

**Dinâmica de Sistemas Acoplados
a um Reservatório com Flutuações Reduzidas
via Equação Mestra**

Marcelo Vítor da Cunha Pereira

Março de 2009

**Dinâmica de Sistemas Acoplados
a um Reservatório com Flutuações Reduzidas
via Equação Mestra**

Marcelo Vítor da Cunha Pereira
Orientadora: Profa. Maria Carolina Nemes

Financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pesquisa em Ensino Superior
(CAPES)

Dissertação apresentada à UNIVERSIDADE
FEDERAL DE MINAS GERAIS, como requisito
parcial para a obtenção do grau de mestre em
Física.

Janeiro de 2009

RESUMO

A equação mestra é usada aqui para descrever a dinâmica de um sistema que interage com um outro que possui infinitos graus de liberdade, que normalmente é chamado de reservatório. Sua utilidade é tornar possível uma descrição simples dessa dinâmica, relegando parte da informação concernente ao reservatório.

Nessa dissertação o reservatório é considerado como sendo descrito por um estado comprimido, que é tal que as dispersões associadas a alguns de seus operadores são reduzidas. Isso resulta numa série de efeitos peculiares, em princípio mensuráveis. Expomos em teoria esses efeitos assim como os meios para suas detecções. Isso faz necessário o uso de vários métodos comuns no estudo de sistemas abertos, como distribuições de quasi-probabilidade, o teorema da regressão quântico e os que envolvem a resolução de equações diferenciais parciais como a equação de Fokker-Planck.

A possibilidade de implementação experimental da dinâmica estudada, que ainda não foi feita, é discutida superficialmente. O modelo no entanto, descreve situações concretas que até então não foram realizadas pelas dificuldades técnicas envolvidas.

ABSTRACT

The master equation is used here to describe the dynamics of a system which interacts with another one which possesses an infinite number of degrees of freedom, and which is usually called reservoir. Its utility is in making possible the simple description of this dynamics, relegating part of the information concerning the reservoir.

In this master thesis the reservoir is considered as being described by a squeezed state, which is such that the dispersions associated with some of its operators are reduced. This results in a series of peculiar effects, measurable in principle. We expose theoretically these phenomena as well as the means of their detection. This makes necessary the use of several methods, which are commonplace in the study of open systems, like quasiprobability distributions, the quantum regression theorem and those which involve the resolution of partial differential equations like the Fokker-Planck equation.

The possibility of experimentally implementing the studied dynamics, which hasn't been done yet, is discussed superficially. The model however, describes concrete situations that until now have not been realized because of the technical difficulties involved.

CONTEÚDO

Introdução	1
1 Conceitos importantes	3
1.1 Quantização das variáveis conjugadas	4
1.1.1 Osciladores harmônicos	4
1.1.2 Quantização do campo livre	5
1.2 Estados de Fock	8
1.3 Estados coerentes	9
1.3.1 Estado coerente de um modo	11
1.3.2 Operadores de deslocamento	13
1.4 Quadraturas	14
1.4.1 Operadores de quadratura para um modo do campo	15
1.4.2 Operadores de quadratura multi-modal	17
1.5 Estados comprimidos	18
1.5.1 Propriedades dos estados comprimidos de um modo	18
1.5.2 Estados comprimidos multi-modais	20
1.6 Representações integrais do operador densidade	22
1.6.1 Função P generalizada e a função característica	23
1.6.2 Função de Wigner	24
Apêndice I: Relações BCH	27
2 Equação Mestra	28
2.1 Dedução e domínio de validade	29
2.1.1 Dedução	30
2.1.2 Mesma dinâmica para outros sistemas físicos	34
2.1.3 Discussão das aproximações	35
2.2 Propriedades da evolução para estados gerais	36
2.2.1 Média no número de excitações	37
2.2.2 Variâncias das quadraturas	37
2.3 Sistemas de dois níveis e constantes de decaimento	38
2.3.1 Evolução do sistema	40
2.3.2 Espectro da fluorescência de ressonância	41
Apêndice II: Teorema da regressão quântico	43

3	Soluções analíticas da equação mestra	44
3.1	Estado Gaussiano	44
3.1.1	Propriedades	44
3.1.2	Decoerência	45
3.2	Superposição de estados coerentes	48
3.2.1	Solução da equação mestra - Equação diferencial parcial	48
3.2.2	Solução da equação mestra - Separação dos operadores	49
3.2.3	Detecção homodina do estado	51
3.3	Superposição de estados de Fock	53
3.3.1	Equação de Fokker-Planck	53
3.3.2	Solução da equação de Fokker-Planck	54
3.3.3	Medição homodina para estados de Fock	56
	Apêndice III: Método das curvas características	58
	Conclusão	59
	Bibliografia	61

INTRODUÇÃO

Há situações em que dois ou mais sistemas formam um sistema maior isolado cujos componentes interagem entre si. Pode-se perguntar sobre a dinâmica do sistema total, que como se sabe, terá a evolução temporal regida por uma transformação unitária, pela qual quantidades como a energia total se conservarão. No entanto, quando apenas a dinâmica de um desses componentes interessa e por razões práticas não se pode calcular a evolução do sistema total, pode-se por vezes consegui-la deixando de lado o conhecimento completo do seu entorno. Esse sistema é considerado um sistema aberto ou não-isolado, que pode adquirir e ceder energia e mesmo perder algumas das suas características fundamentalmente quânticas (ver seção 3.1 e [1]).

A equação para a evolução dos operadores do sistema de interesse na representação de Heisenberg é um análogo próximo da equação de Langevin, porque um dos termos que nela consta age basicamente como um ruído cujas propriedades devem ser conhecidas apenas na média [2]. Em geral, exige-se como conhecimento dos sistemas que compõem o entorno apenas médias nos produtos de seus operadores. Na representação de interação (ver capítulo 2), podemos tentar obter uma equação de evolução para o operador densidade reduzido, que comprime quase toda a informação que se pode desejar extrair do sistema de interesse, e que é usualmente mais facilmente solúvel que as equações de Langevin quânticas. Ela é chamada equação mestra e seu análogo clássico menos evidente é a equação de Fokker-Planck, uma equação para a distribuição de probabilidade no espaço de fase. Na seção 3.3 a analogia se torna mais clara quando escrevemos o operador densidade em termos da função de Wigner (descrito na seção 1.6).

A equação mestra em geral depende apenas dos operadores do sistema de interesse e do operador densidade relativo a ele (veja seção 2.1 sobre operador densidade reduzido) em vários instantes de tempo. Porém, sob certas circunstâncias torna-se uma equação diferencial que só inclui o operador densidade em um único momento. Diz-se que esse tipo de dinâmica é markoviana porque o estado do sistema num instante prévio não influencia sua evolução daí em diante. Em [2], há uma dedução bem geral de equação mestra do tipo que ocorre na descrição dos fenômenos relacionados à ótica quântica, para os quais ela é uma ferramenta muito adequada e no capítulo 3 deduzo uma equação desse tipo para o caso em que tanto o sistema de interesse quanto o entorno são descritos como osciladores harmônicos. Esse tipo de modelo é comum ([2], [3], [4] por exemplo) e representa bem uma gama de sistemas.

Fisicamente, a equação mestra representa a influência do entorno, com muitos graus de liberdade, sobre o sistema de interesse. Ela é aplicável quando esse entorno

pouco é afetado pelo sistema (por essa razão ele é usualmente chamado de reservatório) e o efeito dele sobre o sistema se dá numa escala de tempo longa. Como explicado em [4], uma analogia conveniente é pensar no movimento browniano: uma partícula pesada (sistema de interesse) em um fluido (reservatório) se move aleatoriamente devido às colisões randômicas. A ordem do tempo entre as colisões é pequena e cada colisão pouco afeta o movimento da partícula mas o efeito acumulado de muitas colisões faz com que ela tenha um curso errático.

Nessa dissertação, as flutuações associadas ao reservatório que agem no sistema são consideradas comprimidas, no sentido de que em certos aspectos a sua influência é reduzida e em outros, amplificada. Embora haja uma dificuldade maior de expressar esse efeito sem o uso da matemática, veremos que em alguns casos podemos (segundo Gardiner em [2] ou Tombesi e Vitali em [5]) dizer especificamente que sistema físico é representado pelo sistema de interesse e que sistema é representado pelo reservatório. Ainda que não se saiba como implementar experimentalmente a dinâmica estudada aqui para uma situação particular, as propriedades teóricas previstas estarão dadas.

O capítulo 1 trata de conceitos variados que serão utilizados nos capítulos seguintes: estados quânticos pertinentes, observáveis que quantificam as propriedades importantes e representações integrais do sistema de interesse. Esse último tópico é usado principalmente no capítulo 3 como uma ferramenta prática na resolução analítica da equação mestra. Nesse último capítulo reproduziremos resultados já estabelecidos [6], faremos uma pequena generalização do exposto em [7] e faremos também uma conta que do conhecimento do autor não fora feita anteriormente, embora ela seja usada apenas para comprovar fatos esperados e não utilize métodos que já não eram conhecidos.

O capítulo 2 é fundamentalmente baseado no tratamento de Cohen-Tannoudji, Dupont-Roc e Grynberg [4] no que diz respeito à dedução da equação mestra. Em relação à equação mestra específica que é tratada aqui, algumas propriedades gerais são demonstradas e um resultado interessante de Gardiner ([2], seção 10.3) é reproduzido. Esse último dá um efeito mensurável da nossa dinâmica (em princípio apenas, porque até a presente data a comprovação experimental não aconteceu).

1 CONCEITOS IMPORTANTES

O objetivo desse capítulo é introduzir os estados quânticos que serão usados ao longo do resto da dissertação e as ferramentas que serão utilizadas na resolução da equação mestra no capítulo 3. Esses estados quânticos serão adiante usados na descrição tanto de campos eletromagnéticos como de partículas.

Na seção 1.1 será introduzido o formalismo necessário para tratar um campo eletromagnético quanticamente. A maneira rigorosa de quantizar um campo (o que está feito em [8], cap II) consiste em: primeiro, estabelecer que um campo eletromagnético é descrito de fato por variáveis conjugadas (no sentido do formalismo Hamiltoniano), e para tanto mostrar quais são elas a partir de um Lagrangeano; depois, às variáveis conjugadas associar operadores cujo comutador terá o valor de $i\hbar$, seguindo o método de quantização por analogia clássica de Dirac [9]. Aqui o tratamento será simplificado e por isso mais direto (o que de fato é feito na maior parte da literatura, incluindo [9]). Da quantização se poderá ver que o espectro de energia de um campo eletromagnético de um modo é discreto e que os estados estacionários de um campo livre são formalmente equivalentes aos estados estacionários de um sistema evoluindo sob a ação de um potencial harmônico. Esses estados são chamados de estados de Fock e são descritos na seção 1.2.

O *estado quasi-clássico* é introduzido na seção 1.3 como em [8]; o estado que melhor descreve quanticamente um campo com amplitude e fase bem definidas, mas as propriedades que o fazem ser chamado também de *estado coerente* são mencionadas, seguindo os artigos originais de Glauber [10]. Um estado trivialmente diferente do estado coerente, chamado *estado de Bargmann*, é introduzido rapidamente; uma de suas propriedades será utilizada seguidamente no capítulo 3. Finalizando a seção, algumas propriedades do *operador deslocamento*, extensivamente estudadas em [11] por Cahill e Glauber, serão apresentadas.

O conceito de quadraturas é importante na ótica e será abordado na seção 1.4. Esses são observáveis que podem ser acessados mediante a detecção homodina, e essa será a ferramenta considerada no capítulo 3 para esclarecer algumas propriedades mensuráveis nos estados cuja dinâmica é dada pela equação mestra. As quadraturas são também vitais para a apresentação do que segue, os estados comprimidos, que são aqueles a que se associa o conceito de “flutuações reduzidas” que aparece no título dessa dissertação.

Para terminar o capítulo, os estados são deixados de lado e nos concentramos nas representações integrais do operador densidade. Essas são diversas mas as que serão utilizadas no capítulo 3 são apenas duas. Essa ferramenta possibilita a substituição

de um problema que é resolver uma equação de operadores para o sistema em outro: resolver uma equação diferencial parcial para uma função que caracteriza esse sistema univocamente, como o operador densidade o caracteriza univocamente.

1.1 Quantização das variáveis conjugadas

No cap. 4 de [9] uma correspondência é traçada entre o colchete de Poisson (representado por $\{\bullet, \bullet\}$) e o comutador (representado por $[\bullet, \bullet]$). A idéia é que quando um sistema tratado for tal que sua dinâmica for bem descrita pelas equações clássicas, essas equações estejam contidas como uma primeira aproximação na formulação mais exata, que é a da mecânica quântica. Tanto o colchete de Poisson quanto o comutador satisfazem as mesmas propriedades de linearidade e a identidade de Jacobi. Uma das propriedades importantes do colchete de Poisson é que sempre q e p forem variáveis conjugadas, isso é, se

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

, onde L é o Lagrangeano que descreve a dinâmica do sistema,

$$\{q, p\} = 1$$

No caso de q e p serem operadores, a condição que leva à dinâmica correta é

$$[q, p] = i\hbar$$

\hbar é real porque $([q, p])^\dagger = (qp)^\dagger - (pq)^\dagger = -[q, p]$ é puramente imaginário ou anti-hermitiano, e é identificado como a constante de Planck dividida por 2π .

1.1.1 Osciladores harmônicos

A energia (e nesse caso também o Hamiltoniano) de um número N de osciladores harmônicos é

$$H = \sum_{j=1}^N \frac{p_j^2}{2m_j} + m_j \omega_j^2 \frac{q_j^2}{2} \quad (1.1.1)$$

As variáveis conjugadas são nesse caso a posição q_j e o respectivo momento p_j para $j = 1, 2, \dots, N$. A quantização se dá portanto fazendo

$$[q_j, p_{j'}] = i\hbar \delta_{jj'} \quad (1.1.2)$$

Introduzo os operadores

$$a_j = \frac{(m_j \omega_j q_j + i p_j)}{\sqrt{2\hbar m_j \omega_j}} \quad , \quad a_j^\dagger = \frac{(m_j \omega_j q_j - i p_j)}{\sqrt{2\hbar m_j \omega_j}} \quad (1.1.3)$$

que, pela relação de comutação (1.1.2) satisfazem:

$$[a_j, a_j^\dagger] = \delta_{jj'} \quad (1.1.4)$$

Em termos desses a energia se escreve

$$H = \sum_{j=1}^N \frac{\hbar\omega_j}{2} (a_j^\dagger a_j + a_j a_j^\dagger) = \sum_{j=1}^N \hbar\omega_j \left(a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2} \right)$$

, onde se usou (1.1.4). O termo constante do hamiltoniano ($\sum_{j=1}^N \frac{\hbar\omega_j}{2}$) não tem efeito sobre a dinâmica dos osciladores e pode ser suprimido, de modo que escrevemos a energia como

$$H = \sum_{j=1}^N \hbar\omega_j a_j^\dagger a_j \quad (1.1.5)$$

Na representação de Heisenberg, a evolução dos operadores a_j e a_j^\dagger é dada por

$$\frac{da_j}{dt}(t) = \frac{1}{i\hbar} [a_j, H] = -i\omega a_j(t) \quad , \quad \frac{da_j^\dagger}{dt}(t) = i\omega a_j^\dagger(t) \quad (1.1.6)$$

e a solução das equações acima nos dá

$$a_j = a_j(0)e^{-i\omega t} \quad , \quad a_j^\dagger = a_j^\dagger(0)e^{i\omega t} \quad (1.1.7)$$

1.1.2 Quantização do campo livre

A energia (que também equivale ao Hamiltoniano) de um sistema que consiste apenas num campo eletromagnético confinado em um volume \mathcal{V} no vácuo é dada por

$$H = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} [\mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + c^2 \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t)] d^3r \quad (1.1.8)$$

No calibre de Coulomb (e na ausência de cargas), a descrição dos campos elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ está contida no potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ em termos do qual eles são escritos como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) \quad , \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (1.1.9)$$

O calibre de Coulomb impõe sobre $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ a condição

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (1.1.10)$$

e as equações de Maxwell implicam

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.1.11)$$

Fazendo a separação de variáveis $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0^{-1/2} \mathbf{u}(\mathbf{r})q(t)$ teremos

$$\ddot{q} = -k^2 c^2 q \quad (1.1.12a)$$

$$(\nabla^2 + k^2) \mathbf{u} = 0 \quad (1.1.12b)$$

Uma função que satisfaz (1.1.12b) para um determinado \mathbf{k} é uma autofunção de ∇^2 e será denotada por $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, sendo em geral complexa. Se nos restringirmos a autofunções limitadas na superfície que delimita o volume \mathcal{V} (ainda que esse volume seja infinito), elas possuirão autovalor $-\mathbf{k}^2$ negativo (ver problema 10.1 de [12] e cap. 6 de [13]), o que implica \mathbf{k} real. Além disso, elas são ortogonais e podem ser escolhidas também normalizadas (se \mathbf{k} puder assumir qualquer valor real, a normalização é no sentido de delta de Dirac).

Se o volume em que está contido o campo for delimitado por uma cavidade perfeitamente refletora de superfície S , as condições de contorno

$$\mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{r}, t)|_{\mathbf{r} \in S} = 0 \quad , \quad \mathbf{B}_{\perp}(\mathbf{r}, t)|_{\mathbf{r} \in S} = 0 \quad (1.1.13)$$

impõem restrições adicionais às formas das autofunções $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ e sobre os possíveis valores de \mathbf{k} , que passarão a admitir apenas um número discreto de soluções. Identificaremos os possíveis valores de \mathbf{k} por um índice j e a autofunção correspondente como $\mathbf{u}_j(\mathbf{r})$. Assim,

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{u}_j^*(\mathbf{r}) \mathbf{u}_{j'}(\mathbf{r}) d^3r = \delta_{jj'} \quad (1.1.14)$$

A solução geral de (1.1.11) será enfim do tipo

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0^{-1/2} \sum_j \mathbf{u}_j(\mathbf{r}) q_j(t) \quad (1.1.15)$$

, onde $q_j(t)$ tem a evolução dada por uma equação do tipo oscilador harmônico com frequência $\omega_j = ck_j$. De fato, definindo $p_j = \dot{q}_j$, podemos reescrever a energia (1.1.8) como

$$H = \sum_j \frac{p_j^2}{2} + \omega_j^2 \frac{q_j^2}{2} \quad (1.1.16)$$

que é formalmente igual à energia dos osciladores harmônicos (1.1.1) de mesma massa $m_j = 1$, exceto que, como são infinitos os modos de uma cavidade, a soma em j terá infinitos termos. É importante não interpretar q_j e p_j como posição e momento associados ao modo \mathbf{k}_j ; eles estão associados às amplitudes dos campos elétrico e magnético¹. Na seção 1.4 veremos que q_j e p_j estão relacionados a um dos possíveis pares chamados no contexto da ótica de quadraturas conjugadas. Como H é o Hamiltoniano do sistema, pode-se ver que de fato q_j e p_j são variáveis canonicamente conjugadas e por isso podemos, num tratamento quântico, associá-los a operadores que obedecem à relação de comutação (1.1.2).

¹Em [14], os autores argumentam que não se pode definir um estado para o campo tal que ele esteja localizado em um ponto, o que impossibilita a concepção de um operador posição relativo a esse sistema.

Definindo os operadores

$$a_j = \frac{(\omega_j q_j + ip_j)}{\sqrt{2\hbar\omega_j}} \quad , \quad a_j^\dagger = \frac{(\omega_j q_j - ip_j)}{\sqrt{2\hbar\omega_j}} \quad (1.1.17)$$

que satisfazem a relação de comutação (1.1.4), a energia poderá novamente ser escrita como

$$H = \sum_{j=1}^N \hbar\omega_j \left(a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2} \right)$$

O termo que não envolve operadores não deve ser suprimido sem algum cuidado, porque sendo a soma sobre um número infinito de termos, ele sozinho resulta em uma energia infinita. No entanto, efetivamente ele não trará mudanças na dinâmica dos sistemas considerados e alguns argumentos podem ser dados de maneira a tornar razoável o seu descarte (como no final da seção 10.3 de [15]). Deixando essas questões de lado, escreveremos a energia como

$$H = \sum_j \hbar\omega_j a_j^\dagger a_j \quad (1.1.18)$$

Até então não se assumiu uma forma determinada para a cavidade, o que não nos permite especificar o conjunto $\{\mathbf{k}_j\}$ e as funções $u_j(\mathbf{r})$, mas ao longo da dissertação apenas será considerado o efeito de um campo em um único ponto, o que torna irrelevante essa especificação. Por definição, no entanto, faremos a escolha conveniente de uma cavidade cúbica de aresta L , o que implica que

$$u_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}} \mathbf{e}_j \quad , \quad \text{com } (\mathbf{k}_j)_i = \frac{2\pi n_j^{(i)}}{L} \quad , \quad n_j^{(i)} \text{ inteiro} \quad (1.1.19)$$

$(\mathbf{k}_j)_i$ é a componente i de \mathbf{k}_j e \mathbf{e}_j dá a direção de polarização referente a esse modo e que deve, em via da equação (1.1.10) do calibre de Coulomb, estar necessariamente num plano perpendicular à direção de \mathbf{k}_j . Estabelecidas essas convenções, podemos escrever os campos como:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_j \left(\frac{\hbar}{2\omega_j \epsilon_0} \right)^{1/2} [a_j e^{i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - \omega_j t)} \mathbf{e}_j + c.c.] \quad (1.1.20a)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_j \left(\frac{\hbar\omega_j}{2\epsilon_0} \right)^{1/2} [ia_j e^{i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - \omega_j t)} \mathbf{e}_j + c.c.] \quad (1.1.20b)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_j \left(\frac{\hbar}{2\omega_j \epsilon_0} \right)^{1/2} [ia_j e^{i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - \omega_j t)} (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_j) + c.c.] \quad (1.1.20c)$$

Deve-se ressaltar,

- A quantização feita através de analogia clássica é mais clara na representação de Heisenberg, porque classicamente a evolução temporal está contida inteiramente nos observáveis. Os operadores acima dependem de t e por se referirem a um sistema que é o campo isolado, toda a evolução de fato está contida nas exponenciais. Em geral, no entanto, a evolução desses operadores na representação de Heisenberg é mais complexa porque o campo colocado para interagir com um ou mais sistemas terá a dinâmica regida por um Hamiltoniano com mais termos do que o de (1.1.18). Além disso, em cálculos práticos é muitas vezes mais conveniente lidar ou com a evolução temporal inteiramente contida no estado do sistema, ou pelo menos na representação de interação, que será introduzida no próximo capítulo.
- O termo $i \left(\frac{\hbar\omega_j}{2\epsilon_0} \right)^{1/2} a_j$ por exemplo, pode ser interpretado como a amplitude complexa do operador \mathbf{E} referente ao modo \mathbf{k}_j , embora não se deva esquecer que a descrição do sistema campo está efetivamente contida no seu estado.

1.2 Estados de Fock

Os operadores $a_j^\dagger a_j$ são hermitianos e portanto possuem autovalores reais n_j correspondendo aos autoestados $|n_j\rangle$. Um estado $|\{n\}\rangle$ que é autoestado de $a_j^\dagger a_j$ para todos os j é claramente um autoestado da energia, e possui autovalor $\sum_j \hbar\omega_j n_j$. Pode-se mostrar também que $|\{n\}\rangle$ é também um autoestado do momento relativo ao campo com autovalor $\sum_j \hbar\mathbf{k}_j n_j$. Isso se deve à escolha do modo normal (1.1.19) que, no caso de uma partícula (e ignorando \mathbf{e}_j), descreve um estado tal que ela tem momento definido $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}_j$. Outras escolhas são possíveis; por exemplo, que levam a autoestados da energia, do momento angular \mathbf{L}^2 e de L_z . Isso está feito no complemento B_I de [8].

Como

$$|\{n\}\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \dots \quad (1.2.1)$$

podemos nos concentrar nas propriedades de apenas um dos modos; os outros terão características análogas. Seja $|n\rangle$ o autoestado de $a^\dagger a$ com autovalor n para um modo específico. $a|n\rangle$ será algum outro ket e portanto temos,

$$n = \langle n| a^\dagger a |n\rangle \geq 0 \quad (1.2.2)$$

onde a igualdade vale apenas se $a|n\rangle = 0$ e $n = 0$. Temos portanto,

$$a|0\rangle = 0 \quad (1.2.3)$$

Usando a relação de comutação $[a, a^\dagger] = 1$,

$$a^\dagger a (a|n\rangle) = (a a^\dagger a - a) |n\rangle = (n - 1) (a|n\rangle)$$

, ou seja, $a|n\rangle$ é um autoestado de $a^\dagger a$ com autovalor $n - 1$. A aplicação repetida de a em um ket $|n\rangle$ nos dará estados correspondentes a autovalores cada vez menores que, em vista da desigualdade (1.2.2), devem ser maiores do que zero. No entanto, aplicar a seguidamente em $|n\rangle$ eventualmente nos dará um autoestado com autovalor negativo a menos que n seja um inteiro, o que faz que $a^{n+1}|n\rangle = 0$ pela equação (1.2.3). Segue que os autovalores de $a^\dagger a$ são os inteiros não-negativos (não há limite superior para o valor de n porque se houvesse teríamos $\langle n|aa^\dagger|n\rangle = n + 1 = 0$ para algum n positivo, o que não é possível).

Temos também

$$a^\dagger a (a^\dagger |n\rangle) = (n + 1) (a^\dagger |n\rangle)$$

e, assumindo que os $|n\rangle$ são normalizados chegaremos a

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n + 1} |n + 1\rangle \quad (1.2.4a)$$

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n - 1\rangle \quad (1.2.4b)$$

Os $|n\rangle$ são conhecidos como estados de Fock e suas representações no espaço de \mathbf{q} , $\langle \mathbf{q}|n\rangle$, são proporcionais aos polinômios de Hermite de ordem n , cuja completeza é conhecida, e isso assegura que a base dos $|n\rangle$ é também completa. Diz-se, no caso em que $|n\rangle$ descreve o estado de um modo do campo, que este modo possui n excitações ou há n fótons associados a ele. Os operadores a^\dagger e a estão portanto associados à criação e destruição, respectivamente, de um fóton do modo correspondente. Naturalmente, pode-se desenvolver esses argumentos para o caso em que o conjunto de operadores $\{a_p^\dagger, a_p\}$ está associado à criação e destruição de excitações em outros estados que não os de momento definido $\hbar\mathbf{k}_j$ (como os estados com momento angular \mathbf{L}^2 e L_z definidos). Eles satisfarão as mesmas relações de comutação $[a_{p'}, a_p^\dagger] = \delta_{p'p}$ e portanto o espectro dos $\{a_p^\dagger a_p\}$ obedecerá as mesmas restrições (1.2.2), (1.2.3), (1.2.4). Os dois conjuntos estarão relacionados por uma transformação linear (ver §60 de [9]).

1.3 Estados coerentes

O estado coerente $|\alpha\rangle$ de um modo pode ser definido como

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (1.3.1)$$

, ou seja, como autoestado do operador destruição daquele modo. O estado coerente de muitos modos será definido analogamente como autoestado de qualquer dos operadores a_j :

$$a_j |\{\alpha\}\rangle = \alpha_j |\{\alpha\}\rangle \quad , \quad |\{\alpha\}\rangle = |\alpha_1\rangle \otimes |\alpha_2\rangle \otimes \dots \quad (1.3.2)$$

onde $|\alpha_j\rangle$ representa o autoestado do operador a_j com autovalor α_j . A definição acima parece arbitrária mas aparece naturalmente quando se busca um estado que satisfaz qualquer uma das seguintes propriedades:

- Em [10], é feito um estudo da coerência ótica que, em resumo, determina se o estado do campo é tal que há uma relação definida para sua fase em cada ponto do espaço-tempo, quantificando-a em termos de observáveis acessíveis mediante experimentos de foto-deteccção (ver [15], cap. 9 para a teoria semi-clássica de foto-deteccção e cap. 14 para a quântica). Os estados coerentes aparecem naturalmente como aqueles em que a diferença de fase para o campo entre quaisquer pontos do espaço-tempo é completamente determinada. A origem do nome *estados coerentes* advém dessa propriedade.
- A energia de um campo livre e o campo elétrico associado podem ser escritos classicamente como (ver [8], 1 – C):

$$\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_j \left(\frac{\hbar\omega_j}{2\epsilon_0} \right)^{1/2} [i\alpha_j e^{i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - \omega_j t)} \mathbf{e}_j + c.c.]$$

$$H_c = \sum_j \hbar\omega_j \alpha_j^* \alpha_j$$

Essas expressões podem ser obtidas tomando o valor médio dos operadores $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e H dados em (1.1.18) e (1.1.20) no estado coerente (1.3.2). O mesmo vale para o campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ e potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$. Portanto o estado coerente é tal que o valor médio das quantidades fisicamente importantes têm comportamento clássico. Some-se a isso o fato de que a variância $\langle (\Delta a_j)^2 \rangle$ dos operadores a_j que estão de certa forma relacionados com as amplitudes complexas dos campos é nula para esses estados. Os campos coerentes têm como análogo clássico imediato os campos com amplitudes complexas bem definidas.

- As variâncias de q_j e p_j são $\langle (\Delta q_j)^2 \rangle = \langle (\Delta p_j)^2 \rangle = \hbar/2$, as menores possíveis em vista da desigualdade de Heisenberg

$$\langle (\Delta q_j)^2 \rangle \langle (\Delta p_j)^2 \rangle \leq \frac{\hbar^2}{4} \quad (1.3.3)$$

A dinâmica dada pelo Hamiltoniano (1.1.5) dos osciladores harmônicos ou (1.1.18) do campo é tal que $\langle q_j \rangle \propto \cos(\omega_j t - \phi_j)$ e $\langle p_j \rangle \propto \sin(\omega_j t - \phi_j)$. Se o estado coerente está representando um oscilador harmônico, o valor médio de q_j e p_j , que nesse caso podem ser interpretados como posição e momento, oscilam no tempo como posição e momento de um oscilador clássico.

Pelos dois últimos itens, o estado coerente é também conhecido como *estado quasi-clássico*. A coerência ótica além disso, faz com que ele seja usado na descrição de campos como os *lasers* (ver cap. 18 de [15]). Das outras propriedades que não serão demonstradas aqui, vale mencionar as seguintes:

- Uma corrente clássica que é descrita por uma função $j(t)$ do tempo determinada (que portanto não representa um grau de liberdade, em particular significando que não é afetada pelo campo gerada por ela própria) sempre gera um estado coerente (ver [8], complemento B_{III} ou [15] seção 11.13).

- Os resultados de medições interferométricas calculados com o formalismo quântico no caso em que o campo está em um estado coerente são precisamente os mesmo de quando os cálculos são feitos com a teoria eletromagnética clássica, com o campo descrito por $\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}_c(\mathbf{r}, t)$ (ver [8], complemento A_{III}).

Se algum $|\alpha_i| \gg 1$, as consequências da não-comutatividade de a_i e a_i^\dagger se tornam irrelevantes. Por exemplo, no valor médio $\langle \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) \rangle$ aparecem termos $\langle a_i^\dagger a_i \rangle = |\alpha_i|^2$ e $\langle a_i a_i^\dagger \rangle = |\alpha_i|^2 + 1 \approx |\alpha_i|^2$. Nesse caso, a substituição dos operadores a_i e a_i^\dagger pelos números α_i e α_i^* pode ser feita sem prejuízo da descrição do campo, e nesse sentido quanto maior os $\{|\alpha_j|\}$ do estado, mais ele se aproxima de um campo clássico.

Vamos trabalhar algumas propriedades dos estados coerentes que serão importantes para esse trabalho, nos limitando ao campo de apenas um modo.

1.3.1 Estado coerente de um modo

Para o estado de um modo, temos então as relações duais:

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad \langle\alpha|a^\dagger = \langle\alpha|\alpha^* \quad (1.3.4)$$

Podemos expandir um estado $|\alpha\rangle$ na base dos estados de Fock. Usando o dual de (1.2.4a) e (1.3.4), temos que $\langle n|a|\alpha\rangle = \sqrt{n+1}\langle n+1|\alpha\rangle = \alpha\langle n|\alpha\rangle$, relação de recorrência que nos leva a

$$\langle n|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\langle 0|\alpha\rangle$$

Usando $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$:

$$|\alpha\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|\alpha\rangle = \langle 0|\alpha\rangle \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

O quadrado da norma do vetor $|\alpha\rangle$ é $\langle\alpha|\alpha\rangle = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 e^{|\alpha|^2}$. Para que ele esteja normalizado, podemos exigir portanto $\langle 0|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}$. Escrito na base dos $|n\rangle$, os estados coerentes se tornam:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad \langle\alpha| = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} \langle n| \quad (1.3.5)$$

Isso mostra que a probabilidade de encontrarmos $|\alpha\rangle$ no estado de ocupação $|n\rangle$ segue uma distribuição de Poisson com valor médio $|\alpha|^2$

$$|\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}$$

e que o estado coerente com $\alpha = 0$ corresponde ao estado de vácuo $|0\rangle$. Definindo

$$||\alpha\rangle = e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} |\alpha\rangle = \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (1.3.6)$$

conhecido como estado de Bargmann, vemos que

$$\langle n | a^\dagger | \alpha \rangle = \sqrt{n} \langle n-1 | \alpha \rangle = \frac{n\alpha^{n-1}}{\sqrt{n!}} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \langle n | \alpha \rangle$$

, onde $\langle n | \alpha \rangle$ é o produto interno formado pelo ket $| \alpha \rangle$ e o bra $\langle n |$. Esse resultado vale para qualquer $\langle n |$, e como a base dos estados de Fock é completa, segue que

$$\langle u | a^\dagger | \alpha \rangle = \sum_n \langle u | n \rangle \langle n | a^\dagger | \alpha \rangle = \frac{\partial}{\partial \alpha} \langle u | \alpha \rangle \quad (1.3.7)$$

para $\langle u |$ qualquer.

Novamente pela expansão (1.3.5), usando a ortonormalidade dos $| n \rangle$ temos as relações:

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \exp \left\{ \alpha^* \beta - \frac{1}{2} |\alpha|^2 - \frac{1}{2} |\beta|^2 \right\} \Rightarrow |\langle \beta | \alpha \rangle|^2 = \exp \{ |\alpha - \beta|^2 \} \quad (1.3.8)$$

Os estados coerentes não são ortogonais, exceto aproximadamente para α e β suficientemente diferentes, mas vetores arbitrários ainda podem ser expandidos em termos destes, desde que eles formem uma base completa. Denotando as variáveis de integração no plano complexo dos α como $d^2\alpha = d(\text{Re } \alpha)d(\text{Im } \alpha)$ e escrevendo $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$, temos:

$$\int (\alpha^*)^n \alpha^m e^{-|\alpha|^2} d^2\alpha = \int_0^\infty |\alpha|^{n+m+1} e^{-|\alpha|^2} d|\alpha| \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta = \pi n! \delta_{n,m}$$

Usando essa identidade e (1.3.5) temos

$$\int |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha = \pi \sum_n |n\rangle\langle n|$$

A base dos $| n \rangle$ é completa e por isso

$$\int |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha = \pi \quad (1.3.9)$$

, o que demonstra a completeza da base dos $| \alpha \rangle$ (na verdade, super-completeza, o que significa que um estado qualquer pode ser expandido em termos desses de maneira não-única; ver [15], seção 11.6).

Usando a expansão de $| \alpha \rangle$ (1.3.5) na base dos estados de Fock e o gerador da dinâmica $H = \hbar\omega a^\dagger a$, na representação de Schroedinger temos que o estado evolui de modo que

$$| \alpha \rangle (t) = | \alpha e^{-i\omega t} \rangle \quad (1.3.10)$$

1.3.2 Operadores de deslocamento

Um estado coerente pode ser escrito como

$$|\alpha\rangle = D(\alpha) |0\rangle \quad , \quad D(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} \quad (1.3.11)$$

, onde $e^{\alpha a^\dagger} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!}$. Isso pode ser visto usando (1.2.4) e (1.3.5). O termo $e^{-\alpha^* a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha^* a)^n}{n!}$ foi acrescentado usando $a |0\rangle = 0$ por razões que ficarão claras a seguir. Há certas identidades que serão úteis aqui e estão demonstradas no apêndice I (outras em [15], seção 10.11). Elas são devidas a Baker, Campbell e Hausdorff e por isso são conhecidas como relações BCH. Sejam A e B operadores que satisfazem

$$[[A, B], A] = [[A, B], B] = 0$$

, então temos o caso particular de uma dessas relações

$$e^{-\frac{1}{2}[A,B]} e^A e^B = e^{A+B} \quad (1.3.12)$$

Os operadores de criação e aniquilação satisfazem a relação acima, então $D(\alpha)$ pode ser escrito das seguintes formas:

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} \quad (1.3.13a)$$

$$D(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} \quad (1.3.13b)$$

$$D(\alpha) = e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\alpha^* a} e^{\alpha a^\dagger} \quad (1.3.13c)$$

Pela primeira delas, vê-se que $D^\dagger(\alpha) = D^{-1}(\alpha)$ e que $D(-\alpha) = D^\dagger(\alpha)$. Observe primeiramente que

$$\begin{aligned} \int e^{\nu(\alpha-\beta)^* - \nu^*(\alpha-\beta)} d^2\nu &= \int e^{2i[Re(\nu)Im(\alpha-\beta) + Im(\nu)Re(\alpha-\beta)]} d(Re \nu) d(Im \nu) \\ &= \pi^2 \delta^2(\alpha - \beta) \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

, onde $\delta^2(\alpha-\beta) = \delta[Re(\alpha) - Re(\beta)] \delta[Im(\alpha) - Im(\beta)]$. Tomando o traço de (1.3.13b), usando a completeza dos estados coerentes, temos então:

$$\begin{aligned} tr\{D(\alpha)\} &= \pi^{-1} \int \langle \beta | D(\alpha) | \beta \rangle d^2\beta = \pi^{-1} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \int e^{\alpha\beta^* - \alpha^*\beta} d^2\beta \\ &= \pi e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \delta^2(\alpha) = \pi \delta^2(\alpha) \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

Ainda, usando (1.3.12) e (1.3.13a), chegamos ao resultado:

$$D(\alpha + \beta) = e^{-\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)} D(\alpha) D(\beta) \quad (1.3.16)$$

A quantidade entre parênteses no exponencial é um número imaginário puro. Tomando o traço dos dois lado obtemos então:

$$tr\{D(\alpha)D(\beta)\} = \pi \delta^2(\alpha + \beta) \quad (1.3.17)$$

Outra das relações BCH, válida para quaisquer operadores X e G , é

$$e^{\lambda G} X e^{-\lambda G} = X + \frac{\lambda}{1!} [G, X] + \frac{\lambda^2}{2!} [G, [G, X]] + \dots \\ + \frac{\lambda^n}{n!} \overbrace{[G, [G, \dots [G, [G, X]] \dots]]}^{n \text{ comutadores}} + \dots \quad (1.3.18)$$

Usando essa identidade com (1.3.13a) temos

$$D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) = a + \alpha \quad , \quad D^\dagger(\alpha) a^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^*$$

de onde segue, usando $D(\alpha) D^\dagger(\alpha) = 1$, que

$$D^\dagger(\alpha) a^n D(\alpha) = D^\dagger(\alpha) a^{n-1} D(\alpha) D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) = (D^\dagger(\alpha) a D(\alpha))^n = (a + \alpha)^n \\ D^\dagger(\alpha) (a^\dagger)^n D(\alpha) = (D^\dagger(\alpha) a^\dagger D(\alpha))^n = (a^\dagger + \alpha^*)^n$$

Através dessas equações chegamos ao resultado

$$D^\dagger(\alpha) f(a^\dagger, a) D(\alpha) = f(a^\dagger + \alpha^*, a + \alpha) \quad (1.3.19)$$

válido para funções apenas de a e a^\dagger expandíveis em série desses operadores. Por essas relações, $D(\alpha)$ é chamado de operador de deslocamento com respeito a a e a^\dagger .

1.4 Quadraturas

Definimos as quadraturas conjugadas Q_θ e P_θ de um modo j como

$$Q_{\theta j} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_j e^{-i\theta} + a_j^\dagger e^{i\theta}) \quad , \quad P_{\theta j} = Q_{(\theta+\pi/2)j} \quad (1.4.1)$$

Foi mencionado na primeira seção que os operadores q_j e p_j estão relacionados às quadraturas. De fato, pode-se ver que

$$q_j = \sqrt{\frac{\hbar}{\omega_j}} Q_{\theta=0j} \quad , \quad p_j = \sqrt{\hbar \omega_j} P_{\theta=0j}$$

Da relação de comutação $[q_j, p_{j'}] = i\hbar \delta_{jj'}$ segue imediatamente

$$[Q_{\theta j}, P_{\theta j'}] = i\delta_{jj'} \quad (1.4.2)$$

, e dessa relação segue a desigualdade (análoga à desigualdade de Heisenberg para q e p)

$$\langle (\Delta Q_{\theta j})^2 \rangle \langle (\Delta P_{\theta j})^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \quad (1.4.3)$$

Essa desigualdade é fundamental como ponto de partida na descrição dos estados comprimidos da próxima seção.

Os autoestados de um operador de quadratura Q_{θ_j} formam uma base para o modo j assim como os autoestados de q_j formam uma base para os estados referentes ao modo j . Matematicamente, isso significa que se estamos considerando apenas o subespaço relativo ao modo j e se $|q'_{\theta_j}\rangle$ é um autoestado de Q_{θ_j} com autovalor q'_{θ_j} ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |q'_{\theta_j}\rangle\langle q'_{\theta_j}| dq'_{\theta_j} = 1 \quad (1.4.4)$$

1.4.1 Operadores de quadratura para um modo do campo

Uma representação pictórica costumeira que se faz de um estado de um modo é feita com um desenho bidimensional com dois eixos ortogonais, representando Q_{θ} e P_{θ} . Repare que pela relação

$$Q_{\theta} + iP_{\theta} = (Q_0 + iP_0)e^{-i\theta} \quad (1.4.5)$$

os eixos correspondentes aos Q_{θ} e P_{θ} no mesmo plano são obtidos dos primeiros girando-os no sentido anti-horário por θ (comparando as partes real e imaginária de cada lado de (1.4.5) isso fica claro).

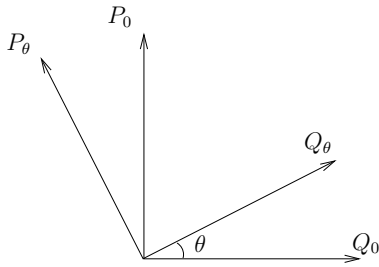


Figura 1.1: Rotação dos eixos segundo (1.4.5)

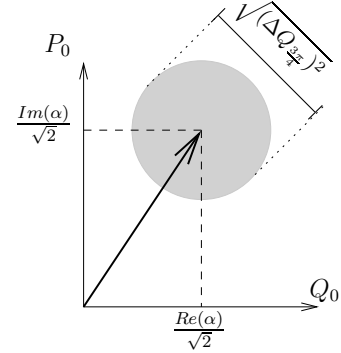


Figura 1.2: Estado coerente

Considere como exemplo o estado coerente $|\alpha\rangle$ caracterizado pelos valores médios e variâncias

$$\langle Q_{\theta} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \alpha | (ae^{-i\theta} + a^{\dagger}e^{i\theta}) | \alpha \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha e^{-i\theta} + \alpha^* e^{i\theta}) \quad (1.4.6a)$$

$$\langle (\Delta Q_{\theta})^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \alpha | [e^{2i\theta}((a^{\dagger})^2 - (\alpha^*)^2) + e^{-2i\theta}(a^2 - \alpha^2) + (2a^{\dagger}a - 2|\alpha|^2) + 1] | \alpha \rangle = \frac{1}{2} \quad (1.4.6b)$$

, onde usou-se a relação de comutação $[a, a^{\dagger}] = 1$. Nessa representação, o vetor na figura tem como componentes os valores médios do eixo usado; no caso da figura 1.2, esses valores são $\langle Q_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Re}(\alpha)$ e $\langle P_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Im}(\alpha)$. Já a largura do círculo

em uma direção dada segundo um ângulo θ' representa a raiz quadrada da variância $\sqrt{\langle(\Delta Q_{\theta'})^2\rangle}$. A forma circular reflete portanto o fato de que a variância não depende do ângulo θ' escolhido.

No capítulo 3 será necessária a forma explícita do produto interno $\langle q_\theta|\alpha\rangle$; ela pode ser calculada lembrando que, pela definição de $|\alpha\rangle$ em (1.3.6), temos

$$\langle q_\theta|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \langle q_\theta||\alpha\rangle$$

Usando a hermiticidade de Q_θ e a relação (1.3.7), teremos

$$\langle q_\theta|Q_\theta||\alpha\rangle = q_\theta \langle q_\theta||\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{-i\theta}\alpha + e^{i\theta}\frac{\partial}{\partial\alpha} \right] \langle q_\theta||\alpha\rangle$$

, cuja solução nos dá a função de onda normalizada

$$\langle q_\theta|\alpha\rangle = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}q_\theta^2 + \sqrt{2}x_\theta\alpha e^{-i\theta} - \frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{1}{2}\alpha^2 e^{-2i\theta}} \quad (1.4.7)$$

Embora pareça até o momento que as quadraturas sejam construções meramente teóricas, elas na verdade podem ser medidas através de um esquema conhecido como detecção homodina. A montagem simplificada está ilustrada na figura 1.3 (para mais detalhes, ver referências dadas em [16], seção 4.3). A idéia é superpor o feixe do sistema de interesse descrito pelos operadores a e a^\dagger com um outro de referência coerente e intenso e de mesma frequência (razão do nome homodina), comumente chamado de *oscilador local*, representado pelos operadores b e b^\dagger . Isso é feito através de um divisor de feixes DF (um espelho semi-refletor aqui considerado ideal com transmitância 1/2 e reflectância 1/2). A superposição resulta nos campos cujos termos envolvendo os operadores de aniquilação são

$$c_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}a + i\sqrt{\frac{1}{2}}b \quad (1.4.8a)$$

$$c_2 = i\sqrt{\frac{1}{2}}a + \sqrt{\frac{1}{2}}b \quad (1.4.8b)$$

O cálculo foi feito na representação de Heisenberg². A analogia com a situação clássica, em que as amplitudes complexas do campo satisfazem as mesmas relações (1.4.8), pode ser usada como uma justificativa heurística. De fato, a correspondência entre a amplitude complexa α e o operador a foi notada no início da seção 1.3.

Os fotodetectores D1 e D2 produzem uma corrente mensurável quando um campo incide sobre eles, e cuja magnitude é proporcional a, respectivamente, (ver complemento **A_{II}** de [4] e cap. 14 de [15]):

$$\begin{aligned} c_1^\dagger c_1 &= \frac{1}{2}a^\dagger a + \frac{1}{2}b^\dagger b + i\frac{1}{2}(a^\dagger b - b^\dagger a) \\ c_2^\dagger c_2 &= \frac{1}{2}a^\dagger a + \frac{1}{2}b^\dagger b - i\frac{1}{2}(a^\dagger b - b^\dagger a) \end{aligned}$$

²A conta foi feita na representação de Schroedinger em [16], seção 4.1.2.

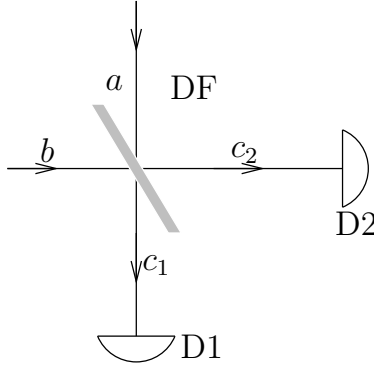


Figura 1.3: Esquema para detecção homodina

A hipótese de que o campo b é um estado coerente intenso permite-nos aproximar o operador $b \approx |\epsilon| e^{i\theta}$ (ver introdução da seção 1.3), onde o lado direito é um número complexo e θ é a fase entre o feixe do oscilador local e o do sistema de interesse, que pode ser variada, por exemplo, modificando a distância percorrida pelo feixe b . Se calcularmos nessa aproximação a diferença entre as intensidades medidas em D1 e D2, chegamos a um observável proporcional a

$$c_2^\dagger c_2 - c_1^\dagger c_1 = \frac{i}{2} |\epsilon| (a^\dagger e^{i\theta} - a e^{-i\theta}) = \frac{|\epsilon|}{\sqrt{2}} P_\theta \quad (1.4.9)$$

Feitas várias medidas para um mesmo θ escolhido obtém-se a distribuição de probabilidades associados aos autovalores de P_θ . Fazendo a mudança $\theta \rightarrow \theta - \pi/2$ o observável a ser medido será Q_θ . Percebe-se assim que a cada escolha de θ corresponde a medida de uma quadratura específica.

1.4.2 Operadores de quadratura multi-modal

O operador campo elétrico, seja de um ou vários modos, pode ser separado na parte que contém apenas os operadores de aniquilação e na que contém os operadores de criação,

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_j \varepsilon_j a_j e^{-i(\omega_j t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \mathbf{e}_j \quad , \quad \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)]^\dagger \quad (1.4.10)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \quad , \quad \varepsilon_j = \frac{i}{4} \sqrt{\frac{\hbar \omega_j}{\epsilon_0 \pi^3}}$$

Misturando-o novamente com um campo coerente intenso de apenas um modo de frequência ω , supondo que ambos estão polarizados na mesma direção por conveniência ($\mathbf{e}_j = \mathbf{e}$ para todo j), e realizando o mesmo esquema da detecção homodina, a corrente dos fotodetectores é proporcional a (ignorando agora a dependência espacial dos campos que incidem sobre os detectores, ambos à mesma distância do divisor

de feixes):

$$\frac{i}{2} |\epsilon| (E^{(-)}(t)e^{i(\theta-\omega t)} - E^{(+)}(t)e^{-i(\theta-\omega t)})$$

(O que se fez foi apenas substituir a por $E^{(+)}(t)$, b por $|\epsilon| e^{i(\theta-\omega t)}$ e seus complexos conjugados em (1.4.9).) A dependência temporal é agora importante porque os vários modos evoluem com frequências distintas. A quantidade acima nos motiva a definir as quadraturas para um campo com número arbitrário de modos:

$$E_\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (E^{(-)}(t)e^{i(\theta-\omega t)} + E^{(+)}(t)e^{-i(\theta-\omega t)}) \quad (1.4.11)$$

Assim, a medida na detecção homodina de um campo multi-modal corresponde novamente à medida de alguma quadratura E_θ , como no caso do campo de um modo. Ela não se reduz, porém, à quadratura definida para o campo de um modo na subseção anterior pela presença dos termos ε_j , mas isso não será empecilho. Deve-se ressaltar que a quadratura como definida acima depende explicitamente do tempo, mas para campos com frequências ópticas, por exemplo, apenas as frequências próximas da frequência ω do oscilador local contribuem significativamente na medição, já que o detector computa a média da medida num intervalo de tempo, que será nula quando da incidência de um campo que oscila rapidamente. A detecção homodina portanto faz com que a medida se dê principalmente em torno da frequência ω .

Assim como para a quadratura de um modo, a relação de comutação

$$[E_\theta, E_{\theta+\frac{\pi}{2}}] = i \sum_j |\varepsilon_j|^2 \quad (1.4.12)$$

, implica na desigualdade

$$\langle (\Delta E_\theta)^2 \rangle \langle (\Delta E_{\theta+\frac{\pi}{2}})^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \sum_{m,n} |\varepsilon_m|^2 |\varepsilon_n|^2 \quad (1.4.13)$$

1.5 Estados comprimidos

1.5.1 Propriedades dos estados comprimidos de um modo

A desigualdade (1.4.3) para as quadraturas conjugadas não impõe restrições quanto à pequenez da variância de uma determinada quadratura. Estados como os estados coerentes satisfazem a igualdade na relação, isso é, o produto da variância de qualquer quadratura com sua conjugada possui, para esses estados, o menor valor alcançável em vista de (1.4.3). No entanto, a variância de qualquer quadratura é a mesma ($\langle (\Delta Q_\theta)^2 \rangle = 1/2$). Os estados comprimidos são tais que a variância, ao menos para uma das quadraturas, é inferior à variância do vácuo ou de algum outro estado coerente. Naturalmente, devido à igualdade, a quadratura conjugada a essa deverá aumentar de forma a que se continue satisfeita (1.4.3).

Estados assim podem ser formalmente obtidos atuando sobre um estado qualquer o operador $S(r, \phi) = e^{\frac{1}{2}(re^{-i\phi}a^2 - re^{i\phi}a^{\dagger 2})}$ com r e ϕ reais, chamado operador de compressão. Pela equação (1.3.18) vemos que

$$\begin{aligned} S^\dagger(r, \phi)aS(r, \phi) &= \cosh(r)a - \sinh(r)e^{i\phi}a^\dagger \\ S^\dagger(r, \phi)a^\dagger S(r, \phi) &= \cosh(r)a^\dagger - \sinh(r)e^{-i\phi}a \end{aligned}$$

Além disso, $S(-r, \phi) = [S(r, \phi)]^{-1}$ e $S^\dagger(r, \phi) = [S(r, \phi)]^{-1}$ o que leva à propriedade geral

$$S^\dagger(r, \phi)f(a^\dagger, a)S(r, \phi) = f(\cosh(r)a^\dagger - \sinh(r)e^{-i\phi}a, \cosh(r)a - \sinh(r)e^{i\phi}a^\dagger) \quad (1.5.1)$$

válida para funções $f(a^\dagger, a)$ expandíveis em séries dos operadores de criação e aniquilação a^\dagger e a .

O operador de compressão com $r \neq 0$ reduz ou aumenta a variância de qualquer estado em que atua ([15], cap. 21). Trataremos particularmente do estado

$$|r, \phi, \alpha\rangle = D(\alpha)S(r, \phi)|0\rangle \quad (1.5.2)$$

, chamado estado comprimido ideal. Para ver que ele possui variância menor que $\frac{1}{2}$ para um intervalo em θ , vamos calculá-la:

$$\langle Q_\theta \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0| S^\dagger(r, \phi) D^\dagger(\alpha) (ae^{-i\theta} + a^\dagger e^{i\theta}) D(\alpha) S(r, \phi) |0\rangle = \text{Re}(\alpha e^{-i\theta}) \quad (1.5.3a)$$

$$\begin{aligned} \langle (\Delta Q_\theta)^2 \rangle &= \frac{1}{2} \langle 0| S^\dagger(r, \phi) [(\alpha + a)e^{-i\theta} + (\alpha^* + a^\dagger)e^{i\theta}]^2 S(r, \phi) |0\rangle - \langle X_\theta \rangle^2 \\ &= \frac{1}{2} [\cosh^2(r) + \sinh^2(r) - 2\cosh(r)\sinh(r)\cos(2\theta - \phi)] \quad (1.5.3b) \end{aligned}$$

Os primeiros momentos $\langle Q_\theta \rangle$ só dependem do deslocamento α e os menores e maiores valores para a variância correspondem respectivamente aos casos $\theta = \frac{\phi}{2}$ e $\theta = \frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{2}$ com $r > 0$, para os quais ela se torna

$$\langle (\Delta Q_{\frac{\phi}{2}})^2 \rangle = \frac{1}{2} (\cosh(r) - \sinh(r))^2 = \frac{1}{2} e^{-2r} \quad (1.5.4a)$$

$$\langle (\Delta P_{\frac{\phi}{2}})^2 \rangle = \frac{1}{2} (\cosh(r) + \sinh(r))^2 = \frac{1}{2} e^{2r} \quad (1.5.4b)$$

Considere a equação de uma elipse com o semi-eixo menor a fazendo um ângulo de $\frac{\phi}{2}$ com o eixo cartesiano x e com semi-eixo maior b :

$$\vec{r}(\theta) = a \cos\left(\theta - \frac{\phi}{2}\right) \hat{x} + b \sin\left(\theta - \frac{\phi}{2}\right) \hat{y}$$

A largura da elipse segundo θ , é $2r^2(\theta) = 2a^2 \cos^2(\theta - \frac{\phi}{2}) + 2b^2 \sin^2(\theta - \frac{\phi}{2})$. Se $a = \frac{1}{4} [\cosh(r) - \sinh(r)]$ e $b = \frac{1}{4} [\cosh(r) + \sinh(r)]$, chegamos à expressão

$$\begin{aligned} 2r^2(\theta) &= \frac{1}{2} \left\{ \cosh^2(r) + \sinh^2(r) - 2\cosh(r)\sinh(r) \left[\cos^2(\theta - \frac{\phi}{2}) - \sin^2(\theta - \frac{\phi}{2}) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} [\cosh^2(r) + \sinh^2(r) - 2\cosh(r)\sinh(r)\cos(2\theta - \phi)] \end{aligned}$$

que equivale precisamente à (1.5.3b). A representação gráfica do estado é da forma da figura 1.3 ; uma elipse centrada em $(\text{Re}(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}), \text{Im}(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}))$ com os semi-eixos menor e maior $\frac{e^{-r}}{\sqrt{8}}$ e $\frac{e^r}{\sqrt{8}}$ inclinados de $\frac{\phi}{2}$ em relação às quadraturas Q_0 e P_0 .

Uma última propriedade que deve ser notada é que estados do tipo (1.5.2) formam a classe dos estados de incerteza mínima; estados para os quais a igualdade em (1.4.3) é obedecida. Os estados coerentes são uma subclasse dessa, quando se faz $r = 0$.

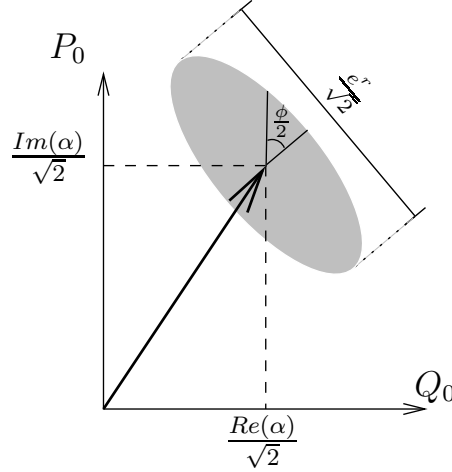


Figura 1.4: Estado comprimido (1.5.2)

1.5.2 Estados comprimidos multi-modais

Considere agora o seguinte operador, chamado operador de compressão de dois modos,

$$S_{ij}(z, \phi) = e^{ze^{-i\phi}a_i a_j - ze^{i\phi}a_i^\dagger a_j^\dagger} \quad (1.5.5)$$

, com z e ϕ reais. Como na subseção 1.5.1 pode-se ver que

$$\begin{aligned} S_{ij}^\dagger(z, \phi) f(a_i, a_i^\dagger, a_j, a_j^\dagger) S_{ij}(z, \phi) = \\ f(\cosh(z)a_i - e^{i\phi}\sinh(z)a_j^\dagger, \cosh(z)a_i^\dagger - e^{-i\phi}\sinh(z)a_j, \\ \cosh(z)a_j - e^{i\phi}\sinh(z)a_i^\dagger, \cosh(z)a_j^\dagger - e^{-i\phi}\sinh(z)a_i) \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

e que fazendo $i = j$ e $z = r/2$ ele se reduz ao operador de compressão de um modo, para o modo i . Aplicando-o num campo cujos modos estão todos no estado de vácuo $\prod_j |0\rangle_j = |\{0\}\rangle$, teremos o estado correspondente

$$S_{ij}(z, \phi) |\{0\}\rangle$$

Os valores médios das quadraturas para esse estado serão nulos, como no estado de vácuo, mas a variância para um determinado θ é

$$\begin{aligned} \langle E_\theta^2 \rangle &= \langle \{0\} | S_{ij}^\dagger(z, \phi) E_\theta^2 S_{ij}(z, \phi) | \{0\} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m \neq i, j} \langle \{0\} | |\varepsilon_m|^2 a_m a_m^\dagger | \{0\} \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \langle \{0\} | S_{ij}^\dagger(z, \phi) \left[\varepsilon_i^* a_i^\dagger e^{i(\omega_i t - \theta)} + \varepsilon_i a_i e^{-i(\omega_i t - \theta)} + \varepsilon_j^* a_j^\dagger e^{i(\omega_j t - \theta)} + \varepsilon_j a_j e^{-i(\omega_j t - \theta)} \right]^2 S_{ij}(z, \phi) | \{0\} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m \neq i, j} |\varepsilon_m|^2 + \frac{1}{2} (\sinh^2(z) + \cosh^2(z)) (|\varepsilon_i|^2 + |\varepsilon_j|^2) \\ &\quad + 2 |\varepsilon_i| |\varepsilon_j| \cosh(z) \sinh(z) \operatorname{Re} [e^{-i[\phi - 2(\theta - \omega t)]} e^{i(\omega_i + \omega_j)t}] \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

Na prática, esse estado é gerado fazendo incidir um feixe intenso de frequência 2ω em um meio não-linear que o acoplará a dois outros modos “laterais” com frequências simetricamente distantes de ω ,

$$\omega_i + \Delta = \omega = \omega_j - \Delta$$

, modos cujos estados correspondentes iniciais são os de vácuo. Esse acoplamento resulta na geração simultânea de um par de fótons, um em cada frequência lateral. Nos experimentos ópticos $(\frac{\Delta}{\omega})^2 \ll 1$ (em [17], por exemplo, $(\frac{\Delta}{\omega})^2 \sim 10^{-2}$). Substituindo essas frequências na expressão acima, vemos que a dependência temporal desaparece, e escolhendo $\theta = \frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{2}$ para minimizar a variância, os dois últimos termos desta se tornam,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (|\varepsilon_i|^2 + |\varepsilon_j|^2) \cosh(2z) - |\varepsilon_i| |\varepsilon_j| \sinh(2z) &= \frac{\hbar\omega}{16\epsilon_0\pi^3} \cosh(2z) - \frac{\hbar\sqrt{\omega^2 - \Delta^2}}{16\epsilon_0\pi^3} \sinh(2z) \\ &\approx \frac{\hbar\omega}{16\epsilon_0\pi^3} [\cosh(2z) - \sinh(2z)] = \frac{\hbar\omega}{16\epsilon_0\pi^3} e^{-2z} \end{aligned}$$

, onde se fez a expansão da raiz quadrada na primeira linha até primeira ordem em Δ/ω . Temos assim uma variância menor que a do estado de vácuo ($z = 0$), e isso caracteriza um estado comprimido³.

A quadratura medida oscila no tempo segundo (1.4.11) e para que se veja uma flutuação menor que a do estado do vácuo, deve-se analisar o seu espectro. A componente de Fourier associada com a frequência Δ será apenas a parte da quadratura

$$\varepsilon_i a_i e^{-i\theta} + \varepsilon_j a_j e^{-i\theta} + \varepsilon_i^* a_i^\dagger e^{i\theta} + \varepsilon_j^* a_j^\dagger e^{i\theta}$$

³Para mais detalhes sobre como os estados comprimidos de um ou mais modos podem ser gerados, ver referências do cap. 21 de [15].

, que é precisamente a parte que tem a flutuação reduzida. A figura abaixo ilustra o resultado experimental tirado de [17] de como essa flutuação varia em função da fase θ do oscilador local e como ela pode ser menor que a flutuação associada ao estado de vácuo, representada pela linha horizontal. O estado comprimido é do tipo acima, que envolve acoplamento entre dois modos, e a medida da quadratura é feita com a detecção homodina.

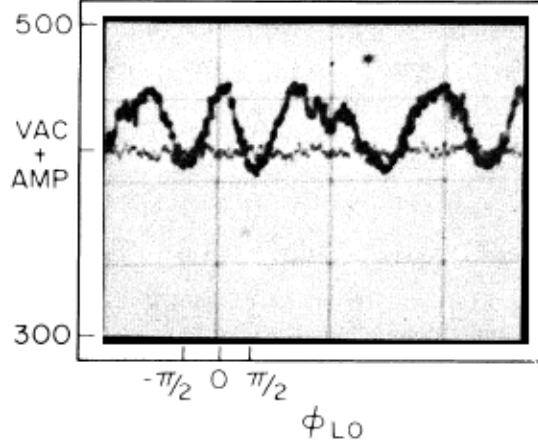


Figura 1.5: Flutuação do sinal do campo em função da fase do oscilador local (figura retirada de [17])

Em [18], essa redução na flutuação pode ser observada para uma larga faixa de frequências ($\sim 3 \times 10^7$ Hz). Essa compressão de banda larga do campo é necessária para que o tratamento por equação mestra (ver capítulo 2) seja válido.

1.6 Representações integrais do operador densidade

O operador densidade admite inúmeras (na verdade, infinitas) representações integrais⁴. Três das mais utilizadas são casos particulares da seguinte expansão:

$$\rho = \pi^{-1} \int W(\alpha, s) T(\alpha, s) d^2\alpha \quad , \quad T(\alpha, -s) = \pi^{-1} \int D(\xi, s) e^{\alpha\xi^* - \alpha^*\xi} d^2\xi \quad (1.6.1)$$

Novamente $d^2\alpha = d(\text{Re}\alpha)d(\text{Im}\alpha)$ é o elemento de integração (o mesmo vale para $d^2\xi$), $W(\alpha, s)$ é uma função que caracteriza unicamente o estado [11] e $T(\alpha, s)$ é um operador definido em termos do operador de deslocamento:

$$D(\alpha, s) = e^{s|\alpha|^2/2} D(\alpha) \quad (1.6.2)$$

⁴Operadores em geral admitem representações integrais; cada representação exige no entanto que certas condições sobre a norma desses operadores sejam satisfeitas [11].

O parâmetro s admite qualquer valor complexo mas leva às três expansões mais comuns quando é feito igual a -1 , 0 e 1 . No primeiro caso, $W(\alpha, -1) = \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle$, no segundo temos $W(\alpha, 0) = W(\alpha)$ chamada de função de Wigner por ter sido introduzida primeiramente por Wigner [19] e no terceiro, $W(\alpha, 1) = \pi P(\alpha)$, onde $P(\alpha)$ é a função P de Glauber-Sudarshan (referências originais no cap. 11 de [15]). Os diferentes valores que podem ser tomados por s são um artifício que possibilitou os autores Cahill e Glauber de [11] elucidar propriedades gerais da expansão (1.6.1), mas para fins práticos assume-se normalmente que s possui um dos três valores acima⁵.

Como $\rho^\dagger = \rho$ e $\text{tr}\{\rho\} = 1$, as funções $W(\alpha, s)$ obedecem às seguintes propriedades:

$$W(\alpha, s^*) = W(\alpha, s)^* \quad (1.6.3a)$$

$$\pi^{-1} \int W(\alpha, s) d^2\alpha = 1 \quad (1.6.3b)$$

Se s é real, $W(\alpha, s)$ é real, então vemos que nesse caso essas funções satisfazem duas propriedades similares às de uma densidade de probabilidade. No entanto, $W(\alpha, s)$ pode ser negativa e até extremamente singular (isso vale especialmente para a função $P(\alpha)$, que deve ser interpretada de maneira geral como uma função generalizada ou distribuição; ver seção 11.8 de [15] e [20]). Por essas razões, essas funções são chamadas de distribuições de quasi-probabilidade. Cada uma tem sua utilidade de acordo com o problema em questão; aqui a discussão se limitará apenas a duas que serão utilizadas no capítulo 3, sendo que uma delas envolve uma generalização da função P , e por isso é chamada função de P generalizada.

1.6.1 Função P generalizada e a função característica

Como colocado em [2], seção 6.4, na representação P generalizada o operador densidade se escreve na forma mais geral como

$$\rho = \int P(\boldsymbol{\alpha}) \Lambda(\boldsymbol{\alpha}) d\mu(\boldsymbol{\alpha}) \quad , \quad \Lambda(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{|\alpha\rangle\langle\beta^*|}{\langle\beta^*|\alpha\rangle} \quad (1.6.4)$$

Onde $\boldsymbol{\alpha}^T = (\alpha, \beta)$ e α e β são complexos. Como a base dos estados coerentes é super-completa $\left(\int |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha = \pi \right)$, um operador pode ser expandido em termos desses de maneira não-única. A escolha da forma da expansão se dá pela escolha da medida $d\mu(\boldsymbol{\alpha})$. Se $d\mu(\boldsymbol{\alpha}) = \delta^2(\beta^*) d^2\alpha d^2\beta$ teremos o caso particular da função P de Glauber-Sudarshan. Na seção 3.2 a escolha conveniente será $d\mu(\boldsymbol{\alpha}) = \delta^2(\alpha - \beta^*) d^2\alpha d^2\beta$.

⁵Em [16], mostra-se que a expansão (1.6.1) tem sim utilidade prática para valores de s diferentes dos três acima.

Podemos ver que, usando essa forma para o operador densidade,

$$\begin{aligned}
\chi(\lambda, \lambda^*) &= \text{tr}\{\rho e^{\lambda a^\dagger} e^{-\lambda^* a}\} = \int P(\boldsymbol{\alpha}) \text{tr}\{e^{\lambda a^\dagger} e^{-\lambda^* a} \Lambda(\boldsymbol{\alpha})\} \delta^2[\alpha - \kappa_1 - (\beta^* - \kappa_2)] d^2\alpha d^2\beta \\
&= \int P(\boldsymbol{\alpha}) e^{\lambda\beta - \lambda^*\alpha} \delta^2[\alpha - \kappa_1 - (\beta^* - \kappa_2)] d^2\alpha d^2\beta = \int P(\alpha, \alpha^* - \kappa_1^* + \kappa_2^*) e^{-\lambda^*\alpha + \lambda(\alpha^* - \kappa_1^* + \kappa_2^*)} d^2\alpha \\
&= \int P_{\kappa_1\kappa_2}(\alpha, \alpha^*) e^{-\lambda^*(\alpha + \kappa_1) + \lambda(\alpha + \kappa_2)^*} d^2\alpha \quad , \quad P_{\kappa_1\kappa_2}(\alpha, \alpha^*) = P(\alpha + \kappa_1, \alpha^* + \kappa_2^*)
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados por $e^{\lambda^*(\xi + \kappa_1) - \lambda(\xi + \kappa_2)^*}$, integrando em $d^2\lambda$ e usando (1.3.14), chegamos a

$$P_{\kappa_1\kappa_2}(\xi, \xi^*) = \pi^{-2} \int \chi(\lambda, \lambda^*, t) e^{\lambda^*(\xi + \kappa_1) - \lambda(\xi + \kappa_2)^*} d^2\lambda \quad (1.6.5)$$

Na representação diagonal ($\kappa_1 = \kappa_2 = 0$), a $\chi(\lambda, \lambda^*)$ é a transformada de Fourier de $P(\alpha)$ e como atribui-se a $P(\alpha)$ o nome de distribuição de quasi-probabilidade, χ é chamada de função característica em analogia com a função característica clássica, que é a transformada de Fourier de uma distribuição de probabilidade verdadeira (ver [15], seção 1.4.2).

Seguindo a convenção segundo a qual, denotando $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, temos

$$\partial_\mu = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial\mu_1} - i \frac{\partial}{\partial\mu_2} \right) \quad , \quad \partial_{\mu^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial\mu_1} + i \frac{\partial}{\partial\mu_2} \right)$$

podemos traçar a seguinte correspondência

$$\text{tr}\{e^{\lambda a^\dagger} e^{-\lambda^* a} a^\dagger \rho\} = \text{tr}\{(a^\dagger - \lambda^*) e^{\lambda a^\dagger} e^{-\lambda^* a} \rho\} = (\partial_\lambda - \lambda^*) \chi(\lambda, \lambda^*)$$

onde usou-se (1.3.18). Isso significa que a ação de a^\dagger em ρ corresponde à ação de $(\partial_\lambda - \lambda^*)$ em $\chi(\lambda, \lambda^*)$. Podemos repetir o procedimento para $a\rho$, de onde obteremos

$$a^\dagger \rho \leftrightarrow (\partial_\lambda - \lambda^*) \chi(\lambda, \lambda^*) \quad \rho a \leftrightarrow (\partial_{\lambda^*} - \lambda) \chi(\lambda, \lambda^*) \quad (1.6.6a)$$

$$a\rho \leftrightarrow -\partial_{\lambda^*} \chi(\lambda, \lambda^*) \quad \rho a^\dagger \leftrightarrow -\partial_\lambda \chi(\lambda, \lambda^*) \quad (1.6.6b)$$

, onde as duas à direita são apenas o complexo conjugado das relações da esquerda.

1.6.2 Função de Wigner

Essa função foi introduzida originalmente por Wigner [19] como uma função definida no espaço de fase do sistema, e seria a caracterização mais próxima à do espaço de fase para sistemas clássicos. Ao contrário da função P de Glauber-Sudarshan, ela sempre é uma função regular [11].

Se na expansão (1.6.1) fizermos $s = 0$ teremos, (omitindo de agora em diante o parâmetro s)

$$\rho = \pi^{-1} \int W(\alpha) T(\alpha) d^2\alpha \quad , \quad T(\alpha) = \pi^{-1} \int D(\lambda) e^{\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda} d^2\lambda \quad (1.6.7)$$

$D(\lambda)$ é o operador de deslocamento com respeito a a e a^\dagger e $T(\alpha)$ pode ser identificado como a sua transformada de Fourier porque, denotando $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ e $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, temos:

$$\pi^{-1} \int g(\lambda) e^{\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda} d^2\lambda = \pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda_1, \lambda_2) e^{-2i(\alpha_1\lambda_2 - \alpha_2\lambda_1)} d\lambda_1 d\lambda_2$$

que é uma dupla transformada de Fourier convencional a menos de uma mudança de escala em λ_1 e λ_2 . O operador de deslocamento pode ser escrito como (ver (1.3.13b)) $D(\lambda) = e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}} e^{\lambda a^\dagger} e^{-\lambda^* a}$. Inserindo dois operadores identidade $\pi^{-1} \int |\mu\rangle\langle\mu| d^2\mu$ nos estados coerentes e usando a propriedade destes de serem autoestados do operador de aniquilação a :

$$\begin{aligned} T(\alpha) &= \pi^{-3} \iiint e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}} e^{\lambda\mu^* - \lambda^*\nu} e^{\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda} |\mu\rangle \langle\mu|\nu\rangle \langle\nu| d^2\mu d^2\nu d^2\lambda \\ &= \pi^{-3} \iiint e^{-\frac{|\lambda|^2}{2} - \frac{|\mu|^2}{2} - \frac{|\nu|^2}{2} - \mu^*\nu + \lambda\mu^* - \lambda^*\nu + \alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda} |\mu\rangle\langle\nu| d^2\mu d^2\nu d^2\lambda \end{aligned}$$

Reescrevendo $|\mu\rangle = \|\mu\rangle e^{-\frac{|\mu|^2}{2}}$ e usando a propriedade dos estados de Bargmann (ver (1.3.7)) $\langle a | a^\dagger \|\mu\rangle = \frac{\partial}{\partial\mu} \langle a \|\mu\rangle = \partial_\mu \langle a \|\mu\rangle$,

$$\begin{aligned} \langle a | a^\dagger T(\alpha) | b \rangle &= \pi^{-3} \iiint e^{-\frac{|\lambda|^2}{2} - |\mu|^2 - \frac{|\nu|^2}{2} - \mu^*\nu + \lambda\mu^* - \lambda^*\nu + \alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda} \partial_\mu (\langle a \|\mu\rangle) \langle\nu|b\rangle d^2\mu d^2\nu d^2\lambda \\ &= \pi^{-3} \iiint \mu^* e^{-\frac{|\lambda|^2}{2} - |\mu|^2 - \frac{|\nu|^2}{2} - \mu^*\nu + \lambda\mu^* - \lambda^*\nu + \alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda} \langle a \|\mu\rangle \langle\nu|b\rangle d^2\mu d^2\nu d^2\lambda \end{aligned}$$

$|a\rangle$ e $|b\rangle$ são estados quaisquer e no último passo realizou-se uma integração por partes. Continuando,

$$\begin{aligned} \langle a | a^\dagger T(\alpha) | b \rangle &= \pi^{-3} \iiint e^{-\frac{|\lambda|^2}{2} - \frac{|\mu|^2}{2} - \frac{|\nu|^2}{2} - \mu^*\nu} (\partial_\lambda + \alpha^*) e^{\lambda\mu^* - \lambda^*\nu + \alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda} \langle a \|\mu\rangle \langle\nu|b\rangle d^2\mu d^2\nu d^2\lambda \\ &= \pi^{-3} \iiint \left(\frac{\lambda^*}{2} + \alpha^* \right) e^{-\frac{|\lambda|^2}{2} - \frac{|\mu|^2}{2} - \frac{|\nu|^2}{2} - \mu^*\nu} e^{\lambda\mu^* - \lambda^*\nu + \alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda} \langle a \|\mu\rangle \langle\nu|b\rangle d^2\mu d^2\nu d^2\lambda \\ &= \pi^{-3} \iiint \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha + \alpha^* \right) e^{-\frac{|\lambda|^2}{2} - \frac{|\mu|^2}{2} - \frac{|\nu|^2}{2} - \mu^*\nu} e^{\lambda\mu^* - \lambda^*\nu + \alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda} \langle a \|\mu\rangle \langle\nu|b\rangle d^2\mu d^2\nu d^2\lambda \end{aligned}$$

Temos assim, integrando por partes,

$$\begin{aligned} \langle a | a^\dagger \rho(t) | b \rangle &= \pi^{-1} \int W(\alpha) \langle a | a^\dagger T(\alpha) | b \rangle d^2\alpha \\ &= \pi^{-1} \int W(\alpha) \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha + \alpha^* \right) \langle a | T(\alpha) | b \rangle d^2\alpha \\ &= \langle a | \left[\pi^{-1} \int T(\alpha) \left(\alpha^* - \frac{1}{2} \partial_\alpha \right) W(\alpha) d^2\alpha \right] | b \rangle \end{aligned}$$

Como $|a\rangle$ e $|b\rangle$ são arbitrários, concluimos que a ação de a^\dagger no operador densidade corresponde a ação de $\left(\alpha^* - \frac{1}{2}\partial_\alpha\right)$ em $W(\alpha)$. Seguindo um procedimento análogo para ρa^\dagger e tomando os complexos conjugados obtemos as seguintes correspondências:

$$a^\dagger \rho \leftrightarrow \left(\alpha^* - \frac{1}{2}\partial_\alpha\right) W(\alpha) \quad \rho a \leftrightarrow \left(\alpha - \frac{1}{2}\partial_{\alpha^*}\right) W(\alpha) \quad (1.6.8a)$$

$$\rho a^\dagger \leftrightarrow \left(\alpha^* + \frac{1}{2}\partial_\alpha\right) W(\alpha) \quad a \rho \leftrightarrow \left(\alpha + \frac{1}{2}\partial_{\alpha^*}\right) W(\alpha) \quad (1.6.8b)$$

Para obter a função $W(\alpha)$ a partir de um ρ conhecido, multiplicaremos ambos os lados de (1.6.7) por $T(\alpha')$, tomaremos o traço e usaremos a equação (1.3.17), $tr\{D(\lambda)D(\mu)\} = \pi\delta^2(\lambda + \mu)$:

$$\begin{aligned} tr\{\rho T(\alpha')\} &= \int d^2\alpha W(\alpha) \left[\pi^{-3} \iint d^2\lambda d^2\nu e^{\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda + \alpha'\nu^* - \alpha'^*\nu} tr\{D(\lambda)D(\mu)\} \right] \\ &= \int W(\alpha) d^2\alpha \left[\pi^{-2} \int e^{(\alpha-\alpha')\lambda^* - (\alpha-\alpha')^*\lambda} d^2\lambda \right] = \int W(\alpha) \delta^2(\alpha - \alpha') d^2\alpha \end{aligned}$$

Ou seja,

$$tr\{\rho T(\alpha)\} = W(\alpha) \quad (1.6.9)$$

Apêndice I: Relações BCH

A primeira das relações que será provada é

$$e^{\lambda G} X e^{-\lambda G} = X + \frac{\lambda}{1!} [G, X] + \frac{\lambda^2}{2!} [G, [G, X]] + \dots \\ + \frac{\lambda^n}{n!} \overbrace{[G, [G, \dots [G, [G, X]] \dots]]}^{n \text{ comutadores}} + \dots \quad (\text{I.1})$$

Para isso, definimos

$$F(t) = e^{\lambda G t} X e^{-\lambda G t}$$

e a expandimos em $t = 0$:

$$F(t) = \sum_k \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k F}{dt^k} \right|_{t=0} t^k \quad (\text{I.2})$$

Temos, por exemplo,

$$\frac{dF}{dt} = \lambda (GF(t) - F(t)G) = \lambda [G, F(t)] \\ \frac{d^2 F}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{dF}{dt} = \lambda \left(G \frac{dF}{dt} - \frac{dF}{dt} G \right) = \lambda \left[G, \frac{dF}{dt} \right] = \lambda^2 [G, [G, F(t)]]$$

e assim por diante. Fazendo $t = 1$ em (I.2) chegamos a (I.1).

A outra relação que usamos no capítulo é

$$e^{-\frac{1}{2}[A, B]} e^A e^B = e^{A+B} \quad (\text{I.3})$$

, onde $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$. Definimos primeiramente,

$$U(t) = e^{(A+B)t} \quad (\text{I.4})$$

, que satisfaz

$$\frac{dU}{dt} = (A + B)U(t) \quad (\text{I.5})$$

Multiplico os dois lados por e^{-At} à esquerda e defino

$$V(t) = e^{-At} U(t)$$

, chegando a

$$\frac{dV}{dt} = e^{-At} B U(t) = e^{-At} B e^{At} e^{-At} U(t) = e^{-At} B e^{At} V(t) \quad (\text{I.6})$$

Utilizando a relação (I.1) provada acima e a hipótese sobre os comutadores de A e B , o lado direito se torna

$$(B - [A, B]t) V(t)$$

e a solução para a equação diferencial é

$$e^{-At} U(t) = e^{Bt - \frac{1}{2}[A, B]t^2} \quad (\text{I.7})$$

, onde usou-se que $V(0) = 1$, conforme a definição de V e U . Fazendo $t = 1$ e lembrando que B comuta com $[A, B]$, chegamos a (I.3).

2 EQUAÇÃO MESTRA

Se um sistema \mathcal{A} interage com outro \mathcal{R} que possui um número muito maior de graus de liberdade, ao qual me refiro como *reservatório*, normalmente a evolução exata do sistema $\mathcal{A} + \mathcal{R}$ não pode ser obtida (uma exceção está detalhada em [3], cap. 11). No entanto, partindo da equação diferencial para $\mathcal{A} + \mathcal{R}$, podemos deduzir a dinâmica do sistema \mathcal{A} apenas, desconsiderando parte da informação que concerne \mathcal{R} . Satisfeitas certas condições essa dinâmica é dada apenas em função dos operadores de \mathcal{A} e à equação que a descreve na representação de Schroedinger chamamos *equação mestra*. A separação em sistemas \mathcal{A} e \mathcal{R} pode ser apenas matemática, no sentido que podem representar apenas graus de liberdade diferentes de um mesmo sistema físico. Na presente dissertação no entanto, \mathcal{A} e \mathcal{R} serão sim sistemas físicos distintos.

Esse tipo de equação fornece muita informação sobre o sistema de interesse, mas ela dá a evolução na representação de Schroedinger e médias do tipo $\langle Q_A(t)Q'_A(t') \rangle$ ou generalizações dessa pedem a representação de Heisenberg, exceto para casos onde o teorema da regressão quântica valem (ver apêndice II). Nesse e no próximo capítulo exploraremos as informações que podem ser obtidas sem a necessidade do uso da representação de Heisenberg, que é estudada com certa profundidade em [2].

O importante para que a evolução seja dada por uma equação mestra é que haja três escalas de tempo

$$\tau_c \ll \Delta t \ll T_R$$

τ_c dá a ordem do tempo em que os operadores do reservatório flutuam rapidamente. Se nesse tempo a influência de \mathcal{R} sobre \mathcal{A} for pequena, seu efeito em \mathcal{A} em um tempo Δt que compreende vários τ_c é bem descrito pela média das perturbações causadas nesse intervalo. No entanto, o efeito acumulado do reservatório sobre o sistema de interesse termina por alterá-lo de forma significativa e T_R dá a ordem do tempo necessário para que essas alterações aconteçam. A equação mestra descreve a evolução na escala de tempo Δt (a condição sobre as escalas se encontra demonstrada rigorosamente em [21] no caso em que o acoplamento entre \mathcal{A} e \mathcal{R} é fraco).

Um campo eletromagnético de fato possui infinitos graus de liberdade, associados aos seus infinitos modos, e pode então ser associado a \mathcal{R} . Se o sistema de interesse \mathcal{A} for um átomo ou molécula, as condições para a dinâmica via equação mestra serão satisfeitas se a largura do espectro do campo for grande o suficiente e se ele for pouco intenso o suficiente¹. Dessa forma a prescrição das três escalas de tempo é

¹Essas condições valem se o campo em questão não estiver no estado de vácuo, para o qual a ordem de τ_c deve ser calculada de outra forma, como em [8].

satifeita e com isso é automaticamente aceitável admitir as outras aproximações: \mathcal{R} essencialmente não é afetado pela interação com \mathcal{A} na escala de Δt , razão pela qual ele é chamado de reservatório, e o tratamento por teoria perturbativa até segunda ordem é suficientemente preciso.

Pela dedução veremos as condições sobre os operadores de \mathcal{R} a serem satisfeitas para que se chegue na equação mestra e podemos a partir de então deixar de lado a especificação da natureza do reservatório, ou a que ele corresponde fisicamente, avaliando de maneira mais abstrata a dinâmica de um sistema que não um átomo ou molécula, mas ainda regida pela mesma equação mestra.

2.1 Dedução e domínio de validade

O Hamiltoniano que usaremos é

$$H = H_0 + V \quad , \quad \text{onde} \quad H_0 = H_A + H_R \quad (2.1.1)$$

$$H_A = \hbar\omega a^\dagger a \quad , \quad H_R = \sum_j \hbar\nu_j b_j^\dagger b_j \quad , \quad V = \hbar \sum_j g_j a^\dagger b_j + g_j^* a b_j^\dagger$$

Ele é usado normalmente para modelar efeitos de dissipação na energia de \mathcal{A} . Por dissipação entenda-se que a energia cedida ou recebida por \mathcal{A} não retorna. A origem dessa irreversibilidade está no acoplamento com um número infinito de graus de liberdade do reservatório [3], representado por um número infinito de termos na soma de V .

O modelo acima descreve por exemplo um modo do campo (o sistema \mathcal{A} representado pelos operadores a e a^\dagger) interagindo com um conjunto de átomos (reservatório \mathcal{R} representado por $\{b_j, b_j^\dagger\}$) que formariam a parede de uma cavidade ou os sensores de um detector. Embora representar esses átomos por osciladores harmônicos pareça artificial, Glauber mostra em [3] que essa associação é boa; o conjunto de osciladores harmônicos representaria certos modos que determinam a ação coletiva de todos os átomos (isso é, um operador b_j não estaria representando um átomo mas um modo de excitação específico de todos os átomos). Outro exemplo é o mecanismo preponderante de dissipação em cavidades óticas: o espalhamento. Nesse caso o modo de interesse representado por a e a^\dagger estaria acoplado a modos externos do campo $\{b_j, b_j^\dagger\}$. A geometria desse tipo de cavidade pode ser aberta e nesse caso o campo interno poderia se perder por difração, e há também que se considerar que as paredes que a delimitam não refletem com eficiência absoluta, e parte do campo poderia ser transmitida através delas.

Veremos na dedução que segue que a equação mestra depende também do estado de \mathcal{R} e por considerarmos que o reservatório possui flutuações reduzidas não é claro que ele estar representando fisicamente um conjunto de átomos tem algo de razoável em termos práticos. Algumas propostas foram feitas por Tombesi e Vitali [5] em relação a realizar um esquema em que a evolução de um modo do campo é dada pela equação mestra a ser deduzida. Elas no entanto, reproduzem algumas das

propriedades desejadas mas não levam a uma mesma equação mestra. Vamos aqui nos ater às propriedades matemáticas da dinâmica e deixar de lado a questão de como realizar na prática um esquema que leve à equação que estudaremos; apenas na última seção veremos que um modelo análogo ao acima descreve uma situação implementável (pelo menos em princípio).

2.1.1 Dedução

Para deduzir a equação mestra partimos da evolução do operador densidade ρ_T de $\mathcal{A} + \mathcal{R}$,

$$\frac{d}{dt}\rho_T(t) = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho_T(t)]$$

Na representação de interação,

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_T(t) = \frac{1}{i\hbar} [\tilde{V}, \tilde{\rho}_T(t)] \quad , \quad \begin{cases} \tilde{\rho}_T(t) &= e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} \rho_T e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}} \\ \tilde{V}(t) &= e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} V e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}} \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Usando a identidade (1.3.18), podemos calcular $\tilde{V}(t)$ explicitamente, obtendo

$$\begin{aligned} \tilde{V}(t) &= \hbar \sum_j g_j e^{i(\omega - \nu_j)t} a^\dagger b_j + g_j^* e^{-i(\omega - \nu_j)t} a b_j^\dagger \\ &= \hbar [a^\dagger F(t) + a F^\dagger(t)] \quad , \quad F(t) = \sum_j g_j e^{i(\omega - \nu_j)t} b_j \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Porém, antes de substituir (2.1.3) em (2.1.2), integro essa última de t a $t + \Delta t$:

$$\tilde{\rho}_T(t + \Delta t) = \tilde{\rho}_T(t) + \frac{1}{i\hbar} \int_t^{t+\Delta t} [\tilde{V}(t'), \tilde{\rho}_T(t')] dt' \quad (2.1.4)$$

Podemos substituir a expressão de $\tilde{\rho}_T$ no integrando à direita:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_T(t + \Delta t) - \tilde{\rho}_T(t) &= \frac{1}{i\hbar} \int_t^{t+\Delta t} dt' [\tilde{V}(t'), \tilde{\rho}_T(t)] \\ &\quad + \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' [\tilde{V}(t'), [\tilde{V}(t''), \tilde{\rho}_T(t'')]] \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

, uma relação integral exata para a evolução de $\tilde{\rho}_T(t)$. Substituir t'' por t no argumento de $\tilde{\rho}_T$ do segundo integrando equivale a fazer uso da teoria perturbativa dependente do tempo [9] até segunda ordem em \tilde{V} , e é o que se faz aqui, deixando a questão do domínio de validade dessa aproximação para uma subseção adiante. Como o que nos interessa é a dinâmica de \mathcal{A} , podemos tomar a média dos operadores relacionados ao reservatório, o que equivale a tomar o traço nas variáveis de \mathcal{R} , denotando a operação por tr_R . Defino o operador

$$\tilde{\rho}(t) = tr_R\{\tilde{\rho}_T(t)\} \quad (2.1.6)$$

A média de qualquer observável Q_A do sistema \mathcal{A} é dada por

$$\langle Q_A \rangle = tr\{\rho_T Q_A\} = tr\{\tilde{\rho}_T(t) \tilde{Q}_A\} = tr_A\{\tilde{Q}_A tr_R\{\tilde{\rho}_T(t)\}\} = tr_A\{\tilde{\rho}(t) \tilde{Q}_A\}$$

onde tr_A é o traço sobre as variáveis de \mathcal{A} . Usamos a propriedade de invariância do traço por permutação cíclica e definimos $\tilde{Q}_A = e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} Q_A e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}}$, o observável na nova representação. Como Q_A não depende das variáveis de \mathcal{R} , ele comuta com H_R e portanto \tilde{Q}_A também independe das variáveis de \mathcal{R} , saindo inalterado pela operação tr_R .

Pela equação acima, vê-se que todas as informações de interesse concernentes a \mathcal{A} são providas por $\tilde{\rho}(t)$, que é o operador densidade reduzido *na representação de interação* (em particular, a probabilidade de que a medida de um observável M de \mathcal{A} retorne o valor m' é dada pela média $tr_A\{|m'\rangle\langle m'| \tilde{\rho}\}$). Assim, tomo o traço das variáveis de \mathcal{R} na equação (2.1.5) e uso a teoria perturbativa descrita acima, obtendo:

$$\Delta\tilde{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_t^{t+\Delta t} dt' tr_R\{\tilde{V}(t'), \tilde{\rho}_T(t)\} + \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' tr_R\{\tilde{V}(t'), [\tilde{V}(t''), \tilde{\rho}_T(t)]\} \quad (2.1.7)$$

, onde $\Delta\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}(t + \Delta t) - \tilde{\rho}(t)$.

Vamos agora fazer duas hipóteses fundamentais (que levam aos mesmos resultados rigorosamente demonstrados em [21]):

- O acoplamento entre \mathcal{A} e \mathcal{R} é fraco de tal maneira que o estado do reservatório não muda com o tempo na representação de interação.
- Se os sistemas \mathcal{A} e \mathcal{R} começaram a interagir antes de t , o termo V do Hamiltoniano terá gerado uma correlação entre eles e podemos escrever

$$\tilde{\rho}_T(t) = tr_A\{\tilde{\rho}_T(t)\} \otimes tr_R\{\tilde{\rho}_T(t)\} + \tilde{\rho}_{correl}(t) \quad (2.1.8)$$

No entanto, como será demonstrado adiante, a influência do termo $\tilde{\rho}_{correl}(t)$ na evolução de $\rho(t)$ ao longo de um tempo $\Delta t \gg \tau_c$ é pequena e sob as mesmas condições que nos permitem fazer as outras aproximações, ele pode ser desprezado. Assim,

$$\tilde{\rho}_T(t) \approx \tilde{\rho}(t) \otimes \tilde{\rho}_R(t) \quad , \quad \tilde{\rho}_R(t) = tr_A\{\tilde{\rho}_T(t)\}$$

Assim como para o sistema \mathcal{A} , a média de um operador \tilde{Q}_R de \mathcal{R} na rep. de interação é dada por $\langle \tilde{Q}_R \rangle_R = tr_R\{\tilde{\rho}_R \tilde{Q}_R(t)\}$, então pela equação (2.1.3) e usando as aproximação acima, pode-se ver que em (2.1.7) aparecerão termos como $\langle F(t') \rangle_R$ e $\langle F(t') F(t'') \rangle_R = tr_R\{\tilde{\rho}_R F(t') F(t'')\}$ no primeiro e segundo integrandos, respectivamente, cujos valores dependem das propriedades do reservatório.

Consideraremos aqui \mathcal{R} num estado de vácuo comprimido como o de [18], com compressão em uma larga faixa de frequências (larga em relação à faixa de frequências

que interagem significativamente com \mathcal{A}) em torno da frequência ω do sistema. Os termos que aparecem nas médias de F são, assim,

$$\langle b_j \rangle = 0 \quad (2.1.9a)$$

$$e^{i(\Delta_i)t'} e^{-i(\Delta_j)t''} \langle b_i^\dagger b_j \rangle = \delta_{\nu_i \nu_j} e^{i(\Delta_i)\tau} \bar{n}_i \quad (2.1.9b)$$

$$e^{-i(\Delta_i)t'} e^{-i(\Delta_j)t''} \langle b_i b_j \rangle = \delta_{\Delta_i, -\Delta_j} e^{i(\Delta_i)\tau} J_i \quad (2.1.9c)$$

, onde $\tau = t' - t''$ e escrevi $\nu_j = \omega + \Delta_j$ sem perda de generalidade. Os termos restantes que aparecem nas médias em F são obtidos a partir desses tomando o complexo conjugado na primeira e terceira linhas e usando $[b_j, b_j^\dagger] = 1$ na segunda. Os \bar{n}_j são reais e representam o número médio de fótons do modo j . Deve-se ressaltar que \mathcal{R} não pode ser interpretado como um reservatório térmico e que os \bar{n}_j não estão portanto relacionados com uma temperatura e sim, da mesma forma que os J_j , apenas com outros parâmetros referentes ao processo de geração desse estado. Em geral, os J_j são complexos.

Pela primeira linha de (2.1.9), vemos que a primeira integral de (2.1.7) é nula. Além disso, vê-se que as médias dependem apenas da diferença de tempo τ . Mudando a variável de t'' para τ no segundo integrando de (2.1.7) temos o intervalo de integração:

$$\int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' \rightarrow \int_0^{\Delta t} d\tau \int_{t+\tau}^{t+\Delta t} dt' \quad (2.1.10)$$

Se considerarmos a hipótese mencionada na introdução de que $\tau_C \ll \Delta t$, onde τ_C é tal que

$$\langle F(t)F(t+\delta) \rangle_R \approx 0 \quad \text{se} \quad \delta > \tau_C \quad (2.1.11)$$

, o segundo integrando da expressão se anula rapidamente para $\tau > \tau_C$, o que nos possibilita, considerando $\Delta t \gg \tau_C$, estender o intervalo superior de integração de τ para $+\infty$ e o inferior da integração em t' para t , acrescentando um erro negligenciável.

Fazendo essa mudança e substituindo a forma explícita (2.1.3) de $\tilde{V}(t)$ na expressão (2.1.7) para $\Delta\tilde{\rho}(t)$:

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{\rho}(t) = & \\ & - \int_0^\infty d\tau \int_t^{t+\Delta t} dt' \{ \langle F(\tau)F(0) \rangle_R (a^\dagger a^\dagger \tilde{\rho}(t) - a^\dagger \tilde{\rho}(t) a^\dagger) + \langle F^\dagger(\tau)F^\dagger(0) \rangle_R (a a \tilde{\rho}(t) - a \tilde{\rho}(t) a) \\ & + \langle F(\tau)F^\dagger(0) \rangle_R (a^\dagger a \tilde{\rho}(t) - a \tilde{\rho}(t) a^\dagger) + \langle F^\dagger(\tau)F(0) \rangle_R (a a^\dagger \tilde{\rho}(t) - a^\dagger \tilde{\rho}(t) a) + c.c. \} \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Usando (2.1.9) podemos calcular as médias nas variáveis de \mathcal{R} :

$$\begin{aligned} \langle F^\dagger(\tau)F(0) \rangle_R &= \sum_j |g_j|^2 \bar{n}_j e^{-i(\omega-\nu_j)\tau} & \langle F(\tau)F(0) \rangle_R &= \sum_j (g_j)^2 J_j e^{-i(\omega-\nu_j)\tau} \\ \langle F(\tau)F^\dagger(0) \rangle_R &= \sum_j |g_j|^2 (\bar{n}_j + 1) e^{i(\omega-\nu_j)\tau} & \langle F^\dagger(\tau)F^\dagger(0) \rangle_R &= \sum_j (g_j^*)^2 J_j^* e^{i(\omega-\nu_j)\tau} \end{aligned}$$

Como última hipótese vamos considerar que o reservatório não apenas possui infinitos graus de liberdade, como eles formam um contínuo. O somatório nos modos j do campo se torna uma integral na variável contínua ν' . Por exemplo,

$$\langle F^\dagger(\tau)F(0) \rangle_R = \int |g(\nu')|^2 \bar{n}(\nu') e^{-i(\omega-\nu')\tau} d\nu'$$

Fazendo a integral desse termo na variável τ , temos²:

$$\int d\nu' |g(\nu')|^2 \bar{n}(\nu') \left[\int_0^\infty e^{-i(\omega-\nu')\tau} d\tau \right] = \pi \int |g(\nu')|^2 \bar{n}(\nu') \delta(\omega-\nu') d\nu' = \pi |g(\omega)|^2 \bar{n}(\omega)$$

Definindo $\gamma = 2\pi |g(\omega)|^2$, $N = \bar{n}(\omega)$ e $M = \frac{(g(\omega))^2}{|g(\omega)|^2} J(\omega)$, temos então:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \langle F^\dagger(\tau)F(0) \rangle_R d\tau &= \frac{\gamma}{2} N & \int_0^\infty \langle F(\tau)F(0) \rangle_R d\tau &= \frac{\gamma}{2} M \\ \int_0^\infty \langle F(\tau)F^\dagger(0) \rangle_R d\tau &= \frac{\gamma}{2} (N+1) & \int_0^\infty \langle F^\dagger(\tau)F^\dagger(0) \rangle_R d\tau &= \frac{\gamma}{2} M^* \end{aligned}$$

O motivo da escolha de γ ficará claro na seção 2.2. A equação (2.1.12) fica então

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \tilde{\rho}(t)}{\Delta t} &= -\frac{\gamma}{2} \{ (N+1)(a^\dagger a \tilde{\rho}(t) - a \tilde{\rho}(t) a^\dagger) + N(aa^\dagger \tilde{\rho}(t) - a^\dagger \tilde{\rho}(t) a) \\ &\quad + M(a^\dagger a^\dagger \tilde{\rho}(t) - a^\dagger \tilde{\rho}(t) a^\dagger) + M^*(aa \tilde{\rho}(t) - a \tilde{\rho}(t) a) + c.c. \} \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Essa equação nos dá a variação de $\tilde{\rho}(t)$ em um intervalo de tempo $\Delta t \gg \tau_c$. De fato,

$$\frac{\Delta \tilde{\rho}(t)}{\Delta t} = \frac{\tilde{\rho}(t + \Delta t) - \tilde{\rho}(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \frac{d\tilde{\rho}}{dt'}(t') dt'$$

, ou seja, $\frac{\Delta \tilde{\rho}(t)}{\Delta t}$ é simplesmente a média de $\frac{d\tilde{\rho}}{dt}(t)$ em um intervalo Δt . Se sua evolução for acompanhada segundo a escala de tempo dada por Δt , o que significa que o sistema não é observado entre dois intervalos de tempo infinitesimalmente separados, mas ainda muito menor que a ordem do tempo T_R em que ocorrem mudanças significativas, podemos escrever $\frac{\Delta \tilde{\rho}(t)}{\Delta t} = \frac{d\tilde{\rho}}{dt}$ e tratar a equação (2.1.13) como uma equação diferencial. Essa é a equação mestra para $\tilde{\rho}(t)$ e, subentendida a dependência em t de $\tilde{\rho}$, se escreve:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\rho}}{dt} &= \frac{\gamma}{2} (N+1) \{ 2a\tilde{\rho}a^\dagger - a^\dagger a \tilde{\rho} - \tilde{\rho} a^\dagger a \} + \frac{\gamma}{2} N \{ 2a^\dagger \tilde{\rho} a - aa^\dagger \tilde{\rho} - \tilde{\rho} aa^\dagger \} \\ &\quad - \frac{\gamma}{2} M \{ 2a^\dagger \tilde{\rho} a^\dagger - a^\dagger a^\dagger \tilde{\rho} - \tilde{\rho} a^\dagger a^\dagger \} - \frac{\gamma}{2} M^* \{ 2a\tilde{\rho} a - aa\tilde{\rho} - \tilde{\rho} aa \} \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

²A integral entre colchetes na verdade é $\int_0^\infty e^{-i(\omega-\nu')\tau} d\tau = \pi \delta(\omega-\nu') - i\mathcal{P} \frac{1}{\omega-\nu'}$, onde \mathcal{P} denota o valor principal de Cauchy (ver [15], pág. 96). Esse segundo termo dá origem a um desvio na frequência de oscilação livre do sistema \mathcal{A} e foi desprezado por não ser importante nas considerações que seguem.

$|M\rangle$ obedece a uma restrição. Para ver isso, primeiro notemos que para r e θ reais, e qualquer $|n\rangle$ da base dos autoestados de $b^\dagger b$,

$$\langle n | \left(r e^{i\theta} \frac{g(\omega)}{|g(\omega)|} b + \frac{g^*(\omega)}{|g(\omega)|} b^\dagger \right)^\dagger \left(r e^{i\theta} \frac{g(\omega)}{|g(\omega)|} b + \frac{g^*(\omega)}{|g(\omega)|} b^\dagger \right) | n \rangle \geq 0$$

Como a base dos $|n\rangle$ é completa, $\left(r e^{i\theta} \frac{g(\omega)}{|g(\omega)|} b + \frac{g^*(\omega)}{|g(\omega)|} b^\dagger \right)^\dagger \left(r e^{i\theta} \frac{g(\omega)}{|g(\omega)|} b + \frac{g^*(\omega)}{|g(\omega)|} b^\dagger \right) \geq 0$.
Agora

$$\begin{aligned} & \left\langle \left(r e^{i\theta} \frac{g(\omega)}{|g(\omega)|} b(\omega) + \frac{g^*(\omega)}{|g(\omega)|} b^\dagger(\omega) \right)^\dagger \left(r e^{i\theta} \frac{g(\omega)}{|g(\omega)|} b(\omega) + \frac{g^*(\omega)}{|g(\omega)|} b^\dagger(\omega) \right) \right\rangle_R \\ &= r^2 \langle b^\dagger(\omega) b(\omega) \rangle_R + \langle b(\omega) b^\dagger(\omega) \rangle_R + r \left[\frac{g^{*2}(\omega)}{|g(\omega)|^2} e^{-i\theta} \langle b^{\dagger 2}(\omega) \rangle_R + \frac{g^2(\omega)}{|g(\omega)|^2} e^{i\theta} \langle b^2(\omega) \rangle_R \right] \\ &= N(1 + r^2) + 1 + r [e^{-i\theta} M^* + e^{i\theta} M] \end{aligned}$$

O menor valor do termo entre colchetes se dá fazendo θ tal que $e^{i\theta} M + c.c. = -2|M|$. Assim ficamos com

$$N(1 + r^2) + 1 - 2|M|r \geq 0$$

A expressão à esquerda tem o valor mínimo em $r = |M|/N$, com o qual chegamos a

$$|M| \leq \sqrt{N(N+1)} \quad (2.1.15)$$

2.1.2 Mesma dinâmica para outros sistemas físicos

Vemos pelas funções de correlação antes de (2.1.13) e por toda a dedução que a natureza do sistema \mathcal{R} não é relevante no que diz respeito a chegar à equação mestra da forma (2.1.14). Se supusermos que o Hamiltoniano do sistema $\mathcal{A} + \mathcal{R}$ seja

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar (a^\dagger K + a K^\dagger) + H_R$$

, chegaremos à mesma equação mestra se

$$\langle K^\dagger(t) K(t') \rangle_R = \gamma N \delta(t - t') \quad \langle K(t) K^\dagger(t') \rangle_R = \gamma(N + 1) \delta(t - t') \quad (2.1.16a)$$

$$\langle K(t) K(t') \rangle_R = \gamma M e^{-2i\omega t} \delta(t - t') \quad \langle K^\dagger(t) K^\dagger(t') \rangle_R = \gamma M^* e^{2i\omega t} \delta(t - t') \quad (2.1.16b)$$

, onde $K(t)$ é o operador K na representação de interação. Nesse caso, o sistema \mathcal{A} poderia representar por exemplo um modo de campo eletromagnético de frequência ω . Na seção 2.2 tomaremos como esse o caso para que haja algum sentido considerar o resultado da detecção homodina aplicada em \mathcal{A} .

Se fizermos $M = 0$, N passa a ser interpretado como o número médio de excitações de um reservatório térmico e chegamos à equação mestra que na prática descreve um sistema que perde ou adquire energia exponencialmente no tempo (ver 2.2).

2.1.3 Discussão das aproximações

Tomemos a expressão (2.1.12). Sabemos que para o caso de interesse a integral com os primeiros momentos $\langle F(t') \rangle_R$ é nula e que a outra envolve as médias $\langle F(\tau)F(0) \rangle_R$ integradas em uma faixa de intervalo da ordem de τ_c . O termo da ordem de $\hbar^2 \langle F^2 \rangle_R$ caracteriza o quadrado da força do acoplamento entre \mathcal{A} e \mathcal{R} e será denotado por v^2 (se \mathcal{R} for um campo, $v^2 \sim \langle |E|^2 \rangle_R \wp^2$, a intensidade do campo multiplicada pelo quadrado do elemento da matriz de dipolo atômica referente à transição envolvida). Temos

$$\frac{\Delta \tilde{\rho}}{\Delta t} \sim -\frac{v^2 \tau_c}{\hbar^2} \tilde{\rho} \quad (2.1.17)$$

O termo que multiplica $\tilde{\rho}$ à direita é da ordem do inverso do tempo T_R de evolução de \mathcal{A} :

$$\frac{1}{T_R} \sim \frac{v^2 \tau_c}{\hbar^2} \quad (2.1.18)$$

Para que $\tau_c \ll T_R$, devemos ter portanto

$$\frac{v \tau_c}{\hbar} \ll 1 \quad (2.1.19)$$

Essa condição expressa o fato de que o acoplamento entre \mathcal{A} e \mathcal{R} , caracterizado pela frequência v/\hbar , tem pouca influência ao longo do tempo de correlação τ_c . Se o reservatório representa um campo $\tau_c \sim (\Delta\omega)^{-1}$ (ver [15], seção 4.3.3 e o teorema de Wiener-Khintchine na seção 2.4.1), onde $\Delta\omega$ dá a largura do seu espectro e a condição (2.1.19) impõe as condições de que $\Delta\omega$ deve ser suficientemente grande e o acoplamento v suficientemente pequeno (esse depende diretamente da intensidade do campo de acordo com $v \propto \langle |E|^2 \rangle_R$) para que ele seja tratável via equação mestra.

Se usássemos a expansão perturbativa até ordens maiores, teríamos outras contribuições na evolução de $\tilde{\rho}(t)$. O termo de terceira ordem, por exemplo, envolveria termos da ordem de v^3 integrados no tempo em um volume da ordem de $\tau_c^2 \Delta t$, porque os integrandos só contribuem para tempos t_1, t_2 e t_3 próximos entre si (na faixa de τ_c). Assim a contribuição do termo de terceira ordem na expansão perturbativa seria

$$\frac{v^3}{\hbar^3} \tau_c^2 = \frac{v^2 \tau_c}{\hbar^2} \frac{v \tau_c}{\hbar} \sim \frac{1}{T_R} \frac{v \tau_c}{\hbar} \quad (2.1.20)$$

, que é da ordem de $v \tau_c / \hbar$ vezes a contribuição do termo de segunda ordem. Segundo (2.1.19), ela é pequena e como os termos de ordens maiores contribuem ainda menos, a expansão até segunda ordem é justificada.

Outra aproximação usada na dedução da equação mestra foi desprezar $\tilde{\rho}_{correl}(t)$ em (2.1.8). Com isso, pudemos usar que $tr_R\{\tilde{\rho}_T(t)aF^\dagger\} = \tilde{\rho}(t)atr_R\{\tilde{\rho}_R(t)F^\dagger\} = 0$ e o mesmo para o seu complexo conjugado, eliminando o primeiro termo de (2.1.12). O termo $tr_R\{\tilde{\rho}_{correl}(t)\tilde{V}\}$ no entanto não é nulo e contribui para $\Delta\tilde{\rho}(t)$. A correlação entre \mathcal{A} e \mathcal{R} é gerada pelo acoplamento entre eles dado por $\tilde{V}(t)$, que se assume ter começado em $t_0 \rightarrow -\infty$, e a influência que ela tem em $\frac{\Delta\tilde{\rho}(t)}{\Delta t}$ resulta portanto da

interação anterior a t (que cria a correlação existente em t) e a interação no intervalo $[t, t + \Delta t]$ (que produz uma variação em $\tilde{\rho}(t)$ ao longo do tempo Δt). A ordem de magnitude dessa contribuição em segunda ordem no \tilde{V} aparece portanto na primeira integral de (2.1.7) e é

$$-\frac{1}{\hbar^2} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^t dt'' \int_t^{t+\Delta t} dt' \langle \tilde{V}(t'') \tilde{V}(t') \rangle_R \tilde{\rho} \quad (2.1.21)$$

$\langle \tilde{V}(t'') \tilde{V}(t') \rangle_R$ se anula rapidamente para tempos $t' - t'' > \tau_c$ e por isso os dois intervalos de integração se estendem a até uma diferença de τ_c de t , ou seja

$$\int_{-\infty}^t dt'' \int_t^{t+\Delta t} dt' \approx \int_{t-\tau_c}^t dt'' \int_t^{t+\tau_c} dt'$$

e com isso ficamos com a ordem de grandeza da contribuição desprezada:

$$\frac{v^2 \tau_c^2}{\hbar^2 \Delta t} = \frac{v^2 \tau_c}{\hbar^2} \frac{\tau_c}{\Delta t} = \frac{1}{T_R} \frac{\tau_c}{\Delta t} \quad (2.1.22)$$

A contribuição é então menor que a do termo relevante por um fator $\frac{\tau_c}{\Delta t}$, que por construção é assumido muito pequeno. Como se vê em (2.1.22), a correlação existente entre \mathcal{A} e \mathcal{R} em t só afeta $\tilde{\rho}$ de modo significativo no intervalo de tempo $[t, t + \tau_c]$.

É importante ressaltar que como a taxa de variação dos elementos de matriz de $\tilde{\rho}(t)$ é dada por um sistema de equações diferenciais de primeira ordem (que os acopla segundo (2.1.14)) com coeficientes constantes, a expressão para $\frac{d\tilde{\rho}}{dt}$ vale em qualquer t , o que nos permite prever o comportamento de \mathcal{A} para tempos muito maiores até do que T_R .

2.2 Propriedades da evolução para estados gerais

Primeiramente observo que a solução assintótica da equação mestra (2.1.14) pode ser obtida fazendo $\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = 0$, mas como a essa solução independe da condição inicial $\tilde{\rho}(0)$, ela pode ser obtida mais facilmente a partir de uma das soluções específicas do próximo capítulo fazendo $t \rightarrow \infty$.

Iremos aqui calcular algumas médias que não dependem de $\tilde{\rho}(0)$. Para fazer isso, deve-se lembrar que a equação mestra na forma (2.1.14) está na representação de interação. A conexão entre os operadores densidade na representação de Schroedinger ρ e na de interação $\tilde{\rho}$ é dada por

$$\rho = e^{-\frac{iH_A t}{\hbar}} \tilde{\rho} e^{\frac{iH_A t}{\hbar}}$$

, de onde segue que

$$\frac{d\rho}{dt} = -i\omega [a^\dagger a, \rho] + e^{-\frac{iH_A t}{\hbar}} \frac{d\tilde{\rho}}{dt} e^{\frac{iH_A t}{\hbar}}$$

Multiplicando dos dois lado a esquerda o operador Q de \mathcal{A} cuja média se deseja obter e tomando o traço, ficamos com:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle Q \rangle(t)}{dt} &= -i\omega \langle [Q, a^\dagger a] \rangle \\ &+ \frac{\gamma}{2}(N+1) \{2\langle a^\dagger Q a \rangle - \langle Q a^\dagger a \rangle - \langle a^\dagger a Q \rangle\} + \frac{\gamma}{2}N \{2\langle a Q a^\dagger \rangle - \langle Q a a^\dagger \rangle - \langle a a^\dagger Q \rangle\} \\ &- \frac{\gamma}{2}M e^{-2i\omega t} \{2\langle a^\dagger Q a^\dagger \rangle - \langle Q a^\dagger a^\dagger \rangle - \langle a^\dagger a^\dagger Q \rangle\} - \frac{\gamma}{2}M^* e^{2i\omega t} \{2\langle a Q a \rangle - \langle Q a a \rangle - \langle a a Q \rangle\} \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

2.2.1 Média no número de excitações

Substituindo $Q \rightarrow a^\dagger a$ em (2.2.1) e usando $[a, a^\dagger] = 1$, temos

$$\frac{d\langle n \rangle}{dt} = -\gamma (\langle n \rangle - N) \quad (2.2.2)$$

Podemos ver dessa equação a interpretação física de γ e justificar daí a forma específica com que ele foi definido. Ele é o termo linear de dissipação, e dá a taxa com que o sistema \mathcal{A} perde suas excitações iniciais e adquire as do reservatório \mathcal{R} . A solução para (2.2.2) é

$$\langle n \rangle(t) = \langle n \rangle(0)e^{-\gamma t} + N(1 - e^{-\gamma t}) \quad (2.2.3)$$

Igualando o lado esquerdo de (2.2.2) a zero ou tomando $t \rightarrow \infty$ do lado direito de (2.2.3) obtemos a solução assintótica e estacionária $\langle n \rangle_{est} = N$. Se o reservatório fosse térmico, isso significaria que \mathcal{A} assintoticamente se aproximaria do equilíbrio térmico à temperatura de \mathcal{R} , como esperado. No nosso caso, não há uma interpretação em termos de temperatura mas vemos simplesmente que o número médio de excitações de \mathcal{A} se iguala ao de \mathcal{R} , desaparecendo qualquer referência ao estado inicial do sistema de interesse.

Podemos calcular o valor médio de outros operadores:

$$\langle a \rangle(t) = \langle a \rangle(0)e^{-(\frac{\gamma}{2}+i\omega)t} \quad \langle a^2 \rangle(t) = \langle a^2 \rangle(0)e^{-(\gamma+2i\omega)t} + M e^{-2i\omega t} (1 - e^{-\gamma t}) \quad (2.2.4a)$$

$$\langle a^\dagger \rangle(t) = \langle a^\dagger \rangle(0)e^{-(\frac{\gamma}{2}-i\omega)t} \quad \langle a^{\dagger 2} \rangle(t) = \langle a^{\dagger 2} \rangle(0)e^{-(\gamma-2i\omega)t} + M^* e^{2i\omega t} (1 - e^{-\gamma t}) \quad (2.2.4b)$$

2.2.2 Variâncias das quadraturas

O operador de quadratura na representação de interação é

$$Q_\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} (a e^{-i\theta} + a^\dagger e^{i\theta}) \quad (2.2.5)$$

Q_θ não tem evolução temporal se considerarmos que a frequência do oscilador local (ver seção 1.4) é ω , a mesma de \mathcal{A} , e foi o que fizemos aqui. Para efetuar a

detecção homodina no sistema \mathcal{A} , ele deve representar fisicamente um modo de campo eletromagnético; ao reservatório, nesse caso, não atribuímos um sentido físico.

A evolução de $\langle Q_\theta \rangle = \text{tr}_A\{\tilde{\rho}Q_\theta\}$ pode ser determinada pelas evoluções já calculadas de $\langle a \rangle$ e $\langle a^\dagger \rangle$ fazendo $\omega = 0$:

$$\langle Q_\theta \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle a \rangle(0)e^{-\frac{\gamma}{2}t - i\theta} + \langle a^\dagger \rangle(0)e^{-\frac{\gamma}{2}t + i\theta} \right) \quad (2.2.6)$$

Essa média simplesmente tende a zero assintoticamente. A variância, no entanto, revela propriedades mais interessantes, e pode ser calculada também usando as evoluções da subseção anterior (2.2.3) e (2.2.4):

$$\begin{aligned} \langle (\Delta Q_\theta)^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left\{ e^{-2i\theta} [\sigma_{aa}(0)e^{-\gamma t} - M(1 - e^{-\gamma t})] + e^{2i\theta} [\sigma_{a^\dagger a^\dagger}(0)e^{-\gamma t} - M^*(1 - e^{-\gamma t})] \right. \\ &\quad \left. + 1 + 2[\langle a^\dagger a \rangle(0) - \langle a^\dagger \rangle(0)\langle a \rangle(0)]e^{-\gamma t} + 2N(1 - e^{-\gamma t}) \right\} \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

, onde $\sigma_{a^\dagger a^\dagger} = \langle a^{\dagger 2} \rangle - \langle a^\dagger \rangle^2$ e $\sigma_{aa} = \langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2$. No limite assintótico, as referências aos valores iniciais desaparecem e ficamos com

$$\langle (\Delta Q_\theta)^2 \rangle_{est} = N - \text{Re}(e^{-2i\theta}M) + \frac{1}{2} \quad (2.2.8)$$

Como dito na seção 1.5, um estado comprimido possui variância em alguma quadratura menor que 1/2. A quadratura de menor variância é dada pelo θ' tal que $\text{Re}(e^{-2i\theta'}M) = |M|$. Nesse caso ficamos com

$$\langle (\Delta Q_{\theta'})^2 \rangle_{est} = \frac{1}{2} - (|M| - N) \quad (2.2.9)$$

A condição a ser satisfeita para que o estado assintótico de \mathcal{A} seja comprimido é portanto

$$N < |M| \leq \sqrt{N(N+1)} \quad (2.2.10)$$

Pelo princípio da incerteza, sabemos que a variância da quadratura conjugada aumenta, mas o produto entre elas não necessariamente dá o valor mínimo de 1/4:

$$\langle (\Delta Q_{\theta'})^2 \rangle_{est} \langle (\Delta P_{\theta'})^2 \rangle_{est} = \frac{1}{4} + [N(N+1) - |M|^2]$$

e o termo entre colchetes é no mínimo zero, correspondendo à incerteza mínima.

2.3 Sistemas de dois níveis e constantes de decaimento

Se o sistema \mathcal{A} não possuir níveis de energia igualmente espaçados, é possível que apenas a transição referente a dois estados (aos quais chamarei de $|a\rangle$ e $|b\rangle$ com $E_a < E_b$) possa ocorrer durante a interação em uma dada circunstância. No caso de \mathcal{A} representar um átomo interagindo com um campo (o \mathcal{R}) isso é plausível se o

acoplamento entre eles é predominante numa faixa de frequências que se aproxima da frequência de transição $\omega = (E_b - E_a)/\hbar$ e de nenhuma outra. Nesse caso é razoável tratar \mathcal{A} como um sistema de dois níveis.

Alguns graus de liberdade de sistemas encontrados normalmente na natureza possuem de fato apenas dois estados possíveis, por exemplo, a polarização de um modo do campo e o spin de uma partícula de spin 1/2. Originalmente, porém, Jaynes e Cummings [22] consideraram a interação de uma molécula com apenas dois níveis com um modo do campo porque esse era um modelo não-trivial cuja evolução podia ser obtida analiticamente. Mostrou-se que ele previa efeitos interessantes [23] e pouco depois ele deixou de ser uma idealização e foi experimentalmente realizado [24], fazendo confirmadas as previsões teóricas.

Vamos considerar aqui que um sistema de dois níveis representando um átomo ou molécula que está acoplado com infinitos modos de um campo. O Hamiltoniano para esse modelo é

$$H = H_0 + V \quad , \quad \begin{cases} H_0 &= \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z + \sum_j \hbar\nu_j b_j^\dagger b_j \\ V &= \sum_j g_j \sigma_+ b_j + g_j^* \sigma_- b_j^\dagger \end{cases} \quad (2.3.1)$$

, onde $\sigma_z = |b\rangle\langle b| - |a\rangle\langle a|$, $\sigma_+ = |b\rangle\langle a|$, $\sigma_- = |a\rangle\langle b|$

A energia livre de \mathcal{A} foi definida de forma que o zero está situado à mesma distância das duas energias E_b e E_a ($E_b - \frac{1}{2}\hbar\omega = 0 = E_a + \frac{1}{2}\hbar\omega$ e $E_b - E_a = \hbar\omega$). As relações de comutação entre σ_z , σ_+ e σ_- são

$$[\sigma_z, \sigma_+] = 2\sigma_+ \quad [\sigma_z, \sigma_-] = -2\sigma_-$$

, de onde obtemos os operadores na representação de interação

$$e^{i\frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z t} \sigma_\pm e^{-i\frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z t} = e^{\pm i\omega t} \sigma_\pm$$

, onde foi usada novamente a identidade (1.3.18). Podemos ver então que a equação mestra terá a mesma forma da deduzida anteriormente mas com as substituições

$$a^\dagger \rightarrow \sigma_+ \quad , \quad a \rightarrow \sigma_-$$

A fase de $M = \frac{(g(\omega))^2}{|g(\omega)|^2} J(\omega)$ está relacionada com a fase do campo que incide no átomo, que assumimos poder ser manipulada; escolhemo-na então de forma que $M = M^*$. Usando $\sigma_+\sigma_+ = \sigma_-\sigma_- = 0$ a equação mestra para um sistema de dois níveis se reduz a

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\rho}}{dt} &= \frac{\gamma}{2}(N+1)\{2\sigma_-\tilde{\rho}\sigma_+ - \sigma_+\sigma_-\tilde{\rho} - \tilde{\rho}\sigma_+\sigma_-\} + \frac{\gamma}{2}N\{2\sigma_+\tilde{\rho}\sigma_- - \sigma_-\sigma_+\tilde{\rho} - \tilde{\rho}\sigma_-\sigma_+\} \\ &\quad - \gamma M\{\sigma_+\tilde{\rho}\sigma_+ + \sigma_-\tilde{\rho}\sigma_-\} \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

2.3.1 Evolução do sistema

Definindo os operadores $S_+ = \sigma_+ e^{-i\omega t}$ e $S_- = \sigma_- e^{i\omega t}$ que não evoluem na rep. de interação, podemos obter a equação para os elementos de matriz não-diagonais de $\tilde{\rho}$, $\langle a | \tilde{\rho}(t) | b \rangle = \text{tr} \{ \tilde{\rho}(t) \tilde{S}_+ \}$ e $\langle b | \tilde{\rho}(t) | a \rangle = \text{tr} \{ \tilde{\rho}(t) \tilde{S}_- \}$

$$\frac{d\langle S_+ \rangle}{dt} = -\gamma \left(N + \frac{1}{2} \right) \langle S_+ \rangle - \gamma M \langle S_- \rangle \quad (2.3.3a)$$

$$\frac{d\langle S_- \rangle}{dt} = -\gamma \left(N + \frac{1}{2} \right) \langle S_- \rangle - \gamma M \langle S_+ \rangle \quad (2.3.3b)$$

assim como para $S_z = \sigma_z$,

$$\frac{d\langle S_z \rangle}{dt} = -\gamma (2N + 1) \langle S_z \rangle - \gamma \quad (2.3.4)$$

, onde se usou que $|b\rangle\langle b| = \frac{1}{2} (\sigma_z + 1)$. Em termos dos operadores

$$S_x = (S_+ + S_-) \quad , \quad S_y = -i(S_+ - S_-) \quad (2.3.5)$$

as soluções de (2.3.3) se tornam

$$\langle S_x \rangle(t) = \langle S_x \rangle(0) e^{-\gamma_x t} \quad , \quad \gamma_x = \gamma \left(N + \frac{1}{2} + M \right) \quad (2.3.6a)$$

$$\langle S_y \rangle(t) = \langle S_y \rangle(0) e^{-\gamma_y t} \quad , \quad \gamma_y = \gamma \left(N + \frac{1}{2} - M \right) \quad (2.3.6b)$$

$$\langle S_z \rangle(t) = \langle S_z \rangle(0) e^{-\gamma_z t} - \frac{1}{2N + 1} (1 - e^{-\gamma_z t}) \quad , \quad \gamma_z = \gamma (2N + 1) \quad (2.3.6c)$$

Para compressão máxima $M = \sqrt{N(N + 1)}$ e $N \gg 1$, ficamos com

$$\gamma_x = \gamma \left(2N + \frac{1}{2} \right) \quad , \quad \gamma_y = \frac{\gamma}{2} \left(1 - \frac{1}{N} \right) \quad , \quad \gamma_z = \gamma (2N + 1) \quad (2.3.7)$$

, o que significa que $\langle S_x \rangle$ e $\langle S_z \rangle$ se aproximam dos seus valores estacionários 0 e $-1/(2N + 1)$ numa escala de tempo muito mais rápida do que $\langle S_y \rangle$. Fisicamente, $\langle S_z \rangle$ representa a probabilidade do sistema, em uma medição, ser encontrado no estado excitado $|a\rangle$ menos a probabilidade de ser encontrado no estado $|b\rangle$. No estado estacionário ele portanto deve ser encontrado com mais facilidade no estado não-excitado.

Para interpretar $\langle S_x \rangle$ e $\langle S_y \rangle$, começamos por lembrar que como o operador de dipolo elétrico só possui termos não-diagonais, ele pode ser escrito como

$$\tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{d}_{ab} (|a\rangle\langle b| e^{i\omega t} + |b\rangle\langle a| e^{-i\omega t}) = \mathbf{d}_{ab} (S_+ e^{i\omega t} + S_- e^{-i\omega t})$$

na representação de interação. Seu valor médio evolui segundo

$$\langle \mathbf{d} \rangle = \text{tr}\{\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{d}}\} = \mathbf{d}_{ab} [\langle S_x \rangle(t) \cos(\omega t) - \langle S_y \rangle(t) \sin(\omega t)] \quad (2.3.8)$$

As médias $\langle S_x \rangle$ e $\langle S_y \rangle$ aparecem então como as amplitudes das componentes de $\langle \mathbf{d} \rangle$ que giram com uma defasagem de $\frac{\pi}{2}$ entre si.

Note que as equações (2.3.6) determinam completamente o estado do sistema de dois níveis porque ele pode ser escrito genericamente como

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{2} [I_d + \langle S_x \rangle S_x + \langle S_y \rangle S_y + \langle S_z \rangle S_z] \quad (2.3.9)$$

, onde I_d é a matriz identidade.

2.3.2 Espectro da fluorescência de ressonância

Estamos considerando nessa seção que um campo com flutuações reduzidas em uma larga faixa de frequências em torno da frequência de ressonância do átomo incide sobre ele. Sabe-se que um dos efeitos da incidência de um campo ressonante sobre o átomo é fazer com que ele reemita um campo, chamado campo de fluorescência. Veremos aqui que o espectro desse campo reemitido possui características únicas ligadas à compressão do campo incidente.

De acordo com a teoria de fluorescência de ressonância desenvolvida em 1976 por Kimble e Mandel (que está citada e reproduzida quase integralmente em [15], seção 15.5,6), a função de autocorrelação $\Gamma(\tau) = \langle \mathbf{E}^{(-)}(t+\tau) \cdot \mathbf{E}^{(+)}(t) \rangle$ do campo reemitido pelo átomo (considerado um sistema de dois níveis) é proporcional a

$$e^{-i\omega\tau} \langle S_+(t+\tau) S_-(t) \rangle$$

para um campo \mathbf{E} medido a uma distância grande do átomo emissor.

Pelo teorema de Wiener-Khintchine ([15], seção 2.4.1), o espectro de um campo $S(\nu)$ é dado pela transformada de Fourier de $\Gamma(\tau)$:

$$S(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\tau) e^{i\nu\tau} d\tau \quad (2.3.10)$$

, ou seja, ele será proporcional à transformada de Fourier de $e^{-i\omega\tau} \langle S_+(t+\tau) S_-(t) \rangle$.

Primeiro, note que usando as definições (2.3.5) para S_x e S_y , temos

$$\begin{aligned} \langle S_+(t+\tau) S_-(t) \rangle &= \frac{1}{4} [\langle S_x(t+\tau) S_x(t) \rangle + \langle S_y(t+\tau) S_y(t) \rangle \\ &\quad - i \langle S_x(t+\tau) S_y(t) \rangle + i \langle S_y(t+\tau) S_x(t) \rangle] \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Vamos considerar que o campo está interagindo com o átomo a tempo suficiente para que o processo seja considerado estacionário, de forma que $\Gamma(\tau)$ não dependa de

t. Pelo teorema da regressão quântico (ver apêndice II), podemos utilizar as soluções já encontradas (2.3.6) para o cálculo dessas médias, obtendo:

$$\langle S_x(\tau)S_x(0) \rangle = \langle S_x^2(0) \rangle e^{-\gamma_x \tau} \quad , \quad \langle S_x(\tau)S_y(0) \rangle = \langle S_x(0)S_y(0) \rangle e^{-\gamma_x \tau} \quad (2.3.12a)$$

$$\langle S_y(\tau)S_y(0) \rangle = \langle S_y^2(0) \rangle e^{-\gamma_y \tau} \quad , \quad \langle S_y(\tau)S_x(0) \rangle = \langle S_y(0)S_x(0) \rangle e^{-\gamma_y \tau} \quad (2.3.12b)$$

Podemos usar a propriedade $\Gamma(-\tau) = \Gamma^*(\tau)$ válida para qualquer processo estacionário, e que pode ser verificada diretamente para $e^{i\omega\tau} \langle S_+(\tau)S_-(0) \rangle$, para fazer a integral (2.3.10), de onde obteremos:

$$S(\nu) \propto \frac{N}{2N+1} \left(\frac{\gamma_x}{\delta^2 + \gamma_x^2} + \frac{\gamma_y}{\delta^2 + \gamma_y^2} \right) \equiv \frac{s(\delta)}{\gamma} \quad (2.3.13)$$

, onde $\delta = \omega - \nu$ e $s(\delta)$ está relacionado com o espectro apenas por uma constante multiplicativa. Foram usadas as propriedades das matrizes S_x , S_y e S_z , $S_x^2 = S_y^2 = 1$ e $[S_x(0), S_y(0)] = 2iS_z(0)$, assim como o valor estacionário de S_z , que é $\frac{-1}{2N+1}$, como mostrado na subseção anterior.

O gráfico abaixo mostra como a compressão do campo incidente tem um efeito significativo no espectro do campo de fluorescência mesmo para $N = 10$. Esse efeito foi previsto por Gardiner e está contido em [2], seção 10.3.

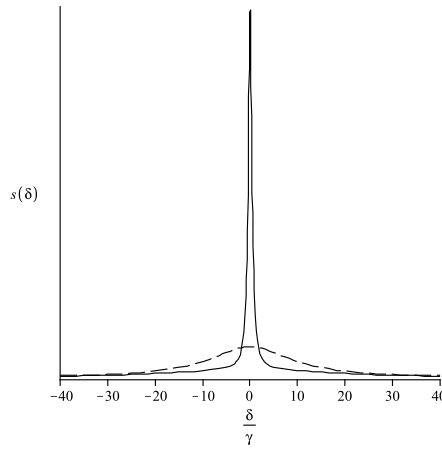


Figura 2.1: Gráfico de $s(\delta)$ por δ/γ com $N = 10$; $M = \sqrt{N(N+1)}$ na linha sólida e $M = 0$ na tracejada. A compressão faz o espectro ter um pico mais pronunciado na frequência de ressonância $\delta = 0$.

Apêndice II: Teorema da regressão quântico

Seguindo o exposto em [2], seção 5.2.3, afirmamos que se para qualquer condição inicial e um conjunto de operadores unitários $\{X_i\}$ do sistema valem as equações diferenciais

$$\partial_t \langle X_i(t) \rangle = \sum_j G_{ij}(t) \langle X_j(t) \rangle \quad (\text{II.1})$$

, teremos também

$$\partial_\tau \langle X_i(t + \tau) X_l(t) \rangle = \sum_j G_{ij}(t + \tau) \langle X_j(t + \tau) X_l(t) \rangle \quad (\text{II.2})$$

Trabalhando na representação de Heisenberg, podemos considerar como condição inicial o operador densidade $\rho_0 = X_l(t)\rho$, porque a atuação do operador unitário $X_l(t)$ em ρ apenas o transforma em outro operador densidade. A média no tempo $t + \tau$ do operador X_i seria então

$$\langle X_i(t + \tau) \rangle_0 = \text{tr}\{X_i(t + \tau)\rho_0\} \quad (\text{II.3})$$

, onde o índice 0 explicita que a média é feita considerando o operador densidade inicial ρ_0 .

Por hipótese, essa média obedece à equação (II.1):

$$\partial_{t'} \langle X_i(t') \rangle_0 = \sum_j G_{ij}(t') \langle X_j(t') \rangle_0 \quad (\text{II.4})$$

Podemos escolher $t' = t + \tau$, e notar que $\partial_{t+\tau} X(t + \tau) = \partial_\tau X(t + \tau)$. Fazendo essa substituição na equação acima e escrevendo as médias $\langle \bullet \rangle_0$ explicitamente em termos das médias $\langle \bullet \rangle$, chegamos na equação (II.2) que se desejava demonstrar.

3 SOLUÇÕES ANALÍTICAS DA EQUAÇÃO MESTRA

A equação mestra deduzida no capítulo anterior pode ser resolvida analiticamente para qualquer tempo, mas para cada condição inicial imposta há um método mais conveniente; apresentados aqui serão três.

3.1 Estado Gaussiano

3.1.1 Propriedades

Nos casos de sistemas para os quais se pode definir os operadores de criação e aniquilação (conjunto de bósons, dentre os quais fótons, ou osciladores harmônicos), há uma maneira única de definir um operador densidade gaussiano: uma exponencial quadrática nesses operadores. No caso unidimensional (que corresponde a um oscilador harmônico, um possível estado para o conjunto de bósons¹ ou um campo com apenas um modo), podemos escrevê-lo da seguinte forma

$$\rho_G = D(\alpha)S(r, \phi)\sigma(\nu)S^\dagger(r, \phi)D^\dagger(\alpha) \quad , \text{ onde} \quad (3.1.1)$$
$$\sigma(\nu) = \frac{1}{1 + \nu} e^{\ln(\frac{\nu}{\nu+1})a^\dagger a} \quad , \quad D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} \quad , \quad S(r, \phi) = e^{\frac{1}{2}(re^{-i\phi}a^2 - re^{i\phi}a^{\dagger 2})}$$

$D(\alpha)$ é o operador de deslocamento com respeito a a e a^\dagger e $S(r, \phi)$ é o operador de compressão de um modo, como visto no capítulo 1, e de qualquer forma que se reorganizem esses termos (por exemplo, escrevendo ρ_G como uma única exponencial), devido à maneira como esses operadores transformam a e a^\dagger linearmente segundo (1.3.19) e (1.5.1), o operador densidade terá sempre exponenciais com argumentos quadráticos nesses operadores². $\sigma(\nu)$ corresponde ao operador densidade de um sistema bosônico em equilíbrio térmico com número médio de excitações ν .

A notação $\langle \bullet \rangle_\nu = \text{tr}\{\bullet\sigma(\nu)\}$ será usada para a média no operador densidade $\sigma(\nu)$ térmico (por exemplo, $\langle a^\dagger a \rangle_\nu = \nu$) e $\langle \bullet \rangle = \text{tr}\{\bullet\rho_G\}$ para ρ_G . Usando as propriedades

¹Ver [9], cap. 10.

²Como demonstrado em [2], cap.4, essa definição ainda implica que a função característica, função P e função de Wigner do estado, introduzidas na seção 1.6, são também gaussianas.

(1.3.19) e (1.5.1) dos $D(\alpha)$ e $S(r, \phi)$, vê-se que as duas estão conectadas por

$$\begin{aligned}\langle f(a^\dagger, a) \rangle &= \text{tr}\{f(a^\dagger, a)D(\alpha)S(r, \phi)\sigma(\nu)S^\dagger(r, \phi)D^\dagger(\alpha)\} \\ &= \text{tr}\{S^\dagger(r, \phi)D^\dagger(\alpha)f(a^\dagger, a)D(\alpha)S(r, \phi)\sigma(\nu)\} \\ &= \langle f(\cosh(r)a^\dagger + e^{-i\phi}\sinh(r)a + \alpha^*, \cosh(r)a + e^{i\phi}\sinh(r)a^\dagger + \alpha) \rangle_\nu\end{aligned}\quad (3.1.2)$$

Segue dessa propriedade e da forma de $\sigma(\nu)$ que

$$\langle a \rangle = \alpha \qquad \langle a^\dagger \rangle = \alpha^* \quad (3.1.3a)$$

$$\langle a^2 \rangle = \alpha^2 + e^{i\phi} \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \sinh(2r) \qquad \langle a^{\dagger 2} \rangle = \alpha^{*2} + e^{-i\phi} \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \sinh(2r) \quad (3.1.3b)$$

$$\langle a^\dagger a \rangle = |\alpha|^2 - \frac{1}{2} + \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \cosh(2r) \qquad \langle aa^\dagger \rangle = |\alpha|^2 + \frac{1}{2} + \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \cosh(2r) \quad (3.1.3c)$$

Essas equações nos permitem relacionar todos os parâmetros de ρ_G com as médias lineares e quadráticas nos operadores a^\dagger e a . Pela evolução dessas médias, já calculadas na seção 2.2, temos portanto $\rho_G(t)$ para todo t apenas fazendo a inversão de (3.1.3), e escrevendo $r(t)$, $\phi(t)$, $\nu(t)$ e $\alpha(t)$ como função do tempo. A solução estacionária pode também ser obtida facilmente fazendo $t \rightarrow \infty$.

3.1.2 Decoerência

Substituindo α e α^* por $\langle a \rangle$ e $\langle a^\dagger \rangle$, obtemos

$$\begin{aligned}\sigma_{aa} &= \langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2 = e^{i\phi} \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \sinh(2r) \\ \sigma_{a^\dagger a^\dagger} &= \langle a^{\dagger 2} \rangle - \langle a^\dagger \rangle^2 = e^{-i\phi} \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \sinh(2r) \\ \sigma_{a^\dagger a} &= \frac{\langle a^\dagger a \rangle + \langle aa^\dagger \rangle}{2} - \langle a^\dagger \rangle \langle a \rangle = \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \cosh(2r)\end{aligned}$$

Tomando o quadrado da terceira linha e subtraindo dela o produto da primeira pela segunda linha, obtemos $(\nu + 1/2)^2$, e então

$$\nu = \sqrt{\sigma_{a^\dagger a}^2 - \sigma_{a^\dagger a^\dagger} \sigma_{aa}} - \frac{1}{2} \quad (3.1.4)$$

A álgebra para a obtenção dos outros parâmetros será omitida assim como as suas expressões explícitas, que são pouco esclarecedoras. O parâmetro ν tem no entanto particular importância, porque é o único que aparece na expressão da entropia de $\rho_G(t)$, que é definida como:

$$S[\rho_G] = -\text{tr}\{\rho_G \ln(\rho_G)\}$$

Podemos expandir o logaritmo em série e como $D(\alpha)$ e $S(r, \phi)$ são unitários,

$$\begin{aligned} \ln (S(r, \phi)D(\alpha)\sigma(\nu)D^\dagger(\alpha)S^\dagger(r, \phi)) &= \sum_j c_j [S(r, \phi)D(\alpha)\sigma(\nu)D^\dagger(\alpha)S^\dagger(r, \phi)]^j \\ &= S(r, \phi)D(\alpha) \left[\sum_j c_j (\sigma(\nu))^j \right] D^\dagger(\alpha)S^\dagger(r, \phi) = S(r, \phi)D(\alpha) \ln(\sigma(\nu)) D^\dagger(\alpha)S^\dagger(r, \phi) \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} S[\rho_G] &= -tr\{D(\alpha)S(r, \phi)\sigma(\nu)S^\dagger(r, \phi)D^\dagger(\alpha)D(\alpha)S(r, \phi)\ln(\sigma(\nu))S^\dagger(r, \phi)D^\dagger(\alpha)\} \\ &= -tr\{\sigma(\nu) \ln(\sigma(\nu))\} = S[\sigma(\nu)] \end{aligned}$$

A entropia de $\sigma(\nu)$ é por sua vez,

$$\begin{aligned} S[\sigma(\nu)] &= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\nu+1} \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right)^k \ln \left[\frac{1}{\nu+1} \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right)^k \right] \\ &= - \frac{1}{\nu+1} \ln \left(\frac{1}{\nu+1} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right)^k - \frac{1}{\nu+1} \ln \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right) \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right)^k \\ &= (\nu+1) \ln(\nu+1) - \nu \ln(\nu) \end{aligned}$$

Portanto

$$S[\tilde{\rho}_G] = (\nu+1) \ln(\nu+1) - \nu \ln(\nu) \quad (3.1.5)$$

A entropia provê uma medida de quão puro é o estado: quanto maior S , menos puro é o sistema. Se $\tilde{\rho}$ for puro, por exemplo, ele pode ser escrito como $|\psi\rangle\langle\psi|$ e teremos $S[\tilde{\rho}] = \langle\psi| \tilde{\rho} \ln(\tilde{\rho}) |\psi\rangle = 1 \ln(1) = 0$. Ao contrário da entropia de um sistema fechado, que não se altera no tempo, a entropia do subsistema de interesse \mathcal{A} que interage com o reservatório \mathcal{R} em geral muda. O seu aumento é associado a um efeito chamado decoerência³.

Faremos uma pequena generalização de uma propriedade exposta em [7]. Observe que se o estado inicial for do tipo (3.1.1) com $r_0 = M = 0$, a entropia é monotonicamente crescente ou decrescente, enquanto que se $r_0 \neq 0$ ou $|M| \neq 0$ e satisfeitas certas condições para os outros parâmetros ν_0 e N , o índice 0 denotando valores iniciais, isso pode não acontecer, como se observa no gráfico abaixo.

Para chegar às condições, basta exigirmos que a equação $\frac{dS[\tilde{\rho}_g]}{dt} = 0$ admita soluções com t real e positivo. Vemos primeiro que, usando (3.1.4)

$$\frac{dS[\tilde{\rho}_g]}{dt} = \ln \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \frac{d\nu}{dt} = \ln \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \frac{1}{2\sqrt{\sigma_{a^\dagger a}^2 - \sigma_{a^\dagger a^\dagger} \sigma_{aa}}} \frac{d}{dt} (\sigma_{a^\dagger a}^2 - \sigma_{a^\dagger a^\dagger} \sigma_{aa})$$

³Para mais detalhes sobre decoerência, ver [1] e o experimento em que se observou sua progressão pela primeira vez [25].

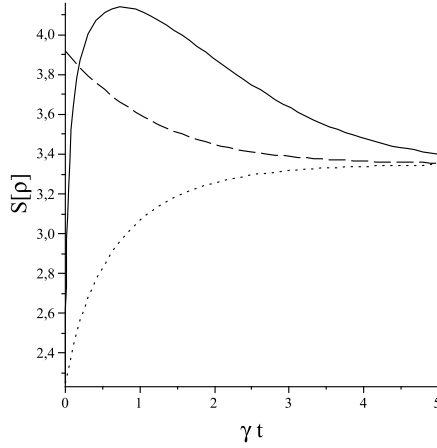


Figura 3.1: Para as três curvas foram escolhidos os parâmetros $N = 10$ e $M = \phi_0 = 0$. Com $[\nu_0 = 3, r_0 = 0]$ e $[\nu_0 = 18, r_0 = 0]$ as curvas são monotonicamente crescente e decrescente (linhas pontilhadas e tracejadas, respectivamente) e com $[\nu_0 = 3, r_0 = 2]$ (linha sólida) esse não é o caso.

e como a expressão a esquerda da derivada é positiva, exceto para o caso em que $\sigma_{a^\dagger a}^2 - \sigma_{a^\dagger a^\dagger} \sigma_{aa} = 0$ que dá uma entropia constante, a condição que buscamos é:

$$\frac{d}{dt} (\sigma_{a^\dagger a}^2 - \sigma_{a^\dagger a^\dagger} \sigma_{aa}) = 0 \quad (3.1.6)$$

Resolvendo para γt , temos (denotando $M = |M| e^{i\psi}$)

$$\gamma t = \ln \left(\frac{A + B - 2C}{A - C} \right), \quad \text{onde} \quad (3.1.7)$$

$$A = \left(N + \frac{1}{2} \right)^2 - |M|^2, \quad B = \left(\nu_0 + \frac{1}{2} \right)^2$$

$$C = \left(\nu_0 + \frac{1}{2} \right) \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) \cosh(2r_0) - |M| \sinh(2r_0) \cos(\phi_0 - \psi) \right]$$

E há então duas maneiras possíveis para que γt seja positivo e real:

$$A > C \quad \text{e} \quad B > C \quad \text{ou} \quad (3.1.8a)$$

$$A < C \quad \text{e} \quad B < C \quad (3.1.8b)$$

As condições (3.1.8a) não podem ser obedecidas. Vemos primeiramente que o menor valor de C se dá para $\phi_0 - \psi = 0$. Além disso, como $|M|^2 \leq N(N+1) < \left(N + \frac{1}{2}\right)^2$ e como $\cosh(2r_0) > \sinh(2r_0)$, C fica menor se escolhermos $r_0 = 0$ sem que isso afete os parâmetros A e B . Em seguida, notemos que se $C < A$ com $r_0 = 0$ para algum $|M| > 0$, $C < A$ necessariamente para $|M| = 0$. As duas condições se tornam então

$$N > \nu_0 \quad \text{e} \quad \nu_0 > N$$

respectivamente, e portanto não podem ser satisfeitas simultaneamente. As condições (3.1.8b) no entanto podem sim ser satisfeitas simultaneamente, como o são para os parâmetros usados na curva sólida do gráfico acima.

3.2 Superposição de estados coerentes

Nessa seção consideraremos o estado inicial

$$\tilde{\rho}(0) = \sum_{\alpha, \beta} N_{\alpha\beta} |\alpha\rangle\langle\beta| \quad (3.2.1)$$

, onde os estados sobre os quais se soma são todos coerentes, ou seja, o sistema \mathcal{A} é uma mistura estatística de superposições de estados coerentes. O sistema \mathcal{A} deverá ser interpretado como representando um modo do campo eletromagnético, de forma que se possa efetuar a detecção homodina sobre ele (seção 1.4). A equação mestra é, novamente

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\rho}}{dt} = & \frac{\gamma}{2}(N+1)\{2a\tilde{\rho}a^\dagger - a^\dagger a\tilde{\rho} - \tilde{\rho}a^\dagger a\} + \frac{\gamma}{2}N\{2a^\dagger\tilde{\rho}a - aa^\dagger\tilde{\rho} - \tilde{\rho}aa^\dagger\} \\ & - \frac{\gamma}{2}M\{2a^\dagger\tilde{\rho}a^\dagger - a^\dagger a^\dagger\tilde{\rho} - \tilde{\rho}a^\dagger a^\dagger\} - \frac{\gamma}{2}M^*\{2a\tilde{\rho}a - aa\tilde{\rho} - \tilde{\rho}aa\} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

3.2.1 Solução da equação mestra - Equação diferencial parcial

Para resolver (3.2.2), escrevo o operador densidade na representação P generalizada (em toda essa seção e a próxima faço uso das propriedades deduzidas na seção 1.6; o leitor deve se referir a ela sempre que necessário):

$$\tilde{\rho}(t) = \int P_{\kappa_1\kappa_2}(\alpha, \beta) \Lambda_{\alpha, \beta} d\mu(\alpha, \beta) \quad , \quad \begin{cases} \Lambda_{\alpha, \beta} & = \frac{|\alpha\rangle\langle\beta^*|}{\langle\beta^*|\alpha\rangle} \\ d\mu(\alpha, \beta) & = \delta^2[\alpha - \kappa_1 - (\beta^* - \kappa_2)] d^2\alpha d^2\beta \end{cases} \quad (3.2.3)$$

κ_1 e κ_2 são escolhidos adiante segundo conveniência. A função característica associada é

$$\chi(\lambda, \lambda^*, t) = \text{tr}\{\tilde{\rho}(t)e^{\lambda a^\dagger} e^{-\lambda^* a}\} \quad (3.2.4)$$

e com ela conseguimos a função $P_{\kappa_1\kappa_2}$ de (3.2.3) da relação

$$P_{\kappa_1\kappa_2}(\xi, \xi^*) = \pi^{-2} \int \chi(\lambda, \lambda^*, t) e^{\lambda^*(\xi+\kappa_1) - \lambda(\xi+\kappa_2)^*} d^2\lambda \quad (3.2.5)$$

válida se o lado direito for bem definido.

Com a função característica podemos transformar a equação de operadores (3.2.2) em uma equação diferencial usando as correspondências

$$a^\dagger \rho \leftrightarrow (\partial_\lambda - \lambda^*) \chi(\lambda, \lambda^*) \quad \rho a \leftrightarrow (\partial_{\lambda^*} - \lambda) \chi(\lambda, \lambda^*) \quad (3.2.6a)$$

$$a \rho \leftrightarrow -\partial_{\lambda^*} \chi(\lambda, \lambda^*) \quad \rho a^\dagger \leftrightarrow -\partial_\lambda \chi(\lambda, \lambda^*) \quad (3.2.6b)$$

Dessa forma a equação mestra se torna uma equação diferencial parcial para $\chi(\lambda, \lambda^*, t)$:

$$\left[\partial_t + \frac{\gamma}{2} (\lambda \partial_\lambda + \lambda^* \partial_{\lambda^*}) \right] \chi(\lambda, \lambda^*, t) = -\gamma \left[N |\lambda|^2 - \frac{1}{2} (M \lambda^{*2} + M^* \lambda^2) \right] \chi(\lambda, \lambda^*, t) \quad (3.2.7a)$$

$$\chi(\lambda, \lambda^*, 0) = \sum_{\alpha, \beta} N_{\alpha\beta} \langle \beta | \alpha \rangle e^{-\lambda^* \alpha + \lambda \beta^*} \quad (3.2.7b)$$

A condição inicial (3.2.7b) segue diretamente da definição da função característica (3.2.4), da condição inicial para $\tilde{\rho}$ (3.2.1) e da propriedade dos estados coerentes de serem autoestados do operador de aniquilação a .

3.2.2 Solução da equação mestra - Separação dos operadores

A solução da equação diferencial (3.2.7) pode ser formalmente escrita como

$$\chi(\lambda, \lambda^*, t) = e^{-\frac{\gamma}{2} [(\lambda \partial_\lambda + \lambda^* \partial_{\lambda^*}) - 2N |\lambda|^2 + (M \lambda^{*2} + M^* \lambda^2)] t} \chi(\lambda, \lambda^*, 0) \quad (3.2.8)$$

, o que se pode verificar diretamente por substituição. Não sabemos o resultado da aplicação do operador exponenciado à direita em (3.2.8) sobre $\chi(\lambda, \lambda^*, 0)$, mas de

$$\begin{aligned} e^{zx \partial_x} f(x) &= \sum_{m,n} \frac{z^m}{m!} (x \partial_x)^m x^n \left[\frac{d^n f(x)}{dx^n} \right]_{x=0} = \sum_{m,n} \frac{z^m n^m}{m! n!} x^n \left[\frac{d^n f(x)}{dx^n} \right]_{x=0} \\ &= \sum_n e^{zn} x^n \left[\frac{d^n f(x)}{dx^n} \right]_{x=0} = \sum_n (e^z x)^n \left[\frac{d^n f(e^z x)}{d(e^z x)^n} \right]_{x=0} = f(e^z x) \end{aligned}$$

e

$$[\lambda \partial_\lambda, \lambda^* \partial_{\lambda^*}] = 0$$

, temos

$$e^{z(\lambda \partial_\lambda + \lambda^* \partial_{\lambda^*})} \chi(\lambda, \lambda^*, t) = e^{z\lambda \partial_\lambda} e^{z\lambda^* \partial_{\lambda^*}} \chi(\lambda, \lambda^*, t) = \chi(e^z \lambda, e^z \lambda^*, t) \quad (3.2.9)$$

Portanto, separando o operador exponenciado em exponenciais cuja ação sobre $\chi(\lambda, \lambda^*, 0)$ é conhecida, podemos obter a solução. Primeiramente, denoto

$$P = \lambda \partial_\lambda + \lambda^* \partial_{\lambda^*} \quad (3.2.10a)$$

$$Q = -2N |\lambda|^2 + (M \lambda^{*2} + M^* \lambda^2) \quad (3.2.10b)$$

de modo que a solução formal se escreve

$$\chi(\lambda, \lambda^*, t) = e^{-\frac{\gamma}{2} t (P+Q)} \chi(\lambda, \lambda^*, 0) \quad (3.2.11)$$

A ação de e^{xP} sobre $\chi(\lambda, \lambda^*, 0)$ é dada por (3.2.9) e a de e^{yQ} é apenas multiplicá-la como um número. Iremos efetuar a separação seguinte

$$e^{-\frac{\gamma}{2}t(P+Q)} = e^{(-\frac{\gamma}{2}t)xQ} e^{(-\frac{\gamma}{2}t)yP}$$

, onde x e y são números a serem determinados, pelo método matricial [26]⁴. Começamos por representar P e Q por matrizes que satisfaçam a mesma relação de comutação:

$$\begin{aligned} [P, Q] f(\lambda, \lambda^*) &= -2N [(\lambda\partial_\lambda + \lambda^*\partial_{\lambda^*}) (|\lambda|^2 f) - |\lambda|^2 (\lambda\partial_\lambda + \lambda^*\partial_{\lambda^*}) f] \\ &\quad + M [\lambda^*\partial_{\lambda^*} (\lambda^{*2} f) - \lambda^{*3}\partial_{\lambda^*} f] + M^* [\lambda\partial_\lambda (\lambda^2 f) - \lambda^3\partial_\lambda f] \\ &= (-4N |\lambda|^2 + 2M\lambda^{*2} + 2M^*\lambda^2) f(\lambda, \lambda^*) \end{aligned}$$

Ou seja,

$$[P, Q] = 2Q \quad (3.2.12)$$

Para que o método funcione, é importante que as matrizes, as quais denotarei também como P e Q , satisfaçam $c_1P + c_2Q = 0$ apenas para os números $c_1 = c_2 = 0$. As matrizes seguintes satisfazem essa condição e a relação (3.2.12):

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.13)$$

Agora,

$$(P+Q)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (P+Q)^n = \begin{cases} I_d & \text{se } n \text{ par} \\ (P+Q) & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases} \quad (3.2.14)$$

, onde I_d é a matriz identidade, e

$$P^n = \begin{cases} I_d & \text{se } n \text{ par} \\ P & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}, \quad Q^n = \begin{cases} Q & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{se } n > 1 \end{cases} \quad (3.2.15)$$

Assim,

$$e^{-\frac{\gamma}{2}t(P+Q)} = I_d \cosh\left(\frac{\gamma t}{2}\right) - (P+Q) \sinh\left(\frac{\gamma t}{2}\right) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\gamma t}{2}} & -\sinh\left(\frac{\gamma t}{2}\right) \\ 0 & e^{\frac{\gamma t}{2}} \end{pmatrix} \quad (3.2.16)$$

e

$$\begin{aligned} e^{(-\frac{\gamma}{2}t)xQ} e^{(-\frac{\gamma}{2}t)yP} &= \left[I_d - \frac{\gamma t}{2} xQ \right] \left[I_d \cosh\left(\frac{\gamma t}{2} y\right) - P \sinh\left(\frac{\gamma t}{2} y\right) \right] \\ \begin{pmatrix} 1 & -x\frac{\gamma t}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-y\frac{\gamma t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{y\frac{\gamma t}{2}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{-y\frac{\gamma t}{2}} & -x\frac{\gamma t}{2} e^{y\frac{\gamma t}{2}} \\ 0 & e^{y\frac{\gamma t}{2}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

⁴Para outros dois métodos, mais algorítmicos, ver as referências de [27].

Igualando as duas matrizes descobrimos que

$$x = \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma t} \quad , \quad y = 1$$

e ficamos com

$$\chi(\lambda, \lambda^*, t) = e^{-(1-e^{-\gamma t})[N|\lambda|^2 - \frac{1}{2}(M\lambda^{*2} + M^*\lambda^2)]} e^{-\frac{\gamma}{2}t(\lambda\partial_\lambda - \lambda^*\partial_{\lambda^*})} \chi(\lambda, \lambda^*, 0) \quad (3.2.18)$$

, que com a condição inicial (3.2.7b) e usando (3.2.9), se torna

$$\chi(\lambda, \lambda^*, t) = \sum_{\alpha, \beta} N_{\alpha\beta} \langle \beta | \alpha \rangle e^{B^*\lambda - A\lambda^* - \mathcal{N}|\lambda|^2 + M\lambda^{*2} + M^*\lambda^2} \quad , \quad \text{onde} \quad (3.2.19a)$$

$$A = \alpha e^{-\frac{\gamma}{2}t} \quad , \quad B = \beta e^{-\frac{\gamma}{2}t} \quad , \quad \mathcal{N} = N(1 - e^{-\gamma t}) \quad , \quad \mathcal{M} = \frac{1}{2}M(1 - e^{-\gamma t}) \quad (3.2.19b)$$

Substituo agora (3.2.19a) em (3.2.5) escolhendo $\kappa_1 = A$ e $\kappa_2 = B$ em cada termo do somatório, ficando com:

$$\tilde{\rho}(t) = \sum_{\alpha, \beta} N_{\alpha\beta} \langle \beta | \alpha \rangle \int P_{AB}(\xi, \xi^*) \frac{|\xi + A\rangle \langle \xi + B|}{\langle \xi + B | \xi + A \rangle} d^2\xi \quad (3.2.20a)$$

$$P_{AB}(\xi, \xi^*) = \pi^{-2} \int e^{-\mathcal{N}|\lambda|^2 + M\lambda^{*2} + M^*\lambda^2 + \lambda^*\xi - \lambda\xi^*} d^2\lambda \quad (3.2.20b)$$

É importante salientar que a integral (3.2.20b) diverge para $|M| > N$. No entanto, $P_{AB}(\xi, \xi^*)$ deve ser interpretado como uma função generalizada de acordo com a teoria de distribuições, e só possui significado físico dentro de uma integral no plano complexo de ξ . Na prática, o que se faz e será feito na próxima subseção é trocar a ordem das integrações em $Re(\lambda)$, $Im(\lambda)$, $Re(\xi)$ e $Im(\xi)$ na expressão (3.2.20a)⁵, o que nos dará resultados válidos para qualquer $|M| \leq \sqrt{N(N+1)}$.

3.2.3 Detecção homodina do estado

A probabilidade de que a medida da quadratura Q_θ retorne o valor q_θ é

$$\langle q_\theta | \tilde{\rho} | q_\theta \rangle$$

, onde $|q_\theta\rangle$ é um autoestado de Q_θ com autovalor q_θ . Essa medida é realizada através da detecção homodina (ver seção 1.4).

Vemos que se $\tilde{\rho}$ está escrito na representação P generalizada, no cálculo dessa probabilidade aparecerão produtos internos $\langle q_\theta | \alpha \rangle$ ($|\alpha\rangle$ um estado coerente) que já foram calculados na seção 1.4:

$$\langle q_\theta | \alpha \rangle = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}q_\theta^2 + \sqrt{2}q_\theta\alpha e^{-i\theta} - \frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{1}{2}\alpha^2 e^{-2i\theta}} \quad (3.2.21)$$

⁵Para uma justificativa desse procedimento, consultar [28] cap. 5 ou o mais rigoroso matematicamente Schwartz, L. - *Théorie des distributions*.

A probabilidade de se obter q_θ é então (denotando $\xi = x_1 + ix_2$ com x_1, x_2 reais)

$$\langle q_\theta | \tilde{\rho} | q_\theta \rangle = \pi^{-\frac{1}{2}} \sum_{\alpha, \beta} N_{\alpha\beta} \langle \beta | \alpha \rangle e^{-q_\theta^2 + \sqrt{2}x(A+B^*) - \frac{1}{2}(A+B^*)^2} \int P_{AB}(\xi, \xi^*) e^{-2x_1^2 - 2x_1[(A+B^*) - \sqrt{2}q_\theta]} dx_1 dx_2$$

cujo resultado nos dá

$$\langle q_\theta | \tilde{\rho} | q_\theta \rangle = \sum_{\alpha, \beta} N_{\alpha\beta} \frac{\langle \beta | \alpha \rangle}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_x^2}(q_\theta - \delta_{\alpha\beta})} \quad , \quad \begin{cases} \delta_{\alpha\beta} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha e^{i\theta} + \beta e^{-i\theta}) e^{-\frac{\gamma}{2}t} \\ \sigma_x^2 &= \frac{1}{2} \{1 + 2[N + |M| \cos(2\theta + \psi)] (1 - e^{-\gamma t})\} \end{cases} \quad (3.2.22)$$

Consideremos um estado inicial particular

$$\tilde{\rho}(0) = C [|\alpha\rangle\langle\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha| + i(|-\alpha\rangle\langle\alpha| - |\alpha\rangle\langle-\alpha|)] \quad (3.2.23)$$

, onde C é uma constante de normalização. Um estado desse tipo pode ser gerado fazendo um estado coerente passar por um meio não-linear⁶. Com essa escolha, (3.2.22) torna-se

$$\langle q_\theta | \tilde{\rho}(t) | q_\theta \rangle = C [p_\alpha^2 + p_{-\alpha}^2 + 2p_\alpha p_{-\alpha} \text{sen } \Omega |\langle \alpha | -\alpha \rangle|^\eta] \quad (3.2.24)$$

, onde
$$p_\nu = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_x^2} [q_\theta - \sqrt{2}|\nu| \cos(\theta + \arg \nu) e^{-\frac{\gamma}{2}t}]^2} \quad , \quad (\nu = -\alpha, \alpha)$$

$$\Omega = \frac{\sqrt{2}|\alpha|}{\sigma_x^2} q_\theta \text{sen}(\theta + \arg \alpha) e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$\eta = 1 - \frac{e^{-\gamma t}}{2\sigma_x^2}$$

$\arg \nu$ denota a fase do número complexo ν (se $\nu = |\nu| e^{i\theta}$, $\arg \nu = \theta$).

O último termo de (3.2.24) revela que pode-se observar um padrão de interferências fazendo essa medida, que será destruído para $|\alpha| \gg 1$ a menos que o expoente η seja suficientemente pequeno. Se $|M| = \sqrt{N(N+1)}$, que é o maior valor para $|M|$, e fizermos $N \gg 1$

$$\eta \approx 1 - \left[1 + \frac{(e^{\gamma t} - 1)}{4N} + O(N^{-2}) \right]^{-1} \quad (3.2.25)$$

A figura 3.2 mostra como a interferência é mantida no tempo $t = 2/\gamma$ para o reservatório comprimido ($|M| = \sqrt{N(N+1)}$) enquanto no reservatório térmico a temperatura nula ($M = N = 0$) ela não aparece. Segundo (3.2.25), o reservatório comprimido mantém o expoente η menor que o que corresponde ao reservatório térmico a temperatura nula, para tempos t tais que $\frac{e^{\gamma t}}{4N} \gg 1$ ou seja, para $\gamma t \gg \ln N$, para o qual $\eta \approx 1$.

⁶Como um meio Kerr; ver [15], cap. 22.

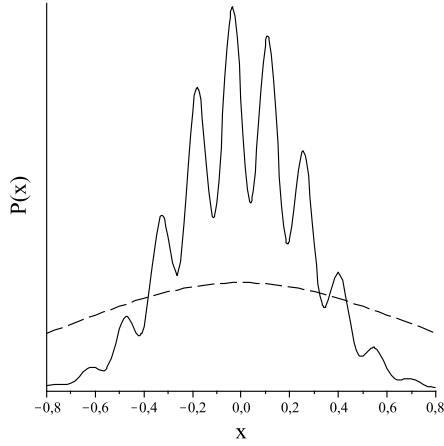


Figura 3.2: Padrões de interferência para $P(x = q_\theta) = \langle q_\theta | \tilde{\rho}(t) | q_\theta \rangle$, com $\tilde{\rho}(0)$ dado por (3.2.23), com $\alpha = 5\pi/\sqrt{8}$, tempo $t = 2/\gamma$, $\theta = -\pi/2$ e $\psi = 0$. O padrão é visível para $|M| = \sqrt{N(N+1)}$ com $N = 90$ (linha sólida) mas ausente para $N = M = 0$ (linha tracejada).

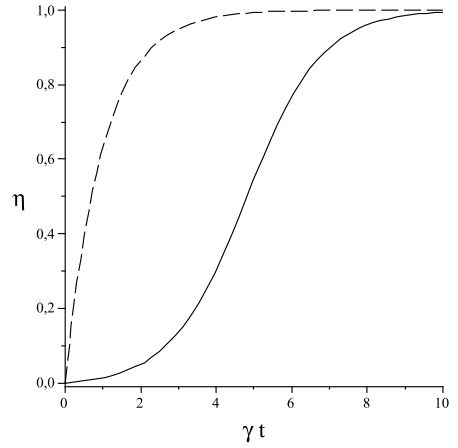


Figura 3.3: Valor do parâmetro η em função do tempo em unidades de γ^{-1} para $\cos(2\theta + \psi) = -1$ e $|M| = \sqrt{N(N+1)}$ com $N = 30$ para a linha sólida e $N = 0$ para a tracejada. O efeito do reservatório comprimido é preservar o termo de interferência em (3.2.24)

3.3 Superposição de estados de Fock

3.3.1 Equação de Fokker-Planck

Podemos representar um operador densidade por (ver seção 1.6):

$$\tilde{\rho}(t) = \pi^{-1} \int W(\alpha, t) T(\alpha) d^2\alpha \quad , \quad T(\alpha) = \pi^{-1} \int D(\lambda) e^{\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda} d^2\lambda \quad (3.3.1)$$

, onde $D(\lambda)$ é o operador de deslocamento com respeito a a e a^\dagger . Temos as seguintes correspondências:

$$a^\dagger \tilde{\rho} \leftrightarrow \left(\alpha^* - \frac{1}{2} \partial_\alpha \right) W(\alpha) \quad \tilde{\rho} a \leftrightarrow \left(\alpha - \frac{1}{2} \partial_{\alpha^*} \right) W(\alpha) \quad (3.3.2a)$$

$$\tilde{\rho} a^\dagger \leftrightarrow \left(\alpha^* + \frac{1}{2} \partial_\alpha \right) W(\alpha) \quad a \tilde{\rho} \leftrightarrow \left(\alpha + \frac{1}{2} \partial_{\alpha^*} \right) W(\alpha) \quad (3.3.2b)$$

Utilizando-as transformamos a equação mestra de operadores para $\tilde{\rho}(t)$ em uma equação diferencial parcial para $W(\alpha, t)$

$$\partial_t W(\alpha, t) = \frac{\gamma}{2} \left[\partial_\alpha \alpha + \partial_{\alpha^*} \alpha^* + (2N + 1) \partial_\alpha \partial_{\alpha^*} + |M| \left(e^{i\psi} \partial_\alpha^2 + e^{-i\psi} \partial_{\alpha^*}^2 \right) \right] W(\alpha, t) \quad (3.3.3)$$

Esse tipo de equação é conhecido como de Fokker-Plack e esta acima será resolvida na próxima subseção. Vale ressaltar que uma equação do mesmo tipo poderia ser

obtida para a função $P(\alpha)$ da representação P , mas as soluções desta só poderiam ser representadas por funções generalizadas no sentido de distribuições, e teriam pouca utilidade em cálculos práticos (em oposição a uma utilidade do ponto de vista da manipulação formal). Ainda, $P(\alpha)$ não pode ser também uma função comum se o operador densidade que ela representa consistir em uma superposição de estados de Fock, ao contrário da função de Wigner $W(\alpha)$, que é bem definida nessa situação.

3.3.2 Solução da equação de Fokker-Planck

Até o momento nada foi dito sobre a condição inicial de $\tilde{\rho}$ ou equivalentemente, de $W(\alpha)$. A idéia é resolver a equação de Fokker-Planck (3.3.3) para a função $W_G(\alpha, t)$ tal que $W_G(\alpha, t = 0) = \delta^2(\alpha - \alpha_0)$, que representa um ponto no plano complexo de α . Conhecida a evolução temporal de um ponto arbitrário temos então a evolução de um estado geral fazendo

$$W(\alpha, t) = \int W(\alpha_0, t = 0) W_G(\alpha, \alpha_0, t) d^2\alpha_0 \quad (3.3.4)$$

ou seja, a evolução de $W(\alpha)$ é dada pela soma da evolução dos pontos α_0 do plano complexo de α com o peso dado pela condição inicial $W(\alpha_0, t = 0)$. $W_G(\alpha, \alpha_0, t)$ pode ser reconhecida como uma função de Green ou propagador⁷, que leva um estado inicial qualquer $W(\alpha, t = 0)$ em $W(\alpha, t)$.

Primeiramente tomamos a transformada de Fourier complexa de $W_G(\alpha)$:

$$W_G(\alpha, t) = \pi^{-1} \int e^{\alpha z^* - \alpha^* z} \hat{W}_G(z, t) d^2z \quad (3.3.5)$$

Podemos ver daí as seguintes correspondências:

$$\begin{array}{ll} \alpha W(\alpha) & \leftrightarrow -\partial_{z^*} \hat{W}_G(z) & \alpha^* W(\alpha) & \leftrightarrow \partial_z \hat{W}_G(z, t) \\ \partial_\alpha W(\alpha) & \leftrightarrow z^* \hat{W}_G(z) & \partial_{\alpha^*} W(\alpha) & \leftrightarrow -z \hat{W}_G(z, t) \end{array}$$

E a equação de Fokker-Planck se torna então, no espaço recíproco,

$$\partial_t \hat{W}_G(z, t) = -\frac{\gamma}{2} [z \partial_z + z^* \partial_{z^*} + (2N + 1) |z|^2 - |M| (e^{i\psi} z^2 + e^{-i\psi} z^{*2})] \hat{W}_G(z, t)$$

Se $z = x + iy$, podemos reescrever a equação acima como:

$$\partial_t \hat{W}_G = -\gamma \{ x \partial_x + y \partial_y + (N + 1/2) (x^2 + y^2) - |M| [(x^2 - y^2) \cos \psi - 2xy \sin \psi] \} \hat{W}_G \quad (3.3.6)$$

Essa equação, através de uma interpretação geométrica, pode ser resolvida pelo método das curvas características (apêndice III). Segundo esse método, resolver (3.3.6)

⁷Na verdade, W_G nem sequer representa um estado físico (ver [2], cap.4), o que não invalida o procedimento. Se o peso $W(\alpha, t = 0)$ for físico, $W(\alpha, t)$ também o será.

equivale a solucionar as seguintes equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{dt}{ds} = 1 \quad (3.3.7a)$$

$$\frac{dx}{ds} = \gamma x \quad , \quad \frac{dy}{ds} = \gamma y \quad (3.3.7b)$$

$$\frac{d\hat{W}_G}{ds} = -\gamma \hat{W}_G \left\{ \left(N + \frac{1}{2} \right) (x^2 + y^2) - |M| [(x^2 - y^2)\cos\psi - 2xy\sen\psi] \right\} \quad (3.3.7c)$$

Como o parâmetro s só aparece em ds , ele é definido a menos de uma constante aditiva. Podemos usar essa liberdade para, escolher $t = s$ como solução da primeira das equações. As da segunda linha nos dão $x = x_0 e^{\gamma t}$ e $y = y_0 e^{\gamma t}$, onde x_0 e y_0 são ainda indefinidos. Substituindo essas soluções em (3.3.7c) e integrando em t (porque $ds = dt$), chegamos à solução:

$$\hat{W}_G(x, y, t) = f(xe^{-\gamma t}, ye^{-\gamma t}) e^{-\frac{1}{2}\left\{(N+\frac{1}{2})(x^2+y^2)-|M|[(x^2-y^2)\cos\psi-2xy\sen\psi]\right\}} \quad (3.3.8)$$

f é uma função arbitrária dos parâmetros indefinidos $x_0 = xe^{-\gamma t}$ e $y_0 = ye^{-\gamma t}$. Como assumimos $W_G(\alpha, t = 0) = \delta^2(\alpha - \alpha_0)$,

$$\hat{W}_G(z, t = 0) = \pi^{-1} e^{\alpha_0^* z - \alpha_0 z^*} = \pi^{-1} e^{-2i(x\alpha_{02} - y\alpha_{01})}$$

, onde $\alpha_0 = \alpha_{01} + i\alpha_{02}$. Essa condição nos dá f no tempo $t = 0$, e com isso obtemos diretamente a solução

$$\hat{W}_G(x, y, t) = \frac{1}{\pi} e^{2i(\alpha_{01}y - \alpha_{02}x)e^{-\gamma t} - \frac{(1-e^{-2\gamma t})}{2}\left\{(N+\frac{1}{2})(x^2+y^2)-|M|[(x^2-y^2)\cos\psi-2xy\sen\psi]\right\}} \quad (3.3.9)$$

Pela transformada de Fourier (3.3.5), obtemos finalmente $W_G(\alpha, t)$:

$$W_G(\alpha, t) = \frac{2}{\pi\sqrt{A_1}(1-e^{-2\gamma t})} \exp \left\{ -\frac{2A_2}{A_1(1-e^{-2\gamma t})} \left[(\alpha_1 - \alpha_{01}e^{-\gamma t})^2 + \frac{(\alpha_2 - \alpha_{02}e^{-\gamma t})^2 \sen^2\psi}{4} (1-e^{-2\gamma t})^2 + (\alpha_1 - \alpha_{01}e^{-\gamma t})(\alpha_2 - \alpha_{02}e^{-\gamma t}) \sen\psi (1-e^{-2\gamma t}) \right] - 2\frac{(\alpha_2 - \alpha_{02}e^{-\gamma t})^2}{A_2(1-e^{-2\gamma t})} \right\} \quad (3.3.10)$$

, onde $A_1 = \left(N + \frac{1}{2}\right)^2 - |M|^2 \cos\psi + \frac{\sen^2\psi}{4}$ e $A_2 = N + \frac{1}{2} - |M| \cos\psi$.

Até o momento, nada foi dito sobre a condição inicial $W(\alpha, t = 0)$. A partir da próxima subseção solucionaremos o problema para o caso em que o sistema se encontra inicialmente numa superposição de estados de Fock.

3.3.3 Medição homodina para estados de Fock

Consideraremos como estado inicial,

$$\tilde{\rho}(0) = \sum_{m,n} C_{mn} |m\rangle\langle n| \quad , \quad \sum_n C_{nn} = 1 \quad (3.3.11)$$

A soma é sobre estados de Fock (descritos na seção 1.2). Para obter a função de Wigner correspondente $W(\alpha, t = 0)$, usaremos

$$\text{tr}\{\tilde{\rho}(t)T(\alpha)\} = W(\alpha, t) \quad (3.3.12)$$

e o resultado

$$D(\lambda/2) |\nu\rangle = D(\lambda/2)D(\nu) |0\rangle = e^{\frac{1}{4}(\lambda\nu^* - \lambda^*\nu)} D(\nu + \lambda/2) |0\rangle = e^{\frac{1}{4}(\lambda\nu^* - \lambda^*\nu)} |\nu + \lambda/2\rangle$$

válido para um estado coerente $|\nu\rangle$ e obtido através de (1.3.16). Além disso, $D(\lambda) = D(\lambda/2)D(\lambda/2)$ e $D(\lambda/2) = D^\dagger(-\lambda/2)$, portanto

$$\begin{aligned} \text{tr}\{\tilde{\rho}(0)T(\alpha)\} &= \text{tr} \left\{ \int d^2\lambda e^{\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda} \tilde{\rho}(0) \pi^{-3} \int d^2\nu D(\lambda/2) |\nu\rangle\langle\nu| D^\dagger(-\lambda/2) \right\} \\ &= \pi^{-3} \iint \langle\nu - \lambda/2| \tilde{\rho}(0) |\nu + \lambda/2\rangle e^{\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda} e^{\frac{1}{2}(\lambda\nu^* - \lambda^*\nu)} d^2\nu d^2\lambda \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Usando o resultado (1.3.5) para o produto interno $\langle n|\alpha\rangle$, temos:

$$\langle\nu - \lambda/2| \tilde{\rho}(0) |\nu + \lambda/2\rangle = e^{-\frac{|\nu - \lambda/2|^2}{2} - \frac{|\nu + \lambda/2|^2}{2}} \sum_{m,n} C_{mn} \frac{(\nu^* - \lambda^*/2)^m (\nu + \lambda/2)^n}{\sqrt{m!n!}}$$

Para a escolha feita para o estado inicial ficamos com:

$$W(\alpha, t = 0) = \sum_{m,n} \frac{C_{mn}}{\pi^3 \sqrt{m!n!}} \iint e^{-|\nu|^2 - \frac{|\lambda|^2}{4}} (\nu^* - \lambda^*/2)^m (\nu + \lambda/2)^n e^{\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda} e^{\frac{1}{2}(\lambda\nu^* - \lambda^*\nu)} d^2\nu d^2\lambda \quad (3.3.14)$$

O resultado da detecção homodina é distribuído segundo

$$\langle q_\theta | \tilde{\rho}(t) | q_\theta \rangle = \pi^{-1} \int W(\alpha, t) \langle x_\theta | T(\alpha) | x_\theta \rangle d^2\alpha$$

Usando a expressão (3.3.1) que define $T(\alpha)$, expandindo-o na base dos estados coerentes e com o já calculado produto $\langle q_\theta | \alpha \rangle$ (ver (3.2.21)), podemos obter $\langle q_\theta | \tilde{\rho}(t) | q_\theta \rangle$ por integração, mas consideraremos aqui o caso particular em que $\psi = 0$ e

$$\tilde{\rho}(0) = \frac{1}{2} (|0\rangle + |1\rangle) (\langle 0| + \langle 1|) \quad (3.3.15)$$

, e verificaremos o resultado da medição para $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$. Fazendo a integração, chegamos a

$$\begin{aligned}\langle x_\theta | T(\alpha) | x_\theta \rangle &= \delta^2(\nu - \sqrt{2}\alpha_1) \quad , \quad \text{para } \theta = 0 \\ \langle x_\theta | T(\alpha) | x_\theta \rangle &= \delta^2(\nu + \sqrt{2}\alpha_2) \quad , \quad \text{para } \theta = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Temos também,

$$W(\alpha_0, t = 0) = \frac{4}{\pi} e^{-2|\alpha_0|^2} (|\alpha_0|^2 + \alpha_{02})$$

e a função de Green se simplifica com $\psi = 0$:

$$W_G(\alpha, t) = \frac{2e^{-\frac{2}{(1-e^{-2\gamma t})} \left[\frac{(\alpha_1 - \alpha_{01} e^{-\gamma t})^2}{N + \frac{1}{2} + |M|} + \frac{(\alpha_2 - \alpha_{02} e^{-\gamma t})^2}{N + \frac{1}{2} - |M|} \right]}}{\pi (1 - e^{-2\gamma t}) \sqrt{(N + \frac{1}{2})^2 - |M|^2}}$$

Usando todos esses resultados, traçamos abaixo dois gráficos, o primeiro para $\theta = \frac{\pi}{2}$ e o segundo para $\theta = 0$. Eles mostram que o reservatório afeta menos o sistema no que se refere à quadratura comprimida ($\theta = \pi/2$), mantendo as características iniciais do estado por mais tempo, e que o contrário acontece na quadratura aumentada ($\theta = 0$); nesse caso, o reservatório comprimido destrói as franjas de interferência mais rápido do que o térmico a temperatura nula.

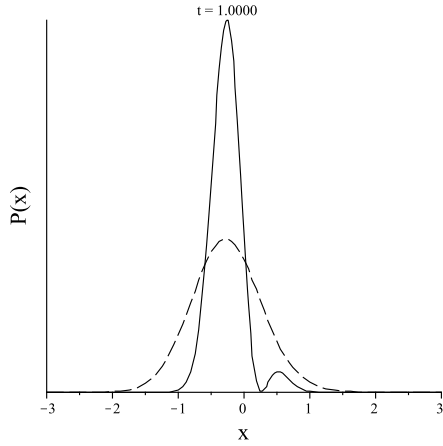


Figura 3.4: Padrões de interferência para $P(x) = \langle x_\theta | \tilde{\rho}(t) | x_\theta \rangle$, com $\tilde{\rho}(0)$ dado por (3.3.15), com $\psi = 0$, tempo $t = 1/\gamma$ e $\theta = \pi/2$. O padrão é visível para $|M| = \sqrt{N(N+1)}$ com $N = 90$ (linha sólida) mas ausente para $N = M = 0$ (linha tracejada).

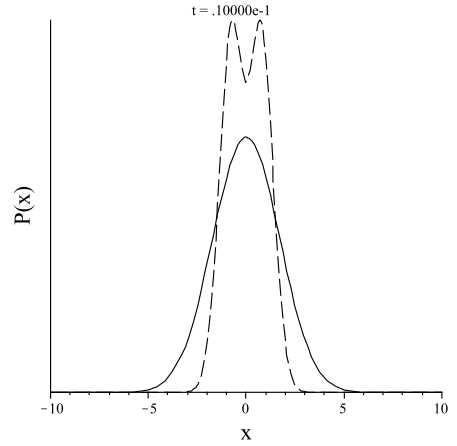


Figura 3.5: Padrões de interferência para $P(x) = \langle x_\theta | \tilde{\rho}(t) | x_\theta \rangle$, com $\tilde{\rho}(0)$ dado por (3.3.15), com $\psi = 0$, tempo $t = 10^{-2}/\gamma$ e $\theta = 0$. O padrão não é visível para $|M| = \sqrt{N(N+1)}$ com $N = 90$ (linha sólida) mas o é para $N = M = 0$ (linha tracejada).

Apêndice III: Método das curvas características

Consideremos uma superfície parametrizada por s e t , na qual a função $F(x(s, t), y(s, t), z(s, t)) = c$, onde c é constante. Derivando dos dois lados em s , teremos

$$\nabla F \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = 0 \quad , \quad \mathbf{r}^T = (x \ y \ z)$$

e o mesmo para t , ou seja, ∇F é perpendicular a dois vetores que tangenciam a superfície, o que significa que ∇F é normal à ela. Se uma superfície é dada por $z = u(x, y)$, temos $F(x, y, u(x, y)) = z - u(x, y) = 0$ e

$$(\nabla F)^T = (\partial_x u(x, y) \ \partial_y u(x, y) \ -1) \quad (\text{III.1})$$

é sempre normal a ela no ponto $\mathbf{r}^T = (x \ y \ u(x, y))$.

Consideremos a equação diferencial parcial

$$a(x, y)\partial_x u(x, y) + b(x, y)\partial_y u(x, y) = c(x, y, u) \quad (\text{III.2})$$

Vamos assumir que a solução $u(x, y)$ é conhecida. Ela é representada por uma superfície cuja normal no ponto \mathbf{r} é dada por (III.1). Denoto agora por $\mathbf{v}^T = (a(x, y) \ b(x, y) \ c(x, y))$ o campo vetorial formado pelas funções que aparecem na equação diferencial. Se no domínio de interesse $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \neq 0$, (III.2) escrita como

$$\mathbf{v} \cdot \nabla F = 0$$

mostra que \mathbf{v} é tangente à superfície $z = u(x, y)$. Uma curva, parametrizada por s , que satisfaça

$$\frac{dx}{ds} = a(x, y) \quad \frac{dy}{ds} = b(x, y) \quad \frac{du}{ds} = c(x, y, u) \quad (\text{III.3})$$

é chamada curva característica da equação diferencial e a solução geral é a união dessas curvas. No caso de uma equação diferencial parcial mais geral

$$\sum_i \mathbf{a}_i(\mathbf{x}) \partial_{x_i} u(\mathbf{x}) = c(\mathbf{x}, u) \quad (\text{III.4})$$

com $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \neq 0$, solucioná-la equivale a resolver o sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad , \quad \frac{du}{ds} = c(\mathbf{x}, u) \quad (\text{III.5})$$

Igualando o diferencial ds em cada uma podemos escrever o sistema também como

$$\frac{d\mathbf{x}_1}{\mathbf{a}_1(\mathbf{x})} = \frac{d\mathbf{x}_2}{\mathbf{a}_2(\mathbf{x})} = \dots = \frac{du}{c(\mathbf{x}, u)} \quad (\text{III.6})$$

, o que se conhece na literatura como equações subsidiárias.

Mais detalhes sobre o método em [29], cap. II, §1.

CONCLUSÃO

Quando a dinâmica da interação de um sistema com um reservatório de flutuações reduzidas, como a que é tratada aqui, é descrita na representação de Heisenberg, o efeito do reservatório como o de um ruído aparece mais claramente [2]. A peculiaridade da dinâmica dada pela equação mestra (3.2.2) é que esse ruído afeta diferentemente quadraturas distintas; dependência que está contida no caráter complexo de M (mais especificamente, em ψ de $M = |M| e^{i\psi}$). Por exemplo, vimos na seção 2.2 que o estado assintótico pode ser um estado comprimido e nas seções 3.2 e 3.3, que as franjas de interferência mensuráveis no estado inicial do sistema são destruídas em escalas de tempo distintas para quadraturas distintas.

Em geral, para noticiar os efeitos característicos dessa dinâmica é importante que se tenha um controle da quadratura que é observada, o que torna necessário o uso de esquemas como a detecção homodina. Esse esquema no entanto, só pode ser usado na medição de um modo de campo eletromagnético e portanto para aplicá-lo no sistema de interesse, este deve ser um modo de campo eletromagnético. Isso traz o problema de como efetivamente construir um sistema total (sistema de interesse mais reservatório) que reproduza a dinâmica de (3.2.2). Nos artigos de [5] são propostas soluções que fazem uso de “feedback”, um sinal que depende de alguma medição não-destrutiva do sistema de interesse e que é reinjetado sobre o próprio sistema. No primeiro artigo, é apresentada uma dinâmica em que o estado assintótico atingido pelo sistema de interesse é o mesmo de um cuja dinâmica é dada por (3.2.2) e no segundo, uma dinâmica em que as franjas de interferência medidas por detecção homodina são preservadas. Apesar disso, a dinâmica do modo não é a mesma de (3.2.2) em nenhum dos casos.

Vimos na seção 2.3 no entanto, que outros efeitos mensuráveis aparecem sem a necessidade de se observar quadraturas específicas. O problema é que na dedução da equação mestra que descreve a dinâmica de um átomo ou molécula sobre o qual incide um campo eletromagnético com uma quadratura comprimida, a hipótese usualmente considerada de que o átomo só interage com os modos comprimidos do campo traz dificuldades práticas, como apontado em [2]. Até o momento, muitos efeitos da interação de um átomo com um campo de vácuo comprimido de grande largura espectral foram previstos em teoria, e muitas propostas de como reproduzi-los em laboratório foram feitas (ver por exemplo, os artigos que citam a referência *PRL - vol. 56, pág. 1917* cujo conteúdo está na íntegra no livro [2], cap. 10), mas nenhuma ainda foi realizada, pela dificuldade de introduzir um átomo em um campo desse tipo.

Em suma, essa equação mestra ainda é frequentemente revisitada no campo teórico

mas encontrou pouco espaço no experimental. Resta justificar essa dissertação observando que a possibilidade da realização de um tal reservatório é real e principalmente, verificando a abrangência de alguns métodos apresentados. Em particular, os que tratam da solução analítica da equação mestra são usados de modo recorrente em especial na ótica quântica.

BIBLIOGRAFIA

- [1] PAZ, J. P.; ZUREK, W. H. Environment-Induced Decoherence and the Transition from Quantum to Classical. Curso dado em *72nd Les Houches Summer School on "Coherent Matter Waves"*, July-August 1999, disponível em arXiv:quant-ph/0010011 (2000)
- [2] GARDINER, C. W.; ZOLLER, P. *Quantum Noise*. 3 ed. Springer (2004)
- [3] GLAUBER, R. J. *Quantum Theory of Optical Coherence - Selected papers and lectures*. Wiley-VCH (2007)
- [4] COHEN-TANNOUDJI, C.; DUPONT-ROC, J.; GRYNBERG, G. *Atom-Photon Interactions - Basic Processes and Applications*. Wiley (1992)
- [5] TOMBESI, P.; VITALI, D. Physical realization of an environment with squeezed quantum fluctuations via quantum-nondemolition-mediated feedback. *Physical Review A*, v. 50, no. 5, p. 4253. (1994) - Macroscopic coherence via quantum feedback. *Physical Review A*, v. 50, no. 6, p. 4913 (1995)
- [6] KENNEDY, T. A. B.; WALLS, D. F. Squeezed quantum fluctuations and macroscopic quantum coherence. *Physical Review A*, v. 37, p. 152 (1988)
- [7] SOUZA, L. A. M.; NEMES, M. C. Characteristic time and maximum mixedness: Single mode Gaussian states in dissipative channels. *Physics Letters A*, v.372, issue 20, p. 3616 (2008)
- [8] COHEN-TANNOUDJI, C.; DUPONT-ROC, J.; GRYNBERG, G. *Photons and Atoms - Introduction to Quantum Electrodynamics*. John Wiley & Sons (1989)
- [9] DIRAC, P. A. M. *The Principles of Quantum Mechanics*. 4 ed. Clarendon Press (1967)
- [10] GLAUBER, R. J. Quantum Theory of Optical Coherence. *Physical Review*, v. 130, p. 2529. (1963) - Coherent and Incoherent States. *Physical Review*, v. 131, p. 2766 (1963)
- [11] CAHILL, K. E.; GLAUBER, R. J. Ordered Expansions in Boson Amplitude Operators. *Physical Review*, v. 177, p. 1857. (1969) - Density Operators and Quasiprobability Distributions. *Physical Review*, v. 177, p.1882 (1969)

- [12] SCHLEICH, W. P. *Quantum Optics in Phase Space*. Wiley-VCH (2000)
- [13] MORSE, P. M.; FESHBACH, H. *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill Book Company (1953)
- [14] NEWTON, T. D.; WIGNER, E. P. Localized States for Elementary Systems; *Rev. Mod. Phys*, v.21, p.400 (1949)
- [15] MANDEL, L.; WOLF, E. *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge University Press (1995)
- [16] LEONHARDT, U. *Measuring the Quantum State of Light*. Cambridge University Press (1997)
- [17] SLUSHER, R. E.; HOLBERG, L. W.; YURKE, B.; MERTZ, J. C.; VALLEY, J. F. Observation of Squeezed States Generated by Four-Wave Mixing in an Optical Cavity. *Physical Review Letters*, v. 55, p. 2409 (1985)
- [18] BREITENBACH, G.; MÜLLER, T.; PEREIRA, S. F.; POIZAT, J. -PH.; SCHILLER, S.; MLYNEK, J. Squeezed vacuum from a monolithic optical parametric oscillator. *Journal of the Optical Society of America B*, v. 12, no. 11, p. 2304 (1995)
- [19] WIGNER, E. P. On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium; *Phys. Rev*, v.40, p.749 (1932)
- [20] KLAUDER, J. R.; McKENNA, J.; CURRIE, D. G. On “Diagonal” Coherent-State Representations for Quantum-Mechanical Density Matrices. *Journal of Mathematical Physics*, v. 6, p. 734 (1965)
- [21] DAVIES, E. B. Markovian master equations; *Commun. math. Phys.*, v.39, p.91 (1974)
- [22] JAYNES, E. T.; CUMMINGS, F. W. Comparison of Quantum and Semiclassical Radiation Theories with Application to the Beam Maser ; *Proceedings of the IEEE*, p. 89 (1963)
- [23] EBERLY, J. H.; NAROZHNY, N. B.; SANCHEZ-MONDRAGON, J. J. Periodic spontaneous collapse and revival in a simple quantum model; *Phys. Rev. Lett.*, v.44, p.1323 (1980)
- [24] REMPE, G.; WALTHER, H.; KLEIN, N. Observation of quantum collapse and revival in an one-atom maser; *Phys. Rev. Lett.*, v.58, p.353 (1987)
- [25] BRUNE, M.; HAGLEY, J.; DREYER, J.; MAÎTRE, X.; MAALI, A.; WUNDERLICH, C.; RAIMOND, J. M.; HAROCHE, S. Observing the Progressive Decoherence of the “Meter” in a Quantum Measurement. *Physical Review Letters*, v. 77, no. 24, p. 4887 (1996)

- [26] GILMORE, R. Baker-Campbell-Hausdorff formulas. *Journal of Mathematical Physics*, v. 15, p. 2090 (1974)
- [27] WITSCHHEL, W. Ordered products of exponential operators by similarity transformations. *International Journal of Quantum Chemistry*, v. 20, p. 1233. (1981)
- Ordering of boson operator functions by the Hausdorff similarity transform. *Physics Letters A*, v. 334, p. 140 (2005)
- WILCOX, R. M. Exponential Operators and Parameter Differentiation in Quantum Physics. *Journal of Mathematical Physics*, v. 8, p. 962 (1967)
- [28] SCHWARTZ, L. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. 2 ed. Collection Enseignement des sciences 3 (1979)
- [29] COURANT, R.; HILBERT, D. *Methods of Mathematical Physics, Volume II - Partial Differential Equations*. Interscience Publishers (1966)