



Universidade Federal de Minas Gerais  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Física

Pós Graduação em Física

**Uma Aplicação de Métodos de  
Renormalização ao Estudo de Séries  
Temporais Financeiras**

Renato Vieira dos Santos

Dissertação de Mestrado

Belo Horizonte  
02/09/2009



Universidade Federal de Minas Gerais  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Física

Renato Vieira dos Santos

**Uma Aplicação de Métodos de Renormalização ao Estudo de  
Séries Temporais Financeiras**

*Trabalho apresentado ao Programa de Pós Graduação em  
Física do Departamento de Física da Universidade Federal  
de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do  
grau de Mestre em Física.*

Orientador: *Ronald Dickman*

Belo Horizonte  
02/09/2009



*Dedico esta dissertação à quem teve a paciência de  
escutar minhas divagações mais empolgadas, minha  
querida namorada Rosa.*



# Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Professor Ronald Dickman, primeiramente pelo sempre cativante exemplo de profissional e de pessoa, pelas discussões esclarecedoras e também pela paciência que certamente foi necessária.

Agradeço também à Shirley Maciel, da biblioteca da Física, por seu inigualável apoio e prestabilidade e à minha namorada Rosa pelo estímulo sempre muito importante.



*The market can stay irrational longer than you can stay solvent*  
—JOHN MAYNARD KEYNES



# Resumo

Neste trabalho fazemos um estudo que compara, sob a luz da Hipótese de Mercado Eficiente, uma técnica tradicional utilizada no estudo de séries temporais com uma técnica motivada pelos métodos de renormalização da física teórica. Utilizamos a técnica denominada Aproximação Auto-Similar para fazer previsões de alguns índices financeiros para o período que corresponde à recente crise financeira mundial ocorrida em 2008. Uma revisão de alguns conceitos sobre sistemas dinâmicos se fez necessária para que um melhor entendimento do método proposto fosse alcançado.

Encontramos também as distribuições de probabilidade que descrevem os log-retornos dos preços.

Usando o método Detrended Fluctuation Analysis (DFA), calculamos o valor do expoente de Hurst de algumas séries do índice Bovespa com a finalidade de determinar possíveis tendências de longo prazo e, de certa forma, justificar a utilização do método de renormalização proposto.

**Palavras-chave:** Sistemas Dinâmicos, Renormalização, Séries Temporais, Distribuições de Probabilidade, expoente de Hurst, Hipótese de Mercado Eficiente.



# Abstract

In this work we perform a study that compares, in the light of the Efficient Market Hypothesis, a traditional technique used in the study of time series with a technique motivated by renormalization methods of theoretical physics. We use the technique called the Self-Similar Aproximation to predict of some financial indices for the period that corresponds to the recent global financial crisis of 2008. A review of some concepts of systems was necessary for a better understanding of the proposed method was achieved.

We also found the probability distributions that describe the log-price returns.

Using the Detrended Fluctuation Analysis (DFA), we calculate the value of the Hurst exponent of some series of the Bovespa index in order to determine possible long-term trends and, in some way, justify the use of the renormalization method proposed.

**Keywords:** Dynamical Systems, Renormalization, Time Series, Probability Distributions, Hurst exponent, Efficient Market Hypothesis.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Eficiência de Mercado	3
1.1.1	Arbitragem	3
1.1.2	Hipótese de Mercado Eficiente	3
1.2	A medida da Eficiência de Mercado: O Expoente de Hurst	5
<b>2</b>	<b>Análise de Séries Temporais:</b>	
	<b>Os modelos econométricos padrão</b>	<b>9</b>
2.1	Modelos Autorregressivos e de Médias Móveis	9
2.1.1	Introdução	9
2.1.2	Modelos Autorregressivos	9
2.1.3	Modelos de Médias Móveis	11
2.2	Autocorrelação e Previsão	13
2.3	Medidas de precisão das previsões	14
2.3.1	Medidas baseadas no erro percentual	15
2.3.2	Erros Escalados	15
2.4	Exemplos de previsões feitas com modelos ARIMA(p,d,q)	16
2.4.1	Previsão das séries selecionadas	16
<b>3</b>	<b>Distribuições de Probabilidade dos Log-Retornos dos Ativos</b>	<b>21</b>
3.1	Introdução	21
3.2	Distribuições Hiperbólicas Generalizadas	23
3.3	Subclasses	26
3.3.1	Distribuições Limites	27
3.4	Ajustamento das Distribuições aos dados empíricos	28
3.5	Testes de Ajuste	29
3.5.1	Distância de Kolmogorov-Smirnov - KS	31
3.5.2	Distância de Kuiper - KP	32
3.5.3	Distância de Anderson-Darling - AD	32
3.5.4	Distância de Fajardo-Farias-Ornelas - FFO	32
3.6	Medidas de Risco	34
3.6.1	O Valor em Risco - VaR	35
3.6.2	Perda Média Esperada - <i>Expected Shortfall</i> (ES)	35
3.7	Propriedades de Medidas de Risco Coerentes	36
3.7.1	A não coerência do VaR e a coerência do ES	37

3.8	A função Ômega	37
3.8.1	A função Ômega	37
<b>4</b>	<b>Modelos com Autossimilaridade. Fractalidade</b>	<b>41</b>
4.1	Introdução	41
4.2	Distribuições estáveis	41
4.3	Modelos com Autossimilaridade	43
4.3.1	O Fenômeno da Autossimilaridade Estatística de Hurst	43
4.3.2	Um método para estimar o expoente de Hurst: Detrended Fluctuation Analysis (DFA)	45
<b>5</b>	<b>A teoria da aproximação Autossimilar</b>	<b>49</b>
5.1	Soma de séries divergentes	49
5.1.1	Introdução	49
5.1.2	Aproximantes de Padé	49
5.2	Renormalização autossimilar algébrica e "bootstrap" autossimilar	51
5.2.1	Funções controle	58
5.2.2	Exemplo	60
5.3	Aproximantes de Padé X aproximantes exponenciais autossimilares	62
5.3.1	Ilustração da técnica em ação	63
5.4	Renormalização Autossimilar na Análise de Séries Temporais	70
5.4.1	Mecanismos de Crash	73
5.5	Discussão	74
5.6	Crises de Mercado	75
5.7	Aplicação do método ao estudo do crash de 2008	78
5.7.1	Discussão	80
5.8	Análise estatística	81
5.8.1	Exemplos de bolhas de mercado	83
5.9	Conclusão	87
<b>A</b>	<b>Alguns Conceitos de Sistemas Dinâmicos</b>	<b>89</b>
A.1	Motivação	89
A.2	Mapeamento Iterativo e Caos	90
A.3	Quantificando o Caos	90
A.4	O mapeamento logístico	91
A.4.1	‘Teia de Aranha’	94
A.4.2	Bifurcação	95
A.4.3	Expoente de Lyapunov e Entropia do Mapeamento Logístico	96
A.5	Sistemas Contínuos	98
<b>B</b>	<b>Teoria de Carteiras</b>	<b>101</b>
B.1	Introdução	101
B.2	Carteiras, Retornos e Risco	101
B.3	Carteiras com dois ativos de risco	102
B.4	Carteiras de Múltiplos Ativos	104

B.5	O Modelo de Precificação de Ativos de Capital	109
<b>C</b>	<b>Ajustes das Distribuições de Probabilidade</b>	<b>117</b>



# Lista de Figuras

2.1	Previsão para 300 dias à frente para PETR4	17
2.2	Modelo ARIMA para previsões 300 dias à frente no período de 9/3/01 a 20/5/08	20
3.1	Densidade de probabilidade empírica e ajuste normal para IBOV	22
3.2	Efeito do parâmetro ‘ $\mu$ ’ nas densidades de probabilidade GHD	24
3.3	Efeito do parâmetro ‘ $\delta$ ’ nas densidades de probabilidade GHD	25
3.4	Efeito do parâmetro ‘ $\beta$ ’ nas densidades de probabilidade GHD	26
3.5	Efeito do parâmetro ‘ $\alpha$ ’ nas densidades de probabilidade GHD	27
3.6	Densidades Empírica e Ajustadas para IBOV	28
3.7	Densidades Empírica e Ajustadas para IBOV em escala semi-logarítmica	29
3.8	Centro das distribuições IBOV	30
3.9	Cauda Esquerda IBOV	30
3.10	Cauda Direita IBOV	30
3.11	Ilustração da distância de Kolmogorov-Smirnov. $P(x)$ na figura representa $F_{estimado}(x)$ e $S_N(x)$ na figura representa $F_{empirico}(x)$ . Fonte: <a href="http://members.cox.net">http://members.cox.net</a> .	31
3.12	Ilustração da medida de risco ES - <i>Expected Shortfall</i> . Fonte: <a href="http://www.trl.ibm.com">www.trl.ibm.com</a>	36
3.13	Ilustração da medida de performance Ômega. Fonte: <a href="http://www.bpmmagazine.com">www.bpmmagazine.com</a> .	38
3.14	Ilustração da medida de performance Ômega (Gráfico Ômega). Fonte: <a href="http://www.bpmmagazine.com">www.bpmmagazine.com</a> .	39
3.15	Expected Shortfall e Ômega para IBOV, VALE e PETR	40
4.1	Séries Temporais para vários valores de $\mathbb{H}$	46
4.2	Figura ilustrando o algoritmo DFA	47
5.1	Exemplo Aproximante de Padé $P_1^1(x)$	50
5.2	Aproximantes de Padé para $f(x) = \exp(-x)$	64
5.3	Erros percentuais relativos para $P_3^2(x)$ e $P_4^1(x)$	65
5.4	Comparações entre $f(x)$ e os aproximantes $f_{55}^*(x)$ , $f_{44}^*(x)$ , $f_{33}^*(x)$ e $f_{22}^*(x)$ , onde, na legenda, $f_{nn} \equiv f_{nn}^*(x)$ , para $n = 2, 3, 4, 5$ .	66
5.5	Comparações entre os multiplicadores $ M_5^* $ , $ M_4^* $ , $ M_3^* $ e $ M_2^* $ . Na legenda, fizemos $M_{kk} \equiv M_k^*$ .	67
5.6	Comparações entre os Aproximantes de Padé e os Aproximantes Exponenciais	68
5.7	Erro percentual de $f_{55}^*(x)$ e de $P_3^2(x)$ para $x$ pequeno	68
5.8	Erro percentual de $f_{55}^*(x)$ e de $P_3^2(x)$ para $x$ grande	68
5.9	Gráficos de $f(x)$ , $f_{55}^*(x)$ e $P_3^2(x)$	69
5.10	Ln do erro percentual relativo de $f_{55}^*(x)$ e de $P_3^2(x)$	69

5.11	Valor do índice Bovespa no ápice da crise, no dia 27 de Outubro de 2008 com a respectiva previsão.	78
5.12	Previsão feita pelo método Bootstrap Auto-Similar para 10/10/2008 para Dow Jones	80
5.13	Previsão para 27/10/2008 para IBOV	80
5.14	Previsão para 27/10/2008 para FTSE	80
A.1	Mapeamento logístico, com $\mu = 2,9$ , $x_0 = 0,1$	92
A.2	Mapeamento logístico, com $\mu = 3,4$ , $x_0 = 0,1$	92
A.3	Caos no mapeamento logístico com $\mu = 3,7$ e $x_0 = 0,1$	93
A.4	Solução gráfica com $\mu = 7/2$	93
A.5	Solução gráfica de período quatro	94
A.6	Teia de Aranha Logística	94
A.7	Teia de aranha logística para $\mu = 3,99$	95
A.8	Diagrama de bifurcação para $\mu$ entre 3 e 3,99	95
A.9	Expoente de Lyapunov para $\mu$ entre 3,5 e 4	96
A.10	Entropia para $\mu$ entre 3,5 e 4	96
A.11	Superposição das figuras (A.9) e (A.10)	97
A.12	Amplitude pêndulo amortecido com $\gamma = 0,2$ e $\omega = 1$	99
A.13	Trajetórias no espaço de fase do pêndulo amortecido com $\gamma = 0,2$ e $\omega = 1$	99
A.14	Ciclo Limite partindo de fora	100
A.15	Ciclo limite partindo de dentro	100
B.1	Ilustração da curva de Risco-Retorno	104
B.2	Diagrama de Risco-Retorno com a Fronteira Eficiente	112
B.3	Médias dos Retornos para as Carteiras Tangente, de Mínima Variância e IBOV	113
B.4	Médias dos Retornos para as Carteiras Tangente, de Mínima Variância e IBOV	113
B.5	Desvios Padrão das Carteiras Tangente, de Mínima Variância e IBOV	114
B.6	Desvio padrão médio dos Retornos para as Carteiras Tangente, de Mínima Variância e IBOV	114
B.7	Comparação dos Log-Retornos das Carteiras Tangente e IBOVESPA	115
B.8	Comparação dos Valores das Carteiras Tangente e IBOVESPA	116

# Lista de Tabelas

2.1	Ativos selecionados e seus respectivos períodos	16
2.2	MAPE para preços	18
2.3	MASE para preços	19
2.4	MASE para os retornos	19
3.1	Algumas estatísticas para os ativos	23
3.2	Distâncias para IBOV	32
3.3	Distâncias para PETR4	33
3.4	Distâncias para VALE5	33
4.1	Expoentes de Hurst $H$ para todos os períodos e para os três ativos	47
5.1	Exemplo 1	83
5.2	Exemplo 2	84
5.3	Exemplo 3	84
5.4	Exemplo 4	85
5.5	Exemplo 5	85
5.6	Exemplo 6	85
5.7	Exemplo 7	86
5.8	Exemplo 8	86
5.9	Exemplo 9	86
5.10	Exemplo 10	87
B.1	Pesos na carteira de Mínima Variância (MV), carteira Tangente (CT), médias e desvios dos retornos e cor na figura B.2	111
B.2	Médias e Desvios Padrão das carteiras de Mínima Variância e Tangente	111
B.3	Estatísticas das carteiras Tangente e IBOVESPA	115
C.1	Distâncias para IBOV período 1	117
C.2	Distâncias para IBOV período 2	117
C.3	Distâncias para IBOV período 3	118
C.4	Distâncias para IBOV período 4	118
C.5	Distâncias para PETR4 período 1	118
C.6	Distâncias para PETR4 período 2	118
C.7	Distâncias para PETR4 período 3	118
C.8	Distâncias para PETR4 período 4	119
C.9	Distâncias para VALE5 período 1	119

C.10 Distâncias para VALE5 período 2	119
C.11 Distâncias para VALE5 período 3	119
C.12 Distâncias para VALE5 período 4	119

## CAPÍTULO 1

# Introdução

A análise de séries temporais tem uma longa história e uma literatura abundante. Quando tradicionalmente analisamos séries temporais, tentamos produzir um modelo particular que represente os dados históricos disponíveis e subseqüentemente, fazemos uma tentativa de previsão do futuro. Este tipo de abordagem se mostrou razoável em descrever evoluções suficientemente estáveis, mas falha em tratar grandes flutuações tais como as que aparecem nos mercados de capitais. Existe um entendimento crescente que esta falha é causada principalmente pela inability de se levar em conta, com qualquer dado modelo, as muito irregulares evoluções do mercado, as quais apresentam um calmo desenvolvimento interrompido por repentinos desvios de forte intensidade resultando em bolhas e quebras. Tais mudanças abruptas não são oscilações cíclicas regulares, mas eventos complexos análogos às flutuações próximas ao ponto crítico dos sistemas que exibem criticalidade, tendo suas origens nas interações coletivas dos muitos agentes do mercado. O movimento dos mercados de ações é essencialmente não linear e fora do equilíbrio, o que os torna um dos mais complexos sistemas existentes na natureza. Quebras de mercado são análogas aos fenômenos críticos em sistemas físicos. Ao meu entendimento, o mercado é um sistema fora do equilíbrio onde duas tendências, a vendedora <sup>1</sup> e a compradora <sup>2</sup>, competem entre si. Esta competição resulta algumas vezes em flutuações aleatórias que por sua natureza são similares às flutuações heterofásicas. Uma quebra de mercado pode também ser comparada com uma transição entre dois estados metaestáveis diferentes. Apesar de estas analogias serem somente qualitativas, elas fornecem novas maneiras de abordar o problema da análise do mercado de capitais e este tópico de pesquisa é um dos ataques feitos pelos físicos na tentativa de descrever alguns fenômenos econômicos. A estas tentativas de explicar os fenômenos econômicos através de técnicas originadas da física teórica cunhou-se o nome de Econofísica.

Neste trabalho, pretendemos principalmente aplicar algumas técnicas da teoria do grupo de renormalização ao estudo de algumas séries temporais financeiras, inclusive a algumas séries provenientes do mercado de capitais brasileiro correspondentes à recente crise de crédito desencadeada nos Estados Unidos da América em meados de 2008. Será feita uma revisão dos métodos tradicionais de se analisar séries temporais para que se possa, com mais propriedade, fazer algumas comparações entre os métodos tradicionais e o método proposto. Como o método proposto se origina de um desdobramento de uma nova técnica de ressonância de séries assintóticas, também será feita uma comparação entre esta nova técnica de ressonância com a técnica usualmente utilizada, a saber, a técnica dos aproximantes de Padé.

Tanto no mundo acadêmico quanto entre os investidores há uma longa discussão sobre a

---

<sup>1</sup>Bearish

<sup>2</sup>Bullish

possibilidade de se fazer previsões minimamente acuradas das séries de preços ou retornos das ações. Essa discussão é formalizada na famosa Hipótese de Mercado Eficiente, uma espécie de versão formal do velho ditado popular “não existe almoço grátis”, discutida na seção seguinte. Dentre outras, essa hipótese afirma a normalidade dos log-retornos e embutida na formulação geral da hipótese de mercado eficiente está a afirmação de que se tal hipótese for válida, é impossível fazer previsões consistentemente melhores que aquelas que seriam feitas se os preços das ações seguissem um “random walk”. Na tentativa de refutar essa hipótese, muitas abordagens foram sugeridas e entre elas, está a idéia de que nas séries temporais se encontra embutido o caráter multifractal das mesmas, afirmando que estas séries são autossimilares e que acusariam a presença de correlações de longo alcance, manifestando um certo tipo de persistência de seu comportamento prévio, um tipo de “inércia”. Foi proposta na literatura uma medida dessa persistência, um número entre zero e um chamado expoente de Hurst. Alguns autores sugerem que esse número seria uma medida direta da eficiência de mercado. Quanto mais próximo de 0,5 esse número, mais eficiente seria o mercado. Calculamos esse número para alguns ativos brasileiros em diferentes períodos para testar a hipótese de haver persistência de longo alcance nas séries. Certamente, o fato de haver persistência nas séries temporais financeiras está intimamente ligado com a possibilidade de se fazer previsões das mesmas e, ao meu ver, o conceito de persistência de longo alcance e de sua respectiva medida pelo expoente de Hurst também estão intimamente relacionados ao método de renormalização aqui discutido, principalmente pelo suposto caráter autossimilar das séries associado aos dois conceitos aparentemente dissociados, de persistência de longo alcance e de renormalizabilidade. Mas para mim no momento, isso não passa de uma conjectura. Para fornecer melhores condições de entendermos o método de renormalização proposto, há uma discussão sucinta dos conceitos sobre sistemas dinâmicos associados.

Na tentativa ainda de refutar a Hipótese de Mercado Eficiente, procuramos pelas distribuições de probabilidade que descrevem estatisticamente os log-retornos de alguns ativos e do índice Bovespa. Usamos uma classe bastante ampla e versátil (versatilidade esta conseguida às custas de uma quantidade razoável de parâmetros a serem determinados) de distribuições de probabilidade, as distribuições Hiperbólicas Generalizadas, que possuem como casos limite muitas das distribuições comumente estudadas, tais como a normal e a *t de student*.

Dado que a Hipótese de Mercado Eficiente afirma ser impossível, sob certas condições, “bater o mercado”, aplicamos também uma das teorias mais conhecidas do mundo das finanças, a teoria de carteiras de Markowitz, para termos uma idéia da possibilidade de se obter retornos consistentes, maiores que os do mercado, apenas escolhendo de maneira “ótima” a proporção dos ativos a serem incluídos na carteira, a fim de se obter uma carteira diversificada e de mínimo risco, para um dado retorno. Num certo sentido, estaríamos assim quantificando e aplicando a idéia comumente difundida de que “não se deve colocar todos os ovos numa mesma cesta”.

## 1.1 Eficiência de Mercado

### 1.1.1 Arbitragem

Os preços dos ativos geralmente obedecem a Lei do Preço Único, que diz que os preços de ativos equivalentes em mercados competitivos devem ser os mesmos [1]. Isto implica que se uma carteira de determinados ativos replica outra carteira com outros ativos, os preços das duas carteiras devem ser iguais. É esperado também que os preços dos ativos sejam iguais no mundo todo, desde que sejam expressos na mesma unidade monetária e que os custos de transporte e de transação sejam ignorados. Uma violação da Lei do Preço Único leva a uma oportunidade de *arbitragem*, que nada mais é que uma oportunidade de comprar um determinado ativo e imediatamente vendê-lo (usualmente em outro mercado) com lucro e sem risco. Um exemplo típico de oportunidade de arbitragem é o seguinte: Considere uma situação em que um negociador pode negociar um dólar americano (USD) para cada euro (EUR) ou para cada 120 yenes (JPY). Adicionalmente, o negociador pode negociar 1 EUR por 119 JPY. Então, em termos de taxas de câmbio,  $1USD/JPY > 1EUR/JPY * 1USD/EUR$ . Obviamente, o especulador que opera, digamos, 100000 USD, pode realizar um lucro comprando 12000000 JPY e os vendendo por  $12000000/119 \approx 100840$  EUR, e então comprar de volta 100840 USD. Se os custos de transação forem negligenciados, esta operação irá realizar um lucro de aproximadamente 840USD.

Geralmente oportunidades de arbitragem como a citada acima não perduram por muito tempo. Podem aparecer de tempos em tempos. Negociadores do mercado de câmbio ganham a vida, em parte, tentando encontrar tais oportunidades. É importante notar que existe um número finito de ativos no "melhor" preço. No nosso exemplo, existe um número finito de yenes disponíveis à taxa de  $USD/JPY = 120$ . À medida que a oportunidade de arbitragem vai sendo executada, a taxa de câmbio  $USD/JPY$  diminui até atingir o valor de equilíbrio de  $1USD/JPY = 1EUR/JPY * 1USD/EUR$ , e a arbitragem desaparece. Em geral, quando os arbitradores obtêm lucro, eles agem de forma que sejam eliminadas as oportunidades de arbitragem.

### 1.1.2 Hipótese de Mercado Eficiente

O conceito de *Mercado Eficiente* é intimamente relacionado ao conceito de (ausência de) arbitragem. O mercado eficiente pode ser pensado simplesmente como um mercado ideal sem arbitragem, mas, na verdade, ele é muito mais que isso. Observemos primeiro o que realmente provocam as mudanças de preços. O preço de um lote de ações de uma companhia pode mudar devido às suas novas divulgações de resultados, devido aos novos prognósticos a respeito da performance futura da empresa, ou devido a uma nova expectativa para a tendência da indústria. Eventos macroeconômicos e políticos, ou simplesmente boatos sobre a administração da companhia, também podem afetar os preços das ações. Todos esses eventos implicam que novas informações estão disponíveis aos mercados. A *Teoria do Mercado Eficiente* [2] afirma que mercados financeiros são eficientes porque eles instantaneamente refletem todas as novas informações relevantes nos preços dos ativos. A Hipótese de Mercado Eficiente (HME) propõe um caminho para verificar a eficiência de mercado. Por exemplo, um investidor em

um mercado eficiente não pode esperar retornos acima do mercado usando *análise técnica* ou *fundamentalista*<sup>3</sup>.

Três formas de HME são discutidas na literatura econômica moderna. Na forma ‘fraca’ de HME, os preços correntes refletem todas as informações dos preços passados. Então a análise técnica se torna necessariamente inútil. Na forma ‘forte’, os preços instantaneamente refletem não somente a informação pública, mas também a informação privada (insider) disponível. Isto implica que a análise fundamentalista (aquela que os analistas de investimentos fazem) também não será útil. O compromisso entre as formas forte e fraca da HME nos dá a forma ‘semi-forte’ da HME, e de acordo com a qual os preços refletem todas as informações publicamente disponíveis e os analistas de investimentos são importantes agentes na definição dos preços justos.

Duas noções são importantes para HME. A primeira noção é a de *random walk*. De forma resumida, os preços do mercado seguem um random walk se suas variações são aleatórias e independentes. Outra noção é a de *investidores racionais*, que são aqueles que imediatamente incorporam as novas informações em preços justos. A evolução do paradigma da HME, começando com o trabalho pioneiro de Bachelier em 1900, até a definição formal de HME por Fama em 1965 e a análise estatística rigorosa feita por Lo e MacKinlay no final dos anos 80, está publicada [5, 6, 7, 8, 9]. Se os preços seguem um random walk, esta é uma condição suficiente para a HME.

Críticas à HME têm sido conduzidas ao longo de duas avenidas. Primeiro, análises teóricas completas resultaram na rejeição da hipótese do random walk para os retornos semanais para o mercado dos EUA durante 1962-1986 [8]. Curiosamente, análises similares para o período de 1986-1996 mostram que os retornos foram bastante próximos de um random walk. Lo e MacKinlay, enquanto autores da pesquisa, sugerem uma possível razão para esta tendência. Eles sugerem que várias firmas de investimento (ou fundos de investimento) implementaram estratégias de negociação de arbitragens<sup>4</sup> baseadas na ineficiência de mercado reveladas na pesquisa anterior. A execução destas estratégias possivelmente eliminou algumas das oportunidades de arbitragens.

Outra razão para questionar a HME é que as noções de ‘preço justo’ e ‘investidores racionais’ não podem deixar de serem criticadas à luz das bolhas especulativas e dos crashes. A ‘exuberância irracional’ de 1999-2000 pode dificilmente ser atribuída a um comportamento racional [6]. De fato, pesquisas empíricas no novo campo das ‘finanças comportamentais’ demonstram que o comportamento do investidor às vezes difere do que se espera ser racional [10, 11]. Excesso de confiança, indecisão, reação exagerada, ganância e medo são alguns dos empecilhos psicológicos para uma perfeita racionalidade.

Talvez a explanação de Keynes de que um ‘espírito animal’ governa o comportamento do investidor seja um exagero. Mas investidores não podem ser reduzidos a máquinas racionais também. Além disso, ações de diferentes investidores, mesmo sendo, suponhamos, inerentemente racionais, podem variar significativamente. Em parte, isto pode ser causado por diferen-

---

<sup>3</sup>A análise técnica é baseada na busca e interpretação de comportamentos nos preços passados [3]. A análise fundamentalista é a valoração da qualidade dos negócios da companhia baseada no crescimento das expectativas, fluxo de caixa, etc. [4].

<sup>4</sup>Estratégias que buscam encontrar e tirar proveito de oportunidades de arbitragem.

tes percepções em relação às tendências de mercado (crenças heterogêneas). Além do mais, investidores possuem diferentes recursos para adquirir e processar novas informações. Como resultado, a noção de *racionalidade limitada* se tornou popular na literatura moderna.

Apesar disso, os advogados da HME não desistiram. Malkiel oferece o seguinte argumento na seção ‘What do we mean by saying markets are efficient’ de seu livro ‘A Random Walk Down Wall Street’ [5]:

*“No one person or institution has yet to provide a long-term, consistent record of finding risk-adjusted individual stock trading opportunities, particularly if they pay taxes and incur transactions costs.”*

—‘

Assim sendo, a polêmica em torno da HME muda da discussão sobre se os preços seguem um random walk para a habilidade prática de consistentemente ‘bater o mercado’.

Por mais que os especialistas se esforcem, a busca de idéias que potencialmente forneçam maneiras de realizar retornos acima da média nunca acaba. Três principais direções nas estratégias de investimento podem ser discernidas. Primeiro, existem as receitas qualitativas tais como ‘Dogs of the Dow’ (compre 10 ações do índice Dow Jones Industrial Average que retornam os maiores dividendos), ‘Efeito Janeiro’ (retornos dos ativos são particularmente altos durante as primeiras duas semanas de janeiro), e outras. Estas idéias não são fontes rentáveis de retorno reprodutíveis, como argumenta Malkiel [5].

Também existem comportamentos relativamente simples de análise técnica, tais como ‘canal’, ‘cabeças e ombros’, etc. [3]. Estas técnicas inflamam uma longa discussão sobre a questão de a análise técnica propiciar ou não excessos de retornos consistentes [12, 13, 14].

Finalmente, existem estratégias de negociação baseadas em sofisticadas possibilidades de arbitragens. Enquanto vários fundos de investimento que empregam estas estratégias se mostram lucrativos em alguns intervalos de tempo, pouco é conhecido sobre a eficiência e a persistência de suas estratégias proprietárias. Recentes tendências indicam que algumas destas oportunidades de arbitragens têm esmorecido [15]. Apesar disso, podemos esperar que mercados modernos e extremamente voláteis sempre fornecerão novas oportunidades para arbitadores agressivos. E é aqui que entra uma ferramenta útil na descoberta de mercados ineficientes e a respectiva mensuração de sua ineficiência que aparece de forma frequente na literatura científica, a saber, o expoente de Hurst.

## **1.2 A medida da Eficiência de Mercado: O Expoente de Hurst**

Nos campos das Finanças e da Econofísica, estudos interdisciplinares têm despertado um particular interesse nas propriedades de memória de longo alcance das séries temporais [16, 17, 18, 19, 20, 21]. Muitos pesquisadores estão interessados neste tópico de pesquisa porque os resultados relacionados à existência da propriedade de memória de longo alcance servem não somente como uma evidência negativa da forma fraca da HME mas também estão intimamente relacionados à previsibilidade dos preços dos ativos [22, 23, 24, 25, 26]. Esta medida quantifica o grau de persistência de comportamento de preços autossimilares, e está intimamente

relacionada à forma fraca da HME. Existem estudos propondo que o expoente de Hurst pode ser usado como uma medida da eficiência de mercado [27, 28].

É difícil encontrar estudos que empiricamente tenham observado a relação entre a existência de propriedades de memória de longo alcance e a previsibilidade dos preços futuros. Para fazer esta investigação, é necessário estabelecer um modelo de previsão que pode examinar a relação prática com o expoente de Hurst. Tal modelo de previsão será baseado no uso do conceito de mudanças de comportamento de preços autossimilares, que é um componente comum entre a forma fraca de HME e o expoente de Hurst. De acordo com essa idéia, usaremos o método da Renormalização algébrica autossimilar, uma técnica de ressonância de séries assintóticas divergentes, que tem origem no método do Grupo de Renormalização da Física Teórica, e que usa as mudanças autossimilares de comportamento dos preços no passado para a predição dos preços no futuro [29, 30, 31].

A hipótese de teste é que o grau de eficiência do mercado calculado como sendo o valor do expoente de Hurst está relacionado com a previsibilidade calculada a partir do método da Renormalização Algébrica Autossimilar. Os valores do expoente de Hurst variam entre 0 e 1. Baseado no valor do expoente de Hurst  $H$ , uma série temporal pode ser classificada em três categorias. (1)  $H = 0,5$  indica uma série aleatória. (2)  $0 < H < 0,5$  indica uma série antipersistente. (3)  $0,5 < H < 1$  indica uma série persistente. Uma série antipersistente possui a característica de “reversão à média”, o que significa que uma subida no valor da série é mais provavelmente seguida de uma descida no valor e vice-versa. A intensidade da “reversão à média” aumenta quanto mais próximo de 0,0 estiver  $H$ . Uma série persistente é uma série em que a tendência se autorreforça, o que significa que a direção (subida ou descida comparado ao último valor) do próximo valor é provavelmente a mesma do valor corrente. Conjectura-se que quando o grau de eficiência diminui, o valor de  $H$  aumenta, fazendo com que aumente a sua respectiva previsibilidade também. Para verificar empiricamente esta hipótese, usaremos alguns dos ativos de maior liquidez na Bolsa de Valores de São Paulo, a BOVESPA.

A estrutura desta dissertação é a seguinte: no próximo capítulo, faremos um pequeno esboço do estado da arte do estudo tradicional da Econometria, chamado Análise de Séries Temporais, que tem sido usado e aprimorado ao longo das últimas 5 décadas. Nosso objetivo proposto no capítulo 2 é fornecer condições mínimas para podermos fazer algumas comparações entre estes modelos padrão da Econometria e o método proposto nesta dissertação. Para maiores informações sobre a análise de séries temporais tradicional, veja [32, 33, 34].

No capítulo três é feito um estudo da determinação das distribuições de probabilidade dos retornos de alguns ativos do índice Bovespa. Apesar de muitos modelos em finanças assumirem que tais retornos seguem uma distribuição Gaussiana, há muito se sabe que tal hipótese não se verifica empiricamente. Como as flutuações de preço são intrinsecamente estocásticas, naturalmente o mais importante a saber sobre tal fenômeno, com a finalidade, por exemplo, de executar simulações de Monte Carlo, é qual distribuição de probabilidade o descreve. Testamos uma ampla classe de distribuições conhecidas como Distribuições Hiperbólicas Generalizadas e usamos várias distâncias para quantificar a qualidade dos ajustes realizados.

No capítulo quatro é fornecido o embasamento teórico associado ao conceito importante de autossimilaridade, terreno onde naturalmente surge a idéia de utilizar um número para indicar a possível presença de persistência nas séries temporais, o expoente de Hurst, onde também

introduzimos o método utilizado para calculá-lo, o método DFA, Detrended Fluctuation Analysis.

Finalmente, no capítulo cinco, desenvolveremos o método da Teoria da Aproximação Autossimilar e alguns de seus desdobramentos, tal como a Renormalização Algébrica Autossimilar, para posterior utilização no estudo de séries temporais. É feita uma comparação entre os Aproximantes de Padé, utilizados na ressonância de séries assintóticas divergentes com os aproximantes exponenciais, que é um subproduto da teoria da Aproximação Autossimilar.

No apêndice A é feita uma revisão de alguns conceitos de sistemas dinâmicos que serão utilizados no capítulo cinco, tais como o conceito de ponto fixo, multiplicadores, que estão associados à estabilidade do ponto fixo, expoentes de Lyapunov e entropia.

No apêndice B é feita uma revisão de uma das teorias mais bem sucedidas e amplamente usadas no mundo das finanças, a teoria das carteiras de Markowitz<sup>5</sup>. Foram montadas algumas carteiras com os 9 ativos selecionados e uma espécie de “backtesting” foi realizado. Para montarmos a carteira, utilizamos metade dos dados históricos disponíveis das séries temporais. Feito isso, comparamos os retornos subsequentes realizados pelas carteiras com o que seria obtido se tivéssemos investido apenas no índice Bovespa. Com isso, é possível ter uma idéia da eficiência da teoria na sua tarefa de diversificar os riscos, maximizando os retornos.

---

<sup>5</sup>Harry Markowitz, economista americano vencedor do prêmio nobel de economia por sua contribuição à moderna teoria das carteiras.



# Análise de Séries Temporais: Os modelos econométricos padrão

## 2.1 Modelos Autorregressivos e de Médias Móveis

### 2.1.1 Introdução

Neste capítulo faremos uma breve introdução aos métodos econométricos padrão usados na análise de séries temporais, com o objetivo de fornecer condições de melhor avaliar as diferenças entre tais métodos e os que serão desenvolvidos no capítulo cinco desta dissertação. Aplicaremos os métodos revisados aqui em séries temporais oriundas da bolsa de valores de São Paulo, a Bovespa, em um período em que ocorreu a chamada crise do *subprime*, uma crise que se originou de uma bolha no mercado de crédito imobiliário nos Estados Unidos da América em meados de 2007 e rapidamente se espalhou pelo mundo.

### 2.1.2 Modelos Autorregressivos

A discussão nesta seção segue [33].

Primeiro, consideraremos uma série temporal univariada  $y(t)$  para um processo que é observado nos momentos  $t = 0, 1, \dots, n$ . O processo tal que a série temporal que no momento  $t$  depende linearmente das observações nos momentos  $t - 1, t - 2, \dots, t - p$

$$y(t) = a_1y(t-1) + a_2y(t-2) + \dots + a_p y(t-p) + \varepsilon(t), \quad t \geq p \quad (2.1)$$

é chamado *processo autorregressivo* de ordem  $p$ , ou  $AR(p)$ . O termo  $\varepsilon(t)$  em (2.1) é um ruído branco que satisfaz

$$\mathbb{E}[\varepsilon(t)] = 0; \quad \mathbb{E}[\varepsilon^2(t)] = \sigma^2; \quad \mathbb{E}[\varepsilon(t)\varepsilon(s)] = 0, \quad \text{se } t \neq s,$$

onde  $\mathbb{E}$  denota Esperança Matemática. O *operador Lag*  $L^p y(t) = y(t-p)$  é às vezes usado para descrever séries temporais. Note que  $L^0 = y(t)$ . A equação (2.1) escrita em termos do operador Lag possui a forma

$$A_p(L)y(t) = \varepsilon(t) \quad (2.2)$$

onde

$$A_p(L) = 1 - a_1L - a_2L^2 - \dots - a_pL^p \quad (2.3)$$

O operador  $A_p(L)$  é chamado polinômio  $AR(p)$  do operador Lag de ordem  $p$ . Considere  $AR(1)$  que começa com um choque aleatório. Sua definição implica que

$$y(0) = \varepsilon(0), \quad y(1) = a_1 y(0) + \varepsilon(1),$$

$$y(2) = a_1 y(1) + \varepsilon(2) = a_1^2 \varepsilon(0) + a_1 \varepsilon(1) + \varepsilon(2), \dots$$

Então, por indução ,

$$y(t) = \sum_{i=0}^t a_1^i \varepsilon(t-i), \quad (2.4)$$

A média e a variância de  $AR(1)$  são iguais a

$$\mathbb{E}[y(t)] = 0, \quad \text{Var}[y(t)] = \frac{\sigma^2}{1 - a_1^2}, \quad (2.5)$$

respectivamente. Como podemos observar, as contribuições do “ruído” convergem com o tempo a zero quando  $|a_1| < 1$ . Como resultado, este processo não se afasta muito de sua média. A esta característica se dá o nome de *reversão à média*.

O processo com  $a_1 = 1$  é chamado de *random walk*

$$y(t) = y(t-1) + \varepsilon(t). \quad (2.6)$$

Neste caso, a equação (2.4) se reduz a

$$y(t) = \sum_{i=0}^t \varepsilon(t-i)$$

As contribuições do ruído no random walk não se enfraquecem com o tempo. Portanto, o random walk não exibe reversão à média. Agora, considere o processo que representa a primeira diferença

$$x(t) = y(t) - y(t-1) = \varepsilon(t) \quad (2.7)$$

Neste caso, ruído passado possui somente um caráter transitório para o processo  $x(t)$ . Portanto,  $x(t)$  possui reversão à média. Alguns processos devem ser diferenciados várias vezes para que o ruído não transitório seja excluído. A uma série temporal diferenciada  $d$  vezes se dá o nome de série integrada de ordem  $d$  e é denotada por  $I(d)$ . O operador de diferenciação é usado para descrever um processo  $I(d)$

$$\Delta_i^d = (1 - L^i)^d, \quad i, d = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Se um processo  $I(d)$  puder ser reduzido a um processo  $AR(p)$  aplicando o operador de diferenciação, ele passa a ser simbolizado por  $ARI(p, d)$  e possui a forma

$$\Delta_1^d y(t) - a_1 \Delta_1^d y(t-1) - \dots - a_p \Delta_1^d y(t-p) = \varepsilon(t), \quad t \geq p+d \quad (2.9)$$

Note que diferenciar uma série temporal  $d$  vezes reduz o número de variáveis independentes por  $d$ , de tal forma que o número de variáveis independentes em  $ARI(p, d)$  em uma amostra de  $n$  observações é igual a  $n - p - d$ .

A raiz unitária é outra noção muito usada para discernir efeitos permanentes de transitórios nos choques aleatórios. Ela é baseada nas raízes do polinômio característico do modelo  $AR(p)$ . Por exemplo, seja o modelo  $AR(1)$  expresso por

$$y(t) = ay(t-1) + \varepsilon(t). \quad (2.10)$$

A série  $y(t)$  só será estacionária se o valor de  $a$ , em módulo, for menor do que 1, isto é,  $|a| < 1$ . A equação (2.10) pode ser reescrita como

$$A_1(L)y(t) = \varepsilon(t), \quad (2.11)$$

sendo  $A_1(L) \equiv 1 - aL$  um polinômio em  $L$ , cuja raiz será dada por (substituindo  $L$  por  $z$ ):

$$1 - az = 0 \quad (2.12)$$

e, portanto,

$$z = \frac{1}{a}.$$

A equação (2.12) é chamada de polinômio característico. Se  $a$  for menor do que 1, em módulo,  $z$  será maior do que 1 (também em módulo). A raiz do polinômio deve, então, ser maior que 1 em valores absolutos, o que se diz, de maneira um pouco mais sofisticada, que a raiz cai *fora do círculo unitário*. Generalizando, a conclusão que se tira é que, para que a série  $y(t)$  seja estacionária, devemos ter que as raízes do polinômio característico devem estar fora do círculo unitário.

### 2.1.3 Modelos de Médias Móveis

Um modelo mais geral que  $AR(p)$  contém ambos ruídos e observações atrasadas no tempo

$$y(t) = a_1y(t-1) + a_2y(t-2) + \dots + a_py(t-p) + \varepsilon(t) + b_1\varepsilon(t-1) + b_2\varepsilon(t-2) + \dots + b_q\varepsilon(t-q) \quad (2.13)$$

Este modelo é chamado de *modelo autorregressivo de média móvel* de ordem  $(p, q)$ , ou simplesmente  $ARMA(p, q)$ . Algumas vezes a modelagem de dados empíricos requer  $AR(p)$  com um valor elevado de  $p$ . Então,  $ARMA(p, q)$  pode ser mais eficiente pois o número de termos  $(p + q)$  necessários para uma dada precisão é menor que o número  $p$  no modelo  $AR(p)$ .  $ARMA(p, q)$  pode ser expandido em um modelo integrado,  $ARIMA(p, d, q)$ , similar à expansão do modelo  $AR(p)$  em  $ARI(p, d)$ . Negligenciando os termos autoregressivos em  $ARMA(p, q)$  obteremos um *modelo de média móvel "puro" MA(q)*

$$y(t) = \varepsilon(t) + b_1\varepsilon(t-1) + b_2\varepsilon(t-2) + \dots + b_q\varepsilon(t-q) \quad (2.14)$$

Um  $MA(q)$  pode ser expresso na forma

$$y(t) = B_q(L)\varepsilon(t) \quad (2.15)$$

onde  $B_q(L)$  é um polinômio no operador Lag

$$B_q(L) = 1 + b_1L + b_2L^2 + \dots + b_qL^q \quad (2.16)$$

O modelo de média móvel não depende explicitamente dos valores passados de  $y(t)$ . Entretanto, é fácil mostrar que este modelo implicitamente incorpora o passado. Considere, por exemplo, o modelo  $MA(1)$

$$y(t) = \varepsilon(t) + b_1\varepsilon(t-1) \quad (2.17)$$

com  $\varepsilon(0) = 0$ . Para este modelo,

$$y(1) = \varepsilon(1), \quad y(2) = \varepsilon(2) + b_1\varepsilon(1) = \varepsilon(2) + b_1y(1),$$

e

$$y(3) = \varepsilon(3) + b_1\varepsilon(2) = \varepsilon(3) + b_1(y(2) - b_1y(1)), \dots$$

Então, o resultado geral para  $MA(1)$  tem a forma

$$(1 - b_1L + b_1^2L^2 - b_1^3L^3 + \dots)y(t) = \varepsilon(t) \quad (2.18)$$

A equação (2.18) pode ser vista como o processo  $AR(\infty)$ , o que ilustra que um modelo  $MA$  depende do passado.

Um modelo  $MA(q)$  é inversível se ele pode ser transformado em um modelo  $AR(\infty)$ . Pode ser mostrado [33] que  $MA(q)$  é inversível se todas as soluções da equação

$$1 + b_1z + b_2z^2 + \dots + b_qz^q = 0 \quad (2.19)$$

estão fora do círculo unitário. Em particular,  $MA(1)$  é inversível se  $|b_1| < 1$ . Se o processo  $y(t)$  possui um valor médio  $m$  diferente de zero, então o modelo  $AR(1)$  pode ser apresentado na seguinte forma

$$y(t) - m = a_1[y(t-1) - m] + \varepsilon(t) = c + a_1y(t-1) + \varepsilon(t) \quad (2.20)$$

Na equação (2.20), o intercepto  $c$  é igual a

$$c = m(1 - a_1). \quad (2.21)$$

O modelo geral  $AR(p)$  com média diferente de zero possui a seguinte forma

$$A_p(L)y(t) = c + \varepsilon(t), \quad c = m(1 - a_1 - \dots - a_p). \quad (2.22)$$

Similarmente, o intercepto pode ser incluído no modelo geral de média móvel  $MA(q)$

$$y(t) = c + B_p(L)\varepsilon(t), \quad c = m. \quad (2.23)$$

Note que a média de um modelo  $MA$  coincide com o intercepto porque a média de um ruído branco é zero.

## 2.2 Autocorrelação e Previsão

Agora, vamos introduzir a *função autocorrelação* (*FAC*) para um processo  $y(t)$

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}, \quad (2.24)$$

onde  $\gamma(k)$  é a *autocovariância* de ordem  $k$

$$\gamma(k) = \mathbb{E}[(y(t) - m)(y(t - k) - m)], \quad (2.25)$$

onde  $m$  representa o valor médio de  $y(t)$ . As funções de autocorrelação possuem alguns comportamentos típicos, que podem ser usados na identificação de séries temporais empíricas [33]. As propriedades óbvias das *FAC* são

$$\rho(0) = 1, \quad -1 < \rho(k) < 1 \text{ para } k \neq 0. \quad (2.26)$$

As *FAC* são intimamente relacionadas aos parâmetros do *ARMA*. Em particular, para um *AR*(1)

$$\rho(1) = a_1. \quad (2.27)$$

A *FAC* de um modelo de média móvel de primeira ordem *MA*(1) é igual a

$$\rho(1) = \frac{b_1}{b_1^2 + 1}. \quad (2.28)$$

O lado direito da (2.28) possui o mesmo valor se fizermos a transformação  $b_1 \rightarrow \frac{1}{b_1}$ . Por exemplo, os dois processos

$$\begin{aligned} x(t) &= \varepsilon(t) + 2\varepsilon(t - 1) \\ y(t) &= \varepsilon(t) + 0.5\varepsilon(t - 1) \end{aligned}$$

possuem o mesmo  $\rho(1)$ . Note, entretanto, que  $y(t)$  é um processo invertível enquanto  $x(t)$  não o é.

Modelos *ARMA* são extensivamente usados para previsão. Considere a previsão da variável  $y(t + 1)$  baseada num conjunto de variáveis  $x(t)$  conhecidas no momento  $t$ . Este conjunto pode ser constituído dos valores passados de  $y$ , ou seja,  $y(t), y(t - 1), \dots, y(t - n + 1)$ . Vamos denotar a previsão por  $\hat{y}(t + 1|t)$ . A qualidade da previsão é usualmente definida através de alguma função perda. O *erro médio quadrático* (*EMQ*) é a função perda convencional em muitas aplicações

$$EMQ(\hat{y}(t + 1|t)) = \mathbb{E}[(y(t + 1) - \hat{y}(t + 1|t))^2]. \quad (2.29)$$

A previsão que retorna o mínimo de *EMQ* se transforma no valor esperado de  $y(t + 1)$  condicionado a  $x(t)$

$$\hat{y}(t + 1|t) = \mathbb{E}[y(t + 1)|\mathbf{x}(t)]. \quad (2.30)$$

No caso de regressão linear

$$y(t + 1) = \mathbf{b}^T \mathbf{x}(t) + \varepsilon(t), \quad (2.31)$$

onde o sobrescrito  $T$  denota transposição,  $EQM$  se reduz a estimar  $\mathbf{b}$  pelo *método dos mínimos quadrados* (MMQ). Para uma amostra de  $N$  observações,

$$\mathbf{b} = \frac{\sum_{t=1}^N \mathbf{x}(t)y(t+1)}{\sum_{t=1}^N \mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)}. \quad (2.32)$$

Outro importante conceito na análise de séries temporais é o de *estimativa de máxima verossimilhança* (EMV)<sup>1</sup>[33]. Considere o modelo geral *ARMA* (2.13) com o ruído branco (2.6). O problema é como estimar os parâmetros do *ARMA* tendo como base as observações de  $y(t)$ . A idéia da EMP é encontrar um vetor  $\mathbf{r}^T = (a_1, \dots, a_p, \dots, b_1, \dots, b_q, \sigma^2)$  que maximiza a função probabilidade para as observações conhecidas  $(y_1, y_2, \dots, y_T)$

$$f_{1,2,\dots,T}(y_1, y_2, \dots, y_T; \mathbf{r}^T). \quad (2.33)$$

A função probabilidade (2.33) pode ser interpretada como a probabilidade de observar os dados  $(y_1, y_2, \dots, y_T)$ . Nesta abordagem, o modelo *ARMA* e a distribuição de probabilidade para o ruído branco devem ser especificadas primeiro. Às vezes a distribuição normal leva a estimativas razoáveis mesmo se a distribuição verdadeira for diferente. Posteriormente, a função probabilidade deve ser escolhida para um dado modelo *ARMA* escolhido. Finalmente, as componentes do vetor  $\mathbf{r}^T$  devem ser estimadas. O último passo pode requerer a utilização de uma técnica sofisticada de otimização. Detalhes da implementação do MMP são discutidos em [33].

### 2.3 Medidas de precisão das previsões

Muitas medidas de precisão das previsões foram propostas no passado. Hyndman e Koehler [39] sugerem que muitas das medidas de precisão utilizadas não são aplicadas de forma geral por poderem retornar resultados infinitos ou não serem definidas em algumas situações. Aqui, vamos focar em duas medidas de precisão, a PEMA (Porcentagem de Erro Médio Absoluto)<sup>2</sup> e EMAE (Erro Médio Absoluto Escalado)<sup>3</sup>, este último proposto em [39]. De agora em diante, preferiremos utilizar as siglas originais em inglês, MAPE e MASE, respectivamente.

Seja  $Y_t$  a observação da série no tempo  $t$  e  $F_t$  a previsão (forecast) de  $Y_t$ . Então definimos o erro de previsão por  $e_t \equiv Y_t - F_t$ . As previsões podem ser computadas a partir de uma base comum de tempo e com horizontes variáveis. Podemos computar previsões “out of sample”  $F_{n+1}, \dots, F_{n+m}$  baseadas em dados obtidos nos tempos  $t = 1, \dots, n$ . Alternativamente, as previsões podem ser obtidas a partir de bases temporais variáveis e de um horizonte de previsão consistente. Podemos computar as previsões  $F_{1+h}, \dots, F_{m+h}$  onde cada  $F_{j+k}$  é baseada em tempo  $t = 1, \dots, j$ . Tal forma de fazer as previsões são denominadas “in sample”. Um terceiro

<sup>1</sup>Maximum Likelihood Estimate (MLE)

<sup>2</sup>MAPE (Mean Absolute Percentage Error)

<sup>3</sup>MASE (Mean Absolute Scaled Error)

cenário possível para computar as previsões surge quando queremos comparar a precisão dos métodos em muitas séries em um horizonte de tempo único. Assim, calculamos uma única previsão  $F_{n+h}$  baseada nos dados disponíveis da série de  $t = 1, \dots, n$ .

### 2.3.1 Medidas baseadas no erro percentual

O erro percentual é dado por  $p_t = 100 * e_t / Y_t$ . Erros percentuais tem a vantagem de serem independentes de escala, e são frequentemente usados para comparar a performance em diferentes conjuntos de dados. As medidas mais comumente usadas são:

- Mean Absolute Percentage Error (MAPE) =  $media(|p_t|)$
- Median Absolute Percentage Error (MdAPE) =  $mediana(|p_t|)$
- Root Mean Square Percentage Error (RMSPE) =  $\sqrt{media(p_t^2)}$
- Root Median Square Percentage Error (RMdSPE) =  $\sqrt{mediana(p_t^2)}$

Estas medidas tem a desvantagem de serem zero ou indefinidas quando  $Y_t = 0$  para qualquer  $t$  no período de interesse, e possuem uma distribuição muito assimétrica quando  $Y_t$  é próximo de zero. O MAPE e o MdAPE também possuem a desvantagem de penalizarem mais os erros positivos que os negativos.

### 2.3.2 Erros Escalados

Hyndman e Koehler [39] propuseram o MASE como medida de precisão que julgam ser apropriada para todas as situações, e que possui uma interpretação muito simples: o erro escalado é menor que um se o modelo testado for melhor que a média das previsões um passo a frente “in sample” feitas por um método “ingênuo”<sup>4</sup> tido como benchmark. Esse método ingênuo é aquele que faz as previsões como se o ativo em questão seguisse um Random Walk, ou seja, a melhor previsão para o preço do ativo amanhã é o preço dele hoje. O erro escalado é definido como

$$q_t = \frac{e_t}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n |Y_i - Y_{i-1}|} \quad (2.34)$$

que é claramente independente das escalas dos dados. O Mean Absolute Scaled Error (MASE) é simplesmente

$$MASE = media(|q_t|) \quad (2.35)$$

Quando  $MASE < 1$ , o método proposto retorna, na média, erros menores que aqueles obtidos pelo método ingênuo e, reciprocamente, se  $MASE > 1$ , o método de previsão proposto retorna previsões piores que o benchmark.

---

<sup>4</sup>Naive, em inglês.

## 2.4 Exemplos de previsões feitas com modelos ARIMA(p,d,q)

Nesta seção vamos exemplificar o que foi exposto acima selecionando alguns modelos ARIMA para alguns ativos do índice BOVESPA e fazendo suas respectivas previsões. Todos os cálculos necessários serão realizados no software estatístico R [40]. Foram escolhidas três séries distintas para tal análise: O próprio índice BOVESPA (ibov), e as séries dos ativos das duas empresas de maior representatividade no índice, a Petrobrás (petr4) e a Vale (vale5). Cada série foi dividida em quatro partes iguais, em que se observam comportamentos diferentes: O primeiro período corresponde ao período que começa antes do plano Real, de alta volatilidade, em 1991 e se estende até 1995. O segundo período começa em 1995 e se estende até 2000, o terceiro período começa em 2000 e vai até 2004 e o último período começa em 2004 e se estende até o ano de 2009. Os inícios dos períodos dos ativos estão especificados na tabela 2.1. Os fins de cada período coincidem com os inícios dos períodos seguintes e o fim do período 4 para todos os ativos é 23/01/2009. Os traços verticais na figura 2.1 foram feitos nestas datas.

Ativo	Período 1	Período 2	Período 3	Período 4	Período todo
ibov	18/12/91	16/4/96	19/7/00	18/10/04	18/12/91 a 23/1/09
petr4	17/07/92	10/09/96	26/10/00	8/12/04	17/7/92 a 23/1/09
vale5	1/11/91	12/3/96	28/6/200	5/10/04	1/11/91 a 23/1/09

**Tabela 2.1** Ativos selecionados e seus respectivos períodos

### 2.4.1 Previsão das séries selecionadas

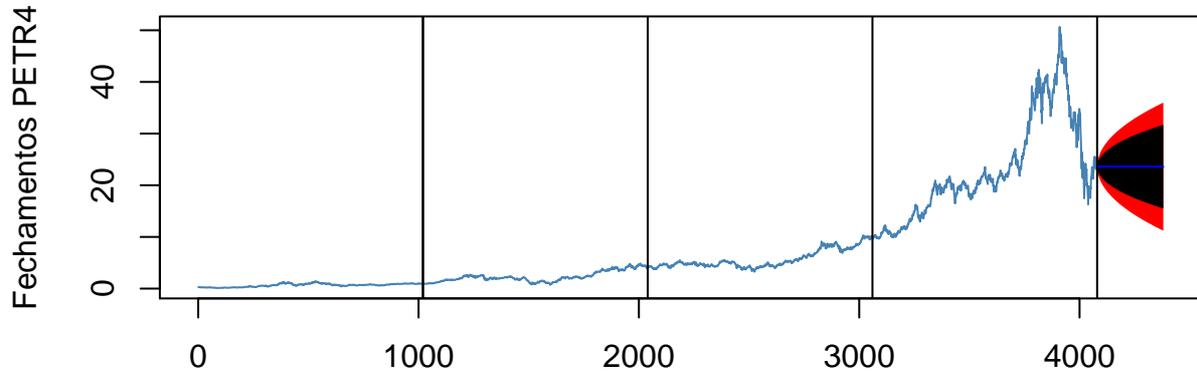
Nesta sub-seção, a título de ilustração, vamos encontrar modelos ARIMA(p,d,q) para os preços de fechamento e para os retornos para os três ativos escolhidos, nos cinco (incluindo o período todo) períodos de tempo. Na figura 2.1 vemos os gráficos da série de fechamento e dos Log-Retornos da PETR4 junto com suas respectivas previsões 300 dias à frente. O valor 300 é puramente arbitrário e foi escolhido para que os intervalos de confiança de 95 e 99% ficassem nítidos nas representações gráficas.

Observamos que os modelos ARIMA(p,d,q) selecionados foram  $ARIMA(2, 1, 2)$  para a série de preços e  $ARIMA(1, 0, 3)$  para a série de retornos. Estes modelos foram selecionados atribuindo a p e q valores que vão de 0 a 3, e para d atribuímos os valores de 0 a 2. Encontramos todos os modelos ARIMA(p,d,q) com todas as combinações possíveis de p, d e q e através dos chamados critérios de informação, selecionamos o modelo melhor. A idéia é escolher as ordens de k e l que minimizem a quantidade

$$P(k, l) = \ln \hat{\sigma}_{k,l}^2 + (k + l) \frac{C(N)}{N} \quad (2.36)$$

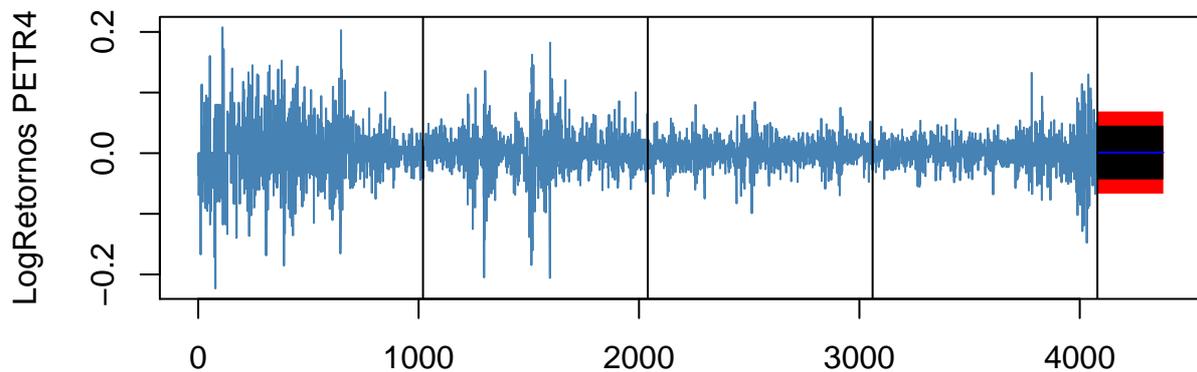
em que  $\hat{\sigma}_{k,l}^2$  é uma estimativa da variância dos resíduos obtida ajustando um modelo ARMA(k,l) às N observações da série e C(N) é uma função do tamanho da série.

### Previsões 300 dias à frente Fechamentos PETR4



ARIMA(2,1,2)

### Previsões 300 dias à frente LogRetornos PETR4



ARIMA(1,0,3)

**Figura 2.1** Previsão para 300 dias à frente para PETR4

A quantidade  $(k + l) \frac{C(N)}{N}$ , denominada termo penalizador, aumenta quando o número de parâmetros aumenta, enquanto que a variância residual diminui. Assim, minimizar (2.36) corresponde a identificar as ordens de  $k$  e  $l$  que equilibrem esse comportamento, estabelecendo assim o que se convencionou chamar de princípio da parcimônia.

Um desses critérios é o critério de informação de Akaike (AIC)<sup>5</sup>. Akaike [41] sugere esco-

<sup>5</sup>Akaike Information Criterion

lher o modelo cujas ordens  $k$  e  $l$  minimizam o critério

$$AIC(k, d, l) = N \ln \hat{\sigma}^2 + \frac{N}{N-d} 2(k+l+1 + \delta_{d0}) + N \ln 2\pi + N \quad (2.37)$$

em que

$$\delta_{d0} = \begin{cases} 1, & d = 0 \\ 0, & d \neq 0 \end{cases}$$

e  $\hat{\sigma}^2$  é o estimador de máxima verossimilhança de  $\sigma^2$ .

Voltando aos gráficos das previsões, note que as previsões para os preços da PETR4 rapidamente convergem para um valor constante, mas os limites do intervalo de confiança se tornam mais largos à medida que fazemos previsões mais longas. Este é exatamente o tipo de comportamento que esperamos de um modelo Random Walk (*ARIMA*(0, 1, 0)).

Os limites da previsão sugerem que a acurácia das previsões para os preços da PETR4 seja de pouquíssima utilidade. Para propósitos práticos, os preços se comportam como um ‘geometric random walk’. Para corroborar esta conclusão, temos que as medidas MAPE e MASE valem respectivamente 2,342 e 0,994 para a série de preços de fechamento da PETR4. Esse valor próximo de 1 para o MASE indica que não existe uma previsão significativamente melhor dos preços de fechamento em relação à previsão que seria feita se considerássemos como previsão do dia seguinte o valor de hoje.

Já para a série de retornos temos um comportamento diferente. As previsões para o retorno convergem para a média da série observada e a distância entre os limites de confiança convergem para um múltiplo constante de  $\hat{\sigma}$ . Em contraste, as previsões para os preços convergem para o valor correspondente à média das últimas observações no lugar de convergir para a média de todas as observações. Finalmente, o valor da medida MASE para a série dos retornos vale 0,79, indicando uma melhoria significativa ao que seria obtido utilizando nosso ‘naive model’. Para esta série, a medida MAPE não é bem definida.

Ativo	Período 1	Período 2	Período 3	Período 4	Período todo
ibov	2,91	1,90	1,49	1,50	1,97
petr4	3,51	2,37	1,56	1,92	2,34
vale5	3,20	2,22	1,53	1,98	2,68

**Tabela 2.2** MAPE para preços

Realizamos este procedimento para os três ativos para cada um dos quatro períodos selecionados, e os resultados para as medidas MAPE e MASE para os preços de fechamento e MASE para os respectivos retornos estão nas tabelas 2.2, 2.3 e 2.4. Podemos observar que, de maneira geral, os modelos encontrados para fazer previsões para os preços de fechamento dos ativos não conseguem ter uma eficiência melhor que o que seria feito com o random walk, como ficou evidenciado com os valores do MASE para os preços de todos os ativos em todos os períodos

Ativo	Período 1	Período 2	Período 3	Período 4	Período todo
ibov	0,994	0,997	0,999	0,997	1,001
petr4	1,013	0,997	0,989	0,991	0,994
vale5	1,009	1,00	0,994	0,996	1,005

**Tabela 2.3** MASE para preços

Ativo	Período 1	Período 2	Período 3	Período 4	Período todo
ibov	0,72	0,74	0,70	0,69	0,72
petr4	0,70	0,76	0,74	0,73	0,79
vale5	0,73	0,70	0,74	0,71	0,72

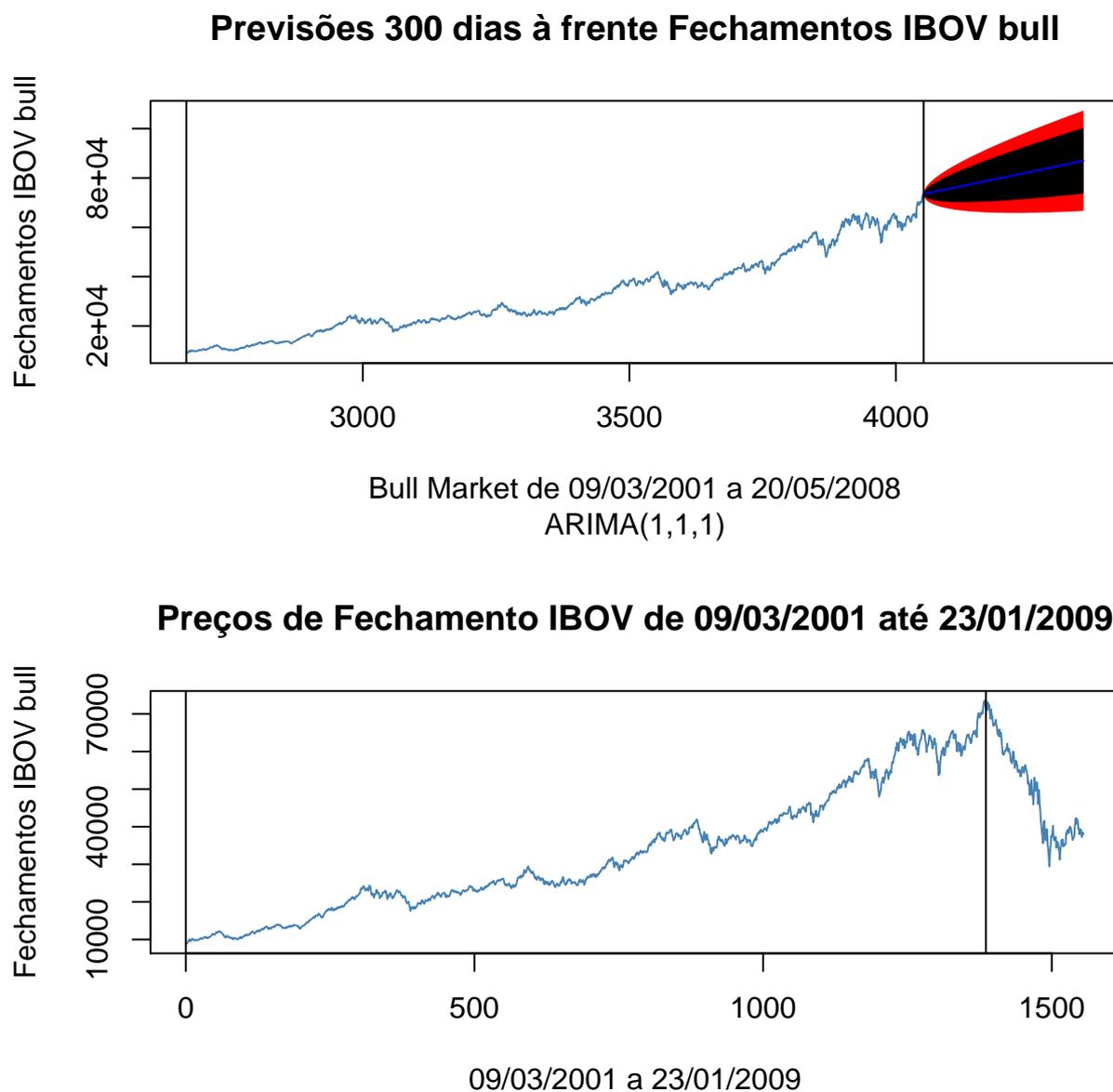
**Tabela 2.4** MASE para os retornos

(Tabelas 2.2 e 2.3). Em contrapartida, os retornos são significativamente mais bem previstos, como evidenciam os números MASE na tabela 2.4.

A figura 2.2 ilustra bem o típico perigo que se corre ao confiar nestes modelos ARIMA lineares: ela mostra a previsão que seria feita para o preço de fechamento para o índice BOVESPA no período de 9/3/2001 a 20/5/2008. A previsão 300 dias à frente mostra uma forte tendência ascendente, decorrente das hipóteses da modelagem ARIMA, que explicitamente assume que o comportamento dos preços futuros decorre do que aconteceu no passado, e será, num certo sentido, uma reprodução deste. Vemos na figura que, enquanto a previsão mostra que o índice manterá sua trajetória ascendente, o que ocorreu na verdade foi o inverso: um mergulho no valor do índice decorrente dos desdobramentos da crise do *subprime* nos EUA, ocorrida em meados de 2007. Um dos propósitos deste trabalho é testar se os métodos de Renormalização para estudar séries temporais propostos mais adiante serão capazes de capturar fenômenos críticos nas séries temporais e prever comportamentos mais condizentes com a realidade.

Existem vários modelos, ainda no contexto da Econometria de Séries Temporais, que tentam sanar os problemas mencionados acima, tais como aqueles que utilizam expressões não lineares para descrever a dinâmica dos preços, assumindo que a volatilidade dos mesmos não sejam constantes, e toda uma família de modelos denominada GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic) foi criada para esse propósito, e que não serão abordados aqui, visto que nosso objetivo foi somente ilustrar a idéia geral de como se trabalha tradicionalmente com séries temporais. Cabe ressaltar que meu objetivo de forma nenhuma foi de esgotar o tema, e certamente as conclusões obtidas aqui para os modelos ARIMA não podem ser generalizadas e transmitidas a modelos mais sofisticados.

Uma outra possível maneira de medir a performance de um determinado modelo consiste em contar a proporção de vezes em que tal modelo acerta a tendência do ativo, ou seja, contar quantas vezes o modelo acerta na determinação de uma subida ou descida de um dia para o outro na série histórica do ativo correspondente. Tal medida é útil na construção de Trading Systems. Executando tal procedimento na série histórica dos retornos da BOVESPA, encontramos que o modelo ARFIMA que melhor se ajusta a série acerta cerca de 43% das tentativas,



**Figura 2.2** Modelo ARIMA para previsões 300 dias à frente no período de 9/3/01 a 20/5/08

enquanto que um modelo tipo ‘Random Walk’ acerta 34%, resultado consistente com as medidas MASE obtidas anteriormente<sup>6</sup>. Cabe salientar que um modelo que acerta muito pouco a tendência (por exemplo, ‘acerta’ apenas 34% das vezes e portanto, ‘erra’ 66%), é mais útil para inferirmos a tendência do retorno do dia seguinte que um modelo que acerta pouco (por exemplo, ‘acerta’ 43% e ‘erra’ 57%).

<sup>6</sup>Quando calculamos o MASE para a série inteira de retornos do índice BOVESPA usando um modelo tipo ‘Random Walk’, o valor encontrado foi de 0,99, o que reafirma a consistência mencionada acima.

# Distribuições de Probabilidade dos Log-Retornos dos Ativos

## 3.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é encontrar distribuições de probabilidade que descrevam bem os dados dos três ativos em questão. Sabe-se da literatura que, apesar de muitos modelos da matemática financeira, tais como a teoria de carteiras de Markowitz [42] e a famosa teoria de precificação de derivativos de Black-Scholes [43] se apoiarem na hipótese de normalidade dos retornos, essa hipótese não se verifica, como mostra a figura 3.1. Na parte superior desta figura vemos, numa escala semi-log, as distribuições de probabilidade empírica e o respectivo ajuste normal para os retornos diários<sup>1</sup> feitos para o índice BOVESPA durante todo o período considerado, junto com o gráfico qq-plot<sup>2</sup>, que ajuda e evidenciar a não normalidade dos retornos, principalmente nas regiões das caudas das curvas. Observamos que a distribuição normal subestima a probabilidade de eventos extremos por possuir um decaimento muito acentuado de suas caudas, em contraposição ao que ocorre na distribuição empírica, como vemos no gráfico qq-plot na parte inferior da figura. Tal característica implica em efeitos não desejáveis nas teorias mencionadas acima, tais como a subprecificação de derivativos na teoria de Black-Scholes e a subestimação dos níveis de risco no cálculo do VaR<sup>3</sup>.

Uma forma de quantificar a característica de ‘caudas pesadas’ das distribuições é através da medida de excesso de curtose  $k$ <sup>4</sup>. Na tabela 3.1 vemos algumas estatísticas que mostram, dentre outras, as assimetrias e as curtoses das distribuições dos ativos. Vemos, por exemplo, que VALE5 apresenta as maiores assimetrias e curtoses.

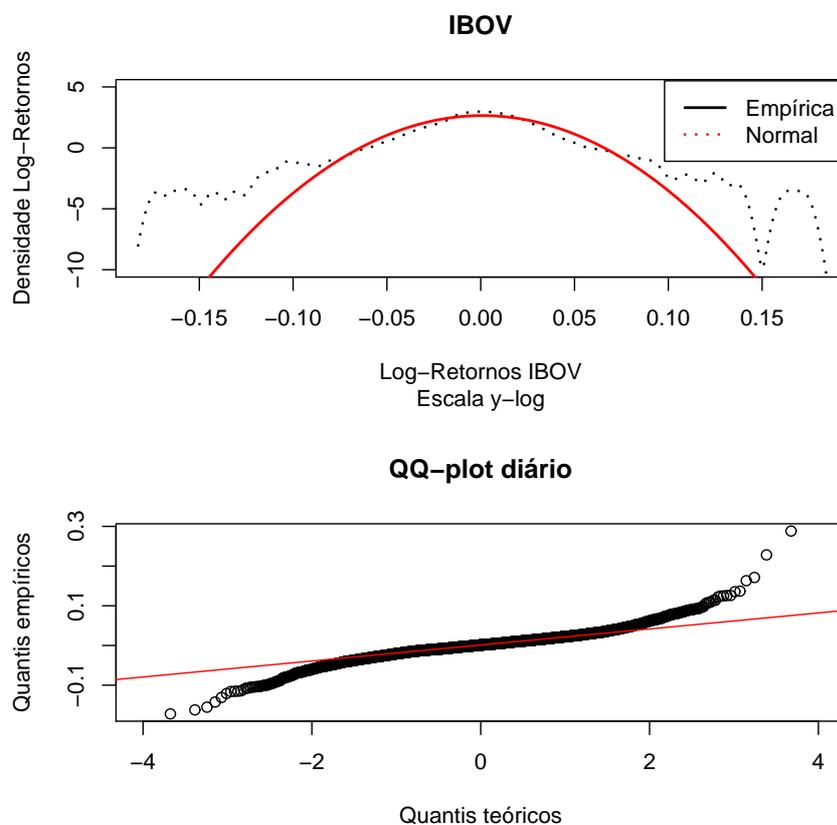
Uma questão que se coloca neste momento é até que ponto a distribuição normal subestima as probabilidades nas suas caudas. Suponhamos que queiramos saber quantas vezes no ano o Log-Retorno do IBOV é menor que  $-0,08$ . Empiricamente isso acontece em 1% dos retornos e a distribuição normal ajustada aos dados dá uma estimativa dessa probabilidade de apenas um quinto disso, ou seja 0,2%. Assim, temos que, empiricamente, este evento ocorre, em média, uma vez a cada 2,5 anos, enquanto que o estimado pelo ajuste normal diz que esse evento deve

<sup>1</sup>Sabe-se da literatura que à medida que aumentamos a escala temporal, de retornos diários para semanais, de semanais para anuais, etc., as distribuições de probabilidade dos retornos tendem para a distribuição normal, consequência, naturalmente, do Teorema Central do Limite. Tal fenômeno é conhecido como *agregação gaussiana*.

<sup>2</sup>O gráfico qq-plot é um gráfico feito para comparar os quantis de uma distribuição de probabilidade empírica com os quantis teóricos de uma distribuição normal.

<sup>3</sup>Value at Risk: A que perda máxima em um único dia você está sujeito quando aplica em um fundo de investimento? Essa é a questão a ser respondida pelo VaR.

<sup>4</sup>Excesso de curtose  $\equiv k = \frac{\mathbb{E}[(x-\bar{x})^4]}{\sigma^4} - 3$



**Figura 3.1** Densidade de probabilidade empírica e ajuste normal para IBOV

ocorrer, em média, uma vez a cada 12,5 anos. Somos confrontados nesse caso particular com uma grande subestimação por parte da distribuição normal.

Podemos ver, ainda, que a cauda direita é ainda mais pesada que a esquerda. Essa informação pode ser inferida a partir do gráfico qq-plot na parte inferior da figura 3.1, onde vemos que os quantis empíricos se afastam mais da linha reta que representa os quantis teóricos na parte direita do gráfico, consequência da assimetria positiva verificada para esse ativo, IBOV, como se observa na tabela 3.1.

Todos os exemplos relatados nos parágrafos acima se referem ao ativo IBOV, no entanto, todas as situações referidas são encontradas nos outros ativos em estudo. Em termos gerais, todos os ativos se comportam de forma muito semelhante e para os quais se podem tirar as mesmas conclusões.

Como observação final podemos concluir que a distribuição normal não é um bom modelo para o ajustamento das distribuições dos Log-Retornos em que o intervalo das observações seja curto. A distribuição normal não é capaz de modelar ‘caudas pesadas’ nem possui capacidade para lidar com conjuntos de dados assimétricos. É muito importante introduzir uma nova classe de distribuições de probabilidade capazes de modelar esses efeitos.

ESTATÍSTICAS	IBOV	PETR4	VALE5
Mínimo	-0,17	-0,22	-0,16
Máximo	0,29	0,21	0,38
Média	0,00078	0,0011	0,00098
Mediana	0,0012	0,0000	0,0000
Desvio Padrão	0,028	0,035	0,032
Assimetria	0,25	-0,08	0,5
Curtose	7,13	5,12	7,6

**Tabela 3.1** Algumas estatísticas para os ativos

### 3.2 Distribuições Hiperbólicas Generalizadas

Já em 1963, Mandelbrot [44] concluiu que o comportamento dos log-retornos dos ativos financeiros apresentam caudas mais pesadas que as sugeridas pelas gaussianas, sugerindo então o uso das distribuições de Pareto. No entanto, essas distribuições apresentam caudas demasiadamente altas, fato observado empiricamente.

Um novo tipo de distribuições chamadas Hiperbólicas Generalizadas provou ser útil no tratamento de dados financeiros e o que tornou tais distribuições bastante populares foi a versatilidade com que se ajustam aos mais variados conjuntos de dados. O desenvolvimento destas distribuições se deve a Barndoff-Nielsen [45], que ajustou uma classe hiperbólica ao tamanho dos grãos de areia quando sujeitos ao vento contínuo. Estes conceitos foram generalizados e mais tarde foram obtidas as Distribuições Hiperbólicas Generalizadas (DHG).

A função densidade de probabilidade unidimensional de uma DHG é definida pela seguinte equação :

$$D_{HG}(x; \alpha, \beta, \delta, \mu, \lambda) = a(\lambda, \alpha, \beta, \delta) (\delta^2 + (x - \mu)^2)^{\frac{\lambda-1}{2}} K(\lambda, \alpha, \delta, \mu, \beta) \quad (3.1)$$

com

$$K(\lambda, \alpha, \delta, \mu, \beta) = K_{\lambda-\frac{1}{2}}(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}) \exp(\beta(x - \mu)), \quad (3.2)$$

onde

$$a(\lambda, \alpha, \beta, \delta) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\frac{\lambda}{2}}}{\sqrt{2\pi} \alpha^{\lambda-\frac{1}{2}} \delta^\lambda K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} \quad (3.3)$$

é um fator de normalização para tornar a área total igual a 1 e

$$K_\lambda(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{\lambda-1} \exp\left(-\frac{1}{2}x(y + y^{-1})\right) dy \quad (3.4)$$

é a função de Bessel modificada de ordem 3 com índice  $\lambda$ .

Os domínios dos parâmetros são:

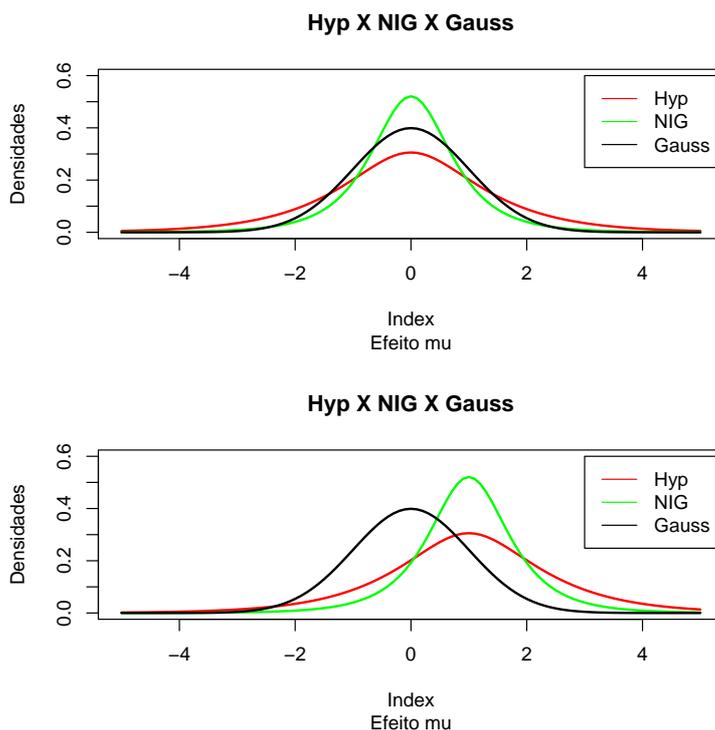
$$\begin{aligned} \mu, \lambda &\in \mathbb{R} \\ -\alpha < \beta < \alpha \\ \delta, \alpha &> 0 \end{aligned}$$

onde  $\mu$  é um parâmetro de localização,  $\delta$  é um fator de escala,  $\alpha$  e  $\beta$  determinam a forma da distribuição e  $\lambda$  determina a subclasse da DHG e está diretamente relacionada à espessura da cauda. O logaritmo da função densidade de probabilidade é uma hipérbole e esse é o motivo do nome da distribuição. Note que o logaritmo da função densidade de probabilidade normal por sua vez é uma parábola.

As DHG possuem as caudas semi-pesadas por possuírem caudas mais pesadas que as gaussianas mas menos pesadas que as distribuições de Pareto, possuindo variância finita, como observamos na expressão abaixo:

$$gh(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta) \sim |x|^{\lambda-1} \exp((\mp\alpha + \beta)x) \text{ quando } x \rightarrow \pm\infty. \quad (3.5)$$

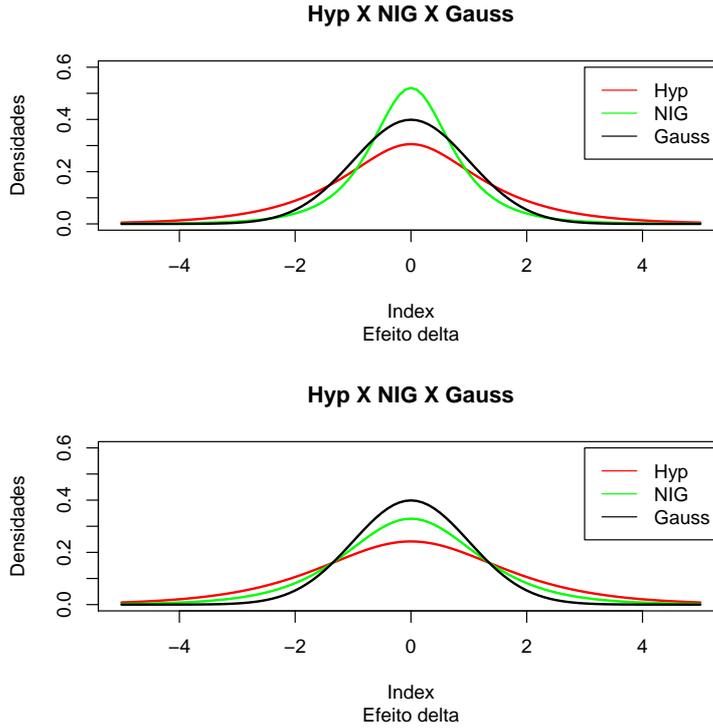
Muitas distribuições podem ser obtidas como subclasses ou como distribuições limite das DHG. Citamos como exemplo a distribuição Gaussiana, a t de Student e a Gaussiana Normal Inversa.



**Figura 3.2** Efeito do parâmetro ' $\mu$ ' nas densidades de probabilidade GHD

A título de ilustração, colocamos nas figuras 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5 gráficos que ilustram os efeitos de mudanças nos parâmetros  $\mu$ ,  $\delta$ ,  $\beta$  e  $\alpha$  respectivamente. Estes parâmetros foram variados arbitrariamente apenas com a intenção de mostrar os efeitos de suas mudanças nos

gráficos. Vemos que uma mudança nos parâmetros  $\delta$  e  $\alpha$  provocam mudanças nos ‘achatamentos’ nas distribuições de probabilidade, mudando suas variâncias. O parâmetro  $\beta$  provoca distorções nas distribuições, fazendo com que elas se tornem mais assimétricas positivamente quando  $\beta < 0$  e assimétricas negativamente quando  $\beta > 0$ . Finalmente, o parâmetro  $\mu$  provoca deslocamentos de translação nas distribuições, mudando suas médias.



**Figura 3.3** Efeito do parâmetro ‘ $\delta$ ’ nas densidades de probabilidade GHD

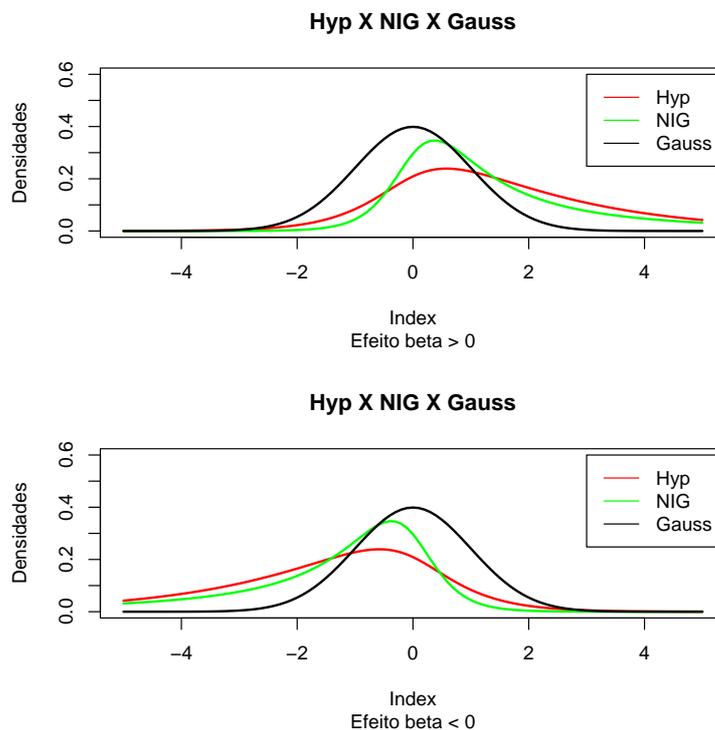
Através da função geradora dos momentos, e definindo  $\gamma \equiv \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$  e  $\bar{\gamma} \equiv \delta\gamma$ , pode-se mostrar que [46]:

$$\mathbb{E}(X) = \mu + \beta \frac{K_{\lambda+1}(\bar{\gamma})}{\gamma K_{\lambda}(\bar{\gamma})} \quad (3.6)$$

e que

$$\text{Var}(X) = \delta \left[ \frac{K_{\lambda+1}(\bar{\gamma})}{\gamma K_{\lambda}(\bar{\gamma})} + \frac{\beta^2}{\gamma^2} \left( \frac{K_{\lambda+2}(\bar{\gamma})}{K_{\lambda}(\bar{\gamma})} - \left( \frac{K_{\lambda+1}(\bar{\gamma})}{K_{\lambda}(\bar{\gamma})} \right)^2 \right) \right] \quad (3.7)$$

A expressão da média dada em 3.6 mostra-nos que todos os parâmetros têm efeito na média. Os efeitos de  $\mu$  e  $\beta$  foram ilustrados nas figuras 3.2 e 3.4, respectivamente. Analogamente, todos os parâmetros influenciam a variância, com destaque para o parâmetro  $\delta$ , como ilustra a figura 3.3.



**Figura 3.4** Efeito do parâmetro ‘ $\beta$ ’ nas densidades de probabilidade GHD

### 3.3 Subclasses

Atribuindo valores específicos ao parâmetro  $\lambda$  obtemos diferentes subclasses. Usando as propriedades das funções de Bessel  $K_\lambda$ , é possível simplificar a função densidade de probabilidade da distribuição hiperbólica generalizada 3.1 quando  $\lambda \in \frac{\mathbb{Z}}{2}$ . Para  $\lambda = n + \frac{1}{2}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , a função de Bessel pode ser expressa como

$$K_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \exp^{-x} \left( 1 + \sum_{i=1}^n \frac{(n+i)!}{(n-i)!i!} (2x)^{-i} \right). \quad (3.8)$$

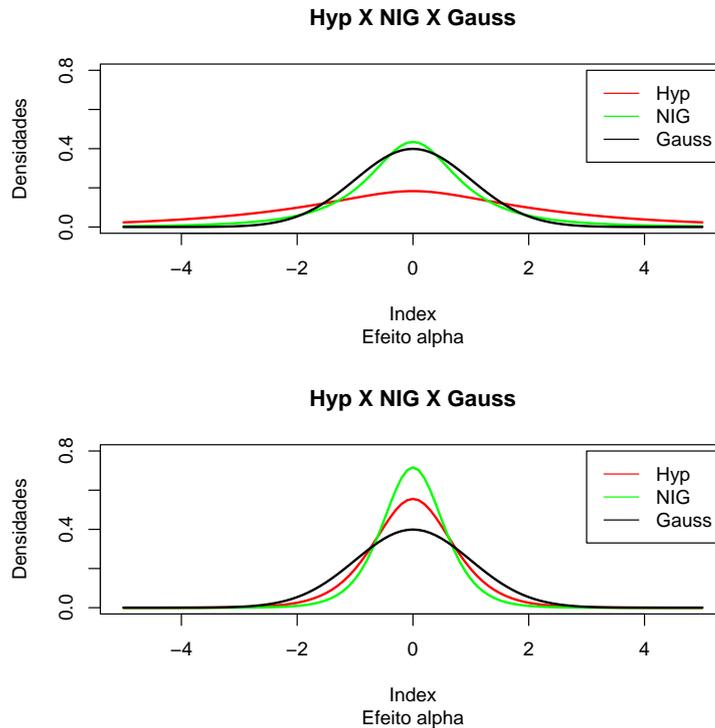
Como  $K_\lambda(x) = K_{-\lambda}(x)$ , obtemos  $K_{-\frac{1}{2}}(x) = K_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \exp^{-x}$ . Em particular, esta expressão permite deduzir expressões mais simples no caso em que  $\lambda = -\frac{1}{2}$  e  $\lambda = 1$ .

**Definição 1.** Para  $\lambda = 1$  obtemos a distribuição hiperbólica (HYP) cuja função densidade é

$$HYP(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2\delta\alpha K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} \exp(-\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} + \beta(x - \mu)), \quad (3.9)$$

com  $x, \mu \in \mathbb{R}, 0 \leq \delta$  e  $|\beta| < \alpha$ .

Note que a função de Bessel  $K_1$  só aparece como constante.



**Figura 3.5** Efeito do parâmetro ' $\alpha$ ' nas densidades de probabilidade GHD

**Definição 2.** Para  $\lambda = -\frac{1}{2}$  obtemos a distribuição Normal Inversa Gaussiana (NIG) com função densidade

$$NIG(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{\alpha\delta}{\pi} \exp(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(x - \mu)) \frac{K_1(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2})}{\sqrt{\delta^2 - (x - \mu)^2}} \quad (3.10)$$

com  $x, \mu \in \mathbb{R}, 0 \leq \delta$  e  $0 \leq |\beta| \leq \alpha$ .

Nos anos mais recentes, alguns autores têm ajustado com sucesso as distribuições da sub-classe NIG aos Log-Retornos dos ativos financeiros. Dentre esses, destacamos Prause [46].

### 3.3.1 Distribuições Limites

Um aspecto importante das distribuições hiperbólicas generalizadas é o fato de ela generalizar muitos tipos de distribuições, obtidas como casos particulares, tais como a distribuição Normal, t de Student e a distribuição de Cauchy.

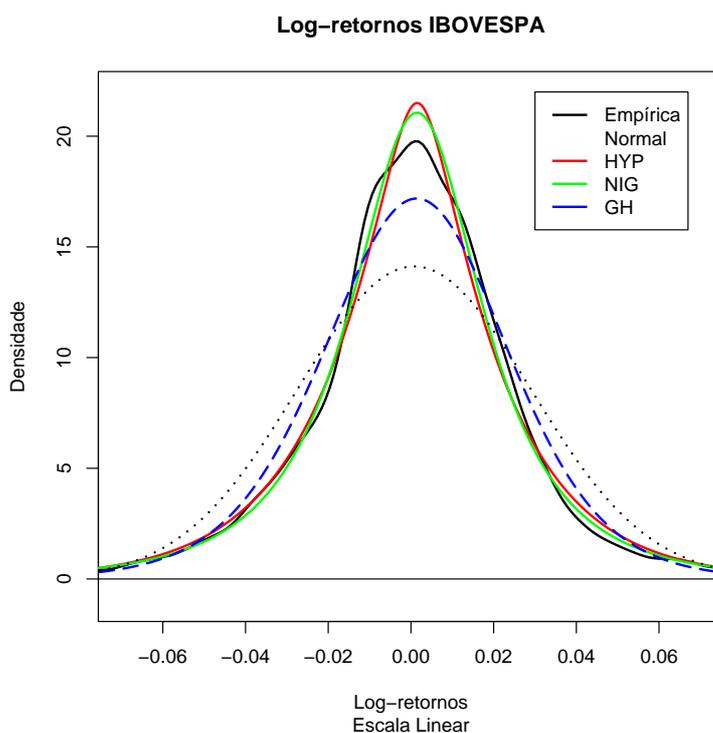
- A distribuição Normal é obtida como um caso limite da distribuição Hiperbólica Generalizada quando  $\delta \rightarrow \infty$  e  $\frac{\delta}{\alpha} \rightarrow \sigma^2$ .
- A distribuição t de Student é obtida como um caso limite da distribuição Hiperbólica Generalizada quando  $\lambda > 0$  e  $\alpha = \beta = \mu = 0$ .

- A distribuição de Cauchy é obtida como um caso limite da distribuição Hiperbólica Generalizada quando  $\lambda = -\frac{1}{2}$  e  $\alpha = \beta = 0$  e  $\delta = 1$ .

### 3.4 Ajustamento das Distribuições aos dados empíricos

Nesta seção, ajustaremos distribuições de probabilidade da classe DHG aos dados empíricos. Os dados utilizados serão os mesmos utilizados no capítulo sobre séries temporais. A estimação dos parâmetros será feita utilizando-se o método da maximização da função de Log-verossimilhança. Ver [46] para maiores detalhes.

Mostramos 4 gráficos para as distribuições dos Log-Retornos para o índice BOVESPA. O gráfico 3.6 mostra as densidades de probabilidade empírica e as distribuições ajustadas Normal, Hiperbólica (HYP), Gaussiana Normal Inversa (NIG)<sup>5</sup> e Hiperbólica Generalizada (GH)<sup>6</sup>, em escala linear.

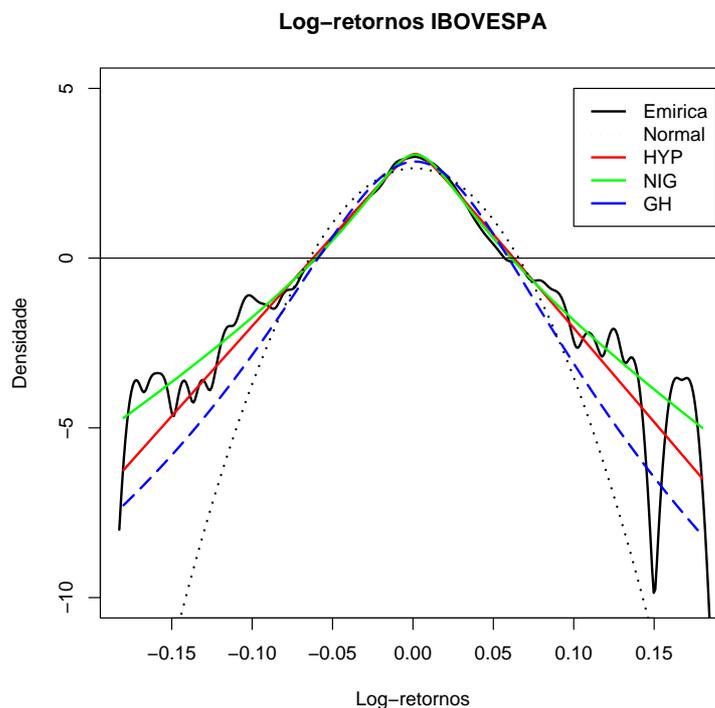


**Figura 3.6** Densidades Empírica e Ajustadas para IBOV

Na figura 3.6, nitidamente observamos que a curva normal não se ajusta bem aos dados empíricos, possuindo uma leptocurtose muito inferior, o mesmo ocorrendo para a distribuição hiperbólica generalizada.

<sup>5</sup>NIG: Normal Inverse Gaussian

<sup>6</sup>GH: Generalized Hyperbolic



**Figura 3.7** Densidades Empírica e Ajustadas para IBOV em escala semi-logarítmica

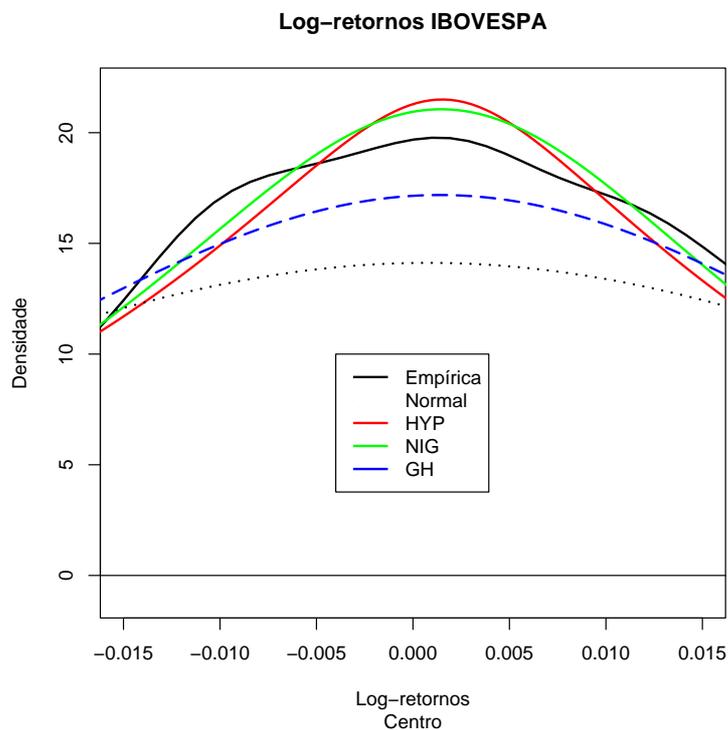
Para verificarmos os comportamentos nas caudas, primeiro, na figura 3.7, temos os mesmos dados da figura 3.6 porém em escala semi-logarítmica. Fica nítida mais uma vez a incapacidade da distribuição normal de capturar os eventos extremos nas caudas. Podemos ver nessa figura a parábola oriunda da distribuição normal e a hipérbole oriunda da distribuição hiperbólica. Assim como no gráfico anterior, fica difícil escolher entre as distribuições NIG e HYP. Pelo gráfico 3.8, parece que a distribuição NIG se ajusta um pouco melhor, pelo menos na região central, aos dados empíricos.

Finalmente, através das figuras 3.9 e 3.10, que mostram somente as caudas das curvas, vemos novamente que duas distribuições se destacam: A NIG e a HYP. Mais uma vez, observamos que os resultados obtivos para o IBOVESPA são suficientemente gerais, de tal forma que as conclusões a respeito dos gráficos obtidas para esse ativo podem ser repassadas para os outros.

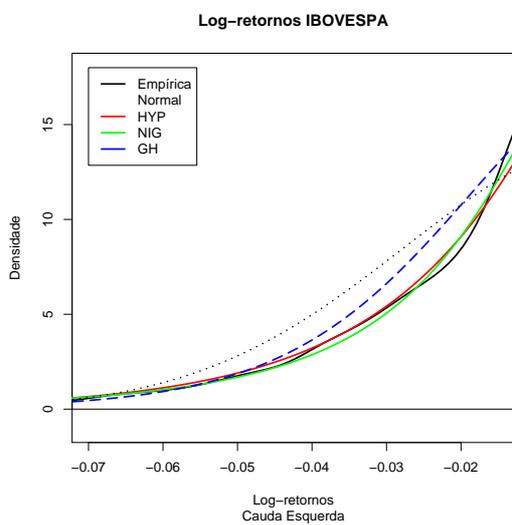
Vemos que através dessa análise visual podemos selecionar duas das quatro distribuições ajustadas. Mas faz-se necessário um método quantitativo mais sistemático para selecionar aquela distribuição que melhor se ajusta aos dados. Isso será feito na seção seguinte.

### 3.5 Testes de Ajuste

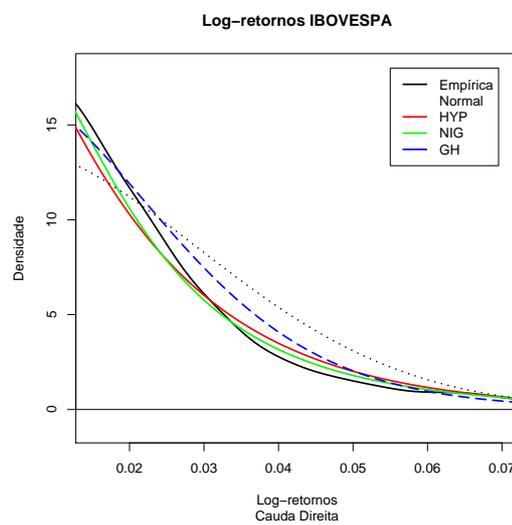
Medir a qualidade do ajustamento de uma distribuição de probabilidade teórica à uma distribuição empírica é um problema bastante usual em estatística. Existem muitos métodos de se



**Figura 3.8** Centro das distribuições IBOV



**Figura 3.9** Cauda Esquerda IBOV



**Figura 3.10** Cauda Direita IBOV

verificar a qualidade desse ajustamento, e a escolha de um fica condicionada ao que se pretende com esse ajustamento. No nosso caso, é importante termos um bom ajustamento relativamente às caudas das distribuições, pois a maior parte das aplicações dessa área da matemática financeira incide sobre tais caudas. Neste trabalho, mediremos a qualidade dos ajustes feitos através

de testes estatísticos que medem a ‘distância’ dos ajustes aos dados empíricos. Utilizaremos as seguintes distâncias:

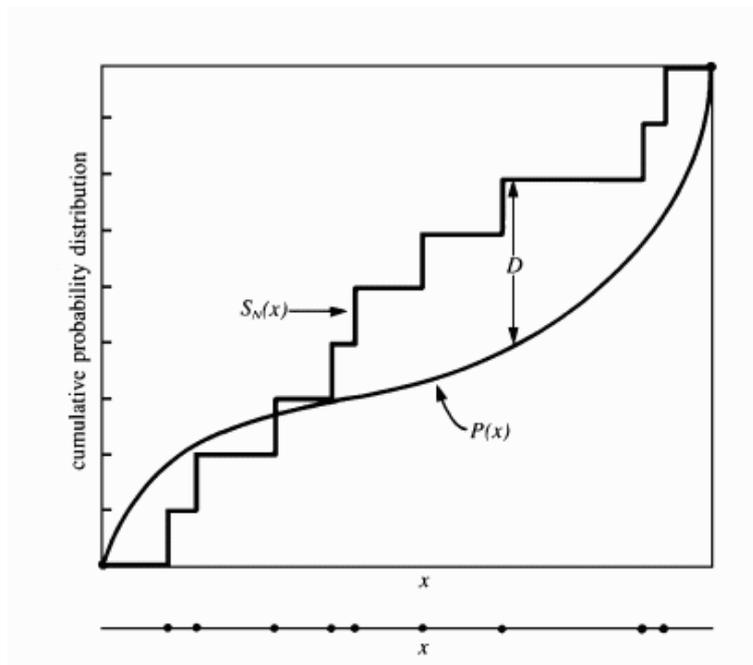
- distância de Kolmogorov-Smirnov;
- distância de Kuiper;
- distância de Anderson-Darling;
- distância de Fajardo-Farias-Ornelas.

### 3.5.1 Distância de Kolmogorov-Smirnov - KS

A distância de Kolmogorov-Smirnov é definida como a maior distância entre a distribuição empírica e a teórica para todos os valores possíveis. Essa distância não dá nenhuma indicação sobre a qualidade do ajustamento nas caudas, porque a contribuição dos valores que se situam nas caudas é desprezível frente aos grandes valores provenientes das zonas centrais da distribuição. Por isso, essa distância não é a melhor distância a considerar se nosso interesse está nas caudas. A distância é dada pela seguinte expressão:

$$KS = \max[F_{empirico}(x) - F_{estimado}(x), 0], \quad (3.11)$$

onde  $F_{empirico}$  é a função de probabilidade acumulada empírica e  $F_{estimado}$  é a função de probabilidade acumulada teórica estimada.



**Figura 3.11** Ilustração da distância de Kolmogorov-Smirnov.  $P(x)$  na figura representa  $F_{estimado}(x)$  e  $S_N(x)$  na figura representa  $F_{empirico}(x)$ . Fonte: <http://members.cox.net>.

### 3.5.2 Distância de Kuiper - KP

Essa distância é muito usada para verificar a qualidade do ajustamento de distribuições contínuas. A principal diferença entre a distância de Kuiper e a de Kolmogorov-Smirnov é que a primeira diferencia entre as diferenças superiores e inferiores e na segunda todas as diferenças são consideradas iguais. Essa distância realça a importância das caudas. Sua expressão é definida por

$$KP = \max[(F_{empirico}(x) - F_{estimado}(x)), 0] + \max[(F_{estimado}(x) - F_{empirico}(x)), 0]. \quad (3.12)$$

### 3.5.3 Distância de Anderson-Darling - AD

A distância de Anderson-Darling pode ser considerada como a distância de Kolmogorov-Smirnov ponderada, cuja ponderação é definida de forma a dar especial importância às caudas da distribuição. A distância considerada é definida pela seguinte expressão

$$AD = \max \left[ \frac{(F_{empirico}(x) - F_{estimado}(x))}{\sqrt{F_{estimado}(x)(1 - F_{estimado}(x))}}, 0 \right]. \quad (3.13)$$

### 3.5.4 Distância de Fajardo-Farias-Ornelas - FFO

A distância de Fajardo-Farias-Ornelas é mais sensível aos valores das caudas que aos valores centrais da distribuição. Usa a função de ponderação da distância de Anderson-Darling e o desvio de direção tal como a distância de Kuiper, incorporando as melhores características das duas distâncias. A distância é definida por

$$FFO = \max \left[ \frac{(F_{empirico}(x) - F_{estimado}(x))}{\sqrt{F_{estimado}(x)(1 - F_{estimado}(x))}}, 0 \right] + \max \left[ \frac{(F_{estimado}(x) - F_{empirico}(x))}{\sqrt{F_{estimado}(x)(1 - F_{estimado}(x))}}, 0 \right]. \quad (3.14)$$

Nas tabelas 3.2, 3.3 e 3.4 estão os valores calculados de todas as distâncias mencionadas acima, para os ativos IBOV, PETR4 e VALE5 respectivamente, para todo o período considerado, de 1991 a 2009.

DISTÂNCIA	NORMAL	HYP	NIG	GH
KS	0,078	0,016	0,011	0,040
AD	11,14	0,17	0,035	0,30
KP	0,146	0,032	0,021	0,070
FFO	11,31	0,24	0,069	0,46

**Tabela 3.2** Distâncias para IBOV

Na tabela 3.2, observamos que todas as distâncias indicam que a distribuição de probabilidade que melhor se ajusta aos dados empíricos do IBOV é a NIG. Conclusões análogas podem

ser obtidas para os outros ativos nas tabelas 3.3 e 3.4 para a PETR4 e VALE5, respectivamente.

DISTÂNCIA	NORMAL	HYP	NIG	GH
KS	0,081	0,054	0,049	0,051
AD	36,97	0,11	0,097	0,17
KP	0,16	0,093	0,093	0,093
FFO	37,16	0,22	0,019	0,38

**Tabela 3.3** Distâncias para PETR4

DISTÂNCIA	NORMAL	HYP	NIG	GH
KS	0,057	0,055	0,051	0,058
AD	0,75	0,12	0,11	0,12
KP	0,11	0,10	0,10	0,10
FFO	0,90	0,20	0,20	0,21

**Tabela 3.4** Distâncias para VALE5

Concluimos, portanto, que a NIG é uma boa candidata a descrever as distribuições empíricas para todos os ativos considerados, no período que vai de 1991 a 2009 visto que as distâncias consideradas possuem, de modo geral, valores menores para esta distribuição teórica.

Uma questão interessante a ser respondida é se a NIG sempre foi uma boa candidata para as distribuições de probabilidade dos log-retornos. Uma maneira de investigar isso é estimar as melhores distribuições de probabilidade para os três ativos nos quatro períodos considerados anteriormente. Desta forma, poderemos verificar a ‘robustez’ da hipótese de que a NIG é de fato a melhor distribuição de probabilidade para os log-retornos, independentemente do período considerado. No apêndice C se encontram tabelas que mostram as distâncias calculadas para os três ativos nos quatro períodos considerados. Observa-se que, de modo geral, a NIG se reafirma como uma boa candidata à distribuição de probabilidade, já que, a menos do período 1 para IBOV e do período 4 para PETR4, todos os períodos e em todos os ativos tal distribuição mostra-se como sendo a melhor escolha. Em alguns casos a distribuição HYP empata com a NIG.

É interessante ressaltar uma ‘anomalia’ que ocorreu no primeiro período de VALE5: Para este ativo neste período, os testes utilizados não foram capazes de distinguir uma única distribuição dentre as quatro consideradas, o que indica que neste período todas as distribuições (inclusive a normal) se ajustam igualmente bem aos dados. Este período, como ressaltado no capítulo sobre séries temporais, corresponde ao período pré-plano real. Também verificamos que neste período para IBOV, a distribuição que melhor se ajusta aos dados é a distribuição hiperbólica, e que, também neste período para PETR4, as distribuições hiperbólica e NIG se ajustam igualmente bem aos dados. É curioso notar que, dos 6 casos onde a NIG não aparece como líder absoluta no que se refere à qualidade do ajuste, três deles se referem ao primeiro

período considerado. Tal fato nos leva a conjecturar a possibilidade de que a mudança na economia do país com o advento do Plano Real tenha alterado a estrutura do mercado de capitais brasileiro, a ponto de alterar as distribuições de probabilidade do índice BOVESPA em geral, e de dois dos seus principais ativos em particular.

### 3.6 Medidas de Risco

De posse das distribuições de probabilidade dos log-retornos dos ativos, podemos agora estimar o risco a que estaríamos sujeitos se expuséssemos nosso capital em carteiras de ativos que contivessem um ou mais dos ativos escolhidos.

Existe um conjunto de medidas de risco tradicionais obtidas a partir de uma série de retornos  $r_j$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, m$ , sendo  $m$  o número total de observações dos retornos do ativo:

$$\text{Desvio Padrao} = \mathbf{DP} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (r_i - \bar{r})^2}{m}} \quad (3.15)$$

onde  $\bar{r}$  é o retorno médio,

$$\text{Semi Variância} = \mathbf{SV} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \text{Min}[0; (r_i - \bar{r})]^2}{m}} \quad (3.16)$$

$$\text{Downside Risk} = \mathbf{DR} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \text{Min}[0; (r_i - RMA)]^2}{m}} \quad (3.17)$$

onde RMA é o *retorno mínimo aceitável*,

$$\text{Desvio Absoluto Medio} = \mathbf{DA} = \frac{\sum_{i=1}^m |r_i - \bar{r}|}{m} \quad (3.18)$$

$$\text{Semi Desvio Absoluto Medio} = \mathbf{SDA} = \frac{\sum_{i=1}^m |\text{Min}[0; (r_i - \bar{r})]|}{m} \quad (3.19)$$

$$\text{Downside Risk Absoluto Medio} = \mathbf{DRA} = \frac{\sum_{i=1}^m |\text{Min}[0; (r_i - r_{RMA})]|}{m} \quad (3.20)$$

Cada uma dessas medidas apresenta características peculiares e é possível empregá-las para otimizar alocação de ativos em carteiras, como feito por exemplo em [42].

Dois medidas de risco muito utilizadas na avaliação de risco em carteiras são o *VaR* (Value at Risk) e o *Expected Shortfall*. Nas subseções a seguir são apresentadas tais medidas.

### 3.6.1 O Valor em Risco - VaR

A metodologia VaR, desenvolvida pelo banco J. P. Morgan (1996), surge com o objetivo de quantificar, de forma sistemática e simples, as perdas potenciais decorrentes da exposição ao risco de mercado, ou seja, aquele advindo da volatilidade dos preços de mercado. Esta metodologia vem desde então sendo amplamente utilizada na prática do gerenciamento de risco no mercado como medida do risco total de uma carteira de ativos, sendo inclusive mencionada em diversas práticas reguladoras do sistema financeiro internacional.

Através do VaR pode-se ter idéia da probabilidade de perda maior que um certo nível. Particularmente, o VaR responde a questão: “Qual o montante mínimo que espero perder a uma certa probabilidade e horizonte<sup>7</sup>?”

O VaR, em termos matemáticos, corresponde ao percentil da distribuição de uma carteira, podendo ser expresso em termos da perda esperada da carteira expressa em valor corrente (VaR absoluto) ou em valor esperado para o horizonte em questão (VaR relativo).

O VaR tenta resumir em um único número a perda máxima esperada dentro de um certo prazo e com um certo grau de confiança estatística. Ele avalia a variável aleatória que representa o ganho (ou perda) da carteira. Um VaR(95%) indica que existem 5 chances em 100 de que o prejuízo seja maior que o indicado pelo VaR no prazo para o qual foi calculado. Torna-se um número de fácil leitura e entendimento que depende do prazo (N) e do grau (1- $\alpha$ ) de confiança desejado. O VaR=V pode ser lido como: “Nós estamos (1- $\alpha$ )% certos de que não iremos perder mais do que V unidades monetárias nos próximos N dias”. Podemos definir o VaR com 100(1- $\alpha$ )% de nível de confiança ( $VaR_{\alpha}(R)$ ) de acordo com a expressão 3.21

$$VaR_{\alpha}(R) = -\inf \{r | P(R \leq r) > \alpha\} \quad (3.21)$$

onde r é o retorno pertencente à distribuição do ativo ou portfólio. O cálculo do VaR é bastante simples, desde que se conheça de forma detalhada a distribuição de retornos, pois o VaR é, por definição, algum quantil associado a um percentil extremo da distribuição (usualmente 1% ou 5%). De posse dessa distribuição, pode-se calcular, por exemplo, o pior resultado entre os 95% melhores ou o melhor entre os 5% piores. Esse valor de corte é o VaR de 5%.

### 3.6.2 Perda Média Esperada - *Expected Shortfall* (ES)

Uma crítica relacionada ao VaR é que este não fornece estimativa do tamanho da perda esperada uma vez que a perda tenha excedido o valor crítico. Por exemplo, uma carteira em que o VaR de 95% de confiança é R\$100 significa que há apenas 5% de chance de a carteira perder mais de R\$100, porém, não há indicação de quanto grande pode ser essa perda.

A perda média esperada ou *Expected Shortfall*, ou também *Conditional Value at Risk* (CVaR), é uma medida que indica a perda média que excede o VaR, ou seja, quantifica quanto grande é, na média, a perda (risco) a que se está sujeito em uma determinada carteira, fornecendo dessa forma informações sobre a cauda da distribuição. Pode-se pensar na medida de ES como “quão pesada” é a cauda da distribuição dos log-retornos de uma carteira.

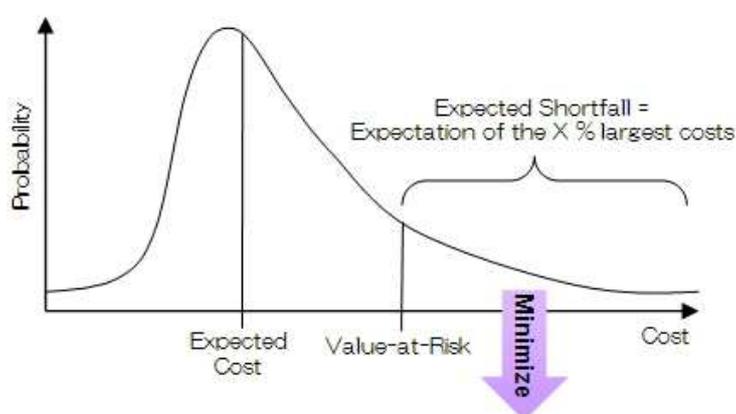
<sup>7</sup>Aqui horizonte pode ser pensado como um intervalo de tempo. Portanto, poderíamos reescrever: Qual o montante mínimo que espero perder a uma certa probabilidade em um determinado intervalo de tempo?

Portanto, enquanto o VaR responde a pergunta “Qual a perda mínima incorrida pela carteira nos  $\alpha\%$  piores cenários?”, o ES responde a questão “Qual a perda média incorrida pela carteira nos  $\alpha\%$  piores cenários?”

Matematicamente pode-se definir o ES como a esperança condicional de perdas na carteira de perdas superiores ao VaR. Suponha-se que  $r$  representa o conjunto de retornos da distribuição do ativo ou da carteira, e  $Var_\alpha(r)$  é o VaR com  $100(1-\alpha)\%$  nível de confiança, então o  $ES_\alpha(r)$  se define como sendo

$$ES_\alpha(r) = \mathbb{E}[-r | -r \geq VaR_\alpha(r)]. \quad (3.22)$$

A figura 3.12 ilustra a definição de ES dada na equação 3.22.



**Figura 3.12** Ilustração da medida de risco ES - *Expected Shortfall*. Fonte: [www.trl.ibm.com](http://www.trl.ibm.com)

### 3.7 Propriedades de Medidas de Risco Coerentes

Se  $X$  e  $Y$  são as distribuições de probabilidade de duas variáveis aleatórias, uma medida de risco coerente deve satisfazer às seguintes propriedades:

*Alocação* : A alocação de renda fixa à carteira diminui o risco no mesmo montante:

$$Risk(X + c) = Risk(X) - c \quad (3.23)$$

*Subaditividade*: O risco da soma de subcarteiras é menor ou igual ao risco da soma individual dos ativos da carteira:

$$Risk(X + Y) \leq Risk(X) + Risk(Y) \quad (3.24)$$

*Homogeneidade positiva de grau 1*: Ao aumentar o tamanho de cada posição na carteira o risco da carteira aumenta em igual proporção :

$$Risk(cX) = cRisk(X), \forall c > 0 \quad (3.25)$$

*Monotonicidade:* Se os ganhos da carteira X são menores que os ganhos da carteira Y para todos os cenários possíveis, então o risco na carteira X é maior que o risco na carteira Y:

$$X < Y \Rightarrow Risk(X) \geq Risk(Y) \quad (3.26)$$

Medidas de risco tradicionais, tais como o desvio padrão e o VaR, nem sempre satisfazem as propriedades de uma medida de risco coerente. A subaditividade é uma das propriedades mais importantes, por estar justamente associada ao fato de que a diversificação diminui o risco.

### 3.7.1 A não coerência do VaR e a coerência do ES

Embora a medida do VaR seja constantemente empregada no mercado, esta apresenta alguns inconvenientes metodológicos, pois nem sempre respeita as propriedades desejáveis que uma medida de risco (coerente) deve apresentar. A propriedade da subaditividade por exemplo, é de suma importância para o gerenciamento de risco para diversas áreas de negócios, uma vez que o risco do todo nunca pode ser maior que o da soma das partes.

É possível demonstrar que o ES é uma medida de risco coerente, e, portanto, em um ambiente de retornos não normais resulta ser uma medida de risco mais confiável e que permite ao investidor ter uma idéia do risco ao qual se encontra exposto.

## 3.8 A função Ômega

O grande desafio em qualquer programa de gestão de riscos consiste em lidar com eventos extremamente improváveis, mas potencialmente catastróficos, modelados pelas caudas pesadas das distribuições de probabilidade. Não estaríamos totalmente seguros assumindo normalidade das distribuições dos ativos subjacentes. Devemos olhar para os momentos de ordem mais alta, tais como os associados à simetria e curtose. E é aqui que a função Ômega entra em cena.

A abordagem tradicional que considera a variância como medida de risco dos ativos não leva em consideração a distinção entre os desvios em relação a média para cima e os desvios em relação a média para baixo dos retornos dos ativos. A motivação original para usar a variância como medida de risco era a facilidade computacional causada nos problemas de otimização de carteiras. Dado que a capacidade de processamento dos computadores modernos é hoje em dia ordens de grandeza maior que era há 50 anos atrás, porque utilizarmos uma hipótese que sabemos ser falsa?

### 3.8.1 A função Ômega

Inventada em 2002 por Con Keating e William Shadwick (um matemático canadense), ela é similar ao Índice de Sharpe<sup>8</sup> e serve para ordenar as carteiras dos ativos no que se refere às suas rentabilidades e riscos. Diferentemente do Índice de Sharpe, a função Ômega incorpora todos

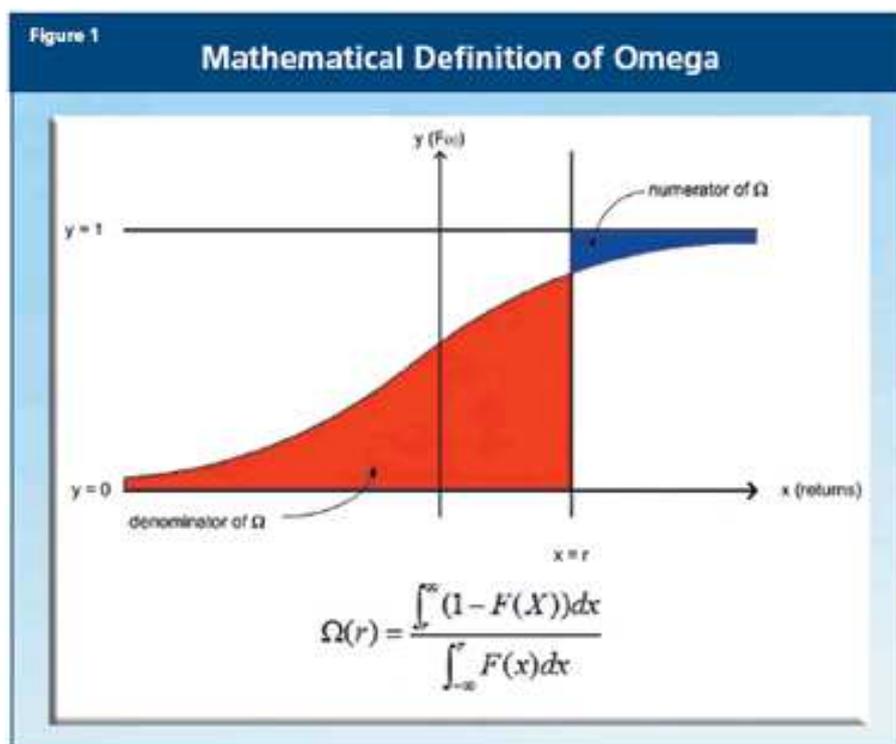
---

<sup>8</sup>Índice utilizado na análise de fundos de investimento, que tem como objetivo ajustar o retorno do fundo pelo seu risco, ou seja, quanto maior o retorno e menor o risco do investimento, melhor será o Índice de Sharpe. O índice é calculado da seguinte forma: Índice de Sharpe = (Retorno do Fundo - Taxa livre de Risco)/DP, onde DP equivale ao desvio padrão do Retorno do Fundo.

os momentos de ordem superior e distingue entre desvios superiores e inferiores dos retornos em relação a média. Ela fornece uma completa descrição das características do risco-retorno, de tal modo que resulta em uma medida intuitivamente atrativa e facilmente computável.

Ômega também leva em conta um nível de retorno chamado “limite” ( $r$ )<sup>9</sup> definido exogenamente, o qual é a fronteira entre o que se considera como ganho e como perda. Por exemplo, suponhamos que um determinado investidor tenha a possibilidade de fazer um investimento que lhe renda com certeza (sem risco) 1,0% ao mês. Não seria nenhum pouco interessante para esse investidor fazer um investimento em uma carteira de ativos (com risco) que lhe rendesse menos de 1,0% ao mês. Então o valor de  $r$  poderia ser exogenamente determinado como sendo 1,0% (ou outro valor qualquer maior que 1,0%, dependendo do “apetite” por risco do investidor). Mesmo em distribuições normais, dependendo do valor de  $r$ , a medida Ômega fornece informações adicionais que só a média e a variância não conseguiriam. Isso levaria a obter diferentes resultados em otimização de carteiras, se comparado com a otimização clássica de Markowitz [42].

A função Ômega é calculada em relação ao nível  $r$ , que pode ser interpretado como um retorno mínimo tal que possa ser considerado um ganho. Qualquer retorno aquém deste nível é considerado uma perda.



**Figura 3.13** Ilustração da medida de performance Ômega. Fonte: www.bpmmagazine.com.

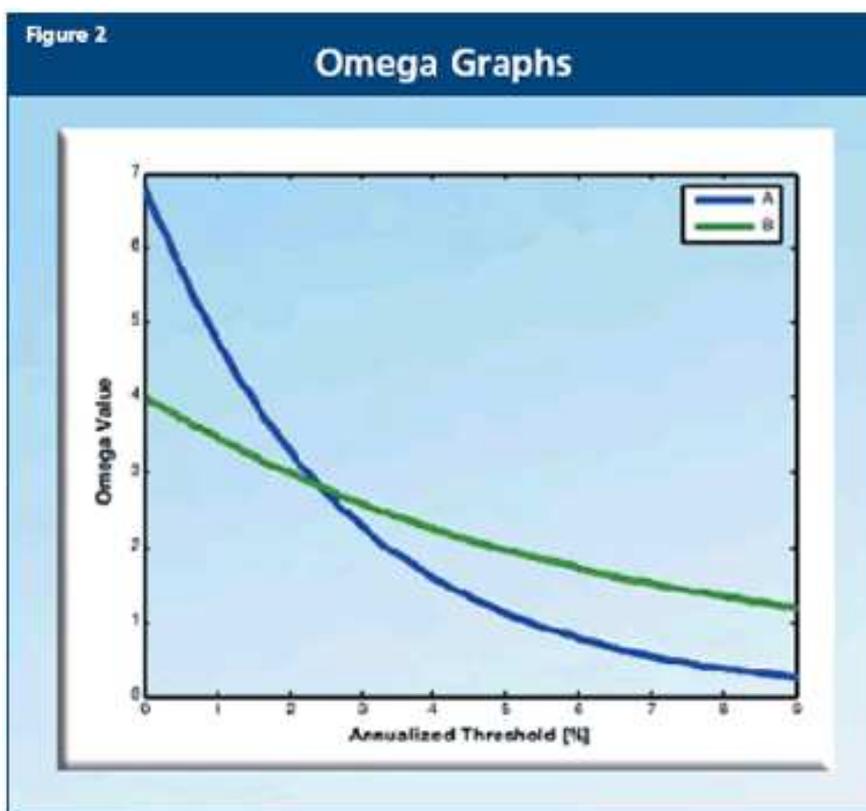
A função Ômega é equivalente (veja figura 3.13) à distribuição de retornos e possui muitas propriedades matemáticas atrativas. A função Ômega pode ser definida por

<sup>9</sup>Threshold level.

$$\Omega(r) = \frac{\int_r^\infty (1 - F(x))dx}{\int_{-\infty}^r F(x)dx} \quad (3.27)$$

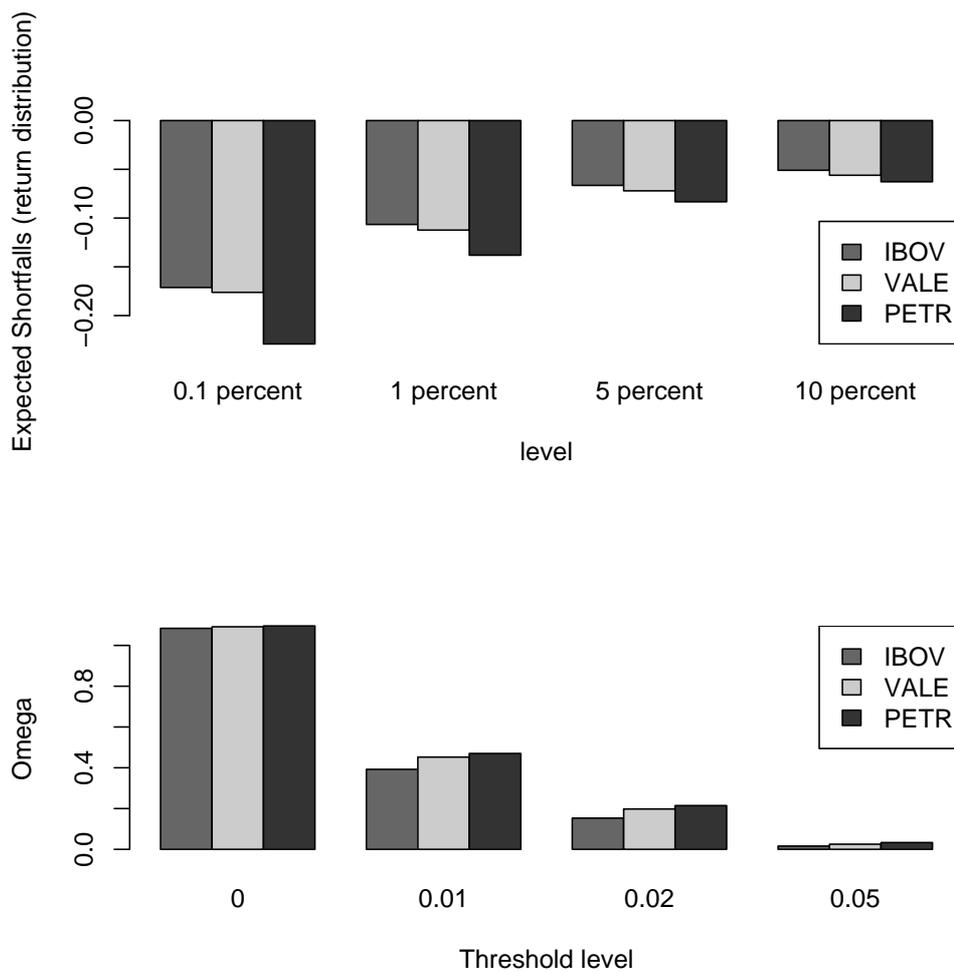
onde  $F(x)$  é a função de probabilidade acumulada de  $x$ .

Fazendo o gráfico de  $r$  versus  $\hat{\Omega}$ mega, encontramos o gráfico  $\hat{\Omega}$ mega de investimento (veja figura 3.14). Os gráficos  $\hat{\Omega}$ mega tornam fácil comparar diferentes investimentos. O ponto de interseção de diferentes gráficos  $\hat{\Omega}$ mega representa o ponto de indiferença do investidor. A curvatura do gráfico  $\hat{\Omega}$ mega é útil em fornecer “insights” relacionados à robustez do investimento. Gráficos  $\hat{\Omega}$ mega são sempre decrescentes, mas aqueles que decrescem a uma taxa menor são menos sensíveis ao nível  $r$ , indicando que são mais robustos e possuem uma parte superior mais “caudalosa”.



**Figura 3.14** Ilustração da medida de performance  $\hat{\Omega}$ mega (Gráfico  $\hat{\Omega}$ mega). Fonte: [www.bpmmagazine.com](http://www.bpmmagazine.com).

A figura 3.15 fornece um gráfico em que foram calculados os  $\hat{\Omega}$ egas e as perdas médias esperadas (Expected Shortfall - ES) para os ativos IBOV, VALE e PETR. Observe que tanto o ES quanto o  $\hat{\Omega}$ mega indicam que o IBOV é menos arriscado que os ativos VALE e PETR, o que é consistente com o conceito de diversificação de carteira.



**Figura 3.15** Expected Shortfall e  $\hat{\Omega}$  para IBOV, VALE e PETR

# Modelos com Autossimilaridade. Fractalidade

## 4.1 Introdução

Neste capítulo faremos uma discussão sucinta sobre dois temas de muita relevância para a matemática financeira moderna: as distribuições estáveis e a idéia de autossimilaridade estatística, por constituírem o habitat natural de onde emerge a definição do chamado expoente de Hurst que, como indicado anteriormente, fornece pistas sobre a plausibilidade de se fazer previsões em séries temporais financeiras, assim como fornece indícios sobre a veracidade da Hipótese de Mercado Eficiente.

## 4.2 Distribuições estáveis

Na análise estatística de modelos de distribuição de probabilidade dos índices financeiros, é notória a importância das *distribuições estáveis* como candidatas a modelos probabilísticos deste tipo. Nesta seção, faremos uma breve introdução a estes conceitos.

**Definição 1.** Dizemos que uma variável aleatória  $X$  é estável ou possui uma distribuição estável se, para quaisquer números positivos  $a$  e  $b$ , existem números positivos  $c$  e  $d$  tais que

$$f(aX_1 + bX_2) = f(cX + d) \quad (4.1)$$

para cópias independentes  $X_1$  e  $X_2$  de  $X$  (isto significa que  $f(X_i) = f(X)$ ,  $i = 1, 2$ ; Assumimos, sem perda de generalidade, que as variáveis aleatórias em questão são definidas no mesmo espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ).

Pode ser provado [35] que em (4.1) nós necessariamente temos

$$c^\alpha = a^\alpha + b^\alpha \quad (4.2)$$

para algum  $\alpha \in (0, 2]$  independentemente de  $a$  e  $b$ .

Uma outra definição muito utilizada e equivalente é:

**Definição 2.** Uma variável aleatória  $X$  é dita ser estável se para cada  $n \geq 2$  existe um número positivo  $C_n$  e um número  $D_n$  tais que

$$f(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = f(C_n X + D_n) \quad (4.3)$$

onde  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  são cópias independentes de  $X$ .

Se  $D_n = 0$  em (4.3) para  $n \geq 2$ , ou seja

$$f(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = f(C_n X), \quad (4.4)$$

então  $X$  é dita ser uma variável estritamente *estável*.

O parâmetro  $C_n \equiv n^{\frac{1}{\alpha}}$  em (4.3) e (4.4) para algum  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 2$ , é o mesmo parâmetro em (4.2).

Para enfatizar a importância de  $\alpha$ , às vezes se utiliza o termo ' $\alpha$ -estabilidade' no lugar de '*estabilidade*'.

De acordo com um notável resultado da teoria da probabilidade, devido a P. Levy e A. Khintchine, a função característica

$$\varphi(\theta) = \mathbb{E}(e^{i\theta X})$$

de uma variável aleatória estável  $X$  possui a seguinte representação :

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} \exp \left\{ i\mu\theta - \sigma^\alpha |\theta|^\alpha \left( 1 - i\beta (\text{Sgn}\theta) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right\}, & \text{se } \alpha \neq 1, \\ \exp \left\{ i\mu\theta - \sigma |\theta| \left( 1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\text{Sgn}\theta) \ln |\theta| \right) \right\}, & \text{se } \alpha = 1, \end{cases} \quad (4.5)$$

onde  $0 < \alpha \leq 2$ ,  $|\beta| \leq 1$ ,  $\sigma > 0$ , e  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Aqui os quatro parâmetros  $(\alpha, \beta, \sigma, \mu)$  tem o seguinte significado:

- $\alpha$  é o *expoente de estabilidade* ou o *parâmetro característico*;
- $\beta$  é o parâmetro que mede a assimetria da densidade de probabilidade;
- $\sigma$  é o parâmetro de escala;
- $\mu$  é o parâmetro de localização .

O parâmetro  $\alpha$  'controla' o decréscimo das 'caudas' das distribuições . Se  $0 < \alpha < 2$ , então

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \mathbb{P}(X > x) = C_\alpha \frac{1 + \beta}{2} \sigma^\alpha, \quad (4.6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \mathbb{P}(X < -x) = C_\alpha \frac{1 - \beta}{2} \sigma^\alpha \quad (4.7)$$

onde

$$C_\alpha = \left( \int_0^\infty x^{-\alpha} \text{sen} x dx \right)^{-1} = \begin{cases} \frac{1 - \alpha}{\Gamma(2 - \alpha) \cos(\frac{\pi\alpha}{2})}, & \text{se } \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi}, & \text{se } \alpha = 1, \end{cases} \quad (4.8)$$

Se  $\alpha = 2$ , então por (4.5) obtemos

$$\varphi(\theta) = e^{i\mu\theta - \sigma^2\theta^2} = e^{i\mu\theta - \frac{\theta^2}{2}(2\sigma^2)}, \quad (4.9)$$

que mostra que  $\varphi(\theta)$  é a função característica da distribuição normal  $\mathcal{N}(\mu, 2\sigma^2)$ , ou seja, de uma variável aleatória  $X$  com distribuição normal com  $\mathbb{E}(X) = \mu$  e  $\text{Var}(X) = 2\sigma^2$ .

O valor de  $\beta$  em (4.5) não é bem definido neste caso (porque se  $\alpha = 2$ , este parâmetro entra no termo  $\beta \tan \pi$ , que é igual a zero). Fazemos usualmente  $\beta = 0$ .

O caso  $\alpha = 2$  difere significativamente do caso  $\alpha < 2$ . Se  $\mu = 0$  e  $2\sigma^2 = 1$ , então

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X| > x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}. \quad (4.10)$$

Comparando esta equação com (4.6) e (4.7) vemos que para  $\alpha < 2$  as caudas são ‘pesadas’: O decaimento no caso normal é mais rápido. É por esse motivo que é natural usar a classe de distribuições estáveis como fonte de modelos probabilísticos para governar a dinâmica de sequências tais como  $h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}$  de log-retornos dos ativos, em que  $S_n$  são os valores dos preços dos ativos.

É importante notar que, como vimos em (4.6) e (4.7), a esperança  $\mathbb{E}(|X|)$  será finita se e somente se  $\alpha > 1$ . Em geral,  $\mathbb{E}(|X|)^p < \infty$  se e somente se  $p < \alpha$ .

### 4.3 Modelos com Autossimilaridade

É historicamente observado na análise estatística de séries temporais financeiras que muitas destas séries possuem a propriedade de *autossimilaridade* estatística. Isto significa que a estrutura de suas partes é igual à estrutura da série como um todo. Se  $S_n, n \geq 0$ , são os valores diários do índice Bovespa, então as densidades de probabilidade  $f_1(x)$  e  $f_k(x), k > 1$ , das distribuições das variáveis

$$h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}} \quad \text{e} \quad h_{kn} = \ln \frac{S_{kn}}{S_{k(n-1)}}, \quad n \geq 1,$$

calculados para grandes quantidades de dados, satisfazem a relação

$$f_1(x) \approx k^{\mathbb{H}} f_k(k^{\mathbb{H}}x),$$

onde  $\mathbb{H}$  é alguma constante, que no caso das séries temporais financeiras, pode ser significativamente maior que  $1/2$ , em contraste com o que seria de se esperar de acordo com o *teorema central do limite*.

Obviamente, tais propriedades pedem explicações. Tais explicações podem ser obtidas do conceito geral de auto-similaridade estatística, que não somente nos fornece um caminho para estudar o *movimento browniano fracionário* (fBm), *ruído fracionário Gaussiano*, e outras noções importantes, mas também é crucial no desenvolvimento da *geometria fractal* (B. Mandelbrot). Este conceito de autossimilaridade está intimamente conectado a conceitos e teorias não probabilísticas, tal como *caos* ou *sistemas dinâmicos não lineares*.

#### 4.3.1 O Fenômeno da Autossimilaridade Estatística de Hurst

Em 1951, um climatologista Britânico chamado H. E. Hurst, que trabalhou mais de 60 anos no Egito como um participante dos projetos de hidrologia do rio Nilo, publicou um artigo [22] devotado a sua descoberta do seguinte fenômeno surpreendente nas flutuações anuais do nível das águas do rio Nilo e de vários outros rios.

Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_n$  os valores de  $n$  sucessivos níveis de água (do Nilo digamos, em alguma parte). Então o valor de  $\frac{X_n}{n}$ , onde  $X_n = \sum_{k=1}^n x_k$ , é um bom estimador da média de  $x_k$ .

O desvio do valor acumulativo  $X_k$  correspondente a  $k$  sucessivos anos da média empírica calculado usando os dados para  $n$  anos é

$$X_k - \frac{k}{n}X_n,$$

e

$$\min\left(X_k - \frac{k}{n}X_n\right) \text{ e } \max\left(X_k - \frac{k}{n}X_n\right)$$

são os menores e os maiores desvios. Seja

$$\mathbb{R}_n = \max\left(X_k - \frac{k}{n}X_n\right) - \min\left(X_k - \frac{k}{n}X_n\right)$$

o intervalo caracterizando a amplitude do desvio dos valores acumulados  $X_k$  em relação ao seu valor médio  $\frac{k}{n}X_n$  nos sucessivos anos. Hurst não trabalhou com os valores de  $\mathbb{R}_n$ , mas sim com os valores normalizados  $\mathbb{Q}_n = \frac{\mathbb{R}_n}{\mathbb{S}_n}$ , onde

$$\mathbb{S}_n = \sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right)^2\right)}$$

é o desvio empírico médio introduzido para tornar a estatística *invariante* sobre a mudança

$$x_k \rightarrow c(x_k + m), \quad k \geq 1.$$

Esta é uma propriedade desejada porque a esperança e a variância de  $x_k$  são usualmente desconhecidas.

Baseado num grande volume de dados, os registros dos fluxos do rio Nilo em 622 – 1469 (um período de 847 anos), H. Hurst descobriu o seguinte comportamento para a estatística  $\frac{\mathbb{R}_n}{\mathbb{S}_n}$  para valores grandes de  $n$ :

$$\frac{\mathbb{R}_n}{\mathbb{S}_n} \sim cn^{\mathbb{H}}, \quad (4.11)$$

onde  $c$  é uma certa constante e o parâmetro  $\mathbb{H}$  nós chamaremos de *parâmetro de Hurst* ou *expoente de Hurst* e vale aproximadamente 0,7. (Hurst obteve valores próximos a este para outros rios também.) Este é um resultado inesperado. Ele havia antecipado que  $\mathbb{H} = 0,5$  por motivos que foram depois explicados por W. Feller [35]:

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias *independentes e identicamente distribuídas* com  $\mathbb{E}(x_n) = 0$  e  $\mathbb{E}(x_n^2) = 1$ . (Isto era o que Hurst esperava.) Então, como mostrado por Feller,

$$\mathbb{E}(\mathbb{R}_n) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}n^{\frac{1}{2}} \text{ e } \sqrt{\text{Var}\mathbb{R}_n} \sim \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}\right)n$$

para  $n$  grande. Como  $\mathbb{S}_n \rightarrow 1$  neste caso, os valores de  $\mathbb{Q}_n$  devem crescer com  $n^{\frac{1}{2}}$  para  $n$  grande.

No estudo das propriedades estatísticas da sequência  $(x_n)_{n \geq 1}$  faz sentido perguntar sobre a estrutura da distribuição empírica  $f(x_1 + \dots + x_n)$  calculada a partir de um grande número de amostras, digamos,  $(x_1, \dots, x_n), (x_{n+1}, \dots, x_{2n}), \dots$ . No caso quando os  $x_k$  são os desvios do nível de água de algum valor médio, encontramos que

$$f(x_1 + \dots + x_n) \equiv f(n^{\mathbb{H}} x_1), \quad (4.12)$$

onde  $\mathbb{H} > \frac{1}{2}$ .

Façamos agora uma pergunta importante: Quais propriedades probabilísticas e estatísticas a sequência  $(x_n)$  em (4.12) deve ter para que o parâmetro  $\mathbb{H}$  seja diferente de 0,5?

Olhando para a fórmula (4.4) vemos uma das possíveis explicações para a relação  $\mathbb{H} \sim 0,7$ : os  $x_j$  podem ser variáveis aleatórias independentes estáveis com expoente de estabilidade  $\alpha = \frac{1}{\mathbb{H}} \sim 1.48$ .

Mas existe uma outra possibilidade: A relação (4.12) com  $\mathbb{H} \neq \frac{1}{2}$  pode ocorrer no caso de variáveis normalmente distribuídas, mas com variáveis  $x_1, x_2, \dots$  dependentes! Neste caso, a sequência  $(x_n)$  é necessariamente uma sequência com o que chamamos de *persistência*, quando  $\mathbb{H} > 0,5$  e *antipersistência* quando  $\mathbb{H} < 0,5$ .

As propriedades (4.11) e (4.12) representam uma peculiar forma de auto-similaridade, observada em muitos índices financeiros (com o  $h_n$  no lugar de  $x_n$ ). A observação anterior que os  $x_n$  podem ser ‘independentes e estáveis’ ou ‘dependentes normais’ possui numerosas aplicações na matemática financeira, e em particular, na análise da estrutura ‘fractal’ da ‘volatilidade’.

Cabe ressaltar que uma variedade de sistemas com dinâmica não linear (ocorrendo na física, geofísica, biologia, economia,  $\dots$ ) exibem autossimilaridades do tipo representada por (4.11) e (4.12). É esta propriedade de autossimilaridade que ocupa o lugar central em *geometria fractal* e tal propriedade será a base de nossa abordagem para a análise e previsão de séries temporais no capítulo 5. A figura (4.1) plota algumas séries temporais para alguns valores de  $\mathbb{H}$ .

### 4.3.2 Um método para estimar o expoente de Hurst: Detrended Fluctuation Analysis (DFA)

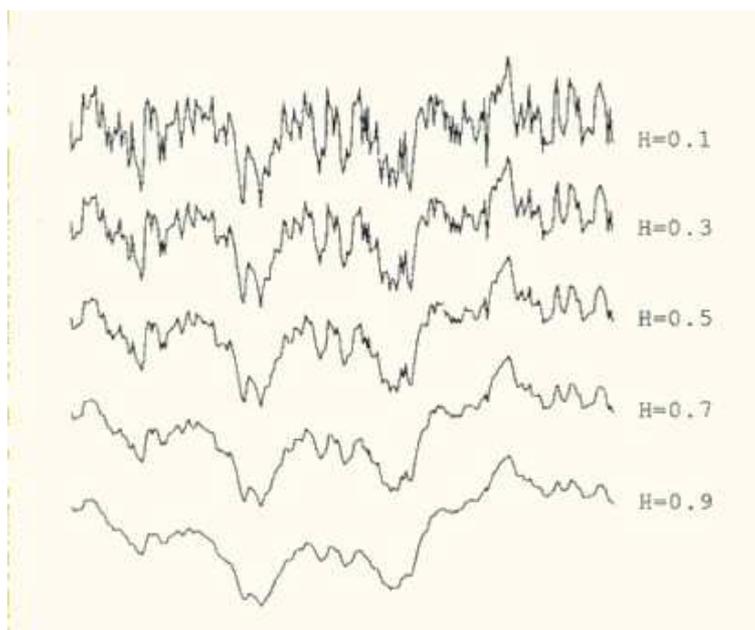
O método  $\mathbb{R}/\mathbb{S}$  descrito na seção anterior pode ser implementado e fornece uma estimativa do expoente de Hurst. Porém, por sua característica assintótica, deve ser utilizado somente para séries temporais longas. Lo [8] indica alguns inconvenientes adicionais desta metodologia.

Nesta subseção, abordaremos sucintamente outro método utilizado para estimar o expoente de Hurst  $\mathbb{H}$ : Detrended Fluctuation Analysis (DFA). Para maiores detalhes, veja [25].

Em processos estocásticos, teoria do caos e na análise de séries temporais, o método DFA determina a autoafinidade estatística caracterizada pelo expoente de Hurst da seguinte forma: Dada uma série temporal  $y_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , uma integração primeiro converte a série  $y_k$  em uma outra série  $Y_k$  tal que

$$Y_k = \sum_{i=1}^k (y_i - \langle y_i \rangle), \quad (4.13)$$

onde  $Y_k$  é chamada de soma acumulada. Este processo de integração converte, por exemplo, um ruído branco em um random walk. Posteriormente,  $Y_k$  é dividida em janelas temporais de



**Figura 4.1** Séries Temporais para vários valores de  $\mathbb{H}$

comprimento  $L$ , e um ajuste linear local (a tendência local) é calculada minimizando o erro quadrático  $E^2$

$$E^2 = \sum_{i=1}^L (Y_i - ai - b)^2, \quad (4.14)$$

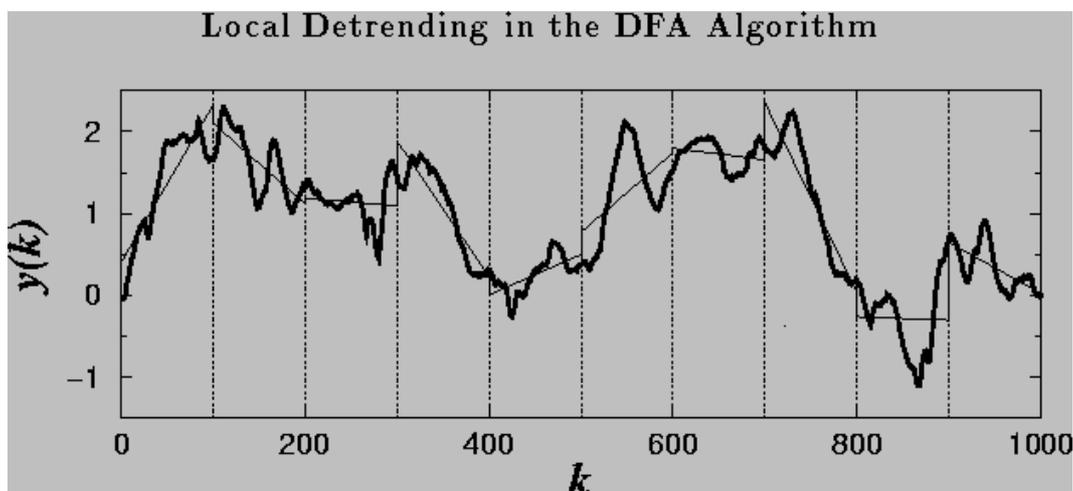
onde  $a$  e  $b$  são os coeficientes do polinômio interpolador, no caso, da reta de regressão linear. Depois o desvio quadrático médio da tendência, (a *flutuação*) é calculada em todas as janelas em todas as escalas de tempo:

$$F(L) = \left[ \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (Y_i - ai - b)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.15)$$

Este processo é repetido em todo o sinal em intervalos de diferentes tamanhos de janela  $L$ , e um gráfico  $\log - \log$  de  $L$  contra  $F(L)$  é construído. Uma linha reta neste gráfico indica autoafinidade estatística expressa como  $F(L) \sim L^{\mathbb{H}}$ . O expoente  $\mathbb{H}$  é calculado como a inclinação da linha reta ajustado no gráfico  $\log - \log$  usando o método dos mínimos quadrados. A figura 4.1 [71] mostra a simulação de uma série com vários expoentes de Hurst diferentes. A figura 4.2 ilustra o algoritmo DFA.

A tabela 4.1 mostra os valores dos expoentes de Hurst para todos os períodos considerados para cada um dos três ativos. Observamos que estes valores de  $\mathbb{H}$  para os ativos são muito próximos, o que não é nenhuma surpresa, dado que a correlação entre PETR4 e VALE5 é bastante alta (0,98) e estes dois ativos sozinhos representam quase 30% do valor de mercado de todo o índice BOVESPA, composto por 64 ativos <sup>1</sup>. Observando a tabela, podemos concluir

<sup>1</sup>Composição do segundo semestre de 2008.



**Figura 4.2** Figura ilustrando o algoritmo DFA

Ativo	Período 1	Período 2	Período 3	Período 4	Período todo
ibov	0,69	0,66	0,66	0,68	0,68
petr4	0,67	0,67	0,69	0,67	0,69
vale5	0,71	0,70	0,67	0,67	0,68

**Tabela 4.1** Expoentes de Hurst  $\mathbb{H}$  para todos os períodos e para os três ativos

que as séries históricas dos três ativos possuem persistência, ou, em outras palavras, possuem correlações de longo alcance, já que os valores de  $\mathbb{H}$  se mostraram consistentemente maiores que 0,5, o que, teoricamente, justifica a busca por modelos que capturem alguns ‘comportamentos ocultos’ na série, tarefa esta que pretendemos realizar com a aplicação dos métodos de renormalização da Física.



# A teoria da aproximação Autossimilar

## 5.1 Soma de séries divergentes

### 5.1.1 Introdução

Soma de séries divergentes é um problema de grande importância na física teórica, matemática aplicada e engenharia. O motivo é que problemas realísticos são usualmente resolvidos por métodos algorítmicos de cálculo que resultam em sequências de aproximação divergentes. O processo de atribuir um valor finito ao limite de uma sequência divergente é chamado de ressonância. A técnica mais amplamente usada é a do Aproximante de Padé [55]. Entretanto, tal método possui muitas deficiências e, entre elas, o fato de que para que o método alcance uma acurácia razoável, às vezes precisamos conhecer da ordem de dez a vinte termos da série perturbativa e também o fato de que os aproximantes de Padé são definidos para séries de potências inteiras, o que se mostra ser um inconveniente, pois em muitos casos a série assintótica revela potências não inteiras [67].

O objetivo deste presente capítulo é desenvolver um método analítico livre das deficiências inerentes ao método de Padé, para somar séries divergentes contendo qualquer número de termos (somente alguns ou muitos) com potências não inteiras arbitrárias e aplicar este método ao estudo de séries temporais financeiras. Será ilustrada a generalidade da abordagem aplicando-a a alguns problemas de interesse físico de naturezas diferentes. Alguns destes problemas podem ser tratados pelo método de Padé e nestes casos faremos comparações entre o método de Padé e o método da renormalização autossimilar a ser desenvolvido.

Como já dissemos, métodos de perturbação comumente retornam séries divergentes. É desencorajador descobrir que a série perturbativa diverge, especialmente se os termos foram tediosamente calculados. Entretanto, na próxima seção mostraremos que para muitas das séries é possível atribuir um valor aproximado a esta soma usando alguns termos da série.

Claramente, uma ingênua soma da série divergente simplesmente adicionando os primeiros  $N$  termos não faz sentido porque ela retorna uma soma parcial que pode estar longe do valor real da “soma” da série quando  $N \rightarrow \infty$ .

### 5.1.2 Aproximantes de Padé

Quando a representação em séries de potências de uma função diverge, isso indica a presença de singularidades. A divergência da série reflete a inabilidade de um polinômio de aproximar adequadamente a função em pontos próximos da singularidade. A idéia básica da teoria de soma de séries divergentes é representar  $f(x)$ , a função em questão, por uma expressão conver-

gente.

A idéia da soma de Padé é substituir a série de potências  $\sum a_n x^n$  por uma sequência de funções racionais (uma função racional é a razão de dois polinômios) da forma

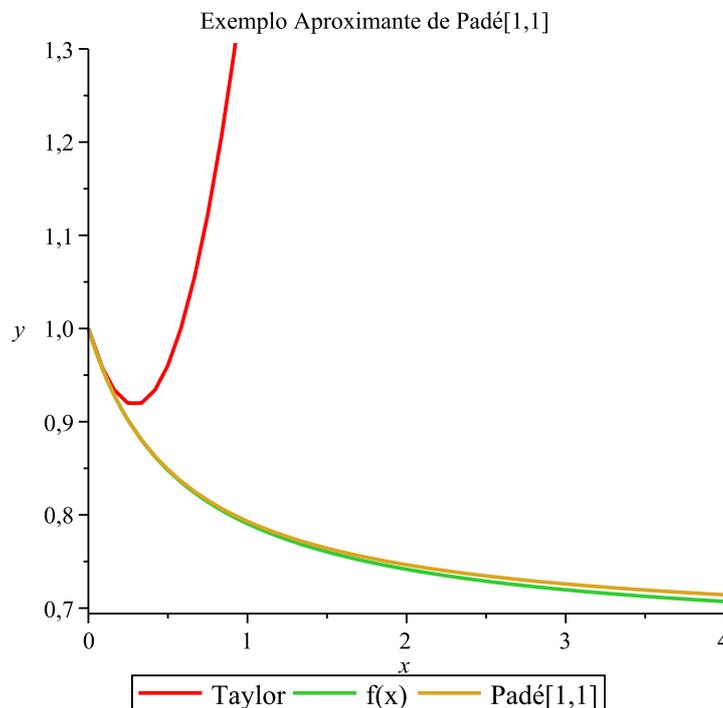
$$P_M^N(x) = \frac{\sum_{n=0}^N A_n x^n}{\sum_{n=0}^M B_n x^n} \quad (5.1)$$

onde escolhemos  $B_0 = 1$  sem perda de generalidade. Escolhemos os  $(M + N + 1)$  coeficientes restantes  $A_0, A_1, \dots, A_N, B_1, B_2, \dots, B_M$  de tal forma que os primeiros  $(M + N + 1)$  termos na expansão  $P_M^N(x)$  se ajustem aos  $(M + N + 1)$  termos na expansão em séries de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ .

A função racional resultante  $P_M^N(x)$  é chamada de aproximante de Padé.

Construir os aproximantes  $P_M^N(x)$  é muito útil. Se  $\sum a_n x^n$  é uma representação em série de potências da função  $f(x)$ , então, de modo geral,  $P_M^N(x) \rightarrow f(x)$  quando  $N, M \rightarrow \infty$ , mesmo se  $\sum a_n x^n$  é uma série divergente.

A representação inteira da série de potências da função  $f(x)$  não precisa ser conhecida para construir um aproximante de Padé. Precisamos saber somente os primeiros  $M + N + 1$  termos.



**Figura 5.1** Exemplo Aproximante de Padé  $P_1^1(x)$

Como exemplo simples de aplicação desta técnica, vamos encontrar o aproximante de Padé

$P_1^1(x)$  da função  $f(x) = \sqrt{\frac{1+\frac{7}{8}x}{1+2x}}$  e comparar o resultado com a expansão em série de Taylor truncada denominada  $g(x)$ . Tal expansão é  $g(x) = 1 - \frac{9}{16}x + \frac{495}{512}x^2$ . O gráfico (5.1) mostra as três curvas onde nitidamente observamos a diferença entre a aproximação de Taylor e o Aproximante de Padé  $P_1^1(x)$ , que é dado por  $P_1^1(x) = \frac{1+\frac{37}{32}x}{1+\frac{55}{32}x}$ .

## 5.2 Renormalização autossimilar algébrica e "bootstrap" autossimilar

A principal idéia da teoria da aproximação autossimilar é colocar a sequência de termos perturbativos da série em correspondência com um sistema dinâmico (veja apêndice A para uma sucinta revisão de sistemas dinâmicos), onde o número de aproximação da sequência representa o papel do tempo discreto do sistema dinâmico. Assim, a transformação de uma aproximação à outra pode ser representada como a evolução do sistema dinâmico. A equação de evolução correspondente pode ser formulada como sendo a equação de autossimilaridade funcional, que é uma condição necessária de convergência rápida<sup>1</sup> [57]. Um sistema dinâmico com tempo discreto é chamado de cascata. Um ponto fixo de uma cascata, representando uma sequência de aproximações, corresponde a um limite efetivo desta sequência. Para garantir convergência, o ponto fixo deve ser estável e a condição suficiente para a estabilidade pode ser formulada em termos dos multiplicadores, como mostrado no apêndice A sobre sistemas dinâmicos.

Suponhamos que, ao nos depararmos com um determinado problema, obtenhamos como solução uma série perturbativa não necessariamente convergente. Seja a solução exata dada por uma função de uma variável real  $f(x)$ . Representemos a sequência de funções aproximadas por  $\{f_k(x)\}$ , onde o índice  $k = 0, 1, \dots$  é a ordem da aproximação e que o procedimento perturbativo resulte em um polinômio  $f_k(x) \approx \sum_{n=0}^k a_n x^{\alpha_n}$  ( $x \rightarrow 0$ ), onde  $\alpha_n$  são números reais arbitrários arranjados em ordem ascendente,  $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ , ( $n = 0, 1, \dots, k$ ). Cabe salientar que esta expansão para  $f_k(x)$  em geral não possui um significado direto se continuarmos inadvertidamente na direção de um valor de  $x$  arbitrário. Uma ferramenta analítica para a solução deste problema, chamada renormalização algébrica auto-similar foi recentemente desenvolvida e será isto que iremos desenvolver nesta seção. Para o propósito da análise auto-similar, a soma parcial

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^k a_n x^{\alpha_n} \quad (5.2)$$

deve satisfazer às seguintes condições :

- A análise não deve depender da escolha de unidades para a variável. A equação (5.2) deve ser escrita na forma adimensional.
- As expansões assintóticas devem ser reduzidas à forma invariante de escala. Para tal, é sempre possível fatorar o termo

<sup>1</sup>Mais a frente nesta mesma seção mais será dito sobre esta importante afirmativa.

$$f_0(x) = a_0 x^{\alpha_0} \quad (a_0 \neq 0) \quad (5.3)$$

e introduzir a função invariante de escala

$$\varphi_k(x) \equiv \frac{f_k(x)}{f_0(x)}, \quad (5.4)$$

onde  $x$  é assumido ser adimensional. Evidentemente, a função (5.4) não depende de mudanças de escala para  $f_k$ .

- Se a variável  $x$  pertence a um intervalo limitado semi-infinito, este será normalizado para o intervalo unitário. Assim sendo, em toda discussão que segue, é assumido que  $x \in [0, 1]^2$ .

Para a função invariante de escala (5.4), temos

$$\varphi_k(x) = \sum_{n=0}^k b_n x^{\beta_n}, \quad (5.5)$$

onde  $x \in [0, 1]$  e

$$b_n \equiv \frac{a_n}{a_0}, \quad \beta_n \equiv \alpha_n - \alpha_0 \geq \beta_0 = 0. \quad (5.6)$$

Claramente,  $\varphi_0(x) = 1$ . Também, todas as potências  $\beta_n$  são positivas, mesmo se alguns  $\alpha_n$  forem negativos, o que segue da ordem ascendente dos  $\alpha_n$ . Por construção, a série (5.5) é assintótica, possuindo sentido somente para  $x \rightarrow 0$ , enquanto para um  $x$  finito a sequência  $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$  diverge. É possível dizer que a última sequência converge somente no ponto  $x = 0$ .

Devemos transformar uma série divergente em uma forma que faça sentido para  $x \in [0, 1]$  finito. Isto pode ser feito com a ajuda de funções controle que podem ser introduzidas de diferentes maneiras. Trabalhando com séries assintóticas, é conveniente invocar a transformação multiplicativa na forma de lei de potência definida como

$$\Phi_k(x, s) \equiv x^s \varphi_k(x) \quad (5.7)$$

com a transformação inversa

$$\varphi_k(x) = x^{-s} \Phi_k(x, s). \quad (5.8)$$

Como as leis de potência são comuns na descrição de objetos fractais, a equação (5.7) pode ser chamada de *transformação fractal*. A transformação (5.7), de acordo com a equação (5.5), é

$$\Phi_k(x, s) = \sum_{n=0}^k b_n x^{s+\beta_n}. \quad (5.9)$$

---

<sup>2</sup>É possível transformar um intervalo qualquer em um intervalo unitário pelas mudanças de variáveis  $x' = \frac{x}{1+x}$  e  $x = \frac{x'}{1-x'}$ .

Aqui  $s = s(x)$  é uma função controle, cujo objetivo é fazer a série (5.9) ter sentido para  $x$  finito. Esta série pode ser considerada uma expansão em potências da nova variável  $x^s$ . Como é evidente, tal série é assintótica com relação a  $x^s \rightarrow 0$ . Este último limite pode ser atingido se, no lugar de forçar  $x$  tender a zero, mantemos  $|x| < 1$  e tomamos  $s \rightarrow \infty$ . Assim, a série (5.9) pode ser tratada como assintótica com relação a  $s \rightarrow \infty$  para todo  $|x| < 1$ . Agora podemos dizer que a sequência  $\{\Phi_k(x, s)\}_{k=0}^\infty$  converge para todo  $|x| < 1$ , desde que  $s \rightarrow \infty$ . Desta forma, chegamos a uma escolha natural para as funções controle quando  $s \rightarrow \infty$ . Lembre que estamos considerando o caso quando nenhum vínculo adicional é imposto sobre o comportamento da função  $f(x)$  e tudo que sabemos é sua expansão assintótica (5.2). Nas expressões intermediárias, o valor de  $s$  é assumido ser assintoticamente grande, e o real limite  $s \rightarrow \infty$  é tomado após a transformação inversa (5.8).

Como nossas considerações aqui são sobre funções, precisamos definir a propriedade de *autossimilaridade funcional*, que não deve ser confundida com autossimilaridade geométrica que descreve os fractais. A noção de autossimilaridade geométrica é conectada com a noção de escala, o que é somente um caso particular da noção mais geral de autossimilaridade funcional ou *autossimilaridade de grupo*. Para corretamente definir este último, precisamos introduzir alguma notação. Definiremos a função expansão  $x(\varphi, s)$  pela equação

$$\Phi_0(x, s) = \varphi, \quad x = x(\varphi, s). \quad (5.10)$$

Com a forma (5.9), isto dá  $x(\varphi, s) = \varphi^{\frac{1}{s}}$  e  $\varphi = x^s$ . Introduzimos o mapeamento

$$y_k(\varphi, s) \equiv \Phi_k(x(\varphi, s), s). \quad (5.11)$$

Seja  $\Phi_k(x, s)$  real para todo  $k = 0, 1, 2, \dots$  e todo  $x \in [0, 1]$ . De  $\Phi_k(x, s) \in \mathbb{R}$  segue que  $y_k(\varphi, s) \in \mathbb{R}$  para todo  $k = 0, 1, 2, \dots$  e  $\varphi \in \mathbb{R}$ . Portanto o mapeamento (5.11) é um *endomorfismo*<sup>3</sup> (um *homomorfismo*<sup>4</sup> de um objeto em si mesmo). É este endomorfismo que nos permite formular a propriedade de autossimilaridade de grupo que precisamos.

Nosso objetivo é representar a mudança do endomorfismo (5.11), quando variamos o número de aproximação  $k$ , como a evolução de  $y_k$  com relação ao tempo discreto  $k$ . Do ponto de vista da teoria de grupos, autossimilaridade não é nada mais que a propriedade de semigrupo<sup>5</sup>. Esta propriedade, para a evolução de  $y_k$  com relação a  $k$ , se escreve  $y_{k+p} = y_k * y_p$ . Como segue da definição (5.9), o elemento primeiro é  $y_0$ , já que  $y_0(\varphi, s) = \varphi$ . A família de endomorfismos  $\{y_k | k = 0, 1, 2, \dots\}$ , com a propriedade de semigrupo forma um sistema dinâmico em tempo

<sup>3</sup>O termo endomorfismo deriva do advérbio grego *endon* ("dentro") e *morphosis* ("para formar"). Em álgebra, um endomorfismo de um grupo, módulo, anel, espaço vetorial, etc, é um *homomorfismo* de um objeto em si mesmo.

<sup>4</sup>Definição de Homomorfismo: Sejam dois conjuntos  $\mathbb{E}$  e  $\mathbb{F}$ , não necessariamente distintos, com elementos  $a, b, c \in \mathbb{E}$  e  $a', b', c' \in \mathbb{F}$ . Suponha uma aplicação  $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  com correspondência  $a' = f(a)$ ,  $b' = f(b)$  e  $c' = f(c)$ . Se uma operação  $c = ab$  em  $\mathbb{E}$  corresponde à operação  $c' = a'b'$  em  $\mathbb{F}$ , isto é,  $f(ab) = f(a)f(b)$ , então esta relação é chamada homomorfismo. Aqui  $a', b'$  e  $c'$  são chamados imagens homomórficas de  $a, b$  e  $c$ , respectivamente. Exemplo de homomorfismo: Sejam  $\mathbb{E}$  conjunto dos números reais positivos e  $\mathbb{F}$  conjunto dos números reais. Seja uma aplicação  $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  dada por  $y = \log(x)$ . Para uma operação de multiplicação em  $\mathbb{E}$ , isto é, para  $c = ab$ , existe uma correspondência  $c' = a' + b'$  em  $\mathbb{F}$ , pois,  $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ .

<sup>5</sup>Semigrupo é um conjunto  $G$  dotado de uma operação binária para a qual valem as propriedades de fechamento e de associatividade.

discreto, chamado de cascata. A propriedade de semigrupo, em termos da notação (5.10), toma a forma

$$y_{k+p}(\varphi, s) = y_k(y_p(\varphi, s), s). \quad (5.12)$$

Pela interpretação proposta, trataremos a sequência  $\{y_k(\varphi, s)\}$  como uma trajetória resultante da evolução da cascata  $\{y_k | k = 0, 1, 2, \dots\}$ . A relação (5.12) pode ser chamada de *autossimilaridade de evolução*<sup>6</sup>. Esta equação (5.12) é uma condição necessária para a convergência mais rápida<sup>7</sup>. O ponto fixo da cascata representa a função desejada  $f(x)$ .

Por ser mais fácil de tratar analiticamente, a cascata  $\{y_k | k = 0, 1, 2, \dots\}$  pode ser “embutida” em um fluxo<sup>8</sup>  $\{y_t | t \geq 0\}$ , que é um sistema dinâmico em tempo contínuo. O análogo contínuo da equação (5.12) seria  $y(t+t', \varphi, s) = y(t, y(t', \varphi, s), s)$  e a trajetória  $y(t, \varphi, s)$  do fluxo passa por todos os pontos da cascata, de modo que  $y(t, \varphi, s) = y_k(\varphi, s)$ , ( $t = k \in \mathbb{Z}_+$ ). Para este último, podemos escrever uma equação que é uma equação diferencial de movimento, dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} y(t, \varphi, s) = v(y(t, \varphi, s)), \quad (5.13)$$

onde  $v(y)$  é um campo de velocidade. Integrando a equação (5.13) entre  $y_{k-1} = y_{k-1}(\varphi, s)$  e  $y_k^* = y_k^*(\varphi, s)$ , onde  $y_k^*$  é um ponto fixo aproximado, nós obtemos a *integral de evolução*

$$\int_{y_{k-1}}^{y_k^*} \frac{dy}{v(y)} = \int_k^{k+\tau_k} dt \Rightarrow \int_{y_{k-1}}^{y_k^*} \frac{dy}{v(y)} = \tau_k, \quad (5.14)$$

com  $\tau_k$  sendo o *tempo de aproximação efetivo* requerido para alcançar o ponto quase fixo  $y_k^*$ . Após uma mudança de variáveis feita de acordo com (5.10), a integral (5.14) se reduz a

<sup>6</sup>*evolutional self-similarity*

<sup>7</sup>Convergência uniforme dos aproximantes autossimilares implica a validade do critério de convergência de Cauchy

$$|y_{k+p}(\varphi) - y_k(\varphi)| < \varepsilon$$

para todo  $k \geq N_\varepsilon$  e  $p \geq 1$ . Isto sugere que a evolução no mapeamento  $\{y_k(\varphi)\}$  seja tal que minimize o funcional custo de convergência rápida

$$\mathbb{F}_y = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [y_{n+p}(\varphi) - y_n(\varphi)]^2.$$

O mínimo absoluto do funcional custo acima é obtido se o ponto inicial  $\varphi$  coincide com o ponto fixo  $y^*(\varphi)$ , quando teremos  $\mathbb{F}_y = 0$ ,  $\varphi = y^*(\varphi)$ . Temos então que: **Proposição** : Para que o funcional custo de convergência mais rápida seja mínimo é necessário que seja válida a *relação de autossimilaridade*

$$y_{k+p}(\varphi) = y_k(y_p(\varphi)).$$

**Prova:** O mínimo absoluto do funcional custo é  $\mathbb{F}_y = 0$ . Isto é conseguido se e somente se  $\varphi = y^*(\varphi)$ , quando a equação de autossimilaridade se transforma numa identidade.

<sup>8</sup>Podemos imaginar esse passo como sendo uma aproximação do sistema dinâmico em tempo discreto por seu análogo em tempo contínuo, que aqui chamamos de fluxo.

$$\int_{\Phi_{k-1}}^{\Phi_k^*} \frac{d\varphi}{v_k(\varphi, s)} = \tau_k, \quad (5.15)$$

onde  $\Phi_k^* = \Phi_k^*(x, s)$ .

O campo de velocidade do fluxo (a velocidade da cascata), definido pela discretização de Euler, é dado por

$$v_k(\varphi, s) \equiv y_k(\varphi, s) - y_{k-1}(\varphi, s). \quad (5.16)$$

Das equações (5.9) - (5.11), segue que

$$y_k(\varphi, s) = \sum_{n=0}^k b_n \varphi^{1 + \frac{\beta_n}{s}}, \quad (5.17)$$

que resulta em

$$v_k(\varphi, s) = b_k \varphi^{1 + \frac{\beta_k}{s}}. \quad (5.18)$$

A equação diferencial do movimento pode ser integrada. Colocando-se a equação (5.18) em (5.15) e realizando-se a integral obtemos

$$\Phi_k^* = \left( \Phi_{k-1}^{-\frac{\beta_k}{s}} - \frac{\beta_k}{s} b_k \tau_k \right)^{-\frac{s}{\beta_k}}, \quad (5.19)$$

onde  $\Phi_k^* = \Phi_k^*(x, s) \equiv y_k^*(x^s, s)$  e  $\Phi_{k-1} = \Phi_{k-1}(x, s)$ . A transformação inversa (5.8) é dada por

$$x^{-s} \Phi_k^*(x, s) = \left( \varphi_{k-1}^{-\frac{\beta_k}{s}}(x) - \frac{\beta_k}{s} b_k \tau_k x^{\beta_k} \right)^{-\frac{s}{\beta_k}}. \quad (5.20)$$

Em particular,

$$\Phi_1^*(x, s) = x^s \left( 1 - \frac{\beta_1}{s} b_1 \tau_1 x^{\beta_1} \right)^{-\frac{s}{\beta_1}}. \quad (5.21)$$

Retornando à função  $\varphi_k^*(x)$  através da transformação inversa (5.20), temos que tomar o limite  $s \rightarrow \infty$ . Por exemplo,

$$\varphi_1^*(x) \equiv \lim_{s \rightarrow \infty} x^{-s} \Phi_1^*(x, s), \quad (5.22)$$

que resulta no aproximante auto-similar de primeira ordem

$$\varphi_1^*(x) = \exp(b_1 \tau_1 x^{\beta_1}). \quad (5.23)$$

Para obter aproximações maiores, podemos repetir este procedimento de renormalização  $2k$  vezes para cada  $\Phi_k^*(x, s)$ , processo que é chamado de *bootstrap auto-similar*. Entretanto, o

mesmo resultado pode ser obtido duas vezes mais rápido, realizando  $k$  renormalizações, da seguinte forma. Podemos escrever a equação (5.5) como

$$\varphi_k(x) = 1 + b_1 x^{\beta_1} \left( 1 + \frac{b_2}{b_1} x^{\beta_2 - \beta_1} \left( 1 + \frac{b_3}{b_2} x^{\beta_3 - \beta_2} (1 + \dots) \right) \dots \right). \quad (5.24)$$

Esta equação pode ser escrita na forma  $\varphi_k(x) = 1 + x_1$ , na qual  $x_1$  é expresso através de  $x_2$ , e  $x_2$  através de  $x_3$ , e assim sucessivamente de acordo com a regra

$$x_n = \frac{b_n}{b_{n-1}} x^{\beta_n - \beta_{n-1}} (1 + x_{n+1}), \quad (5.25)$$

onde  $n = 1, 2, \dots, k$ . Considerando cada  $x_n$  como um parâmetro pequeno, precisamos realizar o procedimento de renormalização de primeira ordem  $k$  vezes. Como resultado, introduzindo a notação

$$c_n \equiv \frac{b_n}{b_{n-1}} \tau_n, \quad v_n \equiv \beta_n - \beta_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots, k), \quad (5.26)$$

obtemos finalmente o *aproximante autossimilar de ordem  $k$*

$$\varphi_k^*(x) = \exp(c_1 x^{v_1} \exp(c_2 x^{v_2} \dots \exp(c_k x^{v_k})) \dots). \quad (5.27)$$

A equação acima é chamada de *superexponencial* de ordem  $k$ .

As quantidades  $\tau_n$ , com  $n = 1, 2, \dots, k$ , na forma renormalizada (5.27) assumem o papel das funções controle. Se reproduzirmos os cálculos acima para as funções  $f_k(x) \equiv p_k(x)$ <sup>9</sup> definidas em (5.2) no lugar das funções  $\varphi_k(x)$  definidas em (5.4), ou, em outras palavras, escrevermos as expressões (5.20) e (5.27) em termos da expressão original  $f_k(x) \equiv p_k(x)$ , teremos que (5.20) será dada por

$$P_k^*(x, s, \tau) \equiv x^{-s} P_k^*(x, s, \tau) = \left[ P_{k-1}^{-\kappa}(x) - \frac{\kappa a_k \tau}{a_0^{1+\kappa}} x^{s\kappa} \right]^{\frac{-1}{\kappa}} \quad (5.28)$$

onde

$$p_k(x) = \sum_{n=0}^k a_n x^{\alpha_n}, \quad P_k(x, s, \tau) \equiv x^s p_k(x) = \sum_{n=0}^k a_n x^{s+\alpha_n}, \quad \text{e} \quad \kappa \equiv \frac{\alpha_k - \alpha_0}{s + \alpha_0},$$

e a equação (5.27) por

$$F_k(x, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) = p_0(x) \exp(c_1 x^{v_1} \exp(c_2 x^{v_2} \dots \exp(c_k x^{v_k})) \dots). \quad (5.29)$$

com  $c_k$  e  $v_k$  dados por  $c_k \equiv \frac{a_k}{a_{k-1}} \tau_k$  e  $v_k \equiv \alpha_k - \alpha_{k-1}$ .

Na seção seguinte mostraremos algumas das maneiras de definir as funções  $\tau_n$ . Assuma, por enquanto, que estas funções controle foram definidas retornando  $\tau_n = \tau_n(x)$ . Substituindo estas funções em (5.29), obtemos o aproximante auto-similar exponencial escrito na forma

<sup>9</sup>Esta mudança de notação se fará útil em discussões subsequentes.

$$f_k^*(x) = F_k(x, \tau_1(x), \tau_2(x), \dots, \tau_k(x)). \quad (5.30)$$

Vale ressaltar que os expoentes nas expressões assintóticas para  $f(x)$  podem ser reais ou complexos. Tais expoentes complexos aparecem em problemas com invariância discreta de escala, documentados em modelos de ruptura, terremotos, crashes financeiros e em vários sistemas aleatórios. A abordagem autossimilar pode ser facilmente aplicada à séries com expoente complexo. A variável  $s$  na transformação algébrica (5.7) também pode ser considerada como complexa. Portanto, as correspondentes funções controle  $s_k(x)$  serão complexas.

Tentaremos agora, com um exemplo bem simples, ilustrar como tudo funciona: Suponha que pela teoria da perturbação obtemos

$$p_1(x) = 1 - x \quad (5.31)$$

com  $0 \leq x \ll 1$ . Como podemos continuar esta expansão a partir de pequenos valores de  $x \ll 1$  para  $x \geq 1$ , quando nenhuma outra informação está disponível?

Seguindo a renormalização algébrica autossimilar, construímos o polinômio transformado  $P_k(x, s) = x^s p_k(x)$ ,  $s \geq 0$ ,  $p_k(x) = \sum_{n=0}^k a_n x^n$ ,  $a_n \neq 0$ , que para o caso (5.31) é

$$P_1(x, s) = x^s - x^{1+s}. \quad (5.32)$$

De acordo com  $P_0(x, s) = a_0 x^s \equiv f^{10}$ , temos a função expansão

$$x(f, s) = \left( \frac{f}{a_0} \right)^{\frac{1}{s}}. \quad (5.33)$$

Então a equação  $y_k(f, s) \equiv P_k(x(f, s), s) = \sum_{n=0}^k a_n \left( \frac{f}{a_0} \right)^{\frac{n}{s}+1}$  dá

$$y_1(f, s) = f - f^{1+\frac{1}{s}}, \quad (5.34)$$

onde fizemos  $a_0 = 1$  e  $a_1 = -1$ . O campo de velocidade  $v_{k+1}(f, s) = a_{k+1} \left( \frac{f}{a_0} \right)^{\frac{k+1}{s}+1}$  se torna

$$v_1(f, s) = -f^{1+\frac{1}{s}}. \quad (5.35)$$

A integral de evolução  $\int_{P_k^*}^{P_{k+1}^*} \frac{df}{v_{k+1}(f, s)} = t_k^*$ , que leva a  $P_{k+1}^* = \frac{P_k}{\left( 1 - \frac{(k+1)a_{k+1}t_k^* P_k^{\frac{k+1}{s}}}{s a_0^{\frac{k+1}{s}+1}} \right)^{\frac{s}{k+1}}}$  agora dá

$$P_1^*(x, s) = \left( \frac{s x}{s + t_0^* x} \right)^s. \quad (5.36)$$

<sup>10</sup>Aqui,  $f$  faz o papel de  $\varphi$  definida na equação (5.10).

A aproximação auto-similar  $p_{k+1}^* = \frac{p_k(x)}{\left(1 - \frac{(k+1)a_{k+1}t_k^*}{sa_0^{\frac{k+1}{s}+1}} x^{k+1} p_k(x)^{\frac{k+1}{s}}\right)^{\frac{s}{k+1}}}$  se reduz a

$$p_1^*(x) = \left(\frac{s_1(x)}{s_1(x) + t_0^* x}\right)^{s_1(x)}. \quad (5.37)$$

Como estamos interessados na região  $x \geq 1$  temos que tomar o limite  $s_1(x) \rightarrow \infty$ . Portanto, para a aproximação autossimilar (5.37) obtemos

$$f_1^*(x) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{s}{s + t_0^* x}\right)^s = e^{-t_0^* x}. \quad (5.38)$$

Uma forma de encontrar  $t_k^*$  é expandir  $e^{-t_k^* x}$  numa série de Taylor e comparar com a expressão (5.31), que retorna para  $t_0^*$  o valor 1 e portanto,  $f_1^*(x) = e^{-x}$ .

Da mesma forma, uma expansão linear

$$p_1(x) = a_0 + a_1 x, \quad (5.39)$$

com  $a_0, a_1 \neq 0$ , derivados para  $x \ll 1$ , pode ser continuada para a região  $|x| \geq \left|\frac{a_0}{a_1}\right|$  onde é representada pela aproximação autossimilar

$$f_1^*(x) = a_0 \exp\left(\frac{a_1}{a_0} x\right). \quad (5.40)$$

Assim, podemos concluir que a exponencial (5.40) é a representação autossimilar geral da expansão linear (5.39), quando *nenhuma restrição adicional é imposta*.

### 5.2.1 Funções controle

Existem muitas formas de incorporar funções controle em um algoritmo iterativo e defini-las. Por exemplo, se exigirmos que o tempo que aparece na integral de evolução (5.15) seja mínimo, após  $k$  passos do procedimento de renormalização, a aproximação autossimilar (5.30) conterà  $k$  funções controle  $\tau_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, k$ .

A maneira mais simples de definir estas funções controle consiste em lembrar que o tempo efetivo na integral corresponde ao número mínimo de passos necessários para a aproximação do ponto fixo. Quando nenhuma outra restrição é imposta, o número mínimo de passos é, claramente, igual a um. Colocando  $\tau_n = 1$  para todos os  $n = 1, 2, \dots, k$  na equação (5.30) temos

$$f_k^*(x) = F_k(x, 1, 1, \dots, 1). \quad (5.41)$$

Uma definição mais elaborada de possíveis funções controle pode ser formulada fazendo  $\tau_n = 1$  para todos os  $n = 1, 2, \dots, k-1$ , exceto no último passo para o qual  $\tau_n = \tau$ , que permanece indefinido. Considere então a sequência  $\{f_k\}$  consistindo dos termos

$$f_k(x, \tau) \equiv F_k(x, 1, 1, \dots, \tau). \quad (5.42)$$

Para a velocidade da cascata podemos escrever a diferença finita

$$V_k(x, \tau) = f_k(x, \tau) - f_{k-1}(x, \tau). \quad (5.43)$$

Quando se aproxima do ponto fixo, a velocidade da cascata tende a zero. Portanto, a condição de estar tão perto quanto possível do ponto fixo é equivalente à condição de velocidade mínima. Esta condição

$$\min_{\tau} |V_k(x, \tau)| = |V_k(x, \tau_k(x))| \quad (5.44)$$

nos proporciona uma definição possível da função controle  $\tau_k(x)$ . A equação (5.44) é a forma geral da condição de velocidade mínima. Em particular, tomando em conta a definição (5.43), podemos ter a equação

$$f_k(x, \tau) - f_{k-1}(x, \tau) = 0, \quad (5.45)$$

cuja solução  $\tau = \tau_k(x)$  é a função controle desejada. Para os aproximantes exponenciais (5.29), a equação (5.45) nos fornece

$$\tau = \exp\left(\frac{a_k}{a_{k-1}} \tau x^{\nu_k}\right). \quad (5.46)$$

A solução da equação (5.46), ou seja,  $\tau = \tau_k(x)$ , quando substituída em (5.42), nos dá a aproximação autossimilar

$$f_k^*(x) = f_k(x, \tau_k(x)). \quad (5.47)$$

O esquema descrito para definição das funções controle é aplicável quando não são impostas restrições adicionais ao comportamento da função procurada  $f(x)$ . Pode acontecer que, em adição à expansão (5.2), que um comportamento assintótico de  $f(x)$ , quando  $x \rightarrow x_0$ , seja conhecido. A condição assintótica

$$f(x) \cong f_0(x), \quad x \rightarrow x_0 \quad (5.48)$$

faz o papel de uma restrição imposta. E as aproximações autossimilares devem satisfazer a condição assintótica (5.48). Nestas circunstâncias, as funções controle devem ser escolhidas da seguinte forma: renormalizemos a série  $p_{k-1}(x)$  para a aproximação autossimilar  $f_{k-1}^*(x)$  com a função controle definida de acordo com a definição acima. Obtemos, partindo da equação (5.28) que

$$F_k^*(x, s, \tau) = \left[ (f_{k-1}^*(x))^{-\kappa} - \frac{\kappa a_k \tau}{a_0^{1+\kappa}} x^{s\kappa} \right]^{-\frac{1}{\kappa}}. \quad (5.49)$$

Agora requeremos que a expressão (5.49) satisfaça a condição assintótica

$$F_k^*(x, s, \tau) \cong f_0(x) \quad x \rightarrow x_0, \quad (5.50)$$

de acordo com (5.48). As funções controle  $s = s_k(x)$  e  $\tau = \tau_k(x)$  devem ser escolhidas de tal forma que a condição (5.50) seja válida. Com as funções controle definidas, obtemos finalmente a aproximação auto-similar

$$f_k^*(x) = F_k^*(x, s_k(x), \tau_k(x)) \quad (5.51)$$

possuindo a propriedade assintótica desejada (5.48).

### 5.2.2 Exemplo

Para ilustrar essa última variante da definição das funções controle, considere a integral

$$J(g) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2 - gx^4) dx, \quad (5.52)$$

que representa a função de partição configuracional do oscilador anarmônico unidimensional, onde  $g$  é chamado de parâmetro de acoplamento [70]. A série para a integral (5.52) é frequentemente usada como modelo para expansões perturbativas fortemente divergentes na teoria quântica de campos.

A expansão para acoplamento fraco de (5.52) [70] dá

$$J(g) \cong a + bg + \dots, \quad (g \rightarrow 0), \quad (5.53)$$

com  $a = 1$ ,  $b = -\frac{3}{4}$ . No limite de acoplamento forte temos

$$J(g) \cong Ag^{-\frac{1}{4}} + Bg^{-\frac{3}{4}} + Cg^{-\frac{5}{4}} + Dg^{-\frac{7}{4}} + \dots, \quad (g \rightarrow \infty), \quad (5.54)$$

onde  $A = \frac{1,813}{\sqrt{\pi}}$ ,  $B = -\frac{0,612}{\sqrt{\pi}}$  e  $C = \frac{0,227}{\sqrt{\pi}}$ . A expansão para acoplamento forte (5.54) é da forma da série (5.2), com os coeficientes

$$a_0 = A, \quad a_1 = B, \quad a_2 = C \quad e \quad a_3 = D$$

com as potências não inteiras

$$\alpha_0 = -\frac{1}{4}, \quad \alpha_1 = -\frac{3}{4}, \quad \alpha_2 = -\frac{5}{4}, \quad \alpha_3 = -\frac{7}{4}.$$

Iremos renormalizar a expansão (5.54) sujeita à condição limite

$$\lim_{g \rightarrow 0} J(g) = a, \quad (5.55)$$

que segue de (5.53).

Partindo de

$$J_0(g) = Ag^{-\frac{1}{4}} \quad (5.56)$$

temos

$$J_2^*(g) = J_0(g) \exp \left( \frac{B}{A} g^{-1/2} \exp \left( \frac{C}{B} g^{-1/2} \right) \right). \quad (5.57)$$

No próximo passo, de acordo com a equação (5.49), temos

$$J_3^*(g, s, \tau) = [(J_2^*(g))^{-\kappa} + \gamma g^{s\kappa}]^{-\frac{1}{\kappa}}, \quad (5.58)$$

com

$$\kappa = \frac{6}{1-4s}, \quad \gamma = -\frac{\kappa D \tau}{A^{1+\kappa}}.$$

No limite de acoplamento fraco, a equação (5.57) retorna

$$J_2^*(g) \cong Ag^{-1/4}, \quad (g \rightarrow 0)$$

e a equação (5.58) fornece

$$J_3^*(g, s, \tau) = \left( A^{-\kappa} g^{\frac{\kappa}{4}} + \gamma g^{s\kappa} \right)^{-\frac{1}{\kappa}}.$$

A última expressão satisfaz a condição limite

$$\lim_{g \rightarrow 0} J_3^*(g, s, \tau) = a, \quad (5.59)$$

correspondendo à equação (5.50), se e somente se  $s = 0$  e  $\gamma = a^{-6}$  ou, respectivamente,

$$\kappa = 6, \quad \tau = -\frac{A^7}{6a^6D}.$$

Substituindo os valores de  $s$  e  $\tau$  encontrados em (5.58), obtemos

$$J_3^*(g) = [(J_2^*(g))^{-6} + a^{-6}]^{-\frac{1}{6}}. \quad (5.60)$$

Usando agora a expressão (5.57) e lembrando que  $a = 1$ , finalmente obtemos a aproximação auto-similar

$$J_3^*(g) = \left[ 1 + \frac{g^{3/2}}{A^6} \exp \left( \frac{-6B}{A\sqrt{g}} \exp \left( \frac{C}{B\sqrt{g}} \right) \right) \right]^{-\frac{1}{6}} \quad (5.61)$$

correspondendo à (5.51).

O aproximante exponencial (5.61) representa a integral (5.52) com uma precisão muito grande. O erro percentual máximo é 2,7% e ocorre em  $g = 0, 1$ . O erro para a região fisicamente mais interessante ( $g \approx 1$ ) é somente 0,7%.

Considere outro exemplo simples que ilustra a generalidade do método que também funciona quando outros não o fazem. Assuma que precisamos encontrar uma aproximação para uma função limitada  $f(x)$ , com  $-\infty < x < \infty$ , possuindo as seguintes propriedades assintóticas:

$$f(x) \cong 1 + x + \mathcal{O}(x^2) \quad (x \rightarrow 0),$$

$$f(x) \cong e^x \quad (x \rightarrow -\infty),$$

$$f(x) \cong \frac{1}{x^\alpha}, \quad \alpha > 0 \quad (x \rightarrow \infty),$$

onde  $\alpha$  é uma potência irracional conhecida. Ao meu entendimento, a técnica de Padé é especialmente inapropriada para este caso. Utilizando o método da aproximação auto-similar, executando o mesmo procedimento como acima, obtém-se

$$f^*(x) = \left[ \exp\left(-\frac{2}{\alpha}x\right) + x^2 \right]^{-\frac{\alpha}{2}}.$$

### 5.3 Aproximantes de Padé X aproximantes exponenciais autossimilares

Nesta seção serão feitas comparações entre os aproximantes de Padé e a técnica de renormalização auto-similar para leis do tipo quase-exponencial. Em [68] são discutidos os motivos pelos quais tais leis são tão importantes e recorrentes na natureza. Aqui focaremos nos resultados. Para o propósito de reconstrução de leis do tipo exponencial, a escolha ótima das funções controle  $\tau_j$  é obtida expandindo os  $p_k^*(x, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j)$  nas vizinhanças de  $x = 0$  e exigindo que esta expansão coincida com  $f_k(x)$ . Com esta determinação dos parâmetros de controle, obtemos os aproximantes auto-similares da função procurada  $f_k^*$ ,

$$f_k^*(x, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) = p_k^*(x, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k).$$

Por exemplo, se colocarmos a expressão (5.29) na forma<sup>11</sup>

$$p_k^*(x, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) = a_0 \exp\left(\frac{a_1}{a_0} \tau_1 x \exp\left(\frac{a_2}{a_1} \tau_2 x \cdots \exp\left(\frac{a_k}{a_{k-1}} \tau_k x\right)\right)\right), \quad k = 2, 3, \dots, n, \quad (5.62)$$

teremos

$$f_2^*(x, \tau_1, \tau_2) = a_0 \exp\left(\frac{a_1}{a_0} \tau_1 x \exp\left(\frac{a_2}{a_1} \tau_2 x\right)\right),$$

$$f_3^*(x, \tau_1, \tau_2, \tau_3) = a_0 \exp\left(\frac{a_1}{a_0} \tau_1 x \exp\left(\frac{a_2}{a_1} \tau_2 x \exp\left(\frac{a_3}{a_2} \tau_3 x\right)\right)\right),$$

$$f_4^*(x, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) = a_0 \exp\left(\frac{a_1}{a_0} \tau_1 x \exp\left(\frac{a_2}{a_1} \tau_2 x \exp\left(\frac{a_3}{a_2} \tau_3 x \exp\left(\frac{a_4}{a_3} \tau_4 x\right)\right)\right)\right).$$

<sup>11</sup>Aqui estamos assumindo que os  $\beta_n$  são inteiros iguais a 1, ou seja, as funções  $f_k(x)$  são polinômios.

Para checar se a sequência de  $f_k^*(x, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$  converge, estudamos seus multiplicadores,

$$M_k^*(x, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \equiv \frac{\delta f_k^*(x, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)}{\delta p_1(x)} = \frac{1}{a_1} \frac{\partial}{\partial x} f_k^*(x, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k). \quad (5.63)$$

Esta definição dos multiplicadores nos capacita a comparar a convergência das expressões re-normalizadas.

Com as funções controle definidas como prescrito acima, podemos obter  $k$  aproximantes exponenciais auto-similares para a função procurada (onde todos os  $\tau$  são agora funções conhecidas dos parâmetros  $a_k$ ):

$$f_{k1}^*(x) = f_k^*(x, \tau_1, 1, \dots, 1), \quad f_{k2}^*(x) = f_k^*(x, \tau_1, \tau_2, 1, \dots, 1), \quad f_{kk}^*(x) = f_k^*(x, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k),$$

que diferem apenas no número de parâmetros de controle a serem empregados. Isto gera uma matriz de aproximantes auto-similares, indexada pela ordem  $k$  e pelo número de parâmetros. A esta matriz de aproximantes está associada uma matriz de multiplicadores. Por exemplo, para  $k = 4$ , temos

$$\begin{aligned} f_{21}^*(x) &= f_2^*(x, \tau_1, 1), & f_{22}^*(x) &= f_2^*(x, \tau_1, \tau_2), \\ f_{31}^*(x) &= f_3^*(x, \tau_1, 1, 1), & f_{32}^*(x) &= f_3^*(x, \tau_1, \tau_2, 1), & f_{33}^*(x) &= f_3^*(x, \tau_1, \tau_2, \tau_3), \\ f_{41}^*(x) &= f_4^*(x, \tau_1, 1, 1, 1), & f_{42}^*(x) &= f_4^*(x, \tau_1, \tau_2, 1, 1), \\ f_{43}^*(x) &= f_4^*(x, \tau_1, \tau_2, \tau_3, 1), & f_{44}^*(x) &= f_4^*(x, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4). \end{aligned}$$

Vamos qualificar a convergência para a função procurada examinando a convergência das diferentes sequências de multiplicadores  $M^*$  e dos aproximantes  $f^*$ , escolhendo aqueles cujo par exibe a melhor taxa de convergência. O ponto limite resultante da tabela de aproximantes será tomado como o valor da função procurada.

### 5.3.1 Ilustração da técnica em ação

Apresentaremos exemplos explícitos demonstrando como a técnica funciona.

#### Um filtro ideal

Considere a expansão de Taylor da função exponencial,  $f(x) = \exp(-x)$ , até uma ordem arbitrária em  $x$ ,

$$f_n(x) \cong \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad (5.64)$$

onde

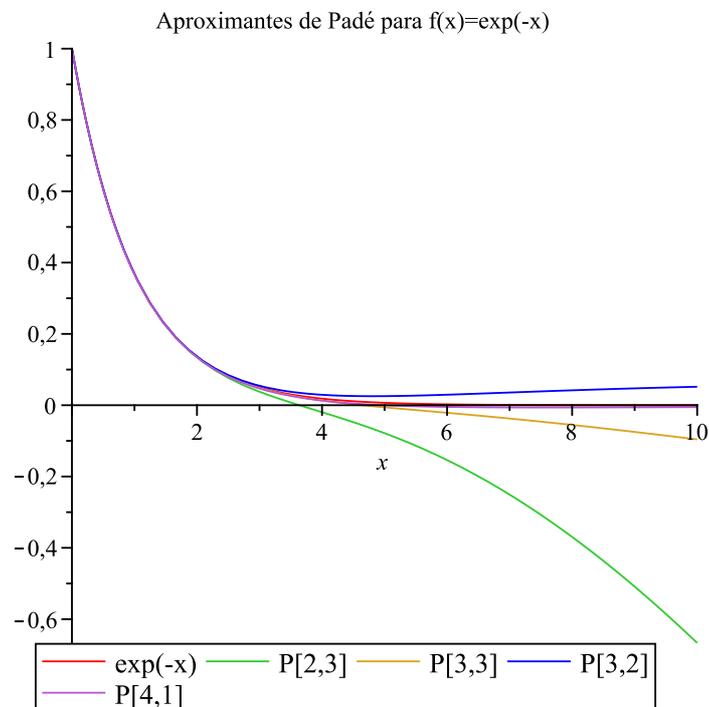
$$a_0 = 1, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = -\frac{1}{6}, \quad a_4 = \frac{1}{24}, \quad a_5 = -\frac{1}{120}.$$

O aproximante auto-similar de segunda ordem é

$$f_{22}^*(x) = a_0 \exp \left( \frac{a_1 x \tau_1 \exp \left( \frac{a_2 x \tau_2}{a_1} \right)}{a_0} \right), \quad \tau_1 = 1, \quad \tau_2 = 1 - \frac{1}{2} \frac{a_1^2}{a_2 a_0} = 0.$$

O fato que  $\tau_2 = 0$  leva a  $f_{22}^*(x) = \exp(-x)$ . Qualquer aproximação de ordem arbitrária  $f_{kk}^*(x)$  retorna  $\exp(-x)$ . Note que todos os outros aproximantes, exceto  $f_{21}^*, f_{31}^*, f_{41}^*, f_{51}^*$ , são idênticos a  $\exp(-x)$  e todos os parâmetros de controle de ordem elevada são idênticos a zero, como  $\tau_2$ .

Considere agora os aproximantes convencionais de Padé,  $P_3^2(x)$  e  $P_4^1(x)$  ( $P_1^4(x)$  e  $P_2^3(x)$  possuem qualidade inferior) e os compare com a função exata, veja figura 5.2, onde na legenda usamos  $P_M^N \equiv P[M, N]$ . Apesar de  $P_3^2(x)$  permanecer positivo, não se comporta monotonicamente. Por outro lado,  $P_4^1(x)$  se torna negativo para grandes valores de  $x$ . Estes são problemas típicos encontrados quando tentamos reconstruir funções com comportamento assintótico exponencial pelos métodos dos aproximantes de Padé.



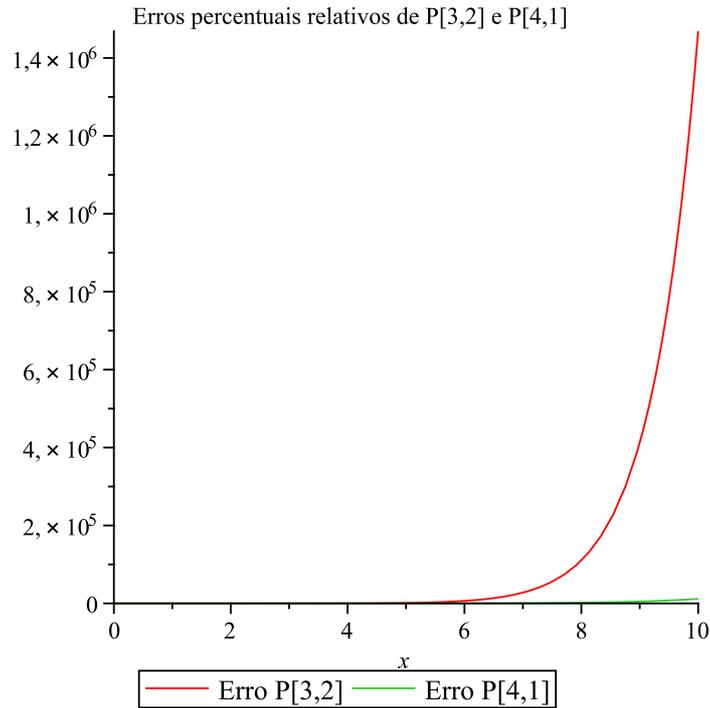
**Figura 5.2** Aproximantes de Padé para  $f(x) = \exp(-x)$

O erro percentual relativo para os dois aproximantes de Padé  $P_3^2(x)$  e  $P_4^1(x)$  são mostrados na figura 5.3. Não podemos nos deixar enganar pela errônea performance superior de  $P_4^1(x)$  que está qualitativamente errada em prever valores negativos para tempos moderados.

### “Badly damaged” perturbation

Considere a função,  $f(x) = \ln(1+x) \exp(-x^2)$ , que não é monotônica. Sua expansão é

$$f_5(x) \cong x \sum_{k=0}^5 a_k x^k, \quad (5.65)$$



**Figura 5.3** Erros percentuais relativos para  $P_3^2(x)$  e  $P_4^1(x)$

onde

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = -\frac{2}{3}, \quad a_3 = \frac{1}{4}, \quad a_4 = -\frac{11}{30}, \quad a_5 = -\frac{1}{6}.$$

Os valores dos parâmetros de controle são

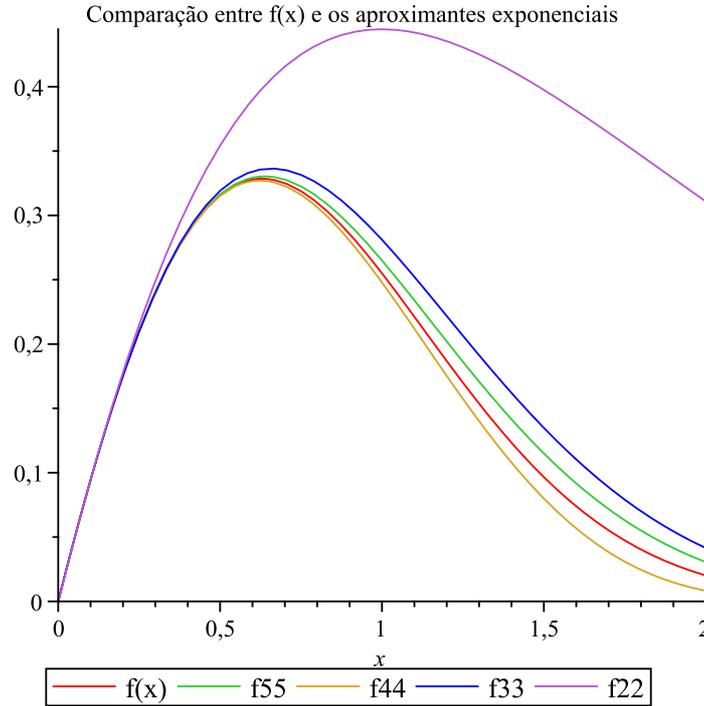
$$\tau_1 = -2, \quad \tau_2 = -\frac{3}{4}, \quad \tau_3 = -\frac{8}{9}, \quad \tau_4 = \frac{25}{176}, \quad \tau_5 = \frac{27181}{18000}.$$

Na figura 5.4 temos os gráficos da função  $f(x)$  e dos aproximantes exponenciais  $f_{22}^*(x)$ ,  $f_{33}^*(x)$ ,  $f_{44}^*(x)$  e  $f_{55}^*(x)$ . Podemos perceber que os aproximantes  $f_{44}^*(x)$  e  $f_{55}^*(x)$  se ajustam de forma melhor à curva  $f(x)$ , por baixo e por cima respectivamente.

Este comportamento poderia talvez ser justificado se observarmos o gráfico 5.5, onde são mostrados os módulos dos multiplicadores dos aproximantes e onde podemos observar que, no intervalo  $[0; 0,7]$  aproximadamente,  $|M_5^*|$  e  $|M_4^*|$  são os menores, de onde podemos esperar que os aproximantes  $f_{55}^*(x)$  e  $f_{44}^*(x)$  sejam os que se ajustam melhor à  $f(x)$ .

Considere todos os aproximantes de Padé  $P_3^2(x)$ ,  $P_4^1(x)$ ,  $P_1^4(x)$  e  $P_2^3(x)$  que podem ser construídos partindo do polinômio de ordem 5 (5.65). Podemos ver na figura 5.6 que sua qualidade é bem inferior àquela obtida com  $f_{55}^*(x)$ . Como antes, temos  $P[m,n] \equiv P_M^N(x)$  na legenda da figura.

### Perturbação forte



**Figura 5.4** Comparações entre  $f(x)$  e os aproximantes  $f_{55}^*(x)$ ,  $f_{44}^*(x)$ ,  $f_{33}^*(x)$  e  $f_{22}^*(x)$ , onde, na legenda,  $f_{nn} \equiv f_{nn}^*(x)$ , para  $n = 2, 3, 4, 5$ .

Considere a expansão de Taylor  $f_5(x) \cong \sum_{k=0}^5 a_k x^k$  de uma função do tipo exponencial  $f(x) = \exp(-x(1+x)^{-\frac{1}{2}})$ , até a quinta ordem em  $x$ , com os coeficientes

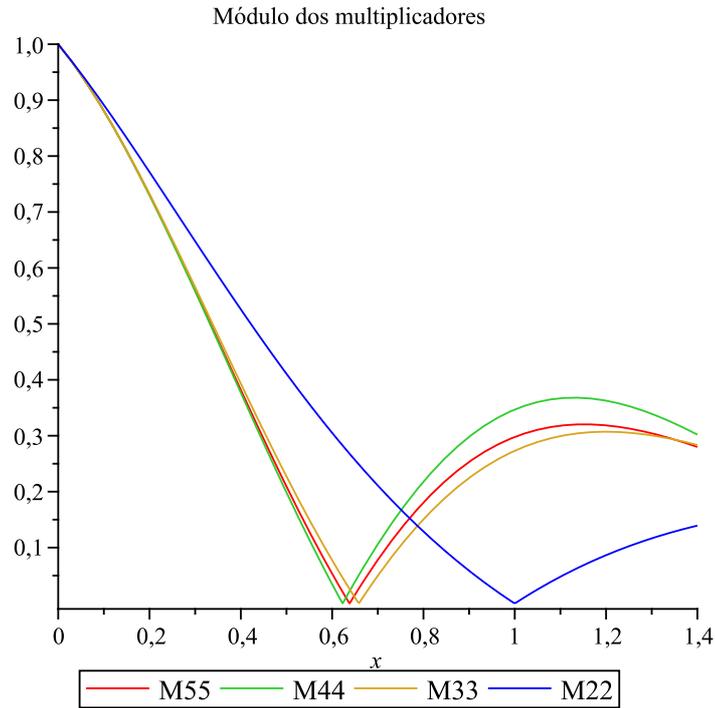
$$a_0 = 1, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = -\frac{25}{24}, \quad a_4 = \frac{53}{48}, \quad a_5 = -\frac{2261}{1920}.$$

Os parâmetros de controle

$$\tau_1 = 1, \quad \tau_2 = \frac{1}{2}, \quad \tau_3 = \frac{12}{25}, \quad \tau_4 = \frac{125}{318}, \quad \tau_5 = \frac{2491}{6783},$$

são todos positivos, menores que um mas decem muito lentamente. Como no exemplo anterior, os aproximantes  $f_{44}^*(x)$  e  $f_{55}^*(x)$  envolvem a função  $f(x)$  mas, desta vez, com um erro relativo muito maior que o aproximante de Padé  $P_3^2(x)$  para valores de  $x$  pequenos, veja figura 5.7. Para valores de  $x$  grandes, o erro de  $P_3^2(x)$  supera o de  $f_{55}^*(x)$ , veja figura 5.8.

Este exemplo ilustra a propriedade de que, para coeficientes  $a'_i$ s rapidamente crescentes em valores absolutos, os aproximantes exponenciais auto-similares considerados se tornam inapropriados. Tais casos de coeficientes que crescem rápido como o fatorial de sua ordem constituem uma importante classe de comportamento, pois ela aparece em expansões que são típicas em muitas teorias de campo não lineares. Considere o particularmente ilustrativo exemplo da função de Stieltjes,  $f(x) = \int_0^\infty \frac{\exp(-y)}{1+xy} dy$ , que exemplifica tal comportamento. Seus coeficientes da série de Taylor



**Figura 5.5** Comparações entre os multiplicadores  $|M_5^*|$ ,  $|M_4^*|$ ,  $|M_3^*|$  e  $|M_2^*|$ . Na legenda, fizemos  $Mkk \equiv M_k^*$ .

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -1!, \quad a_2 = 2!, \quad a_3 = -3!, \quad a_4 = 4!, \quad a_5 = -5!,$$

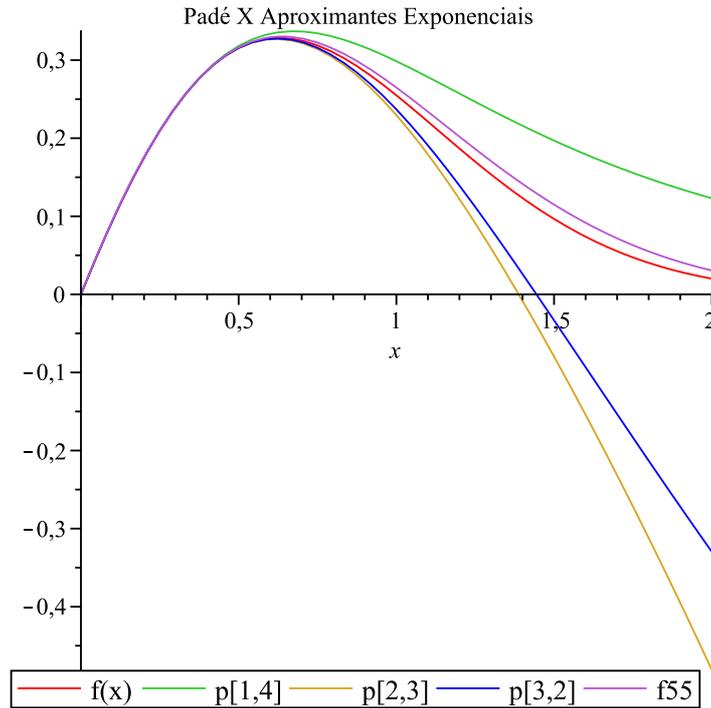
crecem com a função fatorial, levando aos parâmetros de controle

$$\tau_1 = 1, \quad \tau_2 = 0,75, \quad \tau_3 = 0,713, \quad \tau_4 = 0,697, \quad \tau_5 = 0,685.$$

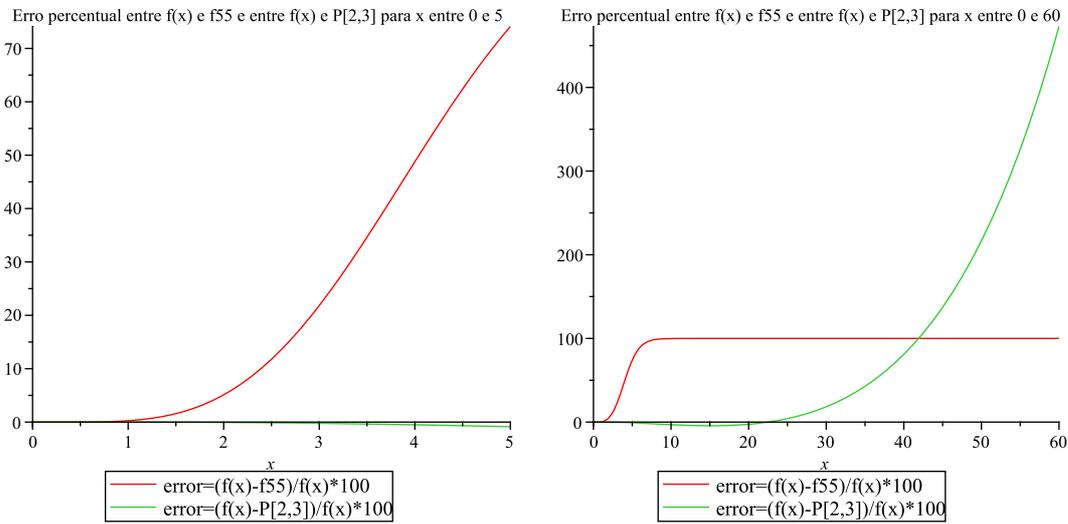
Como podemos antecipar da observação prévia, o aproximante de Padé  $P_3^2(x)$  facilmente supera  $f_{55}^*(x)$ , veja figuras 5.9 e 5.10.

Vale ressaltar que esta falha do método dos aproximantes exponenciais, quando comparados aos aproximantes de Padé, não implica na falha da renormalização algébrica auto-similar como um todo. Esta falha apenas demonstra as limitações do modo particular de definir as funções controle e também da condição de potência infinita ( $s \rightarrow \infty$ ) usada na dedução destes aproximantes. Nas aplicações, o uso dos aproximantes exponenciais é análogo às aproximações do tipo campo médio. É importante salientar que esta teoria de campo médio fornece claros avisos de sua eventual falha antecipadamente, refletidos no caráter de crescimento rápido como a função fatorial dos coeficientes do polinômio de Taylor, assim como na divergência dos seus multiplicadores. Em [67], mostra-se que a acurácia da renormalização autossimilar pode ser aumentada dramaticamente se mudarmos a restrição de potência infinita.

### Equação de Estado para um sistema de esferas duras

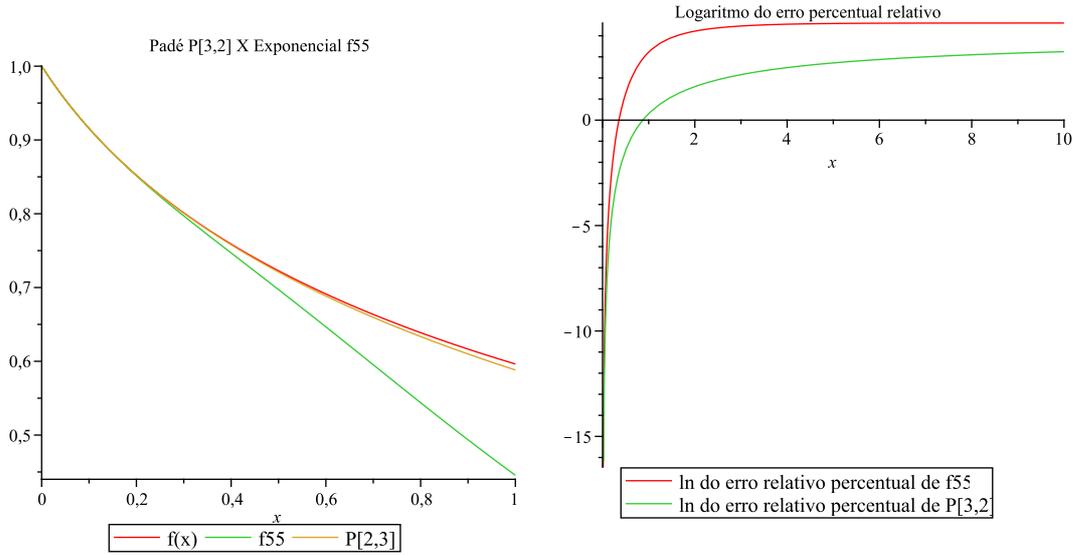


**Figura 5.6** Comparações entre os Aproximantes de Padé e os Aproximantes Exponenciais



**Figura 5.7** Erro percentual de  $f_{55}^*(x)$  e de **Figura 5.8** Erro percentual de  $f_{55}^*(x)$  e de  $P_3^2(x)$  para  $x$  pequeno

Demonstraremos abaixo como o bootstrap autossimilar pode ser aplicado na teoria das equações de estado para líquidos simples. Considere o celebrado modelo de esferas duras com diâmetro  $d$ , onde a equação de estado empírica, conectando pressão  $p$ , temperatura  $T$ ,



**Figura 5.9** Gráficos de  $f(x)$ ,  $f_{55}^*(x)$  e  $P_3^2(x)$  **Figura 5.10** Ln do erro percentual relativo de  $f_{55}^*(x)$  e de  $P_3^2(x)$

densidade  $n$ , e densidade reduzida  $\rho = \pi n \frac{d^2}{6}$ , é conhecida como:

$$\frac{p}{nkT} = \frac{1 + \rho + \rho^2 - \rho^3}{(1 - \rho)^3}. \tag{5.66}$$

A equação de estado (5.66) concorda muito bem com os resultados de dinâmica molecular. Por outro lado, a correspondente expressão analítica é dada como segue:

$$\frac{p}{nkT} = \frac{1 + \rho + \rho^2 - 3\rho^3}{(1 - \rho)^3}. \tag{5.67}$$

Estas duas expressões coincidem em baixas densidades, e.g. em  $\rho = 0,1$ , a porcentagem de erro da equação (5.67), quando comparada com a (5.66), é igual a  $-18\%$ , enquanto que para densidades intermediárias e altas, a concordância se torna muito pobre; e.g. em  $\rho = 0,5$ , a porcentagem de erro é igual a  $-15,385\%$  e em  $\rho = 0,8$ , ele é igual a  $-53,112\%$ .

Considere a parte regular da equação (5.67), definida como  $r$ ,

$$r = 1 + \rho + \rho^2 - 3\rho^3, \tag{5.68}$$

como uma expansão assintótica em baixa densidade para a ‘verdadeira’ parte regular  $\tilde{r}(\rho)$ , e tente generalizar a equação (5.68) da região  $\rho \ll 1$ , para a região  $\rho \leq 1$ . Parece ser razoável usar os últimos três termos da equação (5.68) para renormalização, já que a constante descreve o comportamento do gás ideal, e estamos interessados na região de densidades altas. Vamos escrever as seguintes aproximações consecutivas para a quantidade  $\bar{r} = r - 1$ :

$$\begin{aligned} \bar{r}_1 &= \rho \\ \bar{r}_2 &= \rho + \rho^2 \end{aligned}$$

$$\bar{r}_3 = \rho + \rho^2 - 3\rho^3$$

Os multiplicadores são

$$\begin{aligned} m_1(\rho, s) &= 1 + \rho \frac{2+s}{1+s}, \\ m_2(\rho, s) &= m_1(\rho, s) - 3\rho^2 \frac{3+s}{1+s}, \\ m_3(\rho, s) &= 1 - 3\rho \frac{3+s}{2+s}. \end{aligned}$$

Seguindo os passos da sub-seção anterior, obtemos

$$\tilde{r}(\rho) = \rho e^{[\rho e^{-3\rho}]}. \quad (5.69)$$

O multiplicador  $M(\rho)$ , correspondente a equação (5.69), é dado pela expressão

$$M(\rho) = e^{(\rho e^{-3\rho})e^{-4\rho}} (1 - 3\rho) \quad (5.70)$$

e isto é muito pequeno em  $\rho > \frac{1}{3}$ , e.g.,  $M(0,8) = -0,061$ , sinalizando a robusta estabilidade da sequência de exponenciais continuadas (5.69). Recalculando

$$\frac{p}{nkT} = \frac{\tilde{r}(\rho) + 1}{(1 + \rho)^3} \quad (5.71)$$

e comparando esta equação com a fórmula empírica (5.66), obtemos que, em  $\rho = 0,1$ , o erro percentual é igual a  $-0,118\%$ ; em  $\rho = 0,5$ , o erro percentual é de  $-4,061\%$ , e em  $\rho = 0,8$  ele é igual a  $-3,516\%$ .

Nós vemos que a equação de estado (5.71), obtida da renormalização auto-similar, é muito melhor, e concorda mais uniformemente com o experimento computacional, que a expressão analítica inicial (5.67). A concordância melhora drasticamente, cerca de 17 vezes, na região de densidades elevadas.

## 5.4 Renormalização Autossimilar na Análise de Séries Temporais

Muitos dados em diferentes ciências são apresentados na forma de séries temporais. O problema de analisar séries temporais consiste em entender a dinâmica do movimento a partir de um dado instante a outro no passado e tentar prever o valor em um dado instante no futuro próximo. A abordagem padrão para análise de séries temporais consiste em tentar descobrir qual sistema dinâmico estocástico está por trás dos dados, isto é, tenta modelar os eventos produzindo os dados considerados por uma equação diferencial estocástica ou de diferenças finitas [47, 48]. Tais abordagens se revelaram razoáveis quando aplicadas a sistemas perto do estado estacionário, mas mudanças abruptas no comportamento do sistema dinâmico gerador das séries temporais não podem ser acuradamente compreendidas.

Nesta seção mostraremos uma nova abordagem de análise de séries temporais, baseadas nas técnicas de ressonância que são usadas na Física Teórica e apresentadas nas seções anteriores. Como exemplos para ilustração, optamos por séries temporais geradas por sistemas

econômicos, incluindo mudanças agudas em seu comportamento. Notamos que diferentes analogias e técnicas da física são agora às vezes usadas para descrever fenômenos econômicos [49, 50, 51, 52, 53, 54].

Como ponto de partida, apresentamos um conjunto discreto de dados, obtidos do sistema no passado, na forma de um polinômio (i.e. como uma série de potências formal), que é o análogo direto de uma expansão perturbativa válida quando o tempo  $t \rightarrow 0$ . O resto consiste na aplicação de uma ou outra técnica de ressonância à expansão assintótica onde o papel da constante de acoplamento é feito pelo tempo. Se somente poucos pontos da história do sistema são conhecidos, o grau da expansão assintótica será baixo, e a soma mais popular de Padé [55] é muito difícil, se possível, de aplicar. Entretanto, usaremos a abordagem discutida anteriormente da teoria da aproximação autossimilar [56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63] que realiza bons trabalhos mesmo para um pequeno número de termos assintóticos. Aqui usaremos uma variante desta abordagem, a renormalização autossimilar algébrica [61, 62, 63]. Consideraremos vários exemplos obtidos de mercados de ações reais usando somente alguns, até seis, pontos dos dados históricos para calcular os valores seguintes dos preços, e, como uma última aplicação, utilizaremos o método para o caso do crash das bolsas mundiais ocorrido bem recentemente, em Setembro/Outubro de 2008, devido à crise do *subprime*, desencadeada nos EUA.

Primeiro, vamos dar o esquema geral do método que sugerimos. Assuma que os valores da função  $f(t)$  sejam conhecidos para  $n$  momentos sucessivos equidistantes do tempo,  $t = k = 0, 1, \dots, n-1$ , de tal forma que

$$f(0) = a_0, \quad f(1) = a_1, \quad \dots, \quad f(n-1) = a_{n-1}. \quad (5.72)$$

Estamos interessados no valor da função  $f(n)$  no momento seguinte  $n$  do tempo. Para procedimentos futuros, é importante encontrar uma representação compacta do conjunto de dados (5.72) na forma de uma função explícita. Para fazer isso, podemos sempre fazer uso da série formal de Taylor de tal função,  $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k$ . Como somente um conjunto finito de valores (5.72) está disponível, podemos reconstruir somente um conjunto finito de coeficientes,  $A_k = A_k(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , da condição (5.72). Então, obtemos uma expansão aproximada

$$f(t) \cong \sum_{k=0}^{n-1} A_k(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) t^k. \quad (5.73)$$

O problema de reconstruir o valor de uma função em algum momento distante a partir do conhecimento de um conjunto finito de valores passados se torna agora equivalente à reconstrução da função para valores finitos dos seus argumentos,  $t = n$ , a partir do conhecimento da sua expansão assintótica quando  $t \rightarrow 0$ . Na Física Teórica, tal problema é chamado renormalização ou ressonância [55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64]. Então, o problema da previsão dos valores futuros a partir de um conjunto de dados históricos na forma de séries temporais se torna equivalente à renormalização de séries assintóticas.

Utilizaremos a renormalização autossimilar algébrica, desenvolvida em [61, 62, 63]. Descreveremos aqui somente seus pontos principais, importantes no contexto deste exemplo nesta seção. A representação polinomial (5.73) dá para a função  $f(t)$  as seguintes  $n$  aproximações  $p_i(t)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ ,

$$p_0(t) = A_0 \equiv a_0, \quad p_1(t) = p_0(t) + A_1 t, \quad \dots, \quad p_{n-1}(t) = p_{n-2}(t) + A_{n-1} t^{n-1}. \quad (5.74)$$

A renormalização autossimilar algébrica começa pela aplicação na aproximação (5.74) de uma transformação algébrica definida por  $P_i(t, s) = t^s p_i(t)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , com  $s \geq 0$ . Esta transformação eleva as potências da série (5.74), e nos fornece uma forma efetiva de levar em consideração mais pontos da história do sistema. Usaremos no que segue a forma forte de tal transformação quando  $s \rightarrow \infty$ , que resulta numa representação exponencial para a função  $f(t)$ , como discutimos na seção anterior. A sequência das aproximações transformadas  $P_i(t, s)$  é considerada como um sistema dinâmico no tempo discreto  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Para descrever a evolução do sistema no tempo, introduzimos, de acordo com as referências [56, 57, 58, 59, 60], uma nova variável  $\varphi$  e definimos a chamada função expansão  $t(\varphi, s)$  a partir da equação  $P_0(t, s) = a_0 t^s = \varphi$ , que resulta em  $t(\varphi, s) = (\varphi/a_0)^{\frac{1}{s}}$ . Então contruímos uma aproximação em cascata [56, 57, 58, 59, 60] cujas trajetórias dos pontos são dadas pelas expressões  $y_i(\varphi, s) \equiv P_i(t(\varphi, s), s)$ . Embutindo esta cascata em um fluxo de aproximação, podemos escrever a equação de evolução na forma de uma relação de autossimilaridade  $y_{i+p}(\varphi, s) = y_i(y_p(\varphi, s), s)$ . Neste estágio, podemos checar a eficácia da transformação algébrica calculando os multiplicadores locais,

$$m_i(t, s) \equiv \left[ \frac{\partial y_i(\varphi, s)}{\partial \varphi} \right]_{\varphi=P_0(t, s)} \quad (5.75)$$

quando  $s \rightarrow \infty$ . Para os cálculos usamos a forma integral da relação de autossimilaridade,

$$\int_{P_{i-1}^*}^{P_i^*} \frac{d\varphi}{v_i(\varphi, s)} = \tau,$$

onde a velocidade da cascata é  $v_i(\varphi, s) = y_i(\varphi, s) - y_{i-1}(\varphi, s)$  e  $\tau$  é o número mínimo de passos do procedimento necessários para alcançar o ponto fixo  $P_i^*(t, s)$  da cascata de aproximação. É possível encontrar  $P_i^*(t, s)$  de forma explícita e realizar uma transformação algébrica inversa depois da qual o limite  $s \rightarrow \infty$  será tomado. O primeiro passo da renormalização autossimilar está completo. Então o procedimento pode ser repetido quantas vezes forem necessárias para renormalizar todos os polinômios. Esta é a principal idéia do bootstrap autossimilar [63]. Realizando este programa, obteremos a seguinte sequência de aproximantes exponenciais autossimilares, como obtido na seção anterior,

$$f_j^*(t, \tau) = A_0 \exp \left( \frac{A_1}{A_0} t \exp \left( \frac{A_2}{A_1} t \dots \exp \left( \frac{A_j}{A_{j-1}} \tau t \right) \dots \right) \right), \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (5.76)$$

Para checar se esta sequência converge, temos que analisar os multiplicadores correspondentes. A partir da equação  $f_1^*(t, \tau) = \varphi$ , encontramos  $t(\varphi) = \left( \frac{A_0}{A_1} \right) \ln \left( \frac{\varphi}{A_0} \right)$ . Então construímos uma aproximação em cascata, como descrito acima, fazendo  $z_j(\varphi, \tau) \equiv f_j^*(t(\varphi), \tau)$ , e definindo

$$M_j(t, \tau) \equiv \left[ \frac{\partial z_j(\varphi, \tau)}{\partial \varphi} \right]_{\varphi=f_1^*(t, 1)} \quad (5.77)$$

Selecionando da sequência  $f_j^*$  dois termos sucessivos com os menores  $M_j(t) \equiv M_j(t, 1)$ , como regra os dois últimos termos da sequência, podemos finalmente determinar  $\tau$  a partir da condição de velocidade mínima escrita como a condição de diferença mínima

$$\min_{\tau} |f_j^*(t, \tau) - f_{j-1}^*(t, \tau)|, \quad (5.78)$$

cuja solução  $\tau = \tau(t)$  nos permite escrever a aproximação exponencial auto-similar para a função

$$f_j^*(t) = f_j^*(t, \tau(t)). \quad (5.79)$$

Os aproximantes  $f_{n-2}^*(n, 1)$  e  $f_{n-1}^*(n, 1)$  usualmente compõem o valor ótimo  $f_{n-1}^*(n)$ . Podemos analisar, seguindo o procedimento descrito acima, um conjunto de aproximantes autossimilares para um número diferente de pontos históricos, i.e., podemos calcular vários possíveis  $f_j^*(t)$ ,  $j = 2, 3, \dots, n-1$ , e escolher aqueles que correspondem ao menor multiplicador calculado no ponto fixo. O valor do multiplicador no ponto fixo pode ser definido como

$$M_j^*(t) \equiv \frac{M_j(t, \tau(t)) + M_{j-1}(t, \tau(t))}{2} \quad (5.80)$$

A partir de agora ilustraremos o método com exemplos de vários mercados financeiros. Nos concentraremos em crises de diferentes mercados de ações, quando os preços mudam brusca-mente durante um período comparável à resolução da série temporal.

#### 5.4.1 Mecanismos de Crash

Considere o comportamento do índice Dow Jones nas proximidades da crise de 27 de Outubro de 1997. Queremos dar uma ilustração do esquema de renormalização autossimilar apresentada acima e também fazer alguns comentários gerais a cerca do mecanismo do crash. Vamos fazer uma previsão para o índice Dow Jones pra o dia 25 de Outubro de 1997 baseada em diferentes números de pontos da história do sistema.

**Previsão de três pontos.** Os seguintes valores estão disponíveis no período que vai de 13 de Setembro de 1997 a 11 de Outubro de 1997, passando por 27 de Setembro de 1997, tomados com a resolução de duas semanas:

$$a_0 = 7720 \text{ (Set.13)}, \quad a_1 = 7920, \quad a_3 = 8000 \text{ (Out.11)}.$$

Os coeficientes da equação (5.74) são  $A_1 = 260$  e  $A_2 = -60$ . Encontramos os aproximantes exponenciais  $f_1^*(3, 1) = 8540,8$  e  $f_2^*(3, 1) = 8120,4$  e os multiplicadores  $M_1(3) = 1$  e  $M_2(3) = 0,146$ . A partir da condição de mínima diferença

$$\min_{\tau} |f_2^*(3, \tau) - f_1^*(3, \tau)|,$$

obtemos  $\tau = 0,641428$ . Finalmente, a aproximação exponencial autossimilar é  $f_2^*(3) = 8237$  e o módulo do multiplicador é  $|M_2^*(3)| = 0,485$ .

**Previsão de quatro pontos.** Os seguintes valores estão disponíveis no período de tempo indo de 30 Agosto de 1997 até 11 de Outubro de 1997, tomados com uma resolução de 2 semanas:

$$a_0 = 7690 \text{ (Ago.30)}, \quad a_1 = 7720, \quad a_2 = 7920, \quad a_3 = 8000 \text{ (Out.11)}.$$

Os coeficientes do polinômio são  $A_1 = -151667$ ,  $A_2 = 230$ , e  $A_3 = -48333$ . Repetindo o mesmo procedimento como acima, encontramos os aproximantes exponenciais  $f_2^*(4, 1) = 7689$

e  $f_3^*(4, 1) = 7646$ , com os multiplicadores  $M_2(4) = -0,013$  e  $M_3(4) = 0,046$ . Da condição de diferença mínima

$$\min_{\tau} |f_3^*(4, \tau) - f_2^*(4, \tau)|,$$

obtemos  $\tau = 0,6023$ . O aproximante exponencial auto-similar se torna  $f_3^*(4) = 7674$  com o correspondente módulo do multiplicador  $|M_3^*(4)| = 0,048$ .

**Previsão de cinco pontos.** Considere os dados históricos para o índice Dow Jones no período a partir de 16 de Agosto de 1997 até 11 de Outubro de 1997. Os seguintes dados estão disponíveis:

$$a_0 = 7780 \text{ (Ago.16)}, \quad a_1 = 7690, \quad a_2 = 7720, \quad a_3 = 7920, \quad a_4 = 8000 \text{ (Out.11)}.$$

Os coeficientes do polinômio (2.2), com  $i = 0, 1, \dots, 4$  são  $A_1 = -48333$ ,  $A_2 = -120833$ ,  $A_3 = 93333$ ,  $A_4 = -14167$ . Os seguintes aproximantes auto-similares,  $f_2^*(t, \tau)$ ,  $f_3^*(t, \tau)$ , e  $f_4^*(t, \tau)$  podem ser escritos, tais que em  $t = 5$  nós temos  $f_2^*(5, 1) = 0$ ,  $f_3^*(5, 1) = 7472$ , e  $f_4^*(5, 1) = 6113$ . Os multiplicadores correspondentes,  $M_2(5) = 0$ ,  $M_3(5) = 0,319$  e  $M_4(5) = 13569$ , confirmam que a subsequência  $f_2^*, f_3^*, f_4^*$  é instável. Mas a partir da condição de diferença mínima

$$\min_{\tau} |f_4^*(5, \tau) - f_3^*(5, \tau)|$$

encontramos  $\tau = 0,6232$ . A aproximação exponencial auto-similar é  $f_4^*(5) = 7069$ , com o módulo do multiplicador  $|M_4^*(5)| = 0,163$ .

**Previsão de seis pontos.** Considere os dados para o índice Dow Jones no período que vai de 2 de Agosto de 1997 a 11 de Outubro de 1997:

$$a_0 = 8170 \text{ (Ago.2)}, \quad a_1 = 7780, \quad a_2 = 7690, \quad a_3 = 7720, \quad a_4 = 7920, \quad a_5 = 8000 \text{ (Out.11)}.$$

Os coeficientes do polinômio são  $A_1 = -771,5$ ,  $A_2 = 582,917$ ,  $A_3 = -253,75$ ,  $A_4 = 57,083$ , e  $A_5 = -4,75$ . Seguindo as prescrições padrão, podemos encontrar os aproximantes exponenciais  $f_4^*(6, 1) = 7720$  e  $f_5^*(6, 1) = 7138$  e os multiplicadores  $M_4(6) = -0,308$  e  $M_5(6) = 0,198$ . Da condição de mínima diferença,  $\tau = \exp(\frac{6A_5\tau}{A_4})$  e obtemos  $\tau = 0,7037$ . Para a aproximação exponencial auto-similar nós obtemos  $f_5^*(6) = 7328$ , com o módulo do multiplicador  $|M_5^*(6)| = 0,087$ .

## 5.5 Discussão

Todas as previsões, exceto a de três pontos, predizem um decréscimo do índice Dow Jones. Normalmente, na ausência de um evento dramático que possa alterar drasticamente a atividade do mercado, devemos esperar que a trajetória mais estável seja realizada. Observando a sequência de multiplicadores  $\{M_j^*\}$ ,  $j = 2, 3, \dots, 5$ , notamos que a previsão de quatro pontos  $f_3^*(4) = 7464$  é ótima do ponto de vista da estabilidade, ou seja, ela corresponde a uma trajetória com multiplicador mínimo, e, então, a predição de quatro pontos é escolhida como estimativa final. O índice Dow Jones no dia 25 de Outubro de 1997 foi de 7715. O erro percentual da nossa previsão é de  $-0,531\%$ . Uma trajetória de alta, prevista pela previsão de três

pontos, aparece como a menos estável dentre as previsões. O nível atingido pelo mercado após o estouro da bolha corresponde mais a uma correção que a um crash.

Quando a evolução normal do mercado é interrompida por algum evento dramático *negativo*, tal como a crise de Hong Kong, que perturba a dinâmica autossimilar, o mercado temporariamente não seleciona a trajetória mais estável. Em sua busca pela solução, o mercado pode se distanciar da sua trajetória mais estável e pular para uma menos estável. Posteriormente, ele pode voltar à sua trajetória mais estável ou cair na trajetória de maior estabilidade subsequente, neste caso, na trajetória correspondente à previsão de cinco pontos. Durante um curto período de tempo, menor que a resolução da série temporal, podemos observar uma sucessão rápida de todas as trajetórias possíveis. Após a fonte da violação da autossimilaridade deixar de existir, esperamos que o mercado volte à sua trajetória mais estável. O movimento para a trajetória menos estável é o momento mais dramático, como pode ser visto a partir da análise da previsão de cinco pontos. Como ambos os primeiros coeficientes do polinômio são negativos e  $|A_2| \gg |A_1|$ , uma tendência extremamente forte de queda, um pouco de pânico, aparece resultando em  $f_2^*(5, 1) = 0$ ; entretanto a situação é remediada devido ao coeficiente de ordem mais alta  $A_3 > 0$ , que reflete uma visão moderadamente otimista; tal otimismo permanece limitado pelas visões pessimistas representadas pelo valor negativo de  $A_4$ . O valor finito dado por  $f_4^*(5) = 7069$  é muito baixo por causa da combinação de tendências. Devemos remarcar que no caso da previsão de cinco pontos, o ponto fixo determinado pela sequência instável  $f_3^*, f_4^*$  se encontra muito próximo da fronteira limite que separa as trajetórias intáveis das estáveis. Este é o motivo pelo qual os preços de mercado de curto prazo terem variado rapidamente, primeiro, ao nível determinado por  $f_5^*(6) = 7328$ , e posteriormente ao nível  $f_3^*(4) = 7674$ . Concluimos que as flutuações de Outubro de 1997 foram causadas pelos seguintes motivos: (1) o estouro da bolha especulativa acompanhado do surgimento de várias trajetórias estáveis de queda; (2) a localização de uma destas trajetórias, correspondente a uma queda forte, no limite entre as trajetórias instáveis e estáveis; (3) o crash de Hong Kong que empurrou o mercado tirando-o de sua trajetória mais estável com correções moderadas para uma trajetória menos estável, para depois da crise o mercado rapidamente retornar à sua trajetória vizinha mais estável.

## 5.6 Crises de Mercado

Consideraremos agora vários exemplos de crises que ocorreram em diferentes mercados de capitais, para, posteriormente, aplicar a técnica no estudo da recente crise do *subprime*. Em todos os casos executamos todos os passos como demonstrado acima, mas agora somente as previsões ótimas são apresentadas. Observamos que diferentes crises requerem para suas descrições diferentes números de pontos históricos. Começaremos com as crises que podem ser descritas conhecendo somente três pontos da história passada.

(i) Considere a crise do índice francês de 1986 a 1988, com um tempo de resolução de 1 ano, e façamos uma previsão para 1989. Os seguintes dados históricos estão disponíveis (o preço para 1985 é feito ser igual a 100):

$$a_0 = 153,3 \text{ (1986)}, \quad a_1 = 177,6 \text{ (1987)}, \quad a_2 = 162,1 \text{ (1988)}.$$

Da condição (5.72), os coeficientes do polinômio (5.73), com  $i = 0, 1, 2$ , podem ser encontrados e valem  $A_1 = 44,2$  e  $A_2 = -19,9$ . Os seguintes aproximantes exponenciais (5.76) podem ser obtidos:

$$f_1^*(t, \tau) = a_0 \exp\left(\frac{A_1 t \tau}{a_0}\right), \quad f_2^*(t, \tau) = a_0 \exp\left(\frac{A_1}{a_0} t \exp\left(\frac{A_2}{A_1} t \tau\right)\right),$$

de onde, em  $t = 3$  e  $\tau = 1$ , nós temos  $f_1^*(3, 1) = 364,078$  e  $f_2^*(3, 1) = 191,8$ . Os multiplicadores podem ser calculados usando a fórmula (5.77), que dá  $M_1(3) = 1$  e  $M_2(3) = -0,048$ , de tal forma que a sequência  $f_1^*, f_2^*$  é localmente estável. Da condição de diferença mínima

$$\min_{\tau} |f_2^*(3, \tau) - f_1^*(3, \tau)|,$$

temos que

$$\tau = \exp\left(\frac{3A_2}{A_1} \tau\right),$$

encontramos  $\tau = 0,505$ . Finalmente, a aproximação auto-similar para o preço do índice francês é  $f_3^*(3) = 237,34$ . O real valor do índice em 1989 foi 234,9. O erro percentual da previsão é 1,039%.

(ii) Em 1990 – 1992, o índice da Dinamarca obteve os seguintes valores (1990  $\rightarrow$  100):

$$a_0 = 100 \text{ (1990)}, \quad a_1 = 100 \text{ (1991)}, \quad a_2 = 92 \text{ (1992)}.$$

Vamos fazer uma previsão para 1993. Os coeficientes dos polinômios valem  $A_1 = 4$  e  $A_2 = -4$ . Para este índice temos  $f_1^*(3, 1) = 112,75$  e  $f_2^*(3, 1) = 100,60$ . O multiplicador  $M_2(3) = -0,089$ , e portanto a sequência de aproximantes exponenciais converge localmente. Da condição de diferença mínima, encontramos  $\tau = 0,35$ . Assim, a aproximação exponencial auto-similar é  $f_2^*(3) = 104,289$ . O valor real do índice em 1993 foi 105, com um erro de  $-0,677\%$ .

(iii) Considere o índice da Suíça de 1993 a 1995, onde, novamente, 1993  $\rightarrow$  100:

$$a_0 = 137,4 \text{ (1993)}, \quad a_1 = 159,2 \text{ (1994)}, \quad a_2 = 166 \text{ (1995)}.$$

Os coeficientes do polinômio correspondente são  $A_1 = 29,3$  e  $A_2 = -7,5$ . Faremos uma previsão para 1996. Repetindo os passos anteriores, obtemos os aproximantes exponenciais  $f_1^*(3, 1) = 260,508$ ,  $f_2^*(3, 1) = 184,833$ , e o multiplicador  $M_2(3) = 0,076$ . Então da condição de diferença mínima, encontramos  $\tau = 0,601$ . Assim, a aproximação exponencial auto-similar é  $f_2^*(3) = 204,394$ . O preço em 1996 foi 206,3, com um erro percentual de  $-0,924\%$ . Continuamos com as crises que podem ser descritas usando quatro pontos:

(i) Considere a dinâmica do índice industrial Francês em 1970 – 1973, com um ano de resolução (1970  $\rightarrow$  100):

$$a_0 = 100 \text{ (1970)}, \quad a_1 = 95,8 \text{ (1971)}, \quad a_2 = 107,4 \text{ (1972)}, \quad a_3 = 129,7 \text{ (1973)}.$$

Faremos uma previsão para 1974. Os coeficientes do polinômio são  $A_1 = -13,8$ ,  $A_2 = 10,45$  e  $A_3 = -0,85$ . Os aproximantes exponenciais são

$$f_1^*(t, \tau) = a_0 \exp\left(\frac{A_1}{a_0} t \tau\right),$$

$$f_2^*(t, \tau) = a_0 \exp\left(\frac{A_1}{a_0} t \exp\left(\frac{A_2}{A_1} t \tau\right)\right),$$

$$f_3^*(t, \tau) = a_0 \exp\left(\frac{A_1}{a_0} t \exp\left(\frac{A_2}{A_1} t \exp\left(\frac{A_3}{A_2} t \tau\right)\right)\right).$$

Portanto, em  $t = 4$ , nós temos  $f_1^*(4, 1) = 57,58$ ,  $f_2^*(4, 1) = 97,366$ , e  $f_3^*(4, 1) = 93,966$ . Os correspondentes multiplicadores são  $M_1(4) = 1$ ,  $M_2(4) = -0,166$  e  $M_3(4) = -0,087$ . Da condição de diferença mínima

$$\min_{\tau} |f_3^*(4, \tau) - f_2^*(4, \tau)|,$$

que pode ser escrita como

$$\tau = \exp\left(\frac{4A_3}{A_2} \tau\right),$$

encontramos  $\tau = 0,7767$ . A aproximação exponencial auto-similar é  $f_3^*(4) = 94,885$ . Esta estimativa concorda muito bem com o valor real, que é igual a 96,6 em 1973. O erro percentual é  $-1,775\%$ .

(ii) Em 1985 – 1988, o índice da Nova Zelândia possuía os seguintes valores:

$$a_0 = 100 \text{ (1985)}, \quad a_1 = 128,7 \text{ (1986)}, \quad a_2 = 129,2 \text{ (1987)}, \quad a_3 = 119,7 \text{ (1988)}.$$

Vamos fazer uma previsão para 1989. Os coeficientes do polinômio são  $A_1 = 48,867$ ,  $A_2 = -23,2$ , e  $A_3 = 3,033$ . O multiplicador é igual a  $m_1(t, s) = 1 + A_1(1+s)t/A_0s$ , quando  $s \rightarrow \infty$  e em  $t = 4$  ele assume o valor  $m_1(4, \infty) = 1 + 4 * A_1/A_0 = 2,995$ , de tal forma que a qualidade da sequência não é boa. Neste caso, podemos considerar outra sequência de aproximações, que não exclui o termo constante. A função expansão agora é determinada a partir da equação  $A_1 t^{t+s} = \varphi$  dando  $t(\varphi, s) = (\varphi/A_1)^{\frac{1}{1+s}}$ . O multiplicador local correspondente, definido por uma fórmula análoga a (5.75), que é  $m_{3,1}(t, s) = 1 + A_2(2+s)t/A_1(t+s)$ , quando  $s \rightarrow \infty$ ,  $t = 4$ , é igual a  $-0,899 < 1$ . Assim, os seguintes aproximantes exponenciais podem ser obtidos

$$f_3^*(t, \tau) = a_0 + A_1 t \exp\left(\frac{A_2}{A_1} t \tau\right),$$

$$f_4^*(t, \tau) = a_0 + A_1 t \exp\left(\frac{A_2}{A_1} t \exp\left(\frac{A_3}{A_2} t \tau\right)\right).$$

Isto leva à estimativa  $f_3^*(4, 1) = 129,264$  e  $f_4^*(4, 1) = 163,417$ . O multiplicador  $M_3(4)$ , calculado a partir de uma fórmula análoga à (5.77), é igual a 0,613, que nos mostra que a sequência  $f_3^*, f_4^*$  é estável. A partir da condição de diferença mínima

$$\min_{\tau} |f_4^*(4, \tau) - f_3^*(4, \tau)|$$

encontramos  $\tau = 0,6952$ , que resulta numa aproximação auto-similar  $f_4^*(4) = 152,206$ . Essa previsão concorda bem com o valor do índice em 1989, cujo valor real foi de 151,4, portanto, com um erro de 0,532%.

(iii) Considere os dados para o índice de preços mexicanos em 1991 – 1994, (1990=100)

$$a_0 = 190,1 \text{ (1991)}, \quad a_1 = 291,3 \text{ (1992)}, \quad a_2 = 325,6 \text{ (1993)}, \quad a_3 = 442,1 \text{ (1994)}.$$

Os coeficientes do polinômio são  $A_1 = 184,35$ ,  $A_2 = -108$ , e  $A_3 = 24,85$ . Faremos uma previsão para 1995. Como  $m_1(4, \infty) = 4,879$  e  $m_{3,1}(4, \infty) = -1,343$ , devemos proceder de maneira análoga ao caso (ii). Repetindo os mesmos passos, podemos calcular os aproximantes exponenciais  $f_3^*(4, 1) = 260,893$  e  $f_4^*(4, 1) = 480,018$ , com o multiplicador  $M_3(4) = 0,13$ . Da condição de diferença mínima, temos  $\tau = 0,584$ . A aproximação autossimilar é  $f_4^*(4) = 377,695$ . O índice mexicano em 1995 foi 389,3, com um erro portando, de  $-2,981\%$ .

## 5.7 Aplicação do método ao estudo do crash de 2008

Nesta seção serão descritos os resultados da aplicação da técnica desenvolvida na seção anterior no crash da crise hipotecária dos EUA. Assumiremos que o ápice da crise, pelo menos no que se refere aos seus efeitos na bolsa de valores de São Paulo, se deu no dia 27 de Outubro de 2008, que, como podemos ver na figura 5.11, corresponde ao mínimo do índice Bovespa em 29435 pontos.



**Figura 5.11** Valor do índice Bovespa no ápice da crise, no dia 27 de Outubro de 2008 com a respectiva previsão.

Utilizando o método da seção anterior e fazendo uma previsão de cinco pontos semestral, considerando

$$a_0 = 40363 \text{ em } 28/04/06, \quad a_1 = 39328 \text{ em } 27/10/06, \quad a_2 = 49229 \text{ em } 27/04/07, \\ a_3 = 64275 \text{ em } 26/10/07 \text{ e } a_4 = 65187 \text{ em } 25/04/08,$$

obtemos que a previsão para a data 27/10/08 será de 40363 pontos, o que corresponde a um erro de 37%. O valor do respectivo multiplicador é  $2,7 \times 10^{-16}$ . À primeira vista, podemos imaginar que um erro desta magnitude torna a análise inútil. Mas se refletirmos com mais cuidado, podemos ver que este método foi capaz de prever uma queda no índice apesar da recente bolha especulativa, que fez com que os preços apresentassem uma trajetória ascendente, coisa que o método tradicional do capítulo 2 não foi capaz de fazer. Pelos métodos lineares tradicionais, ao meu ver, não é possível, dada uma série temporal monotonicamente ascendente, obter previsões que contrariem a tendência. E se olharmos a figura 5.11, onde foram traçadas duas linhas horizontais, a inferior indicando o fundo da série em 29,5 mil pontos e a superior indicando a previsão em 40,5 mil pontos, vemos que o valor do índice parece “relaxar” para um valor de “equilíbrio” em torno do valor previsto, nos cinco meses logo após a quebra da bolsa. Esta conjectura corrobora uma conclusão oriunda da “Teoria das Finanças Comportamentais”, a conclusão de que o mercado, nas bolhas especulativas<sup>12</sup>, sempre reage exageradamente aos eventos extremos, sejam estes de euforia, sejam de pânico. Assim, me parece razoável que, após um período de pânico e a sua consequente irracionalidade, os investidores tendam a remediar suas atitudes excessivamente pessimistas e a consequência desse fenômeno seria essa “relaxação para o equilíbrio”.

Para a escolha do número de pontos de previsão (neste caso 5) e escolha da resolução da série (neste caso, semestral), foram feitos testes com o número de pontos indo de 3 a 6 e a resolução da série variou entre 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 e 13 meses. O que determinou a escolha dos parâmetros 5 pontos e resolução semestral foram os valores dos multiplicadores. A previsão escolhida foi aquela associada ao menor valor absoluto do multiplicador. Estes parâmetros foram testados com um método grosseiro e trabalhoso de tentativa e erro e, portanto, um método sistemático mais eficiente certamente retornaria valores potencialmente melhores.

Para finalizar, vemos nas figuras 5.12, 5.13, 5.14, gráficos análogos ao 5.11 para o índice Dow Jones, o índice Bovespa novamente e para o FTSE de Londres, respectivamente. Podemos ver que a previsão feita para o Dow Jones, onde foram usados os seis seguintes pontos para uma previsão anual,

$$a_0 = 7850 \text{ em } 10/10/02, \quad a_1 = 9675 \text{ em } 10/10/03, \quad a_2 = 10055 \text{ em } 10/10/04, \\ a_3 = 10292 \text{ em } 10/10/05, \quad a_4 = 11960 \text{ em } 10/10/06 \text{ e } a_5 = 14072 \text{ em } 10/10/07,$$

foi de 7850 e o valor do índice em 10/10/08 foi 7882, um erro de apenas 0,4%. Neste caso, o multiplicador calculado foi 0. Todos estes gráficos demonstram comportamentos completamente análogos e portanto, as conclusões tiradas para um deles servem imediatamente para os outros.

<sup>12</sup>Podemos fazer aqui uma analogia entre a fase em que o mercado se encontra inflado em uma bolha especulativa com a teoria dos fenômenos críticos. A divergência das derivadas termodinâmicas nesta teoria seria análogo à divergência da derivada do preço do ativo em relação ao tempo naquela. Quem leva esta analogia bem mais adiante é Sornette em [69].

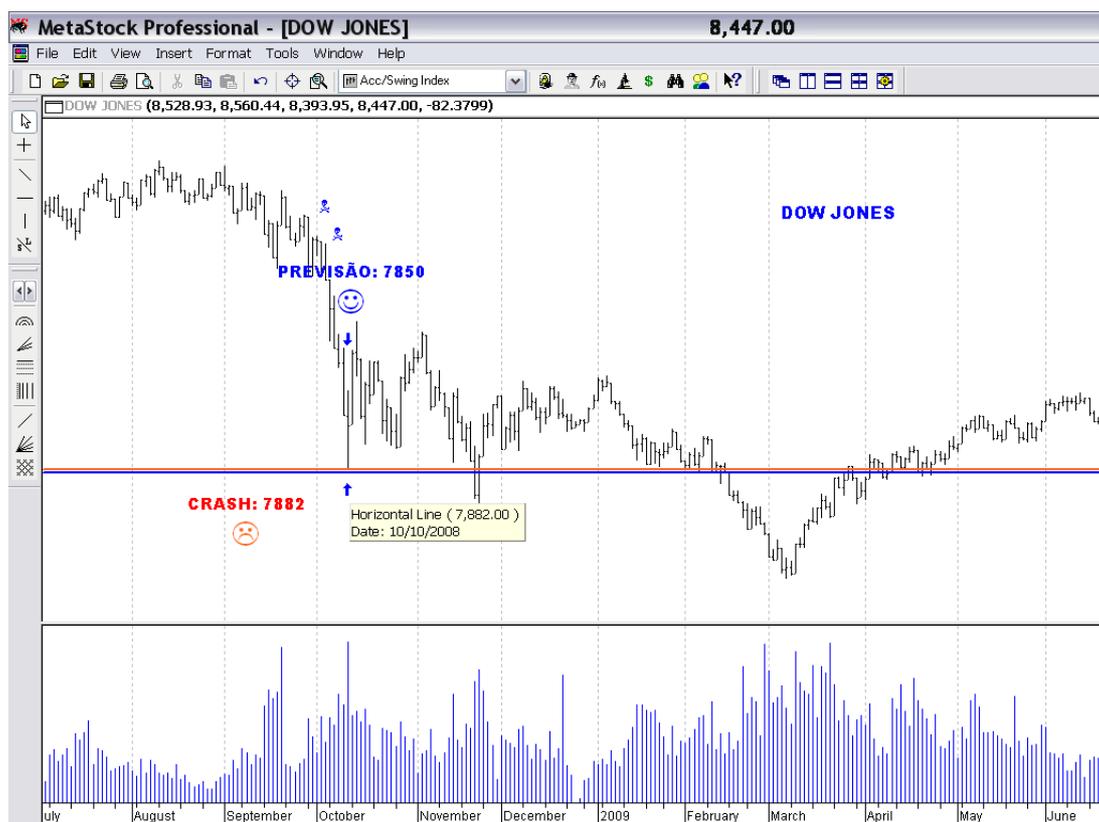


Figura 5.12 Previsão feita pelo método Bootstrap Auto-Similar para 10/10/2008 para Dow Jones



Figura 5.13 Previsão para 27/10/2008 para IBOV



Figura 5.14 Previsão para 27/10/2008 para FTSE

### 5.7.1 Discussão

Mostramos que as técnicas de ressonância da Física Teórica podem ser empregadas com sucesso na análise de séries temporais. Aplicamos esta abordagem na análise da série temporal correspon-

dente ao índice Bovespa, no período de Abril de 2006 a Abril de 2008, ao índice Dow Jones, no período que vai de Outubro de 2002 a Outubro de 2008, a para o índice FTSE, no período que inicia em Outubro de 2002 a vai até Outubro de 2008. Deste ponto de vista, as crises de mercado são similares aos fenômenos críticos na física estatística. Existe uma região temporal em torno da crise, onde o comportamento do mercado se mostra intimamente conectado com o comportamento em tempos relativamente distantes, exibindo inicialmente aspectos específicos, como oscilações log-periódicas causadas por flutuações [66]. O ponto de vista de que as crises de mercado possuem origens no comportamento coletivo de muitos agentes interagentes e que as crises no mercado de capitais são análogas aos fenômenos críticos foi também proposta por outros pesquisadores [51]. As semelhanças entre as crises no mercado de capitais e os fenômenos críticos dos sistemas estatísticos torna possível aplicar os mesmos métodos de ressonância na descrição do fenômeno.

## 5.8 Análise estatística

Utilizando o método proposto fomos capazes de fazer uma previsão para a série temporal. Entretanto, na vida real não será necessariamente o mais provável que irá ocorrer por que uma série temporal é a realização de um processo aleatório. O que precisamos para generalizar a abordagem é sermos capazes de apresentar todo um espectro de cenários possíveis ponderados por suas respectivas probabilidades, o que nos permitiria calcular as características estatísticas do processo aleatório.

Seja  $D_k$  uma base de dados de ordem  $k$  dada por

$$D_k = \{f_k, f_{k-1}, \dots, f_0 | t_k < t_{k-1} < \dots < 0\}. \quad (5.81)$$

onde os  $f_k$  são os valores da série temporal no instante  $t_k$ . Para cada base de dados (5.81) podemos construir a previsão autossimilar. Mas podemos utilizar conjuntos diferentes de bases de dados variando a ordem  $k$  da mesma, ou mudando os intervalos de tempo entre os momentos de tempo  $t_n$ , onde  $n = 0, 1, \dots, k$ , ou variando ambos a ordem da base de dados assim como sua escala, de tal forma que, em geral, podemos considerar um ensemble de bases de dados diferentes. Cada base de dados deste ensemble pode ser descrita por

$$D_k(j) = \{f_k^{(j)}, f_{k-1}^{(j)}, \dots, f_0 | t_k^{(j)} < t_{k-1}^{(j)} < \dots < 0\}, \quad (5.82)$$

onde o índice  $k$  é a ordem da base de dados, e  $j$  especifica a escala de tempo do passado. Para cada base de dados (5.82), obtemos uma previsão  $f_k^*(j, t)$ . Assim, existe um ensemble  $\{f_k^*(j, t)\}$  de previsões possíveis, ou cenários admitidos. Qual destes possíveis cenários será o verdadeiro? Para o propósito de atribuir probabilidades às diferentes previsões  $f_k^*(j, t)$ , podemos considerar a passagem de  $f_k^*(j, t)$  a  $f_{k+1}^*(j, t)$  como um movimento em relação a  $k$ . Então, o mapeamento  $\{f_k^*(j, t) | k = 1, 2, \dots\}$  será tratado como a imagem de um sistema dinâmico com tempo discreto  $k$ , como antes. A probabilidade do cenário  $f_k^*(j, t)$  pode ser definida como

$$p_k(j, t) = \frac{1}{Z_k(t)} \exp(-\Delta S_k(j, t)), \quad (5.83)$$

onde  $Z_k(t)$  é um fator de normalização, definido pela soma

$$Z_k(t) \equiv \sum_j \exp \{-\Delta S_k(j, t)\}$$

sobre todos os índices  $j$ , e a expressão

$$\Delta S_k(j, t) \equiv S_k(j, t) - S_1(j, t) \quad (5.84)$$

mostra a variação da entropia com relação ao tempo efetivo  $k$ . A entropia de um sistema dinâmico pode ser definida, por analogia com sistemas estatísticos, como o logaritmo de um volume de fase elementar, este último, em nosso caso, sendo  $|\delta f_k^*(j, t)|$ . Assim, a entropia dinâmica é

$$S_k(j, t) \equiv \ln |\delta f_k^*(j, t)|. \quad (5.85)$$

A variação de entropia (5.84) se torna

$$\Delta S_k(j, t) = \ln \left| \frac{\delta f_k^*(j, t)}{\delta f_1^*(j, t)} \right|. \quad (5.86)$$

Com a notação do multiplicador

$$m_k(j, t) \equiv \frac{\delta f_k^*(j, t)}{\delta f_1^*(j, t)} = \frac{\partial f_k^*(j, t)/\partial t}{\partial f_1^*(j, t)/\partial t}, \quad (5.87)$$

a variação de entropia (5.86) se reduz a

$$\Delta S_k^*(j, t) = \ln |m_k(j, t)|. \quad (5.88)$$

É conveniente introduzir o multiplicador médio  $\bar{m}_k(t)$  pela relação

$$\frac{1}{|\bar{m}_k(t)|} \equiv \sum_j \frac{1}{|m_k(j, t)|}. \quad (5.89)$$

Usando as equações (5.88) e (5.89), nós temos

$$p_k(j, t) = \left( \frac{\bar{m}_k(t)}{m_k(j, t)} \right). \quad (5.90)$$

Note que a *probabilidade de cenário* (5.90) é normalizada com relação à soma sobre o índice  $j$  correspondendo a diferentes escalas de tempo. No caso particular de uma escala fixa, podemos realizar a normalização com relação a uma soma em  $k$ .

Assuma que estejamos interessados no que acontecerá no instante  $t = k + \Delta t$ . Para isto, podemos construir o conjunto  $\{f_k^*(k + \Delta t)\}$ , onde  $k = 1, 2, \dots, N$ , das previsões auto-similares. Desta forma, o espectro  $\{f_k^*(k + \Delta t)\}_{k=1}^N$  de cenários possíveis é ponderado pelas probabilidades de cenário (5.90). A previsão média será

$$\langle f(\Delta t) \rangle \equiv \sum_{k=1}^N p_k(\Delta t) f_k^*(k + \Delta t). \quad (5.91)$$

Como para qualquer análise estatística, podemos definir a dispersão

$$\sigma^2(\Delta t) \equiv \langle f^2(\Delta t) \rangle - \langle f(\Delta t) \rangle^2, \quad (5.92)$$

o desvio padrão

$$\sigma(\Delta t) \equiv [\langle f^2(\Delta t) \rangle - \langle f(\Delta t) \rangle^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.93)$$

significando para os mercados a volatilidade, e o coeficiente de variação

$$\rho(\Delta t) \equiv \frac{\sigma(\Delta t)}{\langle f(\Delta t) \rangle} \cdot 100\%. \quad (5.94)$$

Quando o verdadeiro valor  $x_{N+\Delta t}$  para o momento considerado de tempo no futuro for conhecido, podemos encontrar a porcentagem do erro da previsão média (5.91) como

$$\varepsilon(\Delta t) \equiv \frac{\langle f(\Delta t) \rangle - x_{N+\Delta t}}{|x_{N+\Delta t}|} \cdot 100\%. \quad (5.95)$$

O procedimento descrito para analisar séries temporais constitui a *análise estatística auto-similar*.

### 5.8.1 Exemplos de bolhas de mercado

Para ilustrar o procedimento desenvolvido, selecionaremos vários exemplos de séries temporais exibindo bolhas. Consideraremos bases de dados de ordem 6 para o tempo de previsão e selecionamos  $\Delta t = 1$ .

**Exemplo 1:** A dinâmica do índice de preços do grama do ouro na Africa do Sul no período que vai do segundo bimestre de 1986 ao segundo bimestre de 1987. O último valor, no último bimestre é aceito ser 100 (1987 = 100). Vamos fazer uma previsão para o terceiro bimestre de 1987, comparando-a com o real valor que é  $x_6 = 81,64$ . Os dados  $x_n$  e os resultados para as previsões autossimilares  $f_n^*(n+1)$ , os multiplicadores locais relacionados  $m_n^*(n+1)$  e as correspondentes probabilidades são dados na tabela 5.1.

n	0	1	2	3	4	5	6
$x_n$	52,734	69,141	82,813	85,938	93,750	100	<b>81,640</b>
$f_n^*(n+1)$	–	107,122	109,355	82,812	132,501	$\infty$	
$m_n^*(n+1)$	–	1	1	$-4 \times 10^{-4}$	0,233	$\infty$	
$p_n(1)$	–	$4 \times 10^{-4}$	$4 \times 10^{-4}$	0,997	0,002	0	

**Tabela 5.1** Exemplo 1

A previsão média (5.91), desvio padrão (5.93), o coeficiente de variação (5.94), e o erro (5.95), respectivamente, são

$$\langle f \rangle = 82,926, \quad \sigma = 2,25, \quad \rho = 2,71\%, \quad \varepsilon = 1,58\%.$$

**Exemplo 2** Seja o índice do preço do tabaco nos EUA de 1965 até 1970. Vamos fazer uma previsão para 1971. O valor para 1990 é tomado como sendo 100. (1990 = 100). Os resultados estão na tabela 5.2. Outras características são:

$$\langle f \rangle = 39,74, \quad \sigma = 2,27, \quad \rho = 5,71\%, \quad \varepsilon = -4,93\%.$$

n	0	1	2	3	4	5	6
$x_n$	33,9	36,58	37,1	37,9	39,5	45,9	<b>41,8</b>
$f_n^*(n+1)$	–	54,6	37,5	38,4	36,5	41,4	
$m_n^*(n+1)$	–	1	1	0,023	0,152	–0,024	
$p_n(1)$	–	0,011	0,011	0,464	0,070	0,445	

**Tabela 5.2** Exemplo 2

**Exemplo 3** O comportamento do índice boliviano de zinco de 1979 até 1984, fornece um exemplo de um crescimento não monotônico. Faremos uma previsão para 1985. A análise correspondente se encontra na tabela 5.3, onde o valor para 1990 é feito ser igual a 100. Outras características são:

$$\langle f \rangle = 60,35, \quad \sigma = 6,41, \quad \rho = 10,6\%, \quad \varepsilon = -2,74\%.$$

n	0	1	2	3	4	5	6
$x_n$	53,5	53,6	61,2	58,3	54,6	68,4	<b>58,7</b>
$f_n^*(n+1)$	–	90,5	44,7	61,3	59,3	47,0	
$m_n^*(n+1)$	–	1	1	–0,027	–0,620	–0,288	
$p_n(1)$	–	0,023	0,023	0,839	0,037	0,079	

**Tabela 5.3** Exemplo 3

**Exemplo 4** O índice espanhol, do segundo bimestre de 1986 até o segundo bimestre de 1987. O tempo de interesse é o terceiro bimestre de 1987. A análise está na tabela 5.4 e

$$\langle f \rangle = 80,479, \quad \sigma = 7,354, \quad \rho = 9,14\%, \quad \varepsilon = 9,62\%.$$

**Exemplo 5** Seja o índice de preço da Índia de 1969 até 1974. O tempo de interesse é 1975. Os resultados estão na tabela 5.5. Outras características são:

$$\langle f \rangle = 33,5, \quad \sigma = 3,44, \quad \rho = 10,2\%, \quad \varepsilon = 4,8\%.$$

n	0	1	2	3	4	5	6
$x_n$	52,721	62,338	63,906	79,243	76,589	100	<b>73,026</b>
$f_n^*(n+1)$	–	141,147	63,083	94,207	43,978	78,060	
$m_n^*(n+1)$	–	1	1	–0,029	1,109	–0,005	
$p_n(1)$	–	0,004	0,004	0,145	0,004	0,843	

**Tabela 5.4** Exemplo 4

n	0	1	2	3	4	5	6
$x_n$	30,9	33,4	32,3	31,8	35,1	38,8	<b>31,9</b>
$f_n^*(n+1)$	–	43,3	46,3	31,4	33,7	32,4	
$m_n^*(n+1)$	–	1	1	–0,170	0,132	–0,101	
$p_n(1)$	–	0,039	0,039	0,232	0,299	0,390	

**Tabela 5.5** Exemplo 5

**Exemplo 6** Seja o índice de preço mexicano de 1989 até 1994 (1990 = 100). O tempo de previsão é 1995. Os resultados estão na tabela 5.6. Outras características são:

$$\langle f \rangle = 365,0, \quad \sigma = 47,8, \quad \rho = 13,1\%, \quad \varepsilon = -6,65\%.$$

**Exemplo 7** Seja o índice de preço coreano de 1973 até 1978 (1985 = 100). Os resultados estão na tabela 5.7. Outras características são:

$$\langle f \rangle = 84,8, \quad \sigma = 16,4, \quad \rho = 19,3\%, \quad \varepsilon = -2,35\%.$$

**Exemplo 8** Seja o índice de preço do cobre na Inglaterra de 1975 até 1980 (1990 = 100). Os resultados estão na tabela 5.8. Outras características são:

$$\langle f \rangle = 67,9, \quad \sigma = 34,1, \quad \rho = 50,2\%, \quad \varepsilon = 3,56\%.$$

**Exemplo 9** Seja o índice de preço da Dinamarca de 1968 até 1973 (1985 = 100). Os resultados estão na tabela 5.9. Outras características são:

$$\langle f \rangle = 18,1, \quad \sigma = 11,1, \quad \rho = 61,3\%, \quad \varepsilon = -5\%.$$

n	0	1	2	3	4	5	6
$x_n$	57,7	100	190,1	291,3	325,6	442,1	<b>389,3</b>
$f_n^*(n+1)$	–	666,0	288,9	510,0	$\infty$	350,1	
$m_n^*(n+1)$	–	1	1	0,020	$\infty$	–0,002	
$p_n(1)$	–	0,002	0,002	0,091	0	0,906	

**Tabela 5.6** Exemplo 6

n	0	1	2	3	4	5	6
$x_n$	57,6	56,7	63,0	77,3	81,7	103,4	<b>86,8</b>
$f_n^*(n+1)$	–	139,0	74,3	94,2	52,5	60,6	
$m_n^*(n+1)$	–	1	1	0,013	0,256	–0,038	
$p_n(1)$	–	0,009	0,009	0,0698	0,035	0,239	

Tabela 5.7 Exemplo 7

n	0	1	2	3	4	5	6
$x_n$	46,5	52,7	49,2	51,3	74,1	82,1	<b>65,5</b>
$f_n^*(n+1)$	–	92,0	155,9	46,5	59,7	365,9	
$m_n^*(n+1)$	–	1	1	–0,269	0,213	49,371	
$p_n(1)$	–	0,096	0,096	0,356	0,450	0,002	

Tabela 5.8 Exemplo 8

**Exemplo 10** Seja o índice mundial de commodities de 1969 até 1974 (1990 = 100). Os resultados estão na tabela 5.10. Outras características são:

$$\langle f \rangle = 63,7, \quad \sigma = 43,2, \quad \rho = 67,8\%, \quad \varepsilon = -10,2\%.$$

Nesta subseção, generalizamos o método da análise autossimilar de séries temporais tornando a abordagem estatística. As probabilidades de cenário foram introduzidas. O método torna possível analisar todo o espectro de previsões por considerar diferentes resultados caracterizando-os pelos seus pesos. A previsão média é definida como sendo o ponto fixo médio. Esta última não precisa necessariamente ser muito próxima da previsão mais provável ou próxima do valor realmente realizado, apesar que na maioria dos casos elas o são. Vários exemplos de séries temporais exibindo bolhas ilustraram a abordagem. Como uma série temporal é a realização de um processo estocástico, o estouro da bolha é um evento que pode ser previsto somente no sentido probabilístico. O máximo que uma teoria de previsão pode fazer é definir um espectro de possibilidades ponderados por suas correspondentes probabilidades.

n	0	1	2	3	4	5	6
$x_n$	12	14	13	12	17	26	<b>19</b>
$f_n^*(n+1)$	–	49	25	12	15	454	
$m_n^*(n+1)$	–	1	1	–0,349	0,126	467	
$p_n(1)$	–	0,078	0,078	0,224	0,620	$2 \times 10^{-4}$	

Tabela 5.9 Exemplo 9

n	0	1	2	3	4	5	6
$x_n$	40,4	39,7	37,1	42,8	69,2	83,9	<b>70,2</b>
$f_n^*(n+1)$	–	105,8	202,6	37,4	58,3	37,1	
$m_n^*(n+1)$	–	1	1	–0,320	0,171	–0,392	
$p_n(1)$	–	0,074	0,074	0,231	0,432	0,189	

Tabela 5.10 Exemplo 10

## 5.9 Conclusão

Neste trabalho, tivemos como objetivo investigar a utilização de algumas técnicas comumente utilizadas no estudo de séries temporais financeiras, e compará-las com um método proposto recentemente, o método da aproximação autossimilar, com o objetivo de fazer previsões sobre os seus possíveis valores futuros.

Como discutido no capítulo 1, existe um hipótese, a Hipótese de Mercado Eficiente (HME), que de certa forma está relacionada a um certo limite quanto à possibilidade ou não de se realizar o programa de se fazer previsões em séries temporais financeiras. A veracidade desta hipótese implica a existência de uma distribuição de probabilidades para os log-retornos dos preços, a saber, a distribuição normal, assim como a não dependência serial dos preços. Existe muito debate na comunidade acadêmica sobre o fato de esta hipótese ser ou não verdadeira e conseqüentemente, muitos esforços foram e são devotados na tentativa de contradizê-la. Muitas abordagens já foram realizadas, e dentre elas, destacam-se aquelas que tentam encontrar correlações de longo alcance nas séries através da estimação do chamado expoente de Hurst da série, número este que também reflete seu aspecto multifractal e, portanto, quantifica o caráter de autossimilaridade da mesma. Resumidamente, se o valor do expoente de Hurst for significativamente maior que 0,5, temos que a seqüência de números associada tem uma persistência característica de uma seqüência com memória de longo alcance. O valor do expoente de Hurst foi calculado para alguns ativos da principal bolsa de valores do Brasil e verificamos que ele foi consistentemente maior que 0,5, o que faz com que a análise subsequente da renormalização autossimilar seja, ao meu ver, parcialmente justificada.

Uma abordagem motivada por métodos de ressonância da física teórica foi proposta por Yukalov. Tal método assume que, em torno de uma região temporal que envolve um crash ou uma bolha especulativa (perto de um ponto crítico), a série possui características de autossimilaridade e, quando esta hipótese é expressa matematicamente através da chamada *autossimilaridade de evolução*, juntamente com o reconhecimento de que o sistema dinâmico associado à autossimilaridade de evolução pode ser posto em correspondência biunívoca com uma seqüência de aproximações do valor ao qual sucumbirá o índice de preços, podemos prever o comportamento da série, mesmo na presença anterior de uma tendência monotônica, como a observada no que antecede a crise mais recente testada, comumente conhecida como a crise do subprime. Verificamos que, enquanto os métodos tradicionais dificilmente previriam uma queda acentuada logo após uma longa e monótona tendência ascendente, o método de Yukalov previu corretamente uma queda nos índices mais importantes do mundo, o que, por si só, já é

um feito surpreendente.

Fizemos um estudo dos log-retornos de alguns dos ativos mais líquidos do Ibovespa e verificamos que uma distribuição normal inversa, que é um caso particular de uma classe muito ampla de distribuições de probabilidade, as distribuições Hiperbólicas Generalizadas, se ajustam muito bem aos dados empíricos, tanto para os dados do passado quanto para os dados mais recentes, o que dá a estas distribuições uma caráter bastante robusto. De posse destas distribuições de probabilidade, minha intenção inicial era fazer simulações de Monte Carlo para a precificação de opções e posterior estudo de estratégias que envolvem opções, mas o tempo disponível foi demasiado exíguo e este estudo ficará para um futuro não muito distante.

Também aplicamos a moderna teoria de carteiras aos 9 ativos mais líquidos do Ibovespa e fizemos uma espécie de backtesting simplificado. Concluimos que a moderna teoria de carteiras de Markowitz é potencialmente útil na determinação de carteiras com variância mínima. Este estudo se encontra no apêndice B e através dele foi possível refutar, mesmo que de forma superficial, a afirmação, feita no contexto de Hipótese de Mercado Eficiente em sua forma fraca, de que é impossível consistentemente bater o mercado.

Os fatos de que as séries parecem indicar correlações de longo alcance, através de seus respectivos expoentes de Hurst  $> 0,5$ , além de as distribuições de probabilidade dos log-retornos serem significativamente diferentes da distribuição normal e finalmente que previsões feitas utilizando-se a Aproximação Autossimilar revelaram-se com resultados muito sugestivos parecem negar, de maneira consistente, a veracidade da Hipótese de Mercado Eficiente.

# Alguns Conceitos de Sistemas Dinâmicos

## A.1 Motivação

Neste capítulo faremos algumas considerações relevantes sobre sistemas dinâmicos para o desenvolvimento da técnica de Renormalização Algébrica Auto-Similar, tais como os conceitos de mapeamento, ponto fixo, espaço de fase, estabilidade de trajetórias, que utilizaremos no capítulo 7.

A principal razão para estudarmos dinâmica caótica de sistemas dinâmicos está associada à obtenção de um melhor entendimento das possíveis causas da aleatoriedade dos preços. Obviamente, novas informações fazem os preços do mercado se moverem. Algumas notícias eventualmente aparecem inesperadamente e os preços, conseqüentemente, mudam de forma imprevisível. Mas serão as novas informações as únicas fontes para a aleatoriedade das mudanças de preços? Não há dúvidas de que os preços flutuam mesmo na ausência de novas informações. Uma provocante proposição é a de que a dinâmica dos preços pode ser atribuída em parte à complexidade intrínseca dos mercados financeiros. A possibilidade de que processos determinísticos modulem as variações de preços possui uma importante aplicação prática: apesar destes processos apresentarem regimes caóticos de comportamento, sua natureza determinística significa que os preços podem ser *parcialmente* previsíveis. Entretanto, pesquisas sobre caos em finanças e economia estão recheadas de discussões a respeito de uma limitada previsibilidade dos processos sob investigação [36].

Há vários esforços para encontrar possíveis atratores estranhos<sup>1</sup> nas séries temporais econômicas e financeiras [36] [37]. Discernir uma dinâmica caótica determinística de um processo estocástico “puro” é sempre uma tarefa não trivial. Este problema é às vezes mais complicado para mercados financeiros porque os parâmetros podem possuir componentes não estacionários [38]. As pesquisas mostram pequenas (se existem) evidências de caos em séries econômicas e financeiras. Mas a busca por regimes caóticos permanece um interessante aspecto da pesquisa empírica.

O estudo dos sistemas complexos<sup>2</sup> começa a partir de um conjunto de modelos que capturam os aspectos da dinâmica de tais sistemas. Começaremos nossa discussão com o conceito de

---

<sup>1</sup>No regime caótico, as soluções do sistema podem permanecer em uma região do espaço de fase chamada *atrator estranho*. Estas soluções nunca se repetem e nunca se interceptam. Como conseqüência, no regime caótico, o sistema se torna imprevisível.

<sup>2</sup>Um sistema complexo pode ser definido como um conjunto de elementos interdependentes que interagem com objetivos comuns formando um todo, e onde cada um dos elementos componentes comporta-se, por sua vez, como um sistema cujo resultado é maior do que o resultado que as unidades poderiam ter se funcionassem independentemente. Qualquer conjunto de partes unidas entre si pode ser considerado um sistema, desde que as relações entre as partes e o comportamento do todo sejam o foco de atenção.

mapeamento iterativo.

## A.2 Mapeamento Iterativo e Caos

Um mapeamento iterativo  $f$  é uma função que faz evoluir o estado de um sistema,  $x$ , em tempo discreto, definida da seguinte forma:

$$x(t) = f(x(t - \delta t)) \quad (\text{A.1})$$

ou, equivalentemente,

$$x_n = f(x_{n-1})$$

onde  $x(t)$  descreve o estado do sistema no tempo  $t$ . Por conveniência iremos geralmente medir o tempo em unidades de  $\delta t$  que então recebe o valor 1, e o tempo assume valores inteiros começando da condição inicial em  $t = 0$ . Mapeamentos que começam com diferentes condições iniciais eventualmente exibem comportamentos que se enquadram em um de três tipos possíveis: ponto fixo, órbita periódica e comportamento caótico. Um ponto fixo é análogo a um ponto de equilíbrio. Por exemplo, um oscilador harmônico amortecido tenderá para sua posição de equilíbrio e ficará nele. Pontos fixos não se modificam por seus mapeamentos e satisfazem equações da forma  $f(f(f(\dots f(x)\dots))) = x$  onde  $f$  representa o mapeamento. Certos pontos fixos são atratores; se você começa de um ponto suficientemente próximo ao ponto fixo, então a órbita será atraída para o ponto fixo e o pêndulo amortecido é outro exemplo onde a posição de equilíbrio é um atrator. Estruturas repelentes tendem a levar o sistema para longe do ponto fixo, como o movimento perto de uma região de equilíbrio instável. Órbitas periódicas ocorrem quando os pontos fixos se alternam entre dois ou mais valores. As propriedades da órbita podem mudar quando os parâmetros do mapeamento variam. Os valores de um parâmetro onde a natureza do movimento muda são conhecidos como pontos de bifurcação. Em um ponto de bifurcação, um período de uma órbita pode se subdividir em um período de duas órbitas, depois num período de quatro órbitas e eventualmente se tornar caótico.

Caos, um comportamento imprevisível em longo prazo, é uma consequência da sensibilidade do sistema a uma mudança nas condições iniciais. Não importa quão precisas sejam suas medidas em sistemas deste tipo, suas previsões do movimento subsequente estarão radicalmente erradas em um curto espaço de tempo.

## A.3 Quantificando o Caos

Como foi observado no início deste capítulo, é importante entender quando a aleatoriedade de uma série temporal é causada por ruído ou pela natureza caótica do respectivo processo determinístico. Nesta seção iremos considerar duas formas de quantificar o caos, uma com o expoente de Lyapunov e outra através do conceito de Entropia. O expoente de Lyapunov quantifica a divergência das órbitas de sistemas caóticos. Mais precisamente, considere um mapeamento  $f(x)$  a faça o sistema evoluir partindo de condições iniciais próximas mas diferentes,  $x$  e  $x + \varepsilon$ .

Após  $n$  iterações as órbitas divergentes podem ser caracterizadas por

$$|f^n(x + \varepsilon) - f^n(x)| \simeq \varepsilon e^{n\lambda_n} \quad (\text{A.2})$$

onde  $f^n(x) = f(f(\dots f(x)))$ . O parâmetro  $\lambda_n$  representa a taxa de divergência. No limite de  $\varepsilon$  tendendo a zero, o expoente de Lyapunov é determinado pela derivada do mapeamento

$$\lambda_n \simeq \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x + \varepsilon) - f^n(x)}{\varepsilon} \right| \simeq \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x)}{dx} \right| \quad (\text{A.3})$$

O expoente de Lyapunov é definido como  $\lambda = \lim(\lambda_n, n \rightarrow \infty)$ . Pode ser mostrado que isto é equivalente a

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df^i(x)}{dx} \right| \quad (\text{A.4})$$

Esta expressão para  $\lambda$  mede a taxa de separação exponencial entre duas órbitas próximas. Se  $\lambda$  for negativo, então as órbitas convergem e o sistema dinâmico é insensível às suas condições iniciais. Se  $\lambda$  for positivo, a distância entre duas órbitas cresce exponencialmente, e o sistema apresenta sensibilidade às condições iniciais.

Uma outra forma de quantificar a desordem no caos e através de sua Entropia. Se  $p$  é uma lista de probabilidades  $p_i$ , então a entropia é definida como

$$\text{entropia} = - \sum_{i=1}^n p_i \log(p_i) \quad (\text{A.5})$$

A entropia mede a homogeneidade da distribuição do sistema em seus vários estados no espaço de fase. Um sistema com uma entropia muito baixa se encontra usualmente em um de poucos estados possíveis, e ele é dito ser mais previsível que um sistema com grande entropia. Se um sistema possui somente um estado possível, dizemos que o sistema é perfeitamente ordenado - conhecemos *a priori* em qual estado o sistema se encontra e nenhuma informação nova é obtida.

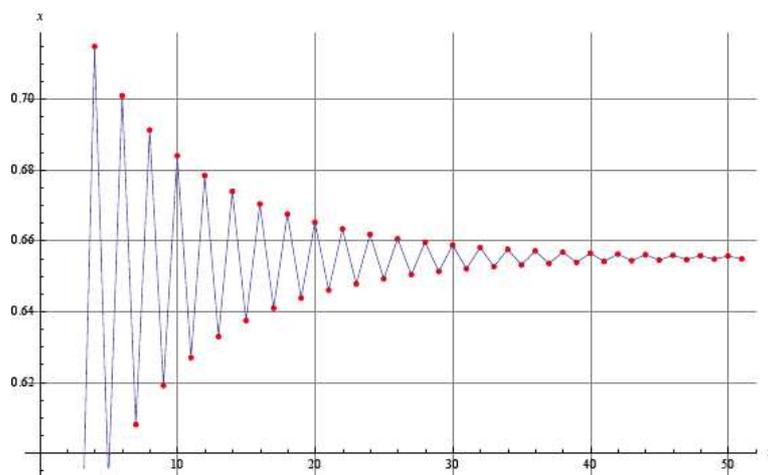
## A.4 O mapeamento logístico

Para exemplificar os conceitos abordados acima, utilizaremos o clássico exemplo do mapeamento logístico. O mapeamento logístico é definido por

$$x_n = \mu x_{n-1}(1 - x_{n-1}) \quad (\text{A.6})$$

onde  $\mu$  é um parâmetro no intervalo de 0 a 4 e  $x_n$  está entre 0 e 1. Todas as condições iniciais eventualmente se encaixam em um dos seguintes três tipos de comportamento:

- Pontos fixos, onde os valores das iterações se aproximam de um valor estável.
- Órbitas periódicas, onde as iterações se alternam entre dois ou mais valores.



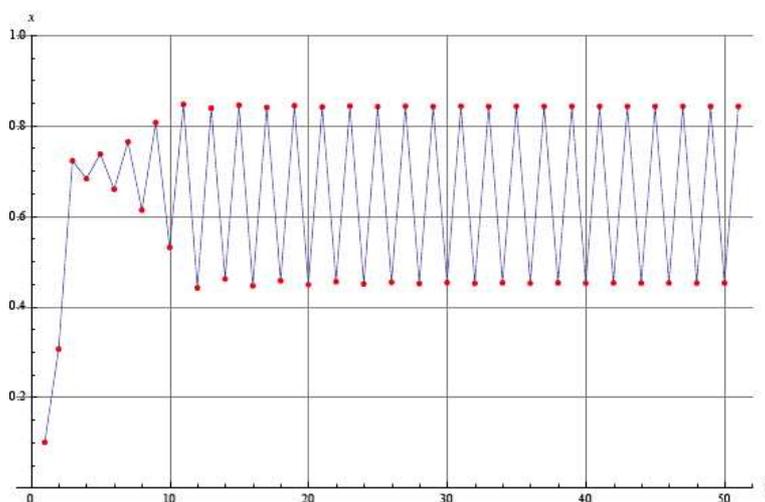
**Figura A.1** Mapeamento logístico, com  $\mu = 2,9$ ,  $x_0 = 0,1$

- Órbitas caóticas onde as iterações se alternam entre valores imprevisíveis.

Por exemplo, no mapeamento logístico, usando  $\mu = 2,9$ , começando de  $x_0 = 0,1$ , após 50 iterações teremos o comportamento visto no gráfico (A.1).

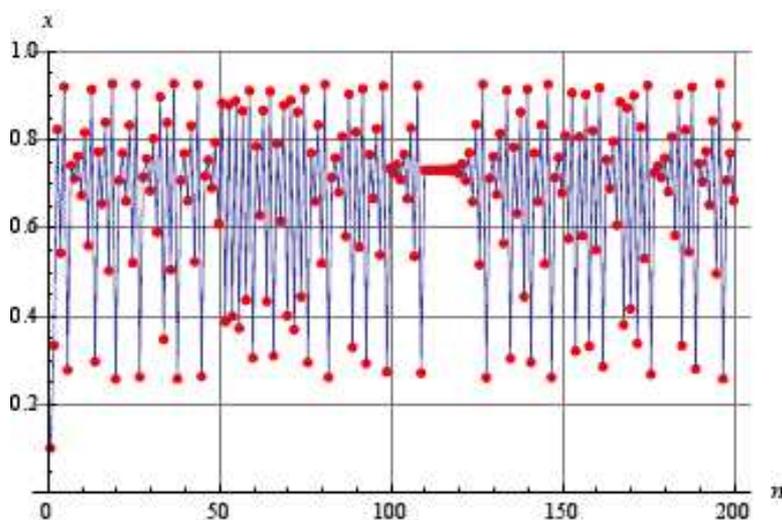
O gráfico ilustra como a órbita converge para o valor 0,655. Este gráfico é muito parecido com o gráfico do oscilador amortecido onde as amplitudes vão para zero.

Para mostrar um período com duas órbitas, com pontos fixos iguais a 0,84 e 0,45, basta fazer  $\mu = 3,4$ . Observe a figura (A.2).



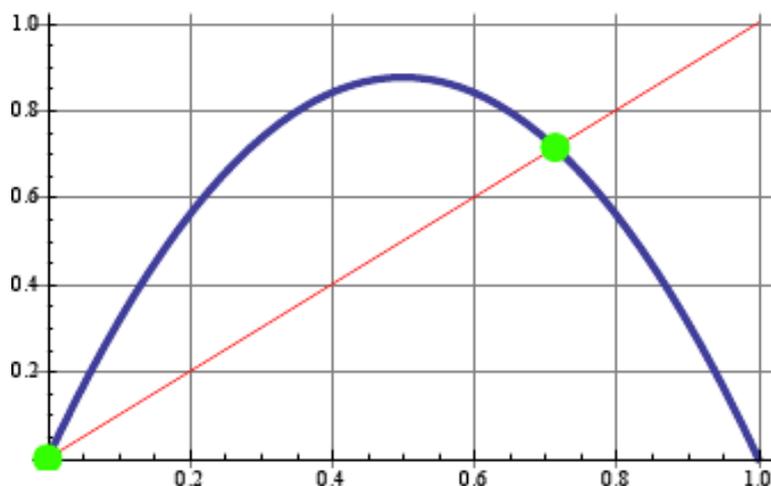
**Figura A.2** Mapeamento logístico, com  $\mu = 3,4$ ,  $x_0 = 0,1$

Para  $\mu = 3,54$  teremos um período de quatro órbitas,  $\mu = 3,55$  um período de oito órbitas, e, finalmente, para  $\mu = 3,57$ , um comportamento caótico emerge, como ilustrado na figura (A.3).



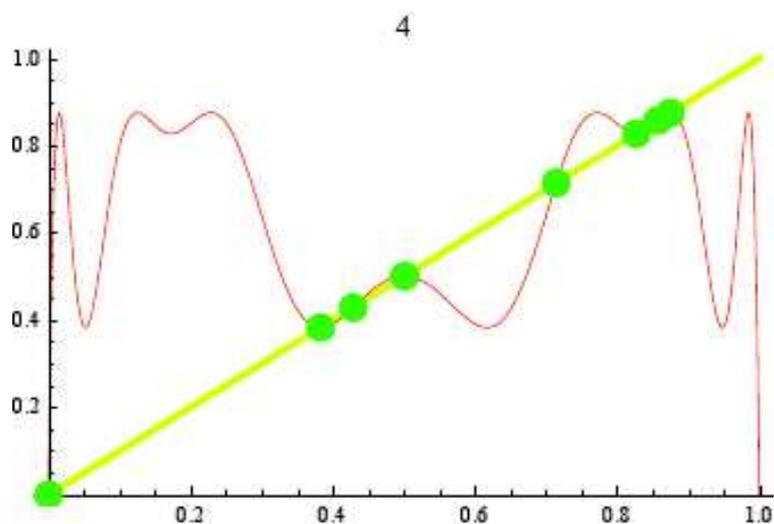
**Figura A.3** Caos no mapeamento logístico com  $\mu = 3,7$  e  $x_0 = 0,1$

Existe uma maneira gráfica de resolver as equações de ponto fixo  $x = f(f(\dots f(x)\dots))$ . Se você plotar os lados direito e esquerdo de  $x = f(f(\dots f(x)\dots))$ , então os pontos fixos são determinados pela interseção das curvas. No gráfico (A.4), vemos a solução para  $\mu = 7/2$ :



**Figura A.4** Solução gráfica com  $\mu = 7/2$

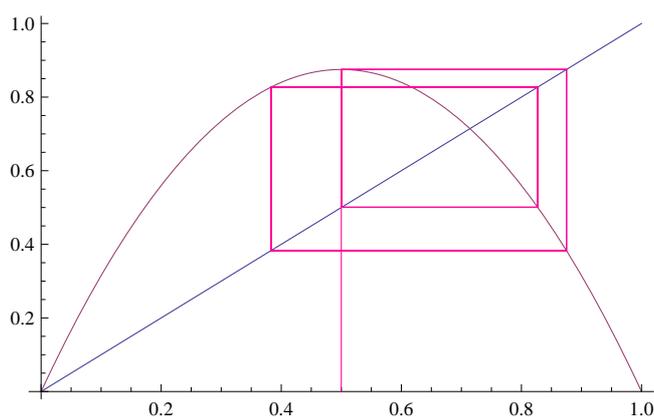
Pontos fixos são como pontos de equilíbrio no espaço de fase; se o sistema começa nele, permanece nele. Se  $x_0$  satisfaz a equação  $f(x_0, \mu) = x_0$ , onde  $f$  é o mapeamento, então  $x_0$  é um ponto fixo de período um. Um ponto fixo  $x_0$  de período  $n$  é aquele tal que após  $n$  iterações o mapeamento volta a  $x_0$ . Por exemplo, um ponto fixo de período dois satisfaz a equação  $f(f(x_0, \mu), \mu) = x_0$ . O ponto fixo periódico geral satisfaz uma equação da forma  $f(f(\dots f(x_0)\dots)) = x_0$ . Para o mapeamento logístico, vemos da figura (A.4) que os pontos fixos de período um são  $x_0 = 0$  e  $x_0 = \frac{\mu-1}{\mu}$ . Os pontos fixos de período quatro estão representados no gráfico (A.5).



**Figura A.5** Solução gráfica de período quatro

#### A.4.1 ‘Teia de Aranha’

Um mapeamento possui uma outra maneira de mostrar o comportamento de suas órbitas e seus pontos fixos. Desenhe uma linha vertical começando em  $x_0$  no eixo  $x$  até encostar na curva da função  $f$ . Trace agora uma linha horizontal partindo do ponto na curva até interceptar a reta  $f(x) = x$ . Este ponto possui coordenadas  $\{f(x_0), f(x_0)\}$ . A linha vertical construída a partir deste último ponto até interceptar a curva  $f$  novamente nos fornece um ponto com coordenadas  $\{f(x_0), f(f(x_0))\}$ . Se o processo é continuado, então as linhas formam um comportamento chamado de ‘Teia de Aranha’<sup>3</sup>. Se existir um ponto de período  $n$ , então o comportamento se repete. Este procedimento está explicitado na figura (A.6) para o caso do mapeamento logístico.

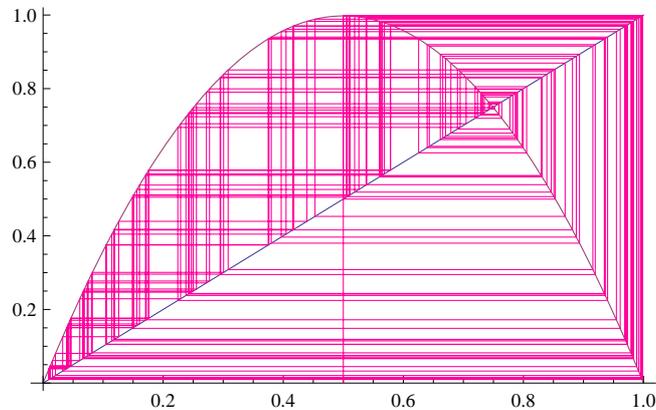


**Figura A.6** Teia de Aranha Logística

Quando  $\mu$  cresce, as linhas ricocheteiam vigorosamente para sempre, mas nunca se repetem.

<sup>3</sup>Cobweb

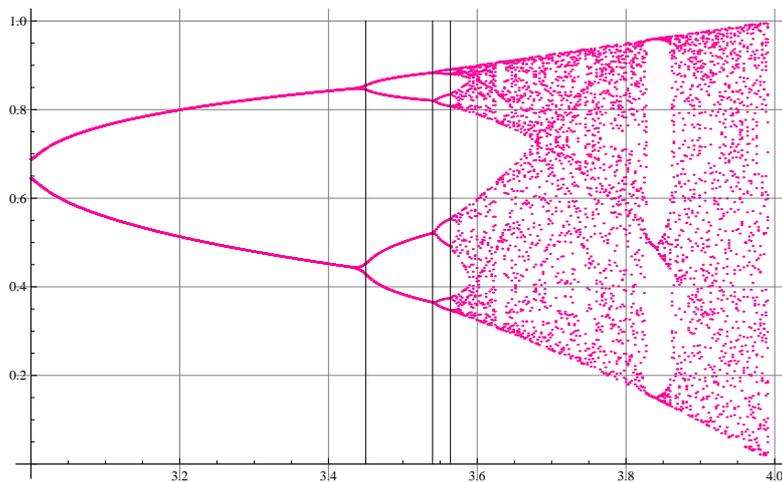
Na figura (A.7) temos a teia de aranha formada quando  $\mu = 3,99$ . Observe que não parece existir qualquer comportamento assintótico.



**Figura A.7** Teia de aranha logística para  $\mu = 3,99$

#### A.4.2 Bifurcação

Uma forma elegante de examinar o comportamento de um mapeamento quando  $\mu$  muda é construindo um diagrama de bifurcação. Um diagrama de bifurcação plota  $\mu$  no eixo horizontal e os pontos  $x_n$  no eixo vertical. Para o mapeamento logístico para  $\mu$  entre 3 e 3,99, o diagrama de bifurcação fica como apresentado na figura (A.8).

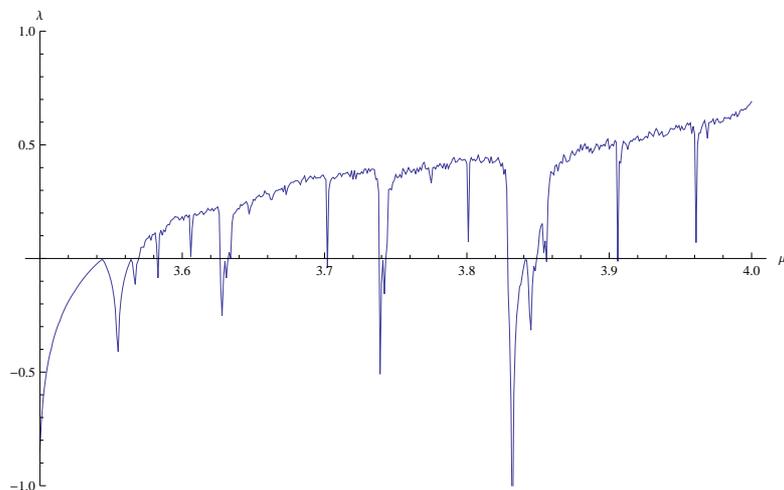


**Figura A.8** Diagrama de bifurcação para  $\mu$  entre 3 e 3,99

Adicionamos três linhas verticais em  $\mu = \{3,45; 3,54; 3,564\}$  para mostrar os começos dos pontos de bifurcação. Regiões além de  $\mu = 3,7$  mostram janelas de comportamento periódico intercaladas por janelas de comportamento caótico.

### A.4.3 Expoente de Lyapunov e Entropia do Mapeamento Logístico

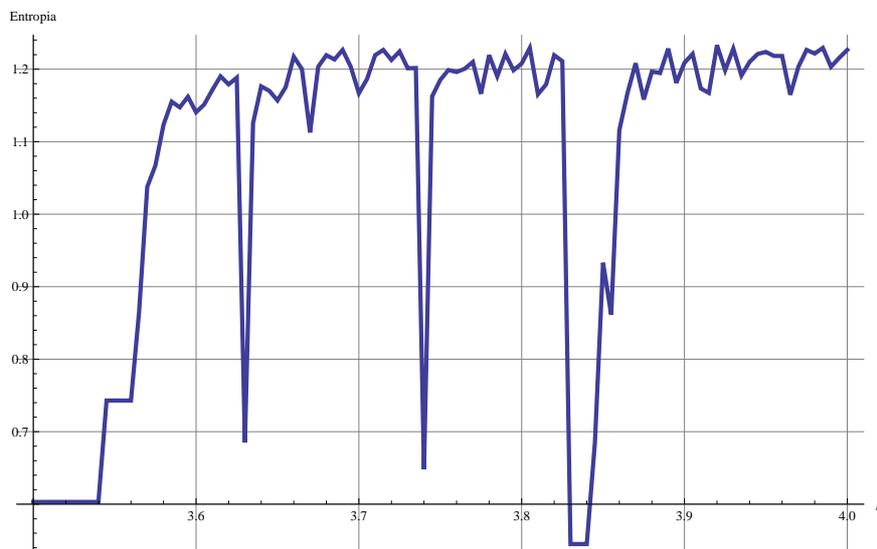
O expoente de Lyapunov para  $\mu$  entre 3,5 e 4 está representado graficamente na figura (A.9). Trajetórias feitas para condições iniciais próximas convergirão se  $\lambda$  for negativo e divergirão



**Figura A.9** Expoente de Lyapunov para  $\mu$  entre 3,5 e 4

se  $\lambda$  for positivo, indicando a presença de sensibilidade às condições iniciais.

Vamos agora calcular a entropia para  $\mu$  entre 3,5 e 4. A entropia segue de  $-\sum_{i=1}^n p_i \log(p_i)$ . Para  $\mu$  entre 3,5 e 4, a entropia foi plotada no gráfico (A.10).

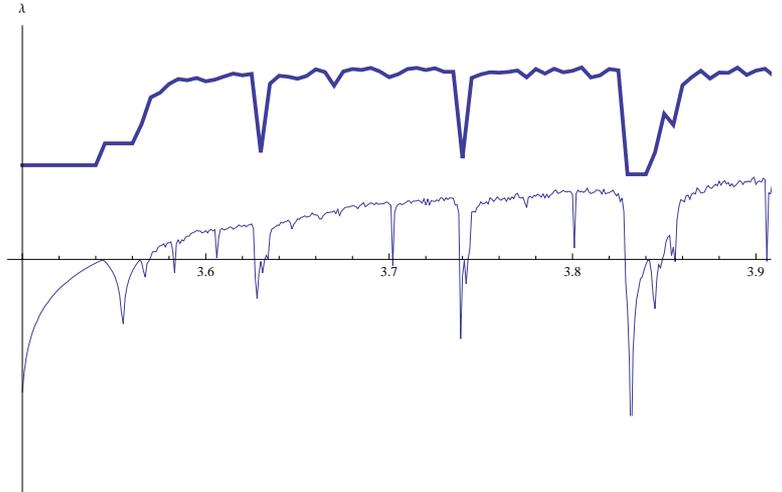


**Figura A.10** Entropia para  $\mu$  entre 3,5 e 4

As depressões na entropia ocorrem em valores de  $\mu$  onde o diagrama de bifurcação possui janelas. A entropia é maior na região caótica onde as trajetórias perdem informações sobre suas

histórias prévias.

Para comparar os diagramas da entropia e do expoente de Lyapunov, no gráfico (A.11) as curvas foram superpostas. A curva superior é a entropia e a curva inferior é o expoente de Lyapunov.



**Figura A.11** Superposição das figuras (A.9) e (A.10)

Uma maneira de caracterizar os pontos fixos analiticamente é a seguinte: Considere um mapeamento iterativo da forma (A.1), com um ponto fixo  $x_0$ . Se a expressão para  $f$  do mapeamento iterativo pode ser expandida em uma série de Taylor ao redor de  $x_0$ , temos que a derivada

$$g \equiv \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} \quad (\text{A.7})$$

caracteriza os pontos fixos como segue ( $g$  é chamado de **multiplicador**):

- Para  $|g| < 1$ ,  $x_0$  é um ponto fixo atrativo.
- Para  $|g| > 1$ ,  $x_0$  é um ponto fixo repulsivo.
- Para  $g < 0$ , as iterações alternam os lados em uma vizinhança suficientemente próxima de  $x_0$ .
- Para  $g > 0$ , as iterações permanecem em um lado de uma vizinhança suficientemente próxima de  $x_0$ .

Para verificarmos isso, basta expandirmos a expressão  $f$  para o mapeamento iterativo em uma série de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + g(x - x_0) + h(x - x_0)^2 + \dots \quad (\text{A.8})$$

onde  $g$  é a primeira derivada em  $x_0$ , e  $h$  é a metade da segunda derivada em  $x_0$ . Como  $x_0$  é um ponto fixo,  $f(x_0) = x_0$ , podemos reescrever a expressão acima como

$$\frac{f(x) - x_0}{x - x_0} = g + h(x - x_0) + \dots \quad (\text{A.9})$$

Se assumimos que não existem termos além de  $g$ , então por inspeção cada uma das quatro condições listadas segue da expressão (A.9). Por exemplo, se  $|g| > 1$ , vemos que  $f(x) - x_0$  é maior que  $x - x_0$  e as iterações levam o ponto  $x$  para longe de  $x_0$ . Se  $g > 0$ , então esta expressão diz que  $f(x)$  está do mesmo lado de  $x$ . As outras condições seguem de forma similar.

## A.5 Sistemas Contínuos

Enquanto as séries temporais em tempo discreto formam o alicerce conveniente para a análise de dados financeiros, processos financeiros são às vezes descritos usando uma representação contínua. Precisamos de um entendimento do caos específico em sistemas contínuos. Vamos introduzir várias noções importantes com um modelo simples de um pêndulo amortecido. A equação do movimento em termos do ângulo de desvio em relação a posição de equilíbrio,  $\theta^4$ , é

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma\frac{d\theta}{dt} + \omega^2\theta = 0 \quad (\text{A.10})$$

Em (A.10),  $\gamma$  é o coeficiente de amortecimento e  $\omega$  é a frequência angular. Sistemas dinâmicos são às vezes descritos como *fluxos*, conjuntos de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem acopladas. Estas equações em notação vetorial possuem a seguinte forma

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = F(\mathbf{X}(t)), \quad \mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)^T. \quad (\text{A.11})$$

Iremos considerar os chamados *sistemas autônomos*, para os quais a função  $F$  no lado direito de (A.11) não depende explicitamente do tempo. Todo sistema não autônomo pode ser transformado em um sistema autônomo tratando o tempo na função  $F(\mathbf{X}, t)$  como uma variável adicional,  $X_{N+1}$ , e adicionando outra equação ao fluxo,

$$\frac{dX_{N+1}}{dt} = 1. \quad (\text{A.12})$$

Como um resultado, a dimensão do espaço de fase cresce por um. A noção de ponto fixo em sistemas contínuos difere daquela em sistemas discretos. Os pontos fixos do fluxo (A.11) são os pontos  $\mathbf{X}^*$  tais que todas as derivadas do lado esquerdo são iguais a zero. Estes pontos também são chamados de pontos de equilíbrio (ou pontos estacionários): se o sistema alcança um destes pontos, permanecerá nele para sempre.

Equações com derivadas de ordem maior que um podem também ser transformadas em fluxos pela introdução de variáveis adicionais. Por exemplo, a equação (A.10) pode ser transformada no sistema

$$\frac{d\theta}{dt} = \varphi, \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\gamma\varphi - \omega^2\theta \quad (\text{A.13})$$

Assim, o pêndulo amortecido pode ser descrito em um espaço de fase bidimensional  $(\varphi, \theta)$ . A energia do pêndulo amortecido,  $E$ ,

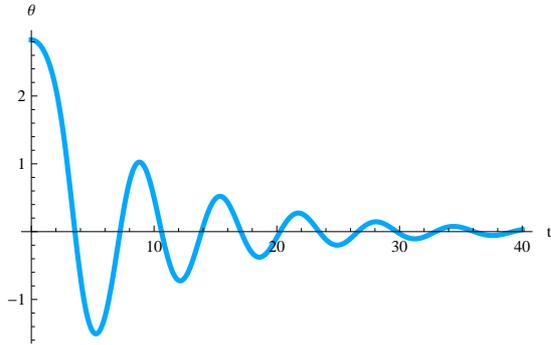
$$E = \frac{1}{2}(\varphi^2 + \omega^2\theta^2) \quad (\text{A.14})$$

<sup>4</sup>Aqui  $\theta$  é considerado suficientemente pequeno de tal forma que podemos usar a aproximação  $\sin(\theta) \cong \theta$ .

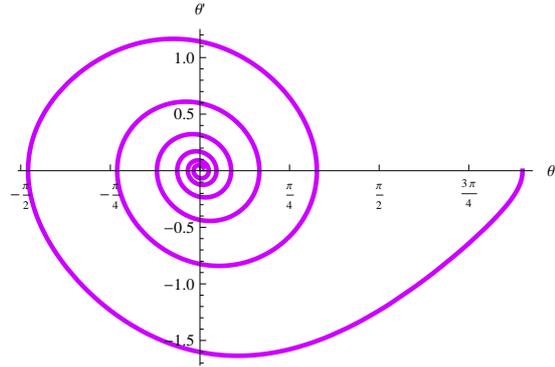
evolui de acordo com a equação

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma\dot{\theta}^2. \quad (\text{A.15})$$

Segue da equação (A.14) que o pêndulo amortecido dissipa energia (é um sistema dissipativo) quando  $\gamma > 0$ . Um gráfico típico da amplitude do pêndulo amortecido está mostrado na (A.12) com a sua respectiva trajetória no espaço de fase mostrada na figura (A.13). No caso  $\gamma = 0$ , as



**Figura A.12** Amplitude pêndulo amortecido com  $\gamma = 0,2$  e  $\omega = 1$



**Figura A.13** Trajetórias no espaço de fase do pêndulo amortecido com  $\gamma = 0,2$  e  $\omega = 1$

trajetórias são círculos centrados na origem do espaço de fase. Se  $\gamma > 0$ , as trajetórias possuem a forma de uma espiral convergindo para o origem do plano. Em geral, os sistemas dissipativos possuem um ponto atrator no centro do sistema de coordenadas correspondendo a energia zero.

Geralmente o caos está associado a sistemas dissipativos. Sistemas sem dissipação de energia são denominados sistemas *conservativos* ou *Hamiltonianos*. Alguns sistemas conservativos podem assumir regimes caóticos também (às vezes chamados de *sistemas não integráveis*), mas este caso não será discutido aqui. Podemos facilmente identificar as fontes de dissipação em processos físicos reais, tais como fricção, radiação térmica. Em geral, o fluxo (A.11) é dissipativo se a condição

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \equiv \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial X_i} < 0 \quad (\text{A.16})$$

for válida.

Além dos atratores pontuais, sistemas com duas ou mais dimensões podem apresentar um atrator chamado *ciclo limite*. Um exemplo de tal atrator é a solução da equação de Van der Pol. Esta equação descreve um oscilador com um coeficiente de amortecimento variável

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \left[ \left( \frac{\theta}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right] \frac{d\theta}{dt} + \omega^2\theta = 0 \quad (\text{A.17})$$

Na equação (A.17),  $\theta_0$  é um parâmetro. O coeficiente de amortecimento é positivo em amplitudes suficientemente elevadas  $\theta > \theta_0$ , o que leva a uma dissipação de energia. Entretanto, em amplitudes baixas ( $\theta < \theta_0$ ), o coeficiente de amortecimento se torna negativo. O termo negativo em (A.17) pode ser interpretado como sendo associado a uma fonte de energia que impede que

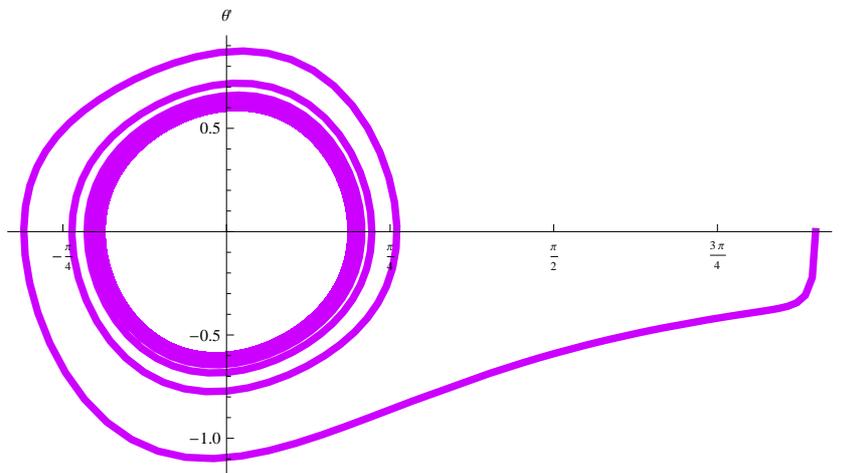
as oscilações decaíam completamente. Se introduzirmos  $\theta_0 \sqrt{\frac{\omega}{\gamma}}$  como unidade de amplitude e  $\frac{1}{\omega}$  como unidade de tempo, então a equação (A.17) adquire a forma

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + (\theta^2 - \varepsilon^2) \frac{d\theta}{dt} + \theta = 0 \quad (\text{A.18})$$

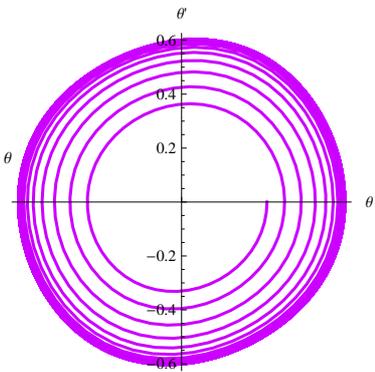
onde  $\varepsilon \equiv \frac{\gamma}{\omega}$  é somente um parâmetro adimensional que define a evolução do sistema. O fluxo descrevendo a equação de Van der Pol possui a seguinte forma

$$\frac{d\theta}{dt} = \varphi, \quad \frac{d\varphi}{dt} = (\varepsilon^2 - \theta^2)\varphi - \theta \quad (\text{A.19})$$

As figuras (A.14) e (A.15) ilustram as soluções da equação (A.18) para  $\varepsilon = 0,3$ . As trajetórias



**Figura A.14** Ciclo Limite partindo de fora



**Figura A.15** Ciclo limite partindo de dentro

se aproximam da curva fechada partindo de condições iniciais localizadas tanto dentro quanto fora do ciclo limite. Deve ser observado que as trajetórias do fluxo jamais se interceptam, apesar de o gráfico decepcionantemente indicar o contrário. Esta propriedade segue de teoremas de unicidade da solução da equação (A.17).

Como a solução da equação de Van der Pol muda qualitativamente de um atrator pontual para um atrator do tipo ciclo limite quando o parâmetro  $\varepsilon$  muda, este ponto é uma bifurcação. Tais bifurcações que levam a ciclos limite são chamadas de bifurcações de *Hopf*.

# Teoria de Carteiras

## B.1 Introdução

Neste capítulo, exploraremos a eficiência da gestão de risco em uma carteira de ativos. O principal desafio é como balancear a carteira, ou seja, como escolher a porcentagem (em valor) de cada ativo na carteira de tal modo a minimizar o risco para um dado retorno esperado.

## B.2 Carteiras, Retornos e Risco

Para nosso modelo, assumiremos que existem somente dois instantes de tempo: O instante inicial  $t = 0$  e o instante final  $t = T$ . Cada ativo  $a_i$  possui um valor inicial  $\vartheta_{i,0}$  e um valor final  $\vartheta_{i,T}$ .

### Carteiras

Uma carteira consiste em uma coleção de ativos  $a_1, \dots, a_n$  em uma dada proporção. Formalmente, definimos uma carteira como sendo uma  $n$ -upla ordenada de números reais

$$\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n),$$

onde  $\theta_i$  é o número de unidades do ativo  $a_i$ . Se  $\theta_i$  é negativo então a carteira possui uma posição vendida a descoberto neste ativo: o ativo foi vendido sem a sua posse e isso é indicado como uma posição com um “peso negativo” na carteira. Um valor positivo de  $\theta_i$  indica uma posição comprada no ativo correspondente.

### Peso dos Ativos

É costume medir a quantidade de um ativo em uma carteira por sua porcentagem em valor. O **peso**  $w_i$  do ativo  $a_i$  é a porcentagem do valor do ativo contido na carteira no tempo  $t = 0$ , ou seja,

$$w_i = \frac{\theta_i \vartheta_{i,0}}{\sum_{j=1}^n \theta_j \vartheta_{j,0}}.$$

Note que a soma dos pesos será sempre 1.

### Retorno dos Ativos

O retorno  $R_i$  do ativo  $a_i$  é definido pela equação

$$R_i = \frac{\vartheta_{i,T} - \vartheta_{i,0}}{\vartheta_{i,0}}. \quad (\text{B.1})$$

O retorno esperado do ativo  $a_i$  será denotado por  $\mu = \mathbb{E}(R_i)$ , e a variância, dada por  $\sigma_i^2 = \text{Var}(R_i)$ , será chamada de **risco** do ativo <sup>1</sup>  $a_i$ .

### Retorno da Carteira

O **retorno** da carteira em si mesma é definido como a soma ponderada dos retornos de cada ativo

$$R = \sum_{i=1}^n w_i R_i \quad (\text{B.2})$$

e o retorno esperado da carteira como um todo será

$$\mu = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i. \quad (\text{B.3})$$

Como os retornos individuais geralmente não são independentes, a variância do retorno da carteira será dada pela fórmula

$$\sigma^2 = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n w_i R_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \text{Cov}(R_i, R_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j, \quad (\text{B.4})$$

onde  $\text{Cov}(R_i, R_j)$  é a covariância de  $R_i$  e  $R_j$  e  $\rho_{i,j}$  é o coeficiente de correlação .

### Mais sobre Risco

Geralmente falando, existem duas formas de risco associadas a um ativo. O **Risco Sistemático** de um ativo é o risco que está associado às forças macroeconômicas no mercado como um todo e não somente com o ativo em particular. Por exemplo, uma mudança na taxa de juros afeta o mercado como um todo.

Por outro lado, o **Risco Não Sistemático** é o risco que é particular a um ativo ou grupo de ativos. A diferença chave entre esses dois tipos de risco é que o risco não sistemático pode sempre ser diversificado, enquanto o risco sistemático não pode.

## B.3 Carteiras com dois ativos de risco

Vamos começar nossa análise de carteiras bem do começo, com carteiras que contenham somente dois ativos  $a_1$  e  $a_2$ , com pesos  $w_1$  e  $w_2$ , respectivamente. É costume traçar curvas de

---

<sup>1</sup>Estudamos medidas de risco mais elaboradas no capítulo 2, mas no presente contexto, utilizaremos a variância como medida de risco padrão.

risco-retorno esperado com o risco no eixo horizontal e retorno esperado no eixo vertical. O retorno esperado de tal carteira será dado por  $\mu = \mu_1 + \mu_2$  e o risco é  $\sigma^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2$ . Vamos assumir que  $0 < \sigma_1 \leq \sigma_2$  e definimos  $\rho = \rho_{1,2}$ .

### O caso $\rho = \pm 1$

Vamos primeiro considerar o caso  $\rho = \pm 1$ . Nestes casos, a expressão para  $\sigma^2$  se simplifica consideravelmente e nós temos

$$\sigma = |w_1\sigma_1 \pm w_2\sigma_2|, \quad (\text{B.5})$$

em que o sinal positivo é tomado quando  $\rho = 1$  e o sinal negativo é tomado quando  $\rho = -1$ . Como  $w_1 + w_2 = 1$ , tomamos por conveniência  $w_2 = s$ ,  $w_1 = 1 - s$  e obtemos as equações paramétricas

$$\mu = (1 - s)\mu_1 + s\mu_2 \quad (\text{B.6})$$

$$\sigma = |(1 - s)\sigma_1 \pm s\sigma_2| \quad (\text{B.7})$$

onde  $s$  pode ser qualquer número real. Para  $s$  no intervalo  $[0, 1]$  ambos os pesos são não negativos e então a carteira não possui posições a descoberto. Fora deste intervalo, exatamente um dos pesos é negativo, indicando que o correspondente ativo foi vendido a descoberto e o outro ativo não.

Das equações paramétricas para  $\mu$  e  $\sigma$ , podemos observar que:

- Quando  $\rho = 1$  e  $\sigma_1 = \sigma_2$  então todos os pesos dão o mesmo (e portanto mínimo) risco  $\sigma_{min} = \sigma_1 = \sigma_2$ .
- Quando  $\rho = 1$  e  $\sigma_1 < \sigma_2$  os pesos de risco mínimo são  $w_1 = \frac{-\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}$ ,  $w_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2}$ , com  $\mu_{min} = \frac{\sigma_1\mu_2 - \sigma_2\mu_1}{\sigma_1 - \sigma_2}$  e  $\sigma_{min} = 0$ .
- Quando  $\rho = -1$  então os pesos de mínimo risco são  $w_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$ ,  $w_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$ , com  $\mu_{min} = \frac{\sigma_1\mu_2 + \sigma_2\mu_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$  e  $\sigma_{min} = 0$ .

Cabe enfatizar que geralmente não é possível encontrar ativos que satisfaçam  $\rho = \pm 1$  e então os resultados acima são de natureza essencialmente teórica.

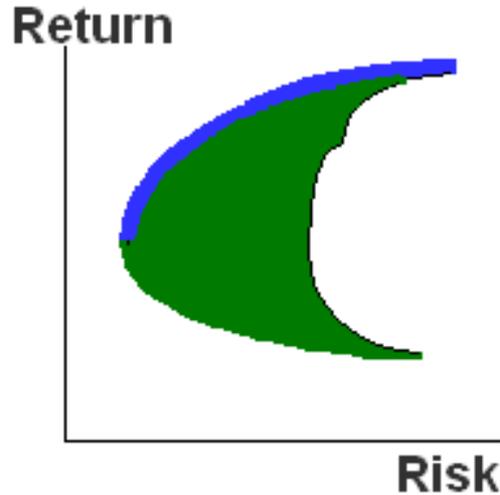
### O caso $-1 < \rho < 1$

Quando  $-1 < \rho < 1$  as equações paramétricas para o risco e retorno esperado são

$$\mu = (\mu_2 - \mu_1)s + \mu_1 \quad (\text{B.8})$$

$$\sigma^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)s^2 - 2\sigma_1(\sigma_1 - \rho\sigma_2)s + \sigma_1^2. \quad (\text{B.9})$$

Observe que se  $\rho < 1$  o coeficiente de  $s^2$  em  $\sigma^2$  satisfaz  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2\sigma_1\sigma_2(1 - \rho) > 0$  e a expressão para  $\sigma^2$  é verdadeiramente quadrática. O gráfico dos pontos  $(\sigma^2, \mu)$  é uma parábola. A figura B.1 ilustra essa parábola.



**Figura B.1** Ilustração da curva de Risco-Retorno

Assuma novamente que  $0 < \sigma_1 \leq \sigma_2$ . Derivando o risco  $\sigma^2$  com relação a  $s$  dá

$$\frac{d}{ds}(\sigma^2) = 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)s - 2\sigma_1(\sigma_1 - \rho\sigma_2), \quad (\text{B.10})$$

de tal forma que o risco mínimo ocorre em

$$s_{min} = \frac{\sigma_1(\sigma_1 - \rho\sigma_2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} \quad (\text{B.11})$$

e o risco mínimo é

$$\sigma_{min}^2 = \frac{\sigma_1\sigma_2^2(1 - \rho^2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}. \quad (\text{B.12})$$

A carteira de mínimo risco não terá posições a descoberto se e somente se  $s_{min} \in [0, 1]$ .

#### B.4 Carteiras de Múltiplos Ativos

Vamos voltar nossa atenção para carteiras com um número arbitrário  $n \geq 2$  de ativos. Os pesos da carteira podem ser escritos na matriz (ou vetor)

$$\mathbf{W} = (w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_n). \quad (\text{B.13})$$

É também conveniente definir a matriz (ou vetor) de 1's por

$$\mathbf{O} = (1 \ 1 \ \cdots \ 1) \quad (\text{B.14})$$

de tal forma que a condição  $w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$  pode ser escrita como

$$\mathbf{O}\mathbf{W}^t = 1 \quad (\text{B.15})$$

onde  $\mathbf{W}^t$  é a transposta de  $\mathbf{W}$ . Iremos denotar a matriz dos retornos esperados por

$$\mathbf{M} = (\mu_1 \ \mu_2 \ \cdots \ \mu_n) \quad (\text{B.16})$$

e a matriz de covariâncias por

$$\mathbf{C} = (c_{i,j}), \quad (\text{B.17})$$

onde

$$c_{i,j} = \text{Cov}(R_i, R_j).$$

Note que  $c_{i,i} = \sigma_i^2$  é a variância de  $R_i$ . Pode ser mostrado que a matriz  $\mathbf{C}$  é **simétrica** (ou seja,  $\mathbf{C}^t = \mathbf{C}$ ) e **positiva semidefinida**, o que significa que para qualquer matriz  $\mathbf{A} = (a_1, \cdots, a_n)$  nós temos  $\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{A}^t \geq 0$ . Assumiremos que  $\mathbf{C}$  seja inversível, o que nesse caso implica que  $\mathbf{C}$  seja **positiva definida**, isto é, para qualquer matriz  $\mathbf{A}$  nós temos  $\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{A}^t > 0$ .

O retorno esperado pode agora ser escrito como um produto matricial

$$\mu = \mathbf{M}\mathbf{W}^t = \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_n w_n \quad (\text{B.18})$$

e o risco pode ser escrito como

$$\sigma^2 = \text{Var}(w_1 R_1 + \cdots + w_n R_n) = \sum_{i,j=1}^n c_{i,j} w_i w_j = \mathbf{W}\mathbf{C}\mathbf{W}^t \quad (\text{B.19})$$

### A idéia de Markowitz

Vamos examinar a relação entre os pesos  $\mathbf{W} = (w_1, \cdots, w_n)$  de uma carteira e o correspondente ponto de risco-retorno esperado  $(\sigma, \mu)$  para esta carteira, dadas as equações acima. Note que estamos nos referindo agora ao risco na forma do desvio padrão  $\sigma$ .

O vetor  $\mathbf{W}$  se encontra em um espaço n-dimensional no qual os vetores peso  $(w_1, \cdots, w_n)$  residem. Como a soma dos pesos deve ser igual a 1, os vetores peso devem estar no hiperplano cuja equação é

$$w_1 + \cdots + w_n = 1. \quad (\text{B.20})$$

Denotaremos por  $f$  a função que leva cada vetor peso no hiperplano de pesos ao par ordenado risco-retorno esperado da carteira correspondente, isto é,

$$f(w_1, \cdots, w_n) = (\sigma, \mu) \quad (\text{B.21})$$

onde

$$\mu = \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_n w_n = \mathbf{M}\mathbf{W}^t \quad (\text{B.22})$$

e

$$\sigma^2 = \sum_{i,j=1}^n c_{i,j} w_i w_j = \mathbf{W}\mathbf{C}\mathbf{W}^t. \quad (\text{B.23})$$

Nosso objetivo é determinar a imagem de uma reta no hiperplano de pesos sob a função  $f$ . Isto irá nos ajudar a termos uma idéia de como a função  $f$  se comporta em geral. (Isto é análogo a construir as curvas de nível de uma função).

A equação de uma reta em um espaço  $n$ -dimensional pode ser escrita na forma paramétrica

$$l(t) = (a_1 t + b_1, \cdots, a_n t + b_n) = \mathbf{A}t + \mathbf{B} \quad (\text{B.24})$$

sendo

$$\mathbf{A} = (a_1, \cdots, a_n)$$

e

$$\mathbf{B} = (b_1, \cdots, b_n)$$

em que o parâmetro  $t$  varia de  $-\infty$  a  $\infty$ . O valor  $t = 0$  corresponde ao ponto  $l(0) = \mathbf{B}$  e  $t = 1$  corresponde a  $l(1) = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ .

Agora, para qualquer ponto  $\mathbf{W} = (w_1, \cdots, w_n)$  da reta, correspondente a um valor particular de  $t$ , o retorno esperado é

$$\mu = \mathbf{M}\mathbf{W} = \mathbf{M}(\mathbf{A}t + \mathbf{B}) = (\mathbf{M}\mathbf{A}t + \mathbf{M}\mathbf{B}) \quad (\text{B.25})$$

que é uma função linear de  $t$ . Resolvendo para  $t$  temos

$$t = \frac{\mu - \mathbf{M}\mathbf{B}}{\mathbf{M}\mathbf{A}} = \alpha\mu + \beta \quad (\text{B.26})$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são usados simplesmente por conveniência e onde assumimos que o denominador  $\mathbf{M}\mathbf{A}$  não é 0.

Agora vamos olhar para o risco, na forma da variância

$$\sigma^2 = \mathbf{W}\mathbf{C}\mathbf{W}^t = (\mathbf{A}t + \mathbf{B})\mathbf{C}(\mathbf{A}^t t + \mathbf{B}^t) = (\mathbf{A}\mathbf{C}(\mathbf{A}^t)t^2 + (\mathbf{B}\mathbf{C}(\mathbf{A}^t) + \mathbf{A}\mathbf{C}(\mathbf{B}^t))t + \mathbf{B}\mathbf{C}(\mathbf{B}^t) = \gamma t^2 + \delta t + \varepsilon \quad (\text{B.27})$$

onde usamos as letras  $\gamma$ ,  $\delta$  e  $\varepsilon$  para simplificar a expressão, que é quadrática em  $t$ . Substituindo  $t$  por sua expressão B.26 em termos de  $\mu$  teremos

$$\sigma^2 = \gamma(\alpha\mu + \beta)^2 + \delta(\alpha\mu + \beta) + \varepsilon \quad (\text{B.28})$$

que é quadrática em  $\mu$ .

Observamos que quando  $t$  varia de  $-\infty$  a  $\infty$ ,  $l(t)$  traça uma linha no hiperplano dos pesos e os pontos de risco-retorno esperado  $(\sigma^2, \mu)$  traçam uma parábola no plano  $(\sigma, \mu)$ . Tomando a raiz quadrada produzimos uma curva que denominaremos daqui para frente de **curva de Markowitz**. Então, retas no hiperplano dos pesos são mapeadas em curvas de Markowitz no plano  $(\sigma, \mu)$  pela função  $f$ . Note que as curvas de Markowitz não são parábolas.

### O ponto de risco mínimo

Vamos denotar o ponto de risco mínimo por  $(\sigma_{min}, \mu_{min})$ . Vamos encontrar os pesos dos ativos que correspondem a este ponto. O próximo teorema dá os pesos de risco mínimo. A demonstração usa a técnica dos multiplicadores de Lagrange.

**Teorema B.4.1.** *Uma carteira com risco mínimo possui pesos dados por*

$$\mathbf{W} = \frac{\mathbf{O}\mathbf{C}^{-1}}{\mathbf{O}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{O}^t}. \quad (\text{B.29})$$

Note que o denominador é somente a soma dos componentes do numerador e  $\mathbf{O}$  é um vetor.

**Demonstração :** Buscamos minimizar a expressão

$$\sigma^2 = \sum_{i,j=1}^n c_{i,j}w_iw_j = \mathbf{W}\mathbf{C}\mathbf{W}^t \quad (\text{B.30})$$

sujeita ao vínculo

$$\mathbf{O}\mathbf{W}^t = w_1 + \dots + w_n = 1 \quad (\text{B.31})$$

De acordo com a técnica dos multiplicadores de Lagrange, devemos tomar as derivadas parciais com relação a cada  $w_i$  e  $\alpha$  da seguinte função

$$g(w_1, \dots, w_n) = \sum_{i,j=1}^n c_{i,j}w_iw_j + \alpha(1 - w_1 - \dots - w_n) \quad (\text{B.32})$$

e fazê-las iguais a zero. Isto resulta na equação

$$\mathbf{C}\mathbf{W}^t = \frac{\alpha}{2}\mathbf{O}^t \quad (\text{B.33})$$

e então em

$$\mathbf{W} = \frac{\alpha}{2}\mathbf{O}\mathbf{C}^{-1}. \quad (\text{B.34})$$

Substituindo esta última equação na equação B.31 (e usando o fato de que  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{C}^{-1}$  são simétricas) teremos

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\mathbf{O}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{O}^t} \quad (\text{B.35})$$

e então obtemos o resultado desejado.

### A fronteira eficiente de Markowitz

O conjunto de pontos  $(\sigma_{min}, \mu_{min})$  que dá o mínimo risco para um dado retorno esperado  $\mu$  é chamado **fronteira eficiente de Markowitz**. O próximo teorema descreve este conjunto de pontos. Apesar de a fórmula ser um pouco desajeitada, existe uma importante lição aqui: os pesos de mínimo risco são *funções lineares* do retorno esperado. Isto significa que quando o retorno esperado  $\mu$  assume todos os valores de  $-\infty$  a  $\infty$ , os pesos de mínimo risco traçam uma linha reta no hiperplano de pesos e os correspondentes pontos  $(\sigma_{min}, \mu)$  traçam uma curva de Markowitz. Em outras palavras, a fronteira eficiente de Markowitz é uma curva de Markowitz. A linha de pesos que corresponde à curva de Markowitz é chamada de *linha de pesos de mínimo risco*.

**Teorema B.4.2.** Para um dado retorno esperado  $\mu$ , a carteira com risco mínimo possui pesos dados por

$$\mathbf{W} = \frac{\begin{vmatrix} \mu & \mathbf{MC}^{-1}\mathbf{O}' \\ 1 & \mathbf{OC}^{-1}\mathbf{O}' \end{vmatrix} \mathbf{MC}^{-1} + \begin{vmatrix} \mathbf{MC}^{-1}\mathbf{M}' & \mu \\ \mathbf{OC}^{-1}\mathbf{M}' & 1 \end{vmatrix} \mathbf{OC}^{-1}}{\begin{vmatrix} \mathbf{MC}^{-1}\mathbf{M}' & \mathbf{MC}^{-1}\mathbf{O}' \\ \mathbf{MC}^{-1}\mathbf{M}' & \mathbf{OC}^{-1}\mathbf{O}' \end{vmatrix}}$$

Em particular, cada peso  $w_i$  é uma função linear de  $\mu$ .

**Demonstração :** Neste caso, buscamos minimizar a expressão

$$\sigma^2 = \sum_{i,j=1}^n c_{i,j} w_i w_j = \mathbf{WCW}^t \quad (\text{B.36})$$

sujeita aos vínculos

$$\mathbf{MW}^t = w_1 \mu_1 + \dots + w_n \mu_n \quad (\text{B.37})$$

e

$$\mathbf{OW}^t = w_1 + \dots + w_n = 1 \quad (\text{B.38})$$

Isto é feito tomando as derivadas parciais da seguinte função iguais a 0:

$$g = \sum_{i,j=1}^n c_{i,j} w_i w_j + \alpha (\mu - w_1 \mu_1 - \dots - w_n \mu_n) + \beta (1 - w_1 - \dots - w_n) \quad (\text{B.39})$$

que resulta na seguinte equação matricial

$$2\mathbf{CW}^t = \alpha \mathbf{M}^t + \beta \mathbf{O}^t \quad (\text{B.40})$$

e então

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{O})\mathbf{C}^{-1}. \quad (\text{B.41})$$

Substituindo a expressão para  $\mathbf{W}^t$  na equação matricial para os vínculos obtemos o seguinte sistema de equações

$$(\mathbf{M}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{M}^t)\alpha + (\mathbf{M}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{O}^t)\beta = 2\mu \quad (\text{B.42})$$

$$(\mathbf{O}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{M}^t)\alpha + (\mathbf{O}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{O}^t)\beta = 2. \quad (\text{B.43})$$

Usando a regra de Cramer obtemos fórmulas para  $\alpha$  e  $\beta$ . Substituindo isto na expressão para  $\mathbf{W}$  obtemos o resultado desejado.

## B.5 O Modelo de Precificação de Ativos de Capital

Agora que discutimos a *Teoria de Carteiras de Markowitz*, estamos em condições de discutir o *Modelo de Precificação de Ativos de Capital (CAPM)*<sup>2</sup>. Incluiremos um ativo livre de risco na teoria de carteiras. Como vimos, um ativo livre de risco é um ativo que possui risco 0, ou seja, a variância é 0. Então, o ponto no plano  $(\sigma, \mu)$  corresponde a um ponto sobre o eixo vertical. A idéia básica por trás do CAPM é que um investidor pode melhorar a sua relação risco/retorno esperado balanceando o investimento parcialmente em uma carteira de ativos de risco e parcialmente em ativos livres de risco. Vejamos por que isto é verdade.

Imagine uma carteira que consiste de um ativo livre de risco  $a_{rf}$  com peso  $w_{rf}$  e ativos de risco  $a_1, \dots, a_n$  como antes, com pesos  $w_1, \dots, w_n$ . Note que agora a soma dos pesos dos ativos de risco não somam mais 1. De fato, temos

$$w_{rf} + \sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (\text{B.44})$$

$$w_{risco} = \sum_{i=1}^n w_i \leq 1 \quad (\text{B.45})$$

O retorno esperado da carteira completa será

$$\mu = w_{rf}\mu_{rf} + \sum_{i=1}^n w_i\mu_i = w_{rf}\mu_{rf} + \mu_{risco} \quad (\text{B.46})$$

e como a variância do ativo livre de risco é 0, o retorno  $R_{rf}$  é uma constante. Assim, sua covariância com qualquer outro retorno é 0 e então

$$\sigma^2 = \text{Var}(w_{rf}R_{rf} + \sum_{i=1}^n w_iR_i) = \text{Var}(\sum_{i=1}^n w_iR_i) = \sigma_{risco}^2. \quad (\text{B.47})$$

Concluimos então que

---

<sup>2</sup>Capital Asset Pricing Model

$$\sigma = \sigma_{risco} \quad (\text{B.48})$$

Vamos considerar agora a carteira formada pela remoção do ativo livre de risco renormalizando os pesos dos ativos de risco de modo que a soma destes pesos resulte 1. Vamos chamar esta carteira de *Carteira de Risco Derivada*. Por exemplo, se a carteira original é composta de um ativo livre de risco com peso igual a  $w_{rf} = 0,20$ , um ativo de risco  $a_1$  com peso igual a  $w_1 = 0,30$  e outro ativo de risco  $a_2$  com peso  $w_2 = 0,50$ , então a soma dos pesos dos ativos de risco é  $0,80$  e a carteira de risco derivada consiste de um ativo de risco  $a_1$  com peso igual a  $w_1 = \frac{0,30}{0,80} = 0,375$  e um outro ativo de risco  $a_2$  com peso  $w_2 = \frac{0,50}{0,80} = 0,625$ , que possui um peso total de 1. Vamos denotar o retorno esperado da carteira de risco derivada por  $\mu_{der}$  e o respectivo risco por  $\sigma_{der}^2$ . Disto segue que

$$\mu = w_{rf}\mu_{rf} + \sum_{i=1}^n w_i\mu_i = w_{rf}\mu_{rf} + w_{risco} \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{w_{risco}} \mu_i \quad (\text{B.49})$$

e

$$\sigma^2 = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n w_i R_i\right) = w_{risco}^2 \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{w_{risco}} R_i\right) = w_{risco}^2 \sigma_{der}^2 \quad (\text{B.50})$$

Então

$$\mu = w_{rf}\mu_{rf} + w_{risco}\mu_{der} \quad (\text{B.51})$$

e

$$\sigma = w_{risco}\sigma_{der} \quad (\text{B.52})$$

e como  $w_{rf} + w_{risco} = 1$ 

$$\mu = \mu_{rf} + w_{risco}(\mu_{der} - \mu_{rf}) \quad (\text{B.53})$$

$$\sigma = w_{risco}\sigma_{der} \quad (\text{B.54})$$

Como  $w_{risco}$  pode ser qualquer número real, as equações B.53 e B.54 traçam uma linha reta. Resolvendo a equação B.54 para  $w_{risco}$  e usando a equação B.53, obtemos a equação

$$\mu = \frac{\mu_{der} - \mu_{rf}}{\sigma_{der}} \sigma + \mu_{rf}. \quad (\text{B.55})$$

Podemos ver que se  $w_{risco} = 0$  então  $(\sigma, \mu) = (0, \mu_{rf})$  e se  $w_{risco} = 1$  então  $(\sigma, \mu) = (\sigma_{der}, \mu_{der})$ . Temos então que um investidor que investe em um ativo livre de risco junto com alguns ativos de risco obterá um ponto no plano  $(\sigma, \mu)$  que deverá estar na linha unindo os pontos  $(0, \mu_{rf})$  e  $(\sigma_{der}, \mu_{der})$ . Adicionalmente, de todas as linhas unindo o ponto  $(0, \mu_{rf})$  aos pontos  $(\sigma_{der}, \mu_{der})$  na região viável de Markowitz, a linha que produz os pontos com os maiores retornos esperados para um dado risco é a linha tangente à curva de Markowitz na sua porção superior, como mostrado na figura B.2, que mostra a curva de Markowitz para os nove ativos mais líquidos do Índice BOVESPA, a saber, PETR4, VALE5, BBDC4, CSNA3, ITAU4,

VALE3, USIM5, PETR3, BBAS3. Os nove pontos coloridos à direita no gráfico representam os pontos  $(\sigma, \mu)$  para os nove ativos individuais. A curva à esquerda é a curva de Markowitz, com suas porções inferior (cinza) e superior (preto). A porção superior da curva de Markowitz é comumente denominada de Fronteira Eficiente. O ponto azul na fronteira eficiente representa a **Carteira de Mínima Variância**, o ponto vermelho representa a **Carteira Tangente**, enquanto que o quadrado cinza perto do ponto vermelho representa a carteira em que todos os pesos são iguais. A curva em forma de 'bengala' na figura apresenta os valores do índice de Sharpe para as diversas carteiras possíveis no hiperplano de pesos. Observamos que o índice de Sharpe é máximo para a carteira tangente.

Para obtermos essa figura, consideramos os 9 ativos mais líquidos do IBOVESPA, PETR4, VALE5, BBDC4, CSNA3, VALE3, USIM5, PETR3, e BBAS4, com os dados históricos começando na data 3/08/1993 e terminando em 15/05/2001, o que perfaz um total de 1909 observações. Com essas 1909 observações dos preços de fechamento dos ativos, construímos as carteiras de mínima variância e a carteira tangente, utilizando a teoria proposta por Markowitz acima. Os pesos da carteira de mínima variância (MV), carteira tangente (CT) estão na tabela B.1, junto com as médias  $\mu$  e desvios padrão  $\sigma$  dos ativos individuais.

ATIVO	MV	CT	$\mu$	$\sigma$	COR
PETR4	0,0820	0,201	0,00145	0,0384	AZUL ESCURO SUPERIOR
VALE5	0,1385	0,1820	0,00117	0,0344	AZUL CLARO INFERIOR
BBDC4	0,1225	0,0550	0,00089	0,0322	VERDE SUPERIOR
CSNA3	0,1302	0,0716	0,00086	0,0337	AMARELO INFERIOR
ITAU4	0,1158	0,1500	0,00117	0,0308	AMARELO SUPERIOR
VALE3	0,1253	0,1506	0,00117	0,0381	LARANJA
USIM5	0,0980	0,0000	0,000157	0,0377	AZUL ESCURO INFERIOR
PETR3	0,0630	0,1950	0,00168	0,0433	AZUL CLARO SUPERIOR
BBAS3	0,1247	0,0000	-0,000164	0,036	VERDE INFERIOR

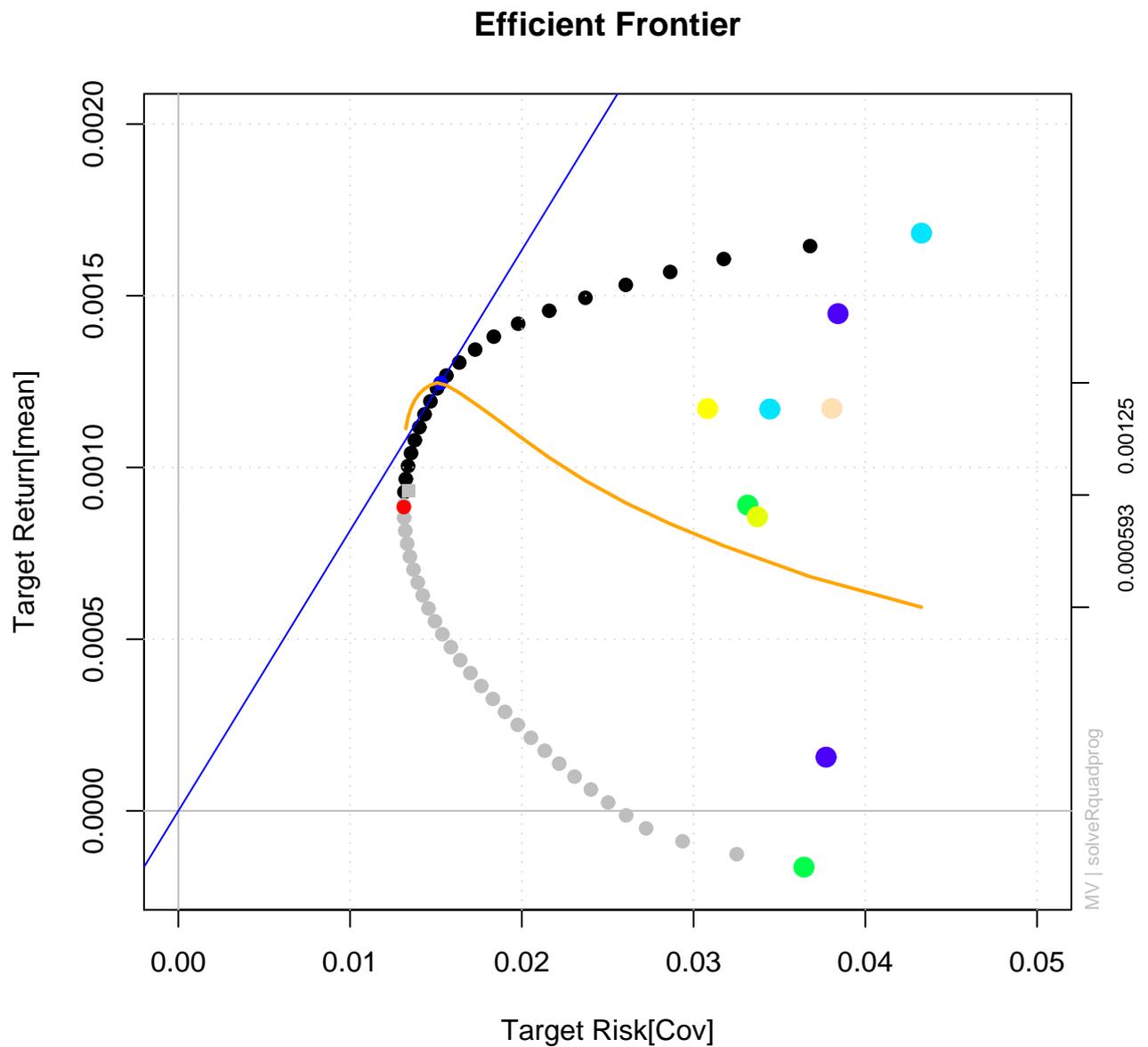
**Tabela B.1** Pesos na carteira de Mínima Variância (MV), carteira Tangente (CT), médias e desvios dos retornos e cor na figura B.2

Para apreciarmos os benefícios da diversificação, vemos na tabela B.2 as médias dos retornos e os desvios padrão das carteiras de mínima variância e tangente como um todo:

CARTEIRA	$\mu$	$\sigma$
MV	0,0009	0,013
CT	0,0013	0,016

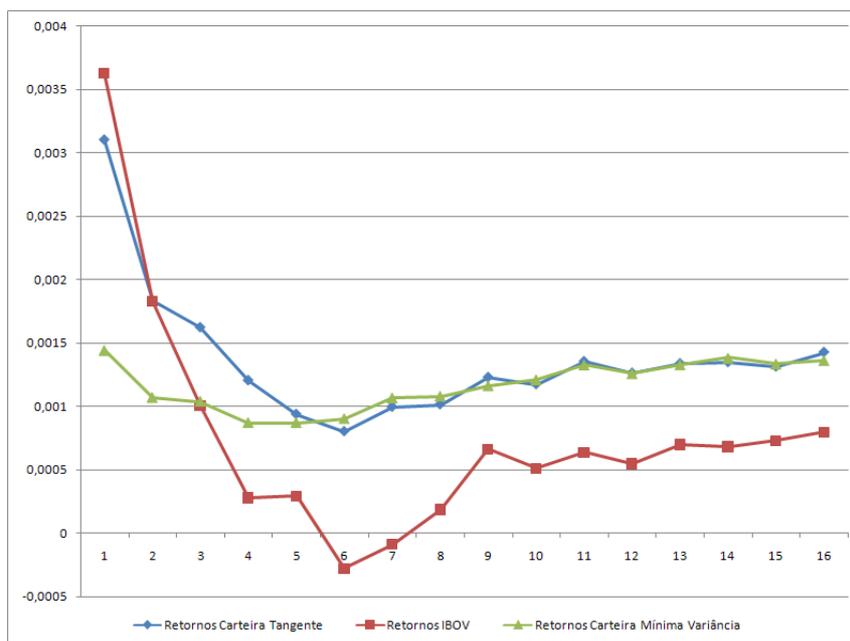
**Tabela B.2** Médias e Desvios Padrão das carteiras de Mínima Variância e Tangente

Podemos observar, por exemplo, que a carteira tangente apresenta aproximadamente o mesmo retorno de ITAU4 com a metade do risco (medido pelo desvio padrão).



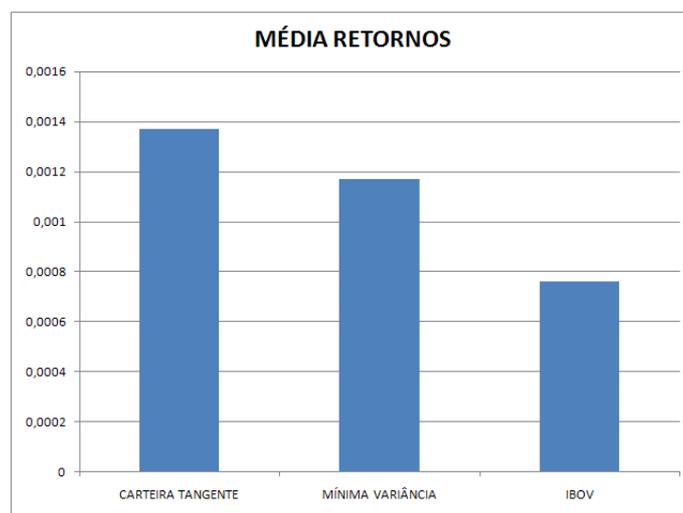
**Figura B.2** Diagrama de Risco-Retorno com a Fronteira Eficiente

Queremos responder agora a seguinte pergunta: Como foram os desempenhos das carteiras nos períodos subsequentes? As figuras B.3 e B.4 tentam responder essa pergunta. A figura B.3 mostra um gráfico do retorno médio versus tempo, para os próximos 16 períodos de tempo semestrais após 15/05/2001. Podemos observar que no primeiro semestre após esta data, os retornos do IBOV foram maiores, em média, que os retornos das duas carteiras analisadas. Mas, à medida que o tempo foi passando, rapidamente as performances das carteiras, no que se refere aos retornos médios, ficaram nitidamente melhores que a performance do IBOV.



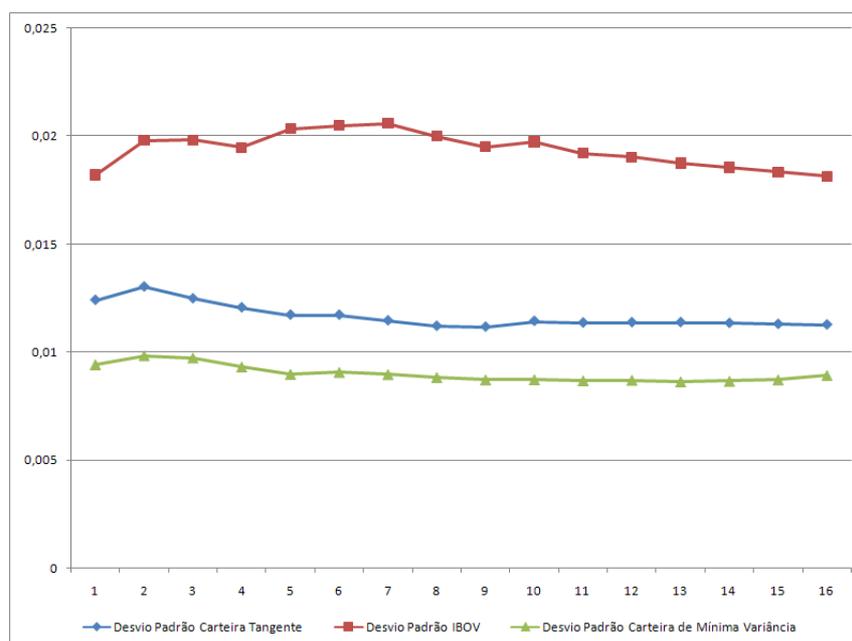
**Figura B.3** Médias dos Retornos para as Carteiras Tangente, de Mínima Variância e IBOV

A figura B.4 mostra as médias dos retornos das carteiras e do IBOV para todo o período posterior a 15/05/2001. Vemos que, de fato, a carteira tangente forneceu sistematicamente retornos maiores que a carteira de mínima variância, como deve ser. Porém, na figura B.5, vemos o preço a ser pago: a carteira tangente obteve uma maior variância que a carteira de mínima variância, como deve ser.

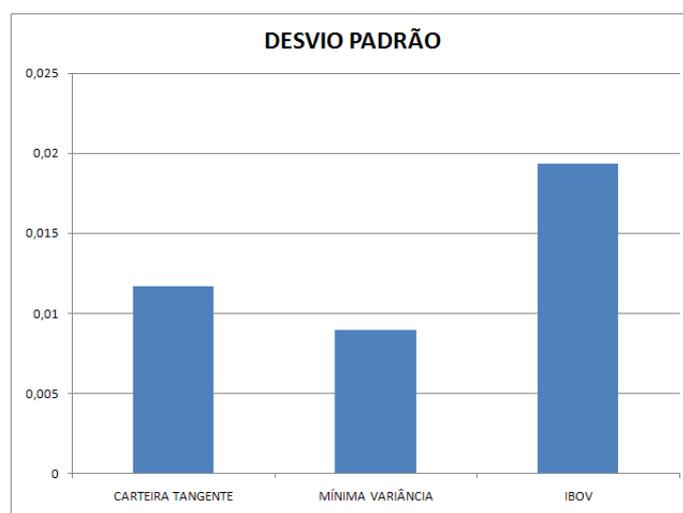


**Figura B.4** Médias dos Retornos para as Carteiras Tangente, de Mínima Variância e IBOV

Concluimos que para os ativos selecionados e para o período analisado, a teoria de carteiras de Markowitz funcionou, pois os resultados obtidos foram idênticos aos previstos pela teoria.



**Figura B.5** Desvios Padrão das Carteiras Tangente, de Mínima Variância e IBOV

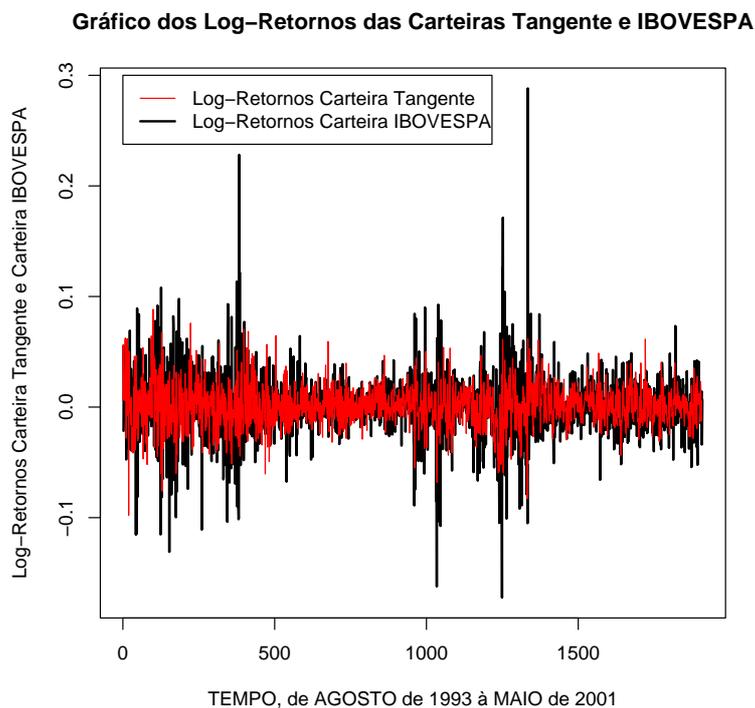


**Figura B.6** Desvio padrão médio dos Retornos para as Carteiras Tangente, de Mínima Variância e IBOV

Quanto maior o risco da carteira, maior o retorno.

As figuras B.7 e B.8 mostram como os Log-Retornos das carteiras Tangente e da carteira formada pelo índice BOVESPA se comportaram ao longo da primeira metade de toda a série temporal analisada, que vai de AGOSTO de 1993 à Janeiro de 2009. Na figura B.7 fica nítido o fato de que a volatilidade da carteira do índice BOVESPA, medida pelo desvio padrão da série temporal, é maior que a volatilidade da carteira Tangente.

Já na figura B.8, procuramos responder qual seria o valor em dinheiro que teríamos, em



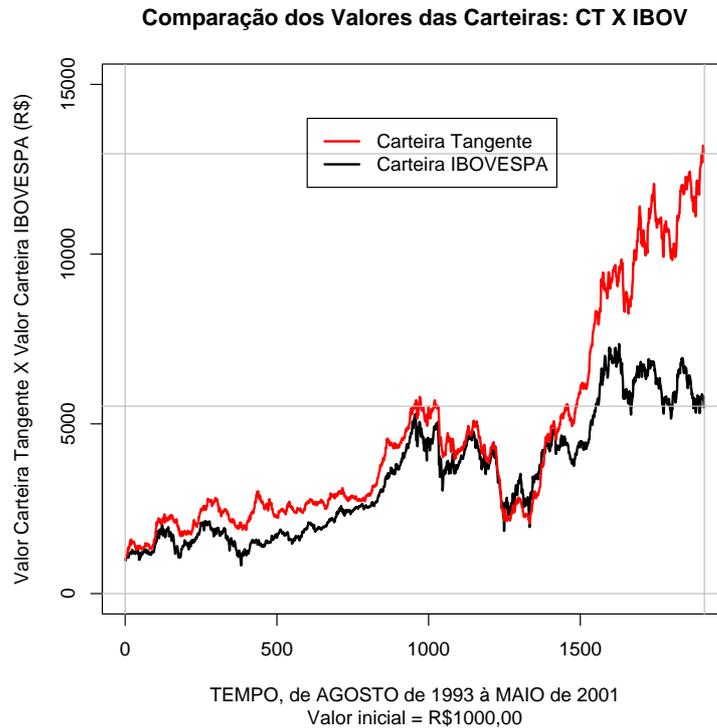
**Figura B.7** Comparação dos Log-Retornos das Carteiras Tangente e IBOVESPA

MAIO de 2001, caso fizéssemos um investimento de R\$1000,00 em Agosto de 1993, tanto na carteira Tangente como na carteira do IBOVESPA. Vemos que, quase sempre, o valor da carteira tangente supera o valor da carteira formada pelo índice, para culminar numa grande diferença ao final do período analisado, com a carteira do índice valendo R\$5520, o que implica num rendimento de 551%, e a carteira Tangente valendo R\$ 12960 em Maio de 2001, representando um rendimento bruto de 1296%. Algumas estatísticas estão resumidas na tabela B.3.

Estatísticas	Carteira Tangente	Carteira IBOVESPA
Mínimo	-0,098	-0,17
Máximo	0,088	0,288
Média	0,0013	0,0009
Desvio Padrão	0,0189	0,030
Assimetria	0,078	0,390
Curtose	1,90	8,57

**Tabela B.3** Estatísticas das carteiras Tangente e IBOVESPA

A grande diferença que passamos a observar no final do período talvez possa ser explicada



**Figura B.8** Comparação dos Valores das Carteiras Tangente e IBOVESPA

pele fato de que os ativos que constituem a carteira Tangente foram selecionados com base na liquidez dos mesmos no segundo semestre de 2008, e certamente estes ativos não necessariamente eram os mais líquidos do índice BOVESPA em 1993. À medida que o tempo foi passando, os ativos que em 2008 se caracterizariam como de alta liquidez, passaram a ter um desempenho relativamente melhor em relação ao que tinham apresentado até então. Assim sendo, devemos tomar cuidado com as conclusões a serem tiradas desses gráficos, pois o desempenho extraordinário do passado não é garantia de desempenho extraordinário no futuro. O ideal para esta análise seria construir a carteira tangente em 1993 com os ativos mais líquidos de 1993. Porém, essas informações não estão disponíveis ao autor, e mesmo se estivessem, muitas das empresas mais líquidas de 1993 poderiam não mais existir. Também foi observado que, se em maio de 1993 colocássemos os R\$1000 em uma carteira que deliberadamente atribui um peso igual a  $1/9$  para os nove ativos, obteríamos em agosto de 2001 um valor correspondente à aproximadamente R\$9200, o que é significativamente menor que o valor obtido com a carteira tangente, sugerindo que, mesmo se levarmos em conta o fato mencionado acima sobre a liquidez dos ativos, a teoria de Markowitz consegue encontrar efetivamente uma carteira otimizada.

APÊNDICE C

## Ajustes das Distribuições de Probabilidade

- KS=Distância de Kolmogorov-Smirnov
- AD=Distância de Anderson-Darling
- KP=Distância de Kuiper
- FFO=Distância de Fajardo-Farias-Ornelas

DISTÂNCIA	NORMAL	HYP	NIG	GH
KS	0,070	0,040	0,042	0,043
AD	0,152	0,084	0,090	0,092
KP	0,112	0,062	0,070	0,059
FFO	0,298	0,135	0,145	0,149

**Tabela C.1** Distâncias para IBOV período 1

DISTÂNCIA	NORMAL	HYP	NIG	GH
KS	0,080	0,022	0,016	0,033
AD	41,38	0,192	0,063	1,50
KP	0,16	0,037	0,029	0,059
FFO	41,55	0,363	0,126	1,76

**Tabela C.2** Distâncias para IBOV período 2

DISTÂNCIA	NORMAL	HYP	NIG	GH
KS	0,030	0,035	0,014	0,020
AD	1,84	0,180	0,083	0,169
KP	0,049	0,050	0,028	0,035
FFO	1,92	0,215	0,116	0,220

**Tabela C.3** Distâncias para IBOV período 3

DISTÂNCIA	NORMAL	HYP	NIG	GH
KS	0,074	0,017	0,014	0,033
AD	10,75	0,189	0,080	0,57
KP	0,14	0,031	0,027	0,066
FFO	10,92	0,262	0,144	0,72

**Tabela C.4** Distâncias para IBOV período 4

DISTÂNCIA	NORMAL	HYP	NIG	GH
KS	0,12	0,12	0,12	0,13
AD	0,65	0,23	0,23	0,29
KP	0,24	0,24	0,23	0,24
FFO	0,88	0,46	0,46	0,56

**Tabela C.5** Distâncias para PETR4 período 1

DISTÂNCIA	NORMAL	HYP	NIG	GH
KS	0,08	0,045	0,047	0,046
AD	50	0,237	0,095	0,108
KP	0,15	0,084	0,084	0,084
FFO	50	0,320	0,169	0,186

**Tabela C.6** Distâncias para PETR4 período 2

DISTÂNCIA	NORMAL	HYP	NIG	GH
KS	0,042	0,026	0,026	0,033
AD	0,94	0,052	0,053	0,12
KP	0,074	0,043	0,043	0,059
FFO	1,05	0,096	0,094	0,22

**Tabela C.7** Distâncias para PETR4 período 3

DISTÂNCIA	NORMAL	HYP	NIG	GH
KS	0,071	0,024	0,021	0,021
AD	6,97	0,109	0,068	0,060
KP	0,134	0,041	0,039	0,040
FFO	7,15	0,176	0,126	0,118

**Tabela C.8** Distâncias para PETR4 período 4

DISTÂNCIA	NORMAL	HYP	NIG	GH
KS	0,092	0,092	0,092	0,093
AD	0,184	0,183	0,184	0,186
KP	0,182	0,182	0,182	0,182
FFO	0,363	0,363	0,363	0,363

**Tabela C.9** Distâncias para VALE5 período 1

DISTÂNCIA	NORMAL	HYP	NIG	GH
KS	0,095	0,085	0,070	0,077
AD	0,195	0,170	0,141	0,181
KP	0,167	0,137	0,137	0,137
FFO	0,371	0,275	0,275	0,350

**Tabela C.10** Distâncias para VALE5 período 2

DISTÂNCIA	NORMAL	HYP	NIG	GH
KS	0,036	0,035	0,035	0,032
AD	0,516	0,070	0,069	0,24
KP	0,065	0,061	0,061	0,061
FFO	0,639	0,123	0,123	0,328

**Tabela C.11** Distâncias para VALE5 período 3

DISTÂNCIA	NORMAL	HYP	NIG	GH
KS	0,057	0,017	0,016	0,033
AD	32,54	0,115	0,081	0,966
KP	0,107	0,030	0,030	0,062
FFO	32,67	0,223	0,135	1,22

**Tabela C.12** Distâncias para VALE5 período 4



## Referências Bibliográficas

- [1] Z. Bodie and R. C. Merton, *Finance*, Prentice Hall, 1998.
- [2] E. F. Fama, *Journal of Finance* 25 (1970) 383.
- [3] R. Edwards and J. Magee, *Technical Analysis of Stock Trends*, 8<sup>th</sup> Ed., AMACOM, 2001.
- [4] S. Cottle, R. F. Murray, and F. E. Block, *Security Analysis*, McGraw-Hill, 1988.
- [5] B. G. Malkiel, *A Random Walk Down Wall Street*, Norton, 2003.
- [6] R. J. Shiller, *Irrational Exuberance*, Princeton University Press, 2000.
- [7] E. Petters, *Chaos and Order in Capital Markets*, Wiley, 1996.
- [8] A. W. Lo and A. C. MacKinlay, *A Non-Random Walk Down Wall Street*, Princeton University Press, 1999.
- [9] J. Voit, *Statistical Mechanics of Financial Markets*, Springer, 2003.
- [10] D. Kahneman and A. Tversky (Eds.), *Choices, Values and Frames*, Cambridge University Press, 2000.
- [11] R. H. Thaler, *Advances in Behavioral Finance*, Russel Sage Foundation, 1993.
- [12] M. A. H. Dempster and C. M. Jones: ‘Can Technical Pattern Trading Be Profitably Automated?’ 1. The Channel; 2. The Head and Shoulders, *Working Papers*, The Judge Institute of Management Studies, University of Cambridge, November and December, 1999.
- [13] A. W. Lo, H. Mamaysky, and J. Wang: ‘Foundations of Technical Analysis: Computational Algorithms, Statistical Inference, and Empirical Implementation’, *NBER Working Paper W7613*, 1999.
- [14] B. LeBaron: ‘Technical Trading Profitability in Foreign Exchange Markets in the 1990s’, *Working Paper*, Brandeis University, 2000.
- [15] R. Clow: ‘Arbitrage Stung by More Efficient Market’, *Financial Times*, April 21, 2002.
- [16] B. Jacobsen, *Journal of Empirical Finance* 25 (1979) 383.
- [17] C. Hiemstra, J. D. Jones, *Journal of Empirical Finance* 4 (1997) 373.

- [18] J. T. Barkoulas, C. R. Baum, N. Travios, *Applied Financial Economics* 10 (2000) 177.
- [19] P. Grau-Carles, *Physica A* 287 (2000) 396.
- [20] G. Oh, S. Kim, C. Eom, *Journal of the Korean Physical Society* 48 (2006) S 197; S. Chae, W.-S. Jung, J.-S Yang, H.-T. Moon, *Journal of the Korean Physical Society* 48 (2006) 313.
- [21] G. Oh, S. Kim, C. Eom, *Physica A* 387 (2008) 1247; W. -S. Jung, F. Z. Wang, S. Havlin, T. Kaizoji, H.-T. Moon, H. E. Stanley, *The European Physical Journal B* 62 (2008) 113.
- [22] H. E. Hurst, *Transactions of The American Society of Civil Engineers* 116 (1951) 770.
- [23] A. W. Lo, *Journal of Econometrica* 59 (1991) 1279.
- [24] J. Geweke, S. Porter-Hudack, *Journal of Time Series Analysis* 4 (1983) 221.
- [25] C. K. Peng, S. V. Buldyrev, S. Havlin, M. Simons, H. E. Stanley, A. L. Goldberger, *Physical Review E* 49 (1994) 1685.
- [26] R. T. Baillie, T. Bollerslev, H. O. Mikkelsen, *Journal of Econometrics* 74 (1996) 3.
- [27] D. O. Cajueiro, B. M. Tabak, *Chaos, Solitons and Fractals* 22 (2004)349.
- [28] T. D. Matteo, T. Aste, M. M. Dacorogna, *Journal of Banking and Finance* 29 (2005) 827.
- [29] V. Yukalov, “Self-similar approach to market analysis”, cond-mat/0110285, *Eur. Phys. J B* 20, 609-617 (2001).
- [30] S. Gluzman and V. I. Yukalov, “Renormalization Group Analysis of October Market Crashes”, arXiv: cond-mat/970336, *Mod. Phys. Lett B* 12, 75-84, (1998).
- [31] S. Gluzman and V. I. Yukalov, “Booms and Crashes in Self-Similar Markets”, arXiv: cond-mat/9810092, *Mod.Phys. Lett B* 12, 575-587 (1998).
- [32] P. H. Franses, *Time Series Models for Business and Economic Forecasting*, Cambridge University Press, 1998.
- [33] J. D. Hamilton, *Time Series Analysis*, Princetos University Press, 1994.
- [34] C. Alexander, *Market Models: A Guide to Financial Data Analysis*, Wiley, 2001.
- [35] W. Feller, “The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables”, *Annals of Mathematical Statistics* **22** (1951), no. 3, 427-432.
- [36] B. LeBaron, “Chaos and Nonlinear Forecastability in Economics and Finance,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **348A**, 397-404 (1994).
- [37] W. A. Brock, D. Hsieh, and B. LeBaron, *Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence*, MIT Press, 1991.

- [38] T. Lux, “The Socio-economic Dynamics of Speculative Markets: Interacting Agents, Chaos, and Fat Tails of Return Distributions,” *Journal of Economic Behavior and Organization* **33**, 143-165 (1998).
- [39] Hyndman R. J., Koehler A. B., “Another Look at Measures fo Forecast Accuracy,” *Internationa Journal of Forecasting*, **22**, 679-688, (2006).
- [40] R Development Core Team (2008). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org>.
- [41] Akaike, H. Maximum likelihood identification of Gaussian autorregressive moving average models, *Biometrika*, **60**, 255-265, (1973).
- [42] Markowitz, H. M. Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7, 77-91, 1952.
- [43] Black, F. and Scholes, M. The pricing of options ans corporate liabilities. *Political Economy*, **81**, 635-654, 1973.
- [44] B. B. Mandelbrot, The variation of certain speculative prices, *Journal of Business*, 36, 394-419, 1963.
- [45] O. E. Barndoff-Nielsen. Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size, *Proceedings of the Royal Society London A*, 353, 401-419, 1977.
- [46] K. Prause, *The Generalized Hyperbolic Model: Estimation, Financial Derivatives and Risk Measures*, PhD thesis, University of Freiburg, 1999.
- [47] G.E. Box and G.M. Jenkins, *Time Series Analysis* (Holden-Day, San Francisco, 1970).
- [48] H. Tong, *Non-Linear Time Series* (Clarendon, Oxford, 1990).
- [49] D. Sornette, A. Johansen, and J. P. Bouchaud, *J. Phys. I France* **6**, 167 (1996).
- [50] J. A. Feigenbaum and P. G. Freund, *Int. J. Mod. Phys. B* **10**, 3737 (1996).
- [51] D. Sornette and A. Johansen, *Physica A* **245**, 411 (1997).
- [52] R. Mantegna and H. E. Stanley, *Nature* **376**, 46 (1995).
- [53] A. Timmermann, *Nature* **376**, 46 (1995).
- [54] S. Gashghaie, W. Breymann, J. Peinke, P. Talkner and Y. Dodge, *Nature* **381**, 767 (1996).
- [55] G. A. Baker Jr. and P. Graves-Morris, *Padé Approximants* (Cambridge Univ., Cambridge, 1996).
- [56] V. I. Yukalov, *Physica A* **167**, 833 (1990).
- [57] V. I. Yukalov, *J. Math. Phys.* **32**, 1235 (1991).

- [58] V. I. Yukalov, *J. Math. Phys.* **33**, 3994 (1994).
- [59] V. I. Yukalov and E. P. Yukalova, *Physica A* **206**, 553 (1994).
- [60] V. I. Yukalov and E. P. Yukalova, *Physica A* **225**, 336 (1996).
- [61] V. I. Yukalov and S. Gluzman, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 333 (1997).
- [62] S. Gluzman and V. I. Yukalov, *Phys. Rev. E* **55**, 3983 (1997).
- [63] V. I. Yukalov and S. Gluzman, *Phys. Rev. E* **55**, 6552 (1997).
- [64] N. N. Bogolubov and D. V. Shirkov, *Introduction to Theory of Quantized Fields* (Moscow, Nauka, 1984).
- [65] V. Pareto, *Manuel d'Economie Politique* (Giard, Paris, 1927).
- [66] V. I. Yukalov, *Phys. Rep.* **208**, 395 (1991).
- [67] V. I. Yukalov and S. Gluzman, *Phys. Rev. E* **58**, 4197 (1998).
- [68] S. Gluzman, D. Sornette, and V. I. Yukalov, cond-mat/0204326 (2002).
- [69] D. Sornette, *Why Stock Markets Crash* (Princeton University Press, 2002).
- [70] J. Zinn Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Clarendon, Oxford, 1996).
- [71] Saupe, Dietmar, *Algorithms for random fractals*, capítulo 2 de *The Science of Fractal Images*, Barnsley et al, Springer-Verlag, 1988.

