
**Tomografia Quântica de Qubits
Espaciais usando um
Modulador Espacial de Luz**

Juliana Gontijo Fonseca

Tomografia Quântica de Qubits Espaciais usando um Modulador Espacial de Luz

Juliana Gontijo Fonseca

Orientador: Prof. Sebastião José Nascimento de Pádua

Co-orientador: Prof. Marcelo O. Terra Cunha

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Ciências – Física**.

Belo Horizonte

Junho de 2009

Agradecimentos

A Deus pelas pessoas que foram colocadas na minha vida, principalmente minha família. Sem o apoio dela provalvemente eu não estaria aqui.

Aos meus pais por serem meu maior exemplo, pelo amor e carinho dedicados. Vocês são, definitivamente, os melhores. Amo vocês.

À minha irmã, porque sem ela minha vida não seria tão emocionante! Queca, você sabe que eu te adoro, apesar das brigas e arranca rabos de vez em quando.

Ao meu irmão Felipe agradeço a paciência com que aguenta minhas reclamações, eu sei que às vezes eu posso ser uma chata. Porém, eu sei que você é daquelas poucas pessoas em que se pode sempre contar.

Ao Fofó (Fábio) por todos os momentos juntos. Você é mais que um simples namorado. Obrigada por me escutar nos momentos de crise. Te amo!

Ao meu grande orientador, Sebastião, pela atenção, apoio e ajuda durante todo o trabalho.

Às minhas amigas da física (Ana, Camilla, Bob, Lívia, Ive e Paulinha). Nós nos divertimos bastante.

Em especial quero agradecer a Ana, por nossas conversas e desabafos. Em todos os momentos eu sou grata pela sua amizade. Você tem um grande coração, e o seu temperamento, na minha opinião, é seu charme.

Aos meninos do Lab (Olavo, José, Marcos e Pierre) e aos alunos do Monken (Pablo e Wallon) pela ajuda de boa vontade sempre que eu precisei.

Ao Marcos e ao José pela ajuda no experimento. A Alejandra que também estive, durante alguns meses, ajudando na realização do trabalho.

Ao Olavo pelas inumeras vezes que me fez companhia a noite no lab. Você

é um grande amigo.

Ao Marcelo Terra pela grande ajuda na implementação teórica dessa dissertação.

Ao grupo EnLight, por fortalecer os laços entre os membros do grupo.

Aos professores Juan e Franklin por terem sido meus primeiros orientadores.

Ao Dudu, por me ajudar quando eu tinha um milhão de perguntas.

A todos com quem eu dividi a sala de mestrado do quarto andar e que também enlouqueceram um pouquinho junto comigo.

Ao CNPq, a CAPES e a Fapemig

E finalmente, a todos aqueles que fazem do Departamento de Física da UFMG um lugar bom de trabalhar e não foram citados aqui.

Sumário

Agradecimentos	4
Resumo	8
Abstract	9
Introdução	14
1 Conversão paramétrica e Estados de qudits espaciais	16
1.1 Efeitos Não Lineares em Óptica Quântica	16
1.1.1 Geração do Segundo Harmônico	16
1.1.2 Conversão Paramétrica Descendente	17
1.2 Geração de Estados de Qudits Espaciais	19
1.2.1 Qudits	19
1.2.2 A geração dos estados	20
1.3 Experimento	24
1.3.1 Correlação de momento transversal do feixe de fótons gêmeos	24
1.3.2 Geração e estudo de estados espaciais de qudits	24
1.4 Discussão do Experimento de fenda dupla com duas partículas	27
1.5 Estudo do Padrão de Interferência Condicional	28
2 Tomografia Quântica	36
2.1 Representação de Estados Puros e Mistos	36
2.1.1 Esfera de Bloch	37
2.2 Tomografia de um qubit	38
2.3 Implementação da Tomografia	45

2.4	Tomografia de dois qubits	49
2.5	Tomografia de Detectores	51
2.5.1	Estados Coerentes do Campo Eletromagnético	51
2.5.2	Tomografia de Detectores	52
3	Modulador Espacial de luz e Fibras Ópticas	58
3.1	Cristais Líquidos	58
3.2	Propriedades Ópticas dos Cristais Líquidos Nemáticos Girados	60
3.3	Modulador Espacial de Luz - modelo LC-R 2500	63
3.4	Fibras Ópticas	67
3.5	Estudo das curvas de visibilidade para as fibras multimodo e monomodo	69
	Conclusões e Perspectivas	74
	A Cálculo da Tomografia Quântica de Dois qubits	75
	Bibliografia	83

Resumo

Com o objetivo de implementar a Tomografia Quântica para Qudits espaciais, realizamos neste trabalho uma sistematização dos procedimentos experimentais para tomografia de um qubits. Utilizando a correlação transversal dos fótons gerados na conversão paramétrica descendente criamos estados de qubits e qudits utilizando pares de fendas múltiplas. Observamos a correlação espacial dos fótons transmitidos por fendas quádruplas, bem como padrão de interferência. Verificamos também a condicionalidade das franjas desse padrão.

Foi realizada uma descrição teórica da tomografia de um e de dois qubits para estados espaciais de caminho transversal. Para a implementação da tomografia escolhemos um conjunto de pontos especiais na esfera de Bloch que exigisse o menor número de medições. Esses pontos formam um tetraedro regular inscrito nesta esfera.

Para a realização da tomografia, foi construído um POVM (*Positive Operator Valued Measure*) com operadores proporcionais a projetores nas direções dos vértices deste tetraedro. Esses operadores foram gerados utilizando um Modulador Espacial de Luz (SLM). O modulador permite adicionarmos, de maneira simples, uma diferença de fase entre os estados de fendas, o que é crucial para o processo de tomografia.

Abstract

With the goal of implementing Quantum Tomography of Spatial Qudits, we did a systematization of the experimental procedures for the tomography of one and two qubits. Using the transversal correlations of the photons generated in the parametric down conversion, we created qubit and qudit states by using pairs of multiple slits. We observed the spatial correlations of the photons transmitted through multiple slits, as well as the interference pattern. We also verified the conditionality of the fringes pattern.

We theoretically described the tomography of one and two qubits for transversal path spatial states. To implement the tomography we chose an special set of points in the Bloch sphere that allowed us to do the minimum number of measurements. Together, these points create a regular tetrahedron inside the sphere.

For the tomography implementation, we built a POVM formed by operators proportional to projectors onto the states related to the vertices of this tetrahedron. These operators were generated with the help of a Spatial Light Modulator (SLM). The modulator allows us to add a specific phase difference between the states created by the slits, what is crucial for the tomography.

Lista de Figuras

- 1.1 Esquema simplificado: a) geração do segundo harmônico (a partir de fótons de frequência ω e um cristal não linear obtêm-se fótons com de frequência 2ω) e b) conversão paramétrica descendente (a partir de um fóton é possível obtermos um par de fótons - que obedecem as relações de conservação da energia e momento anteriores. 18
 - 1.2 a) Conversão Paramétrica Descendente do tipo I e b) conversão paramétrica descendente e do tipo II [6]. 19
 - 1.3 Correlação de momento transversal entre os fótons convertidos para o laser focalizado no plano das fendas. As setas indicam os possíveis caminhos dos fótons signal e idler 23
 - 1.4 Medida da correlação transversal dos feixes de fótons gêmeos. Utilizamos uma fenda de $200\mu m$ na entrada dos detectores a) perfil vertical utilizando a lente $f=100cm$ antes do cristal, b) perfil horizontal com lente, c) perfil vertical sem lente e d) perfil horizontal sem lente 25
 - 1.5 Montagem experimental utilizada para detecção das imagens de duas fendas múltiplas e verificação das correlações entre os fótons que atravessam fendas simetricamente opostas 26
-

-
- 1.6 Correlação espacial medida através dos fótons transmitidos por duas fendas quádruplas de abertura $40 \mu m$, nessa imagem os pontos pretos correspondem as contagens simples e os pontos vermelhos as contagens em coincidências a) O detector 2 estava posicionado na quarta fenda e o detector 1 foi deslocado. Observamos um pico de coincidências apenas quando o detector 1 passou pela primeira fenda. b) O detector 2 estava posicionado na terceira fenda, por isso o pico de coincidência é notado somente quando o detector 1 passa pela segunda fenda c) Detector 2 na segunda fenda e coincidências observadas entre a segunda e terceira fenda. d) Detector 2 posicionado na primeira fenda, com coincidências apenas quando o detector 1 é posicionado na quarta fenda. 31
- 1.7 Correlação espacial medida através dos fótons transmitidos por duas fendas quádruplas de abertura $100 \mu m$, nessa imagem os pontos pretos correspondem as contagens simples e os azuis as contagens em coincidência. a) O detector 2 estava posicionado na quarta fenda e o detector 1 foi deslocado. Observamos um pico de coincidências apenas quando o detector 1 passou pela primeira fenda. b) O detector 2 estava posicionado na terceira fenda, por isso o pico de coincidência é notado somente quando o detector 1 passa pela segunda fenda c) Detector 2 na segunda fenda e coincidências observadas entre a segunda e terceira fenda. d) Detector 2 posicionado na primeira fenda, com coincidências apenas quando o detector 1 é posicionado na quarta fenda. 32
- 1.8 Esquema do experimento de fenda dupla usando fótons gerados na conversão paramétrica descendente. 33
- 1.9 a) Padrão de Interferência e b) Padrão de Condicionalidade, para o estado de quatro fendas utilizando uma lente com foco de 10cm focalizando no detector. O tempo de aquisição de cada ponto é de 5s. A abertura da fenda utilizada era de $100 \mu m$ 34
-

1.10 a) Padrão de Interferência e b) Padrão de Condicionalidade, para o estado de quatro fendas utilizando uma lente com foco de 20cm focalizando no detector. O tempo de aquisição de cada ponto é de 6s. A abertura da fenda utilizada era de 100 μm	35
2.1 Representação de um qubit $ \psi\rangle$ na esfera de Bloch [23]	38
2.2 Esquema da montagem experimental utilizada na Tomografia de Polarização realizada no trabalho apresentado no artigo “ <i>Experimental polarization state tomography using optimal polarimeters</i> ” [14].	40
2.3 Tetraedro Regular de lado l	41
2.4 Tetraedro inscrito na esfera de Bloch [14]	42
2.5 Montagem Experimental das medidas de tomografia.	47
2.6 Esquema de um detector TMD [19]	54
2.7 Esquema da montagem experimental utilizada na referência [17] para caracterização de dois detectores. A placa $\lambda/2$ e o polarizador são usados para variar a amplitude do estado coerente e os filtros neutros e a fibra óptica são usados como atenuadores.	55
2.8 Resultado apresentado na referência [17] para a tomografia de detectores. O gráfico principal corresponde a medida de tomografia para o detector TMD e o menor para o detector APD. Os gráficos relacionam a probabilidade com o módulo quadrado da magnitude do estado coerente.	56
2.9 Diagonais para os POVM reconstruídos para a) o detector TMD construído e b) para o detector APD tradicional [17].	57
3.1 Organização molecular de alguns tipos de cristais líquidos a) nemáticos b) esméticos c) colestéricos	59
3.2 Propagação da luz por um cristal líquido nemático girado, para uma angulo de giro de 90° [11].	60
3.3 Montagem Experimental	64
3.4 Curvas de caracterização do SLM para diversos ângulos do polarizador	65

-
- 3.5 Medida feita posicionando uma fenda simples na posição na qual o SLM será colocado. Essa medida permitiu verificar que a imagem está sendo formada na posição em que será colocado o SLM. Tempo de aquisição de cada ponto no gráfico foi de 10s. 70
- 3.6 Imagem da fenda dupla utilizando o SLM como um espelho. O tempo de aquisição de cada ponto no gráfico foi de 10s. 70
- 3.7 Medidas de visibilidade utilizando uma fenda dupla e uma fibra monomodo. O tempo de aquisição de cada um desses pontos foi de 30s. 71
- 3.8 Esquema simplificado de uma fibra óptica 71
- 3.9 Fibra Óptica - Corte longitudinal 71
- 3.10 Medida da visibilidade do padrão de interferência de dois feixes de luz ao serem transmitidos por uma fenda dupla com a diferença de fase entre elas variável. Foram utilizadas uma fibra multimodo e filtros de frequência de (650 ± 10) nm nos detectores. a) Nessa medida o laser foi focalizado no cristal e observamos uma visibilidade muito baixa de aproximadamente 24% e b) a visibilidade sem a lente, usada para focalizar o feixe de laser, também é bastante baixa (30,5 %). 72
- 3.11 a) Medida de calibração para um ângulo de 60° no polarizador e utilizando uma fibra monomodo, o tempo de aquisição foi de 12 s para cada ponto, b) medida da visibilidade do padrão de interferência da fenda dupla em função da diferença de fase entre os caminhos, com filtro de frequência de (650 ± 10) nm no detector e tempo de aquisição de 35 s e c) visibilidade sem o filtro de frequência, o tempo de aquisição de cada ponto foi de 20 s. Podemos notar que a visibilidade para a situação com e sem o filtro é praticamente a mesma (67%), a principal diferença é que as contagens com o filtro caem significativamente. 73
-

Introdução

A tomografia quântica é um processo que permite, a partir de um ensemble de partículas identicamente preparadas, caracterizarmos um estado quântico completamente. Por esse motivo, a tomografia quântica tem sido muito estudada. Neste trabalho será apresentado uma metodologia para determinação da matriz densidade que descreve um estado de qubits.

Os qubits são estados quânticos de dois níveis e podem corresponder à polarização do fóton, ao momento de spin do elétron em uma direção, ou como no caso desse trabalho os caminhos possíveis do fóton ao atravessar uma fenda dupla. Foram gerados estados a partir de uma fenda dupla colocada no caminho do fóton. Esses estados, que chamamos de qubits, são utilizados para a implementação da tomografia quântica.

Apesar de, não ter sido possível realizar todas medidas necessárias para determinação dos elementos que compõem a matriz densidade, esse trabalho é importante, visto que além uma revisão ele também apresenta uma sistematização dos procedimentos experimentais que irão permitir sua futura implementação experimental.

Essa dissertação está dividida em três capítulos. No primeiro capítulo é feita uma apresentação dos estados gerados na conversão paramétrica descendente (processo não linear a partir do qual é possível gerarmos um par de fótons correlacionados em energia e momento) e sua utilização na criação de estados espaciais utilizando fendas múltiplas. Nesse capítulo também são mostrados alguns resultados que foram obtidos por nós durante essa dissertação.

No segundo capítulo é realizado um estudo sobre a tomografia para o caso de um qubit e é proposto um método experimental para sua implementação. O método proposto foi baseado no artigo “*Experimental polarization state*

tomography using optimal polarimeters” [14]. Nesse artigo os autores propõem um método no qual serão necessárias o mínimo de medidas para determinação da matriz densidade.

O terceiro e último capítulo tem como principal função apresentar o Modulador Espacial de Luz (*Spatial Light Modulator - SLM*) que foi utilizado em algumas medidas e é necessário a realização das medidas de tomografia.

Após esse capítulo é apresentada uma breve conclusão, na qual são apresentadas as perspectivas futuras do trabalho para a realização das medidas de tomografia.

Essa dissertação conta também com um apêndice (Apêndice A), no qual é realizada uma generalização dos cálculos realizados no capítulo 2 para o caso da tomografia de dois qubits, ou seja, quando tivermos dois pares de fendas duplas no caminho dos fótons, uma para cada fóton gerado na conversão paramétrica.

Capítulo 1

Conversão paramétrica e Estados de qudits espaciais

Neste capítulo será feita uma pequena revisão sobre a conversão paramétrica, assim como a geração de estados espaciais de qudits a partir de fótons convertidos que atravessam um par de fendas múltiplas. Esses estados foram estudados através de medidas de imagens das fendas, do padrão de interferência e do padrão de condicionalidade.

A geração de qudits espaciais usando fendas múltiplas já foi realizado anteriormente [4, 5]. A razão deste capítulo é dar uma descrição completa da geração desses estados, bem como o estudo de algumas de suas características.

1.1 Efeitos Não Lineares em Óptica Quântica

1.1.1 Geração do Segundo Harmônico

O fenômeno de geração de segundo harmônico é um fenômeno não linear que ocorre em materiais birrefringentes. Uma luz monocromática, ao atravessar esse meio, interage com o material e observa-se a saída de outras componentes espectrais do campo. Como a resposta desses materiais ao campo eletromagnético é uma resposta não linear, podemos expressar a polarização com a série abaixo [1]:

$$P_i = \chi_{ij}^{(1)} E_j + \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots \quad (1.1)$$

onde $\chi^{(n)}$ corresponde ao tensor susceptibilidade elétrica de ordem n . O termo $\chi_{ijk}^{(2)}$ corresponde à contribuição não linear de menor ordem (susceptibilidade não-linear de segunda ordem).

Na geração de segundo harmônico, um feixe de luz de frequência ω_0 incidente em um meio não linear é capaz de gerar um campo com frequência $\omega_f = 2\omega_0$. A partir de dois fótons de mesma frequência é possível obtermos um fóton com o dobro dessa frequência. Na figura 1.1 item *a*) é mostrado um esquema no qual a partir de dois fótons de frequência ω é possível obtermos um com o dobro da frequência ω .

1.1.2 Conversão Paramétrica Descendente

Assim como a geração do segundo harmônico, a conversão paramétrica descendente (CPD) também corresponde a um fenômeno não linear. A conversão paramétrica é, de certo modo, um processo inverso da geração do segundo harmônico, já que na conversão, um fóton do feixe de luz incidente no material (um cristal não linear) será convertido em dois outros. Cada fóton de frequência ω_0 e vetor de onda k_0 incidente no cristal não linear gera dois fótons com frequências ω_1 e ω_2 e vetores de onda k_1 e k_2 [1]. Esses dois fótons gerados na conversão são comumente chamados de signal e idler.

No processo descrito, energia e momento são conservados, de forma que:

$$\hbar\omega_0 = \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2, \quad (1.2a)$$

$$\hbar\mathbf{k}_0 = \hbar\mathbf{k}_1 + \hbar\mathbf{k}_2, \quad (1.2b)$$

onde a primeira equação corresponde a conservação de energia e a segunda a conservação de momento linear. A figura 1.1 item *b*) mostra um esquema da conversão paramétrica descendente, nele um fóton com frequência $\tilde{\omega}_3$ e frequência ω_3 é convertido em dois fótons, com frequência ω_1 e ω_2 e vetores de onda \vec{k}_1 e \vec{k}_2 .

A partir das equações anteriores podemos observar que tem-se valores restritivos para as frequências e para as direções dos vetores de onda da luz.

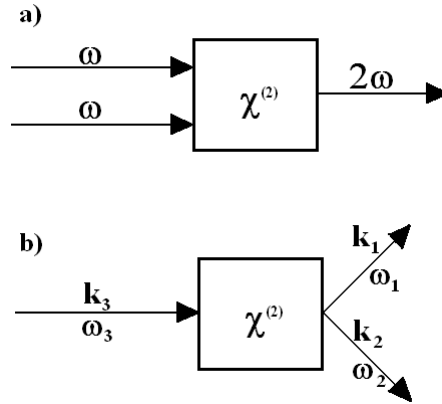


Figura 1.1: Esquema simplificado: a) geração do segundo harmônico (a partir de fótons de frequência ω e um cristal não linear obtém-se fótons com de frequência 2ω) e b) conversão paramétrica descendente (a partir de um fóton é possível obtermos um par de fótons - que obedecem as relações de conservação da energia e momento anteriores).

Por causa da simetria do cristal em torno da direção de propagação, a luz convertida é gerada em forma de cones de luz, como pode ser observado na figura 1.2. As condições de casamento de fase que levam à conservação da energia e do momento também levam a uma restrição para a polarização dos fótons 1 e 2 que são convertidos no cristal. A conversão paramétrica descendente pode ser de dois tipos. Na do tipo I, os fótons gerados no cristal possuem a mesma polarização e ambas são ortogonais à polarização da luz do laser que bombeia o cristal. Na do tipo II, um dos fótons convertidos terá a mesma polarização do laser, enquanto o outro terá polarização ortogonal a eles.

Considerando as aproximações monocromática, paraxial e de cristal fino, temos que o estado dos fótons gerados na conversão paramétrica descendente é dado por [3]:

$$|\Psi\rangle = c_1 |vac\rangle + c_2 \int dq_i \int dq_s v(q_i + q_s) |1q_i\rangle |1q_s\rangle, \quad (1.3)$$

com $c_1 \gg c_2$.

Nessa equação, os índices i e s são usados para representar os fótons convertidos idler e signal, respectivamente. O estado $|1q_i\rangle$ ($|1q_s\rangle$) representa

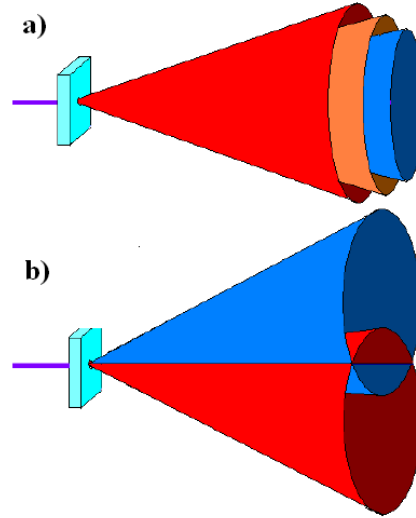


Figura 1.2: a) Conversão Paramétrica Descendente do tipo I e b) conversão paramétrica descendente e do tipo II [6].

um fóton no modo \mathbf{q}_i (\mathbf{q}_s), onde \mathbf{q}_i (\mathbf{q}_s) corresponde à componente transversal do vetor de onda \mathbf{k}_i (\mathbf{k}_s). O termo $v(\mathbf{q}_i + \mathbf{q}_s)$ é o espectro angular do campo do laser para $z=0$ (plano do cristal).

Nesse resultado, observamos que o espectro angular do laser incidente no cristal é transferido para o estado quântico dos fótons convertidos. Dessa forma, é possível, mudando o perfil transversal do laser, alterarmos a correlação transversal dos fótons gerados, já que mudar o perfil do laser no plano do cristal corresponde a mudar o espectro angular que representa a Transformada de Fourier do campo elétrico nas variáveis transversais.

1.2 Geração de Estados de Qudits Espaciais

1.2.1 Qudits

Os qudits correspondem a estados quânticos com d níveis no espaço de Hilbert de interesse. Quando $d=2$, são chamados de qubits (estados quânticos em duas dimensões) e qutrits quando $d=3$. Os estados formados por um e por dois qubits serão estudados mais profundamente no próximo capítulo. A palavra qudits é usada geralmente para designar estados em uma dimensão

$d > 3$.

O estado puro de um qudit pode ser representado por:

$$|\Psi\rangle = \sum_{l=1}^d \alpha_l |l\rangle. \quad (1.4)$$

onde $|l\rangle$ são ortonormais.

Para o caso de um estado formado por dois qudits, cada uma das partes do sistema pode se encontrar em um dos d níveis possíveis ou em combinações (superposições) deles. Eles podem ser representados por:

$$|\Psi\rangle = \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \alpha_{l,m} |l\rangle \otimes |m\rangle. \quad (1.5)$$

Nas próximas seções será descrito um método experimental simples que permite a geração de estados de dois qudits fotônicos, será também apresentada algumas medidas que foram realizadas.

1.2.2 A geração dos estados

Usando as correlações de momento transversal dos fótons na conversão paramétrica é possível gerarmos estados de qudits espaciais utilizando um par de fendas múltiplas, uma para cada um dos fótons convertidos. Esse estado é gerado após os fótons convertidos atravessarem as fendas múltiplas (Figura 1.3).

O estado dos fótons convertidos nas variáveis de momento transversal logo após a transmissão pelas fendas, é dado por [4, 8, 9]:

$$|\Psi\rangle \propto \int dq_i \int dq_s \mathfrak{S}(q_i, q_s) |1q_i\rangle |1q_s\rangle, \quad (1.6)$$

onde o termo $\mathfrak{S}(q_i, q_s)$ corresponde a

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(q_i, q_s) = & \int dx_i \int dx_s A_i(x_i) A_s(x_s) W\left(\frac{x_i + x_s}{2}; z_A\right) \times \\ & \times e^{\frac{ik}{8z_A}(x_s - x_i)^2} e^{-i(q_i x_i + q_s x_s)}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

definindo como z a direção de propagação dos fótons e considerando x_i e x_s as componentes transversais da posição e, q_i e q_s , as componentes transversais dos vetores de onda \mathbf{k}_i e \mathbf{k}_s , respectivamente. As funções A_i e A_s são as funções transmissão das fendas múltiplas e a função W descreve o perfil transversal do campo elétrico do feixe de laser na posição z_A .

Como resultado da equação anterior temos que mudanças tanto no perfil do laser quanto na função das aberturas, ou seja, no tipo de abertura, levam a geração de um novo estado de dois fótons.

No caso estudado, as fendas múltiplas foram colocadas no caminho dos fótons gerados. As fendas podem ser representadas através de funções retângulo Π , ou seja, podem ser descritas como possuindo valor zero ou um, dependendo da posição x . A descrição matemática da função transmissão das fendas múltiplas é:

$$A(x) = \sum_{l=-l_D}^{l_D} \Pi\left(\frac{x - ld}{2a}\right). \quad (1.8)$$

Nessa expressão, a separação entre as fendas é d e a abertura é $2a$. O termo l_D do somatório é $l_D \equiv \frac{D-1}{2}$, onde D corresponde ao número de aberturas de cada uma das fendas múltiplas. Em nosso experimento foram utilizadas fendas quádruplas ($D=4$), ou seja, o somatório é realizado de $-3/2$ até $3/2$. Substituindo a relação anterior na expressão 1.7, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(q_i, q_s) = & \sum_{l, m=-l_D}^{l_D} \int_{ld-a}^{ld+a} dx_i \int_{md-a}^{md+a} dx_s W\left(\frac{x_i + x_s}{2}, z_A\right) \times \\ & \times e^{\frac{ik}{8z_A}(x_s - x_i)^2} e^{-i(q_x x + q_y y)}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

A integração na expressão anterior é feita para cada uma das fendas sobre toda a abertura.

Fazendo as seguintes substituições

$$x'_i = x_i - ld$$

e

$$x'_s = x_s - md$$

e considerando o perfil transversal do laser constante no intervalo de $(-a, a)$, o termo $\mathfrak{S}(q_i, q_s)$ pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(q_i, q_s) = & \sum_{l, m=-l_D}^{l_D} W\left(\frac{[l+m]d}{2}; z_A\right) e^{-id(q_i l + q_s m)} e^{\frac{ikd^2}{8z_A}(m-l)^2} \times \\ & \times \int_{-a}^a dx'_i e^{-iq_i x'_i} \int_{-a}^a dx'_s e^{-iq_s x'_s} . \end{aligned} \quad (1.10)$$

Com o $\mathfrak{S}(q_i, q_s)$ encontrado, o estado dos fótons ao atravessarem as fendas será [9]:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle \propto & \sum_{l, m=-l_D}^{l_D} W\left(\frac{[l+m]d}{2}; z_A\right) e^{\frac{ikd^2}{8z_A}(m-l)^2} \times \\ & \times \int dq_i e^{-iq_i ld} \text{sinc}(q_i a) |1q_i\rangle \int dq_s e^{-iq_s md} \text{sinc}(q_s a) |1q_s\rangle. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Podemos identificar os estados de fenda $|l\rangle, |m\rangle$ com os seguintes estados escritos na base de momento transversal q_j ($j = s, i$). As integrais da equação 1.11 podem ser analisadas como sendo o estado de um fóton, dado por $|l\rangle$ e $|m\rangle$

$$|l\rangle \equiv \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int dq_i e^{-iq_i ld} \text{sinc}(q_i a) |1q_i\rangle, \quad (1.12a)$$

$$|m\rangle \equiv \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int dq_s e^{-iq_s md} \text{sinc}(q_s a) |1q_s\rangle. \quad (1.12b)$$

De acordo com a referência [11] os estados anteriores são os estados de um fóton transmitido por uma fenda simples deslocada de ld (md) da posição $x_i = 0$ ($x_s = 0$).

A equação para o estado dos fótons transmitidos será portanto:

$$|\Psi\rangle \propto \sum_{l, m=-l_D}^{l_D} W\left(\frac{[l+m]d}{2}; z_A\right) e^{\frac{ikd^2}{8z_A}(m-l)^2} |l\rangle_i \otimes |m\rangle_s. \quad (1.13)$$

Para o perfil do laser constante no plano das fendas, ou seja, a largura da sua distribuição espacial menor que a separação das fendas centrais, temos

que $W(\theta; z_A)$ é aproximadamente constante entre $-a$ e a , e zero para valores de $x > a$ e $x < -a$ e o estado dos fótons transmitidos será [4]:

$$|\Psi\rangle = \sum_{l=-3/2}^{3/2} \frac{1}{\sqrt{D}} e^{\frac{ikd^2}{2z_A} l^2} |l\rangle_i \otimes | -l\rangle_s. \quad (1.14)$$

Por causa da correlação entre os fótons gêmeos quando focalizamos o laser no plano das fendas, o estado do fóton representado por $|m\rangle$ será $| -l\rangle$ [9]. Dessa forma, sempre que um fóton atravessar uma determinada fenda, o outro fóton irá passar pela fenda simétrico-oposta a ela. A figura 1.3 mostra um esquema simplificado dessa situação.

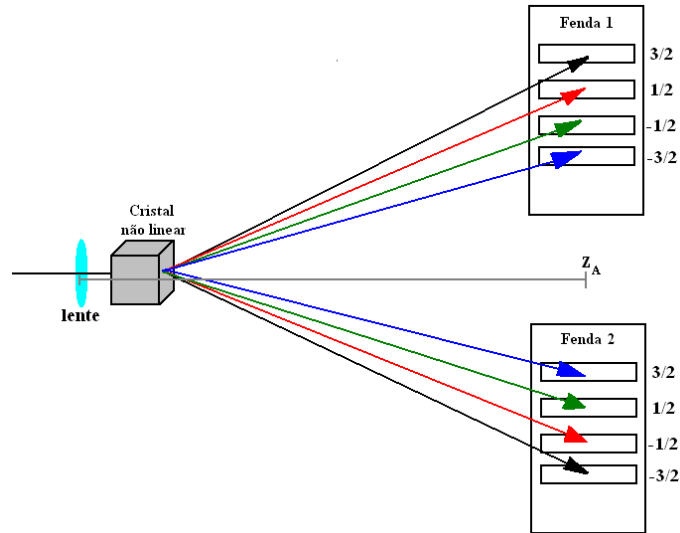


Figura 1.3: Correlação de momento transversal entre os fótons convertidos para o laser focalizado no plano das fendas. As setas indicam os possíveis caminhos dos fótons sinal e idler

1.3 Experimento

1.3.1 Correlação de momento transversal do feixe de fótons gêmeos

Como já foi dito anteriormente, para geração dos estados do tipo da equação (1.14) é importante que o perfil transversal dos fótons no plano da fendas seja o mais estreito possível assegurando que os fótons gêmeos atravessem fendas opostas. Por esse motivo, foi feita uma medida da correlação de momento transversal dos feixes de fótons gêmeos. O objetivo principal foi encontrarmos a posição z na qual o perfil, horizontal ou vertical, era mais estreito e dessa forma colocarmos as fendas nesta posição.

A montagem experimental era composta de um laser HeCd ($\lambda = 325nm$) que incidia em um cristal $LiIO_3$ tipo I, que pela CPD gerava um par de fótons. Cada um dos fótons atingia um detector que possuía filtros de interferência centrados em $(650 \pm 10)nm$.

Para estudar o perfil do laser, foram colocadas fendas simples de abertura de $200\mu m$ na frente dos detectores. As medidas eram feitas movendo-se o detector perpendicularmente a posição da fenda e realizando a aquisição de dados para cada posição. Esse procedimento foi realizado primeiro para uma fenda posicionada horizontalmente e depois foi repetido para uma fenda posicionada verticalmente e também utilizando uma lente de distância focal igual a $100cm$ antes dos detectores. Esses resultados estão mostrados na figura 1.4.

Observando os resultados da figura 1.4, nota-se que o perfil vertical é um pouco mais estreito e mais simétrico que o horizontal.

1.3.2 Geração e estudo de estados espaciais de qudits

A geração dos estados de qudits espaciais foi realizada experimentalmente por nós utilizando um par de fendas múltiplas posicionadas cada uma delas no caminho de um dos fótons da conversão paramétrica. O experimento foi realizado para dois conjuntos de fendas múltiplas, com aberturas de $40\mu m$ e de $100\mu m$. As fendas de $40\mu m$ possuíam separação entre o centros de fendas consecutivas de $80\mu m$ e as de $100\mu m$ possuíam separação de $200\mu m$.

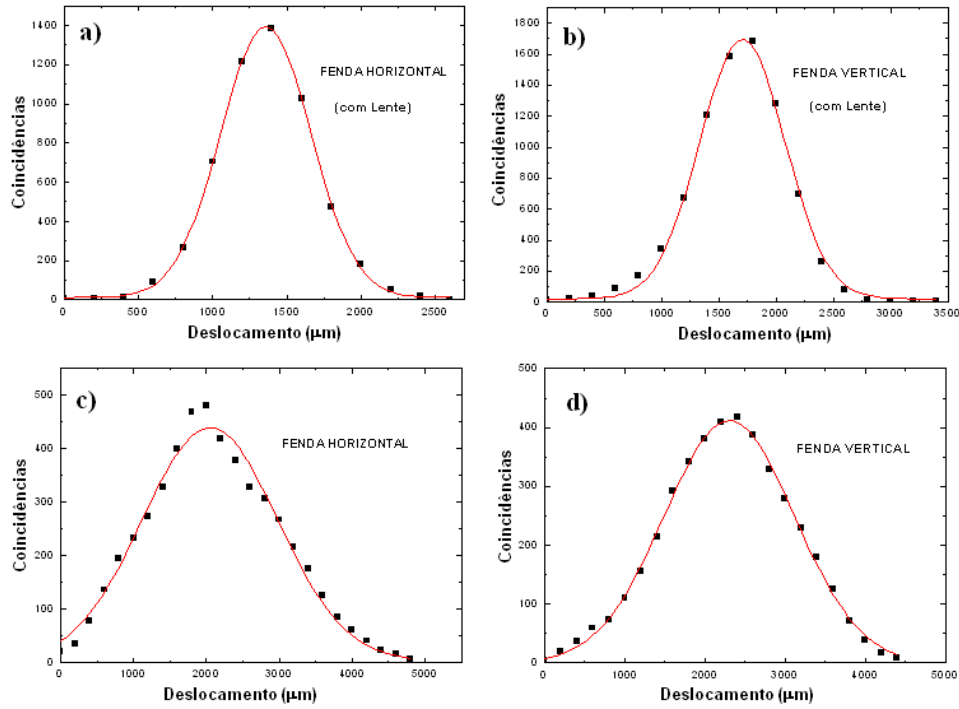


Figura 1.4: Medida da correlação transversal dos feixes de fótons gêmeos. Utilizamos uma fenda de $200\mu m$ na entrada dos detectores a) perfil vertical utilizando a lente $f=100cm$ antes do cristal, b) perfil horizontal com lente, c) perfil vertical sem lente e d) perfil horizontal sem lente

Posicionamos as fendas horizontalmente, pois a correlação transversal dos pares na direção vertical era a mais estreita. Utilizando uma lente convergente de $f = 25cm$ posicionada antes do cristal, focalizamos o feixe do laser no plano das fendas. Como o espectro angular do laser é transferido para o estado dos fótons convertidos, o perfil transversal da taxa de coincidências dos gêmeos será focalizado nas fendas [3, 4]. Para a detecção da imagem das fendas foi usado um par de lentes cilíndricas de $f = 10cm$ (já que essas lentes funcionam como lente apenas em uma direção) posicionadas simetricamente entre as fendas e o detector (objeto e imagem estavam a 20 cm da lente). A montagem experimental descrita acima está mostrada esquematicamente na figura 1.5.

As medidas das imagens das fendas quádruplas, detectadas através de

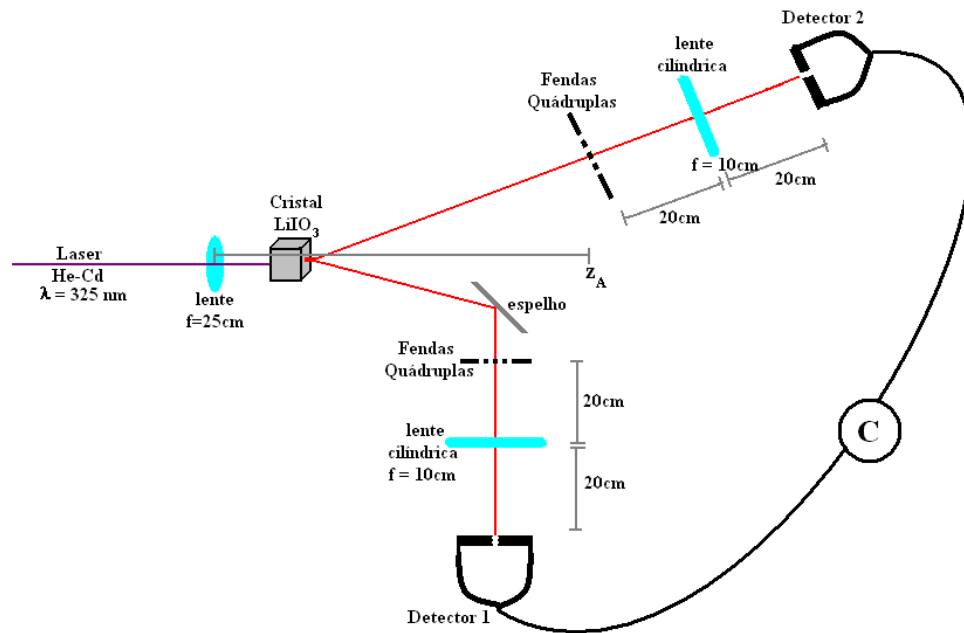


Figura 1.5: Montagem experimental utilizada para detecção das imagens de duas fendas múltiplas e verificação das correlações entre os fótons que atravessam fendas simetricamente opostas

contagens simples e coincidências, estão mostradas nas figuras 1.6 e 1.7. Em cada uma dessas medições o detector 2 foi posicionado em uma das fendas e o detector 1 foi deslocado de forma a passar por todas as fendas. O pico de coincidências é observado somente quando o detector 1 passa pela fenda simétrico-oposta à fenda selecionada no detector 2. Isso é, quando o fóton signal atravessa a fenda l , o fóton idler atravessa a fenda $-l$ (ver figura 1.3). Com esse resultado confirmamos que o estado dos fótons gerados transmitidos pelas fendas possuem correlação espacial.

Na figura 1.6 é possível notar que os picos de coincidência possuem valores próximos, como resultado os módulos das amplitudes do estado de qudits de caminhos transversais na posição das fendas, também são próximas. O mesmo não acontece para o caso da fenda de 100 (figura 1.7). Nela observamos que a taxa de coincidências para as fendas da extremidade é menor. Uma possível explicação para isso está relacionada ao ângulo de aceitação dos detectores.

O módulo das amplitudes do estado de ququarts podem ser obtidos a partir do cálculo da probabilidade do par de fótons atravessarem as fendas l e m . Essa probabilidade é dada pela relação [9]:

$$P_{lm} = \frac{C_{lm}}{(\sum_{l,m} C_{lm})} \quad (1.15)$$

C_{lm} corresponde a taxa de coincidência entre os fótons transmitidos pela fenda l , detectados pelo detector 1 e pela fenda m detectados pelo detector 2.

Realizamos um estudo do padrão de interferência para a fenda de $100\mu m$ usando lentes de distâncias focais diferentes. Para facilitar o entendimento dessas medições, é interessante primeiramente analisarmos o caso de dois qubits, ou seja, quando utilizamos uma fenda dupla para gerar o estado espacial. Na próxima seção, o experimento de fenda dupla para duas partículas é analisado, tendo como base as referências [26, 27, 28].

1.4 Discussão do Experimento de fenda dupla com duas partículas

No experimento proposto por Greenberger, Horne and Zeilinger [26], o grupo discute um experimento de fenda dupla para duas partículas. Nesse trabalho, eles discutem o padrão de interferência observado quando se utiliza como fonte de dois fótons, os fótons gerados na conversão paramétrica.

A amplitude de probabilidade de detecção no ponto x_i e no ponto x_s :

$$\psi(x_i) \sim e^{ikL_A} + e^{ikL_B} \sim \cos \frac{2\pi\theta}{\lambda}(x + x_i), \quad (1.16a)$$

$$\psi(x_s) \sim e^{ikL_{A'}} + e^{ikL_{B'}} \sim \cos \frac{2\pi\theta}{\lambda}(x + x_s). \quad (1.16b)$$

onde L_A , L_B , L'_A e L'_B correspondem a distância de um determinado ponto no cristal (por exemplo, o ponto Ω mostrado na figura 1.8)) até cada uma das fendas A , B , A' e B' .

Considerando o caso em que os dois fótons chegam em coincidência no plano de detecção e integrando em toda a extensão do cristal, encontramos a

amplitude total para os dois fótons atingirem as posições x_i e x_s simultaneamente

$$\psi(x_i, x_s) \sim \frac{1}{d} \int_{d/2}^{-d/2} \cos \frac{2\pi\theta}{\lambda}(x + x_i) \cos \frac{2\pi\theta}{\lambda}(x + x_s). \quad (1.17)$$

Para o caso de $d \gg \lambda/\theta$ obtemos

$$\frac{1}{2} \cos(2\pi\theta(x_i - x_s)/\lambda),$$

que corresponde a um padrão com presença de franjas condicionais, já que a amplitude de coincidências depende de x_i e de x_s , então, por exemplo, ao fixarmos um detector em x_i e deslocarmos o outro no plano em que temos x_s o padrão de interferência também será deslocado em igual quantidade.

Porém, para o caso $d \ll \lambda/\theta$ temos a integral proporcional a

$$\frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi\theta}{\lambda}x_i\right) \times \cos\left(\frac{2\pi\theta}{\lambda}x_s\right),$$

que corresponde ao produto dos padrões de cada um dos fótons, ou seja, nesse caso as franjas são independentes, ou seja, o padrão não é condicional.

1.5 Estudo do Padrão de Interferência Condicional

A condicionalidade de um padrão está relacionada a posição das franjas dependerem das posições escolhidas para os detectores. Segundo as referências [9, 5] a probabilidade de detecção em coincidência para qudits é:

$$\begin{aligned} C_{\Psi_{a,b}}(x_i, x_s) &\propto \left| \sum_{l=-l_D}^{l_D} e^{ik\frac{d^2 l^2}{2zA}} \langle vac | \hat{E}^{(+)}(x_s; z) \hat{E}^{(+)}(x_i; z) | l, -l \rangle \right|^2 \\ &\propto \sum_{l=-l_D}^{l_D} V_l(x_i, x_s) + \\ &+ 2 \sum_{l=-l_D}^{l_D} \sum_{m=l+1}^{l_D} V_{lm}(x_i, x_s) \times \cos(\beta(l-m)[x_i - x_s + \phi(l+m)]), \end{aligned} \quad (1.18)$$

onde β e ϕ são

$$\beta = \frac{kd}{2[f - \eta(z_L - z_A - f)]}$$

e

$$\phi = \frac{d[f - \eta(z_L - f)]}{z_A}$$

com $\eta = (z - z_L - f)/f$. O termo V_{lm} da equação 1.18 corresponde a

$$V_{lm}(x_i, x_s) \equiv \prod_{j=l,m} \text{sinc} \left(a\beta \frac{(x_s - j\eta d)}{d} \right) \text{sinc} \left(a\beta \frac{(x_i + j\eta d)}{d} \right), \quad (1.19)$$

e representa a difração devido a abertura.

A equação 1.18, assim como a função $\frac{1}{2} \cos(2\pi\theta(x_i - x_s)/\lambda)$ para o caso de dois qubits, descreve um padrão de interferência com características condicionais, ou seja a posição das franjas dependem da posição dos detectores. Dessa forma, ao deslocarmos um dos detectores a forma do padrão irá variar.

Após a obtenção das imagens das fendas quádruplas, foi realizada uma medida do padrão de interferência e do padrão de condicionalidade dos fótons transmitidos pelas fendas de 40 e de 100 μm .

Para as medidas do padrão de interferência e de condicionalidade, foram retiradas as lentes cilíndricas e acrescentadas uma lente antes de cada detector, a uma distância igual aos seus comprimentos focais. Realizou-se medições com lentes de foco igual a 10cm e 20cm, todas elas a uma distância focal do detector. Fendas simples de abertura de 100 μm foram presas aos detectores. Para obtenção do padrão de interferência posicionamos o detector 2 na posição central, ou seja, no máximo de contagens simples e varremos o detector 1 deslocando-o a passos de 10 μm .

A medida do padrão de condicionalidade consiste em deslocarmos o detector 2 até a posição de mínimo do padrão de interferência e novamente varremos o detector 1. Podemos observar que onde anteriormente tinha-se um máximo central, agora tem-se um mínimo e vice-versa. Esse resultado está mostrado na figura 1.9 para a fenda de 100 μm utilizando uma lente de $f = 10\text{cm}$ e na figura 1.10 para a mesma fenda utilizando uma lente de $f = 20\text{cm}$.

Os gráficos das figuras 1.9 e 1.10 confirmam a condicionalidade do padrão para o estado de qudits gerados, esses resultados também são uma evidência de que os qudits gerados estão emaranhados [9, 5].

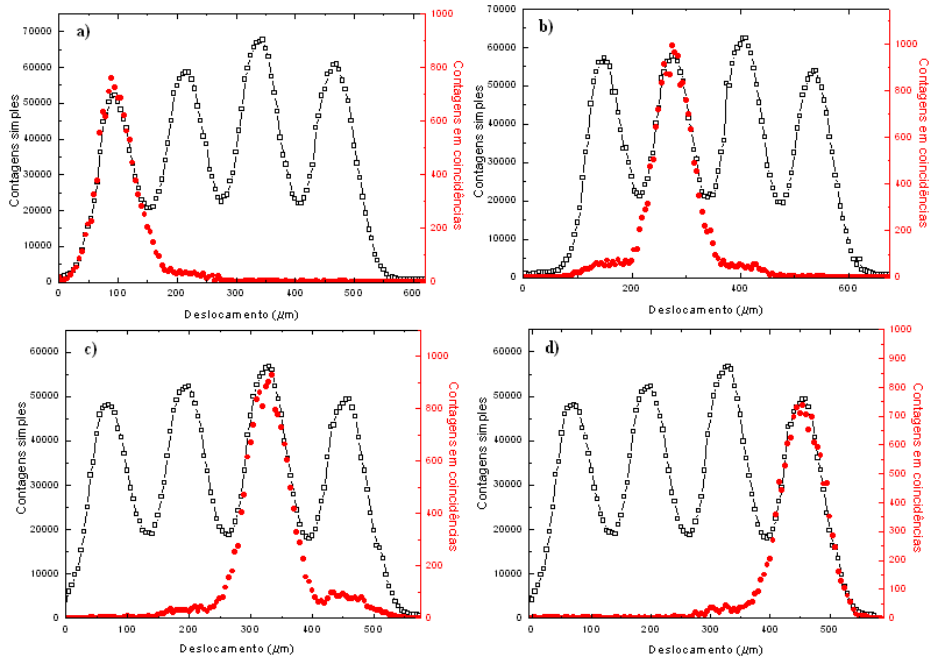


Figura 1.6: Correlação espacial medida através dos fótons transmitidos por duas fendas quádruplas de abertura $40 \mu m$, nessa imagem os pontos pretos correspondem as contagens simples e os pontos vermelhos as contagens em coincidências a) O detector 2 estava posicionado na quarta fenda e o detector 1 foi deslocado. Observamos um pico de coincidências apenas quando o detector 1 passou pela primeira fenda. b) O detector 2 estava posicionado na terceira fenda, por isso o pico de coincidência é notado somente quando o detector 1 passa pela segunda fenda c) Detector 2 na segunda fenda e coincidências observadas entre a segunda e terceira fenda. d) Detector 2 posicionado na primeira fenda, com coincidências apenas quando o detector 1 é posicionado na quarta fenda.

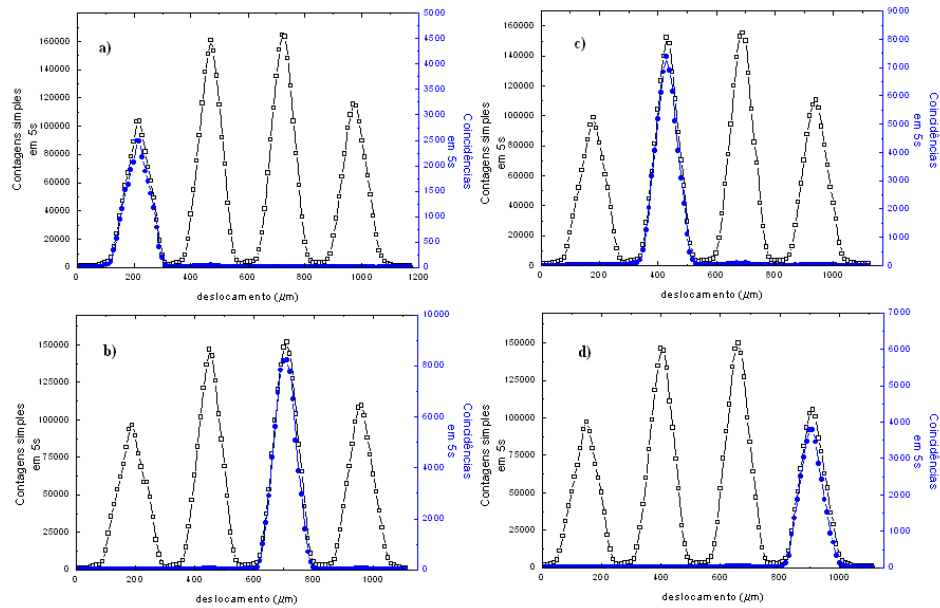


Figura 1.7: Correlação espacial medida através dos fótons transmitidos por duas fendas quádruplas de abertura $100 \mu\text{m}$, nessa imagem os pontos pretos correspondem as contagens simples e os azuis as contagens em coincidência. a) O detector 2 estava posicionado na quarta fenda e o detector 1 foi deslocado. Observamos um pico de coincidências apenas quando o detector 1 passou pela primeira fenda. b) O detector 2 estava posicionado na terceira fenda, por isso o pico de coincidência é notado somente quando o detector 1 passa pela segunda fenda c) Detector 2 na segunda fenda e coincidências observadas entre a segunda e terceira fenda. d) Detector 2 posicionado na primeira fenda, com coincidências apenas quando o detector 1 é posicionado na quarta fenda.

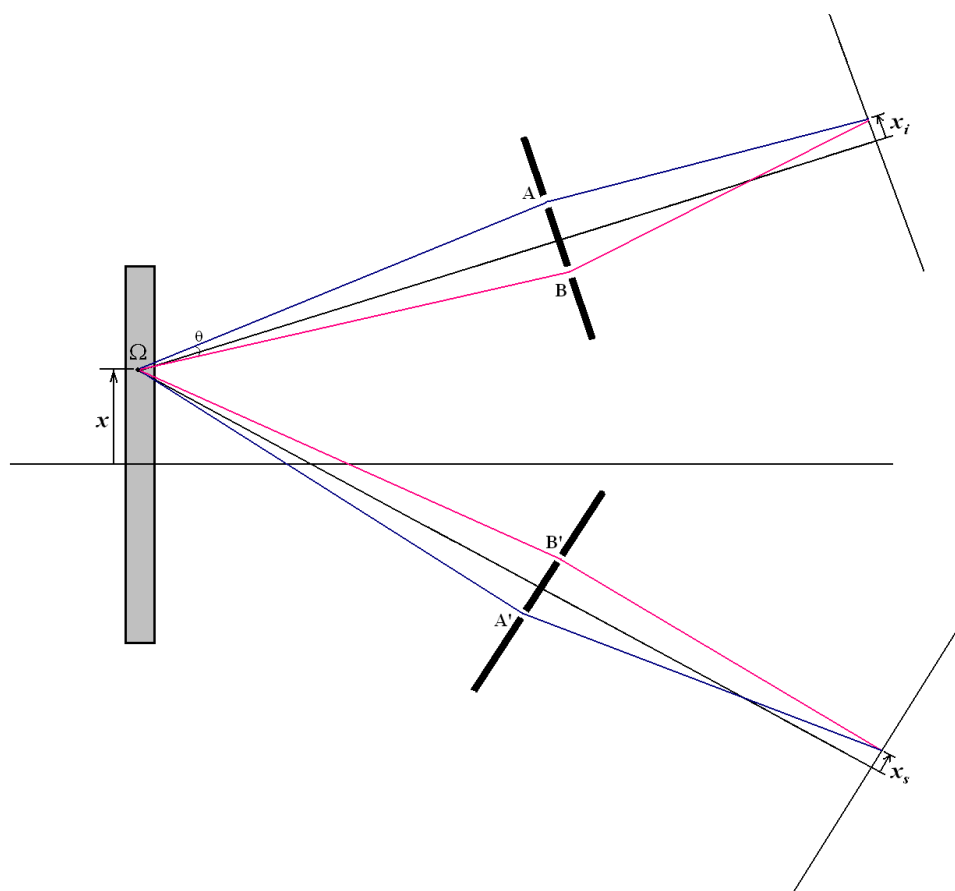


Figura 1.8: Esquema do experimento de fenda dupla usando fótons gerados na conversão paramétrica descendente.

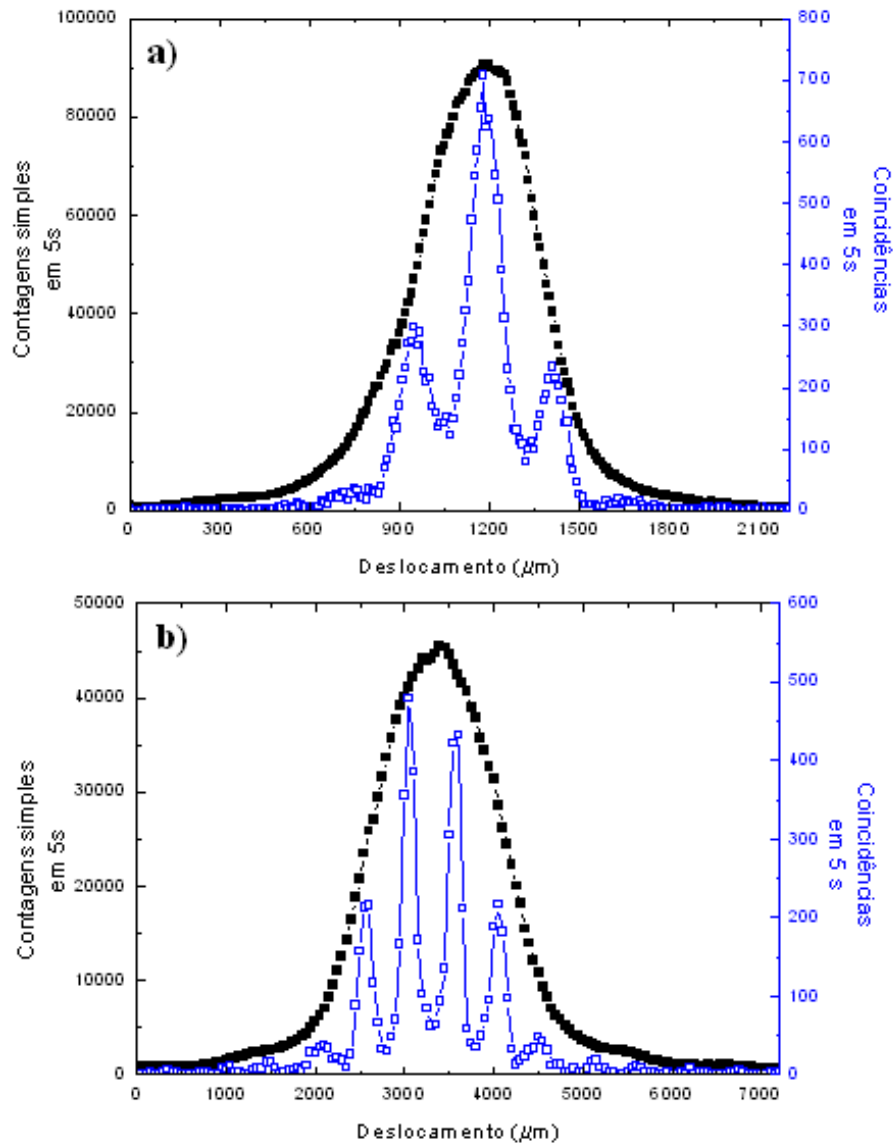


Figura 1.9: a) Padrão de Interferência e b) Padrão de Condicionalidade, para o estado de quatro fendas utilizando uma lente com foco de 10cm focalizando no detector. O tempo de aquisição de cada ponto é de 5s. A abertura da fenda utilizada era de $100 \mu\text{m}$.

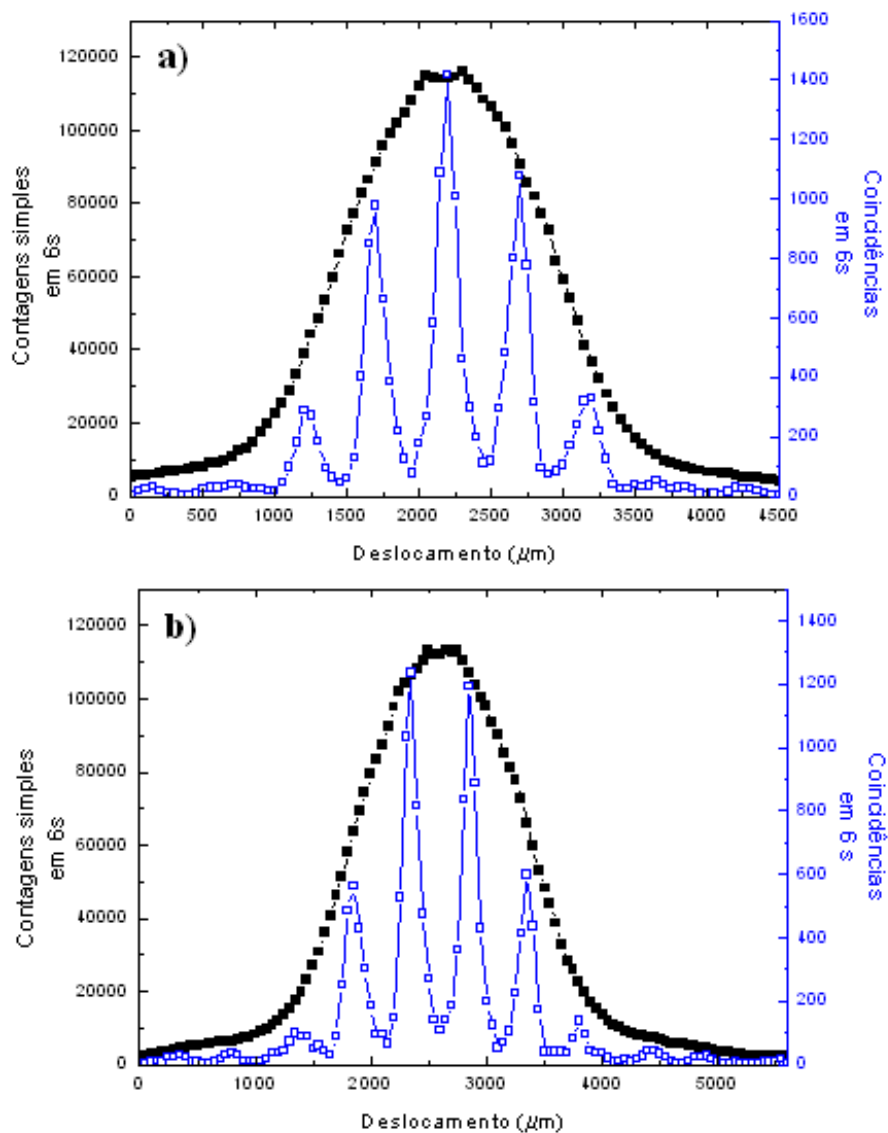


Figura 1.10: a) Padrão de Interferência e b) Padrão de Condicionidade, para o estado de quatro fendas utilizando uma lente com foco de 20cm focalizando no detector. O tempo de aquisição de cada ponto é de 6s. A abertura da fenda utilizada era de $100 \mu\text{m}$.

Capítulo 2

Tomografia Quântica

A tomografia quântica é um processo que permite, a partir de um ensemble de partículas identicamente preparadas, caracterizarmos um estado quântico completamente. Neste capítulo é feita uma breve descrição da tomografia clássica e computadorizada e depois é feita uma analogia com o caso quântico.

O objetivo principal desse capítulo é realizar um estudo sobre a tomografia de um e de dois qubits visando sua implementação para estados espaciais de qubits. Também é realizado um estudo sobre tomografia quântica de detectores baseando-se nas referências [17, 20].

2.1 Representação de Estados Puros e Mistos

Um qubit corresponde a um estado quântico em duas dimensões. Esses estados podem corresponder, por exemplo à polarização do fóton (vertical e horizontal) ou ao momento de spin do elétron na direção z (para cima e para baixo) ou ainda aos caminhos possíveis do fóton ao atravessar uma fenda dupla (caminhos 1 e 2).

Um estado puro pode ser representado por um vetor de estado e para o caso de um sistema de um qubit, temos:

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (2.1)$$

onde os coeficientes α e β são complexos e satisfazem a condição de normalização $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

No formalismo da matriz densidade, ela é definida como uma matriz de traço um, hermitiana e positiva. Para o caso de um estado puro, temos $\rho = \rho^2$, então, $Tr(\rho^2)=1$. Para estados mistos o $Tr(\rho^2)$ é sempre um número menor que um.

Uma interpretação de matriz densidade possível é descrevermos o estado é como uma mistura estatística dos sub-ensembles que compõem esse estado. Isto é, a matriz densidade é construída considerando os pesos estatísticos de cada estado puro que constitui o sistema. Essa matriz pode ser escrita como:

$$\rho = \sum_i P_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad (2.2)$$

onde P_i corresponde a probabilidade ou peso estatístico do estado $|\psi_i\rangle$, com $\sum_i P_i = 1$. É interessante dizer que toda matriz positiva de traço um corresponde a uma matriz densidade. A decomposição acima corresponde a apenas uma de um conjunto infinito de decomposições possíveis para uma dada matriz ρ , a exceção é apenas para o caso de estados puros em que essa decomposição é única. É importante notar que qualquer estado puro também pode ser representado no formalismo de matriz densidade, já que essa descrição é mais geral que a descrição usando vetor de onda. Para um estado puro, $\rho = |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$ e $P_i = \delta_{ij}$, sendo $|\psi_j\rangle$ o vetor de estado da partícula.

Entre as propriedades da matriz densidade, temos que ela possui traço um e é uma matriz hermitiana e positiva. Para o caso de um estado puro, temos $\rho = \rho^2$, então, $Tr(\rho^2)=1$. Para estados mistos o $Tr(\rho^2)$ é sempre um número menor que um.

2.1.1 Esfera de Bloch

Uma forma conveniente de se visualizar um qubit é fazendo uso da esfera de Bloch, que corresponde a uma representação geométrica de um estado puro de dois níveis quânticos (ver figura 2.1). Ao representarmos o estado de um qubit em coordenadas esféricas (equação 2.3), estamos definindo um ponto na superfície da esfera Bloch. Nessa esfera de raio unitário, os estados puros estarão sobre sua superfície e os estados mistos no seu interior, já que estes correspondem a misturas de estados puros. Como exemplo, para a

polarização do fóton, os estados de polarização vertical e horizontal ficarão nos polos da esfera, os de polarização circular no equador.

Um estado quântico puro de dois níveis pode ser descrito como:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \quad (2.3)$$

A partir dessa equação, escrita em coordenadas polares, podemos identificar o estado $|\psi\rangle$ na esfera de Bloch (ver figura 2.1)

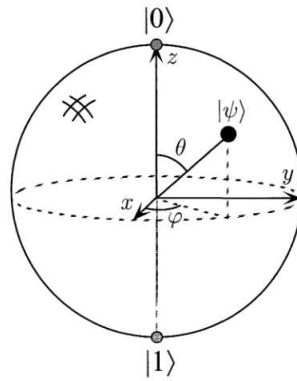


Figura 2.1: Representação de um qubit $|\psi\rangle$ na esfera de Bloch [23]

2.2 Tomografia de um qubit

Podemos escrever a matriz densidade de um qubit como:

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+a & b-ic \\ b+ic & 1-a \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Nesta expressão, foi levado em consideração o fato de ρ ser uma matriz hermitiana de traço igual a um.

É interessante, porém, reescrevermos ρ em termos da matriz identidade e das matrizes de Pauli, conforme a equação a seguir:

$$\rho = \frac{1}{2}(I + a\sigma_z + b\sigma_x + c\sigma_y) = \frac{1}{2}(I + \vec{b} \cdot \vec{\sigma}), \quad (2.5)$$

onde \vec{b} corresponde a (b, c, a) e é conhecido como vetor de Bloch (chamado de vetor de Stokes quando consideramos polarização). Esse vetor identifica um ponto na esfera de Bloch. A matriz I mostrada na equação anterior representa a matriz identidade e $\vec{\sigma}$ representa as matrizes σ_x , σ_y e σ_z que correspondem as matrizes de Pauli.

As matrizes de Pauli para um qubit são:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

O objetivo de se realizar uma tomografia é determinar os elementos a , b e c que constituem a matriz densidade. Existem várias escolhas que permitem determinarmos esses termos, em nosso caso decidimos medir um conjunto especial. Esse conjunto escolhido tem como principal vantagem ser o conjunto que permite realizarmos o menor número de medições. Os pontos a serem medidos correspondem aos vértices de um tetraedro inscrito na esfera de Bloch (figura 2.4). A vantagem de medirmos esse conjunto decorre do fato que para esses pontos, a normalização corresponde a soma das coincidências de todos os pontos medidos.

É importante comentar que é possível realizarmos a tomografia escolhendo outro conjunto de pontos, porém, seriam necessárias mais medições, já que a normalização de cada termo é feita dividindo-se pela soma da taxa de coincidências para um vetor e para o seu ortogonal. Por exemplo, se escolhermos medir os pontos do equador temos que medir o estado $|0\rangle$ e seu ortogonal $|1\rangle$, o estado diagonal $|D\rangle$ e o seu ortogonal $|A\rangle$ (anti-diagonal) e também é necessário medirmos os pontos dos pólos, que correspondem a fases de $\pi/2$ e $-\pi/2$ entre os vetores $|0\rangle$ e $|1\rangle$.

A idéia para as medições desses pontos surgiu a partir do trabalho “*Experimental polarization state tomography using optimal polarimeters*” [14]. Neste trabalho, o grupo apresenta a maneira mínima necessária para se estimar o vetor de Stokes (análogo ao vetor de Bloch), o que consiste em realizarmos quatro medições. Essas medições são definidas a partir de quatro vetores não coplanares que definem um tetraedro na esfera de Poincaré. O POVM (*Positive Operator Valued Measure*) escolhido é interessante principalmente

quando não se conhece nada sobre ρ , já que nele, os pontos que definem o tetraedro são igualmente espaçados [29, 30].

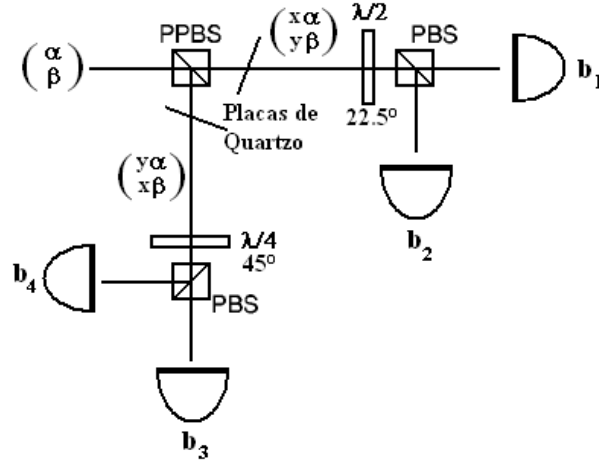


Figura 2.2: Esquema da montagem experimental utilizada na Tomografia de Polarização realizada no trabalho apresentado no artigo “*Experimental polarization state tomography using optimal polarimeters*” [14].

Na figura 2.2, observamos um esquema da montagem experimental utilizada na tomografia de um estado de polarização. Um cubo parcialmente polarizador (PPBS) separa a luz em uma razão específica já que possui coeficientes de divisão iguais a x e y que obedecem a equação de conservação $|x|^2 + |y|^2 = 1$. Por causa dessa diferença nos coeficientes de divisão, a saída em cada um dos braços será diferente. Na tabela a seguir, mostramos a saída nos braços transmitido e refletido para uma luz polarizada horizontalmente e verticalmente.

Polarização	Transmitido	Refletido
Horizontal	$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$
Vertical	$\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$

A luz transmitida pelo PPBS é projetada na base de polarização $\pm 45^\circ$ e a refletida é projetada nas bases de polarização circular a esquerda e a direita.

O conjunto específico x e y que produz o arranjo tetragonal é

$$x^2 = 1/2 + 1/(2\sqrt{3}) \quad \text{e} \quad y^2 = 1/2 - 1/(2\sqrt{3}).$$

Para a implementação experimental da tomografia, o grupo realizou uma calibração para eliminar fases que poderiam estar presentes [32]. Essas fases foram eliminadas com a utilização de placas de quartzo. Com essa calibração é encontrada a matriz instrumento corrigida. Essa matriz relaciona as intensidades medidas com vetores de Stokes.

No nosso caso, escolhemos implementar a tomografia para estados espaciais de caminho transversal. O POVM escolhido também foi o que descreve um tetraedro regular inscrito na esfera de Bloch. A seguir, um tetraedro regular de lado l foi analisado, figura 2.3. Considerando que o tetraedro mostrado possa ser inscrito em uma esfera de raio unitário, com os vértices, A , B , C e D tocando a superfície da esfera, foram determinadas as coordenadas na esfera que descrevem esses pontos.

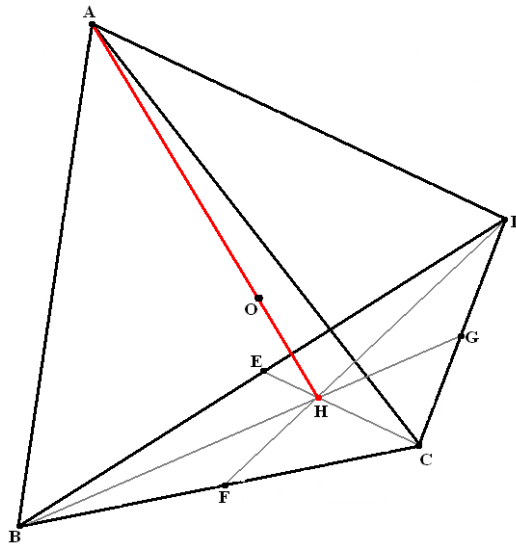


Figura 2.3: Tetraedro Regular de lado l

Analisando primeiramente o triângulo equilátero BCD. Sabendo que o ponto H corresponde ao baricentro desse triângulo e que a altura de um triângulo equilátero é $l\sqrt{3}/2$, encontramos $BH = l\sqrt{3}/3$. Se analisarmos agora o triângulo ABH, observamos que a altura do tetraedro (AH) é $\sqrt{2/3}l$. Se

notarmos que os segmentos OA , OB , OC e OD correspondem a raios em uma esfera que circunscreva o tetraedro, temos, então, $OA = OB = OC = OD = 1$ (o ponto O corresponde ao centro dessa esfera). A partir do triângulo OBH , determina-se que $l = 2\sqrt{2/3}$.

Como $AH = \sqrt{2/3}(2\sqrt{2/3})$, temos $OH = AH - 1 = 1/3$. Ou seja, considerando que o vértice A caia sobre o eixo z , os outros vértices devem ser coplanares e sua coordenada z deve ser igual a $-1/3$. Como os vértices B , C e D formam um triângulo equilátero, eles dividem um círculo em três arcos iguais, que podem ser escolhido como sendo 0 , $2\pi/3$ e $-2\pi/3$.

Cada ponto na esfera de Bloch pode ser escrito em coordenadas esféricas como sendo $(\sin\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \cos\theta)$. Ao escolhermos um vértice para o tetraedro tal que $A = (0, 0, 1)$, ou seja $\theta = 0$, os outros três vértices selecionados devem estar no mesmo plano, ou seja devem possuir mesmo valor de θ e $\phi = 0, 2\pi/3$ e $-2\pi/3$ para cada um deles.

A escolha de vértices sugerida seria, por exemplo:

$$A = (0, 0, 1), \quad (2.7a)$$

$$B = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, 0, \frac{-1}{3}\right), \quad (2.7b)$$

$$C = \left(\frac{-\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{-1}{3}\right), \quad (2.7c)$$

$$D = \left(\frac{-\sqrt{2}}{3}, \frac{-\sqrt{6}}{3}, \frac{-1}{3}\right). \quad (2.7d)$$

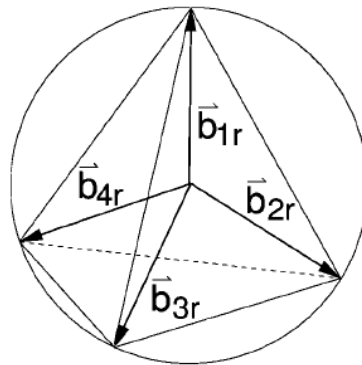


Figura 2.4: Tetraedro inscrito na esfera de Bloch [14]

A partir desses pontos, podemos escrever os vetores de estado associados a esses vértices.

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle, \quad (2.8a)$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |1\rangle, \quad (2.8b)$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |0\rangle - e^{i2\pi/3} \sqrt{\frac{2}{3}} |1\rangle, \quad (2.8c)$$

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |0\rangle - e^{-i2\pi/3} \sqrt{\frac{2}{3}} |1\rangle. \quad (2.8d)$$

Os vetores acima foram contruídos a partir dos vértices do tetraedro, eles não são vetores ortogonais e por isso ao construirmos operadores de medida a partir deles é necessário usarmos o formalismo de POVM (*Positive Operator Valued Measure*).

Nesse formalismo, os operadores Π_i construídos são positivos e possuem probabilidade total igual a 1 ($\sum_i \Pi_i = I$). No nosso caso, esses operadores Π_i serão $\frac{1}{2} |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, já que ao somarmos todas as matrizes de $|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ encontramos o dobro da identidade.

Os operadores $|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ serão:

$$|\psi_1\rangle\langle\psi_1| = |0\rangle\langle 0|,$$

$$|\psi_2\rangle\langle\psi_2| = \frac{1}{3} |0\rangle\langle 0| - \frac{\sqrt{2}}{3} |0\rangle\langle 1| - \frac{\sqrt{2}}{3} |1\rangle\langle 0| + \frac{2}{3} |1\rangle\langle 1|,$$

$$|\psi_3\rangle\langle\psi_3| = \frac{1}{3} |0\rangle\langle 0| - \frac{\sqrt{2}}{3} e^{-i2\pi/3} |0\rangle\langle 1| - \frac{\sqrt{2}}{3} e^{i2\pi/3} |1\rangle\langle 0| + \frac{2}{3} |1\rangle\langle 1|,$$

$$|\psi_4\rangle\langle\psi_4| = \frac{1}{3} |0\rangle\langle 0| - \frac{\sqrt{2}}{3} e^{i2\pi/3} |0\rangle\langle 1| - \frac{\sqrt{2}}{3} e^{-i2\pi/3} |1\rangle\langle 0| + \frac{2}{3} |1\rangle\langle 1|.$$

Somando os operadores $|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, obtemos:

$$\sum_{i=1}^4 |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = 2I, \quad (2.9)$$

o que justifica a escolha $\Pi_i = \frac{1}{2} |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$.

As matrizes Π_i serão:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \Pi_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \\ \Pi_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3}e^{i2\pi/3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3}e^{-i2\pi/3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, & \Pi_4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3}e^{-i2\pi/3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3}e^{i2\pi/3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A probabilidade de cada uma das medições Π_i é dada por:

$$p_i = \text{Tr}(\hat{\Pi}_i \hat{\rho}) = \frac{1}{2} \text{Tr}(|\psi_i\rangle\langle\psi_i| \rho) = \frac{1}{2} \langle\psi_i | \rho | \psi_i\rangle \quad (2.10)$$

Usando essa relação temos:

$$p_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+a & b-ic \\ b+ic & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Então:

$$p_1 = \frac{1}{4}(1+a) \quad (2.11a)$$

Semelhantemente para os outros pontos temos:

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+a & b-ic \\ b+ic & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \\ p_2 &= \frac{1}{12}(3-a-2\sqrt{2}b) \end{aligned} \quad (2.11b)$$

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}}e^{-2i\pi/3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+a & b-ic \\ b+ic & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}}e^{2i\pi/3} \end{pmatrix} \\ p_3 &= \frac{1}{12}(3-a-2\sqrt{2}b \cos(2\pi/3) - 2\sqrt{2}c \sin(2\pi/3)) \end{aligned} \quad (2.11c)$$

$$p_4 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}}e^{2i\pi/3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+a & b-ic \\ b+ic & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}}e^{-2i\pi/3} \end{pmatrix}$$

$$p_4 = \frac{1}{12}(3 - a - 2\sqrt{2}b \cos(2\pi/3) + 2\sqrt{2}c \sin(2\pi/3)) \quad (2.11d)$$

Notamos, então que para realizarmos a tomografia temos que resolver uma sistema com 4 equações e 3 incógnitas (a , b e c). É natural termos 4 equações e 3 incógnitas ao somarmos essas equações recuperamos o vínculo $\sum_i = 1$. No experimento, esse vínculo será refletido na condição de normalização dada pelo total de contagens.

Então, realizarmos a tomografia de um qubit corresponde a resolvermos o sistema abaixo para um conjunto de probabilidades (p_1, p_2, p_3, p_4)

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & -1/12 & -\sqrt{2}/6 & 0 \\ 1/4 & -1/12 & \sqrt{2}/12 & -\sqrt{6}/4 \\ 1/4 & -1/12 & \sqrt{2}/12 & \sqrt{6}/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Os valores p_1 , p_2 , p_3 e p_4 serão estimados a partir das medições.

2.3 Implementação da Tomografia

Nesta dissertação trabalhamos com estados espaciais gerados a partir de fendas múltiplas. Os estados quânticos para esse sistema são estados de caminho transversais dos fótons ao atravessar as fendas. Para implementação da tomografia é necessário identificarmos cada um dos estados do fóton representados pelos vértices do tetraedro com os estados de fendas.

Para o caso das fendas, a coordenada z corresponde a atenuação de cada uma das fendas, ou seja, o quanto da fenda é obstruído e o seu sinal indica qual fenda irá sofrer a obstrução ou atenuação. Bloquearmos a fenda inferior e contarmos o número de fótons, corresponde a realizarmos a operação Π_1 no estado.

Como os outros pontos escolhidos do tetraedro estão no mesmo plano, e portanto os caminhos das fendas possuem a mesma relação de atenuação, é necessário que nas medições dos operadores correspondentes se bloqueie parcialmente uma mesma quantidade em um dos caminhos dos fótons, neste caso, a fenda que estava aberta será parcialmente bloqueada e a que estava bloqueada é liberada. O que vai diferir nesses três casos será apenas a fase introduzida entre os caminhos transversais, ou seja, entre os estados de fendas. Para estes pontos do tetraedro, o caminho do fóton que passa pela fenda superior é atenuado de $1/3$, ou seja bloqueia-se parcialmente a fenda superior até que a taxa de contagens baixe para $2/3$ do total. Com essa atenuação são realizadas três medições. Em cada uma delas introduzimos uma diferença de fase específica entre as fendas (primeiramente 0, ou seja, não acrescentamos diferença de fase, depois $2\pi/3$ e em seguida $-2\pi/3$). Cada uma destas três possibilidades de medições corresponde a um dos operadores Π_2 , Π_3 e Π_4 .

Experimentalmente, para acrescentarmos a diferença de fase utilizamos um modulador espacial de luz (SLM) LC-R2500 da empresa Holoeye. Seu funcionamento será discutido mais profundamente no próximo capítulo. Porém, é necessário saber que esse equipamento permite acrescentarmos facilmente uma diferença de fase no caminho dos fótons transmitidos pelas fendas.

O experimento constitui em gerar estados espaciais usando fendas múltiplas e caracterizá-los através da tomografia. O esquema experimental está mostrado na figura 2.5, e é composto por um laser HeCd, um cristal $LiIO_3$, espelhos, uma fenda dupla (para gerar os qubits), o SLM e um atenuador (ou bloqueador) - responsáveis pela criação dos operadores Π_i , um polarizador Gran-Laser, um cabo de fibra óptica monomodo, acopladores de entrada e saída para fibras ópticas da ThorLabs, dois módulos de detecção de um fóton (detectores avalanche) e um módulo eletrônico de contagens de fótons em coincidências.

É necessário agora, relacionarmos as probabilidades Π_1 , Π_2 , Π_3 e Π_4 e medições da taxa de coincidências, já que no laboratório não medimos probabilidades, mas sim coincidências. Primeiro será feita uma análise considerando a medição ideal, isto é, não temos perdas introduzidas pelo modelo de medida. Isto, porém, não é o que ocorre, já que o método que usamos para a atenuação introduz uma diferença nas contagens de fótons. Nesse

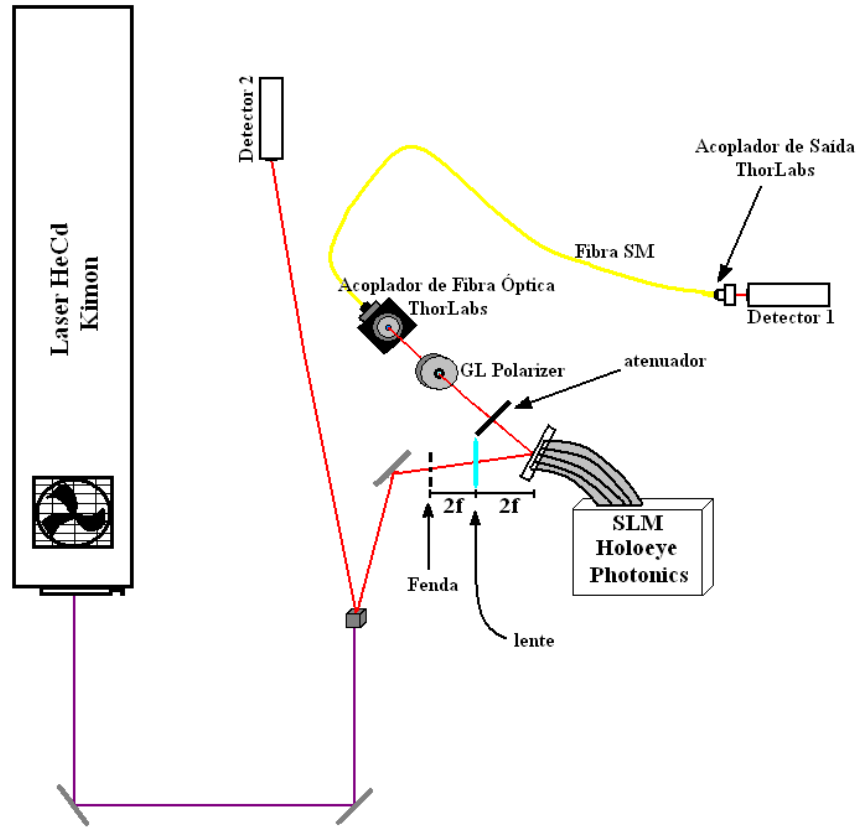


Figura 2.5: Montagem Experimental das medidas de tomografia.

caso, serão feitas as correções por efeitos de absorção.

1) Caso Ideal

No caso ideal, consideramos que a medição é perfeita, ou seja, não há perdas experimentais. Nesse caso, a probabilidade irá relacionar-se com as contagens em coincidências da seguinte forma:

$$p_i = \frac{c_i}{c_t}, \quad (2.13)$$

onde c_i corresponde à taxa de contagem em coincidência para medições de cada um dos vértices do tetraedro e c_t corresponde a soma das taxas de coincidências para esses quatro pontos. Substituindo essa relação para os p_i

no sistema da equação (2.12), obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & -1/12 & -\sqrt{2}/6 & 0 \\ 1/4 & -1/12 & \sqrt{2}/12 & -\sqrt{6}/4 \\ 1/4 & -1/12 & \sqrt{2}/12 & \sqrt{6}/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1/c_t \\ c_2/c_t \\ c_3/c_t \\ c_4/c_t \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

2) Correções por efeitos de Absorção

A maneira como a atenuação entre os estados de fendas é implementada introduz erros nas medições. Nossa escolha leva a uma diferença nas contagens devido a absorção de fótons.

O procedimento experimental realizado consiste em, primeiramente, bloquearmos totalmente uma das fendas e contarmos apenas os fótons transmitidos pela outra. Nesse caso, a contagem irá cair à metade. Já para as outras medições iremos bloquear parcialmente 1/3 uma das fendas, nessa situação, a contagem cai a 2/3 do total.

A diferença entre o número total de fótons traz a necessidade de introduzirmos uma correção na relação entre probabilidades e contagens. Acrescentando, então, uma constante α_i (coeficiente de absorção) nessa equação. Esse coeficiente irá corrigir a diferença existente nas contagens.

$$\alpha_i c_i = p_i c_t, \quad (2.15)$$

onde c_i corresponde à taxa de coincidência para cada um dos operadores dos vértices do tetraedro e $c_t = \sum_i \alpha_i c_i$.

No caso considerado, os coeficientes relacionados as perdas α_2 , α_3 e α_4 são considerados iguais, já que nessas três medições a atenuação é a mesma e a única diferença introduzida está na fase. O sistema a ser resolvido considerando a correção é:

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & -1/12 & -\sqrt{2}/6 & 0 \\ 1/4 & -1/12 & \sqrt{2}/12 & -\sqrt{6}/4 \\ 1/4 & -1/12 & \sqrt{2}/12 & \sqrt{6}/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\alpha_1/c_t \\ c_2\alpha_2/c_t \\ c_3\alpha_2/c_t \\ c_4\alpha_2/c_t \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Uma estratégia para a determinação dos coeficientes de atenuação é realizarmos as medições descritas anteriormente usando uma fonte luminosa incoerente. Escolhemos uma fonte incoerente, porém, poderíamos também, utilizar qualquer fonte em que o operador densidade seja conhecido. Conhecendo a matriz densidade e sabendo quais deveriam ser os valores para as probabilidades p_i , é possível determinarmos os α_i que corrigem as diferenças introduzidas nas coincidências por causa da atenuação.

2.4 Tomografia de dois qubits

No caso de dois qubits podemos escrever a matriz densidade que representa esse estado como sendo:

$$\rho = \frac{1}{4} \sum_{i,j} b_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j, \quad (2.17)$$

onde $\sigma_i \otimes \sigma_j$ representa o produto tensorial das matrizes de Pauli de um qubit, que está mostrado no apêndice A, bem como o detalhamento dos cálculos mostrados nessa seção.

Como as matrizes $\sigma_i \otimes \sigma_j$ representam uma base para a construção da matriz densidade, podemos escrever:

$$\rho = \frac{1}{4} \sum_{\mu,\nu} B_{\mu\nu} S_{\mu\nu}, \quad (2.18)$$

a matriz $S_{\mu\nu}$ representa o produto tensorial das matrizes σ_i e σ_j .

Para encontrarmos os operadores do POVM, representados por Π_{ij} , primeiramente construímos os vetores $|\psi_i\rangle \otimes |\psi_j\rangle$ a partir dos vetores que formam o tetraedro de um qubit. Encontramos 16 vetores diferentes.

Os operadores Π_{ij} construídos a partir desses vetores serão da forma $(1/a) |\psi_i \psi_j\rangle \langle \psi_i \psi_j|$. O termo a é acrescentado devido ao fato das matrizes formadas por esses vetores não somarem a identidade, mas sim um múltiplo dela.

Conforme foi verificado no apêndice A, temos:

$$\sum_{i,j} |\psi_i \psi_j\rangle \langle \psi_i \psi_j| = 4I, \quad (2.19)$$

dessa forma os operadores Π_{ij} serão:

$$\Pi_{ij} = \frac{1}{4} |\psi_i \psi_j\rangle \langle \psi_i \psi_j|. \quad (2.20)$$

Novamente, iremos escrever que a probabilidade de uma determinada medição representada pelo operador Π_{ij} é:

$$p_{ij} = Tr(\hat{\Pi}_{ij}\hat{\rho}) = \frac{1}{4}Tr(|\psi_i \psi_j\rangle \langle \psi_i \psi_j| \hat{\rho}) = \frac{1}{4}\langle \psi_i \psi_j | \rho | \psi_i \psi_j \rangle. \quad (2.21)$$

Todas as probabilidades p_{ij} podem ser determinadas a partir dos termos $B_{\mu\nu}(b_{ij})$ que formam a matriz densidade (mostrada no apêndice A). Conforme foi feito para um qubit, temos que relacionar probabilidades e coincidências, isso pode ser feito usando uma equação semelhante à equação (2.13). Porém, considerando que agora temos dois qubits,

$$p_{ij} = \frac{c_{ij}}{(\sum_{i,j} c_{ij})}, \quad (2.22)$$

c_{ij} corresponde a taxa de coincidências quando medimos, simultaneamente, $|\psi_i\rangle$ para o fóton signal e $|\psi_j\rangle$ para o fóton idler.

Devido ao processo de medição, é necessário, novamente, corrigirmos a equação da probabilidade.

$$\alpha_{ij} c_{ij} = p_{ij} c_t \quad (2.23)$$

onde $c_t = \sum_{i,j} c_{ij}$.

Os procedimentos experimentais para a realização da tomografia são os mesmos que foram observados anteriormente na determinação da matriz densidade de um qubit. Esses procedimentos são:

Para uma fonte incoerente:

- Medir sem atenuação. Isso quer dizer, realizarmos medições das contagens em coincidências para o caso das duas fendas desbloqueadas, sem acrescentar nenhuma diferença de fase entre elas.
- Realizar as medições acrescentando a diferença de fase entre as fendas e bloqueando, quando necessário, parcialmente ou completamente uma fenda.

As medições acima permitirão determinar os coeficientes de absorção α_{ij} . Os passos acima devem ser repetidos novamente usando a fonte de fótons gêmeos, e dessa forma, concluímos as medições de tomografia. Uma maneira de diminuirmos os erros experimentais relativos a essas medições é em vez de realizar todos os passos com a fonte incoerente e depois para a fonte a ser estudada, realizarmos cada uma das etapas acima para as duas fontes. Isso é, por exemplo, realizamos a medições sem atenuação para a fonte incoerente e logo em seguida realizamos o mesmo para os fótons gêmeos. Depois, passamos para o passo seguinte e repetimos o procedimento, porém, agora, com a diferença de fase e a atenuação.

2.5 Tomografia de Detectores

Nesta seção será apresentado um resumo do artigo “*Tomography of quantum detectors*” [17] no qual foram feitas medições de tomografia de detectores. Discutimos este trabalho aqui para mostrar uma aplicação recente e interessante que ilustra bem a capacidade da técnica de Tomografia Quântica. Antes, porém, será feita uma pequena revisão sobre coerência temporal e espacial e sobre os estados coerentes do campo eletromagnético.

2.5.1 Estados Coerentes do Campo Eletromagnético

Campos eletromagnéticos gerados por fontes coerentes, como por exemplo lasers, podem ser representados de maneira apropriada no formalismo de estados coerentes [1]. Considerando apenas um modo do campo eletromagnético, temos para o operador destruição de fótons (\hat{a}):

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle, \quad (2.24)$$

onde $|\alpha\rangle$ corresponde ao autoestado do operador destruição e é chamado de estado coerente. α pode ser um número complexo, já que \hat{a} não é hermitiano.

Semelhantemente, temos:

$$\langle\alpha| \hat{a}^\dagger = \alpha^* \langle\alpha|, \quad (2.25)$$

onde \hat{a}^\dagger corresponde ao operador criação de fótons.

Podemos representar o estado coerente na base dos estados de Fock $|n\rangle$, com n representando o número de ocupação [1].

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \quad (2.26)$$

c_n correspondem aos coeficientes da expansão.

Substituindo a expansão anterior na relação 2.24 e utilizando as relações $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ e $\hat{a}|0\rangle = 0$ para o operador destruição de fótons, obtemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \quad (2.27)$$

Como o conjunto dos estados de Fock representa um conjunto ortogonal, a equação é satisfeita apenas se os coeficientes de estados correspondentes são iguais. A partir dessa equação obtemos uma relação recursiva que permite obtermos c_n a partir de c_0 . O estado coerente $|\alpha\rangle$ pode ser representado, em termos dos estados de Fock, como sendo [1]:

$$|\alpha\rangle = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2.28)$$

onde $c_0 = e^{-|\alpha|^2/2}$, e pode ser obtido pela normalização $\langle\alpha|\alpha\rangle$.

A probabilidade $p(n)$ que n fótons se encontrem no estado coerente $|\alpha\rangle$ é dada por:

$$p(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}, \quad (2.29)$$

que corresponde a uma distribuição de Poisson.

2.5.2 Tomografia de Detectores

A tomografia de detectores é bastante parecida com a tomografia de estados. A principal diferença é que agora, não mais se quer determinar a matriz densidade, mas sim o conjunto de operadores que formam o POVM associado ao detector (ou seja, $\{\Pi_i\}$). Para realização da tomografia de detectores é

necessário utilizarmos um conjunto conhecido de estados de prova $\{\rho\}$ que formem um conjunto de geradores para o espaço de operadores.

A semelhança entre a tomografia de estados e de detectores está ligada ao fato que a equação para a probabilidade ($p_i = \text{Tr}(\rho\Pi_i)$), pode ser invertida para obtermos ρ , ou para obtermos Π_i . Dessa maneira, o conjunto $\{\Pi_i\}$ pode ser caracterizado a partir de medições de um conjunto de estados ρ conhecidos. O conjunto ρ escolhido deve ser completo, e os operadores Π_i devem ser positivos semi-definidos (seus autovalores são não-negativos) e devem somar para identidade.

Nesse trabalho [17] foi realizado uma tomografia de um detector APD (*Avalanche Photodiode*) e de um detector TMD (*Time multiplexed detector*) construído pelo próprio grupo.

O conjunto de estados de prova $\{\rho\}$ pode ser gerado a partir do estado coerente de um laser ($|\alpha\rangle$) transformado por atenuações e atrasos. Dessa maneira foi construído um conjunto de estados coerentes do tipo $\{|\alpha\rangle\langle\alpha|\}$. Para esses estados temos:

$$Q_n(\alpha) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \Pi_n | \alpha \rangle = \frac{1}{\pi} p_{n,\alpha} \quad (2.30)$$

A definição acima corresponde a uma definição da representação da função Q para POVM. A representação Q , corresponde a uma representação de um operador, geralmente a matriz densidade, em uma base de estados coerentes, no caso, o conjunto $\{|\alpha\rangle\}$. Determinar $Q_n(\alpha)$ corresponde a se realizar a tomografia do detector, já que $Q_n(\alpha)$ e o operador do POVM Π_n possuem basicamente a mesma informação.

O detector APD corresponde a um módulo de detecção no qual tem-se dois resultados possíveis (0 click ou 1 click). O caso de 0 click ocorre quando nenhum fóton atingiu o detector, logo, nenhum pulso eletrônico é gerado. O caso de 1 click ocorre quando um ou mais fótons atingem o detector e um sinal é gerado e registrado. O funcionamento do detector APD não permite distinguir entre diferentes estados de números de fótons.

O detector TMD construído separa o pulso incidente em N modos temporais separados por um intervalo de tempo de Δt , divididos entre dois modos espaciais. A principal vantagem de separar os modos temporalmente e não espacialmente é que no caso temporal são necessários apenas dois detectores

APD independente do número de modos em que é dividido o pulso [19].

Esse detector é composto por vários comprimentos de fibras ópticas mono-modo e vários acopladores de fibras que dividem a luz de entrada igualmente em dois modos espaciais. O tamanho L foi escolhido de forma que o atraso no pulso ser bem maior que o tempo de morte do detector APD. São construídos m estágios, como mostrado na figura 2.6 e cada um dos modos espaciais da saída possui 2^m modos temporais.

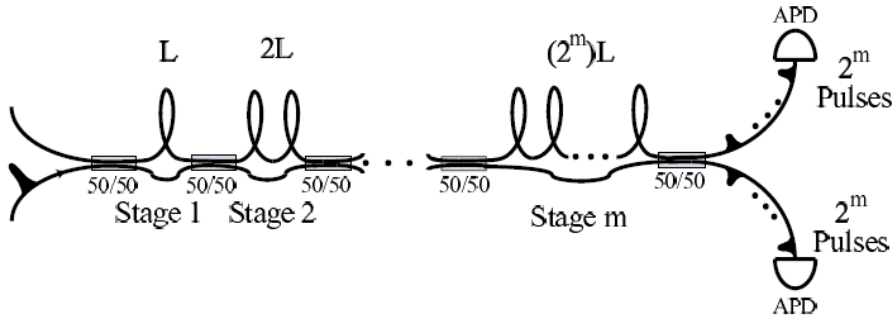


Figura 2.6: Esquema de um detector TMD [19]

O objetivo do trabalho foi reconstruir o POVM que representa esses dois detectores, ou seja, realizar a tomografia. A maneira de se realizar as medições é, como já foi dito, utilizar um conjunto de estados coerentes conhecidos. Para o conjunto em que se permitiu a fase decair, não se observou nenhuma mudança.

Como não foi observada nenhuma dependência da fase, é necessário somente controlar a magnitude de α . Podemos escrever um operador que não dependa da fase como sendo:

$$\Pi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k^{(n)} |k\rangle\langle k| \quad (2.31)$$

o conjunto descrito pelos Π_n acima são compostos apenas por “matrizes” diagonais.

Podemos escrever uma equação que relaciona o conjunto de medições ($P_{D \times N}$), todos os estados de prova α ($F_{D \times M}$) e o conjunto de operadores desconhecidos ($\Pi_{M \times N}$)

$$P = F\Pi \quad (2.32)$$

Para os estados coerentes temos:

$$F_{i,k} = \frac{|\alpha_i|^{2k}}{k!} e^{-|\alpha_i|^2} \quad (2.33)$$

Na figura 2.7 está mostrado um esquema da montagem experimental utilizada para a caracterização dos detectores. Nessa montagem estão mostrados os elementos que foram utilizados para uma mudança na fase e atenuação. A dependência da distribuição de probabilidade vs. a magnitude do estado coerente ($|\alpha|^2$) foi realizada para o detector APD e para até oito clicks do detector TMD.

Pela construção do detector TMD, n clicks garante a presença de pelo menos n fótons no pulso.

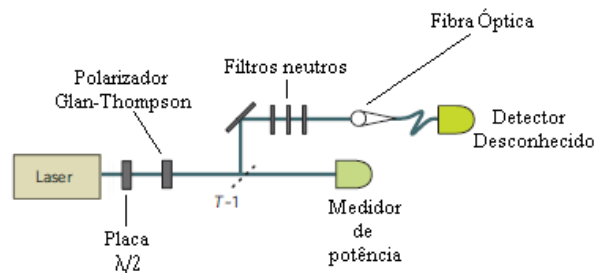


Figura 2.7: Esquema da montagem experimental utilizada na referência [17] para caracterização de dois detectores. A placa $\lambda/2$ e o polarizador são usados para variar a amplitude do estado coerente e os filtros neutros e a fibra óptica são usados como atenuadores.

A partir dos resultados obtidos (ver figura 2.8) e resolvendo um problema de otimização, foram encontrados os elementos diagonais $\theta_k^{(n)}$ que descrevem o conjunto $\{\Pi_n\}$. O resultado obtido está mostrado na figura 2.9

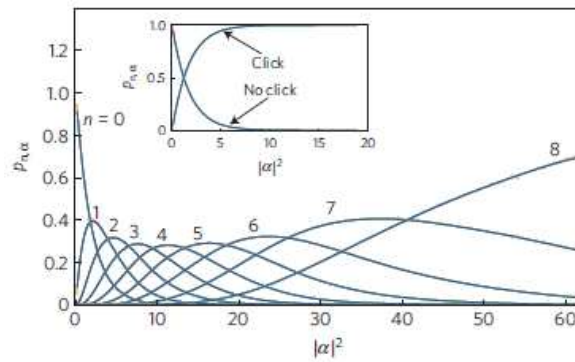


Figura 2.8: Resultado apresentado na referência [17] para a tomografia de detectores. O gráfico principal corresponde a medida de tomografia para o detector TMD e o menor para o detector APD. Os gráficos relacionam a probabilidade com o módulo quadrado da magnitude do estado coerente.

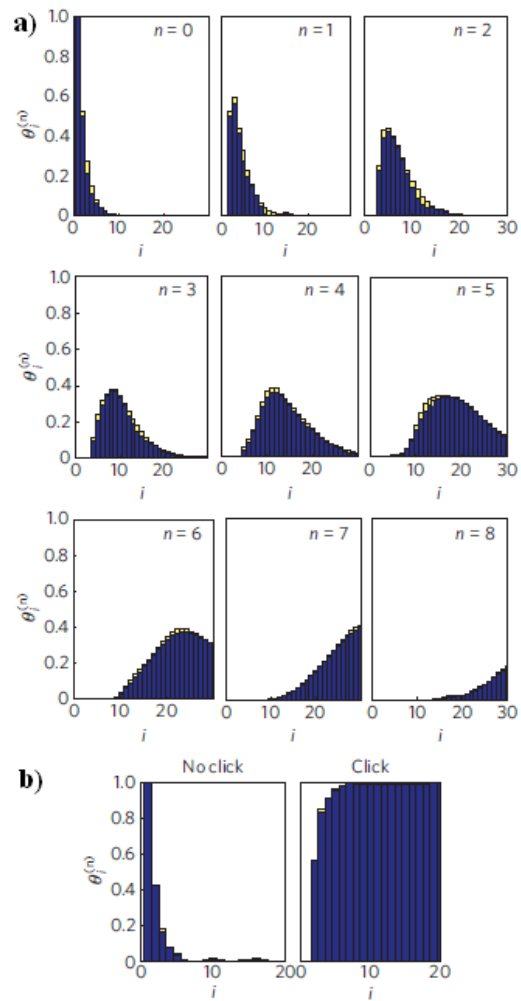


Figura 2.9: Diagonais para os POVM reconstruídos para a) o detector TMD construído e b) para o detector APD tradicional [17].

Capítulo 3

Modulador Espacial de luz e Fibras Ópticas

Neste capítulo será feita uma introdução ao Modulador Espacial de Luz (SLM), primeiramente, dando uma descrição dos tipos de cristais líquidos e suas principais características. Depois, irá se descrever o Modulador e as fibras ópticas usados no experimento de tomografia.

3.1 Cristais Líquidos

Os cristais líquidos correspondem a um material que se encontra em uma fase intermediária entre líquido e sólido. Eles exibem características dos dois estados, são fluídos como os líquidos e possuem algumas outras características de longo alcance como por exemplo, certa ordem orientacional. As moléculas que compõem esses cristais são moléculas orgânicas alongadas em um eixo [15].

Podemos citar três tipos de cristais líquidos [11]. Nos cristais conhecidos como cristais líquidos nemáticos as moléculas tendem a se organizar de forma paralela umas as outras, mesmo assim, as moléculas ainda podem se movimentar no fluido. Também é possível conseguirmos uma ordem na posição dessas moléculas. Os cristais que possuem ordenação em orientação e em posição são chamados de cristais líquidos esméticos. Ainda pode-se ter um terceiro tipo de cristal líquido, os colestéricos. Neles, os planos de moléculas

que compõem o cristal sofrem uma rotação helicoidal em torno de seu eixo. Na figura 3.1 podemos ver um esquema dos cristais descritos acima.

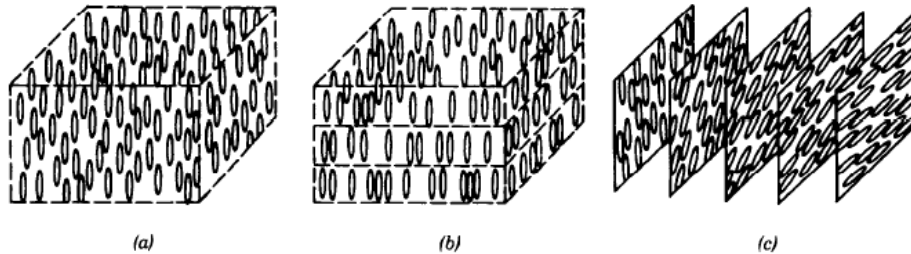


Figura 3.1: Organização molecular de alguns tipos de cristais líquidos a) nemáticos b) esméticos c) colestéricos

Os cristais líquidos são fluidos anisotrópicos, ou seja, suas propriedades variam com a direção. Por exemplo, a susceptibilidade elétrica paralela (ao longo do eixo alongado) é diferente da perpendicular. A diferença de susceptibilidade $\chi_a \equiv \chi_{\parallel} - \chi_{\perp}$ leva o cristal líquido a se orientar com o campo elétrico, com importantes conseqüências, como será discutido. Para $\chi_a > 0$, a orientação preferencial será paralela ao campo, caso $\chi_a < 0$, será perpendicular.

• Cristal Líquido Nemático Girado

Correspondem a um tipo especial de cristal líquido nemático. Possui grande aplicação em óptica, como por exemplo o modulador espacial e displays. Nesse cristal, a partir de forças externas é possível provocar uma rotação helicoidal em torno do seu eixo.

A diferença entre esses cristais e os colestéricos é que essa característica pode ser imposta no primeiro e no segundo é permanente. Alguns fatores, como por exemplo a aplicação de um campo elétrico, podem mudar a orientação das moléculas. Só isso já é capaz de causar mudanças drásticas em suas propriedades ópticas.

Esses cristais girados possuem simetria localmente uniaxial, com o eixo óptico paralelo a orientação das moléculas. Como a ordenação dessas moléculas no cristal tem profunda influência no comportamento da luz propagada

no material, as moléculas podem ser rearranjadas de forma a girar a polarização da luz incidente ou acrescentar um atraso entre as componentes do campo.

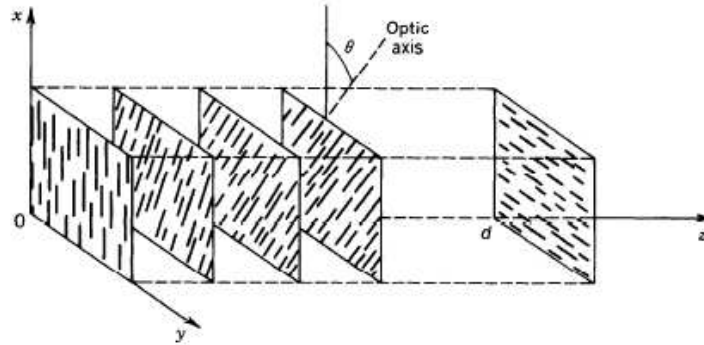


Figura 3.2: Propagação da luz por um cristal líquido nemático girado, para uma angulo de giro de 90° [11].

3.2 Propriedades Ópticas dos Cristais Líquidos Nemáticos Girados

Para facilitar o estudo desses cristais, já que são anisotrópicos e uniaxiais apenas localmente, é indicado dividirmos o material em camadas finas perpendiculares ao eixo de giro. Cada uma dessas finas camadas é considerada como um cristal uniaxial. Os Cristais Nemáticos Girados são capazes de girar a polarização da luz incidente, visto que quando o alinhamento molecular é rodado em cada camada, a polarização também é rodada.

O modelo descrito abaixo foi retirado da referência [11] e tem como objetivo mostrar de maneira simplificada como ocorre a mudança na polarização durante a propagação da luz no cristal líquido. Considerando que a direção de propagação é a mesma do eixo de giro do cristal (eixo z) e que o ângulo de giro varia linearmente com z ,

$$\theta = \alpha z, \quad (3.1)$$

nesse caso α é o coeficiente de giro dado em *graus/comprimento* e o ângulo θ corresponde ao ângulo entre o eixo óptico e a direção x . Por exemplo, em um cristal líquido de tamanho d , o ângulo de giro é αd

O coeficiente de atraso na fase é dado por:

$$\beta = (n_e - n_o)k_o, \quad (3.2)$$

onde n_e corresponde ao índice de refração extraordinário ou seja, índice de refração para a polarização paralela ao eixo óptico e n_o corresponde ao índice de refração ordinário, para polarização perpendicular ao eixo óptico.

A seguir será mostrado que um cristal líquido que tenha $\beta \gg \alpha$, isto é, vários ciclos de atrasos na fase são introduzidos antes que o eixo óptico gire apreciavelmente. Considere que o cristal líquido de comprimento d é dividido em N camadas iguais. A posição de cada camada é dada por $z = m\Delta z$ e o eixo óptico de cada camada faz um ângulo $\theta_m = m\Delta\theta$ com o eixo x , o índice m refere-se a camada m .

A matriz de Jones para a camada m é dada por:

$$\mathbf{T}_m = \mathbf{R}(-\theta_m)\mathbf{T}_r\mathbf{R}(\theta_m), \quad (3.3)$$

onde \mathbf{T}_r corresponde a matriz de Jones para o retardo com eixo na direção x

$$\mathbf{T}_r = \begin{bmatrix} \exp(-in_e k_o \Delta z) & 0 \\ 0 & \exp(-in_o k_o \Delta z) \end{bmatrix}.$$

A matriz $\mathbf{R}(\theta_m)$ corresponde a matriz de rotação para a camada m

$$\mathbf{R}(\theta_m) = \begin{bmatrix} \cos \theta_m & \sin \theta_m \\ -\sin \theta_m & \cos \theta_m \end{bmatrix}.$$

Reescrevendo \mathbf{T}_r em termos de β e considerando $(n_e + n_o)k_o/2 = \phi$, obtemos:

$$\mathbf{T}_r = \exp(-i\phi\delta z) \begin{bmatrix} \exp(-i\beta\frac{\Delta z}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(i\beta\frac{\Delta z}{2}) \end{bmatrix}.$$

A matriz de Jones resultante do produto das N camadas em que se foi dividido o cristal líquido é:

$$\mathbf{T} = \prod_{m=1}^N \mathbf{T}_m = \prod_{m=1}^N \mathbf{R}(-\theta_m) \mathbf{T}_r \mathbf{R}(\theta_m). \quad (3.4)$$

Como $\mathbf{R}(\theta_m)\mathbf{R}(-\theta_{m-1})=\mathbf{R}(\theta_m - \theta_{m-1})= \mathbf{R}(\Delta\theta)$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos(\theta_m) & \sin(\theta_m) \\ -\sin(\theta_m) & \cos(\theta_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_{m-1}) & \sin(\theta_{m-1}) \\ -\sin(\theta_{m-1}) & \cos(\theta_{m-1}) \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} \cos(\theta_m - \theta_{m-1}) & \sin(\theta_m - \theta_{m-1}) \\ -\sin(\theta_m - \theta_{m-1}) & \cos(\theta_m - \theta_{m-1}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Temos:

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}(-\theta_N) [\mathbf{T}_r \mathbf{R}(\Delta\theta)]^N \mathbf{R}(\theta_1). \quad (3.6)$$

Com

$$\mathbf{T}_r \mathbf{R}(\Delta\theta) = \begin{bmatrix} \exp(-i\beta\frac{\Delta z}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(i\beta\frac{\Delta z}{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha\Delta z) & \text{sen}(\alpha\Delta z) \\ -\text{sen}(\alpha\Delta z) & \cos(\alpha\Delta z) \end{bmatrix}.$$

Visto que $\alpha \ll \beta$:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} & \approx \mathbf{R}(-\theta_N) [\mathbf{T}_r]^N \mathbf{R}(\theta_1) = \mathbf{R}(-\alpha N \Delta z) \begin{bmatrix} \exp(-i\beta\frac{\Delta z}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(i\beta\frac{\Delta z}{2}) \end{bmatrix}^N \\ & = \mathbf{R}(-\alpha N \Delta z) \begin{bmatrix} \exp(-i\beta N \frac{\Delta z}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(i\beta N \frac{\Delta z}{2}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Considerando o limite de $N \rightarrow \infty$, $\Delta z \rightarrow 0$ e $N\Delta z \rightarrow d$, então:

$$\mathbf{T} \approx \mathbf{R}(-\alpha d) \begin{bmatrix} \exp(-i\beta\frac{d}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(i\beta\frac{d}{2}) \end{bmatrix}.$$

Temos então um atraso βd do eixo lento ao longo da direção x , seguido por um giro da polarização de αd . Portanto, vemos que o campo elétrico em um feixe de luz ao ser transmitido por um cristal líquido sofre um deslocamento de fase longitudinal e uma rotação em sua polarização.

3.3 Modulador Espacial de Luz - modelo LC-R 2500

No nosso experimento usamos um modulador espacial de luz modelo LC-R 2500 produzido pela Holoeye Photonics [24, 16]. Esse modulador é constituído basicamente de um microdisplay de cristal líquido sobre silício (LCoS) refletivo, com uma resolução de 1024 x 768 pixel (cada pixel possui 19 μm de lado). Esse modulador permite, dependendo da polarização incidente, modular amplitude e fase. Em nosso experimento porém, usamos elementos ópticos tal que o modular funciona, para uma certa faixa de tensão, apenas como um modulador de fase.

Além do LCD e de um controle eletrônico, o modulador possui uma saída DVI (*Digital Visual Interface*), que permite conectá-lo a uma placa de vídeo no computador. A partir de um software é possível controlarmos os parâmetros desejados e configurarmos o SLM.

No programa do computador associa-se uma escala de cinza escolhida a uma tensão, com a qual o pixel no SLM será energizado. É possível atribuímos 256 valores diferentes de tensão, ou seja 256 valores para a escala de cinza, assim é possível variarmos a intensidade e a fase da luz refletida no SLM.

A relação escala de cinza vs. tensão não é linear, por isso o programa possui uma curva Gama. Nessa curva, cada valor na escala de cinza é convertido em um valor correspondente de tensão. A partir dessa curva não linear, obtém-se uma variação linear da escala de cinza e da fase. É importante observarmos que a mudança na escala de cinza, ou seja, na fase, leva também a uma mudança na polarização da luz refletida.

Foram feitas medidas para caracterização do modulador. A montagem experimental utilizada, mostrada na figura 3.3, era constituída de um laser HeCd da Kimom, um cristal LiIO_3 , uma lente, um modulador espacial de luz LC-R2500, um polarizador Glan-Laser, acopladores com fibra óptica monomodo da TorLabs e dois detectores de avalanche. Após ligado, é necessário esperarmos cerca de 30 minutos para o SLM e o laser adquirirem estabilidade térmica.

O feixe de laser ultra-violeta ($\lambda = 325\text{nm}$) ao passar pelo cristal gera pares

de fótons no visível ($\lambda = 650\text{nm}$) com mesma polarização, através do processo óptico não-linear da conversão paramétrica descendente espontânea tipo I. Um dos fótons do par é detectado diretamente pelo detector 2 e o segundo fóton é detectado pelo detector 1, após ser refletido pelo SLM, passar pelo polarizador e ser transmitido pela fibra óptica. Obtemos simultaneamente as contagens no detector 1 e 2 e contagens de coincidências entre eles.

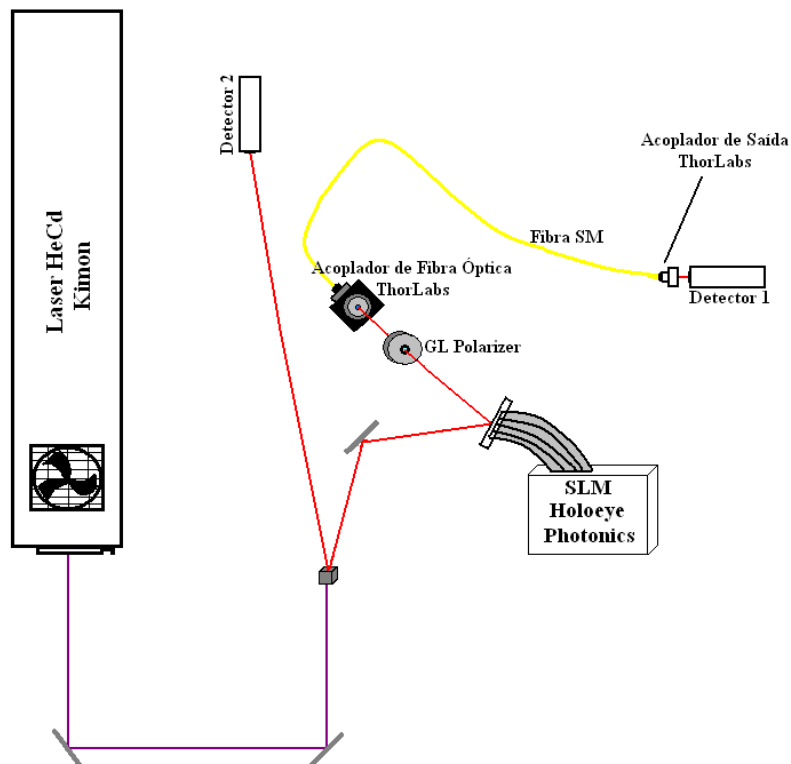


Figura 3.3: Montagem Experimental

Nesse experimento, para um determinado ângulo do polarizador, construímos a curva da intensidade vs. fase. Esse procedimento foi realizado para vários ângulos do polarizador. Obtivemos assim, várias curvas. Algumas delas estão incluídas na figura 3.4.

Podemos observar nesses gráficos que a mudança no ângulo do polarizador é capaz de provocar uma mudança abrupta no perfil da curva de caracteriza-

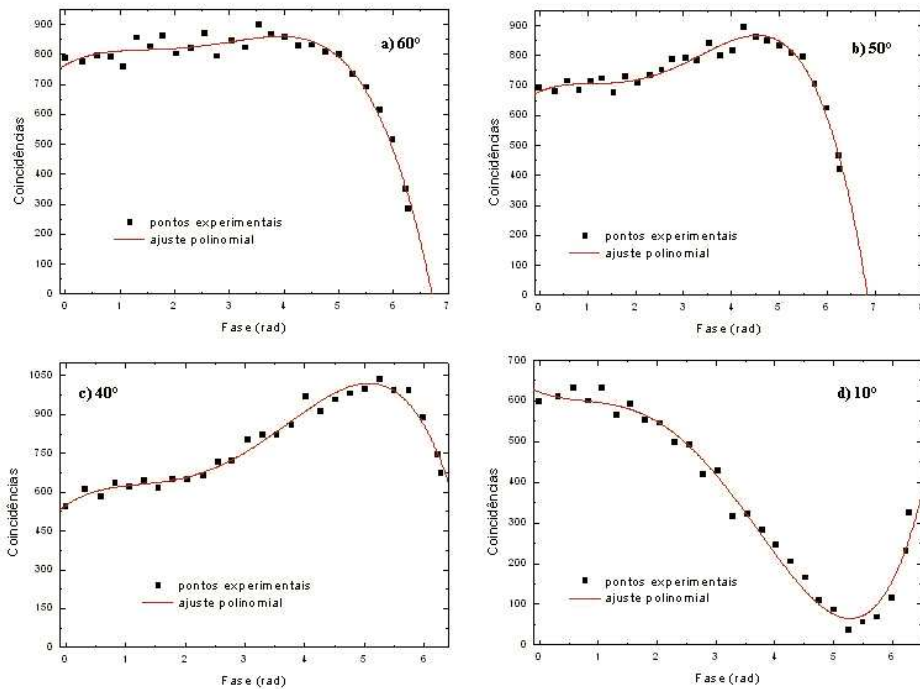


Figura 3.4: Curvas de caracterização do SLM para diversos ângulos do polarizador

ção. Isso acontece por que, ao aplicarmos a tensão que irá acrescentar a fase desejada, as moléculas que constituem o cristal líquido mudam a orientação e com isso ocorre uma mudança na polarização da luz refletida pelo SLM.

Vamos supor agora que interferimos um feixe refletido pelo SLM com outro feixe de luz de fase constante. Gostaríamos que ao variar a fase do feixe refletido pelo SLM, as franjas de interferência do padrão se deslocassem

A caracterização foi feita para certificarmos que ao observarmos um mínimo na visibilidade (interferência destrutiva), ele seria devido apenas a diferença de fase acrescentada pelo SLM e não por causa da rotação na polarização da luz refletida por este.

Nota-se que para o ângulo de 60° do polarizador, o número de fótons transmitidos pelo polarizador é quase constante entre 0 e 5 rad (figura 3.4), indicando que para a luz transmitida o SLM funciona como um modulador de fase.

O SLM é utilizado no experimento da tomografia para acrescentarmos uma diferença de fase entre as fendas de uma fenda dupla que produzem o qubit. A configuração experimental era tal que a imagem da fenda no SLM receberia fases diferentes em cada uma das fendas, depois passaria pelo polarizador e entraria em uma fibra com saída para o detector.

Para assegurarmos que as fases fossem acrescentadas corretamente, foi colocado na posição do modulador uma fenda simples. Essa fenda simples foi varrida e observou-se no detector posicionado atrás dela a formação da imagem da fenda dupla. A imagem é observada através das medidas da contagens e coincidências em função do deslocamento transversal da fenda simples de largura $100\mu m$. Essa imagem está mostrada na figura 3.5. Com essa medida estamos certificando-nos que a imagem está sendo formada na posição onde o SLM será colocado.

Nesta medida, a fenda dupla (com largura de $100\mu m$ e separação entre as fendas de $200\mu m$) foi posicionada a uma distância de 20cm em relação ao centro do cristal. Para formarmos a imagem das fendas duplas utilizamos uma lente de $f = 10cm$, posicionada 20cm após a fenda dupla com a imagem sendo formada a 20 cm em relação a lente

Posteriormente com toda a montagem realizada, foi feita uma medida da imagem das fendas detectando a luz refletida pelo SLM (figura 3.6); nela o modulador foi usado apenas como uma espécie de espelho, já que não acrescentava nenhuma diferença de fase.

Uma medida que também teve que ser feita foi o número de fótons refletidos pelo SLM quando a imagem da fenda dupla é projetada sobre o SLM e fases diferentes são acrescentadas em cada uma das fendas da fenda dupla. Essa medida foi realizada para duas situações diferentes. Em um desses casos deixamos a primeira fenda com fase zero e vamos variando a fase da segunda fenda com o SLM (fase normal), no outro caso deixamos a segunda fenda com fase zero e variamos a fase da primeira (fase invertida). O resultado desta medida está mostrado na figura 3.7. Nesse resultado observa-se que as curvas desta medida estão um pouco deslocadas entre si, indicando que uma pequena diferença de fase já está sendo acrescentada nos próprios caminhos de propagação. Esse resultado é particularmente importante na escolha das diferenças de fase na tomografia.

3.4 Fibras Ópticas

As fibra ópticas são formadas por um núcleo e uma casca (figura 3.8). O índice de refração do material da casca deve ser menor que o do material do núcleo. A luz propaga-se na fibra óptica por reflexões sucessivas, conforme pode ser observado na figura 3.9. Geralmente, a fibra é revestida para proteção mecânica e ambiental, formando-se um cabo óptico. Existem duas classes principais de fibras, as multimodos e as monomodos.

As fibras multimodos possuem vários modos de propagação, e podem ser classificadas como em índice degrau ou em índice gradual. Nas fibras com índice degrau, o índice de refração do núcleo da fibra cai abruptamente na casca. Já para as fibras com índice gradual, o índice de refração varia gradualmente do valor máximo no centro da fibra até o valor do índice de refração da casca. As fibras monomodos, geralmente menores (da ordem de alguns micrometros) e com maior capacidade de transmissão permitem apenas um modo de propagação.

Durante a propagação, temos perdas nas fibras por absorção e por imperfeições no material. As fibras ópticas possuem as chamadas *janelas de transmissão*, que são as regiões espectrais com perda mínima. No nosso experimento foram usadas fibras com janela de transmissão em torno de 630nm.

• Abertura Numérica

Toda fibra óptica possui um ângulo de aceitação, que corresponde ao ângulo limite no qual um raio penetra no núcleo da fibra e é transmitido por diversas reflexões internas. Para fibras multimodo, o ângulo de aceitação da fibra é:

$$\theta_a = \text{sen} \left[\frac{\sqrt{(n_1^2 - n_2^2)}}{n_0} \right]^{-1} \quad (3.7)$$

onde n_0 corresponde ao índice de refração do meio em que se encontra a fibra, geralmente, o ar, n_1 corresponde ao índice de refração do material do núcleo e n_2 corresponde ao índice de refração do material da casca.

A partir do ângulo de aceitação é possível definirmos a abertura numérica da fibra como:

$$AN = n_0 \operatorname{sen} \theta_a = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (3.8)$$

A abertura numérica é uma medida da capacidade de uma fibra óptica de capturar a luz. Valores típicos de abertura são de 0,2 a 0,29 para fibras de vidro e até 0,5 para fibras de plástico. Para fibras com abertura numérica muito grande, existe também uma contribuição significativa dos chamados "skew rays" (raios inclinados), que são raios que se propagam pela fibra sem passar por seu eixo, geralmente na região próxima da casca.

• Tipos de fibras

- Multimodo com Índice de Refração Degrau: correspondem ao tipo mais simples de fibra. Nela, ocorre uma variação abrupta do índice de refração, além da presença de muitos modos de propagação. Suas dimensões relativamente grandes se comparadas com as monomodos e sua capacidade de transmissão é baixa, apesar de sua capacidade de captar a luz, por isso são usadas apenas para pequenas distancias.
- Multimodo com Índice de Refração Gradual: a variação gradual do índice de refração do núcleo, permite uma melhor transmissão se comparada com a degrau. Suas dimensões também são menores. Também apresentam muitos modos de propagação.
- Monomodo possuem a melhor capacidade de transmissão e as menores dimensões. Sua principal desvantagem é a dificuldade de manuseio devido a alta precisão exigida para conexões e acoplamento com as fontes e detectores. As aproximações de óptica geométrica não são válidas para esse tipo de fibra, já que suas dimensões são da ordem de alguns comprimentos de onda da luz incidente (inferiores a $10\mu\text{m}$). Para essas fibras, podemos definir o comprimento de onda de corte como sendo o comprimento de onda a partir do qual a fibra apresenta comportamento multimodo.

• Atenuação

A atenuação ou perdas de transmissão da luz ao propagar pela fibra é uma característica crucial na determinação da distância entre fonte e receptor e é dada por:

$$\alpha = \frac{-10}{L} \log(P_i/P_o) \quad (3.9)$$

onde P_i corresponde a potência de entrada e P_o a potência luminosa de saída na fibra de comprimento L dada em km. A unidade de α é dB/km.

As principais perdas nas fibras óptica são devido a: absorções, espalhamentos e curvatura da fibra, além das perdas no acoplamento e conexões.

3.5 Estudo das curvas de visibilidade para as fibras multimodo e monomodo

A visibilidade do padrão de interferência de fenda dupla foi realizada da forma mostrada na figura 1.5. O número de fótons em coincidência transmitidos pela fibra em função da diferença de fase entre as fendas foi detectado. A visibilidade foi calculada através dos números de fótons coincidentes máximo e mínimo com a expressão $V = \frac{C_{max} - C_{min}}{C_{max} + C_{min}}$.

Neste estudo observamos que a visibilidade, mesmo utilizando um filtro de frequência de 650 ± 10 nm, é muito baixa para o caso da fibra multimodo (figura 3.10).

Analisamos duas situações: a) o laser foi focalizado no cristal; b) o feixe de laser não foi focalizado. Ao focalizarmos o feixe de laser no cristal, alteramos a coerência espacial dos fótons gerados [11, 33]

Realizamos as mesmas medidas utilizando também uma fibra monomodo, o resultado está mostrado na figura 3.11. Nesse resultado, mostramos que para o ângulo de 60° escolhido no polarizador, obtivemos uma visibilidade de quase 70 % quando estamos com e sem filtro no detector. Podemos observar então, que a própria fibra monomodo funciona como uma espécie de filtro de frequência.

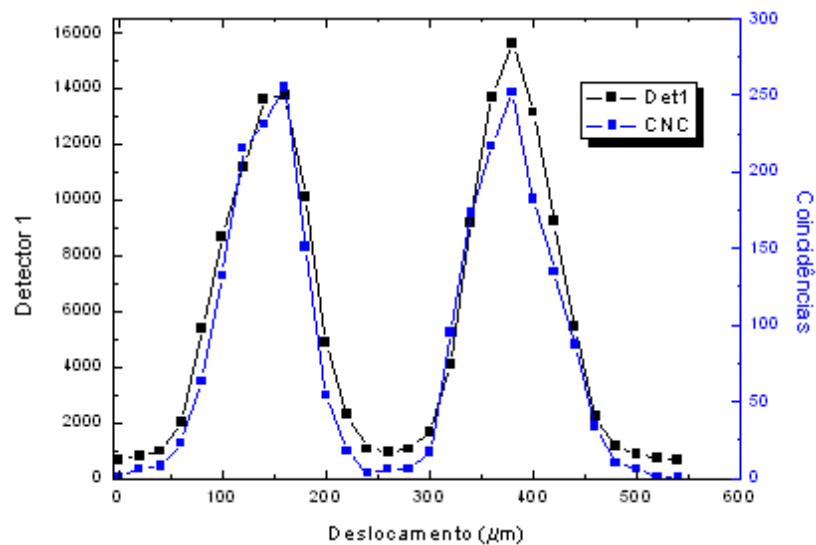


Figura 3.5: Medida feita posicionando uma fenda simples na posição na qual o SLM será colocado. Essa medida permitiu verificar que a imagem está sendo formada na posição em que será colocado o SLM. Tempo de aquisição de cada ponto no gráfico foi de 10s.

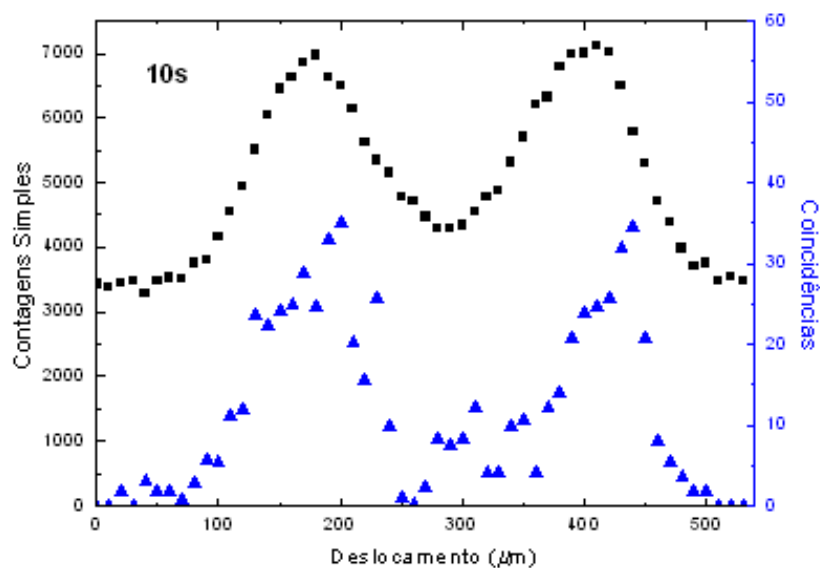


Figura 3.6: Imagem da fenda dupla utilizando o SLM como um espelho. O tempo de aquisição de cada ponto no gráfico foi de 10s.

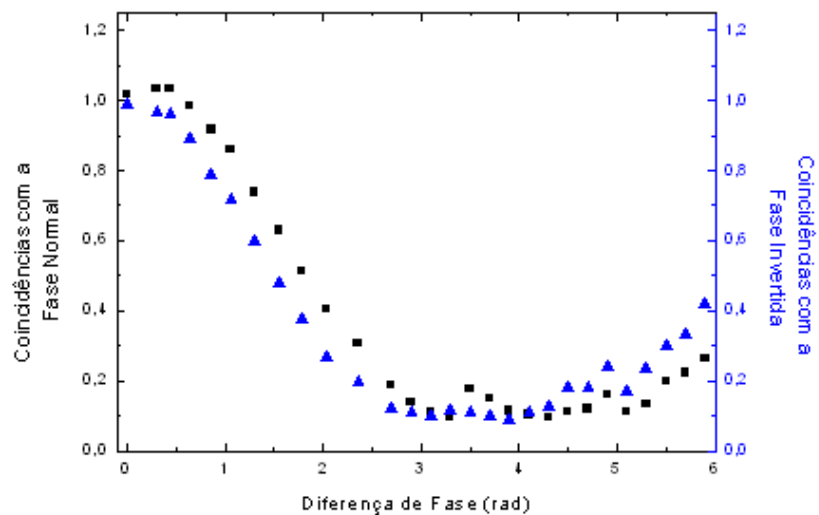


Figura 3.7: Medidas de visibilidade utilizando uma fenda dupla e uma fibra monomodo. O tempo de aquisição de cada um desses pontos foi de 30s.

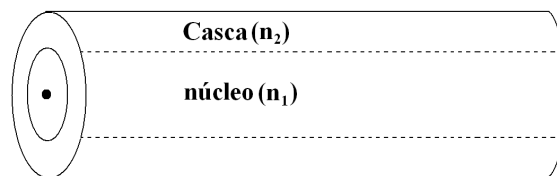


Figura 3.8: Esquema simplificado de uma fibra óptica

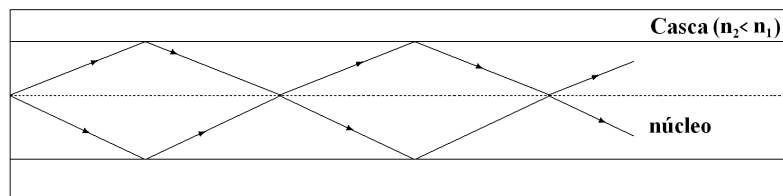


Figura 3.9: Fibra Óptica - Corte longitudinal

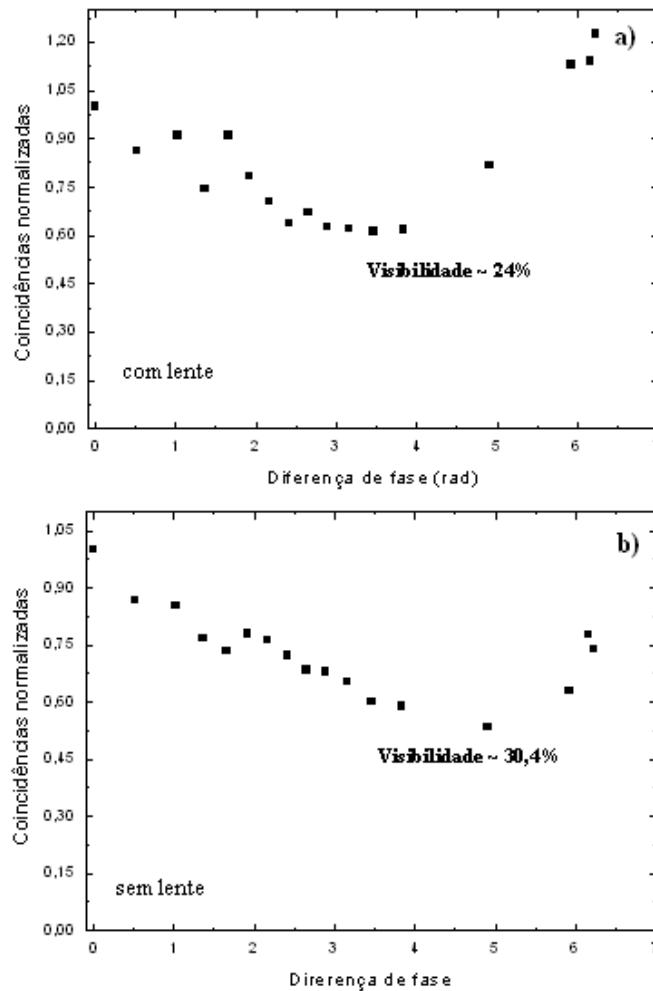


Figura 3.10: Medida da visibilidade do padrão de interferência de dois feixes de luz ao serem transmitidos por uma fenda dupla com a diferença de fase entre elas variável. Foram utilizadas uma fibra multimodo e filtros de frequência de (650 ± 10) nm nos detectores. a) Nessa medida o laser foi focalizado no cristal e observamos uma visibilidade muito baixa de aproximadamente 24% e b) a visibilidade sem a lente, usada para focalizar o feixe de laser, também é bastante baixa (30,5 %).

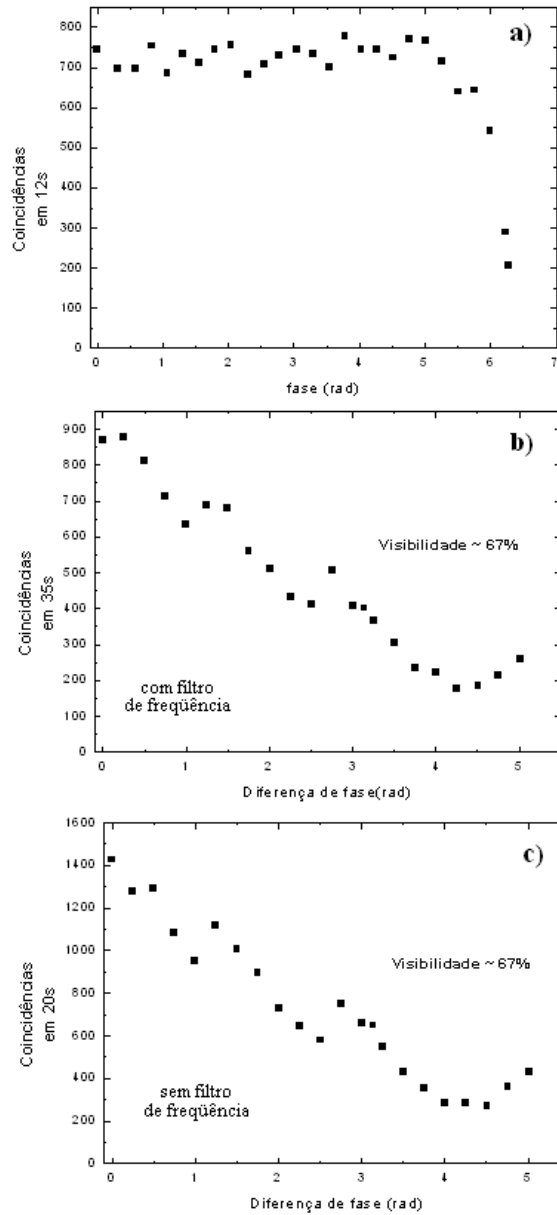


Figura 3.11: a) Medida de calibração para um ângulo de 60° no polarizador e utilizando uma fibra monomodo, o tempo de aquisição foi de 12 s para cada ponto, b) medida da visibilidade do padrão de interferência da fenda dupla em função da diferença de fase entre os caminhos, com filtro de frequência de (650 ± 10) nm no detector e tempo de aquisição de 35 s e c) visibilidade sem o filtro de frequência, o tempo de aquisição de cada ponto foi de 20 s. Podemos notar que a visibilidade para a situação com e sem o filtro é praticamente a mesma (67%), a principal diferença é que as contagens com o filtro caem significativamente.

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho estudamos estados espaciais gerados pelas correlações entre os fótons produzidos pela conversão paramétrica descendente espontânea. Esses estados foram gerados experimentalmente utilizando um par de fendas múltiplas e foram feitas algumas medidas. Nelas observamos as correlações espaciais dos fótons transmitidos. Confirmamos a condicionalidade das franjas do padrão de interferência para esses estados nas medidas do padrão de interferência condicional.

Realizamos toda a descrição matemática para a tomografia de um e de dois qubits. Analisamos a relação entre as probabilidades e os dados que podem ser obtidos experimentalmente. Observamos, que por causa da metodologia experimental utilizada para a atenuação das bases, é necessária uma medida de calibração.

Todo o trabalho experimental iniciado nesta dissertação segue em andamento no laboratório, e após sua implementação ser concluída, a generalização para dimensões maiores será simples, já que consiste em trocar as fendas duplas por múltiplas, gerar a imagem com a fase no SLM, além de introduzirmos uma atenuação entre os estados de fenda.

As dificuldades em implementar as medidas de tomografia para dimensões maiores estão relacionadas ao fato dos cálculos ficarem muito extensos, além do número de medidas crescer muito.

A principal perspectiva do trabalho, utilizando o conhecimento adquirido será a realização de medidas de tomografia para dois qubits espaciais. Após a medida de tomografia, poderemos realizar um experimento de desigualdade de Bell. Também será feita uma caracterização mais completa do SLM, o que consiste em determinar seus parâmetros de Stokes. A determinação desses parâmetros também pode ser vista como uma espécie de tomografia.

Apêndice A

Cálculo da Tomografia Quântica de Dois qubits

Para o caso de dois qubits, a matriz densidade que representa o estado pode ser representada com sendo:

$$\rho = \sum_{\mu,\nu} B_{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}. \quad (\text{A.1})$$

A matriz densidade pode ser escrita como:

$$\rho = I + \rho_{real} + i\rho_{imag}, \quad (\text{A.2})$$

nesta equação I representa a matriz identidade, ρ_{real} representa os outros termos da parte real e ρ_{imag} representa a parte imaginária de ρ .

A matriz que corresponde a ρ_{real} é

$$\begin{pmatrix} B_3 + B_{12} + B_{15} & B_1 + B_{13} & B_4 + B_7 & B_5 - B_{10} \\ B_1 + B_{13} & B_{12} - B_3 - B_{15} & B_5 + B_{10} & B_4 - B_7 \\ B_4 + B_7 & B_5 + B_{10} & B_3 - B_{12} - B_{15} & B_1 - B_{13} \\ B_5 - B_{10} & B_4 - B_7 & B_1 - B_{13} & B_{15} - B_3 - B_{12} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

A matriz a seguir representa a parte imaginária de ρ (ρ_{imag}) é

$$\begin{pmatrix} 0 & -(B_2 + B_{14}) & -(B_8 + B_{11}) & -(B_6 + B_9) \\ (B_2 + B_{14}) & 0 & -(B_9 - B_6) & -(B_8 - B_{11}) \\ (B_8 + B_{11}) & (B_9 - B_6) & 0 & -(B_2 - B_{14}) \\ (B_6 + B_9) & (B_8 - B_{11}) & (B_2 - B_{14}) & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Para encontrarmos os operadores Π_{ij} que representam as medidas no formalismo POVM, temos primeiramente que encontrar o conjunto de todos os vetores $|\psi_i \psi_j\rangle$ que representam o produto tensorial dos estados representados pelos vértices dos tetraedros associados aos dois qubits.

$$|\psi_1 \psi_1\rangle = |00\rangle,$$

$$|\psi_1 \psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|00\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|01\rangle,$$

$$|\psi_1 \psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|00\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i2\pi/3}|01\rangle,$$

$$|\psi_1 \psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|00\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}e^{-i2\pi/3}|01\rangle,$$

$$|\psi_2 \psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|00\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|10\rangle,$$

$$|\psi_2 \psi_2\rangle = \frac{1}{3}|00\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3}|01\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3}|10\rangle + \frac{2}{3}|11\rangle,$$

$$|\psi_2 \psi_3\rangle = \frac{1}{3}|00\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i2\pi/3}|01\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3}|10\rangle + \frac{2}{3}e^{i2\pi/3}|11\rangle,$$

$$|\psi_2 \psi_4\rangle = \frac{1}{3}|00\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-i2\pi/3}|01\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3}|10\rangle + \frac{2}{3}e^{-i2\pi/3}|11\rangle,$$

$$|\psi_3 \psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|00\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i2\pi/3}|10\rangle,$$

$$|\psi_3 \psi_2\rangle = \frac{1}{3}|00\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3}|01\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i2\pi/3}|10\rangle + \frac{2}{3}e^{i2\pi/3}|11\rangle,$$

$$|\psi_3 \psi_3\rangle = \frac{1}{3}|00\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i2\pi/3}|01\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i2\pi/3}|10\rangle + \frac{2}{3}e^{i4\pi/3}|11\rangle,$$

$$|\psi_3 \psi_4\rangle = \frac{1}{3}|00\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-i2\pi/3}|01\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i2\pi/3}|10\rangle + \frac{2}{3}|11\rangle,$$

$$|\psi_4 \psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|00\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}e^{-i2\pi/3}|10\rangle,$$

$$|\psi_4 \psi_2\rangle = \frac{1}{3}|00\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3}|01\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-i2\pi/3}|10\rangle + \frac{2}{3}e^{-i2\pi/3}|11\rangle,$$

$$|\psi_4 \psi_3\rangle = \frac{1}{3}|00\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i2\pi/3}|01\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-i2\pi/3}|10\rangle + \frac{2}{3}|11\rangle,$$

$$|\psi_4 \psi_4\rangle = \frac{1}{3}|00\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-i2\pi/3}|01\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-i2\pi/3}|10\rangle + \frac{2}{3}e^{-i4\pi/3}|11\rangle.$$

As matrizes que representam os operadores $|\psi_i \psi_j\rangle\langle\psi_i \psi_j|$ serão:

$$|\psi_1 \psi_1\rangle\langle\psi_1 \psi_1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|\psi_1 \psi_2\rangle\langle\psi_1 \psi_2| = \begin{pmatrix} 1/3 & -\sqrt{2}/3 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|\psi_1 \psi_3\rangle\langle\psi_1 \psi_3| = \begin{pmatrix} 1/3 & -\sqrt{2}/3e^{i2\pi/3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/3e^{-i2\pi/3} & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|\psi_1 \psi_4\rangle\langle\psi_1 \psi_4| = \begin{pmatrix} 1/3 & -\sqrt{2}/3e^{-i2\pi/3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/3e^{i2\pi/3} & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|\psi_2 \psi_1\rangle\langle\psi_2 \psi_1| = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -\sqrt{2}/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|\psi_2 \psi_2\rangle\langle\psi_2 \psi_2| = \begin{pmatrix} 1/9 & -\sqrt{2}/9 & -\sqrt{2}/9 & 2/9 \\ -\sqrt{2}/9 & 2/9 & 2/9 & -2\sqrt{2}/9 \\ -\sqrt{2}/9 & 2/9 & 2/9 & -2\sqrt{2}/9 \\ 2/9 & -2\sqrt{2}/9 & -2\sqrt{2}/9 & 4/9 \end{pmatrix},$$

$$|\psi_2 \psi_3\rangle\langle\psi_2 \psi_3| =$$

$$\begin{pmatrix} 1/9 & -\sqrt{2}/9e^{i2\pi/3} & -\sqrt{2}/9 & 2/9e^{i2\pi/3} \\ -\sqrt{2}/9e^{-i2\pi/3} & 2/9 & 2/9e^{-i2\pi/3} & -2\sqrt{2}/9 \\ -\sqrt{2}/9 & 2/9e^{i2\pi/3} & 2/9 & -2\sqrt{2}/9e^{i2\pi/3} \\ 2/9e^{-i2\pi/3} & -2\sqrt{2}/9 & -2\sqrt{2}/9e^{-i2\pi/3} & 4/9 \end{pmatrix},$$

$$|\psi_2 \psi_4\rangle\langle\psi_2 \psi_4| =$$

$$\begin{pmatrix} 1/9 & -\sqrt{2}/9e^{-i2\pi/3} & -\sqrt{2}/9 & 2/9e^{-i2\pi/3} \\ -\sqrt{2}/9e^{i2\pi/3} & 2/9 & 2/9e^{i2\pi/3} & -2\sqrt{2}/9 \\ -\sqrt{2}/9 & 2/9e^{-i2\pi/3} & 2/9 & -2\sqrt{2}/9e^{-i2\pi/3} \\ 2/9e^{i2\pi/3} & -2\sqrt{2}/9 & -2\sqrt{2}/9e^{i2\pi/3} & 4/9 \end{pmatrix},$$

$$|\psi_3 \psi_1\rangle\langle\psi_3 \psi_1| = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -\sqrt{2}/3e^{i2\pi/3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/3e^{i2\pi/3} & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|\psi_3 \psi_2\rangle\langle\psi_3 \psi_2| =$$

$$\begin{pmatrix} 1/9 & -\sqrt{2}/9 & -\sqrt{2}/9e^{i2\pi/3} & 2/9e^{i2\pi/3} \\ -\sqrt{2}/9 & 2/9 & 2/9e^{i2\pi/3} & -2\sqrt{2}/9e^{i2\pi/3} \\ -\sqrt{2}/9e^{-i2\pi/3} & 2/9e^{-i2\pi/3} & 2/9 & -2\sqrt{2}/9 \\ 2/9e^{-i2\pi/3} & -2\sqrt{2}/9e^{-i2\pi/3} & -2\sqrt{2}/9 & 4/9 \end{pmatrix},$$

$$|\psi_3 \psi_3\rangle\langle\psi_3 \psi_3| =$$

$$\begin{pmatrix} 1/9 & -\sqrt{2}/9e^{i2\pi/3} & -\sqrt{2}/9e^{i2\pi/3} & 2/9e^{i4\pi/3} \\ -\sqrt{2}/9e^{-i2\pi/3} & 2/9 & 2/9 & -2\sqrt{2}/9e^{i2\pi/3} \\ -\sqrt{2}/9e^{-i2\pi/3} & 2/9 & 2/9 & -2\sqrt{2}/9e^{i2\pi/3} \\ 2/9e^{-i4\pi/3} & -2\sqrt{2}/9e^{-i2\pi/3} & -2\sqrt{2}/9e^{-i2\pi/3} & 4/9 \end{pmatrix},$$

$$|\psi_3 \psi_4\rangle\langle\psi_3 \psi_4| =$$

$$\begin{pmatrix} 1/9 & -\sqrt{2}/9e^{i2\pi/3} & -\sqrt{2}/9e^{i2\pi/3} & 2/9 \\ -\sqrt{2}/9e^{-i2\pi/3} & 2/9 & 2/9e^{i4\pi/3} & -2\sqrt{2}/9e^{-i2\pi/3} \\ -\sqrt{2}/9e^{-i2\pi/3} & 2/9e^{-i4\pi/3} & 2/9 & -2\sqrt{2}/9e^{-i2\pi/3} \\ 2/9 & -2\sqrt{2}/9e^{i2\pi/3} & -2\sqrt{2}/9e^{i2\pi/3} & 4/9 \end{pmatrix},$$

$$|\psi_4 \psi_1\rangle\langle\psi_4 \psi_1| = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -\sqrt{2}/3e^{-i2\pi/3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/3e^{i2\pi/3} & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|\psi_4 \psi_2\rangle\langle\psi_4 \psi_2| =$$

$$\begin{pmatrix} 1/9 & -\sqrt{2}/9 & -\sqrt{2}/9e^{-i2\pi/3} & 2/9e^{-i2\pi/3} \\ -\sqrt{2}/9 & 2/9 & 2/9e^{-i2\pi/3} & -2\sqrt{2}/9e^{-i2\pi/3} \\ -\sqrt{2}/9e^{i2\pi/3} & 2/9e^{i2\pi/3} & 2/9 & -2\sqrt{2}/9 \\ 2/9e^{i2\pi/3} & -2\sqrt{2}/9e^{i2\pi/3} & -2\sqrt{2}/9 & 4/9 \end{pmatrix},$$

$$|\psi_4 \psi_3\rangle\langle\psi_4 \psi_3| =$$

$$\begin{pmatrix} 1/9 & -\sqrt{2}/9e^{-i2\pi/3} & -\sqrt{2}/9e^{-i2\pi/3} & 2/9 \\ -\sqrt{2}/9e^{i2\pi/3} & 2/9 & 2/9e^{-i4\pi/3} & -2\sqrt{2}/9e^{i2\pi/3} \\ -\sqrt{2}/9e^{i2\pi/3} & 2/9e^{i4\pi/3} & 2/9 & -2\sqrt{2}/9e^{i2\pi/3} \\ 2/9 & -2\sqrt{2}/9e^{-i2\pi/3} & -2\sqrt{2}/9e^{-i2\pi/3} & 4/9 \end{pmatrix},$$

$$|\psi_4 \psi_4\rangle\langle\psi_4 \psi_4| = \begin{pmatrix} 1/9 & -\sqrt{2}/9e^{-i2\pi/3} & -\sqrt{2}/9e^{-i2\pi/3} & 2/9e^{-i4\pi/3} \\ -\sqrt{2}/9e^{i2\pi/3} & 2/9 & 2/9 & -2\sqrt{2}/9e^{-i2\pi/3} \\ -\sqrt{2}/9e^{i2\pi/3} & 2/9 & 2/9 & -2\sqrt{2}/9e^{-i2\pi/3} \\ 2/9e^{i4\pi/3} & -2\sqrt{2}/9e^{i2\pi/3} & -2\sqrt{2}/9e^{i2\pi/3} & 4/9 \end{pmatrix}.$$

Realizando a soma $\sum_{i,j} |\psi_i \psi_j\rangle\langle\psi_i \psi_j|$ obtemos

$$\rho = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I. \quad (\text{A.5})$$

Isso ocorre já que temos $(1 + e^{i2\pi/3} + e^{-i2\pi/3}) = 0$ e $(1 + e^{i4\pi/3} + e^{-i4\pi/3}) = 0$. A matriz I representa a matriz identidade.

Os operadores do POVM que representam a medição serão:

$$\Pi_{ij} = \frac{1}{4} |\psi_i \psi_j\rangle\langle\psi_i \psi_j|. \quad (\text{A.6})$$

O termo $1/4$ aparece por construção, pois as matrizes $|\psi_i \psi_j\rangle\langle\psi_i \psi_j|$ não somam a identidade.

Como já foi visto no capítulo 2 a fórmula que relaciona probabilidade com os operadores P_{ij} é

$$p_{ij} = \text{Tr}(\Pi_{ij}\rho) = \frac{1}{4}\text{Tr}(|\psi_i\psi_j\rangle\langle\psi_i\psi_j| \rho) = \frac{1}{4}\langle\psi_i\psi_j| \rho |\psi_i\psi_j\rangle. \quad (\text{A.7})$$

$$p_{11} = \frac{1}{16}(1 + B_{12} + B_{15} + B_3),$$

$$p_{12} = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{3}(3 - 2\sqrt{2}B_1 + 3B_{12} - 2\sqrt{2}B_{13} - B_{15} - B_3)\right),$$

$$p_{13} = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{3}(3 + \sqrt{2}B_1 + 3B_{12} + \sqrt{2}B_{13} - \sqrt{6}B_{14} - B_{15} - \sqrt{6}B_2 - B_3)\right),$$

$$p_{14} = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{3}(3 + \sqrt{2}B_1 + 3B_{12} + \sqrt{2}B_{13} + \sqrt{6}B_{14} - B_{15} + \sqrt{6}B_2 - B_3)\right),$$

$$p_{21} = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{3} (3 - B_{12} - B_{15} + 3B_3 + 2\sqrt{2}B_4 + 2\sqrt{2}B_7) \right),$$

$$p_{22} = \frac{1}{144} (9 - 6\sqrt{2}B_1 - 3B_{12} + 2\sqrt{2}B_{13} + B_{15} - 3B_3 - 6\sqrt{2}B_4 + 8B_5 + 2\sqrt{2}B_7),$$

$$p_{23} = \frac{1}{144} (9 + 3\sqrt{2}B_1 - 3B_{12} - \sqrt{2}B_{13} + \sqrt{6}B_{14} + B_{15} - 3\sqrt{6}B_2 - \\ - 3B_3 - 6\sqrt{2}B_4 - 4B_5 + 4\sqrt{3}B_6 + 2\sqrt{2}B_7),$$

$$p_{24} = \frac{1}{144} (9 + 3\sqrt{2}B_1 - 3B_{12} - \sqrt{2}B_{13} - \sqrt{6}B_{14} + B_{15} + 3\sqrt{6}B_2 - \\ - 3B_3 - 6\sqrt{2}B_4 - 4B_5 - 4\sqrt{3}B_6 + 2\sqrt{2}B_7),$$

$$p_{31} = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{3} (3 - \sqrt{6}B_{11} - B_{12} - B_{15} + 3B_3 + \sqrt{2}B_4 + \sqrt{2}B_7 - \sqrt{6}B_8) \right),$$

$$p_{32} = \frac{1}{144} (9 - 6\sqrt{2}B_1 + \sqrt{6}B_{11} - 3B_{12} + 2\sqrt{2}B_{13} + B_{15} - 3B_3 + \\ + 3\sqrt{2}B_4 - 4B_5 - \sqrt{2}B_7 - 3\sqrt{6}B_8 + 4\sqrt{3}B_9),$$

$$p_{33} = \frac{1}{144} (9 + 3\sqrt{2}B_1 + 6B_{10} + \sqrt{6}B_{11} - 3B_{12} - \sqrt{2}B_{13} + \sqrt{6}B_{14} + B_{15} - 3\sqrt{6}B_2 - \\ - 3B_3 + 3\sqrt{2}B_4 + 2B_5 - 2\sqrt{3}B_6 - \sqrt{2}B_7 - 3\sqrt{6}B_8 - 2\sqrt{3}B_9),$$

$$p_{34} = \frac{1}{144} (9 + 3\sqrt{2}B_1 - 6B_{10} + \sqrt{6}B_{11} - 3B_{12} - \sqrt{2}B_{13} - \sqrt{6}B_{14} + B_{15} + 3\sqrt{6}B_2 - 3B_3 +$$

$$+3\sqrt{2}B_4 + 2B_5 + 2\sqrt{3}B_6 - \sqrt{2}B_7 - 3\sqrt{6}B_8 - 2\sqrt{3}B_9),$$

$$p_{41} = \frac{1}{144}(5 + 3\sqrt{2}B_{11} + B_{12} + B_{15} + 5B_3 + \sqrt{6}B_4 + \sqrt{6}B_7 + 3\sqrt{2}B_8),$$

$$p_{42} = \frac{1}{144}(9 - 6\sqrt{2}B_1 - \sqrt{6}B_{11} - 3B_{12} + 2\sqrt{2}B_{13} + B_{15} - 3B_3 + 3\sqrt{2}B_4 - \\ -4B_5 - \sqrt{2}B_7 + 3\sqrt{6}B_8 - 4\sqrt{6}B_9),$$

$$p_{43} = \frac{1}{144}(9 + 3\sqrt{2}B_1 - 6B_{10} - \sqrt{6}B_{11} - 3B_{12} - \sqrt{2}B_{13} + \sqrt{6}B_{14} + B_{15} - 3\sqrt{6}B_2 - \\ -3B_3 + 3\sqrt{2}B_4 + 2B_5 - 2\sqrt{3}B_6 - \sqrt{2}B_7 + 3\sqrt{6}B_8 + 2\sqrt{3}B_9),$$

$$p_{44} = \frac{1}{144}(9 + 3\sqrt{2}B_1 + 6B_{10} - \sqrt{6}B_{11} - 3B_{12} - \sqrt{2}B_{13} - \sqrt{6}B_{14} + B_{15} + 3\sqrt{6}B_2 - \\ -3B_3 + 3\sqrt{2}B_4 + 2B_5 + 2\sqrt{3}B_6 - \sqrt{2}B_7 + 3\sqrt{6}B_8 + 2\sqrt{3}B_9).$$

Referências Bibliográficas

- [1] Mandel L., and Wolf E. , *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press (1995).
 - [2] Chen C. K., Heinz T. F., Ricard D. , and Shen Y. R., *Detection of Molecular Monolayers by Optical Second-Harmonic Generation*, Physical Review Letters, **46**, 1010 (1981).
 - [3] Monken C. H., Souto Ribeiro P. H., and Pádua S., *Transfer of angular spectrum and image formation in spontaneous parametric down-conversion*, Physical Review A, **57**, 3123 (1998).
 - [4] Neves L., Pádua S., and Saavedra C., *Controlled generation of maximally entangled qudits using twin photons*, Physical Review A, **69**, 042305 (2004).
 - [5] Leonardo Teixeira Neves, *Estados Emaranhados de Qubits e Qudits criados com pares de fótons produzidos na conversão paramétrica descendente*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Setembro de 2006.
 - [6] Olavo Cosme da Silva, *Correlações espaciais de estados multifotônicos gerados via cristal de PPKTP*, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Dezembro de 2008.
 - [7] Rafael Santos Thebaldi, *Estados de dois fótons com momento angular orbital*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Abril de 2001.
-

-
- [8] Leonardo Teixeira Neves, *Estudo do Emaranhamento em Experimentos de Interferência de Young com Dois Fótons*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Outubro de 2002.
- [9] Gustavo de Aquino Moreira Lima, *Geração de estados emaranhados de qudits espaciais e análises experimentais visando sua utilização prática*, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Setembro de 2006.
- [10] Campagnola P.J., and Loew L.M., *Second-harmonic imaging microscopy for visualizing biomolecular arrays in cells, tissues and organisms*, Nature Biotechnology, **21**, 1356 (2003).
- [11] Abouraddy A. F., Saleh B. E. A., Sergienko A. V., and Teich M. C., *Role of Entanglement in Two-Photon Imaging*, Physical Review Letters, **87**, 123602 (2001).
- [12] Altepeter J. B., Jeffrey E. R., and Kwiat P. G., *Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics - Chapter: Photonic State Tomography*, Elsevier Science.
- [13] Smith S. W., *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*, California Technical Pub. (1997).
- [14] Ling A., Soh K. P., Lamas-Linares A., and Kurtsiefer C., *Experimental polarization state tomography using optimal polarimeters*, Physical Review A, **74**, 022309 (2006).
- [15] Chris Desimpel, *Liquid Crystal Devices with In-Plane Director Rotation*, PhD Thesis, Universiteit Gent, Maio de 2006.
- [16] Martin Stütz, *Qutrit-Manipulation mit aktiven Phasenhologrammen*, Institut für Experimentalphysik der Universität Wien.
- [17] Lundeen J. S., Feito A., Coldenstrodt-Ronge H., Pregnell K. L., Silberhorn Ch., Ralph T. C., Eisert J., Plenio M. B., and Walmsley I. A., *Tomography of quantum detectors*, Nature Physics, **5**, 27 (2009).
-

-
- [18] Achilles D., Silberhorn Ch., Sliwa C., Banaszek K., and Walmsley I. A., *Fiber-assisted detection with photon number resolution*, arXiv:quant-ph/0305191v1 30 de maio de 2003.
- [19] Achilles D., Silberhorn Ch., Sliwa C., Banaszek K., and Walmsley I. A., *Photon number resolving detection using time-multiplexing*, arXiv:quant-ph/0310183v1 30 de outubro de 2003.
- [20] D'Ariano G. M., Maccone L., and Lo Presti P., *Quantum Calibration of Measurement Instrumentation*, Physical Review Letters, **93**, 250407 (2004).
- [21] Sakurai J. J., *Modern Quantum Mechanics*, Addison Wesley Publishing Company (1994).
- [22] Kak A. C., and Slaney M. *Principles of Computerized Tomography Imaging*, Society for Industrial Mathematics (2001).
- [23] Nielsen M. A., and Chuang I.L. *Quantum computation and quantum information*, Cambridge University Press (2000).
- [24] página da Holoeye Photonics (<http://www.holoeye.com>).
- [25] Giozza W. F., Conforti E., and Waldman *Fibras Ópticas*, McGraw- Hill.
- [26] Greenberg D. M., Horne M. A., and Zeilinger, *Multiparticle Interferometry and the Superposition Principle*, Physics Today, **46**, 22 (1993).
- [27] Eduardo Jorge da Silva Fonseca, *Interferência com Pacotes de Onda de Dois Fótons e a Medida de seu Comprimento de Onda de De Broglie*, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Maio de 2000.
- [28] Fonseca E. J. S., Machado da Silva J. C., Monken C. H., and Pádua S., *Controlling Two Particle Conditional Interference*, Physical Review A, **61**, 023801 (2000).
- [29] Englert B.-G., Tin K. M., Goh C. G., and Ng H. K., *Single-Loop Interferometer for Minimal Ellipsometry*, Laser Physics, **15**, 7 (2005).
-

-
- [30] Ambirajan A., and Look Jr. D. C., *Optimum angles for a polarimeter*, Opt. Eng., **34**, 1656 (1995).
- [31] Lima G., Vargas A., Neves L., Guzmán R., and Saavedra C., *Manipulating spatial qudit states with programmable optical devices*, arXiv:0904.4336v1 [quant-ph] 28 Apr 2009.
- [32] Azzam R. M. A., Elminyaw I. M., and El-Saba A. M., *General analysis and optimization of the four-detector photopolarimeter*, J. Opt. Soc. Am. A, **5**, 681 (1988).
- [33] Souto Ribeiro P. H., Monken C. H., and Barbosa G. A., *Measurement of coherence area in parametric downconversion luminescence*, Applied Optics, **33**, 352 (1994).
-