

**Análise de Escala em Bilhares com Fronteiras**

**Móveis**

Denis Gouvêa Ladeira

Março de 2008

# Análise de Escala em Bilhares com Fronteiras Móveis

Denis Gouvêa Ladeiara

Orientador: Prof. Dr. Jafferson Kamphorst Leal da Silva

Co-Orientador: Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Tese apresentada à  
Universidade Federal de Minas Gerais,  
como requisito parcial para a obtenção do grau de  
Doutor em Física.

Março de 2008

Página branca (ajeitando a numeração das páginas).

Página de assinaturas da banca.

À minha esposa, Jandira, e  
à minha filha, Luanna,  
dedico este trabalho.

# Agradecimentos

A Deus pela vida, pelo amor e pelas pessoas maravilhosas que colocou em minha convivência diária, tanto pessoal como profissional.

Ao Jafferson, orientador e amigo.

Ao Denis, co-orientador e xará, pelas discussões e dicas preciosas.

À minha esposa, Jandira, por me inspirar confiança e motivação quando preciso e à minha filha, Luanna, por tornar doce os momentos difíceis.

Aos amigos da pós-graduação. São tantos que enumerá-los seria um ato heróico. Seria desonesto, no entanto, não citar o Leonardo, Pablo, Talarico, Carlos, Júlio, Lauro, Alcides, Samir, o pessoal do Piauí, Lucas, Edson, Márcio, Robson, Andreza, Sidney, André, Marcelo, Humberto, enfim, obrigado pelos momentos de discussão e de descontração que tivemos juntos.

Aos meus pais, que mesmo distantes, sempre me apoiaram, e ao meu irmão, Alexandre.

Aos professores do departamento de física.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

# Resumo

Estudamos numericamente as propriedades de escala de alguns sistemas dinâmicos. Na transição do regime integrável para o não-integrável das versões completa e simplificada do modelo de Fermi-Ulam, investigamos a região de energia mais baixa (mar de caos). Calculamos quantidades médias como funções (a) do número de iteração  $n$  ou do tempo  $t$ , (b) da velocidade inicial e (c) do parâmetro de controle. Investigamos também as propriedades de escala do modelo *bouncer* simplificado mapeando-o no modelo padrão. O comportamento de escala aparece (i) na transição do regime integrável para o não-integrável (não-linearidade fraca), (ii) na transição do regime de crescimento limitado de energia para o regime onde existe aceleração de Fermi (crescimento ilimitado da energia) e (iii) no regime de não-linearidade forte. Estudamos também o modelo *bouncer* com colisões inelásticas da partícula contra a fronteira. Obtemos a descrição de escala da transição do regime de crescimento ilimitado para o de crescimento limitado de energia ao introduzir a dissipação. Descrevemos algumas propriedades do espaço de fase do bilhar circular pulsante simplificado e obtemos a descrição de escala de trajetórias pertencentes ao mar de caos na transição de integrável para não-integrável. Finalmente consideramos uma versão híbrida envolvendo os modelos de Fermi-Ulam e *bouncer*. Considerando colisões inelásticas descrevemos algumas propriedades do espaço de fase, como eventos de crise e cascatas de duplicação de período do sistema.

# Abstract

We study numerically the scaling properties of some dynamical systems. Near the transition from the integrable to the non-integrable regime of complete e simplified versions of Fermi-Ulam model, we investigate the region of low energy (chaotic sea). We evaluate average quantities as functions (a) of the iteration number  $n$  or the time  $t$ , (b) of the initial velocity and (c) of the control parameter. We also investigate the scaling properties of the simplified bouncer model by mapping it in the standard model. We obtain the scaling properties (i) of the integrable to non-integrable transition (weakly non-linear regime), (ii) of the transition from the regime of limited energy growth to the regime of Fermi acceleration (unlimited energy growth) and (iii) for the regime of big values of the non-linearity parameter. We also study the properties of the bouncer model with inelastic collisions between the particle and the wall. We obtain the scaling description of the transition from the unlimited to the limited energy growth when the dissipation is introduced. We describe some properties of the phase space of the pulsating circular billiard and we obtain the scaling description of the chaotic sea near the integrable to the non-integrable transition. Finally we study a hybrid version of the of Fermi-Ulam and bouncer models. Regarding inelastic collisions we present some properties of the phase space, as occurrence of crisis and cascades of period doubling.

---

---

# CONTEÚDO

---

<b>Agradecimentos</b>	<b>iv</b>
<b>Resumo</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Noções básicas de sistemas dinâmicos e leis de escala</b>	<b>4</b>
2.1 Introdução . . . . .	4
2.2 Sistemas conservativos, dissipativos e o volume no espaço de fase . . . . .	4
2.3 Pontos fixos e estabilidade . . . . .	8
2.4 Caos . . . . .	11
2.5 Integrabilidade, não-integrabilidade e o teorema KAM . . . . .	13
2.6 Seções de Poincaré e mapas . . . . .	14
2.7 Órbitas periódicas e estabilidade . . . . .	16
2.8 Órbitas homoclínicas e heteroclínicas . . . . .	19
2.9 Noções de teoria de escala . . . . .	21
2.10 Quantidades médias . . . . .	24

---

<b>3</b>	<b>O modelo de Fermi-Ulam</b>	<b>27</b>
3.1	Introdução . . . . .	27
3.2	O modelo simplificado . . . . .	29
3.2.1	O mapa . . . . .	30
3.2.2	Estabilidade dos pontos fixos . . . . .	31
3.2.3	Expansão em série de Taylor para a primeira curva invariante . . . . .	36
3.2.4	Precisão numérica . . . . .	37
3.2.5	Análise de escala . . . . .	38
3.3	O modelo completo . . . . .	47
3.3.1	O mapa . . . . .	47
3.3.2	Análise de escala . . . . .	49
3.3.3	Relação entre os expoentes $a$ e $a^*$ . . . . .	54
3.4	Diferenças entre as versões completa e simplificada . . . . .	55
3.4.1	Tempo máximo entre duas colisões . . . . .	56
3.5	Conclusões . . . . .	59
<b>4</b>	<b>O modelo <i>bouncer</i> simplificado e o mapeamento padrão</b>	<b>70</b>
4.1	Introdução . . . . .	70
4.2	O modelo <i>bouncer</i> e sua equivalência com o mapa padrão . . . . .	71
4.3	Propriedades do espaço de fase . . . . .	73
4.4	Análise de escala . . . . .	78
4.5	Transição de integrável para não-integrável . . . . .	78
4.5.1	Propriedades de escala da região de movimento regular . . . . .	79
4.5.2	Análise de escala da região de movimento caótico . . . . .	82

---

4.6	Regime $K \gtrsim K_c$ . . . . .	84
4.7	Regime de não-linearidades fortes ( $K \gg K_c$ ) . . . . .	87
4.8	Versão estocástica do mapa padrão . . . . .	92
4.9	Conclusões . . . . .	95
<b>5</b>	<b>O modelo <i>bouncer</i> dissipativo simplificado</b>	<b>98</b>
5.1	Introdução . . . . .	98
5.2	O modelo . . . . .	99
5.3	Análise de escala . . . . .	100
5.4	Relação entre as variáveis tempo e número de choques . . . . .	104
5.5	Conclusões . . . . .	106
<b>6</b>	<b>O bilhar circular pulsante simplificado</b>	<b>108</b>
6.1	Introdução . . . . .	108
6.2	A versão simplificada do bilhar circular . . . . .	109
6.3	Propriedades do espaço de fase . . . . .	113
6.4	Expansão em série de Taylor para a primeira curva invariante	116
6.5	Análise de escala . . . . .	120
6.6	Conclusões . . . . .	126
<b>7</b>	<b>Propriedades dinâmicas do modelo híbrido Fermi-Ulam-bouncer sob influência de dissipação</b>	<b>127</b>
7.1	Introdução . . . . .	127
7.2	O modelo . . . . .	128
7.3	Resultados numéricos . . . . .	133
7.3.1	Regime de dissipação fraca e moderada . . . . .	134

---

7.4	Limite de dissipação forte . . . . .	140
7.5	Aniquilação de pontos fixos . . . . .	144
7.6	Conclusões . . . . .	144
<b>8</b>	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>146</b>

---

---

## LISTA DE FIGURAS

---

2.1	<i>A figura ilustra um conjunto de condições iniciais delimitado por uma área <math>V</math>.</i>	5
2.2	<i>A figura ilustra a estabilidade de pontos fixos. Em (a) temos um ponto estável. Em (b) temos um ponto fixo instável. O gráfico (c) ilustra um ponto de sela. Os pontos espirais (d) e (e) correspondem, respectivamente, a um ponto estável e um instável. A figura (f) ilustra trajetórias em torno de um ponto fixo elíptico.</i>	11
2.3	<i>A figura ilustra uma trajetória de um sistema descrito pelas variáveis <math>x_1</math>, <math>x_2</math> e <math>x_3</math>. A seção de Poincaré consiste na intersecção da trajetória com a superfície de Poincaré que no caso é o plano <math>x_1 - x_2</math>.</i>	15
2.4	<i>O ponto de sela ilustra a seção de Poincaré de um ciclo de sela originalmente em um espaço tridimensional.</i>	19
2.5	<i>(a) A figura ilustra a intersecção de uma variedade instável com uma estável de um mesmo ponto de sela formando uma órbita homoclínica. (b) A figura mostra a intersecção entre uma variedade instável e uma estável de pontos de sela distintos formando uma órbita heteroclínica.</i>	21
3.1	<i>O modelo de Fermi-Ulam é constituído por um par de paredes paralelas entre as quais uma partícula move-se com velocidade constante.</i>	28
3.2	<i>Os referenciais <math>S</math> e <math>S'</math> e as velocidades <math>\vec{V}</math>, <math>\vec{V}_w</math> e <math>\vec{V}'</math>.</i>	30

- 3.3 *As figuras (a) e (b) ilustram, respectivamente, o espaço de fase das versões simplificada e completa do modelo de Fermi-Ulam para  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Observa-se que o espaço de fases de ambas as versões são muito semelhantes. As setas indicam a posição da curva invariante de energia mais baixa. . . . .* 32
- 3.4 *Pontos fixos no espaço de fase do modelo simplificado de Fermi-Ulam com  $\varepsilon = 10^{-3}$  e  $4 \leq m \leq 9$ . . . . .* 33
- 3.5 *A figura ilustra os valores característicos dos pontos fixos para  $\varepsilon = 10^{-3}$ . (a) Os pontos fixos com  $\phi^* = \pi$  são pontos de sela. Os pontos fixos com  $\phi^* = 0$  são pontos elípticos para  $m \leq 10$ , figura (b), e se tornam pontos de sela para  $m > 10$ , como ilustrado em (c). As linhas horizontais correspondem a  $|\Lambda| = 1$ . . . . .* 61
- 3.6 *Gráfico log-log de energias médias como funções de  $n$  calculadas utilizando precisão dupla e quádrupla. . . . .* 62
- 3.7 *As figuras ilustram curvas de energia do modelo simplificado de Fermi-Ulam em escalas log-log. As curvas em (a) correspondem ao caso em que  $V_0 < \varepsilon$ . Em (b) são mostradas as curvas de energia média para o caso  $V_0 > \varepsilon$ . Os mesmos valores de  $\varepsilon$  foram empregados em (a) e em (b). . . . .* 62
- 3.8 *Por meio de transformações apropriadas de escala obtemos o colapso das curvas de energia média para  $t \ll t_2$ . Em (a) temos as curvas para o caso  $V_0 < \varepsilon$ , com  $l = \varepsilon^{-1/b_1}$ , e em (b) para  $V_0 > \varepsilon$ , com  $l = V_0^{-1/c_1}$ . . . . .* 63
- 3.9 *As figuras ilustram, em escalas log-log, ajustes dos dados numéricos via o método dos mínimos quadrados. O procedimento fornece em (a) o expoente  $\beta$  e em (b) o expoente  $z$ . As barras de erro são menores que o tamanho dos símbolos. . . . .* 63
- 3.10 *As figuras ilustram o colapso das curvas de energia média para  $t \gg t_2$ . Em (a) temos as curvas para o caso em que  $V_0 < \varepsilon$  e em (b) para o caso  $V_0 > \varepsilon$ . Os valores dos expoentes são  $a_2 = 1.38 \pm 0.02$ ,  $b_2 = -0.92 \pm 0.01$  e  $c_2 = -0.46 \pm 0.01$ , e o fator de escala que escolhemos é  $l = \varepsilon^{-1/b_2}$ . . . . .* 64

- 3.11 *A figura (a) ilustra o comportamento das curvas do número de choques em função do tempo. Em (b) obtemos, por transformações apropriadas de escala, o colapso para tempos longos das curvas apresentadas em (a).* . . . . . 64
- 3.12 *Curvas de energia média como funções da variável  $t$  para o modelo de Fermi-Ulam completo. O caso em que  $V_0 = 10^{-6}$ , ou  $V_0 < \varepsilon$ , é mostrado em (a). Em (b) são mostradas as curvas de energia para  $V_0 > \varepsilon$ . Foram utilizadas  $M = 2 \times 10^3$  amostras caracterizadas por fases iniciais escolhidas aleatoriamente.* . . . 65
- 3.13 *A figura ilustra, em escalas logarítmicas, o gráfico do tempo de crossover  $t_2$  como função de  $\varepsilon$ .* . . . . . 65
- 3.14 *A figura ilustra o colapso das curvas de energia da figura 3.12 para tempos longos. Em (a) mostramos o colapso para  $V_0 < \varepsilon$  e em (b) para  $V_0 > \varepsilon$ .* . . . . . 66
- 3.15 *Gráficos log-log da energia média  $\langle \bar{E} \rangle(t)$  obtida como função de  $t$  para os mesmos valores de  $\varepsilon$  mostrados na figura 3.12(a). A figura da esquerda, (a), corresponde ao caso em que  $V_0 < \varepsilon$  e em (b) são mostradas as curvas para a situação na qual  $V_0 > \varepsilon$ .* 66
- 3.16 *Por meio das transformações  $\langle \bar{E} \rangle(t)/l$  e  $tl^a$ , com  $l = \varepsilon^{-1/b}$ , obtemos o colapso das curvas de energia originalmente apresentadas nas figuras 3.15(a) e (b).* . . . . . 67
- 3.17 *(a) A figura ilustra a energia média  $\langle \bar{E} \rangle(n)$ , como função do número de choques  $n$ , para diferentes valores do parâmetro de controle e velocidade inicial. Em (b) apresentamos o colapso das curvas mostradas em (a).* . . . . . 67
- 3.18 *(a) A região de cor cinza corresponde a possíveis combinações de velocidade e fase na região de energia baixa que resultam em colisão indireta no modelo completo de Fermi-Ulam. A figura (b) mostra, como função de  $\phi_n$ , o valor máximo de tempo para que ocorra uma colisão. Nas figuras (a) e (b) foi utilizado  $\varepsilon = 10^{-3}$ .* . . . . . 68

- 3.19 *As figuras ilustram os dados de uma órbita caótica do modelo completo que visitou a região de energia baixa. Em (a) temos os valores de velocidade e fase que correspondem a colisões indiretas. Em (b) temos o intervalo de tempo necessário para que estas colisões ocorram. Assim como na figura 3.18, utilizamos  $\varepsilon = 10^{-3}$ .* . . . . . 68
- 3.20 *Intervalo de tempo necessário para que ocorra uma colisão na versão simplificada do modelo de Fermi-Ulam. Os dados são de uma órbita caótica que visitou a região de energia baixa. Esta figura foi gerada com  $\varepsilon = 10^{-3}$ .* . . . . . 69
- 4.1 *O modelo bouncer é constituído de uma partícula em queda livre que colide elasticamente contra uma plataforma oscilante.* 71
- 4.2 *Em (a) é ilustrado o espaço de fase do mapa padrão para  $K = 10^{-3}$ , em (b) para  $K = 0.7$  e em (c) para  $K = 1.5$ .* . . . . . 74
- 4.3 *Em (a) são ilustrados os modos aceleradores para  $K = 7$ ,  $m = 1$  e  $l = 1$ . Em (b) o processo iterativo foi realizado utilizando as mesmas condições iniciais empregadas em (a), mas agora foi considerado  $I \bmod 2\pi$ .* . . . . . 77
- 4.4 *Gráfico log-log do valor médio  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$ , calculado para diferentes valores de  $K$  e  $I_0$ , como função de  $n$ . Estas curvas correspondem ao limite de valores pequenos da não-linearidade do mapeamento padrão.* . . . . . 79
- 4.5 *Em (a) temos o gráfico log-log de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)/n^\alpha$  versus  $K$  para  $n \ll n_x$ . Em (b) temos o gráfico log-log da iteração de crossover  $n_x$  como função de  $K$ . Os ajustes foram feitos via o método dos mínimos quadrados.* . . . . . 80
- 4.6 *Por meio de transformações apropriadas de escala obtemos o colapso das curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  da figura 4.4 em uma curva universal. O fator de escala que utilizamos é  $l = K^{-1/b}$ .* . . . . . 82
- 4.7 *A figura ilustra curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  calculadas como funções de  $n$  considerando órbitas pertencentes à região de movimento caótico.* . . . . . 83

- 4.8 Em (a) temos o gráfico log-log de  $n_x$  como função de  $K$  e em (b) temos o valor de saturação,  $\langle \bar{I}^2 \rangle_{\text{sat}}(n)$ , como função de  $K$ . O melhor ajuste aos dados fornece, respectivamente,  $z = -1.43 \pm 0.08$  e  $\gamma = 1.72 \pm 0.04$ . Os dados correspondem a condições iniciais pertencentes à região de movimento caótico para  $K < K_c$ . . . . . 83
- 4.9 Por meio das transformações de escala  $\langle \bar{I}^2 \rangle(n) \rightarrow \langle \bar{I}^2 \rangle(n)/l$  e  $n \rightarrow nl^a$ , com  $l = K^{-1/b}$ , obtemos o colapso das curvas de  $\langle \bar{I}^2 \rangle(n)$  correspondentes a órbitas caóticas para  $K < K_c$  (figura 4.7). . . . . 84
- 4.10 Curvas do valor médio de  $I^2$  caracterizando a transição de crescimento limitado para crescimento ilimitado de  $\langle \bar{I}^2 \rangle(n)$  ( $K_r = K - K_c \gtrsim 0$ ) do mapa padrão. . . . . 85
- 4.11 A figura (a) ilustra, em escalas log-log, o gráfico de  $n_x$  como função de  $K_r$ . Em (b) temos o gráfico de  $\langle \bar{I}^2 \rangle(n)/n$  versus  $K_r$ . O ajuste via mínimos quadrados fornece, respectivamente,  $z = -2.99 \pm 0.09$  e  $\beta = 3.06 \pm 0.05$ . . . . . 85
- 4.12 Colapso das curvas de  $\langle \bar{I}^2 \rangle(n)$  originalmente mostradas na figura 4.10 em uma curva universal. . . . . 87
- 4.13 A figura (a) ilustra, em escalas logarítmicas, curvas de  $\bar{I}^2$  em função de  $n$  para diferentes valores de  $K_r$ . (b) Colapso das curvas mostradas em (a) em uma curva universal. As grandezas médias  $\bar{I}^2$  e  $I^2$  são descritas pelos mesmos expoentes de escala. . . . . 88
- 4.14 A figura ilustra o crescimento ilimitado das curvas de  $\langle \bar{I}^2 \rangle(n)$  no regime de não-linearidade grande ( $K \gg K_c$ ) para diferentes valores de  $K$  e  $I_0$ . . . . . 88
- 4.15 Em escalas log-log temos: em (a) o gráfico de  $\langle \bar{I}^2 \rangle(n)/n$  versus  $K$ , em (b) o gráfico de  $n_x$  como função de  $I_0$  e em (c) a dependência de  $n_x$  no parâmetro  $K$ . O melhor ajuste dos dados fornece, respectivamente,  $\beta = 2.02 \pm 0.02$ ,  $z_1 = 1.98 \pm 0.02$  e  $z_2 = -1.98 \pm 0.02$ . . . . . 90

- 4.16 *Colapso das curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  originalmente mostradas na figura 4.14 em uma curva universal para o limite  $K \gg K_c$ . . . . .* 91
- 4.17 *Em escalas logarítmicas, temos na figura (a) a quantidade média  $\langle I^2 \rangle(n)$  como função de  $n$  para  $K \gg K_c$ . (b) Transformações apropriadas das escalas colapsam as curvas de  $\langle I^2 \rangle(n)$  em uma curva universal. . . . .* 92
- 4.18 *Em (a) mostramos o crescimento ilimitado das curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  para a versão estocástica do mapa padrão. Em (b) comparamos os resultados teóricos com os dados numéricos. A figura (c) ilustra o colapso das curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$ , originalmente mostradas em (a), em uma curva universal. . . . .* 94
- 5.1 *A figura ilustra uma curva típica da média do quadrado da velocidade para a versão simplificada do modelo bouncer dissipativo. . . . .* 100
- 5.2 *Em (a) temos curvas de rugosidade como funções do tempo para valores diferentes de  $\mu_r$  e  $\varepsilon$ . Em (b) temos as curvas de rugosidade apresentadas em (a) como funções da nova variável  $t\varepsilon^2$ . . . . .* 102
- 5.3 *As figuras ilustram, em escalas log-log, os ajustes via mínimos quadrados dos dados numéricos. Em (a) e (b) temos, respectivamente, os valores de saturação da rugosidade como funções de  $\varepsilon$  e de  $\mu_r$ . De forma similar, as figuras (c) e (d) ilustram os valores de  $t_z\varepsilon^2$  como funções de  $\varepsilon$  e de  $\mu_r$ . . . . .* 103
- 5.4 *A figura ilustra o colapso das curvas de rugosidade originalmente apresentadas na figura 5.2(b) em uma curva universal. . . . .* 105
- 5.5 *O número médio de choques como função de  $t\varepsilon^2$  apresenta dois regimes caracterizados por expoentes de crescimento diferentes. . . . .* 106
- 6.1 *A figura ilustra o bilhar circular e algumas de suas variáveis. . . . .* 110

- 6.2 *As figuras mostram a estrutura do espaço de fase do bilhar circular para  $\varepsilon = 10^{-4}$  e valores diferentes de  $V_\theta$ . Em (a) temos  $V_\theta = 10^{-3}$ , em (b) temos  $V_\theta = 5 \times 10^{-3}$  e (c) temos  $V_\theta = 1.7 \times 10^{-2}$ . . . . . 114*
- 6.3 *Em (a) temos o valor absoluto máximo de  $V_r$  para uma órbita caótica pertencente ao mar de caos para dois valores de  $\varepsilon$ . Em (b) temos a dependência de  $V_{r \max}$  no parâmetro  $\varepsilon$ . . . . . 115*
- 6.4 *A figura ilustra, em escalas linear-log, gráficos de  $K_c$ ,  $R^*$  e  $\Theta^*$  como funções de  $\varepsilon$ . Os dados correspondem a valores numéricos obtidos na primeira curva invariante. Utilizamos  $V_\theta = 10^{-4}$ , valor menor que  $V_{\theta c}$ . . . . . 119*
- 6.5 *A figura ilustra, em escalas lineares, gráficos de  $K_c$ ,  $R^*$  e  $\Theta^*$  como funções de  $V_\theta$  para  $V_\theta > V_{\theta c}$  e  $\varepsilon = 10^{-5}$ . . . . . 120*
- 6.6 *Em (a) temos  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$  como função de  $n$  para valores diferentes de  $V_\theta$ , em que  $V_\theta < V_{\theta c}$ . A figura (b) ilustra curvas de  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$  para valores diferentes de  $\varepsilon$  e  $V_{r,0}$ , com  $V_\theta = 10^{-4}$ . . . 121*
- 6.7 *As figuras ilustram, em escalas log-log, ajustes dos dados numéricos via método dos mínimos quadrados. Em (a) temos  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)/n^\alpha$  versus  $\varepsilon$ . Em (b) temos a dependência do valor de saturação no parâmetro  $\varepsilon$ . Em (c) temos o crossover,  $n_x$ , como função de  $\varepsilon$ . . . . . 122*
- 6.8 *Em (a) temos o colapso das curvas de  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$  em uma curva universal para  $V_\theta < V_{\theta c}$ . Em (b) temos uma ilustração do comportamento irregular das curvas de  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$  para  $V_\theta > V_{\theta c}$ . 125*
- 7.1 *As figuras ilustram as variedades estáveis e instáveis do ponto fixo de sela do modelo híbrido para  $m = 1$ ,  $\epsilon = 4 \times 10^{-2}$  e  $g = 10^{-4}$ . Em (a) foi empregado  $\mu = \nu = 0.96625$  e em (b)  $\mu = \nu = 0.968125$ . As figuras (c), (e) e (g) são ampliações das regiões indicadas na figura (a). De forma semelhante, as figuras (d), (f) e (h) mostram os detalhes indicados na figura (b) envolvendo a intersecção das variedades estável e instável do ponto de sela. . . . . 136*

- 7.2 *As figuras ilustram as variedades estáveis e instáveis do ponto de sela correspondente a  $m = 2$ ,  $\epsilon = 2 \times 10^{-2}$  e  $g = 10^{-4}$ . Em (a) empregamos  $\nu = 0.9$  e  $\mu = 1$  e em (b)  $\nu = 0.905$  e  $\mu = 1$ . . . . . 138*
- 7.3 *A figura ilustra as bacias de atração dos atratores da figura 7.2(a) ( $\epsilon = 2 \times 10^{-2}$ ,  $g = 10^{-4}$ ,  $\nu = 0.9$  e  $\mu = 1$ ). As regiões de cor cinza e marrom correspondem, respectivamente, às bacias de atração dos atratores espirais para  $m = 1$  e  $m = 2$ , e a cor preta indica a bacia de atração do atrator caótico. . . . . 139*
- 7.4 *A figura mostra os valores efetivos dos coeficientes de restituição que caracterizam a família de eventos de crise. Para todos os valores de  $\nu$  e  $\mu$  acima das curvas são observados eventos de crise e, como consequência, os atratores caóticos não existem e as órbitas convergem para o atrator espiral. Abaixo das curvas estão os valores de  $\nu$  e  $\mu$  para os quais não ocorre crise. Em ambas as figuras  $g = 10^{-4}$  e, em (a)  $m = 1$  e  $\epsilon = 4 \times 10^{-2}$ , e em (b)  $m = 2$  e  $\epsilon = 2 \times 10^{-2}$ . . . . . 140*
- 7.5 *Variando o parâmetro  $g$  observamos ocorrência de cascatas de duplicação de período nas variáveis fase (a) e velocidade (b). Em (c) mostramos o expoente de Lyapunov para as cascatas exibidas em (a) e (b). Os valores de parâmetros que utilizamos são  $\epsilon = 4 \times 10^{-2}$ ,  $\nu = 0.99$  e  $\mu = 0.4$ . . . . . 141*
- 7.6 *As figuras (a) e (b) ilustram as cascatas de duplicação de período da fase e da velocidade ao variar o parâmetro  $\epsilon$ . Os demais parâmetros assumiram valores fixos dados por  $g = 10^{-4}$ ,  $\nu = 0.99$  e  $\mu = 0.4$ . As órbitas de período 1 correspondem aos pontos fixos dados pela equação (7.32). Em (c) mostramos o expoente de Lyapunov associado aos diagramas de bifurcação apresentados nas figuras (a) e (b). . . . . 143*

- 7.7 *A figura ilustra o processo de destruição de pontos fixos para  $\epsilon = 4 \times 10^{-2}$  e  $g = 10^{-4}$ . Os gráficos mostram como os valores de fase (a) e de velocidade (b) dos pontos fixos do caso (iii) (equações (7.24) e (7.25)) variam em função de  $\mu = \nu$ . As curvas sólidas correspondem aos pontos fixos para  $m = 1$  e as tracejadas aos pontos fixos de ordem  $m = 2$ . O processo de aniquilação do par ocorre quando, para valores críticos de  $\mu = \nu$ , os dois pontos fixos se tocam. . . . . 145*

# Introdução

---

As propriedades dos sistemas físicos normalmente são descritas por equações diferenciais, muitas das vezes, não-lineares. Embora tais equações sejam difíceis de serem resolvidas, a teoria dos sistemas dinâmicos [1, 2] fornece diversas ferramentas para extrair resultados analíticos e numéricos que caracterizam o comportamento temporal destes sistemas. A classe de problemas dos bilhares constitui um dos tipos mais simples de sistemas dinâmicos [3]. Eles consistem de uma partícula confinada numa região do espaço delimitada por uma fronteira. As colisões da partícula com a fronteira podem ser elásticas ou inelásticas. A fronteira atua como uma força externa e sua posição no espaço pode ser estática ou dependente do tempo. Dependendo da geometria das fronteiras, os bilhares podem apresentar dinâmica integrável, não-integrável ou caótica, mesmo para os casos em que a fronteira é estática. Quando a posição da fronteira do bilhar é dependente do tempo [3], a energia cinética da partícula pode (i) apresentar crescimento ilimitado, fenômeno conhecido como aceleração de Fermi, ou (ii) permanecer limitada. Embora os bilhares possam ser descritos através da formulação Hamiltoniana, é mais fácil descrevê-los por meio de mapas discretos. Como o movimento da partícula entre uma colisão e outra é trivial, estes mapas descrevem a dinâmica dos bilhares no instante de cada colisão apenas. Apesar de simples, estes sistemas apresentam dinâmica bastante rica, o que motiva a investigação numérica e analítica de suas propriedades.

Neste trabalho dedicamo-nos ao estudo das propriedades do espaço de fase de alguns bilhares uni e bidimensionais. Estudamos as propriedades de escala [4, 5, 6] associadas a transições que estes bilhares apresentam, como a transição do regime integrável para o não-integrável e a transição do regime

---

de crescimento limitado de energia para o regime em que a energia cresce sem limites. A análise de escala é uma ferramenta importante pois fornece uma descrição unificadora no sentido de termos o mesmo comportamento das propriedades do sistema para valores diferentes dos parâmetros de controle quando tais parâmetros e as variáveis do sistema são renormalizadas adequadamente. Além disso, sistemas diferentes que apresentam os mesmos expoentes de escala podem ser colocados na mesma classe de universalidade [4, 5]. Esta abordagem foi aplicada com sucesso nos mapeamentos dissipativos unidimensionais,  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Feigenbaum [7, 8] descreveu a rota para o caos via bifurcação de períodos por funções de escala caracterizadas por dois expoentes. Utilizando a técnica de renormalização, Feigenbaum calculou os valores desses expoentes. A classe de universalidade é definida pelo termo não-linear de menor ordem da função  $f(x_n)$ . Todos os sistemas dissipativos unidimensionais com o termo não-linear  $x_n^2$ , por exemplo, são descritos pelo mesmo conjunto de expoentes. A abordagem de escala foi também aplicada ao decaimento, na variável iteração  $n$ , na vizinhança de bifurcações do mapeamento logístico [9].

O modelo de Fermi-Ulam [10, 11], o modelo *bouncer* simplificado [12] e o mapa padrão [13] são bilhares unidimensionais, descritos por mapeamentos bidimensionais. Estes sistemas pertencem a duas classes de universalidade distintas: (i) a de Fermi-Ulam e (ii) a do modelo *bouncer* e mapa padrão. Estudamos também as propriedades de escala do bilhar circular simplificado [14]. O bilhar circular é um sistema bidimensional. Mostraremos que para pequenos valores da componente tangencial da velocidade a descrição de escala é a mesma do modelo de Fermi-Ulam. Estudamos também as propriedades de escala quando dissipação é introduzida no modelo *bouncer* por meio de colisões inelásticas. Apresentamos, por fim, as propriedades do espaço de fase de uma versão híbrida envolvendo o modelo de Fermi-Ulam e o modelo *bouncer* [15, 16] considerando colisões inelásticas.

O trabalho é organizado da seguinte forma. No capítulo 2 apresentamos uma descrição elementar de alguns conceitos utilizados no estudo de sistemas dinâmicos e algumas propriedades de tais sistemas. Nos capítulos 3 e 4 introduzimos, respectivamente, os modelos de Fermi-Ulam e *bouncer*. Apresentamos algumas propriedades já conhecidas destes modelos e obtemos a descrição de escala destes sistemas. No capítulo 5 estudamos as propriedades de escala da versão dissipativa do modelo *bouncer*. No capítulo 6 estuda-

mos algumas propriedades do espaço de fase do bilhar circular e obtemos a descrição de escala deste sistema. No capítulo 7 estudamos as propriedades dinâmicas da versão híbrida Fermi-Ulam-*bouncer* com colisões inelásticas. Finalmente, apresentamos as conclusões no capítulo 8.

# Noções básicas de sistemas dinâmicos e leis de escala

---

## 2.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos uma descrição breve de algumas propriedades e ferramentas utilizadas no estudo de sistemas dinâmicos. Uma revisão detalhada sobre estes sistemas pode ser encontrada nas referências [1, 11, 17, 18]. Apresentaremos aqui apenas os conceitos que serão úteis nos capítulos seguintes. Um leitor que já está familiarizado com o assunto pode, caso prefira, iniciar a leitura a partir do próximo capítulo.

## 2.2 Sistemas conservativos, dissipativos e o volume no espaço de fase

Sistemas Hamiltonianos é o nome dado à classe de sistemas descrita por variáveis que obedecem as equações dinâmicas de Hamilton. Em geral, estes têm a propriedade de manter constante o valor de algumas quantidades como, por exemplo, a energia mecânica total ou o momento angular. Por esta razão estes sistemas também são conhecidos como conservativos. Neste trabalho denominamos como conservativos todos os sistemas que preservam o volume no espaço de fase, embora esta nomenclatura não seja a mais adequada. Outra classe importante é a dos sistemas dissipativos. Nesta classe de sistemas, o volume de uma região do espaço de fase se contrai para um objeto geométrico de dimensão inferior ao do espaço de fase original. Nesta seção discutimos brevemente estas duas classes de sistemas (conservativos e

dissipativos) sob o ponto de vista da evolução das trajetórias de condições iniciais que ocupam um determinado volume no espaço de fase.

Consideremos inicialmente o caso em que o espaço de fase do sistema é bidimensional. Notaremos que o resultado é facilmente generalizado para dimensões superiores. A figura 2.1 ilustra um conjunto de condições iniciais delimitado no espaço de fase pelas coordenadas  $(q_a, p_a)$  e  $(q_b, p_b)$ , em que  $q$  e  $p$  representam a coordenada e o momento generalizados. A área ocupada

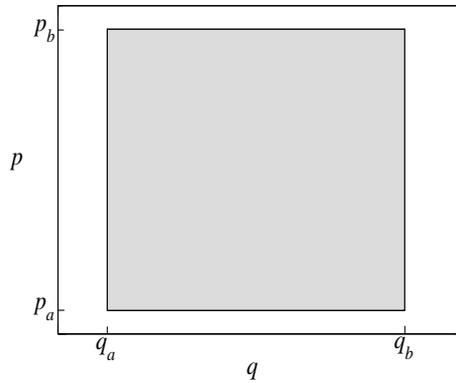


Figura 2.1: A figura ilustra um conjunto de condições iniciais delimitado por uma área  $V$ .

por este conjunto de condições iniciais é dada por

$$V = (q_b - q_a)(p_b - p_a). \tag{2.1}$$

Assim, definindo

$$\begin{aligned} f_q(q, p) &= \frac{dq}{dt}, \\ f_p(q, p) &= \frac{dp}{dt}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

temos que

$$\frac{dV}{dt} = (q_b - q_a)(f_p(q_a, p_b) - f_p(q_a, p_a)) + (p_b - p_a)(f_q(q_b, p_a) - f_q(q_a, p_a)) \tag{2.3}$$

Expandindo  $f_q(q_b, p_a)$  e  $f_p(q_a, p_b)$  em série de Taylor para  $q_b \approx q_a$  e  $p_b \approx p_a$

temos, até primeira ordem, que

$$\frac{dV}{dt} = (q_b - q_a) \left( (p_b - p_a) \frac{\partial f_p}{\partial p} \right) + (p_b - p_a) \left( (q_b - q_a) \frac{\partial f_q}{\partial q} \right). \quad (2.4)$$

Note que as derivadas são avaliadas no ponto  $(q_a, p_a)$ . Da expressão acima e de (2.1) temos, portanto,

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \frac{\partial f_q}{\partial q} + \frac{\partial f_p}{\partial p}. \quad (2.5)$$

A generalização para dimensões arbitrárias do espaço de fase é direta, sendo dada por

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f_{q_i}}{\partial q_i} + \frac{\partial f_{p_i}}{\partial p_i} \right). \quad (2.6)$$

Na formulação de Hamilton a evolução temporal de um sistema é descrita em termos de um conjunto de equações dinâmicas que fornecem as coordenadas e os momentos generalizados. No caso de um sistema com  $N$  graus de liberdade<sup>1</sup> tem-se que  $\tilde{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)$  é o conjunto de coordenadas generalizadas e  $\tilde{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$  o conjunto de momentos conjugados. Na situação mais geral a função Hamiltoniana é uma função das coordenadas generalizadas, dos momentos conjugados e do tempo, ou seja,  $H = H(\tilde{q}, \tilde{p}, t)$ .

Quando  $\partial H / \partial t = 0$  tem-se que  $H$  é uma constante do movimento. Além disso, o valor da função  $H$  coincide com a energia do sistema quando satisfeitas as duas condições [18]: (i) as equações de transformação que relacionam as coordenadas de posição e velocidade  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$  com as coordenadas generalizadas  $\tilde{q}$  e  $\tilde{p}$  não dependem do tempo e (ii) quando as forças são obtidas de potenciais conservativos.

Consideremos o caso em que  $H$  é a energia de um sistema e que esta seja uma constante do movimento. Neste caso uma trajetória não pode visitar qualquer região do espaço de fase. A órbita está vinculada a visitar regiões do espaço de fase com valor de energia dado pela configuração inicial.

Na formulação Hamiltoniana a dependência temporal de  $\tilde{q}$  e  $\tilde{p}$  é deter-

---

<sup>1</sup>Grau de liberdade é o nome dado a cada direção independente de movimento translacional ou rotacional de um corpo.

minada pelas soluções das equações de Hamilton:

$$\begin{aligned}\frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H(\tilde{q}, \tilde{p})}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H(\tilde{q}, \tilde{p})}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Das equações acima e da definição de  $f_q$  e  $f_p$ , equação (2.2), temos que

$$f_{q_i} = \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad f_{p_i} = \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.\tag{2.8}$$

Desta forma a soma do lado direito da equação (2.6) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_{q_i}}{\partial q_i} + \frac{\partial f_{p_i}}{\partial p_i} &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial}{\partial p_i} \left( -\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \\ &= 0.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Para sistemas Hamiltonianos tem-se, portanto,

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = 0.\tag{2.10}$$

Isto significa que o volume do espaço de fase é constante para sistemas conservativos.

Vamos agora discutir o caso dissipativo. Definindo um volume que englobe um conjunto de condições iniciais no espaço de fase, similarmente ao que foi feito na equação (2.1), observa-se que as trajetórias de um sistema dissipativo convergem para um objeto conhecido como atrator. A dimensão do atrator é menor que a dimensão do volume delimitado pelas condições iniciais. Neste caso o somatório da expressão (2.6) fornece um valor negativo. Para o caso bidimensional, por exemplo, o atrator pode ser unidimensional (uma linha) ou um ponto. O colapso do volume no espaço de fase é uma característica de sistemas dissipativos e, como consequência,  $dV/dt < 0$ .

## 2.3 Pontos fixos e estabilidade

Consideremos a situação em que um sistema com um grau de liberdade seja descrito em termos de um conjunto de equações diferenciais ordinárias autônomas<sup>2</sup> de primeira ordem da seguinte forma

$$\begin{aligned}\dot{q} &= f_q(q, p), \\ \dot{p} &= f_p(q, p).\end{aligned}\tag{2.11}$$

Os pontos fixos deste sistema, definidos por  $\dot{q} = 0$  e  $\dot{p} = 0$ , são obtidos resolvendo as equações

$$f_q(q^*, p^*) = f_p(q^*, p^*) = 0.\tag{2.12}$$

Aqui  $(q^*, p^*)$  são as coordenadas do ponto fixo. Quando trajetórias de condições iniciais vizinhas se aproximam assintoticamente do ponto fixo tem-se um ponto fixo estável. No caso de um ponto fixo instável as trajetórias vizinhas se afastam do ponto fixo. Assim a análise linear das funções  $f_q(q, p)$  e  $f_p(q, p)$  para  $(q, p) \approx (q^*, p^*)$  determina a estabilidade do ponto fixo. A expansão em série de Taylor de  $f_q(q, p)$  e  $f_p(q, p)$  em torno de  $(q^*, p^*)$  fornece, até primeira ordem,

$$\begin{aligned}f_q(q, p) &= f_q(q^*, p^*) + (q - q^*) \left. \frac{\partial f_q}{\partial q} \right|_{q^*, p^*} + (p - p^*) \left. \frac{\partial f_q}{\partial p} \right|_{q^*, p^*}, \\ f_p(q, p) &= f_p(q^*, p^*) + (q - q^*) \left. \frac{\partial f_p}{\partial q} \right|_{q^*, p^*} + (p - p^*) \left. \frac{\partial f_p}{\partial p} \right|_{q^*, p^*}.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Definindo  $\Delta\eta_1 = q - q^*$  e  $\Delta\eta_2 = p - p^*$ , e utilizando as equações (2.11)-(2.12), obtemos

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\eta}_1 &= f_q(p, q) - f_q(q^*, p^*) = \dot{q}, \\ \Delta\dot{\eta}_2 &= f_p(p, q) - f_p(q^*, p^*) = \dot{p}.\end{aligned}\tag{2.14}$$

---

<sup>2</sup>Autônoma é o nome dado à classe de equações diferenciais que não apresentam dependência explícita do tempo

Desta forma escrevemos (2.13) como

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{\eta}_1 \\ \Delta \dot{\eta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_q}{\partial q} & \frac{\partial f_q}{\partial p} \\ \frac{\partial f_p}{\partial q} & \frac{\partial f_p}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \eta_1 \\ \Delta \eta_2 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

A matriz do lado direito da expressão acima será representada pelo símbolo  $J$ . Assim a expressão acima pode ser escrita como

$$\Delta \dot{\tilde{\eta}} = J \Delta \tilde{\eta}. \quad (2.16)$$

A equação de autovalores

$$J \tilde{\eta} = \Lambda \tilde{\eta}, \quad (2.17)$$

onde  $\Lambda$  é o autovalor, permite discutir a estabilidade do sistema. O valor de  $\Lambda$  é obtido resolvendo a expressão

$$(J - \Lambda I) \tilde{\eta} = 0, \quad (2.18)$$

em que  $I$  é a matriz identidade  $2 \times 2$ . Supondo que a solução da expressão acima não seja trivial, ou seja,  $\tilde{\eta} \neq 0$ , temos que

$$\det(J - \Lambda I) = 0. \quad (2.19)$$

Como no caso presente as matrizes são  $2 \times 2$ , a expressão acima fornece duas soluções, dadas por

$$\Lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ \text{Tr} J \pm \sqrt{(\text{Tr} J)^2 - 4 \det J} \right] \quad (2.20)$$

De forma geral a solução da expressão (2.16) é escrita como

$$\Delta \tilde{\eta}(t) = \tilde{C}_1 e^{\Lambda_1 t} + \tilde{C}_2 e^{\Lambda_2 t}, \quad (2.21)$$

em que  $\tilde{C}_1$  e  $\tilde{C}_2$  são constantes de integração.

Se  $\Lambda_1 < 0$  e  $\Lambda_2 < 0$ , a distância entre a trajetória e o ponto fixo diminui no tempo. Neste caso o ponto fixo é estável. Quando  $\Lambda_1 > 0$  e  $\Lambda_2 > 0$ , as trajetórias vizinhas afastam-se do ponto fixo que, neste caso, é instável. A situação em que  $\Lambda_1 > 0$  e  $\Lambda_2 < 0$ , ou vice-versa, corresponde ao caso em que as trajetórias vizinhas se aproximam do ponto fixo em uma direção enquanto se afastam na outra direção. Neste caso o ponto fixo é chamado

de ponto de sela. Existe ainda a possibilidade de  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$  serem complexos (um conjugado do outro). Esta situação ocorre quando o argumento da raiz quadrada na expressão (2.20) se torna negativo. Neste caso o critério de estabilidade é dado pela parte real de  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$ . Para  $\text{Re}(\Lambda) < 0$  o ponto fixo é estável, pois trajetórias vizinhas se aproximam do ponto fixo. Por outro lado, quando  $\text{Re}(\Lambda) > 0$  então o ponto fixo é instável. Para  $\text{Im}\Lambda \neq 0$  as órbitas circulam enquanto se aproximam ou se afastam do ponto fixo que, neste caso, é classificado como ponto fixo espiral. Para o caso em que a parte real dos autovalores é nula, o ponto fixo é classificado como ponto fixo elíptico (ou centro estável).

A figura 2.2 ilustra o comportamento de algumas trajetórias nas proximidades de pontos fixos, marcados com o símbolo \*, com estabilidades diferentes. A figura 2.2(a) ilustra o caso em que as trajetórias convergem para o ponto fixo. Neste caso o ponto fixo é estável. A figura 2.2(b) mostra o caso em que o ponto fixo é instável. Neste caso as trajetórias se afastam do ponto fixo. A figura 2.2(c) ilustra um ponto de sela. As duas trajetórias que convergem para o ponto fixo são chamadas de variedades estáveis. As duas trajetórias que se afastam do ponto fixo são as variedades instáveis. Neste caso observa-se que as variedades estáveis e instáveis separam o espaço de fase em quatro partes. Por esta razão as variedades estáveis e instáveis são também conhecidas como separatrizes. Os pontos de sela são também chamados de pontos hiperbólicos.

As figuras 2.2(d) e (e) ilustram casos em que  $\Lambda$  é complexo. O ponto fixo da figura 2.2(d) corresponde a um ponto fixo espiral estável enquanto o ponto fixo da figura 2.2(e) corresponde a um ponto fixo espiral instável. A figura 2.2(f) ilustra a situação em que os valores característicos são complexos com  $\text{Re}(\Lambda) = 0$ . Neste caso o ponto fixo é chamado de ponto fixo elíptico.

Em sistemas que contraem volume no espaço de fase os pontos fixos das figuras 2.2(a) e (d) correspondem a atratores. As propriedades do atrator determinam, assim, o comportamento do sistema para tempos longos. De forma geral um sistema pode apresentar mais que um atrator. A bacia de atração de um determinado atrator é definida pelo conjunto de pontos do espaço de fase que evolui para este atrator em particular. Em espaços de fase com mais de um atrator as diferentes bacias de atração são separadas por variedades estáveis e instáveis (separatrizes) de pontos de sela.

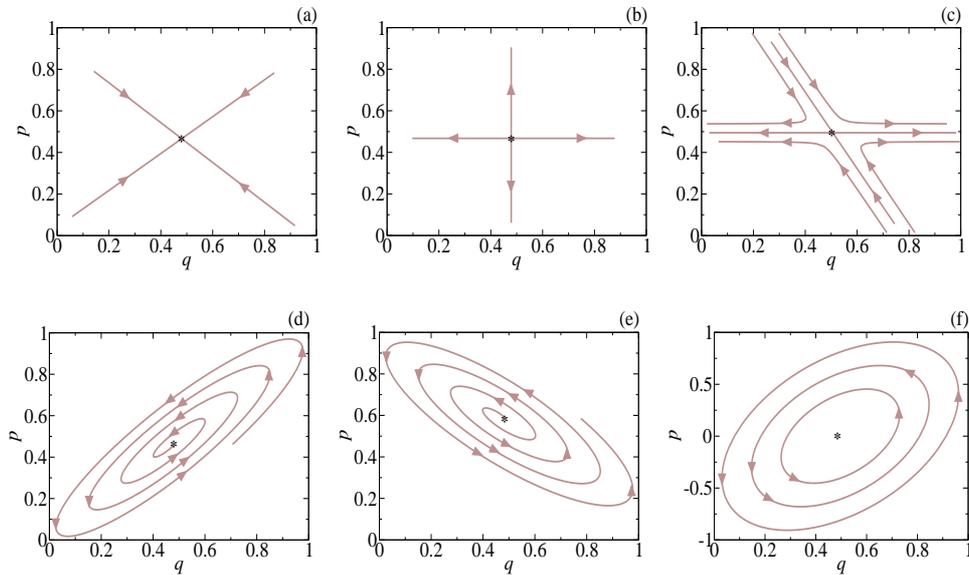


Figura 2.2: A figura ilustra a estabilidade de pontos fixos. Em (a) temos um ponto estável. Em (b) temos um ponto fixo instável. O gráfico (c) ilustra um ponto de sela. Os pontos espirais (d) e (e) correspondem, respectivamente, a um ponto estável e um instável. A figura (f) ilustra trajetórias em torno de um ponto fixo elíptico.

Finalizando esta seção, é importante mencionar que a estabilidade dos pontos fixos normalmente muda ao variar algum parâmetro de controle do sistema. O procedimento que acabamos de apresentar pode ser generalizado para sistemas com número maior de graus de liberdade. Em um espaço tridimensional, por exemplo, as variedades estáveis e instáveis de um ciclo de sela são superfícies em que trajetórias se aproximam ou se afastam deste ciclo. O ciclo de sela, neste caso, é uma trajetória fechada definida pela intersecção da superfície estável com a superfície instável.

## 2.4 Caos

Não existe definição única para o termo *caos*. Na definição dada por Hilborn [1], caos é um tipo de comportamento que satisfaz as seguintes condições:

- Trajetórias distintas não se interceptam,

- O espaço de fase é fechado e
- Órbitas próximas divergem exponencialmente.

As três condições acima não são satisfeitas simultaneamente para sistemas uni e bidimensionais. O teorema da não-intersecção de trajetórias [1, 19] declara que duas trajetórias distintas do espaço de fase nunca se cruzam, nem mesmo uma única trajetória se intercepta em algum instante de tempo. Este teorema é uma consequência dos princípios de soluções determinísticas e únicas das trajetórias. Em duas dimensões as órbitas possíveis são trajetórias que convergem assintoticamente para ciclos limites e pontos fixos. Em três ou mais dimensões, no entanto, as trajetórias podem se curvar e entrelaçar formando emaranhados. Assim as trajetórias passam de um lado para outro do espaço de fase sem que se cruzem.

A segunda restrição indica apenas que as órbitas estão numa região limitada do espaço de fase. A divergência de trajetórias próximas, terceira condição, é descrita pelo expoente de Lyapunov. Consideremos as trajetórias de duas condições iniciais próximas no espaço cartesiano tridimensional. Sendo  $\Delta x_0$  a separação inicial entre as trajetórias na coordenada  $x$ , a separação entre as duas trajetórias no instante  $t$  é dada por

$$\Delta x(t) = \Delta x_0 e^{\lambda_x t}, \quad (2.22)$$

em que  $\lambda_x$  é o expoente de Lyapunov associado à direção do eixo  $x$ . O mesmo raciocínio é aplicado para as componentes  $y$  e  $z$  da órbita. Quando pelo menos um dos valores de  $\lambda$  é positivo as trajetórias são classificadas como caóticas.

Em sistemas que contraem volume no espaço de fase pelo menos um expoente de Lyapunov é negativo, indicando a convergência das trajetórias para um atrator. Neste caso o volume definido por um conjunto de condições iniciais contrai à medida que o sistema evolui ( $dV/dt < 0$ ). Se o comportamento das órbitas no atrator é caótico (um dos valores de  $\lambda$  é negativo e um outro é positivo) tem-se então um *atrator caótico*, também conhecido como *atrator estranho*. Quando todos os expoentes de Lyapunov são negativos então as trajetórias evoluem para um ponto fixo ou para um atrator estranho não caótico, como demonstrado por Grebogi et al. [20]. No caso em todos os expoentes de Lyapunov são positivos então não existem atratores no espaço

de fase. Em sistemas conservativos a soma dos expoentes de Lyapunov é zero devido à preservação do volume no espaço de fase.

## 2.5 Integrabilidade, não-integrabilidade e o teorema KAM

Por questão de simplicidade vamos considerar a situação em que a energia é uma constante do movimento. O espaço de fase de um sistema com  $N$  graus de liberdade possui  $2N$  dimensões. Mas como a energia é conservada então as trajetórias evoluem numa superfície com  $2N - 1$  dimensões, caracterizada pelo valor constante da energia.

Alguns sistemas Hamiltonianos admitem que outras quantidades sejam constantes. O caso mais direto corresponde à situação na qual uma das componentes de  $\tilde{p}$  satisfaz a relação  $\dot{p}_j = -\partial H/\partial q_j = 0$ . Neste caso o momento conjugado  $p_j$  é uma constante do movimento e  $H$  não depende da coordenada generalizada  $q_j$ . Assim as trajetórias são confinadas não apenas a regiões do espaço de fase associadas a um valor particular de energia mas também que preservem o valor de  $p_j$ . Sendo assim as trajetórias estão confinadas numa superfície de  $2N - 2$  dimensões. Cada constante do movimento simplifica a geometria do espaço de fase reduzindo uma dimensão. Portanto, as trajetórias de um sistema com  $k$  constantes do movimento limita-se a uma superfície com  $2N - k$  dimensões.

Existe uma classe especial e limitada de sistemas cujo número de quantidades conservadas (constantes do movimento) é igual ao número de graus de liberdade. Os sistemas que pertencem a esta classe são conhecidos como integráveis [1]. Desta forma, as órbitas estão confinadas a uma superfície de  $N$  dimensões. De forma geral é dito que as trajetórias de um sistema integrável com  $N$  graus de liberdade estão vinculadas à superfície de um toro de  $N$  dimensões. Estes toros residem no espaço de fase original de  $2N$  dimensões e são chamados de toros invariantes.

Consideremos o caso de um sistema integrável com dois graus de liberdade. Logo as variáveis do espaço de fase são  $\tilde{q} = (q_1, q_2)$  e  $\tilde{p} = (p_1, p_2)$ . Suponha que, além da energia, a quantidade  $p_2$  também seja preservada. Temos, assim, duas constantes do movimento. Desta forma as trajetórias deste sistema estão confinadas à superfície bidimensional de um toro que se encon-

tra no espaço de fase original de quatro dimensões. Além disso, diferentes valores das constantes de movimento originam toros diferentes. Como a superfície do toro é bidimensional e as trajetórias nesta superfície não podem se interceptar, as órbitas possíveis são periódicas ou quase-periódicas. Neste case, portanto, trajetórias caóticas não existem.

Os sistemas não-integráveis podem apresentar uma dinâmica mais complexa, já que possuem mais variáveis que constantes de movimento. O menor número de vínculos permite que trajetórias visitem regiões do espaço de fase não necessariamente limitadas à superfície de toros. Assim movimento caótico torna-se possível.

A transição do regime integrável para o não-integrável é descrita pelo teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser, também conhecido como teorema KAM [21]. Considere o Hamiltoniano

$$H = H_0 + \varepsilon H_1. \quad (2.23)$$

O primeiro termo da direita corresponde à parte integrável do sistema e o segundo termo corresponde à contribuição dada pela parte não-integrável. A intensidade da não-integrabilidade é controlada pelo parâmetro  $\varepsilon$ . Para  $\varepsilon = 0$  o sistema é integrável e as trajetórias são periódicas ou quase-periódicas. Aumentando lentamente o valor de  $\varepsilon$  observa-se que os toros associados a órbitas periódicas são os primeiros a serem destruídos. Aumentando ainda mais a não-integrabilidade do sistema as trajetórias quase-periódicas começam a desaparecer. Primeiro são destruídas as órbitas quase-periódicas com frequências irracionais cujos valores são próximos aos de razões entre inteiros positivos  $m/n$ . O último toro a desaparecer corresponde à órbita quase-periódica com frequência irracional dada pelo número de ouro  $((\sqrt{5} - 1)/2)$ . Para valores de  $\varepsilon$  ainda maiores observa-se apenas órbitas caóticas.

## 2.6 Seções de Poincaré e mapas

O método de seção de Poincaré [1] consiste em obter os pontos de intersecção de trajetórias com uma superfície de  $2N - 1$  dimensões, em que  $2N$  é a dimensão do espaço de fase. Desta forma a seção de Poincaré simplifica a geometria do espaço de fase reduzindo uma dimensão. A superfície de intersecção é chamada de superfície de Poincaré.

A figura 2.3 ilustra o comportamento de uma trajetória no espaço de fase de um sistema descrito por três variáveis. Nesta figura, a superfície de Poincaré é definida pelo plano  $x_1 - x_2$ . A seção de Poincaré é gerada pelas sucessivas intersecções de trajetórias com este plano sempre que  $x_3$  passa de positivo para negativo. Dada uma condição inicial, consideremos que a primeira intersecção ocorra no ponto  $(x_1, x_2) = (u_0, v_0)$ . Posteriormente a trajetória intercepta a superfície de Poincaré nos pontos  $(u_1, v_1)$ ,  $(u_2, v_2)$ ,  $(u_3, v_3)$ ,  $\dots$ , como ilustra a figura 2.3. Vamos definir, portanto, que  $T$  seja uma transformação que permita obter o ponto  $(u_{n+1}, v_{n+1})$  a partir do ponto anterior pela aplicação  $T(u_n, v_n) = (u_{n+1}, v_{n+1})$ . Este processo nos leva ao conceito de mapas.

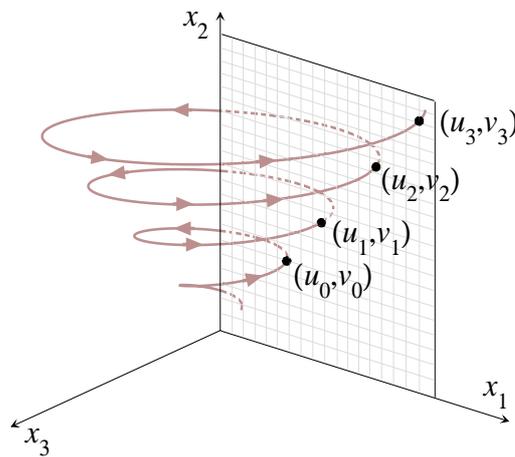


Figura 2.3: A figura ilustra uma trajetória de um sistema descrito pelas variáveis  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ . A seção de Poincaré consiste na intersecção da trajetória com a superfície de Poincaré que no caso é o plano  $x_1 - x_2$ .

Um mapa, ou mapeamento, consiste de um conjunto de equações que descrevem a dinâmica de um sistema via processo iterativo. Os mapas normalmente são obtidos ao descrever as intersecções de trajetórias no espaço de fase com superfícies de Poincaré. Em alguns casos, no entanto, os mapas podem modelar sistemas físicos mesmo quando as equações diferenciais que descrevem estes sistemas não são conhecidas [1].

A classe mais simples de mapas é aquela em que um sistema é descrito

por uma função de uma única variável da seguinte forma

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (2.24)$$

Um mapa unidimensional pode ser interpretado como a seção de Poincaré de um sistema cujo espaço de fase original é de dimensão maior ou igual a 2.

Para um sistema cujo espaço de fase é tridimensional, como o da figura 2.3, tem-se, neste caso, que a seção de Poincaré é bidimensional<sup>3</sup>. Sendo as soluções das equações diferenciais que descrevem a dinâmica do sistema únicas e determinísticas então existe um mapeamento que leva um ponto da seção de Poincaré ao próximo. Supondo que uma intersecção da trajetória com a superfície de Poincaré seja dada pelo ponto  $(u_n, v_n)$  então o próximo ponto da seção de Poincaré,  $(u_{n+1}, v_{n+1})$ , é dado pelo mapa bidimensional

$$T : \begin{cases} u_{n+1} = f_u(u_n, v_n), \\ v_{n+1} = f_v(u_n, v_n). \end{cases} \quad (2.25)$$

Assim, conhecendo o valor inicial  $(u_0, v_0)$  e as funções  $f_u$  e  $f_v$  do mapa temos essencialmente toda informação necessária para caracterizar o estado do sistema em tempos futuros. A generalização do método para espaços de fase com dimensão superior a três é direta.

## 2.7 Órbitas periódicas e estabilidade

Considerando ainda o mapa dado pela equação (2.25), tem-se que a órbita do ponto  $(u^*, v^*)$  é periódica com período  $p$  quando satisfeita a relação

$$\begin{aligned} u_{n+p} &= u_n, \\ v_{n+p} &= v_n, \end{aligned} \quad (2.26)$$

sendo  $p$  o menor inteiro que satisfaz as igualdades acima.

A estabilidade das órbitas periódicas é dada pelo comportamento de

---

<sup>3</sup>Em alguns casos, no entanto, existe a possibilidade de reduzir a dimensão da seção de Poincaré através de transformações apropriadas de variáveis. Em situações como esta um sistema com três ou mais variáveis poderia, por exemplo, ser descrito por um mapa unidimensional, como aquele dado por (2.24).

trajetórias próximas a estas órbitas. De maneira qualitativa uma órbita periódica é estável quando a evolução de uma condição inicial vizinha à órbita periódica é atraída para ela. Por outro lado, quando a evolução de uma condição inicial vizinha afasta-se da órbita periódica então esta órbita periódica é instável. É possível ainda a situação em que uma trajetória se aproxime da órbita periódica em determinadas direções enquanto se afasta em outras direções. Neste caso a órbita periódica é um ciclo de sela.

O tipo de órbita periódica mais simples ocorre quando  $p = 1$ . Neste caso esta órbita periódica é conhecida como ponto fixo. Uma órbita de período 2,  $p = 2$ , pode ser considerada como um ponto fixo da segunda aplicação do mapa. Definindo  $T^{(m)}$  como a  $m$ -ésima aplicação do mapa, o mesmo raciocínio é sucessivamente aplicado para órbitas com período  $m$  e reduzindo-as a pontos fixos de  $T^{(m)}$ . Sendo assim faremos toda a análise de estabilidade considerando pontos fixos.

A estabilidade do ponto fixo é determinada através da análise linear da trajetória de uma condição inicial  $(u_0, v_0)$  em torno do ponto fixo. Assim, expandindo  $f_u(u_n, v_n)$  e  $f_v(u_n, v_n)$  (equação (2.25)) em série de Taylor temos, até primeira ordem,

$$\begin{aligned} f_u(u_0, v_0) &= f_u(u^*, v^*) + (u_0 - u^*) \left. \frac{\partial f_u}{\partial u} \right|_{u^*, v^*} + (v_0 - v^*) \left. \frac{\partial f_u}{\partial v} \right|_{u^*, v^*}, \\ f_v(u_0, v_0) &= f_v(u^*, v^*) + (u_0 - u^*) \left. \frac{\partial f_v}{\partial u} \right|_{u^*, v^*} + (v_0 - v^*) \left. \frac{\partial f_v}{\partial v} \right|_{u^*, v^*} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Definindo

$$\tilde{\zeta} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

e a separação entre a trajetória e o ponto fixo como

$$\Delta \tilde{\zeta}_1 = \begin{pmatrix} u_1 - u^* \\ v_1 - v^* \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

a expressão (2.27) pode ser reescrita na forma matricial

$$\Delta \tilde{\zeta}_1 = J \Delta \tilde{\zeta}_0, \quad (2.30)$$

em que  $J$  é a matriz

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_u}{\partial u} & \frac{\partial f_u}{\partial v} \\ \frac{\partial f_v}{\partial u} & \frac{\partial f_v}{\partial v} \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Após  $n$  iterações temos que

$$\Delta \tilde{\zeta}_n = J^n \Delta \tilde{\zeta}_0, \quad (2.32)$$

As derivadas na expressão (2.31) devem ser avaliadas no ponto fixo  $(u^*, v^*)$ . Como discutido na seção 2.3, os valores característicos são obtidos resolvendo a equação (2.19) cujas soluções são dadas por (2.20). Para o caso bidimensional tem-se portanto dois valores característicos,  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$ . Nas proximidades do ponto fixo, temos, portanto,

$$\Delta \tilde{\zeta}_n = \tilde{D}_1 \Lambda_1^n + \tilde{D}_2 \Lambda_2^n, \quad (2.33)$$

em que  $\tilde{D}_1$  e  $\tilde{D}_2$  são constantes cujos valores são determinados a partir das condições iniciais.

Da expressão acima observa-se, portanto, que a condição de estabilidade para mapas é ligeiramente diferente daquela utilizada para equações diferenciais (seção 2.3). Quando  $|\Lambda_1| < 1$  e  $|\Lambda_2| < 1$ , vemos da equação (2.33) que o ponto fixo é estável, pois a distância entre a trajetória e o ponto fixo diminui com o número de iterações. Quando  $|\Lambda_1| > 1$  e  $|\Lambda_2| > 1$ , o ponto fixo é classificado como instável (ou nó instável). Na situação em que  $|\Lambda_1| < 1$  e  $|\Lambda_2| > 1$ , ou vice-versa, a trajetória se aproxima do ponto fixo em uma direção enquanto se afasta na outra direção. Neste caso tem-se um ponto fixo de sela, ou simplesmente ponto de sela.

Existe ainda a possibilidade de  $\Lambda$  ser complexo. Nesta situação  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$  formam um par conjugado complexo e os pontos da órbita que interceptam a superfície de Poincaré giram em torno do ponto fixo. O critério de estabilidade é idêntico ao apresentado acima para  $\Lambda$  real. Para  $|\Lambda_1| < 1$  e  $|\Lambda_2| < 1$  as trajetórias vizinhas giram enquanto se aproximam do ponto fixo estável. Por outro lado, quando  $|\Lambda_1| > 1$  e  $|\Lambda_2| > 1$ , as trajetórias giram enquanto se afastam do ponto fixo que, neste caso, é instável.

Para sistemas que contraem o volume no espaço de fase tem-se que

$\Lambda_1\Lambda_2 < 1$ , e para os que conservam o volume  $\Lambda_1\Lambda_2 = 1$ . Note que o procedimento utilizado aqui pode ser estendido para mapas com dimensão maior que dois. O número de valores característicos fornecidos pela equação (2.19) é igual ao número de dimensões do mapa que descreve o sistema.

## 2.8 Órbitas homoclínicas e heteroclínicas

Para entendermos o que são órbitas homoclínicas precisamos primeiramente discutir algumas propriedades dos pontos de sela. Vamos considerar o caso particular de um sistema cujo espaço de fase é tridimensional, mas o raciocínio pode ser generalizado para dimensões superiores. Desta forma a seção de Poincaré é representada em duas dimensões. Além disso, definimos  $T$  como o mapa que leva o ponto  $(u_n, v_n)$  da seção de Poincaré ao próximo ponto,  $T(u_n, v_n) = (u_{n+1}, v_{n+1})$ .

No espaço de fase original uma órbita cíclica é uma linha que forma uma trajetória fechada. Assim um ciclo de sela é uma linha que corresponde à intersecção de duas superfícies. Uma destas superfícies é uma variedade estável e a outra é instável. A seção de Poincaré deste ciclo de sela corresponde a um ponto de sela. A seção de Poincaré das superfícies estáveis e instáveis do ciclo de sela geram as variedades estáveis e instáveis mostradas na figura 2.4.

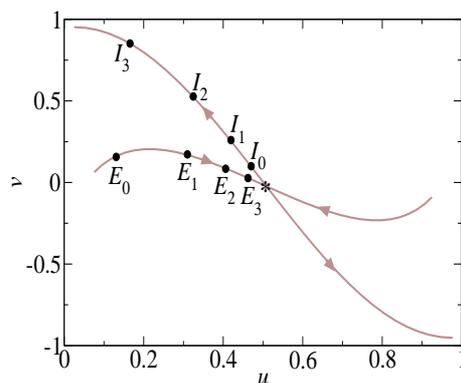


Figura 2.4: O ponto de sela ilustra a seção de Poincaré de um ciclo de sela originalmente em um espaço tridimensional.

No espaço de fase original as trajetórias evoluem suavemente. Na seção de Poincaré, contudo, tem-se uma seqüência discreta de pontos que corres-

pondem às intersecções da trajetória com a superfície de Poincaré. Consideremos primeiramente uma condição inicial  $I_0 = (u_0, v_0)$  sobre uma das variedades instáveis (figura 2.4). A aplicação do mapa de Poincaré  $T$  ao ponto  $I_0$  resulta no ponto  $I_1$ . Sucessivamente obtém-se uma série de pontos  $T(I_1) = I_2, \dots, T(I_n) = I_{n+1}$  que divergem do ponto de sela. Por outro lado, a aplicação sucessiva do mapa  $T$  em uma condição inicial  $E_0 = (u_0, v_0)$  que esteja sobre uma das variedades estáveis gera uma seqüência de pontos que converge assintoticamente para o ponto de sela, como ilustra a figura 2.4. As curvas desta figura, portanto, não representam trajetórias suaves mas a totalidade de órbitas de vários pontos iniciais próximos.

Ao variar o parâmetro de controle do sistema é possível que as variedades estáveis e instáveis do ponto se aproximem e, eventualmente, se interceptem, como ilustrado na figura 2.5(a). Quando isto ocorre diz-se que ocorreu uma intersecção homoclínica. Os pontos de intersecção são chamados de pontos homoclínicos e o processo iterativo de  $T$  em qualquer um destes pontos gera uma seqüência de pontos de intersecção conectando o ponto de sela a ele mesmo. Por isso, esta seqüência de pontos é conhecida como órbita homoclínica. À medida que a aplicação do mapa  $T$  de Poincaré prossegue observa-se que a órbita homoclínica se aproxima assintoticamente do ponto de sela, gerando infinitos pontos homoclínicos.

Nas intersecções homoclínicas, ao aproximar do ponto de sela a amplitude da variedade instável tende a crescer devido à influência repulsiva do ponto de sela. Desta forma o processo iterativo da variedade instável, dado pelo mapa de Poincaré, gera órbitas que se afastam e aproximam do ponto de sela formando no regime assintótico uma estrutura complexa chamada de emaranhado homoclínico.

É importante notar que o fato de as curvas suaves da figura 2.5 não serem trajetórias individuais garante que o teorema da não-intersecção não seja violado.

O mesmo tipo de comportamento pode ocorrer em sistemas que possuem mais de um ponto de sela. A figura 2.5(b) ilustra uma situação em que ocorre intersecção entre uma variedade instável de um ponto de sela com uma variedade estável do outro ponto de sela. De forma similar ao caso anterior os pontos de intersecção são chamados de pontos heteroclínicos e formam uma órbita heteroclínica que converge para um dos pontos de sela

(figura 2.5(b)). Também são possíveis situações em que órbitas heteroclínicas conectam três ou mais pontos de sela.

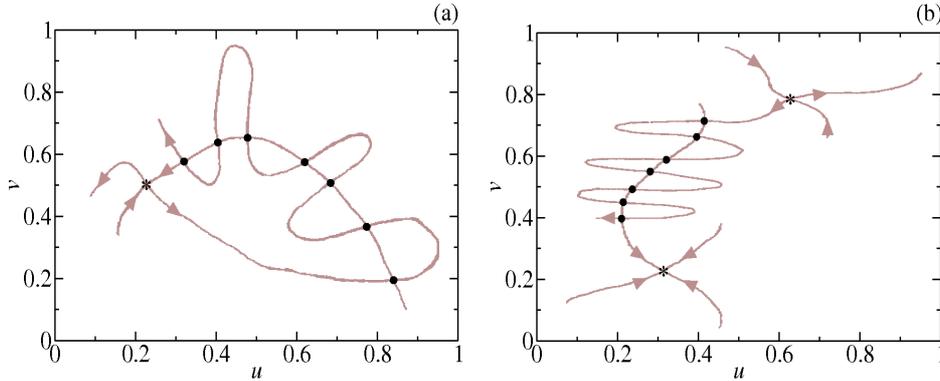


Figura 2.5: (a) A figura ilustra a intersecção de uma variedade instável com uma estável de um mesmo ponto de sela formando uma órbita homoclínica. (b) A figura mostra a intersecção entre uma variedade instável e uma estável de pontos de sela distintos formando uma órbita heteroclínica.

## 2.9 Noções de teoria de escala

Introduzimos os conceitos de teoria de escala utilizando a linguagem das transições de fase de segunda ordem [4, 5, 6]. Seja  $m(k, h, t)$  a magnetização de um sistema ferromagnético que evolui no tempo  $t$  devido a uma dinâmica estocástica. A variável  $k = (T_c - T)/T_c$  é o desvio relativo da temperatura crítica  $T_c$  e  $h$  é o campo magnético externo. Em  $t = 0$  o sistema se encontra fora do equilíbrio, mas está em equilíbrio termodinâmico quando  $t \rightarrow \infty$ . Considere que estejamos no equilíbrio. Perto do ponto crítico ( $k = 0, h = 0, t \rightarrow \infty$ ), o sistema é descrito experimentalmente (ou numericamente) por leis de potência. Assim temos que a magnetização espontânea (magnetização a campo nulo) se comporta como

$$m(k, 0, \infty) \propto k^\beta, \quad (2.34)$$

onde  $\beta$  é um expoente crítico determinado por meio de um ajuste via o método dos mínimos quadrados no gráfico log-log de  $m$  versus  $k$ . Já o comportamento da magnetização em cima da temperatura crítica ( $k = 0$ ) como

função do campo é dado por

$$m(0, h, \infty) \propto h^\delta, \quad (2.35)$$

onde  $\delta$  é outro expoente crítico determinado de forma experimental ou numérica.

Podemos agora considerar a relaxação do sistema para o equilíbrio quando o campo externo é nulo ( $h = 0$ ). Neste caso, o sistema é descrito por  $m(k, 0, t)$ . Quando o tempo é muito menor que o tempo de relaxação do sistema,  $\tau$ , o sistema está fora do equilíbrio. Por outro lado, se  $t \gg \tau$  o sistema se encontra no equilíbrio. O tempo de relaxação depende da temperatura, ou seja, depende de  $k$ . A medida que a temperatura se aproxima da temperatura crítica,  $\tau$  cresce rapidamente como

$$\tau \propto k^{-z}, \quad (2.36)$$

onde  $z$  é o expoente dinâmico, em geral determinado experimental ou numericamente. A variável  $\tau$  controla o *crossover*, isto é, a passagem do regime de não equilíbrio para o regime de equilíbrio.

Estes comportamentos em lei de potência obtidos de forma experimental ou numérica podem ser explicados, em princípio, através da análise de escala. Suponha que a magnetização  $m(k, h, t)$  seja uma função homogênea generalizada [4, 5, 6], isto é, que  $m$  satisfaça a relação

$$m(k, h, t) = lm(l^a k, l^b h, l^c t), \quad (2.37)$$

para qualquer valor do fator de escala  $l$  e para determinados valores dos expoentes de escala  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Para obter o comportamento da equação (2.34) e determinar como é que o expoente  $\beta$  está relacionado com os expoentes de escala, basta escolhermos  $l = k^{-1/a}$ . Assim a relação acima se torna

$$m(k, h, t) = k^{-1/a} m(1, k^{-b/a} h, k^{-c/a} t). \quad (2.38)$$

Como  $h = 0$  e  $t \rightarrow \infty$ , obtemos

$$m(k, 0, \infty) = k^{-1/a} m(1, 0, \infty). \quad (2.39)$$

Comparando esta equação com a (2.34), obtemos que  $a = -1/\beta$  se con-

siderarmos que  $m(1, 0, \infty)$  é uma constante finita. O comportamento da magnetização de equilíbrio ( $t \rightarrow \infty$ ) em  $k = 0$ , dada pela equação (2.35), é obtido colocando-se  $l = h^{-1/b}$  na equação (2.37):

$$m(0, h, \infty) = h^{-1/b} m(0, 1, \infty). \quad (2.40)$$

Supondo que  $m(0, 1, \infty)$  é constante, obtemos da equação (2.35) que a relação entre o expoente experimental  $\delta$  e os expoentes de escala é  $b = -1/\delta$ .

A relação entre o expoente dinâmico  $z$  e os expoentes de escala surge se considerarmos que  $l = k^{-1/a}$ ,  $h = 0$  e que  $t$  é finito. Dessa forma, a equação (2.38) pode ser escrita como

$$m(k, 0, t) = k^{-1/a} g\left(\frac{t}{k^{c/a}}\right), \quad (2.41)$$

onde  $g(x) = m(1, 0, x)$  com  $x = t/k^{c/a}$ . A função  $g(x)$  pode ter um comportamento quando  $x \ll 1$  e outro comportamento no caso de  $x \gg 1$ . Sabemos que quando  $t \rightarrow \infty$ , ou seja quando  $x \gg 1$ , a magnetização espontânea só depende de  $k$ , o que implica que  $g(\infty)$  é constante. Por outro lado, se  $t = 0$  a magnetização deve ter o valor inicial independentemente do valor de  $k$ . A dependência em  $k$  da magnetização pode desaparecer somente se

$$g(x) \approx x^y \approx \frac{t^y}{k^{cy/a}}, \quad (2.42)$$

quando  $x \ll 1$  e  $y$  assumir um valor particular ( $y = -1/c$ ). Antes de prosseguirmos, gostaríamos de enfatizar que esta forma de  $g(x)$  (ou de  $m(1, 0, x)$ ) é a forma mais geral compatível com a teoria de escala, pois se  $y = 0$ , obtemos que  $g \approx$  constante. Em outras palavras,  $g(x)$  admite um *crossover* controlado por  $k^{c/a}$  e, portanto, da equação (2.41) temos que o tempo  $\tau$  de relaxação do sistema deve ser proporcional a  $k^{c/a}$ . Assim, considerando  $x \approx 1$  para  $t \approx \tau$  obtemos da equação (2.36) que  $z = -c/a$ .

Note que os expoentes de escala são determinados a partir dos expoentes medidos:  $a = -1/\beta$ ,  $b = -1/\delta$  e  $c = z/\beta$ . O conhecimento dos expoentes de escala permite também o colapso de curvas numa curva única, a chamada curva universal. Por exemplo, suponha que tenhamos obtido experimentalmente, ou numericamente, gráficos de  $m$  versus  $t$  para valores diferentes de  $k$ , todos com  $h = 0$ . Vemos da equação (2.41) que se colocarmos no eixo  $y$  a

variável renormalizada  $y = m(k, 0, t)k^{1/a}$  e no eixo  $x$  a variável renormalizada  $x = t/k^{c/a}$ , todas as curvas representarão a mesma função  $g(x)$ . As novas variáveis  $x$  e  $y$  são chamadas de variáveis de escala, ou renormalizadas, e a curva  $g(x)$  é a curva universal. Observe que a descrição de escala é obtida do comportamento da grandeza de interesse, no caso a magnetização  $m$ , como função de suas variáveis [4, 5, 6].

## 2.10 Quantidades médias

Nesta seção apresentamos o procedimento utilizado para o cálculo das quantidades médias que serão utilizadas nos próximos capítulos. Exemplos de quantidades médias que estudaremos são a energia média e o desvio quadrático médio da velocidade de uma partícula em um bilhar.

Nas seções anteriores discutimos algumas propriedades de sistemas dinâmicos e o comportamento de trajetórias no espaço de fase. Como vimos, a dinâmica do sistema pode, de forma geral, ser descrita de duas formas: (i) Utilizando o espaço de fase original com  $2N$  dimensões, onde  $\tilde{q}$  e  $\tilde{p}$  variam continuamente no tempo ou (ii) utilizando a seção de Poincaré, em que as variáveis do sistema são avaliadas de forma discreta no tempo por meio de mapas. Portanto o cálculo de quantidades médias pode ser feito considerando estas duas possibilidades.

Consideremos o caso de uma trajetória no espaço de fase original. O valor de uma grandeza  $f$  do sistema varia de forma contínua no tempo. Desta forma o valor médio de  $f(t)$ , obtido ao longo da trajetória, é definido por

$$\overline{f}_i(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f_i(\tau) d\tau, \quad (2.43)$$

em que  $i$  representa uma trajetória particular.

Considerando um conjunto de  $M$  trajetórias, caracterizadas por condições iniciais diferentes, definimos a quantidade média

$$\langle \overline{f} \rangle(t) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \overline{f}_i(t). \quad (2.44)$$

A grandeza definida acima corresponde ao valor médio de  $f$  obtido desde

o instante  $t = 0$  até o instante  $t$  para trajetórias de  $M$  condições iniciais. Alternativamente definimos  $\langle f \rangle(t)$  como a quantidade média dada por

$$\langle f \rangle(t) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M f_i(t). \quad (2.45)$$

A quantidade média acima é, portanto, obtida no instante  $t$  para  $M$  condições iniciais.

Definimos ainda o desvio quadrático médio de  $f$  como a quantidade dada por [22]

$$\langle \bar{\omega} \rangle(t) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sqrt{\overline{f_i^2}(t) - \overline{f_i}(t)^2}. \quad (2.46)$$

A grandeza  $f$  varia de forma discreta em cada intersecção da trajetória com a superfície de Poincaré. Desta forma, versões análogas das expressões acima são utilizadas para definir quantidades médias para a seqüência discreta de pontos fornecida pelo método de Poincaré. Assim, definimos o valor médio de  $f$  calculado ao longo da órbita, entre a primeira e a  $n$ -ésima intersecção, como

$$\overline{f_i}(n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f_{i,j}. \quad (2.47)$$

O subscrito  $i$  corresponde a uma trajetória particular e o subscrito  $j$  corresponde às intersecções de Poincaré.

Considerando um conjunto de  $M$  trajetórias de Poincaré, caracterizadas por condições iniciais diferentes, definimos a quantidade média

$$\langle \bar{f} \rangle(n) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \overline{f_i}(n). \quad (2.48)$$

De forma similar à equação (2.44), a expressão acima representa o valor médio de  $f$  desde a primeira até a intersecção  $n$  de Poincaré para um conjunto de  $M$  órbitas.

Definimos também o valor médio de  $f$  obtido para  $M$  trajetórias no

$n$ -ésimo ponto de intersecção de Poincaré como

$$\langle f \rangle(n) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M f_i. \quad (2.49)$$

Antes de finalizarmos a discussão é interessante mencionar que de acordo com o teorema ergódico [6] temos, nos casos limites  $t \rightarrow \infty$  (ou  $n \rightarrow \infty$ ) e  $M \rightarrow \infty$ , que  $\bar{f} = \langle f \rangle$ .

---

# O modelo de Fermi-Ulam

---

## 3.1 Introdução

O acelerador de Fermi é um sistema dinâmico proposto por Enrico Fermi [23] com o objetivo de compreender o processo pelo qual os raios cósmicos adquirem altas energias. O modelo consiste basicamente de uma partícula carregada que interage com campos magnéticos dependentes do tempo. Posteriormente, vários autores propuseram versões do modelo original adaptadas para diferentes aplicações. Uma destas versões é o modelo *bouncer* [12], que apresentaremos no próximo capítulo. Estes sistemas foram também investigados experimentalmente e os dados foram comparados aos resultados teóricos [24, 25]. Além disso, versões quânticas destes modelos também foram implementadas e investigadas [26, 27]. O estudo destes sistemas é de grande importância pois encontra aplicação em diversas áreas da física como óptica [28, 29], física atômica [30, 31, 32], física de plasmas [33] e astrofísica [34, 35].

Neste capítulo discutimos uma destas versões, o modelo de Fermi-Ulam [10, 36]. Neste modelo uma partícula é confinada entre uma parede rígida fixa e outra que se move periodicamente no tempo. O modelo desconsidera a presença de campo gravitacional no espaço localizado entre as duas paredes. Desta forma, a partícula move-se com velocidade constante entre duas colisões. A partícula interage unicamente com as paredes via colisões elásticas, nas quais ocorre transferência de momento e energia.

Na figura 3.1 temos uma ilustração do modelo de Fermi-Ulam. A parede fixa encontra-se na posição  $x = 0$  e atua invertendo o sentido do momento da partícula, caracterizando, assim, o mecanismo pelo qual a partícula retorna

para a parede móvel. A parede móvel oscila em torno da posição  $x = l$  de acordo com a relação  $x(t') = l + \epsilon \cos(\omega t' + \phi_0)$ , em que  $\epsilon$  é a amplitude de oscilação,  $t'$  é o tempo,  $\phi_0$  é a fase inicial e  $\omega$  é a frequência de oscilação. Contudo é apropriado descrevermos o sistema em termos de variáveis adimensionais. Definimos, portanto,  $X = x/l$  como a posição da parede oscilante e  $t = \omega t'$  como a nova variável de tempo. Definimos, também, a variável  $\phi(t) = (t + \phi_0)$  e descrevemos a posição da parede oscilante como  $X(t) = 1 + \epsilon \cos \phi(t)$ , em que  $\epsilon = \epsilon/l$  é a amplitude de oscilação adimensional. Em termos destas novas variáveis a velocidade da parede varia no tempo de acordo com a relação  $\dot{X}(t) = -\epsilon \sin \phi(t)$ . Definindo  $V = v/l\omega$ , a energia média adimensional da partícula é dada por  $E = V^2 = 2\text{Energia}/m\omega^2 l^2$ .

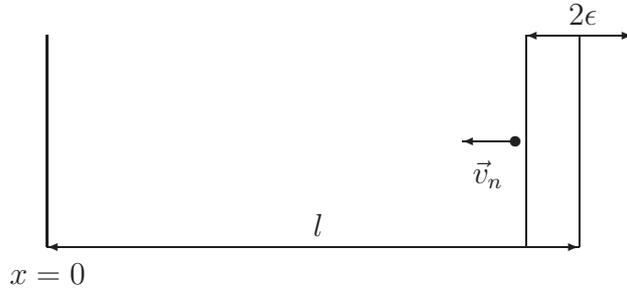


Figura 3.1: O modelo de Fermi-Ulam é constituído por um par de paredes paralelas entre as quais uma partícula move-se com velocidade constante.

A zona de colisão do modelo de Fermi-Ulam é a região do espaço definida por  $X \in [1 - \epsilon, 1 + \epsilon]$ . Para  $\epsilon = 0$  a velocidade da parede é nula e as colisões apenas invertem o sinal da velocidade da partícula. Neste caso, a energia da partícula é constante e o sistema é integrável. Para  $\epsilon \neq 0$ , no entanto, o sistema se torna não-integrável e a energia da partícula pode diminuir ou aumentar ao colidir com a parede móvel, dependendo dos valores da fase da parede e da velocidade da partícula antes da colisão com a parede móvel. Para  $\epsilon \neq 0$  o sistema apresenta comportamento caótico e, como demonstrado na referência [37], o mar de caos do modelo de Fermi-Ulam é caracterizado pelo expoente de Lyapunov  $\lambda \approx 0.78$  para quaisquer valores de  $\epsilon$ , desde que  $\epsilon \neq 0$ .

Próximo da transição do regime integrável para o regime não-integrável as propriedades do modelo de Fermi-Ulam podem ser descritas por relações de escala, de forma similar ao caso do sistema magnético apresentado na

seção 2.9. A transição de integrável para não-integrável foi investigada primeiramente por Leonel, McClintock e da Silva [38] no modelo de Fermi-Ulam simplificado, onde a análise foi feita tomando o número de iterações como variável independente. Análises similares foram realizadas posteriormente neste modelo [39, 40], em modelos de poços de potencial [41, 42] e uma versão de um guia de onda [43]. A versão estocástica do modelo de Fermi-Ulam considera deslocamentos aleatórios da parede móvel. Como demonstrado por Hammersley [44], nesta versão a partícula apresenta crescimento ilimitado de energia. Introduzindo colisões inelásticas da partícula contra as fronteiras Leonel [45] demonstrou que a energia não cresce ilimitadamente, e obteve a descrição de escala caracterizando a transição do regime de crescimento limitado de energia para o regime de crescimento sem limites.

Neste capítulo apresentamos algumas propriedades do modelo de Fermi-Ulam dando ênfase ao estudo das propriedades de escala que descrevem a transição do regime integrável para o regime não-integrável deste sistema [39, 40].

## 3.2 O modelo simplificado

Na próxima seção mostraremos que no modelo de Fermi-Ulam o tempo entre colisões é obtido resolvendo numericamente uma equação transcendental. Existe, contudo, uma simplificação do modelo em que se despreza o deslocamento da parede móvel, considerando o tempo entre dois choques com a parede móvel dado por  $\Delta t = 2/V$ , em que  $V$  é a velocidade da partícula [11, 46]. A transferência de momento entre a parede móvel e a partícula, no entanto, continua a ocorrer como descrito na versão completa. Esta aproximação permite que as simulações sejam realizadas mais rapidamente, uma vez que o tempo entre colisões,  $\Delta t$ , não é obtido de uma equação transcendental. Nesta simplificação as colisões sucessivas não existem e, em decorrência disto, a dinâmica da versão simplificada não é idêntica à dinâmica do modelo completo. Apesar de não descreverem exatamente as versões originais, o estudo de versões simplificadas é útil pois permite que sejam obtidos resultados analíticos importantes, aplicáveis também às versões completas. Nesta seção consideramos o modelo simplificado de Fermi-Ulam. Determinamos numericamente as curvas de energia média e do número médio de colisões como funções do tempo e obtemos a descrição de escala destas quantidades.

### 3.2.1 O mapa

Consideremos que imediatamente após a colisão  $n$  a fase da parede móvel seja  $\phi_n = \phi(t_n) = t_n + \phi_0$  e que a partícula adquira velocidade  $\vec{V} = V_n \hat{i}$ ,  $V_n < 0$ , movimentando-se para a esquerda. O trajeto percorrido pela partícula até alcançar a parede fixa e depois de volta à parede oscilante é feito com valor constante do módulo da velocidade. No instante da próxima colisão a fase da parede é dada por  $\phi_{n+1} = \phi_n + \Delta t_{n+1}$ , em que  $\Delta t_{n+1}$  é o intervalo de tempo entre as colisões  $n$  e  $n + 1$ . Dada a simplificação do modelo temos que  $\Delta t_{n+1} = -2/V_n$ .

A análise das colisões necessita da descrição do movimento da partícula nos referenciais da parede fixa,  $S$ , e da parede móvel,  $S'$ . A figura 3.2 ilustra os vetores posição envolvidos no cálculo de mudança entre referenciais em um espaço bidimensional. No referencial  $S$ , a partícula move-se com velocidade  $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$  e a origem do referencial  $S'$  (parede móvel) com velocidade  $\vec{V}_w = \dot{\vec{R}}_w$ . Como no referencial  $S'$  a velocidade da partícula é  $\vec{V}' = \dot{\vec{R}}'$ , a relação entre

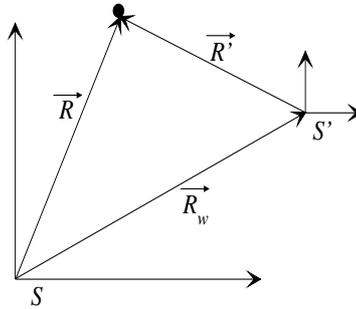


Figura 3.2: Os referenciais  $S$  e  $S'$  e as velocidades  $\vec{V}$ ,  $\vec{V}_w$  e  $\vec{V}'$ .

as velocidades é

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_w, \quad (3.1)$$

onde  $\vec{V}_w = \dot{X} \hat{i} = -\varepsilon \sin \phi(t) \hat{i}$ . Imediatamente antes da colisão ( $n + 1$ ), a velocidade da partícula em  $S$  é  $\vec{V} = V_n \hat{i}$ . Se mudarmos para o referencial  $S'$ , temos que  $\vec{V}'_i = (-V_n + \varepsilon \sin \phi_{n+1}) \hat{i}$ . Como a colisão é elástica, a velocidade da partícula nesse referencial após a colisão é  $\vec{V}'_f = -\vec{V}'_i = (V_n - \varepsilon \sin \phi_{n+1}) \hat{i}$ . Voltando ao referencial da parede fixa (expressão (3.1)) temos, imediatamente

após a colisão ( $n + 1$ ), que  $\vec{V}_{n+1} = (V_n - 2\varepsilon \sin \phi_{n+1})\hat{i}$ . Escrevemos, portanto, o mapa bidimensional do modelo simplificado de Fermi-Ulam como

$$\begin{aligned}\phi_{n+1} &= \phi_n - \frac{2}{V_n} \text{ mod } 2\pi, \\ V_{n+1} &= -|V_n - 2\varepsilon \sin \phi_{n+1}|.\end{aligned}\tag{3.2}$$

As barras de valor absoluto são introduzidas na expressão da velocidade para impedir que a partícula abandone a região entre as paredes. Esta simplificação aproxima do modelo completo quando a velocidade da partícula é maior que a velocidade máxima da parede e a amplitude de oscilação da parede móvel é muito menor que a distância média entre as paredes.

As figuras 3.3(a,b) ilustram, respectivamente, o espaço de fase dos modelos simplificado e completo com  $\varepsilon = 10^{-3}$ . O espaço de fase do sistema foi construído utilizando diversas condições iniciais escolhidas aleatoriamente no espaço  $\phi \times V$  com  $\phi_0 \in (0, 2\pi]$  e  $V_0 \in (0, 0.08]$ . A variável  $V$  nas figuras 3.3(a,b) representa o valor absoluto da velocidade da partícula. Observa-se que o espaço de fase da versão simplificada é essencialmente o mesmo da versão completa. Nas 3.3(a) e (b) indicamos com uma seta a posição da curva invariante de energia mais baixa. Abaixo desta curva invariante o espaço de fase é caracterizada por regiões de movimento regular envolvidas por uma região de movimento caótico chamada *mar de caos*. A curva invariante de energia mais baixa separa o mar de caos da região de energia alta, impedindo que a partícula apresente aceleração de Fermi [47]. Acima da primeira curva invariante existem outras regiões de movimento regular e caótico. A análise de escala que apresentaremos mais adiante é feita na região de movimento caótico abaixo da curva invariante de energia mais baixa. Antes, contudo, vamos discutir mais algumas propriedades do espaço de fase.

### 3.2.2 Estabilidade dos pontos fixos

Observando o espaço de fase do modelo de Fermi-Ulam, figura 3.3, notamos que o tamanho das regiões de movimento regular diminui quando o valor de  $V$  decresce. Desta forma é natural questionarmos se estas regiões estáveis existem com tamanho muito pequeno no limite  $V \rightarrow 0$  ou se a estabilidade dos pontos fixos depende do valor de  $V$  e, assim, as ilhas não existem para valores de  $V$  suficientemente pequenos. Para tal verificação vamos utilizar os conceitos apresentados na seção 2.7 para estudar a estabilidade dos pontos

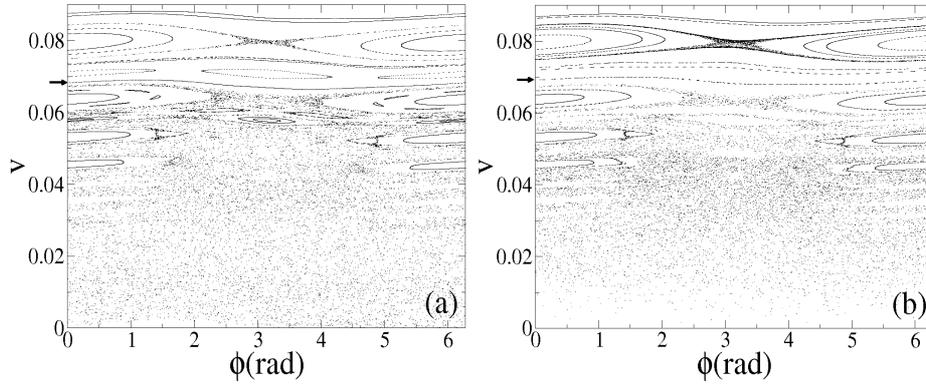


Figura 3.3: As figuras (a) e (b) ilustram, respectivamente, o espaço de fase das versões simplificada e completa do modelo de Fermi-Ulam para  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Observa-se que o espaço de fases de ambas as versões são muito semelhantes. As setas indicam a posição da curva invariante de energia mais baixa.

fixos do modelo de Fermi-Ulam.

Os pontos fixos do modelo simplificado de Fermi-Ulam são obtidos resolvendo  $\phi_{n+1} = \phi_n$  e  $V_{n+1} = V_n$  nas expressões do mapa (3.2). As expressões da fase e velocidade fornecem, respectivamente, as coordenadas  $(\phi^*, V^*)$  do ponto fixo

$$\begin{aligned} V^* &= -\frac{1}{m\pi}, \quad m = 1, 2, \dots \\ \phi^* &= 0, \pi. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Para cada valor de  $V^*$  temos, portanto, dois pontos fixos associados aos dois valores possíveis de  $\phi^*$ . A figura 3.4 ilustra o espaço de fase do modelo simplificado de Fermi-Ulam para  $\varepsilon = 10^{-3}$  onde os pontos fixos estão indicados por círculos. Os pontos fixos em  $\phi = 2\pi$  correspondem aos mesmos pontos fixos em  $\phi = 0$ . Na figura ilustramos apenas os pontos fixos com  $4 \leq m \leq 9$ . Para  $m = 1$ ,  $m = 2$ , e  $m = 3$  temos que  $V^* > 0.1$ .

Para determinar a estabilidade dos pontos fixos devemos obter os autovalores da matriz

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

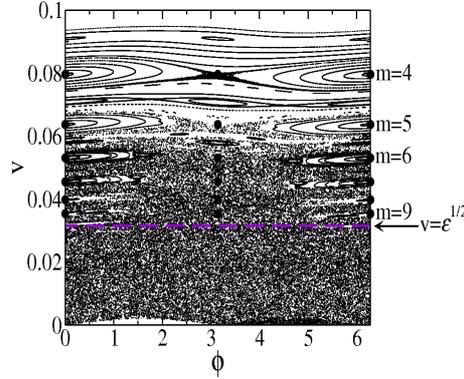


Figura 3.4: *Pontos fixos no espaço de fase do modelo simplificado de Fermi-Ulam com  $\varepsilon = 10^{-3}$  e  $4 \leq m \leq 9$ .*

Para o caso do modelo simplificado de Fermi-Ulam (mapa 3.2)) os elementos da matriz  $J$  são dados por

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} &= 1 - 2\varepsilon \cos \phi_{n+1} \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n}, \\
 \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} &= -2\varepsilon \cos \phi_{n+1} \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n}, \\
 \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} &= \frac{2}{V_n^2}, \\
 \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} &= 1.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Como discutido na seção 2.7, a estabilidade dos pontos fixos é determinada pelos autovalores de  $J$ , obtidos resolvendo a equação

$$\det(J - \Lambda I) = 0, \tag{3.6}$$

em que  $I$  é a matriz identidade  $2 \times 2$ . As soluções da expressão acima são dadas por

$$\Lambda = 1 - \frac{2\varepsilon}{V_n^2} \cos \phi_{n+1} \pm 2 \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{V_n^2}\right)^2 \cos^2 \phi_{n+1} - \frac{\varepsilon}{V_n^2} \cos \phi_{n+1}}. \tag{3.7}$$

Substituindo  $\phi_{n+1}$  e  $V_n$  na expressão (3.7) pelos valores de  $\phi^*$  e  $V^*$  dados

pela equação (3.3) temos, para os pontos fixos, os autovalores abaixo

$$\begin{aligned}\Lambda_0 &= 1 - 2\varepsilon m^2 \pi^2 \pm 2\sqrt{\varepsilon m^2 \pi^2 (\varepsilon m^2 \pi^2 - 1)} \\ \Lambda_\pi &= 1 + 2\varepsilon m^2 \pi^2 \pm 2\sqrt{\varepsilon m^2 \pi^2 (\varepsilon m^2 \pi^2 + 1)}.\end{aligned}\quad (3.8)$$

Na expressão acima o subscrito 0 está associado ao ponto fixo com  $\phi^* = 0$  e o subscrito  $\pi$  ao ponto fixo com  $\phi^* = \pi$ .

Como  $m > 1$  então  $2\sqrt{\varepsilon m^2 \pi^2 (\varepsilon m^2 \pi^2 + 1)} > 2\varepsilon m^2 \pi^2$  e, portanto,  $\Lambda_{\pi+} > 1$  e  $\Lambda_{\pi-} < 1 \quad \forall m$ . Desta forma, os pontos fixos com  $\phi^* = \pi$  são pontos de sela.

Os pontos fixos com  $\phi^* = 0$ , no entanto, podem ser pontos de sela ou pontos elípticos, dependendo dos valores de  $\varepsilon$  e de  $m$ . Quando o argumento da raiz quadrada na expressão de  $\Lambda_0$  é negativo temos dois valores característicos complexos, com  $\Lambda_{0-}$  e  $\Lambda_{0+}$  formando um par complexo conjugado. Da equação (3.8) temos que o ponto fixo com  $\phi^* = 0$  será elíptico quando satisfeita a relação

$$\varepsilon m^2 \pi^2 - 1 < 0. \quad (3.9)$$

Esta expressão fornece

$$m < \frac{1}{\pi\sqrt{\varepsilon}}. \quad (3.10)$$

Como  $\varepsilon$  é um parâmetro que varia continuamente e  $m$  é inteiro devemos desprezar a parte fracionária do lado direito da relação acima. Utilizando (3.3) e a expressão acima temos que

$$m = -\frac{1}{V^*\pi} < \frac{1}{\pi\sqrt{\varepsilon}}. \quad (3.11)$$

Portanto órbitas em torno de pontos elípticos são observadas para

$$V^* < -\sqrt{\varepsilon}. \quad (3.12)$$

A figura 3.4 confirma este resultado para o caso particular em que  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

Para  $m > 1/\pi\sqrt{\varepsilon}$  os pontos fixos com  $\phi^* = 0$  são classificados como pontos de sela.

Vamos exemplificar considerando  $\varepsilon = 10^{-3}$ . A figura 3.5 ilustra os valores

característicos, dados pela expressão (3.8), como funções de  $m$ . Na figura 3.5(a) temos o comportamento de  $\Lambda_{\pi+}$  e  $\Lambda_{\pi-}$ . A linha horizontal indica o valor  $\Lambda = 1$ . Verificamos assim que os pontos fixos em  $\phi^* = \pi$  são pontos de sela. A figura 3.5(b) mostra a parte real e imaginária de  $\Lambda_0$  para o caso em que o argumento da raiz quadrada é negativo. Para  $m \leq 10$  a parte imaginária de  $\Lambda_0$  é diferente de zero indicando que os pontos fixos em  $\phi^* = 0$  são elípticos. Para  $m > 10$  tem-se que  $|\Lambda_{0-}| > 1$  e que  $|\Lambda_{0+}| < 1$ , como ilustra a figura 3.5(c). Portanto, para  $m > 10$  os pontos fixos com  $\phi^* = 0$  se tornam pontos de sela.

Temos, portanto, que para  $\varepsilon = 10^{-3}$  o ponto fixo estável de mais baixa energia é dado por  $V^* = -1/m\pi$  com  $m = 10$ , ou seja,  $V^* \approx -3.18 \times 10^{-2}$ . O ponto fixo de sela com  $\phi^* = 0$  de mais alta energia corresponde a  $m = 11$  com velocidade  $V^* \approx -2.89 \times 10^{-2}$ .

Os pontos fixos que analisamos nesta seção são conhecidos como pontos fixos primários pois eles existem mesmo no limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

O estudo de estabilidade pode ser estendido a órbitas periódicas com período superiores. Lichtenberg e Lieberman [11] demonstraram que as órbitas estáveis com período 2 se tornam instáveis para valores de velocidade com valor absoluto superior ao menor valor de  $|V^*|$  fornecido pela expressão (3.12).

A análise para períodos 3, 4, 5, ... se torna progressivamente mais difícil. Contudo Lieberman e Lichtenberg [48] utilizaram um procedimento que permite obter a estabilidade de pontos fixos de período grande para o modelo de Fermi-Ulam. Desta forma eles observaram que nenhuma região de movimento estável primária existe abaixo do último ponto fixo estável que discutimos acima. Lichtenberg relata também a existência de órbitas periódicas para intervalos estreitos do parâmetro  $\varepsilon$ . Estas trajetórias são chamadas de ilhas secundárias e estão associadas ao processo de bifurcação dos pontos fixos primários instáveis. As ilhas secundárias ocorrem para valores de velocidade abaixo do último ponto fixo estável primário. No entanto estas regiões de movimento regular parecem não existir, ou são extremamente pequenas, para valores de velocidade suficientemente pequenos.

Até aqui descrevemos brevemente algumas propriedades das órbitas estáveis primárias e secundárias. Como discutido, as órbitas primárias estão

situadas todas acima do último ponto fixo primário estável. Vamos, agora, descrever a primeira curva invariante que limita os valores de energia do mar de caos.

### 3.2.3 Expansão em série de Taylor para a primeira curva invariante

Reproduzimos nesta seção os resultados apresentados nas referências [37] e [3]. O procedimento apresentado nesta seção será útil para determinarmos a descrição de escala do modelo de Fermi-Ulam mais adiante. A expressão de  $\phi$  dada pelo mapa (3.2) pode ser reescrita como

$$\Delta\phi_{n+1} = \phi_{n+1} - \phi_n = -\frac{2}{V_n}. \quad (3.13)$$

Para valores de  $V$  próximos da primeira curva invariante as barras de valor absoluto na expressão da velocidade (mapa (3.2)) são desnecessárias. Portanto

$$V_{n+1} = V_n - 2\varepsilon \sin \phi_{n+1}. \quad (3.14)$$

Definindo  $V^*$  como um valor característico da velocidade na primeira curva invariante, escrevemos

$$V_n = V^* + \Delta V_n. \quad (3.15)$$

Expandindo a expressão de  $\Delta\phi_{n+1}$  em série de Taylor para  $V_n \approx V^*$  temos, até primeira ordem,

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{n+1} &= -\frac{2}{V^*} + (V_n - V^*)\frac{2}{V^{*2}} \\ &= -\frac{2}{V^*} + \frac{2\Delta V_n}{V^{*2}}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Em termos da expressão (3.15) escrevemos (3.14) como

$$\Delta V_{n+1} = \Delta V_n - 2\varepsilon \sin \phi_{n+1}. \quad (3.17)$$

Multiplicando ambos os lados da expressão acima por  $2/V^{*2}$  tem-se

$$\frac{2\Delta V_{n+1}}{V^{*2}} = \frac{2\Delta V_n}{V^{*2}} - \frac{4\varepsilon}{V^{*2}} \sin \phi_{n+1}. \quad (3.18)$$

Somando a quantidade  $-2/V^*$  em ambos os lados da expressão acima obtemos

$$-\frac{2}{V^*} + \frac{2\Delta V_{n+1}}{V^{*2}} = -\frac{2}{V^*} + \frac{2\Delta V_n}{V^{*2}} - \frac{4\varepsilon}{V^{*2}} \sin \phi_{n+1}. \quad (3.19)$$

Definindo a nova variável  $I_n = \Delta\phi_{n+1}$  temos, das equações (3.16) e (3.19),

$$I_{n+1} = I_n - \frac{4\varepsilon}{V^{*2}} \sin \phi_{n+1}. \quad (3.20)$$

Definindo  $\theta_n = \phi_{n+1} - \pi$  escrevemos o mapa

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n + K_{\text{eff}} \sin \theta_n \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + I_{n+1}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

em que

$$K_{\text{eff}} = \frac{4\varepsilon}{V^{*2}}. \quad (3.22)$$

Desta forma, o modelo de Fermi-Ulam é localmente equivalente ao mapa padrão de Chirikov [13]. No próximo capítulo discutiremos em mais detalhes as propriedades do mapa padrão. O parâmetro  $K_{\text{eff}}$  dado pela expressão acima fornece essencialmente o mesmo valor para  $\varepsilon \in [10^{-5}, 10^{-2}]$  com valor médio  $K_{\text{eff}} = 0.88 \pm 0.07$  [37]. Este resultado é próximo do valor  $K \approx 0.9716$  que caracteriza a transição de comportamento localmente caótico para globalmente caótico do mapa padrão.

### 3.2.4 Precisão numérica

O estudo das propriedades de sistemas caóticos é freqüentemente realizado de forma numérica. Portanto, é importante conhecer as vantagens e limitações dos métodos numéricos disponíveis. Normalmente, ao estudar sistemas não-lineares devemos escolher qual a melhor maneira de resolver o problema. Contudo, mesmo utilizando a técnica mais apropriada, a solução numérica obtida não é um resultado exato. Os computadores trabalham com

um número finito de algarismos significativos. Devido a esta limitação, o procedimento numérico gera erros de tal forma que, após um determinado tempo, a solução não corresponde ao estado inicial do sistema, mas corresponde, por exemplo, ao estado de uma configuração inicial vizinha à que foi utilizada. Assim, devemos interpretar os resultados e julgar até que ponto o resultado é confiável.

Neste trabalho estudamos as propriedades de escala de quantidades médias de alguns sistemas. A figura 3.6 mostra duas curvas de energia média calculadas conforme definido pelas equações (2.47) e (2.48) para o modelo simplificado de Fermi-Ulam. Nesta figura empregamos  $M = 2 \times 10^3$  condições iniciais diferentes que pertencem ao mar de caos de energia mais baixa. Os cálculos foram realizados em FORTRAN, utilizando precisão dupla e quádrupla. Observamos que a diferença entre as curvas, obtidas utilizando precisões diferentes, é pequena. Portanto, nos cálculos que apresentamos neste trabalho, empregamos precisão dupla. O valor de  $M$  empregado na figura 3.6 é suficiente para que o desvio padrão da quantidade média  $\langle \bar{E} \rangle(n)$  seja menor que o tamanho dos símbolos utilizados nas curvas.

### 3.2.5 Análise de escala

O estudo das propriedades de escala do modelo simplificado de Fermi-Ulam utilizando quantidades médias calculadas como funções do número de iterações foi feito por Leonel et al. [38]. Assim, é legítimo obter a descrição de escala deste modelo calculando as quantidades médias considerando o tempo como variável independente. É importante mencionar que não encontramos a descrição de escala das regiões de caos acima da primeira curva invariante. A análise de escala que apresentaremos foi obtida para o mar de caos do modelo simplificado de Fermi-Ulam.

As condições iniciais de uma amostra <sup>1</sup>são caracterizadas por um valor de velocidade da partícula,  $V_0$ , e fase da parede oscilante,  $\phi_0$ . Definimos, assim, um conjunto de amostras caracterizadas pelo mesmo valor de velocidade inicial e valores diferentes de  $\phi_0$ . Desta forma, o instante da primeira colisão é o mesmo para todas as amostras. Antes da primeira colisão as trajetórias

---

<sup>1</sup>Amostra é um termo usado em estatística para classificar um experimento caracterizado por estado inicial conhecido. No nosso caso, o termo amostra é interpretado como a trajetória de uma partícula.

são idênticas e, portanto, iniciamos a contagem do tempo no instante da primeira colisão. Para simplificar a nomenclatura consideramos  $-V_0$ ,  $V_0 > 0$ , como a velocidade inicial da partícula e  $t'$  como o tempo adimensional. Desta forma, a primeira colisão ocorre no instante  $T_1 = 2/V_0$ , e definimos a nova variável de tempo  $t = t' - 2/V_0$ . Em termos desta nova variável calculamos as quantidades médias e obtemos a descrição de escala do modelo de Fermi-Ulam.

Definimos  $V_i(t)$  e  $N_i(t)$  como a velocidade da partícula  $i$  no instante  $t$  e o número de colisões que esta amostra sofre com a parede oscilante até este mesmo instante. Assim o cálculo da energia média  $\langle E \rangle(t)$  e do número médio de colisões  $\langle N \rangle(t)$  é feito seguindo a definição dada pela equação (2.45). Para o cálculo das quantidades médias utilizamos  $M = 2 \times 10^4$  amostras pertencentes ao mar de caos. Este valor de  $M$  é suficiente para que o desvio padrão de  $\langle E \rangle(t)$  e  $\langle N \rangle(t)$  seja menor que o tamanho dos símbolos empregados nas figuras.

Para valores de velocidade inicial suficientemente pequenos não existem regiões primárias de movimento estável. Assim, a fase  $\phi_0$  é escolhida aleatoriamente no intervalo  $[0, 2\pi)$ . Para valores grandes de velocidade inicial, no entanto, existem regiões de movimento regular. Neste caso, devemos nos certificar de escolher apenas os valores de  $\phi_0$  que pertencem ao mar de caos.

A figura 3.7(a) mostra, para quatro valores de  $\varepsilon$ , as curvas de energia média  $\langle E \rangle(t)$  para o caso em que  $V_0 = 10^{-6} < \varepsilon$ . Na figura 3.7(b) são utilizados os mesmos valores de  $\varepsilon$  mostrados em (a) mas, agora, para o caso em que  $V_0 > \varepsilon$ .

Como podemos observar, as curvas de energia média são caracterizadas inicialmente por um regime de valor constante, então crescem e, para tempos longos, as curvas de energia decaem lentamente. Os valores de  $t$  que caracterizam a mudança de comportamento das quantidades médias são chamados de tempos de *crossover*. Caracterizando a mudança do regime de energia constante para o regime crescimento existe um valor de tempo  $t_1$ . Similarmente definimos  $t_2$  como o tempo de *crossover* que caracteriza a transição do regime de crescimento para o regime de decaimento lento.

Em princípio deveríamos ter uma função de escala que descrevesse todos os regimes. No entanto, não conseguimos avaliar o expoente de crescimento

na região entre  $t_1$  e  $t_2$ . Além disso, o decaimento assintótico da energia também não é esperado. É um problema relacionado à aproximação do modelo simplificado. Alternativamente, conseguimos descrever o comportamento do modelo simplificado de Fermi-Ulam utilizando duas funções de escala: uma para o regime de tempos pequenos e outra para tempos longos.

Antes de apresentarmos os resultados numéricos, vamos fazer uma estimativa analítica para a energia média quando  $t < t_1$ . Após a primeira colisão, a qual ocorre no instante  $t' = T_1 = 2/V_0$ , a velocidade da partícula é dada por  $V_1 = -|V_0 - 2\varepsilon \sin(T_1 + \phi_0)|$ . Considerando um conjunto de amostras caracterizadas por valores de  $\phi_0$  escolhidos aleatoriamente entre 0 e  $2\pi$  calculamos o valor médio de  $V_1^2$  utilizando a expressão (2.45). Se o número de amostras é grande suficiente o valor médio de  $\sin^2(T_1 + \phi_0)$  é  $1/2$  enquanto o valor médio de  $\sin(T_1 + \phi_0)$  é zero. Obtemos assim o valor médio  $\langle V_1^2 \rangle(T_1) \approx 2\varepsilon^2 + V_0^2$ . Portanto, para  $t < t_1$ , temos que

$$\langle E \rangle(t) \approx 2\varepsilon^2 + V_0^2. \quad (3.23)$$

Estimando o valor médio  $\langle V_1 \rangle(T_1) \approx \sqrt{\langle V_1^2 \rangle(T_1)}$  temos, então, que o instante médio da segunda colisão é  $t' = 2/V_0 + 2/\langle V_1 \rangle(T_1)$ . Definindo  $t_1 = t' - 2/V_0$  obtemos  $t_1 \approx 2/\langle V_1 \rangle(T_1)$ , ou seja,

$$t_1 \approx \frac{2}{\sqrt{2\varepsilon^2 + V_0^2}}. \quad (3.24)$$

O instante médio da segunda colisão dado pela expressão acima fornece o intervalo de tempo em que as curvas de energia média da figura 3.7 apresentam valor constante, dado pela equação (3.23). Depois disto, as novas colisões implicam no crescimento inicial das curvas de energia.

Supomos que, próximo da transição do regime integrável para o regime não-integrável, a energia média  $\langle E \rangle(t)$  obedece a uma equação homogênea generalizada similar àquela dada pela expressão (2.37) (seção 2.9). A descrição de escala para valores pequenos de tempo é obtida com o auxílio das equações (3.23) e (3.24) acima. Para  $t \ll t_2$  temos que

$$\langle E \rangle(t, \varepsilon, V_0) = l \langle E \rangle(l^{a_1} t, l^{b_1} \varepsilon, l^{c_1} V_0), \quad (3.25)$$

em que  $l$  é o fator de escala e  $a_1$ ,  $b_1$  e  $c_1$  são os expoentes que descrevem as propriedades de escala para  $t \ll t_2$ . Escolhendo  $l = \varepsilon^{-1/b_1}$  a equação acima é reescrita como

$$\langle E \rangle(t, \varepsilon, V_0) = \varepsilon^{-1/b_1} g(\varepsilon^{-a_1/b_1} t, \varepsilon^{-c_1/b_1} V_0), \quad (3.26)$$

em que  $g = \langle E \rangle(\varepsilon^{-a_1/b_1} t, 1, \varepsilon^{-c_1/b_1} V_0)$ . No limite de valores pequenos de velocidade inicial ( $V_0 < \varepsilon$ ) temos, das equações (3.23) e (3.24), que

$$\langle E \rangle(t) \propto \varepsilon^2 \quad (3.27)$$

e

$$t_1 \propto \varepsilon^{-1}. \quad (3.28)$$

Para  $t < t_1$  e valores pequenos de  $V_0$  a energia depende apenas de  $\varepsilon$ . Neste limite temos que  $\varepsilon^{-c_1/b_1} V_0 \approx 0$  e que  $\varepsilon^{-a_1/b_1} t \approx 0$ . Assim, a função  $g$  é constante e a equação (3.26) é reescrita como

$$\langle E \rangle(t, \varepsilon, V_0) \propto \varepsilon^{-1/b_1}. \quad (3.29)$$

Comparando as equações (3.27) e (3.29) temos que  $-1/b_1 = 2$  ou  $b_1 = -1/2$ . Da equação (3.26) temos que o tempo de *crossover*  $t_1$  é dado por

$$t_1 \propto \varepsilon^{a_1/b_1}. \quad (3.30)$$

Da equação acima e da equação (3.28) temos  $a_1/b_1 = -1$ . Portanto  $a_1 = 1/2$ . O expoente  $c_1$  é obtido de forma semelhante. Para valores de  $V_0$  suficientemente grandes a equação (3.23) é reescrita como

$$\langle E \rangle \propto V_0^2. \quad (3.31)$$

Escolhendo  $l = V_0^{-1/c_1}$  a equação (3.25) fornece, para  $V_0 > \varepsilon$ ,

$$\langle E \rangle(t, \varepsilon, V_0) = V_0^{-1/c_1} \langle E \rangle(V_0^{-a_1/c_1} t, 0, 1). \quad (3.32)$$

Para  $t < t_1$  e  $V_0$  grande suficiente a energia não depende de  $\varepsilon$ . Neste

limite temos que  $V_0^{-a_1/c_1} t \approx 0$  e a equação acima nos fornece

$$\langle E \rangle(t, \varepsilon, V_0) \propto V_0^{-1/c_1}. \quad (3.33)$$

Das equações (3.31) e (3.33) temos que  $c_1 = -1/2$ . De posse destes expoentes, definimos as transformações de escala  $\langle E \rangle(t) \rightarrow \langle E \rangle(t)/l$  e  $t \rightarrow tl^{a_1}$ . Obtemos, desta forma, o colapso das curvas de energia mostradas na figura 3.7 para tempos curtos, como exibido na figura 3.8.

Obtemos, assim, os expoentes que descrevem as relações de escala para tempos curtos. Ressaltamos, no entanto, que o regime inicial é um transiente que normalmente é desprezado. A análise de escala é realmente importante para valores de tempo após este transiente. Vamos, portanto, obter a descrição de escala para tempos longos.

No limite  $t \gg t_2$  a energia média  $\langle E \rangle(t)$  depende apenas de  $t$  e  $\varepsilon$ . Neste limite escrevemos  $\langle E \rangle(t)$  como

$$\begin{aligned} \langle E \rangle(t, \varepsilon, V_0) &\propto g(\varepsilon)t^\alpha \\ g(\varepsilon) &\propto \varepsilon^\beta. \end{aligned} \quad (3.34)$$

O valor do expoente de decaimento  $\alpha$  é obtido numericamente através de ajustes não-lineares no limite de  $t$  grande. Este procedimento foi realizado para sete valores diferentes de  $\varepsilon$  no intervalo de  $5 \times 10^{-5}$  até  $5 \times 10^{-3}$  e obtemos, assim, o valor médio  $\alpha = -0.055 \pm 0.005$ . A partir do valor assintótico das curvas de  $\langle E \rangle(t)/t^\alpha$  versus  $t$  obtemos o valor de  $g(\varepsilon)$ , definido na equação (3.34), para valores diferentes de  $\varepsilon$ . O melhor ajuste dos dados de  $g(\varepsilon)$  versus  $\varepsilon$  fornece  $\beta = 1.07 \pm 0.03$ , como mostra a figura 3.9(a).

Além disso o tempo de *crossover*  $t_2$  é descrito pela relação

$$t_2 \propto \varepsilon^z. \quad (3.35)$$

O melhor ajuste dos dados do gráfico de  $t_2$  versus  $\varepsilon$  fornece  $z = -1.49 \pm 0.02$ , como ilustra a figura 3.9(b).

No limite  $t \gg t_1$  supomos que, na transição do regime integrável para o não-integrável ( $\varepsilon \approx 0$ ), a energia média  $\langle E \rangle(t)$  seja descrita pela equação

homogênea

$$\langle E \rangle(t, \varepsilon, V_0) = l \langle E \rangle(l^{a_2} t, l^{b_2} \varepsilon, l^{c_2} V_0), \quad (3.36)$$

em que  $l$  é um fator de escala e  $a_2$ ,  $b_2$  e  $c_2$  são os expoentes de escala para tempos longos. Escolhendo  $l = \varepsilon^{-1/b_2}$  a equação acima é reescrita na forma

$$\langle E \rangle(t, \varepsilon, V_0) = \varepsilon^{-1/b_2} \langle E \rangle(\varepsilon^{-a_2/b_2} t, 1, \varepsilon^{-c_2/b_2} V_0). \quad (3.37)$$

Para  $t \gg t_2$  a energia média não depende de  $V_0$ . Neste regime temos, portanto, que  $\varepsilon^{-c_2/b_2} V_0 \approx 0$  e a expressão acima se reduz a

$$\langle E \rangle(t, \varepsilon, V_0) = \varepsilon^{-1/b_2} f(\varepsilon^{-a_2/b_2} t). \quad (3.38)$$

No limite  $t \gg t_2$  a equação acima depende de  $t$  e de  $\varepsilon$ . Como discutido na seção 2.9, a forma mais geral da expressão acima é dada por

$$\begin{aligned} \langle E \rangle(t, \varepsilon, V_0) &\propto \varepsilon^{-1/b_2} (\varepsilon^{-a_2/b_2} t)^y \\ &\propto \varepsilon^{-(1+a_2 y)/b_2} t^y. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Comparando as expressões (3.34) e (3.39) concluímos que  $\beta = -(1 + a_2 y)/b_2$  e que  $\alpha = y$ . Além disso, temos da equação (3.38) que o tempo de *crossover*  $t_2$  é dado por

$$t_2 \approx \varepsilon^{a_2/b_2}. \quad (3.40)$$

Comparando as equações (3.35) e (3.40) obtemos que  $z = a_2/b_2$ . Como os valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $z$  são conhecidos numericamente e sabemos como eles se relacionam com expoentes de escala  $a_2$  e  $b_2$ , temos, portanto,  $a_2 = 1.30 \pm 0.05$  e  $b_2 = -0.87 \pm 0.02$ . O expoente  $c_2$  é obtido por meio da conexão existente entre o modelo de Fermi-Ulam e o mapa padrão apresentada na seção 3.2.3. Portanto, a expressão de  $K_{\text{eff}}$ , equação (3.22), pode ser reescrita em termos das variáveis rescaladas  $\varepsilon' = l^{b_2} \varepsilon$  e  $V^{*'} = l^{c_2} V^*$  como

$$\begin{aligned} K_{\text{eff}} &= \frac{4\varepsilon'}{V^{*'}2} \\ &= \frac{4l^{b_2-2c_2}\varepsilon}{V^{*2}} \\ &= \frac{4\varepsilon}{V^{*2}}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Tem-se, assim, que  $b_2 - 2c_2 = 0$ , ou  $c_2 = b_2/2 = -0.44 \pm 0.01$ . Observamos

que esta relação entre os expoentes  $b_2$  e  $c_2$  também é obtida da equação (3.12), em que o ponto fixo instável de energia mais alta, para  $\phi^* = 0$ , obedece a relação  $l^{c_2} V^* = -l^{b_2/2} \sqrt{\varepsilon}$ .

Os expoentes  $a$ ,  $b$  e  $c$  podem ser obtidos de outra forma. Para valores grandes de tempo as curvas de energia média dependem de  $\varepsilon$  e  $t$ . Consideremos o caso de uma curva de  $\langle E \rangle(t)$  caracterizada pelo parâmetro  $\varepsilon = \varepsilon_1$ . Desta forma, o comportamento de  $\langle E \rangle(t)$  para tempos longos, dado pela expressão (3.34), é

$$\langle E \rangle(t, \varepsilon_1, V_0) = \text{cons. } \varepsilon_1^\beta t^\alpha. \quad (3.42)$$

Similarmente uma curva de  $\langle E \rangle(t)$  caracterizada pelo valor de parâmetro  $\varepsilon = \varepsilon_2$  é dada por

$$\langle E \rangle(t, \varepsilon_2, V_0) = \text{cons. } \varepsilon_2^\beta t^\alpha. \quad (3.43)$$

A expressão acima pode ser reescrita como

$$\langle E \rangle(t, \varepsilon_2, V_0) = \text{cons. } \varepsilon_2^\beta \varepsilon_1^{-\beta} \varepsilon_1^\beta t^\alpha, \quad (3.44)$$

ou seja,

$$\langle E \rangle(t, \varepsilon_2, V_0) = \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)^\beta \langle E \rangle(t, \varepsilon_1, V_0). \quad (3.45)$$

Portanto temos que

$$\frac{\langle E \rangle(t, \varepsilon_2, V_0)}{(\varepsilon_2/\varepsilon_1)^\beta} = \langle E \rangle(t, \varepsilon_1, V_0). \quad (3.46)$$

Desta forma, obtemos empiricamente o valor de  $\beta$  que satisfaz a relação acima. Realizamos este procedimento considerando sete valores diferentes de  $\varepsilon$  no intervalo  $[5 \times 10^{-5}, 5 \times 10^{-3}]$  e obtemos o valor médio  $\beta = 1.00 \pm 0.02$ .

Uma análise similar foi utilizada para determinarmos o expoente  $z$ . Considerando a curva de energia média caracterizada pelo parâmetro  $\varepsilon = \varepsilon_1$  temos, da expressão (3.35), que o tempo de *crossover* é dado por

$$t_2(\varepsilon_1) = \text{cons. } \varepsilon_1^z. \quad (3.47)$$

Uma curva de energia média caracterizada por  $\varepsilon = \varepsilon_2$  pode ser escrita como

$$t_2(\varepsilon_2) = \text{cons. } \varepsilon_2^z \varepsilon_1^{-z} \varepsilon_1^z. \quad (3.48)$$

Portanto

$$\frac{t_2(\varepsilon_2)}{(\varepsilon_2/\varepsilon_1)^z} = t_2(\varepsilon_1). \quad (3.49)$$

Assim, tomando  $t_2(\varepsilon_1)$  como valor de referência, determinamos o valor de  $z$  que satisfaz a relação acima. Realizando o procedimento descrito para valores de  $\varepsilon$  no intervalo  $[5 \times 10^{-5}, 5 \times 10^{-3}]$  obtemos o valor médio  $z = 1.50 \pm 0.04$ .

Como  $\beta = -(1 + a_2\alpha)/b_2$ ,  $z = a_2/b_2$  e  $c_2 = b_2/2$  temos, portanto,  $a_2 = 1.38 \pm 0.02$ ,  $b_2 = -0.92 \pm 0.01$  e  $c_2 = -0.46 \pm 0.01$ . Este procedimento que utilizamos para determinar os expoentes  $\beta = 1.00 \pm 0.02$  e  $z = 1.50 \pm 0.04$ , via equações (3.46) e (3.49), consiste, assim, em obter de forma empírica o colapso das curvas de energia média para tempos longos. A figura 3.10 ilustra o resultado. Os expoentes  $\beta$  e  $z$  foram obtidos de duas maneiras independentes: (i) por ajuste dos dados numéricos, como ilustrado na figura 3.9 e (ii) de forma empírica como definido pelas equações (3.46) e (3.49). Considerando as incertezas, observamos que os expoentes  $a_2$ ,  $b_2$  e  $c_2$  são os mesmos em ambas as situações. Utilizamos, assim, os valores médios  $a_2 = 1.35 \pm 0.05$ ,  $b_2 = -0.90 \pm 0.03$  e  $c_2 = -0.45 \pm 0.01$ .

Vamos agora obter a descrição de escala do número médio de colisões  $\langle N \rangle(t)$ . A figura 3.11 mostra curvas de  $\langle N \rangle(t)$  como funções do tempo para diferentes valores de  $\varepsilon$ . Observamos que  $\langle N \rangle(t)$  é constante até um certo valor de tempo  $t_1$ , dado pela equação (3.24), e então cresce. Observamos também que o regime de crescimento de  $\langle N \rangle(t)$  é inicialmente caracterizado por um crescimento mais acentuado e, para tempos longos, a taxa de crescimento diminui e assume um valor constante. Definimos assim  $t_2$  como o tempo de *crossover* que caracteriza a mudança na taxa de crescimento do número médio de colisões.

No limite  $t \gg t_2$ , em que a taxa de crescimento do número de choques é constante, o comportamento de  $\langle N \rangle(t)$  é dado por

$$\langle N \rangle(t, \varepsilon, V_0) \propto \varepsilon^\delta t^\gamma. \quad (3.50)$$

Seguindo um procedimento análogo ao que foi feito na obtenção dos expoentes  $\alpha$  e  $\beta$  da energia média  $\langle E \rangle(t)$ , obtemos  $\delta = 0.52 \pm 0.01$  e  $\gamma = 0.943 \pm 0.001$ . Para  $V_0 \approx 0$  as propriedades de escala da quantidade  $\langle N \rangle(t)$

são descritas pela relação

$$\langle N \rangle(t, \varepsilon, 0) = l \langle N \rangle(l^d t, l^e \varepsilon, 0). \quad (3.51)$$

Escolhendo  $l = \varepsilon^{-1/e}$  temos que

$$\langle N \rangle(t, \varepsilon, 0) = \varepsilon^{-1/e} g(\varepsilon^{-d/e} t). \quad (3.52)$$

No limite  $t \gg t_2$  o número médio de choques depende de  $t$  e  $\varepsilon$ . Desta forma a expressão acima é reescrita como

$$\langle N \rangle(t, \varepsilon, 0) \propto \varepsilon^{-(1+dy)/e} t^y. \quad (3.53)$$

Desta expressão e de (3.50) temos que  $y = \gamma$  e que  $-(1 + dy)/e = \delta$ . Da equação (3.52) temos que o tempo de *crossover*  $t_2$  obedece à relação

$$t_2 \approx \varepsilon^{d/e}. \quad (3.54)$$

É natural buscar uma relação entre o comportamento das curvas de energia e número médio de colisões, pois mudanças nos valores de velocidade afetam a taxa de colisões. De fato o regime inicial de crescimento de  $\langle N \rangle(t)$  está relacionado ao crescimento das curvas de energia média para valores de tempo entre  $t_1$  e  $t_2$ . Similarmente, o regime de crescimento de  $\langle N \rangle(t)$  para  $t > t_2$  corresponde ao regime de tempos longos das curvas de energia média. Portanto assumimos que  $d/e = a_2/b_2$ . Empregando o valor médio de  $a_2/b_2$  obtemos  $d = -1.7 \pm 0.1$  e  $e = 1.12 \pm 0.05$ . A figura 3.11(b) mostra o colapso das curvas de  $\langle N \rangle(t)$  originalmente apresentadas na figura 3.11(a).

Um resultado que, a princípio, foi intrigante é o decaimento das curvas de energia média observado no limite de tempos longos. Na próxima seção estudaremos as propriedades de escala da versão completa do modelo de Fermi-Ulam e mostraremos que a energia média satura para tempos longos. Portanto é importante discutirmos a origem do decaimento da energia observado no modelo simplificado. Isto será feito de forma mais detalhada na seção 3.4.

Eventualmente a partícula perde praticamente toda sua energia após colidir com a parede móvel. Em situações como esta a partícula permanecerá com velocidade baixa por um tempo grande,  $\Delta t = 2/V$ , até que ocorra a

próxima colisão com a parede móvel. Existe, assim, um estado de energia baixa em que as partículas permanecem por intervalos de tempo grandes, resultando no decaimento das curvas de energia média. No modelo completo uma colisão sucessiva normalmente ocorre nos casos em que a partícula está com velocidade baixa. Como o intervalo de tempo necessário para que ocorra uma colisão sucessiva é menor que  $2\pi$  não observamos decaimento na energia média para a versão completa do modelo de Fermi-Ulam.

Quando a análise é feita na variável  $n$ , o intervalo entre duas colisões consecutivas é sempre  $\Delta n = 1$ , independentemente da velocidade da partícula. Assim, as energias médias das versões simplificada e completa, quando avaliadas como funções de  $n$ , não apresentam decaimento.

### 3.3 O modelo completo

#### 3.3.1 O mapa

A versão completa do modelo de Fermi-Ulam possui uma característica diferente da versão simplificada. Imagine a situação em que a partícula adquira velocidade muito baixa após uma colisão ou até mesmo que sua velocidade seja nula. Como o movimento da parede móvel é periódico então verifica-se que em um intervalo de tempo menor que  $T = 2\pi$  a parede se encontrará com a partícula antes que esta abandone a zona de colisão, delimitada pela região no intervalo  $X \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ . Esta colisão é chamada de *direta* (ou *sucessiva*). Colisões diretas não ocorrem na versão simplificada do modelo onde o movimento da parede não é considerado no cálculo do tempo entre colisões. Quando, após uma colisão, a partícula se movimenta para a esquerda com velocidade alta suficiente para escapar da zona de colisão, ela alcança a parede fixa, inverte sua velocidade e volta para a parede móvel contra a qual colide novamente. Neste caso a colisão é chamada *indireta*.

Suponha que após a colisão  $n$  a fase da parede seja  $\phi_n$  e que a velocidade da partícula seja  $\vec{V}_n = -V_n \hat{i}$ ,  $V_n > 0$  (movimento para a esquerda). Se  $V_n$  for grande suficiente a partícula abandona a zona de colisão e o próximo choque será indireto. O tempo gasto pela partícula em sua trajetória até a parede

fixa e depois de volta até a parede móvel é dado por

$$\Delta t_{n+1} = \frac{0 - (1 + \varepsilon \cos \phi_n)}{-V_n} + \frac{(1 + \varepsilon \cos \phi_{n+1}) - 0}{V_n}. \quad (3.55)$$

Ou seja,

$$V_n \Delta t_{n+1} - (1 + \varepsilon \cos \phi_n) = +(1 + \varepsilon \cos \phi_{n+1}). \quad (3.56)$$

A velocidade da parede móvel é dada por  $\vec{V}_w = -\varepsilon \sin \phi(t) \hat{i}$ . Como a velocidade da partícula inverteu o sinal ao colidir contra a parede fixa, então imediatamente antes do choque  $n + 1$  com a parede móvel sua velocidade é  $\vec{V} = V_n \hat{i}$ . A colisão é elástica. Portanto, no referencial da parede oscilante o valor da velocidade da partícula imediatamente antes e imediatamente após a colisão é igual em valor absoluto. Seguindo o mesmo raciocínio apresentado na subseção 3.2.1, obtemos

$$V_{n+1} = +V_n + 2\varepsilon \sin \phi_{n+1}. \quad (3.57)$$

No caso de uma colisão direta a velocidade da partícula não inverte de sinal antes de colidir contra a parede móvel. Considerando que a velocidade da partícula seja  $\vec{V}_n = -V_n \hat{i}$ ,  $V_n > 0$  então, neste caso, o intervalo entre as duas colisões é dado por

$$\Delta t_{n+1} = \frac{(1 + \varepsilon \cos \phi_{n+1}) - (1 + \varepsilon \cos \phi_n)}{-V_n}. \quad (3.58)$$

Ou seja,

$$V_n \Delta t_{n+1} - (1 + \varepsilon \cos \phi_n) = -(1 + \varepsilon \cos \phi_{n+1}). \quad (3.59)$$

Imediatamente antes da colisão a velocidade da partícula é  $\vec{V} = -V_n \hat{i}$ . Assim, seguindo o procedimento de mudança de referencial apresentado na subseção 3.2.1 obtemos, para colisões sucessivas,

$$V_{n+1} = -V_n + 2\varepsilon \sin \phi_{n+1}. \quad (3.60)$$

De forma geral podemos reunir as expressões (3.56) e (3.59) escrevendo

$$f(\Delta t_{n+1}) = \pm[1 + \varepsilon \cos(\Delta t_{n+1} + \phi_n)] - V_n \Delta t_{n+1} + (1 + \varepsilon \cos \phi_n). \quad (3.61)$$

Nesta expressão o sinal positivo que acompanha o primeiro termo do lado direito corresponde aos choques indiretos e o sinal negativo aos choques diretos. Para colisões indiretas, o tempo que a partícula gasta em seu trajeto de ida até a parede fixa e depois de volta até a entrada da zona de colisão é  $(1 + \varepsilon \cos \phi_n + 1 - \varepsilon)/V_n = [2 + \varepsilon(\cos \phi_n - 1)]/V_n$ . Definindo  $\tau$  como o tempo que a partícula viaja dentro da zona de colisão,  $\tau \in [0, 2\pi)$ , temos que  $\Delta t_{n+1} = [2 + \varepsilon(\cos \phi_n - 1)]/V_n + \tau$ . Para colisões diretas  $\Delta t_{n+1} = \tau$ , com  $\tau \in (0, 2\pi]$ . O valor de  $\tau$  é obtido numericamente resolvendo  $f(\Delta t_{n+1}) = 0$ .

Reunindo as expressões (3.57) e (3.60) o modelo completo de Fermi-Ulam é descrito pelo mapa bidimensional

$$\begin{aligned} \phi_{n+1} &= \phi_n + \Delta t_{n+1} \bmod 2\pi \\ V_{n+1} &= \pm V_n + 2\varepsilon \sin \phi_{n+1} \end{aligned}, \quad (3.62)$$

em que a amplitude renormalizada de oscilação da parede móvel,  $\varepsilon$ , é o parâmetro de controle do sistema. O sinal positivo que acompanha  $V_n$  corresponde aos choques indiretos e o sinal negativo aos choques diretos.

O espaço de fase do modelo de Fermi-Ulam é construído via processo iterativo do mapa definido na equação (3.62). Uma ilustração do espaço de fase da versão completa foi apresentada na figura 3.3, onde utilizamos  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

### 3.3.2 Análise de escala

Definimos um conjunto de  $M$  amostras caracterizadas por condições iniciais que pertencem ao mar de caos. Para valores suficientemente pequenos da velocidade inicial,  $V_0$ , a fase inicial,  $\phi_0$ , é escolhida aleatoriamente no intervalo  $[0, 2\pi)$ . Além disso, seguindo um raciocínio análogo ao apresentado no início da subseção 3.2.5, desconsideramos o intervalo de tempo inicial que corresponde à primeira vez em que a partícula penetra na zona de colisão.

Determinamos, assim, o valor médio da energia adimensional  $\langle E \rangle(t) = \langle V^2 \rangle(t)$  como definido pela expressão (2.45). Obtemos também o valor médio  $\overline{V_i^2}(t)$  ao longo da órbita e então a energia média  $\langle \overline{E} \rangle(t)$  como definido pelas equações (2.43) e (2.44), respectivamente. O quadrado da velocidade da partícula é constante durante o intervalo de tempo entre colisões com a parede móvel. Desta forma a integral na equação (2.43) é calculada sem dificuldades.

Calculamos também a energia média  $\langle \bar{E} \rangle(n)$  em função do número de colisões como definido pela equação (2.48). As curvas de energia apresentadas neste estudo correspondem a valores médios obtidos a partir de  $M = 2 \times 10^3$  amostras. Este valor de  $M$  é suficiente para que o desvio padrão da energia seja menor que o tamanho dos símbolos utilizados nas curvas.

A figura 3.12(a) mostra as curvas de energia média  $\langle E \rangle(t)$  para valores diferentes do parâmetro  $\varepsilon$  para o caso em que o valor inicial da velocidade das partículas é  $V_0 = 10^{-6}$ . As curvas de energia mostradas na figura 3.12(b) correspondem aos mesmos valores de  $\varepsilon$  mostrados na figura 3.12(a), porém com  $V_0 > \varepsilon$ , como indicado.

Observe que as curvas de energia são constantes até um dado valor de tempo  $t_1$ . Assim como apresentado na subseção 3.2.5, o instante  $t = t_1$  corresponde ao valor de tempo no qual o número médio de colisões com parede móvel é 2. Após  $t = t_1$  novas colisões ocorrem e observamos o crescimento das curvas de energia.

Diferentemente do modelo simplificado observamos, para tempos longos, que a energia média da versão completa alcança um valor estacionário cujo valor depende apenas do parâmetro  $\varepsilon$ . Portanto, para  $t \gg t_2$ , escrevemos

$$\langle E \rangle(t, \varepsilon, V_0) \propto \varepsilon^\beta. \quad (3.63)$$

A mudança do regime de crescimento para o regime de saturação é marcada pelo valor de tempo  $t_2(\varepsilon)$ , dado por

$$t_2 \propto \varepsilon^z. \quad (3.64)$$

O valor do expoente  $\beta$  na equação (3.63) foi determinado utilizando um procedimento similar ao apresentado na subseção 3.2.5. Tomando o limite de tempo longo de uma curva de energia caracterizada pelo parâmetro  $\varepsilon = \varepsilon_1$  temos, da equação (3.63),

$$\langle E \rangle(t, \varepsilon_1, V_0) = \text{cons. } \varepsilon_1^\beta. \quad (3.65)$$

Seguindo os mesmos passos que nos levaram à equação (3.46), obtemos que

$$\frac{\langle E \rangle(t, \varepsilon_2, V_0)}{(\varepsilon_2/\varepsilon_1)^\beta} = \langle E \rangle(t, \varepsilon_1, V_0). \quad (3.66)$$

Desta forma, para  $\varepsilon = \varepsilon_2$  buscamos o valor de  $\beta$  que faz a quantidade  $\langle E \rangle(t, \varepsilon_2, V_0)/(\varepsilon_2/\varepsilon_1)^\beta$  coincidir com  $\langle E \rangle(t, \varepsilon_1, V_0)$ . O valor médio, obtido a partir de simulações realizadas para  $\varepsilon \in [1 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-3}]$ , é  $\beta = 1.01 \pm 0.01$ .

O valor de  $z$ , equação (3.64), é obtido via ajuste em lei de potência no gráfico de  $t_2$  versus  $\varepsilon$ , como ilustrado na figura 3.13. Este procedimento fornece o valor  $z = -1.50 \pm 0.03$ .

Entre  $t_1$  e  $t_2$  temos uma região onde ocorre sobreposição das mudanças de regime de cada tempo de *crossover* dificultando a descrição do regime de crescimento da energia. Podemos desconsiderar o transiente inicial (que corresponde, aproximadamente, aos 10 primeiros choques) escrevendo, para  $t \gg t_1$ , a relação de escala

$$\langle E \rangle(t, \varepsilon, V_0) = l \langle E \rangle(l^a t, l^b \varepsilon, l^c V_0). \quad (3.67)$$

Nesta expressão  $l$  é o fator de escala e  $a$ ,  $b$  e  $c$  são os expoentes de escala. Para o caso  $V_0 < \varepsilon$ , escolhemos  $l = \varepsilon^{-1/b}$  e reescrevemos a expressão acima como

$$\begin{aligned} \langle E \rangle(t, \varepsilon, V_0) &= \varepsilon^{-1/b} \langle E \rangle(\varepsilon^{-a/b} t, 1, \varepsilon^{-c/b} V_0) \\ &= \varepsilon^{-1/b} f(\varepsilon^{-a/b} t) \\ &\propto \varepsilon^{-1/b} (\varepsilon^{-a/b} t)^y. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Para  $t \gg t_2$  a energia não depende do tempo. Assim, temos que  $y = 0$ , e a expressão acima é reescrita como

$$\langle E \rangle(t, \varepsilon, V_0) \propto \varepsilon^{-1/b}. \quad (3.69)$$

Comparando as expressões (3.63) e (3.69) obtemos, portanto, que  $\beta = -1/b$ . Utilizando o valor obtido numericamente  $\beta = 1.01 \pm 0.01$  temos que  $b = -0.99 \pm 0.01$ . Da equação (3.68) observa-se que o tempo de *crossover*  $t_2$  obedece a relação

$$t_z \approx \varepsilon^{a/b}. \quad (3.70)$$

Desta equação e da equação (3.64) obtemos que  $z = a/b$ . Como  $z = -1.50 \pm$

0.03 temos, assim, que  $a = 1.49 \pm 0.04$ . Utilizando os expoentes obtidos, as transformações de escala  $\langle E \rangle(t) \rightarrow \langle E \rangle(t)/l$  e  $t \rightarrow tl^a$  fazem com que, para tempos longos, as curvas de energia mostradas na figura 3.12(a) colapsem em uma única curva universal, como mostrado na figura 3.14(a). Obtemos das simulações que as propriedades de escala são válidas apenas próximo da transição do regime integrável para o não-integrável, ou seja, para valores de  $\varepsilon$  suficientemente pequenos. O expoente  $c$  é obtido através da conexão existente entre o modelo de Fermi-Ulam e o mapa padrão de Chirikov (equação (3.41)). Temos, assim, que  $c = b/2 = -0.495 \pm 0.005$ . Na figura 3.14(b) apresentamos o colapso das curvas de energia originalmente mostradas na figura 3.12(b).

Dependendo dos valores da fase e velocidade, a partícula pode, após colidir com a parede móvel, adquirir uma velocidade pequena suficiente de tal forma que uma colisão sucessiva ocorra. Este tipo de situação é mais freqüente para pequenos valores de  $V_0$  e  $t$ , e não nos permite obter satisfatoriamente uma descrição de escala para o transiente inicial das curvas de energia para  $V_0 < \varepsilon$ . Além disso, este transiente afeta as curvas de energia entre  $t_1$  e  $t_2$ , intervalo de tempo em que uma descrição para o regime de crescimento da energia não é obtida de forma direta.

A energia média  $\langle \bar{E} \rangle(t, \varepsilon, V_0)$ , definida pela equação (2.44), é descrita por uma relação de escala similar àquela dada pela equação (3.67), na qual substituímos  $\langle E \rangle(t, \varepsilon, V_0)$  por  $\langle \bar{E} \rangle(t, \varepsilon, V_0)$ . A figura 3.15(a) mostra as curvas de energia  $\langle \bar{E} \rangle(t)$  para o limite de pequenos valores de velocidade inicial ( $V_0 < \varepsilon$ ) e, na figura 3.15(b), são mostradas as curvas de energia para a situação na qual  $V_0 > \varepsilon$ . Os valores de  $\varepsilon$  empregados nas figuras 3.15(a) e (b) são os mesmos que foram empregados na figura 3.12. Seguindo o mesmo raciocínio empregado na análise de escala da energia média  $\langle E \rangle(t, \varepsilon, V_0)$  obtemos os expoentes  $a = 1.50 \pm 0.04$ ,  $b = -0.995 \pm 0.003$  e  $c = -0.498 \pm 0.001$ . As figuras 3.16(a) e (b) mostram a energia reescalada  $\langle \bar{E} \rangle(t)/l$  como função de  $tl^a$ . A figura 3.16(a) corresponde ao caso em que  $V_0 < \varepsilon$  e a figura 3.16(b) corresponde ao caso em que  $V_0 > \varepsilon$ . Após um transiente inicial as curvas de energia  $\langle \bar{E} \rangle(t)$  colapsam em uma única curva universal. Se considerarmos as margens de erro, os valores destes novos expoentes são os mesmos daqueles que foram obtidos na análise de  $\langle E \rangle(t)$ , ou seja, as energias médias  $\langle E \rangle(t)$  e  $\langle \bar{E} \rangle(t)$  são descritas pelo mesmo conjunto de expoentes  $a = 1.50 \pm 0.04$ ,  $b = -0.993 \pm 0.007$  e  $c = -0.497 \pm 0.003$ .

A figura 3.17(a) mostra, para diferentes valores do parâmetro de controle  $\varepsilon$ , as curvas de energia média  $\langle \overline{E} \rangle(n)$ , definida pela equação (2.48), como função do número de colisões  $n$ . Nesta figura estão incluídos ambos os casos  $V_0 < \varepsilon$  e  $V_0 > \varepsilon$  para diferentes valores de  $\varepsilon$ . Para  $V_0 < \varepsilon$  as curvas de energia média  $\langle \overline{E} \rangle(n)$  apresentam um regime inicial de crescimento em lei de potência. Para valores grandes de  $n$  a energia média  $\langle \overline{E} \rangle(n)$  atinge um regime de saturação. Esta transição do regime de crescimento para o regime de saturação é caracterizada pelo número de iteração de *crossover*  $n = n_x$ . As curvas com  $V_0 > \varepsilon$ , no entanto, são caracterizadas por um regime inicial no qual a energia média  $\langle \overline{E} \rangle(n)$  é essencialmente constante ( $\approx V_0^2$ ). Depois as curvas apresentam um regime de crescimento e, finalmente, acompanham as curvas obtidas com  $V_0 < \varepsilon$ . Após o regime de crescimento, as curvas de energia média atingem, para grandes valores de  $n$ , o regime de saturação. Como podemos observar, o valor da energia de saturação depende apenas do parâmetro  $\varepsilon$ . Considerando ainda as curvas de energia com  $V_0 > \varepsilon$  definimos  $n'_x$  como o número de iteração para o qual  $\langle \overline{E} \rangle(n)$  passa do regime de valor constante para o regime de crescimento. Similarmente definimos  $n''_x > n'_x$  como o valor de  $n$  para o qual  $\langle \overline{E} \rangle(n)$  passa do regime de crescimento para o regime de saturação. Observa-se que  $n''_x \approx n_x$  e que  $n' \approx 0$  no limite  $V_0 < \varepsilon$ .

Utilizando um novo conjunto de expoentes universais  $a^*$ ,  $b^*$  e  $c^*$  escrevemos a relação de escala para  $\langle \overline{E} \rangle(n, \varepsilon, V_0)$  como

$$\langle \overline{E} \rangle(n, \varepsilon, V_0) = l \langle \overline{E} \rangle(l^{a^*} n, l^{b^*} \varepsilon, l^{c^*} V_0). \quad (3.71)$$

Considerando o caso em que  $V_0 < \varepsilon$ , o *crossover*,  $n_x$ , é descrito por

$$n_x \propto \varepsilon^z, \quad (3.72)$$

em que  $z = -1.01 \pm 0.02$ . Como o regime assintótico de  $\langle \overline{E} \rangle(n, \varepsilon, V_0)$  depende apenas de  $\varepsilon$ , escrevemos, para  $n \gg n_x$ ,

$$\langle \overline{E} \rangle(n, \varepsilon, V_0) = g(\varepsilon) \propto \varepsilon^\beta, \quad (3.73)$$

com  $\beta = 1.02 \pm 0.02$ . Escolhendo  $l = \varepsilon^{-1/b^*}$ , a equação (3.71) é reescrita como

$$\langle \overline{E} \rangle(n, \varepsilon, V_0) = \varepsilon^{-1/b^*} f(\varepsilon^{-a^*/b^*} n, \varepsilon^{-c^*/b^*} V_0), \quad (3.74)$$

em que  $f = \langle \overline{E} \rangle(\varepsilon^{-a^*/b^*} n, 1, \varepsilon^{-c^*/b^*} V_0)$  é assumida constante para  $n \ll n_x$ .

Tabela 3.1: *Valores dos expoentes de escala do modelo completo de Fermi-Ulam. Os expoentes  $a$ ,  $b$  e  $c$  descrevem as propriedades de escala da energia média como função de  $t$ . As relações de escala da energia média como função do número de choques,  $n$ , são descritas pelos expoentes  $a^*$ ,  $b^*$  e  $c^*$ .*

	$t$	$n$
$a, a^*$	$1.50 \pm 0.04$	$0.99 \pm 0.04$
$b, b^*$	$-0.993 \pm 0.007$	$-0.98 \pm 0.02$
$c, c^*$	$-0.497 \pm 0.003$	$-0.49 \pm 0.01$

Desta forma temos a relação  $\beta = -1/b^*$  e, portanto,  $b^* = -0.98 \pm 0.02$ . Temos ainda que  $n_x$  relaciona-se com  $\varepsilon$  através da relação

$$n_x \approx \varepsilon^{a^*/b^*}. \quad (3.75)$$

Desta forma temos, das equações (3.72) e (3.75), que  $z = a^*/b^*$ . Segue-se que  $a^* = 0.99 \pm 0.04$ .

O valor do expoente  $c^*$ , associado a  $V_0$  na relação de escala, é obtido como anteriormente pela equação (3.41). O procedimento fornece  $c^* = b^*/2$ , ou seja,  $c^* = -0.49 \pm 0.01$ . Definindo o fator de escala  $l = \varepsilon^{-1/b^*}$  obtemos, por meio das transformações  $\langle \bar{E} \rangle(n) \rightarrow \langle \bar{E} \rangle(n)/l$  e  $n \rightarrow nl^{a^*}$ , o colapso das curvas de energia, como mostra a figura 3.17(b). Na tabela 3.1 resumimos os resultados obtidos no estudo das propriedades de escala do modelo de Fermi-Ulam. Os resultados apresentados correspondem aos dois conjuntos de expoentes, obtidos da análise de médias na energia como funções de  $(t, \varepsilon, V_0)$  e  $(n, \varepsilon, V_0)$ . Considerando as incertezas, observa-se que  $b \approx b^*$  e que  $c \approx c^*$ . Observa-se também que  $a \approx 3/2$  enquanto que  $a^* \approx 1$ . Apesar de diferentes, mostramos na próxima subseção que  $a$  e  $a^*$  estão relacionados.

### 3.3.3 Relação entre os expoentes $a$ e $a^*$

Nesta seção apresentamos um argumento simples que relaciona os expoentes  $a$  e  $a^*$ , os quais são associados às variáveis  $t$  e  $n$ , respectivamente. O cálculo consiste em estabelecer uma conexão entre o tempo e o número de choques. Assim, considere o regime de tempos longos, em que as curvas de energia são caracterizadas por um valor constante. Definimos a veloci-

dade média  $\langle \bar{V} \rangle = \sqrt{\langle E \rangle}$  e  $\Delta t$  como um certo intervalo de tempo. Sendo  $\bar{L}$  a distância média percorrida pela partícula entre duas colisões, podemos escrever

$$\frac{\langle \bar{V} \rangle \Delta t}{\bar{L}} = \Delta n, \quad (3.76)$$

em que  $\Delta n$  é o número de colisões que ocorrem no intervalo de tempo  $\Delta t$ . Como a relação acima é sempre válida no regime de saturação da energia média, então, em termos das variáveis reescaladas  $\langle \bar{V}' \rangle = l^c \langle \bar{V} \rangle$ ,  $\Delta t' = l^a \Delta t$ ,  $\Delta n' = l^{a^*} \Delta n$  e  $\bar{L}' = \bar{L} \approx 2$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{\langle \bar{V}' \rangle \Delta t'}{\bar{L}'} &= \Delta n' \\ \frac{l^c \langle \bar{V} \rangle l^a \Delta t}{\bar{L}} &= l^{a^*} \Delta n. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Comparando as duas últimas equações tem-se que  $c + a - a^* = 0$ , ou seja,  $a^* = a + c$ , uma relação corroborada pelos resultados obtidos nas simulações.

### 3.4 Diferenças entre as versões completa e simplificada

Nas seções anteriores estudamos as propriedades de escala das versões completa e simplificada do modelo de Fermi-Ulam. As análises consideraram grandezas como energias médias e número médio de colisões. Na versão completa a energia média como função do tempo satura para valores grandes de  $t$ . Por outro lado, uma análise similar revelou que na versão simplificada a energia média decai para tempos longos.

Nesta seção discutimos com mais detalhes as diferenças entre estas duas versões. Em particular estudamos numericamente as propriedades do modelo de Fermi-Ulam na região caótica de energia mais baixa. Como resultado apontamos que no modelo completo a possibilidade de uma partícula permanecer com velocidade muito baixa por um tempo muito grande ( $> 10^5$  no exemplo considerado, com  $\varepsilon = 10^{-3}$  e  $10^8$  iterações) ocorre apenas quando  $\phi \approx \pi$ . Para a versão simplificada o tempo entre colisões pode ser grande ( $> 10^9$ , para  $\varepsilon = 10^{-3}$  e  $10^8$  iterações) para colisões com  $\phi \in (\pi, 2\pi]$ .

### 3.4.1 Tempo máximo entre duas colisões

A órbita de uma condição inicial situada no mar caótico do modelo completo de Fermi-Ulam eventualmente visita a região de energia mais baixa do espaço de fase. Quando a velocidade da partícula se torna muito pequena normalmente ocorre uma colisão direta (situação em que a partícula colide sucessivamente com a parede móvel antes de abandonar a zona de colisão) e a velocidade da partícula sofre um aumento que depende da velocidade da parede (da fase  $\phi$ ) no instante da colisão. Em situações como esta, a partícula permanece por um tempo menor que  $T = 2\pi$  com velocidade baixa até que ocorra a colisão direta. Aqui  $T$  é o período de oscilação da parede móvel.

Os maiores valores de velocidade da região de movimento caótico são aqueles que estão próximos da primeira curva invariante. Próximo à primeira invariante o valor da velocidade é grande suficiente para que a partícula tenha uma colisão indireta (situação em que a partícula colide com a parede fixa antes de uma nova colisão com a parede móvel). Portanto o intervalo de tempo entre colisões indiretas assume os menores valores possíveis para valores de velocidade da partícula próximos à primeira curva invariante. Como exemplo tomemos  $\varepsilon = 10^{-3}$ , em que o valor maior de velocidade da região de movimento caótico é  $V^* \approx 7 \times 10^{-2}$  (figura 3.3(a)). Este valor de velocidade é grande suficiente para garantir que uma colisão indireta ocorra em um intervalo de tempo  $\Delta t \approx 29$  (ou  $2/(7 \times 10^{-2})$ ). Valores menores de  $\varepsilon$  originam valores ainda menores da velocidade da primeira curva invariante e, conseqüentemente, valores de tempo maiores para colisões indiretas. Independentemente do valor de  $\varepsilon$ , o menor tempo possível de uma colisão indireta é maior que o tempo de uma colisão sucessiva.

A versão simplificada não considera colisões sucessivas. Como conseqüência o tempo entre duas colisões é sempre  $2/V$ . Em decorrência deste fato, quando a partícula visita a região mais baixa do mar de caos sua energia permanecerá baixa por um tempo longo.

Na versão completa, no entanto, existe uma circunstância em que a partícula é capaz de escapar da zona de colisão com velocidade baixa e conseqüentemente permanecer nesta situação de energia baixa por um tempo longo. O início da zona de colisão está na posição  $x = 1 - \varepsilon$  e corresponde à fase  $\phi = \pi$  da parede oscilante. Quando imediatamente após a  $n$ -ésima

colisão a fase é  $\phi_n \approx \pi$  então a velocidade da parede é  $V_w \approx 0$ . Se após esta colisão a partícula possui velocidade baixa então ela escapará da zona de colisão com velocidade baixa e a próxima colisão será indireta. O tempo gasto pela partícula para abandonar a zona de colisão pode assumir qualquer valor no intervalo  $(0, 2\pi)$ . O tempo que a partícula gasta em seu trajeto desde a saída da zona de colisão até a parede fixa e desta de volta até a entrada da zona de colisão é  $2(1 - \varepsilon)/V_n$ . Após entrar na zona de colisão, o tempo gasto pela partícula até se encontrar com a parede móvel pode assumir qualquer valor no intervalo  $[0, 2\pi)$ . Portanto o intervalo de tempo até a próxima colisão (indireta) será maior que  $2(1 - \varepsilon)/V_n$  e menor que  $2(1 - \varepsilon)/V_n + 4\pi$ .

Como o tempo das colisões sucessivas é sempre menor que  $2\pi$ , concentremo-nos no estudo da distribuição de velocidades da partícula e do tempo máximo até a próxima colisão em situações em que a partícula escapa da zona de colisão com velocidade baixa.

Utilizando diferentes valores de  $\phi_n$  e  $V_n$  determinamos as combinações destas variáveis que resultam em choque direto e quais resultam em choque indireto. A região em cor cinza na figura 3.18(a) corresponde às combinações de  $V_n$  e  $\phi_n$  para as quais a partícula escapa da zona de colisão. Nesta figura empregamos  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Observamos para  $V_n < -\varepsilon$  que, independente do valor da fase, a partícula escapa da zona de colisão. Este resultado já era esperado uma vez que em tal situação a partícula se move para a esquerda com módulo da velocidade maior que a velocidade máxima da parede. Também já era esperado que a região cinza não se estendesse para valores positivos de  $V_n$ . Sendo  $V_n > 0$  a partícula se move para a direita e uma colisão sucessiva fatalmente ocorrerá. Para  $\phi_n = \pi$  observamos que qualquer valor de  $V_n$ , por menor que seja seu valor absoluto, escapará da zona de colisão, um resultado esperado uma vez que este corresponde ao caso em que a partícula está na fronteira da zona de colisão e a parede se encontra com velocidade nula.

A figura 3.18(a) foi gerada empregando 500 por 500 combinações diferentes das variáveis  $V_n$  e  $\phi_n$ . Os valores mínimo e máximo de  $V_n$  foram, respectivamente,  $V_{n, \min} = -1.2\varepsilon$  e  $V_{n, \max} = 1.2\varepsilon$ . O valor mínimo de  $\phi_n$  foi 0 e o valor máximo foi  $2\pi$ . As combinações de  $V_n$  e  $\phi_n$  sem realidade física foram descartadas, por exemplo, as que correspondem à situação em que, imediatamente após a colisão  $n$ , o movimento da partícula é para a direita,  $V_n > 0$ , enquanto o movimento da parede é para a esquerda,  $V_w < 0$ . Então

empregamos a equação (3.61) e determinamos para cada ponto  $(V_n, \phi_n)$  a solução  $\Delta t_{n+1}$  e que tipo de colisão (direta ou indireta) ocorreu.

A linha negra na figura 3.18(a) é a curva de menor  $|V_n|$ . Esta curva corresponde, portanto, às combinações de  $V_n$  e  $\phi_n$  para as quais a partícula escapa da zona de colisão e ocasionam os eventos de maior tempo até a próxima colisão. Assim, mostramos na figura 3.18(b) o gráfico do tempo máximo de colisões indiretas como função de  $\phi_n$ . Nesta figura  $\Delta t_{\max}$  corresponde à linha negra da figura 3.18(a). Observamos que  $\Delta t_{\max}$  possui um pico em  $\phi_n \approx \pi$ , correspondendo a  $|V_n| \approx 0$  na figura 3.18(a).

Na figura 3.19 mostramos as distribuições de velocidade e do tempo para colisões indiretas como funções de  $\phi_n$ . As distribuições foram obtidas de uma órbita da região caótica. A condição inicial foi iterada  $10^8$  vezes. Toda vez que a partícula satisfaz a condição de sofrer uma colisão indireta com  $|V_n| < 1.2\varepsilon$  as informações do sistema,  $V_n$ ,  $\phi_n$  e o intervalo de tempo para a próxima colisão, foram armazenadas. Das  $10^8$  iterações, 40080 satisfizeram a condição. Os dados obtidos nesta análise estão sobrepostos aos resultados da análise anterior (figura 3.18). A figura 3.19(b) mostra que os valores de tempo para a próxima colisão estão predominantemente na faixa  $1.7 \times 10^3$  até  $2 \times 10^4$ . Valores de  $\Delta t_{n+1}$  menores que  $1.7 \times 10^3$  correspondem a velocidades superiores a  $1.2\varepsilon$ . Observamos ainda que são raras as situações em que o intervalo de tempo entre colisões supera  $10^5$  e estes casos correspondem a 0.045% das ocorrências. O tempo médio entre colisões é  $3.3 \times 10^3$ .

Como o número de ocasiões nas quais a partícula permanece por um tempo demasiadamente grande com velocidades baixas é relativamente pequeno, o comportamento assintótico da energia média satura para tempos longos para a versão completa.

Na versão simplificada do modelo de Fermi-Ulam as colisões sucessivas não existem. Assim toda vez que a partícula adquire baixa velocidade o tempo para a próxima colisão é grande. Com o objetivo de estabelecer uma comparação entre as versões completa e simplificada do modelo de Fermi-Ulam, realizamos uma análise similar à apresentada para modelo completo. Utilizando o mapa do modelo simplificado calculamos a órbita de uma condição inicial pertencente à região de movimento caótico. Os dados da órbita foram armazenados todas as vezes em que a partícula visitou a região de baixa energia com  $|V_n| < 1.2\varepsilon$  onde utilizamos  $\varepsilon = 10^{-3}$ , como na análise

anterior. O procedimento foi realizado para  $10^8$  colisões e a partícula visitou a região do espaço de fase com  $|V_n| < 1.2\varepsilon$  um total de 2050870 vezes, quantidade aproximadamente 51 vezes maior que a obtida na versão completa. A figura 3.20 mostra os tempos da próxima colisão,  $\Delta t_{n+1}$ , correspondentes aos dados da órbita para  $|V_n| < 1.2\varepsilon$ . O valor médio de  $\Delta t_{n+1}$  neste caso foi  $2.49 \times 10^4$ . Este valor é aproximadamente uma ordem de grandeza maior que aquele obtido para a versão completa do modelo ( $3.3 \times 10^3$ ). O número de vezes em que o tempo para a próxima colisão superou o valor  $10^5$  corresponde a 1.67% das ocorrências, percentual maior em relação ao obtido para o modelo completo (0.045%). Algumas vezes o intervalo entre colisões superou o valor  $10^9$ .

Comparando as figuras 3.19(b) e 3.20 notamos que no modelo completo a possibilidade de divergência de  $\Delta t_{n+1}$  ocorre apenas em  $\phi = \pi$ . No modelo simplificado a possibilidade de divergências em  $\Delta t_{n+1}$  ocorre em todo o intervalo  $\phi \in (\pi, 2\pi]$ . Esta diferença é suficiente para gerar o decaimento na energia média observado na versão simplificada para tempos longos.

### 3.5 Conclusões

Estudamos as propriedades de escala da transição do regime integrável para o regime não-integrável das versões completa e simplificada do modelo de Fermi-Ulam. O estudo foi realizado no mar de caos localizado abaixo da curva invariante de mais baixa energia.

Para o regime de tempos longos, a descrição de escala da energia média da versão completa de Fermi-Ulam é caracterizada pelos expoentes  $a = 1.50 \pm 0.04 \approx 3/2$ ,  $b = -0.993 \pm 0.007 \approx -1$  e  $c = -0.497 \pm 0.003 \approx -1/2$ , correspondentes às variáveis  $t$ ,  $\varepsilon$  e  $V_0$ , respectivamente. Na versão simplificada a descrição da energia média como função do tempo é caracterizada pelos expoentes  $a_2 = 1.35 \pm 0.05$ ,  $b_2 = -0.90 \pm 0.03$  e  $c_2 = -0.45 \pm 0.01$ . Comparando os resultados das versões completa e simplificada notamos que os valores dos expoentes não são os mesmos.

Obtemos também a descrição de escala do número médio de colisões como função do tempo para o modelo simplificado de Fermi-Ulam. Os expoentes de escala associados às variáveis  $t$  e  $\varepsilon$  são, respectivamente,  $d = -1.7 \pm 0.1$  e  $e = 1.12 \pm 0.05$ .

Considerando a versão completa, observamos que os expoentes associados ao parâmetro  $\varepsilon$  e à velocidade inicial  $V_0$  são basicamente os mesmos para as médias no tempo e no número de choques, ou seja,  $b \approx b^*$  e  $c \approx c^*$ . Mostramos também que apesar de os expoentes  $a$  e  $a^*$  (associados, respectivamente, às variáveis  $t$  e  $n$ ) serem diferentes, eles estão relacionados com o expoente  $c$  através da equação  $a^* = a + c$ .

No regime de valores grandes de tempo, as curvas de energia média da versão completa atingem um valor de saturação. Para a versão simplificada, no entanto, as curvas de energia média decaem de acordo com a relação  $\langle E \rangle(t) \propto t^\alpha$  com  $\alpha = -0.055 \pm 0.005$ . A origem desta diferença se deve ao fato de a versão simplificada não incorporar colisões diretas. Mostramos numericamente para a versão simplificada que os eventos de tempo grande entre colisões se dá para valores de fase no intervalo  $\phi \in (\pi, 2\pi]$ . À medida que o tempo passa, o número de amostras que eventualmente adquirem um estado de energia baixa cresce lentamente, gerando o decaimento nas curvas de energia média no limite de tempos longos. Já na versão completa, os eventos em que o tempo entre colisões é grande só ocorrem quando coincide de a partícula estar com velocidade baixa e a colisão ocorrer quando a fase da parede é  $\phi \approx \pi$ . Estes eventos são raros o suficiente para serem detectados na forma de decaimento nas curvas de energia média.

O resultado da análise de escala da energia média calculada como função do número de iterações fornece o conjunto de expoentes  $a^* = 0.99 \pm 0.04 \approx 1$ ,  $b^* = -0.98 \pm 0.02 \approx -1$  e  $c^* = -0.49 \pm 0.01 \approx -1/2$ , o mesmo para as versões completa e simplificada. As energias médias quando calculadas como funções de  $n$  não apresentam regime de decaimento, resultado válido para as versões completa e simplificada. Este resultado é uma consequência do fato de que a variável  $n$  é discretizada em intervalos de tamanho  $\Delta n = 1$ , independente da velocidade e do tempo entre colisões. Os resultados das propriedades de escala que apresentamos neste capítulo foram parcialmente publicados nas revistas *Physical Review E* [40] e *Brazilian Journal of Physics* [39]. A análise de escala da energia média calculada como função do tempo para a versão completa está em processo de submissão.

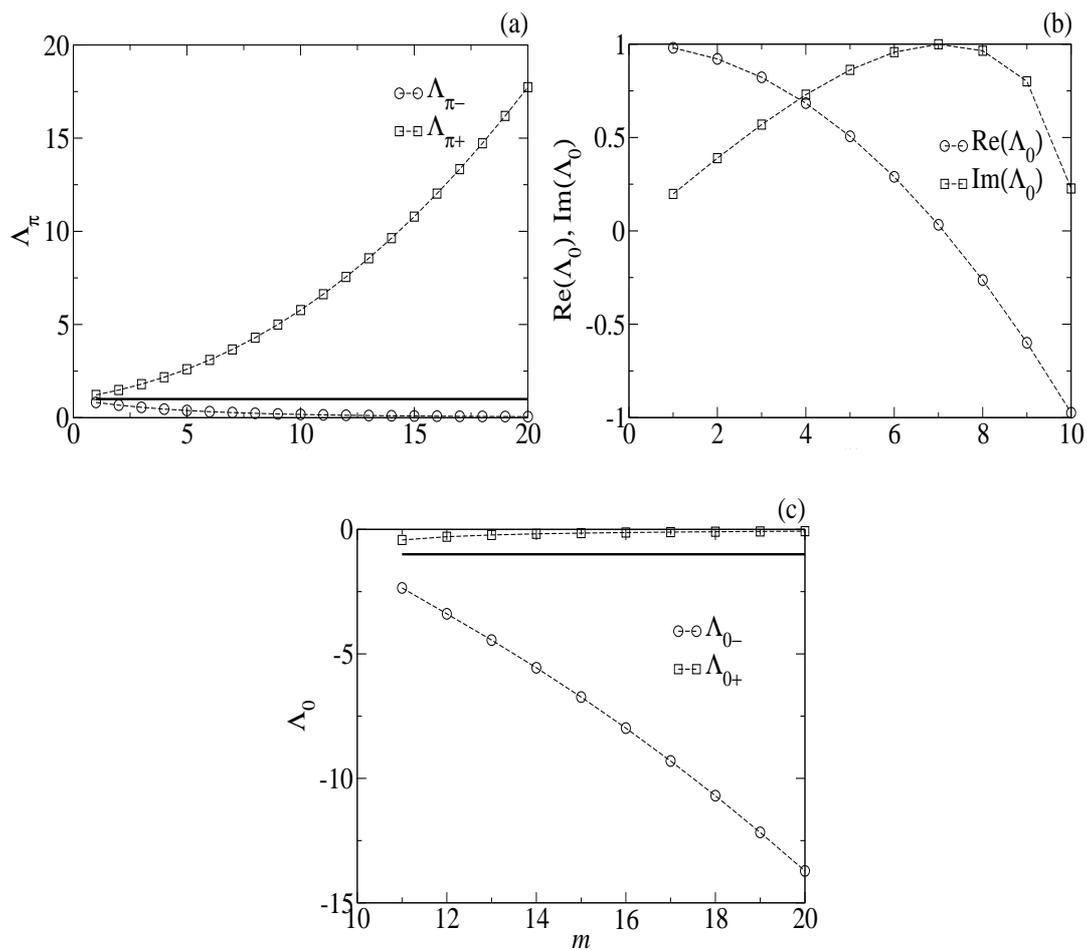


Figura 3.5: A figura ilustra os valores característicos dos pontos fixos para  $\varepsilon = 10^{-3}$ . (a) Os pontos fixos com  $\phi^* = \pi$  são pontos de sela. Os pontos fixos com  $\phi^* = 0$  são pontos elípticos para  $m \leq 10$ , figura (b), e se tornam pontos de sela para  $m > 10$ , como ilustrado em (c). As linhas horizontais correspondem a  $|\Lambda| = 1$ .

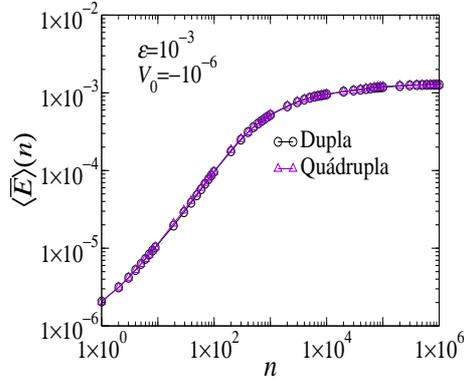


Figura 3.6: Gráfico log-log de energias médias como funções de  $n$  calculadas utilizando precisão dupla e quádrupla.

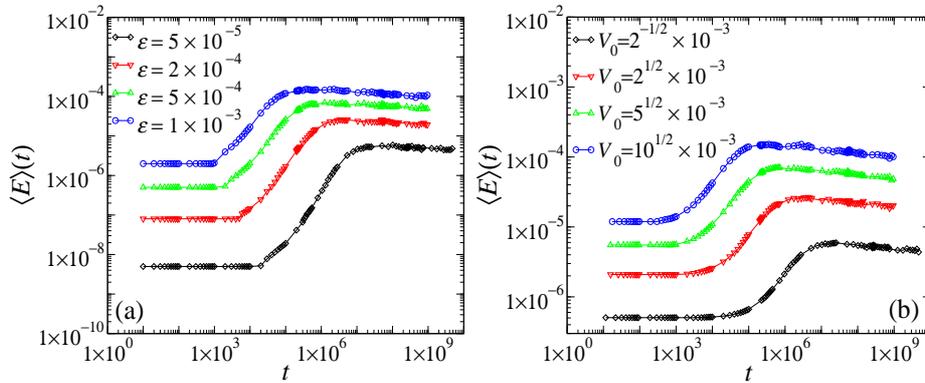


Figura 3.7: As figuras ilustram curvas de energia do modelo simplificado de Fermi-Ulam em escalas log-log. As curvas em (a) correspondem ao caso em que  $V_0 < \varepsilon$ . Em (b) são mostradas as curvas de energia média para o caso  $V_0 > \varepsilon$ . Os mesmos valores de  $\varepsilon$  foram empregados em (a) e em (b).

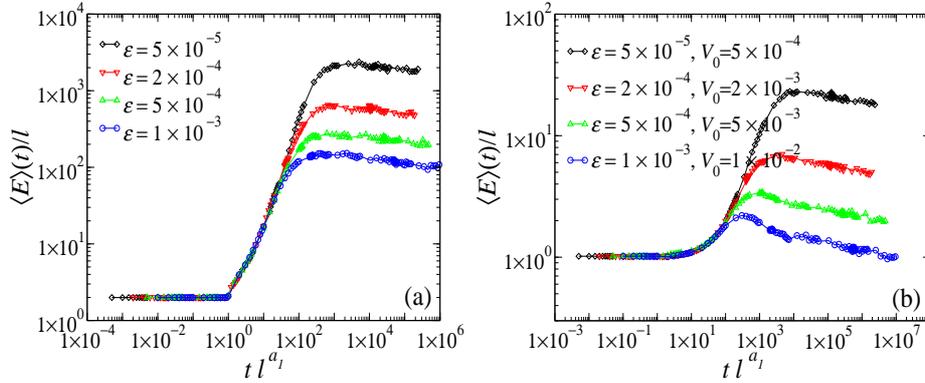


Figura 3.8: Por meio de transformações apropriadas de escala obtemos o colapso das curvas de energia média para  $t \ll t_2$ . Em (a) temos as curvas para o caso  $V_0 < \varepsilon$ , com  $l = \varepsilon^{-1/b_1}$ , e em (b) para  $V_0 > \varepsilon$ , com  $l = V_0^{-1/c_1}$ .

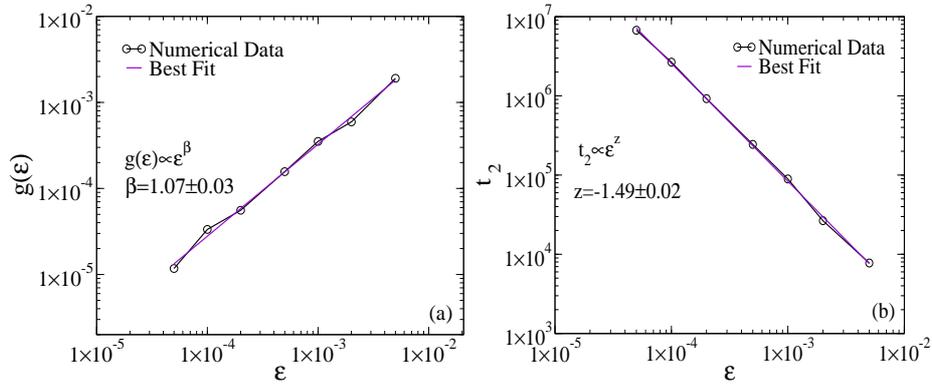


Figura 3.9: As figuras ilustram, em escalas log-log, ajustes dos dados numéricos via o método dos mínimos quadrados. O procedimento fornece em (a) o expoente  $\beta$  e em (b) o expoente  $z$ . As barras de erro são menores que o tamanho dos símbolos.

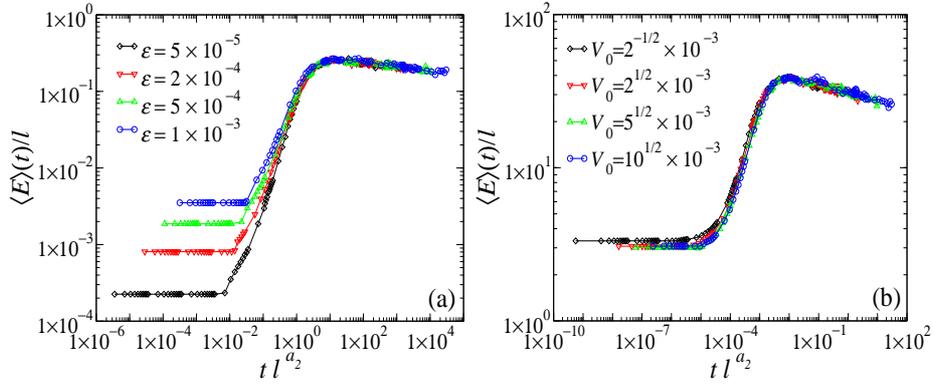


Figura 3.10: As figuras ilustram o colapso das curvas de energia média para  $t \gg t_2$ . Em (a) temos as curvas para o caso em que  $V_0 < \varepsilon$  e em (b) para o caso  $V_0 > \varepsilon$ . Os valores dos expoentes são  $a_2 = 1.38 \pm 0.02$ ,  $b_2 = -0.92 \pm 0.01$  e  $c_2 = -0.46 \pm 0.01$ , e o fator de escala que escolhemos é  $l = \varepsilon^{-1/b_2}$ .

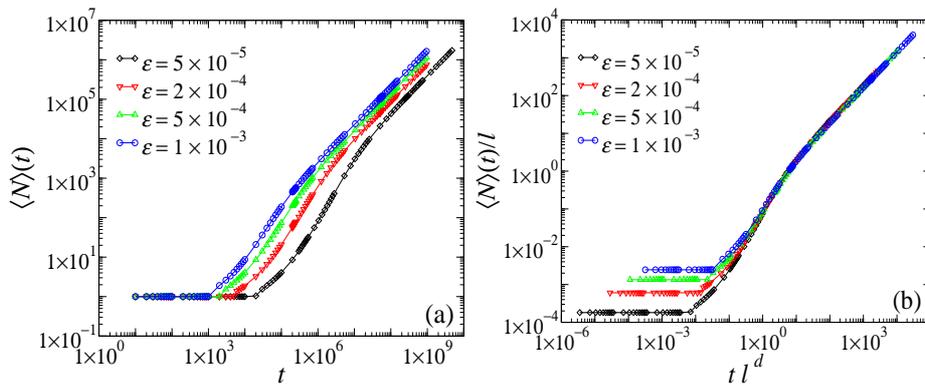


Figura 3.11: A figura (a) ilustra o comportamento das curvas do número de choques em função do tempo. Em (b) obtemos, por transformações apropriadas de escala, o colapso para tempos longos das curvas apresentadas em (a).

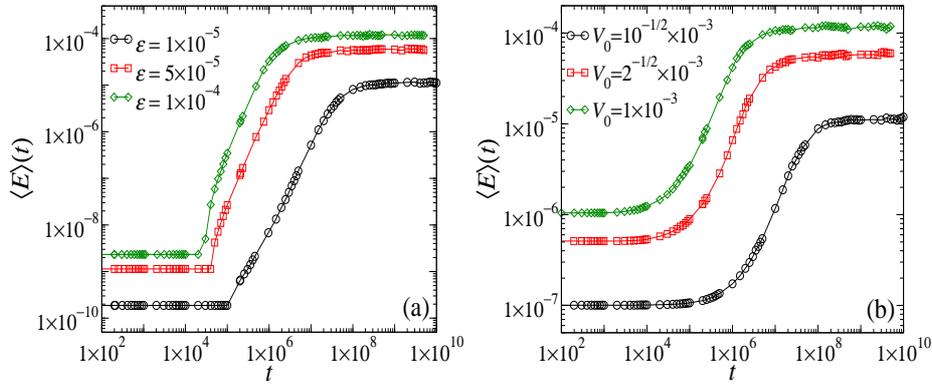


Figura 3.12: Curvas de energia média como funções da variável  $t$  para o modelo de Fermi-Ulam completo. O caso em que  $V_0 = 10^{-6}$ , ou  $V_0 < \epsilon$ , é mostrado em (a). Em (b) são mostradas as curvas de energia para  $V_0 > \epsilon$ . Foram utilizadas  $M = 2 \times 10^3$  amostras caracterizadas por fases iniciais escolhidas aleatoriamente.

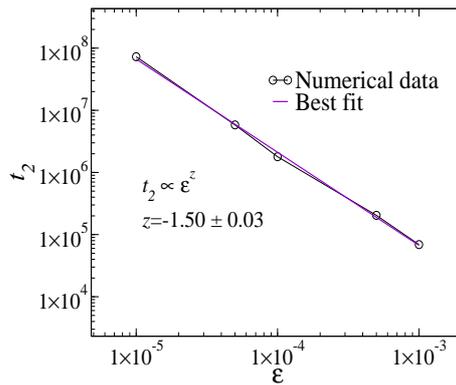


Figura 3.13: A figura ilustra, em escalas logarítmicas, o gráfico do tempo de crossover  $t_2$  como função de  $\epsilon$ .

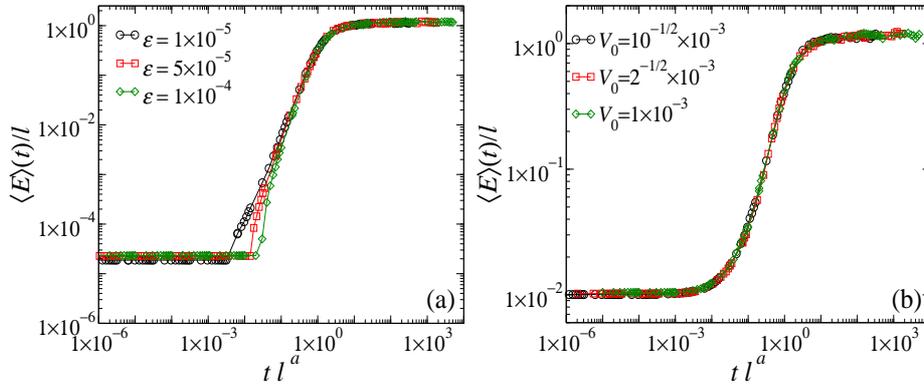


Figura 3.14: A figura ilustra o colapso das curvas de energia da figura 3.12 para tempos longos. Em (a) mostramos o colapso para  $V_0 < \varepsilon$  e em (b) para  $V_0 > \varepsilon$ .

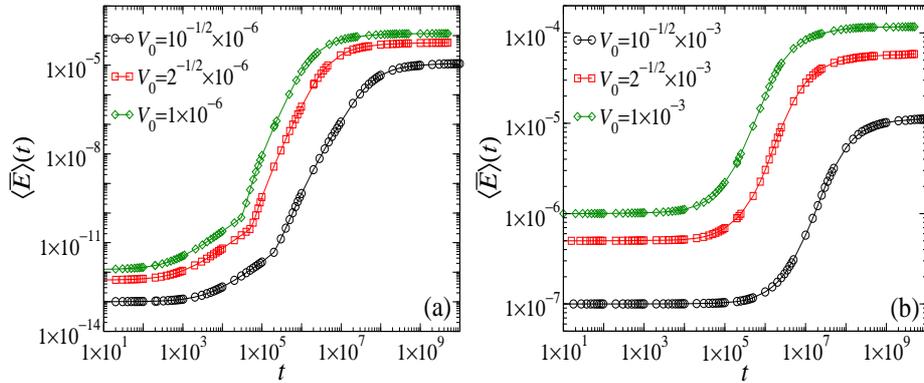


Figura 3.15: Gráficos log-log da energia média  $\langle \bar{E} \rangle(t)$  obtida como função de  $t$  para os mesmos valores de  $\varepsilon$  mostrados na figura 3.12(a). A figura da esquerda, (a), corresponde ao caso em que  $V_0 < \varepsilon$  e em (b) são mostradas as curvas para a situação na qual  $V_0 > \varepsilon$ .

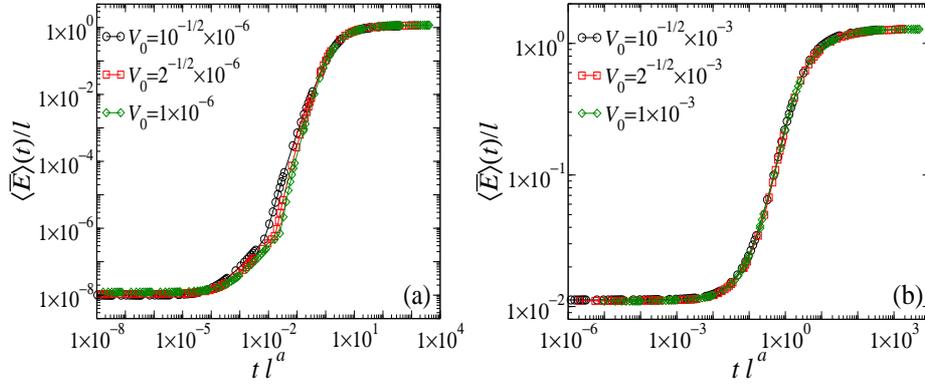


Figura 3.16: Por meio das transformações  $\langle \bar{E} \rangle(t)/l$  e  $tl^a$ , com  $l = \varepsilon^{-1/b}$ , obtemos o colapso das curvas de energia originalmente apresentadas nas figuras 3.15(a) e (b).

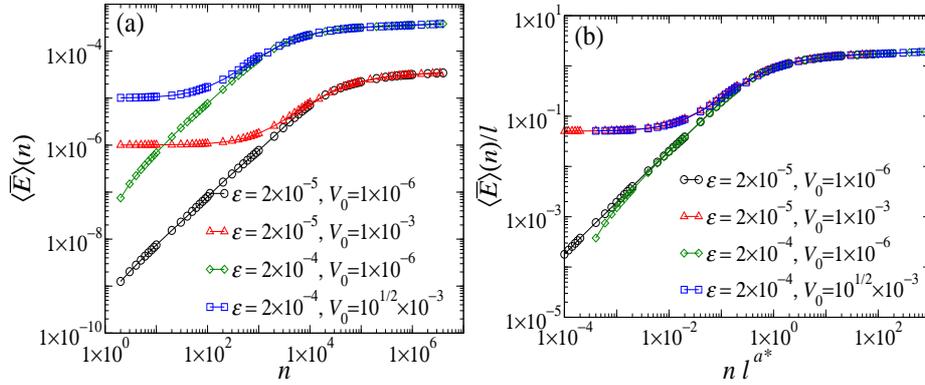


Figura 3.17: (a) A figura ilustra a energia média  $\langle \bar{E} \rangle(n)$ , como função do número de choques  $n$ , para diferentes valores do parâmetro de controle e velocidade inicial. Em (b) apresentamos o colapso das curvas mostradas em (a).

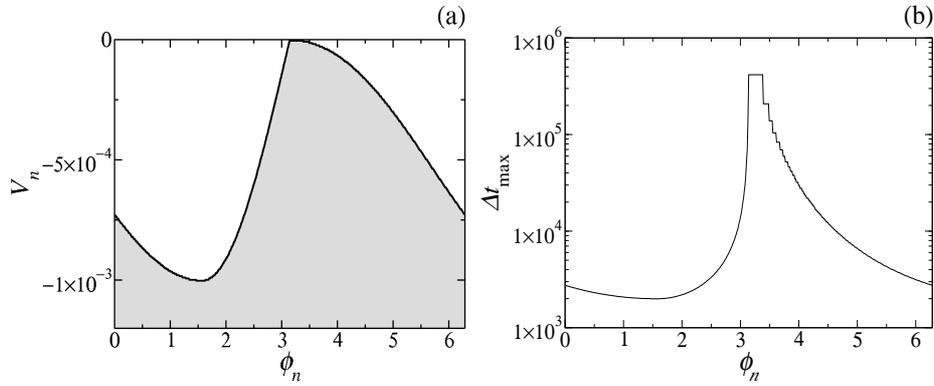


Figura 3.18: (a) A região de cor cinza corresponde a possíveis combinações de velocidade e fase na região de energia baixa que resultam em colisão indireta no modelo completo de Fermi-Ulam. A figura (b) mostra, como função de  $\phi_n$ , o valor máximo de tempo para que ocorra uma colisão. Nas figuras (a) e (b) foi utilizado  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

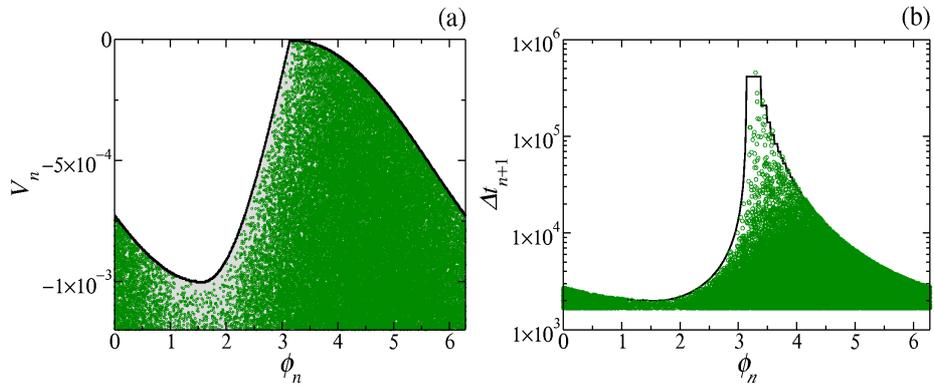


Figura 3.19: As figuras ilustram os dados de uma órbita caótica do modelo completo que visitou a região de energia baixa. Em (a) temos os valores de velocidade e fase que correspondem a colisões indiretas. Em (b) temos o intervalo de tempo necessário para que estas colisões ocorram. Assim como na figura 3.18, utilizamos  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

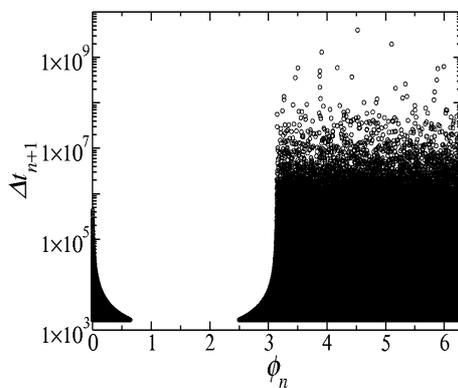


Figura 3.20: *Intervalo de tempo necessário para que ocorra uma colisão na versão simplificada do modelo de Fermi-Ulam. Os dados são de uma órbita caótica que visitou a região de energia baixa. Esta figura foi gerada com  $\varepsilon = 10^{-3}$ .*

---

# O modelo *bouncer* simplificado e o mapeamento padrão

---

## 4.1 Introdução

O modelo *bouncer*, originalmente proposto por Pustynnikov [12], é uma das modificações do modelo de Fermi. Ele consiste de uma partícula clássica que, sob influência da aceleração gravitacional, colide contra uma plataforma oscilante, cujo movimento vertical é caracterizado por uma amplitude  $\epsilon$  e frequência  $\omega$ , como ilustra a figura 4.1. Versões quânticas do modelo *bouncer* são encontradas nas referências [49, 50]. Wijn et al. estudaram uma versão do modelo *bouncer* em que a plataforma oscilante possui forma de dente de serra [51]. Os autores demonstraram que a partícula apresenta ou não movimento difusivo na direção horizontal dependendo do movimento da plataforma oscilante. A comparação de dados experimentais com resultados numéricos obtidos para o modelo *bouncer* também foi feita na literatura [52].

A palavra *bouncer* é de origem inglesa. No entanto é comum as pessoas se referirem a este modelo utilizando o termo em inglês. Por esta razão nos referimos ao modelo de Pustynnikov como *bouncer*.

No modelo *bouncer* a partícula apresenta, para certas combinações de valores de parâmetros de controle e condições iniciais, a propriedade de crescimento ilimitado de energia, fenômeno conhecido como aceleração de Fermi [12, 53]. A origem desta propriedade foi explicada por Lichtenberg [3], quem demonstrou a equivalência entre o modelo *bouncer* simplificado e o mapa padrão de Chirikov [13].

O mapa padrão descreve a dinâmica da variável ação,  $I$ , e da variável ângulo,  $\theta$ , através de um mapa bidimensional caracterizado por um parâmetro  $K$ , cujo valor determina a intensidade da não-linearidade do sistema. Para  $K = 0$  o mapa padrão é integrável e a variável ação  $I$  é constante. Quando  $K \neq 0$  o sistema se torna não-linear e o mapa apresenta dinâmica caótica. O mapa padrão apresenta também uma transição em  $K = K_c \approx 0.9716$ . Para  $K < K_c$  as órbitas são confinadas no espaço de fase por curvas invariantes. Para  $K > K_c$  estas invariantes são todas destruídas e, na média, o valor absoluto de  $I$  cresce sem limites.

Neste capítulo apresentamos algumas propriedades do mapa padrão dando ênfase à descrição de escala deste sistema. O estudo é realizado considerando valores médios do quadrado de  $I$  como funções do número de iterações do mapa. Investigamos as propriedades de escala do mapa padrão em três regimes de não-linearidade:  $K \approx 0$ ,  $K \approx K_c$  e  $K \gg K_c$ .

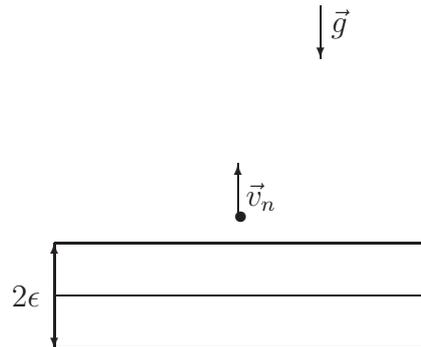


Figura 4.1: O modelo *bouncer* é constituído de uma partícula em queda livre que colide elasticamente contra uma plataforma oscilante.

## 4.2 O modelo *bouncer* e sua equivalência com o mapa padrão

O modelo *bouncer* consiste de uma partícula que, submetida a uma aceleração gravitacional constante  $\vec{g} = -g\hat{j}$ ,  $g > 0$ , colide elasticamente contra uma plataforma oscilante cuja posição vertical é descrita por  $y = \epsilon \cos(\omega t' + \phi_0)$ , em que  $\epsilon$  é a amplitude,  $\omega$  é a frequência de oscilação, e  $\phi_0$  é a fase inicial da plataforma. A versão simplificada do modelo *bouncer* é uma

aproximação na qual se despreza o deslocamento da parede oscilante. Ao colidir, no entanto, a transferência de momento entre a parede e a partícula ocorre considerando-se o movimento da parede.

Sendo  $v_n$  e  $t'_n$  a velocidade da partícula e o instante de tempo imediatamente após a  $n$ -ésima colisão, definimos as variáveis adimensionais  $V_n = \omega v_n/g$ ,  $t_n = \omega t'_n$  e  $\phi_n = t_n + \phi_0$ . A velocidade de um corpo em queda livre é dada por  $v = v_0 - g\Delta t'$ , em que  $v_0$  é a velocidade do corpo no instante  $t'_0$ . Portanto, em termos das variáveis adimensionais esta expressão é reescrita como  $V = V_0 - \Delta t$ .

A velocidade da parede é dada por  $\vec{V}_w = -\varepsilon \sin \phi(t) \hat{j}$ . Considere que imediatamente após a colisão  $n$  a velocidade da partícula seja  $\vec{V} = V_n \hat{j}$ ,  $V_n > 0$  (movimento para cima). Devido à simplificação, imediatamente antes da colisão  $n + 1$  a velocidade da partícula é  $\vec{V} = -V_n \hat{j}$ . Assim o intervalo entre colisões é  $\Delta t = 2V_n$  e a fase da parede oscilante no instante da colisão  $n + 1$  é dada por  $\phi_{n+1} = \phi_n + \Delta t = \phi_n + 2V_n$ . Considerando que a colisão seja elástica então, no referencial da parede oscilante, o valor absoluto da velocidade da partícula é igual imediatamente antes e imediatamente após a colisão. O cálculo da velocidade após a colisão é feito seguindo o procedimento apresentado na seção 3.2.1. Desta forma o modelo *bouncer* é descrito pelo mapa

$$T : \begin{cases} V_{n+1} = |V_n - 2\varepsilon \sin \phi_{n+1}|, \\ \phi_{n+1} = \phi_n + 2V_n \text{ mod } 2\pi, \end{cases} \quad (4.1)$$

em que  $\varepsilon = \epsilon\omega^2/g$  é o parâmetro adimensional efetivo do sistema. O parâmetro  $\varepsilon$  é interpretado fisicamente como a razão entre a aceleração máxima da parede e a aceleração gravitacional. O fato de valores negativos de velocidade serem proibidos na versão simplificada do modelo *bouncer* explica o uso das barras de valor absoluto na equação acima.

Seguindo Lichtenberg [3], vamos fazer as transformações apropriadas de variáveis que tornam o modelo *bouncer* simplificado no mapa padrão de Chirikov [13]. Multiplicando por 2 ambos os lados da expressão da velocidade no mapa (4.1) define-se a nova variável  $I_n = 2V_n$ . Desta forma, a expressão da velocidade é reescrita como  $I_{n+1} = |I_n - 4\varepsilon \sin \phi_{n+1}|$ . Definimos ainda  $K = 4\varepsilon$  e  $\theta_n = \phi_{n+1} + \pi$ . Assim  $\sin \phi_{n+1} = -\sin \theta_n$  e o mapa (4.1) é reescrito

como

$$T : \begin{cases} I_{n+1} = I_n + K \sin \theta_n, \\ \theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1} \text{ mod } 2\pi. \end{cases} \quad (4.2)$$

Desta forma Lichtenberg demonstrou que o modelo *bouncer* simplificado é equivalente ao mapa padrão. Embora o mapa padrão não seja definido com barras de valor absoluto na expressão de  $I$ , as propriedades do espaço de fase de ambos os modelos são basicamente as mesmas. Dada a equivalência entre os dois modelos a quantidade  $I^2$  é proporcional à energia da partícula no modelo *bouncer*.

### 4.3 Propriedades do espaço de fase

A figura 4.2 mostra o espaço de fase do mapa padrão para diferentes valores do parâmetro  $K$ . O espaço de fase da figura 4.2(a) foi construído com  $K = 10^{-3}$ , valor que corresponde ao caso  $K \approx 0$ . Para este valor de parâmetro, a região de movimento caótico é muito pequena para ser observada. Praticamente todas as órbitas são regulares. A figura 4.2(a) ilustra apenas a porção do espaço de fase para valores pequenos de  $I$ , onde observa-se a ilha de movimento periódico correspondente ao ponto fixo (este ponto fixo também é conhecido como *centro*, uma vez que trajetórias em sua vizinhança não se afastam nem se aproximam dele). A órbita de período 2 ocorre em  $I = \pi$  e não é mostrada para simplificar a visualização. Consistente com o teorema KAM, ao aumentar o valor da não-linearidade curvas invariantes são gradativamente destruídas, resultando no aumento da região de movimento caótico. Na figura 4.2(b) utilizamos  $K = 0.7$ . Existe um valor crítico,  $K_c \approx 0.9716$ , tal que para  $K < K_c$  as órbitas periódicas de períodos 1 e 2 estão separadas por curvas invariantes. Para  $K = K_c$  a última curva invariante que separa estas duas órbitas periódicas é destruída. Para valores de  $K$  acima de  $K_c$  as curvas invariantes não existem mais e, na média, o valor absoluto da variável  $I$  no mar de caos cresce sem limites, como ilustra a figura 4.2(c).

A expressão de  $I$  do mapa padrão (equação (4.2)) normalmente é escrita como

$$I_{n+1} = I_n + K \sin \theta_n \text{ mod } 2\pi. \quad (4.3)$$

Como demonstrado por Chirikov [13], os pontos fixos obtidos considerando a expressão acima dão origem a uma peculiaridade ao mapa padrão. Fazendo

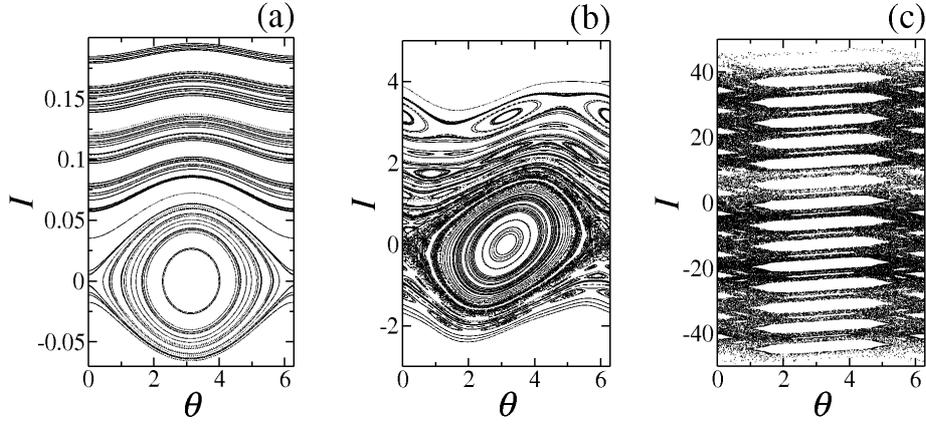


Figura 4.2: Em (a) é ilustrado o espaço de fase do mapa padrão para  $K = 10^{-3}$ , em (b) para  $K = 0.7$  e em (c) para  $K = 1.5$ .

$I_{n+1} = I_n = I^*$  e  $\theta_{n+1} = \theta_n = \theta^*$  obtemos, da expressão de  $I$ ,

$$K \sin \theta^* = 2\pi m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

e da expressão de  $\theta$  obtemos

$$I^* = 2\pi l, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

Os pontos fixos são, portanto, dados por

$$\begin{aligned} \theta^* &= \arcsin\left(\frac{2\pi m}{K}\right) \\ I^* &= 2\pi l. \end{aligned} \quad (4.6)$$

A matriz Jacobiana do mapa padrão é definida por

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

e seus elementos são

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} &= 1, \\
\frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} &= K \cos \theta_n, \\
\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} &= \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} = 1, \\
\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} &= 1 + \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} = 1 + K \cos \theta_n.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Como discutido na seção 2.7, a estabilidade dos pontos fixos é determinada resolvendo a equação

$$\det(J - \Lambda I) = 0. \tag{4.9}$$

As soluções da expressão acima são

$$\Lambda = \frac{1}{2}(2 + K \cos \theta^* \pm \sqrt{(2 + K \cos \theta^*)^2 - 4}). \tag{4.10}$$

Desta forma os pontos fixos serão estáveis quando satisfeita a condição

$$(2 + K \cos \theta^*)^2 - 4 < 0. \tag{4.11}$$

Neste caso os pontos fixos são elípticos. A expressão acima fornece

$$\pm(2 + K \cos \theta^*) - 2 < 0. \tag{4.12}$$

Na expressão acima a escolha pelo sinal negativo permite-nos escrever

$$-4 < K \cos \theta^*, \tag{4.13}$$

e o sinal positivo fornece

$$K \cos \theta^* < 0. \tag{4.14}$$

Temos, portanto, que

$$-4 < K \cos \theta^* < 0. \tag{4.15}$$

Tomando o quadrado em cada termo obtemos

$$0 < K^2 \cos^2 \theta^* < 16. \quad (4.16)$$

Utilizando a expressão (4.4) somamos  $K^2 \sin^2 \theta^* = (2\pi m)^2$  em cada termo da expressão acima para escrevermos a relação

$$(2\pi m)^2 < K^2 < 16 + (2\pi m)^2 \quad \text{ou} \quad 2\pi m < K < \sqrt{16 + (2\pi m)^2}. \quad (4.17)$$

Este resultado fornece intervalos de  $K$  em que órbitas estáveis são observadas para valores arbitrariamente grandes do parâmetro. O primeiro intervalo, obtido fazendo  $m = 0$  na expressão acima, fornece que para  $0 < K < 4$  os pontos fixos são estáveis. Para  $K > 4$  os pontos fixos se tornam instáveis. Fazendo  $m = 1$ , obtemos que em  $K = 2\pi$  inicia um novo intervalo em que os pontos fixos são estáveis. Para  $K > \sqrt{16 + 4\pi^2}$  os pontos fixos se tornam instáveis. E assim prosseguimos sucessivamente.

O critério de estabilidade apresentado foi obtido considerando a variável  $I$  dada pela expressão (4.3). Vamos agora considerar a expressão de  $I$  sem a função mod  $2\pi$ , como definida no mapa (4.2). Analisaremos o comportamento de trajetórias com valores de  $\theta$  e  $I$  fornecidos pela expressão (4.6).

Fazendo  $m = 0$  na expressão (4.6) de pontos fixos e substituindo no mapa (4.2) obtemos que  $I = 2\pi l = \text{constante}$ . Contudo, para  $m \neq 0$  os valores de  $\theta$  e  $I$  dados por (4.6) resultam numa trajetória dada por

$$I_n = 2\pi mn + I_0, \quad I_0 = 2\pi l. \quad (4.18)$$

Este resultado indica que o valor da variável  $I$  cresce monotonamente com o número de iterações  $n$ . As trajetórias vizinhas àquelas fornecidas pela expressão acima também resultam em crescimento ilimitado de  $I$ . As trajetórias geradas pela expressão (4.18) e as órbitas vizinhas são chamadas de modos aceleradores [11, 13].

A figura 4.3(a) ilustra modos aceleradores com  $K = 7$ . Os valores iniciais de  $\theta$  e  $I$  são aqueles dados pela expressão (4.6) com  $m = 1$  e  $l = 1$ . A órbita com  $\theta$  constante corresponde ao modo acelerador dado pela equação (4.18). As outras órbitas são trajetórias vizinhas àquela dada por (4.18). A figura

4.3(b) mostra órbitas com os mesmos valores iniciais utilizados na figura 4.3(a) mas considerando  $I \bmod 2\pi$ , como definido pela expressão (4.3). As órbitas são elípticas em concordância com a condição de estabilidade dada pela equação (4.17).

Na realidade, as trajetórias de movimento regular em torno do ponto fixo elíptico da figura 4.3(b) ocorrem nas proximidades de  $I = 0$  e  $I = 2\pi$ . Como o tamanho desta região de movimento regular é pequeno, a parte desta região que ocorre em  $I \approx 2\pi$  foi trazida para para junto da parte em  $I \approx 0$  subtraindo  $2\pi$ . Este procedimento foi adotado apenas para facilitar a visualização do comportamento das trajetórias em torno do ponto fixo elíptico.

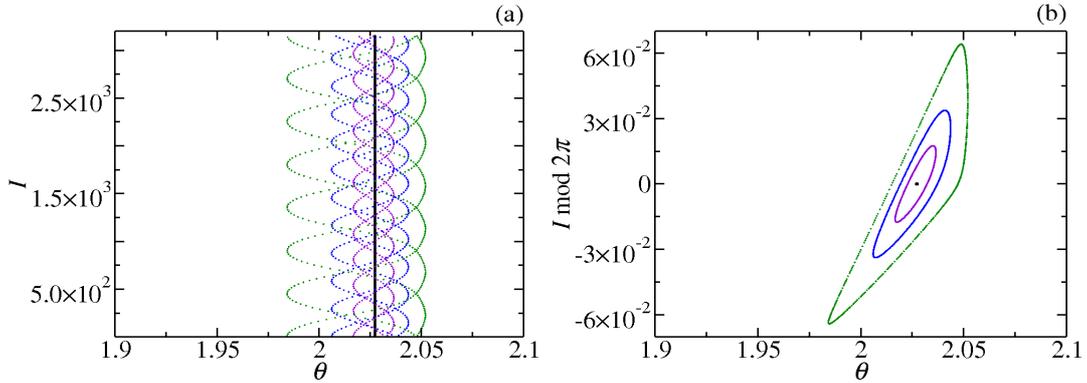


Figura 4.3: Em (a) são ilustrados os modos aceleradores para  $K = 7$ ,  $m = 1$  e  $l = 1$ . Em (b) o processo iterativo foi realizado utilizando as mesmas condições iniciais empregadas em (a), mas agora foi considerado  $I \bmod 2\pi$ .

Os modos aceleradores que correspondem a outras órbitas periódicas na expressão (4.3) podem ser determinados de forma análoga à que foi apresentada acima e são encontrados nas referências [11, 13].

Temos, portanto, dois mecanismos diferentes de aceleração de Fermi [53, 13, 54]. Os modos aceleradores discutidos acima são responsáveis pelo crescimento regular da variável  $I$ , originando o fenômeno de aceleração de Fermi como discutido por Pustyl'nikov [12]. O processo difusivo de crescimento ilimitado de  $|I|$  observado na região de movimento caótico para  $K > K_c$ , figura 4.2(c), gera a aceleração de Fermi na versão de Ulam [10, 11].

Para  $K < K_c$  estudamos as relações de escala das regiões de movimento caótico e regular. Para  $K > K_c$  estudamos as propriedades de escala da região de movimento caótico, onde é observada aceleração de Fermi no sentido de Ulam.

## 4.4 Análise de escala

Definimos  $\overline{I^2}_i(n)$  como o valor médio de  $I^2$  calculado ao longo da órbita de uma condição inicial, como definido na equação (2.47). Determinamos assim o valor médio  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  para  $M$  condições iniciais diferentes como definido pela equação (2.48). Obtemos ainda o valor médio  $\langle I^2 \rangle(n)$  para  $M$  amostras utilizando a definição dada pela equação (2.49). Neste estudo utilizamos  $M = 10^3$ . Este valor é suficiente para que o desvio padrão de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  e de  $\langle I^2 \rangle(n)$  seja desprezível.

Baseados no valor de  $K$ , estudamos as propriedades de escala das quantidades médias  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  e  $\langle I^2 \rangle(n)$  em três regimes de não-linearidade, definidos como: i) transição do regime integrável para o não-integrável, em  $K \approx 0$  ou  $K \ll K_c$ , ii) transição de valores limitados para crescimento ilimitado das quantidades médias  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  e  $\langle I^2 \rangle(n)$ , para  $K \approx K_c$ , e iii) o regime de não-linearidade grande, para  $K \gg K_c$ . Além disso descrevemos analiticamente as relações de escala de uma versão estocástica do mapa padrão, a qual apresenta, mesmo para pequenos valores de  $K$ , crescimento ilimitado do valor médio de  $I^2$ .

## 4.5 Transição de integrável para não-integrável

Para  $K \approx 0$  o mapa padrão está próximo da transição de integrável para não-integrável (equação (4.2)). Neste regime, as órbitas de período 1 e período 2 estão separadas no espaço de fase por curvas invariantes. O espaço de fase do sistema apresenta em torno de  $I = 0$  uma ilha de movimento regular envolvida por uma estreita região de caos. Desta forma estudamos as propriedades de escala da transição de integrável para não-integrável considerando separadamente a região de movimento regular e a região de movimento caótico.

### 4.5.1 Propriedades de escala da região de movimento regular

Calculando  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  para diferentes valores de  $K$  e  $I_0$  obtemos as curvas da figura 4.4.

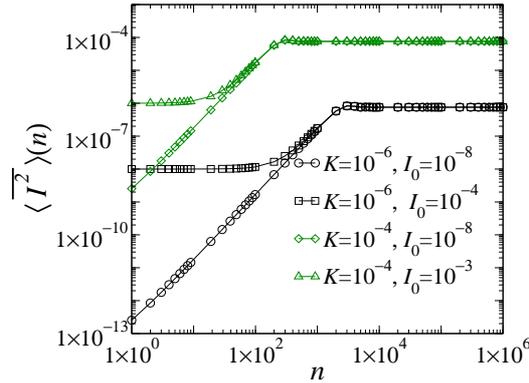


Figura 4.4: Gráfico log-log do valor médio  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$ , calculado para diferentes valores de  $K$  e  $I_0$ , como função de  $n$ . Estas curvas correspondem ao limite de valores pequenos da não-linearidade do mapeamento padrão.

Para  $I_0 < K$  observamos que as curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  apresentam um regime de crescimento para  $n$  pequeno. Para  $n$  suficientemente grande observamos que  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  aproxima de um valor constante. Assim definimos  $n_x$  como o valor de  $n$  para o qual as curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$ , com  $I_0 < K$ , mudam do regime de crescimento para o regime de saturação.

As curvas com  $I_0 > K$  são caracterizadas por um regime inicial de valor constante onde  $\langle \overline{I^2} \rangle(n) \approx I_0^2$ . Definimos  $n'_x$  como o valor de  $n$  no qual as curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  mudam do regime de valor constante para o regime de crescimento. Definimos ainda  $n''_x$  como o valor de  $n$  que caracteriza a transição do regime de crescimento para o regime de saturação das curvas com  $I_0 > K$ . A figura 4.4 mostra também que o regime assintótico não depende do valor de  $I_0$ . Além disso  $n''_x \approx n_x$ .

Considerando as curvas com  $I_0 < K$  descrevemos o crescimento inicial de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  como

$$\langle \overline{I^2} \rangle(n, K, I_0) \propto n^\alpha K^\beta, \quad (4.19)$$

em que  $\alpha$  é o expoente de crescimento e  $\beta$  é o expoente que define a dependência de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  em  $K$ . O valor de  $\alpha$  foi obtido para cada curva via ajuste

no regime de crescimento. Utilizando valores de  $K$  no intervalo  $[10^{-6}, 10^{-2}]$  obtemos o valor médio  $\alpha = 1.91 \pm 0.01$ . O expoente  $\beta$  foi obtido do melhor ajuste em um gráfico de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)/n^\alpha$  versus  $K$  para  $n \ll n_x$ . Este procedimento fornece  $\beta = 2.012 \pm 0.005$ , como ilustrado na figura 4.5.

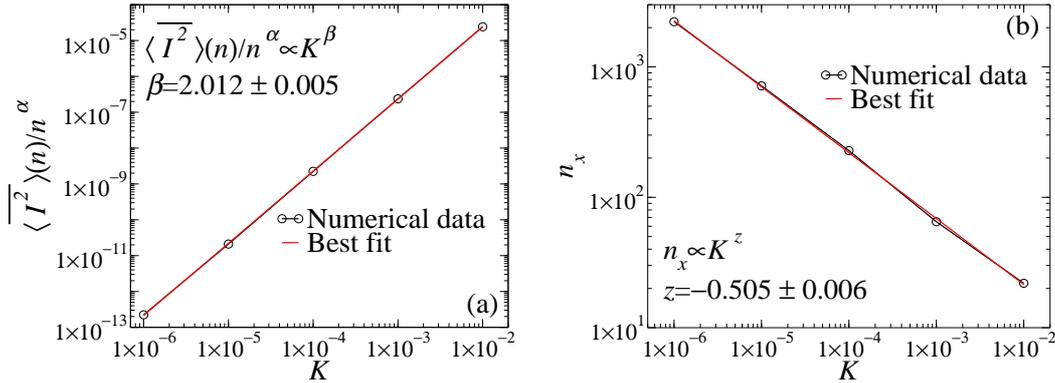


Figura 4.5: Em (a) temos o gráfico log-log de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)/n^\alpha$  versus  $K$  para  $n \ll n_x$ . Em (b) temos o gráfico log-log da iteração de crossover  $n_x$  como função de  $K$ . Os ajustes foram feitos via o método dos mínimos quadrados.

Além disso descrevemos  $n_x$  como

$$n_x \propto K^z, \quad (4.20)$$

em que  $z$  é o expoente dinâmico. O valor de  $z$  é obtido pelo melhor ajuste no gráfico de  $n_x$  versus  $K$ , como ilustra a figura 4.5(b). O procedimento fornece  $z = -0.505 \pm 0.006$ .

Para  $n \gg n_x$  o regime de saturação de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  é descrito por

$$\langle \overline{I^2} \rangle_{\text{sat}}(n) \propto K^\gamma, \quad (4.21)$$

em que  $\gamma$  é o expoente de saturação.

Assumindo que  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  seja uma função das variáveis  $n$ ,  $K$ , e  $I_0$  então a transição do regime integrável para o não-integrável do mapa padrão é descrita pela equação homogênea

$$\langle \overline{I^2} \rangle(n, K, I_0) = l \langle \overline{I^2} \rangle(l^a n, l^b K, l^c I_0), \quad (4.22)$$

em que  $l$  é um fator de escala e  $a$ ,  $b$  e  $c$  são os expoentes de escala. Escolhendo

$l = K^{-1/b}$  a equação acima é reescrita como

$$\langle \overline{I^2} \rangle(n, K, I_0) = K^{-1/b} f(K^{-a/b} n, K^{-c/b} I_0). \quad (4.23)$$

em que  $f = \langle \overline{I^2} \rangle(K^{-a/b} n, 1, K^{-c/b} I_0)$  é constante para  $n \gg n_x$ . Comparando as equações (4.21) e (4.23) temos  $\gamma = -1/b$ .

Da equação acima temos também que a iteração de *crossover*  $n_x$  é dada por

$$n_x \approx K^{a/b}. \quad (4.24)$$

Desta expressão e da equação (4.20) obtemos que  $z = a/b$ .

Escolhendo  $l = n^{-1/a}$  a equação (4.22) se torna

$$\begin{aligned} \langle \overline{I^2} \rangle(n, K, I_0) &= n^{-1/a} g(n^{-b/a} K, n^{-c/a} I_0) \\ &= n^{-(1+by)/a} K^y h(n^{-c/a} I_0). \end{aligned} \quad (4.25)$$

em que  $g = \langle \overline{I^2} \rangle(1, n^{-b/a} K, n^{-c/a} I_0)$ . Para  $I_0 \ll K$  a função  $h$  é constante. Considerando o regime inicial de crescimento das curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$ ,  $n \ll n_x$ , temos das equações (4.19) e (4.25) que  $\alpha = -(1+by)/a$  e  $\beta = y$ .

Para  $I_0 > K$  observamos que o regime inicial das curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  obedece a relação  $I_0^2/K = \text{constante}$ . Definindo  $K' = l^b K$  e  $I_0' = l^c I_0$  temos que  $I_0^2/K = I_0'^2/K'$ . Desta forma obtemos  $c = b/2$ . Temos assim o conjunto de expoentes de escala

$$\begin{aligned} a &= -\frac{z}{\beta+\alpha z} = 0.48 \pm 0.02 \approx \frac{1}{2}, \\ b &= \frac{a}{z} = -0.95 \pm 0.05 \approx -1, \\ c &= \frac{b}{2} = -0.48 \pm 0.03 \approx -\frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Além disso, como  $\gamma = -1/b$  temos, portanto, que o expoente da saturação é  $\gamma = 1.06 \pm 0.06$ .

A figura 4.6 mostra o colapso das curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  da figura 4.4 após as transformações de escala  $n \rightarrow nl^a$  e  $\langle \overline{I^2} \rangle(n) \rightarrow \langle \overline{I^2} \rangle(n)/l$ , com  $l = K^{-1/b}$ .

Para  $I_0$  e  $K$  suficientemente pequenos podemos considerar para  $n \ll n_x$  que  $nK \ll 1$ . Considerando ainda  $\theta \approx 0$  a função seno na equação (4.2)

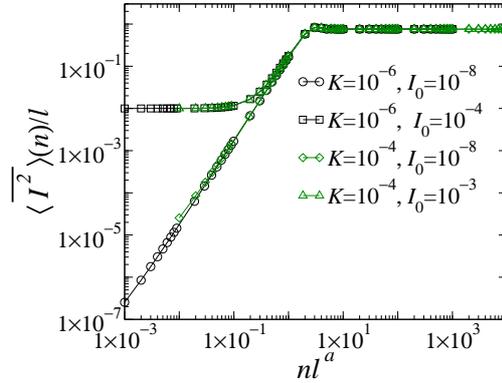


Figura 4.6: Por meio de transformações apropriadas de escala obtemos o colapso das curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  da figura 4.4 em uma curva universal. O fator de escala que utilizamos é  $l = K^{-1/b}$ .

pode ser expandida até primeira ordem. O procedimento fornece  $I_n \approx nK\theta_0$ , ou seja,  $I_n^2 \propto n^2K^2$ . Este caso particular concorda bem com a descrição do crescimento inicial de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  dado pela equação (4.19).

Para valores de  $K$  no intervalo  $[0.1, K_c)$  o mapa padrão está longe da transição de integrável para não-integrável. Apesar disto a descrição de escala é feita pelos mesmos expoentes  $a$  e  $b$  obtidos para  $K \approx 0$ . Para  $I_0 \gg K$ , com  $K \in [0.1, K_c)$  as órbitas se encontram acima de curvas invariantes. Assim o caso  $I_0 \gg K$  corresponde a regiões do espaço de fase separadas da região com  $I_0 < K$ . Como as trajetórias com  $I_0 < K$  e com  $I_0 \gg K$  não existem numa região comum do espaço de fase, o valor do expoente  $c$  não pode ser determinado.

#### 4.5.2 Análise de escala da região de movimento caótico

Uma dificuldade de estudar as propriedades de escala da transição de integrável para não-integrável da região de movimento caótico é o tamanho pequeno desta região para  $K \approx 0$ . Desta forma obtemos a descrição de escala da região caótica no intervalo  $[0.1, K_c)$ . A figura 4.7 mostra as curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  para órbitas caóticas com  $I_0 < K$ .

Seguindo um procedimento análogo ao realizado para a região de movimento regular obtemos o expoente dinâmico  $z$ . O melhor ajuste dos dados de  $n_x$  versus  $K$  fornece  $z = -1.43 \pm 0.08$ , como ilustra a figura 4.8(a). Similarmemente o ajuste via mínimos quadrados aos dados de  $\langle \overline{I^2} \rangle_{\text{sat}}(n)$  versus  $K$

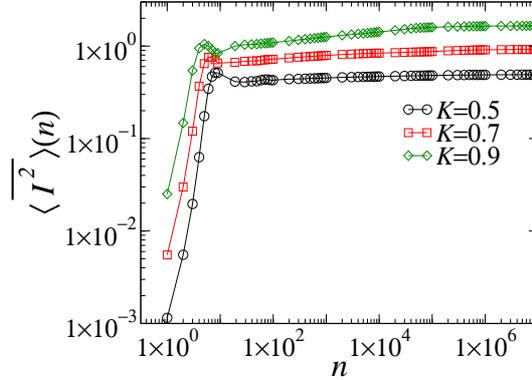


Figura 4.7: A figura ilustra curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  calculadas como funções de  $n$  considerando órbitas pertencentes à região de movimento caótico.

fornece  $\gamma = 1.72 \pm 0.04$ , como mostra a figura 4.8(b). Obtemos, assim, os expoentes

$$\begin{aligned} a &= 0.83 \pm 0.06, \\ b &= -0.58 \pm 0.01. \end{aligned} \quad (4.27)$$

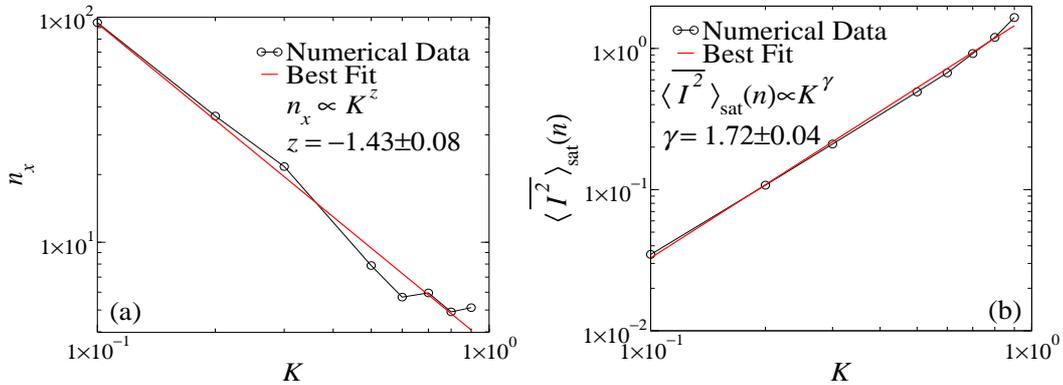


Figura 4.8: Em (a) temos o gráfico log-log de  $n_x$  como função de  $K$  e em (b) temos o valor de saturação,  $\langle \overline{I^2} \rangle_{\text{sat}}(n)$ , como função de  $K$ . O melhor ajuste aos dados fornece, respectivamente,  $z = -1.43 \pm 0.08$  e  $\gamma = 1.72 \pm 0.04$ . Os dados correspondem a condições iniciais pertencentes à região de movimento caótico para  $K < K_c$ .

Para  $I_0 \gg K$  as órbitas se encontram acima de curvas invariantes, sepa-

radas do mar de caos que existe em torno de  $I = 0$ . Assim, trajetórias com  $I_0 < K$  e com  $I_0 \gg K$  pertencem a regiões distintas do espaço de fase. Desta forma o expoente  $c$  não pode ser obtido. A figura 4.9 mostra o colapso das curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  em uma curva universal para o caso em que  $I_0 < K$ . Valores pequenos de  $K$  não fornecem bom colapso devido ao tamanho reduzido da região caótica.

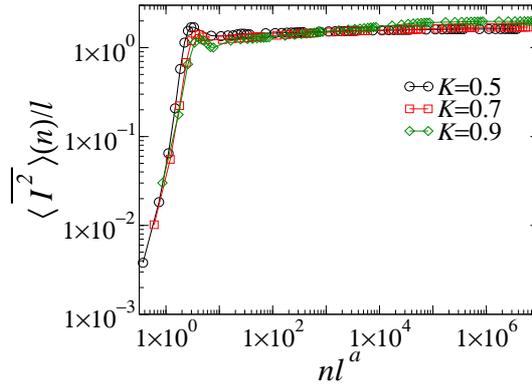


Figura 4.9: Por meio das transformações de escala  $\langle \overline{I^2} \rangle(n) \rightarrow \langle \overline{I^2} \rangle(n)/l$  e  $n \rightarrow nl^a$ , com  $l = K^{-1/b}$ , obtemos o colapso das curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  correspondentes a órbitas caóticas para  $K < K_c$  (figura 4.7).

Observamos para  $K < K_c$  que a descrição de escala do mapa padrão fornece expoentes diferentes quando comparamos os resultados obtidos para órbitas regulares com os obtidos para órbitas caóticas, equações (4.26) e (4.27).

## 4.6 Regime $K \gtrsim K_c$

Nesta seção apresentaremos a descrição de escala da região de movimento caótico para  $K \gtrsim K_c$ . Este regime de não-linearidade caracteriza a transição de valores limitados de  $I$  para o regime de aceleração de Fermi (no sentido de Ulam). Definindo  $K_r = K - K_c$ , estudamos as propriedades de escala do mapa padrão para  $K_r \gtrsim 0$ .

A figura 4.10 mostra as curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  para diferentes valores de  $K_r$ . Observamos para valores pequenos de  $n$  que  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  cresce lentamente. Para valores de  $n$  suficientemente grandes as curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  apresentam inclinação maior.

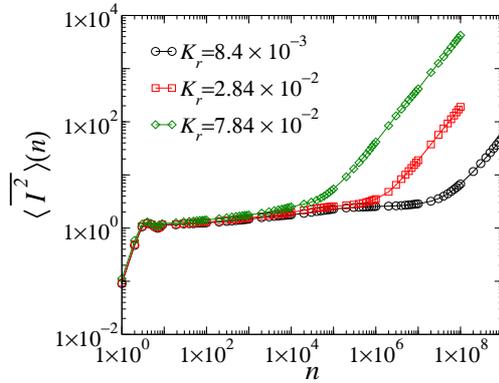


Figura 4.10: Curvas do valor médio de  $I^2$  caracterizando a transição de crescimento limitado para crescimento ilimitado de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  ( $K_r = K - K_c \gtrsim 0$ ) do mapa padrão.

Definimos  $n_x$  como o valor de  $n$  que caracteriza a mudança do regime inicial de crescimento lento para o regime de crescimento mais acentuado. Observamos que  $n_x$  cresce à medida que  $K_r$  diminui de acordo com a relação

$$n_x \propto K_r^z, \quad (4.28)$$

em que  $z = -2.99 \pm 0.09$ , como ilustra a figura 4.11(a). Como  $z < 0$  observamos que  $n_x$  diverge no limite  $K_r \rightarrow 0$ . Isto significa que  $K_r = 0$  caracteriza a transição de crescimento limitado para crescimento ilimitado de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$ .

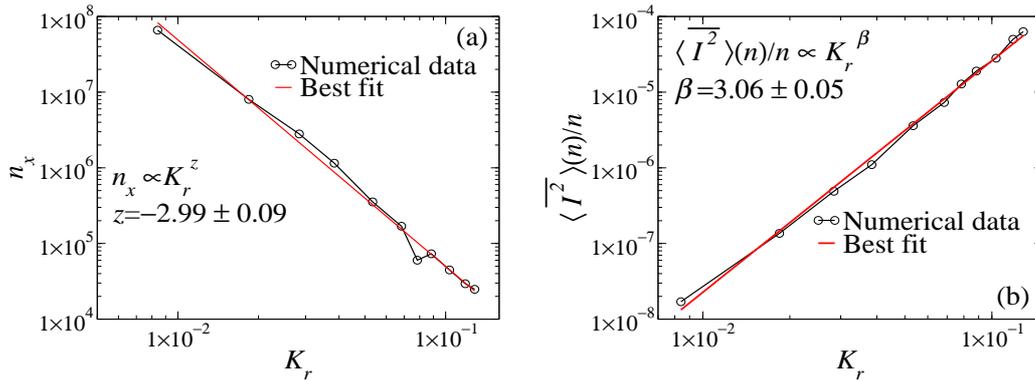


Figura 4.11: A figura (a) ilustra, em escalas log-log, o gráfico de  $n_x$  como função de  $K_r$ . Em (b) temos o gráfico de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)/n$  versus  $K_r$ . O ajuste via mínimos quadrados fornece, respectivamente,  $z = -2.99 \pm 0.09$  e  $\beta = 3.06 \pm 0.05$ .

O crescimento das curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  observado para  $n \gg n_x$  é descrito por

$$\langle \overline{I^2} \rangle(n) \propto n^\alpha K_r^\beta. \quad (4.29)$$

O valor de  $\alpha$  é obtido diretamente via ajuste nas curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  para  $n$  grande. Para 11 valores de  $K$  no intervalo  $[8.4 \times 10^{-3}, 1.284 \times 10^{-1}]$  obtemos o valor médio  $\alpha = 0.99 \pm 0.03$ . O valor do expoente  $\beta$  é obtido do gráfico de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)/n$  versus  $K_r$ . O procedimento é ilustrado na figura 4.11(b) e fornece  $\beta = 3.06 \pm 0.05$ . Como  $\alpha \approx 1$  e  $\beta \approx 3$  então o regime de crescimento de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  para  $n \gg n_x$  é bem descrito por  $\langle \overline{I^2} \rangle(n) \propto n K_r^3$ .

Para  $K \gtrsim K_c$  descrevemos  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  pela relação de escala

$$\langle \overline{I^2} \rangle(n, K_r) = l \langle \overline{I^2} \rangle(l^a n, l^b K_r). \quad (4.30)$$

Escolhendo  $l = K_r^{-1/b}$  a equação acima se torna

$$\langle \overline{I^2} \rangle(n, K_r) = K_r^{-1/b} f(K_r^{-a/b} n). \quad (4.31)$$

Da equação acima temos que o *crossover*  $n_x$  é dado por

$$n_x \propto K_r^{a/b}. \quad (4.32)$$

Comparando esta expressão com a equação (4.28) temos que  $z = a/b$ . Prosseguindo, reescrevemos a equação (4.31) como

$$\langle \overline{I^2} \rangle(n, K_r) \propto K_r^{-1/b} (K_r^{-a/b} n)^x. \quad (4.33)$$

Considerando o limite  $n \gg n_x$ , comparamos as equações (4.29) e (4.33) para obter  $x = \alpha$  e  $-1/b = z\alpha + \beta$ .

Escolhendo  $l = n^{-1/a}$  a equação (4.30) se torna

$$\begin{aligned} \langle \overline{I^2} \rangle(n, K_r) &= n^{-1/a} g(n^{-b/a} K_r) \\ &\propto n^{-1/a} (n^{-b/a} K_r)^y. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Comparando esta expressão com a equação (4.29) obtemos para  $n$  grande que  $y = \beta$  e  $-1/a = \alpha + \beta/z$ . Como  $\alpha \approx 1$ ,  $z \approx -3$  e  $\beta \approx 3$ , temos que

$-1/a \approx 0$  e  $-1/b \approx 0$ . Os valores de  $a$  e  $b$  portanto divergem. Contudo a razão entre eles é finita pois  $z = a/b \approx -3$ . Escolhendo  $l = K_r^{-1/b}$  temos, portanto, que  $l \approx 1$  e  $nl^a = nK_r^{-z}$ . Desprezando um pequeno transiente inicial, obtemos o colapso das curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  mostradas na figura 4.10 em uma curva universal, como mostra a figura 4.12.

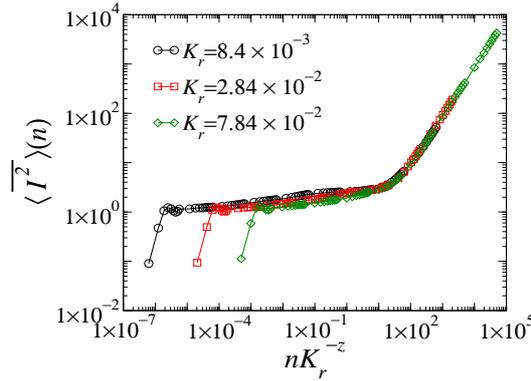


Figura 4.12: Colapso das curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  originalmente mostradas na figura 4.10 em uma curva universal.

A figura 4.13(a) mostra o valor médio  $\langle I^2 \rangle(n)$  como função de  $n$ . Com exceção de um curto estágio inicial onde as curvas são irregulares, o comportamento de  $\langle I^2 \rangle(n)$  é essencialmente o mesmo de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$ . Além disso, ambas as médias  $\langle I^2 \rangle(n)$  e  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  são descritas pelo mesmo conjunto de expoentes. A figura 4.13(b) mostra o colapso das curvas de  $\langle I^2 \rangle(n)$  em uma curva universal.

## 4.7 Regime de não-linearidades fortes ( $K \gg K_c$ )

Como discutido na seção 4.3, o mapa padrão apresenta dois mecanismos pelos quais o fenômeno de aceleração de Fermi é obtido. Um deles se deve ao crescimento regular da variável  $I$  dado pela expressão (4.18) e as órbitas vizinhas a esta trajetória (figura 4.3(a)). O outro mecanismo de aceleração se deve às órbitas caóticas que, na média, apresentam crescimento ilimitado da variável  $I^2$ . Na seção anterior estudamos as propriedades de escala para  $K \gtrsim K_c$ . Agora vamos obter a descrição de escala no limite  $K \gg K_c$ , longe da transição de crescimento limitado para crescimento ilimitado do valor

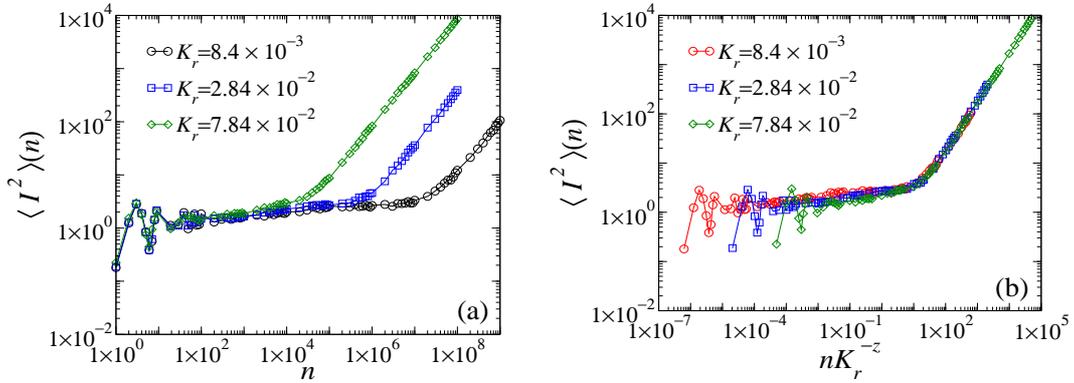


Figura 4.13: A figura (a) ilustra, em escalas logarítmicas, curvas de  $\overline{I^2}$  em função de  $n$  para diferentes valores de  $K_r$ . (b) Colapso das curvas mostradas em (a) em uma curva universal. As grandezas médias  $\overline{I^2}$  e  $I^2$  são descritas pelos mesmos expoentes de escala.

médio de  $I^2$ .

Empregando  $10^3$  condições iniciais caracterizadas por valores aleatórios de  $\theta_0$  e diferentes valores de  $I_0$  na região de movimento caótico calculamos a grandeza média  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  definida pela equação (2.48). Apresentamos na figura 4.14 as curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  para dois valores de  $K$ . Empregamos valores diferentes de  $I_0$  satisfazendo ambos os casos  $I_0 < K$  e  $I_0 > K$ .

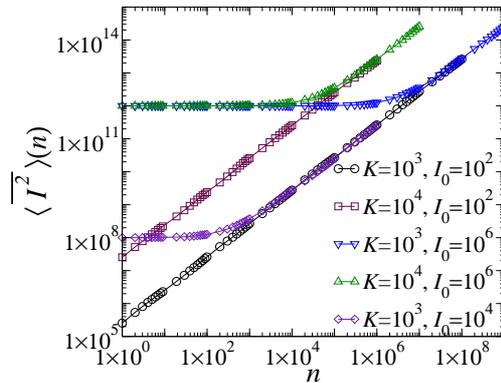


Figura 4.14: A figura ilustra o crescimento ilimitado das curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  no regime de não-linearidade grande ( $K \gg K_c$ ) para diferentes valores de  $K$  e  $I_0$ .

Observamos para  $I_0 < K$  que as curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  são caracterizadas por um regime único de crescimento. Para os casos em que  $I_0 > K$ , as curvas de

$\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  apresentam um regime inicial constante em que  $\langle \overline{I^2} \rangle(n) \approx I_0^2$ . Depois a quantidade média  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  cresce e converge para as curvas com mesmo valor de  $K$ . Para valores grandes de  $n$  observamos que  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  não depende de  $I_0$ .

Considerando as curvas para as quais  $I_0 < K$ , descrevemos o crescimento de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  como

$$\langle \overline{I^2} \rangle(n) \propto n^\alpha K^\beta, \quad (4.35)$$

em que  $\alpha$  é o expoente de crescimento e  $\beta$  é o expoente que relaciona a dependência de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  com o parâmetro  $K$ . O expoente  $\alpha$  é obtido via ajuste em lei de potência. Utilizando valores diferentes de  $K$  no intervalo  $[10^1, 10^5]$  obtemos o valor médio  $\alpha = 0.999 \pm 0.001 (\approx 1)$ . O melhor ajuste no gráfico de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)/n$  versus  $K$ , como ilustrado na figura 4.15(a), fornece  $\beta = 2.02 \pm 0.02$ .

Definimos  $n_x$  como o valor de  $n$  que caracteriza a mudança do regime de valor constante para o regime de crescimento das curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  com  $I_0 > K$ . Observamos na figura 4.14 que  $n_x$  depende de  $K$  e  $I_0$ . Portanto escrevemos  $n_x$  como

$$n_x \propto I_0^{z_1} K^{z_2}, \quad (4.36)$$

onde  $z_1$  e  $z_2$  são os expoentes dinâmicos. Fixando  $K$  em  $10^3$  e utilizando diferentes valores de  $I_0$ , maiores que  $K$ , obtemos  $n_x$  como função de  $I_0$ . O melhor ajuste a estes dados fornece  $z_1 = 1.98 \pm 0.02$ , como ilustrado na figura 4.15(b). Similarmente utilizamos valores diferentes de  $K$  e utilizando  $I_0 = 10^6 (> K)$  obtemos  $n_x$  como função de  $K$ . O procedimento é apresentado na figura 4.15(c) e fornece  $z_2 = -1.98 \pm 0.02$ . Observamos, assim, que  $n_x \rightarrow 0$  quando  $I_0 \rightarrow 0$ . Semelhantemente  $n_x$  diminui com o aumento de  $K$ .

Considerando  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  como uma função das variáveis  $nK^x$  e  $I_0$ , descrevemos o regime  $K \gg K_c$  pela relação

$$\langle \overline{I^2} \rangle(nK^x, I_0) = l \langle \overline{I^2} \rangle(l^d nK^x, l^e I_0). \quad (4.37)$$

Como será demonstrado, o valor do expoente  $x$  é relacionado aos expoentes críticos  $\alpha$  e  $\beta$  e obtemos seu valor através das propriedades de escala do mapa padrão para  $K \gg K_c$ .

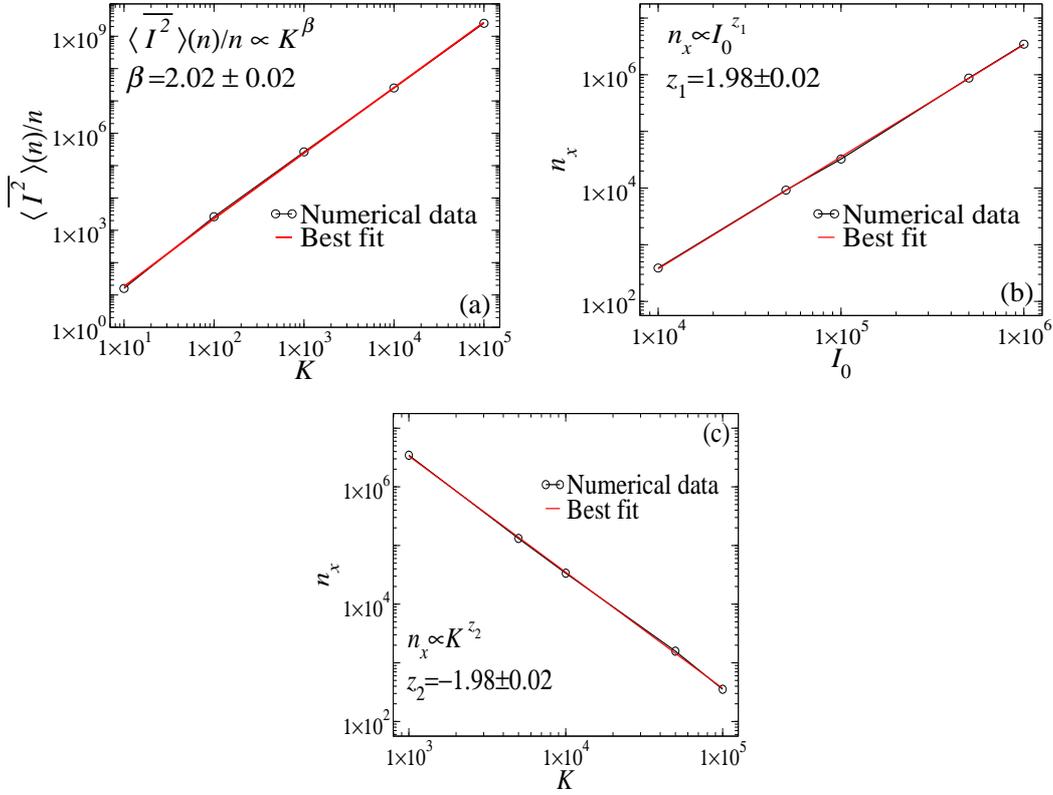


Figura 4.15: Em escalas log-log temos: em (a) o gráfico de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)/n$  versus  $K$ , em (b) o gráfico de  $n_x$  como função de  $I_0$  e em (c) a dependência de  $n_x$  no parâmetro  $K$ . O melhor ajuste dos dados fornece, respectivamente,  $\beta = 2.02 \pm 0.02$ ,  $z_1 = 1.98 \pm 0.02$  e  $z_2 = -1.98 \pm 0.02$ .

Definindo  $l = (nK^x)^{-1/d}$  a expressão acima é reescrita como

$$\langle \overline{I^2} \rangle(nK^x, I_0) = (nK^x)^{-1/d} f((nK^x)^{-e/d} I_0), \quad (4.38)$$

em que  $f = \langle \overline{I^2} \rangle(1, (nK^x)^{-e/d} I_0)$ . Da equação acima escrevemos

$$\langle \overline{I^2} \rangle(nK^x, I_0) \propto (nK^x)^{-1/d} [(nK^x)^{-e/d} I_0]^y. \quad (4.39)$$

Para  $n \gg n_x$ , observamos que as curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  não dependem de  $I_0$ . Portanto neste limite  $y = 0$ . Assim, comparando as equações (4.35) e (4.39), obtemos  $-1/d = \alpha$  e  $-x/d = \beta$ . Temos portanto  $x = \beta/\alpha$ . Para  $n \ll n_x$  temos duas possibilidades: (i) Para  $I_0 < K$  tem-se  $y = 0$  na equação (4.39); (ii) Para  $I_0 > K$  temos  $y = 2$ . No último caso (figura 4.14)  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  não

depende de  $n$  nem de  $K$ . Portanto  $-1/d - ey/d = -x/d - exy/d = 0$ . Ou seja  $e = -1/y = -1/2$ . Além disso, como  $\alpha = 0.999 \pm 0.001$  e  $\beta = 2.02 \pm 0.02$ , temos  $x = \beta/\alpha = 2.02 \pm 0.02$  e  $d = -1/\alpha = -1.001 \pm 0.001$ .

Escolhendo  $l = I_0^{-1/e}$  a equação (4.37) se torna

$$\langle \overline{I^2} \rangle(nK^x, I_0) = I_0^{-1/e} g(I_0^{-d/e} nK^x). \quad (4.40)$$

Desta relação temos que o *crossover*  $n_x$  é dado por

$$\begin{aligned} n_x &\propto \frac{I_0^{d/e}}{K^x} \quad \text{ou} \\ n_x &\propto \left( \frac{I_0^2}{K^\beta} \right)^{1/\alpha}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Aqui temos que  $2/\alpha = 2.002 \pm 0.002$  e  $\beta/\alpha = 2.02 \pm 0.02$ . Comparando a expressão acima com a equação (4.36) observa-se boa concordância com os expoentes  $z_1 = 1.98 \pm 0.02$  e  $z_2 = -1.98 \pm 0.02$ , respectivamente.

Finalmente, utilizando  $l = I_0^{-1/e} = I_0^2$  e as transformações de coordenadas  $n \rightarrow l^{-1/\alpha} n K^{\beta/\alpha}$  e  $\langle \overline{I^2} \rangle(n) \rightarrow \langle \overline{I^2} \rangle(n)/l$ , obtemos o colapso das curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$ . A figura 4.16 ilustra o procedimento.

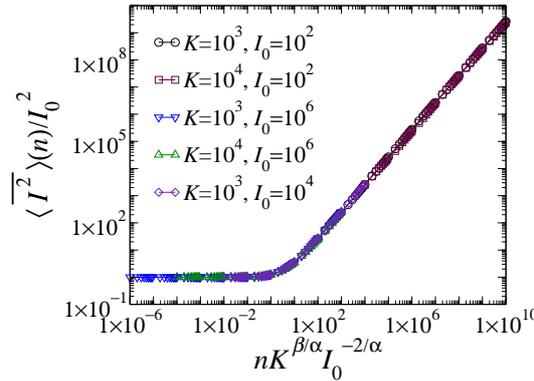


Figura 4.16: Colapso das curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  originalmente mostradas na figura 4.14 em uma curva universal para o limite  $K \gg K_c$ .

Na figura 4.17(a) mostramos curvas de  $\langle I^2 \rangle(n)$  para o caso em que  $K \gg K_c$ . Utilizando o mesmo conjunto de expoentes e aplicando as mesmas

transformações de escala descritas acima obtemos o colapso das curvas de  $\langle I^2 \rangle(n)$  em uma curva universal, como ilustra a figura 4.17(b).

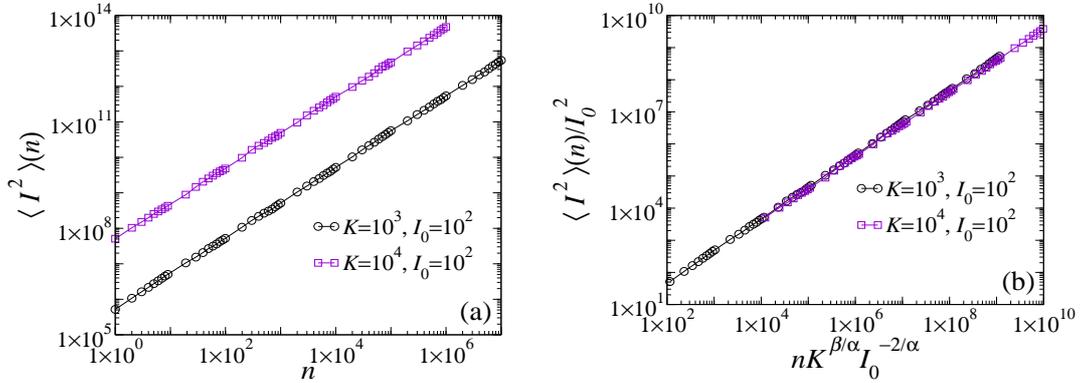


Figura 4.17: Em escalas logarítmicas, temos na figura (a) a quantidade média  $\langle I^2 \rangle(n)$  como função de  $n$  para  $K \gg K_c$ . (b) Transformações apropriadas das escalas colapsam as curvas de  $\langle I^2 \rangle(n)$  em uma curva universal.

## 4.8 Versão estocástica do mapa padrão

O estudo de versões estocásticas iniciaram-se com Hammersley no estudo do modelo de Fermi-Ulam com deslocamentos aleatórios da parede móvel [44]. Como demonstrado por Hammersley, neste sistema a partícula apresenta crescimento ilimitado de energia. Uma outra versão do modelo de Fermi-Ulam onde ambas as paredes apresentam movimento estocástico foi apresentada recentemente por Karlis *et al.* [55]. O estudo destas versões estocásticas simulam o processo complexo de interação de uma partícula em contato com um reservatório térmico.

Neste trabalho introduzimos estocasticidade no mapa padrão atribuindo, em cada iteração, valores aleatórios no intervalo  $[0, 2\pi)$  à variável  $\theta_n$ . No entanto, continuamos a calcular a variável  $I$  de acordo com a equação (4.2). Assim, após  $n$  iterações, a variável  $I_{n,i}$  que caracteriza o valor da ação de uma condição inicial  $i$  é dada por

$$I_{n,i} = I_{0,i} + \sum_{k=0}^{n-1} \sin \theta_k. \quad (4.42)$$

Tomando a média do quadrado da expressão acima ao longo da trajetória, como definido na equação (2.47), temos

$$\overline{I_i^2}(n) = \frac{1}{n+1} \left[ (n+1)I_0^2 + 2KI_0 \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \sin \theta_k + K^2 \sum_{k=0}^{n-1} \left( \sum_{k'=0}^k \sin \theta_{k'} \right)^2 \right]. \quad (4.43)$$

Considerando agora  $M$  órbitas diferentes calculamos a grandeza média  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  definida na equação (2.48). Como os valores de  $\theta$  para cada condição inicial e para cada iteração são obtidos de forma independente então para  $M$  suficientemente grande o valor médio de  $\sin \theta_k$  é aproximadamente zero enquanto o valor médio de  $\sin^2 \theta_k$  é aproximadamente  $1/2$ . Assim, considerando o mesmo valor de  $I_0$  para todas as  $M$  trajetórias obtemos

$$\langle \overline{I^2} \rangle(n) = I_0^2 + \frac{K^2}{4}n. \quad (4.44)$$

A expressão acima revela que a quantidade média  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  cresce sem limites, desde que  $K \neq 0$ . Em termos das variáveis do modelo *bouncer* isto significa que a partícula apresenta crescimento ilimitado de energia. Na figura 4.18(a) mostramos as curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  dadas pela equação (4.44) para diferentes valores de  $K$  e  $I_0$ . Para  $I_0 < K$  as curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  não dependem de  $I_0$ . Para  $I_0 > K$ , no entanto, observa-se que  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  é essencialmente constante,  $\langle \overline{I^2} \rangle(n) \approx I_0^2$ , para valores pequenos de  $n$ . Os resultados obtidos numericamente concordam bem com aquele fornecido pela equação (4.44), como mostra a figura 4.18(b).

Para  $I_0 > K$  e  $n \ll n_x$  temos da equação (4.44) que  $\langle \overline{I^2} \rangle(n) \approx I_0^2$ . Por outro lado, para  $n \gg n_x$  a equação (4.44) fornece  $\langle \overline{I^2} \rangle(n) \approx K^2 n/4$ . Portanto o *crossover*  $n_x$  é dado por

$$n_x \approx 4 \left( \frac{I_0}{K} \right)^2. \quad (4.45)$$

Descrevendo  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  em termos das variáveis  $nK^2$  e  $I_0$  temos

$$\langle \overline{I^2} \rangle(nK^2, I_0) = l \langle \overline{I^2} \rangle(l^d nK^2, l^e I_0). \quad (4.46)$$

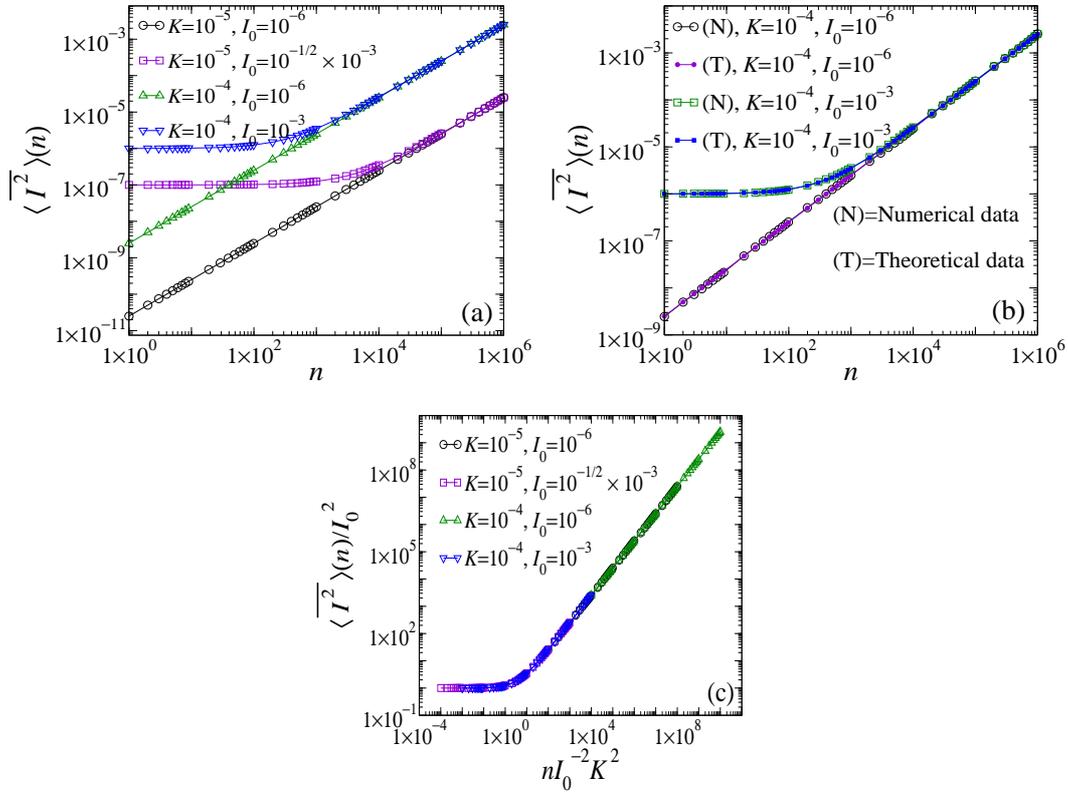


Figura 4.18: Em (a) mostramos o crescimento ilimitado das curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  para a versão estocástica do mapa padrão. Em (b) comparamos os resultados teóricos com os dados numéricos. A figura (c) ilustra o colapso das curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$ , originalmente mostradas em (a), em uma curva universal.

Escolhendo  $l = (nK^2)^{-1/d}$  reescrevemos a expressão acima como

$$\langle \overline{I^2} \rangle(nK^2, I_0) = (nK^2)^{-1/d} f((nK^2)^{-e/d} I_0). \quad (4.47)$$

Para  $n \gg n_x$  as curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  não dependem de  $I_0$  e, portanto, temos que  $f = \langle \overline{I^2} \rangle(1, (nK^2)^{-e/d} I_0)$  é constante. Assim, para  $n \gg n_x$  temos das equações (4.44) e (4.47) que  $-1/d = 1$ .

Escolhendo  $l = I_0^{-1/e}$  temos, da equação (4.46),

$$\langle \overline{I^2} \rangle(nK^2, I_0) = I_0^{-1/e} g(I_0^{-d/e} nK^2). \quad (4.48)$$

Desta relação temos que a iteração de *crossover*  $n_x$  é dada por

$$n_x \approx I_0^{d/e} K^{-2}. \quad (4.49)$$

Comparando as equações (4.45) e (4.49) temos que  $d/e = 2$ . Temos, portanto, os expoentes  $d = -1$  e  $e = -1/2$ .

A figura 4.18(c) mostra que transformações apropriadas de escala,  $n \rightarrow nl^d K^2$  e  $\langle \overline{I^2} \rangle(n) \rightarrow \langle \overline{I^2} \rangle(n)/l$ , com  $l = I_0^{-1/e} = I_0^2$ , colapsam as curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  em uma curva universal.

## 4.9 Conclusões

Neste capítulo estudamos as propriedades de escala do mapa padrão de Chirikov. Os resultados obtidos também são válidos para o modelo *bouncer* de Pustynnikov devido a equivalência entre estes sistemas. Tendo como referência o valor crítico  $K_c$  investigamos as propriedades de escala do mapa padrão em três regimes de não-linearidade.

- (i) Estudamos a transição do regime integrável para o não-integrável,  $K \approx 0$ , para órbitas de movimento regular. Além disso verificamos que a descrição de escala da região de movimento regular é a mesma no intervalo  $[10^{-6}, K_c)$ . O regime de crescimento das curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  com  $K \approx 0$  ocorre para  $n < n_x$ , sendo descrito por  $\langle \overline{I^2} \rangle(n) \propto n^2 K^2$ .

As propriedades de escala que caracterizam a transição de integrável para não-integrável da região de movimento caótico são difíceis de serem obtidas devido ao tamanho pequeno desta região. Desta forma estudamos as propriedades de escala da região de movimento caótico para valores de  $K$  no intervalo  $[0.1, K_c)$ . No entanto, esperamos que a descrição de escala para a região de movimento caótico possa ser estendida até  $K \approx 0$ , como é o caso para órbitas regulares.

Para  $K \in [0.1, K_c)$  o regime de crescimento apresenta poucos pontos e não permite que os expoentes  $\alpha$  e  $\beta$  sejam obtidos. Uma outra dificuldade com relação ao intervalo  $K \in [0.1, K_c)$  é a obtenção do expoente  $c$ . As curvas de  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  para  $I_0 \gg K$  se encontram acima do valor de saturação, em outras regiões do espaço de fase. Desta forma o expoente  $c$  não pode ser obtido.

- (ii) Para  $K \gtrsim K_c$  estudamos as propriedades de escala da região de movimento caótico. Em  $K = K_c$  os valores médios de  $I^2$  mudam do regime de valores limitados para crescimento sem limites. O regime de crescimento é observado para  $n \gg n_x$  e descrito por  $\langle \overline{I^2} \rangle(n) \propto nK_r^3$ , em que  $K_r = K - K_c$ . No limite  $K_r \rightarrow 0$  observamos que  $n_x$  diverge confirmando que em  $K_r = 0$  ocorre a transição para o regime de aceleração de Fermi.
- (iii) Para  $K \gg K_c$  o regime de crescimento é descrito por  $\langle \overline{I^2} \rangle(n) \propto nK^2$  e ocorre para  $n \gg n_x$ .

No estudo da versão estocástica observamos que a quantidade média  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$  cresce, sem limites e independente do valor de  $K$ , de acordo com a relação  $\langle \overline{I^2} \rangle(n) \propto nK^2$ .

A tabela 4.1 resume a descrição de escala do mapa padrão. Para  $K \gtrsim K_c$  e  $K \gg K_c$  observamos que a quantidade média  $\langle \overline{I^2} \rangle(n)$ , obtida na região de movimento caótico, cresce sem limites de forma proporcional a  $n$ . Por outro lado, o crescimento regular da variável  $I$  dado pela expressão (4.18) fornece que  $I_n^2 = (2\pi m + I_0/n)^2 n^2$ . Desta forma, no regime assintótico ( $n \rightarrow \infty$ ) temos para os modos aceleradores que  $I_n^2$  cresce de forma proporcional a  $n^2$ . Percebemos, portanto, que estes modos aceleradores não afetam de forma significativa a região de movimento caótico que os envolve. Para a versão estocástica do mapa padrão, temos que o crescimento ilimitado do valor médio de  $I^2$  é descrito por  $\langle \overline{I^2} \rangle(n) \propto n$ .

No capítulo 3 apresentamos a análise de escala para a transição do regime integrável para o não-integrável do modelo de Fermi-Ulam. A análise foi feita para órbitas caóticas na região de energias baixas. Vamos, portanto, comparar os expoentes do modelo de Fermi-Ulam com os expoentes obtidos para órbitas caóticas na transição de integrável para não-integrável do mapa padrão. O cálculo da energia média como função da variável  $n$  para o modelo de Fermi-Ulam fornece os expoentes  $a \approx 1$  e  $b \approx -1$  (expoentes relacionados às variáveis  $n$  e  $\varepsilon$ , respectivamente). Os expoentes obtidos para o mapa padrão relacionados às variáveis  $n$  e  $K$  são, respectivamente,  $a = 0.83 \pm 0.06$  e  $b = -0.58 \pm 0.01$ . Portanto, a transição de integrável para não-integrável do modelo de Fermi-Ulam e do mapa padrão é descrita por expoentes diferentes. Apesar de serem unidimensionais, estes sistemas, portanto, pertencem a

Regime	Variáveis de escala	Expoentes de escala	Regime de crescimento $\langle \overline{I^2} \rangle(n) \propto n^\alpha K^{\dagger\beta}$
$K \in [10^{-6}, 0.9]$ órbitas regulares	$n$ $K$ $I_0$	$a = 0.48(2) \approx 1/2$ $b = -0.95(5) \approx -1$ $c = -0.48(3) \approx -1/2$	$n \ll n_x$ $\alpha = 1.91(1) \approx 2$ $\beta = 2.012(5) \approx 2$
$K \in [0.1, 0.9]$ órbitas caóticas	$n$ $K$	$a = 0.83(6)$ $b = -0.58(1)$	$n \ll n_x$
$K \gtrsim K_c$	$n$ $K_r$	$a \rightarrow \pm\infty$ $b \rightarrow \mp\infty$ $a/b = -2.99(9) \approx -3$	$n \gg n_x$ $\alpha = 0.99(3) \approx 1$ $\beta = 3.06(5) \approx 3$
$K \gg K_c$	$nK^{\beta/\alpha}$ $I_0$	$d = -1.001(1)$ $e = -1/2$	$n \gg n_x$ $\alpha = 0.999(1) \approx 1$ $\beta = 2.02(2) \approx 2$
Versão estocástica	$nK^2$ $I_0$	$d = -1$ $e = -1/2$	$n \gg n_x$ $\alpha = 1$ $\beta = 2$

Tabela 4.1: *Análise de escala do mapa padrão. Para  $K \gtrsim K_c$  tem-se que  $K^\dagger = K_r$ . Para os outros casos  $K^\dagger = K$ .*

classes de universalidade distintas. Este resultado é um reflexo das diferentes propriedades destes sistemas. O espaço de fase do modelo de Fermi-Ulam é caracterizado, na transição, por um mar de caos global na região de energia baixa. O mapa padrão, por sua vez, apresenta a mesma transição com órbitas regulares predominando na maior parte do espaço de fase.

Os resultados que apresentamos aqui foram publicados na revista *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* [56].

# O modelo *bouncer* dissipativo simplificado

---

## 5.1 Introdução

Neste capítulo fazemos a descrição de escala de uma versão do modelo *bouncer* que contrai área no espaço de fase. Introduzimos colisões inelásticas da partícula com a plataforma oscilante através de um coeficiente de restituição  $\mu$ . Para  $\mu = 1$  as colisões são elásticas e, como descrito na capítulo anterior, o sistema apresenta aceleração de Fermi para determinados valores de parâmetro e condições iniciais. Para  $\mu < 1$ , no entanto, o sistema é dissipativo e a energia média sempre cresce para tempos curtos e satura para tempos longos. Em outras palavras, as colisões inelásticas suprimem a aceleração de Fermi. Temos, assim, um outro tipo de transição ao variar o parâmetro  $\mu$ .

Aplicações envolvendo o fenômeno de aceleração de Fermi tem despertado interesse em várias áreas da física como óptica [28, 29], astrofísica [34, 35], física de plasmas [33], física atômica [30] e também a classe de problemas dos bilhares [57].

Neste capítulo caracterizamos a transição de crescimento ilimitado para crescimento limitado de energia. O estudo consiste em obter a descrição de escala do desvio quadrático médio da velocidade calculado em função do tempo. A análise considerando o valor médio do desvio quadrático como função do número de choques é encontrada na referência [58].

## 5.2 O modelo

O modelo *bouncer*, como já discutido no capítulo 4, consiste de uma partícula que, sob aceleração da gravidade, cai e colide contra uma plataforma oscilante. No presente trabalho as colisões inelásticas são introduzidas definindo um coeficiente de restituição  $\mu \in [0, 1)$ . Ao colidir temos, no referencial da parede oscilante, que os valores de velocidade da partícula imediatamente antes e imediatamente após o choque<sup>1</sup> se relacionam por  $V_f' \hat{j} = -\mu V_i' \hat{j}$ . Desta forma a quantidade  $1 - \mu$  define a fração da velocidade que, em valor absoluto, é perdida devido ao choque inelástico.

Consideramos aqui a versão simplificada do modelo *bouncer*. A simplificação consiste em preservar a transferência de energia entre a plataforma e a partícula assumindo uma posição fixa para a plataforma. Esta simplificação preserva a não-linearidade do problema e torna as simulações mais rápidas com relação à versão completa [15], uma vez que não é necessário resolver equações transcendentais. Definindo as variáveis adimensionais  $V_n = v_n w/g$ ,  $t_n = wt'_n$ ,  $\varepsilon = \epsilon w^2/g$  e  $\phi_n = t_n + \phi_0$ , como na seção 4.2, o modelo *bouncer* dissipativo é descrito pelo mapa

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= |\mu V_n - (1 + \mu)\varepsilon \sin \phi_{n+1}|, \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + 2V_n \bmod 2\pi. \end{aligned} \quad (5.1)$$

As barras de valor absoluto são necessárias para evitar que a partícula seja encontrada abaixo da parede, região proibida na versão simplificada. Este sistema contrai área no espaço de fase. O determinante da matriz Jacobiana é dado por  $\det J = \mu \operatorname{sign}[\mu V_n - (1 + \mu)\varepsilon \sin \phi_{n+1}]$  [58], em que  $\operatorname{sign}(x) = -1$  para  $x < 0$  e  $\operatorname{sign}(x) = +1$  para  $x > 0$ . Observamos pelo mapa dado acima que a dinâmica do modelo *bouncer* dissipativo é governada por dois parâmetros de controle:  $\mu$  e  $\varepsilon$ .

Para  $\mu = 1$  o mapa dado pela equação (5.1) recupera o modelo *bouncer* em que as colisões são elásticas, dado pela expressão (4.1). Neste caso, como discutido no capítulo 4, as órbitas caóticas apresentam crescimento ilimitado de energia para  $\varepsilon > K_c/4 \approx 0.2428$  [11, 13]. O foco do presente trabalho é estudar as propriedades de escala do modelo *bouncer* dissipativo para  $\varepsilon >$

---

<sup>1</sup>O cálculo de mudança de referenciais é encontrado na seção 3.2.1 onde foi obtido o mapa para o modelo de Fermi-Ulam

0.2428 no limite  $\mu \approx 1$ , onde ocorre a transição de crescimento sem limites para o crescimento limitado da energia do sistema.

### 5.3 Análise de escala

Considerando a órbita de uma condição inicial determinamos o valor médio  $\overline{V_i^2}(t)$  como definido pela expressão (2.43) e, considerando um conjunto com  $M$  condições iniciais diferentes, determinamos a quantidade média  $\langle \overline{V^2} \rangle(t)$ , como definida pela equação (2.44).

A figura 5.1 mostra a quantidade  $\langle \overline{V^2} \rangle(t)$  para  $\mu = 0.999$  e  $\varepsilon = 60$ . Além disso consideramos  $M = 10^3$  condições iniciais diferentes. Este valor de  $M$  é suficiente para que o desvio padrão de  $\langle \overline{V^2} \rangle(t)$  seja menor que os símbolos empregados na curva. Observamos que  $\langle \overline{V^2} \rangle(t)$  apresenta um regime inicial de crescimento. Para tempos longos  $\langle \overline{V^2} \rangle(t)$  atinge um regime de saturação. A saturação de  $\langle \overline{V^2} \rangle(t)$  para tempos longos confirma que a energia não cresce sem limites.

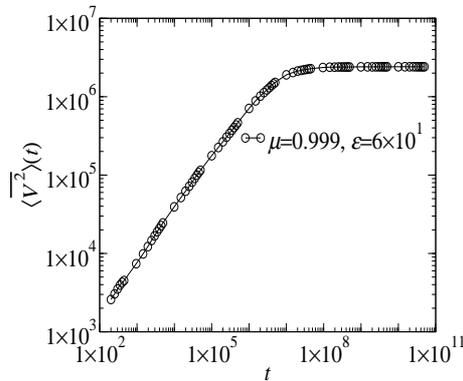


Figura 5.1: A figura ilustra uma curva típica da média do quadrado da velocidade para a versão simplificada do modelo *bouncer dissipativo*.

No capítulo 3 vimos que o modelo simplificado de Fermi-Ulam apresenta decaimento da energia média no regime de tempos longos, equação (3.34). Como a versão simplificada não leva em consideração colisões diretas então o tempo entre colisões é grande toda vez que a velocidade da partícula se torna pequena (seção 3.4). No modelo *bouncer*, contudo, o intervalo entre colisões,  $2V_n$ , é pequeno quando a velocidade da partícula se torna pequena (equação (5.1)). Esta característica, contrária a do modelo de Fermi-Ulam,

explica porque ao invés de decair a energia satura em tempos longos para a versão simplificada do modelo *bouncer*.

Em vez de estudarmos as propriedades de escala de  $\langle \overline{V^2} \rangle(t)$  consideramos a média do desvio da velocidade [22], também chamada de rugosidade, definida pela equação (2.46).

Como a transição que estamos interessados em investigar ocorre em  $\mu = 1$  é apropriado definir um novo parâmetro  $\mu_r = (1 - \mu)$ . Em termos deste parâmetro estudamos as propriedades de escala do modelo *bouncer* dissipativo quando o sistema está próximo da transição, ou seja, quando  $\mu_r = (1 - \mu) \approx 0$ .

A figura 5.2(a) mostra as curvas de rugosidade em função do tempo para valores diferentes de  $\mu_r$  e  $\varepsilon$ . Observamos que todas as curvas apresentam o mesmo comportamento no sentido de que a rugosidade cresce no regime de valores pequenos de tempo e, para tempos longos, a rugosidade atinge um valor estacionário no qual  $\langle \overline{w} \rangle(t)$  não depende do tempo. Além disso definimos  $t_z$  como o valor do tempo para o qual as curvas de rugosidade mudam do regime de crescimento para o regime de saturação.

Substituindo a variável  $t$  pela nova variável  $t\varepsilon^2$  a descrição de escala torna-se mais direta. A figura 5.2(b) mostra as curvas de rugosidade em função de  $t\varepsilon^2$ . Em termos desta nova variável as curvas de rugosidade colapsam no regime inicial de crescimento. Assim, para valores pequenos de tempo as curvas de rugosidade são descritas pela relação

$$\langle \overline{w} \rangle(t) \propto (t\varepsilon^2)^\beta, \quad (5.2)$$

em que  $\beta$  é o expoente de crescimento. O valor médio obtido para 55 combinações diferentes de  $\mu_r$  e  $\varepsilon$  é  $\beta = 0.334 \pm 0.008$ .

Da figura 5.2(b) observamos também que o valor de saturação depende dos parâmetros  $\mu_r$  e  $\varepsilon$ . Portanto, em termos destes parâmetros, descrevemos a saturação das curvas de rugosidade pela relação

$$\langle \overline{w} \rangle_{\text{sat}}(t) \propto \varepsilon^{\gamma_1} \mu_r^{\gamma_2}. \quad (5.3)$$

Os expoentes  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são os expoentes de rugosidade. Fixando o valor de  $\mu_r$  e utilizando valores diferentes de  $\varepsilon$  obtemos, do gráfico de  $\langle \overline{w} \rangle_{\text{sat}}(t)$  versus  $\varepsilon$ , o valor do expoente  $\gamma_1$ . A figura 5.3(a) ilustra o procedimento, que fornece

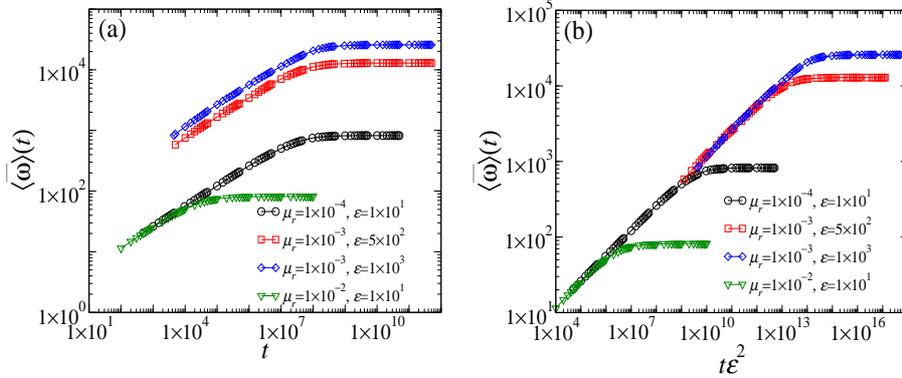


Figura 5.2: Em (a) temos curvas de rugosidade como funções do tempo para valores diferentes de  $\mu_r$  e  $\varepsilon$ . Em (b) temos as curvas de rugosidade apresentadas em (a) como funções da nova variável  $t\varepsilon^2$ .

$\gamma_1 = 0.99 \pm 0.01$ . Similarmente fixamos o valor de  $\varepsilon$  e, utilizando valores diferentes de  $\mu_r$ , obtemos  $\gamma_2 = -0.510 \pm 0.001$ , como ilustra a figura 5.3(b). Como  $\gamma_2$  é negativo então o valor de saturação  $\langle \bar{w} \rangle_{\text{sat}}(t)$  diverge no limite  $\mu_r \rightarrow 0$ , como esperado.

Ainda da figura 5.2(b) observamos que a variável de *crossover*  $t_z \varepsilon^2$  também depende de ambos os parâmetros  $\mu_r$  e  $\varepsilon$ . Escrevemos, portanto,

$$t_z \varepsilon^2 \propto \varepsilon^{z_1} \mu_r^{z_2}, \quad (5.4)$$

em que  $z_1$  e  $z_2$  são os expoentes dinâmicos. Os valores dos expoentes  $z_1$  e  $z_2$  são obtidos via ajustes dos dados de  $t_z$  como função de  $\varepsilon$  e  $\mu_r$ , respectivamente. Assim fixamos o valor de  $\mu$  e variamos o valor de  $\varepsilon$  para obter  $z_1 = 2.98 \pm 0.02$ , como ilustra a figura 5.3(c). Por outro lado, fixando o valor de  $\varepsilon$  e empregando valores diferentes de  $\mu_r$  obtemos  $z_2 = -1.49 \pm 0.01$ , como ilustrado na figura 5.3(d). No limite  $\mu_r \rightarrow 0$   $t_z \varepsilon^2$  diverge, como esperado.

Agora que conhecemos os expoentes dinâmicos  $\beta$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $z_1$  e  $z_2$  estamos prontos para iniciar a descrição de escala do modelo *bouncer* dissipativo. Para  $\mu_r \approx 0$  descrevemos a rugosidade em termos das variáveis  $t\varepsilon^2$ ,  $\mu_r$  e  $\varepsilon$  pela relação

$$\langle \bar{w} \rangle(\varepsilon, \mu_r, t\varepsilon^2) = l \langle \bar{w} \rangle(l^a \varepsilon, l^b \mu_r, l^c t\varepsilon^2), \quad (5.5)$$

em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são expoentes de escala e  $l$  é um fator de escala. Escolhendo

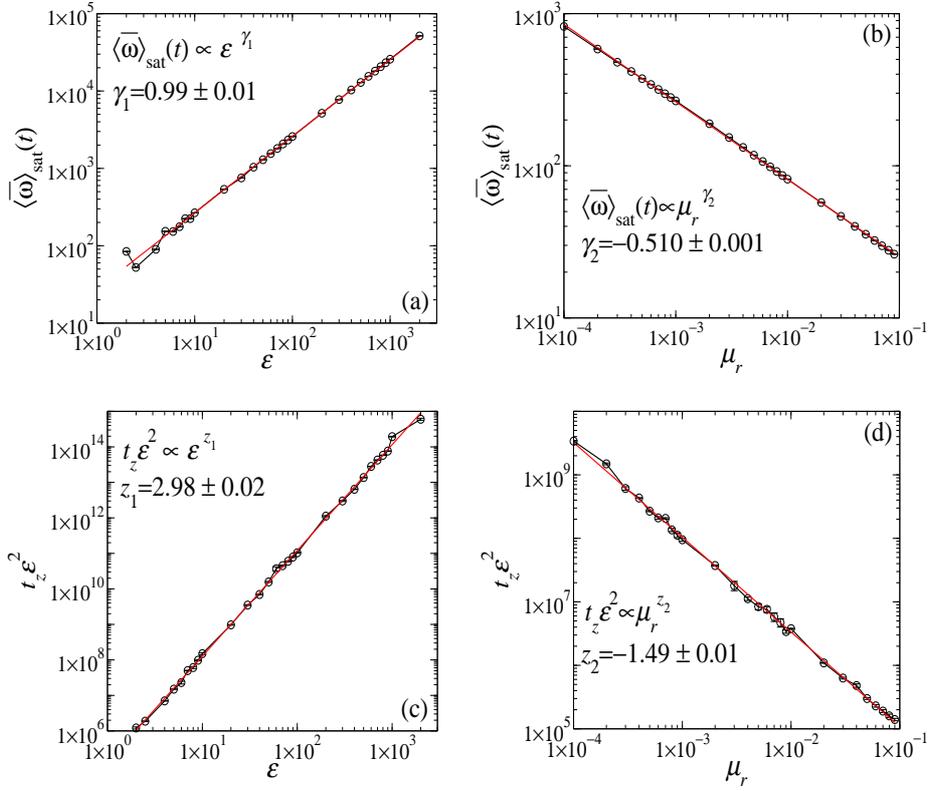


Figura 5.3: As figuras ilustram, em escalas log-log, os ajustes via mínimos quadrados dos dados numéricos. Em (a) e (b) temos, respectivamente, os valores de saturação da rugosidade como funções de  $\varepsilon$  e de  $\mu_r$ . De forma similar, as figuras (c) e (d) ilustram os valores de  $t_z \varepsilon^2$  como funções de  $\varepsilon$  e de  $\mu_r$ .

$l = (t\varepsilon^2)^{-1/c}$  a expressão acima se torna

$$\langle \bar{\omega} \rangle(\varepsilon, \mu_r, t\varepsilon^2) = (t\varepsilon^2)^{-1/c} h((t\varepsilon^2)^{-a/c} \varepsilon, (t\varepsilon^2)^{-b/c} \mu_r), \quad (5.6)$$

em que  $h = \langle \bar{\omega} \rangle((t\varepsilon^2)^{-a/c} \varepsilon, (t\varepsilon^2)^{-b/c} \mu_r, 1)$ . Para valores pequenos do tempo a função  $h$  é constante. Assim, comparando as equações (5.2) e (5.6) obtemos a relação  $\beta = -1/c$ . Os argumentos da função  $h$  fornecem os expoentes do tempo de *crossover*. Do primeiro argumento temos que

$$t_z \varepsilon^2 \propto \varepsilon^{c/a}. \quad (5.7)$$

Comparando esta expressão com a equação (5.4) obtemos  $z_1 = c/a$ . O se-

gundo argumento da função  $h$  na equação (5.6) fornece

$$t_z \varepsilon^2 \propto \mu_r^{c/b}. \quad (5.8)$$

Comparando as expressões (5.4) e (5.8) obtemos  $z_2 = c/b$ .

Escolhendo  $l = \varepsilon^{-1/a}$  a expressão (5.5) é reescrita como

$$\begin{aligned} \langle \bar{w} \rangle(\varepsilon, \mu_r, t\varepsilon^2) &= \varepsilon^{-1/a} f(\varepsilon^{-b/a} \mu_r, \varepsilon^{-c/a} t\varepsilon^2) \\ &\propto \varepsilon^{-1/a} (\varepsilon^{-b/a} \mu_r)^x g(\varepsilon^{-c/a} t\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Para tempos longos a função  $g$  é constante. Comparando a expressão acima com (5.3) temos que  $-1/a - bx/a = \gamma_1$  e que  $x = \gamma_2$ . Temos, desta forma, a relação

$$1 + a\gamma_1 + b\gamma_2 = 0. \quad (5.10)$$

Utilizando as relações entre os expoentes de *crossover* com os expoentes de escala obtemos  $b = a(z_1/z_2)$ . Empregando este resultado na relação (5.10) encontramos

$$a = -\frac{z_2}{\gamma_1 z_2 + \gamma_2 z_1} = -0.498 \pm 0.005, \quad (5.11)$$

$$b = -\frac{z_1}{\gamma_1 z_2 + \gamma_2 z_1} = 1.00 \pm 0.01, \quad (5.12)$$

$$c = -\frac{z_1 z_2}{\gamma_1 z_2 + \gamma_2 z_1} = -1.48 \pm 0.03. \quad (5.13)$$

A figura 5.4 mostra o colapso das curvas de rugosidade originalmente mostradas na figura 5.2(b) em uma curva universal.

## 5.4 Relação entre as variáveis tempo e número de choques

A análise de escala da rugosidade como função do número de choques, obtida na referência [58], revela que o regime de crescimento é descrito por  $\langle \bar{w} \rangle(t) \propto n^{1/2}$ . Nós confirmamos este resultado ao relacionar o número médio de choques com tempo.

Acompanhando a órbita de uma condição inicial no tempo obtemos o nú-

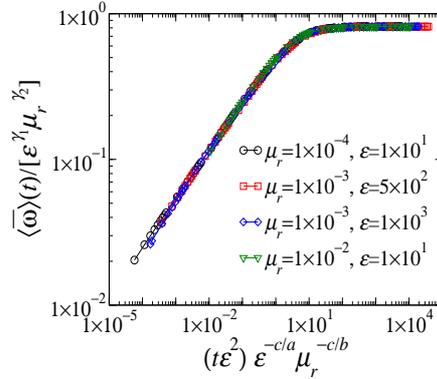


Figura 5.4: A figura ilustra o colapso das curvas de rugosidade originalmente apresentadas na figura 5.2(b) em uma curva universal.

mero de colisões  $N_i(t)$  que a partícula sofre até o instante  $t$ . O procedimento é realizado para  $M$  condições iniciais diferentes. Assim obtemos o número médio de choques  $\langle N \rangle(t)$  como definido pela expressão (2.45).

A figura 5.5 mostra o comportamento típico de  $\langle N \rangle(t)$  como função de  $t\varepsilon^2$  obtido na análise. Nesta figura utilizamos  $\mu_r = 10^{-3}$  e  $\varepsilon = 10$ . A figura 5.5 revela que  $\langle N \rangle(t)$  apresenta dois regimes de crescimento. A mudança entre os dois regimes caracteriza o valor de crossover  $t_z\varepsilon^2$ . De forma geral descrevemos o número médio de choques,  $\langle N \rangle(t)$ , pela relação

$$\langle N \rangle(t) \propto (t\varepsilon^2)^w. \quad (5.14)$$

Desta forma o regime inicial de crescimento é caracterizado por um expoente  $w = w_1$  e para  $t \gg t_z$  o expoente de crescimento é  $w = w_2$ .

Realizando ajustes em curvas de  $\langle N \rangle(t)$  para  $\mu_r \in [10^{-4}, 9 \times 10^{-2}]$  e  $\varepsilon \in [2, 2 \times 10^3]$  obtemos os valores médios  $w_1 = 0.69 \pm 0.02$  e  $w_2 = 0.9999 \pm 0.0002 \approx 1$ . O primeiro regime de crescimento corresponde ao crescimento inicial de  $\langle \bar{w} \rangle(t)$  para  $t < t_z$ . O segundo regime de crescimento do número de colisões corresponde ao regime de saturação da rugosidade para tempos longos. Considerando o regime de crescimento inicial, a relação (5.14) é reescrita como

$$t\varepsilon^2 \propto (\langle N \rangle(t))^{1/w_1}. \quad (5.15)$$

Utilizando este resultado na equação (5.2) temos que as curvas de rugo-

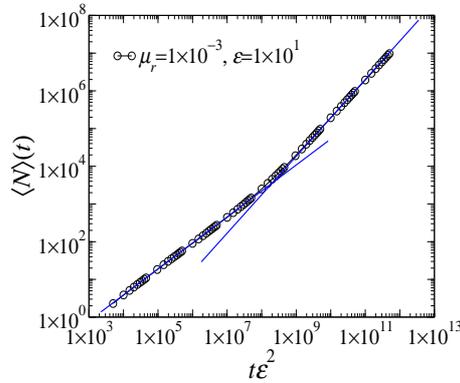


Figura 5.5: O número médio de choques como função de  $t\varepsilon^2$  apresenta dois regimes caracterizados por expoentes de crescimento diferentes.

side para  $t\varepsilon^2 < t_z \varepsilon^2$  são descritas por

$$\langle \bar{w} \rangle(t) \propto (\langle N \rangle(t))^{\beta/w_1} \quad (5.16)$$

Como  $\beta \approx 1/3$  e  $w_1 \approx 2/3$  temos da expressão acima o resultado

$$\langle \bar{w} \rangle(t) \propto (\langle N \rangle(t))^{1/2}. \quad (5.17)$$

Este resultado confirma o crescimento da rugosidade obtido como função de  $n$  na referência [58].

## 5.5 Conclusões

No presente capítulo introduzimos colisões inelásticas no modelo *bouncer* simplificado. Como consequência a energia média obtida considerando órbitas caóticas para  $\varepsilon > 0.2428$  não apresenta crescimento ilimitado. O valor de saturação do desvio da velocidade no modelo *bouncer* dissipativo depende dos parâmetros  $\mu$  e  $\varepsilon$  que representam, respectivamente, o coeficiente de restituição e a amplitude reescalada de oscilação da plataforma. No limite  $\mu \rightarrow 1$  o mapa dado pela equação (5.1) recupera o modelo *bouncer* apresentado no capítulo anterior. Neste limite o tempo de *crossover* e o valor de saturação da rugosidade divergem, recuperando o regime de aceleração de Fermi.

O regime de valores pequenos de dissipação,  $\mu_r = (1 - \mu) \approx 0$ , corresponde à transição do regime onde é observado o fenômeno de aceleração de

Fermi para o regime de crescimento limitado de energia. A descrição de escala desta transição fornece o conjunto de expoentes  $a = -z_2/(\gamma_1 z_2 + \gamma_2 z_1)$ ,  $b = -z_1/(\gamma_1 z_2 + \gamma_2 z_1)$  e  $c = -z_1 z_2/(\gamma_1 z_2 + \gamma_2 z_1)$ , em que  $z_1 = 2.98 \pm 0.02 \approx 3$  e  $z_2 = -1.49 \pm 0.01 \approx -3/2$  são os expoentes dinâmicos,  $\gamma_1 = 0.99 \pm 0.01 \approx 1$  e  $\gamma_2 = -0.510 \pm 0.001 \approx -1/2$  são os expoentes da saturação. Temos, portanto,  $a = -0.498 \pm 0.005 \approx -1/2$ ,  $b = 1.00 \pm 0.01 \approx 1$  e  $c = -1.48 \pm 0.03 \approx -3/2$ . Como a rugosidade é proporcional à velocidade da partícula então ambas são descritas pelos mesmos expoentes  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

As curvas do número médio de choques no tempo apresentam dois regimes de crescimento. O regime de crescimento inicial é descrito pela relação  $\langle N \rangle(t) \propto (t\varepsilon^2)^{w_1}$ , com  $w_1 = 0.69 \pm 0.02$ . Para tempos longos o número médio de colisões cresce de acordo com a relação  $\langle N \rangle(t) \propto (t\varepsilon^2)^{w_2}$ , com  $w_2 = 0.9999 \pm 0.0002 \approx 1$ . O regime de crescimento inicial de  $\langle N \rangle(t)$  corresponde ao crescimento das curvas de rugosidade para  $t\varepsilon^2 < t_z \varepsilon^2$ . Neste limite a rugosidade é descrita por  $\langle \bar{w} \rangle(t) \propto (t\varepsilon^2)^\beta$ , com  $\beta = 0.334 \pm 0.008$ . Como  $w_1 \approx 2/3$  e  $\beta \approx 1/3$ , utilizamos a relação entre  $\langle N \rangle(t)$  e  $t\varepsilon^2$  para escrever o crescimento inicial da rugosidade como  $\langle \bar{w} \rangle(t) \propto (\langle N \rangle(t))^{1/2}$ , confirmando o resultado encontrado na literatura.

---

# O bilhar circular pulsante simplificado

---

## 6.1 Introdução

Os bilhares bidimensionais tem despertado interesse em estudos que envolvem o fenômeno de aceleração de Fermi. De acordo com a conjectura de Loskutov, Ryabov e Akhishin [59] a existência ou não da aceleração de Fermi em tais sistemas está associada às propriedades do espaço de fase da versão estática. A conjectura declara que condições iniciais pertencentes à região caótica da versão estática apresentarão crescimento ilimitado de energia quando é introduzida uma perturbação dependente do tempo na fronteira. Por outro lado, a aceleração de Fermi não será observada se as condições iniciais apresentarem dinâmica regular na versão estática. A conjectura tem sido confirmada em versões simplificadas de bilhares com fronteiras circulares [60, 61] e em bilhares dispersivos do tipo de Lorentz [62]. Kamphorst et al. [63] mostraram, para uma classe de bilhares com fronteiras cuja forma depende de um parâmetro, que a conjectura é válida para as versões simplificadas. Quando a análise considera as versões completas o fenômeno de aceleração de Fermi pode ou não ocorrer. Eles mostraram ainda que as perturbações da fronteira que preservam a simetria do bilhar resultam na ausência do fenômeno.

O caso de um bilhar com fronteiras circulares dependentes do tempo foi investigado por de Carvalho et al. [60, 61]. Neste sistema as fronteiras formam uma estrutura em forma de anel. Os autores mostraram que os resultados do modelo de Fermi-Ulam são recuperados quando a posição do centro

dos círculos é a mesma (caso concêntrico) e o momento angular é zero. Neste caso a energia média da partícula não cresce sem limites. Quando os círculos não apresentam um centro comum (caso excêntrico), o sistema apresenta o fenômeno de aceleração de Fermi. Experimentos e simulações envolvendo um sistema baseado no bilhar de Sinai foram analisados por Schmick et al. [64], em que o controle do caos foi feito variando os valores de coeficientes de restituição.

O bilhar circular pulsante [14] consiste de uma partícula confinada na região de um círculo cujo raio depende do tempo. A versão estática deste modelo corresponde à situação em que o raio do círculo é constante. Assim, após cada colisão elástica, as componentes radial e tangencial da velocidade da partícula são constantes e o sistema é integrável. Ao introduzir a perturbação na fronteira, no entanto, o sistema se torna não-integrável e o espaço de fase apresenta estrutura mista composta por regiões de movimento regular e regiões caóticas.

Apresentamos neste capítulo os resultados da descrição de escala que caracteriza a transição do regime integrável para o regime não-integrável da versão simplificada do bilhar circular pulsante. Apresentamos também um cálculo analítico que demonstra, em dois regimes da componente tangencial da velocidade, a equivalência local do bilhar circular com o mapa padrão.

## 6.2 A versão simplificada do bilhar circular

Provavelmente o bilhar circular é a generalização mais direta em duas dimensões do modelo de Fermi-Ulam. O estudo do bilhar circular é importante pois permite compararmos os expoentes que caracterizam as propriedades de escala deste sistema bidimensional com os que foram obtidos para o modelo de Fermi-Ulam.

O modelo sob análise consiste de uma partícula clássica presa na região definida por um círculo cujo raio varia no tempo com amplitude  $\epsilon$  de acordo com a relação  $r(t') = r_0 + \epsilon \cos(\omega t' + \delta_0)$ , em que  $r_0$  é o valor de equilíbrio,  $\omega$  é a frequência de oscilação,  $\delta_0$  é a fase inicial da fronteira e  $t'$  é o tempo. Contudo é apropriado descrever o sistema em termos de variáveis adimensionais. Definimos assim  $t = \omega t'$ ,  $\delta(t) = t + \delta_0$  e  $\varepsilon = \epsilon/r_0$ . Desta forma descrevemos a posição da fronteira pela expressão  $R(t) = 1 + \varepsilon \cos \delta(t)$ . A

figura 6.1 ilustra o bilhar circular e algumas das variáveis que são utilizadas na descrição do modelo. A posição angular da partícula após a  $n$ -ésima colisão é dada pela variável  $\theta_n$ . A variável  $\alpha_n$  é definida como o ângulo entre o vetor velocidade da partícula e uma linha que tangencia o círculo no instante da  $n$ -ésima colisão.

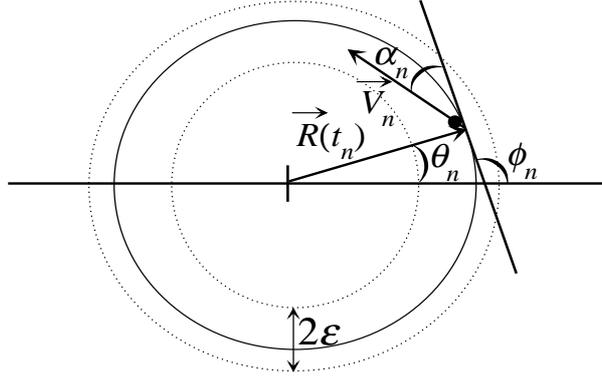


Figura 6.1: A figura ilustra o bilhar circular e algumas de suas variáveis.

A versão simplificada despreza o deslocamento da fronteira do bilhar. No entanto, a transferência de energia e momento entre a parede e a partícula ocorre considerando a dependência temporal da posição da fronteira. Esta simplificação preserva a não-linearidade do sistema e é empregada para agilizar as simulações e, principalmente, para fornecer resultados analíticos.

No bilhar circular a fronteira atua como uma força externa que atua na direção radial. Como consequência, o bilhar circular pulsante apresenta a propriedade de conservação do momento angular [14]. Assim, a componente polar da velocidade,  $V_\theta$ , é constante na versão simplificada do modelo.

Devido à simetria do modelo, para um dado valor inicial  $\alpha_0$  todos os valores possíveis de  $\theta_0$  são equivalentes. Além disso, a dinâmica do sistema não é afetada se a partícula se move no sentido anti-horário,  $V_\theta > 0$ , ou no sentido horário,  $V_\theta < 0$ , desde que  $|V_\theta|$  seja o mesmo em ambos os casos.

Em coordenadas cartesianas a velocidade da partícula imediatamente após a colisão  $n$  é dada por

$$\vec{V}_n = V_n \cos(\alpha_n + \phi_n) \hat{i} + V_n \sin(\alpha_n + \phi_n) \hat{j}, \quad (6.1)$$

em que  $V_n = \sqrt{V_{r,n}^2 + V_{\theta,n}^2}$  é o valor absoluto da velocidade. Como a componente tangencial da velocidade é constante, temos que  $V_{\theta,n} = V_\theta$ .

A linha horizontal, o vetor  $\vec{R}(t_n)$  e a tangente ao círculo no instante da  $n$ -ésima colisão formam um triângulo (figura 6.1). O vetor  $\vec{R}(t_n)$  é perpendicular à linha tangente ao círculo. Assim, a soma dos ângulos internos do triângulo fornece

$$\theta_n + \frac{\pi}{2} + (\pi - \phi_n) = \pi, \quad \text{ou seja,} \quad \phi_n = \theta_n + \frac{\pi}{2}. \quad (6.2)$$

Desta forma temos, da expressão (6.1),

$$\vec{V}_n = -V_n \sin(\alpha_n + \theta_n) \hat{i} + V_n \cos(\alpha_n + \theta_n) \hat{j}. \quad (6.3)$$

A colisão  $(n+1)$  ocorre em  $\theta = \theta_{n+1}$ . Entre as colisões  $n$  e  $(n+1)$  o movimento da partícula é retilíneo. Assim, a trajetória da partícula é descrita pela relação

$$y = ax + b, \quad (6.4)$$

em que  $a = \tan(\alpha_n + \phi_n) = -\cot(\alpha_n + \theta_n)$  e  $b$  é uma constante. Como estamos considerando a versão simplificada então as componentes do vetor  $\vec{R}(t)$  nos instantes das colisões  $n$  e  $(n+1)$  são dadas por

$$\begin{aligned} x_n &= \cos \theta_n & x_{n+1} &= \cos \theta_{n+1} \\ y_n &= \sin \theta_n & y_{n+1} &= \sin \theta_{n+1}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

lembrando que, em variáveis adimensionais, o círculo tem raio unitário. Temos, portanto,

$$y_{n+1} - y_n = a(x_{n+1} - x_n), \quad (6.6)$$

ou seja,

$$\sin \theta_{n+1} - \sin \theta_n = -\cot(\alpha_n + \theta_n)(\cos \theta_{n+1} - \cos \theta_n). \quad (6.7)$$

Assim obtemos o valor de  $\theta_{n+1}$  resolvendo a equação  $f(\theta_{n+1}) = 0$ , onde a função  $f(\theta_{n+1})$  é dada por

$$f(\theta_{n+1}) = \sin \theta_{n+1} - \sin \theta_n + \cot(\alpha_n + \theta_n)(\cos \theta_{n+1} - \cos \theta_n). \quad (6.8)$$

Em coordenadas cartesianas os vetores unitários  $\hat{r}$  e  $\hat{\theta}$  são dados por

$$\begin{aligned}\hat{r} &= \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \\ \hat{\theta} &= -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}.\end{aligned}\quad (6.9)$$

Imediatamente antes da colisão ( $n+1$ ) as componentes polares do vetor velocidade, equação (6.3), são dadas por

$$\begin{aligned}V_r^{(n)} &= \vec{V}_n \cdot \hat{r}_{n+1} \\ &= V_n[-\sin(\alpha_n + \theta_n) \cos \theta_{n+1} + \cos(\alpha_n + \theta_n) \sin \theta_{n+1}] \\ &= -V_n \sin(\alpha_n + \theta_n - \theta_{n+1}), \\ V_\theta^{(n)} &= \vec{V}_n \cdot \hat{\theta}_{n+1} \\ &= V_n[\sin(\alpha_n + \theta_n) \sin \theta_{n+1} + \cos(\alpha_n + \theta_n) \cos \theta_{n+1}] \\ &= V_n \cos(\alpha_n + \theta_n - \theta_{n+1}).\end{aligned}\quad (6.10)$$

A velocidade da fronteira é dada por  $\vec{V}_w = -\varepsilon \sin \delta(t) \hat{r}$  e a velocidade da partícula imediatamente antes da colisão é  $\vec{V} = V_r^{(n)} \hat{r} + V_\theta^{(n)} \hat{\theta}$ . O procedimento de mudança de referencial é semelhante àquele apresentado na seção 3.2.1. No referencial da fronteira, a componente radial da velocidade da partícula inverte de sinal ao colidir, e a componente tangencial preserva o sinal. Desta forma, imediatamente após a colisão, a velocidade da partícula é dada por

$$\begin{aligned}\vec{V}_{n+1} &= [V_n \sin(\alpha_n + \theta_n - \theta_{n+1}) - 2\varepsilon \sin \delta_{n+1}] \hat{r} \\ &\quad + V_n \cos(\alpha_n + \theta_n - \theta_{n+1}) \hat{\theta}.\end{aligned}\quad (6.11)$$

Utilizando (6.10) a expressão acima se torna

$$\vec{V}_{n+1} = (-V_r^{(n)} - 2\varepsilon \sin \delta_{n+1}) \hat{r} + V_\theta^{(n)} \hat{\theta}.\quad (6.12)$$

A componente tangencial da velocidade é igual antes e depois da colisão. Além disso, para evitar que a partícula abandone a região delimitada pela fronteira do círculo, escrevemos a expressão acima como

$$\vec{V}_{n+1} = -| -V_r^{(n)} - 2\varepsilon \sin \delta_{n+1} | \hat{r} + V_\theta \hat{\theta}.\quad (6.13)$$

De (6.5) temos que a distância percorrida pela partícula entre uma colisão e outra é dada por

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= \sqrt{(y_{n+1} - y_n)^2 + (x_{n+1} - x_n)^2} \\ &= \sqrt{2[1 - \cos(\theta_{n+1} - \theta_n)]}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Assim, o intervalo de tempo entre as colisões  $n$  e  $(n + 1)$  é dado por

$$\Delta\delta_{n+1} = \frac{R_{n+1}}{V_n}. \quad (6.15)$$

Das expressões (6.13) e (6.15) temos, portanto, que o bilhar circular pulsante é descrito pelo mapa

$$\begin{aligned} \vec{V}_{n+1} &= -| -V_r^{(n)} - 2\varepsilon \sin \delta_{n+1} | \hat{r} + V_\theta \hat{\theta}, \\ \delta_{n+1} &= \delta_n + \Delta\delta_{n+1} \text{ mod } 2\pi, \end{aligned} \quad (6.16)$$

lembrando que  $V_r^{(n)}$  é a componente radial da velocidade imediatamente antes da colisão  $(n + 1)$ , dada por (6.10). Das componentes  $\hat{r}$  e  $\hat{\theta}$  da velocidade obtemos o valor de  $\alpha_n$  da expressão

$$\tan \alpha_n = -\frac{V_{r,n}}{V_\theta}. \quad (6.17)$$

Para  $\varepsilon = 0$  as quantidades  $(\theta_{n+1} - \theta_n)$  e  $V_{r,n}$  são constantes e o bilhar circular é integrável. Para  $\varepsilon \neq 0$  o sistema se torna não-integrável. Apresentaremos a descrição de escala desta transição de integrável para não-integrável na seção 6.5. Antes disso, vamos apresentar algumas propriedades do espaço de fase do bilhar circular.

## 6.3 Propriedades do espaço de fase

Para valores de  $V_\theta$  suficientemente pequenos, o espaço de fase do bilhar circular é similar ao do modelo de Fermi-Ulam. A figura 6.2(a) mostra a região de movimento caótico de energia mais baixa do bilhar circular para  $V_\theta = 10^{-3}$  e  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Esta figura foi gerada a partir de apenas uma condição inicial que foi iterada  $10^7$  vezes. A região de energia baixa é caracterizada por ilhas de movimento regular envolvidas por um mar de caos. A região de

caos é limitada na parte superior por uma curva invariante. Acima da primeira invariante existem outras regiões de caos, outras regiões de movimento regular e outras curvas invariantes. Restringimo-nos, contudo, à análise das propriedades da região de caos abaixo da primeira curva invariante do bilhar circular.

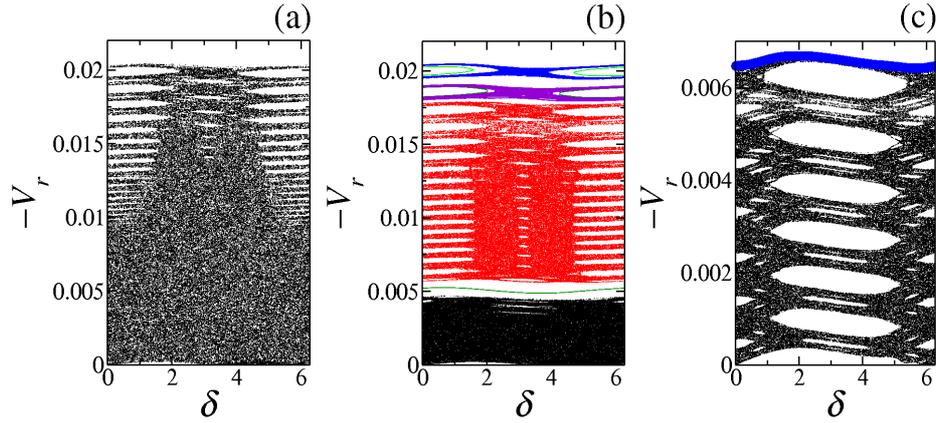


Figura 6.2: As figuras mostram a estrutura do espaço de fase do bilhar circular para  $\varepsilon = 10^{-4}$  e valores diferentes de  $V_\theta$ . Em (a) temos  $V_\theta = 10^{-3}$ , em (b) temos  $V_\theta = 5 \times 10^{-3}$  e (c) temos  $V_\theta = 1.7 \times 10^{-2}$ .

A figura 6.2(b) mostra o espaço de fase do bilhar circular para  $\varepsilon = 10^{-4}$  e  $V_\theta = 5 \times 10^{-3}$ . Cada região de movimento caótico que apresentamos na figura 6.2(b) foi gerada com uma condição inicial que foi iterada  $10^7$  vezes. Como consequência do aumento de  $V_\theta$ , curvas invariantes surgem para valores menores de  $-V_r$ . Este resultado mostra que o tamanho da primeira região caótica depende do valor de  $V_\theta$ . A figura 6.2(c) mostra a estrutura do mar de caos e a primeira curva invariante para  $\varepsilon = 10^{-4}$  e  $V_\theta = 1.7 \times 10^{-2}$ . O mar de caos desta figura também foi obtido a partir de uma condição inicial que foi iterada  $10^7$  vezes.

Para obter uma estimativa do tamanho da primeira região de caos como função de  $V_\theta$  iteramos o mapa (6.16)  $10^6$  vezes utilizando uma condição inicial na região caótica com componente radial da velocidade  $V_{r,0} = 10^{-6}$ . Assim, para um dado valor de  $\varepsilon$  variamos  $V_\theta$  e obtemos o valor absoluto máximo da componente radial da velocidade da partícula,  $V_{r, \max}$ , ao longo da órbita. Temos, assim, uma estimativa do valor máximo de  $V_r$  para a primeira região de caos. A figura 6.3(a) mostra o procedimento para dois valores de  $\varepsilon$ .

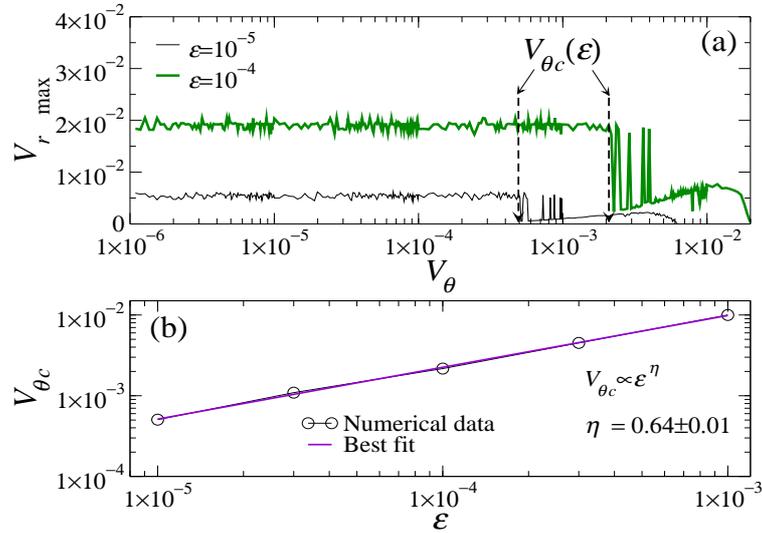


Figura 6.3: Em (a) temos o valor absoluto máximo de  $V_r$  para uma órbita caótica pertencente ao mar de caos para dois valores de  $\varepsilon$ . Em (b) temos a dependência de  $V_{r \max}$  no parâmetro  $\varepsilon$ .

Para valores pequenos de  $V_\theta$  observamos que  $V_{r \max}$  é basicamente constante. Para cada valor de  $\varepsilon$  existe um valor  $V_{\theta c}$  tal que para  $V_\theta < V_{\theta c}$  a quantidade  $V_{r \max}$  não depende de  $V_\theta$ . Para  $V_\theta \approx V_{\theta c}$  as regiões de caos (veja a figura 6.2(b)) são muito próximas. Neste caso os erros numéricos eventualmente fundem as regiões de caos resultando no comportamento irregular de  $V_{r \max}$  observado na figura 6.3(a) para  $V_\theta \gtrsim V_{\theta c}$ . Aumentando ainda mais o valor de  $V_\theta$  observamos que  $V_{r \max}$  apresenta valores menores que aquele observado para  $V_\theta < V_{\theta c}$ , indicando que a primeira região de movimento caótico foi reduzida.

Realizando o procedimento descrito acima obtemos  $V_{\theta c}$  para diferentes valores de  $\varepsilon$ . A figura 6.3(b) mostra o resultado em um gráfico de  $V_{\theta c}$  versus  $\varepsilon$ . O melhor ajuste dos dados fornece que  $V_{\theta c} \propto \varepsilon^\eta$ , com  $\eta = 0.64 \pm 0.01$ .

O valor de  $V_\theta$ , contudo, não pode ser arbitrariamente grande. Para valores muito grandes de  $V_\theta$  tem-se que  $V_{r \max} \ll V_\theta$ . Neste caso o processo iterativo dado pelo mapa (6.16) não é eficiente pois várias colisões são necessárias para fornecer um deslocamento pequeno na variável  $\theta$ . Assim, para  $V_\theta \gg V_{\theta c}$  não conseguimos obter a descrição numérica do bilhar circular.

## 6.4 Expansão em série de Taylor para a primeira curva invariante

Nesta seção faremos expansão em série de Taylor da variável  $\Delta\delta_{n+1}$ , equação (6.15), para valores de  $V_{r,n}$  próximos da primeira curva invariante. O cálculo é feito de forma similar aos que foram feitos para o modelo de Fermi-Ulam na seção 3.2.3 e nas referências [37, 3]. Para o bilhar circular, contudo, devemos considerar a dependência da primeira invariante em ambos os parâmetros  $\varepsilon$  e  $V_\theta$ . Os resultados que apresentamos nesta seção serão úteis adiante, quando estudarmos as propriedades de escala do bilhar.

Definimos  $V_r^*$  como o valor médio característico da componente radial da velocidade na primeira curva invariante. Assim, expandindo  $\Delta\delta_{n+1}$  em série de Taylor para  $V_{r,n} \approx V_r^*$  temos, até primeira ordem,

$$\Delta\delta_{n+1}(V_{r,n} \approx V_r^*) = \frac{R_{n+1}}{V_n} \Big|_{V_{r,n}=V_r^*} + \frac{\partial\Delta\delta_{n+1}}{\partial V_{r,n}} \Big|_{V_{r,n}=V_r^*} (V_{r,n} - V_r^*), \quad (6.18)$$

em que

$$\frac{\partial\Delta\delta_{n+1}}{\partial V_{r,n}} = V_n^{-1} \frac{\partial R_{n+1}}{\partial V_{r,n}} + R_{n+1} \frac{\partial V_n^{-1}}{\partial V_{r,n}}. \quad (6.19)$$

Da equação (6.14) obtemos a primeira derivada do lado direito da equação acima, ou seja,

$$\frac{\partial R_{n+1}}{\partial V_{r,n}} = \frac{\sin(\theta_{n+1} - \theta_n)}{R_{n+1}} \frac{\partial\theta_{n+1}}{\partial V_{r,n}}. \quad (6.20)$$

Para obter  $\partial\theta_{n+1}/\partial V_{r,n}$  empregamos a equação (6.8) e calculamos  $\partial f/\partial V_{r,n} = 0$ . Desta forma temos

$$\frac{\partial\theta_{n+1}}{\partial V_{r,n}} = - [\sin\alpha_n \csc(\alpha_n + \theta_n - \theta_{n+1}) - 1] \frac{\partial\alpha_n}{\partial V_{r,n}}. \quad (6.21)$$

Da equação (6.17) obtemos  $\partial\alpha_n/\partial V_{r,n}$

$$\frac{\partial\alpha_n}{\partial V_{r,n}} = -\frac{V_\theta}{V_n^2}. \quad (6.22)$$

Assim, definindo

$$\Theta_{n+1} = \frac{\sin(\theta_{n+1} - \theta_n)}{R_{n+1}} [\sin \alpha_n \csc(\alpha_n + \theta_n - \theta_{n+1}) - 1], \quad (6.23)$$

utilizamos as equações (6.21) e (6.22) para reescrevermos (6.20) como

$$\frac{\partial R_{n+1}}{\partial V_{r,n}} = \Theta_{n+1} \frac{V_\theta}{V_n^2}. \quad (6.24)$$

A segunda derivada da equação (6.19) é obtida de forma mais direta, fornecendo

$$\frac{\partial V_n^{-1}}{\partial V_{r,n}} = -\frac{V_{r,n}}{V_n^3}. \quad (6.25)$$

Utilizando as equações (6.24) e (6.25) na equação (6.19) obtemos

$$\Delta \delta_{n+1}(V_{r,n} \approx V_r^*) = \frac{R_{n+1}^*}{V^*} + \frac{\Delta V_{r,n}}{V^{*3}} (\Theta_{n+1}^* V_\theta - R_{n+1}^* V_r^*), \quad (6.26)$$

em que  $V^* = \sqrt{V_r^{*2} + V_\theta^2}$ ,  $R_{n+1}^* = R_{n+1}(V_{r,n} = V_r^*)$  e  $\Delta V_{r,n} = V_{r,n} - V_r^*$ .

Para órbitas na primeira curva invariante, observamos numericamente das equações (6.14) e (6.23) que  $R_n$  e  $\Theta_n$  são essencialmente constantes. Na primeira invariante definimos, portanto,  $R^* = R_n^*$  e  $\Theta^* = \Theta_n^*$ .

Devido à simetria do bilhar circular, temos que os valores da componente radial da velocidade da partícula imediatamente após a colisão  $n$ ,  $V_{r,n}$ , e imediatamente antes da colisão  $(n+1)$ ,  $V_r^{(n)}$ , estão relacionados por  $V_r^{(n)} = -V_{r,n}$ . Além disso a componente radial da velocidade  $V_{r,n}$  é naturalmente negativa para a primeira invariante. Portanto, reescrevemos a componente radial da velocidade, dada pelo mapa (6.16), como

$$V_{r,n+1} = V_{r,n} - 2\varepsilon \sin \delta_{n+1} \quad (6.27)$$

Como  $V_{r,n} = V_r^* + \Delta V_{r,n}$  a expressão acima é reescrita como

$$\Delta V_{r,n+1} = \Delta V_{r,n} - 2\varepsilon \sin \delta_{n+1}. \quad (6.28)$$

Multiplicando ambos os lados da expressão acima por  $(\Theta^* V_\theta - R^* V_r^*)/V^{*3}$

e então somando  $R^*/V^*$  temos

$$\begin{aligned} \frac{R^*}{V^*} + \frac{\Delta V_{r,n+1}}{V^{*3}}(\Theta^*V_\theta - R^*V_r^*) &= \frac{R^*}{V^*} + \frac{\Delta V_{r,n}}{V^{*3}}(\Theta^*V_\theta - R^*V_r^*) \\ &\quad - \frac{2\varepsilon}{V^{*3}}(\Theta^*V_\theta - R^*V_r^*) \sin \delta_{n+1}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Comparando as equações (6.26) e (6.29) definimos  $I_n = \Delta\delta_{n+1}$  e reescrevemos a expressão acima como

$$I_{n+1} = I_n - K_c \sin \delta_{n+1}, \quad (6.30)$$

em que

$$\begin{aligned} K_c &= K_r + K_\theta, \text{ com} \\ K_r &= -\frac{2\varepsilon}{V^{*3}}R^*V_r^* \text{ e } K_\theta = \frac{2\varepsilon}{V^{*3}}\Theta^*V_\theta. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Os valores de  $R^*$  e  $\Theta^*$  e também os valores de  $K_r$ ,  $K_\theta$  e  $K_c$  foram calculados numericamente considerando ambos os casos  $V_\theta < V_{\theta c}$  e  $V_\theta > V_{\theta c}$ .

A figura 6.4 mostra como  $K_r$ ,  $K_\theta$ ,  $K_c$ ,  $R^*$  e  $\Theta^*$  dependem de  $\varepsilon$ . Nesta figura empregamos  $V_\theta = 10^{-4}$ . No intervalo de  $\varepsilon$  utilizado temos que  $R^* \approx 2$  e que  $\Theta^* \ll R^*$ . Conseqüentemente  $K_\theta \ll K_r$ . Além disso,  $K_c$  é essencialmente constante, com valor médio  $K_c = 0.934 \pm 0.008$ .

A figura 6.5 mostra a análise para  $V_\theta > V_{\theta c}$ . Nesta figura empregamos  $\varepsilon = 10^{-5}$ . Aumentando  $V_\theta$  observamos que  $R^*$  diminui enquanto  $\Theta^*$  cresce em valor absoluto. Conseqüentemente  $K_r$  diminui e aproxima-se de zero enquanto  $K_\theta$  cresce. Para  $V_\theta$  suficientemente grande temos que  $|K_\theta| \gg K_r$ . A quantidade  $K_c$ , contudo, é basicamente constante com valor médio  $K_c = -0.92 \pm 0.02$ .

Para  $V_\theta < V_{\theta c}$  temos que  $K_c > 0$ . Para  $V_\theta > V_{\theta c}$  temos que  $K_c < 0$ . Portanto, próximo à primeira curva invariante, descrevemos o bilhar circular pulsante como

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n \pm K_c \sin \phi_n, \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + I_{n+1}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

O sinal positivo que acompanha o parâmetro  $K$  corresponde ao caso  $V_\theta < V_{\theta c}$

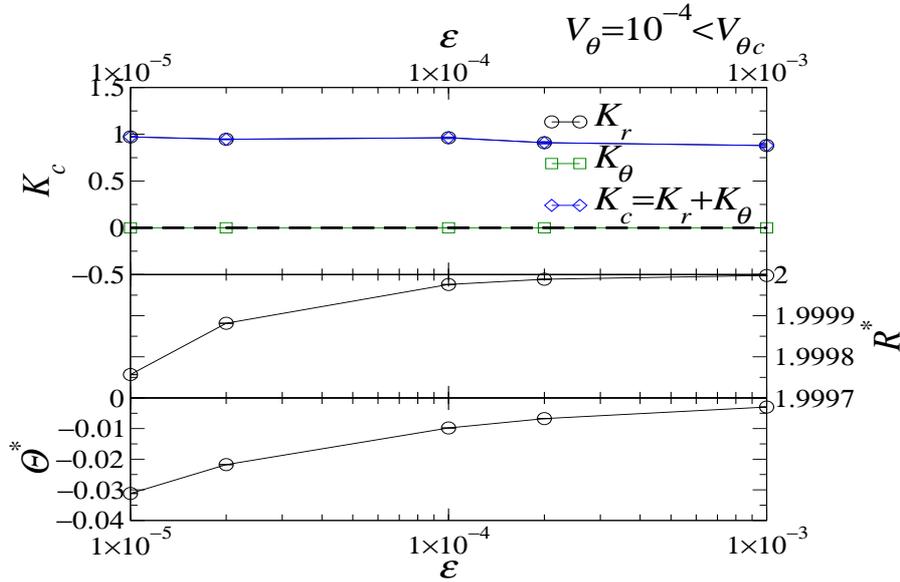


Figura 6.4: A figura ilustra, em escalas linear-log, gráficos de  $K_c$ ,  $R^*$  e  $\Theta^*$  como funções de  $\varepsilon$ . Os dados correspondem a valores numéricos obtidos na primeira curva invariante. Utilizamos  $V_\theta = 10^{-4}$ , valor menor que  $V_{\theta c}$ .

e o negativo ao  $V_\theta > V_{\theta c}$ . Além disso

$$\phi_n = \begin{cases} \delta_{n+1} - \pi & , \text{ para } V_\theta < V_{\theta c} \\ \delta_{n+1} & , \text{ para } V_\theta > V_{\theta c} \end{cases} . \quad (6.33)$$

Este resultado mostra que o bilhar circular pulsante é localmente equivalente ao mapa padrão de Chirikov [13], apresentado no capítulo 4. As figuras 6.2(a) e (c) ilustram o espaço de fase do bilhar circular para  $V_\theta < V_{\theta c}$  e  $V_\theta > V_{\theta c}$ , respectivamente. É importante lembrar que o valor de  $V_\theta$  não pode ser arbitrariamente grande. Para valores grandes de  $V_\theta$  temos que  $V_{r \max} \ll V_\theta$  e, assim, ocorre um número muito grande de colisões em um intervalo pequeno de tempo. Nesta situação é necessário um número muito grande de iterações do mapa (6.16) para que o deslocamento da partícula na variável  $\theta$  seja pequeno e não podemos obter uma descrição numérica do sistema.

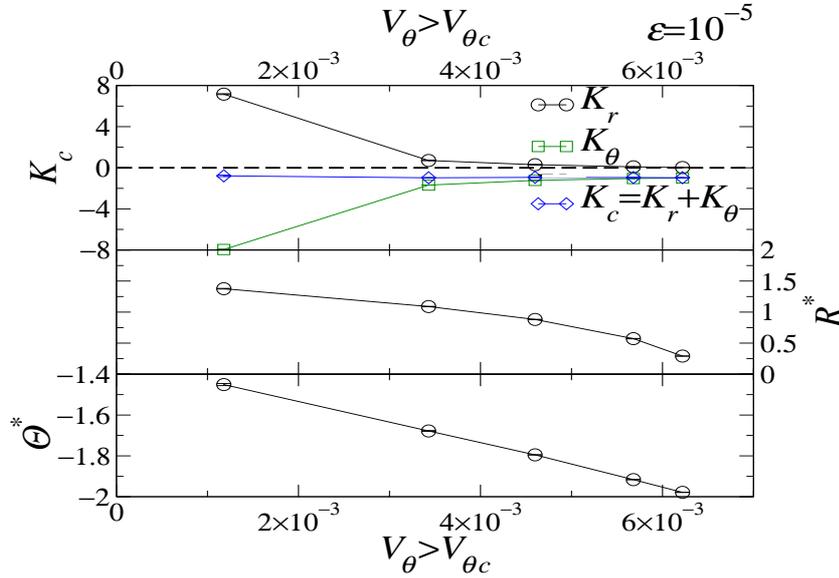


Figura 6.5: A figura ilustra, em escalas lineares, gráficos de  $K_c$ ,  $R^*$  e  $\Theta^*$  como funções de  $V_\theta$  para  $V_\theta > V_{\theta c}$  e  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

## 6.5 Análise de escala

Considerando primeiramente o valor da componente radial da velocidade de uma órbita calculamos a quantidade média  $\overline{V_{ir}^2}(n)$ , como definida pela equação (2.47). Assim, determinamos o valor médio  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$  para um conjunto de  $M$  amostras, como definido pela equação (2.48). As  $M$  amostras são caracterizadas por valores diferentes de  $\delta_0$ . Além disso empregamos valores aleatórios de  $\theta_0$  mas, devido à simetria do bilhar circular, os diferentes valores de  $\theta_0$  são equivalentes.

A figura 6.6(a) mostra curvas de  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$  para  $\varepsilon = 10^{-3}$  e valores diferentes de  $V_\theta$ . Note que em todos os casos  $V_\theta < 10^{-2}$ , pois para  $\varepsilon = 10^{-3}$  tem-se que  $V_{\theta c} \approx 10^{-2}$  (figura 6.3(a)). O fato das três curvas de  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$  da figura 6.6(a) serem essencialmente as mesmas confirma que a posição da primeira curva invariante é a mesma para os três valores de  $V_\theta$ , como discutido na seção 6.3. As análises que apresentaremos a seguir são feitas com  $V_\theta = 10^{-4}$ , garantido assim  $V_\theta < V_{\theta c}$  para os valores de  $\varepsilon$  utilizados. Além disso, como o sinal de  $V_\theta$  não é importante, utilizamos apenas valores positivos deste parâmetro. O caso  $V_\theta > V_{\theta c}$  é discutido no final desta seção.

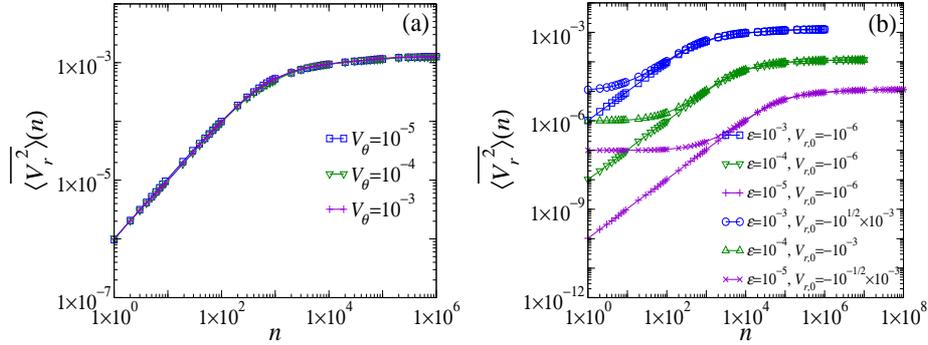


Figura 6.6: Em (a) temos  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$  como função de  $n$  para valores diferentes de  $V_\theta$ , em que  $V_\theta < V_{\theta c}$ . A figura (b) ilustra curvas de  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$  para valores diferentes de  $\varepsilon$  e  $V_{r,0}$ , com  $V_\theta = 10^{-4}$ .

Na figura 6.6(b) temos as curvas de  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$  para valores diferentes de  $\varepsilon$ . Nesta figura incluímos ambas as situações  $V_{r,0} < \varepsilon$  e  $V_{r,0} > \varepsilon$ . As curvas com  $V_{r,0} < \varepsilon$  apresentam um regime inicial de crescimento. Assintoticamente a quantidade média  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$  converge para um valor de saturação. A mudança do regime de crescimento para o regime de saturação define  $n = n_x$ .

Para os casos em que  $V_{r,0} > \varepsilon$  as curvas de  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$  apresentam um regime inicial constante. Depois  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$  cresce e acompanha as curvas com mesmo  $\varepsilon$  no limite de  $n$  suficientemente grande. O valor da variável  $n$  que marca a mudança do regime inicial de  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$  constante para o regime de crescimento é  $n'_x$ . A mudança do regime de crescimento para o regime de saturação define  $n''_x$ .

Observamos na figura 6.6(b) que  $n''_x \approx n_x$ . Além disso temos que o valor assintótico de  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$  não depende de  $V_{r,0}$ .

Para  $V_{r,0} < \varepsilon$  e valores pequenos de  $n$  descrevemos  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$  como

$$\langle \overline{V_r^2} \rangle(n, \varepsilon, V_{r,0}) \propto n^\alpha \varepsilon^\gamma, \quad (6.34)$$

em que  $\alpha$  é o expoente de crescimento e  $\gamma$  é o expoente que relaciona  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$  com o parâmetro  $\varepsilon$  no regime de crescimento inicial. O valor de  $\alpha$  é obtido diretamente por meio de ajustes para  $n \ll n_x$ . O valor médio obtido para oito valores de  $\varepsilon$  entre  $10^{-5}$  e  $2 \times 10^{-3}$  é  $\alpha = 0.995 \pm 0.008$ . Para  $n \ll n_x$  o gráfico de  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)/n^\alpha$  como função de  $\varepsilon$  fornece  $\gamma = 2.01 \pm 0.01$ , como

ilustrado na figura 6.7(a).

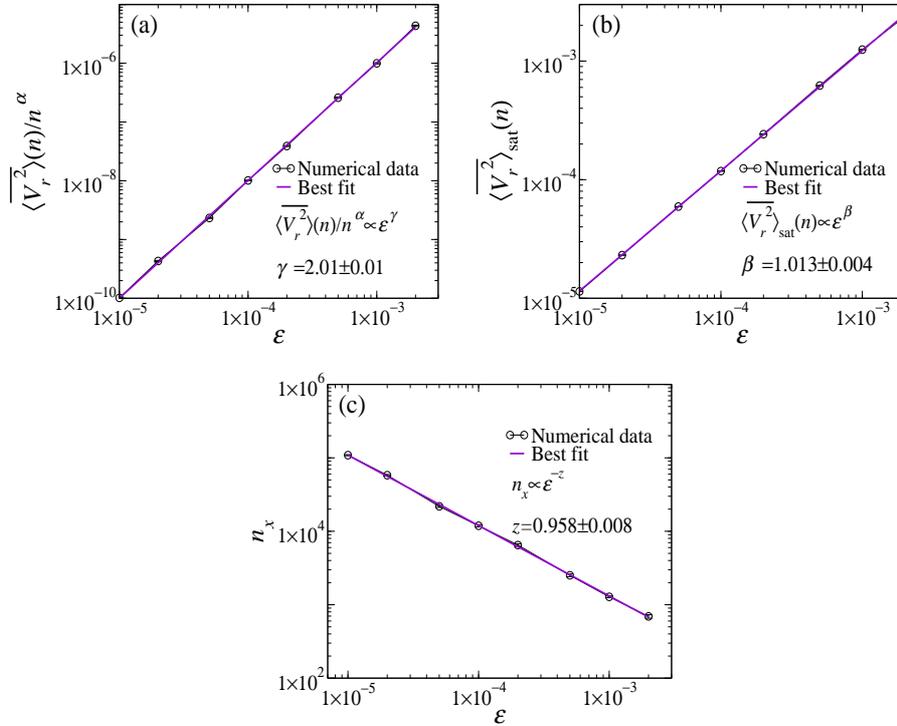


Figura 6.7: As figuras ilustram, em escalas log-log, ajustes dos dados numéricos via método dos mínimos quadrados. Em (a) temos  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)/n^\alpha$  versus  $\epsilon$ . Em (b) temos a dependência do valor de saturação no parâmetro  $\epsilon$ . Em (c) temos o crossover,  $n_x$ , como função de  $\epsilon$ .

Como a saturação das curvas de  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$  depende apenas de  $\epsilon$  escrevemos

$$\langle \overline{V_r^2} \rangle_{\text{sat}}(n) \propto \epsilon^\beta, \quad (6.35)$$

em que  $\beta$  é o expoente da saturação. O valor de saturação  $\langle \overline{V_r^2} \rangle_{\text{sat}}(n)$  foi obtido pela extrapolação das curvas de  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$  para  $n$  grande. O melhor ajuste dos dados de um gráfico  $\langle \overline{V_r^2} \rangle_{\text{sat}}(n)$  versus  $\epsilon$  fornece  $\beta = 1.013 \pm 0.004 \approx 1$ , como ilustra a figura 6.7(b).

O número de iterações de *crossover*,  $n_x$ , comporta-se como

$$n_x \propto \epsilon^{-z}, \quad (6.36)$$

em que  $z$  é o expoente dinâmico. A figura 6.7(c) mostra o melhor ajuste dos dados de  $n_x$  versus  $\varepsilon$ . O procedimento fornece  $z = 0.958 \pm 0.008$ .

Com as equações (6.34)-(6.36) e conhecendo os expoentes críticos  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $z$  estamos prontos para iniciar a descrição de escala de  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$ . Escrevendo  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$  como uma função de  $n, \varepsilon$  e  $V_{r,0}$  temos a relação

$$\langle \overline{V_r^2} \rangle(n, \varepsilon, V_{r,0}) = l \langle \overline{V_r^2} \rangle(l^a n, l^b \varepsilon, l^c V_{r,0}). \quad (6.37)$$

em que  $l$  é um fator de escala e  $a, b$  e  $c$  são os expoentes de escala. Escolhendo  $l = n^{-1/a}$  temos

$$\langle \overline{V_r^2} \rangle(n, \varepsilon, V_{r,0}) = n^{-1/a} \langle \overline{V_r^2} \rangle(1, n^{-b/a} \varepsilon, n^{-c/a} V_{r,0}). \quad (6.38)$$

Da expressão acima temos

$$\langle \overline{V_r^2} \rangle(n, \varepsilon, V_{r,0}) \propto n^{-(1+xb)/a} \varepsilon^x f(n^{-c/a} V_{r,0}). \quad (6.39)$$

Para o caso  $V_{r,0} < \varepsilon$  a função  $f(n^{-c/a} V_{r,0})$  é uma constante. Comparando a expressão acima com a equação (6.34) temos, para  $n \ll n_x$ , que  $x = \gamma$  e  $-(1+xb)/a = \alpha$ .

Escolhendo  $l = \varepsilon^{-1/b}$  temos, da equação (6.37),

$$\begin{aligned} \langle \overline{V_r^2} \rangle(n, \varepsilon, V_{r,0}) &= \varepsilon^{-1/b} \langle \overline{V_r^2} \rangle(\varepsilon^{-a/b} n, 1, \varepsilon^{-c/b} V_{r,0}) \\ &\propto \varepsilon^{-1/b} g(\varepsilon^{-a/b} n, \varepsilon^{-c/b} V_{r,0}). \end{aligned} \quad (6.40)$$

No regime assintótico as curvas de  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$  não dependem de  $n$  nem de  $V_{r,0}$ . Neste caso, a função  $g$  é uma constante. Comparando as equações (6.35) e (6.40) temos para  $n \gg n_x$  que  $-1/b = \beta$ .

Da equação (6.40) temos que  $n_x$  é dado por

$$n_x \propto \varepsilon^{a/b}. \quad (6.41)$$

Comparando esta expressão com (6.36) encontramos  $z = -a/b$ .

A figura 6.4(b) mostra para  $V_\theta < V_{\theta c}$  que  $R^* \approx 2$  e que  $K_r$  é basicamente constante. Além disso  $K_\theta$  é desprezível. Assumindo  $V_{r \max} \approx V_r^*$ , figura 6.3,

temos que  $|V_r^*| \gg V_\theta$ . Assim, utilizando a equação (6.31) temos

$$\frac{4\varepsilon}{V_r^{*2}} = \frac{4\varepsilon'}{V_r'^{*2}} = \frac{4l^b\varepsilon}{l^{2c}V_r^{*2}}. \quad (6.42)$$

Portanto, obtemos  $b - 2c = 0$ , ou seja,  $c = b/2$ . Assim, para  $V_\theta < V_{\theta c}$ , temos

$$\begin{aligned} a &= \frac{z}{\gamma - \alpha z} = 0.91 \pm 0.03 \approx 1, \\ b &= -\frac{1}{\beta} = -0.987 \pm 0.004 \approx -1, \\ c &= \frac{b}{2} = -0.494 \pm 0.002 \approx -1/2. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Da figura 6.6(b) temos, no limite  $n \ll n'_x$  e para  $V_{r,0} > \varepsilon$ , que

$$\langle \overline{V_r^2} \rangle(n) \approx V_{r,0}^2. \quad (6.44)$$

Utilizando a relação de escala dada pela equação (6.40) temos

$$\langle \overline{V_r^2} \rangle(n, \varepsilon, V_{r,0}) \propto \varepsilon^{-(1+cy)/b} V_{r,0}^y h(\varepsilon^{-a/b} n). \quad (6.45)$$

Para  $V_{r,0} > \varepsilon$  e  $n \ll n'_x$  as curvas de  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$  não dependem de  $n$  nem de  $\varepsilon$ . Neste caso a função  $h$  na expressão acima é uma constante. Comparando (6.44) e (6.45) temos  $-(1+cy)/b = 0$  e  $y = 2$ , ou seja,  $c = -1/2$ . Este resultado concorda bem com o valor fornecido pela relação  $c = b/2$  (equação (6.43)).

Como  $z = -a/b$  temos, alternativamente, que  $a = z/\beta$ . Comparando com a expressão de  $a$  em (6.43) temos que  $\beta = \gamma - \alpha z$ . Assim o expoente  $b$  possui uma relação extra dada por  $b = 1/(\alpha z - \gamma)$ . Resumindo temos

$$\begin{aligned} a &= \frac{z}{\beta} = 0.95 \pm 0.01, \\ b &= \frac{1}{\alpha z - \gamma} = -1.06 \pm 0.03, \\ c &= -\frac{1}{2}, \\ \beta &= \gamma - \alpha z = 1.06 \pm 0.03. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Os valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$  em (6.43) e (6.46) foram obtidos de formas diferentes e concordam relativamente bem. Além disso, os valores de  $\beta$  fornecidos pelo ajuste dos dados de  $\langle \overline{V_r^2} \rangle_{sat}(n)$  versus  $\varepsilon$ , figura 6.7(b), e pela relação  $\beta = \gamma - \alpha z$ , expressão (6.46), concordam bem.

A figura 6.8(a) mostra o colapso das curvas de  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$  da figura 6.6(b) em uma curva universal, em que  $l = \varepsilon^{-1/b}$ .

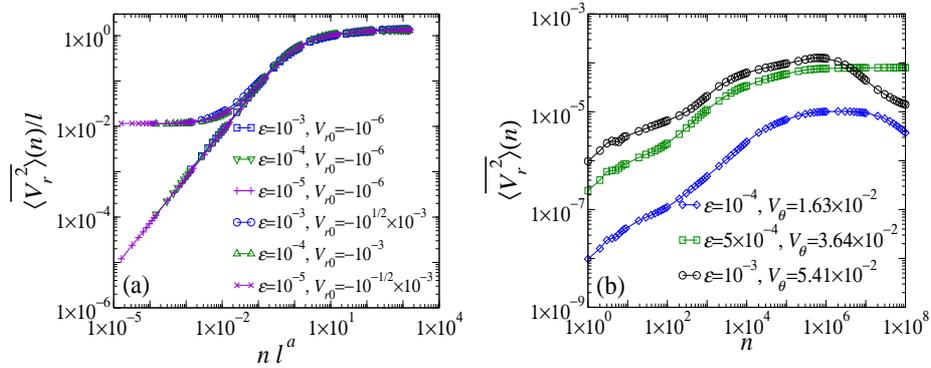


Figura 6.8: Em (a) temos o colapso das curvas de  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$  em uma curva universal para  $V_\theta < V_{\theta c}$ . Em (b) temos uma ilustração do comportamento irregular das curvas de  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$  para  $V_\theta > V_{\theta c}$ .

Para o modelo unidimensional de Fermi-Ulam os valores dos expoentes são  $a = 0.99 \pm 0.03$ ,  $b = -0.977 \pm 0.006$  e  $c = -0.489 \pm 0.003$  [38, 39]. Considerando as incertezas observa-se que, para  $V_\theta < V_{\theta c}$ , o bilhar circular pulsante e o modelo de Fermi-Ulam são descritos pelo mesmo conjunto de expoentes. Isto já era esperado pois quando a componente  $\hat{\theta}$  da velocidade é pequena então o movimento da partícula é essencialmente em direções ao longo do diâmetro do círculo, passando próximo do centro. Assim, o movimento se aproxima daquele que ocorre no modelo de Fermi-Ulam [37].

Obtemos também curvas de  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$  para  $V_\theta > V_{\theta c}$ . A figura 6.8(b) mostra as curvas de  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$  para valores diferentes de  $\varepsilon$  e  $V_\theta$ , em que  $V_\theta > V_{\theta c}$ . Observa-se que  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$  apresenta um regime inicial de crescimento. No regime de valores grandes de  $n$ , no entanto,  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$  apresenta comportamento irregular, como observemos na figura 6.8(b). Desta forma o expoente da saturação e o expoente dinâmico não podem ser obtidos. A origem deste comportamento irregular se deve a órbitas que ficam limitadas por várias colisões em uma região do espaço de fase.

## 6.6 Conclusões

Estudamos as propriedades de escala do bilhar circular pulsante. Existe um valor  $V_{\theta_c}$  tal que para  $V_\theta < V_{\theta_c}$  o tamanho da primeira região de movimento caótico não depende de  $V_\theta$ . Para  $V_\theta > V_{\theta_c}$  curvas invariantes surgem para valores menores de  $-V_r$  gerando regiões de movimento caótico de tamanho menor. Para  $V_\theta \gtrsim V_{\theta_c}$  estas regiões de movimento caótico são muito próximas e mesmo erros numéricos eventualmente as fundem.

Expandimos  $\Delta\delta_{n+1}$  em série de Taylor para valores de  $V_r$  próximos da primeira curva invariante. Assim, por meio de transformações apropriadas de variáveis mostramos, para  $V_\theta < V_{\theta_c}$  e  $V_\theta > V_{\theta_c}$ , que o bilhar circular é localmente equivalente ao mapa padrão de Chirikov [13].

Para  $V_\theta < V_{\theta_c}$  mostramos que o bilhar circular é descrito pelo mesmo conjunto de expoentes do modelo de Fermi-Ulam. Para  $V_\theta > V_{\theta_c}$  a irregularidade das curvas de  $\langle \overline{V_r^2} \rangle(n)$  impede que a descrição de escala do bilhar circular seja obtida. A origem deste comportamento irregular está associada a órbitas que permanecem presas em uma região do espaço de fase por várias colisões. Uma outra dificuldade ocorre ao estudar o bilhar circular utilizando valores grandes de  $V_\theta$ . Neste caso o mapa não é eficiente pois um número grande de colisões é necessário para que a partícula descreva um deslocamento pequeno na variável  $\theta$ .

# Propriedades dinâmicas do modelo híbrido Fermi-Ulam-bouncer sob influência de dissipação

---

## 7.1 Introdução

Uma versão híbrida envolvendo os modelos de Fermi-Ulam e *bouncer* foi estudada por Leonel et. al. [15]. O modelo consiste, basicamente, na introdução de um campo gravitacional no modelo de Fermi-Ulam. Assim o modelo híbrido apresenta propriedades de ambos os sistemas. Para valores pequenos do campo gravitacional o sistema se comporta como o modelo de Fermi-Ulam. Para campo intenso o sistema apresenta curvas invariantes no regime de baixas energias e os autores estabeleceram os valores de parâmetro em que são observadas estas curvas.

Neste capítulo descrevemos as propriedades deste modelo híbrido ao introduzir colisões inelásticas entre a partícula e as paredes [16]. Normalmente as versões que consideram colisões elásticas são caracterizadas por espaços de fase com estruturas mistas, onde são observadas curvas invariantes e ilhas KAM envolvidas por regiões de movimento caótico. Contudo, as versões dissipativas apresentam estruturas diferentes, como pontos fixos atratores, ciclos limite e atratores caóticos.

Estudamos a versão completa do modelo híbrido pois, dependendo da

intensidade da dissipação, a partícula pode estar sujeita a sofrer um número significativamente maior de colisões diretas que indiretas. Portanto nenhuma simplificação ou modificação foi introduzida.

Mostraremos que, ao variar a intensidade da dissipação, o modelo híbrido apresenta eventos de crise. Crises são eventos que ocorrem ao variar os valores dos parâmetros de controle do sistema resultando na intersecção uma variedade instável e outra estável de um ponto de sela. Estes eventos resultam em súbita destruição do atrator caótico.

No limite de dissipação intensa demonstramos que, ao variar os valores dos parâmetros, o sistema apresenta cascatas de duplicação de período nas variáveis velocidade e fase. Mostramos também que, para determinados valores de parâmetros e condições iniciais, o sistema se comporta como o modelo *bouncer*.

## 7.2 O modelo

O modelo híbrido Fermi-Ulam-*bouncer* dissipativo consiste de uma partícula clássica confinada entre duas plataformas, ou paredes, horizontais, com as quais colide inelasticamente. Uma das paredes é fixa na posição  $y = l$  enquanto a outra apresenta movimento oscilatório de acordo com a equação  $y = \varepsilon \cos(\omega t' + \phi_0)$ , em que  $\varepsilon$ ,  $\omega$  e  $\phi_0$  são, respectivamente, a amplitude, a frequência de oscilação e a fase inicial da parede. Existe também um campo gravitacional de tal forma que a partícula é submetida a uma aceleração constante vertical  $\vec{g}' = -g' \hat{j}$ .

Assim como no capítulo 5, as colisões inelásticas entre a partícula e as paredes são introduzidas por meio de coeficientes de restituição. Desta forma, a parede inferior é caracterizada por um coeficiente de restituição  $\mu$  enquanto o coeficiente de restituição da parede superior é  $\nu$ . Para  $\mu = \nu = 1$  as colisões são elásticas e os resultados obtidos na referência [15] são recuperados. O limite de colisões perfeitamente inelásticas corresponde aos casos em que  $\mu = 0$  e/ou  $\nu = 0$ , cada um com conseqüências diferentes. O caso em que  $\nu = 0$  significa que, após colidir com a parede superior, a partícula perde toda sua energia cinética e, sob influência da gravidade, retorna para a parede móvel. Para  $\mu = 0$  o movimento da partícula pode, dependendo dos valores dos parâmetros de controle, mover-se juntamente com a parede móvel ou ser

relançada com velocidade igual à velocidade máxima da parede.

A construção do mapa do modelo híbrido deve considerar os três casos possíveis: (i) a partícula sofre sucessivos impactos com a parede móvel antes de abandonar a zona de colisão, a qual é definida como a região no intervalo  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ , onde ocorre o movimento da parede oscilante, (ii) a partícula abandona a zona de colisão, porém sua energia cinética não é suficiente para alcançar a parede superior e, sob influência da gravidade, retorna para a parede móvel e (iii) a partícula abandona a zona de colisão com energia cinética suficiente, colide com a parede superior e retorna para a parede móvel devido à contribuição da ação da gravidade e da reflexão com a parede fixa.

O procedimento para obtenção do mapa é semelhante aos que foram apresentados nas seções 3.3.1 e 4.2. Ao colidir, a velocidade da partícula, no referencial da parede, inverte o sinal e sofre uma perda fracional em seu valor, como descrito na seção 5.2. Antes de apresentarmos o mapa, definimos as variáveis adimensionais

$$\begin{aligned} \epsilon &= \varepsilon/l & , & \quad g = g'/(\omega^2 l), \\ t &= \omega t' & , & \\ V_n &= v_n/(\omega l), & \phi_n &= t + \phi_0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Multiplicando a equação de queda livre  $v = v_0 - g't'$  por  $1/\omega l$  obtemos a equação adimensional  $V = V_0 - gt$ . Em termos destas variáveis descrevemos o modelo híbrido pelo mapa

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \mu(V_n^* + g\phi_c) - (1 + \mu)\epsilon \sin(\phi_{n+1}), \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + \Delta T_n \pmod{2\pi}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

em que  $V_n^*$  e  $\Delta T_n$  são expressões cuja forma depende de qual tipo de colisão ocorre. Para o caso (i) temos que

$$\begin{aligned} V_n^* &= -V_n, \\ \Delta T_n &= \phi_c. \end{aligned} \quad (7.3)$$

O valor de  $\phi_c$  é obtido numericamente resolvendo a equação transcendental  $G(\phi_c) = 0$ , sendo  $G(\phi_c)$  dada por

$$G(\phi_c) = \epsilon \cos(\phi_n + \phi_c) - \epsilon \cos(\phi_n) - V_n \phi_c + \frac{g\phi_c^2}{2}. \quad (7.4)$$

Nós obtemos a equação acima relacionando o intervalo de tempo com a distância percorrida por uma partícula em queda livre, utilizando um procedimento análogo ao adotado na subseção 3.3.1 e na seção 4.2.

O caso (ii) é caracterizado pela situação na qual a partícula abandona a zona de colisão, mas não alcança a parede superior. Este caso ocorre quando a velocidade da partícula satisfaz a relação

$$\begin{aligned} V_n &\leq \sqrt{-2gz_n}, \\ z_n &= \epsilon \cos(\phi_n) - 1. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Para o caso (ii) temos que

$$\begin{aligned} V_n^* &= \sqrt{V_n^2 + 2g\epsilon[\cos(\phi_n) - 1]}, \\ \Delta T_n &= \phi_u + \phi_d + \phi_c, \end{aligned} \quad (7.6)$$

em que  $\phi_u$  e  $\phi_d$  correspondem, respectivamente, aos valores de tempo que a partícula gasta em sua trajetória de subida e descida, e são dados por

$$\begin{aligned} \phi_u &= V_n/g, \\ \phi_d &= \sqrt{2\epsilon[\cos(\phi_n) - 1]/g + V_n^2/g^2}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Assim como para o caso (i), utilizamos o procedimento adotado na subseção 3.3.1 e na seção 4.2 e obtemos a equação

$$F(\phi_c) = \epsilon \cos(\phi_n + \phi_u + \phi_d + \phi_c) - \epsilon + V_n^* \phi_c + \frac{g\phi_c^2}{2}. \quad (7.8)$$

Assim, de forma similar ao caso (i), o valor de  $\phi_c$  é obtido resolvendo numericamente  $F(\phi_c) = 0$ .

O caso (iii) ocorre quando a velocidade da partícula, após colidir contra a parede móvel, satisfaz a seguinte condição

$$V_n > \sqrt{-2gz_n}. \quad (7.9)$$

Agora, as equações de  $V_n^*$  e  $\Delta T_n$ , para o caso (iii), são dadas por

$$\begin{aligned} V_n^* &= \sqrt{\nu^2(V_n^2 + 2gz_n) + 2g(1 - \epsilon)}, \\ \Delta T_n &= \phi_u + \phi_d + \phi_c, \end{aligned} \quad (7.10)$$

e as expressões de  $\phi_u$  e  $\phi_d$  são

$$\begin{aligned}\phi_u &= V_n/g - \sqrt{V_n^2/g^2 + 2z_n/g}, \\ \phi_d &= \sqrt{\nu^2(V_n^2/g^2 + 2z_n/g) + 2(1 - \epsilon)/g} - \nu\sqrt{V_n^2/g^2 + 2z_n/g}.\end{aligned}\quad (7.11)$$

O valor de  $\phi_c$  para o caso (iii) é obtido resolvendo  $F(\phi_c) = 0$ , sendo  $F(\phi_c)$  a função dada pela equação (7.8). Nesta equação devemos utilizar os valores de  $V_n^*$ ,  $\phi_u$  e  $\phi_d$  obtidos para o caso (iii), fornecidos pelas expressões (7.10) e (7.11).

A matriz Jacobiana  $J$  do sistema é dada por

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} \end{pmatrix}.\quad (7.12)$$

Os elementos da matriz Jacobiana são, para os casos (i) e (ii),

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} &= \mu \left( \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} - 1 \right) - (1 + \mu) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} \epsilon \cos \phi_{n+1}, \\ \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} &= \mu g \left( \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} - 1 \right) - (1 + \mu) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} \epsilon \cos \phi_{n+1},\end{aligned}\quad (7.13)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} &= \frac{\phi_{n+1} - \phi_n}{V_n - g(\phi_{n+1} - \phi_n) + \epsilon \sin \phi_{n+1}}, \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} &= \frac{V_n - g(\phi_{n+1} - \phi_n) + \epsilon \sin \phi_n}{V_n - g(\phi_{n+1} - \phi_n) + \epsilon \sin \phi_{n+1}}.\end{aligned}$$

Após ‘um pouco’ de álgebra obtemos, para os casos (i) e (ii), o determinante de  $J$

$$\det J = \mu^2 \left[ \frac{V_n + \epsilon \sin \phi_n}{V_{n+1} + \epsilon \sin \phi_{n+1}} \right].\quad (7.14)$$

Para o caso (iii) os elementos da Jacobiana são dados por

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} &= \mu \left[ \nu \left( 1 - g \frac{\partial \phi_u}{\partial V_n} \right) + g \left( \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} - \frac{\partial \phi_u}{\partial V_n} \right) \right] \\ &\quad - (1 + \mu) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} \epsilon \cos \phi_{n+1}, \\ \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} &= \mu \left[ -\nu g \frac{\partial \phi_u}{\partial \phi_n} + g \left( \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} - \frac{\partial \phi_u}{\partial \phi_n} - 1 \right) \right] \\ &\quad - (1 + \mu) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} \epsilon \cos \phi_{n+1},\end{aligned}\tag{7.15}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} &= \frac{n_1}{d}, \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} &= \frac{n_2}{d},\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}n_1 &= \frac{\partial \phi_u}{\partial V_n} V_n + \phi_u + \nu \frac{\partial \phi_u}{\partial V_n} (V_n - g \phi_u) \\ &\quad - \nu \left( 1 - g \frac{\partial \phi_u}{\partial V_n} \right) (\phi_{n+1} - \phi_n - \phi_u) \\ &\quad + g \frac{\partial \phi_u}{\partial V_n} (\phi_{n+1} - \phi_n - \phi_u) - g \frac{\partial \phi_u}{\partial V_n} \phi_u,\end{aligned}\tag{7.16}$$

$$\begin{aligned}n_2 &= \frac{\partial \phi_u}{\partial \phi_n} V_n + \nu \left( \frac{\partial \phi_u}{\partial \phi_n} + 1 \right) (V_n - g \phi_u) + \nu g \frac{\partial \phi_u}{\partial \phi_n} (\phi_{n+1} - \phi_n - \phi_u) \\ &\quad + g \left( \frac{\partial \phi_u}{\partial \phi_n} + 1 \right) (\phi_{n+1} - \phi_n - \phi_u) - g \frac{\partial \phi_u}{\partial \phi_n} \phi_u - \epsilon \sin \phi_n,\end{aligned}\tag{7.17}$$

$$d = \frac{V_{n+1} + \epsilon \sin \phi_{n+1}}{\mu}.\tag{7.18}$$

Sendo  $\phi_u$  e suas derivadas com relação a  $V_n$  e  $\phi_n$  dadas por

$$\phi_u = \frac{1}{g} \left[ V_n - \sqrt{V_n^2 - 2g(1 - \epsilon \cos \phi_n)} \right],\tag{7.19}$$

$$\frac{\partial \phi_u}{\partial V_n} = \frac{\sqrt{V_n^2 - 2g(1 - \epsilon \cos \phi_n)} - V_n}{g \sqrt{V_n^2 - 2g(1 - \epsilon \cos \phi_n)}},\tag{7.20}$$

$$\frac{\partial \phi_u}{\partial \phi_n} = \frac{\epsilon \sin \phi_n}{\sqrt{V_n^2 - 2g(1 - \epsilon \cos \phi_n)}}.\tag{7.21}$$

Calculando o determinante da Jacobiana (equação 7.12) obtemos, para o caso (iii),

$$\det J = \mu^2 \nu^2 \left[ \frac{V_n + \epsilon \sin \phi_n}{V_{n+1} + \epsilon \sin \phi_{n+1}} \right]. \quad (7.22)$$

Antes de prosseguirmos com os resultados numéricos, vamos discutir as conseqüências das colisões inelásticas interpretando os resultados fornecidos pelas equações (7.14) e (7.22). Definindo  $A = \phi V$  como uma determinada área no espaço de fase tem-se que, após a colisão  $n$ , a área é dada por  $A_n = \phi_n V_n$ . Desta forma o valor de área após a colisão  $(n + 1)$  se relaciona com  $A_n$  pela relação  $A_{n+1} = (\det J)A_n$ . Assim, escrevendo  $d\phi_{n+1} dV_{n+1} = (\det J)\phi_n dv_n$  temos, para os casos (i) e (ii) (expressão (7.14)), que  $(V_{n+1} + \epsilon \sin \phi_{n+1})d\phi_{n+1} dV_{n+1} = \mu^2(V_n + \epsilon \sin \phi_n)d\phi_n dV_n$ . Da mesma forma temos, para o caso (iii) (expressão (7.22)), que  $(V_{n+1} + \epsilon \sin \phi_{n+1})d\phi_{n+1} dV_{n+1} = \mu^2 \nu^2(V_n + \epsilon \sin \phi_n)d\phi_n dV_n$ . Portanto a quantidade  $(V + \epsilon \sin \phi)d\phi dV$  é preservada apenas no limite de colisões elásticas, quando  $\mu = \nu = 1$ . Para  $\mu < 1$  ou  $\nu < 1$ , contudo, o sistema contrai o valor da área no espaço de fase. Para o caso (iii) a contração do volume é proporcional a  $\mu^2 \nu^2$  e para os casos (i) e (ii) a contração é proporcional a  $\mu^2$ .

## 7.3 Resultados numéricos

Nesta seção apresentaremos as propriedades dinâmicas do modelo híbrido para regimes diferentes caracterizados pelos valores dos parâmetros de restituição  $\mu$  e  $\nu$ . Como veremos, no regime de dissipação fraca e moderada o espaço de fase do sistema é caracterizado pela presença de um atrator caótico e pontos fixos atratores. A bacia de atração de cada atrator é delimitada pelas variedades estáveis e instáveis que emanam de pontos fixos de sela. Variando os valores dos parâmetros de restituição determinamos os valores críticos de  $\mu$  e  $\nu$  para os quais as variedades estáveis e instáveis de um ponto de sela se tocam dando origem a uma órbita homoclínica, como discutido na seção 2.8. Mostramos que o cruzamento das variedades instável e estável resulta na destruição do atrator caótico, fenômeno conhecido como crise. Na seqüência apresentamos o regime de dissipação forte, em que a partícula colide perdendo, no referencial da parede móvel, mais de 50% de sua velocidade. Neste limite obtemos cascatas de duplicação de período nas variáveis velocidade e fase ao variar os parâmetros  $\epsilon$  e  $g$ . Finalmente, relatamos um

evento de aniquilação de pontos fixos ao variar os parâmetros  $\mu$  e  $\nu$ .

### 7.3.1 Regime de dissipação fraca e moderada

Uma consequência importante da dissipação é a destruição da estrutura mista do espaço de fase. Como o volume no espaço de fase não é mais preservado (equações (7.14) e (7.22)), o espaço de fase apresenta atratores que podem ser caóticos ou simplesmente pontos fixos atrativos. No caso do modelo híbrido, as órbitas periódicas de período  $i$  são obtidas exigindo-se que as variáveis  $V$  e  $\phi$ , dadas pelo mapa (7.2), satisfaçam a condição

$$\begin{aligned} V_{n+i} &= V_n, \\ \phi_{n+i} &= \phi_n. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Os pontos fixos são obtidos para  $i = 1$ , as órbitas de período 2 para  $i = 2$  e assim sucessivamente. O modelo híbrido possui pontos fixos para as situações (ii) e (iii). No limite de dissipações fracas e moderadas, contudo, pontos fixos estáveis são observados apenas para a situação (iii). Pontos fixos estáveis para o caso (ii), no qual a partícula abandona a zona de colisão mas não alcança a parede superior, são observados apenas no regime de dissipação intensa. Na próxima seção estudaremos as propriedades do modelo híbrido para este regime de dissipação. Fazendo  $i = 1$  na equação (7.23) obtemos, para o caso (iii), que a velocidade do ponto fixo é dada por

$$V = \frac{1 + \mu}{\gamma} \epsilon \sin(\phi) - \frac{\mu}{\gamma} \sqrt{\nu^2(1 + \mu)^2 \epsilon^2 \sin^2(\phi) + 2\gamma g(1 - \nu^2)z}, \quad (7.24)$$

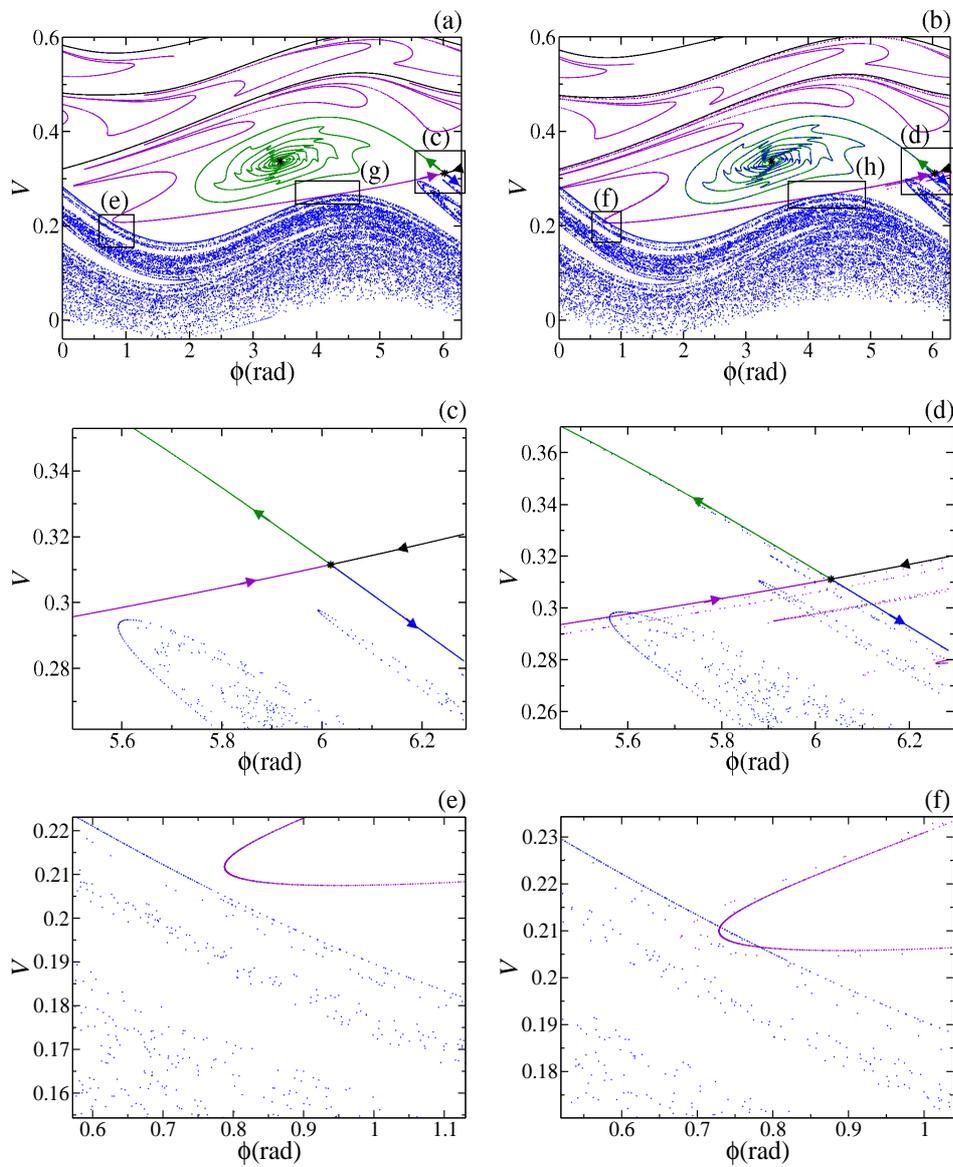
em que  $\gamma = \mu^2 \nu^2 - 1$  e  $z = \epsilon \cos(\phi) - 1$ , sendo  $\phi$  o valor de fase do ponto fixo, obtido numericamente da expressão

$$h(\phi) = V - (1 + \nu) \sqrt{V^2 + 2gz} - 2\pi mg + \sqrt{\nu^2(V^2 + 2gz) - 2gz}, \quad (7.25)$$

com  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Para um dado valor de  $m$ , a equação acima fornece duas soluções, as quais correspondem a dois pontos fixos. A figura 7.1(a) mostra as variedades estáveis e instáveis do ponto de sela do modelo híbrido para  $\epsilon = 4 \times 10^{-2}$ ,  $g = 10^{-4}$  e  $\mu = \nu = 0.96625$ . Os pontos fixos para  $m = 1$  estão indicados pelo símbolo \*.

Na seção 2.7 descrevemos o procedimento que permite determinarmos a

estabilidade de pontos fixos. Nas seções 3.2.2 e 4.3 aplicamos este procedimento no estudo da estabilidade de pontos fixos dos modelos de Fermi-Ulam e *bouncer*. De forma análoga, obtemos os autovalores da matriz Jacobiana e obtemos a estabilidade dos pontos fixos do modelo híbrido. Para o ponto fixo de sela apresentado na figura 7.1(a) determinamos os autovetores da matriz Jacobiana. As direções destes autovetores definem os valores de condições iniciais que geram as variedades estáveis e instáveis do ponto de sela que apresentamos na figura 7.1(a).



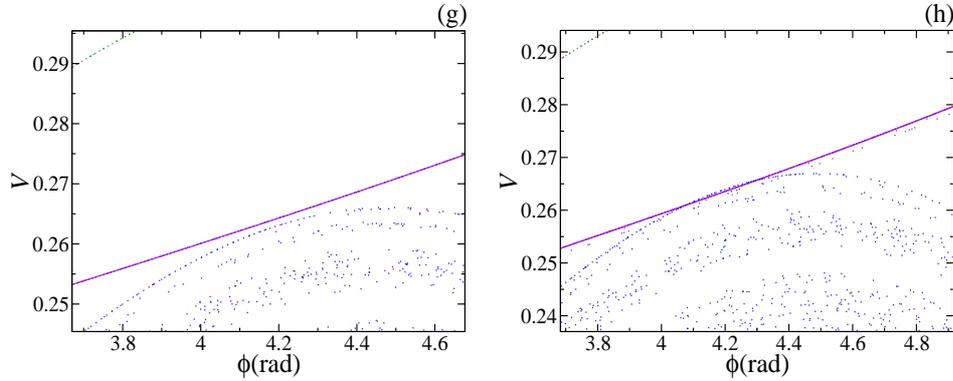


Figura 7.1: As figuras ilustram as variedades estáveis e instáveis do ponto fixo de sela do modelo híbrido para  $m = 1$ ,  $\epsilon = 4 \times 10^{-2}$  e  $g = 10^{-4}$ . Em (a) foi empregado  $\mu = \nu = 0.96625$  e em (b)  $\mu = \nu = 0.968125$ . As figuras (c), (e) e (g) são ampliações das regiões indicadas na figura (a). De forma semelhante, as figuras (d), (f) e (h) mostram os detalhes indicados na figura (b) envolvendo a intersecção das variedades estável e instável do ponto de sela.

As variedades instáveis são obtidas de forma direta via o processo iterativo do mapa (7.2). Observamos que a variedade instável superior converge para o atrator espiral, localizado no centro da figura, enquanto a variedade instável inferior evolui para o atrator caótico. O processo de obtenção das variedades estáveis é menos direto, uma vez que o processo iterativo dado pelo mapa (7.2) faz com que as condições iniciais evoluam para o ponto fixo de sela. Portanto torna-se necessária a construção do mapeamento inverso, o qual nos fornece os valores  $\phi_n$  e  $V_n$  a partir de  $\phi_{n+1}$  e  $V_{n+1}$ . Assim, para o caso no qual a partícula vem de uma colisão com parede superior, temos que a velocidade  $V_n$  é dada por

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{1}{\mu^2} [V_{n+1} + (1 + \mu)\epsilon \sin(\phi_{n+1})]^2 + 2gz_{n+1} - 2\nu^2gz_n}, \\ z_n &= \epsilon \cos(\phi_n) - 1. \end{aligned} \quad (7.26)$$

O valor de  $\phi_n$  é obtido numericamente resolvendo-se  $k(\phi_n) = 0$ , sendo  $k(\phi_n)$

dado pela expressão abaixo

$$k(\phi_n) = -\phi_{n+1} + \phi_n + \frac{1}{g} \left\{ V_n - (1 + \nu) \sqrt{V_n^2 + 2gz_n} + \sqrt{-2gz_{n+1} + \nu^2(V_n^2 + 2gz_n)} \right\}. \quad (7.27)$$

Para o caso no qual a partícula vem de uma colisão sem atingir a parede superior a expressão de  $V_n$  é dada por

$$V_n = \sqrt{V_{n+1}^{\dagger 2} + 2g\epsilon [\cos(\phi_{n+1}) - \cos(\phi_n)]}, \quad (7.28)$$

em que  $V_{n+1}^{\dagger}$  é a expressão auxiliar dada por

$$V_{n+1}^{\dagger} = \frac{1}{\mu} [V_{n+1} + (1 + \mu)\epsilon \sin(\phi_{n+1})]. \quad (7.29)$$

Neste caso, o valor de  $\phi_n$  é solução de  $j(\phi_n) = 0$ , sendo a expressão de  $j(\phi_n)$  dada por

$$j(\phi_n) = -\phi_{n+1} + \phi_n + \frac{1}{g}V_n + \frac{1}{g}V_{n+1}^{\dagger}, \quad (7.30)$$

em que a expressão de  $V_n$  é dada pela equação (7.28).

O processo iterativo do mapeamento inverso gera, assim, as variedades estáveis do ponto fixo de sela que apresentamos na figura 7.1(a). Observamos que estas variedades correspondem a valores de velocidade suficientemente altos e, assim, a partícula não visita a região de energias baixas. Desta forma, não é necessário o desenvolvimento das expressões do mapeamento inverso para a situação (i), na qual a partícula sofre colisões sucessivas com a parede oscilante.

Na figura 7.1(b) utilizamos os mesmos valores de  $\epsilon$  e  $g$ , porém  $\mu = \nu = 0.968125$ , valores ligeiramente maiores que aqueles empregados na figura 7.1(a). Para estes novos valores de parâmetros ocorre cruzamento das variedades estável e instável dando origem a uma órbita homoclínica. Desta forma as trajetórias no atrator caótico originalmente existente na figura 7.1(a) são substituídas por um transiente caótico. Após este transiente as trajetórias convergem assintoticamente para o ponto fixo espiral atrator. As figuras 7.1(c), (e) e (g) são ampliações das regiões delineadas na figura 7.1(a) e mos-

tram que as variedades estável e instável não se tocam para os valores de  $\mu$  e  $\nu$  utilizados. As figuras 7.1(d), (f) e (h) mostram os detalhes envolvendo o cruzamento das variedades estável e instável do ponto de sela.

Observamos também que eventos de crise ocorrem para pontos fixos caracterizados por valores diferentes de  $m$ . Na figura 7.2(a), por exemplo, mostramos as variedades estáveis e instáveis do ponto de sela para  $m = 2$ ,  $\epsilon = 2 \times 10^{-2}$  e  $g = 10^{-4}$ . A variedade instável superior converge assintoticamente para o ponto espiral atrator e a variedade instável inferior evolui para o atrator caótico. Similarmente ao caso  $m = 1$ , as variedades estáveis e instáveis para  $m = 2$  são geradas a partir dos autovetores do ponto de sela. Como mostra a figura 7.2(b), uma pequena mudança nos parâmetros de restituição faz com que as variedades instável e estável do ponto de sela se interceptem criando, assim, uma órbita homoclínica e o atrator caótico é destruído.

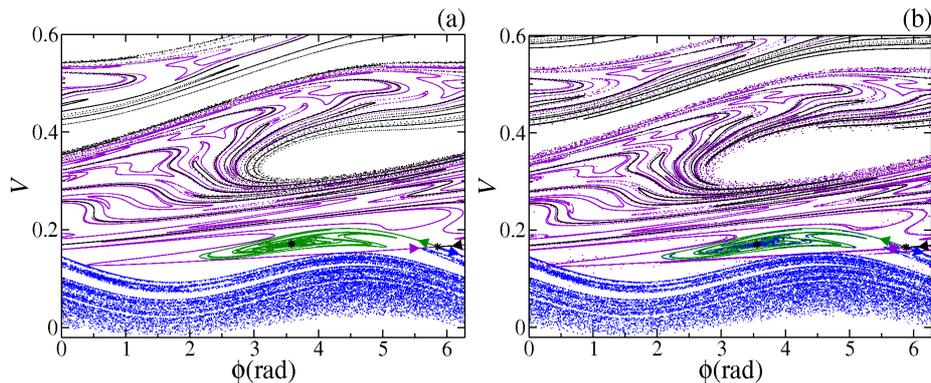


Figura 7.2: As figuras ilustram as variedades estáveis e instáveis do ponto de sela correspondente a  $m = 2$ ,  $\epsilon = 2 \times 10^{-2}$  e  $g = 10^{-4}$ . Em (a) empregamos  $\nu = 0.9$  e  $\mu = 1$  e em (b)  $\nu = 0.905$  e  $\mu = 1$ .

Na figura 7.2(a) existem, a princípio, três atratores, um deles caótico e dois pontos fixos espirais que correspondem a  $m = 1$  e  $m = 2$ . Com o objetivo de obter as bacias de atração de cada atrator da figura 7.2(a) empregamos  $200 \times 200$  valores de velocidade e fase iniciais caracterizadas por  $V_0 \in [0, 0.6]$  e  $\phi_0 \in [0, 2\pi)$ , e iteramos o mapa (7.2) até  $10^5$  vezes. Analisando o comportamento assintótico das trajetórias determinamos a qual bacia de atração cada condição inicial pertence. O resultado é ilustrado na figura 7.3, em que cada cor corresponde a uma bacia de atração diferente. A cor

preta indica os valores de velocidade e fase iniciais que evoluem para o atrator caótico. As cores cinza e marrom indicam as condições iniciais que convergem para os atratores espirais com  $m = 1$  e  $m = 2$ , respectivamente.

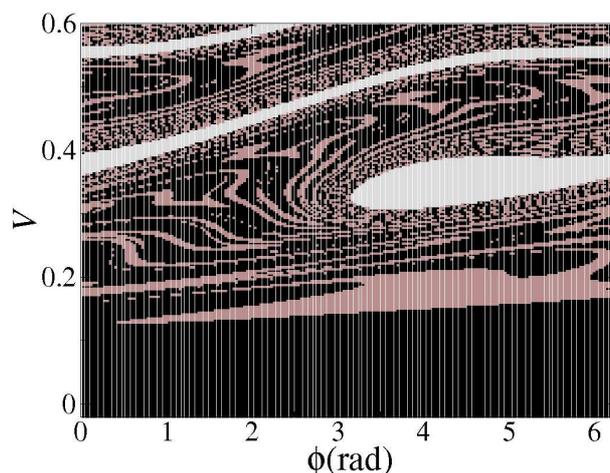


Figura 7.3: A figura ilustra as bacias de atração dos atratores da figura 7.2(a) ( $\epsilon = 2 \times 10^{-2}$ ,  $g = 10^{-4}$ ,  $\nu = 0.9$  e  $\mu = 1$ ). As regiões de cor cinza e marrom correspondem, respectivamente, às bacias de atração dos atratores espirais para  $m = 1$  e  $m = 2$ , e a cor preta indica a bacia de atração do atrator caótico.

Como empregamos coeficientes de dissipação distintos  $\mu$  e  $\nu$  para as paredes superior e inferior, podemos, então, determinar os valores efetivos destes parâmetros para os quais ocorre a crise. Eventos de crise, como aqueles que apresentamos nas figuras 7.1 e 7.2, ocorrem para outras combinações dos valores dos coeficientes de restituição, por exemplo, aumentando  $\mu$  e diminuindo  $\nu$  (ou vice-versa).

Dividimos então o espaço  $\mu-\nu$  em 500 valores de  $\mu$  e 500 valores de  $\nu$ . As condições iniciais, definidas pela variedade instável inferior, foram iteradas até  $10^6$  colisões com a parede oscilante. Quando a trajetória permanece no atrator caótico até o final do processo iterativo, então assumimos que a intersecção das variedades instável e estável não ocorreu. Por outro lado, quando, para um determinado par de valores  $\nu$  e  $\mu$ , a órbita converge para o ponto fixo atrator, então o atrator caótico foi destruído, indicando que o evento de crise ocorreu. Neste caso o processo iterativo, para esta condição inicial, é interrompido. Utilizando, sucessivamente, novas combinações de valores dos

parâmetros  $\mu$  e  $\nu$ , determinamos os valores críticos destes parâmetros que caracterizam a transição do regime em que são observados atratores caóticos para o regime no qual estes atratores são destruídos. A figura 7.4(a) ilustra o resultado da análise correspondente aos eventos de crise envolvendo as variedades do ponto fixo de sela com  $m = 1$  para  $\epsilon = 4 \times 10^{-2}$  e  $g = 10^{-4}$ . De forma semelhante, a figura 7.4(b) ilustra o resultado correspondente ao ponto de sela com  $m = 2$  para  $\epsilon = 2 \times 10^{-2}$  e  $g = 10^{-4}$ . Um ajuste linear  $\mu = A + B\nu$  dos dados numéricos da figura 7.4(a) fornece  $A = 1.9253 \pm 0.0008$  e  $B = -0.9888 \pm 0.0008$ , enquanto o ajuste dos dados da figura 7.4(b) fornece  $A = 1.889 \pm 0.001$  e  $B = -0.988 \pm 0.001$ .

Para valores de  $\mu$  e  $\nu$  que se encontram localizadas abaixo das curvas  $\mu = A + B\nu$  os eventos de crise não são observados. Por outro lado, os valores de  $\nu$  e  $\mu$  acima das curvas correspondem ao caso no qual as variedades estáveis e instáveis se cruzam e o atrator caótico não existe.

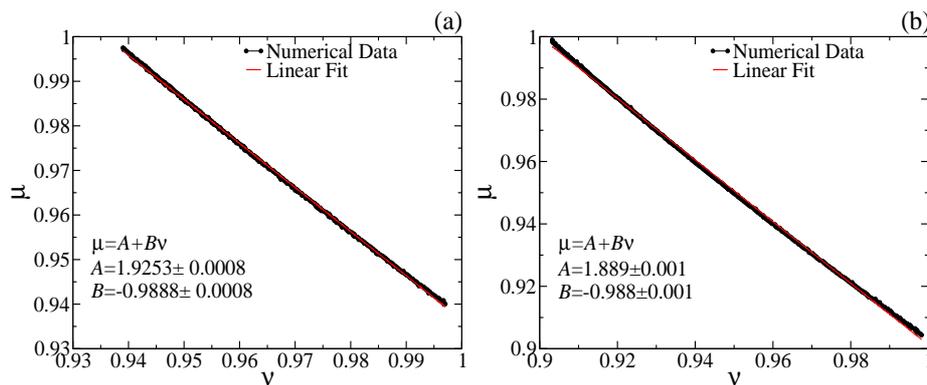


Figura 7.4: A figura mostra os valores efetivos dos coeficientes de restituição que caracterizam a família de eventos de crise. Para todos os valores de  $\nu$  e  $\mu$  acima das curvas são observados eventos de crise e, como consequência, os atratores caóticos não existem e as órbitas convergem para o atrator espiral. Abaixo das curvas estão os valores de  $\nu$  e  $\mu$  para os quais não ocorre crise. Em ambas as figuras  $g = 10^{-4}$  e, em (a)  $m = 1$  e  $\epsilon = 4 \times 10^{-2}$ , e em (b)  $m = 2$  e  $\epsilon = 2 \times 10^{-2}$ .

## 7.4 Limite de dissipação forte

O limite de dissipação forte é definido como a situação na qual, ao colidir, a partícula perde, no referencial da parede móvel, mais de 50% da

velocidade que possuía imediatamente antes da colisão. Citamos aqui dois trabalhos encontrados na literatura que abrangem o regime de dissipação intensa. Everson [65] e Luna-Acosta [66] estudaram uma versão do modelo *bouncer* na qual a velocidade da parede é descrita por  $V_w = c(1 + \sin(t))$ , em que  $c$  é uma constante. Everson considerou colisões inelásticas da partícula com a parede oscilante e Luna-Acosta introduziu dissipação na forma de arrasto viscoso. Uma consequência importante, relatada em ambos os casos, é a ocorrência de cascatas de duplicação de período na fase da parede, no limite de dissipação alta.

Com o objetivo de estudar os efeitos de dissipações intensas no modelo híbrido adotamos, na parede superior, um coeficiente de restituição  $\nu = 0.99$  e na parede inferior  $\mu = 0.4$ . Desta forma, a velocidade da partícula imediatamente após colidir com a parede móvel é, no referencial desta parede, 60% menor que o valor imediatamente antes da colisão. Desta forma os valores de  $\mu$  e  $\nu$  se encontram bem abaixo das curvas mostradas na figura 7.4. Utilizando um valor fixo  $\epsilon = 4 \times 10^{-2}$  e variando o valor de  $g$  obtemos cascatas de duplicação de período nas variáveis  $\phi$  e  $V$ , como mostram as figuras 7.5(a) e (b).

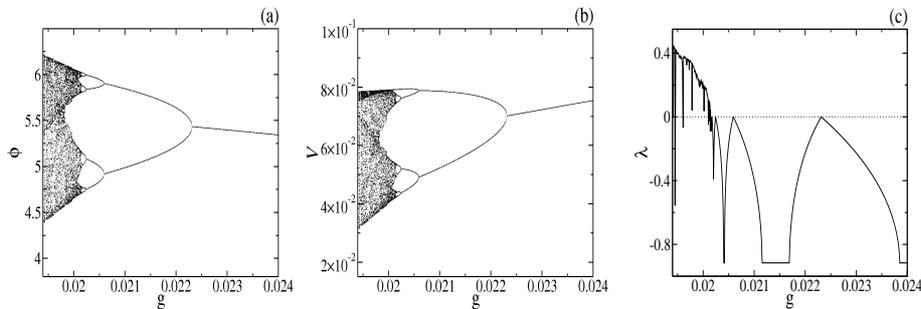


Figura 7.5: Variando o parâmetro  $g$  observamos ocorrência de cascatas de duplicação de período nas variáveis fase (a) e velocidade (b). Em (c) mostramos o expoente de Lyapunov para as cascatas exibidas em (a) e (b). Os valores de parâmetros que utilizamos são  $\epsilon = 4 \times 10^{-2}$ ,  $\nu = 0.99$  e  $\mu = 0.4$ .

Utilizando o método da triangularização implícita [67], definimos o expoentes de Lyapunov como

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda_j|, \quad j = 1, 2, \quad (7.31)$$

em que  $\Lambda_j$  são os autovalores da matriz  $M = \prod_{i=1}^n J_i(V_i, \phi_i)$  e  $J_i$  é a matriz Jacobiana calculada ao longo da órbita  $(V_i, \phi_i)$ . Se pelo menos um dos  $\lambda_j$  é positivo então a órbita é classificada como caótica. Portanto definimos  $\lambda$  como o maior valor de  $\lambda_j$ . Assim, determinando os expoentes de Lyapunov associados às cascatas das figuras 7.5(a) e (b) obtemos a figura 7.5(c). Como podemos observar, as órbitas periódicas são caracterizadas por valores negativos de  $\lambda$ . Observamos, também, que o expoente de Lyapunov vai a zero para os valores do parâmetro  $g$  nos quais ocorrem as bifurcações. Além disso, temos que  $\lambda$  assume valores positivos após um valor crítico de  $g$  e as correspondentes órbitas são classificadas como caóticas. Notamos também que o expoente de Lyapunov associado às órbitas periódicas assume valores constantes para determinados intervalos de  $g$ . Este resultado, como mostrado por Everson [65], se deve ao fato de que os autovalores das órbitas periódicas atratoras, para estes intervalos de  $g$ , assumem valores complexos, o que significa que estas órbitas são atratores espirais. Para os valores dos parâmetros de controle utilizados na figura 7.5, ou seja,  $\nu = 0.99$ ,  $\mu = 0.4$  e  $\epsilon = 4 \times 10^{-2}$ , as cascatas de duplicação de período são observadas apenas no intervalo  $g \in [0.019, 0.0287]$ . Para valores de  $g$  que não pertencem a este intervalo, observamos que a partícula e a parede movem-se juntas, fenômeno conhecido como *locking*, ou travamento [68, 69]. Os atratores da figura 7.5, bem como os expoentes Lyapunov associados, foram obtidos a partir das condições iniciais  $\phi_0 = 5.5$  e  $V_0 = 0.07$ . Além disso o transiente das figuras 7.5(a) e (b) foi descartado eliminando as  $10^5$  colisões iniciais.

Para a situação na qual a partícula abandona a zona de colisão com velocidade  $V_n \leq \sqrt{-2gz_n}$ ,  $z_n = \epsilon \cos(\phi_n) - 1$ , (caso (ii)) as expressões de fase e velocidade do ponto fixo são dadas por

$$\begin{aligned} \phi &= \arcsin \left[ \frac{V}{\epsilon} \left( \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \right) \right], \\ V &= \pi m g, \end{aligned} \tag{7.32}$$

com  $m = 1, 2, 3, \dots$ . A janela de período 1 que observamos nas figuras 7.5(a) e (b) corresponde a este ponto fixo com  $m = 1$ . Este resultado é uma evidência de que, para determinados valores dos parâmetros de controle e condições iniciais, o modelo híbrido comporta-se como o modelo *bouncer*. Como o valor absoluto do argumento do arcoseno não pode exceder a unidade então, para a combinação de parâmetros de controle empregados na figura

7.5, não observa-se pontos fixos para  $m > 1$ .

De forma análoga, fixamos o valor de  $g$  e variamos o valor de  $\epsilon$ . Adotando  $\nu = 0.99$ ,  $\mu = 0.4$  e  $g = 10^{-4}$  obtemos os diagramas de bifurcação de período para  $\phi$  e  $V$ , como ilustrado nas figuras 7.6(a) e (b). Utilizamos as condições iniciais  $\phi_0 = 5.5$  e  $V_0 = 2.54 \times 10^{-4}$  e, além disso, descartamos as  $10^5$  colisões iniciais com o objetivo de eliminar o transiente. Os valores do expoente de Lyapunov,  $\lambda$ , associados às cascatas de duplicação de período são exibidos na figura 7.6(c). Observamos que as órbitas periódicas são caracterizadas por valores negativos de  $\lambda$ . Observamos também que o expoente de Lyapunov se anula para os valores de  $\epsilon$  nos quais as bifurcações ocorrem e que  $\lambda$  assume valores positivos para valores de  $\epsilon$  acima de um valor crítico.

As cascatas de duplicação de período das figuras 7.6(a) e (b) são observadas para valores de  $\epsilon$  no intervalo  $[1.36 \times 10^{-4}, 2.06 \times 10^{-4}]$ . Para outros valores de  $\epsilon$  observamos, devido ao campo gravitacional e às conseqüências da dissipação alta, ocorrência do fenômeno de travamento (*locking*) [68, 69] dos movimentos da partícula e da parede.

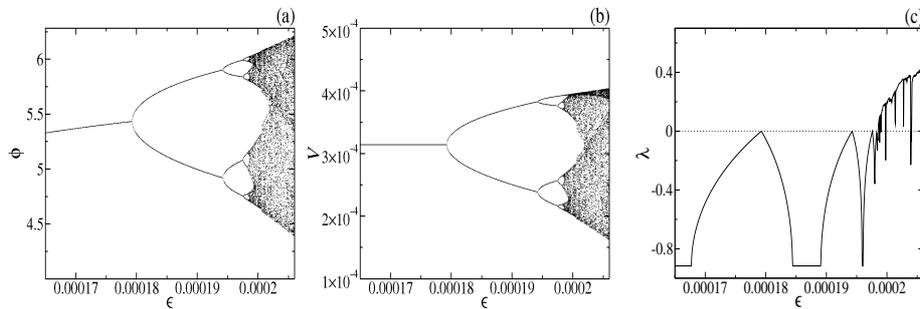


Figura 7.6: As figuras (a) e (b) ilustram as cascatas de duplicação de período da fase e da velocidade ao variar o parâmetro  $\epsilon$ . Os demais parâmetros assumiram valores fixos dados por  $g = 10^{-4}$ ,  $\nu = 0.99$  e  $\mu = 0.4$ . As órbitas de período 1 correspondem aos pontos fixos dados pela equação (7.32). Em (c) mostramos o expoente de Lyapunov associado aos diagramas de bifurcação apresentados nas figuras (a) e (b).

As órbitas de período 1 da figura 7.6 correspondem aos pontos fixos dados pela equação (7.32) para  $m = 1$ . Este resultado corresponde à situação em que a partícula abandona a zona de colisão mas não alcança a parede superior (caso (ii)). Em concordância com a equação (7.32) o valor de  $V$  das órbitas de período 1 na figura 7.6(b) não dependem de  $\epsilon$ .

O fato dos pontos fixos da figura 7.6 corresponderem ao caso (ii) evidencia mais uma vez que o modelo híbrido se comporta, para determinados valores dos parâmetros e condições iniciais, como o modelo *bouncer*.

## 7.5 Aniquilação de pontos fixos

No limite de dissipações fracas e moderadas, seção 7.3.1, vimos que as equações (7.24) e (7.25) fornecem, para cada valor de  $m$ , duas soluções ou pontos fixos. Um exemplo é dado na figura 7.1, em que estas soluções correspondem ao ponto espiral atrator e o ponto fixo de sela. Relatamos, aqui, uma outra consequência introduzida pela dissipação: o fenômeno de aniquilação, por pares, de pontos fixos.

Fixando os valores dos parâmetros  $\epsilon$  e  $g$  observamos que, à medida que o grau de dissipação aumenta, os valores de fase e velocidade que caracterizam os pontos fixos aproximam-se e, após tornarem um único ponto fixo, eles desaparecem. Na figura 7.7 mostramos, para  $\epsilon = 4 \times 10^{-2}$ ,  $g = 10^{-4}$  e para a situação em que  $\mu = \nu$ , como ocorre este fenômeno de aniquilação. A figura 7.7(a) corresponde aos valores de fase dos pontos fixos e a figura 7.7(b) aos valores da velocidade. As curvas sólidas correspondem aos pontos fixos para  $m = 1$  e as tracejadas para  $m = 2$ . Para cada valor de  $\mu = \nu$  e um dado  $m$  temos dois pontos fixos. À medida que os coeficientes de restituição diminuem (ou seja, a dissipação aumenta) os valores de fase e velocidade destes pontos fixos mudam de tal forma que a distância entre eles diminui. Para valores críticos de  $\mu = \nu$  estes pontos fixos se tocam e, para valores ainda menores de  $\mu = \nu$ , os pontos fixos não existem. Observamos também que o valor de  $\mu = \nu$  para o qual a aniquilação ocorre depende da ordem  $m$  do ponto fixo. Quanto maior o valor de  $m$  maior é o valor crítico de  $\mu = \nu$  para o qual observamos este fenômeno de aniquilação.

## 7.6 Conclusões

Neste trabalho descrevemos as consequências dinâmicas da dissipação, introduzida via colisões inelásticas, no modelo híbrido Fermi-Ulam-*bouncer*. Para determinados valores dos parâmetros de controle as colisões sucessivas podem ser importantes e, portanto, não introduzimos nenhuma simplificação ou modificação ao modelo.

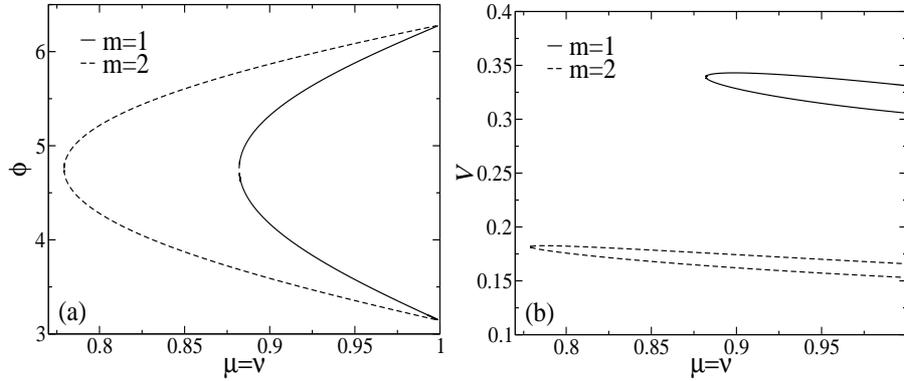


Figura 7.7: A figura ilustra o processo de destruição de pontos fixos para  $\epsilon = 4 \times 10^{-2}$  e  $g = 10^{-4}$ . Os gráficos mostram como os valores de fase (a) e de velocidade (b) dos pontos fixos do caso (iii) (equações (7.24) e (7.25)) variam em função de  $\mu = \nu$ . As curvas sólidas correspondem aos pontos fixos para  $m = 1$  e as tracejadas aos pontos fixos de ordem  $m = 2$ . O processo de aniquilação do par ocorre quando, para valores críticos de  $\mu = \nu$ , os dois pontos fixos se tocam.

No regime de dissipação fraca e moderada relatamos a ocorrência dos eventos de crise e determinamos famílias de crises para diferentes pontos de sela. Estas famílias de crises foram obtidas considerando combinações diferentes dos parâmetros  $\mu$  e  $\nu$ . Uma análise deste tipo é importante em experimentos onde a dissipação não pode ser completamente ignorada.

No limite de dissipação forte o sistema apresenta, nas variáveis fase e velocidade, cascatas de duplicação de período ao variar os parâmetros  $g$  e  $\epsilon$ . Mostramos também, para determinados valores dos parâmetros e condições iniciais, que o modelo híbrido se comporta como o modelo *bouncer*.

Diminuindo os valores dos coeficientes de restituição  $\mu$  e  $\nu$ , ou seja, aumentando a intensidade da dissipação, observamos, ainda, eventos de aniquilação por pares de pontos fixos. Os resultados que apresentamos neste capítulo foram publicados na revista *Chaos* [16].

---

## Conclusões e perspectivas

---

Estudamos as propriedades de escala de quantidades médias, calculadas como funções das variáveis  $n$  e  $t$ , em transições dos modelos unidimensionais de Fermi-Ulam e *bouncer*, e do bilhar circular pulsante.

Obtivemos a descrição de escala da transição do regime integrável para o não-integrável do modelo de Fermi-Ulam e do modelo *bouncer* simplificado (mapa padrão). Para a região caótica de energia mais baixa, mostramos que quando a análise é feita em termos da variável número de iterações, a transição de integrável para não-integrável destes sistemas é descrita por expoentes de escala diferentes. Em outras palavras, estes sistemas pertencem a classes de universalidade distintas. Tal resultado pode ser atribuído às diferentes propriedades dinâmicas envolvendo as trajetórias no espaço de fase.

Investigamos também as propriedades dinâmicas do bilhar circular pulsante. A expansão da componente radial da velocidade próximo da primeira curva invariante mostra que o bilhar circular pulsante é localmente equivalente ao mapa padrão. Para valores pequenos da componente tangencial da velocidade, a análise de escala deste sistema, considerando a variável número de iterações, fornece o mesmo conjunto de expoentes que descreve as propriedades de escala do modelo de Fermi-Ulam.

Obtivemos a descrição de escala do mapa padrão para  $K \approx K_c$ , quando a última curva invariante é destruída e a energia muda do regime de valor limitado para o regime de crescimento ilimitado. Estudamos ainda as propriedades de escala do modelo *bouncer* no regime de não-linearidade forte. A aceleração de Fermi fornecida pelos modos aceleradores de Pustyl'nikov é descrita por  $I^2 \propto n^2$ , enquanto na região de movimento caótico, para  $K > K_c$ ,

e na versão estocástica do mapa padrão o crescimento ilimitado da energia é descrito por  $I^2 \propto n$ . Portanto, os modos aceleradores não afetam de forma significativa a região de movimento caótico que os envolve. O modelo *bouncer* dissipativo suprime a aceleração de Fermi observada na versão em que as colisões são elásticas. Obtemos, assim, as propriedades de escala que descrevem a transição do regime de aceleração de Fermi para o regime de crescimento limitado da energia, no limite de dissipação pequena.

No modelo simplificado de Fermi-Ulam o decaimento da energia que observamos para tempos longos é um comportamento atípico que surge como consequência da aproximação utilizada. Ao desconsiderar o movimento da parede oscilante o tempo entre colisões é dado por  $\Delta t = 2/V$ . Na versão completa do modelo de Fermi-Ulam são raros os eventos em que o tempo entre colisões é grande. Quando a velocidade da partícula é pequena uma colisão direta ocorre em um intervalo de tempo  $\Delta t < 2\pi$ , um valor finito. Desta forma, a energia média, calculada como função do tempo, satura para o modelo completo de Fermi-Ulam. Já para o modelo *bouncer* simplificado o tempo entre colisões é  $\Delta t = 2V$ . Caso a velocidade da partícula seja pequena, uma colisão ocorre imediatamente. Assim, a energia média para o modelo *bouncer* simplificado não decai para tempos longos. Quando as médias são calculadas como funções do número de choques, a diferença entre as versões completa e simplificada é irrelevante, pois a variável  $n$  é discreta e entre uma colisão e outra  $\Delta n = 1$  para ambos os casos, independente da velocidade da partícula.

Por fim estudamos as consequências dinâmicas da dissipação na versão híbrida dos modelos de Fermi-Ulam e *bouncer*. No limite de dissipação fraca e moderada mostramos que o sistema apresenta eventos de crise. No regime de dissipação intensa o modelo híbrido apresenta cascatas de duplicação de período. Mostramos também que este modelo apresenta o fenômeno de aniquilação de pontos fixos ao variar os coeficientes de restituição do sistema.

O estudo das propriedades de escala dos sistemas dinâmicos ainda não está fechado. Temos o objetivo de utilizar as técnicas de renormalização e calcular as classes de universalidade dos diferentes sistemas. Esta tarefa, contudo, não será simples.

Os resultados obtidos bem como as ferramentas que utilizamos neste estudo encontram aplicações em sistemas que apresentam transição do re-

gime integrável para o não-integrável e em sistemas em que a intensidade da dissipação não seja alta. Processos envolvendo aceleração de Fermi são de grande interesse em sistemas onde partículas devem ser aceleradas até atingirem velocidades altas, como as que devem ser obtidas no *Large Hadron Collider* (LHC), ou em sistemas onde a velocidade de núcleos atômicos deve atingir um valor mínimo para iniciar a fusão nuclear, processo a ser desempenhado pelos *tokamaks*, uma fonte de energia limpa que não oferece riscos de acidentes envolvendo radiação.

---

---

## BIBLIOGRAFIA

---

- [1] Robert C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics*, Oxford University Press (1994).
- [2] H. Bai-Lin, *Chaos II*, World Scientific Publishing, (1990).
- [3] A. J. Lichtenberg, M.A. Lieberman and R. H. Cohen, *Physica D* **1**, 291 (1980).
- [4] H. E. Stanley, *Introduction to Phase Transition and Critical Phenomena*, Clarendon Press, Oxford (1971).
- [5] S. Ma, *Modern Theory of Critical Phenomena*, W. A. Benjamin, Massachusetts (1976).
- [6] S. R. A. Salinas, *Introdução à Física Estatística*, Segunda edição, EdUSP, São Paulo, (1999).
- [7] M. J. Feigenbaum, *Journal of Statistical Physics*, **19**, 25, (1978).
- [8] M. J. Feigenbaum, *Journal of Statistical Physics*, **21**, 669, (1979).
- [9] E. D. Leonel, J. K. L. da Silva, S. O. Kamphorst, *Inter. J. of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering* **12**, 1667 (2002).
- [10] S. Ulam, *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Math. Statistics and Probability Vol 1* (University of California Press, Berkeley, 1961).
- [11] A. J. Lichtenberg e M.A. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics Appl. Math. Sci.* **38**, Springer Verlag, New York, (1992).
- [12] L. D. Pustyl'nikov, *Trans. Moscow Math. Society* **2**, 1 (1978).

- 
- [13] B.V. Chirikov, Phys. Rep. **52**, 263 (1979).
- [14] S. O. Kamphorst and S. P. de Carvalho, Nonlinearity **12**, 1363 (1999).
- [15] E. D. Leonel and P. V. E. McClintock, J. Phys. A: Math. Gen. **38**, 823 (2005).
- [16] D. G. Ladeira e E. D. Leonel, Chaos (Woodbury), **17**, 013119, (2007).
- [17] Robert L. Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley Publishing Company, (1992).
- [18] H. Goldstein, *Classical Mechanics* 2a ed., Addison-Wesley Series in Physics, Columbia University, (1980).
- [19] S. Hassani, *Foundations of Mathematical Physics*, Allyn and Bacon, Boston (1991).
- [20] C. Grebogi, E. Ott, S. Pelikan e J. A. Yorke, Physica D **13**, 261 (1984).
- [21] V. I. Arnold, *Mathematical Methods in Classical Mechanics*, Springer, New York (1978).
- [22] A. L. Barabási, H. E. Stanley, *Fractal Concepts in Surface Growth* (Cambridge Uni. Press, Cambridge, 1995).
- [23] E. Fermi, Phys. Rev. **15**, 1169 (1949).
- [24] Z. J. Kowalik, M. Franaszek and P. Pieranski, Phys. Rev. A **37**, 4016 (1988).
- [25] S. Warr, W. Cooke, R. C. Ball and J. M. Huntley, Physica A **231**, 551 (1996).
- [26] G. Karner, J. Stat. Phys. **77**, 867 (1994).
- [27] J. V. José and R. Cordery, Phys. Rev. Lett. **56**, 290 (1986).
- [28] F. Saif, I. Bialynicki-Birula, M. Fortunato, W. P. Schleich, Phys. Rev. A **58**, 4779 (1998).
- [29] A. Steane, P. Szriftgiser, P. Desbiolles, J. Dalibard, Phys. Rev. Lett. **74**, 4972, (1995).

- 
- [30] G. Lanzano *et al.*, Phys. Rev. Lett. **83**, 4518, (1999).
- [31] C. S. Adams, M. Sigel, J. Mlynek, Phys. Rep. **240**, 143 (1994).
- [32] M. G. Raizen, Adv. At. Mol. Opt. Phys. **41**, 43 (1999).
- [33] A. V. Milovanov, L. M. Zelenyi, Phys. Rev. E **64**, 052101 (2001).
- [34] A. Veltri, V Carbone, Phys. Rev. Lett. **92**, 143901, (2004).
- [35] K. Kobayakawa, Y. S. Honda, T. Samura, Phys. Rev. D **66**, 083004, (2002).
- [36] M.A. Lieberman e A. J. Lichtenberg, Phys. Rev. A **5**, 1852 (1971).
- [37] E. D. Leonel, J. K. L. da Silva e S. O. Kamphorst, Physica A **331**, 435 (2004).
- [38] E. D. Leonel, P. V. E. McClintock e J. K. L. da Silva, Phys. Rev. Lett. **93**, 14101 (2004).
- [39] J. K. L. da Silva, D.G. Ladeira, E.D. Leonel, P.V.E. McClintock, S.O. Kamphorst, Braz. J. Phys **36**, 700 (2006).
- [40] D. G. Ladeira e J. K. L. da Silva, Phys. Rev. E, **73**, 026201 (2006).
- [41] E. D. Leonel, P.V.E. McClintock, Journal of Physics A: Mathematical and General, United Kingdom, **37**, 8949, (2004).
- [42] E. D. Leonel, P.V.E. McClintock, Chaos (Woodbury), **15**, 33701, (2005).
- [43] E. D. Leonel, Physical Review Letters, **98**, 114102, (2007).
- [44] J.M. Hammersley, Proc. 4th Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob. **79** (1961).
- [45] E. D. Leonel, J. Phys. A: Math. Theor. **40**, F1077 (2007).
- [46] O modelo simplificado de Fermi-Ulam foi introduzido por Lichtenberg e Lieberman e pode ser encontrado na referência [11].
- [47] R. Douady, Applications du théorème des tores invariants, Thèse de 3ème Cycle, University of Paris VII, 1982.

- 
- [48] M. A. Lieberman, A. J. Lichtenberg, Phys. Rev. A **5**, 1852 (1972).
- [49] Wen-Yu Chen and G.J. Milburn, Phys. Rev. E **56**, 351 (1997).
- [50] S. T. Dembinski, A. J. Makowski and P. Peplowski, Phys. Rev. Lett. **70**, 1093 (1993).
- [51] A. S. Wijn e H. Kantz, Phys. Rev. E **75**, 046214 (2007).
- [52] J.-C. Géminard e C. Laroche, Phys. Rev. E **68**, 031305 (2003).
- [53] F. Saif, Phys. Rep. **419**, 207 (2005); F. Saif, Phys. Rep. **425**, 369 (2006).
- [54] F. Saif and I. Rehman, Phys. Rev. A. **75**, 043610 (2007).
- [55] A. K. Karlis, F. K. Diakonov, V. Constantoudis and P. Schmelcher, Phys. Rev. Lett. **97**, 194102 (2006).
- [56] D. G. Ladeira e J. K. L. da Silva, J. Phys. A: Mathematical and Theoretical **40**, 11467 (2007).
- [57] A. Loskutov, A. B. Ryabov, J. Stat. Phys. **108**, 995 (2002).
- [58] E. D. Leonel, A. L. P. Livorati, Physica A **387**, 1155 (2008).
- [59] A. Loskutov, A. B. Ryabov and L. G. Akinshin, J. Phys. A: Math. Gen. **33**, 7973 (2000).
- [60] R. Egydio de Carvalho, F. C. Sousa, E. D. Leonel, Phys. Rev. E. **73**, 066229 (2006).
- [61] R. Egydio de Carvalho, F. C. de Sousa, E. D. Leonel, J. Phys. A **39**, 3561 (2006).
- [62] A. Loskutov, A. B. Ryabov, L. G. Akinshin, J. Exp. Theor. Phys. **89**, 966 (1999).
- [63] S. O. Kamphorst, E. D. Leonel e J. K. L. da Silva, J. Phys. A: Mathematical and Theoretical **40**, F887 (2007).
- [64] M. Schmick, Q. Liu, Q. Ouyang, M. Markus, Phys. Rev. E, **76**, 021115 (2007).
- [65] R. M. Everson, Physica D **19**, 355 (1986).

- 
- [66] G. A. Luna-Acosta, Phys. Rev. A **42**, 7155 (1990).
- [67] J. P. Eckmann and D. Ruelle, Rev. Mod. Phys. **57**, 617 (1985).
- [68] J. M. Luck e A. Mehta, Phys. Rev. E **48**, 3988 (1993).
- [69] A. Mehta e J. M. Luck, Phys. Rev. Lett. **65**, 393 (1990).