

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**AVALIAÇÃO NÃO DESTRUTIVA DE PROPRIEDADES MECÂNICAS DE
MADEIRAS ATRAVÉS DA TÉCNICA DE ULTRA-SOM:
FUNDAMENTOS FÍSICOS E RESULTADOS EXPERIMENTAIS**

Antonio Pires Azevedo Júnior

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da
Escola de Engenharia da Universidade Federal de
Minas Gerais, como parte dos requisitos
necessários à obtenção do título de Mestre em
Engenharia de Estruturas.

Área de concentração: Estruturas de Madeira

Orientador: Professor Edgar V. Mantilla Carrasco
Universidade Federal de Minas Gerais

Belo Horizonte
Escola de Engenharia da UFMG
2002

Dissertação defendida e aprovada em 26 de Abril de 2002, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Edgar Vladimiro Mantilla Carrasco
DEES – UFMG
(Orientador)

Prof. Dr. Eduardo Chahud
DEES - UFMG

Prof^a. Dra. Raquel Gonçalves
UNICAMP

Prof. M.Sc. Marco Antonio de Mendonça Vecci
DEES – UFMG
(Convidado Especial)

AGRADECIMENTOS

Aos funcionários do Laboratório de Análise Experimental em Estruturas (LAEES), pela disponibilidade e presteza de seus serviços;

À Iracema, Inês, Lucíola, Patrícia e Renata pela atenção dispensada;

Aos amigos do Mestrado, Rosana e Anderson, pelo companheirismo e amizade;

Ao amigo Fábio, por ajudar-me a domar o “temperamental” computador;

Ao meu irmão Leandro, que, por muitas vezes, renunciou ao seu descanso nos finais de semana para me auxiliar nos numerosos e exaustivos ensaios;

Aos meus familiares, pelo apoio e incentivo constantes;

Ao meu mestre e orientador, Professor Edgar, não apenas por ser o grande idealizador deste trabalho, mas, sobretudo, por despertar-me para o fascinante e desafiador mundo da ciência e tecnologia da madeira,

os meus sinceros agradecimentos.

SUMÁRIO

RESUMO	12
INTRODUÇÃO	14
REVISÃO DE LITERATURA	17
1 PRINCÍPIOS GERAIS DE PROPAGAÇÃO DE ONDAS ULTRA-SÔNICAS A BAIXAS AMPLITUDES	32
1.1 Introdução	35
1.2 Vibrações livres e vibrações forçadas	35
1.2.1 Considerações gerais	35
1.2.2 Vibrações livres	36
1.2.2.1 Energia no movimento harmônico simples	40
1.2.2.2 Vibrações amortecidas	42
1.2.3 Vibrações forçadas	44
1.2.3.1 Ressonância	46
1.3 Vetores de onda	48
1.4 Impedância acústica específica	49
1.5 Energia transportada pela onda ao se propagar por um meio material	53
1.6 Intensidade acústica	56
1.7 Pressão de radiação	60
1.8 Atenuação de ondas planas	63
1.9 Velocidade de fase e velocidade de grupo	73

2 PROPAGAÇÃO DE ONDAS ULTRA-SÔNICAS EM SÓLIDO ANISOTRÓPICO INFINITO	80
2.1 Ondas em sólido anisotrópico infinito	81
2.2 Ondas em um sólido ortotrópico	89
3 PROPAGAÇÃO DE ONDAS ULTRA-SÔNICAS EM MADEIRAS	95
3.1 Fatores que influenciam a propagação de ondas ultra-sônicas em madeiras	96
3.1.1 Umidade da madeira	96
3.1.2 Densidade da madeira	101
3.1.3 Temperatura ambiente	102
3.1.4 Natureza biológica da madeira	104
3.1.5 Dimensões dos elementos anatômicos	105
4 RESULTADOS EXPERIMENTAIS	106
4.1 Determinação da velocidade de propagação do pulso ultra-sônico	108
4.1.1 Considerações gerais	108
4.1.2 Procedimento experimental	109
4.1.3 Equipamentos utilizados	110
4.1.4 Resultados experimentais	110
4.2 Determinação das propriedades físicas das pranchas	112
4.2.1 Determinação da umidade das pranchas	113
4.2.1.1 Considerações gerais	113
4.2.1.2 Procedimento experimental	113
4.2.1.3 Equipamentos utilizados	114
4.2.1.4 Resultados experimentais	114
4.2.2 Determinação da densidade aparente das pranchas	115
4.2.2.1 Considerações gerais	115

4.2.2.2 Procedimento experimental	116
4.2.2.3 Equipamentos utilizados	116
4.2.2.4 Resultados experimentais	116
4.3 Determinação das propriedades mecânicas das pranchas	117
4.3.1 Extração dos corpos de prova	118
4.3.2 Equipamentos utilizados	118
4.3.3 Calibração dos transdutores semianulares	120
4.3.4 Determinação da resistência paralela às fibras e do módulo de elasticidade longitudinal das pranchas	123
4.3.4.1 Considerações gerais	123
4.3.4.2 Procedimento experimental	124
4.3.4.3 Resultados experimentais	126
4.3.5 Determinação da resistência e do módulo de elasticidade normais às fibras	130
4.3.5.1 Considerações gerais	130
4.3.5.2 Procedimento experimental	131
4.3.5.3 Resultados experimentais	133
4.3.6 Determinação da resistência ao cisalhamento paralelo às fibras	137
4.3.6.1 Considerações gerais	137
4.3.6.2 Procedimento experimental	138
4.3.6.3 Resultados experimentais	139
5 ANÁLISE DOS RESULTADOS	142
5.1 Determinação das relações estatísticas entre as propriedades mecânicas, a velocidade de propagação e as propriedades físicas de madeiras	142
5.1.1 Estatística descritiva	142
5.1.1.1 Descrição das variáveis	144
5.1.1.1.1 Variáveis indicadoras	144
5.1.1.1.2 Varáveis preditoras	144
5.1.1.1.3 Variáveis resposta	145

5.1.2	Normalidade das variáveis resposta	145
5.1.3	Correlação entre as variáveis	148
5.1.4	Análise de f_{c0}	151
5.1.4.1	Modelo completo	151
5.1.4.2	Modelo reduzido	151
5.1.5	Análise de f_{c90}	159
5.1.5.1	Modelo completo	159
5.1.5.2	Modelo reduzido	160
5.1.6	Análise de f_{v0}	164
5.1.6.1	modelo completo	164
5.1.6.2	modelo reduzido	164
5.1.7	Análise de $\text{Log}(E_{c0})$	164
5.1.7.1	Modelo completo	165
5.1.7.2	Modelo reduzido	165
5.1.8	Análise de $\text{Log}(E_{c90})$	169
5.1.8.1	Modelo completo	169
5.1.8.2	Modelo reduzido	169
	CONCLUSÃO	170
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	172
	SUMMARY	173
	REFERÊNCIAS BIBILOGRÁFICAS	175
	APENDICE A	177
	APENDICE B	194
	APENDICE C	196

RESUMO

A avaliação não destrutiva de madeiras através da técnica de ultra-som baseia-se nos princípios gerais de propagação de ondas mecânicas em meios materiais. Estes princípios são governados por relações físicas fundamentais, conhecidas como Equação de Christoffel, estabelecidas para um sólido anisotrópico, entre a velocidade de fase, a densidade e as constantes elásticas da madeira. Entretanto, diferentemente de outros sólidos, a propagação de ondas ultra-sônicas em madeiras constitui um fenômeno de considerável complexidade. As constantes de propagação, ou seja, as velocidades (de fase e de grupo) e os coeficientes de absorção são significativamente afetados não somente pela heterogeneidade da composição química, pela sua microestrutura, pela irregularidade na disposição dos elementos anatômicos, inerentes à estrutura biológica da madeira, como também pela sua natureza higroscópica, pela frequência do transdutor e pela geometria do corpo de prova utilizado. A determinação experimental da velocidade de fase do pulso ultra-sônico ao longo da madeira é consideravelmente difícil. Todavia, ao se propagar através da madeira, a velocidade do pulso (ou velocidade de grupo), assim como a velocidade de fase, pode ser afetada por uma série de fatores que estão intrinsecamente relacionados às propriedades mecânicas daquele material. Dessa maneira, pode-se concluir que seja possível estabelecer relações estatísticas que possam expressar estas propriedades como função daquela velocidade. Com o objetivo de se estabelecer correlações estatísticas entre a velocidade de propagação do pulso ultra-sônico longitudinalmente às fibras e parâmetros físicos e mecânicos de madeiras, foram determinadas, experimentalmente, a velocidade de propagação, a umidade, a densidade aparente, as resistências à compressão paralela e normal às fibras, a resistência ao cisalhamento paralelo às fibras e os módulos de elasticidade longitudinal e normal às fibras. Para esse propósito, foram escolhidas duas espécies de madeiras nativas e uma espécie de madeira de reflorestamento. As espécies nativas escolhidas foram a *Manilkara spp* e a *Hyminaea spp*, conhecidas, popularmente, como Maçaranduba e Jatobá e a espécie de reflorestamento foi o *Eucalyptus tereticornis*, ou, simplesmente, Eucalipto.

A escolha destas espécies se baseou no fato de serem madeiras amplamente empregadas nas estruturas correntes. Os dados experimentais obtidos foram, posteriormente, estatisticamente tratados e, por meio de regressão linear múltipla, procurou-se estabelecer aquelas correlações. De posse destas correlações, pode-se estimar e determinar as propriedades mecânicas de madeiras com considerável confiabilidade, sem a necessidade dos laboriosos ensaios destrutivos convencionais.

INTRODUÇÃO

Com a possibilidade de escassez dos recursos minerais não renováveis, pode-se dizer que a madeira será, por excelência, o material de construção do futuro. Suas excelentes propriedades físicas e mecânicas, além do fato de ser um material continuamente renovável na Natureza, colocam-na numa posição de destaque frente a outros materiais.

Portanto, torna-se indispensável o profundo conhecimento de suas propriedades, para que sejam garantidos, principalmente, os requisitos de segurança e durabilidade. Atualmente, esse conhecimento se baseia em resultados obtidos a partir de ensaios de natureza destrutiva, muitas vezes onerosos e laboriosos. É importante salientar, também, que tais resultados geram dúvidas concernentes à sua confiabilidade, uma vez que são representativos apenas para um determinado lote de madeiras.

Nesse sentido, a avaliação não destrutiva de madeiras assume um papel de vital importância, pois permite obter e analisar o maior número de informações sobre o material, objetivando não somente maior precisão dos resultados, como também estabelecer critérios práticos de classificação e caracterização daquele material, fornecendo subsídios para que sua utilização abandone o aspecto puramente artesanal e empírico, passando a ser feita de forma mais racional e científica, alcançando, assim, a projeção que realmente merece.

Existem diversos métodos e técnicas de avaliação não destrutiva de madeiras, sendo cada um deles adequado à avaliação de determinadas propriedades e características desse material.

Baseada nos princípios de propagação de ondas mecânicas em meios materiais, a avaliação não destrutiva de madeiras através da técnica de ultra-som surge como uma das opções mais difundidas e promissoras, devido à relevância das informações obtidas, à facilidade de operação e ao custo relativamente baixo do equipamento.

Ao propagar-se através da madeira, as velocidades (de fase e de grupo) das ondas ultra-sônicas podem ser afetadas por uma série de fatores que estão intrinsecamente relacionados às propriedades mecânicas do material. Dessa maneira, imagina-se ser possível estabelecer correlações estatísticas que possam expressar estas propriedades como funções daquelas velocidades.

Estabelecer algumas destas correlações constitui o desafio que este trabalho se propôs a realizar. Entretanto, antes de se estabelecê-las, far-se-á, nos capítulos iniciais, um estudo dos fundamentos físicos que governam a propagação de ondas ultra-sônicas em madeiras, demonstrando, assim, que o ultra-som é uma importante ferramenta na avaliação e estimativa de propriedades deste material.

Dessa forma, o Capítulo 1 faz um estudo pormenorizado dos princípios gerais de propagação de ondas ultra-sônicas em meios materiais. Na introdução, são apresentados os principais tipos de ondas que podem se propagar nestes meios. Através da analogia mecânica entre o sistema massa-mola e as vibrações das partículas do material, são definidas as grandezas físicas relacionadas à propagação de ondas, como frequência, período e comprimento de onda. O capítulo aborda, também, os vetores de onda, que são os elementos que caracterizam a propagação daquelas ondas, relacionando-os à impedância acústica, à intensidade acústica e à pressão de radiação. O capítulo é finalizado com uma explanação dos mecanismos de atenuação de ondas em sólidos e com as definições de velocidade de fase e velocidade de grupo.

No Capítulo 2, será estudada a propagação de ondas em um sólido elástico anisotrópico infinito, estabelecendo-se as relações físicas fundamentais, conhecidas como Equação de Christoffell, entre a velocidade de propagação, a densidade e as constantes elásticas do meio. Uma particular atenção será dada ao sólido ortotrópico, por representar, numa primeira aproximação, satisfatoriamente, o material madeira.

No Capítulo 3, será feito um breve estudo sobre a propagação de ondas ultra-sônicas em madeiras, enfatizando os principais fatores inerentes à madeira que influenciam esta propagação.

O Capítulo 4, constituído por uma análise exclusivamente experimental, tratará da determinação dos parâmetros físicos e mecânicos de alguns espécimes de madeiras e da velocidade de propagação do pulso ultra-sônico ao longo deste material.

Os dados obtidos no Capítulo 4 serão analisados e estatisticamente tratados no Capítulo 5. Neste capítulo, estabelecer-se-ão, através de regressão linear múltipla, equações que permitam expressar algumas propriedades mecânicas de madeiras (resistência e rigidez) como funções das propriedades físicas (umidade e densidade) e da velocidade de propagação do pulso ultra-sônico.

Na Conclusão, são feitos alguns comentários e conclusões referentes à análise realizada no Capítulo 5.

Como considerações finais, são sugeridos alguns temas para estudo e continuidade da pesquisa, finalizando, assim, o presente trabalho.

REVISÃO DE LITERATURA

Segundo Emerson et al. [s. d.], no artigo *Nondestructive evaluation techniques for timber bridges* (Técnicas de avaliação não destrutiva de pontes de madeira), a avaliação não destrutiva é a ciência e, ao mesmo tempo, a arte de se determinar as propriedades físicas, químicas e mecânicas de um material sem, no entanto, prejudicar sua utilização inicialmente pretendida.

Naquele artigo, Emerson et al. [s. d.] fazem um estudo comparativo entre as principais técnicas de avaliação não destrutiva de madeiras, enfatizando-se as vantagens e desvantagens de cada uma delas. De acordo com estes autores, as principais técnicas são a inspeção visual, o método da onda de tensão, a resistência ao furo, a radiografia, a inspeção por microondas e a técnica de ultra-som.

A inspeção visual é a técnica mais simples de avaliação não destrutiva existente e deve ser o primeiro passo na avaliação de madeiras. Usando a inspeção visual, o técnico pode, rapidamente, desenvolver uma avaliação qualitativa da integridade estrutural relativa de elementos individuais. Naturalmente, algumas deficiências podem ser facilmente identificadas, incluindo danos externos, deterioração, esmagamento das fibras nos apoios, fendas ou rachaduras. Os resultados obtidos através da inspeção visual podem ser empregados como um guia adicional de avaliação não destrutiva. Embora esta técnica seja muito útil, ela apresenta certas limitações. Variações nos resultados podem ocorrer em função da acuidade visual e treinamento/experiência dos inspetores. O acesso aos elementos a serem inspecionados também pode acarretar problemas. Componentes com acesso limitado podem ser suscetíveis ao aumento da imprecisão na interpretação da inspeção visual e componentes não expostos podem não ser totalmente inspecionados. Os resultados são puramente qualitativos e o conhecimento é limitado à superfície externa da madeira.

Baseada nos princípios de propagação de ondas mecânicas em meios materiais, o método mais simples de utilização de ondas de tensão consiste na determinação do

tempo necessário para que a onda viaje através de uma distância especificada. Se as dimensões do material forem conhecidas, o tempo de propagação da onda pode ser usado para localizar deterioração em peças de madeiras. Uma vez que a onda de tensão viaja mais lentamente através de madeiras deterioradas do que em madeiras sadias, a condição de uma determinada peça pode ser determinada através da medida do tempo de propagação da onda em várias regiões ao longo da peça. Regiões que apresentem elevados valores de tempo propagação são regiões potencialmente possíveis de estarem deterioradas. O comportamento da onda de tensão em madeiras sadias difere do comportamento em madeiras deterioradas. Em geral, uma onda de tensão típica atenuará mais rapidamente em madeiras deterioradas do que em madeiras sadias. Um uso comum do método de ondas de tensão é a determinação do módulo de elasticidade de elementos estruturais. Usando-se um medidor de tempo, sobre um comprimento pré-determinado, pode-se calcular a velocidade da onda de tensão. A velocidade da onda pode, então, ser usada para calcular o módulo de elasticidade dinâmico do material e estimar várias propriedades de resistência usando-se correlações estatísticas.

A resistência ao furo é um teste quase não destrutivo que tem sido usado para se avaliar a densidade e detectar deterioração em árvores e madeiras. Ele é classificado como um teste quase não destrutivo porque um pequeno furo de diâmetro entre 1,5 mm e 3,0 mm fica no espécime após o ensaio. Entretanto, este furo é pequeno o suficiente para se negligenciar os efeitos estruturais na seção transversal remanescente e pode ser fechado para se evitar o acesso de agentes deterioradores.

A técnica da resistência ao furo opera sob a premissa de que a resistência à penetração está correlacionada com a densidade do material. A resistência é determinada pela medida da força requerida para atravessar o material. Plotando a resistência ao furo em função da profundidade da extremidade da broca, obtém-se um perfil de resistência ao furo que pode ser usado para avaliar a condição interna de uma árvore ou peça de madeira e identificar locais de vários estágios de deterioração. O perfil de resistência ao furo pode ser também usado para estimar a densidade de uma peça.

Devido à natureza invasiva da técnica de resistência ao furo e o fato de produzir várias

medidas localizadas de densidade, esta técnica pode ser melhor empregada quando usada em conjunto com métodos não destrutivos que forneçam uma avaliação qualitativa (por exemplo, a inspeção visual) ou condições de avaliação regional (por exemplo, ondas de tensão ou inspeção ultra-sônica). Assim sendo, a inspeção visual ou por ondas de tensão poderiam ser usadas para localizar regiões de deterioração. As medidas de resistências ao furo poderiam, então, ser tomadas em um número limitado de locais para se determinar a condição da espessura de madeira atravessada. Estas medidas poderiam ser combinadas para prever o módulo de elasticidade e, possivelmente, a resistência da peça.

A técnica de radiografia envolve o posicionamento de uma fonte de energia radiográfica em um dos lados do material e um meio de gravação, como por exemplo um filme, do lado oposto. A radiação percorre o material e expõe o filme. A densidade local do material controla o quanto de radiação passa através dele, resultando numa figura bidimensional da variação da densidade do material sob inspeção.

Uma técnica mais avançada, denominada tomografia computadorizada (TC), pode ser utilizada para produzir uma representação tridimensional da estrutura interna do material. O material, no caso uma peça de madeira, é radiografado em várias orientações e, então, um computador pode ser usado para construir uma imagem tridimensional da peça.

As condições de um elemento estrutural de madeira podem ser investigadas usando técnicas radiográficas tanto em laboratório quanto nos serviços de campo (*in loco*). A densidade local da madeira tem sido estimada com precisão pelo emprego de Raios-X e Raios Gama.

A radiografia vem sendo usada também, com sucesso, para investigar a degradação da madeira devido ao ataque de fungos.

Técnicas radiográficas convencionais realizam-se bem em laboratórios e mostram-se promissoras para o uso em serrarias. Entretanto, o equipamento apresenta alguns

problemas para a inspeção “*in situ*” de peças de madeira. O fato de não ser portátil e a dificuldade de acesso às peças são os dois maiores problemas para a implantação da técnica em campo.

A principal desvantagem do uso de técnicas radiográficas convencionais para a inspeção de membros estruturais é que elas utilizam a absorção fotoelétrica para produzir uma imagem interna da peça. A absorção fotoelétrica propriamente requer acesso aos múltiplos lados da peça sob inspeção. Vários artifícios tem sido desenvolvidos para que se tenha acesso apenas a um lado da peça, realizando-se as medidas de densidade através do emprego do espalhamento Compton em lugar da absorção fotoelétrica.

As técnicas de inspeção por microondas baseiam-se nos princípios gerais de propagação de ondas eletromagnéticas em materiais dielétricos (isto é, materiais isolantes). Estas ondas são produzidas por sondas (antenas típicas) em frequências que variam de 300 MHz a 300 GHz.

Sondas de transmissão e recepção separadas podem ser empregadas para a técnica de transmissão ou uma única sonda pode ser usada para transmitir e receber a energia refletida.

A inspeção de madeiras por microondas tem sido utilizada não só na avaliação da densidade, como também do conteúdo de umidade e do ângulo da grã em sistemas automatizados de classificação de madeiras.

Uma vez que as ondas eletromagnéticas são sensíveis à presença de umidade, a técnica de inspeção por microondas tem se demonstrado promissora na detecção de zonas de deterioração em árvores vivas e em estruturas de madeira envelhecidas.

Constituindo o tema do presente trabalho, a utilização da técnica de ultra-som na avaliação não destrutiva de madeiras é bastante recente e incipiente no Brasil. Grande parte das pesquisas que utilizam a propagação de ondas mecânicas na avaliação

de propriedades e características da madeira era realizada com frequências inferiores às frequências ultra- sônicas, ou seja, com ondas de tensão.

Em seu artigo “*In situ*” *nondestructive testing of built in wooden members* (Testes não destrutivos “*in situ*” de peças de madeiras macias), Zombori (2001) faz um estudo comparativo entre as principais técnicas de avaliação não destrutivas de madeiras, enfatizando as características da técnica de ultra-som perante as outras técnicas.

Segundo Zombori (2001), as frequências ultra-sônicas são empregadas, no lugar das frequências sônicas, em virtude das altas atenuações que aquelas frequências sofrem na madeira.

Para Zombori (2001), a velocidade de grupo e coeficiente de atenuação podem ser utilizados para prever a resistências de peças e o aumento no tempo de propagação do pulso pode ser empregado na localização de defeitos internos (fissuras, nós, inclinação da grã, etc.).

De acordo com Zombori (2001), os métodos mais utilizados na avaliação de elementos estruturais são os métodos de transmissão direta e do pulso-eco. O método de transmissão direta emprega dois transdutores piezelétricos (cristais de quartzo) localizados em cada lado da peça a ser ensaiada. Um gerador de pulsos elétricos envia um sinal através do transdutor emissor. Se houver alguma fissura, nós ou outros defeitos ao longo da propagação do pulso, parte da energia ultra-sônica será refletida. O sinal refletido será recebido pelo transdutor receptor. A proporção entre o sinal emitido e o sinal refletido pode ser usada na investigação de defeitos internos.

No caso do método do pulso-eco, somente um transdutor é utilizado. Dessa forma, o transdutor exerce as funções de emissor e receptor do pulso e, conseqüentemente, apenas o pulso refletido é mensurado. O tempo entre a emissão e recepção do pulso será menor, caso este seja refletido pelos contornos de defeitos internos, do que o tempo de reflexão na extremidade da peça ensaiada.

Segundo Kaerly (1985), no artigo *Ultrasonic pulse velocity testing of plywood*.(Teste de velocidade do pulso ultra-sônico em compensados), para a avaliação de peças “*in situ*”, já construídas, em que muitas vezes o acesso a todas as faces é restrito, o método do pulso-eco é mais prático que o método de transmissão direta.

Para Zombori (2001), o maior obstáculo com relação à técnica de ultra-som reside na dificuldade de acoplamento acústico entre a superfície do material e o transdutor, uma vez que a transmissão de ondas ultra-sônicas através do ar é relativamente muito ruim. Por esta razão, o transdutor deve ser adequadamente acoplado à peça que está sendo avaliada. O problema pode ser contornado através da aplicação de uma substância acoplante (graxa ou gel de medicina) entre o transdutor e a superfície da peça. Entretanto, esta exigência dificulta a avaliação de peças com superfícies extensas, tornando-a praticamente inexecutável. Neste caso, a madeira pode ser submersa em um tanque com água, em que dois transdutores próprios são posicionados próximos à peça. A água constitui um bom material acoplante.

Ham e Lum (1991), em *Application of ultrasonic and slope of grain indicator to direction of compression wood in lumber* (Aplicação de ultra-som e inclinação da grã como indicadores da direção de compressão de madeira serrada), discutem o estudo e projeto de transdutores de contato direto, em que os inconvenientes decorrentes da imersão da peça de madeira na água poderão ser evitados. Estes transdutores são apresentados por Sandoz (1998), no artigo *Ultrasonic solid wood evaluation in industrial applications* (Avaliação de madeira bruta por ultra-som em aplicações industriais).

De acordo com Sandoz (1998), o fato da atenuação ser proporcional à frequência da onda e a necessidade da aplicação do ultra-som, em escala industrial, ser realizada sem a utilização de um acoplante, por motivos práticos, descartam o uso de transdutores de frequências ultra-sônicas elevadas. Dessa maneira, novos transdutores piezelétricos foram projetados usando-se baixas frequências (na faixa dos 20 kHz) juntamente com uma alta energia de vibração, obtidas através de um condensador (capacitor). O condensador é progressivamente alimentado, até que se atinja a tensão de 700 V,

ocorrendo, então, a excitação das células piezelétricas. Nesta tensão, as células vibram ao longo do eixo x. Para se obter uma emissão unidirecional, os transdutores são construídos com uma massa de metal na parte traseira. Para concentrar a energia ultra-sônica na peça a ser ensaiada, o transdutor é projetado em forma de cone, conforme ilustrado na FIG. 1, com cabeça “*puntual*”, para um pequeno contato com a superfície, produzindo uma tensão singular de 20 bar (2 MPa).

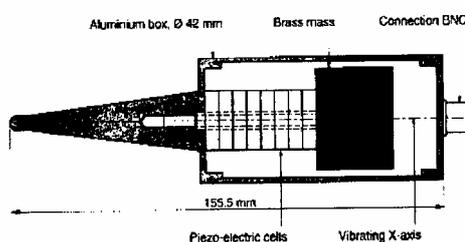


FIGURA 1 – Transdutor ultra-sônico para acoplamento *puntual*.

FONTE – SANDOZ, 1998. p. 6.

Sandoz (1998) enfatiza que o uso desta nova tecnologia simplificará consideravelmente a técnica de ultra-som na avaliação e inspeção de madeiras e derivados industriais.

Os estudos desenvolvidos por McDonald (1978), em *Lumber quality evaluation using ultrasonic* (Avaliação da qualidade de madeira serrada usando ultra-som), demonstraram que a propagação de ondas ultra-sônicas em madeiras é sensivelmente afetada pelas condições ambientais e pelas características inerentes à estrutura biológica da madeira. Segundo McDonald, a velocidade ultra-sônica aumenta à medida que o conteúdo de umidade diminui. A velocidade é também, dependente da direção de propagação em relação às fibras da madeira. O tempo de propagação é aproximadamente três vezes maior na direção longitudinal às fibras do que na direção radial, em madeira bruta. Este fato possibilita à técnica detectar defeitos que envolvam mudanças na direção da grã, como, por exemplo, nós e fibras revessas.

Descontinuidades na estrutura celular e a decomposição ou apodrecimento decorrente da ação de agentes deterioradores , também acarretam a diminuição de velocidade ultra-sônica em madeiras.

Um estudo mais completo dos mecanismos de propagação de ondas ultra-sônicas em madeiras e da avaliação das propriedades e características deste material, através da técnica de ultra-som, é realizado por Bucur (1995), em seu livro *Acoustics of wood* (Acústica da madeira), em que a pesquisadora reúne e discute vários artigos sobre o assunto. Neste trabalho, Bucur (1995) não só estabelece os princípios gerais de propagação de ondas mecânicas em meios materiais, enunciando as equações físicas fundamentais (*vide* Capítulo 2) que governam aqueles princípios, como também elucida os principais fatores que afetam a propagação daquelas ondas em madeiras. Estes fatores afetam tão significativamente os mecanismos de propagação que serão tratados em um capítulo especial do presente trabalho.

Segundo Bucur (1995), a caracterização completa da madeira, em termos de suas constantes elásticas, através da propagação de ondas, baseia-se na hipótese de que suas propriedades mecânicas possam ser representadas considerando-a como um meio homogêneo ortotrópico. O comportamento elástico da madeira pode ser expresso por nove coeficientes de rigidez (*vide* equação (2.20)), que podem ser medidas através da técnica de ultra-som. Para Bucur, a grande vantagem desta técnica se encontra na flexibilidade nas medidas das constantes de propagação, ou seja, da velocidade e dos coeficientes de absorção, em um grande número de tipos de amostras (árvores, pequenos espécimes de madeira bruta ou composta, vigas, pranchas, etc.).

De acordo com Bucur (1995), a detecção de defeitos internos pode ser efetuada através da avaliação e estimativa das constantes elásticas, da velocidade e da atenuação nos diversos tipos de amostras acima citadas.

No artigo, *Ultrasonic solid wood evaluation in industrial applications* (Avaliação de madeira bruta por ultra-som em aplicações industriais), já citado anteriormente,

Sandoz (1998) expõe alguns resultados experimentais referentes à classificação de madeiras através da técnica de ultra-som.

Sandoz (1998) verificou que, ao longo da direção das fibras, a velocidade de propagação ultra-sônica está intimamente ligada à rigidez longitudinal. Dessa forma, há uma boa correlação entre a velocidade de propagação e o módulo de elasticidade paralelo às fibras. Para melhorar a qualidade da classificação nas várias etapas de transformação industrial da madeira, diversas leituras do tempo de propagação foram realizadas em uma amostra de árvores, que foram acompanhadas ao longo das diferentes etapas de transformação (serragem à produção de peças laminadas coladas). O produto final, constituído por doze vigas de madeira laminada colada, foi testado em laboratório com o objetivo de se quantificar as propriedades mecânicas.

A amostra de árvores foi classificada em três grupos (designados por grupos 1, 3 e 5), sendo o primeiro grupo constituído por toras de madeira mais frágil e o último constituído por toras de qualidade superior aos dois primeiros. Esta classificação foi feita baseando-se em duas leituras de tempo de propagação ao longo do eixo longitudinal das toras.

As toras tinham comprimentos médios de 5 m e diâmetros variando entre 30 cm a 50 cm. A amostra era constituída por um total de vinte e sete toras, sendo nove toras para cada um dos três grupos.

Na serraria, a amostra foi cortada em pranchas que foram secas até a umidade de equilíbrio e, em seguida, enviadas à preparação e produção das vigas de madeira laminada colada. Após a confecção das doze vigas, determinou-se a velocidade de propagação do pulso ao longo das mesmas. Os valores obtidos, juntamente com as médias das velocidades de propagação longo das toras e dos módulos de elasticidade são apresentados na TAB. 1.

TABELA 1

Relação entre a velocidade de ondas ultra-sônica em diferentes árvores, pranchas e vigas e as propriedades mecânicas do produto final.

Grupo	Número	Velocidade de propagação ao longo das toras (m / s)	Velocidade de propagação ao longo das pranchas secas (m / s)	Módulo de elasticidade (N / mm ²)
1	Barra 11	...	5339	10226
	Barra 12	...	5427	11491
	Barra 13	...	5344	10735
	Barra 14	...	5254	10820
Média/Grupo 1	...	4362	5343	10818
2	Barra 31	...	5576	12836
	Barra 32	...	5616	12692
	Barra 33	...	5652	12571
	Barra 34	...	5582	11573
Média/Grupo 3	...	4878	5622	12418
3	Barra 51	...	5837	14579
	Barra 52	...	5786	14330
	Barra 53	...	5856	14268
	Barra 54	...	6011	17152
Média/Grupo 5	...	5286	5873	15082

FONTE – SANDOZ, 1998. p 4.

Os resultados obtidos por Sandoz (1998), conforme demonstra a TAB. 1, indicam que a classificação de toras por meio de propagação de ondas ultra-sônicas constitui uma técnica eficiente na avaliação da qualidade de produtos finais de madeiras.

Resultados experimentais relativos à avaliação da qualidade de madeiras utilizando ondas ultra-sônicas também foram obtidos por Gonçalves e Puccini (2000), em *Utilização do ultra-som na avaliação de aspectos de qualidade da madeira*.

Neste artigo, os autores buscam estabelecer correlações entre a avaliação visual e a velocidade de propagação da onda.

Para tal análise, os pesquisadores utilizaram a madeira Pinus, por ser uma espécie cuja presença de nós, regiões com medula e desvio das fibras são extremamente abundantes.

Os ensaios foram realizados utilizando-se duas tábuas de dimensões comerciais (150 mm de largura, 25,4 mm de espessura e 2500 mm de comprimento). Cada tábua foi dividida, longitudinalmente, em dez trechos de 250 mm e cada um destes trechos foi dividido em três regiões de análise, gerando as regiões esquerda, central e direita, totalizando, dessa forma, sessenta seções analisadas.

Cada uma das sessenta seções foi visualmente avaliada e os detalhes referentes à presença de nós, medula e desvio das fibras foram anotados.

Em seguida, determinaram-se os tempos de propagação da onda ultra-sônica de superfície em cada seção, utilizando-se o equipamento Steinkamp BP-7, dotado de transdutores de 45 kHz e devidamente calibrado. Para acoplamento entre os transdutores e a madeira, foi aplicado, em cada leitura, gel de medicina.

De posse do tempo de propagação da onda e do comprimento do trecho por ela percorrido, calculou-se a velocidade de propagação em cada seção. Os detalhamentos da análise visual de cada trecho e região das tábuas podem ser vistos nas TAB. 2 e 3.

Segundo a análise dos próprios autores, comparando-se a avaliação visual detalhada nas TAB. 2 e 3, observa-se que a tábua 2 apresenta, em geral, qualidade superior à tábua 1, ou seja, apresenta menor quantidade de defeitos.

TABELA 2
Detalhamento da análise visual da tábua 1.

Trechos	Direita	Central	Esquerda
1	Sem defeito	Medula	Nó + inclinação de 4°
2	Desvio	Nó grande (5 cm)	Desvio
3	Inclinação 2,1°	Medula	Inclinação de 1°
4	Sem defeito	Sem defeito	Sem defeito
5	Sem defeito	Sem defeito	Inclinação de 1°
6	Desvio + nó pequeno	Sem defeito	Desvio
7	Sem defeito	Sem defeito	Inclinação de 2,3°
8	Inclinação de 1,1°	Sem defeito	Inclinação de 2,3°
9	Inclinação de 1,1°	Sem defeito	Sem defeito
10	Nó pequeno na ponta	Sem defeito	Inclinação de 3,7°

FONTE – GONÇALVES E PUCCINI, 2000.

TABELA 3
Detalhamento da análise visual da tábua 2.

Trechos	Direita	Central	Esquerda
1	Sem defeito	Sem defeito	Sem defeito
2	Inclinação de 5°	Sem defeito	Sem defeito
3	Sem defeito	Sem defeito	Sem defeito
4	Sem defeito	Nó de 2,5 cm	Sem defeito
5	Sem defeito	Sem defeito	Pequeno desvio
6	Dois nós (2,5 cm e 3 cm)	Nó de 2,5 cm	Sem defeito
7	Sem defeito	Sem defeito	Sem defeito
8	Sem defeito	Sem defeito	Sem defeito
9	Nó de 2,5 cm	Desvio	Pequeno desvio
10	Medula na ponta (pequena porção)	Sem defeito	Sem defeito

FONTE – GONÇALVES E PUCCINI, 2000.

Os resultados de velocidade de propagação das ondas de superfície obtidos para cada trecho e região das tábuas podem ser vistos nas TAB. 4 e 5.

Observando-se as TAB. 4 e 5, pode-se verificar que o coeficiente de variação obtido para a velocidade média de propagação das ondas na tábua 1 foi de 12,5 %, enquanto na tábua 2 foi de apenas 4,7 %. A maior variabilidade dos valores de velocidade é indício da presença de maiores descontinuidades no material.

TABELA 4
Velocidade de propagação da onda de superfície na tábua 1.

Viga 1 – velocidade da onda de superfície (m / s)				
Trechos	Direita	Central	Esquerda	Valor médio
1	6944	3261	5130	5112
2	6165	2765	5734	4888
3	6609	5473	5906	5996
4	6906	3383	6862	5717
5	6915	4498	6739	6051
6	6849	6010	5900	6253
7	7159	6008	6717	6628
8	7418	6964	7205	7196
9	7353	6870	7230	7151
10	6438	5987	6932	6452
Média	6875,6	5121,9	6435,5	6144,4
C.V. (%)	5,7	30	11	12,5
Mínimo	6165	2765	5130	4888
Máximo	7418	6964	7230	7196

FONTE – GONÇALVES e PUCCINI, 2000.

TABELA 5
Velocidade de propagação da onda de superfície na tábua 2.

Viga 2 – velocidade da onda de superfície (m / s)				
Trechos	Direita	Central	Esquerda	Valor médio
1	7156	7222	8453	7610
2	6555	6887	6964	6802
3	6266	6782	6668	6572
4	6631	6024	6775	6477
5	6637	6749	7123	6836
6	6281	6460	7042	6594
7	6944	6973	7070	6996
8	6925	7068	7184	7059
9	6487	7032	6868	6796
10	6638	6932	7284	6951
Média	6652	6812,9	7143,1	6869,3
C.V. (%)	4,3	5,1	7,0	4,7
Mínimo	6266	6024	6668	6477
Máximo	7156	7222	8453	7610

FONTE – GONÇALVES e PUCCINI, 2000.

Ainda segundo a análise dos autores, a avaliação visual indicou que a região central da tábua 1 apresentava, nos três primeiros trechos, a presença de defeitos marcantes, isto é, medula e nós de grandes dimensões. Nesta região, a velocidade de propagação da onda ultra-sônica apresentou o menor valor e o maior coeficiente de variação.

A Segunda região com valor mais baixo de velocidade de propagação e maior coeficiente de variação foi a região esquerda da tábua 1. A análise visual desta região demonstra a presença de nó de 3,5 cm e as maiores inclinações das fibras (4° e 3,7°).

A velocidade média obtida para todos os trechos e regiões da tábua 2 foi 12 % maior que da tábua 1 e o coeficiente de variação foi 133 % menor que o da tábua 1.

Segundo Gonçalves e Puccini (2000), estes valores, embora preliminares, podem estar indicando que tanto a velocidade de propagação das ondas superficiais quanto o coeficiente de variação da velocidade podem ser utilizados como instrumentos de avaliação da qualidade da madeira. Porém, ressaltam os autores, estes resultados apontam para uma maior sensibilidade do coeficiente de variação da velocidade como indicativo desta qualidade. Poder-se-ia dizer que a variabilidade indicada pelo coeficiente de variação da velocidade na tábua é um indicativo mais contundente da qualidade do que o valor da velocidade média.

Uma outra análise interessante realizada por Gonçalves e Puccini (2000) demonstra que ocorre uma diminuição da velocidade de propagação da onda quando seu percurso é perturbado pela presença de descontinuidades no material. Dessa maneira, o ultra-som é capaz de detectar defeitos não visíveis no interior da madeira. Isto torna a avaliação por meio de ultra-som muito mais eficiente que a avaliação visual.

CAPÍTULO 1 PRINCÍPIOS GERAIS DE PROPAGAÇÃO DE ONDAS ULTRA-SÔNICAS A BAIXAS AMPLITUDES

A Acústica, como ramo da Física, é a ciência que se encarrega do estudo das vibrações e ondas mecânicas em meios materiais.

De acordo com a faixa ou o espectro de frequências, as vibrações mecânicas (e, conseqüentemente, as ondas a elas associadas) podem ser classificadas, basicamente, em três grupos¹:

- 1) Os infra-sons, produzidos a partir de vibrações com frequências muito baixas, inferiores a 20 Hz;
- 2) Os sons, constituídos por frequências situadas entre 20 Hz e 20 kHz;
- 3) Os ultra-sons, produzidos por frequências superiores a 20 kHz.

Esta classificação baseia-se exclusivamente em medidas fisiológicas bem determinadas e a faixa compreendida entre 20 Hz e 20 kHz, conhecida como audio-frequência, refere-se ao intervalo de frequências capaz de sensibilizar o ouvido humano. É importante salientar que tal faixa refere-se apenas ao homem, visto que alguns animais como cães, gatos e cavalos ouvem até cerca de 45 kHz, enquanto os morcegos e algumas espécies de ratos podem ser sensíveis a frequências superiores 70 kHz.

O escopo do presente trabalho se restringe, entretanto, ao estudo e às aplicações dos ultra-sons na avaliação não destrutiva de madeiras .

¹ É válido lembrar que o termo supersônico designa velocidades superiores à da propagação do som no meio considerado, não tendo, portanto, nenhuma relação com frequência.

Embora as constantes de propagação, isto é, as velocidades (de fase e de grupo) e o coeficiente de absorção de um determinado material independam, em geral, da faixa de frequências, existem algumas vantagens do uso de frequências ultra-sônicas no lugar dos infra-sons e das audio-frequências:

- 1) Quanto maior a frequência, menor será o comprimento de onda. Isto permite que se consiga, com maior facilidade, as condições necessárias à propagação de ondas planas no material, o que é essencialmente importante para pequenos corpos;
- 2) Os coeficientes de absorção são usualmente mais altos e, conseqüentemente, muito mais fáceis de serem mensurados em altas frequências;
- 3) Os ultra-sons são inaudíveis;
- 4) As ondas associadas às altas frequências são mais facilmente direcionadas.

As primeiras aplicações utilizando ultra-sons ocorreram somente em 1883, quando Galton inventou um apito de alta frequência para medir o valor limite de resposta do ouvido humano.

Embora o efeito magnetostritivo (descoberto por Joule, em 1847) e o efeito piezelétrico (descoberto por Pierre Currie, em 1880) fossem conhecidos, não havia, na época, conhecimento tecnológico suficiente que permitisse a utilização daqueles efeitos na geração de ondas ultra-sônicas.

A primeira importante utilização dos ultra-sons foi feita pelo físico francês Paul Langevin durante a Primeira Grande Guerra, em sondagens submarinas. Nos anos seguintes, o vagaroso (porém constante) progresso permitiu medir as constantes de propagação dos materiais.

Em 1925, Pierce, observando a dispersão da velocidade em Dióxido de Carbono, demonstrou que as medidas das constantes de propagação poderiam fornecer valiosas

informações sobre as propriedades físicas dos materiais através dos quais as ondas se propagam.

No final da década de 1920, Sokolov apresentou o seu pioneiro trabalho no qual se discutia a possibilidade de utilização de ondas ultra-sônicas na detecção de falhas no interior de sólidos.

Durante aproximadamente uma década, nenhum progresso significativo ocorreu. Porém, em 1940, no auge da Segunda Guerra Mundial, Firestone desenvolveu a técnica do pulso ultra-sônico, marcando o início da ampla utilização de ultra-sons não apenas em um grande número de diagnósticos médicos como também na avaliação não destrutiva de diversos materiais.

O crescente avanço tecnológico das últimas décadas, principalmente no que se refere ao estudo e projeto de novos transdutores, permitiu o desenvolvimento de aparelhos de ultra-sons altamente sofisticados e adaptados às peculiaridades inerentes a cada material.

Atualmente, os ultra-sons são utilizados não somente na inspeção e controle de produtos industriais (como, por exemplo, na indústria aeronáutica), em diversos processos físico-químicos (como aceleradores de reações químicas) bem como na avaliação de propriedades físicas e na caracterização mecânica de um vasto número de materiais, entre os quais a madeira.

A propagação de ondas ultra-sônicas em sólidos, particularmente a madeira, constitui um fenômeno muito mais complexo e intrincado do que a propagação em líquidos e gases. Para melhor compreensão desse fenômeno, serão abordados, neste capítulo, os fundamentos físicos que governam a propagação de ondas mecânicas em meios materiais. É oportuno lembrar que o tratamento matemático apresentado independe da faixa de frequências.

1.1 Introdução

As constantes de propagação ultra-sônica dos materiais, ou seja, as velocidades e o coeficiente de absorção, podem ser determinadas usando-se ondas de baixas amplitudes, em que há, geralmente, uma relação linear entre a tensão aplicada e a deformação resultante, relação esta conhecida como Lei de Hooke.

A existência de correlações entre as constantes de propagação e as propriedades físicas e mecânicas de um dado material permite avaliar e determinar estas propriedades através da propagação de ondas planas neste material. Estas ondas originam-se de uma fonte que possui uma superfície plana vibrante, executando um movimento harmônico simples.

Quando a fonte excitadora vibra na direção do movimento da onda, haverá propagação de ondas longitudinais. Estas ondas produzem zonas de compressão e rarefação na microestrutura do material e, por essa razão, são muitas vezes chamadas de ondas de compressão. Quando a excitação sonora é perpendicular à direção de propagação da onda, haverá propagação de ondas transversais. Em meios materiais, estas ondas originam tensões cisalhantes e o termo ondas de cisalhamento é, muitas vezes, usado. Exceto em alguns casos especiais, as ondas de cisalhamento somente se propagam em sólidos. Portanto, nem toda onda transversal pode ser descrita como onda de cisalhamento; por exemplo, uma onda transversal em uma mola estendida ou ondas transversais nas superfícies de líquidos não estão associadas a tensões de cisalhamento.

1.2 Vibrações livres e vibrações forçadas

1.2.1 Considerações gerais

A propagação de ondas mecânicas está relacionada à vibração das partículas elementares do meio através do qual estas ondas se propagam. Embora estas vibrações possam tomar formas diferentes, far-se-á, para estudá-las, uma analogia mecânica com o sistema

massa-mola, esquematizado na FIG. 2. Nesta analogia, as vibrações das partículas são simuladas pela oscilação de um corpo de massa M suspenso por uma mola de compliância C_m (isto é, deslocamento por unidade de força restauradora).

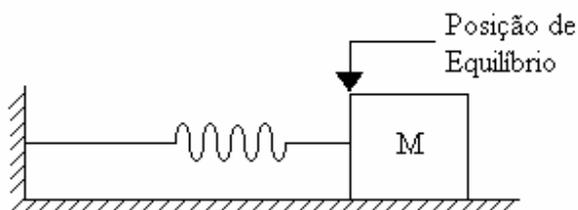


FIGURA 2 – Sistema massa-mola.

Deslocando-se o corpo de sua posição de equilíbrio e, em seguida, soltando-o, ele oscilará em torno desta posição. Se o corpo continuar seu movimento oscilatório sem o auxílio de um agente externo, se diz, então, que ele sofre vibrações livres. Caso contrário, se para continuar executando seu movimento oscilatório seja necessário injetar energia no sistema, por meio de uma força periódica, se diz, então, que o corpo sofre vibrações forçadas. Neste caso, quando se injeta energia no sistema, se diz que este está sendo forçado ou excitado.

1.2.2 Vibrações livres

Ao se deslocar o corpo de sua posição de equilíbrio de uma quantidade x_0 (sendo x_0 pequeno em relação a esta posição), a mola exercerá sobre ele uma força restauradora de módulo igual a $F = -kx$, conforme a Lei de Hooke, uma vez que a mola é deformada dentro do limite elástico. O sinal negativo decorre do fato da força restauradora ser sempre no sentido oposto ao deslocamento.

Ao soltar o corpo, ele executará, na ausência de amortecimento, um movimento harmônico simples com frequência $f = 1/T$, sendo T o período, que é o tempo necessário para o corpo realizar uma oscilação completa. Logo, aplicando-se a Lei de Newton,

$$F = Ma \quad \therefore$$

$$-kx_0 = Ma \quad \therefore$$

$$kx_0 + Ma = 0 \tag{1.1}$$

em que a representa a aceleração do corpo.

Sabendo-se que o valor da compliância é o inverso da constante da mola k , a equação (1.1) torna-se:

$$\frac{x}{C_m} + Ma = 0 \quad \text{ou}$$

$$\frac{x}{C_m} + M \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \tag{1.2}$$

em que x passa a representar o deslocamento do corpo num tempo t qualquer.

A solução da equação (1.2) é dada por:

$$x = x_0 \cos \omega t \tag{1.3}$$

em que x_0 , que representa o deslocamento máximo do corpo, é denominado *amplitude do deslocamento* e ω é a *frequência angular* do sistema. O argumento da função co-seno é

denominado *fase do movimento*. O movimento no qual a posição de um corpo varia segundo a equação (1.3) é, por definição, o *movimento harmônico simples*.

Pode-se determinar o período T sabendo-se que a fase no instante $T + t$ é exatamente igual a 2π mais a fase no instante t , isto é:

$$\omega(T + t) = 2\pi + \omega t \quad \therefore$$

$$\omega T + \omega t = 2\pi + \omega t \quad \text{ou melhor,}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{1.4}$$

Conseqüentemente, a frequência será dada por:

$$f = \frac{1}{T} \quad \therefore$$

$$f = \frac{1}{2\pi/\omega} \quad \text{ou seja,}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \tag{1.5}$$

Derivando a equação (1.3) em relação a t , determina-se a velocidade do movimento:

$$v = \frac{dx}{dt} = -x_0 \omega \text{sen } \omega t \tag{1.6}$$

ou ainda,

$$v = x_0 \omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = v_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.6a)$$

Pode-se observar que a fase da velocidade difere da fase da posição por $\pi/2$ rad ou 90° . Isso demonstra que quando $\cos \omega t$ assume o valor $+1$ ou -1 , $\sin \omega t = 0$. Portanto, quando x assume o valor máximo ou mínimo, a velocidade é nula. Analogamente, quando $\sin \omega t$ for igual a $+1$ ou -1 , $\cos \omega t = 0$. Logo, a velocidade é máxima quando o corpo passa pela posição de equilíbrio.

Derivando-se, agora, a equação (1.6) em relação a t , pode-se determinar a aceleração do corpo, ou seja:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -x_0 \omega^2 \cos \omega t$$

Uma vez que $x_0 \cos \omega t = x$, logo:

$$a = -\omega^2 x \quad (1.7)$$

Substituindo o valor de a na equação (1.2), obtém-se:

$$\frac{x}{C_m} - M \omega^2 x = 0 \quad \therefore$$

$$1 - C_m M \omega^2 = 0 \quad \therefore$$

$$\omega^2 = \frac{1}{M C_m} \quad \text{ou ainda,}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{MC_m}} \quad (1.8)$$

Em função da constante da mola k , ω pode ser escrito como:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad (1.8a)$$

1.2.2.1 Energia no movimento harmônico simples

Em um dado tempo qualquer, a energia mecânica ou total de um sistema oscilatório é dada por:

$$W = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{C_m} \quad (1.9)$$

O primeiro termo à direita da equação (1.9) representa a energia cinética (K) do corpo e o segundo representa energia potencial elástica (U) armazenada na mola. Assumindo a hipótese de ausência de amortecimento (não há forças de atrito atuando), a soma da energia cinética com a energia potencial (ou seja, a energia mecânica) permanece constante, embora aquelas parcelas variem individualmente com o tempo.

Das equações (1.3) e (1.6), pode-se verificar que quando $x = 0$ (posição de equilíbrio), $v = v_0$ e quando $v = 0$, $x = x_0$ (deslocamento máximo). Isso significa que quando a energia potencial elástica da mola for nula, a energia cinética adquire seu valor máximo,

$K = \frac{1}{2} M v_0^2$, e quando a energia potencial da mola alcança seu valor máximo $U = \frac{1}{2} \frac{x^2}{C_m}$,

a energia cinética do corpo é nula². Conseqüentemente,

$$W = \frac{1}{2} M v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{x_0^2}{C_m} \quad (1.10)$$

Portanto, pode-se concluir que a energia mecânica (ou energia total) é constante no tempo.

Na FIG. 3, plotou-se o gráfico da energia potencial U em função do deslocamento x . A função é parabólica, com o mínimo (vértice) na posição de equilíbrio. Como a energia total W é constante, ela é representada por uma reta horizontal. Esta reta intercepta a curva da energia potencial elástica nos pontos $x = x_0$ e $x = -x_0$. O movimento do corpo está restrito no intervalo $-x_0 \leq x \leq x_0$, uma vez que a energia total tem que ser maior que a energia potencial elástica ou, no mínimo, igual a ela. A energia cinética, para qualquer valor de x neste domínio, é $K = W - U$.

² Pode-se demonstrar, facilmente, que a energia mecânica é igual à energia cinética ou à energia potencial elástica máximas. Sabendo-se que $W = K + U$ e que $x = x_0 \cos \omega t$ e $v = \dot{x} = -x_0 \omega \sin \omega t$ logo:

$$K = \frac{1}{2} M (x_0 \omega \sin \omega t)^2 = \frac{1}{2} M x_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t \quad \text{e} \quad U = \frac{1}{2} \frac{(x_0 \cos \omega t)^2}{C_m} = \frac{1}{2} \frac{x_0^2 \cos^2 \omega t}{C_m}, \text{ logo:}$$

$$W = \frac{1}{2} M x_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2} \frac{x_0^2 \cos^2 \omega t}{C_m}$$

Uma vez que $\omega^2 M = \frac{1}{C_m}$, a equação acima pode ser reescrita como:

$$W = \frac{1}{2} \frac{x_0^2}{C_m} (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) \quad \therefore \quad W = \frac{1}{2} \frac{x_0^2}{C_m}$$

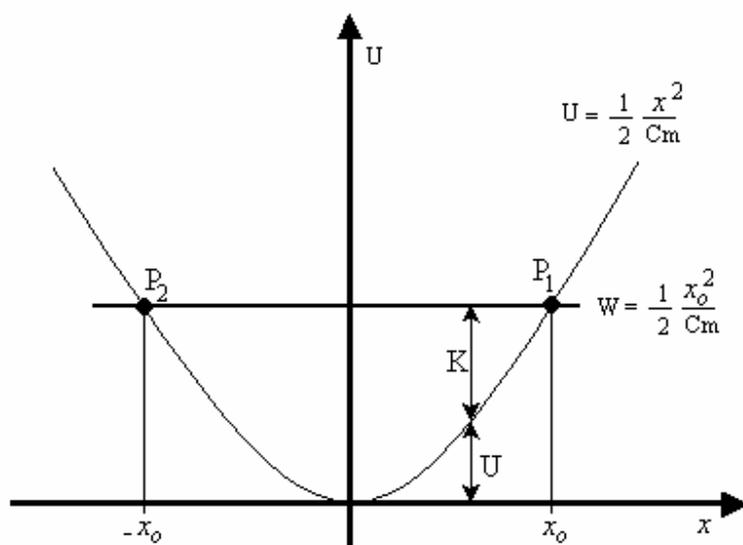


FIGURA 3 - A função energia potencial $U = \frac{1}{2} kx^2$ para um corpo de massa M preso a uma mola de compliância C_m .

1.2.2.2 Vibrações amortecidas

Nos movimentos oscilatórios reais, há dissipação de energia mecânica em virtude da ação de forças de atrito. Quando a energia mecânica de um movimento oscilatório diminui com o tempo, o movimento é dito amortecido.

Se as forças de atrito ou de amortecimento forem pequenas o suficiente, o movimento é aproximadamente periódico, embora sua amplitude diminua lentamente com o tempo, conforme ilustrado na FIG. 4.

Uma vez que a energia total é proporcional ao quadrado da amplitude, a diminuição da amplitude de oscilação acarreta a diminuição da energia mecânica do sistema.

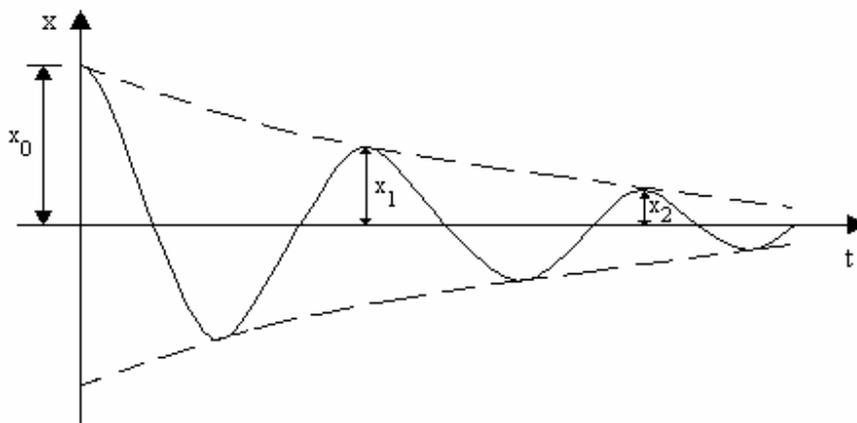


FIGURA 4 - Deslocamento em função do tempo em um oscilador levemente amortecido.

A hipótese de pequeno amortecimento fornece uma relação de proporcionalidade entre a força de amortecimento e a velocidade, sendo a constante de proporcionalidade a resistência mecânica R_m .

Dessa forma, a equação (1.2) pode ser reescrita como:

$$- \frac{x}{C_m} - R_m v = Ma \quad \text{logo,}$$

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + R_m \frac{dx}{dt} + \frac{x}{C_m} = 0 \quad (1.11)$$

A frequência angular ω' de um sistema levemente amortecido é menor que a frequência dada pela equação (1.8), mas a diferença não é significativa e pode ser ignorada. A solução da equação (1.11) é:

$$x = x_0 e^{-\beta t} \cos \omega t \quad (1.12)$$

A equação (1.12) está representada na FIG. 4 pela curva tracejada que envolve o movimento amortecido. As amplitudes dos picos sucessivos são dadas por $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$ nos tempos $0, T, 2T, \dots, nT$, em que $T = 1/f$ representa o período e n um número inteiro. O decremento logarítmico por ciclo, δ , é dado pela expressão:

$$\delta = \beta T = \frac{R_m T}{2M} \quad (1.13)$$

Pode-se observar que:

$$e^{\delta} = \frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \dots = \frac{x_{n-1}}{x_n} \quad (1.14)$$

1.2.3 Vibrações forçadas

Quando uma força periódica, $F = F_0 \sin \omega t$, de frequência $f_f = \omega_f / 2\pi$, é aplicada a um sistema massa-mola amortecido, a equação do movimento é descrita como:

$$F - \frac{x}{C_m} - R_m v = Ma \quad \therefore \quad F_0 \sin \omega_f t - \frac{x}{C_m} - R_m \frac{dx}{dt} = M \frac{d^2 x}{dt^2}$$

ou ainda,

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + R_m \frac{dx}{dt} + \frac{x}{C_m} = F_0 \sin \omega_f t \quad (1.15)$$

A velocidade v , em um dado tempo, será:

$$v = \frac{F_0 \operatorname{sen} \omega_f t}{R_m + i(\omega_f M - 1/\omega_f C_m)} \quad (1.16)$$

em que $i = \sqrt{-1}$.

A amplitude da velocidade é dada por:

$$v_0 = \frac{F_0}{\sqrt{R_m^2 + (\omega_f M - 1/\omega_f C_m)^2}} \quad (1.17)$$

As equações (1.15), (1.16) e (1.17) são análogas às equações que representam um circuito elétrico com uma resistência R , uma indutância L , e uma capacitância C , em série com uma f.e.m alternada V . Neste caso, R_m , M , C_m e F são análogas à R , L , C e V , respectivamente, e x e v são equivalentes à carga elétrica Q e à corrente elétrica i , respectivamente. A relação seguinte

$$Z_m = \frac{F}{v} \quad (1.18)$$

é comumente designada como *impedância mecânica*. Conforme se observa, da equação (1.16), a impedância mecânica é uma quantidade complexa, e pode ser reescrita como:

$$Z_m = R_m + iX_m \quad (1.19)$$

em que $X_m = (\omega_f M - 1/\omega_f C_m)$ é denominada *Reatância Mecânica*.

1.2.3.1 Ressonância

A relação entre amplitude da velocidade e a frequência angular da fonte excitadora, dada pela equação (1.17), é mostrada na FIG. 5, para diferentes valores de resistência mecânica R_m .

A amplitude da velocidade é máxima quando a frequência da fonte excitadora ω_f for igual (ou aproximadamente igual) à frequência natural do sistema, ω_0 , dada pela equação (1.8). A frequência natural de um oscilador é a frequência na qual ele vibra na ausência de amortecimento ou excitações.

Quando a frequência da fonte excitadora for igual à frequência natural do sistema, a taxa de transferência de energia ao sistema é máxima. Esse fenômeno é conhecido como *ressonância* e a frequência natural é denominada *frequência de ressonância do sistema*.

A qualidade da ressonância é descrita pelo fator mecânico Q_m , que é expresso pela relação:

$$Q_m = \frac{\omega_0 M}{R_m} = \frac{\pi}{\delta} \quad (1.20)$$

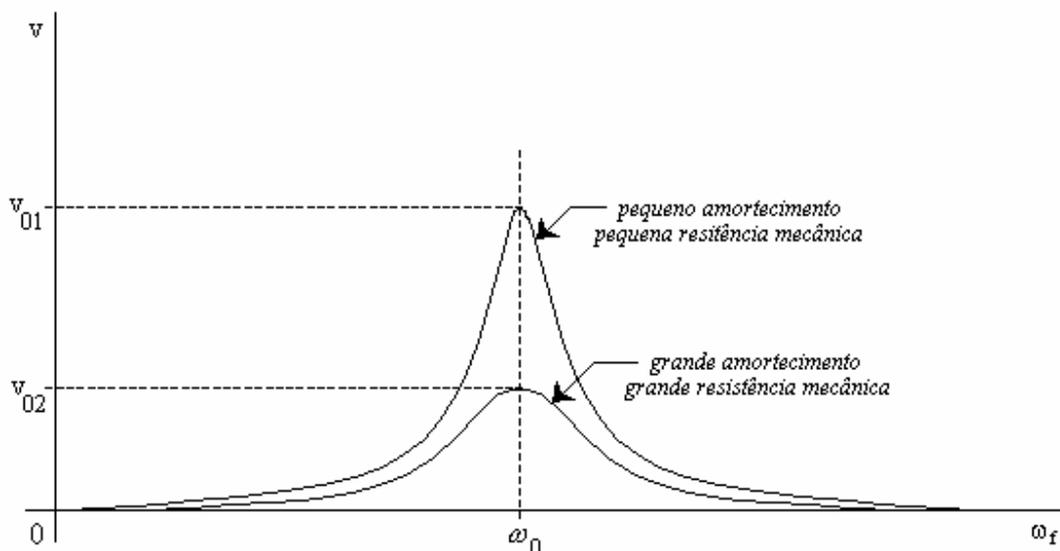


FIGURA 5 - Curvas representando a amplitude da velocidade em função da frequência angular da fonte excitadora para diferentes valores de resistência mecânica.

Para pequenos valores de R_m , obter-se-ão grandes valores do fator de qualidade Q_m e, conseqüentemente, mais aguçados serão os picos das curvas.

O fator Q_m pode ser expresso, de maneira alternativa, como a relação entre a frequência natural do sistema e a diferença entre as frequências de excitação diametralmente opostas em relação à frequência natural, para o valor de velocidade correspondente a $1/\sqrt{2}$ do valor da amplitude da velocidade, conforme mostrado na FIG. 6.

Dessa forma, pode-se escrever:

$$Q_m = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_f} = \frac{\omega_0}{\omega_{f2} - \omega_{f1}} \quad (1.21)$$

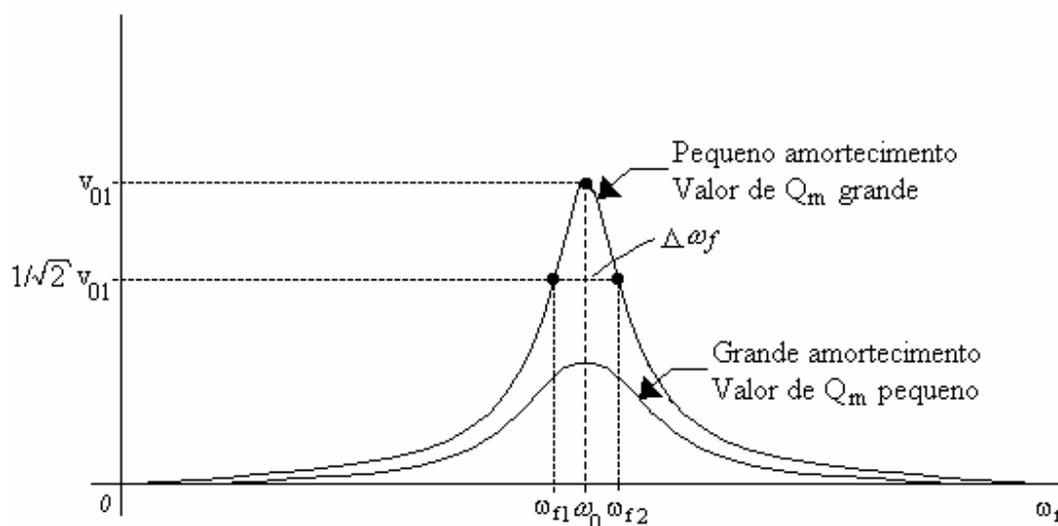


FIGURA 6 – Relação entre o fator de qualidade Q_m , a frequência natural do sistema e a diferença entre duas frequências de excitação diametralmente opostas, correspondentes ao valor de velocidade igual a $1/\sqrt{2}$ da velocidade máxima.

1.3 Vetores de onda

A propagação de ondas mecânicas através de um meio material é caracterizada pelos vetores de onda, cujos valores variam no tempo e no espaço. Os mais importantes vetores de onda são:

- Deslocamento, \vec{u} , que representa o deslocamento da partícula de sua posição de equilíbrio no meio material;
- Velocidade da partícula, \vec{v} ;
- Pressão acústica (ou tensão), \vec{p} , que é a pressão (ou tensão) aplicada devida à ação das ondas;

d) Condensação, s , que representa a variação da densidade do meio. Embora não seja uma quantidade vetorial, a condensação s pode ser relacionada ao deslocamento u , à velocidade v e à pressão acústica p .

Para ondas planas, os vetores de onda, em dado tempo qualquer, têm valores constantes em todos os pontos em um plano normal à direção de propagação da onda. No caso de ondas longitudinais, eles são orientados na direção de propagação e para o caso de ondas transversais, eles são polarizados na direção normal à direção do movimento da onda.

1.4 Impedância acústica específica

Na seção 1.2.3, foi discutida a analogia entre a vibração mecânica e a vibração elétrica. Uma analogia similar também existe entre as vibrações acústica e elétrica, em que a pressão acústica p , o deslocamento da partícula u e a velocidade da partícula v são equivalentes à diferença de potencial V , à carga elétrica C e à corrente elétrica i , respectivamente.

Dessa forma, pode-se definir a impedância acústica específica Z_a como sendo a razão entre a pressão acústica p e a velocidade da partícula v :

$$Z_a = \frac{p}{v} \quad (1.30)$$

A impedância acústica específica é análoga à impedância elétrica, sendo igual à impedância mecânica por unidade de área da seção transversal do meio.

Uma vez que as impedâncias elétrica e mecânica são complexas, a impedância acústica específica também será, podendo ser expressa como:

$$Z_a = R_a + i X_a \quad (1.31)$$

em que R_a e X_a são as componentes resistiva e reativa, respectivamente.

Para ondas planas progressivas propagando-se em um meio não absorvente, pode-se demonstrar, facilmente, que a equação geral da onda é dada por:

$$u = u_0 \cos(\omega t - kx) \quad (1.32)$$

em que $k = 2\pi/\lambda$, é definido como o número de onda, o qual está relacionado ao comprimento de onda. Não deve ser confundido com a constante k da mola. A frequência $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ é denominada *frequência angular da onda*.

De acordo com a Lei de Hooke,

$$p = -E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.33)$$

em que p designa a pressão ou tensão decorrente da ação da onda e E representa o módulo de elasticidade ou módulo de Young do material.

Derivando-se a equação (1.32) em relação a x e substituindo este valor na expressão (1.33), obtém-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_0 k \sin(\omega t - kx) \quad \therefore$$

$$p = -E u_0 \sin(\omega t - kx) \quad (1.34)$$

Derivando-se, agora, a equação (1.32) em relação a t e substituindo o resultado, juntamente com a equação (1.34), na expressão (1.30),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\omega u_0 \cos(\omega t - kx) \quad \therefore$$

$$Z_a = \frac{p}{u} = \frac{E u_0 k \cos(\omega t - kx)}{\omega u_0 \cos(\omega t - kx)} \quad \text{ou,}$$

$$Z_a = E \frac{k}{\omega} \quad (1.35)$$

Substituindo os respectivos valores de k e ω na equação (1.35), obtém-se:

$$Z_a = E \frac{\frac{2\pi}{\lambda}}{\frac{2\pi}{T}} \quad \therefore$$

$$Z_a = E \frac{T}{\lambda} \quad (1.36)$$

Uma vez que a velocidade de propagação da onda é dada por $v = \lambda/T$, a equação acima pode ser reescrita como:

$$Z_a = \frac{E}{v} \quad (1.37)$$

Derivando-se a equação (1.33) em relação a x ,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -E \frac{\partial u^2}{\partial x} \quad (1.38)$$

De acordo com a Segunda Lei de Newton,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.39)$$

Igualando-se as equações (1.38) e (1.39), obtém-se:

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.40)$$

A equação diferencial que descreve a propagação da onda é dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.41)$$

Substituindo a equação acima na equação (1.40), obtém-se:

$$E = \rho v^2 \quad (1.42)$$

Substituindo, finalmente, o valor de E na equação (1.37):

$$Z_a = \frac{E}{v} = \frac{\rho v^2}{v} \quad \therefore$$

$$Z_a = \rho v \quad (1.43)$$

Pode-se verificar que Z_a é real e, conseqüentemente, não possui componente reativa.

O produto ρv é denominado *impedância característica* do meio. Esta quantidade constitui um fator que afeta consideravelmente os mecanismos de reflexão e transmissão de ondas.

1.5 Energia transportada pela onda ao se propagar por um meio material

Conforme visto na seção anterior, a equação geral de uma onda se propagando através de um meio material não absorvente, na direção x , é dada pela expressão (1.32), ou seja,

$$u = u_0 \cos(\omega t - kx)$$

A energia mecânica W da parte do meio em que se propaga esta onda é composta pela energia cinética K e pela energia potencial U . Supondo-se que o volume desta parte do meio seja V , que sua massa seja m e que v seja a velocidade com que suas partículas se deslocam, a energia cinética será, nestas condições, dada pela expressão:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \quad (1.44)$$

A massa m pode ser expressa, de maneira alternativa, como $m = \rho V$, em que ρ representa a densidade do meio.

Derivando-se a equação (1.32) em relação ao tempo, obtém-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v = -u_0 \omega \sin(\omega t - kx) \quad (1.45)$$

Logo, a equação (1.44) pode ser reescrita sob a forma:

$$K = \frac{1}{2} \rho V u_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx) \quad (1.46)$$

De acordo com Frish & Timoreva (1972), a energia potencial de um sólido submetido a uma deformação específica relativa $\varepsilon = \Delta L/L$ é dada por:

$$U = \frac{1}{2} E V \varepsilon^2 \quad (1.47)$$

em que E representa o módulo de elasticidade ou módulo de Young do Material e V o volume do corpo deformado.

A deformação específica ε pode ser expressa em termos da relação diferencial du/dx ³, em que du corresponde à diferença entre as elongações (deslocamentos) das partículas que se encontram, entre si, a uma distância dx. Portanto,

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = u_0 k \text{sen}(\omega t - kx) \quad (1.48)$$

Substituindo o valor de ε na expressão (1.48),

$$U = \frac{1}{2} E V u_0^2 k^2 \text{sen}^2(\omega t - kx) \quad (1.49)$$

Substituindo, agora, o valor do módulo de Young E pelo valor descrito na equação (1.42) e o valor de k por ω/v , pode-se reescrever a equação (1.49) como:

$$U = \frac{1}{2} \rho v^2 V u_0^2 \frac{\omega^2}{v^2} \text{sen}^2(\omega t - kx) \quad \therefore$$

$$U = \frac{1}{2} \rho V u_0^2 \omega^2 \text{sen}^2(\omega t - kx) \quad (1.50)$$

³ Considerando uma deformação uniaxial.

Dessa forma, a energia mecânica ou total W do elemento de volume V do meio será:

$$W = K + U \quad \therefore$$

$$W = \frac{1}{2}\rho V u_0^2 \omega^2 \text{sen}^2(\omega t - kx) + \frac{1}{2}\rho V u_0^2 \omega^2 \text{sen}^2(\omega t - kx) \quad \text{ou melhor,}$$

$$W = \rho V u_0^2 \omega^2 \text{sen}^2(\omega t - kx) \quad (1.51)$$

Pode-se concluir, portanto, que a energia da parte do meio no qual a onda se propaga é diretamente proporcional à densidade deste meio, ao quadrado da amplitude do deslocamento das partículas e ao quadrado da frequência de suas vibrações.

Pode-se, então, introduzir agora o conceito de densidade de energia η , que se define como a razão entre a energia contida em um elemento de volume V e o valor deste mesmo volume, ou seja:

$$\eta = \frac{W}{V} \quad \therefore$$

$$\eta = \rho u_0^2 \omega^2 \text{sen}^2(\omega t - kx) \quad (1.52)$$

Uma vez que o valor médio do quadrado da função seno, no decorrer de um período, é igual a $1/2$, o valor médio da densidade de energia será, então:

$$\bar{\eta} = \frac{1}{2}\rho u_0^2 \omega^2 \quad (1.53)$$

1.6 Intensidade acústica

Conforme visto anteriormente, as partículas de um meio através do qual se propaga uma onda realizam um movimento vibratório e, conseqüentemente, possuem energia cinética.

Considere, então, um ponto qualquer do material situado ao longo da direção de propagação da onda e imagine uma pequena superfície plana, normal àquela direção de propagação, de área ΔA , sobre aquele ponto.

Se $\Delta \bar{P}$ representa a taxa na qual a energia flui através da superfície, pode-se definir a razão $\Delta \bar{P}/\Delta A$ como sendo a intensidade acústica média sobre a superfície ΔA .

No limite, quando ΔA tende a zero, tem-se:

$$\bar{I} = \frac{d\bar{P}}{dA} \quad (1.54)$$

em que \bar{I} representa a intensidade acústica média no ponto considerado.

Se uma fonte puntiforme emite ondas em todas as direções em um meio isotrópico não absorvente, a energia, a uma distância r da fonte, estará uniformemente distribuída sobre uma superfície esférica de raio r e área igual a $4\pi r^2$. Sendo \bar{P} a potência média da fonte, a intensidade acústica será dada por:

$$\bar{I} = \frac{\bar{P}}{4\pi r^2} \quad (1.55)$$

Pode-se observar que a intensidade varia com a distância de acordo com a lei do inverso do quadrado.

Considerando-se ondas planas se propagando em um meio uniforme não absorvente, pode-se dizer, baseando-se no princípio de conversão de energia, que a intensidade \bar{I} deve ser a mesma em todos os pontos da onda. Neste caso, há uma relação simples entre a intensidade da onda e a densidade de energia média $\bar{\eta}$, ou seja, a energia por unidade de volume no meio o qual a onda se propaga. Imagine uma onda esférica que atinja uma distância r_1 . O volume no interior da esfera r_1 contém energia, visto que as partículas desta região estão oscilando em movimento harmônico simples. A região externa à esfera não contém energia em virtude da onda ainda não ter atingido esta região. Após um certo intervalo de tempo Δt , a onda se move para além de r_1 , percorrendo uma pequena distância $\Delta r = v \Delta t$. A energia total no meio aumenta pela energia na casca esférica de área superficial A , espessura $\Delta r = v \Delta t$ e volume⁴ $\Delta V = A \Delta r$. A energia adicional na casca esférica será:

$$\Delta E = \bar{\eta} \Delta V = \bar{\eta} A v \Delta t \quad (1.56)$$

em que $\bar{\eta}$ é a energia média por unidade de volume ou densidade de energia na casca que agora passou a ter energia e v é a velocidade de propagação da onda.

A taxa de aumento de energia corresponde à potência injetada na casca esférica. A fonte desta energia é a energia gerada no centro da esfera de onde a onda está sendo irradiada.

⁴ Na verdade, o valor de ΔV corresponde à diferença entre o volume da esfera compreendido entre a distância $r_1 + \Delta r$ e o volume compreendido entre a distância r_1 . Logo,

$$\Delta V = V_{r_1+\Delta r} - V_{r_1} = \frac{4\pi}{3}(r_1 + \Delta r)^3 - \frac{4\pi}{3}r_1^3 \quad \therefore$$

$$\Delta V = \frac{4\pi}{3}(\Delta r)^3 + 4\pi r_1^2 \Delta r + 4\pi r_1 (\Delta r)^2$$

Para valores muito pequenos de Δr , pode-se escrever-se $\Delta V \approx 4\pi r_1^2 \Delta r$. Uma vez que $4\pi r_1^2 = A$, logo, $\Delta V \cong A \Delta r$

Dessa forma, a potência média incidente será:

$$\bar{P} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \bar{\eta} A v \quad (1.57)$$

Conseqüentemente, a intensidade da onda será dada por:

$$\bar{I} = \frac{\bar{P}}{A} = \bar{\eta} v \quad (1.58)$$

Portanto, a intensidade acústica média é igual ao produto da velocidade de propagação da onda pela densidade de energia média $\bar{\eta}$. Este resultado é válido para todos os tipos de ondas.

A energia mecânica ou total de uma partícula oscilante de massa m possui componentes de energia cinética e energia potencial e, de acordo com o princípio de conservação de energia, a soma destas componentes é constante em um dado tempo qualquer, considerando que não haja absorção de energia pelo meio.

Quando a partícula passa pela sua posição de equilíbrio (ou seja, $u = 0$), a sua energia potencial é nula e sua energia cinética tem valor máximo, $\frac{1}{2} m u_0^2$. Este valor será, portanto, a energia mecânica ou total da partícula.

Considerando um volume unitário do meio, a massa total da partícula será igual à densidade ρ , e a energia total média será, conseqüentemente, igual à densidade de energia média $\bar{\eta}$, isto é,

$$\bar{W} = \bar{\eta} = \frac{1}{2} \rho u_0^2 \quad (1.59)$$

Logo, a intensidade média da onda pode ser reescrita sob a forma:

$$\bar{I} = \bar{\eta} v = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 u_0^2 \quad (1.60)$$

Da equação (1.43), $Z_a = \rho v$, logo:

$$\bar{I} = \frac{1}{2} \omega^2 Z_a u_0^2 \quad (1.61)$$

Esta equação é análoga à relação existente entre a potência elétrica P , a amplitude da corrente i_0 e a resistência elétrica R , em um circuito elétrico de corrente alternada, ou seja:

$$P = \frac{1}{2} R i_0^2$$

A equação (1.62) pode ser expressa, de maneira alternativa, como:

$$\bar{I} = \frac{1}{2} \frac{P_0^2}{\rho v} \quad (1.61.a)$$

ou ainda,

$$\bar{I} = \frac{1}{2} p_0 \omega \quad (1.61.b)$$

$$\bar{I} = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 u_0^2 \quad (1.61.c)$$

$$\bar{I} = \frac{1}{2} \rho v^3 s_0^2 \quad (1.61.d)$$

Nestas expressões, p_0 , u_0 e s_0 representam, respectivamente, as amplitudes da pressão acústica, da velocidade da partícula, de seu deslocamento e da condensação.

A diferença logarítmica entre duas intensidades acústicas é definida como nível de intensidade β , isto é,

$$\beta = 10 \log I_2 - 10 \log I_1 \quad \therefore$$

$$\beta = 10 \log \frac{I_2}{I_1} \quad (1.62)$$

em que I_2 e I_1 são, respectivamente, as intensidades final e inicial.

1.7 Pressão de radiação

Os deslocamentos das partículas de um meio, decorrentes da passagem da onda por ele, provocam variações na densidade e, conseqüentemente, na pressão acústica.

Em um dado tempo qualquer, a densidade de um elemento de volume do meio através do qual uma onda longitudinal se propaga é dada por:

$$\rho = \rho_0 (1 + s) \quad (1.63)$$

em que s representa a condensação e ρ_0 o valor estático da densidade, ou seja, o valor da densidade do meio sem que este tenha sofrido uma perturbação.

Por definição, a condensação s é dada por:

$$s = \frac{\Delta\rho}{\rho} = -\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.64)$$

em que $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ e $\frac{\Delta V}{V}$ são, respectivamente, as variações relativas de densidade e volume do meio. A relação $\frac{\partial u}{\partial x}$ representa a deformação do meio.

De acordo com a Lei de Hooke, expressa pela equação (1.33):

$$p = -E \frac{\partial u}{\partial x}$$

Dessa forma, a pressão acústica pode ser relacionada à condensação pela seguinte equação:

$$p = E s \quad (1.65)$$

Substituindo, agora, o valor $E = \rho v^2$, dado pela equação (1.42) na equação (1.65) obtém-se:

$$p = \rho v^2 s \quad (1.66)$$

Para variação senoidal,

$$s = s_0 \text{ sen } (\omega t - kx) \quad (1.67)$$

Portanto, a equação (1.66), pode ser reescrita como:

$$p = \rho_0 [1 + s_0 \sin(\omega t - kx)] v^2 s_0 \sin(\omega t - kx) \quad \therefore$$

$$p = \rho_0 v^2 s_0 \sin(\omega t - kx) + \rho_0 v^2 s_0^2 \sin^2(\omega t - kx) \quad (1.68)$$

O valor médio, por ciclo, da primeira parcela do segundo membro da equação (1.68) é nulo.

Entretanto, o valor médio da segunda parcela é $\frac{1}{2} \rho_0 v^2 s_0^2$. Este valor é denominado *pressão de radiação* p_r . Logo,

$$p_r = \frac{1}{2} \rho_0 v^2 s_0^2 \quad (1.69)$$

Multiplicando-se e dividindo-se a equação (1.69) por v , obtém-se:

$$p_r = \frac{1}{2} \rho_0 \frac{v^3}{v} s_0^2 \quad \text{ou ainda,}$$

$$p_r = \frac{1}{v} \left(\frac{1}{2} \rho_0 v^3 s_0^2 \right) \quad (1.70)$$

Entretanto, de acordo com a equação (1.62.d), o valor $\frac{1}{2} \rho_0 v^3 s_0^2$ corresponde à intensidade acústica média \bar{I} . Portanto:

$$p_r = \frac{\bar{I}}{v} \quad (1.71)$$

Porém, a razão \bar{I}/v representa a densidade de energia média $\bar{\eta}$, logo,

$$p_r = \bar{\eta} \quad (1.72)$$

Ou seja, a pressão de radiação é igual ao valor da densidade média de energia $\bar{\eta}$.

1.8 Atenuação de Ondas Planas

Enquanto a velocidade de propagação de ondas em meios materiais está relacionada às constantes elásticas e à densidade do meio, a atenuação está intrinsecamente relacionada aos mecanismos dissipativos peculiares a cada material, à frequência das vibrações, às dimensões da microestrutura, à presença de campos externos, etc. Fundamentalmente, a atenuação de ondas planas em meios materiais pode ocorrer por dois motivos:

- a) Desvio de energia do feixe paralelo por reflexão, refração, difração e dispersão (espalhamento);
- b) Absorção energética, em que parte da energia mecânica das partículas oscilantes é convertida em calor, devido ao atrito interno entre as mesmas.

Quando um feixe ultra-sônico incide obliquamente na interface que separa dos meios de impedâncias características diferentes, sofrerá reflexão e refração. A FIG. 7 ilustra claramente estes fenômenos. Nesta figura, o raio L_i representa um feixe longitudinal incidente e os raios L_r e L_{re} representam, respectivamente, os feixes longitudinais refletido e refratado. Quando um ou ambos os meios suportam tensões de cisalhamento, um modo de conversão ocorrerá na interface, devido ao fato da pressão acústica da onda longitudinal incidente ser dirigida obliquamente sobre o contorno e podendo, desse modo, ser decomposta em duas componentes, uma atuando ao longo do contorno e a outra atuando perpendicularmente a ele. Dessa maneira, as camadas (e, conseqüentemente, as partículas) do contorno estão sujeitas, simultaneamente, a tensões de compressão e de cisalhamento,

fazendo com que haja reflexão e refração tanto de ondas longitudinais como de ondas transversais. As ondas transversais, também conhecidas como ondas de cisalhamento, ao contrário das ondas longitudinais, são polarizadas. A polarização dessas ondas ocorre no plano que contém o vetor de onda longitudinal, ou seja, paralelamente ao plano de incidência.

Na FIG. 7, as ondas transversais refletida e refratada são representadas, respectivamente, pelos raios T_r e T_{re} .

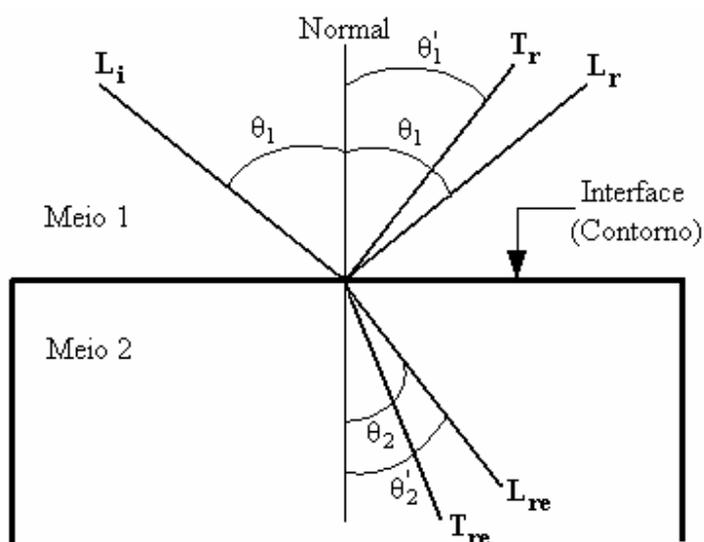


FIGURA 7 – Reflexão e refração de uma onda longitudinal na interface de dois meios de impedâncias características diferentes. Observa-se, também, o modo de conversão dessa onda na interface, devido à sua incidência oblíqua.

De acordo com a lei de Snell, os ângulos e as velocidades de propagação das diferentes ondas guardam entre si a seguinte relação:

$$\frac{v_{L1}}{\text{sen } \theta_1} = \frac{v_{L2}}{\text{sen } \theta_2} = \frac{v_{T1}}{\text{sen } \theta'_1} = \frac{v_{T2}}{\text{sen } \theta'_2} \quad (1.73)$$

em v_{L1} e v_{L2} representam as velocidades da onda longitudinal nos meios 1 e 2, respectivamente, e v_{T1} e v_{T2} as velocidades da onda transversal correspondente. O valor de θ_1 representa os ângulos de incidência e reflexão da onda longitudinal e θ_2 designa o ângulo de refração desta onda no meio 2. Os valores de θ'_1 e θ'_2 correspondem, respectivamente, aos ângulos de reflexão e refração da onda transversal ou de cisalhamento.

A relação entre as intensidades acústicas da onda refletida e da onda incidente define o coeficiente de reflexão α_r e a relação entre as intensidade das ondas transmitida e incidente define o coeficiente de transmissão α_t . Supondo-se que não haja conversão da onda na superfície de contorno dos meios (ou seja, que ambos não suportem tensões de cisalhamento) pode-se demonstrar que :

$$\alpha_r = \left(\frac{Z_2 \cos \theta_1 - Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2} \right)^2 \quad (1.74)$$

$$\alpha_t = \frac{4 Z_1 Z_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{(Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2)^2} \quad (1.75)$$

em que Z_1 e Z_2 são as impedâncias acústicas características dos meios 1 e 2, respectivamente.

Quando a onda incide normalmente à superfície de contorno, ela é transmitida de forma exclusivamente longitudinal, isto é, não há ondas transversais refletidas ou transmitidas. Neste caso, os ângulos θ_1 e θ_2 são nulos e as expressões (1.74) e (1.75) podem ser reescritas de maneira mais simplificada como:

$$\alpha_r = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2 \quad (1.76)$$

$$\alpha_t = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_2 + Z_1)^2} \quad (1.77)$$

Observa-se, a partir destas equações, que quando os dois meios possuem impedâncias características iguais, ou seja $Z_1 = Z_2$, não haverá reflexão ($\alpha_r = 0$), ocorrendo portanto, a transmissão total da energia ultra-sônica. Por outro lado, se as impedâncias forem muito diferentes, ocorrerá a reflexão quase completa dessa energia. Este fenômeno justifica a necessidade de um meio acoplante entre o transdutor e o material a ser ensaiado, evitando, assim, que haja uma camada de ar entre eles.

Ao se propagar através de um material, a onda ultra-sônica pode encontrar discontinuidades (como, por exemplo, fendas, fissuras, vazios, etc.) que, dependendo da relação entre o comprimento de onda e as dimensões dessas discontinuidades, impossibilitam sua livre propagação. Caso esta relação seja muito grande, isto é, o comprimento de onda seja muito maior que as dimensões das discontinuidades, nenhuma mudança sensível ocorrerá com as frentes de onda, e a onda se propagará indiferente à existência daquelas discontinuidades. Por outro lado, se o comprimento de onda for muito próximo das dimensões das discontinuidades, além da reflexão nas interfaces, as frentes de onda podem ainda sofrer uma inflexão em torno de suas bordas, provocando o

espalhamento da onda incidente. Esta inflexão ou curvatura das frentes de onda é conhecida como *difração*.

O espalhamento ou dispersão da onda pode estar, também, relacionado à natureza estrutural do material no qual se propaga. Em um sólido policristalino, por exemplo, a dispersão está associada aos contornos dos grãos, que constituem fronteiras bidimensionais que separam cristais de diferentes orientações no arranjo policristalino. Há, dessa forma, em cada contorno, uma descontinuidade do módulo de elasticidade e, conseqüentemente, da impedância acústica característica. Em decorrência disto, ocorrerão, nos contornos dos grãos, reflexões e a dispersão resultante dependerá do grau de anisotropia dos cristais, do diâmetro médio dos grãos e do comprimento de onda. Se o comprimento de onda for pequeno comparado ao tamanho dos grãos, a dispersão será provocada quase exclusivamente pôr reflexão regular e, neste caso, a atenuação resultante independerá da freqüência. Caso contrário, se o comprimento de onda for grande comparado às dimensões dos grãos, ocorrerá um tipo de dispersão conhecido como dispersão de Rayleigh e a atenuação será proporcional à quarta potência da freqüência. Entretanto, a dispersão de Rayleigh não é significativa para freqüências abaixo de 1MHz.

Até o presente momento, para se estabelecer todas as relações físicas que caracterizam a propagação de ondas mecânicas em meios materiais, considerou-se a hipótese de que o meio fosse não absorvente. Entretanto, quando uma onda ultra-sônica se propaga pôr um meio material real (absorvente), parte da energia por ela transportada é absorvida pelo meio e convertida em calor, devido ao atrito interno entre as partículas vibrantes. A quantidade de energia que a onda transporta depende de sua distância à fonte. Quanto maior a distância entre a fonte e a superfície ou frente de onda, tanto menor será a energia da onda.

Uma vez que a energia é proporcional ao quadrado da amplitude, conforme já demonstrado anteriormente, a amplitude das vibrações das partículas diminuirá à medida que a onda se propaga. Para se estabelecer a lei que governa o decréscimo de energia da onda,

considerar-se-á uma pequena camada do meio de espessura Δx , normal à direção de propagação da onda, situada a uma distância x da fonte, conforme ilustrado na FIG. 8.

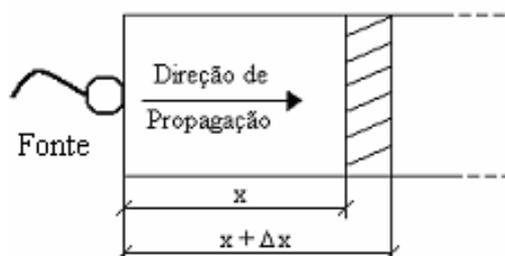


FIGURA 8 – Modelo para a determinação do decréscimo de energia (ou densidade de energia) da onda em função da distância à fonte.

Se a atenuação for uniforme ao longo do material, a relação entre o decréscimo fracional (relativo) da amplitude da onda e a espessura da camada deverá ser constante, ou seja:

$$\frac{-\Delta u}{u} / \Delta x = \alpha \quad (1.78)$$

em que α , que representa uma constante que depende da natureza do material, é denominado *coeficiente de absorção do meio*. O coeficiente de absorção α é, algumas vezes, designado como *coeficiente de atenuação*.

Substituindo-se, na equação anterior, os incrementos Δu e Δx pelas respectivas diferenciais du e dx , pode-se escrever:

$$\frac{du}{u} = -\alpha dx \quad (1.79)$$

Integrando-se esta equação e aplicando as condições de contorno, isto é, $u = u_0$ para $x = 0$, obtém-se:

$$\int_{u_0}^u \frac{1}{u} du = -\alpha \int_0^x dx \quad \therefore \quad [\ln u]_{u_0}^u = \alpha [x]_0^x \quad \therefore \quad \ln \frac{u}{u_0} = -\alpha x \quad \therefore$$

$$u = u_0 e^{-\alpha x} \quad (1.80)$$

Dessa forma, a equação de onda plana para um meio material absorvente é dada por:

$$u = u_0 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - kx) \quad (1.81)$$

Observa-se que esta equação é análoga à equação (1.12), que representa o movimento de um sistema oscilante amortecido.

De acordo com a expressão (1.53), a densidade de energia média $\bar{\eta}$ é diretamente proporcional ao quadrado da amplitude do deslocamento das partículas. Dessa forma, chamando de $\bar{\eta}_0$ e $\bar{\eta}$ as densidades de energia, respectivamente, em $x = 0$ e em um ponto x qualquer ao longo do material, pode-se escrever:

$$\bar{\eta}_0 = \frac{1}{2} \rho u_0^2 \omega^2 \quad \text{e} \quad \bar{\eta} = \frac{1}{2} \rho u^2 \omega^2$$

Entretanto, $u^2 = u_0^2 e^{-2\alpha x}$, logo,

$$\bar{\eta} = \frac{1}{2} \rho u_0^2 \omega^2 e^{-2\alpha x}$$

ou seja,

$$\bar{\eta} = \bar{\eta}_0 e^{-2\alpha x} \quad (1.82)$$

Esta expressão representa a lei que descreve o decréscimo de energia da onda na medida em que se propaga ao longo do material. Uma vez que a intensidade acústica é diretamente proporcional à densidade de energia, é fácil demonstrar que:

$$\bar{I} = \bar{I}_0 e^{-2\alpha x} \quad (1.83)$$

A expressão (1.60) permite escrever:

$$\bar{I}_0 = \frac{1}{2} \rho v \omega_0^2 \quad \text{e} \quad \bar{I} = \frac{1}{2} \rho v \omega^2$$

Substituindo estes valores na equação (1.83), obtém-se:

$$\frac{1}{2} \rho v \omega^2 = \frac{1}{2} \rho v \omega_0^2 e^{-2\alpha x} \quad \therefore \quad \omega^2 = \omega_0^2 e^{-2\alpha x} \quad \text{ou melhor,}$$

$$\omega = \omega_0 e^{-\alpha x} \quad (1.84)$$

Manipulando-se, de maneira análoga, as equações (1.61.a) e (1.62.1), pode-se obter, respectivamente:

$$p = p_0 e^{-\alpha x} \quad (1.85)$$

$$s = s_0 e^{-\alpha x} \quad (1.86)$$

Estas três últimas expressões, juntamente com a equação (1.80), podem ser escritas sob a forma de uma única expressão, isto é,

$$A = A_0 e^{-\alpha x} \quad (1.87)$$

em que A poderá ser u , \dot{u} , p ou s e A_0 poderá ser, respectivamente, u_0 , \dot{u}_0 , p_0 ou s_0 .

Explicitando α na equação (1.87), obtém-se, finalmente, a expressão para o coeficiente de absorção, ou seja:

$$-\alpha x = \ln \frac{A}{A_0} \quad \therefore$$

$$\alpha = -\frac{1}{x} \ln \frac{A}{A_0} \quad (1.88)$$

Para materiais anisotrópicos, em que o coeficiente de absorção depende da direção de propagação da onda, a expressão (1.88) é escrita, de maneira mais geral, como:

$$\alpha_{ij} = -\frac{1}{x} \ln \frac{A}{A_0} \quad (1.89)$$

em que i e j podem assumir valores inteiros no intervalo $[1,3]$.

O coeficiente de absorção α_{ij} pode ser expresso, também, em termos do decréscimo da amplitude por ciclo (isto é, em um período completo), ou seja, em termos do decremento logarítmico δ (*vide* seção 1.2.2.2). Neste caso, x corresponderá ao valor do comprimento de onda λ e, conforme as equações (1.14) e (1.80),

$$e^{-\delta} = \frac{u_0}{u} = e^{-\alpha_{ij} \lambda} \quad \therefore$$

$$\delta = \alpha_{ij} \lambda \quad (1.90)$$

ou ainda,

$$\delta = \frac{2\pi v}{\omega} \alpha_{ij} \quad (1.91)$$

Portanto, pode-se concluir que:

$$\alpha_{ij} = \frac{\omega \delta}{2\pi v} \quad (1.92)$$

em que ω e v são, respectivamente, a frequência angular e a velocidade de propagação da onda.

Através da equação (1.92), observa-se que o coeficiente de absorção é diretamente proporcional à frequência da onda, o que permite concluir que quanto maiores as frequências, maiores serão os coeficientes de absorção.

Por fim, o coeficiente de absorção pode ser, também, relacionado ao fator Q_m , descrito pela equação (1.20). Dessa forma, pode-se escrever:

$$\alpha_{ij} = \frac{\omega \pi}{2\pi v Q_m} \quad \therefore$$

$$\alpha_{ij} = \frac{\omega}{2 v Q_m} \quad (1.93)$$

1.9 Velocidade de fase e velocidade de grupo

Quando se considerou a propagação de uma vibração mecânica ao longo de um meio material, admitiu-se, até o presente momento, a existência de uma única onda harmônica de frequência fixa. O movimento ondulatório foi, então, expresso em termos das funções periódicas $u = u_0 \cos(\omega t - kx)$ e $u = u_0 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - kx)$, respectivamente para meios não absorventes e absorventes.

Existem, entretanto, vibrações de natureza complexa, como, por exemplo, os pulsos ondulatórios, que não são funções periódicas. Todavia, estas vibrações podem ser decompostas em vibrações harmônicas puras, isto é, podem ser representadas por funções de onda co-senoidais harmônicas, sendo necessário, para isto, dispor-se de um contínuo de frequências.

A diferença fundamental entre um pulso ondulatório e uma onda periódica de uma só frequência consiste no fato de que o pulso tem um princípio e um fim, enquanto a onda harmônica se repete indefinidamente.

Para se enviar um sinal mediante uma onda, torna-se necessário um pulso, constituído por um grupo de ondas de diferentes frequências, em lugar de uma onda harmônica de uma só frequência. Este grupo ou conjunto de ondas é denominado *pacote de ondas*. A FIG. 9 representa um pacote de ondas constituído por duas ondas harmônicas de frequências angulares diferentes.

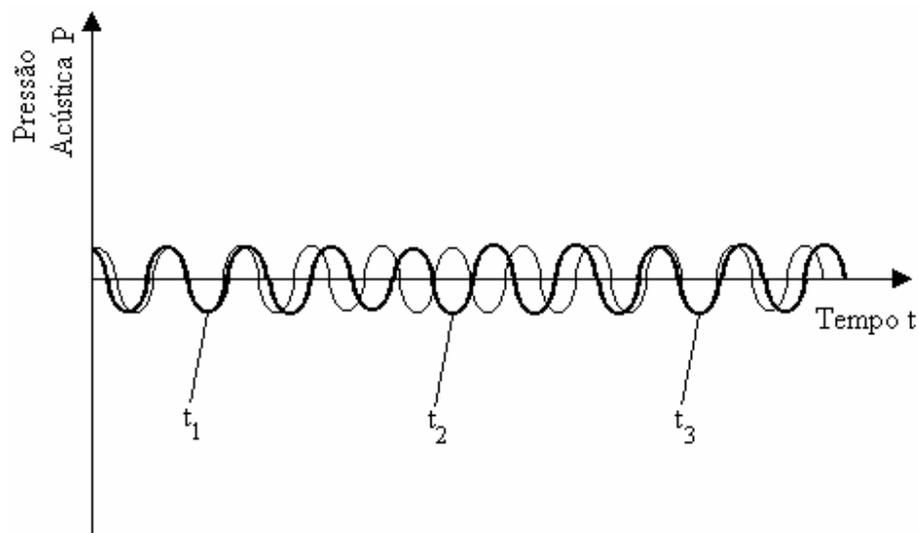


FIGURA 9 - Duas ondas de frequências ligeiramente diferentes que estão em fase nos instantes t_1 e t_3 e fora de fase, com diferença de 180° , no instante t_2 .

A superposição das duas ondas do pacote da FIG. 9 produz uma onda resultante de frequência aproximadamente igual às frequências das ondas originais, mas de amplitude modulada, conforme demonstrado pela curva tracejada da FIG. 10.

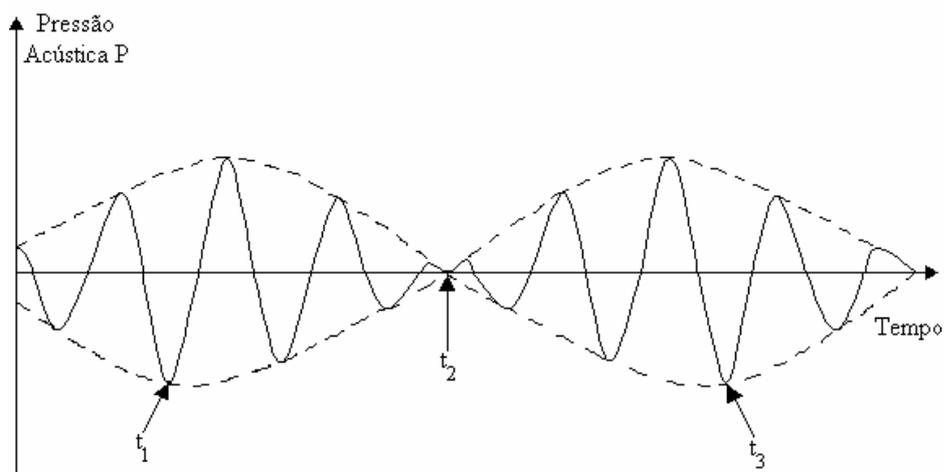


FIGURA 10 – Onda resultante da superposição das duas ondas descritas na FIG. 9. A amplitude é máxima nos instantes t_1 e t_3 e nula no instante t_2 .

Há uma importante relação matemática entre a distribuição de frequências das funções harmônicas que constituem o pacote de onda e o tempo de duração do pulso ondulatório, ou seja,

$$\Delta\omega \Delta t \approx 1 \quad (1.94)$$

Se um pacote de onda mantém sua forma à medida que se desloca no meio material, todas as ondas harmônicas que o compõem terão a mesma velocidade, o que acontecerá somente se as velocidades destas ondas não dependerem do comprimento de onda ou da frequência das vibrações. Um meio no qual a velocidade de propagação da onda independe do comprimento de onda, ou da frequência, é denominado *meio não dispersivo*⁵.

Por outro lado, se o meio for dispersivo, as velocidades das ondas que constituem o pacote dependerão das frequências e dos comprimentos de onda, e o pacote de onda terá sua forma alterada à medida que avança no meio. Neste caso, a velocidade do pacote (por exemplo, a velocidade do centro do pacote) não é a mesma que a velocidade média das ondas que o constituem. A velocidade média das ondas harmônicas é denominada *velocidade de fase* e a velocidade do pacote é denominada *velocidade de grupo*. Rayleigh foi quem introduziu o conceito de velocidade de grupo ao estudo das ondas.

Para simplificar a dedução da expressão analítica da velocidade de grupo, continuar-se-á considerando um pacote contendo apenas duas ondas de frequências ligeiramente diferentes entre si.

Se a primeira onda possuir um comprimento de onda λ e se propagar com velocidade v , a segunda onda terá comprimento de onda $\lambda' = \lambda + d\lambda$ e se propagará com velocidade

⁵ O ar, por exemplo, é um meio não dispersivo para as ondas sonoras, enquanto os líquidos e os sólidos, geralmente, não o são. Para ondas eletromagnéticas, todos os meios materiais são dispersivos.

$$v' = v + \frac{dv}{d\lambda} d\lambda \quad (1.95)$$

A posição relativa entre as duas ondas, em um dado instante, é representada pela FIG. 11. As cristas destas ondas coincidem no ponto A. Neste ponto, ocorre a máxima amplitude da vibração resultante.

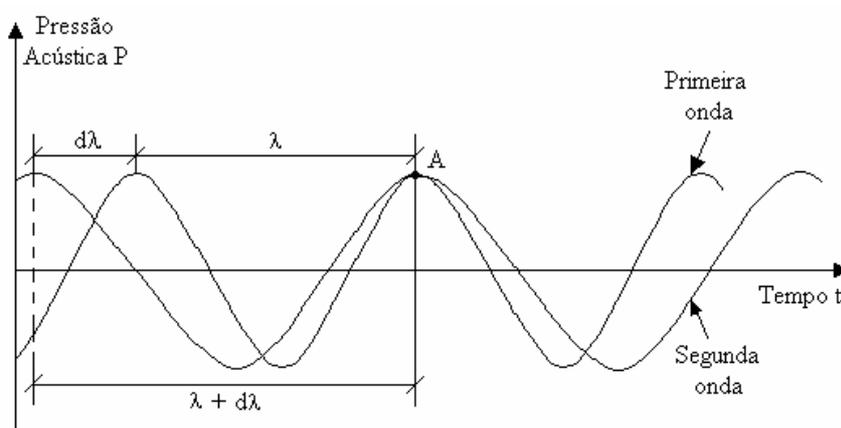


FIGURA 11 - Posição relativa entre duas ondas em um dado instante.

Supondo-se que v' seja maior que v , a segunda onda se adiantará em relação à primeira.

Após transcorrido um determinado tempo $t = t_t$, ela se adiantará de um segmento igual a $d\lambda$ e, como resultado, as ondas não coincidirão mais no ponto A, e sim, no ponto B, conforme ilustrado na FIG. 12.

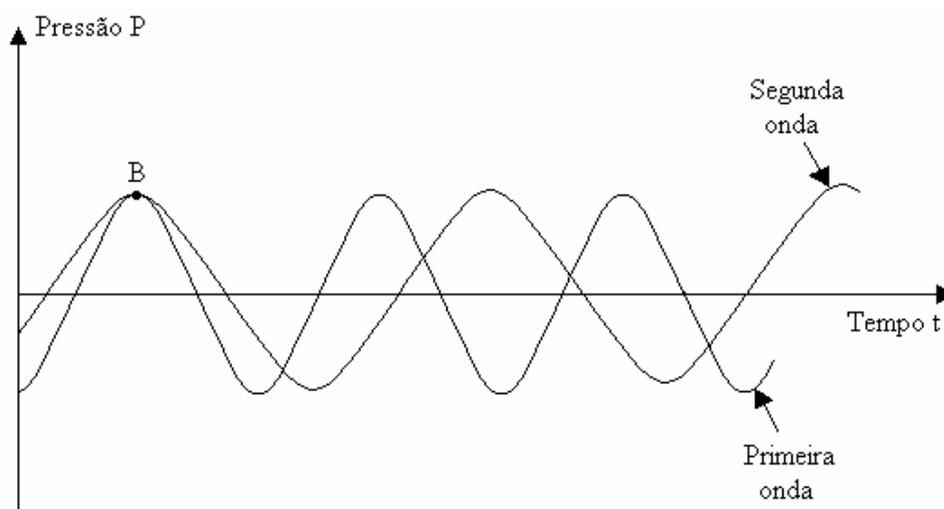


FIGURA 12 – Posição relativa entre as duas ondas descritas na FIG. 9 após transcorrido um intervalo de tempo t_t .

O ponto correspondente ao máximo da vibração composta resultante se deslocará para trás de um segmento λ em relação à primeira onda. Dessa maneira, pode-se deduzir que a velocidade de propagação do máximo das ondas resultantes, em relação ao meio, é menor que a velocidade de propagação da primeira onda de um valor igual $\frac{\lambda}{t_t}$. Esta velocidade de propagação do máximo da vibração composta é o que se denomina *velocidade de grupo* v_g , ou seja,

$$v_g = v - \frac{\lambda}{t_t} \quad (1.96)$$

Uma vez que a velocidade da segunda onda em relação à primeira é igual a $v_{21} = v' - v$, logo:

$$t_t = \frac{d\lambda}{v'-v} \quad (1.97)$$

Substituindo a equação (1.97) na equação (1.96), obtém-se:

$$v_g = v - \frac{\lambda}{\frac{d\lambda}{v'-v}}$$

ou melhor,

$$v_g = v - \frac{\lambda(v'-v)}{d\lambda} \quad (1.98)$$

Substituindo, agora, o valor de v' , expresso pela equação (1.95), na equação (1.98.), obtém-se, finalmente, a expressão para a velocidade de grupo, isto é,

$$v_g = v - \frac{\lambda(v + dv - v)}{d\lambda} \quad \therefore$$

$$v_g = v - \lambda v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} + \lambda v \quad \therefore$$

$$v_g = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} \quad (1.99)$$

Observa-se que quanto maior a razão $\frac{dv}{d\lambda}$ tanto maior será a diferença entre a velocidade de grupo v_g e a velocidade de fase v , ou seja, maior será a dependência entre esta velocidade

e o comprimento de onda (ou frequência). Portanto, quando $\frac{dv}{d\lambda} > 0$, a velocidade de grupo

v_g será menor que a velocidade fase v e quando $\frac{dv}{d\lambda} < 0$, a velocidade de grupo será maior que a velocidade fase. Dessa forma, a velocidade de grupo poderá ser maior ou menor que a velocidade de fase. A velocidade de grupo será menor que a de fase quando as ondas de maiores comprimentos de onda (menores frequências) se propagarem mais rapidamente que as ondas mais curtas (de menores comprimentos de onda ou maiores frequências). Este fenômeno é conhecido como *dispersão normal*.

Para os meios em que não exista dispersão, ou seja, $\frac{dv}{d\lambda} = 0$, a velocidade de grupo será, como dito anteriormente, igual à velocidade de fase.

CAPÍTULO 2 PROPAGAÇÃO DE ONDAS ULTRA-SÔNICAS EM SÓLIDO ANISOTRÓPICO INFINITO

Uma das mais importantes aplicações da técnica de ultra-som é a determinação das constantes elásticas do material. Dependendo de fatores como as dimensões do material e a frequência das ondas, a propagação pode ocorrer sob condições de “campo livre” ou sob condições de “ondas guiadas”.

Quando uma perturbação ocorre em um ponto de um sólido infinito, dois tipos de onda de volume podem se propagar, conforme visto anteriormente. O primeiro tipo corresponde às ondas longitudinais e envolve a mudança de volume do meio (sólido). O segundo tipo não provoca nenhuma mudança no volume, envolvendo apenas movimentos cisalhantes e é denominado ondas transversais.

Em 1885, Rayleigh demonstrou, teoricamente, que era possível uma onda bidimensional propagar-se na superfície de um sólido. O movimento da partícula da superfície é elíptico, havendo uma componente longitudinal da onda paralela à superfície, na direção de propagação e uma componente transversal normal à superfície de propagação. Ambas componentes, longitudinal e transversal, atenuam rapidamente com a profundidade de forma que a maior parte da energia fica confinada em uma camada de espessura não superior a um comprimento de onda.

Há outros tipos de ondas de superfície, como por exemplo, as ondas de Love (ondas bidimensionais transversais que possuem uma componente transversal ao longo da superfície com o deslocamento da partícula perpendicular à direção de propagação), as ondas de Stoneley (ondas que ocorrem na superfície entre dois sólidos, no qual a onda em cada lado da interface destes sólidos é do tipo onda de Rayleigh) e as ondas de Lamb, que se propagam em placas.

As ondas de superfície ocorrem, em geral, quando a relação entre a base b e altura h da seção transversal do sólido em que a onda estiver se propagando for elevada, ou seja, $b \gg h$ e quando comprimento de onda λ for maior que a altura h daquela seção.

No presente capítulo, serão estabelecidas as equações fundamentais que descrevem a propagação de ondas ultra-sônicas em um sólido anisotrópico infinito. Uma atenção especial será dada ao sólido ortotrópico por representar, em uma primeira aproximação, satisfatoriamente o material madeira.

2.1 Ondas em sólido anisotrópico infinito

Em um material anisotrópico, a relação entre a direção de propagação da onda e a direção do deslocamento da partícula é complexa. Em outras palavras, as ondas não são, em geral, puramente longitudinais ou puramente transversais, mas sim formas associadas destes dois tipos de ondas.

Há, entretanto, certas direções em que ondas longitudinais ou transversais puras podem se propagar. Nesta seção, serão deduzidas as equações de propagação de ondas em sólidos anisotrópicos e as soluções específicas serão examinadas, para que correspondam aos tipos de ondas puras.

As equações do movimento para um corpo anisotrópico podem ser encontradas através da combinação entre da Lei de Newton,

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \rho \ddot{u}_i \quad (2.1)$$

e a Lei de Hooke generalizada,

$$\sigma_{ik} = C_{iklm} \varepsilon_{lm} \quad (2.2)$$

fornecendo,

$$\rho \underline{\underline{\sigma}}_1 = C_{iklm} \frac{\partial \varepsilon_{lm}}{\partial x_k} \quad (2.3)$$

Pela definição de deformação, dada pela equação (A.11) do Apêndice A, pode-se escrever:

$$\varepsilon_{lm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \right) \quad (2.4)$$

Substituindo ε_{lm} na equação (2.3), obtém-se:

$$\rho \underline{\underline{\sigma}}_1 = C_{iklm} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \right) \right] \quad \therefore$$

$$\rho \underline{\underline{\sigma}}_1 = \frac{1}{2} C_{iklm} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \right) \quad (2.5)$$

em que C_{iklm} é um tensor de quarto grau conhecido como *tensor de constantes elásticas* ou *tensor de rigidez*.

Uma vez que C_{iklm} é simétrico em relação a l e m, pode-se permutar estes índices no segundo termo dentro dos parênteses da equação anterior:

$$\rho \underline{\underline{\sigma}}_1 = \frac{1}{2} C_{iklm} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_l} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right) \quad \therefore$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{1}{2} C_{iklm} 2 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right) \quad \text{portanto,}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = C_{iklm} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right) \quad (2.6)$$

Assumindo-se que ondas harmônicas planas estejam se propagando no corpo, a solução da equação diferencial (2.6) será:

$$u_i = u_{0i} \exp[i(\omega t - k_j x_j)] \quad (2.7)$$

em que u_{0i} são as amplitudes das componentes do vetor deslocamento e k_j são as componentes do vetor de onda. O valor u_{0i} pode também ser escrito como $u_0 \alpha_i$, em que u_0 representa a amplitude do deslocamento e α_i são os co-senos diretores do vetor deslocamento da partícula. Substituindo o valor expresso pela equação (2.7) na equação (2.6), obtém-se:

$$\rho \omega^2 u_i = C_{iklm} k_k k_l u_m \quad (2.8)$$

Esta equação pode ser escrita de forma mais homogênea fazendo-se $u_i = u_m \delta_{im}$, em que o tensor δ_{im} é denominado *tensor unitário* ou *delta de Kronecker*, ou seja,

$$(\rho \omega^2 \delta_{im} - C_{iklm} k_k k_l) u_m = 0 \quad (2.9)$$

A equação (2.9) foi desenvolvida por Christoffel e é comumente conhecida como equação de Christoffel. Ela representa um conjunto de três equações homogêneas de primeiro grau

em u_1, u_2 e u_3 . Estas equações terão soluções não nulas, não triviais, se, e somente se, o determinante dos coeficientes for igual a zero, ou seja:

$$\left| C_{iklm} k_k k_l - \rho \omega^2 \delta_{im} \right| = 0 \quad (2.10)$$

O desenvolvimento da equação (2.10) fornece uma equação cúbica em ω^2 (ou em termos de v^2). As três raízes desta equação são diferentes, gerando três diferentes valores de velocidades de propagação.

É mais conveniente escrever a equação (2.9) na forma:

$$\left(\lambda_{im} - \rho v^2 \delta_{im} \right) u_m = 0 \quad (2.11)$$

ou ainda, matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} - \rho v^2 & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} - \rho v^2 & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} - \rho v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.12)$$

em que o tensor λ_{im} , conhecido como tensor de Christoffel, é definido como:

$$\lambda_{im} = C_{iklm} n_k n_l \quad (2.13)$$

Na equação (2.11), v representa a velocidade de fase das ondas e n_i , implícitos em λ_{im} , denotam os co-senos diretores da normal às frentes de onda.

Portanto, o novo determinante a ser calculado será:

$$\left| \lambda_{im} - \rho v^2 \delta_{im} \right| = 0 \quad (2.14)$$

O fator λ_{im} depende da simetria estrutural do corpo e da orientação das ondas neste corpo.

A equação (2.14) pode ser reescrita, sob a forma matricial, como:

$$\begin{bmatrix} (\lambda_{11} - \rho v^2) & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{12} & (\lambda_{22} - \rho v^2) & \lambda_{23} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & (\lambda_{33} - \rho v^2) \end{bmatrix} = 0 \quad (2.15)$$

em que,

$$\begin{aligned} \lambda_{11} = & C_{1111} n_1^2 + C_{1221} n_2^2 + C_{1331} n_3^2 + C_{1121} n_1 n_2 + C_{1131} n_1 n_3 + C_{1211} n_2 n_1 \\ & + C_{1231} n_2 n_3 + C_{1311} n_3 n_1 + C_{1321} n_3 n_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{22} = & C_{2112} n_1^2 + C_{2222} n_2^2 + C_{2332} n_3^2 + C_{2122} n_1 n_2 + C_{2132} n_1 n_3 + C_{2212} n_2 n_1 \\ & + C_{2232} n_2 n_3 + C_{2312} n_3 n_1 + C_{2322} n_3 n_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{33} = & C_{3113} n_1^2 + C_{3223} n_2^2 + C_{3333} n_3^2 + C_{3123} n_1 n_2 + C_{3133} n_1 n_3 + C_{3213} n_2 n_1 \\ & + C_{3233} n_2 n_3 + C_{3313} n_3 n_1 + C_{3323} n_3 n_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{12} = & C_{1112} n_1^2 + C_{1222} n_2^2 + C_{1332} n_3^2 + C_{1122} n_1 n_2 + C_{1132} n_1 n_3 + C_{1212} n_2 n_1 \\ & + C_{1232} n_2 n_3 + C_{1312} n_3 n_1 + C_{1322} n_3 n_2 \end{aligned}$$

$$\lambda_{13} = C_{1113} n_1^2 + C_{1223} n_2^2 + C_{1333} n_3^2 + C_{1123} n_1 n_2 + C_{1133} n_1 n_3 + C_{1213} n_2 n_1 \\ + C_{1233} n_2 n_3 + C_{1313} n_3 n_1 + C_{1323} n_3 n_2$$

$$\lambda_{23} = C_{2113} n_1^2 + C_{2223} n_2^2 + C_{2333} n_3^2 + C_{2123} n_1 n_2 + C_{2133} n_1 n_3 + C_{2213} n_2 n_1 \quad (2.16) \\ + C_{2233} n_2 n_3 + C_{2313} n_3 n_1 + C_{2323} n_3 n_2$$

Muitas vezes, é conveniente utilizar a notação matricial ao invés da notação tensorial. Para isso, o seguinte esquema é adotado:

Notação tensorial:	11	22	33	23,32	13,31	12,21
Notação matricial:	1	2	3	4	5	6

Dessa forma, as expressões (2.16) tornam-se:

$$\lambda_{11} = \lambda_1 = C_{11} n_1^2 + C_{66} n_2^2 + C_{55} n_3^2 + C_{16} n_1 n_2 + C_{51} n_1 n_3 + C_{61} n_2 n_1 + C_{65} n_2 n_3 \\ + C_{51} n_3 n_1 + C_{56} n_3 n_2$$

$$\lambda_{22} = \lambda_2 = C_{66} n_1^2 + C_{22} n_2^2 + C_{44} n_3^2 + C_{62} n_1 n_2 + C_{64} n_1 n_3 + C_{26} n_2 n_1 + C_{24} n_2 n_3 \\ + C_{46} n_3 n_1 + C_{42} n_3 n_2$$

$$\lambda_{33} = \lambda_3 = C_{55} n_1^2 + C_{44} n_2^2 + C_{33} n_3^2 + C_{54} n_1 n_2 + C_{53} n_1 n_3 + C_{45} n_2 n_1 + C_{43} n_2 n_3 \\ + C_{35} n_3 n_1 + C_{34} n_3 n_2$$

$$\lambda_{12} = \lambda_6 = C_{15} n_1^2 + C_{62} n_2^2 + C_{54} n_3^2 + C_{12} n_1 n_2 + C_{14} n_1 n_3 + C_{66} n_2 n_1 + C_{64} n_2 n_3 \\ + C_{56} n_3 n_1 + C_{52} n_3 n_2$$

$$\lambda_{13} = \lambda_5 = C_{15} n_1^2 + C_{64} n_2^2 + C_{53} n_3^2 + C_{14} n_1 n_2 + C_{15} n_1 n_3 + C_{65} n_2 n_1 + C_{63} n_2 n_3 + C_{55} n_3 n_1 + C_{54} n_3 n_2$$

$$\lambda_{23} = \lambda_4 = C_{65} n_1^2 + C_{24} n_2^2 + C_{43} n_3^2 + C_{64} n_1 n_2 + C_{63} n_1 n_3 + C_{25} n_2 n_1 + C_{23} n_2 n_3 + C_{45} n_3 n_1 + C_{44} n_3 n_2$$

Devido a simetria do tensor C_{iklm} , $C_{15} = C_{51}$, $C_{16} = C_{61}$, $C_{26} = C_{62}$, $C_{24} = C_{42}$, $C_{34} = C_{43}$, $C_{35} = C_{53}$, $C_{45} = C_{54}$, $C_{46} = C_{64}$ e $C_{56} = C_{65}$, logo:

$$\lambda_1 = C_{11} n_1^2 + C_{66} n_2^2 + C_{55} n_3^2 + 2C_{16} n_1 n_2 + 2C_{15} n_1 n_3 + 2C_{56} n_2 n_3$$

$$\lambda_2 = C_{66} n_1^2 + C_{22} n_2^2 + C_{44} n_3^2 + 2C_{26} n_1 n_2 + 2C_{46} n_1 n_3 + 2C_{24} n_2 n_3$$

$$\lambda_3 = C_{55} n_1^2 + C_{44} n_2^2 + C_{33} n_3^2 + 2C_{45} n_1 n_2 + 2C_{35} n_1 n_3 + 2C_{34} n_2 n_3$$

$$\lambda_4 = C_{65} n_1^2 + C_{24} n_2^2 + C_{43} n_3^2 + C_{64} n_1 n_2 + C_{63} n_1 n_3 + C_{25} n_2 n_1 + C_{23} n_2 n_3 + C_{45} n_3 n_1 + C_{44} n_3 n_2$$

$$\lambda_5 = C_{15} n_1^2 + C_{64} n_2^2 + C_{53} n_3^2 + C_{14} n_1 n_2 + C_{15} n_1 n_3 + C_{65} n_2 n_1 + C_{63} n_2 n_3 + C_{55} n_3 n_1 + C_{54} n_3 n_2$$

$$\lambda_6 = C_{15} n_1^2 + C_{62} n_2^2 + C_{54} n_3^2 + C_{12} n_1 n_2 + C_{14} n_1 n_3 + C_{66} n_2 n_1 + C_{64} n_2 n_3 + C_{56} n_3 n_1 + C_{52} n_3 n_2 \quad (2.17)$$

O exame cuidadoso da equação (2.15) mostra que os vetores deslocamento associados a cada autovalor, ρv^2 , são mutuamente perpendiculares. Para uma dada direção de propagação, definida pelo vetor de onda \vec{k} , três ondas se propagam com vetores deslocamento mutuamente perpendiculares entre si e com velocidades diferentes.

Em geral, estas ondas não são puramente longitudinais ou puramente transversais. Entretanto, para certas direções de propagação em um dado meio material, em que \vec{k} é um autovetor de λ_{im} , uma onda é puramente longitudinal e as outras duas são puramente transversais.

Para uma onda longitudinal pura, o vetor deslocamento da partícula \vec{u} é paralelo ao vetor unitário normal às frentes de onda \vec{h} . Por conseguinte, o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{h}$ é nulo. Por outro lado, para uma onda transversal pura, os mesmos vetores são perpendiculares entre si e, conseqüentemente, o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{h}$ é igual a zero.

Christoffel demonstrou que os co-senos diretores α_i do deslocamento das partículas das frentes de onda estão relacionados às correspondentes velocidades de onda por:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \lambda_{11} + \alpha_2 \lambda_{12} + \alpha_3 \lambda_{13} &= \alpha_1 \rho v^2 \\ \alpha_1 \lambda_{12} + \alpha_2 \lambda_{22} + \alpha_3 \lambda_{23} &= \alpha_2 \rho v^2 \\ \alpha_1 \lambda_{13} + \alpha_2 \lambda_{23} + \alpha_3 \lambda_{33} &= \alpha_3 \rho v^2 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Este conjunto de equações pode ser facilmente deduzido a partir da equação (2.11), substituindo u_m pelos co-senos diretores α_i do vetor deslocamento da partícula \vec{u} ,

$$\lambda_{mi} \alpha_i - \rho v^2 \delta_{mi} \alpha_i = 0 \quad \therefore$$

$$\lambda_{mi} \alpha_i = \rho v^2 \delta_{mi} \alpha_i \quad (2.19)$$

2.2 Ondas em um sólido ortotrópico

Quando um sólido possui, em cada ponto, três planos de simetria elástica, é denominado ortogonalmente anisotrópico ou, simplesmente, ortotrópico. O conjunto de eixos x_1, x_2 e x_3 , perpendiculares entre si e paralelos às normais àqueles planos são conhecidos como eixos de simetria do sólido. Esta forma de simetria elástica é de considerável importância, uma vez que ocorre em uma vasta quantidade de materiais empregados na engenharia, inclusive a madeira.

A matriz de rigidez (ou matriz dos coeficientes elásticos) de um sólido ortotrópico é dada por:

$$[C]_{\text{Ortotrópico}} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Considere, por exemplo, uma onda se propagando perpendicularmente a um dos planos de simetria elástica, mais especificamente na direção x_1 , no sentido positivo do eixo. Neste caso, o vetor normal às frentes de onda \vec{h} possuirá componentes $n_1 = 1, n_2 = 0$ e $n_3 = 0$, conforme ilustrado na FIG. 13.

Dessa forma, a equação (2.15) pode ser simplificada e reescrita como:

$$\begin{vmatrix} \lambda_{11} - \rho v^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{22} - \rho v^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} - \rho v^2 \end{vmatrix} = 0$$

Logo,

$$(\lambda_{11} - \rho v^2)(\lambda_{22} - \rho v^2)(\lambda_{33} - \rho v^2) = 0$$

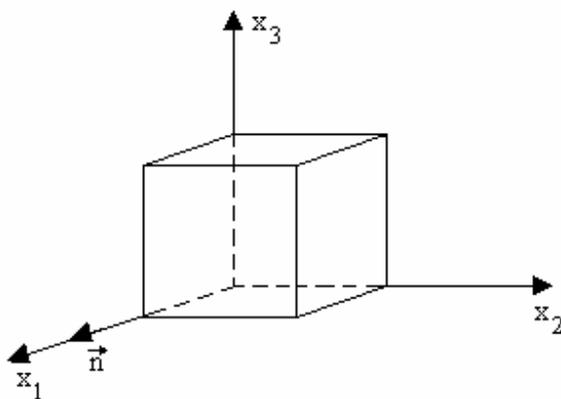


FIGURA 13 – Propagação de uma onda ao longo do eixo x_1 de simetria de um sólido ortotrópico.

Solucionando a equação anterior, obtêm-se três raízes distintas, ou seja, três valores quadráticos de velocidade de propagação:

$$v_1^2 = \frac{\lambda_{11}}{\rho} = \frac{C_{11}}{\rho}$$

$$v_2^2 = \frac{\lambda_{22}}{\rho} = \frac{C_{66}}{\rho}$$

$$v_3^2 = \frac{\lambda_{33}}{\rho} = \frac{C_{55}}{\rho}$$

Substituindo, primeiramente, ρv_1^2 nas equações (2.18), obtém-se:

$$\alpha_1 C_{11} = \alpha_1 C_{11}$$

$$\alpha_2 C_{66} = \alpha_2 C_{11}$$

$$\alpha_3 C_{55} = \alpha_3 C_{11}$$

As duas últimas equações fornecem:

$$\alpha_2 (C_{66} - C_{11}) = 0 \quad \text{se, e somente se, } \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_3 (C_{55} - C_{11}) = 0 \quad \text{se, e somente se, } \alpha_3 = 0$$

De acordo com a Álgebra Vetorial, a soma dos quadrados dos co-senos diretores deve ser igual a 1, ou seja:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$$

Por conseguinte,

$$\alpha_1 = 1$$

O vetor deslocamento da partícula \vec{u} terá, então, a direção $(1,0,0)$. Dessa forma, o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{h}$ é nulo e v_1 representa, portanto, a velocidade da onda longitudinal.

Para ρv_2^2 , as equações (2.18) fornecem:

$$\alpha_1 C_{11} = \alpha_1 C_{66}$$

$$\alpha_2 C_{66} = \alpha_2 C_{66}$$

$$\alpha_3 C_{55} = \alpha_3 C_{66} \quad \text{logo,}$$

$$\alpha_1 (C_{11} - C_{66}) = 0 \quad \therefore \quad \alpha_1 = 0$$

$$\alpha_3 (C_{55} - C_{66}) = 0 \quad \therefore \quad \alpha_3 = 0$$

Da condição de ortogonalidade,

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \quad \therefore \quad \alpha_2 = 1$$

O vetor deslocamento da partícula possuirá, conseqüentemente, a direção $(0,1,0)$.

Por fim, substituindo ρv_3^2 nas equações (2.18), obtém-se:

$$\alpha_1 C_{11} = \alpha_1 C_{55}$$

$$\alpha_2 C_{66} = \alpha_2 C_{55}$$

$$\alpha_3 C_{66} = \alpha_3 C_{66}$$

As duas primeiras equações anteriores permitem escrever:

$$\alpha_1 (C_{11} - C_{55}) = 0 \quad \therefore \quad \alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 (C_{66} - C_{55}) = 0 \quad \therefore \quad \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \quad \therefore \quad \alpha_3 = 1$$

Neste caso, o vetor deslocamento da partícula \vec{u} terá direção $(0,0,1)$.

Observa-se, com facilidade, que para as velocidades v_2 e v_3 os respectivos vetores deslocamento das partículas são perpendiculares ao vetor normal à frente de onda \vec{h} . Assim sendo, os produtos escalares entre aqueles vetores e \vec{h} são iguais a zero e v_2 e v_3 representam, desta maneira, velocidades de ondas transversais.

De maneira análoga, pode-se determinar os três termos restantes (C_{22}, C_{33} e C_{44}) da diagonal da matriz de rigidez analisando-se a propagação de ondas ao longo dos dois outros eixos de simetria do sólido.

Para a determinação das três componentes de rigidez fora da diagonal da matriz (C_{12}, C_{13} e C_{23}), basta analisar a propagação da onda em direções diferentes das direções

dos eixos de simetria do sólido, como por exemplo, no plano 12, conforme mostrado na FIG. 14.

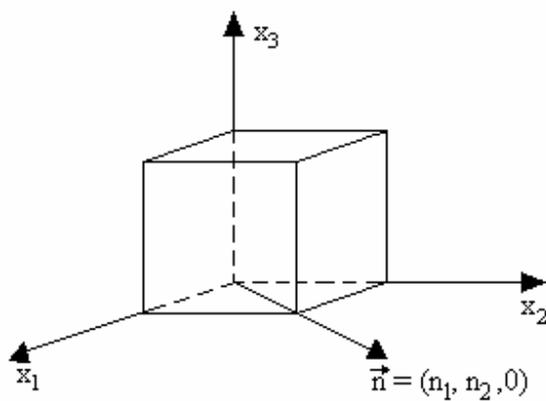


FIGURA 14 – Propagação de uma onda ao longo do plano 12 de simetria do sólido.

CAPÍTULO 3 PROPAGAÇÃO DE ONDAS ULTRA-SÔNICAS EM MADEIRAS

O estudo dos mecanismos de propagação de ondas ultra-sônicas em madeiras se fundamenta nas mesmas hipóteses consideradas na avaliação e estudo de suas características e propriedades mecânicas, ou seja, em considerá-la como um sólido ortotrópico (*vide* Capítulo 2, seção 2.2). Dessa forma, desprezando-se a não homogeneidade e a curvatura das camadas de crescimento anual, é possível distinguir, em uma peça de madeira, três planos de simetria elástica, conforme ilustrado na FIG. 15.

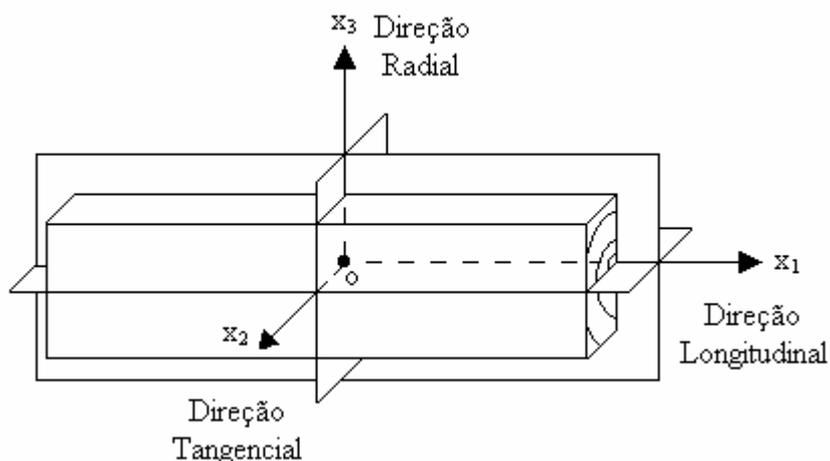


FIGURA 15 – Planos e direções de simetria da madeira.

O primeiro plano, denotado por x_2Ox_3 , cujo vetor normal unitário é paralelo ao eixo x_1 , é perpendicular à direção das fibras da madeira. O segundo plano, também denominado plano tangencial, definido por x_1Ox_2 e cujo vetor normal unitário está na direção do eixo x_3 , é paralelo às camadas de crescimento anual. O terceiro plano, conhecido como plano radial, denotado por x_1Ox_3 , é mutuamente perpendicular aos outros dois planos e seu vetor normal unitário é paralelo à direção do eixo x_1 .

Todos os planos paralelos a x_2Ox_3 , x_1Ox_2 e x_1Ox_3 são, também, planos de simetria elástica. As direções dos eixos de simetria x_1 , x_2 e x_3 são especialmente denominadas direção longitudinal L, tangencial T e radial R, respectivamente.

Entretanto, diferentemente de outros sólidos ortotrópicos, a propagação de ondas ultra-sônicas em madeiras constitui um fenômeno de considerável complexidade. As constantes de propagação, isto é, as velocidades (de fase e de grupo) e os coeficientes de absorção, são significativamente afetados não somente pela heterogeneidade da composição química, pela sua microestrutura, pela irregularidade na disposição dos elementos anatômicos, inerentes à estrutura biológica da madeira, como também pela sua natureza higroscópica.

Neste capítulo, serão estudados os principais fatores que afetam os mecanismos de propagação de ondas ultra-sônicas em madeiras e de que maneira estes fatores influenciam as constantes de propagação ultra-sônica.

3.1 Fatores que influenciam a propagação de ondas ultra-sônicas em madeiras

3.1.1 Umidade da madeira.

A madeira constitui, por natureza, um material higroscópico, ou seja, é capaz de interagir com o meio ambiente absorvendo ou perdendo umidade para ele. Esta característica peculiar da madeira e de alguns outros materiais afeta sensivelmente suas propriedades físicas e mecânicas.

De acordo com a interação com a parede celular, a água existente no interior da madeira pode ser encontrada sob as seguintes formas:

- a) Água livre ou de embebição, que ocupa parcial ou completamente o lúmen das células e os interstícios celulares;
- b) Água de adesão ou impregnação, que está quimicamente ligada, por pontes de hidrogênio, às cadeias de celulose das paredes celulares.

As árvores vivas, por exemplo, possuem grandes quantidades de água sob as duas formas, podendo chegar, segundo Zimmermann (1983), a valores superiores a 200% de conteúdo de umidade.

O início do processo de remoção de água de adesão das paredes celulares corresponde ao ponto de saturação das fibras. O ponto de saturação das fibras pode ser, também, definido como o valor de umidade abaixo do qual as propriedades físicas e mecânicas da madeira são afetadas pelo conteúdo de umidade. O valor de umidade correspondente ao ponto de saturação das fibras é de aproximadamente 33%, variando, ligeiramente, de uma espécie para outra.

De maneira geral, o conteúdo de umidade da madeira abaixo do ponto de saturação da fibra é função da umidade relativa do ar e da temperatura ambiente. Há, entretanto, um valor de umidade no qual a madeira, após um determinado tempo em contato com o ar atmosférico, estabiliza-se, ou seja, nem ganha nem perde água para o meio ambiente. Este valor de umidade é definido como umidade de equilíbrio da madeira.

Conforme foi demonstrado nos capítulos anteriores, as constantes de propagação de ondas ultra-sônicas estão intrinsecamente relacionadas às propriedades físicas e mecânicas dos materiais. Em madeiras, particularmente, estas propriedades são sensivelmente afetadas pelo conteúdo de umidade. Portanto, o estudo da influência da umidade naquelas propriedades constitui o primeiro passo para se compreender, de maneira mais inteligível, a relação entre as constantes de propagação e o conteúdo de umidade da madeira.

Tiemann (1906) foi quem primeiro observou que as propriedades mecânicas da madeira são afetadas somente pela água de constituição ou de impregnação, uma vez que apenas a parede celular contribui efetivamente para a resistência. A redução da resistência e do módulo de elasticidade com o aumento do conteúdo de umidade, até o ponto de saturação, é mostrada na FIG. 16. Nesta figura, as letras E_L , E_R e E_T representam os módulos nas direções longitudinal, radial e tangencial, respectivamente.

O aumento do conteúdo de umidade, acima do ponto de saturação, não influencia significativamente aqueles dois parâmetros mecânicos.

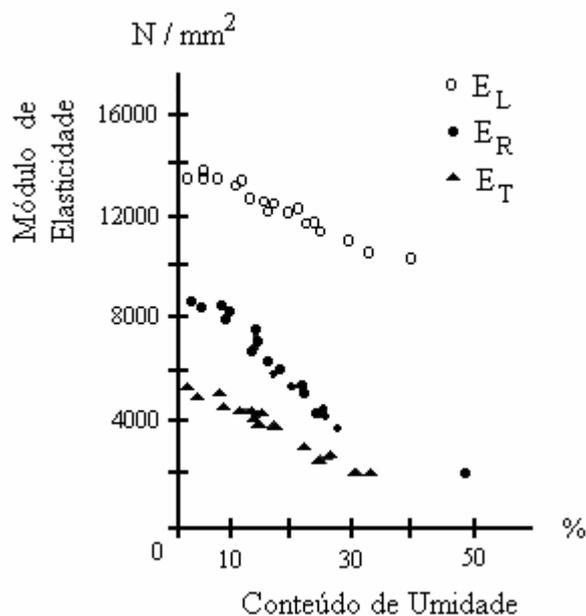


FIGURA 16 – Influência do conteúdo de umidade nos módulos de elasticidade de Abeto.

FONTE – BUCUR, 1995. p. 199.

A relação existente entre a velocidade de propagação do pulso, a correspondente atenuação e o conteúdo de umidade pode ser vista na FIG. 17. Como pode ser verificado, a velocidade diminui à medida que o conteúdo de umidade aumenta, ao passo que a atenuação aumenta conforme aumenta o conteúdo de umidade. O máximo valor de velocidade e o mínimo valor de atenuação são obtidos quando a madeira se encontra seca.

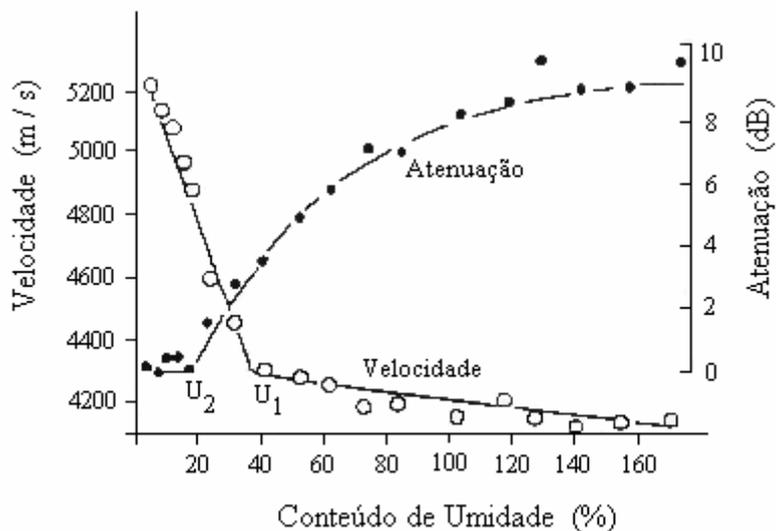


FIGURA 17 – Velocidade do pulso ultra-sônico ao longo da direção longitudinal e a correspondente atenuação como funções do conteúdo de umidade para metasequóias.

FONTE – BUCUR, 1995. p. 200.

É interessante observar, na FIG. 16, que a variação da velocidade em função do conteúdo de umidade possui um ponto crítico, U_1 , correspondente ao ponto de saturação das fibras, enquanto a variação da atenuação em função do conteúdo de umidade possui um ponto crítico U_2 , diferente de U_1 e abaixo deste.

Segundo Bucur (1995), a análise cuidadosa dessa figura permite concluir que:

- A velocidade de propagação decresce rapidamente à medida que o conteúdo de umidade aumenta, até o ponto de saturação U_1 . A partir deste ponto, a variação é muito pequena;
- A atenuação é praticamente constante para pequenos valores de umidade, mas aumenta sensivelmente a partir do ponto crítico U_2 .

Para baixos valores de umidade, ou seja, $U < U_2$, quando toda água existente na madeira se encontra ligada às moléculas de celulose da parede celular, o pulso ultra-sônico é praticamente dispersado pelos contornos dos elementos anatômicos. Nestes contornos, analogamente ao que ocorre nos contornos dos grãos de um sólido policristalino, há uma descontinuidade do módulo de elasticidade e, conseqüentemente, da impedância acústica característica. A tensão ou pressão de radiação que atua nas partículas das moléculas de celulosas, resultante da passagem da onda ultra-sônica através do elemento anatômico, reorienta a posição da hidroxila (OH) ou outro radical pertencentes àquelas moléculas. Neste caso, o mecanismo de atenuação relacionado às características das paredes celulares constitui, provavelmente, o fator mais importante.

Para valores de conteúdos de umidade compreendidos entre o ponto crítico U_2 e o ponto de saturação das fibras U_1 , a dispersão nos contornos dos elementos anatômicos é, possivelmente, o mais importante mecanismo de atenuação. Após o ponto de saturação U_1 , em que há água livre ou de embebição no interior das cavidades dos elementos anatômicos, a porosidade da madeira atua como fator preponderante na dispersão do pulso ultra-sônico.

Dessa forma, pode-se concluir que a velocidade de propagação do pulso é consideravelmente influenciada pela existência de água de adesão, enquanto a atenuação é sensivelmente influenciada pela presença de água livre. O ponto crítico U_1 corresponde ao ponto de saturação das fibras e o ponto crítico U_2 corresponde ao valor de umidade a partir do qual os elementos anatômicos começam a reter água livre.

Finalmente, é interessante analisar a variação da rigidez em função do conteúdo de umidade. Assim como na variação da velocidade em função da umidade, a variação da rigidez com a umidade possui um ponto crítico, correspondente, também, ao ponto de saturação das fibras. Para valores de umidade abaixo deste ponto, a rigidez diminui conforme o conteúdo de umidade aumenta. Entretanto, para valores de umidade superiores ao ponto de saturação, a rigidez aumenta à medida em que o conteúdo de umidade aumenta, devido, principalmente, ao fato da densidade da madeira aumentar

com o aumento da umidade e à presença de água livre, que está relacionada à porosidade da madeira. A FIG. 18 ilustra claramente este fenômeno.

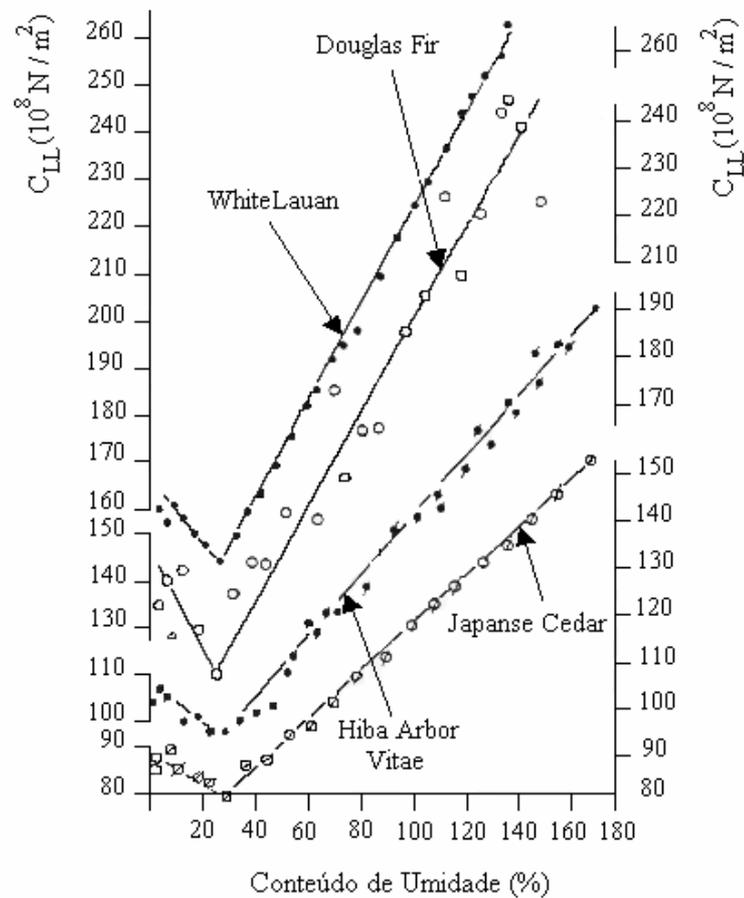


FIGURA 18 - Variação da rigidez longitudinal em função do conteúdo de umidade, para diferentes espécies de madeiras.

FONTE – BUCUR, 1995. p. 201.

3.1.2 Densidade da madeira

Segundo Oliveira e Sales (2000), o aumento da densidade propicia, para um valor de umidade constante ao longo da amostra, uma maior velocidade de propagação em qualquer das três direções da madeira.

Porém, não é propriamente o aumento da densidade que acarreta o aumento na velocidade de propagação das ondas ultra-sônicas em madeiras. Ao contrário, o aumento da densidade deveria provocar a diminuição da velocidade de propagação, visto que a velocidade é, conforme demonstrado no Capítulo 2, inversamente proporcional à raiz quadrada da densidade.

Entretanto, considerando-se um valor de umidade constante ao longo da amostra, o aumento da densidade decorre da maior deposição de celulose na face interna da parede celular. Esta deposição acarreta aumento mais significativo nos valores de rigidez do que nos valores de densidade da madeira. Dessa forma, mesmo que haja aumento da densidade, a velocidade não diminui, pois é compensada pelo apreciável aumento da rigidez. A densidade da madeira, assim como a rigidez, é sensivelmente afetada pelo teor de umidade. Todavia, o efeito da umidade na rigidez é, também, muito mais expressivo do que na densidade. Portanto, em geral, as maiores velocidades ultra-sônicas são alcançadas em espécimes de madeiras com maiores densidades e menores teores de umidade.

3.1.3 Temperatura ambiente

Os resultados obtidos por Launay e Gilletá¹, citados por Bucur (1995), ao analisarem a influência simultânea da temperatura (no intervalo de 20° C a 80° C) e do conteúdo de umidade (para os valores de 6%, 12% e 18%) na velocidade de propagação de ondas ultra-sônicas em madeiras, permitiram verificar que a influência da temperatura nesta velocidade é estritamente dependente do valor do conteúdo de umidade da madeira.

Os resultados permitiram concluir, ainda, que para pequenos teores de umidade, a variação da temperatura não altera, de forma expressiva, os valores de velocidade.

A influência da temperatura na velocidade de propagação de ondas em madeiras pode ser compreendida, de maneira mais inteligível, quando se considera a influência concomitante da temperatura e do conteúdo de umidade na rigidez desse material. Esta

¹ LAUNAY, J. and GILLETA, F. L'influence de la temperature et du taux d'humidité sur les constantes élastiques du bois d'épicéa de Sitka. Actes du colloques mechanical behaviour of wood. 1988.

influência pode ser nitidamente observada nos resultados experimentais obtidos por Dinwoodie (1981), para a madeira *Pinus radiata*.

Dinwoodie (1981) verificou que para o conteúdo de umidade de 0% e uma variação de temperatura entre -20°C e 60°C , há uma redução no valor do módulo de elasticidade da madeira de apenas 6%. Por outro lado, para o conteúdo de umidade igual a 20%, a redução no valor do módulo de elasticidade chega a 40%, considerando-se a mesma faixa de temperatura.

De acordo com Bucur (1985), o estudo da influência simultânea da temperatura e do conteúdo de umidade na velocidade de propagação de ondas em madeiras é realizado de forma mais conveniente quando se consideram três intervalos de temperatura, isto é,

- a) Temperaturas baixas, que compreendem o intervalo abaixo do ponto de congelamento ou de solidificação da água;
- b) Temperaturas intermediárias, que compreendem o intervalo entre o ponto de congelamento e a temperatura na qual a decomposição térmica da madeira se inicia (180°C);
- c) Altas temperaturas, constituídas pelo intervalo entre a temperatura do início da decomposição térmica e a temperatura de combustão da madeira, (1000°C).

Para cada intervalo de temperatura descrito anteriormente, são considerados, ainda, dois intervalos de conteúdo de umidade, ou seja, os intervalos compreendidos abaixo e acima do ponto de saturação das fibras.

Como o escopo deste trabalho se restringe à avaliação de madeiras e estruturas de madeira expostas às variações de temperatura ambiente, far-se-á, dessa forma, o estudo da influência da faixa compreendida entre -30°C e 50°C , que cobrem, com folga, as amplitudes máxima e mínima de temperaturas encontradas no País.

Bucur verificou que para esta faixa de temperatura e abaixo do ponto de saturação das fibras a velocidade da onda ultra-sônica, em geral, aumenta linearmente com a diminuição da temperatura.

Acima do ponto de saturação das fibras, o aumento da velocidade de propagação do pulso ultra-sônico com a diminuição da temperatura é aproximadamente linear até à temperatura de solidificação da água. Nesta temperatura, ocorre um aumento brusco nos valores de velocidade, e, a partir desse ponto, a propagação da onda ocorre de maneira análoga à propagação de ondas em meios porosos congelados.

Este aumento brusco na velocidade de propagação está associado à transição capilar e à gradual solidificação da água livre no lúmen das células. Esta solidificação da água livre no interior das células torna a madeira mais rígida, o que acarreta o significativo aumento na velocidade de propagação.

Quando a umidade da madeira está abaixo do ponto de saturação, o lúmen celular se encontra vazio e a água adsorvida pela região interfibrilar se congela e expandi-se com facilidade. O processo de mudança de estado físico da água adsorvida na parede celular pode explicar a linearidade existente entre o aumento da velocidade ultra-sônica com diminuição da temperatura.

3.1.4 Natureza biológica da madeira

De acordo com Bucur (1995), o fenômeno de propagação de ondas ultra-sônicas em madeiras, em escala estrutural, pode ser melhor compreendido usando-se um modelo acústico simplificado. Neste modelo, os elementos anatômicos são considerados tubos constituídos por uma substância cristalina, ou seja, a celulose, embutidos em uma matriz de substância amorfa, a lignina. Portanto, a madeira sólida é constituída por uma fileira retangular de tubos embutidos em uma matriz. A orientação longitudinal dos tubos é levemente perturbada pelos elementos horizontais ou raios medulares.

Ao longo da direção dos tubos, os mecanismos de dissipação de energia acústica estão relacionados, principalmente, à reflexão ou à difração da onda ultra-sônica nas extremidades destes tubos. Em geral, naquela direção, os valores de atenuação são relativamente pequenos, enquanto os valores de velocidade são os mais altos possíveis, em razão da continuidade entre os elementos anatômicos e da alta cristalinidade das microfibrilas celulósicas.

Por outro lado, pode-se concluir que as maiores atenuações e as menores velocidades ocorrem na direção tangencial, em virtude da descontinuidade dos elementos estruturais e da presença de lignina, substância amorfa e inelástica, ao longo da direção de propagação da onda.

3.1.5 Dimensões dos elementos estruturais

Os mecanismos de dispersão da onda ultra-sônica ao longo da madeira estão intrinsecamente relacionados às dimensões dos elementos estruturais desse material.

Segundo Bucur (1995), quando uma onda longitudinal se propaga ao longo da direção das fibras da madeira, os comprimentos de onda e o comprimento das células são da mesma ordem de grandeza. A propagação ocorre, dessa forma, no regime de dispersão estocástico. Por outro lado, ao longo das direções radial e tangencial, os comprimentos de onda são consideravelmente maiores que as dimensões médias das células e a propagação ocorre, provavelmente, dentro do regime de dispersão de Rayleigh.

CAPÍTULO 4 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Conforme demonstrado nos capítulos anteriores, as velocidades de propagação (de fase e de grupo) de ondas ultra-sônicas em madeiras é extremamente sensível a fatores que determinam suas características e propriedades físicas e mecânicas.

Entretanto, a determinação experimental da velocidade de fase ao longo da madeira é consideravelmente difícil.

Porém, ao se propagar através da madeira, a velocidade do pulso (ou velocidade de grupo), assim como a velocidade de fase, pode ser afetada por um série de fatores que estão intrinsecamente relacionados às propriedades físicas e mecânicas desse material. Dessa maneira, é possível estabelecer relações estatísticas que possam expressar tais propriedades como funções da velocidade do pulso.

Com o objetivo de se estabelecer as correlações estatísticas entre a velocidade de propagação do pulso ultra-sônico longitudinalmente às fibras e parâmetros físicos e mecânicos de madeiras, foram determinadas, experimentalmente, a velocidade de propagação, a umidade, a densidade aparente, as resistências à compressão paralela e normal às fibras, a resistência ao cisalhamento paralelo às fibras, e os módulos de elasticidade longitudinal e norma às fibras. Os dados experimentais obtidos foram, posteriormente, estatisticamente tratados e, por meio de regressão linear múltipla, procurou-se estabelecer as correlações.

Para esse propósito, foram escolhidas, em madeiras, duas espécies de madeiras nativas e uma espécie de madeira de reflorestamento. As espécies nativas escolhidas foram a *Manilkara spp* e a *Hyminaea spp*, conhecidas, popularmente, como Maçaranduba e Jatobá e a espécie de reflorestamento foi o *Eucalyptus tereticornis*, designado, doravante,

simplesmente como Eucalipto. A escolha destas espécies se baseou no fato de serem madeiras amplamente empregadas nas estruturas correntes.

Para cada uma das três espécies escolhidas, selecionou-se, aleatoriamente, uma amostra constituída por dez pranchas com espessuras variando entre 4,0 cm e 5,0 cm, larguras entre 25,0 cm e 30,0 cm e comprimentos variados.

As pranchas provenientes das madeiras nativas possuíam altos teores de umidade, pois eram procedentes de toras recentemente cortadas. As pranchas de Eucalipto já tinham sido secas em estufa e suas umidades estavam muito próximas da umidade equilíbrio. Isso possibilitou que se trabalhasse com uma larga faixa de valores de umidade.

Depois da seleção, as pranchas de Maçaranduba e Jatobá foram cortadas em comprimentos aproximados de 1,0 m e as pranchas de Eucalipto em comprimentos aproximados de 0,75 m. A diferença entre os comprimentos das pranchas se deve, exclusivamente, ao fato de não se encontrarem pranchas de Eucalipto com comprimentos superiores a 0,80 m. Os cortes foram cuidadosamente feitos no esquadro, objetivando, dessa maneira, que as superfícies das seções transversais externas pudessem ficar o mais paralelas possível.

Determinados os comprimentos reais e os tempos de propagação do pulso ultra-sônico, as pranchas foram cortadas ao meio. Selecionou-se, então, uma das metades de cada prancha e outra foi hermeticamente acondicionada em sacos plásticos, evitando, assim, o contato com o meio ambiente. Das metades selecionadas, foram, então, extraídos os corpos de prova para caracterização física e mecânica das espécies, seguindo os critérios prescritos pela NBR 71790/97.

4.1 Determinação da velocidade de propagação do pulso ultra-sônico

4.1.1 Considerações gerais

A velocidade de propagação do pulso ultra-sônico ao longo das pranchas foi determinada utilizando a relação cinemática existente entre a velocidade v do pulso, a distância d por ele percorrida e o tempo t necessário para percorrê-la, ou seja,

$$v = \frac{d}{t} \quad (4.1)$$

A distância percorrida pelo pulso, que é igual à distância compreendida entre o transdutor emissor e o transdutor receptor do pulso, corresponderá ao comprimento total das pranchas, de acordo com o ilustrado na FIG. 19.

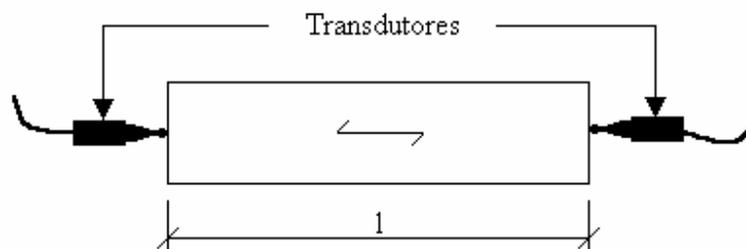


FIGURA 19 - Determinação da velocidade de propagação do pulso ultra-sônico ao longo das pranchas. A distância d percorrida pelo pulso é igual ao comprimento l das pranchas.

Dessa forma, a equação (4.1) pode ser reescrita como:

$$v = \frac{l}{t} \quad (4.2)$$

Conforme pode ser visto na FIG. 19, a posição dos transdutores, perpendicular às faces transversais das pranchas, indica a transmissão de ondas longitudinais ao longo das mesmas. O tempo de propagação do pulso é fornecido diretamente pelo aparelho de ultra-som.

4.1.2 Procedimento experimental

Para a determinação do tempo de propagação do pulso, cada prancha foi igualmente dividida, ao longo da direção das fibras, em três regiões, como mostra a FIG. 20.

O tempo de propagação do pulso foi considerado como sendo a média dos tempos de propagação em cada uma das três regiões mostradas.

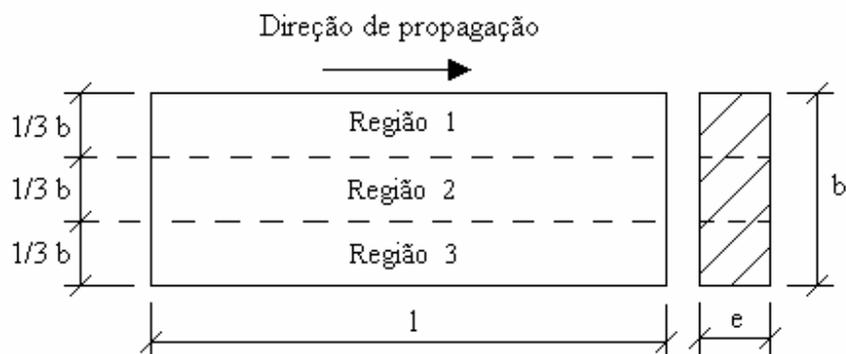


FIGURA 20 - Divisão da prancha em três regiões iguais, para a determinação do tempo de propagação do pulso.

4.1.3 Equipamentos utilizados

Os ensaios para a determinação da velocidade do pulso ultra-sônico ao longo das pranchas foram realizados com os seguintes equipamentos:

- Aparelho de ultra-som;
- Trena de 5 m.

O aparelho de ultra-som utilizado foi o Sylvatest[®]. Ele é dotado de dois sensores piezelétricos que geram pulsos ultra-sônicos na frequência de 30 kHz. O tempo de propagação do pulso é diretamente mostrado em uma tela de cristal líquido.

4.1.4 Resultados experimentais

Com os valores dos comprimentos l e dos tempos de propagação t , determinou-se, através da equação (4.2), a velocidade do pulso ultra-sônico ao longo das pranchas.

Os valores de l e t medidos, juntamente com os valores de velocidade calculados, respectivamente, para as pranchas de Maçaranduba, Jatobá e Eucalipto, foram listados nas TAB. 6, 7 e 8.

TABELA 6

Velocidade média de propagação do pulso ao longo das pranchas de Maçaranduba.

Pranchas	Comprimento l (m)	Tempo Médio de Propagação t (10 ⁻⁶ s)	Velocidade Média de Propagação v (m / s)
P1M	0,976 ± 0,001	227 ± 1	4290 ± 20
P2M	0,973	215	4530
P3M	0,972	228	4260
P4M	0,979	231	4230
P5M	0,977	229	4270
P6M	0,975	222	4390
P7M	0,976	215	4530
P8M	0,977	215	4540
P9M	0,977	231	4240
P10M	0,978	228	4290

TABELA 7

Velocidade média de propagação do pulso ao longo das pranchas de Jatobá.

Pranchas	Comprimento l (m)	Tempo Médio de Propagação t (10 ⁻⁶ s)	Velocidade Média de Propagação v (m / s)
P1J	0,975 ± 0,001	191 ± 1	5100 ± 30
P2J	0,980	220	4460
P3J	0,974	194	5010
P4J	0,978	192	5100
P5J	0,979	202	4840
P6J	0,977	264	3700
P7J	0,978	253	3870
P8J	0,980	190	5170
P9J	0,975	202	4830
P10J	0,974	234	4160

TABELA 8
Velocidade média propagação do pulso ao longo das pranchas de Eucalipto.

Pranchas	Comprimento l (m)	Tempo de Propagação t (10 ⁻⁶ s)	Velocidade de propagação (m / s)
P1E	0,748 ± 0,001	130 ± 1	5750 ± 50
P2E	0,749	148	5060
P3E	0,746	139	5370
P4E	0,747	139	5370
P5E	0,746	132	5650
P6E	0,751	147	5110
P7E	0,744	142	5240
P8E	0,744	151	4930
P9E	0,747	136	5490
P10E	0,746	130	5740

NOTA – A nomenclatura utilizada para representar as pranchas foi a seguinte: a primeira letra e o número identificam a prancha e a segunda letra a espécie em estudo. Por exemplo, a prancha P5M , da TAB. 6, designa a prancha 5 da madeira de Maçaranduba. Esta nomenclatura é também válida para as TAB. 7 e 8.

4.2 Determinação das propriedades físicas das pranchas

Neste item, serão determinadas as propriedades físicas das pranchas das espécies em estudo, ou seja, as umidades e as densidades das mesmas.

4.2.1 Determinação da umidade das pranchas

4.2.1.1 Considerações gerais

De acordo com a NBR 7190/97, Anexo B, item B.5.2, define-se como teor ou conteúdo de umidade da madeira a relação entre a massa de água nela contida e a massa da madeira seca, ou seja,

$$U(\%) = \frac{m_i - m_s}{m_s} \times 100 \quad (4.3)$$

em que m_i corresponde à massa inicial úmida e m_s à massa da madeira seca.

4.2.1.2 Procedimento experimental

Após a extração das partes selecionadas das pranchas para os ensaios de caracterização, seguindo os critérios estabelecidos pelo anexo B, item B.2 da norma anteriormente citada, as amostras foram devidamente cortadas e delas extraídos os corpos de prova. Cada corpo de prova foi confeccionado nas dimensões aproximadas de 2,0 cm x 3,0 cm de seção transversal e 5,0 cm de comprimento na direção paralela às fibras, de acordo com o item B.5.3 da mesma norma e conforme ilustrado na FIG. 21.

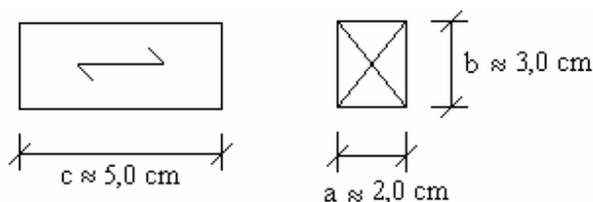


FIGURA 21 – Corte dos corpos de provas.

Em seguida, os corpos de prova foram pesados em uma balança eletrônica, com sensibilidade de 0,01gf, determinando-se, dessa forma, o peso inicial úmido P_i de cada corpo de prova. Após a determinação do peso inicial úmido, os corpos de prova foram, então, colocados em uma estufa e secados a uma temperatura média de $110^{\circ} \text{C} \pm 1^{\circ} \text{C}$.

No decorrer da secagem, o peso de cada corpo de prova foi medido em intervalos de tempo de aproximadamente 10 horas. Considerou-se como peso seco P_s o último valor medido no qual a variação percentual entre P_s e a medida anterior a ele não superou 0,5 % do valor de P_s .

4.2.1.3 Equipamentos utilizados

Os equipamentos utilizados na determinação do conteúdo de umidade das pranchas foram:

- Balança eletrônica com sensibilidade de 0,01 gf;
- Estufa elétrica.

4.2.1.4 Resultados experimentais

Com os pesos P_i e P_s dos corpos de prova, calculou-se, respectivamente, as massas inicial m_i e seca m_s de cada um.

Em seguida, através da equação (4.3), pôde-se determinar o valor do teor de umidade U das pranchas. Os valores de U calculados, de cada corpo de prova, estão listados na TAB. 9.

TABELA 9
Umidade das pranchas

CP	Umidade U (%)		
	Maçaranduba	Jatobá	Eucalipto
1	29,64 ± 0,02	21,50 ± 0,03	11,92 ± 0,01
2	30,89	45,02	12,29
3	30,29	20,33	12,22
4	30,34	21,89	11,70
5	28,95	20,38	12,50
6	30,75	60,77	11,82
7	29,11	45,65	13,34
8	22,48	21,24	12,75
9	27,14	18,78	13,23
10	28,17	25,70	11,56

4.2.2 Determinação da densidade aparente das pranchas

4.2.2.1 Considerações gerais

Por representar, de forma mais adequada, a densidade real da madeira, considerar-se-á, no estudo da propagação de ondas ultra-sônicas ao longo das pranchas, suas densidades aparentes.

Define-se como densidade aparente $\rho_{ap,U\%}$ da madeira, à umidade U, a relação entre a massa inicial úmida e o volume da madeira úmida, ou seja,

$$\rho_{ap,U\%} = \frac{m_i}{V_i} \quad (4.4)$$

em que m_i e V_i correspondem, respectivamente, à massa inicial úmida e ao volume da madeira úmida.

A extração das amostras para confecção dos corpos de prova para a determinação da densidade aparente das pranchas obedeceu aos critérios estabelecidos pela NBR 7190/97.

4.2.2.2 Procedimento experimental

Os corpos de prova utilizados para a determinação da densidade aparente das pranchas foram os mesmos utilizados no cálculo de seus teores de umidade.

Antes dos corpos serem levados à estufa, para a secagem, eles foram cuidadosamente medidos, com um paquímetro, determinando-se, assim, suas reais dimensões.

4.2.2.3 Equipamentos utilizados

Para a determinação da densidade aparente das pranchas, foram utilizados os seguintes equipamentos:

- Balança eletrônica com sensibilidade de 0,01 gf.
- Paquímetro digital.

4.2.2.4 Resultados experimentais

Conhecidas as dimensões reais dos corpos de prova, pôde-se determinar os seus respectivos volumes.

Com os valores da massa inicial úmida m_i , obtidas para a determinação da umidade e utilizando a equação (4.4), calculou-se as densidades das pranchas das três espécies estudadas.

Os valores das densidades dos corpos de prova foram listados na TAB. 10.

TABELA 10
Densidade aparente das pranchas

CP	Densidade aparente $\rho_{ap,U\%}$ (kg / m ³)		
	Maçaranduba	Jatobá	Eucalipto
1	1200 ± 10	1130 ± 10	980 ± 9
2	1160	1090	940
3	1210	1150	1010
4	1210	910	680
5	1190	960	950
6	1150	880	1030
7	1140	870	930
8	1120	900	940
9	1180	830	970
10	1180	660	910

4.3 Determinação das propriedades mecânicas das pranchas

Nesta seção, será apresentada a forma de determinação das propriedades mecânicas das pranchas em estudo, ou seja, as resistências e os módulos de elasticidade de cada uma.

Devido, unicamente, à dificuldade de se disponibilizar a máquina para ensaios de tração, foram determinadas, apenas, as resistências à compressão paralela às fibras (f_{c0}), à compressão normal às fibras (f_{c90}) e a resistência ao cisalhamento paralelo às fibras (f_{v0}).

Os módulos de elasticidade calculados foram os módulos longitudinal (E_{c0}) e normal (E_{c90}) às fibras.

A metodologia e a instrumentação necessárias à avaliação das propriedades mecânicas das pranchas, principalmente no que se refere à determinação dos módulos de elasticidade, requereram acuidade e sofisticação consideravelmente maiores que na determinação das propriedades físicas. Dessa forma, antes de se tratar propriamente da avaliação daquelas propriedades, far-se-á um breve comentário sobre os procedimentos experimentais e os equipamentos utilizados que possibilitaram esta avaliação.

4.3.1 Extração dos corpos de prova

As amostras para a confecção dos corpos de prova de caracterização mecânica foram retiradas das partes remanescentes das pranchas que foram utilizadas na retirada dos corpos de prova para a determinação da umidade e da densidade. A retirada daquelas amostras obedeceu aos critérios prescritos pela NBR 7190/97, item B.2.

4.3.2 Equipamentos utilizados

Os equipamentos empregados na realização dos ensaios foram:

- Cilindro hidráulico com transdutor de pressão;
- Anéis de carga de 10 t e 30 t;
- Relógio comparador;
- Paquímetro;
- Extensômetros elétricos;
- Dois transdutores de deslocamento semianulares;
- Sistema de aquisição de dados (SAD);
- Microcomputador com programa Aqdados.

O cilindro hidráulico foi utilizado para aplicação de força aos corpos de prova. Conectado a ele, havia um transdutor de pressão constituído por extensômetros elétricos em um circuito de ponte completa ligado ao sistema de aquisição de dados.

Com o conjunto cilindro-transdutor devidamente calibrado, os valores de força eram fornecidos diretamente pelo Aqdados.

Os anéis de 10 t e 30 t foram utilizados na determinação da força de ruptura com objetivo de se comparar os valores por eles obtidos aos valores obtidos pelo SAD.

Os extensômetros elétricos foram empregados apenas na calibração dos transdutores de deslocamento semianulares.

Os transdutores de deslocamento semianulares foram utilizados na determinação das deformações dos corpos de prova. São também constituídos por extensômetros elétricos em ponte completa fixados a uma pequena lâmina metálica de formato semianular, conforme ilustrado na FIG. 22. Os furos nas extremidades da lâmina permitem que os transdutores sejam fixados nas faces laterais dos corpos de prova.

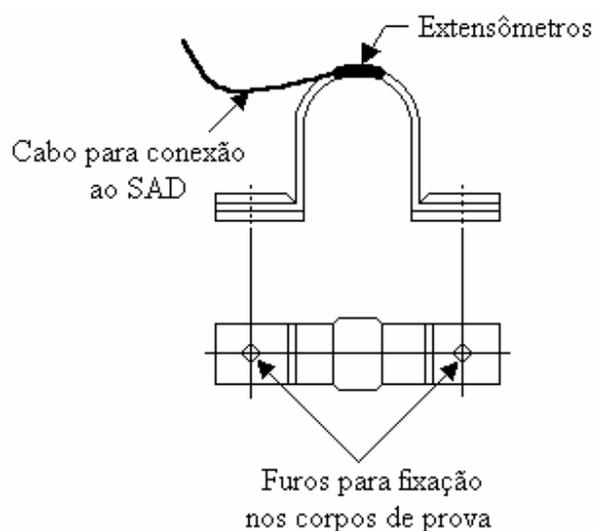


FIGURA 22 – Transdutores de deslocamento semianulares.

Dessa maneira, as deformações nos corpos de prova, decorrentes da aplicação de força de compressão pelo cilindro, provocam a aproximação dos furos da lâmina e a conseqüente deformação dos extensômetros situados na região semicircular desta lâmina. Os transdutores podem ser calibrados de maneira que se possa estabelecer uma relação entre suas deformações e as deformações reais dos corpos de prova.

O sistema de aquisição de dados coletava os sinais elétricos provenientes dos transdutores e dos extensômetros e o programa permitia a leitura, em tempo real, e a manipulação dos valores de força e deformação.

4.3.3 Calibração dos transdutores de deslocamento semianulares

Evidentemente, as deformações dos transdutores de deslocamento não correspondem à deformação real do corpo de prova. Entretanto, é possível se estabelecer uma relação empírica entre estas deformações.

Dessa forma, a calibração dos transdutores de deslocamento consistiu justamente em se determinar a constante de proporcionalidade da relação empírica, obtida por regressão linear, entre as suas deformações e as deformações reais dos corpos de prova, ou seja,

$$\varepsilon_{\text{real}} = k \bar{\varepsilon}_{\text{transdutores}} \quad (4.5)$$

em que $\varepsilon_{\text{real}}$ é a deformação real dos corpos de prova, $\bar{\varepsilon}_{\text{transdutores}}$ a média das deformações dos transdutores e k a constante de proporcionalidade.

Para isso, foram confeccionados dois corpos de prova extras com aproximadamente 4,0 cm x 4,0 cm de seção transversal e 16,0 cm de comprimento. Em duas faces laterais, diametralmente opostas destes corpos de prova, foram feitos dois furos que permitiram a fixação dos transdutores, por meio de parafusos, no ponto médio das faces.

Entre os pontos de fixação dos transdutores, foram colados os extensômetros elétricos em circuito de ponte completa para a determinação da deformação real dos corpos de prova. A montagem está esquematizada nas FIG. 23 e 24.

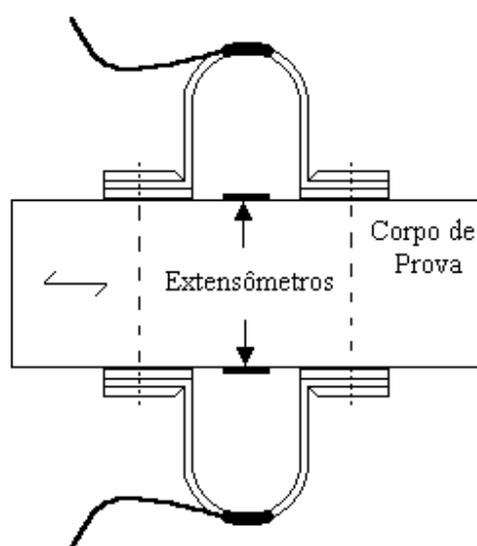


FIGURA 23 – Esquema de fixação dos transdutores nos corpos de prova.

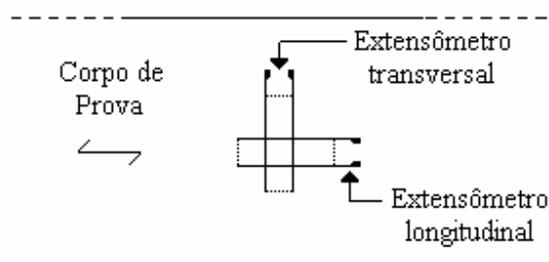


FIGURA 24 – Detalhe da colagem dos extensômetros sobre o corpo de prova.

Cada corpo de prova de prova foi ensaiado três vezes, permitindo a obtenção de seis valores para a constante k. Os valores de k e os respectivos coeficientes de correlação estão listados na TAB. 11.

TABELA 11
Constantes de proporcionalidade entre os valores de deformação real dos corpos de prova e a média das deformações dos transdutores de deslocamento.

CP	Ensaio	Constante de proporcionalidade (k)	Coefficiente de correlação (R ²)
1	1	3,9	0,9856
	2	3,9	0,9844
	3	3,3	0,9909
2	1	2,1	0,9494
	2	3,1	0,9966
	3	4,6	0,9820

O valor de k considerado foi, então, a média dos seis valores obtidos, ou seja,

$$k = 3,7 \pm 0,8$$

Dessa forma, a equação (4.5) pode ser reescrita como:

$$\varepsilon_{\text{real}} = 3,7 \bar{\varepsilon}_{\text{transdutores}} \quad (4.6)$$

Portanto, conhecidas as deformações dos transdutores, pôde-se determinar as deformações reais dos corpos de prova.

4.3.4 Determinação da resistência paralela às fibras e do módulo de elasticidade longitudinal das pranchas

4.3.4.1 Considerações gerais

De acordo com NBR 7190/97, item B.8.2, a resistência da madeira à compressão paralela às fibras é dada pela máxima tensão de compressão que pode atuar em um corpo de prova com seção transversal quadrada de 5,0 cm de lado e 15,0 cm de comprimento, expressa pela relação:

$$f_{c0} = \frac{F_{c0, \max}}{A} \quad (4.7)$$

em que $F_{c0, \max}$ é a força máxima de compressão aplicada ao corpo de prova durante o ensaio e A corresponde à área inicial da seção transversal comprimida.

O módulo de elasticidade da madeira, segundo a norma acima citada, é obtido a partir do trecho linear do diagrama tensão-deformação através da inclinação da reta secante à curva tensão em função da deformação, definida pelos pares de pontos $(\sigma_{10\%}; \varepsilon_{10\%})$ e $(\sigma_{50\%}; \varepsilon_{50\%})$, correspondentes, respectivamente, a 10 % e 50 % da resistência à compressão paralela às fibras. Matematicamente, o módulo de elasticidade longitudinal é expresso por:

$$E_{c0} = \frac{\sigma_{50\%} - \sigma_{10\%}}{\varepsilon_{50\%} - \varepsilon_{10\%}} \quad (4.8)$$

em que $\sigma_{10\%}$ e $\sigma_{50\%}$ são as tensões de compressão correspondentes, respectivamente, a 10 % e 50 % da resistência f_{c0} , representadas pelos pontos 71 e 85 do digrama de

carregamento mostrado na FIG 26. Os valores $\varepsilon_{10\%}$ e $\varepsilon_{50\%}$ constituem as deformações específicas medidas nos corpos de prova correspondentes àquelas duas tensões.

4.3.4.2 Procedimento experimental

Os corpos de prova para determinação da resistência à compressão paralela às fibras e do módulo de elasticidade longitudinal foram confeccionados, devido às limitações impostas pelas espessuras das pranchas, nas dimensões aproximadas de 4,0 cm x 4,0 cm de seção transversal e 12,0 cm de comprimento, de acordo com a recomendação da NBR 7190/97, item B.8.3 e conforme ilustrado na FIG. 25.

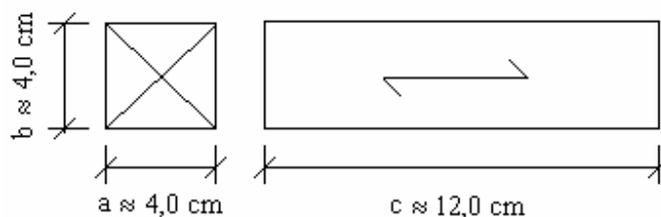


FIGURA 25 – Corpos de prova para ensaios de resistência à compressão paralela às fibras.

Após serem cortados, a seção e o comprimento dos corpos de prova foram medidos com um paquímetro, obtendo-se, assim, suas reais dimensões.

Em seguida, cada corpo de prova foi furado em duas faces paralelas para a fixação dos transdutores de deslocamento semianulares.

Para a determinação do módulo de elasticidade, a resistência ($f_{c0,est}$) das pranchas em estudo foi estimada através do ensaio destrutivo de um corpo de prova selecionado aleatoriamente de cada uma das amostras das três espécies em estudo.

Conhecida a resistência estimada de cada amostra, os corpos de prova foram, então, ensaiados. A aplicação da força ocorreu de forma gradativa em dois ciclos de carga e descarga, conforme recomendado pela NBR 7190/97, item B.8.4 e descrito pelo diagrama de carregamento, ilustrado na FIG. 26.

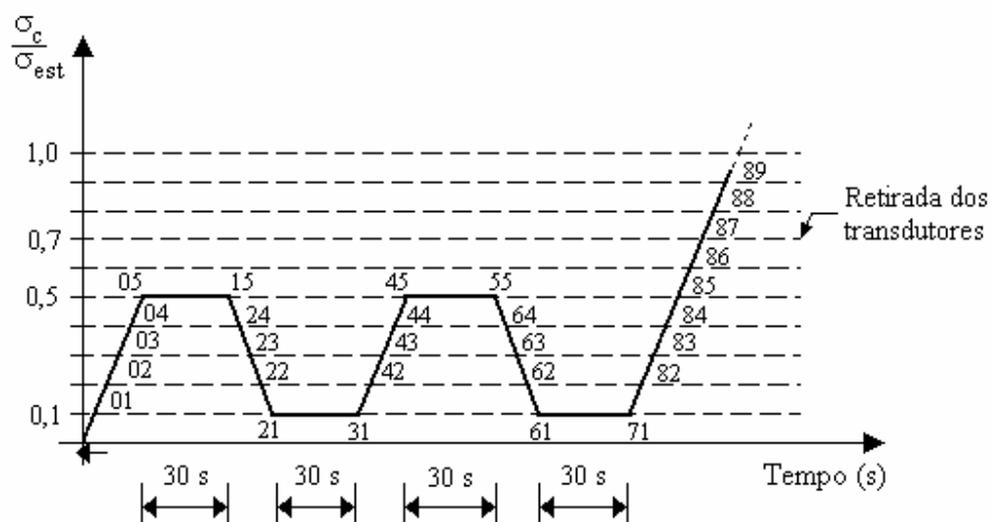


FIGURA 26 – Diagrama de carregamento para a determinação dos módulos de elasticidade longitudinal e normal das pranchas.

Os registros das forças aplicadas e das deformações foram feitos para cada ponto do diagrama mostrado na FIG. 26.

No último ciclo de carga, os transdutores de deslocamento eram retirados ao se atingirem 70 % da resistência estimada das amostras para se evitar possíveis danos aos instrumentos. Em seguida, elevava-se a força aplicada até a ruptura dos corpos de prova.

4.3.4.3 Resultados experimentais

Os valores da força de ruptura e das deformações nos transdutores de deslocamento eram fornecidos diretamente pelo programa Aqdados. O programa permitiu, ainda, a filtragem dos dados na frequência de 60 Hz, evitando-se, assim, a interferência de sinais indesejados da rede elétrica.

As deformações reais dos corpos de prova foram determinadas através da relação empírica expressa pela equação (4.6). A resistência e o módulo de elasticidade de cada corpo de prova foram calculados utilizando as equações (4.7) e (4.8).

Os valores das áreas dos corpos de prova, das forças compressivas máximas e das resistências das pranchas foram listadas nas TAB. 12, 13 e 14, respectivamente, para a Maçaranduba, o Jatobá e o Eucalipto.

TABELA 12
Resistências à compressão paralela às fibras das pranchas de Maçaranduba.

CP	A (10^{-4} m^2)	$F_{c0,max}$ (10^4 N)	f_{c0} (MPa)
1MP	$16,7 \pm 0,1$	$10,00 \pm 0,02$	$59,8 \pm 0,5$
2MP	16,6	9,44	56,8
3MP	16,3	11,10	68,2
4MP	16,6	11,50	69,3
5MP	16,6	11,10	66,8
6MP	16,4	8,07	49,3
7MP	16,5	11,00	66,7
8MP	16,3	11,50	70,5
9MP	16,5	11,20	68,0
10MP	16,7	11,20	67,0

TABELA 13
Resistências à compressão paralela às fibras das pranchas de Jatobá.

CP	A (10^{-4} m^2)	$F_{c0,max}$ (10^4 N)	f_{c0} (MPa)
1JP	$16,2 \pm 0,1$	$13,70 \pm 0,02$	$84,4 \pm 0,5$
2JP	16,4	7,91	48,1
3JP	16,1	12,90	80,1
4JP	16,0	10,20	63,8
5JP	16,1	9,86	61,3
6JP	16,5	6,59	39,9
7JP	16,4	7,20	43,9
8JP	16,6	8,66	52,3
9JP	16,7	7,70	46,1
10JP	16,5	4,38	26,5

TABELA 14
Resistências à compressão paralela às fibras das pranchas de Eucalipto.

CP	A (10^{-4} m^2)	$F_{c0,max}$ (10^4 N)	f_{c0} (MPa)
1EP	$13,0 \pm 0,1$	$9,37 \pm 0,02$	$71,9 \pm 0,5$
2EP	12,9	8,02	62,2
3EP	12,5	11,50	92,3
4EP	13,0	7,17	55,3
5EP	12,8	10,30	80,4
6EP	12,9	7,97	61,7
7EP	12,8	8,34	65,1
8EP	12,9	7,00	54,2
9EP	13,0	10,60	81,3
10EP	12,9	10,50	81,2

NOTA – As letras que acompanham os números dos corpos de prova designam, respectivamente, a espécie considerada e a direção em que está sendo determinada a propriedade. Por exemplo, o CP 1MP representa o corpo de prova um, das pranchas de Maçaranduba cuja propriedade estudada está na direção paralela às fibras.

Os valores de $\sigma_{10\%}$, $\sigma_{50\%}$, $\varepsilon_{10\%}$, $\varepsilon_{50\%}$ e dos módulos de elasticidade longitudinal da pranchas foram listados nas TAB. 15, 16 e 17.

TABELA 15
Módulos de elasticidade longitudinal das pranchas de Maçaranduba.

CP	$\sigma_{10\%}$ (MPa)	$\sigma_{50\%}$ (MPa)	$\varepsilon_{10\%}$ (10^{-4})	$\varepsilon_{50\%}$ (10^{-4})	E_{Co} (MPa)
1MP	$5,8 \pm 0,2$	$29,9 \pm 0,3$	$2,30 \pm 0,02$	$8,15 \pm 0,02$	41000 ± 2000
2MP	6,1	28,6	2,42	6,74	52000
3MP	7,1	34,0	2,16	7,75	48000
4MP	7,2	34,3	1,33	6,29	55000
5MP	6,8	33,3	2,03	8,70	40000
6MP	5,3	24,4	3,25	10,24	27000
7MP	7,5	33,4	1,00	5,25	61000
8MP	7,5	35,4	1,49	7,53	46000
9MP	6,2	33,8	2,52	8,62	45000
10MP	6,7	33,7	1,67	7,30	48000

TABELA 16
Módulos de elasticidade longitudinal das pranchas de Jatobá.

CP	$\sigma_{10\%}$ (MPa)	$\sigma_{50\%}$ (MPa)	$\varepsilon_{10\%}$ (10^{-4})	$\varepsilon_{50\%}$ (10^{-4})	E_{Co} (MPa)
1JP	$8,3 \pm 0,2$	$42,0 \pm 0,3$	$2,26 \pm 0,02$	$7,70 \pm 0,02$	62000 ± 3000
2JP	5,0	24,1	0,94	3,98	63000
3JP	8,3	38,9	1,97	7,71	53000
4JP	7,1	31,9	1,45	5,27	65000
5JP	6,4	30,7	1,60	6,25	52000
6JP	4,1	19,9	3,33	8,06	33000
7JP	4,6	22,0	3,61	8,79	33000
8JP	6,2	26,0	0,18	3,76	55000
9JP	4,8	23,1	3,12	9,47	29000
10JP	4,8	13,2	5,89	8,30	35000

TABELA 17
Módulos de elasticidade longitudinal das pranchas de Eucalipto.

CP	$\sigma_{10\%}$ (MPa)	$\sigma_{50\%}$ (MPa)	$\varepsilon_{10\%}$ (10^{-4})	$\varepsilon_{50\%}$ (10^{-4})	E_{Co} (MPa)
1EP	6,7 ± 0,2	36,2 ± 0,4	0,91 ± 0,02	6,69 ± 0,02	51000 ± 5000
2EP	6,6	31,0	3,20	9,35	40000
3EP	9,3	46,0	0,26	4,14	95000
4EP	6,1	27,8	2,56	7,02	49000
5EP	8,3	39,9	0,77	4,19	92000
6EP	6,7	30,8	2,69	8,50	41000
7EP	6,9	32,6	0,11	5,09	52000
8EP	6,1	27,1	2,38	7,83	38000
9EP	8,8	41,2	1,46	7,48	54000
10EP	8,1	40,9	1,79	6,57	68000

4.3.5 Determinação da resistência e do módulo de elasticidade normais às fibras

4.3.5.1 Considerações gerais

A resistência à compressão normal às fibras, segundo a NBR 7190/97, item B.10.2, corresponde ao valor convencional determinado pela deformação específica residual de 0,2 %, obtida em um ensaio de compressão uniforme. Matematicamente, a resistência à compressão normal às fibras é dada por:

$$f_{c90} = \frac{F_{c90/0,2\%}}{A} \quad (4.9)$$

em que $F_{c90/0,2\%}$ é a força de compressão normal às fibras correspondente a uma deformação residual de 0,2 % e A é a área inicial da seção transversal do corpo de prova.

O módulo de elasticidade normal às fibras é obtido, a partir do trecho linear do diagrama tensão-deformação, pela inclinação da reta secante à curva tensão em função da deformação, definida pelos pares de pontos $(\sigma_{10\%}, \varepsilon_{10\%})$ e $(\sigma_{50\%}, \varepsilon_{50\%})$ correspondentes, respectivamente, a 10 % e a 50 % da resistência convencional normal às fibras, sendo dado pela relação:

$$E_{c90} = \frac{\sigma_{50\%} - \sigma_{10\%}}{\varepsilon_{50\%} - \varepsilon_{10\%}} \quad (4.10)$$

em que $\sigma_{10\%}$ e $\sigma_{50\%}$ são as tensões de compressão correspondentes, respectivamente, a 10 % e 50 % da resistência convencional f_{c90} , dadas pelos pontos 71 e 85 do digrama mostrado na FIG. 26, e $\varepsilon_{10\%}$ e $\varepsilon_{50\%}$ constituem as deformações específicas medidas nos corpos de prova correspondentes àquelas duas tensões.

4.3.5.2 Procedimento experimental

Devido às limitações impostas pelas espessuras das pranchas, os corpos de prova foram confeccionados nas dimensões aproximadas de 4,0 cm x 4,0 cm de seção transversal e 8,0 cm de comprimento, mantendo-se, dessa forma, a relação $h = 2a = 2b$, conforme mostrado na FIG. 27.

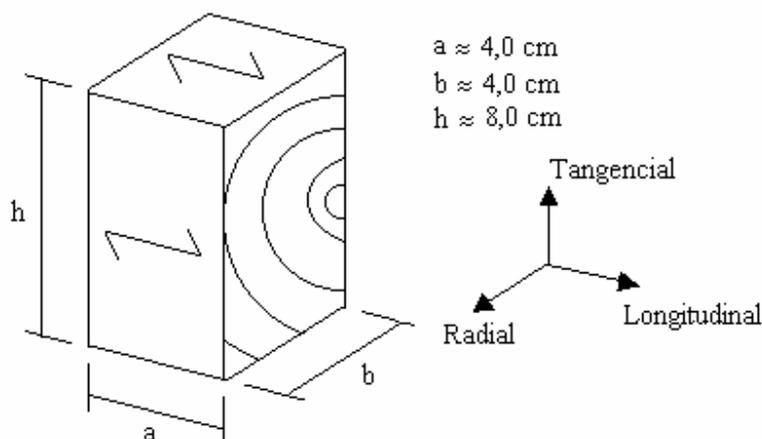


FIGURA 27 - Dimensões dos corpos de prova para ensaio de compressão normal às fibras.

Após o corte, os corpos de prova foram medidos e furados em duas faces paralelas para a fixação dos transdutores de deslocamento semianulares.

Para a determinação do módulo de elasticidade normal às fibras, a resistência $f_{c90,est}$ das pranchas foi estimada através do ensaio destrutivo de um corpo de prova selecionado aleatoriamente de cada uma das amostras das três espécies estudadas.

Conhecida a resistência estimada de cada amostra, os corpos de prova foram, então, ensaiados. A aplicação da força ocorreu de forma gradativa, a uma taxa aproximada de 10 MPa / min, em dois ciclos de carga e descarga, conforme recomendado pela NBR 7190/97, item B.10.4 e descrito pelo diagrama de carregamento, ilustrado na FIG. 26.

Os registros das forças aplicadas e das deformações foram feitos para cada ponto do diagrama ilustrado na FIG. 26.

No último ciclo de carga, analogamente ao que se fez nos ensaios de determinação da resistência e do módulo de elasticidade paralelos às fibras, os transdutores de deslocamento eram retirados ao se atingirem 70 % da resistência estimada das amostras para se evitar possíveis danos aos instrumentos. Em seguida, elevava-se a força aplicada até a ruptura dos corpos de prova.

4.3.5.3 Resultados experimentais

Os valores da força de ruptura e das deformações nos transdutores de deslocamento eram fornecidos diretamente pelo programa Aqdados. Todos os dados obtidos foram filtrados.

A deformação real de cada corpo de prova foi, também, determinada através da relação empírica expressa pela equação (4.6).

A resistência e o módulo de elasticidade normais às fibras de cada corpo de prova foram calculados utilizando as equações (4.9) e (4.10).

Os valores das áreas dos corpos de prova, das forças compressivas e das resistências das pranchas foram listadas nas TAB. 18, 19 e 20, respectivamente, para a Maçaranduba, o Jatobá e o Eucalipto.

TABELA 18
Resistências à compressão normal às fibras das pranchas de Maçaranduba.

CP	A (10^{-4} m^2)	$F_{c90/0,2\%}$ (10^4 N)	f_{c90} (MPa)
1MN	$15,9 \pm 0,1$	$1,23 \pm 0,02$	$7,7 \pm 0,2$
2MN	15,8	1,53	9,7
3MN	16,0	1,26	7,9
4MN	15,8	1,34	8,5
5MN	15,8	1,18	7,5
6MN	15,8	1,24	7,9
7MN	15,4	1,33	8,6
8MN	15,8	1,05	6,6
9MN	16,0	1,37	8,6
10MN	15,8	1,20	7,6

TABELA 19
Resistências à compressão normal às fibras das pranchas de Jatobá.

CP	A (10^{-4} m^2)	$F_{c90/0,2\%}$ (10^4 N)	f_{c90} (MPa)
1JN	$15,8 \pm 0,1$	$1,73 \pm 0,02$	$11,0 \pm 0,2$
2JN	15,3
3JN	15,4	1,59	10,4
4JN	15,5	0,91	5,9
5JN	15,8	1,49	9,4
6JN	15,6
7JN	15,3	0,71	4,6
8JN	15,5	0,72	4,7
9JN	15,2	0,54	3,6
10JN	15,5

TABELA 20
Resistências à compressão normal às fibras das pranchas de Eucalipto.

CP	A (10^{-4} m^2)	$F_{c90/0,2\%}$ (10^4 N)	f_{c90} (MPa)
1EN	$12,5 \pm 0,1$	$1,02 \pm 0,02$	$8,1 \pm 0,2$
2EN	12,4	0,72	5,8
3EN	12,2	1,11	9,1
4EN	12,9	0,51	4,0
5EN	12,4	0,68	5,5
6EN	12,4	0,75	6,1
7EN	13,1	1,11	8,5
8EN	12,6	0,5	4,0
9EN	13,0
10EN	13,0	0,86	6,6

NOTA – As resistências dos corpos de prova CP 21JN, CP 61 JN, CP 10 JN e CP 9EN não puderam ser determinadas devido à incoerência dos dados experimentais obtidos. Conseqüentemente, não puderam ser, também determinados os respectivos módulos de elasticidade.

Os valores de $\sigma_{10\%}$, $\sigma_{50\%}$, $\varepsilon_{10\%}$, $\varepsilon_{50\%}$ e dos módulos de elasticidade normal das pranchas foram listados nas TAB. 21, 22 e 23.

TABELA 21
Módulos de elasticidade normal às fibras das pranchas de Maçaranduba.

CP	$\sigma_{10\%}$ (MPa)	$\sigma_{50\%}$ (MPa)	$\epsilon_{10\%}$ (10^{-4})	$\epsilon_{50\%}$ (10^{-4})	E_{C90} (MPa)
1MN	$0,9 \pm 0,1$	$3,8 \pm 0,2$	$0,49 \pm 0,02$	$9,79 \pm 0,02$	3000 ± 1000
2MN	0,9	4,8	0,61	8,36	5000
3MN	1,6	4,1	8,12	11,90	6000
4MN	1,6	4,3	6,68	10,50	7000
5MN	1,6	3,9	10,60	12,60	11000
6MN	0,9	4,1	9,84	12,10	14000
7MN	0,8	4,3	1,67	9,48	4000
8MN	1,6	3,2	10,20	12,00	9000
9MN	0,8	4,3	8,88	12,10	11000
10MN	1,8	3,7	10,50	11,90	14000

TABELA 22
Módulos de elasticidade normal às fibras das pranchas de Jatobá.

CP	$\sigma_{10\%}$ (MPa)	$\sigma_{50\%}$ (MPa)	$\epsilon_{10\%}$ (10^{-4})	$\epsilon_{50\%}$ (10^{-4})	E_{C90} (MPa)
1JN	$1,1 \pm 0,1$	$5,5 \pm 0,2$	$9,86 \pm 0,02$	$13,00 \pm 0,02$	14000
2JN
3JN	5,1	8,0	11,40	14,70	9000
4JN	0,6	3,2	7,33	12,20	5000
5JN	1,0	4,7	3,40	11,00	5000
6JN
7JN	0,5	2,5	0,12	8,56	2000
8JN	0,7	2,3	1,15	10,20	2000
9JN	0,5	1,7	2,25	9,92	2000
10JN

TABELA 23
Módulos de elasticidade normal às fibras das pranchas de Eucalipto.

CP	$\sigma_{10\%}$ (MPa)	$\sigma_{50\%}$ (MPa)	$\varepsilon_{10\%}$ (10^{-4})	$\varepsilon_{50\%}$ (10^{-4})	E_{C90} (MPa)
1EN	$0,9 \pm 0,2$	$4,1 \pm 0,2$	$1,25 \pm 0,02$	$9,27 \pm 0,02$	3990 ± 1000
2EN	0,8	2,8	0,92	8,70	2591
3EN	0,9	4,4	3,95	10,30	5551
4EN	0,5	1,9	0,45	8,56	1815
5EN	0,6	2,6	3,58	10,50	2913
6EN	0,6	3,0	4,68	9,56	4792
7EN	0,8	4,0	1,96	7,36	5937
8EN	0,3	2,2	6,00	11,70	3342
9EN
10EN	0,6	3,3	5,00	10,40	4986

4.3.6 Determinação da resistência das pranchas ao cisalhamento paralelo às fibras

4.3.6.1 Considerações gerais

A NBR 7190/97, em seu item B.12.2, define a resistência ao cisalhamento paralelo às fibras como sendo a máxima tensão de cisalhamento que pode atuar na seção crítica de um corpo de prova prismático, dada pela relação:

$$f_{v0} = \frac{F_{v0, \max}}{A_{v0}} \quad (4.11)$$

em que $F_{v0, \max}$ é a máxima força cisalhante aplicada ao corpo de prova e A_{v0} é a área inicial crítica do corpo de prova, em um plano paralelo às fibras.

4.3.6.2 Procedimento experimental

De acordo com NBR 7190/97, item B.12.4, os corpos de prova para os ensaios de resistência ao cisalhamento devem ser confeccionados de maneira que as dimensões aproximadas da área resistente ao cisalhamento sejam de 5,0 cm x 5,0 cm nas direções longitudinal e radial. Entretanto, devido às limitações das espessuras das pranchas, não era possível extrair, diretamente das amostras, corpos de prova com estas dimensões.

Para contornar o problema, foram cortados, primeiramente, dois tacos com dimensões aproximadas de 2,5 cm x 5,0 cm de seção transversal e 5,0 cm de comprimento ao longo da direção paralela às fibras. Em seguida, os tacos foram justapostos e colados de maneira a formarem os corpos de prova com as dimensões especificadas pela norma, conforme ilustrado na FIG. 28.

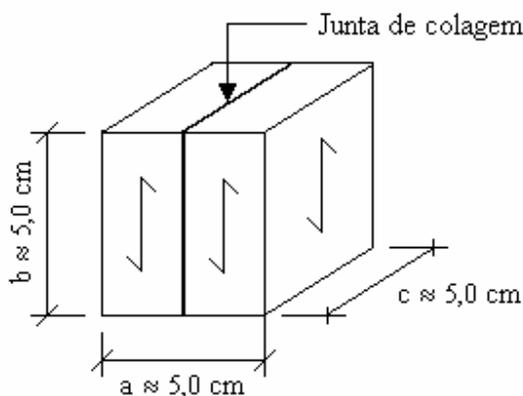


FIGURA 28 – Corpos de prova para ensaio de resistência ao cisalhamento paralelo às fibras.

Note que $A_{v0} = a \times b$.

As dimensões reais dos corpos de prova foram determinadas com o auxílio de um paquímetro. Em seguida, os corpos foram finalmente ensaiados.

Um dispositivo adaptado ao cilindro hidráulico permitia a aplicação de uma força cisalhante paralela à direção das fibras.

A aplicação da força ocorreu de forma gradativa e crescente, a uma taxa aproximada de 2,5 MPa / min.

4.3.6.3 Resultados experimentais

Os valores de força cisalhante eram fornecidos diretamente pelo programa Aqdados. Todos os dados obtidos foram filtrados com o objetivo de se evitarem interferências indesejadas da rede elétrica.

As resistências das pranchas ao cisalhamento paralelo às fibras foram determinadas através da equação (4.11).

Os valores encontrados, juntamente com as áreas iniciais críticas e as forças máximas cisalhantes foram listados nas TAB. 24, 25 e 26, respectivamente para a Maçaranduba, o Jatobá e o Eucalipto.

TABELA 24
Resistências ao cisalhamento paralelo às fibras das pranchas de Maçaranduba.

CP	A_{v0} (10^{-4} m^2)	$F_{v0,max}$ (10^4 N)	f_{v0} (MPa)
1MC	$25,6 \pm 0,01$	$2,90 \pm 0,01$	$11,3 \pm 0,1$
2MC	25,9	3,50	13,5
3MC	26,1	3,03	11,6
4MC	26,1	3,40	13,0
5MC	26,0	3,40	13,1
6MC	26,1	3,70	14,2
7MC	25,4	3,40	13,4
8MC	25,8	3,44	13,4
9MC	25,9	3,70	14,3
10MC	26,2	3,84	14,6

TABELA 25
Resistências ao cisalhamento paralelo às fibras das pranchas de Jatobá.

CP	A_{v0} (10^{-4} m^2)	$F_{v0,max}$ (10^4 N)	f_{v0} (MPa)
1JC	$24,8 \pm 0,1$	$2,67 \pm 0,02$	$10,8 \pm 0,1$
2JC	25,5	2,71	10,6
3JC	25,9	4,51	17,4
4JC	25,8	2,71	10,5
5JC	26,0	3,82	14,7
6JC	26,2	3,29	12,6
7JC	25,7	2,76	10,8
8JC	25,9	3,80	14,7
9JC	26,0	3,82	14,7
10JC	27,7	1,67	6,0

TABELA 26
Resistências ao cisalhamento paralelo às fibras das pranchas de Eucalipto.

CP	A_{v0} (10^{-4} m^2)	$F_{v0,max}$ (10^4 N)	f_{v0} (MPa)
1EC	$25,4 \pm 0,1$	$3,62 \pm 0,02$	$14,3 \pm 0,1$
2EC	25,1	4,45	17,7
3EC	24,6	2,91	11,8
4EC	25,0	3,83	15,3
5EC	25,1	4,66	18,6
6EC	25,7	4,64	18,1
7EC	25,5	3,91	15,3
8EC	25,3	4,88	19,3
9EC	25,6	4,74	18,5
10EC	25,1	4,39	17,5

CAPÍTULO 5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

O objetivo deste capítulo é analisar qualitativa e quantitativamente os resultados experimentais obtidos no Capítulo 4, culminando com a determinação de relações estatísticas que possibilitem expressar as propriedades mecânicas (resistência e rigidez) como funções da velocidade de propagação do pulso ultra-sônico e de propriedades físicas (umidade e densidade), dos três espécimes estudados.

Para esta finalidade, foi realizado um tratamento estatístico dos dados obtidos e, com auxílio do programa Minitab, versão 13, foi desenvolvida uma análise de regressão linear múltipla em que vários modelos matemáticos foram testados. Após algumas tentativas, selecionou-se aqueles modelos que melhor representavam as relações entre as variáveis dependentes (resistência e rigidez) e as variáveis independentes (velocidade, umidade e densidade).

5.1 Determinação das relações estatísticas entre as propriedades mecânicas, a velocidade de propagação e as propriedades físicas

5.1.1 Estatística descritiva

Para facilitar a análise estatística dos dados obtidos, foi confeccionado um banco de dados contendo todas as informações referentes às variáveis envolvidas. Este banco de dados está apresentado na TAB. 27.

TABELA 27
Banco de dados.

CP	V	U	ρ_{ap}	madeira	f_{c0}	f_{c90}	f_{v0}	E_{c0}	E_{c90}
1M	4290	29,64	1200	1	59,8	7,7	11,3	41000	3000
2M	4530	30,89	1160	1	56,8	9,7	13,5	52000	5000
3M	4260	30,29	1210	1	68,2	7,9	11,6	48000	6000
4M	4230	30,34	1210	1	69,3	8,5	13,0	55000	7000
5M	4270	28,95	1190	1	66,8	7,5	13,1	40000	11000
6M	4390	30,75	1150	1	49,3	7,9	14,2	27000	14000
7M	4530	29,11	1140	1	66,7	8,6	13,4	61000	4000
8M	4540	22,48	1120	1	70,5	6,6	13,4	46000	9000
9M	4240	27,14	1180	1	68,0	8,6	14,3	45000	11000
10M	4290	28,17	1180	1	67,0	7,6	14,6	48000	14000
1J	5100	21,50	1130	2	84,4	11,0	10,8	62000	14000
2J	4460	45,02	1090	2	48,1	...	10,6	63000	...
3J	5010	20,33	1150	2	80,1	10,4	17,4	53000	9000
4J	5100	21,89	910	2	63,8	5,9	10,5	65000	5000
5J	4840	20,38	960	2	61,3	9,4	14,7	52000	5000
6J	3700	60,77	880	2	39,9	...	12,6	33000	...
7J	3870	45,65	870	2	43,9	4,6	10,8	33000	2000
8J	5170	21,24	900	2	52,3	4,7	14,7	55000	2000
9J	4830	18,78	830	2	46,1	3,6	14,7	29000	2000
10J	4160	25,70	660	2	26,5	...	6,0	35000	...
1E	5750	11,92	980	3	71,9	8,1	14,3	51000	4000
2E	5060	12,29	940	3	62,2	5,8	17,7	40000	3000
3E	5370	12,22	1010	3	92,3	9,1	11,8	95000	5000
4E	5370	11,70	680	3	55,3	4,0	15,3	49000	2000
5E	5650	12,50	950	3	80,4	5,5	18,6	92000	3000
6E	5110	11,82	1030	3	61,7	6,1	18,1	41000	5000
7E	5240	13,34	930	3	65,1	8,5	15,3	52000	6000
8E	4930	12,75	940	3	54,2	4,0	19,3	38000	3000
9E	5490	13,23	970	3	81,3	...	18,5	54000	...
10E	5740	11,56	910	3	81,2	6,6	17,5	68000	5000

5.1.1.1 Descrição das variáveis

5.1.1.1.1 Variáveis indicadoras

Como a variável Madeira é qualitativa e tem 3 níveis, são necessárias duas variáveis indicadoras, ou seja:

$$I_1 = \begin{cases} 1, & \text{se madeira} = 1 \\ 0, & \text{se madeira} = 2 \\ 0, & \text{se madeira} = 3 \end{cases}$$

$$I_2 = \begin{cases} 0, & \text{se madeira} = 1 \\ 1, & \text{se madeira} = 2 \\ 0, & \text{se madeira} = 3 \end{cases}$$

Para se fazer a predição com a variável madeira significativa, serão usados os seguintes códigos:

- $I_1=1$ e $I_2=0$ para a madeira 1 (Maçaranduba);
- $I_1=0$ e $I_2=1$ para a madeira 2 (Jatobá);
- $I_1=0$ e $I_2=0$ para a madeira 3 (Eucalipto).

5.3.1.1.2 Variáveis preditoras

As variáveis preditoras dos modelos são:

1. Umidade (U);
2. Velocidade de Propagação (v);
3. Densidade aparente (ρ_{ap});
4. Tipo de Madeira:
 - a) Maçaranduba;
 - b) Jatobá;
 - c) Eucalipto.

5.1.1.1.3 Variáveis resposta

As variáveis respostas dos modelos são:

1. Resistência à compressão paralela às fibras (f_{c0});
2. Resistência à compressão normal às fibras (f_{c90});
3. Resistência ao cisalhamento paralelo às fibras (f_{v0});
4. Módulo de elasticidade longitudinal (E_{c0});
5. Módulo de elasticidade normal às fibras (E_{c90}).

5.1.2 Normalidade das variáveis resposta

O modelo de regressão linear simples exige a normalidade da variável resposta. Assim, antes do ajuste do modelo, deve-se realizar um teste de hipótese para a normalidade dos dados, da seguinte forma:

H_0 : a distribuição normal ajusta-se aos dados.

H_1 : a distribuição normal não se ajusta aos dados.

Considerando um nível de significância (α) igual a 5%, se o valor p do teste for menor que 0,05 rejeita-se a hipótese nula.

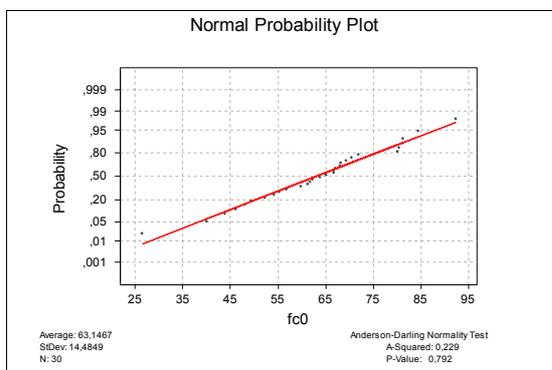


GRÁFICO 1 – Teste de normalidade da resposta f_{c0} .

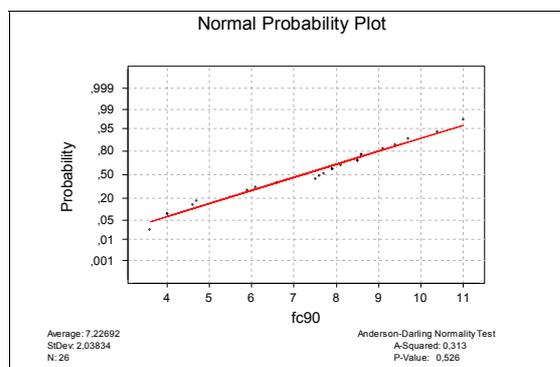


GRÁFICO 2 – Teste de normalidade da resposta f_{c90} .

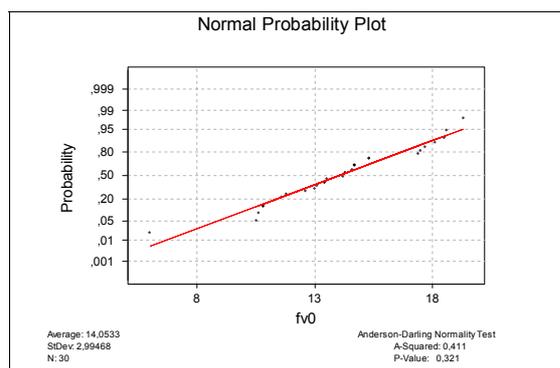


GRÁFICO 3 – Teste de normalidade da resposta f_{v0} .

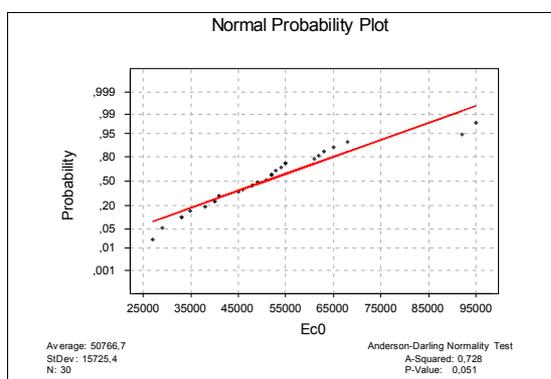


GRÁFICO 4 – Teste de normalidade da resposta E_{c0} .

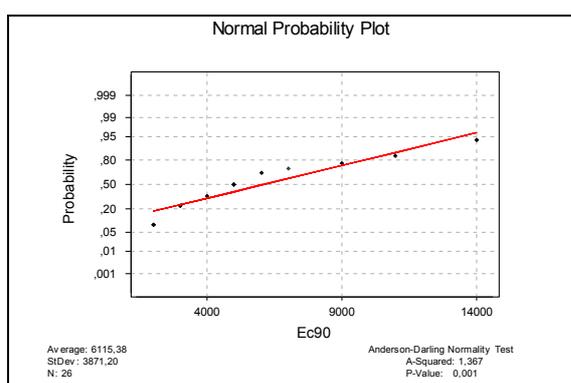


GRÁFICO 5 – Teste de normalidade da resposta E_{c90} .

As três primeiras variáveis resposta anteriores, de acordo com o teste de normalidade, possuem distribuição aproximadamente normal. No entanto, as variáveis E_{c0} e E_{c90} não se aproximam de uma normal. Para contornar o problema, procurou-se uma transformação que pudesse deixá-las mais próximas desta distribuição. A transformação logarítmica resolveu satisfatoriamente o problema.

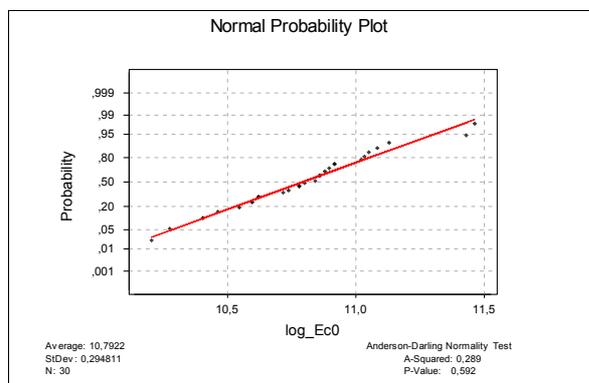


GRÁFICO 6 – Teste e normalidade da resposta $\log(E_{c0})$.

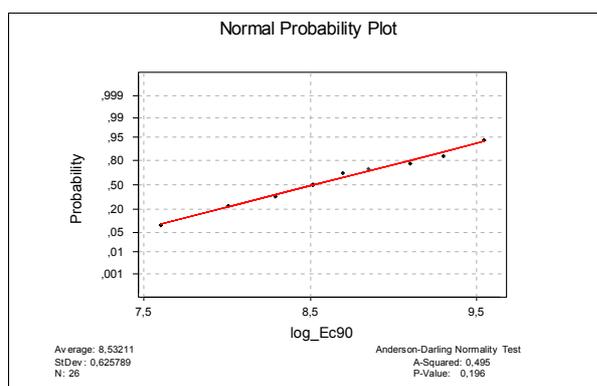


GRÁFICO 7 – Teste de normalidade da resposta $\log(E_{c90})$.

5.1.3 Correlações entre as variáveis

Nas TAB. 28 e 29, são apresentadas as correlações entre as variáveis. Nestas tabelas, o primeiro valor corresponde à correlação amostral entre as variáveis. Abaixo dele, encontra-se o valor p, cujos valores próximos de zero indicam correlação significativa entre as variáveis.

TABELA 28
Correlações entre as variáveis regressoras

	v	u	ρ_{ap}
u	-0,849 0,000	- -	- -
ρ_{ap}	-0,300 0,107	0,219 0,245	- -

TABELA 29
Correlações entre as variáveis resposta e regressoras

	v	U	ρ_{ap}
f_{c0}	0,573 0,001	-0,514 0,004	0,436 0,016
f_{c90}	-0,123 0,549	0,183 0,370	0,688 0,000
f_{v0}	0,556 0,001	-0,548 0,002	0,005 0,980
E_{c0}	0,566 0,001	-0,346 0,061	0,075 0,692
E_{c90}	-0,333 0,097	0,275 0,174	0,650 0,000

O tipo de estrutura ideal consiste em se obter alta correlação entre as variáveis preditoras e as variáveis resposta, pois isso indica que as preditoras contém informação sobre a resposta, e baixa correlação das variáveis preditoras entre si, uma vez que não faz sentido incluir, em um modelo, duas variáveis preditoras altamente correlacionadas.

Uma característica importante do conjunto de dados é que todas as variáveis resposta tem correlação significativa com pelo menos uma variável preditora. Isso indica que se pode

encontrar um bom modelo de regressão. Outra característica importante observada é que as variáveis umidade e velocidade têm alta correlação entre si.

Na TAB. 30, é apresentada a descritiva das variáveis resposta e regressoras segundo o tipo de madeira.

TABELA 30
Descritiva das variáveis resposta e regressoras segundo o tipo de madeira.

Variável	madeira	Média	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo
v	1	4357,0	129,2	4230,0	4540,0
	2	4624,0	543,0	3700,0	5170,0
	3	5371,0	288,3	4930,0	5750,0
U	1	28,776	2,509	22,480	30,890
	2	30,130	14,770	18,780	60,770
	3	12,333	0,621	11,560	13,340
ρ_{ap}	1	1174,0	30,6	1120,0	1210,0
	2	938,0	150,8	660,0	1150,0
	3	934,0	96,5	680,0	1030,0
f_{c0}	1	64,24	6,77	49,30	70,50
	2	54,64	17,97	26,50	84,40
	3	70,56	12,82	54,20	92,30
f_{c90}	1	8,060	0,837	6,600	9,70
	2	7,090	3,080	3,600	11,00
	3	6,411	1,851	4,000	9,10
f_{v0}	1	13,240	1,082	11,300	14,60
	2	12,280	3,230	6,000	17,40
	3	16,640	2,377	11,800	19,30
E_{c0}	1	46300	9262	27000	61000
	2	48000	14063	29000	65000
	3	58000		38000	95000
E_{c90}	1	8400	4006	3000	14000
	2	5571	4504	2000	14000
	3	4000	1323	2000	6000

5.1.4 Análise de f_{c0}

5.1.4.1 Modelo completo

O modelo completo encontrado para f_{c0} foi o seguinte:

The regression equation is				
$f_{c0} = - 84,5 + 0,0168 v - 0,038 u + 0,0701 \rho_{ap} - 5,51 I1 - 3,00 I2$				
Predictor	Coef	StDev	T	P
Constant	-84,47	37,05	-2,28	0,032
v	0,016768	0,006911	2,43	0,023
u	-0,0379	0,2782	-0,14	0,893
ρ_{ap}	0,07006	0,01606	4,36	0,000
I1	-5,507	7,764	-0,71	0,485
I2	-2,999	5,051	-0,59	0,558
S = 8,112 R-Sq = 74,0% R-Sq(adj) = 68,6%				

5.1.4.2 Modelo reduzido

As variáveis umidade e madeira não são significativas, portanto podem ser retiradas do modelo. O novo modelo ajustado é:

The regression equation is						
$f_{c0} = - 97,1 + 0,0200 v + 0,0635 \rho_{ap}$						
Predictor	Coef	StDev	T	P		
Constant	-97,12	18,60	-5,22	0,000		
v	0,020025	0,002692	7,44	0,000		
ρ_{ap}	0,063494	0,009875	6,43	0,000		
S = 7,736 R-Sq = 73,4% R-Sq(adj) = 71,5%						
Analysis of Variance						
Source	DF	SS	MS	F	P	
Regression	2	4468,9	2234,5	37,34	0,000	
Residual Error	27	1615,7	59,8			
Total	29	6084,6				
Unusual Observations						
Obs	v	f_{c0}	Fit	StDev Fit	Residual	St Resid
20	4160	26,50	28,09	4,55	-1,59	-0,25 X
23	5370	92,30	74,54	2,11	17,76	2,39R
R denotes an observation with a large standardized residual						
X denotes an observation whose X value gives it large influence.						

Todas as variáveis são significativas no modelo. O modelo tem um R^2 ajustado igual a 71,5%, ou seja, essa é a porcentagem da variabilidade total dos dados explicada pelo modelo.

Uma vez que o modelo ajusta-se bem aos dados, resta verificar se as suposições do modelo de regressão linear estão sendo satisfeitas, ou seja, se o modelo é válido ou não. Dessa forma, será feita a análise de resíduos do modelo reduzido, descrita pelo GRAF. 8.

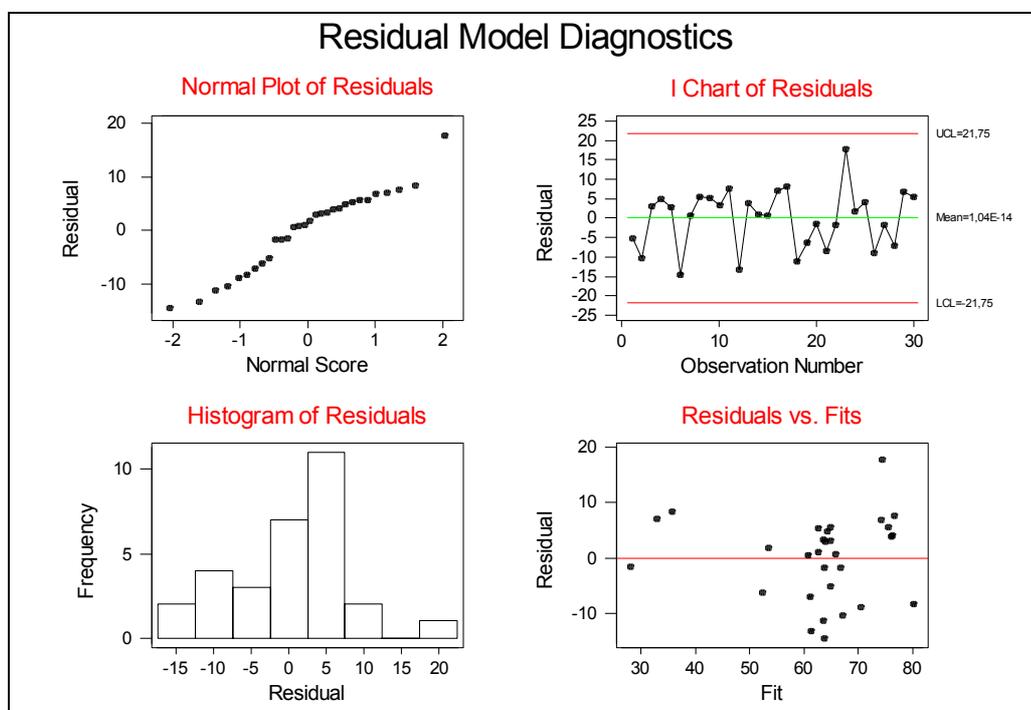


GRÁFICO 8 – Análise de resíduos de f_{c0} .

A análise de resíduos indica que algumas suposições do modelo de regressão foram violadas. Isso pode ser devido à presença de outliers (valores discrepantes). Dessa forma, testes para detecção de outliers são apresentados a seguir:

- Se o resíduo padronizado estiver fora do intervalo (-2,2) a observação é um outlier.
- Se D de Cook for maior que $1/F_{n-p, n}(\alpha)$ a observação é um outlier.
 $1/F_{28,30}(\alpha) = 1/1,62 = 0,62$
- Se DFIT for maior que $\sqrt{\frac{p}{n}} = 0,52$, a observação é um outlier.

Na TAB. 31, são apresentados os resultados dos testes para a detecção de outliers.

TABELA 31
Testes para detecção de outliers.

Observação	Resíduos Padronizados	D de COOK	DFIT
1	-0,70350	0,017138	-0,224574
2	-1,39684	0,045543	-0,376587
3	0,43443	0,007076	0,143479
4	0,66720	0,017125	0,224278
5	0,38723	0,005008	0,120623
6	-1,94212	0,091041	-0,552914
7	0,09644	0,000191	0,023491
8	0,74251	0,009994	0,171680
9	0,71686	0,016826	0,222605
10	0,44474	0,006153	0,133816
11	1,02839	0,029212	0,296364
12	-1,76269	0,052990	-0,415919
13	0,52175	0,007591	0,148836
14	0,13475	0,000350	0,031795
15	0,07186	0,000068	0,013993
16	1,04910	0,118813	0,598183
17	1,20057	0,123415	0,613710
18	-1,50138	0,048956	-0,392825
19	-0,83897	0,022438	-0,257985
20	-0,25397	0,011346	-0,181259
21	-1,16309	0,072955	-0,471037
22	-0,22375	0,000809	-0,048399
23	2,38567	0,151893	0,745656
24	0,24810	0,005314	0,124042
25	0,55823	0,013631	0,199594
26	-1,17987	0,023309	-0,266456
27	-0,23465	0,001171	-0,058230
28	-0,93614	0,012879	-0,196099
29	0,93349	0,028201	0,290151
30	0,77813	0,031555	0,305370

Por dois dos três testes de detecção de outliers, a observação 23, referente à terceira medida no tipo de madeira 2, foi considerada atípica. Portanto, a observação 23 é um outlier e deve ser retirada da análise.

A análise, excluindo-se a observação 23, será:

The regression equation is				
fc0 = - 86,6 + 0,0177 v - 0,010 u + 0,0644 p _{ap} - 1,77 I1 - 0,89 I2				
Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	-86,57	33,97	-2,55	0,018
v	0,017726	0,006347	2,79	0,010
u	-0,0099	0,2553	-0,04	0,969
p _{ap}	0,06443	0,01492	4,32	0,000
I1	-1,773	7,290	-0,24	0,810
I2	-0,887	4,716	-0,19	0,852
S = 7,436 R-Sq = 75,6% R-Sq(adj) = 70,3%				

Uma outra justificativa para a retirada da observação discrepante é o efeito da sua presença nas estimativas dos coeficientes, no Quadrado Médio Residual e no R² ajustado, conforme pode ser visto na TAB.32.

TABELA 32

Comparação entre os coeficientes do modelo de regressão com e sem o outlier.

	Com a Obs. 23	Sem a Obs. 23
Coeficientes:		
Constante	-84,47	-86,57
Velocidade	0,016768	0,017726
Umidade	-0,0379	-0,0099
Densidade	0,07006	0,06443
Madeira: I1	-5,507	-1,773
Madeira: I2	-2,999	-0,887
Quadrado Médio Residual	65,81	55,29
R ² ajustado	68,6%	70,3%

Retirando-se as variáveis não significativas, o modelo de regressão final para a resposta f_{c0} será:

The regression equation is						
$f_{c0} = - 90,0 + 0,0187 v + 0,0622 p_{ap}$						
Predictor		Coef	SE Coef	T	P	
Constant		-89,96	17,06	-5,27	0,000	
v		0,018678	0,002490	7,50	0,000	
p_{ap}		0,062161	0,008954	6,94	0,000	
S = 7,003		R-Sq = 75,5%		R-Sq(adj) = 73,6%		
Analysis of Variance						
Source	DF	SS	MS	F	P	
Regression	2	3930,3	1965,1	40,07	0,000	
Residual Error	26	1275,1	49,0			
Total	28	5205,4				
Unusual Observations						
Obs	v	f_{c0}	Fit	SE Fit	Residual	St Resid
6	4390	49,30	63,52	1,82	-14,22	-2,10R
20	4160	26,50	28,76	4,12	-2,26	-0,40 X
R denotes an observation with a large standardized residual						
X denotes an observation whose X value gives it large influence.						

Para a análise de resíduos de f_{c0} sem o outlier, foi confeccionado o GRAF. 9. O teste de normalidade do resíduo da resposta f_{c0} está descrito no GRAF. 10.

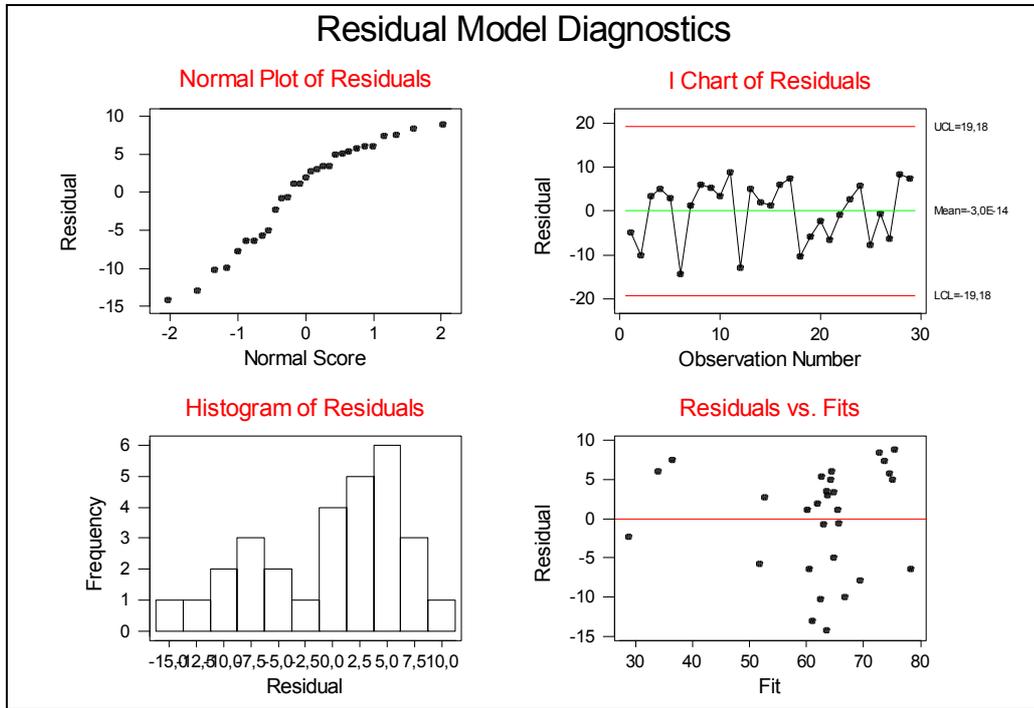


GRÁFICO 9 – Análise de resíduos de f_{c0} sem o outlier.

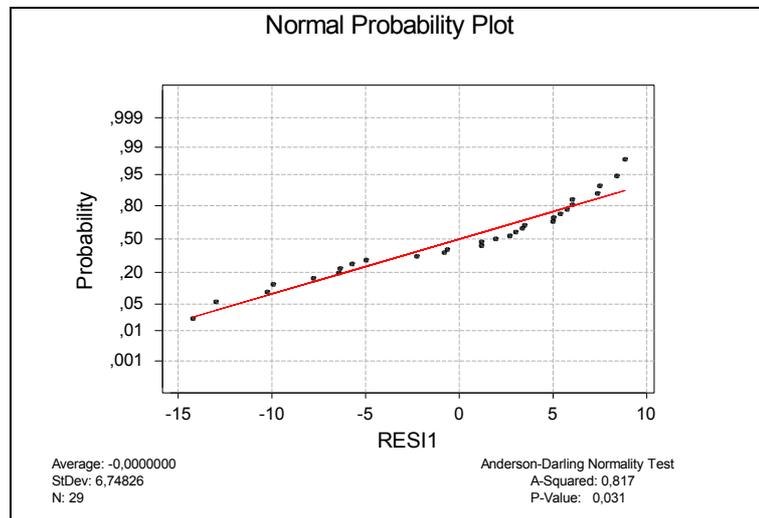


GRÁFICO 10 - Teste de normalidade do resíduo da resposta f_{c0} sem o outlier.

A suposição de normalidade dos resíduos foi violada. Como o gráfico de normalidade não indica nenhuma observação discrepante das demais, indício de que ainda restariam outliers entre os dados, transformações nas variáveis predictoras foram testadas. O melhor modelo encontrado foi construído com a variável v elevada ao quadrado.

The regression equation is				
fc0 = 328 - 0,153 v - 0,604 u + 0,0791 ρ_{ap} + 1,09 I1 + 6,54 I2 + 0,000017 v*v				
Predictor	Coef	StDev	T	P
Constant	328,2	141,9	2,31	0,030
v	-0,15253	0,05726	-2,66	0,014
u	-0,6040	0,2967	-2,04	0,054
ρ_{ap}	0,07914	0,01377	5,74	0,000
I1	1,093	6,360	0,17	0,865
I2	6,543	4,767	1,37	0,184
v*v	0,00001705	0,00000571	2,99	0,007
S = 6,413 R-Sq = 82,6% R-Sq(adj) = 77,9%				

Retirando-se as variáveis não significativas, o modelo final será:

The regression equation is						
fc0 = 205 - 0,101 v - 0,305 u + 0,0693 ρ_{ap} + 0,000012 v*v						
Predictor	Coef	StDev	T	P		
Constant	204,9	120,6	1,70	0,102		
v	-0,10106	0,04793	-2,11	0,046		
u	-0,3052	0,2299	-1,33	0,197		
ρ_{ap}	0,069286	0,008789	7,88	0,000		
v*v	0,00001199	0,00000478	2,51	0,019		
S = 6,488 R-Sq = 80,6% R-Sq(adj) = 77,4%						
Analysis of Variance						
Source	DF	SS	MS	F	P	
Regression	4	4195,0	1048,7	24,91	0,000	
Residual Error	24	1010,4	42,1			
Total	28	5205,4				
Unusual Observations						
Obs	v	fc0	Fit	StDev Fit	Residual	St Resid
6	4390	49,30	62,59	1,73	-13,29	-2,13R
16	3700	39,90	37,53	4,87	2,37	0,55X
21	5750	71,90	84,45	3,65	-12,55	-2,34R
R denotes an observation with a large standardized residual						
X denotes an observation whose X value gives it large influence.						

Para a análise de resíduos e teste de normalidade do resíduo da resposta de f_{c0} , com v^2 , foram confeccionados os GRAF. 11 e 12, respectivamente.

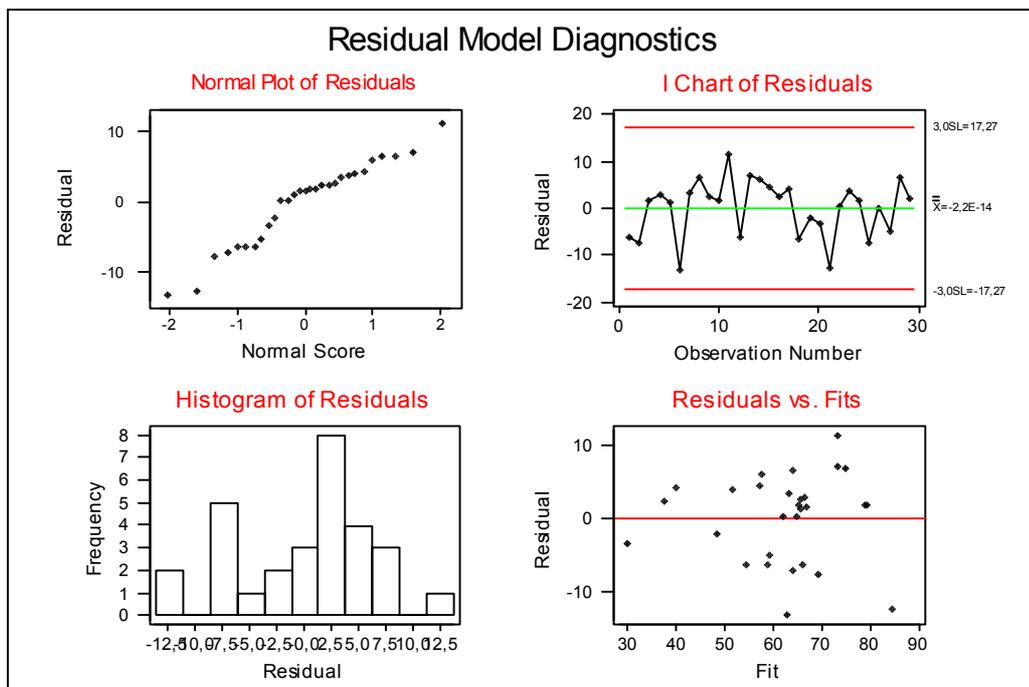


GRÁFICO 11 – Análise de resíduos de f_{c0} com v^2 .

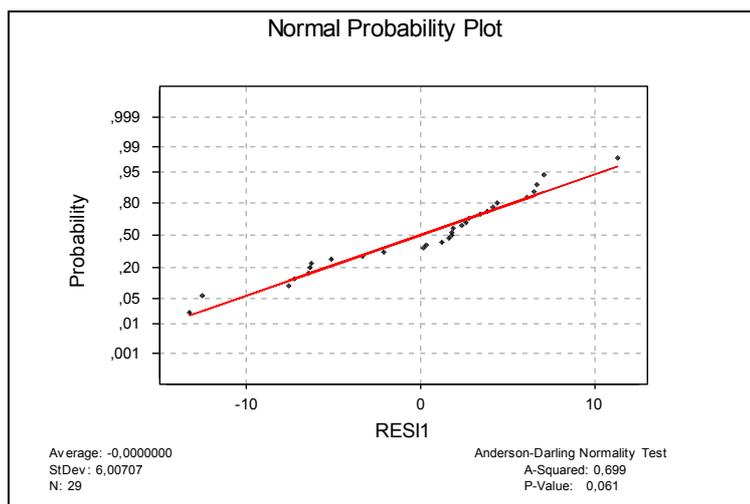


GRÁFICO 12 – Teste de normalidade do resíduo da resposta de f_{c0} com v^2 .

Segundo a análise de resíduos, o modelo é confiável, uma vez que nenhuma suposição foi violada.

Dessa forma, a resistência à compressão paralela às fibras f_{c0} pode ser obtida, conhecendo-se a velocidade de propagação do pulso, a umidade e a densidade de madeiras, através da seguinte equação:

$$f_{c0} = 205 - 0,101 v - 0,305 u + 0,0693 \rho_{ap} + 0,000012 v^2 \quad (5.1)$$

5.1.5 Análise de f_{c90}

5.1.5.1 Modelo completo

O modelo completo encontrado para f_{c90} foi:

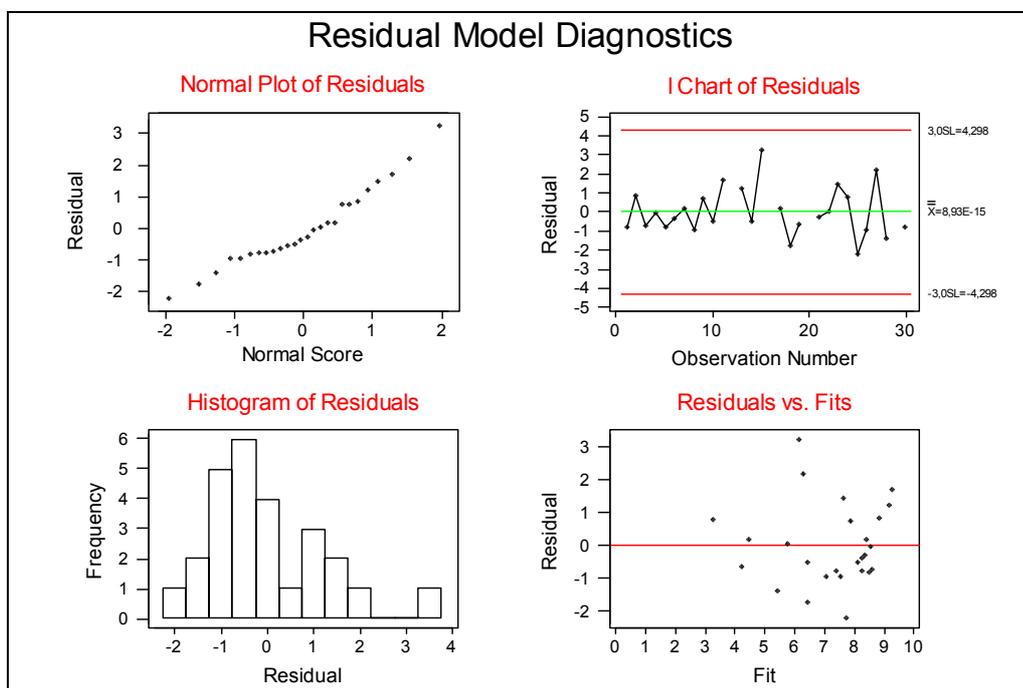
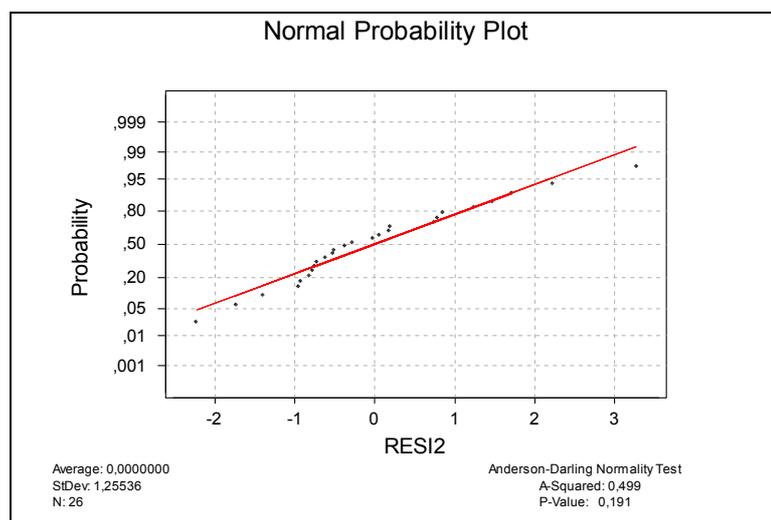
The regression equation is				
$f_{c90} = - 21,9 + 0,00239 v + 0,0711 u + 0,0158 \rho_{ap} -$				
$0,98 I1 + 0,502 I2$				
26 cases used 4 cases contain missing values				
Predictor	Coef	StDev	T	P
Constant	-21,906	8,148	-2,69	0,014
v	0,002389	0,001301	1,84	0,081
u	0,07114	0,07718	0,92	0,368
ρ_{ap}	0,015753	0,003115	5,06	0,000
I1	-0,981	1,476	-0,66	0,514
I2	0,5025	0,9585	0,52	0,606
S = 1,329		R-Sq = 66,0%		R-Sq(adj) = 57,5%

5.1.5.2 Modelo reduzido

Como pode ser verificado, as variáveis indicadoras podem ser retiradas do modelo. Dessa forma, o novo modelo ajustado será:

The regression equation is						
fc90 = - 23,5 + 0,00309 v + 0,0984 u + 0,0132 ρ_{ap}						
26 cases used 4 cases contain missing values						
Predictor	Coef	StDev	T	P		
Constant	-23,541	8,122	-2,90	0,008		
v	0,003093	0,001208	2,56	0,018		
u	0,09836	0,06757	1,46	0,160		
ρ_{ap}	0,013230	0,002283	5,79	0,000		
S = 1,338		R-Sq = 62,1%		R-Sq(adj) = 56,9%		
Analysis of Variance						
Source	DF	SS	MS	F	P	
Regression	3	64,473	21,491	12,00	0,000	
Residual Error	22	39,398	1,791			
Total	25	103,871				
Unusual Observations						
Obs	v	fc90	Fit	StDev Fit	Residual	St Resid
12	4460	*	9,101	1,228	*	* X
15	4840	9,400	6,133	0,325	3,267	2,52R
16	3700	*	5,521	1,752	*	* X
17	3870	4,600	4,428	1,090	0,172	0,22 X
20	4160	*	0,584	1,266	*	* X
R denotes an observation with a large standardized residual						
X denotes an observation whose X value gives it large influence.						

Para a análise de resíduos e teste da normalidade do resíduo da resposta, para f_{c90} , foram confeccionados os GRAF. 13 e 14.

GRÁFICO 13 – Análise de resíduos de f_{c90} .GRÁFICO 14 – Tese de normalidade do resíduo da resposta de f_{c90} .

A análise de resíduos não indica nenhum desvio das suposições do modelo.

Como pode ser verificado, através do valor de p, a variável umidade não é significativa no modelo.

Entretanto, a retirada desta variável do modelo faz com que se perca um pouco da explicação da variabilidade total dos dados, conforme demonstrado na análise abaixo:

```

The regression equation is
fc90 = - 14,0 + 0,00159 v + 0,0131 ρap

26 cases used 4 cases contain missing values

Predictor      Coef      StDev      T      P
Constant      -13,997    4,909      -2,85   0,009
v              0,0015887 0,0006406    2,48   0,021
ρap         0,013110  0,002337    5,61   0,000

S = 1,370      R-Sq = 58,4%      R-Sq(adj) = 54,8%

Analysis of Variance

Source          DF          SS          MS          F          P
Regression      2           60,678      30,339      16,16      0,000
Residual Error  23          43,193      1,878
Total           25          103,871

```

Para a análise de resíduos e teste da normalidade do resíduo para a resposta de f_{c90} sem a variável umidade, foram construídos os GRAF. 15 e 16.

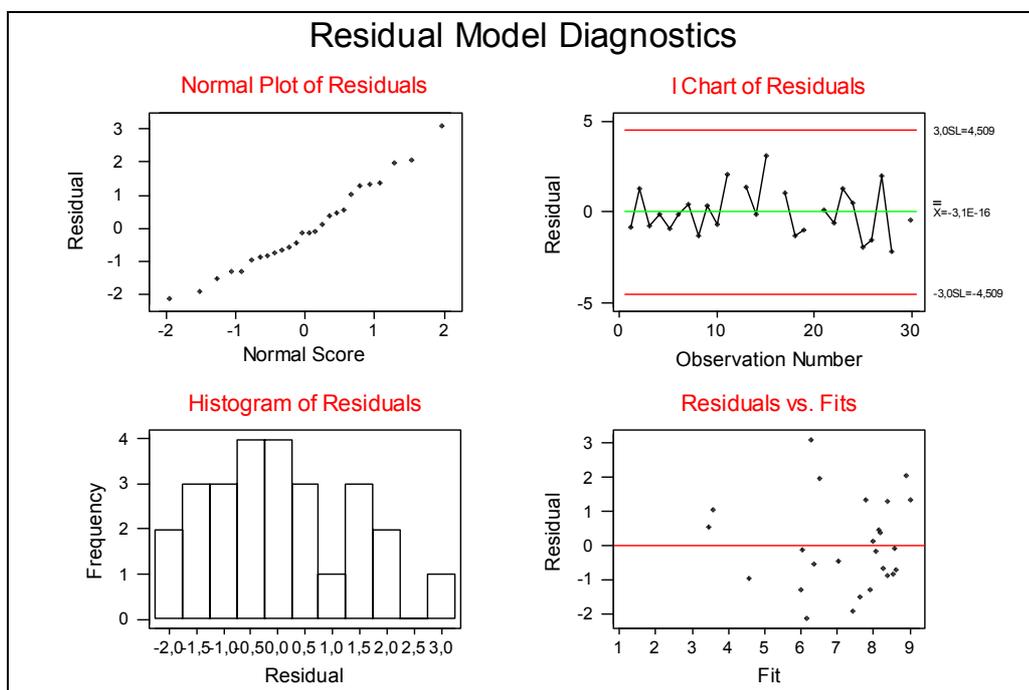


GRÁFICO 15 – Análise de resíduos de f_{c90} sem a variável umidade.

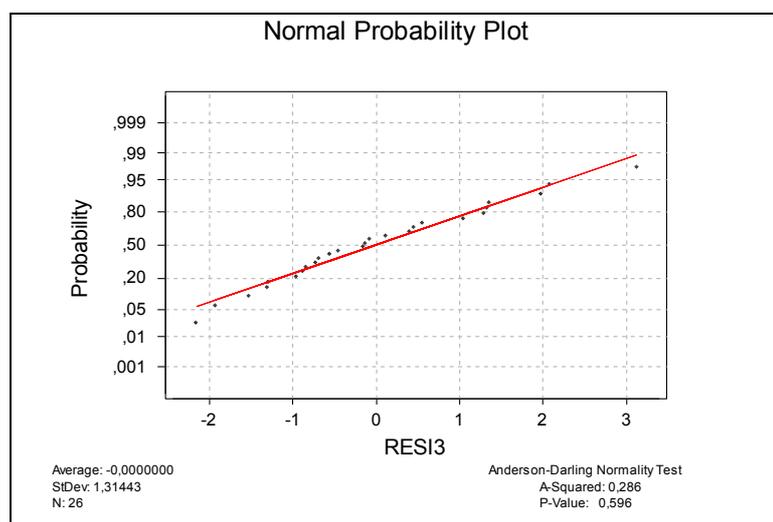


GRÁFICO 16 - Teste de normalidade do resíduo da resposta de f_{c90} sem a variável umidade.

Dessa forma, a resistência à compressão normal às fibras se relaciona à velocidade de propagação do pulso e à densidade através da seguinte expressão:

$$f_{c90} = -14,0 + 0,00159 v + 0,0131 \rho_{ap} \quad (5.2)$$

5.1.6 Análise de f_{v0}

5.1.6.1 Modelo completo

O modelo completo obtido para f_{v0} foi:

The regression equation is				
fv0 = 9,5 + 0,00028 v - 0,0419 u + 0,00662 ρ_{ap} - 4,02 I1 - 3,43 I2				
Predictor	Coef	StDev	T	P
Constant	9,48	10,84	0,87	0,391
v	0,000278	0,002022	0,14	0,892
u	-0,04186	0,08141	-0,51	0,612
ρ_{ap}	0,006624	0,004700	1,41	0,172
I1	-4,019	2,271	-1,77	0,090
I2	-3,434	1,478	-2,32	0,029
S = 2,373		R-Sq = 48,0%		R-Sq(adj) = 37,2%

5.1.6.2 Modelo reduzido

Conforme pode ser verificado, através dos valores de p, as variáveis velocidade e umidade não são significativas no modelo, não se podendo estabelecer, dessa forma, uma relação entre elas e a variável f_{v0} .

5.1.7 Análise de Log (E_{c0})

A variável E_{c0} não apresentou distribuição normal, sendo, assim, incorreto utilizar o modelo de regressão linear. Entretanto, após uma transformação logarítmica, foi possível obter a distribuição normal e iniciar o ajuste do modelo.

5.1.7.1 Modelo completo

O modelo completo obtido para Log (E_{co}) foi:

The regression equation is				
$\log_Ec0 = 6,83 + 0,000637 v + 0,0129 u + 0,000541 \rho_{ap} + 0,108 I1 + 0,062 I2$				
Predictor	Coef	StDev	T	P
Constant	6,833	1,050	6,51	0,000
v	0,0006366	0,0001958	3,25	0,003
u	0,012934	0,007885	1,64	0,114
ρ_{ap}	0,0005412	0,0004552	1,19	0,246
I1	0,1076	0,2200	0,49	0,629
I2	0,0623	0,1431	0,44	0,667
S = 0,2299		R-Sq = 49,7%		R-Sq(adj) = 39,2%

5.1.7.2 Modelo reduzido

De acordo com os valores de p, as variáveis indicadoras relativas ao tipo de madeira podem ser retiradas do modelo. Portanto, o novo modelo será:

The regression equation is						
$\log_Ec0 = 7,04 + 0,000580 v + 0,0126 u + 0,000665 \rho_{ap}$						
Predictor	Coef	StDev	T	P		
Constant	7,0418	0,9254	7,61	0,000		
v	0,0005800	0,0001431	4,05	0,000		
u	0,012640	0,006678	1,89	0,070		
ρ_{ap}	0,0006654	0,0002843	2,34	0,027		
S = 0,2221		R-Sq = 49,1%		R-Sq(adj) = 43,2%		
Analysis of Variance						
Source	DF	SS	MS	F	P	
Regression	3	1,23797	0,41266	8,37	0,000	
Residual Error	26	1,28252	0,04933			
Total	29	2,52049				
Unusual Observations						
Obs	v	\log_Ec0	Fit	StDev Fit	Residual	St Resid
6	4390	10,2036	10,7419	0,0577	-0,5383	-2,51R
16	3700	10,4043	10,5415	0,1582	-0,1372	-0,88X
20	4160	10,4631	10,2186	0,1478	0,2445	1,48X
23	5370	11,4616	10,9829	0,0608	0,4788	2,24R
R denotes an observation with a large standardized residual						
X denotes an observation whose X value gives it large influence.						

Este modelo está apresentando um coeficiente de determinação pequeno (43,2%). Isso pode ser devido à presença de pontos atípicos, que podem ser detectados pela análise de resíduos. No quadro de análise de regressão, já é demonstrado que as observações 06 e 23 tem resíduos muito grandes.

Para a análise de resíduos e teste da normalidade do resíduo para a resposta de Log (E_{c0}), foram construídos os GRAF. 17 e 18.

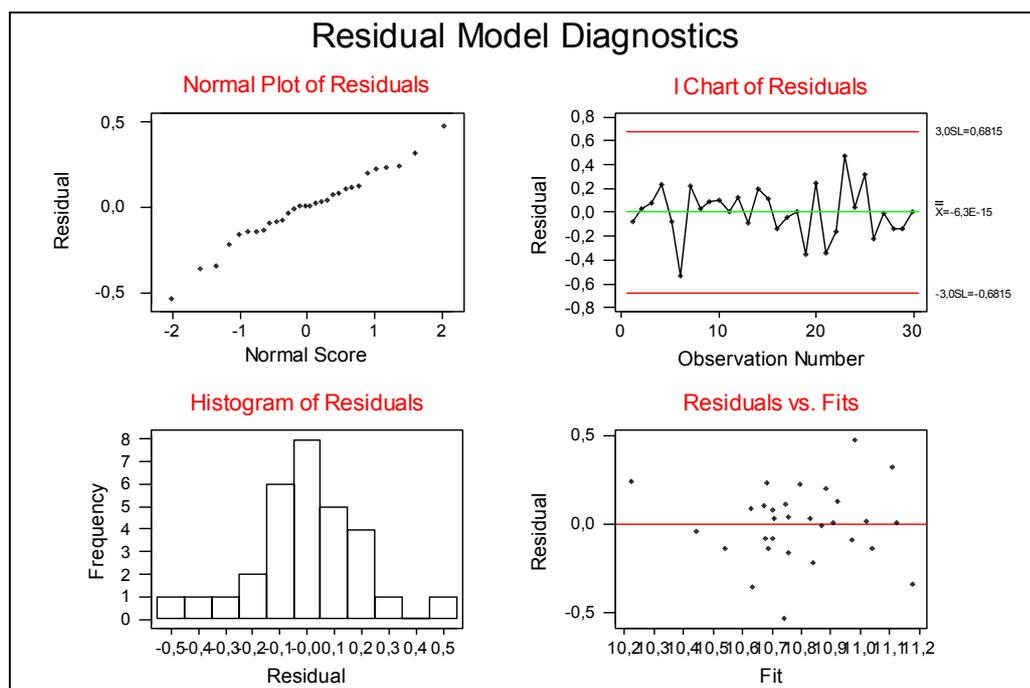


GRÁFICO 17 – Análise de resíduos de Log (E_{c0})

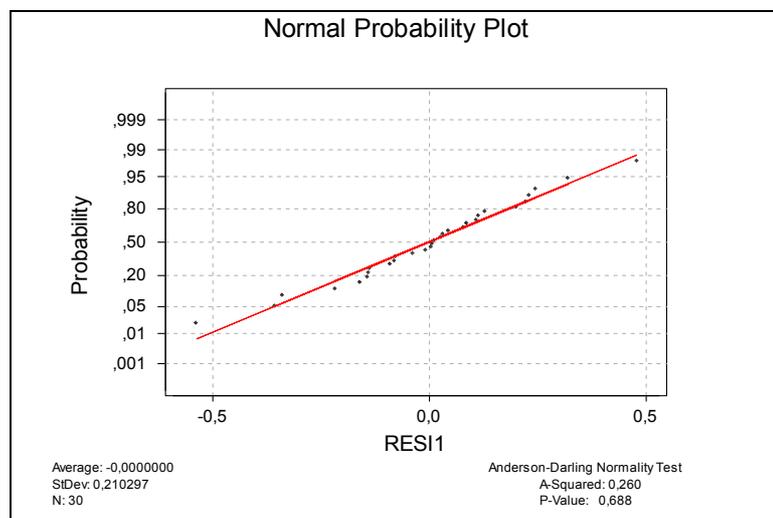


GRÁFICO 18 – Teste da normalidade do resíduo da resposta de Log (E_{c0}).

A análise sem as observações 06 e 23 e sem a variável densidade aparente fornecerá:

The regression equation is
 $\log_{Ec0} = 6,55 + 0,000763 v + 0,0173 u + 0,420 I1 + 0,143 I2$

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	6,5453	0,7664	8,54	0,000
v	0,0007631	0,0001326	5,76	0,000
u	0,017260	0,005560	3,10	0,005
I1	0,4196	0,1203	3,49	0,002
I2	0,1427	0,1046	1,36	0,186

S = 0,1672 R-Sq = 62,7% R-Sq(adj) = 56,2%

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	4	1,08253	0,27063	9,68	0,000
Residual Error	23	0,64313	0,02796		
Total	27	1,72566			

Unusual Observations

Obs	v	\log_{Ec0}	Fit	SE Fit	Residual	St Resid
15	3700	10,4043	10,5605	0,1258	-0,1562	-1,42X
18	4830	10,2751	10,6980	0,0704	-0,4230	-2,79R
23	5650	11,4295	11,0727	0,0672	0,3568	2,33R

R denotes an observation with a large standardized residual
X denotes an observation whose X value gives it large influence.

Para análise de resíduos e teste de normalidade de resposta de Log (E_{c0}) sem os outliers, foram confeccionados os GRAF. 19 e 20.

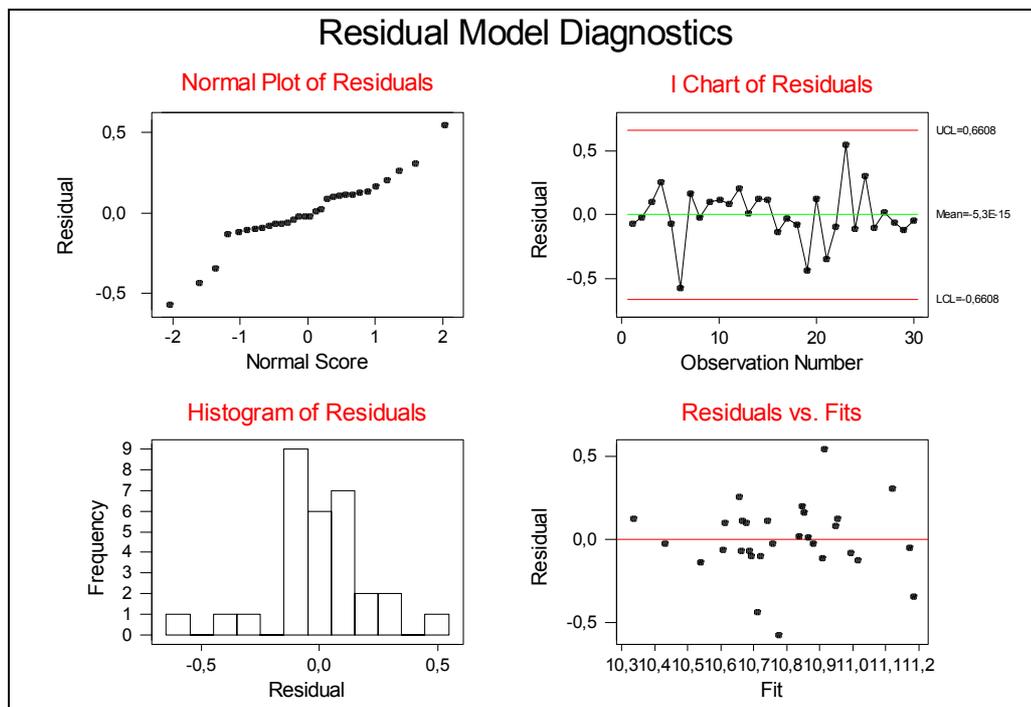


GRÁFICO 19 - Análise de resíduos de Log(E_{c0}) sem os outliers.

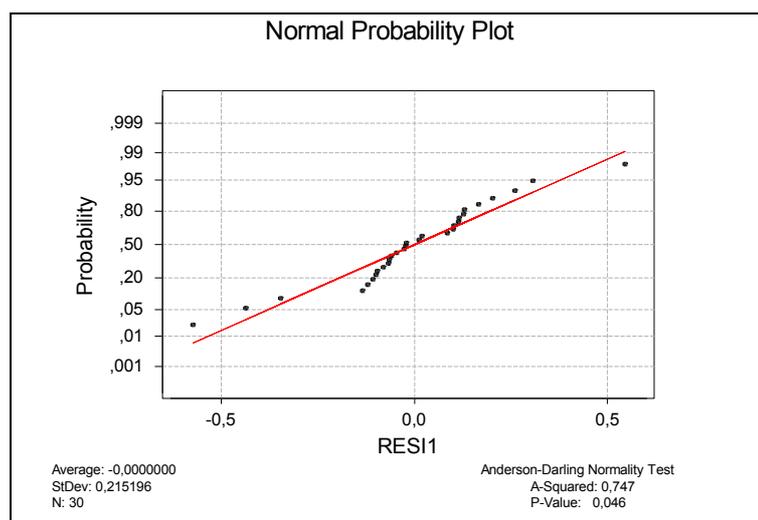


GRÁFICO 20 - Teste de normalidade do resíduo da resposta de Log (E_{c0}) sem os outliers.

Portanto, o módulo de elasticidade paralelo às fibras pode ser expresso como função da velocidade, da umidade e do tipo de madeira através da expressão:

$$\text{Log}(E_{c0}) = 6,55 + 0,000763 v + 0,0173 u + 0,420 I_1 + 0,143 I_2 \quad (5.3)$$

5.1.8 Análise de Log (E_{c90})

A variável E_{c90} não apresentou distribuição normal, sendo, assim, incorreto utilizar o modelo de regressão linear. Após uma transformação logarítmica, no entanto, foi possível obter tal distribuição e iniciar o ajuste do modelo.

5.1.8.1 Modelo completo

The regression equation is				
log_Ec90 = 4,92 +0,000031 v - 0,0216 u + 0,00368 ro + 0,167 I1 + 0,264 I2				
26 cases used 4 cases contain missing values				
Predictor	Coef	StDev	T	P
Constant	4,916	2,807	1,75	0,095
v	0,0000311	0,0004482	0,07	0,945
u	-0,02156	0,02659	-0,81	0,427
ro	0,003679	0,001073	3,43	0,003
I1	0,1675	0,5085	0,33	0,745
I2	0,2639	0,3302	0,80	0,433
S = 0,4578 R-Sq = 57,2% R-Sq(adj) = 46,5%				

5.1.8.2 Modelo Reduzido

conforme pode ser observado, através do valor de p, a variável velocidade e as variáveis indicadoras relativas ao tipo de madeira não são significativas no modelo. Portanto, não se pode estabelecer uma relação entre a velocidade de propagação e o módulo de elasticidade normal às fibras.

CONCLUSÃO

Conclui-se, através da análise realizada no Capítulo 5, que é possível prever algumas propriedades mecânicas de madeiras através da propagação de um pulso ultra-sônico ao longo da direção das fibras.

A equação (5.1), que estabelece a relação entre a resistência à compressão paralela às fibras e a velocidade, umidade e densidade aparente, constitui o modelo mais representativo, com um coeficiente de regressão $R^2 = 77,9 \%$. Isto significa que 77,9 % dos dados podem ser explicados com segurança e confiabilidade pelo modelo.

A análise de regressão permite concluir, ainda, que existe uma correlação extremamente significativa entre a resistência à compressão paralela às fibras e a densidade aparente da madeira.

Para a equação (5.2), que expressa a resistência normal às fibras como função da velocidade e da densidade aparente, apenas 54,8 % dos dados podem ser representados com segurança pela equação.

O módulo de elasticidade paralelo às fibras pode ser obtido através da equação (5.3), em que 56,2 % dos dados podem ser seguramente representados.

Para a resistência ao cisalhamento paralelo às fibras e módulo de elasticidade normal às fibras, não foi possível estabelecer nenhuma equação que permitisse expressá-los como funções da velocidade de propagação do pulso ao longo da direção paralela às fibras.

Este resultado se justifica pelo fato de existirem relações físicas entre aquelas propriedades mecânicas e a velocidade de propagação do pulso ao longitudinalmente às fibras.

De maneira geral, tendo em vista que se está trabalhando com um material de natureza orgânica, anisotrópico, não homogêneo e higroscópico, pode-se concluir que os resultados obtidos foram consideravelmente satisfatórios.

Pode-se concluir, também, através da exposição dos fundamentos físicos que governam a propagação de ondas em meios materiais, que o ultra-som é uma importante ferramenta na avaliação não destrutiva de propriedades da madeira.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ressalta-se, novamente, que a avaliação não destrutiva de propriedades mecânicas de madeiras através da técnica do ultra-som demonstrou-se bastante eficiente.

Espera-se, dessa forma, que as pesquisas nesta área continuem e, para isto, são sugeridos alguns temas para estudo:

- 1) Tentar estabelecer relações entre a velocidade de propagação perpendicular às fibras e a resistência e o módulo de elasticidade normais às fibras;
- 2) Caracterização elástica das espécies brasileiras através da propagação de pulsos ultrassônicos em madeiras;
- 3) Utilizar a técnica do ultra-som para a avaliação de defeitos internos da madeira;
- 4) Utilizar os coeficientes de atenuação e o tempo de propagação do pulso como potenciais avaliadores do estado fitossanitário de madeiras.

SUMMARY

The evaluation no destructive of wood through the ultrasound technique bases on the general principles of propagation of mechanical waves in material means. These principles are governed by fundamental physical relationships, known as Equation of Christoffel, established for a solid anisotrópico, among the phase speed, the density and the elastic constants of the wood. However, differently of other solids, the propagation of ultrasonic waves in wood constitutes a phenomenon of considerable complexity. The propagation constants, in other words, the speeds (of phase and of group) and the absorption coefficients are affected significantly not only for the heterogeneity of the chemical composition, for her microestrutura, for the irregularity in the disposition of the anatomical elements, inherent to the biological structure of the wood, as well as for her nature hygroscopic, for the frequency of the transdutor and for the geometry of the proof body. The experimental determination of the speed of phase of the ultrasonic pulse along the wood is considerably difficult. However, when spreading through the wood, the speed of the pulse (or group speed), as well as the phase speed, it can be affected by a series of factors that they are intimately related to the mechanical properties of that material. Of that it sorts things out, it can be concluded that it is possible to establish statistical relationships that can express these properties as function of that speed. With the objective of establishing statistical correlations longitudinally among the speed of propagation of the ultrasonic pulse to the fibers and physical and mechanical parameters of wood, they were certain, experimentally, the propagation speed, the moisture content, the apparent density, the resistances to the parallel and normal compression to the fibers, the resistance to the parallel shear to the fibers and the modules of longitudinal and normal elasticity to the fibers. For that purpose, they were chosen two species of native wood and a type of reforestation wood. The chosen native species were the *Manilkara spp* and the *Hyminaea spp*, known, popularly, like Maçaranduba and Jatobá and the reforestation species was the *Eucalyptus tereticornis*. The choice of these species based on the fact of they be wood thoroughly employed in the current structures. The obtained experimental

data were, later, treated estatisticamente and, through multiple lineal regression, it tried to establish those correlations. Of ownership of these correlations, it can be considered and to determine the mechanical properties of wood with considerable reliability, without the need of the laborious conventional destructive test.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR-7190*: Projeto de Estruturas de Madeira. Rio de Janeiro, 1997. p. 107.

BEDFORD, A.; DRUMHELLER, D. S. *Introduction to elastic wave propagation*. England: John Wiley & Sons Ltd, 1994. p. 297.

BLITZ, J. *Fundamentals of ultrasonics*. Second edition. London: Butterworths, 1967. p. 220.

BUCUR, V. *Acoustics of wood*. United States of America: CRC press Inc., 1995. p. 336.

BUCUR, V. *Acoustics as a too for the nondestructive testing of wood*, Nancy, v. 4, n. 11, november 1999.

DINWOODIE, J. M. *Timber, its nature and behaviour*, New York, 1981.

EMERSON, R. N. et al. *Nondestructive evaluation techniques for timber bridges*, Washington.

FRISH, S.; TIMOREVA, A. *Curso de Física General*. Rússia: Mir, 1972. p. 528. (Tomo 1).

GONÇALVES, R.; PUCCINI, C. T. Utilização do ultra-som na avaliação de aspectos de qualidade da madeira. In: ENCONTRO BRASILEIRO EM MADEIRAS E EM ESTRUTURAS DE MADEIRA, 8. São Carlos: 2000. p. 9. *Anais* São Carlos, 2000.

HAMM, E. A.; LUM, C. *Application of ultrasonic and slop of grain indicator to direction of compression wood in lumber*. Washington, 1991.

KAERLY, V. C. *Ultrasonic pulse velocity testing of plywood*. [s. l]. 1985.

MACDONALD, K. A. *Lumber quality evaluation using ultrasonic*, Washington, 1978.

NEPOMUCENO, L. X. *Acústica técnica*. Brasil: ETEGIL, 1968.p. 578.

POLLARD, H. F. *Sound waves in solid*. London: Pion limited, 1977. p. 366.

SALLES, A.; OLIVEIRA, F. G. Propagação de ondas acústicas na madeira. In: ENCONTRO BRASILEIRO EM MADEIRAS E EM ESTRUTURAS DE MADEIRA. 8. São Carlos: 2000. p. 10. *Anais* São Carlos, 2000.

SANDOZ, J. L. *Ultrasonic solid wood evaluation in industrial applications*, Swiss. 1998.

TIEMANN, H. D. *Effect of moisture upon the strength and stiffness of wood*, United States of America. 1906.

ZIMMERMAN, M. H. *Xylem structure and ascent of sap*, Berlim. 1983.

ZOMBORI, B. "In situ" nondestructive testing of built in wooden members, Virgínia, v. 6, n. 3, march 2001.

APÊNDICE A ELASTICIDADE LINEAR

A.1 Introdução

Quando forças externas são aplicadas a um corpo sólido, o movimento geral do corpo pode ser descrito por uma translação linear, uma rotação e uma deformação. Na Teoria da Elasticidade Linear, somente as deformações são de interesse e tais deformações se relacionam linearmente às tensões aplicadas.

Para muitos propósitos, uma teoria do contínuo é satisfatória para explicar um fenômeno elástico em larga escala. Uma teoria da elasticidade em escala atômica somente se torna necessária quando os efeitos da deformação devem ser examinados nos espaços interatômicos (ou seja, no interior dos espaços atômicos).

A FIG. 29 mostra o gráfico de energia potencial, U , em função da separação, r , entre os átomos no sólido. Como pode ser observado, conforme r decresce há, inicialmente, uma redução progressiva da energia potencial. Se os átomos continuarem a ser empurrados uns contra os outros, a distribuição de carga elétrica dos mesmos começa a se sobrepor. Esse fato ocasiona dois efeitos, ambos no sentido de aumentar a energia potencial e de se estabelecer uma força repulsiva. O primeiro deles é que na medida em que os átomos se aproximam, os núcleos tornam-se menos blindados e começam a se repelir mutuamente e o segundo é que para pequenas separações internucleares tem-se, na verdade, um único sistema para o qual se aplica o princípio de exclusão de Pauli e alguns elétrons passarão para estados de maior energia de modo a não violar este princípio. Em outras palavras, a curva de energia potencial demonstra a existência de uma força repulsiva para pequenas distâncias interatômicas e uma força atrativa para distâncias maiores.

Existe, entretanto, uma distância r_0 em que há um balanço (equilíbrio) entre as forças repulsiva e atrativa, resultando em um mínimo na curva de energia potencial. Pode ser demonstrado que dentro dos limites da teoria da elasticidade linear, as constantes elásticas do material dependem da curvatura da função $U = f(r)$ no ponto de equilíbrio r_0 . Somente pequenas variações de r_0 são permitidas, caso a curva não mude apreciavelmente.

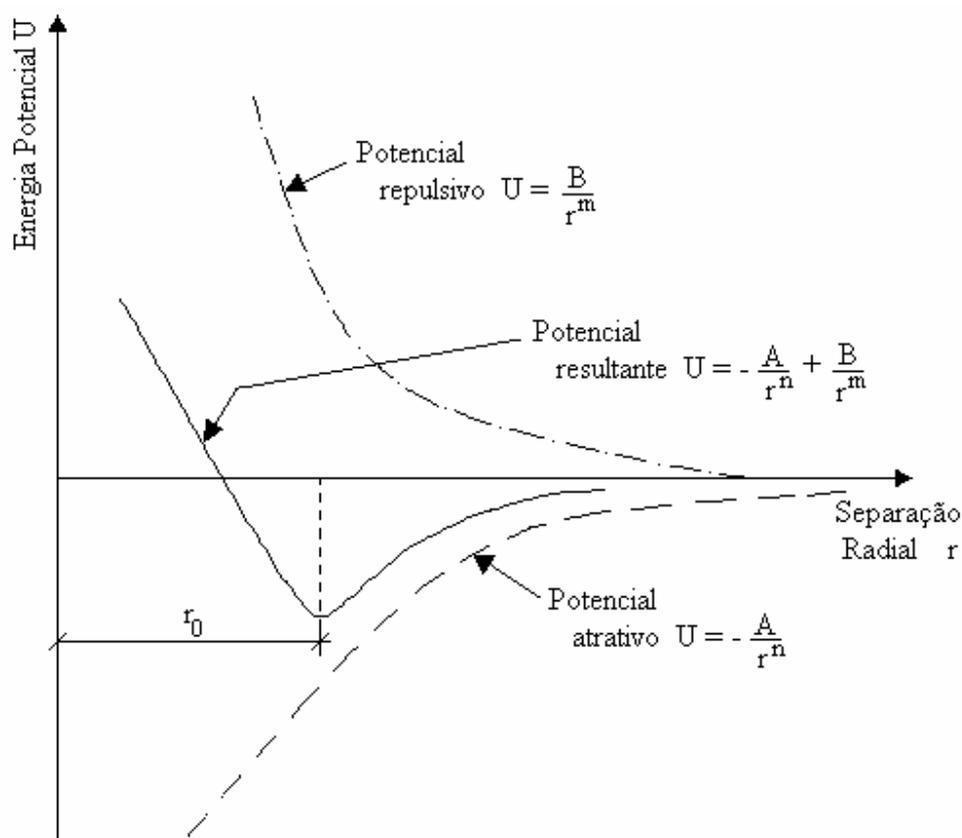


FIGURA 29 - Representação esquemática da relação entre a energia potencial e a separação radial entre os átomos em um sólido. Na figura, r_0 é a separação de equilíbrio correspondente à mínima energia potencial resultante.

A.2 Tensões

Considere um pequeno volume de um corpo sólido contornado por uma superfície S . Em geral, dois tipos de forças mecânicas podem atuar no corpo:

- a) Forças de volume, cujas forças são proporcionais ao volume do corpo;
- b) Forças de superfície, cujas forças são proporcionais à área da superfície.

A gravidade é um exemplo clássico do primeiro tipo de força, que envolve a força atuante em cada partícula do corpo. A tensão aplicada a um corpo elástico é um exemplo do segundo tipo, em que a força experimentada pelas partículas da superfície é também transmitida às partículas do interior do corpo.

Para se definir, de maneira mais inteligível, o conceito de tensão, imagine um plano π fictício que contenha uma das áreas mostradas na FIG. 30. Nesta figura, uma força \vec{F} unidirecional atua em áreas da superfície do corpo, com diferentes orientações de seus respectivos vetores normais unitários.

Dessa forma, o vetor \vec{F} pode ser decomposto em duas componentes, uma na direção paralela ao vetor normal unitário \vec{h} à área A (e, conseqüentemente, ao plano π), designada por \vec{F}_n e outra na direção perpendicular ao vetor normal \vec{h} , ou seja, tangente à área A e ao plano π , denominada \vec{F}_p . A componente \vec{F}_n é conhecida como força normal e a componente \vec{F}_p é conhecida como força tangencial ou de cisalhamento, atuantes na área A , conforme ilustrado na FIG. 31.

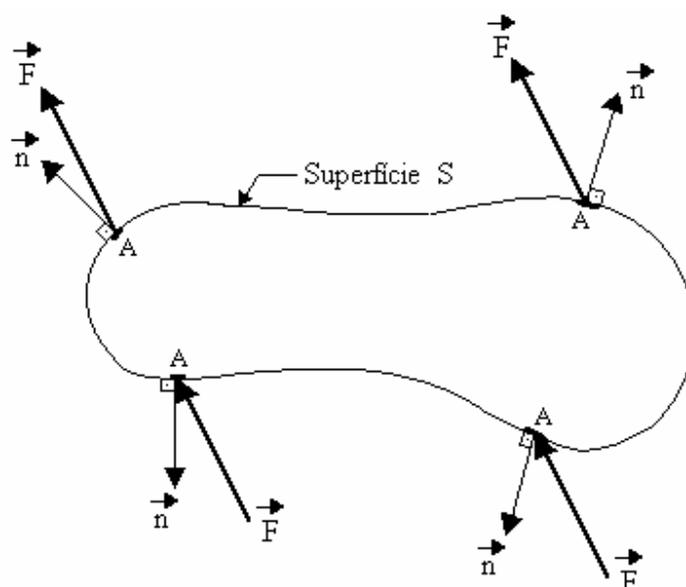


FIGURA 30 - Uma força unidirecional atua em uma pequena porção da superfície de um corpo sólido. A tensão na superfície depende da direção da força e da orientação da área em que ela atua.

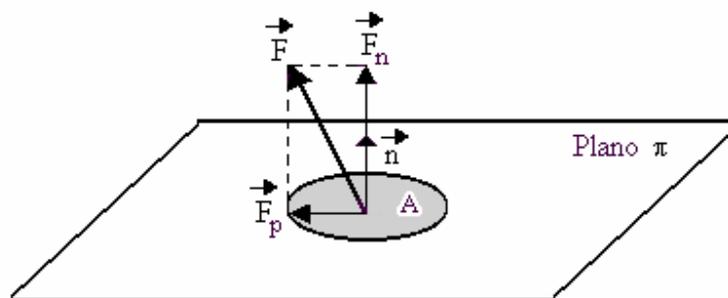


FIGURA 31 - Decomposição do vetor \vec{F} em suas componentes normal \vec{F}_n e tangencial \vec{F}_p .

Durante o processo de deformação de um corpo, as forças $\overset{p}{F}_n$ e $\overset{p}{F}_p$ variam com o tempo. O valor médio destas forças por unidade de área, isto é, F_n/A e F_p/A , são chamadas, respectivamente, tensões médias normal e de cisalhamento da área A , ou seja,

$$\bar{\sigma} = \frac{F_n}{A} \quad (\text{A.1})$$

$$\bar{\tau} = \frac{F_p}{A} \quad (\text{A.2})$$

em que $\bar{\sigma}$ e $\bar{\tau}$ representam, respectivamente, as tensões médias normal e de cisalhamento.

O conceito de tensão em um ponto é obtido fazendo com que a área A se aproxime de zero. Os valores limites das relações F_n/A e F_p/A são denominados tensões normal e de cisalhamento contidas no plano π e atuantes no ponto onde a área infinitesimal A está localizada. Matematicamente,

$$\sigma = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{F_n}{A} \quad (\text{A.3})$$

$$\tau = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{F_p}{A} \quad (\text{A.4})$$

em que σ é a tensão normal no ponto da área A e τ é a tensão de cisalhamento no mesmo ponto da área A , contida no plano π .

Considere, agora, que a área mostrada na FIG. 31 seja unitária. Construindo-se um sistema de coordenadas cartesiano x_1 , x_2 e x_3 em relação a esta área, haverá, então, três componentes de tensão, denotadas por σ_i (em que $i = 1,2,3$), uma na direção da normal, com vetor unitário \hat{h}_1 e as outras duas paralelas à área A, nas direções dos vetores unitários \hat{h}_2 e \hat{h}_3 . A equação vetorial da tensão nesta área será:

$$\vec{\sigma} = \sigma_1 \hat{h}_1 + \sigma_2 \hat{h}_2 + \sigma_3 \hat{h}_3 \quad (\text{A.5})$$

Portanto, para se definir o estado de tensão em um ponto de um corpo contínuo, seria necessário, a princípio, encontrar a força atuante em cada área unitária que abrange o ponto em questão. Na prática, é suficiente escolher três áreas unitárias do ponto, normais a cada um dos três eixos coordenados de referência.

Pode-se, dessa forma, examinar as forças atuando nas faces de um paralelepípedo retangular infinitesimal no interior do corpo tensionado, como ilustra a FIG. 32.

Supondo-se que a força aplicada seja unidirecional, que o corpo esteja em equilíbrio estático e que as forças de volume sejam ignoradas, haverá três componentes de tensão em cada uma das três faces mostradas, fornecendo um total de nove componentes de tensão. A notação indicial é usada para identificar cada componente. O primeiro índice denota a direção normal ao plano em que o vetor tensão atua e o segundo corresponde à direção da componente do vetor tensão. Por exemplo, a tensão σ_{13} corresponde à componente de tensão atuando no plano perpendicular a x_1 na direção de x_3 . Uma vez que a tensão é uniforme, as componentes das outras três faces do paralelepípedo devem ser iguais e opostas às mostradas na FIG. 32.

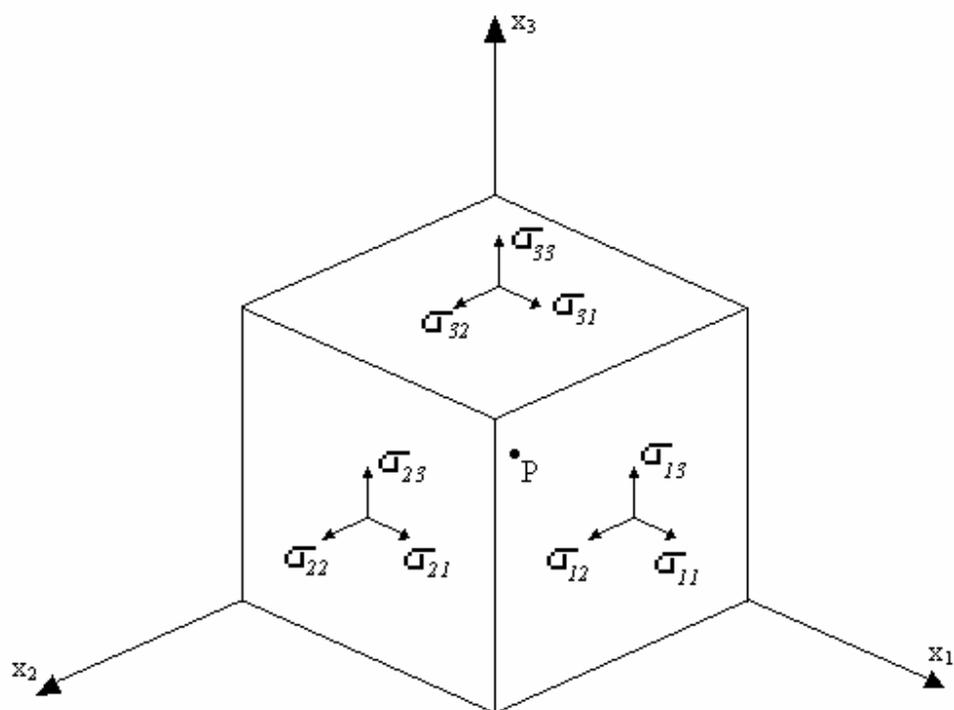


FIGURA 32 – Componentes de tensão atuando em cada face de um paralelepípedo elementar abrangendo um ponto P do corpo, quando uma força uniforme atua sobre o mesmo.

As componentes σ_{11} , σ_{22} e σ_{33} são denominadas componentes normais do vetor tensão; as componentes σ_{12} , σ_{21} , σ_{13} , σ_{31} , σ_{23} e σ_{32} são chamadas componentes de cisalhamento do vetor tensão.

O conjunto de componentes, denotadas por σ_{ij} , em que i e j podem assumir os valores 1, 2 e 3, constitui as componentes de um tensor do segundo grau, chamado de *tensor de tensões*.

Uma das principais propriedades do tensor tensão é a sua simetria, ou seja, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Esta simetria pode ser demonstrada tomando-se o somatório dos momentos em relação a um dos eixos coordenados, por exemplo, em relação a x_3 , conforme ilustrado na FIG.33.

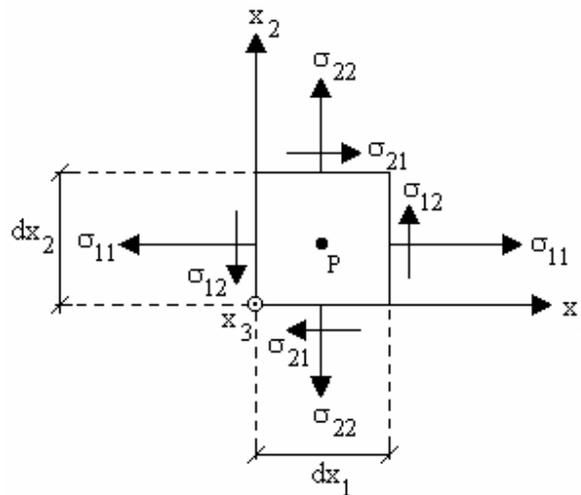


FIGURA 33 – Modelo para demonstração da simetria do tensor de tensões.

Dessa forma, pode-se escrever:

$$\sum M_{x_3} = 0 \quad \therefore$$

$$\sigma_{12}(dx_2 \cdot dx_3) \cdot dx_1 - \sigma_{21}(dx_1 \cdot dx_3) \cdot dx_2 = 0 \quad \therefore$$

$$\sigma_{12}(dx_1 dx_2 dx_3) = \sigma_{21}(dx_1 dx_2 dx_3) \quad \text{ou seja,}$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}$$

De maneira análoga, pode-se demonstrar que $\sigma_{13} = \sigma_{31}$ e $\sigma_{23} = \sigma_{32}$.

Há, portanto, somente seis componentes independentes de tensão. As nove componentes do tensor tensão podem ser escritas na forma matricial:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

A.3 Deformações

Define-se como corpo deformável aquele em que movimentos relativos entre suas partes constituintes podem ocorrer, provocando mudanças na forma, no volume ou em ambos. Na natureza, todos os corpos são deformáveis.

Em geral, as mudanças produzidas pelas forças aplicadas podem ser:

- a) Longitudinal: envolvem mudanças no comprimento da espécie;
- b) Tangencial ou cisalhante: envolvem o movimento relativo das camadas paralelas do material;
- c) Compressão volumar: envolvem mudanças no volume sem que haja, no entanto, mudança da forma.

Quando o corpo recupera suas dimensões e forma originais, após as forças serem removidas, a deformação é dita elástica. Se as forças aplicadas excederem um limite elástico definido, o corpo continuará a se deformar permanentemente, mesmo que aquelas forças sejam removidas. Se as forças forem suficientemente grandes, o corpo pode exibir escoamento plástico ou mesmo fraturar-se.

Para se derivar uma expressão geral da deformação induzida em corpo sólido, considerar-se-á um ponto P no interior do corpo, cuja posição é dada pelas coordenadas x_i em relação ao conjunto de eixos cartesianos. Se P é deslocado para uma nova posição P', com coordenadas x'_i , as componentes do vetor deslocamento \vec{u} serão dadas por:

$$u_i = x'_i - x_i \quad (\text{A.7})$$

Considere, agora, um segundo ponto Q, adjacente ao ponto P, com coordenadas $x_i + dx_i$, conforme mostrado na FIG. 34. Se o corpo for deformado, o elemento de linha PQ se tornará o elemento P'Q'. Enquanto P se move para a posição P', Q se move para a posição Q', cujas coordenadas são $x'_i + dx'_i$. Logo, o deslocamento de Q será:

$$u'_i = (x'_i + dx'_i) - (x_i + dx_i) \quad \therefore$$

$$u_i = (x'_i - x_i) + (dx'_i - dx_i) \quad (\text{A.8})$$

Uma vez que $u_i = x'_i - x_i$ e $du_i = dx'_i - dx_i$, a equação (A.8) será reescrita como:

$$u'_i = u_i + du_i \quad (\text{A.9})$$

Dessa forma, du_i é uma medida da deformação do elemento, visto que, sendo $du_i = 0$, PQ é deslocado sem que haja deformação.

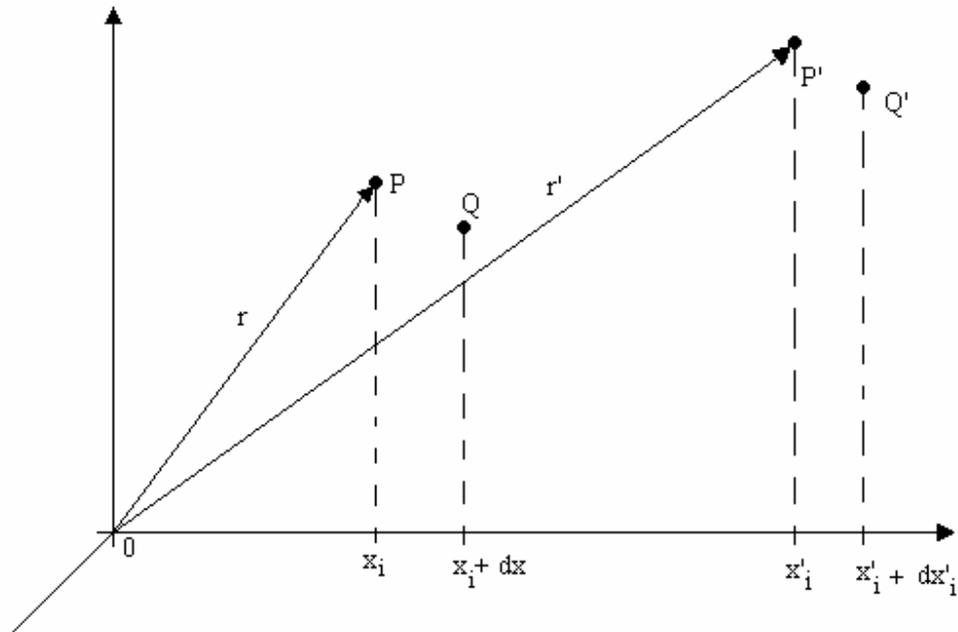


FIGURA 34 – Um elemento PQ de um corpo elástico torna-se o elemento P'Q', após a deformação.

Usando o teorema de Taylor e desprezando os termos de ordens superiores, pode-se escrever:

$$u'_i = u_i + du_i = u_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k + \dots \quad \text{ou seja,}$$

$$u'_i = u_i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dx_k - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) dx_k, \text{ logo,}$$

$$u'_i = u_i + \varepsilon_{ik} dx_k - \omega_{ik} dx_k \quad (\text{A.10})$$

O primeiro termo do segundo membro da equação (A.10) denota um vetor, enquanto ε_{ik} e ω_{ik} denotam tensores de segunda ordem.

Particularmente, o tensor ε_{ik} , dado pela expressão

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A.11})$$

é chamado *tensor de deformações*. Desta equação, pode-se verificar que ε_{ik} é simétrico, ou seja:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki} \quad (\text{A.12})$$

Portanto, das nove componentes possíveis para o tensor de deformações, somente seis componentes são independentes.

O tensor ω_{ik} , que é anti-simétrico, ou seja, $\omega_{ik} = -\omega_{ki}$, com três componentes independentes, representa uma rotação pura do elemento.

O resultado expresso na equação (A.10) é definido como teorema de Helmholtz. Em outras palavras, este teorema afirma que qualquer deslocamento arbitrário de um elemento PQ do corpo pode ser descrito como:

- a) Uma translação pura do elemento, u_i ;
- b) Uma deformação $\varepsilon_{ik} dx_k$;
- c) Uma rotação pura $-\omega_{ik} dx_k$.

Não é possível medir, individualmente, as componentes do tensor deformação, exceto sob circunstâncias em que somente as componentes diagonais ε_{11} , ε_{22} e ε_{33} têm valores finitos.

Landau & Lifshitz (1970) mostraram que se a distância dl' , entre P' e Q' , após a deformação, é calculada, então o tensor ε_{ik} é diagonalizado, isto é:

$$(dl')^2 = (1 + 2\varepsilon_{11}) dx_1^2 + (1 + 2\varepsilon_{22}) dx_2^2 + (1 + 2\varepsilon_{33}) dx_3^2 \quad (\text{A.13})$$

Dessa forma, uma deformação arbitrária pode ser representada por três deformações independentes nas direções dos eixos principais do tensor de deformação. É fácil mostrar que cada uma daquelas deformações é uma tração simples ou uma compressão. Por exemplo, o comprimento dx_1 ao longo do primeiro eixo principal será:

$$dx'_1 = (1 + 2\varepsilon_{11})^{1/2} dx_1 \quad (\text{A.14})$$

Expandindo-se, em série, a equação (A.14) e desprezando os termos de ordens superiores, obtém-se:

$$dx'_1 = dx_1 \left[1 + \frac{1}{2} 2\varepsilon_{11} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) 4\varepsilon_{11}^2 + \dots \right] \quad \therefore$$

$$dx'_1 \approx (1 + \varepsilon_{11}) dx_1 \quad (\text{A.15})$$

Dessa forma, a deformação relativa, ou a deformação longitudinal será, então:

$$dx'_1 = dx_1 + \varepsilon_{11} dx_1 \quad \therefore$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{dx'_1 - dx_1}{dx_1} \quad (\text{A.16})$$

Expressões similares são deduzidas para as deformações ε_{22} e ε_{33} .

A deformação volumétrica ou dilatação θ pode ser determinada a partir do resultado anterior. Considerando-se, por exemplo, um paralelepípedo retangular infinitesimal de volume dV , que após a deformação passa a ter um volume dV' e tomando como eixos principais do tensor de deformações os eixos coordenados, pode-se escrever:

$$dV' = dx'_1 dx'_2 dx'_3 = dV (1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22})(1 + \varepsilon_{33}) \quad \therefore$$

$$dV' = dV (1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}) \quad (\text{A.17})$$

em que $dV = dx_1 dx_2 dx_3$.

Desprezando-se os termos de ordens superiores, obtém-se:

$$dV' = dV (1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \quad (\text{A.18})$$

Usando a notação de somatório de Einstein, a equação acima pode ser escrita como:

$$dV' = dV (1 + \varepsilon_{ii}) \quad (\text{A.19})$$

onde ε_{ii} é o somatório dos valores principais do tensor de deformação. A soma

$\varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ é chamada *invariante de deformações*.

Finalmente, a mudança de volume relativa, também denominada dilatação θ é expressa por:

$$\theta = \frac{dv' - dv}{dv} = \frac{dv(1 + \varepsilon_{ii}) - dv}{dv} \quad \therefore$$

$$\theta = \frac{dv(1 + \varepsilon_{ii} - 1)}{dv}, \quad \text{ou seja,}$$

$$\theta = \varepsilon_{ii} \quad (\text{A.20})$$

Nota-se que ε_{ii} é uma grandeza escalar, uma vez que é formado pela contração de um tensor de segundo grau. Também, da equação (A.10), pode-se verificar que $\varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$, o que corresponde à divergência de u_i . Logo, em notação alternativa,

$$\theta = \text{div } u_i = \nabla \cdot u_i \quad (\text{A.21})$$

em que ∇ designa o operador vetorial definido por:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

A.4 Equações de movimento e equilíbrio

Considere um corpo com dado volume sujeito a tensões σ_{ik} aplicadas à superfície que o envolve. Se F_i representa a resultante das forças internas por unidade de volume, a resultante das forças atuando em elemento de volume do corpo, dV , será $F_i dV$. A força resultante atuante em todo o corpo será, então, $\int_V F_i dV$.

As forças de volume podem ser relacionadas às forças de superfície com o auxílio do teorema da divergência de Gauss, ou seja:

$$\int_V F_i \, dV = \int_S \sigma_{ik} \, dA_k \quad (\text{A.22})$$

em que dA_k é um elemento de área da superfície.

Em outras palavras, esta equação afirma que a integral de um vetor sobre um volume arbitrário pode ser transformada em uma integral de um tensor de segunda ordem sobre a superfície, contanto que o vetor seja a divergência do tensor, isto é:

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \text{div } \sigma_{ik} = \nabla \cdot \sigma_{ik} \quad (\text{A.23})$$

Devido à convenção indicial, para cada valor de i há uma soma de três termos.

As equações de movimento são obtidas igualando a força resultante, devida às tensões internas, ao produto da aceleração pela massa por unidade de volume, ou seja, pela massa específica do corpo,

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \rho a_i \quad (\text{A.24})$$

em que ρ é a densidade ou massa específica do corpo e a_i representa as componentes do vetor aceleração.

Havendo forças de volume Φ_i atuantes no corpo, a equação (A.24) torna-se:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \Phi_i = \rho \ddot{x}_i \quad (\text{A.25})$$

A força de volume mais comum é a força da gravidade $\Phi_i = \rho g_i$, em que g_i representa as componentes do vetor aceleração da gravidade.

As equações de equilíbrio são deduzidas igualando-se simplesmente a equação (A.25) a zero, uma vez que, em equilíbrio, a resultante das forças internas deve ser nula, isto é,

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \Phi_i = 0 \quad (\text{A.26})$$

APÊNDICE B DETERMINAÇÃO DA INCERTEZA DE GRANDEZAS INDIRETAS

A determinação da incerteza ou erro absoluto de uma grandeza indireta é feita com o auxílio da teoria elementar do Cálculo diferencial. Dessa forma, é do conhecimento de todos que a diferencial de uma função de uma variável, $y = f(x)$, é expressa pela relação:

$$dy = f'(x) dx \quad (\text{B.1})$$

em que $f'(x)$ é a derivada de y em relação a x .

Se a função depender de várias variáveis, por exemplo, $w = f(x, y, z)$, tem-se a diferencial total, expressa por uma relação análoga, isto é:

$$dw = f_x dx + f_y dy + f_z dz \quad (\text{B.2})$$

em que f_x, f_y e f_z indicam as derivadas parciais em relação x, y, z .

Caso w represente uma grandeza cujo valor depende dos valores das grandezas x, y e z , sendo e_x, e_y e e_z os erros absolutos nas medidas dessas grandezas, o erro absoluto e_w na medida de w é calculado substituindo, na equação anterior, as diferenciais das variáveis independentes pelos respectivos erros absolutos.

Por exemplo, supondo-se que $w = kxyz$, em que k representa uma constante, pode-se escrever:

$$dw = e_w = k(yz e_x + xz e_y + xy e_z) \quad (\text{B.3})$$

Dividindo-se a equação (B.3) por w , obtém-se

$$\frac{e_w}{w} = \frac{k}{k} \left[\frac{yze_x}{xyz} + \frac{xze_y}{xyz} + \frac{xye_z}{xyz} \right]$$

Logo, o erro relativo de w será,

$$\frac{e_w}{w} = \frac{e_x}{x} + \frac{e_y}{y} + \frac{e_z}{z} \quad (\text{B.4})$$

e o erro absoluto,

$$e_w = w \left[\frac{e_x}{x} + \frac{e_y}{y} + \frac{e_z}{z} \right] \quad (\text{B.5})$$

APÊNDICE C REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA

O Modelo de Regressão Linear Múltipla assume que a variável resposta Y_i está relacionada com p variáveis explicativas X_i através do modelo:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + K + \beta_p X_{ip} + \varepsilon_i \quad (\text{C.1})$$

em que $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ são constantes desconhecidas (parâmetros do modelo) e ε_i são os erros aleatórios.

Supõe-se que os erros tenham distribuição normal com média zero, variância σ^2 e que são independentes. Estes erros representam a parte da informação da variável resposta Y que não é explicada pelo modelo de regressão ajustado aos dados. As variáveis X_{ij} são controladas e medidas com erro desprezível. Portanto, os valores de X_{ij} são pré-fixados *a priori* e X_{ij} não são variáveis aleatórias.

C.1 Estimação dos parâmetros $\beta_i, i = 1, 2, \dots, p$

A estimação é feita através da minimização da soma dos erros (resíduos) ao quadrado. É necessário que se tenha n valores observados da variável resposta Y , em que $n > p$.

O modelo ajustado,

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{i1} + \hat{\beta}_2 X_{i2} + K + \hat{\beta}_p X_{ip} \quad (\text{C.2})$$

representa a estimativa do valor médio de Y quando as variáveis explicativas X estão pré-fixadas nos valores $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ip}$ respectivamente. Portanto, \hat{Y}_i é uma estimativa da esperança de Y .

Os resíduos do modelo ajustado serão:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i \quad (\text{C.3})$$

C.2 Teste de Hipótese para os coeficientes individuais

Para testar a significância da variável X_i , utiliza-se o seguinte teste de hipóteses:

H_0 : $\beta_i = 0$, a variável não é significativa.

H_1 : $\beta_i \neq 0$, a variável é significativa.

Se a hipótese nula não é rejeitada, isso indica que o regressor X_i pode ser retirado do modelo. A estatística de teste para essas hipóteses é:

$$t_{\text{observado}} = \frac{\hat{\beta}_j}{\text{desvio padrão de } (\hat{\beta}_j)} \quad (\text{C.4})$$

que sob H_0 tem distribuição t de Student com $(n-2)$ graus de liberdade.

A Regra de Decisão será: rejeita-se H_0 se $|t_{\text{observado}}| > t_{\alpha/2, n-2}$ (valor tabelado).

C.3 Testes de Hipóteses para todos os coeficientes β

Este teste é conhecido como “teste para a significância da regressão”, pois ele determina se existe uma relação linear entre a resposta Y e alguma das variáveis regressoras X_i .

H_0 : $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = 0$, o modelo não está bem ajustado.

H_1 : pelo menos um β_j diferente de zero, para $j = 1, 2, \dots, p$, o modelo está bem ajustado.

A rejeição da hipótese nula implica que pelo menos uma das variáveis regressoras contribui significativamente para o modelo. A estatística de teste será:

$$F_{\text{observado}} = \frac{\text{QM Reg}}{\text{QMR}} \quad (\text{C.5})$$

que sob H_0 tem distribuição F com $(p, n-p-1)$ graus de liberdade.

A Regra de decisão será: rejeita-se H_0 se $F_{\text{observado}} > F_{\alpha, (n-p-1)}$

em que α é o nível de significância do teste.

QUADRO 1
Análise de Variância.

Fonte de Variação	Graus de Liberdade	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	F
Regressão	p	SQReg	QMReg	F_0
Residual	n - p - 1	SQR	QMR	
Total	n - 1	SQT		

em que,

$$\text{SQReg} = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 \quad (\text{C.6})$$

$$\text{SQR} = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \text{SQT} - \text{SQReg} \quad (\text{C.7})$$

$$\text{SQT} = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \quad (\text{C.8})$$

$$F_{\text{observado}} = \frac{\text{QMReg}}{\text{QMR}} \quad (\text{C.9})$$

Os quadrados médios são obtidos dividindo-se cada soma de quadrados por seus respectivos graus de liberdade.

C.4 Coeficiente de Determinação – R^2

Matematicamente, o coeficiente de determinação é dado por:

$$R^2 = \frac{SQReg}{SQT}, \quad 0 \leq R^2 \leq 1. \quad (C.10)$$

O coeficiente de determinação é uma medida da quantidade da variabilidade de Y, que é explicada pelo modelo de regressão ajustado.

Entretanto, um grande valor de R^2 não implica, necessariamente, que o modelo ajustado é o mais adequado. Isso decorre do fato que o valor de R^2 pode ser aumentado através da inclusão de mais variáveis regressoras no modelo. Para efeito de comparação de modelos, deve-se observar o R^2 ajustado, dado pela expressão:

$$R^2_{ajust} = 1 - \frac{n-1}{n-p} (1 - R^2) \quad (C.11)$$

em que p é o número de parâmetros do modelo de regressão.

C.5 Predição

O modelo de regressão pode ser utilizado para predição de futuras observações em Y relativas a valores determinados das variáveis preditoras X_{01} , X_{02} , ..., X_{0p} . Neste caso, o valor predito será:

$$\hat{Y}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{01} + \hat{\beta}_2 X_{02} + \dots + \hat{\beta}_p X_{0p}$$

Recomenda-se que a capacidade de predição do modelo seja assegurada observando-se a sua performance com novos dados, que não foram utilizados para a construção do modelo.

Além disso, deve-se tomar o cuidado de não extrapolar o intervalo dos valores das variáveis preditoras. Em outras palavras, o modelo só é válido dentro do intervalo das variáveis preditoras que foi observado para sua construção.