

**Universidade Federal de Minas Gerais  
Faculdade de Ciências Econômicas  
Departamento de Administração  
Centro de Pós-Graduação e Pesquisa em Administração**

**ELEONORA CRUZ SANTOS**

**MODELO DE OTIMIZAÇÃO DE POLÍTICAS DE CRÉDITO PARA  
INSTITUIÇÕES BRASILEIRAS DE MICROFINANÇAS**

**Belo Horizonte  
2008**

**ELEONORA CRUZ SANTOS**

**MODELO DE OTIMIZAÇÃO DE POLÍTICAS DE CRÉDITO PARA  
INSTITUIÇÕES BRASILEIRAS DE MICROFINANÇAS**

Tese de doutorado apresentada ao Centro de Pós-Graduação e Pesquisas em Administração do Departamento de Ciências Administrativas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Administração.

Linha de Pesquisa: Finanças

Orientador: Prof. Dr. Hudson Fernandes Amaral

Co-Orientador: Prof. Dr. Luiz Henrique Duczmal

**Belo Horizonte  
2008**

## DEDICATÓRIA

*À minha avó Carmelita, meu maior exemplo e modelo de mulher. Aos meus filhos, Mathias e Valentina, com os quais tenho o privilégio de tentar reproduzir esse exemplo.*

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho, embora fruto de um desejo e interesse pessoais, no qual envolveu mudanças físicas, de estilo de vida, de conceitos e até mesmo de valores, não poderia ser realizado sem a participação e contribuição de várias pessoas, as quais deixo aqui registrado os meus sinceros agradecimentos.

A possibilidade de concretização desse trabalho se deu, sobretudo pelo apoio do meu marido, Tadeu, com o qual tenho hoje as duas maiores dívidas da minha vida: Mathias e Valentina. Como dito pelo próprio Tadeu, “*ele foi meu verdadeiro patrocinador*”. Outras ajudas no âmbito familiar também foram muitos importantes, especialmente dos meus irmãos Bernardo e Ivana, da minha mãe Yêda e da minha cunhada Regiane, “companheira de parto” no nascimento da querida Valentina.

No Cepead tive a oportunidade de conhecer e compartilhar momentos difíceis e divertidos com os colegas Laise e Marcelo. Hoje orgulho-me por tê-los como novos amigos mineiros.

Da “velha guarda” da FACE, agradeço aos amigos e atuais professores do Cedeplar, Fred, Lízia e Paula, pelas distintas formas de incentivo nesse novo projeto.

Às queridas amigas Miriam e Zezinha, pelo apoio constante e por terem me proporcionado momentos de diversão tão necessários para a sobrevivência!

Ao professor Hudson Amaral, meu orientador, agradeço por acreditar na minha capacidade de ousar e, sobretudo por não medir esforços para a concretização desse projeto. Admiro sua coragem em apostar!

Ao estimado professor Luiz Duczmal, meu co-orientador, o qual sempre acreditou e investiu intensamente no desenvolvimento desse projeto e com o qual eu compartilho integralmente este trabalho. Se hoje concretizei a idéia lançada há cinco anos atrás é graças a seu interesse, apoio e dedicação.

Aos professores Aureliano Bressan e Ricardo Takahashi, pelas discussões, pelo interesse e apoio na concepção das idéias. Ao meu prezadíssimo orientador de mestrado Eduardo Rios-Neto, pela sua constante gentileza.

Aos queridos amigos Sérgio Werlang e Marco Bonomo, os quais vêm há alguns anos me incentivando e promovendo profissionalmente. Muito da minha vida profissional devo a ambos e a participação neste trabalho é mais um reflexo desse incentivo e amizade.

À gentil e simpatissíssima Dayanne, que nesses anos todos sempre se mostrou pronta a ajudar, e à querida Célia, bibliotecária-chefe da FACE, por seu apoio fundamental na reta final desse trabalho.

Aos órgãos fomentadores de pesquisa, CNPq e FAPEMIG, pelas bolsas de doutorado no período de março de 2005 a fevereiro de 2006, e junho de 2006 a fevereiro de 2008, respectivamente.

Este trabalho teve um outro tipo de apoio que considero fundamental: a ajuda espiritual das minhas queridas irmãs beneditinas, em especial aquelas do Mosteiro Nossa Senhora das Graças, no qual sou postulante. Que este agradecimento se faça de maneira especial às Madres Inês, Estefânia e Mectildes, e às irmãs Paula, Maria Rita, Lúcia, Emerenciana e Petra. À minha madrinha, residente no Mosteiro da Glória, em Uberaba, querida Madre Gema, pelo seu apoio constante, e pelo seu empenho na minha evolução e aprofundamento espirituais. Que estes agradecimentos também se estendam à Madre Margarida, do Carmelo Santa Terezinha, cujas conversas sempre me emocionaram e me fortaleceram.

A Deus, por todas as bênçãos.

## RESUMO

Nesta tese, constrói-se um modelo computacional a fim de dar suporte ao processo de concessão de crédito e gestão dos recursos financeiros das Instituições de Microfinanças (IMF). Criou-se uma ferramenta de otimização multiobjetivo, a qual busca maximizar, simultaneamente, o nível de eficiência (medida como a seleção dos candidatos a crédito com menor probabilidade de inadimplência) e de eficácia (volume de recursos) para a política de seleção de candidatos a crédito. O objetivo é facilitar a auto-sustentabilidade da IMF, sem a dependência de doação de recursos. A principal novidade metodológica é a aplicação de uma técnica de Monte Carlo, para testes de permutação, a fim de se gerarem configurações sob a hipótese nula, em problemas multiobjetivos, substituindo-se as técnicas econométricas clássicas e as análises do tipo DEA, mais frequentemente encontradas em artigos computacionais, na área econômica e financeira. Aplica-se o novo conceito de vetor de significância, o qual permite realizar o cálculo de inferência da robustez dos resultados encontrados na fronteira ótima de Pareto. A capacidade de se selecionar a política de crédito mais adequada dentre aquelas contidas na fronteira de Pareto, por meio de um critério quantitativo, que dispensa a utilização de pesos arbitrariamente fixados para dosar a importância relativa das funções monoobjetivas de eficiência e eficácia, consiste na novidade do modelo, no contexto de avaliação de políticas de crédito.

---

Palavras-chave: otimização multiobjetivo, fronteira de Pareto, eficiência, eficácia, permutação cíclica

## ABSTRACT

This thesis built a computational model for decision making support in credit loan for Micro-Finance Institutions (MFI). One develops a multi-objective optimization tool to maximize simultaneously both levels of efficiency (measured as the selection of candidates for credit loan with lower default probability) as well as efficacy (a proxy to portfolio credit volume) for credit loan candidates selection policies. The objective is to achieve self-sustaining without the necessity of external donations. The main methodological contribution is an application of a Monte Carlo technique for permutation tests to generate configurations under the null hypothesis in multi-objective problems, instead of employing the most frequently technical applied in the computational economy and financial areas, such as classical econometric tools and DEA. It was built the significance vector concept in order to infer the robustness of the results found within the Pareto optimal front. The ability to select, through quantitative criteria, the most adequate policy amongst the Pareto front solutions, without resorting to arbitrary weights to balance the relative importance of the mono-objective functions of efficiency and efficacy, makes this method a novelty in credit policies evaluation area.

---

Key-words: multi-objective optimization, Pareto frontier, efficient, efficacy, cyclical permutation.

## LISTA DE FIGURAS E QUADRO

FIGURA 1a - Conjunto alcançável e <i>portfolios</i> eficientes encontrados através das isomédias e isovariâncias – $x$ dentro do conjunto alcançável.....	20
FIGURA 1b - Conjunto alcançável e <i>portfolios</i> eficientes encontrados através das isomédias e isovariâncias – $x$ fora do conjunto alcançável.....	21
FIGURA 2 - Exemplo ilustrativo da caixa de Edgeworth.....	25
FIGURA 3 - Exemplo ilustrativo do equilíbrio walrasiano na caixa de Edgeworth.....	27
FIGURA 4 - Exemplo Ilustrativo da eficiência de Pareto.....	29
FIGURA 5 - Exemplos ilustrativos de conjuntos convexos e não-convexos.....	41
FIGURA 6 - Três possíveis soluções de otimização.....	54
FIGURA 7 - Situação típica de um problema de otimização multiobjetivo.....	58
FIGURA 8a - Exemplo ilustrativo da permutação cíclica.....	74
FIGURA 8b - Permutação cíclica: ilustração das mudanças em forma circular.....	76
FIGURA 9 - Diagrama da árvore para ilustração da permutação cíclica.....	78
FIGURA 10 - Resultados possíveis (cor e direção) dos Vetores de Significância.....	85
FIGURA 11 - Procedimento utilizado pelo gerador RAN1.....	124
FIGURA. 12 - Políticas factíveis no espaço objetivo.....	129
FIGURA 13a - Resultados da política de crédito após as permutações – Mulheres.....	131
FIGURA 14a - Resultados da política de crédito após as permutações – Homens.....	132
FIGURA 15a - Resultados da política de crédito após as permutações – Homem e Mulher.....	134
FIGURA 13b - Camadas de Pareto para a política selecionada e as permutadas – Mulheres.....	136
FIGURA 14b - Camadas de Pareto para a política selecionada e as permutadas – Homens.....	137
FIGURA 15b - Camadas de Pareto para a política selecionada e as permutadas – Homens e Mulheres.....	138
FIGURA 16 - Resultados de eficiência e eficácia e respectivas camadas de Pareto – (base de dados só com clientes).....	139
FIGURA 17 - Resultados de eficiência e eficácia e respectivas fronteiras de Pareto – (base de dados com clientes e candidatos recusados).....	140
FIGURA. 18 - Resultados das políticas de crédito no espaço de decisão e seus vetores de significância.....	141
FIGURA 19a - Camadas de Pareto para políticas com e sem candidatos recusados.....	142
FIGURA 19b - Camadas de Pareto e seus vetores de significância para políticas com e sem candidatos recusados.....	142
FIGURA 20a - Representação gráfica da política selecionada - vetor azul.....	144
FIGURA 20b - Representação gráfica da política selecionada - vetor amarelo.....	145
FIGURA 21a - Resultado do melhor vetor de significância - política selecionada da fronteira de Pareto com candidatos recusados.....	147
FIGURA 21b - Resultado do segundo melhor vetor de significância – política selecionada da fronteira de Pareto com candidatos recusados.....	148
FIGURA 22a - Resultado do melhor vetor de significância – política selecionada da fronteira de Pareto sem candidatos recusados.....	149
FIGURA 23 - Pseudogradientes intrapolíticas para o período $t_0$ e $t_1$ .....	152
 QUADRO 1 - Organograma das IMF	 91



## LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1 - Ilustração de um problema de otimização multiobjetivo.....	33
GRÁFICOS 2a-2d - Conjuntos ótimos de Pareto com curvas contínuas.....	35
GRÁFICO 3a - O espaço de decisão.....	38
GRÁFICO 3b - O espaço objetivo .....	38
GRÁFICO 4 - Ilustração geométrica da inclinação da curva de nível .....	49
GRÁFICO 5 - Ilustração geométrica da inclinação da restrição .....	50
GRÁFICO 6a - Ilustração geométrica da inclinação da tangência para um problema de maximização.....	50
GRÁFICO 6b - Ilustração geométrica da inclinação da tangência para um problema de minimização.....	51
GRÁFICO 7 - Frequência relativa dos pagamentos em dia por valor do crédito.....	104
GRÁFICO 8a - Frequência relativa dos pagamentos em dia por valor e finalidade do crédito – Homens .....	105
GRÁFICO 8b - Frequência relativa dos pagamentos em dia por valor e finalidade do crédito – Mulheres.....	105
GRÁFICO 9a - Frequência relativa dos pagamentos em dia por valor do crédito e grau escolaridade – Homens.....	106
GRÁFICO 9b - Frequência relativa dos pagamentos em dia por valor do crédito e grau escolaridade – Mulheres .....	106
GRÁFICO 10 - Frequência relativa do pagamento antecipado por valor do crédito – Homens e Mulheres.....	107
GRÁFICO 11a - Frequência relativa pagamentos antecipados por finalidade do crédito – Homens.....	108
GRÁFICO 11b - Frequência relativa pagamentos antecipados por finalidade do crédito – Mulheres.....	108
GRÁFICO 12a - Frequência relativa dos pagamentos antecipados por valor do crédito e grau escolaridade – Homens.....	109
GRÁFICO 12b - Frequência relativa dos pagamentos em dia por valor de crédito e grau de escolaridade – Mulheres.....	110
GRÁFICO 13 - Frequência relativa dos pagamentos em atraso por valor de crédito e gênero- Homens e Mulheres.....	110
GRÁFICO 14a - Frequência relativa em atrasos por valor finalidade do crédito – Homens.....	111
GRÁFICO 14b - Frequência relativa pagamentos em atraso por valor finalidade do crédito – Mulheres.....	111
GRÁFICO 15a - Frequência relativa dos pagamentos em atraso por valor do crédito e instrução – Homens.....	112
GRÁFICO 15b - Frequência relativa dos pagamentos em atraso por valor do crédito e instrução – Mulheres.....	112
GRÁFICO 16 - Frequência relativa pagamentos em aberto por valor do crédito e gênero.....	113
GRÁFICO 17a - Frequência relativa incidência parcela em aberto em relação ao total de parcelas – Homens.....	113
GRÁFICO 17b - Frequência relativa da proporção de parcelas em aberto por finalidade de crédito – Mulheres.....	114
GRÁFICO 18a - Frequência relativa dos pagamentos em aberto por valor do crédito e grau escolaridade – Homens.....	115
GRÁFICO 18b - Frequência relativa pagamentos em aberto por valor do crédito - Mulheres	115

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - Representação dos elementos selecionados.....	73
TABELA 2 - Estimativa de oferta de microcrédito no Brasil – Dezembro de 2006.....	90
TABELA 3 - Distribuição absoluta e relativa do número de contratos por PAB segundo gênero.....	94
TABELA 4 - Frequência absoluta e relativa do valor do crédito por faixa de crédito segundo gênero.....	95
TABELA 5 - Valor médio do crédito por PAB segundo gênero.....	96
TABELA 6 - Distribuição percentual do grau de escolaridade por PAB segundo gênero.....	97
TABELA 7 - Valor médio do crédito por grau de instrução segundo gênero.....	98
TABELA 8 - Renda líquida média por PAB segundo gênero.....	98
TABELA 9 - Composição percentual do estado civil por PAB segundo gênero.....	99
TABELA 10 - Idade média por PAB segundo gênero.....	100
TABELA 11 - Distribuição percentual da finalidade do crédito por PAB segundo gênero.....	101
TABELA 12 - Distribuição da Frequência relativa do número de parcelas por PAB segundo gênero.....	102
TABELA 13 - Perfil das parcelas de crédito por situação do contrato.....	103
TABELA 14 - Número de dias em relação ao vencimento por situação das parcelas segundo gênero.....	104
TABELA 15 - Tamanho inicial e final da amostra para o modelo.....	116
TABELA 16 - Dados para construção de um histórico de pagamento simulado.....	125
TABELA 17 - Exemplo da construção do histórico de crédito para candidatos Recusados.....	126
TABELA 18 - Variáveis e subcategorias do exemplo das políticas de seleção de crédito.....	130
TABELA 19 - Resultados de eficiência e eficácia das políticas ilustradas .....	133
TABELA 20 - Políticas com maiores valores de vetor de significância no tempo $t_1$ (inclui candidatos recusados).....	143
TABELA 21a - Políticas mais significativas da fronteira de Pareto – vetor de significância verde (inclui candidatos recusados, período $t_1$ ).....	147
TABELA 21b - Política mais significativa da fronteira de Pareto (não inclui candidatos recusados, período $t_1$ ).....	150

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	12
2	REFERENCIAL TEÓRICO.....	18
2.1	O modelo de seleção de <i>portfolio</i> de Markowitz.....	18
2.1.1	Aplicações computacionais do modelo de Markowitz .....	22
2.2	Revisão conceitual: otimização .....	24
2.2.1	Origem do conceito de otimização multiobjetivo.....	24
2.2.2	Equilíbrio walrasiano e a caixa de Edgeworth .....	25
2.2.3	A eficiência de Pareto.....	29
2.2.3.1	Conceito de Dominância .....	32
2.2.3.2	Propriedade da relação de dominância .....	34
2.2.3.3	Terminologias de Pareto.....	35
2.3	Problemas de otimização mono e multiobjetivos .....	37
2.3.1	Diferenças conceituais básicas entre otimização mono e multiobjetivo .....	39
2.3.2	Definições conceituais básicas .....	41
2.3.2.1	Concavidade, convexidade e derivadas de funções de uma variável .....	41
2.3.2.2	Concavidade, convexidade e derivadas de funções de várias variáveis .....	42
2.3.2.3	Máximos e mínimos locais e globais.....	43
2.3.2.3.1	Funções com uma Variável .....	43
2.3.2.3.2	Funções com mais de uma variável.....	44
2.4	O Processo de otimização condicionada .....	45
2.4.1	Método de Lagrange: restrições com igualdade .....	46
2.4.1.1	Método de Lagrange: interpretação geométrica .....	48
2.4.1.2	Método de Lagrange: condições de segunda ordem.....	52
2.4.2	Método de Kuhn-Tucker: restrições na forma de desigualdade e negatividade.....	55
2.5	Otimização multiobjetivo .....	59
2.6	Eficiência e Eficácia .....	61
2.6.1	Revisão conceitual: Eficiência e Eficácia.....	61
3	PROPOSTA CONCEITUAL DE EFICIÊNCIA E EFICÁCIA.....	69
3.1	Eficiência.....	69
3.2	Eficácia .....	70
3.3	Otimização multiobjetivo de eficiência e eficácia.....	70
4	PROPOSTA METODOLÓGICA .....	73
4.1	Referencial metodológico: permutação cíclica .....	73
4.1.1	Aplicação ao modelo proposto .....	79
4.2	Proposta dos Vetores de Significância .....	83
4.3	Proposta de um Pseudogradiante intrapolítica .....	87

5	ANÁLISE DE DADOS .....	90
5.1	Tipologia e Organograma das IMF .....	90
5.2	Base de Dados .....	93
5.2.1	Coleta de Dados.....	93
5.3	Análise descritiva .....	94
5.4	Análise dos pagamentos de crédito .....	104
6	PROGRAMA COMPUTACIONAL DE AVALIAÇÃO DE POLÍTICAS DE CRÉDITO .....	117
6.1	Histórico de crédito dos candidatos recusados.....	118
6.1.1	Hipótese da distribuição de Poisson não-homogênea .....	119
6.1.2	Critérios adicionais para candidatos recusados .....	120
6.1.2.1	Definição do valor da parcela.....	120
6.1.2.2	Definição do número de dias de atraso.....	121
6.1.2.3	Geração de variáveis aleatórias .....	123
6.1.2.4	Pesos aleatórios para cada parcela.....	125
6.1.2.5	Início do pagamento de cada contrato .....	126
6.1.2.6	Contratos renegociados .....	127
6.2	Resultados das possíveis combinações de políticas de crédito.....	128
6.3	Aplicação da permutação cíclica .....	131
6.4	A construção das camadas de Pareto para as políticas do espaço de decisão .....	135
6.5	Os campos dos vetores de significância e sua interpretação .....	139
6.5.1	Diferença entre os vetores .....	148
6.6	O Pseudogradiante intrapolítica e sua interpretação.....	150
7	CONCLUSÃO .....	152
8	REFERÊNCIAS .....	156
	ANEXO I .....	161
	ANEXO II .....	162
	ANEXO III .....	164

## 1 INTRODUÇÃO

No Brasil, as Instituições de Microfinanças (IMF), usualmente conhecidas como bancos de microcrédito, têm se constituído com apoio fundamental dos governos municipais e organismos internacionais e nacionais, donde se destaca a atuação do Banco Interamericano de Desenvolvimento (BID), o Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social (BNDES), e os bancos de desenvolvimento regional. A grande contribuição das IMF diz respeito à inserção de cidadãos menos privilegiados na dinâmica da economia, bem como na redução da pobreza. Ademais, podem se constituir em possíveis instrumentos de políticas públicas e, por conseguinte, estarem inseridos dentro de um contexto maior de atuação do Estado, como por exemplo, na capacitação e no treinamento de mão-de-obra factível de benefícios advindos do microcrédito produtivo orientado<sup>1</sup>. No entanto, a viabilização das IMF está intrinsecamente associada a sua capacidade de auto-sustentabilidade no médio e longo prazo, o que, até o presente momento, ainda tem sido um entrave para o seu crescimento e consolidação. Embora nos últimos anos o governo federal venha buscando promover o microcrédito, seu enfoque também tem sido os bancos comerciais tradicionais, e o microcrédito não necessariamente produtivo orientado. Como as especificidades do microcrédito produtivo orientado, em vários aspectos, distinguem-se sobremaneira daquelas verificadas para o crédito tradicionalmente praticado pelas instituições tradicionais, as organizações financeiras, em sua maioria, ainda têm preferido repassar seus recursos às IMF a investirem diretamente neste segmento de mercado.

Do ponto de vista regulatório, a diferença mais significativa entre as IMF e os bancos tradicionais é a impossibilidade dos primeiros de receberem depósitos<sup>2</sup> e se alavancarem financeiramente. Associado a esse aspecto tem-se o fato de que as IMF brasileiras, em sua maioria, constituírem-se sob a forma jurídica de Organizações Não-Governamentais (ONG) Especializadas e Generalistas, ou Organização Civil de Interesse Público (OSCIP), o que as caracteriza como instituições sem fins lucrativos. Tais aspectos impactam negativamente na capacidade de auto-sustentabilidade das IMF.

---

<sup>1</sup> De acordo com o documento Microcrédito e microfinanças, do Ministério da Fazenda, “microcrédito produtivo orientado é aquele crédito concedido para o atendimento das necessidades financeiras de pessoas físicas e jurídicas empreendedoras de atividades produtivas de pequeno porte.” Há uma distinção entre o microcrédito, caracterizado por empréstimos de pequeno porte, e o microcrédito produtivo orientado, o qual de fato tem o objetivo de (re)inserção na atividade econômica.

<sup>2</sup> Depósitos são todos os recursos financeiros depositados em conta corrente, ou em outra conta específica da instituição (fundos de investimento, caderneta de poupança, dentre outros), que não se destinam ao pagamento das prestações de crédito. Com os recursos financeiros advindos de depósitos bancários que os bancos promovem o efeito multiplicador e conseguem se alavancar.

Inegavelmente, a auto-sustentabilidade é condição *necessária* para o sucesso e a expansão futura das IMF brasileiras, caso consiga promover independência de recursos de terceiros para a continuidade dos negócios. A não-sustentabilidade perene pode vir a transformar o instrumento de microcrédito em mais uma política social de cunho assistencialista, sem garantia de inserção dos indivíduos mais carentes na atividade econômica, e incapaz de atuar na redução da pobreza.

É com base nessa discussão que surgiu a motivação e o tema de pesquisa do trabalho ora desenvolvido. Em outras palavras, o interesse pela expansão do microcrédito, por se tratar de um poderoso instrumento de inserção dos indivíduos, de maneira digna, na atividade econômica, conjugado aos aspectos de cunho financeiro que envolvem a questão da sustentabilidade das IMF, foram a grande motivação deste estudo. As peculiaridades e idiosincrasias do microcrédito produtivo orientado, conjugadas à “prematuridade” da forma de gestão e atuação dessas instituições, também contribuíram pela busca de uma abordagem menos tradicional para o tema.

No que diz respeito aos objetivos, o objetivo primeiro é construir um modelo de política de crédito com base nas variáveis de seleção dos candidatos, bem como em seus respectivos históricos de crédito, as soluções calculadas são todas as possibilidades de arranjo entre as variáveis de seleção dos candidatos, sob as quais se têm os referidos históricos de crédito.

Duas características marcantes distinguem a avaliação da concessão de crédito feito pelas IMF e aquela realizada pelas demais instituições financeiras. A primeira diz respeito às ações e a critérios relacionados à avaliação do crédito solicitado. No caso do Brasil, como de outros países que praticam o microcrédito produtivo orientado, há um gasto comparativa e significativamente maior para se conhecer o potencial cliente em relação aos gastos verificados pelas instituições convencionais, tornando os indicadores de performance incomparáveis entre esses dois grupos. Subjacente ao custo de avaliação do crédito, tem-se a figura do agente de crédito, ao qual cabe a avaliação *in loco* dos dados socioeconômicos e da atividade-fim para a qual o empréstimo está sendo solicitado. Tal trabalho inexistente nas instituições convencionais, as quais se balizam em procedimentos internos de análises de risco, conjugados aos trabalhos de instituições outras, como o Serviço de Proteção ao Consumidor (SPC), o Serasa<sup>3</sup>, e o Clube de Diretores Lojistas (CDL).

---

<sup>3</sup> Serasa é a maior empresa da América Latina em pesquisas, informações e análises econômico-financeiras no suporte para as decisões de crédito e negócios.

A segunda característica é a falta de flexibilidade de atuação no mercado financeiro. Apesar do fato de essas instituições não serem possibilitadas de receberem depósito, o Governo Federal limitou os valores máximos a serem aplicados, tanto da taxa de juros quanto da taxa de abertura de crédito sobre os contratos de crédito. Esse fator restringe e, muitas vezes, engessa a atuação dessas IMF, comparativamente às demais.

Neste estudo, busca-se indicar uma política ótima de seleção de crédito, a fim de maximizar dois objetivos: eficiência e eficácia, pertinentes à definição de uma política creditícia de seleção de clientes para IMF, sem entrar na mensuração do risco creditício. Para o desenvolvimento do trabalho, foram utilizados os instrumentais de seleção de clientes adotados pelas IMF, ao invés de se tentar aplicar técnicas como, por exemplo, *credit scoring*, que não se constitui em ferramenta apropriada às instituições de microfinanças.

Analogamente ao modelo de Markowitz (1959), neste trabalho é construída uma fronteira a partir de dois objetivos contraditórios, definidos como eficiência e eficácia. *Grosso modo*, a eficiência mede o nível de adimplência e a eficácia, o tamanho da carteira ativa.

No modelo de média-variância de Markowitz (1952), o autor constrói a fronteira eficiente de retornos esperados de um portfólio em relação à variância desse modelo. A idéia central é encontrar os portfólios capazes de gerar maiores retornos com menores variâncias. No trabalho desenvolvido, a idéia fundamental é construir uma fronteira eficiente que contemple os maiores volumes de carteira ativa disponíveis à Instituição (eficácia) concomitante ao conjunto de melhores clientes, ou seja, aqueles que honram pontualmente seus compromissos creditícios (eficiência). Adicionalmente, as técnicas utilizadas permitem, dentre as combinações ótimas que compõem a fronteira eficiente, escolher aquela(s) política(s) que melhor atende(m) aos dois objetivos.

Em síntese, neste estudo, há apropriação das idéias de Markowitz (1952), a fim de se construir uma fronteira eficiente para aperfeiçoar objetivos aparentemente contraditórios em um tema relevante em finanças, microcrédito, dando um tratamento conceitual e metodológico totalmente distinto do autor, bem como do que há disponível na literatura embasada nessa abordagem teórica. Mais recentemente, tem surgido abordagens na literatura compostas por alternativas aos modelos econométricos e aos processos mono-objetivos de otimização, donde se destaca a técnica DEA.

A DEA, *grosso modo*, constitui-se em uma técnica não-paramétrica, cuja abordagem centra-se na mensuração de indicadores de performance de eficiência dos *portfolios* através da

comparação entre *inputs* e *outputs* relativos a tais portfólios. Assim como a técnica DEA, outros trabalhos recentes utilizando técnicas de otimização multiobjetivo também vêm surgindo como novas abordagens computacionais na discussão de otimização voltada para a área de finanças. Embora seja inegável o avanço que a DEA significa em comparação às técnicas mais recorrentes, as abordagens computacionais de tratamento multiobjetivo vêm surgindo como ferramentas que permitem o tratamento mais “puro” do problema, evitando-se as “calibragens” exigidas na maioria dos modelos. O estudo aqui realizado inclui-se no grupo das abordagens computacionais multiobjetivos e pode ser considerado uma nova ferramenta na avaliação de *portfolios* e performances creditícias.

Comparativamente aos trabalhos clássicos de finanças, este estudo também apresenta um caráter inovador, ao levantar um problema de crédito voltado à auto-sustentabilidade da instituição. Estudos de crédito voltados para as instituições tradicionais estão mais diretamente ligados à inadimplência, uma vez que elas têm a capacidade de se alavancar com o recebimento de depósitos. No caso específico do Brasil, e de outros países que praticam o microcrédito, tal possibilidade de alavancagem não se configura pelo recebimento de depósito. Ademais, pelo fato de as IMF serem organizações sem fins lucrativos e, por conseguinte, não poderem ter o lucro como objetivo-fim, a possibilidade de gerarem excedente é voltado exclusivamente para reinvestimento, ou seja, para a sua capacidade alavancagem. Dito de outra maneira, as IMF precisam otimizar seus recursos disponíveis, a fim de concedê-los àqueles candidatos que possam apresentar os menores níveis de inadimplência e contribuir para a geração de novos empréstimos.

Com custos operacionais diretos muito mais elevados e recursos disponíveis bem inferiores aos das instituições convencionais, o desafio à auto-sustentabilidade do microcrédito parece residir na capacidade de aumentar sua carteira ativa às custas de clientes menos onerosos. É com base nessa argumentação que se formulou o objetivo deste trabalho, e com base em muitas discussões e reflexões, podem-se se construir os conceitos de eficiência e eficácia aqui tratados.

A razão para a dificuldade de se construir a métrica relativa a tais conceitos reside em três aspectos. Primeiro, pelo fato de o tema de microfinanças ser ainda muito recente na literatura e as discussões clássicas de finanças serem calcadas nos mercados financeiros tradicionais. Segundo, que as abordagens literárias embasadas no modelo de Markowitz, em sua maioria, são voltadas para os resultados da carteira, ou seja, para a instituição financeira, ao passo que um dos objetivos aqui tratados focaliza-se no cliente, ou seja, no retorno institucional advindo



do comportamento do cliente. E, por último, que os conceitos definidos não encontram similares na literatura, sendo uma composição de alguns indicadores já existentes.

Outro aspecto inovador decorrente da maneira como o problema multiobjetivo foi construído diz respeito ao tratamento dado a ele. A técnica escolhida para construir políticas artificiais e compará-las em relação às políticas factíveis no espaço objetivo foi a permutação cíclica. A principal característica dessa técnica é poder, simultaneamente, gerar composições aleatórias com base nos dados originais, sem que suas marginais sejam alteradas e preservar as características amostrais dos dados originais. Com essa técnica, foi possível gerar instâncias da hipótese nula, a qual buscava averiguar se a política original não se encontrava na fronteira de Pareto em termos de eficiência e eficácia, e poder aplicá-la sem restrições, uma vez que a base de dados passou a conter também o histórico simulado de candidatos a crédito que tiveram seus pedidos indeferidos. Com isso, pode-se testar a hipótese nula, contemplando-se todo o universo de indivíduos que buscam o microcrédito produtivo orientado.

A forma de construção dos históricos simulados de pagamento das parcelas de crédito para os candidatos que tiveram seu pedido indeferido, é também outra novidade. Atualmente, a literatura de simulação de comportamento tem utilizado, com mais frequência, técnicas como *fuzzy* e árvores de decisão. Com base na análise descritiva dos dados, pode-se supor que a distribuição característica do evento “pagamento das parcelas” seguia a forma de uma Poisson não-homogênea. Com base nos dez vizinhos mais próximos (clientes) e através da geração de pesos aleatórios para cada vizinho, construiu-se uma média ponderada do número de dias de atraso do pagamento das parcelas. Com isso, a base de dados original passou a incluir os candidatos recusados com seus históricos simulados, possibilitando-se, sem ressalvas, a aplicação da técnica de permutação.

Por fim, dois novos conceitos foram desenvolvidos e aplicados na análise dos resultados multiobjetivos, denominados de vetores de significância e pseudogradientes. O primeiro foi construído com base na estatística  $t$ , e o segundo no conceito de vetor de gradiente. Os vetores de significância permitiram avaliar a significância dos resultados que compunham a fronteira de Pareto, para, a partir daí, extrair(em)-se aquele(s) resultado(s) mais significativo(s) estatisticamente. O pseudogridente, por sua vez, permitiu decompor o efeito da inclusão dos candidatos recusados na base original de dados, para cada política individualmente, definindo-se, assim, um resultado intrapolítica da base de dados que só tratavam dos clientes comparativamente àquela que também incluía os candidatos com créditos indeferidos.

Todo o trabalho foi desenvolvido com dados reais de uma IMF brasileira com sede em Belo Horizonte, Minas Gerais. Os resultados encontrados para a escolha da política de crédito vão em consonância com a análise descritiva, sugerindo que, de fato, a ferramenta construída é útil para se especificar a política ótima.

Em termos genéricos, a política mais significativa do ponto de vista do vetor de significância é aquela que contempla (i) mulheres, (iii) solteiras, casadas, viúvas, separadas, divorciadas e outras, (iii) com até 1º. grau completo de escolaridade, (iv) cuja finalidade de crédito destina-se tanto a capital de giro e fixo, quanto a ambos conjuntamente (capital misto), e (v) para qualquer faixa de valor de crédito disponibilizada pela IMF. A segunda melhor política encontrada na fronteira de Pareto, com parâmetros de significância muito próximos à anterior, distingue-se da anterior em duas variáveis: primeiramente, por incluir também os homens; e, em segundo, por excluir os indivíduos que cujo estado civil seja viúvos, separados, divorciados e outros, ou seja, excluiu todas aquelas que não fossem solteiros e/ou casados. Em suma, entre as duas melhores políticas de seleção dos melhores candidatos ao microcrédito produtivo orientado, há alguns denominadores comuns que devem ser avaliados com mais atenção: os candidatos solteiros e casados, com baixo nível de escolaridade.

Por fim, pode-se afirmar que o modelo computacional ora desenvolvido, de natureza distinta dos mais tradicionais na área, surge como uma inovação na forma de abordagem do problema, tanto pelo fato de tratá-lo de maneira multiobjetivo, como pelas ferramentas nele embutidas. Tais ferramentas fornecem técnicas promissoras para a avaliação e à possibilidade de criação de inferência acerca dos conceitos desenvolvidos sobre eficiência e eficácia dessas instituições ou, até mesmo, daquelas instituições mais convencionais.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

O fundamento teórico advindo da área de finanças para a construção do problema multiobjetivo deste estudo é o modelo clássico de Markowitz (1952), apresentado a seguir. Acrescido a este modelo, discutem-se aplicações na literatura mais pertinentes ao trabalho proposto.

### 2.1 O modelo de seleção de *portfolio* de Markowitz

O artigo clássico de Markowitz (1952) busca, a partir das crenças relevantes sobre as performances futuras dos ativos, escolher o *portfolio* capaz de maximizar o retorno e reduzir a variância, através de ilustrações geométricas da regra de “retorno esperado-variância dos retornos”. Já neste trabalho, Markowitz (1952) faz referências a técnicas capazes de computar o conjunto de *portfolios* eficientes e de combinações eficientes associadas às suas respectivas média e variância estimadas. Ao final de seu artigo, o autor escreve que “(...) my feeling is that the statistical computations should be used to arrive at a tentative set of  $\mu_i$  e  $\sigma_{ij}$ .(...)” (MARKOWITZ, 1952, p.91)<sup>4</sup>

Na sua construção teórica, Markowitz (1952) parte da suposição de que há  $N$  ativos e considera  $r_{it}$  como o retorno antecipado, no tempo  $t$ , por dólar investido no ativo  $i$ ;  $d_{it}$  a taxa de atualização (desconto) para valor presente do retorno do  $i$ -ésimo ativo no tempo  $t$ ;  $X_i$  a quantidade relativa do ativo investido no ativo  $i$ , excluindo-se as vendas de curto-prazo. A taxa de retorno antecipado descontada do *portfolio* é:

$$R = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{i=1}^N d_{it} r_{it} X_i = \sum_{i=1}^N X_i \left( \sum_{t=1}^{\infty} d_{it} r_{it} \right)$$

Sendo  $R_i = \sum_{t=1}^{\infty} d_{it} r_{it}$  o retorno descontado do  $i$ -ésimo ativo, então  $R = \sum X_i R_i$  é independente de  $X_i$ . Dado que  $X_i \geq 0$  para todo  $i$  e que  $\sum X_i = 1$ ,  $R$  é uma média ponderada de  $R_i$  com  $X_i$  como pesos não-negativos, para maximizar  $R$ , considere  $X_i = 1$  para  $i$  com máximos  $R_i$ . Se diversos  $R_{i_a}$ ,  $a=1, \dots, K$  são máximos, então qualquer alocação com  $\sum_{a=1}^K X_{i_a} = 1$  maximiza  $R$ .

---

<sup>4</sup> “pressinto que as estatísticas computacionais poderiam ser utilizadas para se alcançar, por tentativa, um conjunto de  $\mu_i$  e  $\sigma_{ij}$ .” (Tradução nossa)

Ao invés de discutir os retornos de um *i-ésimo* ativo ao longo do tempo, ou seja,  $(r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{it}, \dots)$ , o autor concentra-se na discussão do fluxo de retornos  $(r_i)$  de um *i-ésimo* ativo. O fluxo de retornos de um *portfolio* como um todo é definido como

$$R = \sum X_i r_i .$$

Supondo que se tenha um número de variáveis aleatórias  $(R_1, \dots, R_n)$ , e que  $R$ , também uma variável aleatória, seja a soma ponderada (combinação linear) dos  $R_i$ , ou seja,  $R = a_1 R_1 + a_2 R_2 + \dots + a_n R_n$ . O valor esperado da soma ponderada é a soma ponderada dos valores esperados, definido como

$$E(R) = a_1 E(R_1) + a_2 E(R_2) + \dots + a_n E(R_n) \quad (\text{eq.1})$$

e,

$$\text{a variância da soma ponderada é } V(R) = \sum_{i=1}^N a_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{i>1}^N a_i a_j \sigma_{ij} \quad (\text{eq.2}),$$

onde:  $\sigma_{ij}$  é a covariância entre  $R_i$  e  $R_j$

$R_i$  é o retorno do *i-ésimo* ativo.<sup>5</sup>

Markowitz (1952) sugere a existência de técnicas estatísticas capazes de construir as superfícies de eficiência, e ilustra geometricamente a natureza de tais superfícies para pequenos números de ativos disponíveis. A construção das superfícies de eficiência pressupõe a definição das probabilidades das crenças dos investidores, ou seja, do julgamento dos conhecedores de mercado, e da criação dos conceitos de curvas de isomédia e de isovariância.<sup>6</sup>

Isomédia é definida como o conjunto de todos os pontos que representam os *portfolios*, com um dado retorno esperado. Já isovariância é o conjunto de todos os pontos que representam o *portfolio* com uma dada variância de retorno. A título de simplificação e com o intuito de poder se visualizar o formato das curvas de isomédias e isovariâncias, Markowitz (1952) reduz a definição de suas variáveis-chave para o caso de três ativos, reduzindo também a interpretação geométrica ao espaço bidimensional, através de um simples artifício

<sup>5</sup> Note que o retorno  $(R)$  sobre o portfólio como um todo é uma soma ponderada das variáveis aleatórias, sob as quais o investidor pode escolher os pesos, ou seja, sua composição.

<sup>6</sup> Como pode se avaliar mais adiante, distintamente do modelo de Markowitz (1952), o modelo criado neste trabalho não exige que se defina as probabilidades de ocorrência de nenhum evento.

matemático, como se segue. Previamente definiu-se que  $\sum X_i = 1$ , e isolando-se  $X_3$ , e tendo que  $X_3 = 1 - X_1 - X_2$ , pode se reescrever a média definida na (eq.1) como

$$E = \sum_{i=1}^3 X_i \mu_i = \mu_3 + X_1(\mu_1 - \mu_3) + X_2(\mu_2 - \mu_3) \quad (\text{eq.1.1}).$$

Da equação (eq.1.1) pode se definir  $X_2$  como

$$X_2 = \frac{E - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3} - \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3} X_1.$$

A inclinação da linha de isomédia com  $E = E_0$  é dada por  $-\frac{(\mu_1 - \mu_3)}{(\mu_2 - \mu_3)}$  e, seu intercepto, por

$\frac{E_0 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3}$ . Assim, mudanças em  $E$  só afetam o intercepto e não a inclinação da linha de

isomédia. As curvas de isomédia formam um sistema de linhas estritamente paralelas, ao passo que, ao se interpretar a fórmula derivada para as curvas de variância, no caso de três ativos, percebe-se que tais curvas formam um sistema de elipses concêntricas, cujo centro é o ponto que minimiza  $V$ . Da eq.2, para o caso de três ativos, tem-se que a fórmula da variância,  $V$ , é definida como

$$V = X_1^2(\sigma_{11} - 2\sigma_{13} + \sigma_{33}) + X_2^2(\sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33}) + 2X_1X_2(\sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \sigma_{33}) + 2X_1(\sigma_{13} - \sigma_{33}) + 2X_2(\sigma_{23} - \sigma_{33}) + \sigma_{33} \quad (\text{eq.2.1})$$

A ilustração da FIG.1 apresenta as curvas de isomédia e isovariância; o ponto de mínima variância, representado por  $x$ ; o conjunto de pontos alcançáveis<sup>7</sup> que compõem o *portfolio*; e os *portfolios* eficientes. A variância aumenta, ao se distanciar do ponto  $x$ . A variância mínima pode se encontrar dentro ou fora do conjunto de pontos alcançáveis; se encontrada dentro significa que se trata de um caso de *portfolio* eficiente. O ponto da linha de isomédia no qual a variância alcança o seu menor nível é aquele em que a linha de isomédia é tangente à curva de isovariância. Considerando-se variações na média, traça-se uma curva, representada pela letra

<sup>7</sup> O conjunto de pontos alcançáveis do portfólio consiste em todos os portfólios os quais satisfazem as seguintes restrições:  $\sum_{i=1}^3 X_i = 1$  e  $X_i \geq 0$  para  $i = 1, 2, 3$ .

$l$ , e denominada de linha crítica, a qual passa por  $X$  e pelo ponto que minimiza  $V$ , onde  $E(X_1, X_2) = E$ . O segmento da linha crítica de  $X$  até o ponto onde essa linha corta o conjunto alcançável é uma parte do conjunto eficiente. A FIG.1a ilustra uma situação na qual o ponto  $x$  de mínima variância se encontra dentro do conjunto alcançável, definido pelo triângulo  $abc$ .

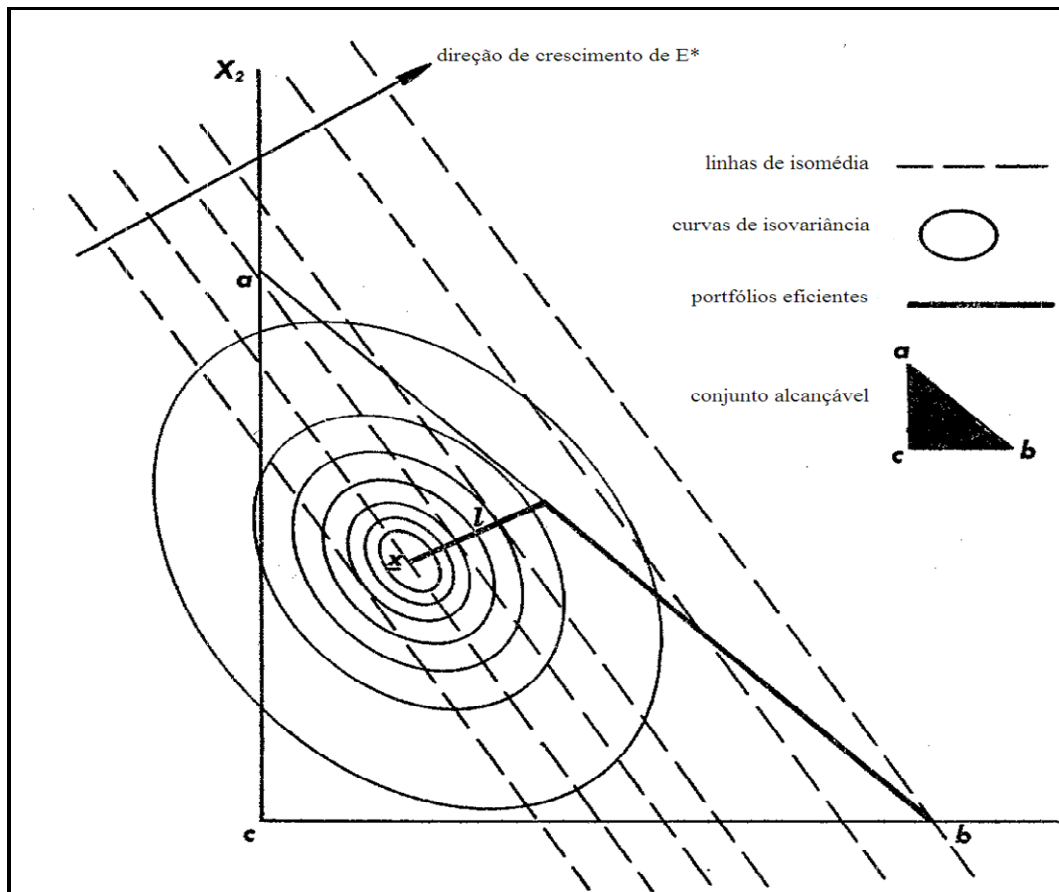


FIGURA 1a: Conjunto alcançável e *portfolios* eficientes encontrados através das isomédias e isovariâncias –  $x$  dentro do conjunto alcançável  
 Fonte: Markowitz (1952)

A regra de retorno esperado–variância do retorno implica em diversificação para uma faixa de  $\mu_i, \sigma_{ij}$ , ressaltando-se a possibilidade de se ter um caso particular de um *portfolio* não-diversificado superior aos demais, em que seu único ativo apresenta maior retorno e menor variância em relação a todos os demais ativos existentes. Da mesma maneira, quando se tenta reduzir a variância, é necessário que, ao se investir em ativos diversificados, evite que tais ativos sejam fortemente correlacionados. A FIG. 1b ilustra uma situação onde o ponto  $x$  situa-se fora do conjunto alcançável, e a linha crítica  $l$  não corta o conjunto alcançável.

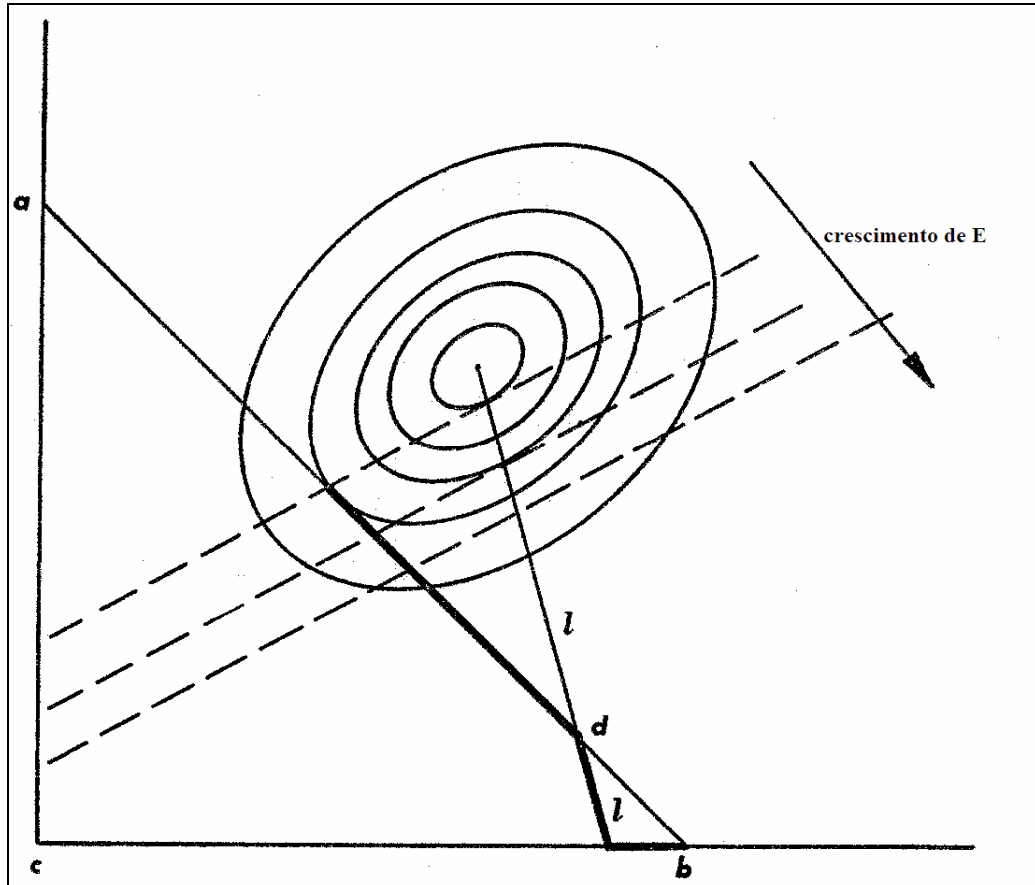


FIGURA 1b: Conjunto alcançável e *portfolios* eficientes encontrados através das isomédias e isovariâncias –  $x$  fora do conjunto alcançável  
Fonte: Markowitz (1952)

Dois aspectos relevantes para o trabalho aqui proposto diferenciam-se do artigo de Markowitz (1952). Primeiro, abordagem contrária a desse autor, que trata o problema de maximização da mesma forma clássica que os economistas. Em outras palavras, embora o problema de maximização não esteja formalmente definido, trata-se de uma discussão monoobjetiva, cuja solução encontrada se dá pela tangência da curva de isovariância com a curva de isomédia. E, segundo, que os objetivos a serem avaliados também são distintos dos propostos pelo autor, embora sigam a mesma contradição aparente.

### 2.1.1 Aplicações computacionais do modelo de Markowitz

Na literatura mais recente baseada no trabalho teórico de Markowitz (1952), três artigos merecem destaque, quais sejam: Chang *et al.* (2000), Mukerjee *et al.* (2002) e Ehrgott *et al.* (2004). Adicionalmente, não se pode deixar de fazer referência ao trabalho de Lewis (1984), o qual construiu um algoritmo para a linha crítica  $l$  do modelo de média-variância de

Markowitz (1952), ainda em uma época em que as discussões econômico-financeiras não se apropriavam do instrumental de programação computacional mais intensiva.

Dentre os trabalhos mencionados, o de Chang *et al.* (2000) é o mais fiel aos conceitos definidos por Markowitz (1952) e o primeiro a apresentar algoritmos que permitem mostrar os resultados das curvas de *trade-off* entre risco e retorno, produzidos computacionalmente. Seu objetivo principal é encontrar a fronteira eficiente para *portfolios*, cuja restrição é a fixação do número de ativos para o *portfolio* em análise, em comparação com os resultados para *portfolios* sem restrição ao número de ativos. Para se encontrar essa fronteira com restrição, os autores utilizam três algoritmos heurísticos distintos: algoritmo genético, *tabu search*<sup>8</sup> e *simulated annealing*. Para se testar a heurística, os autores construíram cinco testes de conjuntos de dados, considerando os ativos financeiros (ações) envolvidos em cinco diferentes índices do mercado de capital mundial, para o período de março de 1992 a setembro de 1997. A justificativa dos autores para o emprego da heurística reside no fato de que o tomador de decisão deve se deparar com uma diferente fronteira de eficiência restritiva, considerando-se os *trade-offs* entre risco, retorno, e número de ativos para a escolha do *portfolio*.

Ehrgott *et al.* (2004) desenvolvem um modelo de múltiplos critérios, com um número maior de restrições, baseado em mais de duas funções-objetivo, com vistas a permitir maior flexibilidade na modelagem dos objetivos dos investidores, concomitante a uma abordagem apropriada de utilidade. Assim, o retorno esperado do modelo de Markowitz (1952) é desmembrado em cinco critérios: (i) performance de doze meses (utilizada como uma medida de risco do *portfolio*); (ii) performance de três anos; e (iii) dividendo anual. O risco, por sua vez, é desmembrado em (iv) volatilidade e (v) na classificação da *Standard&Poor*. Esses cinco atributos são combinados por meio de funções de utilidade específicas de tomada de decisão para cada um individualmente, assim como uma função-utilidade global a fim de se derivar o modelo final. Com base nos critérios desmembrados e na teoria de utilidade, os autores utilizam uma função-objetivo para maximizar a utilidade total do investidor. A fase de tomada de decisão é incorporada ao desenvolvimento da função-utilidade. Os algoritmos utilizados são os mesmos do trabalho de Chang *et al.* (2000), quais sejam, *tabu search*, *genetic algorithm* e *simulated annealing*. Para testar a performance deles, Ehrgott *et al.* (2004) utilizaram 1.108 fundos de investimento, com dados levantados pela *Standard&Poor*,

---

<sup>8</sup> Ehrgott et al (2004) também utilizam este algoritmo na modelagem computacional que se baseia teoricamente no trabalho de Markowitz (1952).



além das funções de utilidade específicas e dos cinco objetivos supracitados. Em linhas gerais, todos os algoritmos produziram bons resultados, destacando-se o algoritmo genético.

Mukerjee *et al.* (2002) propõem aplicar o algoritmo evolucionário denominado NSGA-II (*non-dominated sorting genetic algorithm*) na avaliação do *trade-off* entre risco e retorno, face ao gerenciamento de *portfolio*. Em outras palavras, o estudo transforma o problema básico de gerenciamento de crédito em termos de objetivos múltiplos de maximização do retorno e de minimização do risco.<sup>9</sup> Ademais, os autores comparam a performance do algoritmo NSGA-II com o método  $\varepsilon$ -*constraint*, no qual adota-se um modelo simplificado de risco de crédito, baseado no desvio-padrão do retorno sobre todo o *portfolio*.

Em linhas gerais, esses três artigos apontam para uma nova abordagem dos conceitos difundidos pelo modelo de Markowitz (1952), levando a crer que é possível também estendê-lo aos modelos de risco-retorno, como por exemplo, o *Capital Asset Pricing Model* (CAPM).

## 2.2 Revisão conceitual: otimização

Os processos de otimização podem ser tratados de maneira mono e multiobjetivos. Embora o tratamento dado ao objeto de estudo deste trabalho seja multiobjetivo, as definições e as distinções entre otimização mono e multiobjetivo, assim como a definição conceitual de eficiência de Pareto, também fundamentais na abordagem do objeto, são discutidos a seguir.

### 2.2.1 Origem do conceito de otimização multiobjetivo

A teoria de otimização multiobjetivo é inerente à teoria econômica do Equilíbrio Geral. Leon Walras foi precursor na construção do conceito mais geral de equilíbrio econômico, recebendo contribuições posteriores de William Stanley Jevons, Carl Menger, Francis Ysidro Edgeworth e Vilfredo Pareto.<sup>10</sup> Esse último teórico, por sua vez, criou o conceito de “eficiência de Pareto”, de fundamental importância no campo da matemática e da economia, como, por exemplo, na Teoria de Otimização, na Teoria do Equilíbrio Geral, na Teoria dos Jogos, dentre outras.

---

<sup>9</sup> O objetivo do trabalho aqui proposto segue a mesma analogia ao modelo de risco-retorno de portfólio de Markowitz (1952), porém em um contexto de concessão de crédito. Em termos de construção dos objetivos, as semelhanças com o trabalho de Mukerjee *et al.* (2002) são evidentes.

<sup>10</sup> Coello Coello *et al.* (2007) fazem uma breve digressão dos precursores da área.

Quando da publicação do clássico artigo *Nonlinear Programming*, de Kuhn e Tucker (1951), no qual se discutem as condições necessárias e suficientes para a propriedade de não-inferioridade, que deu-se início aos *esforços mais significativos* voltados ao desenvolvimento de procedimentos para se gerarem soluções de não-inferioridade para problemas de otimização de vetores.<sup>11</sup>

As subseções 2.2.2 e 2.2.3, que se seguem, tratam da elaboração e da construção dos conceitos que fundamentam a Teoria do Equilíbrio Geral, abordando, especificamente, os conceitos de equilíbrio walrasiano e eficiência de Pareto.

### 2.2.2 Equilíbrio walrasiano e a caixa de Edgeworth

Para o propósito deste trabalho, abordar-se-á o conceito de equilíbrio walrasiano dentro de um caso específico do modelo de equilíbrio geral, no qual todos os agentes econômicos são consumidores e os preços são dados. Essa situação, conhecida como “troca pura”, contém alguns dos fenômenos presentes no caso mais extensivo em que se analisa, também, as firmas. Os livros de Varian (1984, 2003) são as referências utilizadas para a construção do conceito do equilíbrio walrasiano.

Suponha um mercado com  $n$  consumidores (agentes), em que cada um detém, individualmente, uma cesta de  $k$  commodities (bens<sup>12</sup>). A cesta inicial de bens  $k$  de cada agente  $i$  pode ser definida como um vetor  $W_i$ . Os agentes trocam entre si e cada um busca a maximização de suas preferências individuais. Em síntese, diz-se que, no caso particular da Teoria da Troca Pura, cada agente  $i$  comporta-se competitivamente, uma vez que toma os preços como dados, independente de suas ações.<sup>13</sup>

A cesta de bens de consumo do agente  $i$  pode ser denotado por  $x_i$ ; ou seja, é um vetor  $k$  descrevendo quanto de cada bem o agente  $i$  consome. A quantidade de bem  $j$  que o agente  $i$  consome é denotado por  $x_i^j$ .

---

<sup>11</sup> Problemas de otimização de vetores são uma classe importante de problemas de otimização multiobjetiva. Do ponto de vista metodológico, constituem-se em problemas de programação matemática com uma função objetivo "vector-valued", e do ponto de vista de tomada de decisão, surgem como ferramenta para situações cuja regra de decisão implica que cada atributo ou função-objetivo seja mantido(a) tão extremo(a) quanto possível.

<sup>12</sup> O conceito de bem utilizado é bem vasto, podendo ser distinguidos pelo tempo, localização e estado. Serviços, tais como trabalho, são considerados outra categoria de bens. Assume-se um mercado para cada bem, no qual o seu referido preço é determinado.

<sup>13</sup> No modelo de equilíbrio geral, todos os preços são variáveis e o equilíbrio requer que todos os mercados sejam transparentes. A Teoria do Equilíbrio Geral leva em consideração todas as interações entre os mercados, bem como o funcionamento dos mercados individualmente. (Varian, 1984, p. 189)

Uma alocação  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  é o agrupamento das cestas de consumo individuais cujos  $n$  agentes mantêm. Cada consumidor é definido de acordo com suas preferências, ou sua função utilidade, e sua cesta de  $k$  commodities (bens).

Uma alocação factível das cestas (e quantidades) de bens entre os agentes, ou seja, uma alocação possível para o caso específico da “troca pura”, é aquela que utiliza todos os bens. Formalmente, tem-se que

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n W_i .$$

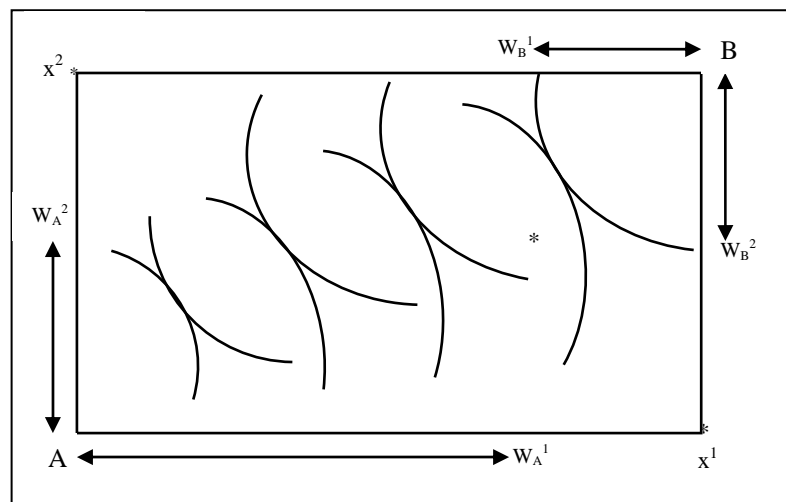


FIGURA 2: Exemplo ilustrativo da caixa de Edgeworth  
Fonte: Varian (1984)

A caixa de Edgeworth<sup>14</sup> é uma maneira conveniente de se visualizarem as alocações (factíveis), bem como as preferências dos consumidores bidimensionalmente. Como no exemplo (FIG.2), suponha a existência de dois bens,  $W^1$  e  $W^2$ , e dois agentes, A e B. A caixa de Edgeworth permite desenhar quanto cada agente pode ter de cada um dos bens, ou seja, as possíveis alocações entre ambos. A largura da caixa mede a quantidade do bem  $x_1$  da economia, ao passo que a altura mede a quantidade do bem  $x_2$ . As escolhas do agente A são medidas a partir do canto de baixo à esquerda, enquanto as escolhas do agente B são medidas a partir do canto superior à direita. Assim, pode-se medir quanto o agente A tem dos bens 1 e 2, pela distância horizontal e vertical, respectivamente, a partir do canto inferior à esquerda, e

<sup>14</sup> A caixa de Edgeworth recebe este nome em homenagem ao economista inglês Francis Ysidro Edgeworth (1845-1926), um dos primeiros a utilizar essa ferramenta analítica.

quanto o agente B tem de ambos os bens, a partir da distância horizontal e vertical, respectivamente, a partir do canto superior à direita. A quantidade de bens ( $W_A^1$  e  $W_A^2$ ) que o agente A detém determina quanto o agente B detém.

Analogamente, a caixa de Edgeworth também pode desenhar as curvas de indiferença dos agentes, ou seja, as curvas sob as quais qualquer alocação entre os dois bens é igualmente desejável para cada agente individualmente. Assim, a caixa de Edgeworth representa todas as possíveis alocações de bens (ou combinações de cestas de consumo) para cada agente, definidas ao longo de cada curva de indiferença individual.

Suponha que nessa economia de “troca pura”, com dois agentes e dois bens, em que os preços são dados, cada consumidor busque a melhor escolha de bens para o seu consumo. Formalmente, cada agente estaria buscando resolver o seguinte problema:

$$\begin{aligned} & \max u_i(x_i) \\ & \text{sujeito a } p^* x_i = y_i = p^* W_i \quad i = A \text{ e } B \end{aligned}$$

Dois aspectos importantes daí resultam. Primeiramente, pode-se afirmar que a resposta para esse problema,  $x_i(p, p^* W_i)$ , encontra-se na função demanda do consumidor. Em segundo, que, na situação apresentada, a renda do consumidor é dada pelo valor inicial de sua cesta de bens, e dessa maneira, depende de  $p$ . A partir daí, a questão que norteia o conceito de “equilíbrio walrasiano” é a existência ou não de um vetor de preços  $p^*$  que igualará a oferta à demanda em todos os mercados. Ademais, se há bens indesejáveis, esses devem promover, no equilíbrio, um excesso de oferta em relação à demanda.

Em outras palavras, o “equilíbrio walrasiano” é definido como o par  $(p^*, x^*)$ , no qual  $p^*$  é um equilíbrio walrasiano para a situação em que não haja bens para os quais há excesso de demanda. Analogamente, se todos os bens são desejáveis, então nenhum bem pode estar, no equilíbrio, em excesso de oferta. Formalmente, tem-se:

$$\sum_i x_i^* = \sum_i x_i(p^*, p^* W_i) \leq \sum_i W_i$$

No contexto da caixa de Edgeworth, o equilíbrio walrasiano pode ser graficamente interpretado com se segue: dado qualquer vetor de preços, pode-se definir a linha orçamentária de cada agente e utilizar a condição de tangência para se encontrarem as cestas

de bens demandadas para cada um, respectivamente. Busca-se, assim, aquele vetor de preços capaz de compatibilizar a demanda por bens de ambos os agentes.<sup>15</sup>

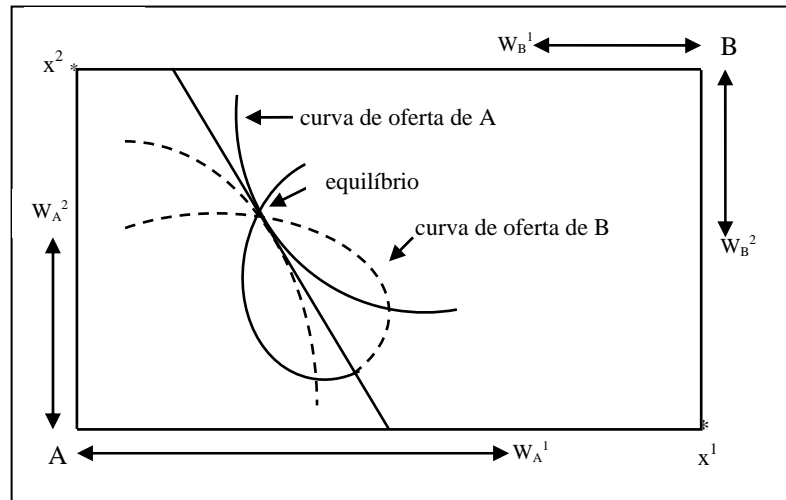


FIGURA 3: Exemplo ilustrativo do equilíbrio walrasiano na caixa de Edgeworth

Fonte: Varian (1984)

Analisando-se o equilíbrio do lado da oferta, como demonstrado na FIG. 3, e considerando-se que a curva de oferta descreve os pontos de tangência de um agente, o que, visto por outro ângulo são o conjunto de cestas por ele demandadas, o equilíbrio walrasiano dá-se no ponto no qual as curvas de oferta se interceptam. Nesse ponto, as cestas demandadas por cada agente são iguais às ofertas disponíveis.

Em síntese, pode-se definir o equilíbrio walrasiano da seguinte forma:

1. se  $\sum x_i = \sum W_i$ , ou seja, a oferta total é igual à demanda total, a alocação é factível; em outras palavras, a demanda excedente agregada é nula.
2. se  $x_i'$  é preferido pelo agente  $i$  para  $x_i$ , então  $p * x_i' > p * W_i$ , ou seja, cada agente está maximizando seu conjunto orçamentário.

<sup>15</sup> O equilíbrio walrasiano ocorre no ponto em que as curvas de indiferença dos agentes se tangenciam; também nesse ponto a taxa marginal de substituição de cada agente é igual à razão dos preços comuns a ambos.

Como salientado por Varian (1984), embora a hipótese dos preços como dados não seja plausível em algumas circunstâncias, o equilíbrio walrasiano é interessante, sobretudo por seu aspecto normativo. Sua analogia ao conceito de eficiência de Pareto parece clara, como exposto na subseção 1.2.3.

### 2.2.3 A eficiência de Pareto

Conceitualmente, a eficiência de Pareto pode ser apresentada de diversas maneiras distintas, tais como:

- uma alocação factível de  $x$  é uma alocação eficiente de Pareto se não houver outra alocação factível de  $x$  tal que todos os agentes prefiram  $x'$  a  $x$ ;
- não há uma alocação factível na qual todos os agentes estejam melhores;
- não há uma alocação factível em que um agente melhore sem que o outro piore.

Tais definições são equivalentes, sob a hipótese fraca de monotonicidade e continuidade das preferências. Do ponto de vista da continuidade, se há uma maneira de tornar um agente melhor sem piorar os demais, há uma maneira de melhorar todos, ou seja, se um agente pode se tornar melhor, então, por continuidade, esse agente pode deter um pouco mais de todos os bens e melhorar sua situação. No entanto, se ao invés disso, se redistribuir o excesso de bens entre os demais agentes, a hipótese de monotonicidade das preferências vai implicar que todos eles também melhorarão sua situação.

As alocações de Pareto podem ser visualizadas também na caixa de Edgeworth. A aplicação do conceito de eficiência de Pareto se dá no sentido de se testar se, após atingir o equilíbrio competitivo em que a demanda se iguala à oferta, os agentes ainda desejarem fazer mais alguma troca (?). Dito de outra maneira, a questão que se coloca é se o equilíbrio de mercado é eficiente no sentido de Pareto.

No contexto da caixa de Edgeworth, as curvas de indiferença dos dois agentes têm que ser tangentes em qualquer alocação eficiente de Pareto.<sup>16</sup> O conjunto de todos os pontos eficientes no sentido de Pareto é denominado conjunto de Pareto, ou curva de contrato<sup>17</sup>.

<sup>16</sup> É possível ter alocações no sentido de Pareto nos lados da caixa de Edgeworth, ou seja, onde as curvas não se tangenciam, sendo denominados de casos de fronteira.

<sup>17</sup> O termo “curva de contrato” vem da noção de que todos os “contratos finais” (arranjos, etc) de troca têm de se localizar no conjunto de Pareto. Caso contrário, ainda se estaria na situação de possibilidade de trocas e, por conseguinte, de melhoria.

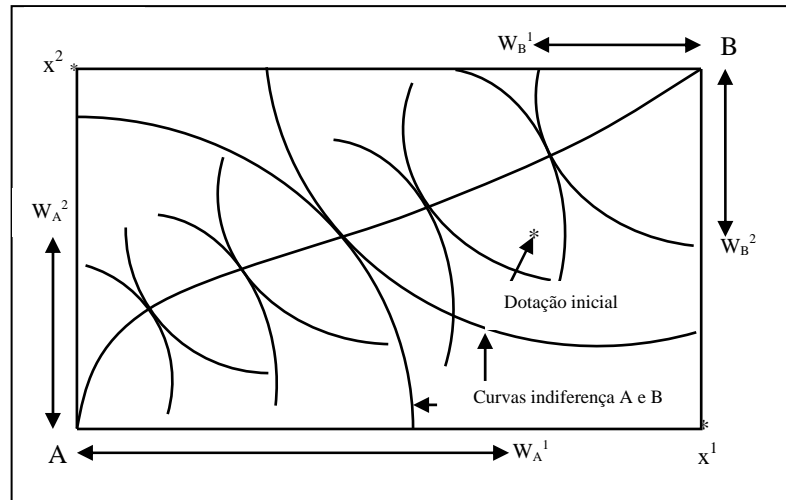


FIGURA 4: Exemplo ilustrativo da eficiência de Pareto  
Fonte: Varian (1984)

Para se demonstrar as alocações de eficiência de Pareto na caixa de Edgeworth tem que se fixar a função utilidade de um agente em um dado nível e maximizar a função utilidade do outro agente, sujeita à(s) restrição(ões). De maneira formal, o problema pode ser apresentado como:

$$\begin{aligned} & \max u_1(x_1) \\ & \text{sujeito a } \begin{cases} u_2(x_2) \geq u \\ x_1 + x_2 = W_1 + W_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Para cada valor da função utilidade do agente B tem-se uma alocação em que a função utilidade do agente A é maximizada e, por conseguinte, é satisfeita a condição de tangência. Nesse ponto de tangência, a taxa marginal de substituição entre os dois bens é igual entre os dois agentes. Em outras palavras, ocorre onde a curva de indiferença do agente A alcança a mais elevada curva de indiferença do agente B.

A linha que interliga todos os pontos de tangência entre as curvas de indiferença dos dois agentes é denominada conjunto de Pareto, ou curvas de contrato.

Por fim, como dito no final da subseção anterior, parece haver uma semelhança par-a-par entre o conjunto dos equilíbrios walrasianos e o conjunto das alocações eficientes de Pareto. Cada equilíbrio walrasiano satisfaz as considerações de primeira ordem para a maximização da preferência, em que a taxa marginal de substituição entre dois bens, para cada agente, é

igual à razão dos preços entre os respectivos bens. E, dado que todos os agentes têm a mesma taxa de preços no equilíbrio walrasiano, todos os agentes devem ter a mesma taxa marginal de substituição.

Do lado da eficiência de Pareto, a analogia apresenta-se, também, por meio da igualdade na taxa marginal de substituição ao longo dos dois agentes e, por conseguinte, a taxa de preços também é comum.

Da correspondência entre o equilíbrio walrasiano e a eficiência de Pareto, surge um importante teorema, denominado de “Primeiro teorema do bem-estar econômico”, Varian (2003), o qual afirma que:

*Se  $(x, p)$  é um equilíbrio walrasiano, então  $X$  é Pareto eficiente.*

Varian (2003) demonstra, por contradição, que um mercado em equilíbrio, também o é no sentido de eficiência de Pareto. Assim, dizer que um equilíbrio de mercado não é eficiente no sentido de Pareto significa dizer que há outra(s) alocação(ões) factível(is). Usando a notação anterior para a definição do equilíbrio walrasiano e supondo que  $x'$  é uma alocação factível a qual todos os agentes preferem para  $x$ , logo a propriedade 2 do equilíbrio walrasiano<sup>18</sup> (ver subseção anterior) é representada por:

$$p^* x'_i > p^* W_i \quad \text{para } i = 1, \dots, n$$

pode ser reescrita conforme a caixa de Edgeworth, em que

$$y_A^1 + y_B^1 = w_A^1 + w_B^1 \quad \text{e} \quad y_A^2 + y_B^2 = w_A^2 + w_B^2$$

são as alocações factíveis e,

---

<sup>18</sup> Propriedade 2: se  $x'_i$  é preferido pelo agente  $i$  para  $x_i$ , então  $p^* x'_i > p^* W_i$ , ou seja, cada agente está maximizando seu conjunto orçamentário.



$$(y_A^1, y_A^2) \succ A(x_A^1, x_A^2) \text{ e } (y_B^1, y_B^2) \succ B(x_B^1, x_B^2)$$

mas, as alocações  $y$ , tanto do agente A quanto do agente B, são preferidas em relação às alocações  $x$ .

Pela definição de factibilidade, tem-se que, se a alocação  $y$  for melhor do que a cesta que o agente escolhe, então a referida alocação deve custar mais, ou seja:

$$p_1 y_A^1 + p_2 y_A^2 > p_1 w_A^1 + p_2 w_A^2$$

e,

$$p_1 y_B^1 + p_2 y_B^2 > p_1 w_B^1 + p_2 w_B^2$$

Somando-se essas duas equações tem-se que:

$$\begin{aligned} p_1 y_A^1 + p_2 y_A^2 + p_1 y_B^1 + p_2 y_B^2 &> p_1 w_A^1 + p_2 w_A^2 + p_1 w_B^1 + p_2 w_B^2 = \\ p_1 (y_A^1 + y_B^1) + p_2 (y_A^2 + y_B^2) &> p_1 (w_A^1 + w_B^1) + p_2 (w_A^2 + w_B^2) \end{aligned}$$

Substituindo-se pelas equações de factibilidade, tem-se que:

$$p_1 (w_A^1 + w_B^1) + p_2 (w_A^2 + w_B^2) > p_1 (w_A^1 + w_B^1) + p_2 (w_A^2 + w_B^2)$$

o que é uma contradição, uma vez que ambos os lados são iguais.

### 2.2.3.1 Conceito de Dominância

Subjacente ao conceito de eficiência de Pareto encontra-se o conceito de dominância. Como definido em Deb (2001), suponha a existência de  $M$  funções-objetivo, cujo conceito de dominância possa ser assim definido: “*uma solução*  $x^{(1)}$  *domina a outra solução*  $x^{(2)}$  *se as seguintes condições forem verdadeiras:*

- a solução  $x^{(1)}$  não é pior que  $x^{(2)}$ , em todos os objetivos, ou  $f_j(x^{(1)}) \geq f_j(x^{(2)})$  para todo  $j=1,2,\dots,M$ ;
- a solução  $x^{(1)}$  é estritamente melhor do que  $x^{(2)}$ , em ao menos um objetivo, ou  $f_j(x^{(1)}) < f_j(x^{(2)})$  para ao menos um  $j \in \{1,2,\dots,M\}$ .

Se algumas das condições acima forem violadas, a solução  $x^{(1)}$  não domina a solução  $x^{(2)}$ . Se  $x^{(1)}$  domina a solução  $x^{(2)}$ , (matematicamente,  $x^{(1)} \prec x^{(2)}$ , para um problema de minimização), pode-se afirmar, que:

- $x^{(2)}$  é dominado por  $x^{(1)}$ ;
- $x^{(1)}$  é não-dominado por  $x^{(2)}$ ;
- $x^{(1)}$  é não-inferior a  $x^{(2)}$ .

Graficamente tem-se, a seguir, a ilustração do conceito de dominância para uma situação com cinco soluções factíveis no espaço objetivo. Para o exemplo em questão, a função-objetivo 1 busca a maximização, enquanto a função-objetivo 2 busca a minimização.

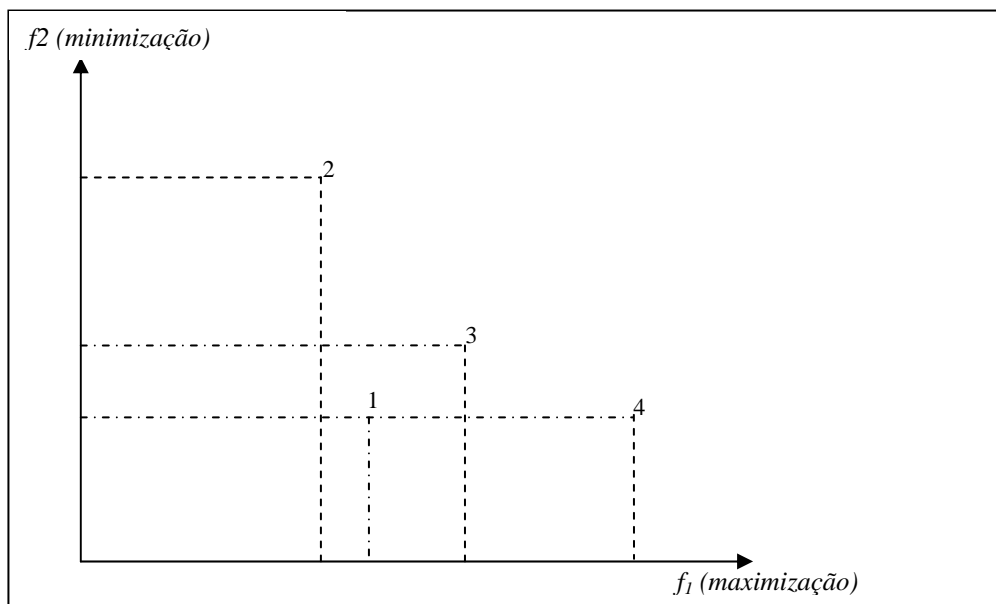


GRÁFICO 1: Ilustração de um problema de otimização multiobjetivo  
Fonte: Deb (2001)

O ponto 2 é dominado por todos os demais nos dois objetivos. O ponto 1 domina o ponto 3 na função-objetivo  $f_2$ , mas não o domina em  $f_1$ . O ponto 3, por sua vez, é dominado pelo ponto 4 nos dois objetivos. Já o ponto 4 domina o ponto 1 no primeiro objetivo, mas não é dominado por 1 no segundo objetivo, sendo igual a esse ponto. Assim, dentre os pontos factíveis no espaço objetivo, o ponto 4 domina todos os demais, em ambos os objetivos simultaneamente. Configura-se, então, o ponto 5 como aquele de dominância sobre os demais, por atender às duas condições de dominância exigidas pela definição conceitual apresentada.

Em síntese, o conceito de dominância permite que se comparem soluções que envolvam objetivos múltiplos, sendo a razão pela qual a maioria dos métodos de otimização multiobjetivo o utiliza, na busca por soluções não-dominadas.

Às vezes, a relação de dominância entre duas soluções é classificada como uma *fraca relação de dominância*. Conceitualmente,

*uma solução  $x^{(1)}$  domina fortemente uma solução  $x^{(2)}$  ( $x^{(1)} \prec x^{(2)}$ ) se a solução  $x^{(1)}$  for estritamente melhor que a solução  $x^{(2)}$  em todos os  $M$  objetivos.*

Pelo exemplo acima (GRÁF.1), a solução 4 não domina *fortemente* a solução 1, mas *fracamente*. Já em relação à solução 3, diz-se que a solução 4 a domina fortemente, uma vez que é melhor em ambos os objetivos. Da definição de dominância fraca, extrai-se a definição de dominância:

*entre um conjunto de soluções  $P$ , o conjunto de soluções fracas não-dominadas é aquele em que não é fortemente dominado por nenhum membro do conjunto  $P$ .*

### 2.2.3.2 Propriedade da relação de dominância

De acordo com Deb (2001), há três possibilidades, ao se investigar a relação de dominância entre 2 (duas) soluções factíveis, a constar: (i) a solução 1 domina a solução 2; (ii) a solução 1 é dominada pela solução 2; (iii) as soluções 1 e 2 não dominam uma à outra, ou seja, não há dominância entre ambas. Ainda segundo o autor, quatro propriedades da relação de dominância devem ser consideradas:

- *reflexividade*: a relação de dominância é não-reflexiva, uma vez que qualquer solução  $p$  não a domina, de acordo com a definição de dominância; a segunda condição da relação de dominância não permite que essa propriedade seja satisfeita.

- *simetria*: a relação de dominância é não simétrica, porque  $p \prec q$  não implica que  $q \prec p$ . Assim, se  $p$  domina  $q$ , então  $q$  não-domina  $p$ , e a relação de dominância é assimétrica.
- *anti-simetria*: uma vez que a relação de dominância é não simétrica, não pode ser anti-simétrica.
- *transitividade*: a relação de dominância é transitiva, porque, se  $p \prec q$  e  $q \prec r$ , então  $p \prec r$ . Se a solução  $p$  não-domina a solução  $q$ , isso não significa que a solução  $q$  domina  $p$ .

### 2.2.3.3 Terminologias de Pareto

Várias são as maneiras como os autores definem as terminologias de Pareto. Nesse trabalho optou-se pelas definições encontradas em Deb (2001) e Coello Coello *et al.* (2007) que abordam o conceito com base na relação de dominância, anteriormente explicada.

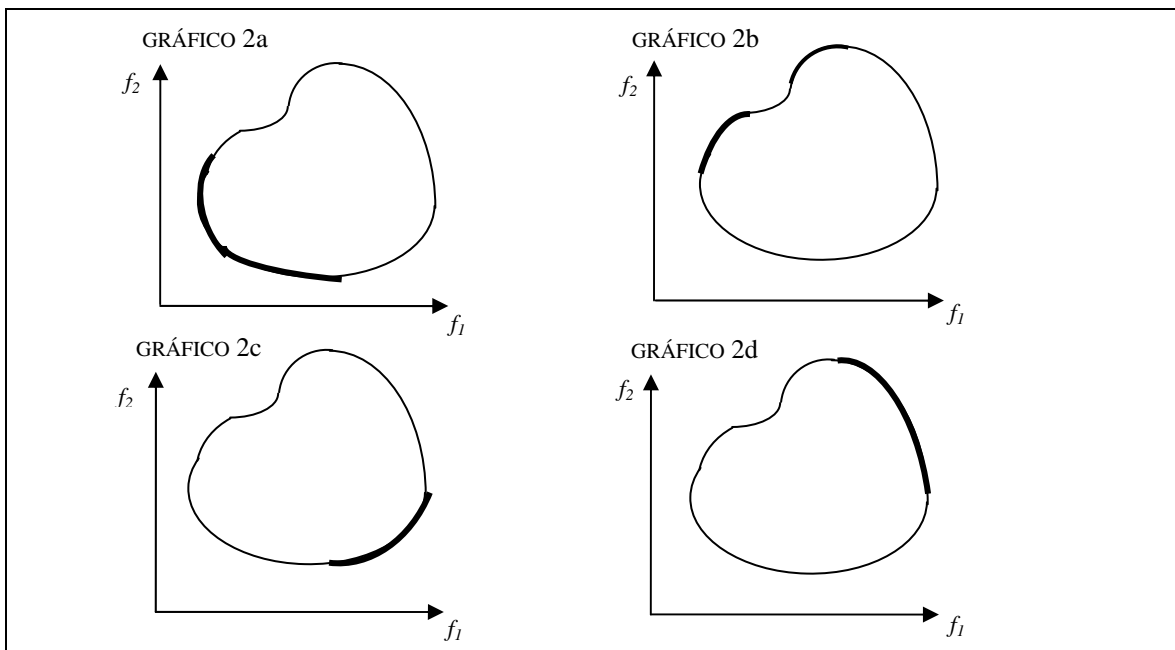
A partir do conceito de dominância, deriva-se a definição de conjunto não-dominado, o qual constitui-se naquele conjunto  $P'$ , dentro um conjunto de soluções  $P$ , cujas soluções não são dominadas por nenhum outro conjunto de soluções de  $P$ . Formalmente, conforme Coello Coello *et al.* (2007), o conceito de Dominância de Pareto pode ser apresentado como “*um vetor  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$  domina outro vetor  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_k)$ , ou seja,  $\mathbf{u} \prec \mathbf{v}$  se, e somente se,  $\mathbf{u}$  é parcialmente menos do que  $\mathbf{v}$ , isto é,  $\forall i \in \{1, \dots, k\}, u_i \leq v_i \wedge \exists i \in \{1, \dots, k\} : u_i < v_i$ .*”

Do conceito de dominância define-se o conceito de Conjunto Ótimo de Pareto para um dado problema multiobjetivo representado por  $F(\mathbf{x})$ , como:

$$P^* := \{x \in \Omega \mid \neg \exists x' \in \Omega F(x') \prec F(x)\}.$$

As soluções ótimas de Pareto são aquelas dentro do espaço de decisão, cujo vetor objetivo correspondente não pode ser melhorado. Tais soluções podem ser também denominadas de não-inferiores, admissíveis, ou eficientes, sendo representadas por  $P^*$  e seus vetores de não-dominados.

Os quatro gráficos a seguir ilustram conjuntos ótimos de Pareto, com curvas contínuas para quatro diferentes cenários, com dois objetivos cada. O GRÁF. 2a minimiza as duas funções-objeto e a curva sólida demarca o conjunto de soluções ótimas de Pareto. O GRÁF. 2b minimiza a função  $f_1$  e maximiza a função  $f_2$ . O conjunto ótimo de Pareto, para esse caso, é uma união desconectada de duas regiões ótimas de Pareto. Contrariamente, o GRÁF. 2c busca maximizar a função  $f_1$  e minimizar a função  $f_2$  e o GRÁF. 2d busca a região que maximiza simultaneamente as duas funções.



GRÁFICOS 2a-2d: Conjuntos ótimos de Pareto com curvas contínuas  
Fonte: Deb (2001)

Se, para todo membro  $x$ , no conjunto  $\underline{P}$ , não houver uma solução  $y$  dominando qualquer membro deste conjunto na vizinhança de  $x$ , tal que  $\|y - x\|_{\infty} \leq \varepsilon$ , onde  $\varepsilon > 0$ , então as soluções pertencentes ao conjunto  $\underline{P}$  constituem um **conjunto local ótimo de Pareto**. Por conseguinte, o conjunto não-dominado do todo o espaço de busca factível é o **conjunto global ótimo de Pareto**.

Da definição de conjunto ótimo de Pareto, chega-se ao conceito de Fronteira de Pareto,  $FP^*$ , definido por Coello Coello *et al.* (2007) como:

$$FP^* := \{u = F(x) | x \in P^*\}$$

onde, para um dado problema multiobjetivo cujas funções-objetivo são representadas por  $F(x)$ , e o conjunto ótimo de Pareto por  $P^*$ , os vetores não-dominados são conjuntamente chamados de Fronteira de Pareto,  $FP^*$ . Assim, essa formulação diz que a  $FP^*$  produz todos os possíveis vetores-objetivo dentre todas as soluções possíveis em  $\Omega$  (ver definição de Conjunto Ótimo de Pareto).

Em termos práticos, a maneira mais comum de se gerar a Fronteira de Pareto é calcular um número suficiente de pontos em  $\Omega$  e sua correspondência em  $f(\Omega)$ , determinando os pontos não-dominados e a respectiva Fronteira de Pareto.

### 2.3 Problemas de otimização mono e multiobjetivos

Existem diferenças fundamentais nos princípios relativos aos problemas de otimização mono e multiobjetivos. Como mencionado por Deb (2001), (i) no problema de otimização monoobjetiva, a tarefa básica é encontrar uma solução que otimize a função-objetivo; enquanto no problema multiobjetivo, a tarefa básica é encontrar as soluções ótimas correspondentes a cada função-objetivo; (ii) na otimização multiobjetivo, as funções-objetivo constituem-se em um espaço multidimensional em adição ao espaço de decisão (das variáveis); e, (iii) a otimização multiobjetivo pode ser denominada de vetor de otimização, devido ao fato de se otimizar um vetor de objetivos e não simplesmente um único objetivo. É importante ressaltar que só existem múltiplas soluções ótimas de Pareto para um problema, se os objetivos forem conflitantes entre si. Tais objetivos conflitantes são usualmente conhecidos como *trade-off*. Assim, por exemplo, quando dois objetivos conflitantes estão sendo avaliados, não pode haver uma solução ótima única que otimize simultaneamente ambos os objetivos. O resultado consiste em um conjunto de soluções ótimas com uma variação de níveis de valores objetivos.

Formalmente, suponha um problema de otimização multiobjetivo com  $m$  funções-objetivo sujeitas às seguintes restrições:

$$\begin{array}{ll} \min/\max f_m(x) & m = 1, 2, \dots, M \\ \text{sujeito a } \left\{ \begin{array}{ll} g_j(x) \geq 0, & j = 1, 2, \dots, J; \\ h_k(x) = 0, & k = 1, 2, \dots, K; \\ x_i \leq x_i \leq x_i^u & i = 1, 2, \dots, n. \end{array} \right. \end{array}$$

A solução  $x$  de minimização ou maximização é um vetor de  $n$  variáveis de decisão,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ . O último conjunto de variáveis restritivas (variáveis limites/fronteira) determina os valores mínimo,  $x_i^l$ ; e máximo,  $x_i^u$ , do vetor  $x$ . Para cada solução  $x$  no espaço de decisão, existe um ponto correspondente no espaço objetivo, denotado por  $f(x) = z = (z_1, z_2, \dots, z_M)^T$ .

Assim, pode-se afirmar que dois espaços Euclidianos são considerados em problemas de otimização multiobjetivos:

- o espaço  $n$ -dimensional de decisão das variáveis no qual cada eixo de coordenada corresponde a um componente do vetor  $x$ ;
- o espaço  $k$ -dimensional das funções-objetivo no qual cada eixo de coordenada corresponde a um componente do vetor  $f_k(x)$ .

Os GRÁF. 3a e 3b representam esses dois espaços, ou seja, o espaço de decisão de variáveis e o seu correspondente espaço objetivo. Cada ponto no primeiro espaço representa uma solução e um ponto correspondente no segundo espaço, o qual, por seu turno, determina a qualidade deste solução em termos de valores de função-objetivo. Todas as soluções factíveis no espaço de decisão podem ser mapeadas para uma solução no espaço objetivo factível; ilustrativamente, uma solução factível encontrada,  $z$ , corresponde ao ponto  $x$  do GRÁF. 3a.

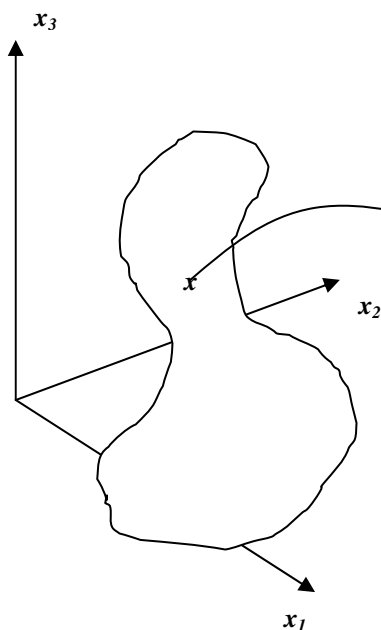


GRÁFICO 3a: O espaço de decisão

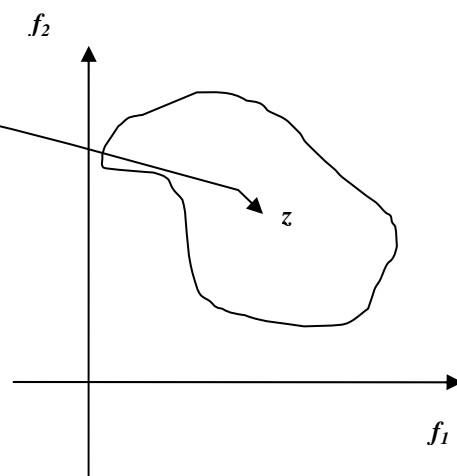


GRÁFICO 3b: O espaço objetivo

Fonte: Deb (2001)

Fonte: Deb (2001)

### 2.3.1 Diferenças conceituais básicas entre otimização mono e multiobjetivo

Deb (2001) destaca que existem três diferenças fundamentais entre a otimização mono e multiobjetivo. Basicamente:

- a otimização monoobjetiva trata de um único objetivo, ao passo que na otimização multiobjetivo busca-se solucionar dois ou mais objetivos. Embora o espaço de busca no problema monoobjetivo possa conter um número de soluções ótimas locais, o objetivo é encontrar a solução ótima global.<sup>19</sup> Entretanto, na otimização multiobjetivo, há dois objetivos igualmente importantes e uma diversidade de conjuntos de soluções obtidas próximas à fronteira de Pareto provê uma diversidade de soluções ótimas, trocando-se os objetivos. Em outras palavras, a solução para um problema de otimização multiobjetivo deve ser capaz de convergir para a fronteira de Pareto e, simultaneamente manter um conjunto diversificado de soluções.
- na otimização monoobjetiva há somente um espaço de busca, ou seja, o espaço de decisão, no qual se aceitam ou se rejeitam as soluções, baseando-se nos valores de suas funções-objetivo. Na otimização multiobjetivo, há, também, o espaço objetivo (ou de critério). Embora esses espaços sejam relacionados por um único mapeamento, freqüentemente não-linear, entre eles, suas propriedades também não costumam ser similares.<sup>20</sup>
- dada a complexidade dos problemas multiobjetivos, existem métodos de resoluções artificiais (predefinidas), sendo os mais difundidos a “abordagem da soma ponderada” e o “método da restrição  $\epsilon$ ”.<sup>21</sup> No processo de otimização multiobjetivo, para se

<sup>19</sup> Há uma exceção, a qual consiste no caso da otimização multimodal. Conceitualmente, de acordo com Deb (2001), o objetivo do problema de otimização multimodal é encontrar soluções ótimas múltiplas tendo também igual ou não valores de função-objetivo. Isto significa que, para se encontrar a(s) solução(ões) ótima(s) global(is) tem-se que encontrar outras soluções ótimas locais.

<sup>20</sup> Como ilustra Deb (2001), mesmo que haja uma proximidade de soluções em um espaço, isso não significa que há uma proximidade no outro espaço. Segundo o autor, em qualquer algoritmo de otimização, a busca se dá no espaço de decisão, embora os procedimentos possam ser traçados no espaço objetivo.

<sup>21</sup> Segundo Deb (2001), na *abordagem da soma ponderada*, os objetivos múltiplos são ponderados e somados para se criar uma função-objetivo conjunta. A otimização dessa função resulta na otimização de funções-objetivo individuais. Já no método  *$\epsilon$ -constraint*, escolhe-se uma das funções-objetivo e tratam-se as demais como funções restritivas, limitando, cada uma, dentro de certos limites predefinidos. Tal técnica também converte um problema de otimização multiobjetivo em um problema monoobjetivo, cujo resultado depende dos limites estipulados para as restrições.



encontrarem as soluções ótimas múltiplas de Pareto, eliminam-se estes métodos prévios de resolução e o conceito de dominância ajuda a superar algumas dificuldades, tais como simulações múltiplas, resoluções predefinidas, dentre outras. Tanto o conceito de dominância quanto as terminologias que envolvem o conceito de Pareto já foram discutidas na subseção 1.2.3.

Para Coello Coello (2007), partindo-se de um problema monoobjetivo, no qual se tem uma única solução para um problema multiobjetivo, com um conjunto de soluções encontradas através da Teoria de Otimização de Pareto, é de extrema relevância o papel do tomador de decisões, responsável pela escolha dos valores de  $x_i^*$ . A seleção de tais valores é essencialmente um *trade-off* de uma solução completa de valores de  $x$  em relação à outra no espaço multiobjetivo. Os autores definem o problema de otimização monoobjetivo como:

(...) as minimizing (or maximizing)  $f(x)$  subject to  $g_i(x) \leq 0$ ,  $i=\{1,2,\dots,m\}$ , and  $h_j(x) = 0$ ,  $j=\{1,2,\dots,p\}$   $x \in \Omega$ . A solution minimizes (or maximizes) the scalar  $f(x)$  where  $x$  is a  $n$ -dimensional decision variable vector  $x = \{x_1,\dots,x_n\}$  from some universe  $\Omega$ . It is noted that  $g_i(x) \leq 0$  and  $h_j(x) = 0$  represent constraints that must be fulfilled while optimizing (minimizing or maximizing)  $f(x)$ .  $\Omega$  contains all possible  $x$  that can be used to satisfy an evaluation of  $f(x)$  and its constraints. Of course,  $x$  can be a vector of continuous or discrete variables as well as  $f$  being continuous or discrete. (COELLO COELLO *et al*, 2007, p.4)<sup>22</sup>

A definição para o problema de otimização multiobjetivo é dada pela:

(...) minimizing (or maximizing)  $F(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$  subject to  $g_i(x) \leq 0$ ,  $i=\{1,2,\dots,m\}$ , and  $h_j(x) = 0$ ,  $j=\{1,2,\dots,p\}$   $x \in \Omega$ . An multiobjective problem solution minimizes (or maximizes) the components of a vector  $F(x)$ , where  $x$  is a  $n$ -dimensional decision variable vector  $x=(x_1,\dots,x_n)$  from some universe  $\Omega$ . It is noted that  $g_i(x) \leq 0$  and  $h_j(x) = 0$  represent constraints that must be fulfilled while minimizing (or maximizing)  $F(x)$  and  $\Omega$  contains all possible  $x$  that can be used to satisfy an evaluation of  $F(x)$ .

Thus, a multiobjective problem consists of  $k$  objectives reflected in the  $k$  objective functions,  $m+p$  constraints on the objective functions and  $n$  decision variables. The  $k$  objective functions may be linear or nonlinear and continuous or discrete in nature. The evaluation functions,  $F: \Omega \rightarrow \Lambda$  is a mapping from the vector of decision variables ( $x = x_1,\dots,x_n$ ) to output vectors ( $y = a_1,\dots,a_k$ ). Of course, the vector of decision variables  $x_i$  can also be continuous or discrete. (COELLO COELLO *et al.*, 2007, p.8)<sup>23</sup>

<sup>22</sup> um problema de minimização, ou maximização de  $f(x)$  sujeito a  $g_i(x) \leq 0$ ,  $i=\{1,2,\dots,m\}$ , e  $h_j(x) = 0$ ,  $j=\{1,2,\dots,p\}$   $x \in \Omega$ . Uma solução minimiza (maximiza) o escalar  $f(x)$  onde  $x$  é um vetor variável de decisão  $n$ -dimensional,  $x = \{x_1,x_2,\dots,x_n\}$  de algum universo  $\Omega$ . As restrições  $g_i(x) \leq 0$  e  $h_j(x) = 0$  devem ser atendidas para que se minimize (maximize)  $f(x)$ .  $\Omega$  contém todos os possíveis  $x$  que podem ser utilizados para satisfazer uma avaliação de  $f(x)$  e suas restrições. Naturalmente que  $x$  pode ser um vetor de variáveis discretas ou contínuas, assim como a função  $f$ , respectivamente. (Tradução nossa)

<sup>23</sup> “(...) minimização (ou maximização)  $F(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$  sujeito a  $g_i(x) \leq 0$ ,  $i=\{1,2,\dots,m\}$ , e  $h_j(x) = 0$ ,  $j=\{1,2,\dots,p\}$   $x \in \Omega$ . A solução para um problema multiobjetivo minimiza (ou maximiza) os componentes do

## 2.3.2 Definições conceituais básicas

### 2.3.2.1 Concavidade, convexidade e derivadas de funções de uma variável

De Coello Coello *et al.* (2007, p.8-9) pode se extrair a seguinte definição para convexidade:

(...) a function  $\phi(x)$  is called **convex** over the domain of  $\mathbf{R}$  if for any two vectors  $x_1$  and  $x_2 \in \mathbf{R}$ ,

$$\phi(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) \leq \theta\phi(x_1) + (1 - \theta)\phi(x_2)$$

where  $\theta$  is a scalar in the range  $0 \leq \theta \leq 1$ .

A convex function cannot have any value larger than the function values obtained by linear interpolation between  $\phi(x_1)$  and  $\phi(x_2)$ .<sup>24</sup>

Analogamente, se a desigualdade reversa da equação se mantém, a função é denominada côncava. Assim,  $\phi(x)$  é côncava se  $-\phi(x)$  for convexa.

Ainda segundo Coello Coello *et al.* (2007, p.9)

“(...) a set of points (or region) is defined as a convex set in  $n$ -dimensional space if, for all pairs of two points  $x_1$  and  $x_2$ , in the set, the straight-line segment joining them is also entirely in the set. Thus, every point  $x$ , where  $x = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2$ , is also in the set.”<sup>25</sup>

Ilustrativamente, há os seguintes exemplos de conjuntos convexos e não-convexos, na FIG.5 a seguir.

vector  $F(\mathbf{x})$ , onde  $\mathbf{x}$  é um vetor de variável de decisão  $n$ -dimensional,  $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n)$  de algum universo  $\Omega$ . As restrições  $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$  e  $h_j(\mathbf{x}) = 0$  devem ser atendidas para que se minimize (maximize)  $F(\mathbf{x})$  e  $\Omega$  contenha todos os possíveis  $\mathbf{x}$  que possam ser utilizados para satisfazer uma avaliação de  $F(\mathbf{x})$ . Assim, um problema de otimização multiobjetiva consiste de  $k$  objetivos refletidos em  $k$  funções-objetivo,  $m+p$  restrições às funções-objetivo e  $n$  variáveis de decisão. A função-objetivo  $k$  pode ser linear ou não linear e de natureza contínua ou discreta. A função  $F: \Omega \rightarrow \Lambda$  é um mapeamento de vetor de variáveis de decisão ( $x = x_1, \dots, x_n$ ) para vetores de resultados ( $y=a_1, \dots, a_k$ ). O vetor de variáveis de decisão pode ser contínuo ou discreto. (Tradução nossa)

<sup>24</sup> A função  $\phi(x)$  é denominada convexa sob o domínio de  $\mathbf{R}$ , se para quaisquer dois vetores  $x_1$  e  $x_2 \in \mathbf{R}$ , tal que:  $\phi(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) \leq \theta\phi(x_1) + (1 - \theta)\phi(x_2)$  onde:  $\theta$  é um escalar que pode variar entre  $0 \leq \theta \leq 1$ . Uma função convexa não pode ter nenhum valor maior do que os valores da função obtidos através da interpolação linear entre  $\phi(x_1)$  e  $\phi(x_2)$ . (Tradução nossa)

<sup>25</sup> Um conjunto de pontos ou região é definido como um conjunto convexo no espaço  $n$ -dimensional se, para todo par de dois pontos  $x_1$  e  $x_2$ , uma linha reta unindo-os está totalmente dentro do referido conjunto. Assim, todo ponto  $x$  onde  $x = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2$ , em que  $0 \leq \theta \leq 1$ , está também no conjunto. (Tradução nossa)

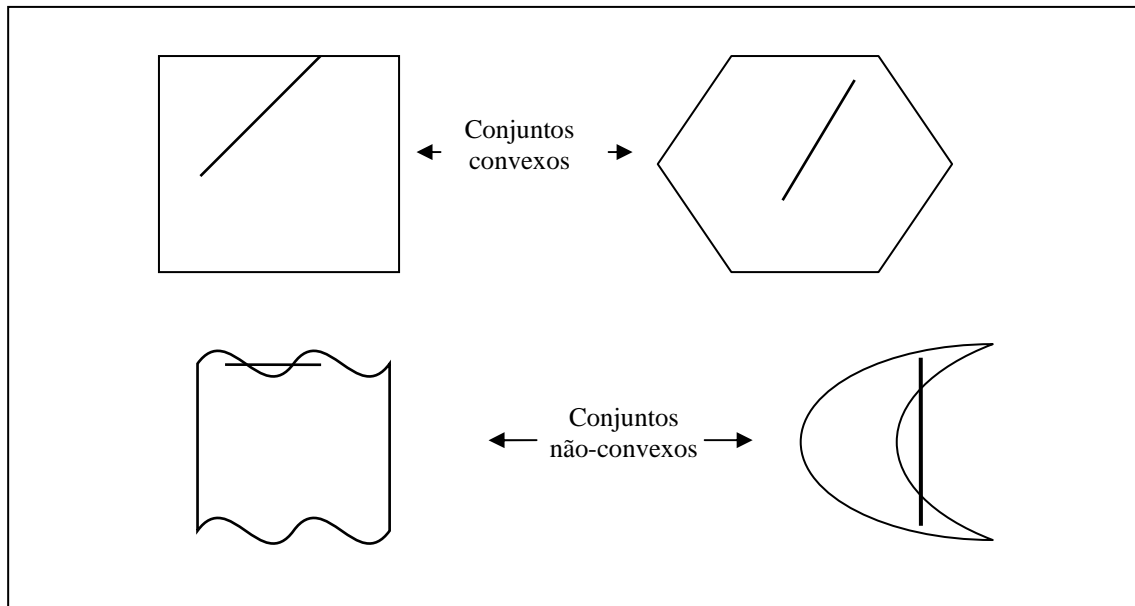


FIGURA 5 – Exemplos ilustrativos de conjuntos convexos e não-convexos  
 Fonte: Coello Coello *et al.* (2007)

Com base na explanação de Jehle e Reny (2001) apresenta-se o teorema para definição de convexidade tal como:

*seja D um intervalo da reta real para o qual uma função f seja de classe  $C^2$ . A função f será côncava se  $\frac{\partial^2(x)}{\partial x \partial x} \leq 0$  e será estritamente côncava, caso  $\frac{\partial^2(x)}{\partial x \partial x} < 0$ .*

*Analogamente, a função f será convexa, se  $\frac{\partial^2(x)}{\partial x \partial x} \geq 0, \forall x \in D$ , e será estritamente convêxa caso  $\frac{\partial^2(x)}{\partial x \partial x} > 0$ .*

### 2.3.2.2 Concavidade, convexidade e derivadas de funções de várias variáveis

No caso de funções com mais de uma variável, ou seja,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , é a natureza da matriz Hessiana (**H**) dessa função que deve informar sobre a concavidade ou sobre a convexidade da referida função. De acordo com a definição de Jehle e Reny (2001), o teorema para várias funções pode ser assim apresentado:

seja D um subconjunto convexo de  $\mathbf{R}^n$  com um interior não-vazio, em que uma função  $f(x)$  seja duplamente derivável, tem-se as seguintes situações em que se definem as funções côncava e convexa:

- se  $\mathbf{H}(x)$  for semidefinida negativa, ou seja, se seus menores principais alternarem de sinal, sendo  $D_i(x) \leq 0, \forall i$  ímpar, e  $D_i(x) \geq 0, \forall i$  par, a função  $f(x)$  é côncava;
- se  $\mathbf{H}(x)$  for definida negativa, ou seja, se seus menores principais alternarem de sinal, sendo  $D_i(x) < 0, \forall i$  ímpar, e  $D_i(x) > 0, \forall i$  par, a função  $f(x)$  é estritamente côncava;
- se  $\mathbf{H}(x)$  for semidefinida positiva, isto é, se seus menores principais apresentarem o padrão de sinal em que  $D_i(x) \geq 0, \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$ , a função  $f(x)$  é convexa;
- se  $\mathbf{H}(x)$  for definida positiva, ou seja, se seus menores principais forem todos estritamente positivos, ou seja,  $D_i(x) > 0, \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$ , a função  $f(x)$  é estritamente convexa;
- se alguns dos menores principais de  $\mathbf{H}(x)$ , forem diferentes de zero,  $D_i(x) \neq 0$ , mas não seguirem nenhum padrão, então, diz-se que a matriz  $\mathbf{H}(x)$  é indefinida.

### 2.3.2.3 Máximos e mínimos locais e globais

#### 2.3.2.3.1 Funções com uma Variável

Esta subseção lança mão da terminologia apresentada por Jehle e Reny (2001), para a definição de pontos de máximo e mínimo locais e globais. Formalmente, suponha uma função de classe  $C^2$  de uma única variável  $f(x)$  de domínio  $D$ . Essa função atinge um ponto de:

- **máximo local** em  $x^*$ , se, e somente se,  $f(x^*) \geq f(x), \forall x$  em alguma vizinhança de  $x^*$ ;
- **máximo global** em  $x^*$ , se, e somente se,  $f(x^*) \geq f(x), \forall x$  no domínio de  $D$ ;
- **mínimo local** em  $\tilde{x}$ , se, e somente se,  $f(\tilde{x}) \leq f(x), \forall x$  em alguma vizinhança de  $\tilde{x}$ ;
- **mínimo global** em  $\tilde{x}$ , se, e somente se,  $f(\tilde{x}) \leq f(x), \forall x$  no domínio de  $D$ .

Os pontos de máximo ou mínimo global podem ser únicos, ou não. Ademais, podem ser ótimos interiores, ou ótimos de fronteira.

Seja uma função  $f(x)$  de classe  $C^2$ , de uma única variável de domínio  $D$ . As condições de primeira ordem e segunda ordem, respectivamente, para a ocorrência dos pontos ótimos podem ser assim resumidas:

- **ponto máximo:** a condição de primeira ordem, para que  $f(x)$  atinja um máximo em  $x^*$ , é dada por  $\frac{\partial f(x^*)}{\partial x} = 0$ ;  
a condição de segunda ordem, para que  $f(x)$  atinja um máximo em  $x^*$ , é dada por  $\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^2} \leq 0$ ;
- **ponto mínimo:** a condição de primeira ordem, para que  $f(x)$  atinja um mínimo em  $\tilde{x}$ , é dada por  $\frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x} = 0$ ;  
a condição de segunda ordem, para que  $f(x)$  atinja um mínimo em  $\tilde{x}$ , é dada por  $\frac{\partial^2 f(\tilde{x})}{\partial x^2} \geq 0$ .

#### 2.3.2.3.2 Funções com mais de uma variável

Suponha agora uma função  $f(x)$  de classe  $C^2$ , de  $n$  variáveis de domínio  $D \subset \mathbf{R}^n$ . Esta função atinge um ponto de:

- **máximo local** em  $x^*$ , se, e somente se,  $\exists \varepsilon > 0$ , tal que  $f(x^*) \geq f(x)$ ,  $\forall x \in B_\varepsilon(x^*)$ ;
- **máximo global** em  $x^*$ , se, e somente se,  $\exists \varepsilon > 0$ , tal que  $f(x^*) \geq f(x)$ ,  $\forall x$  no domínio de  $D$ ;
- **máximo local global** em  $x^*$  será único, se, e somente se,  $f(x^*) > f(x)$ ,  $\forall x \in B_\varepsilon(x^*)$ ,  $\forall x$  no domínio de  $D$ ;
- **mínimo local** em  $\tilde{x}$ , se, e somente se,  $\exists \varepsilon > 0$ , tal que  $f(\tilde{x}) \leq f(x)$ ,  $\forall x \in B_\varepsilon(\tilde{x})$ ,  $\forall x$  no domínio de  $D$ ;
- **mínimo global** em  $\tilde{x}$ , se, e somente se,  $\exists \varepsilon > 0$ , tal que  $f(\tilde{x}) < f(x)$ ,  $\forall x$  no domínio de  $D$ .

As condições *suficientes* de primeira e segunda ordem para se encontrarem os pontos ótimos de função com  $n$  variáveis utilizam a forma da matriz Hessiana (das derivadas segundas da função  $f(x)$ ) para indicar o tipo de ponto ótimo crítico  $x^*$  encontrado. Se a matriz Hessiana for:

- definida negativa, ou seja,  $(-1)^i D_i(x) > 0$ ,  $\forall i = 1, 2, 3, \dots, n$ , trata-se de uma função  $f(x)$  estritamente côncava, que atinge um ponto de máximo local, único e interior em  $x^*$ ;
- semidefinida negativa, ou seja,  $(-1)^i D_i(x) \geq 0$ ,  $\forall i = 1, 2, 3, \dots, n$ ,  $f(x)$  é uma função côncava, que atinge um ponto de máximo local e interior em  $x^*$ ;
- definida positiva, ou seja,  $D_i(x) > 0$ ,  $\forall i = 1, 2, 3, \dots, n$ ,  $f(x)$  consiste-se em uma função estritamente convexa, que atinge um ponto de mínimo local, único e interior em  $x^*$ ;
- semidefinida positiva, ou seja,  $D_i(x) \geq 0$ ,  $\forall i = 1, 2, 3, \dots, n$ ,  $f(x)$  configura-se como uma função convexa, que atinge um ponto de mínimo local e interior em  $x^*$ ;
- indefinida,  $f(x)$  não atinge nenhum ponto nem de mínimo, nem de máximo em  $x^*$ , correspondendo, assim, a um ponto de sela.

#### 2.4 O Processo de otimização condicionada

A resolução de problemas de otimização *sem* restrições exige simplesmente que se encontrem as derivadas parciais de primeira ordem, igualem-nas a zero e resolva-se o sistema de equações daí extraído. No entanto, é usual a existência de restrições às funções-objetivo que se deseja otimizar (maximizar ou minimizar) e os tipos básicos de restrições. Seus métodos de resolução mais usualmente utilizados são:

- método de Lagrange, para solucionar problemas com restrições na forma de *igualdade*;
- método de Kuhn-Tucker, para solucionar problemas com restrições (1) na forma de *desigualdade* e, (2) na forma de *não-negatividade*.

A descrição desses métodos é feita nas próximas subseções, com base nos livros de Jehle e Reny (2001), Deb (2001), Chankong e Haimes (1983) e Coello Coello *et al.* (2007).

### 2.4.1 Método de Lagrange: restrições com igualdade

Na visão de Jehle e Reny (2001), o método de Lagrange para a resolução de problemas de otimização com restrição pode ser caracterizado como “plausível em casos relativamente simples”, além de oferecer um “algoritmo” para se identificar o ponto de restrição em uma vasta gama de problemas.

O método pode ser assim sintetizado: suponha uma função-objetivo,  $f(x_1, x_2)$ , onde  $x_1$  e  $x_2$  são as variáveis de escolha, cuja função restritiva é  $g(x_1, x_2)$ . Formalmente, elabora-se o problema da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \max_{x_1, x_2} f(x_1, x_2) \\ & \text{sujeito a } g(x_1, x_2) \end{aligned}$$

A idéia básica do método é solucionar as equações, incluindo a função Lagrangeana (função que representa a restrição) e encontrar o ponto crítico da função-objetivo  $f(x_1, x_2)$  juntamente com a restrição  $g(x_1, x_2) = 0$ .

Na prática, o método de Lagrange consiste, inicialmente, em se multiplicar a equação restritiva por uma constante, lâmbda ( $\lambda$ ); adicionar este produto à função-objetivo; e construir uma nova função, denominada de função Lagrangiana. Essa nova função contém três variáveis e é assim representada:

$$L(x_1, x_2, \lambda) \equiv f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$$

A partir daí, inicia-se a determinação dos pontos críticos de  $L(\cdot)$ , com as derivadas parciais da função Lagrangiana:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} + \lambda^* \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} = 0 \quad (\text{eq.11})$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} + \lambda^* \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} = 0 \quad (\text{eq.12})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x_1^*, x_2^*) = 0 \quad (\text{eq.13})$$

Ao se resolverem essas três equações, (eq.11) a (eq.13), encontram-se os pontos críticos de  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  e  $\lambda^*$ , que solucionam simultaneamente o problema de otimização condicionada.

Um aspecto importante reside no fato de que as soluções para as condições de primeira ordem a fim de se otimizar uma função Lagrangeana também otimizam uma função-objetivo  $f(x_1, x_2)$ . Para isso, a diferencial total da função-objetivo  $f$  é também igual a zero, para, no mínimo todos os valores permitidos de  $dx_1$  e  $dx_2$  que satisfaçam a restrição. Os valores permitidos (possíveis) para  $dx_i$  são aqueles em que, após qualquer mudança em  $x_1$  e  $x_2$ , a função restritiva  $g(x_1, x_2)$  mantenha-se igual a zero, ou, que a diferencial total,  $dg$ , permaneça igual a zero.

Assim, supondo que  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  e  $\lambda^*$  satisfaçam as condições de primeira ordem para um ótimo de  $L$ , então  $dL$  deve ser igual a zero. A diferencial total da função Lagrangiana é:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial L}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda. \quad (\text{eq.14})$$

Substituindo-se as equações (eq.11)-(eq.13) em (eq.14) tem-se, para todo  $dx_1$ ,  $dx_2$  e  $d\lambda$ , a seguinte (eq.15a):

$$dL = \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} dx_2 + g(x_1^*, x_2^*) d\lambda + \lambda^* \left[ \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} dx_2 \right] = 0$$

Destaca-se, também, que, se  $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x_1^*, x_2^*) = 0$ , ou seja, a condição de restrição é atendida

para  $x_1^*$ ,  $x_2^*$ , então  $g(x_1, x_2) = 0$ . Assim, a (eq.15a) pode ser reescrita como:

$$dL = \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} dx_2 + \lambda^* \left[ \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} dx_2 \right] = 0 \quad (\text{eq.15b})$$



Em (eq.15), nota-se que, para todo  $dx_i$  que satisfaça a restrição de  $g$ , a diferencial total é igual a zero,  $dg = 0$ . Dessa forma, podem-se identificar aquelas mudanças em  $dx_1$  e  $dx_2$  que tornam  $dg = 0$ , diferenciando-se totalmente a equação da restrição e igualando-a a zero. Fazendo isso, encontra-se que a relação implícita deve se manter entre as mudanças permitidas  $dx_1$  e  $dx_2$  de, respectivamente,  $x_1^*$  e  $x_2^*$ .

$$dg = \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} dx_2 = 0 \quad (\text{eq.16})$$

Considerando-se as mudanças nas variáveis que satisfaçam a (eq.16), então o terceiro termo da (eq.15b) deve ser igual a zero, reduzindo-se essa equação (eq.15b) para todos os valores  $dx_1$  e  $dx_2$  que satisfaçam a restrição:

$$dL = \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} dx_2 = 0 \quad (\text{eq.17})$$

As soluções  $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$  para as condições de primeira ordem para um ótimo sem restrição da função Lagrangeana garante que o valor da função-objetivo  $f$  não pode ser alterado para pequenas mudanças em  $x_1^*$  e  $x_2^*$  que satisfaçam a restrição. Assim, ao longo da restrição, tem-se o ponto ótimo da função-objetivo.

Em síntese, se  $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$  soluciona  $dL(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) = 0$  para todo  $(dx_1, dx_2, d\lambda)$ , então  $df(x_1^*, x_2^*) = 0$  para todos  $dx_1$  e  $dx_2$  que satisfaçam a restrição. O ponto crítico de  $f$  é  $(x_1^*, x_2^*)$ , dado que as variáveis devem satisfazer a restrição e que qualquer movimento ao longo de  $(x_1^*, x_2^*)$ , deve ser um movimento ao longo da restrição.

#### 2.4.1.1 Método de Lagrange: interpretação geométrica

Nesta subseção, faz-se a interpretação geométrica do problema de maximização com restrição apresentado anteriormente, qual seja:

$$\max_{x_1, x_2} f(x_1, x_2)$$

sujeito a  $g(x_1, x_2)$

A partir da aplicação das condições de primeira ordem, calcula-se o valor de  $\lambda^*$ :

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} + \lambda^* \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \lambda^* = - \left[ \frac{\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1}}{\frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1}} \right]$$

e,

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} + \lambda^* \frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \lambda^* = - \left[ \frac{\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2}}{\frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2}} \right].$$

Igualando-se os multiplicadores de Lagrange,  $\lambda^*$ , das expressões anteriores, chega-se à inclinação de uma curva de nível para a função  $f(x_1, x_2)$  no ponto  $x^*$ , bem como a inclinação da restrição naquele mesmo ponto  $x^*$ , conforme se segue:

$$- \left[ \frac{\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1}}{\frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1}} \right] = - \left[ \frac{\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2}}{\frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2}} \right] = - \left[ \frac{\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1}}{\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2}} \right] = - \left[ \frac{\frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1}}{\frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2}} \right] \Rightarrow - \frac{f_1(x^*)}{f_2(x^*)} = - \frac{g_1(x^*)}{g_2(x^*)}$$

onde:  $-\frac{f_1(x^*)}{f_2(x^*)}$  representa a inclinação da curva de nível para a função  $f(x_1, x_2)$  no

ponto  $x^*$  e,

$-\frac{g_1(x^*)}{g_2(x^*)}$  representa a inclinação da restrição no ponto  $x^*$ .

Conforme o GRÁF. 4, o ponto  $x^*$  está sobre a curva de nível da restrição; trata-se do ponto em que a restrição  $g(x_1^*, x_2^*) = 0$  é atendida. Também nesse ponto, a curva de nível é a mais alta possível e tangencia a restrição.

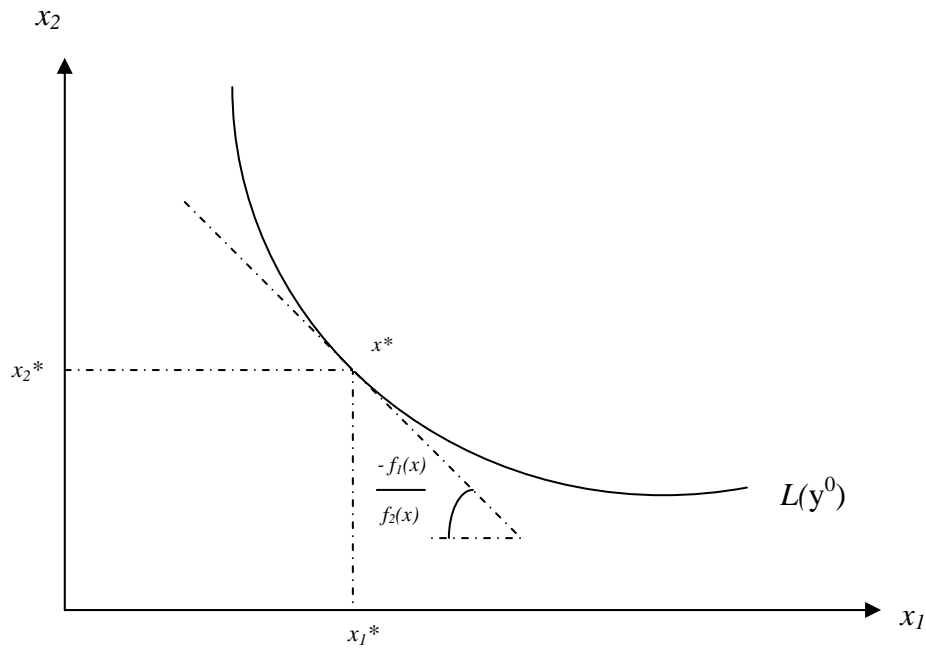


GRÁFICO 4: Ilustração geométrica da inclinação da curva de nível  
Fonte: Jehle e Reny (2001)

O GRÁF. 5 apresenta a inclinação da restrição, que, conforme demonstrado acima, é igual àquela verificada para a curva de nível.

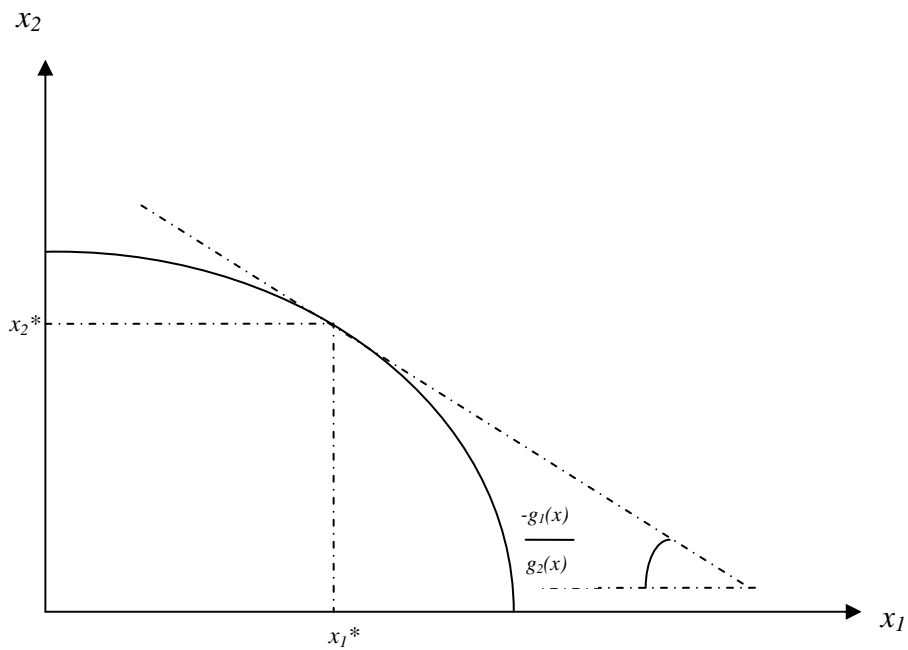


GRÁFICO 5: Ilustração geométrica da inclinação da restrição  
Fonte: Jehle e Reny (2001)

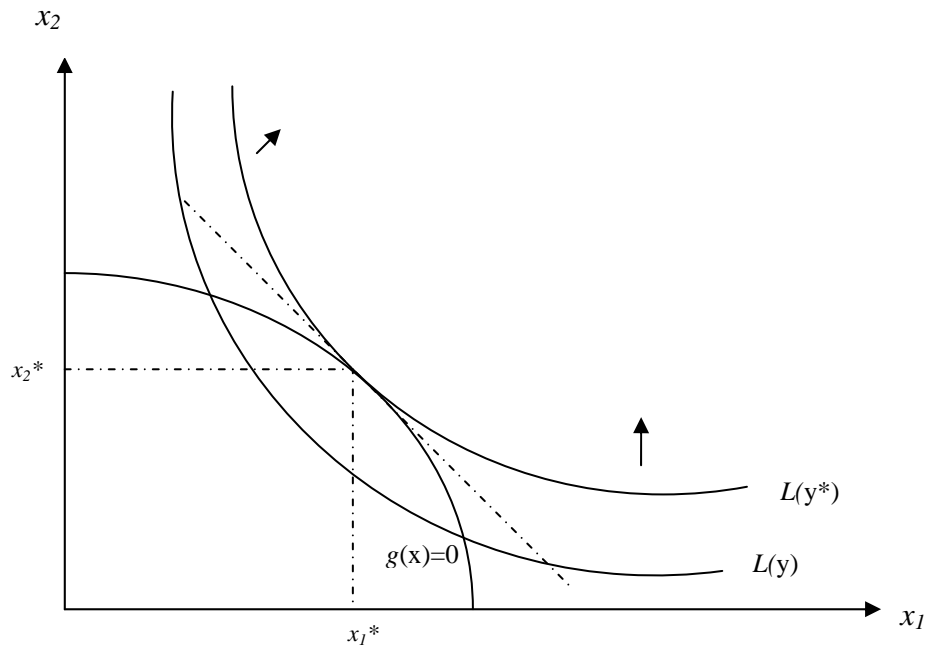


GRÁFICO 6a: Ilustração geométrica da inclinação da tangência  
para um problema de maximização  
Fonte: Jehle e Reny (2001)

Por fim, os GRÁF.6a e GRÁF.6b apresentam a inclinação da tangência. O ponto que está sobre a restrição e onde a inclinação da curva de nível da função-objetivo e a inclinação da restrição são iguais é, por definição, o ponto de tangência entre a restrição e a curva de nível. Os gráficos a seguir ilustram essa situação para um caso de maximização e minimização, respectivamente, da função-objetivo  $f$  sujeita à restrição  $g$ .

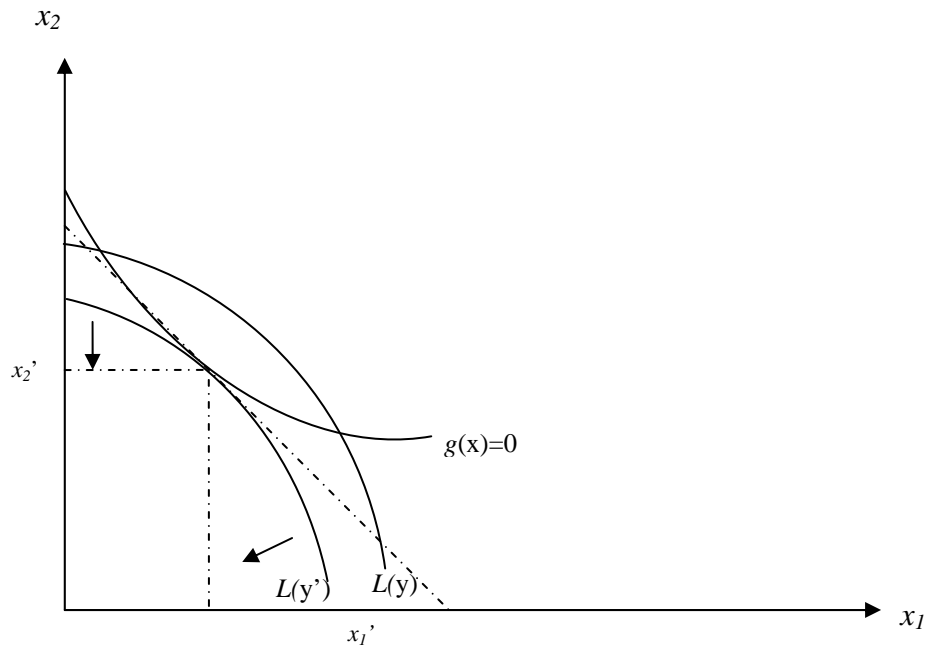


GRÁFICO 6b: Ilustração geométrica da inclinação da tangência para um problema de minimização  
 Fonte: Jehle e Reny (2001)

#### 2.4.1.2 Método de Lagrange: condições de segunda ordem

As condições de segunda ordem para os problemas Lagrangeanos seguem a natureza das condições de primeira ordem. Mantendo-se o exemplo utilizado nas subseções anteriores, com duas variáveis e uma restrição, as condições de segunda ordem para se testar se um ponto crítico  $x^*$  é de máximo ou de mínimo, deve-se utilizar a análise do determinante de um tipo de matriz Hessiana relativa, a qual contém as derivadas de segunda ordem da função Lagrangeana e as parciais de primeira ordem da equação da restrição e um zero; ou seja, trata-se de uma matriz Hessiana Orlada de  $L(x_1, x_2, \lambda)$ .

Assim, para o problema de otimização com restrição

$$\max_{x_1, x_2} f(x_1, x_2)$$

$$\text{sujeito a } g(x_1, x_2)$$

a matriz Hessiana Orlada da função Lagrangeana é

$$d^2L(x_1, x_2, \lambda) = H^- = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1 \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2 \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda \partial x_1} & \frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda \partial x_2} & \frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda \partial \lambda} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H^- = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2 \partial x_2} & \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & g_1 \\ L_{21} & L_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Como sintetizado em Jehle e Reny (2001), o teorema da condição *suficiente* para um ótimo local em um problema de duas variáveis e uma restrição define que:

- se  $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$  soluciona as condições de primeira ordem para o problema de otimização e se o determinante da matriz Hessiana Orlada for positivo  $\left[ \begin{matrix} - \\ H \end{matrix} \right] > 0$  quando avaliado no ponto  $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$ , o par de valores  $(x_1^*, x_2^*)$  maximizará a função  $f(x_1, x_2)$  condicionada pela restrição  $g(x_1, x_2) = 0$ .
- se  $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$  soluciona as condições de primeira ordem para o problema de otimização e se o determinante da matriz Hessiana Orlada for positivo  $\left[ \begin{matrix} - \\ H \end{matrix} \right] < 0$  quando avaliado no ponto  $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$ , o par de valores  $(x_1^*, x_2^*)$  minimizará a função  $f(x_1, x_2)$  condicionada pela restrição  $g(x_1, x_2) = 0$ .

Para o caso de  $n$  variáveis sujeitas a uma restrição, com funções Lagrangeanas da forma  $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , uma condição *suficiente* para se caracterizar o ponto crítico  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  obtido pelas condições de segunda ordem, é

avaliar o sinal apresentado pelos  $n-m$  determinantes das matrizes Hessianas Orladas  $\bar{H}_k$  com  $k = m+1, m+2, \dots, n$ , como se segue:

$$\left[ \bar{H}_2 \right] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & g_1 \\ L_{21} & L_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \left[ \bar{H}_3 \right] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{12} & g_1 \\ L_{21} & L_{22} & L_{22} & g_2 \\ L_{31} & L_{32} & L_{32} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \left[ \bar{H}_{n+m} \right] = \left[ \bar{H} \right] = \begin{bmatrix} L_{11} \dots L_{1n} \dots g_1^1 \dots g_1^m \\ \cdot \\ \cdot \\ L_{n1} & L_{22} & \dots & g_2 \\ g_1 & g_2 & \dots & 0 \\ g_1 & g_2 & \dots & 0 \\ g_1 & g_2 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Por um lado, se no ponto crítico  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  todos os determinantes forem negativos, ou seja,  $\left[ \bar{H}_2 \right] < 0, \left[ \bar{H}_3 \right] < 0, \dots, \left[ \bar{H} \right] < 0$ , o ponto  $x^*$  encontrado será o ponto de mínimo da função. Por outro lado, se, no ponto crítico  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  os determinantes alternarem seu sinal, iniciando-se com o sinal positivo, ou seja,  $\left[ \bar{H}_2 \right] > 0, \left[ \bar{H}_3 \right] < 0, \dots$ , o ponto  $x^*$  encontrado será ponto de máximo da função.

Para o caso de  $n$  variáveis e  $m$  restrições, as condições *suficientes* de segunda ordem dizem que há um máximo (mínimo), caso a diferencial segunda da função-objetivo for menor do que zero (maior do que zero) no ponto onde a condição de primeira ordem é satisfeita. O teorema das condições *suficientes* para ótimos locais com restrições de igualdade é assim definido: considere uma função-objetivo  $f(x)$  e  $m < n$  restrições, dada pela função  $g^j(x) = 0, j = 1, \dots, m$ , cuja função Lagrangeana seja  $L(x, \Lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g^j(x)$ . Ademais, considere que  $(x^*, \Lambda^*)$  solucione as condições de primeira ordem da Lagrangeana, definidas como:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g^j(x^*)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{e,}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = g^j(x^*).$$

Nessas condições:

- $x^*$  é um máximo local de  $f(x)$  sujeito às restrições se os sinais apresentados pelos determinantes das matrizes Hessianas Orladas forem alternados, iniciando com sinal positivo, quando avaliados em  $(x^*, \Lambda^*)$ ;
- $x^*$  é um máximo local de  $f(x)$  sujeito às restrições se os sinais apresentados pelos determinantes das matrizes Hessianas Orladas forem todos negativos, quando avaliados em  $(x^*, \Lambda^*)$ .

#### 2.4.2 Método de Kuhn-Tucker: restrições na forma de desigualdade e negatividade

É vasta a aplicação de problemas de otimização cujas restrições envolvem, ao invés de igualdade, desigualdades. Nessas situações, a análise Lagrangeana deve ser modificada, para se adequar problemas desta natureza às variáveis de escolha. Utilizando-se do exemplo ilustrativo apresentado por Jehle e Reny (2001), busca-se a otimização do seguinte problema:

$$\max_x f(x)$$

sujeito a  $x \geq 0$ .

Tal formulação permite a existência de três possibilidades, as quais a região relevante para as soluções é a linha de restrição de não-negatividade, conforme ilustrado a seguir.

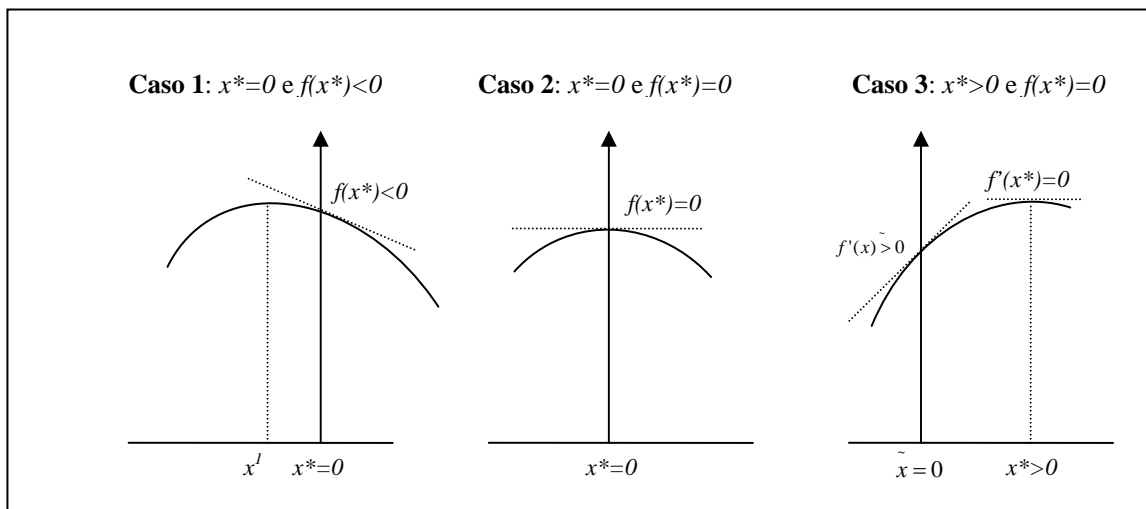


FIGURA 6: Três possíveis soluções de otimização  
Fonte: Jehle e Reny (2001)



Como pode-se notar, em todas essas soluções,  $x^* \left[ \frac{\partial f(x^*)}{\partial x} \right] = 0$ , o que permite generalizar-se a seguinte regra para problemas de otimização com restrições de não-negatividade:

- em casos de maximização, deve se verificar, simultaneamente, as seguintes condições:

$$\left[ \frac{\partial f(x^*)}{\partial x} \right] \leq 0 \quad \therefore \quad \left[ \frac{\partial f(x^*)}{\partial x} \right] = 0 \quad \therefore \quad x^* \geq 0;$$

- em casos de minimização, deve se verificar, simultaneamente, as seguintes condições:

$$\left[ \frac{\partial f(x^*)}{\partial x} \right] \geq 0 \quad \therefore \quad \left[ \frac{\partial f(x^*)}{\partial x} \right] = 0 \quad \therefore \quad x^* \geq 0.$$

Para o caso de maximização de uma função de duas variáveis sujeita a uma restrição de desigualdade, de tal forma que suas variáveis de escolha estejam interrelacionadas, mas não necessariamente positivas, o problema de otimização pode ser assim apresentado:

$$\begin{aligned} & \max_{x_1, x_2} f(x_1, x_2) \\ & \text{sujeito a } g(x_1, x_2) \geq 0 \end{aligned}$$

Trata-se de um problema de otimização não-linear, cuja resolução é dada por meio da conversão da(s) restrição(ões) em equações de igualdade e de não-negatividade. Para tanto, o “truque” utilizado é a introdução de uma variável  $z$ , definida como a quantidade que excede  $g$ , sendo, por definição, não-negativa. Assim, reescreve-se a condição de desigualdade em duas outras, de tal forma que o problema de otimização seja redefinido como:

$$\begin{aligned} & \max_{x_1, x_2} f(x_1, x_2) \\ & \text{sujeito a } \begin{cases} g(x_1, x_2) - z = 0 \\ z \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Essa nova formalização converteu o problema de maximização sujeito a uma restrição na forma de desigualdade em um problema com duas restrições, sendo a primeira na forma de igualdade e a segunda, na forma de não-negatividade. A solução, a partir de agora, se dá através da construção da função Lagrangeana, sendo que sua maximização deve levar em

consideração as condições de primeira ordem para problemas tanto com igualdade de restrições quanto com não-negatividade de restrições. Formalmente tem-se:

- a função Lagrangeana:  $L(x_1, x_2, z, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda[g(x_1, x_2) - z]$
- as restrições de igualdade:  $\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \forall i = 1, 2$  e  $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ ;
- as restrições de não-negatividade:  $\frac{\partial L}{\partial z} \leq 0, z \left[ \frac{\partial L}{\partial z} \right] = 0$  e  $z \geq 0$ ; e
- as condições de primeira ordem:
  - $L_1 = \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0$  (eq.kt1),
  - $L_2 = \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0$  (eq.kt2),
  - $L_z = \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial z} = -\lambda \leq 0$  (eq.kt3),
  - $z \left[ \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial z} \right] = z(-\lambda) = 0$  (eq.kt4),
  - $z \geq 0$  (eq.kt5),
  - $L_\lambda = \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = g(x_1, x_2) - z = 0$ . (eq.kt6).

Da equação (eq.kt6), tem-se que  $g(x_1, x_2) = z$  e, substituindo-se, nas equações (eq.kt4) e (eq.kt5), pode-se reescrevê-las como:

$$\lambda g(x_1, x_2) = 0 \quad (\text{eq.kt4}')$$

e, 
$$g(x, x_2) \geq 0 \quad (\text{eq.kt5}')$$

Por fim, substituem-se as três condições iniciais [(eq.kt4)-(eq.kt6)] por essas duas últimas redefinidas [(eq.kt4')-(eq.kt5')] e tem-se que a maximização das funções sujeitas às restrições de desigualdades deve atender às seguintes condições, denominadas de **condições de Kuhn-Tucker**:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0$$

$$\lambda \geq 0$$

$$\lambda g(x_1, x_2) = 0$$

$$g(x, x_2) \geq 0.$$

Como sintetizado em Jehle e Reny (2001), as condições de Kuhn-Tucker são *necessárias*, porém não *suficientes* para se caracterizar o ponto ótimo. As *condições suficientes* serão dadas, analisando-se a concavidade da função-objetivo,  $f(x)$ , e a concavidade de sua restrição,  $g(x)$ . Se, por um lado, tanto a função-objetivo quanto a função restritiva forem côncavas, as condições de Kuhn-Tucker serão *suficientes* para se caracterizar um ponto  $x^*$  como um ponto de máximo. Se, por outro lado, as condições de Kuhn-Tucker forem atendidas e as funções (objetivo e restritiva) forem convexas, então o ponto  $x^*$  é caracterizado como um ponto de mínimo.

De outra maneira, Coello Coello *et al.* (2007) definem as condições de Kuhn-Tucker *necessárias e suficientes* para não-inferioridade, dessa forma: “Se uma solução  $x$  para um problema de otimização é não-inferior, então existe  $w_l \geq 0$ , para  $l = 1, 2, \dots, k$ , ( $w_r$  é estritamente positiva para alguns  $r = 1, 2, \dots, k$ ), e  $\lambda_i \geq 0$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$ , tal que:

$$x \in \Omega$$

$$\lambda_i g_i(x) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{e,}$$

$$\sum_{l=1}^k w_l \nabla f_l(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x) = 0.”$$

Assim, quando todas as funções de  $f_l(x)$  são côncavas e  $\Omega$  for um conjunto convexo, as condições de Kuhn-Tucker também são *suficientes*.

## 2.5 Otimização multiobjetivo

Chankong e Haimes (1983) elencam cinco aspectos que devem ser especificados na descrição de um problema de decisão multiobjetivo (PDM), quais sejam:

- a unidade de tomada de decisão (UTM), na qual um dos componentes é o tomador de decisão (TM);
- o conjunto de objetivos e sua hierarquia (OBJ);
- um conjunto apropriado de atributos (CAA) e as relações completas entre atributos e objetivos (CAA-OBJ);
- a situação de decisão (SD); e,
- a regra de decisão (RD).

Na FIG.7, descreve-se uma situação típica de um problema de decisão multiobjetivo. O resultado de um problema de decisão multiobjetivo é a decisão. Os insumos são a direção para a qual aponta a unidade de tomada de decisão (papel do tomador de decisão) cuja decisão é requerida, bem como os dados necessários para a completa descrição da situação de decisão.

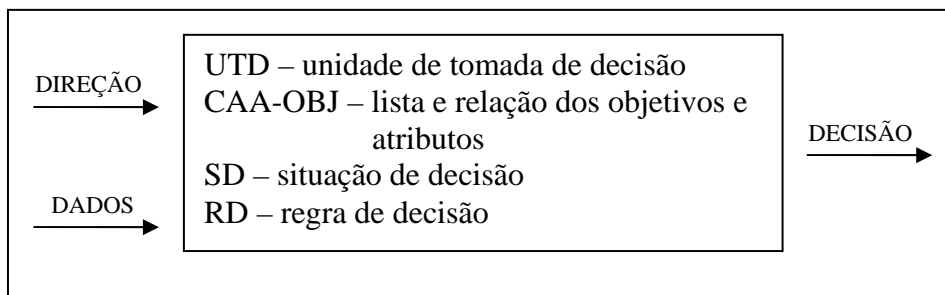


FIGURA 7 – Situação típica de um problema de otimização multiobjetivo  
Fonte: Chankong e Haimes (1983)

Ainda segundo Chankong e Haimes (1983), para se especificar uma situação de decisão, é necessário:

- o conjunto de alternativas  $X$ , o qual consiste em um conjunto de vetores multi-dimensionais da variável de decisão  $x$ ;

- $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ , o conjunto de regras para as quais o valor de cada atributo,  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , é avaliado para uma dada alternativa  $x$ ;
- a descrição do ambiente da decisão, ou seja, se há incerteza ou não, e com qual distribuição (conhecida ou não) de probabilidade.

Coello Coello *et al.* (2007, p.5) definem o problema de otimização multiobjetivo<sup>26</sup> como a busca por

a vector decision variables which satisfies constraints and optimizes a vector function whose elements represent the objective functions. These functions form a mathematical description of performance criteria which are usually in conflict with each other. Hence, the term "optimize" means finding such a solution which would give the values of all the objective functions acceptable to the decision maker.<sup>27</sup>

Deb (2001, p.22) sintetiza que há dois objetivos nos problemas de otimização multiobjetivo, a constar, encontrar um conjunto de soluções:

- tão próximo quanto possível da fronteira de Pareto; e
- tão diversificado quanto possível.

A definição formal da Teoria de Otimização de Pareto é a base para a definição formal do problema de otimização multiobjetivo. No entanto, dado que a seleção das variáveis de decisão cabem ao tomador de decisão, a busca da melhor solução depende, naturalmente, das preferências específicas (ou viesadas) do tomador de decisão. Levando-se em consideração como se dá a construção do problema, enfatizado anteriormente por Chankong e Haimes (1983) e também ponderado por Coello *et al.* (2007), não há uma definição universalmente aceita para o problema de otimização global multiobjetivo. Na terminologia de Coello Coello *et al.* (2007), a Fronteira de Pareto,  $\mathcal{FP}^*$ , determinado pelo valor do conjunto ótimo de Pareto,  $\mathcal{P}^*$ , é fixado pelo problema de otimização multiobjetivo. Para um conjunto de solução mínima global,  $\mathbf{x}_i^*$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , ou seja, um conjunto ótimo de Pareto,  $\mathcal{P}^*$ ,  $f$  é a função-objetiva

<sup>26</sup> Também denominado de otimização de multicritérios, multiperformance ou problema do vetor de otimização. Esse último, por sua vez, é a nomenclatura escolhida por Chankong e Haimes (1983).

<sup>27</sup> um vetor de variáveis de decisão que satisfaça as restrições e otimize a função-vetor cujos elementos representam as funções-objetivo. Tais funções formam uma descrição matemática dos critérios de performance os quais estão sempre em conflito uns com os outros. Assim, o termo "otimizar" significa encontrar uma solução a qual daria os valores de todas as funções-objetivo aceitáveis para o tomador de decisão.(...)" (Tradução nossa)

múltipla e  $\Omega$  é o conjunto de região factível. Dado que  $\mathcal{P}^*$  representa as melhores soluções disponíveis e permite que se defina o ótimo global do problema multiobjetivo, formalmente tem-se que,

dada uma função  $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $k \geq 2$ , para todo  $\mathbf{x} \in \Omega$ , o conjunto de  $\mathcal{FP}^* = \{ \mathbf{x}_i^* \mid f(\mathbf{x}_i^*) \preceq f(\mathbf{x}) \}$  é denominado de mínimo global se, e somente se,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega: f(\mathbf{x}_i^*) \preceq f(\mathbf{x})$ .

O problema de determinação do conjunto de solução mínima global é definido como o problema multiobjetivo de otimização global.

## 2.6 Eficiência e Eficácia

Os conceitos de eficiência e eficácia têm ampla aplicação nas ciências sociais aplicadas e exatas. Embora suas definições sejam vastas, há uma “conjunção de idéias” que permeiam estes conceitos, nas diversas áreas em que são utilizados. *Grosso modo*, ao conceito de eficiência associa-se a idéia de mensuração dos *inputs* associados ao objeto em análise em relação aos *outputs* desse objeto, retratando-se a relação do resultado obtido com os recursos aplicados na busca constante de um resultado satisfatório com o menor custo incorrido. Ao conceito de eficácia, centra-se a noção de valores ou metas alcançadas, avaliando-se a relação do orçado com o executado, destacando-se os objetivos alcançados. Neste capítulo definem-se, formalmente, os conceitos de eficiência e eficácia utilizados para a definição do problema multiobjetivo analisado no capítulo 6 (seis), fazendo uma breve digressão de diversas aplicações destes conceitos em áreas afins.

### 2.6.1 Revisão conceitual: Eficiência e Eficácia

Laurindo *et al.* (2001) propõem analisar diversos trabalhos que tratam do papel da Tecnologia da Informação (TI) nas organizações, avaliando como a TI pode contribuir para a maior competitividade das empresas. Nesse trabalho, os autores lançam mão dos conceitos de eficiência e eficácia para ajudar na compreensão do papel da TI dentro das organizações. Segundo os autores, eficiência significa fazer bem as coisas, do ponto de vista de uso dos recursos, enquanto eficácia significa fazer as coisas certas, do ponto de vista de atendimento das metas, objetivos e requisitos. No que diz respeito à TI, eficiência está relacionada aos aspectos internos da atividade de TI, bem como sua adequação à utilização dos recursos,

enquanto a eficácia confronta os resultados das aplicações de TI com os resultados no negócio da empresa e seus possíveis impactos sobre a operação e a estrutura organizacional.

Marinho e Façanha (2001) utilizam a *teoria dos contratos* para construir os conceitos de eficiência e eficácia na avaliação de programas sociais. Entendem os programas sociais de governo como organizações, as quais enfrentam dificuldades inerentes aos “contratos” e ao “desenho de mecanismos contratuais”. A idéia central dos autores é, por meio da técnica de *Data Envelopment Analysis* (DEA)<sup>28</sup>, mensurar a efetividade dos programas sociais, com vistas a avaliar, a monitorar e a propor regras contratuais de repartição de recursos e de incentivo aos agentes executores dos programas. A técnica de DEA é utilizada para se construir fronteiras e *scores* de eficiência relativa.

Segundo os autores, “(...) é comum encontrar-se na literatura especializada de avaliação, referências a dimensões desejáveis de desempenho de organizações e programas avaliados, que se traduzirá por exigências de efetividade, eficiência e eficácia dos programas do governo. (...) a eficiência denotaria competência para se produzir resultados com dispêndio mínimo de recursos e esforços; e a eficácia, por sua vez, remete a *condições controladas* e a resultados desejados de experimentos(...)”. (MARINHO E FAÇANHA, 2001, p.2)

No contexto definido por esses autores, a eficiência está se referindo às relações de custo-benefício dos programas sociais, enquanto a eficácia aos resultados esperados mediante os recursos investidos. Há, contudo, uma relação entre eficiência e eficácia: programas sociais só serão eficazes se forem eficientes; em outras palavras, a eficiência torna-se um ingrediente indispensável da eficácia.

---

<sup>28</sup> *Data Envelopment Analysis* (DEA) é uma abordagem não-paramétrica para medidas de performance, adotada pioneiramente no trabalho de Charnes et al (1978), no qual se desenvolve um modelo de programação não-linear capaz de fornecer uma nova definição de eficiência na avaliação de programas públicos e/ou atividades sem fins lucrativos. Uma medida escalar de eficiência de cada unidade participante é fornecida conjuntamente com pesos para as múltiplas saídas (*outputs*) e entradas (*inputs*) que caracterizam esses programas. A DEA provê uma interface com programas computacionais mais usualmente utilizados, além de conexões entre as abordagens de eficiência advindas da engenharia, da economia e das finanças, com vistas a se avaliar e se controlar o comportamento gerencial em programas públicos. Nota-se que essa ferramenta é bem alinhada com as abordagens clássicas de *inputs* e *outputs*, para se caracterizar a eficiência enquanto medida de performance, tanto na engenharia quanto na economia e na administração. Com vistas a reduzir o custo computacional, Jahanshahloo et al. (2008) constroem um modelo formalizado sobre custo da eficiência do *Decision Maker Unit* (DMU) reduzindo o número de variáveis restritivas, mas mantendo a estrutura clássica de pesos para o emprego da técnica DEA.

Preferencialmente, o conceito de eficiência está intrinsecamente associado ao conceito de retornos de escala.<sup>29</sup>

A técnica de DEA é largamente utilizada em trabalhos que buscam avaliar resultados, e via de regra mensurar índices de produtividade e eficiência, em substituição a métodos tradicionais de taxas de performance e de técnicas econométricas. Na área de engenharia de transportes, por exemplo, há uma série de artigos que visam mensurar a eficiência, utilizando a referida técnica, tais como os trabalhos de Charnes *et al.* (1996), Chu *et al.* (1992), Karlaftis (2004) e Park e Park (2007).

Dentre esses, os dois últimos trabalhos merecem maior atenção no que diz respeito à definição do conceito de eficiência. Karlaftis (2004) utiliza uma base de dados de 256 sistemas americanos de trânsito, para um período de 5 anos, com o objetivo de (i) avaliar a eficiência e a efetividade, bem como a relação entre essas duas medidas; e, (ii) mensurar as economias de escala nos sistemas de trânsito. Lança mão da técnica de DEA para classificação dos sistemas de trânsito e trata o problema de forma monoobjetiva, visando maximizar uma quantidade de fatores ponderados de *inputs* (insumos) para se produzir a quantidade de *outputs* (rotas), levando-se em consideração as economias de escala. Ademais, Karlaftis (2007) faz uma revisão breve da literatura que busca utilizar e/ou medir indicadores de performance do sistema de trânsito, destacando-se os de produtividade e eficiência, aplicados a uma grande variedade de dados e metodologias. É importante frisar que, nessa revisão, fica evidente a amplitude de conceitos construídos de eficiência, bem como as maneiras distintas de o estimar. Para seu trabalho, Karlaftis (2007) define três categorias de *outputs* para uma mesma categoria de *inputs*. O conceito de eficiência se aplica à primeira categoria de *outputs* (todos os veículos-milhas) em relação aos *inputs*; a segunda categoria de *outputs* (total de vias terrestres) define a efetividade; e a terceira, definida como um *mix* das duas anteriores, mensura a performance combinada de ambas (efetividade e eficiência). Nota-se que tais conceitos são adaptados aos objetivos do autor, reforçando a noção de que não há uma definição precisa que os padronize.

Em sua maioria, os trabalhos que lançam mão da técnica de DEA o fazem para análises *cross-section*. O trabalho de Park e Park (2007) encontra-se entre os poucos que contemplam a dimensão temporal dos problemas de mensuração das medidas de performance. O artigo dá um enfoque à medida de eficiência agregada intertemporalmente, a qual produz uma

---

<sup>29</sup> *Grosso modo*, economia de escala é a relação entre a curva de custo médio e a produção. Fukuyama (2000) e Soleimani-damaneh e Mostafae (2008) descrevem esse conceito associando-o ao emprego da técnica DEA.



“eficiência agregada multiperíodo”, sem que seja necessária qualquer informação sobre os dados de preços e sobre a ponderação dos *inputs* e dos *outputs* ao longo do tempo. O indicador calcula a eficiência através da comparação da unidade de produção-alvo com a unidade de fronteira eficiente. Como pode ser visto adiante, há trabalhos utilizando-se DEA sem que se compare o objetivo avaliado com o *benchmark* (ou a fronteira eficiente), e sim em relação aos demais objetos que compõem a base de dados.

Na área de economia e finanças, os conceitos de eficiência também estão associados às noções de custo-benefício e de economias de escala. A edição da revista *European Journal of Operational Research*, publicada em 16 de abril de 1997, contemplou exclusivamente artigos que abordavam novos métodos de análise e de avaliação da performance das instituições financeiras, definidas como bancos, associações de crédito e fundos de investimentos, companhias de seguro, dentre outras. Dessa edição, os trabalhos de Berger *et al.* (1997), Berger e Humphrey (1997), Mester (1997), Schaffnit *et al.* (1997), Pastor *et al.* (1997) e Murthi *et al.* (1997) apresentam enfoques e definições distintas para os indicadores de performance, embora todos lançam mão da técnica de DEA como uma nova e alternativa ferramenta em relação às tradicionais. À exceção do trabalho de Murthi *et al.* (1997), todos os demais buscam avaliar exclusivamente a performance geral da instituição. Mesmo assim, as discussões conceituais são bem amplas. Por exemplo, no trabalho de Schaffnit *et al.* (1997), os autores ponderam que os bancos utilizam medidas de rentabilidade como base para mensurar a performance de suas filiais, negligenciando outras medidas não financeiras como produtividade e qualidade. Com essa argumentação, os autores constroem uma medida de produtividade para os cinco maiores bancos canadenses, focando-se exclusivamente na performance pessoal dos gerentes das filiais.

Ainda na linha de avaliação das instituições financeiras, Berger e Humphrey (1997) afirmam, com base em um levantamento de 130 trabalhos para 21 países que, “*this literature has employed at least five major different efficiency techniques, which have been applied to financial institutions in at least 21 countries.*”<sup>30</sup> (BERGER E HUMPHREY, 1997, p.176)

Além das diferenças no emprego das técnicas, há também as diferenças conceituais para a aplicação delas.

No trabalho de Pastor *et al.* (1997), utilizam-se os conceitos econômicos de fronteira de produção, advindos da *teoria da firma*, para se estimar mudanças na produtividade, na

---

<sup>30</sup> Essa literatura tem empregado pelo menos as cinco maiores técnicas de eficiência, as quais têm sido aplicadas em ao menos 21 países. (Tradução nossa)

tecnologia e na eficiência do sistema financeiro espanhol, associando tais mudanças a medidas de eficiência. Utiliza-se a noção de distância entre o indicador de eficiência da firma e a fronteira, e também os índices de Malmquist, para se computar as diferenças na produtividade entre duas firmas pertencentes a diferentes sistemas bancários. A justificativa para a escolha do índice de Malmquist de produtividade deve-se a três aspectos: (i) não requer as condições de minimização de custo ou maximização de lucro; (ii) não requer dados sobre os preços; (iii) permite a decomposição da mudança na produtividade em eficiência técnica e mudança técnica.<sup>31</sup>

O primeiro trabalho a medir a performance dos fundos mútuos americanos utilizando a técnica de DEA é o de Murthi *et al.* (1997). Segundo os autores, a razão para a escolha dessa técnica reside em três aspectos: (i) DEA é uma análise não-paramétrica que não requer modelos teóricos como medidas de *benchmark*. Ao contrário, DEA pode medir a performance desse fundo em relação ao melhor conjunto de fundos dentro de uma categoria específica; (ii) DEA pode avaliar a performance sobre um número de *inputs* e *outputs*, simultaneamente (por exemplo, medir retorno e tamanho dos ativos, simultaneamente); (iii) DEA provê a contribuição marginal de cada *input* sobre um *output* específico. Murthi *et al.* (1997) definem um índice de eficiência dos fundos mútuos, denominado de *DEA Portfolio Efficiency Index* (DPEI), o qual busca mensurar o retorno do fundo analisado, descontados os custos ponderados de transação, sujeito ao retorno dos demais fundos, descontados seus respectivos custos ponderados de transação. Note que esse artigo utiliza a noção de distância do objeto analisado em relação aos demais, e não em relação à fronteira.

Especificamente em relação aos indicadores de performance para as IMF, o trabalho de Jansson (2002), seguindo a linha dos indicadores financeiros tradicionais, apresenta quatro categorias a serem utilizadas pelo BID na avaliação e comparação da performance, do risco e das condições financeiras das IMF. Tais categorias são assim definidas: (i) qualidade da carteira, (ii) produtividade e eficiência, (iii) gerenciamento financeiro, e (iv) rentabilidade.

---

<sup>31</sup> Pastor et al (1997) definem o índice de Malmquist de produtividade como:  $M_i(y^2, x^2, y^1, x^1) = \frac{D^i(y^1, x^1)}{D^i(y^2, x^2)}$  onde  $M_i(y^2, x^2, y^1, x^1) = \frac{D^i(y^1, x^1)}{D^i(y^2, x^2)} M_i(y^2, x^2, y^1, x^1) = \frac{D^i(y^1, x^1)}{D^i(y^2, x^2)}$   $M_i > 1$  indica uma produtividade maior da firma no país 2 do que no 1, uma vez que a redução necessária no vetor de *input* da firma no país 1,  $D^i(y^1, x^1)$ , é maior do que o correspondente na firma do país 2,  $D^i(y^2, x^2)$ , e o contrário para quando  $M_i < 1$ .

A categoria “qualidade da carteira” é fundamental para as IMF, uma vez que, ao contrário dos bancos comerciais, elas não apresentam garantias bancárias colaterais, estando, assim, totalmente vulneráveis ao seu “portfolio de empréstimos”. Dentro dessa categoria, incluem-se quatro indicadores relacionados à qualidade da carteira, bem como aos riscos associados à mesma, a constar: risco da carteira, taxa de perdas (provisão para devedores duvidosos), taxa de provisão de despesas, taxa de cobertura de risco.

Os indicadores de “eficiência e produtividade” constituem-se em medidas que demonstram quanto ajustadas estão as operações de crédito das IMF. Os indicadores de produtividade refletem o total gerado por unidade de empréstimo, enquanto os indicadores de eficiência também levam em consideração o custo dos empréstimos e/ou o preço do retorno dos mesmos. O ponto central é que as instituições convencionais são bem menos intensivas em mão-de-obra, sobretudo quando comparadas às IMF. Economias de escala para IMF têm um impacto bem mais restrito sobre a eficiência do que para as instituições convencionais, devido exatamente às altas variações de custos da tecnologia de microcrédito.

Dentre os indicadores de eficiência e produtividade do BID, destacam-se:

- taxa de despesa operacional = despesas operacionais / carteira média bruta
- custo por cliente = despesas operacionais / número médio de clientes
- produtividade pessoal = número de clientes ativos / quadro total de pessoas que trabalham tempo integral na IMF
- produtividade dos agentes de crédito = número de clientes ativos / quadro total de agentes de crédito, estagiários e gerentes da IMF.

Os indicadores de “gerenciamento financeiro” devem refletir a liquidez das instituições. O gerenciamento financeiro pode ter um impacto decisivo sobre a rentabilidade das IMF, o que pode ser avaliado pelos seguintes indicadores:<sup>32</sup> taxa de despesa com recursos (juros e demais taxas relativas à captação sobre a carteira média bruta), e taxa de custo dos recursos (juros e demais taxas relativas aos ativos financeiros em relação aos ativos financeiros médios).

Ainda segundo Janssoon (2002), os indicadores de rentabilidade são de difícil mensuração para as IMF. As razões são: primeiramente, pelo fato de ainda haver uma vasta prática de doações e empréstimos subsidiados destinados às IMF, o que dificulta a comparação entre elas; segundo que, para que sejam analisados corretamente, devem ser acompanhados de

---

<sup>32</sup> Os indicadores de gerenciamento financeiro foram desenvolvidos também para as IMF, que podem receber depósitos, embora não seja uma prática permitida às IMF brasileiras.

indicadores que apontem a performance operacional das instituições (por exemplo, eficiência operacional e qualidade da carteira); e, por último, que as avaliações clássicas dos auditores externos não podem ser aplicadas diretamente às IMF, uma vez que a natureza deste mercado é significativamente diferente do mercado financeiro tradicional. Assim, os indicadores de rentabilidade devem refletir como as IMF captam e mantêm seus clientes, enquanto as instituições tradicionais são limitadas às suas metas de captação de clientes e a quanto podem promover de rentabilidade. Os indicadores de rentabilidade do BID mais significativos para as IMF brasileiras são o retorno sobre os ativos (renda líquida<sup>33</sup> sobre ativos médios) e rendimento da carteira (receita total financeira disponível sobre carteira média bruta). Observe que os conceitos de eficiência e eficácia aqui desenvolvidos contemplam algumas noções conceituais de diversos indicadores de performance, podendo ser vistos como um *mix* de alguns.

Em suma, a definição de eficiência e eficácia para o estudo proposto se dá de forma bem distinta daquelas tradicionalmente utilizadas. O sentido de eficiência do modelo de média-variância de Markowitz (1952) dá a noção de eficiência no sentido de máximo retorno esperado para um dado nível de variância. Neste trabalho o sentido de eficiência (vale dizer, não o da fronteira eficiente) é encontrar a política com o máximo retorno, entendido como o valor mais próximo ao crédito concedido e esperado como retorno. A eficácia, por sua vez, está associada ao volume da carteira. Nesse trabalho, comparativamente aos supracitados, apresenta-se um caráter distinto: o objetivo está focado tanto no indivíduo (cliente), quanto na instituição, ao passo que, nos demais, o objetivo centra-se nos processos e nas instituições, tornando o conceito de ganho de escala tão importante para a discussão. O argumento para a diferença de foco é simples: uma vez que o objetivo-fim do trabalho desenvolvido é definir uma política que possa corroborar com a auto-sustentabilidade da IMF, há de se contemplar o efeito do critério de seleção sobre o nível de inadimplência apresentado pelo indivíduo e, simultaneamente, sobre a carteira ativa da instituição.

Ainda comparativamente à discussão clássica de eficiência, o conceito inerente de economia de escala é também substituído, no trabalho aqui desenvolvido, pelo *trade-off* entre quantidade e qualidade. A título de elucidação, duas situações extremas são apresentadas. Na primeira, a carteira ativa pode estar se expandindo, mas às custas de créditos mal-avaliados, cujo retorno atrasado estaria impactando diretamente no fluxo de caixa da instituição e, por conseguinte, na capacidade de atendimento a outros possíveis beneficiários desse crédito. Na

---

<sup>33</sup> Excluindo-se doações.

segunda, o elevado rigor na concessão pode ter selecionado os bons pagadores, mas limitado a capacidade de crédito a ser concedido, reduzindo-se a expansão e a auto-sustentabilidade. Situações extremas como essas baseiam a discussão para a definição de um conceito que expresse, por um lado, o indivíduo e sua capacidade de honrar o crédito, definida como eficiência e, por outro lado, dimensione a capacidade de expansão e sustentabilidade da IMF, definida como eficácia.

Vale frisar que é ampla a gama de conceitos de eficiência, muito embora a idéia central de se comparar o quanto se investiu em relação a quanto retornou, parece ser a noção básica subjacente às diversas variantes do referido conceito. Via de regra, a análise está centrada na instituição, ao passo que, no conceito definido para este trabalho, a análise está centrada também no indivíduo, ou seja, no cliente.

Em termos genéricos, a avaliação de *inputs* em relação aos *outputs*, assim como a relação custo-benefício, podem ser traduzidos, para o caso deste trabalho, como a relação de receita descontada *versus* receita estimada. No que diz respeito à eficácia, a lacuna de noções conceituais ainda é maior. Também, via de regra, eficácia está mais fortemente associada à noção de “alcance dos objetivos”. Como será visto nas próximas subseções, ambos os conceitos foram criados com o intuito de dar auto-sustentabilidade às IMF, e sob esse aspecto, tanto o volume da carteira (captado pela medida de eficácia) quanto a qualidade subjacente ao respectivo volume (captada pela medida de eficiência) são cruciais para a definição da política creditícia da Instituição.

### 3 PROPOSTA CONCEITUAL DE EFICIÊNCIA E EFICÁCIA

#### 3.1 Eficiência

A medida de eficiência utilizada nesta tese busca medir a performance do cliente mediante o crédito concedido. Sua forma de mensuração é a razão entre todo o valor que retornou ao sistema, com alguma penalização ou não em relação à data esperada do retorno (uma *proxy* para custo de oportunidade financeiro) e todo o valor esperado para retorno. Cada cliente é mensurado por seu comportamento mensal em relação ao pagamento de suas parcelas de crédito. Assim, pagamentos em dia geram resultados iguais ao esperado no ato do contrato e pagamentos em atraso sofrem uma taxa de penalização, sob o qual o valor pago sofre um desconto. Esse desconto foi construído com base na Resolução n.º 2.682 do Banco Central do Brasil, publicada em 21/12/1999, a qual dispõe sobre os critérios de classificação das operações de crédito e das regras para Provisão para Devedores Duvidosos (PDD). Como nesta Resolução os créditos são classificados por dias de atraso, as categorias lá definidas foram as mesmas utilizadas para a construção da taxa de penalização, a qual, por seu turno, é composta pela Taxa de Abertura de Crédito (TAC) e pelos juros embutidos nas prestações. Pode-se dizer que esta tabela segue o padrão de construção de uma tabela Price. Em termos formais, a eficiência foi definida como:

$$ef_{i,j} = \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^M \frac{vr_{i,j} * fd_{i,j}}{vp_{i,j}}$$

onde:

$ef_{i,j}$  é a eficiência das  $i$  parcelas dos  $j$  clientes (inclui os candidatos recusados)

$vr_{i,j}$  é o valor da  $i$ -ésima parcela do  $j$ -ésimo cliente que foi paga

$vp_{i,j}$  é o valor da  $i$ -ésima parcela contratada a ser paga pelo  $j$ -ésimo cliente

$fd_{i,j}$  é o fator de desconto da  $i$ -ésima parcela paga do  $j$ -ésimo cliente

$M$  é o número de clientes

Mais especificamente, a medida construída de eficiência penaliza os pagamentos efetuados em atraso e permite que se mensure, em uma escala de 0 a 1, a pontualidade dos clientes da Instituição. Quanto mais próximo de 1, mais pontual é o cliente para honrar seus compromissos financeiros ante a IMF. É nesse sentido que entendemos a eficiência, ou seja, como uma medida de qualidade dos clientes que compõem a carteira de crédito da IMF.

### 3.2 Eficácia

Para a eficácia, a definição formal é dada em termos per capita, ou seja:

$$ec_{i,j} = \frac{\sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^M vg_{i,j}}{\sum j}$$

onde:

$ec_{i,j}$  é a eficácia das  $i$  parcelas dos  $j$  clientes (inclui os candidatos recusados)

$vg_{i,j}$  é o valor pago da  $i$ -ésima parcela do  $j$ -ésimo cliente

A eficácia nos dá a magnitude do crédito concedido que retornou ao sistema, em termos per capita, independente do tempo de retorno, ou seja, embute os juros e mora das parcelas pagas em atraso. A mensuração em termos per capita permite a comparação entre as diversas políticas de crédito possíveis, além de poder sinalizar o impacto do ingresso de novos clientes sobre a carteira de crédito. Distintamente da medida de eficiência, é uma medida mais voltada à quantidade do crédito.

Em síntese, a eficiência busca mensurar a qualidade do cliente quanto à pontualidade no pagamento do crédito, ao passo que a eficácia mensura a quantidade desse crédito que retornou ao sistema para ser novamente repassado.

### 3.3 Otimização multiobjetivo de eficiência e eficácia

É utilizado, neste estudo, o procedimento de programação computacional, denominado “Classificação de uma População Não-Dominada”, para se encontrar o ótimo global das

políticas de crédito que maximizam os objetivos de eficiência e eficácia, simultaneamente. Esse procedimento permite classificar a população em dois conjuntos: dominada e não-dominada. A população deve ser classificada de acordo com o nível de ascensão da não-dominância. As melhores soluções não-dominadas são as de nível 1; as soluções não-dominadas da população remanescente são, em seguida, encontradas e classificadas como de nível 2, e assim sucessivamente, até que todos os membros sejam classificados dentro de um nível não-dominado. Constrói-se, então, os conjuntos de soluções não-dominadas, em que o nível 1 é considerado o conjunto global ótimo de Pareto. Após ter se definido os objetivos, pode se formalizar o problema multiobjetivo como:

$$\begin{array}{l} \max_t (ef, ec) \\ \text{sujeito a } \left\{ \begin{array}{l} p \\ e \\ ge \\ g \\ r \\ fc \\ vc \end{array} \right. \end{array}$$

onde:

*ef* é a medida de eficiência;

*ec* é a medida de eficácia;

*t* é o tempo, dividido em dois períodos de 12 meses cada;

*p* é o posto de atendimento bancário;

*e* é o estado civil, decomposto em casados, solteiros e outros;

*ge* é o grau de escolaridade, decomposto em 1º. grau, 2º. grau e superior (completos ou não)

*g* é o gênero, podendo ser homem e mulher, ou cada um separadamente;

*r* é a renda líquida disponível do indivíduo, descontadas as despesas fixas mensais

*fc* é a finalidade do crédito, decomposto em capital fixo, de giro e misto;

*vc* é o valor do crédito, definido em três categorias: até R\$999,00, até R\$1.999,00 e R\$2.000,00 e mais.

Todas as variáveis foram contempladas pelas combinações factíveis entre suas respectivas categorias. Nas IMF, ao contrário dos bancos tradicionais, a variável taxa de juros é tratada



exogenamente às demais variáveis avaliativas de seleção do crédito. Sua determinação é uma função direta do valor concedido de crédito. No caso dos dados utilizados neste estudo, a instituição adota a seguinte política de determinação da taxa de juros: contratos de concessão de crédito abaixo de R\$960,00 (novecentos e sessenta reais) sofrem 2% a.m. de taxa de juros, enquanto valores superiores a R\$960,00 (novecentos e sessenta reais) sofrem correção de 3,9% a.m., e não há nenhum outro fator, especificamente atrelado ao risco de crédito, que possa interferir em tais taxas. Por essa razão, a taxa de juros não faz parte do modelo.

## 4 PROPOSTA METODOLÓGICA

Neste capítulo são descritos (1) *a técnica da permutação cíclica*, empregada para se gerar aleatoriedade aos dados e testar a hipótese nula subjacente ao modelo de seleção de candidatos a crédito para instituições de microfinanças; bem como (2) *os vetores de significância*, construídos para se avaliar a robustez dos resultados encontrados; e (3) *o pseudogradiante intrapolítica*, uma medida que busca “descontar” o efeito da inclusão dos candidatos recusados à base de dados original.

### 4.1 Referencial metodológico: permutação cíclica

Manly (1997) define teste de permutação cíclica como um modelo de probabilidade para se estimar a significância das soluções ótimas obtidas por meio dos verdadeiros dados da população em análise. No caso específico deste trabalho, cujo objetivo primeiro é construir um modelo de política de crédito com base nas variáveis de seleção dos candidatos, bem como em seus respectivos históricos de crédito, as soluções calculadas são todas as possibilidades de arranjo entre as variáveis de seleção dos candidatos, sob as quais se têm os referidos históricos de crédito.

O teste de permutação cíclica pode ser visto como uma ferramenta que permite gerar aleatoriedade aos dados observados disponíveis sobre um determinado fenômeno que se queira investigar. O objetivo da permutação cíclica é obter, a partir da distribuição multivariada para os dados observados, uma nova distribuição que elimine a dependência possivelmente existente entre as variáveis, mas que mantenham intactas as distribuições marginais. A significância das soluções calculadas é extraída via comparação dos resultados gerados *vis-a-vis* aqueles observados originalmente.

Outro aspecto relevante, frisado por Manly (1997) é de que a probabilidade de um resultado (caso) ocorrido em alguma determinada categoria é a mesma para todas as categorias.

Para melhor compreensão prática da técnica, suponha um espaço tridimensional representando um problema trivariado ( $n=3$ ). Cada variável do problema é categorizada e seu valor respectivo encontra-se em sua coordenada. Ademais, suponha que, nesse espaço, exista uma população formada por  $m$  indivíduos, onde  $m > n$ , e cujas categorias, para cada variável, estão associadas as suas respectivas coordenadas ( $x, y, z$ ). Três desses elementos são aleatoriamente selecionados e representados graficamente pela cor vermelha, na FIG.8a. Os

três elementos originais selecionados, com três coordenadas cada um, estão sintetizados na TAB. 1, a seguir.

TABELA 1  
Representação dos elementos selecionados

Indivíduo	Definição da Posição	Valores das Categorias
1	$a_1 a_2 a_3$	3 2 1
2	$b_1 b_2 b_3$	1 3 3
3	$c_1 c_2 c_3$	3 2 3

Uma permutação cíclica gera os novos indivíduos  $(c_1, a_2, b_3)$ ,  $(b_1, c_2, a_3)$ ,  $(a_1, b_2, c_3)$ , e outra permutação cíclica gera os novos indivíduos  $(a_1, c_2, b_3)$ ,  $(b_1, a_2, c_3)$ ,  $(c_1, b_2, a_3)$ . A FIG. 8b mostra que pode se gerar esses conjuntos de novos indivíduos por intermédio de trocas cíclicas entre as coordenadas, de modo que cada uma das variáveis apareça exatamente uma vez em cada um dos novos indivíduos.

Uma das permutações cíclicas é escolhida e os  $n$  indivíduos originais são substituídos pelos  $n$  indivíduos permutados.

A permutação cíclica inicializa-se com trocas entre as variáveis que definem os elementos, até que se esgotem as possibilidades de agrupamento ordenado a cada troca, sem que se repita, dentre cada agrupamento, categorias relativas a um mesmo elemento. Note-se que, a cada vez, para que se esgotem as possibilidades de agrupamento ordenado, é necessário que se troquem  $n-1$  posições dentre cada categoria de possibilidades.

As possibilidades de permutação cíclica, contemplando a não repetição de mais de uma categoria para cada elemento, são visualizadas na FIG. 8a. Nesse exemplo, cada categoria relativa a uma variável só pode ser permutada duas vezes, o que significa que o número de permutações cíclicas para o caso de 3 (três) variáveis é de  $(n-1)!$ , ou seja, dois. Ao todo, tem-se três possibilidades de agrupamentos ordenados, incluindo-se o original.

Como mencionado na descrição deste exemplo, há três planos/coordenadas com suas respectivas frequências relativas aos elementos dispostas neste espaço.

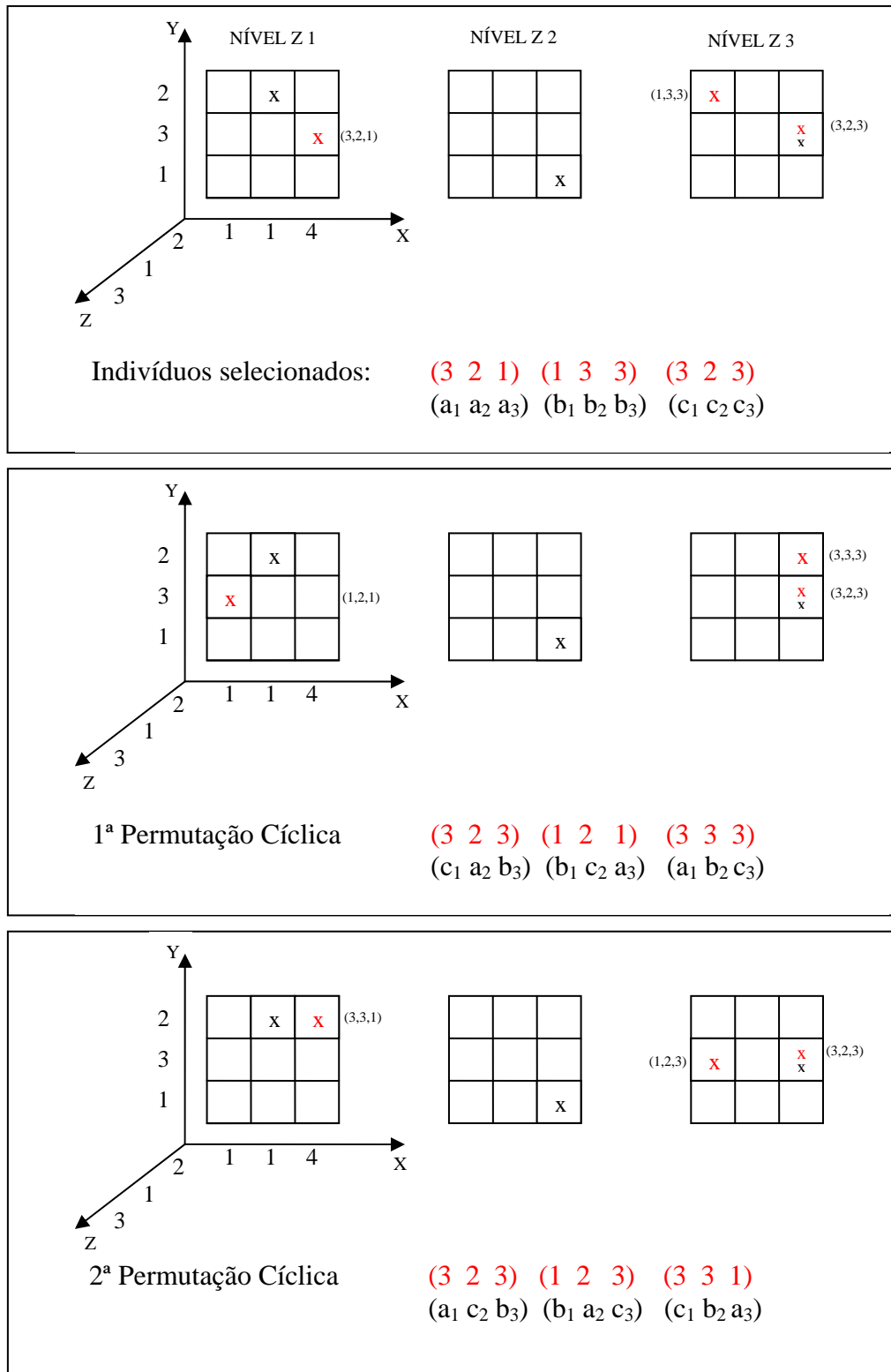


FIGURA 8a: Exemplo ilustrativo da permutação cíclica

Após a realização das permutações, nota-se que não houve alteração das frequências relativas das variáveis selecionadas, garantindo-se o pressuposto de manutenção das marginais. Em ambas as possíveis permutações, as marginais não se alteraram, uma vez que a mudança é feita par-a-par, dentro de um mesmo espaço físico.

Ademais, a dependência das variáveis no conjunto de indivíduos dos dados observados foi desfeita, gerando-se aleatoriedade aos dados originais e permitindo-se, a partir daí, que se testassem os resultados originais em relação àqueles gerados aleatoriamente. Em outras palavras, esta técnica permite que se gerem configurações sob a hipótese nula de que não existem dependências entre as variáveis, a qual, por sua vez, busca testar se a configuração original se destaca em relação a outras configurações permutadas.

É importante frisar que cada permutação cíclica se dá dentro de uma área específica (cilindro, como o nome sugere), tratando-se, pois de uma mudança física em um espaço  $n$ -dimensional, como ilustrado na FIG. 8b.

A cada mudança física há novas possibilidades de combinações e de resultados gerados dentro da mesma área, ou seja, geram-se possibilidades de novos agrupamentos (resultados), dentro do mesmo espaço físico, através da criação de composições distintas da original, mantendo-se a frequência da ocorrência dos resultados, e preservando-se, então, as suas respectivas marginais originais. Na primeira caixa, há os dados originais, assim como na FIG. 8a  $[(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3)]$ . Na segunda caixa os dados originais sofreram uma primeira permutação, assim como na FIG. 8a  $[(c_1, a_2, b_3), (b_1, c_2, a_3), (a_1, b_2, c_3)]$ ; e, na terceira, os dados sofrem a segunda permutação  $[(a_1, c_2, b_3), (b_1, a_2, c_3), (c_1, b_2, a_3)]$ .

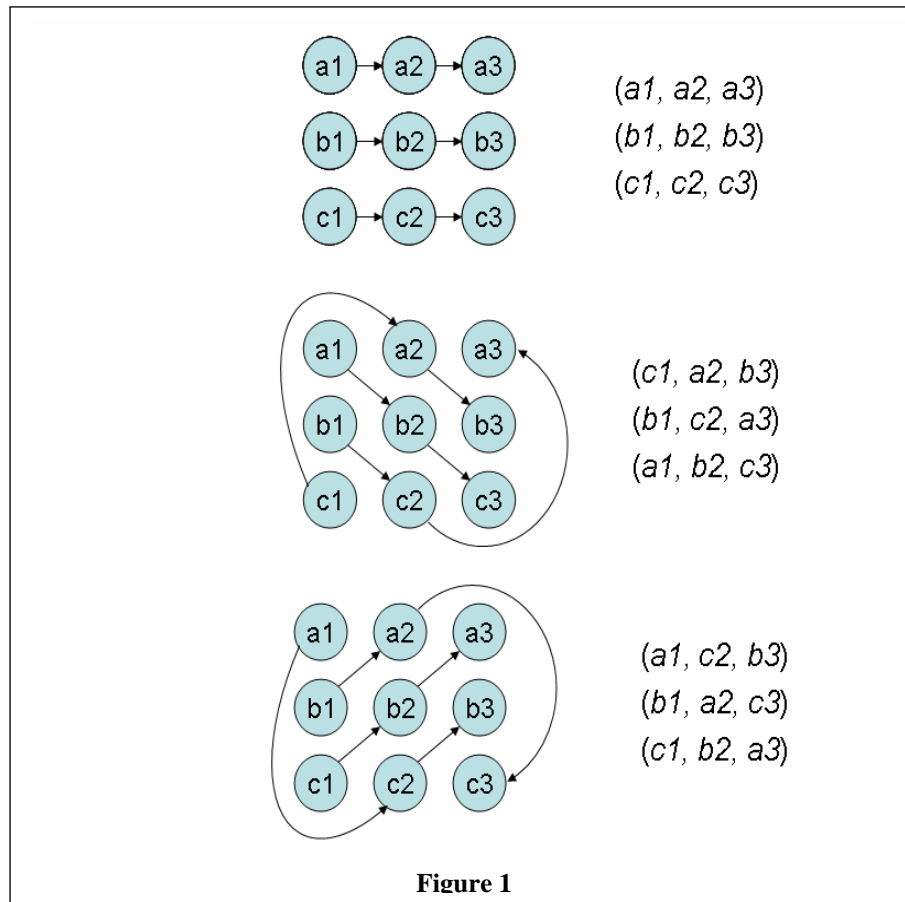


FIGURA 8b: Permutação cíclica: ilustração das mudanças em forma circular

Outra maneira visual de se compreender a permutação cíclica é por meio da construção de uma árvore de decisão, ilustrada pela FIG.9 adiante. Para cada elemento sorteado, cada categoria relativa a sua respectiva variável do espaço tridimensional deve sofrer  $n-1$  possibilidades de trocas, como já explicado. No entanto, independente do número de possibilidades de trocas, o que define as configurações dos demais elementos em relação a um elemento específico é a primeira troca circular das posições entre todos esses elementos. Novamente, os elementos originais, com três coordenadas cada um, são (a1 a2 a3) (b1 b2 b3) (c1 c2 c3). Ao se definir uma troca em que o primeiro elemento passa de (a1 a2 a3 ) para (a1 b2 c3 ), necessariamente os outros dois elementos passarão de (b1 b2 b3) e (c1 c2 c3 ) para (b1 c2 a3 ) e (c1 a2 b3 ), respectivamente.

Em suma, existem duas diferentes configurações que mantêm as categorias em suas posições respectivas, porém em diferentes elementos:

$$(c_1 a_2 b_3) (b_1 c_2 a_3) (a_1 b_2 c_3)$$

$$(a_1 c_2 b_3) (b_1 a_2 c_3) (c_1 b_2 a_3).$$

Em síntese, é importante frisar alguns pressupostos requeridos pela permutação cíclica:

- faz-se, inicialmente, um número elevado o suficiente de embaralhamentos dos dados originais;
- em seguida, sorteia-se, aleatoriamente, os elementos que farão parte da permutação;
- o número de elementos sorteados tem que ser igual ao número de variáveis. Nesse caso, como se trata de um espaço tridimensional, devem-se sortear 3 (três) elementos a cada permutação;
- cada elemento não pode conter, após a permutação, mais de uma subcategoria original das variáveis que o defina.

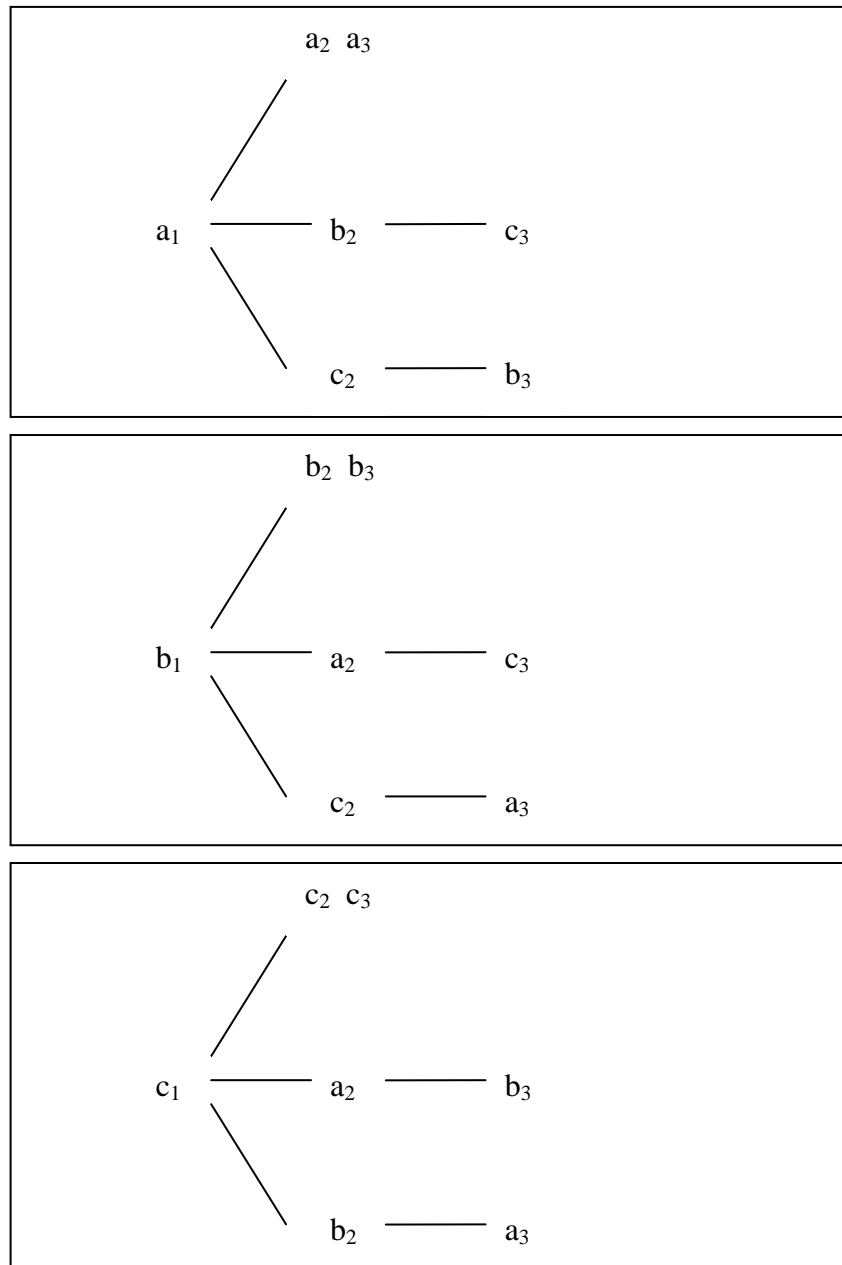


FIGURA 9: Diagrama da árvore para ilustração da permutação cíclica

#### 4.1.1 Aplicação ao modelo proposto

Como dito no início da seção 4.1, a permutação cíclica, ao gerar aleatoriedade aos dados observados disponíveis sobre um determinado fenômeno que se queira investigar, permite, em última instância, que se estime a significância das soluções calculadas em relação aos verdadeiros dados da população em análise. No caso específico deste trabalho, cujo objetivo é construir um modelo de política de crédito com base nas variáveis de seleção dos candidatos, bem como em seus respectivos históricos de crédito, as soluções calculadas são todas as possibilidades de arranjo entre as variáveis de seleção dos candidatos, sob as quais se têm os referidos históricos de crédito.



A significância das soluções calculadas é extraída por meio da comparação dos resultados gerados *vis-à-vis* aqueles observados originalmente. E, para este trabalho, a hipótese a ser testada pode ser assim definida:

**$H_0$ :** a política original *não se encontra* na fronteira de Pareto, em termos de eficiência e de eficácia da seleção dos candidatos a crédito

**$H_1$ :** a política original encontra-se na fronteira de Pareto em termos de eficiência e de eficácia da seleção dos candidatos a crédito

A técnica de permutação cíclica para a seleção da(s) política(s) de crédito foi aplicada sobre 7 (sete) variáveis de seleção de crédito que se mostraram mais relevantes, a constar: (i) posto de atendimento bancário, (ii) estado civil, (iii) gênero, (iv) grau de escolaridade, (v) renda líquida disponível, (vi) finalidade do crédito, e (vii) valor do crédito. Cada uma das sete variáveis gerou possibilidades distintas de resultados. Por exemplo, a política de seleção de crédito poderia ser aquela que contemplasse indivíduos, homens e mulheres, casados, com até o primeiro grau de escolaridade (completo ou não), renda líquida disponível inferior a R\$500,00 (quinhentos reais), com a finalidade de crédito voltada para capital fixo (aquisição de algum maquinário para seu trabalho) e cujo valor do crédito fosse de até R\$960,00 (novecentos e sessenta reais).

Dentre aquelas variáveis relevantes definidas, selecionaram-se possíveis subcategorias, dentre cada variável, que fossem factíveis para a concessão do crédito. São elas:

- posto de atendimento bancário: localizado na cidade de Belo Horizonte;
- estado civil: solteiros e casados; solteiros, casados e outros;
- gênero: homens; mulheres; homens e mulheres;
- grau de escolaridade: até 1º grau completo; até 2º grau completo; até superior completo;
- renda líquida disponível (a renda descontada todos os gastos mensais do cliente; definida a partir do questionário socioeconômico aplicado pelo agente de crédito no domicílio ou estabelecimento comercial, isto é onde reside ou trabalha, respectivamente, o candidato ao crédito): até R\$499,99 (quatrocentos e noventa e nove reais e noventa e nove centavos) e acima de R\$499,99 (quatrocentos e noventa e nove reais e noventa e nove centavos). Inicialmente, utilizaram-se as duas categorias, mas

por não se mostrarem significativas, foram agrupadas em uma única categoria de análise;

- finalidade do crédito: crédito para capital fixo e capital de giro; e, crédito para capital fixo, giro e misto (este último definido como a composição de capital fixo e de giro) conjuntamente;
- valor do crédito: dividido em três categorias, a constar, até R\$999,99 (novecentos e noventa e nove reais e noventa e nove centavos); até R\$1.999,99 (hum mil, novecentos e noventa e nove reais e noventa e nove centavos); e, para valores das categorias anteriores e inclusive acima delas, ou seja, superiores a R\$1.999,99 (hum mil, novecentos e noventa e nove reais e noventa e nove centavos).

Ao todo, há sete variáveis, incluindo-se o Posto de Atendimento Bancário (PAB) e a renda líquida disponível, os quais só contemplam uma subcategoria. Tais variáveis foram selecionadas dentre o conjunto de variáveis utilizadas pelo questionário socioeconômico preenchido pelo candidato a crédito e averiguado pelo agente de crédito. Para estado civil, tem-se duas subcategorias; gênero, três subcategorias; grau de escolaridade, três subcategorias; renda líquida disponível, uma subcategoria; finalidade do crédito, duas subcategorias; e, valor do crédito, três subcategorias. Em notação vetorial, tem-se que as possibilidades de agrupamento são da seguinte ordem:

$$P[1][2][3][3][1][2][3],$$

ou seja, é possível que se faça cento e oito agrupamentos distintos (produto do número de possibilidades vetoriais). Originalmente, existia na base de dados da Instituição, mais de um PAB e de uma categoria de renda líquida e, conseqüentemente, a matriz P não tinha somente uma entrada na primeira e quinta variáveis. Com a finalidade de se manter a matriz P compatível com os dados originais e efetuar futuras modificações, optou-se pela manutenção de todas as sete variáveis.

No caso da permutação simples, onde se tem um agrupamento qualquer ordenado de  $n$  objetos distintos, o número de permutações simples dos  $n$  objetos é dado por:

$$P_n = n * (n - 1) * (n - 2) ... * (n - n) = n!$$

na permutação cíclica, as possibilidades adicionais de agrupamento ordenado, além daquela observada pelos dados originais é dada por

$$C_{bd,n} * P_n$$

onde:  $C_{bd,n}$  é a combinação de casos distintos da base de dados  $bd$ , tomados  $n$  a  $n$

$P_n$  é a permutação cíclica entre sete categorias,

ou seja, o número de possíveis permutações cíclicas é dado pelo produto da combinação do número de casos possíveis e da possibilidade de permutação de  $(n-1)!$  categorias. Como explicado adiante, a permutação cíclica é utilizada para sete categorias de variáveis, sendo seu número máximo de possibilidades de agrupamentos da ordem de:

$$C_{753,7} * P_{C_7} = \frac{753!}{7!(753-7)!} * (7-1)! = 2,648 * 10^{16} * 720 = 1,907 * 10^{19}$$

O teste de permutação cíclica exerce o papel de gerar o valor esperado de eficiência e eficácia por posto de atendimento bancário, estado civil, gênero, grau de escolaridade, renda líquida, finalidade e valor do crédito. Assim, suponha que se tenham os valores observados de eficácia e eficiência, segundo essas categorias no vetor  $E$ :

$$E = (E^{eficacia}, E^{eficiencia}) = (E^1, E^2) = \sum_p \sum_c \sum_g \sum_{ge} \sum_r \sum_{fc} \sum_{vc} ee_{p,c,g,ge,r,fc,vc}$$

onde  $ee_{p,c,g,ge,r,fc,vc} = (ee^1_{p,c,g,ge,r,fc,vc}, ee^2_{p,c,g,ge,r,fc,vc})$  é o vetor dos valores de eficácia e eficiência, observadas as seguintes variáveis: estado civil  $c$ , gênero  $g$ , grau de escolaridade  $ge$ , renda líquida  $r$ , finalidade de crédito  $fc$  e valor de crédito  $vc$ .

Para cada subcategoria de posto de atendimento bancário  $p$ ; estado civil,  $c$ ; gênero,  $g$ ; grau de escolaridade,  $ge$ ; renda líquida,  $r$ ; finalidade de crédito,  $fc$ ; e valor de crédito,  $vc$ , calcula-se, após a execução da permutação, os (novos) valores esperados de eficácia e eficiência

$$\mu_{p,c,g,ge,r,fc,vc} = (\mu_{p,c,g,ge,r,fc,vc}^{eficacia}, \mu_{p,c,g,ge,r,fc,vc}^{eficiencia}) = (\mu_{p,c,g,ge,r,fc,vc}^1, \mu_{p,c,g,ge,r,fc,vc}^2)$$

condicionando-se aos valores observados das marginais, tal que:

$$\mu_{p,c,g,ge,r,fc,vc}^i = \frac{1}{E^i} \left( \sum_c ee_{p,c,g,ge,r,fc,vc}^i \right) \left( \sum_g ee_{p,c,g,ge,r,fc,vc}^i \right) \left( \sum_{ge} ee_{p,c,g,ge,r,fc,vc}^i \right) \left( \sum_r ee_{p,c,g,ge,r,fc,vc}^i \right) \left( \sum_{fc} ee_{p,c,g,ge,r,fc,vc}^i \right) \left( \sum_{vc} ee_{p,c,g,ge,r,fc,vc}^i \right)$$

sendo  $i = 1, 2$  e  $\mu_{p,c,g,ge,r,fc,vc}^1$  e  $\mu_{p,c,g,ge,r,fc,vc}^2$  os valores esperados de eficácia e eficiência, respectivamente, os quais podem ser escritos como a proporção do produto de todos os valores ocorridos em cada uma das categorias contempladas pela permutação. Os valores

esperados de eficiência e eficácia em um bloco específico  $A$  é a soma dos valores esperados de todos  $p, c, g, ge, r, fc$  e  $vc$  dentro desse bloco  $A$ . Formalmente tem-se que, para um bloco específico  $A$ , os valores esperados de eficiência e eficácia são definidos como:

$$\mu_A = \sum_{(p,c,g,ge,r,fc,vc) \in A} \mu_{p,c,g,ge,r,fc,vc}$$

#### 4.2 Proposta dos Vetores de Significância

A construção de uma hipótese a ser testada pressupõe que se aplique um ou mais de um teste de validação para aceitar ou não a referida hipótese. Seja qual for a técnica que se esteja utilizando, a idéia básica consiste em construir a hipótese, testá-la e aceitá-la ou não, com um determinado grau de significância. Nos modelos econométricos, por exemplo, supondo-se que os dados seguem uma distribuição Normal, as estatísticas  $t$  e  $F$  informam, a um determinado nível de significância, se  $b$  é um estimador não-viesado de  $\beta$ , não rejeitando, assim a hipótese nula,  $H_0$ .<sup>34</sup>

Neste trabalho, a hipótese nula,  $H_0$ , não vai ser testada com a utilização de modelos econométricos, uma vez que o tratamento e a análise dos dados segue uma abordagem essencialmente “empírico-descritiva”. Por conseguinte, optou-se pela criação de um teste de validação nos moldes da estatística  $t$ .

Dados  $R$  valores amostrais  $b_i, i=1, \dots, R$  que são instâncias de uma variável aleatória  $\beta$ , e um valor dado  $\mu_0$ , a estatística  $t$  com  $R-1$  graus de liberdade é definida como

$$t = \frac{b - \mu_0}{\sigma_b / \sqrt{R}},$$

onde:

$b$  é a média amostral, e

$\sigma_b$  é o desvio-padrão amostral.

---

<sup>34</sup> Em regressões simples, o teste  $t$  e o teste  $F$  produzem o mesmo resultado, isto é se a hipótese nula foi rejeitada, conclui-se que  $\beta \neq 0$ . Em regressão múltipla, os testes  $t$  e  $F$  têm produzem resultados distintos. Enquanto o primeiro determina se há uma relação significativa entre a variável dependente e cada variável explicativa (independente), o segundo determina se há uma relação significativa entre a variável dependente e o conjunto de todas as variáveis independentes. (Anderson *et al*, 2002, p.489-90)

O desvio-padrão amostral de  $b$ ,  $\sigma_b$ , uma medida da variação dos valores amostrais de  $b_i$  em relação à média, é definido como<sup>35</sup>

$$\sigma_b = \sqrt{\left( R \left( \sum_{i=1}^R b_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^R b_i \right)^2 \right) / R(R-1)}$$

Neste trabalho, a medida construída para se aferir a significância da hipótese a ser testada foi denominada Vetor de Significância. De maneira análoga à estatística  $t$ , lança-se mão do desvio-padrão, por ser considerada a mais importante medida de variação para padronizar os resultados encontrados e, dessa forma, poder compará-los dentro de um mesmo padrão. Sua definição formal é feita em duas etapas, como se segue:

$$dp_{x_0,ef_{x_0}} = \frac{R * ef_{x_0} - \sum_{i=1}^R ef_{x_i}}{\sigma_{ef} * \sqrt{R}} \quad \text{e} \quad dp_{x_0,ec_{x_0}} = \frac{R * ec_{x_0} - \sum_{i=1}^R ec_{x_i}}{\sigma_{ec} * \sqrt{R}}$$

onde:

$dp_{x_0,ef_{x_0}}$  é a diferença entre os resultados de eficiência da política avaliada e as permutadas, em número de desvios-padrões das políticas permutadas;

$dp_{x_0,ec_{x_0}}$  é a diferença entre os resultados de eficácia da política avaliada e as permutadas, em número de desvios-padrões das políticas permutadas;

$ef_{x_0,cl}$  e  $ef_{x_i,cl}$  é o resultado de eficiência para a política avaliada,  $x_0$ , e as políticas permutadas  $x_i$ ;

$ec_{x_0,cl}$  e  $ec_{x_i,cl}$  é o resultado de eficácia para a política avaliada,  $x_0$ , e as políticas permutadas  $x_i$ ;

$\sigma_{ef_{x_i,cl}}$  e  $\sigma_{ec_{x_i,cl}}$  é o desvio-padrão do resultado das políticas  $x_i$ , para eficiência e eficácia.

---

<sup>35</sup> Segundo Triola (1999), essa fórmula do desvio-padrão tende a ser mais conveniente para uso com números extensos, ou com grandes conjuntos de valores, sendo assim mais utilizada em programas computacionais. Outro aspecto relevante reside no fato de que, devido à sua forma abreviada, exige apenas três registros de memória, em lugar de um registro de memória separado para cada valor individual, eliminando-se, assim, erros de arredondamento intermediários, comuns em situações nas quais não se utiliza o valor exato da média.

Para se encontrar o resultado conjunto de eficiência e eficácia, extrai-se a raiz quadrada da soma dos quadrados dos “vetores parciais de significância” de eficiência e eficácia da política avaliada em relação às permutadas. Por fim, o *Vetor de Significância* é definido como:

$$vs_{x_0} = (dp_{x_0,ec_{x_0}}) \hat{i} + (dp_{x_0,ef_{x_0}}) \hat{j}$$

onde:  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  são os vetores unitários de eficácia e eficiência, respectivamente.

O módulo do vetor de significância é definido como:

$$\|vs_{x_0}\| = \left( (dp_{x_0,ec_{x_0}})^2 + (dp_{x_0,ef_{x_0}})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

indicando o quão afastada a política original (não permutada) está, em termos de eficiência e eficácia, de políticas simuladas que sejam inteiramente aleatórias. O vetor de significância busca mostrar basicamente qual o ganho (ou não), em termos de desvios-padrões, de se adotar uma determinada política (factível) que faz parte do espaço em relação a outras quaisquer. Em outras palavras, mede a relevância da política definida.

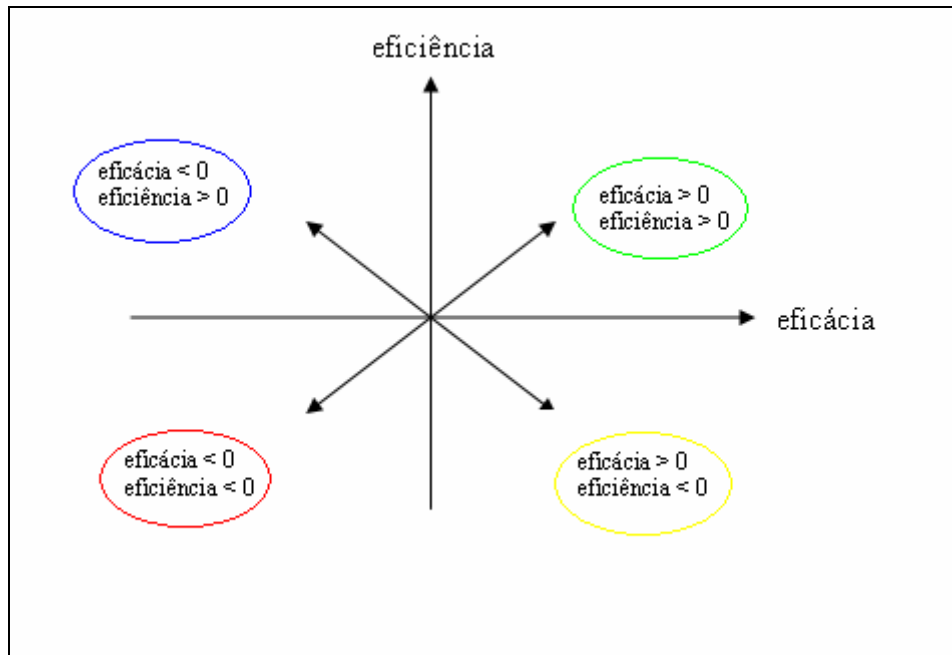


FIGURA 10: Resultados possíveis (cor e direção) dos Vetores de Significância

Esse mesmo procedimento de cálculo é aplicado à base expandida, ou seja, àquela que inclui os candidatos recusados. Na verdade, é com tal base que se busca avaliar os resultados multiobjetivos para eficiência e eficácia.

Na FIG. 10 são ilustradas as quatro possibilidades de resultados de pares ordenados de eficiência e eficácia gerados pelo Vetor de Significância, conforme a direção em cada um dos quatro quadrantes do plano cartesiano (eficiência *versus* eficácia).

O Vetor de Significância, por contemplar o resultado de uma determinada política  $x_0$  em número de desvios-padrões do conjunto de políticas  $x_i$ , permite aferir, também, com quantos desvios-padrões em relação a tais políticas,  $x_0$  é (visualmente) significativa.

Nos resultados apresentados no capítulo 6 (seis), os vetores apresentam as cores circuladas dos resultados dos pares ordenados de eficiência e eficácia, sendo verde, quando ambos são positivos; amarelos, quando somente eficácia é positiva; vermelha, quando ambos são negativos; e azul quando só eficiência é positiva.

### 4.3 Proposta de um Pseudogradiante intrapolítica

O conceito de gradiente é utilizado em arranjos matriciais para processos de otimização. Seu entendimento pressupõe o conhecimento básico de cálculo diferencial, o qual se faz, nos parágrafos que se seguem, através de uma breve e simples digressão.

Conforme exposto em Jehle e Reny (2001), a declividade de uma função linear,  $f(x)$ , é definida como a tangente do seu ângulo de inclinação. Analogamente, essa declividade pode ser aproximada pela taxa média de variação da função, que é definida como a razão entre a variação na distância vertical em relação à variação na distância horizontal entre dois pontos quaisquer. Formalmente, a taxa média de variação,  $TMV$ , é definida como se segue:

$$TMV = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

À inclinação de uma função em um dado ponto dá-se o nome de derivada primeira da função neste ponto, que pode ser definida formalmente como:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

quando este limite existir.

Caso a função seja composta por várias variáveis, terá  $n$  derivadas parciais, cada uma relativa a uma das  $n$  variáveis que compõem a função. Assim, supondo-se uma função do tipo

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

De forma geral, a derivada parcial de  $f$  em relação à função  $f(x)$  é dada por

$$f'_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

Em forma matricial, pode-se escrever as derivadas como um vetor denominado de Gradiente da função,  $\nabla f(x)$ , formalmente simbolizado como:



$$\nabla f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y}{\partial x_3} \\ \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Como pode se notar, o gradiente tem exatamente a mesma representação que a derivada. De acordo com Varian (1984), suponha a função  $f: R^n \rightarrow R$ , ou seja,  $f(x)$  anteriormente exposta. O Gradiente é definido por  $\nabla f(x)$  e a derivada, por  $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ , ambas com os mesmos componentes. No entanto, a derivada é uma função linear em  $R^n$  enquanto o gradiente é um vetor em  $R^n$ .

Em outras palavras, o conceito de gradiente pode ser interpretado como um resultado (campo) vetorial das taxas de variação parciais de uma função. A partir dessa noção, pode-se construir um indicador que estime a “variação marginal intratemporal” da inclusão dos candidatos recusados nos resultados de eficiência e eficácia. A idéia fundamental desse indicador é descontar os efeitos intratemporais do aumento da base de clientes decorrente da inclusão dos candidatos recusados, sob o cômputo final de eficiência e eficácia. Tal indicador foi intitulado “Pseudogradiente Intrapolítica” e, na prática, busca eliminar o “efeito inclusão dos recusados” e estimar o ganho ou a perda líquido(a) da inclusão dos candidatos recusados sob os indicadores de eficiência e eficácia, intratemporalmente. Formalmente define-se Pseudogradiente Intrapolítica como:

$$\nabla f(x_i) = (ec_{x_i,rec} - ec_{x_i,cl}) \hat{i} + (ef_{x_i,rec} - ef_{x_i,cl}) \hat{j}, \quad \forall x_i \in X$$

onde:

$\nabla f(x_i)$  é o pseudogradiente do efeito intratemporal da política  $x_i$ ;

$ef_{x_i,rec}$  e  $ef_{x_i,cl}$  é o resultado de eficiência para a política  $x_i$  com os candidatos recusados,  $x_{i,rec}$ , e só com os clientes,  $x_{i,cl}$ ;

$ec_{x_i,rec}$  e  $ec_{x_i,cl}$  é o resultado de eficiência para a política  $x_i$  com os candidatos

recusados,  $x_{i,rec}$ , e só com os clientes,  $x_{i,cl}$ ;

$\hat{i}$  e  $\hat{j}$  são os vetores unitários de eficácia e eficiência, respectivamente.

## 5 ANÁLISE DE DADOS

### 5.1 Tipologia e Organograma das IMF

Em um estudo específico sobre as IMF latino-americanas, Berger (2000) constrói uma tipologia classificando-as segundo (i) sua estratégia, (ii) sua forma jurídica, (iii) seu público-alvo, (iv) sua metodologia, (v) sua sustentabilidade, e, (vi) seus instrumentos de crédito/fontes de captação de recursos. Segundo essa tipologia, no Brasil, as IMF podem ser divididas em quatro categorias:

- **Instituições Financeiras Convencionais**, sob a forma jurídica de Bancos e Financeiras, ou Cooperativas;
- **Instituições Financeiras Especializadas**, sob a forma jurídica das Sociedades de Crédito ao Microempreendedor (SCM);
- **ONG Especializadas em Microfinanças**, sob a forma jurídica das Organizações Cíveis de Interesse Público (OSCIP);
- **ONG Generalistas**, que à semelhança das ONG Especializadas, também são instituições sem fins lucrativos e não regulamentadas, que atuam juridicamente sob a forma de Associações sem fins Lucrativos ou Fundações.

À exceção das instituições financeiras convencionais, as SCM, OSCIP e ONG Generalistas têm como público-alvo as microempresas, sendo que as OSCIP podem se estender até às pequenas empresas.

Na prática, os instrumentos de crédito mais comumente utilizados pelas SCM, OSCIP e ONG generalistas são (a) o crédito individual e, (b) as metodologias de grupo (grupos solidários e bancos comunitários). Embora nas instituições financeiras convencionais os procedimentos e análises para a concessão de crédito encontrem semelhanças com aqueles adotados pelas IMF voltadas para o pequeno empreendedor, as metodologias utilizadas não são nem de crédito individual, nem de grupo. Mas, tanto nas instituições convencionais como nas SCM, OSCIP e ONG generalistas, sua sustentabilidade e prosperidade deve-se à capacidade própria de captar recursos financeiros, emprestá-los e garantir a liquidação total deles.

Segundo levantamento realizado por Alves e Melo Sobrinho (2007), o País contava, em dezembro de 2006, com 220 instituições que participavam direta das atividades de microcrédito. Desagregadamente, 56 eram SCM; 137 ONG Especializadas, OSCIP e Fundos Públicos e o Crediamigo, que é a carteira do Banco Nordeste especializada em microcrédito;

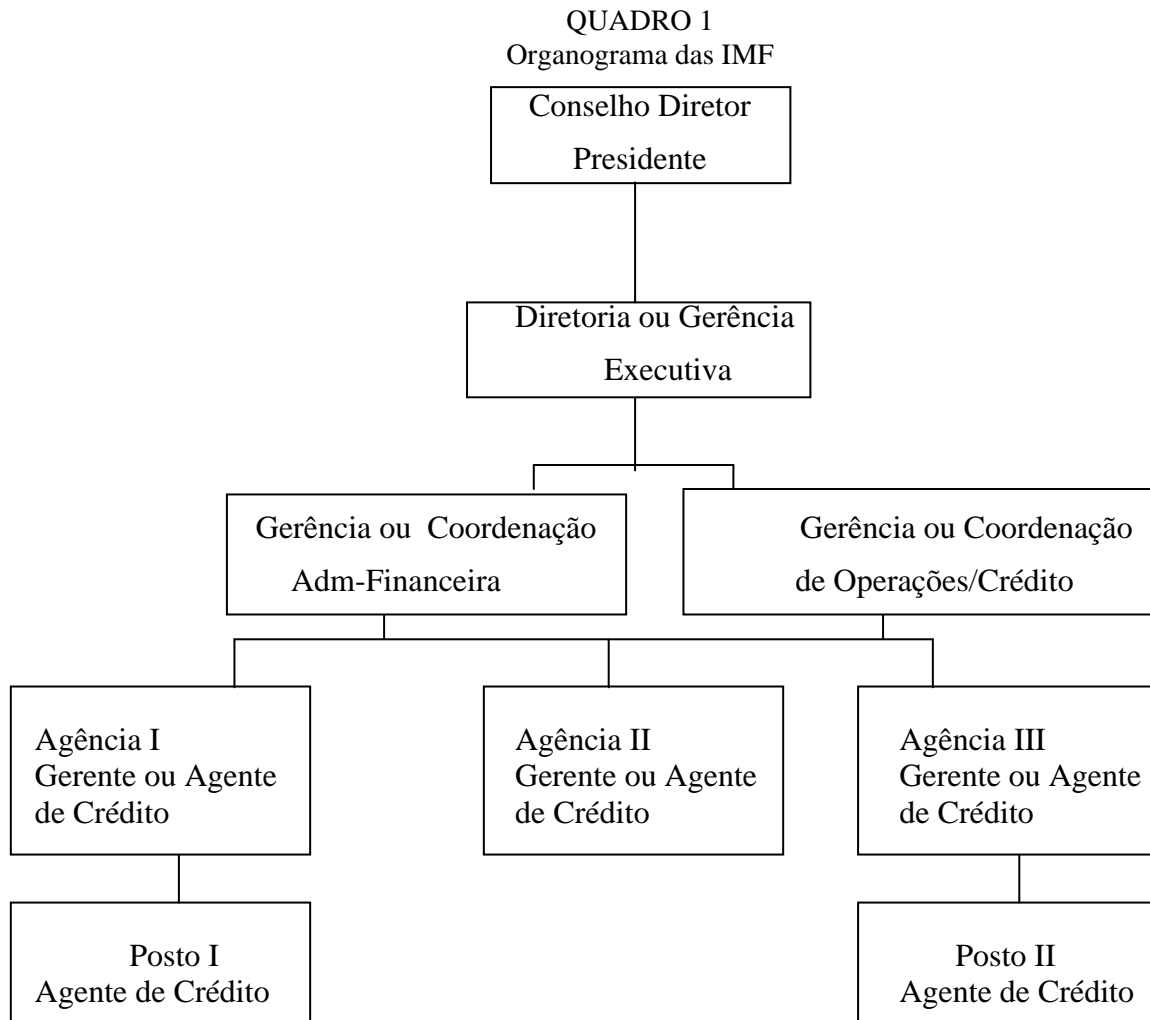
23 eram cooperativas de microempresários; e, 4 bancos privados. A maior parte do volume de recursos emprestados advinha do Banco do Nordeste e dos bancos comerciais que, de acordo com a Lei.10.753/2003, deveriam dispor de 2% dos recursos de depósitos a vista para atividades de microcrédito. Na TAB. 2 apresenta-se a consolidação dessas informações.

TABELA 2  
Estimativa de oferta de microcrédito no Brasil – Dezembro de 2006

<b>Tipo IMF</b>	<b>Nº Inst.</b>	<b>Número Clientes Ativos</b>	<b>Valor Médio Empréstimo</b>	<b>Total Emprestado</b>
SCM	56	21.286	2.238,83	47,7
ONG Generalistas, OSCIP, Fundos Públicos	136	89.997	687,35	52,8
Crediamigo	1	235.729	723,71	170,6
Coop. Microempresários	23	33.672	4.333,00	145,9
Bancos Privados	4	n.d.	1.680,00	71,7
Recursos Direcionados	-	714.075	817,95	600,6
<b>Total</b>	<b>220</b>	<b>1.094.758</b>	<b>1.746,81</b>	<b>1.089,2</b>

Fonte: Alves e Melo Sobrinho (2007)

Via de regra, a estrutura das IMF segue o organograma do QUADRO 1, a seguir.



Fonte: Machado (2002)

Com demonstrado pelo organograma típico das IMF, a estrutura hierárquica destas instituições é bem mais enxuta que a vigente nas instituições financeiras tradicionais e via de regra as relações são tanto mais diretas, quanto mais intensas entre os diferentes níveis. Semanalmente há os comitês de avaliação das novas propostas de crédito, e de avaliação dos créditos em atraso e/ou renegociados, dos quais participam desde a gerência executiva até o agente de crédito. Nestas reuniões são discutidos aspectos qualitativos da avaliação do crédito, em que pese a observação e sensibilidade do agente de crédito mediante a visita técnica ao candidato solicitante, para averiguação das informações declaradas no questionário socioeconômico preenchido no ato da solicitação do crédito.

Esta rotina de avaliação *in loco* das informações declaradas no questionário socioeconômico concomitante às reuniões de comitê de crédito são peculiares marcantes do processo de

concessão de crédito de uma instituição de microfinanças, o que a coloca em uma posição muito distinta das instituições financeiras tradicionais.

## 5.2 Base de Dados

Para o desenvolvimento deste trabalho conseguiu-se a base de dados de uma IMF cuja sede se situa na cidade de Belo Horizonte. Trata-se da Associação de Crédito Popular, mais conhecida como Banco do Povo. Constituída sob a forma jurídica de Associação em 15/05/1999 e qualificada como OSCIP em 20/12/2000, seu objetivo definido juridicamente é “conceder créditos ágeis, acessíveis e adequados para o fortalecimento ou criação de micros e pequenos empreendimentos, formais e informais, localizados no Estado de Minas Gerais”. Sua logomarca é a seguinte:



O Banco do Povo® atua com uma estratégia de crescimento junto às prefeituras locais dos municípios aos quais estão sendo montadas suas novas agências. O Banco também obtém apoio das seguintes instituições: SEBRAE, BDMG e BNDES. Ademais, seus recursos para capital de giro são captados juntamente ao BNDES, BDMG e Banco Itaú.

Atualmente, o Banco do Povo® possui uma equipe de 35 funcionários, assim distribuídos: 1 gerente executivo, 1 gerente financeiro e 1 gerente de crédito, 2 coordenadores, 17 agentes de crédito, 1 motorista, 1 auxiliar financeiro, 2 auxiliares de crédito, 5 atendentes.

### 5.2.1 Coleta de Dados

Em junho de 2006, deu-se início à coleta de dados junto ao Banco do Povo, em Belo Horizonte e, somente em início de 2007, encerrou-se o trabalho de levantamento dos dados.

O Banco do Povo concede crédito com três finalidades distintas: (i) capital de giro, que financia mercadorias e matérias-primas; (ii) crédito para capital fixo, para aquisição de ferramentas, equipamentos, veículos utilitários, máquinas novas e usadas, melhoria ou reforma de instalações, conserto de máquinas e equipamentos; e, (iii) capital misto, uma

composição das finalidades anteriores. Todos os três tipos de crédito devem ter o caráter de empreendedorismo, ou seja, destinarem-se ao microcrédito produtivo orientado. Os recursos podem se destinar ao empreendimento informal/pessoa física, ou formal/pessoa jurídica.

A base de dados utilizada neste trabalho inclui todos os clientes pessoas físicas que tiveram seu crédito aprovado e iniciaram seu processo de empréstimo junto à Instituição, do período de setembro de 2004 a dezembro de 2006. Foram coletadas todas as informações sócio-econômicas, bem como o histórico de pagamento das parcelas de crédito para cada contrato individualmente. Ao todo se tem 6276 contratos de crédito.

Na análise descritiva dispõe-se de todos os clientes em todos os Postos de Atendimento Bancário (PAB)<sup>36</sup>, ao passo que, no trabalho de simulação e construção do modelo computacional, trabalhou-se apenas com os dados referentes ao PAB da cidade de Belo Horizonte, por ser o único com informações sócio-econômicas disponíveis dos candidatos solicitantes que tiveram o crédito recusado. Para esta parte do trabalho, dividiu-se os dados em dois períodos de 12 meses cada, sendo o primeiro de setembro de 2004 a agosto de 2005 e, o segundo de setembro de 2005 a agosto de 2006. Do total de 890 contratos do PAB de Belo Horizonte, para todo o período (setembro de 2004 a dezembro de 2006), restaram 543 que foram utilizados no modelo. São duas as razões para esta redução: primeiro, o corte do período em análise, retirando-se os contratos que iniciavam a partir de setembro de 2006, ou seja, excluindo-se os 4 (quatro) últimos meses da base inicial; e, segundo, os clientes que tiveram algum campo de registro incompleto, seja por não-declaração, seja por lançamento errado, por parte da Instituição, na base de dados.

### 5.3 Análise descritiva

Os dados do Banco do Povo relativos aos contratos de concessão de crédito, para o período de setembro de 2004 a dezembro de 2006, estão sumarizados na TAB.2. Do total de 6276 contratos de crédito, 2980 (47,48%) foram concedidos para homens e 3296 (52,52%) para mulheres.

---

<sup>36</sup> Seria o equivalente às agências ou postos de atendimentos bancários das instituições financeiras tradicionais.

TABELA 3  
Distribuição absoluta e relativa do número de contratos por PAB segundo gênero

PAB/Gênero	homem	mulher	Total	%hom	%mul	%pab/tot
<b>Belo Horizonte</b>	295	595	890	33,146%	66,854%	14,181%
<b>Vespasiano</b>	69	141	210	32,857%	67,143%	3,346%
<b>Congonhas</b>	14	8	22	63,636%	36,364%	0,351%
<b>Ouro Branco</b>	9	11	20	45,000%	55,000%	0,319%
<b>Ouro Preto</b>	20	82	102	19,608%	80,392%	1,625%
<b>Pará de Minas</b>	159	216	375	42,400%	57,600%	5,975%
<b>Curvelo</b>	89	90	179	49,721%	50,279%	2,852%
<b>Itabirito</b>	48	58	106	45,283%	54,717%	1,689%
<b>Conselheiro Lafaiete</b>	151	205	356	42,416%	57,584%	5,672%
<b>Minas Novas</b>	589	392	981	60,041%	39,959%	15,631%
<b>Sete Lagoas</b>	61	112	173	35,260%	64,740%	2,757%
<b>Turmalina</b>	952	620	1572	60,560%	39,440%	25,048%
<b>Abaeté</b>	14	23	37	37,838%	62,162%	0,590%
<b>Nova Lima</b>	21	44	65	32,308%	67,692%	1,036%
<b>Divinópolis</b>	206	267	473	43,552%	56,448%	7,537%
<b>Itaúna</b>	80	72	152	52,632%	47,368%	2,422%
<b>Sto Antônio Monte</b>	33	17	50	66,000%	34,000%	0,797%
<b>Barreiro</b>	170	343	513	33,138%	66,862%	8,174%
<b>Total Geral</b>	<b>2980</b>	<b>3296</b>	<b>6276</b>	<b>47,482%</b>	<b>52,518%</b>	<b>100,000%</b>

Fonte: Banco do Povo

Conjuntamente, os PAB de Belo Horizonte, Minas Novas e Turmalina respondem por 54,86% do total de contratos. Embora, em média, as mulheres tenham uma participação superior aos homens, em Turmalina e Minas Novas, respectivamente os maiores PAB, esta concentração é inversa: os homens respondem por cerca de 60% dos contratos e as mulheres pelo restante.

Quanto ao valor do crédito concedido, a TAB.4 apresenta a frequência absoluta e relativa por faixa de valor do crédito, indicando que, em termos gerais, 61,79% do crédito vigora entre R\$481,00 (quatrocentos e oitenta e um reais) e R\$1.440,00 (hum mil, quatrocentos e quarenta reais).



TABELA 4  
 Frequência absoluta e relativa do valor do crédito por faixa de crédito segundo gênero

Faixa Valor Crédito em R\$				%		
	Homens	Mulheres	Total	Hom/Hom Tot Geral	%Mul/Mul Tot Geral	Total/Tot Geral
<b>0-480</b>	90	111	201	3,020%	3,368%	3,203%
<b>481-960</b>	1181	1392	2573	39,631%	42,233%	40,997%
<b>961-1440</b>	592	713	1305	19,866%	21,632%	20,793%
<b>1441-1920</b>	550	563	1113	18,456%	17,081%	17,734%
<b>1921-2400</b>	325	325	650	10,906%	9,860%	10,357%
<b>2401-2880</b>	57	65	122	1,913%	1,972%	1,944%
<b>2881-3360</b>	168	115	283	5,638%	3,489%	4,509%
<b>3361-3840</b>	0	1	1	0,000%	0,030%	0,016%
<b>3841-4320</b>	7	9	16	0,235%	0,273%	0,255%
<b>4321-4800</b>	0	0	0	0,000%	0,000%	0,000%
<b>4801-5280</b>	8	2	10	0,268%	0,061%	0,159%
<b>5281-5760</b>	0	0	0	0,000%	0,000%	0,000%
<b>5761-6240</b>	0	0	0	0,000%	0,000%	0,000%
<b>6241-6720</b>	0	0	0	0,000%	0,000%	0,000%
<b>6721-7200</b>	1	0	1	0,034%	0,000%	0,016%
<b>7201-7680</b>	0	0	0	0,000%	0,000%	0,000%
<b>7681-8160</b>	1	0	1	0,034%	0,000%	0,016%
<b>Total Geral</b>	<b>2980</b>	<b>3296</b>	<b>6276</b>	-	-	-

Fonte: Banco do Povo

Analisando-se desagregadamente por PAB percebe-se uma dispersão relativamente elevada inter-regionalmente. Abaeté e Congonhas concedem créditos com valores bem mais baixos quando comparados com os demais, e em específico com outros de mesmo porte, como Ouro Branco e Santo Antônio do Monte.

Outro aspecto interessante é o fato dos homens terem, em média, um valor médio de crédito ligeiramente superior às mulheres, também evidenciado pela distribuição de frequência acumulada das faixas de valor de crédito (TAB.4 e 5).

TABELA 5  
Valor médio do crédito por PAB segundo gênero

<b>PAB/Gênero</b>	<b>Homens</b>	<b>Mulheres</b>	<b>Total</b>
<b>Belo Horizonte</b>	1.230,24	1.157,64	1.181,70
<b>Vespasiano</b>	1.357,98	1.196,48	1.249,55
<b>Congonhas</b>	836,76	777,50	815,21
<b>Ouro Branco</b>	958,42	1.150,91	1.064,29
<b>Ouro Preto</b>	1.345,50	1.294,22	1.304,27
<b>Pará de Minas</b>	1.321,74	1.149,94	1.222,78
<b>Curvelo</b>	1.377,43	1.308,01	1.342,52
<b>Itabirito</b>	1.656,67	1.276,94	1.448,89
<b>Conselheiro Lafaiete</b>	1.272,96	1.297,84	1.287,28
<b>Minas Novas</b>	1.403,90	1.290,37	1.358,54
<b>Sete Lagoas</b>	1.254,35	1.265,47	1.261,55
<b>Turmalina</b>	1.265,81	1.193,86	1.237,43
<b>Abaeté</b>	798,22	766,29	778,37
<b>Nova Lima</b>	1.029,58	1.296,05	1.209,96
<b>Divinópolis</b>	1.248,05	1.153,72	1.194,81
<b>Itaúna</b>	1.042,11	970,93	1.008,39
<b>Sto Antônio Monte</b>	1.201,74	975,79	1.124,92
<b>Barreiro</b>	1.165,90	1.215,00	1.198,73
<b>Média Geral (R\$)</b>	<b>1.284,54</b>	<b>1.202,19</b>	<b>1.241,29</b>

Fonte: Banco do Povo

Embora os homens tenham crédito concedido um pouco mais elevado, seu grau de escolaridade não é superior ao das mulheres: 58,89% possuem até o 1<sup>o</sup> grau completo, ante 44,94% para as mulheres; 22,65% possuem curso de 2<sup>o</sup> grau completo ou não, 32,43% as mulheres; e, 4,96% com curso superior completo ou não, comparados a 8,38% das mulheres (TAB.6). Os PAB com menores valores médios de crédito são também aqueles com níveis de escolaridade mais baixos.

TABELA 6  
Distribuição percentual do grau de escolaridade por PAB segundo gênero

(Continua)

PAB/Instrução-Homens	1º grau inc	1º grau comp	2º grau inc	2º grau comp	sup inc	sup comp	s/decla
Belo Horizonte	24,75%	12,20%	7,12%	33,56%	7,12%	7,12%	8,14%
Vespasiano	27,54%	26,09%	5,80%	34,78%	0,00%	0,00%	5,80%
Congonhas	64,29%	21,43%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	14,29%
Ouro Branco	33,33%	22,22%	0,00%	22,22%	0,00%	0,00%	22,22%
Ouro Preto	30,00%	20,00%	15,00%	15,00%	10,00%	0,00%	10,00%
Pará de Minas	22,64%	7,55%	9,43%	19,50%	1,89%	0,00%	38,99%
Curvelo	44,94%	17,98%	7,87%	21,35%	2,25%	4,49%	1,12%
Itabirito	10,42%	39,58%	14,58%	18,75%	4,17%	8,33%	4,17%
Conselheiro Lafaiete	35,76%	17,88%	7,28%	27,15%	5,96%	2,65%	3,31%
Minas Novas	59,08%	8,49%	2,04%	12,22%	0,51%	0,51%	17,15%
Sete Lagoas	47,54%	19,67%	8,20%	14,75%	4,92%	1,64%	3,28%
Turmalina	56,09%	12,29%	5,25%	7,56%	0,21%	1,37%	17,23%
Abaeté	71,43%	7,14%	21,43%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Nova Lima	28,57%	19,05%	0,00%	23,81%	9,52%	4,76%	14,29%
Divinópolis	25,24%	21,84%	9,71%	25,24%	8,25%	3,40%	6,31%
Itaúna	38,75%	11,25%	11,25%	23,75%	6,25%	3,75%	5,00%
Sto Antônio Monte	51,52%	12,12%	9,09%	24,24%	0,00%	0,00%	3,03%
Barreiro	34,12%	27,06%	5,29%	18,24%	6,47%	2,94%	5,88%
<b>Total por Instrução</b>	<b>44,63%</b>	<b>14,26%</b>	<b>6,01%</b>	<b>16,64%</b>	<b>2,75%</b>	<b>2,21%</b>	<b>13,49%</b>

(Conclusão)

PAB/Instrução - Mulheres	1º grau inc	1º grau comp	2º grau inc	2º grau comp	sup inc	sup comp	s/decla
Belo Horizonte	26,39%	11,26%	8,24%	29,08%	5,04%	7,73%	12,27%
Vespasiano	26,24%	18,44%	2,84%	36,88%	1,42%	7,80%	6,38%
Congonhas	50,00%	0,00%	0,00%	12,50%	0,00%	25,00%	12,50%
Ouro Branco	27,27%	18,18%	0,00%	27,27%	9,09%	0,00%	18,18%
Ouro Preto	19,51%	20,73%	4,88%	39,02%	3,66%	6,10%	6,10%
Pará de Minas	8,33%	15,74%	9,72%	25,00%	0,46%	1,39%	39,35%
Curvelo	37,78%	15,56%	12,22%	26,67%	2,22%	3,33%	2,22%
Itabirito	32,76%	24,14%	17,24%	12,07%	3,45%	6,90%	3,45%
Conselheiro Lafaiete	29,76%	6,83%	9,27%	34,63%	5,85%	5,37%	8,29%
Minas Novas	45,66%	10,71%	3,06%	14,54%	2,81%	6,63%	16,58%
Sete Lagoas	28,57%	18,75%	18,75%	24,11%	6,25%	0,89%	2,68%
Turmalina	42,10%	10,81%	7,42%	12,74%	0,97%	4,03%	21,94%
Abaeté	52,17%	0,00%	4,35%	26,09%	8,70%	0,00%	8,70%
Nova Lima	43,18%	20,45%	9,09%	11,36%	11,36%	0,00%	4,55%
Divinópolis	28,84%	12,36%	7,87%	33,33%	3,37%	5,62%	8,61%
Itaúna	22,22%	12,50%	13,89%	19,44%	11,11%	6,94%	13,89%
Sto Antônio Monte	17,65%	5,88%	11,76%	58,82%	0,00%	0,00%	5,88%
Barreiro	29,15%	18,37%	7,87%	30,03%	1,46%	3,79%	9,33%
<b>Total por Instrução</b>	<b>31,80%</b>	<b>13,14%</b>	<b>7,95%</b>	<b>24,48%</b>	<b>3,22%</b>	<b>5,16%</b>	<b>14,26%</b>

Fonte: Banco do Povo

De fato, o coeficiente de correlação entre grau de escolaridade e valor médio do crédito, apresentado na TAB.7, confirma as evidências anteriores. O coeficiente de correlação é significativamente positivo para homens e mulheres, indicando que, quanto maior a escolaridade, maior o valor concedido. Ademais, essa correlação é ainda mais forte para as mulheres, o que se explica pelo fato de, mesmo não tendo uma composição educacional tão elevada quanto as mulheres, os homens contraem empréstimos com valores médios mais elevados.

TABELA 7  
Valor médio do crédito por grau de instrução segundo gênero

<b>Grau Instrução\Gênero</b>	<b>Homens</b>	<b>Mulheres</b>	<b>Média Geral</b>
<b>1º grau incompleto</b>	1219,18	1139,53	1184,08
<b>1º grau completo</b>	1279,46	1231,16	1255,09
<b>2º grau incompleto</b>	1364,83	1187,46	1259,45
<b>2º grau completo</b>	1361,54	1214,20	1270,29
<b>superior incompleto</b>	1289,15	1322,58	1308,00
<b>superior completo</b>	1739,55	1417,03	1507,23
<b>indeterminado</b>	1299,77	1197,93	1244,88
<b>Média Geral</b>	1284,54	1202,19	1241,29
<b>Coefficiente Correlação</b>	<b>0,753</b>	<b>0,895</b>	<b>0,865</b>

Fonte: Banco do Povo

Outro aspecto interessante é o fato de as mulheres apresentarem, em média, renda líquida superior aos homens. A renda líquida é calculada subtraindo-se, da renda total familiar, todos os gastos fixos da respectiva família, como alimentação, educação, saúde, vestuário, transporte, dentre outros. Essa variável é calculada através do questionário aplicado pelo agente de crédito na residência ou no estabelecimento comercial do candidato solicitante. A TAB.8 apresenta esse resultado.

TABELA 8  
Renda líquida média por PAB segundo gênero

<b>PAB/Gênero</b>	<b>Homens</b>	<b>Mulheres</b>	<b>Total</b>
<b>Belo Horizonte</b>	827,70	837,98	834,49
<b>Vespasiano</b>	739,90	599,57	644,33
<b>Congonhas</b>	699,53	880,93	767,65
<b>Ouro Branco</b>	1.138,80	919,82	1.004,73
<b>Ouro Preto</b>	1.099,71	903,01	946,44
<b>Pará de Minas</b>	728,38	588,65	645,38
<b>Curvelo</b>	766,47	1.023,29	895,49
<b>Itabirito</b>	1.387,97	859,38	1.092,37
<b>Conselheiro Lafaiete</b>	700,38	722,19	713,10
<b>Minas Novas</b>	197,26	254,83	219,70
<b>Sete Lagoas</b>	711,78	820,38	786,69
<b>Turmalina</b>	357,57	368,41	361,78
<b>Abaeté</b>	1.020,90	652,96	784,29
<b>Nova Lima</b>	809,31	819,38	815,92
<b>Divinópolis</b>	806,16	808,62	807,48
<b>Itaúna</b>	841,09	574,12	713,59
<b>Sto Antônio Monte</b>	783,63	1.007,26	853,02
<b>Barreiro</b>	648,78	641,77	644,04
<b>Média Geral (R\$)</b>	<b>519,60</b>	<b>608,68</b>	<b>565,27</b>

Fonte: Banco do Povo

Para se contornar a diferença de tamanho entre os PAB, pode-se ponderar a renda líquida média pelo número de clientes, ou seja, transformá-la em renda líquida média ponderada.

Mesmo assim, a renda líquida ponderada feminina é cerca de 16,65% superior à dos homens. Uma suposição poderia ser o fato de as mulheres apresentarem um estado civil com maior concentração de casadas, inferindo-lhes uma condição de cônjuge e, por conseguinte, menos responsável pela geração da renda familiar. No entanto, os dados de estado civil indicam um perfil masculino muito semelhante ao feminino, como mostrado pela TAB. 9. De fato, há um percentual de mulheres na condição de solteiras inferior ao dos homens, mas, em parte, compensado pelo de viúvas e divorciadas. Em suma, não há evidências claras de que as mulheres sejam proporcionalmente mais cônjuges do que chefes de família.

TABELA 9  
Composição percentual do estado civil por PAB segundo gênero

Gênero PAB/Estado Civil	homens					mulheres				
	solteiro	casado	viúvo	divorciado	outros	solteiro	casado	viúvo	divorciado	outros
<b>Belo Horizonte</b>	33,56%	54,24%	1,36%	9,49%	1,36%	29,08%	47,39%	8,57%	7,56%	7,39%
<b>Vespasiano</b>	36,23%	46,38%	0,00%	11,59%	5,80%	31,91%	48,23%	3,55%	9,93%	6,38%
<b>Congonhas</b>	21,43%	71,43%	0,00%	0,00%	7,14%	0,00%	62,50%	37,50%	0,00%	0,00%
<b>Ouro Branco</b>	44,44%	44,44%	0,00%	0,00%	11,11%	27,27%	72,73%	0,00%	0,00%	0,00%
<b>Ouro Preto</b>	40,00%	55,00%	0,00%	0,00%	5,00%	32,93%	53,66%	0,00%	7,32%	6,10%
<b>Pará de Minas</b>	54,09%	42,14%	0,63%	0,00%	3,14%	39,81%	52,78%	2,31%	2,31%	2,78%
<b>Curvelo</b>	29,21%	58,43%	0,00%	3,37%	8,99%	33,33%	47,78%	1,11%	11,11%	6,67%
<b>Itabirito</b>	39,58%	43,75%	0,00%	6,25%	10,42%	18,97%	55,17%	3,45%	13,79%	8,62%
<b>Conselheiro Lafaiete</b>	39,07%	52,98%	0,00%	4,64%	3,31%	33,17%	45,37%	3,41%	9,76%	8,29%
<b>Minas Novas</b>	51,44%	40,75%	3,57%	0,68%	3,57%	60,20%	28,57%	5,87%	1,28%	4,08%
<b>Sete Lagoas</b>	21,31%	70,49%	0,00%	3,28%	4,92%	33,93%	39,29%	9,82%	16,07%	0,89%
<b>Turmalina</b>	70,48%	25,53%	0,00%	0,84%	3,15%	64,68%	28,55%	3,06%	1,45%	2,26%
<b>Abaeté</b>	57,14%	35,71%	0,00%	7,14%	0,00%	8,70%	73,91%	4,35%	8,70%	4,35%
<b>Nova Lima</b>	23,81%	57,14%	4,76%	0,00%	14,29%	25,00%	54,55%	6,82%	11,36%	2,27%
<b>Divinópolis</b>	34,47%	55,34%	1,46%	3,88%	4,85%	39,33%	39,70%	8,61%	7,49%	4,87%
<b>Itaúna</b>	35,00%	53,75%	0,00%	8,75%	2,50%	23,61%	62,50%	1,39%	5,56%	6,94%
<b>Sto Antônio Monte</b>	42,42%	45,45%	3,03%	0,00%	9,09%	29,41%	58,82%	0,00%	11,76%	0,00%
<b>Barreiro</b>	28,82%	58,24%	0,00%	6,47%	6,47%	24,78%	56,27%	2,33%	10,20%	6,41%
<b>Total por Estado Civil</b>	<b>50,03%</b>	<b>41,98%</b>	<b>1,04%</b>	<b>3,02%</b>	<b>3,93%</b>	<b>40,75%</b>	<b>42,99%</b>	<b>4,95%</b>	<b>6,31%</b>	<b>5,01%</b>

Fonte: Banco do Povo

A variável idade não apresentou distinção relevante entre homens e mulheres. Conforme listado na TAB.10, a idade média das mulheres pouco difere daquela dos homens, não sugerindo, assim, nenhuma evidência etária que os distingua.

TABELA 10  
Idade média por PAB segundo gênero

<b>PAB/Gênero</b>	<b>Homens</b>	<b>Mulheres</b>	<b>Total</b>
<b>Belo Horizonte</b>	43,48	45,54	44,86
<b>Vespasiano</b>	43,59	41,36	42,10
<b>Congonhas</b>	40,14	53,00	44,43
<b>Ouro Branco</b>	36,00	39,64	38,00
<b>Ouro Preto</b>	43,25	38,72	39,61
<b>Pará de Minas</b>	36,65	37,22	36,98
<b>Curvelo</b>	41,56	40,12	40,84
<b>Itabirito</b>	38,27	39,88	39,15
<b>Conselheiro Lafaiete</b>	40,74	38,22	39,29
<b>Minas Novas</b>	45,58	42,05	44,16
<b>Sete Lagoas</b>	43,20	42,50	42,75
<b>Turmalina</b>	37,08	38,28	37,55
<b>Abaeté</b>	36,50	42,87	40,46
<b>Nova Lima</b>	41,43	43,30	42,69
<b>Divinópolis</b>	40,07	41,15	40,68
<b>Itaúna</b>	37,26	36,57	36,93
<b>Sto Antônio Monte</b>	35,67	38,65	36,68
<b>Barreiro</b>	44,15	44,24	44,21
<b>Média Geral</b>	<b>40,65</b>	<b>41,29</b>	<b>40,99</b>

Fonte: Banco do Povo

A finalidade do crédito é outra variável que distingue o perfil entre os gêneros. Na TAB.11, é apresentada a distribuição percentual da finalidade do crédito para homens e mulheres em cada PAB. Em Minas Novas e Turmalina, onde há a maior concentração de contratos da Instituição, mais de 90% destinam-se à aquisição de capital fixo, para o caso masculino, enquanto 92,09% e 85,32%, respectivamente, têm essa mesma finalidade, para o caso feminino. Para o PAB Belo Horizonte, a finalidade de crédito é mais homoganeamente distribuída para ambos os gêneros. No entanto, agregadamente, há uma concentração maior de crédito voltado para capital fixo (66,98%) no caso masculino ante ao feminino (48,88%), ao passo que a modalidade de capital de giro é, em ambos os casos, a menos utilizada (12,45% e 19,75% para homens e mulheres, respectivamente). Deve-se ponderar que não há como mensurar quanto do capital destinado simultaneamente ao capital fixo e de giro, ou seja, ao capital misto, não pode estar sendo mais empregado como capital de giro, viesando, assim, a interpretação dessa variável.

TABELA 11  
Distribuição percentual da finalidade do crédito por PAB segundo gênero

PAB\ Gênero Finalidade Crédito	Homens			Mulheres		
	misto	fixo	cap.giro	misto	fixo	cap.giro
<b>Belo Horizonte</b>	32,54%	28,47%	38,98%	33,61%	30,76%	35,63%
<b>Vespasiano</b>	57,97%	33,33%	8,70%	47,52%	40,43%	12,06%
<b>Congonhas</b>	21,43%	42,86%	35,71%	75,00%	0,00%	25,00%
<b>Ouro Branco</b>	44,44%	33,33%	22,22%	36,36%	36,36%	27,27%
<b>Ouro Preto</b>	40,00%	45,00%	15,00%	37,80%	15,85%	46,34%
<b>Pará de Minas</b>	50,94%	44,65%	4,40%	65,28%	31,48%	3,24%
<b>Curvelo</b>	6,74%	66,29%	26,97%	17,78%	54,44%	27,78%
<b>Itabirito</b>	50,00%	33,33%	16,67%	63,79%	22,41%	13,79%
<b>Conselheiro Lafaiete</b>	26,49%	32,45%	41,06%	39,02%	17,07%	43,90%
<b>Minas Novas</b>	4,41%	94,91%	0,68%	6,12%	92,09%	1,79%
<b>Sete Lagoas</b>	31,15%	52,46%	16,39%	41,96%	27,68%	30,36%
<b>Turmalina</b>	9,56%	90,02%	0,42%	13,55%	85,32%	1,13%
<b>Abaeté</b>	14,29%	85,71%	0,00%	34,78%	43,48%	21,74%
<b>Nova Lima</b>	28,57%	23,81%	47,62%	27,27%	47,73%	25,00%
<b>Divinópolis</b>	35,92%	41,75%	22,33%	38,58%	31,46%	29,96%
<b>Itaúna</b>	40,00%	48,75%	11,25%	59,72%	22,22%	18,06%
<b>Sto Antônio Monte</b>	9,09%	75,76%	15,15%	29,41%	41,18%	29,41%
<b>Barreiro</b>	34,12%	35,88%	30,00%	36,73%	37,90%	25,36%
<b>Total Geral</b>	<b>20,57%</b>	<b>66,98%</b>	<b>12,45%</b>	<b>31,37%</b>	<b>48,88%</b>	<b>19,75%</b>

Fonte: Banco do Povo

Outra variável característica do perfil do crédito, e utilizada na construção do histórico de crédito de candidatos que tiveram sua solicitação recusada, é o número de parcelas de cada contrato de crédito. Como pode-se observar na TAB.12, para a base de clientes analisada, essa variável não apresentou comportamento distinto entre homens e mulheres, indicando uma concentração maior em torno de 12 parcelas. Tal número foi utilizado como parâmetro na geração do número de parcelas de cada contrato simulado para os candidatos recusados pela Instituição, como demonstrado adiante.

TABELA 12  
Distribuição da frequência relativa do número de parcelas por PAB segundo gênero

PAB/Gênero No. Parcelas	Homens			Mulheres		
	1 a 11	12	13 e +	1 a 11	12	13 e +
Belo Horizonte	65,42%	33,56%	1,02%	64,87%	34,45%	0,67%
Vespasiano	39,13%	52,17%	8,70%	44,68%	52,48%	2,84%
Congonhas	50,00%	50,00%	0,00%	25,00%	75,00%	0,00%
Ouro Branco	22,22%	77,78%	0,00%	45,45%	54,55%	0,00%
Ouro Preto	30,00%	65,00%	5,00%	58,54%	39,02%	2,44%
Pará de Minas	38,36%	57,23%	4,40%	47,22%	52,31%	0,46%
Curvelo	56,18%	43,82%	0,00%	72,22%	27,78%	0,00%
Itabirito	41,67%	54,17%	4,17%	37,93%	62,07%	0,00%
Conselheiro Lafaiete	41,72%	56,29%	1,99%	49,76%	49,76%	0,49%
Minas Novas	19,69%	79,80%	0,51%	24,23%	75,51%	0,26%
Sete Lagoas	59,02%	39,34%	1,64%	58,04%	40,18%	1,79%
Turmalina	29,73%	70,27%	0,00%	33,23%	66,61%	0,16%
Abaeté	50,00%	50,00%	0,00%	43,48%	56,52%	0,00%
Nova Lima	66,67%	33,33%	0,00%	59,09%	40,91%	0,00%
Divinópolis	42,72%	53,40%	3,88%	53,18%	46,44%	0,37%
Itaúna	43,75%	56,25%	0,00%	59,72%	40,28%	0,00%
Sto Antônio Monte	45,45%	54,55%	0,00%	64,71%	35,29%	0,00%
Barreiro	62,94%	35,29%	1,76%	59,77%	38,78%	1,46%
<b>Total Geral</b>	<b>37,92%</b>	<b>60,84%</b>	<b>1,24%</b>	<b>48,48%</b>	<b>50,85%</b>	<b>0,67%</b>

Fonte: Banco do Povo

Algumas variáveis relativas às características sócioeconômicas, tais como idade e renda líquida familiar, não se mostraram significativas. Outras características econômicas, levantadas no ato da aplicação do questionário na residência do candidato solicitante, ou em seu estabelecimento comercial, também não se mostraram relevantes, e foram excluídas em uma análise prévia a essa, não fazendo parte também do modelo de concessão de crédito. As variáveis que fazem parte deste questionário que foram excluídas são: valor do terreno, valor do imóvel, valor do automóvel, valor da renda total familiar, valor dos gastos com água, luz, telefone, alimentação transporte, saúde, aluguel e vestuário.<sup>37</sup> Nos parágrafos seguintes é feita uma análise do comportamento do crédito em função do número de dias de pagamento de cada parcela em relação à sua data de vencimento, ou seja, se pagas em dia, com atraso, com antecedência, ou até mesmo não pagas, com e sem renegociação. As variáveis que apresentaram alguma distinção entre gêneros, como grau de escolaridade e finalidade do crédito, foram aqui contempladas.

Na TAB.13, sintetiza-se o comportamento das parcelas de crédito de todos os contratos em vigor no período em análise, com separação daqueles contratos estabelecidos entre aqueles que não sofreram nenhum tipo de renegociação e os que sofreram uma ou mais renegociações, no período de vigência.

<sup>37</sup> As variáveis de gastos são utilizadas no cálculo da renda líquida familiar.



TABELA 13  
Perfil das parcelas de crédito por situação do contrato

<b>Característica dos Contratos e das Parcelas</b>	<b>(%)</b>
<b>Contratos Sem Renegociação (total: 5948)</b>	<b>94,774%</b>
<b>Parcelas sem Renegociação</b>	<b>94,635%</b>
Parcelas em Aberto e Sem Renegociação	4,730%
Parcelas Pagas Antecipadas	28,196%
Parcelas Pagas em Dia e Sem Renegociação	15,974%
Parcelas Pagas em Atraso e Sem Renegociação	45,736%
<b>Contratos Renegociados (total: 328)</b>	<b>5,226%</b>
<b>Parcelas Renegociadas</b>	<b>5,365%</b>
Parcelas Renegociadas e não Pagas	2,853%
Parcelas Renegociadas e Pagas	2,512%

Fonte: Banco do Povo

De um total de 6 276 contratos, 94,77% não sofreram nenhuma renegociação. Das 46 602 parcelas referentes a todos os contratos, 2 500 sofreram algum tipo de renegociação, sendo que 1 330 continuaram não sendo pagas, e 1 170 o foram. Das parcelas cujos contratos não sofreram algum tipo de renegociação, somente 7 447 (15,97% do total de parcelas) foram pagas em dia, embora 28,20% tenham sido pagas antecipadamente; ou seja, cerca de 44% são pagas sem qualquer atraso. Em contrapartida, 45,74% das parcelas pagas sofrem algum atraso, e 4,73% ainda estavam inadimplentes no ato da coleta destes dados. O histórico do número de dias de pagamento, ou não, de cada parcela em relação a sua data de vencimento é utilizado para a simulação dos candidatos a crédito que tiveram seu pedido indeferido. O histórico de cada contrato, em separado, é a base para a construção do histórico simulado de crédito daqueles candidatos com pedido de crédito recusado.

#### 5.4 Análise dos pagamentos de crédito

De forma sucinta, nesta subseção, são mostradas tenta buscar evidências relevantes sobre o comportamento do cliente ao longo do processo de concessão de crédito. Os pagamentos ou não das parcelas são sintetizados na TAB.14 e a seguir é feita uma análise, em separado, para cada situação das parcelas (em atraso, pagas em antecipado, em dia, em aberto, renegociadas e não pagas, e renegociadas e pagas).

TABELA 14  
Número de dias em relação ao vencimento por situação das parcelas segundo gênero

Situação das Parcelas	Homens	Mulheres	Total Geral
Pagas Com Atraso	19,75	18,58	19,14
Pagas Antecipadas	6,64	6,86	6,75
Não Pagas – Em Aberto	151,75	137,59	144,27
Renegociadas – Em Aberto	335,61	301,26	316,42
Renegociadas – Pagas em Atraso	41,87	34,00	37,13

Fonte: Banco do Povo

Via de regra, o comportamento das mulheres diferencia-se, porque: apresentam dias de atraso inferiores e pagamentos antecipados superiores aos homens. As parcelas renegociadas e não pagas, por apresentarem número de dias superiores a 180, vão para PDD (Provisão para Devedores Duvidosos) e, após 360 dias, são lançadas a prejuízo na carteira da Instituição. Por essa razão, não entram na análise adiante.<sup>38</sup>

No GRÁF.7, apresenta-se a frequência relativa dos pagamentos feitos em dia, separadamente, para homens e mulheres. Esse resultado vai em consonância com o resultado da TAB.14, e mostra, adicionalmente, que o comportamento médio masculino é muito semelhante ao feminino. Outra informação interessante é que, em média, o comportamento dos homens e mulheres é positivamente relacionado com o valor do crédito, tornando-se menos satisfatório com valores de crédito superiores a R\$3.840,00 (três mil oitocentos e quarenta reais) para as mulheres e superior a R\$4.800,00 (quatro mil e oitocentos reais) para os homens.

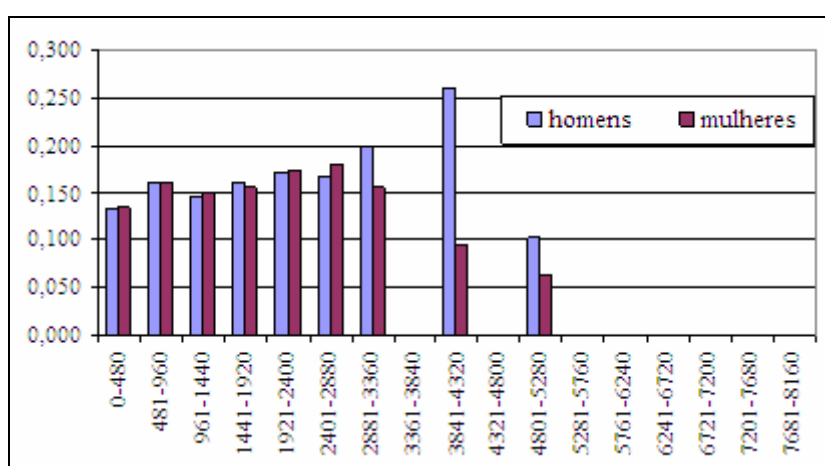


GRÁFICO 7: Frequência relativa dos pagamentos em dia por valor do crédito

Fonte: Banco do Povo - Tabulações especiais

<sup>38</sup> As demais parcelas que foram renegociadas, por representarem cerca de 2% do valor da carteira ativa pessoa física, foram, por simplificação, também excluídas desta análise.

No GRAF.8a, infere-se que a finalidade de crédito voltada para capital misto apresentou uma piora com o aumento do valor concedido de crédito, assim como o capital de giro. No caso das mulheres, como sugerido por esse mesmo gráfico, as finalidades de capital de giro e misto são as que mais acompanharam o movimento de queda na frequência relativa dos pagamentos em dia para as faixas de crédito mais elevadas.

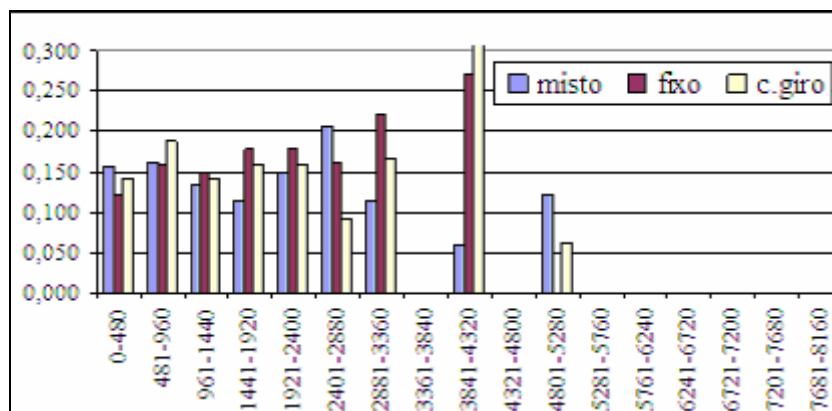


GRÁFICO 8a: Frequência relativa dos pagamentos em dia por valor e finalidade do crédito - Homens

Fonte: Banco do Povo - Tabulações Especiais

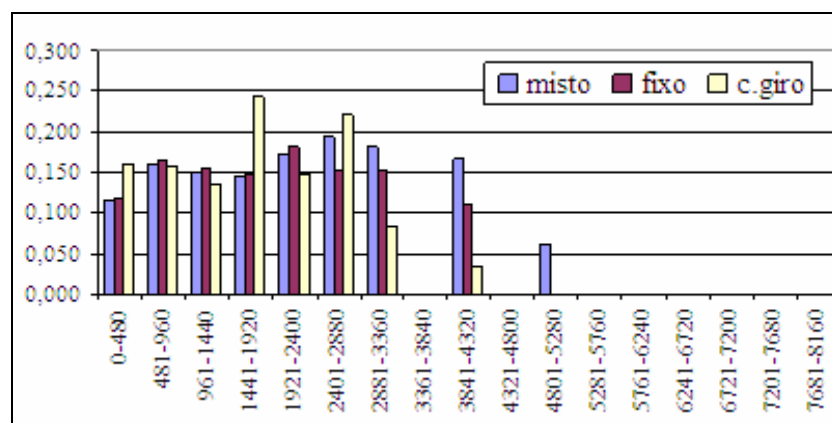


GRÁFICO 8b: Frequência relativa dos pagamentos em dia por valor e finalidade do crédito - Mulheres

Fonte: Banco do Povo - Tabulações especiais

No entanto, o mais significativo é a inexistência de um padrão no comportamento médio do pagamento em qualquer finalidade de crédito; ou seja, não há evidências fortes de comportamento diferenciado no pagamento em dia controlando-se pela finalidade do crédito contraído pelos clientes.

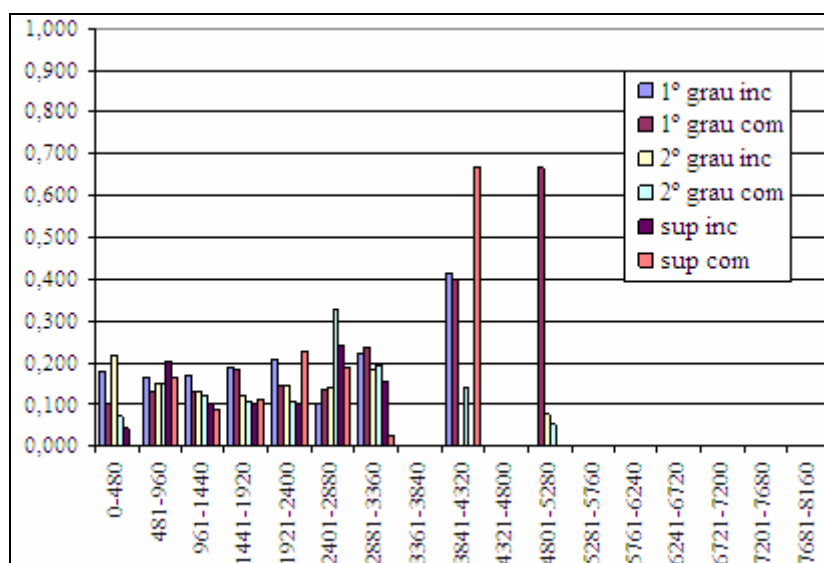


GRÁFICO 9a: Frequência relativa dos pagamentos em dia por valor do crédito e grau escolaridade - Homens

Fonte: Banco do Povo - Tabulações especiais

Quando se inclui o grau de escolaridade como variável de controle, os resultados entre homens e mulheres apresentam uma distinção interessante. Em praticamente todas as faixas de valor de crédito, a frequência relativa dos pagamentos em dia, dos homens, é declinante com o aumento da escolaridade. No entanto, no caso feminino, não há evidências nesse sentido, como demonstram os GRÁF.9a e 9b.

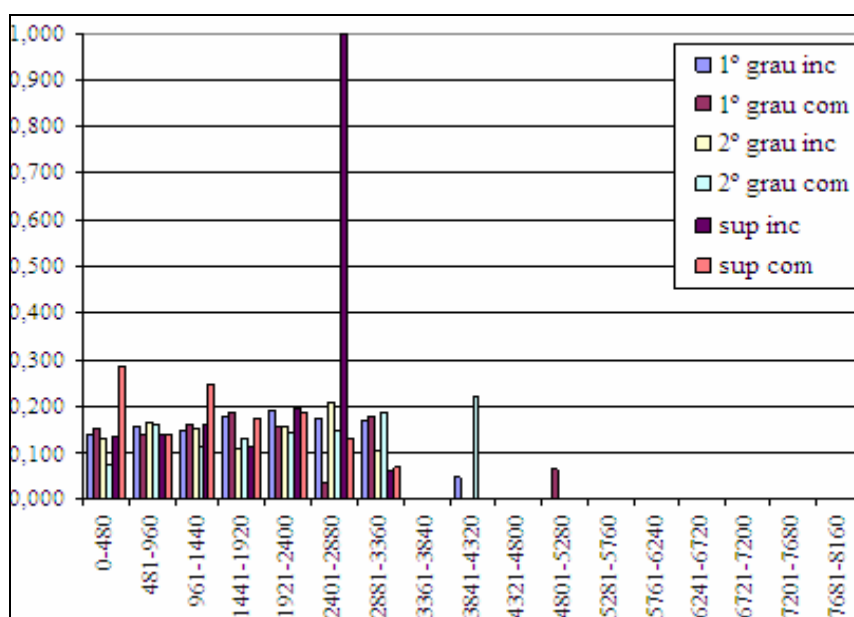


GRÁFICO 9b: Frequência relativa dos pagamentos em dia por valor do crédito e grau escolaridade - Mulheres

Fonte: Banco do Povo - Tabulações Especiais

Pagamentos em dia, assim como os pagamentos antecipados fortalecem a qualidade da carteira de crédito. Do total da carteira em análise, um percentual significativamente elevado corresponde a pagamentos antecipados (28,20%), como demonstrado na TAB.13, anteriormente. O perfil de pagamentos antecipados são similares àqueles em dia: homens tendem a apresentar um percentual ligeiramente superior às mulheres, embora nas faixas de crédito mais elevadas, esse comportamento se alterne (GRÁF.10).

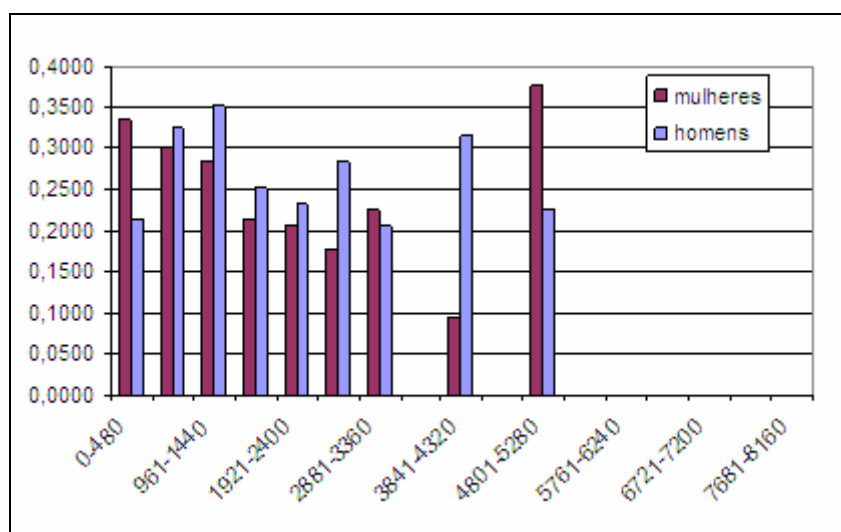


GRÁFICO 10: Frequência relativa do pagamento antecipado por valor do crédito – Homens e Mulheres

Fonte: Banco do Povo - Tabulações especiais

No que diz respeito à finalidade do crédito, a frequência relativa dos pagamentos dos homens não apresenta nenhum padrão de comportamento claro (GRÁF.11a) como o feminino (GRÁF.11b).

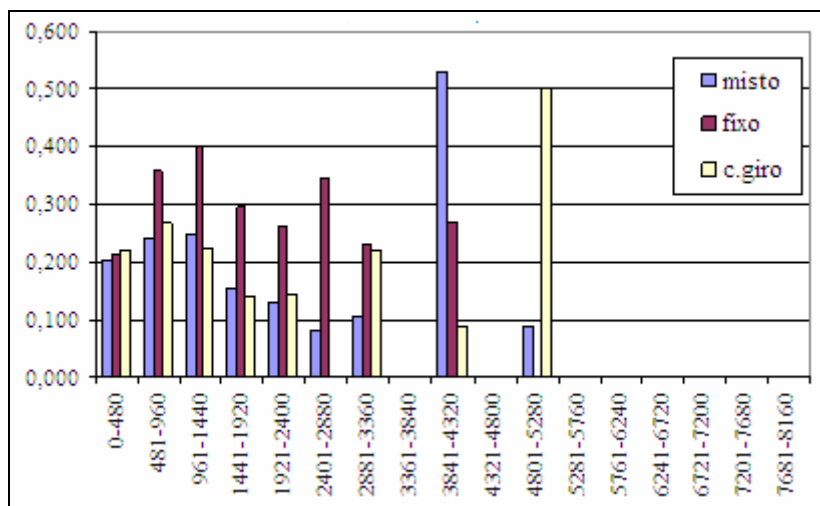


GRÁFICO 11a: Frequência relativa pagamentos antecipados por finalidade do crédito – Homens

Fonte: Banco do Povo - Tabulações Especiais

Como ilustrado no GRÁF.11b, o crédito concedido às mulheres parece seguir um certo padrão: há uma redução na frequência relativa de pagamentos antecipados, quando se aumenta o valor do crédito concedido, em todas as finalidades de crédito, destacando-se aquele voltado para capital fixo. É importante lembrar que o crédito destinado a capital de giro representa o menor percentual dentre as finalidades de crédito, sendo da ordem de 20% do total concedido às mulheres.

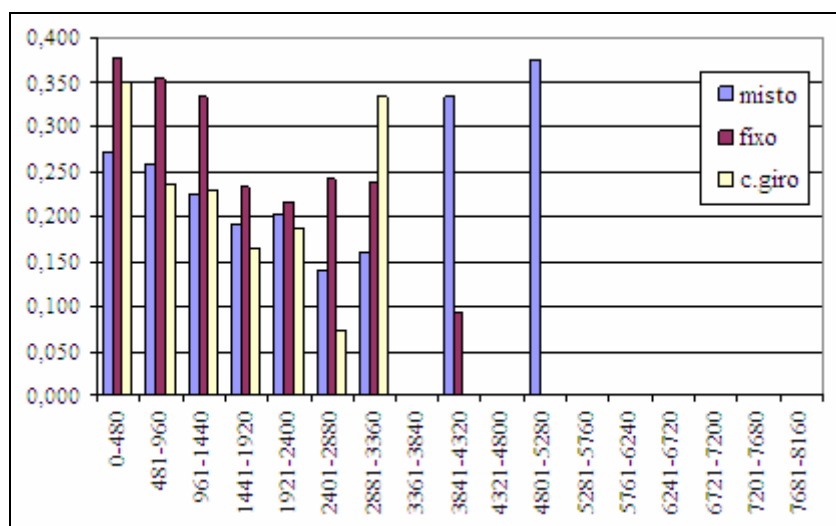


GRÁFICO 11b: Frequência relativa pagamentos antecipados por finalidade do crédito – Mulheres

Fonte: Banco do Povo - Tabulações especiais

Por fim, no que diz respeito ao grau de escolaridade, reproduz-se o mesmo comportamento observado para aqueles que mantêm seu pagamento em dia. Como demonstrado no GRÁF.12a, os homens tendem a apresentar uma redução na Frequência de pagamentos antecipados, à medida que se aumenta o grau de escolaridade, dentro da mesma faixa de valor de crédito. Ademais, percebe-se uma redução pouco expressiva na Frequência de pagamentos antecipados, quando se aumenta o valor do crédito, ou seja, os homens com créditos e nível de escolaridade menores tendem a ser mais zelosos de seus compromissos que aqueles mais escolarizados e com volumes de crédito maiores.

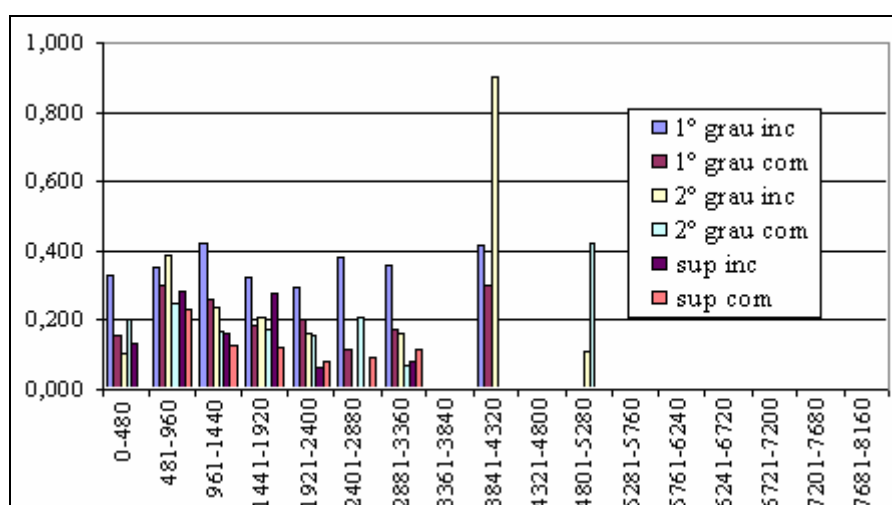


GRÁFICO 12a: Frequência relativa dos pagamentos antecipados por valor do crédito e grau escolaridade - Homens

Fonte: Banco do Povo - Tabulações especiais

Analogamente aos casos de pagamentos em dia, as mulheres que pagam seus créditos antecipadamente também não apresentam comportamento diferenciado no que diz respeito ao grau de escolaridade.

Na verdade, não há uma tendência que relacione o pagamento antecipado com o grau de escolaridade e o valor do crédito concedido. Ao contrário dos homens, as mulheres parecem ter um comportamento mais homogêneo a despeito do grau de escolaridade, indicando uma suave incremento na Frequência relativa de pagamentos antecipados, à medida que se aumenta o valor do crédito, proporcionalmente, em todos os níveis de escolaridade.

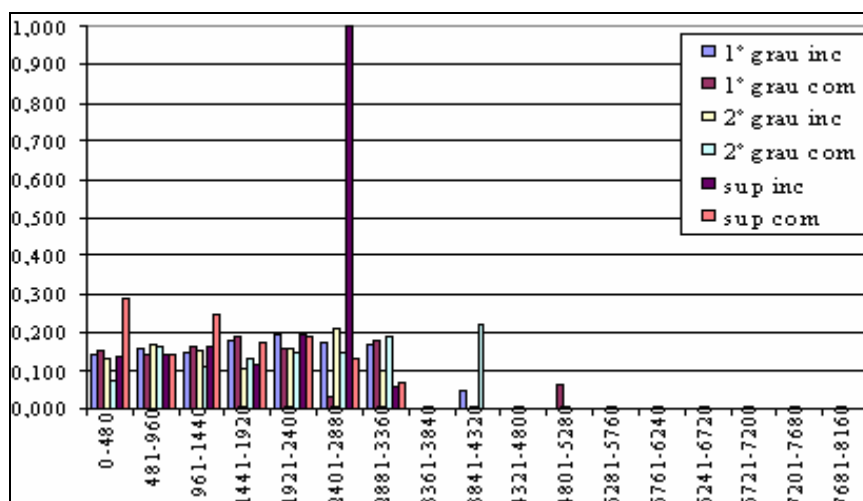


GRÁFICO 12b: Frequência relativa dos pagamentos em dia por valor de crédito e grau de escolaridade - Mulheres  
Fonte: Banco do Povo - Tabulações especiais

As parcelas de pagamento em atraso representam 45,74% do total de parcelas do período em análise (TAB.13) e são efetivamente pagas, em média, 19 dias após a data de vencimento (TAB.14), tanto para homens (19,75) quanto para mulheres (18,58). O GRÁF.13 mostra que, de fato, homens e mulheres seguem um comportamento similar.

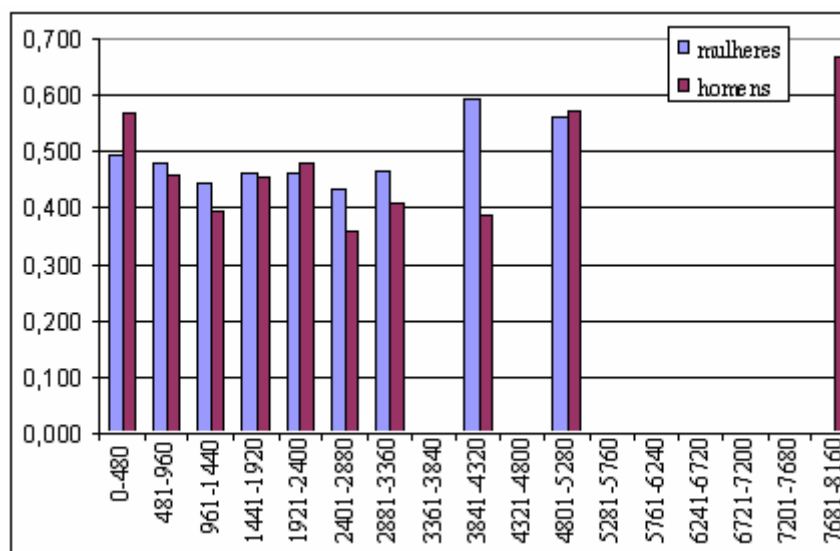


GRÁFICO 13: Frequência relativa dos pagamentos em atraso por valor de crédito e gênero- Homens e Mulheres  
Fonte: Banco do Povo - Tabulações especiais



Novamente, os homens não apresentam nenhum comportamento que os distingua pela finalidade do crédito contraído. O mesmo se aplica às mulheres, embora elas apresentem um comportamento mais homogêneo entre as finalidades de crédito.

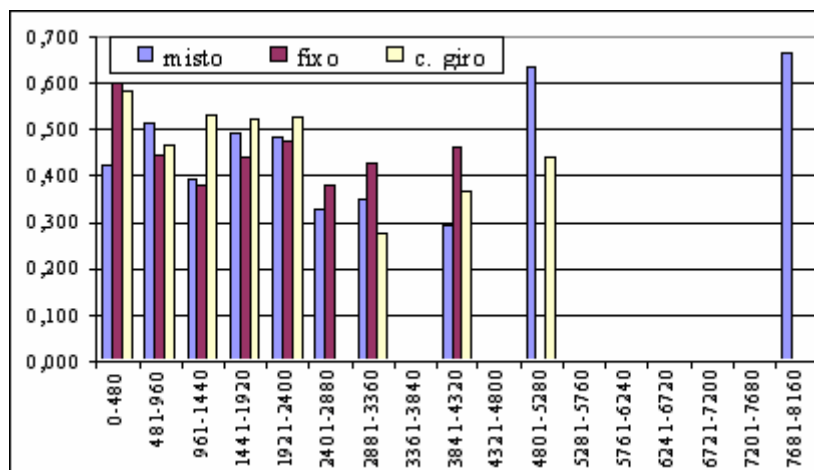


GRÁFICO 14a: Frequência relativa em atrasos por valor finalidade do crédito - Homens

Fonte: Banco do Povo - Tabulações especiais

Em geral, o percentual de atraso de todas as finalidades de crédito para as mulheres é mais próximo entre si, havendo alguma variação de nível, ao longo do valor do crédito concedido.

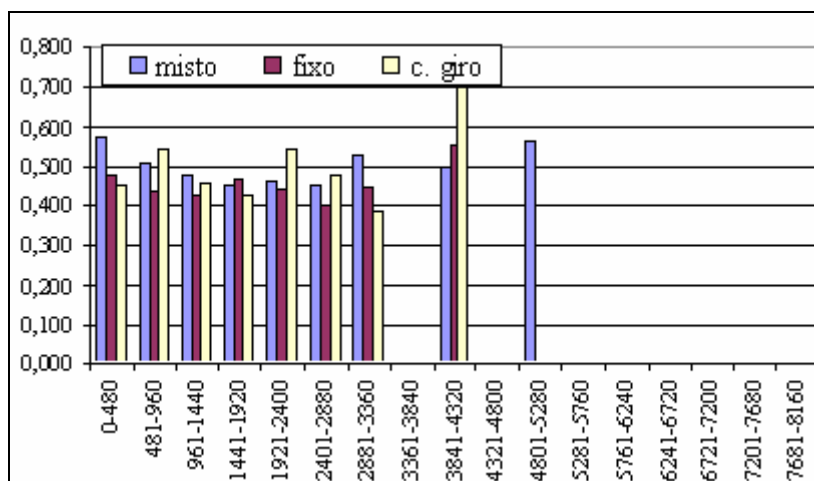


GRÁFICO 14b: Frequência relativa pagamentos em atraso por valor finalidade do crédito - Mulheres

Fonte: Banco do Povo - Tabulações especiais

Chama novamente a atenção o comportamento do pagamento das parcelas, quando se utiliza a variável grau de escolaridade como controle. Analisando-se intrafaixa de valor de crédito,

observa-se que os homens tendem a aumentar a frequência relativa dos pagamentos em atraso à proporção que se eleva o grau de escolaridade. Esse resultado, apresentado no GRÁF.15a, verificou-se também quando foram analisados os dados relativos a pagamentos em dia; naquela situação, havia uma relação inversa entre grau de escolaridade e pagamento em dia intrafaixa de valor de crédito.

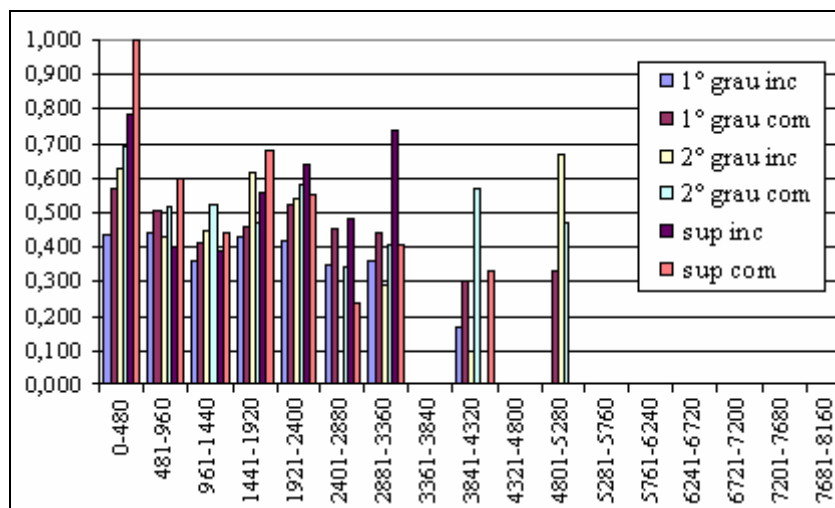


GRÁFICO 15a: Frequência relativa dos pagamentos em atraso por valor do crédito e instrução - Homens

Fonte: Banco do Povo - Tabulações especiais

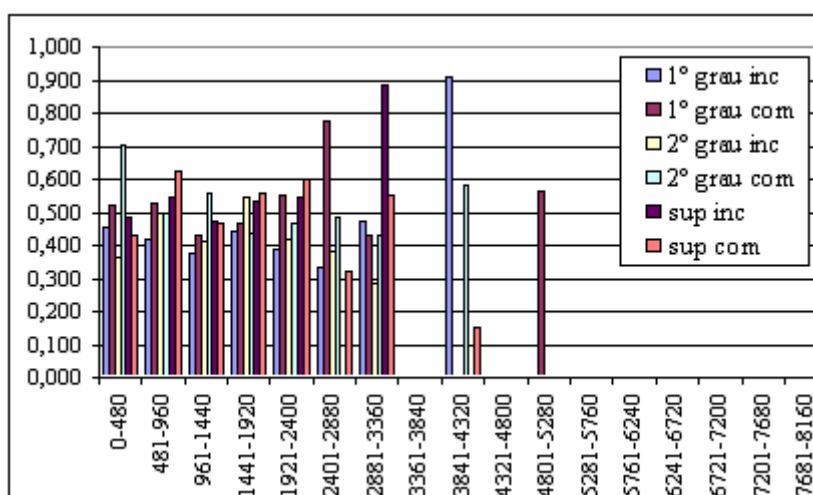


GRÁFICO 15b: Frequência relativa dos pagamentos em atraso por valor do crédito e instrução - Mulheres

Fonte: Banco do Povo - Tabulações especiais

No caso feminino, ilustrado no GRÁF.15b, as evidências não são claras: em algumas faixas de valor de crédito, a Frequência relativa dos pagamentos em atraso cresce com o aumento do grau de escolaridade, porém em proporções menores que as verificadas para os homens.

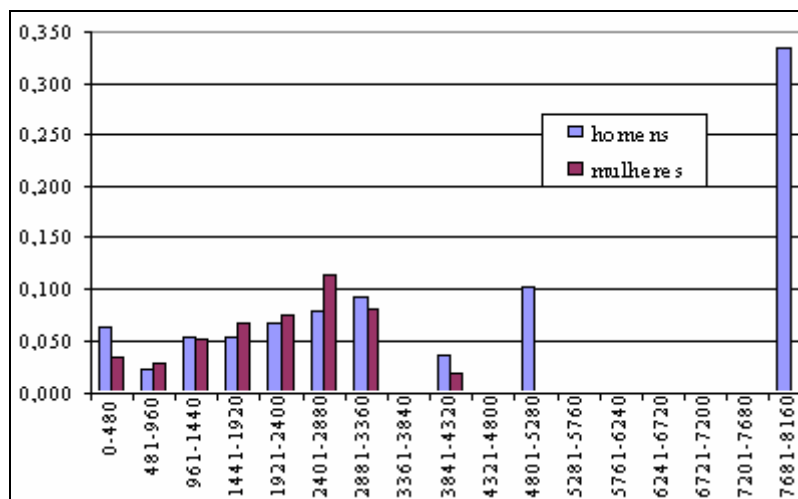


GRÁFICO 16: Frequência relativa pagamentos em aberto por valor do crédito e gênero

Fonte: Banco do Povo - Tabulações especiais

Como já visto, as parcelas de crédito em aberto são da ordem de 4,73% e o GRÁF.16 permite inferir que esse comportamento é crescente com o valor do crédito concedido, tanto para homens quanto para mulheres, apresentando um declínio nos valores de crédito mais elevados.

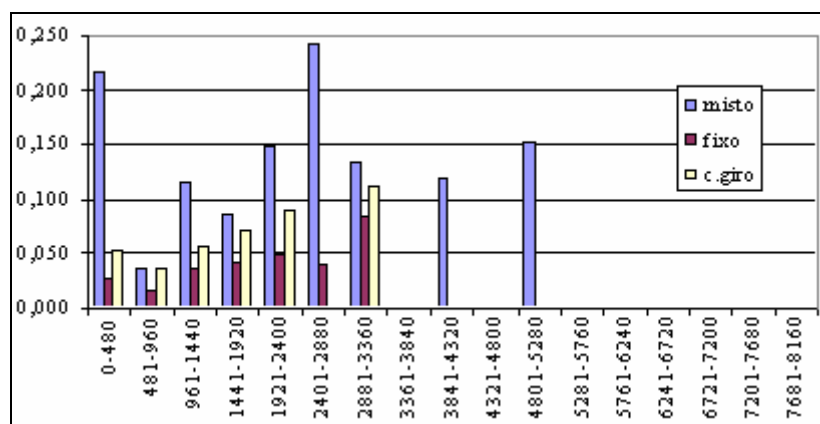


GRÁFICO 17a: Frequência relativa incidência parcela em aberto em relação ao total de parcelas - Homens

Fonte: Banco do Povo - Tabulações especiais

Analisando-se desagregadamente o caso masculino (GRÁF.17a), percebe-se que é crescente a incidência de pagamentos em aberto com o aumento do valor do crédito concedido, para todas as finalidades de crédito, sendo que as taxas maiores são para capital misto, seguidas de capital de giro e, por último, capital fixo. No caso feminino (GRÁF.17b), o comportamento não é tão claro: a Frequência de pagamentos em aberto aumenta com o valor do crédito, declinando nas duas últimas faixas de crédito. Ademais, as Frequências de parcelas em aberto variam indistintamente entre as finalidades de crédito.

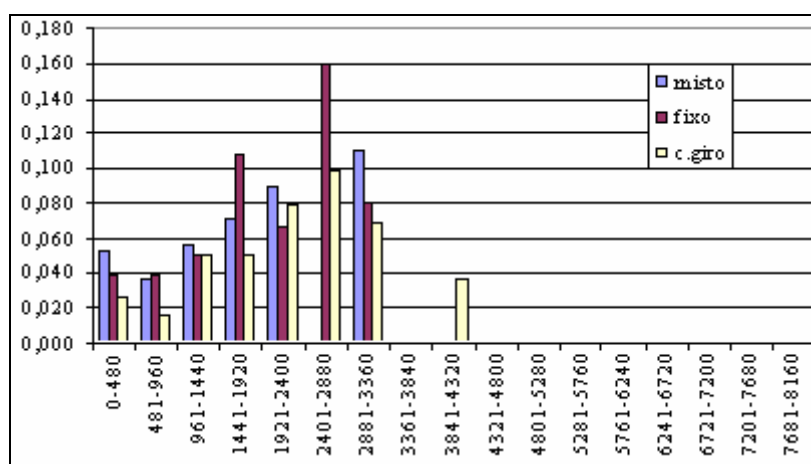


GRÁFICO 17b: Frequência relativa da proporção de parcelas em aberto por finalidade de crédito - Mulheres

Fonte: Banco do Povo - Tabulações Especiais

Por fim, no GRÁF.18a, apresentam-se os resultados de Frequência relativa de pagamentos em aberto para os homens, indicando uma leve tendência do aumento dos pagamentos em aberto, intrafaixa de crédito, com o aumento da escolaridade. No caso feminino (GRÁF.18b), não há evidências claras de algum perfil de comportamento por grau de escolaridade, indicando, mais uma vez, que as mulheres têm um comportamento mais homogêneo, independente do nível de escolaridade.

Em suma, as análises aqui levantadas destacam alguns aspectos que merecem ser sumarizados: embora homens apresentem, em média, nível de escolaridade e valor de crédito concedido superior às mulheres, seu perfil de pagamento tende a ser declinante com o grau de escolaridade e o valor concedido. De qualquer forma, não há evidências tão fortes que possam distinguir, de forma mais significativa, o perfil de comportamento entre homens e mulheres.

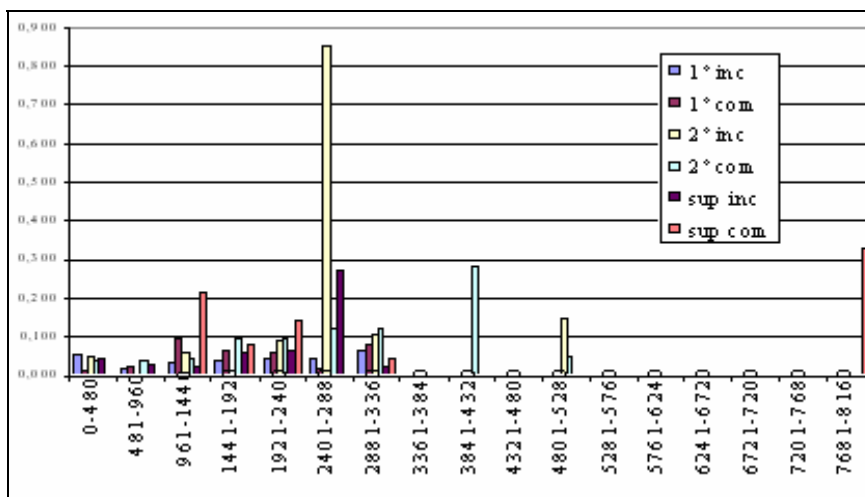


GRÁFICO 18a: Frequência relativa dos pagamentos em aberto por valor do crédito e grau escolaridade - Homens

Fonte: Banco do Povo - Tabulações Especiais

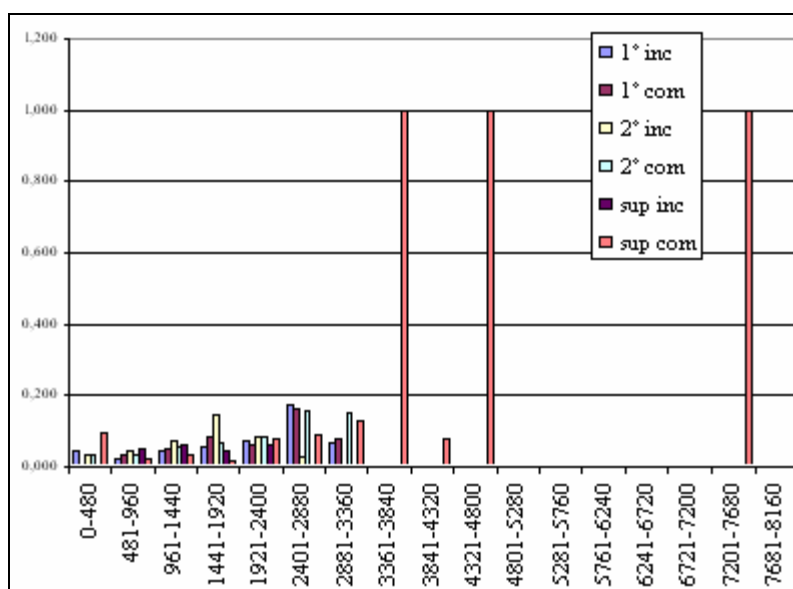


GRÁFICO 18b: Frequência relativa pagamentos em aberto por valor do crédito - Mulheres

Fonte: Banco do Povo - Tabulações especiais

## 6 PROGRAMA COMPUTACIONAL DE AVALIAÇÃO DE POLÍTICAS DE CRÉDITO

Neste capítulo, desenvolve-se o programa computacional de concessão de crédito para IMF, lançando mão dos dados do Banco do Povo referentes a um único posto de atendimento bancário (PAB) da Instituição, o PAB Belo Horizonte, por ser o único que dispunha de informações dos candidatos a crédito que tiveram seu processo de concessão indeferido. A TAB.15 fornece uma síntese do tamanho da amostra utilizada nesse programa. Como já visto no capítulo anterior, na seção 5.2, o PAB Belo Horizonte contava com 890 clientes em todo o período de análise. Após retirar aqueles clientes cujas informações necessárias estavam incompletas, ou situavam-se fora do período escolhido para se fazer as simulações, obteve-se, ao final, 543 dos 890 clientes iniciais. Selecionaram-se, aleatoriamente, mais 210 candidatos que tiveram crédito recusado. Logo, a base de dados total para este modelo passou a contar com 753 contratos de crédito, sendo 543 de clientes e 210 de recusados.

TABELA 15  
Tamanho inicial e final da amostra para o modelo

<b>PAB 01</b>	<b>homens</b>	<b>mulheres</b>	<b>total</b>	<b>homens</b>	<b>mulheres</b>
Amostra Inicial	295	595	890	33,146%	66,854%
Após Filtro Amostral	187	356	543	34,438%	65,562%
Incluindo Recusados	269	484	753	35,724%	64,276%

Fonte: Banco do Povo

O modelo computacional de definição de políticas de crédito para IMF foi construído seguindo uma série de etapas, cada qual gerando um ou mais algoritmos que iriam compor o programa final. Tais etapas podem ser sumarizadas como se segue:

- primeiramente, definiu-se uma série de critérios para se estimar o histórico de crédito dos candidatos que foram recusados, mas que passaram a fazer parte da base de dados utilizada pelo modelo computacional;
- segundo, criou-se o algoritmo que gerou o histórico de cada candidato recusado, sendo este último extraído aleatoriamente da base de dados dos candidatos recusados da Instituição;
- em terceiro, construiu-se os algoritmos que mensuraram eficiência e eficácia com base em suas definições conceituais definidas no capítulo 3 (três);
- em quarto, desenvolveu-se o algoritmo que executa a permutação cíclica;

- em quinto, após se encontrar o par ordenado de eficiência e eficácia para cada política de crédito gerada, com e sem permutação cíclica, construiu-se o algoritmo que mostrava graficamente as camadas de Pareto, ou seja, o par ordenado dos resultados de eficiência e eficácia para cada resultado encontrado de política de crédito com e sem permutação;
- sexto, desenvolveu-se o algoritmo que permitiu visualizar a significância das políticas encontradas nas camadas de Pareto;
- e, por fim, construiu-se o algoritmo para se gerar os *pseudogradientes intrapolíticas*, as quais, visualmente, mostravam o ganho/perda marginal da inclusão dos candidatos recusados nos resultados de eficiência e eficácia das políticas de crédito estimadas, que compunham as camadas de Pareto.

### 6.1 Histórico de crédito dos candidatos recusados

Esta subseção apresenta (i) as definições conceituais que permeiam a construção do histórico de crédito dos candidatos recusados, assim como (ii) os pseudocódigos para a geração dos históricos desses candidatos e sua inclusão na base de dados original.

A técnica da permutação cíclica aplicada ao caso específico deste trabalho visa testar a efetividade da política analisada em relação aos resultados de eficiência e eficácia. A perda da dependência entre as variáveis, concomitantemente à manutenção das marginais, é a garantia de que a aleatoriedade é alcançada.

No contexto deste trabalho, como os dados observados dizem respeito somente àqueles candidatos a crédito que tiveram sua solicitação aceita, faz-se necessário a inclusão dos candidatos cujas solicitações foram indeferidas, para que se componha todo o possível universo de candidatos a crédito daquele PAB. De posse desse universo, a permutação cíclica passa a ser corretamente aplicada. Para tanto, faz-se necessário construir o histórico de pagamento do crédito para candidatos recusados. O passo inicial é buscar, na base de dados da instituição em análise, os dados socioeconômicos dos possíveis candidatos que tiveram crédito indeferido. A seleção se deu por amostragem, para o mesmo período em que os dados dos candidatos aceitos foram analisados, ou seja, de setembro de 2004 a dezembro de 2006. Como os candidatos recusados não possuem históricos de crédito, construiu-se um histórico de pagamento das parcelas de crédito conforme as subseções posteriores buscam explicar.

### 6.1.1 Hipótese da distribuição de Poisson não-homogênea

Existe um vasto número de técnicas de simulação da ocorrência de um determinado evento que se queira investigar. Seja qual for a técnica, há de se construir algumas suposições prévias acerca dos dados relativos ao evento a ser simulado. Para o caso específico deste trabalho, partiu-se do pressuposto de que o histórico de pagamento do crédito do candidato recusado segue uma distribuição de Poisson não-homogênea. Duas variáveis são fundamentais no histórico de pagamento do crédito: a primeira é a parcela de crédito, e a segunda é a diferença entre a data de vencimento e a data de pagamento da parcela de crédito, denominada como número de dias de atraso. A variável número de dias de atraso, por não ter um comportamento homogêneo ao longo do processo de pagamento das parcelas de um contrato, ou em termos genéricos, por não apresentar uma taxa de ocorrência que não muda ao longo do período, foi tratada como seguindo uma distribuição de Poisson não-homogênea.<sup>39</sup> Esse pressuposto é fundamental para o cálculo do número de dias de atraso das parcelas dos contratos dos candidatos recusados, com base no comportamento dos clientes.

Verifica-se a ocorrência de um processo de Poisson homogêneo, conforme apresentando por Larson (1982) e Rossi (2002), se, ao se supor que os eventos ocorram em um espaço de tempo aleatório e que  $N(t)$  denota o número de eventos que podem ocorrer no intervalo de tempo  $[0, t]$ , com taxa  $\lambda$ ,  $\lambda > 0$ , tem-se que:

- $N(0) = 0$ , ou seja, o processo se inicia no tempo 0;
- o número de eventos ocorrendo em intervalos disjuntos são independentes, ou seja, o número de eventos ocorridos no tempo  $t$  [ $N(t)$ ] é independente do número de eventos que ocorre entre o tempo  $t$  e  $t+s$  [ $N(t+s) - N(t)$ ];
- a distribuição do número de eventos que ocorre em um determinado intervalo depende só do tamanho do referido intervalo; ou seja, a distribuição de probabilidade de  $N(t+s) - N(t)$  é a mesma para todos os valores de  $t$ .
- a probabilidade de exatamente 1 evento ocorrer em um curto intervalo de tempo  $\Delta t$  seja igual a proporção do tamanho do intervalo,  $\lambda \Delta t$ ; formalmente tem-se que,

---

<sup>39</sup> A distribuição de Poisson é usada com frequência para caracterizar o número de eventos que ocorre por unidade de tempo (Duczmal *et al* (2003, p.28).



$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P\{N(h)=1\}}{h} = \lambda$ . Esse pressuposto é denominado como o *incremento estacionário*.

- em um espaço suficientemente curto de tempo,  $\Delta t$ , somente 0 ou 1 evento pode ocorrer, ou seja, duas ou mais ocorrências simultâneas são impossíveis; formalmente, tem-se que,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P\{N(h) \geq 2\}}{h} = 0$ .

Uma distribuição de Poisson não-homogênea relaxa a hipótese do *incremento estacionário*, permitindo-se, assim, processos não-homogêneos, ou não estacionários. Assim, ainda segundo Ross (2002), se os eventos ocorrem aleatoriamente no tempo, e  $N(t)$  denota o número de eventos que ocorre por período de tempo  $t$ , então pode-se afirmar que  $\{N(t), t \geq 0\}$  constitui-se em um processo de Poisson não-homogêneo com função intensidade  $\lambda(t), t \geq 0$ , se:

- $N(0) = 0$ ;
- o número de eventos que ocorre em tempos de intervalos disjuntos é independente;
- $\lim_{h \rightarrow 0} P \{ \text{exatamente 1 evento entre } t \text{ e } t+h \} / h = \lambda(t)$
- $\lim_{h \rightarrow 0} P \{ 2 \text{ eventos ou mais entre } t \text{ e } t+h \} / h = 0$ .

Elucidativamente, o cliente que inicia seu contrato pagando regulamente e em dia suas prestações de crédito, e a partir de um determinado período passa a pagá-las de forma irregular, com atraso, pode ser caracterizado como um cliente cujo comportamento segue uma distribuição de Poisson não-homogênea. Naturalmente, este tipo de comportamento torna-se usual para os clientes que se tornam inadimplentes.

## 6.1.2 Critérios adicionais para candidatos recusados

### 6.1.2.1 Definição do valor da parcela

A etapa de construção do histórico de pagamento dos candidatos recusados consistiu, basicamente, em definir vários critérios, a constar:

- assumiu-se, como parâmetro de valor de crédito para cálculo do valor das parcelas, o montante solicitado de acordo com a pesquisa sócio-econômica realizada pela instituição junto ao candidato solicitante;

- definiu-se como 12 meses o número de parcelas por ser este valor a moda do número de parcelas verificada nas estatísticas descritivas (ver subseção 5.3);
- calculou-se o número de parcelas em função dos critérios adotados pela instituição solicitante. Em linhas gerais, o crédito solicitado segue um cálculo padrão, havendo somente duas taxas de juros aplicadas Para contratos com crédito inferior a R\$960,00 (novecentos e sessenta reais), a taxa de juros é de 2,00% a.m., e para valores iguais ou superiores a R\$960,00 (novecentos e sessenta reais), a taxa de juros aplicada é de 3,90% a.m.. Formalmente, tem-se que:

$$\circ \quad vp = vc * \left[ \left( 1 + \frac{tac}{100} \right) * (1 + ff) \right]$$

onde:  $vp$  = valor da parcela

$vc$  = valor do crédito solicitado

$tac$  = taxa de abertura de crédito

$ff$  = fator de juros – conversão da taxa de juros adotada em fator pela tabela Price.<sup>40</sup>

- parcelas em atraso sofreram correção de mora e multa. O valor da mora definida pela instituição é de 0,33% a.d. e da multa é de 2,00%, ambos incidentes sobre o valor da parcela em atraso. Para o cálculo do valor de mora, é necessário que se tenha o número de dias de atraso, a qual é conceitualmente definida a seguir.

#### 6.1.2.2 Definição do número de dias de atraso

O pagamento de qualquer parcela de crédito pode ocorrer (i) antes da data definida no contrato, (ii) na data do vencimento, (iii) posteriormente ao vencimento, ou (iv) não se realizar efetivamente. No primeiro caso, o número de dias de atraso em relação à data de vencimento é negativo, configurando-se um pagamento antecipado. No segundo caso, em que o pagamento se dá na data prevista pelo contrato, esse mesmo número de dias de atraso é nulo. Na terceira situação, o número de dias de atraso é negativo e, da mesma maneira, o não pagamento gera um número de dias de atraso negativo, o qual, para fins deste trabalho,

---

<sup>40</sup> Para a taxa de juros de 2,00% a.m., o fator da tabela Price é de 0,09456 e para a taxa de juros de 3,90% a.m., o fator aplicado é de 0,1059.

encerra-se no último mês de cada período analisado. Como o modelo computacional foi aplicado em dois períodos de 12 meses cada, subsequentes, o número de dias de atraso para pagamentos em aberto encerrou-se no último dia do último mês de cada período analisado. Em outras palavras, se algum cliente deixou em aberto uma ou mais prestações de algum período em análise, computou-se o atraso dessa(s) referida(s) prestação(ões) como a diferença entre o último dia do período em análise e a data de seu(s) vencimento(s).

O cálculo do número de dias de atraso para os clientes, conforme explicado no parágrafo anterior, é uma informação relevante para a definição do número de dias de atraso para os candidatos recusados. O histórico de dias de atraso do pagamento das parcelas de crédito dos solicitantes recusados foi construído com base na proximidade das características destes indivíduos em relação aos clientes pertencentes à base de dados da instituição.

Melhor explicando, buscou-se a diferença entre os valores observados das características dos candidatos aceitos (clientes) e as mesmas características dos candidatos recusados. Em termos práticos, construiu-se uma matriz das diferenças das características entre cada candidato recusado e todos os clientes, e, a partir daí, ordenaram-se, em ordem crescente, os resultados para cada candidato recusado e selecionaram-se os 10 resultados menores, ou seja, aqueles clientes que mais se aproximavam dos candidatos recusados. Formalmente tem-se que:

$$MD_{i,j} = \sum_{k=1}^6 |MS_{[i,k]} - MC_{[j,k]}|$$

onde:  $MD_{i,j}$  é a matriz das diferenças entre as características dos candidatos recusados e os clientes

$MS_{i,k}$  é a matriz das características dos candidatos recusados

$MC_{j,k}$  é a matriz das características dos clientes

Com base na matriz  $MD'_{j,i}$ , a transposta de  $MD_{i,j}$ , e na ordenação das diferenças de cada candidato recusado em relação aos demais clientes, em ordem decrescente, permite-se identificar quais os clientes mais próximos a cada candidato recusado. Assim, valores mais próximos de zero referem-se aos clientes que apresentam características mais próximas àqueles solicitantes que tiveram seu crédito indeferido.

Da matriz  $MD'_{j,i}$  selecionaram-se os dez primeiros valores, de cada vetor de diferenças entre o candidato solicitante e os clientes da base de dados, relacionando-os a seus respectivos

clientes e históricos de crédito. Assim, para cada candidato recusado, foram identificados os 10 clientes mais próximos, no que diz respeito às características para seleção do candidato ao crédito. A escolha de 10 clientes para cada candidato foi um critério que buscou minimizar o risco de se extrair da amostra indivíduos mais distantes e que, conseqüentemente, poderia gerar uma maior variância no histórico de crédito, não assegurando, assim, a proximidade da amostra. Enfim, buscou-se manter o compromisso entre tamanho e proximidade amostral.

### 6.1.2.3 Geração de variáveis aleatórias

O número de dias de atraso dos candidatos recusados, definida como uma variável que segue uma distribuição de Poisson não-homogênea, foi calculado da seguinte forma:

- extraiu-se o histórico do número de dias de atraso dos 10 clientes mais próximos ao solicitante;
- ponderou-se cada histórico, através de pesos gerados aleatoriamente em um intervalo de 0 a 1;
- gerou-se, aleatoriamente, o início de cada pagamento;
- selecionou-se, aleatoriamente, quais candidatos recusados teriam passado por algum processo de renegociação.

De acordo com a definição de Larson (1982), uma variável aleatória é uma quantidade numérica cujo valor observado é determinado, ao menos em parte, por algum mecanismo de mudança. Em notação matemática funcional, uma variável aleatória  $X$  é uma função de valor real de elementos de um espaço amostral  $S$ ; a faixa de  $X$  é denotada por  $R_x$ . Ilustrativamente, suponha que se jogue um par de dados não viciados uma vez, e que  $X(w)$ , a representação funcional da variável aleatória  $X$ , seja a soma dos dois números ( $x_1$  e  $x_2$ ) dos respectivos dados. O espaço amostral  $S$  é definido como

$$S = \{(x_1, x_2): x_1 = 1, 2, \dots, 6; x_2 = 1, 2, \dots, 6\} \quad ,$$

sua a representação funcional como

$$X(w) = x_1 + x_2 \quad \forall w = (x_1, x_2) \in S \quad e,$$

o conjunto de possíveis valores que podem ocorrer para  $X$ , definido acima como  $R_x$  é

{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

As variáveis aleatórias podem ser discretas, como no exemplo anterior, ou contínuas. Uma variável aleatória  $X$  é denominada *discreta*, se seu conjunto de possibilidades (de números reais)  $R_x$  for discreto. Analogamente, uma variável aleatória  $X$  é denominada *contínua*, caso seu conjunto de possibilidades  $R_x$  for contínuo.

Para Press *et al.* (2002) parece conceitualmente impossível que o computador produza números aleatórios, uma vez que qualquer programa computacional produz resultados que são totalmente previsíveis e, por conseguinte, não verdadeiramente aleatórios. Entretanto, segundo os autores, geradores de números aleatórios computacionais são comumente utilizados.

Existe um número significativo de geradores de números aleatórios que satisfazem uma extensa classe de programas aplicativos, além de gerarem resultados estatisticamente idênticos. Os sistemas de oferta de variáveis aleatórias são, em geral, geradores lineares congruentes, os quais geram uma seqüência de inteiros  $I_1, I_2, I_3, \dots$ , cada um entre 0 e  $m-1$ , através da seguinte relação recursiva, segundo Press *et al.* [2002:pp. 276]):

$$I_{j+1} = aI_j + c^* |m|$$

onde:  $a$  e  $c$  são inteiros positivos denominados multiplicadores;

$m$  é o incremento.

Ainda segundo Press *et al.* (2002), o método de congruência linear tem a vantagem de ser bem rápido, embora não seja livre de correlações seqüenciais após sucessivas chamadas. No entanto, o algoritmo multiplicativo congruente, definido como

$$I_{j+1} = aI_j^* |m|$$

pode ser tão bom quanto qualquer gerador linear congruente, cujo valor de  $c$  seja diferente de zero ( $c \neq 0$ ).

As rotinas de geradores de números aleatórios são classificadas, basicamente, em duas categorias, a constar:

- Geradores de Números Aleatórios Portáteis: ran0, ran1, ran2, ran3;
- Geradores Rápidos e Impuros: ranqd1 e ranqd2.

Para o presente trabalho, escolheu o gerador ran1,<sup>41</sup> o qual é capaz de remover correlações seriais de baixa ordem (solicitação). Sua rotina supera os testes estatísticos que a rotina do gerador ran0 não é capaz de superar, embora esse último seja satisfatório para a maioria das aplicações. O procedimento utilizado pelo gerador ran1 para quebrar a correlação seqüencial de um tipo de gerador “Padrão Mínimo”<sup>42</sup> é ilustrado a seguir. Os números em círculo indicam as seqüências dos eventos. A cada chamada do gerador, o número da variável aleatória em  $iy$  é utilizado para escolher um elemento aleatório na faixa  $iv$ . O elemento torna-se o número aleatório resultante, bem como o próximo  $iy$ .

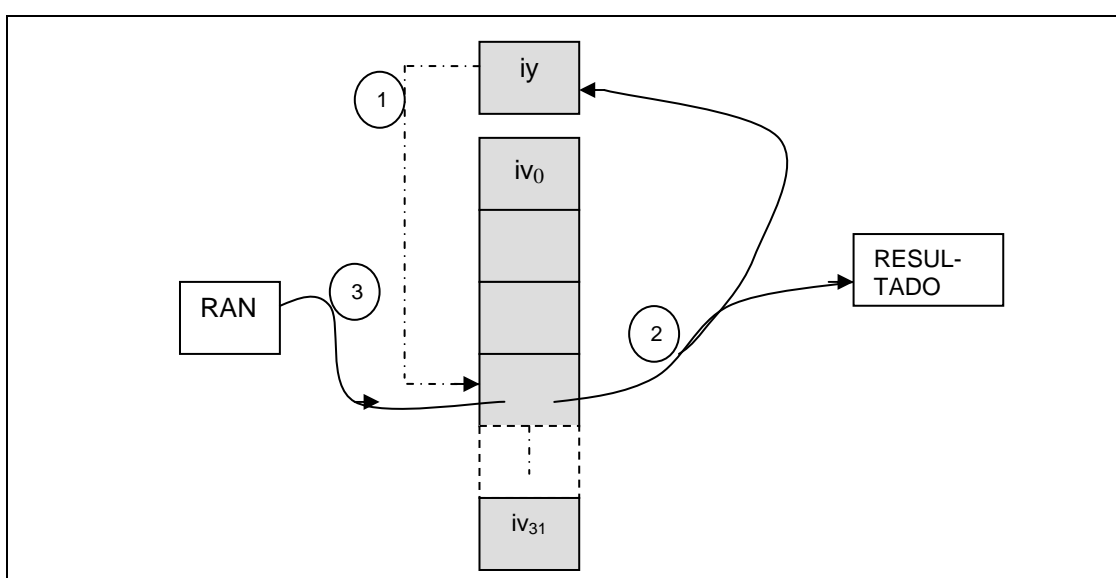


FIGURA 11: Procedimento utilizado pelo gerador RAN1

Fonte: Press *et al.* (2002)

#### 6.1.2.4 Pesos aleatórios para cada parcela

A etapa subsequente ao cálculo do valor das parcelas do crédito solicitado pelo candidato recusado foi encontrar, dentre os 10 vizinhos mais próximos, a média ponderada do número de dias de atraso para cada parcela, como mencionado na subseção anterior. Para o cálculo da média ponderada, geraram-se 9 números aleatórios para dar pesos distintos a cada histórico dos clientes vizinhos próximos, e assim permitir maior aleatoriedade aos resultados de cada solicitante. Esses números foram ordenados e posteriormente extraiu-se a diferença entre eles,

<sup>41</sup> Ver algoritmo no ANEXO I.

<sup>42</sup> Padrão Mínimo é um gerador proposto por Park e Miller (1988), cujos valores de  $a$  e  $m$  são, respectivamente,  $16807 (7^5)$  e  $2147483647 (2^{31} - 1)$ .

construindo-se, por fim, o valor de cada peso. A cada contrato aplica-se um dos 10 pesos gerados ao final desse processo (ver coluna “Pesos” na tabela adiante). A título de ilustração, a TAB.16 apresenta o histórico de dias de atraso dos 10 clientes mais próximos de um candidato recusado (colunas  $t_1$  a  $t_{12}$ ), seus pesos aleatórios (coluna Pesos) e o resultado da média ponderada do produto entre o número de dias de atraso e o peso aleatório de cada contrato/cliente. De posse desses históricos de dias de atraso, constrói-se o valor corrigido de cada parcela e inclui-se, na base de dados dos clientes, os candidatos recusados com histórico de crédito simulado.

#### Características do Solicitante Recusado:

Valor nominal da parcela solicitada: R\$132,70 (cento e trinta e dois reais e setenta centavos)

Início: mês 20 (7º mês do 2º período)

Contrato: sem renegociação

TABELA 16  
Dados para construção de um histórico de pagamento simulado

Código	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$t_{11}$	$t_{12}$	Pesos
cl.400	0	0	29	63	31	32	31	32	32	-	-	-	0,084
cl.399	0	32	323	292	272	240	211	179	-	-	-	-	0,112
cl.52	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	0,122
cl.330	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	0,020
cl.524	0	21	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,104
cl.383	0	0	21	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,058
cl.349	0	0	21	32	31	-	-	-	-	-	-	-	0,248
cl.325	0	0	0	0	0	32	31	0	-	-	-	-	0,056
cl.66	0	31	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	0,164
cl.329	0	0	32	53	21	32	31	52	272	240	211	179	0,032
<b>MédiaPond Dias de Atraso</b>	0,00	10,86	51,40	56,83	49,43	76,03	68,00	60,15	47,59	49,56	211	179	-
<b>Histórico (R\$)</b>	132,70	140,20	158,31	160,74	157,43	169,31	165,73	162,22	156,61	157,49	229,60	215,31	-

Fonte: Banco do Povo

#### 6.1.2.5 Início do pagamento de cada contrato

Para cada contrato, gerou-se uma variável aleatória entre 1 e 24, uma vez que trabalha-se com 24 meses de histórico das informações da instituição em análise. Dessa forma, os números

gerados devem estar dentro dos dois períodos de análise dos dados. Embora todos os históricos tivessem até 12 meses de vigência de contrato, não necessariamente estaria se utilizando todo o referido período, pois números aleatórios superiores a 12 só permitiriam incluir as parcelas dos históricos dentro do período de 24 meses. Melhor explicando, um número aleatório de início de contrato igual a 20 só poderia incluir, na base de dados, as suas cinco primeiras informações relativas ao histórico do crédito (do mês 20 ao mês 24), como o foi o caso do histórico gerado para o cliente recusado apresentado na subseção anterior (TAB.16). No caso do histórico gerado acima, os dados a serem utilizados na base de dados que inclui os candidatos recusados são os seguintes:

TABELA 17  
Exemplo da construção do histórico de crédito para candidatos recusados

<b>Descrição</b>	<b>t<sub>20</sub></b>	<b>t<sub>21</sub></b>	<b>t<sub>22</sub></b>	<b>t<sub>23</sub></b>	<b>t<sub>24</sub></b>
<b>Histórico (R\$)</b>	132,70	140,20	158,31	160,74	157,43
<b>Nº dias atraso</b>	0,00	10,86	51,40	56,83	49,43

Fonte: Banco do Povo

#### 6.1.2.6 Contratos renegociados

A base de dados da instituição para o PAB analisado nesse modelo apresentava 4,8% de contratos que sofreram uma ou mais renegociações. Assim, para que se mantenha a mesma proporção dentre aqueles que foram aceitos, dos 210 contratos estimados para os candidatos recusados, 4,8% foram classificados como renegociados, mantendo-se a mesma proporção dos dados originais. É importante que se considere a possibilidade de renegociação, para que todas as possibilidades de eventos sejam contempladas pela permutação cíclica. Ademais, contratos negociados uma única vez possuem “pesos” distintos daqueles que sofreram uma ou mais renegociações.

Uma maneira alternativa para se calcular a proporção de contratos renegociados na base expandida seria estimá-los com base no comportamento dos 10 clientes mais próximos a cada candidato recusado. Assim, estaria se reproduzindo o comportamento dos candidatos recusados com base naqueles clientes com comportamento supostamente mais próximo. No entanto, cada cliente da base original dos dados pode ser referência para um ou mais candidatos recusados, como de fato o é, comprometendo e até mesmo superestimando a



probabilidade de renegociação. Dessa maneira, optou-se pela reprodução do comportamento da base de dados original.

## 6.2 Resultados das possíveis combinações de políticas de crédito

As variáveis consideradas relevantes foram analisadas descritivamente no capítulo 5 (cinco) e fazem parte do modelo de concessão de crédito. No capítulo metodológico, detalham-se as subcategorias de cada uma das variáveis selecionadas (PAB, estado civil, gênero, grau de escolaridade, renda líquida disponível, valor do crédito concedido e finalidade do crédito).

No contexto desse modelo computacional de definição de política de crédito para IMF, entende-se por política creditícia *todas as possibilidades de combinação factível entre as variáveis definidas como seletivas na determinação do crédito*. Vale fazer a seguinte ressalva: a variável taxa de juros não entra na análise, por ser tratada *exogenamente* às demais variáveis avaliativas de seleção do crédito. Sua determinação é uma função direta do valor concedido de crédito: contratos de concessão de crédito abaixo de R\$960,00 (novecentos e sessenta reais) sofrem 2% a.m. de taxa de juros, enquanto valores superiores a R\$960,00 (novecentos e sessenta reais) sofrem correção de 3,9% a.m., e não há nenhum outro fator, especificamente atrelado ao risco de crédito, que possa interferir nessas taxas. Tal critério está em consonância com os objetivos das IMF, que não têm o lucro como objetivo-fim, mas sim o atendimento aos mais necessitados, cobrando um retorno financeiro maior daqueles que tem condições de captar um volume maior de recursos. Destacados esses aspectos relativos à definição conceitual de política de seleção de crédito, passa-se à análise das possibilidades de políticas que o modelo permite construir.

A política mais abrangente é a que está em vigor pela Instituição, por se tratar daquela que engloba todas as subcategorias possíveis para cada variável de seleção dos candidatos ao crédito. Como os dados originais podiam ser decompostos em subcategorias de variáveis (por exemplo, a variável estado civil, decomposta em indivíduos solteiros, casados, viúvos, divorciados, e outros), foi construído o número máximo de políticas capazes de contemplar todas as possibilidades combinatórias entre as sete variáveis. Naturalmente, só foram encontrados resultados para os casos em que havia clientes que atendessem às subcategorias definidas em cada política gerada.

Como cada política nova gerada é restritiva em relação à original da Instituição, nenhuma pode conter mais clientes do que aqueles que compõem a original. Dito de outra maneira, cada política definida deve conter alguns dos clientes que compõem a base, pois se trata de uma política restritiva em relação à política original. Assim, cada cliente, com seu subconjunto específico<sup>43</sup> de 7 (sete) variáveis, gera um resultado de eficiência e eficácia com base no seu histórico de crédito, e pode pertencer a uma ou mais políticas (restritivas) específicas.

Na FIG.12, apresenta-se o resultado de todas as políticas possíveis de crédito contempladas por clientes e candidatos recusados. A análise é dividida por resultados distintos: (i) um resultado inclui só os clientes efetivos da Instituição, e, (ii) o outro agrega clientes e candidatos recusados, para fins futuros de aplicação da permutação cíclica.

Ao maior número de pontos, associa-se um maior número de políticas encontradas. Como nos quadrantes à esquerda só se trabalha com a base dos clientes efetivos, a frequência das observações é bem inferior àquelas verificadas para os quadrantes à direita, nos quais se incluem os candidatos recusados. Assim, é de se esperar que, de fato como ocorrido, encontrem-se mais possíveis políticas (restritivas) de crédito, quando se incluem os candidatos recusados. No quadrante esquerdo inferior, tem-se a política de crédito para os clientes, no período  $t_0$ , ou seja, de setembro de 2004 a agosto de 2005; no quadrante esquerdo superior há as políticas para o período de setembro de 2005 a agosto de 2006 (período  $t_1$ ). No quadrante inferior direito são apresentados os resultados de eficiência e eficácia para o período  $t_0$ , no qual se incluem clientes e os candidatos com crédito recusado; e, no quadrante direito superior, há os resultados para o período  $t_1$ .

Em linhas gerais, a política original, circulada no gráfico e apresentada na cor rosa, situa-se mais à direita. No entanto, como está se trabalhando com os dados de eficácia em termos per capita, a política com a maior frequência de indivíduos não apresenta necessariamente o melhor resultado per capita. O que os dados da FIG.12 indicam é a existência de políticas mais restritivas com desempenho, em termos de eficiência e eficácia, via de regra superiores às políticas originais.

---

<sup>43</sup> Subconjunto específico significa os valores, dentro de cada categoria, que correspondem a cada uma das características de seleção do candidato a crédito.

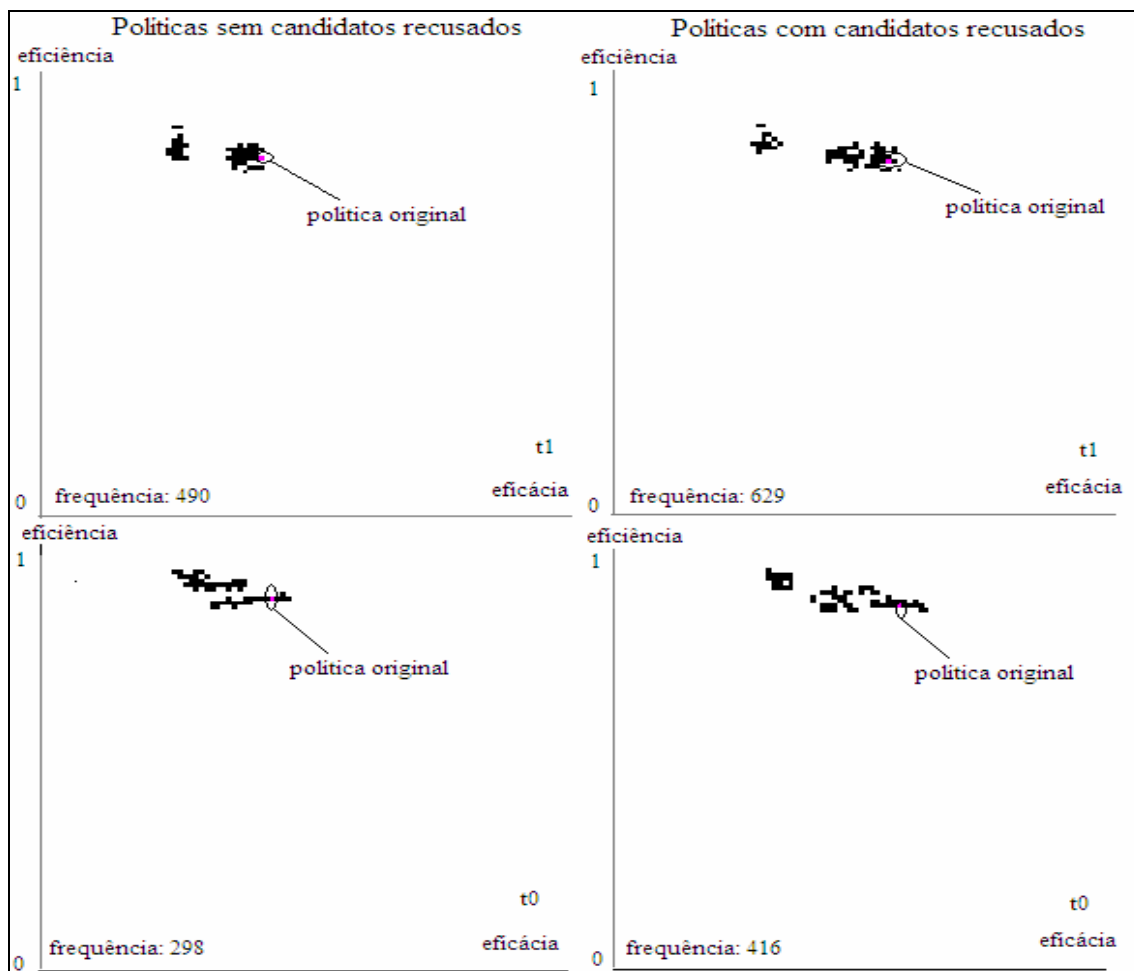


FIGURA 12: Políticas factíveis no espaço objetivo

Fonte: Banco do Povo

Como eficiência depende intrinsecamente da variável tempo, seu cálculo é afetado negativamente pela demora no pagamento das parcelas de crédito. Entretanto, para o cálculo da eficácia, mesmo que o cliente demore a retornar o valor do crédito à instituição, essa medida não sofre o efeito da variável tempo. Eficácia é uma medida mais associada à quantidade, ao passo que eficiência é uma medida de qualidade, e o tempo pode ser considerado a principal variável intrínseca à medida de qualidade. Assim, valores elevados de eficácia só são positivamente correlacionados com valores elevados de eficiência se não houver atraso no pagamento do crédito. Como já enfatizado na descrição conceitual de eficiência e eficácia, o *trade-off* entre quantidade e qualidade pode ser considerado um grande desafio na concessão do crédito. Dessa maneira, quanto mais clientes com maior volume de crédito concedido per capita, maior é o resultado de eficácia, porém não necessariamente esse resultado sempre aparece acompanhado pelo resultado de eficiência, cuja probabilidade de redução também está associada ao aumento da base de clientes.

### 6.3 Aplicação da permutação cíclica

A explanação conceitual da permutação cíclica foi feita no capítulo 4 (quatro), subseção 4.1. A partir deste ponto, mostra-se sua aplicação prática no modelo construído de concessão de crédito. A permutação é feita entre a mesma quantidade de clientes/contratos e de variáveis utilizadas na avaliação e seleção do crédito. Como foram escolhidas sete variáveis, a permutação sempre estará trabalhando, a cada vez, com sete clientes. Em síntese, o procedimento consiste em embaralhar um número elevado de vezes<sup>44</sup> os dados da base e extrair, para cada permutação, sete clientes da base com suas respectivas características/variáveis. Repete-se, para o exemplo ilustrado a seguir, 100 (cem) vezes as permutações, e calcula-se, a cada procedimento, os resultados de eficiência e eficácia para as possíveis políticas de crédito. Ao final, com os 100 (cem) resultados de pares ordenados de eficiência e eficácia de políticas geradas aleatoriamente comparar-se-as aos resultados da política original sem permutação.

TABELA 18  
Variáveis e subcategorias do exemplo das políticas de seleção de crédito

<b>Variável</b>	<b>FIG.13a e 13b subcategorias</b>	<b>FIG.14a e 14b subcategorias</b>	<b>FIG.15a e 15b subcategorias</b>
PAB	Belo Horizonte	Belo Horizonte	Belo Horizonte
Estado civil	solteiros e casados	solteiros e casados	solteiros e casados
Gênero	mulheres	homens	homens e mulheres
Grau Escolaridade	1º. grau inc. ou completo	1º. grau inc. ou completo	1º. grau inc. ou completo
Renda líquida	R\$0,00 e mais	R\$0,00 e mais	R\$0,00 e mais
Finalidade Crédito	capital misto, fixo e giro	capital misto, fixo e giro	capital misto, fixo e giro
Valor do Crédito	todas as faixas	todas as faixas	todas as faixas

Fonte: Banco do Povo

Na TAB.18 sintetiza-se um exemplo ilustrativo de uma política de crédito selecionada, cuja única variável que se altera é o gênero. Na FIG.13 (a e b) à FIG.15 (a e b) apresentam-se os resultados dessas 100 permutações para cada variante da política selecionada.

Em todas as figuras tem-se, na parte inferior esquerda de cada quadrante, a frequência das observações para a política avaliada, que, por sua vez, encontra-se circulada e marcada com a cor preta. As frequências do período  $t_0$  são, via de regra, inferiores, pois o número de contratos da Instituição foi se expandindo ao longo do tempo. Ademais, a frequência para as

<sup>44</sup> Foram realizados 10.000 (dez mil) embaralhamentos para cada permutação.

políticas que incluem os candidatos recusados é, também, via de regra, superior àquelas das políticas que só incluem os clientes.

A título de comparação, as três figuras apresentam os resultados de 100 permutações para a política de crédito apresentada na TAB.18, a qual sofre alterações apenas na variável gênero: a FIG.13a contemplava só as mulheres; a FIG.14a somente os homens; e ambos os gêneros, na FIG.15a.

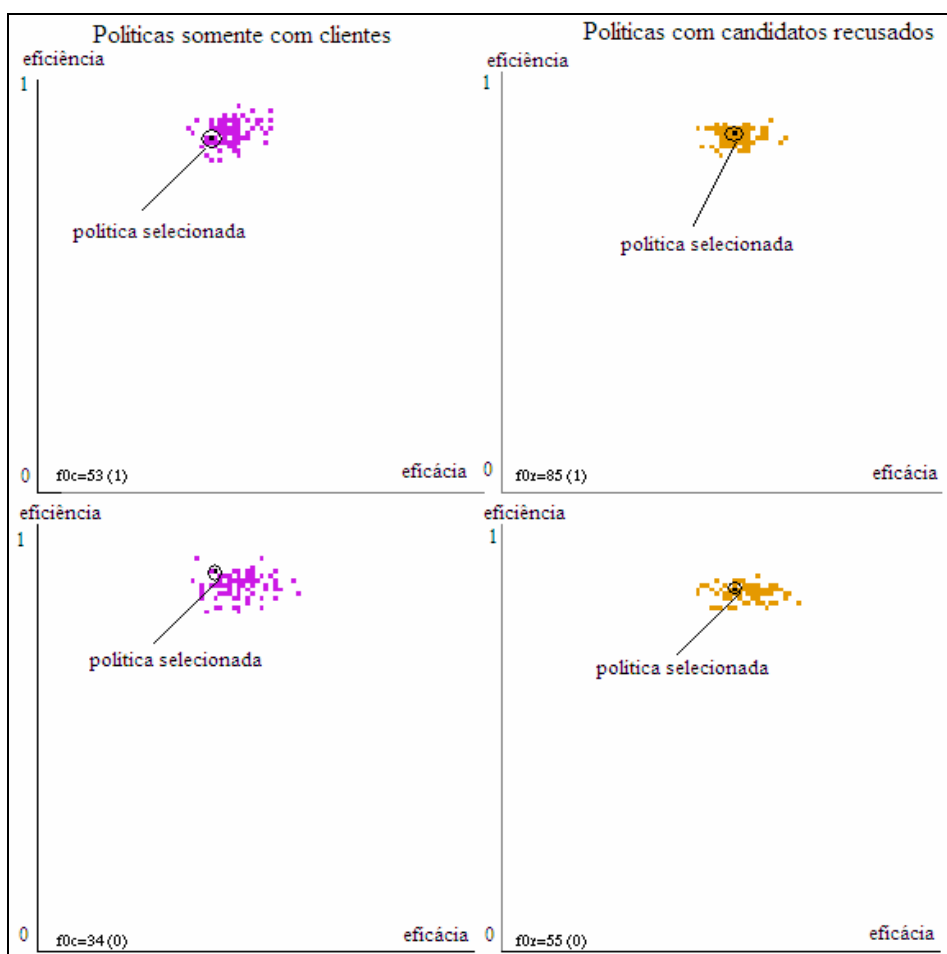


FIGURA 13a: Resultados da política de crédito após as permutações – Mulheres  
Fonte: Banco do Povo

É importante frisar que, embora esse exemplo altere todas as possibilidades de ocorrência de uma variável e mantenha constantes as demais, não é objetivo dessa análise avaliar o efeito isolado desta variável (gênero, no exemplo em questão) para as políticas possíveis definidas; em outras palavras, não está se buscando *decompôr* os efeitos de cada variável (controlando pela mudança nas subcategorias), mas avaliar, em conjunto, o *impacto* das subcategorias sobre o resultado final das políticas.

Na TAB.19 apresentam-se os resultados de eficiência e eficácia relativos às FIG.13a a FIG.15a. Frisa-se que os resultados de eficácia, para fins comparativos, são em termos per capita e que os resultados de eficiência mais elevados (mais próximos de 1) indicam maior pontualidade (menores níveis de inadimplência) no pagamento do crédito.

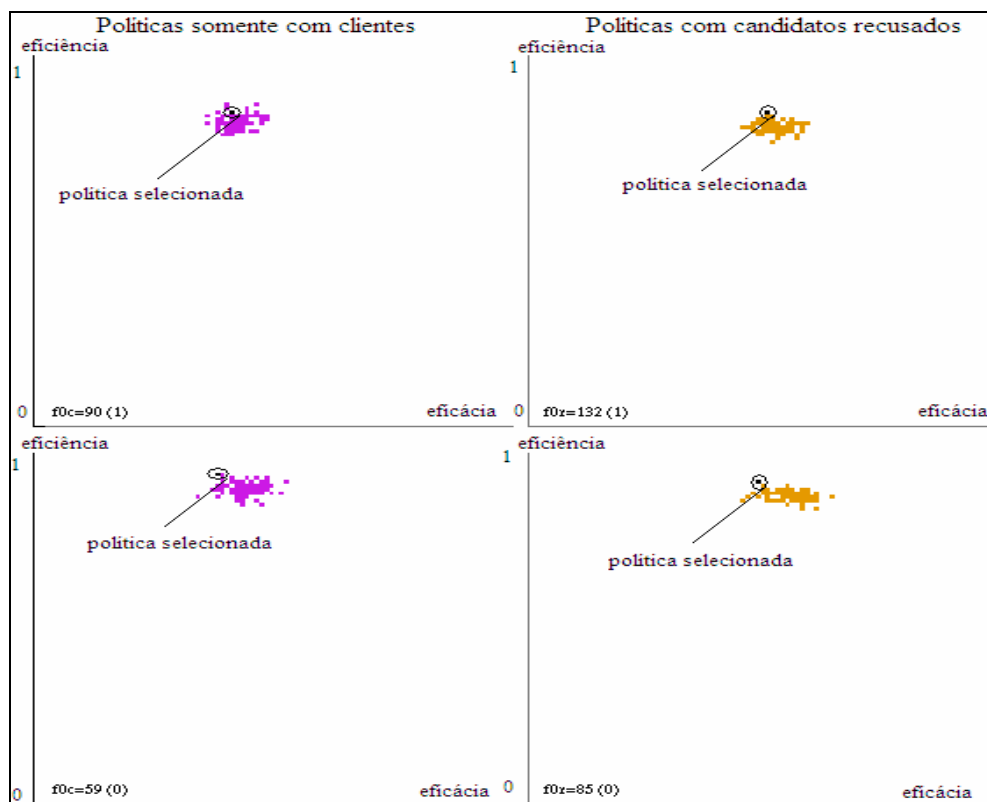


FIGURA 14a: Resultados da política de crédito após as permutações - Homens  
Fonte: Banco do Povo

No exemplo em questão, alguns resultados interessantes merecem destaque. Isoladamente, as mulheres apresentam, em ambos os períodos, piores resultados de eficiência que os homens, mas em termos de eficácia, esses resultados se alternam. No período  $t_0$  as mulheres têm melhor eficácia e no segundo período ( $t_1$ ) esse resultado se reverte para os homens. É um exemplo claro do *trade-off* possível entre eficiência e eficácia: contrair maior volume de recursos aumenta a probabilidade de risco de inadimplência. Essa afirmativa encontra respaldo também no comparativo intertemporal. Do período  $t_0$  para  $t_1$ , os homens aumentaram sua eficácia, porém reduziram sua eficiência, enquanto com as mulheres ocorreu exatamente o contrário.

TABELA 19

Resultados de eficiência e eficácia das políticas ilustradas

Figura e seus Resultados	Política Sem Recusados				Política Com Recusados			
	Eficiência		Eficácia		Eficiência		Eficácia	
	$t_0$	$t_1$	$t_0$	$t_1$	$t_0$	$t_1$	$t_0$	$t_1$
FIG.13a	0.936	0.864	724,395	705,541	0.901	0.897	993,470	990,177
FIG.14a	0.947	0.906	708,240	775,616	0.933	0.912	916,246	952,661
FIG.15a	0.943	0.891	714,145	749,512	0.920	0.896	946,584	967,356

Fonte: Banco do Povo

Outros dois aspectos podem ser destacados: primeiro, que as políticas com e sem candidatos recusados apresentaram elevados níveis de eficiência em praticamente todas as situações. E, em segundo, que via de regra, intertemporalmente (de  $t_0$  para  $t_1$ ) o aumento (redução) de eficácia foi contrabalançado pela redução (aumento) de eficiência.

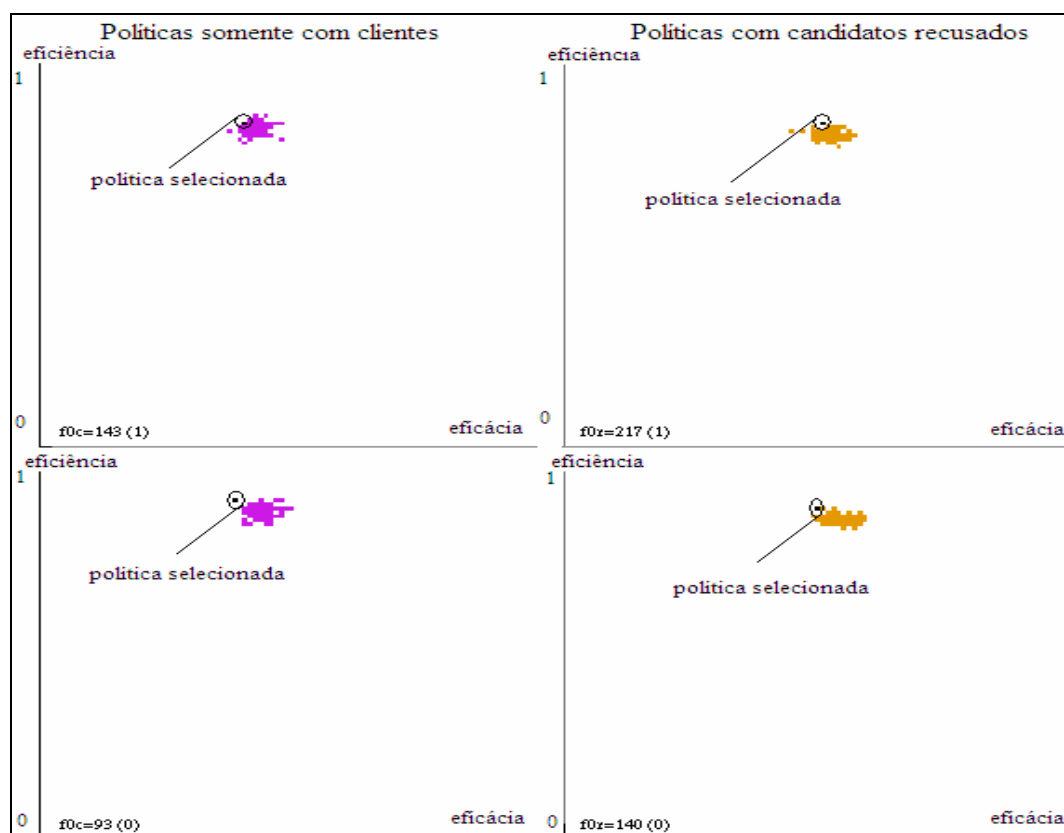


FIGURA 15a: Resultados da política de crédito após as permutações - Homem e Mulher

Fonte: Banco do Povo

Os três exemplos discutidos mostraram, em uma aplicação prática, o mecanismo e a função da permutação cíclica, mediante as políticas selecionadas e aquelas geradas aleatoriamente. As políticas factíveis e seus respectivos resultados encontram-se no ANEXO III.

Até o presente momento, os resultados aqui discutidos ainda não são capazes de informar se as políticas selecionadas atendem aos objetivos simultâneos de maximização de eficiência e eficácia. É necessário que se avaliem todas as políticas individualmente, em relação às demais, em termos de dominância, para que se possa afirmar quais políticas encontram-se na fronteira de Pareto.

#### 6.4 A construção das camadas de Pareto para as políticas do espaço de decisão

As políticas selecionadas na subseção anterior foram avaliadas entre si, porém nada pode ser aferido em relação às suas factibilidades do ponto de vista de eficiência e eficácia no espaço de decisão. Em termos práticos, avaliar tais factibilidades implica em comparar os resultados das políticas definidas com aqueles verificados para as políticas permutadas, em termos de camadas de Pareto.<sup>45</sup> Nesse ponto, reside a importância da permutação cíclica, isto é, poder testar a hipótese nula de que *a política definida não é relevante quando comparada às demais políticas*.

Na FIG.13b, cada quadrante representa as camadas de Pareto construídas para os seus respectivos resultados desenhados na FIG.13a, relativos à política de crédito especificada na TAB.18. Como pode-se perceber, nenhum resultado encontrado atende, de maneira ótima, aos objetivos de eficiência e eficácia.

Ao contrário do caso feminino, no caso masculino, como apresentado na FIG.14a, os resultados da política definida se mostraram eficientes do ponto de vista de Pareto, exceto para os clientes no período  $t_1$ , conforme confirma a FIG.14b.

---

<sup>45</sup> A segunda etapa desta avaliação consiste em avaliar a robustez e a significância dos resultados dessas políticas, as quais são atendidas com os vetores de significância e o pseudogradiante intrapolítica.



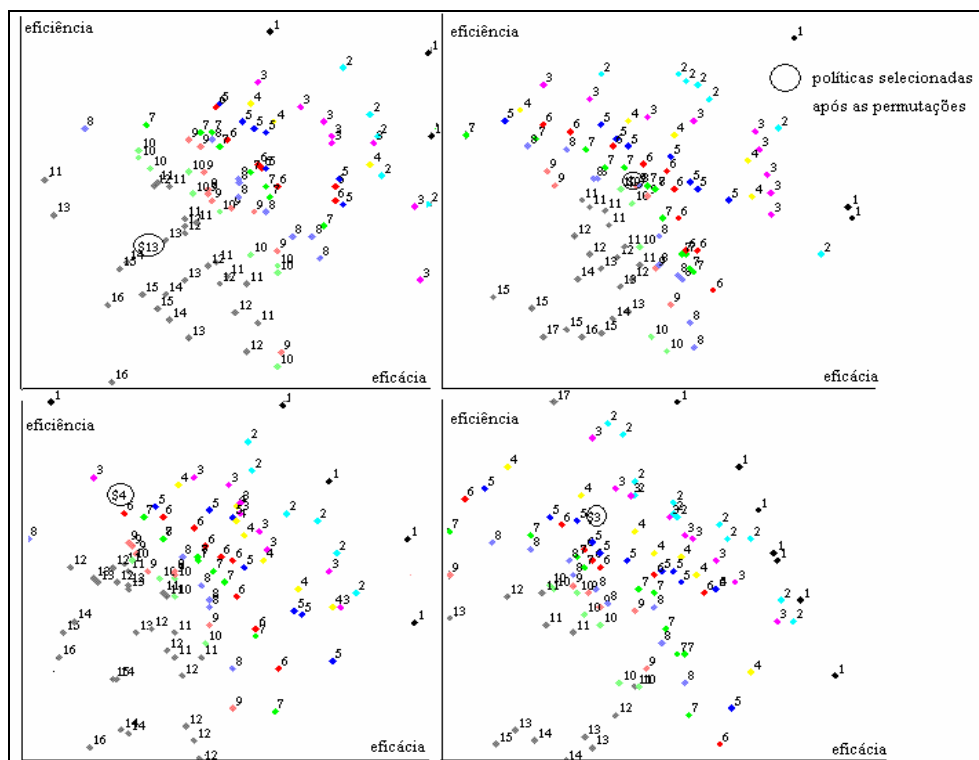


FIGURA 13b: Camadas de Pareto para a política selecionada e as permutadas – Mulheres  
Fonte: Banco do Povo

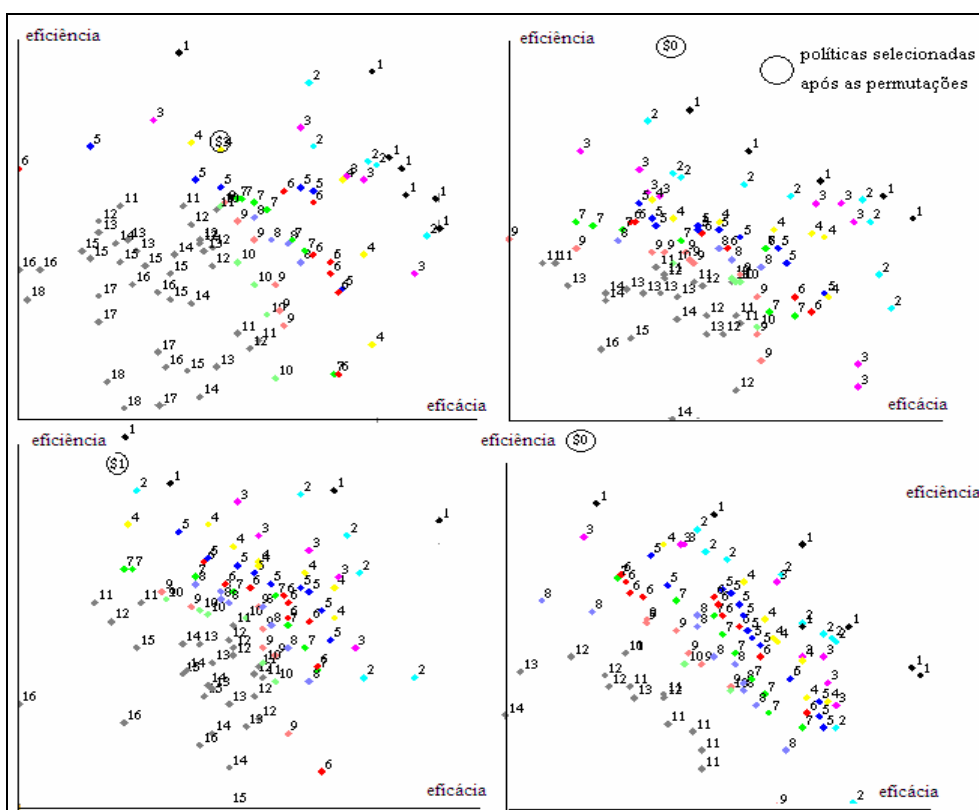


FIGURA 14b: Camadas de Pareto para a política selecionada e as permutadas – Homens  
Fonte: Banco do Povo

Analogamente ao resultado encontrado somente para os homens (FIG.14a e FIG.14b), a política para ambos os gêneros (FIG.15b) encontra-se na Fronteira de Pareto em três dos quatro resultados, excluindo-se a política só para clientes do período  $t_1$ .

Até o presente momento, têm-se feito explicações sobre a aplicabilidade da permutação cíclica sob as políticas definidas de forma individual; em síntese, tem-se mostrado como esta técnica permite avaliar, individualmente, cada política em relação às possíveis políticas geradas aleatoriamente. O que se almeja é avaliar, dentre o conjunto de políticas factíveis do espaço de decisão, aquelas que compõem a fronteira de Pareto.

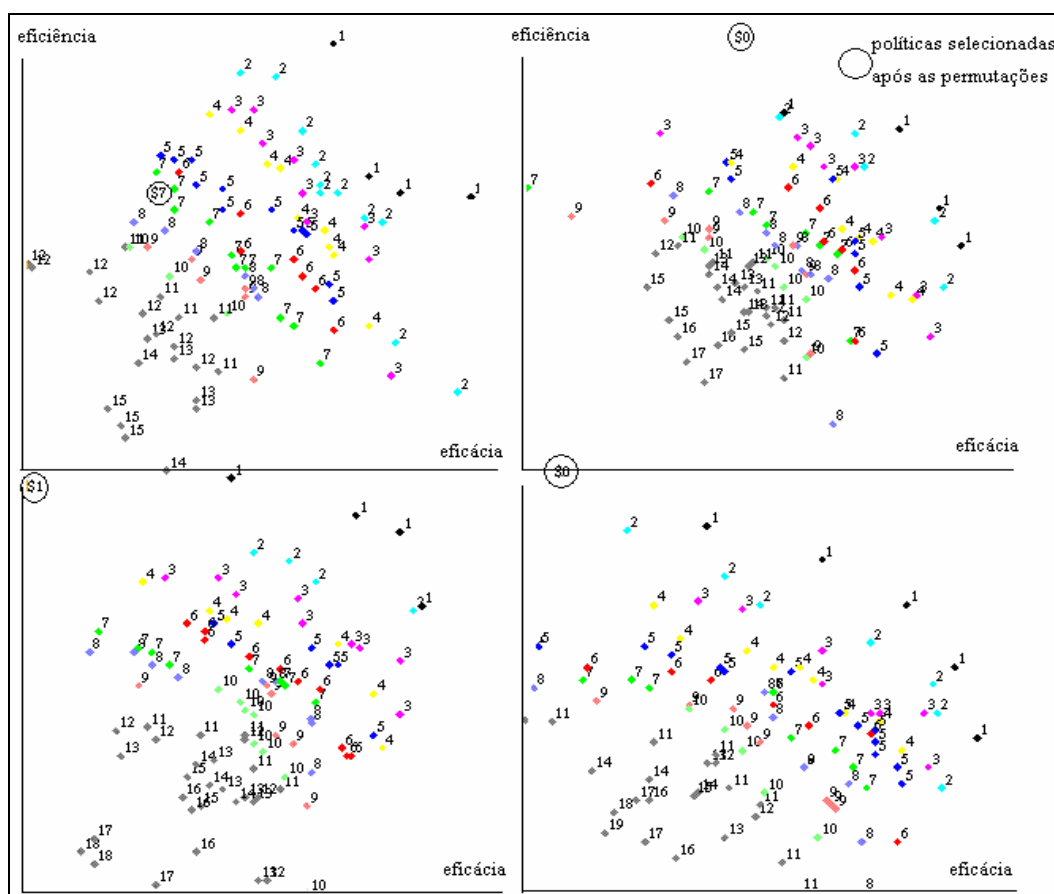


FIGURA 15b: Camadas de Pareto para a política selecionada e as permutadas – Homens e Mulheres

Fonte: Banco do Povo

Na FIG.12, apresentou-se o resultado das políticas factíveis no espaço de decisão de eficiência e eficácia para (i) a base de clientes e (ii) a base de clientes e candidatos recusados, nos períodos  $t_0$  e  $t_1$ . De posse desses resultados, o passo seguinte para a análise agregada foi construir a fronteira de Pareto. Optou-se pela construção da fronteira de Pareto em dois níveis,

sendo o primeiro nível definido na cor rosa; e o segundo, na azul, conforme é demonstrado nas FIG.16 e 17. A razão para se escolher dois níveis é simples: dado tanto a proximidade entre ambos os níveis, quanto o fato de todos os pontos ali representados serem ótimos no sentido conceitual de Pareto, trabalhar com os dois níveis estaria se reduzindo o risco de exclusão de pontos que poderiam ser tratados como de fronteira. As políticas que incluem os resultados só para a base dos clientes e suas respectivas fronteiras estão conjuntamente representadas na FIG.16, ao passo que a FIG.17 inclui também os resultados dos candidatos recusados.

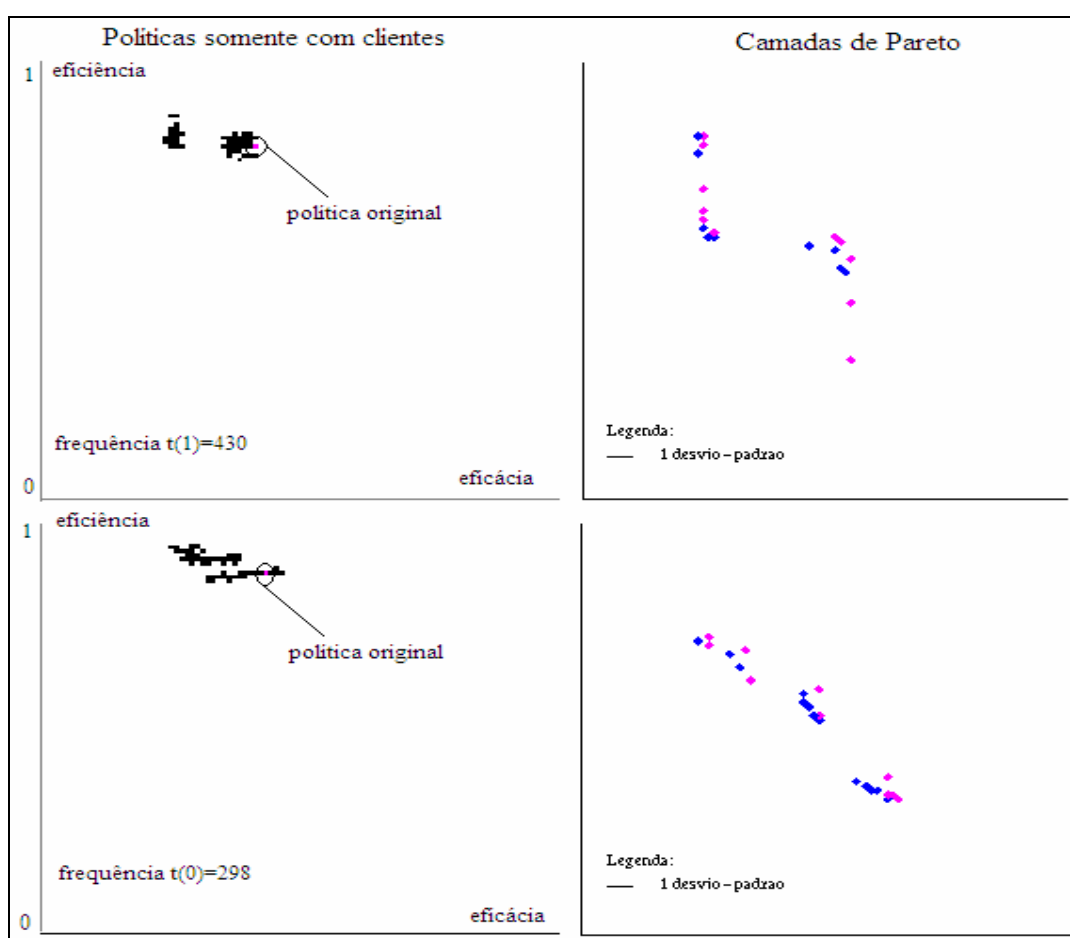


FIGURA 16: Resultados de eficiência e eficácia e respectivas camadas de Pareto (base de dados só com clientes)

Fonte: Banco do Povo

Como pode se notar na FIG.16, o argumento de se selecionar dois níveis de não-dominância é, nesse caso, bastante procedente, haja vista a proximidade dos resultados verificados em algumas políticas. Na FIG.17, nota-se que, em grande parte dos resultados que incluem os recusados, claramente há um distanciamento maior entre o nível 1 e 2.

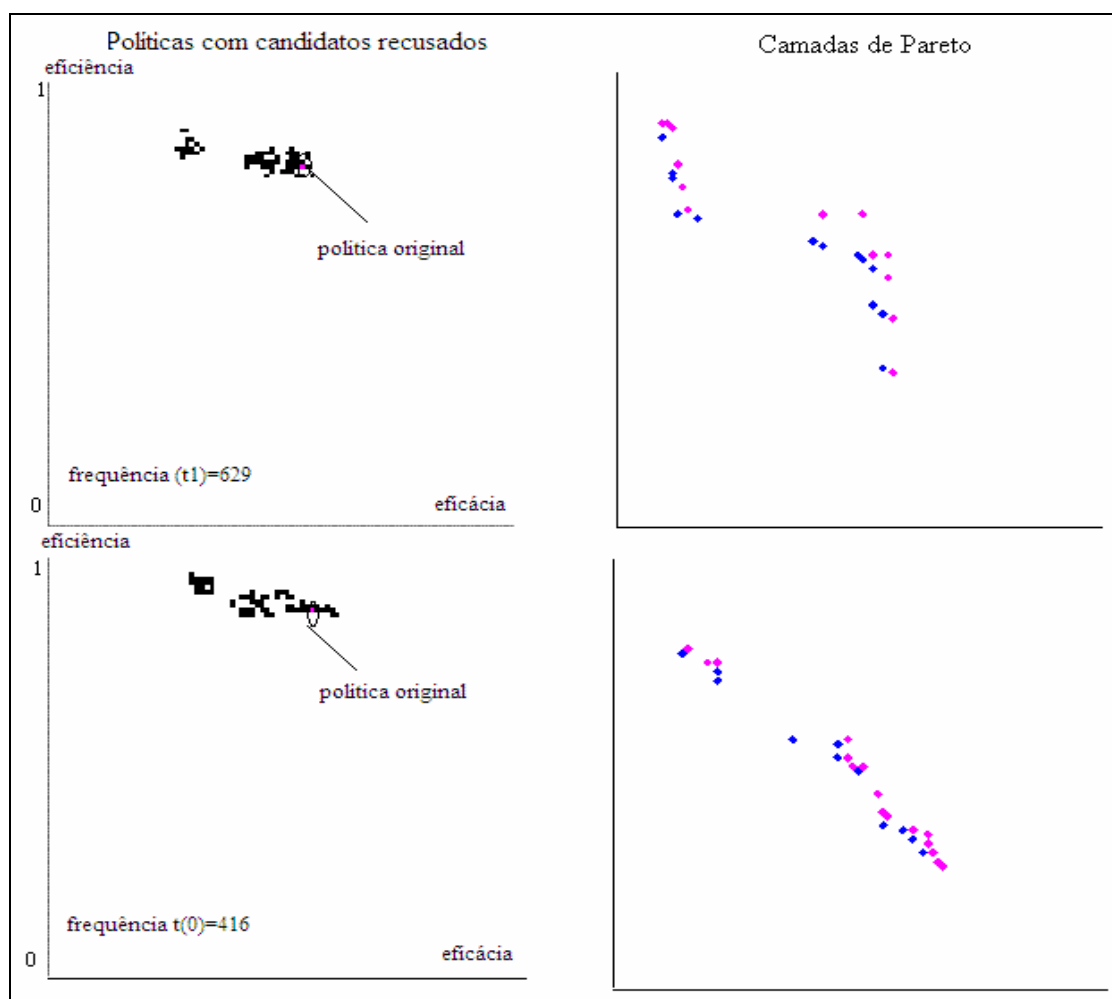


FIGURA 17: Resultados de eficiência e eficácia e respectivas fronteiras de Pareto (base de dados com clientes e candidatos recusados)

Fonte: Banco do Povo

Desses resultados, surgem duas questões: a primeira, quais são as políticas que representam o ótimo de Pareto, e a segunda, dentre estas políticas, qual(is) atende(m) simultaneamente eficiência e eficácia ao maior nível de significância. Nas subseções 6.5 e 6.6 são respondidas tais questões.

### 6.5 Os campos dos vetores de significância e sua interpretação

Analisar individualmente cada política é uma tarefa sujeita a muitos erros, uma vez que a capacidade humana de trabalhar manualmente com um número tão elevado de resultados é limitada. Naturalmente que, uma análise do ponto de vista agregado, englobando todas as políticas factíveis, só é viável, se tivermos algum(ns) mecanismo(s) que avalie(m) cada

política em relação às demais. Assim, buscando uma medida que eliminasse a probabilidade de erro humano, criaram-se os denominados Vetores de Significância e o Pseudogradiante, já previamente definidos no capítulo metodológico (subseções 4.2 e 4.3). Apesar de suas propriedades particulares, ambas as medidas têm em comum o fato de mensurarem o ganho ou perda relativo de cada política, seja comparativamente às demais (efeito interpolítica - vetores de significância), seja comparativamente à inclusão dos candidatos recusados (efeito intrapolítica - pseudogradiante).

Na subseção anterior, foram mostrados os resultados das políticas factíveis de seleção de candidatos a crédito (FIG.12), bem como a fronteira de Pareto para o conjunto de políticas não-dominadas (FIG.16 e FIG.17). Os vetores de significância foram criados para todas as políticas representadas na FIG.12.

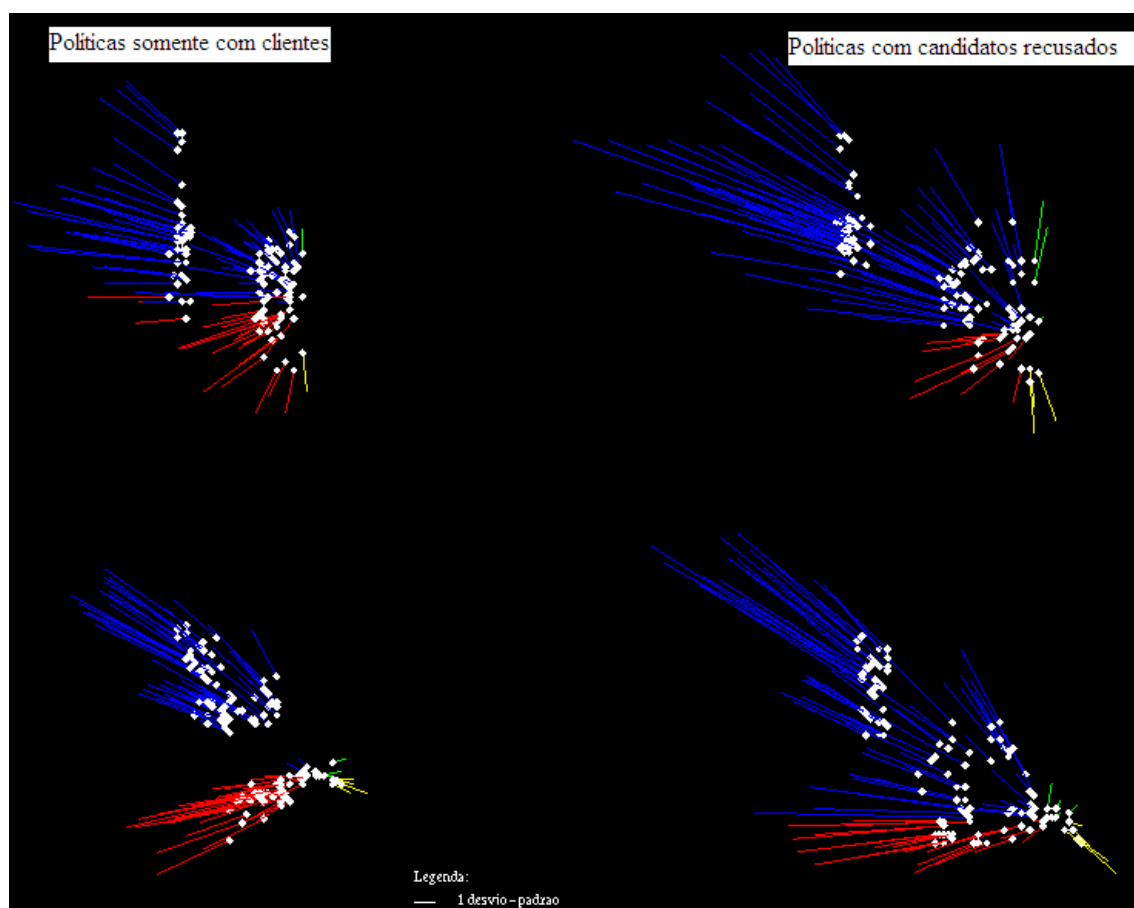


FIGURA. 18: Resultados das políticas de crédito no espaço de decisão e seus vetores de significância

Fonte: Banco do Povo

Na FIG.18 é apresentado o resultado dos vetores de significância para todas aquelas políticas demonstradas graficamente na FIG.12. No entanto, são aquelas que compõem a Fronteira de Pareto que merecem ser avaliadas.

Dentre as políticas definidas que fazem parte da Fronteira de Pareto, a questão é encontrar qual(is) a(s) que atende(m) melhor aos objetivos de eficiência e eficácia simultaneamente. Conforme descrito na subseção metodológica sobre vetores de significância, os resultados em verde são aqueles cujo somatório da diferença entre os valores da política analisada e as permutadas, normalizadas em número de desvios-padrões das políticas permutadas, é positivo tanto para eficiência quanto para eficácia. Os vetores azuis são positivos para eficiência, porém negativos para eficácia, enquanto os vetores em amarelo possuem comportamento contrário. Vetores vermelhos apresentam resultados negativos para eficiência e eficácia. Os vetores que interessam à análise são aqueles que compõem a Fronteira de Pareto (FIG.19a) e estão representados na FIG.19b.

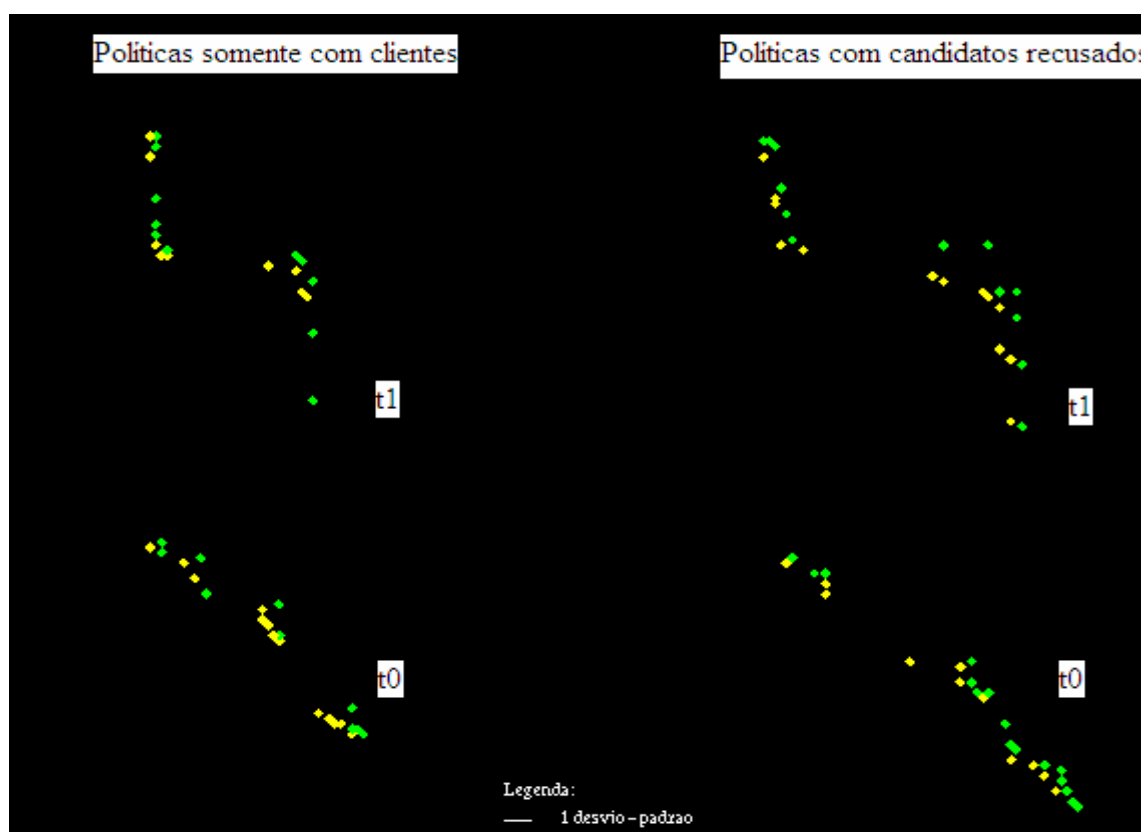


FIGURA 19a: Camadas de Pareto para políticas com e sem candidatos recusados  
Fonte: Banco do Povo

Os pontos verdes representam a Fronteira de Pareto e os amarelos formam o segundo nível de não-dominância. Dentre os pontos de ótimo, aqueles cujos vetores de significância estão

representados pela cor verde são a resposta para o problema multiobjetivo que está se investigando, pois indicam ganhos de eficiência e eficácia em relação às demais políticas. Ademais, aqueles vetores verdes com maior número de desvios-padrões são também os que atendem, num maior nível de significância, os dois objetivos simultaneamente.

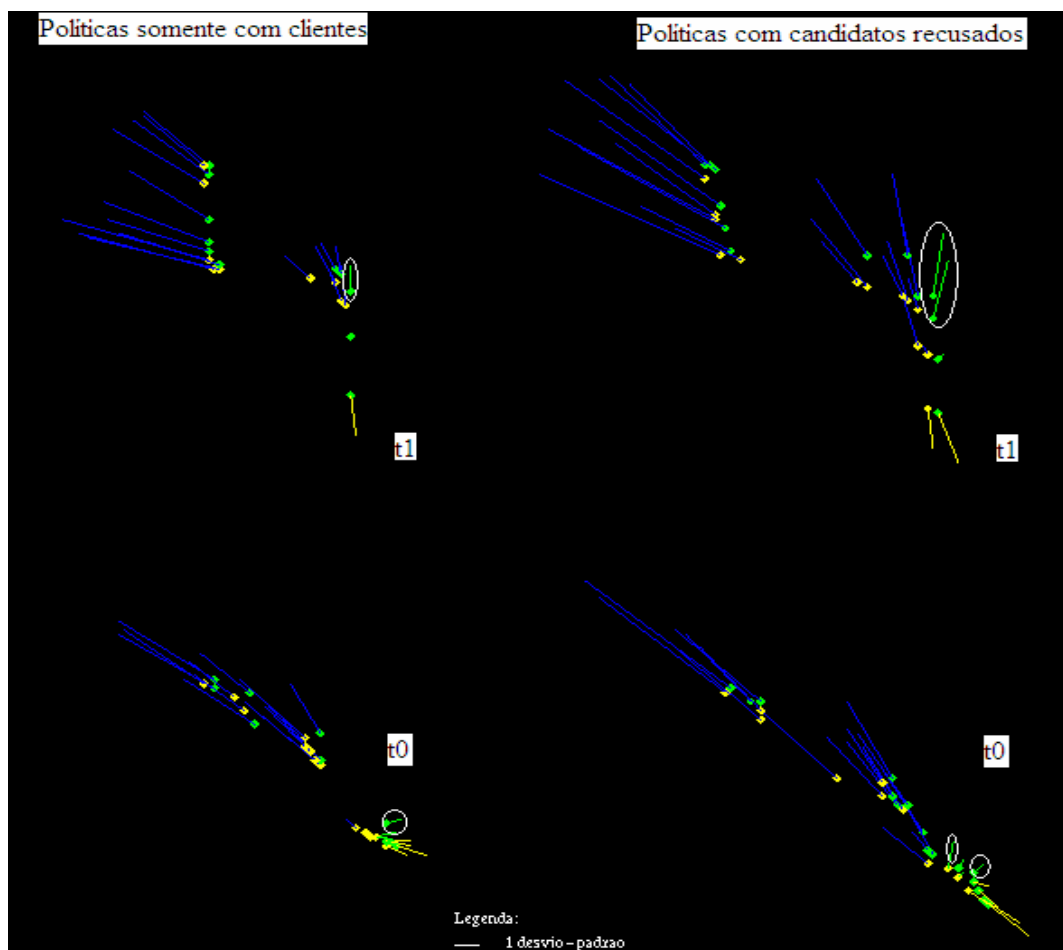


FIGURA 19b: Camadas de Pareto e seus vetores de significância para políticas com e sem candidatos recusados

Fonte: Banco do Povo

Antes de se discutirem os vetores representados pela cor verde, são apresentados exemplos elucidativos dos demais vetores, ressaltando-se que, no caso do vetor amarelo, não foram encontrados resultados nas duas primeiras camadas de Pareto, para as políticas com candidatos recusados em  $t_1$ , conforme demonstra a FIG.19b. Dessa maneira, buscaram-se resultados nas camadas bem mais baixas, como se pode observar pela FIG.18.

TABELA 20  
Políticas com maiores valores de vetor de significância no tempo  $t_1$   
(inclui candidatos recusados)

Variável/Categorias	Vetor Azul	Vetor Amarelo	Vetor Vermelho
PAB	Belo Horizonte	Belo Horizonte	Belo Horizonte
Estado civil	solteiros, casados e outros	solteiros e casados	solteiros, casados e outros
Gênero	homens e mulheres	homens	homens
Grau Escolaridade	1º, 2º e 3º graus completos ou incompletos	1º, 2º e 3º graus completos ou incompletos	1º, 2º e 3º graus completos ou incompletos
Renda líquida	R\$0,00 e mais	R\$0,00 e mais	R\$0,00 e mais
Finalidade Crédito	capital misto, fixo e giro	capital misto, fixo e giro	capital misto, fixo e giro
Valor do Crédito	até R\$999,99	todos os valores/faixas	até R\$1.999,99

Fonte: Banco do Povo

Os resultados dos vetores de significância para todas as políticas, nas quatro situações (políticas com e sem recusados no período  $t_0$  e  $t_1$ ), encontram-se no ANEXO III.

Na TAB.20 são apresentadas as políticas relativas aos maiores resultados dos vetores de significância das cores azul, amarelo e vermelho, para as políticas com candidatos recusados, no período  $t_1$ .

A política cujo vetor de significância está representada na cor azul (FIG.20a) indica que, comparativamente às políticas permutadas, há um ganho de eficiência em contraposição a uma perda de eficácia. Em termos de significância, os vetores parciais são bastante significativos, embora o resultado de eficiência seja positivo e o de eficácia negativo.

Essa política, para o tempo  $t_1$ , incluindo os candidatos recusados, caracteriza-se por incluir homens e mulheres, de todos os estados civis e graus de escolaridade, sem restrição de renda líquida e com qualquer finalidade de crédito orientado produtivo. A única restrição é o valor de crédito concedido, cujo valor é inferior a R\$1.000,00 (hum mil reais).



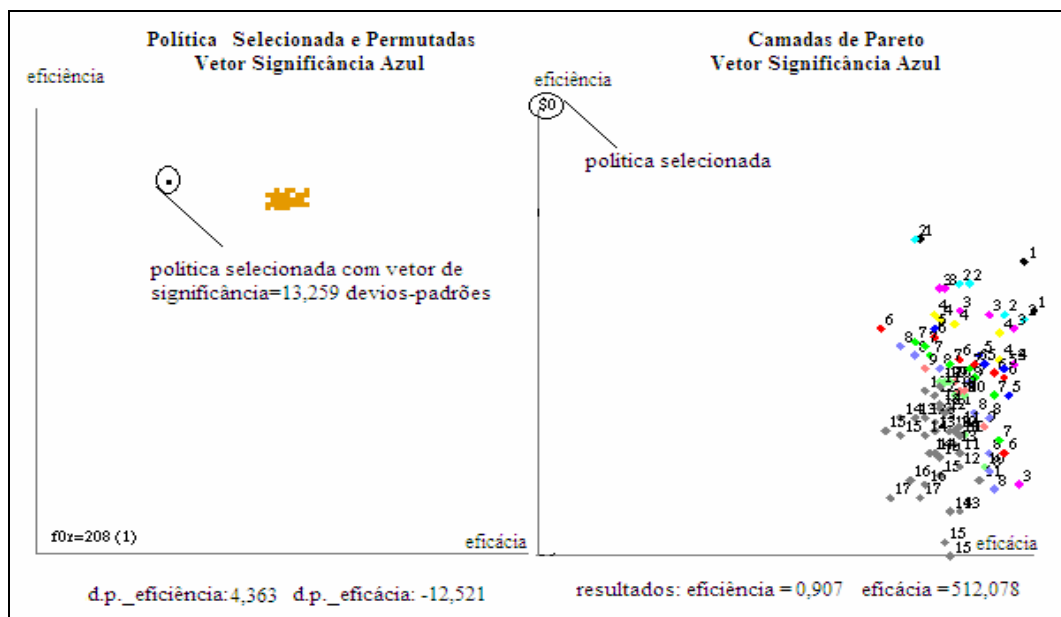


FIGURA 20a: Representação gráfica da política selecionada - vetor azul  
 Fonte: Banco do Povo

O resultado na direção oposta àquele anterior apresenta eficácia positiva, porém eficiência negativa, e é representado pelo vetor amarelo. Como se pode observar graficamente (FIG.20b), o resultado da política relativa a esse vetor encontra-se em posição diametralmente oposta ao verificado pela política designada pelo vetor azul.

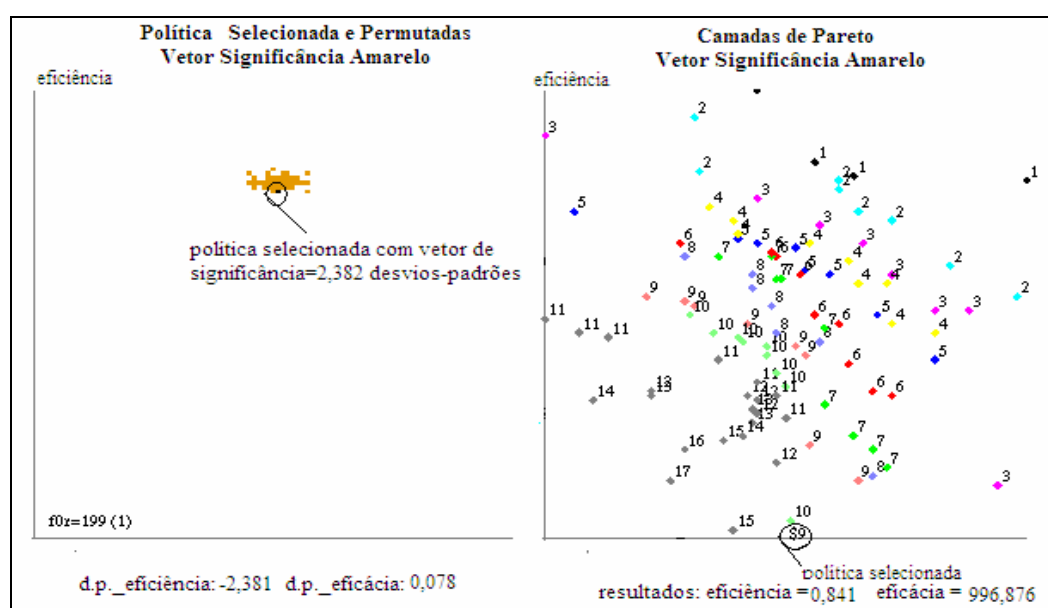


FIGURA 20b: Representação gráfica da política selecionada - vetor amarelo  
 Fonte: Banco do Povo

Em outras palavras, a posição da política em relação às permutadas lhe garante um ganho de eficácia contrabalançado por uma perda de eficiência. Tal política é caracterizada por incluir somente homens, casados e solteiros, embora as demais variáveis (grau de escolaridade, renda líquida, finalidade e valor do crédito) incluam todas as possibilidades de categorias.

Por fim, a pior política, cujos resultados apontam para uma perda em ambos os objetivos, e está representada pelo vetor vermelho, é aquela que inclui somente homens, de todos os estados civis, e com valor do crédito concedido inferior a R\$2.000,00 (dois mil reais), com quaisquer (i) grau de escolaridade, (ii) renda líquida e (iii) finalidade do crédito (FIG.20c). É uma política com características que misturam as políticas designadas pelos vetores azul e amarelo, porém mais próxima à última. Destaca-se a exclusão das mulheres: ao que tudo indica, a restrição ao sexo feminino parece ser o fator que mais contribui para a perda dos resultados, seja de eficiência, seja de eficácia.

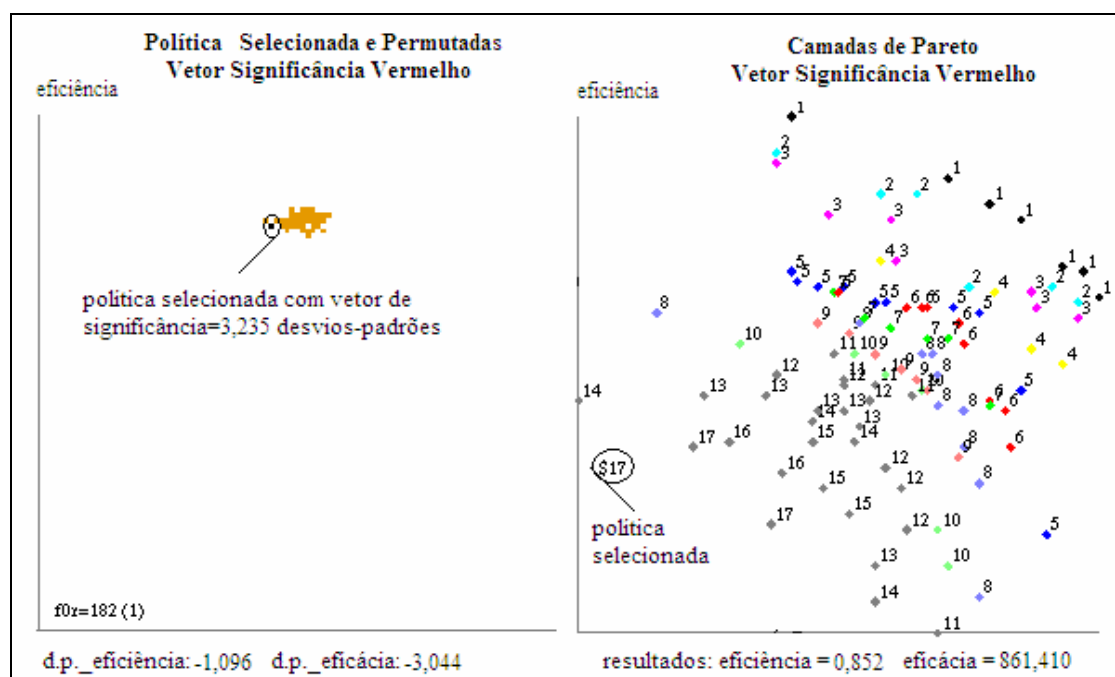


FIG. 20c – Representação gráfica da política seleccionada - vetor vermelho

Fonte: Banco do Povo

Como já dito, a resposta a esse problema multiobjetivo está nos vetores verdes. Representados graficamente para ambas as políticas (sem e com candidatos recusados), nos dois períodos ( $t_0$  e  $t_1$ ), os vetores verdes estão circulados na FIG.19b, e dentre eles, os relativos às políticas com candidatos recusados, no período  $t_1$ , são os mais significativos. As duas figuras a seguir

(FIG.21a e 21b) apresentam os resultados das políticas relativas aos dois vetores, tanto em termos de permutação cíclica, quanto em termos de camadas de Pareto. Na FIG.21a, tem-se o resultado do vetor mais à esquerda, cujo desvio-padrão é ligeiramente superior ao do vetor mais à direita; o último, por sua vez, encontra-se representado na FIG.21b.

Ambas as políticas são definidas na TAB.21a. A única distinção é que, na primeira, cujo vetor de significância apresenta um desvio-padrão um pouco superior, só se selecionam as mulheres, enquanto na segunda selecionam-se, também, os homens. Outro aspecto interessante diz respeito ao grau de escolaridade: em ambas, os clientes devem ter somente até o 1º grau de escolaridade completo.

Como ilustrado pela FIG.19b, os dois vetores verdes relativos à política com clientes e candidatos recusados, no período  $t_1$ , encontram-se no “joelho” da fronteira, evidenciando-se, assim, a característica de ótimo no sentido multiobjetivo. Esse talvez seja o resultado mais importante e interessante das melhores políticas.

TABELA 21a  
Políticas mais significativas da fronteira de Pareto – vetor de significância verde  
(inclui candidatos recusados, período  $t_1$ )

<b>Variável</b>	<b>Vetor Significância = 2,746 d.p. eficiência: 2,709 d.p. eficácia: 0,446 d.p.</b>	<b>Vetor Significância = 2,672 d.p. eficiência: 2,622 d.p. eficácia: 0,516 d.p.</b>
PAB	Belo Horizonte	Belo Horizonte
Estado civil	solteiros, casados e outros	solteiros, casados e outros
Gênero	homens e mulheres	homens e mulheres
Grau Escolaridade	até superior completo ou incompleto	até 2º grau completo ou incompleto
Renda líquida	R\$0,00 e mais	R\$0,00 e mais
Finalidade Crédito	capital misto, fixo e giro	capital misto, fixo e giro
Valor do Crédito	até R\$999,99	até R\$999,99

Fonte: Banco do Povo

Ao se analisarem os resultados dos vetores individuais/parciais de eficiência e eficácia, nota-se que a significância da eficácia da segunda política é superior à primeira, embora a eficiência seja superior no caso da primeira política.

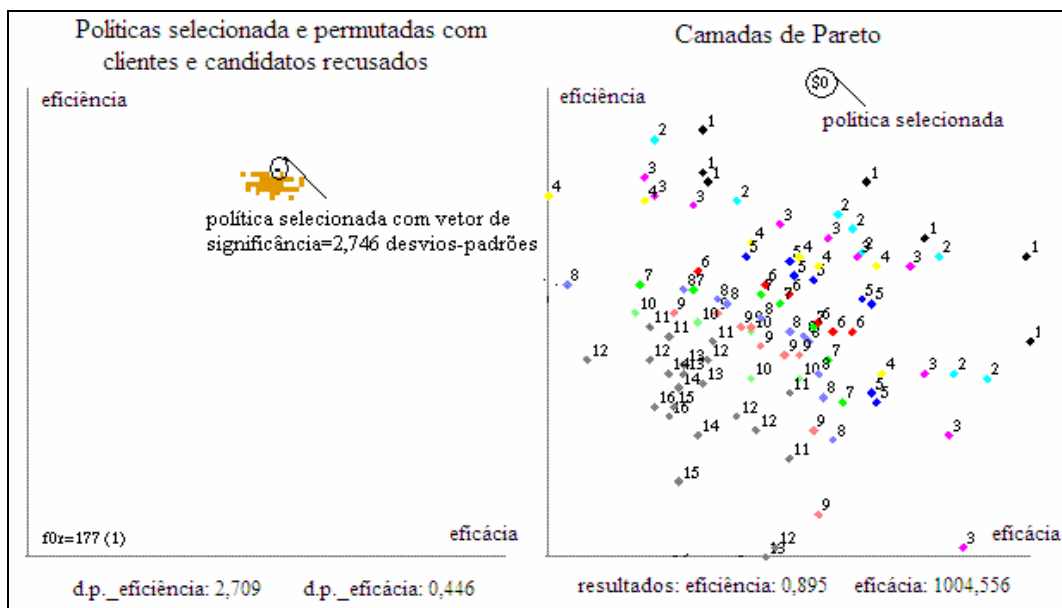


FIGURA 21a: Resultado do melhor vetor de significância - política selecionada da fronteira de Pareto com candidatos recusados

Fonte: Banco do Povo

Visualmente, pode-se perceber que o vetor da segunda política, que se encontra mais à direita que o da primeira, apresenta uma inclinação menos perpendicular ao eixo do  $x$  que o vetor da primeira política, além de se posicionar mais distante do eixo do  $y$ , indicando um valor de eficácia superior àquele do vetor de significância mais elevado.

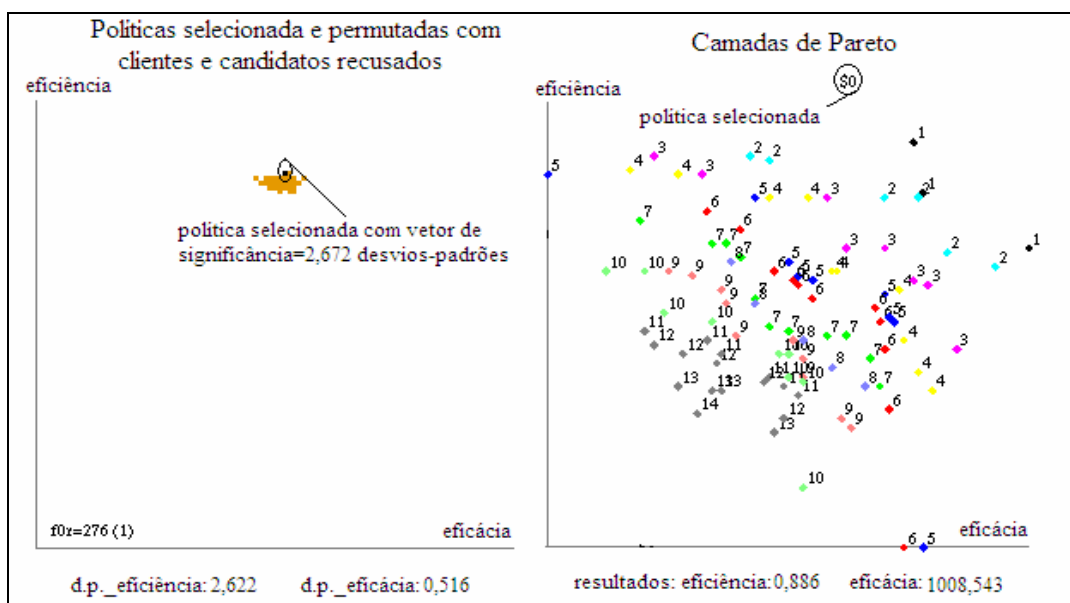


FIGURA 21b: Resultado do segundo melhor vetor de significância - política selecionada da fronteira de Pareto com candidatos recusados

Fonte: Banco do Povo

Os resultados dessas duas políticas de crédito sugerem que, *ceteris paribus*, o grau de escolaridade, o gênero e o estado civil são as variáveis determinantes sob os possíveis maximizadores resultados de eficiência e eficácia. Entretanto, optar pela política que engloba homens e mulheres significa uma decisão de contemplar mais a eficácia em contrapartida à eficiência, dado o *trade-off* entre eficiência e eficácia evidenciado pelos resultados tanto dos vetores parciais de significância quanto pelos próprios valores absolutos dessas métricas.

#### 6.5.1 Diferença entre os vetores

Na subseção anterior discutiram-se os resultados apresentados para as políticas com os candidatos recusados, no período  $t_1$ . No entanto, não se sabe quão próximos ou não esses resultados estão daqueles verificados para as políticas que só incluem os clientes da instituição. Em termos práticos, os resultados que incluem os candidatos recusados são os que merecem maior atenção e que, de fato, fornecem a resposta ao problema multiobjetivo aqui analisado. A razão para isso reside em dois aspectos:

- a técnica escolhida da permutação cíclica, fundamental na solução do problema multiobjetivo deste trabalho, só pode ser aplicada corretamente, se incluir o universo de candidatos a crédito da IMF. Caso contrário, a aleatoriedade gerada estaria “viesada” pela base dos clientes da IMF;
- e, como consequência do aspecto anterior, os candidatos recusados, que fazem parte do universo da IMF, mas que não estão incluídos na análise dos clientes, também não estão contemplados nos resultados das políticas exclusivas de clientes, não refletindo, assim, seu impacto sob os dois objetivos avaliados.

Mesmo assim, nesta subseção apresenta-se o único resultado do vetor de significância verde para as políticas sem candidatos recusados, para se ter uma visão comparativa com os resultados das políticas discutidas na subseção anterior, com os candidatos recusados.

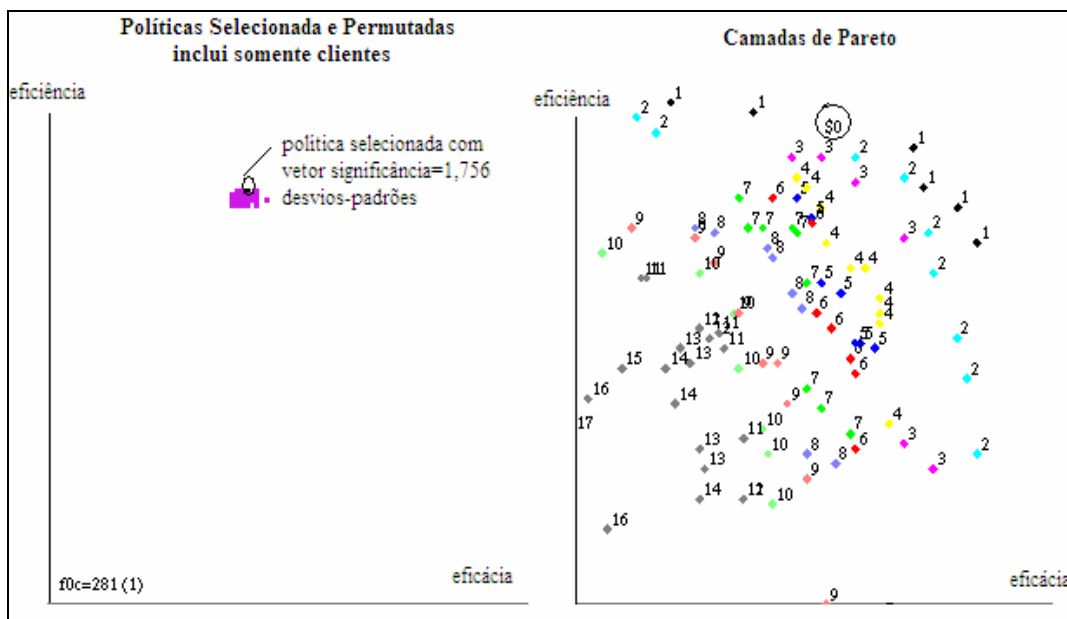


FIGURA 22 – Resultado do melhor vetor de significância - política selecionada da fronteira de Pareto sem candidatos recusados

Fonte: Banco do Povo

Na FIG.19b, no quadrante superior à esquerda, há somente um (1) vetor verde, representado na FIG.22. As características dessa política e seus respectivos valores estão na TAB.21b. O resultado da melhor política para os clientes (vetor de significância = 1,159 d.p.), no período  $t_1$ , em nada se difere da melhor política que inclui os candidatos recusados (TAB.21b, vetor de significância = 2,746 d.p.).

TABELA 21b  
Política mais significativa da fronteira de Pareto  
(não inclui candidatos recusados, período  $t_1$ )

Variável	Vetor Verde = 1,159 d.p. eficiência: 1,159 d.p. eficácia: 0,044 d.p.
PAB	Belo Horizonte
Estado civil	solteiros, casados e outros
Gênero	homens e mulheres
Grau Escolaridade	até superior completo ou incompleto
Renda líquida	R\$0,00 e mais
Finalidade Crédito	capital misto, fixo e giro
Valor do Crédito	até R\$999,99

Fonte: Banco do Povo

Dessa maneira, tanto os dados originais quanto aqueles gerados pela inclusão dos candidatos recusados sugerem que, ao se restringir a política às mulheres com nível de escolaridade mais baixo, os resultados tornam-se mais factíveis no que diz respeito ao alcance da auto-sustentabilidade. Esse resultado está em consonância com a política de crédito adotada pelo maior banco de microcrédito do mundo, o Grammen Bank, cujo Prêmio Nobel da Paz de 2006 foi concedido a ser fundador, Muhammad Yunus. A política do banco é basicamente voltada para as mulheres de baixa renda.

### 6.6 O Pseudogradiante intrapolítica e sua interpretação

Os resultados do cálculo dos pseudogradientes intrapolíticas, medidos intratemporalmente, apresentam-se graficamente na FIG.23, a seguir. Em linhas gerais, os campos vetoriais mantiveram as mesmas cores definidas para os vetores de significância, o que quer dizer, na maioria dos casos. Nota-se a prevalescência dos vetores amarelos, sobretudo no período  $t_0$ , sinalizando um aumento per capita no volume do crédito concedido acompanhada de um aumento na inadimplência. Em outras, palavras, a inclusão dos candidatos recusados reforçou o *trade-off* entre os dois objetivos.

Independente do aumento na eficácia, não seria de se estranhar a possibilidade de queda na eficiência, haja vista a inclusão, na base de clientes, de indivíduos cujo crédito havia sido negado. Esses candidatos têm um comportamento mais próximo aos piores candidatos existentes na base. Todavia, esse comportamento não é homogêneo ao longo do tempo. Do período  $t_0$  para  $t_1$ , percebe-se um ganho conjunto de eficiência e eficácia, o que também pode sugerir um aumento no rigor da Instituição no que diz respeito à concessão do crédito.

Especificamente, os campos vetoriais do período  $t_0$  só apresentam uma única política com ganho líquido em eficiência e perda em eficácia. Outro resultado é a inexistência de perda simultânea tanto de eficiência quanto de eficácia (vetores vermelhos). Via de regra, a perda de eficiência foi expressiva, haja vista a inclinação dos vetores.

Comparativamente ao período  $t_1$ , percebe-se uma perda em eficiência menos acentuada nos resultados: os vetores, no período  $t_1$ , são menos perpendiculares ao eixo do  $x$  que no período  $t_0$ , além de passarem a apresentar situações de ganho em ambos os objetivos. Esse último resultado reforça a viabilidade da auto-sustentabilidade.

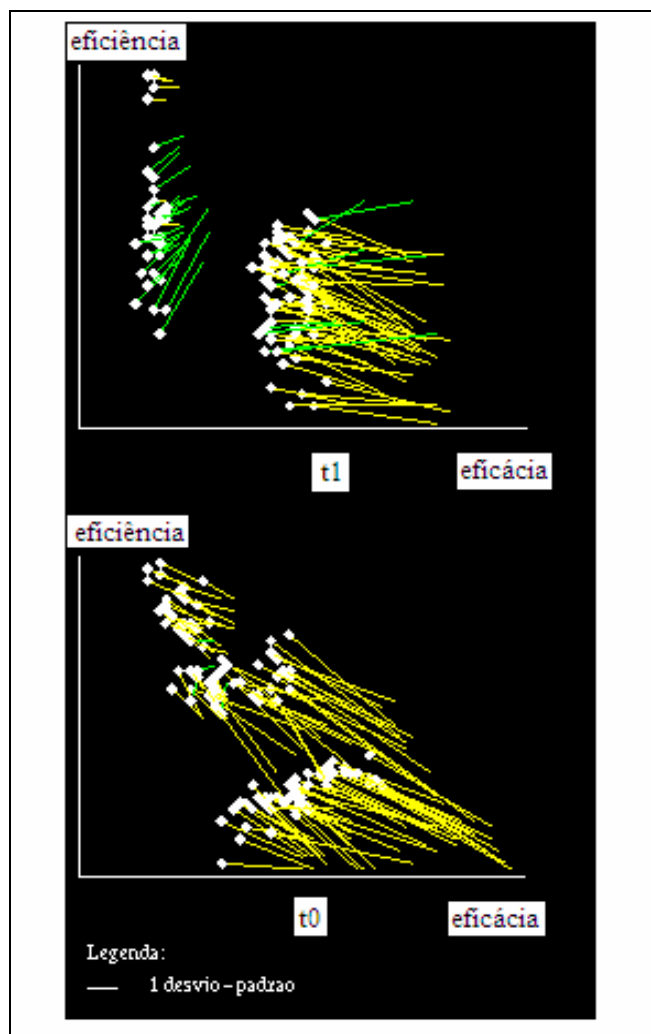


FIGURA 23: Pseudogradientes intrapolíticas para o período  $t_0$  e  $t_1$   
 Fonte: Banco do Povo

No cômputo geral, dado que as políticas são as mesmas em ambos os períodos, uma provável explicação para a melhoria nos resultados de eficiência seria o aprimoramento no critério subjetivo de avaliação do candidato. Como uma característica importante na forma de atuação das IMF é o papel do agente de crédito no processo de seleção dos candidatos, uma explicação para o fato de se manter a política de seleção, mas melhorar o cliente selecionado seria o aprimoramento na avaliação subjetiva do agente de crédito. Pode-se inferir que, no passado recente,  $t_0$ , a IMF ainda tinha um critério seletivo menos apurado, percebido ao se comparar os resultados intertemporalmente.



## 7 CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi abordado um problema em finanças, mais especificamente em microfinanças, definido como a necessidade de auto-sustentabilidade das IMF brasileiras. Essa abordagem tratou, simultaneamente, de dois objetivos pertinentes à auto-sustentabilidade, a eficiência e a eficácia. A eficiência remete-se à qualidade da seleção dos candidatos a crédito e mensura, em uma escala de 0 a 1, a pontualidade do cliente no compromisso de pagamento do crédito contraído; quanto mais próximo de 1, maior o valor da eficiência. A eficácia estima o volume da carteira ativa disponível para novos repasses/empréstimos, em termos per capita, e oferece um parâmetro da quantidade de crédito disponível para as operações da IMF.

A analogia ao modelo clássico de média-variância de Markowitz (1952), cuja idéia subjacente é encontrar a fronteira eficiente, no sentido de Pareto, de seleção de *portfolios*, parece evidente. No trabalho aqui proposto e desenvolvido, a idéia subjacente foi encontrar uma fronteira eficiente que maximizasse eficiência e eficácia para a escolha da melhor política de seleção de crédito da IMF. Comparativamente aos trabalhos referenciados, também se avançou conceitualmente na escolha, dentre os pontos pertencentes à fronteira, daquele que melhor atendesse aos propósitos de solução do problema.

O caráter inovador deste trabalho de tese se faz presente sob mais quatro outros aspectos. O primeiro é a técnica de permutações cíclica, inovadora na área econômico-financeira, aqui utilizada com o propósito de se construir uma fronteira eficiente de política de seleção de crédito para as IMF. A principal contribuição metodológica é a aplicação da técnica de Monte Carlo de testes de permutação para gerar configurações sob a hipótese nula em problemas multiobjetivos, em substituição às técnicas econométricas, bem como às abordagens do tipo DEA, mais recente e freqüentemente encontradas em artigos computacionais na área econômico-financeira e de engenharia (computacional). Especificamente em relação à técnica DEA, além do tratamento do problema, por muitas vezes, ser reduzido ao tradicional mono-objetivo, suas aplicações exigem especificações (pesos) que não se mostraram necessários no tratamento dado pelo trabalho aqui desenvolvido.

Outro aspecto é o novo conceito do vetor de significância, que permitiu realizar o cálculo de inferência da robustez dos resultados encontrados na fronteira de Pareto. A capacidade de selecionar a política de crédito mais adequada dentre aquelas contidas na fronteira ótima de Pareto, através de um critério quantitativo, sem que fosse necessária a utilização de pesos arbitrariamente fixados para equacionar a importância relativa das funções mono-objetivo de

eficiência e eficácia, tornou o método ainda mais atraente no contexto de avaliação de políticas de crédito em IMF. Ainda comparativamente à técnica DEA, o vetor de significância apresenta uma característica interessante. A técnica DEA de avaliação de algum parâmetro/indicador se dá, em geral, pela mensuração da distância entre o indicador avaliado e aquele referenciado como próximo à fronteira eficiente (*benchmark*) ou entre o indicador avaliado e os demais disponíveis. No caso deste trabalho, a avaliação da significância de cada política se deu entre a política analisada e o conjunto de políticas permutadas, ou seja, aquelas geradas aleatoriamente, em termos de desvios-padrões. Há, de fato, uma analogia entre uma possível aplicação da DEA e o trabalho ora desenvolvido, muito embora o vetor de significância deste trabalho esteja muito mais próximo à estatística de teste  $t$  e, por conseguinte, a uma estatística de significância, do que à técnica DEA.

A técnica de inclusão amostral de candidatos a crédito que tiveram suas propostas indeferidas aproximou a base de dados ao potencial universo da IMF analisada e foi também uma outra novidade no âmbito da avaliação e seleção do comportamento do candidato a crédito. Usualmente são as técnicas de *credit scoring* e mais recentemente de *data mining* que têm prevalecido. Especificamente, a metodologia de inferência do comportamento do crédito aos candidatos recusados, partiu do pressuposto de que o comportamento do pagamento das parcelas segue uma distribuição de Poisson não-homogênea. A partir desse pressuposto utilizou-se a média ponderada (gerada através de números aleatórios) do histórico de crédito dos dez clientes mais próximos aos candidatos solicitantes e pode se construir um histórico simulado dos candidatos recusados. Por conseguinte, tornou-se viável aplicar a técnica de permutação cíclica sem restrições ao seu completo funcionamento no que diz respeito à aleatoriedade dos dados gerados.

O último aspecto distintivo deste trabalho é a utilização de uma análise e interpretação visual dos resultados alcançados. As ferramentas computacionais gráficas de visualização facilitaram a interpretação dos resultados de forma interativa com o usuário, permitindo o refinamento das análises das políticas de crédito à medida que se compreendia melhor o comportamento das políticas analisadas. Enfim, produziu-se ao final, um modelo computacional bastante acessível e com resultados visuais de fácil interpretação. A visualização (i) das políticas que compunham a fronteira; (ii) de suas posições, analisadas individualmente em relação às políticas permutadas (artificiais) em termos de camadas de Pareto; (iii), da sua significância e robustez, medidas e apontadas pelos quatro possíveis resultados dos vetores de significância; e (iv) da decomposição intratemporal do efeito da

inclusão dos candidatos recusados, de cada política individualmente, foram os resultados propiciados pelo programa computacional aqui apresentado.

Associado a todo esforço computacional e matemático de elaboração de um programa que fosse capaz de dar uma resposta empírica às questões de otimização multiobjetivo recorrentes na literatura, mas cujo tratamento tem sido, via de regra, monoobjetivo já foi um grande avanço desse trabalho. Porém, tão significativo quanto a abordagem de um problema clássico em finanças ter sido tratado com metodologias tão inovadoras é o fato de os resultados reforçarem o que as evidências empíricas internacionais de sucesso vêm mostrando, quer seja, que o microcrédito é um poderoso instrumento de atuação junto aos indivíduos das camadas mais pobres, com menor grau de escolaridade e, em específico, do gênero feminino.

Destarte, a contribuição deste trabalho foi muito além da construção de um modelo computacional, em linguagem C, que contemplou inovações conceituais e metodológicas, sobretudo para a área de finanças, e que possibilitou tratar o problema de otimização de maneira multiobjetivo, mas sobretudo a validação, pois vias inovadoras, da possibilidade de auto-sustentabilidade do microcrédito orientado produtivo, como já comprovado internacionalmente. Essa validação é nitidamente evidente ao se constatar, estatisticamente, que as políticas situadas no “joelho” da fronteira de Pareto são aquelas cuja significância conjunta de eficiência e eficácia apontam na direção de ganhos positivos para ambos os objetivos.

No que diz respeito especificamente aos resultados encontrados, é importante destacar que, dentre aquelas políticas que compunham a fronteira de Pareto, duas mostraram-se significativas sob o ponto de vista (estatístico) dos vetores de significância. A política com maior vetor de significância contemplava: (i) mulheres; (ii), solteiras, casadas, divorciadas, viúvas; e outras, (iii) com até 1º. grau de escolaridade completo; (iv) cuja finalidade do crédito destinava-se a capital de giro, fixo e misto; e (v) abrangendo todas as faixas de crédito disponíveis pela IMF. A segunda política, em termos de vetor de significância, abrangia um universo de indivíduos maior, pois incluía também os homens, embora excluísse os indivíduos cujo estado civil não fosse indivíduos solteiros e/ou casados. Comparativamente, o resultado encontrado para as duas políticas sugere um *trade-off* entre eficiência e eficácia, e a decisão de escolha entre ambas, por parte da IMF, depende de qual o ritmo que a Instituição prefere para se alcançar a auto-sustentabilidade.

Subjacente ao propósito deste trabalho, houve, durante todo o tempo de desenvolvimento do mesmo, a preocupação e o cuidado de se construir uma ferramenta de fácil manuseio e

tratamento das informações, utilizando-se alguma técnica que fosse a mais próxima possível da distribuição empírica dos dados e que minimizasse a introdução de modelos estatísticos artificiais para os quais fosse difícil justificar sua aplicabilidade.

Por fim, é importante ressaltar que a técnica aqui desenvolvida também pode ser aplicada a problemas de outra natureza, seja na área de finanças, como, por exemplo, em avaliação e seleção de políticas creditícias adotadas em bancos comerciais, ou na avaliação de políticas públicas de outra natureza. Exemplos elucidativos são as políticas tributárias e sociais. No caso das políticas tributárias, uma abordagem pertinente seria buscar uma solução para o *trade-off* entre (i) maior nível de arrecadação; e (ii) menores alíquotas tributárias, para que se pudesse definir qual a melhor estrutura tributária a ser adotada. No caso de uma avaliação e definição de políticas públicas de cunho social, como, por exemplo, os projetos de bolsa-escola e bolsa-família, dentre outros, uma aplicação plausível seria a busca por uma solução do *trade-off* entre custo mínimo do programa social, em termos *per capita*, concomitante a sua abrangência máxima.

## 8 REFERÊNCIAS

ALVES, S.D.S.; SOARES, M.M. *Microfinanças: democratização do crédito no Brasil* atuação do Banco Central. 3. ed. Brasília: Banco Central do Brasil, 2006.

ANDERSON, D.; SWEENEY, J.D.; WILLIAMS, T.A. *Estatística aplicada à administração e economia*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002. 642p.

BANCO DO POVO®. Informações disponíveis em: <<http://www.bcodopovo.org.br>>

BARONE, F.; LIMA, P.; DANTAS, V.; RESENDE, V. *Introdução ao microcrédito*. Brasília: Conselho da Comunidade Solidária, 2002.

BERGER, A.N.; BROCKETT, P.L.; COOPER, W.W.; PASTOR, J.T. New approaches for analyzing and evaluating the performance of financial institutions. *European Journal of Operational Research*, v. 98, n. 2, p. 169-443, 1997.

BERGER, A.N.; HUMPHREY, D.B. Efficiency of Financial institutions: international survey and directions for future research. *European Journal of Operational Research*, v. 98, n. 2, p. 175-212, 1997.

BERGER, M. *Microfinance: an emerging market within the emerging markets*. Washington D.C.: Inter American Development Bank, 2000. (Discussion paper, SSD/MSM)

BLUHM, C.; OVERBECK, L.; WAGNER, C. *An introduction to credit risk modeling*. Boca Raton, Fla.: Chapman&Hall, 2003. 297 p.(CRC Financial Mathematics Series.)

BOUCHINHAS CAMPOS AUDITORES INDEPENDENTES *Manual de auditoria externa para microfinanças*. Rio de Janeiro: BNDES, 2002.

BRASIL. Banco Central do Brasil. Resolução nº2.682, datada de 21/12/1999. Disponível em: <<http://www.bcb.gov.br>>

BRASIL. Ministério da Fazenda. Microcrédito e microfinanças no governo Lula. Disponível em:<[http://www.fazenda.gov.br/portugues/documentos/2005/Microcredito\\_Microfinan%C3%A7as\\_do\\_Gov\\_Lula\\_01-09-05.pdf](http://www.fazenda.gov.br/portugues/documentos/2005/Microcredito_Microfinan%C3%A7as_do_Gov_Lula_01-09-05.pdf)>.

BRUETT,T.; SUMMERLIN, R.; D'ONOFRIO, S. *Técnicas de gestão microfinanceira*. Rio de Janeiro: BNDES, 2002.

CHANG, T.-J.; MEADE, N.; BEASLEY, J.E.; SHARAIHA, Y.M. Heuristics for cardinality constrained portfolio optimization. *Computers & Operations Research*, v. 27, n. 13, p. 1271-1302, 2000.

CHANKONG, V.; HAIMES, Y.Y. *Multiobjective decision making: theory and methodology*. New York: Dover, 1983, 405 p.

CHARNES, A.; COOPER, W.W.; RHODES, E. Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, v.2, n. 6, p. 429-444, 1978.

CHU, X.; FIELDING, G.J.; LMAR, B.W. Measuring transit performance using data envelopment analysis. *Transportation Research*, v. 26A, n. 3, p. 223-239p.

COELLO COELLO, C.A.; LAMONT, G.B.; VAN VELDHUIZEN, D.A. Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems. 2<sup>ed.</sup>, Springer. 2007, 800p.

DEB, K. *Multi-objective optimization using evolutionary algorithms*. London, John Wiley & Sons, 2001. 515p.

DUCZMAL, L.H.; BESSEGATO, L.F.; SANTOS, A.C.; FERREIRA NETO, S. Introdução às pilhas e filas e teste de permutação UFMG: ICEX, 2003. (Relatório técnico, RTE-03, Série Ensino).

DUCZMAL, L.H.; CANÇADO, A.L.F.; TAKAHASHI, R.H., BESSEGATO, L.F. *A genetic algorithm for irregularly shaped spatial scan statistics*. Submitted 2005.

DUCZMAL, L.H.; CANÇADO, A.L.F.; TAKAHASHI, R. Delineation of irregularly shaped disease clusters through multi-objective optimization. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, v. 17, n. 1, p. 243-262, 2008.

ECO, H. *Como se faz uma tese*. 20 ed. São Paulo: Perspectiva, 2005. 174 p.

EHRGOTT, M.; KLAMROTH, K.; SCHWEHM, C. An MCDM approach to portfolio optimization. *European Journal of Operational Research*, v.155, n. 3, p. 752-770, 2004.

FONSECA, C.M.; FLEMING, P.J. Genetic algorithms for multiobjective optimization: formulation, discussion and generalization. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON GENETIC ALGORITHMS, 5., 1993, San Mateo, CA. *Proceedings*. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann, 1993. p.416-423.

FUKUYAMA, H. Returns to scale and scale elasticity in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, v. 125, n.1, p. 3-112, 2000.

GILLI, M.; WINKER, P. *Indirect estimation of the parameters of agent based models of financial markets*. Geneva: University of Geneva, 2001. (FAME research paper)

GRINBLATT, M.; TITMAN, S. *Mercados financeiros & estratégia corporativa*. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2005. 724 p.

HEIJ, C.; DE BÔER, P.; FRANCES, P.H.; KLOEK, T.; VAN DIJK, H.K. *Econometric methods with applications in business and economics*. New York: Oxford University, 2004. 787p.

JORION, P. *Financial risk manager handbook*. 2. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2003. 832 p.

JAHANSHALOO, G.R.; SOLEIMANI-DAMANEH, M.; MOSTAFAEE, A. A simplified version of the DEA cost efficiency model. *European Journal of Operational Research*, v. 184, n. 3, p. 814-815, 2008. (Short Communication)

JANSSON, T. *Performance indicators for microfinance institutions: technical guide*. 3. ed. Washington, DC: Inter-American Development Bank, Sustainable Development Department. Micro, Small and Medium Enterprise Division, 2002. 58 p.

JANSSONN, T. *From village to Wall Street*. Washington D.C.: Inter American Development Bank, 2001. (Discussion Paper, MSM/SSD)

JEHLE, G.A.; RENY, P.J. *Advanced microeconomic theory*. 2. ed. Boston: Addison Wesley Longman., 2001. 512p.

KARLAFTIS, M.G. A DEA approach for evaluating the efficiency and effectiveness of urban transit systems. *European Journal of Operational Research*, v.152, n. 2, p. 354-364, 2004.

KERNIGHAN, B.W.; RITCHIE, D.M. *C: a linguagem de programação padrão ANSI*. Rio de Janeiro: Campus, 1990. 289 p.

KUHN, H.W.; TUCKER, A.W. Nonlinear programming. In: BERKELEY SYMPOSIUM ON MATHEMATICAL STATISTICS AND PROBABILITY, 2; 1950, Berkeley, Ca. *Proceedings*. Berkeley Ca. University of California, 1951. p. 481-492 (Neyman, J. Ed.)

KULLDORFF, M.; MOSTASHARI, F.; DUCZMAL, L.; YIH, K.; KLEINMAN, K.; PLATT, R. Multivariate scan statistics for disease surveillance. *Statistics in Medicine*, v. 26, n. 8, p. 1824-1833, 2007.

LARSON, H.J. *Introduction to probability theory and statistical inference*. 3.ed. John New York: Wiley & Sons, 1982. 637 p.

LAURINDO, F.J.B.; SHIMIZU, T.; MONTEIRO DE CARVALHO, M.; RABECHINI JR, R. O papel da tecnologia da informação na estratégia das organizações. *Gestão e Produção*, v. 8, n. 2, p. 160-179, ago.2001.

LEWIS, A.L. A simple algorithm for the portfolio selection problem. *Journal of Finance*, v. 43, n. 1, p. 71-82, 1988.

MACHADO, T. (Org.) *Série primeiros rumos: um guia de microcrédito*. Brasília, DF: ICCAPE/Fundação Banco do Brasil/Ministério do Trabalho e Emprego, 2002.

MARINHO, A.; FAÇANHA, L.O. Programas sociais: efetividade, eficiência e eficácia como dimensões operacionais da avaliação. Rio de Janeiro: IPEA, 2001. (Texto para discussão; n.787)

MARKOWITZ, H. Portfolio selection. *Journal of Finance* v. 7, n. 1, p.77-91, 1952.

MANSSOUR, I.H. *Linguagem de programação C* (Notas de aula). Disponível em: <<http://www.inf.pucrs.br/~manssour>>

MEISSNER, G.; NIELSEN, K. Recent advances in credit risk management: a comparison of five models. *Derivatives Use, Trading & Regulation*. v. 18, n. 1, p.76-93, 2002.

MERTON. R.C. On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rate. *Journal of Finance*, v. 49, n. 2, p. 449-470, 1974.

MESTER, L.J. Measuring efficiency at US banks: accounting for heterogeneity is important. *European Journal of Operational Research*, v. 98, n. 2, p. 230-242, 1997

MUKERJEE, A.; BISWAS, R.; DEB, K.; MATHUR, A.P. Multi-objective evolutionary algorithms for the risk-return trade-off in bank loan management. *International Transactions in Operational Research*, v.9, n. 5, p. 583-597, 2002.

MURTHI, B.P.S.; CHOI, Y.K.; DESAI, P. Efficiency of mutual funds and portfolio performance measurement: a non-parametric approach. *European Journal of Operational Research*, v. 98, n. 2, p. 408-418, 1997.

PARK, K.S.; PARK, K. Measurement of multiperiod aggregative efficiency. *European Journal of Operational Research*, 2007. doi: 10.1016/j.ejor.2007.11.028

PASTOR, J.M.; PÉREZ, F.; QUESADA, J. Efficiency analysis in banking firms: an international comparison. *European Journal of Operational Research*, v. 98, n. 2, p. 395-407, 1997

PRADO, E.A. Gestão de risco de crédito em bancos de varejo. In: DUARTE JR, A., VARGA, G. *Gestão de riscos no Brasil*. Rio de Janeiro: Financial Consultoria, 2003. p. 345-364.

PRESS, W.H., TEUKOLSKY, S.A., VETTERLING, W.T., FLANNERY, B.P. *Numerical Recipes in C++: the art of scientific computing*. Cambridge University Press, 2002.

ROSS, S.M. *Simulation*. New York: Academic Press, 2002. 274p.

SCHAFFNIT, C.; ROSEN, D.; PARADI, J.C. Best practice analysis of bank branches: an application of DEA in a large Canadian bank. *European Journal of Operational Research*. v. 98, n. 2, p. 269-289, 1997.

SEARLE, S.R. *Matrix algebra used for statistics*. New York: John Wiley&Sons, 1982. 438 p.

SENNE, E.L.F. *Primeiro curso de programação em C*. 2. ed. Florianópolis: Visual Books, 2006. 308 p.

SICSÚ, A.L. Desenvolvimento de um sistema de crédito scoring. In: DUARTE JR., A., VARGA, G. *Gestão de riscos no Brasil* Rio de Janeiro: Financial Consultoria, 2003. p. 325-344.

SOARES, M.M.; MELO SOBRINHO, A.B. *Microfinanças: o papel do Banco Central e a importância do cooperativismo de crédito*. Brasília: Banco Central do Brasil, 2007. 170 p.

SOLEIMANI-DAMANEH, M.; MOSTAFAEE, A. A comment on “Returns to scale and scale elasticity in data envelopment analysis”. *European Journal of Operational Research*, v. 184, p. 1179-1181, 2008.

SOUZA, E.B.M.; ARAGÃO, C. Uma proposta de uso de modelos de simulação para alocação de capital em bancos de atacado. In: DUARTE JR, A., VARGA, G. DUARTE JR., A., VARGA, G. *Gestão de riscos no Brasil* Rio de Janeiro: Financial Consultoria, 2003. p. 397-426.

TOST, H.; RIZZO, J.; CARROLL, S. *Managing organizational behavior*. Cambridge, Mass: Ballinger, 1986. p. 467-489.

TRIOLA, M. *Introdução à estatística*. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999. 410 p.



VARIAN, H.R. *Microeconomic analysis*. 2. ed. New York: W.W. Norton, 1984. 343 p.

VARIAN, H.R. *Intermediate microeconomics: a modern approach*. 6. ed New York: W.W. Norton, 1990. 778 p.

YANG, S.M.; SHAO, D.G.; LUO, Y.J. A novel evolution strategy for multiobjective optimization problem. *Applied Mathematics and Computation*, v. 170, n.2, p. 850-873, 2005.

ZIVIANI, N. *Projeto de algoritmos com implementações em Pascal e C*. 2. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2005. 552 p.

YIN, R. *Estudo de caso: planejamento e métodos*. Porto Alegre: Bookman, 2001.

WIRTH, K. *Algoritmos e estruturas de dados*. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1989. 255 p.

## ANEXO I

### Conceituação de Variável Aleatória

De acordo com a definição de Larson (1982), uma variável aleatória é uma quantidade numérica cujo valor observado é determinado, ao menos em parte, por algum mecanismo de mudança. Em notação matemática funcional, uma variável aleatória  $X$  é uma função de valor real de elementos de um espaço amostral  $S$ ; a faixa de  $X$  é denotada por  $R_x$ . Ilustrativamente, suponha que se jogue um par de dados não viciados uma vez, e que  $X(w)$ , a representação funcional da variável aleatória  $X$ , seja a soma dos dois números ( $x_1$  e  $x_2$ ) dos respectivos dados. O espaço amostral  $S$  é definido como

$$S = \{(x_1, x_2): x_1 = 1, 2, \dots, 6; x_2 = 1, 2, \dots, 6\} \quad ,$$

sua a representação funcional como

$$X(w) = x_1 + x_2 \quad \forall w = (x_1, x_2) \in S \quad \text{e,}$$

o conjunto de possíveis valores que podem ocorrer para  $X$ , definido acima como  $R_x$  é

$$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

As variáveis aleatórias podem ser discretas, como no exemplo anterior, ou contínuas. Uma variável aleatória  $X$  é denominada discreta, se seu conjunto de possibilidades (de números reais)  $R_x$  for discreto. Analogamente, uma variável aleatória  $X$  é denominada contínua, caso seu conjunto de possibilidades  $R_x$  for contínuo.

## ANEXO II

### Implementação Computacional

Toda a programação computacional foi desenvolvida na linguagem computacional C, utilizando o compilador "Bloodshed DEV-C++" com a biblioteca gráfica "glut".

Segundo Kernighan e Ritchie (1989: p.1), "C é uma linguagem de programação de finalidade geral, (...) não é atada a um sistema operacional ou a uma máquina em particular, (...) tem sido usada, igualmente, para escrever grandes programas em muitas áreas diferentes."<sup>46</sup>

Mais à frente o autor enfatiza que,

(...) C provê as construções fundamentais de fluxo de controle exigidas por programas bem estruturados: agrupamento de comando, tomada de decisão ("if-else"), seleção de um dentre um conjunto de casos possíveis ("switch"), laços com teste de término no topo ("while, for"), ou no fundo ("do"), e saída antecipada do laço ("break").

A linguagem C oferece construções simples de fluxos de controle, o que facilita sobremaneira seu entendimento e compreensão, embora não ofereça operações paralelas, multiprogramação, sincronização ou co-rotinas, mantendo-se em dimensões mais modestas.

Dado que seus tipos de dados e estruturas de controle são suportados pela maioria dos computadores, sua biblioteca é pequena.

A necessidade de se chamar explicitamente as funções da biblioteca-padrão, podendo evitá-las se não forem necessárias, torna a linguagem mais portátil.

---

<sup>46</sup>A linguagem C é independente de qualquer arquitetura de máquina, podendo se escrever programas "portáteis", ou seja, que possam ser rodados sem alterações em uma série de hardware diferente.

QUADRO  
Algoritmo gerador de números aleatórios

```

#define IA 16807
#define IM 2147483647
#define AM (1.0/IM)
#define IQ 127773
#define IR 2836
#define MASK 123459876
#define NTAB 32
#define NDIV (1+(IM-1)/NTAB)
#define EPS 1.2e-7
#define RNMX (1.0-EPS)
#define pi (3.1415926535897932)

float ran1(long idum0)
{
  int j;
  long k;
  float temp;
  static long iy=0;
  static long iv[NTAB];

  if (idum0<=0 || !iy ){
    if( -(idum0)<1 ) idum0=1;
    else idum0 = -(idum0);
    for(j=NTAB+7;j>=0;j--){
      k= (idum0)/IQ;
      idum0= IA * (idum0 - k * IQ) - IR * k;
      if(idum0 < 0) idum0 +=IM;
      if(j<NTAB) iv[j]=idum0;
    }
    iy=iv[0];
  }
  k= (idum0)/IQ;
  idum0 = IA * (idum0 - k * IQ) - IR * k;
  if(idum0 < 0) idum0 += IM;
  j=iy/NDIV;
  iy=iv[j];
  iv[j] = idum0;
  temp=AM*iy;
  idum=idum0;
  if(temp>RNMX)return RNMX;
  else return temp;
}

```

Fonte Press *et al.* (2002)

### ANEXO III

#### Resultados do Modelo Computacional

As tabelas a seguir apresentam os resultados de cada política, especificada por suas categorias dentro de cada variável de análise. A primeira tabela apresenta os resultados para a base de dados que só inclui os clientes, ao passo que a segunda inclui também os candidatos recusados.

A variável PAB só inclui o posto de atendimento de Belo Horizonte, e sempre assume o valor 0 (zero). Especificamente, cada variável é assim definida:

- estado civil: 0 (zero) para casados, solteiros, viúvos, divorciados e outros; e 1 (hum) para casados e solteiros;
- grau de escolaridade: 0 (zero) para a categoria que inclui todos os graus de escolaridade; 1 (hum) para indivíduos com até o 1º grau de escolaridade completo ou não; e 2 (dois) para indivíduos com até o 2º grau de escolaridade completo ou não;
- renda líquida: 0 (zero), incluindo todas as possibilidades de renda positiva;
- finalidade de crédito: 0 (zero), no qual há todas as possibilidades de crédito (capital de giro, fixo e misto); e 1 (hum) para capital de giro e fixo;
- valor do crédito: 0 (zero) no qual se incluem todos os valores possíveis de crédito; e 1 (hum) para créditos até R\$1.999,99 (hum mil, novecentos e noventa e nove reais e noventa e nove centavos).

**TABELA**  
**Resultado das políticas em termos de eficiência e eficácia e**  
**vetor de significância - base com clientes (Continua)**

políticas	vetor de eficácia	vetor de eficiência	vetor de significância	eficácia	eficiência	período
0 0 0 0 0 0	dpvet_x=-1.#IND00	dpvet_y=0.000000	dpvetor=-1.#IND00	822.768.322	0.909260	d=0
0 0 0 0 0 0	dpvet_x=0.000000	dpvet_y=0.000000	dpvetor=0.000000	791.958.605	0.879178	d=1
0 0 0 0 0 1	dpvet_x=-5.202145	dpvet_y=-1.434565	dpvetor=5.396322	732.641.604	0.901931	d=0
0 0 0 0 0 1	dpvet_x=-6.046683	dpvet_y=0.160192	dpvetor=6.048805	702.117.185	0.879825	d=1
0 0 0 0 0 2	dpvet_x=-6.151371	dpvet_y=3.404131	dpvetor=7.030467	536.665.944	0.957144	d=0
0 0 0 0 0 2	dpvet_x=-7.668481	dpvet_y=1.708039	dpvetor=7.856399	475.260.055	0.905597	d=1
0 0 0 0 1 0	dpvet_x=-1.620467	dpvet_y=-0.067522	dpvetor=1.621873	782.362.757	0.909217	d=0
0 0 0 0 1 0	dpvet_x=-0.956281	dpvet_y=1.574427	dpvetor=1.842089	771.072.043	0.891348	d=1
0 0 0 0 1 1	dpvet_x=-5.043307	dpvet_y=-1.023828	dpvetor=5.146180	652.656.235	0.898652	d=0
0 0 0 0 1 1	dpvet_x=-3.111183	dpvet_y=1.617655	dpvetor=3.506604	697.213.750	0.894068	d=1
0 0 0 0 1 2	dpvet_x=-5.080301	dpvet_y=2.668621	dpvetor=5.738553	503.500.309	0.960845	d=0
0 0 0 0 1 2	dpvet_x=-5.359041	dpvet_y=1.600991	dpvetor=5.593075	493.285.873	0.909882	d=1
0 0 0 1 0 0	dpvet_x=-2.865769	dpvet_y=2.760167	dpvetor=3.978839	724.899.304	0.941002	d=0
0 0 0 1 0 0	dpvet_x=-0.509277	dpvet_y=0.915781	dpvetor=1.047864	772.189.771	0.891631	d=1
0 0 0 1 0 1	dpvet_x=-3.363291	dpvet_y=1.815421	dpvetor=3.821973	674.890.280	0.934207	d=0
0 0 0 1 0 1	dpvet_x=-2.050249	dpvet_y=0.965874	dpvetor=2.266370	707.931.899	0.894003	d=1
0 0 0 1 0 2	dpvet_x=-2.864740	dpvet_y=1.949196	dpvetor=3.464982	586.019.000	0.958508	d=0
0 0 0 1 0 2	dpvet_x=-4.359453	dpvet_y=1.789539	dpvetor=4.712460	487.358.966	0.921262	d=1
0 0 0 1 0 1	dpvet_x=-2.493555	dpvet_y=2.625324	dpvetor=3.620793	691.762.877	0.951336	d=0
0 0 0 1 0 1	dpvet_x=-0.710742	dpvet_y=1.514420	dpvetor=1.672908	756.399.646	0.903431	d=1
0 0 0 1 0 1	dpvet_x=-3.480762	dpvet_y=1.898692	dpvetor=3.964938	600.921.194	0.942994	d=0
0 0 0 1 0 1	dpvet_x=-1.568632	dpvet_y=1.361899	dpvetor=2.077348	702.982.475	0.901460	d=1
0 0 0 1 0 1	dpvet_x=-2.463743	dpvet_y=1.706580	dpvetor=2.997073	549.681.915	0.958353	d=0
0 0 0 1 0 2	dpvet_x=-3.252823	dpvet_y=2.193614	dpvetor=3.923366	485.624.483	0.929909	d=1
0 0 0 2 0 0	dpvet_x=-2.386136	dpvet_y=-0.439287	dpvetor=2.426236	789.681.070	0.906942	d=0
0 0 0 2 0 0	dpvet_x=-2.631924	dpvet_y=-1.377250	dpvetor=2.970495	760.302.314	0.873956	d=1
0 0 0 2 0 1	dpvet_x=-5.335567	dpvet_y=-1.075915	dpvetor=5.442965	708.442.432	0.901622	d=0
0 0 0 2 0 1	dpvet_x=-4.738034	dpvet_y=0.073074	dpvetor=4.738597	697.435.077	0.880175	d=1
0 0 0 2 0 2	dpvet_x=-5.694629	dpvet_y=2.850411	dpvetor=6.368175	556.517.840	0.955709	d=0
0 0 0 2 0 2	dpvet_x=-7.048102	dpvet_y=1.420340	dpvetor=7.189792	475.972.422	0.904186	d=1
0 0 0 2 0 1	dpvet_x=-2.739078	dpvet_y=-0.485858	dpvetor=2.781835	742.476.667	0.904577	d=0
0 0 0 2 0 1	dpvet_x=-1.592527	dpvet_y=0.756762	dpvetor=1.763187	753.046.471	0.885659	d=1
0 0 0 2 0 1	dpvet_x=-5.309219	dpvet_y=-1.041426	dpvetor=5.410395	631.127.333	0.896635	d=0
0 0 0 2 0 1	dpvet_x=-2.642177	dpvet_y=1.419052	dpvetor=2.999134	706.606.368	0.893058	d=1
0 0 0 2 0 1	dpvet_x=-4.591648	dpvet_y=2.266623	dpvetor=5.120626	517.104.217	0.959479	d=0
0 0 0 2 0 1	dpvet_x=-5.052353	dpvet_y=1.448642	dpvetor=5.255933	500.716.396	0.908966	d=1
0 0 1 0 0 0	dpvet_x=-0.845647	dpvet_y=0.351992	dpvetor=0.915979	799.383.775	0.911576	d=0
0 0 1 0 0 0	dpvet_x=-0.195739	dpvet_y=1.814046	dpvetor=1.824575	787.799.466	0.892687	d=1
0 0 1 0 0 1	dpvet_x=-2.822177	dpvet_y=-0.440675	dpvetor=2.856375	731.594.091	0.904486	d=0
0 0 1 0 0 1	dpvet_x=-3.322341	dpvet_y=1.267355	dpvetor=3.555860	691.756.042	0.891298	d=1
0 0 1 0 0 2	dpvet_x=-4.524816	dpvet_y=3.097179	dpvetor=5.483291	530.898.854	0.967400	d=0
0 0 1 0 0 2	dpvet_x=-5.791044	dpvet_y=1.682077	dpvetor=6.030387	480.105.042	0.913815	d=1
0 0 1 0 0 1	dpvet_x=-1.687271	dpvet_y=-0.127915	dpvetor=1.692113	759.097.479	0.908501	d=0
0 0 1 0 0 1	dpvet_x=-0.521600	dpvet_y=1.215480	dpvetor=1.322671	775.556.630	0.894946	d=1
0 0 1 0 0 1	dpvet_x=-3.509142	dpvet_y=-0.766693	dpvetor=3.591921	657.360.865	0.897921	d=0
0 0 1 0 0 1	dpvet_x=-1.939586	dpvet_y=0.909665	dpvetor=2.142308	702.423.660	0.893508	d=1
0 0 1 0 0 1	dpvet_x=-3.893414	dpvet_y=2.682246	dpvetor=4.727908	495.280.167	0.976210	d=0
0 0 1 0 0 1	dpvet_x=-3.933236	dpvet_y=1.327591	dpvetor=4.151246	505.719.750	0.911152	d=1
0 0 1 1 0 0	dpvet_x=-1.694446	dpvet_y=2.026319	dpvetor=2.641423	732.941.026	0.941667	d=0
0 0 1 1 0 0	dpvet_x=0.044613	dpvet_y=1.158639	dpvetor=1.159498	789.032.222	0.900202	d=1
0 0 1 1 0 0	dpvet_x=-2.498564	dpvet_y=1.231864	dpvetor=2.785733	667.124.225	0.933161	d=0
0 0 1 1 0 0	dpvet_x=-1.440533	dpvet_y=1.094876	dpvetor=1.809390	709.434.118	0.902352	d=1
0 0 1 1 0 0	dpvet_x=-2.080406	dpvet_y=1.736316	dpvetor=2.709775	577.011.739	0.971416	d=0
0 0 1 1 0 0	dpvet_x=-3.738090	dpvet_y=2.393113	dpvetor=4.438503	474.833.036	0.946799	d=1
0 0 1 1 0 1	dpvet_x=-1.269168	dpvet_y=2.077810	dpvetor=2.434765	731.146.250	0.954615	d=0
0 0 1 1 0 1	dpvet_x=-0.485432	dpvet_y=1.233426	dpvetor=1.325513	759.610.548	0.908405	d=1
0 0 1 1 0 1	dpvet_x=-2.459280	dpvet_y=1.458068	dpvetor=2.859024	609.410.000	0.945303	d=0
0 0 1 1 0 1	dpvet_x=-1.168154	dpvet_y=0.702306	dpvetor=1.363018	703.255.873	0.899205	d=1
0 0 1 1 0 1	dpvet_x=-1.885574	dpvet_y=1.472410	dpvetor=2.392359	543.638.276	0.969583	d=0
0 0 1 1 0 1	dpvet_x=-2.551385	dpvet_y=2.419476	dpvetor=3.516167	478.262.895	0.953611	d=1
0 0 1 2 0 0	dpvet_x=-2.706809	dpvet_y=-0.261367	dpvetor=2.719399	744.412.548	0.906644	d=0
0 0 1 2 0 0	dpvet_x=-0.979751	dpvet_y=0.576659	dpvetor=1.136859	766.516.680	0.885178	d=1
0 0 1 2 0 0	dpvet_x=-3.953117	dpvet_y=-0.585181	dpvetor=3.996195	688.041.862	0.901872	d=0
0 0 1 2 0 0	dpvet_x=-3.277645	dpvet_y=0.606024	dpvetor=3.333200	680.916.056	0.887051	d=1
0 0 1 2 0 0	dpvet_x=-4.431737	dpvet_y=2.560230	dpvetor=5.118112	540.389.302	0.965402	d=0
0 0 1 2 0 0	dpvet_x=-5.411046	dpvet_y=1.399911	dpvetor=5.589201	471.617.156	0.911538	d=1
0 0 1 2 0 1	dpvet_x=-3.282465	dpvet_y=-0.596282	dpvetor=3.336185	690.599.684	0.901337	d=0
0 0 1 2 0 1	dpvet_x=-1.217885	dpvet_y=0.552972	dpvetor=1.337543	750.169.295	0.887698	d=1
0 0 1 2 0 1	dpvet_x=-4.523866	dpvet_y=-0.888340	dpvetor=4.610261	610.007.126	0.894110	d=0
0 0 1 2 0 1	dpvet_x=-2.039043	dpvet_y=0.529597	dpvetor=2.106697	698.160.797	0.888869	d=1

(Continua)

políticas	vetor de eficácia	vetor de eficiência	vetor de significância	eficácia	eficiência	período
0 0 1 2 0 1 2	dpvet_x=-3.916570	dpvet_y=2.307043	dpvetor=4.545543	495.898.491	0.973797	d=0
0 0 1 2 0 1 2	dpvet_x=-3.890007	dpvet_y=1.068259	dpvetor=4.034021	500.560.548	0.907510	d=1
0 0 2 0 0 0 0	dpvet_x=0.898024	dpvet_y=-0.393605	dpvetor=0.980495	867.703.333	0.905120	d=0
0 0 2 0 0 0 0	dpvet_x=0.199915	dpvet_y=-1.830315	dpvetor=1.841200	799.802.349	0.854630	d=1
0 0 2 0 0 0 1	dpvet_x=-1.643725	dpvet_y=-0.913640	dpvetor=1.880577	734.645.543	0.897056	d=0
0 0 2 0 0 0 1	dpvet_x=-1.639495	dpvet_y=-1.148108	dpvetor=2.001523	720.813.985	0.860217	d=1
0 0 2 0 0 0 2	dpvet_x=-3.046928	dpvet_y=1.145391	dpvetor=3.255102	548.445.532	0.936798	d=0
0 0 2 0 0 0 2	dpvet_x=-3.944296	dpvet_y=0.353005	dpvetor=3.960061	465.960.806	0.889677	d=1
0 0 2 0 0 1 0	dpvet_x=0.000900	dpvet_y=0.018459	dpvetor=0.018481	824.310.758	0.910427	d=0
0 0 2 0 0 1 0	dpvet_x=-0.466746	dpvet_y=0.357940	dpvetor=0.588195	762.789.286	0.884715	d=1
0 0 2 0 0 1 1	dpvet_x=-2.343526	dpvet_y=-0.507535	dpvetor=2.397855	644.220.345	0.899996	d=0
0 0 2 0 0 1 1	dpvet_x=-1.632212	dpvet_y=0.734282	dpvetor=1.789772	688.051.494	0.895055	d=1
0 0 2 0 0 1 2	dpvet_x=-2.514599	dpvet_y=0.880158	dpvetor=2.664186	516.830.270	0.937210	d=0
0 0 2 0 0 1 2	dpvet_x=-3.055229	dpvet_y=0.786456	dpvetor=3.154827	471.661.739	0.907585	d=1
0 0 2 1 0 0 0	dpvet_x=-1.433768	dpvet_y=1.478995	dpvetor=2.059883	707.946.486	0.939518	d=0
0 0 2 1 0 0 0	dpvet_x=-0.897636	dpvet_y=-0.220487	dpvetor=0.924319	738.214.483	0.873025	d=1
0 0 2 1 0 0 1	dpvet_x=-1.314073	dpvet_y=1.120179	dpvetor=1.726728	690.206.667	0.936263	d=0
0 0 2 1 0 0 1	dpvet_x=-1.258283	dpvet_y=0.041095	dpvetor=1.258954	705.195.714	0.878965	d=1
0 0 2 1 0 0 2	dpvet_x=-1.424263	dpvet_y=0.722959	dpvetor=1.597246	603.282.917	0.935221	d=0
0 0 2 1 0 0 2	dpvet_x=-2.497523	dpvet_y=-0.042757	dpvetor=2.497888	509.986.452	0.878260	d=1
0 0 2 1 0 1 0	dpvet_x=-2.019458	dpvet_y=1.263679	dpvetor=2.382246	616.146.800	0.943896	d=0
0 0 2 1 0 1 0	dpvet_x=-0.451844	dpvet_y=0.662597	dpvetor=0.801997	750.539.750	0.894064	d=1
0 0 2 1 0 1 1	dpvet_x=-1.938550	dpvet_y=0.991983	dpvetor=2.177615	585.712.083	0.938670	d=0
0 0 2 1 0 1 1	dpvet_x=-0.911749	dpvet_y=0.930886	dpvetor=1.303010	702.529.211	0.905180	d=1
0 0 2 1 0 1 2	dpvet_x=-1.271349	dpvet_y=0.719518	dpvetor=1.460834	559.418.889	0.941261	d=0
0 0 2 1 0 1 2	dpvet_x=-1.778793	dpvet_y=0.345533	dpvetor=1.812042	499.611.500	0.888028	d=1
0 0 2 2 0 0 0	dpvet_x=0.912714	dpvet_y=-0.097329	dpvetor=0.917888	872.322.442	0.907412	d=0
0 0 2 2 0 0 0	dpvet_x=-0.862759	dpvet_y=-1.718145	dpvetor=1.922596	748.026.393	0.851570	d=1
0 0 2 2 0 0 1	dpvet_x=-1.224422	dpvet_y=-0.507844	dpvetor=1.325562	746.859.091	0.901188	d=0
0 0 2 2 0 0 1	dpvet_x=-1.191116	dpvet_y=-0.561915	dpvetor=1.317007	728.850.714	0.868126	d=1
0 0 2 2 0 0 2	dpvet_x=-2.402226	dpvet_y=1.056070	dpvetor=2.624114	592.083.333	0.936110	d=0
0 0 2 2 0 0 2	dpvet_x=-3.669027	dpvet_y=0.327690	dpvetor=3.683631	485.101.731	0.889380	d=1
0 0 2 2 0 1 0	dpvet_x=0.111179	dpvet_y=0.029858	dpvetor=0.115118	832.082.364	0.909354	d=0
0 0 2 2 0 1 0	dpvet_x=-0.465377	dpvet_y=0.210361	dpvetor=0.510712	758.520.122	0.881800	d=1
0 0 2 2 0 1 1	dpvet_x=-1.833699	dpvet_y=-0.419533	dpvetor=1.881079	669.407.708	0.900856	d=0
0 0 2 2 0 1 1	dpvet_x=-0.998775	dpvet_y=0.886013	dpvetor=1.335130	722.356.216	0.900580	d=1
0 0 2 2 0 1 2	dpvet_x=-1.988671	dpvet_y=0.887185	dpvetor=2.177593	554.567.667	0.937086	d=0
0 0 2 2 0 1 2	dpvet_x=-2.651292	dpvet_y=0.905663	dpvetor=2.801709	501.015.789	0.911729	d=1
0 1 0 0 0 0 0	dpvet_x=0.934794	dpvet_y=0.152691	dpvetor=0.947182	837.271.807	0.909779	d=0
0 1 0 0 0 0 0	dpvet_x=-1.652459	dpvet_y=-1.975547	dpvetor=2.575540	770.923.705	0.870681	d=1
0 1 0 0 0 0 1	dpvet_x=-3.125048	dpvet_y=-0.962744	dpvetor=3.269985	742.410.717	0.901930	d=0
0 1 0 0 0 0 1	dpvet_x=-4.128112	dpvet_y=-1.362980	dpvetor=4.347301	698.369.331	0.869754	d=1
0 1 0 0 0 0 2	dpvet_x=-5.383074	dpvet_y=2.842647	dpvetor=6.087539	524.743.246	0.956165	d=0
0 1 0 0 0 0 2	dpvet_x=-6.979147	dpvet_y=0.800505	dpvetor=7.024905	471.977.452	0.896227	d=1
0 1 0 0 0 1 0	dpvet_x=-0.658031	dpvet_y=-0.115874	dpvetor=0.668156	802.199.935	0.908586	d=0
0 1 0 0 0 1 0	dpvet_x=-1.485375	dpvet_y=0.130178	dpvetor=1.491068	749.397.958	0.880693	d=1
0 1 0 0 0 1 1	dpvet_x=-3.818021	dpvet_y=-1.039124	dpvetor=3.956901	657.677.068	0.896950	d=0
0 1 0 0 0 1 1	dpvet_x=-2.867873	dpvet_y=0.141462	dpvetor=2.871359	680.990.773	0.881361	d=1
0 1 0 0 0 1 2	dpvet_x=-4.212150	dpvet_y=2.319130	dpvetor=4.808386	492.987.564	0.960628	d=0
0 1 0 0 0 1 2	dpvet_x=-4.959403	dpvet_y=0.885114	dpvetor=5.037768	481.160.708	0.900309	d=1
0 1 0 1 0 0 0	dpvet_x=-2.748499	dpvet_y=2.451945	dpvetor=3.683243	714.145.484	0.942710	d=0
0 1 0 1 0 0 0	dpvet_x=-1.040611	dpvet_y=0.663082	dpvetor=1.233916	749.511.888	0.891418	d=1
0 1 0 1 0 0 1	dpvet_x=-2.929568	dpvet_y=1.647633	dpvetor=3.361110	666.546.932	0.935271	d=0
0 1 0 1 0 0 1	dpvet_x=-1.694456	dpvet_y=0.428528	dpvetor=1.747803	711.484.436	0.888675	d=1
0 1 0 1 0 0 2	dpvet_x=-2.511993	dpvet_y=1.516558	dpvetor=2.934290	575.392.857	0.949471	d=0
0 1 0 1 0 0 2	dpvet_x=-4.043653	dpvet_y=1.392546	dpvetor=4.276718	488.541.644	0.917064	d=1
0 1 0 1 0 1 0	dpvet_x=-2.605422	dpvet_y=1.949287	dpvetor=3.253912	671.518.333	0.944862	d=0
0 1 0 1 0 1 0	dpvet_x=-1.158870	dpvet_y=0.920208	dpvetor=1.479784	728.051.531	0.895996	d=1
0 1 0 1 0 1 1	dpvet_x=-3.184337	dpvet_y=1.211307	dpvetor=3.406944	589.164.107	0.933161	d=0
0 1 0 1 0 1 1	dpvet_x=-1.571429	dpvet_y=0.613766	dpvetor=1.687038	688.684.111	0.890933	d=1
0 1 0 1 0 1 2	dpvet_x=-2.071241	dpvet_y=1.355136	dpvetor=2.475164	546.522.632	0.951829	d=0
0 1 0 1 0 1 2	dpvet_x=-3.094989	dpvet_y=1.794928	dpvetor=3.577809	472.252.400	0.923409	d=1
0 1 0 2 0 0 0	dpvet_x=-1.224574	dpvet_y=-0.540685	dpvetor=1.338627	796.494.039	0.904713	d=0
0 1 0 2 0 0 0	dpvet_x=-3.452043	dpvet_y=-2.686922	dpvetor=4.374489	734.077.900	0.862390	d=1
0 1 0 2 0 0 1	dpvet_x=-3.432250	dpvet_y=-1.095630	dpvetor=3.602880	714.967.366	0.898896	d=0
0 1 0 2 0 0 1	dpvet_x=-3.784592	dpvet_y=-1.284403	dpvetor=3.996601	694.737.363	0.868973	d=1
0 1 0 2 0 0 2	dpvet_x=-5.048073	dpvet_y=2.434608	dpvetor=5.604494	538.684.900	0.954136	d=0
0 1 0 2 0 0 2	dpvet_x=-6.719633	dpvet_y=0.662468	dpvetor=6.752209	475.878.633	0.895406	d=1
0 1 0 2 0 1 0	dpvet_x=-1.817297	dpvet_y=-0.929706	dpvetor=2.041304	756.574.000	0.898154	d=0
0 1 0 2 0 1 0	dpvet_x=-1.855625	dpvet_y=-0.923214	dpvetor=2.072599	736.333.627	0.870840	d=1
0 1 0 2 0 1 1	dpvet_x=-3.993463	dpvet_y=-1.481951	dpvetor=4.259569	636.977.679	0.888415	d=0
0 1 0 2 0 1 1	dpvet_x=-2.492325	dpvet_y=-0.219298	dpvetor=2.501954	695.515.574	0.877687	d=1
0 1 0 2 0 1 2	dpvet_x=-3.867737	dpvet_y=1.957536	dpvetor=4.334897	500.886.716	0.958362	d=0
0 1 0 2 0 1 2	dpvet_x=-4.686488	dpvet_y=0.843724	dpvetor=4.761831	491.054.545	0.899538	d=1

## (Conclusão)

políticas	vetor de eficácia	vetor de eficiência	vetor de significância	eficácia	eficiência	período
0 1 1 0 0 0 0	dpvet_x=-0.408320	dpvet_y=0.392648	dpvetor=0.566478	805.405.220	0.912803	d=0
0 1 1 0 0 0 0	dpvet_x=-0.809957	dpvet_y=0.526980	dpvetor=0.966302	769.565.955	0.884854	d=1
0 1 1 0 0 0 1	dpvet_x=-1.842091	dpvet_y=-0.317634	dpvetor=1.869275	741.641.189	0.905385	d=0
0 1 1 0 0 0 1	dpvet_x=-2.554732	dpvet_y=0.013437	dpvetor=2.554768	700.335.436	0.880016	d=1
0 1 1 0 0 0 2	dpvet_x=-4.060883	dpvet_y=2.762542	dpvetor=4.911457	502.095.405	0.966344	d=0
0 1 1 0 0 0 2	dpvet_x=-5.415671	dpvet_y=1.063639	dpvetor=5.519133	485.020.510	0.905287	d=1
0 1 1 0 0 1 0	dpvet_x=-1.283912	dpvet_y=-0.438323	dpvetor=1.356671	762.483.196	0.904518	d=0
0 1 1 0 0 1 0	dpvet_x=-0.833941	dpvet_y=-0.013004	dpvetor=0.834043	761.586.309	0.880000	d=1
0 1 1 0 0 1 1	dpvet_x=-2.812745	dpvet_y=-1.137466	dpvetor=3.034034	653.962.619	0.892113	d=0
0 1 1 0 0 1 1	dpvet_x=-1.975294	dpvet_y=-0.380900	dpvetor=2.011683	690.978.016	0.874433	d=1
0 1 1 0 0 1 2	dpvet_x=-3.211840	dpvet_y=2.505523	dpvetor=4.073519	473.225.106	0.974627	d=0
0 1 1 0 0 1 2	dpvet_x=-3.930342	dpvet_y=0.790804	dpvetor=4.009109	498.208.696	0.900466	d=1
0 1 1 1 0 0 0	dpvet_x=-1.857588	dpvet_y=2.196305	dpvetor=2.876523	708.238.814	0.946804	d=0
0 1 1 1 0 0 0	dpvet_x=-0.216783	dpvet_y=1.341198	dpvetor=1.358605	775.616.222	0.906418	d=1
0 1 1 1 0 0 1	dpvet_x=-2.440916	dpvet_y=1.374392	dpvetor=2.801254	643.150.364	0.937392	d=0
0 1 1 1 0 0 1	dpvet_x=-0.790649	dpvet_y=0.797543	dpvetor=1.123032	738.758.171	0.899430	d=1
0 1 1 1 0 0 2	dpvet_x=-1.945332	dpvet_y=1.531043	dpvetor=2.475562	557.872.059	0.963872	d=0
0 1 1 1 0 0 2	dpvet_x=-3.068852	dpvet_y=2.265897	dpvetor=3.814727	482.276.744	0.950316	d=1
0 1 1 1 0 1 0	dpvet_x=-1.563464	dpvet_y=1.661685	dpvetor=2.281582	696.105.526	0.948578	d=0
0 1 1 1 0 1 0	dpvet_x=-0.941224	dpvet_y=0.841366	dpvetor=1.262458	722.008.167	0.901098	d=1
0 1 1 1 0 1 1	dpvet_x=-2.381273	dpvet_y=0.990236	dpvetor=2.578959	585.733.714	0.934331	d=0
0 1 1 1 0 1 1	dpvet_x=-1.206122	dpvet_y=0.109594	dpvetor=1.211091	690.342.407	0.885418	d=1
0 1 1 1 0 1 2	dpvet_x=-1.620731	dpvet_y=1.369435	dpvetor=2.121820	541.943.636	0.966069	d=0
0 1 1 1 0 1 2	dpvet_x=-2.348417	dpvet_y=2.330068	dpvetor=3.308214	467.881.613	0.952901	d=1
0 1 1 2 0 0 0	dpvet_x=-2.096752	dpvet_y=-0.496406	dpvetor=2.154713	741.236.475	0.903193	d=0
0 1 1 2 0 0 0	dpvet_x=-1.865040	dpvet_y=-0.805512	dpvetor=2.031557	734.787.326	0.872322	d=1
0 1 1 2 0 0 1	dpvet_x=-2.722835	dpvet_y=-0.779827	dpvetor=2.832306	695.070.789	0.898276	d=0
0 1 1 2 0 0 1	dpvet_x=-2.679316	dpvet_y=-0.660466	dpvetor=2.759520	685.135.882	0.872282	d=1
0 1 1 2 0 0 2	dpvet_x=-3.879554	dpvet_y=2.326969	dpvetor=4.523906	510.347.656	0.963369	d=0
0 1 1 2 0 0 2	dpvet_x=-5.172804	dpvet_y=0.788539	dpvetor=5.232561	475.065.682	0.901285	d=1
0 1 1 2 0 1 0	dpvet_x=-2.746015	dpvet_y=-1.306962	dpvetor=3.041175	689.626.622	0.889002	d=0
0 1 1 2 0 1 0	dpvet_x=-1.742979	dpvet_y=-1.085024	dpvetor=2.053108	723.979.680	0.866370	d=1
0 1 1 2 0 1 1	dpvet_x=-3.514970	dpvet_y=-1.639300	dpvetor=3.878443	609.339.412	0.880046	d=0
0 1 1 2 0 1 1	dpvet_x=-2.176282	dpvet_y=-1.041580	dpvetor=2.412694	681.330.714	0.865156	d=1
0 1 1 2 0 1 2	dpvet_x=-3.225924	dpvet_y=2.174461	dpvetor=3.890356	470.184.750	0.970967	d=0
0 1 1 2 0 1 2	dpvet_x=-3.869829	dpvet_y=0.521138	dpvetor=3.904761	491.286.129	0.894746	d=1
0 1 2 0 0 0 0	dpvet_x=1.165578	dpvet_y=-0.296399	dpvetor=1.202674	893.569.444	0.904954	d=0
0 1 2 0 0 0 0	dpvet_x=-0.429939	dpvet_y=-2.156540	dpvetor=2.198980	773.203.507	0.847699	d=1
0 1 2 0 0 0 1	dpvet_x=-1.258963	dpvet_y=-0.771740	dpvetor=1.476676	743.786.250	0.895846	d=0
0 1 2 0 0 0 1	dpvet_x=-1.922998	dpvet_y=-1.476659	dpvetor=2.424550	695.147.563	0.853204	d=1
0 1 2 0 0 0 2	dpvet_x=-2.554859	dpvet_y=1.138313	dpvetor=2.796973	566.641.750	0.939418	d=0
0 1 2 0 0 0 2	dpvet_x=-3.728204	dpvet_y=-0.125546	dpvetor=3.730317	450.312.712	0.880408	d=1
0 1 2 0 0 1 0	dpvet_x=0.605327	dpvet_y=0.244479	dpvetor=0.652833	869.788.070	0.914761	d=0
0 1 2 0 0 1 0	dpvet_x=-0.935385	dpvet_y=0.159327	dpvetor=0.948857	729.441.209	0.881864	d=1
0 1 2 0 0 1 1	dpvet_x=-1.809091	dpvet_y=-0.202539	dpvetor=1.820394	664.044.694	0.905112	d=0
0 1 2 0 0 1 1	dpvet_x=-1.715796	dpvet_y=0.557837	dpvetor=1.804200	665.455.062	0.892363	d=1
0 1 2 0 0 1 2	dpvet_x=-2.287435	dpvet_y=0.928389	dpvetor=2.468656	522.950.000	0.941703	d=0
0 1 2 0 0 1 2	dpvet_x=-2.932152	dpvet_y=0.496093	dpvetor=2.973823	454.426.364	0.900046	d=1
0 1 2 1 0 0 0	dpvet_x=-1.097756	dpvet_y=1.146267	dpvetor=1.587135	724.395.294	0.935698	d=0
0 1 2 1 0 0 0	dpvet_x=-1.243667	dpvet_y=-0.611667	dpvetor=1.385945	705.183.774	0.864213	d=1
0 1 2 1 0 0 1	dpvet_x=-1.023178	dpvet_y=0.850432	dpvetor=1.330462	705.541.212	0.932006	d=0
0 1 2 1 0 0 1	dpvet_x=-1.539328	dpvet_y=-0.327812	dpvetor=1.573846	667.632.549	0.870244	d=1
0 1 2 1 0 0 2	dpvet_x=-1.306702	dpvet_y=0.490629	dpvetor=1.395774	602.470.455	0.929246	d=0
0 1 2 1 0 0 2	dpvet_x=-2.488563	dpvet_y=-0.303489	dpvetor=2.507000	497.521.333	0.871081	d=1
0 1 2 1 0 1 0	dpvet_x=-1.717132	dpvet_y=0.933059	dpvetor=1.954263	629.049.545	0.937723	d=0
0 1 2 1 0 1 0	dpvet_x=-0.496031	dpvet_y=0.396695	dpvetor=0.635149	737.593.684	0.888023	d=1
0 1 2 1 0 1 1	dpvet_x=-1.601548	dpvet_y=0.673919	dpvetor=1.737562	594.881.429	0.931218	d=0
0 1 2 1 0 1 1	dpvet_x=-0.850614	dpvet_y=0.699995	dpvetor=1.101606	686.196.667	0.899259	d=1
0 1 2 1 0 1 2	dpvet_x=-1.#IND00	dpvet_y=0.382621	dpvetor=-1.#IND00	552.818.750	0.933217	d=0
0 1 2 1 0 1 2	dpvet_x=-1.641436	dpvet_y=0.092040	dpvetor=1.644014	479.383.684	0.877508	d=1
0 1 2 2 0 0 0	dpvet_x=0.847109	dpvet_y=-0.118582	dpvetor=0.855369	879.721.481	0.906665	d=0
0 1 2 2 0 0 0	dpvet_x=-1.075011	dpvet_y=-1.878589	dpvetor=2.164427	732.903.894	0.846296	d=1
0 1 2 2 0 0 1	dpvet_x=-1.070043	dpvet_y=-0.484686	dpvetor=1.174697	746.470.278	0.899807	d=0
0 1 2 2 0 0 1	dpvet_x=-1.393162	dpvet_y=-0.772217	dpvetor=1.592866	710.584.466	0.863804	d=1
0 1 2 2 0 0 2	dpvet_x=-2.186184	dpvet_y=1.053971	dpvetor=2.426985	589.062.222	0.939834	d=0
0 1 2 2 0 0 2	dpvet_x=-3.457907	dpvet_y=0.043326	dpvetor=3.458179	477.281.373	0.885447	d=1
0 1 2 2 0 1 0	dpvet_x=0.343555	dpvet_y=0.028326	dpvetor=0.344721	853.713.333	0.909341	d=0
0 1 2 2 0 1 0	dpvet_x=-0.476325	dpvet_y=0.007999	dpvetor=0.476393	755.881.013	0.877694	d=1
0 1 2 2 0 1 1	dpvet_x=-1.476568	dpvet_y=-0.384895	dpvetor=1.525909	679.691.364	0.900258	d=0
0 1 2 2 0 1 1	dpvet_x=-0.919599	dpvet_y=0.678428	dpvetor=1.142771	717.891.690	0.896581	d=1
0 1 2 2 0 1 2	dpvet_x=-1.901038	dpvet_y=0.880826	dpvetor=2.095185	546.371.111	0.942523	d=0
0 1 2 2 0 1 2	dpvet_x=-2.454513	dpvet_y=0.684411	dpvetor=2.548147	490.666.486	0.907531	d=1



**TABELA**  
**Resultado das políticas em termos de eficiência e eficácia e**  
**vetor de significância - base com clientes e recusados (Continua)**

políticas	vetor de eficácia	vetor de eficiência	vetor de significância	eficácia	eficiência	período
0 0 0 0 0 0	dpvet_x=-1.#IND00	dpvet_y=-1.#IND00	dpvetor=-1.#IND00	1.039.158.822	0.889273	d=0
0 0 0 0 0 0	dpvet_x=-1.#IND00	dpvet_y=0.000000	dpvetor=-1.#IND00	989.958.871	0.862311	d=1
0 0 0 0 0 1	dpvet_x=-10.102406	dpvet_y=0.240200	dpvetor=10.105261	843.362.493	0.889968	d=0
0 0 0 0 0 1	dpvet_x=-10.591032	dpvet_y=2.175408	dpvetor=10.812140	844.053.980	0.867888	d=1
0 0 0 0 0 2	dpvet_x=-10.394651	dpvet_y=6.538436	dpvetor=12.280061	590.722.484	0.948874	d=0
0 0 0 0 0 2	dpvet_x=-12.520630	dpvet_y=4.363467	dpvetor=13.259186	512.078.077	0.907178	d=1
0 0 0 0 0 1	dpvet_x=-1.469922	dpvet_y=0.123893	dpvetor=1.475134	1.000.420.553	0.889753	d=0
0 0 0 0 0 1	dpvet_x=-1.565780	dpvet_y=1.514645	dpvetor=2.178490	950.960.909	0.870474	d=1
0 0 0 0 0 1	dpvet_x=-6.930148	dpvet_y=-0.508013	dpvetor=6.948743	769.880.577	0.885127	d=0
0 0 0 0 0 1	dpvet_x=-6.442901	dpvet_y=3.501486	dpvetor=7.332897	793.554.007	0.885405	d=1
0 0 0 0 0 1	dpvet_x=-7.399714	dpvet_y=4.660109	dpvetor=8.744849	563.547.909	0.952823	d=0
0 0 0 0 0 2	dpvet_x=-8.490662	dpvet_y=3.850385	dpvetor=9.322918	528.992.222	0.912625	d=1
0 0 0 1 0 0	dpvet_x=-1.528362	dpvet_y=2.763824	dpvetor=3.158261	980.514.802	0.909860	d=0
0 0 0 1 0 0	dpvet_x=0.515831	dpvet_y=2.621505	dpvetor=2.671773	1.008.543.261	0.885711	d=1
0 0 0 1 0 0	dpvet_x=-4.656483	dpvet_y=2.537232	dpvetor=5.302866	830.071.208	0.913730	d=0
0 0 0 1 0 0	dpvet_x=-2.931074	dpvet_y=3.058001	dpvetor=4.235867	873.646.416	0.891195	d=1
0 0 0 1 0 0	dpvet_x=-4.884757	dpvet_y=3.784200	dpvetor=6.179079	625.284.875	0.955645	d=0
0 0 0 1 0 0	dpvet_x=-6.719583	dpvet_y=4.058606	dpvetor=7.850164	532.019.417	0.928191	d=1
0 0 0 1 0 0	dpvet_x=-2.071999	dpvet_y=2.826893	dpvetor=3.504926	927.028.131	0.921138	d=0
0 0 0 1 0 1	dpvet_x=-0.796918	dpvet_y=2.580325	dpvetor=2.700584	947.229.467	0.892778	d=1
0 0 0 1 0 1	dpvet_x=-4.445501	dpvet_y=2.126845	dpvetor=4.928077	753.561.196	0.916473	d=0
0 0 0 1 0 1	dpvet_x=-2.940436	dpvet_y=2.530305	dpvetor=3.879253	827.680.929	0.893884	d=1
0 0 0 1 0 1	dpvet_x=-3.719019	dpvet_y=3.272680	dpvetor=4.953941	601.293.091	0.956977	d=0
0 0 0 1 0 1	dpvet_x=-4.854921	dpvet_y=3.727414	dpvetor=6.120774	536.628.261	0.934883	d=1
0 0 0 2 0 0	dpvet_x=-0.933140	dpvet_y=-0.939443	dpvetor=1.324124	1.024.640.720	0.886236	d=0
0 0 0 2 0 0	dpvet_x=-0.715240	dpvet_y=-0.912411	dpvetor=1.159337	982.302.789	0.859932	d=1
0 0 0 2 0 0	dpvet_x=-8.373484	dpvet_y=-0.180308	dpvetor=8.375425	837.805.862	0.887988	d=0
0 0 0 2 0 0	dpvet_x=-7.517436	dpvet_y=1.981386	dpvetor=7.774171	843.095.045	0.869304	d=1
0 0 0 2 0 0	dpvet_x=-9.947660	dpvet_y=5.549019	dpvetor=11.390678	603.794.929	0.950270	d=0
0 0 0 2 0 0	dpvet_x=-10.916532	dpvet_y=4.144507	dpvetor=11.676798	514.946.703	0.908631	d=1
0 0 0 2 0 0	dpvet_x=-1.998627	dpvet_y=-0.413068	dpvetor=2.040866	975.890.095	0.886065	d=0
0 0 0 2 0 1	dpvet_x=-1.076152	dpvet_y=0.640882	dpvetor=1.252531	959.315.238	0.866148	d=1
0 0 0 2 0 1	dpvet_x=-6.610507	dpvet_y=-0.847488	dpvetor=6.664611	760.089.602	0.881719	d=0
0 0 0 2 0 1	dpvet_x=-5.366980	dpvet_y=3.209123	dpvetor=6.253235	806.840.293	0.884898	d=1
0 0 0 2 0 1	dpvet_x=-6.681961	dpvet_y=4.195375	dpvetor=7.889853	567.927.553	0.955144	d=0
0 0 0 2 0 1	dpvet_x=-7.359118	dpvet_y=3.573582	dpvetor=8.180899	542.195.906	0.912568	d=1
0 0 1 0 0 0	dpvet_x=-1.620833	dpvet_y=1.589133	dpvetor=2.269899	990.045.644	0.896380	d=0
0 0 1 0 0 0	dpvet_x=-0.679558	dpvet_y=2.357924	dpvetor=2.453895	971.708.625	0.873377	d=1
0 0 1 0 0 0	dpvet_x=-5.457321	dpvet_y=1.253080	dpvetor=5.599336	833.057.748	0.897286	d=0
0 0 1 0 0 0	dpvet_x=-5.453775	dpvet_y=2.633502	dpvetor=6.056319	834.120.723	0.877502	d=1
0 0 1 0 0 0	dpvet_x=-7.041279	dpvet_y=5.613987	dpvetor=9.005357	584.184.434	0.961039	d=0
0 0 1 0 0 0	dpvet_x=-9.034115	dpvet_y=3.748074	dpvetor=9.780762	509.971.866	0.912187	d=1
0 0 1 0 0 0	dpvet_x=-2.061330	dpvet_y=0.253707	dpvetor=2.076885	939.420.452	0.891501	d=0
0 0 1 0 0 1	dpvet_x=-1.067420	dpvet_y=1.225131	dpvetor=1.624909	949.192.780	0.872559	d=1
0 0 1 0 0 1	dpvet_x=-4.514501	dpvet_y=-0.184587	dpvetor=4.518273	768.057.077	0.887195	d=0
0 0 1 0 0 1	dpvet_x=-4.134130	dpvet_y=2.266822	dpvetor=4.714819	799.425.181	0.884390	d=1
0 0 1 0 0 1	dpvet_x=-5.617274	dpvet_y=4.798933	dpvetor=7.388067	556.108.182	0.971247	d=0
0 0 1 0 0 1	dpvet_x=-6.048795	dpvet_y=3.391475	dpvetor=6.934697	531.984.270	0.914996	d=1
0 0 1 1 0 0	dpvet_x=-1.629234	dpvet_y=2.651385	dpvetor=3.111951	939.043.130	0.919423	d=0
0 0 1 1 0 0	dpvet_x=0.445730	dpvet_y=2.709521	dpvetor=2.745939	1.004.555.706	0.895445	d=1
0 0 1 1 0 0	dpvet_x=-2.753772	dpvet_y=2.146298	dpvetor=3.491398	841.351.633	0.918664	d=0
0 0 1 1 0 0	dpvet_x=-2.258079	dpvet_y=2.910749	dpvetor=3.683935	866.061.724	0.899711	d=1
0 0 1 1 0 0	dpvet_x=-3.397743	dpvet_y=3.301368	dpvetor=4.737477	626.960.769	0.964845	d=0
0 0 1 1 0 0	dpvet_x=-5.546180	dpvet_y=4.291647	dpvetor=7.012727	501.484.687	0.946493	d=1
0 0 1 1 0 0	dpvet_x=-1.299634	dpvet_y=2.311152	dpvetor=2.651503	920.333.582	0.924022	d=0
0 0 1 1 0 1	dpvet_x=-0.818930	dpvet_y=1.918504	dpvetor=2.085978	934.825.238	0.894768	d=1
0 0 1 1 0 1	dpvet_x=-2.415495	dpvet_y=1.806563	dpvetor=3.016337	780.717.759	0.920290	d=0
0 0 1 1 0 1	dpvet_x=-2.445491	dpvet_y=1.502109	dpvetor=2.869976	820.722.184	0.889409	d=1
0 0 1 1 0 1	dpvet_x=-2.633705	dpvet_y=2.983023	dpvetor=3.979300	607.864.848	0.965246	d=0
0 0 1 1 0 1	dpvet_x=-3.811724	dpvet_y=4.006501	dpvetor=5.530035	509.076.047	0.952213	d=1
0 0 1 2 0 0	dpvet_x=-2.035491	dpvet_y=0.318991	dpvetor=2.060334	970.541.142	0.890642	d=0
0 0 1 2 0 0	dpvet_x=-0.606100	dpvet_y=0.949330	dpvetor=1.126315	974.212.821	0.867612	d=1
0 0 1 2 0 0	dpvet_x=-5.520125	dpvet_y=0.688885	dpvetor=5.562943	815.397.273	0.893719	d=0
0 0 1 2 0 0	dpvet_x=-4.955051	dpvet_y=1.762015	dpvetor=5.259014	829.849.437	0.874111	d=1
0 0 1 2 0 0	dpvet_x=-6.734744	dpvet_y=4.697019	dpvetor=8.210893	591.953.404	0.960327	d=0
0 0 1 2 0 0	dpvet_x=-8.281033	dpvet_y=3.468560	dpvetor=8.978108	499.618.934	0.912815	d=1
0 0 1 2 0 0	dpvet_x=-2.220193	dpvet_y=-0.623610	dpvetor=2.306111	922.294.264	0.883261	d=0
0 0 1 2 0 1	dpvet_x=-1.030738	dpvet_y=0.322677	dpvetor=1.080065	951.731.455	0.865166	d=1
0 0 1 2 0 1	dpvet_x=-4.676105	dpvet_y=-0.616969	dpvetor=4.716631	744.539.910	0.881725	d=0
0 0 1 2 0 1	dpvet_x=-3.906306	dpvet_y=1.713465	dpvetor=4.265582	802.726.343	0.880090	d=1
0 0 1 2 0 1	dpvet_x=-5.172627	dpvet_y=4.150427	dpvetor=6.631901	555.054.483	0.969592	d=0
0 0 1 2 0 1	dpvet_x=-5.538853	dpvet_y=2.951610	dpvetor=6.276217	529.488.148	0.911177	d=1

(Continua)

políticas	vetor de eficácia	vetor de eficiência	vetor de significância	eficácia	eficiência	período
0 0 2 0 0 0 0	dpvet_x=1.562196	dpvet_y=-1.414920	dpvetor=2.107713	1.124.460.658	0.878197	d=0
0 0 2 0 0 0 0	dpvet_x=0.653085	dpvet_y=-2.207328	dpvetor=2.301916	1.021.837.031	0.843992	d=1
0 0 2 0 0 0 1	dpvet_x=-2.951210	dpvet_y=-1.293404	dpvetor=3.222194	861.961.301	0.877032	d=0
0 0 2 0 0 0 1	dpvet_x=-3.044170	dpvet_y=-1.095675	dpvetor=3.235347	861.409.890	0.851729	d=1
0 0 2 0 0 0 2	dpvet_x=-4.465372	dpvet_y=2.128341	dpvetor=4.946654	603.323.091	0.926032	d=0
0 0 2 0 0 0 2	dpvet_x=-6.517779	dpvet_y=1.848228	dpvetor=6.774761	515.892.027	0.898335	d=1
0 0 2 0 0 1 0	dpvet_x=0.631997	dpvet_y=-0.104677	dpvetor=0.640607	1.096.900.306	0.887336	d=0
0 0 2 0 0 1 0	dpvet_x=-0.617042	dpvet_y=0.370478	dpvetor=0.719719	953.920.069	0.867023	d=1
0 0 2 0 0 1 1	dpvet_x=-3.178542	dpvet_y=-0.498578	dpvetor=3.217407	772.919.744	0.881659	d=0
0 0 2 0 0 1 1	dpvet_x=-3.116636	dpvet_y=1.582617	dpvetor=3.495440	783.614.211	0.887133	d=1
0 0 2 0 0 1 2	dpvet_x=-3.462194	dpvet_y=1.667841	dpvetor=3.842978	574.707.500	0.926166	d=0
0 0 2 0 0 1 2	dpvet_x=-4.442799	dpvet_y=1.841102	dpvetor=4.809170	524.150.545	0.908790	d=1
0 0 2 1 0 0 0	dpvet_x=0.214947	dpvet_y=0.413036	dpvetor=0.465619	1.057.438.065	0.893673	d=0
0 0 2 1 0 0 0	dpvet_x=0.191988	dpvet_y=0.270248	dpvetor=0.331501	1.015.672.525	0.868199	d=1
0 0 2 1 0 0 1	dpvet_x=-2.438568	dpvet_y=0.862743	dpvetor=2.586685	808.395.098	0.903626	d=0
0 0 2 1 0 0 1	dpvet_x=-1.403654	dpvet_y=0.808552	dpvetor=1.619877	887.223.951	0.876410	d=1
0 0 2 1 0 0 2	dpvet_x=-2.410199	dpvet_y=1.671441	dpvetor=2.933048	622.172.500	0.938676	d=0
0 0 2 1 0 0 2	dpvet_x=-3.567038	dpvet_y=1.416895	dpvetor=3.838144	582.127.692	0.902318	d=1
0 0 2 1 0 1 0	dpvet_x=-1.037008	dpvet_y=1.409257	dpvetor=1.749683	938.241.500	0.916389	d=0
0 0 2 1 0 1 0	dpvet_x=-0.253685	dpvet_y=1.338021	dpvetor=1.361857	967.580.156	0.889581	d=1
0 0 2 1 0 1 1	dpvet_x=-2.593899	dpvet_y=0.961511	dpvetor=2.766372	707.235.294	0.909257	d=0
0 0 2 1 0 1 1	dpvet_x=-1.386678	dpvet_y=1.756474	dpvetor=2.237873	839.103.774	0.901004	d=1
0 0 2 1 0 1 2	dpvet_x=-1.952076	dpvet_y=1.545547	dpvetor=2.489842	591.435.455	0.944514	d=0
0 0 2 1 0 1 2	dpvet_x=-2.621869	dpvet_y=1.425709	dpvetor=2.984433	582.195.385	0.910309	d=1
0 0 2 2 0 0 0	dpvet_x=1.400151	dpvet_y=-0.983373	dpvetor=1.710978	1.117.201.719	0.879580	d=0
0 0 2 2 0 0 0	dpvet_x=0.109874	dpvet_y=-1.664703	dpvetor=1.668325	996.939.794	0.846367	d=1
0 0 2 2 0 0 1	dpvet_x=-2.387504	dpvet_y=-0.980128	dpvetor=2.580858	878.489.417	0.878221	d=0
0 0 2 2 0 0 1	dpvet_x=-2.526492	dpvet_y=-0.197716	dpvetor=2.534217	867.208.846	0.861018	d=1
0 0 2 2 0 0 2	dpvet_x=-3.926090	dpvet_y=2.176830	dpvetor=4.489184	627.992.826	0.930818	d=0
0 0 2 2 0 0 2	dpvet_x=-5.598886	dpvet_y=1.834886	dpvetor=5.891887	544.629.048	0.901240	d=1
0 0 2 2 0 1 0	dpvet_x=0.168654	dpvet_y=0.124954	dpvetor=0.209899	1.061.246.420	0.890013	d=0
0 0 2 2 0 1 0	dpvet_x=-0.268904	dpvet_y=0.383626	dpvetor=0.468485	972.448.130	0.867817	d=1
0 0 2 2 0 1 1	dpvet_x=-2.623650	dpvet_y=-0.492585	dpvetor=2.669491	786.643.692	0.881709	d=0
0 0 2 2 0 1 1	dpvet_x=-2.489072	dpvet_y=1.830964	dpvetor=3.089969	814.186.633	0.893307	d=1
0 0 2 2 0 1 2	dpvet_x=-3.062314	dpvet_y=1.891313	dpvetor=3.599282	588.667.500	0.933385	d=0
0 0 2 2 0 1 2	dpvet_x=-3.757881	dpvet_y=1.977658	dpvetor=4.246505	564.572.609	0.914859	d=1
0 1 0 0 0 0 0	dpvet_x=0.106424	dpvet_y=1.206887	dpvetor=1.211571	1.039.882.029	0.893262	d=0
0 1 0 0 0 0 0	dpvet_x=-2.019353	dpvet_y=-0.907173	dpvetor=2.213764	959.297.942	0.860156	d=1
0 1 0 0 0 0 1	dpvet_x=-7.477932	dpvet_y=0.915229	dpvetor=7.533732	838.821.783	0.893666	d=0
0 1 0 0 0 0 1	dpvet_x=-7.468596	dpvet_y=0.719573	dpvetor=7.503180	834.778.034	0.866313	d=1
0 1 0 0 0 0 2	dpvet_x=-8.231015	dpvet_y=5.260612	dpvetor=9.768503	588.608.168	0.946352	d=0
0 1 0 0 0 0 2	dpvet_x=-10.499370	dpvet_y=2.961878	dpvetor=10.909147	516.210.899	0.898561	d=1
0 1 0 0 0 1 0	dpvet_x=-0.897780	dpvet_y=0.468801	dpvetor=1.012809	1.009.868.726	0.892530	d=0
0 1 0 0 0 1 0	dpvet_x=-2.145570	dpvet_y=-0.125005	dpvetor=2.149209	922.576.963	0.861418	d=1
0 1 0 0 0 1 1	dpvet_x=-5.960345	dpvet_y=-0.399977	dpvetor=5.973750	774.807.849	0.885622	d=0
0 1 0 0 0 1 1	dpvet_x=-5.497067	dpvet_y=1.764472	dpvetor=5.773309	773.015.308	0.877750	d=1
0 1 0 0 0 1 2	dpvet_x=-6.065826	dpvet_y=3.908413	dpvetor=7.215950	561.418.000	0.951168	d=0
0 1 0 0 0 1 2	dpvet_x=-7.071754	dpvet_y=2.667869	dpvetor=7.558256	521.593.071	0.903703	d=1
0 1 0 1 0 0 0	dpvet_x=-2.024566	dpvet_y=3.286655	dpvetor=3.860177	946.583.929	0.919818	d=0
0 1 0 1 0 0 0	dpvet_x=-0.598226	dpvet_y=3.117804	dpvetor=3.174678	967.356.175	0.895653	d=1
0 1 0 1 0 0 1	dpvet_x=-4.655844	dpvet_y=3.005380	dpvetor=5.541588	794.933.250	0.923740	d=0
0 1 0 1 0 0 1	dpvet_x=-2.773533	dpvet_y=3.083469	dpvetor=4.147321	862.451.484	0.897566	d=1
0 1 0 1 0 0 2	dpvet_x=-4.565923	dpvet_y=3.128067	dpvetor=5.534660	617.650.923	0.948013	d=0
0 1 0 1 0 0 2	dpvet_x=-5.659956	dpvet_y=3.489892	dpvetor=6.649394	546.274.048	0.925337	d=1
0 1 0 1 0 1 0	dpvet_x=-2.222704	dpvet_y=2.701719	dpvetor=3.498528	896.172.184	0.923836	d=0
0 1 0 1 0 1 0	dpvet_x=-1.697306	dpvet_y=2.159744	dpvetor=2.746878	890.384.357	0.890907	d=1
0 1 0 1 0 1 1	dpvet_x=-4.030914	dpvet_y=1.759397	dpvetor=4.398153	743.593.421	0.914437	d=0
0 1 0 1 0 1 1	dpvet_x=-3.030430	dpvet_y=1.954397	dpvetor=3.605991	790.401.933	0.890850	d=1
0 1 0 1 0 1 2	dpvet_x=-3.311737	dpvet_y=2.794098	dpvetor=4.332965	598.395.111	0.952116	d=0
0 1 0 1 0 1 2	dpvet_x=-4.155564	dpvet_y=3.161608	dpvetor=5.221540	531.980.172	0.929994	d=1
0 1 0 2 0 0 0	dpvet_x=-0.424856	dpvet_y=-0.079222	dpvetor=0.432180	1.027.822.500	0.888323	d=0
0 1 0 2 0 0 0	dpvet_x=-2.415891	dpvet_y=-1.305906	dpvetor=2.746255	945.536.485	0.857350	d=1
0 1 0 2 0 0 1	dpvet_x=-6.997514	dpvet_y=0.299344	dpvetor=7.003913	829.358.797	0.890569	d=0
0 1 0 2 0 0 1	dpvet_x=-6.234732	dpvet_y=1.012922	dpvetor=6.316478	832.028.417	0.868515	d=1
0 1 0 2 0 0 2	dpvet_x=-8.149291	dpvet_y=4.729550	dpvetor=9.422292	594.376.316	0.947838	d=0
0 1 0 2 0 0 2	dpvet_x=-9.501752	dpvet_y=2.948013	dpvetor=9.948571	522.774.650	0.900793	d=1
0 1 0 2 0 1 0	dpvet_x=-1.270269	dpvet_y=-0.519344	dpvetor=1.372334	991.669.548	0.884359	d=0
0 1 0 2 0 1 0	dpvet_x=-1.657662	dpvet_y=-0.964700	dpvetor=1.917939	933.918.233	0.855059	d=1
0 1 0 2 0 1 1	dpvet_x=-5.890816	dpvet_y=-1.061032	dpvetor=5.985608	767.175.918	0.878480	d=0
0 1 0 2 0 1 1	dpvet_x=-4.904539	dpvet_y=1.489202	dpvetor=5.125644	790.231.688	0.876023	d=1
0 1 0 2 0 1 2	dpvet_x=-5.637346	dpvet_y=3.590305	dpvetor=6.683559	557.776.623	0.953567	d=0
0 1 0 2 0 1 2	dpvet_x=-6.395984	dpvet_y=2.594239	dpvetor=6.902079	538.234.775	0.903792	d=1

## (Conclusão)

políticas	vetor de eficácia	vetor de eficiência	vetor de significância	eficácia	eficiência	período
0 1 1 0 0 0 0	dpvet_x=-0.939730	dpvet_y=1.819790	dpvetor=2.048104	1.002.225.352	0.900262	d=0
0 1 1 0 0 0 0	dpvet_x=-1.834487	dpvet_y=1.804849	dpvetor=2.573485	935.633.449	0.873239	d=1
0 1 1 0 0 0 1	dpvet_x=-4.722778	dpvet_y=1.765688	dpvetor=5.042052	830.616.145	0.902985	d=0
0 1 1 0 0 0 1	dpvet_x=-4.717515	dpvet_y=2.267868	dpvetor=5.234326	825.390.791	0.879083	d=1
0 1 1 0 0 0 2	dpvet_x=-5.938424	dpvet_y=4.997832	dpvetor=7.761650	572.765.714	0.958410	d=0
0 1 1 0 0 0 2	dpvet_x=-7.455316	dpvet_y=2.778019	dpvetor=7.956074	525.339.182	0.904322	d=1
0 1 1 0 0 1 0	dpvet_x=-1.507617	dpvet_y=0.313017	dpvetor=1.539769	954.300.157	0.892871	d=0
0 1 1 0 0 1 0	dpvet_x=-1.579659	dpvet_y=-0.154675	dpvetor=1.587213	920.474.745	0.860436	d=1
0 1 1 0 0 1 1	dpvet_x=-4.111367	dpvet_y=-0.150384	dpvetor=4.114117	765.244.571	0.888159	d=0
0 1 1 0 0 1 1	dpvet_x=-3.809414	dpvet_y=1.056182	dpvetor=3.953120	775.835.032	0.874209	d=1
0 1 1 0 0 1 2	dpvet_x=-4.611767	dpvet_y=4.241045	dpvetor=6.265369	551.470.000	0.968777	d=0
0 1 1 0 0 1 2	dpvet_x=-5.296580	dpvet_y=2.450066	dpvetor=5.835802	534.235.789	0.905401	d=1
0 1 1 1 0 0 0	dpvet_x=-1.777686	dpvet_y=3.424022	dpvetor=3.857991	916.246.000	0.932768	d=0
0 1 1 1 0 0 0	dpvet_x=-0.594547	dpvet_y=3.632870	dpvetor=3.681200	952.660.909	0.912209	d=1
0 1 1 1 0 0 1	dpvet_x=-3.051749	dpvet_y=2.943976	dpvetor=4.240302	799.605.000	0.932729	d=0
0 1 1 1 0 0 1	dpvet_x=-2.100805	dpvet_y=3.374507	dpvetor=3.975007	861.586.250	0.912372	d=1
0 1 1 1 0 0 2	dpvet_x=-3.064778	dpvet_y=2.996364	dpvetor=4.286147	625.676.750	0.957123	d=0
0 1 1 1 0 0 2	dpvet_x=-4.566330	dpvet_y=3.997935	dpvetor=6.069173	527.033.469	0.949932	d=1
0 1 1 1 0 1 0	dpvet_x=-1.464422	dpvet_y=2.427226	dpvetor=2.834777	895.600.769	0.930089	d=0
0 1 1 1 0 1 0	dpvet_x=-1.918953	dpvet_y=1.769875	dpvetor=2.610525	845.171.463	0.894809	d=1
0 1 1 1 0 1 1	dpvet_x=-2.480085	dpvet_y=1.811697	dpvetor=3.071330	763.213.696	0.922652	d=0
0 1 1 1 0 1 1	dpvet_x=-2.818201	dpvet_y=1.265047	dpvetor=3.089110	761.853.944	0.888046	d=1
0 1 1 1 0 1 2	dpvet_x=-2.252968	dpvet_y=2.717733	dpvetor=3.530147	623.722.692	0.961637	d=0
0 1 1 1 0 1 2	dpvet_x=-3.186521	dpvet_y=3.682426	dpvetor=4.869720	516.797.429	0.951014	d=1
0 1 1 2 0 0 0	dpvet_x=-1.217863	dpvet_y=0.530884	dpvetor=1.328544	988.990.234	0.892346	d=0
0 1 1 2 0 0 0	dpvet_x=-1.906064	dpvet_y=0.408155	dpvetor=1.949274	929.663.963	0.864970	d=1
0 1 1 2 0 0 1	dpvet_x=-4.802225	dpvet_y=0.991699	dpvetor=4.903554	810.949.521	0.897142	d=0
0 1 1 2 0 0 1	dpvet_x=-4.478045	dpvet_y=1.524856	dpvetor=4.730547	815.134.570	0.874672	d=1
0 1 1 2 0 0 2	dpvet_x=-5.751335	dpvet_y=4.376020	dpvetor=7.226853	581.005.417	0.957077	d=0
0 1 1 2 0 0 2	dpvet_x=-6.884620	dpvet_y=2.509886	dpvetor=7.327859	514.332.551	0.903929	d=1
0 1 1 2 0 1 0	dpvet_x=-1.627461	dpvet_y=-0.733361	dpvetor=1.785062	944.696.471	0.880698	d=0
0 1 1 2 0 1 0	dpvet_x=-1.683173	dpvet_y=-1.361390	dpvetor=2.164822	915.661.716	0.848354	d=1
0 1 1 2 0 1 1	dpvet_x=-4.259111	dpvet_y=-0.884692	dpvetor=4.350024	746.486.437	0.878070	d=0
0 1 1 2 0 1 1	dpvet_x=-3.764563	dpvet_y=0.355455	dpvetor=3.781307	774.032.786	0.866834	d=1
0 1 1 2 0 1 2	dpvet_x=-4.360728	dpvet_y=3.768970	dpvetor=5.763773	549.287.333	0.966172	d=0
0 1 1 2 0 1 2	dpvet_x=-4.955668	dpvet_y=2.090333	dpvetor=5.378488	531.527.353	0.899695	d=1
0 1 2 0 0 0 0	dpvet_x=0.933389	dpvet_y=-0.728437	dpvetor=1.183991	1.100.646.212	0.882861	d=0
0 1 2 0 0 0 0	dpvet_x=0.078369	dpvet_y=-2.380764	dpvetor=2.382053	996.875.729	0.840755	d=1
0 1 2 0 0 0 1	dpvet_x=-2.594362	dpvet_y=-0.990138	dpvetor=2.776885	852.548.972	0.878393	d=0
0 1 2 0 0 0 1	dpvet_x=-2.917890	dpvet_y=-1.473630	dpvetor=3.268894	849.714.969	0.846659	d=1
0 1 2 0 0 0 2	dpvet_x=-3.716470	dpvet_y=1.817132	dpvetor=4.136921	616.922.340	0.926218	d=0
0 1 2 0 0 0 2	dpvet_x=-5.966523	dpvet_y=1.123591	dpvetor=6.071396	501.444.559	0.888974	d=1
0 1 2 0 0 1 0	dpvet_x=0.480579	dpvet_y=0.245926	dpvetor=0.539848	1.092.894.706	0.892076	d=0
0 1 2 0 0 1 0	dpvet_x=-0.937296	dpvet_y=-0.021967	dpvetor=0.937554	925.746.462	0.862890	d=1
0 1 2 0 0 1 1	dpvet_x=-2.616007	dpvet_y=-0.424043	dpvetor=2.650152	789.795.075	0.881714	d=0
0 1 2 0 0 1 1	dpvet_x=-2.850446	dpvet_y=1.130603	dpvetor=3.066481	768.717.282	0.883163	d=1
0 1 2 0 0 1 2	dpvet_x=-3.079465	dpvet_y=1.434105	dpvetor=3.397022	575.667.838	0.927143	d=0
0 1 2 0 0 1 2	dpvet_x=-4.177665	dpvet_y=1.345120	dpvetor=4.388876	502.752.941	0.901053	d=1
0 1 2 1 0 0 0	dpvet_x=-0.484355	dpvet_y=0.809784	dpvetor=0.943584	993.469.818	0.901021	d=0
0 1 2 1 0 0 0	dpvet_x=-0.196793	dpvet_y=0.267395	dpvetor=0.332005	990.177.059	0.870828	d=1
0 1 2 1 0 0 1	dpvet_x=-2.303861	dpvet_y=1.024967	dpvetor=2.521573	787.417.826	0.908840	d=0
0 1 2 1 0 0 1	dpvet_x=-1.540336	dpvet_y=0.479759	dpvetor=1.613321	863.835.857	0.874156	d=1
0 1 2 1 0 0 2	dpvet_x=-2.288158	dpvet_y=1.262799	dpvetor=2.613489	604.809.600	0.933196	d=0
0 1 2 1 0 0 2	dpvet_x=-3.349288	dpvet_y=0.792669	dpvetor=3.441810	573.210.857	0.893871	d=1
0 1 2 1 0 1 0	dpvet_x=-1.206056	dpvet_y=1.231422	dpvetor=1.723651	897.021.143	0.914486	d=0
0 1 2 1 0 1 0	dpvet_x=-0.387202	dpvet_y=1.020150	dpvetor=1.091160	954.306.034	0.885933	d=1
0 1 2 1 0 1 1	dpvet_x=-2.146190	dpvet_y=0.554471	dpvetor=2.216657	713.509.000	0.900749	d=0
0 1 2 1 0 1 1	dpvet_x=-1.270370	dpvet_y=1.305560	dpvetor=1.821627	832.629.167	0.894677	d=1
0 1 2 1 0 1 2	dpvet_x=-1.800030	dpvet_y=1.209077	dpvetor=2.168404	563.736.316	0.938071	d=0
0 1 2 1 0 1 2	dpvet_x=-2.512301	dpvet_y=0.968131	dpvetor=2.692384	555.084.348	0.900735	d=1
0 1 2 2 0 0 0	dpvet_x=0.697782	dpvet_y=-0.581230	dpvetor=0.908145	1.084.577.350	0.882901	d=0
0 1 2 2 0 0 0	dpvet_x=-0.417843	dpvet_y=-1.585545	dpvetor=1.639679	970.598.363	0.845898	d=1
0 1 2 2 0 0 1	dpvet_x=-2.324517	dpvet_y=-0.670760	dpvetor=2.419359	857.650.947	0.880957	d=0
0 1 2 2 0 0 1	dpvet_x=-2.485613	dpvet_y=-0.394187	dpvetor=2.516675	858.888.417	0.859275	d=1
0 1 2 2 0 0 2	dpvet_x=-3.497494	dpvet_y=2.025085	dpvetor=4.041464	617.297.857	0.932869	d=0
0 1 2 2 0 0 2	dpvet_x=-5.248119	dpvet_y=1.378183	dpvetor=5.426061	536.797.119	0.895845	d=1
0 1 2 2 0 1 0	dpvet_x=0.066014	dpvet_y=0.040859	dpvetor=0.077636	1.055.552.933	0.888917	d=0
0 1 2 2 0 1 0	dpvet_x=-0.380933	dpvet_y=0.103715	dpvetor=0.394799	960.982.719	0.864577	d=1
0 1 2 2 0 1 1	dpvet_x=-2.253100	dpvet_y=-0.585839	dpvetor=2.328018	797.175.667	0.879051	d=0
0 1 2 2 0 1 1	dpvet_x=-2.133622	dpvet_y=1.399180	dpvetor=2.551479	815.153.077	0.889533	d=1
0 1 2 2 0 1 2	dpvet_x=-2.765118	dpvet_y=1.719040	dpvetor=3.255914	569.714.688	0.936686	d=0
0 1 2 2 0 1 2	dpvet_x=-3.496138	dpvet_y=1.592212	dpvetor=3.841630	548.841.860	0.910073	d=1