

**Desemaranhamento de Qutrits**

Breno Marques Gonçalves Teixeira

Março de 2009

# Desemaranhamento de Qutrits

Breno Marques Gonçalves Teixeira

Orientador: Marcelo Paleólogo França Santos

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Março de 2009

# Agradecimentos

Agradeço aos meus pais e minha irmã que sempre me apoiaram em todas as situações.

Agradeço à Ana que, ao longo dessa jornada sem fim na física, sempre esteve ao meu lado. Agradecer sogra deve dar azar, mas mesmo assim agradeço à família da Ana que eu gosto tanto.

Agradeço ao Grupo Enlight que além de ótimos amigos, são pessoas muito boas de trabalhar junto. Sem a ajuda de todos essa dissertação não sairia. Um agradecimento especial ao Professor Marcelo França Santos por me suportar como orientado.

Agradeço a meu colegas de sala, exceto o Edmilson, por serem grandes amigos, pelas horas de estudos juntos, pelas discussões, as vezes, não muito produtivas, mas bastante engraçadas.

Agradeço à turma do Anta Vesga que, com certeza, sem eles não teria chegado onde estou agora. Pelos dias de zuação em Maravilhas e em Belo Horizonte, que não me deixaram enlouquecer mais do que sou.

Agradeço ao CNPq, a Fapemig e ao Instituto Milênio de Informação Quântica pelo suporte financeiro.

# Resumo

Sistemas emaranhados que interagem com o ambiente tendem a perder o emaranhamento. Para sistemas  $2 \otimes 2$  (dois qubits) que interagem com um reservatório de emissão espontânea, foi mostrado que há essencialmente duas dinâmicas: morte súbita e decaimento assintótico [1]. Alguns trabalhos estudaram o comportamento do emaranhamento para sistemas bipartites de maior dimensão, também com interação com o ambiente. Por exemplo, Lastra *et al.* [2] mostram que em sistemas de maior dimensão pode haver mudança abrupta da dinâmica de desemaranhamento, além da morte súbita já estudada.

Neste trabalho estudamos como a evolução do emaranhamento em um sistema quântico constituído de dois qutrits que interagem com o ambiente de forma independente varia com a mudança da configuração dos níveis de energia de cada subsistema. Para isso, utilizaremos a Negatividade [3] como quantificador de emaranhamento, que informa sobre o emaranhamento livre (destilável) [4], recurso, esse, importante para protocolos de Informação Quântica [5]. Para fazer o cálculo da dinâmica, utilizaremos Trajetórias Quânticas [6, 7] que permitem simular computacionalmente sistemas quânticos. Esse método é equivalente a resolver a Equação Mestra [6, 8] e relaciona-se com realizações experimentais em que obtém-se informação sobre o sistema a partir do monitoramento do reservatório.

# Abstract

The interaction of entanglement system with the environment tends to degrade the entanglement. It has been shown that, for  $2 \otimes 2$  system (two qubits) interacting with spontaneous emission reservoir there are essentially two types of dynamics: sudden death and asymptotic decay of entanglement [1]. The entanglement behavior for bipartite systems of higher dimension interacting with the environment has also been subject of some studies. Lastra et. al. [2] showed that, in system higher dimension, the disentanglement dynamics may present abrupt changes, along with sudden death.

In this work we study quantum system of two qubits that interact with the environment independently, and how the entanglement evolution of these systems changes for different internal level configuration of each subsystem. Therefore, we use Negativity [3] as an entanglement quantifier that gives information on free entanglement (distillable) [4], which is important to quantum information protocols [5]. The dynamics calculation is done using Quantum Trajectories Method [6, 7], which allow us to computationally simulate quantum system. This method is equivalent to solving the Master Equation [6, 8] and is related to experiments in which information on the system is obtained by monitoring the reservoir.

# Conteúdo

<b>Agradecimentos</b>	<b>i</b>
<b>Resumo</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Introdução</b>	<b>vi</b>
<b>1 Correlações</b>	<b>1</b>
1.1 Correlações Clássicas . . . . .	1
1.2 Correlações Quânticas . . . . .	3
1.3 Critério de Peres-Horodecki e Negatividade . . . . .	5
1.3.1 Critério de Separabilidade . . . . .	5
1.3.2 Emaranhamento Destilável . . . . .	8
<b>2 Evolução Temporal de Sistemas Quânticos</b>	<b>11</b>
2.1 Sistemas Fechados . . . . .	11
2.2 Sistemas Abertos . . . . .	13
2.3 Operações Quânticas . . . . .	14
2.4 Equação Mestra . . . . .	15
2.5 Reservatório de Emissão Espontânea . . . . .	19
<b>3 Trajetórias Quânticas</b>	<b>24</b>
3.1 Processo Estocástico Clássico . . . . .	24
3.2 Processo Estocástico Quântico, Trajetórias Quânticas . . . . .	26
3.3 Equivalência entre Trajetórias Quânticas e Equação Mestra . . . . .	27
3.4 Análise usando Trajetórias Quânticas de um Qubit em um Reservatório de Emissão	30
3.5 Análise usando Trajetórias Quânticas de dois Qubits emaranhados em Reservatórios de Emissão Independente . . . . .	32
<b>4 Dinâmica de Dois Qutrits</b>	<b>33</b>
4.1 O Que É Um Qutrit? . . . . .	33
4.2 Desemaranhamento Entre Dois Qutrits . . . . .	35
4.2.1 Configuração Cascata-Cascata . . . . .	36
4.2.2 Configuração V-V . . . . .	38
4.2.3 Configuração Lambda-Lambda . . . . .	40
4.3 Dinâmica de Emaranhamento de Uma Trajetória . . . . .	42
4.4 Solução Analítica para Trajetórias Sem Saltos . . . . .	46
4.4.1 Cascata-Cascata e V-V . . . . .	46
4.4.2 Lambda-Lambda . . . . .	46

4.5	Comparação Entre Diferentes Configurações de Energia . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>50</b>

# Introdução

Os primeiros passos da Mecânica Quântica foram dados no começo do século XX, quando se fez necessária outra teoria para explicar fenômenos exclusivamente microscópicos, por exemplo as linhas espectrais de um átomo (a referência [9] apresenta os fatos que deram origem à Física Quântica de forma cronológica). A criação de um dicotomismo entre física clássica e quântica foi fortalecida por outros fenômenos observados posteriormente que só eram explicados usando o formalismo da mecânica quântica. Mas o que parecia o inferno, começa a tomar forma e entre perguntas (algumas ainda não respondidas) e respostas, surge uma teoria que descreve o mundo microscópico com ótima fidelidade e introduz uma nova forma de ver a natureza, onde as grandezas físicas são descritas por operadores, o sistema físico é descrito por um vetor complexo, etc.

Em seu processo de crescimento em descrever o micro, a Mecânica Quântica mostra suas estranhas peculiaridades: não determinação absoluta dos graus de liberdade, tunelamento, emaranhamento, dentre outras. O que já saía do senso comum, coloca agora todo o nosso instinto em xeque. Entretanto, o que parece ser o fim é, na verdade, o começo de uma nova história. Mesmo com perguntas ainda sem respostas definitivas como a de Einstein, Rosen e Podolski [10], a mecânica quântica trás infinitas possibilidades de aplicações de efeitos exclusivamente quânticos. Por exemplo, o emaranhamento [11], principal motivador de um dos debates científicos mais famosos no século XX (ou até da história da física), aparece, atualmente, como uma das propriedades quânticas mais estudadas. O impressionante é o aparecimento desta propriedade como um recurso para fazer Informação Quântica [5], que é a abordagem que possibilita o uso de quântica para produzir, manipular e transmitir informação. Análogo à Informação Clássica [12], essa nova teoria usa canais de comunicação, portas lógicas e tem como principal portador de informação os qubits [13] (um sistema quântico de dois níveis, o análogo quântico de um bit clássico).

Nessa dissertação, estudaremos propriedades dinâmicas do emaranhamento em sistemas quânticos abertos. São ditos abertos sistemas que possuem interação com o ambiente (sistema com muitos graus de liberdade). Em quântica, pela característica probabilísticas dos estados físicos, se faz necessário o conceito de ensemble: idealização de um número grande de cópias do sistema, considerando-se todas de uma só vez, cada uma representando possíveis estados que o sistema real pode ter. Em sistemas abertos, uma descrição natural da evolução temporal desses ensembles é obtida a partir de uma equação mestra. Nessa dissertação, contudo, aplicaremos um tratamento equivalente, desenvolvido em [6, 7], chamado de Trajetórias Quânticas. Esse tratamento permite acompanhar, através do monitoramento do reservatório, as diferentes evoluções possíveis de cada realização desses ensembles, facilitando, assim, o tempo de computação e enriquecendo a análise teórica como mostraremos ao longo do trabalho. Nesse trabalho, em particular, estudaremos como a evolução do emaranhamento em sistemas quânticos  $3 \otimes 3$  (dois qutrits) que interagem, individualmente, com o ambiente varia se mudarmos as configurações dos níveis internos de energia de cada qutrit ou as condições iniciais do sistema.



O primeiro Capítulo discute sobre o principal recurso usado para fazer Informação Quântica. A discussão é iniciada comparando-se estados clássicos e quânticos, e mostrando como o emaranhamento aparece como uma característica exclusivamente quântica. Essa parte familiariza o leitor com a notação que será usada ao longo dessa jornada. Para usar o emaranhamento como recurso, é preciso quantificá-lo, por isso, vamos introduzir o conceito de Negatividade, criado em [3, 4, 14], que é um dos possíveis quantificadores de emaranhamento de dois qubits e indica o emaranhamento de sistemas mais complexos.

O segundo Capítulo fala sobre a dinâmica de estados quânticos, passando rapidamente por sistemas isolados e concentrando-se na análise de sistemas quânticos abertos. Um sistema isolado tem uma dinâmica completamente diferente de um sistema que está imerso em um banho térmico ou interagindo com outro do qual não se tem controle (o ambiente, neste caso, onde o sistema está imerso). Por menor que essa interação seja, não pode ser desconsiderada. Uma maneira de analisar matematicamente a dinâmica de um sistema que se comunica com o ambiente é através de uma equação Mestra [6, 8]. Essa equação, fornece uma forma simples de descrever sistemas em condições muito próximas das reais.

O terceiro capítulo introduz as Trajetórias Quânticas [6, 7] que também permitem a análise de qualquer dinâmica de um sistema quântico. Em particular, pode-se usar esse método para resolver numericamente dinâmicas descritas pela equação Mestra. Além disso, pode-se usá-lo também para analisar efeitos em realizações únicas de experimentos, servindo como ferramenta para algumas experiências feitas atualmente em Óptica Quântica [15].

O quarto e último capítulo fala sobre um caso especial de sistemas quânticos abertos emaranhados, o de dois qutrits (sistemas com espaço de Hilbert de dimensão  $n = 3$ ). Mesmo sendo o caso mais simples depois de dois qubits, esses sistemas já apresentam variações não encontradas em sistemas de dois qubits. Por apresentar diferentes configurações possíveis e maior dimensão, a dinâmica de emaranhamento para dois qutrits possui características muito interessantes que podem ser facilmente generalizadas para maiores dimensões.

Por fim, concluímos, com perspectivas futuras, inclusive de implementação dessas ideias em laboratório de fótons gêmeos.

# Capítulo 1

## Correlações

Correlações Quânticas, também conhecidas como emaranhamento, são uma das propriedades mais estranhas e fascinantes da física. A abordagem mais moderna renomeou-as de *emaranhamento*. Na literatura, existem quantidades imensas de usos para emaranhamento, sendo a maioria voltada, principalmente, para computação quântica [5], teleportação [16] e distribuição de chaves quânticas [17]. Neste capítulo serão comparados sistemas clássicos e quânticos e suas possíveis correlações [18]. Além disso, a definição de um critério para conseguir diferenciar estados emaranhados e separáveis será discutida, assim como uma possível escala de emaranhamento entre dois subsistemas quânticos.

### 1.1 Correlações Clássicas

Um sistema clássico pode ser descrito em um espaço vetorial: o Espaço de Fase  $\Gamma$ . O conjunto necessário para definir  $\Gamma$  é dado por

$$\Gamma = \{(\mathbf{q}_k, \mathbf{p}_k); k = 1, 2, \dots, n\}, \quad (1.1)$$

onde  $\mathbf{q}_k$  e  $\mathbf{p}_k$  são a posição e o momento da partícula  $k$  e  $n$  é o número de constituintes do sistema. O espaço de fase é, então, formado pelo produto cartesiano das posições e momentos de cada partícula

$$\Gamma = \mathbf{q}_1 \times \mathbf{p}_1 \times \mathbf{q}_2 \times \mathbf{p}_2 \cdots \times \mathbf{q}_n \times \mathbf{p}_n \quad (1.2)$$

A descrição do estado do sistema em um espaço de fase encena todo o conhecimento que temos sobre ele. Um sistema cujo estado conhecemos exatamente (posição e momento de todos os constituintes), é descrito por um ponto no espaço de fase:

$$\rho_{puro} = \prod_k \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_{k0}) \delta(\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_{k0}), \quad (1.3)$$

o estado  $\rho_{puro}$  é dito puro. Caso não saibamos com precisão os valores de todas as suas grandezas físicas, o sistema é descrito por uma distribuição de probabilidades no espaço de fase:

$$\rho_{misto} = \rho(\mathbf{q}_k, \mathbf{p}_k) \geq 0, \int \rho(\mathbf{q}_k, \mathbf{p}_k) dq_k dp_k = 1. \quad (1.4)$$

Esse tipo de estado é dito misto.

Em particular, o sistema total formado por dois subsistemas A e B tem, como seu espaço de fase, o produto cartesiano dos dois subsistemas:

$$\Gamma_{AB} = \Gamma_A \times \Gamma_B = \{(\mathbf{q}_A, \mathbf{p}_A), (\mathbf{q}_B, \mathbf{p}_B)\} \quad (1.5)$$

e a forma mais geral de um estado desse sistema é dada por:

$$\rho_{AB} = \rho_{AB}(\mathbf{q}_A, \mathbf{p}_A, \mathbf{q}_B, \mathbf{p}_B) \quad (1.6)$$

Se quisermos olhar apenas para o subsistema A, basta integrarmos em todos os possíveis valores de B

$$\rho_A = \int \rho_{AB} d\mathbf{q}_B d\mathbf{p}_B \quad (1.7)$$

O estado  $\rho_{AB}$  será produto de estados dos dois subsistemas se, e somente se, não existirem correlações estatísticas entre ambos. Esse, contudo, não é o caso geral e, normalmente, o estado geral terá duas partes

$$\rho_{AB} = \rho_A \rho_B + \text{corr.Cl.} \neq \leq \quad (1.8)$$

onde corr.Cl. são todos os termos que possuem correlações estatísticas que chamamos de correlações clássicas. Porém, um estado clássico sempre pode ser escrito como separável, isso é, pode-se sempre preparar um estado análogo composto de uma mistura estatística de estados produtos (não-correlacionados). Esta decomposição é única em termos de estados puros,

$$\rho_{AB}(\mathbf{q}_A, \mathbf{p}_A, \mathbf{q}_B, \mathbf{p}_B) = \sum_k \omega_k \rho_{Ak}(\mathbf{q}_A, \mathbf{p}_A) \rho_{Bk}(\mathbf{q}_B, \mathbf{p}_B); \quad \omega_k \geq 0, \quad \sum_k \omega_k = 1. \quad (1.9)$$

O que essa equação está dizendo é que um estado clássico  $\rho_{AB}$  sempre pode ser preparado pegando o subsistema A e preparando-o no estado  $\rho_{Ak}$  e o subsistema B em  $\rho_{Bk}$  com probabilidade  $\omega_k$  e fazendo isso para todo  $k$ . A seguir há um exemplo simples de um sistema clássico que tem correlações.

**Exemplo 1.** *Suponha um jogo de cara ou coroa. No caso usual joga-se a moeda para cima e depois de cair vê-se qual face ficou para cima. O estado que descreve essa situação antes de olharmos a moeda é:*

$$\rho = \frac{1}{2}(\rho(\text{cara}) + \rho(\text{coroa})). \quad (1.10)$$

*O estado acima representa uma moeda com probabilidade meio de dar cara e meio de dar coroa. Faremos o lançamento duas vezes. Temos 4 possibilidades de resultado, todos com a mesma probabilidade: cara-cara; coroa-coroa; coroa-cara ou cara-coroa, tal que o estado global seja da forma:*

$$\rho = \frac{1}{4}(\rho_1(\text{cara}) \times \rho_2(\text{cara}) + \rho_1(\text{cara}) \times \rho_2(\text{coroa}) + \rho_1(\text{coroa}) \times \rho_2(\text{cara}) + \rho_1(\text{coroa}) \times \rho_2(\text{coroa})). \quad (1.11)$$

*onde  $\rho_1$  se refere ao primeiro lançamento e  $\rho_2$  ao segundo.*

*Agora, ao invés de jogar para cima, divida a moeda no meio de tal forma que uma parte só tenha cara e a outra só coroa. Coloque cada uma, aleatoriamente, em um envelope de modo que não possamos saber em qual envelope está a cara ou a coroa. Os dois lançamentos serão substituídos pela abertura dos dois envelopes. Individualmente, o estado de cada envelope é igual ao do caso anterior 1.10, mas os possíveis resultados são: cara-coroa ou coroa-cara. O estado global será:*

$$\rho = \frac{1}{2}(\rho_1(\text{cara}) \times \rho_2(\text{coroa}) + \rho_1(\text{coroa}) \times \rho_2(\text{cara})). \quad (1.12)$$

*No primeiro caso as jogadas são independentes, não tendo correlação clássica. No segundo caso, os estados dos envelopes estão estatisticamente correlacionados, apresentando correlações clássicas.*

## 1.2 Correlações Quânticas

Começaremos por definir estado quântico: um sistema quântico é definido no espaço de Hilbert, um espaço vetorial complexo com dimensão  $d$  igual à do sistema,

$$E = C^d = \{c_k; k = 1, 2, \dots, d\}. \quad (1.13)$$

Esse espaço tem produto interno e norma finita. Já introduzindo a notação que será usada ao longo dessa dissertação, um vetor no espaço de Hilbert será descrito por  $|\psi\rangle$  e  $\overline{|\psi\rangle} = \langle\psi|$  é o seu conjugado transposto. O produto interno de um espaço vetorial complexo é dado por

$$(\phi, \psi) = \langle\phi|\psi\rangle \quad (1.14)$$

e a norma de um vetor no espaço é dada por

$$||\psi|| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}. \quad (1.15)$$

O produto interno neste espaço respeita todas as propriedades de um produto interno complexo:

$$\begin{aligned} 1. (\langle\phi| + \langle\theta|)|\psi\rangle &= \langle\phi|\psi\rangle + \langle\theta|\psi\rangle & 2. \langle a\phi|b\psi\rangle &= a^*b(\langle\phi|\psi\rangle) \\ 3. \overline{\langle\phi|\psi\rangle} &= \langle\psi|\phi\rangle & 4. \langle\psi|\psi\rangle &\geq 0, \end{aligned} \quad (1.16)$$

onde  $a$  e  $b$  são números complexos e  $|\psi\rangle$ ,  $|\phi\rangle$  e  $|\theta\rangle$  são vetores complexos.

Um sistema quântico em um estado puro é descrito por um vetor complexo de norma igual a 1 no espaço de Hilbert:

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_d \end{bmatrix} \quad \sum_{k=1}^d |c_k|^2 = 1 \quad (1.17)$$

e o seu complexo conjugado

$$\langle\psi| = [c_1^* \quad c_2^* \quad \cdots \quad c_d^*] \quad \sum_{k=1}^d |c_k|^2 = 1. \quad (1.18)$$

A primeira diferença existente entre estados clássicos e quânticos é que sistemas quânticos podem ter sobreposição de estados puros, sendo possível escrever um estado de várias formas, dependendo de qual base é usada.

Para ficar mais fácil de visualizar o que foi dito até agora sobre sistemas quânticos considere um estado de um sistema de dois níveis  $d = 2$ :

$$|\psi\rangle = \sqrt{a}|1\rangle + \sqrt{1-a}e^{i\varphi}|2\rangle. \quad (1.19)$$

O estado  $|\psi\rangle$  é uma superposição de dois estados possíveis do sistema com probabilidade  $a$  de ter o estado  $|1\rangle$  e  $1-a$  de ter o estado  $|2\rangle$ . Além disso existe uma diferença de fase  $\varphi$  entre o primeiro e segundo estado. Os valores  $\sqrt{a}$  e  $\sqrt{1-a}$  são interpretados como uma amplitude de probabilidade em  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ , respectivamente ( $\langle 1|2\rangle = 0$ ).

Um estado puro também pode ser descrito pela sua matriz densidade  $\rho$ , também chamada de operador densidade, sendo o produto externo do estado com ele mesmo.

$$\rho_{puro} = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (1.20)$$

Em mecânica quântica, os estados puros são os tipos de estados em que temos mais conhecimento sobre o sistema. Analogamente a um sistema clássico, caso não tenhamos informação máxima sobre o sistema, o estado que o descreve é dito misto. Um estado misto pode ser escrito na forma de matrix densidade como:

$$\rho = \{\rho_{lm}; l, m = 1, 2, \dots, d\} \geq 0, \quad Tr(\rho) = 1 \quad (1.21)$$

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad \sum_i p_i = 1. \quad (1.22)$$

A equação 1.22 apresenta o estado escrito como uma soma convexa de estados puros. Essa decomposição pode ser feita de infinitas formas, todas descrevendo o mesmo estado quântico, sendo esta, outra diferença entre estados clássicos e quânticos. Por exemplo, se aplicarmos uma transformação unitária  $U$  em  $\rho$  obtém-se um  $\rho' = U^\dagger \rho U$  que possui as mesmas propriedades do estado  $\rho$  só que com uma decomposição diferente.

$$\rho' = U^\dagger \rho U = \sum_i p_i U^\dagger |\psi_i\rangle \langle \psi_i| U = \sum_i p_i |\psi'_i\rangle \langle \psi'_i|. \quad (1.23)$$

Uma operação unitária pode ser escrita como  $U = e^{iH}$ , onde  $H$  é um operador hermitiano. O que se tem é o sistema ganhando uma fase global que não altera suas propriedades, sendo  $\rho$  e  $\rho'$  duas maneiras de descrever o mesmo estado.

Semelhante a sistemas clássicos, sistemas quânticos também podem ser compostos por subsistemas. O espaço vetorial do sistema quântico composto pelos subsistemas A e B é definido como o produto tensorial dos espaços vetoriais de cada sub-espaço.

$$H = C^{d_A} \otimes C^{d_B} = \{c_{lm}; l = 1, 2, \dots, d_A; m = 1, 2, \dots, d_B\} \quad (1.24)$$

Da mesma forma que no caso clássico, existem estados quânticos separáveis que podem ser escritos como

$$\rho_{AB} = \sum_k \omega_k \rho_{Ak} \otimes \rho_{Bk} \quad \omega_k \geq 0, \quad \sum_k \omega_k = 1. \quad (1.25)$$

Entretanto, para um estado geral temos:

$$\rho_{AB} = \rho_{Ak} \otimes \rho_{Bk} + corr.Cl. + corr.Q \quad (1.26)$$

onde *corr.Q.* são correlações exclusivamente quânticas.

Pode-se olhar para somente uma parte do sistema, por exemplo a parte A, se, seguindo a mesma receita dos caso clássico, somarmos sobre todos os estados de B.

$$\rho_A = Tr_B(\rho_{AB}). \quad (1.27)$$

Essa operação é chamada de *Traço Parcial*.

Sistemas quânticos que têm somente correlações clássicas podem ser escritos na forma 1.25, mas sistemas que tenham correlações quânticas não. Um caso particular de estado separável são os estados favoráveis, que podem ser escritos como produto de estados de cada parte. Por exemplo, para sistemas bipartites (contém duas partes), o estado pode ser descrito pela equação 1.25.

Note, contudo que não devemos confundir separável com fatorável. Fatoráveis são os estados que não apresentam sequer correlação clássicas, mas mesmo que o sistema não seja fatorável, ainda assim, se puder ser escrito na forma separável com em 1.25 ainda terá um análogo clássico como em 1.9. Mas mecânica quântica é mais estranha que isso. Ela permite correlações mais

fortes do que as clássicas, encontradas quando o estado não permite decomposição como 1.25. A esses estados, chamamos de emaranhados. Esses são os estados mais comuns em sistemas quânticos compostos (um sorteio aleatório de uma matriz densidade tem mais probabilidade de apresentar emaranhamento do que não).

**Exemplo 2.** *Estados de Bell.* Considere um estado de um sistema bipartite de dimensão  $2 \otimes 2$  dado por  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + e^{i\phi}|\downarrow\uparrow\rangle)$ . Esses estados são muito conhecidos, pois são exemplos comuns em discussões sobre emaranhamento. O estado global do sistema é puro, mas se olharmos para o estado reduzido de qualquer uma das partes esse é dado por:

$$\rho_A = \rho_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

que é o estado de maior ignorância sobre o sistema (proporcional à identidade) e tem a mesma distribuição de uma moeda honesta. Se tentarmos descrever o estado global olhando só para as partes separadamente, é impossível, mostrando que existe mais do que correlações clássicas envolvidas entre os sistemas (note que a fase  $\phi$  desaparece nos estados reduzidos). Para todos os outros casos dos estados de Bell a resposta é a mesma. Isso sugere que uma primeira possível caracterização de emaranhamento de um estado puro seja olhar para o estado reduzido de uma das partes que o compõem. Caso o estado reduzido também seja puro, o estado global não apresenta correlações, mas, caso contrário, o sistema apresenta alguma correlação quântica. De fato para sistemas bipartidos com estado global puro, essa análise é suficiente para determinar o emaranhamento do sistema. A título de curiosidade, estados quânticos desse tipo são usados como geradores genuínos de números aleatórios justamente pela analogia com a moeda clássica honesta.

Outros exemplos de estados que têm correlações quânticas serão discutidos na próxima seção.

## 1.3 Critério de Peres-Horodecki e Negatividade

Com os estudos usando estados emaranhados principalmente para informação quântica e discussões sobre, por exemplo, desigualdades de Bell (dois exemplos são a proposta do próprio Bell[19] e a de CHSH [20]) veio a necessidade de caracterizar os estados do ponto de vista de correlações quânticas. Dentre outras propostas Perez [14] e depois Horodecki [4] encontraram um critério que permite dizer se o estado bipartite (sistema composto por duas partes) é fatorável ou emaranhado. O critério de Perez-Horodecki é necessário e suficiente para determinar se um estado é emaranhado para sistemas  $2 \otimes 2$  e  $2 \otimes 3$ . Porém, para sistemas com dimensões maiores o critério é suficiente, mas não necessário (de fato, não há um critério único para sistemas de dimensões maiores que  $2 \otimes 2$  e  $2 \otimes 3$ , senão o da própria definição de separabilidade dada pela equação 1.25).

### 1.3.1 Critério de Separabilidade

Um estado bipartite qualquer é dito separável se puder ser escrito na forma 1.25. Para explicar com mais facilidade a condição algébrica de separabilidade, é mais fácil escrever os termos da matriz densidade:

$$\rho_{m\mu lv} = \sum_k \omega_k (\rho_{Ak})_{ml} (\rho_{Bk})_{\mu v}, \quad (1.29)$$

onde os índices gregos se referem ao segundo sistema. Para sistemas quânticos, a matriz densidade tem de ser positiva, o que implica em não ter nenhum auto-valor negativo. Como a matriz densidade pode ser escrita de várias formas, uma delas (a melhor para ser usada agora) é diagonalizá-la e montar uma soma convexa com as matrizes dos produtos externos dos auto-vetores com o respectivo auto-valor associado,

$$\rho = \sum_k \omega_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k|. \quad (1.30)$$

Todos esses auto-valores  $\omega_k$  são positivos, pois representam a probabilidade do sistema estar no estado do respectivos auto-vetor  $|\psi_k\rangle$ . A ideia do critério é combinar essa restrição com o fato de que operações quânticas têm de ser descritas por mapas completamente positivos (a ideia de mapa quântico está melhor explicada no seção 2.3, sendo abordada agora somente o essencial para introduzir o conceito). Um mapa  $M : \rho \rightarrow M\rho$  é dito positivo se  $M\rho \geq 0$  e para ser quântico  $Tr(M\rho) \leq 1$ . Para um mapa ser completamente positivo, além das propriedades descritas anteriormente, ele tem de continuar sendo um mapa positivo se for estendido trivialmente  $(M \otimes I_{arb})\rho_{big} \geq 0$  onde  $\rho_{big} = \rho \otimes \rho_{arb}$  é o estado do nosso sistema mais outro sistema com espaço de Hilbert arbitrário.

Uma operação que é positiva, mas não completamente positiva, é a *transposição*:  $T\rho_{ml} = \rho_{lm}$  ( $T\rho = \rho^T$ ). Como toda matriz densidade é hermitiana  $\rho_{ml} = \rho_{lm}^*$ , de tal forma que quando é feita a transposição em uma matriz densidade a operação produz um novo estado que tem a fase das correlações com sinal invertido em relação ao anterior. Por outro lado, vejamos o que ocorre se o sistema quântico for composto por dois subsistemas. Nesse caso, se o estado for separável já vimos que pode ser escrito da forma 1.25. A transposição do sistema A (também chamada de transposição parcial) resulta em uma matriz  $\sigma$  dada por:

$$\sigma = (T_A \otimes I_B)\rho_{AB} = \sum_k \omega_k (T_A \rho_A) \otimes (I_B \rho_B) = \sum_k \omega_k \rho_A^T \otimes \rho_B \quad (1.31)$$

Como  $\rho_A^T$  também é um estado quântico, segue, imediatamente que  $\sigma$  é um estado quântico (todos seus auto-valores são positivos). Esse raciocínio fornece um identificador automático de emaranhamento. Em um sistema quântico bipartite qualquer (de qualquer dimensão), se fizermos a transposição parcial de um subsistema e, ao diagonalizar  $\sigma$  encontramos ao menos um auto-valor negativo, isso indica que  $\rho$  não é separável, ou seja, é emaranhado. Contudo, esse critério não é suficiente já que há estados emaranhados com transposição parcial positiva.

Com essas ideias é possível montar um critério que nos permite saber se o sistema é ou não emaranhado:

1. **Se** a transposta parcial for *negativa*, o estado é emaranhado. O sistema não é separável, não sendo possível escrevê-lo na forma 1.25.
2. **Caso** a transposta parcial seja *positiva*, o estado pode ou não estar emaranhado. No caso de sistemas  $2 \otimes 2$  e  $2 \otimes 3$  o estado é separável, podendo ser escrito como uma soma convexa de estados produto. No caso de dimensões maiores não podemos dizer nada sobre o sistema, pois existe a possibilidade de, mesmo  $\sigma$  sendo uma matriz positiva, o estado ser emaranhado.

Seguem dois exemplos para deixar mais claro como o critério funciona.

**Exemplo 3.** Considere o estado de Bell  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle)$ . Escrevendo-o na forma de matriz densidade e depois calculando a transposta parcial, tem-se:

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

Calculando os auto-valores da matriz  $\sigma$  acha-se  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2}$  e  $\lambda_4 = -\frac{1}{2}$ . Logo, esse estado de Bell tem correlações quânticas entre seus constituintes. De fato, os estados de Bell são maximamente emaranhados [5].

**Exemplo 4.** Consideraremos agora o estado misto que é o singlete  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$  com razão  $x$  mais um fator aleatório com razão  $1 - x$

$$\rho = x|\psi\rangle\langle\psi| + (1 - x)\frac{I}{4}, \quad (1.33)$$

onde  $I = |\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| + |\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + |\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + |\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow|$  é a identidade. A matriz densidade e a transposta parcial correspondente são:

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1-x}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+x}{4} & \frac{-x}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-x}{2} & \frac{1+x}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-x}{4} \end{pmatrix} \quad \sigma = \begin{pmatrix} \frac{1-x}{4} & 0 & 0 & \frac{-x}{2} \\ 0 & \frac{1+x}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+x}{4} & 0 \\ \frac{-x}{2} & 0 & 0 & \frac{1-x}{4} \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

Calculando-se os auto-valores de  $\sigma$  encontra-se  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1+x}{4}$  e  $\lambda_4 = \frac{1-3x}{4}$ , onde o quarto auto-valor pode tomar valores negativos dependendo do valor de  $x$ . Se  $x \leq \frac{1}{3}$  o estado é separável, se  $x > \frac{1}{3}$  o estado é emaranhado.

Até agora foi discutido que se a transposta parcial de um estado não for positiva, o estado está emaranhado. Porém uma pergunta ainda não foi respondida: quão emaranhado um estado é? Dentre outras [21], deseja-se de um quantificador de emaranhamento duas propriedades:

1. de diga se um estado é mais emaranhado que outro;
2. se usado para aplicações práticas (por exemplo, informação quântica) que essa grandeza seja vista como um *recurso* a ser utilizado [21].

Um quantificador de emaranhamento que tem ambas as propriedades é a Negatividade [3] definida como:

$$N = -2 \sum \lambda_- \quad (1.35)$$

onde  $\lambda_-$  são os auto-valores negativos da matriz transposição parcial. O valor 2 multiplicando a soma é uma normalização para que os estados de Bell tenham emaranhamento igual a 1 (vide exemplo 3, onde foram calculados os auto-valores negativos de  $\sigma$ ). Os estados que têm a maior correlação possível para um sistema de dois qubits são os estados de Bell. Por outro lado, caso o estado seja separável  $N = 0$ . Ainda existem alguns estados que tem negatividade igual a zero que não são separáveis, que são conhecidos por estados PPT (*partial positive transposition*, transposição parcial positiva). A figura 1.1 muito comum em livros e artigos que discutem emaranhamento, deixa mais clara as ideias descritas até agora.

Não existem quantificadores absolutos de emaranhamento [22]. O melhor que se pode fazer é classificar os estados de acordo com o recurso que provém para realização de tarefas quânticas. A negatividade se enquadra nesse critério quantificando o emaranhamento destilável (ou livre) [23].





Figura 1.1: Conjunto de todos os estados possíveis quanticamente. A Negatividade não consegue diferenciar os estados PPT (mesmo estes sendo estados emaranhados) e os estados separáveis. Assim, os estados emaranhados no qual a negatividade é diferente de zero são os estados que encontram na area branca. No caso de sistemas  $2 \otimes 2$  e  $2 \otimes 3$  não existem estados PPT, somente separáveis e emaranhados, ou seja, nesses casos, a área cinza claro é nula.

### 1.3.2 Emaranhamento Destilável

Suponha as várias cópias de um estado emaranhado (não precisa ser puro) de um sistema bipartite, de modo que cada cópia esteja dividida entre dois observadores que conseguem operar somente em sua própria parte (permitidas somente operações locais). Os dois observadores podem se comunicar classicamente. A maioria dos protocolos de informação quântica exigem estados de Bell como ponto de partida mas, geralmente, o que se tem é um conjunto de estados com algum emaranhamento, mas não o máximo. Um protocolo de destilação é um conjunto de operações locais e comunicação clássica que concentra o emaranhamento em alguns constituintes, normalmente criando pares de Bell, e descartando o resto (preço que se paga para fazer a destilação).

P. Horodecki mostrou que existem alguns tipos de estados mistos emaranhados cuja matriz transposição parcial é positiva [4]. Esse tipo especial de estado é chamado PPT e sua principal propriedade é que seu emaranhamento não pode ser destilado. Por outro lado, a negatividade não quantifica o emaranhamento total do sistema, mas acredita-se que quantifique o emaranhamento destilável desse. A maioria dos protocolos quânticos estão interessados nesse tipo de emaranhamento, também chamado de *livre*, para o qual a negatividade é um bom quantificador.

**Exemplo 5.** *Um estado que tem transposição parcial positiva e não é separável para um sistema*

de dois qutrit é dado por

$$\rho = \frac{1}{1+8a} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+a) & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{1-a^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & a & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{1-a^2} & 0 & \frac{1}{2}(1+a) \end{pmatrix}, \quad (1.36)$$

onde  $0 < a < 1$ . A transposta parcial do estado é da forma:

$$\sigma = \frac{1}{1+8a} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+a) & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{1-a^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{1-a^2} & 0 & \frac{1}{2}(1+a) \end{pmatrix}. \quad (1.37)$$

Olhando bem para  $\sigma$  e comparando com  $\rho$ , vê-se que a matriz parcialmente transposta respeita todas as propriedades de um estado quântico : não tem nenhum auto-valor negativo ( $N(\rho) = 0$ ). Mostrar que esse estado não é separável é não trivial, por esse motivo é difícil encontrar exemplos para estados PPT. P. Horodocki usou esse estado como exemplo em seu artigo que mostra que existem estados com dimensões maiores que tem negatividade nula e emaranhamento [4].

No caso de sistemas de dois qubits ou de um qubit e um qutrit a negatividade caracteriza totalmente o emaranhamento do estado. Outros bons quantificadores de emaranhamento, por exemplo a Concorrência [24] e a Entropia de Von Newmann [25], são igualmente satisfatórios para sistemas dessas dimensões.

Já no caso de sistemas bipartites com dimensões maiores a negatividade caracteriza apenas o emaranhamento destilável. E há, ainda, o caso de sistemas multipartites cuja caracterização do emaranhamento é algo ainda mais complexo, não tendo um critério único e totalmente satisfatório. A dificuldade está no fato de que em sistemas multipartites podem haver vários tipos de emaranhamento: entre apenas duas das partes constituintes ou entre várias delas, podendo mesmo ser entre todas as partes. Ainda não há uma medida absoluta para caracterizar-se o emaranhamento desse tipo de sistema, portanto, o máximo que podemos dizer é, quando muito, o emaranhamento entre cada partição.

Uma complicação ainda pior na caracterização do emaranhamento é que estados quânticos podem ser escritos de várias formas, sendo que um bom quantificador não pode variar para diferentes formas de representação do estado. Por esse motivo, a forma mais aceita para caracterizar o emaranhamento é o *Emaranhamento de Formação* que determina a menor quantidade de emaranhamento necessária para formar o estado [22]. Mesmo sendo o quantificador mais desejado, não é o mais útil, pois é muito difícil de calcular, mesmo para o caso de dois qubits [26] [27].

Nesse trabalho, as características que queremos observar envolvem a dinâmica de emaranhamento em sistemas  $3 \otimes 3$ . Como, nesse caso, não há quantificador absoluto, optamos por estudar o emaranhamento destilável. Sendo assim, nos concentramos na Negatividade dos estados estudados. No próximo capítulo falaremos da dinâmica desses sistemas quando estão em contato com o ambiente e depois retornaremos a discussão do emaranhamento desta feita, ao longo de uma evolução temporal.

# Capítulo 2

## Evolução Temporal de Sistemas Quânticos

Em mecânica clássica, normalmente se está preocupado com a evolução temporal de um dado sistema. Existem várias formas de descrever essa dinâmica, sendo uma das mais conhecidas a equação de Liouville  $\frac{d\rho}{dt} = \{H, \rho\}$ , onde  $\{, \}$  são os colchetes de Poisson. A inclusão de elementos externos sobre os quais não se tem controle pode ser feita de várias maneiras: por uma força dissipativa, um reservatório, etc. Quanticamente, encontra-se o mesmo tipo de problema. Nesse capítulo será mostrado como pode ser analisado matematicamente um sistema cuja dinâmica depende de fatores externos não-controláveis. Além disso será discutida a dinâmica de sistemas fechados e de sistemas abertos. Será apresentada, também, uma formulação possível para sistema quânticos abertos, a Equação Mestra.

### 2.1 Sistemas Fechados

Pode-se descrever a dinâmica de um estado quântico puro em um sistema fechado usando-se a equação de Schrödinger [28]:

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}H(t)|\psi(t)\rangle \quad (2.1)$$

onde  $H(t)$  é o Hamiltoniano do sistema. Considerando-se que o estado inicial de um sistema é dado em um tempo  $t = t_0$ , a solução geral da equação será dada por um operador evolução temporal aplicado no estado inicial.

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle \quad (2.2)$$

Para 2.2 ser solução de 2.1  $U(t, t_0)$  tem de respeitar uma equação semelhante (com a condição inicial  $U(t_0, t_0) = 1$ ):

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0) = -\frac{i}{\hbar}H(t)U(t, t_0) \quad \frac{\partial}{\partial t}(U^\dagger U) = \frac{i}{\hbar}(U^\dagger H^\dagger U - U^\dagger H U). \quad (2.3)$$

O Hamiltoniano é uma variável dinâmica, então ele é Hermitiano. Assim, tem-se que o operador evolução temporal é unitário. Pode-se escrever esse operador para um sistema que tenha o Hamiltoniano independente do tempo na forma:

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \quad (2.4)$$

Um estado puro isolado (sistema fechado) sempre evolui temporalmente para outro estado puro. Isso ocorre porque uma operação unitária não pode levar um estado puro em um misto. Por outro lado, se o estado inicial é misto obtemos a evolução temporal a partir de:

$$\begin{aligned}
\rho(t) &= \sum_k \omega_k |\psi_k(t)\rangle \langle \psi_k(t)| \\
&= \sum_k \omega_k U(t, t_0) |\psi_k(t_0)\rangle \langle \psi_k(t_0)| U^\dagger(t, t_0) \\
&= U(t, t_0) \rho(t_0) U^\dagger(t, t_0)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

A equação diferencial para a evolução de um estado misto pode ser facilmente mostrada se derivarmos  $\rho(t)$  em relação ao tempo e nos lembrarmos de que o Hamiltoniano comuta com o operador  $U(t, t_0)$  (o operador evolução é função do hamiltoniano).

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H(t), \rho(t)] = -\frac{i}{\hbar} (H(t)\rho(t) - \rho(t)H(t)) \tag{2.6}$$

Há, ainda, três possíveis formas de descrever qualquer evolução temporal de um sistema quântico:

1. **Representação de Schrödinger:** A dependência temporal do sistema é carregada pelo estado. É a mais comum nos livros didáticos e é a que foi apresentada nesta seção.
2. **Representação de Heisenberg:** A dependência temporal do sistema é carregada pelos operadores. Neste formalismo, o estado é independente do tempo e as variáveis dinâmicas evoluem. A equação que rege essa evolução é:

$$\frac{dR_h(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H_h(t), R_h(t)] + \left( \frac{\partial R}{\partial t} \right)_h \tag{2.7}$$

onde  $R$  é uma variável dinâmica qualquer e o sub-escrito  $h$  simboliza a variável escrita na *Representação de Heisenberg*. A relação entre a variável escrita na *Representação de Heisenberg* e *Representação de Schrödinger* é  $R_h(t) = U^\dagger(t, t_0) R U(t, t_0)$ , onde  $U$  é o operador evolução temporal.

3. **Representação de Interação:** Em um sistema bipartite (não se aplica somente a sistemas bipartites, mas como nesta dissertação estamos focando-os, introduziremos essa representação somente para esses sistemas) pode-se dividir o Hamiltoniano em três partes:  $H = H_1 + H_2 + H_I$  onde  $H_1 = H_1 \otimes I$  e  $H_2 = I \otimes H_2$  são hamiltonianos que agem somente no primeiro e no segundo constituinte respectivamente.  $H_I$  é a interação entre os subsistemas. A *representação de Interação* divide a evolução temporal em duas partes: dos sistemas e da interação. O estado na *representação de Interação* tem a forma:

$$\tilde{\rho}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}(H_1+H_2)t} \rho(t) e^{-\frac{i}{\hbar}(H_1+H_2)t} \tag{2.8}$$

Derivando  $\tilde{\rho}(t)$  em relação ao tempo temos.

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} &= \frac{i}{\hbar} (H_1 + H_2) \tilde{\rho}(t) - \frac{i}{\hbar} \tilde{\rho}(t) (H_1 + H_2) + e^{\frac{i}{\hbar}(H_1+H_2)t} \left( \frac{d\rho(t)}{dt} \right) e^{-\frac{i}{\hbar}(H_1+H_2)t} \\
&= -\frac{i}{\hbar} [\tilde{H}_I(t), \tilde{\rho}(t)]
\end{aligned} \tag{2.9}$$

onde  $H_I$  também depende explicitamente do tempo:

$$\widetilde{H}_I(t) = e^{\frac{i}{\hbar}(H_1+H_2)t} H_I e^{-\frac{i}{\hbar}(H_1+H_2)t} \quad (2.10)$$

Integrando a equação 2.9 obtém-se [8]:

$$\widetilde{\rho}(t) = \rho(t_0) + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t [\widetilde{H}_I(t'), \widetilde{\rho}(t')] dt', \quad (2.11)$$

e substituindo  $\widetilde{\rho}(t)$  dentro do comutador em 2.9.

$$\frac{d\widetilde{\rho}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\widetilde{H}_I(t), \rho(t_0)] + -\frac{1}{\hbar^2} \int_{t_0}^t [\widetilde{H}_I(t), [\widetilde{H}_I(t'), \widetilde{\rho}(t')]] dt'. \quad (2.12)$$

Essa equação é exata. Tanto o estado, quanto os operadores dependem explicitamente do tempo. Essa análise é muito útil quando os tempos característicos da interação são muito maiores que os dos hamiltonianos livres. Uma das deduções da equação mestra cuja apresentação será descrita neste capítulo será feita utilizando a *representação de Interação*.

## 2.2 Sistemas Abertos

Sistemas fechados são casos muito especiais e pouco realistas de dinâmicas quânticas, pois é muito difícil, se não impossível, isolar um sistema de tal forma que seus constituintes não tenham nenhuma interação com o ambiente. Sistemas reais sofrem interações incontroláveis, sendo necessário levá-las em consideração para uma modelagem teórica mais próxima do que é observado nos experimentos.

Distinguir um sistema aberto de um fechado é algo delicado, mesmo em mecânica clássica. Suponha o pêndulo de um relógio. Este interage muito pouco com o ambiente, mas mesmo esse pouco tem de ser considerado porque, depois de um tempo, ele vai diminuir a amplitude de seu movimento até parar. O amortecimento causado pela resistência do ar e pelas imperfeições do mecanismo de suspensão do pêndulo são os principais canais de interação do pêndulo com o ambiente. Caso o sistema fosse fechado, não interagindo nada com o ambiente, esse pêndulo ficaria oscilando para sempre. A diferença neste caso entre o sistema aberto e fechado é parar em um tempo finito ou oscilar para sempre. Para tempos curtos, considerar o sistema fechado seria uma boa aproximação (considerando o regime em que a interação sistema e ambiente seja pequena), mas no caso de um relógio, queremos vê-lo medindo as horas por meses, anos, sendo, portanto, impossível desconsiderar os efeitos do ambiente.

Quando se está analisando um sistema aberto não é preciso levar em conta como o ambiente modifica seu próprio estado, mas sim como a existência dele modifica o sistema em questão. No caso do pêndulo, o que acontece com o ar por causa do seu movimento não é importante para a análise. Entretanto, o efeito da resistência do ar no pêndulo é algo importante, não podendo ser desconsiderado. O exemplo abaixo mostra um exemplo clássico de um sistema aberto com uma descrição matemática muito simples.

**Exemplo 6.** *Considere um bit de informação armazenado no disco rígido de um computador [5]. O bit pode tomar os valores 0 ou 1. Depois de um longo tempo, por flutuações do campo magnético próximo deste bit, ele pode mudar de valor. Esse problema pode ser modelado*

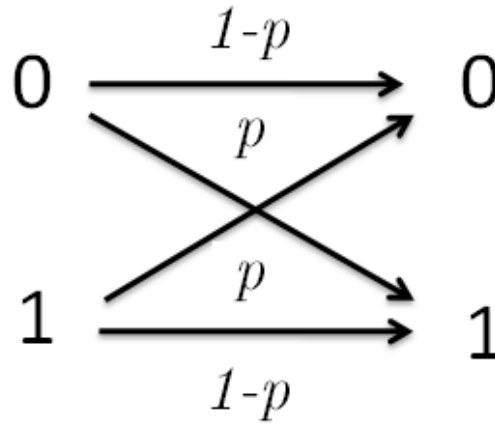


Figura 2.1: Após um tempo longo um bit em um HD pode ter seu valor modificado com probabilidade  $p$ .

considerando que o bit tem probabilidade  $p$  de mudar o valor e probabilidade  $1 - p$  de manter seu valor inalterado.

O estado inicial do bit é:

$$\rho = p_0\rho(0) + p_1\rho(1) = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

onde  $p_0$  é a probabilidade do bit estar em zero e  $p_1$  é a probabilidade do bit começar com o valor 1. Depois do tempo decorrido o estado do bit pode ser escrito por:

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

onde  $q_0$  e  $q_1$  são as novas probabilidades de encontrar o bit em 0 e 1, respectivamente. Em nenhum momento deste exemplo foram discutidas mudanças no campo magnético, apenas como suas flutuações afetam o bit.

A descrição do exemplo anterior exemplifica um mapa clássico descrito pela matriz  $\begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$ . Da mesma forma, para um sistema quântico aberto, a evolução temporal do estado pode ser dada por um mapa quântico. Antes de ir para o caso especial de evolução temporal será discutida a ideia do que é um mapa quântico. A ideia geral de um mapa quântico foi discutida na seção 1.3. Abaixo serão explicitados com mais cuidado quais são as possíveis operações quânticas. Essas ideias serão muito importantes ao decorrer desse texto, sendo necessário enfatizá-las.

## 2.3 Operações Quânticas

Mapa quântico é qualquer operação em um estado quântico que o leva, com certa probabilidade, a um outro estado quântico (uma matriz hermitiana não negativa cujo traço é igual a 1). Como foi dito na seção 1.3, todo mapa quântico é um mapa completamente positivo. Para deixar mais claro, suponha um mapa  $M$  qualquer que atue em um estado quântico arbitrário  $\rho$  levando a uma matriz  $\rho'$

$$\rho' = M(\rho). \quad (2.15)$$

Para que essa operação seja fisicamente possível  $M$  tem de seguir algumas regras.

1.  $Tr[M(\rho)]$  é a probabilidade do processo caracterizado por  $M$  acontecer, então  $0 \leq Tr[M(\rho)] \leq 1$ .
2.  $M$  é um mapa linear. Considerando um mapa qualquer atuando em um estado misto escrito na forma de 1.14

$$M \left( \sum_i p_i \rho_i \right) = \sum_i p_i M(\rho_i) \quad (2.16)$$

3.  $M$  tem de ser um mapa completamente positivo. Isso quer dizer que, se  $A$  e  $B$  são operadores positivos, então  $M_A(A)$  e  $(M_A \otimes I_B)(A \otimes B)$  também o serão. Por esse motivo a transposição não é uma operação quântica, pois ela é positiva mas não completamente positiva.

Dois exemplos simples de operações possíveis são transformações unitárias  $\rho' = U\rho U^\dagger$  e medições  $\rho_m = P_m \rho P_m^\dagger$ . O caso da medição inicialmente leva a um estado quântico não normalizado, pois  $Tr(P_m \rho P_m^\dagger) \leq 1$ . O estado final, no caso de medição é  $\rho' = M(\rho)/Tr[M(\rho)]$ .

Os operadores quânticos descrevem processos físicos que levam estados iniciais  $\rho$ , a estados finais  $M(\rho)$ . Um caso muito especial de transformação, nesse caso, unitária é a evolução temporal, descrita na primeira seção deste capítulo.

Na próxima seção será descrito como se pode analisar um sistema quântico aberto levando em conta somente a dinâmica do sub-sistema de interesse, desconsiderando-se a dinâmica do ambiente. Para introduzir essa abordagem, usaremos mapas quânticos cujas propriedades foram descritas nessa seção.

## 2.4 Equação Mestra

Considere um sistema aberto que pode ser tratado como o sistema de interesse em contato com o ambiente. O espaço de Hilbert do sistema total é  $E = E_S \otimes E_B$ , onde  $E_S$  é o espaço de Hilbert do sistema e  $E_B$  é o do ambiente. Pode-se escrever o hamiltoniano do sistema total como:

$$H = H_S \otimes I_B + I_S \otimes H_B + H_I \quad (2.17)$$

onde  $H_I$  é o Hamiltoniano de interação entre o sistema e o ambiente.

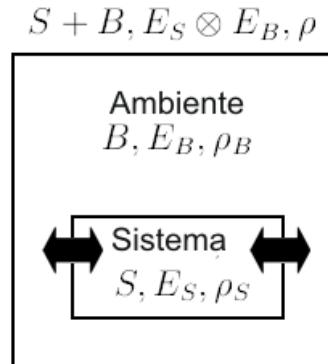


Figura 2.2: Esquema do sistema de interesse mais ambiente mostrando o estado e o espaço de Hilbert global e as dois possíveis estados e espaços reduzidos.



O sistema S é o único em que se tem interesse. Considerando-se um observável  $A = A \otimes I_B$  desse sistema, seu valor esperado é  $\langle A \rangle = \text{Tr}(A\rho_S)$ , onde o estado  $\rho_S$  do sistema é obtido fazendo o traço parcial em relação aos graus de liberdade do ambiente.

$$\rho_S = \text{Tr}_B(\rho_{SB}) \quad (2.18)$$

O sistema global evolui na *representação de Schrödinger* com a equação de Schrödinger. A evolução do sistema S pode, portanto, ser construída a partir de:

$$\rho_S(t) = \text{Tr}_B(\rho_{SB}(t)) = \text{Tr}_B(U(t, t_0)\rho_{SB}U^\dagger(t, t_0)) \quad (2.19)$$

Consideraremos agora duas aproximações típicas do tratamento de sistemas quânticos abertos (para maiores detalhes, ver referência [8]):

1. **Aproximação de Born:** Consideramos que o estado global do sistema é sempre fatorável. Em geral, mesmo que isso seja verdade inicialmente, para tempos posteriores surgem correlações entre o sistema e o ambiente. Assume-se, entretanto, que o estado é sempre fatorável fazendo duas considerações: primeiramente que o acoplamento entre os sistemas é fraco, ou seja, o hamiltoniano do sistema S é mais relevante na dinâmica do que a interação com o reservatório. Além disso, que o ambiente é um sistema muito grande cujo estado pode ser considerado inalterado pela interação com o sub-sistema S. Essa é chamada de Aproximação de Born
2. **Aproximação de Markov:** O estado do sistema no tempo  $t_2 > t_1$  depende apenas do estado do sistema em  $t_1$ . Assume-se que o estado do reservatório não muda na dinâmica. Isso é aproximadamente verdade se o tempo característico da perda de correlação do reservatório for muito menor que o tempo característico da evolução do sistema. Isso define que o reservatório não tem memória de um estado anterior.

Vamos considerar que o estado do sistema e do ambiente é, inicialmente, separável:  $\rho_{SB}(t_0) = \rho_S(t_0) \otimes \rho_B$ , onde  $\rho_S(t_0)$  é o estado inicial do sistema e  $\rho_B$  é o estado do reservatório em equilíbrio térmico, por exemplo. Nesse caso, pode-se escrever a evolução do sistema como [6]:

$$\rho_S(t_0) \mapsto \rho_S(t - t_0) = V(t - t_0)\rho_S(t_0) = \text{Tr}_B\{U(t, t_0)[\rho_S(t_0) \otimes \rho_B]U^\dagger(t, t_0)\}, \quad (2.20)$$

onde  $V(t - t_0)$  é o mapa quântico que governa a dinâmica do sub-sistema ( $t > t_0$ ). Pela aproximação de Markov, para uma evolução com variação temporal  $t_1 + t_2$ , o mapa tem de ser dado por  $V(t_1 + t_2) = V(t_2)V(t_1)$ . O estado reduzido do ambiente escrito em sua forma espectral é  $\rho_B = \sum_\beta \lambda_\beta |\varphi_\beta\rangle\langle\varphi_\beta|$ , onde  $\{|\varphi_\beta\rangle\}$  forma uma base no espaço  $E_B$  e  $\lambda_\beta$  são números reais não negativos que satisfazem  $\sum_\beta \lambda_\beta = 1$ . Podemos definir diretamente de 2.19 o mapa quântico  $V(t)$  na forma:

$$V(t - t_0)\rho_S(t_0) = \sum_{\alpha, \beta} W_{\alpha, \beta} \rho_S W_{\alpha, \beta}^\dagger \quad (2.21)$$

$$W_{\alpha, \beta} = \sqrt{\lambda_\beta} \langle \varphi_\alpha | U(t, t_0) | \varphi_\beta \rangle. \quad (2.22)$$

Por  $W_{\alpha, \beta}$  definir um mapa,  $\sum_{\alpha, \beta} W_{\alpha, \beta} = I_S$ . Por  $V(t)$  ser formado por uma soma convexa de operadores ele é um mapa completamente positivo que preserva o traço do sistema. Essa família de operadores pode descrever uma gama enorme de dinâmicas sempre dadas em uma direção temporal ( $t \geq t_0$ ).

Nesses casos, um gerador linear  $L$  da dinâmica pode ser representado por um mapa linear da forma:

$$V(t) = e^{Lt} \quad (2.23)$$

Essa representação leva imediatamente em uma equação diferencial de primeira ordem para o estado do sub-sistema S:

$$\frac{d\rho_S(t)}{dt} = L\rho_S(t) \quad (2.24)$$

que é chamada de *Equação Mestra de Markov*. Note que, dado 2.23, a equação 2.24 é a forma diferencial de 2.20.

Pode-se construir uma forma geral para a dinâmica do sistema (esse tratamento está seguindo os passos descritos em [6]). Considerando-se, inicialmente, que o sistema de interesse tem dimensão finita,  $\dim(E_S) = N$ , pode-se montar uma base ortonormal para os operadores que atuam no espaço de Hilbert desse sistema  $\{F_i, i = 1, 2, \dots, N^2\}$  com o *produto interno* dado por  $(F_i, F_j) = \text{Tr}_S\{F_i^\dagger F_j\} = \delta_{i,j}$ . Uma base conveniente para esse caso é constituída por um operador proporcional à identidade  $F_{N^2} = \frac{1}{\sqrt{N}}I_S$  e os demais com traço zero  $\text{Tr}_S\{F_i\} = 0$  para  $i = 1, 2, \dots, N^2 - 1$ . Reescrevendo o operador  $W_{\alpha,\beta}$  nessa nova base, tem-se:

$$W_{\alpha,\beta} = \sum_i^{N^2} F_i(F_i, W_{\alpha,\beta}) \quad (2.25)$$

Analogamente, pode-se escrever o mapa  $V(t)$  aplicado no estado  $\rho_S$  como:

$$\rho_S(t) = V(t)\rho_S = \sum_{i,j}^{N^2} c_{i,j}(t) F_i \rho_S F_j^\dagger \quad (2.26)$$

onde,

$$c_{i,j}(t) \equiv \sum_{\alpha,\beta} (F_i, W_{\alpha,\beta})(F_j, W_{\alpha,\beta})^*. \quad (2.27)$$

A matriz de coeficientes  $c = (c_{i,j})$  é hermitiana e positiva.

Podemos, então, usar as relações descritas em 2.26 para reescrever a equação 2.24. Primeiro, note que, da definição de derivada segue que:

$$L\rho_S = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\epsilon} (V(\epsilon)\rho_S - \rho_S) \right], \quad (2.28)$$

lembrando que  $V(0) = I_S$ . Substituindo 2.26 em 2.28 temos que:

$$L\rho_S = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{N} \frac{c_{N^2,N^2}(\epsilon) - N}{\epsilon} \rho_S + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N^2-1} \left( \frac{c_{i,N^2}(\epsilon)}{\epsilon} F_i \rho_S + \frac{c_{N^2,i}(\epsilon)}{\epsilon} \rho_S F_i^\dagger \right) + \sum_{i,j}^{N^2-1} \frac{c_{i,j}(\epsilon)}{\epsilon} F_i \rho_S F_j^\dagger \right], \quad (2.29)$$

Agora, introduzimos os coeficientes  $a_{i,j}$

$$a_{N^2,N^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{N} \frac{c_{N^2,N^2}(\epsilon) - N}{\epsilon} \quad (2.30)$$

$$a_{i,N^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{c_{i,N^2}(\epsilon)}{\epsilon}, \quad i = 1, 2 \dots N^2 - 1 \quad (2.31)$$

$$a_{i,j} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{c_{i,j}(\epsilon)}{\epsilon}, \quad i, j = 1, 2 \dots N^2 - 1, \quad (2.32)$$

e os operadores:

$$F = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i^{N^2-1} a_{i,N^2} F_i \quad (2.33)$$

$$G = \frac{1}{2N} a_{N^2,N^2} I_S + \frac{1}{2} (F^\dagger + F) \quad (2.34)$$

$$H = \frac{1}{2i} (F^\dagger - F), \quad (2.35)$$

onde H é um operador hermitiano. Assim como a matriz de coeficientes  $c$ ,  $a = (a_{i,j})$  é hermitiana e positiva. Usando essas definições pode-se escrever a equação 2.29 como:

$$L\rho_S = -i[H, \rho_S] + \{G, \rho_S\} + \sum_{i,j}^{N^2-1} a_{i,j} F_i \rho_S F_j^\dagger. \quad (2.36)$$

onde  $\{, \}$  é o anti-comutador ( $\{A,B\}=AB+BA$ ). Note que a escolha de base  $\{F_i\}$  está restrita ao fato de que o mapa descrito tem de levar um estado quântico em outro. Portanto, o traço de  $\rho_S$  tem de ser preservado:

$$Tr_S(L\rho_S) = 0 = Tr_S \left\{ \left( 2G + \sum_{i,j}^{N^2-1} a_{i,j} F_j^\dagger F_i \right) \rho_S \right\}, \quad (2.37)$$

Para que isso seja verdade sempre, tem-se que:

$$G = -\frac{1}{2} \sum_{i,j}^{N^2-1} a_{i,j} F_j^\dagger F_i. \quad (2.38)$$

Como a matriz dos coeficientes  $a$  é positiva e hermitiana pode-se diagonalizá-la usando uma matriz unitária  $u$  apropriada.

$$uau^\dagger = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_{N^2-1} \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

onde  $\gamma_i$  é um número real positivo. Introduzindo os operadores  $A_k$ :

$$F_i = \sum_{k=1}^{N^2-1} u_{k,i} A_k. \quad (2.40)$$

chegamos na forma mais conhecida da *Equação Mestra*:

$$\frac{d\rho_S}{dt} = L\rho_S = -i[H, \rho_S] + \sum_{k=1}^{N^2-1} \gamma_k \left( A_k \rho_S A_k^\dagger - \frac{1}{2} \{A_k^\dagger A_k, \rho_S\} \right). \quad (2.41)$$

O primeiro termo do gerador representa a parte unitária da evolução gerada pelo Hamiltoniano H. Os operadores  $A_k$ , introduzidos como combinação linear apropriada para a base de operadores  $F_i$ , são usualmente chamados de *Operadores de Lindblad*, e dependem da situação física que será estudada. Na próxima seção será mostrado um tipo de situação física muito comum: o reservatório de emissão espontânea. Será considerado um sistema quântico limitado (por exemplo um átomo ou uma cavidade resonante), com dois níveis, que interage com um ambiente representado por um conjunto infinito de graus de liberdade e evolui de acordo com 2.41. Seguimos os cálculos desenvolvidos na referência [6]

## 2.5 Reservatório de Emissão Espontânea

Considere, inicialmente, um sistema qualquer descrito na *Representação de Interação* interagindo com um reservatório. A equação 2.12 diz respeito à dinâmica do reservatório mais sistema, mas pode-se tomar o traço parcial em relação ao ambiente permitindo escrever a evolução temporal somente do sistema.

$$\frac{d\widetilde{\rho}_S(t)}{dt} = Tr_B \frac{1}{i\hbar} [\widetilde{H}_I(t), \rho_{SB}(t_0)] + -\frac{1}{\hbar^2} \int_{t_0}^t Tr_B \{[\widetilde{H}_I(t), [\widetilde{H}_I(t'), \widetilde{\rho}_{SB}(t')]]\} dt'. \quad (2.42)$$

Usando a aproximação de Born, o estado inicial é separável e é invariante no tempo. Como consequência, a relação

$$Tr_B \frac{1}{i\hbar} [\widetilde{H}_I(t), \rho_B(t_0)] = 0 \quad (2.43)$$

é válida. Por simplicidade, mas sem perder generalidade, pode-se fazer  $t_0 = 0$ . Reescrevendo 2.42:

$$\frac{d\widetilde{\rho}_S}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t Tr_B \{[\widetilde{H}_I(t), [\widetilde{H}_I(t'), \widetilde{\rho}_S(t') \otimes \rho_B]]\} dt'. \quad (2.44)$$

Usando agora a aproximação de Markov, a evolução depende somente do estado presente, o estado  $\rho_S(t')$  pode ser substituído por  $\rho_S(t)$  chegando em:

$$\frac{d\widetilde{\rho}_S}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t Tr_B \{[\widetilde{H}_I(t), [\widetilde{H}_I(t'), \widetilde{\rho}_S(t) \otimes \rho_B]]\} dt'. \quad (2.45)$$

Ainda não foi dito nada sobre o reservatório ou sobre o sistema, sendo a análise até agora muito geral. O reservatório é modelado considerando-o como uma coleção de osciladores harmônicos com frequência  $w_i$  e com os operadores criação e aniquilação  $r_i^\dagger$  e  $r_i$ , respectivamente. O hamiltoniano livre do reservatório será:

$$H_B = \sum_i \hbar w_i r_i^\dagger r_i. \quad (2.46)$$

Tomando o estado inicial do ambiente como o estado de equilíbrio térmico à temperatura  $T$ , o correspondente operador densidade é:

$$\rho_B = \prod_i e^{-\frac{\hbar w_i r_i^\dagger r_i}{K_B T}} \left( 1 - e^{-\frac{\hbar w_i}{K_B T}} \right), \quad (2.47)$$

onde  $K_B$  é a constante de Boltzmann.

Nessa análise, será considerado que o sistema tem dois níveis (para ilustrar o caso, estudaremos o caso de níveis de energia atômicos ou moleculares). O hamiltoniano livre do sistema pode ser escrito na forma diagonal:

$$\begin{aligned} H_S &= E_1 |1\rangle\langle 1| + E_2 |2\rangle\langle 2| \\ &= \frac{1}{2}(E_1 + E_2) I_S + \frac{1}{2}(E_1 - E_2) \sigma_z \quad \sigma_z = |1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|, \end{aligned} \quad (2.48)$$

onde o estado  $|1\rangle$  é o estado fundamental ( $E_1 < E_2$ ). O primeiro termo de 2.48 é uma constante que pode ser eliminada se o zero de energia estiver no meio da transição, podendo escrever o hamiltoniano na forma:

$$H_S = \frac{1}{2} \hbar w_S \sigma_z \quad w_S \equiv \frac{(E_1 - E_2)}{\hbar}. \quad (2.49)$$

Considerando agora o momento de dipolo  $e\mathbf{q}$  (consideraremos somente o termo de interação de dipolo), onde  $e$  é a carga elétrica e  $\mathbf{q}$  é o operador coordenada do elétron em um nível atômico, temos.

$$\begin{aligned} e\mathbf{q} &= \sum_{n,m=1}^2 \langle n|e\mathbf{q}|m\rangle|n\rangle\langle m| \\ &= e(\langle 1|\mathbf{q}|2\rangle|1\rangle\langle 2| + \langle 2|\mathbf{q}|1\rangle|2\rangle\langle 1|) \\ &= \mathbf{d}_{1,2}\sigma_- + \mathbf{d}_{2,1}\sigma_+ \quad \sigma_- \equiv |1\rangle\langle 2| \quad \sigma_+ \equiv |2\rangle\langle 1|, \end{aligned} \quad (2.50)$$

onde foi feito  $\langle 1|\mathbf{q}|1\rangle = \langle 2|\mathbf{q}|2\rangle = 0$ , assumindo que a simetria dos estados atômicos garante que o momento elétrico permanente seja nulo. Como todo observável quântico, o momento de dipolo é hermitiano, então  $\mathbf{d}_{2,1} = (\mathbf{d}_{1,2})^*$ .

As matrizes  $\sigma_z$ ,  $\sigma_-$  e  $\sigma_+$  são os operadores de spin  $\frac{1}{2}$ :  $\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y)$ , e um sistema de dois níveis, montado dessa forma, tem características semelhantes às de spin, onde os operadores  $\sigma_-$  e  $\sigma_+$  aparecem no contexto de transições magnéticas de spins  $\frac{1}{2}$  [28].

Estando o sistema de interesse e o reservatório bem definidos, podemos montar o hamiltoniano global do sistema como sendo a soma de 2.49, 2.46 e um termo de interação na forma:

$$H_I = \sum_{k,\lambda} \hbar(\kappa_{k,\lambda}^* r_{k,\lambda}^\dagger \sigma_- + \kappa_{k,\lambda} r_{k,\lambda} \sigma_+) = \hbar(\sigma_- \Gamma^\dagger + \sigma_+ \Gamma) \quad (2.51)$$

$$\kappa_{k,\lambda} \equiv -e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_S} \sqrt{\frac{w_k}{2\hbar\epsilon_0 V}} \hat{\mathbf{e}}_{k,\lambda} \cdot \mathbf{d}_{21} \quad (2.52)$$

$$\Gamma = \sum_{k,\lambda} \kappa_{k,\lambda} r_{k,\lambda} \quad \Gamma^\dagger = \sum_{k,\lambda} \kappa_{k,\lambda}^* r_{k,\lambda}^\dagger. \quad (2.53)$$

O parâmetro  $\kappa_{k,\lambda}$  é o termo de acoplamento de dipolo entre o reservatório e o sistema. A soma é feita sobre os parâmetros dos osciladores do reservatório (modos do campo eletromagnético) com vetor de onda  $k$  e estado de polarização  $\lambda$ , com frequência  $w_k$  e o vetor unitário de polarização  $\hat{\mathbf{e}}_{k,\lambda}$ . O átomo é posicionado em  $\mathbf{r}_S$ ,  $V$  é o volume quantizado do campo. O operador  $\Gamma$  incorpora a soma de todos os operadores do reservatório mais a constante de acoplamento. Esse hamiltoniano de interação é proporcional a  $\mathbf{d}_S \mathbf{E}_B$  (onde  $\mathbf{d}_S$  é o momento de dipolo e  $\mathbf{E}_B$  é a amplitude do campo) com a aproximação de *onda girante* que desconsidera termos do tipo  $\sigma_+ \Gamma^\dagger$  e  $\sigma_- \Gamma$ . Esses termos são desconsiderados pois têm uma dinâmica muito mais rápida do que a dinâmica das partes proporcionais à  $\sigma_+ \Gamma$  e à  $\sigma_- \Gamma^\dagger$ . Essa aproximação é boa no regime de osciladores próximos às frequências ópticas. Para frequências baixas ou para amortecimento muito forte, em que o tempo de decaimento se aproxima do período de oscilação, essa aproximação não é boa.

O hamiltoniano de interação na *Representação de Interação* é da forma:

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_I &= e^{(i\frac{1}{2}w_S\sigma_z t + i\sum_j w_j r_j^\dagger r_j t)} \hbar(\sigma_- \Gamma^\dagger + \sigma_+ \Gamma) e^{(-i\frac{1}{2}w_S\sigma_z t - i\sum_j w_j r_j^\dagger r_j t)} \\ &= \hbar \left( e^{i\frac{1}{2}w_S\sigma_z t} \sigma_- e^{-i\frac{1}{2}w_S\sigma_z t} \right) \left( e^{i(\sum_j w_j r_j^\dagger r_j t)} \Gamma^\dagger e^{-i(\sum_j w_j r_j^\dagger r_j t)} \right) + \\ &\quad \hbar \left( e^{i\frac{1}{2}w_S\sigma_z t} \sigma_+ e^{-i\frac{1}{2}w_S\sigma_z t} \right) \left( e^{i(\sum_j w_j r_j^\dagger r_j t)} \Gamma e^{-i(\sum_j w_j r_j^\dagger r_j t)} \right) \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$= \hbar(\sigma_- e^{-i w_S t}) \widetilde{\Gamma}^\dagger + \hbar(\sigma_+ e^{i w_S t}) \widetilde{\Gamma}, \quad (2.55)$$

onde os termos de  $\sigma_-$  e  $\sigma_+$  são obtidos se considerarmos a equação de movimento de Heisenberg

$$\frac{d\widetilde{\sigma}_-}{dt} = i\frac{1}{2}w_S e^{i(\frac{w_S\sigma_z}{2})t} (\sigma_z \sigma_- - \sigma_- \sigma_z) e^{-i(\frac{w_S\sigma_z}{2})t} = i w_S \widetilde{\sigma}_-, \quad (2.56)$$

a qual pode ser resolvida trivialmente

$$\tilde{\sigma}_-(t) = \sigma_- e^{-i\omega_s t}, \quad (2.57)$$

e analogamente para  $\tilde{\sigma}_+$ .

Com o hamiltoniano  $\tilde{H}_I$  em mãos podemos usá-lo em 2.45 obtendo:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\rho}_S}{dt} = & - \int_{t_0}^t \{ [\sigma_- \sigma_- \tilde{\rho}_S(t') - \sigma_- \tilde{\rho}_S(t') \sigma_-] e^{-i\omega_s(t+t')} \langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_B + h.c. \\ & + [\sigma_+ \sigma_+ \tilde{\rho}_S(t') - \sigma_+ \tilde{\rho}_S(t') \sigma_+] e^{i\omega_s(t+t')} \langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}(t') \rangle_B + h.c. \\ & + [\sigma_- \sigma_+ \tilde{\rho}_S(t') - \sigma_+ \tilde{\rho}_S(t') \sigma_-] e^{-i\omega_s(t-t')} \langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}(t') \rangle_B + h.c. \\ & + [\sigma_+ \sigma_- \tilde{\rho}_S(t') - \sigma_- \tilde{\rho}_S(t') \sigma_+] e^{i\omega_s(t-t')} \langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_B + h.c. \} dt' \end{aligned} \quad (2.58)$$

onde as funções correlações do reservatório são dadas por:

$$\langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_B = \sum_{j,k} \kappa_j^* \kappa_k^* e^{i\omega_j t} e^{i\omega_k t'} Tr_B \left( \rho_B r_j^\dagger r_k^\dagger \right) = 0 \quad (2.59)$$

$$\langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}(t') \rangle_B = \sum_{j,k} \kappa_j \kappa_k e^{-i\omega_j t} e^{-i\omega_k t'} Tr_B \left( \rho_B r_j r_k \right) = 0 \quad (2.60)$$

$$\langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}(t') \rangle_B = \sum_{j,k} \kappa_j^* \kappa_k e^{i\omega_j t} e^{-i\omega_k t'} Tr_B \left( \rho_B r_j^\dagger r_k \right) = \sum_j |\kappa_j|^2 e^{i\omega_j(t-t')} \bar{n}(w_j, T) \quad (2.61)$$

$$\langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_B = \sum_{j,k} \kappa_j \kappa_k^* e^{i\omega_j t} e^{-i\omega_k t'} Tr_B \left( \rho_B r_j r_k^\dagger \right) = \sum_j |\kappa_j|^2 e^{-i\omega_j(t-t')} [\bar{n}(w_j, T) + 1] \quad (2.62)$$

com

$$\bar{n}(w_j, T) = Tr_B \left( \rho_B r_j^\dagger r_j \right) = \frac{e^{-\frac{\hbar w_j}{K_B T}}}{1 - e^{-\frac{\hbar w_j}{K_B T}}} \quad (2.63)$$

As correlações não nulas 2.61 e 2.62 envolvem uma soma sobre os osciladores do reservatório. Pode-se mudar a soma para uma integral introduzindo a densidade de estados  $g(w)$  onde  $g(w)dw$  é o número de osciladores com frequência no intervalo  $w$  e  $w + dw$ . Fazendo a mudança de variável  $\tau = t - t'$  e fazendo  $t_0 = 0$  podemos escrever 2.58 como:

$$\frac{d\tilde{\rho}_S}{dt} = \alpha (\sigma_- \tilde{\rho}_S \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \tilde{\rho}_S) + \beta (\sigma_- \tilde{\rho}_S \sigma_+ + \sigma_+ \tilde{\rho}_S \sigma_- - \sigma_+ \sigma_- \tilde{\rho}_S - \tilde{\rho}_S \sigma_- \sigma_+) + h.c. \quad (2.64)$$

onde

$$\alpha = \int_0^t d\tau \int_0^\infty e^{-i(w-\omega_s)\tau} g(w) |\kappa(w)|^2 dw \quad (2.65)$$

$$\beta = \int_0^t d\tau \int_0^\infty e^{-i(w-\omega_s)\tau} g(w) |\kappa(w)|^2 \bar{n}(w, T) dw \quad (2.66)$$

A expressão 2.64 pode ser simplificada usando  $\alpha$ ,  $\beta$ , o comutador  $[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_z$  e as definições:

$$\gamma \equiv 2\pi \sum_\lambda \int d^3k g(\mathbf{k}) |\kappa(\mathbf{k}, \lambda)|^2 \delta(kc - \omega_s), \quad (2.67)$$

$$\Delta \equiv \sum_\lambda P \int d^3k \frac{g(\mathbf{k}) |\kappa(\mathbf{k}, \lambda)|^2}{\omega_s - kc}, \quad (2.68)$$

$$\Delta' \equiv \sum_\lambda P \int d^3k \frac{g(\mathbf{k}) |\kappa(\mathbf{k}, \lambda)|^2}{\omega_s - kc} \bar{n}(kc, T), \quad (2.69)$$

$$\bar{n} \equiv \bar{n}(\omega_s, T), \quad (2.70)$$

onde  $P$  indica o valor principal de Cauchy. As relações entre as definições e  $\alpha$  e  $\beta$  são:

$$\alpha = \frac{\gamma}{2} + i\Delta \quad \beta = \frac{\gamma}{2}\bar{n} + i\Delta'. \quad (2.71)$$

Usando as relações  $\sigma_{\pm}\sigma_{\mp} = \frac{1}{2}(I \pm \sigma_z)$  e com pequenas simplificações chega-se em :

$$\begin{aligned} \frac{d\widetilde{\rho}_S}{dt} = & -i\frac{1}{2}(2\Delta' + \Delta)[\sigma_z, \widetilde{\rho}_S] + \frac{\gamma}{2}(\bar{n} + 1)(2\sigma_- \widetilde{\rho}_S \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \widetilde{\rho}_S - \widetilde{\rho}_S \sigma_+ \sigma_-) \\ & + \frac{\gamma}{2}\bar{n}(2\sigma_+ \widetilde{\rho}_S \sigma_- - \sigma_- \sigma_+ \widetilde{\rho}_S - \widetilde{\rho}_S \sigma_- \sigma_+). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Agora, voltando para a *representação Schrödinger*, obtém-se a Equação Mestre para um átomo de dois níveis amortecido:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_S}{dt} = & iw'_S[\sigma_z, \rho_S] + \frac{\gamma}{2}(\bar{n} + 1)(2\sigma_- \rho_S \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \rho_S - \rho_S \sigma_+ \sigma_-) \\ & + \frac{\gamma}{2}\bar{n}(2\sigma_+ \rho_S \sigma_- - \sigma_- \sigma_+ \rho_S - \rho_S \sigma_- \sigma_+), \end{aligned} \quad (2.73)$$

com

$$w'_S \equiv w_S + 2\Delta' + \Delta. \quad (2.74)$$

O termo proporcional a  $\frac{\gamma}{2}(\bar{n} + 1)$  é a taxa de transição  $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$  e o termo proporcional a  $\frac{\gamma}{2}\bar{n}$  é a taxa de transição  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ . A diferença de energia entre os níveis do átomo no sistema isolado e no sistema interagindo com o ambiente ( $w'_S - w_S$ ) inclui um termo independente da temperatura chamado de *Lamb Shift* dado por  $\Delta$ , também visto em um oscilador harmônico, e um termo dependente da temperatura  $2\Delta'$  (proporcional a  $2\bar{n}$ ) que vem do *efeito Stark*.

**Exemplo 7.** Os valores médios  $\langle\sigma_z\rangle = \rho_{11} - \rho_{22}$ ,  $\langle\sigma_+\rangle = \rho_{12}$  e  $\langle\sigma_-\rangle = \rho_{21}$  têm correlação direta com os termos da matriz densidade  $\rho$ . Usando a equação 2.73 para cada termo da matriz, temos um conjunto de quatro equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{22} = & -\frac{i}{2}w'_S\langle 2|\sigma_z\rho - \rho\sigma_z|2\rangle \\ & + \frac{\gamma}{2}(\bar{n} + 1)\langle 2|(2\sigma_- \rho\sigma_+ - \rho\sigma_+\sigma_- - \sigma_+\sigma_-\rho)|2\rangle + \frac{\gamma}{2}\bar{n}\langle 2|(2\sigma_+\rho\sigma_- - \rho\sigma_-\sigma_+ - \sigma_-\sigma_+\rho)|2\rangle \\ = & -\gamma(\bar{n} + 1)\rho_{22} + \gamma\bar{n}\rho_{11}, \end{aligned} \quad (2.75)$$

e, analogamente

$$\dot{\rho}_{11} = -\gamma\bar{n}\rho_{11} + \gamma(\bar{n} + 1)\rho_{22} \quad (2.76)$$

$$\dot{\rho}_{21} = -\left[\frac{\gamma}{2}(2\bar{n} + 1) + iw'_S\right]\rho_{21} \quad (2.77)$$

$$\dot{\rho}_{12} = \left[\frac{\gamma}{2}(2\bar{n} + 1) - iw'_S\right]\rho_{12}. \quad (2.78)$$

Como a evolução temporal da média de um operador é dada por  $\langle\dot{O}\rangle = \text{Tr}(O\dot{\rho})$ , as evoluções temporais da média dos dos três operadores podem ser escritas na forma:

$$\langle\dot{\sigma}_z\rangle = -\gamma[(2\bar{n} + 1)\langle\sigma_z\rangle + 1] \quad (2.79)$$

$$\langle\dot{\sigma}_-\rangle = -\left[\frac{\gamma}{2}(2\bar{n} + 1) + iw'_S\right]\langle\sigma_-\rangle \quad (2.80)$$

$$\langle\dot{\sigma}_+\rangle = \left[\frac{\gamma}{2}(2\bar{n} + 1) - iw'_S\right]\langle\sigma_+\rangle. \quad (2.81)$$

Sabendo  $\langle\dot{\sigma}_-\rangle$  e  $\langle\dot{\sigma}_+\rangle$  conseguimos saber qual é a variação do momento de dipolo ao longo da evolução,  $\langle\dot{\mathbf{e}}\mathbf{q}\rangle = \mathbf{d}_{12}\langle\dot{\sigma}_-\rangle + \mathbf{d}_{12}^*\langle\dot{\sigma}_+\rangle$ .

Comparando as equações 2.72 e 2.41 vemos que elas têm a mesma forma substituindo os operadores  $A_1$  por  $\sigma_-$ ,  $A_1^\dagger$  por  $\sigma_+$ ,  $A_2$  por  $\sigma_+$ ,  $A_2^\dagger$  por  $\sigma_-$ ; as constantes de decaimento  $\gamma_1 = \gamma(\bar{n} + 1)$  e  $\gamma_2 = \gamma\bar{n}$ .

Para encerrar o capítulo sobre equações mestras, vale, ainda, salientar que com a equação mestra pode-se, a princípio calcular  $\rho(t)$  para qualquer  $t$ . Contudo, na maioria dos casos isso significa resolver várias equações diferenciais acopladas, o que pode torna-se um problema computacionalmente complexo. No próximo capítulo mostraremos um método alternativo computacionalmente mais simples e rápido, chamado de *Trajétórias Quânticas*.



# Capítulo 3

## Trajetórias Quânticas

Até agora, toda a teoria apresentada fala da evolução temporal da média sobre um ensemble de sistemas físico. Entretanto, há experimentos atuais que permitem a observação e manipulação de uma única realização de um sistema físico, apresentando efeitos interessantes, tais como os saltos quânticos [29]. Nesse caso, uma nova descrição da dinâmica é necessária. Uma alternativa é o método das Trajetórias Quânticas que apresentaremos nesse capítulo.

No primeiro capítulo foram feitas comparações entre um sistema clássico e um sistema quântico do ponto de vista de suas descrições matemáticas e de correlações que podem apresentar. Agora, mostraremos que nos dois casos, a ação do ambiente torna o estado do sistema obrigatoriamente misto. Contudo, tanto no caso clássico quanto no caso quântico pode ser usada uma descrição de trajetórias estocásticas de estados puros (no caso clássico pontos no espaço de fase, no caso quântico projetores no espaço de Hilbert). No caso quântico essas trajetórias estocásticas são as *Trajetoórias Quânticas*.

### 3.1 Processo Estocástico Clássico

Considere o sistema de um bit em um disco rígido descrito no exemplo 6. Um bit no estado inicial 2.13 tem probabilidade de inverter-se, o que modifica a distribuição de probabilidades de encontrarmos esse bit nos estados 0 e 1 conforme descrito na equação 2.14.

Uma forma de determinar a dinâmica de um único bit é medir seu valor em intervalos consecutivos de tempo [7]. Por exemplo, considere um bit que será monitorando ao longo do tempo  $t$ . Dividindo esse tempo em  $m$  intervalos iguais  $\Delta t$ , com  $t = m\Delta t$  pode-se obter como respostas um conjunto de medidas ao longo do processo. As respostas obtidas em uma parte da dinâmica são:

$$RESPOSTAS \equiv \left\{ \dots, \emptyset, \begin{matrix} 0 \rightarrow 1 \\ T_{n-1} \end{matrix}, \emptyset, \begin{matrix} 1 \rightarrow 0 \\ T_n \end{matrix}, \emptyset, \begin{matrix} 0 \rightarrow 1 \\ T_{n+1} \end{matrix}, \emptyset, \dots \right\} \quad (3.1)$$

onde  $\emptyset$  são os intervalos que não ocorrem mudanças no estado e  $T_i$  é o tempo que a  $i$ -ésima mudança de estado ocorre (a mudança ocorrida está representada acima de  $T_i$ ). Essas mudanças abruptas do estado são chamadas de “Saltos”. Esse monitoramento temporal de um sistema individual é chamado de *Trajetoória*.

As respostas são triviais e monótonas, sendo, neste caso, somente importantes, os tempos em que são observadas mudanças de estado. A evolução temporal do estado em que ocorre apenas um salto está descrita na figura 3.1.

Pode-se simular esse tipo de sistema em um computador usando um número aleatório  $r_m$  ( $0 \leq r_m \leq 1$ ) que é sorteado a cada passo  $m$ . Dependendo de seu valor ocorre um salto ou o estado permanece o mesmo.

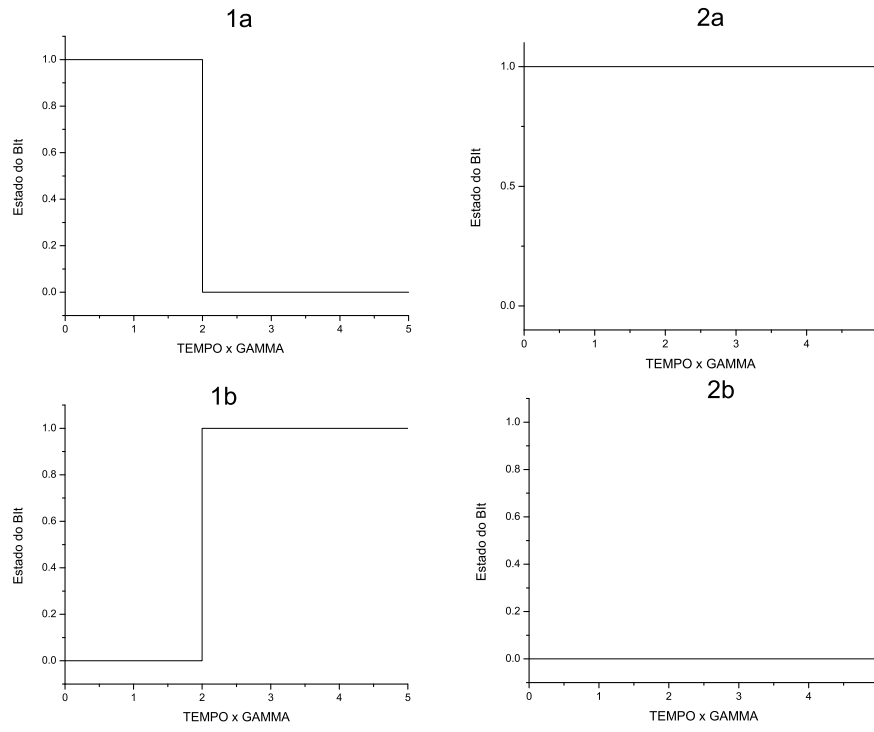


Figura 3.1: Considerando um sistema constituído por um bit, o sistema pode ter dois tipos de dinâmicas, com ou sem saltos. Quando o estado tem mudança o sistema teve um salto:  $1 \rightarrow 0$  (1a) ou  $0 \rightarrow 1$  (1b). Caso o sistema não apresente saltos a dinâmica é descrita pelos gráficos 2a (caso o valor inicial do bit seja 1) e 2b (caso o valor seja zero).

1. **SE** o estado é 0 então:  
 Se  $p_m > r_m$ , inverte-se o bit de  $0 \rightarrow 1$ .  
 Caso contrário  $0 \rightarrow 0$ .
2. **SE** o estado é 1 então:  
 Se  $p_m > r_m$ , inverte-se o bit de  $1 \rightarrow 0$ .  
 Caso contrário  $1 \rightarrow 1$ .

A probabilidade  $p_m$  de ocorrer um salto pode variar ou ser estática no tempo dependendo da interação com o campo magnético e de como esse flutua.

É importante ressaltar que estamos lidando com um único bit. No exemplo 6, para chegar na equação 2.14, tem-se de considerar um ensemble. Usando esse método, para chegarmos na mesma resposta do exemplo, é necessário fazer trajetórias para todo o ensemble e tirar a média das dinâmicas. Note também que no modelo de trajetórias, se o estado inicial é puro, por exemplo o estado 0 ( $p_0 = 1, p_1 = 0$ ), então, ao longo de uma trajetória permanecerá puro e a trajetória será uma sequência de 0's e 1's dependendo dos saltos que ocorrem. Por outro lado, o estado descrito no exemplo 6 é obrigatoriamente misto para qualquer tempo diferente de zero. Essa estatística é recuperada quando tomamos a média sobre todas as trajetórias.

De um ponto de vista quântico, além dos estados 0 ( $|0\rangle$ ) e 1 ( $|1\rangle$ ), um estado puro pode estar em uma superposição ( $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ ). Para generalizar a ideia desse modelo clássico será necessário usar um modelo mais sofisticado que considera a possibilidade de superposição dos estados e leva em consideração não só as populações desses como também sua coerência.

## 3.2 Processo Estocástico Quântico, Trajetórias Quânticas

Suponha um sistema quântico inicialmente puro  $\rho_S = |\psi\rangle\langle\psi|$  que esteja em um ambiente qualquer descrito pela equação 2.41. Queremos saber como é a função de onda do estado em um tempo  $t + \delta t$ , para uma única realização experimental do ensemble, no qual monitoramos o reservatório. O sistema pode evoluir de duas formas [30]:

1. O estado evolui sem ter nenhum salto. Para calcular  $|\psi'(t + \delta t)\rangle$  pode-se evoluir o estado  $|\psi(t)\rangle$  por um hamiltoniano efetivo:

$$H_{eff} = H - \frac{i\hbar\gamma_k}{2} \sum_k A_k^\dagger A_k. \quad (3.2)$$

$H_{eff}$  é um operador não-hermitiano e gera uma evolução não-unitária do estado:

$$|\psi'(t + \delta t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H_{eff}\delta t}|\psi(t)\rangle = \left(I - \frac{iH_{eff}\delta t}{\hbar}\right)|\psi(t)\rangle. \quad (3.3)$$

A segunda igualdade é válida para o caso de  $\delta t$  ser um passo muito pequeno tal que a aproximação de primeira ordem no tempo seja válida. Como  $H_{eff}$  gera uma dinâmica não-unitária o novo estado  $|\psi'(t + \delta t)\rangle$  não é normalizado.

$$\langle\psi'(t + \delta t)|\psi'(t + \delta t)\rangle = \langle\psi(t)|\left(I + \frac{iH_{eff}^\dagger\delta t}{\hbar}\right)\left(I - \frac{iH_{eff}\delta t}{\hbar}\right)|\psi(t)\rangle = 1 - \delta p \quad (3.4)$$

onde  $\delta p$  é descrito por:

$$\delta p = \delta t \frac{i}{\hbar} \langle\psi(t)|\left(H_{eff}^\dagger - H_{eff}\right)|\psi(t)\rangle = \delta t \gamma_k \langle\psi(t)|\left(\sum_k A_k^\dagger A_k\right)|\psi(t)\rangle = \sum_k \delta p_k \quad (3.5)$$

$$\delta p_k = \delta t \gamma_k \langle\psi(t)|\left(A_k^\dagger A_k\right)|\psi(t)\rangle \geq 0 \quad (3.6)$$

Como o passo  $\delta t$  é pequeno, isso implica que  $\delta p \ll 1$

2. A evolução do estado  $|\psi(t)\rangle$  entre o tempo  $t$  e  $t + \delta t$  inclui um salto quântico. Em geral, existem vários saltos possíveis, cada qual associado a um operador  $L_k = \sqrt{\gamma_k}A_k$  e com a probabilidade  $\Pi_k = \delta p_k/\delta p$  de ocorrer (isso são probabilidades, pois  $\sum_k \Pi_k = 1$ ). O intervalo  $\delta t$  é escolhido de forma que apenas um salto possa ocorrer e, nesse caso, o estado será:

$$|\psi(t + \delta t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\delta p_k/\delta t}} L_k |\psi(t)\rangle. \quad (3.7)$$

A evolução do sistema em uma trajetória  $n$  será dada pela sequência de estados

$$\{|\psi(0)\rangle, |\psi(\delta t)\rangle, |\psi(2\delta t)\rangle, \dots, |\psi(N\delta t)\rangle\}, \quad (3.8)$$

onde cada qual é gerado a partir do caso anterior por um dos saltos possíveis ou pela evolução sem saltos. Essa sequência é chamada de *Trajétória Quântica*

### 3.3 Equivalência entre Trajetórias Quânticas e Equação Mestra

Usando o processo descrito anteriormente é possível recuperar todos os resultados de uma única realização do experimento, tal qual no caso clássico. Fazendo esse procedimento várias vezes e calculando a média sobre os resultados em cada tempo devemos recuperar o resultado encontrado pela equação mestra [31], conforme mostraremos a seguir

Seja  $\rho(t)$  a matriz densidade do sistema no tempo  $t$ . No intervalo  $\delta t$  ou o sistema evolui por  $H_{eff}$  (trajetória sem salto) ou por um dos operadores  $A_k$  correspondentes a um dos possíveis saltos. Para conhecermos  $\rho(t + \delta t)$  fazemos a média sobre todas as possibilidades de trajetórias, ou seja, se  $\rho(t) = \sum_i p_i |\psi_i(t)\rangle \langle \psi_i(t)|$  onde o  $i$ -ésimo estado tem probabilidade  $p_i$  de ocorrer ao longo de todas as trajetórias, então

$$\rho(t + \delta t) = (1 - \delta p) \sum_i p_i \frac{|\psi'_i(t + \delta t)\rangle \langle \psi'_i(t + \delta t)|}{\sqrt{1 - \delta p} \sqrt{1 - \delta p}} + \delta p \sum_{k,i} p_i \Pi_k \frac{L_k |\psi_i(t)\rangle \langle \psi_i(t)| L_k^\dagger}{\sqrt{\delta p_k / \delta t} \sqrt{\delta p_k / \delta t}}. \quad (3.9)$$

Da equação 3.3 e reescrevendo os operadores  $L_k = \sqrt{\gamma_k} A_k$  temos:

$$\rho(t + \delta t) = \rho(t) + \frac{i\delta t}{\hbar} [\rho(t), H] + \delta t \sum_k \gamma_k \left( A_k \rho(t) A_k^\dagger - \frac{1}{2} \{A_k^\dagger A_k, \rho(t)\} \right), \quad (3.10)$$

o que leva à equação diferencial

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\rho(t), H] + \sum_k \gamma_k \left( A_k \rho(t) A_k^\dagger - \frac{1}{2} \{A_k^\dagger A_k, \rho(t)\} \right). \quad (3.11)$$

A equação acima tem a mesma forma da equação 2.41 o que mostra a equivalência entre a equação mestra e as trajetórias quânticas

As trajetórias quânticas têm quatro importantes vantagens que nos levaram a escolher esse método em nosso trabalho:

1. **Realização Experimental:** As trajetórias quânticas podem ser realizadas experimentalmente usando uma ideia muito simples: monitorar o ambiente que está interagindo com o sistema. O monitoramento do reservatório se dá fazendo medidas consecutivas a cada passo  $\delta t$  de tempo. Por exemplo, se estivermos analisando um átomo com decaimento espontâneo, e observarmos um fóton no reservatório, isso significa que o sistema decaiu, seguindo, portanto, a evolução descrita pela equação 3.7; caso não observemos nenhum fóton no reservatório (considerando um reservatório à temperatura zero) o sistema evolui também, só que seguindo a dinâmica descrita por 3.3. Note que para esse tipo de reservatório as medidas nele realizadas fornecem algum conhecimento sobre o estado [32], mesmo quando o resultado é nulo. O exemplo 8 mostra um caso simples de como uma medida nula afeta o sistema.
2. **Simulação Computacional:** Esse modelo permite fazer simulações computacionais usando poucos recursos, pois se o estado inicial é puro, então para uma dada trajetória, este sempre permanecerá puro o que nos permite trabalhar com vetores de dimensão  $N$  (função de onda) em vez de matrizes com dimensão  $N^2$  (operador densidade). Para a simulação é usado um processo de sorteio de um número aleatório  $r_m$  em cada passo  $m$  para determinar se ouve um salto ou não, igual ao caso clássico. Dado um estado inicial  $|\psi\rangle$  em cada intervalo de tempo  $\delta t$  sorteia-se um número aleatório entre 0 e 1. De acordo

com o intervalo em que o número sorteado cair, aplica-se a correspondente evolução ( $H_{eff}$  ou um dos saltos  $L_k$ ). Uma particular trajetória  $j$  será dada pela sequência

$$\{|\psi_j(0)\rangle, |\psi_j(\delta t)\rangle, |\psi_j(2\delta t)\rangle, \dots, |\psi_j(N\delta t)\rangle\} \quad (3.12)$$

obtida a partir dos  $r_m$ 's sorteados  $\{r_1, r_2, \dots, r_N\}$  e da aplicação dos respectivos operadores  $\{O_1, O_2, \dots, O_N\}$ , onde  $O_i$  é  $L_k$  para um salto  $k$  e  $H_{eff}$  caso não haja nenhum salto. Note que a aplicação de  $O_i$  no estado diminui sua norma. Para evitar trabalhar com números muito pequenos é importante renormalizar o estado a cada passo. Para recuperar  $\rho(t)$  para um tempo qualquer basta repetir o procedimento muitas vezes, obtendo diferentes  $|\psi_j(t)\rangle$  (onde  $j$  indica a correspondente trajetória) e fazer a média sobre todas as trajetórias encontradas

$$\rho(t) = \frac{1}{T} \sum_j \omega_j |\psi_j(t)\rangle \langle \psi_j(t)| \quad (3.13)$$

onde  $T$  é o número total de trajetórias simuladas e  $\omega_j$  é a frequência com que o estado  $|\psi_j(t)\rangle$  aparece. Note ainda que, como  $|\psi_j(t)\rangle$  é normalizado, segue que:

$$Tr[\rho(t)] = \frac{1}{T} \sum_j \omega_j Tr[|\psi_j(t)\rangle \langle \psi_j(t)|] = \frac{1}{T} \sum_j \omega_j = 1 \quad (3.14)$$

o significa que  $\sum_j \omega_j = T$ , conforme deveria ser. Por usar simulação, esse método faz com que perdemos generalidade por que estudamos apenas casos particulares.

3. **Relação entre Simulação e Experimento:** Um experimento pode ser facilmente simulado usando trajetórias quânticas. Geralmente um experimento é feito usando um constituinte do ensemble de cada vez e monitorando seu estado em intervalos discretos. A simulação segue esse mesmo raciocínio, usando um número aleatório para simular a aleatoriedade da evolução do sistema experimental.
4. **“Destilamento” do Emaranhamento:** É conhecido que operações locais (operações que atuam individualmente em cada subsistema) não aumentam o emaranhamento de um sistema *em média*. Nesse trabalho será mostrado que as trajetórias sem saltos podem aumentar o emaranhamento de alguns constituintes, dependendo do estado inicial, mesmo com reservatórios locais. Pode-se usar o processo de pós-seleção de estados dividindo os sistemas em dois casos: os que evoluem com algum salto e os que evoluem sem nenhum salto. Os sistemas em que ocorrem saltos são descartados. Os estados que evoluem com uma trajetória sem saltos são selecionados, pois podem possuir mais emaranhamento que o estado inicial (será mostrado como isso ocorre na seção 4.3). Esse processo não aumenta o emaranhamento na média, mas somente de alguns constituintes.

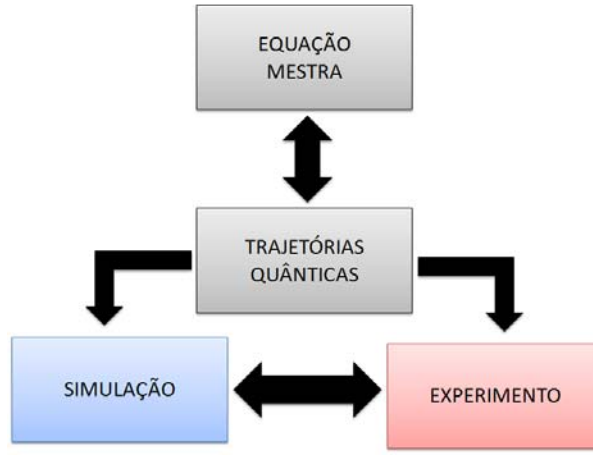


Figura 3.2: Esquema que mostra a equivalência entre equação mestra e trajetórias quânticas. Além disso, as trajetórias quânticas tem interpretação direta relacionada aos experimentos, facilitando assim, simular computacionalmente alguns experimentos.

Mostramos, agora, um exemplo de evolução por trajetória quântica.

**Exemplo 8.** Considere o sistema descrito na seção 2.5 com o estado inicial  $|\psi(0)\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle$  normalizado ( $|a|^2 + |b|^2 = 1$ ) interagindo com um reservatório com temperatura igual a zero ( $\bar{n} = 0$ ). Depois de um passo  $\delta t$  o sistema pode sofrer um salto  $\sigma_-$  (detectar um fóton no reservatório) ou evoluir pelo hamiltoniano efetivo (nenhum fóton detectado). Se não houver um salto, o estado do sistema em  $\delta t$  será dado por:

$$\begin{aligned}
 |\psi(\delta t)\rangle &= \frac{(I - \frac{i\delta t}{\hbar} H_{eff}) |\psi(0)\rangle}{\sqrt{1 - \gamma\delta t}} = \frac{|\psi(0)\rangle + \gamma\delta t\sigma_+\sigma_-|\psi(0)\rangle}{\sqrt{1 - \gamma\delta t}} \\
 |\psi(\delta t)\rangle &= \frac{a|1\rangle + (1 - \gamma\delta t)b|2\rangle}{\sqrt{1 - \gamma\delta t}}
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Pode-se ver que a população do estado excitado  $|2\rangle$  diminui e do estado  $|1\rangle$  aumenta. Como nenhum fóton foi detectado no reservatório, o sistema tem uma probabilidade menor de estar no estado  $|2\rangle$  após  $\delta t$ . Repetindo esse processo várias vezes (número de passos  $m \rightarrow \infty$ ) o estado final será o estado  $|1\rangle$ , como deveria ser, posto que para um reservatório de emissão espontânea o estado assintótico do sistema é sempre o seu estado fundamental.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |\psi(m\delta t)\rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a|1\rangle + (1 - m\gamma\delta t)b|2\rangle}{\sqrt{1 - m\gamma\delta t}} = |1\rangle. \tag{3.16}$$

A trajetória sem nenhum salto quântico é chamada de “No-Jump Trajectory” (trajetória sem salto). Esse tipo de trajetória mostra que uma não detecção no reservatório nos fornece informação sobre o sistema, sendo uma medida tão importante quanto a detecção de um fóton. Por outro lado, se houver um salto, o estado do sistema é projetado imediatamente em seu estado final  $|1\rangle$ , já que o único operador de salto é  $\sigma_-$

### 3.4 Análise usando Trajetórias Quânticas de um Qubit em um Reservatório de Emissão

Para deixar claro como as trajetórias quânticas fornecem resultados tão bons quanto o da equação mestra, voltamos ao exemplo anterior, agora calculando  $\rho(t)$  ao longo da dinâmica temos: um qubit interagindo com um reservatório de emissão a temperatura zero (outros exemplos simples de uso da trajetória podem ser encontrados na referência [33]). Investigando só para a dinâmica de interação entre o reservatório e o qubit (analisando o sistema na *representação de interação*) e usando a equação mestra pode-se montar um sistema de equações diferenciais para cada elemento da matriz densidade  $\rho_{11}$ ,  $\rho_{22}$  e  $\rho_{12} = \rho_{21}$  ( $\bar{n} = 0$ ). Resolvendo essas equações, encontramos:

$$\rho_{22} = ae^{-\gamma t} \quad (3.17)$$

$$\rho_{11} = 1 - ae^{-\gamma t} \quad (3.18)$$

$$\rho_{12} = a(1 - a)e^{-\frac{\gamma t}{2}}. \quad (3.19)$$

Essa solução tem como condição inicial o estado puro  $|\psi\rangle = \sqrt{a}|1\rangle + \sqrt{1-a}|2\rangle$ .

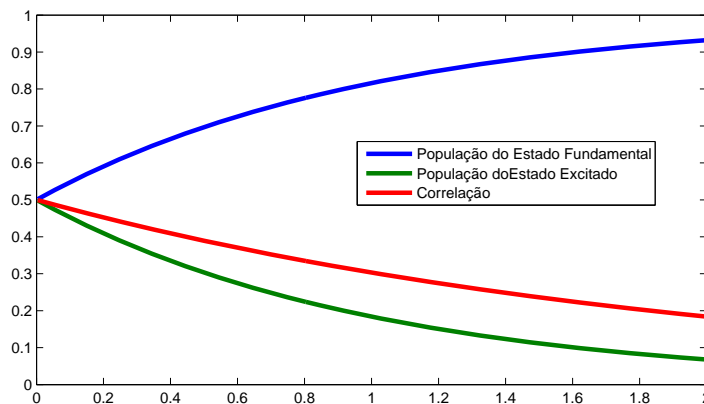


Figura 3.3: Resolução analítica da equação mestra feita para o sistema de um qubit, mostrando que as duas são igualmente satisfatórias. Foi escolhido  $a = \frac{1}{2}$ .

Agora usaremos as trajetórias quânticas para analisar o mesmo problema. Como exemplo, analisaremos um estado inicial:

$$|\psi_1(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle). \quad (3.20)$$

Para se ter uma boa aproximação do resultado analítico é preciso ter um número considerável de trajetórias que depende de vários fatores, sendo o principal o quão drástico o sistema é modificado quando ocorre um salto quântico. Quanto mais drástica a mudança é, mais trajetórias serão necessárias. Outro fator importante a ser considerado é o número de saltos e o número de níveis envolvidos. O número de trajetórias aumenta com o aumento da possibilidade de saltos e com a dimensão do sistema. No caso estudado foram usadas 1000 trajetórias, o que fornece um resultado muito satisfatório, como mostra a figura 3.4 quando comparada com a solução analítica na figura 3.3.

Ao monitorar o reservatório, uma trajetória possível é aquela que não apresenta saltos, conforme discutido anteriormente. A figura 3.5 mostra como o estado do qubit evolui se não

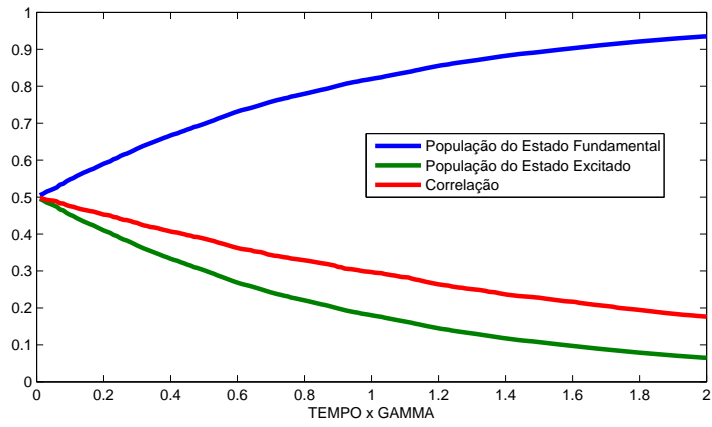


Figura 3.4: Resolução numérica feita para o mesmo estado inicial, mostrando que as duas resoluções chegam no mesmo resultado, sendo igualmente satisfatórias.

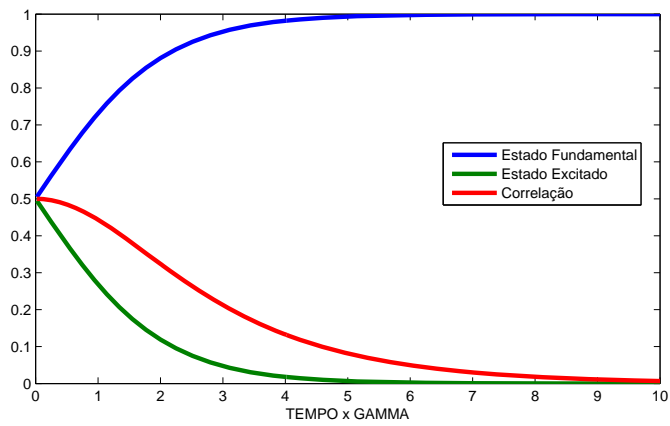


Figura 3.5: Um qubit com estado inicial igual ao analisado anteriormente evoluindo em uma dinâmica sem saltos.

ocorre nenhum salto. A dinâmica sem saltos modifica as populações seguindo o que foi dito no final da seção anterior.



### 3.5 Análise usando Trajetórias Quânticas de dois Qubits emaranhados em Reservatórios de Emissão Independente

Nessa dissertação estamos interessados em investigar o desemaranhamento de sistemas abertos. Um sistema já estudado envolve dois qubits, inicialmente emaranhados, cada um interagindo com um reservatório de emissão dado pela equação 2.73. Nesse caso, há dois tipos possíveis de dinâmica de emaranhamento: morte súbita de emaranhamento (o emaranhamento chega a zero em tempo finito) ou decaimento assintótico. Se vai ocorrer uma ou outra dinâmica depende somente do estado inicial. Considerando estados da forma  $|\psi\rangle = a|11\rangle + b|22\rangle$ , podemos usar trajetórias quânticas para encontrar como é a dinâmica em dois diferentes intervalos:  $a > b$  e  $b > a$ . Segue o gráfico mostrando dois exemplos, um para cada intervalo. Esse exemplo já foi estudado nas referências [1, 34].

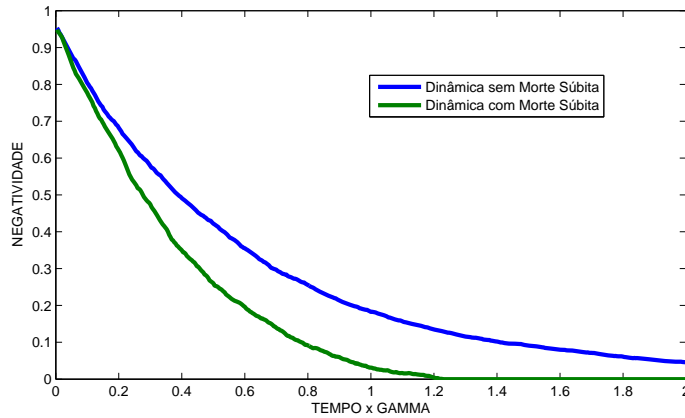


Figura 3.6: Um sistema constituído por dois qubits tem o emaranhamento morrendo assintoticamente se  $a > b$  e apresenta morte súbita se  $b > a$ . Os valores utilizados nos dois casos foram  $\frac{3}{5}$  para o menor valor e  $\frac{4}{5}$  para o maior.

Esse exemplo apresenta os possíveis casos de dinâmica de emaranhamento de dois qubits. No próximo capítulo será apresentada uma análise semelhante para qutrits. No caso de dois qutrits além da possibilidade de variar o estado inicial, ainda há a possibilidade de um sistema ter configurações de níveis diferentes, sendo o principal estudo dessa dissertação como essas configurações afetam a dinâmica de emaranhamento.

# Capítulo 4

## Dinâmica de Dois Qutrits

O emaranhamento aparece como recurso em vários protocolos de informação quântica, o que cria a necessidade de saber como essa propriedade do sistema evolui no tempo quando estamos lidando com sistemas quânticos abertos. A dinâmica de qubits banhados por um reservatório de emissão já foi estudada exaustivamente em vários trabalhos, conforme exemplo dado na seção 3.5. Em sistemas bipartites de maior dimensão podem ocorrer efeitos diferentes, devidos à sua complexidade. O menor sistema que contém características que não podem ser vistas em dois qubits são dois qutrits. Já foram estudadas algumas propriedades da evolução do emaranhamento em um sistema aberto de dois qutrits como: mudanças abruptas de emaranhamento [2], criação de emaranhamento em reservatório conjunto [35] e análise de canais atômicos envolvendo qutrits [36]. Neste capítulo serão mostradas algumas das possíveis dinâmicas de emaranhamento que um sistema constituído de dois qutrits pode ter e, mais especificamente, como o desemaranhamento varia para diferentes configurações dos níveis de energia de cada qutrit.

### 4.1 O Que É Um Qutrit?

Um Qutrit é um sistema quântico de três níveis. A primeira diferença evidente entre qutrits e qubits é a possibilidade de qutrits terem diferentes configurações, que se mostrará essencial para a dinâmica de desemaranhamento. Nessa dissertação, estudaremos o emaranhamento de sistemas de dois qutrits que apresentam três possíveis configurações: Lambda (um nível superior e dois níveis inferiores que não se enxergam, considerando a aproximação de dipolo), Cascata (semelhante a um oscilador harmônico truncado no terceiro nível, onde o estado mais excitado não decai diretamente para o estado fundamental) e V (dois níveis superiores cujo decaimento é proibido entre si mais um nível com energia inferior, para o qual ambos decaem). A figura 4.1 mostra com maior clareza como são os três tipos de configuração.

Vamos, sempre, analisar qutrits que interagem com um reservatório independente através de dois canais de decaimento que dependem das configurações dos níveis de energia. Dessa forma, podemos comparar com os casos previamente estudados em que o decaimento se dava em cascata. Pode-se considerar que cada canal, separadamente, tem a mesma forma do canal de decaimento descrito para um qubit na equação 2.73. Os canais para cada configuração são:

1. Caso o Qutrit tenha configuração Cascata

$$C_1 = |1\rangle\langle 2| \quad C_2 = |2\rangle\langle 3|. \quad (4.1)$$

2. Caso o Qutrit tenha configuração Lambda

$$\Lambda_1 = |1\rangle\langle 3| \quad \Lambda_2 = |2\rangle\langle 3| \quad (4.2)$$

### 3. Caso o Qutrit tenha configuração V

$$V_1 = |1\rangle\langle 2| \quad V_2 = |1\rangle\langle 3| \quad (4.3)$$

Cada canal de decaimento é definido pelo seu operador, semelhantes ao  $\sigma_-$ , cujo *bra* define o nível que perde população e o *ket* o nível que ganha população.

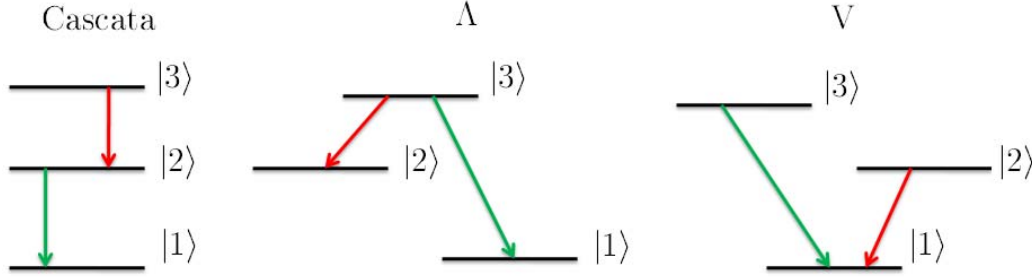


Figura 4.1: Possíveis configurações dos níveis de energia de um sistema de três níveis.

Em nossa análise, vamos considerar que os qutrits estejam longe o suficiente um do outro para conseguirmos distinguir os fótons emitidos por cada um. Ou seja, trataremos de reservatórios independentes.

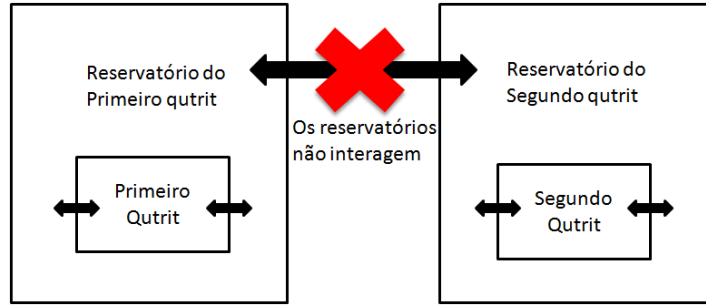


Figura 4.2: Esquema que mostra o sistema mais seu reservatório evoluindo independentemente.

Como queremos analisar como o emaranhamento varia dependendo somente da interação entre o sistema e o reservatório, todas as análises estarão na *representação de Interação*. A equação mestra que descreve o sistema é:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} = & \gamma_1 \left( A_1 \rho A_1^\dagger - \frac{1}{2} \{ A_1^\dagger A_1, \rho \} \right) + \gamma_2 \left( A_2 \rho A_2^\dagger - \frac{1}{2} \{ A_2^\dagger A_2, \rho \} \right) \\ & + \gamma'_1 \left( B_1 \rho B_1^\dagger - \frac{1}{2} \{ B_1^\dagger B_1, \rho \} \right) + \gamma'_2 \left( B_2 \rho B_2^\dagger - \frac{1}{2} \{ B_2^\dagger B_2, \rho \} \right), \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde  $A_i$  e  $\gamma_i$  é relativo a operadores do primeiro qutrit e  $B_j$  e  $\gamma'_j$  é relativo a operadores do segundo qutrit. Por exemplo, se o primeiro qutrit tiver a configuração cascata,  $A_1 = C_1 \otimes I$  e  $A_2 = C_2 \otimes I$ , e o segundo em configuração Lambda,  $B_1 = I \otimes \Lambda_1$  e  $B_2 = I \otimes \Lambda_2$ . Para simplificar a notação  $\widetilde{\rho}_S \equiv \rho$ . Consideraremos o caso que todas as constantes de decaimento são iguais ( $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma'_1 = \gamma'_2$ ).

Outra possibilidade, que não será alvo de estudos dessa dissertação, analisa o caso em os estados que não têm decaimento entre si (nas configurações V e Lambda) são degenerados. Isso

implicaria em não saberemos qual salto ocorreu ( $\Lambda_1$  ou  $\Lambda_2$  para Lambda e  $V_1$  ou  $V_2$  para a configuração V), não sabendo, portanto, para qual nível de energia o estado decaiu, no caso Lambda, ou em qual nível estava, no caso V. Existiria, também, a possibilidade, na configuração Cascata, de não conseguirmos distinguir os fótons de cada transição, formando, assim, uma "degenerescência" dos possíveis fótons emitidos, implicando na mesma ignorância das outras configurações. Em todos esses casos de níveis degenerado, a dinâmica não seria dada pela equação 4.4 e sim por uma nova equação.

$$\frac{d\rho}{dt} = \gamma \left( J\rho J^\dagger - \frac{1}{2}\{J^\dagger J, \rho\} \right) + \gamma' \left( J'\rho J'^\dagger - \frac{1}{2}\{J'^\dagger J', \rho\} \right) \quad (4.5)$$

onde

$$J = (C_1 + C_2) \otimes I' \quad (4.6)$$

$$J = (\Lambda_1 + \Lambda_2) \otimes I' \quad (4.7)$$

$$J = (V_1 + V_2) \otimes I', \quad (4.8)$$

por exemplo, onde 4.6, 4.7 e 4.8 se referem, respectivamente, a operadores degenerados das configurações Cascata, Lambda e V para a primeira partícula (as grandezas com ' atuam no segundo sistema). Contudo, nesse trabalho ficaremos restritos somente ao caso não-degenerado, onde os canais de decaimento são caracterizados pelos operadores 4.1 para a configuração cascata, 4.2 para lambda e 4.8 para V.

## 4.2 Desemaranhamento Entre Dois Qutrits

Sistemas quânticos abertos que estejam emaranhados inicialmente perdem emaranhamento em contato com um reservatório. Sem perda de generalidade, restringiremos nossa análise aos estados da forma:

$$|\psi\rangle = a|11\rangle + b|22\rangle + c|33\rangle. \quad (4.9)$$

Por simplicidade os valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$  serão tomados reais e positivos. Note que, para estudos de emaranhamento, a fase relativa entre eles é pouco importante e pode sempre ser "absorvida" por uma redefinição momentânea dos estados. O estado 4.9 tem emaranhamento máximo quando  $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$  com negatividade  $N = 2$ . Considerando-se somente estados desse tipo já se pode observar um conjunto muito grande de diferentes dinâmicas dependendo dos valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$  ou das diferentes configurações (Cascata, Lambda e V). Para facilitar a visualização da evolução do emaranhamento, os gráficos das sub-seções 4.2.1, 4.2.2 e 4.2.3, além de mostrarem a negatividade, mostram o comportamento temporal de cada auto-valor negativo separadamente. No caso dos sistemas em questão, a transposta parcial do estado contém, no máximo, 3 auto-valores negativos. Como suas dinâmicas têm tempos característicos diferentes, podem-se observar mudanças abruptas na negatividade. Observa-se, também, emaranhamento decaindo assintoticamente se pelo menos um dos auto-valores tende assintoticamente para zero. E só se observa morte súbita quando todos os auto-valores negativos chegam a zero em tempo finito.

Para observar essas propriedades fizemos simulações usando o método de Trajetórias Quânticas pois, mesmo sendo possíveis, resultados analíticos demandariam cálculos muito extensos sem acréscimo qualitativo (ou mesmo quantitativo) ao principal objetivo da dissertação: estudar a evolução do emaranhamento para diferentes configurações de energia em sistemas aberto  $3 \otimes 3$  em reservatórios independentes.

### 4.2.1 Configuração Cascata-Cascata

Primeiramente, considerando ambos os qutrits na configuração cascata, mostramos, a seguir, a dinâmica de seu desemaranhamento. Em particular, é mostrado a negatividade das possíveis dinâmicas que podem ocorrer dependendo do estado inicial do sistema. Para essa configuração pode-se ver que o sistema possui diferentes dinâmicas dependendo do estado inicial. F. Lastra *et al.* estudaram esse caso em [2]. Repetimos os resultados para comparar com as outras configurações. As possíveis dinâmicas para essa configuração são:

1.  $a > b > c$ : decaimento assintótico.
2.  $b > a > c$  ou  $a > c > b$ : uma mudança abrupta e decaimento assintótico.
3.  $b > c > a$ : duas mudanças abruptas e decaimento assintótico.
4.  $c > b > a$ : duas mudanças abruptas e morte súbita.

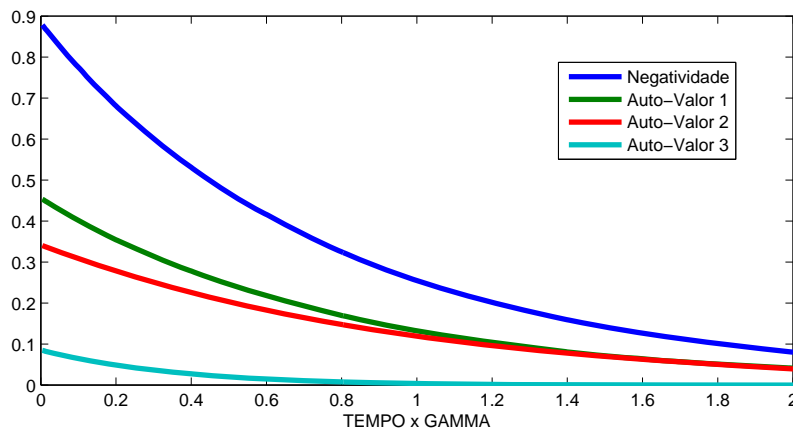


Figura 4.3: Caso sem mudanças abruptas para configuração Cascata-Cascata. Valores numéricos:  $a=0.9545$ ,  $b=0.2386$ ,  $c=0.1790$

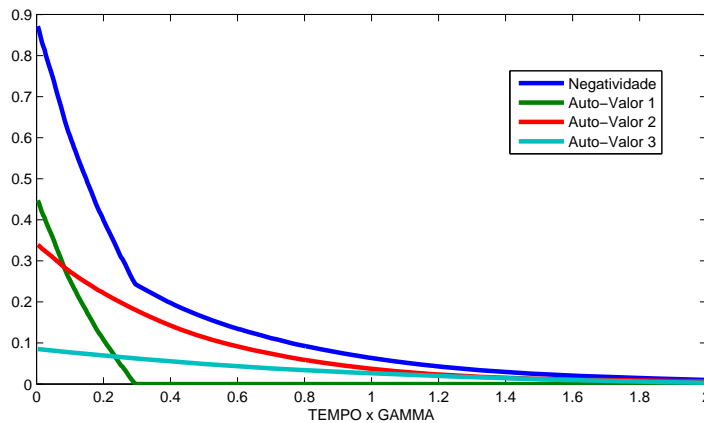


Figura 4.4: Caso com uma mudança abrupta e decaimento assintótico para configuração Cascata-Cascata. Valores utilizados:  $a=0.2386$ ,  $b=0.9545$ ,  $c=0.1790$

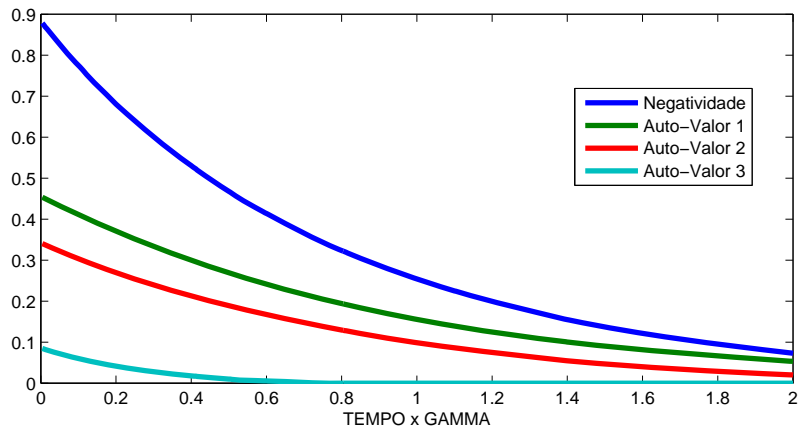


Figura 4.5: Caso com uma mudança abrupta e decaimento assintótico para configuração Cascata-Cascata. Valores numéricos:  $a=0.9545$ ,  $b=0.1790$   $c=0.2386$

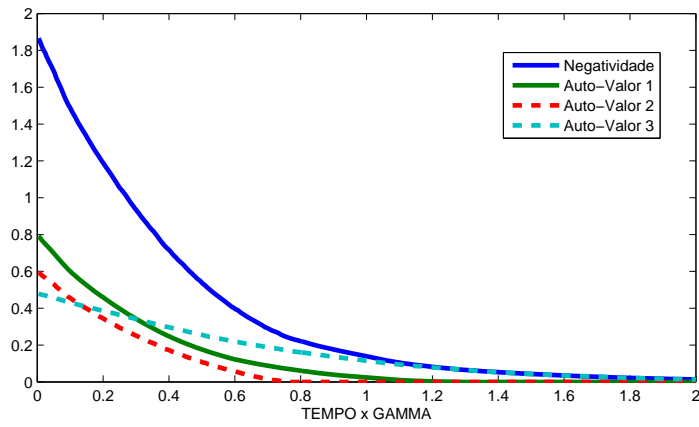


Figura 4.6: Caso com duas mudanças abruptas e decaimento assintótico para configuração Cascata-Cascata. Os valores utilizados foram:  $a=0.4243$ ,  $b=0.7071$   $c=0.5657$

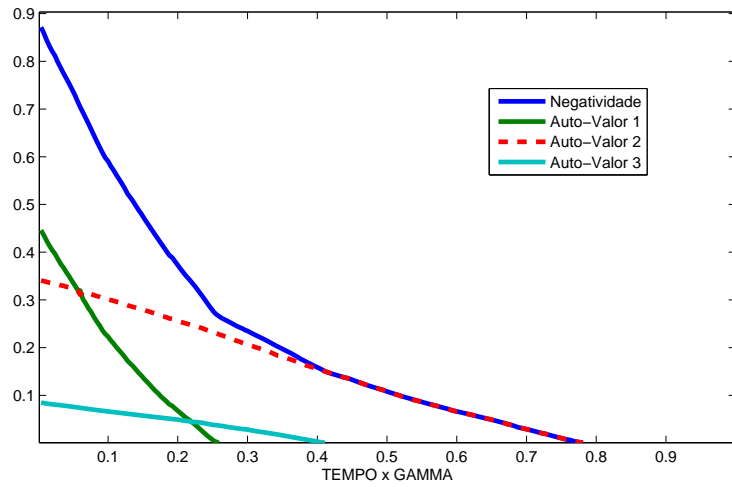


Figura 4.7: Caso com duas mudanças abruptas e morte súbita para configuração Cascata-Cascata. Com os valores numéricos sendo:  $a=0.1790$ ,  $b=0.2386$   $c=0.9545$

### 4.2.2 Configuração V-V

No caso Cascata-Cascata foram encontrados diferentes dinâmicas dependo dos valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$ . O comportamento da dinâmica, dependendo do estado inicial, pode ser visto, também para o caso V-V. Abaixo seguem as possíveis dinâmicas para este caso:

1.  $a > b$  e  $a > c$ : Não há mudanças abruptas no emaranhamento
2.  $a > b$  e  $a < c$  ou  $a < b$  e  $a > c$ : Há uma mudança abrupta.
3.  $a < b$  e  $a < c$ : Ocorrem duas mudanças abruptas

Na configuração V-V não existe a possibilidade de haver morte súbita, pois um dos autovalores negativos sempre tende à zero assintoticamente para qualquer estado inicial do sistema. No caso estudado de configuração V, consideramos que não há decaimento entre os dois níveis excitados. Além disso, consideramos que os canais de perda são independentes. Como o estado final só converge para o estado fundamental ( $|11\rangle$ ) assintoticamente, sempre haverá um pouquinho de emaranhamento livre disponível, mesmo para tempos longos, desde que o sistema seja originalmente emaranhado. Além do mais, os dois estados excitados têm um canal de decaimento para o nível  $|1\rangle$ , apresentando dinâmicas idênticas (isso vale somente para o caso não degenerado e que a constante de decaimento seja a mesma). Portanto, para dois qutrits nessa configuração, a troca das populações entre  $b$  e  $c$  não muda a dinâmica do sistema.

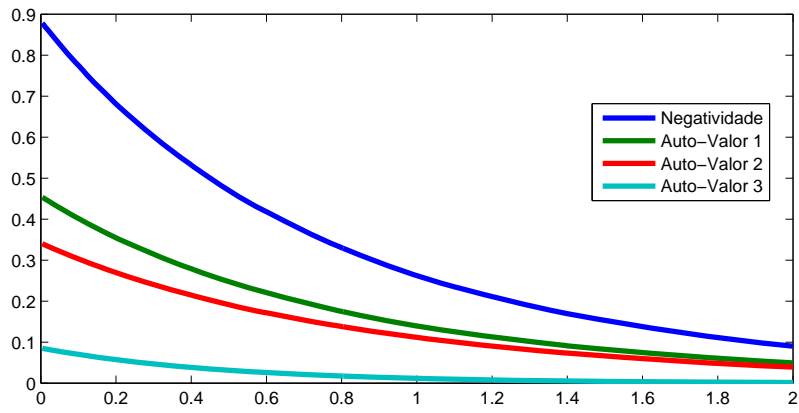


Figura 4.8: Não há mudança abrupta no emaranhamento para configuração V-V. Valores numéricos:  $a=0.1790$ ,  $b=0.2386$   $c=0.9545$

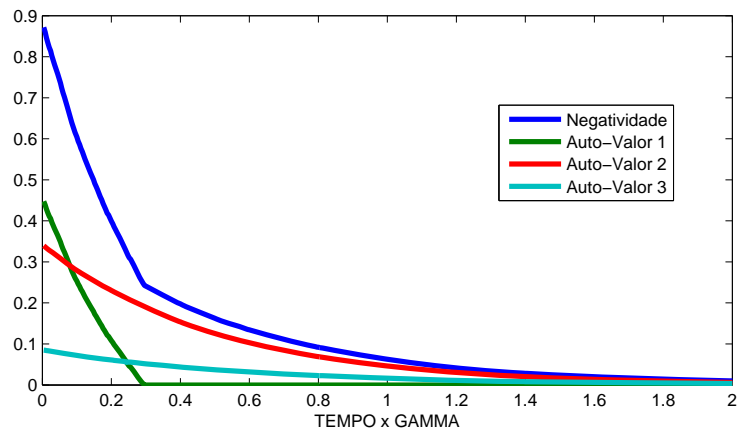


Figura 4.9: Caso com uma mudança abrupta para configuração V-V. Valores numéricos:  $a=0.2386$ ,  $b=0.9545$   $c=0.1790$



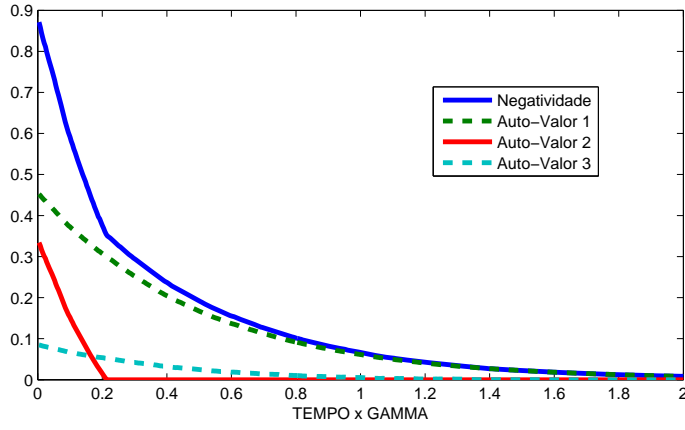


Figura 4.10: Caso com duas mudanças abruptas para configuração V-V. Os valores utilizados foram:  $a=0.1790$ ,  $b=0.2386$   $c=0.9545$

### 4.2.3 Configuração Lambda-Lambda

Semelhante ao caso Cascata-Cascata e V-V, foi feita uma análise com os dois qutrits tendo configuração Lambda. A seguir seguem os gráficos e os intervalos interessantes nesse caso.

1.  $\frac{a}{c} > \frac{1}{2}$  e  $\frac{b}{c} > \frac{1}{2}$ : Não há mudanças abruptas no sistema e o sistema tem emaranhamento assintótico.
2.  $\frac{a}{c} > \frac{1}{2}$  e  $\frac{b}{c} < \frac{1}{2}$  ou  $\frac{a}{c} < \frac{1}{2}$  e  $\frac{b}{c} > \frac{1}{2}$ : Há duas mudanças abruptas e o emaranhamento morre assintoticamente ( $\frac{c^2}{4} > ab$ ); ou há uma mudança abrupta e o sistema possui emaranhamento assintótico ( $\frac{c^2}{4} < ab$ ).
3.  $\frac{a}{c} < \frac{1}{2}$  e  $\frac{b}{c} < \frac{1}{2}$ : Ocorrem duas mudanças abruptas no sistema e ocorre morte súbita .

Um qutrit na configuração Lambda, diferente das outras duas configurações não tende para o nível fundamental  $|1\rangle$  (espaço de Hilbert do estado quando o tempo  $t \rightarrow \infty$  é igual à  $E_{final}^C = E_{final}^V = 1$ ) e sim para o sub-espaço de dimensão  $E_{final}^\Lambda = 2$  formado pelos níveis de energia  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ . Nos casos de dois qutrits com essa configuração há a possibilidade de existir emaranhamento assintótico, pois o sistema não tende para o estado fundamental  $|11\rangle$  global, mas para o sub-espaço  $E_{final}^\Lambda \otimes E_{final}^\Lambda$  definido pelos vetores  $|11\rangle$ ,  $|12\rangle$ ,  $|21\rangle$  e  $|22\rangle$ . Portanto, o sistema pode apresentar um emaranhamento equivalente ao de dois qubits. Ou seja, além das possibilidades de dinâmica semelhante ao outros casos de configuração, existem as possibilidades:

1. se  $\frac{c^2}{4} > ab$  não há emaranhamento assintótico
2. se  $\frac{c^2}{4} < ab$  há emaranhamento assintótico

Quando há emaranhamento assintótico, apenas um dos auto-valores negativos não morrem nunca. Para dois qubits, o emaranhamento é caracterizado por somente um auto-valor negativo, confirmando cujo emaranhamento entre os qutrits tende para um estado que o emaranhamento é semelhante ao de um sistema de dois qubits ( $2 \otimes 2$ ).

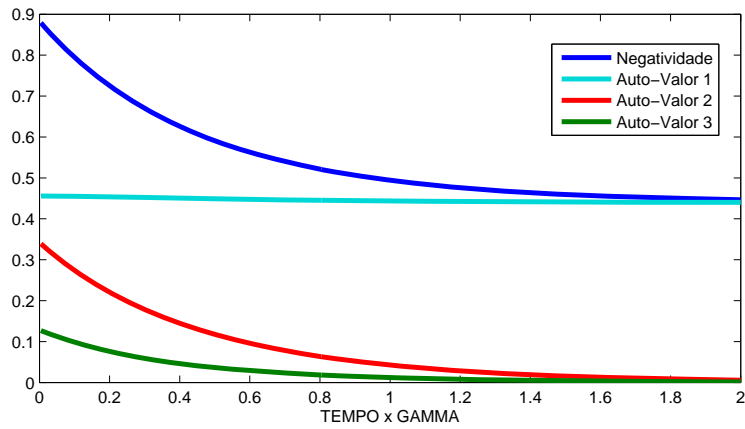


Figura 4.11: Caso em que o sistema Lambda-Lambda não tem nenhuma mudança abrupta e tem emaranhamento assintótico, como expresso no primeiro caso. O emaranhamento assintótico do sistema é  $N=0.4394$ . Os valores utilizados foram  $a=0.2386$ ,  $b=0.9545$  e  $c=0.1790$

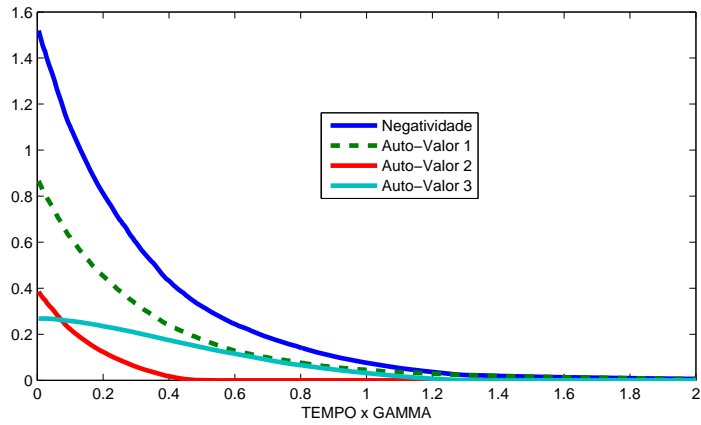


Figura 4.12: O sistema Lambda-Lambda possui duas mudanças abruptas e morte súbita, como descrito no segundo caso com  $\frac{c^2}{4} > ab$ . Os valores numéricos usados foram:  $a=0.2449$ ,  $b=0.5477$  e  $c=0.8000$

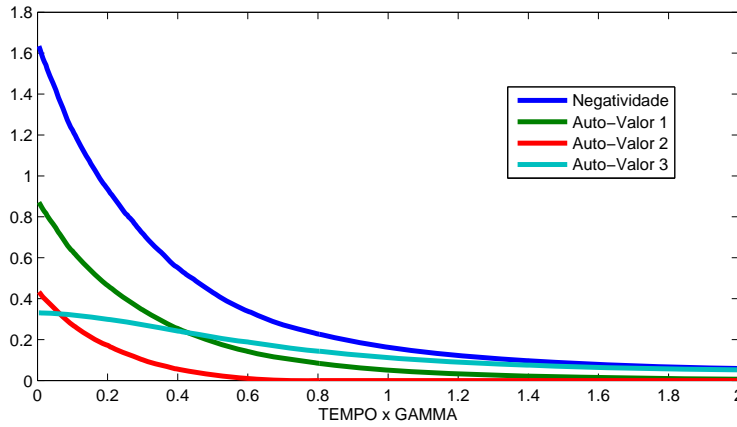


Figura 4.13: Neste caso da configuração Lambda-Lambda, o sistema apresenta uma mudança abrupta e emaranhamento assintótico como descrito no segundo caso com  $\frac{c^2}{4} < ab$ . O emaranhamento assintótico do sistema é  $N=0.0366$ . Os valores numéricos usados foram  $a=0.5747$ ,  $b=0.2873$   $c=0.7663$

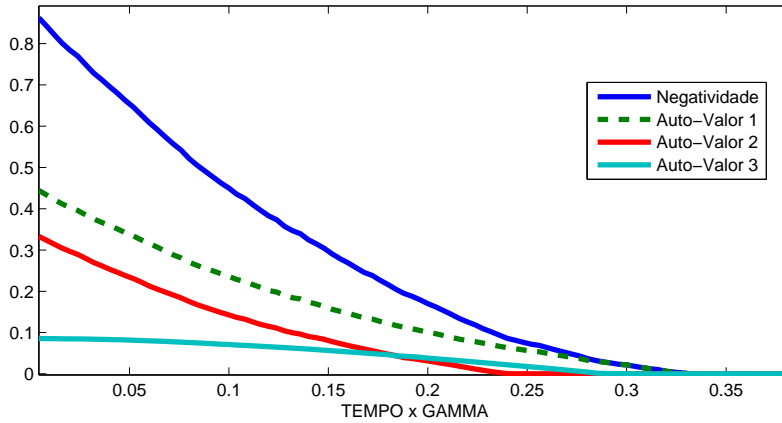


Figura 4.14: O sistema apresenta duas mudanças abruptas e morte súbita, como apresentado no último caso da configuração Lambda-Lambda.  $a=0.1790$ ,  $b=0.2386$   $c=0.9545$ .

### 4.3 Dinâmica de Emaranhamento de Uma Trajetória

No caso não degenerado, em que o fóton identifica de qual nível decaiu e para qual nível foi, a ocorrência de algum salto quântico sempre destrói todo o emaranhamento existente no sistema. Para esses casos, portanto, estaremos mais interessados na dinâmica de uma trajetória sem saltos que pode, eventualmente, preservar ou mesmo aumentar o emaranhamento existente.

Nessa seção, repetimos a análise, para todas as configurações apresentadas anteriormente, olhando a evolução quando nenhum fóton é detectado no reservatório. Em alguns casos, para facilitar a análise, as trajetórias foram feitas para valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$  diferentes dos anteriores, contudo sem perda de generalidade.

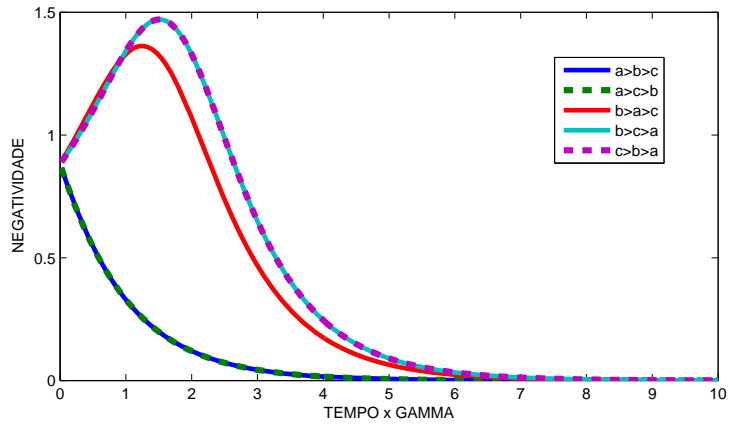


Figura 4.15: Todos os caso de trajetórias sem saltos para a configuração Cascata-Cascata. Os valores utilizados sem foram maior=0.9545, intermediário=0.2386 menor=0.1790

No caso Cascata-Cascata existem duas possibilidades de um trajetória sem saltos: o emaranhamento passa por um máximo ou decai diretamente. Para os casos  $c > b > a$  e  $b > c > a$  em que o emaranhamento apresenta um pico, esse é ao redor de  $t\gamma = 1.51$  e negatividade  $N = 1.4705$  e para o caso  $b > a > c$  o pico é ao redor de  $t\gamma = 1.24$  e negatividade  $N = 1.3623$  para os valores estudados. Na próxima seção explicamos essa propriedade.

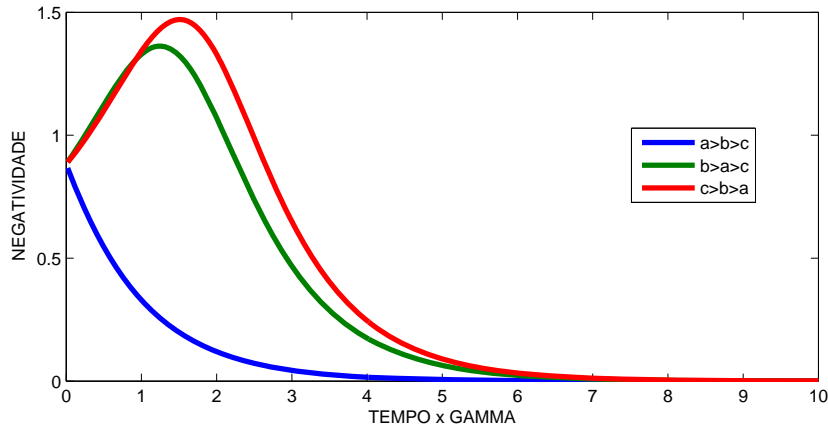


Figura 4.16: Todos os caso de trajetórias sem saltos para a configuração V-V. Os valores utilizados em todos os gráficos foram maior=0.9545, intermediário=0.2386 menor=0.1790

Na configuração V-V, dois possíveis intervalos dos valores iniciais ( $b > a > c$  e  $c > b > a$ ) apresentam um pico de emaranhamento. Nos nossos exemplos, os picos são em  $t\gamma = 1.51$  com negatividade  $N = 1.4705$  para o caso  $c > b > a$  e  $t\gamma = 1.24$  com negatividade  $N = 1.3623$  no caso  $b > a > c$ . Comparando as trajetórias das configurações Cascata-Cascata e V-V podemos notar que são idênticas para os mesmos intervalos de  $a$ ,  $b$  e  $c$ , sendo melhor explicado o por quê na próxima seção.

No caso do Lambda-Lambda foram feitos os gráficos separadamente, para mostrar o que ocorre com cada auto-valor. Esta configuração, apresenta uma característica singular se comparada com as demais. Se  $a, b \neq 0$ , então o estado assintótico é obrigatoriamente emaranhado. Nos exemplos que se seguem, os valores numéricos usados para fazer as trajetórias sem saltos foram os mesmos valores usados para fazer a dinâmica na seção anterior.

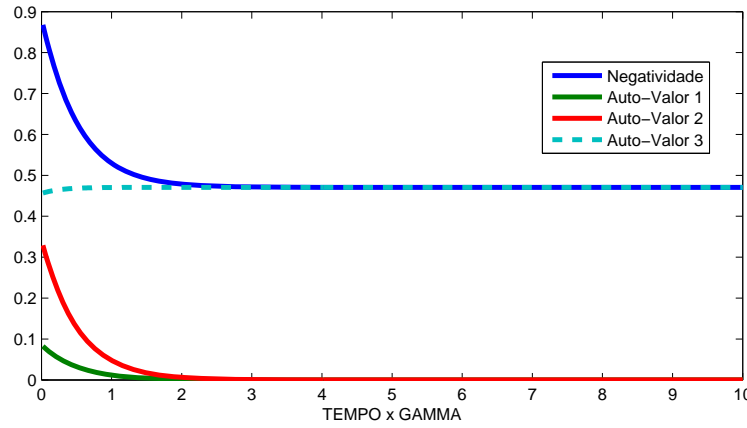


Figura 4.17: Primeiro caso da configuração Lambda-Lambda  $\frac{a}{c} > \frac{1}{2}$  e  $\frac{b}{c} > \frac{1}{2}$ . O sistema tende para um estado com negatividade  $N=0.4709$ . O único intervalo dessa configuração que não apresenta um pico de emaranhamento.

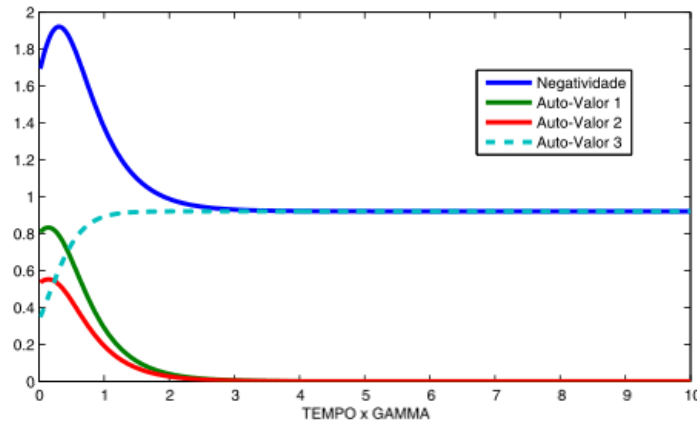


Figura 4.18: Segundo caso da configuração Lambda-Lambda  $\frac{a}{c} > \frac{1}{2}$ ,  $\frac{b}{c} < \frac{1}{2}$  e  $\frac{c^2}{4} > ab$ . O sistema tende para um estado com negatividade  $N=0.9613$ . O pico de emaranhamento é em  $t\gamma = 0.31$  com negatividade  $N=1.9211$ .

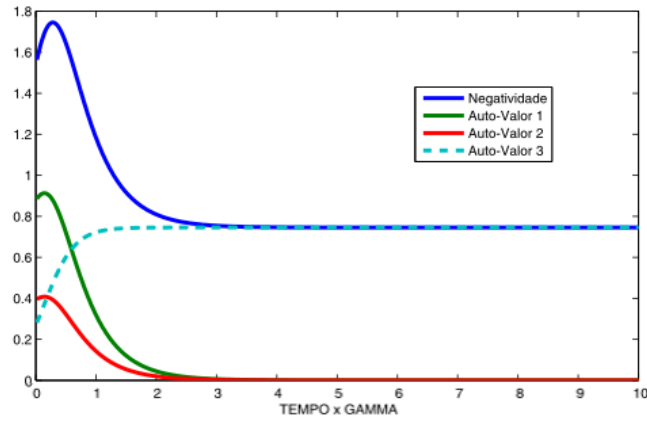


Figura 4.19: Terceiro caso da configuração Lambda-Lambda  $\frac{a}{c} > \frac{1}{2}$ ,  $\frac{b}{c} < \frac{1}{2}$  e  $\frac{c^2}{4} < ab$ . O sistema tende para um estado com negatividade  $N=0.7454$ . O pico de emaranhamento é em  $t\gamma = 0.28$  com negatividade  $N=1.7453$ .

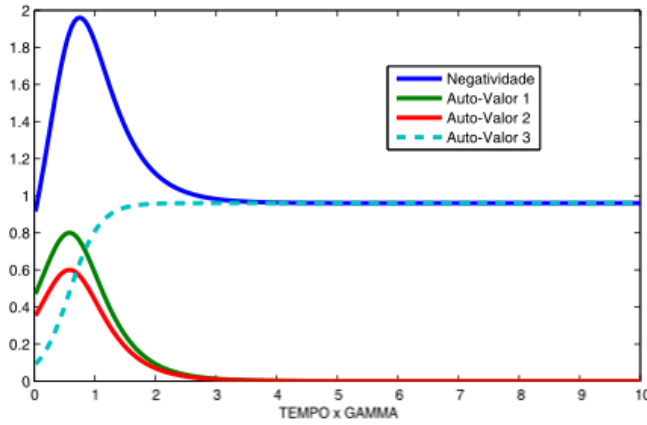


Figura 4.20: Quarto caso da configuração Lambda-Lambda  $\frac{a}{c} < \frac{1}{2}$  e  $\frac{b}{c} < \frac{1}{2}$ . O sistema tende para um estado com negatividade  $N=0.9602$ . O pico de emaranhamento é em  $t\gamma = 0.75$  com negatividade  $N=1.9599$ .

Para entender esse comportamento aparentemente anômalo vale lembrar que o estado final para esta configuração mora em um espaço de Hilbert  $2 \otimes 2$ . Na próxima seção calculamos analiticamente e interpretamos fisicamente esse fenômeno.

## 4.4 Solução Analítica para Trajetórias Sem Saltos

Embora na seção anterior tenhamos utilizado simulações de computador para obter as trajetórias sem salto, uma rápida olhada na equação 3.3 aponta uma solução analítica simples para as mesmas. De fato, a aplicação de sucessivas evoluções sem saltos equivale a uma evolução temporal para o estado dada por:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle}} e^{\frac{i}{\hbar} H_{eff} t} |\psi(0)\rangle, \quad (4.10)$$

Nas sub-seções abaixo usamos essa evolução para obter analiticamente a Negatividade do estado  $|\psi(t)\rangle$  para as diferentes configurações.

### 4.4.1 Cascata-Cascata e V-V

Para as configurações Cascata-Cascata e V-V, o hamiltoniano efetivo é o mesmo.

$$\begin{aligned} H_{eff} &= \frac{i\hbar\gamma}{2} (C_1^\dagger C_1 + C_2^\dagger C_2 + C_1^\dagger C_1' + C_2^\dagger C_2') \\ &= \frac{i\hbar\gamma}{2} (V_1^\dagger V_1 + V_2^\dagger V_2 + V_1^\dagger V_1' + V_2^\dagger V_2') \\ &= \frac{i\hbar\gamma}{2} (|3\rangle\langle 3| + |2\rangle\langle 2| + |3'\rangle\langle 3'| + |2'\rangle\langle 2'|) \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde  $|i\rangle\langle i| = |i\rangle\langle i| \otimes I$  e  $|i'\rangle\langle i'| = I \otimes |i\rangle\langle i|$ . Substituindo 4.11 em 4.10 e usando o mesmo estado inicial desse capítulo temos:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (1-a^2)e^{-4\gamma t}}} (a|11\rangle + be^{-2\gamma t}|22\rangle + ce^{-2\gamma t}|33\rangle). \quad (4.12)$$

A negatividade em função do tempo é dada por:

$$N = \frac{2}{a^2 + (1-a^2)e^{-4\gamma t}} (abe^{-2\gamma t} + ace^{-2\gamma t} + bce^{-4\gamma t}), \quad (4.13)$$

e a equação que determina a posição temporal do máximo de emaranhamento, se houver, é:

$$2a(a^2(b+c) + 2abce^{-2\gamma t} + (a^2-1)(b+c)e^{-4\gamma t}) = 0. \quad (4.14)$$

Note, primeiro, que a negatividade vai a zero para  $t \rightarrow \infty$  o que é razoável se lembrarmos que nessas configurações o estado assintótico é o estado fundamental. Note, também, que a equação 4.14 é de fácil solução em  $\gamma t$ .

### 4.4.2 Lambda-Lambda

Nesse caso, a evolução temporal análoga leva ao estado

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + c^2(e^{-8\gamma t} - 1)}} (a|11\rangle + b|22\rangle + ce^{-4\gamma t}|33\rangle). \quad (4.15)$$

De cara, note que a ação da não observação de fótons no reservatório afeta diretamente apenas o estado excitado. A negatividade em função do tempo, dada por

$$N = 2 \frac{ab + (a+b)ce^{-4\gamma t}}{1 + c^2(e^{-8\gamma t} - 1)}, \quad (4.16)$$

evidencia a diferença dessa configuração para as anteriores, pois, nesse caso percebe-se imediatamente que se  $a$  e  $b$  forem diferentes de zero há emaranhamento residual mesmo em tempo infinito

$$N(t \rightarrow \infty) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}. \quad (4.17)$$

Note também, que esse comportamento sequer depende das particulares taxas de decaimento. Esse fenômeno se explica facilmente se percebermos que a trajetória sem saltos descreve uma realização para a qual o estado inicial se encontra, de fato, no sub-espaço de dimensão  $2 \otimes 2$   $\{|11\rangle, |12\rangle, |21\rangle, |22\rangle\}$  que corresponde a um sistema efetivo de dois qubits.

Por fim, a equação que determina a posição temporal do máximo de emaranhamento, se houver, é:

$$(a + b)(c^2 - 1) + 2abce^{-4\gamma t} + (a + b)c^2e^{-8\gamma t} = 0. \quad (4.18)$$

## 4.5 Comparação Entre Diferentes Configurações de Energia

Existe ainda a possibilidade de termos sistemas emaranhados que não tenham a mesma configuração dos níveis de energia em cada sub-sistema. Nesse caso, podem aparecer diferenças consideráveis de dinâmica. Como exemplo dessas possíveis configurações, para os mesmos estados iniciais, fizemos dois casos, e apresentamos os resultados nos gráficos a seguir. O que pode-se observar dos gráficos é que a estrutura da dinâmica passa a depender consideravelmente do estado inicial.

No caso que  $c > b > a$  as dinâmicas são completamente diferentes, algumas apresentando morte súbita, outras apresentando mudança abrupta e decaimento assintótico. Uma característica importante neste intervalo é que em todas as configurações o sistema apresenta alguma mudança abrupta no emaranhamento.

No caso  $b > a > c$  as dinâmicas são muito próximas, havendo somente dinâmicas com decaimento assintótico, exceto o caso Lambda-Lambda que apresenta emaranhamento assintótico. Nesse intervalo, a ocorrência de mudanças abruptas é condicionada à configuração dos níveis de energia. De fato, apenas as configurações V-V e Cascata-Cascata apresentam mudança abrupta.

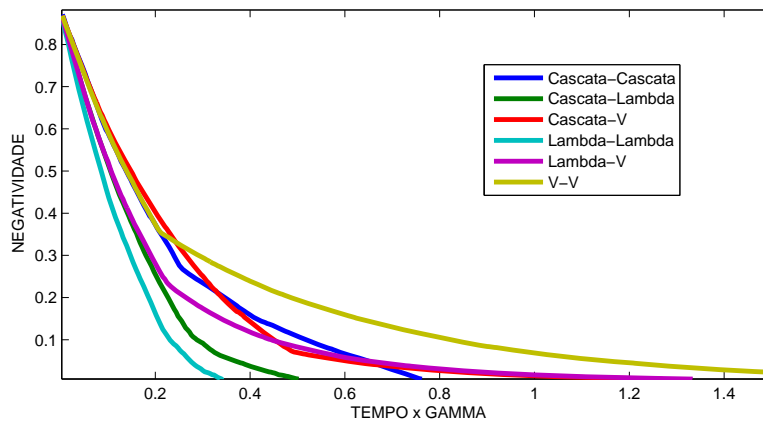


Figura 4.21: Dinâmica para um mesmo estado inicial ( $a=0.1790$ ,  $b=0.2386$  e  $c=0.9545$ ) em todas as possíveis configurações de energia.



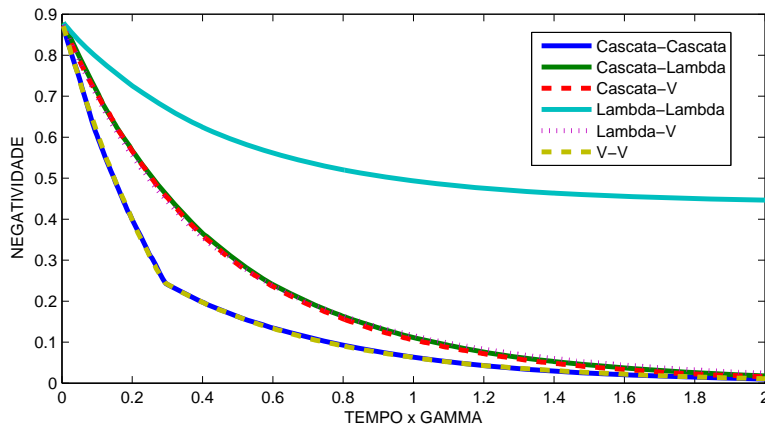


Figura 4.22: Dinâmica para um mesmo estado inicial ( $a=0.2386$ ,  $b=0.9545$  e  $c=0.1790$ ) em todas as possíveis configurações de energia.

Também foram feitas, para todas as configurações, as trajetórias sem saltos. Algumas configurações apresentam trajetórias semelhantes pois para elas, o Hamiltoniano efetivo  $H_{eff}$ , gerador das trajetórias sem saltos, é sempre o mesmo. As trajetórias sem saltos das configurações Cascata-Cascata, Cascata-V e V-V são iguais entre si, e Lambda-Cascata e Lambda-V têm a mesma trajetória. Para estados iniciais semelhantes a 4.9 não se consegue diferenciar qual configuração que o sistema apresenta olhando somente para as trajetórias sem saltos.

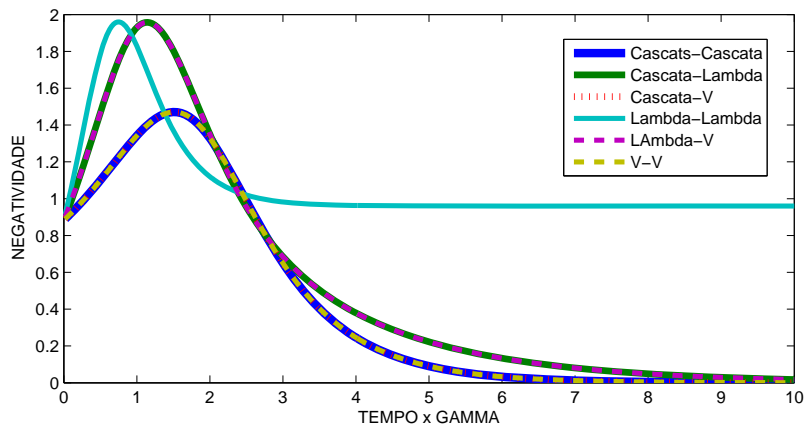


Figura 4.23: Trajetória sem saltos para um mesmo estado inicial ( $a=0.1790$ ,  $b=0.2386$  e  $c=0.9545$ ) em todas as possíveis configurações de energia.

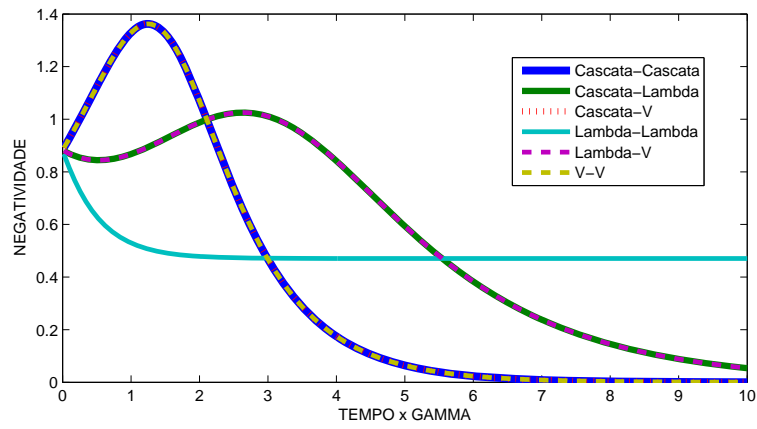


Figura 4.24: Trajetória sem saltos para um mesmo estado inicial ( $a=0.2386$ ,  $b=0.9545$  e  $c=0.1790$ ) em todas as possíveis configurações de energia.

# Capítulo 5

## Conclusões

A dinâmica de emaranhamento para sistemas maiores (nos restringindo aqui, somente ao caso bipartite) mostra uma gama muito maior de possibilidades, devido à maior complexidade existente nesses sistemas. Isso já pode ser observado mesmo pegando um dos primeiros casos de sistemas bipartites maiores, o de dois qutrits. Além da possibilidade da mudança de configuração dos níveis de energia, a mudança nas populações iniciais de um único tipo de estado já apresenta mudanças drásticas em como o emaranhamento evolui quando o sistema interage com o ambiente.

Com o uso de trajetórias quânticas foi possível analisar, usando simulação computacional, a dinâmica do emaranhamento do ensemble e também de trajetórias únicas para dois qutrits em reservatórios independentes. O uso das trajetórias possibilitou a simulação de problemas de difícil solução analítica. Os resultados obtidos estão de acordo com as obtidas por F. Lastra *et al.* [2].

O emaranhamento entre dois qutrits, dependendo dos canais de decaimento, pode variar drasticamente dependendo do estado inicial e da configuração dos níveis de energia internos de cada um dos constituintes (nesse trabalho usamos somente estados iniciais do tipo  $|\psi\rangle = a|11\rangle + b|22\rangle + c|33\rangle$ ). Dependendo do estado inicial a evolução do emaranhamento pode apresentar para as configurações:

1. **Cascata-Cascata:** nenhuma mudança abrupta ( $a > b > c$ ); uma mudança abrupta ( $b > a > c$  ou  $a > c > b$ ); duas mudanças abruptas e decaimento assintótico ( $b > c > a$ ); e duas mudanças abruptas e morte súbita ( $c > b > a$ ).
2. **Lambda-Lambda:** nenhuma mudança abrupta e emaranhamento assintótico ( $\frac{a}{c} > \frac{1}{2}$  e  $\frac{b}{c} > \frac{1}{2}$ ); duas mudanças abruptas e o emaranhamento morre assintoticamente ( $\frac{a}{c} > \frac{1}{2}$  e  $\frac{b}{c} > \frac{1}{2}$  com  $\frac{c^2}{4} > ab$ ); uma mudança abrupta e emaranhamento assintótico ( $\frac{a}{c} > \frac{1}{2}$  e  $\frac{b}{c} > \frac{1}{2}$  com  $\frac{c^2}{4} < ab$ ); e duas mudanças abruptas e morte súbita ( $\frac{a}{c} < \frac{1}{2}$  e  $\frac{a}{c} < \frac{1}{2}$ ).
3. **V-V:** nenhuma mudança abrupta ( $a > b$  e  $a > c$ ); uma mudança abrupta ( $a > b$  e  $a < c$ ); ou duas mudanças abruptas e emaranhamento assintótico ( $a < b$  e  $a < c$ ).

Com várias possibilidades de dinâmica, dependendo do processo a ser estudado usando qutrits, podemos escolher uma configuração de níveis de energia que otimize o resultado que queiramos obter.

Além do estudo da dinâmica de emaranhamento do ensemble, foi estudado a dinâmica de uma única trajetória. Para sistemas não degenerados em reservatórios independentes, o único caso interessante são a trajetórias sem saltos, pois para tempos posteriores a um salto o emaranhamento é sempre nulo. Observamos que, para alguns estados iniciais, o emaranhamento

tem um aumento para tempos curtos. Isso possibilita usar esse tipo de dinâmica para aumentar o emaranhamento de alguns constituintes fazendo pós-seleção. Além disso, para a configuração Lambda-Lambda é observado um emaranhamento assintótico alto para todos os casos de estados iniciais estudados.

Temos como perspectiva de futuros trabalhos generalizar a dinâmica estudada aqui para sistemas de dois qudits (dimensão do espaço de Hilbert  $d \otimes d$ ). A dinâmica com dimensões ainda maiores aumenta o número de mudanças abruptas e aumenta o número de possibilidades de configurações dos níveis de energia. Além disso, temos interesse em implementar esse trabalho experimentalmente, usando fótons gêmeos, seguindo linha semelhante à desenvolvida no Laboratório de Óptica Quântica da UFRJ só que para qudits implementados pelo Laboratório de Óptica Quântica da UFMG.

# Bibliografia

- [1] T. Yu and J. H. Eberly. *Physical Review Letters v.93 - 140404*, 2004.
- [2] F. Lastra et.al.; *Physical Review A V.75 062324* (2007).
- [3] G. Vidal and R. F. Werner; *Physical Review A V.65 032314* (2002).
- [4] P. Horodecki; *Physics Letters A V.232 N°333* (1997).
- [5] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge, The University Press-Cambridge-United Kingdom, 2000.
- [6] H.-Peter Breuer and F. Petruccione. *The Theory of Open Quantum System*. Oxford, university press, 2002.
- [7] H. J. Carmichael. *Statistical Methods in Quantum Optics 2*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2002.
- [8] H. J. Carmichael. *Statistical Methods in Quantum Optics 1*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2002.
- [9] R. Eisberg and R. Resnick. *Física Quântica: Átomo, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas*. Elsevier Editora Ltda (tradução), 1979.
- [10] B. Podolsky A. Einstein and . Rosen; *Physical Review V.47 777* (1935).
- [11] E. Schrödinger. *Naturwiss 23, 807* (1935); *23, 823* (1935); *23, 844* (1935).
- [12] C. E. Shannon and W. Weaver. *The Mathematical Theory of Communication*. University of Illinois Press, New York, 1949.
- [13] B. Schumacher; *Physical Review A v.53 2738* (1995).
- [14] A. Peres; *Physical Review Letters V.76 1413* (1996).
- [15] C. H. Bennett et al.; *Physical Review Letters v.70 1895* (1993).
- [16] C. H. Bennett and G. Brassard. *Proceedings of IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing, Bangalore, India*. IEEE Computer Society Press, Los Alamos, CA, p. 175.
- [17] Lajos Diósi. *A Short Course in Quantum Information Theory*. Springer, Berlin Heidelberg, 2007.
- [18] J. S. Bell; *Physics 1 195* (1964).

- [19] M. A. Horne A. Shimony J. F, Clauser and R. A. Holt; Physical Review Letters v.23 880 (1969).
- [20] Marcelo Terra Cunha. *Emaranhamento: caracteriza,ção, manipulação e consequências*. UFMG, Universidade federal de Minas Gerais, 2005.
- [21] C. H. Bennett et. al.; Physical Review A V.54 N°5 (1996).
- [22] P. Horodecki M. Horodecki and R. Horodecki; Physical Review Lettes V.80 24 (1998).
- [23] W. K. Wootters; Physical Review Letters v.80 2245 (1998).
- [24] C. H. Bennett et al.; Physical Review A v.53 2046 (1996).
- [25] W. K. Wootters; Physical Review Letters V.80 10 (1998).
- [26] S. Hill and W. K. Wootters; Physical Review Letters V.78 26 (1997).
- [27] Leslie E. Ballentine. *Quantum Mechanics: a modern development*. World Scientific Publishing, Singapore, 1998.
- [28] M. B. Plenio and P. L. Knight; Reviews of Modern Physics V.70 N°1 (1998).
- [29] Y. Castin K. Molmer and J. Dalibard; J. Opt. Soc. Am. B V.10 N°3 (1993).
- [30] P. Zoller R. Dum and H. Ritsch; Physical Review A V.45 N°7 (1992).
- [31] H. M. Wiseman and L. Diósi; Chemical Physics 91-104 (2001).
- [32] Todd A. Brun; American Journal of Physics V.70 719 (2002).
- [33] L. Davidovich N. Zagury M. F. Santos, P. Milman. *Physical Review A V.7 - 042328*, 2006.
- [34] J. Dajka and J. Luczka; Physical Review A v.77 062303 (2008).
- [35] A. Checinska and K. Wódkiewicz; Physical Review A v.76 052306 (2007).