

Métodos Semiclássicos para a abordagem de Sistemas Dinâmicos Quânticos

Autor: Maurício Reis e Silva Júnior

Orientadora: Professora Doutora Maria Carolina Nemes

Co-orientador: Professor Doutor José Geraldo Peixoto de Faria

18 de maio de 2009

Resumo

Explora-se neste trabalho a análise do regime semiclássico de modelos quânticos sob o ponto de vista de suas dinâmicas. Na primeira parte do trabalho, são analisados modelos com limite clássico bem definido e atribui-se a ele uma dinâmica clássica correspondente. Pretende-se investigar como os sistemas se comportam nesse limite clássico e como o comportamento quântico pode ser aproximado. Para isso, é utilizado uma aproximação semiclássica como método sistemático de se encontrar correções quânticas aos valores médios clássicos de observáveis. São usados também resultados exatos para testar a eficiência dessa aproximação na determinação de efeitos quânticos e a fidelidade do estado aproximado pela expansão com o estado evoluído exatamente. A segunda parte do trabalho trata do limite clássico da mecânica quântica obtido através de uma equação mestra. As evoluções de funções de distribuição clássica e quântica são comparadas usando-se a representação de Wigner. São obtidas condições nas quais o acoplamento com o reservatório se faz consistente com a indistinguibilidade de 2 partículas e então analisa-se o processo de decoerência.

Abstract

This work studies the semiclassical behaviour of quantum models according to their dynamics. On the first part, we analyse quantum models with well defined classical limit and define a corresponding classical dynamics. We are intend to investigate here how those systems behave at this classical limit and how the quantum dynamics can be approximated. For that we make use of a semiclassical approximation as a systematic way of finding quantum corrections to the classical mean values of observables. We also make use of exact results for testing the semiclassical approximation for calculating typical quantum effects and the fidelity of the approximate state with the exact one. In the second part we deal with the classical limit of quantum mechanics through intercation with environment. The evolution of quantum and classical probability distributions are compared using the Wigner representation. We find then conditions under which the coupling of the system with the environment preserves two initially identical particles as identical and the we analyze the process of decoherence in that system.

Agradecimentos

- À professora Maria Carolina Nemes, não apenas pela orientação, mas pela inigualável ajuda em toda minha vida como estudante de Física, por sua paciência, sua energia, vontade de trabalhar e até pelas raras e merecidas broncas;
- Ao professor José Geraldo Peixoto de Faria pela orientação que se fez não apenas para esta tese, mas também para minha formação profissional;
- Aos professores Gustavo Rigolin, Marcelo Oliveira Terra Cunha, Salomon Sylvain e Mário Sérgio, membros da banca que avaliou este trabalho, pelos comentários e correções indicadas;
- À minha amada esposa Patrícia por me dar a maior alegria de minha vida até hoje, nossa filha Iara.
- À minha amada filha Iara por se tornar fonte de minha inspiração e vontade de viver.

Sumário

| | | |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1 | Introdução | 5 |
| 2 | Ferramentas | 9 |
| 2.1 | Preliminares | 9 |
| 2.2 | Estados Coerentes do Oscilador Harmônico | 10 |
| 2.3 | Estados Coerentes de Spin | 11 |
| 2.4 | Função de Wigner | 13 |
| 2.5 | Hamiltoniana Clássica associada a uma Hamiltoniana Quântica | 22 |
| 2.6 | Aproximação Semiclássica | 24 |
| 3 | Oscilador Quártico | 29 |
| 3.1 | O Modelo | 29 |
| 3.2 | Dinâmica | 31 |
| 3.3 | Análise Semiclássica | 35 |
| 3.4 | Oscilador Quártico Duplo | 48 |
| 3.5 | Análise Semiclássica no Oscilador Quártico Duplo | 50 |
| 4 | Modelo de Dicke para Superradiância | 61 |
| 4.1 | Limite Clássico do Modelo de Dicke | 62 |
| 4.2 | Aproximação Semiclássica no modelo de Dicke | 66 |
| 4.3 | Resultados e conclusão | 69 |
| 5 | Sistemas Quânticos Markovianos na Representação de Weyl | 72 |
| 5.1 | Sistemas Quânticos Abertos | 72 |
| 5.2 | Equações de movimento para a função de Wigner e função de Cordas | 76 |
| 5.3 | Soluções | 83 |
| 5.4 | Gráficos | 84 |
| 6 | Conclusão e Perspectivas | 99 |

Capítulo 1

Introdução

“And, what was fundamentally of greater significance, was that the general opinion in theoretical physics had accepted the idea that the principle of continuity (‘*natura non facit saltus*’), prevailing in the perceived macrocosmic world, is merely simulated by an averaging process in a world which in truth is discontinuous by its very nature.” [1]

Quando a Mecânica Quântica foi desenvolvida, ela trouxe novos conceitos e novas idéias, trouxe uma nova visão do mundo microscópico e ampliou as possibilidades tecnológicas. Mudou a forma de pensar dos físicos e representou uma mudança tão grande que alguns dos próprios responsáveis pelo surgimento da teoria não a aceitaram como tal [2]. Grande parte dessas mudanças levaria a uma descrição bizarra do mundo como conhecemos se os fenômenos possíveis de ocorrer em escala microscópica também ocorressem em escala macroscópica. Assim, seria difícil acreditar que um gato pudesse estar em uma superposição de vivo e morto ou que um cachorro fosse capaz de atravessar um muro. O que acontece portanto, é que existe um processo limite no qual as leis do mundo microscópico podem descrever o mundo macroscópico adequadamente: a Mecânica Quântica deve de alguma forma se tornar a Mecânica Clássica quando algum parâmetro da teoria se adapta para as condições do nosso mundo macroscópico. Poderíamos querer comparar esse processo ao que ocorre com a Teoria da Relatividade Especial. Para esta, é simples: no limite de baixas velocidades, obtém-se de volta a Relatividade de Galileu e os efeitos relativísticos se tornam desprezíveis. Com a Mecânica Quântica isso não funciona exatamente assim. Não há um único parâmetro que podemos levar a zero ou a infinito e assim obtermos de volta nossa descrição clássica do mundo. Isso por que as diferenças nas duas teorias não são puramente cinemáticas. Há novos conceitos revolucionários em Mecânica Quântica tais como a superposição de estados, não-localidade e, talvez o mais importante deles, o da dualidade onda partícula. Dessa forma

não é simplesmente um processo de média amparada pela lei dos grandes números que irá adequar as descrições que a Física dá para os mundos micro e macroscópico. Além do mais, se esse processo de média fosse suficiente, talvez a Mecânica Quântica jamais teria se estabelecido, pois os fenômenos microscópicos que justificam sua formulação não seriam notados. Em outras palavras, a Mecânica Quântica é revolucionária a ponto de ser notada, mas discreta a ponto de se adequar à realidade macroscópica.

Consideremos por exemplo uma forma comum de se obter o limite clássico, que é o caso em que grandezas típicas de um sistema físico são grandes o suficiente para tornar \hbar uma quantia de magnitude desprezível. Esse é um limite análogo ao caso da teoria da relatividade em baixas velocidades e será abordado na primeira parte dessa tese. Ocorre entretanto que muitos dos experimentos que foram cruciais para o desenvolvimento da Teoria Quântica eram feitos em escalas macroscópicas, como por exemplo a medição do espectro de radiação de corpo negro e o efeito fotoelétrico, mas os efeitos quânticos permaneceram eminentes. A constante de Planck estava lá, ainda que pequena, fornecendo assim resultados incompatíveis com a descrição clássica de até então.

Como se sua própria formulação já não representasse uma mudança no modo com o qual a física descreve o mundo, novas propriedades e características intrínsecas da natureza apareceram sob a luz da Mecânica Quântica. Um exemplo é a descoberta do momento magnético intrínseco, ou seja, o spin das partículas elementares. Algumas dessas novas descobertas podem ser colocadas no contexto de uma descrição clássica, mas o que há de realmente diferente na mecânica quântica é a forma como ela trata essas propriedades. Tomemos esse mesmo exemplo do spin. Não se pode deduzir, a partir da Mecânica Quântica não relativística, que as partículas elementares possuam uma propriedade intrínseca chamada spin. Isso é algo como o fato da matéria possuir massa, aceita-se isso como uma propriedade da natureza. Podemos realizar cálculos clássicos envolvendo partículas com spin, há entretanto experimentos, como o de Stern-Gerlach, que são impossíveis de se descrever usando unicamente teorias clássicas. Deve-se nesse caso usar os postulados da Mecânica Quântica adequados para sua descrição, como a existência de estados de superposição e o processo de medição por projeção. Se em particular quiséssemos verificar o limite clássico desse experimento, estaríamos numa posição complicada, já que não há um parâmetro específico a se variar para que o experimento possa ser aproximadamente descrito por uma formulação clássica.

Da mesma forma, a indistinguibilidade de partículas é algo concebível mesmo classicamente. Aos olhos da mecânica quântica entretanto, duas partículas devem ser idênticas dentro do contexto da dualidade onda partícula.

Devido a isso, devemos simetrizar ou antisimetrizar estados, e obtemos assim correlações responsáveis por mudanças na estatística de um agregado de partículas que não podem ser explicadas classicamente. Nesse caso entretanto, é possível obter um limite clássico. Imaginemos por exemplo duas partículas idênticas descritas quanticamente. A força de troca entre essas partículas corresponde a uma mudança no valor médio da distância entre elas. Essa mudança depende basicamente do quanto as funções de onda das partículas se sobreponham. Se as partículas estão próximas uma da outra, a função de onda total do sistema exibe uma correlação que leva ao efeito da “força de troca”. Numa situação em que duas partículas estão suficientemente afastadas umas das outras, teremos um valor médio para a distância entre elas igual àquele que seria obtido através de considerações clássicas. Vemos nesse caso um limite que não envolve “grandes números”, mas apenas uma compatibilidade na dualidade onda partícula. Quando estamos numa situação em que as correlações relacionadas ao caráter onda são irrelevantes, a descrição clássica passa a ser adequada.

Percebe-se então que a adequação da teoria quântica com um mundo clássico tal como conhecemos é um difícil e importante problema da física atual. Uma pergunta importante a se fazer nesse caso seria: Se o limite clássico de um sistema existe e pode ser obtido de forma suave, como o comportamento desse sistema muda a medida que nos afastamos desse regime? Essa pergunta constitui a motivação para a primeira parte do presente estudo. Na primeira parte vamos analisar a dinâmica de sistemas quânticos fechados cujo limite clássico é bem estabelecido. Neste caso, estaremos interessados no comportamento dos sistemas quando estes estão em um regime próximo ao clássico. A análise a ser feita se dará inicialmente em termos cinemáticos, sob o ponto de vista estatístico. Em particular, trataremos da evolução temporal de valores médios de observáveis quânticos. Em que escala efeitos quânticos ainda poderão ser observados? É possível distinguir as duas dinâmicas usando-se os valores médios desses observáveis? Correlações quânticas entre os observáveis irão permanecer? Para responder a essas perguntas, iremos usar uma aproximação semiclássica que foi desenvolvida para atender particularmente a essas questões.

Se queremos ser coerentes com a proposta de se comparar as mecânicas clássica e quântica através de descrições estatísticas, algo que deve sempre ser levado em conta é o fato de ser impossível observar na natureza um sistema completamente isolado de seu ambiente. É fato que todo sistema físico interage com seu ambiente, ainda que essa interação seja muito fraca a ponto de poder ser desprezada em muitos casos. Se levarmos em consideração esta perspectiva, o tratamento através de sistemas abertos seria a forma mais correta de se resolver boa parte dos problemas relacionados ao limite

clássico da mecânica quântica. Essa abordagem constitui um importante ramo de pesquisa atual e, além de ser útil para a compreensão de questões fundamentais, está intimamente ligada ao desenvolvimento tecnológico que a teoria pode proporcionar.

Na segunda parte dessa tese, iremos abordar o problema de duas partículas idênticas interagindo com um ambiente. Nesse caso, estaremos interessados em entender quais características da interação com o ambiente nos permite preservar a indistinguibilidade das partículas. O objeto da análise será novamente a dinâmica das partículas, e será feita em bases estatísticas usando a função de Wigner.

Capítulo 2

Ferramentas

2.1 Preliminares

Normalmente espera-se que uma descrição física da natureza envolva conceitos básicos de forma que seja por nós compreensível. Talvez o mais básico desses conceitos seja o conceito de movimento. Por isso, apesar de as Mecânicas Clássica e Quântica apresentarem uma diferença estrutural em suas formulações, uma forma natural de compararmos as duas descrições aplicadas a um dado sistema físico é através de sua dinâmica. Levando em consideração o caráter estatístico da Mecânica Quântica, devemos fazer essa comparação pelos caminhos da Mecânica Estatística. Deve-se comparar, por exemplo, valores médios de grandezas físicas mensuráveis classicamente com os valores médios de observáveis da Mecânica Clássica; analogamente comparam-se distribuições de probabilidade clássicas com distribuições de *quasi*-probabilidade da mecânica quântica.

Nessa análise, os estados coerentes desempenham importante papel. Será feita aqui uma revisão de suas definições e propriedades principais. Um tratamento formal dos estados coerentes pode ser encontrado na referência [3], e uma série de trabalhos envolvendo estados coerentes se encontra em [4].

Será mostrado como é possível usar os estados coerentes e obter uma hamiltoniana clássica a partir de uma hamiltoniana quântica. Estudando a relação entre essas duas hamiltonianas, é possível observar alguns fenômenos interessantes, como a correspondência entre autofunções de hamiltonianas quânticas e órbitas da hamiltoniana clássica correspondente, no fenômeno da “cicatrização” (em inglês, *scars*) [5, 6, 7]. Outro exemplo são as transições de fase quânticas que muitas vezes podem ser relacionadas com pontos de instabilidade da dinâmica clássica associada [8, 9, 10].

Por último, será apresentado o método de aproximação semiclássica de-

envolvida por Oliveira e colaboradores [11] que nos permitirá calcular as correções ao limite clássico do modelo de Dicke.

2.2 Estados Coerentes do Oscilador Harmônico

Os estados coerentes do Oscilador Harmônico são obtidos através dos operadores da álgebra h_4 [3]. Essa álgebra é caracterizada pelos operadores de criação e aniquilação a , a^\dagger e o operador número de excitações dado pelo produto $a^\dagger a$ que obedecem as relações de comutação:

$$[a, a^\dagger] = 1; \quad [a, a^\dagger a] = a \quad [a^\dagger, a^\dagger a] = -a^\dagger \quad (2.1)$$

As distribuições de probabilidade associadas aos estados coerentes do Oscilador Harmônico são Gaussianas em x e em p com produto de incertezas mínimo, $\Delta x \Delta p = \hbar/2$ e igualmente distribuído, sendo essa possivelmente a razão de serem chamados de Estados “*Quasi-Clássicos*”. Eles podem ser obtidos aplicando-se o operador unitário de *deslocamento*

$$D(\alpha) = \exp\{\alpha a^\dagger - \alpha^* a\} \quad (2.2)$$

ao estado fundamental do oscilador harmônico:

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle. \quad (2.3)$$

Através da relação [12]

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} \quad (2.4)$$

válida se $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$, é possível escrever o operador deslocamento como um produto de exponenciais:

$$D(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a}. \quad (2.5)$$

Essa forma é operacional e através dela pode-se obter os estados coerentes na base de Fock:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.6)$$

Dois estados coerentes sempre terão alguma sobreposição, isto é, são sempre não ortogonais. Fazendo $\langle \beta | \alpha \rangle$ obtém-se:

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \exp\left\{\beta^* \alpha - \frac{1}{2} [|\beta|^2 + |\alpha|^2]\right\}, \quad (2.7)$$

que é diferente de zero sempre.

Qualquer estado do espaço vetorial gerado pelos autovetores de $n = a^\dagger a$ pode ser escrito em termos dos estados coerentes. Isso pode ser verificado calculando-se $\int \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha|$, onde $d^2\alpha = d\alpha d\alpha^*$. Reescrevendo a equação (2.6) com a mudança de variáveis $\alpha = r e^{i\theta}$,

$$\int \int d\alpha d\alpha^* |\alpha\rangle \langle \alpha| = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r dr d\theta e^{-r^2} \sum_{n,n'} \frac{r^{n+n'} e^{i(n'-n)\theta}}{\sqrt{n!n'}} |n'\rangle \langle n|.$$

Utilizando agora os resultados:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{i(n-n')\theta} d\theta &= 2\pi \delta_{n,n'} \\ \int_0^\infty r^{2n+1} e^{-r^2} dr &= \frac{1}{2} \Gamma(n+1) \end{aligned}$$

obtém-se a relação:

$$\frac{1}{\pi} \int \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = 1. \quad (2.8)$$

2.3 Estados Coerentes de Spin

A álgebra $su(2)$ [3] é caracterizada pelos operadores J_z , J_+ e J_- , que obedecem as relações de comutação:

$$[J_z, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad [J_+, J_-] = 2J_z. \quad (2.9)$$

Os estados coerentes de Spin também são obtidos fazendo o operador de deslocamento da álgebra, dado por

$$D(\tau) \equiv \exp \left\{ \frac{\arctan |\tau|}{|\tau|} (\tau J_+ - \tau^* J_-) \right\}, \quad (2.10)$$

atuar no estado $|j, -j\rangle$

$$|\zeta\rangle \equiv D(\zeta) |j, -j\rangle, \quad (2.11)$$

onde $|j, m\rangle$ é autoestado dos operadores J_z , $\mathbf{J}^2 = J_+ J_- + J_z^2 - J_z$:

$$\mathbf{J}^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle \quad J_z |j, m\rangle = m |j, m\rangle. \quad (2.12)$$

Uma fórmula BCH [13] permite reescrever o operador deslocamento da álgebra $su(2)$ como produto de exponenciais:

$$D(\tau) = \exp\{\tau J_+\} \exp\{\ln(1 + |\tau|^2) J_z\} \exp\{\tau J_-\}, \quad (2.13)$$

Através dessa forma produto pode-se de maneira prática obter os estados coerentes de spin na base de autoestados de J_z :

$$|\zeta\rangle = \frac{1}{(1+|\tau|^2)^j} \sum_{k=0}^{2j} \tau^k \sqrt{\binom{2j}{k}} |j, -j+k\rangle. \quad (2.14)$$

Na expressão acima,

$$\binom{a}{b} \equiv \frac{a!}{(a-b)!b!}.$$

Assim como no caso do oscilador harmônico, os estados coerentes de spin são em geral não ortogonais,

$$\begin{aligned} \langle \tau | \sigma \rangle &= \frac{1}{(1+|\tau|^2)^j} \frac{1}{(1+|\sigma|^2)^j} \sum_{k=0}^{2j} \binom{2j}{k} \tau^{*k} \sigma^k \\ &= \frac{1}{(1+|\tau|^2)^j} \frac{1}{(1+|\sigma|^2)^j} (1+\omega^* \sigma)^{2j}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

e têm também uma relação de “super-completeza”. É possível obtê-la, usando a equação (2.14) e escrevendo τ como função de θ e ϕ de acordo com a equação:

$$\tau = e^{i\phi} \tan \frac{\theta}{2}. \quad (2.16)$$

Essa equação pode ser vista como uma transformação ou mapeamento da variável complexa τ em duas variáveis reais θ e ϕ com $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi < 2\pi$. Isso corresponde a fazer uma projeção estereográfica da variável τ [3]. Através dessa relação temos:

$$\begin{aligned} |\tau\rangle \langle \tau| &= \frac{1}{(1+|\tau|^2)^{2j}} \sum_{k,k'=0}^{2j} \tau^k (\tau^*)^{k'} \times \\ &\times \sqrt{\binom{2j}{k} \binom{2j}{k'}} |j, -j+k\rangle \langle j, -j+k'|, \\ |\tau|^2 &= \tan^2 \theta/2, \quad (1+|\tau|^2)^{-1} = \cos^2 \theta/2, \\ |\tau\rangle \langle \tau| &= \sum_{k,k'=0}^{2j} (\sin \theta/2)^{k+k'} (\cos \theta/2)^{2j-k-k'} \times \\ &\times e^{i(k-k')\theta} \sqrt{\binom{2j}{k} \binom{2j}{k'}} |j, -j+k\rangle \langle j, -j+k'|. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Integrando em todo o espaço, i.e., fazendo:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \text{sen}\theta \, d\theta d\phi |\tau\rangle \langle \tau|$$

e usando os resultados

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{i(n-n')\theta} d\theta &= 2\pi \delta_{n,n'} \\ \int_0^\pi (\text{sen}\theta/2)^{2k+1} (\text{cos}\theta/2)^{2j-2k+1} d\theta &= \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(j-k+1)}{\Gamma(j+2)} \end{aligned}$$

chega-se à relação:

$$\frac{2j+1}{4\pi} \int d^2\tau |\tau\rangle \langle \tau| = 1 \quad (2.18)$$

Para finalizar, um pequeno comentário sobre as relações de incerteza nos observáveis de spin. Ao contrário dos estados coerentes do oscilador harmônico, os estados coerentes de spin não são estados de incerteza mínima. Generalizando o conceito para um sistema de spin, o princípio de incerteza deve ser escrito como $\Delta J_x \Delta J_y \geq \frac{1}{2} \Delta J_z$. No entanto, mesmo para o estado $|J, -J\rangle$, que é um estado coerente de spin com $\tau = 0$ a igualdade não é observada. Ainda assim, estes estados são também considerados quasi-clássicos.

Neste trabalho será usado um estado coerente generalizado, cujo operador deslocamento atua em dois graus de liberdade e corresponde ao produto direto:

$$D(x, y) = D_1(x) \otimes D_2(y). \quad (2.19)$$

O estado coerente generalizado será portanto o produto tensorial de dois estados coerentes:

$$|x, y\rangle = |x\rangle \otimes |y\rangle. \quad (2.20)$$

2.4 Função de Wigner

A Mecânica Clássica descreve completamente um sistema dinâmico através dos valores de variáveis canônicas, como por exemplo momento e coordenada. Portanto é possível responder às perguntas “onde está?” e “com qual velocidade?” e obter todas as informações possíveis a respeito de um sistema físico. Estendendo esta idéia para a Mecânica Estatística, estas perguntas se tornam “qual a probabilidade de estar aqui com essa velocidade?”. Associar uma probabilidade para cada lugar possível define uma distribuição de probabilidade. Em Mecânica Estatística as distribuições de probabilidade são usadas para descrever um sistema físico e resumem toda a informação

que se pode obter dele. Já em Mecânica Quântica, o cenário é bem distinto. Basicamente, a descrição de um sistema quântico se baseia no conceito abstrato de estado quântico. O princípio da incerteza limita as possibilidades de descrição do sistema através de variáveis canônicas, já que não é possível conhecer simultaneamente e com precisão arbitrária o valor de duas variáveis que não comutam.

Ainda assim é possível em Mecânica Quântica definir distribuições de *quasi*-probabilidade [14] que servem como representações de um sistema, em analogia com o que é feito em Mecânica Estatística. É natural que essas distribuições quânticas apresentem diferenças fundamentais em relação às distribuições clássicas. Em termos de posição e momento por exemplo, a distribuição de probabilidade de uma está relacionada com a outra por uma transformada de Fourier, o que não ocorre nas distribuições clássicas.

Uma propriedade desejável em funções de distribuição é a de se obter a distribuição marginal de uma das variáveis somando-se sobre todos os valores das outras, isto é, se $R(x, y)$ é uma distribuição de probabilidade, deseja-se obter uma distribuição para x fazendo-se $P(x) = \int_{-\infty}^{\infty} R(x, y)dy$, por exemplo. Suponhamos que um determinado sistema quântico é descrito por um operador densidade ρ , isto é, um estado que não é necessariamente puro. Se a distribuição de quasi-probabilidade $W(q, p)$ desse estado ρ atende a propriedade das distribuições marginais, é possível relacioná-la com a descrição quântica usual pelas equações:

$$\langle q | \rho | q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} W_{\rho}(q, p)dp ; \quad (2.21)$$

$$\langle p | \rho | p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} W_{\rho}(q, p)dq . \quad (2.22)$$

Na verdade, é possível obter uma generalização das distribuições marginais para uma determinada direção θ . Isso pode ser feito através de um operador unitário $\hat{U}(\theta)$, definido em função dos operadores $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q} + i\hat{p})$, $a^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q} - i\hat{p})$ como sendo $\hat{U}(\theta) = \exp\{-ia^{\dagger}a\theta\}$. O operador $\hat{U}(\theta)$ transforma os operadores \hat{q} e \hat{p} da seguinte forma¹:

$$\begin{aligned} \hat{U}^{\dagger}(\theta)\hat{q}\hat{U}(\theta) &= \hat{q}\cos\theta + \hat{p}\sin\theta; \\ \hat{U}^{\dagger}(\theta)\hat{p}\hat{U}(\theta) &= -\hat{q}\sin\theta + \hat{p}\cos\theta. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Como $\hat{U}(\theta)$ é unitário, $\hat{U}^{\dagger}|q\rangle$ é autovetor do operador $\hat{q}' = \hat{U}^{\dagger}(\theta)\hat{q}\hat{U}(\theta)$. A

¹Podem ser verificados pela relação $e^{x^A B} e^{-x a} = B + [A, B]x + [A, [A, B]]x^2/2! + [A, [A, [A, B]]]x^3/3! \dots$

generalização das equações (2.21) e (2.22) pode ser feita escrevendo-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(q \cos \theta - p \sin \theta, q \sin \theta + p \cos \theta) dp = \langle q | \hat{U}(\theta) \rho \hat{U}^\dagger(\theta) | q \rangle, \quad (2.24)$$

isto é, pretende-se que a distribuição de *quasi*-probabilidade recupere distribuições marginais se isso for feito em qualquer direção θ no espaço de fases. Nos casos $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$ obtém-se as distribuições de probabilidade $\langle q | \rho | q \rangle$, $\langle p | \rho | p \rangle$ respectivamente. Para obter uma função das variáveis canônicas (q, p) que satisfaça as propriedades das distribuições marginais como mostrado acima [15], vamos inicialmente definir a *Função Característica* de um operador \hat{A} que atua no espaço de Hilbert gerado por \hat{q} , \hat{p} :

$$\widetilde{W}_A(\xi) = \text{Tr} \left\{ \hat{A} D(\beta) \right\}, \quad (2.25)$$

onde $\xi = (\xi_q, \xi_p)$,

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\xi_q + i\xi_p) \quad (2.26)$$

e $D(\beta)$ é o operador deslocamento tal como definido em (2.2). A *função de Wigner* [14] do operador \hat{A} , $W_A(q, p)$ é a transformada de Fourier de sua Função Característica:

$$W_A(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \widetilde{W}_A(\xi) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \xi \wedge \mathbf{x} \right\} d\xi. \quad (2.27)$$

Nessa expressão, $\xi \wedge \mathbf{x} = \xi_p q - \xi_q p$ e $d\xi = d\xi_q d\xi_p$. Escrevendo o traço em (2.25) na representação q , pode-se obter a seguinte expressão para a função de Wigner:

$$W_A(q, p) = \int \exp\{-ipq'/\hbar\} \langle q + q'/2 | \hat{A} | q - q'/2 \rangle dq'. \quad (2.28)$$

Podemos de forma análoga obter a função de Wigner na representação de momentum:

$$W_A(q, p) = \int \exp\{ip'q/\hbar\} \langle p + p'/2 | \hat{A} | p - p'/2 \rangle dp'. \quad (2.29)$$

A função característica em um ponto (ξ_q, ξ_p) de um operador densidade $\hat{\rho}$ pode ser vista como a média do operador deslocamento $D(\beta)$ naquele estado. Para obter uma interpretação semelhante na função de Wigner, considere o operador paridade definido como:

$$\Pi \equiv \frac{1}{4\pi\hbar} \int dk ds \exp\{i(k\hat{q} + s\hat{p})/\hbar\}. \quad (2.30)$$

Usando a forma fatorada do operador acima e o fato de o operador momentum ser gerador de deslocamentos do operador \hat{q} , isto é,

$$e^{-is\hat{p}/\hbar}\hat{q}e^{is\hat{p}/\hbar} = \hat{q} - s, \quad (2.31)$$

pode-se verificar que:

$$\Pi = \int dq | -q \rangle \langle q | \quad (2.32)$$

e também

$$\Pi\hat{q}\Pi = -\hat{q}. \quad (2.33)$$

Da mesma forma, usando o fato de \hat{q} ser gerador de deslocamentos do operador \hat{p} mostram-se relações semelhantes:

$$e^{-ik\hat{q}/\hbar}\hat{p}e^{ik\hat{q}/\hbar} = \hat{p} + k, \quad (2.34)$$

pode-se verificar que:

$$\Pi = \int dp | p \rangle \langle -p | \quad (2.35)$$

e também

$$\Pi\hat{p}\Pi = -\hat{p}. \quad (2.36)$$

O operador paridade definido em (2.30) faz portanto uma inversão no espaço de fases em torno da origem. Ele pode no entanto ser generalizado para uma inversão em torno do ponto ($q = u, p = v$) através do operador deslocamento. Definindo

$$\Pi_{uv} \equiv D(\alpha)\Pi D(-\alpha) \quad (2.37)$$

onde

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(u + iv), \quad (2.38)$$

obtem-se:

$$\Pi_{uv} \equiv \frac{1}{4\pi\hbar} \int dk ds \exp\{i(k(\hat{q} - u) + s(\hat{p} - v))/\hbar\}. \quad (2.39)$$

Na representação de posição,

$$\Pi_{uv} = \int ds e^{-ivs/\hbar} | u + s \rangle \langle u - s | \quad (2.40)$$

e

$$\Pi_{uv}(\hat{q} - u)\Pi_{uv} = -(\hat{q} - u). \quad (2.41)$$

Na representação de momentum,

$$\Pi_{uv} = \int dk e^{-iuk/\hbar} |v - k\rangle \langle v + k| \quad (2.42)$$

e

$$\Pi_{uv}(\hat{p} - v)\Pi_{uv} = -(\hat{p} - v). \quad (2.43)$$

Usando as relações acima, podemos escrever a função de Wigner de um estado ρ como sendo

$$W_\rho(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \text{Tr} \{ \rho \Pi_{qp} \} \quad (2.44)$$

ou seja, é possível interpretar a função de Wigner num ponto (q, p) como sendo a média do operador paridade em torno daquele ponto [16].

Escrevendo os projetores P_{qp}^+ e P_{qp}^- nos espaços de estados simétrico (+) e antisimétrico (-) em torno de (q, p) ,

$$P_{qp}^\pm \equiv \frac{1}{2}(1 \pm \Pi_{qp}), \quad (2.45)$$

vemos que

$$\Pi_{pq} = P_{qp}^+ - P_{qp}^- \quad (2.46)$$

e o valor da função de Wigner no ponto (q, p) pode ser vista como a diferença entre as partes simétrica e antisimétrica de ρ em torno daquele ponto:

$$W_\rho(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \{ \text{Tr} \{ \rho P_{qp}^+ \} - \text{Tr} \{ \rho P_{qp}^- \} \}. \quad (2.47)$$

Isso implica na seguinte desigualdade para o valor da função de Wigner num ponto (q, p) :

$$-\frac{1}{\pi\hbar} \leq W_\rho(q, p) \leq \frac{1}{\pi\hbar}. \quad (2.48)$$

A seguir são mostrados os gráficos das funções de Wigner para alguns casos importantes. Para fazer a função de Wigner de um autoestado do oscilador harmônico por exemplo, basta obter esses autoestados na representação de posição e tomar a transformada de Fourier da função $\Psi_n^*(q - x/2)\Psi_n(q + x/2)$ em x , ou seja, $(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \Psi_n^*(q - x/2)\Psi_n(q + x/2) dx$.

Já para o primeiro estado excitado do oscilador harmônico, existe uma região negativa na função de Wigner, conforme figura 2.1.

Na verdade, exceto pelo estado fundamental, todos os estados de Fock são estados com regiões negativas, consequência da simetria de suas funções de onda. A função de Wigner do estado fundamental é uma Gaussiana (figura 2.2) em q e p centrada na origem,

$$W_{|0\rangle\langle 0|}(q, p) = \frac{1}{\pi} e^{-q^2 - p^2} \quad (2.49)$$

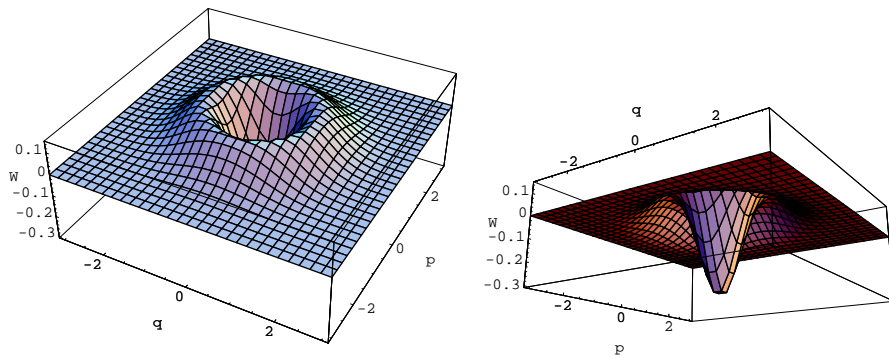


Figura 2.1: Função de Wigner para o autoestado $n = 1$ do oscilador harmônico ($\hbar = 1$, $\omega = 1$). À direita, vista inferior com detalhe para a parte negativa.

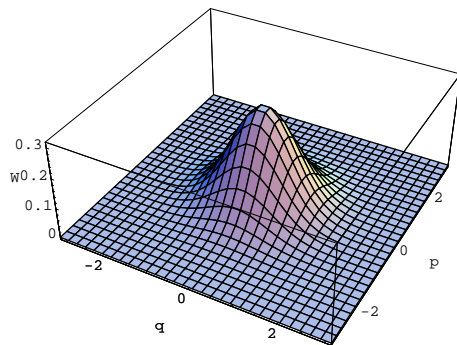


Figura 2.2: Função de Wigner para o estado fundamental do oscilador harmônico ($\hbar = 1$, $\omega = 1$).

Com a função de Wigner é possível ilustrar melhor o processo de obtenção de estados coerentes. Reescrevendo o operador deslocamento em termos dos operadores \hat{q} e \hat{p} e definindo $\alpha = u + iv$,

$$D(\alpha) = \exp\{i(v\hat{q} - u\hat{p})\} = e^{-\frac{1}{2}iuv} e^{iv\hat{q}} e^{-iu\hat{p}}. \quad (2.50)$$

Segundo o tratamento usado por Ballentine [17], o operador \hat{p} é um gerador hermitiano de translação no grupo de Galileu. Portanto, $T(\lambda) = e^{-i\lambda\hat{p}}$ é um operador unitário de translação que, atuando nos autovetores de \hat{q} faz $e^{-i\lambda\hat{p}}|q\rangle = |q + \lambda\rangle$. A função de Wigner de um estado coerente será obtida como:

$$\begin{aligned} W_{|\alpha\rangle\langle\alpha|}(q, p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} \langle q - x/2 | \alpha \rangle \langle \alpha | q + x/2 \rangle dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \langle q - x/2 | D(\alpha) | 0 \rangle \langle 0 | D^\dagger(\alpha) | q + x/2 \rangle dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} e^{iv(q-x/2)} \langle q - x/2 | T(\lambda) | 0 \rangle \times \\ &\quad \times \langle 0 | T^\dagger(\lambda) | q + x/2 \rangle e^{iv(q-x/2)} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p-v)x} \langle (q-u) - x/2 | 0 \rangle \langle 0 | (q-u) + x/2 \rangle dx \quad (2.51) \end{aligned}$$

A equação (2.51) representa uma Gaussiana deslocada nas direções q, p pelas partes real e imaginária de α .

Outra assinatura quântica relacionada à paridade de um estado quântico surge na função de Wigner para a superposição de dois estados coerentes. Escolhendo o parâmetro α de um estado coerente como sendo $\alpha = q_0$, um número real, o estado de superposição $|\psi\rangle = 2^{-1/2}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)$ terá como operador densidade o projetor:

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}(|\alpha\rangle\langle\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha| + |\alpha\rangle\langle-\alpha| + |-\alpha\rangle\langle\alpha|).$$

A função de Wigner para $|\alpha\rangle\langle\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha|$ é apenas a soma de duas Gaussianas, uma centrada em $(q_0, 0)$ e a outra em $(-q_0, 0)$. A parte não clássica está no termo: $|\alpha\rangle\langle-\alpha| + |-\alpha\rangle\langle\alpha|$:

$$\begin{aligned} W_{|\alpha\rangle\langle-\alpha|} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \exp\{-(q^2 + (x + q_0)^2)\} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-q^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(u-2q_0)} \exp\{-\frac{u^2}{4}\} du, \quad u = x + 2q_0 \quad (2.52) \end{aligned}$$

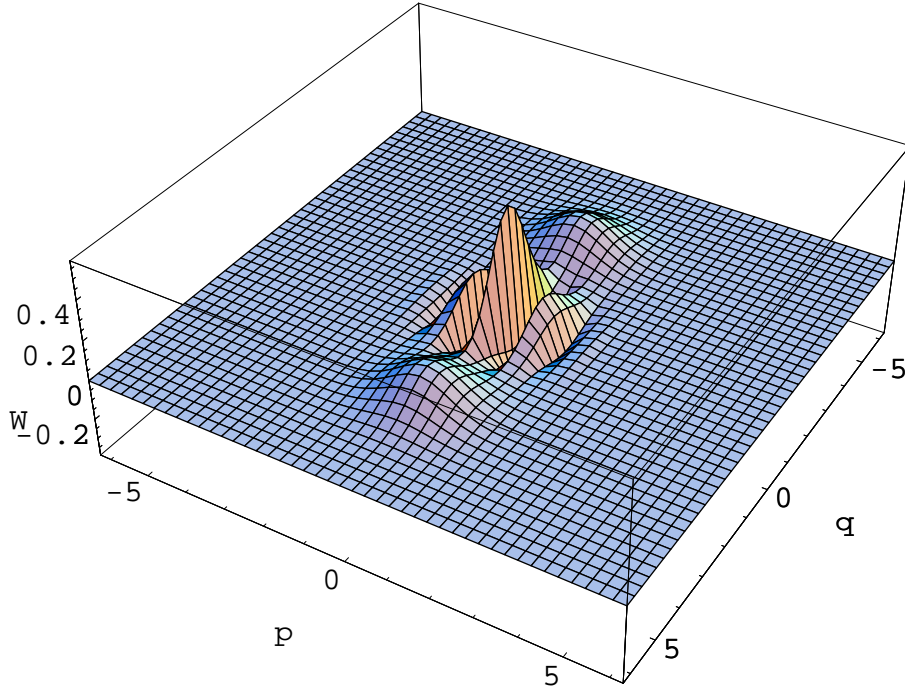


Figura 2.3: Função de Wigner para um estado de superposição de dois estados coerentes do oscilador harmônico ($\hbar = 1$, $\omega = 1$, $|\psi\rangle = (D(\alpha)|0\rangle + D(-\alpha)|0\rangle)/N$, sendo N uma normalização e $\alpha = 1$).

usando $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-ipx - x^2/4\}dx = \pi^{-1/2} 2e^{-p^2}$ e reescrevendo o resultado para o outro termo de interferência obtido trocando $q_0 \rightarrow -q_0$, a função de Wigner para o estado de superposição será dada por:

$$W_{|\psi\rangle\langle\psi|}(q, p) = (2\pi)^{-1} \left(e^{-p^2 - (q - q_0)^2} + e^{-p^2 - (q + q_0)^2} + 2\sqrt{\pi} e^{-p^2 - q^2} \cos(2p q_0) \right) \quad (2.53)$$

O último termo da equação acima representa uma oscilação na direção p envolvida por uma Gaussiana na origem. Quanto maior a separação q_0 , maior o número de oscilações observado. A figura 2.3 mostra o gráfico do efeito de interferência.

A função de Wigner foi obtida para a representação (q, p) . É possível no entanto estender os conceitos até agora utilizados para defini-las em uma representação de momento angular, o que foi feito por Agarwal [18, 19]. Para a função de Wigner da álgebra de $su(2)$, Agarwal objetivou preservar

a propriedade do traço, isto é,

$$\text{Tr} \{ \hat{A} \hat{B} \} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi W_{\hat{A}} W_{\hat{B}} \sin\theta \, d\theta \, d\phi \quad (2.54)$$

Não serão apresentados aqui os procedimentos utilizados por ele para obter a generalização. Resumidamente pode-se dizer que, para a álgebra de momento angular, o operador deslocamento que aparece na função característica é trocado pelo tensor esférico

$$\hat{T}_{KQ} = \sum_{m=-j}^j (-1)^{j-m} \sqrt{2K+1} \begin{pmatrix} j & K & j \\ -m & Q & m-Q \end{pmatrix} |j, m\rangle \langle j, m-Q|. \quad (2.55)$$

O símbolo

$$\begin{pmatrix} j & K & j \\ -m & Q & m-Q \end{pmatrix}$$

é conhecido como símbolo $3j$ de Wigner [17] e está relacionado aos coeficientes de Clebsch-Gordan. A *matriz característica*, correspondente da função característica, é definida como:

$$\varrho_{KQ} \equiv \text{Tr} \{ \rho \hat{T}_{KQ} \}. \quad (2.56)$$

Os elementos ϱ_{KQ} da matriz característica nada mais são que os coeficientes da expansão do operador densidade na base de tensores esféricos. A função de Wigner para momento angular pode ser então escrita de forma única em termos de Harmônicos esféricos $Y_{KQ}(\theta, \phi)$:

$$W_\rho(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \sum_{K=0}^{2j} \sum_{Q=-K}^K \varrho_{KQ} Y_{KQ}(\theta, \phi). \quad (2.57)$$

Para visualizar as funções de Wigner esféricas, pode-se usar um esquema de relevo em uma esfera de raio $\sqrt{j(j+1)}$. A representação gráfica se faz então simplesmente parametrizando a esfera com variações no raio de acordo com os valores da função de Wigner.

As figuras 2.4 e 2.5 mostram as funções de Wigner para estados de Dicke $|5, -5\rangle$ e $|5, -3\rangle$. Para visualizar estados na região do pólo sul, é interessante usar uma representação projetiva, com uma transformação de variáveis: $\tau = e^{i\phi} \tan \theta/2$.

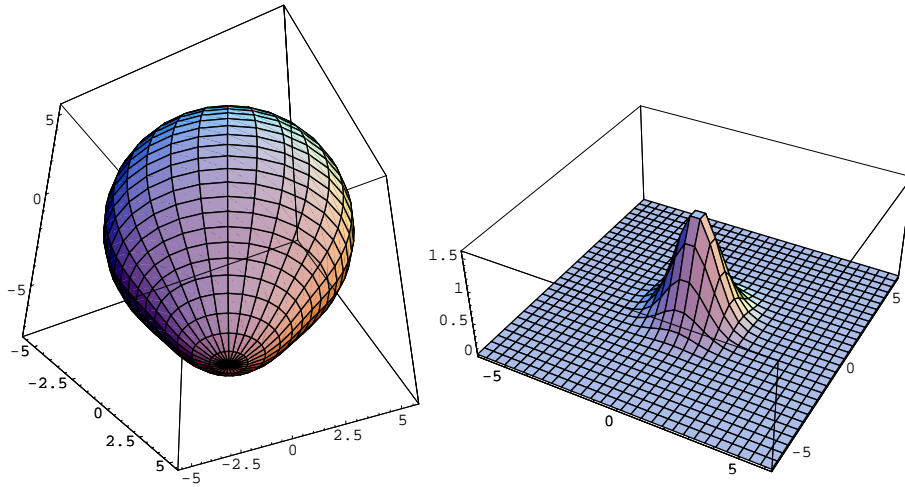


Figura 2.4: Função de Wigner para o estado de Dicke $|5, -5\rangle$. À direita, vista projetiva no plano complexo dada pela equação $\tau = e^{i\phi} \tan \theta/2$.

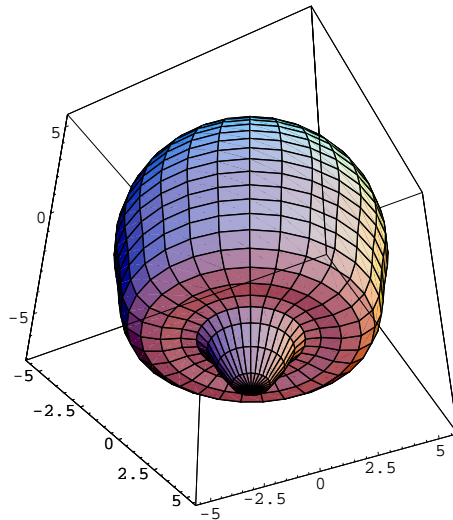


Figura 2.5: Função de Wigner para o estado de Dicke $|5, -3\rangle$.

2.5 Hamiltoniana Clássica associada a uma Hamiltoniana Quântica

Em geral pode-se definir uma hamiltoniana quântica a partir de uma hamiltoniana clássica usando uma regra simples: trocam-se as variáveis canônicas por operadores e, caso seja necessário, faz-se uma simetrização para garantir que a hamiltoniana quântica obtida seja hermitiana. Essa forma é chamada

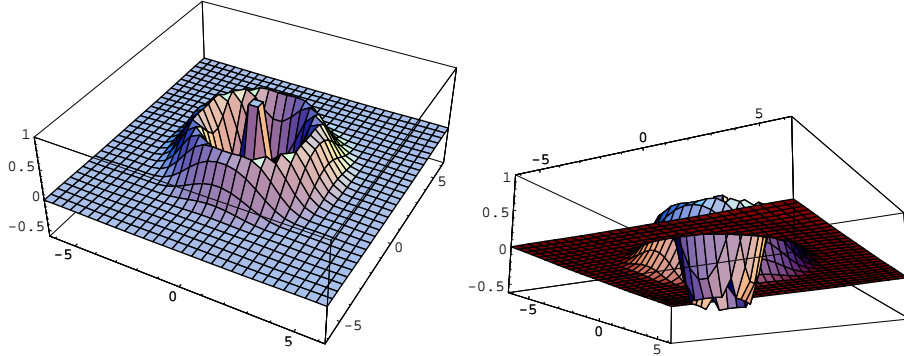


Figura 2.6: Função de Wigner para o estado de Dicke $|5, -3\rangle$. Vista projetiva no plano complexo dada pela equação $\tau = e^{i\phi} \tan \theta/2$. A direita, detalhe da parte negativa.

quantização canônica. Para o Campo Eletromagnético por exemplo usam-se os operadores a , a^\dagger no lugar das amplitudes do potencial vetor. Uma vez partindo de uma hamiltoniana quântica poderíamos querer obter uma hamiltoniana clássica pelo processo inverso: associando-se variáveis aos operadores. Deve-se observar no entanto que, devido às relações de comutação, uma hamiltoniana quântica pode gerar diferentes hamiltonianas clássicas. Essa possível ambigüidade pode ser removida deixando claro qual ordenamento dos operadores foi usado para obtenção da hamiltoniana clássica análoga. Se por exemplo quiséssemos obter uma hamiltoniana clássica para o oscilador harmônico

$$H = \omega\hbar(a^\dagger a + 1/2),$$

poderíamos obter pelo menos 3 opções:

$$H_n = \omega\hbar(|\alpha|^2 + 1/2), \quad H_a = \omega\hbar(|\alpha|^2 - 1/2), \quad H_s = \omega\hbar|\alpha|^2,$$

tomando a mesma hamiltoniana quântica com ordenamentos normal, anti-normal e simétrico respectivamente.

Uma maneira de formalizar essa correspondência é através da projeção em estados coerentes. Posto que a média de um operador não muda ao reescrevê-lo usando relações de comutação, se definirmos a hamiltoniana clássica como o valor médio da hamiltoniana quântica em estados coerentes generalizados:

$$\mathcal{H}_{cls}(x, y) = \langle xy | H | xy \rangle, \quad (2.58)$$

teremos sempre a mesma forma para a hamiltoniana clássica correspondente a uma dada hamiltoniana quântica. Para a álgebra h_4 por exemplo, a hamiltoniana clássica obtida irá sempre corresponder à ordenação normal da hamiltoniana quântica do modelo em estudo.

Esse procedimento é um padrão para se obter hamiltonianas clássicas, podendo estas serem vistas como geradores de evolução temporal dos rótulos dos estados coerentes generalizados x, y . Essa evolução temporal será dada pelas equações clássicas:

$$\begin{aligned}
ig \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}_{cls}(x, y)}{\partial x^*} \\
-ig \frac{dx^*}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}_{cls}(x, y)}{\partial x} \\
ig \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}_{cls}(x, y)}{\partial y^*} \\
-ig \frac{dy^*}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}_{cls}(x, y)}{\partial y},
\end{aligned} \tag{2.59}$$

sendo o fator g uma correção às equações de acordo com a métrica dos espaços correspondentes [3]:

$$\begin{cases} g = 1 & \text{para álgebra } h_4 \\ g = \frac{2j}{(1+|y|^2)^2} & \text{para álgebra } su(2) \end{cases} \tag{2.60}$$

No presente trabalho, essa hamiltoniana clássica será fundamental para o método aproximativo que será mostrado na próxima seção.

2.6 Aproximação Semiclássica

A aproximação semiclássica aqui utilizada foi inicialmente proposta por Oliveira e colaboradores [11] em um trabalho sobre escalas de tempo de efeitos quânticos de um oscilador quártico em uma e duas dimensões e foi o primeiro método sistemático para obtenção de tempos de Ehrenfest. O tempo de Ehrenfest de uma evolução temporal quântica é o tempo no qual os valores médios de observáveis evoluídos através dela coincidem com seus correspondentes clássicos.

A aproximação que será apresentada aqui foi também usada por Fonseca Romero [20] e colaboradores em um trabalho sobre sensibilidade às condições iniciais em sistemas bilineares. Basicamente o que se faz na aproximação é separar a evolução quântica em duas: uma parte semiclássica que possui correspondência direta com a dinâmica clássica associada e o restante da evolução que é tratada então como uma perturbação.

Para fazer a aproximação, toma-se como referência a evolução temporal de estados coerentes. Sendo estes estados “*quasi*-clássicos”, eles podem dar uma boa referência sobre a parte clássica da evolução quântica. Um

estado coerente preserva suas qualidades “*quasi-clássicas*” quando evoluído por uma hamiltoniana linear nos operadores de sua álgebra. Essas hamiltonianas serão aqui chamadas semiclássicas, com notação H_{sc} . Para a álgebra $su(2)$ por exemplo, as hamiltonianas semiclássicas seriam do tipo $H_{sc} = c_0(t)J_z + c_+(t)J_+c_-(t)J_- + c_1(t)$, sendo c_0, c_{\pm} coeficientes complexos que podem depender do tempo.] De forma análoga, na álgebra h_4 estaríamos tratando de hamiltonianas do tipo $H_{sc} = c_0(t)a^\dagger a + c_+(t)a^\dagger + c_-(t)a + c_1(t)$.

Para comparar as dinâmicas geradas por H e $\mathcal{H}_{\downarrow\uparrow f}$, suponha que a média de um dos operadores do grupo tenha sua evolução temporal feita de duas formas: usando a hamiltoniana quântica e usando a hamiltoniana clássica associada a ela pela projeção em estados coerentes, conforme (2.58). Se a hamiltoniana quântica for do tipo semiclássica, i.e., linear nos operadores do grupo conforme descrito acima, as duas formas de evolução serão equivalentes, veremos que as equações para operadores e para médias apresentarão a mesma estrutura. Nesse caso, teríamos um tempo de Ehrenfest infinito e não seria possível distinguir entre as duas dinâmicas usando-se apenas a média dos operadores. Esta é a base na qual podemos obter uma aproximação semiclássica útil no estudo das dinâmicas clássica e quântica de um sistema físico.

Para mostrar o que significa exatamente essa igualdade de estrutura, é necessário visualizar a hamiltoniana clássica, escrita em termos dos rótulos dos estados coerentes, como uma função dos valores médios dos operadores. Para tal, faz-se uso das relações:

$$a \rightarrow \alpha, \quad a^\dagger \rightarrow \alpha^*, \quad a^\dagger a \rightarrow |\alpha|^2, \quad (2.61)$$

$$J_- \rightarrow \frac{2j\tau}{(1+|\tau|^2)} = \mathcal{J}_-, \quad J_+ \rightarrow \frac{2j\tau^*}{(1+|\tau|^2)} = \mathcal{J}_+,$$

$$J_z \rightarrow -j \frac{1-|\tau|^2}{1+|\tau|^2} = \mathcal{J}_z \quad (2.62)$$

e devemos pensar nas hamiltonianas clássicas como se estivessem nas formas:

$$\mathcal{H}_{cls}(\alpha, \alpha^*) = \mathcal{K}(\alpha, \alpha^*, |\alpha|^2) \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_{cls}(\tau, \tau^*) = \mathcal{K}(\mathcal{J}_+, \mathcal{J}_-, \mathcal{J}_z). \quad (2.63)$$

Se estivermos tratando de um sistema com mais graus de liberdade, basta estender as relações acima de maneira apropriada e definir a hamiltoniana com mais variáveis de acordo com a necessidade. Com as relações (2.61) e (2.62) podemos dizer que temos equações de movimento semelhantes nos casos quântico e clássico se estas forem obtidas através das “Kamiltonianas” $\mathcal{K}(\alpha, \alpha^*, |\alpha|^2, \mathcal{J}_z, \mathcal{J}_+, \mathcal{J}_-)$. Escrevendo equações de movimento para α por

exemplo teríamos:

$$i\hbar \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_{cls}}{\partial \alpha^*} = \frac{\partial \mathcal{K}(\alpha, \alpha^*, |\alpha|^2)}{\partial \alpha^*} + \frac{\partial \mathcal{K}(\alpha, \alpha^*, |\alpha|^2)}{\partial (|\alpha|^2)} \frac{\partial |\alpha|^2}{\partial \alpha^*}$$

$$i\hbar \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \mathcal{K}(\alpha, \alpha^*, |\alpha|^2)}{\partial \alpha^*} + \frac{\partial \mathcal{K}(\alpha, \alpha^*, |\alpha|^2)}{\partial (|\alpha|^2)} \alpha. \quad (2.64)$$

Pode-se então usar a relação (2.61) e identificar a semelhança estrutural da equação clássica dada por (2.64) com a equação de movimento do operador a , quando este é evoluído por uma hamiltoniana semiclássica do grupo h_4 :

$$i\hbar \frac{da}{dt} = [a, H_{sc}] = c_0(t)a + c_+(t). \quad (2.65)$$

Relações equivalentes são observadas para os demais operadores. Pela derivada temporal de $|\alpha|^2$ por exemplo, teríamos:

$$i\hbar \frac{d|\alpha|^2}{dt} = i\hbar \alpha^* \frac{d\alpha}{dt} + i\hbar \alpha \frac{d\alpha^*}{dt} = \alpha^* \frac{\partial \mathcal{H}_{cls}}{\partial \alpha^*} - \alpha \frac{\partial \mathcal{H}_{cls}}{\partial \alpha}, \quad (2.66)$$

$$i\hbar \frac{d|\alpha|^2}{dt} = \alpha^* \frac{\partial \mathcal{K}(\alpha, \alpha^*, |\alpha|^2)}{\partial \alpha^*} - \alpha \frac{\partial \mathcal{K}(\alpha, \alpha^*, |\alpha|^2)}{\partial \alpha}, \quad (2.67)$$

que pode ser comparada diretamente com

$$i\hbar \frac{d(a^\dagger a)}{dt} = [a^\dagger a, H_{sc}] = c_+(t)a^\dagger - c_-(t)a \quad (2.68)$$

Com a álgebra de $su(2)$ o cálculo é um pouco mais trabalhoso. Para \mathcal{J}_+ seria necessário fazer:

$$i\hbar \frac{d\mathcal{J}_+}{dt} = i\hbar \frac{\partial \mathcal{J}_+}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dt} + i\hbar \frac{\partial \mathcal{J}_+}{\partial \tau^*} \frac{d\tau^*}{dt} \quad (2.69)$$

$$i\hbar \frac{d\mathcal{J}_+}{dt} = -\tau^* \frac{2j\hbar}{(1+|\tau|^2)^2} \frac{d\tau}{dt} + \frac{2j\hbar}{(1+|\tau|^2)^2} \frac{d\tau^*}{dt}. \quad (2.70)$$

Escrevendo então a derivada temporal de τ , τ^* em termos de \mathcal{H}_{cls} e em seguida derivando H através da Kamiltoniana,

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tau} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathcal{J}_+} \frac{\partial \mathcal{J}_+}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathcal{J}_-} \frac{\partial \mathcal{J}_-}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathcal{J}_z} \frac{\partial \mathcal{J}_z}{\partial \tau} \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tau^*} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathcal{J}_+} \frac{\partial \mathcal{J}_+}{\partial \tau^*} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathcal{J}_-} \frac{\partial \mathcal{J}_-}{\partial \tau^*} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathcal{J}_z} \frac{\partial \mathcal{J}_z}{\partial \tau^*} \quad (2.72)$$

é possível mostrar a relação:

$$i\hbar \frac{d\mathcal{J}_+}{dt} = 2\mathcal{J}_z \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathcal{J}_-} - \mathcal{J}_+ \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathcal{J}_z}. \quad (2.73)$$

Essa por sua vez tem a mesma estrutura da equação para evolução temporal de J_+ sob ação de uma hamiltoniana semiclássica:

$$i\hbar \frac{dJ_+}{dt} = [J_+, H_{sc}] = 2c_-(t)J_z - c_0(t)J_+ \quad (2.74)$$

Essas equações constituem a chave para a aproximação semiclássica de Oliveira e colaboradores. Para construí-la deve-se obter, a partir da hamiltoniana quântica H que será aproximada, uma hamiltoniana semiclássica, H_{sc} , com as propriedades:

1. H_{sc} é linear nos operadores geradores da álgebra do grupo ($a^\dagger a$, a , a^\dagger no caso da álgebra h_4 e J_z , J_\pm para a álgebra $su(2)$), preservando assim a estrutura dos estados coerentes;
2. Quando projetada em estados coerentes a hamiltoniana semiclássica corresponde à hamiltoniana clássica análoga, isto é:

$$\mathcal{H}_{\downarrow f} = \langle x, y | H_{sc} | x, y \rangle = \langle x, y | H | x, y \rangle$$

3. As equações para médias de operadores obtidas a partir de H_{sc} são similares em estrutura às equações clássicas correspondentes.

Percebe-se então que a Aproximação Semiclássica em sua ordem zero fornece, por construção, uma evolução temporal para valores médios que irá sempre concordar com a evolução temporal clássica correspondente. Para obter as correções quânticas, trata-se $\Delta = H - H_{sc}$ como perturbação e obtém-se a aproximação na representação de interação:

$$\begin{aligned} |\Psi^I(t)\rangle = & \left(1 - i \int_0^t dt_1 \Delta_I(t_1) - \right. \\ & \left. - \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \Delta_I(t_1) \Delta_I(t_2) + \dots \right) |\Psi(t=0)\rangle, \end{aligned} \quad (2.75)$$

onde $|\Psi(t=0)\rangle$ é um estado coerente generalizado, $\Delta(t)_I = U_{sc}^\dagger(t) \Delta U_{sc}(t)$ e $U_{sc}(t)$ satisfaz

$$i\hbar \frac{dU_{sc}}{dt}(t) = H_{sc} U_{sc}(t). \quad (2.76)$$

A equação (2.76), com a condição inicial dada por $|\Psi(t=0)\rangle$, determina o operador de evolução semiclássica. Uma particularidade dessa aproximação é que o operador de evolução semiclássica depende do estado coerente inicial

onde ele será utilizado. Uma outra forma de se obter a evolução semiclássica é através da forma:

$$U_{sc} = D(x(t))e^{i\omega(t)\hat{A}_0+\phi(t)}D^{-1}(x_0). \quad (2.77)$$

Na expressão acima, \hat{A}_0 deve ser $a^\dagger a$ na álgebra h_4 e J_z na álgebra $su(2)$. Dessa forma, ao atuar em um estado coerente inicial $|x_0\rangle$, o primeiro termo de U_{sc} leva o estado coerente à origem. O operador $e^{i\omega(t)\hat{A}_0+\phi(t)}$ encontrará então um de seus autoestados e sua ação será meramente acrescentar uma fase global ao estado. Finalmente, o operador $D(x(t))$ encontrará um estado fiducial a ser deslocado fornecendo assim um estado coerente com rótulo $x(t)$, tal como a prescrição do método semiclássico exige. Para determinar completamente U_{sc} , pode-se derivar o operador em sua forma (2.77) e usar a equação (2.76) para determinar os parâmetros $\omega(t)$ e $\phi(t)$, ao passo que a equação para $x(t)$ irá naturalmente coincidir com a equação dos rótulos da hamiltoniana clássica.

Por último, devo mencionar que a liberdade adicional dos termos de fase se faz mais que necessária. Como foi observado por Fonseca Romero e colaboradores [20], a evolução final terá a forma

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\eta(t)} |x(t)\rangle, \quad (2.78)$$

onde a fase $\eta(t)$, que pode ser obtida da equação

$$\frac{d\eta}{dt} = \langle x(t) | (i\frac{\partial}{\partial t} - H_{sc}) | x(t) \rangle, \quad (2.79)$$

corresponde a uma ação generalizada e é de fundamental importância para as correções quânticas. A equação acima pode ser obtida levando-se em conta que a evolução temporal do estado coerente sob uma hamiltoniana semiclássica preserva o caráter *quasi*-clássico deste estado e supondo portanto uma evolução temporal tal como em (2.78). Derivando-se o estado e tomando-se a média, obtém-se (2.79).

Capítulo 3

Oscilador Quártico

3.1 O Modelo

O Oscilador Quártico é um modelo simples que servirá ao propósito de se testar e exemplificar o uso da aproximação semiclássica além de mostrar alguns aspectos importantes do limite clássico. As versões para um e dois graus de liberdade deste modelo foram estudadas usando a aproximação semiclássica por Oliveira e colaboradores em [11], onde é obtida uma expressão analítica para o tempo de Ehrenfest do modelo. Parte dos resultados daquela publicação serão revistos aqui. Será acrescentada aqui uma análise do limite clássico no sentido de distribuições de probabilidade no sistema com um e dois graus de liberdade. Além disso, para o sistema com 2 graus de liberdade, será mostrado o cálculo para uma medida de emaranhamento, a entropia linear ou defeito de idempotência, segundo a aproximação e uma análise da fidelidade da aproximação em relação à evolução quântica exata. Começaremos pelo modelo com um grau de liberdade, onde será feita uma descrição um pouco mais detalhada das etapas para obtenção da aproximação semiclássica.

O modelo para 1 grau de liberdade foi estudado no contexto do limite clássico por diversos autores [21, 22, 23, 24] e pode ser usado para explicar alguns fenômenos como condensados de Bose-Einstein [25] e biestabilidade óptica [26]. A biestabilidade óptica é um interessante fenômeno físico com importantes aplicações tecnológicas relacionadas. Seu estudo foi de fato impulsionado por suas possíveis aplicações em lógica óptica. Em um dispositivo ótico Bi-estável, há duas intensidades possíveis de luz emitida para um mesmo valor de intensidade de luz incidente, conforme mostra a figura de histerese a seguir:

Apenas a título ilustrativo, vejamos resumidamente como o fenômeno

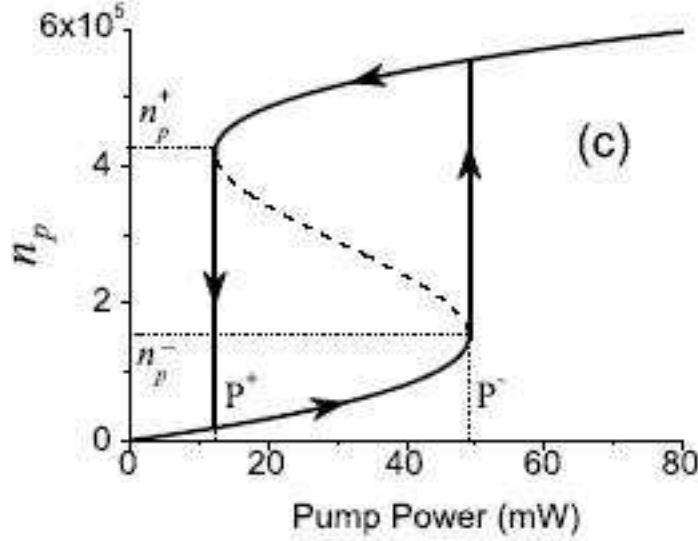


Figura 3.1: Gráfico do número de fótons detectados n_p em função da intensidade do campo aplicado (Pump Power) em um dispositivo Bi-estável. Retirado de [28]

da biestabilidade óptica pode ser modelado através do Oscilador Quártico. Seguindo a dedução de Drummond em [26], classicamente a biestabilidade óptica pode ser observada quando medimos a intensidade do campo eletromagnético em uma cavidade de meio dispersivo não linear cuja polarização possa ser escrita como sendo

$$\mathbf{P} = \chi^{(1)}\mathbf{E} + \chi^{(3)}\mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} \quad (3.1)$$

onde $\chi^{(n)}$ é um tensor de susceptibilidade de ordem $(n + 1)$. A Hamiltoniana Clássica de tal sistema, dada como a energia total do campo, fornecerá a evolução temporal das amplitudes dos campos \mathbf{B} e \mathbf{E} e pode ser escrita como:

$$H = \int d^3r \left\{ \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 + \mathbf{E} \cdot \left[\frac{1}{2}(\epsilon + \chi^{(1)}) \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{4}\chi^{(3)} \cdot \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} \right] \right\}. \quad (3.2)$$

A quantização da equação acima leva à seguinte hamiltoniana quântica escrita em ordenamento normal:

$$H = \hbar\omega_c a^\dagger a + \hbar\chi'' a^{\dagger 2} a^2, \quad (3.3)$$

onde

$$\chi'' = \left(\frac{3\hbar\omega^2}{8\epsilon_0^2} \right) \int \chi^{(3)}(\mathbf{r}) |u(\mathbf{r})|^4 d^3r \quad (3.4)$$

e ω_c é a frequência ressonante da cavidade. Uma discussão adequada da biestabilidade óptica deve levar em consideração o acoplamento da cavidade com o meio ambiente, isto é, deve-se tratar o fenômeno num contexto de Sistemas Quânticos Abertos. Este estudo é realizado por Drummond [26] e uma

abordagem interessante do tema, onde são estudadas as funções de Wigner do oscilador quártico acoplado a um reservatório e fonte pode ser encontrada em [29]. No presente trabalho nos limitaremos a estudar a dinâmica das versões de um e dois graus de liberdade do sistema fechado.

3.2 Dinâmica

Na versão de um grau de liberdade, podemos descrever o modelo através da hamiltoniana:

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar^2\lambda(a^\dagger a)^2 = (\omega + \lambda\hbar)\hbar a^\dagger a + \hbar^2\lambda(a^\dagger)^2(a)^2. \quad (3.5)$$

A Hamiltoniana Clássica correspondente é obtida conforme descrito anteriormente e pode ser escrita como

$$\mathcal{H}_{cls}(x, x^*) = \hbar(\omega + \lambda\hbar)|x|^2 + \hbar^2\lambda|x|^4, \quad (3.6)$$

onde x é a variável complexa desempenhando papel de rótulo do estado coerente. Para retratar a dinâmica do modelo, será obtida a evolução temporal de um estado coerente no caso clássico e no caso quântico usando a função de Wigner. Inicialmente, tomemos a equação de movimento para $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$:

$$i\hbar \frac{d\rho}{dt} = [H, \rho]. \quad (3.7)$$

Para obter a equação diferencial de evolução da função de Wigner, primeiramente obtém-se a função característica correspondente à equação (3.7):

$$i\hbar \text{Tr} \left\{ \frac{d\rho}{dt} D(\alpha) \right\} = \text{Tr} \{ [H, \rho] D(\alpha) \}. \quad (3.8)$$

O termo à esquerda é simplesmente a derivada temporal da função característica. Usando a linearidade e invariância do traço por permutação cíclica, pode-se reescrever o termo à direita da equação acima e obtê-la como sendo:

$$i\hbar \frac{d\widetilde{W}_\rho}{dt} = -\omega\hbar \text{Tr} \{ \rho [a^\dagger a, D(\alpha)] \} - \hbar^2\lambda \text{Tr} \{ \rho [(a^\dagger a)^2, D(\alpha)] \}. \quad (3.9)$$

Derivando-se o operador deslocamento $D(\alpha)$ em relação à α e α^* , é possível obter as relações:

$$[a^\dagger a, D(\alpha)] = \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) D(\alpha) \quad (3.10)$$

e

$$[(a^\dagger a)^2, D(\alpha)] = \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) \left[\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) \left(\frac{\alpha^*}{2} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \left(-\frac{\alpha^*}{2} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \left(-\frac{\alpha}{2} - \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) \right] D(\alpha), \quad (3.11)$$

e é possível escrever a equação para evolução temporal da função característica:

$$i\hbar \frac{d\widetilde{W}_\rho}{dt} = -\omega\hbar \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) \widetilde{W}_\rho - \hbar^2 \lambda \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) \left[\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) \left(\frac{\alpha^*}{2} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \left(-\frac{\alpha^*}{2} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \left(-\frac{\alpha}{2} - \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) \right] \widetilde{W}_\rho. \quad (3.12)$$

A função de Wigner é dada pela transformada de Fourier da função característica:

$$W(x, x^*) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int d^2\alpha \widetilde{W} \exp\{\alpha^* x - \alpha x^*\}. \quad (3.13)$$

Denotando a transformada de Fourier de uma função $f(\alpha)$ por $\mathcal{F}[f(\alpha)] = F(x)$, podemos escrever regras de transformação úteis na obtenção da função de Wigner:

$$\mathcal{F} \left[\frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} \right] = x^* F(x), \quad \mathcal{F} \left[\frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha^*} \right] = -x F(x), \quad (3.14)$$

$$\mathcal{F} [\alpha f(\alpha)] = -\frac{\partial F(x)}{\partial x^*}, \quad \mathcal{F} [\alpha^* f(\alpha)] = \frac{\partial F(x)}{\partial x}. \quad (3.15)$$

Fazendo uso dessas relações e algumas simplificações, pode-se escrever a equação para evolução temporal da função de Wigner como sendo:

$$\frac{dW_\rho(x, x^*)}{dt} = i(\omega + 2\lambda\hbar|x|^2) \left(x \frac{\partial W_\rho}{\partial x} - x^* \frac{\partial W_\rho}{\partial x^*} \right) + \frac{1}{2} i\hbar\lambda \left(x^* \frac{\partial^3 W_\rho}{\partial x \partial x^*{}^2} - x \frac{\partial^3 W_\rho}{\partial x^* \partial x^2} \right). \quad (3.16)$$

A equação acima corresponde à expansão dos parênteses de Moyal [27].

A evolução temporal clássica pode ser feita pela equação de Fokker-Planck ou de forma mais direta, considerando a derivada temporal total da distribuição, já que estamos no regime não dissipativo. Neste caso:

$$\begin{aligned} \frac{dW_\rho(x, x^*)}{dt} &= \frac{\partial W_\rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial W_\rho}{\partial x^*} \frac{dx^*}{dt} = \\ &= i(\omega + 2\lambda\hbar|x|^2) \left(x \frac{\partial W_\rho}{\partial x} - x^* \frac{\partial W_\rho}{\partial x^*} \right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Comparando as equações (3.16) e (3.17) é possível encontrar um limite onde a distribuição quântica passa a ter uma evolução igual à da distribuição clássica. Inicialmente devemos notar que, assim como $a^\dagger a$ é uma constante de movimento da hamiltoniana quântica,

$$[a^\dagger a, H] = 0, \quad (3.18)$$

$|x|$ é uma constante de movimento da hamiltoniana clássica:

$$\frac{d|x(t)|}{dt} = 0. \quad (3.19)$$

Se estamos descrevendo a evolução de um ponto no espaço de fases e a condição inicial do sistema dinâmico clássico é dada por $x(0) = x_0$, a constante $|x_0|$ pode ser tomada como tamanho característico do sistema. Da mesma forma, para o sistema quântico, a média de $a^\dagger a$ é constante e pode ser tomada como tamanho característico. Ao compararmos as duas evoluções, estaremos comparando uma distribuição clássica centrada em x_0 com a evolução temporal de um estado coerente quântico de rótulo x_0 .

Para obter o limite, considere inicialmente a função de Wigner e sua evolução temporal, dada pela equação (3.16), em termos da variável escalonada:

$$\tilde{x} = \frac{x}{|x_0|}. \quad (3.20)$$

A equação (3.16) se torna:

$$\begin{aligned} \frac{dW_\rho(\tilde{x}, \tilde{x}^*)}{dt} &= i(\omega + 2\lambda\hbar|\tilde{x}|^2|x_0|^2) \left(\tilde{x} \frac{\partial W_\rho}{\partial \tilde{x}} - \tilde{x}^* \frac{\partial W_\rho}{\partial \tilde{x}^*} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} i\hbar \frac{\lambda}{|x_0|^2} \left(\tilde{x}^* \frac{\partial^3 W_\rho}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{x}^{*2}} - \tilde{x} \frac{\partial^3 W_\rho}{\partial \tilde{x}^* \partial \tilde{x}^2} \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

A diferença entre as duas evoluções está nos termos de derivada de ordem 3. Se essas derivadas de terceira ordem são comportadas o suficiente, podemos transformar a equação (3.21) em uma equação clássica tomando o limite:

$$\hbar\lambda \rightarrow 0, \quad |x_0| \rightarrow \infty, \quad \text{com} \quad \hbar\lambda|x_0|^2 \rightarrow \lambda' \quad (3.22)$$

sendo λ' constante. Este é o procedimento usado por Milburn [23] para obtenção do limite clássico do modelo. Nesse regime, independente de um acoplamento com o reservatório, teríamos as duas dinâmicas semelhantes. Isso corresponde ao caso em que o campo aplicado à cavidade dispersiva é muito intenso em comparação ao fator de susceptibilidade não-linear. Outra forma de interpretar esse limite é dizer que nessas circunstâncias a variância relativa da distribuição quântica é pequena o suficiente para ser considerada um ponto no espaço de fase quando tratamos da variável relativa \tilde{x} .

Uma vez que já temos uma noção sobre as duas dinâmicas do modelo, trataremos agora dos valores médios. De acordo com a correspondência $a \rightarrow x$, o valor médio de a deve ser comparado com o valor de $x(t)$ clássico. Pela equação para operadores na representação de Heisenberg, podemos obter a evolução temporal de a como sendo dada por:

$$i\hbar \frac{da}{dt} = [a, H] = [\hbar\omega + \hbar^2\lambda(2a^\dagger a + 1)]a. \quad (3.23)$$

Identificando $a^\dagger a$ como constante de movimento podemos escrever a solução para a equação acima como sendo:

$$a(t) = \exp \{ -i(\omega + \hbar\lambda(2a^\dagger a + 1))t \} a(0). \quad (3.24)$$

A média $\langle a(t) \rangle$ na qual estamos interessados será dada pela projeção de $a(t)$ no estado coerente $|x\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle a(t) \rangle &= \langle x(0) | a(t) | x \rangle = x_0 \exp \{ -i(\omega + \hbar\lambda)t \} \langle x | e^{-2i\lambda\hbar a^\dagger a t} | x \rangle \\ \langle a(t) \rangle &= x_0 \exp \{ -i(\omega + \hbar\lambda)t \} \langle x(0) | x(0) e^{-2i\lambda\hbar t} \rangle \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\langle a(t) \rangle = x_0 \exp \{ -i(\omega + \hbar\lambda)t \} \exp \{ |x_0|^2 (e^{-2i\lambda\hbar t} - 1) \}. \quad (3.26)$$

Já a evolução clássica de $x(t)$ é dada pela equação

$$i\hbar \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_{cls}}{\partial x^*} = (\hbar(\omega + \lambda\hbar) + 2\hbar^2\lambda|x|^2)x, \quad (3.27)$$

que pode ser resolvida observando que $|x(t)|^2$ é uma constante de movimento e integrando a equação para obter:

$$x(t) = x_0 \exp \{ -i(\omega + \lambda\hbar + 2\lambda\hbar|x|^2)t \}. \quad (3.28)$$

Expandindo o argumento da exponencial da solução quântica e fazendo uso do limite $|x_0|^2 \rightarrow \infty$, $\lambda\hbar \rightarrow 0$, $\lambda\hbar|x_0|^2 \rightarrow \lambda'$ com λ' constante, o valor médio quântico se torna igual à $x(t)$ clássico.

3.3 Análise Semiclássica

Vamos, finalmente, à primeira aplicação da aproximação semiclássica. Para este problema, a “Kamiltoniana” correspondente à hamiltoniana clássica

$$\mathcal{K}(x, x^*, |x|^2) = \hbar(\omega + \lambda\hbar)|x|^2 + \lambda\hbar^2|x|^4 \quad (3.29)$$

possui dependência unicamente em $|x|^2$, o que nos leva a uma hamiltoniana semiclássica com dependência em $a^\dagger a$ somente. Conforme o que foi discutido anteriormente, para que $H_{sc} = c_0(t)a^\dagger a + c_+(t)a^\dagger + c_-(t)a + c_1(t)$ forneça equações de movimento para $a^\dagger a$, a e a^\dagger com estrutura semelhante às equações clássicas, devemos ter:

$$c_0(t) = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial(|x|^2)} = \hbar(\omega + \lambda\hbar(1 + 2|x|^2)). \quad (3.30)$$

Ao final, usamos o termo livre para fazer

$$\langle x | H_{sc} | x \rangle = \mathcal{H}_{cls}(x, x^*).$$

A aproximação portanto deve ser feita com a seguinte hamiltoniana semiclássica:

$$H_{sc} = \hbar(\omega + \lambda\hbar(1 + 2|x|^2))a^\dagger a - \lambda\hbar^2|x|^4. \quad (3.31)$$

Para este caso, o operador de evolução semiclássico possui forma simples:

$$\begin{aligned} U_{sc} &= \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t H_{sc} dt \right\} = \\ &= \exp \left\{ -i(\omega + \lambda\hbar(1 + 2|x|^2))t a^\dagger a + \lambda i\hbar^2|x|^4 t \right\}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Vamos no entanto mostrar o outro método para determinar U_{sc} . Se o estado inicial a ser evoluído é dado por $|x_0\rangle = D(x_0)|0\rangle$, vamos supor que U_{sc} possui a forma:

$$U_{sc} = D(x(t)) \exp \{ i\omega(t)a^\dagger a + i\phi(t) \} D^{-1}(x_0). \quad (3.33)$$

Derivando a equação acima e usando (2.76) deveremos ter:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dU_{sc}}{dt} &= i\hbar \left[\left(a^\dagger - \frac{x^*}{2} \right) \frac{dx}{dt} - \left(a - \frac{x}{2} \right) \frac{dx^*}{dt} + \right. \\ &+ i \frac{d\omega}{dt} (a^\dagger a - x a^\dagger - x^* a + |x|^2) + i \frac{d\phi}{dt} \left. \right] U_{sc} = \\ &\hbar [(\omega + \lambda\hbar(1 + 2|x|^2)) a^\dagger a - \lambda\hbar|x|^4] U_{sc}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Comparando os coeficientes dos operadores nos dois lados da expressão acima, temos as seguintes relações:

$$-\hbar \frac{d\omega}{dt} = \hbar(\omega + \lambda\hbar(1 + 2|x|^2)) \quad (3.35)$$

$$i\hbar \frac{dx}{dt} + \hbar \frac{d\omega}{dt} x = 0, \quad -i\hbar \frac{dx^*}{dt} + \hbar \frac{d\omega}{dt} x^* = 0 \quad (3.36)$$

$$i\hbar \left(\frac{x}{2} \frac{dx^*}{dt} - \frac{x^*}{2} \frac{dx}{dt} \right) - \hbar \frac{d\omega}{dt} |x|^2 - \hbar \frac{d\phi}{dt} = \lambda\hbar^2 |x|^4. \quad (3.37)$$

Conforme comentado anteriormente, as equações (3.36) são as equações clássicas para o rótulo x . Essas equações diferenciais em t devem ser resolvidas levando-se em conta a condição

$$U_{sc}(0) = 1,$$

o que implica em

$$\omega(0) = 0, \quad \phi(0) = 0, \quad x(0) = x_0$$

e o rótulo x irá portanto seguir a trajetória clássica a partir da condição inicial x_0 . Para mostrar a equivalência entre U_{sc} obtido dessa forma e aquele obtido através da equação (3.32), basta fazer comutar o operador deslocamento com o operador exponencial para obter:

$$e^{-i\omega(t)a^\dagger a} D(x(t)) e^{i\omega(t)a^\dagger a} = D(x(t)) e^{-i\omega(t)}. \quad (3.38)$$

Procedendo agora para obter as correções semiclássicas, se escrevermos a hamiltoniana original como sendo $H = H_{sc} + \Delta$, teremos Δ dado por

$$\Delta = -2\lambda\hbar^2 |x|^2 a^\dagger a + \lambda\hbar^2 (a^\dagger)^2 a^2 + \lambda\hbar^2 |x|^4. \quad (3.39)$$

Tratando esse Δ como perturbação iremos obter as correções da aproximação semiclássica conforme (2.75). Essas correções são mais facilmente obtidas a partir da aproximação aplicada à evolução temporal do operador a , como foi feito por Oliveira e colaboradores em [11]. Para a média do operador a num estado coerente $|x_0\rangle$, teremos:

$$\langle a(t) \rangle = \langle a(t)^{(0)} \rangle + \langle a(t)^{(1)} \rangle + \langle a(t)^{(2)} \rangle + \langle a(t)^{(3)} \rangle \dots \quad (3.40)$$

$$\langle a(t) \rangle = x(t) \left(1 - t^2 \hbar^2 \lambda^2 |x_0|^2 + \frac{8i}{6} t^3 \hbar^3 \lambda^3 |x_0|^2 \dots \right). \quad (3.41)$$

A correção em primeira ordem no tempo é zero. As figuras 3.3, 3.2 e 3.3 mostram os gráficos da evolução temporal dos valores médios segundo a evolução clássica, quântica e terceira ordem da aproximação para diferentes valores de λ :

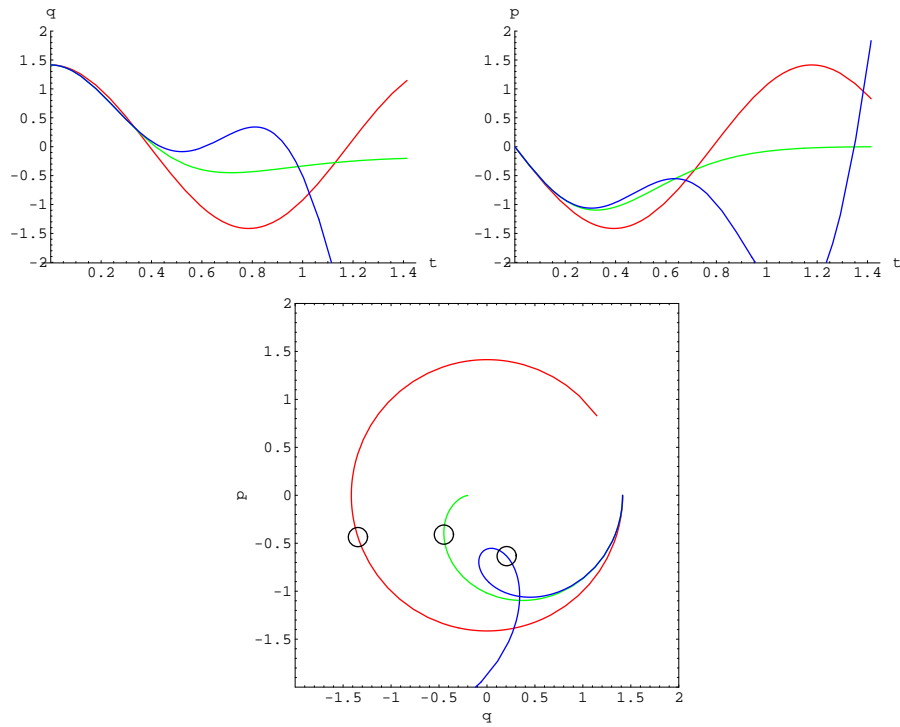


Figura 3.2: Evolução temporal da média $x(t)$ um estado inicial coerente segundo as descrições clássica (linha vermelha), quântica (linha verde) e semiclássica até terceira ordem (linha azul). Em cima, à esquerda temos $q(t)$, à direita $p(t)$ e embaixo o gráfico no espaço de fases $q \times p$, com um pequeno círculo indicando o ponto das trajetórias onde ocorre tempo de Ehrenfest, que corresponde a $t = (1/\sqrt{2})\omega^{-1}$. Dados da evolução: $q_0 = \sqrt{2\hbar}/\omega$, $p_0 = 0$, $\lambda = (\hbar\omega)^{-1}$.

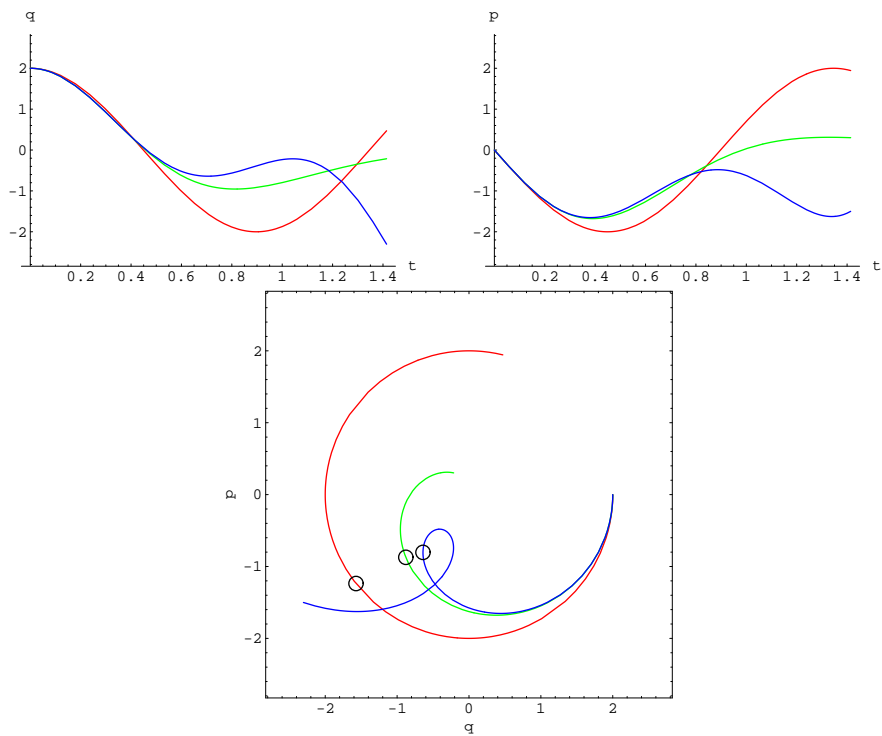


Figura 3.3: Evolução temporal da média $x(t)$ um estado inicial coerente segundo as descrições clássica (linha vermelha), quântica (linha verde) e semiclássica até terceira ordem (linha azul). Em cima, à esquerda temos $q(t)$, à direita $p(t)$ e embaixo o gráfico no espaço de fases $q \times p$, com um pequeno círculo indicando o ponto das trajetórias onde ocorre tempo de Ehrenfest, que corresponde a $t = (1/\sqrt{2})\omega^{-1}$. Dados da evolução: $q_0 = 2\sqrt{\hbar/\omega}$, $p_0 = 0$, $\lambda = 0,5(\hbar\omega)^{-1}$.

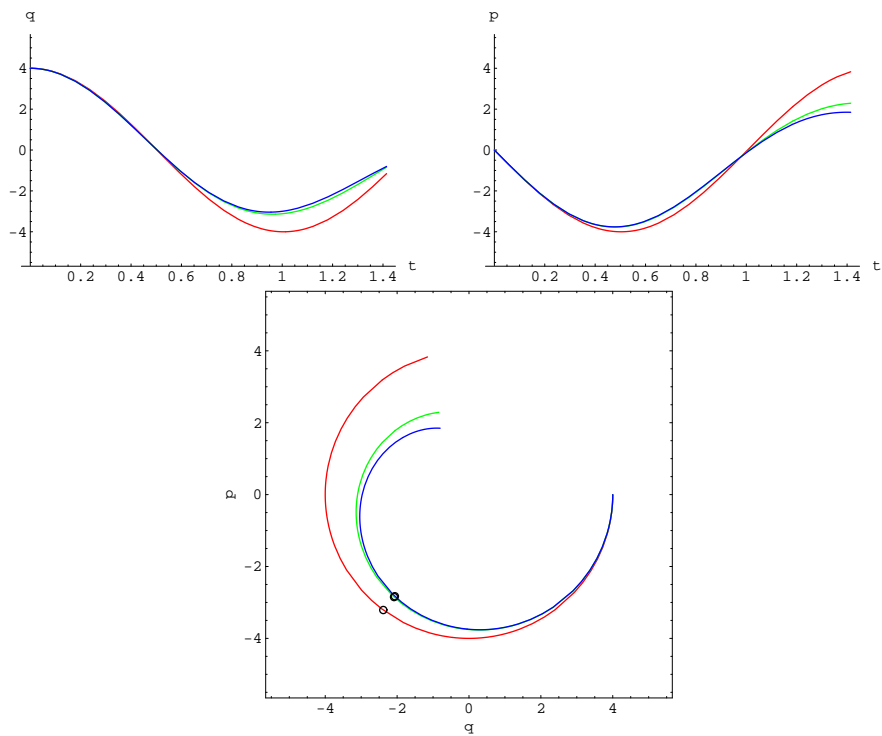


Figura 3.4: Evolução temporal da média $x(t)$ um estado inicial coerente segundo as descrições clássica (linha vermelha), quântica (linha verde) e semi-clássica até terceira ordem (linha azul). Em cima, à esquerda temos $q(t)$, à direita $p(t)$ e embaixo o gráfico no espaço de fases $q \times p$, com um pequeno círculo indicando o ponto das trajetórias onde ocorre tempo de Ehrenfest, que corresponde a $t = (1/\sqrt{2})\omega^{-1}$. Dados da evolução: $q_0 = 4\sqrt{\hbar/\omega}$, $p_0 = 0$, $\lambda = 0,125(\hbar\omega)^{-1}$.

Essa expressão para $\langle a(t) \rangle$ obtida pela aproximação semiclássica é idêntica à expansão em t a partir da solução quântica exata. Em outras palavras, somando-se todos os termos obtidos pela aproximação semiclássica obtém-se o resultado quântico exato. Além disso, a expansão é obtida em termos da constante de não linearidade $\lambda\hbar$, e espera-se uma melhor aproximação a medida que temos o limite clássico definido por (3.22), isto é, quando

$$\lambda' = \lambda\hbar|x_0|^2 \ll 1. \quad (3.42)$$

O tempo de Ehrenfest pode ser obtido a partir do primeiro termo não nulo, que é o de segunda ordem:

$$t_E \sim \frac{1}{\sqrt{2}\hbar\lambda|x_0|}. \quad (3.43)$$

Posto dessa forma, pode parecer estranho que o tempo de Ehrenfest dependa inversamente da amplitude do estado inicial, já que esperamos um comportamento clássico quando aumentamos a ação clássica do sistema. Para melhor compreensão, a expressão para o tempo de Ehrenfest pode ser apresentada no limite dado por (3.22) como sendo

$$t_E \sim \frac{|x_0|}{\lambda'\sqrt{2}}. \quad (3.44)$$

Tomando-se o limite clássico e olhando para desvios relativos à amplitude inicial, o tempo de Ehrenfest torna se, portanto, proporcional a ação clássica.

Para uma comparação final do modelo com um grau de liberdade, mostramos a seguir os gráficos referentes às evoluções clássica, quântica e semiclássica em primeira ordem da função de Wigner de um estado inicial coerente.

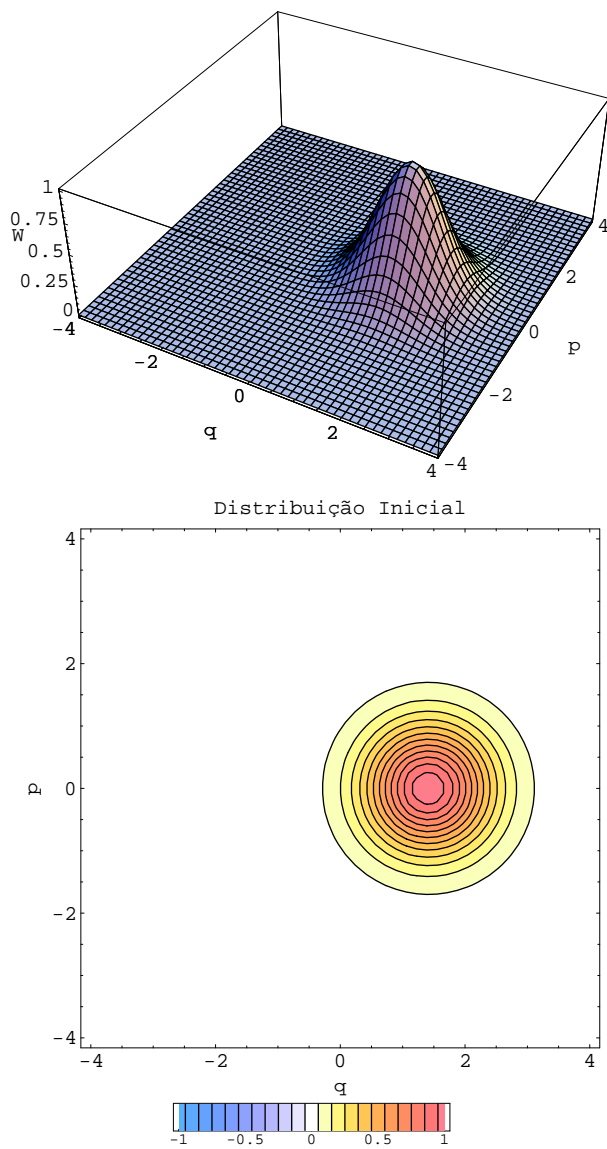


Figura 3.5: Distribuição de (*quasi*)-probabilidades correspondente ao estado inicial coerente que será mostrado nas figuras seguintes evoluído segundo as descrições clássica, quântica e semiclássica. Acima o gráfico tridimensional e embaixo o gráfico com as curvas de nível da distribuição. O esquema de cores mostra amplitudes normalizadas relativas ao máximo, com tonalidades azuis indicando valores negativos. Variável q em unidades de $\sqrt{\hbar/\omega}$ no eixo horizontal, variável p em unidades de $\sqrt{\hbar\omega}$ no eixo vertical e o tempo t dado em unidades de ω^{-1} . Dados da evolução: $q_0 = \sqrt{\hbar/2\omega}$, $p_0 = 0$, $\lambda = (\hbar\omega)^{-1}$.

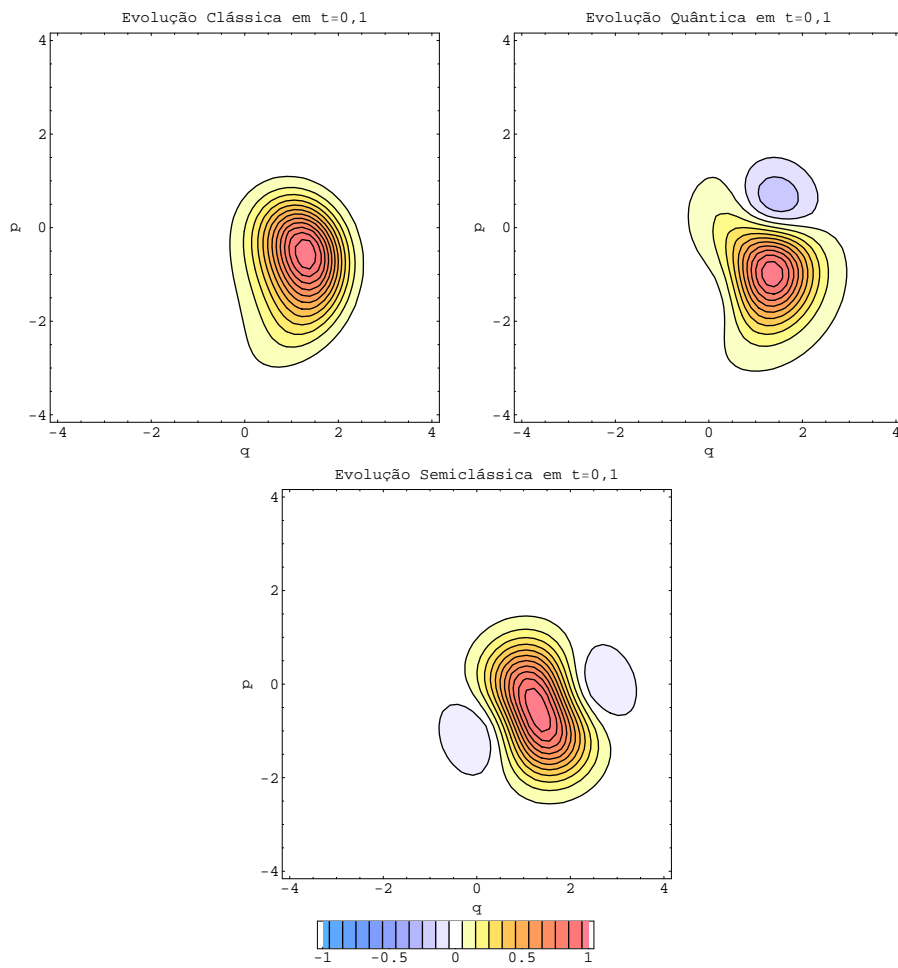


Figura 3.6: Curvas de nível da função de Wigner no tempo $t = 0, 1\omega^{-1}$. Acima à esquerda, evolução clássica, à direita evolução quântica e embaixo a evolução semiclassical.

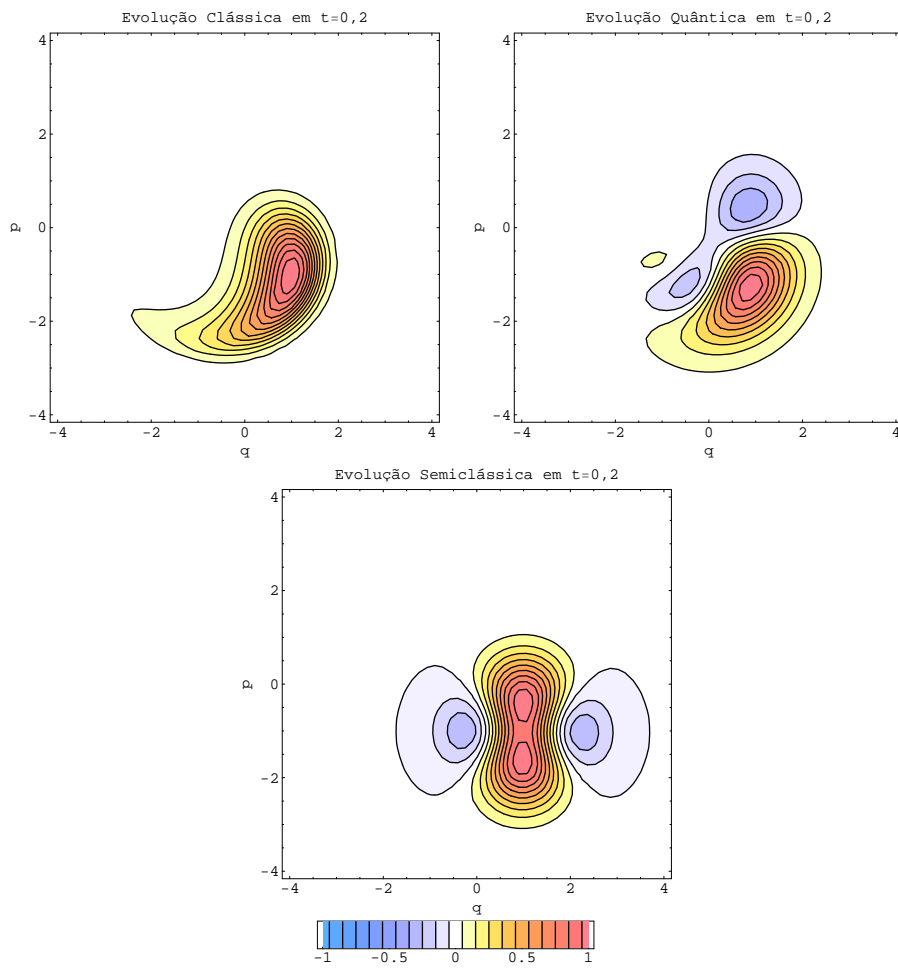


Figura 3.7: Curvas de nível da função de Wigner no tempo $t = 0, 2\omega^{-1}$. Acima à esquerda, evolução clássica, à direita evolução quântica e embaixo a evolução semiclassical.

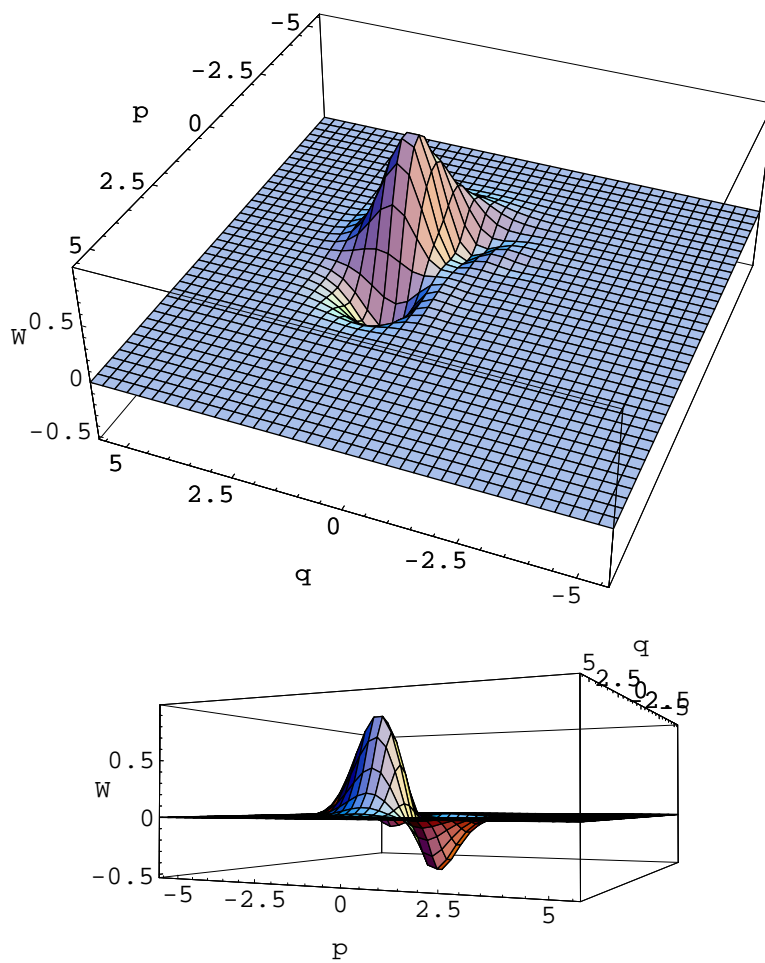


Figura 3.8: Gráfico tridimensional da evolução quântica da figura anterior ($t = 0, 2$) com detalhe para região negativa.

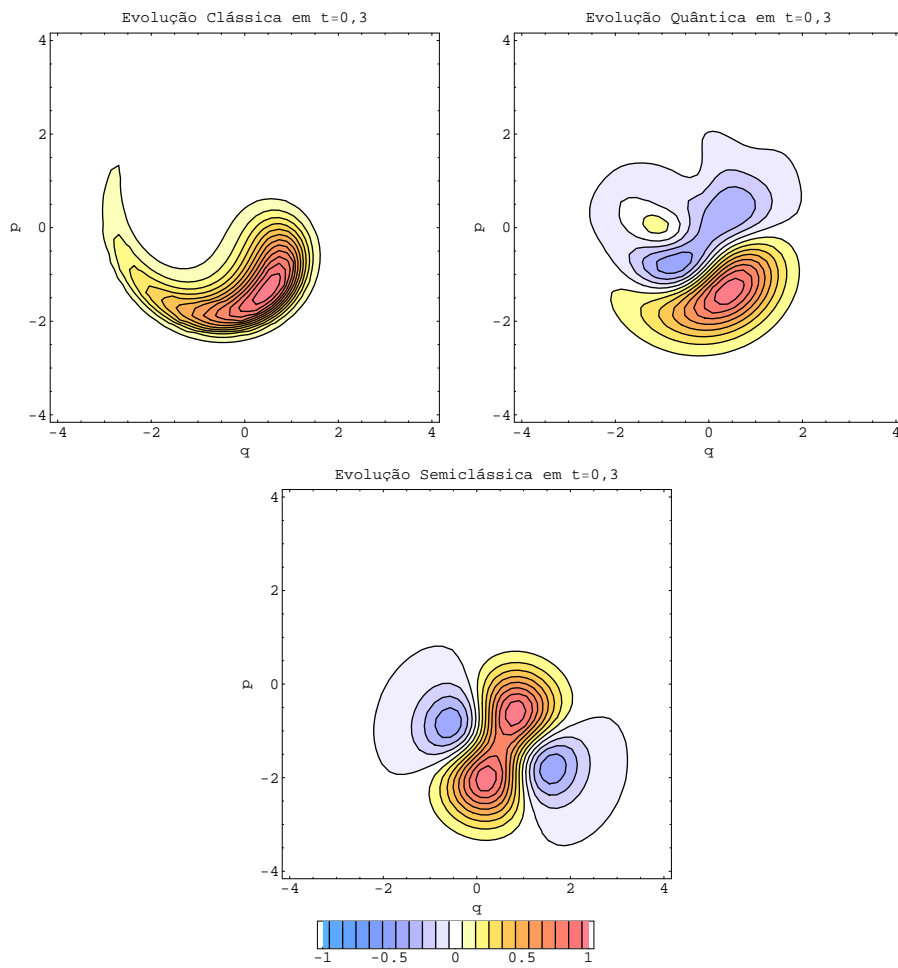


Figura 3.9: Curvas de nível da função de Wigner no tempo $t = 0,3\omega^{-1}$. Acima à esquerda, evolução clássica, à direita evolução quântica e embaixo a evolução semiclassical.

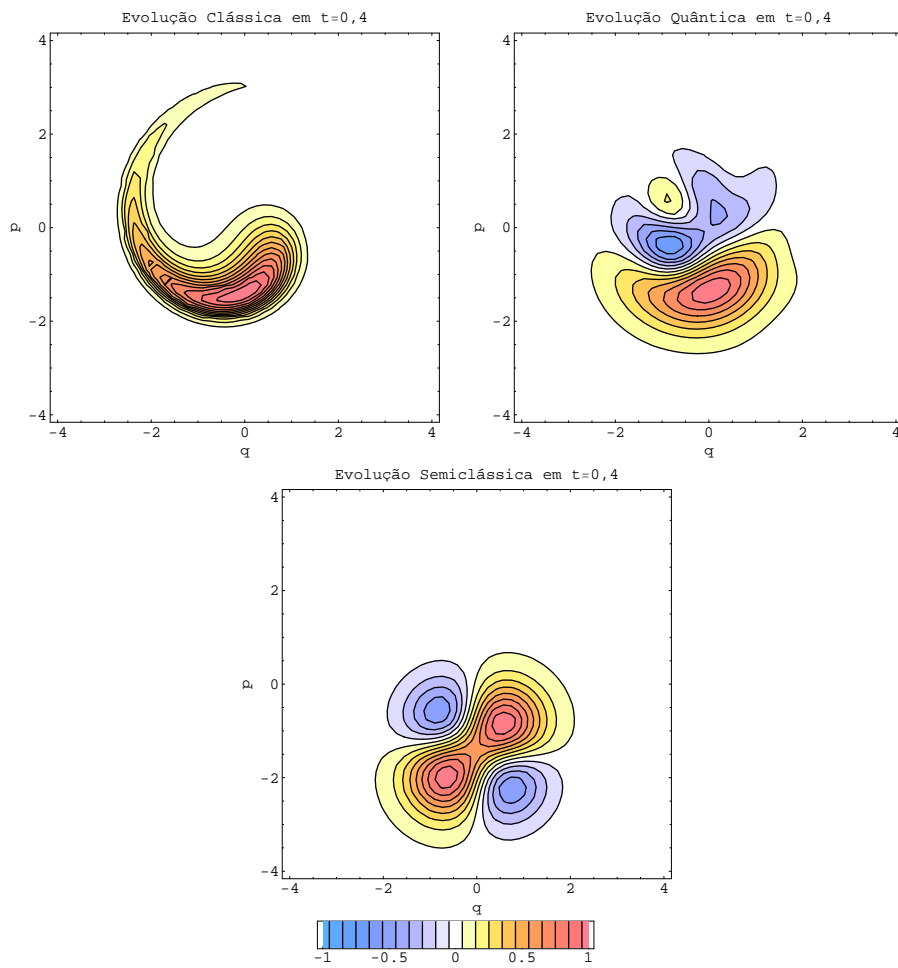


Figura 3.10: Curvas de nível da função de Wigner no tempo $t = 0,4\omega^{-1}$. Acima à esquerda, evolução clássica, à direita evolução quântica e embaixo a evolução semiclassical.

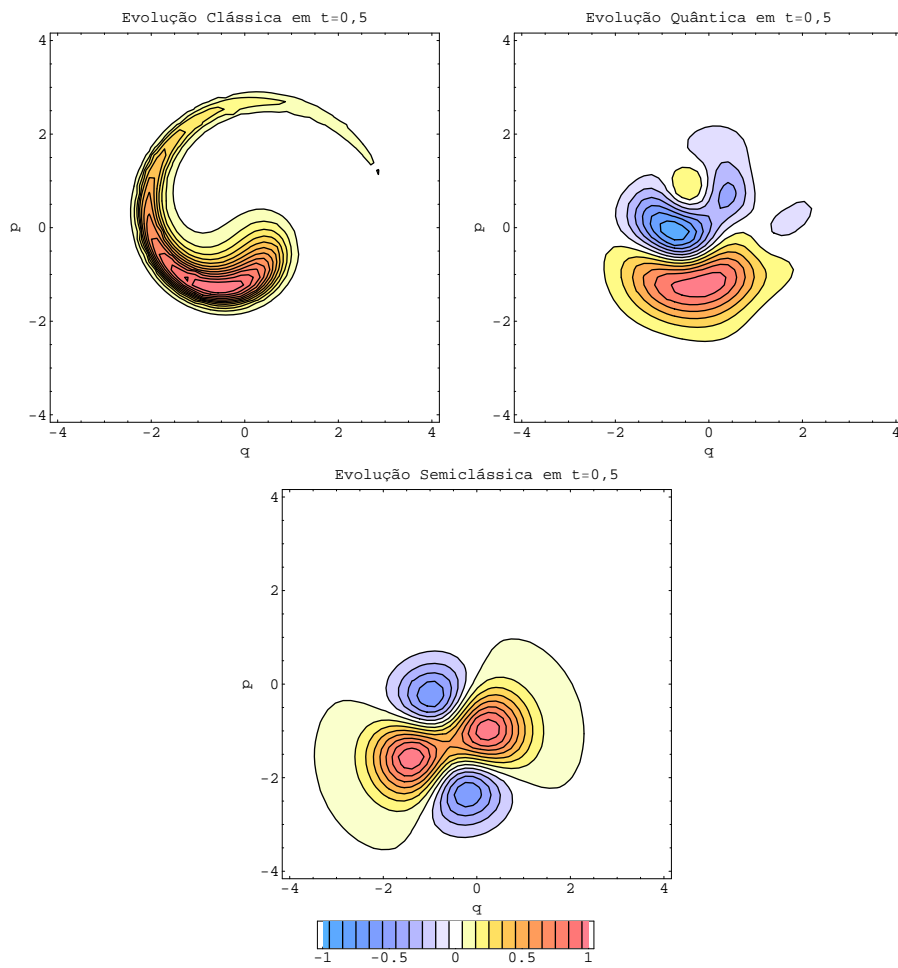


Figura 3.11: Curvas de nível da função de Wigner no tempo $t = 0,5\omega^{-1}$. Acima à esquerda, evolução clássica, à direita evolução quântica e embaixo a evolução semiclassical.

3.4 Oscilador Quártico Duplo

Estudaremos agora o modelo com dois graus de liberdade. A intenção é tentar usar a expansão para o cálculo de uma quantia tipicamente quântica, a saber, o emaranhamento entre dois sistemas. Por haver uma evolução temporal de estados coerentes exata, há também uma expressão analítica [11] para o defeito de idempotência, o que nos permitirá uma comparação. Será possível também calcular a fidelidade do estado coerente evoluído pela expansão em relação àquele evoluído exatamente.

A hamiltoniana do oscilador quártico com interação em 2 dimensões é escrita como [11]:

$$H = \hbar\nu(a^\dagger a + b^\dagger b) + \lambda\hbar^2[(a^\dagger)^2 a^2 + (b^\dagger)^2 b^2 + 2a^\dagger a b^\dagger b] + \mu\hbar(a^\dagger b + a b^\dagger). \quad (3.45)$$

A hamiltoniana clássica associada, obtida pela projeção em estados coerentes, como usual, é dada por:

$$\mathcal{H}_{cls} = \hbar\nu(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + \lambda\hbar^2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)^2 + \mu\hbar(\alpha^*\beta + \alpha\beta^*). \quad (3.46)$$

Para dois graus de liberdade, temos as constantes de movimento $a^\dagger a + b^\dagger b$ e $|\alpha|^2 + |\beta|^2 \equiv S$, o que pode ser verificado pelo comutador

$$[a^\dagger a + b^\dagger b, H] = 0 \quad (3.47)$$

e pela derivada temporal de S ou pelo parênteses de Poisson

$$\{(|\alpha|^2 + |\beta|^2), \mathcal{H}_{cls}\} = 0. \quad (3.48)$$

Assim como no caso unidimensional, essa grandeza define um tamanho característico do sistema e pode ser usada para definir um limite clássico de distribuições, mais uma vez olhando para as equações de evolução temporal da função de Wigner. Os detalhes serão omitidos aqui já que o processo é praticamente o mesmo do que foi feito em um grau de liberdade. Em suma as equações clássica e quântica se tornam equivalentes quando fazemos o limite:

$$\lambda\hbar \rightarrow 0 \quad S \rightarrow \infty \quad S\lambda\hbar = \text{constante}. \quad (3.49)$$

A evolução temporal clássica de $\alpha(t)$ pode ser obtida levando-se em conta essa constante de movimento e integrando-se as equações de movimento acopladas em α e β :

$$i\hbar \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_{cls}}{\partial \alpha^*} = \nu + 2\lambda\hbar S\alpha + \mu\beta; \quad (3.50)$$

$$i\hbar \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_{cls}}{\partial \beta^*} = \nu + 2\lambda\hbar S\beta + \mu\alpha. \quad (3.51)$$

Uma rotação dos eixos de coordenadas leva essas equações a uma forma diagonal. Integrando então essas equações,

$$\alpha(t) = [\alpha_0 \cos(\mu t) - i\beta_0 \sin(\mu t)] \exp \{-i(\nu - \lambda\hbar(1 + 2S))t\} \quad (3.52)$$

$$\beta(t) = [\beta_0 \cos(\mu t) - i\alpha_0 \sin(\mu t)] \exp \{-i(\nu - \lambda\hbar(1 + 2S))t\} \quad (3.53)$$

onde $\alpha(0) = \alpha_0$ e $\beta(0) = \beta_0$. Para obter a evolução temporal da média $\langle a(t) \rangle$ em um estado inicial coerente vamos escrever a evolução temporal desse estado. Essa expressão será útil para o cálculo da medida de emaranhamento e da fidelidade da aproximação semiclássica. Primeiramente, observado-se que $[H(t), H(t')] = 0$ e lembrando que $a^\dagger a + b^\dagger b$ é constante de movimento, pode-se escrever o operador de evolução como sendo:

$$U = \exp \{-i\lambda(a^\dagger a + b^\dagger b)^2 t\} \exp \{-i\sigma(a^\dagger a + b^\dagger b)t\} \exp \{-i\mu(a^\dagger b + ab^\dagger)t\} \quad (3.54)$$

onde $\sigma = \nu - \lambda\hbar$. Queremos evoluir o estado:

$$|\alpha_0 \beta_0\rangle \equiv D_1(\alpha_0)D_2(\beta_0)|00\rangle \quad (3.55)$$

onde $D_1(\alpha_0) = \exp\{\alpha a^\dagger - \alpha^* a\}$ e $D_2(\beta_0) = \exp\{\beta b^\dagger - \beta^* b\}$. Comutando o primeiro operador exponencial em (3.54) com o operador deslocamento, teremos

$$e^{-i\mu(a^\dagger b + ab^\dagger)t} D_1(\alpha_0) e^{i\mu(a^\dagger b + ab^\dagger)t} = D_1(\alpha_0 \cos(\mu t)) D_2(-i\alpha_0 \sin(\mu t)), \quad (3.56)$$

$$e^{-i\mu(a^\dagger b + ab^\dagger)t} D_2(\beta_0) e^{i\mu(a^\dagger b + ab^\dagger)t} = D_1(-i\beta_0 \sin(\mu t)) D_2(-i\beta_0 \cos(\mu t)). \quad (3.57)$$

Podemos então escrever:

$$e^{-i\mu(a^\dagger b + ab^\dagger)t} |\alpha_0 \beta_0\rangle = |\alpha' \beta'\rangle \quad (3.58)$$

onde

$$\alpha' = \alpha_0 \cos(\mu t) - i\beta_0 \sin(\mu t), \quad (3.59)$$

$$\beta' = \beta_0 \cos(\mu t) - i\alpha_0 \sin(\mu t). \quad (3.60)$$

Fazendo agora $\exp \{-i\sigma(a^\dagger a + b^\dagger b)t\}$ atuar sobre esse estado coerente, obtemos:

$$\exp \{-i\sigma(a^\dagger a + b^\dagger b)t\} |\alpha' \beta'\rangle = |\alpha'(t) \beta'(t)\rangle, \quad (3.61)$$

com $\alpha'(t) \beta'(t)$ dados por

$$\alpha'(t) = [\alpha_0 \cos(\mu t) - i\beta_0 \sin(\mu t)] e^{-i\sigma t}, \quad (3.62)$$

$$\beta'(t) = [\beta_0 \cos(\mu t) - i\alpha_0 \sin(\mu t)] e^{-i\sigma t}. \quad (3.63)$$

A evolução quântica total pode ser descrita como:

$$U | \alpha_0 \beta_0 \rangle = \exp \{ -i\lambda(a^\dagger a + b^\dagger b)^2 t \} | \alpha'(t) \beta'(t) \rangle \quad (3.64)$$

ou

$$U | \alpha_0 \beta_0 \rangle = e^{|\alpha|^2/2} \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{\alpha^k \beta^l}{\sqrt{k!l!}} \exp \{ -i\lambda\hbar(k+l)^2 t \} | k \rangle \otimes | l \rangle . \quad (3.65)$$

Nessa última expressão $|k\rangle$ e $|l\rangle$ são os autoestados de $a^\dagger a$ e $b^\dagger b$. Para a expressão do valor médio de $a(t)$ é mais prático usar a forma anterior juntamente com a expressão:

$$\begin{aligned} \exp \{ i\lambda\hbar(a^\dagger a + b^\dagger b)^2 t \} a \exp \{ -i\lambda\hbar(a^\dagger a + b^\dagger b)^2 t \} = \\ = \exp \{ -2i\lambda\hbar(a^\dagger a + b^\dagger b + 1/2)t \} a. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Procedendo então com cálculo semelhante ao que foi feito em uma dimensão obtém-se:

$$\langle a(t) \rangle = [\alpha_0 \cos(\mu t) - i\beta_0 \sin(\mu t)] e^{-i\sigma t} e^{-i\lambda\hbar t} \exp \{ S (e^{-2i\lambda\hbar t} - 1) \} . \quad (3.67)$$

Novamente, expandindo-se a solução quântica de acordo com o limite dado em (3.49) obtém-se o valor médio clássico.

3.5 Análise Semiclássica no Oscilador Quártico Duplo

Vamos agora ao tratamento semiclássico. A hamiltoniana semiclássica terá a forma:

$$H_{sc} = A_0(t)a^\dagger a + B_0(t)b^\dagger b + A_+(t)a^\dagger + B_+(t)b^\dagger + A_-(t)a + B_-(t)b + f(t) . \quad (3.68)$$

Derivando \mathcal{H} em relação à α , β , $|\alpha|^2$, $|\beta|^2$ e comparando as equações com as equações para os operadores quânticos, obtém-se a hamiltoniana semiclássica:

$$\begin{aligned} H_{sc} = [\hbar\nu + 2\lambda\hbar^2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)](a^\dagger a + b^\dagger b) + \\ + \mu\hbar(a^\dagger\beta + a\beta^* + \alpha b^\dagger + \alpha^* b) - \lambda\hbar^2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)^2 - \mu\hbar(\alpha^*\beta + \alpha\beta^*), \end{aligned} \quad (3.69)$$

e o respectivo Δ :

$$\begin{aligned} \Delta = H - H_{sc} = \lambda\hbar^2[2(a^\dagger a - |\alpha|^2)(b^\dagger b - |\beta|^2) \\ + (a^\dagger a - |\alpha|^2)^2 + (b^\dagger b - |\beta|^2)^2 - a^\dagger a - b^\dagger b] \\ + \mu\hbar[(a^\dagger - \alpha^*)(b - \beta) + (a - \alpha)(b^\dagger - \beta^*)] \end{aligned} \quad (3.70)$$

Em [11] encontra-se a seguinte expressão para o valor médio de $a(t)$ segundo a aproximação semiclássica:

$$\langle a(t) \rangle = \alpha(t) \{1 - 2\lambda^2 \hbar^2 t^2 S\}. \quad (3.71)$$

O tempo de Ehrenfest tem expressão bem similar ao modelo com um grau de liberdade:

$$t_E \sim \frac{1}{\lambda \hbar \sqrt{2S}}. \quad (3.72)$$

Estamos interessados agora em usar a aproximação para evoluir um estado coerente. Para tanto vamos obter o operador de evolução semiclássico por derivação de parâmetros:

$$U_{sc} = D_1(\alpha(t)) \exp \{i\omega(t)a^\dagger a + i\phi(t)\} D_1^{-1}(\alpha_0) \otimes D_2(\beta(t)) \exp \{i\gamma(t)b^\dagger b\} D_2^{-1}(\beta_0). \quad (3.73)$$

Derivando-se e usando a relação (2.76) obtém-se as equações:

$$-\hbar \frac{d\omega}{dt} = \hbar\nu + 2S\lambda\hbar^2 = -\hbar \frac{d\gamma}{dt} \quad (3.74)$$

$$-i\hbar \left(\frac{\alpha^*}{2} \frac{d\alpha}{dt} - \frac{\alpha}{2} \frac{d\alpha^*}{dt} + \frac{\beta^*}{2} \frac{d\beta}{dt} - \frac{\beta}{2} \frac{d\beta^*}{dt} \right) - S\hbar(\sigma + 2\lambda\hbar(S + 1/2)) - \hbar \frac{d\phi}{dt} = -\mu\hbar(\beta^* \alpha + \beta \alpha^*) - S\lambda\hbar^2 \quad (3.75)$$

e as equações para os rótulos são idênticas às equações clássicas. As soluções de (3.74) e (3.75) podem ser escritas como:

$$\gamma(t) = \omega(t) = -(\nu + 2\lambda\hbar S)t \quad (3.76)$$

e

$$\phi(t) = -(\sigma S + 2\lambda\hbar S + \mu\hbar\alpha_0\beta_0)t \quad (3.77)$$

Uma vez obtido U_{sc} , podemos fazer agora o cálculo de $|\psi(t)\rangle$ na aproximação semiclássica. Passando para representação de interação e tratando Δ como aproximação, procedemos conforme (2.75) para obter a evolução do estado coerente

$$|\alpha_0, \beta_0\rangle \equiv D_1(\alpha_0) \otimes D_2(\beta_0) |00\rangle$$

como sendo:

$$|\Psi_I(t)\rangle = A^{-1} D_1(\alpha_0) \otimes D_2(\beta_0) \{ |00\rangle + c_{11}(t) |11\rangle + c_{20}(t) |20\rangle + c_{02} |02\rangle \}; \quad (3.78)$$

onde os coeficientes c_{ij} acima satisfazem as equações diferenciais

$$\frac{dc_{11}}{dt} = 2\lambda\hbar^2\alpha(t)\beta(t)\exp[-i\omega(t) - i\gamma(t)]; \quad (3.79)$$

$$\frac{dc_{20}}{dt} = \sqrt{2}\lambda\hbar^2\alpha^2(t)e^{-2i\omega(t)}; \quad (3.80)$$

$$\frac{dc_{02}}{dt} = \sqrt{2}\lambda\hbar^2\beta^2(t)e^{-2i\gamma(t)}; \quad (3.81)$$

juntamente com as condições iniciais $c_{ij}(0) = 0$ e A é a normalização. Estas equações podem ser resolvidas exatamente, tendo como soluções:

$$\begin{aligned} c_{11}(t) &= \frac{\lambda\hbar^2}{\mu} \text{sen}(\mu t)[2\alpha_0\beta_0 - i(\alpha_0^2 + \beta_0^2) \text{sen}(\mu t)] \\ c_{20}(t) &= \frac{\lambda\hbar^2}{2\mu\sqrt{2}}[(\alpha_0^2 + \beta_0^2) \text{sen}(2\mu t) + \\ &\quad + 2i\alpha_0\beta_0(\cos(2\mu t) - 1) + 2\mu(\alpha_0^2 - \beta_0^2)t] \\ c_{02}(t) &= \frac{\lambda\hbar^2}{2\mu\sqrt{2}}[(\alpha_0^2 + \beta_0^2) \text{sen}(2\mu t) + \\ &\quad + 2i\alpha_0\beta_0(\cos(2\mu t) - 1) - 2\mu(\alpha_0^2 - \beta_0^2)t]. \end{aligned} \quad (3.82)$$

A aproximação semiclássica é uma tentativa de se construir a dinâmica quântica usando elementos clássicos. Para o cálculo de valores médios a aproximação produz resultados consistentes. Vamos agora investigar a qualidade da aproximação quando esta é utilizada para tentar descrever efeitos tipicamente quânticos. Inicialmente, vamos testar a aproximação para o cálculo de uma medida de correlações não clássicas entre os dois graus de liberdade.

Uma característica importante da mecânica quântica está no fato de o todo não poder ser completamente determinado pelas partes separadamente [30]. Quando um sistema físico de dois graus de liberdade é descrito por um vetor produto do tipo

$$|\psi\rangle = |u\rangle \otimes |v\rangle, \quad (3.83)$$

os valores médios de operadores que atuam nos dois subespaços separadamente, isto é, operadores com a forma

$$\hat{A} = A_1 \otimes \mathbf{1} \quad \text{e} \quad B = \mathbf{1} \otimes \hat{B}_2, \quad (3.84)$$

obedecem a igualdade

$$\langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle = \langle \hat{A}\hat{B} \rangle, \quad (3.85)$$

indicando que o estado da equação (3.83) está fatorado, seus dois graus de liberdade foram preparados de forma independente. Pode-se obter toda a informação a respeito do estado do sistema como um todo a partir da informação disponível nas partes separadamente. No caso em que um estado não possui aquela forma produto entretanto, existem correlações quânticas entre os dois graus de liberdade [31] e podemos ter

$$\langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle \neq \langle \hat{A} \hat{B} \rangle. \quad (3.86)$$

Essas correlações são ditas quânticas por possuírem caráter não local, conforme apontado por Einstein, Podolsky e Rosen em 1935 [2]. Nesse caso, o conhecimento separado das partes, não é capaz de reproduzir o todo.

Para medir as correlações entre as duas partes de um estado puro, vamos considerar o operador densidade associado a ele, que será o projetor desse estado:

$$\rho = |\psi\rangle \langle \psi|. \quad (3.87)$$

Escrevendo ρ como

$$\rho = \sum_{ij\alpha\beta} \lambda_{ij\alpha\beta} |u_i\rangle \otimes |v_\alpha\rangle \langle u_j| \otimes \langle v_\beta|, \quad (3.88)$$

onde $\{|u_i\rangle\}$, $\{|v_\alpha\rangle\}$ são bases para os subsistemas, o traço parcial de ρ

$$\rho_1 = \text{Tr}_2\{\rho\} = \sum_{ij\alpha} \lambda_{ij\alpha\alpha} |u_i\rangle \langle u_j|, \quad (3.89)$$

representa a informação contida em um dos subsistemas unicamente. Se um estado puro está fatorado em dois subsistemas assim como em (3.83),

$$\rho = \rho_1 \otimes \rho_2 \quad (3.90)$$

e $\rho_{1,2}$ representam estados puros que podem também ser escritos como projetores. Para ρ_1 por exemplo,

$$\rho_1 = |u\rangle \langle u| \quad (3.91)$$

e é claro que $\rho_1^2 = \rho$ se ρ representa um estado puro. É possível identificar se o operador ρ_1 representa um estado puro tomando-se o traço de ρ_1^2 . Se $\text{Tr}\{\rho_1^2\} < 1$, ρ_1 não representa um estado puro, indicando que o estado $|\psi\rangle$ não pode ser escrito em uma forma fatorada ou seja, existem correlações não locais entre os subsistemas 1 e 2. Na verdade a entropia linear

$$\delta = 1 - \text{Tr}\{\rho_1^2\} \quad (3.92)$$

é um quantificador do entrelaçamento entre dois subsistemas em um estado puro. Usando-se a decomposição de Schimidt [30] pode-se mostrar que ele é independente do subsistema que tomamos, isto é, tomando se $\text{Tr}\{\rho_1^2\}$ ou $\text{Tr}\{\rho_2^2\}$ teríamos o mesmo quantificador.

Há uma expressão analítica para a dependência temporal do $\text{Tr}\{\rho_1^2\}$ de um estado inicial coerente $|\alpha_0, \beta_0\rangle$ evoluindo segundo a hamiltoniana (3.45). Para obtê-la deve-se usar a evolução temporal de um estado coerente conforme obtida anteriormente. Fazendo isso obtem-se:

$$\text{Tr}\{\rho_\alpha^2\} = \exp\{-2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)\} \sum \exp\{2|\alpha|^2 \cos[2(m-n)\lambda\hbar]\} \frac{|\beta|^{2m}}{m!} \frac{|\beta|^{2n}}{n!}, \quad (3.93)$$

sendo

$$\begin{aligned} \alpha &= [\alpha_0 \cos(\mu t) - i\beta_0 \text{sen}(\mu t)] e^{-i\sigma t} \\ \beta &= [\beta_0 \cos(\mu t) - i\alpha_0 \text{sen}(\mu t)] e^{-i\sigma t} \end{aligned}$$

Em seu trabalho, Oliveira e colaboradores [11] apresentam também uma aproximação algébrica para $\text{Tr}\{\rho_1^2\}$ válida para tempos curtos:

$$\text{Tr}\{\rho_1^2\} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + |4|\alpha_0|^2||\beta_0|^2\hbar^2 t^2 \lambda^2|}} \quad (3.94)$$

Seguindo a análise feita naquele trabalho, percebe-se que o tempo para o surgimento de uma correlação quântica entre dois subsistemas diminui com o produto das ações dos dois subsistemas, ao passo que o tempo de Ehrenfest diminui com a soma destas ações, isto é, efeitos quânticos já são observados antes que as dinâmicas clássica e quântica se distingam no que diz respeito a valores médios de observáveis. Isto parece indicar que o emaranhamento não pode ser completamente descrito apenas através da evolução temporal de valores médios.

Vamos aplicar a aproximação semiclássica para obter $\text{Tr}\{\rho_1^2\}$ no mesmo caso, isto é, na evolução de um estado inicial coerente. Esperamos assim ter uma idéia do quanto a aproximação se adequa ao tentar descrever essa quantia tipicamente quântica usando elementos de dinâmica clássica.

A expressão para o $\text{Tr}\{\rho_1^2\}$ na aproximação semiclássica do oscilador anarmônico é obtida da equação (3.78). Tomando-se o projetor de $|\Psi(t)\rangle$ como matriz densidade e efetuando-se as operações devidas para se obter a entropia linear, obtém-se:

$$\text{Tr}\{\rho_\alpha^2\} = \frac{1 + |c_{11}|^4 + (2 + |c_{02}|^2)|c_{02}|^2 + (2 + |c_{20}|^2)|c_{20}|^2}{(1 + |c_{11}|^2 + |c_{20}|^2 + |c_{02}|^2)^2}, \quad (3.95)$$

onde os coeficientes c_{ij} dependem do tempo e são dados pela equação (3.82). Dá-se através deles a dependência de $\text{Tr} \{\rho_1^2\}$ com a constante de não linearidade λ e as condições iniciais. A seguir estão os gráficos que mostram $\text{Tr} \{\rho_1^2\}$ exato e o resultado obtido pela aproximação. Em todos os gráficos, usa-se $\mu = (\hbar\nu)^{-1}$ e a escala de tempo em unidades de ν^{-1} .

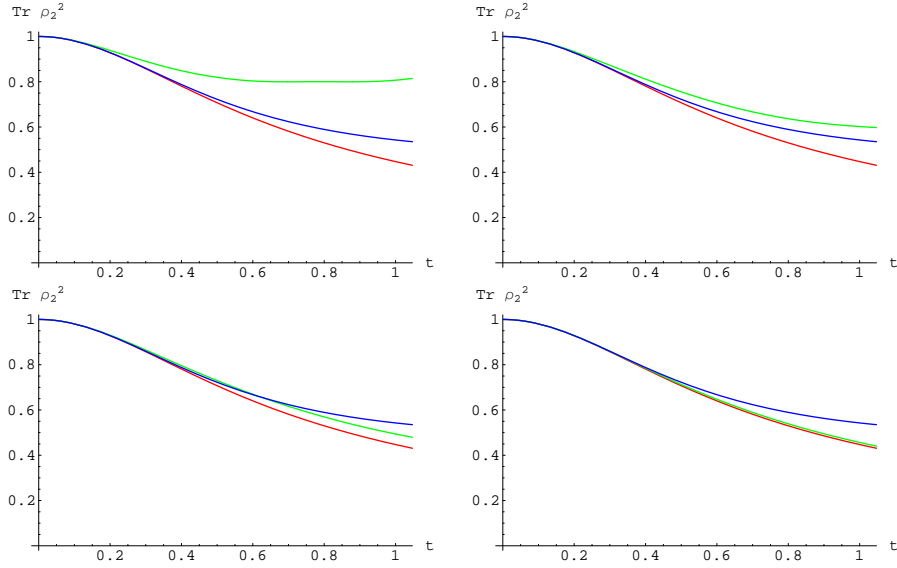


Figura 3.12: Gráfico de $\text{Tr}\{\rho_1^2\}$ para o oscilador quártico com dois graus de liberdade. Linha vermelha: aproximação algébrica dada em (3.94); Linha verde: expressão exata; Linha azul: Aproximação semiclassica. Para este conjunto, $S\lambda\hbar = 1$ e da esquerda para direita, de cima para baixo teremos: $\lambda = 2$; $\alpha_0 = \beta_0 = 0,5$, $\lambda = 1$; $\alpha_0 = \beta_0 = 1/\sqrt{2}$, $\lambda = 0,5$; $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ e $\lambda = 0,125$; $\alpha_0 = \beta_0 = 2$.

Pode-se notar que, para tempos curtos, a aproximação semiclassica dá resultado semelhante ao resultado exato. Isso nos estimula a investigar um pouco mais. Quais informações puramente quânticas podemos obter a partir da aproximação semiclassica? Quanto da dinâmica quântica pode ser construída a partir da dinâmica clássica? A evolução semiclassica é feita de forma a obter os valores médios quânticos como correções ao limite clássico do modelo. Nada foi colocado como condição, ao se fazer a aproximação semiclassica, a respeito do estado. A aproximação semiclassica se revelou ótima para evoluir médias. Pode-se esperar que o *estado* evoluído pela aproximação seja semelhante ao estado evoluído exatamente?

Para responder a essa pergunta, podemos calcular a fidelidade

$$\text{Fid} = |\langle \psi(t) | \psi_{sc}(t) \rangle|^2 \quad (3.96)$$

do estado exato em relação àquele evoluído pela aproximação. As figuras a seguir mostram a evolução temporal da fidelidade para os mesmos valores onde foi calculado $\text{Tr}\{\rho_1^2\}$.

Há pelo menos dois fatos dignos de nota a respeito desses gráficos. O primeiro deles é que a aproximação em primeira ordem possui quase a mesma

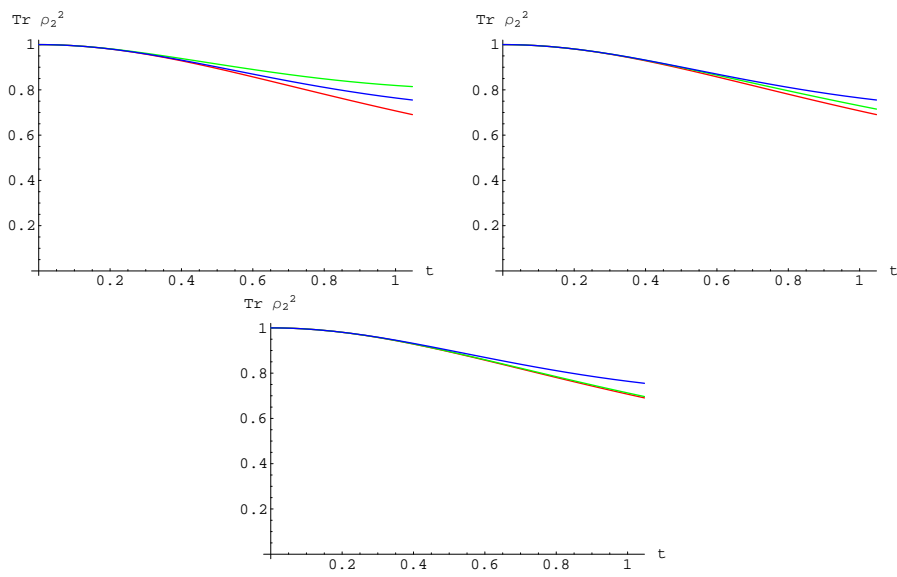


Figura 3.13: Gráfico de $\text{Tr}\{\rho_1^2\}$ para o oscilador quártico com dois graus de liberdade. Linha vermelha: aproximação algébrica (3.94); Linha verde: expressão exata; Linha azul: Aproximação semiclassica. Para este conjunto, $S\lambda\hbar = 0,5$ e da esquerda para direita, de cima para baixo teremos: $\lambda = 1$; $\alpha_0 = \beta_0 = 0,5$, $\lambda = 0,25$; $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ e $\lambda = 0,0625$; $\alpha_0 = \beta_0 = 2$.

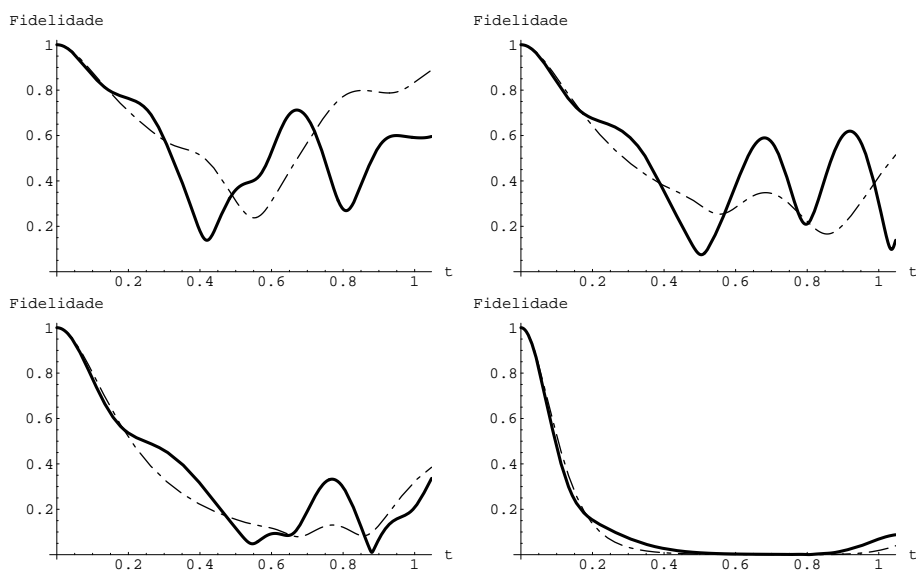


Figura 3.14: Gráfico da fidelidade $\text{Fid} = |\langle \psi(t) | \psi_{sc}(t) \rangle|^2$ para o oscilador quártico com dois graus de liberdade. Linha pontilhada: fidelidade com a ordem zero da expansão, linha contínua: fidelidade com a primeira ordem da expansão. Para este conjunto, $S\lambda\hbar = 1$ e da esquerda para direita, de cima para baixo teremos: $\lambda = 2$; $\alpha_0 = \beta_0 = 0,5$, $\lambda = 1$; $\alpha_0 = \beta_0 = 1/\sqrt{2}$, $\lambda = 0,5$; $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ e $\lambda = 0,125$; $\alpha_0 = \beta_0 = 2$.

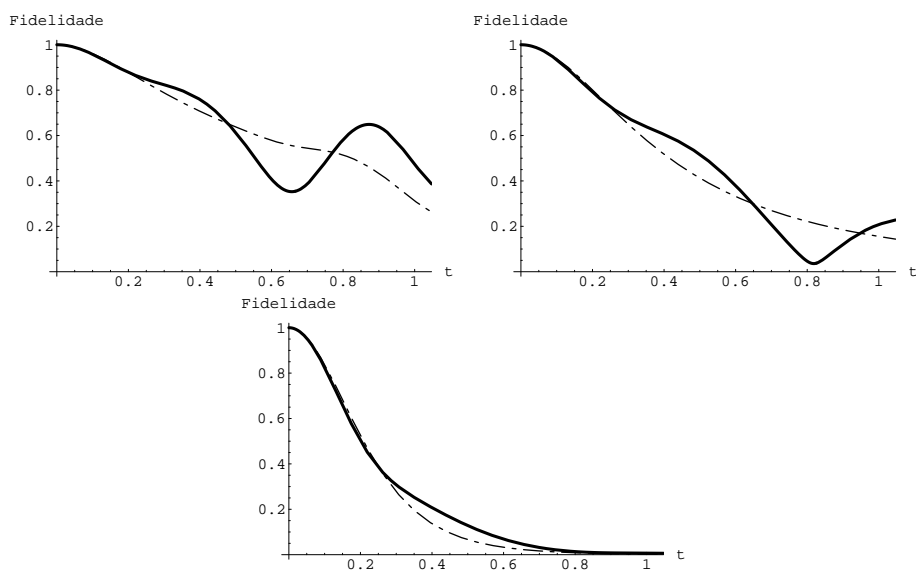


Figura 3.15: Gráfico da fidelidade $\text{Fid} = |\langle \psi(t) | \psi_{sc}(t) \rangle|^2$ para o oscilador quártico com dois graus de liberdade. Linha pontilhada: fidelidade com a ordem zero da expansão, linha contínua: fidelidade com a primeira ordem da expansão. Para este conjunto, $S\lambda\hbar = 0,5$ e da esquerda para direita, de cima para baixo teremos: $\lambda = 1$; $\alpha_0 = \beta_0 = 0,5$, $\lambda = 0,25$; $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ e $\lambda = 0,0625$; $\alpha_0 = \beta_0 = 2$.

fidelidade que a aproximação em ordem zero. Parece que a inclusão de mais ordens na aproximação não é capaz de melhorar a fidelidade. O segundo fato digno de nota é que, em alguns casos a fidelidade vai a zero, e ainda que o emaranhamento medido por $\text{Tr} \{\rho_1^2\}$ seja bem reproduzido pela aproximação. Esse fato põe em dúvida o desempenho da aproximação quando se trata do cálculo de grandezas exclusivamente quânticas. Já para um grau de liberdade, uma comparação dos gráficos da função de Wigner dos dois casos (quântico exato e aproximação semiclássica) mostra diferenças quanto a forma das funções. Uma análise qualitativa, através daquelas figuras nos leva a deduzir que se a aproximação mantém boa fidelidade com o resultado exato sua convergência deve ser muito mais lenta que a convergência de valores médios. Isso talvez seja decorrente do fato de a aproximação se basear no limite clássico de distribuições que se tornam pontos no espaço de fases. Deve se notar que a evolução temporal de estados coerentes é um assunto com uma certa riqueza de detalhes e devemos portanto ser mais cuidadosos. O método dos propagadores [32, 33] por exemplo é uma forma adequada de se tratar o problema.

Vale a pena indicar entretanto que a inadequação da aproximação semiclássica no que diz respeito a propagação de estados coerentes não a desqualifica ou diminui seus méritos como método para o cálculo de valores médios. Vemos que a forma como o método é proposto é consistente com os resultados, e não há problema algum se a convergência do estado aproximado não é tão rápida quanto a de valores médios. Um exemplo disso acontece também com o método variacional [34] aplicado à mecânica quântica.

Capítulo 4

Modelo de Dicke para Superradiância

A Hamiltoniana do modelo de Dicke pode ser escrita $H = H_o + H_I$, onde H_o representa a parte separável da Hamiltoniana e H_I representa a interação átomo-campo. Neste tratamento, cada átomo é considerado um sistema de dois níveis, representando $|e\rangle$ o estado excitado e $|g\rangle$ o estado desexcitado.

Se apenas um modo do campo for considerado e as dimensões ocupadas pelos átomos forem pequenas comparadas com o comprimento de onda do modo em questão, todos os átomos do sistema percebem efetivamente o mesmo campo, permitindo que a hamiltoniana de Dicke seja escrita como [35]:

$$H = a^\dagger a + \epsilon J_z + \frac{G}{\sqrt{2j}}(a + a^\dagger)(J_+ + J_-), \quad (4.1)$$

onde G é uma constante de interação entre átomo e campo.

A equação (4.1) apresenta um termo $(aJ_- + a^\dagger J_+)$. A interpretação física para este termo é a criação de um fóton no campo com correspondente excitação atômica. Usando teoria de perturbação, pode-se mostrar [34] que no cálculo de taxas de transição, sua contribuição contém um fator $(\omega_0 + \omega_m)^{-1}$. Perto da ressonância, $\omega_0 \approx \omega_m$, este termo se torna desprezível comparado com o termo conservativo $(aJ_+ + a^\dagger J_-)$. Se este termo for descartado, faz-se a chamada aproximação de onda girante, e a Hamiltoniana do modelo passa a ser escrita como:

$$H_{RWA} = a^\dagger a + \epsilon J_z + \frac{G}{\sqrt{2j}}(aJ_+ + a^\dagger J_-). \quad (4.2)$$

Para este caso, há uma conservação no número de fótons e átomos excitados, $[a^\dagger a + J_z, H] = 0$. O fenômeno da super-radiância pode ser mostrado pelo

cálculo da taxa de transição atômica:

$$I = I_o |\langle j m | J_- | j m + 1 \rangle|^2 = I_o(j + m)(j - m + 1). \quad (4.3)$$

No caso $N = 1$, o estado $|j m\rangle = |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$ terá taxa de transição dada por $I = I_o$, ou seja, I_o representa a taxa de transição de uma partícula isolada. Um estado com $m \cong 0$ terá uma taxa de emissão máxima, sendo proporcional a N^2 . Este estado é chamado *Super-radiante*.

4.1 Limite Clássico do Modelo de Dicke

Conforme discutido anteriormente, a Hamiltoniana de Dicke descreve N átomos de dois níveis sujeitos a um campo eletromagnético de frequência ω e é dado por (em unidades de $\hbar\omega$):

$$H = \epsilon J_z + a^\dagger a + \frac{G}{\sqrt{N}}(J_+ + J_-)(a + a^\dagger) \quad (4.4)$$

O correspondente clássico da Hamiltoniana (4.4) é obtido pela projeção em estados coerentes

$$\mathcal{H}(x, y) \equiv \langle x, y | H | x, y \rangle, \quad (4.5)$$

onde $|x, y\rangle \equiv |x\rangle \otimes |y\rangle$ é um produto direto de dois estados coerentes obtidos como:

$$|x, y\rangle = \exp\{xa^\dagger - x^*a\} \otimes \exp\left\{\frac{\arctan|y|}{|y|}(yJ_+ - y^*J_-)\right\} |0\rangle \otimes |J, -J\rangle \quad (4.6)$$

e x, y representam os rótulos dos estados coerentes, isto é, são as variáveis complexas nas quais $\mathcal{H}(x, y)$ gera uma dinâmica clássica. Pode-se escrever $\mathcal{H}(x, y)$ como sendo:

$$\mathcal{H}(x, y) = |x|^2 - j\epsilon \left(\frac{1 - |y|^2}{1 + |y|^2}\right) + \frac{2j}{1 + |y|^2} \frac{G}{\sqrt{2j}} (x + x^*)(y + y^*). \quad (4.7)$$

Essa hamiltoniana gera as seguintes equações para os rótulos x e y :

$$\frac{dx}{dt} = -i \frac{\partial \mathcal{H}_N}{\partial x^*} = -i \left(x + \frac{NG(y + y^*)}{\sqrt{N}(1 + |y|^2)} \right) \quad (4.8)$$

$$\frac{dy}{dt} = -i \frac{(1 + |y|^2)^2}{N} \frac{\partial \mathcal{H}_N}{\partial y^*} = -i \left(\epsilon y + \frac{G(1 - y^2)(x + x^*)}{\sqrt{N}} \right) \quad (4.9)$$

$$\frac{dx^*}{dt} = i \frac{\partial \mathcal{H}_N}{\partial x} = i \left(x^* + \frac{NG(y + y^*)}{\sqrt{N}(1 + |y|^2)} \right) \quad (4.10)$$

$$\frac{dy^*}{dt} = i \frac{(1 + |y|^2)^2}{N} \frac{\partial \mathcal{H}_N}{\partial y} = i \left(\epsilon y^* + \frac{G(1 - y^{*2})(x + x^*)}{\sqrt{N}} \right) \quad (4.11)$$

Para o oscilador quártico foi relativamente fácil obter o limite clássico, bastando fazer a equação para evolução temporal da função de Wigner se tornar equivalente à equação de Fokker-Plank. Definiu-se uma nova variável que é escalonada pelo tamanho característico do sistema, que no caso era a ação clássica. Fez-se também com que a constante de não linearidade fosse a zero e a ação se tornasse arbitrariamente grande. Nesse caso, as flutuações relativas desaparecem e obter o limite clássico dessa forma é na verdade fazer com que distribuições de quasi-probabilidade se tornem pontos no espaço de fases.

Um limite clássico semelhante pode ser obtido no modelo de Dicke. Aqui no entanto não é prático obter esse limite através da equação para a função de Wigner, pois a álgebra de $su(2)$ torna esse trabalho complicado. A questão é que a equação de evolução temporal para a função de Wigner nesse caso depende do tamanho característico do modelo, o número N de átomos, de forma não trivial, como ocorreu no caso do oscilador quártico. O leitor interessado pode encontrar uma dedução da equação para a função de Wigner do modelo Dicke com 1 átomo ($j = 1/2$) em [36].

Para definir um limite clássico no modelo de Dicke, vamos nos basear num teorema de Hepp e Lieb [37]. Este limite clássico é semelhante àquele obtido no oscilador quártico. Serão considerados aqui a equação de movimento de variáveis intensivas definidas como:

$$\tilde{J}_{+,-,z} = \frac{J_{+,-,z}}{N}; \quad \tilde{a} = \frac{a}{\sqrt{N}}; \quad \tilde{a}^\dagger = \frac{a^\dagger}{\sqrt{N}}. \quad (4.12)$$

As equações de movimento para estes operadores são obtidas através do comutador com a hamiltoniana (4.4) e são dadas por:

$$\dot{\tilde{J}}_+ = i \left[\epsilon \tilde{J}_+ - 2G \tilde{J}_z (\tilde{a} + \tilde{a}^\dagger) \right], \quad (4.13)$$

$$\dot{\tilde{J}}_- = -i \left[\epsilon \tilde{J}_- - 2G \tilde{J}_z (\tilde{a} + \tilde{a}^\dagger) \right], \quad (4.14)$$

$$\dot{\tilde{J}}_z = -iG (\tilde{J}_+ - \tilde{J}_-) (\tilde{a} + \tilde{a}^\dagger), \quad (4.15)$$

$$\dot{\tilde{a}} = -i \left[\tilde{a} + G (\tilde{J}_+ + \tilde{J}_-) \right], \quad (4.16)$$

$$\dot{\tilde{a}}^\dagger = i \left[\tilde{a}^\dagger + G (\tilde{J}_+ + \tilde{J}_-) \right]. \quad (4.17)$$

Um desses operadores, descrevendo a densidade de fótons na cavidade $a^\dagger a$, foi usado por Wang e Hioe [38] para descrever a transição de fase no modelo no limite termodinâmico.

Outro conceito importante na descrição do limite clássico de Hepp e Lieb é o de “estado clássico”. Vamos representar os operadores intensivos definidos acima através da notação: $\{A_N^i\}_{i=1}^5$.

Considere H_N como sendo o espaço de Hilbert correspondente aos estados de N átomos interagindo com um modo do campo eletromagnético. Suponha que para um dado operador densidade χ^N atuando em H_N seja possível tomar o limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Tr} \{ \chi^N A_N^i \} = \alpha^i \quad (4.18)$$

para um número complexo α^i . Este operador densidade χ^N representa um estado clássico com relação aos operadores $\{A_N^i\}$ com valor α_i se, além do limite existir, for possível também escrever:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Tr} \{ \chi^N (A_N^i - \alpha^i)^\dagger (A_N^i - \alpha^i) \} = 0. \quad (4.19)$$

Em outras palavras, suponha que temos o operador densidade representando o estado do modelo para um dado N e o representamos por χ^N . Suponha agora que podemos associar um operador densidade do modelo com $N + 1$ átomos com o operador densidade obtido para o modelo com N átomos através dos valores médios e variâncias de operadores nesses dois espaços. Queremos que os valores médios e variâncias de operadores no estado χ^{N+1} sejam os mais próximos dessas quantidades no estado χ^N . Queremos assim formar uma sequência de operadores densidade $\{\chi^N\}$. Se no limite $N \rightarrow \infty$ o valor médio de cada um dos operadores A_N^i definidas acima tende aos valores α^i e, além disso a variância desses operadores nesse estado vai a zero, χ^N representa um estado clássico com valor α^i .

Um exemplo de estados clássicos são os estados coerentes generalizados dados por:

$$|\alpha, y\rangle \equiv D(\sqrt{N}x) \otimes D(y) |0\rangle |j, -j\rangle. \quad (4.20)$$

Vemos que é possível obter uma sequência de estados coerentes de diferentes N 's, sendo que neste caso iremos variar o \sqrt{N} no rótulo x e o valor de j no grau de liberdade dos átomos. Pela ação dos operadores deslocamento nas álgebras respectivas e usando $N = 2j$ pode-se obter:

$$\langle \alpha, y | \tilde{a} | \alpha, y \rangle = x; \quad (4.21)$$

$$\langle \alpha, y | \tilde{a}^\dagger | \alpha, y \rangle = x^*; \quad (4.22)$$

$$\langle \alpha, y | \tilde{J}_+ | \alpha, y \rangle = \frac{y^*}{1 + |y|^2} \equiv \langle \tilde{J}_+ \rangle; \quad (4.23)$$

$$\langle \alpha, y | \tilde{J}_- | \alpha, y \rangle = \frac{y}{1 + |y|^2} \equiv \langle \tilde{J}_- \rangle; \quad (4.24)$$

$$\langle \alpha, y | \tilde{J}_z | \alpha, y \rangle = -\frac{1}{2} \left(\frac{1 - |y|^2}{1 + |y|^2} \right) \equiv \langle \tilde{J}_z \rangle. \quad (4.25)$$

As equações (4.21) a(4.25) mostram que o limite em (4.18) está bem definido para o estado $\chi^N = \left| \sqrt{N}x, y \right\rangle \left\langle \sqrt{N}x, y \right|$. Pode-se também mostrar a condição da variância dada por (4.19). Para o grau de liberdade do campo,

$$D^\dagger(\sqrt{N}x)\tilde{a}D(\sqrt{N}x) = \tilde{a} + x, \quad (4.26)$$

então a variância dos operadores do campo vai a zero trivialmente. Para o grau de liberdade atômico pode-se escrever:

$$\langle y | (\tilde{J}_z - \langle \tilde{J}_z \rangle)^\dagger (\tilde{J}_z - \langle \tilde{J}_z \rangle) | y \rangle = \frac{1}{N} \frac{|y|^2}{1 + |y|^2}, \quad (4.27)$$

$$\langle y | (\tilde{J}_+ - \langle \tilde{J}_+ \rangle)^\dagger (\tilde{J}_+ - \langle \tilde{J}_+ \rangle) | y \rangle = \frac{1}{N} \frac{|y|^4}{(1 + |y|^2)^2}, \quad (4.28)$$

$$\langle y | (\tilde{J}_- - \langle \tilde{J}_- \rangle)^\dagger (\tilde{J}_- - \langle \tilde{J}_- \rangle) | y \rangle = \frac{1}{N} \frac{|y|^4}{(1 + |y|^2)^2}. \quad (4.29)$$

E vemos que a variância vai a zero quando $N \rightarrow \infty$. Dadas as definições de variável intensiva e estado clássico, podemos agora enunciar o teorema de Hepp e Lieb [37]:

Se χ^N é um estado clássico em relação a $\{\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger, \tilde{J}_z, \tilde{J}_+, \tilde{J}_-\}$ no ponto

$$\vec{r} = \{\langle \tilde{a} \rangle, \langle \tilde{a}^\dagger \rangle, \langle \tilde{J}_z \rangle, \langle \tilde{J}_+ \rangle, \langle \tilde{J}_- \rangle\},$$

o estado evoluído pela hamiltoniana (4.4), $\chi^N(t) = e^{-iHt}\chi^N(0)e^{iHt}$, será também um estado clássico no ponto

$$\vec{r}(t) = \{\langle \tilde{a} \rangle(t), \langle \tilde{a}^\dagger \rangle(t), \langle \tilde{J}_z \rangle(t), \langle \tilde{J}_+ \rangle(t), \langle \tilde{J}_- \rangle(t)\},$$

e a evolução de $\vec{r}(t)$ será dada pelas equações clássicas:

$$\langle \dot{\tilde{J}}_+ \rangle = i \left[\epsilon \langle \tilde{J}_+ \rangle - 2G \langle \tilde{J}_z \rangle (\langle \tilde{a} \rangle + \langle \tilde{a}^\dagger \rangle) \right], \quad (4.30)$$

$$\langle \dot{\tilde{J}}_- \rangle = -i \left[\epsilon \langle \tilde{J}_- \rangle - 2G \langle \tilde{J}_z \rangle (\langle \tilde{a} \rangle + \langle \tilde{a}^\dagger \rangle) \right], \quad (4.31)$$

$$\langle \dot{\tilde{J}}_z \rangle = -iG (\langle \tilde{J}_+ \rangle - \langle \tilde{J}_- \rangle) (\langle \tilde{a} \rangle + \langle \tilde{a}^\dagger \rangle), \quad (4.32)$$

$$\langle \dot{\tilde{a}} \rangle = -i \left[\langle \tilde{a} \rangle + G (\langle \tilde{J}_+ \rangle + \langle \tilde{J}_- \rangle) \right], \quad (4.33)$$

$$\langle \dot{\tilde{a}}^\dagger \rangle = i \left[\langle \tilde{a}^\dagger \rangle + G (\langle \tilde{J}_+ \rangle + \langle \tilde{J}_- \rangle) \right]. \quad (4.34)$$

4.2 Aproximação Semiclássica no modelo de Dicke

Vamos agora obter as correções ao limite clássico de Hepp e Lieb usando a aproximação semiclássica. Lembrando a receita dada anteriormente, a hamiltoniana semiclássica deve ser linear e deve satisfazer as condições de correspondência de equações. Ao final, somam-se termos proporcionais à identidade para garantir que $\mathcal{H} = \langle x, y | H_{sc} | x, y \rangle$.

Para o modelo de Dicke a Hamiltoniana semiclássica pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} H_{sc} &= a^\dagger a + \epsilon J_z \\ &+ \frac{G}{\sqrt{2j}} [(a^\dagger - x^*)\langle J_- \rangle + (a - x)\langle J_+ \rangle + x^* J_- + x J_+] \\ &+ \frac{G}{\sqrt{2j}} [(a^\dagger - x^*)\langle J_+ \rangle + (a - x)\langle J_- \rangle + x^* J_+ + x J_-], \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde $\langle J_\pm \rangle = \langle y | J_\pm | y \rangle$, é o valor médio de J_\pm no estado coerente atômico de rótulo y , e $x = \langle x | a | x \rangle$ o valor médio do operador a no estado coerente do campo com rótulo x .

Para determinar o operador de evolução semiclássico usa-se o método de derivação de parâmetros descrito anteriormente e obtém-se:

$$U_{sc} = D_1(x) \exp\{i\omega(t)a^\dagger a + \phi(t)\} D_1^{-1}(x_0) \otimes D_2(y) \exp\{i\nu(t)J_z\} D_2^{-1}(y_0), \quad (4.36)$$

onde x_0, y_0 correspondem aos rótulos dos estados coerentes iniciais, x, y são dados pelas trajetórias clássicas de $\mathcal{H}(x, y)$ e a dependência temporal dos parâmetros ω, ν, ϕ é encontrada derivando (4.36) e comparando com a hamiltoniana semiclássica, conforme (2.76). Obtém-se assim:

$$\omega(t) = -t; \quad (4.37)$$

$$\dot{\nu} = -\epsilon + \frac{G}{\sqrt{2j}}(xy^* + x^*y) + \frac{G}{\sqrt{2j}}(x^*y^* + xy); \quad (4.38)$$

$$\dot{\phi} = \frac{j[G(xy^* + x^*y) + G(xy + x^*y^*)]}{\sqrt{2j}(1 + |y|^2)}; \quad (4.39)$$

A perturbação $\Delta = H - H_{sc}$ é dada por:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{G}{\sqrt{2j}} [(a^\dagger - x^*)(J_- - \langle J_- \rangle) + (a^\dagger - x^*)(J_- + \langle J_+ \rangle) + \\ &(a - x)(J_- + \langle J_+ \rangle) + (a - x)(J_- - \langle J_- \rangle)]. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Usando-se então a equação (2.76) obtém-se a evolução do estado de forma perturbativa. Até primeira ordem em Δ a aproximação semiclássica fornece para o modelo de Dicke:

$$|\Psi^I(t)\rangle = \frac{|x_0, y_0\rangle + c_{11}(t)|x_1, y_1\rangle}{(1 + |c_{11}(t)|^2)^{1/2}}, \quad (4.41)$$

onde $|x_n, y_k\rangle$ são estados coerentes obtidos pela ação do operador deslocamento nos estados excitados da base canônica:

$$|x_n, y_k\rangle = D_1(x_0) \otimes D_2(y_0) |n; j, -j + k\rangle.$$

O coeficiente c_{11} é obtido da equação:

$$\dot{c}_{11}(t) = -i \frac{G[1 - y^2(t)]}{\sqrt{2j}[1 + |y(t)|^2]} \exp\{i[t - \nu(t)]\}. \quad (4.42)$$

Para ordens superiores pode-se usar:

$$|\Psi^I(t)\rangle^{(n)} = -i \int_0^t d\tau \Delta(\tau) |\Psi^I(\tau)\rangle^{(n-1)}, \quad (4.43)$$

onde $|\Psi^I(t)\rangle^{(n)}$ representa a correção de n -ésima ordem. A forma geral de $|\Psi^I(t)\rangle$ pode ser escrita como:

$$|\Psi^I(t)\rangle = A^{-1} \left\{ (1 + c_{00}) |x_0, y_0\rangle + \sum_{ij} c_{ij}(t) |x_i, y_j\rangle \right\}, \quad (4.44)$$

onde o coeficiente A é uma normalização e $|x_n, y_k\rangle$ é o estado de referência generalizado como anteriormente. Até segunda ordem, obtém-se:

$$\dot{c}_{00}(t) = \frac{-ic_{11}(t)G(1 - y^{*2})e^{-it+iv(t)}}{1 + |y|^2} \quad (4.45)$$

$$\dot{c}_{01}(t) = \frac{ic_{11}(t)2G(y^* + y)e^{-it}}{\sqrt{2j}(1 + |y|^2)} \quad (4.46)$$

$$\dot{c}_{02}(t) = \frac{-ic_{11}(t)G(1 - y^2)e^{-it-iv(t)}}{1 + |y|^2} \quad (4.47)$$

$$\dot{c}_{20}(t) = \frac{-ic_{11}(t)\sqrt{2}G(1 - y^{*2})e^{it+iv(t)}}{1 + |y|^2} \quad (4.48)$$

$$\dot{c}_{21}(t) = \frac{ic_{11}(t)2\sqrt{2}G(y + y^*)e^{it}}{\sqrt{2j}1 + |y|^2} \quad (4.49)$$

$$\dot{c}_{22}(t) = \frac{-ic_{11}(t)\sqrt{2}G(1 - y^2)e^{-it-iv(t)}}{1 + |y|^2}. \quad (4.50)$$

Utilizando-se a aproximação semiclássica, podemos obter os primeiros termos de correção ao limite clássico do modelo de Dicke, isto é, os termos de ordem N^{-1} . Para isso, deve-se considerar os valores esperados da forma

$$\langle \hat{O} \rangle = \langle \alpha(t), y(t) | \hat{O} | \alpha(t), y(t) \rangle, \quad (4.51)$$

onde o estado clássico é o estado coerente:

$$|\alpha(t), y(t)\rangle \equiv D(\sqrt{N}x(t)) \otimes D(y(t)|0\rangle \otimes |j, -j\rangle. \quad (4.52)$$

Com a aproximação semiclássica até segunda ordem, obtém-se os valores esperados:

- Para \tilde{a} até 2.a ordem:

$$\langle \tilde{a} \rangle(t) = x(t) + \frac{1}{A\sqrt{N}}(c_{11}c_{01}^* + c_{21}c_{11}^*); \quad (4.53)$$

- Para \tilde{J}_z até 2.a ordem:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{J}_z \rangle(t) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1 - |y(t)|^2}{1 + |y(t)|^2} \right] \\ &+ \frac{y(t)[(1 + c_{00})c_{01}^* + c_{20}c_{21}^*] + \sqrt{2}(c_{01}c_{02}^* + c_{21}c_{22}^*)}{A\sqrt{N}[1 + |y(t)|^2]} + \text{c.c.}; \end{aligned} \quad (4.54)$$

- Para \tilde{a}^2 :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{a}^2 \rangle(t) &= x(t)^2 + \frac{1}{AN} \{ 2(c_{11}c_{01}^* + c_{21}c_{11}^*) \\ &+ \sqrt{2}[c_{22}c_{02}^* + c_{21}c_{01}^* + c_{20}(1 + c_{00})^*] \}; \end{aligned} \quad (4.55)$$

- Para \tilde{J}_z^2 as correções já aparecem em primeira ordem:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{J}_z^2 \rangle(t) &= \frac{1}{4} \left[\frac{1 - |y(t)|^2}{1 + |y(t)|^2} \right]^2 \\ &+ \left\{ \frac{[1 - |y(t)|^2]^2 |c_{11}|^2 + |y(t)|^2(1 + 3|c_{11}|^2)}{N(1 + |c_{11}|^2)[1 + |y(t)|^2]^2} \right\}; \end{aligned} \quad (4.56)$$

- os valores médios dos termos de interação na Hamiltoniana são dados por:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{a}\tilde{J}_+ \rangle &= \frac{x(t)y^*(t)}{2[1 + |y(t)|^2]} + \frac{x(t)}{A\sqrt{N}} \{ (1 + c_{00})c_{01}^* + c_{20}c_{21}^* \\ &+ \sqrt{2}(c_{01}c_{02}^* + c_{21}c_{22}^*) - y^*(t)[c_{01}(1 + c_{00})^* + c_{21}c_{20}^*] \\ &- \sqrt{2}y^*(t)(c_{02}c_{01}^* + c_{22}c_{21}^*) \}; \end{aligned} \quad (4.57)$$

com expressões similares para os outros termos.

4.3 Resultados e conclusão

Nas equações acima, os c_{ij} tem sua dependência temporal dadas pelas equações (4.45) a (4.50) e os rótulos $x(t)$, $y(t)$ obedecem as equações de movimento clássicas. É possível reconhecer

$$x(t) \text{ e } [1 - |y(t)|^2] / \{2 [1 + |y(t)|^2]\}$$

como a média dos operadores \tilde{a} e \tilde{J}_z respectivamente. Além disso, as equações (4.53) a (4.57) concordam com o limite clássico de Hepp e Lieb [equação (4.19)]. Essas correções são o resultado principal desse trabalho e vemos que eles são de ordem $1/\sqrt{N}$ ou $1/N$.

Note que os coeficientes $c_{ij}(t)$ dependem de N e t , através de (4.45) a (4.50). Pode se questionar então: qual a validade da aproximação? Existiria um domínio $N - t$ onde podemos tratar as correções como tal? Uma forma de responder essa pergunta é olhando o domínio $N - t$ onde os termos de correção são pequenos o suficiente. Deve-se levar em consideração que diferentes condições iniciais terão diferentes regimes de validade. Como todos os coeficientes, exceto $1 + c_{00}$, estão relacionados às correções semiclássicas, uma maneira sugestiva de se testar o regime $N - t$ seria através da razão:

$$R(t) \equiv \frac{\sum |c_{kl}(t)|}{|1 + c_{00}(t)|}. \quad (4.58)$$

Quando razão $R(t)$ é pequena, as correções quânticas não são tão importantes e podem portanto ser tratadas como correções. À medida que $R(t)$ se torna apreciável, afasta-se do regime semiclássico e deve-se levar em conta mais termos na expansão. Talvez o resultado mais interessante é que, para pequenos valores de N , as correções quânticas mostram dependência em N (mantendo-se as outras variáveis fixas). Entretanto, a medida que se aumenta N , $R(t)$ se torna uma curva “universal” que é independente de N , apesar de continuar dependendo do estado inicial. Também na região onde $t < \omega^{-1}$ $R(t)$ não depende de N .

Os resultados que foram publicados em [39] são ilustrados nas figuras a seguir, onde 4.1 e 4.2 mostram a dependência de $R(t)$ nas condições iniciais bem como o comportamento para N grande. Figuras 4.3 e 4.4 mostram a dependência de $R(t)$ com a constante de acoplamento. Para o caso $G = 0.5$ o modelo está passando pela transição de fase, fazendo com que tenhamos um R bem maior (repare a escala de valores de R), indicando que a validade da expansão está limitada a valores bem pequenos de t .

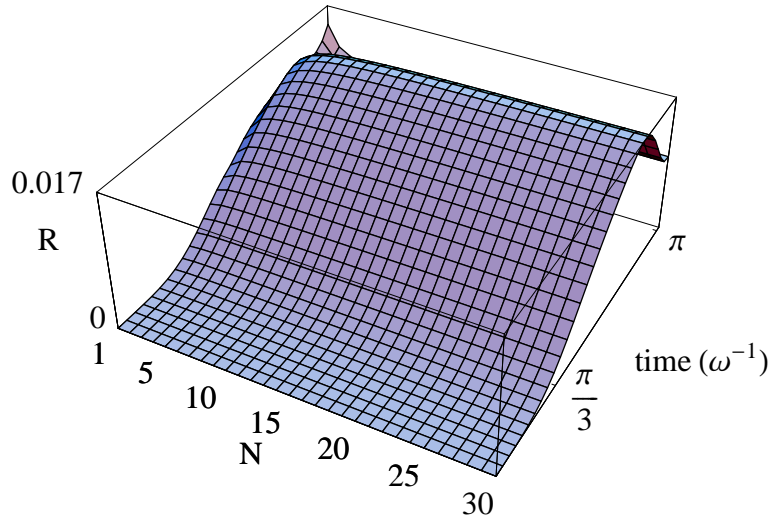


Figura 4.1: $R(t)$ para vários valores de N . $\epsilon = 1$; $G = 0.2$; $x_0 = 0.404748$; $y_0 = -0.0708881$.

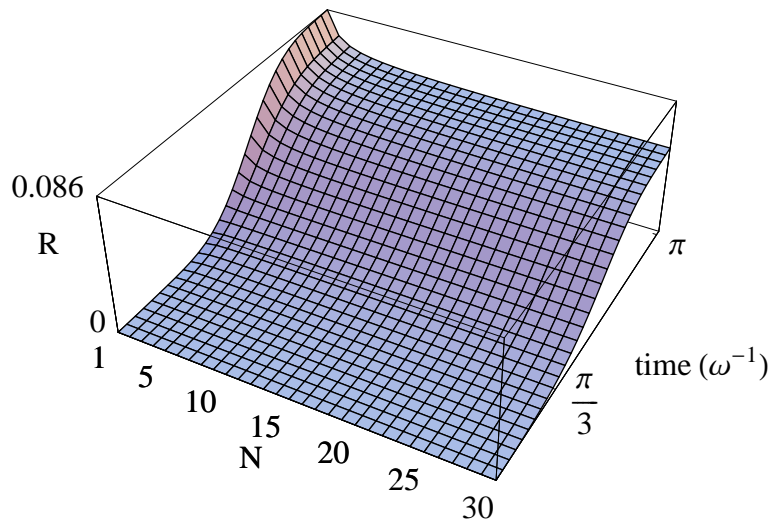


Figura 4.2: $R(t)$ para vários valores de N . $\epsilon = 1$; $G = 0.2$; $x_0 = 0.0707107(1 + i)$; $y_0 = 0.0710669(1 + i)$.

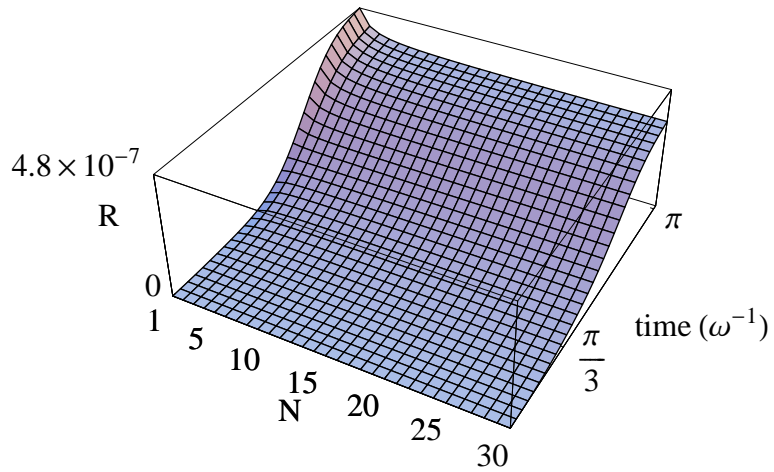


Figura 4.3: $R(t)$ para vários valores de N . $\epsilon = 1$; $G = 0.01$; $x_0 = 0.0707107(1 + i)$; $y_0 = 0.0710669(1 + i)$.

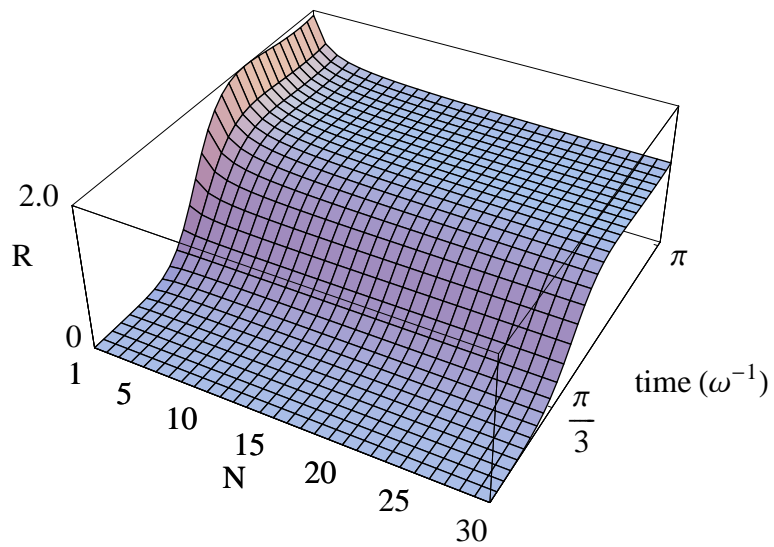


Figura 4.4: $R(t)$ para vários valores de N . $\epsilon = 1$; $G = 0.5$; $x_0 = 0.0707107(1 + i)$; $y_0 = 0.0710669(1 + i)$.

Capítulo 5

Sistemas Quânticos Markovianos na Representação de Weyl

A representação de Weyl é uma representação de operadores que usa a função de Wigner e a função característica, também conhecida como função de cordas. Neste capítulo será feito um estudo de sistemas abertos markovianos usando a função de Wigner como principal meio para tratar a álgebra dos problemas que serão apresentados. Em alguns casos, utilizando-se as propriedades da função de Wigner descritas no capítulo “Ferramentas”, será possível uma interpretação direta de alguns desses resultados. A análise a ser feita vai se restringir à álgebra do grupo de Weyl-Heisenberg, h_4 . Trataremos do problema de dois bósons idênticos evoluindo sob uma hamiltoniana quadrática acoplados a um reservatório. Considerando que a indistinguibilidade de partículas no sentido quântico é uma propriedade a ser preservada pelo acoplamento com o reservatório, encontraremos as condições que a equação markoviana deve preencher para fornecer uma descrição compatível com o que é observado na natureza.

5.1 Sistemas Quânticos Abertos

Como mencionado na introdução, todo sistema físico interage, ainda que muito fracamente, com o ambiente à sua volta. Tal como descrito pela termodinâmica, esse ambiente - aqui chamado de reservatório - possui infinitos graus de liberdade e estamos interessados na dinâmica do sistema somente. Quanticamente podemos obter a evolução temporal do sistema se evoluirmos o sistema composto e fizermos o traço sobre os graus de liberdade do

reservatório. Entretanto, tendo o reservatório infinitos graus de liberdade, tal procedimento se torna impossível. O que se faz portanto [31] é, a partir da equação para o sistema composto, deduzir uma equação para a matriz densidade reduzida do sistema, ρ_S . Dessa forma, obtém-se uma equação mestra quântica análoga à equação de Fokker-Plank para distribuições clássicas. Para realizar tal procedimento, são feitas aproximações e supostas certas condições. A equação final obtida deve preservar ρ_S como operador densidade, isto é, $\rho_S(t)$ deve satisfazer [17]:

- Não-negatividade, ou seja, se \mathcal{H}_S é o espaço de Hilbert do sistema,

$$\langle v | \rho_S(t) | v \rangle \geq 0 \quad \forall |v\rangle \in \mathcal{H}_S; \quad (5.1)$$

- O operador densidade deve ser hermitiano,

$$\rho_S(t) = \rho_S^\dagger(t); \quad (5.2)$$

- O operador densidade deve ter traço unitário,

$$\text{Tr} \{ \rho_S(t) \} = 1. \quad (5.3)$$

Vale lembrar que a evolução dada pela equação mestra é não unitária, e podemos ter no final um operador densidade que não mais corresponde a um estado puro. Por outro lado, este processo pode destruir correlações quânticas presentes inicialmente em ρ_S e assim gerar um estado com características clássicas. Esta é uma forma de se obter o mundo clássico a partir da Mecânica Quântica [40].

Dependendo das aproximações que fazemos para a dedução da equação mestra, podemos obter diferentes formas de equação. Dentre as diferentes aproximações, uma que se destaca é a aproximação markoviana. As equações mestras markovianas são obtidas sob a condição de fraco acoplamento entre sistema e reservatório e efeitos de memória ou histórico de evolução desprezíveis, ou seja, para estas equações não importa a maneira como $\rho_S(t)$ evoluiu desde o instante inicial, mas apenas as informações nele contidas no instante t . De acordo com o teorema estrutural de Lindblad [41], uma equação mestra que satisfaz condições markovianas pode sempre ser colocada na forma

$$i\hbar \frac{d\rho_S}{dt} = [H_S, \rho_S] + i \sum_k \left(L_k \rho_S L_k^\dagger - \frac{1}{2} L_k^\dagger L_k \rho_S - \frac{1}{2} \rho_S L_k^\dagger L_k \right), \quad (5.4)$$

onde os operadores de Lindblad L_k 's são funções dos operadores do sistema. Para escrever a evolução temporal de um sistema quântico aberto, pode-se,

em muitos casos, supor que a interação do sistema com o reservatório seja tal que é possível escrever a equação mestra na forma de Lindblad e determinar a forma desses operadores empiricamente [42]. Vale lembrar, entretanto, que nem toda equação na forma de Lindblad possui significado físico. Normalmente condições suplementares são colocadas sobre estes operadores para correspondência com uma verdadeira evolução markoviana como tratado por Peixoto de Faria e Nemes em [43]. Obteremos agora condições suplementares no caso em que é necessário preservar a indistinguibilidade de duas partículas.

Para tratar do problema, vamos supor que existe um operador de troca \hat{E} que, ao atuar na função de onda de duas partículas, realiza uma permutação entre essas partículas. Assim, se $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 | \psi \rangle = \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ representa a função de onda do sistema de duas partículas,

$$\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 | \hat{E} | \psi \rangle = \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 | \psi \rangle = \psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1). \quad (5.5)$$

Se estamos tratando um sistema de partículas idênticas bosônicas,

$$\psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) = \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (5.6)$$

e portanto a função de onda de duas partículas idênticas deve ser uma auto-função de \hat{E} . Além do mais, se um sistema é descrito por uma hamiltoniana H que preserva a indistinguibilidade de partículas,

$$[\hat{E}, H] = 0. \quad (5.7)$$

Se, além da evolução unitária, as partículas idênticas estão acopladas a um reservatório e queremos poder continuar tratando as partículas como idênticas, \hat{E} deve ser de certa forma imune à ação do reservatório. Vamos tratar agora do caso específico onde o acoplamento com o reservatório possa ser descrito por uma equação mestra markoviana onde os operadores de Lindblad aparecem como combinação linear dos operadores \hat{q} e \hat{p} :

$$L_j = \lambda_{j1}\hat{q}_1 + \lambda_{j2}\hat{q}_2 + \mu_{j1}\hat{p}_1 + \mu_{j2}\hat{p}_2. \quad (5.8)$$

Inicialmente, façamos uma transformação de coordenadas:

$$\hat{R} = \frac{\hat{q}_1 + \hat{q}_2}{2}, \quad \hat{r} = \hat{q}_1 - \hat{q}_2, \quad (5.9)$$

$$\hat{P} = \hat{p}_1 + \hat{p}_2 \quad \hat{p} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{2}. \quad (5.10)$$

Nessa transformação, \hat{R} e \hat{P} são, respectivamente, o operador de posição e momentum do centro de massa, ao passo que \hat{r} e \hat{p} são os operadores de

posição e momentum das coordenadas relativas. As seguintes relações de comutação são observadas:

$$[\hat{R}, \hat{P}] = i\hbar, \quad [\hat{r}, \hat{p}] = i\hbar, \quad (5.11)$$

$$[\hat{R}, \hat{p}] = 0, \quad [\hat{r}, \hat{P}] = 0, \quad (5.12)$$

e as demais são zero trivialmente. Nesse sistema de coordenadas, podemos escrever o operador de troca como sendo

$$\hat{E} = \mathbf{1} \otimes \Pi_r, \quad (5.13)$$

onde Π_r é o operador paridade que atua exclusivamente nas coordenadas relativas, com as propriedades:

$$\Pi_r^\dagger = \Pi_r^{-1} = \Pi_r; \quad (5.14)$$

$$\Pi_r \hat{r} \Pi_r = -\hat{r}, \quad \Pi_r \hat{p} \Pi_r = -\hat{p}. \quad (5.15)$$

Já o operador de Lindblad terá a forma:

$$L_j = \Lambda_j \hat{R} + \Gamma_j \hat{P} + \mu_j \hat{r} + \eta_j \hat{p}. \quad (5.16)$$

Na representação de Heisenberg, a evolução temporal do operador \hat{E} pela equação mestra é dada por:

$$\frac{d\hat{E}}{dt} = -\frac{1}{i\hbar} [H, \hat{E}] + \frac{1}{2\hbar} \sum_j \left(2L_j^\dagger \hat{E} L_j - L_j^\dagger L_j \hat{E} - \hat{E} L_j^\dagger L_j \right). \quad (5.17)$$

Se estamos tratando de um sistema de partículas idênticas, $[H, \hat{E}] = 0$ por hipótese. Se queremos uma interação com o reservatório que preserve a indistinguibilidade, devemos ter então

$$\frac{1}{2\hbar} \sum_j (2L_j^\dagger L'_j - L_j^\dagger L_j - (L_j^\dagger)' L'_j) \Pi_r = 0. \quad (5.18)$$

onde $L'_j = \Pi_r L_j \Pi_r$. Procedendo com este cálculo, percebe-se que as condições para que a igualdade acima se verifique independem dos coeficientes dos operadores do centro de massa em (5.16), pois elas se cancelam automaticamente, ao passo que os coeficientes das coordenadas relativas devem satisfazer

$$\sum_j |\mu_j|^2 = 0 \quad \text{e} \quad \sum_j |\eta_j|^2 = 0, \quad (5.19)$$

que só pode ser feito escolhendo-se $\mu_j = \eta_j = 0$ para todo j . Em outras palavras, se o acoplamento com o reservatório é descrito por operadores de Lindblad lineares nas variáveis $\hat{q}_{1,2}$, $\hat{p}_{1,2}$, a condição suficiente e necessária para se preservar a indistinguibilidade de partículas é de que o reservatório tenha ação unicamente no centro de massa do sistema.

5.2 Equações de movimento para a função de Wigner e função de Cordas

Uma das vantagens de se utilizar a representação de Weyl está na facilidade de se contrastar resultados clássicos e quânticos de um mesmo modelo. Para fazer uso dessa vantagem, é necessário que seja obtida uma equação de movimento da função de Wigner em termos das derivadas das variáveis canônicas (q, p) . Isso é possível utilizando-se a equação para evolução do operador densidade ρ juntamente com a representação de Weyl dos operadores \hat{q} e \hat{p} .

Suponhamos por exemplo que a evolução temporal de um sistema quântico seja descrita pela hamiltoniana:

$$\hat{H}(\hat{p}, \hat{q}) = F(\hat{p}) + V(\hat{q}). \quad (5.20)$$

Considerando a equação

$$i\hbar\dot{\rho} = [H, \rho], \quad (5.21)$$

podemos obter uma equação para a função de Wigner do estado ρ , W_ρ , aplicando a transformada de Weyl, que é simplesmente definição da função de Wigner, nos dois lados da equação. Podemos escrever a transformada de Weyl como sendo

$$\mathcal{W}(\bullet) \equiv \int dp' \langle p + p'/2 | \bullet | p - p'/2 \rangle e^{ip'q/\hbar} \quad (5.22)$$

ou

$$\mathcal{W}(\bullet) \equiv \int dq' \langle q + q'/2 | \bullet | q - q'/2 \rangle e^{-ip'q/\hbar}, \quad (5.23)$$

de acordo com a conveniência. No comutador há 2 termos:

$$F(\hat{p})\rho - \rho F(\hat{p}), \quad \text{e} \quad V(\hat{q})\rho - \rho V(\hat{q}). \quad (5.24)$$

Para $F(\hat{p})\rho - \rho F(\hat{p})$ considere:

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int dp' \langle p + p'/2 | (F(\hat{p})\rho - \rho F(\hat{p})) | p - p'/2 \rangle e^{ip'q/\hbar}. \quad (5.25)$$

Trocando-se o operador \hat{p} pelo seu autovalor p ,

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp' [F(p+p'/2) - F(p-p'/2)] \langle p + p'/2 | \rho | p - p'/2 \rangle e^{ip'q/\hbar}. \quad (5.26)$$

Fazendo a expansão em série de Taylor de $F(p \pm p'/2)$

$$F(p + p'/2) = \sum_k \frac{(p'/2)^k}{k!} \frac{\partial^k F(p)}{\partial p^k}, \quad (5.27)$$

$$F(p - p'/2) = \sum_k \frac{(-p'/2)^k}{k!} \frac{\partial^k F(p)}{\partial p^k}, \quad (5.28)$$

teremos

$$F(p + p'/2) - F(p - p'/2) = 2 \sum_k \frac{1}{k!} (p'/2)^k \frac{\partial^k F}{\partial p^k}. \quad (5.29)$$

Podemos escrever p' que aparece nesta equação como a derivada da exponencial:

$$\frac{\partial}{\partial q} e^{ip'q/\hbar} = \frac{i}{\hbar} p' e^{ip'q/\hbar}. \quad (5.30)$$

Portanto,

$$p'^k e^{ip'q/\hbar} = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial q}\right)^k e^{ip'q/\hbar}. \quad (5.31)$$

e podemos escrever a transformada de Weyl do comutador como sendo

$$\begin{aligned} & \int dp' \langle p + p'/2 | [F(\hat{p}), \rho] | p - p'/2 \rangle e^{ip'q/\hbar} = \\ & 2 \sum_{k \text{ ímpar}} \frac{1}{k!} \left(-\frac{i\hbar}{2}\right)^k \frac{\partial^k F}{\partial p^k} \frac{\partial^k}{\partial q^k} W_\rho. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Para $V(\hat{q})$ procede-se de maneira análoga, mudando apenas para a representação de posição e obtendo q' pela derivada:

$$q'^k e^{ipq'/\hbar} = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p}\right)^k e^{-ipq'/\hbar}. \quad (5.33)$$

A transformada de Weyl será dada por

$$\begin{aligned} & \int dq' \langle q + q'/2 | [V(\hat{q}), \rho] | q - q'/2 \rangle e^{-ipq'/\hbar} = \\ & 2 \sum_{k \text{ ímpar}} \frac{1}{k!} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^k \frac{\partial^k V}{\partial q^k} \frac{\partial^k}{\partial p^k} W_\rho. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Semelhanças ou diferenças entre as evoluções clássica e quântica de uma distribuição podem ser feitas comparando-se a evolução temporal quântica da função de Wigner com a evolução temporal da mesma função via parênteses de Poisson. Um caso particular guarda perfeita igualdade entre as duas evoluções. É o caso em que a hamiltoniana quântica é uma função quadrática dos operadores \hat{p} e \hat{q} . Nesse caso, a hamiltoniana tem a seguinte forma:

$$H(\hat{p}, \hat{q}) = a\hat{p}^2 + b\hat{q}^2 + s(\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}). \quad (5.35)$$

Aplicando a transformada de Weyl nos vários termos que aparecem no comutador, podemos obter:

$$\mathcal{W}([a\hat{p}^2, \rho]) = 2a\left(\frac{-i\hbar}{2}\right)2p\frac{\partial W_\rho}{\partial q}; \quad (5.36)$$

$$\mathcal{W}([b\hat{q}^2, \rho]) = 2b\left(\frac{i\hbar}{2}\right)2q\frac{\partial W_\rho}{\partial p}. \quad (5.37)$$

Para o termo $\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}([\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}, \rho]) &= \mathcal{W}(\hat{p}\hat{q}\rho - \rho\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}\rho - \rho\hat{q}\hat{p}) \\ &= \mathcal{W}(\hat{p}\hat{q}\rho) - \mathcal{W}(\rho\hat{p}\hat{q}) + \mathcal{W}(\hat{q}\hat{p}\rho) - \mathcal{W}(\rho\hat{q}\hat{p}) \end{aligned}$$

que pode ser manipulado para obter

$$\mathcal{W}(\hat{p}\hat{q}\rho) = \mathcal{W}(\rho\hat{q}\hat{p}) = \left(p - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q}\right)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right)W_\rho \quad (5.38)$$

$$\mathcal{W}(\rho\hat{p}\hat{q}) = \mathcal{W}(\hat{q}\hat{p}\rho) = \left(q - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\right)W_\rho, \quad (5.39)$$

resultando em:

$$\mathcal{W}([\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}, \rho]) = \left[2i\hbar\left(p\frac{\partial}{\partial p} - q\frac{\partial}{\partial q}\right)W_\rho\right]. \quad (5.40)$$

A evolução temporal da função de Wigner será dada por:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial W_\rho}{\partial t} &= \mathcal{W}([H, \rho]) \\ \frac{\partial W_\rho}{\partial t} &= -2ap\frac{\partial W_\rho}{\partial q} + 2bq\frac{\partial W_\rho}{\partial p} + 2s\left(p\frac{\partial W_\rho}{\partial p} - q\frac{\partial W_\rho}{\partial q}\right) \end{aligned} \quad (5.41)$$

Nesse caso, a evolução temporal da função de Wigner é igual à evolução clássica dada pelos parênteses de Poisson tomados em relação à uma hamiltoniana clássica quadrática em q e p :

$$\frac{\partial W_\rho(\mathbf{x})}{\partial t} = \{H(\mathbf{x}), W_\rho(\mathbf{x})\}. \quad (5.42)$$

Esse resultado seria igualmente válido se adicionássemos algum termo linear em \hat{q} e \hat{p} ou se estivéssemos tratando de hamiltonianas quadráticas com mais graus de liberdade. Podemos comparar isso ao que foi feito no capítulo anterior, quando a hamiltoniana semiclássica era escrita de tal forma que só

contivesse termos lineares nos operadores da álgebra h_4 . O termo linear em $a^\dagger a$ naquele caso corresponde a forma quadrática em \hat{p} e \hat{q} .

Para a função de cordas pode-se seguir o mesmo procedimento e obter resultado semelhante. Nesse caso a evolução temporal será dada pela equação:

$$\frac{\partial \widetilde{W}_\rho(\xi)}{\partial t} = \left\{ H(\xi), \widetilde{W}_\rho(\xi) \right\}. \quad (5.43)$$

onde $\xi = (\xi_p, \xi_q)$ e a função $H(\xi)$ deve ser entendida como sendo a hamiltoniana clássica avaliada no ponto ($p = \xi_p, q = \xi_q$).

Tomemos dois bósons interagindo como dois osciladores harmônicos acoplados. Temos então:

$$\frac{\hat{H}}{\hbar} = \frac{\omega}{2}(\hat{p}_1^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{q}_2^2) + \lambda \hat{q}_1 \hat{q}_2 \quad (5.44)$$

onde \hat{q}_i, \hat{p}_i são os operadores para posição e momentum da partícula i , ω a frequência do oscilador e λ uma constante de interação real positiva, $\lambda < \omega$. Usando-se a representação de Weyl para os operadores \hat{q}_i, \hat{p}_i , obtemos a hamiltoniana na representação de Weyl:

$$H(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{H} \mathbf{x} \quad (5.45)$$

onde $\mathbf{x} = (p_1, p_2, q_1, q_2)$ e \mathbf{H} é dado por:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & \omega \end{pmatrix}. \quad (5.46)$$

A matriz \mathbf{H} , juntamente com a matriz

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (5.47)$$

onde $\mathbf{1}$ representa matrizes identidade 2×2 , define a matriz

$$\mathbf{R}_t = \exp(2\mathbf{J}\mathbf{H}t) \quad (5.48)$$

que dá a evolução temporal de \mathbf{x} . A matriz simplética \mathbf{J} definida em (5.47) é usada também para generalizar o produto externo $\xi \wedge \mathbf{x}$ que aparece na definição da função de cordas:

$$W_A(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \widetilde{W}_A(\xi) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \xi \wedge \mathbf{x} / \right\} d\xi. \quad (5.49)$$

Para mais dimensões, define-se este produto externo como sendo

$$\xi \wedge \mathbf{x} \equiv \mathbf{J}\xi \cdot \mathbf{x}. \quad (5.50)$$

Trataremos agora da interação desses dois bósons com um reservatório cuja interação pode ser descrita por operadores de Lindblad que são combinações lineares de \hat{q} e \hat{p} , isto é:

$$L_j = \lambda_{j1}\hat{q}_1 + \lambda_{j2}\hat{q}_2 + \mu_{j1}\hat{p}_1 + \mu_{j2}\hat{p}_2. \quad (5.51)$$

Para obter a evolução temporal na representação de Weyl, será mais fácil considerar a equação para a função de cordas. Aplicando as regras descritas anteriormente, pode-se obter

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{W}_t(\xi)}{\partial t} = & \left\{ H(\xi), \widetilde{W}_t(\xi) \right\} - \alpha \xi \cdot \frac{\partial \widetilde{W}_t(\xi)}{\partial \xi} - \\ & - \frac{1}{2\hbar} \sum_j [(\mathbf{l}'_j \cdot \xi)^2 + (\mathbf{l}''_j \cdot \xi)^2] \widetilde{W}_t(\xi), \end{aligned} \quad (5.52)$$

onde $\xi = (\xi_{p1}, \xi_{p2}, \xi_{q1}, \xi_{q2})$. Os vetores \mathbf{l}'_j e \mathbf{l}''_j são obtidos escrevendo-se $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{q}_1, \hat{q}_2)$ e os operadores de Lindblad como

$$L_j = \mathbf{l}'_j \cdot \hat{\mathbf{x}} + i\mathbf{l}''_j \cdot \hat{\mathbf{x}}. \quad (5.53)$$

A constante α por sua vez representa a dissipação efetiva dada pela equação de Lindblad e é definida por:

$$\alpha = \sum_j \mathbf{J}\mathbf{l}''_j \cdot \mathbf{l}'_j. \quad (5.54)$$

Seguindo o artigo de Brodier & Ozorio [44], a solução da equação (5.52) pode ser obtida pela evolução temporal dada por (equação (19) de [44]):

$$\widetilde{W}_t(\xi) = \widetilde{W}_0(\xi_{-t}) \exp\left(-\frac{1}{2\hbar} \xi \cdot \mathbf{M}(t)\xi\right), \quad (5.55)$$

sendo $\widetilde{W}_0(\xi_{-t})$ a função de cordas de ρ_s , ξ o vetor das variáveis de cordas e \mathbf{M} uma matriz real positiva-definida definida por:

$$\mathbf{M}(t) = \sum_j \int_0^t dt' e^{2\alpha(t'-t)} \mathbf{R}_{t'-t}^T (\mathbf{l}'_j \mathbf{l}'_j{}^T + \mathbf{l}''_j \mathbf{l}''_j{}^T) \mathbf{R}_{t'-t}. \quad (5.56)$$

A evolução temporal das variáveis de cordas é dada pela equação:

$$\xi_t = e^{\alpha t} \mathbf{R}_t \xi. \quad (5.57)$$

A evolução temporal da função de Wigner associada a ρ_s é dada pela transformada de Fourier de $\widetilde{W}_t(\xi)$

$$W_t(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int \widetilde{W}_0(\xi_{-t}) \exp\left(-\frac{1}{2\hbar}\xi \cdot \mathbf{M}(t)\xi\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\xi \wedge \mathbf{x}\right) d\xi \quad (5.58)$$

onde a integral é feita sobre todo espaço, n é o número de graus de liberdade e o produto externo \wedge é definido na equação (5.50). Percebe-se que no processo de decoerência descrito pela equação (5.58), a parte não unitária da evolução temporal da função de Wigner aparece como uma Gaussiana que se alarga com o tempo. Neste processo portanto o processo de decoerência é o mesmo, qualquer que seja o estado inicial. Sendo a transformada de Fourier do produto de duas funções dado pela convolução das transformadas das respectivas funções, à medida que $M(t)$ evolui, termos possivelmente negativos na função de Wigner irão desaparecer. Esse efeito pode ser entendido como se a convolução fizesse uma transformação da função de Wigner para uma função de Husimi. De acordo com [44], o tempo t_P para a completa positividade da função de Wigner é obtida quando essa Gaussiana tem largura \hbar , que acontece quando

$$\det(\mathbf{M}(-t)) \geq \frac{1}{4} \quad (5.59)$$

Para obter a função de Wigner de (5.58), fazemos inicialmente a transformada de $\widetilde{W}_0(\xi_{-t})$ que é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\widetilde{W}_0(\xi_{-t})) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int \widetilde{W}_0(\xi_{-t}) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\xi \wedge \mathbf{x}\right) d\xi = \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int \widetilde{W}_0(e^{-\alpha t}\mathbf{R}_{-t}\xi) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\xi \wedge \mathbf{x}\right) d\xi. \end{aligned}$$

Mudando de variáveis na integral:

$$d\xi = \left| \frac{\partial \xi}{\partial \xi_{-t}} \right| d\xi_{-t} = e^{2n\alpha t} \det(\mathbf{R}_t) d\xi = e^{2n\alpha t} d\xi$$

onde usamos que $\det(\mathbf{R}_t) = 1$, pois $\text{Tr}\{\mathbf{JH}\} = 0$. Usando agora o resultado: $\mathbf{R}_t^T = -\mathbf{J}\mathbf{R}_{-t}\mathbf{J}$ podemos escrever:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\widetilde{W}_0(\xi_{-t})) &= \frac{e^{2n\alpha t}}{(2\pi\hbar)^n} \int \widetilde{W}_0(\xi_{-t}) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\xi_{-t} \wedge (e^{\alpha t}\mathbf{R}_{-t}\mathbf{x})\right) d\xi = \\ &= e^{2n\alpha t} W_0(e^{\alpha t}\mathbf{R}_{-t}\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (5.60)$$

A transformada de Fourier da Gaussiana é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\exp\left(-\frac{1}{2\hbar}\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{M}(t)\boldsymbol{\xi}\right)\right) &= \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int\exp\left(-\frac{1}{2\hbar}\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{M}(t)\boldsymbol{\xi}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\xi}\wedge\mathbf{x}\right)d\boldsymbol{\xi} \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int\exp\left(-\frac{1}{2\hbar}\mathbf{J}\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{J}\mathbf{M}(t)\mathbf{J}^T\mathbf{J}\boldsymbol{\xi}+\frac{i}{\hbar}\mathbf{J}\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}\right)d\boldsymbol{\xi} \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int\exp\left(-\frac{1}{2\hbar}\boldsymbol{\xi}'\cdot\mathbf{M}_J(t)\boldsymbol{\xi}'+\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\xi}'\cdot\mathbf{x}\right)d\boldsymbol{\xi}' \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{M}_J(t))}}\exp\left(-\frac{1}{2\hbar}\mathbf{x}\cdot\mathbf{M}_J(t)^{-1}\mathbf{x}\right)
\end{aligned} \tag{5.61}$$

Então temos:

$$\begin{aligned}
W_t(\mathbf{x}) &= \frac{e^{2n\alpha t}}{(2\pi\hbar)^n\det(\mathbf{M}_J(t))}\int W_0(e^{\alpha t}\mathbf{R}_{-t}(\mathbf{x}-\mathbf{y}))\times \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2\hbar}\mathbf{y}\cdot\mathbf{M}_J(t)^{-1}\mathbf{y}\right)d\mathbf{y},
\end{aligned} \tag{5.62}$$

onde

$$\mathbf{M}_J(t) = -\mathbf{J}\mathbf{M}(t)\mathbf{J}. \tag{5.63}$$

Fazendo-se agora a transformação de variáveis:

$$\begin{aligned}
\mathbf{z} &= e^{\alpha t}\mathbf{R}_{-t}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \quad ; \\
d\mathbf{z} &= e^{2n\alpha t}d\mathbf{y} \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_t(\mathbf{x}) &= \frac{(2\pi\hbar)^n}{\det(\mathbf{M}_J(t))}\int W_0(\mathbf{z})\times \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2\hbar}e^{-2\alpha t}(\mathbf{z}-\mathbf{x}_{-t})\mathbf{R}_t^T\mathbf{M}_J(t)^{-1}\mathbf{R}_t(\mathbf{z}-\mathbf{x}_{-t})\right)d\mathbf{z} = \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^n\det(\mathbf{M}_J(t))}\int W_0(\mathbf{z})\times \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2\hbar}(\mathbf{z}-\mathbf{x}_{-t})\widetilde{\mathbf{M}}(t)^{-1}(\mathbf{z}-\mathbf{x}_{-t})\right)d\mathbf{z},
\end{aligned} \tag{5.64}$$

sendo

$$\mathbf{x}_t = e^{-\alpha t}\mathbf{R}_t\mathbf{x}. \tag{5.65}$$

e

$$\widetilde{\mathbf{M}}(t) = e^{2\alpha t}\mathbf{R}_{-t}\mathbf{M}_J(t)\mathbf{R}_{-t}^T = -\mathbf{M}_J(-t). \tag{5.66}$$

A última igualdade da expressão acima é obtida usando-se $\mathbf{R}_t^T = -\mathbf{J}\mathbf{R}_{-t}\mathbf{J}$ juntamente com a definição de $\mathbf{M}(t)$.

5.3 Soluções

Para um estado do tipo:

$$|\Psi\rangle = \frac{|\zeta\rangle + |-\zeta\rangle}{\sqrt{2(1 + e^{-2|\zeta|^2})}} \quad (5.67)$$

temos a função de Wigner dada por

$$W(\mathbf{x}) = \frac{W_\beta(\mathbf{x}) + W_{-\beta}(\mathbf{x}) + W_I(\mathbf{x})}{2(1 + e^{-2|\zeta|^2})}, \quad (5.68)$$

sendo $\beta = (q_0 + ip_0)/\sqrt{2\hbar}$ e:

$$W_\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi\hbar} \exp\left(-\frac{1}{\hbar}(q - q_0)^2 - \frac{1}{\hbar}(p - p_0)^2\right); \quad (5.69)$$

$$W_I(\mathbf{x}) = \frac{2}{\pi\hbar} \exp\left(-\frac{1}{\hbar}(q^2 + p^2)\right) \cos\left(\frac{2}{\hbar}(pq_0 - p_0q)\right). \quad (5.70)$$

Pode-se usar o formalismo apresentado até aqui para fazer a evolução do estado dado em (5.67) por uma hamiltoniana bilinear. Essa solução é semelhante a que será obtida para o estado de dois bósons idênticos. Pelo postulado de simetrização, a função de onda de dois bósons idênticos deve ser simétrica em relação a uma troca de coordenadas. Se dois bósons idênticos estão em estados coerentes de centróides equidistantes da origem do sistema de coordenadas, eles podem ser descritos por um estado com a forma:

$$|\Psi\rangle = \frac{|\zeta, -\zeta\rangle + |-\zeta, \zeta\rangle}{\sqrt{2(1 + e^{-4|\zeta|^2})}}. \quad (5.71)$$

A função de Wigner de tal estado pode ser escrita em termos das funções de Wigner do estado de gato escritas anteriormente (5.69), (5.70). Como a função de Wigner de um produto tensorial é o produto das funções de Wigner em cada espaço separadamente, pode-se escrever:

$$W(\mathbf{x}) = N^{-1} (W_\beta(\mathbf{x}_1)W_{-\beta}(\mathbf{x}_2) + W_{-\beta}(\mathbf{x}_1)W_\beta(\mathbf{x}_2) + 2\Re\{W_+(\mathbf{x}_1)W_-(\mathbf{x}_2)\}) \quad (5.72)$$

com \mathbf{x}_i se referindo ao grau de liberdade i , $W_\beta(\mathbf{x}_1)$ conforme expressão para um grau de liberdade, $N = 2\pi^2\hbar^2(1 + e^{-4|\zeta|^2})$ e

$$W_\pm(\mathbf{x}_i) = \exp\left(\mp \frac{2i}{\hbar}(p_i q_0 - q_i p_0)\right).$$

A função de Wigner pode ser escrita como:

$$W(\mathbf{x}) = N^{-1} \left[\exp\left(-\frac{1}{\hbar}|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2\right) + \exp\left(-\frac{1}{\hbar}|\mathbf{x} + \mathbf{x}_0|^2\right) + 2e^{-|\mathbf{x}|^2/\hbar} \cos\left(\frac{2}{\hbar}\mathbf{x}_0 \wedge \mathbf{x}\right) \right]. \quad (5.73)$$

A evolução temporal das funções de Wigner acima (estado de “gato” em 1 grau de liberdade e partículas idênticas simetrizadas) pode ser obtida a partir da equação (5.64). Basicamente fazem-se mudanças nas variáveis de integração de modo a escrever a convolução de duas Gaussianas como a integral de uma Gaussiana enquanto que para os termos de interação usa-se a generalização da integral gaussiana para variáveis complexas. Procedendo de tal forma, teremos a expressão:

$$W(\mathbf{x}, t) = \frac{A}{\sqrt{\det(\mathbf{K}(t)\mathbf{M}_{\mathbf{J}}(t))}} \left[\exp\left(\frac{2}{\hbar}\Delta_+ \cdot \mathbf{G}\Delta_+\right) + \exp\left(\frac{2}{\hbar}\Delta_- \cdot \mathbf{G}\Delta_-\right) + 2 \cos\left(\frac{4}{\hbar}\mathbf{x}_0 \wedge \mathbf{G}\right) \exp\left\{\frac{1}{\hbar} [2\mathbf{x}_{-t} \cdot \mathbf{G}\mathbf{x}_{-t} - \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}_0 - 2(\mathbf{J}\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{J}\mathbf{x}_0)]\right\} \right] \quad (5.74)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t &= e^{-\alpha t} \mathbf{R}_t \mathbf{x}; & \Delta_{\pm} &= \pm \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{-t} \\ \mathbf{M}_{\mathbf{J}} &= -\mathbf{J}\mathbf{M}(t)\mathbf{J}; & \widetilde{\mathbf{M}}(t) &= -\mathbf{M}_{\mathbf{J}}(-t); \\ \mathbf{K}(t) &= \widetilde{\mathbf{M}}(t)^{-1} + 2\mathbf{1}; & \mathbf{G}(t) &= \mathbf{K}(t)^{-1} - \frac{1}{2}\mathbf{1}; \end{aligned}$$

a solução dada pela equação (5.74) vale tanto para o estado de “gato” como para as partículas idênticas, bastando considerar

$$\mathbf{x} = (p, q); \quad \mathbf{x}_0 = (p_0, q_0); \quad A = 2\pi^2 \hbar^2 (1 + e^{-2|\zeta|^2})$$

no primeiro caso e

$$\mathbf{x} = (p_1, p_2, q_1, q_2); \quad \mathbf{x}_0 = (p_0, -p_0, q_0, -q_0); \quad A = 2\pi^2 \hbar^2 (1 + e^{-4|\zeta|^2})$$

no segundo.

5.4 Gráficos

Vamos tomar inicialmente o caso unidimensional de uma superposição de dois estados coerentes evoluindo sob uma hamiltonia de oscilador harmônico

e reservatório de fótons térmicos [44] dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_s = & \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}, \rho_s] + \gamma(\bar{n} + 1)(2a\rho_s a^\dagger - a^\dagger a \rho_s - \rho_s a^\dagger a) + \\ & + \gamma\bar{n}(2a^\dagger \rho_s a - a a^\dagger \rho_s - \rho_s a a^\dagger) \end{aligned} \quad (5.75)$$

Temos então

$$H(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{2}(p^2 + q^2)$$

e as matrizes que compõem $\mathbf{M}(t)$ dadas por $\mathbf{I}_1^T = (i\sqrt{\gamma(\bar{n} + 1)/2}, \sqrt{\gamma(\bar{n} + 1)/2})$ e $\mathbf{I}_2^T = (-i\sqrt{\gamma\bar{n}/2}, \sqrt{\gamma\bar{n}/2})$. Neste caso $\mathbf{M}(t)$ é diagonal e dada por:

$$\mathbf{M}(t) = \frac{(2\bar{n} + 1)(1 - e^{-\gamma t})}{2} \mathbf{1} = \chi(t) \mathbf{1}, \quad (5.76)$$

as demais matrizes vão ser diagonais também:

$$\mathbf{M}_J(t) = -\mathbf{J}\mathbf{M}(t)\mathbf{J} = \chi(t) \mathbf{1}; \quad \widetilde{\mathbf{M}}(t) = -\mathbf{M}_J(-t) = -\chi(-t) \mathbf{1} = \tilde{\chi}(t) \mathbf{1}$$

$$\mathbf{K}(t) = \widetilde{\mathbf{M}}(t)^{-1} + 2 \mathbf{1} = \left(\frac{2\tilde{\chi}(t) + 1}{\tilde{\chi}(t)} \right) \mathbf{1}.$$

A evolução temporal será dada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x}, t) = & \frac{2}{\sqrt{\det(\mathbf{K}(t)\mathbf{M}_J(t))}} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}_{-t} \cdot \mathbf{x}_{-t} + \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}_0}{(2\tilde{\chi}(t) + 1)\hbar}\right) \times \quad (5.77) \\ & \times \left[\cosh\left(\frac{2\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}_{-t}}{(2\tilde{\chi}(t) + 1)\hbar}\right) + \exp\left(-\frac{(2\tilde{\chi}(t) - 1)\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}_0}{(2\tilde{\chi}(t) + 1)\hbar}\right) \cos\left(\frac{4\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}_{-t}}{(2\tilde{\chi}(t) + 1)\hbar}\right) \right]. \end{aligned}$$

A positividade é garantida quando a exponencial modulando o termo oscilatório for menor que 1. Para isso,

$$2\tilde{\chi}(t) - 1 = (2\bar{n} + 1)(e^{\gamma t} - 1) - 1 > 0$$

que é garantido se:

$$t \geq \frac{1}{\gamma} \ln\left(1 + \frac{1}{2\bar{n} + 1}\right), \quad (5.78)$$

em conformidade com o que foi proposto anteriormente em (5.59). Para o estado inicial escolhido, correlações quânticas se manifestam pelo termo oscilatório presente entre as duas Gaussianas. O máximo deste termo oscilatório ocorre na origem do espaço de fases e indica que o estado é autoestado do operador paridade. A medida que o sistema perde coerência entretanto, este termo tende a desaparecer. Um indicativo das correlações quânticas para este estado é portanto a paridade da função de Wigner na origem. A seguir são mostrados gráficos que ilustram o processo de decoerência dado pela evolução não unitária do estado inicial de gato.

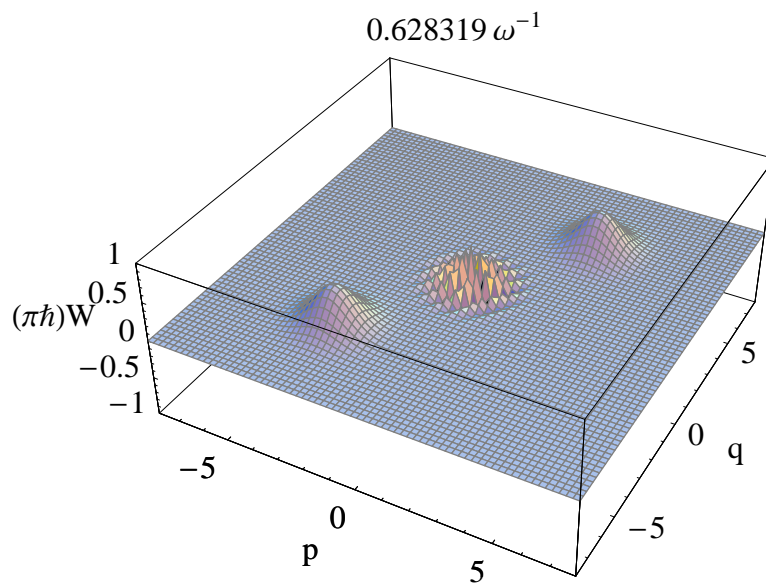
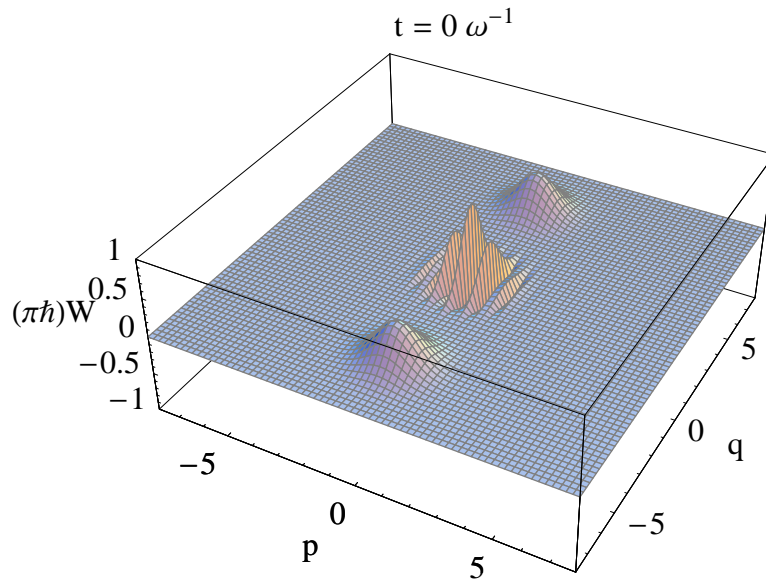


Figura 5.1: Função de Wigner do estado de gato, tempo mostrado acima de cada gráfico. $q_0 = 5\hbar^{1/2}$, $p_0 = 0$, $T = 1k_B/\hbar\omega$, $\gamma = 0.01\omega$, $t_P = 37.988\omega^{-1}$

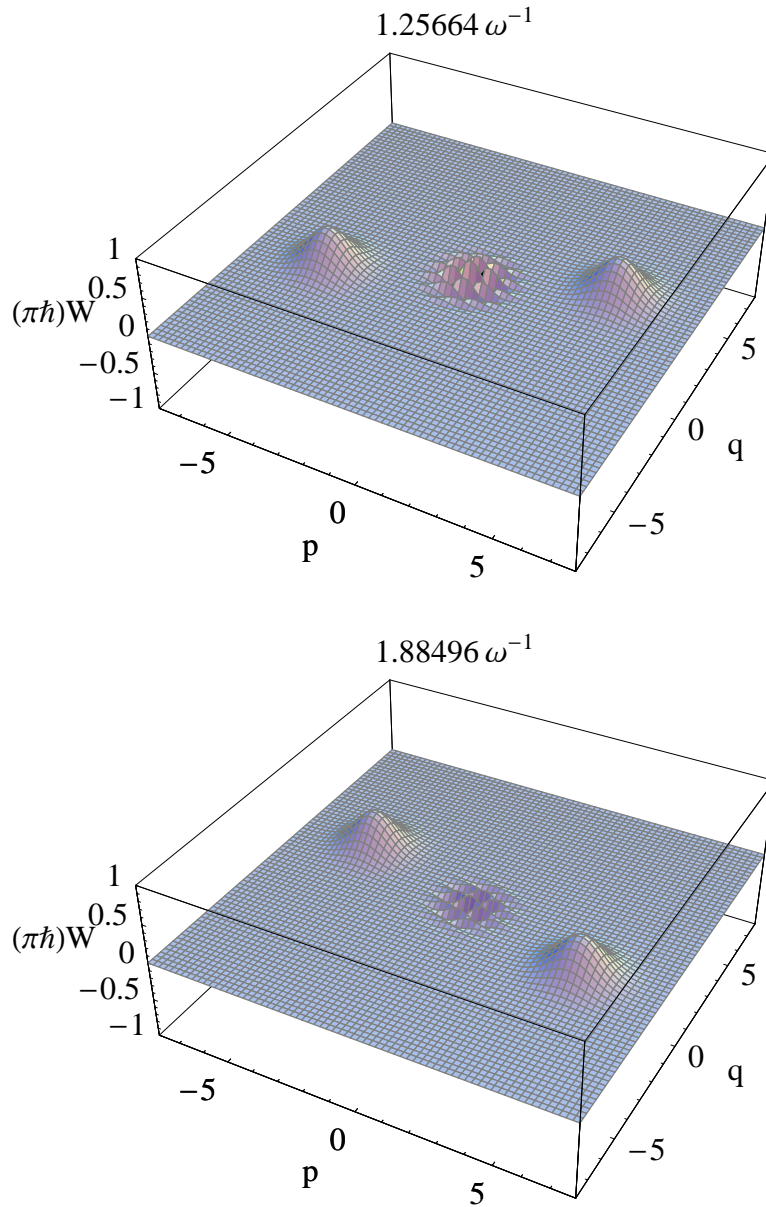


Figura 5.2: Função de Wigner do estado de gato, tempo mostrado acima de cada gráfico. $q_0 = 5\hbar^{1/2}$, $p_0 = 0$, $T = 1k_B/\hbar\omega$, $\gamma = 0.01\omega$, $t_P = 37.988\omega^{-1}$

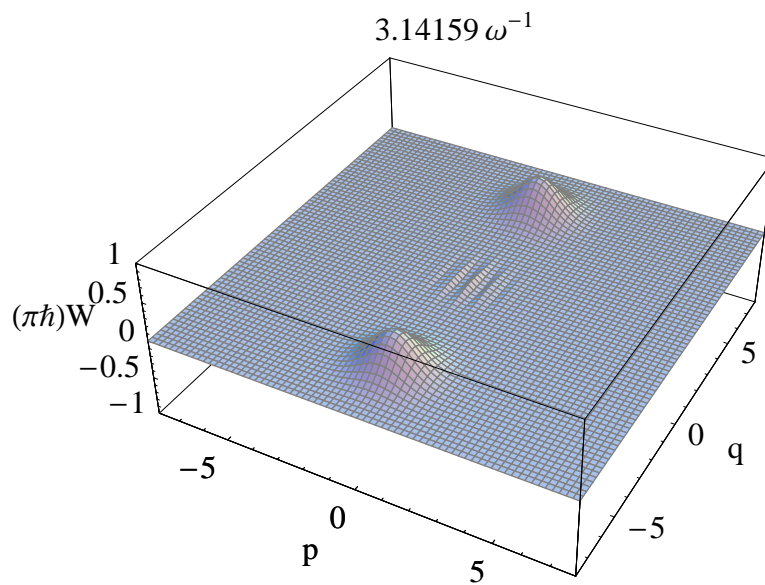
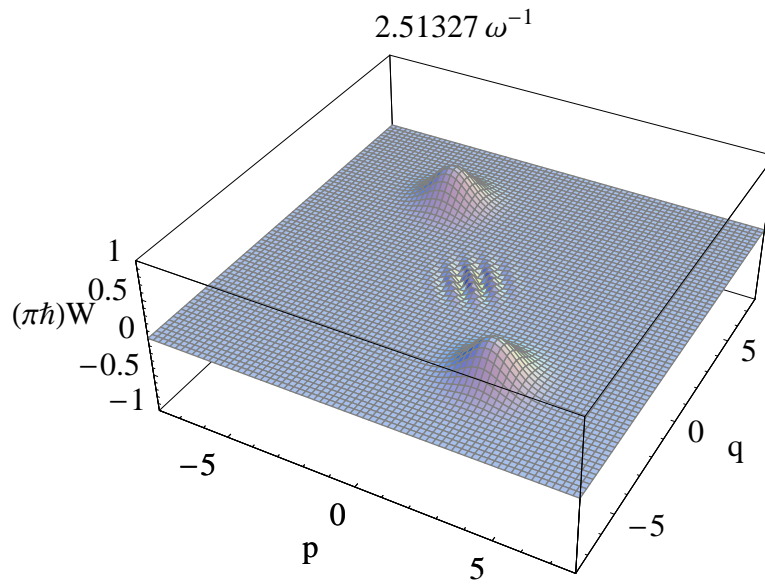


Figura 5.3: Função de Wigner do estado de gato, tempo mostrado acima de cada gráfico. $q_0 = 5\hbar^{1/2}$, $p_0 = 0$, $T = 1k_B/\hbar\omega$, $\gamma = 0.01\omega$, $t_P = 37.988\omega^{-1}$

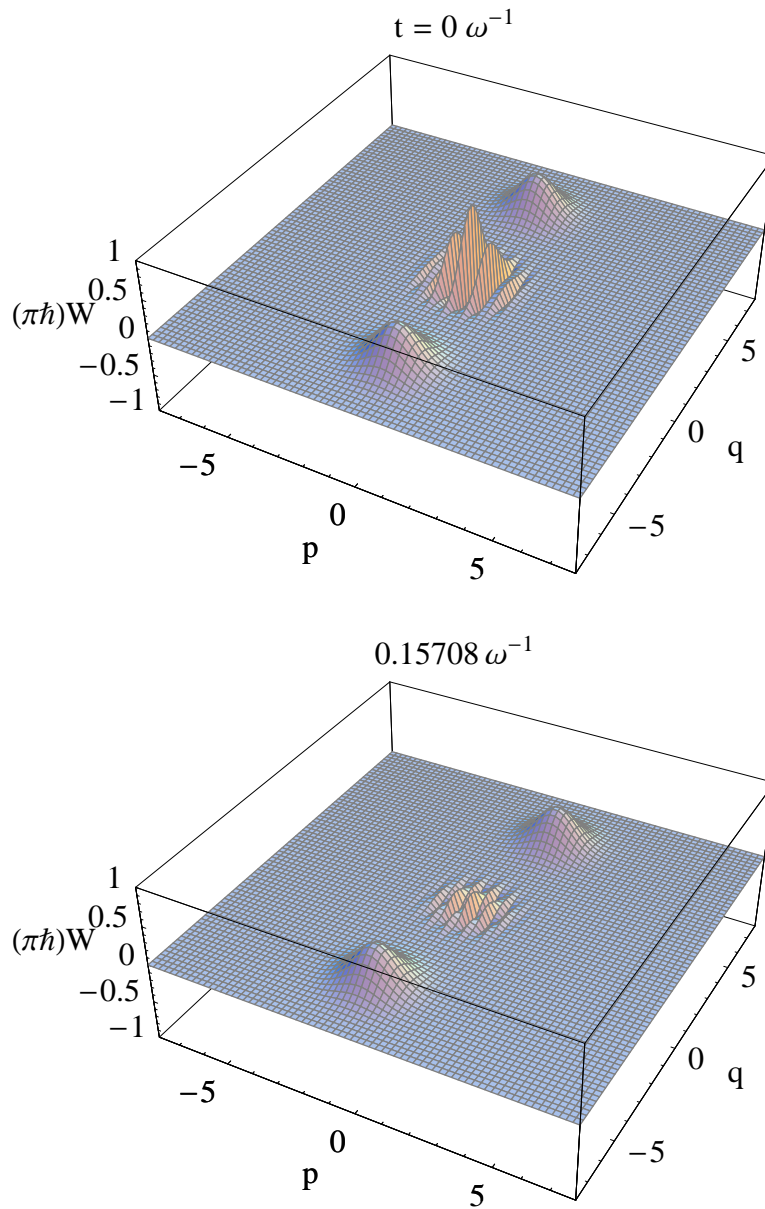


Figura 5.4: Função de Wigner do estado de gato, tempo mostrado acima de cada gráfico. $q_0 = 5\hbar^{1/2}$, $p_0 = 0$, $T = 1k_B/\hbar\omega$, $\gamma = 0.1\omega$, $t_P = 3.7988\omega^{-1}$

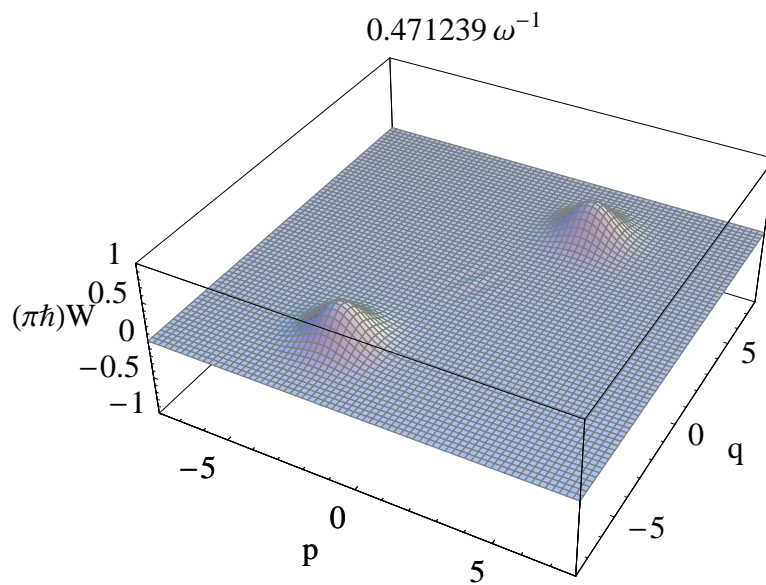
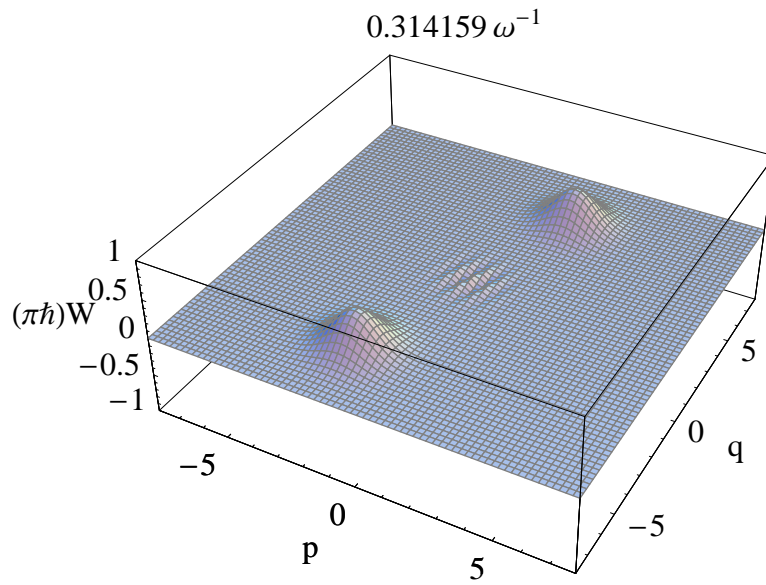


Figura 5.5: Função de Wigner do estado de gato, tempo mostrado acima de cada gráfico. $q_0 = 5\hbar^{1/2}$, $p_0 = 0$, $T = 1k_B/\hbar\omega$, $\gamma = 0.1\omega$, $t_P = 3.7988\omega^{-1}$

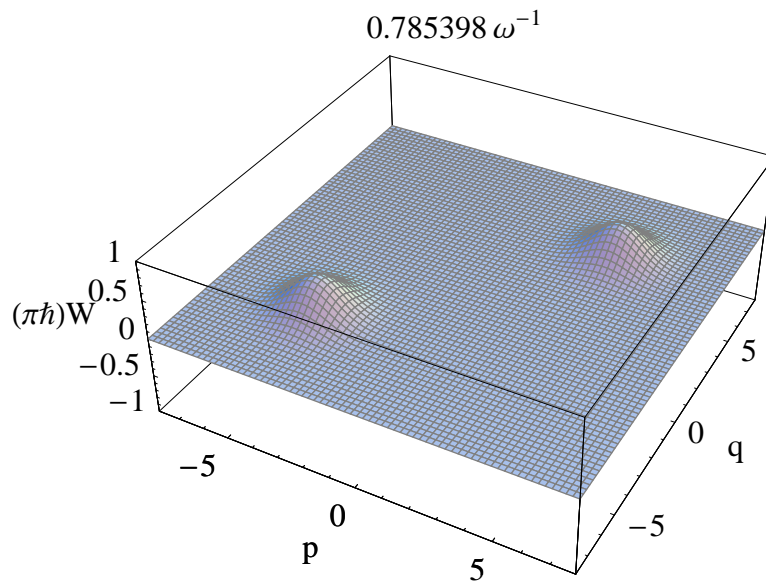
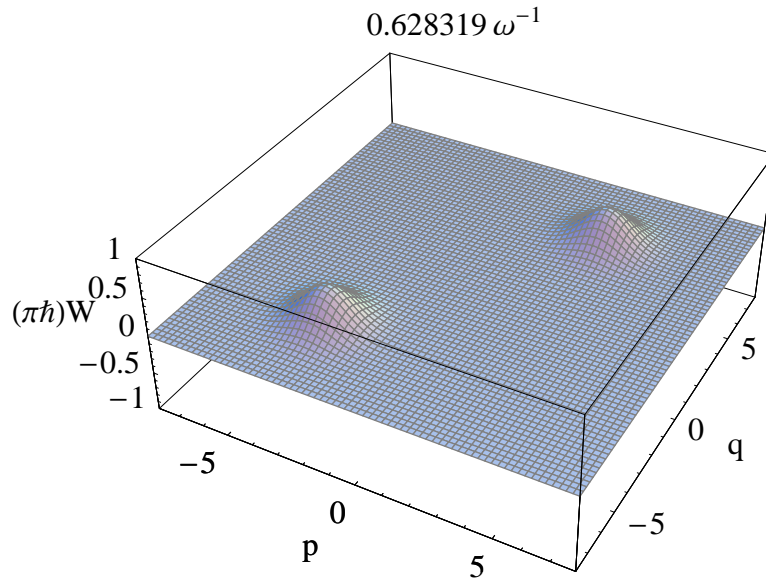


Figura 5.6: Função de Wigner do estado de gato, tempo mostrado acima de cada gráfico. $q_0 = 5\hbar^{1/2}$, $p_0 = 0$, $T = 1k_B/\hbar\omega$, $\gamma = 0.1\omega$, $t_P = 3.7988\omega^{-1}$

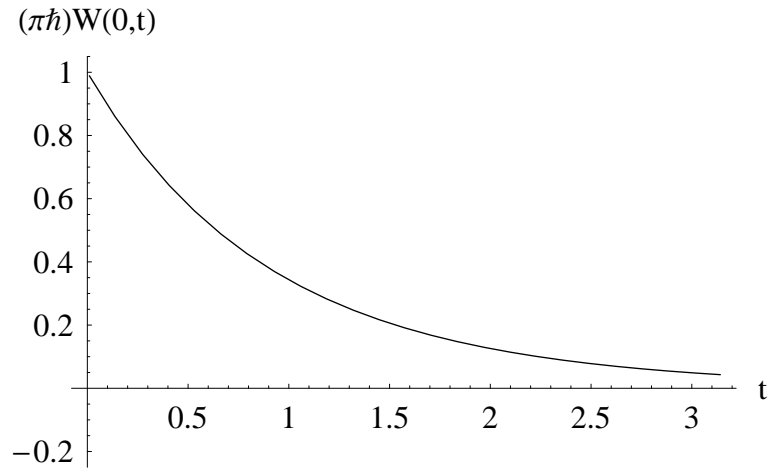


Figura 5.7: Paridade do estado de gato. $q_0 = 5\hbar^{1/2}, p_0 = 0, T = 1k_B/\hbar\omega, \gamma = 0.01\omega, t_P = 37.988\omega^{-1}$

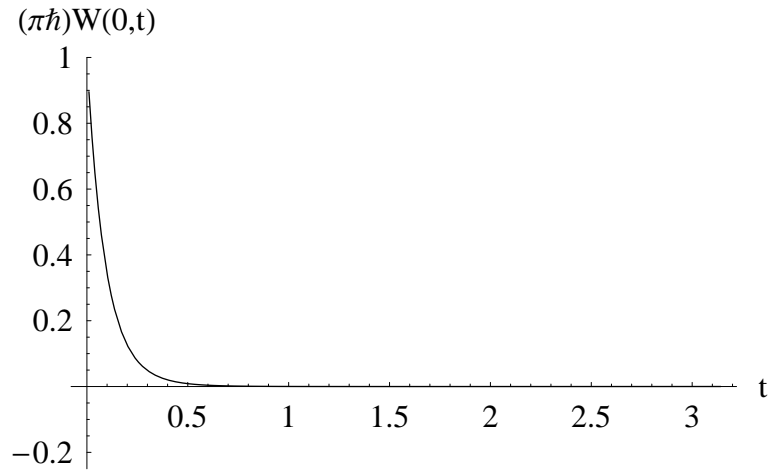


Figura 5.8: Paridade do estado de gato. $q_0 = 5\hbar^{1/2}, p_0 = 0, T = 1k_B/\hbar\omega, \gamma = 0.1\omega, t_P = 3.7988\omega^{-1}$

Para tratar agora do sistema com dois bósons idênticos, vamos generalizar o reservatório usado anteriormente no caso de uma dimensão e considerar a seguinte equação para evolução temporal de ρ_s :

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_s = & \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}, \rho_s] + \gamma_1(\bar{n}_1 + 1)(2a_1\rho_s a_1^\dagger - a_1^\dagger a_1 \rho_s - \rho_s a_1^\dagger a_1) + \\
& + \gamma_1 \bar{n}_1 (2a_1^\dagger \rho_s a_1 - a_1 a_1^\dagger \rho_s - \rho_s a_1 a_1^\dagger) + \\
& + \gamma_2(\bar{n}_2 + 1)(2a_2\rho_s a_2^\dagger - a_2^\dagger a_2 \rho_s - \rho_s a_2^\dagger a_2) + \\
& + \gamma_2 \bar{n}_2 (2a_2^\dagger \rho_s a_2 - a_2 a_2^\dagger \rho_s - \rho_s a_2 a_2^\dagger) .
\end{aligned} \tag{5.79}$$

O termo dissipador nessa equação permite acoplamento distinto com cada uma das partículas. Para que a evolução temporal preserve a condição de indistinguibilidade, devemos ter $\gamma_1 = \gamma_2$ e $\bar{n}_1 = \bar{n}_2$. A seguir são mostrados os gráficos da paridade da função de Wigner para o caso das partículas idênticas.

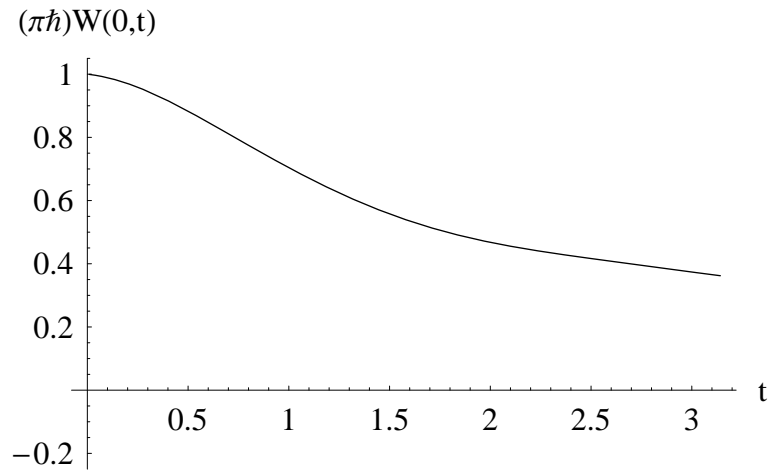


Figura 5.9: Paridade de duas partículas idênticas. $\lambda = 0.8976$, $q_0 = 1\hbar^{1/2}$, $p_0 = 0$, $T_1 = T_2 = 1k_B/\hbar\omega$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.01\omega$.

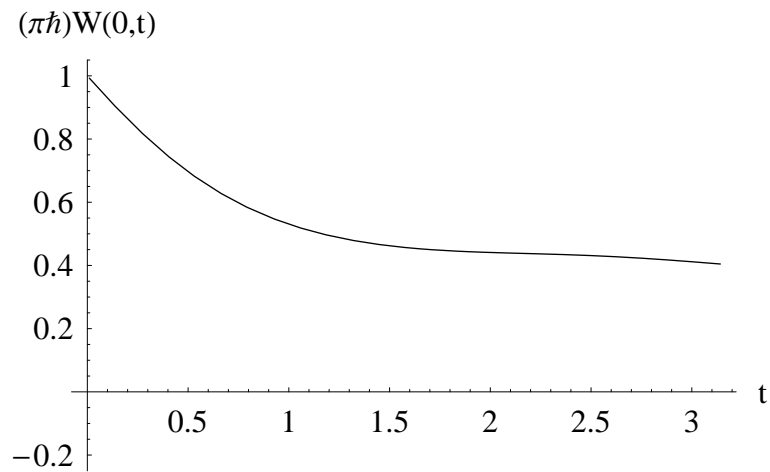


Figura 5.10: Paridade de duas partículas idênticas. $\lambda = 0.8976$, $q_0 = 1\hbar^{1/2}$, $p_0 = 0$, $T_1 = T_2 = 1k_B/\hbar\omega$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.1\omega$.

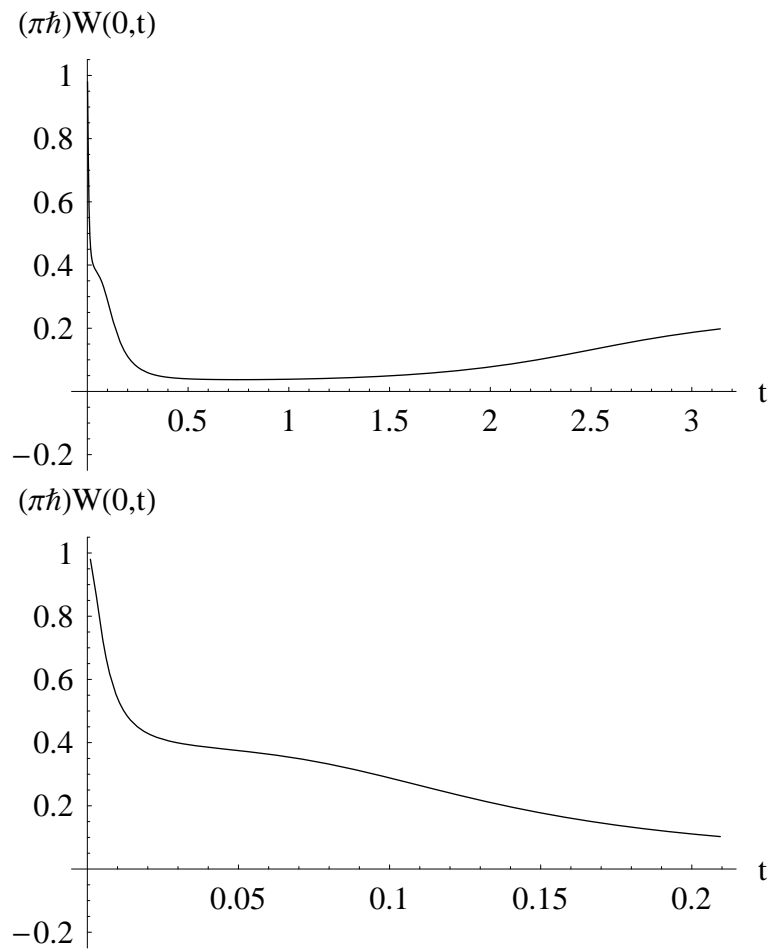


Figura 5.11: Paridade de duas partículas idênticas. Em baixo: detalhe da região com $t < \pi/15$ do gráfico a cima. $\lambda = 0.8976$, $q_0 = 1\hbar^{1/2}$, $p_0 = 0$, $T_1 = T_2 = 1k_B/\hbar\omega$, $\gamma_1 = 0.1\omega$, $\gamma_2 = 10^{-6}\omega$.

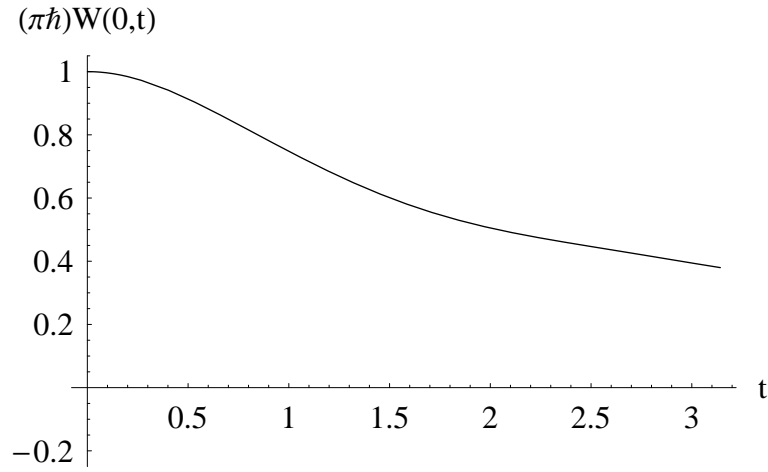


Figura 5.12: Paridade de duas partículas idênticas. $\lambda = 0.8976$, $q_0 = 1\hbar^{1/2}$, $p_0 = 0$, $T_1 = T_2 = 1k_B/\hbar\omega$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 10^{-6}\omega$.

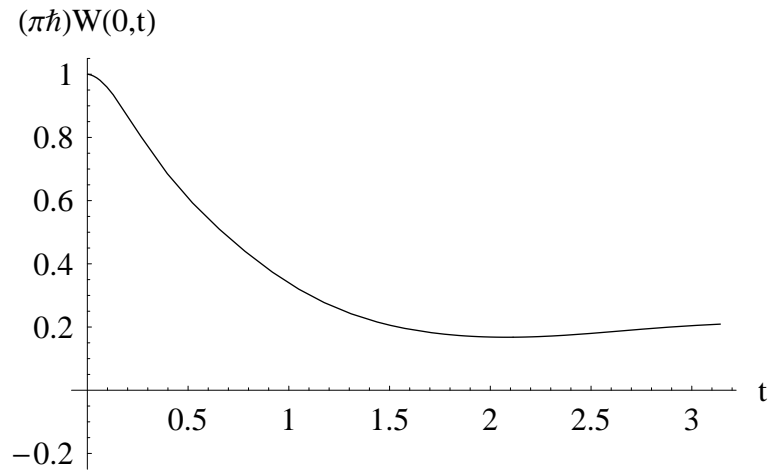


Figura 5.13: Paridade de duas partículas idênticas. $\lambda = 0.8976$, $q_0 = 1\hbar^{1/2}$, $p_0 = 0$, $T_1 = T_2 = 1k_B/\hbar\omega$, $\gamma_1 = 0.019\omega$, $\gamma_2 = 0.001\omega$.

A perda de coerência ocorre independente de se preservar ou não o caráter de partículas idênticas. Percebe-se, entretanto, que a perda de coerência é maior quando o reservatório não preserva a indistinguibilidade das partículas, como mostra as figuras 5.11-5.13. Para entender melhor o que ocorre no caso das partículas idênticas, vamos usar o sistema de coordenadas do centro de massa e das coordenadas relativas.

O estado coerente $|q_0, -q_0\rangle$, com q_0 real, pode ser escrito da seguinte forma:

$$|q_0, -q_0\rangle = \exp\left\{-\frac{iq_0}{\hbar}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)\right\} |0, 0\rangle . \quad (5.80)$$

Reescrevendo o operador deslocamento na base das coordenadas relativas,

$$|q_0, -q_0\rangle = \exp\left\{-2\frac{iq_0}{\hbar}\hat{p}\right\} |0, 0\rangle . \quad (5.81)$$

Para obter agora o estado coerente $|q_0, -q_0\rangle$ na base dos autovetores de \hat{R} e \hat{r} , dados por:

$$\hat{R}|X\rangle = X|X\rangle ; \quad \hat{r}|\chi\rangle = \chi|\chi\rangle , \quad (5.82)$$

podemos usar a relação de completeza

$$\int dXd\chi |X, \chi\rangle \langle X, \chi| = \mathbf{1} \quad (5.83)$$

e então fazer:

$$|q_0, -q_0\rangle = \int dXd\chi \exp\left\{-2\frac{iq_0}{\hbar}\hat{p}\right\} |X, \chi\rangle \langle X, \chi| |0, 0\rangle . \quad (5.84)$$

Se $|q_1, q_2\rangle$ representa um estado produto de autoestados dos operadores \hat{q}_1 e \hat{q}_2 , isto é, $|q_1, q_2\rangle = |q_1\rangle \otimes |q_2\rangle$ com $\hat{q}_i|q_i\rangle = q_i|q_i\rangle$, $i = 1, 2$, temos as relações:

$$\langle X, \chi | q_1, q_2 \rangle = \delta(X + \chi/2 - q_1)\delta(X - \chi/2 - q_2) , \quad (5.85)$$

$$\langle X, \chi | q_1, q_2 \rangle = \delta(X - (q_1 + q_2)/2)\delta(\chi - (q_1 - q_2)) , \quad (5.86)$$

podemos escrever:

$$|q_0, -q_0\rangle = \exp\left\{-2\frac{iq_0}{\hbar}\hat{p}\right\} \int dXd\chi \delta(x)\delta(\chi) |X, \chi\rangle . \quad (5.87)$$

Então

$$|q_0, -q_0\rangle = \exp\left\{-2\frac{iq_0}{\hbar}\hat{p}\right\} \int dXd\chi \delta(x)\delta(\chi) |X, \chi\rangle , \quad (5.88)$$

$$|q_0, -q_0\rangle = \exp\left\{-2\frac{iq_0}{\hbar}\hat{p}\right\} |\tilde{0}, \tilde{0}\rangle, \quad (5.89)$$

com $|\tilde{0}\rangle$ representando uma Gaussiana na origem do sistema de coordenadas relativas ou do centro de massa. Podemos portanto escrever:

$$|q_0, -q_0\rangle = |\tilde{0}, \tilde{2}q_0\rangle. \quad (5.90)$$

Dessa forma, o estado coerente simetrizado se toma uma forma produto na base do centro de massa/coordenadas relativas,

$$\frac{|q_0, -q_0\rangle + |-q_0, q_0\rangle}{N} = \frac{|\tilde{0}\rangle \otimes (|\tilde{2}q_0\rangle + |-\tilde{2}q_0\rangle)}{N}, \quad (5.91)$$

o mesmo acontecendo com ρ :

$$\rho_0 = \rho_{CM} \otimes \rho_{cr}. \quad (5.92)$$

Se o reservatório atua apenas nas coordenadas do centro de massa, ρ mantém essa forma produto:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho] - \frac{1}{2\hbar} \left(\sum_j 2L_j \rho_{CM} L_j^\dagger - L_j^\dagger L_j \rho_{CM} - \rho_{CM} L_j^\dagger L_j \right) \otimes \rho_{cr}. \quad (5.93)$$

Olhando agora para a função de Wigner desse produto teremos

$$W_t(\mathbf{x}) = W_t^{(1)}(r, p) W_t^{(2)}(R, P) \quad (5.94)$$

e apenas a parte do centro de massa irá perder coerência. Reescrevendo o operador de Lindblad para determinar os termos de decoerência do centro de massa e definindo $\gamma = 2\alpha$,

$$\beta_t = 2\bar{n}(1 - e^{-\gamma t}) + 1, \quad (5.95)$$

$$\mathbf{X} = (P, R), \quad \mathbf{X}_t = e^{-\alpha t} \mathbf{R}_t \mathbf{X} = (P_t, R_t), \quad \mathbf{R}_t = \exp\{2\mathbf{JH}t\}, \quad (5.96)$$

podemos escrever a evolução temporal nesse sistema de coordenadas como sendo:

$$W_t(\mathbf{x}) = W_t^{(1)}(r, p) \frac{1}{\beta_t} \exp\left\{-\frac{1}{\hbar\beta_t}(P_{-t}^2 + R_{-t}^2)\right\}. \quad (5.97)$$

Vemos então que a função de Wigner do centro de massa é uma Gaussiana que se alarga. Se a paridade inicial é dada por $W(0)$, vemos que a Gaussiana do centro de massa faz com que a paridade no tempo t seja menor por um fator β_t^{-1} , isto é:

$$W_t = \frac{1}{\beta_t} W_0(0). \quad (5.98)$$

Podemos assim entender a perda da coerência sem que o caráter indistinguível das partículas seja violado. Traçando-se o grau de liberdade do centro de massa para obter apenas a parte das coordenadas relativas, vemos que esta será um estado de gato que preserva as correlações.

Capítulo 6

Conclusão e Perspectivas

Ainda que o limite clássico da mecânica quântica não seja algo trivial, em muitos casos ele é bem definido e possui interpretação direta. Apresentamos neste trabalho uma análise do comportamento de sistemas quânticos que possuem limite clássico bem definido. No capítulo 3 foi estudado o modelo quártico com 1 e dois graus de liberdade. Utilizando-se de uma aproximação semiclássica foi possível obter a evolução temporal quântica de valores médios mediante sucessivas aproximações a partir do resultado clássico. Este modelo serviu também como teste para a eficiência da aproximação no cálculo de valores médios no limite clássico. A eficácia da aproximação neste caso foi consistente com a forma pela qual ela foi definida.

Para o oscilador quártico duplo, procedeu-se com o cálculo de valores médios de forma análoga, tendo sido confirmada novamente a eficácia da aproximação. Com estes resultados já estabelecidos, usamos a aproximação para o cálculo do entrelaçamento dos dois graus de liberdade. Apesar de obter resultado aparentemente satisfatório, a convergência da aproximação no caso da determinação do estado exato se mostrou lenta, deixando dúvidas quanto a eficácia da aproximação no cálculo de outras grandezas quânticas além dos valores médios de observáveis. Uma possível continuidade do trabalho de se investigar a aproximação poderia usar o método de propagadores de estados coerentes para avaliar as dificuldades referentes a convergência da série no que diz respeito à função de onda. Um possível aprimoramento da aproximação semiclássica não seria descartado.

No capítulo 4, tendo estabelecido nossa confiança nas reais possibilidades da aproximação, foi possível usá-la para o cálculo de valores médios do modelo de Dicke. Um limite clássico para este modelo é bem definido em termos de variáveis intensivas e foi possível, através da aproximação semiclássica, obter as correções a esse limite. As correções obtidas são inversamente proporcionais ao tamanho característico do modelo, que é o número de átomos.

Percebeu-se também uma forte dependência dessas correções com o estado clássico inicial e da constante de não linearidade do modelo, o que é perfeitamente compreensível em se tratando de um modelo cuja hamiltoniana clássica é caótica.

Finalmente, no capítulo 5 estudamos a representação de Weyl da mecânica quântica. Deduzindo-se uma equação para a evolução temporal da função de Wigner, vimos inicialmente como a representação em espaço de fases pode ser útil para se fazer um paralelo entre as descrições clássica e quântica de um modelo. No caso de uma hamiltoniana quadrática por exemplo, vimos que as duas evoluções são equivalentes. A seguir, usamos a formulação de Lindblad para descrever a evolução de sistemas quânticos abertos e, através da representação de Weyl, fizemos a evolução temporal de um sistema de duas partículas acopladas a um reservatório e interagindo através de uma hamiltoniana quadrática. Foram obtidas também condições para que fosse preservada a indistinguibilidade das partículas pela evolução temporal do sistema aberto. Mostrou-se que, para operadores de Lindblad obtidos como combinações lineares dos operadores do sistema, a condição suficiente e necessária para que isso ocorra é que o acoplamento com o reservatório seja feito exclusivamente através das variáveis de centro de massa. Finalmente, foi possível obter a evolução onde a indistinguibilidade é preservada e observou-se perda de coerência relacionada ao grau de liberdade do centro de massa. Essa descrição é de fundamental importância se queremos obter um limite clássico consistente com o que é observado na natureza.

O uso da representação de Weyl surge como um método promissor para o estudo do limite clássico da mecânica quântica, tanto do ponto de vista interpretativo quanto na praticidade para obtenção de resultados. Contando com um nível de rigor adequado, este método [45] amplia bastante as possibilidades de pesquisa na área do limite clássico e pretende-se aprofundar em seu estudo, pois o que foi explorado até agora constituiu apenas uma introdução ao assunto.

Referências Bibliográficas

- [1] John von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Express (1955)
- [2] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Can Quantum Mechanical Description of Reality be Considered Complete?* Phys. Rev **47**, 777-780 (1935)
- [3] Wei-Min Zhang, Da Hsuan Feng and Robert Gilmore, *Coherent States: theory and some applications*. Reviews of Modern Physics **62**, 867 (1990)
- [4] J. R. Klauder, B. Skagerstam, *Coherent States: Applications in Physics and Mathematical Physics*. World Scientific (1985)
- [5] E. B. Bogomolny, *Smoothed wave functions of chaotic quantum systems*. Physica D **31**, 169 (1988)
- [6] E. J. Heller, *Bound-state eigenfunctions of classically chaotic Hamiltonian systems - Scars of periodic orbits*. Physical Review Letters **53**, 1515 (1984)
- [7] A. C. Oliveira and M. C. Nemes, *Classical Structures in the Husimi Distributions of Stationary States for H₂ and HCl Molecules in the Morse Potential*. Physica Scripta **64**, 279 (2001)
- [8] Mauricio Reis, M. O. Terra Cunha, Adelcio C. Oliveira, M. C. Nemes, *Relation between quantum phase transitions and classical instability points in the pairing model*. Physics Letters A **344**, 164-169 (2005)
- [9] M.C. Nemes, K. Furuya, G.Q. Pellegrino, A.C. Oliveira, Maurício Reis and L. Sanz , *Quantum entanglement and fixed point Hopf bifurcation*. Physics Letters A **354**, 22 May 2006, Pages 60-66
- [10] Clive Emary and Tobias Brandes, *Chaos and quantum phase transition in the Dicke model*. Physical Review E **67**, 066203 (2003)

- [11] Adelcio C. Oliveira, M. C. Nemes and K. M. Fonseca Romero *Quantum time scales and the classical limit: Analytic results for some simple systems*, Physical Review E **68**, 036214 (2003)
- [12] Claude Cohen-Tanoudji, Bernard Diu, Franck Laloë *Quantum Mechanics*. John Wiley and Sons, New York (1977)
- [13] Gilmore, R. *Baker-Campbell-Hausdorff Formulas*. Journal of Mathematical Physics **15**, 2090, (1974)
- [14] E. P. Wigner, *On the Quantum Corrections for the Thermodynamic Equilibrium*. Phys Rev. **40**, 749759 (1932)
- [15] Ulf Leonhardt, *Measuring the Quantum State of Light*. Cambridge University Press, (1997)
- [16] A. Royer, *Wigner Function as the expectation value of the parity operator*. Phys. Rev. A **15**, 449 (1977)
- [17] Leslie E. Ballentine *Quantum Mechanics - A Modern Development*, World Scientific (1998)
- [18] G. S. Agarwal. *Relation Between Atomic Coherent-State Representation, State Multipoles and Generalized Phase-Space Distributions*. Phys. Rev. A **24**, 2889, (1981)
- [19] Jonathan P. Dowling, G. S. Agarwal, and Wolfgang P. Schleich. *Wigner Distribution of a General Angular-Momentum State: Applications to a Collection of two-level Atoms*. Phys. Rev. A **49** 4101, (1994)
- [20] K. M. Fonseca Romero, M. C. Nemes, J. G. Peixoto de Faria, A. F. R. de Toledo Piza *Sensitivity to initial conditions in quntum dynamics: an analytical semiclassical expansion*. Physics Letters A **327**, 129 (2004)
- [21] G. Berman and G. Zaslavsky, *Condition of stochasticity in quantum nonlinear systems*. Physica A **91**, 450 (1977)
- [22] A. G. P. Berman and G. Zaslavsky, *Method of quasiclassical approximation for c-number projection in coherent states basis*. Physica D **4**, 113 (1981)
- [23] G. J. Milburn, *Quantum and Classical Liouville dyanamics of the anharmonic oscillator*. Physical Review A **33**, 674 (1986)
- [24] R. Angelo, Tese de Doutorado, UNICAMP, (2003)

- [25] M. Greiner, O. Mandel, T. W. Hansch, I. Bloch, *Collapse and revival of the matter wave field of a Bose-Einstein condensate*. Nature **419**, 51 (2002)
- [26] P. D. Drummond e D. F. Walls, *Quantum theory of optical bistability* Journal of Physics A **13**, 725 (1980)
- [27] Martin C. Gutzwiller, *Chaos in classical and quantum mechanics*. New York, Berlin: Springer Verlag, (1990)
- [28] E. A. Cotta e F. M. Matinaga, *Bistability double-crossing curve effect in a polariton-laser semiconductor microcavity* Physical Review B **76**, 073308 (2007)
- [29] K. V. Kheruntsyan, *Wigner function for a driven anharmonic oscillator* Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics **1**, 225 (1999)
- [30] M. O. Terra Cunha, Tese de Doutorado, UFMG (2004)
- [31] J. G. Peixoto de Faria, Tese de Doutorado, UFMG (2001)
- [32] A. D. Ribeiro, M. A. M. de Aguiar *Controlling Phase Space Caustics in the semiclassical coherent state propagator*, Ann. of Phys. **323**, 654 (2008)
- [33] A. D. Ribeiro, M. Novaes and M. A. M de Aguiar *Uniform Approximation for the Coherent State Propagator using a Conjugate Application of the Bargmann Representation* Phys. Rev. Letters **95**, 050405 (2005)
- [34] David J. Griffiths *Introduction to Quantum Mechanics* Prentice Hall, (1995)
- [35] R. H. Dicke *Coherence in Spontaneous Radiation Processes*. Phys. Rev. **93**, 99 (1954)
- [36] A. Czirják and M. G. Benedict *Joint Wigner Function for Atom-Field Interactions*. Quantum and Semiclassical Optics **8**, pp. 975-981 (1996)
- [37] K. Hepp and E. H. Lieb, *The laser: A reversible quantum dynamical system with irreversible classical macroscopic motion*. Springer Lecture Notes in Physics **38**, 178 (1975)
- [38] Y. K. Wang and F. T. Hioe, *Phase Transition in the Dicke Model of Superradiance* Physical Review A **7**, 831 (1973)

- [39] Mauricio Reis, M. C. Nemes and J. G. Peixoto de Faria, *Semiclassical Corrections to the large- N limit of Dicke's model* Physical Review E **78**, 036220 (2008)
- [40] D. Giulini, E. Joos, C. Kiefer, J. Kupsch, I. O. Stamatescu, H. D. Zeh, *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory*. Springer-Verlag Berlin (1996)
- [41] G. Lindblad, *On the Generators of Quantum Dynamical Semigroups* Communications in Mathematical Physics **48**, 119 (1976)
- [42] Serge Haroch and Jean-Michel Raimond *Exploring the Quantum*. Oxford University Press (2006)
- [43] J. G. Peixoto de Faria and M. C. Nemes, *Phenomenological criteria for the validity of quantum Markovian equations*. J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 7095 (1998)
- [44] O. Brodier and A. M. Ozorio de Almeida, *Symplectic evolution of Wigner functions in Markovian open systems* Physical Review E **69**, 016204 (2004)
- [45] A. M. Ozorio de Almeida, *The Weyl Representation in Classical and Quantum Mechanics* CBPF- NF-062/96 (1996)