painéis superior, intermediário e inferior correspondem, respectivamente, aos valores de  $\sigma$ , em km/s, para a primária, secundária e terciária. Observe que  $\sigma$  não depende fortemente da fase orbital. No entanto, na fase zero onde a primária é eclipsada,  $\sigma$  é infinito significando que nenhuma informação pode ser obtida sobre a velocidade desta componente.

Para possibilitar uma visão mais clara da estimativa da informação da velocidade radial em um intervalo espectral para um sistema triplo, usamos os espectros reconstruídos de RV Crt obtidos pelo KOREL, na análise conjunta de 25 regiões (Tab. 5.2), das quais 24 foram escolhidas para o presente estudo (exceto R1, pois é a região com menor probabilidade de



**Tabela A.1:** Fatores de luz ( $\ell_i$ ) das componentes de RV Crt fora (“out”) e dentro do eclipse primário (“in”) e sinal sobre ruído ( $S/R$ ) para duas regiões espectrais R13 (5725 a 5832 Å) e R16 (6071 a 6185 Å).

	$\ell_{1,\text{out}}$	$\ell_{2,\text{out}}$	$\ell_{3,\text{out}}$	$\ell_{1,\text{in}}$	$\ell_{2,\text{in}}$	$\ell_{3,\text{in}}$	$S/R$
R 13	0,4228	0,0903	0,4869	0	0,1565	0,8435	118
R 16	0,4159	0,0998	0,4843	0	0,1709	0,8291	120

obter informações sobre a velocidade radial da componente mais fraca – secundária).

Foram aplicadas, nesses espectros, uma função do tipo “spline” para diminuir os efeitos ruidosos que poderiam interferir no valor do desvio médio padrão (os “falsos” perfis de linha produzidos pelo ruído são considerados como se fossem pertencentes aos espectros das componentes, dando uma estimativa errônea do valor de  $\sigma_i$ ). Se considerarmos a presença de ruído nos espectros intrínsecos, os valores de  $\sigma$  passam a ser 2,97 vezes maiores para a primária, 10,6 vezes maiores para a secundária e 1,02 vezes maiores para a terciária, em comparação com o valor de  $\sigma$  sem ruído. É preciso dizer que, como o processo de desembaraçamento possui mais parâmetros a serem ajustados, os valores para  $\sigma$ , na realidade, são mais incertos que os preditos aqui, devendo estes ser considerados como uma estimativa de seu limite inferior.

Inicialmente, estudamos a dependência dos valores de  $\sigma_i$  com a fase orbital em duas regiões espectrais de 2048 pixels: R13 (5725 a 5835 Å) e R16 (6071 a 6185 Å). Como discutido na início da Sec. A.1.1 os espectros  $I_{i,\lambda}$  representam o espectro normalizado da componente  $i$  sem ruído e deslocado em  $\lambda$  devido ao movimento orbital. Assim, escolhemos 11 fases, dentre as 41 disponíveis, correspondentes às seguintes velocidades: 0%,  $\pm 20\%$ ,  $\pm 40\%$ ,  $\pm 60\%$ ,  $\pm 80\%$  e  $\pm 100\%$  da amplitude máxima de velocidade radial preliminar das componentes ( $K_1=74,6$  km/s e  $K_2=135,95$  km/s), e aplicamos o deslocamento Doppler nos seus espectros. Para determinar  $\sigma$ , consideramos apenas a região de interesse nos espectros de saída (pertencentes ao intervalo [50,n-50 pixels], onde “n” é o número de pixels no espectro) e, dentro deste intervalo, aquele correspondente à interseção entre os 3 espectros das componentes deslocados de acordo com suas velocidades Doppler. Os fatores de luz e o  $S/R$  adotados estão listados na Tab. A.1.

Os resultados do valor de  $\sigma_i$  para as componentes nas duas regiões espectrais em função da fase orbital são mostrados na Fig. A.1. Concluímos que os valores de  $\sigma_i$  não dependem extremamente da fase orbital, exceto para a fase onde a velocidade é nula (fase zero). Observe que, nesta fase,  $\sigma_1$  tende a infinito, mostrando que nenhuma informação sobre a velocidade radial da primária pode ser obtida.

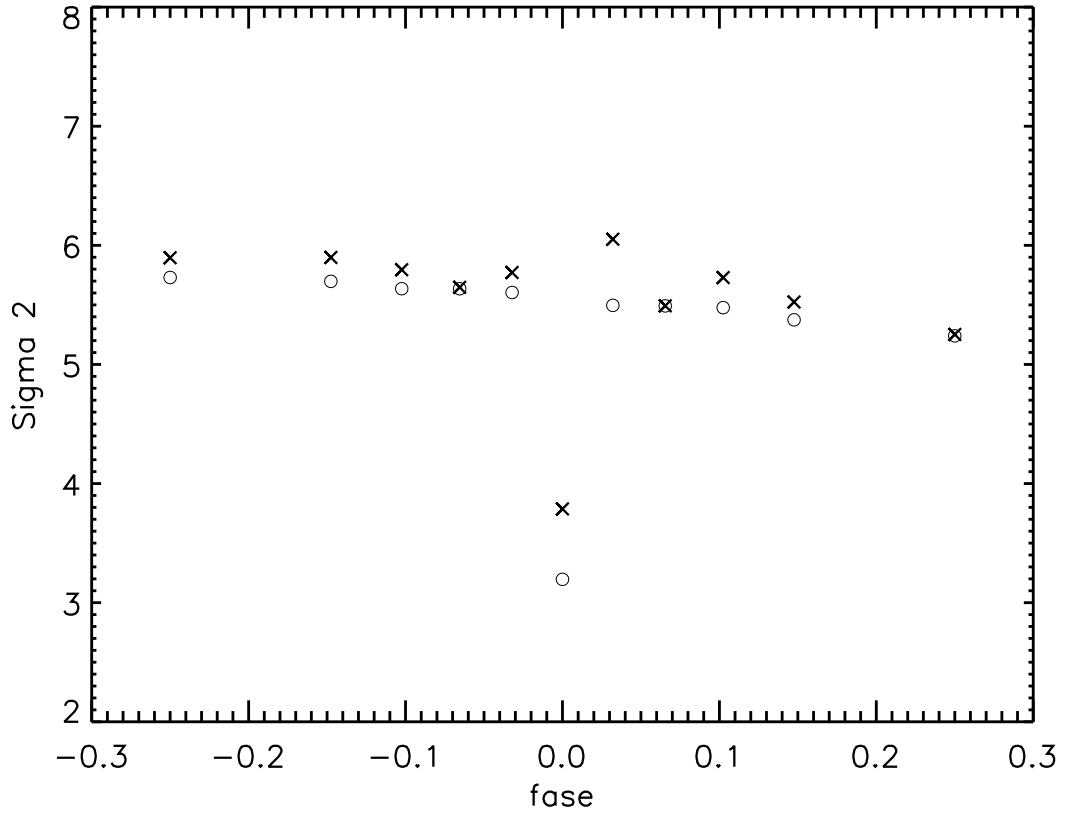
Por outro lado, os valores de  $\sigma_i$  dependem fortemente da região espectral analisada, como pode ser visto na Tab. A.2, onde listamos o desvio médio padrão das componentes para as 24 regiões espectrais de RV Crt. Os fatores de luz ( $\ell_i$ ) foram escolhidos como sendo constantes dentro de cada intervalo, mas variando do azul para o vermelho de acordo com o procedimento descrito na Sec. 5.1.6. Para o cálculo de  $\sigma_i$  usamos a aproximação (A.41), pois tanto essa equação como a aproximação (A.37) nos deram uma boa estimativa da informação de velocidade radial das componentes contida num intervalo espectral, sendo portanto equivalentes (como pode ser visto na Fig. A.2).

**Tabela A.2:** Valores numéricos de  $\sigma_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) em km/s para RV Crt em 24 regiões espectrais.  $r$  é o índice da região analisada,  $\lambda$  é o comprimento de onda inicial,  $n$  é o número de pixels, S/R é a relação sinal-ruído e  $\ell_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) são os fatores de luz da primária, secundária e terciária, respectivamente.

R	$\lambda$	S/R	n	$\ell_1$	$\ell_2$	$\ell_3$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$
02	4010	50	4096	0,4654	0,0417	0,4929	0,357	6,959	0,031
03	4139	61	4096	0,4615	0,0454	0,4931	0,271	7,617	0,022
04	4277	72	1024	0,4591	0,0477	0,4932	0,497	10,63	0,035
05	4278	76	4096	0,4574	0,0494	0,4932	0,250	4,162	0,021
06	4420	80	2048	0,4544	0,0524	0,4932	0,433	6,516	0,025
07	4505	83	4096	0,4509	0,0562	0,4929	0,342	4,872	0,022
08	4676	89	1024	0,4480	0,0593	0,4927	0,912	9,913	0,058
09	4728	94	4096	0,4449	0,0628	0,4923	0,336	4,476	0,026
10	4907	99	4096	0,4403	0,0681	0,4916	0,290	3,368	0,019
11	5093	105	4096	0,4358	0,0736	0,4906	0,224	2,851	0,017
12	5438	114	2048	0,4290	0,0822	0,4888	0,498	3,495	0,034
13	5725	118	2048	0,4228	0,0903	0,4869	1,411	5,240	0,069
14	5828	119	2048	0,4207	0,0932	0,4861	0,456	3,263	0,047
15	5926	119	2048	0,4187	0,0959	0,4854	1,140	5,357	0,053
16	6071	120	2048	0,4159	0,0998	0,4843	0,641	2,592	0,040
17	6045	120	4096	0,4153	0,1007	0,4840	0,546	2,444	0,029
18	6375	122	4096	0,4091	0,1095	0,4814	0,294	2,262	0,032
19	6654	122	512	0,4061	0,1140	0,4799	2,480	7,181	0,137
20	6507	123	4096	0,4068	0,1129	0,4803	0,314	2,641	0,053
21	6669	125	1024	0,4056	0,1147	0,4797	2,050	6,024	0,111
22	8482	91	512	0,3803	0,1544	0,4653	0,910	6,405	0,169
23	8619	85	1024	0,3785	0,1573	0,4642	0,754	4,641	0,156
24	8700	76	1024	0,3776	0,1588	0,4636	2,547	8,823	0,197
25	8796	68	512	0,3768	0,1602	0,4630	2,456	6,566	0,222

Note que esta aproximação não determina o valor absoluto de  $\sigma_i$ , mas, em termos comparativos, a possibilidade de escolha das melhores regiões onde a secundária é mais “presente” (ou seja, onde seu sinal é mais forte). Veja que, para se obter uma idéia do limite inferior das incertezas na medida da velocidade radial, é necessário estudar a influência de vários intervalos espectrais para uma única fase orbital ( $\sigma$  não varia com a fase). A razão se deve ao fato de que esta estimativa depende fortemente das características dos espectros, como comprimento do intervalo, forma e densidade das linhas, que são mudanças mais “bruscas” de uma região para outra do que de uma fase para outra.

Os resultados da Tab. A.2 nos revelam que as regiões 10, 11, 12, 14, 16, 17, 18 e 20 poderiam ser usadas, a princípio, para determinar a razão das massas do par eclipsante. Veja que regiões mais no azul mostram  $\sigma_2$  mais altos (R2, R3, R4 e R8, por exemplo) em comparação com outros valores, pois nestes intervalos a componente mais fraca (secundária) contribui menos em luz. Por outro lado, vemos algumas exceções no intervalo mais no vermelho onde  $\sigma_2$  continua tendo valores altos. Observe também que os valores de  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  são bem menores, na maioria das vezes, que os valores para  $\sigma_2$ , mostrando a “dificuldade” em determinar a velocidade radial dessa componente.



**Figura A.2:** Comparação entre os valores de  $\sigma_2$  para a região 13 usando a Eq. (A.37) (“x”) e a aproximação (A.41) (“o”), em função da fase orbital para o sistema triplo RV Cr. Veja que tanto uma equação como a outra podem ser usadas para dar a estimativa da informação da velocidade radial das componentes de um sistema contida num intervalo espectral (no caso em que a correlação dos espectros das componentes é mínima).

## A.2 Aplicação da Técnica de Correlação Cruzada nos Espectros obtidos pelo KOREL

A correlação cruzada é uma técnica freqüentemente usada para obter os desvios Doppler de espectros digitalizados. Foi introduzida por Simkin (1974) e tratada de forma mais elaborada por Tonry & Davis (1979).

Zucker & Mazeh (1994) e Zucker et al. (1995) desenvolveram uma técnica que usa a correlação cruzada para sistemas estelares duplos e triplos, respectivamente, usando a combinação de dois (sistema binário) ou três (sistema triplo) espectros “gabaritos” a serem correlacionados com o espectro composto.

A correlação cruzada unidimensional é definida como o produto cruzado de dois vetores  $X$  e  $Y$  (contendo  $N$  elementos), sendo que a variável independente é tomada como um deslocamento inteiro (ou seja, em bloco) entre os dois vetores

$$c(n) = \frac{\sum_{m=1}^N X(m)Y(m-n+1)}{N\sigma_X\sigma_Y}, \quad (\text{A.42})$$

onde  $\sigma_X^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N X(m)^2$  e  $\sigma_Y^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N Y(m)^2$ . A normalização é adotada para

facilitar a comparação dos parâmetros da curva para correlações diferentes, fazendo com que os valores da função se encontrem limitados entre 0 e 1.

Considerando dois espectros lineares como as funções intensidades  $I(x)$  e  $J(x)$ , onde  $x$  é proporcional ao comprimento de onda, e dado o número total de pontos,  $N$ , pode-se calcular a função correlação cruzada entre eles usando a Eq. (A.42). Se os dois espectros forem iguais, a função de correlação terá seu valor máximo quando o deslocamento entre eles for nulo, ou seja na origem. Se as linhas de um espectro estiverem deslocadas, de uma distância  $d$ , em relação às linhas correspondentes do outro espectro, o máximo de correlação vai acontecer numa posição deslocada de  $d$  da origem. Sendo  $x$  proporcional ao comprimento de onda, pode-se relacionar  $d$  com o desvio Doppler de um espectro em relação ao outro. Conhecendo-se, portanto, a velocidade radial de um espectro “gabarito” (*template*), pode-se inferir a velocidade do outro.

Vários fatores podem interferir na forma final da curva de correlação. As diferenças intrínsecas entre os espectros objeto e “gabarito” podem diminuir a precisão na determinação da velocidade radial. Essas diferenças incluem: tipo espectral, abundância química, velocidade rotacional ou de campos de velocidade atmosféricas e até mesmo, diferenças na retificação dos espectros. Neste aspecto, o código KOREL é vantajoso em relação à correlação cruzada, pois determina as velocidades radiais das componentes de um sistema estelar múltiplo considerando os espectros “gabaritos” como sendo os *próprios* espectros das componentes obtidos através da separação espectral.

Contudo, ao aplicar esse código no sistema triplo eclipsante RV Crt, observamos que os erros produzidos pelo KOREL, para certos intervalos em comprimento de onda, se mostravam constantemente nulos, o que não constitui um fato comum ao lidar com dados observacionais. No intuito de verificar as velocidades radiais e os erros determinados pelo KOREL, aplicamos a correlação cruzada, Eq. (A.42), entre os espectros observados e aqueles reconstruídos pelo KOREL, usando as soluções preliminares de RV Crt.

Considere  $x_k$ , para  $k = k_1, k_2, k_3$ , os espectros reconstruídos pelo KOREL para as componentes e  $S_{obs,j}$ , o espectro composto observado no tempo  $j$ . Conhecendo-se os fatores de luz das componentes em função do tempo  $\ell_{k,j}$  e as velocidades radiais das componentes  $v_{k,j}$  determinadas pelo KOREL, podemos determinar o espectro “subtração” das componentes

$$S_{k_1,j} = \frac{S_{obs,j} - [\ell_{k_2,j} x_{k_2} (\ln \lambda - v_{k_2,j}) + \ell_{k_3,j} x_{k_3} (\ln \lambda - v_{k_3,j})]}{\ell_{k_1,j}}, \quad (\text{A.43})$$

onde os índices  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  se referem ao índice das componentes 1 (primária), 2 (secundária) e 3 (terciária) e seguem a relação:  $(k_1, k_2, k_3) = (1, 2, 3)$ , ou  $(2, 3, 1)$ , ou  $(3, 1, 2)$ . Além disso,  $x_k (\ln \lambda - v_{k,j})$  é o espectro da componente  $k$ , reconstruído pelo KOREL, deslocado do comprimento de onda esperado por uma quantidade igual a  $-v_{k,j}$  (determinado pelo KOREL).

Podemos obter as velocidades radiais de cada componente em cada fase orbital, aplicando a correlação cruzada entre o espectro composto observado,  $S_{obs,j}$ , e cada espectro “subtração”,  $S_{k,j}$ <sup>1</sup>. Na próxima seção iremos descrever com mais detalhe como foi aplicada a correlação cruzada nos espectros de RV Crt e os resultados das curvas de velocidade radial das componentes e seus resíduos, para alguns intervalos espectrais.

<sup>1</sup>Procedimento adotado no KOREL, pelo menos teoricamente. Não sabemos exatamente como o KOREL determina as velocidades radiais das componentes.

## A.2.1 Procedimento

A solução para RV Crt foi processada, usando o código KOREL, a partir da análise conjunta de regiões espectrais contendo o mesmo número de pixels em seus espectros compostos (veja Tab. 5.2). Ou seja, uma solução envolvendo 11 regiões com 4096 pixels, outra com 6 regiões de 2048 pontos, outra com 5 regiões de 1024 pixels e outra com 3 regiões de 512 pixels. As contribuições em luz de cada componente foram obtidas com o procedimento mostrado na Sec. 5.1.6, para cada uma das 41 fases orbitais, descritas na Tab. 5.1, onde apenas uma se encontra em fase de eclipse total primário.

Todos os espectros (compostos e reconstruídos) já se encontram amostrados em passo constante em velocidade e igual a 2.72511343 (km/s). Os espectros reconstruídos das componentes,  $x_k$ , são deslocados de acordo com seus desvios Doppler usando uma rotina escrita em IDL (*Interactive Data Language*) denominada SHFTV.PRO (descrito em Torres 2002, Apêndice A.1.3) e, conseqüentemente, o espectro “subtração”,  $S_{k,j}$ , é obtido usando a Eq. (A.43). Através da função C-CORRELATE do IDL, obtivemos a curva de correlação cruzada entre os dois espectros,  $S_{obs,j}$  e  $S_{k,j}$ , em função do deslocamento entre eles. Esse deslocamento é transformado em velocidade usando a Eq. (2.10).

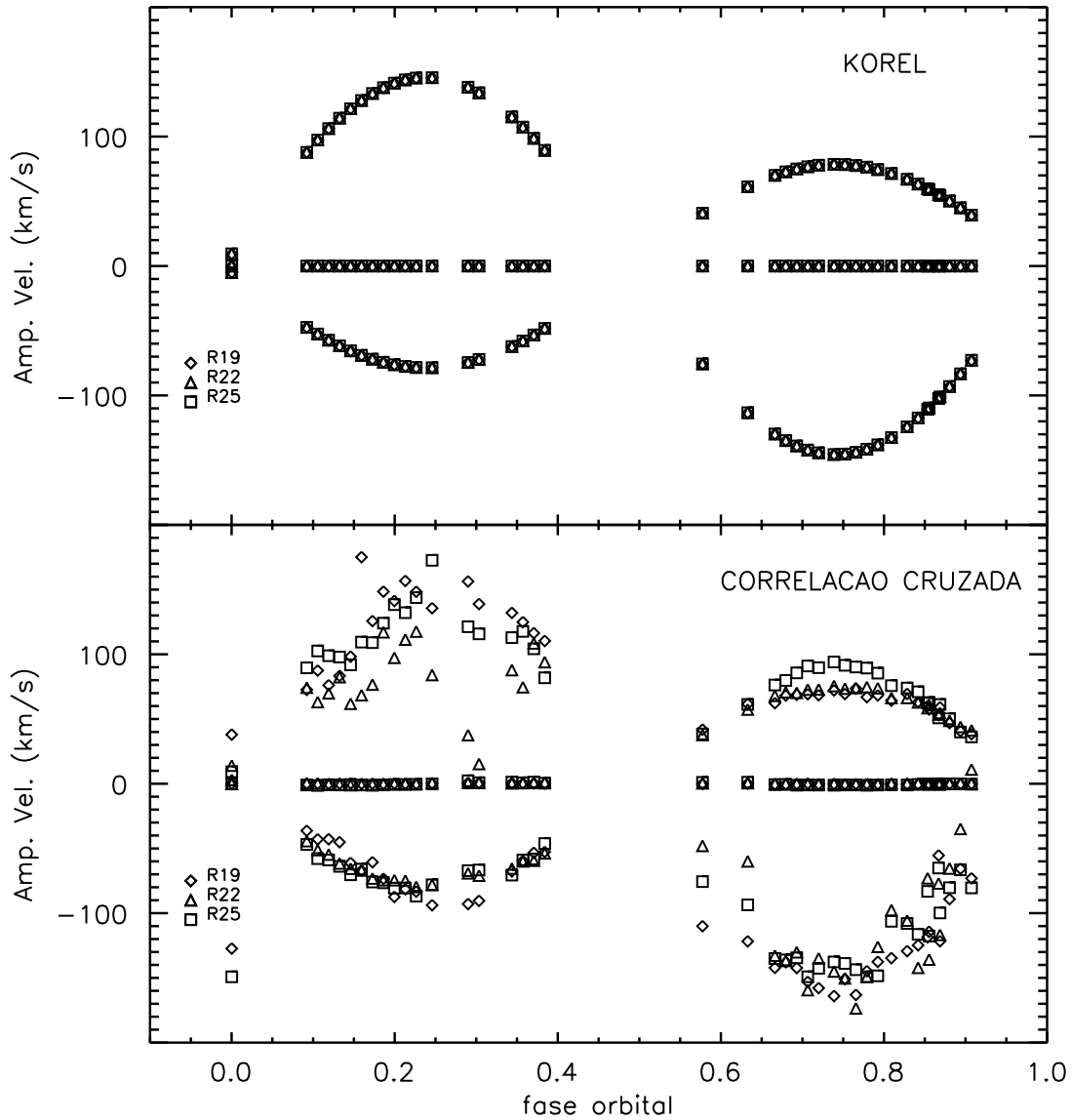
Para a localização dos centros dos máximos nas curvas de correlação, é bastante comum o ajuste de Gaussianas ou Lorentzianas a essas curvas (Baranne et al. 1979, Hrivnak et al. 1984, Duquennoy et al. 1991, Machado 1997). Para ajustar a gaussiana, escolhemos, simultaneamente, a fase orbital de máxima amplitude de velocidade das componentes e, para cada conjunto das 4 soluções descritas acima, a região espectral em que há maior probabilidade de se obter as velocidades radiais das componentes, de acordo com os estudos realizados no Apêndice A.1. Para o conjunto de regiões com 4096 pixels, escolhemos a região 18 (veja Tab. 5.2); para o conjunto de regiões com 2048 pontos, escolhemos a região 16; para o conjunto de regiões com 1024 pixels, escolhemos a região 23 e para o conjunto de regiões com 512 pixels, escolhemos a região 22.

Uma vez determinada a gaussiana, para aquele conjunto específico de solução, a mesma foi aplicada a todas as outras fases orbitais e regiões espectrais, para determinação dos picos de correlação, e conseqüentemente, as velocidades radiais de cada componente. É importante ressaltar que a gaussiana foi determinada separadamente para cada componente e que pontos que desviaram da curva de correlação não foram considerados.

## A.2.2 Resultados

As Figs. A.3, A.4, A.5 e A.6 mostram a curva de velocidade radial das componentes de RV Crt obtidas (a) com o KOREL e (b) com a nossa aplicação de correlação cruzada entre os espectros observados e os reconstruídos pelo KOREL, para três conjuntos de soluções: 3 regiões com 41 espectros contendo 512 pixels, 5 regiões com 41 espectros contendo 1024 pixels, 6 regiões com 41 espectros contendo 2048 pixels e 11 regiões com 41 espectros contendo 4096 pixels.

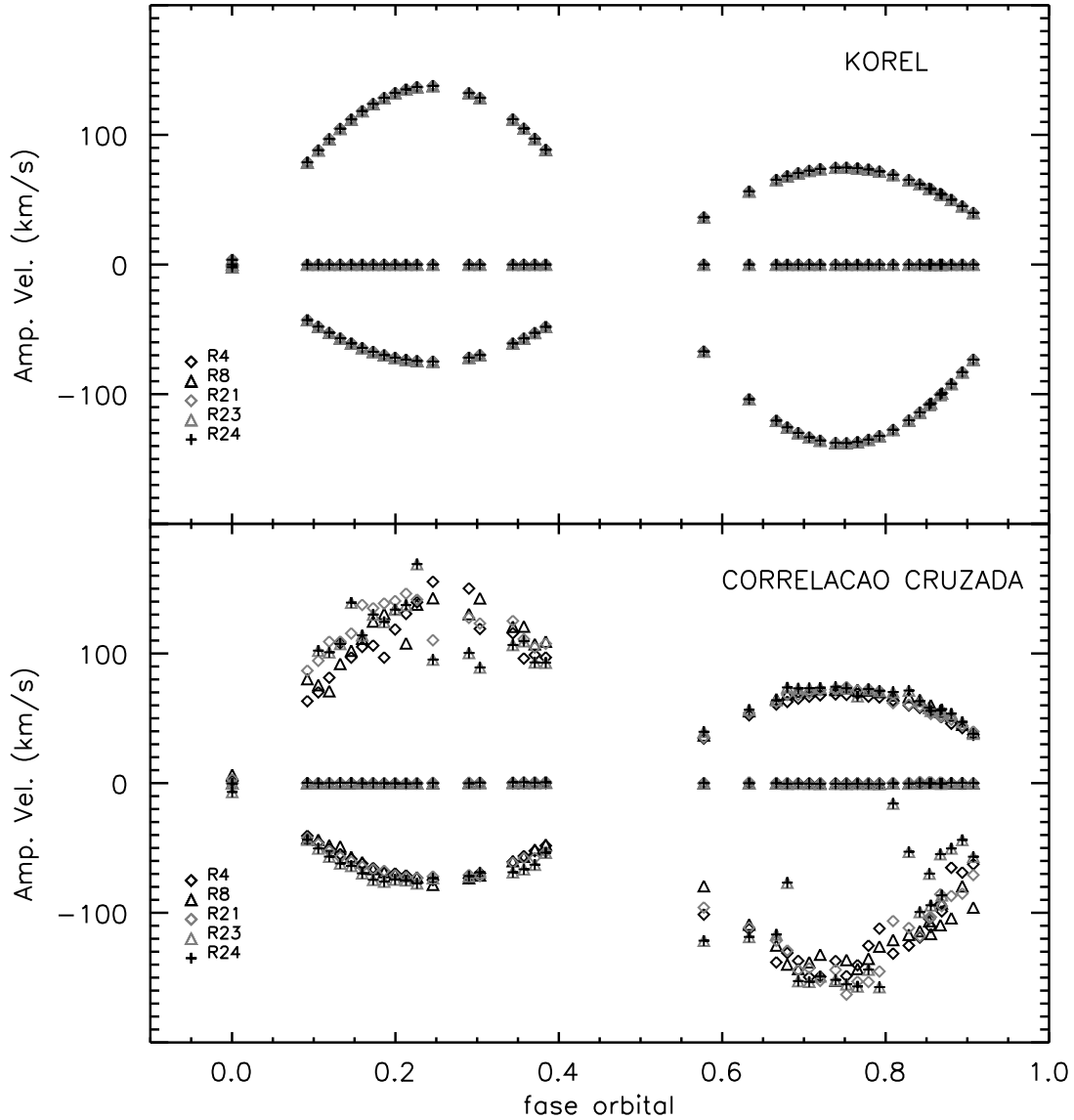
Observe como as soluções obtidas pela correlação cruzada mostram curvas com pontos mais “espalhados” em comparação com aquelas obtidas pelo KOREL. No KOREL, as velocidades radiais de cada componente, para cada intervalo espectral pertencente a cada conjunto, se coincidem todo o tempo e seus erros são nulos. Nesse caso, esperaríamos encontrar, pelo menos, as curvas de velocidade radial da secundária com pontos mais espalhados, uma vez que essa componente, contribuindo com somente da ordem de 9%



**Figura A.3:** Velocidades radiais obtidas pelo KOREL (painel superior) e pela **correlação cruzada** entre os espectros observados e os reconstruídos por ele (painel inferior), para o sistema triplo elipsante RV Crt e para o conjunto de 3 regiões espectrais contendo 512 pontos. Os índices “R”, seguidos de um número, se referem aos mesmos índices dos intervalos espectrais descritos na Tab. 5.2.

da luz total do sistema, tem a determinação de sua velocidade orbital comprometida. A aplicação da correlação cruzada, usando os próprios resultados do KOREL, deveria mostrar velocidades bem próximas daquelas obtidas por ele, o que não foi observado.

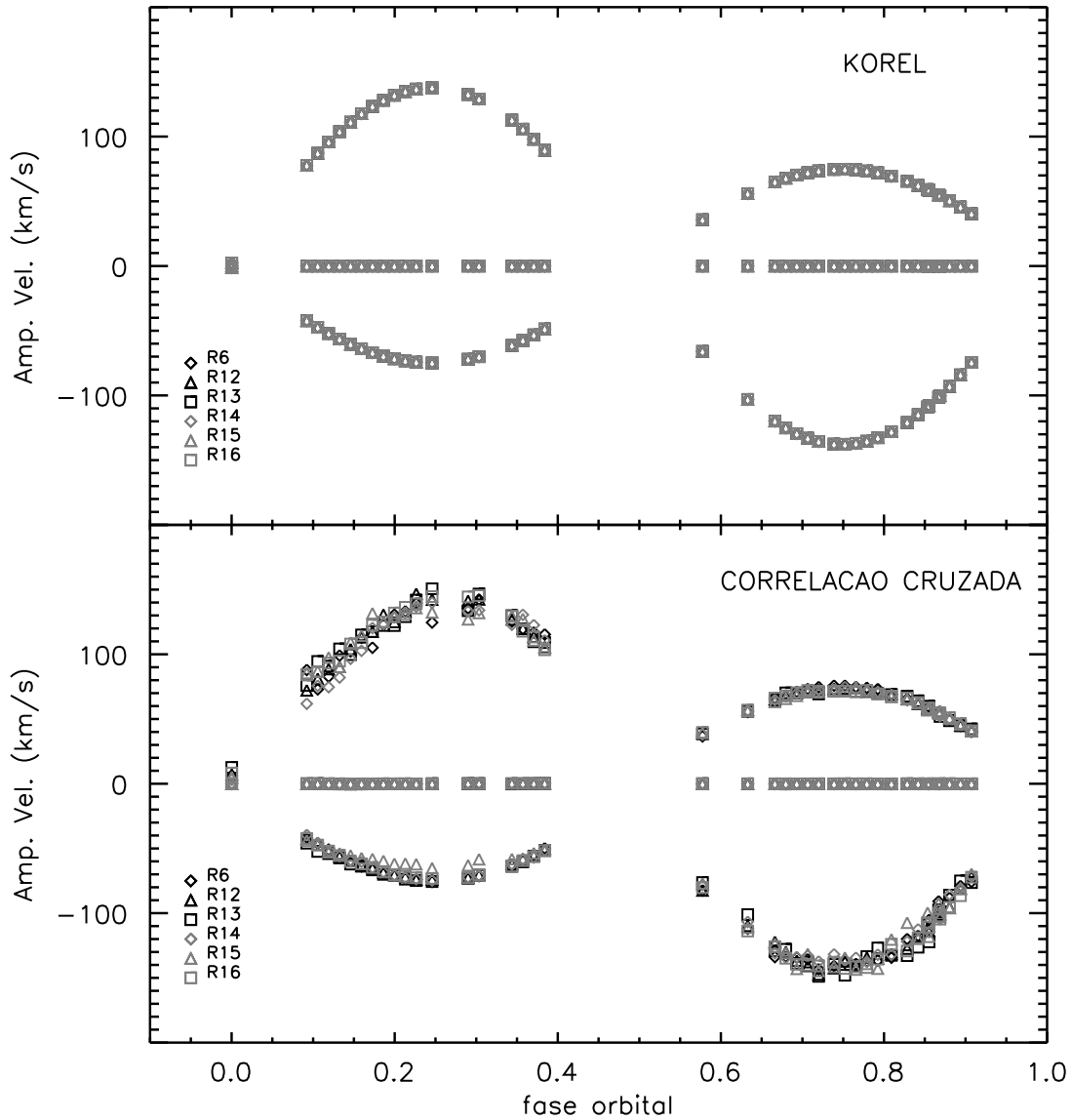
Com relação aos resultados obtidos pela nossa aplicação de correlação cruzada, vemos que o conjunto de 2048 e 4096 pixels produzem curvas de velocidade radial menos espalhadas para a secundária, em relação aos outros conjuntos. Ou seja, há maior concordância dos valores das velocidades radiais da secundária entre os intervalos espectrais para os conjuntos de 2048 e 4096 do que para os conjuntos de 512 e 1024. Isso confirma a nossa



**Figura A.4:** Velocidades radiais obtidas pelo KOREL (painel superior) e pela **correlação cruzada** entre os espectros observados e os reconstruídos por ele (painel inferior), para o sistema triplo elipsante RV Crt e para o conjunto de 5 regiões espectrais contendo 1024 pontos. Os índices “R”, seguidos de um número, se referem aos mesmos índices dos intervalos espectrais descritos na Tab. 5.2.

previsão sobre a estimativa da informação de velocidade radial contida num intervalo espectral, Apêndice A.1. De acordo com os resultados apresentados na Tab. A.2, as regiões que possuem menor probabilidade de determinar a velocidade radial da secundária (altos valores de  $\sigma_2$ ) são as regiões contendo 512 e 1024 pixels.

A Fig. A.7 mostra as curvas de velocidade radial com barras de erro, para cada intervalo espectral do conjunto de 6 regiões com 41 espectros de 2048 pontos. Essas barras de erro mostram a diferença entre as velocidades radiais obtidas pela nossa correlação cruzada e pelo KOREL. Em geral as curvas para as componentes primária e terciária são

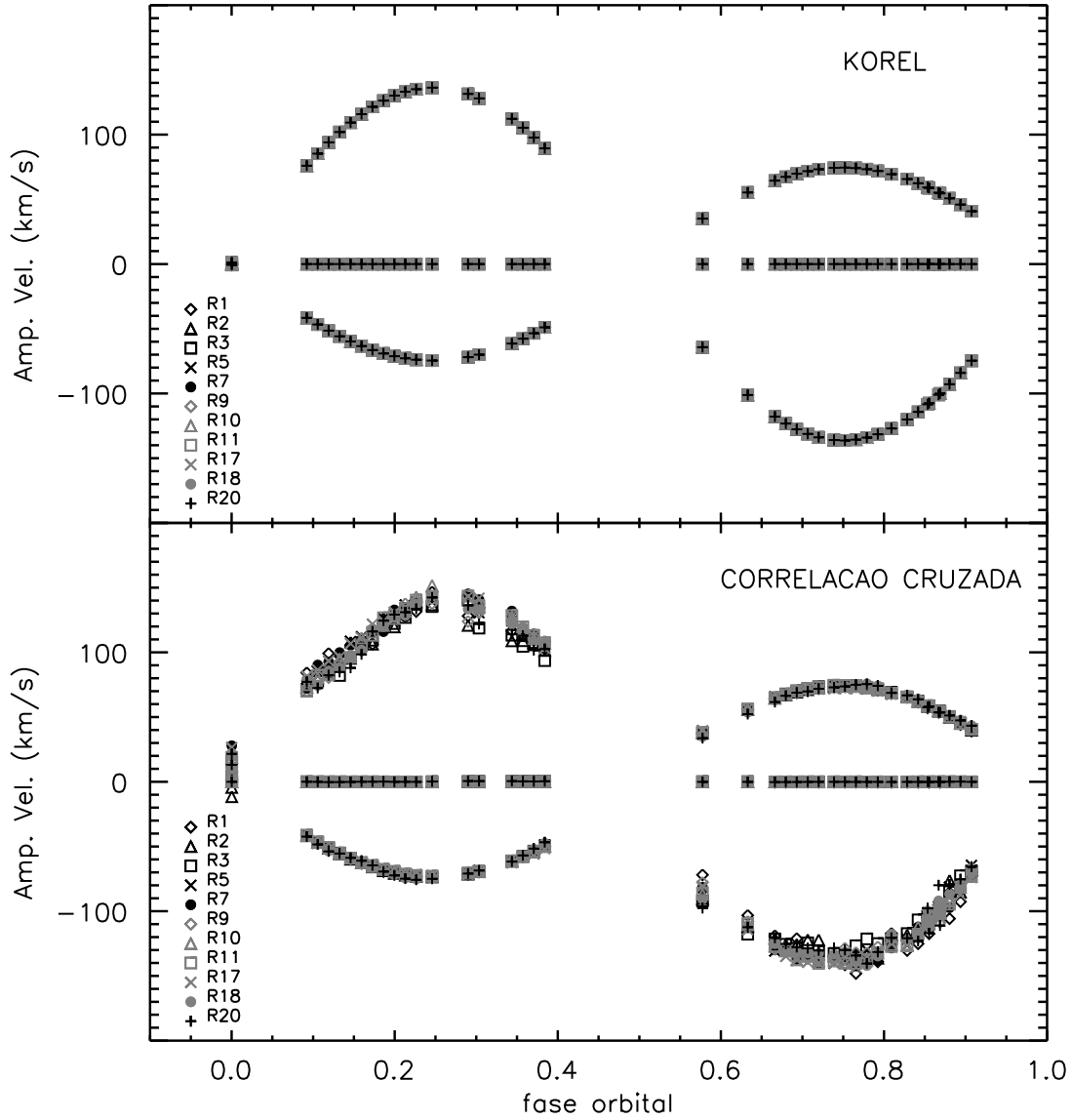


**Figura A.5:** Velocidades radiais obtidas pelo KOREL (painel superior) e pela **correlação cruzada** entre os espectros observados e os reconstruídos por ele (painel inferior), para o sistema triplo elipsante RV Crt e para o conjunto de 6 regiões espectrais contendo 2048 pontos. Os índices “R”, seguidos de um número, se referem aos mesmos índices dos intervalos espectrais descritos na Tab. 5.2.

mais bem determinadas (exceto o painel inferior esquerdo), enquanto que as curvas para a secundária se diferem mais, em relação as outras componentes.

Portanto, suspeitamos que o KOREL obtém as velocidades radiais a partir da equação da órbita e não a partir de uma correlação cruzada usando os espectros e velocidades determinados por ele. Sugerimos que o usuário do método aplique a correlação cruzada, como descrito nesse apêndice, para verificar as velocidades radiais obtidas pelo KOREL.



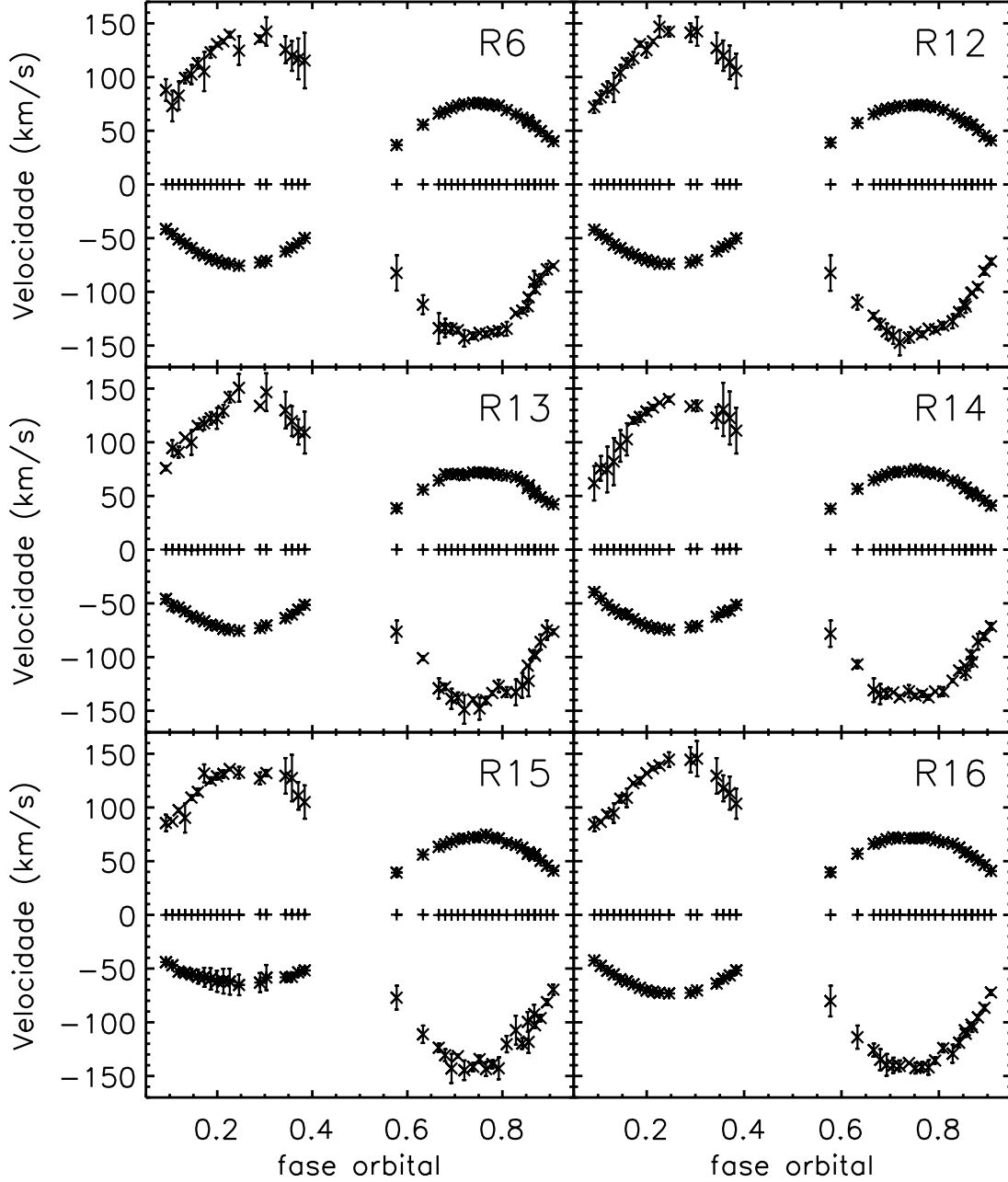


**Figura A.6:** Velocidades radiais obtidas pelo KOREL (painel superior) e pela **correlação cruzada** entre os espectros observados e os reconstruídos por ele (painel inferior), para o sistema triplo elipsante RV Crt e para o conjunto de 11 regiões espectrais contendo 4096 pontos. Os índices “R”, seguidos de um número, se referem aos mesmos índices dos intervalos espectrais descritos na Tab. 5.2.

### A.3 Contribuição dos diferentes modos de Fourier

A transformada inversa de Fourier da solução para os modos no espaço de Fourier,  $(v_m, V_m)$  com  $m = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}$  proporciona no caso  $N = 8$  as seguintes contribuições para cada pixel  $p_n$ ,  $n = 0, \dots, 7$ :

$$8v_0 = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7$$



**Figura A.7:** Velocidades radiais obtidas pela **correlação cruzada** entre os espectros observados e os reconstruídos pelo KOREL, para o sistema triplo elipsante RV Crt e para cada um dos intervalos espectrais do conjunto de 6 regiões contendo 2048 pontos. Os índices “R” (no canto superior de cada painel), seguidos de um número, se referem aos mesmos índices dos intervalos espectrais descritos na Tab. 5.2.

$$8v_1 = p_0 - p_4 + \frac{\sqrt{2}}{2}(p_1 - p_3 - p_5 + p_7)$$

$$8V_1 = p_6 - p_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}(p_1 + p_3 - p_5 - p_7)$$

$$\begin{aligned}
8v_2 &= p_0 - p_2 + p_4 - p_6 \\
8V_2 &= p_3 - p_1 + p_7 - p_5 \\
8v_3 &= p_0 - p_4 - \frac{\sqrt{2}}{2}(p_1 - p_3 - p_5 + p_7) \\
8V_3 &= p_2 - p_6 - \frac{\sqrt{2}}{2}(p_1 + p_3 - p_5 - p_7) \\
8v_4 &= p_0 - p_1 + p_2 - p_3 + p_4 - p_5 + p_6 - p_7
\end{aligned} \tag{A.44}$$

As relações inversas são:

$$\begin{aligned}
p_0 &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2}v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \frac{1}{2}v_4 \right) \\
p_1 &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2}v_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}v_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}V_1 - V_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}v_3 - \frac{\sqrt{2}}{2}V_3 - \frac{1}{2}v_4 \right) \\
p_2 &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2}v_0 - V_1 - v_2 + V_3 + \frac{1}{2}v_4 \right) \\
p_3 &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2}v_0 - \frac{\sqrt{2}}{2}v_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}V_1 + V_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}v_3 - \frac{\sqrt{2}}{2}V_3 - \frac{1}{2}v_4 \right) \\
p_4 &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2}v_0 - v_1 + v_2 - v_3 + \frac{1}{2}v_4 \right) \\
p_5 &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2}v_0 - \frac{\sqrt{2}}{2}v_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}V_1 - V_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}v_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}V_3 - \frac{1}{2}v_4 \right) \\
p_6 &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2}v_0 + V_1 - v_2 - V_3 + \frac{1}{2}v_4 \right) \\
p_7 &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2}v_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}v_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}V_1 + V_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}v_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}V_3 - \frac{1}{2}v_4 \right)
\end{aligned} \tag{A.45}$$

## A.4 Trabalhos Publicados

### A.4.1 On the separation of component spectra in binary and higher-multiplicity stellar systems: bias progression and spurious patterns

*H.Hensberge, S. Ilijic e K.B.V. Torres*

aceito para publicação na revista *Astronomy & Astrophysics*. A ordem dos autores está em ordem alfabética, de acordo com o último nome dos mesmos, devido ao fato de que cada um dos autores contribuiu comparavelmente ao estudo realizado. Minha contribuição específica, a esse artigo foi:

- determinação das equações de separação no espaço de Fourier para sistemas duplos, triplos e com  $K$  componentes;
- análise das equações de separação no espaço de Fourier no sentido de determinar em quais circunstâncias as equações são singulares, implicando em soluções degeneradas;
- cálculos analíticos de sistemas hipotéticos simples, nos domínios de Fourier e velocidade, e sua correspondente análise.
- cálculos numéricos de sistemas hipotéticos simples, utilizando os códigos `KOREL` e `FDBinary` (que operam no espaço de Fourier e foram desenvolvidos, respectivamente, por P. Hadrava e S. Ilijic) e o código `CRES` (que opera no espaço de velocidade, desenvolvido por S. Ilijic), e sua correspondente análise;
- cálculos e participação na análise de espectros reconstruídos pelo código `CRES`, para um sistema duplo artificial cujas observações são influenciadas por viés correlacionados com a fase orbital.
- estudo das amplitudes dos padrões espúrios induzidos nos espectros reconstruídos, tanto nos domínios de Fourier como de velocidade, para o caso de sistemas hipotéticos simples;
- cálculo e análise do número de condição para o sistema triplo eclipsante RV Crt;
- estudo do melhoramento do número de condição ao adotar pesos, dependentes do modo de Fourier, em fases em eclipses e aplicação para o sistema triplo eclipsante RV Crt;
- estudo do processo de renormalização de espectros reconstruídos (por método que opera no espaço de Fourier), cujas observações são tendenciadas, e posterior aplicação do referido procedimento em RV Crt.

A seguir são mostradas, respectivamente, cópias do email, confirmando o aceite do artigo para publicação e cópia integral do referido artigo. Na data de 27/02/2008 foi feita a revisão das provas e dado o consentimento final para a publicação.

Date: Thu, 14 Feb 2008 10:26:08 +0100  
From: aanda.paris@obspm.fr  
To: herman.hensberge@oma.be  
Subject: AA/2007/9038: paper sent to language-editor

14/02/2008

Dr. H. Hensberge  
Royal Observatory of Belgium  
Ringlaan 3

B-1180 Brussel  
BELGIUM

herman.hensberge@oma.be

Our Ref. : AA/2007/9038

Dear Dr. Hensberge,

I am pleased to inform you that your paper entitled "On the separation of component spectra in binary and higher-multiplicity stellar systems: bias progression and spurious patterns" is now accepted for publication in Astronomy and Astrophysics. The official date of acceptance is 09/02/2008.

Your paper is being sent to our language editor and the annotated copy will be forwarded to you if significant changes are required. We will contact you again as soon as possible.

Sincerely yours,

C. Bertout  
Editorial Office Paris

## A.4.2 Comparison of different spectral disentangling techniques applied to a triple system

*Torres K.B.V., Vaz L.P.R., Hensberge H.*

publicado em Modern Binaries 2007, IAUS 240, 210 (poster), eds. W.I. Hartkopf, E. Guinan, P. Harmanec.

Minha contribuição foi:

- estudo de um procedimento alternativo para redução do tempo computacional no espaço de velocidade, usando o código CRES desenvolvido por S. Ilijić;
- aplicação dos códigos CRES e KOREL (que opera no espaço de Fourier e foi desenvolvido por P. Hadrava) no sistema triplo eclipsante RV Cr1;
- eliminação de padrões espúrios induzidos nos espectros reconstruídos para RV Cr1 via procedimento descrito neste estudo.
- comparação e análise dos espectros reconstruídos por ambas as técnicas.

O resumo do trabalho está a seguir

### Abstract

Spectral disentangling allows us to reconstruct the contribution of multiple stars to a composite spectrum. Different algorithms have been proposed, which fall in two categories: algorithms operating on the Fourier components of the spectra and algorithms operating on the velocity bins (logarithm of wavelength). Almost all applications use the former algorithms because of public availability of software code and the computing time involved. Nevertheless, the simultaneous use of both techniques would give a better insight in the error budget, since each algorithm is sensitive in a different way to uncertainties in the input data and the options available to assign weights to the input data are different. We will discuss the application of both techniques to a triple system, consisting of a dominant stationary third component dominating the composite spectrum and a close binary with one component much fainter than the other. Several spectral regions are selected, some of which contain telluric lines. When necessary for a better understanding, also simpler artificial spectra are analysed by both techniques.

### A.4.3 Methods of spectral separation: analyse of spurious patterns and bias in the reconstructed spectra of multiple systems.

*Torres, K. B. V., Hensberge H., Vaz L. P. V., Ilijic S.*

publicado no Boletim da Sociedade Astronômica Brasileira, 2007, vol. 27, N.1, p. 32–32 (apresentação oral), eds. V. A. F. Martin, B. X. Santiago, C. A. Wuensche, R. B. Gruenwald.

Minha contribuição foi:

- introdução sobre desembaraçamento espectral, enfatizando as potencialidades dos métodos, através dos resultados preliminares obtidos para RV Crt, no que diz respeito aos espectros reconstruídos e parâmetros fundamentais (massa, temperatura efetiva e raio);
- demonstrar em quais circunstâncias as equações de separação espectral são degeneradas e o uso da decomposição de valor singular para tratar sistemas quasi-singulares;
- discussão sobre a progressão de padrões espúrios sobre os espectros reconstruídos, devido a presença de viés nos espectros compostos observados;
- eliminação de efeitos de baixa-freqüência por inclusão de fases em eclipse total;
- processo de eliminação dos efeitos de baixa-freqüência sobre os espectros reconstruídos através das técnicas de separação espectral.

O resumo do trabalho está a seguir

### **Abstract**

Binaries are an important source of precise fundamental stellar parameters and hence provide empirical constraints on stellar evolution. Powerful methods of spectral separation have been developed to reconstruct the spectra of the components. Systems insoluble using traditional techniques can now be solved. The modern reconstruction techniques are especially advantageous in complex multiple spectra (high line density, or/and broad lines and some components faint). However, spurious patterns in the component spectra led many authors to refrain from such analysis. This work aims to discuss how to avoid or recognize spurious patterns in the reconstructed component spectra, due to quasi-degeneracy of equations or as a consequence of bias in the observed spectra. We intend also to guide potential users of these techniques to obtain in the most efficient way the appropriate observation sets such that the transfer of systematic errors to the output quantities is constrained. We analysed, analitically, the spectral separation equations and used real and artificial data sets to illustrate and discuss the degeneracies and the transfer of bias to the reconstructed component spectra. We find that the bias depends on (1) the

distribution of the observed Doppler-shift, (2) the chosen log-wavelength sampling (3) the time-variability in the relative light-factors of the components and (4) the normalisation errors in the input spectra. Based on this, we can understand and control the bias, opening effectively a new field of applications, since the spectrum of each component in a multiple system can be analysed now accurately as for a single star.



#### A.4.4 Study of the Spectral Disentangling Code – Korel – in eclipsing triple systems. Application to RV Crt

*Torres, K. B. V., Vaz L. P. V., Hensberge H.*

publicado em Spectroscopically and Spatially Resolving the Components of Close Binary Stars, 2004 vol. 318, p. 114–116 (poster).

Minha contribuição foi:

- estudo do processo final do desembaraçamento espectral de um sistema triplo artificial, cujas características são semelhantes ao sistema triplo eclipsante RV Crt. O estudo foi baseado nos resultados obtidos por Torres (2002) quanto às limitações e aplicabilidade do código KOREL.
- aplicação do código KOREL no sistema triplo eclipsante RV Crt com consequente obtenção da curva de velocidade radial e espectros intrínsecos para as 3 componentes, em 4 regiões espectrais diferentes.

O resumo e a cópia do trabalho publicado estão a seguir

#### **Abstract**

The KOREL code is applied to artificial spectra of binaries and a hierarchical triple with one rather faint component to understand better its possibilities and limitations. We present also the first successfully disentangled spectra of the eclipsing triple system RV Crt, whose components may be in the PMS evolutionary phase (Machado 1997).

## A.4.5 Study of the RV Crt using the Spectral Disentangling Code – Korel

*Torres, K. B. V., Vaz L. P. V., Hensberge H.*

publicado no Boletim da Sociedade Astronômica Brasileira, 2004, vol. 24, N.1, p. 126–126 (poster) N.1, p. 136–136 (poster), eds. V. A. F. Martin, B. X. Santiago, C. A. Wuensche, R. B. Gruenwald.

Minha contribuição foi:

- estudo do processo final do desembaraçamento espectral de um sistema triplo artificial, cujas características são semelhantes ao sistema triplo eclipsante RV Crt. O estudo foi baseado nos resultados obtidos por Torres (2002) quanto às limitações e aplicabilidade do código KOREL.
- aplicação do código KOREL no sistema triplo eclipsante RV Crt e consequente obtenção da curva de velocidade radial e espectros intrínsecos para as 3 componentes, em 4 regiões espectrais diferentes.

O resumo está a seguir

### Abstract

RV Crateris (HD 98412; SAO 156604;  $V=9m$ ) is an eclipsing triple system of spectral type F8. A preliminary analysis (Machado A.C., 1997, MSc Dissertation, DF-ICEx-UFMG) of accurate photoelectric light curves (Striömgren uvby filters obtained with SAT, ESO, La Silla, Chile) and radial velocity curves (CCD Coudé spectra obtained with the 1.6 m telescope at the Pico dos Dias Observatory, LNA, Brazil) indicated two possible solutions for the orbital elements of the components. The presence of a large amount of third light in both the light curves and the spectra, plus the fast rotation of the eclipsing components (due to orbital synchronization and the short orbital period,  $P=1d. 17$ ), made it difficult to identify the spectral lines of the faintest eclipsing component. So, we decided to use the korel code (Hadrava, 1995) because it has proved to be an efficient tool for the determination of spectroscopic orbital parameters through the disentangling of stellar spectra of multiple stars. Moreover, we obtained new high S/N ( $> 100$ ), high resolution (50000) spectra of RV Crt with FEROS shortly after its move to the MPG/ESO 2.2 m telescope and analysed them with the korel code. In this work, we show the preliminary results: individual spectra of each component in four different spectral regions, spectroscopic orbital parameters (such as velocity amplitudes of each component,  $K_1 = 80$  km/s and  $K_2 = 115$  km/s), radial velocity curves and light curves obtained from the analysis of this system, besides some modifications done in the korel code to accomplish these goals.

## A.4.6 Estudo e aplicação do código de desembarçamento espectral - Korel - em sistemas triplos

*Torres, K. B. V., Vaz L. P. V.*

publicado no Boletim da Sociedade Astronômica Brasileira, 2003, vol. 23, N.1, p. 136–136 (poster), eds. V. A. F. Martin, B. X. Santiago, C. A. Wuensche, R. B. Gruenwald.

- estudo do processo final do desembarçamento espectral de um sistema triplo artificial, cujas características são semelhantes ao sistema triplo eclipsante RV Cr. O estudo foi baseado nos resultados obtidos por Torres (2002) quanto às limitações e aplicabilidade do código KOREL.
- aplicação do código KOREL no sistema triplo eclipsante RV Cr.

O resumo está a seguir

### Resumo

O código KOREL é uma ferramenta adicional eficiente para a determinação simultânea de parâmetros orbitais espectroscópicos para o desembarço de espectros individuais de sistemas estelares com até cinco componentes. Estudos já realizados (Torres,KBV,2002, Dissertação de Mestrado DF-ICEX-UFMG) mostram as limitações, aplicabilidade e eficiência do código para sistemas com duas componentes. Apresentamos, neste trabalho, a continuação dos estudos para sistemas com três componentes (sistemas hierárquicos), utilizando espectros sintéticos “gabaritos” de estrelas individuais em órbitas cujos parâmetros são conhecidos “a priori”. Geramos os espectros compostos e verificamos como o código reproduz os parâmetros orbitais e espectros individuais em diversas situações físicas. É apresentado, ainda, uma discussão da aplicabilidade do código em sistemas reais como RV Crateris (Machado,ACM,1997, Dissertação de Mestrado DF-ICEX-UFMG), um sistema triplo cujas componentes eclipsantes estão, provavelmente, ainda na fase pré-sequência principal.

## A.4.7 Spectral Disentangling Applied to Triple Systems: RV Crt

*Hensberge H., Vaz L. P. V., Torres, K. B. V., Armond, T.*

publicado em Multiple Stars Across the H-R Diagram, ESO Astrophysics Symposia 2008, p. 47 (apresentação oral feita por Herman Hensberge), eds. S. Hubrig, M. Petr-Gotzens, A. Tokovinin.

Minha contribuição foi participar da análise do sistema triplo eclipsante RV Crt, usando o método de desembaraçamento espectral KOREL. O resumo e a cópia do trabalho publicado estão a seguir

### Abstract

The eclipsing triple system RV Crt shows a composite spectrum dominated by the sharp-lined late-F type spectrum of the tertiary. The spectral lines of the close binary are considerably broadened, since both components rotate synchronously with the orbit. The Doppler shifts and the component spectra are successfully recovered by application of the spectral disentangling technique. The cooler, less massive component of the close binary is larger than the hotter one. The hotter component of the close binary is very similar to the tertiary. The system is probably still on its way to the zero-age main sequence.

# Referências

---

- Andersen, J. & Nordström, B. 1983, *A&A* **122**, 23
- Ausseloos, M., Aerts, C., Lefever, K., Davis, J., & Harmanec, P. 2006, *A&A* **455**, 256
- Bagnuolo, W. G., Jr., & Gies, D. R. 1991, *ApJ* **376**, 266
- Bagnuolo, W. G., Jr., Riddle, R., Gies, D. R., & Barry, D. J. 2001, *ApJ* **553**, 362
- Bagnuolo, W. G., Jr., Gies, D. R., & Wiggs, M. S. 1992, *ApJ* **385**, 708
- Bagnuolo, W. G., Jr., Gies, D. R., Hahula, M.E., Wiemker, R., & Wiggs, M.S. 1994, *ApJ* **423**, 446
- Bagnuolo, W. G., Jr., & Barry, D. J. 1996, *ApJ* **469**, 347
- Bakiş, V., Budding, E., Erdem, A., Bakiş, H., Demircan, O., & Hadrava, P. 2006, *MNRAS* **370**, 1935
- Barai, P., Gies, D. R., Choi, E., et al. 2004, *ApJ* **608**, 989
- Baranne, A., Mayor, M., & Poncet, J. L. 1979, *Vistas in Astronomy*, **23**, 279
- Bisikalo, D. V., Harmanec, P., Boyarchuk, A. A., Kuznetsov, O. A., & Hadrava, P. 2000, *A&A* **353**, 1009
- Bonanos, A. Z., Stanek, K. Z., Kudritzki, R. P., Macri, L. M., Sasselov, D. D., Kaluzny, J., Stetson, P. B., Bersier, D., Bresolin, F., Matheson, T., Mochejska, B. J., Przybilla, N., Szentgyorgyi, A. H., Tonry, J., Torres, G. 2006, *ApJ* **652**, 313
- Bouchy, F., Pepe, F., & Queloz, D. 2001, *A&A* **374**, 733
- Boyajian, T. S., Gies, D. R., Helsel, M. E., Kaye, A. B., McSwain, M. V., Riddle, R. L., & Wingert, D. W. 2006, *ApJ* **646**, 1209
- Brown, T. M. 1990, in *CCD's in Astronomy*, ed. G.H.Jacoby, ASP Conf. Ser. Vol 8, 335
- Budovičvá, A., Šteff, S., Hadrava, P., Rivinius, Th., & Stahl, O. 2005, *Ap&SS* **296**, 169
- Carbon, D. F., & Gingerich, O. J. 1969, in : "Theory and Observations of Normal Stellar Atmospheres", Ed. O.J. Gingerich (Cambridge, MA: MIT Press), p. 377
- Chadima, P., Harmanec, P., Ak, H., Dermican, O., Yang, S., Koubský, P., Škoda, P., Šlechta, M., Wolf, M., Božć, H., Ruždjak, D., & Sudar, D. 2006, in the IAU Symposium No. 240, "Binary stars as Critical Tools and Tests in Contemporary Astrophysics", (eds. W. Hartkopf, E. Guiman, & P. Harmanec)
- Casey, B. W., Mathieu, R. D., Vaz, L. P. R., Andersen, A., & Suntzeff, N. B., 1997, *AJ*, **115**, 1617
- De Becker, M., Rauw, G., Manfroid, J., & Eenens, P. 2006, *A&A* **456**, 1121
- De Cat, P., de Ridder, J., Hensberge, H., & Ilijić, S. 2004, in ASP Conf. Ser. Vol 318, 338
- Duquenooy, A., Mayor, M., & Hallbwachs, J. -L. 1991, *A&AS* **88**, 281
- Dougherty D. 1997, in *SED, & AWK*, O'Reilly Associates

- Ferluga, S., Floreano, L., Bravar, U., Bédalo C., 1997, A&AS **121**, 201
- Fitzpatrick, E. L., Ribas, I., Guinan, E. F., et al. 2002, ApJ **564**, 260
- Fitzpatrick, E. L., Ribas, I., Guinan, E. F., Maloney, F. P., & Claret A. 2003, ApJ **587**, 685
- Frémat, Y., Lampens, P., & Hensberge, H. 2004, in ASP Conf. Ser. Vol. 318, 342
- Frémat, Y., Lampens, P., & Hensberge, H. 2005, MNRAS, **365**, 545
- Gies, D. R., Wiggs, M. S., & Bagnuolo, W.G., Jr. 1993 ApJ **403**, 752
- Gies, D. R., Furlleton, A. W., Bolton, C. T., et al. 1994 ApJ **422** 823
- Gies, D. R., Bagnuolo, W. G., Jr., Ferrara, E. C., et al. 1998 ApJ **493**, 440
- Gies, D. R., Penny, L. R., Mayer, P., Drechsel, H., & Lorenz R. 2002 ApJ **574**, 957
- Gies, D. R. 2004, in ASP Conf. Ser. Vol. 318, 61
- Griffin, R., & Griffin, R. 1986, JApA **7**, 195
- Griffin, R. E. 2002, AJ**123**, 988
- Gronbech, B., Olsen, E. H., & Strömgren, B. 1976, A&AS **25**, 213
- Gronbech, B., & Olsen, E. H. 1977, A&AS **27**, 443
- González, J. F., & Levato, H. 2006, A&A **448**, 283
- González, J. F., & Hubrig, S., Nesvacil, N., & North, P. 2006, A&A **449**, 327
- Hadamard, J. 1902, *Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique.* p.49–52 (Princeton University Bulletin)
- Hadrava, P. 1995, A&AS **114**, 393
- Hadrava, P. 1997, A&AS **122**, 581
- Hadrava, P. 2004a, in ASP Conf. Ser. Vol. 318, 86
- Hadrava, P. 2004b, Publ. Astron. Inst. ASCR 92, 15
- Hadrava, P. 2004c, 'KOREL', <http://www.asu.cas.cz/had/korel.html>
- Hadrava, P. 2006, A&A **448**, 1149
- Hadrava, P. 2007, in the IAU Syposium No. 240, “Binary stars as Critical Tools and Tests in Contemporary Astrophysics”, (eds. W. Hartkopf, E. Guinan, & P. Harmanec)
- Harmanec, P., Hadrava, P., Yang, S., Holmgren, D., North, P., Koubský, P., Kubát, J., Poretti, E. 1997, A&A **319**, 867
- Harmanec, P., Uytterhoeven, K., & Aerts, C. 2004, A&A **422**, 1013
- Harries, T. J., Hilditch, R. W., & Howarth, I.D. 2003, MNRAS **339**, 157
- Harvin, J. A. 2002a, dissertation, Georgia State University
- Harvin, J. A., Gies, D. R., Bagnuolo, W. G., Jr., Penny, L. R., & Thaller, M. L. 2002b, ApJ, **564**, 1216
- Hensberge, H., Pavlovski, K., & Verschueren, W. 2000, A&A **358**, 553
- Hensberge, H. 2004, in ASP Conf. Ser. Vol. 318, 43
- Hensberge, H., & Pavlovski, K. 2006, “Modern Analysis Techniques for Spectroscopic Binaries”, talk presented by Hensberge H. in the IAU Syposium No. 240, “Binary stars as Critical Tools and Tests in Contemporary Astrophysics”, (eds. W. Hartkopf, E. Guinan, & P. Harmanec)

- Hensberge, H., Vaz, L. P. R., Torres, K. B. V., & Armond, T. 2008, “Spectral Disentangling Applied to Triple Systems: RV Cr<sup>t</sup>”, talk presented by H. Hensberge in the workshop “Multiple Stars Across the H-R Diagram”, (eds. S. Hubrig, M. Petr-Gotzens, A. Tokovinin), ESO Astrophysics Symposia, p.47–52
- Hilditch, R. W., Howarth, I. D., & Harries, T. J. 2005 MNRAS **357**, 304
- Hill, G. 1982, Publ. Dominion Astrophys. Obs. **16**, 59
- Hill, G., & Khalessseh, B. 1993a, A&A **276**, 57
- Hill, G., Adelman, S. M., & Gulliver, A. F. 1993b, PASP **105**, 748
- Hill, G., Hilditch, R. W., Aikman, G. C. L., & Khalessseh, B. 1994, A&A **282**, 455
- Hill, G., & Holmgren, D. E. 1995, A&A **297**, 127
- Hill, G., Harmanec, P., Pavlovski, K., et al. 1997, A&A **324**, 965
- Hillwig, T. S., Gies, D. R., Bagnuolo, W. G. Jr., Huang, W., McSwain, M. V., & Wingert, D. W. 2006, ApJ **639**, 1069
- Holland, John H., Adaptation in natural and artificial systems. an introductory analysis with applications to biology, control and artificial intelligence, University of Michigan Press, 1975
- Holmgren, D., Hadrava, P., Harmanec, P., Koubský, P., Kubát, J., & Poretti, E. 1997, A&A **322**, 565
- Holmgren, D. E., Hadrava, P., Harmanec, P., Eenens, P., Corral, L. J., Yang, S., Ak H., & Božić H. 1999, A&A **345**, 855
- Holmgren, D. E. 2004, in ASP Conf. Ser. Vol. 318, 95
- Horne, K. 1986, PASP **98**, 609
- Hrivnak, B. J., Milone, E. F., Hill, G., & Fisher, W.A. 1984, ApJ **285**, 683
- Hubrig, S., González, J. F., Savanov, I., Schöller, M., Ageorges, N., Cowley, C. R., & Wolff, B. 2006, MNRAS **371**, 1953
- Hynes, R. I., & Maxted, P. F. L. 1998, A&A **331**, 167
- Ilijić, S. 2006, “FDBinary”, <http://sail.zpf.fer.hr/fdbinary/>
- Ilijić, S. 2006, “CRES”, <http://sail.zpf.fer.hr/cres/>
- Ilijić, S. 2003, MSc Dissertation
- Ilijić, S., Hensberge, H., Pavlovski, K., & Freyhammer, L. M. 2004a, in ASP Conf. Ser. Vol. 318, 111
- Ilijić, S., Freyhammer, L. M., Helt, B. E. 2004c, in ASP Conf. Ser. Vol. 318, 111
- Ilijić, S. 2004b, in ASP Conf. Ser. Vol. 318, 107
- Ilijić, S., Hensberge, H., & Pavlovski, K. 2001, Fizika B, **130**, 2838
- Janík, J., Harmanec, P., Lehmann, H., et al. 2003, A&A **408**, 611
- Koubský, P., Hadrava, P., & Šarounová, L. 2004, in ASP Conf. Ser. Vol. 318, 103
- Lacy, C. H. S., Torres, G., Claret, A. & Vaz, L. P. R., 2005, AJ, **130**, 2838
- Lampens, P., Frémat, Y., De Cat, P., & Hensberge, H. 2007 in the IAU Symposium No. 240, “Binary stars as Critical Tools and Tests in Contemporary Astrophysics”, (eds. W. Hartkopf, E. Guinan, & P. Harmanec)
- Lehmann, H., & Hadrava, P. 2005, in ASP Conf. Ser. Vol. 333, 211

- Lichtblau, D., & Weisstein, E. W. "Condition Number." From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/ConditionNumber.html>
- Linnell, A. P., Harmanec, P., Koubský, P., Božić, H. Yang, S., Ruždjak, D. Sudar, D., Libich, J., Eenens, P. Krpata, J. Wolf, M., Škoda, P., & Šlechta, M., 2006, *A&A* **455**, 1037
- Liu, N., Gies, D. R., Xiong, Y., et al. 1997, *ApJ* **485**, 350
- Lorentz, R., Mayer, P., & Drechsel, H. 1998, *A&A* **332**, 909
- Lorentz, R., Mayer, P., & Drechsel, H. 1999, *A&A* **345**, 531
- McSwain, M. V. 2003, *ApJ* **595**, 1124
- Machado, A. C. M. 1997, Dissertação de Mestrado, Depto. de Física - ICEX - UFMG
- Marchenko, S. V., Moffat, A. F. J., & Eenens, P. R. J. 1998, *PASP* , **110**, 1416
- Martins, F., Trippe, S., Paumard, T. Ott, T., Genzel, R., Rauw, G., Eisenhauer, F., Gillessen, S., Maness, H., & Abuter, R. 2006, *ApJ* **649**, L103
- Pavlovski, K., & Hensberge, H. 2005, *A&A* **439**, 309
- Pavlovski, K., & Tamajo, E. 2007, in the IAU Symposium No. 240, "Binary stars as Critical Tools and Tests in Contemporary Astrophysics", (eds. W. Hartkopf, E. Guiman, & P. Harmanec)
- Pavlovski, K., Holmgren, D. E., Koubský, P., Southworth, J., & Yang, S. 2006, *Ap&SS* **304**, 329
- Penny, L. R., Gies, D. R., & Bagnuolo, W. G., Jr. 1997, *ApJ* **483**, 439
- Penny, L. R., Gies, D. R., & Bagnuolo, W.G., Jr. 1999, *ApJ* **518**, 450
- Penny, L. R., Seyle, D., Gies, D. R., et al. 2001, *ApJ* **548**, 889
- Penny, L. R., Gies, D. R., Wise, J.H., Stickland, D. J., & Lloyd, C. 2002, *ApJ* **575**, 1050
- Popper, D. M. 1996, *ApJS* **106**, 133
- Ribas, I., Fitzpatrick, E. L., Maloney, F. P., Guinan, E. F., & Udalski A., 2002, *ApJ* **574**, 771
- Ribas, I., Jordi, C., Vilardell, F., Fitzpatrick, E. L., Hilditch, R. W., & Guiman, E. F. 2005, *ApJ* **635**, L37
- Rossiter, R. A. 1924, *ApJ* **60**, 15
- Rucinski, S. M. 1992, *AJ* **104**, 1968
- Rucinski, Slavek M. 2002, *AJ* **124**, 1746
- Saad, S. M., Kubát, J., Hadrava, P., Harmanec, P., Koubský, P., Škoda, P., Šlechta, M., Korčáková, D., & Yang, S., 2005, *Ap&SS* **296**, 173
- Simkin, S. M. 1974, *A&A* **31**, 129
- Schlesinger, F. 1909a, *Publ. Allegheny Obs.*, **1**, 134
- Schlesinger, F. 1909b, *Publ. Allegheny Obs.*, **3**, 28
- Simon, K. P., & Sturm, E. 1994, *A&A* **281**, 286
- Simon, K.P., Sturm, E., & Fiedler, A. 1994, *A&A* **292**, 507
- Stassun, K. G., Mathieu, R. D., Vaz, L. P. R., Stroud, N., & Vrba, F. J. 2004, *AJS* **151**, 357
- Sturm, E., & Simon, K. P. 1994, *A&A* **282**, 93
- Thaller, M. L., Bagnuolo, W. G., Jr., Gies, D.R. , & Penny, L.R. 1995, *ApJ* **448**, 878



- Thrall, R. M., & Tornheim, L. 1963, *Vector Spaces and Matrices*, p. 127 (John Wiley & Sons, Inc., New York)
- Tonry, J., Jr., & Davis, M. 1979, *AJ* **84**, 1511
- Torres, K. B. V. 2002, MSc Dissertation, DF-ICEx-UFMG
- Torres, K. B. V., Vaz, L. P. R., Hensberge, H. 2004, in *ASP Conf. Ser. Vol. 318*, 114
- Torres, K. B. V., Vaz, L. P. R., Hensberge, H. 2007, in the *IAU Symposium No. 240*, “Binary stars as Critical Tools and Tests in Contemporary Astrophysics”, (eds. W. Hartkopf, E. Guiman, & P. Harmanec)
- Uytterhoeven, K., Briquet, M., Aerts, C., Telting, J. H., Harmance, P., Lefever, K., & Cuypers, J. 2005, *A&A* **432**, 955
- Vaz L.P.R., 1984, PhD Thesis, Copenhagen University Observatory, unpublished
- Vaz, L. P. R., Hensberge, H., Torres, K. B. V., et. al, 2008, em preparação
- Vaz, L. P. R., Andersen, J., & Rabello Soares, M. C. A. 1995, *A&AS* **301**, 693
- Vieira, E. F. 1991, Dissertação de Mestrado, Depto. de Física - ICEx - UFMG
- Verschueren, W. 1981, PhD Thesis, Free University of Brussels
- Weisstein, Eric W., 2007, “Convolution Theorem.” 2007, From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/ConvolutionTheorem.html>
- Willian, H. et al 1992, *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Second Edition, pp. 51–63.
- Willian, H. et al 2008, *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing* <http://www.nrbook.com/a/bookpdf/f2-6.pdf>
- Willians, A. M., et al. 2001, *ApJ* **548**, 425
- Wilson, R. E., & Devinney, E. J. 1971, *ApJ* **166**, 605
- Wilson, R. E. 1993, in *ASP Conf. Ser. Vol. 38*, 91
- Wood, D. B. 1971, *AJ* **76**, 701
- Wright, K. O. 1952, *Publ. DAO* **9**, 189
- Zucker, S., & Mazeh T. 1994, *ApJ* **420**, 806
- Zucker, S., Torres, G., & Mazeh, T. 1995, *ApJ* **452**, 863
- Zucker, S. 2004, in *ASP Conf. Ser. Vol 318*, 77
- Yakut, K., Tarasov, A. E., Ibanoglu, C., et al. 2003, *A&A* **405**, 1087
- Zverko, J., Žižňovský, J., & Kh hlova, V. L. 1997, *Contrib. Astron. Obs. Skalnaté Pleso* **27**, 41
- Zwahlen, N., North, P., Debernardi, Y., Eyer, L., Galland, F., Groenewegen, M. A. T., & Hummel, C. A. 2005, *A&A* **425**, L45