

Teoria de Casimir para a Energia Escura Revisitada

Gustavo Gazzola de Lima

Agosto de 2009

Teoria de Casimir para a Energia Escura Revisitada

Gustavo Gazzola de Lima

Orientadora: Profa. Maria Carolina Nemes

Co-orientador: Prof. Walter Felipe Wreszinski

Dissertação apresentada à UNIVERSIDADE
FEDERAL DE MINAS GERAIS, como requisito
parcial para a obtenção do grau de mestre em
Física.

Agosto de 2009

In memoriam Chef Margit

Agradecimentos

Não poderia deixar de agradecer principalmente à você. Mas também:

À minha família consanguínea pelo suporte durante este longo período de aprendizado. E à minha família não-consanguínea por ter minha acolhido ao longo desta trajetória. Especialmente aos meus queridos irmãos Rafael, Henrique, Pedro, Thiago e Sebastião. Meu pai Flávio. Minhas mães Carla Rosane, Eva e Carolina. E minha carinhosa companheira Carla Soares.

À Prof^a Maria Carolina Nemes que desde a graduação teve paciência em responder todas aos meus indagamentos sobre nossa ciência.

Ao Prof Walter Felipe Wreszinski que mesmo sabendo muito sobre física, tem muita paciência de ensinar os mínimos detalhes para aqueles que ainda estão iniciando o aprendizado.

Ao grupo de pessoas que me ensinaram, quando mais precisava, sobre Teoria Quântica de Campos: Antônio Scarpelli, Edson Dias, Magneto, Luíz Cleber, Marcos Sampaio e Helvécio.

Aos meus colegas de graduação e amigos Marcelo, Luísa, Lívia, Ana Paula, Fábio, Marquinhos e Guilherme.

Resumo

Neste trabalho, assumimos que “Energia Escura” (de uma “pequena” região do espaço no tempo cósmico presente) pode ser identificada como um sistema composto pelo vácuo e poucos estados de uma-partícula de momento zero de um campo quântico escalar de massa $\mu \neq 0$. Sob tais suposições, mostramos que uma teoria quântica de campos local produz um correspondente tensor momento-energia na forma de um fluido perfeito, e que uma energia estritamente positiva, necessária para descrever a energia escura, pode ser achada apenas em regiões de dimensão linear L da ordem do comprimento de onda de Compton da partícula $1/\mu$. Além de satisfazer a densidade de energia positiva, mostramos que a condição de que a pressão termodinâmica deve ser negativa também é respeitada neste estudo. Algumas primeiras conjecturas para o valor da massa de repouso do “axion” produzem uma estimativa de $1.44 \times 10^{-56+4} GeV^4$ para a densidade de energia escura. Dessa forma, esperamos ter tido razões boas o suficiente para visitar a teoria de Casimir para a energia escura, proposta em 2002 por M. Turner.

Abstract

We assume that “Dark Energy” (of a fixed “small” region of space at the present cosmic time) may be identified with the system consisting of the vacuum and of a few one-particle states of zero momentum of a scalar quantum field of mass $\mu \neq 0$. Under this assumption we show that local quantum field theory yields a corresponding energy momentum tensor of the perfect fluid form, and that a strictly positive energy can be localized only in regions of linear dimension L of the order of the particle Compton wave-length $1/\mu$. Some early conjectured values for the “axion” rest-mass yield an estimate $1.44 \times 10^{-56+4} GeV^4$ for the dark energy density. In this way, we hope to have “made a case” for revisiting the Casimir theory of dark energy, proposed in 2002 by M. Turner.

SUMÁRIO

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
1 Introdução	2
2 Conceitos e Fundamentos Teóricos	5
2.1 Vácuo e o Efeito Casimir	5
2.1.1 Efeito Casimir	9
2.2 Energia Escura	10
2.3 Energia Escura como um efeito do Vácuo Quântico	18
3 Construção Matemática	20
3.1 Campo Escalar com Massa	20
3.1.1 Hamiltoniana do Vácuo Limitada por um Contorno	23
3.2 Caso de Placas Paralelas	27
3.3 Caso do Cubo	31
4 Um Modelo para a Energia Escura	35
4.1 Um Universo Composto por Cubos	36
4.1.1 Resultados do Modelo	37
5 Conclusão	42
A Relações de Comutação	45
A.1 Campo Escalar Massivo Livre	45
A.2 Campo Escalar Massivo no Cubo	46

Unified Field Theory¹

*“In the beginning there was Aristotle,
And objects at rest tended to remain at rest,
And objects in motion tended to come to rest,
And soon everything was at rest,
And God saw that it was boring.*

*Then God created Newton,
And objects at rest tended to remain at rest,
But objects in motion tended to remain in motion,
And energy was conserved and momentum was conserved and matter was conserved,
And God saw that it was conservative.*

*Then God created Einstein,
And everything was relative,
And fast things became short,
And straight things became curved,
And the universe was filled with inertial frames,
And God saw that it was relatively general, but some of it was especially relative.*

*Then God created Bohr,
And there was the principle,
And the principle was quantum,
And all things were quantified,
But some things were still relative,
And God saw that it was confusing.*

*Then God was going to create Furgeson,
And Furgeson would have unified,
And he would have fielded a theory,
And all would have been one,
But it was the seventh day,
And God rested,
And objects at rest tend to remain at rest.”*

Tim Joseph

¹The New York Times, 6 de Abril de 1978.

1 INTRODUÇÃO

“As sereias, porém, possuem uma arma ainda mais terrível do que seu canto: seu silêncio... seria talvez concebível que alguém tivesse se salvado de seu canto; de seu silêncio, jamais.”

Franz Kafka¹

Desde que o homem começou a se indagar sobre o mundo que o cercava, tentar entender e explicar o Universo se tornou uma das questões mais intrigantes e fascinantes do conhecimento humano. O que se conhecia sobre os astros influenciou diretamente a formação e destino de impérios, nações, filosofias e religiões. Se antigamente o Universo tinha um tom mais místico ou divino, hoje ele é visto de uma forma mais matemática, mais científica, mas não menos fascinante. Conhecer a dinâmica do mundo que nos acolhe significa conhecer mais sobre nossa própria história, tanto sobre o que nos trouxe aqui quanto sobre o que o futuro nos reserva.

Se o Universo fosse governado apenas pelas leis de Newton, uma “simples” equação diferencial nos daria toda a dinâmica que governa o mundo e o Demônio de Laplace² triunfaria sobre a determinação do futuro do cosmos. Contudo, com a evolução das observações e das teorias físicas, o cosmos mostrou que seria necessário mais do que um pequeno conjunto de leis e condições iniciais de posição e momento para entendê-lo e prever sua dinâmica. É neste contexto que surgiu o conceito de Energia Escura: uma forma “exótica” de energia, para explicar a acelerada expansão do Universo. Esta deve ser descrita com uma densidade de energia positiva $\rho_X > 0$ e uma pressão termodinâmica negativa $p_X < 0$. Em poucas palavras, adiantando o que exploraremos com o devido cuidado na segunda parte da dissertação, nos anos 20, por observações

¹No conto: *O Silêncio das Sereias*.

²Este demônio foi criado por Laplace em sua crença em um mundo regido pelo determinismo causal das leis de Newton. Para Laplace, este demônio saberia com precisão a localização e o momento de todas as partículas do mundo. Desta forma, com as leis de Newton, o demônio calcularia todos os acontecimentos da história do universo, sejam eles no passado, sejam no futuro.

feitas por Hubble, descobrimos que o Universo está em expansão. Com o auxílio da teoria da relatividade geral de Einstein, podemos relacionar a causa desta expansão com uma forma de energia, que mais tarde foi denominada de energia escura (termo usado pela primeira vez oficialmente por Michael Turner [1]) e que, de acordo com observações mais atuais, é responsável por 73% do total de massa-energia do Universo. Infelizmente, até hoje não entendemos a real natureza dessa energia, e este tema de pesquisa em cosmologia se mantém extremamente ativo até hoje.

Aproveitando este momento produtivo da cosmologia contemporânea, nesta dissertação propomos a formulação de um modelo para a energia escura utilizando o já conhecido efeito Casimir. Aqui, cabe explorarmos duas questões: o que é o efeito Casimir e a razão de utilizá-lo. Este efeito foi proposto por Hendrik Casimir e Dirk Polder em 1948 e diz respeito à força que surge de campos quantizados previstos pela Teoria Quântica de Campos. Uma forma simples de entendermos esse feito é utilizando a clássica montagem de duas placas neutras colocadas em paralelo no vácuo. Pela teoria clássica de campos, nada deveria ocorrer com as placas pois o vácuo significa ausência de campos entre as estas. Mas pela teoria quântica de campos, o vácuo é entendido como um campo no estado de menor configuração de energia; em outras palavras, existe um campo no estado fundamental. A presença das placas impõe condições de contorno que o vácuo deve respeitar que resulta numa alteração do valor esperado da energia do vácuo. Essa alteração da energia culmina numa diferença de energia, que trás consequências para a força entre as placas, e isso define o chamado Efeito de Casimir.

Explicada a natureza desse efeito, fica mais simples relacioná-lo agora com o estudo desejado da energia escura. Podemos relacionar a força gravitacional repulsiva e a aceleração da expansão do Universo [2], causada pela energia escura, com a força que emerge do vácuo quântico, que entendemos como efeito de Casimir. Esta idéia não é nova, mas modelos construídos anteriormente chegam em resultados para a densidade de energia escura que desviam do esperado em um fator de 10^{55} [3]. A priori, este resultado parece muito desencorajador, mas em nosso modelo, partindo de premissas físicas razoáveis e condições que respeitam a densidade de energia positiva e a pressão termodinâmica negativa. Como será apresentada ao decorrer do trabalho, conseguimos resultados mais encorajadores que se aproximam mais dos valores esperados.

Nesta dissertação, como em qualquer outro trabalho científico, constituísse em um esforço contínuo e em conjunto com outros físicos que constantemente dão suas contribuições à ciência. Mais especificamente, os trabalhos de Michael Turner (e.g. [3] e [4]) tiveram grande influência na formulação da idéia de nossa pesquisa. Outra contribuição importante se deve à prova de que o cálculo da energia, que desenvolveremos no terceira parte, é independente de regularização. Esta prova foi tema da dissertação de mestrado de Norberto Kawakami [5].

Sabendo que vários pontos fundamentais de nosso trabalho não são necessariamente temas abordados nos cursos de graduação e pós-graduação de física, achamos adequado, no segundo capítulo, explorar com mais cuidado os elementos teóricos que permeiam o nosso modelo, para que o leitor se sinta suficientemente confortável em sua leitura. Dessa forma, resolvemos fazer uma introdução histórica e conceitual da idéia do Vácuo, do Efeito Casimir, da Energia Escura e sua relação com a Constante Cosmológica, que talvez possamos considerar como o ponto mais importante de todo nosso trabalho.

No terceiro capítulo, tentamos fazer uma breve ambientação da matemática da teoria quântica de campos que será utilizada na construção do modelo. Nosso intuito é que em seguida possamos apresentar os cálculos das propriedades de um campo massivo entre placas paralelas, para mostrarmos caso do campo dentro de um cubo.

Utilizando os cálculos apresentados, particularmente as contas do caso do cubo, no quarto capítulo construiremos nosso modelo para a energia escura. Dessa forma, poderemos comparar os resultados obtidos do modelo com os dados obtidos experimentalmente.

No quinto e último capítulo apresentamos algumas conclusões acerca da discussão do trabalho realizado, sem necessariamente fechar a questão do uso do efeito de Casimir para explicar a energia escura. Mais do que apenas concluir, elencamos algumas direções e novos indagamentos que nosso trabalho suscita, e que poderão ser desenvolvidos em investigações posteriores.

2 CONCEITOS E FUNDAMENTOS TEÓRICOS

“Não é misterioso que possamos saber mais sobre coisas que não existem do que coisas que existem?”

Alfréd Rényi¹

Com o intuito de criar uma certa familiaridade do leitor com os elementos usados na construção de nosso modelo, neste capítulo nos limitamos a apresentar como o olhar científico foi lançado sobre tais construções teóricas e experimentais e como nossa visão acerca delas se transformou com o passar dos anos.

Este capítulo é voltado então para esclarecer qualquer lacuna conceitual que possa impedir que o leitor compreenda o contexto de nossa pesquisa.

2.1 Vácuo e o Efeito Casimir

A idéia do vácuo talvez seja uma das mais intrigantes da história da física, pois é um conceito que segue a própria evolução desta. Antes de mais nada, é curioso notar como foi difícil para algumas civilizações adotar essa idéia. Fica mais fácil de notar esta dificuldade quando exemplificamos o caso da Grécia antiga, que foi, sem sombra de dúvida, uma das culturas que mais influenciaram o pensamento ocidental e a ciência contemporânea. Os pensadores gregos não conseguiram lidar com a idéia do vazio por ser paradoxal; achar o Nada na natureza parecia impossível. Dessa forma, Aristóteles banuiu o vácuo dos estudos gregos com sua concepção de *horror vacui*, que defendia que a natureza repelia o vácuo e que este então sempre estaria “sugando” a matéria para evitar o espaço vazio. Platão também não salvou o vácuo. Na concepção platoniana há uma separação entre o mundo concreto e o mundo das idéias. O que permite que reconheçamos uma árvore do princípio ao fim, apesar de suas mudanças ao longo do tempo, é justamente esta instância ideal, a essência. O mundo percebido

¹*Dialogues in Mathematics*, Holden Day, San Francisco, 1976.

é então apenas uma sombra do mundo ideal de Platão. No caso do vácuo, Platão não conseguia conceber uma visão que se encaixasse nesse quadro de uma forma ideal e, sendo assim, ele não conseguia justificar a existência do vácuo no mundo visível.

Outro exemplo que facilita o reconhecimento da dificuldade de lidar com a idéia do Nada, é o caso do numeral 0 (zero). Se hoje, tendo um sistema decimal e posicional², o zero nos parece fundamentalmente necessário e simples, o mesmo não ocorria na antiguidade. Basta notarmos que construções como a geometria e a álgebra³ surgiram antes da formulação do zero, para compreendermos sua difícil conceituação.

Nosso conceito de zero vem da cultura indiana, que tratava o conceito de Nada com mais naturalidade e podia reconhecer de fato sua riqueza. Basta olharmos para as inúmeras palavras diferentes que eles possuíam para tratar da mesma idéia de vazio e de como algumas delas tinham um significado maior. Um exemplo é a palavra “*bindu*”, que poderia significar *nada*, mas também *ponto*. O ponto, vale lembrar, é a forma mais simples da geometria, que pode ser usada para a construção de outras formas. Ou seja, mesmo significando a ausência, ela poderia significar a base para construção de algo. Ou, nas palavras do matemático John D. Barrow no seu livro *The Book of Nothing*: “The *bindu* was the Nothing from which everything could flow”⁴.

Estudos realmente significativos sobre o tema no mundo ocidental só puderam existir depois do começo da Renascença, já que durante a Idade Média o vácuo era considerado uma heresia pela Igreja. Nomes como Galileu Galilei, Evangelista Torricelli e Blaise Pascal fizeram a ciência dar seus primeiros passos em um estudo sério sobre propriedades do vácuo. Outro fato importante dessa época é a construção da primeira bomba de vácuo pelo alemão Otto von Guericke que possibilitou estudos experimentais em laboratório, como por exemplo experimentos de Galileu sobre a gravitação.

Vácuo Quântico

Mesmo sendo o vácuo da física clássica extremamente interessante e frutífero, nosso real interesse recai realmente na interpretação quântica do vácuo. Na física clássica o vácuo pode ser definido nas palavras de James Clerk Maxwell no *Tratado*

²e.g. o número 187 significa $1 \times 100 + 8 \times 10 + 7 \times 1$.

³A geometria e a álgebra tiveram seus primeiros indícios na Mesopotâmia, a primeira cerca de 3000 a.C. e a segunda por volta de 1800 a.C.

⁴“O *bindu* era o Nada de onde tudo poderia fluir.” (Tradução do Autor)

sobre a *Eletricidade e Magnetismo*: “The vacuum is that which is left in a vessel after we have removed everything which we can remove from it.”⁵ Já a física quântica oferece uma interpretação totalmente diferente. Como trabalhos com os chamados *estados quânticos*, definimos o vácuo como o estado quântico de menor energia possível. Este estado normalmente é referido como *estado fundamental* ou simplesmente *estado de vácuo*.

Dessa forma, à luz da teoria quântica, o Nada não é ausência de algo, mas simplesmente algo no estado fundamental de sua existência. Um simples e ótimo exemplo desse estado do sistema é o didático Oscilador Harmônico Quântico descrito pelo hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (2.1)$$

onde o momento \vec{p} toma o status quântico de operador $\vec{p} \rightarrow -i\hbar\nabla$.

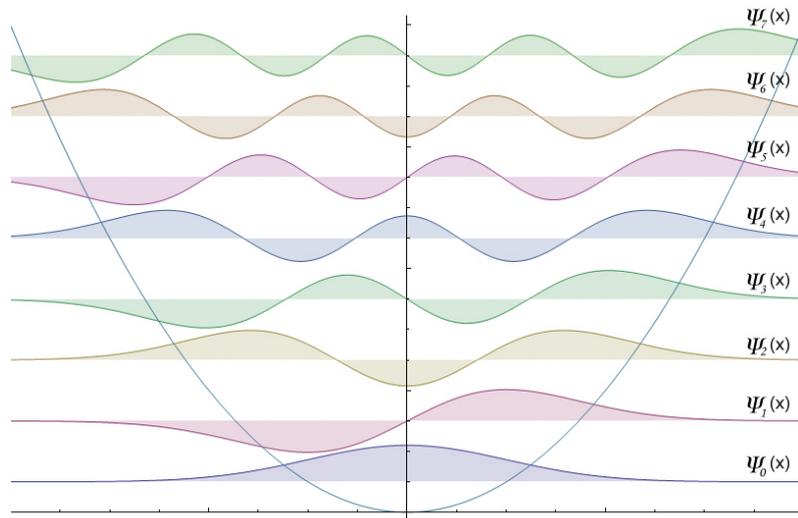


Figura 2.1: Estados do Oscilador Harmônico escalado pelo espectro de energia

A solução deste problema pode ser encontrada facilmente em qualquer livro de mecânica quântica, mas é interessante apresentarmos alguns pontos que têm repercussão no nosso trabalho. Podemos redefinir o problema acima proposto em função dos operadores de aniquilação $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{ip}{m\omega} \right)$ e criação $a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{ip}{m\omega} \right)$,

⁵“O vácuo é aquilo que sobra num recipiente depois que removemos tudo que podemos remover dele”. (Tradução do Autor)

tendo o hamiltoniano reescrito como

$$H = \hbar\omega \left(aa^\dagger + \frac{1}{2} \right) \quad (2.2)$$

Mas, para nós, o ponto mais interessante da solução deste sistema reside no espectro de energia (ilustrado na Fig 2.1 com os respectivos possíveis estados ψ_n):

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (2.3)$$

que, por sua simples forma, fica evidente que a energia de ponto-zero (ou energia do estado fundamental) não é simplesmente nula, como esperado pela mecânica clássica, mas $E_0 = \hbar\omega/2$. Ou seja, o estado de vácuo deste sistema possui uma excitação em relação ao estado fundamental clássico. Mas há um ponto importante para ser observado. Apenas observamos as diferenças de energia, tanto classicamente quanto quanticamente (ver o capítulo 14 de [7]). Essa energia pode ser ignorada por ser finita e dependente da escolha de um ponto zero, mas em teoria quântica de campos essa energia diverge, como será visto. Isso implica na necessidade de uma normalização do campo no espaço infinito (que está estudado em [8]). Fisicamente essa divergência provém do fato de que o vácuo não é simplesmente o vazio, pois nele ocorrem processos virtuais (por exemplo “bolhas”⁶ de criação e aniquilação) que não conservam energia. Estes processos possuem amplitude não-nula analogamente ao tunelamento, que é energeticamente proibido na física clássica mas possível na mecânica quântica.

Este mesmo problema ocorre em relatividade geral. Em [9], Ford diz “Em outras áreas da física, a energia de ponto-zero é normalmente descartada com o argumento de que apenas as diferenças de energia são mensuráveis e a escala de energia pode ser escolhida onde desejarmos. Em física gravitacional esse luxo não existe; o valor de fato do tensor energia-momento da matéria determina a geometria do espaço-tempo.”

O Vácuo na Teoria Quântica de Campos

Apesar de ser uma forma primitiva de compreender a quantização de campos, a interpretação mais didática neste ponto de nossa discussão seria a de que em cada ponto x de um campo $\Phi(x)$ podemos visualizar a existência um oscilador harmônico quântico. E como já explicado na seção anterior, existe um estado de vácuo no

⁶Termo referente a um tipo de gráfico de Feynman [18].

oscilador harmônico quântico que possui energia não-nula. Isso significa que quando referimos ao vácuo físico, por exemplo construir um experimento de placas paralelas no vácuo, na verdade esperamos a existência de um campo como uma superposição de estados fundamentais que permeiam todo o espaço físico que estamos lidando. Desta forma, dependendo da escala trabalhada, podemos esperar efeitos da energia de ponto-zero do campo. Este é o tema que trataremos no nosso próximo tópico, o efeito Casimir.

2.1.1 Efeito Casimir

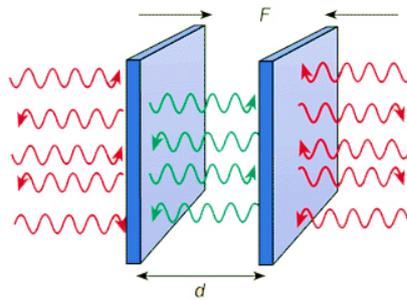


Figura 2.2: O Efeito Casimir entre duas placas paralelas

Na década de 1940, Hendrik Casimir tentou formular um experimento que demonstrasse alguma manifestação física desta energia de ponto-zero, explicada na seção anterior. Apesar de ser necessário aprender como lidamos matematicamente com o efeito, não menos importante é como interpretamos esse feito. Como já foi dito, esse experimento envolve duas placas colocadas paralelamente no vácuo. Antes de colocar as placas, podemos entender o vácuo como uma superposição de estados fundamentais de todos comprimentos de onda. Com a inserção das placas (ilustrado na Fig 2.2, estaremos colocando uma condição de contorno onde a amplitude desses estados deve ser nula na região das placas e com isso, estaremos limitando os possíveis estados fundamentais que podem existir ali. Ou seja, entre as placas só poderemos ter os estados que a onda completa um número inteiro de oscilações. Ao contrário, fora das placas, todos os estados previamente existentes continuam existindo. Isso significa uma diferença de energia entre as duas regiões o que resulta em o aparecimento de uma pressão nas placas.

Seguindo a idéia de osciladores e as condições de contorno de Dirichlet impostas pelas placas $\phi(z=0) = \phi(z=a) = 0$, o cálculo do modulo desta força pode ser efetuado calculando-se a energia de ponto-zero

$$E = \frac{1}{2} \sum_n^{\infty} \hbar\omega \quad (2.4)$$

mas esta é obviamente divergente e para o cálculo seria necessário introduzir um regularizador. Não é nosso interesse demonstrar como fazer esse cálculo especificamente, mas se pode encontrá-lo na seção 2.2 do livro *The Casimir Effect: Physical Manifestations of Zero-Point Energy* de K. A. Milton.

2.2 Energia Escura

Seria interessante antes de mais nada termos a oportunidade de separar dois tópicos que podem de certa forma causar alguma confusão para o leitor que não está familiarizado com temas da cosmologia. Apesar de ainda não termos criados teorias capazes de explicar a Matéria Escura e a Energia Escura, sabemos que elas aparecem em observações muito diferentes. Em poucas palavras, a Matéria Escura foi postulada para explicar a discrepância entre a teoria e a observação da rotação de galáxias espirais. Já a Energia Escura surge no contexto de observações da aceleração da expansão do Universo, como já foi introduzido no primeiro capítulo. Apesar de ter sido feito uma leve introdução histórica no capítulo anterior, seria interessante explorar mais o tema para entendermos como as observações evoluíram mas como ainda não fomos capazes de explicar teoricamente essa forma de energia.

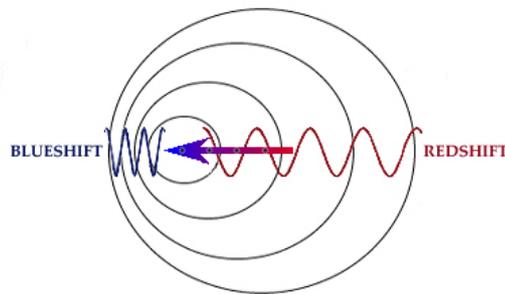


Figura 2.3: Efeito Doppler causando redshift e blueshift numa onda

De fato, a história começa com o astrônomo americano Vesto Slipher publicou em 1917 que entre 15 galáxias estudadas, 13 apresentavam o efeito de redshift [10]. Este efeito, mostrado na Fig 2.3, é devido ao conhecido efeito Doppler em ondas eletromagnéticas. Se uma onda move com uma certa velocidade v , o observador que a detecta medirá um comprimento de onda λ diferente dependendo de sua posição. Se a onda se afasta do observador, ele a medirá com um comprimento de onda maior, ou seja com o espectro deslocado para o vermelho (menos energético). Esse é o chamado redshift. Já o contrário, blueshift, é o caso da onda se aproximando do observador. Mas foi de fato Edwin Hubble que em 1929, formulando a chamada Lei de Hubble, relacionou o efeito de redshift com a expansão acelerada do Universo:

$$v = H_0 r \quad (2.5)$$

Nela, Hubble expôs que uma galáxia se distanciava com uma velocidade v do ponto de observação proporcionalmente com a distância entre os dois r . Essa proporcionalidade está ligada com a constante de Hubble H_0 . Se todas as galáxias estão se distanciando uma das outras de acordo com (2.5), logo concluímos que temos uma expansão do Universo.

Estas observações tiveram um impacto muito grande sobre o trabalho que Einstein havia desenvolvido na Relatividade Geral. Em seu desenvolvimento teórico, Einstein chegou na seguinte equação diferencial para explicar a dinâmica do Universo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.6)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de curvatura de Ricci, R é o escalar de curvatura, G é a constante gravitacional, c é a velocidade da luz e, finalmente, $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento. Mas antes de darmos continuidade em nossa discussão sobre a evolução dos fatos na história da Energia Escura, é importante entendermos a equação (2.6). Nela existem dois tensores que são muito importante de entender: $T_{\mu\nu}$ e $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$

O lado esquerdo da equação (2.6), $G_{\mu\nu}$, trata da geometria do espaço-tempo. O tensor de curvatura de Ricci $R_{\mu\nu}$ mede como o n -espaço⁷ estudado difere de um n -espaço euclidiano. De forma complementar, o escalar de curvatura de Ricci R está associado ao tensor de curvatura, afinal de contas $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$. E junto do escalar, há um termo da métrica $g_{\mu\nu}$ que descreve a geometria do espaço-tempo estudado.

⁷Espaço n -dimensional

Já o tensor de energia-momento pode ser escrito nas suas componentes

$$\left(\begin{array}{c|cccc} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ \hline T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{array} \right) \quad (2.7)$$

deixamos separado as componentes pelos traços para facilitar sua compreensão. Cada setor dessa matrix (ou desse tensor) tem um significado diferente. Para nós o maior importante é a primeira T_{00} que é a densidade de energia do campo estudado, pois ela empenhará um papel muito importante nos nossos cálculos no futuro. Similar com o seu significado, as componentes da esquerda T_{i0} (com $i = 1, 2, 3$) são as componentes da densidade de momento. As T_{0i} descrevem o fluxo de energia do campo através da superfície x^i e as T_{ij} (com $i \neq j$) descrevem o fluxo de momento através da superfície x^j . E por fim as componentes T_{ii} fornecem a pressão do campo.

Então basicamente, podemos resumir dizendo que o lado esquerdo da equação (2.6) é o setor geométrico enquanto o lado direito é o setor de energia. É interessante colocar dessa forma porque, apesar do efeito físico ser o mesmo, podemos entender o termo que está colocado como a constante cosmológica Λ ou como uma causa geométrica do espaço-tempo do Universo ou como a distribuição de massa e energia do sistema. Ambas formas de entender este termo leva-nos a áreas de pesquisa opostos, mas igualmente frutíferos. Aqui vamos só estudar o caso de interpretarmos como uma forma de energia.

Chegando, então, na equação (2.6), Einstein notou uma questão importante. Uma solução estática do Universo não parecia possível. As matérias (estrelas distantes que ficam em média paradas durante longos períodos de tempo, por exemplo) iriam se atrair mutuamente gravitacionalmente resultando em uma contração e aglomeração de toda matéria. Fato que poderia ser evitado se tivesse sido considerado que o Universo está em expansão.

Einstein apostou na idéia que os corpos celestes poderiam possuir uma dinâmica, mas não o Universo em si. Então para contornar o problema, ele retornou em sua equação (2.6) e viu a possibilidade de inserir um termo que descreveria uma força repulsiva entre massas que aumentaria proporcionalmente com a distância entre elas.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.8)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica e Λ é a famosa constante cosmológica agora introduzida por Einstein.

Mesmo sem saber muito sobre o valor de Λ é importante notar que não existe nenhuma razão para ela ser nula também. O que poderíamos dizer é que aparentemente ela é pequena demais para ser percebida na escala que percebemos o mundo do dia-a-dia. Mas em escala astronômica, essa força sobreporia a lei do inverso do quadrado de Newton.

O interessante foi que, antes das observações feitas por Hubble, Alexander Friedmann, assimilando rapidamente a matemática necessária para trabalhar com a teoria de Einstein, conseguiu explorar melhor as soluções possíveis da equação proposta. Friedmann trabalhando em um espaço de De Sitter, *i.e.* um espaço simétrico com solução de vácuo⁸, e com a constante cosmológica agindo de forma repulsiva, mostrou em dois artigos (traduzidos em [11][12]) que mesmo com a introdução de Λ como havia proposto Einstein, a solução de um Universo estático não era estável, o que contradizia a razão de sua introdução. Indo além, ele mostrou que havia também a possibilidade do Universo estar expandindo ou retraindo (que ficou conhecido como Big Crunch).

Quando Einstein ficou convencido de que os cálculos de Friedmann estavam corretos, ele declarou sua famosa constatação de que a constante cosmológica havia sido seu maior embaraço, já que ela não servia para sua proposta inicial. De qualquer forma, como Λ não impossibilitava a solução que parecia ser a verdadeira de uma expansão acelerada, alguns físicos continuaram a trabalhar com ela. Esse foi o caso do padre belga Georges Lemaître⁹, que foi um dos primeiros físicos a sugerir que Λ poderia estar conectada com o restante da física. Apesar de Einstein ter introduzido seu novo termo no setor geométrico de (2.8), Lemaître trabalhou interpretando a constante como um termo de massa-energia, como foi explicado logo após (2.6).

Mas tratando Λ como um fluido perfeito, ou seja, com o tensor energia-momento

⁸É a solução do campo gravitacional em uma região sem fontes gravitacionais, *i.e.* $T_{ab} = 0$.

⁹Lemaître ficou muito famoso por propor o Big Bang.

toma a forma (com $c = 1$)

$$T_{\mu\nu}^{\Lambda} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

podemos perceber a notável característica desta nova constante. Mas para isso devemos usar as equações de Friedmann¹⁰ originalmente derivada por ele em [11]

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.10)$$

e

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.11)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala, que representa a expansão relativa do Universo, H é o parâmetro de Hubble, que representa a taxa de expansão do Universo e k/a^2 é a curvatura gaussiana. Esse k pode tomar três valores distintos que, assim como a métrica FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker)¹¹:

$$ds^2 = a(t)^2 ds_3^2 - dt^2 \quad (2.12)$$

que está por trás das equações de Friedmann, descreve três tipos de Universo: $k = 1$ é o caso de um Universo esférico fechado, $k = 0$ para um Universo plano e $k = -1$ para um Universo hiperbólico aberto. Na equação acima, ds^2 denota o *intervalo* que é um conceito comum na teoria da Relatividade. Ele mede distâncias no espaço-tempo quadridimensional entre dois eventos.

Voltando ao ponto inicial, deixando a constante cosmológica no lado de massa-energia da equação de campo de Einstein, podemos entender melhor seu efeito reescrevendo (2.8) da seguinte forma

$$G_{\mu\nu} = (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{\Lambda}) \quad \text{onde} \quad T_{\mu\nu}^{\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu} \quad (2.13)$$

Desta forma, a segunda equação de Friedmann nos daria que

¹⁰A primeira é derivada da componente 00 de (2.8). A segunda é derivada obtendo o traço da mesma.

¹¹ ds_3 é a métrica tridimensional de um espaço plano, de uma esfera com curvatura positiva ou de uma hipérbole com curvatura negativa. Cada caso corresponde a um valor de k diferente.

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} [(\rho + 3p) + (\rho_\Lambda + 3p_\Lambda)] \quad (2.14)$$

Se queremos só ver o efeito de Λ , desconsideraremos a parte de matéria e ficamos só com ρ_Λ e p_Λ . Como a constante cosmológica possui a propriedade¹² $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ então temos que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(-2\rho_\Lambda) > 0 \quad (2.15)$$

Ou seja, a contribuição de Λ acelera a taxa de expansão do Universo e nós interpretamos isso como uma gravidade atuando de forma repulsiva.

De qualquer forma, apesar da constante cosmológica ter sido aproveitada e bem estudada por Lemaître e outros físicos (como por exemplo a Teoria de Estado Estacionário proposto por F. Hoyle, H. Bondi e T. Gold após a Segunda Guerra Mundial), as equações de Einstein já poderiam explicar um Universo não estático, como parecia ser observado, sem Λ e por isso ela foi deixada de lado por algum tempo.

O “Modelo Padrão” da Cosmologia (Λ CDM) e a volta da Constante cosmológica

Mesmo deixada de lado, alguns experimentos realizados na década de 60 mostraram que Λ poderia resolver algumas inconsistências. É o caso, por exemplo¹³, do tempo de expansão do Universo. Sandage mostrou em [13] que se considerado $\Lambda = 0$, o tempo de expansão do Universo, desde densidades muito altas até que as estrelas pudessem existir, seria menor que $H_0^{-1} \approx 13$ Gyr. Mas este tempo é menor do que a idade das estrelas mais velhas (que é de aproximadamente 15 Gyr). Sandage argumenta no seu artigo que o problema seria resolvido se $\Lambda \neq 0$.

O mesmo argumento, mas com dados mais contemporâneos, é explorado por Turner e Krauss em [15]. Mais ainda, neste artigo é incluído argumentos sobre a formação de estruturas de grande-escala no Universo, a matéria que constitui o cosmos vinculada pela dinâmica do mesmo, observações de raio-X de aglomerados de galáxias e a nucleosíntese do Big-Bang. Até que chegam ao ponto de enfatizar: “*Unless at*

¹²Essa propriedade vem do fato de associarmos à Constante Cosmológica um papel de densidade de energia do vácuo. Mas para isso há uma proporcionalidade entre as duas: $\Lambda = 8\pi G\rho_{vac}$. A propriedade em questão é resultado de tirarmos o traço da parte de $T_{\mu\nu}^\Lambda$ em (2.13), lembrando que o tensor energia-momento é tomado como de um fluido perfeito (2.9).

¹³Outros exemplos podem ser estudados no artigo de revisão [14].

*least two of the fundamental observations described here are incorrect a cosmological constant is required by the data.*¹⁴

Desta forma, [15] mostra como demorou alguns anos para que a constante voltasse a ser colocada em primeiro plano entre teóricos e experimentais. Demorou até que bons experimentos pudessem ser sugeridos e problemas técnicos superados, como por exemplo achar um objeto observacional no espaço que possuísse velas padronizáveis¹⁵.

Neste cenário, dentro a vasta variedade de modelos disponíveis, vários diversos experimentos apontam que o modelo que melhor ajusta nas observações feitas é o chamado Λ CDM. Este modelo além de levar em conta a constante cosmológica, a métrica FLRW e as equações de Friedmann, ele também leva em consideração a matéria escura fria (CDM, *Cold Dark Matter*), que leva o nome de “fria” pode ser não-relativística ($v \ll c$). A primeira série de experimentos a reforçar o modelo veio na década de 90 quando as observações de Supernovas (SNe) do tipo Ia puderam ser melhor estudadas. Elas são consideradas ser a melhor vela padronizável, podendo assim medir a relação de sua distância e redshift para mapearmos a história da expansão no Universo.

Mas pelo que os astrônomos perceberam foi que cada experimento separado, coloca limites poucos restritivos aos parâmetros livres do modelo Λ CDM. O que se percebe hoje em dia é a sobreposição de vários experimentos juntos numa tentativa de limitar de forma mais adequada os parâmetros exigidos. Isso pode ser visto na Fig 2.4. Ela mostra dois gráficos de 3 observações distintas: SNe (Supernovas), 2dFGRS (2dF Galaxy Redshift Survey) e CMB (Radiação Cósmica de Fundo). Em poucas palavras, o 2dFGRS é feito com o telescópio chamado 2dF e como o próprio nome diz, ele mede o redshift das galáxias observadas. Já a Radiação Cósmica de Fundo é basicamente a radiação térmica, prevista pela teoria do Big-Bang, que deixou de ser absorvida depois que os átomos estáveis foram formados.

Outra coisa que deve ser esclarecida na figura é o termo Ω_M . Este é um parâmetro

¹⁴“Ao menos que duas dessas observações fundamentais descritas aqui estão incorretas, a constante cosmológica é requerida pelos dados.” (Tradução do Autor)

¹⁵Usando o exemplo que John Barrow dá em seu “The Book of Nothing”, imagine um experimento para calcular a distância de lâmpadas de 100watts separadas aleatoriamente. Seria possível saber a distância comparando a intensidade de luz de cada lâmpada, mas isso só é possível porque sabemos que todas são de 100watts. Não poderíamos ter a mesma solução para o problema se cada uma tivesse uma potência diferente.

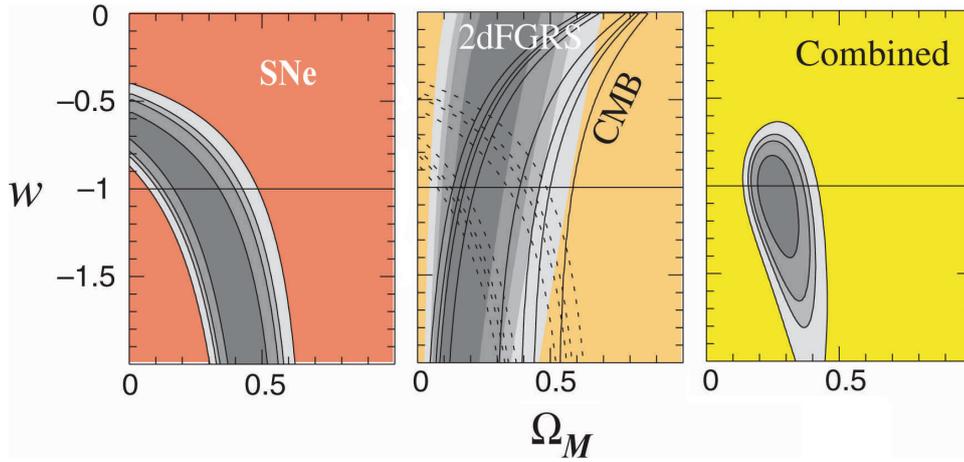


Figura 2.4: Restrições em w em função de Ω_M

de densidade (de matéria escura e bariônica no caso do subscrito M) definido como $\Omega = \rho/\rho_c$, onde ρ_c é a densidade crítica, limiar entre um universo em expansão e um em contração.

O ponto chave da Fig 2.4 é que observamos que o melhor ajuste corresponde¹⁶ a um $w \approx -1$. Este termo w vem da equação de estado de um fluido perfeito, onde existe uma constante de proporcionalidade entre sua densidade e sua pressão:

$$p = w\rho \quad (2.16)$$

Esta também é conhecida como equação de estado de Turner. Para o valor de $w = -1$ temos o exato caso da constante cosmológica em questão, mas existem outros estudos que modelam o efeito da Energia Escura utilizando outros conceitos. Por exemplo para $-1 < w < 0$ associamos o efeito à Quintessência e se $w < -1$ associamos a energia *phantom*.

A mesma conclusão podemos tirar usando outro conjunto de observações chamado BAO (Oscilação Acústica de Bárions), que se referem a oscilações acústicas formadas pela atração da força gravitacional e repulsão da pressão no plasma existente no início da história do Universo. Estas oscilações deixam marcas características na formação de aglomerados de matéria bariônica ao longo do tempo. A grosso modo, esse experimento traz melhores restrições no valor do parâmetro de densidade de

¹⁶Mais especificamente, o valor de w calculado por esse conjunto de observações pelo *Supernova Cosmology Project* [22] é de $w = -1.05^{+0.15}_{-0.20}$.

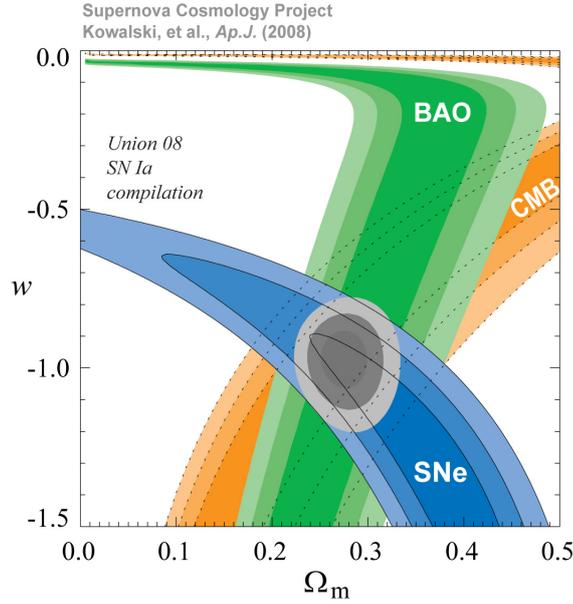


Figura 2.5: Restrições em w em função de Ω_M usando outras observações

matéria Ω_M . Pela Fig 2.5 podemos perceber $w \approx -1$ continua parecer o melhor valor assinalado pelas observações.

2.3 Energia Escura como um efeito do Vácuo Quântico

Então colocada assim, uma idéia após a outra, parece natural atribuímos o efeito da Energia Escura à força que surge do efeito quântico de vácuo. Podemos fazer um cálculo simples e bonito para vermos o resultado catastrófico se a idéia é levada de forma ingênua.

Se somarmos as energia de ponto-zero de um campo de massa m até um *cutoff* Λ (que seja muito maior que a massa m), temos que a densidade de energia do vácuo é dado por

$$\langle \rho \rangle = \int_0^\Lambda \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + m^2} \approx \frac{\Lambda^4}{16\pi^2} \quad (2.17)$$

Levando em conta que estamos acreditando que a relatividade geral é válida até a escala de Planck, então tomamos Λ como a massa de Planck, ou seja, $\Lambda = (8\pi G)^{-1/2}$.

Isto resultaria numa densidade de energia com o valor de

$$\langle \rho \rangle \approx 10^{71} \text{ GeV}^4 \quad (2.18)$$

que se comparado com o valor obtido pelos experimentos para a Energia Escura $\rho_\Lambda \approx 10^{-47} \text{ GeV}^4$, podemos espantar e começar a preocupar com a discrepância de 118 casas decimais. Esse argumento foi apresentado por Weinberg no seu famoso artigo de 1989 intitulado “*The cosmological Constant Problem*” [16].

Esse resultado por mais absurdo que seja, não quer dizer que estamos descartando a explicação da Energia Escura como manifestação do vácuo quântico no cosmos. Procuraremos nos próximos capítulos um modelo possível para explicar o efeito utilizando a teoria de Casimir.

De qualquer forma, seria muito curioso se fôssemos capazes de trabalhar tão facilmente com duas teorias de escalas tão diferentes. Estamos estudando um efeito observado em escala maior que nossa própria galáxia, utilizando uma teoria que trabalha em escalas menores que um átomo! De acordo com nosso conhecimento sobre a física hoje em dia, sabemos que estamos lidando com teorias efetivas que funcionam muito bem em seus respectivos domínios de energia. Trabalhar na fronteira entre duas teorias aparentemente tão discrepantes exige uma visão amadurecida da ciência e talvez seja por isso que a Energia Escura se mostra como um dos temas de tanta curiosidade entre a comunidade científica.

3 CONSTRUÇÃO MATEMÁTICA

“Um matemático pode dizer o que bem quiser, mas um físico deve ser pelo menos parcialmente sã.”

Josiah Willard Gibbs

Visto que os elementos que permeiam nossa pesquisa foram introduzidos anteriormente, agora sentimos mais à vontade para começar a trabalhar nos primeiros passos que nos levará ao modelo.

Neste novo capítulo apresentaremos as contas do efeito Casimir para os casos de placas paralelas e do cubo. O primeiro servirá mais como um exercício para facilitar os cálculos do segundo.

O que queremos então é obter uma forma bem definida para $\langle T_{00}(x) \rangle_{vac}$, seja entre as placas paralelas, seja no cubo. Pois como discutimos, $\langle T_{00}(x) \rangle_{vac}$ representa diretamente a grandeza desejada que é a densidade de energia do vácuo ρ_{vac} . Como os casos estudados utilizam um campo escalar massivo, começamos a derivar as propriedades deste nesta primeira seção.

3.1 Campo Escalar com Massa

Formalmente temos o campo escalar quantizado (processo também descrito em [5] com o potencial vetor $\vec{A}(x)$) com massa μ

$$\Phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} \left(a(\vec{k}) e^{-ik^\mu x_\mu} + a(\vec{k})^\dagger e^{ik^\mu x_\mu} \right) \quad (3.1)$$

onde $\omega = \sqrt{k^2 + \mu^2} = k_0$ carrega o termo de massa e os termos $a(\vec{k})$ e $a(\vec{k})^\dagger$ são respectivamente os operadores de aniquilação e criação. É importante deixar claro que o produto $k^\mu x_\mu$ é um produto escalar entre quadrivetores (ou 4-vetores).

Podemos escrever o campo quantizado conforme a (3.1) se utilizarmos em questão a segunda quantização no espaço de Fock. Este assunto é muito bem tratado em livros

didáticos introdutórios à teoria quântica de campos (como por exemplo [17] ou [18]). Grosseiramente podemos dizer que a segunda quantização é uma forma de entender que os campos são quantizados (inclusive a função de onda de Schrödinger, por exemplo) como uma coleção infinita de osciladores harmônicos quânticos. Como temos um bom formalismo usando os operadores de criação e aniquilação para descrever tais osciladores, utilizamos este mesmo formalismo para descrever os campos.

Sobre o espaço de Fock, podemos dizer que este é uma extensão do espaço de Hilbert, utilizado para o formalismo de operadores lineares em mecânica quântica. Mais formalmente o espaço de Fock F_{\pm} é definido como uma soma direta \oplus dos produtos tensoriais dos espaços de Hilbert $H^{\otimes n}$ definido por n partículas, ou seja: $F_{\pm} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_{\pm} H^{\otimes n}$, onde S_{\pm} é o operador que simetriza (+ no caso das partículas serem bósons) ou antissimetriza (− no caso das partículas serem férmions).

A densidade Hamiltoniana deste no campo descrito pela (3.1) em um espaço infinito é

$$h(x) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_0} \right)^2 + (\nabla \Phi(x))^2 + \mu^2 \Phi(x)^2 \right] \quad (3.2)$$

Podemos assumir que $h(x)$ se comporta exatamente como em um espaço-tempo plano global. Se trabalharmos com essa consideração, temos que levar em conta que a Hamiltoniana deve ser ordenada normalmente¹ para que a arbitrariedade da ordem dos operadores de criação e aniquilação do campo $\Phi(x)$ não resulte em diferenças de energia do estado fundamental. Dessa forma podemos definir $T_{00}(x)$ como

$$T_{00}(x) = : h(x) : \equiv H(x) \quad (3.3)$$

Mas como podemos perceber pela equação (3.1), a ordenação normal deve ser definida no espaço de momentos (já que os operadores $a(\vec{k})$ e $a(\vec{k})^{\dagger}$ estão nesse espaço). Para podermos entender o caso considerando a geometria com contornos, temos que formular a questão no espaço- x . Para isso, usamos a técnica de separação de pontos (*point splitting technique*, também descrita no apêndice de [19]). Essa técnica consiste

¹Ordenação Normal (conhecida também como Ordenação de Wick) consiste em um processo de deixar os operadores de criação a^{\dagger} à esquerda de todos os operadores de aniquilação a . Por exemplo, se temos um operador \hat{A} , composto por uma parte \hat{A}_+ com operadores de criação e outra parte \hat{A}_- com operadores de aniquilação, a ordenação normal do seu quadrado é dada por $:\hat{A}^2 := \hat{A}^2 - [\hat{A}_-, \hat{A}_+]$.

em pegar as multiplicações de termos que estão definidos em um mesmo ponto x e separá-las em um ponto x e outro y , para depois tomar o limite $y \rightarrow x$. Essa técnica de separação de pontos também existe como uma técnica de regularização².

Aplicando a técnica, obtemos diretamente

$$H(x) = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow x} \left[: \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_0} \frac{\partial \Phi(y)}{\partial y_0} : + : \nabla \Phi(x) \nabla \Phi(y) : + \mu^2 : \Phi(x) \Phi(y) : \right] \quad (3.4)$$

Para ordenar normalmente podemos adiantar que os termos Φ_- e Φ_+ são simplesmente as partes do campo Φ que possuem os operadores de aniquilação e criação respectivamente. Ou seja

$$\Phi_-(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega}} a(\vec{k}) e^{-ik^\mu x_\mu} \quad (3.5a)$$

$$\Phi_+(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega}} a(\vec{k})^\dagger e^{+ik^\mu x_\mu} \quad (3.5b)$$

E a relação de comutação entre esses, que deixamos para derivar no apêndice A, é dada:

$$[\Phi_-(x), \Phi_+(y)] = \frac{1}{i} D_0^{(+)}(x - y) \quad (3.6)$$

onde

$$D_0^{(+)}(x - y) \equiv \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{2\omega} e^{-k^\mu (x_\mu - y_\mu)} \quad (3.7)$$

É importante mencionar que essas demonstrações valem apenas para o caso de condições periódicas de contorno, pois é com ela que estão definidas as funções de Green $D_0^{(+)}(x - y)$.

Então do primeiro termo da equação (3.4) tiramos que

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow x} : \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_0} \frac{\partial \Phi(y)}{\partial y_0} : &= \lim_{y \rightarrow x} \left\{ \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_0} \frac{\partial \Phi(y)}{\partial y_0} - \left[\frac{\partial \Phi_-(x)}{\partial x_0}, \frac{\partial \Phi_+(y)}{\partial y_0} \right] \right\} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \left\{ \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_0} \frac{\partial \Phi(y)}{\partial y_0} - \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial y_0} [\Phi_-(x), \Phi_+(y)] \right\} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \left\{ \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_0} \frac{\partial \Phi(y)}{\partial y_0} + \frac{1}{i} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} D_0^{(+)}(x - y) \right\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

²Dessa forma, tentamos evitar inconsistências da teoria quântica de campos onde as integrais levam em conta um mesmo ponto duas vezes.

E de forma similar, temos que os outros termos da equação (3.4) resultam:

$$\lim_{y \rightarrow x} : \nabla\Phi(x)\nabla\Phi(y) := \lim_{y \rightarrow x} \left\{ \nabla\Phi(x)\nabla\Phi(y) + \frac{1}{i}\nabla^2 D_0^{(+)}(x-y) \right\} \quad (3.9)$$

e

$$\lim_{y \rightarrow x} : \mu^2\Phi(x)\Phi(y) := \lim_{y \rightarrow x} \left\{ \mu^2\Phi(x)\Phi(y) + \frac{1}{i}\mu^2 D_0^{(+)}(x-y) \right\} \quad (3.10)$$

Ou seja, nossa densidade Hamiltoniana se torna

$$H(x) = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow x} \left[\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_0} \frac{\partial\Phi(y)}{\partial y_0} + \nabla\Phi(x)\nabla\Phi(y) + \mu^2\Phi(x)\Phi(y) + \frac{1}{i} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} D_0^{(+)}(x-y) + \frac{1}{i} \nabla^2 D_0^{(+)}(x-y) + \frac{1}{i} \mu^2 D_0^{(+)}(x-y) \right] \quad (3.11)$$

Mas como as funções de Green $D_0^{(+)}(x-y)$ também devem respeitar a equação de Klein-Gordon:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} D_0^{(+)}(x-y) + \nabla^2 D_0^{(+)}(x-y) + \mu^2 D_0^{(+)}(x-y) = 0 \quad (3.12)$$

podemos resumir os dois últimos termos da (3.11) e obter

$$H(x) = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow x} \left[\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_0} \frac{\partial\Phi(y)}{\partial y_0} + \nabla\Phi(x)\nabla\Phi(y) + \mu^2\Phi(x)\Phi(y) + \frac{2}{i} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} D_0^{(+)}(x-y) \right] \quad (3.13)$$

A equação (3.13) descreve o campo tanto com, quanto sem contorno. Mas para trabalharmos adequadamente com o caso de haver um contorno, é necessário definir o campo na representação adequada onde a geometria dita sua estrutura. Isso, faremos na seção a seguir.

3.1.1 Hamiltoniana do Vácuo Limitada por um Contorno

Se queremos considerar a geometria de um espaço K com contorno ∂K na definição do campo $\Phi(x)$, expandimos o campo usando as autofunções normalizadas $u_n(\vec{x})$ do Laplaciano em K que respeitam as condições de contorno em ∂K , sejam quais forem³. Matematicamente

$$-\Delta u_n(\vec{x}) = \omega_n^2 u_n(\vec{x}) \quad (3.14)$$

³Temos que $\{u_n\}_{n \in A}$ forma um conjunto completo, com A sendo um conjunto discreto dependente das condições de contorno escolhidas.

onde

$$\omega_n = (k_n^2 + \mu^2)^{1/2} \quad (3.15)$$

Complementariamente à idéia de que as contas estão sendo apresentadas para o caso de condições periódicas de contorno, as autofunções u_n terão também a propriedade de se repetir depois de um intervalo de L , ou seja $u_n(x + L) = u_n(x)$.

Então, expandindo o campo

$$\Phi(x) = \sum_{\vec{n} \in A} \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} [a_n u_n(\vec{x}) e^{-i\omega_n x_0} + a_n^\dagger u_n(\vec{x})^* e^{i\omega_n x_0}] \quad (3.16)$$

E da mesma forma de antes, podemos separar uma parte com o operador a_n e outra com a_n^\dagger da seguinte forma:

$$\Phi_-(x) = \sum_{\vec{n}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} a_n u_n(\vec{x}) e^{-i\omega_n x_0} \quad (3.17a)$$

$$\Phi_+(x) = \sum_{\vec{n}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} a_n^\dagger u_n(\vec{x})^* e^{i\omega_n x_0} \quad (3.17b)$$

Com a relação de comutação entre ambos, também derivada no apêndice A,

$$[\Phi_-(x), \Phi_+(y)] = \frac{1}{i} D_k^{(+)}(x - y) \quad (3.18)$$

onde

$$D_k^{(+)}(x - y) \equiv i \sum_{\vec{n} \in A} \frac{1}{2\omega_n} u_n(\vec{x}) u_n(\vec{y})^* e^{-\omega_n(x_0 - y_0)} \quad (3.19)$$

Mas como houve uma mudança na representação do espaço de Fock, uma nova ordenação normal deve ser feita com os operadores a_n e a_n^\dagger , que neste caso, mais corretamente designamos respectivamente como operadores de absorção e emissão. Para indicar que estamos fazendo uma nova ordenação, utilizamos o símbolo do ponto-e-vírgula ao invés do ordinário dois pontos. Ou seja

$$H_k(x) = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow x} \left[; \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_0} \frac{\partial \Phi(y)}{\partial y_0} ; + ; \nabla \Phi(x) \nabla \Phi(y) ; + \mu^2 ; \Phi(x) \Phi(y) ; + \right. \\ \left. + \frac{2}{i} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} D_0^{(+)}(x - y) \right] \quad (3.20)$$

Similarmente, temos que calcular os termo da (3.20). O primeiro:

$$\begin{aligned}
\lim_{y \rightarrow x} \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_0} \frac{\partial \Phi(y)}{\partial y_0}; &= \lim_{y \rightarrow x} \left\{ \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_0} \frac{\partial \Phi(y)}{\partial y_0} - \left[\frac{\partial \Phi_-(x)}{\partial x_0}, \frac{\partial \Phi_+(y)}{\partial y_0} \right] \right\} \\
&= \lim_{y \rightarrow x} \left\{ \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_0} \frac{\partial \Phi(y)}{\partial y_0} - \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial y_0} [\Phi_-(x), \Phi_+(y)] \right\} \\
&= \lim_{y \rightarrow x} \left\{ \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_0} \frac{\partial \Phi(y)}{\partial y_0} - \frac{1}{i} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} D_k^{(+)}(x-y) \right\} \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Os outros termos seguem da mesma forma, resultando em uma densidade Hamiltoniana

$$\begin{aligned}
H_k(x) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_0}^2 + \nabla \Phi(x)^2 + \mu^2 \Phi(x)^2 \right] + \\
&+ \frac{1}{i} \lim_{y \rightarrow x} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} D_0^{(+)}(x-y) - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} D_k^{(+)}(x-y) \right] \quad (3.22)
\end{aligned}$$

Pois assim chegamos em um ponto crucial. Se queremos obter a densidade de energia do vácuo (levando em conta condições periódicas de contorno), temos que calcular o valor esperado de H_k no estado de vácuo Ω_k

$$\begin{aligned}
\langle T_{00} \rangle_{vac} &= \langle \Omega_k | H_k \Omega_k \rangle = \\
&= \frac{1}{i} \lim_{y \rightarrow x} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} D_0^{(+)}(x-y) - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} D_k^{(+)}(x-y) \right] \quad (3.23)
\end{aligned}$$

Os três primeiros termos da (3.22) são nulos devido à propriedade dos operadores de absorção no espaço de Fock⁴

$$a_n |\Omega_k\rangle = 0 \quad (3.24)$$

que agora atuam primeiro no estado de vácuo $|\Omega_k\rangle$, pois estão à direita. Isso ocorre porque fizemos a ordenação normal da densidade Hamiltoniana.

⁴Propriedade análoga ao do espaço de Hilbert, onde o operador de aniquilação atuando no estado fundamental $|0\rangle$ é nulo: $a|0\rangle = 0$

Então, escrevendo a equação (3.23) explicitamente, temos

$$\begin{aligned}
 \langle T_{00} \rangle_{vac} &= \frac{1}{i} \lim_{y \rightarrow x} \left[\frac{i}{(2\pi)^3} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \int \frac{d^3 k}{2\omega} e^{-k^\mu(x_\mu - y_\mu)} - i \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \sum_{\vec{n}} \frac{1}{2\omega_n} u_n(\vec{x}) u_n(\vec{y})^* e^{-\omega_n(x_0 - y_0)} \right] = \\
 &= \lim_{y \rightarrow x} \left[\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{2\omega} (k_0)^2 e^{-k^\mu(x_\mu - y_\mu)} - \sum_{\vec{n}} \frac{1}{2\omega_n} (\omega_n)^2 u_n(\vec{x}) u_n(\vec{y})^* e^{-\omega_n(x_0 - y_0)} \right] = \\
 &= \lim_{y \rightarrow x} \left[\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{\omega}{2} e^{-k^\mu(x_\mu - y_\mu)} - \sum_{\vec{n}} \frac{\omega_n}{2} u_n(\vec{x}) u_n(\vec{y})^* e^{-\omega_n(x_0 - y_0)} \right] \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

Ironicamente, apesar de os primeiros três termos da equação (3.22) serem nulos, os outros resultam em infinito. Isto indica uma indeterminação na densidade de energia de vácuo. Para podermos lidar com esses infinitos que aparecem nesses termos, temos que introduzir um regularizador que torne a equação (3.25) calculável. Nota-se que o trabalho de mestrado de Kawakami [5] (publicado também em [6]) apresenta a prova da independência de regularização da energia de Casimir. A prova está feita para a mesma classe de regularizadores que utilizaremos aqui.

Ainda sobre a regularização, se temos o caso em que o campo está entre duas placas paralelas, por exemplo, podemos argumentar fisicamente que abaixo de uma certa frequência, as placas se tornam imperceptíveis. Dessa forma estas frequências não participariam no cálculo do efeito de Casimir. Então introduzir um regularizador tipo cutoff limitaria as frequências que estão contribuindo para o cálculo.

Introduzindo um Regularizador

Utilizamos um regularizador $C_\Lambda(\cdot)$ que depende de um parâmetro cutoff Λ que possui dimensão do inverso do comprimento. Esse regularizador deve respeitar as seguintes propriedades

$$C_\Lambda(\vec{k}) = C(\Lambda\omega_n), \quad (3.26a)$$

$$\lim_{\Lambda \rightarrow 0} C_\Lambda(\vec{k}) = \lim_{\Lambda \rightarrow 0} C(\Lambda\omega_n) = 1 \quad (3.26b)$$

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} C(\Lambda) = 0 \quad (3.26c)$$

$$\int_0^\infty C(x) dx < \infty \quad (3.26d)$$

Introduzindo tal regularizador para controlar os infinitos que aparecem na equação (3.25), obtemos em uma nova densidade de energia regularizada

$$\langle T_{00} \rangle_{vac}^\Lambda = \lim_{y \rightarrow x} \left[\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{\omega}{2} e^{-k^\mu(x_\mu - y_\mu)} C(\Lambda\omega) - \sum_{\vec{n}} \frac{\omega_n}{2} u_n(\vec{x}) u_n(\vec{y})^* e^{-\omega_n(x_0 - y_0)} C(\Lambda\omega_n) \right] \quad (3.27)$$

Tomando o limite $y \rightarrow x$ e se utilizarmos um regularizador que também respeite que $\partial C_\Lambda / \partial \Lambda = \omega C_\Lambda$, finalmente chegamos na expressão da densidade de energia de Casimir regularizada que podemos calcular

$$\langle T_{00} \rangle_{vac}^\Lambda = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \Lambda} \left[\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k C(\Lambda\omega) - \sum_{\vec{n}} |u_n(\vec{x})|^2 C(\Lambda\omega_n) \right] \quad (3.28)$$

Podemos adiantar que nosso real interesse recairá sobre os cálculos do efeito de Casimir em um cubo, mas como um exercício mais simples, é interessante desenvolvermos os cálculos do efeito de Casimir entre placas paralelas.

3.2 Caso de Placas Paralelas

Se queremos estudar o caso onde temos que aplicar as condições de contorno nas três dimensões espaciais, nada mais simples do que começarmos a entender o caso com condições de contorno em só uma das dimensões. Mas para isso, devemos deixar claro que o desenvolvimento das equações anteriormente eram para um caso geral onde o contorno existe generalizado em ∂K . Ou seja, ao invés de expandir o campo como fizemos em (3.16), consideramos a geometria apenas em uma das coordenadas espaciais obtendo no lugar

$$\Phi_L(x) = \sum_n \int dk_1 dk_2 \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} \left[a_n u_n(\vec{x}) e^{-i\omega_n x_0} + a_n^\dagger u_n(\vec{x})^* e^{i\omega_n x_0} \right] \quad (3.29)$$

com

$$\omega_n^2 = k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2 + \mu^2 \quad (3.30)$$

Seguindo a mesma linha lógica apresentada, obtemos uma densidade de energia regularizada

$$\langle T_{00} \rangle_{vac,L}^\Lambda = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \Lambda} \left\{ \int d^3k C(\Lambda k_0) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int dk_1 dk_2 |u_n(\vec{x})|^2 C(\Lambda \omega_n) \right\} \quad (3.31)$$

Para resolver o problema, basta explicitarmos quais são as autofunções $u_n(\vec{x})$ já que agora podemos definir bem quais são as condições de contorno. Como temos em vista a modelagem do problema físico que consistirá na divisão do Universo em pequenas células idênticas que se repetem em uma larga escala, adotaremos condições periódicas de contorno (*i.e.* no caso das placas paralelas $u_n(z) = u_n(z + L)$). Ou seja, se temos as placas separadas por uma distância L , então temos o conjunto $A = \left\{ \frac{2\pi}{L}n, n \in \mathbb{Z}, (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ e respeitando (3.14) temos

$$u_n(\vec{x}) = \sqrt{\frac{1}{L}} e^{(2i\frac{n\pi}{L}z)} \frac{1}{2\pi} e^{i(k_1x+k_2y)} \quad (3.32)$$

onde temos que as autofunções permanecem como ondas planas no plano xy .

Utilizando a função

$$C(x) = e^{-x}, \quad x \geq 0 \quad (3.33)$$

como regularizador⁵. Temos que resolver

$$\langle T_{00}(x) \rangle_{vac,L}^\Lambda = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \Lambda} \left\{ -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-\Lambda k_0} + I(\Lambda) \right\} \quad (3.34)$$

onde

$$I(\Lambda) \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 e^{-\Lambda \omega_n} \quad (3.35)$$

Agora introduzimos a fórmula do somatório de Poisson ([20], pg 210)), que nos serve para relacionar os coeficientes da série de Fourier, da função à direita na equação (3.35), aos valores da transformada de Fourier contínua da função:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2\pi n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(m) \quad (3.36a)$$

onde

$$\hat{f}(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-imk} f(k) \quad (3.36b)$$

e

$$f(2\pi n) \equiv e^{-\Lambda \omega_n}$$

⁵Observe que claramente essa função respeita as condições (3.26).

Então do termo (3.35) que aparece em (3.34), temos que

$$\frac{1}{2} \frac{\partial I}{\partial \Lambda} = -\frac{1}{2(2\pi)^3} \frac{1}{L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int dk_1 \int dk_2 \int dk'_3 \left\{ \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{k'_3}{L}\right)^2 + \mu^2} \right. \\ \left. e^{-\Lambda \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{k'_3}{L}\right)^2 + \mu^2}} e^{-imk'_3} \right\} \quad (3.37)$$

Redefinindo $k'_3 = Lk_3$, temos uma forma mais simplificada

$$\frac{1}{2} \frac{\partial I}{\partial \Lambda} = -\frac{1}{2(2\pi)^3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int dk_1 \int dk_2 \int dk_3 \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + \mu^2} \cdot \\ \cdot e^{-\Lambda \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + \mu^2}} e^{-imLk_3} \quad (3.38)$$

Aqui surge um fato muito importante. Notamos que o termo do somatório com $m = 0$ (deixando sem a derivada para ficar mais claro)

$$I(\Lambda)|_{m=0} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk_1 \int dk_2 \int dk_3 e^{-\Lambda \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + \mu^2}} \quad (3.39)$$

é exatamente o outro termo da (3.34) mas de sinal oposto. Ou seja, a soma desses termos será nula, o que fará com que (3.34) possa ser resumida em

$$\langle T_{00}(x) \rangle_{vac,L}^{\Lambda} = -\frac{1}{2(2\pi)^3} \sum_{m \neq 0} \int dk_1 \int dk_2 \int dk_3 \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + \mu^2} \cdot \\ \cdot e^{-\Lambda \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + \mu^2}} e^{-imLk_3} \quad (3.40)$$

Fazendo uma mudança de coordenadas: $dk_1 dk_2 dk_3 = k^2 dk d \cos \theta d\phi$ e $k_3 = k \cos \theta$,

ou seja de cartesianas para esféricas,

$$\begin{aligned}
 \langle T_{00}(x) \rangle_{vac,L}^\Lambda &= \frac{1}{2(2\pi)^2} \sum_{m \neq 0} \int_0^\infty dk k^2 \int_{-1}^1 dx \sqrt{k^2 + \mu^2} e^{-\Lambda \sqrt{k^2 + \mu^2}} e^{-imLkx} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{mL} \int_0^\infty dk k^2 \sin(mLk) \sqrt{k^2 + \mu^2} e^{-\Lambda \sqrt{k^2 + \mu^2}} \\
 &= \frac{2}{(2\pi)^2} \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{mL} \int_0^\infty dk k \sin(mLk) \sqrt{k^2 + \mu^2} e^{-\Lambda \sqrt{k^2 + \mu^2}} \quad (3.41) \\
 &= -\frac{2}{(2\pi)^2} \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{mL} \frac{\partial}{\partial(mL)} \int_0^\infty dk \cos(mLk) \sqrt{k^2 + \mu^2} e^{-\Lambda \sqrt{k^2 + \mu^2}} \\
 &= -\frac{2}{(2\pi)^2} \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{mL} \frac{\partial}{\partial(mL)} \frac{\partial^2}{\partial \Lambda^2} \int_0^\infty dk \cos(mLk) (k^2 + \mu^2)^{-1/2} e^{-\Lambda \sqrt{k^2 + \mu^2}}
 \end{aligned}$$

Mas essa integral é conhecida, pois sabemos por [21] que

$$g(y) = \int_0^\infty dx \cos(xy) (x^2 + \alpha^2)^{-1/2} e^{-\beta \sqrt{x^2 + \alpha^2}} = K_0 [\alpha(\beta^2 + y^2)^{1/2}] \quad (3.42)$$

onde K_ν , $\nu = 0, 1, 2, \dots$ são as funções de Bessel modificadas [21]. Podemos então concluir que

$$\langle T_{00}(x) \rangle_{vac,L}^\Lambda = -\frac{2}{(2\pi)^2} \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{mL} \frac{\partial}{\partial(mL)} \frac{\partial^2}{\partial \Lambda^2} K_0 [\mu(\Lambda^2 + (mL)^2)^{1/2}] \quad (3.43)$$

Se sabemos que as derivadas das funções de Bessel modificadas são

$$\frac{\partial K_\nu(az)}{\partial z} = -aK_{\nu+1}(az) + \frac{\nu}{z} K_\nu(az) \quad (3.44)$$

Então a derivada em relação a Λ na (3.43) é

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial \Lambda^2} K_0 [\mu(\Lambda^2 + (mL)^2)^{1/2}] &= \mu^2 \Lambda^2 (\Lambda^2 + (mL)^2)^{-1} K_0 [\mu(\Lambda^2 + (mL)^2)^{1/2}] + \\
 &\quad + 2\mu \Lambda^2 (\Lambda^2 + (mL)^2)^{-3/2} K_1 [\mu(\Lambda^2 + (mL)^2)^{1/2}] - \\
 &\quad - \mu (\Lambda^2 + (mL)^2)^{-1/2} K_1 [\mu(\Lambda^2 + (mL)^2)^{1/2}] \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

Ficando faltando apenas derivar (3.43) em relação a mL , para podermos tirar o regularizador⁶. Obtendo assim a densidade de energia de Casimir

$$\rho_{paralelas} = -\frac{2}{(2\pi)^2} \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m^3 L^4} [\mu^2 m L K_0(\mu mL) + 2\mu K_1(\mu mL)] \quad (3.46)$$

⁶Para isso tomamos $\Lambda \rightarrow 0_+$ já que a condição (3.26b) deve ser satisfeita.

Partindo da equação para a densidade de energia, podemos obter a pressão. Pois pela equação de estado termodinâmica

$$\begin{aligned} p_{paralelas} &= - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S,N} = - \left(\frac{\partial \langle T_{00}(x) \rangle_{vac,L}^\Lambda}{\partial L} \right) \\ &= - \frac{2}{(2\pi)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu}{m^3 L^4} [4\mu m L K_0(\mu m L) + \mu^2 m^2 L^2 K_1(\mu m L) + 8K_1(\mu m L)] \end{aligned} \quad (3.47)$$

Com estes resultados, podemos perceber dois detalhes. Como as funções modificadas de Bessel de segunda ordem são sempre positivas, *i.e.* $K_\nu(x) \geq 0, \forall \nu, \forall x$ [21], teremos que a densidade de energia será negativa ($\rho_{paralelas} \leq 0$) contrariando a fenomenologia da energia escura. Mas a pressão termodinâmica negativa ($p_{paralelas} \leq 0$) está sendo respeitada. De qualquer forma, temos que rever os cálculos para o caso do cubo para podermos realmente examinar os resultados.

3.3 Caso do Cubo

Como já foi dito, nosso real interesse são as contas do efeito Casimir em um cubo C_L de lado L , pois usaremos este caso para construção de nosso modelo e a seção anterior (do caso de placas paralelas), por ser um caso mais simples, nos servirá aqui como guia. Já temos a expressão (3.28) que nos fornece a energia regularizada $\langle T_{00}(x) \rangle_{vac,cubo}^\Lambda$. Da mesma forma, adotamos condições periódicas de contorno nas três coordenadas espaciais, tendo $A = \left\{ \frac{2\pi}{L} \vec{n}, \vec{n} \in \mathbb{Z}^3 \right\}$. Então ao invés de (3.32), temos as autofunções que respeitam (3.14)

$$u_{\vec{n}}(\vec{x}) = L^{-3/2} e^{(2i \frac{n_1 \pi}{L} x + 2i \frac{n_2 \pi}{L} y + 2i \frac{n_3 \pi}{L} z)} \quad (3.48)$$

Para a energia de Casimir, agora temos

$$\langle T_{00}(x) \rangle_{vac,cubo}^\Lambda = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \omega_{\vec{k}} e^{-\Lambda \omega_{\vec{k}}} + I_{cube}(\Lambda) \right\} \quad (3.49)$$

onde

$$I_{cube}(\Lambda) = \sum_{\vec{n}} \omega_{\vec{n}} e^{-\Lambda \omega_{\vec{n}}} \quad (3.50)$$

e

$$\omega_{\vec{k}} = \left[\vec{k}^2 + \mu^2 \right]^{1/2}, \quad \omega_{\vec{n}} = \left[\left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \vec{n}^2 + \mu^2 \right]^{1/2} \quad (3.51)$$

Seguindo da mesma forma, podemos utilizar a fórmula do somatório de Poisson [20]

$$\sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} f(2\pi\vec{n}) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^3} \hat{f}(\vec{m}) \quad (3.52a)$$

onde

$$\hat{f}(\vec{m}) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int d\vec{k} e^{-i\vec{m} \cdot \vec{k}} f(\vec{k}) \quad (3.52b)$$

com

$$f(\vec{k}) = \left[(\vec{k}/L)^2 + \mu^2 \right]^{1/2} e^{-\Lambda \left[\left(\frac{\vec{k}}{L} \right)^2 + \mu^2 \right]} \quad (3.52c)$$

Mudando de coordenadas cartesianas para esféricas, podemos calcular o termo com $m = 0$ em (3.52b)

$$\begin{aligned} \hat{f}(\vec{m} = \vec{0}) &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 f(k) \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \left((k/L)^2 + \mu^2 \right)^{1/2} e^{-\Lambda \left((k/L)^2 + \mu^2 \right)^{1/2}}, \quad \frac{k}{L} \rightarrow k' \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} L^3 \int_0^\infty dk' k'^2 \left(k'^2 + \mu^2 \right)^{1/2} e^{-\Lambda \left(k'^2 + \mu^2 \right)^{1/2}} \\ &= \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \omega_{\vec{k}} e^{-\Lambda \omega_{\vec{k}}} \end{aligned} \quad (3.53)$$

que similar ao caso anterior, é o mesmo primeiro termo da equação (3.49) mas de sinal oposto. Resumindo a energia de Casimir em

$$\langle T_{00}(x) \rangle_{vac, cubo}^\Lambda = \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}} \omega_{\vec{n}} e^{-\Lambda \omega_{\vec{n}}} \quad (3.54)$$

Novamente, precisamos dos termos com $m \neq 0$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\vec{m} \neq \vec{0}) &= \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \left(\int_{-1}^1 e^{-imku} du \right) f(k) \\ &= \frac{1}{im(2\pi)^2} \int_0^\infty dk k f(k) (e^{imk} - e^{-imk}) \end{aligned} \quad (3.55)$$

onde $m \equiv |\vec{m}|$. Ou seja,

$$\begin{aligned} \langle T_{00}(x) \rangle_{vac, cubo}^\Lambda &= \frac{1}{2} \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^3} \frac{1}{im(2\pi)^2} \int_0^\infty dk k \left((k/L)^2 + \mu^2 \right)^{1/2} \cdot \\ &\quad \cdot e^{-\Lambda \left((k/L)^2 + \mu^2 \right)^{1/2}} (e^{imk} - e^{-imk}) \end{aligned} \quad (3.56)$$

onde deixamos \sum' denotar a exclusão do vetor $\vec{m} = \vec{0}$. Mudando $k/L \rightarrow k$

$$\begin{aligned}
\langle T_{00}(x) \rangle_{vac,cubo}^\Lambda &= \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^3} \frac{L^2}{im(2\pi)^2} \int_0^\infty dk k (k^2 + \mu^2) e^{-\Lambda(k^2 + \mu^2)^{1/2}} (e^{imLk} - e^{-imLk}) \\
&= \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^3} \frac{2L^2}{m(2\pi)^2} \int_0^\infty dk k (k^2 + \mu^2)^{1/2} e^{-\Lambda(k^2 + \mu^2)^{1/2}} \sin(mLk) \\
&= - \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^3} \frac{2L}{m(2\pi)^2} \frac{\partial}{\partial m} \left[\int_0^\infty dk (k^2 + \mu^2)^{1/2} e^{-\Lambda(k^2 + \mu^2)^{1/2}} \cos(mLk) \right] \\
&= - \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^3} \frac{2L}{m(2\pi)^2} \frac{\partial}{\partial m} \frac{\partial^2}{\partial \Lambda^2} \left[\int_0^\infty dk (k^2 + \mu^2)^{-1/2} e^{-\Lambda(k^2 + \mu^2)^{1/2}} \cos(mLk) \right]
\end{aligned} \tag{3.57}$$

onde podemos usar a mesma solução de integral mostrado antes em (3.42) para obter

$$\langle T_{00}(x) \rangle_{vac,cubo}^\Lambda = - \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^3} \frac{2L}{m(2\pi)^2} \frac{\partial}{\partial m} \frac{\partial^2}{\partial \Lambda^2} \{ K_0 [\mu (\Lambda^2 + m^2 L^2)] \} \tag{3.58}$$

Ficando as mesmas derivadas do caso anterior para serem resolvidas. Pois se primeiros tomamos a derivada de segunda ordem em relação a Λ e depois em relação a m , podemos tirar a regularização tomando o limite $\Lambda \rightarrow 0_+$

$$\begin{aligned}
\langle T_{00}(x) \rangle_{vac,cubo} &= - \frac{L}{(2\pi)^2} \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^3} \{ 2\mu m^{-3} L^{-1} K_1(\mu mL) + \\
&\quad + \mu^2 m^{-2} [K_0(\mu mL) + K_2(\mu mL)] \}
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Se queremos achar a densidade de energia de Casimir, fazemos

$$\begin{aligned}
\rho_{vac,cubo} &= L^{-3} \langle T_{00}(x) \rangle_{vac,cubo} \\
&= -L^{-4} \left\{ \frac{2r}{(2\pi)^2} \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^3} m^{-3} K_1(rm) + \frac{r^2}{2} \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^3} m^{-2} [K_0(rm) + K_2(rm)] \right\}
\end{aligned} \tag{3.60}$$

onde deixamos

$$r = L\mu \tag{3.61}$$

Para a pressão recorreremos à mesma equação de estado termodinâmica que usamos em (3.47), obtendo⁷

$$\begin{aligned} p_{vac,cubo} &= -\frac{\partial \langle T_{00}(x) \rangle}{\partial V} = -\frac{\partial \langle T_{00}(x) \rangle}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial V} = -\frac{1}{3L^2} \frac{\partial \langle T_{00}(x) \rangle}{\partial L} \\ &= \frac{2}{3L^2(2\pi)^2} \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^3} \mu^2 m^{-2} \left\{ K'_1 + \frac{1}{2} (K_0 + K_2) + \frac{1}{2} \mu m L (K'_0 + K'_2) \right\} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Sabendo que $K'_1 = -(K_0 + K_2)/2$, $K'_2 = -(K_1 + K_3)/2$ e $K'_0 = -K_1$, podemos ver que o primeiro e segundo termos se cancelam mutuamente, deixando somente

$$\begin{aligned} p_{vac,cubo} &= \frac{1}{3L(2\pi)^2} \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^3} \mu^3 m^{-1} \left[-K_1(\mu m L) - \frac{K_1 + K_3}{2} \right] \\ &= -\frac{1}{3L(2\pi)^2} \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^3} \mu^3 m^{-1} \left[\frac{3}{2} K_1(\mu m L) + \frac{1}{2} K_3 \right] \end{aligned} \quad (3.63)$$

Reescrevendo a expressão para a pressão usando a definição introduzida $r = mL$,

$$p_{vac,cubo} = -L^{-4} \left\{ \frac{r^3}{3(2\pi)^2} \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^3} m^{-1} \left[\frac{3}{2} K_1(rm) + \frac{1}{2} K_3(rm) \right] \right\} \quad (3.64)$$

Desta forma obtemos um resultado similar ao caso anterior: $\rho_{vac,cubo} \leq 0$ e $p_{vac,cubo} \leq 0$ já que, como foi dito, as funções modificadas de Bessel de segunda ordem são sempre positivas. Independente desta análise, chegamos ao que propomos neste capítulo: uma expressão que fornece a densidade de energia do vácuo (3.60) e outra que fornece a pressão deste (3.64) para o efeito Casimir em um cubo.

⁷Lembrando que $V = L^3$

4 UM MODELO PARA A ENERGIA ESCURA

“Você sabe a fórmula: m sobre nada é igual a infinito, m sendo qualquer número positivo? Bem, porque não reduzir a equação para uma forma mais simples multiplicando ambos lados por nada? Neste caso, você tem que m é igual a infinito vezes nada. Isso é o mesmo que dizer que um número positivo é o produto de zero e infinito. Isso não demonstra a criação do universo por um infinito poder do nada?”

Aldous Huxley¹

Para explicar a fenomenologia da Energia Escura observada, tentaremos construir neste capítulo um modelo que utilize os cálculos já trabalhados. Mais especificamente, utilizaremos os resultados do Efeito Casimir de um campo escalar massivo em um cubo, trabalhado na última seção do capítulo precedente.

Como já feito de forma mais extensa na segunda parte desta dissertação, a fenomenologia da Energia Escura nos dá que sua densidade de energia deve ser positiva

$$\rho_{EE} > 0 \tag{4.1}$$

e sua pressão negativa

$$p_{EE} < 0 \tag{4.2}$$

onde deixamos o subscrito “EE” denotar Energia Escura. Mais precisamente, as últimas observações feitas pelo *Supernova Cosmology Project* [22], levando em conta o modelo Λ CDM, inferem uma densidade de energia

$$\rho_{EE} \cong 2.9 \times 10^{-47} \text{GeV}^4 \tag{4.3}$$

E se pararmos para ver sua escala de energia $\rho_{EE}^{1/4} = 2.3 \times 10^{-3} \text{eV}$, podemos perceber que esta é muito pequena.

¹*Point Counter Point*, Grafton, London (1928)

Utilizaremos esses dados para, após a construção do modelo na seção seguinte, comparar com os resultados deste.

4.1 Um Universo Composto por Cubos

Para podermos usar os cálculos do capítulo anterior, construímos nosso Universo como composto de cubos C_L de lado L . Observe que $L \ll L_H$, onde L_H é o raio de Hubble². Ou em outras palavras, estes cubos são infinitesimalmente menores do que o Universo. Então considerar que estamos trabalhando em um espaço infinito, é uma boa aproximação.

Mas construindo o cosmos desta forma, lidamos com um problema. Como comentado no capítulo anterior, as funções modificadas de Bessel de segunda ordem são sempre positivas, *i.e.* $K_\nu(x) \geq 0, \forall \nu, \forall x$ [21], levando à uma densidade de energia do vácuo (3.60) negativa. Então visando a preservação da condição (4.1), tentamos utilizar um vácuo quântico levemente diferente fazendo neste um deslocamento de energia. Tendo o vácuo $|\Omega\rangle$ deslocado para $|(a_{\bar{0}})^\dagger\Omega\rangle$, o que significa que um observável A no vácuo agora é dado por

$$\langle A \rangle'_{vac} = \langle (a_{\bar{0}})^\dagger\Omega | A (a_{\bar{0}})^\dagger\Omega \rangle \quad (4.4)$$

Isso é o mesmo de propormos de adicionar excitações de uma-partícula com momento nulo ao vácuo. Esta é a excitação de menor energia possível compatível com a pressão negativa (4.2), já que não contribuirá para a pressão. Estes estados, que possuem energia μ , são compatíveis com a condição periódica de contorno.

Resulta-se então em energia associada ao vácuo

$$E_{vac} = E_{vac,cubo} + \mu \quad (4.5)$$

ou seja, em uma densidade de energia

$$\rho_{vac} = \rho_{vac,cubo} + L^{-3}\mu \quad (4.6)$$

Com essa mudança, deixamos de associar à Energia Escura somente o vácuo, como estávamos considerando, mas também uma partícula de massa μ . Então, considerando que o efeito Casimir ocorre dentro destes cubos, teremos que pelo modelo,

²O raio de Hubble $L_H = c/H_0$, que mede aproximadamente 13.8 bilhões de anos-luz, é uma grandeza que mede o raio do Universo se considerarmos que este é esférico.

a densidade de energia do vácuo será calculada a partir de (3.60) obtendo

$$\rho_{vac} = -\frac{1}{L^4} \left(\frac{1}{(2\pi)^2} \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^3} \{2rm^{-3}K_1(rm) + r^2m^{-2}[K_0(rm) + K_2(rm)]\} - r \right) \quad (4.7)$$

E a pressão permanece inalterada

$$p_{vac} = -L^{-4} \left\{ \frac{r^3}{3(2\pi)^2} \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^3} m^{-1} \left[\frac{3}{2}K_1(rm) + \frac{1}{2}K_3(rm) \right] \right\} \quad (4.8)$$

Lembrando que

$$r = L\mu \quad (4.9)$$

4.1.1 Resultados do Modelo

Tomando μ como uma grandeza *fixa* dada, podemos checar os resultados das equações (4.7) e (4.8). Para isso analisaremos três casos distintos para a grandeza r : $r \ll 1$, $r \gg 1$ e $r \approx 1$.

(i) $r \ll 1$

Neste caso

$$L \ll 1/\mu \quad (4.10)$$

e podemos analisar o caso limite de massa nula na energia $E_{vac}(\mu \rightarrow 0_+)$. Se $E_{vac} = L^3 \rho_{vac}$ e utilizando que para $z \rightarrow 0_+$

$$K_0 \sim -\ln z \quad (4.11a)$$

$$K_\nu \sim \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \left(\frac{1}{2}z \right)^{-\nu} \quad (4.11b)$$

podemos tirar de (4.7)

$$\begin{aligned} E_{vac,L} &= -\frac{2L}{(2\pi)^2} \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^3} \left(L^{-2}m^{-4} + \frac{2}{2}L^{-2}m^{-4} \right) \\ &= -\frac{4L^{-1}}{(2\pi)^2} \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^3} \frac{1}{m^4} \approx -0.52L^{-1} \end{aligned} \quad (4.12)$$

já que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad (4.13)$$

Então pela condição de energia positiva (4.1), podemos tirar do resultado (4.12) que

$$\mu \geq 0.52L^{-1} \quad (4.14)$$

que contradiz (4.10). Mais claro se passarmos a equação acima para a variável r , ou seja

$$r \geq 0.52 \quad (4.15)$$

que contradiz o caso considerado $r \ll 1$.

Note que não nenhum princípio para teoria quântica de campos local coloca um limite inferior para a região de localização, exceto o limite que $L \rightarrow 0$, correspondendo a campos pontuais. Neste caso, usando (4.7), $\rho_{vac} \rightarrow -\infty$. E isto está de acordo com o teorema de Epstein, Glaser e Jaffe [23] que afirma que : $H(\vec{x})$: não pode ser um operador positivo.

(ii) $r \gg 1$

Neste caso, recorreremos ao fato que o decaimento exponencial das funções de Bessel modificadas $K_\nu(x)$ [21] resultam em uma densidade de energia e pressão nulas. Levando a um resultado infrutífero. De qualquer forma, esse resultado era esperado pela localização de Newton-Wigner de campos quânticos [24].

(iii) $r \approx 1$

Para checar se esse caso é adequado, utilizando a equação (4.7) plotamos o gráfico da densidade de energia em função da variável r como apresentado na Fig.4.1. Como estamos lidando com o caso de $r \approx 1$, plotamos o gráfico usando o intervalo $r = [0.5, 5]$. Podemos ver pelo gráfico que a condição (4.1) é respeitada no intervalo utilizado.

Podemos ainda verificar o comportamento da constante de proporcionalidade w entre a densidade de energia e a pressão (2.16), obtendo

$$w = -\frac{p_{vac}}{\rho_{vac}} \quad (4.16)$$

Com a equação acima, tendo p_{vac} pela (4.8) e ρ_{vac} pela (4.7), plotamos o gráfico (Fig.4.2) para w utilizando o mesmo intervalo usado no gráfico da densidade de energia escura.

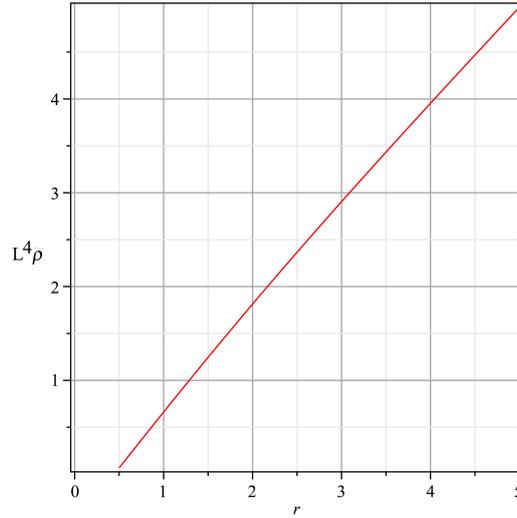


Figura 4.1: Densidade de Energia Escura multiplicada por L^4 em função de $r = L\mu$

Nota-se que o intervalo para w

$$-1 \leq w < -1/2 \quad (4.17)$$

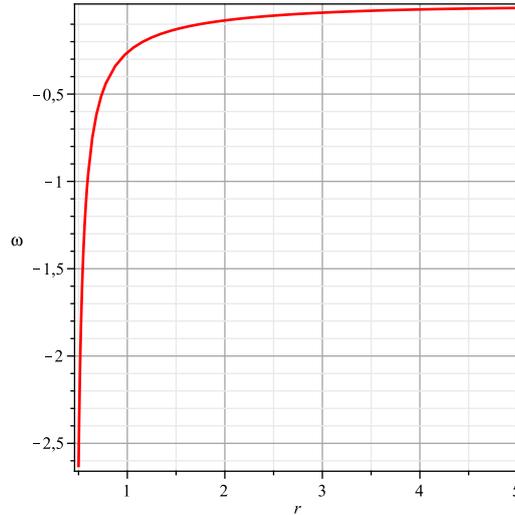
é de relevância para a Cosmologia, pois dentro dele podemos ter a existência de um Universo acelerado [25]. Este intervalo (4.17) equivale a um interstício de $r \approx [0.59, 0.74]$, onde $r \approx 0.59$ ($w = -1$) descreve um Universo plano, ou seja, de Minkowski.

Então, assumiremos

- (a) Positividade da densidade de energia (4.1);
- (b) A condição de Constante cosmológica (*i.e.* $w = -1$ na equação (4.16)):

$$p_{vac} = -\rho_{vac} \quad (4.18)$$

Podemos ver pela Fig.4.1 que, somente com o requerimento de (a), uma larga região de valores de r é possível. Mais especificamente, pela (4.7) podemos calcular que $\rho_{vac} = 0$ corresponde ao valor de $r \approx 0.44$, significando que toda região que percorre $r > 0.44$ é possível. Entretanto, impondo (b), conseguimos um valor definido não-

Figura 4.2: w em função de $r = L\mu$

nulo³ para a densidade de energia do vácuo ρ_{vac} dada por

$$r \approx 0.59 \quad (4.19)$$

Se quisermos calcular de fato a densidade de energia do vácuo para comparar com a da Energia Escura observada, temos que saber a massa μ para usarmos na equação (4.7). Afinal já sabemos o valor de r (dado pela (4.19)). Vamos assumir que um mar de partículas elementares lentas que sobraram dos momentos primordiais do Universo (os hipotéticos axíons⁴) [25] é descrito por um campo quântico escalar. Essa partícula possui uma massa [4] entre

$$\mu_a \approx 10^{-5} - 10^{-4} eV = 10^{-14} - 10^{-13} GeV \quad (4.20)$$

O que, de acordo com (4.9), produz um valor para L de

$$L \approx 5.9 \times 10^{12} - 10^{13} GeV^{-1} \quad (4.21)$$

³Como comentado, também temos uma solução com os cubos grandes ($L \gg \mu$). Esta solução respeita as condições (a) e (b) assumidas, mas é uma solução trivial pois $\rho_{vac} = p_{vac} = 0$.

⁴O axíon, apesar de ter sido postulado em 1977 para resolver o problema da falta de violação da simetria CP (carga-paridade) em cromodinâmica quântica [26], aparece em muitos modelos cosmológicos. Pois se prevê que eles foram criados em abundância nos momentos iniciais do Universo e que com sua baixa massa, tornando um bóson estável, poderiam formar um condensado de Bose-Einstein. Estes modelos cosmológicos trabalham com a idéia de que este frio condensado preenche todo o Universo, sendo uma possível explicação para a Matéria Escura Fria.

Nota-se que agora podemos constatar numericamente a afirmação feita no começo da seção 4.1: $L \ll L_H$, onde $L_H \approx 10^{42} GeV^{-1}$ é o raio de Hubble.

Já que agora temos um valor para L (4.21) e para r (4.19), podemos calcular a densidade de energia do vácuo de nosso modelo utilizando (4.7)

$$\rho_{vac} = 1.4 \times 10^{-56} - 10^{-52} GeV^4 \quad (4.22)$$

que se comparada com a densidade de Energia Escura (4.3), podemos perceber que os valores não são tão discrepantes entre si. Entretanto, vale mencionar que escolhendo o axíon para descrever esse efeito, ainda temos muita incerteza experimental sobre sua massa. Dificultando o cálculo numérico da densidade de energia desejada. Por exemplo, é totalmente aceitável considerar uma massa para o axíon de $\mu_a \approx 10^{-12} GeV$, o que resultaria em uma densidade de energia do vácuo de

$$\rho_{vac} = 1.4 \times 10^{-48} GeV^4 \quad (4.23)$$

Este resultado difere da densidade de Energia Escura apenas por uma ordem de grandeza. O que é um resultado muito próximo para termos cosmológicos.

5 CONCLUSÃO

*“Nothing was first, and shall be last
for nothing holds for ever;
And nothing ever yet scap’t death
so can’t the longest liver:
Nothing’s so Immortall, nothing can,
From crosses ever keepe a man,
Nothing can live, when the world is gone,
for all shall come to nothing.”*

Edward Dyer ou Edward Daunce

Com o objetivo de criarmos um modelo para explicar a Energia Escura, neste trabalho começamos explorando os conceitos dos elementos que seriam utilizados. Explicamos as observações cosmológicas que concluíram que habitamos um Universo em expansão acelerada como também mostramos alguns resultados experimentais atuais (como os do *Supernova Cosmology Project* [22]) que ainda reforçam as observações mais antigas de Slipher e Hubble. Complementariamente mostramos como a teoria da relatividade e as equações de Friedmann comportam esta solução de um Universo que se expande cada vez mais rápido. Também exploramos a evolução do entendimento do vácuo e um dos seus efeitos, o chamado Efeito Casimir, que no terceiro capítulo, pode ser estudado com mais detalhes. Neste tema, sabendo que a energia de Casimir é independente de regularização ([5], [6]), chegamos em uma expressão geral para a densidade de energia de Casimir. Esta expressão foi usada para estudarmos dois casos do Efeito de Casimir: entre placas paralelas e em um cubo. O primeiro caso serviu basicamente como um exercício para o segundo, pois era deste que planejávamos construir o nosso modelo desenvolvido no quarto capítulo.

Este modelo, que leva em conta a Constante cosmológica Λ de Einstein, tem uma grandeza experimental ainda indeterminada. Pois utilizamos a partícula chamada axión para o cálculo numérico da densidade de energia do vácuo (4.7) do modelo,

mesmo não tendo sido observado tal partícula ainda. Dessa forma, sua massa ainda não pode ser determinada, apesar de sabermos o intervalo em que ela deve estar. Mesmo assim, nosso modelo tem um resultado interessante. As condições de Constante cosmológica e de positividade da densidade de energia só são respeitadas simultaneamente em regiões onde L (que é o tamanho do lado dos cubos) é da ordem do comprimento de onda de Compton $1/\mu$. Em outras palavras, o cubo pode ser entendido como a incerteza da localização da partícula de massa μ .

Podemos ainda ver a questão dos cubos por outro ângulo. A densidade calculada do estado (4.4) (dada pela (3.23)) correspondendo a qualquer ponto x é a densidade de energia de qualquer cubo que contém o ponto x com condições periódicas de contorno. A pressão (4.8), que é a pressão termodinâmica derivada dessa energia, corresponde ao que um observador em x mediria em um *Gedankenexperiment*. Deste ponto de vista, a partição em cubos pode ser dispensada. Esta serve como um passo intermediário para a construção do estado do campo quântico dependente do parâmetro L . Em particular, a densidade de energia e a pressão não dependem nem do tempo nem da variável espacial, só de L . Desta forma são homogêneas, como esperado de uma teoria da Energia Escura na aproximação de homogeneidade perfeita¹.

Deixando de lado a indeterminação da existência do axión e do valor de sua massa, outras dificuldades permanecem no modelo. Em particular, qual seria a razão do hipotético estado (4.4), no qual fizemos nossas contas, ser um estado realmente estável? Sobre esse respeito, a análise feita em [28], baseada em estados de Hadamard, vai além. Enquanto em nosso modelo nós assumimos a existência da constante cosmológica e olhamos sua compatibilidade com o estado de um campo quântico escalar massivo, os autores de [28] tentam obtê-la de primeiros princípios. De outra forma, a análise de [28] parece conter algumas *a priori* constantes indeterminadas, enquanto nosso trabalho é capaz de fazer uma predição do alcance da massa da partícula e resulta em uma boa comparação com os dados experimentais. De fato, como fizemos no final do quarto capítulo, os resultados de [4] ou [22] demonstraram uma boa comparação se assumimos o estado (4.4).

¹Para não ser confundida com a real homogeneidade cosmológica física que possui uma escala da ordem de $70-100H$ [27] e que tradicionalmente é trabalhada teoricamente com teoria de perturbação cosmológica (ver [2]).

Outro ponto que seria interessante estudar é o fato de estarmos trabalhando com um efeito dinâmico que participa da evolução do Universo. Mas em nosso trabalho, utilizamos apenas a fatia temporal atual do cosmos. E como foi colocado na introdução, uma das principais motivações para entender a Energia Escura é entender a história do Universo. Seria interessante se nosso modelo levasse em conta a dinâmica do efeito Casimir. Sobre isso existe um bom artigo de Elizalde [29]. De qualquer forma, é importante observar que o modelo é consistente com um estado invariante da forma (4.4). Mesmo com respeito à evolução dinâmica, já que a densidade de Energia Escura é invariante pelas equações de Friedmann [2] (supondo a existência da Constante cosmológica, ou seja $w = -1$).

A RELAÇÕES DE COMUTAÇÃO

A.1 Campo Escalar Massivo Livre

Se temos o campo escalar com massa μ descrito por

$$\Phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} \left(a(\vec{k}) e^{-ik^\mu x_\mu} + a(\vec{k})^\dagger e^{ik^\mu x_\mu} \right) \quad (\text{A.1})$$

fazemos a separação das partes com os operadores de criação $a(\vec{k})^\dagger$ e aniquilação $a(\vec{k})$, obtendo

$$\Phi_-(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} a(\vec{k}) e^{-ik^\mu x_\mu} \quad (\text{A.2})$$

$$\Phi_+(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} a(\vec{k})^\dagger e^{+ik^\mu x_\mu} \quad (\text{A.3})$$

Como temos que as relações de comutação entre os operadores de criação e aniquilação são

$$\left[a(\vec{k}), a(\vec{q}) \right] = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\left[a(\vec{k})^\dagger, a(\vec{q})^\dagger \right] = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\left[a(\vec{k}), a(\vec{q})^\dagger \right] = \delta(\vec{k} - \vec{q}) \quad (\text{A.6})$$

podemos ver que a relação de comutação entre $\Phi_-(x)$ e $\Phi_+(x)$ deve ser não nula. Podemos calcular-la:

$$\begin{aligned} [\Phi_-(x), \Phi_+(y)] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{\sqrt{2\omega'}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} \left[a(\vec{k}), a(\vec{q})^\dagger \right] e^{-ik^\mu x_\mu + iq^\mu y_\mu} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega} e^{-ik^\mu (x_\mu - y_\mu)} \\ &= \frac{1}{i} D_0^{(+)}(x - y) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

onde

$$D_0^{(+)}(x - y) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega} e^{-ik^\mu(x_\mu - y_\mu)} \quad (\text{A.8})$$

E trocando o comutador, temos:

$$\begin{aligned} [\Phi_+(x), \Phi_-(y)] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{\sqrt{2\omega'}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} [a(\vec{k})^\dagger, a(\vec{q})] e^{ik^\mu x_\mu - iq^\mu y_\mu} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega} e^{-ik^\mu(x_\mu - y_\mu)} \\ &= -\frac{1}{i} D_0^{(-)}(x - y) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

onde

$$D_0^{(-)}(x - y) \equiv -\frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega} e^{-ik^\mu(x_\mu - y_\mu)} \quad (\text{A.10})$$

A.2 Campo Escalar Massivo no Cubo

Como apresentamos no terceiro capítulo, a presença a descrição do campo no cubo. Este campo pode ser separado nos operadores de criação e aniquilação da mesma forma:

$$\Phi_-(x) = \sum_{\vec{n}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} a_n u_n(\vec{x}) e^{-i\omega_n x_0} \quad (\text{A.11})$$

$$\Phi_+(x) = \sum_{\vec{n}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} a_n^\dagger u_n(\vec{x}) e^{i\omega_n x_0} \quad (\text{A.12})$$

e a relação de comutação pode ser calculada da mesma forma anterior

$$\begin{aligned} [\Phi_-(x), \Phi_+(y)] &= \sum_{\vec{n}} \sum_{\vec{m}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_m}} [a_n, a_m^\dagger] u_n(\vec{x}) u_m(\vec{y})^* e^{-i(\omega_n x_0 - \omega_m y_0)} \\ &= \sum_{\vec{n}} \frac{1}{2\omega_n} u_n(\vec{x}) u_n(\vec{y})^* e^{-i\omega_n(x_0 - y_0)} \\ &= \frac{1}{i} D_d^{(+)}(x - y) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

onde

$$D_k^{(+)}(x - y) \equiv i \sum_{\vec{n}} \frac{1}{2\omega_n} u_n(\vec{x}) u_n(\vec{y})^* e^{-\omega_n(x_0 - y_0)} \quad (\text{A.14})$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] HUTERER, D. e TURNER, M. S., *Phys. Rev. D* **60**, 081301 (1999), arXiv:astro-ph/9808133v2.
- [2] STRAUMANN, N., *Séminaire Poincaré* **1**, 3 (2002).
- [3] TURNER, M. S., *Séminaire Poincaré* **1**, 93 (2002).
- [4] TURNER, M. S., *Phys. Scripta T* **85**, 210 (2000).
- [5] KAWAKAMI, N. A., *Dissertação de Mestrado*, Departamento de Física, Universidade Federal de Minas Gerais, 2007.
- [6] KAWAKAMI, N. A., NEMES, M. C. e WRESZINSKI, W. F., *J. Math. Phys.* **48**, 102302 (2007).
- [7] FEYNMAN, R., *Lectures on Physics, Volume I*, Addison-Wesley, 1977.
- [8] MANZONI, L. A. e WRESZINSKI, W. F., *Eur. J. Phys. C* **25**, 315 (2002).
- [9] FORD, L. H., *Phys. Rev. D* **11**, 3370 (1975).
- [10] SLIPHER, V., *Proc. Amer. Phil. Soc.* **56**, 403 (1917).
- [11] FRIEDMANN, A., *Gen. Rel. and Grav.* **31**, 1991 (1999).
- [12] FRIEDMANN, A., *Gen. Rel. and Grav.* **31**, 2001 (1999).
- [13] SANDAGE, A., *Astrophys. J.* **133**, 355 (1961).
- [14] PEEBLES, P. e RATRA, B., *Rev. Mod. Phys.* **75**, 559 (2003).
- [15] KRAUSS, L. M. e TURNER, M. S., *Gen. Rel. and Grav.* **27**, 11 (1995).
- [16] WEINBERG, S., *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1 (1989).

- [17] HATFIELD, B., *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings*, Addison-Wesley, 1992.
- [18] PESKIN, M. E., SCHROEDER, D. V. *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, 1995.
- [19] KAY, B. S., *Phys. Rev. D* **20**, 3052 (1979).
- [20] RUDIN, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill, 1966.
- [21] ABRAMOWITZ, M. e STEGUN, I., *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publ. Inc., 1970.
- [22] KOWALSKI, M. *et al*, *Astrophys. J.* **686**, 749 (2008).
Para ver mais: www-supernova.lbl.gov
- [23] EPSTEIN, H., GLASER, V., e JAFFE, A., *Nuovo Cim.* **36**, 1016 (1965).
- [24] NEWTON, T. e WIGNER, E., *Rev. Mod. Phys.* **21**, 400 (1949).
- [25] KOLB, E. W. e TURNER, M. S., *The Early Universe*, Addison Wesley Publishing Co, 1990.
- [26] PECCEI, R. D. e QUINN, H. R., *Phys. Rev. Lett.* **38**, 25 (1977).
- [27] HOGG, D. V. *et al*, *Astrophys. J.* **624**, 54 (2005),
[arXiv:astro-ph/0411197](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0411197).
- [28] DAPPIAGI, C., FREDENHAGEN, K. e PINAMONTI, N., *Phys. Rev. D* **77**, 104015 (2008).
[arXiv:gr-qc/0801.2850](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0801.2850)
- [29] ELIZALDE, E., *J.Phys.A: Math and Theor.* **41**, 164061 (2008).