

**Estudo de estados de variáveis contínuas
Gaussianos e não-Gaussianos monomodais sob
efeito de um canal dissipativo**

Leonardo Antônio Mendes de Souza

**Estudo de estados de variáveis contínuas Gaussianos e
não-Gaussianos monomodais sob efeito de um canal
dissipativo**

Leonardo Antônio Mendes de Souza

Orientadora: Profa. Maria Carolina Nemes

Tese de doutorado apresentado à UNIVERSI-
DADE FEDERAL DE MINAS GERAIS.

Agosto de 2009

*Aos meus pais José de Souza e Maria da Paz,
às minhas irmãs e aos meus sobrinhos, que são a razão da
minha vida.*

Agradecimentos

Agradecer é difícil, não pelo ato de agradecer em si, mas pelo facto de eu ter muita sorte na vida e existirem muitas pessoas que eu queira realmente agradecer num momento desse.

Um doutorado não se faz somente com resultados científicos, mas também, e talvez principalmente, com resultados pessoais. São 4 anos, e muita água passa por baixo dessa ponte.

Tendo escrito e não falado nada aí em cima, vamos ao que interessa... quero expressar aqui meu *muito obrigado*:

- à minha família, mãe, pai, Cláudia, Aline, Tânier Vítor, Arthur e Leandro, que me aturam a mais tempo que todas as outras pessoas. Minha base, minha fortaleza. E que têm que superar meus momentos de nervosão. Tudo de bom que faço é pra vocês;
- à Professora Maria Carolina Nemes, Carolzita, minha mãe científica. Das pessoas que possuem mais insights de física que existe, e que tem uma clareza de pensamento absurda. Uma orientadora, no sentido mais amplo da palavra. Já são 5,5 anos trabalhando juntos, e não quero que essa colaboração pare com este doutorado;
- il gruppo dell'Università di Salerno: Fabrizio, Gerry Now, Fabio of the year, Silvio e colleghi. Inoltre nell'ambito professionale, mi hanno aiutato anche nel campo personale. Calcio, il caffè, il lavoro, il vino, la pizza ... L'Italia segnata nella mia vita. Sono un'altra persona ... migliore;
- aos professores que me ajudaram nos trabalhos, Zé Geraldo (dos melhores físicos que já vi trabalhando), Marcelo França, Karen Romero, Júlia Parreira, Walter Wreszinski. E aos demais professores do departamento de física da UFMG, que conseguem fazer pesquisa de ponta, além de fazerem do nosso ambiente de trabalho um lugar muito agradável;

-
- à Pablito e Thales, dois irmãos em BH, sem mais.
 - aos amigos e amigas da física UFMG (ou não). Vou tentar nomear alguns, mas com certeza vou esquecer de vários nomes. Julinha, minha irmã em BH, sem mais. Xuxu, Pablo, Batata, Carlitos, Gianex, An(t)a, Dut, Indhira, Gordim, Custela, Rodriban, Rosalina, Mol, Marilama, Marcelo França, Mário Sérgio, São, Mário Mentira, Magneto, os Piauí, Gaúcha, Andrezão e esposa, Édson, Júlio, Déborah e família, Rachel, Pará, Erlon, Shakira, Carlitos Parra, demais colombianos, Thiaguim, Jaque, Zé Júnior, Zé Ferraz, Cris, Bob, Matheus, Doktor Dênis, Cacá, pessoas do enlight... são muitas pessoas que me fizeram feliz durante este tempo na UFMG. Se eu esqueci de colocar alguém aqui, me desculpe (hehehe)! Nos momentos felizes vocês estavam presentes, e agradeço por isso. Mas agradeço muito mais por estarem sempre presentes nos momentos difíceis;
 - ao chat(o) do gordo e todo mundo que lá está. É surpreendente como esse chat(o) faz bem pra mim, com tantas informações úteis passadas diariamente;
 - à turma de física da UFV, ainda mantemos contato, mesmo com a distância, e continuamos a mesma... coisa. Saudade demais de vocês. TEMOS que nos encontrar mais vezes! Sinto orgulho de ter aprendido física com vocês.
 - aos meus amigos e amigas da república Diagonal: Dedé, Ktá, Memex, Bateus, MYC, BomBom, Sílvia, Fernanda, Brunão, Burrones, Jean. Impressionante o tanto que vocês conseguem aguentar minhas chatices. Obrigado por existirem na minha vida.
 - aos meus amigos da república Horizontal: Carai, Valmir, Casca, Francis e Bicudo (dentre outros que moraram lá). Sei que é difícil morar comigo, faço isso há 29 anos. Aprendo todo dia com vocês. MUITO obrigado por tudo. Especialmente pelos toddynhos que eu pego de graça.
 - à *os cara*: Leandro, Frank, Karistain, Fabiano e Flávio. Mesmo distantes também continuamos nossa amizade do mesmo jeito.
 - Aos toscos e toscas, por estarem sempre ativos neste meu último ano de doutorado. Atoron o perigon deles.
 - ao CNPq pelo auxílio financeiro.

Muito obrigado.

Tá ruim! – Robin, em Feira-da-Fruta

Resumo

O objetivo desta tese é estudar estados de variáveis contínuas, Gaussianos e não-Gaussianos monomodais, evoluindo sob efeito de um canal dissipativo. Assim, definimos dois problemas: estudar as propriedades quânticas do estado e estudar o canal dissipativo. Para abordar estes problemas, revisamos brevemente as ferramentas matemáticas utilizadas, que são: teoria de estimativas quânticas, equações mestras e variáveis contínuas. Nos capítulos seguintes estudamos, respectivamente: (i) o problema da estimativa do parâmetro de perda, *i.e.* o parâmetro de dissipação, de um canal bosônico utilizando estados não-Gaussianos; (ii) como algumas propriedades quânticas de estados Gaussianos de 1-modo e estados de superposição coerente evoluem segundo uma dinâmica não-unitária. Como resultados do primeiro item, nós conseguimos estimar, de maneira ótima, o parâmetro de perda do canal, por exemplo utilizando estados de Fock; para o segundo item fornecemos os tempos característicos e limites para as condições iniciais dos estados para que estes apresentem, efetivamente, a propriedade de compressão. Ainda mostramos uma comparação entre a evolução da entropia de von Neumann de um estado Gaussiano de 1-modo sob a influência de um reservatório com infinitos graus de liberdade e um com poucos graus de liberdade (mas com alguns deles mostrando instabilidade). Também apresentamos resultados preliminares e perspectivas, dentre elas um trabalho onde estamos estudando como um estado Gaussiano monomodal, evoluindo unitariamente segundo um Hamiltoneano que contém características de instabilidade e não-unitariamente segundo uma equação mestra, e qual é a competição que existe entre a dissipação e a instabilidade.

Abstract

The objective of this thesis is to study continuous variables states, single mode Gaussian and non-Gaussian, evolving under the effect of a dissipative channel. Thereby, we define two problems: study the quantum properties of the state and the dissipative channel. To address these problems, we review briefly the mathematical tools that we used, namely: quantum estimation theory, master equations and continuous variables. In the following chapters we study, respectively: (i) the problem of estimation of the loss parameter, *i.e.* the dissipation parameter, of a bosonic channel using non-Gaussian states; (ii) how some quantum properties of single mode Gaussian states and coherent superposition states evolve under a non-unitary dynamics. Some results for the first item, we estimate, in an optimal way, the loss parameter of the channel, for example using Fock states; for the second item we provide the characteristic times and the initial condition limits of the state in order that they show, effectively, the squeezing property. We show also a comparison between the evolution of the von Neumann entropy of a single mode Gaussian state under the influence of a reservoir with infinite degrees of freedom and one with only few degrees of freedom (but some of them showing instability). Moreover we present preliminary results and perspectives, among them a work where we are studying how a single mode Gaussian state, evolving unitarily according to a Hamiltonian containing characteristic of instability and non-unitarily as a master equation, and what is the relation that exist between dissipation and instability.

CONTEÚDO

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
1 Introdução	4
2 Ferramentas Matemáticas Básicas	8
2.1 Introdução	8
2.2 Teoria de estimativas quânticas	8
2.2.1 Estados quânticos	9
2.2.2 Medidas Projetivas	9
2.2.3 Estatística	10
2.3 Equação Mestra - Dissipação em mecânica Quântica	17
2.3.1 Aproximação de Born e aproximação Markoviana	19
2.4 Variáveis contínuas	22
2.4.1 Estados Gaussianos	24
2.4.2 Informação codificada em um estado Gaussiano	27

3	Estimativa do Parâmetro de Dissipação de um Canal Bosônico	29
3.1	Canais Bosônicos e Estimativas Quânticas	30
3.2	Estados de Fock	33
3.3	Estados tipo ‘qubit’	34
3.4	Estados tipo ‘qutrit’	36
3.5	Relação com estados de-Gaussificados	38
3.6	Superposições de ordem superior	41
3.7	Conclusão	41
4	Quantificação de propriedades quânticas em superposições coerentes e em estados Gaussianos	42
4.1	Estados de Superposição	43
4.1.1	Interferência e Compressão (Squeezing)	44
4.1.2	Distribuição do número de fótons	48
4.1.3	Entropia de von Neumann	51
4.2	Estados Gaussianos: estados térmicos comprimidos e deslocados . .	52
4.2.1	Compressão (Squeezing)	54
4.2.2	Distribuição do número de fótons	56
4.2.3	Entropia de von Neumann	59
4.3	Estados Gaussianos versus estados de superposição coerente – Fidelidade	59
4.4	Aumento de entropia em sistemas Gaussianos instáveis	63
4.5	Conclusão	65
5	Trabalhos em andamento e ideias futuras	67
5.1	Oscilador harmônico com frequência dependente do tempo	67

5.1.1	Estados Gaussianos 1-modo	67
5.1.2	Dinâmica dependente do tempo sob influência de dissipação	68
5.1.3	Solução Analítica da função de Wigner e da função característica	70
5.2	Estados Gaussianos e não Gaussianos n-modos, etc.	77
6	Conclusões	79

Introdução

Mesmo após aproximadamente cem anos de sua criação, a mecânica quântica (MQ) continua sendo uma fonte inesgotável de pesquisa e tem se mantido em constante evolução, tanto em sua estrutura matemática quanto conceitualmente. Mas o que torna a mecânica quântica tão especial? Segundo Richard Feynman, o único mistério na mecânica quântica reside no fato dela apresentar estados de superposição. Destes estados vários efeitos não-clássicos são obtidos tais como emaranhamento, não-localidade, e interferência em partículas macroscópicas [1, 2]. Nas últimas décadas, esses efeitos ganharam grande importância conceitual e tecnológica com a informação quântica [2]. Essa área tenta estudar as propriedades quânticas e utilizá-las para otimizar o processamento de informação de maneiras que um computador clássico não seria capaz de desempenhar. Por exemplo, um algoritmo quântico deve ser capaz de fatorar um número inteiro em seus fatores primos em tempo polinomial [3], porém ainda não existe um equipamento – computador – que possa realmente implementar algoritmos quânticos.

Para processarmos informação utilizamos uma determinada propriedade física do sistema para armazená-la, bem como para manipulá-la. Como exemplo, podemos pensar em informações contidas num computador pessoal, no caso um bit clássico¹. Esta informação, o bit, se encontra nos circuitos integrados (*i.e.*, no estado eletrônico do mesmo), nos discos rígidos (no estado de magnetização do disco rígido), etc, onde ela pode ser manipulada. Ao trabalharmos com informação quântica, neste caso um bit quântico²[4, 5], também desejamos manipulá-la

¹Um bit clássico pode assumir dois valores, 0 ou 1.

²Um bit quântico possui um diferencial com relação ao bit clássico, pois pode assumir estados de superposição, por exemplo: $|bit\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$. Podemos trabalhar com estes estados por exemplo em ressonância magnética nuclear, ou experimentos de eletrodinâmica de cavidades.

e processá-la *eficientemente*. O grande trunfo de se trabalhar com informação quântica é o fato de podermos utilizar estados de superposição e estados emaranhados na implementação de algoritmos [2].

Visto que os sistemas físicos estão sujeitos a perdas, é vital sabermos como as propriedades dos sistemas se comportam sob tais efeitos, tanto clássica quanto quanticamente. Num computador pessoal, os circuitos integrados possuem perdas, grande parte por efeito Joule, e um dos desafios para um engenheiro é minimizá-las. Em mecânica quântica uma das principais fontes de ruído é a *decoerência* [6]. Decoerência é um termo antigo em mecânica quântica e significa a capacidade que um ambiente possui (por ambiente entenda-se reservatório térmico, dissipação, difusão, colisões, etc.) de reduzir os efeitos de interferência, obviamente nos graus de liberdade que se deterioram sob tais efeitos, dos estados quânticos, levando estes para os estados denominados *ponteiros*, e assim os estados tendem a ‘perder’ seus efeitos quânticos (entre aspas pois queremos dizer que a propriedade quântica do estado tende a não ser mais eficaz, tanto em termos de armazenamento de informação quanto na capacidade de acessarmos experimentalmente). Os efeitos de decoerência em MQ também são vistos como um passo na direção de se encontrar um limite quântico-clássico, problema ainda em aberto na física [6].

Uma abordagem particularmente interessante consiste em processar informação quântica (IQ) em variáveis contínuas (VC) [7, 8] – estados Gaussianos e não-Gaussianos – onde a informação é codificada em quadraturas quantizadas dos modos do campo eletromagnético. A maior motivação para se trabalhar com informação quântica em VC é a alta eficiência na implementação de alguns protocolos (preparação, medição e manipulação de estados emaranhados) em propriedades das quadraturas do campo (squeezing, distribuição do número de fótons, etc) [7]. Uma vasta literatura sobre VC em sistemas Gaussianos e informação quântica está contida em [9] e referências inclusas. Um exemplo claro desta eficiência é a possibilidade de se fazer computação quântica tolerante a erros em estados de VC [10].

Assim, temos dois pontos a serem tratados: (i) queremos compreender como as *propriedades quânticas* são deterioradas ao evoluírem sob efeito de um canal bosônico; (ii) como quantificar esta perda de informação. Note a importância de ambos os pontos: desejamos trabalhar com informação (que eventualmente deverá ser enviada de um ponto a outro através de um canal que provavelmente irá provocar perdas no estado) e esta estará codificada em estados quânticos, portanto em

propriedades quânticas dos mesmos. Nesta tese abordamos os dois pontos citados anteriormente, especificamente para estados de variáveis contínuas Gaussianos e não-Gaussianos monomodais, sendo que estes estão sob efeito de um canal dissipativo.

Para abordarmos os dois pontos acima, no capítulo 2 fizemos uma breve revisão das ferramentas matemáticas que utilizamos para estudar tanto o canal quanto as propriedades dos estados de variáveis contínuas. Revisamos a teoria de estimativas quânticas (TEQ), onde definimos os objetos matemáticos principais como a informação de Fisher clássica e quântica, o limite de Cramér-Rao, a derivada logarítmica simétrica, etc. Também apresentamos uma breve, e não excessivamente detalhada, dedução da equação mestra com a qual trabalhamos, mostrando seu significado físico. Por fim neste capítulo, definimos a classe geral de estados que iremos trabalhar: sistemas de variáveis contínuas.

Para quantificar a dissipação, ou o canal que o estado está submetido, trabalhamos basicamente com um problema de estimativas: queremos *estimar*, com a maior precisão teórica possível, o parâmetro de dissipação do canal. Ou seja, queremos utilizar recursos quânticos para obter o valor mais próximo do verdadeiro do ‘quanto’ o canal deteriora o estado, que é o parâmetro de dissipação. No capítulo 3, utilizamos a TEQ para atacar o problema citado, e conseguimos estimar o parâmetro de perda de maneira ótima, usando estados não-Gaussianos [11].

No capítulo 4 estudamos como várias propriedades quânticas (especificamente a entropia de von Neumann, a distribuição do número de fótons, negatividade da função de Wigner e compressão) de estados Gaussianos e não-Gaussianos, se comportam sob efeito de dissipação. Analisamos o tempo característico de cada propriedade, isto é, em quanto tempo cada uma delas se torna ineficaz. Também fizemos um estudo sobre quais são os limites que os estados iniciais devem respeitar, de modo a apresentarem a propriedade quântica de compressão (squeezing)[12, 13]. Além disso, mostramos brevemente como a entropia de von Neumann varia para sistemas Gaussianos de 1-modo acoplados a um reservatório com poucos graus de liberdade [14].

No capítulo 5 mostramos um trabalho em andamento, onde estamos estudando estados Gaussianos de 1-modo, sob ação de um Hamiltoniano que possui características de instabilidade, e também acoplado a uma evolução não-unitária. Queremos ver neste trabalho, de forma analítica, a competição entre a dissipação e a instabilidade. Apresentamos o ferramental matemático que estamos utilizando, além de resultados preliminares. No capítulo 6 mostramos as conclusões desta tese.

Ferramentas Matemáticas Básicas

“É um erro acreditar que é possível resolver qualquer problema importante usando batatas.”

A vida, o universo e tudo mais - Douglas Adams

2.1 Introdução

Neste capítulo faremos uma breve revisão teórica sobre equações mestras e sobre variáveis contínuas (VC) em mecânica quântica (MQ), dando exemplos no estudo de VC em informação quântica. Além disso, iremos apresentar as bases da Teoria de Estimativas Quânticas (TEQ), que estudamos em nosso estágio de doutorado sanduíche. No estudo de TEQ iremos abordar o assunto nos baseando nas referências [15, 16]. Em seguida – no estudo de equação mestra – seguimos os passos da referência [17]. Ao estudarmos VC em MQ iremos seguir as referências [18].

2.2 Teoria de estimativas quânticas

Seja o seguinte esquema: dadas N cópias de um estado quântico desconhecido (no caso, um parâmetro desconhecido qualquer), um físico deseja efetuar medidas neste sistema, e destas *estimar* qual era o estado. Basicamente nosso colega experimental precisa fazer duas otimizações: (i) qual é a melhor medida a ser feita; (ii) como analisar os dados a fim de obter um bom estimador (iremos definir o que é um estimador nas subseções em seguida). Vamos, de maneira muito resumida, caracterizar as etapas que o físico deve passar para obter esta estimativa ótima: estados, medidas, estatística (análise dos dados).

2.2.1 Estados quânticos

Em mecânica quântica podemos descrever o sistema pela sua função de onda $|\psi\rangle$ (no caso, um ket no espaço de Hilbert) ou pelo operador densidade ρ do sistema. Um operador densidade (ou matriz densidade) é um operador positivo semi-definido ($\rho \geq 0 \Rightarrow \rho^\dagger = \rho$) que possui traço igual a 1 ($\text{tr } \rho = 1$).

Para um estado puro, temos que $\rho^2 = \rho$, se isto não ocorre o estado é dito misto. O operador densidade de um estado puro pode ser escrito como $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, enquanto o operador densidade de um estado misto pode ser escrito da forma (não única) $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, com $\sum_i p_i = 1$.

2.2.2 Medidas Projetivas

A MQ prevê com exatidão a probabilidade que um evento aconteça (ou seja uma saída de uma certa medida) dentro de um conjunto de saídas possíveis. Uma medida projetiva em MQ pode ser representada da seguinte forma: seja ϵ a saída de uma medida, e Ω o conjunto – finito – onde ‘vivem’ estas saídas (ou seja, apenas um número finito de saídas é possível), uma medida projetiva é um conjunto finito de operadores M_ϵ , com $\epsilon \in \Omega$ (i.e., ϵ é o resultado de uma medida), onde $M_\epsilon \geq 0$, $M_\epsilon^\dagger = M_\epsilon$ e $\sum_{\epsilon \in \Omega} M_\epsilon = \mathbf{1}$. Note que cada M_ϵ é um projetor, que pode ser definido por

$$M_\epsilon = |\epsilon\rangle\langle\epsilon|,$$

ou seja, a ação de M_ϵ num estado, digamos $|\phi\rangle$, irá ‘projetar’ o vetor $|\phi\rangle$ sobre o vetor $|\epsilon\rangle$ ¹. Este tipo de medida, dada por um conjunto de projetores, é dita *medida projetiva*. Imediatamente após realizarmos uma medida projetiva $M = \sum_{\epsilon} M_\epsilon$, num estado $|\phi\rangle$ por exemplo, ele se torna (dado que o resultado da medida foi ϵ):

$$|\psi\rangle = \frac{M_\epsilon |\phi\rangle}{\sqrt{p(\epsilon)}},$$

onde $p(\epsilon) = \langle\phi|M_\epsilon|\phi\rangle$. Note que para qualquer projetor P sempre vale $P^2 = P$.

Se fizermos uma medida M num estado quântico ρ , com possíveis saídas ϵ , a probabilidade de obtermos um resultado particular da medida é dada pela regra de Born: $p_\epsilon(\rho) = \text{tr } \rho M_\epsilon$. Assim, se temos um ensemble de estados identicamente preparados e fizermos a medida M em cada componente, obtemos a saída ϵ com

¹Assim o projetor seleciona a porção de $|\phi\rangle$ que é paralela a $|\epsilon\rangle$.

frequência $p_\epsilon(\rho)$.²

Exemplo

Consideremos os seguintes projetores:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{\mathbf{1} + \vec{m} \cdot \vec{\sigma}}{2}, \\ M_2 &= \frac{\mathbf{1} - \vec{m} \cdot \vec{\sigma}}{2}, \end{aligned}$$

onde $|\vec{m}| = 1$. As probabilidades de obtermos as saídas 1 e 2, no seguinte estado (estado de qu-bit mais geral): $\rho = \frac{\mathbf{1} + \vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}}{2}$, são:

$$\begin{aligned} p_1 &= \text{tr } \rho M_1 = \frac{1 + \vec{m} \cdot \vec{\eta}}{2}, \\ p_2 &= \text{tr } \rho M_2 = \frac{1 - \vec{m} \cdot \vec{\eta}}{2}, \end{aligned}$$

onde $\vec{\sigma}$ são as bem conhecidas matrizes de Pauli – $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ – e $\vec{\eta}$ é um vetor que localiza o estado na esfera de Bloch. Note que M_1 e M_2 são projetores:

$$\begin{aligned} M_i^2 &= \frac{\mathbf{1} \pm \vec{m} \cdot \vec{\sigma}}{2} \frac{\mathbf{1} \pm \vec{m} \cdot \vec{\sigma}}{2} \\ &= \frac{\mathbf{1} \pm 2\vec{m} \cdot \vec{\sigma} + (\vec{m} \cdot \vec{\sigma})^2}{4} \\ &= \frac{2(\mathbf{1} \pm \vec{m} \cdot \vec{\sigma})}{4} = M_i. \end{aligned}$$

A situação acima pode ser representada na figura 2.1. Nela está representada uma esfera de Bloch, assim o ângulo que posiciona o vetor \vec{m} , vetor que ‘localiza’ a medida, na esfera indica como iremos medir o estado.

2.2.3 Estatística

O problema que queremos tratar é: dadas N -cópias de um estado quântico (onde assumiremos que o estado (operador densidade) é parametrizado por θ , ou seja, $\rho \rightarrow \rho(\theta)$) $\rho(\theta)$, queremos estimar o valor de θ da melhor forma possível,

² M é uma medida POVM, M_ϵ são seus elementos.

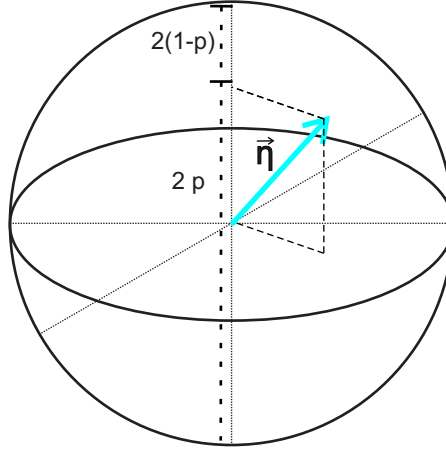


Figura 2.1: Representação gráfica do exemplo acima.

realizando o menor número de medidas ótimas no sistema. Para este fim, devemos analisar estatisticamente um conjunto de dados, e veremos que o objeto matemático principal neste estudo é a *Informação de Fisher*, que iremos definir abaixo (tanto num conceito clássico quanto quântico).

Como mencionamos anteriormente, a MQ não prevê o resultado exato de um experimento, mas sim a probabilidade de que uma saída de um evento ocorra (o resultado de uma medida), assim, nesta seção, iremos estudar resumidamente alguns pontos de estatística clássica e quântica. A pergunta principal que queremos responder é: quão ‘diferentes’ duas distribuições de probabilidade podem ser?

2.2.3.1 Estatística Clássica

Sejam p e q duas distribuições de probabilidade que possuem o mesmo espaço de saída Ω , definimos a distância entre elas como (*distância de Hellinger*)[19]:

$$d_H^2(q, p) = \sum_{\epsilon} (\sqrt{p_{\epsilon}} - \sqrt{q_{\epsilon}})^2 = 2(1 - F(q, p)),$$

onde $F(q, p) = \sum_{\epsilon} \sqrt{p_{\epsilon} q_{\epsilon}}$ é o *overlap* entre p e q .

Dada uma medida M , se duas distribuições de probabilidade são distantes de uma quantidade pequena δ (ou seja, o quanto duas distribuições de probabilidade

são similares), temos³:

$$d_H^2(p(\theta, M), p(\theta + \delta, M)) = \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta} I(\theta, M)_{\alpha\beta} \delta_\alpha \delta_\beta + O(\|\delta\|^3), \quad (2.1)$$

onde $I(\theta, M)_{\alpha,\beta}$ é um elemento da *Matriz Informação de Fisher* [20, 21]:

$$I(\theta, M)_{\alpha\beta} = \sum_{\epsilon \in \Omega_+} \frac{\partial_\alpha p_\epsilon(\theta, M) \partial_\beta p_\epsilon(\theta, M)}{p_\epsilon(\theta, M)}. \quad (2.2)$$

Nas equações acima, temos que $\partial_{\alpha(\beta)}$ é a derivada com relação ao parâmetro $\alpha(\beta)$, Ω_+ está indicando que somaremos sobre as saídas onde $p_\epsilon \neq 0$. No nosso caso, trabalhamos com estimativas uniparamétricas, portanto:

$$I(\theta, M) = \sum_{\epsilon \in \Omega_+} p_\epsilon(\theta, M) \left(\frac{\partial \ln p_\epsilon(\theta, M)}{\partial \theta} \right)^2. \quad (2.3)$$

Mais abaixo iremos dar uma interpretação para a informação de Fisher.

Estimadores e Limite de Cramér-Rao

Após nosso colega experimental efetuar a medida ele (ou ela) obtém dados, e destes dados ele deseja obter um valor estimado do parâmetro θ com o menor erro possível. Isto é feito através da ideia de *estimadores*, que são definidos como sendo a função $\hat{\theta} : \Omega \rightarrow \Theta \in \mathbb{R}$, $\epsilon \rightarrow \hat{\theta}_\epsilon$, do espaço de saídas, Ω , para o espaço de parâmetros, Θ ⁴. Ou seja: dada uma saída ϵ de uma medida M_ϵ , podemos construir um *estimador*, $\hat{\theta}_\epsilon$ ⁵. Este estimador nos dá um valor, um número real, para o parâmetro θ , a partir da saída ϵ que obtivemos da medida M_ϵ . O que desejamos é que esta nossa função $\hat{\theta}$ possua um valor tão próximo quanto possível

³Note que o resultado é uma expansão em série de Taylor em torno de δ , com δ tendendo a 0, da expressão para a distância de Hellinger.

⁴Isto é: a função $\hat{\theta}$ leva um resultado do espaço de medidas Ω para o espaço de parâmetros Θ , levando uma saída de uma medida ϵ para um parâmetro $\hat{\theta}_\epsilon$.

⁵Observe que a notação $\hat{\theta}$ não significa que $\hat{\theta}$ é um operador, mas sim um estimador que é uma função. Porém esta é a linguagem utilizada na área de teoria de estimativas. Durante o texto fica claro quando estamos tratando de estimadores ou de operadores, portanto, a menos que não haja nenhuma ambiguidade no texto, iremos manter a mesma notação para estimadores e operadores.

do valor verdadeiro do parâmetro desconhecido θ .

É claro também que, ao processar os dados, o experimental deseja obter o valor do estimador mais próximo do valor verdadeiro do parâmetro, ou seja, quer obter o estimador com a menor matriz de erro médio quadrático possível, que é definida por: $V(\hat{\theta}, \theta, M) = \mathbb{E}_\theta(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T$ ou $V(\hat{\theta}, \theta, M)_{\alpha\beta} = \sum_\epsilon \text{tr} \rho M_\epsilon (\hat{\theta}_{\epsilon\alpha} - \theta_\alpha)(\hat{\theta}_{\epsilon\beta} - \theta_\beta)$, onde $\mathbb{E}(x)$ é o valor esperado da variável x , definido da seguinte maneira: dada uma variável randômica⁶ discreta x , com probabilidade $p(x)$, temos

$$\mathbb{E}(x_i) = \sum_i x_i p(x_i),$$

se a distribuição de probabilidades assumir uma densidade de probabilidade $f(x)$ então temos

$$\mathbb{E}(x) = \int x f(x) dx.$$

Note que explicitamos que o valor esperado é tomado com relação ao valor verdadeiro do parâmetro θ : $\mathbb{E}_\theta(\hat{\theta})$. Em nosso trabalho estudamos estimadores não tendenciosos, isto é, o valor esperado do estimador é igual ao valor verdadeiro: $\mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}] = \theta$. Para estes estimadores temos que $V(\hat{\theta}, \theta, M) = \text{Cov}_\theta(\hat{\theta})$, onde $\text{Cov}_\theta(\hat{\theta})$ é a matriz de covariância do estimador, dada por:

$$\text{Cov}_\theta(\hat{\theta})_{ij} = \mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}_i \hat{\theta}_j) - \mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}_i) \mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}_j).$$

Para estimadores não tendenciosos o *limite de Cramér-Rao* sempre vale: seja M um POVM e $\hat{\theta}$ um estimador não tendencioso de θ . Neste caso, a variância do estimador $\hat{\theta}$ é limitada pelo inverso da informação de Fisher [22]:

$$V(\hat{\theta}, \theta, M) \geq I(\theta, M)^{-1}. \quad (2.4)$$

Uma propriedade importante é que, dadas N cópias de um sistema e a mesma medida M , temos [20, 21]:

$$V(\hat{\theta}, \theta, M) \geq \frac{I(\theta, M)^{-1}}{N}. \quad (2.5)$$

⁶Variável randômica ou variável aleatória. Podemos enxergá-la como sendo uma variável desconhecida que pode assumir, dentro de um conjunto de valores possíveis, qualquer valor em qualquer instante de tempo.

No começo desta seção mostramos as duas otimizações que um experimental deve fazer, recapitulando: (i) qual é a melhor medida a ser feita; (ii) como analisar os dados a fim de obter um bom estimador. Um resultado interessante que diz respeito ao segundo item é que o *estimador de máxima verossimilhança* (EMV) atinge o seguinte limite:

$$\text{Var}_\theta(\hat{\theta}^N) = V(\hat{\theta}, \theta, M) \quad (2.6)$$

para $N \rightarrow \infty$ ($\hat{\theta}^N$ implica no estimador obtido após N cópias serem analisadas), ou seja, podemos nos limitar a encontrar a melhor medida a ser feita no sistema pois um estimador ótimo é dado pelo EMV⁷. Em nosso trabalho especificamente não trabalhamos diretamente com a obtenção do melhor estimador, dado o argumento acima sobre o EMV, portanto agora iremos apenas definir o mesmo, sem nos preocuparmos tanto com detalhes: definimos o EMV da seguinte forma: seja Ξ_1, \dots, Ξ_N variáveis randômicas independentes e uniformemente distribuídas com função de probabilidade $\text{Pr}[\Xi = \epsilon] = p_\epsilon(\theta)$. O EMV é definido como:

$$\hat{\theta}_{EMV} = \text{argmax} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln p_{\Xi_i}(\theta),$$

onde *argmax* é o argumento do máximo, isto é, o conjunto de pontos do argumento dado para os quais o valor da expressão atinge o valor máximo.

2.2.3.2 Estatística Quântica

Se temos dois estados quânticos podemos distinguí-los fazendo uma medição apropriada em ambos e comparando o resultado do experimento. Ao estudarmos estatística clássica, na seção anterior, vimos que podemos definir uma distância entre duas distribuições de probabilidade, p_ϵ e q_ϵ , através da distância de Hellinger. Vimos anteriormente que podemos associar a Informação de Fisher com a distância entre duas distribuições de probabilidade. Em mecânica quântica estamos interessados não em quão diferentes duas distribuições de probabilidade são, mas sim em quão distantes dois estados são. Assim, faremos uma análise análoga para estados quânticos e definiremos uma ‘distância’ entre estes, a chamada *distância de Bures* [23, 24, 25], a fim de saber quão ‘distantes’ nossos estados estão. Assim, temos que:

$$d_B^2(\rho, \rho') = \max_M d_H^2[p(\rho, M), p(\rho', M)] = 2(1 - F(\rho, \rho')), \quad (2.7)$$

⁷O termo $\text{Var}_\theta(\hat{\theta})$ significa a variância de $\hat{\theta}$. A variância para uma variável x é definida como: $\text{Var}(x) = \mathbb{E}(x^2) - [\mathbb{E}(x)]^2$.

onde

$$F(\rho, \rho') = \text{tr} \sqrt{\sqrt{\rho} \rho' \sqrt{\rho}}, \quad (2.8)$$

esta última expressão é chamada *fidelidade* quântica ⁸.

Suponhamos que nosso estado quântico seja parametrizado por θ . Assim como calculamos a distância de Hellinger na seção anterior, faremos para dois estados quânticos próximos, assim:

$$d_B^2[\rho(\theta), \rho(\theta + \phi)] = 2 \left(1 - \text{tr} \sqrt{\sqrt{\rho(\theta)} \rho(\theta + \phi) \sqrt{\rho(\theta)}} \right),$$

onde assumimos que ϕ é pequeno comparado a θ .

Iremos expandir a distância de Bures em torno de ϕ . Definindo:

$$A(\theta, \phi) = \sqrt{\sqrt{\rho(\theta)} \rho(\theta + \phi) \sqrt{\rho(\theta)}},$$

e tomando a derivada do quadrado da expressão anterior com relação a ϕ temos:

$$(\partial_\phi A(\theta, \phi)) A(\theta, \phi) + A(\theta, \phi) (\partial_\phi A(\theta, \phi)) = \sqrt{\rho(\theta)} \partial_\phi \rho(\theta + \phi) \sqrt{\rho(\theta)}. \quad (2.9)$$

Agora, iremos avaliar a expressão acima em $\phi = 0$, e multiplicar pela direita e pela esquerda por $\rho(\theta)^{-1/2}$, assim⁹:

$$\frac{\lambda(\theta) \rho(\theta) + \rho(\theta) \lambda(\theta)}{2} = \partial_\theta \rho(\theta), \quad (2.10)$$

onde $\lambda(\theta) = 2\rho(\theta)^{-1/2}(\partial_\phi A(\theta, \phi)|_{\phi=0})\rho(\theta)^{-1/2}$ é chamado *derivada logarítmica simétrica* (DLS). Tomando o traço de (2.10), temos para a primeira derivada da distância de Bures:

$$\partial_\phi d_B^2[\rho(\theta), \rho(\theta + \phi)]|_{\phi=0} = -2 \text{tr}[\partial_\phi A(\theta, \phi)]|_{\phi=0} = -2 \text{tr}[\partial_\theta \rho(\theta)] = 0. \quad (2.11)$$

Assim, partimos para o segundo termo. Tirando a segunda derivada de $A^2(\theta, \phi)$:

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho(\theta)}(\partial_\phi^2 \rho(\theta + \phi))\sqrt{\rho(\theta)} &= (\partial_\phi^2 A(\theta, \phi))A(\theta, \phi) + A(\theta, \phi)(\partial_\phi^2 A(\theta, \phi)) + \\ &+ 2(\partial_\phi A(\theta, \phi))(\partial_\phi A(\theta, \phi)), \end{aligned} \quad (2.12)$$

⁸O símbolo \max_M significa que iremos fazer uma maximização da distância de Hellinger, $d_H^2[p(\rho, M), p(\rho', M)]$, sobre todas as medidas possíveis.

⁹No nosso caso estamos assumindo que $\rho(\theta) \neq 0$.

agora avaliando em $\phi = 0$ e tomando o traço, temos:

$$2 \operatorname{tr}[\partial_\phi^2 A(\theta, \phi)|_{\phi=0}] + \frac{1}{2} \operatorname{tr}[\rho(\theta)\lambda(\theta)^2] = 0, \quad (2.13)$$

assim

$$\operatorname{tr}[\partial_\phi^2 A(\theta, \phi)|_{\phi=0}] = -\frac{1}{4}H(\theta) \quad (2.14)$$

onde

$$H(\theta) = \operatorname{tr}[\rho(\theta)\lambda(\theta)^2] \quad (2.15)$$

é a chamada *Informação de Fisher Quântica* (IFQ) ¹⁰. Assim, a distância de Bures fica:

$$d_B^2[\rho(\theta), \rho(\theta + \phi)] = \frac{1}{4}H(\theta)\phi^2 + O(|\phi|^3). \quad (2.17)$$

Uma propriedade importante da informação de Fisher quântica é a seguinte: dadas N cópias de um sistema, e seja $H^N(\theta)$ a informação de Fisher global, assim temos:

$$H^N(\theta) = NH^1(\theta).$$

As deduções acima valem quando $\rho(\theta) > 0$, porém é possível demonstrar [16] que os resultados são válidos também para o caso geral onde $\rho(\theta) \geq 0$.

Um resultado importante a respeito da IFQ é o seguinte, chamado de *inequação de Braunstein-Caves* [25]: suponha um estado quântico ρ parametrizado por θ . Para qualquer medida M sempre vale:

$$I(\theta, M) \leq H(\theta), \quad (2.18)$$

onde $I(\theta, M)$ e $H(\theta)$ são as informações de Fisher clássica e quântica respectivamente. Desta desigualdade segue o *limite de Cramér-Rao quântico*: seja $\hat{\theta}$ um estimador não tendencioso de θ , a seguinte desigualdade vale [20, 21] (sob certas condições, que não iremos detalhar):

$$V(\hat{\theta}, \theta, M) \geq H(\theta)^{-1}. \quad (2.19)$$

¹⁰Note que fizemos a análise para o caso uniparamétrico, que foi o caso estudado. A dedução para o caso mais geral, onde vários parâmetros são estimados, é a extensão direta da dedução feita nesta seção, e a *Matriz* de Informação de Fisher Quântica fica:

$$H_{\alpha\beta}(\theta) = \Re \operatorname{tr}[\rho(\theta)\lambda_\alpha(\theta)\lambda_\beta(\theta)], \quad (2.16)$$

onde $\alpha(\beta)$ diz respeito ao parâmetro $\theta_{\alpha(\beta)}$.

Alguns comentários a respeito dos resultados acima:

- Note que a IFQ não depende de uma medida específica, assim uma medida ótima é aquela que satura a desigualdade de Braunstein-Caves, *i.e.* que faz $I(\theta, M) = H(\theta)$. Isto nem sempre é possível, porém para alguns casos sim, por exemplo em problemas uniparamétricos (o problema que tratamos, que será detalhado em um capítulo posterior, é de estimativa uniparamétrica). Nestes casos, a igualdade é atingida ao fazermos medidas na base onde a DLS é diagonal, ou seja, os elementos do POVM ótimo serão projetores no subespaço definido pelos autovetores comuns da DLS;
- Como vimos, esperamos que o estimador de máxima verossimilhança, para N cópias do sistema, possua covariância igual à matriz de erro médio quadrático. Assim, o limite de Cramér-Rao fica:

$$\text{Var}_\theta(\hat{\theta}^N) \geq \frac{H(\theta)^{-1}}{N}, \quad (2.20)$$

então nosso problema de otimização se resume em encontrar as medidas ótimas que maximizam a IFQ, pois assim teremos uma minimização da variância do estimador com relação ao valor verdadeiro do parâmetro.

- Podemos dar a seguinte interpretação para a informação de Fisher: ela quantifica quanto uma distribuição de probabilidade (ou o estado quântico, para a versão quântica obviamente) é sensível dado que a alteremos de um pequeno valor δ (por exemplo, observando as equações (2.1) e (2.4)). Se alteramos uma distribuição de probabilidade de uma quantidade pequena δ e ela se distingue bastante da distribuição original isto implica em uma informação de Fisher maior, e assim pelo limite de Cramér-Rao e pela distância de Hellinger, iremos estar nos afastando da distribuição de probabilidade original.

2.3 Equação Mestra - Dissipação em mecânica Quântica

“Obey your Master!!!!”

Master of Puppets - Metallica

Ao trabalharmos com sistemas quânticos abertos, estamos pensando em um sistema principal S (em cujas propriedades estamos interessados), interagindo com um sistema R , ambiente ou reservatório térmico, sobre o qual apenas nos interessa sua influência sobre S . De fato, trabalhamos com o seguinte Hamiltoniano

$$H = H_S + H_R + H_{SR}, \quad (2.21)$$

onde H_S e H_R são os Hamiltonianos do sistema e do ambiente (reservatório) e H_{SR} é o Hamiltoniano de interação entre os dois subsistemas. Na análise deste problema, desejamos somente informação do sistema principal, então iremos escrever o operador densidade do sistema completo como $\chi(t)$ e definir o operador densidade reduzido do sistema como

$$\rho(t) = \text{tr}_R[\chi(t)]. \quad (2.22)$$

A equação de Schroedinger para $\chi(t)$ é

$$\dot{\chi}(t) = \frac{1}{i\hbar}[H, \chi(t)]. \quad (2.23)$$

Podemos passar a equação acima para o quadro de interação fazendo

$$\tilde{\chi}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}(H_S+H_R)t} \chi(t) e^{-\frac{i}{\hbar}(H_S+H_R)t}, \quad (2.24)$$

que nos dá a seguinte “equação de Schroedinger”(no quadro de interação):

$$\dot{\tilde{\chi}}(t) = \frac{1}{i\hbar}[\tilde{H}_{SR}(t), \tilde{\chi}(t)]. \quad (2.25)$$

Podemos integrar formalmente a equação acima, resultando em

$$\tilde{\chi}(t) = \chi(0) + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\chi}(t')] dt', \quad (2.26)$$

substituindo para $\tilde{\chi}(t)$ em (2.25) temos

$$\dot{\tilde{\chi}}(t) = \frac{1}{i\hbar}[\tilde{H}_{SR}(t), \tilde{\chi}(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t [\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\chi}(t')]] dt'. \quad (2.27)$$

Esta equação é exata. Agora iremos fazer algumas aproximações para que possamos resolver a integral em (2.27), chegando assim na equação diferencial que

desejamos.

2.3.1 Aproximação de Born e aproximação Markoviana

Assumindo que a interação foi “ligada” em $t = 0$ e que antes disso o sistema e o ambiente não interagiram teremos:

$$\chi(0) = \rho(0) \otimes R_0, \quad (2.28)$$

onde R_0 é o operador densidade inicial do reservatório. Definindo

$$\tilde{\rho}(t) = \text{tr}_r[\tilde{\chi}(t)] = e^{\frac{i}{\hbar}H_S t} \rho(t) e^{-\frac{i}{\hbar}H_S t} \quad (2.29)$$

temos a seguinte equação mestra

$$\dot{\tilde{\rho}} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \text{tr}_R\{[\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\chi}(t')]]\} dt' \quad (2.30)$$

onde fizemos

$$\text{tr}_R[\tilde{H}_{SR}R_0] = 0.$$

Assim que nosso sistema for “ligado”, i.e. $t > 0$, ele irá se correlacionar com o reservatório. Assumimos que o acoplamento entre sistema e reservatório é fraco e também que o reservatório é muito grande em comparação ao sistema, portanto fica praticamente inalterado. Porém, o sistema será drasticamente alterado pelo reservatório (queremos um sistema amortecido). Então escrevemos

$$\tilde{\chi}(t) = \tilde{\rho}(t)R_0 + \mathcal{O}(H_{SR}). \quad (2.31)$$

Com a justificativa acima fazemos a chamada *aproximação de Born*, que consiste em dizer que o reservatório desacopla do sistema para todo o tempo t . Assim escrevemos (2.30) como

$$\dot{\tilde{\rho}} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \text{tr}_R\{[\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\rho}(t')R_0]]\} dt'. \quad (2.32)$$

A equação (2.32) ainda é motivo de discussão na comunidade, pois a idéia da dinâmica não-unitária da equação mestra é a de que as correlações entre sistema e reservatório anulassem as correlações quânticas do sistema. Mas o sistema é

desacoplado do reservatório para todo o tempo, o que soa no mínimo estranho. O grande sucesso entre teoria e experimento dá crédito ao resultado acima obtido.

A equação (2.32) é não-Markoviana, já que a evolução futura depende da evolução passada. A aproximação Markoviana simplifica o cálculo da integral acima e é justificada pelo fato do reservatório ser muito grande (em comparação ao sistema) e mantido em equilíbrio térmico, assim ele não irá guardar por muito tempo informações relativas ao sistema, ou seja, assumindo que as correlações temporais do reservatório decaírem muito mais rápido que as correlações do sistema. Assumindo este fato podemos escrever

$$\dot{\tilde{\rho}} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \text{tr}_R \{ [\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\rho}(t)R_0]] \} dt'. \quad (2.33)$$

Vale ressaltar que existem modelos exatos (por exemplo [26]) modelando a dinâmica entre sistema e reservatório e os resultados são similares aos obtidos pela equação mestra.

A partir da equação (2.33) temos que fazer um modelo específico para nosso sistema global a fim de resolver a integral. Sejam os seguintes Hamiltonianos (partes de (2.21)):

$$H_S = \hbar\omega_0 a^\dagger a, \quad (2.34)$$

$$H_R = \sum_j \hbar\omega_j r_j^\dagger r_j, \quad (2.35)$$

$$H_{SR} = \sum_j \hbar(\kappa_j^* a r_j^\dagger + \kappa_j a^\dagger r_j) = \hbar(a\Gamma^\dagger + a^\dagger\Gamma). \quad (2.36)$$

Os Hamiltonianos acima descrevem um oscilador harmônico (sistema S) com frequência ω_0 e operadores de aniquilação/criação, a/a^\dagger respectivamente. O reservatório (R) é modelado como sendo infinitos osciladores harmônicos (r_j e r_j^\dagger) de frequência ω_j . A interação entre S e R é feita através da constante κ_j ; além de linear a interação é tomada na aproximação de onda-girante.

A equação mestra (2.33), tomando o cuidado de estudar as correlações entre os modos do reservatório (certificando que estes decaem muito mais rapidamente que as correlações do sistema), toma a seguinte forma (após ser feito o traço sob o reservatório e tomado o limite de contínuo de frequências do reservatório):

$$\dot{\tilde{\rho}} = \alpha(a\tilde{\rho}a^\dagger - a^\dagger a\tilde{\rho}) + \beta(a\tilde{\rho}a^\dagger + a^\dagger\tilde{\rho}a - a^\dagger a\tilde{\rho} - \tilde{\rho}aa^\dagger) + \text{H.C.}, \quad (2.37)$$

onde α e β são coeficientes que dependem de parâmetros do reservatório, como a temperatura T :

$$\begin{aligned}\alpha &= \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} g(\omega) |\kappa(\omega)|^2 \\ \beta &= \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} g(\omega) |\kappa(\omega)|^2 \bar{n}(\omega, T),\end{aligned}$$

onde $\bar{n}(\omega, T)$ essencialmente reflete a temperatura do reservatório, $g(\omega)$ e $\kappa(\omega)$ são a *densidade de estados* e o *acoplamento entre S e R* no limite de frequências contínuo, respectivamente.

A equação mestra para o oscilador harmônico amortecido (2.37), na representação de Schroedinger fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= -i\omega'_0[a^\dagger a, \rho] + \frac{\gamma}{2}(\bar{n} + 1)(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a) \\ &\quad + \frac{\gamma}{2}\bar{n}(2a^\dagger \rho a - a a^\dagger \rho - \rho a a^\dagger),\end{aligned}\tag{2.38}$$

onde $\gamma = 2\pi g(\omega_0) |\kappa(\omega_0)|^2 = 2\pi C\omega_0^j$ (onde a C é uma constante e j é um inteiro positivo¹¹) e

$$\bar{n} = \bar{n}(\omega_0, T) = \frac{e^{-\hbar\omega_0/k_B T}}{1 - e^{-\hbar\omega_0/k_B T}},$$

i. e., γ é o acoplamento do reservatório com o oscilador principal e \bar{n} diz respeito à temperatura T do reservatório.

Uma interpretação física da equação (2.38) fica clara quando estudamos a probabilidade $p_n = \langle n|\rho|n\rangle$ do oscilador estar no n -ésimo estado de energia:

$$\dot{p}_n = \gamma(\bar{n} + 1)(n + 1)p_{n+1} - \gamma(\bar{n} + 1)np_n + \gamma\bar{n}np_{n-1} - \gamma\bar{n}(n + 1)p_n.\tag{2.39}$$

A equação acima descreve a taxa de transições entre os estados $n + 1$, $n - 1$ e n do oscilador harmônico amortecido. Respectivamente temos que os coeficientes representam a taxa com a qual o estado faz as seguintes transições:

- $n + 1$ e decair para o estado n ;

¹¹Usamos esta expressão: $\gamma = 2\pi g(\omega_0) |\kappa(\omega_0)|^2 = 2\pi C\omega_0^j$ como um modelo de acoplamento entre o sistema e reservatório no limite de contínuo, tal que as correlações entre os modos do reservatório se anulem muito mais rapidamente que as correlações entre o sistema e o reservatório. Por exemplo, para o nosso caso, $j = 3$ já nos dá uma boa aproximação.

- n e decair para o estado $n - 1$;
- $n - 1$ e excitar para o estado n e
- n e excitar para o estado $n + 1$.

Em nossos trabalhos estudamos basicamente a equação mestra acima (2.38), sob o ponto de vista de sistemas de variáveis contínuas.

2.4 Variáveis contínuas

Um sistema quântico de variáveis contínuas de n -modos é definido como sendo descrito pelo espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{k=1}^n \mathcal{H}_k \quad (2.40)$$

onde os espaços de Hilbert \mathcal{H}_k são de dimensão infinita. Como exemplo podemos citar o Hamiltoniano que descreve uma coleção de n osciladores harmônicos (ou seja, os modos do campo em questão)

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^n \hbar\omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right), \quad (2.41)$$

onde os operadores \hat{a}_k^\dagger e \hat{a}_k ($a_k|0\rangle_k = 0$) são os operadores de criação e aniquilação, respectivamente. Estes operadores respeitam as seguintes relações de comutação:

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}, \quad [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = 0. \quad (2.42)$$

Usaremos unidades tais que $\hbar = 1$.

As quadraturas do campo para cada modo serão

$$\begin{aligned} \hat{q}_k &= \frac{\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger}{\sqrt{2}} \\ \hat{p}_k &= \frac{\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger}{i\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Podemos agrupar os operadores acima em um vetor, a fim de colocar as relações

de comutação de uma forma que fique mais clara sua conexão com grupos simpléticos¹². Definindo

$$\hat{R} = (\hat{q}_1, \hat{p}_1, \hat{q}_2, \hat{p}_2, \dots, \hat{q}_n, \hat{p}_n)^T \quad (2.44)$$

podemos escrever a relação de comutação posição/momento da seguinte forma:

$$[\hat{R}_k, \hat{R}_l] = i\Omega_{kl}, \quad (2.45)$$

onde Ω é a forma simplética

$$\Omega = \bigoplus_{k=1}^n \omega, \quad \omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Os auto-vetores do operador aniquilação constituem o conjunto dos estados coerentes, muito importante em óptica quântica, informação quântica, etc. Os estados coerentes possuem várias características distintas, por exemplo o conjunto de todos os estados coerentes é ‘super-completo’ no seu espaço de Hilbert, no sentido que – irei omitir o sub-índice k , supondo sempre sistemas de VC de 1 modo – dois estados coerentes não são ortogonais, i.e. $\langle \alpha' | \alpha \rangle = e^{-|\alpha' - \alpha|^2}$, mas apesar disso o conjunto dos estados coerentes forma uma relação de completeza:

$$\mathbf{1} = \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| \quad (2.47)$$

onde $|\alpha\rangle$ é o estado coerente $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle$, onde $\hat{D}(\alpha)$ é o operador deslocamento

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}. \quad (2.48)$$

Isto é, se um estado quântico, evoluindo como um oscilador harmônico, está no estado coerente $|\alpha\rangle$, existe uma probabilidade não-nula dele estar no estado $|\alpha'\rangle$; também, por haver uma relação de completeza, podemos escrever qualquer estado coerente como uma soma (uma integral no caso) de estados coerentes. Assim podemos decompor numa forma diagonal qualquer estado.

Em termos dos estados de Fock (que expandem o espaço de Hilbert no caso do oscilador harmônico, $\mathcal{H}_k = \text{span}\{|n_k\rangle\}$) os estados coerentes podem ser escritos

¹²Um grupo simplético de $2n$ entradas reais por exemplo, $Sp(2n, \mathbb{R})$, é o grupo de matrizes simpléticas (ou seja, as matrizes M são tais que: $M^T \Omega M = \Omega$ e determinante igual a 1) $2n$ por $2n$ com entradas em \mathbb{R} , que possui a operação de multiplicação de matrizes. A álgebra que satisfaz este grupo é o conjunto de matrizes A , de entradas reais, que satisfaz: $\Omega A + A^T \Omega = 0$.

como

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha^j}{\sqrt{j!}} |j\rangle. \quad (2.49)$$

Para muitos modos podemos escrever o operador deslocamento como

$$D_\epsilon = e^{iR^T \Omega \epsilon}, \quad (2.50)$$

onde R^T é a transposta de R , (2.44). Assim temos $|\epsilon\rangle = D_\epsilon |0\rangle$ onde $\epsilon \in \mathbb{R}^{2n}$.

Um estado quântico de um sistema de dimensão infinita também pode ser totalmente descrito pela sua função característica:

$$\chi_s(\epsilon) = e^{s\|\epsilon\|^2/2} \text{tr}(\rho \hat{D}_\epsilon), \quad (2.51)$$

$\|\cdot\|^2$ é a norma em \mathbb{R}^{2n} . O vetor ϵ pertence a um espaço $2n$ -dimensional, que é chamado espaço de fase, em analogia com a dinâmica Hamiltoniana clássica.

Se fizermos uma transformada de Fourier na função característica, a relacionamos às chamadas *distribuições de quasi-probabilidade* $W_s(\epsilon)$, que também descrevem totalmente os estados quânticos. As distribuições são chamadas de quasi-probabilidade por poderem apresentar partes negativas – uma “assinatura quântica” como iremos comentar mais a frente neste trabalho. Mais precisamente escrevemos

$$W_s(\epsilon) = \frac{1}{\pi^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \chi_s(\kappa) e^{i\kappa^T \Omega \epsilon} d^{2n} \kappa. \quad (2.52)$$

Neste trabalho iremos concentrar as atenções na chamada *função de Wigner*, que é definida como $W_0(\epsilon)$. Em termos de $|x\rangle$ a função de Wigner pode ser escrita como

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi^n} \int_{\mathbb{R}^n} \langle x - x' | \rho | x + x' \rangle e^{ix' \cdot p} d^n x'. \quad (2.53)$$

2.4.1 Estados Gaussianos

Por definição, estados Gaussianos são os estados que possuem funções características e funções de quasi-probabilidade Gaussianas. Uma característica importante dos estados Gaussianos é que eles se mantêm Gaussianos sob uma evolução (i.e., um Hamiltoniano) no máximo quadrática nos operadores posição e momento (ou criação e aniquilação).

Um estado Gaussiano é completamente caracterizado pelos primeiros e segundos momentos estatísticos das quadraturas do campo, ou seja, pelo vetor de primeiros momentos $\vec{R} = (\langle \hat{R}_1 \rangle, \langle \hat{R}_2 \rangle, \dots, \langle \hat{R}_n \rangle)$ e pela *matriz de covariância* (MC) σ , cujos elementos são:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \langle \hat{R}_i \hat{R}_j + \hat{R}_j \hat{R}_i \rangle - \langle \hat{R}_i \rangle \langle \hat{R}_j \rangle. \quad (2.54)$$

Os primeiros momentos podem ser ajustados arbitrariamente por operações locais unitárias. Tais operações deixam invariantes propriedades físicas importantes – como entropia e emaranhamento – assim iremos fazer $\vec{R} = 0$.

A função de Wigner de um estado Gaussiano pode ser escrita como

$$W(R) = \frac{e^{-\frac{1}{2}R\sigma^{-1}R^T}}{\pi \sqrt{\det \sigma}}, \quad (2.55)$$

onde $R = (q_1, p_1, \dots, q_n, p_n)$.

Uma descrição completa de um estado Gaussiano pode ser feita estudando as propriedades da MC σ . No formalismo de mecânica estatística, os elementos da MC são as funções de correlação de 2-pontos entre as $2n$ variáveis canonicamente conjugadas. Note também que se multiplicarmos as entradas da matriz de covariância por $\hbar\omega_k$, vemos que os termos da diagonal podem ser expressos como energia, de modo que $\text{tr} \sigma$ se relaciona com a energia média do estado.

Por exemplo, a MC de um estado Gaussiano de 1-modo (que é o estado que trabalhamos até o momento) é:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle & \frac{1}{2} \langle xp + px \rangle \\ \frac{1}{2} \langle xp + px \rangle & \langle p^2 \rangle \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

onde fizemos $\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0$. Já a MC de um estado comprimido de 2-modos (que possui emaranhamento) com fator de compressão r pode ser escrita como:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \cosh 2r & 0 & \sinh 2r & 0 \\ 0 & \cosh 2r & 0 & -\sinh 2r \\ \sinh 2r & 0 & \cosh 2r & 0 \\ 0 & -\sinh 2r & 0 & \cosh 2r \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

Uma propriedade importante das MC's é a decomposição de um estado Gaussiano em modos normais. Uma MC pode sempre ser escrita na forma de Williamson

$$\sigma = S^T \nu S, \quad (2.58)$$

onde $S \in Sp(2n, \mathbb{R})$ e ν é a MC

$$\nu = \bigoplus_{k=1}^n \begin{pmatrix} \nu_k & 0 \\ 0 & \nu_k \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

Note que a MC pode ser vista como uma matriz formada por várias matrizes de ordem 2×2 . Analisando desta forma, cada matriz que compõe a diagonal principal é a MC local do modo k . Já as matrizes fora da diagonal representam as correlações (quânticas e clássicas) entre os modos, isto é (exemplo em 2-modos):

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12}^T & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad (2.60)$$

onde σ_1 e σ_2 são as MCs de cada modo e ε_{ij} as correlações entre os modos.

Para que uma matriz de covariância corresponda a um sistema físico ela tem que satisfazer alguns vínculos, pois nela estão contidas todas as informações (localmente invariantes) do sistema – tal como um operador densidade ρ tem que satisfazer algumas propriedades para corresponder a um sistema físico. Estes vínculos, juntamente com as relações de comutação entre os operadores x e p (ou a e a^\dagger) implicam em

$$\sigma + i\Omega \geq 0. \quad (2.61)$$

A relação acima deve ser satisfeita para *qualquer* estado de variáveis contínuas (Gaussiano ou não-Gaussiano) de modo a representar um estado físico; ela também implica em $\sigma \geq 0$. A desigualdade (2.61)¹³ é a forma mais completa do princípio de incerteza para os operadores canonicamente conjugados (forma de Robertson-Schroedinger [27]).

¹³A inequação (2.61) diz respeito aos auto-valores da matriz $\sigma + i\Omega$, ou seja, os auto-valores de $\sigma + i\Omega$ devem ser positivos.

2.4.2 Informação codificada em um estado Gaussiano

Parafrazeando Adesso e Illuminati [18, 28]: “O grau de informação contido num estado quântico corresponde à quantidade de conhecimento que possuímos *a priori* de predizer a saída de qualquer teste feito no estado”.

Uma medida da quantidade de informação é a pureza do estado ρ , definida por:

$$\mu(\rho) = \text{tr } \rho^2. \quad (2.62)$$

Temos que $\mu = 1$ quando o estado é puro e $\mu < 1$ para estados mistos.

Podemos também medir a quantidade de “desinformação”, ou a quantidade de mistura que o sistema possui, ou seja a Entropia. Existem várias definições de entropia, cada qual com seus defeitos/qualidades. Aqui iremos definir a entropia linear:

$$S_L(\rho) = 1 - \mu(\rho) = 1 - \text{tr } \rho^2, \quad (2.63)$$

e a entropia de von Neumann:

$$S_V(\rho) = - \text{tr } \rho \ln \rho. \quad (2.64)$$

Podemos também definir entropias relativas para um sistema composto de subsistemas, mas como trabalhamos com sistemas de 1-modo, iremos apenas citar uma, a chamada informação mútua:

$$I(\rho) = S_V(\rho_1) + S_V(\rho_2) - S_V(\rho), \quad (2.65)$$

onde ρ_i corresponde ao sistema i e ρ ao sistema global.

Para estados Gaussianos as quantidades acima se reduzem a um estudo da MC σ . Temos que a pureza é:

$$\mu(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\det \sigma}}, \quad (2.66)$$

a entropia de von Neumann é (n-modos):

$$S_V(\rho) = \sum_{i=1}^n f(\nu_i) \quad (2.67)$$

onde

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln \left(x + \frac{1}{2}\right) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \ln \left(x - \frac{1}{2}\right) \quad (2.68)$$

e ν_i é o espectro simplético (forma de Williamson) da MC. Por completeza, irei citar também a forma da informação mútua para um estado Gaussiano de 2-modos:

$$I(\rho_{AB}) = S_V(\rho_A) + S_V(\rho_B) - S_V(\rho_{AB}). \quad (2.69)$$

Note que, ao trabalharmos com estados Gaussianos, não há distinção entre estudarmos o estado do sistema, ρ , ou a matriz de covariância, σ . Assim, as equações acima podem ser usadas da mesma forma para a MC, por exemplo a informação mútua para um estado Gaussiano de 2-modos:

$$I(\sigma_{AB}) = S_V(\sigma_A) + S_V(\sigma_B) - S_V(\sigma_{AB}), \quad (2.70)$$

onde σ_{AB} é a MC global e $\sigma_{A(B)}$ é a MC do modo A (B).

Estimativa do Parâmetro de Dissipação de um Canal Bosônico

Durante nosso estágio sanduíche feito na Università degli Studi di Salerno, Itália, estudamos a Teoria de Estimativas Quânticas. Com esta teoria em mãos, abordamos o problema da estimativa do parâmetro de perda (dissipação) de um canal bosônico [11].

Suponha um físico experimental que possua duas estações de trabalho separadas e conectadas por um canal. Nosso colega pode transmitir estados quânticos (estados coerentes, estados comprimidos, estados de número, etc.) neste canal, por exemplo com o propósito de implementar um tipo de comunicação. O sinal de entrada em geral será alterado pelo canal. O problema é determinar quantitativamente qual tipo de ruído afeta o sinal. O que desejamos obter é qual o estado de teste ótimo que deve ser enviado pelo canal, e qual a medida ótima na saída precisa ser realizada a fim de estimar o parâmetro de perda com a máxima precisão possível. No trabalho [29] os autores solucionaram o problema utilizando estados Gaussianos, mais fáceis de produzir e manusear por exemplo utilizando óptica linear, porém a medida ótima encontrada pelos autores envolve medidas não Gaussianas, como contagem de fótons, o que dificulta sua realização. Outro detalhe é que ao utilizarmos estados Gaussianos a otimização é sub-ótima, atingindo o limite de máxima precisão somente em casos limites (que iremos mencionar no decorrer deste capítulo).

Neste capítulo iremos estudar a estimação do parâmetro de perda utilizando estados não-Gaussianos. Mostraremos claramente que para qualquer região de energia dos estados de entrada existe sempre um estado não-Gaussiano que melhora

a estimativa do parâmetro comparado com os estados Gaussianos.

3.1 Canais Bosônicos e Estimativas Quânticas

No capítulo 2 estudamos resumidamente os principais pontos da TEQ. Vimos que podemos utilizá-la para estudar um parâmetro desconhecido *do sistema*. Neste capítulo iremos utilizar as ferramentas desta teoria (derivada logarítmica simétrica, informação de Fisher quântica, limite de Cramér-Rao, etc) para estudar um parâmetro desconhecido relativo ao acoplamento entre sistema e reservatório. Faremos isso através de um ‘truque’ matemático, onde iremos reparametrizar, essencialmente, o tempo e com a equação mestra iremos poder calcular os objetos matemáticos necessários para investigar um problema de estimativas quânticas. Esta parametrização será detalhada abaixo.

Vamos considerar aqui um canal bosônico descrito pela equação mestra $d\rho/dt = (\gamma/2)\mathcal{L}[a]\rho$, onde:

$$\mathcal{L}[a]\rho = 2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a, \quad (3.1)$$

e a é o operador aniquilação no espaço de Fock. Nosso objetivo é estudar a estimativa ótima do parâmetro de perda γ , mas para isto iremos fazer uma reparametrização, de fato para obtermos expressões simplificadas para nossos cálculos. Estimar o parâmetro γ é equivalente a estudar o parâmetro $\phi \in (0, \pi/2)$ definido por

$$\tan^2 \phi = \exp(\gamma t) - 1. \quad (3.2)$$

Em termos de ϕ a equação mestra fica da seguinte forma:

$$\frac{d\rho}{d\phi} = \tan \phi \mathcal{L}[a]\rho, \quad (3.3)$$

cuja solução geral é da forma [30]:

$$\rho_\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sin^2 \phi)^n}{n!} (\cos \phi)^{a^\dagger a} a^n \rho_0 (a^\dagger)^n (\cos \phi)^{a^\dagger a}. \quad (3.4)$$

Recapitulando alguns elementos de TEQ, vistos no capítulo 2, porém no contexto que queremos aplicar neste problema. A estimação ótima de ϕ é atingida assintoticamente ao enviarmos N cópias independentes e identicamente distribuídas do estado de teste ótimo ρ_0 no canal e realizando em cada cópia a medida

ótima no sinal de saída ρ_ϕ . A finalidade disto é construir o estimador $\hat{\phi}$ que irá inferir o valor verdadeiro de ϕ com mínima variância possível. Para qualquer entrada ρ_0 , a medida ótima no estado de saída pode ser determinada em termos da derivada logarítmica simétrica (DLS) $\Lambda(\phi)$ definida implicitamente como o operador Hermitiano que satisfaz:

$$d\rho_\phi/d\phi = (1/2)[\rho_\phi\Lambda(\phi) + \Lambda(\phi)\rho_\phi]. \quad (3.5)$$

Usando a decomposição espectral $\rho_\phi = \sum_k \rho_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$, a DLS pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \partial_\phi \rho_\phi &= \frac{1}{2} [\rho_\phi \Lambda_\phi + \Lambda_\phi \rho_\phi] \\ \partial_\phi \rho_\phi &= \frac{1}{2} \left[\sum_n \rho_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \Lambda_\phi + \Lambda_\phi \sum_n \rho_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \right] \\ \partial_\phi \rho_\phi &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n,m} \rho_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \Lambda_\phi |\psi_m\rangle\langle\psi_m| + \sum_{n,m} \rho_n |\psi_m\rangle\langle\psi_m| \Lambda_\phi |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \right], \end{aligned}$$

trocando m por n e n por m no último termo (pois são apenas índices mudos, podemos trocar os nomes), temos:

$$\partial_\phi \rho_\phi = \frac{1}{2} \sum_{n,m} (\rho_n + \rho_m) |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \Lambda_\phi |\psi_m\rangle\langle\psi_m|.$$

Temos também que:

$$\partial_\phi \rho_\phi = \sum_{n,m} |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \partial_\phi \rho_\phi |\psi_m\rangle\langle\psi_m|.$$

Assim, podemos escrever a equação (3.5) como:

$$\sum_{n,m} |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \partial_\phi \rho_\phi |\psi_m\rangle\langle\psi_m| = \frac{1}{2} \sum_{n,m} (\rho_n + \rho_m) |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \Lambda_\phi |\psi_m\rangle\langle\psi_m|.$$

Das equações acima podemos tirar a seguinte expressão:

$$\langle\psi_n| \Lambda_\phi |\psi_m\rangle = \frac{2\langle\psi_n| \partial_\phi \rho_\phi |\psi_m\rangle}{\rho_n + \rho_m}, \quad (3.6)$$

sabemos também que [31, 32] um operador X , em sua forma matricial, pode ser escrito como

$$X = \sum_{a', a''} |a''\rangle \langle a''| X |a'\rangle \langle a'|,$$

assim podemos escrever a equação (3.6) como:

$$\Lambda_\phi = \sum_{n,m} 2 \frac{\langle \psi_n | \partial_\phi \rho_\phi | \psi_m \rangle}{\rho_n + \rho_m} |\psi_n\rangle \langle \psi_m|. \quad (3.7)$$

Esta última expressão é a que utilizamos para o cálculo da DLS.

As medidas descritas como sendo projetores na base onde a DLS é diagonal saturam o limite de Cramér-Rao:

$$\text{Var}_\phi[\hat{\phi}] \geq \frac{1}{NH(\phi)}, \quad (3.8)$$

onde a informação de Fisher quântica (IFQ) $H(\phi)$ é definida como:

$$H(\phi) = \text{tr}[\rho_\phi \Lambda_\phi^2]. \quad (3.9)$$

Nosso problema então se resume em determinarmos o estado de entrada ótimo com uma dada energia média finita, \bar{n} , tal que a IFQ do estado final seja máxima.

O limite máximo de precisão atingível por um estado quântico é calculado supondo que podemos acessar os graus de liberdade do reservatório (*i.e.* dos infinitos osciladores internos do canal). Claro que esta suposição é ideal, mas o limite é atingível como iremos mostrar. Neste caso temos que o limite de Cramér-Rao fica:

$$\text{Var}_\phi[\hat{\phi}] \geq \frac{1}{4\bar{n}N}. \quad (3.10)$$

Isto significa que uma estimativa ótima necessita de estados de entrada que nos dão na saída uma IFQ exatamente igual a $4\bar{n}$, para cada uma das N cópias. Se os estados de entrada são limitados à classe de estados Gaussianos de 1-modo, a estimativa nunca é ótima: o limite máximo só é atingido assintoticamente para ϕ tendendo a 0 ou $\pi/2$, enquanto a IFQ para o melhor estado Gaussiano pode chegar a apenas $\sim 2\bar{n}$ para perdas intermediárias¹. Neste trabalho mostramos que estados não-Gaussianos, no caso estados de Fock, e superposições dos primeiros destes estados são de fato ótimos para a estimativa do parâmetro de perda em

¹Note que $\phi = 0$ implica em $\gamma = 0$ e $\phi = \pi/2$ implica em $\gamma \rightarrow \infty$.

canais bosônicos com a precisão máxima permitida pela mecânica quântica.

3.2 Estados de Fock

Consideremos primeiramente, como estados de entrada, estados de Fock $\rho_0 = |n\rangle\langle n|$, onde $\bar{n} = n$. O estado evoluído é dado por, de acordo com (3.4):

$$\rho_\phi = \sum_{k=0}^n (\sin^2 \phi)^k \binom{n}{k} (\cos^2 \phi)^{n-k} |n-k\rangle\langle n-k|. \quad (3.11)$$

A DLS para este caso é:

$$\Lambda(\phi) = \tan \phi \sum_{k=0}^n (g_k/f_{n-k}) |k\rangle\langle k|, \quad (3.12)$$

onde

$$g_k = 2[f_{n-k-1}(k+1)(1-\delta_{k,n}) - f_{n-k}k] \quad \text{e} \quad f_k = \binom{n}{k} (\sin^2 \phi)^k (\cos^2 \phi)^{n-k} \quad (3.13)$$

. A informação de Fisher quântica é:

$$H(\phi) = \tan^2 \phi \sum_{k=0}^n (g_k^2/f_{n-k}) = 4\bar{n}. \quad (3.14)$$

Vemos pela equação (3.14) que os estados de Fock nos dão a estimativa *ótima e incondicional* do parâmetro de perda independente do valor verdadeiro do mesmo. Assim, um esquema de medidas adaptativas se torna desnecessário neste caso² (diferentemente do caso Gaussiano).

Ainda neste caso, mostramos que as medidas ótimas que devem ser realizadas em cada cópia, e assim projetando no auto-espço de Λ_ϕ para obtermos a saturação do limite de Cramér-Rao, podem ser implementadas somente por contagem de fótons. Dado o grande controle experimental atingido nas técnicas de medidas por contagem de fótons [5] e a alta fidelidade de se produzir estados de Fock

²Medidas adaptativas são aquelas em que não possuímos todas as N cópias de uma só vez para medirmos, mas uma cópia de cada vez. Assim, é possível utilizar a medida feita na cópia anterior, por exemplo a cópia $k-1$, para escolher qual medida deve ser realizada na próxima cópia, k .

de, por exemplo, $n \lesssim 10$ fótons [33] (em experimentos com campos ópticos ou deterministicamente em cavidades de microondas), escolhendo $\bar{n} = 2$ como uma energia ideal para trabalharmos, nossos resultados fornecem o caminho para a verificação experimental da TEQ e as medidas da DLS para inferir o valor do parâmetro de perda de canais de dissipação.

Pode-se argumentar que, na prática, estados Gaussianos (estados coerentes ou estados comprimidos) são mais simples de se produzir e manipular que estados de Fock, porém aqui mostramos que o resultado para estados coerentes está muito distante do resultado ótimo. Abaixo mostraremos figuras contendo os resultados para os estados de Fock em comparação com estados de superposição dos mesmos, estados coerentes e estados Gaussianos comprimidos.

Como exemplo, no regime de perdas pequenas ou médias ($\phi < \pi/4$), correspondendo como modelo para canais de fibras ópticas, a precisão atingida por um estado de Fock de 2 fótons, ou seja $\bar{n} = 2$, pode ser atingida por um campo coerente com energia muito maior ($\bar{n} = 26$ para $\phi = \pi/16$ e $\bar{n} = 105$ para $\phi = \pi/32$), um aumento em energia que pode não ser bem vindo em termos de otimização, devido ao fato de uma entrada com energia muito alta pode danificar o canal.

De fato, para a implementação experimental da estimativa do canal, é desejável que as entradas possuam baixa energia para que o mesmo não seja alterado, a fim de permitir que possamos introduzir repetidamente os estados de saída. Assim, como os estados de Fock não atingem energias inferiores a 1, e também só possuem energias discretas, vamos nas próximas seções identificar classes de estados não-Gaussianos que podem atingir o limite máximo de precisão na estimativa do parâmetro de perda para qualquer valor de energia, especialmente no regime $0 \leq \bar{n} \leq 1$.

3.3 Estados tipo ‘qubit’

O candidato mais simples como estado inicial no regime de baixas energias é a superposição do estado de vácuo $|0\rangle$ e o estado de 1-fóton $|1\rangle$:

$$\rho_0 = |\psi_0^{(1)}\rangle\langle\psi_0^{(1)}|, \quad (3.15)$$

onde $|\psi_0^{(1)}\rangle = \cos\theta|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\theta|1\rangle$. O número médio de fótons neste caso é dado por: $\bar{n} = \sin^2\theta$.

O estado evoluído, calculado a partir de (3.4), é:

$$\rho_\phi = c_0|0\rangle\langle 0| + c_1^*|1\rangle\langle 0| + c_1|0\rangle\langle 1| + c_2|1\rangle\langle 1|, \quad (3.16)$$

onde

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi \\ c_1 &= e^{i\varphi} \sin \theta \cos \theta \cos \phi \\ c_2 &= \sin^2 \theta \cos^2 \phi. \end{aligned}$$

Diagonalizando o estado acima e calculando a DLS:

$$\Lambda_\phi = 2 \tan \phi \sum_{p,q} \frac{L_{pq}}{\lambda_p + \lambda_q} |\psi_q\rangle\langle \psi_p|, \quad (3.17)$$

onde p e q variam de 1 a 2 e

$$\begin{aligned} L_{pq} &= 2 \sum_i \lambda_i \frac{|c_0 - \lambda_i|^2}{N_i^2} \frac{|c_1|^2}{N_q N_p} - (\lambda_p + \lambda_q) \frac{(c_0 - \lambda_p)(c_0 - \lambda_q)^*}{N_p N_q}, \\ N_j &= \sqrt{|c_1|^2 + (c_0 - \lambda_j)^2}, \\ \lambda_1 &= \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \sin^2 2\phi \sin^4 \theta} \right), \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \sin^2 2\phi \sin^4 \theta} \right), \\ |\psi_1\rangle &= \frac{1}{N_1} [-c_1^*|0\rangle + (c_0 - \lambda_1)|1\rangle] \\ |\psi_2\rangle &= \frac{1}{N_2} [-c_1^*|0\rangle + (c_0 - \lambda_2)|1\rangle]. \end{aligned}$$

Calculando a IFQ ($H(\phi) = \text{tr}[\rho_\phi \Lambda_\phi^2]$) temos o seguinte resultado (independente de φ):

$$H^{(1)}(\phi) = 4\bar{n}[1 - (1 - \bar{n}) \cos^2 \phi]. \quad (3.18)$$

Note que (figuras 3.1 e 3.2) os exemplos simples acima – estados de Fock e estados tipo qubit – nos dão um aumento considerável sobre a melhor estimativa feita com estados Gaussianos para parâmetro de perda (dissipação) com valor intermediário, porém nos regimes de dissipação pequena e baixa energia os estados Gaussianos (que neste limite são simples estados comprimidos [29]) ainda são estados de teste

melhores.

Nas figuras abaixo mostramos os resultados para todos os estados que estudamos, incluindo estados tipo qutrit e ququart que serão tratados nas próximas seções.

3.4 Estados tipo ‘qutrit’

Nesta seção consideramos superposições do vácuo e dos dois primeiros estados de Fock, assim nosso estado inicial é:

$$\rho_0 = |\psi_0^{(2)}\rangle\langle\psi_0^{(2)}|, \quad (3.19)$$

onde

$$|\psi_0^{(2)}\rangle = \cos\alpha|0\rangle + e^{i\mu}\sin\alpha\sin\beta|1\rangle + e^{i\nu}\sin\alpha\cos\beta|2\rangle. \quad (3.20)$$

Note que α pode ser fixado como função de β e \bar{n} ,

$$\alpha = \arcsin\left(\sqrt{\frac{2\bar{n}}{\cos(2\beta) + 3}}\right).$$

O cálculo da DLS envolve a diagonalização de uma matriz 3×3 , *i.e.* o estado final. A IFQ deve ser otimizada (maximizada), para um dado \bar{n} , para as fases μ e ν e também para o parâmetro β (este último parâmetro varia de $\beta = 0$, que corresponde a uma superposição de $|0\rangle$ e $|2\rangle$, até $\beta = \pi/2$, que corresponde a uma superposição do tipo qubit, $|0\rangle$ e $|1\rangle$, tratado na seção anterior).

A maximização para as fases nos dá $\mu = \nu = \pi$. O valor ótimo de β pode ser encontrado numericamente para cada valor de \bar{n} e ϕ , ver figura 3.3. A IFQ para este caso é mostrada nas figuras 3.1 e 3.2, onde o cálculo foi feito numericamente. O estado tipo qutrit nos dá resultados melhores que o estado tipo qubit, como era esperado, e também obtemos uma melhora sobre os estados Gaussianos ótimos, para a mesma energia, para todo o intervalo dos parâmetros, ou seja para qualquer valor do parâmetro de perda.

No limite de estados com energia tendendo a zero, $\bar{n} \rightarrow 0$, o estado ótimo Gaussianos é o estado de vácuo comprimido, cuja IFQ é $H^{(G)}(\phi) = 4\bar{n}[1 + z^2]/[1 + 2z(1 + \bar{n}) + z^2]$ (onde $z = \tan^2\phi$), enquanto o estado ótimo de qutrit é uma

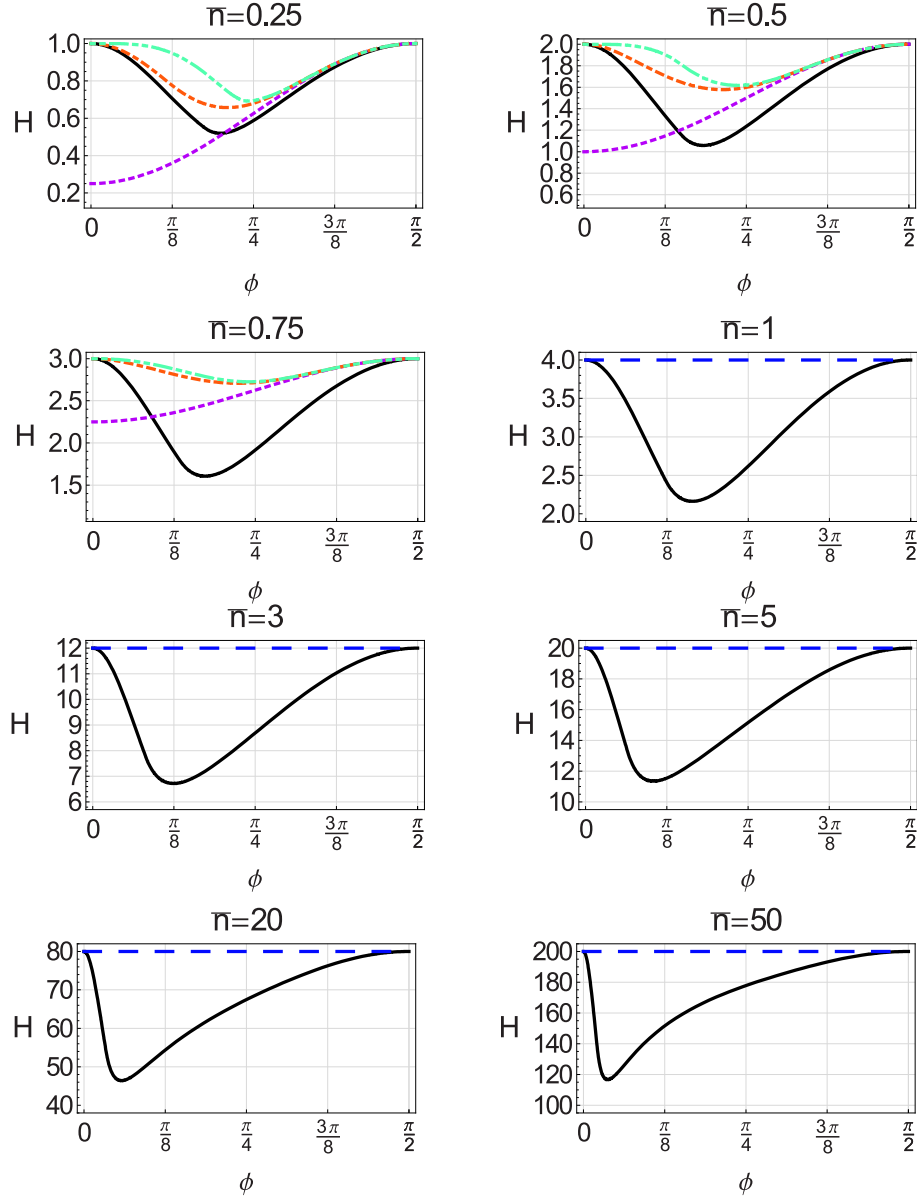


Figura 3.1: Informação de Fisher Quântica $H(\phi)$ versus o parâmetro de perda ϕ para diferentes valores da energia de entrada \bar{n} . Linha sólida preta: estados ótimos Gaussianos [29]; linha tracejada azul: estados de Fock $|\bar{n}\rangle$; linha pontilhada roxa: estados tipo-qubit $|\psi_0^{(1)}\rangle$; linha ponto-traço laranja: estado ótimo de qutrit $|\psi_0^{(2)}\rangle$; linha ponto-ponto-traço verde: estados ótimos tipo-ququart $|\psi_0^{(3)}\rangle$.

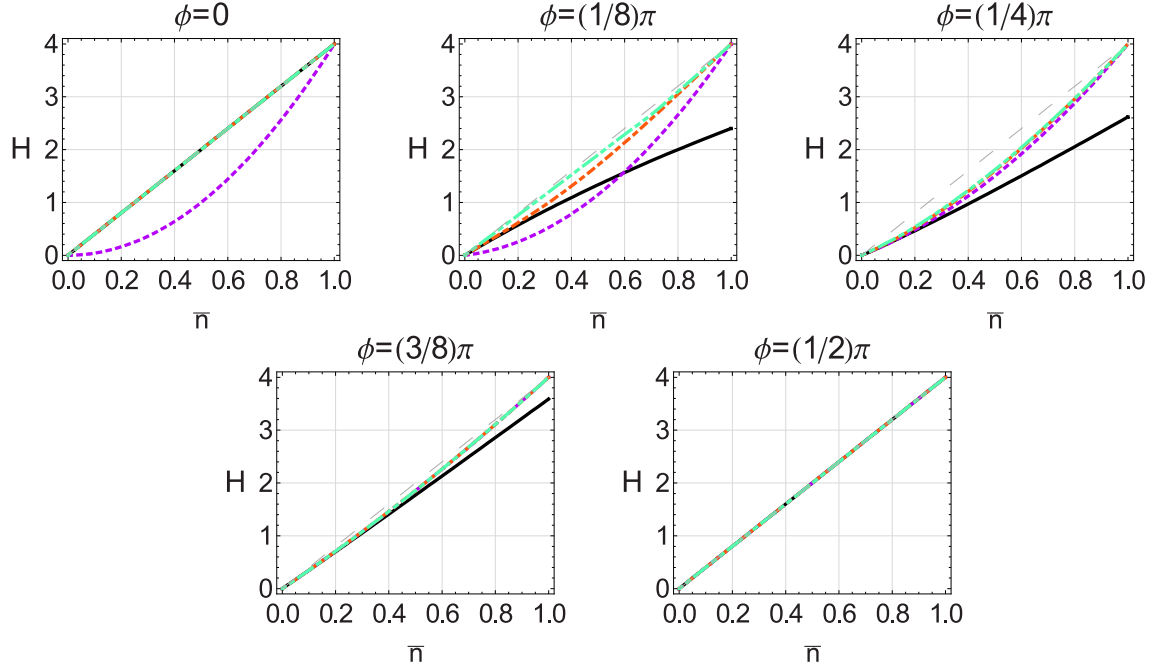


Figura 3.2: Informação de Fisher Quântica $H(\phi)$ versus a energia de entrada dos estados iniciais \bar{n} para diferentes valores do parâmetro de perda ϕ . Linha sólida preta: estados ótimos Gaussianos [29]; linha pontilhada roxa: estados tipo-qubit $|\psi_0^{(1)}\rangle$; linha ponto-traço laranja: estado ótimo de qutrit $|\psi_0^{(2)}\rangle$; linha ponto-ponto-traço verde: estados ótimos tipo-ququart $|\psi_0^{(3)}\rangle$. A linha pontilhada fina mostra o limite quântico máximo, $H(\phi) = 4\bar{n}$.

superposição de $|0\rangle$ e $|2\rangle$ ($\beta = 0$) com IFQ:

$$H^{(2)}(\phi) = 4\bar{n}[1 + z^2]/[1 + z(2 - \bar{n} + z)] \geq H^{(G)}(\phi). \quad (3.21)$$

No limite $\bar{n} \rightarrow 1$, o valor de β tende a $\pi/2$, $\alpha \rightarrow \pi/2$ e o estado de qutrit converge para o estado de Fock $|1\rangle$.

3.5 Relação com estados de-Gaussificados

Uma pergunta que gostaríamos de esclarecer é se este estado pode ser interpretado como um truncamento de dimensão finita de um estado não-Gaussiano mais geral, de dimensão infinita, e qual seria este estado. Para isto, consideramos

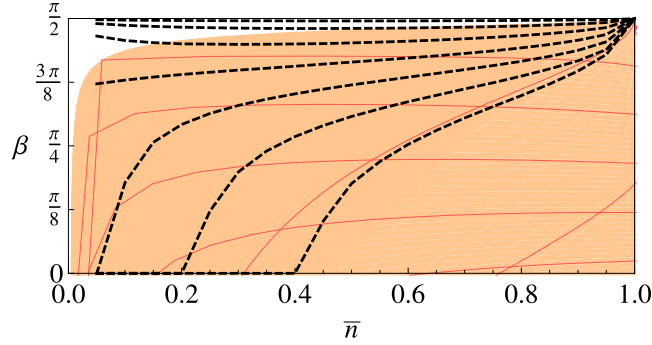


Figura 3.3: Superfície hachurada: ver explicação no texto na seção ‘Relação com estados de-Gaussificados’ para um estado truncado de *photon subtracted*. Linhas pontilhadas: valores de β ótimos como função de \bar{n} , correspondendo ao valor máximo da IFQ entre todos os estados tipo qutrit, para diferentes valores de ϕ (de baixo para cima $\phi = \frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{16}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{16}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}$).

um estado não-Gaussiano de *photon subtracted*:

$$\rho_0^{(nG)} = \mathcal{N}^{-1} a D(\eta) S(r) |0\rangle \langle 0| S^\dagger(r) D^\dagger(\eta) a^\dagger, \quad (3.22)$$

onde η é o deslocamento do campo e r é a compressão do mesmo. Estudamos a projeção deste estado no subespaço gerado pelo vácuo e pelos dois primeiros estados de Fock. Esta escolha é devida ao fato de que as estratégias de adição ou subtração de fótons estão entre as ferramentas mais promissoras para a produção de fontes ópticas não-Gaussianas [34, 35].

O truncamento de estados do tipo ρ_0^{nG} é dado por:

$$|\psi^{(nGtr)}\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle + c_2|2\rangle \quad (3.23)$$

, onde os coeficientes $c_j = k_j / (k_0^2 + k_1^2 + k_2^2)^{1/2}$, com $k_0 = \eta(\tanh r + 1)$, $k_1 = k_0^2 - \tanh r$, $k_2 = 2^{-1/2} k_0 (k_0^2 - 3 \tanh r)$. Os coeficientes k_j são funções do módulo do deslocamento η e a amplitude da compressão r (a fase relativa à compressão pode ser feita igual a 0 para maximizar a IFQ). O que encontramos foi que o estado puro $\rho_0^{(nG)}$ e $\rho_0^{(nGtr)} = |\psi^{(nGtr)}\rangle \langle \psi^{(nGtr)}|$ sempre possuem uma alta fidelidade, *i.e.* $\mathcal{F} = \text{Tr}[\rho_0^{(nG)} \rho_0^{(nGtr)}] > 92\%$. Ao adicionarmos alguns poucos termos na superposição a fidelidade rapidamente aumenta para 99%.

O número médio de fótons \bar{n} é uma função não-linear de η e r . Então, a

fim de visualizar a maximização de H sobre estes dois parâmetros, para um valor fixo de \bar{n} , nós variamos η e r no espaço real (pois são parâmetros reais) e mostramos na área hachurada na figura 3.3 os valores atingíveis de β (caracterizando a parametrização original dos estados de qutrit para uma energia fixa) versus os valores de \bar{n} que são gerados pela variação dos parâmetros. Ou seja, um estado do tipo (3.23) pode possuir parâmetros que atingem algum ponto da região hachurada na figura 3.3. Encontramos que existem combinações de η e r para o estado *photon subtracted* truncado tais que o ângulo β pode assumir praticamente todos os valores no intervalo $[0, \pi/2]$ para cada $\bar{n} \in [0, 1]$. A superposição da região hachurada com as curvas de β em função de \bar{n} nos dá o valor máximo da Informação de Fisher Quântica sobre todos os estados de qutrit, para diferentes valores de ϕ . Isto é, a área hachurada da figura 3.3 nos dá os valores atingíveis no espaço dos coeficientes β e \bar{n} dos estados de qutrit, como função dos parâmetros η e r associados ao truncamento dos estados *photon subtracted* truncados³.

Excluindo-se uma pequena região de baixas energias e dissipação extremamente alta (em que praticamente todos os estados, como estados não-Gaussianos truncados, estados de qubit, qutrit, etc. nos dão praticamente o mesmo resultado, próximo ao limite de precisão no nosso problema de estimativa), sempre existem valores de η e r tais que o estado de *photon subtracted* truncado reproduz exatamente o estado de qutrit ótimo (pictoricamente, as linhas pontilhadas existem justamente na região hachurada da figura 3.3). Por outro lado, esta conclusão não se aplica quando estudamos o truncamento de estados Gaussianos até o estado de $|2\rangle$ (*i.e.* $\rho_{Gtr} = b_1|0\rangle + b_2|1\rangle + b_3|2\rangle$, onde b_j são coeficientes definidos da mesma forma que os k_j para os estados truncados *photon subtracted*). Estes não são ótimos entre os estados de qutrit para vários valores de energias e parâmetros de dissipação, porém, devido ao fato de serem essencialmente não-Gaussianos, estes estados nos dão resultados melhores para o problema em questão que os estados Gaussianos originais.

Este último fato, dos estados Gaussianos truncados melhorarem a otimização da IFQ em comparação com os estados Gaussianos originais, mostra claramente que uma estratégia de ‘de-Gaussificação’, seja implementada por meio de truncamento, subtração de fótons, ou ambos, geralmente nos dá resultados melhores no problema de estimativas do parâmetro de perda num canal bosônico. É razoável conjecturar que existem famílias de estados não-Gaussianos (por exemplo

³A ideia é: comparamos os estados de qutrit com os estados (3.23) e estes últimos podem atingir qualquer ponto na região hachurada da figura 3.3

estados não truncados (*photon subtracted*) que representam fontes ótimas para o problema em questão no regime de baixas energias, atingindo o limite máximo permitido de precisão também para dissipação intermediária, onde superposições dos primeiros estados de Fock não saturam o limite $4\bar{n}$ para a IFQ $H(\phi)$ (apesar de se aproximarem muito deste limite).

3.6 Superposições de ordem superior

As conclusões anteriores podem ser confrontadas ao investigarmos o efeito da adição de termos de ordem superior nas superposições. Considere por exemplo os estados de ququart

$$\rho_0 = |\psi_0^{(3)}\rangle\langle\psi_0^{(3)}| \quad (3.24)$$

com $|\psi_0^{(3)}\rangle = \sum_{n=0}^3 c_n |n\rangle$. A IFQ ótima pode ser obtida ao otimizarmos numericamente os coeficientes c_n para cada \bar{n} e ϕ (resultados nas figuras 3.1 e 3.2).

Com estes estados conseguimos uma melhora ainda maior sobre os estados de qubit e qutrit, bem como sobre os estados Gaussianos. A sucessão de curvas para $H^{(k)}(\phi)$ sugere uma convergência para $4\bar{n}$ para $k \rightarrow \infty$. Podemos concluir, ou conjecturar, que a melhor estimativa necessita de estados não-Gaussianos para qualquer valor de energia e para qualquer valor do parâmetro de perda (dissipação).

Note que nem todos os estados não-Gaussianos melhoram a precisão na estimativa do parâmetro em questão. Por exemplo, a IFQ para estados de superposição coerente é quase sempre menor que as calculadas utilizando estados Gaussianos.

3.7 Conclusão

Mostramos que estados não-Gaussianos, como estados de Fock e superposições destes, são os melhores estados de entrada a fim de atingir uma precisão máxima na estimativa do parâmetro de perda num canal bosônico. O fato dos estados de Fock serem ótimos pode ser entendido devido ao fato do parâmetro a ser estimado é essencialmente uma taxa de decaimento da energia do campo, e como os estados de Fock são auto-estados do observável *energia* eles possuem incerteza em energia zero na sua preparação, pelo menos em termos teóricos.

Quantificação de propriedades quânticas em superposições coerentes e em estados Gaussianos

Neste capítulo iremos discutir especificamente nosso trabalho em que estudamos a quantificação de propriedades quânticas em estados de superposição coerente (os chamados estados tipo ‘gato de Schroedinger’) e em estados Gaussianos [12, 13] – note que ambos constituem estados de variáveis contínuas, porém os estados de superposição coerente não são Gaussianos. A pergunta que nos direcionamos neste trabalho foi: quão rápido estes dois tipos de estado perdem sua potencialidade de exibir propriedades quânticas (tanto propriedades individuais de cada um dos estados quanto as que eles podem possuir em comum)? Também fizemos uma comparação quantitativa (analítica) entre estes dois estados, através do cálculo da fidelidade entre eles.

Ainda neste capítulo, mostramos resumidamente um trabalho que fizemos em colaboração, onde comparamos o crescimento da entropia de von Neumann para sistemas que estão acoplados a reservatórios com infinitos graus de liberdade (como mostramos no capítulo 2 no estudo de equações mestras) e para sistemas acoplados a reservatórios com poucos graus de liberdade (como um ‘reservatório’ formado apenas por um oscilador harmônico invertido). Os detalhes estão no final deste capítulo e na referência [14].

4.1 Estados de Superposição

Como estado inicial usamos:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{N} \left(|\beta_0\rangle + e^{i\theta} |-\beta_0\rangle \right), \quad (4.1)$$

onde

$$N = \sqrt{2(1 + e^{-2|\beta_0|^2} \cos \theta)} \quad (4.2)$$

e $|\beta_0\rangle$ é um estado coerente. Se $\theta = 0(\pi)$ temos uma superposição par (ímpar). Estes estados podem ser experimentalmente produzidos tanto em CQED (eletrodinâmica quântica de cavidades) [36] e por pulsos propagantes [37] e são principalmente utilizados para estudar os efeitos de decoerência e transições clássico-quânticas.

A dinâmica dissipativa que estudamos é (já citada anteriormente):

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}\rho, \quad (4.3)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\cdot &= -i\omega[a^\dagger a, \cdot] + k(\bar{n}_B + 1)(2a \cdot a^\dagger - a^\dagger a \cdot - \cdot a^\dagger a) \\ &+ k \bar{n}_B(2a^\dagger \cdot a - a a^\dagger \cdot - \cdot a a^\dagger), \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde ω é a frequência do oscilador principal (evolução unitária), \bar{n}_B é o número médio de excitações do ambiente e k é a constante de acoplamento entre sistema-reservatório. Usamos neste trabalho $\hbar = 1$.

A solução para o caso de temperatura zero é dada por

$$\begin{aligned} \rho_A(t) &= \frac{1}{N^2} \left\{ |\beta(t)\rangle\langle\beta(t)| + |-\beta(t)\rangle\langle-\beta(t)| + f(\beta_0, t) \times \right. \\ &\quad \left. \times (e^{i\theta} |\beta(t)\rangle\langle-\beta(t)| + e^{-i\theta} |-\beta(t)\rangle\langle\beta(t)|) \right\}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde N é a normalização (4.2),

$$f(\beta_0, t) = e^{-2(|\beta_0|^2 - |\beta(t)|^2)} \quad (4.6)$$

e

$$\beta(t) = \beta_0 e^{-(i\omega + k)t}. \quad (4.7)$$

Note que a solução estacionária é o estado Gaussiano puro

$$\rho_A(t \rightarrow \infty) = |0\rangle\langle 0|. \quad (4.8)$$

Nesta sessão iremos considerar somente o caso de temperatura zero.

O operador densidade (4.5) possui os seguintes autovetores [38]

$$\begin{aligned} |e(t)\rangle &= \frac{1}{N_e(t)} [|\beta(t)\rangle + |-\beta(t)\rangle], \\ |o(t)\rangle &= \frac{1}{N_o(t)} [|\beta(t)\rangle - |-\beta(t)\rangle] \end{aligned} \quad (4.9)$$

cujos auto-valores são dados por

$$\begin{aligned} p_e(t) &= \frac{1}{N^2} (1 + e^{-2|\beta(t)|^2}) (1 + e^{-2(|\beta_0|^2 - |\beta(t)|^2)} \cos \theta), \\ p_o(t) &= \frac{1}{N^2} (1 - e^{-2|\beta(t)|^2}) (1 - e^{-2(|\beta_0|^2 - |\beta(t)|^2)} \cos \theta) \end{aligned} \quad (4.10)$$

e

$$\begin{aligned} N_e(t) &= \sqrt{2(1 + e^{-2|\beta(t)|^2})} \\ N_o(t) &= \sqrt{2(1 - e^{-2|\beta(t)|^2})}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Os subscritos e e o correspondem a superposições pares e ímpares respectivamente.

4.1.1 Interferência e Compressão (Squeezing)

A potencialidade de estados de superposição produzirem interferência no espaço de fase está codificada nas partes negativas da respectiva função de Wigner.

A evolução temporal da função de Wigner de estados da forma (4.1) é dada por:

$$W(\epsilon, \epsilon^*, t) = \frac{4}{N^2} \left\{ \exp[-2|\beta|^2 - 2|\epsilon|^2] \cosh \left[4|\beta|^2 \Re \left(\frac{\epsilon}{\beta} \right) \right] + f(\beta_0, t) e^{-2|\epsilon|^2} \cos \left[\theta - 2|\beta|^2 \Im \left(\frac{\epsilon}{\beta} \right) \right] \right\}. \quad (4.12)$$

A equação acima é obtida usando a relação $W(\epsilon, \epsilon^*) = 2 \operatorname{tr}[\rho_A D(\epsilon) (-1)^{\hat{n}} D^{-1}(\epsilon)]$, onde $D(\epsilon)$ é o operador deslocamento, $(-1)^{\hat{n}}$ é o operador paridade, $\epsilon = \sqrt{\frac{\omega}{2}}(x+ip)$, os símbolos \Re , \Im correspondem à parte real e imaginária da função, respectivamente. Alguns resultados para a função de Wigner (FW) em tempo zero ($t = 0$) para o estado de superposição coerente (ESC) par e ímpar são mostrados nas figuras 4.1-4.2, para diferentes valores de β_0 .

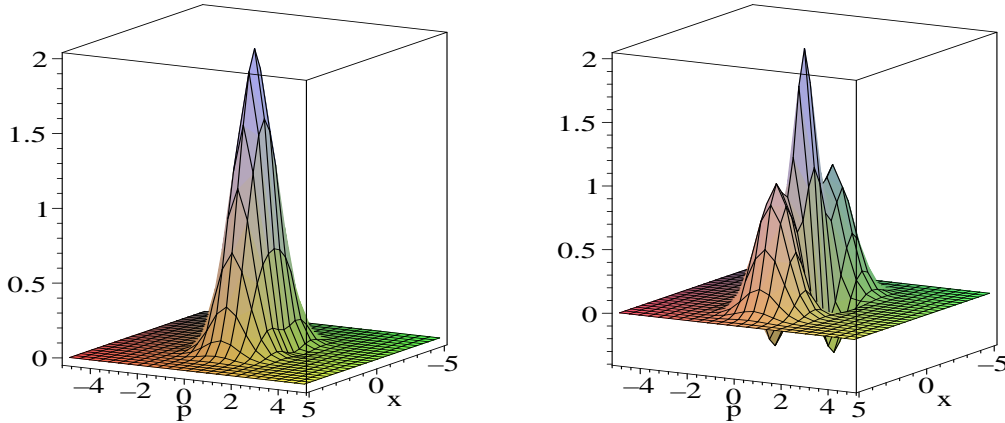


Figura 4.1: Função de Wigner em tempo igual a zero ($t = 0$) para os estados de superposição par. Parâmetros utilizados: $\theta = 0$, $\omega = 1$, $k = 0.1$, $\beta_0 = 0.8$ (figura da esquerda) e $\beta_0 = 1.5$ (figura da direita).

As partes negativas da FW para o mesmo valor de β_0 são sistematicamente maiores para ESC ímpares. Contudo elas desaparecem simultaneamente no conhecido tempo de decoerência $\tau = (4|\beta_0|^2 k)^{-1}$. Quando este tempo característico é alcançado, nenhum efeito quântico é efetivo, nem squeezing ou oscilações no número de fótons. Estes fenômenos, contudo, possuem escalas de tempo diferentes que o tempo de decoerência. Na figura 4.1 (esquerda) é claro (ao menos qualitativamente) que a FW do ESC par, com pequenos valores de β_0 , é quasi-Gaussiana, a diferença crucial é que ela possui valores negativos (mostra interferência). Quando aumentamos o valor de β_0 , as partes negativas da função de Wigner do ESC par são

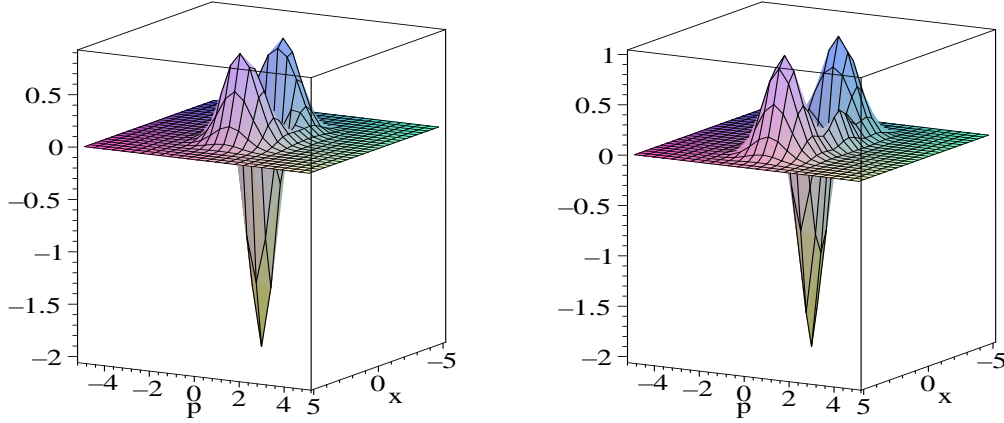


Figura 4.2: Função de Wigner em tempo igual a zero ($t = 0$) para os estados de superposição ímpar. Parâmetros utilizados: $\theta = \pi$, $\omega = 1$, $k = 0.1$, $\beta_0 = 0.8$ (figura da esquerda) e $\beta_0 = 1.5$ (figura da direita).

evidentes. A FW do ESC ímpar sempre possui valor negativo, de valor absoluto alto, particularmente no ponto $x = p = 0$.

Uma maneira fisicamente interessante de entender a dinâmica da FW para o ESC par e ímpar é o seguinte: na figura 4.3 abaixo mostramos a fidelidade de cada estado com o estado de vácuo (que é atingido assintoticamente) como função do tempo. A fidelidade $F(\rho_A, |0\rangle\langle 0|) = \sqrt{\langle 0|\rho_A|0\rangle}$ é dada por

$$F^2(\rho_A, |0\rangle\langle 0|) = \frac{2e^{-|\beta(t)|^2}}{N^2} \left(1 + f(\beta_0, t) \cos \theta \right), \quad (4.13)$$

onde $f(\beta_0, t)$ é dada por (4.6), N é a normalização (4.2) e $\beta(t)$ é dado por (4.7).

Inicialmente o ESC ímpar não contém o vácuo em sua estrutura. No entanto, já que este estado é um ponto fixo na dinâmica (estado ponteiro), ele precisa ser populado. Como pode ser visto na figura, ele é rapidamente populado. Para o ESC par, se $\beta_0 \lesssim 1.14$ (para nossas escolhas de parâmetros), a probabilidade inicial de encontrar o estado de vácuo neste estado é sempre maior que 50%. Aí está a grande diferença com o ESC ímpar. Enquanto o último popula rapidamente o estado de vácuo, o ESC par começa por popular outros estados mantendo a população do vácuo praticamente inalterada. Após este transiente inicial diferente ambos os estados possuem dinâmica similar, evoluindo assintoticamente para o vácuo $|0\rangle\langle 0|$.

Agora mostramos que o tempo característico de squeezing é menor que o de efeitos de interferência. A ferramenta que utilizamos para investigar o squeezing

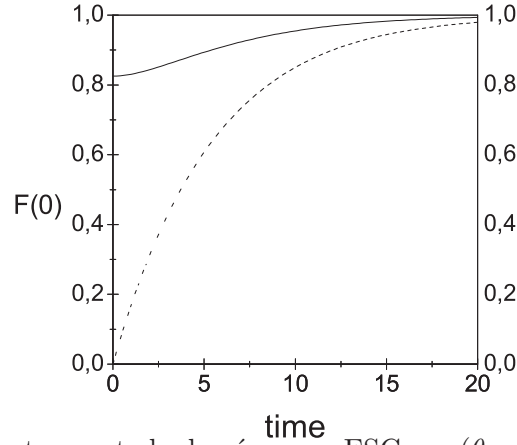


Figura 4.3: Fidelidade entre o estado de vácuo e o ESC par ($\theta = 0$, linha sólida) e ímpar ($\theta = \pi$, linha pontilhada). Parâmetros: $\beta_0 = 0.8$, $\omega = 1$, $k = 0.1$. A escala de tempo é: $\text{time} = \omega t$.

em uma das quadraturas é o determinante da matriz de covariância σ (2.56):

$$D(t) = \det \begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle & \frac{1}{2} \langle xp + px \rangle \\ \frac{1}{2} \langle xp + px \rangle & \langle p^2 \rangle \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Para os ESC temos:

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \frac{1}{2\omega} \left\{ 1 + \beta^2 + \beta^{*2} + \frac{4|\beta|^2}{N^2} \left[1 - \cos(\theta) e^{-2|\beta_0|^2} \right] \right\} \\ \langle p^2 \rangle &= -\frac{\omega}{2} \left\{ -1 + \beta^2 + \beta^{*2} - \frac{4|\beta|^2}{N^2} \left[1 - \cos(\theta) e^{-2|\beta_0|^2} \right] \right\} \\ \langle xp + px \rangle &= -i(\beta^2 - \beta^{*2}). \end{aligned}$$

Nós usamos o determinante da MC pois os termos fora da diagonal cancelam precisamente as rápidas oscilações nas quadraturas devido à frequência da parte unitária. Pode ser visto das equações para $\langle x^2 \rangle$ e $\langle p^2 \rangle$ (também na referência [39]) que o ESC par é sempre comprimido e o ESC ímpar nunca é – pelo menos squeezing até 2ª ordem.

Nas figuras 4.4 mostramos a evolução de $D(t)$ em função do tempo. Como pode ser visto da figura, o squeezing no ESC par (“filtrado” pelo determinante) é caracterizado por um aumento em $D(t)$. O tempo em que o determinante chega

ao máximo (e na “visibilidade” do squeezing) depende de β_0 da seguinte forma

$$t_c^S = -\frac{1}{2k} \ln \left[\frac{\sinh(2|\beta_0|^2)}{4|\beta_0|^2 \cos \theta} \right] \quad (4.15)$$

e os efeitos de squeezing só são “visíveis” para pequenos valores de β_0 , isto é, se

$$0 < \frac{\sinh(2|\beta_0|^2)}{4|\beta_0|^2 \cos \theta} < 1. \quad (4.16)$$

Note que, nas relações acima, está explícito a ausência de squeezing para ESC ímpares $\theta = \pi$ (já que assumimos $t_c^S > 0$ e $t_c^S \in \mathbb{R}$). Para os ESC pares temos

$$0 \leq t_c^S \leq \tau, \quad (4.17)$$

onde τ é o tempo de decoerência. Para valores grandes de β_0 , a quadratura comprimida é essencialmente constante, e o determinante da MC é muito similar para ambos ESC par e ímpar. Note que a visibilidade desta propriedade quântica é devida a dois fatores: a condição inicial deve obedecer a desigualdade acima e o tempo característico deve ser “experimentalmente viável”.

4.1.2 Distribuição do número de fótons

Uma característica marcante em sistemas quânticos (podemos pensar que a física quântica “nasceu” com esta característica, no trabalho sobre radiação de corpo negro de Planck) é que eles podem apresentar uma distribuição do número de partículas (partículas bosônicas no nosso caso) granulada ou oscilatória, enquanto um espectro clássico é contínuo. Nas figuras abaixo mostramos a evolução temporal da distribuição do número de fótons para os ESC par e ímpar.

A expressão analítica para essas curvas é dada por – sendo $P_n = \langle n | \rho | n \rangle$:

$$P_n = e^{-|\beta(t)|^2} \frac{2|\beta(t)|^{2n}}{N^{2n} n!} [1 + (-1)^n f(\beta_0, t) \cos \theta]. \quad (4.18)$$

Note que a dinâmica dissipativa tende a destruir a paridade inicial do estado (por paridade quero dizer oscilações nesta distribuição). O tempo característico desta propriedade é aproximadamente o mesmo que para o squeezing do ESC par. Note que as oscilações desaparecem à medida que o sistema evolui.

É sabido também que enquanto estados coerentes possuem distribuição do

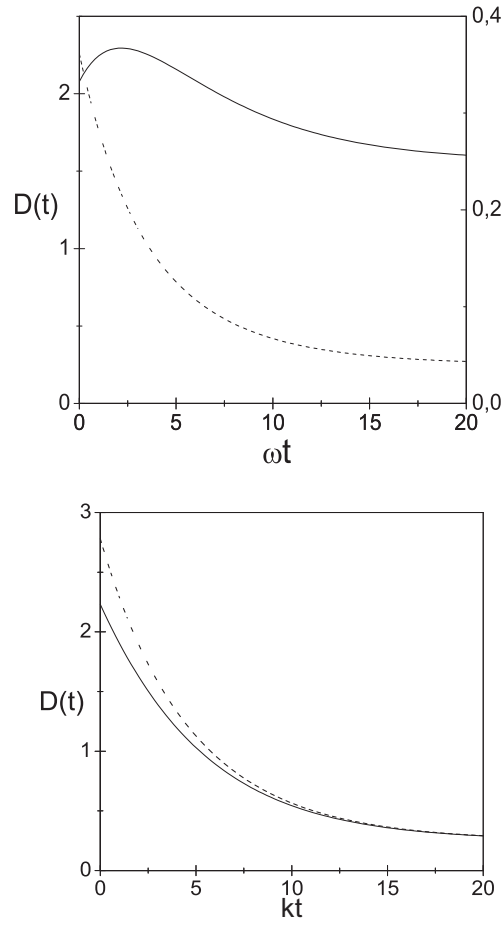


Figura 4.4: Evolução de $D(t)$ em função do tempo. Parâmetros: $\omega = 1$, $k = 0.1$, $\beta_0 = 0.8$ (figura de cima) e $\beta_0 = 1.5$ (figura de baixo). A linha sólida corresponde, em ambos os gráficos, à estados de superposição par e a curva pontilhada aos estados ímpares. Um detalhe sobre a figura de cima: a escala à direita corresponde a curva sólida enquanto a escala à esquerda corresponde a curva pontilhada.

número de fótons Poissoniana, ESC pares (ímpares) possuem distribuição super (sub)-Poissoniana (sob uma dinâmica da forma utilizada por nós). Isto pode ser medido pelo chamado parâmetro de Mandel Q , definido como

$$Q = \frac{\langle(\Delta n)^2\rangle - \langle n\rangle}{\langle n\rangle}, \quad (4.19)$$

onde $\langle n\rangle$ e $\langle(\Delta n)^2\rangle$ são a média e a variância do número de fótons, respectivamente.

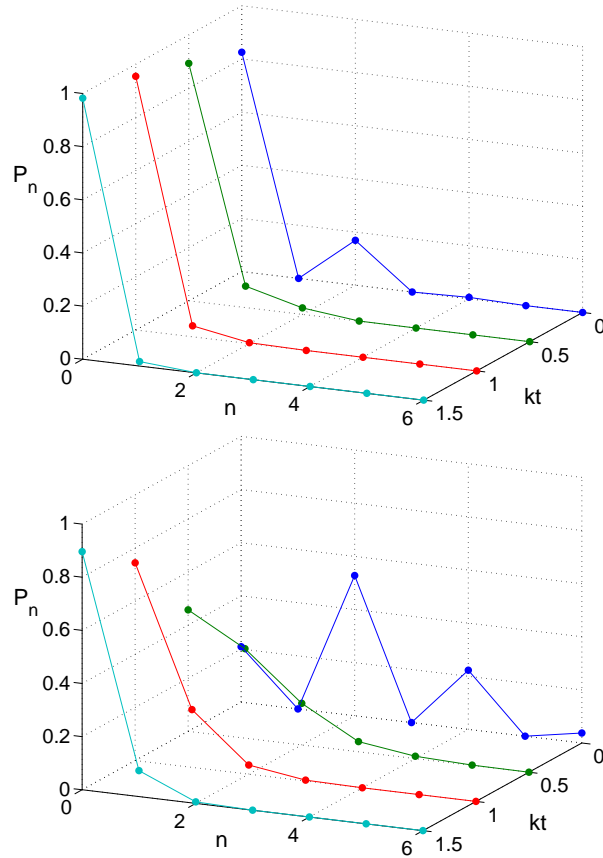


Figura 4.5: Evolução temporal da distribuição do número de fótons para os ESC par. Parâmetros: $\omega = 1$, $k = 0.1$, $\theta = 0$, $\beta_0 = 0.8$ (figura de cima) e $\beta_0 = 1.5$ (figura de baixo).

Se a distribuição é sub-Poissoniana ($Q < 0$) o estado é quântico. Se $Q \geq 0$ (estatística Poissoniana e super-Poissoniana) no entanto, nada pode ser dito. Por exemplo, no nosso caso, o ESC par é “tão quântico” quanto o ímpar, apesar de apresentar estatística super-Poissoniana (como luz “clássica”). Isso evidencia que para decidirmos quando um estado é quântico ou não, mais de um observável pertinente deve ser medido. A exceção para este caso é o conjunto de estados que apresentam função de Wigner negativa, neste caso uma simples medida desta negatividade é suficiente para excluir qualquer análogo clássico.

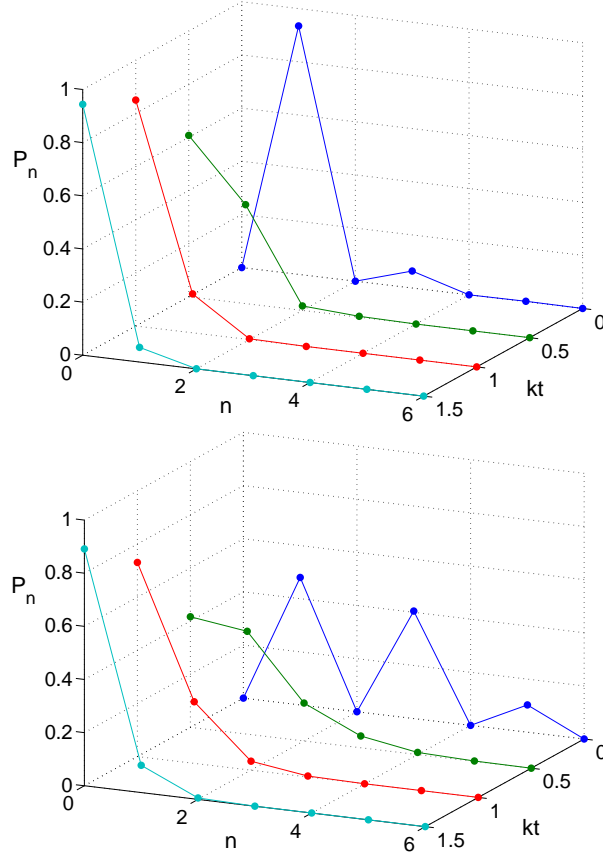


Figura 4.6: Evolução temporal da distribuição do número de fótons para os ESC ímpar. Parâmetros: $\omega = 1$, $k = 0.1$, $\theta = \pi$, $\beta_0 = 0.8$ (figura de cima) e $\beta_0 = 1.5$ (figura de baixo).

4.1.3 Entropia de von Neumann

Com os autovalores das matrizes densidade dos ESC par e ímpar em mãos, podemos facilmente calcular a entropia de von Neumann do sistema, que é mostrada nas figuras 4.7 para diferentes valores de β_0 . A entropia de von Neumann é dada por

$$S[\rho] = -\text{tr}(\rho \ln \rho) \quad (4.20)$$

a para ESC

$$S[\rho_A] = -p_o \ln p_o - p_e \ln p_e. \quad (4.21)$$

Note que a entropia aumenta seu valor até o tempo de decoerência, quando ela começa a decair a zero – que é a entropia do estado final de vácuo.

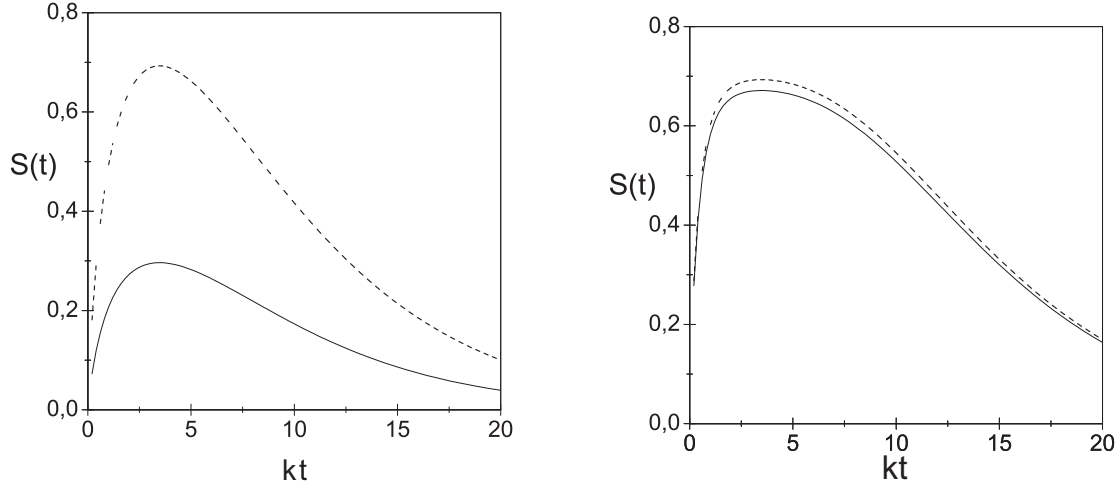


Figura 4.7: Entropia de von Neumann em função do tempo. A linha sólida (pontilhada) corresponde ao ESC par (ímpar). Parâmetros: $\omega = 1$, $k = 0.1$, $\beta_0 = 0.8$ (figura da esquerda) e $\beta_0 = 1.5$ (figura da direita).

4.2 Estados Gaussianos: estados térmicos comprimidos e deslocados

Nós utilizamos o Liouvilleano dado por (4.4), mas agora nós incluímos temperatura, isto é, consideramos $\bar{n}_B \geq 0$. Se o estado inicial é Gaussiano (1-modo), ele pode ser escrito como

$$\rho_B = \mathcal{D}(\alpha_0) \mathcal{S}(r_0, \phi_0) \rho_{\nu_0} \mathcal{S}^\dagger(r_0, \phi_0) \mathcal{D}^\dagger(\alpha_0) \quad (4.22)$$

onde $\mathcal{D}(\alpha)$ é o operador deslocamento, $\mathcal{S}(r, \phi)$ é o operador de squeezing, o subscrito 0 denota valores iniciais e ρ_ν é o operador densidade térmico com número médio de excitações igual a ν . Mais explicitamente temos

$$\mathcal{D}(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a), \quad (4.23)$$

$$\mathcal{S}(r, \phi) = \exp\left(\frac{1}{2} r e^{i\phi} a^{\dagger 2} - \frac{1}{2} r e^{-i\phi} a^2\right), \quad (4.24)$$

$$\rho_\nu = \frac{1}{1 + \nu} \exp\left[\ln\left(\frac{\nu}{\nu + 1}\right) a^\dagger a\right]. \quad (4.25)$$

Note que ν não é o número médio de excitações, mas o número médio de excitações térmicas (ou seja: ν_0 mede a impureza inicial do estado, \bar{n}_B diz respeito

à temperatura do reservatório e ν está relacionado às excitações térmicas do estado). A evolução (que é quadrática, ou bilinear) preserva o caráter Gaussiano do operador densidade, a diferença é que seus parâmetros adquirem uma dependência temporal, ou seja, o estado fica da seguinte forma:

$$\rho_B = \mathcal{D}(\alpha)\mathcal{S}(r, \phi)\rho_\nu\mathcal{S}^\dagger(r, \phi)\mathcal{D}^\dagger(\alpha), \quad (4.26)$$

onde

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-(i\omega+k)t}, \quad (4.27)$$

$$\phi(t) = \phi_0 - 2\omega t, \quad (4.28)$$

$$\nu(t) = \sqrt{x^2(t) - \left[\left(\nu_0 + \frac{1}{2} \right) \sinh(2r_0) e^{-2kt} \right]^2} - \frac{1}{2}, \quad (4.29)$$

$$x(t) = \left(\nu_0 + \frac{1}{2} \right) \cosh(2r_0) e^{-2kt} + \left(\bar{n}_B + \frac{1}{2} \right) (1 - e^{-2kt}), \quad (4.30)$$

$$r(t) = \frac{1}{4} \ln \left[\frac{(\nu_0 + \frac{1}{2})e^{2r_0} + (\bar{n}_B + \frac{1}{2})(e^{2kt} - 1)}{(\nu_0 + \frac{1}{2})e^{-2r_0} + (\bar{n}_B + \frac{1}{2})(e^{2kt} - 1)} \right]. \quad (4.31)$$

A incerteza de Robertson-Schroedinger (determinante da matriz de covariância) e a entropia de von Neumann são relacionados por

$$D(t) = \left[\nu(t) + \frac{1}{2} \right]^2, \quad (4.32)$$

$$S[\rho(t)] = [\nu(t) + 1] \ln [\nu(t) + 1] - \nu(t) \ln \nu(t). \quad (4.33)$$

Note que, no caso de estados Gaussianos (EG), a entropia é completamente determinada por uma relação entre quadraturas, dado por $D(t)$, e é sempre analítica. Note também que, diferentemente dos ESC, a entropia é independente da intensidade do campo ótico (α), que pode ser uma vantagem experimental.

4.2.1 Compressão (Squeezing)

A função de Wigner de um EG é sempre positiva – motivo pelo qual este estado é de certo modo controverso na literatura, alguns alegando que ele não é “quântico”. A FW evoluída de um EG descrita pelo Liouvilliano (4.4) agindo em um estado inicial de um EG de 1-modo, (4.22), é

$$W(q, p) = \sum_l \frac{1}{\pi} \frac{(-|F_3|^\nu)^l}{(\nu + 1)^{l+1}} L_l \left[2 \left(\frac{(x - x_0)^2}{F_4^2} + \frac{(F_4 F_5)^2}{4} \right) \right] \times \frac{F_4}{|F_1|} \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2}{F_4^2} - \frac{(F_4 F_5)^2}{4} \right], \quad (4.34)$$

onde $L_l(x)$ é a função de Laguerre de ordem l e argumento x e definimos [40]

$$\begin{aligned} F_1 &= \cosh r + e^{i\phi} \sinh r, \\ F_2 &= \frac{1 - i \sin \phi \sinh r (\cosh r + e^{i\phi} \sinh r)}{(\cosh r + \cos \phi \sinh r)(\cosh r + e^{i\phi} \sinh r)}, \\ F_3 &= \frac{\cosh r + e^{-i\phi} \sin \phi \sinh r}{\cosh r + e^{i\phi} \sin \phi \sinh r}, \\ F_4 &= \sqrt{\cosh^2 r + \sinh^2 r + 2 \cos \phi \cosh r \sinh r}, \\ F_5 &= 2(p + p_0) - i(x - x_0)(F_2^* - F_2). \end{aligned} \quad (4.35)$$

A evolução dos parâmetros é dada por (4.27)-(4.31).

A função de Wigner de um estado Gaussiano de 1-modo pode ser escrita da seguinte forma fechada Gaussiana:

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi(\nu + \frac{1}{2})} \exp \left\{ -\frac{\cosh(2r)}{2\nu + 1} [(1 - \tanh(2r) \cos \phi)(x - x_0)^2 + (1 + \tanh(2r) \cos \phi)(p - p_0)^2] + \frac{\sin \phi \sinh(2r)}{\nu + \frac{1}{2}} (x - x_0)(p - p_0) \right\}. \quad (4.36)$$

Como dissemos antes, podemos acessar o squeezing olhando para o determinante da matriz de covariância (4.32) (e conseqüentemente neste caso, olhando para a entropia). Na figura 4.8 mostramos a evolução do determinante da MC em função do tempo. Seu comportamento (e a discussão sobre) é muito similar

ao do ESC *par* mostrado anteriormente. Aqui, o tempo em que o determinante atinge seu valor máximo é (este resultado foi encontrado também na ref. [41], onde estudaram a entropia linear)

$$t_c^G = (2k)^{-1} \left\{ \ln 2 - \ln \left[\frac{2\bar{n}_B + 1}{d} \right] \right. \\ \left. \times (2\nu_0 \cosh(2r_0) + \cosh(2r_0) - 2\bar{n}_B - 1) \right\} \quad (4.37)$$

onde

$$d = 2 \cosh(2r_0) \left[\bar{n}_B (\nu_0 + 1) + \nu_0 (\bar{n}_B + 1) + \frac{1}{2} \right] \\ - 2 \left(\bar{n}_B + \frac{1}{2} \right)^2 - 2 \left(\nu_0 + \frac{1}{2} \right)^2.$$

Assumimos que o tempo característico tem que ser positivo e real. As “propriedades quânticas” do estado (neste caso o squeezing) serão visíveis se ν_0 satisfizer [12, 13]

$$\nu_0 < \frac{1}{2} [2\bar{n}_B \cosh(2r_0) + \cosh(2r_0) - 1]. \quad (4.38)$$

Vale lembrar que, dada uma condição inicial ν_0 , a temperatura do reservatório também não pode ser muito alta, pois se fosse o sistema apenas tenderia ao equilíbrio rapidamente. De fato, *dado um valor de ν_0* , a temperatura deve satisfazer

$$\bar{n}_B < \frac{1}{2} [2\nu_0 \cosh(2r_0) + \cosh(2r_0) - 1], \quad (4.39)$$

para que um aumento em $D(t)$ (ou na entropia) seja visível. Claro que a visibilidade mencionada no parágrafo anterior é consequência de dois fatores: a condição inicial deve satisfazer a inequação acima (4.38) e a escala de tempo precisa ser experimentalmente acessível.

A equação (4.38) estabelece um limite superior na condição inicial de “impureza” que um estado deve ter tal que, mesmo sob efeito de dissipação, a propriedade de squeezing possa ser acessada.

É interessante que este tempo característico independe da intensidade do campo α , fato demonstrado numericamente em [42]. Para nossas escolhas de parâmetros, t_c^G é comparável a t_c^S (tempo característico do ESC *par*). Porém, é possível obter $t_c^G \gg t_c^S$, por exemplo simplesmente aumentando a intensidade do campo α

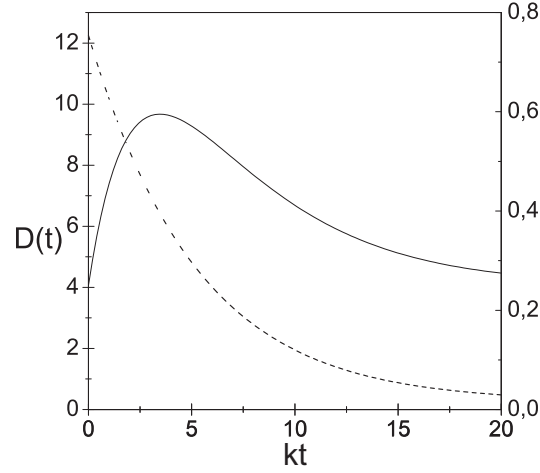


Figura 4.8: Evolução temporal do determinante da MC. Parâmetros: $\omega = 1$, $k = 0.1$, $n_B = 0$, $r_0 = 1$; na linha sólida: $\nu_0 = 0$ e utiliza-se a escala da direita; na linha pontilhada: $\nu_0 = 3$ e a escala da esquerda.

do ESC. Como exemplo, se impusermos $\langle a^\dagger a \rangle_{EG} = \langle a^\dagger a \rangle_{ESC}$ e escolhermos os seguintes parâmetros: $\omega = 1$, $n_B = 0$, $k = 0.1$, $\nu_0 = 0$, $|\beta_0| = 0.8$, $\alpha_0 = 0.0$ e $\theta = 0$, o fator de squeezing tem que ser $r_0 \simeq 0.73$ e o tempo característico respeitará

$$0 < t_c^S < t_c^G < \tau, \quad (4.40)$$

onde τ é o tempo de decoerência para o ESC, t_c^S e t_c^G são dados por (4.15) and (4.37) respectivamente.

4.2.2 Distribuição do número de fótons

Analisando os EG deslocados e comprimidos, podemos ver que eles também possuem estatística super-Poissoniana (sob esta dinâmica). O parâmetro de Mandel para os EG são sempre maiores que zero, *i.e.* $Q \geq 0$. Para um EG é conhecido

que a distribuição de fótons é dada por [41, 43]

$$\begin{aligned}
P_n &= \pi Q(0) (-1)^n 2^{-2n} (\tilde{A} + |\tilde{B}|)^n \\
&\times \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} \left[\frac{\tilde{A} - |\tilde{B}|}{\tilde{A} + |\tilde{B}|} \right]^k \\
&\times H_{2k} \left[i \frac{\Im(\tilde{C} e^{-i\frac{\phi}{2}})}{\sqrt{\tilde{A} - |\tilde{B}|}} \right] \\
&\times H_{2n-2k} \left[i \frac{\Re(\tilde{C} e^{-i\frac{\phi}{2}})}{\sqrt{\tilde{A} + |\tilde{B}|}} \right], \tag{4.41}
\end{aligned}$$

onde H_j é o polinômio de Hermite de ordem j e

$$\begin{aligned}
\pi Q(0) &= [(1+A)^2 - |B|^2]^{1/2} \\
&\times \exp \left\{ - \frac{(1+A)|C|^2 + \frac{1}{2}[B(C^*)^2 + B^*C^2]}{(1+A)^2 - |B|^2} \right\} \tag{4.42}
\end{aligned}$$

onde

$$A = \nu + (2\nu + 1) \sinh^2 r \tag{4.43}$$

$$B = -(2\nu + 1) e^{i\phi} \sinh r \cosh r \tag{4.44}$$

$$C = \alpha \tag{4.45}$$

e finalmente

$$\tilde{A} = \frac{\nu(\nu + 1)}{\nu^2 + (\nu + \frac{1}{2})[1 + \cosh(2r)]} \tag{4.46}$$

$$\tilde{B} = - \frac{e^{i\phi}(\nu + \frac{1}{2}) \sinh(2r)}{\nu^2 + (\nu + \frac{1}{2})[1 + \cosh(2r)]} \tag{4.47}$$

$$\tilde{C} = \frac{C[\frac{1}{2} + (\nu + 1/2) \cosh(2r)] - C^* e^{i\phi}(\nu + \frac{1}{2}) \sinh(2r)}{\nu^2 + (\nu + \frac{1}{2})[1 + \cosh(2r)]}. \tag{4.48}$$

A evolução de P_n é mostrada nas figuras 4.9. Fica claro que, se o estado respeita (4.38), oscilações na distribuição do número de fótons pode ser observada,

senão o estado se comporta como um estado térmico clássico.

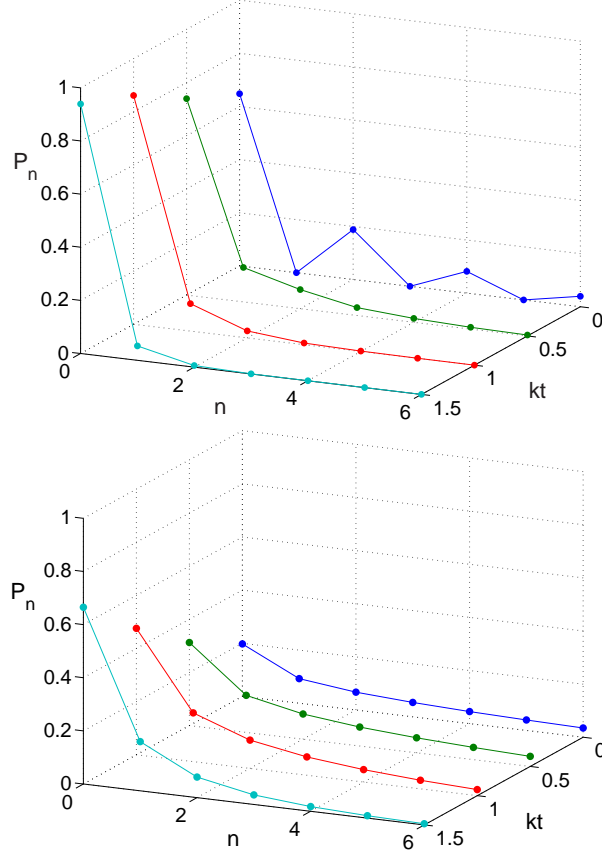


Figura 4.9: Evolução temporal de P_n . Parâmetros: $\alpha_0 = 0$, $\phi_0 = 0$, $r_0 = 1$, $k = 0.1$ e $\bar{n}_B = 0$. Figura de cima: $\nu_0 = 0$ e na figura de baixo: $\nu_0 = 3$

Seguindo as idéias de [44], a função de correlação de segunda ordem para EG comprimidos é uma “testemunha de quanticidade”

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle^2}. \quad (4.49)$$

Se $g^{(2)} > 3$ o estado é intrinsecamente quântico, se $g^{(2)} \leq 3$ os efeitos quânticos são desprezíveis. Em nossos cálculos pudemos observar que para valores de condições iniciais respeitando (4.38) o estado é quântico segundo este critério.

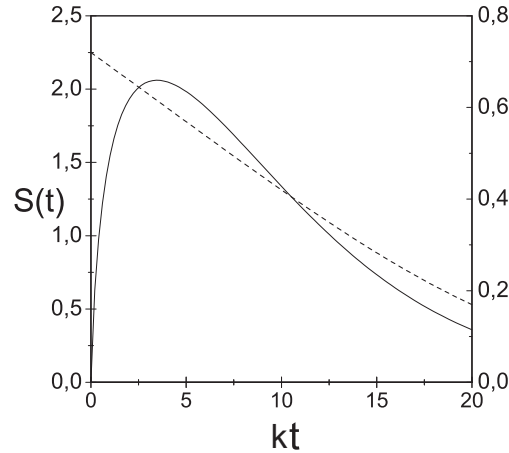


Figura 4.10: Entropia de von Neumann em função do tempo para um EG de 1-modo. Parâmetros: $\omega = 1$, $n_B = 0$, $k = 0.1$, $r_0 = 1$, $\nu_0 = 0$ (linha sólida, escala da direita) e $\nu_0 = 3$ (linha pontilhada, escala da esquerda).

4.2.3 Entropia de von Neumann

Na figura 4.10 mostramos os resultados para a entropia de von Neumann de um EG 1-modo, para diferentes valores de ν_0 . O tempo característico da entropia é igual, neste caso, ao tempo característico para o squeezing (máximo de $D(t)$), e podemos concluir que a mesma relação (4.38) vale para a entropia também. Note também que a entropia (e qualquer observável que depende somente de $\nu(t)$) é independente da amplitude do campo $\alpha(t)$ e da fase do squeezing $\phi(t)$.

4.3 Estados Gaussianos versus estados de superposição coerente – Fidelidade

Nas seções anteriores nós revisamos algumas propriedades de ESC e de EG, e como estas propriedades evoluem no tempo. Nós comparamos estes estados por análise gráfica da evolução temporal de tais propriedades e, mesmo que qualitativamente, nós conseguimos algumas conclusões ao fazermos algumas comparações entre os estados estudados.

Agora, apresentamos uma comparação mais quantitativa entre os estados,

através da fidelidade, definida por

$$F = \text{tr} \sqrt{\sqrt{\rho_A} \rho_B \sqrt{\rho_A}} \quad (4.50)$$

onde ρ_A e ρ_B são (4.5) e (4.26) respectivamente. Com este resultado podemos quantificar como estes estados se parecem um com o outro.

A expressão para a fidelidade é

$$F = \sqrt{\lambda_+} + \sqrt{\lambda_-}, \quad (4.51)$$

onde

$$\lambda_{\pm} = \frac{b + c \pm \sqrt{(b - c)^2 + 4|d|^2}}{2} \quad (4.52)$$

e

$$\begin{aligned} b &= p_e \langle e | \rho_B | e \rangle \\ &= \frac{p_e}{N_e^2} \left\{ \langle \beta | \rho_B | \beta \rangle + \langle -\beta | \rho_B | -\beta \rangle + 2\Re \langle -\beta | \rho_B | \beta \rangle \right\} \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} c &= p_o \langle o | \rho_B | o \rangle \\ &= \frac{p_o}{N_o^2} \left\{ \langle \beta | \rho_B | \beta \rangle + \langle -\beta | \rho_B | -\beta \rangle - 2\Re \langle -\beta | \rho_B | \beta \rangle \right\} \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{p_e p_o} \langle e | \rho_B | o \rangle \\ &= \frac{\sqrt{p_e p_o}}{N_e N_o} \left\{ \langle \beta | \rho_B | \beta \rangle - \langle -\beta | \rho_B | -\beta \rangle + 2i\Im \langle -\beta | \rho_B | \beta \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Os outros termos são

$$\begin{aligned} \langle \beta | \rho_B | \beta \rangle &= \frac{1}{\sqrt{(\nu + 1)^2 \cosh^2 r - \nu^2 \tanh^2 r}} \\ &\times \exp \left\{ \frac{(2\nu + 1) \tanh r \Re[\eta^2]}{(\nu + 1)^2 - \nu^2 \tanh^2 r} \right\} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{|\eta|^2 [(\nu + 1) + \nu \tanh^2 r]}{(\nu + 1)^2 - \nu^2 \tanh^2 r} \right\} \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned}
 \langle -\beta | \rho_B | -\beta \rangle &= \frac{1}{\sqrt{(\nu+1)^2 \cosh^2 r - \nu^2 \tanh^2 r}} \\
 &\times \exp \left\{ \frac{(2\nu+1) \tanh r \Re[\zeta^2]}{(\nu+1)^2 - \nu^2 \tanh^2 r} \right\} \\
 &\times \exp \left\{ -\frac{|\zeta|^2 [(\nu+1) + \nu \tanh^2 r]}{(\nu+1)^2 - \nu^2 \tanh^2 r} \right\}
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned}
 \langle -\beta | \rho_B | \beta \rangle &= \frac{1}{\sqrt{(\nu+1)^2 \cosh^2 r - \nu^2 \tanh^2 r}} \\
 &\times \exp \left\{ \frac{(2\nu+1) \tanh r [\zeta^2 + \eta^2]}{2(\nu+1)^2 - 2\nu^2 \tanh^2 r} \right\} \\
 &\times \exp \left\{ -\frac{|\zeta|^2 + |\eta|^2}{2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\zeta \eta \nu (\nu+1)}{(\nu+1)^2 \cosh^2 r - \nu^2 \sinh^2 r} \right\}
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

onde definimos

$$\zeta = (\beta^* + \alpha^*) e^{i\frac{\phi}{2}} \tag{4.59}$$

$$\eta = (\beta - \alpha) e^{-i\frac{\phi}{2}}. \tag{4.60}$$

Para entender as expressões (grandes e complicadas) para a fidelidade, mostramos à frente os gráficos da fidelidade em função do tempo nas figuras 4.11-4.12 (a escala de tempo dos gráficos é: $\text{time} = \omega t$). A escolha $\alpha_0 \simeq 0.0$ é devida às rotinas numéricas utilizadas. De fato, usamos $\alpha_0 = 10^{-20}$. Em cada figura, mostramos o tempo de decoerência para um ESC τ ($\tau = (4|\beta_0|^2 k)^{-1}$) e o tempo característico de squeezing para os ESC e para o EG – (4.15) e (4.37) respectivamente – nas linhas verticais.

Analisando as figuras podemos concluir o mesmo que antes, porém num modo muito mais quantitativo. Nas figuras 4.11 nós mostramos a fidelidade entre EG comprimidos com $\nu_0 = 0$ e ESC pares e ímpares com $\beta_0 = 0$ e $\beta_0 = 2.0$, respectivamente. Pode-se ver que a fidelidade inicial é sempre alta para ESC pares *com*

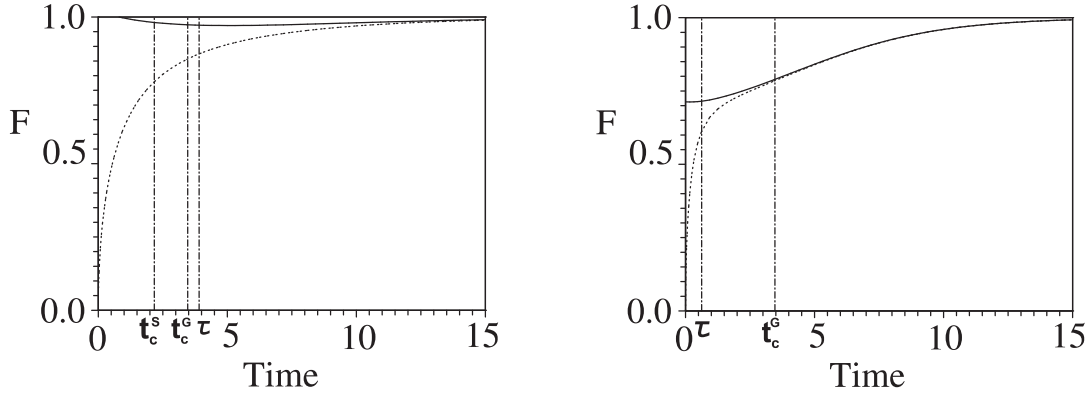


Figura 4.11: Fidelidade entre os estados de superposição coerente e estados Gaussianos de 1-modo. Escala de tempo: $\text{time} = \omega t$. Parâmetros: $w = 1$, $k = 1$, $r_0 = 1$, $\alpha_0 \simeq 0.0$, $\phi_0 = 0$, $n_B = 0$, $\nu_0 = 0$, $\theta = 0$ (linha sólida) e $\theta = \pi$ (linha pontilhada). Figura da esquerda: $\beta_0 = 0.8$. Figura da direita: $\beta_0 = 2.0$

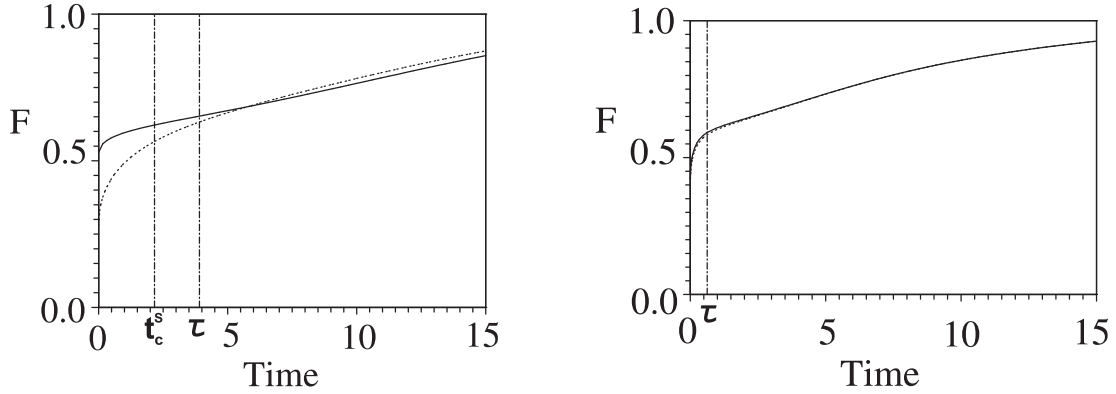


Figura 4.12: Fidelidade entre os estados de superposição coerente e estados Gaussianos de 1-modo. Escala de tempo: $\text{time} = \omega t$. Parâmetros: $w = 1$, $k = 1$, $r_0 = 1$, $\alpha_0 \simeq 0.0$, $\phi_0 = 0$, $n_B = 0$, $\nu_0 = 3$, $\theta = 0$ (linha sólida) e $\theta = \pi$ (linha pontilhada). Figura da esquerda: $\beta_0 = 0.8$. Figura da direita: $\beta_0 = 2.0$

pequenos valores de β_0 , mas quando aumentamos esta condição inicial a fidelidade decresce. O ESC par com $\beta_0 = 0.8$ é aproximadamente Gaussiano – tirando o fato dele possuir função de Wigner negativa – e ele se comporta como um EG, isto é, a propriedade de squeezing domina as outras propriedades quânticas que ele possui. Quando aumentamos o valor de β_0 , a propriedade de interferência domina e o estado não se assemelha a um EG. Para valores de β_0 não respeitando a desigualdade (4.16) vemos que o ESC par não possui alta fidelidade e rapidamente se comporta como o ESC ímpar.

Nas figuras 4.12 mostramos os resultados para o EG com $\nu_0 = 3$ e os ESC pares e ímpares com $\beta_0 = 0$ e $\beta_0 = 2$ respectivamente. Ambos os ESC par e ímpar se comportam de maneira semelhante nestes casos. No primeiro caso, o EG não é “tão comprimido” quanto o ESC par e a fidelidade entre eles é baixa. No segundo caso, a propriedade de interferência dos ESC domina e a fidelidade entre eles e o EG é praticamente igual.

4.4 Aumento de entropia em sistemas Gaussianos instáveis

Também estudamos a relação entre o número de graus de liberdade do reservatório e o crescimento de entropia. Em um trabalho de colaboração [14] estudamos como a entropia de von Neumann varia no tempo (assintoticamente) para sistemas acoplados a reservatórios não com infinitos graus de liberdade, como os estudados no restante deste capítulo, mas a reservatórios com poucos graus de liberdade. O diferencial neste trabalho é que os reservatórios estudados possuem característica de instabilidade. Não iremos detalhar muito este trabalho, mas os pontos principais serão discutidos abaixo.

A conexão entre perda de informação e sistemas caóticos [45] nos fez, recentemente, investigar sistemas de variáveis contínuas em *estados Gaussianos de 1-modo* que podem ser escritos da seguinte forma

$$\hat{\rho}_G = \mathcal{D}(\alpha)\mathcal{S}(r, \phi)\hat{\rho}_\nu\mathcal{S}^\dagger(r, \phi)\mathcal{D}^\dagger(\alpha), \quad (4.61)$$

onde $\mathcal{D}(\alpha)$ é o operador deslocamento, $\mathcal{S}(r, \phi)$ é o operador de squeezing (compressão) (ambos serão explicitados posteriormente) e $\hat{\rho}_\nu$ é o operador densidade térmico com numero médio de excitações ν ,

$$\hat{\rho}_\nu = \frac{1}{1 + \nu} \exp\left(\ln\left(\frac{\nu}{\nu + 1}\right)\hat{a}^\dagger\hat{a}\right). \quad (4.62)$$

Em nosso trabalho [14] utilizamos uma relação bem conhecida na literatura entre a entropia de von Neumann, $S_V = -\text{tr}[\rho_G \ln(\rho_G)]$, e a matriz de covariância de estados Gaussianos (equação (2.67)). Acoplamos o sistema a reservatórios com características de instabilidade (oscilador harmônico invertido e oscilador paramétrico) para estudar sua perda de pureza - mais precisamente estudamos

os seguintes sistemas, descritos pelos seguintes Hamiltonianos:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2} + \frac{\omega_1^2 \hat{x}_1^2}{2} + \frac{\hat{p}_2^2}{2} - \frac{\omega_2^2 \hat{x}_2^2}{2} + \alpha \hat{x}_1 \hat{x}_2 \quad (4.63)$$

e

$$H(t) = \sum_{i=1,2} \frac{1}{2} (\hat{p}_i^2 + (\omega_i^2 - q \cos 2t) \hat{x}_i^2) + \frac{g}{2} (\hat{x}_1 - \hat{x}_2)^2, \quad (4.64)$$

onde o subíndice 1 se refere ao sistema e o subíndice 2 ao ‘reservatório’¹.

Usando a equação (2.67) podemos escrever a entropia de von Neumann da seguinte forma:

$$S_V[\hat{\rho}] = -\text{tr}(\hat{\rho}_r \ln \hat{\rho}_r) = (\nu + 1) \ln(\nu + 1) - \nu \ln \nu, \quad (4.65)$$

onde ν é o número médio de excitações do estado térmico ρ_ν e ρ_r é o operador densidade reduzido do sistema. O determinante da MC do sistema pode ser escrito da seguinte forma

$$D = \det \begin{pmatrix} \sigma_{pp} & \sigma_{qp} \\ \sigma_{qp} & \sigma_{qq} \end{pmatrix} = \left(\nu + \frac{1}{2} \right)^2, \quad (4.66)$$

$\sigma_{xy} = \frac{1}{2} \text{tr}(\hat{\rho} \{\hat{x}, \hat{y}\}) - \text{tr}(\hat{x} \hat{\rho}) \text{tr}(\hat{y} \hat{\rho})$ e \hat{x}, \hat{y} são os operadores posição e seu respectivo momentum conjugado. Como D pode ser escrito em relação a ν , podemos escrever S_V em função de D facilmente.

Para os sistemas acima (chamados sistemas de Anosov) conseguimos mostrar que a entropia de von Neumann varia linearmente no tempo:

$$S_r(t) \sim \ln(C_{20})/2 + \lambda t, \quad (4.67)$$

onde C_{20} é uma constante e λ é o *expoente de Lyapunov* [46]

$$\lambda = \sup_{\alpha \in \mathbf{R}^2} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|[L_\alpha, A(t, t_0)]\|, \quad (4.68)$$

onde $\alpha = (\alpha_p, \alpha_q)$ e $A(t, t_0)$ é um operador limitado (isto é, com norma finita: $\|A\| = \sup_\psi \|A\psi\|/\|\psi\|$). O operador $L_\alpha = \alpha_p \hat{p} + \alpha_q \hat{q}$ é o gerador de translações

¹Note que este é um ‘toy model’, onde modelamos um reservatório térmico com somente um oscilador, onde normalmente se usam infinitos osciladores. O que queremos observar é o efeito da instabilidade no crescimento da entropia do sistema.

no espaço de fase, numa direção α , portanto a definição acima é uma extensão direta do expoente de Lyapunov clássico.

Interessante notar que o expoente de Lyapunov quântico, para este caso, é igual ao expoente clássico, ou seja, mostramos que o crescimento da entropia de von Neumann para determinados sistemas possui um caráter universal, i.e. não depende de vários parâmetros e condições iniciais como em outros tratamentos ².

4.5 Conclusão

Neste capítulo estudamos em detalhes algumas propriedades em comum de superposições coerentes e estados Gaussianos (estados térmicos deslocados e comprimidos) de 1-modo. Analisamos a compressão (squeezing), oscilações no número de fótons e a entropia de von Neumann para ambos os casos. Mostramos que em estados de superposição coerente cada propriedade possui um tempo característico próprio enquanto os estados Gaussianos apresentam apenas um tempo característico (4.37). O estado de superposição par apresenta compressão, assim como o estado Gaussiano pode apresentar, e podemos acessar esta propriedade através da matriz de covariância. Mostramos que, para ambos os casos o efeito de compressão somente pode ser observado para condições iniciais especiais ((4.16) e (4.38)) e em escalas de tempo acessíveis experimentalmente ((4.15) e (4.37)).

Ainda neste trabalho, comparamos os efeitos de ambas as classes de estados quantitativamente analisando a fidelidade entre os estados Gaussianos (térmicos, comprimidos e deslocados) e as superposições coerentes (tanto pares quanto ímpares) concluindo que se os estados respeitam as inequações mencionadas anteriormente, para os estados Gaussianos e as superposições pares, a fidelidade entre os estados Gaussianos de 1-modo e os estados tipo ‘gato de Schroedinger’ possui um alto valor.

Por fim, mostramos que ao acoplarmos um estado Gaussiano monomodal a um reservatório instável, como o oscilador harmônico invertido, sua entropia varia linearmente com o tempo, demonstrando a conjectura de Zurek sobre este assunto (que diz que reservatórios com poucos graus de liberdade que possuam instabilidade são mais efetivos no que diz respeito à decoerência que reservatórios com infinitos

²Sobre o símbolo sup: dado um subconjunto S de um conjunto ordenado T (por exemplo, T pode ser o conjunto dos números reais), o supremo (sup) de S , se existir, é o menor elemento de T que seja maior ou igual a cada elemento de S . Por exemplo: $\sup\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\} = 1$.

osciladores harmônicos).

Trabalhos em andamento e ideias futuras

“The waiting drove me mad.”

Corduroy - Pearl Jam

Nos capítulos anteriores estudamos alguns trabalhos já finalizados. Aqui iremos discutir alguns trabalhos em andamento e comentar o que pretendemos trabalhar no futuro próximo.

5.1 Oscilador harmônico com frequência dependente do tempo

Como dito nos capítulos anteriores, um estado Gaussiano numa evolução no máximo quadrática mantém seu caráter Gaussiano. É sabido também que dependendo da dinâmica pode-se gerar squeezing em EG [47]. Neste trabalho estamos estudando o comportamento de um estado Gaussiano sob influência de dissipação (4.4), porém o Hamiltoniano (a parte unitária da dinâmica) possui uma frequência variável no tempo; assim podemos estudar o comportamento da geração de squeezing versus a dissipação que atua no sistema e observar se a dinâmica não-unitária pode retardar ou até parar os efeitos de geração de squeezing.

5.1.1 Estados Gaussianos 1-modo

No capítulo anterior mostramos como os parâmetros de um EG

$$\hat{\rho} = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(r, \phi)\hat{\rho}_\nu\hat{S}^\dagger(r, \phi)\hat{D}^\dagger(\alpha), \quad (5.1)$$

varia sob influência de uma dinâmica não unitária. Aqui vamos escrever a solução geral para os parâmetros, mas agora em função das variâncias dos operadores a e a^\dagger . Os parâmetros α , ϕ , ν e r irão variar da seguinte forma:

$$\alpha = \langle \hat{a} \rangle \quad (5.2)$$

$$\alpha^* = \langle \hat{a}^\dagger \rangle \quad (5.3)$$

$$e^{i\phi} = \sqrt{\frac{\sigma_{aa}}{\sigma_{a^\dagger a^\dagger}}} \quad (5.4)$$

$$\nu = \sqrt{\left(\sigma_{a^\dagger a} - \frac{1}{2}\right)^2 - \sigma_{a^\dagger a^\dagger} \sigma_{aa} - \frac{1}{2}} \quad (5.5)$$

$$r = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\sigma_{a^\dagger a} - \frac{1}{2} + \sqrt{\sigma_{a^\dagger a^\dagger} \sigma_{aa}}}{\sigma_{a^\dagger a} - \frac{1}{2} - \sqrt{\sigma_{a^\dagger a^\dagger} \sigma_{aa}}} \right). \quad (5.6)$$

Onde definimos

$$\sigma_{a^\dagger a^\dagger} \equiv \langle a^{\dagger 2} \rangle - \langle a^\dagger \rangle^2, \quad (5.7)$$

$$\sigma_{aa} \equiv \langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2, \quad (5.8)$$

$$\sigma_{a^\dagger a} \equiv \langle a^\dagger a \rangle - \langle a^\dagger \rangle \langle a \rangle + 1. \quad (5.9)$$

Em suma, se obtivermos a evolução temporal para as variâncias σ 's acima, saberemos a evolução do estado ρ completo.

5.1.2 Dinâmica dependente do tempo sob influência de dissipação

Estudamos a evolução das variâncias (5.7), (5.8) e (5.9) sob a seguinte dinâmica:

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}\rho, \quad (5.10)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\cdot &= -i\omega[\hat{H}, \cdot] + k(\bar{n}_B + 1)(2a \cdot a^\dagger - a^\dagger a \cdot - \cdot a^\dagger a) \\ &+ k\bar{n}_B(2a^\dagger \cdot a - aa^\dagger \cdot - \cdot aa^\dagger). \end{aligned} \quad (5.11)$$

É a mesma dinâmica não-unitária estudada no capítulo anterior.

O Hamiltoniano estudado \hat{H} é dependente do tempo, da seguinte forma:

$$\hat{H}(\hat{q}, \hat{p}, t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(t)\hat{q}^2. \quad (5.12)$$

Este Hamiltoniano pode ser escrito como [48]

$$\hat{H}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger, t) = \left[f_1(t) \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + f_2(t) (\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2) \right], \quad (5.13)$$

onde

$$f_1(t) = \frac{\omega_0}{2} \left(\left(\frac{\omega(t)}{\omega_0} \right)^2 + 1 \right) \quad (5.14)$$

$$f_2(t) = \frac{\omega_0}{4} \left(\left(\frac{\omega(t)}{\omega_0} \right)^2 - 1 \right). \quad (5.15)$$

Note que a dinâmica completa é quadrática, portanto a ‘forma Gaussiana’ do estado não é alterada.

5.1.2.1 Equações e soluções para $\langle \dot{a} \rangle$ e $\langle \dot{a}^\dagger \rangle$.

Para os primeiros momentos estatísticos encontramos:

$$\langle \dot{a} \rangle = -[(if_1 + k)\langle a \rangle + 2if_2\langle a^\dagger \rangle] \quad (5.16)$$

$$\langle \dot{a}^\dagger \rangle = +[(if_1 - k)\langle a^\dagger \rangle + 2if_2\langle a \rangle]. \quad (5.17)$$

As equações acima podem ser melhor entendidas se definirmos os valores esperados de “momentum” e “posição” como

$$\langle q \rangle = \langle a \rangle + \langle a^\dagger \rangle \quad (5.18)$$

$$\langle p \rangle = \frac{\langle a \rangle - \langle a^\dagger \rangle}{i}. \quad (5.19)$$

As equações de movimento para $\langle q \rangle$ e $\langle p \rangle$ são:

$$\langle \ddot{q} \rangle = -(\omega^2(t) + k^2)\langle q \rangle - 2k\langle \dot{q} \rangle \quad (5.20)$$

$$\langle \dot{p} \rangle = -\left(\frac{\omega^2(t)}{\omega_0} \right) \langle q \rangle - k\langle p \rangle. \quad (5.21)$$

A solução da equação de movimento para o valor esperado $\langle q \rangle$ é

$$\langle q \rangle(t) = Q(t)e^{-kt}, \quad (5.22)$$

onde a função $Q(t)$ obedece a equação clássica de movimento

$$\ddot{Q}(t) + \omega^2(t)Q(t) = 0. \quad (5.23)$$

Similar a outros autores ([47], [49]), encontramos que o valor esperado da posição e momento de um EG, desde que a evolução seja no máximo quadrática, segue o comportamento clássico mas com um decaimento exponencial devido a dissipação.

5.1.3 Solução Analítica da função de Wigner e da função característica

Tentamos estudar este sistema a partir de métodos de solução via Álgebra de Lie, porém os cálculos finais se tornaram impraticáveis. Assim, decidimos seguir o caminho dado pela referência [50], onde os autores elaboram o ferramental matemático para se determinar a evolução da função característica (ou da função de Wigner) sob influência de um reservatório como da equação (5.11). Note que, assim como o estado do sistema ρ possui toda a informação relativa ao mesmo, a função de Wigner e a função característica também possuem, e nosso trabalho se resume em descobrirmos uma destas funções (e sua respectiva evolução temporal) para caracterizar o estado. Iremos aqui fazer um breve resumo dos resultados dos trabalhos de [50] e explicitar nossos resultados até então.

5.1.3.1 Caso sem dissipação

Começaremos pela definição da função de Wigner (já definida no capítulo 2, porém iremos introduzir uma outra notação):

$$W(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dq' \left\langle q + \frac{q'}{2} | \hat{\rho} | q - \frac{q'}{2} \right\rangle \exp\left(-i\frac{pq'}{\hbar}\right), \quad (5.24)$$

onde $\vec{x} = (p, q)$. Sob uma evolução no máximo quadrática, a função de Wigner propaga classicamente [50]:

$$\frac{\partial}{\partial t} W_t(\vec{x}) = \{H(\vec{x}), W_t(\vec{x})\}, \quad (5.25)$$

onde $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q}$ é o parêntese de Poisson clássico, e $H(\vec{x}) = \vec{x} \cdot \mathbf{H}\vec{x}$. Então, podemos escrever [51]:

$$W_t(\vec{x}) = W_0(\mathbf{R}_{-t}\vec{x}), \quad (5.26)$$

onde

$$\mathbf{R}_{-t} = \exp(2\mathbf{\Omega}\mathbf{H}t), \quad (5.27)$$

onde $\mathbf{\Omega}$ é a forma simplética definida no capítulo 2:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.28)$$

Note que (5.27) dá a evolução clássica do Hamiltoniano de um ponto \vec{x} no espaço de fase, ou seja, dado um Hamiltoniano $H(\vec{x})$ a evolução das variáveis, classicamente, é dada por: $\vec{x}_t = \mathbf{R}_t\vec{x}$, ou mais explicitamente:

$$\begin{pmatrix} p_t \\ q_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{v}_t & \dot{u}_t \\ v_t & u_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

onde as funções u_t e v_t seguem uma equação da seguinte forma (para o Hamiltoniano (5.12)):

$$\ddot{\phi}_t + \omega^2(t)\phi_t = 0, \quad (5.30)$$

onde ϕ_t representa tanto u quanto v , o que os diferencia é a condição inicial utilizada. Da equação (5.29) vemos que:

$$\mathbf{R}_t = \begin{pmatrix} \dot{v}_t & \dot{u}_t \\ v_t & u_t \end{pmatrix}. \quad (5.31)$$

A transformada de Fourier da função de Wigner (função característica):

$$\chi(\vec{\xi}) = \frac{1}{2\hbar\pi} \int d\vec{x} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{\xi} \wedge \vec{x}\right) W(\vec{x}) \quad (5.32)$$

também propaga de uma forma análoga a (5.26) no caso sem dissipação. O símbolo \wedge significa: $\vec{\xi} \wedge \vec{x} = \xi_p q - \xi_q p$. Assim:

$$\chi_t(\vec{\xi}) = \chi_0(\mathbf{R}_{-t}\vec{\xi}). \quad (5.33)$$

Assim, como estamos trabalhando com estados Gaussianos de 1-modo, obtendo uma expressão para (5.31) podemos calcular $W_0(\mathbf{R}_{-t}\vec{x})$ pois:

$$W_0(V) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}V\sigma^{-1}V^T\right)}{\pi\sqrt{\det\sigma}}, \quad (5.34)$$

onde $V = (q, p)$ e σ é a matriz de covariância (dada no capítulo 2). Já a função característica $\chi_0(\vec{\xi})$ é dada por:

$$\chi_0(\vec{\xi}) = \frac{1}{2\pi} \int d\vec{x} \exp[-i(\xi_p q - \xi_q p)] W_0(\vec{x}). \quad (5.35)$$

Desde modo, temos a solução geral do problema para o caso sem dissipação.

5.1.3.2 Caso com dissipação

A solução para a equação característica (detalhes em [50]), numa evolução da forma (5.11), é:

$$\chi_t(\vec{\xi}) = \chi_0(\vec{\xi}_{-t}) \exp\left(-\frac{1}{2}\vec{\xi} \cdot \mathbf{M}(t)\vec{\xi}\right), \quad (5.36)$$

onde

$$\mathbf{M}(t) = \sum_j \int_0^t dt' e^{2k(t'-t)} \mathbf{R}_{t'-t}^T (\mathbf{l}'_j \mathbf{l}'_j{}^T + \mathbf{l}''_j \mathbf{l}''_j{}^T) \mathbf{R}_{t'-t}, \quad (5.37)$$

onde k é a constante de dissipação em (5.11) e $j = 1, 2$ pois estamos tratando de um sistema de 1-modo. As variáveis de corda, *i.e.* $\vec{\xi}$, possuem a seguinte variação temporal:

$$\vec{\xi}_t = e^{kt} \mathbf{R}_t \vec{\xi}. \quad (5.38)$$

No nosso caso temos:

$$\mathbf{l}'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{k(n_B + 1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l}''_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{k(n_B + 1)} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{l}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{kn_B} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l}''_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{kn_B} \\ 0 \end{pmatrix},$$

assim, temos: $\mathbf{l}'_1 \mathbf{l}'_1{}^T + \mathbf{l}''_1 \mathbf{l}''_1{}^T = k(n_B + 1)\mathbf{1}$ e $\mathbf{l}'_2 \mathbf{l}'_2{}^T + \mathbf{l}''_2 \mathbf{l}''_2{}^T = kn_B \mathbf{1}$.

Note que a influência da dinâmica dissipativa ocorre no termo $\mathbf{M}(t)$ – (5.37) –

e na evolução da variável de corda $\vec{\xi}$ – (5.38). O termo \mathbf{R}_t continua sendo a matriz de evolução Hamiltoniana clássica de \vec{x} , *i.e.* a matriz (5.31).

Assim, da mesma forma que no caso sem dissipação, ao obtermos um resultado para \mathbf{R}_t possuiremos a evolução do estado, porém neste caso precisamos computar a matriz $\mathbf{M}(t)$.

5.1.3.3 Exemplos que desejamos estudar

Como dito antes, queremos estudar estados Gaussianos de 1-modo, que são totalmente caracterizados pelos seus primeiros e segundos momentos estatísticos: $\langle \hat{q} \rangle$, $\langle \hat{p} \rangle$, $\langle \hat{q}^2 \rangle$, $\langle \hat{p}^2 \rangle$, $\langle \frac{\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}}{2} \rangle$. Ao possuímos a evolução temporal de $\chi(\vec{\xi})$, podemos calcular qualquer dos momentos estatísticos do estado, pois:

$$\langle a^{\dagger m} a^n \rangle = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_p} \right)^m \left(-\frac{\partial}{\partial \xi_q} \right)^n \chi(\vec{\xi}) \Big|_{\vec{\xi}=0}. \quad (5.39)$$

Em particular:

$$\langle \hat{q}^2 \rangle = \frac{\partial^2}{\partial \xi_p^2} \chi_t \Big|_{\vec{\xi}=0}, \quad (5.40)$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \frac{\partial^2}{\partial \xi_q^2} \chi_t \Big|_{\vec{\xi}=0}, \quad (5.41)$$

$$\left\langle \frac{\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}}{2} \right\rangle = (-1) \left(\frac{\partial}{\partial \xi_p} \frac{\partial}{\partial \xi_q} \chi_t \right) \Big|_{\vec{\xi}=0}. \quad (5.42)$$

Assim, o que precisamos é, dado um sistema específico (onde queremos estudar sistemas com características de instabilidade ou geração de squeezing), encontrar a matriz $\mathbf{M}(t)$ para caracterizar o estado físico, e deste modo estudarmos a ‘competição’ entre a dissipação e a instabilidade do sistema.

Iremos estudar Hamiltonianos quadráticos como (5.12) em casos triviais mas importantes.

- O primeiro é o oscilador harmônico invertido (OHI):

$$\omega(t) = i\omega_0. \quad (5.43)$$

O OHI é um *toy model* [14, 45] usado para entender os efeitos de instabilidade

e geração de squeezing. Este modelo possui a característica importante que uma das quadraturas (sem dissipação) diverge exponencialmente da outra, devido à característica de instabilidade que este sistema possui;

- Também queremos estudar o *toy model* proposto por [47], onde a dependência temporal de ω é dada por:

$$\omega_t = \omega_0 \sqrt{1 + \gamma t}, \quad (5.44)$$

onde γ é uma constante;

- Outro exemplo importante seria estudar os potenciais das chamadas armadilhas de Paul [52], onde

$$\omega(t) = \sqrt{a + 2q \cos(\Omega t)}. \quad (5.45)$$

Esta segunda dependência temporal é o exemplo mais importante que pretendemos estudar, devido à suas aplicações práticas.

Dependência temporal: $\omega(t) = i\omega_0$

Para o OHI temos que a matriz \mathbf{R}_t é (onde fizemos $\omega_0 = 1$):

$$\mathbf{R}_t = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}. \quad (5.46)$$

A evolução da variável de corda segue:

$$\vec{\xi}_{-t} = e^{-kt} \mathbf{R}_{-t} \vec{\xi}, \quad (5.47)$$

e a matriz $\mathbf{M}(t)$ possui a seguinte forma:

$$\mathbf{M}(t) = 2k(n_b + \frac{1}{2}) \int_{-t}^0 dx e^{2kx} \left[\cosh 2x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sinh 2x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (5.48)$$

Necessitamos também da função característica inicial χ_0 do estado Gaussiano

de 1-modo:

$$\chi_0(\vec{\xi}) = \exp \left[i(p_0 \xi_q - x_0 \xi_p) - \frac{1}{2} \left(\nu_0 + \frac{1}{2} \right) (e^{2r_0} \xi_p^2 + e^{-2r_0} \xi_q^2) \right]. \quad (5.49)$$

Com estes resultados podemos facilmente computar χ_t e os momentos estatísticos e assim calcular propriedades importantes como o determinante da matriz de covariância, plotado na figura 5.1, e a entropia de von Neuman, figura 5.2.

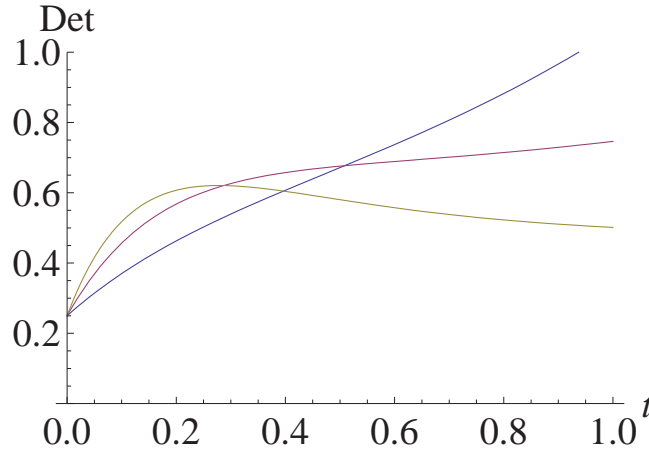


Figura 5.1: Evolução do determinante da matriz de covariância em função do tempo para o OHI. Parâmetros: $\omega_0 = 1$, $r_0 = 1$, $\nu_0 = 0$, $n_B = 0$, $k = 0.5$ (azul), $k = 1$ (lilás) e $k = 1.5$ (bege).

Note nas figuras acima, fig. 5.1 e 5.2, que se o parâmetro de dissipação k é menor que a ‘frequência natural’ do OHI – ω_0 – a entropia cresce rapidamente assumindo um comportamento linear com o tempo, assim como mostramos em nosso trabalho [14], demonstrando que o fato do sistema possuir instabilidade o força a ir rapidamente para um estado de alta entropia. Se $k = \omega_0$, conseguimos ver que o crescimento linear da entropia é ‘freado’, mas seu valor tende a crescer. Já para valores onde $k > \omega_0$ a entropia atinge um valor de saturação, mostrando que pelo menos para este modelo simples existe realmente uma competição entre dissipação e instabilidade.

Como visto em nosso trabalho [14], o potencial relativo às armadilhas de Paul, $\omega(t) = \sqrt{a + 2q \cos(\Omega t)}$, possui pontos de instabilidade onde a entropia de von Neuman varia linearmente no tempo. Estes pontos, em primeira aproximação, são exatamente o potencial do OHI, indicando que também nestes casos efeitos

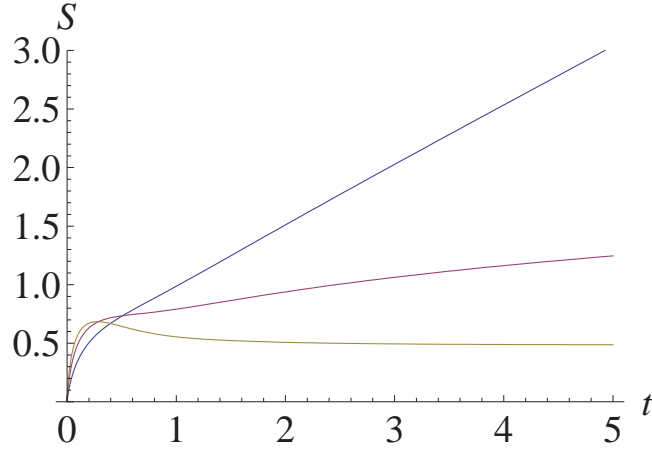


Figura 5.2: Evolução da entropia de von Neuman em função do tempo para o OHI. Parâmetros: $\omega_0 = 1$, $r_0 = 1$, $\nu_0 = 0$, $n_B = 0$, $k = 0.5$ (azul), $k = 1$ (lilás) e $k = 1.5$ (bege).

dissipativos também podem impedir este crescimento rápido da entropia.

Dependência temporal: $\omega_t = \omega_0 \sqrt{1 + \gamma t}$

Para esta dependência temporal de $\omega(t)$, no momento possuímos apenas a matriz \mathbf{R}_t , que é dada por (5.31), onde as funções u e v satisfazem a equação

$$\ddot{\phi}_t + \omega_0^2(1 + \gamma t)\phi_t = 0, \quad (5.50)$$

para as seguintes condições iniciais: $u(0) = 1$, $\dot{u}(0) = 0$, $v(0) = 0$ e $\dot{v}(0) = 1$. A solução da equação acima é [47] (onde fizemos $\omega_0 = 1$):

$$\phi = C_1 \sqrt{t'} J_{1/3}(z) + C_2 \sqrt{t'} Y_{1/3}(z), \quad (5.51)$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração, $J_{1/3}(z)$ e $Y_{1/3}(z)$ são funções de Bessel de ordem $1/3$ e

$$t' = t + \frac{1}{\gamma}, \quad z = \frac{2}{3} \sqrt{\gamma t'^3}. \quad (5.52)$$

No momento estamos fazendo os cálculos da matriz $\mathbf{M}(t)$ para este caso, que

é basicamente:

$$\mathbf{M}(t) = 2k \left(n_B + \frac{1}{2} \right) \int_{-t}^0 dx e^{2kx} \mathbf{R}_x^T \mathbf{R}_x, \quad (5.53)$$

e ainda não obtivemos resultados concretos para serem apresentados.

5.2 Estados Gaussianos e não Gaussianos n-modos, etc.

Recentemente fizemos um estudo sobre a dinâmica de emaranhamento entre 2 modos Gaussianos preparados em uma cavidade de microondas, e vimos que, assintoticamente, o emaranhamento pode persistir, extinguir em tempo finito ou em tempo assintótico ($t \rightarrow \infty$) [53]. Os detalhes deste trabalho não estão no escopo desta tese, porém como trabalho futuro pretendemos estudar mais a fundo este sistema incluindo estados não Gaussianos. Poderíamos, por exemplo, estudar a dinâmica de estados de ‘gato de Schroedinger’, comprimidos ou não, se comportam sob efeitos de dissipação, tanto em canais Gaussianos quanto em canais não-Gaussianos.

Outros projetos que possuímos são:

- Aspectos dinâmicos do emaranhamento de estados não-Gaussianos bi-partidos: neste trabalho queremos estudar a dinâmica do emaranhamento num sistema bi-partido não-Gaussiano, sob efeito de dissipação, onde pretendemos identificar como o emaranhamento entre as partes se comporta. Intuitivamente vemos que o emaranhamento, sendo uma propriedade quântica, deve diminuir com o tempo, assim como outras propriedades quânticas. Porém, isto não é óbvio, visto que existem sistemas onde, mesmo sem emaranhamento, ainda existem correlações não clássicas;
- Estimação de parâmetros em sistemas emaranhados: podemos, imediatamente, aplicar técnicas de TEQ, com a finalidade de estimar parâmetros em sistemas emaranhados, como por exemplo em sistemas comprimidos na variável de spin [54], e estudar a relação entre emaranhamento e uma melhora em medidas de propriedades quânticas;
- Emaranhamento em estados tri-partido e limite clássico em experimentos de difração atômica: a partir do estudo dos trabalhos [55, 56, 57], temos a

intenção de estudar os aspectos dinâmicos de propriedades quânticas, principalmente emaranhamento, de sistemas com 3 graus de liberdade em interferometria atômica. Nestes sistemas, através de uma rede de difração por onde se passam átomos, podemos ou não ver franjas de interferência (devido a um campo estático que é localizado logo após a rede de difração). Ainda não muito estudado, apesar de extremamente interessante, este sistema seria um excelente teste para estudarmos emaranhamento entre graus de liberdade internos, e também para analisarmos limite clássico.

Conclusões

A proposta principal desta tese é realizar um estudo de estados de variáveis contínuas monomodais (estados que possuam natureza intrinsecamente quântica), tanto Gaussianos quanto não-Gaussianos, sob efeito de dissipação. Assim, foram dois passos a serem cumpridos: estudamos (i) o canal responsável pela dissipação dos estados e (ii) como as propriedades quânticas de cada ‘classe’ de estados (Gaussianos e não-Gaussianos) se comportam sob o efeito de dissipação. Assim, no capítulo 3 estudamos estados não-Gaussianos evoluindo sob influência de um canal bosônico, a fim de estimarmos o valor do parâmetro de dissipação; e nos próximos capítulos estudamos os sistemas (estados Gaussianos e não-Gaussianos) e suas propriedades, evoluídos sob uma dinâmica dissipativa de um canal bosônico.

No capítulo 2 fizemos uma breve revisão teórica das ferramentas matemáticas básicas que utilizamos para a solução dos problemas atacados. Estudamos a teoria de estimativas quânticas, seus principais objetos matemáticos (derivada logarítmica simétrica, informação de Fisher clássica e quântica, limite de Cramér-Rao, etc.) e como podemos estimar, teoricamente, o valor de um parâmetro com a maior precisão possível. Também apresentamos uma dedução, apesar de simplista, da equação mestra que trabalhamos (isto é, a equação que modela o canal de dissipação que estudamos com maior detalhe). Ao fim deste capítulo apresentamos o conceito de variáveis contínuas em mecânica quântica, e como podemos estudar algumas propriedades destes, como a entropia de von Neumann.

Com as ferramentas acima em mãos, no capítulo seguinte estudamos um problema de estimativa em mecânica quântica, mais especificamente a estimativa do parâmetro de perda, *i.e.* a dissipação, do canal estudado no capítulo 2 (a equação mestra deduzida para temperatura igual a zero). Vimos que estados não-Gaussianos melhoram a precisão da medida do parâmetro de perda comparados

a estados Gaussianos. Em especial os estados de Fock ($\rho_0 = |n\rangle\langle n|$) saturam o limite de Cramér-Rao, atingindo o máximo de precisão alcançável teoricamente, para qualquer energia *discreta* $\bar{n} = 0, 1, 2, \dots$. Para energias pequenas, ou energias não-discretas, estudamos superposições dos primeiros estados de Fock e verificamos que superposições tipo qu-trit e estados de *photon subtracted* truncados, superam os estados Gaussianos no problema da estimativa do parâmetro de perda de um canal bosônico. Assim, podemos afirmar que estados não-Gaussianos são os estados ótimos a serem utilizados a fim de obtermos a melhor estimativa do parâmetro em questão.

No capítulo 4 fizemos uma comparação detalhada entre estados Gaussianos de 1-modo e estados de superposição coerente par e ímpar. Estudamos várias propriedades destes estados, como distribuição do número de fótons, negatividade da função de Wigner, entropia de von Neumann e squeezing (compressão). Vimos que os estados de superposição par, para parâmetros de deslocamento – ou força do – campo pequenos (da ordem de $\beta_0 \lesssim 1.14$), apresentam *efetivamente* squeezing numa de suas quadraturas, e se comportam de maneira semelhante a estados Gaussianos de 1-modo. Mostramos também que efeitos de compressão para estados Gaussianos monomodais e estados de superposição par apresentam efeitos de compressão para condições iniciais especiais, visto que a escala de tempo seja acessível experimentalmente. Uma conclusão importante destes trabalhos foi o fato de que, para estados Gaussianos de 1-modo, existe um limite na impureza inicial do mesmo para que este apresente efeitos quânticos efetivos (*i.e.* a inequação (4.38)). Ainda neste capítulo, revisamos muito brevemente nosso trabalho [14], onde mostramos que estados Gaussianos acoplados a sistemas com poucos graus de liberdade, porém que contenham características de instabilidade, possuem um crescimento assintótico de sua entropia de von Neumann que é linear com o tempo, diferentemente do que acontece com sistemas acoplados a infinitos graus de liberdade, onde a entropia alcança um patamar.

Por fim, apresentamos um trabalho em andamento, onde estamos estudando estados Gaussianos de 1-modo, sob ação de uma evolução unitária que pode ser dependente do tempo, *i.e.* o Hamiltoniano pode possuir uma dependência temporal. Queremos estudar uma evolução temporal que possua características de instabilidade e a influência de efeitos dissipativos sobre estes sistemas. Analisamos este problema via o formalismo matemático desenvolvido por Ozório [50], onde utilizamos a função característica do sistema e sua evolução temporal. Como exemplo, simples porém importante, estudamos uma evolução de um estado Gaus-

siano numa evolução temporal tipo oscilador invertido, onde $H(t) = p^2 - \omega_0^2 x^2$ por exemplo. Vimos que se a dissipação k for maior que a frequência natural do oscilador invertido, o crescimento da entropia de von Neumann é ‘freiado’, de modo a se estabilizar (o que não ocorre se o oscilador invertido não estiver dissipando, ou se $k < \omega_0$). Pretendemos num futuro próximo estudar o exemplo onde a frequência varia como: $\omega(t) = \omega_0 \sqrt{\gamma t}$. Para este caso ainda não possuímos resultados concretos.

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. P. Feynman, *The Feynman Lectures on Physics*, Addison Wesley Longman, (1970).
- [2] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge, (2000).
- [3] P. W. Shor, SIAM J. Comput., **26**, 1509, (1997).
- [4] I. S. Oliveira, T. J. Bonagamba, R. S. Sarthour, J. C.C. Freitas e E. R. de Azevedo, *NMR Quantum Information Processing*, Elsevier, (2007).
- [5] S. Haroche e J. Raimond, *Exploring the Quantum Atoms, Cavities, and Photons*, Oxford, (2006).
- [6] Wojciech H. Zurek, Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical, *Reviews of Modern Physics*, 75, 715, (2003).
- [7] S. L. Braunstein e A. K. Pati, *Quantum information with continuous variables*, Kluwer Academic, Dordrecht (2003); S. L. Braunstein and P. van Loock, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 513 (2005).
- [8] H. A. Bachor, *A guide to experiments in quantum optics*, John Wiley & Sons, (1988).
- [9] G. Adesso e F. Illuminati, *New Journal of Physics* 8, 15 (2006). G. Adesso, A. Serafini e F. Illuminati, *Phys. Rev. A* **73**, 032345 (2006). G. Adesso e F. Illuminati, *Int. J. of Quant. Inf.* Vol. 4, No. 3, 383 (2006). F. Illuminati, *Nature Physics*, Vol 2, 803, (2006). G. Adesso, A. Serafini, e F. Illuminati, *Open Sys. and Information Dyn.* 12, 189, (2005). A. Serafini, F. Illuminati, M. G. A. Paris, e S. De Siena, *Phys. Rev. A* **69**, 022318 (2004). G. Adesso

- e F. Illuminati, Phys. Rev. A **72**, 032334, (2005). G. Adesso, A. Serafini, e F. Illuminati, Phys. Rev. Lett. **93**, 220504 (2004). A. Serafini, S. De Siena, F. Illuminati e M. G. A. Paris, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **6**, S591, (2004). G. Adesso, A. Serafini, F. Illuminati, New J. Phys. **9**, 60 (2007). T. Hiroshima, G. Adesso, F. Illuminati, Phys. Rev. Lett. **98**, 050503 (2007). A. Serafini et al 2004 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **37** L21. G. Adesso, F. Illuminati, New J. Phys. **8**, 15 (2006).
- [10] S. Lloyd, S. L. Braunstein, Phys. Rev. Lett., **82**, 1784, (1999).
- [11] G. Adesso, F. Dell'Anno, S. De Siena, F. Illuminati, e L. A. M. Souza, Phys. Rev. A, **79**,040305(R), (2009).
- [12] L.A.M. Souza, M.C. Nemes, M. França Santos, J.G. Peixoto de Faria, Opt. Comm., **281** , 4696, (2008).
- [13] L.A.M. Souza, M.C. Nemes, Phys. Lett. A, **372**, 3616, (2008).
- [14] K. M. Fonseca Romero, J. E Parreira, L.A.M. Souza, M.C. Nemes e W. Wreszinski, J. Phys. A: Math. Theor., **41**, 115303, (2008).
- [15] A. Monras, *Optimal estimation of quantum states and operations*, tese de doutorado. Disponível em: http://personal.ifa.es/amonras/thesis_amonras.pdf.
- [16] M. A. B. S'anchez, *Estimation of Quantum States and Operations*, tese de doutorado. Disponível em: <http://www.inria.fr/sophia/asclepios/Publications/Gonzalez/Gonzalez:PhD:1999.pdf>.
- [17] H. J. Carmichael, *Statistical Methods in Quantum Optics 1*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York (2002).
- [18] G. Adesso, *Entanglement of Gaussian States*, tese de doutorado. Disponível em: http://arxiv.org/PS_cache/quant-ph/pdf/0702/0702069v1.pdf.
- [19] A. W. van der Vaart, *Asymptotic Statistics* (Cambridge University Press, 2000).
- [20] C. W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory* (Academic Press, New York, 1976).

- [21] A. S. Holevo, *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1982).
- [22] A. N. Shiryaev, traduzido por R. P. Boas, *Probability*, Springer, (1996).
- [23] M. Hübner, Phys. Lett. A, **163**, 239, (1992).
- [24] W. K. Wootters, Phys. Rev. D, **23**, 357, (1981).
- [25] S.L. Braunstein, e C.M. Caves, Phys. Rev. Lett., **72**, 3439, (1994).
- [26] R. C. Drumond, dissertação de mestrado *Dissipação e decoerência de átomos e campos em cavidades ópticas a temperatura nula*, UFMG (2007). Disponível em: <http://www.fisica.ufmg.br/posgrad/Teses/Tesem/raphael-drumond/dissRCD.pdf>.
- [27] E. Schroedinger, *About Heisenberg Uncertainty Relation*, tradução feita por A. Angelow, M.-C. Batoni em: arXiv:quant-ph/9903100v2 (1999).
- [28] A. Serafini, M. G. A. Paris, F. Illuminati e S. De Siena, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **7**, R19 (2005). G. Adesso e F. Illuminati, J. Phys. A: Math. Theor. **40**, 7821 (2007).
- [29] A. Monras and M. G. A. Paris, Phys. Rev. Lett. **98**, 160401 (2007).
- [30] L. M. Arévalo-Aguiar e H. Moya-Cessa, Quant. Semiclass. Opt. **10**, 671, (1998).
- [31] J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Longman, (1994).
- [32] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, *Quantum Mechanics*, Wiley-Interscience (2006).
- [33] B. T. H. Varcoe *et al.*, Nature **403**, 743 (2000); A. I. Lvovsky *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 050402 (2001); P. Bertet *et al.*, Phys. Rev. Lett. **88**, 143601 (2002); J. McKeever *et al.*, Science **303**, 1992 (2004); A. Zavatta, S. Viciani, and M. Bellini, Phys. Rev. A **70**, 053821 (2004); E. Waks, E. Diamanti, and Y. Yamamoto, New J. Phys. **8**, 4 (2006); A. Ourjoumtsev, R. Tualle-Brouri, and P. Grangier, Phys. Rev. Lett. **96**, 213601 (2006); H. Walther, Fortschr. Phys. **54**, 617 (2006); A. A. Houck *et al.*, Nature **449**, 328 (2007); S. Deleglise *et al.*, Nature **455**, 510 (2008); M. Hofheinz *et al.*, Nature **454**, 310 (2008); H. Wang *et al.*, Phys. Rev. Lett. **101**, 240401 (2008).

- [34] F. Dell'Anno, S. De Siena, L. A. Farias, and F. Illuminati, *Phys. Rev. A* **76**, 022301 (2007); F. Dell'Anno, S. De Siena, L. A. Farias, and F. Illuminati, *Eur. Phys. J. - ST* **160**, 115 (2008); A. Kitagawa, M. Takeoka, M. Sasaki, and A. Chefles, *Phys. Rev. A* **73**, 042310 (2006).
- [35] A. Zavatta, S. Viciani, and M. Bellini, *Science* **306**, 660 (2004); J. Wenger, R. Tualle-Brouri, and P. Grangier, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 153601 (2004); A. Ourjoumtsev, A. Dantan, R. Tualle-Brouri, and P. Grangier, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 030502 (2007).
- [36] M. Brune, S. Haroche, J. M. Raimond, L. Davidovich e N. Zagury, *Phys. Rev. A* **45**, 5193 (1992); L. Davidovich, M. Brune, J. M. Raimond e S. Haroche, *ibid.* **53**, 1295 (1996).
- [37] B. Wang e L.-M. Duan, *Phys. Rev. A* **72**, 022320 (2005); Zhi-Ming Zhang, Ashfaq H Khosa, Manzoor Ikram e M Suhail Zubairy, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **40** 1917 (2007).
- [38] K. M. Fonseca Romero, M. C. Nemes, J. G. Peixoto de Faria, A. N. Salgueiro e A. F. R. de Toledo Piza, *Phys. Rev. A* **58**, 3205 - 3209 (1998).
- [39] V. Bužek, A. Vidiella-Barranco e P. L. Knight, *Phys. Rev. A* **45**, 6570 (1992).
- [40] M. M. Nieto, *Phys. Lett. A* **229**, 135 (1997).
- [41] P. Marian e T. A. Marian, *Phys. Rev. A* **47**, 4487 (1993).
- [42] M. G. A. Paris, F. Illuminati, A. Serafini e S. De Siena, *Phys. Rev. A* **68**, 012314 (2003).
- [43] P. Marian e T. A. Marian, *Phys. Rev. A* **47**, 4474 (1993).
- [44] M. Stobinska e K. Wodkiewicz, *Phys. Rev. A* **71**, 032304 (2005).
- [45] R. Blume-Kohout e W. Zurek , *Phys. Rev. A* **68** 032104 (2003).
- [46] H. R. Jauslin , O. Sapin, S. Guérin e W. F. Wreszinski, *J. Math. Phys.* **45** 4377 (2004).
- [47] G. S. Agarwal e S. Arun Kumar, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 3665 (1991).
- [48] B. Baseia, V. S. Bagnato, M. A. Marchioli e M. C. de Oliveira, *Quantum Semiclass. Opt.* **9**, 519 (1997).

-
- [49] C. F. Lo, EuroPhys. Lett. **27**, 1 (1994); S. Zhang e F. Li, J. Phys. A: Math. Gen. **29**, 6143 (1996); X. Xu, J. Phys. A: Math. Gen. **33**, 2447 (2000); C. Brif, A. Vourdas e A. Mann, J. Phys. A: Math. Gen. **29**, 5873 (1996); S. Abe e R. Ehrhardt, Phys. Rev. A **48**, 986 (1993); A. B. Nassar, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **4**, S226 (2002); J. Aliaga et al, Phys. Rev. Lett. **70**, 434 (1993).
- [50] O. Brodier, A. M. Ozorio de Almeida, Phys. Rev E **69**, 016204 (2004).
- [51] V. I. Arnold, A. Weinstein, K. Vogtmann, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer, (1997).
- [52] W. Paul, Rev. Mod. Phys. **62**, 531 (1990).
- [53] R.C. Drumond, L.A.M. Souza, M. Terra Cunha, em preparação.
- [54] M. Kitagawa e M. Ueda, Phys. Rev. A **47**, 5138 (1993).
- [55] M. Freyberger and A. M. Herkommer, Phys. Rev. Lett. **72**, 1952 (1994).
- [56] M. H. Y. Moussa, S. S. Mizrahi, A. O. Caldeira, Phys. Lett. A, **221**, 145 (1996).
- [57] I. Sh. Averbukh, V. M. Akulin and W. P. Schleich, Phys. Rev. Lett. **72**, 437(1994).