

MANOEL PEDRO DE ARAÚJO

***DINÂMICA DO EMARANHAMENTO NUM
SISTEMA TRIPARTITE***

BELO HORIZONTE-MG, BRASIL

AGOSTO DE 2010

MANOEL PEDRO DE ARAÚJO

***DINÂMICA DO EMARANHAMENTO NUM
SISTEMA TRIPARTITE***

Dissertação apresentada para obtenção do Grau
de Mestre em Física pela Universidade Federal
de Minas Gerais.

Orientador:

Prof^ª. Dr^ª. Maria Carolina Nemes

Co-orientador:

Prof. Dr. Marcelo de Oliveira Terra Cunha

DEPARTAMENTO DE FÍSICA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

BELO HORIZONTE-MG, BRASIL

AGOSTO DE 2010

*“Há homens que lutam um dia e são bons.
Há outros que lutam um ano e são melhores.
Há os que lutam muitos anos e são muito bons.
Porém, há os que lutam toda a vida.
Esses são os imprescindíveis.”*

Bertolt Brecht

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me dado a oportunidade de estar no mundo. Aos meus pais, e à minha família, agradeço todo o amor, carinho, compreensão e respeito.

À Prof^a. Dr^a. Maria Carolina Nemes, orientadora desta dissertação, por todo empenho, sabedoria, compreensão e exigência. Gostaria de ratificar suas discussões, revisões e sugestões.

Ao Prof. Dr. Marcelo de Oliveira Terra Cunha por sua co-orientação com *status* de orientador, pela confiança em mim e, acima de tudo, sua dedicação, compreensão, sugestões e correções para melhorar este trabalho.

Aos Professores da Pós-Graduação que depositaram confiança em mim.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, participaram do desenvolvimento deste trabalho.

A todos os meus amigos que sempre estiveram presentes me aconselhando e incentivando com carinho e dedicação.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio e financiamento concedido.

RESUMO

A proposta deste trabalho é examinar a dinâmica do emaranhamento entre dois constituintes de um sistema tripartido fechado, no sentido de que não existe nenhuma perda de energia. Este sistema é constituído por dois átomos na aproximação de dois níveis com transições atômicas iguais e um único modo de campo numa cavidade, onde um dos átomos é posto para interagir no regime ressonante com o único modo de campo, via interação de *Jaynes-Cummings*. O interesse aqui é a evolução do emaranhamento entre os dois átomos, quantificado pela concorrência de Wootters. Será analisada a influência do estado inicial do campo no aparecimento de bicos na evolução temporal da concorrência. Experimentalmente, a quantificação de emaranhamento, dada pela concorrência, é difícil de se obter. Por isso, para este sistema, sob as condições iniciais impostas, serão definidos dois operadores capazes de acompanhar a dinâmica do emaranhamento e diretamente mensuráveis: o *operador de correlação* dado pelo produto das inversões atômicas dos átomos e o *operador de Bell*. Serão analisados os efeitos do estado inicial do campo em uma combinação linear de dois estados de Fock sobre as dinâmicas destes operadores.

ABSTRACT

The proposal of this work is to study the bipartite entanglement between two constituents of a tripartite closed system, in the sense that there is no energy loss. The system consists of a pair of two-level atoms with equal transitions and one electromagnetic field mode in a cavity, with one of the atoms interacting with the field mode via *Jaynes-Cummings* interaction. We study the time evolution of entanglement between the two atoms, quantified by Wootters' *concurrence*. The influence of initial state of the field in the appearance of singularities in this time evolution is discussed. Since concurrence is hard to determine experimentally, we define two directly measurable observables which, for the special initial conditions we study, can follow the entanglement behavior: the *correlation operator*, given by the product of the population inversions, and the *Bell operator*. We study the effects of initial states given by superpositions of two Fock states.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	1
1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS	4
1.1 Operador densidade	4
1.2 Sistemas compostos	6
1.3 Emaranhamento	8
1.3.1 Medidas de emaranhamento em estados puros	12
1.3.2 Emaranhamento em estados não puros	12
1.3.3 Negatividade	14
1.3.4 Concorrência	15
1.4 Desigualdades de Bell	17
2 SISTEMA ÁTOMO-CAMPO	22
2.1 O Hamiltoniano	22
2.1.1 O átomo	23
2.1.2 O campo quantizado	25
2.1.3 Estados de Fock	30
2.1.4 A interação átomo-campo	31
2.1.5 O modelo de Jaynes-Cummings	32
3 DINÂMICA DO EMARANHAMENTO EM UM SISTEMA TRIPARTITE	36
3.1 O sistema tripartite	36
3.2 A dinâmica do emaranhamento	42

<i>Sumário</i>	vi
3.2.1 A concorrência	42
3.2.2 Operador de correlação	47
3.2.3 Operador de Bell	52
CONCLUSÕES	60
REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS	62

INTRODUÇÃO

O emaranhamento é uma característica intrínseca da Mecânica Quântica que permite correlação em sistemas quânticos para qual não existe análogo clássico. Isto tem sido ponto de discussão da Mecânica Quântica desde os tempos de Schrödinger [1, 2] e Einstein, Podolsky e Rosen [3]. Atualmente, acredita-se que o emaranhamento é um recurso importante em *informação quântica e computação quântica* [4].

A computação quântica pode ser desenvolvida com base na *superposição* quântica e no *emaranhamento* [5]. A computação Clássica usa “bits” para armazenar informação. Estes “bits” podem ter dois estados diferentes usualmente denominados: 0 ou 1. A computação e informação quânticas têm conceito análogo, o “quantum bit”, ou “qubit”. A diferença entre o “bit” e o “qubit” é que, a Mecânica Quântica permite formar combinações lineares de estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, assim

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (1)$$

onde α e β são números complexos, que satisfazem a condição de normalização $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. O estado (1) é um vetor num espaço vetorial complexo. Com a medição projetiva $\hat{P}_0 = |0\rangle\langle 0|$ ou $\hat{P}_1 = |1\rangle\langle 1|$, o qubit (1) pode resultar em 0 com probabilidade $|\alpha|^2 = \langle \psi | \hat{P}_0 | \psi \rangle$ ou 1 com probabilidade $|\beta|^2 = \langle \psi | \hat{P}_1 | \psi \rangle$. Depois da medição o sistema estará no estado $|0\rangle' = \frac{\hat{P}_0|\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | \hat{P}_0 | \psi \rangle}}$ ou $|1\rangle' = \frac{\hat{P}_1|\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | \hat{P}_1 | \psi \rangle}}$.

Outro fenômeno que pode ser importante para a computação e a informação quânticas é o emaranhamento, que é puramente quântico. Um estado puro de dois sistemas 1 e 2 é dito emaranhado quando for não fatorável, $|\psi\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$, caso contrário o sistema é dito desemaranhado.

Um exemplo de estado puro de dois sistemas 1 e 2 emaranhados, é o estado de Bell

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle + |\psi_1\rangle' \otimes |\psi_2\rangle'), \quad (2)$$

onde $|\psi_1\rangle$ é ortonormal a $|\psi_1\rangle'$, e $|\psi_2\rangle$ é ortonormal a $|\psi_2\rangle'$. Observe que no estado (2) não pode-se afirmar o estado do sistema 1 e o estado do sistema 2. Após a medição no sistema 1 é que pode-se dizer em qual estado o sistema se encontra $|\psi_1\rangle$ ou $|\psi_1\rangle'$. O mesmo acontece com

o sistema 2. O estado (2) pode ser um estado de polarização de dois fótons emaranhados, estado atômico de dois átomos emaranhados, etc.

O emaranhamento em sistemas quânticos pode deteriorar-se devido à interação com outros sistemas, chamados ambientes. A perda de emaranhamento nestes sistemas, que são acoplados a ambientes, é usualmente irreversível. O efeito destrutivo do ambiente tem dificultado extremamente a computação quântica, por isso, muitas pesquisas têm sido realizadas sobre este assunto: o emaranhamento e ambiente [6–9].

Sistemas atômicos são de particular interesse neste trabalho, porque podem ser aprisionados, localizados e postos a interagir com ambientes simples, as cavidades ópticas. Muitas investigações são focadas no estudo do emaranhamento de átomos interagindo com um campo numa cavidade. Esta interação pode ser dada pelo modelo de *Jaynes-Cummings*, que é de fundamental interesse [10]. Este tipo de sistema pode exibir o fenômeno chamado morte súbita do emaranhamento [11, 12], que é a perda abrupta de emaranhamento. Recentes experimentos têm confirmado a “morte súbita” do emaranhamento em outros sistemas [13, 14].

Em sistemas constituídos por átomos e cavidades, por exemplo, num sistema *tripartite* composto por dois átomos e um modo de campo numa cavidade ideal sendo que apenas um destes átomos interage com o campo na cavidade via *Jaynes-Cummings* foram estudadas a evolução e a transferência de emaranhamento [15]. Nesta referência foi mostrado que o emaranhamento entre os átomos é transferido para um dos átomos e o campo na cavidade. O estado inicial considerado para a cavidade foi um estado de Fock. Neste estudo, foi usada a concorrência [16] para examinar o emaranhamento.

Objetivo do presente trabalho é analisar a dinâmica do emaranhamento entre os átomos no sistema citado na referência [15], quantificada pela *concorrência* apresentada por Wootters [16]. Com a finalidade de acompanhar a dinâmica do emaranhamento numa medida experimental, serão definidos dois operadores: o *produto das inversões atômicas* e o *operador de Bell* [17]. Será analisado o efeito do estado inicial do campo em combinação linear de dois estados de Fock na dinâmica do emaranhamento.

Justifica-se a busca destes operadores no desenvolvimento deste trabalho pelo fato de que a quantificação do emaranhamento é de interesse prático e os quantificadores de emaranhamento existentes na literatura são difíceis de serem obtidos experimentalmente.

Este trabalho está dividido assim: no capítulo 1, apresentam-se de maneira simplificada algumas ferramentas importantes para o desenvolvimento deste trabalho como o operador densidade e algumas de suas propriedades. Serão tratados os quantificadores de emaranhamento

em estados puros que são as entropias e para estados não-puros, a quantificação pode ser dada pela *concorrência* de Wootters ou pela negatividade. E ainda neste capítulo será abordado o emaranhamento e as desigualdades de Bell [18]. No capítulo 2, apresenta-se o sistema átomo-campo, o átomo na aproximação de dois níveis e o campo quantizado em uma cavidade óptica. Posteriormente, obtém-se a interação entre dois níveis de transições de um átomo com o único modo de campo: o modelo de *Jaynes-Cummings* na aproximação de onda girante. Após isso, apresenta-se a evolução temporal do sistema átomo-campo. No capítulo 3, apresenta-se o sistema tripartido, constituído por um átomo dentro de uma cavidade ideal e um outro completamente não interagente com essas duas partes, a interação do átomo com o campo na cavidade é via *Jaynes-Cummings*. Em seguida, obtém-se a dinâmica do emaranhamento entre os átomos, dada pela *concorrência*. E, a propósito de acompanhar a dinâmica do emaranhamento, definem-se dois operadores, o *operador de correlação* e o *operador de Bell*. Em seguida, analisa-se a evolução temporal dos valores esperados deste operadores sob a influência do estado inicial do campo em uma combinação linear de dois estados de Fock.

Toda a análise da dinâmica do emaranhamento neste trabalho é de cunho exclusivamente teórico e analítico.

1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Neste capítulo é discutido de maneira concisa um dos tópicos mais intrigantes e fascinantes da Teoria Quântica, o emaranhamento. São apresentadas e discutidas algumas ferramentas importantes no estudo do emaranhamento para o desenvolvimento deste trabalho: o operador densidade e alguns quantificadores do emaranhamento, como as entropias, a negatividade e a concorrência. E também serão discutidas as desigualdades de Bell e o emaranhamento.

1.1 Operador densidade

Na Mecânica Quântica, usa-se o espaço de Hilbert \mathcal{H} . Neste espaço, qualquer vetor pode ser expresso em uma combinação linear dos vetores de alguma base, $\{|n_i\rangle\}_{i=1,2,3,\dots,N}$ ortonormal, sendo N a dimensão do espaço \mathcal{H} . Estados puros neste espaço são tratados como se segue: definindo um sistema Ξ com estado $|\psi\rangle$ e expandindo este estado na base ortonormal $\{|n_i\rangle\}$, tem-se

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N C_i |n_i\rangle, \quad (1.1)$$

onde $C_i = \langle n_i | \psi \rangle$, com $\sum_{i=1}^N |C_i|^2 = 1$, sendo $|C_i|^2 = \langle \psi | \hat{P}_i | \psi \rangle$ a probabilidade de encontrar o sistema no estado $|n_i\rangle' = \frac{\hat{P}_i |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | \hat{P}_i | \psi \rangle}}$ correspondente ao projetor $\hat{P}_i = |n_i\rangle\langle n_i|$.

Define-se a matriz densidade de um estado puro, como se segue

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (1.2)$$

Para este operador densidade é fácil verificar que ele é hermitiano, $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$, positivo $\hat{\rho} \geq 0$, de traço unitário $\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$ e obedece a condição

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}, \quad (1.3)$$

chamada de pureza. Desta última propriedade, pode-se concluir que seus autovalores são 1 e 0.

Pode-se obter o valor médio do observável \hat{O} em termos do operador densidade, assim

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{O}). \quad (1.4)$$

Para a mistura estatística de vários estados puros $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle$, com probabilidades p_1, p_2, \dots, p_n de cada estado ser preparado, o operador densidade é dado por

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad \text{com} \quad \sum_i p_i = 1, \quad p_i \geq 0. \quad (1.5)$$

Deste modo, pode-se expressar todas as previsões físicas do sistema em termos de $\hat{\rho}$, sendo a média de operadores densidade $|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, pesados pela probabilidade p_i .

As propriedades do operador densidade para estados mistos são: de traço $\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$, positivo $\hat{\rho} \geq 0$, hermitiano $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$ e não pureza

$$\hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho}, \quad (1.6)$$

seus autovalores estão entre 0 e 1. Para obter a densidade de estado puro (1.2) faz-se $p_i = 1$ para algum i na equação (1.5). Pode-se observar que a mistura estatística é uma generalização do estado puro.

Usando o mesmo procedimento para encontrar o valor médio de um observável para estados puros, pode-se obter o valor médio do observável \hat{O} para estados mistos, dado por

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{O}). \quad (1.7)$$

Portanto, o valor médio de um observável, tem a mesma forma tanto para estados puros, quanto para estados mistos.

Se um sistema for representado por um Hamiltoniano \hat{H} , dependente do tempo ou não, a evolução deste sistema é dada pela equação de Schrödinger, quando o sistema é puro. Para um estado não-puro, faz-se a evolução do operador densidade (1.5), considerando este operador densidade em tempo fixo t_0 e o ensemble não perturbado, a probabilidade p_i permanece constante. Então a evolução temporal só depende do estado $|\psi_i\rangle$. Para este caso, pode-se concluir que num tempo t qualquer, o operador densidade pode ser escrito assim

$$\hat{\rho}(t) = \sum_i p_i |\psi_i(t)\rangle\langle\psi_i(t)|, \quad (1.8)$$

dado que $|\psi_i(t)\rangle$ satisfaz a equação de Schrödinger

$$\frac{d}{dt}|\psi_i(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}|\psi_i(t)\rangle, \quad (1.9)$$

tem-se

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}(t)], \quad (1.10)$$

onde $[\hat{H}, \hat{\rho}(t)]$ representa o comutador de \hat{H} com $\hat{\rho}(t)$. A Equação (1.10) é chamada equação de Von Neumann que representa a dinâmica do operador densidade. Para \hat{H} independente do tempo, a solução formal da equação de von Neumann se escreve assim

$$\hat{\rho}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}\hat{\rho}(t_0)e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}. \quad (1.11)$$

Esta solução pode ser confirmada inserindo a expressão (1.11) na equação de von Neumann (1.10). O operador $\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}$, chamado de propagador, descreve a evolução temporal do operador densidade de acordo com a Equação (1.11).

1.2 Sistemas compostos

Esta secção foi desenvolvida com base em notas de aula de A. F. R. de Toledo de Piza [19].

Num sistema Ξ , composto de n subsistemas $\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n$, com cada subsistema Ξ_k sendo representado por um estado $|\psi_k\rangle$ que pertence ao espaço de Hilbert \mathcal{H}_k com dimensão N_k e base ortonormal $\{|n_{i_k}^{(k)}\rangle\}_{i_k=0, \dots, N_k-1}$, o espaço de Hilbert associado ao sistema total Ξ é dado pelo produto tensorial dos espaços \mathcal{H}_k , assim $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$ com dimensão total $N_1 \times N_2 \times \dots \times N_n$. Uma base ortonormal no espaço total \mathcal{H} pode ser definida assim

$$\{|n_{i_1}^{(1)}\rangle \otimes |n_{i_2}^{(2)}\rangle \otimes \dots \otimes |n_{i_n}^{(n)}\rangle\}_{i_k=(0, \dots, N_k-1)} = \{|n_{i_1}^{(1)} n_{i_2}^{(2)} \dots n_{i_n}^{(n)}\rangle\}_{i_k=(0, \dots, N_k-1)}.$$

O estado total $|\psi\rangle$ em \mathcal{H} pode ser dado pelo produto tensorial de cada subsistema, assim $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle$, mas nem sempre é possível escrever o estado total $|\psi\rangle$ como o produto tensorial de estados $|\psi_k\rangle$. De modo geral, qualquer estado $|\psi\rangle$ em \mathcal{H} pode ser escrito assim

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} C_{i_1, i_2, \dots, i_n} |n_{i_1}^{(1)}\rangle \otimes |n_{i_2}^{(2)}\rangle \otimes \dots \otimes |n_{i_n}^{(n)}\rangle$$

ou pela matriz densidade

$$\hat{\rho} = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_n \\ j_1, j_2, \dots, j_n}} \rho_{i_1, i_2, \dots, i_n; j_1, j_2, \dots, j_n} |n_{i_1}^{(1)} n_{i_2}^{(2)} \dots n_{i_n}^{(n)}\rangle \langle n_{j_1}^{(1)} n_{j_2}^{(2)} \dots n_{j_n}^{(n)}|.$$

Neste caso, podem-se ter estados puros ou mistos.

Seja \hat{O}_k um operador em \mathcal{H}_k . Então, o produto tensorial $\hat{O}_1 \otimes \hat{O}_2 \otimes \dots \otimes \hat{O}_n$ é um operador

em \mathcal{H} . A atuação deste operador em um vetor $|\psi\rangle$ em \mathcal{H} é dado por

$$(\hat{O}_1 \otimes \hat{O}_2 \otimes \cdots \otimes \hat{O}_n)|\psi\rangle = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} C_{i_1, i_2, \dots, i_n} \hat{O}_1 |n_{i_1}^{(1)}\rangle \otimes \hat{O}_2 |n_{i_2}^{(2)}\rangle \otimes \cdots \otimes \hat{O}_n |n_{i_n}^{(n)}\rangle.$$

A extensão de um operador \hat{O}_k , atuando somente em \mathcal{H}_k para \mathcal{H} , se escreve assim

$$\tilde{\hat{O}}_k = \hat{I}_1 \otimes \hat{I}_2 \otimes \cdots \otimes \hat{I}_{k-1} \otimes \hat{O}_k \otimes \hat{I}_{k+1} \otimes \cdots \otimes \hat{I}_{n-1} \otimes \hat{I}_n,$$

onde \hat{I}_k representa o operador identidade no k -ésimo espaço.

Dado um sistema constituído de dois subsistemas Ξ_1 e Ξ_2 , descrito por um operador densidade $\hat{\rho}$ que atua no espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, para saber qual o operador densidade que descreve o subsistema Ξ_1 , toma-se valor esperado em $\hat{\rho}$ do operador $\hat{O}_1 \otimes \hat{I}_2$, onde \hat{O}_1 atuará somente no subsistema Ξ_1 e \hat{I}_2 é o operador identidade que atuará no subsistema Ξ_2 .

Partindo do valor esperado de $\hat{O}_1 \otimes \hat{I}_2$, dado por

$$\langle \hat{O}_1 \otimes \hat{I}_2 \rangle = \text{Tr}(\hat{O}_1 \otimes \hat{I}_2 \hat{\rho}),$$

explicitando em termos da base produto $\{|n_{i_1}^{(1)} n_{i_2}^{(2)}\rangle\}$, obtém-se

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{O}_1 \otimes \hat{I}_2 \hat{\rho}) &= \sum_{i_1, i_2} \langle n_{i_1}^{(1)} n_{i_2}^{(2)} | \hat{O}_1 \otimes \hat{I}_2 \hat{\rho} | n_{i_1}^{(1)} n_{i_2}^{(2)} \rangle = \\ &= \sum_{i_1, i_2, j_1, j_2} \langle n_{i_1}^{(1)} n_{i_2}^{(2)} | \hat{O}_1 \otimes \hat{I}_2 | n_{j_1}^{(1)} n_{j_2}^{(2)} \rangle \langle n_{j_1}^{(1)} n_{j_2}^{(2)} | \hat{\rho} | n_{i_1}^{(1)} n_{i_2}^{(2)} \rangle = \\ &= \sum_{i_1, i_2, j_1, j_2} \langle n_{i_1}^{(1)} | \hat{O}_1 | n_{j_1}^{(1)} \rangle \delta_{i_2 j_2} \langle n_{j_1}^{(1)} n_{j_2}^{(2)} | \hat{\rho} | n_{i_1}^{(1)} n_{i_2}^{(2)} \rangle = \\ &= \sum_{i_1, j_1} \langle n_{i_1}^{(1)} | \hat{O}_1 | n_{j_1}^{(1)} \rangle \sum_{i_2} \langle n_{j_1}^{(1)} n_{i_2}^{(2)} | \hat{\rho} | n_{i_1}^{(1)} n_{i_2}^{(2)} \rangle = \\ &= \sum_{i_1, j_1} \langle n_{i_1}^{(1)} | \hat{O}_1 | n_{j_1}^{(1)} \rangle \langle n_{j_1}^{(1)} | \sum_{i_2} \langle n_{i_2}^{(2)} | \hat{\rho} | n_{i_2}^{(2)} \rangle | n_{i_1}^{(1)} \rangle = \\ &= \text{Tr}_1(\hat{O}_1 \hat{\rho}^{(1)}), \quad \text{com} \quad \hat{\rho}^{(1)} \equiv \sum_{i_2} \langle n_{i_2}^{(2)} | \hat{\rho} | n_{i_2}^{(2)} \rangle, \end{aligned}$$

onde $\text{Tr}_1(\cdot)$ indica o traço no subsistema Ξ_1 . E $\hat{\rho}^{(1)}$ representa a matriz densidade reduzida do subsistema Ξ_1 .

Para obter o operador densidade do segundo subsistema, o mesmo cálculo é feito com o operador $\hat{I}_1 \otimes \hat{O}_2$, fazendo isso, obtém-se o resultado análogo ao anterior

$$\langle \hat{I}_1 \otimes \hat{O}_2 \rangle = \text{Tr}_2(\hat{O}_2 \hat{\rho}^{(2)}) \quad \text{com} \quad \hat{\rho}^{(2)} \equiv \sum_{i_1} \langle n_{i_1}^{(1)} | \hat{\rho} | n_{i_1}^{(1)} \rangle, \quad (1.12)$$

onde $\text{Tr}_2(\cdot)$ indica o traço no subsistema Ξ_2 . E $\hat{\rho}^{(2)}$ é definida como a matriz densidade reduzida do subsistema Ξ_2 .

Usando a notação para as operações de traço parcial para a obtenção das densidades reduzidas explicitadas acima, tem-se

$$\hat{\rho}^{(1)} = \text{Tr}_2(\hat{\rho}) \quad \text{e} \quad \hat{\rho}^{(2)} = \text{Tr}_1(\hat{\rho}), \quad (1.13)$$

sendo que $\text{Tr}_j(\cdot)$ representa o traço parcial sobre o sistema j .

Note que estes operadores são independentes das particulares bases de \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 (e portanto da particular base produto). As matrizes densidade reduzidas têm propriedades em comum com os operadores densidade completos $\hat{\rho}$, são hermitianas, traço unitário e podem satisfazer a condição de pureza, $\text{Tr}(\hat{\rho}^{(j)}) = \text{Tr}((\hat{\rho}^{(j)})^2)$ ou não pureza, $\text{Tr}(\hat{\rho}^{(j)}) \neq \text{Tr}((\hat{\rho}^{(j)})^2)$.

Através da não pureza de operadores densidade reduzidos, pode-se estudar o emaranhamento no caso de estados puros, isso será tratado na próxima secção.

1.3 Emaranhamento

Nesta secção usa-se a decomposição de Schimidt [20], para qualquer estado puro $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, existem bases ortogonais, $\{|n_i^{(1)}\rangle\}$ $\{|n_i^{(2)}\rangle\}$ em \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , tais que

$$|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |n_i^{(1)}\rangle \otimes |n_i^{(2)}\rangle, \quad (1.14)$$

onde $\sqrt{p_i}$, chamados coeficientes de Schmidt, são números reais positivos, que satisfazem a condição $\sum_i p_i = 1$. A matriz densidade para este estado se escreve assim

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{i,j} \sqrt{p_i p_j} |n_i^{(1)}\rangle \otimes |n_i^{(2)}\rangle \langle n_j^{(1)}| \otimes \langle n_j^{(2)}|. \quad (1.15)$$

Tomando o traço parcial de $\hat{\rho}$ sobre os subsistemas Ξ_1 e Ξ_2 , tem-se

$$\hat{\rho}^{(1)} = \text{Tr}_2(\hat{\rho}) = \sum_i p_i |n_i^{(1)}\rangle \langle n_i^{(1)}| \quad \text{e} \quad \hat{\rho}^{(2)} = \text{Tr}_1(\hat{\rho}) = \sum_i p_i |n_i^{(2)}\rangle \langle n_i^{(2)}|, \quad (1.16)$$

onde $\hat{\rho}^{(1)}$ e $\hat{\rho}^{(2)}$ representam as matrizes densidades dos subsistemas Ξ_1 e Ξ_2 respectivamente.

Se o operador densidade reduzido do subsistema $\hat{\rho}^{(j)}$ for puro, isto é, $\hat{\rho}^{(j)} = (\hat{\rho}^{(j)})^2$, de acordo com a propriedade de pureza, Equação (1.3), $\hat{\rho}^{(j)}$ possui apenas um autovalor não nulo, $p_i = 1$ para algum i . Nesse caso a decomposição do vetor do estado (1.14) para o sistema

composto tem um único termo fatorado e esse vetor não é emaranhado:

$$|\psi\rangle = |n_i^{(1)}\rangle \otimes |n_i^{(2)}\rangle. \quad (1.17)$$

A pureza dos operadores densidade reduzidos é portanto equivalente à fatorabilidade de $|\psi\rangle$, e, conseqüentemente, a sua não pureza, isto é, $\hat{\rho}^{(1)} \neq (\hat{\rho}^{(1)})^2$, de acordo com a propriedade de não pureza, Equação (1.6), $\hat{\rho}^{(j)}$ possui autovalores $0 < p_i < 1$ para mais que um i . Neste caso se escreve vetor de estado (1.14) como a soma de termos fatorados

$$|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |n_i^{(1)}\rangle \otimes |n_i^{(2)}\rangle. \quad (1.18)$$

Portanto, a não pureza dos operadores densidade reduzidos sinaliza emaranhamento do vetor de estado. O emaranhamento que existe no vetor de estado $|\psi\rangle$ permite ter correlações quânticas, sem analogia com as correlações na Mecânica Clássica.

Para mostrar que estas correlações são diferentes, será considerado primeiro um caso na Mecânica Clássica, sendo um análogo clássico do decaimento em cascata, dado por Peres [21]. Imagine uma bomba, inicialmente em repouso, que explode em duas partes assimétricas, que

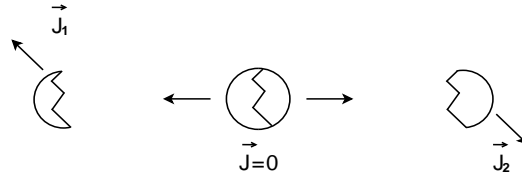


Figura 1.1: Uma bomba inicialmente em repouso, explode em dois fragmentos com momentos angulares iguais e opostos. Esta figura foi retirada da referência [21].

possuem momento angular \vec{J}_1 e $\vec{J}_2 = -\vec{J}_1$, Figura 1.1. Um observador detecta o primeiro fragmento e mede

$$r_{\vec{u}} = \text{sign}(\vec{u} \cdot \vec{J}_1), \quad (1.19)$$

em uma direção fixa e arbitrária do vetor unitário \vec{u} e sign fornece o sinal do produto escalar entre os vetores. Da mesma forma, o segundo observador detecta o outro fragmento e mede

$$r_{\vec{v}} = \text{sign}(\vec{v} \cdot \vec{J}_2), \quad (1.20)$$

na direção fixa e arbitrária do vetor unitário \vec{v} e sign fornece o sinal do produto escalar entre os vetores.

Suponha que este experimento seja repetido N vezes e considerando todas as medições nas direções fixas \vec{u} e \vec{v} . Sendo $r_{\vec{u},j}$ e $r_{\vec{v},j}$ os resultados medidos pelos nossos observadores para a

j -ésima bomba, cada observador pode calcular as médias

$$\langle r_{\vec{u}} \rangle = \sum_j r_{\vec{u},j}/N \quad \text{e} \quad \langle r_{\vec{v}} \rangle = \sum_j r_{\vec{v},j}/N, \quad (1.21)$$

Como as direções de \vec{J}_1 e \vec{J}_2 são aleatoriamente distribuídas, as médias são ambas nulas. Na presença de alguma comunicação, os observadores podem calcular uma correlação,

$$\langle r_{\vec{u}} r_{\vec{v}} \rangle = \sum_j r_{\vec{u},j} r_{\vec{v},j}/N, \quad (1.22)$$

que, em geral, não desaparece. Por exemplo, se $\vec{u} = \vec{v}$, eles sempre obtêm $r_{\vec{u},j} = -r_{\vec{v},j}$, de modo que $\langle r_{\vec{u}} r_{\vec{v}} \rangle = -1$.

Para \vec{u} e \vec{v} arbitrários, a correlação esperada $\langle r_{\vec{u}} r_{\vec{v}} \rangle$ pode ser encontrada como segue: considere uma esfera unitária, cortada por um plano equatorial perpendicular \vec{u} , como mostrado na Figura 1.2. Toda vez que \vec{J}_1 tiver seu vetor acima do plano equatorial perpendicular a \vec{u}

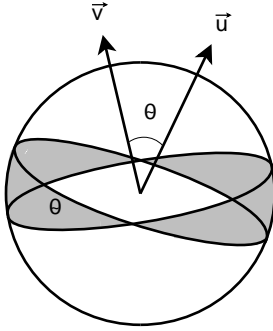


Figura 1.2: Ilustração para obter a correlação clássica $C_{clássica}$. Na área achurada, $r_{\vec{u}} r_{\vec{v}} = 1$ e na área não achurada, $r_{\vec{u}} r_{\vec{v}} = -1$

temos que $r_{\vec{u},j} = 1$, do contrário, se o vetor estiver abaixo do plano, então $r_{\vec{u},j} = -1$. O mesmo é obtido para \vec{J}_2 em relação ao plano equatorial definido perpendicularmente a \vec{v} . Dessa forma a esfera unitária fica dividida em quatro regiões referentes ao ângulo entre \vec{u} e \vec{v} . Ao repetir o experimento muitas vezes, $N \rightarrow \infty$, obtém-se os resultados correlacionados com uma probabilidade $2\theta/(2\pi)$ e anti-correlacionados com uma probabilidade $2(\pi - \theta)/(2\pi)$. As probabilidades foram calculadas observando o ângulo entre os planos definidos por \vec{u} e \vec{v} . Como \vec{J}_1 é uniformemente distribuído, obtém-se a correlação clássica

$$C_{clássica} = \langle r_{\vec{u}} r_{\vec{v}} \rangle = [\theta - (\pi - \theta)]/\pi = -1 + 2\theta/\pi. \quad (1.23)$$

Na Mecânica Quântica, um exemplo que exhibe correlações diferentes das correlações encontradas na Mecânica Clássica, encontra-se no caso de duas partículas de spin $\frac{1}{2}$ separadas

espacialmente e muito longe uma da outra no estado singleto,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2),$$

onde $|\downarrow\rangle_1$ e $|\uparrow\rangle_1$ são os estados da partícula 1, respectivamente em alguma direção e similarmente para $|\downarrow\rangle_2$ e $|\uparrow\rangle_2$. Os observadores medem os observáveis $\vec{u}\cdot\vec{\sigma}_1$ e $\vec{v}\cdot\vec{\sigma}_2$, onde $\vec{\sigma}_1$ e $\vec{\sigma}_2$ são vetores relativos às duas partículas, suas componentes nas direções x, y, z são as matrizes de Pauli. As direções dos vetores unitários \vec{u} e \vec{v} são livremente escolhidas pelos observadores. Como antes, os resultados são chamados $r_{\vec{u}}$ e $r_{\vec{v}}$, e podem ter valores ± 1 . Os valores médios das medidas $r_{\vec{u}}$ e $r_{\vec{v}}$ são previstos pela Mecânica Quântica como $\langle r_{\vec{u}} \rangle = \langle r_{\vec{v}} \rangle = 0$, e a correlação entre elas da seguinte forma

$$C_{\text{quântica}} = \langle r_{\vec{u}} r_{\vec{v}} \rangle = \text{Tr}[|\psi\rangle\langle\psi| (\vec{u}\cdot\hat{\sigma}_1 \otimes \vec{v}\cdot\hat{\sigma}_2)] = -\cos(\theta). \quad (1.24)$$

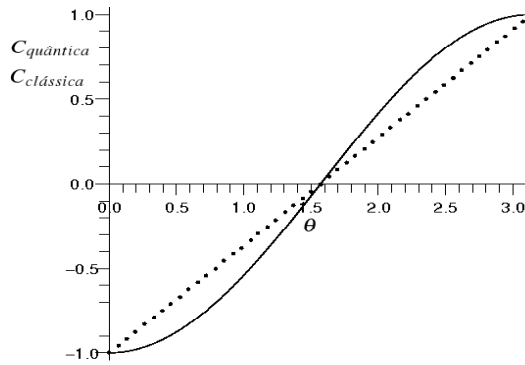


Figura 1.3: Comparação entre as correlações quânticas (linha sólida) e as correlações clássicas (linha pontilhada).

A Figura 1.3 mostra as expressões das definições das correlações (1.23) e (1.24). Nesta figura, pode-se observar que o emaranhamento no estado singleto permite correlações mais fortes que as correlações na Mecânica Clássica definida por (1.23), exceto nos casos onde ambas são iguais a 0 ou ± 1 .

Um passo importante agora será quantificar o emaranhamento que existe nos estados puros. As medidas do “grau de emaranhamento” dos dois subsistemas quando o estado do sistema composto é descrito por um estado puro $|\psi\rangle$, podem ser definidas em termos de medidas do “grau de não idempotência” dos operadores densidade reduzidos. As medidas frequentemente utilizadas para estes estados são medidas entrópicas.

1.3.1 Medidas de emaranhamento em estados puros

Esta subsecção foi desenvolvida com base em notas de aula de A. F. R. de Toledo de Piza [19].

Para um estado bipartido e puro (1.14), as medidas de emaranhamento mais comuns são:

1. Entropia de von Neumann;

$$S(\hat{\rho}^{(1)}) \equiv -\text{Tr}[\hat{\rho}^{(1)} \log_2 \hat{\rho}^{(1)}] = -\sum_i p_i \log_2 p_i \geq 0. \quad (1.25)$$

2. Entropia linear;

$$S(\hat{\rho}^{(1)})_1 \equiv \text{Tr}[\hat{\rho}^{(1)}] - \text{Tr}[(\hat{\rho}^{(1)})^2] = 1 - \sum_i p_i^2 \geq 0. \quad (1.26)$$

3. Entropia “2-Rényi”;

$$S(\hat{\rho}^{(1)})_R \equiv -\log_2(\text{Tr}[(\hat{\rho}^{(1)})^2]) = \log_2(\sum_i p_i^2) \geq 0. \quad (1.27)$$

Todas estas medidas são obtidas de forma análoga para $S(\hat{\rho}^{(2)})$. O valor de cada uma dessas medidas não depende do subsistema considerado por envolver unicamente os autovalores p_i e pelo fato de que os dois operadores reduzidos têm os mesmos autovalores não nulos, Equação (1.16). Nessas expressões o \log_2 indica logaritmos na base 2. A escolha dessa base é arbitrária no sentido que diferentes bases correspondem essencialmente a diferentes escalas. A entropia de von Neumann com logaritmo na base 2 pode ser vista como expressa em “bits”. As propriedades comuns às três medidas são: o valor mínimo (zero) é atingido para densidades reduzidas idempotentes, e portanto indica ausência de emaranhamento, Equação (1.17), e o valor máximo para o sistema de dimensão finita N é atingido quando $p_i = \frac{1}{N}$ para todo i , isso significa que todos os estados do sistema são igualmente populados, $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N |n_i^{(1)}\rangle \otimes |n_i^{(2)}\rangle$.

1.3.2 Emaranhamento em estados não puros

Um estado não puro de um sistema bipartido pode ser caracterizado por um operador densidade $\hat{\rho}$ em $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Diz-se que o operador densidade é não emaranhado quando este poder ser escrito de forma separável [22],

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \hat{\rho}_i^{(1)} \otimes \hat{\rho}_i^{(2)} \quad \text{com} \quad \sum_i p_i = 1. \quad (1.28)$$

Neste estado só existe correlações tipo clássicas. Este estado pode ser preparado por duas pessoas (Alice e Bob) separadas espacialmente via *Operações Locais e Comunicação Clássica*. Para preparar o estado (1.28), Alice gera números aleatórios para a amostra de distribuição de probabilidade p_i , se o resultado encontrado for i , Alice realiza uma operação quântica local e prepara o estado $\hat{\rho}_i^{(1)}$ e informa a Bob o resultado encontrado por meio de um canal de comunicação clássico (telefone, e-mail, etc), após receber a mensagem, Bob através de uma operação quântica local prepara o estado $\hat{\rho}_i^{(2)}$.

Estados não puros descritos por operadores densidade são emaranhados quando tais operadores não puderem ser representados de forma separável como o operador (1.28).

Um procedimento ou critério conhecido que decida sobre a separabilidade ou não separabilidade de um operador densidade, usa mapas positivos Λ que transformam operadores positivos $\hat{\rho} \geq 0$ em outros operadores $\Lambda(\hat{\rho}) \geq 0$ também positivos. Um mapa positivo mais simples e muito usado é via *operador de transposição* \mathcal{T} . Para um operador densidade ρ numa base $\{|n\rangle\}$ em \mathcal{H} a operação de transposição pode ser definida, assim

$$\mathcal{T}(\rho_{mn'}) = \mathcal{T}(\langle n|\hat{\rho}|n'\rangle) = \langle n'|\hat{\rho}|n\rangle. \quad (1.29)$$

Como o operador densidade $\hat{\rho}$ é hermitiano positivo, a transposta é o complexo conjugado. Portanto, a transposta de um operador densidade é um operador densidade com os mesmos autovalores.

Visto que \mathcal{T} é um mapa positivo em \mathcal{H} , a sua extensão $\mathcal{T}_1 \otimes 1_2$ chamada de *transposição parcial* em $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, pode transformar operadores positivos em operadores não-positivos [23]. O operador transposição parcial transforma operador positivo em operador positivo, atuando em estados separáveis, por exemplo, a transposição parcial da Equação (1.28),

$$(\mathcal{T}_1 \otimes 1_2)\hat{\rho} = \sum_i p_i \mathcal{T}_1(\hat{\rho}_i^{(1)}) \otimes \hat{\rho}_i^{(2)}, \quad (1.30)$$

como $\mathcal{T}_1(\hat{\rho}_i^{(1)})$ é positivo, portanto todos os autovalores de $(\mathcal{T}_1 \otimes 1_2)\hat{\rho}$ são positivos. Entretanto, para o estado maximamente emaranhado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} |n_i^{(1)}\rangle \otimes |n_i^{(2)}\rangle, \quad (1.31)$$

que possui operador densidade

$$\hat{\rho} = \frac{1}{N} \sum_{i,j} |n_i^{(1)} n_i^{(2)}\rangle \langle n_j^{(1)} n_j^{(2)}|, \quad (1.32)$$

sua *transposta parcial*, apresenta a seguinte forma

$$(\mathcal{T}_1 \otimes 1_2)\hat{\rho} = \frac{1}{N} \sum_{i,j} |n_j^{(1)} n_i^{(2)}\rangle \langle n_i^{(1)} n_j^{(2)}|, \quad (1.33)$$

para a dimensão $N = 2$, sua representação na forma matricial é

$$(\mathcal{T}_1 \otimes 1_2)\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.34)$$

na base $\{|n_0^{(1)} n_0^{(2)}\rangle, |n_0^{(1)} n_1^{(2)}\rangle, |n_1^{(1)} n_0^{(2)}\rangle, |n_1^{(1)} n_1^{(2)}\rangle\}$. Este operador possui autovalores, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = +\frac{1}{2}$ e $\mu_4 = -\frac{1}{2}$. Portanto, é um operador não positivo, porque este apresenta um autovalor negativo.

O critério da transposta parcial positiva de separabilidade, é conhecido com critério de separabilidade de *Peres-Horodecki*, que é uma condição necessário e suficiente para sistema bipartido com baixas dimensões $2 \otimes 2$ e $2 \otimes 3$ [24], que pode ser resumido assim

Se $(\mathcal{T}_1 \otimes 1_2)\hat{\rho}$ for positivo, o estado $\hat{\rho}$ é separável e se $(\mathcal{T}_1 \otimes 1_2)\hat{\rho}$ for não positivo, o estado $\hat{\rho}$ é inseparável.

Com base neste critério será apresentado um quantificador de emaranhamento chamado de negatividade.

1.3.3 Negatividade

A negatividade é proveniente do critério de separabilidade da matriz densidade $\hat{\rho}$ de um estado bipartido puro ou misto. Para quantificar o emaranhamento entre estes subsistemas, foi definido um quantificador [25] da seguinte forma

$$N(\hat{\rho}) = \sum_i |\mu_i|, \quad (1.35)$$

sendo a soma dos módulos dos autovalores negativos μ_i da transposta parcial de $\hat{\rho}$.

Por exemplo, pode-se usar a negatividade para calcular o emaranhamento no estado de Werner [22], que é um estado misto de dois qubits, dado por

$$\hat{\rho}_W = \frac{1-p}{4} \hat{I} \otimes \hat{I} + p |\psi\rangle \langle \psi| \quad \text{com } 0 \leq p \leq 1, \quad (1.36)$$

onde \hat{I} e $|\psi\rangle$ representam o operador identidade e o estado singlete

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle). \quad (1.37)$$

Escrevendo (1.36) na base padrão ordenada $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, obtém-se

$$\hat{\rho}_W = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1-p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+p & -2p & 0 \\ 0 & -2p & 1+p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p \end{bmatrix}. \quad (1.38)$$

Aplicando a transposição parcial em $\hat{\rho}_W$, encontra-se

$$(\mathcal{T}_1 \otimes 1_2)\hat{\rho}_W = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1-p & 0 & 0 & -2p \\ 0 & 1+p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+p & 0 \\ -2p & 0 & 0 & 1-p \end{bmatrix}, \quad (1.39)$$

cujos autovalores são, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = (1+p)/4$ e $\mu_4 = (1-3p)/4$. Como $0 \leq p \leq 1$ a possível violação da positividade vem deste último, para $p > 1/3$. Portanto, da definição (1.35), obtém-se a negatividade

$$N(\hat{\rho}_w) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq p \leq \frac{1}{3} \\ (3p-1)/4 & \text{se } \frac{1}{3} < p \leq 1, \end{cases} \quad (1.40)$$

observe que esta função cresce linearmente com p . Para $1/3 < p \leq 1$ o estado $\hat{\rho}_w$ encontra-se emaranhado, $N(\hat{\rho}_w) > 0$, e para $0 \leq p \leq 1/3$ o estado $\hat{\rho}_w$ é separável $N(\hat{\rho}_w) = 0$.

Na próxima subsecção será apresentado outro quantificador de emaranhamento em estados mistos e puros, a concorrência.

1.3.4 Concorrência

Nesta secção apresenta-se a concorrência de Wootters [16], definida como um quantificador de emaranhamento em estados puros e mistos de dois qubits, dada por

$$C(\hat{\rho}) = \max\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\}, \quad (1.41)$$

as grandezas λ_i 's são os autovalores em ordem decrescente da matriz

$$\zeta = \hat{\rho} \hat{\sigma}_y^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_y^{(2)} \hat{\rho}^* \hat{\sigma}_y^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_y^{(2)},$$

onde $\hat{\rho}^*$ é o complexo conjugado de $\hat{\rho}$ na base padrão $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ e $\hat{\sigma}_y$ é a matriz de Pauli. Para estados separáveis $C(\hat{\rho}) = 0$ e para estados maximamente emaranhados $C(\hat{\rho}) = 1$.

Por exemplo, a concorrência pode ser usada para calcular o emaranhamento no estado de Werner (1.38). Após encontrar os autovalores da matriz ζ que são, $\lambda_1 = (\frac{3p+1}{4})^2$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = (\frac{1-p}{4})^2$. Da definição (1.41), obtém-se a concorrência

$$C(\hat{\rho}_w) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq p \leq \frac{1}{3} \\ (3p-1)/2 & \text{se } \frac{1}{3} < p \leq 1, \end{cases} \quad (1.42)$$

observa-se que esta função cresce linearmente com p . Para $0 \leq p \leq \frac{1}{3}$ o estado $\hat{\rho}_w$ é separável, $C(\hat{\rho}_w) = 0$, e para $\frac{1}{3} < p \leq 1$ o estado $\hat{\rho}_w$ encontra-se emaranhado $C(\hat{\rho}_w) > 0$.

Das Equações (1.40) e (1.43) pode-se concluir que

$$2N(\hat{\rho}_w) = C(\hat{\rho}_w) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq p \leq \frac{1}{3} \\ (3p-1)/2 & \text{se } \frac{1}{3} < p \leq 1, \end{cases} \quad (1.43)$$

a negatividade multiplicada por um fator 2 é igual a concorrência para o estado $\hat{\rho}_w$.

Se uma matriz densidade contém apenas os elementos diferentes de zero ao longo da diagonal principal e da anti-diagonal,

$$\hat{\rho} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & w \\ 0 & b & z & 0 \\ 0 & z^* & c & 0 \\ w^* & 0 & 0 & d \end{bmatrix} \quad \text{com } \text{Tr}(\hat{\rho}) = a + b + c + d = 1, \quad (1.44)$$

chamada de forma “normal” ou “padrão” de estado misto de dois qubits [26, 27], então a concorrência pode ser facilmente obtida,

$$C(\hat{\rho}) = 2\max\{0, |z| - \sqrt{ad}, |w| - \sqrt{bc}\}. \quad (1.45)$$

Um caso de particular importância, será encontrado no sistema tripartido no capítulo 3, a matriz densidade reduzida que representa duas partes do sistema, apresenta $w = 0$, para este caso, a equação para a concorrência torna-se

$$C(\hat{\rho}) = 2\max\{0, |z| - \sqrt{ad}\}. \quad (1.46)$$

Com o intuito de comparação, a negatividade também foi calculada. Aplicando a trans-

posição parcial em (1.44), obtém-se

$$(\mathcal{T}_1 \otimes 1_2)\hat{\rho} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & z^* \\ 0 & b & w^* & 0 \\ 0 & w & c & 0 \\ z & 0 & 0 & d \end{bmatrix}, \quad (1.47)$$

que possui autovalores $\frac{1}{2}[(b+c) \pm \sqrt{(b+c)^2 - 4(bc - |w|^2)}]$ e $\frac{1}{2}[(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad - |z|^2)}]$. A violação da positividade só pode ser dos menores autovalores $\frac{1}{2}[(a+d) - \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad - |z|^2)}]$ e $\frac{1}{2}[(b+c) - \sqrt{(b+c)^2 - 4(bc - |w|^2)}]$. Portanto, pela definição (1.35), obtém-se a negatividade

$$N(\hat{\rho}) = \frac{1}{2} \max \left\{ 0, - \left[(a+d) - \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad - |z|^2)} \right], - \left[(b+c) - \sqrt{(b+c)^2 - 4(bc - |w|^2)} \right] \right\}. \quad (1.48)$$

Nestas duas últimas subsecções foi discutido de maneira simplificada alguns quantificadores de emaranhamento para estados bipartidos puros e mistos.

1.4 Desigualdades de Bell

As desigualdades de Bell estão fundamentadas nas hipóteses de *localidade* e *realismo*, que foram levantadas no famoso argumento de Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) [3], que questionaram a completeza da Mecânica Quântica. Segundo ERP, *realismo* significa que as propriedades de uma partícula é intrínseca e independe da observação, por exemplo, a posição e momento de uma partícula, e que, a medição apenas revela estas propriedades. E a *localidade* significa que, as propriedades de uma partícula são localmente distribuídas.

Para formular as desigualdades de Bell considere, por exemplo, para um sistema clássico bipartido a distribuição de probabilidade conjunta, dada por

$$p(a, b|x, y) \geq 0 \quad \text{com} \quad \sum_{a, b} p(a, b|x, y) = 1, \quad (1.49)$$

onde a representa o resultado de uma medição x e b o resultado de uma medição y . As medições x, y e seus respectivos resultados a, b e a probabilidade conjunta $p(a, b|x, y)$ formam uma correlação [28].

As probabilidades associadas a cada parte do sistema são dadas por

$$p(a|x,y) = \sum_b p(a,b|x,y) \quad \text{e} \quad p(b|x,y) = \sum_a p(a,b|x,y), \quad (1.50)$$

denominadas probabilidades marginais, onde a probabilidade $p(a|x,y)$ de obter a depende da medição x e da escolha da medição y , o mesmo vale para a probabilidade marginal $p(b|x,y)$. Essa dependência das medições nestes sistemas permitiria uma comunicação com velocidade superluminal entre os sistemas. Para evitar isso, toma-se cada medição em um sistema independente do outro, com esta condição, tem-se as probabilidades marginais *não sinalizadoras*

$$p(a|x) = \sum_b p(a,b|x,y) \quad \text{e} \quad p(b|y) = \sum_a p(a,b|x,y). \quad (1.51)$$

É viável considerar um sistema constituído de dois sistemas denominados A e B que tiveram origem em uma mesma fonte e foram enviados para dois observadores distantes denominados Alice e Bob, onde Alice realiza medições sobre o sistema A e Bob realiza medições no sistema B. A influência das medições em um sistema não pode propagar-se para outro sistema com velocidade superior a velocidade da luz, isto chama-se *causalidade local*. Porém, isso não implica na ausência de correlações entre os dois sistemas. Por hipótese, a correlação entre os sistemas pode ter sido originada na fonte, e cada sistema carrega essa informação, sendo representada por um conjunto de variáveis λ que pode ser discreta ou contínua, pesadas por uma distribuição de probabilidade $\rho(\lambda)$ [18]. Sob esta hipótese, a probabilidade de Alice medir a depende da medição x e da variável λ , $p(a|x,\lambda)$ e a probabilidade de Bob medir b depende da medição y e da variável λ , $p(b|y,\lambda)$. Então, a probabilidade conjunta pode ser escrita como uma soma em λ na forma

$$p(a,b|x,y) = \sum_{\lambda} \rho(\lambda) p(a|x,\lambda) p(b|y,\lambda) \quad \text{com} \quad \rho(\lambda), p(a|x,\lambda), p(b|y,\lambda) \geq 0, \quad (1.52)$$

$$\sum_{\lambda} \rho(\lambda) = 1, \quad \sum_a p(a|x,\lambda) = 1 \quad \text{e} \quad \sum_b p(b|y,\lambda) = 1,$$

onde $p(a,b|x,y)$ com as medições x, y e seus respectivos resultados a, b e a variável λ formam uma correlação local. O conjunto formado por $p(a,b|x,y)$ que obedece a condição (1.52) é convexo com número finito de vértices. Este conjunto é chamado de politopo local. Este politopo é contornado por facetas sendo que cada faceta pode ser representada por uma equação linear dada por

$$\sum_{a,b,x,y} C_{ab}^{xy} p(a,b|x,y) = S,$$

onde C_{ab}^{xy} e S são coeficientes. As soluções comuns a todas as facetas satisfazem as desigual-

dades

$$\sum_{a,b,x,y} C_{ab}^{xy} p(a,b|x,y) \leq S,$$

tais desigualdades são chamadas *desigualdades de Bell*, que devem ser satisfeitas por todas teorias locais e causais.

- **Um exemplo de desigualdade de Bell**

Considere o caso anterior com probabilidade conjunta $p(a,b|x,y)$ onde Alice pode fazer duas medições x no sistema A denotadas por $\{0,1\}$ e pode obter dois resultados possíveis $a = \pm 1$ e identicamente para Bob. Para esse conjunto de medições define-se o seguinte parâmetro

$$\mathbb{B} \equiv E(x=0, y=0) + E(x=0, y=1) + E(x=1, y=0) - E(x=1, y=1), \quad (1.53)$$

com a notação $E(x,y) = p(a=b|x,y) - p(a \neq b|x,y)$. Sob a hipótese de localidade existem $\rho(\lambda)$, $p(a|x, \lambda)$ e $p(b|y, \lambda)$ de modo que

$$p(a=b|x,y) = \sum_{\lambda} \rho(\lambda) [p(-1|x, \lambda)p(-1|y, \lambda) + p(1|x, \lambda)p(1|y, \lambda)], \quad (1.54)$$

$$p(a \neq b|x,y) = \sum_{\lambda} \rho(\lambda) [p(-1|x, \lambda)p(1|y, \lambda) + p(1|x, \lambda)p(-1|y, \lambda)]. \quad (1.55)$$

Usando as relações (1.54), (1.55), $E(x,y)$ e a condição de normalização (1.52), a Equação (1.53) pode ser reescrita assim

$$\begin{aligned} \mathbb{B} = 2 \sum_{\lambda} \rho(\lambda) \{ & [2p(a=-1|x=0, \lambda) - 1] [p(b=-1|y=0, \lambda) + p(b=-1|y=1, \lambda) - 1] + \\ & [2p(a=-1|x=1, \lambda) - 1] [p(b=-1|y=0, \lambda) - p(b=-1|y=1, \lambda)] \}, \end{aligned} \quad (1.56)$$

que está restrita ao intervalo

$$|\mathbb{B}| \leq 2. \quad (1.57)$$

Esta é uma *desigualdade de Bell* conhecida como desigualdade de *Clauser, Horne, Shimony e Holt* (CHSH) [29].

- **A desigualdade de Bell e a Mecânica Quântica**

Considere o observável $\hat{A}_x = \sum_a a |a_x\rangle \langle a_x|$, Alice pode fazer medições neste observável e medir $a = -1, 1$ na direção $x = 0, 1$. E Bob pode fazer medições no observável $\hat{B}_y = \sum_b b |b_y\rangle \langle b_y|$ e medir autovalores $b = -1, 1$ em direções $y = 0, 1$. Então, o valor esperado de $\hat{A}_x \otimes \hat{B}_y$ no estado

$\hat{\rho}$ é dado por

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}_x \otimes \hat{B}_y \rangle &= \text{Tr}[\hat{\rho}(\hat{A}_x \otimes \hat{B}_y)] = \sum_{a=-1}^1 \sum_{b=-1}^1 ab p(a, b|x, y) \text{ com } p(a, b|x, y) \equiv \text{Tr}[\hat{\rho}(|a_x\rangle\langle a_x| \otimes |b_y\rangle\langle b_y|)] \\ &= p(-1, -1|x, y) - p(1, -1|x, y) - p(-1, 1|x, y) + p(1, 1|x, y) = \\ &= p(a = b|x, y) - p(a \neq b|x, y) \rightarrow E(x, y). \end{aligned} \quad (1.58)$$

Com isso, a relação (1.53) pode ser escrita em termos dos valores esperados dos operadores assim

$$\mathbb{B} = \langle \hat{A}_0 \otimes \hat{B}_0 \rangle + \langle \hat{A}_0 \otimes \hat{B}_1 \rangle + \langle \hat{A}_1 \otimes \hat{B}_0 \rangle - \langle \hat{A}_1 \otimes \hat{B}_1 \rangle. \quad (1.59)$$

Desta equação pode-se escrever um operador de Bell associado a desigualdade (1.57), dado por

$$\hat{\mathbb{B}} = \hat{A}_0 \otimes \hat{B}_0 + \hat{A}_0 \otimes \hat{B}_1 + \hat{A}_1 \otimes \hat{B}_0 - \hat{A}_1 \otimes \hat{B}_1, \quad (1.60)$$

que escrito desta forma pode-se obter o parâmetro (1.59) para um estado quântico: $\mathbb{B} = \langle \hat{\mathbb{B}} \rangle$.

Agora, supondo duas partículas de spin $\frac{1}{2}$ denominadas **A** e **B** geradas por uma fonte comum e que estas partículas estão maximamente emaranhadas no estado singleto

$$|\psi_{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow_A \uparrow_B\rangle - |\uparrow_A \downarrow_B\rangle), \quad (1.61)$$

onde $|\uparrow_A\rangle$ representa o estado do spin da partícula **A** em alguma direção espacial e de maneira similar tem-se $|\uparrow_B\rangle$. A partícula **A** é enviada para Alice e a partícula **B** é enviada para Bob. Alice pode escolher fazer medições nos observáveis

$$\hat{A}_0 = \hat{\sigma}_x \quad (1.62)$$

$$\hat{A}_1 = \hat{\sigma}_z, \quad (1.63)$$

onde $\hat{\sigma}_z$ e $\hat{\sigma}_x$ são matrizes de Pauli. E Bob também pode escolher fazer medições nos observáveis,

$$\hat{B}_0 = \hat{\sigma}_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_z), \quad (1.64)$$

$$\hat{B}_1 = \hat{\sigma}_{z'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\sigma}_x - \hat{\sigma}_z), \quad (1.65)$$

com direções das medições em uma inclinação de 45° em relação às respectivas direções de medição de Alice conforme a Figura 1.4. Tomando o valor esperado do observável (1.60) no estado singleto (1.61), obtém-se uma violação da desigualdade de Bell

$$\langle \hat{\mathbb{B}} \rangle = \text{Tr}(\hat{\mathbb{B}}|\psi_{-}\rangle\langle\psi_{-}|) = -2\sqrt{2}. \quad (1.66)$$

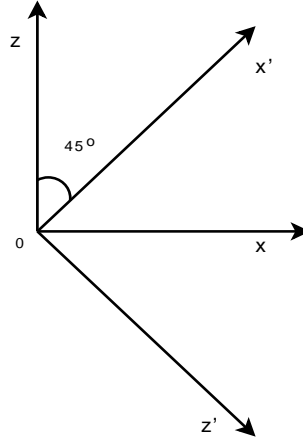


Figura 1.4: Representação das direções das medições dos autovalores da partícula **A** e da partícula **B**.

Como $|\langle \hat{\mathbb{B}} \rangle| = 2\sqrt{2}$, para as partículas emaranhadas no estado singleto, a correlação das medições não pode satisfazer uma distribuição de probabilidades locais. A violação da desigualdade de Bell foi encontrada experimentalmente usando pares de fótons emaranhados [30]. Com isso, o operador de Bell (1.60) pode ser uma ferramenta para detectar emaranhamento num estado quântico quando este for um estado singleto.

Observa-se que este operador não é uma ferramenta geral para se detectar emaranhamento. Veja que as partículas no estado tripleto

$$|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow_A \uparrow_B\rangle + |\uparrow_A \downarrow_B\rangle), \quad (1.67)$$

não violam a *desigualdade de Bell* (1.60), isto é,

$$\langle \hat{\mathbb{B}} \rangle = \text{Tr}(\hat{\mathbb{B}}|\psi_+\rangle\langle\psi_+|) = 0. \quad (1.68)$$

Para detectar o emaranhamento neste estado, pode-se escrever um novo operador na forma

$$\hat{\mathbb{B}}' \equiv \hat{A}_0 \otimes \hat{B}_0 + \hat{A}_0 \otimes \hat{B}_1 - \hat{A}_1 \otimes \hat{B}_0 + \hat{A}_1 \otimes \hat{B}_1, \quad (1.69)$$

tomando o valor esperado deste operador no estado tripleto (1.67) tem-se uma violação da nova *desigualdade de Bell*, dada por

$$\langle \hat{\mathbb{B}}' \rangle = \text{Tr}(\hat{\mathbb{B}}'|\psi_+\rangle\langle\psi_+|) = 2\sqrt{2}. \quad (1.70)$$

Este resultado está de acordo com a referência [31], todo estado puro de dois “qubits” viola alguma desigualdade de Bell.

2 SISTEMA ÁTOMO-CAMPO

Neste capítulo, apresenta-se uma das ferramentas importantes para compreender a interação entre dois níveis de transições de um átomo e um campo de modo único: o modelo de *Jaynes-Cummings*. Após isso, apresenta-se a evolução temporal do sistema átomo-campo.

2.1 O Hamiltoniano

A interação entre campos eletromagnéticos e átomos é conteúdo fundamental em óptica quântica, que pode servir como base para tecnologias de informação quântica [32–35].

Uma das interações importantes na Mecânica Quântica é a interação entre dois níveis de um átomo e um campo eletromagnético contido em uma cavidade óptica [36]. Uma cavidade óptica é um arranjo de espelhos que permite a formação de uma onda estacionária do campo [37]. Este campo nesta cavidade é quantizado como um conjunto de osciladores harmônicos. Um caso simples, é uma cavidade constituída por dois espelhos planos e paralelos. Esta cavidade chama-se cavidade de Fabry-Perot, Figura 2.1. Com este tipo de cavidade tem-se a dificuldade de manter o campo preso e a dificuldade de manter a pureza do modo de vibração. Para sanar estas dificuldades, usam-se cavidades constituídas por espelhos curvos confocais, Figura 2.2. Neste tipo de cavidade o campo será refletido para o centro e obtém-se um maior ganho na pureza do modo de vibração.

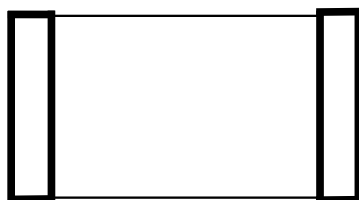


Figura 2.1: *Desenho esquemático da cavidade de Fabry-Perot.*

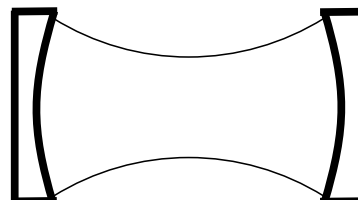


Figura 2.2: *Desenho esquemático de uma cavidade confocal.*

Na interação entre o campo dentro de uma cavidade e um átomo, como exibido esquematicamente na Figura 2.3, o átomo passa a absorver fótons do campo na cavidade e também emitir fótons na cavidade por emissão de radiação. A interação entre o átomo e o campo pode ser

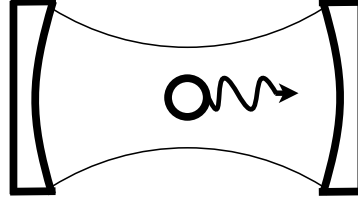


Figura 2.3: Representação da interação entre um campo quantizado e um átomo.

descrita por um Hamiltoniano na aproximação de dipolo e onda girante: o modelo de *Jaynes-Cummings* [10], que apresenta algumas vantagens. Ele pode ser resolvido exatamente. Este é um modelo que descreve muito bem a interação átomo-campo, porque fornece resultados compatíveis com resultados experimentais [38, 39]. A interação de *Jaynes-Cummings*, pode ser entendida como a interação de um átomo com um ambiente simples, isto é, um único modo de campo numa cavidade. Pois, o conceito de ambiente é normalmente considerado como um conjunto de muitos osciladores harmônicos [40].

Para a dedução do modelo de *Jaynes-Cummings*, considera-se um átomo (por exemplo, um átomo de hidrogênio) com o núcleo na origem do sistema de coordenadas, com carga e , em um campo eletromagnético confinado em uma cavidade com paredes refletoras conforme a Figura 2.3. O Hamiltoniano para este sistema, na aproximação de dipolo [41], é dado por

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_c - e\hat{r} \cdot \hat{E}, \quad (2.1)$$

onde \hat{H}_A e \hat{H}_c representam os Hamiltonianos do átomo e do campo eletromagnético quantizado, respectivamente, $e\hat{r}$ representa o operador momento de dipolo do elétron em relação ao núcleo atômico, e \hat{E} representa o operador campo elétrico na posição do núcleo.

Na próxima subsecção será apresentado o Hamiltoniano e o momento de dipolo do átomo.

2.1.1 O átomo

O Hamiltoniano do átomo \hat{H}_A possui uma equação de autovalor dada por

$$\hat{H}_A|i\rangle = E_i|i\rangle, \quad (2.2)$$

onde E_i é o i -ésimo autovalor de \hat{H}_A e $|i\rangle$ é o autovetor correspondente. Estes autovetores formam uma base ortonormal $\delta_{ij} = \langle i|j\rangle$ e completa $\sum_i |i\rangle\langle i| = \hat{I}$. Definido o operador de transição atômica $\hat{\sigma}_{ij} = |i\rangle\langle j|$, o Hamiltoniano do átomo pode ser expresso assim

$$\hat{H}_A = \sum_i E_i \hat{\sigma}_{ii}. \quad (2.3)$$

O momento de dipolo $e\hat{r}$, em termos do operador de transição, pode ser escrito na forma

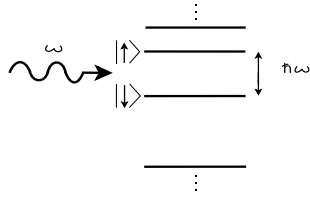
$$e\hat{r} = \sum_{ij} \langle i|e\hat{r}|j\rangle \hat{\sigma}_{ij} = \sum_{i,j} \vec{\rho}_{ij} \sigma_{ij}, \quad (2.4)$$

onde $\vec{\rho}_{ij} = e\langle i|\hat{r}|j\rangle$ é o elemento de matriz de transição de dipolo-elétrico. O operador atômico $\hat{\sigma}_{ij}$, satisfaz a relação de comutação, abaixo

$$[\hat{\sigma}_{ij}, \hat{\sigma}_{kl}] = \delta_{jk} \hat{\sigma}_{il} - \delta_{il} \hat{\sigma}_{kj}. \quad (2.5)$$

O átomo possui muitos níveis de energia, neste capítulo e no próximo considera-se a interação de um modo do campo em ressonância ou próximo da ressonância com a transição entre dois níveis de energia do átomo, que correspondem aos dois autovetores $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$, excitado e fundamental, respectivamente, com autovalores E_\uparrow e E_\downarrow , Figura 2.4. Este átomo com esta aproximação chama-se átomo de dois níveis.

Neste caso, define-se a notação



$$\hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}_{\uparrow\uparrow} - \hat{\sigma}_{\downarrow\downarrow} = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|, \quad (2.6)$$

$$\hat{\sigma}_+ = \hat{\sigma}_{\uparrow\downarrow} = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|, \quad (2.7)$$

$$\hat{\sigma}_- = \hat{\sigma}_{\downarrow\uparrow} = |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \quad (2.8)$$

Figura 2.4: Representação esquemática do campo de frequência ω em ressonância com dois níveis do átomo.

e $\hat{\sigma}_{\uparrow\uparrow} + \hat{\sigma}_{\downarrow\downarrow} = \hat{I}$, onde \hat{I} é matriz identidade. O operador $\hat{\sigma}_+$ toma o átomo no estado fundamental e eleva para estado excitado, o operador $\hat{\sigma}_-$ faz a operação inversa. Os operadores $\hat{\sigma}_+$, $\hat{\sigma}_-$ e $\hat{\sigma}_z$ satisfazem a álgebra de spin- $\frac{1}{2}$ das matrizes de Pauli.

$$[\hat{\sigma}_-, \hat{\sigma}_+] = -\hat{\sigma}_z, \quad (2.9)$$

$$[\hat{\sigma}_-, \hat{\sigma}_z] = 2\hat{\sigma}_-. \quad (2.10)$$

Utilizando (2.6) e $\hat{\sigma}_{\uparrow\uparrow} + \hat{\sigma}_{\downarrow\downarrow} = \hat{I}$, o Hamiltoniano do átomo \hat{H}_A , pode ser escrito assim

$$\hat{H}_A = E_\uparrow \hat{\sigma}_{\uparrow\uparrow} + E_\downarrow \hat{\sigma}_{\downarrow\downarrow} = \frac{E_\uparrow + E_\downarrow}{2} + \left(\frac{E_\uparrow - E_\downarrow}{2} \right) \hat{\sigma}_z, \quad (2.11)$$

escolhendo $E_{\uparrow} + E_{\downarrow} = 0$ e $E_{\uparrow} - E_{\downarrow} = \hbar\omega$, sendo ω a frequência de transição atômica e \hbar a constante de Planck h dividida por 2π . O Hamiltoniano \hat{H}_A toma a seguinte forma

$$\hat{H}_A = \frac{\hbar\omega}{2} \hat{\sigma}_z. \quad (2.12)$$

Na próxima subsecção apresenta-se o processo de quantização do campo eletromagnético.

2.1.2 O campo quantizado

Esta subsecção foi desenvolvida com base no livro de Mandel e Wolf [42].

Para quantizar o campo eletromagnético, inicia-se com a descrição clássica das equações de Maxwell. Estas equações descrevem os vetores dos campos elétrico e magnético, $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e $\vec{B}(\vec{r}, t)$, respectivamente, onde $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$. Considera-se o campo eletromagnético em uma cavidade onde não existem fontes, carga e corrente elétrica, contornada por uma superfície refletora S fechada [10], de volume V . Nesta região as equações de Maxwell são

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t), \quad (2.13)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t), \quad (2.14)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad (2.15)$$

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0, \quad (2.16)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo. A condição imposta pela Equação (2.15) permite escrever o campo magnético em termos de um potencial vetor $\vec{A}(\vec{r}, t)$,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t). \quad (2.17)$$

Com esta equação e a Equação (2.14), pode-se escrever o campo elétrico em função do potencial vetor $\vec{A}(\vec{r}, t)$ e de um potencial escalar $\Phi(\vec{r}, t)$ da seguinte forma

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\nabla\Phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t). \quad (2.18)$$

Com as Equações (2.17), (2.18) e usando a identidade $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$, pode-se escrever as Equações (2.13) e (2.16) em termos do potencial escalar e do potencial vetor,

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)] = 0, \quad (2.19)$$

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}(\vec{r}, t) - \nabla \left[\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{r}, t) \right] = 0, \quad (2.20)$$

tem-se duas equações diferenciais acopladas, para resolvê-las, pode-se escolher a condição

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0, \quad (2.21)$$

chamada *Calibre de Coulomb* ou *Calibre Transverso*. Fazendo isto, a Equação (2.19) reduz-se a equação de Laplace,

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}, t) = 0, \quad (2.22)$$

esta equação fornece um potencial escalar que propaga-se instantaneamente. Porém, segundo a relatividade nenhuma perturbação eletromagnética propaga-se com velocidade superior a velocidade da luz. Portanto, para evitar este comportamento não físico faz-se o potencial escalar nulo

$$\Phi(\vec{r}, t) = 0.$$

Então, com a condição (2.21) e a solução $\Phi(\vec{r}, t) = 0$, o potencial vetor satisfaz a equação de onda homogênea dada por

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}(\vec{r}, t) = 0. \quad (2.23)$$

E os campos (2.17) e (2.18) tomam as seguintes formas

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t). \quad (2.24)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t). \quad (2.25)$$

Para obter as equações dos campos $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e $\vec{B}(\vec{r}, t)$, faz-se uma decomposição de Fourier de $\vec{A}(\vec{r}, t)$ em relação as variáveis x, y, z . Considerando o campo eletromagnético contido numa cavidade na forma de um cubo de lado L e volume $V = L^3$, impondo as condições de contorno periódicas sobre o potencial vetor

$$\vec{A}(\vec{r} + L\vec{s}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) \quad \text{com} \quad \vec{s} = \pm\hat{x}, \pm\hat{y}, \pm\hat{z}, \quad (2.26)$$

esta condição significa que o potencial vetor num ponto numa face é igual a potencial vetor num ponto na face oposta. A expansão de Fourier de $\vec{A}(\vec{r}, t)$ em termos dos modos de onda plana assume a seguinte forma

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \left(\frac{1}{\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\vec{k}} \vec{U}_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}, \quad (2.27)$$

com $\vec{k} = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z)$, $n_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $j = x, y, z$, onde ϵ_0 , a constante dielétrica do vácuo, é

introduzida por conveniência. E a soma $\sum_{\vec{k}}$ representa

$$\sum_{\vec{k}} = \sum_{k_x=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_y=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_z=-\infty}^{+\infty} .$$

A equação (2.27) permite a condição

$$\vec{U}_{-\vec{k}}(t) = \vec{U}_{\vec{k}}^*(t). \quad (2.28)$$

Da condição de contorno (2.21), pode-se obter

$$\vec{k} \cdot \vec{U}_{\vec{k}}(t) = 0. \quad (2.29)$$

A partir desta equação, define-se um par de vetores reais ortonormais $\vec{\epsilon}_{k1}, \vec{\epsilon}_{k2}$, que obedecem as condições

$$\vec{k} \cdot \vec{\epsilon}_{ks} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{\epsilon}_{ks} \cdot \vec{\epsilon}_{ks'} = \delta_{ss'} \quad \text{com} \quad s = 1, 2.$$

Ao substituir $\vec{A}(\vec{r}, t)$ na equação de onda homogênea (2.23), obtém-se a equação

$$\left(\frac{1}{\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + v_k^2 \right) \vec{U}_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = 0, \quad (2.30)$$

com expansão na base $\{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}\}$ linearmente independente, com frequência angular $v_k = ck$ e k o módulo de \vec{k} . Pela independência linear é necessário que todos coeficientes desta expansão sejam nulos. Sob esta condição pode-se escrever a equação diferencial

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + v_k^2 \right) \vec{U}_{\vec{k}}(t) = 0 \quad \text{para todo} \quad \vec{k}. \quad (2.31)$$

A solução geral desta equação, de acordo com a condição (2.28), é dada por

$$\vec{U}_{\vec{k}}(t) = \vec{c}_{\vec{k}} e^{-iv_k t} + \vec{c}_{-\vec{k}}^* e^{iv_k t}. \quad (2.32)$$

escrevendo $\vec{c}_{\vec{k}}$ em termos de $\vec{\epsilon}_{k1}, \vec{\epsilon}_{k2}$, tem-se

$$\vec{c}_{\vec{k}} = \sum_{s=1}^2 c_{ks} \vec{\epsilon}_{ks}. \quad (2.33)$$

Ao substituir as Equações (2.33) e (2.32) na Equação (2.27), obtém-se

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \left(\frac{1}{\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\vec{k}, s} \left[c_{ks} \vec{\epsilon}_{ks} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - v_k t)} + \text{c.c.} \right], \quad (2.34)$$

onde c.c. denota complexo conjugado do termo anterior. Conhecido o potencial vetor (2.27) e potencial escalar $\Phi(\vec{r}, t) = 0$, os campos (2.18) e (2.17) tomam as seguintes formas

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = i \left(\frac{1}{\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\vec{k}, s} \left[v_k c_{\vec{k}s} \vec{\epsilon}_{\vec{k}s} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - v_k t)} - \text{c.c.} \right] \quad (2.35)$$

e

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = i \left(\frac{1}{\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\vec{k}, s} \left[c_{\vec{k}s} (\vec{k} \times \vec{\epsilon}_{\vec{k}s}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - v_k t)} - \text{c.c.} \right]. \quad (2.36)$$

A energia do campo clássico

De posse dos campos $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e $\vec{B}(\vec{r}, t)$ pode-se obter a energia do campo eletromagnético, dada por [43]

$$H = \frac{1}{2} \int_V \left[\epsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2(\vec{r}, t) \right] dV. \quad (2.37)$$

Ao substituir os campos $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e $\vec{B}(\vec{r}, t)$, usando as relações

$$\int_V e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}} dV = V \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \quad (2.38)$$

e

$$(\vec{k} \times \vec{\epsilon}_{\vec{k}s}^*) \cdot (\vec{k}' \times \vec{\epsilon}_{\vec{k}'s'}) = k^2 \delta_{ss'}, \quad (2.39)$$

a energia toma a seguinte forma

$$H = 2 \sum_{\vec{k}, s} v_k^2 |c_{\vec{k}s}|^2, \quad (2.40)$$

que é uma soma sobre os modos. Para a proposta de quantização do Hamiltoniano H , faz-se para cada modo a introdução de um par de variáveis canônicas reais $q_{\vec{k}s}$ e $p_{\vec{k}s}$ definidas deste modo

$$q_{\vec{k}s} = (c_{\vec{k}s} + c_{\vec{k}s}^*), \quad (2.41)$$

$$p_{\vec{k}s} = -i v_k (c_{\vec{k}s} - c_{\vec{k}s}^*). \quad (2.42)$$

Em termos de $q_{\vec{k}s}$ e $p_{\vec{k}s}$, a Equação (2.40) fica

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, s} (p_{\vec{k}s}^2 + v_k^2 q_{\vec{k}s}^2), \quad (2.43)$$

Esta equação é semelhante a energia de um sistema de osciladores harmônicos independentes de frequência v_k e massa $M = 1$, para cada modo \vec{k} e polarização s . O estado do campo de radiação clássica é especificado pelo conjunto de todas as variáveis canônicas $q_{\vec{k}s}(t)$ e $p_{\vec{k}s}(t)$.

Em termos de variáveis canônicas, as Equações (2.35) e (2.36) para os campos $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e

$\vec{B}(\vec{r}, t)$, tornam-se

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = i \left(\frac{1}{\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\vec{k}, s} \left[(v_k q_{\vec{k}s} + i p_{\vec{k}s}) \vec{\epsilon}_{\vec{k}s} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - v_k t)} - \text{c.c.} \right], \quad (2.44)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = i \left(\frac{1}{\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\vec{k}, s} \left[\left(q_{\vec{k}s} + \frac{i}{v_k} p_{\vec{k}s} \right) \vec{k} \times \vec{\epsilon}_{\vec{k}s} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - v_k t)} - \text{c.c.} \right]. \quad (2.45)$$

A quantização

Utilizando o método de segunda quantização, que consiste em identificar as variáveis canônicas $q_{\vec{k}s}$ e $p_{\vec{k}s}$ aos operadores correspondentes $\hat{q}_{\vec{k}s}$ e $\hat{p}_{\vec{k}s}$, que obedecem as relações de comutação

$$[\hat{q}_{\vec{k}s}, \hat{p}_{\vec{k}'s'}] = i\hbar \delta_{\vec{k}'\vec{k}} \delta_{s's'} \quad (2.46)$$

$$[\hat{q}_{\vec{k}s}, \hat{q}_{\vec{k}'s'}] = [\hat{p}_{\vec{k}s}, \hat{p}_{\vec{k}'s'}] = 0, \quad (2.47)$$

a Equação (2.43), em termos destes operadores $\hat{q}_{\vec{k}s}$ e $\hat{p}_{\vec{k}s}$, toma a seguinte forma

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, s} \left(\hat{p}_{\vec{k}s}^2 + v_k^2 \hat{q}_{\vec{k}s}^2 \right). \quad (2.48)$$

A partir desta equação introduz-se os operadores não-hermitianos denominados operadores de aniquilação $\hat{a}_{\vec{k}s}$ e de criação $\hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger$ dados por

$$\hat{a}_{\vec{k}s} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar v_k}} (v_k \hat{q}_{\vec{k}s} + i \hat{p}_{\vec{k}s}), \quad (2.49)$$

$$\hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar v_k}} (v_k \hat{q}_{\vec{k}s} - i \hat{p}_{\vec{k}s}). \quad (2.50)$$

As relações de comutação entre $\hat{a}_{\vec{k}s}$ e $\hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger$ seguem das Equações (2.46) e (2.47):

$$[\hat{a}_{\vec{k}s}, \hat{a}_{\vec{k}'s'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}'\vec{k}} \delta_{s's'}, \quad (2.51)$$

$$[\hat{a}_{\vec{k}s}, \hat{a}_{\vec{k}'s'}] = [\hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger, \hat{a}_{\vec{k}'s'}^\dagger] = 0. \quad (2.52)$$

Usando as relações (2.49) e (2.50) as equações para os campos $\hat{E}(\vec{r}, t)$ e $\hat{B}(\vec{r}, t)$ podem ser escritas em termos dos operadores $\hat{a}_{\vec{k}s}$ e $\hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger$,

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, s} \left(\frac{\hbar v_k}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \left[i \hat{a}_{\vec{k}s} \vec{\epsilon}_{\vec{k}s} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - v_k t)} + \text{h.c.} \right], \quad (2.53)$$

$$\hat{B}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, s} \left(\frac{\hbar}{2v_k \epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \left[i \hat{a}_{\vec{k}s} \left(\vec{k} \times \vec{\epsilon}_{\vec{k}s} \right) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - v_k t)} + \text{h.c.} \right], \quad (2.54)$$

onde h.c. denota hermitiano conjugado do termo anterior.

Energia do campo quantizado

Usando as Equações (2.49), (2.50) e a relação de comutação (2.51), o operador Hamiltoniano (2.48), em termos de $\hat{a}_{\vec{k}s}$ e $\hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger$, se escreve assim

$$\hat{H} = \hbar \sum_{\vec{k}, s} v_k \left(\hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}s} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.55)$$

Esta equação representa o Hamiltoniano do campo eletromagnético quantizado, onde $\hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger$ e $\hat{a}_{\vec{k}s}$ representam os operadores de criação e aniquilação de fótons, v_k é a frequência de oscilação do campo e \hbar é a constante de Planck h dividida por 2π . A contribuição $\sum_{\vec{k}, s} \frac{1}{2} \hbar v_k$ para a energia, chama-se contribuição de ponto zero.

Para o campo de um único modo na cavidade o Hamiltoniano (2.55) do campo eletromagnético reduz-se para

$$\hat{H} = \hbar v \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right) \quad \text{com} \quad \hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (2.56)$$

Na próxima subsecção serão apresentados os autoestados e as autoenergias do Hamiltoniano do campo eletromagnético.

2.1.3 Estados de Fock

Considera-se o campo de um modo de vibração com frequência v e estado $|n\rangle$. Estes estados $|n\rangle$, formam uma base $\{|n\rangle\}_{n=0,1,2,\dots}$ completa e ortonormal no espaço vetorial complexo \mathcal{H} com dimensão infinita. Nesta subsecção apresentam-se algumas propriedades importantes dos estados de Fock. Para detalhes destes estados, veja a referência [44].

Para o hamiltoniano $\hat{H} = \hbar v \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right)$ com $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ tem-se a equação de autovalor

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad (2.57)$$

com autoenergia $E_n = \hbar v \left(n + \frac{1}{2} \right)$, onde $n = 0, 1, 2, \dots$

A atuação do operador destruição \hat{a} no estado $|n\rangle$ e no estado do vácuo é respectivamente

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad \text{e} \quad \hat{a}|0\rangle = 0. \quad (2.58)$$

De maneira similar, tem-se o operador criação atuando no estado $|n\rangle$, assim

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (2.59)$$

O estado $|n\rangle$ pode ser gerado, através de aplicações sucessivas do operador de criação no estado de vácuo $|0\rangle$, da seguinte maneira

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (2.60)$$

Na próxima subsecção apresenta-se a interação entre o átomo e o campo quantizado.

2.1.4 A interação átomo-campo

Conforme a equação (2.1) a interação átomo-campo na aproximação de dipolo é dada por

$$-e\hat{r}\cdot\hat{E}, \quad (2.61)$$

onde o campo elétrico, de acordo com a Equação (2.53), na aproximação de dipolo para um único modo, toma a seguinte forma

$$\hat{E}(0,t) = \left(\frac{\hbar\nu}{2\epsilon_0 V}\right)^{\frac{1}{2}} \left(i\hat{a}e^{-i\nu t} - i\hat{a}^\dagger e^{i\nu t}\right) \vec{e}. \quad (2.62)$$

O momento de dipolo dado pela Equação (2.4) para um átomo de dois níveis na representação de Heisenberg se escreve assim

$$e\hat{r}(t) = \vec{\rho}_{\downarrow\uparrow} \hat{\sigma}_-(t) + \vec{\rho}_{\uparrow\downarrow} \hat{\sigma}_+(t), \quad (2.63)$$

onde

$$e\hat{r}(t) = e^{i\hat{H}_A t/\hbar} e\hat{r} e^{-i\hat{H}_A t/\hbar} \quad \text{com} \quad \hat{H}_A = \frac{\hbar\omega}{2} \hat{\sigma}_z. \quad (2.64)$$

Usa-se a identidade

$$e^{\alpha\hat{A}} \hat{B} e^{-\alpha\hat{A}} = \hat{B} + \alpha [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{\alpha^2}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \quad (2.65)$$

e após algumas manipulações algébricas das Equações (2.63) e (2.64), obtém-se

$$e\hat{r}(t) = \vec{\rho}_{\downarrow\uparrow} \hat{\sigma}_- e^{-i\omega t} + \vec{\rho}_{\uparrow\downarrow} \hat{\sigma}_+ e^{i\omega t}. \quad (2.66)$$

Escrevendo a interação de dipolo (2.61) em termos dos operadores do átomo e do campo na representação de Heisenberg, tem-se

$$\begin{aligned} -e\hat{r}(t) \cdot \hat{E}(t) &= \left(\frac{\hbar\nu}{2\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} (\hat{\rho}_{\uparrow\downarrow} \hat{\sigma}_- e^{-i\omega t} + \hat{\rho}_{\downarrow\uparrow} \hat{\sigma}_+ e^{i\omega t}) \cdot (i\hat{a}e^{-\nu t} - i\hat{a}^\dagger e^{\nu t}) \vec{\varepsilon} = \\ &= \hbar \left[g_{\uparrow\downarrow} \hat{\sigma}_- \hat{a} e^{-i(\omega+\nu)t} + g_{\uparrow\downarrow}^* \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger e^{-i(\omega-\nu)t} + g_{\downarrow\uparrow} \hat{\sigma}_+ \hat{a} e^{i(\omega-\nu)t} + g_{\downarrow\uparrow}^* \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger e^{i(\omega+\nu)t} \right], \end{aligned} \quad (2.67)$$

com

$$g_{\uparrow\downarrow} = -i \left(\frac{\nu}{2\hbar\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{\rho}_{\uparrow\downarrow} \cdot \vec{\varepsilon} \quad \text{e} \quad g_{\downarrow\uparrow} = -i \left(\frac{\nu}{2\hbar\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{\rho}_{\downarrow\uparrow} \cdot \vec{\varepsilon}, \quad (2.68)$$

onde $g(\cdot)$ representa constante de acoplamento entre o átomo e o campo.

O particular interesse aqui é o caso em que a frequência de transição do átomo coincide com o modo ressonante do campo na cavidade. A condição de ressonância é obtida através do ajuste da cavidade de modo que a frequência de um dos modos de cavidade coincide com o da transição atômica ($\omega = \nu$).

No caso ressonante ou próximo da ressonância ($\omega \approx \nu$), tem-se $|\omega - \nu| \lll |\omega + \nu|$. Em consequência disso, os termos proporcionais a $e^{\pm i(\omega+\nu)t}$ oscilam muito rápido, sendo difíceis de serem detectados pelos detectores ópticos, por esta razão desprezam-se os termos proporcionais a $e^{\pm i(\omega+\nu)t}$, porque estes termos têm pouca contribuição para a evolução do sistema. A interação de dipolo (2.67), nesta aproximação, se escreve desta forma

$$-e\hat{r}(t) \cdot \hat{E}(t) \approx \hbar \left[g_{\uparrow\downarrow}^* \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger + g_{\downarrow\uparrow} \hat{\sigma}_+ \hat{a} \right]. \quad (2.69)$$

Esta aproximação chama-se *Aproximação de Onda Girante* (do inglês *Rotating Wave Approximation*)(RWA), é adotada frequentemente na óptica quântica. Nesta interação pode-se analisar o seguinte, o termo $\hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger$ corresponde ao processo de interação que o átomo transita do nível superior $|\uparrow\rangle$ para o nível inferior $|\downarrow\rangle$ e um fóton é criado. Por outro lado, o segundo termo $\hat{\sigma}_+ \hat{a}$ descreve o processo pelo qual o átomo excita de $|\downarrow\rangle$ para $|\uparrow\rangle$, um fóton é absorvido.

Na próxima subsecção será apresentado o Hamiltoniano do sistema.

2.1.5 O modelo de Jaynes-Cummings

De posse da interação de dipolo (2.69), do Hamiltoniano do átomo (2.56) e do campo quantizado (2.12), levando estes resultados na Equação (2.1), obtém-se o Hamiltoniano

$$\hat{H}_{\text{JC}} = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \hbar\omega \hat{\sigma}_z + \hbar \left[g_{\uparrow\downarrow}^* \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger + g_{\downarrow\uparrow} \hat{\sigma}_+ \hat{a} \right]. \quad (2.70)$$

Este Hamiltoniano chama-se modelo de *Jaynes-Cummings* na *Aproximação de Onda Girante* e no regime ressonante. O primeiro termo desta equação é a energia do campo, o segundo representa a energia do átomo e o último termo representa a interação átomo-campo. Pode-se observar que omitiu-se a energia de ponto zero, pois esta não tem nenhuma interferência na evolução do sistema.

Por simplicidade toma-se constante de acoplamento g uma quantidade real que pode ser escrita assim

$$g = g_{\uparrow\downarrow}^* = g_{\downarrow\uparrow}. \quad (2.71)$$

Sob esta condição, o Hamiltoniano de *Jaynes-Cummings*, toma a seguinte forma

$$\hat{H}_{\text{JC}} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega\hat{\sigma}_z + \hbar g \left[\hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_+\hat{a} \right]. \quad (2.72)$$

A evolução do sistema

Escreve-se (2.72) na forma

$$\hat{H}_{\text{JC}} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I \quad (2.73)$$

com

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega\hat{\sigma}_z \quad (2.74)$$

representando o Hamiltoniano do átomo e do campo independentemente e

$$\hat{H}_I = \hbar g \left[\hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_+\hat{a} \right] \quad (2.75)$$

representando o Hamiltoniano de interação.

O estado $|\psi\rangle$ do sistema em um tempo t pode ser escrito como uma combinação linear dos autoestados $|\uparrow\rangle \otimes |n\rangle$, $|\downarrow\rangle \otimes |n\rangle$ do Hamiltoniano \hat{H}_0 da seguinte forma

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n \left[C_{\uparrow,n}(t) |\uparrow\rangle \otimes |n\rangle + C_{\downarrow,n}(t) |\downarrow\rangle \otimes |n\rangle \right], \quad (2.76)$$

onde $|\uparrow\rangle \otimes |n\rangle$, representa o estado excitado do átomo e n é o número de fótons na cavidade. Uma descrição similar para o estado $|\downarrow\rangle \otimes |n\rangle$. Os termos $C_{\uparrow,n}(t)$ e $C_{\downarrow,n}(t)$ são coeficientes complexos, que obedecem a condição de normalização $\sum_n \left[|C_{\uparrow,n}(t)|^2 + |C_{\downarrow,n}(t)|^2 \right] = 1$. A evolução do estado $|\psi(t)\rangle$ é dada segundo a equação de Schrödinger na representação de interação, assim

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}_I(t) |\psi(t)\rangle, \quad (2.77)$$

Note que na condição de ressonância, o Hamiltoniano \hat{H}_0 comuta com \hat{H}_I

$$[\hat{H}_I, \hat{H}_0] = 0, \quad (2.78)$$

implica dizer que \hat{H}_I é uma constante no tempo $\hat{H}_I(t) = \hat{H}_I$. Em consequência, a Equação (2.77) pode ser reescrita assim

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}_I |\psi(t)\rangle. \quad (2.79)$$

Para obter a evolução dos coeficientes de $|\psi(t)\rangle$, substitui-se a Equação (2.76) na (2.77). Como a interação (2.75) causa somente transições do tipo $|\uparrow\rangle \otimes |n\rangle \leftrightarrow |\downarrow\rangle \otimes |n+1\rangle$, obtém-se

$$\frac{d}{dt} C_{\downarrow,n}(t) = 0 \quad \text{para } n = 0, \quad (2.80)$$

$$\frac{d}{dt} C_{\uparrow,n}(t) = -ig\sqrt{n+1}C_{\downarrow,n+1}(t), \quad \text{para } n \geq 1 \quad (2.81)$$

$$\frac{d}{dt} C_{\downarrow,n+1}(t) = -ig\sqrt{n+1}C_{\uparrow,n}(t), \quad (2.82)$$

que são equações diferenciais lineares acopladas de primeira ordem. Destas equações, pode-se obter duas equações diferenciais de segunda ordem

$$\frac{d^2}{dt^2} C_{\uparrow,n}(t) + g^2(n+1)C_{\uparrow,n}(t) = 0, \quad (2.83)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} C_{\downarrow,n+1}(t) + g^2(n+1)C_{\downarrow,n+1}(t) = 0. \quad (2.84)$$

As condições iniciais impostas são

$$C_{\uparrow,n}(t) \Big|_{t=0} = C_{\uparrow,n}(0) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt} C_{\uparrow,n}(t) \Big|_{t=0} = -ig\sqrt{n+1}C_{\downarrow,n+1}(0), \quad (2.85)$$

$$C_{\downarrow,n+1}(t) \Big|_{t=0} = C_{\downarrow,n+1}(0) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt} C_{\downarrow,n+1}(t) \Big|_{t=0} = -ig\sqrt{n+1}C_{\uparrow,n}(0). \quad (2.86)$$

Para resolver as Equações (2.83) e (2.84), supõem-se soluções do tipo

$$C_{\uparrow,n}(t) = Ae^{i\phi t} \quad \text{e} \quad C_{\downarrow,n+1}(t) = Be^{i\varphi t}. \quad (2.87)$$

onde A e B são coeficientes complexos, ϕ e φ são frequências. Ao substituir estas soluções nas Equações (2.83) e (2.84), obtém-se

$$\phi^\pm = \varphi^\pm = \pm \frac{\Omega_n}{2}, \quad (2.88)$$

onde $\Omega_n = 2g\sqrt{n+1}$. As condições ϕ^\pm e φ^\pm implicam em duas soluções para (2.83) e duas para (2.84) respectivamente. Sabe-se que a combinação linear das soluções de uma equação diferencial linear homogênea também é solução. Portanto, as soluções para (2.83) e (2.84)

podem ser escritas da seguinte forma

$$C_{\uparrow,n}(t) = A^+ e^{i\frac{\Omega_n}{2}t} + A^- e^{-i\frac{\Omega_n}{2}t} \quad \text{e} \quad C_{\downarrow,n+1}(t) = B^+ e^{i\frac{\Omega_n}{2}t} + B^- e^{-i\frac{\Omega_n}{2}t}. \quad (2.89)$$

Impondo a condição (2.85), obtêm-se os coeficientes A^\pm . De maneira similar obtêm-se os coeficientes B^\pm da condição de contorno (2.86). Portanto, a solução geral se escreve desta forma

$$C_{\downarrow,n}(t) = C_{\downarrow,n}(0) = \text{constante}, \quad \text{para } n = 0 \quad (2.90)$$

$$C_{\uparrow,n}(t) = C_{\uparrow,n}(0) \cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) - i C_{\downarrow,n+1}(0) \text{sen}\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right), \quad \text{para } n \geq 1, \quad (2.91)$$

$$C_{\downarrow,n+1}(t) = C_{\downarrow,n+1}(0) \cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) - i C_{\uparrow,n}(0) \text{sen}\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right), \quad (2.92)$$

onde $\Omega_n = 2g\sqrt{n+1}$ chama-se frequência de Rabi do n -ésimo dubleto. A partir destas equações, podem-se obter informações físicas importantes referentes ao campo quantizado e ao átomo. Por exemplo, emaranhamento entre o átomo e o campo. Se inicialmente o átomo estiver no estado excitado e o campo no estado $|n\rangle$, tem-se $C_{\uparrow,n}(0) = 1$ e todos outros coeficientes são nulos. Conforme esta condição, o estado do sistema em um tempo t se escreve assim

$$|\psi(t)\rangle = \cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) |\uparrow n\rangle - i \text{sen}\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) |\downarrow n+1\rangle. \quad (2.93)$$

Observa-se que, em geral, o átomo e o campo encontram-se emaranhados e que este emaranhamento depende periodicamente do tempo de interação entre eles.

3 ***DINÂMICA DO EMARANHAMENTO EM UM SISTEMA TRIPARTITE***

Neste capítulo, apresenta-se a dinâmica do emaranhamento num sistema tripartite, que consiste de dois átomos na aproximação de dois níveis e um único modo de campo em uma cavidade, onde esta cavidade interage apenas com um dos átomos, descrita pelo modelo de *Jaynes-Cummings* conforme a secção 2.1.5.

O interesse aqui é a dinâmica do emaranhamento entre os dois átomos, quantificada pela concorrência de Wootters [16]. Com a finalidade de acompanhar esta dinâmica serão definidos dois operadores, um deles é o *operador de correlação*, dado pelo produto das inversões atômicas, e o outro operador é o *operador de Bell* [17]. Será analisado o comportamento da concorrência e dos valores esperados dos operadores sob diferentes condições iniciais do estado do campo. Observa-se que, para o campo inicialmente no estado de Fock, o valor esperado do operador de correlação reflete a dinâmica do emaranhamento. Porém, para uma combinação linear de dois estados de Fock, o *operador de correlação* não reflete a dinâmica do emaranhamento. Já o *operador de Bell* reflete a dinâmica do emaranhamento para o estado de vácuo. Mas, para um estado de Fock ou uma combinação linear de dois estados de Fock, o *operador de Bell* não reflete a dinâmica do emaranhamento.

3.1 **O sistema tripartite**

Aqui será considerado o sistema físico proposto na referência [15], que é um sistema tripartido composto por dois átomos **A** e **B** na aproximação de dois níveis e um único modo de campo numa cavidade ideal **C** como mostra a Figura 3.1.

O átomo **B** permanece completamente livre, sem nenhuma interação com o modo do campo na cavidade **C** nem com o átomo **A**. Só existe interação entre o campo na cavidade **C** e o átomo

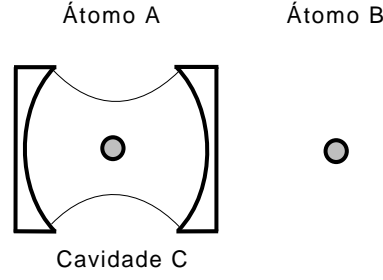


Figura 3.1: Representação esquemática do sistema tripartite, dois átomos **A** e **B** e um único modo de campo na cavidade **C**.

A. Considerando as transições atômicas dos átomos **A** e **B** iguais e o átomo **A** em ressonância ($\omega = \nu$) com o único modo do campo na cavidade, o Hamiltoniano para o sistema pode ser escrito assim

$$\hat{H}_{\text{total}} = \frac{\hbar\omega}{2}\hat{\sigma}_A^z + \frac{\hbar\omega}{2}\hat{\sigma}_B^z + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar g \left(\hat{\sigma}_A^-\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_A^+\hat{a} \right), \quad (3.1)$$

sendo constituído pelos Hamiltonianos dos átomos **A** e **B** na aproximação de dois níveis, pelo Hamiltoniano do campo e pela interação de *Jaynes-Cummings* entre o átomo **A** e o campo. $\hat{\sigma}^z$ é o operador inversão atômica, $\hat{\sigma}^-$ e $\hat{\sigma}^+$ são os operadores abaixamento e levantamento, respectivamente, \hat{a}^\dagger e \hat{a} são os operadores de criação e aniquilação de fótons e g representa a constante de acoplamento entre o átomo **A** e o campo.

Na referência [15], foram analisadas a evolução e transferência de emaranhamento entre as partes, considerando o campo inicialmente no estado de Fock $|n\rangle$ e os dois átomos inicialmente no estado emaranhado

$$|\psi_{\text{átomos}}\rangle = \cos\alpha|\uparrow_A\rangle \otimes |\downarrow_B\rangle + \text{sen}\alpha|\downarrow_A\rangle \otimes |\uparrow_B\rangle, \quad (3.2)$$

sendo α um fator angular.

Neste trabalho será considerado o estado do campo como uma combinação linear de dois estados de Fock, dado por

$$|\psi_{\text{campo}}\rangle = \cos\gamma|n\rangle + \text{sen}\gamma|m\rangle, \quad \text{com } m \neq n, \quad (3.3)$$

sendo γ um fator angular e será mantido os dois átomos no estado emaranhado (3.2). Veja que o estado inicial $|n\rangle$ pode ser recuperado fazendo $\gamma = \frac{j\pi}{2}$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. O objetivo de considerar o estado do campo em uma combinação linear é analisar sua influência na dinâmica do emaranhamento entre os átomos.

O estado inicial total do sistema é dado pelo produto tensorial dos estados (3.2) e (3.3)

$$|\psi(0)\rangle = |\psi_{\text{átomos}}\rangle \otimes |\psi_{\text{campo}}\rangle. \quad (3.4)$$

• A evolução temporal

Escreve-se o Hamiltoniano (3.1) como a soma

$$\hat{H}_{\text{total}} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I, \quad (3.5)$$

onde

$$\hat{H}_0 = \frac{\hbar\omega}{2}\hat{\sigma}_A^z + \frac{\hbar\omega}{2}\hat{\sigma}_B^z + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} \quad (3.6)$$

representa o Hamiltoniano livre dos átomos e do campo e

$$\hat{H}_I = \hbar g \left(\hat{\sigma}_A^- \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_A^+ \hat{a} \right) \quad (3.7)$$

representa o Hamiltoniano da interação entre o átomo A e o campo. O termo de interação, causa transições dos tipos

$$|\uparrow_A\rangle \otimes |\downarrow_B\rangle \otimes |p\rangle \leftrightarrow |\downarrow_A\rangle \otimes |\downarrow_B\rangle \otimes |p+1\rangle, \quad (3.8)$$

$$|\downarrow_A\rangle \otimes |\uparrow_B\rangle \otimes |p\rangle \leftrightarrow |\uparrow_A\rangle \otimes |\uparrow_B\rangle \otimes |p-1\rangle, \quad \text{com } p = n, m. \quad (3.9)$$

Sendo que os estados $|\downarrow\uparrow n\rangle$, $|\downarrow\uparrow m\rangle$, $|\uparrow\downarrow n\rangle$, $|\uparrow\downarrow m\rangle$, $|\downarrow\downarrow n+1\rangle$, $|\downarrow\downarrow m+1\rangle$, $|\uparrow\uparrow n-1\rangle$ e $|\uparrow\uparrow m-1\rangle$ são autoestados do Hamiltoniano \hat{H}_0 . O estado $|\psi(t)\rangle$ do sistema total em um tempo t pode ser escrito como uma combinação linear destes estados,

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = & C_{\uparrow,\downarrow,n}(t)|\uparrow\downarrow n\rangle + C_{\downarrow,\uparrow,n}(t)|\downarrow\uparrow n\rangle + C_{\downarrow,\downarrow,n+1}(t)|\downarrow\downarrow n+1\rangle + C_{\uparrow,\uparrow,n-1}(t)|\uparrow\uparrow n-1\rangle + \\ & + C_{\uparrow,\downarrow,m}(t)|\uparrow\downarrow m\rangle + C_{\downarrow,\uparrow,m}(t)|\downarrow\uparrow m\rangle + C_{\downarrow,\downarrow,m+1}(t)|\downarrow\downarrow m+1\rangle + C_{\uparrow,\uparrow,m-1}(t)|\uparrow\uparrow m-1\rangle, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde $C_I(t)$ são coeficientes complexos, que satisfazem a condição de normalização $\sum_I |C_I(t)|^2 = 1$. O estado (3.10) satisfaz a equação de Schrödinger, novamente na representação de interação

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}_I(t) |\psi(t)\rangle. \quad (3.11)$$

Como \hat{H}_0 comuta com \hat{H}_I ,

$$[\hat{H}_I, \hat{H}_0] = 0, \quad (3.12)$$

\hat{H}_I é constante no tempo. Em consequência disso a Equação (3.11) reduz-se para

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}_I |\psi(t)\rangle. \quad (3.13)$$

Ao substituir $|\psi(t)\rangle$ na equação de Schrödinger (3.13), obtém-se

$$\begin{aligned}
& i\hbar \left[\dot{C}_{\uparrow,\downarrow,n}(t) |\uparrow\downarrow n\rangle + \dot{C}_{\downarrow,\uparrow,n}(t) |\downarrow\uparrow n\rangle + \dot{C}_{\downarrow,\downarrow,n+1}(t) |\downarrow\downarrow n+1\rangle + \dot{C}_{\uparrow,\uparrow,n-1}(t) |\uparrow\uparrow n-1\rangle + \right. \\
& \left. + \dot{C}_{\uparrow,\downarrow,m}(t) |\uparrow\downarrow m\rangle + \dot{C}_{\downarrow,\uparrow,m}(t) |\downarrow\uparrow m\rangle + \dot{C}_{\downarrow,\downarrow,m+1}(t) |\downarrow\downarrow m+1\rangle + \dot{C}_{\uparrow,\uparrow,m-1}(t) |\uparrow\uparrow m-1\rangle \right] = \\
& = \hbar g \left[C_{\uparrow,\downarrow,n}(t) |\downarrow\downarrow n+1\rangle \sqrt{n+1} + C_{\downarrow,\uparrow,n}(t) |\uparrow\uparrow n-1\rangle \sqrt{n} + C_{\downarrow,\downarrow,n+1}(t) |\uparrow\downarrow n\rangle \sqrt{n+1} + \right. \\
& \left. + C_{\uparrow,\uparrow,n-1}(t) |\downarrow\uparrow n\rangle \sqrt{n} + C_{\uparrow,\downarrow,m}(t) |\downarrow\downarrow m+1\rangle \sqrt{m+1} + C_{\downarrow,\uparrow,m}(t) |\uparrow\uparrow m-1\rangle \sqrt{m} + \right. \\
& \left. + C_{\downarrow,\downarrow,m+1}(t) |\uparrow\downarrow m\rangle \sqrt{m+1} + C_{\uparrow,\uparrow,m-1}(t) |\downarrow\uparrow m\rangle \sqrt{m} \right] \quad \text{com} \quad \dot{C}_{\dots}(t) \equiv \frac{d}{dt} C_{\dots}(t). \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Igualando os respectivos coeficientes obtém-se as seguintes equações diferenciais de primeira ordem acopladas,

$$\begin{aligned}
\dot{C}_{\uparrow,\downarrow,n}(t) &= -ig\sqrt{n+1}C_{\downarrow,\downarrow,n+1}(t), & \dot{C}_{\uparrow,\downarrow,m}(t) &= -ig\sqrt{m+1}C_{\downarrow,\downarrow,m+1}(t), \\
\dot{C}_{\downarrow,\uparrow,n}(t) &= -ig\sqrt{n}C_{\uparrow,\uparrow,n-1}(t), & \dot{C}_{\downarrow,\uparrow,m}(t) &= -ig\sqrt{m}C_{\uparrow,\uparrow,m-1}(t), \\
\dot{C}_{\downarrow,\downarrow,n+1}(t) &= -ig\sqrt{n+1}C_{\uparrow,\downarrow,n}(t), & \dot{C}_{\downarrow,\downarrow,m+1}(t) &= -ig\sqrt{m+1}C_{\uparrow,\downarrow,m}(t), \\
\dot{C}_{\uparrow,\uparrow,n-1}(t) &= -ig\sqrt{n}C_{\downarrow,\uparrow,n}(t), & \dot{C}_{\uparrow,\uparrow,m-1}(t) &= -ig\sqrt{m}C_{\downarrow,\uparrow,m}(t).
\end{aligned} \quad (3.15)$$

Destas equações obtém-se as equações lineares homogêneas de segunda ordem

$$\ddot{C}_{\uparrow,\downarrow,n}(t) + g^2(n+1)C_{\uparrow,\downarrow,n}(t) = 0, \quad \ddot{C}_{\uparrow,\downarrow,m}(t) + g^2(m+1)C_{\uparrow,\downarrow,m}(t) = 0, \quad (3.16)$$

$$\ddot{C}_{\downarrow,\uparrow,n}(t) + g^2(n)C_{\downarrow,\uparrow,n}(t) = 0, \quad \ddot{C}_{\downarrow,\uparrow,m}(t) + g^2(m)C_{\downarrow,\uparrow,m}(t) = 0, \quad (3.17)$$

$$\ddot{C}_{\downarrow,\downarrow,n+1}(t) + g^2(n+1)C_{\downarrow,\downarrow,n+1}(t) = 0, \quad \ddot{C}_{\downarrow,\downarrow,m+1}(t) + g^2(m+1)C_{\downarrow,\downarrow,m+1}(t) = 0, \quad (3.18)$$

$$\ddot{C}_{\uparrow,\uparrow,n-1}(t) + g^2(n)C_{\uparrow,\uparrow,n-1}(t) = 0 \quad \ddot{C}_{\uparrow,\uparrow,m-1}(t) + g^2(m)C_{\uparrow,\uparrow,m-1}(t) = 0, \quad (3.19)$$

com condições iniciais impostas pelas Equações (3.4) e (3.15) que são

$$C_{\uparrow,\downarrow,n}(t) \Big|_{t=0} = \cos \gamma \cos \alpha \quad \text{e} \quad \dot{C}_{\uparrow,\downarrow,n}(t) \Big|_{t=0} = -ig\sqrt{n+1}C_{\downarrow,\downarrow,n+1}(0), \quad (3.20)$$

$$(3.21)$$

$$C_{\downarrow,\uparrow,n}(t) \Big|_{t=0} = \cos \gamma \sin \alpha \quad \text{e} \quad \dot{C}_{\downarrow,\uparrow,n}(t) \Big|_{t=0} = -ig\sqrt{n}C_{\uparrow,\uparrow,n-1}(0), \quad (3.22)$$

$$C_{\downarrow,\downarrow,n+1}(t) \Big|_{t=0} = 0 \quad \text{e} \quad \dot{C}_{\downarrow,\downarrow,n+1}(t) \Big|_{t=0} = -ig\sqrt{n+1}C_{\uparrow,\downarrow,n}(0), \quad (3.23)$$

$$C_{\uparrow,\uparrow,n-1}(t) \Big|_{t=0} = 0 \quad \text{e} \quad \dot{C}_{\uparrow,\uparrow,n-1}(t) \Big|_{t=0} = -ig\sqrt{n}C_{\downarrow,\uparrow,n}(0), \quad (3.24)$$

$$C_{\uparrow,\downarrow,m}(t)\Big|_{t=0} = \text{sen } \gamma \cos \alpha \quad \text{e} \quad \dot{C}_{\uparrow,\downarrow,m}(t)\Big|_{t=0} = -ig\sqrt{m+1}C_{\downarrow,\downarrow,m+1}(0), \quad (3.25)$$

$$C_{\downarrow,\uparrow,m}(t)\Big|_{t=0} = \text{sen } \gamma \text{sen } \alpha \quad \text{e} \quad \dot{C}_{\downarrow,\uparrow,m}(t)\Big|_{t=0} = -ig\sqrt{m}C_{\uparrow,\uparrow,m-1}(0), \quad (3.26)$$

$$C_{\downarrow,\downarrow,m+1}(t)\Big|_{t=0} = 0 \quad \text{e} \quad \dot{C}_{\downarrow,\downarrow,m+1}(t)\Big|_{t=0} = -ig\sqrt{m+1}C_{\uparrow,\downarrow,m}(0), \quad (3.27)$$

$$C_{\uparrow,\uparrow,m-1}(t)\Big|_{t=0} = 0 \quad \text{e} \quad \dot{C}_{\uparrow,\uparrow,m-1}(t)\Big|_{t=0} = -ig\sqrt{m}C_{\downarrow,\uparrow,m}(0). \quad (3.28)$$

Para obter as soluções das Equações (3.16)-(3.19) supõem-se soluções da forma

$$C_l(t) = A_l e^{i\phi_p t} \quad \text{com } p = n, m \text{ e } l = \uparrow\downarrow p, \downarrow\uparrow p, \downarrow\downarrow p+1, \uparrow\uparrow p-1. \quad (3.29)$$

Das Equações (3.16)-(3.19) obtém-se

$$\phi_p^\pm = \pm g\sqrt{p+1} \quad \text{e} \quad \phi_{p-1}^\pm = \pm g\sqrt{p}. \quad (3.30)$$

A solução geral para cada equação diferencial homogênea (3.16)-(3.19) é dada pela seguinte combinação linear

$$C_l(t) = A_l^+ e^{i\phi_p^+ t} + A_l^- e^{i\phi_p^- t}. \quad (3.31)$$

Das condições de contorno (3.20)-(3.28) obtém-se os coeficientes A_l^+ e A_l^- . Os coeficientes não-nulos para $|\psi(0)\rangle$ dado pela Equação (3.4) tomam a seguinte forma

$$\begin{aligned} C_{\uparrow,\downarrow,p}(t) &= \cos \alpha \cos \gamma \cos \left(\frac{\Omega_p t}{2} \right), \\ C_{\downarrow,\uparrow,p}(t) &= \text{sen } \alpha \cos \gamma \cos \left(\frac{\Omega_{p-1} t}{2} \right), \\ C_{\downarrow,\downarrow,p+1}(t) &= -i \cos \alpha \cos \gamma \text{sen} \left(\frac{\Omega_p t}{2} \right), \\ C_{\uparrow,\uparrow,p-1}(t) &= -i \text{sen } \alpha \cos \gamma \text{sen} \left(\frac{\Omega_{p-1} t}{2} \right), \end{aligned} \quad (3.32)$$

sendo $\Omega_p = 2g\sqrt{p+1}$, $p = n, m$, a frequência de Rabi do p -ésimo dubleto. Estes coeficientes dependem das condições iniciais, dos fatores angulares α e γ , do número de fótons n e m na cavidade e da constante de acoplamento g .

• A matriz densidade

Para obter informação do sistema atômico, será usada a matriz densidade reduzida, dada pelo traço parcial sobre o campo. Com a condição $|n - m| > 2$, esta matriz densidade se escreve

assim

$$\hat{\rho}_{AB}(t) = \text{Tr}_{\text{campo}} \left[|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| \right] = \sum_{n'=n-1}^{n+1} \langle n'|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|n'\rangle + \quad (3.33)$$

$$+ \sum_{m'=m-1}^{m+1} \langle m'|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|m'\rangle. \quad (3.34)$$

Escrevendo $\hat{\rho}_{AB}(t)$ na forma matricial, tem-se

$$\hat{\rho}_{AB}(t) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & z & 0 \\ 0 & z^* & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

na base padrão $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$, sendo z^* o conjugado complexo de z , onde os termos a, b, c, d e z são dados por

$$a = |C_{\downarrow,\downarrow,n+1}(t)|^2 + |C_{\downarrow,\downarrow,m+1}(t)|^2 = |\text{sen } \alpha \cos \gamma \text{sen}(gt\sqrt{n})|^2 + |\text{sen } \alpha \text{sen } \gamma \text{sen}(gt\sqrt{m})|^2,$$

$$b = |C_{\uparrow,\downarrow,n}(t)|^2 + |C_{\uparrow,\downarrow,m}(t)|^2 = |\cos \alpha \cos \gamma \cos(gt\sqrt{n+1})|^2 + |\cos \alpha \text{sen } \gamma \text{sen}(gt\sqrt{m+1})|^2,$$

$$c = |C_{\downarrow,\uparrow,n}(t)|^2 + |C_{\downarrow,\uparrow,m}(t)|^2 = |\text{sen } \alpha \cos \gamma \cos(gt\sqrt{n})|^2 + |\text{sen } \alpha \text{sen } \gamma \cos(gt\sqrt{m})|^2,$$

$$d = |C_{\uparrow,\uparrow,n-1}(t)|^2 + |C_{\uparrow,\uparrow,m-1}(t)|^2 = |\cos \alpha \cos \gamma \text{sen}(gt\sqrt{n+1})|^2 + |\cos \alpha \text{sen } \gamma \text{sen}(gt\sqrt{m+1})|^2,$$

$$z = C_{\uparrow,\downarrow,n}(t)C_{\downarrow,\uparrow,n}^*(t) + C_{\uparrow,\downarrow,m}(t)C_{\downarrow,\uparrow,m}^*(t) = \text{sen } \alpha \cos \alpha [\cos^2 \gamma \cos(gt\sqrt{n}) \cos(gt\sqrt{n+1}) + \text{sen}^2 \gamma \cos(gt\sqrt{m}) \cos(gt\sqrt{m+1})]. \quad (3.36)$$

Na base padrão os termos da diagonal de $\hat{\rho}_{AB}(t)$, a, b, c e d representam as populações e os termos cruzados z e z^* representam as coerências. Como os átomos **A** e **B** formam um sistema qubit-qubit o emaranhamento entre eles poderá ser quantificado tanto pela concorrência quanto pela negatividade.

3.2 A dinâmica do emaranhamento

Nas subsecções posteriores será analisada a dinâmica do emaranhamento entre os átomos **A** e **B**, via concorrência, subsecção 3.2.1, operador de correlação, subsecção 3.2.2 e de um operador de Bell, subsecção 3.2.3, sob diferentes condições iniciais do estado do campo.

3.2.1 A concorrência

Para a matriz densidade $\hat{\rho}_{AB}$ de acordo com a subsecção 1.3.4, a concorrência entre os átomos assume a seguinte forma

$$C(\hat{\rho}_{AB}) = 2 \max \left\{ 0, |z| - \sqrt{ad} \right\}, \quad (3.37)$$

onde os coeficientes são dados pela Equação (3.36). Para a condição $|z| > \sqrt{ad}$ o sistema encontra-se emaranhado. Para $|z| \leq \sqrt{ad}$ o sistema encontra-se desemaranhado. A seguir será analisado o emaranhamento e desemaranhamento dos átomos sob a influência do estado inicial do campo. Substituindo os coeficientes (3.36) na Equação (3.37), obtém-se

$$\begin{aligned} C(\hat{\rho}_{AB}) = & 2 \max \left\{ 0, |\sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \gamma \cos(gt\sqrt{n+1}) \cos(gt\sqrt{n}) + \right. \\ & \left. + \sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \gamma \cos(gt\sqrt{m+1}) \cos(gt\sqrt{m})| - \right. \\ & \left. - \left\{ \left[|\sin \alpha \cos \gamma \sin(gt\sqrt{n})|^2 + |\sin \alpha \sin \gamma \sin(gt\sqrt{m})|^2 \right] \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left[|\cos \alpha \cos \gamma \sin(gt\sqrt{n+1})|^2 + |\cos \alpha \sin \gamma \sin(gt\sqrt{m+1})|^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (3.38) \end{aligned}$$

Para obter a concorrência entre os átomos com o campo inicialmente no estado $|n\rangle$, faz-se $\gamma = 0$ na expressão acima, que resume-se

$$\begin{aligned} C(\hat{\rho}_{AB}) = & 2 \max \left\{ 0, |\sin \alpha \cos \alpha \cos(gt\sqrt{n+1}) \cos(gt\sqrt{n})| - \right. \\ & \left. - |\sin \alpha \sin(gt\sqrt{n})| |\cos \alpha \sin(gt\sqrt{n+1})| \right\}. \quad (3.39) \end{aligned}$$

Para os parâmetros $\alpha = 3\pi/4$ [corresponde aos átomos inicialmente no estado singlete $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$] e $\gamma = \frac{\pi}{4}$, $n = 1$, $m = 4$ [corresponde ao campo inicialmente em combinação

linear $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |4\rangle)$] a Equação (3.38) pode ser escrita assim

$$C(\hat{\rho}_{AB}) = \max \left\{ 0, \frac{1}{2} |\cos(\sqrt{2}gt) \cos(gt) + \cos(\sqrt{5}gt) \cos(2gt)| - \frac{1}{2} \left[\left[\sin^2(gt) + \sin^2(2gt) \right] \left[\sin^2(\sqrt{2}gt) + \sin^2(\sqrt{5}gt) \right] \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (3.40)$$

Para os valores dos parâmetros $\alpha = 3\pi/4$ [corresponde aos átomos inicialmente no estado singleto $\frac{1}{2}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$] e $n = 1$ [corresponde ao campo inicialmente no estado $|1\rangle$] a Equação (3.39) da concorrência resume-se para

$$C(\hat{\rho}_{AB}) = \max \left\{ 0, |\cos(\sqrt{2}gt) \cos(gt)| - |\sin(\sqrt{2}gt)| |\sin(gt)| \right\}. \quad (3.41)$$

A evolução das Equações (3.41) e (3.40) é representada no gráfico da Figura 3.2.

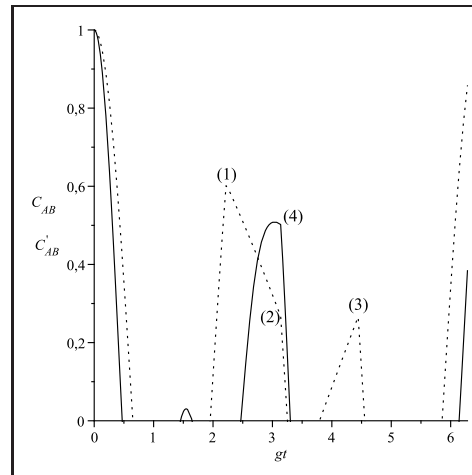


Figura 3.2: Evolução da concorrência para os parâmetros, $n = 1$, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $\gamma = 0$ (linha pontilhada) e $m = 4$, $n = 1$, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ e $\gamma = \frac{\pi}{4}$ (linha sólida) em $0 \leq gt \leq 2\pi$.

Na Figura 3.2, a linha sólida representa a concorrência (3.40) sob a influência do campo no estado inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|4\rangle + |1\rangle)$. A linha pontilhada representa a concorrência (3.41) sob a influência do campo no estado inicial $|1\rangle$.

Observa-se que o emaranhamento é máximo em $t = 0$ e após um tempo $t > 0$, o emaranhamento cai abruptamente a zero. Esta perda de emaranhamento chama-se “morte súbita” [45]. Os dois átomos permanecem desemaranhados por um certo intervalo de tempo, depois o emaranhamento retorna parcialmente para os dois átomos. Isso acontece tanto para (3.40) quanto para (3.41).

Veja que para a concorrência (3.41) representada pela linha pontilhada existem intervalos

de tempo onde os átomos estão desemaranhados $C(\hat{\rho}_{AB}) = 0$, ou seja,

$$|\cos(\sqrt{2}gt) \cos(gt)| < |\sin(\sqrt{2}gt)| |\sin(gt)|, \quad (3.42)$$

quando o módulo das coerências é menor que a raiz quadrada do produto dos módulos das populações.

Para o estado do sistema total (3.10), sob a mesmas condições iniciais da Equação (3.41), o estado do sistema num tempo t qualquer toma a seguinte forma

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\cos(\sqrt{2}gt) |\uparrow\downarrow 1\rangle + \cos(gt) |\downarrow\uparrow 1\rangle + i \sin(\sqrt{2}gt) |\downarrow\downarrow 2\rangle - i \sin(gt) |\uparrow\uparrow 0\rangle \right]. \quad (3.43)$$

Analisando o emaranhamento no estado total (3.43) as conclusões são diferentes em relação à análise feita do emaranhamento entre os átomos dado pela concorrência, veja que de acordo com a condição (3.42) existem pontos específicos onde não existe emaranhamento $C(\hat{\rho}_{AB}) = 0$, dados por

$$gt = \frac{j\pi}{2\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad gt = \frac{j\pi}{2}, \quad j = 1, 3, 5, \dots$$

O estado do sistema em $gt = \frac{j\pi}{2\sqrt{2}}$ é dado por

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos\left(\frac{j\pi}{2\sqrt{2}}\right) |\downarrow\uparrow 1\rangle + i(-1)^{\frac{j-1}{2}} |\downarrow\downarrow 2\rangle - i \sin\left(\frac{j\pi}{2\sqrt{2}}\right) |\uparrow\uparrow 0\rangle \right] \quad (3.44)$$

e para $gt = \frac{j\pi}{2}$ o estado do sistema é

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\cos\left(\frac{j\sqrt{2}\pi}{2}\right) |\uparrow\downarrow 1\rangle + i \sin\left(\frac{j\sqrt{2}\pi}{2}\right) |\downarrow\downarrow 2\rangle + i |\uparrow\uparrow 0\rangle \right]. \quad (3.45)$$

De acordo com os estados (3.44) e (3.45) o emaranhamento encontra-se distribuído entre os átomos e o campo, ou seja, os estados dos átomos e do campo não podem ser escritos de forma fatorada. Tomando o traço sobre o campo, observa-se de imediato em $\hat{\rho}_{AB}$ que não existe emaranhamento entre os átomos. Porém, ao tomar o traço sobre o átomo **A** ou sobre o átomo **B**, observa-se o campo emaranhado com um dos átomos. Isto é diferente do estado tripartite maximamente emaranhado de *Greenberger-Horne-Zeilinger* ou estado GHZ,

$$|\psi_{\text{GHZ}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_1\uparrow_2\uparrow_3\rangle + |\downarrow_1\downarrow_2\downarrow_3\rangle)$$

quando analisa-se o estado total vê-se o emaranhamento distribuído entre as partes. Porém, ao tomar o traço sobre uma das partes

$$\hat{\rho}_{1,2} = \text{Tr}_3(|\psi_{\text{GHZ}}\rangle\langle\psi_{\text{GHZ}}|) = \frac{1}{2} (|\uparrow_1\uparrow_2\rangle\langle\uparrow_1\uparrow_2| + |\downarrow_1\downarrow_2\rangle\langle\downarrow_1\downarrow_2|)$$

é possível vê que as outras duas ficam desemaranhadas.

Veja também que o gráfico da concorrência apresenta bicos e que estes não foram analisados na referência [15]. Aqui será dada uma explicação simples para isso. De acordo com a equação da concorrência para o estado inicial do campo $|1\rangle$,

$$C(\hat{\rho}_{AB}) = \max \left\{ 0, |\cos(\sqrt{2}gt) \cos(gt)| - |\sin(\sqrt{2}gt)| |\sin(gt)| \right\}. \quad (3.46)$$

existe emaranhamento entre os átomos quando

$$|\cos(\sqrt{2}gt) \cos(gt)| > |\sin(\sqrt{2}gt)| |\sin(gt)|.$$

Neste caso, bicos aparecem nos instantes onde concorrência é não diferenciável, isso acontece quando tem-se $|\sin(\sqrt{2}gt)|$ ou $|\sin(gt)|$ nulos, ou seja, quando

$$gt = \frac{j\pi}{\sqrt{2}}, j = 1, 2, 3, \dots \quad \text{ou} \quad gt = j\pi, j = 1, 2, 3, \dots$$

Observe-se que os pontos (1) e (3) correspondem a $gt = \frac{j\pi}{\sqrt{2}}$ com $j = 1$ e $j = 2$ respectivamente, enquanto o ponto (2) corresponde a $gt = j\pi$ com $j = 1$.

Para a concorrência no estado inicial do campo $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |4\rangle)$,

$$C(\hat{\rho}_{AB}) = \max \left\{ 0, \frac{1}{2} |\cos(\sqrt{2}gt) \cos(gt) + \cos(\sqrt{5}gt) \cos(2gt)| - \frac{1}{2} \left\{ \left[\sin^2(gt) + \sin^2(2gt) \right] \left[\sin^2(\sqrt{2}gt) + \sin^2(\sqrt{5}gt) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (3.47)$$

existe emaranhamento entre os átomos quando

$$|\cos(\sqrt{2}gt) \cos(gt) + \cos(\sqrt{5}gt) \cos(2gt)| > \left\{ \left[\sin^2(gt) + \sin^2(2gt) \right] \left[\sin^2(\sqrt{2}gt) + \sin^2(\sqrt{5}gt) \right] \right\}^{\frac{1}{2}},$$

neste caso (veja no gráfico, linha sólida) aparecem bicos, porque o primeiro termo entre colchete anula-se, isso acontece para

$$gt = j\pi, j = 1, 2, \dots$$

Na Figura 3.2, o ponto (4) corresponde a $j = 1$.

A Equação (3.38) para $m = 5$, $n = 1$ e para os mesmos valores de γ e α usados em (3.47)

toma a seguinte forma

$$C(\hat{\rho}_{AB}) = \max \left\{ 0, \frac{1}{2} \left| \cos(\sqrt{2}gt) \cos(gt) + \cos(\sqrt{6}gt) \cos(\sqrt{5}gt) \right| - \frac{1}{2} \left\{ \left[\sin^2(gt) + \sin^2(\sqrt{5}gt) \right] \left[\sin^2(\sqrt{2}gt) + \sin^2(\sqrt{6}gt) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (3.48)$$

que tem sua evolução temporal exibida na Figura 3.2. Observa-se que não aparecem bicos, porque não é possível anular o primeiro ou segundo termo entre colchetes na equação acima.

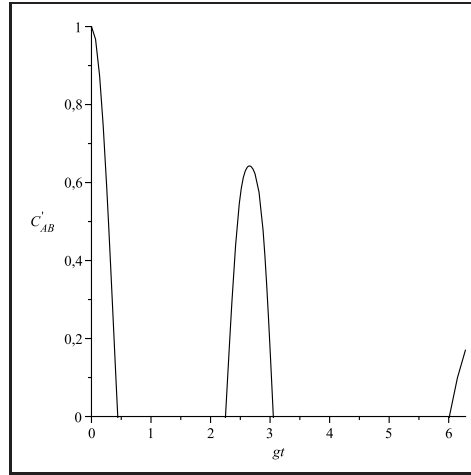


Figura 3.3: Evolução da concorrência para os parâmetros, $m = 5$, $n = 1$, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ e $\gamma = \frac{\pi}{4}$ em $0 \leq gt \leq 2\pi$.

Depois destas análises gráficas do aparecimento dos bicos, pode-se descrever analiticamente as equações das concorrências (3.38) e (3.39) e concluir o seguinte. Para $C(\hat{\rho}_{AB}) > 0$, Equação (3.39), os bicos aparecem quando um dos termos $|\sin \alpha \sin(gt\sqrt{n})|$ ou $|\cos \alpha \sin(gt\sqrt{n+1})|$ é nulo, o que acontece nos pontos

$$gt = \frac{j\pi}{\sqrt{n}}, j = 1, 2, \dots \quad \text{ou} \quad gt = \frac{j\pi}{\sqrt{n+1}}, j = 1, 2, \dots$$

para qualquer $n \geq 1$.

Para $C(\hat{\rho}_{AB}) > 0$, Equação (3.38), os bicos aparecem quando anula-se um dos dois colchetes

$$\left[|\sin \alpha \cos \gamma \sin(gt\sqrt{n})|^2 + |\sin \alpha \sin \gamma \sin(gt\sqrt{m})|^2 \right]$$

ou

$$\left[|\cos \alpha \cos \gamma \sin(gt\sqrt{n+1})|^2 + |\cos \alpha \sin \gamma \sin(gt\sqrt{m+1})|^2 \right].$$

Como o primeiro e o segundo colchetes contêm somas de senos ao quadrado, o primeiro

colchete é nulo quando os senos forem nulos simultaneamente, isso acontece em

$$gt = \frac{j\pi}{\sqrt{n}}, \quad j = 1, 2, \dots \quad \text{para} \quad m = q^2 n, \quad n \geq 1, \quad q \in \mathbb{Q}^1, \quad |n - m| > 2.$$

De maneira similar o segundo colchete anula-se em

$$gt = \frac{j\pi}{\sqrt{n+1}}, \quad j = 1, 2, \dots \quad \text{para} \quad m + 1 = q^2(n + 1), \quad q \in \mathbb{Q}^2, \quad |n - m| > 2.$$

Para uma combinação diferente de n e m onde não é possível anular nenhum dos colchetes, não é possível ter bicos.

Na Figura 3.2, observa-se ainda que para tempos próximos de $t = 0$ a combinação linear no estado do campo contribui para o adiantamento da morte súbita (linha sólida) do emaranhamento entre os átomos.

Em seguida será definido um operador de correlação, com ele, conhecendo o estado inicial emaranhado dos átomos, será possível acompanhar a dinâmica do emaranhamento entre eles.

3.2.2 Operador de correlação

A quantificação do emaranhamento em sistemas quânticos é difícil de se obter experimentalmente. Por exemplo, para quantificar o emaranhamento entre os átomos dada pela concorrência descrita na seção anterior, é necessário determinar todos os elementos da matriz densidade através de uma tomografia de estado [46]. Nesta seção será definido um *operador de correlação* que é mais acessível experimentalmente. Com este operador, para o estado atômico inicial $|\Psi_{\text{átomos}}\rangle$ Equação (3.2), é possível obter informações da dinâmica do mesmo. O operador de correlação é definido assim

$$\hat{\sigma}_z^A \otimes \hat{\sigma}_z^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

na base padrão, onde $\hat{\sigma}_z^A$ e $\hat{\sigma}_z^B$ são as inversões atômicas dos átomos **A** e **B**. Para analisar a dinâmica do estado atômico toma-se o valor esperado de (3.49) em $\hat{\rho}_{AB}$, dado por

¹Conjunto dos números racionais

$$\langle \hat{\sigma}_z^A \otimes \hat{\sigma}_z^B \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}_{AB} \hat{\sigma}_z^A \otimes \hat{\sigma}_z^B) = \text{Tr} \left(\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & -z & 0 \\ 0 & -z^* & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} \right) = (a - b - c + d), \quad (3.50)$$

esta equação só apresenta dependência dos termos da diagonal (populações) de $\hat{\rho}_{AB}$: a , b , c e d dados pela Equação (3.36). Veja que somente com esta equação não pode-se obter informação do emaranhamento entre os dois átomos, pois esta equação não contém os termos z e z^* responsáveis pelo o emarahamento.

Substituindo os coeficientes da Equação (3.50), obtém-se

$$\begin{aligned} \langle \hat{\sigma}_z^A \otimes \hat{\sigma}_z^B \rangle = & |\sin \alpha \cos \gamma \sin(gt\sqrt{n})|^2 + |\sin \alpha \sin \gamma \sin(gt\sqrt{m})|^2 - \\ & - |\cos \alpha \cos \gamma \cos(gt\sqrt{n+1})|^2 - |\cos \alpha \sin \gamma \sin(gt\sqrt{m+1})|^2 - \\ & - |\sin \alpha \cos \gamma \cos(gt\sqrt{n})|^2 - |\sin \alpha \sin \gamma \cos(gt\sqrt{m})|^2 + \\ & + |\cos \alpha \cos \gamma \sin(gt\sqrt{n+1})|^2 + |\cos \alpha \sin \gamma \sin(gt\sqrt{m+1})|^2, \end{aligned} \quad (3.51)$$

Para obter o valor esperado do operador de correlação sob a influência do campo inicialmente no estado $|n\rangle$, faz-se $\gamma = 0$ na equação acima, que resume-se a

$$\begin{aligned} \langle \hat{\sigma}_z^A \otimes \hat{\sigma}_z^B \rangle = & |\sin \alpha \sin(gt\sqrt{n})|^2 - |\cos \alpha \cos(gt\sqrt{n+1})|^2 - \\ & - |\sin \alpha \cos(gt\sqrt{n})|^2 + |\cos \alpha \sin(gt\sqrt{n+1})|^2. \end{aligned} \quad (3.52)$$

• Análise da dinâmica do operador de correlação e da concorrência

Para valores dos parâmetros $\alpha = 3\pi/4$ [corresponde aos átomos no estado singleto $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle)$] e $\gamma = 0$, $n = 0$ [corresponde ao campo no estado de vácuo $|0\rangle$], o estado do sistema [Equação (3.10)], a concorrência (3.39) e valor esperado do operador de correlação (3.52) num tempo t qualquer, são respectivamente

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [-\cos(gt)|\uparrow\downarrow 0\rangle + |\downarrow\uparrow 0\rangle + i\sin(gt)|\downarrow\downarrow 1\rangle], \quad (3.53)$$

$$C_{AB} = \max\{0, |\cos(gt)|\}, \quad (3.54)$$

$$\langle \hat{\sigma}_z^A \otimes \hat{\sigma}_z^B \rangle = -\cos^2(gt). \quad (3.55)$$

A evolução temporal das Equações (3.54) e (3.55) é exibida na Figura 3.4.

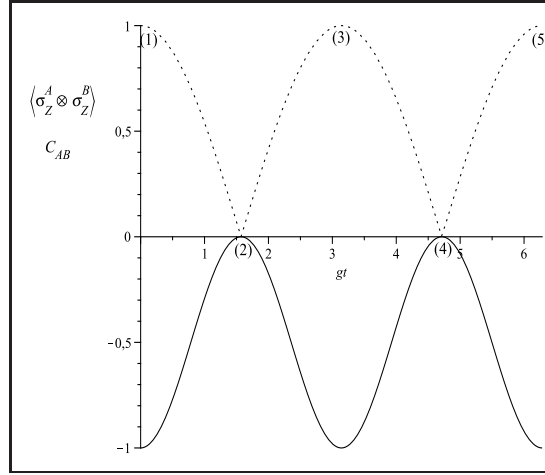


Figura 3.4: Evolução do valor esperado do operador de correlação (linha sólida) e concorrência (linha pontilhada) para os parâmetros, $n = 0$, $\alpha = 3\pi/4$ e $\gamma = 0$ em $0 \leq gt \leq 2\pi$.

Observa-se que, em $gt = j\pi$, $j = 0, 2, \dots$, onde a concorrência é máxima $C(\hat{\rho}_{AB}) = 1$ nos pontos (1) e (5) na figura, o estado do sistema é

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle] \otimes |0\rangle, \quad (3.56)$$

ou seja, os átomos estão no estado singlete e o campo no estado de vácuo. Em $gt = j\pi$, $j = 1, 3, \dots$, onde a concorrência é máxima no ponto (3), o estado do sistema atômico encontra-se no estado tripleto e o campo no estado de vácuo

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle] \otimes |0\rangle. \quad (3.57)$$

Quando $gt = j\pi/2$, $j = 1, 3, \dots$, a concorrência é nula $C(\hat{\rho}_{AB}) = 0$ nos pontos (2) e (4) o estado do sistema é

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle \otimes [|\uparrow 0\rangle + i(-1)^{\frac{j-1}{2}} |\downarrow 1\rangle]. \quad (3.58)$$

Neste caso o emaranhamento entre os átomos **A** e **B** foi transferido para o átomo **B** e o campo.

Observe no gráfico que não há intervalos de tempos onde a concorrência é nula. Aqui há somente instantes periódicos onde anula-se a concorrência, que é diferente do que acontece nas Figuras 3.2 e 3.3 e na referência [47]. Esta referência mostra que para os átomos inicialmente no estado de Werner e o campo no estado $|0\rangle$, dependendo da mistura no estado pode haver intervalos de tempos onde a concorrência é nula.

Analisando a concorrência (3.54) e o valor esperado do operador de correlação (3.52), observa-se que a concorrência (3.54) é máxima $C(\hat{\rho}_{AB}) = 1$ em $gt = j\pi$, $j = 0, 1, 2, \dots$ e o

valor esperado é mínimo $\langle \hat{\sigma}_z^A \otimes \hat{\sigma}_z^B \rangle = -1$. Neste caso, o emaranhamento encontra-se distribuído entre os átomos com mostram as Equações (3.56) e (3.57). Para a concorrência nula $C(\hat{\rho}_{AB}) = 0$ em $gt = \frac{j\pi}{2}$, $j = 1, 3, 5, \dots$, o valor esperado é nulo $\langle \hat{\sigma}_z^A \otimes \hat{\sigma}_z^B \rangle = 0$. Neste caso os átomos estão desemaranhados, o emaranhamento foi transferido para o átomo **B** e o campo, conforme a Equação (3.58).

Em suma, tem-se, para o estado inicial atômico considerado e o campo inicialmente no estado de vácuo, neste sistema existe apenas uma excitação que está contida no sistema atômico. Em $gt = j\pi$ o valor esperado do operador de correlação é sempre $\langle \hat{\sigma}_z^A \otimes \hat{\sigma}_z^B \rangle = -1$, a excitação encontra-se totalmente entre os átomos, neste caso, o sistema atômico encontra-se emaranhado no singlete para $j = 0, 2, \dots$ ou tripleto para $j = 1, 3, \dots$. E quando o valor esperado deste operador for nulo $\langle \hat{\sigma}_z^A \otimes \hat{\sigma}_z^B \rangle = 0$ em $gt = \frac{j\pi}{2}$, a excitação foi transferida do átomo **A** para o campo na cavidade, neste caso os átomos encontram-se desemaranhados para $j = 0, 1, \dots$. Portanto, este operador sob a condição inicial do campo no estado $|0\rangle$, reflete a dinâmica do emaranhamento.

Para valores dos parâmetros $n = 1$ [corresponde ao campo no estado $|1\rangle$] e $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ [corresponde aos átomos no estado singlete $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle)$] as expressões para a concorrência (3.39) e o valor esperado do operador de correlação (3.52) são respectivamente

$$C(\hat{\rho}_{AB}) = \max \left\{ 0, |\cos(\sqrt{2}gt) \cos(gt)| - |\sin(\sqrt{2}gt)| |\sin(gt)| \right\}, \quad (3.59)$$

$$\langle \hat{\sigma}_z^A \otimes \hat{\sigma}_z^B \rangle = -\frac{1}{2} [\cos(2gt) + \cos(2\sqrt{2}gt)]. \quad (3.60)$$

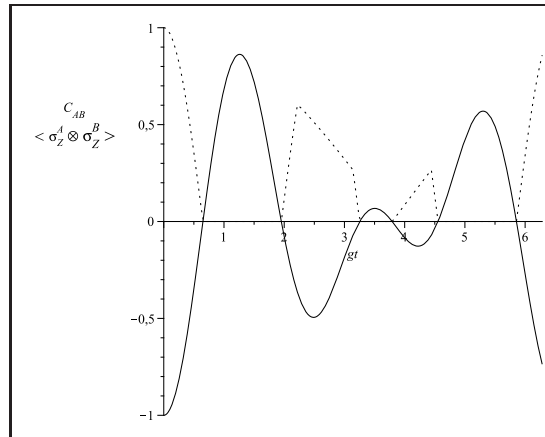


Figura 3.5: Evolução do valor esperado do operador de correlação (linha sólida) e concorrência (linha pontilhada) para os parâmetros, $n = 1$, $\alpha = 3\pi/4$ e $\gamma = 0$ em $0 \leq gt \leq 2\pi$.

Na Figura 3.5, observe que, quando o valor esperado do operador de correlação é positivo

ou nulo $\langle \hat{\sigma}_z^A \otimes \hat{\sigma}_z^B \rangle \geq 0$, a concorrência é nula $C(\hat{\rho}_{AB}) = 0$, ou seja, não existe emaranhamento no sistema. Por outro lado, quando o sistema encontra-se emaranhado, $C(\hat{\rho}_{AB}) > 0$, o valor esperado do operador de correlação é negativo $\langle \hat{\sigma}_z^A \otimes \hat{\sigma}_z^B \rangle < 0$. Com o valor esperado do operador de correlação pode-se conhecer se o sistema encontra-se emaranhado ou não, para o campo na cavidade inicialmente no estado $|1\rangle$.

Para $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ [corresponde aos átomos no estado singlete $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle)$] e $\gamma = \frac{\pi}{4}$, $n = 1$, $m = 4$ [corresponde ao campo em superposição linear $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |4\rangle)$] as expressões para a concorrência (3.38) e o valor esperado do operador de correlação (3.2.2) são dadas por

$$C(\hat{\rho})_{AB} = \max \left\{ 0, \frac{1}{2} |\cos(\sqrt{2}gt) \cos(gt) + \cos(\sqrt{5}gt) \cos(2gt)| - \frac{1}{2} \left\{ \left[\sin^2(gt) + \sin^2(2gt) \right] \left[\sin^2(\sqrt{2}gt) + \sin^2(\sqrt{5}gt) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (3.61)$$

$$\langle \hat{\sigma}_z^A \otimes \hat{\sigma}_z^B \rangle = -\frac{1}{4} \left[\cos(2gt) + \cos(4gt) + \cos(2\sqrt{2}gt) + \cos(2\sqrt{5}gt) \right]. \quad (3.62)$$

A evolução temporal destas equações é exibida na Figura 3.6.

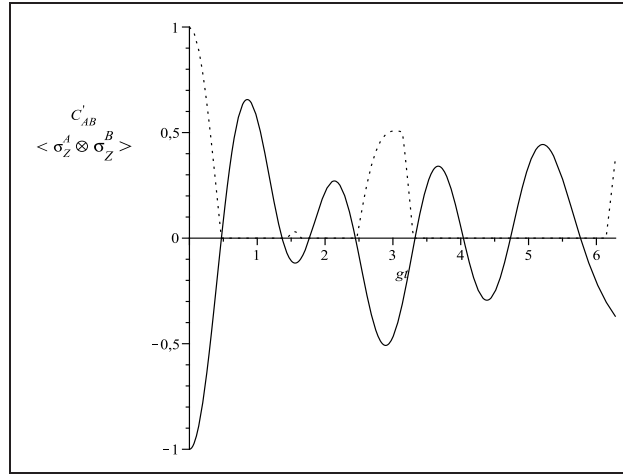


Figura 3.6: Evolução do valor esperado do operador de correlação (linha sólida) e concorrência (linha pontilhada) para os parâmetros, $n = 1$, $m = 4$, $\alpha = 3\pi/4$ e $\gamma = \pi/4$ em $0 \leq gt \leq 2\pi$.

Observa-se, para um tempo $t > 0$, quando o valor esperado do operador de correlação é positivo $\langle \hat{\sigma}_z^A \otimes \hat{\sigma}_z^B \rangle > 0$, a concorrência é nula $C(\hat{\rho}_{AB}) = 0$, isto é, os átomos encontram-se desemaranhados. Porém, em intervalos de tempos onde o valor esperado do operador de correlação é negativo $\langle \hat{\sigma}_z^A \otimes \hat{\sigma}_z^B \rangle < 0$, tanto tem-se concorrência positiva $C(\hat{\rho}_{AB}) > 0$, isto é, o sistema

encontra-se emaranhado, quanto tem-se também concorrência nula $C(\hat{\rho}_{AB}) = 0$, isto é, o átomos encontram-se desemaranhados. Portanto, com o estado do campo inicialmente em combinação linear de dois estados de Fock, o valor esperado do operador de correlação não reflete bem a dinâmica do emaranhamento. Porque, com ele, pode-se obter informação parcial sobre a dinâmica do emaranhamento, pois nos intervalos de tempos onde os valores de $\langle \hat{\sigma}_z^A \otimes \hat{\sigma}_z^B \rangle$ são positivos, pode-se afirmar que o sistema encontra-se desemaranhado. Porém, no intervalos de tempos onde os valores $\langle \hat{\sigma}_z^A \otimes \hat{\sigma}_z^B \rangle$ são negativos, não pode-se afirmar que sistema encontra-se emaranhado.

Na próxima subsecção será apresentado a evolução temporal do valor esperado de um operador de Bell considerando o campo no estado $|n\rangle$ ou em uma superposição linear $\cos \gamma |n\rangle + \sin \gamma |m\rangle$.

3.2.3 Operador de Bell

Nesta subsecção utiliza-se um operador de Bell, conhecido como operador de Clauser, Horne, Shimony e Holt (CHSH) [29], descrito na secção 1.4, dado por

$$\hat{\mathbb{B}} = \hat{\sigma}_x^A \otimes \hat{\sigma}_{x'}^B + \hat{\sigma}_x^A \otimes \hat{\sigma}_{z'}^B + \hat{\sigma}_z^A \otimes \hat{\sigma}_{x'}^B - \hat{\sigma}_z^A \otimes \hat{\sigma}_{z'}^B, \quad (3.63)$$

onde $\hat{\sigma}_{x,z}^A$ é a componente do spin da partícula **A** nas direções (x, z) de maneira similar tem-se $\hat{\sigma}^B$, com

$$\hat{\sigma}_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_z), \quad (3.64)$$

$$\hat{\sigma}_{z'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\sigma}_x - \hat{\sigma}_z). \quad (3.65)$$

Supondo que os dois átomos são enviados para dois observadores denominados Alice e Bob que estão muito distantes um do outro. Alice pode fazer a escolha das medições sobre os átomos **A** nas direções x e z . E Bob pode também fazer a escolha das medições sobre os átomos **B**, nas direções x' e z' , Figura 1.4.

Usando as relações (3.65) e (3.64) e após algumas manipulações algébricas simples é possível escrever o operador de Bell (3.63), assim

$$\hat{\mathbb{B}} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.66)$$

na base padrão.

Para acompanhar a dinâmica do emaranhamento no sistema atômico toma-se o valor esperado do operador de Bell (3.66) em ρ_{AB} , dado por

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbb{B}}(t) \rangle &= \text{Tr}(\rho_{AB}(t) \hat{\mathbb{B}}) = \sqrt{2} \text{Tr} \left(\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & a \\ 0 & -b+z & b-z & 0 \\ 0 & z^* - c & z^* - c & 0 \\ d & 0 & 0 & d \end{bmatrix} \right) = \\ &= \sqrt{2}(a - b - c + d + z + z^*), \end{aligned} \quad (3.67)$$

os termos a , b , c , d e z são dados pela Equação (3.36), sendo z^* o conjugado complexo de z . Observa-se que esta equação é diferente do valor esperado $\langle \hat{\sigma}_z^A \otimes \hat{\sigma}_z^B \rangle$, porque além do fator $\sqrt{2}$, também encontram-se presentes os termos z e z^* que são responsáveis pelo emaranhamento entre os átomos.

Substituindo os coeficientes (3.36) na Equação (3.67), obtém-se o valor esperado do operador de Bell em um tempo t qualquer, com a condição inicial de interesse $\cos \gamma |n\rangle + \sin \gamma |m\rangle$,

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbb{B}}(t) \rangle &= \sqrt{2} \left\{ \cos^2 \gamma \sin^2 \alpha \sin^2(gt\sqrt{n}) + \sin^2 \gamma \sin^2 \alpha \sin^2(gt\sqrt{m}) + \right. \\ &\quad + \sin^2 \gamma \cos^2 \alpha \sin^2(gt\sqrt{m+1}) + \cos^2 \gamma \cos^2 \alpha \sin^2(gt\sqrt{n+1}) - \\ &\quad - \sin^2 \gamma \cos^2 \alpha \cos^2(gt\sqrt{m+1}) - \cos^2 \gamma \cos^2 \alpha \cos^2(gt\sqrt{n+1}) - \\ &\quad - \sin^2 \gamma \sin^2 \alpha \cos^2(gt\sqrt{m}) - \cos^2 \gamma \sin^2 \alpha \cos^2(gt\sqrt{n}) + \\ &\quad + 2 \cos^2 \gamma \cos \alpha \sin \alpha \cos(gt\sqrt{n+1}) \cos(gt\sqrt{n}) + \\ &\quad \left. + 2 \sin^2 \gamma \cos \alpha \sin \alpha \cos(gt\sqrt{m}) \cos(gt\sqrt{m+1}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Para obter o valor esperado do operador de Bell considerando o campo inicialmente no estado de Fock $|n\rangle$, faz-se $\gamma = 0$ na equação acima, que fica assim

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbb{B}}(t) \rangle &= \sqrt{2} \{ \sin^2 \alpha \sin^2(gt\sqrt{n}) + \cos^2 \alpha \sin^2(gt\sqrt{n+1}) - \\ &\quad - \cos^2 \alpha \cos^2(gt\sqrt{n+1}) - \sin^2(\alpha) \cos^2(gt\sqrt{n}) + \\ &\quad + 2 \cos \alpha \cos(gt\sqrt{n+1}) \sin \alpha \cos(gt\sqrt{n}) \}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

- **A análise das dinâmicas do valor esperado do operador de Bell, da concorrência e do estado $|\psi(t)\rangle$**

Para os parâmetros $\alpha = 3\pi/4$ [corresponde aos átomos no estado singleto $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle)$] e $\gamma = 0$, $n = 0$ [corresponde ao campo no estado de vácuo $|0\rangle$] o estado do sistema, Equação

(3.10), a concorrência (3.39) e o valor esperado do operador de Bell (3.69) num tempo t qualquer, são respectivamente

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [-\cos(gt)|\uparrow\downarrow 0\rangle + |\downarrow\uparrow 0\rangle + i\sin(gt)|\downarrow\downarrow 1\rangle], \quad (3.70)$$

$$C(\hat{\rho}_{AB}) = \max\{0, |\cos(gt)|\} \quad (3.71)$$

e

$$\langle \hat{\mathbb{B}}(t) \rangle = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ 1 + 2\cos(gt) + \cos(2gt) \right\}. \quad (3.72)$$

A evolução temporal do valor esperado do operador de Bell (3.69) e da concorrência (3.71) é exibida na Figura 3.7. Observe que, inicialmente, a desigualdade de Bell é violada $|\langle \hat{\mathbb{B}}(t) \rangle| > 2$

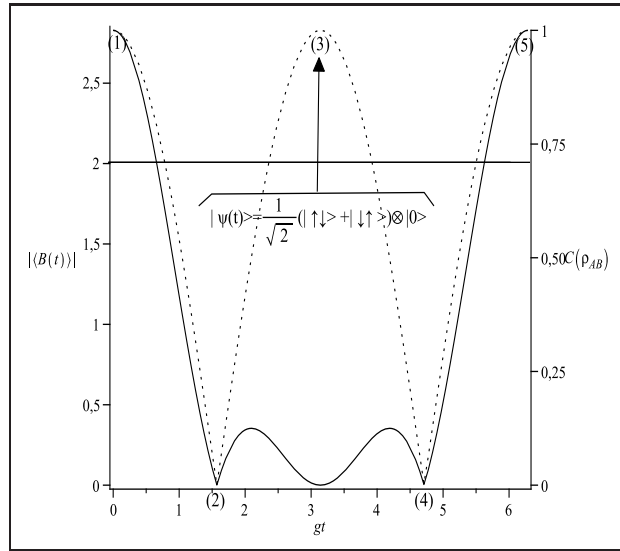


Figura 3.7: Evolução do valor esperado do operador de Bell (linha sólida) e concorrência (linha pontilhada) para os parâmetros, $n = 0$, $\alpha = 3\pi/4$ e $\gamma = 0$ em $0 \leq gt \leq 2\pi$.

depois deixa de violar por um período de tempo, tornando a violar novamente.

Em $gt = \frac{j\pi}{2}$, $j = 1, 3, 5, \dots$, a concorrência é nula $C(\hat{\rho}_{AB}) = 0$ e não violando a desigualdade de Bell $|\langle \hat{\mathbb{B}} \rangle| = 0$, o estado do sistema neste instante é $|\psi(t)\rangle = |\downarrow\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow 0\rangle + i(-1)^{\frac{j-1}{2}} |\downarrow 1\rangle)$, observe que o átomo **B** encontra-se emaranhado com o campo, enquanto o átomo **A** está no estado fundamental. Este estado corresponde aos pontos (2) e (4) na Figura 3.7 onde a concorrência $C(\hat{\rho}_{AB})$ é nula.

Para $gt = j\pi$, $j = 1, 3, 5, \dots$, a concorrência é máxima $C(\hat{\rho}_{AB}) = 1$, porém, não violando a desigualdade de Bell $|\langle \hat{\mathbb{B}}(t) \rangle| = 0$. O estado correspondente a este instante é $|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \otimes |0\rangle$. Neste instante os átomos **A** e **B** encontram-se emaranhados no estado triplete

e o campo no estado de vácuo, isto é, o emaranhamento retornou aos dois átomos, porém, não violando a desigualdade de Bell $|\langle \hat{\mathbb{B}}(t) \rangle| = 0$, veja o ponto (3) na Figura 3.7 onde a concorrência é máxima $C(\hat{\rho}_{AB}) = 1$.

Quando o valor esperado do operador de Bell atinge o valor máximo $|\langle \hat{\mathbb{B}} \rangle| = 2\sqrt{2}$ em $gt = j\pi$ com $j = 0, 2, 4, \dots$, que corresponde aos pontos (1) e (5) onde a concorrência é máxima $C(\hat{\rho}_{AB}) = 1$, o estado total correspondente é $|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \otimes |0\rangle$. Neste instante os átomos **A** e **B** estão maximamente emaranhados no estado singleto e o campo no estado de vácuo.

Para os valores dos parâmetros $\alpha = 3\pi/4$ [corresponde aos átomos no estado singleto $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle)$] e $\gamma = 0$, $n = 1$ [corresponde ao campo no estado $|1\rangle$], o valor esperado do operador de Bell (3.69) e concorrência (3.39) num tempo t são respectivamente

$$\langle \hat{\mathbb{B}}(t) \rangle = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ \cos(2gt) + \cos(2\sqrt{2}gt) + 2\cos(gt)\cos(gt\sqrt{2}) \right\}, \quad (3.73)$$

$$C(\hat{\rho}_{AB}) = \max \left\{ 0, |\cos(\sqrt{2}gt)\cos(gt)| - |\sin(\sqrt{2}gt)| |\sin(gt)| \right\}. \quad (3.74)$$

A evolução do valor esperado do operador de Bell (3.73) e da concorrência (3.74) é exibida na Figura 3.8.

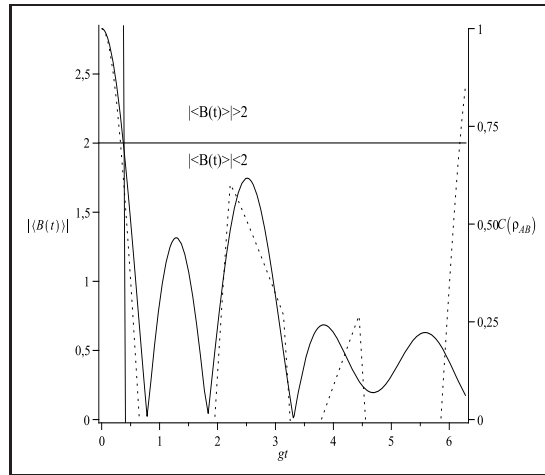


Figura 3.8: Evolução do valor esperado do operador de Bell (linha sólida) e concorrência (linha pontilhada) para os parâmetros, $n = 1$, $\alpha = 3\pi/4$ e $\gamma = 0$ em $0 \leq gt \leq 2\pi$.

Na Figura 3.8 observa-se que em instantes $t > 0$, à esquerda da linha vertical a concorrência é positiva $C(\hat{\rho}_{AB}) > 0$ e ocorre violação da desigualdade de Bell. Entretanto, para instantes à direita da linha vertical a concorrência pode ser positiva $C(\hat{\rho}_{AB}) > 0$, mas não ocorre violação da desigualdade de Bell.

Para cálculos posteriores pode ser encontrado violação da desigualdade de Bell em algum $gt > 2\pi$, nesta região, ocorre uma violação da desigualdade de Bell próxima da violação máxima, $|\langle \hat{\mathbb{B}}(t) \rangle| = 2\sqrt{2}$, quando a concorrência é próxima do valor máximo $C(\hat{\rho}_{AB}) = 1$. Por outro lado, em alguns instantes onde a concorrência aproxima-se do valor máximo $C(\hat{\rho}_{AB}) = 1$ não implica em uma violação da desigualdade de Bell.

Para os valores dos parâmetros $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ [corresponde aos átomos no estado singlete $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle)$] e $\gamma = \frac{\pi}{4}$, $n = 1$, $m = 4$ [corresponde ao campo em superposição linear $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |4\rangle)$], o valor esperado do operador de Bell (3.69) e a concorrência (3.39) num tempo t são respectivamente

$$\langle \hat{\mathbb{B}}(t) \rangle = -\frac{\sqrt{2}}{4} \left\{ \cos(2gt) + \cos(2\sqrt{2}gt) + \cos(2\sqrt{5}gt) + 2\cos(gt)\cos(\sqrt{2}gt) + 2\cos(2gt)\cos(\sqrt{5}gt) \right\}, \quad (3.75)$$

$$C(\hat{\rho}_{AB}) = \max \left\{ 0, \frac{1}{2} \left| \cos(\sqrt{2}gt)\cos(gt) + \cos(\sqrt{5}gt)\cos(2gt) \right| - \frac{1}{2} \left[\left[\sin^2(gt) + \sin^2(2gt) \right] \left[\sin^2(\sqrt{2}gt) + \sin^2(\sqrt{5}gt) \right] \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (3.76)$$

As dinâmicas do valor esperado do operador de Bell (3.75) e da concorrência (3.76) são exibidas na Figura 3.9. Nesta figura pode-se observar que, em $t > 0$, à esquerda da linha vertical,

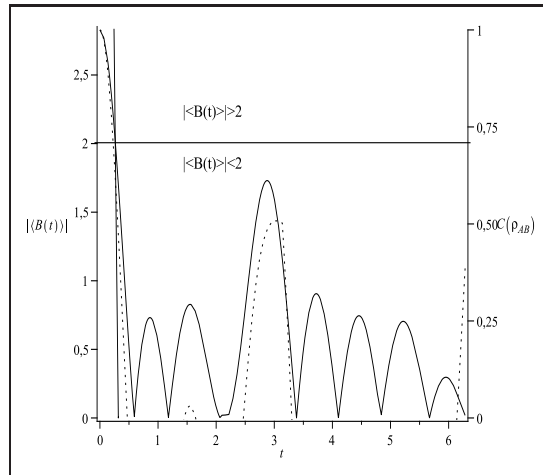


Figura 3.9: Evolução do valor esperado do operador de Bell (linha sólida) e concorrência (linha pontilhada) para os parâmetros, $n = 1$, $m = 4$, $\alpha = 3\pi/4$ e $\gamma = \pi/4$ em $0 \leq gt \leq 2\pi$.

a concorrência é positiva $C(\hat{\rho}_{AB}) > 0$ e ocorre violação da desigualdade de Bell. Por outro lado, para instantes à direita da linha vertical, a concorrência é positiva $C(\hat{\rho}_{AB}) > 0$, mas não ocorre

violação da desigualdade de Bell.

Novamente, tomando cálculos posteriores, pode-se observar que ocorre violação da desigualdade de Bell em algum $gt > 2\pi$. Nesta região ocorre violação da desigualdade de Bell, não tão próxima de $|\langle \hat{\mathbb{B}}(t) \rangle| = 2\sqrt{2}$, como no caso anterior. Por outro lado, em instantes onde a concorrência aproxima-se do valor máximo, $C(\hat{\rho}_{AB}) = 1$, não tem-se violação da desigualdade de Bell.

Em suma, para o valor esperado do operador de Bell descrito pela Equação (3.68), foi visto que é possível violação da desigualdade de Bell para o estado singleto, enquanto para o estado tripleto não ocorre violação desta desigualdade de Bell. Observou-se também que a existência do emaranhamento não é condição suficiente para violar a desigualdade de Bell.

• Detecção do estado tripleto

Para detectar o emaranhamento no estado tripleto, usa-se o operador de Bell descrito pela Equação (1.69), dado por

$$\hat{\mathbb{B}}' = \hat{\sigma}_x^A \otimes \hat{\sigma}_{x'}^B + \hat{\sigma}_x^A \otimes \hat{\sigma}_{z'}^B - \hat{\sigma}_z^A \otimes \hat{\sigma}_{x'}^B + \hat{\sigma}_z^A \otimes \hat{\sigma}_{z'}^B, \quad (3.77)$$

com as Equações (3.65) e (3.64) é possível escrever este operador da seguinte forma

$$\hat{\mathbb{B}}' = \sqrt{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.78)$$

Para estudar a dinâmica do emaranhamento no sistema atômico toma-se o valor esperado do operador de Bell (3.78) em ρ_{AB} dado por

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbb{B}}'(t) \rangle &= \text{Tr}(\rho_{AB}(t)\hat{\mathbb{B}}') = \sqrt{2} \text{Tr} \left(\begin{bmatrix} -a & 0 & 0 & a \\ 0 & b+z & b+z & 0 \\ 0 & z^*+c & z^*+c & 0 \\ d & 0 & 0 & -d \end{bmatrix} \right) = \\ &= \sqrt{2}(-a+b+c-d+z+z^*), \end{aligned} \quad (3.79)$$

sendo z^* o conjugado complexo de z , os termos a , b , c , d e z são dados pela Equação (3.36). Substituindo a Equação (3.36) na Equação (3.79), obtém-se o valor esperado do operador de

Bell

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\mathbb{B}}'(t) \rangle = \sqrt{2} \bigg\{ & -\cos^2 \gamma \sin^2 \alpha \sin^2(gt\sqrt{n}) - \sin^2 \gamma \sin^2 \alpha \sin^2(gt\sqrt{m}) + \\
& -\sin^2 \gamma \cos^2 \alpha \sin^2(gt\sqrt{m+1}) - \cos^2 \gamma \cos^2 \alpha \sin^2(gt\sqrt{n+1}) + \\
& + \sin^2 \gamma \cos^2 \alpha \cos^2(gt\sqrt{m+1}) + \cos^2 \gamma \cos^2 \alpha \cos^2(gt\sqrt{n+1}) + \\
& + \sin^2 \gamma \sin^2 \alpha \cos^2(gt\sqrt{m}) + \cos^2 \gamma \sin^2 \alpha \cos^2(gt\sqrt{n}) + \\
& + 2 \cos^2 \gamma \cos \alpha \sin \alpha \cos(gt\sqrt{n+1}) \cos(gt\sqrt{n}) + \\
& + 2 \sin^2 \gamma \cos \alpha \sin \alpha \cos(gt\sqrt{m}) \cos(gt\sqrt{m+1}) \bigg\}. \tag{3.80}
\end{aligned}$$

Para obter o valor esperado do operador de Bell considerando o campo no estado de Fock $|n\rangle$, faz-se $\gamma = 0$ na equação acima, que fica assim

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\mathbb{B}}'(t) \rangle = \sqrt{2} \bigg\{ & -\sin^2 \alpha \sin^2(gt\sqrt{n}) - \cos^2 \alpha \sin^2(gt\sqrt{n+1}) + \\
& + \cos^2 \alpha \cos^2(gt\sqrt{n+1}) + \sin^2 \alpha \cos^2(gt\sqrt{n}) + \\
& + 2 \cos \alpha \sin \alpha \cos(gt\sqrt{n}) \cos(gt\sqrt{n+1}) \bigg\}. \tag{3.81}
\end{aligned}$$

Como foi visto anteriormente, o operador de Bell (3.78) não reflete a dinâmica do emaranhamento para as condições iniciais do campo $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |4\rangle)$ e $|1\rangle$, aqui será analisado somente o caso em que a desigualdade de Bell reflete bem o emaranhamento, ou seja, considerando o campo inicialmente no estado de vácuo.

Para os parâmetros $\alpha = 3\pi/4$ [corresponde aos átomos no estado singlete $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle)$] e $\gamma = 0$, $n = 0$ [corresponde ao campo no estado de vácuo $|0\rangle$], o valor esperado do operador de Bell (3.81) e a concorrência (3.39) num tempo t qualquer são, respectivamente,

$$\langle \hat{\mathbb{B}}'(t) \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} \{1 - 2 \cos(gt) + \cos(2gt)\}, \tag{3.82}$$

$$C(\hat{\rho}_{AB}) = \max\{0, |\cos(gt)|\}. \tag{3.83}$$

A dinâmica do valor esperado do novo operador de Bell (3.82) e da concorrência (3.83) é exibida na Figura 3.10.

Em $gt = j\pi$, $j = 1, 3, 5, \dots$, ocorre a violação máxima da desigualdade de Bell $|\langle \hat{\mathbb{B}}'(t) \rangle| = 2\sqrt{2}$, o estado total correspondente a este instante é $|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \otimes |0\rangle$. Neste instante, os átomos **A** e **B** estão maximamente emaranhados no estado tripleto $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$ e o campo no estado de vácuo $|0\rangle$. Isto corresponde ao ponto (3) onde a concorrência é máxima

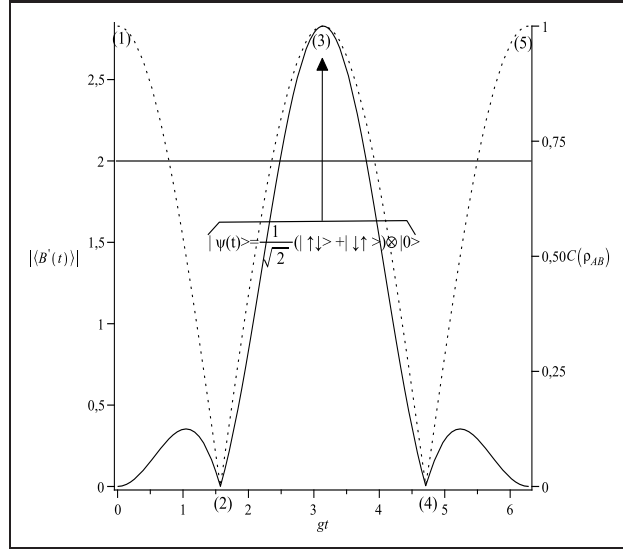


Figura 3.10: Evolução do valor esperado do novo operador de Bell (linha sólida) e concorrência (linha pontilhada) para os parâmetros, $n = 0$, $\alpha = 3\pi/4$ e $\gamma = 0$ em $0 \leq gt \leq 2\pi$.

$$C(\hat{\rho}_{AB}) = 1.$$

Quando $gt = \frac{j\pi}{2}$, $j = 1, 3, \dots$, não ocorre violação $|\langle \hat{\mathbb{B}}'(t) \rangle| = 0$, o emaranhamento entre os átomos é nulo $C(\hat{\rho}_{AB}) = 0$ e o estado total correspondente a este instante é $|\psi(t)\rangle = |\downarrow\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow 0\rangle + i|\downarrow 1\rangle)$. Neste instante o átomo **B** está emaranhado com a cavidade, enquanto o átomo **A** está no estado fundamental. Isto corresponde aos pontos (2) e (4) onde a concorrência é nula $C(\hat{\rho}_{AB}) = 0$.

Em $gt = j\pi$, $j = 0, 2, \dots$, não ocorre violação da desigualdade de Bell $\langle \hat{\mathbb{B}}'(t) \rangle = 0$, e a concorrência é máxima $C(\hat{\rho}_{AB}) = 1$, o estado total correspondente é $|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \otimes |0\rangle$. Neste instante os átomos **A** e **B** encontram-se emaranhados no estado singleto $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$ e cavidade no estado de vácuo $|0\rangle$, o emaranhamento retornou aos átomos, porém, não violando esta desigualdade de Bell $|\langle \hat{\mathbb{B}}'(t) \rangle| = 0$. Este instante corresponde aos pontos (1) e (5) onde a concorrência é máxima $C(\hat{\rho}_{AB}) = 1$. Observe que, neste instante, existe emaranhamento entre os átomos, porém não ocorrendo a violação da desigualdade de Bell para o operador $\hat{\mathbb{B}}'(t)$.

Em suma, o operador de Bell $\hat{\mathbb{B}}(t)$ (3.63) detectou emaranhamento no estado singleto e não detectou o estado tripleto. Já o operador de Bell $\hat{\mathbb{B}}'(t)$ (3.77) foi capaz de detectar emaranhamento no estado tripleto e não detectou no estado singleto. Então, para detectar emaranhamento é preciso construir um operador adequado para cada estado, conforme [31].

CONCLUSÕES

Para o sistema tripartido considerado, constituído por dois átomos e um modo de campo em uma cavidade, onde os dois átomos inicialmente no estado singleto e o campo inicialmente em uma combinação linear de dois estados de Fock, foi analisada a dinâmica do emaranhamento entre os dois átomos quantificada pela concorrência de Wootters. Observou-se que a expressão da concorrência para o estado de Fock $|n\rangle$ para $n \geq 1$, apresenta bicos devido ao anulamento de alguns termos desta expressão, para o estado do campo inicialmente em uma combinação linear $\cos \gamma|n\rangle + \sin \gamma|m\rangle$ o aparecimento dos bicos depende da combinação de n e m .

Definiram-se dois operadores correspondentes a observáveis, o *operador de correlação* e o *operador de Bell*, que podem ser capazes de refletir o emaranhamento numa medida experimental.

Foi verificada a dinâmica do *operador de correlação* com campo na cavidade inicialmente no estado de Fock $|n\rangle$, tanto para o campo no estado de vácuo, como para $n \geq 1$ este operador reflete bem a dinâmica do emaranhamento entre os átomos. Para o estado inicial do campo em uma combinação linear de dois estados de Fock, este operador não reflete bem a dinâmica do emaranhamento, fornecendo apenas uma informação parcial sobre a dinâmica do emaranhamento.

Para a dinâmica do *operador de Bell* com a campo na cavidade no estado de vácuo, ocorre violação máxima para o estado singleto e para o estado tripleto não ocorre violação. Para o estado de Fock $|n\rangle$ com $n \geq 1$ e para uma combinação linear de dois estados de Fock, este operador também não reflete a dinâmica do emaranhamento, pois a existência do emaranhamento não é suficiente para ter uma violação da desigualdade de Bell.

Para detectar o emaranhamento no estado tripleto foi definido um novo *operador de Bell*, com ele foi capaz de violar maximamente a desigualdade de Bell para este estado, com o campo inicialmente no estado de vácuo, porém, com este novo operador não ocorre violação para o estado singleto.

Finalmente, pode-se concluir que a dinâmica do emaranhamento, embora possa ser espelhada em observáveis, a escolha desses observáveis depende muito do modelo em questão e ainda das condições iniciais do campo.

O modelo que foi analisado é simples, de maneira que este pode ser bastante explorado. Futuramente, pode ser feita a análise das dinâmicas da concorrência e do operador de correlação para $m - n = 2$ e $m - n = 1$. E também podem ser investigadas estas dinâmicas com dissipação no sistema.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 SCHRÖDINGER, E. **Discussion of probability relations between separated systems.** Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, v. 31, p. 555–563, 1935.
- 2 ———. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, v. 32, p. 446–451, 1936.
- 3 EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. **Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete?** Physical Review, v. 47, p. 777–780, 1935.
- 4 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Quantum computation and quantum information.** 2. ed. New York: Cambridge, 2000.
- 5 GROVER, L. K. **A fast quantum mechanical algorithm for database search.** In: 28 (Ed.). Annual symposium on theory of Computing. New York: ACM, 1996. p. 212–219.
- 6 DODD, P. J.; HALLIWELL, J. J. **Disentanglement and decoherence by open system dynamics.** Physical Review A, v. 69, p. 052105, 2004.
- 7 YU, T.; EBERLY, J. H. **Finite-time disentanglement via spontaneous emission.** Physical Review Letters, v. 93, p. 140404, 2004.
- 8 ŻYCZKOWSKI, K. et al. **Dynamics of quantum entanglement.** Physical Review A, v. 65, p. 012101, 2001.
- 9 DIÓSI, L. Progressive decoherence and total environmental disentanglement (lecture notes in physics). In: BENATTI, F.; FLOREANINI, R. (Ed.). **Irreversible quantum dynamics.** Berlin: Springer, 2003. v. 622, p. 157.
- 10 JAYNES E. T.; CUMMINGS, F. W. **Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser.** Proceedings of the IEEE, v. 51, p. 89, 1963.
- 11 YÖNAC, M.; YU, T.; EBERLY, J. H. **Sudden death of entanglement of two Jaynes-Cummings atoms.** Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics, v. 39, p. S621, 2006.
- 12 CAVALCANTI, D. et al. **Entanglement versus energy in the entanglement transfer problem.** Physical Review A, v. 74, p. 042328, 2006.
- 13 ALMEIDA, M. P. et al. **Environment-induced sudden death of entanglement.** Science, v. 316, p. 579, 2007.
- 14 SALLES, A. et al. **Experimental investigation of the dynamics of entanglement: sudden death, complementarity, and continuous monitoring of the environment.** Physical Review A , v. 78, p. 022322, 2008.

- 15 LI, Z.-J.; et al. **Time evolution and transfer of entanglement between an isolated atom and a Jaynes-Cummings atom.** Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics, v. 40, p. 3401–3411, 2007.
- 16 WOOTTERS, W. K. **Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits.** Physical Review Letters, v. 80, p. 2245–2248, 1998.
- 17 BRAUNSTEIN, S. L.; MANN, A.; REVZEN, M. **Maximal violation of Bell inequalities for mixed states.** Physical Review Letters, v. 68, p. 3259–3261, 1992.
- 18 BELL, J. S. **On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox.** Physics, v. 1, p. 195, 1964.
- 19 PIZ, A. F. R. T. **Sistemas quânticos compostos e emaranhados, sistemas quânticos abertos e decoerência.** In: Notas de aula para a segunda escola de física teórica, Departamento de Física Matemática. São Paulo: Instituto de Física, Universidade de São Paulo, 2009. Disponível em: <<http://fma.if.usp.br/~piza/>>.
- 20 EKERT, A.; KNIGHT, P. L. **Entangled quantum systems and the Schmidt decomposition.** American Journal of Physics, v. 63, p. 415–423, 1995.
- 21 PERES, A. **Quantum theory: concepts and methods.** New York: Kluwer, 1993.
- 22 WERNER, R. F. **Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model.** Physical Review A, v. 40, p. 4277–4281.
- 23 PERES, A. **Separability criterion for density matrices.** Physical Review Letters, v. 77, p. 1413–1415, 1996.
- 24 HORODECKI, M.; HORODECKI, P.; HORODECKI, R. **Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions.** Physics Letters A, v. 223, p. 1–8, 1996.
- 25 VIDAL, G.; WERNER, R. F. **A computable measure of entanglement.** Physical Review A, v. 65, p. 032314, 2002.
- 26 YU, T.; EBERLY, J. **Sudden death of entanglement: classical noise effects.** Optics Communications, v. 264, p. 393, 2006.
- 27 O’CONNOR, K. M.; WOOTTERS, W. K. **Entangled rings.** Physical Review A, v. 63, p. 052302, 2001.
- 28 BARRETT, J.; et al. **Nonlocal correlations as an information-theoretic resource.** Physical Review A, v. 71, p. 022101, 2005.
- 29 CLAUSER, J. F.; et al. **Proposed experiment to test local hidden-variable theories.** Physical Review Letters, v. 23, p. 880–884, 1969.
- 30 ASPECT, A.; DALIBARD, J.; ROGER, G. **Experimental test of Bell’s inequalities using time-varying analyzers.** Physical Review Letters, v. 49, p. 1804–1807, 1982.
- 31 GISIN, N. **Bell’s inequality holds for all non-product states.** Physical Letters A, v. 154, p. 201–202, 1991.
- 32 DAVIDOVICH, L. et al. **Teleportation of an atomic state between two cavities using nonlocal microwave fields.** Physical Review A, v. 50, p. R895–R898, 1994.

- 33 CIRAC, J. I. et al. **Quantum state transfer and entanglement distribution among distant nodes in a quantum network**. *Physical Review Letters*, v. 78, p. 3221–3224, 1997.
- 34 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Quantum computation and quantum information**. In: _____. 2. ed. New York: Cambridge, 2000. cap. 7.
- 35 BENENTI, G.; STRINI, G.; CASATI, G. **Principles of quantum computation and information: basic tools and special topics**. In: _____. New Jersey: World Scientific, 2007. v. 2, cap. 8.
- 36 RAIMOND, J. M.; BRUNE, M.; HAROCHE, S. **Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity**. *Reviews of Modern Physics*, v. 73, p. 565–582, 2001.
- 37 HAROCHE, S.; RAIMOND, J. **Exploring the quantum: atoms, cavities, and photons**. New York: Oxford University Press, 2006.
- 38 MESCHEDE, D.; WALTHER, H.; MÜLLER, G. **One-atom maser**. *Physical Review Letters*, v. 54, p. 551–554, 1985.
- 39 WALTHER, H. et al. **Cavity quantum electrodynamics**. *Reports on Progress in Physics*, v. 69, p. 1325–1382, 2006.
- 40 PRESKILL, J. **Quantum Information**. In: *Lecture Notes*. California: California Institute of Technology, 1998. Disponível em: <<http://www.theory.caltech.edu/~preskill/ph229/>>.
- 41 SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, M. **Quantum optics**. New York: Cambridge University Press, 2001.
- 42 MANDEL, L.; WOLF, E. **Optical coherence and quantum optics**. New York: Cambridge University Press, 1995.
- 43 JACKSON, J. D. **Classical electrodynamics**. 3. ed. New York: John Wiley and Sons, 1998.
- 44 SAKURAI, J. J. **Modern quantum mechanics**. New York: Addison Wesley, 1993.
- 45 YU, T.; et al. **Sudden death of entanglement**. *Science*, v. 323, p. 598, 2009.
- 46 JAMES, D. F. V. et al. **Measurement of qubits**. *Physical Review A*, v. 64, p. 052312, 2001.
- 47 Man, Z.-X.; et al. **On conditions for atomic entanglement sudden death in cavity QED**. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, v. 41, p. 085503, 2008.