

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Escola de Engenharia

Departamento de Engenharia de Estruturas

ANÁLISE DE VIBRAÇÕES EM PISOS MISTOS AÇO/CONCRETO

Dissertação apresentada como requisito parcial
para a obtenção do grau de Mestre
em Engenharia de Estruturas
por
Rosana Maria Rennó Sommer

Abril de 2002

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**"ANÁLISE DE VIBRAÇÕES EM PISOS MISTOS
AÇO/CONCRETO"**

Rosana Maria Rennó Sommer Gambogi

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Fernando Amorim de Paula
DEES/UFMG - (Orientador)

Prof. Dr. Aécio Freitas Lira
DEES/UFMG

Prof. Dr. Gilson Queiroz
DEES/UFMG

Prof. Dr. Walnório Graça Ferreira
UFES

Belo Horizonte, 29 de abril de 2002

AGRADECIMENTOS

À Deus, por tudo.

Ao professor Fernando Amorim de Paula, meu orientador, pela confiança, dedicação, paciência e amizade, fatores sempre presentes durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus pais, meu marido, meus irmãos, minha família e aos meus amigos que estiveram sempre ao meu lado, me apoiando e incentivando nos momentos difíceis.

Ao Departamento de Engenharia de Estruturas, pela oportunidade de realizar este trabalho.

Aos professores, colegas e funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas, pela amizade e força compartilhadas no dia-a-dia.

Aos monitores do LAMEC pelo auxílio computacional.

À USIMINAS pela concessão da bolsa de estudos.

À SOFTEC – Software Technology Ltda. por ter disponibilizado o programa ANSYS 5.7 ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais, o qual foi amplamente utilizado neste trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

RESUMO

ABSTRACT

1.VIBRAÇÕES EM ESTRUTURAS.....	1
1.1 Introdução	1
1.2 Análise de vibrações	3
1.3 Revisão Bibliográfica	5
1.4 Objetivo e escopo do trabalho	21
1.4.1 Objetivo	21
1.4.2 Escopo do Trabalho	21
2.ANÁLISE DINÂMICA.....	23
2.1 Introdução	23
2.2 Sistemas com um grau de liberdade	24
2.3 Sistemas com Vários Graus de Liberdade	33
2.4 Série de Fourier.....	35
2.5 Série de Fourier Complexa	40
2.6 Amortecimento	41
2.6.1 Amortecimento Viscoso Equivalente	42
2.6.2 Amortecimento de Rayleigh	45
3.ESTRUTURAS MISTAS	46
3.1 Introdução	46
3.2 Vigas Mistas	47
3.3 Conectores de Cisalhamento.....	48
3.4 Ligações Mistas	50
3.4.1 Modelagem da Ligação:.....	52
3.4.2 Cálculo da rigidez de uma ligação mista	52

3.5 Pisos Mistos	56
3.5.1 Largura efetiva	57
3.5.2 Reações de apoio das lajes em vigas	59
3.6 “Slimflors”	60
4. CARREGAMENTOS DINÂMICOS	63
4.1 Introdução	63
4.2 Carregamentos Dinâmicos	64
4.3 Simulação dos Carregamentos Dinâmicos	67
4.4 Limites de Conforto Humano a Vibrações de Pisos	71
4.5 Métodos Simplificados de Cálculo	74
4.5.1 Modelo simplificado de piso misto	74
4.5.2 Resposta de uma viga bi-apoiada	80
5. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	91
5.1 Introdução	91
5.2 – Exemplo 1	92
5.2.1 Etapa 1	93
5.2.2 Etapa 2	97
5.2.3 Análise dos resultados	104
5.3 - Exemplo 2	106
5.3.1 Tipo de Ligações	108
5.3.2 Análise dinâmica	115
5.3.3 Análise dos resultados	126
6. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	128
6.1 – Introdução	128
6.2 – Sugestões para estudos posteriores	132
BIBLIOGRAFIA	133

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - Sistema com um grau de liberdade, UGL.....	24
FIGURA 2 – Diagrama de corpo livre de um sistema UGL	25
FIGURA 3 – (a) Fator de amplificação versus relação de frequências	30
FIGURA 4 – Projeção vetorial no plano complexo.....	33
FIGURA 5 – Polígono de forças vetoriais.....	33
FIGURA 6 – Onda quadrada	38
FIGURA 7 – Forças elástica e de amortecimento atuando sobre o corpo.....	43
FIGURA 8 – Rigidez elástica	44
FIGURA 9 – Piso misto.....	47
FIGURA 10 – Conector tipo stud.....	49
FIGURA 11 - Relação entre momento fletor e rotação relativa entre os elementos	50
FIGURA 12 - Modelo mecânico de nó semi-rígido	52
FIGURA 13 – Ligação mista com cantoneiras de assento parafusadas na mesa inferior da viga secundária (QUEIROZ <i>et al.</i> (2001)).....	53
FIGURA 14 – Laje Mista	57
FIGURA 15 - Detalhe do sistema “slimfloor”.....	61
FIGURA 16 - Tipos de carregamentos dinâmicos.....	65
FIGURA 17 – Critérios de análise de vibrações: (a) CSA Standard, (b) Escalas Reiher-Meister e Reiher-Meister modificada, (c) Escala ISO (1980), (d) Escala ISO (1989)	73
FIGURA 18 – Estrutura de piso misto.....	79
FIGURA 19 – Viga Bi-apoiada com carregamento distribuído	75
FIGURA 20 – Viga Bi-apoiada com carregamento distribuído	80
FIGURA 21 – Esquema de aplicação do carregamento	81
FIGURA 22 – Deslocamento e aceleração na análise transiente para frequência de 10Hz	83

FIGURA 23 – Deslocamento e aceleração na análise transiente para frequência de 14Hz	84
FIGURA 24–Deslocamento e aceleração na análise transiente para frequência de 16,9Hz	84
FIGURA 25 – Deslocamento e aceleração na análise transiente para frequência de 20Hz	84
FIGURA 26 – Deslocamento e aceleração na análise transiente para frequência de 28Hz	85
FIGURA 27 – Combinação de frequências: deslocamento e aceleração, 10Hz e 20Hz	88
FIGURA 28 – Combinação de frequências: deslocamento e aceleração, 14Hz e 28Hz	89
FIGURA 29 – Croqui da estrutura.....	93
FIGURA 30 – Deslocamento U_z no ponto central da viga V2(b).....	97
FIGURA 31 – Reações das lajes para o carregamento $w_p = 1500\text{N/m}^2$	98
FIGURA 32 – Seção transversal e esquema estrutural da viga V2(b).....	98
FIGURA 33 – Seção transversal e esquema estrutural da viga V4	99
FIGURA 34 – Seção transversal e esquema estrutural da viga V1	100
FIGURA 35 – Croquis do piso	106
FIGURA 36 – Locação das Ligações Mistas.....	109
FIGURA 37 – Diagrama M- θ da ligação flexível	110
FIGURA 38 –Frequências naturais do piso com ligações flexíveis	117
FIGURA 39 – Deslocamento U_z no ponto central da viga V11	120
FIGURA 40 – Painel de piso avaliado pelo método simplificado.....	121
FIGURA 41 – Seção transversal e esquema estrutural da viga V11	121
FIGURA 42 – Seção transversal e esquema estrutural da viga V14	122

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Estimativa de carregamentos para eventos rítmicos	67
TABELA 2 – Fatores de carregamento dinâmico para o caminhar.....	68
TABELA 3 - Parâmetros recomendados	69
TABELA 4 – Parâmetros para atividades rítmicas.....	69
TABELA 5 – Coeficientes de carga para cada tipo de atividade humana. (CEB-209, 1991).....	70
TABELA 6 – Limites de Aceleração Recomendados	71
TABELA 7 – Resultados da análise harmônica	82
TABELA 8 – Resultados da análise transiente.....	83
TABELA 9 – Resultados das combinações de frequências, 10 e 20Hz	87
TABELA 10 – Resultados das combinações de frequências, 14 e 28Hz	89
TABELA 11 – Resultados da influência do ângulo de fase nas combinações de frequências, 10 e 20Hz.....	90
TABELA 12 – Propriedades geométricas das vigas de aço	93
TABELA 13 – Comparação das 1 ^{as} frequências naturais obtidas	104
TABELA 14 – Comparação das acelerações máximas	105
TABELA 15 – Comparação dos deslocamentos	105
TABELA 16 – Propriedades geométricas das vigas metálicas.....	107
TABELA 17 – Parâmetros dinâmicos para atividades rítmicas	108
TABELA 18 – Rigidezes das Ligações Mistas	115
TABELA 19 – Frequências naturais do piso	116
TABELA 20 – Frequência natural para situação final de carregamento, show.....	118
TABELA 21 – Frequência natural para situação final de carregamento, dança.....	118
TABELA 22 – Frequência natural para situação final de carregamento, aeróbica	118
TABELA 23 – Comparação das 1 ^{as} frequências naturais obtidas	124
TABELA 24 – Comparação das acelerações máximas	125
TABELA 23 – Forças cortantes máximas nos perfis de aço em kN	126
TABELA 24 – Momentos fletores máximos nos perfis de aço em kNm.....	126

RESUMO

O aprimoramento dos processos de cálculo estrutural e a modernização de técnicas construtivas possibilitaram a execução de estruturas de piso mais esbeltas, vencendo grandes vãos livres. No entanto, essa inovação construtiva ocasionou uma diminuição na rigidez dos pisos, tornando-os susceptíveis a vibrações provenientes de atividades associadas à movimentos de pessoas, tais como o caminhar, exercícios aeróbicos, danças e eventos esportivos. A diminuição na rigidez de uma estrutura resulta na redução da sua primeira frequência natural, o que pode gerar problemas de ressonância pelo fato desta frequência natural se aproximar das frequências representativas das excitações mencionadas.

Neste trabalho, sistemas de piso misto aço/concreto, modelados com a utilização de um programa computacional em elementos finitos, são submetidos a uma análise dinâmica ao atuarem sobre eles carregamentos correspondentes a atividades rítmicas. Utilizaram-se elementos de placa para simular a laje de concreto e elementos de barra tridimensionais para as vigas de aço, garantindo a interação total entre os mesmos. Outra análise foi realizada utilizando-se um modelo simplificado, onde o sistema de piso foi reduzido a um sistema com um grau de liberdade, obtendo-se as respostas máximas para carregamentos harmônicos. Considerações sobre limites aceitáveis de aceleração de pisos sugeridos por normas técnicas são apresentadas, sendo também avaliados os níveis de aceleração obtidos numericamente no piso misto.

Nos pisos analisados, observou-se resultados preocupantes para a aceleração do piso, tendo sido obtidos níveis de aceleração superiores aos limites recomendados para conforto humano. Os esforços solicitantes sofreram pequena variação com relação aos resultados de uma análise estática. A análise simplificada do piso mostrou-se válida para uma análise preliminar do sistema estrutural, não podendo, no entanto, substituir uma análise dinâmica mais detalhada para a determinação de esforços.

ABSTRACT

The improvement of design and construction methods have made possible to build long span floors systems. Unfortunately, their low stiffnesses made them susceptible to vibrations problems due to human activities such as walking, dancing, exercising and audience participation.

Long span floor systems have their natural frequency reduced to the point where they approach or equalize the forcing frequencies; as a result, the vibration grows to large amplitudes.

This paper presents an analytical study of the dynamic response of composite floors, of usual dimensions, due to human activities. An extensive numerical analysis is developed based on the finite element method. A computational program was used to proceed the dynamic analysis and the development of the numerical model. The floor system was modeled with shell elements to represent the concrete slab and beam elements for the steel beam with full interaction between them. For the dynamic analysis a harmonic load was applied on the floor to simulate human activities. In the computational results has been observed that the acceleration response overcomes the standard suggested limits in the analysed problems.

Another analysis consisted in reducing the floor to a single degree of freedom system. Simple design methods and formulae for calculating the system natural frequency, displacements and accelerations were used and the results showed that their utilization is valid only for a preliminary analysis.

1

VIBRAÇÕES EM ESTRUTURAS

1.1 Introdução

Em 1877 Lord Rayleigh, que desenvolveu a formulação relativa ao princípio da teoria da vibração aplicada até os dias atuais, publicou seu extraordinário tratado intitulado “*Theory of Sound*”. Em seu trabalho ele introduziu o conceito fundamental de oscilação de um sistema linear em uma configuração de equilíbrio e mostrou a existência de modos de vibração e modos de frequência para sistemas discretos e sistemas contínuos (GÉRADIN & RIXEN (1997)).

Antes da Revolução Industrial começar, as estruturas em geral possuíam grande massa, uma vez que eram utilizadas pesadas peças de madeiras de lei em sua fabricação. Este método construtivo proporcionava um grande amortecimento inerente à estrutura ocasionando respostas extremamente baixas do sistema estrutural quando submetido a uma vibração.

Com o advento de materiais mais leves e de alta resistência como o ferro, o aço e o alumínio, o aumento do conhecimento das propriedades dos materiais, o aprimoramento dos processos de cálculo estrutural e a modernização de técnicas construtivas, foram possíveis as execuções de projetos arrojados com estruturas mais esbeltas e a utilização de grandes vãos livres (BEARDS (1996)).

Os pioneiros da aeronáutica, devido ao constante desejo de minimizar o peso das aeronaves, foram os primeiros projetistas estruturais a dominarem os problemas de vibração e de dinâmica estrutural. Com o aparecimento e a progressiva popularização dos computadores, desde 1960, novas técnicas de análise para a dinâmica das estruturas foram introduzidas como, por exemplo, a discretização de estruturas via Método dos Elementos Finitos, possibilitando análises mais refinadas.

A disponibilidade de computadores mais avançados tem mudado profundamente os métodos, o significado matemático e a linguagem da análise estrutural, uma vez que ampliam a capacidade do estudo matemático para solucionar problemas que anteriormente eram solucionados apenas experimentalmente. No entanto, os conceitos básicos e teorias da dinâmica estrutural não mudaram, pois estão fortemente enraizados e podem certamente sustentar essa modernização tecnológica. Além disso, só recentemente esse avanço computacional possibilitou uma profunda utilização de conhecimentos acumulados nos últimos dois séculos e muitas vezes inexplorados devido à impossibilidade de resolver cálculos extremamente complexos.

A grande experiência adquirida pelos pioneiros da aeronáutica no campo da avaliação dinâmica, quer seja numérica ou experimentalmente, foi, mais tarde, aplicada em outros campos da indústria e das engenharias civil, mecânica e nuclear, uma vez que a constante modernização das técnicas construtivas para a obtenção de estruturas mais esbeltas ocasionou em uma diminuição da rigidez das estruturas, tornando-as susceptíveis a problemas de vibração oriundos de carregamentos dinâmicos (GÉRADIN & RIXEN (1997)).

1.2 Análise de vibrações

Cinematicamente, uma vibração é todo fenômeno mecânico no qual certas características de movimento se repetem permanentemente. Se estas características se repetem de maneira uniforme e idêntica, diz-se que a vibração é periódica (LOPEZ (1968)). Vários fenômenos naturais envolvem movimentos periódicos de alguma espécie. Nosso próprio corpo possui órgãos que exercem movimentos periódicos, como por exemplo, o pulmão, o coração ou os tímpanos. A vibração, freqüentemente, está associada a eventos terríveis e um dos mais impressionantes e catastróficos fenômenos da natureza associado à vibração é o terremoto.

A vibração que ocorre na maioria das máquinas, estruturas e sistemas dinâmicos é indesejada não só por causar movimentos desagradáveis, barulho e tensões dinâmicas que podem levar uma estrutura ao colapso, mas também devido a grande perda de energia e de desempenho que acompanham a vibração.

Diversas são as fontes que podem ocasionar vibrações em estruturas, tais como a ação dinâmica do vento, ações sísmicas, carregamentos desbalanceados devido à instalação de equipamentos, carregamentos devido ao tráfego de veículos, ação das ondas do mar, excitações de público devido ao caminhar, dançar (KORENEV & REZNIKOV (1992)).

Os carregamentos dinâmicos podem ser definidos como carregamentos que variam com o tempo, ou seja, um carregamento cuja magnitude, direção ou posição varie com o tempo. Similarmente, a resposta da estrutura sujeita a um carregamento dinâmico também varia com o tempo.

Existem basicamente duas diferentes aproximações para avaliar a resposta estrutural devido à atuação de carregamentos dinâmicos: a análise determinística e a não determinística (BEARDS (1996)).

A escolha do método a ser utilizado depende da definição do carregamento dinâmico atuante. Se o carregamento é uma função de tempo completamente conhecida diz-se que é um carregamento dinâmico prescrito, o qual define a análise determinística.

Por outro lado, se o carregamento não é completamente conhecido, mas pode ser avaliado estatisticamente, o carregamento então é considerado randômico definindo, assim, uma análise não determinística.

Em geral, a resposta da estrutura sujeita a qualquer tipo de carregamento dinâmico é expressa em termos de deslocamento da estrutura. Deste modo, com o resultado da análise determinística obtém-se um histórico do deslocamento em função do tempo e em uma análise não determinística os dados obtidos sobre os deslocamentos da estrutura são estatísticos, uma vez que resultam de um carregamento definido estatisticamente.

Os carregamentos determinísticos podem ser divididos basicamente em duas categorias: os não periódicos e os periódicos.

Os carregamentos não periódicos se dividem em impulsivos ou de curta duração e nos de longa duração. Dentre os carregamentos não periódicos estão o impacto do calcanhar sobre o piso, a explosão de uma bomba, etc.

Os carregamentos periódicos são cargas repetitivas as quais exibem a mesma variação sucessivamente por um grande número de ciclos. O mais simples dos carregamentos periódicos é o carregamento que tem a sua variação no tempo definida por uma função do tipo senoidal, chamado de harmônico simples. Geralmente, está associado com máquinas rotacionais. Além disso, segundo o teorema de Fourier, todo carregamento periódico pode ser representado por um somatório de componentes harmônicas (CLOUGH & PENZIEN (1975)).

Na construção civil, problemas de vibrações em pisos devido a carregamentos dinâmicos tornaram-se mais freqüentes com a popularização de atividades rítmicas e danças de salão. As inovações tecnológicas desenvolvidas possibilitam a redução da

massa estrutural e, conseqüentemente, do amortecimento e rigidez da estrutura, resultando em freqüências naturais que se aproximam de freqüências típicas de excitações provenientes de atividades associadas a movimentos de pessoas. A aproximação destas freqüências gera uma amplificação da aceleração do piso devido à ressonância.

1.3 Revisão Bibliográfica

Ao longo dos anos, vários estudos têm sido realizados no campo da dinâmica para avaliar os efeitos da vibração sobre as pessoas e estruturas, para determinar os tipos de carregamentos existentes, para a obtenção de métodos simplificados de análise de vibração e em meios de reduzir-se as vibrações indesejáveis.

LENZEN (1966), pesquisou vários pisos projetados para diferentes utilizações: escritórios, igrejas, salas de aula, halls, salas de máquinas e outros, visando adquirir conhecimentos e dados experimentais sobre vibrações de pisos.

Em todos os pisos estudados, o autor observou que ocorria interação total entre o piso de concreto e o aço para a definição da freqüência natural, f , do sistema de piso. Estas freqüências naturais eram obtidas, de forma aproximada, pela seguinte equação:

$$f = 1,57 \sqrt{\frac{gEI_t}{w_d L^4}} \quad (1.1)$$

onde:

g = aceleração da gravidade = 9,81 m/s²;

I_t = momento de inércia transformado;

E = módulo de elasticidade do material;

w_d = carga permanente do piso por metro linear;

L = comprimento do vão.

O autor, para avaliar a atuação de carregamentos transientes, realizou vários testes em uma plataforma na qual sua frequência natural, amplitude e características de amortecimento poderiam ser alteradas e observou:

- i. Vibrações transientes tornam-se importantes se persistirem por mais de 5 ciclos;
- ii. A resposta de vibrações transientes em ocupantes é diretamente influenciada pelo amortecimento;
- iii. Uma construção típica fornece amortecimento suficiente através das paredes, divisórias e teto, de modo que a vibração transiente varie de imperceptível a levemente perceptível;
- iv. Em construções com grandes vãos livres como escolas, igrejas e lojas têm-se pouco amortecimento inerente à estrutura. Para estas áreas considerar-se-ão satisfatórios os pisos que não ultrapassem o vão de 7,32m;
- v. O corpo humano é um dos melhores amortecedores existentes.

WISS e PARMELEE (1974) analisaram a resposta humana a vibrações transientes, similares às produzidas por passos durante o caminhar, em termos de sua frequência, deslocamento máximo e amortecimento.

Os autores basearam-se nos estudos de Reiher e Meister, *apud* Wiss e Parmelee (1974), para comparação dos resultados obtidos com o modelo matemático desenvolvido. Em suas pesquisas eles expuseram 10 pessoas em pé, individualmente, sobre uma plataforma sujeita a deslocamentos verticais e várias combinações de frequência, amplitude de deslocamento e amortecimento. Cada pessoa, então, avaliaria a combinação segundo a classificação:

- i. imperceptível;
- ii. levemente perceptível;
- iii. perceptível;
- iv. fortemente perceptível;
- v. severo.

Eles observaram que vibrações a uma certa frequência e deslocamento eram menos perceptíveis do que quando avaliadas pelo estudo de Reiher e Meister. No entanto, os autores acreditam que isto se deve pela diferença no tempo de exposição à vibração de 5 segundos contra 5 minutos no estudo de Reiher e Meister.

MURRAY (1981) comparou e revisou várias normas e estudos (GSA/PBS Guide, Canadian Standards Association Standard, International Organization for Standardization/ Splittgerber Scale, Modified Reiher e Meister Scale) para determinar a aceitabilidade de pisos mistos sujeitos a vibrações induzidas por ocupantes. Segundo o autor, as escalas de comparação existentes mostraram-se inconsistentes e, em geral, subestimaram a forte dependência entre a aceitabilidade da vibração e o amortecimento.

O autor, então, desenvolveu um novo critério de avaliação baseando-se em resultados experimentais de 91 sistemas de piso. Este critério, fortemente dependente do amortecimento, é adequado para avaliar a aceitabilidade de pisos mistos sujeitos a vibrações devido a ocupantes, não sendo indicado para quaisquer outros tipos de construção, principalmente sistemas em madeira.

FOSCHI e GUPTA (1987) desenvolveram um estudo analítico sobre vibrações de pisos sujeitos a carregamentos transientes e implementaram um programa computacional utilizando o método dos elementos finitos.

Em seus estudos, os autores propõem um critério baseado na segurança, utilizando um limite de deflexão estática absoluta de 1 mm, para uma carga concentrada de 1 KN atuando no meio do vão de uma viga com módulo de elasticidade $E=10,7 \times 10^3$ Mpa.

Eles apresentaram um quadro comparativo de valores de cargas estáticas e deflexões entre normas de países escandinavos e dos EUA, e concluíram que a norma vigente nos EUA não era satisfatória para controlar vibrações de pisos, sendo necessário implementar normas mais rígidas para controle das deflexões de pisos residenciais.

ALLEN (1990) percebeu a partir do estudo de um caso particular de piso, que o novo critério, introduzido em 1985 no NBC (National Building Code of Canada), para controlar vibrações em pisos sujeitos a atividades aeróbicas, necessitava melhorias. O critério em questão baseava-se na função de carregamento periódico para atividade aeróbica composta de duas componentes senoidais múltiplas de carregamento.

Neste trabalho, o autor estudou um piso de uma academia que estava com um nível excessivo de vibração e através de medições estimou funções de carregamentos para atividade aeróbica considerando, também, uma terceira componente múltipla de carregamento.

O autor, baseando-se nos resultados de sua investigação e em outras publicações, fornece um guia para estabelecer parâmetros utilizados no critério e discute alternativas de reparo de problemas de vibrações em pisos devido à aeróbica, sugerindo, também, mudanças a serem feitas no critério adotado pelo NBC, 1985.

CAVERSON *et al.* (1994) analisaram as normas existentes sobre vibrações para todos os tipos de pisos e avaliaram como elas poderiam ser aplicadas a pisos de concreto suspensos.

Os autores desenvolveram um programa de cálculo para pisos em concreto e apresentaram os resultados das comparações realizadas. Avaliando as escalas de percepção humana à vibração, os autores perceberam que estas são muito semelhantes entre si. No entanto, certas diferenças numéricas podem causar conflitos em algumas análises.

Eles consideraram as escalas difíceis de serem utilizadas, uma vez que dependem do cálculo de parâmetros como a frequência natural e a aceleração. Para os autores existe a necessidade de se desenvolver um método mais simples para a obtenção da frequência natural da estrutura de pisos, pois a utilização do método da viga equivalente subestima a frequência natural da estrutura. Este erro apesar de conservativo, em alguns casos, pode ser excessivo.

DE PAULA e QUEIROZ (1998) apresentaram a análise e adaptação de uma estrutura de piso misto aço/concreto, originalmente dimensionado para cargas estáticas, para atender a ocupação de atividades rítmicas.

O problema foi analisado utilizando-se programa computacional de elementos finitos, sendo o comportamento misto da estrutura obtido com a introdução de equações de restrições que garantam seções planas para o conjunto aço/concreto após as deformações.

Segundo os autores, a estrutura original apresentou resistência adequada para os esforços devido ao carregamento dinâmico, representativo do movimento de público em concertos de música ao vivo. Foram detectados, entretanto, níveis de aceleração, em alguns pontos do piso, superiores aos limites recomendados para atender critérios de conforto do público, o que levou a proposição de reforços.

Os resultados obtidos para as frequências naturais da estrutura, utilizando-se o modelo de elementos finitos, foram comparados com valores experimentais obtidos na estrutura real.

VECCI *et al.* (1998) avaliaram o comportamento dinâmico de pisos metálicos submetidos a excitações rítmicas. A adequabilidade desses pisos, quanto ao desconforto e seu estado limite de utilização relacionado a vibrações foram avaliados utilizando-se o critério de projeto do *National Building Code of Canada (NBC)*, edição de 1990.

Em relação a este critério, considerou-se sua versão mais simples, na qual a avaliação da adequabilidade do piso para excitações rítmicas se limita a uma análise comparativa entre as frequências naturais da estrutura e uma frequência mínima exigida.

No estudo, os autores observaram que, em praticamente toda a área do piso, foram obtidas frequências de vibração inferiores à frequência mínima exigida para o terceiro harmônico, que é de 9,10 Hz pelo critério de projeto do *NBC* de 1990, e concluíram que

o piso não poderia ser utilizado em sua totalidade para ginástica aeróbica, a menos que verificações adicionais relacionadas ao limite de aceleração fossem atendidas.

Várias outras pesquisas tiveram como objetivo principal avaliar experimentalmente os carregamentos dinâmicos relacionados com problemas de vibrações em pisos, buscando modelos matemáticos que representassem convenientemente a excitação dinâmica.

GREIMANN e KLAIBER (1978) realizaram uma instrumentação nas arquibancadas superiores do estádio de futebol da Universidade Estadual de Iowa para monitorar os tipos de deslocamentos e respostas dinâmicas induzidas pelos espectadores.

Um difícil passo para a realização da análise dinâmica era obter uma expressão analítica que melhor representasse os carregamentos dinâmicos atuantes sobre a estrutura. Os autores, então, sugeriram uma função de força harmônica para representar o movimento dos espectadores, com uma frequência próxima à frequência natural da estrutura, dada por:

$$q(t) = \gamma q_o \text{sen}(2\pi\Omega t) \quad (1.2)$$

onde: q_o = carga estática distribuída (15,6 KN/m);

Ω = frequência da excitação; $\Omega = 2,55$ Hz;

γ = fator de participação de público; foram utilizados os valores 0,02, 0,10 e 0,25.

As respostas obtidas no monitoramento foram reproduzidas analiticamente, com sucesso, através de funções de força que representavam o movimento de público.

TUAM e SAUL (1985) simularam o movimento de espectadores, individualmente, em plataformas onde eram feitas medições das componentes do carregamento dinâmico. Carregamentos impulsivos eram produzidos pelo movimento de pessoas levantando, sentando ou pulando sobre o piso, enquanto o carregamento contínuo era produzido por movimentos repetitivos de balançar, dobrar e esticar os joelhos, pulando ou dançando.

Os autores modelaram componentes vertical e horizontal de carregamentos estaticamente equivalentes a partir de valores máximos, obtendo:

- componente vertical: 4503 N/m²;
- componente horizontal paralela aos assentos: 336 N/m;
- componente horizontal perpendicular aos assentos: 438 N/m.

Estes valores foram resumidos e comparados com valores sugeridos por normas e literaturas técnicas, sendo adequados para a verificação da resistência e segurança estrutural.

Os autores sugerem uma nova filosofia de projeto, onde o problema de vibração em pisos deve ser considerado tratando-se o amortecimento como um parâmetro de projeto, nos casos onde a ressonância possa ocorrer.

RAINER *et al.* (1987) realizaram medições durante o caminhar, correr e saltar de pessoas sobre uma plataforma instrumentada. O carregamento dinâmico máximo obtido para o caminhar foi aproximadamente duas vezes maior do que o recomendado no *Ontario Highway Bridge Design Code (OHBDC)* ou pelo *BS 5400*, e para correr ou saltar seis vezes maior.

Os autores utilizaram uma fórmula simples para o cálculo das respostas de passarelas, a qual baseia-se no carregamento dinâmico devido a uma pessoa, na resposta de um vão em ressonância e no limite de duração da excitação. Este método, similar ao *BS 5400* e ao *OHBDC*, permite ao projetista adotar outras funções de carregamentos que possam ser aplicáveis em passarelas como, por exemplo, quando a excitação resultar da segunda componente harmônica do movimento de pedestres.

As acelerações obtidas neste trabalho foram confirmadas em testes experimentais. Os autores recomendam que a resposta devido a pular sobre a passarela seja considerada em projetos.

EBRAHIMPOUR e SACK (1989) descreveram analiticamente cargas dinâmicas devido a ocupantes. Os carregamentos periódicos foram modelados utilizando-se a Série de Fourier e para cargas impulsivas (uma pessoa pulando) foram utilizadas funções de decaimento logarítmico.

Os autores geraram os carregamentos periódicos através de simulações randômicas. Os resultados simulados acordaram perfeitamente com os obtidos experimentalmente.

Eles concluíram que modelos estatísticos eram muito complexos para o objetivo do estudo; sugeriram, então, a utilização de uma parcela da carga dinâmica por pessoa, a qual variaria de acordo com o número de espectadores envolvidos em uma análise dinâmica de estruturas.

BACHMANN (1992) estudou casos de passarelas, ginásios e salas de esporte, salas de dança e shows submetidos a carregamentos dinâmicos, para avaliar causas e estabelecer guias para solucionar problemas de vibração.

Segundo o autor, em situações normais, a frequência fundamental da estrutura deve ser definida de acordo com a frequência da componente harmônica crítica da excitação dinâmica. Isto consiste em manter as frequências dos modos dominantes de vibração da estrutura fora do alcance da frequência dos harmônicos críticos de excitações de atividades humanas.

O autor apresenta dez exemplos práticos analisados em seu trabalho, onde confirma sua teoria.

EBRAHIMPOUR e SACK (1992) tiveram como objetivo examinar cargas induzidas por um amplo grupo de pessoas em movimento harmônico. Para isto, foi construído um piso de $16,72\text{m}^2$ para suportar 40 pessoas. As respostas eram monitoradas por transmissores devidamente localizados no piso. Matrizes de rigidez, de amortecimento e de massa foram determinadas para o piso, sendo as duas últimas matrizes dependentes

do tamanho do público e do número de participantes que estariam em contato ou não com o piso.

Os autores realizaram medições para grupos de 10, 20, 30 e 40 pessoas comparando os resultados com valores de carregamentos obtidos anteriormente através de uma simulação computacional, onde foi utilizado um sistema com nove graus de liberdade na equação do movimento. A partir destas comparações, são sugeridos valores de carregamentos simulando movimentos harmônicos de público para serem utilizados em projetos de estruturas, segundo critérios de resistência e utilização.

Segundo os autores, ao se projetar uma estrutura visando critérios de resistência, esta deve ser capaz de suportar uma sobrecarga total de $5,5 \text{ kN/m}^2$, a qual corresponde à soma de uma carga estática de $2,2 \text{ kN/m}^2$ e uma componente dinâmica de $3,35 \text{ kN/m}^2$. Estes valores baseiam-se em uma pessoa pesando 712 N sobre uma área de $0,325 \text{ m}^2$.

Ao projetar-se uma estrutura visando critérios de utilização os autores sugerem um método simplificado de consideração de carregamento de público.

Para um grupo de 10 pessoas exercitando-se em uma frequência de 2Hz a 3Hz os harmônicos dominantes estarão entre 2 e 3Hz, entre 4 e 6Hz e entre 6 e 9Hz.

A componente dinâmica equivalente da excitação, $q_i(t)$, pode ser então aproximada por uma função senoidal, de amplitude A_i , ângulo de fase θ_i , e correspondente frequência f_i :

$$q_i(t) = A_i \text{sen}(2\pi f_i t + \theta_i) \quad (1.3)$$

Baseando-se em seus trabalhos, os autores acreditam que o seguinte processo de cálculo simplificado, por eles sugerido, seja suficiente para avaliar uma estrutura de piso sujeita a movimentos de público:

- i. Calcular a frequência natural, f_0 , da estrutura de piso;

ii. Determinar um carregamento senoidal apropriado para a obtenção da resposta da estrutura:

a. se $2 \leq f_0 \leq 3\text{Hz}$, usar $q_1(t) = A_1 \text{sen}(2\pi f_0 t)$

b. se $4 \leq f_0 \leq 6\text{Hz}$, usar $q_2(t) = A_2 \text{sen}(2\pi f_0 t)$

c. se $6 \leq f_0 \leq 9\text{Hz}$, usar $q_3(t) = A_3 \text{sen}(2\pi f_0 t)$

Para os valores de primeira frequência natural variando entre 0-2Hz e entre 3-4Hz recomenda-se a utilização de $q_1(t)$.

- iii. Verificar a aceitabilidade da resposta da estrutura segundo o conforto humano;
- iv. Caso o nível de aceleração não seja adequado, modificar as propriedades básicas da estrutura (rigidez, massa, amortecimento) e repetir os passos 1 a 3.

EBRAHIMPOUR e FITTS (1996) apresentaram resultados de um estudo experimental de medições da coerência do movimento rítmico de público. Duas placas instrumentadas foram utilizadas para medir o histórico de carregamento provocado por voluntários em movimentos rítmicos sincronizados.

Os autores observaram que a coerência de movimentos variava em função da frequência do movimento e concluíram com os resultados obtidos que:

- i. Em geral o ângulo de fase é função da frequência do movimento;
- ii. Quando a coerência dos movimentos é controlada por efeitos visuais e auditivos, o retardo da fase tem o valor mínimo;
- iii. Quando a coerência dos movimentos é controlada somente por efeitos auditivos, o retardo da fase cresce com o aumento da frequência;
- iv. A distribuição de probabilidade do retardo da fase é melhor descrita por uma função exponencial, sendo confirmada nos oito casos considerados.

Apesar dos problemas de vibrações em pisos terem se tornado mais frequentes, os métodos analíticos utilizados são complexos por envolverem uma série de variáveis de difícil obtenção como, por exemplo, a frequência fundamental da estrutura, a frequência

da excitação dinâmica, a aceleração máxima permitida a um sistema de piso para uma devida utilização, etc.

Buscando solucionar estes inconvenientes, vários pesquisadores desenvolveram métodos simplificados de cálculo para a obtenção das variáveis necessárias em uma análise dinâmica.

ELLINGWOOD e TALLIN (1983) estudaram o complexo fenômeno da percepção humana ao movimento estrutural e observaram que as limitações existentes sobre deflexões máximas e relações entre vão e altura não eram adequadas para evitar os movimentos causados por atividades humanas.

Eles concluíram que problemas de vibrações em pisos freqüentemente poderiam ser minimizados pela simples verificação da deflexão estática, com um limite de deflexão definido segundo o tipo de ocupação do piso e independente do vão; contudo, ressaltaram que as especificações existentes para critérios baseados em deflexões não consideram essa dependência com o tipo de ocupação do piso.

ALLEN *et al.* (1985) desenvolveram um procedimento de cálculo baseado na aceitação do usuário para pisos sujeitos a vibrações devido a atividades rítmicas. O método pode ser aplicado a carregamentos dinâmicos produzidos por dança, shows, exercícios físicos, eventos esportivos, etc.

Eles sugerem valores de parâmetros de cargas dinâmicas e limites de aceleração para várias atividades baseando-se em estudos disponíveis. Utilizando-se estes parâmetros foram obtidas as freqüências naturais mínimas para diferentes tipos de ocupação e construção de pisos.

Segundo os autores o procedimento de cálculo consiste em:

- i. Determinar o tipo de atividade a que o piso está sujeito. Estimar a densidade de ocupação e obter o peso distribuído dos participantes, w_p .

- ii. Escolher uma frequência de excitação apropriada, f , e um fator de carregamento dinâmico, α . Para exercícios de salto, tanto o primeiro quanto o segundo harmônico devem ser considerados.
- iii. Determinar o nível de aceleração aceitável, a_o/g , para o sistema de piso, segundo recomendações de normas técnicas apropriadas.
- iv. Estimar o peso total do sistema de piso e em seguida determinar a menor frequência natural aceitável para o piso com a seguinte equação,

$$f_o \geq f \sqrt{1 + \frac{1,3}{a_o/g} \frac{\alpha w_p}{w_t}} \quad (1.4)$$

- v. Determinar a primeira frequência natural, f_o , para o piso.
- vi. Caso a Eq. (1.4) não seja satisfeita, algumas alterações deverão ser realizadas no sistema de piso analisado. Dentre as opções de medidas corretivas pode-se citar o enrijecimento do piso, relocação da atividade, etc.

Estas frequências naturais mínimas calculadas a partir da reação humana variam de 5Hz a 12 Hz sendo, geralmente, superiores a 6Hz. No entanto, quando a frequência natural fundamental de um sistema de piso sujeito a atividades rítmicas for inferior a 6Hz, a *NBC (National Building Code of Canada)* exige uma análise dinâmica do sistema para uma cuidadosa avaliação do problema.

RAINER e SWALLOW (1986) realizaram medições em dez pisos mistos aço-concreto para determinar os modos de vibração, frequências naturais e valores de amortecimento. A partir de testes, como de Vibração Ambiente e Vibração Contínua, foi obtida a frequência natural fundamental de 3,5 Hz e a relação de amortecimento de 1% do amortecimento crítico.

Comparando-se o critério de vibração adotado com o Apêndice G da *CAN3-S16.1-M84 (Canadian Standards Association)* os autores confirmaram o desempenho satisfatório do piso para o caminhar, sendo inadequado, no entanto, para atividades rítmicas.

Os autores apresentaram, ainda, valores de coeficiente de participação dos harmônicos do carregamento dinâmico, para atividades rítmicas. Tais coeficientes foram obtidos de acordo com a norma canadense de vibrações, sendo que a de menor componente de excitação variou de 0,7 a 1,6.

TOLAYMAT (1988) ao verificar os métodos de cálculo existentes para análise de vibrações desenvolveu um novo procedimento para avaliação de vibrações em pisos.

Baseando-se na menor frequência natural do sistema e no amortecimento conhecido, o autor classificou os sistemas de pisos em três diferentes categorias:

- i. Sistemas que dissipam a energia de vibração rapidamente. As pessoas não percebem a vibração;
- ii. Sistemas que não dissipam a energia de vibração rapidamente. As pessoas percebem a vibração, mas a aceitam;
- iii. Sistemas que não dissipam a energia de vibração rapidamente. As pessoas percebem a vibração indesejável.

O autor realizou 96 testes em vários tipos de pisos. O programa por ele desenvolvido obtém o histórico de resposta do piso para qualquer carregamento que varie com o tempo.

MURRAY (1991) teve como objetivo ao realizar este trabalho revisar métodos analíticos e conceitos para controlar movimentos indesejáveis de pisos em residências, escritórios, lojas e ginásios.

Ele aplica um método simplificado de cálculo para estimar a frequência natural, a amplitude máxima, o amortecimento e a aceleração de pisos. Baseando-se em sua experiência faz recomendações para três tipos de construções: residências e escritórios, lojas e ginásios.

Além destes, apresenta situações especiais como passarela para pedestres e movimento transversal em vigas principais de sistemas de pisos. A fim de ilustrar alguns dos conceitos utilizados, o autor apresenta dois exemplos numéricos.

HATFIELD (1992) desenvolveu uma escala para estimar o limiar de aceitabilidade de uma vibração em pisos mistos aço/concreto de escritório ou residência devido a atividades humanas rotineiras, sendo pouco conservativa para pisos sujeitos a vibrações causadas por máquinas, veículos ou atividades rítmicas.

O autor baseou-se em dois trabalhos propostos por Murray e sugere que sua escala seja utilizada juntamente com estes estudos, pois eles possuem informações complementares para a obtenção de parâmetros necessários à análise. Ele espera que sua escala forneça o devido discernimento para o controle de vibrações através do aumento da rigidez, da massa ou do amortecimento do piso.

ALLEN e MURRAY (1993) apresentaram um novo critério de cálculo para vibrações devido ao caminhar. O critério baseia-se na resposta dinâmica da estrutura metálica ou mista sujeita a excitações devido ao caminhar, bem como na sensibilidade de ocupantes sujeitos à vibração.

O critério é aplicável a estruturas com frequências abaixo de 9 Hz, onde a ressonância pode ocorrer com a frequência do passo. Em pisos de residências e escritórios onde a frequência pode ser maior que 9 Hz deve ser feita, também, a verificação da deflexão estática com a carga de 1 KN/mm.

DE CARVALHO e DE PAULA (2000) apresentaram um estudo comparativo de diferentes formas de se considerar o amortecimento estrutural, na obtenção da resposta dinâmica de um piso misto.

Em seu estudo, eles consideraram 3 opções de análise:

- i. Níveis distintos de amortecimento para o aço e para o concreto;

- ii. Um fator de amortecimento constante para a estrutura global;
- iii. Matriz de amortecimento de Rayleigh.

Segundo os autores, a utilização do fator de amortecimento constante para toda a estrutura e da matriz de amortecimento de Rayleigh proporcional à rigidez ou proporcional à massa e rigidez da estrutura, conduziram a respostas muito próximas para uma faixa de frequência perto da ressonância. Eles observaram a dificuldade de se estabelecer parâmetros de amortecimento para cada material separadamente, uma vez que o amortecimento não depende apenas de suas propriedades intrínsecas, mas também de materiais e objetos que estejam acoplados à estrutura, tais como acabamentos, alvenaria, divisórias e mobiliários.

Os resultados obtidos foram comparados com medições de vibrações induzidas no piso por atividades rítmicas.

Em geral, a ocorrência de vibração em pisos é desagradável. Os limites de aceitação à vibração variam de pessoa para pessoa e por isso, também as soluções variam de caso para caso. Por se tratar de um fenômeno que envolve o bem estar físico e mental dos ocupantes envolvidos, diversas pesquisas vêm sendo realizadas buscando soluções rápidas, práticas e econômicas para se evitarem os incômodos causados pelas vibrações em pisos.

SETAREH e HANSON (1992) estudaram problemas associados a vibrações de pisos causados por atividades humanas e como amortecedores poderiam ser usados na redução da vibração em um balcão de espectadores.

Os autores desenvolveram um modelo computacional tridimensional do sistema e suas principais características foram estabelecidas a partir da combinação das propriedades dinâmicas do modelo e de resultados de testes dinâmicos realizados anteriormente.

Foram considerados 5 pares de amortecedores atuando simultaneamente para suprimir a resposta ressonante do sistema. Eles foram projetados para reduzir a vibração em 20%.

Os autores realizaram testes antes e depois da instalação dos amortecedores para avaliar sua atuação e também para obterem dados adicionais sobre os efeitos ou não dos amortecedores sobre o balcão.

Os resultados obtidos após a instalação dos amortecedores mostraram que estes eram ativos desde que o balcão chegasse à ressonância.

A fração do amortecimento crítico do balcão foi de 0,08, um crescimento significativo comparando-se com o amortecimento original de 0,016, e a amplitude máxima de vibração obtida no balcão durante a ressonância foi de 0,508 cm, a qual não fornece riscos à estrutura.

HANAGAN e MURRAY (1998) analisaram o papel do amortecimento e da aplicação de um controle ativo na redução de vibrações indesejáveis de pisos.

Os autores apresentam a implementação prática de um controle ativo, através de uma força eletromagnética controlada por computador.

Eles realizaram testes em dois pisos, um escritório e um laboratório de química. Os resultados obtidos nestes sistemas de pisos apresentaram reduções de 70% e 75%, respectivamente, na velocidade de vibração dos pisos.

Segundo os autores, esta drástica melhora foi realizada sem transtornos aos ocupantes, enquanto os reparos eram implementados. Outra vantagem do sistema é ser leve e de fácil instalação, mas tendo o seu custo como principal desvantagem.

1.4 Objetivo e escopo do trabalho

1.4.1 Objetivo

O estudo desenvolvido neste trabalho tem como objetivo avaliar o comportamento dinâmico de pisos mistos aço/concreto submetidos a excitações rítmicas. A partir da análise de modelos numéricos, utilizando programas computacionais baseados no Método dos Elementos Finitos, a funcionalidade desses pisos quanto ao conforto humano e seu estado limite de utilização relacionado a vibrações será avaliada.

Um estudo sobre parâmetros de simulação de carregamentos oriundos de atividades humanas tais como o caminhar, dançar e pular sobre um piso também será realizado, bem como avaliar a confiabilidade de métodos simplificados de análise.

1.4.2 Escopo do Trabalho

O Capítulo 2 trata da análise dinâmica linear de sistemas com um grau de liberdade e vários graus de liberdade submetidos a carregamentos dinâmicos oriundos de atividades humanas. Mostra-se a resposta dos sistemas através da solução da equação diferencial do movimento, e estudam-se os conceitos de amortecimento crítico e ressonância. Estudam-se, ainda, as Séries de Fourier, importante ferramenta matemática que permite a transformação de uma função periódica qualquer em um somatório de funções periódicas simples em senos e co-senos.

No Capítulo 3 estudam-se as estruturas mistas em conceitos básicos de funcionamento. Considerações sobre interação total entre o concreto e os conectores, ligações elásticas, larguras efetivas recomendadas por normas, bem como contribuições das lajes são apresentadas.

No Capítulo 4 são definidos, a partir de normas e recomendações, carregamentos dinâmicos a que as estruturas estão sujeitas. Um enfoque especial será dado aos

carregamentos representativos de movimento de público, tais como andar, dançar, exercícios aeróbicos e shows. Estuda-se a importância das combinações de carregamentos harmônicos e uma aplicação numérica, de uma viga bi-apoiada com carregamento de diferentes frequências, é apresentada para melhor ilustrar o presente estudo.

O Capítulo 5 consiste na aplicação numérica dos conceitos apresentados em modelos de pisos mistos, através da análise dinâmica de diversos pisos, sujeitos a carregamentos dinâmicos, utilizando um programa computacional baseado no método dos elementos finitos. Os resultados são comparados com resultados obtidos através de métodos de cálculo simplificados apresentados em diversas bibliografias, incluindo variações nas considerações estruturais dos sistemas de piso.

No Capítulo 6 são apresentadas as conclusões do trabalho e sugestões para desenvolvimento de outros estudos nesta área.

2

ANÁLISE DINÂMICA

2.1 Introdução

Ao se analisar uma estrutura sob o efeito de cargas dinâmicas, deve-se inicialmente montar um modelo matemático que represente convenientemente a estrutura em questão. Este modelo matemático pode representar sistemas com um grau de liberdade ou com vários graus de liberdade, quando for necessário analisar estruturas mais complexas.

Normalmente, por razões práticas de projeto, costuma-se adotar métodos simplificados que possibilitem uma análise dinâmica mais rápida para estruturas complexas, dentro de uma precisão de cálculo adequada. Essas simplificações ocorrem tanto na estrutura, quanto no carregamento.

Em vários casos que ocorrem na prática é possível reduzir-se um sistema real, possuindo infinitos graus de liberdade, a um sistema equivalente com um só grau de liberdade, sem que haja perda significativa nos resultados finais procurados.

2.2 Sistemas com um grau de liberdade

Um sistema com um grau de liberdade (UGL) é definido como aquele sistema que pode vibrar de um só modo, ou se apenas uma coordenada independente é necessária para especificar completamente a locação geométrica das massas do sistema no espaço.

Na FIG.1 é mostrado um exemplo típico de tal sistema, onde a massa m pode mover-se na direção horizontal, e qualquer ponto da massa se desloca de uma mesma quantidade $u(t)$; no modelo indicado é assumido que o sistema tem amortecimento do tipo viscoso, com constante c , e que a mola, de constante elástica k , não possui massa. A força de amortecimento, neste caso, é proporcional à velocidade do movimento e a força elástica é proporcional ao deslocamento. $P(t)$ representa a atuação de um carregamento dinâmico sobre a estrutura (CRAIG *et al.* (1981)).

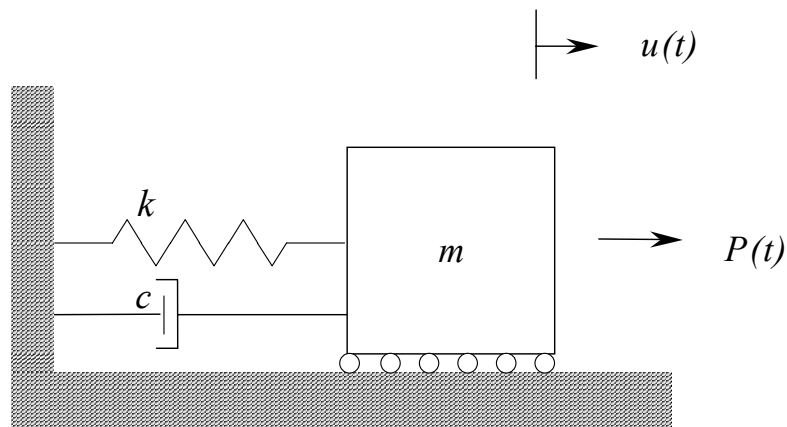


FIGURA 1 - Sistema com um grau de liberdade, UGL

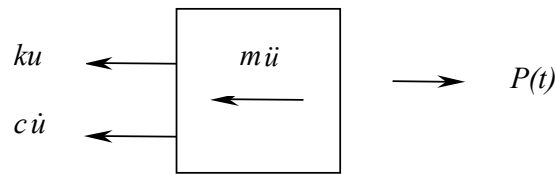


FIGURA 2 – Diagrama de corpo livre de um sistema UGL

Para o sistema descrito, o equilíbrio dinâmico de forças (FIG.2) fornece a seguinte equação diferencial do movimento:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P(t) \quad (2.1)$$

onde \dot{u} e \ddot{u} são, respectivamente, a velocidade e a aceleração, ou seja, derivadas primeira e segunda do deslocamento em função do tempo.

Quando um sistema se movimenta sob a aplicação de um carregamento $P(t)$, que varia com o tempo, diz-se que ele está em vibração forçada.

Se o sistema não tivesse carregamento externo aplicado, a Eq. (2.1) reduzir-se-ia a:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (2.2)$$

Os movimentos que acontecem quando no sistema não existe força externa aplicada são conhecidos como vibrações livres.

Dividindo-se a equação (2.2) por m , pode-se reescrevê-la como:

$$\frac{\ddot{u}}{\ddot{u}} + \frac{c}{m}\dot{u}(t) + \frac{k}{m}u(t) = 0$$

sendo: $\omega_n = (k/m)^{1/2}$	freqüência natural, em rad/s
c	coeficiente de amortecimento
$c_{cr} = 2m\omega_n = 2k/\omega_n$	coeficiente de amortecimento crítico
$\zeta = c/c_{cr}$	fator de amortecimento da estrutura

tem-se:

$$\ddot{u}(t) + \frac{c}{c_{cr}} 2\omega_n \dot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = 0$$

$$\ddot{u}(t) + 2\omega_n \zeta \dot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = 0 \quad (2.3)$$

A solução geral da equação diferencial (2.3) é da forma:

$$u(t) = C e^{st} \quad (2.4)$$

Substituindo-se esta solução na Eq. (2.3) chega-se à equação característica:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (2.5)$$

cuja solução é:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (2.6)$$

A quantidade sob o radical pode ser positiva, nula ou negativa, caracterizando os casos de super-amortecimento ($\zeta > 1$), amortecimento crítico ($\zeta = 1$) ou sub-amortecimento ($\zeta < 1$), respectivamente.

Sistemas estruturais com amortecimento maior que o amortecimento crítico ($\zeta > 1$), não são encontrados em condições usuais.

Quando o radical se anula, tem-se o caso limite conhecido como amortecimento crítico ($\zeta=1$). O valor da Eq. (2.6) é então tomado como:

$$s = -\zeta\omega_n \quad (2.7)$$

e a resposta dada pela Eq. (2.4) será:

$$u(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\zeta\omega_n t} \quad (2.8)$$

onde o segundo termo é multiplicado por t porque apenas um valor de s foi obtido na Eq. (2.7). Os valores de C_1 e C_2 são obtidos ao se impor o atendimento das condições iniciais do movimento, u_o e \dot{u}_o , pela Eq. (2.8). É de se notar que a resposta livre do sistema amortecido criticamente não apresenta oscilação em torno da posição de deflexão zero; pelo contrário, o deslocamento cai a zero, de acordo com o termo exponencial da Eq. (2.8).

Em sistemas sub-amortecidos é conveniente que a equação característica, dada pela Eq. (2.6), seja rescrita na forma:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d \quad (2.9)$$

onde $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ é conhecida como frequência natural amortecida.

A resposta em vibração livre de um sistema sub-amortecido, com a ajuda das equações de Euler, pode ser escrita na forma:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sen \omega_d t) \quad (2.10)$$

onde os valores das constantes A_1 e A_2 são obtidos das condições iniciais do movimento, u_o e \dot{u}_o .

A Eq. (2.10) é a solução da equação homogênea correspondente à Eq. (2.2), isto é, a resposta do sistema sem aplicação de carregamento externo. Na vibração forçada, a solução da equação diferencial é da forma $u(t) = u_h + u_p$, sendo u_h a solução da equação homogênea e u_p a solução particular da equação diferencial. A solução particular depende do tipo de carregamento a que está sujeita a estrutura.

Ao aplicar-se uma carga dinâmica harmônica $P(t) = P_o \cos \Omega t$, onde Ω é a frequência da excitação, a Eq. (2.1) fica:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P_o \cos \Omega t \quad (2.11)$$

Resolvendo-se a Eq. (2.11), a solução particular obtida é da forma:

$$u_p(t) = \left[\frac{u_o}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \right] \cos(\Omega t - \phi) \quad (2.12)$$

onde: $u_o = P_o/k$ deslocamento estático
 $r = \Omega/\omega_n$ relação de frequências
 ϕ ângulo de fase

A solução total da equação do movimento para um sistema amortecido é:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sen \omega_d t) + \left[\frac{u_o}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \right] \cos(\Omega t - \phi) \quad (2.13)$$

O primeiro termo da Eq. (2.13) representa a resposta transitória à carga aplicada; ele se amortece rapidamente e é de pouco interesse. O segundo termo desta Eq. (2.13) representa a resposta permanente, com a frequência da carga aplicada, mas fora de fase com ela.

A amplitude da resposta permanente é dada na Eq. (2.13) e vale:

$$U = \left[\frac{u_o}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \right] \quad (2.14)$$

A razão entre a amplitude da resposta permanente e o deslocamento estático, produzido pela força P_o , é chamada de fator de amplificação dinâmico (D_s):

$$D_s = \frac{U}{u_o} = \left[\frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \right] \quad (2.15)$$

A condição na qual a frequência da carga aplicada é igual à frequência natural de vibração do sistema estrutural chama-se ressonância. Da Eq. (2.15), para $r = 1$, tem-se:

$$D_s = \frac{U}{u_o} = \frac{1}{2\zeta} \quad (2.16)$$

Vê-se então que, o fator de amplificação dinâmico, na ressonância, é inversamente proporcional ao amortecimento (FIG. 3).

O ângulo de fase da resposta é apresentado na FIG. 3 e pode ser escrito na forma:

$$\tan \phi = \frac{2\zeta r}{1 - r^2} \quad (2.17)$$

Na FIG. 3 estão representados valores de D_s e ϕ para vários valores de amortecimento.

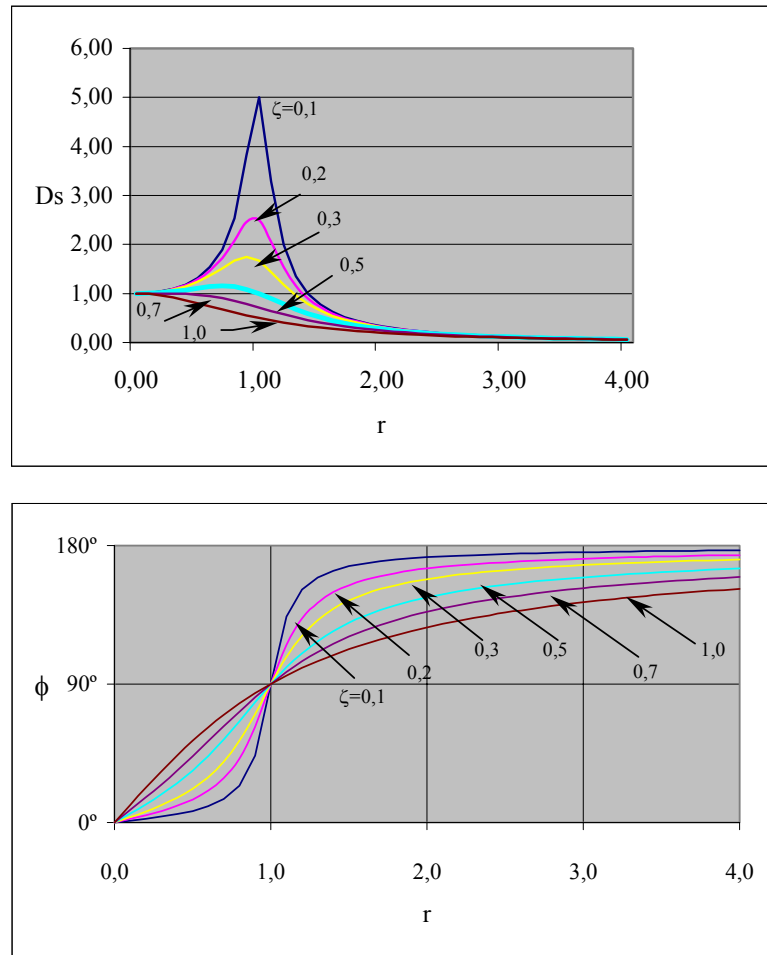


FIGURA 3 – (a) Fator de amplificação versus relação de freqüências
(b) Ângulo de fase versus relação de freqüências

Com a carga harmônica na forma $P(t) = P_o \text{sen } \Omega t$, a equação do movimento se escreve na forma:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P_o \text{sen } \Omega t \quad (2.18)$$

e a solução particular é obtida de forma similar ao carregamento em cosseno:

$$u(t) = U \text{sen}(\Omega t - \phi) \quad (2.18a)$$

com U definido pela Eq. (2.14).

Pode-se derivar duas vezes a equação de deslocamento, obtendo-se a velocidade e a aceleração, respectivamente:

$$\dot{u}(t) = \Omega U \cos(\Omega t - \phi) \quad (2.19)$$

$$\ddot{u}(t) = -\Omega^2 U \sin(\Omega t - \phi) \quad (2.20)$$

Reescrevendo a equação da aceleração, tem-se:

$$\ddot{u}(t) = \frac{P_o}{k} \frac{\Omega^2}{\left[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2 \right]^{1/2}} \sin(\Omega t - \phi) \quad (2.21)$$

Muitas vezes, para a simplificação do cálculo da resposta dinâmica de um sistema, torna-se necessária a utilização da forma complexa. Para um sistema UGL a equação complexa do movimento é encontrada multiplicando-se a Eq. (2.18) por $i = \sqrt{-1}$, somando-a à Eq. (2.11), e se a fórmula de Euler é usada o resultado será:

$$m\ddot{\bar{u}} + c\dot{\bar{u}} + k\bar{u} = \bar{P} = P_o e^{i\Omega t} \quad (2.22)$$

onde $\bar{u} = u_R + iu_I$, é a resposta complexa.

A solução permanente da Eq. (2.22) é dada por:

$$\bar{u} = U \cos(\Omega t - \phi) + iU \sin(\Omega t - \phi) \quad \text{ou}$$

$$\bar{u} = \bar{U} e^{i\Omega t} \quad (2.23)$$

onde $\bar{U} = U e^{-i\phi}$ é a amplitude complexa. A partir da derivação da solução da equação diferencial complexa (2.23), tem-se para a velocidade e a aceleração, respectivamente:

$$\dot{\bar{u}} = i\Omega \bar{U} e^{i\Omega t} = i\Omega \bar{u} \quad (2.24)$$

$$\ddot{\bar{u}} = (i\Omega)^2 \bar{U} e^{i\Omega t} = -\Omega^2 \bar{u}$$

Substituindo (2.24) na equação diferencial complexa representada pela Eq. (2.22), tem-se:

$$-m\Omega^2\bar{U}e^{i\Omega t} + ci\Omega\bar{U}e^{i\Omega t} + k\bar{U}e^{i\Omega t} = P_oe^{i\Omega t}$$

$$[-m\Omega^2 + ci\Omega + k]\bar{U} = P_o \quad (2.25)$$

$$\bar{U} = \frac{P_o}{(k - m\Omega^2) + ic\Omega} \quad (2.26)$$

A expressão acima pode ser reescrita na forma:

$$\bar{H}(\Omega) = \frac{\bar{U}}{U_o} = \frac{1}{(1 - r^2) + i(2\zeta r)} \quad (2.27)$$

onde $\bar{H}(\Omega)$ é a função complexa de resposta em frequência.

Segundo o sistema real de coordenadas o ângulo de fase, ϕ , que define quanto tempo a resposta dinâmica está defasada da excitação, apresenta-se na Eq. (2.28):

$$\tan \phi = \frac{2\zeta r}{1 - r^2} \quad (2.28)$$

A equação diferencial (2.22) pode ser interpretada como forças em equilíbrio atuando em uma massa m . Estas forças quando representadas vetorialmente no plano complexo (FIG.4) formam um polígono fechado, como mostrado na FIG.5.

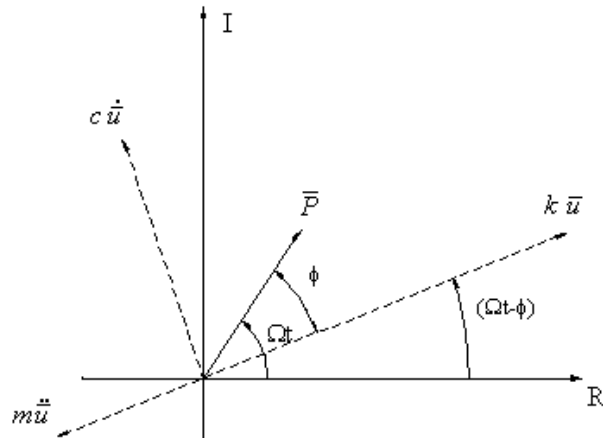


FIGURA 4 – Projeção vetorial no plano complexo

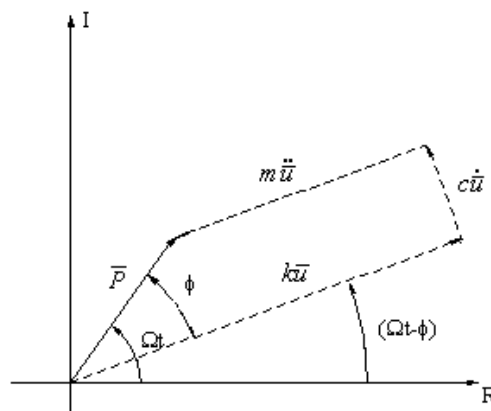


FIGURA 5 – Polígono de forças vetoriais

2.3 Sistemas com Vários Graus de Liberdade

Sistemas com vários graus de liberdade são formulados utilizando conceitos similares aos utilizados em sistemas com um grau de liberdade. Um sistema com n graus de liberdade resulta na formação de matrizes de massa, de rigidez e de amortecimento, que, associadas aos valores de aceleração, deslocamento e velocidade nos graus de liberdade, respectivamente, permitem o equacionamento do equilíbrio dinâmico da estrutura.

A equação básica da dinâmica aparece na forma matricial, como (CRAIG *et al.* (1981)):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{P}(t) \quad (2.29)$$

sendo que $\ddot{\mathbf{u}}(t)$, $\dot{\mathbf{u}}(t)$ e $\mathbf{u}(t)$ representam vetores de dimensão n , \mathbf{M} é a matriz de massa, \mathbf{C} é a matriz de amortecimento e \mathbf{K} é a matriz de rigidez. $\mathbf{P}(t)$ é um vetor de carregamento atuante na estrutura.

Para um sistema não amortecido em vibração livre, tem-se:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad (2.30)$$

A solução do sistema de equações algébricas lineares homogêneas corresponde a um problema de autovalor. Para sistemas com n graus de liberdade, obtêm-se n autovalores que são as frequências naturais da estrutura. A cada autovalor corresponde um autovetor, que representa o modo de vibração associado a cada frequência natural.

Para sistemas com dois graus de liberdade, por exemplo, a equação do movimento é escrita na forma:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

e o problema de vibração livre não amortecida:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

A solução analítica para sistemas com n graus de liberdade é difícil de se obter; são utilizados métodos como a superposição modal ou a integração passo a passo para encontrar a resposta dinâmica (CRAIG *et al.* (1981); CLOUGH & PENZIEN (1975)).

Quando são analisados sistemas mais complexos, com o número de graus de liberdade superior a três, o cálculo manual torna-se extenso, sendo necessário a utilização de programas computacionais para a realização da análise dinâmica do sistema estrutural.

Para a utilização de programas computacionais em análises estruturais deve-se criar um modelo numérico que seja capaz de representar as características físicas e geométricas da estrutura, de forma a garantir a confiabilidade dos resultados.

2.4 Série de Fourier

As funções periódicas ocorrem com frequência nos problemas de engenharia. Sua representação em termos de funções periódicas simples, tais como senos e co-senos, conduz às Séries de Fourier (CLOUGH & PENZIEN (1975)).

Uma função $F(t)$ é periódica se é definida para todo t real, e se existe um número positivo T tal que:

$$F(t) = F(t \pm T) \quad (2.33)$$

O termo T é chamado de período, ou o tempo mínimo requerido para $F(t)$ repetir-se.

A expansão de $F(t)$ em Série de Fourier é:

$$F(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sen(n\Omega t)) \quad (2.34)$$

onde n é inteiro positivo, a_n e b_n são coeficientes da série infinita e a_o é o valor médio de $F(t)$.

A frequência fundamental da função periódica é $\Omega = 2\pi/T$. A frequência do enésimo harmônico é $n\Omega = 2n\pi/T$.

Para deduzir os valores de a_n e b_n , usam-se as seguintes relações:

$$\int_0^T \cos(m\Omega t) \cos(n\Omega t) dt = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ T/2 & \text{se } m = n \end{cases}$$

$$\int_0^T \sen(m\Omega t) \sen(n\Omega t) dt = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ T/2 & \text{se } m = n \end{cases} \quad (2.35)$$

$$\int_0^T \cos(m\Omega t) \sen(n\Omega t) dt = 0 \quad \text{para quaisquer } m \text{ e } n.$$

onde m e n são inteiros e T é o período da função.

Reescrevendo a série em forma expandida, tem-se:

$$F(t) = (a_0 + a_1 \cos \Omega t + a_2 \cos 2\Omega t + \dots) + (b_1 \sen \Omega t + b_2 \sen 2\Omega t + \dots) \quad (2.36)$$

Um coeficiente qualquer a_p pode ser obtido pela multiplicação dos dois lados da Eq.(2.36) por $\cos(p\Omega t)$ e integrando-se cada termo usando as relações (2.35); exceto pelo termo contendo a_p , todas as integrais do lado direito são nulas. Assim:

$$\int_0^T F(t) \cos(p\Omega t) dt = 0 + \dots + \int_0^T a_p \cos^2(p\Omega t) dt + 0 + \dots = a_p T / 2$$

$$a_p = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(p\Omega t) dt \quad (2.37)$$

Da mesma maneira, um coeficiente b_p pode ser obtido pela multiplicação da série expandida por $\sen(p\Omega t)$, e integrando-se cada termo usando as relações (2.35) tem-se:

$$b_p = \frac{2}{T_0} \int_0^T F(t) \text{sen}(p\Omega t) dt \quad (2.38)$$

O coeficiente a_0 da Série de Fourier será:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^T F(t) dt \quad (2.39)$$

Se uma excitação periódica qualquer for expressa na forma de uma série de Fourier, como na Eq. (2.34), ela consiste, então, de uma parcela constante do carregamento médio representado pelo coeficiente a_0 mais uma série de cargas harmônicas múltiplas de frequência Ω_n e amplitudes a_n e b_n .

Considere-se um sistema com um só grau de liberdade, com o equilíbrio dinâmico podendo ser expresso pela seguinte equação diferencial de movimento:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P(t)$$

Seja $P(t)$ uma função no tempo de período T_1 . A equação do movimento passa a ser, substituindo Ω por Ω_1 :

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega_1 t + b_n \text{sen } n\Omega_1 t) \quad (2.40)$$

A resposta do sistema devido a cada um dos componentes da excitação harmônica pode ser calculada como foi visto no item (2.1), e fazendo-se a superposição dos resultados, a resposta permanente do sistema é, segundo a Eq. (2.13):

$$u(t) = \frac{1}{k} \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(n\Omega_1 t - \phi_n)}{\sqrt{(1-r_n^2)^2 + (2\zeta r_n)^2}} + \frac{b_n \text{sen}(n\Omega_1 t - \phi_n)}{\sqrt{(1-r_n^2)^2 + (2\zeta r_n)^2}} \right\} \quad (2.41)$$

onde:

$$r_n = n \Omega_1 / \omega_n$$

$$\Omega_1 = 2\pi / T_1$$

ϕ_n = ângulo de fase

Como exemplo de aplicação, calcula-se o desenvolvimento em série de Fourier da onda quadrada mostrada na FIG.6 a seguir:

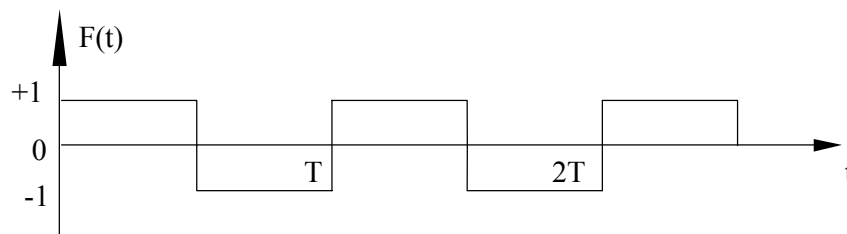


FIGURA 6 – Onda quadrada

Para $\Omega_1 = 2\pi / T$, os coeficientes da série de Fourier são:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} (1) dt - \int_{T/2}^T (1) dt \right] = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(n\Omega t) dt = \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} \cos(n\Omega t) dt - \int_{T/2}^T \cos(n\Omega t) dt \right] = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(n\Omega t) dt = -\frac{2}{T} \frac{T}{2n\pi} \left[\cos \frac{2n\pi}{T} t \Big|_0^{T/2} - \cos \frac{2n\pi}{T} t \Big|_{T/2}^0 \right] = \begin{cases} 4/n\pi \forall n \text{ ímpar} \\ 0 \forall n \text{ par} \end{cases}$$

Assim, a expansão em série de Fourier da onda quadrada é:

$$F(t) = \frac{4}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \sin \frac{2n\pi}{T} t \quad \text{para } n = 1, 3, 5, \dots$$

A resposta para um sistema UGL, de rigidez k , frequência natural ω_n , submetido a este carregamento será:

$$u(t) = \frac{4}{\pi K} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{\text{sen}(n\Omega_1 t - \phi)}{n \left[(1 - r_n^2)^2 + (2\zeta r_n)^2 \right]^{1/2}}$$

A extensão da análise de Fourier quando o período tende para o infinito leva ao conceito da integral de Fourier. O desenvolvimento de uma função $F(t)$ pela integral de Fourier é dado por:

$$F(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \cos \Omega(t - \tau) d\tau \right] d\Omega \quad (2.42)$$

Esta equação pode também ser escrita na forma:

$$F(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(\Omega) \cos \Omega t + B(\Omega) \text{sen} \Omega t] d\Omega \quad (2.43)$$

onde:

$$A(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \cos \Omega \tau d\tau \quad (2.44)$$

$$B(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \text{sen} \Omega \tau d\tau \quad (2.45)$$

As Eqs. (2.43) a (2.45) evidenciam a analogia entre a série e a integral de Fourier, mostrando que a soma de harmônicos de frequência discreta é substituída por uma integração estendida a uma gama contínua de frequências.

2.5 Série de Fourier Complexa

Na seção 2.1 foi apresentada a importância da utilização da forma complexa nos problemas de análise dinâmica. Problemas envolvendo funções periódicas têm, em muitos casos, grande simplificação ao utilizarem a forma complexa.

Desta forma, as funções periódicas podem ser representadas por séries de Fourier Complexas.

Seja a função periódica na forma complexa:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{P}_n(\Omega) e^{i(n\Omega_1 t)} \quad (2.46)$$

Nota-se que:

$$\int_{\tau}^{\tau+T_1} e^{i(n\Omega_1 t)} e^{-i(m\Omega_1 t)} dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ T_1 & n = m \end{cases} \quad (2.47)$$

Multiplicando-se, então, a Eq. (2.46) por $e^{-i(n\Omega_1 t)}$ e integrando em um período, tem-se:

$$\bar{P}_n = \frac{1}{T_1} \int_{\tau}^{\tau+T_1} f(t) e^{-i(n\Omega_1 t)} dt, \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (2.48)$$

A partir das Eqs. (2.23) a (2.27) a resposta de um sistema UGL na forma complexa pode ser definido como:

$$\bar{u}(t) = \bar{U} e^{i\Omega t} = \bar{H}(\Omega) \frac{P_o}{k} e^{i\Omega t} \quad (2.49)$$

onde $\bar{H}(\Omega)$ é a função complexa de resposta em frequência, dada pela Eq. (2.27).

Utilizando-se, então, a série de Fourier para uma excitação periódica:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{P}_n e^{i(n\Omega_1 t)} \quad (2.50)$$

A resposta no estado permanente pode ser escrita como:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{U}_n e^{i(n\Omega_1 t)} \quad (2.51)$$

Para uma excitação harmônica $\bar{U} = \bar{H}p_o$, logo:

$$\bar{U}_n = \bar{H}_n \bar{P}_n = |\bar{H}_n| |\bar{P}_n| e^{i(\alpha_{H_n} + \alpha_{P_n})} \quad (2.52)$$

onde

$$\bar{H}_n(\Omega) = \frac{\bar{U}}{p_o} \quad (2.53)$$

$$\bar{H}_n(\Omega) = \frac{1/k}{[1 - (n\Omega_1 / \omega_n)^2] + i(2\zeta n\Omega_1 / \omega_n)} \quad (2.54)$$

2.6 Amortecimento

As estruturas modernas vêm sendo concebidas visando uma maior economia no custo da construção. Os novos projetos baseiam-se em técnicas construtivas, que proporcionem curto prazo de execução, baixo consumo de materiais e maior aproveitamento da área construída. Essa nova concepção estrutural, no entanto, acarretou em uma diminuição na frequência natural das estruturas que tem se aproximado da frequência de cargas dinâmicas usuais, tais como atividades aeróbicas, motores rotativos, movimento de público, etc.

Desse modo, com a estrutura trabalhando próximo à ressonância, podem ocorrer problemas como a diminuição da sua vida útil, fadiga do material, corrosão, e outros. No que diz respeito ao conforto dos usuários, perto da ressonância os deslocamentos e acelerações ficam intensificados, podendo ultrapassar os limites recomendados por norma.

O amortecimento representa um fator de grande importância no controle de vibrações estruturais indesejáveis. O amortecimento que ocorre em uma estrutura pode ser considerado como sendo um amortecimento inerente à própria estrutura, ou como sendo um amortecimento adicionado à estrutura através de amortecedores, por exemplo. (BEARDS (1996)).

2.6.1 Amortecimento Viscoso Equivalente

O amortecimento está presente em todo tipo de sistema oscilatório. Ele pode ser caracterizado como a perda de energia do sistema, resultando um decaimento na amplitude de vibração no caso de uma vibração livre. O amortecimento viscoso linear provém de um simples modelo matemático, onde a força é diretamente proporcional à velocidade da partícula no fluido. No entanto, se o amortecimento do sistema é mais complexo que o amortecimento viscoso linear, é possível recair na simplicidade do modelo viscoso introduzindo-se a idéia de um amortecimento viscoso equivalente.

Seja a FIG.7 apresentada. Atuam sobre o corpo duas forças, uma força devido a uma mola elástica, f_S , a qual está associada com a energia potencial do sistema, e uma força devido a um amortecedor, f_D , associada com a energia de dissipação. O trabalho realizado por estas forças é W_S e W_D , respectivamente, como segue. (CRAIG *et al.* (1981)).

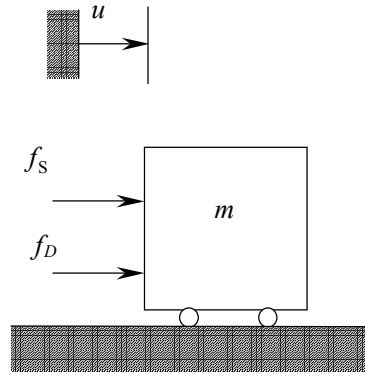


FIGURA 7 – Forças elástica e de amortecimento atuando sobre o corpo

$$W_S = \int_{u_i}^{u_f} f_S du = \int_{t_i}^{t_f} f_S \dot{u} dt \quad (2.55)$$

$$W_D = \int_{t_i}^{t_f} f_D \dot{u} dt \quad (2.56)$$

A energia dissipada é calculada para um ciclo de movimento harmônico. Considerando-se a energia dissipada em um sistema UGL com amortecimento viscoso, tem-se:

$$f_D = -c\dot{u} \quad (2.57)$$

Para o estado permanente de movimento o deslocamento e a velocidade são, respectivamente:

$$u = U \cos(\Omega t - \phi) \quad (2.58)$$

$$\dot{u} = -U\Omega \text{sen}(\Omega t - \phi)$$

Então o trabalho realizado, por ciclo, pela força f_D será:

$$W_D = \int_0^{2\pi/\Omega} (c\dot{u}) \dot{u} dt \quad (2.59)$$

$$W_D = -c\Omega^2 U^2 \int_0^{2\pi/\Omega} \sin^2(\Omega t - \phi) dt \quad (2.60)$$

ou

$$W_D = -\pi c \Omega U^2 \quad (2.61)$$

Caso o amortecimento de um sistema não seja do tipo viscoso linear, então um coeficiente de amortecimento viscoso equivalente deve ser definido como:

$$c_{eq} = -\frac{W_D}{\pi\Omega U^2} \quad (2.62)$$

onde W_D é a energia dissipada por um sistema de amortecimento não viscoso.

A partir da Eq. (2.62) e considerando que $\zeta = c/c_{cr}$ e que $c_{cr} = 2k/\omega_n$ pode-se definir um fator de amortecimento equivalente, ζ_{eq} . Logo,

$$\zeta_{eq} = \frac{c_{eq}}{c_{cr}} = -\frac{W_D/\pi\Omega U^2}{2k/\omega_n} \quad (2.63)$$

como a rigidez, k , pode ser obtida a partir da energia elástica, correspondente à área sob o gráfico de força *versus* deslocamento, FIG.8, tem-se:

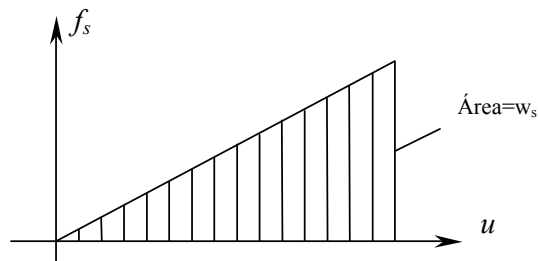


FIGURA 8 – Rigidez elástica

$$W_S = \left(\frac{1}{2}\right)kU^2 \quad (2.64)$$

Assim,

$$\zeta_{eq} = \frac{-W_D}{W_S} \left(\frac{\omega_n}{4\pi\Omega} \right) \quad (2.65)$$

onde Ω é a frequência da excitação para a qual W_D foi obtido.

2.6.2 Amortecimento de Rayleigh

O amortecimento de Rayleigh é utilizado para se considerar o amortecimento de uma estrutura com n graus de liberdade, onde se obtém a matriz de amortecimento, \mathbf{C} , através da seguinte formulação:

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (2.66)$$

Esta matriz assim definida é chamada de matriz proporcional, uma vez que a mesma se reduz a uma matriz diagonal em uma transformação modal (CLOUGH & PENZIEN (1975)). Através de um manuseio algébrico na equação acima se obtém a expressão:

$$\zeta_i = \frac{\alpha}{2\Omega_i} + \frac{\beta\Omega_i}{2} \quad (2.67)$$

onde ζ_i é o fator de amortecimento associado a cada modo de vibração Ω_i .

Em muitos problemas práticos, o fator de amortecimento de massa α pode ser ignorado. Nesse caso, pode-se calcular β conhecendo-se os valores de ζ e Ω . Para especificar os dois fatores α e β para um dado ζ , é comum assumir que para determinada faixa de frequência, a soma dos termos α e β seja constante (ANSYS (1996)). Portanto, dado o valor de ζ e a faixa de frequências a ser considerada, pode-se resolver o sistema de equações e determinar os valores de α e β .

3

ESTRUTURAS MISTAS

3.1 Introdução

As estruturas mistas são uma combinação de perfis metálicos com o concreto. Estes materiais apesar de possuírem características distintas são compatíveis e podem complementar um ao outro. Eles têm praticamente o mesmo coeficiente de dilatação térmica. O concreto oferece proteção térmica e inibe a corrosão do aço, além de melhorar o comportamento à flambagem local (flange e alma) e à flambagem lateral por torção das peças metálicas. Nota-se ainda uma combinação ideal de resistências sendo o aço eficiente na tração e o concreto na compressão. Associando-se as vantagens destes dois materiais temos as soluções mistas, extremamente interessantes tanto do ponto de vista técnico quanto do ponto de vista econômico.

Anteriormente, as peças estruturais mistas eram utilizadas somente com o objetivo de conferir proteção ao fogo e à corrosão da seção de aço. O concreto utilizado era de baixa resistência, tendo pouca influência na capacidade de carga da estrutura. Mais

recentemente, na década de 60, percebeu-se que a utilização de um concreto de maior resistência trabalhando em conjunto com o perfil metálico, através da aderência, atrito e pelo uso de conectores de cisalhamento, seria uma solução construtiva muito econômica. É comum a utilização de armaduras complementares para diminuir eventuais fissuras, aumentar a resistência ao fogo e confinar o concreto.

3.2 Vigas Mistas

Vigas mistas são formadas, em geral, por um perfil “I” de aço suportando em sua mesa superior uma laje de concreto armado fundido “in loco” no todo ou em parte, havendo ligação entre o perfil e a laje de tal forma que estes elementos funcionem em conjunto (RIBEIRO (1997)). As lajes utilizadas nas vigas mistas podem também ser mistas, obtidas através da utilização de fôrmas metálicas com nervuras (FIG.9). Estas fôrmas possuem saliências e mossas que asseguram sua aderência ao concreto, funcionando, assim, como armadura positiva da laje de concreto.

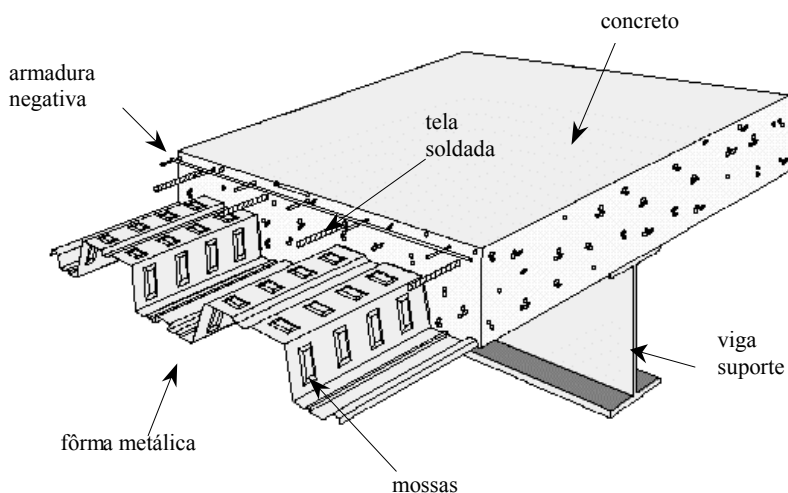


FIGURA 9 – Piso misto

A ligação entre a laje e o perfil “I” de aço é feita com conectores de cisalhamento, que reduzem ou impedem o escorregamento relativo na superfície de contato e a separação vertical entre os dois elementos, quando a viga se deforma sob a ação de cargas

externas. As forças horizontais de cisalhamento no plano de contato são absorvidas pelos conectores e transmitidas ao perfil e à laje.

Neste sistema, a interação aço/concreto será completa se os conectores forem suficientes para que se atinja a resistência nominal da viga de aço ao escoamento ou da laje de concreto ao esmagamento. A interação será parcial caso a resistência nominal dos conectores seja inferior à da viga de aço e à da laje de concreto (JOHNSON (1975)).

3.3 Conectores de Cisalhamento

O primeiro processo de construção mista a ser utilizado foi o constituído por uma viga metálica ligada a uma laje de concreto através de conectores de cisalhamento.

Os conectores de cisalhamento classificam-se em dois tipos: rígidos e flexíveis. A rigidez dos conectores está associada à sua resposta à ação do fluxo de cisalhamento gerado na superfície de contato entre o perfil de aço e a laje de concreto. Pode ser expressa pela relação entre a força no conector e o escorregamento relativo entre os elementos. Quando esta relação for grande, o conector é considerado rígido e quando esta relação for pequena, o conector é considerado flexível. Conectores flexíveis podem sofrer grandes deformações sem se romper, o que possibilita espaçá-los uniformemente (RIBEIRO (1997)).

Quando o escorregamento relativo é praticamente eliminado pelos conectores, obtém-se uma viga mista com “interação total” ou “interação completa”.

Uma situação intermediária, adotada algumas vezes nos projetos, consiste em admitir-se “interação parcial” entre a laje de concreto e o perfil de aço. Neste caso, aceita-se a ocorrência de um pequeno escorregamento relativo entre os dois elementos. Em termos de esforços, na interação parcial, o valor da resultante das forças de cisalhamento no plano horizontal de contato é menor que na interação total.

Na interação completa, considerando que não haja flambagem local da alma (FLA) da viga de aço, o colapso da viga mista dá-se pela plastificação da seção de aço ou pelo esmagamento do concreto da laje. Na interação parcial, a resistência nominal dos conectores é inferior à da viga de aço à tração pura e à da laje de concreto à compressão pura, ou seja, o colapso dá-se por insuficiência de conexão, ocorrendo escorregamento relativo entre os dois elementos (JOHNSON (1975)).

Dentre os conectores de cisalhamento existentes, o mais usado é o tipo pino com cabeça, ou stud mostrado na FIG.10.

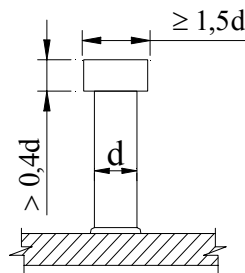


FIGURA 10 – Conector tipo stud

O conector do tipo stud possui dimensões variáveis. A cabeça do stud precisa ter um diâmetro maior que $1,5 d$ e uma altura maior que $0,4 d$, onde d é o diâmetro do fuste do stud.

Estes conectores resistem a uma tensão última de 450 N/mm^2 e a um alongamento de no mínimo 15%, segundo a norma Britânica (JOHNSON (1975)). Já para a NBR 8800 (1986) o stud deve ter uma resistência última de 415 N/mm^2 e um alongamento de no mínimo 20%.

Para a obtenção da resistência nominal de um stud, em lajes com fôrmas de aço incorporadas, utiliza-se um fator de redução. Isto se deve porque a eficiência da conexão entre o piso misto e a viga metálica pode ser reduzida devido à falência local do concreto no interior das nervuras, onde os studs são soldados.

Todos os conectores devem ser capazes de resistir a qualquer tendência de levantamento da laje sobre o flange de aço. O projetista deverá assegurar, portanto, não só a resistência do conector em si, porém ainda da solda da ligação com o flange, a resistência do concreto ao esmagamento e uma ancoragem suficiente da laje, sem o que o projeto não seria completo (JOHNSON (1975)).

Outros processos de construção mista vêm sendo amplamente utilizados, como, por exemplo, outros tipos de lajes mistas, pilares mistos, pisos mistos esbeltos (“slim floors”), bem como ligações mistas entre viga/pilar ou viga/viga.

3.4 Ligações Mistas

As ligações mistas são bastante utilizadas nos EUA, Europa. Na Inglaterra, grande parte de todas as construções de andares múltiplos, novas, utilizam sistemas estruturais mistos (MOORE (1998)).

Usualmente, vigas e pilares são representados como barras, considerando-se os eixos longitudinais destes elementos para se representar a estrutura, como apresentado na FIG.11. As interações destes eixos formam os nós da estrutura (MATA (1998)).

O nó misto é aquele localizado entre o elemento misto e qualquer outro elemento no qual a armadura da laje de concreto irá contribuir para a resistência deste nó.

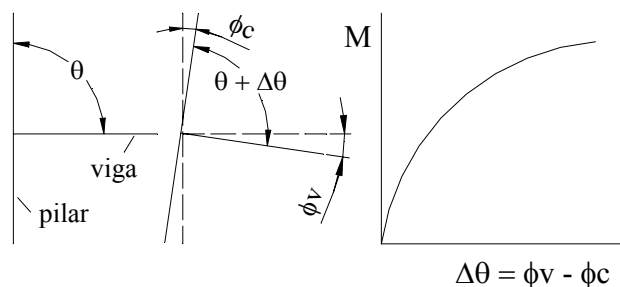


FIGURA 11 - Relação entre momento fletor e rotação relativa entre os elementos

As principais características que definem as ligações em estrutura de aço são: rigidez, resistência e capacidade de deformação (ductilidade). Estas podem ser determinadas a partir de curvas Momento-Rotação obtidas através de ensaios ou métodos empíricos. Um exemplo desta curva pode ser visto na FIG.11.

A capacidade de deformação é muito importante em uma estrutura, uma vez que esta é necessária para a redistribuição de momentos, antes de haver alguma falha na ligação. Uma vez que a viga foi dimensionada para atingir o momento plástico no meio do vão, devido ao aumento de sua curvatura nos apoios, espera-se que a ligação possa deformar sem que haja quebra da armadura da laje de concreto.

Nas ligações usuais considera-se apenas a resistência dos elementos de ligação tais como enrijecedores, chapas de ligação, cantoneiras, consolos, etc. e meios de ligação como, por exemplo, soldas, pinos e parafusos no dimensionamento. A resistência a momento ainda é objeto de pesquisas.

Em ligações mistas a presença da armadura na laje de concreto é considerada e a interação mista leva a ligação a resistir a momento pela formação de um binário entre a armadura na tração e compressão na viga metálica.

A interação estrutural entre vigas e lajes permite a utilização de vigas menores para uma dada rigidez e resistência (QUEIROZ *et al.* (2001)).

Ao se especificar uma ligação mista, deve-se garantir que a mesma tenha as seguintes características:

- Transferência efetiva de compressão para a coluna ;
- Quantidade de armadura superior a uma quantidade mínima, tal que o fissuramento do concreto se desenvolva de maneira controlada;
- Existam conectores de cisalhamento suficientes para passar as forças de tração para a armadura;
- A armadura deverá estar efetivamente ancorada em ambos os lados da ligação;

- Os parafusos devem ter resistência suficiente a cisalhamento.

3.4.1 Modelagem da Ligação:

Em uma análise computacional da estrutura completa, é necessário ter-se um modelo de nó que represente com confiabilidade o comportamento semi-rígido e que possa ser utilizado com facilidade em programas de análise estrutural disponíveis.

Um modelo mecânico de nó semi-rígido que pode ser utilizado consiste de uma mola rotacional localizada entre a extremidade do eixo de uma viga e o eixo do pilar, conforme mostrado na FIG.12.

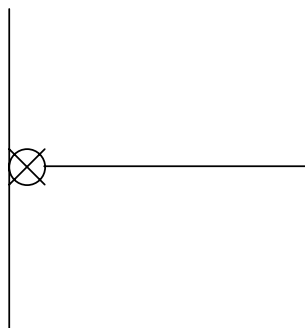


FIGURA 12 - Modelo mecânico de nó semi-rígido

Devido ao tamanho infinitamente pequeno do nó, não é possível captar corretamente todas as respostas envolvidas no comportamento do nó real. Apesar disto, tal modelamento pode ser usado para alguns tipos de ligações com pouca rigidez (ligações consideradas flexíveis na prática) (MATA (1998)).

3.4.2 Cálculo da rigidez de uma ligação mista

Geralmente, uma ligação mista é obtida a partir de uma ligação metálica flexível ou semi-rígida, aumentando sua rigidez e resistência a momento (FIG.13).

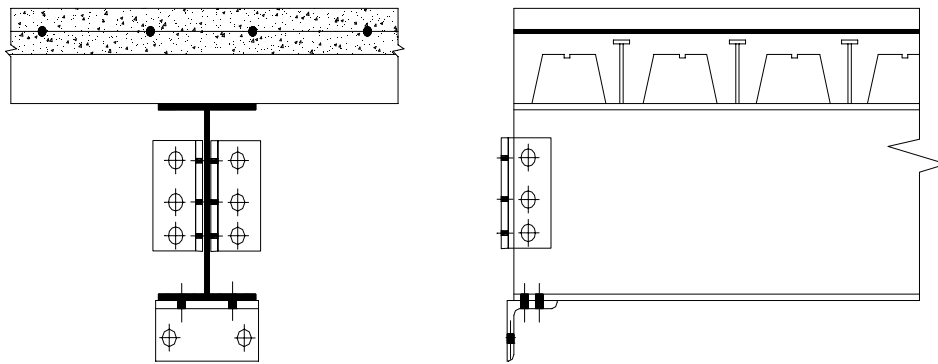


FIGURA 13 – Ligação mista com cantoneiras parafusadas na alma e na mesa inferior da viga secundária (QUEIROZ *et al.* (2001))

Para o cálculo da rigidez de uma ligação mista será utilizado um método analítico aproximado, que conduz a resultados satisfatórios. Este método adotado pelo Eurocode 3 é apresentado por QUEIROZ *et al.* (2001) e consiste em dividir a ligação em seus componentes básicos, tais como armaduras, conectores de cisalhamento, elementos de ligação, entre outros.

A rigidez inicial de uma ligação mista, FIG.13, é obtida a partir da Eq. 3.1:

$$\frac{M}{\theta} = \frac{(d + y)^2}{\left(\frac{I}{K_r} + \frac{I}{K_i} + \frac{I}{K_c} \right)} + c \quad (3.1)$$

Onde

d : altura da viga de aço

y : distância do centro de gravidade da armadura à mesa superior da viga de aço

K_r : rigidez inicial das barras da armadura

K_c : rigidez inicial dos conectores de cisalhamento

K_i : rigidez inicial da ligação da mesa inferior

c : rigidez rotacional das cantoneiras da alma

Em seu trabalho QUEIROZ *et al.* (2001) dividiu os componentes da ligação mista em três grupos: barras da armadura, conectores de cisalhamento e ligação metálica. A partir

da combinação das propriedades dos componentes da ligação determinar-se-á as características da ligação como um todo.

Deste modo, para a determinação da rigidez inicial da ligação mista tem-se:

- **Rigidez inicial das barras da armadura**

$$K_r = \frac{2A_s E_s}{h_c} \quad (3.2)$$

Onde

E_s : módulo de elasticidade do aço da armadura

h_c : dimensão do pilar

A_s : área da seção transversal da armadura longitudinal dentro da largura efetiva da mesa de concreto

Resistência última:

$$P_u = A_s f_{ys} \quad (3.3)$$

Onde :

f_{ys} : limite de escoamento do aço da armadura

P_u : resistência última da armadura

- **Rigidez inicial dos conectores de cisalhamento**

$$K_c = \frac{nK_{sc}}{\alpha} \quad (3.4)$$

Onde:

n : número de conectores

K_{sc} : 1000kN/cm para conectores de $\phi=19$ mm

$$\alpha = v - \frac{(v-1)(d+y)}{[D_s(\xi+1)]}$$

$$v = \left[\frac{(\xi + 1)nK_{sc}L_1(D_s)^2}{(EI_a)} \right]^{1/2}$$

$$\xi = \frac{I_a}{D_s^2 A_s}$$

Sendo,

L_1 : distância da extremidade da viga à seção de momento nulo

D_s : distância do centro de gravidade do perfil metálico ao centro de gravidade da armadura

I_a : momento de inércia do perfil metálico.

Resistência última:

$$P_u = nP_{rk} \geq F_s^{(B)} = A_s f_{ys} \quad (3.5)$$

Onde,

P_{rk} : resistência característica de um conector

$F_s^{(B)}$: força máxima na armadura

• **Rigidez inicial da ligação inferior**

$$K_i = \frac{n}{\left(\frac{1}{K_{p1}} + \frac{1}{K_{p2}} + \frac{1}{K_b} \right)} \quad (3.6)$$

Onde

n = número de parafusos

$$K_{p1} = 24K_s K_{t1} d_b f_{u1}$$

$$K_{p2} = 24K_s K_{t2} d_b f_{u2}$$

$$K_b = \frac{16f_{ub}d_b^2}{d_m}$$

$$K_s = \left(\frac{S}{4d_b} + 0.375 \right) \leq 1,25 \quad (\text{parâmetro associado ao rasgamento entre furos})$$

$$K_{t1} = \frac{1,5t_{p1}}{d_m} \leq 2,5$$

$$K_{t2} = \frac{1,5t_{p2}}{d_m} \leq 2,5$$

d_b : diâmetro dos parafusos;

f_{u1}, f_{u2} : limites de resistência à tração dos aços estruturais da cantoneira e da mesa inferior, respectivamente;

f_{ub} : limite de resistência à tração do aço dos parafusos;

d_m : 1,6 cm (diâmetro de referência)

S : espaçamento entre parafusos na direção da força;

t_{p1}, t_{p2} : espessuras da cantoneira e da mesa inferior da viga, respectivamente.

Resistência última:

$$P_u = nP_{ub} \leq 1,5f_y A_{fi} \quad (3.7)$$

Onde,

P_{ub} : resistência última de um parafuso, levando em conta o corte do parafuso e o esmagamento das chapas com o rasgamento entre furos (NBR8800, 1986)

f_y e A_{fi} : limite de escoamento e área da seção da mesa inferior, respectivamente.

3.5 Pisos Mistos

Pisos mistos consistem em vigas de aço sobrepostas por uma laje de concreto, onde cada viga de aço trabalha em conjunto com uma faixa da laje de concreto, conforme ilustra a FIG.14. Para a verificação dos estados limites últimos e de utilização de uma viga mista em um piso misto, são necessárias duas grandezas básicas: a largura efetiva da laje de concreto que trabalha com a viga de aço e a carga assumida pela viga mista. Tais grandezas variam em função das características do piso e, em geral, têm valores diferentes para os dois tipos de estados limites.

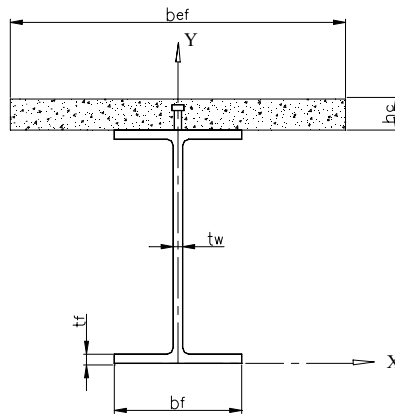


FIGURA 14 – Viga Mista

3.5.1 Largura efetiva

Para o cálculo da resistência ao momento fletor das vigas mistas deve-se levar em conta a largura efetiva da mesa. A largura efetiva da mesa é a largura da mesa que pode ser considerada como incorporada à viga metálica.

As larguras efetivas em regime elástico dependem dos seguintes fatores:

- características elásticas dos materiais e geométricas da estrutura;
- tipo de carregamento;
- condições de apoio;
- armadura longitudinal colocada na laje de concreto.

O cálculo exato da largura efetiva é bastante trabalhoso e as normas apresentam recomendações práticas para sua obtenção.

No cálculo de deformações, a largura efetiva da laje de concreto é definida como uma largura constante em todo o vão que, solidária ao perfil metálico, resultaria em uma viga mista para a qual os deslocamentos verticais calculados fossem iguais aos da viga real.

A NBR 8800 (1986) apresenta as seguintes recomendações para o cálculo da largura efetiva, tanto para o cálculo das tensões quanto para o cálculo das deformações:

a) Quando a laje se estende para ambos os lados da viga de aço, a largura efetiva, deve ser igual a menor das larguras :

- a1) $\frac{1}{4}$ do vão da viga mista, considerado entre linhas de centro dos apoios;
- a2) 16 vezes a espessura da laje, mais a largura da mesa superior da viga de aço;
- a3) a largura da mesa superior da viga de aço mais a média das distâncias livres entre essa mesa e as mesas superiores das vigas adjacentes.

b) Quando a laje se estende para apenas um lado da viga de aço, porém, cobre totalmente sua mesa superior, a largura efetiva da mesa de concreto não pode ser maior que a largura dessa mesa mais a menor das seguintes larguras:

- b1) a largura da mesa superior da viga de aço mais $\frac{1}{12}$ do vão da viga mista, considerado entre linhas de centro dos apoios;
- b2) a largura da mesa superior da viga de aço mais 6 vezes a espessura da laje;
- b3) a largura da mesa superior da viga de aço mais metade da distância livre entre as mesas superiores da viga considerada e da viga adjacente.

O EUROCODE 4 (1992), que trata de estruturas mistas aço-concreto, apresenta as seguintes recomendações para a largura efetiva:

a) Largura efetiva para análise global da estrutura:

Uma largura efetiva constante poderá ser considerada em cada vão da viga. Este valor pode ser igual ao aplicável ao meio do vão para vigas apoiadas em suas extremidades e igual ao aplicável ao apoio para vigas em balanço.

O valor total da largura efetiva b_{ef} da laje de concreto associada com a viga metálica será a soma das larguras efetivas b_e de cada lado da linha de centro da viga:

$$b_e = l_o / 8 \leq b \quad (3.8)$$

onde b é a metade da distância do eixo da viga adjacente. Para bordas livres, b deverá ser tomado igual à distância do eixo da viga considerada à borda livre. O comprimento l_o é aproximadamente igual à distância entre os pontos de momentos fletores nulos. Para vigas bi-apoiadas, ele é igual ao vão.

b) Largura efetiva para verificação da seção transversal:

Para regiões de momento positivo, o valor da largura efetiva aplicável ao meio do vão deverá ser usado. Para regiões de momento negativo, o valor da largura efetiva aplicável ao apoio correspondente deverá ser usado. Estas larguras efetivas são calculadas como anteriormente.

Pode-se notar que o EUROCODE 4 (1992) não faz referência a um limitador da largura efetiva baseado na espessura da laje. Este limitador está relacionado com a possibilidade de flambagem da laje fora de seu plano.

Assim, como no EUROCODE 4 (1992), as larguras efetivas dadas pela NBR8800 (1986) são usadas tanto para a verificação de estados limites últimos quanto para a verificação de estados limites de utilização.

3.5.2 Reações de apoio das lajes em vigas

A NBR 6118 (1978) permite que as reações de apoio das lajes sobre as vigas sejam determinadas através do comportamento rígido-plástico (charneiras plásticas) desde que as cargas atuem sempre no mesmo sentido e que a seção da laje não seja super-armada.

Neste processo, as seguintes hipóteses são feitas:

- a) As armaduras devem ser suficientemente fracas (sub-armadas) para que o colapso ocorra por escoamento da armadura (formação de um mecanismo hipostático antes do colapso);

- b) As regiões entre as charneiras plásticas permanecem em regime elástico, isto é, o concreto tem comportamento rígido-plástico. Têm-se então, charneiras retas delimitando regiões planas, ou seja, a superfície média da laje torna-se poliédrica;
- c) Os momentos fletores positivos e negativos correspondentes à formação de charneiras são denominados “momentos de plastificação” e são considerados constantes ao longo destas charneiras;
- d) Não se consideram esforços de membrana provenientes do impedimento de deslocamentos no plano da laje;
- e) Capacidade de rotação ilimitada na charneira.
- f) A reação da laje para cada apoio é a carga correspondente ao triângulo ou trapézio obtido traçando-se a partir dos vértices, na planta da laje, retas inclinadas de:
 - 45° entre apoios do mesmo tipo;
 - 60° a partir do apoio engastado quando o outro for livremente apoiado.
 - 90° a partir do apoio quando a borda vizinha for livre.

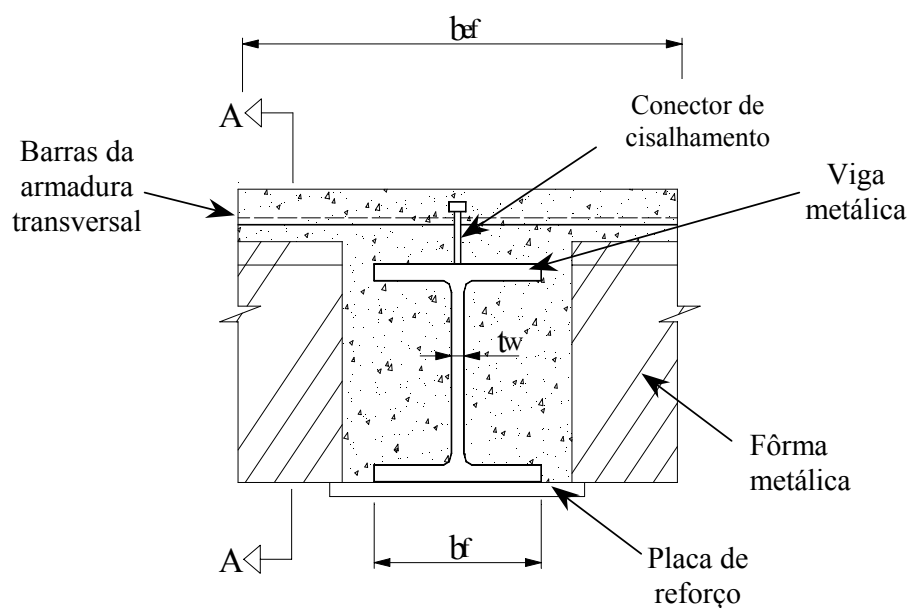
Tais recomendações são baseadas no estado limite último da laje, sendo prática usual utilizar as mesmas reações da laje na verificação dos estados limites de utilização.

3.6 Pisos Esbeltos

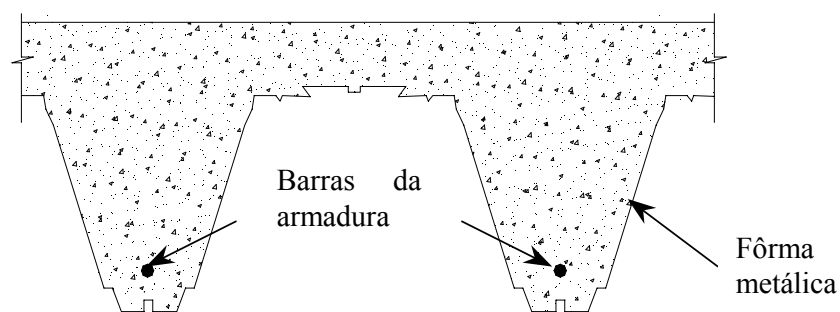
O sistema construtivo utilizando pisos esbeltos foi introduzido na Inglaterra em 1991 (MULLETT (1998)). Inicialmente, este método era utilizado em conjunto com lajes de

concreto moldadas in loco sendo, mais tarde, substituídas por lajes mistas com fôrmas metálicas incorporadas.

A fôrma metálica possui seção transversal trapezoidal, conforme FIG.15, o que pode tornar o piso mais leve e, ainda, aumentar a rigidez da estrutura. Esta fôrma metálica é suportada por uma viga metálica H monossimétrica, que pode ter uma placa de reforço soldada no seu flange inferior.



(a) Detalhe do sistema construtivo



(b) Corte A-A

FIGURA 15 - Sistema construtivo de pisos esbeltos

Dentre as vantagens da utilização do sistema construtivo em pisos esbeltos pode-se citar:

- Os pisos oferecem uma passagem para serviços;
- Redução da sua altura útil podendo ocasionar, eventualmente, uma redução no peso próprio da estrutura;
- Proporciona uma grande redução no tempo de execução da edificação;
- Aumenta a resistência a incêndio da seção metálica;
- O concreto que encobre a viga ocasiona um aumento do momento de inércia da seção. Isto é de grande valia, uma vez que acarreta em uma redução das deflexões;
- No caso de instabilidade local do elemento, o concreto irá melhorar a característica de transmissão de carga da viga.

Visando economia deve-se utilizar vãos de 6 a 9m. Basicamente, existem duas formas construtivas para a viga metálica:

- Tipo 1: viga não-mista (o concreto tem, somente, a função de aumentar a rigidez e a resistência ao fogo).
- Tipo 2: viga mista com conectores de cisalhamento que conferem a ação composta com o piso.

A princípio as vigas metálicas são projetadas para uma construção não-escorada, mas, em alguns casos, o escoramento é utilizado para garantir a utilização de uma viga menor para um dado vão.

4

CARREGAMENTOS DINÂMICOS

4.1 Introdução

Historicamente, os problemas oriundos de vibrações não vinham sendo considerados com a devida atenção em projetos de pisos. No entanto, devido à popularização de atividades associadas a movimentos de pessoas, tais como o caminhar, exercícios aeróbicos, danças e eventos esportivos, sérios problemas de vibração têm sido causados por estas excitações rítmicas.

Juntamente com a popularização de atividades rítmicas, as estruturas modernas têm sido executadas cada vez mais esbeltas. A utilização de grandes vãos livres ocasiona uma diminuição na rigidez dos pisos, tornando-os susceptíveis a vibrações provenientes de excitações dinâmicas. A diminuição na rigidez de uma estrutura acarreta em redução da sua primeira frequência natural, o que pode gerar problemas de ressonância pelo fato desta frequência natural aproximar-se das frequências representativas das excitações mencionadas, ocasionando vibrações excessivas nos sistemas estruturais.

Estas vibrações resultam em grande desconforto aos usuários ou mesmo em comprometimento de partes resistentes da estrutura.

Logo, torna-se evidente a importância de uma análise dinâmica bem feita, visando garantir a segurança e o conforto dos usuários. Todavia, a maior parte dos projetistas ainda limita-se apenas a efetuar uma análise estática das estruturas.

Em uma análise de vibrações oriundas de atividades humanas os principais aspectos a serem observados são os seguintes:

- Utilização de um modelo numérico que represente satisfatoriamente o comportamento real da estrutura;
- Determinação do nível de amortecimento da estrutura;
- Estabelecimento do carregamento dinâmico representativo do comportamento do público em uma atividade rítmica.

4.2 Carregamentos Dinâmicos

As excitações dinâmicas podem ser originadas por diversos fatores, como terremotos, ventos, trânsito de veículos, atividades exercidas pelo homem, etc. Dentre os problemas dinâmicos que se apresentam na engenharia estrutural, ocupam lugar de destaque aqueles produzidos por atividades exercidas pelo homem, em particular, o estudo do comportamento de estruturas submetidas a cargas produzidas por pessoas em movimento.

Atividades corriqueiras, que podem passar despercebidas aos projetistas, muitas vezes são origem desses problemas. O simples ato de andar, correr, pular ou até mesmo dançar são exemplos das atividades humanas que produzem cargas dinâmicas (FIG.16). Na maioria dos casos, este tipo de carga produz um comportamento inadequado da estrutura em termos de perturbações e desconforto aos usuários. Em alguns casos

podem surgir também problemas de segurança em consequência das ações dinâmicas, como os oriundos de fadiga do material.

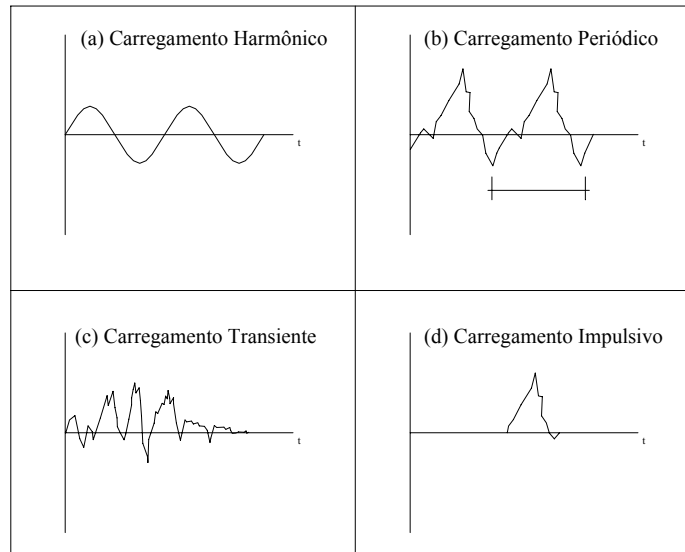


FIGURA 16 - Tipos de carregamentos dinâmicos

A maior parte dos problemas de vibração em pisos envolve carregamentos periódicos, que através de uma decomposição em série de Fourier, podem ser representados por uma combinação de várias forças harmônicas.

$$F = P \left[1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \text{sen}(2\pi i f t + \phi_i) \right] \quad (4.1)$$

Onde:

P : peso da pessoa

α_i : coeficiente dinâmico

i : múltiplo harmônico

f : frequência de uma excitação dinâmica

t : tempo

n : número de harmônicos sendo considerados

ϕ_i : ângulo de fase para um harmônico

Os carregamentos dinâmicos periódicos possuem um número variável de componentes harmônicas, com frequências múltiplas da frequência da excitação.

Para vibrações devido a atividades humanas como dança ou aeróbica, as três primeiras componentes harmônicas são usualmente consideradas, uma vez que podem ocorrer problemas de ressonância também com a segunda e terceira componentes aproximando-se da frequência natural do sistema de piso.

É possível controlar a aceleração devido à ressonância com o aumento dos níveis de amortecimento ou da massa da estrutura. Este controle é mais efetivo quando a amplitude da aceleração é pequena, como ela é para o caminhar.

Onde as forças dinâmicas são grandes, como as devidas a aeróbica, a vibração ressonante é geralmente muito grande para ser controlada pelo crescimento do amortecimento ou da massa. Neste caso, a frequência natural de qualquer modo de vibração de um piso, submetido a um carregamento dinâmico, precisa ser mantida fora da faixa de frequências dos múltiplos significativos da excitação. Isto, geralmente, significa que a frequência natural fundamental do piso tem que ser maior do que a da maior componente harmônica da excitação que possa causar ampla vibração ressonante.

Para estas atividades, cuidados devem ser tomados para que não haja transmissão de vibrações para ocupantes em outras partes do piso ou do prédio, uma vez que os limites de percepção e sentimento de desconforto de níveis de aceleração podem variar de pessoa para pessoa e com a atividade que ela esta exercendo. Para isto, deve-se considerar que a vibração possa ser também transmitida pelos apoios, como colunas, particularmente nos locais onde haja possibilidades da ocorrência de ressonância.

Deste modo, é necessário que se faça um estudo sobre o comportamento dinâmico da estrutura para que sejam garantidos valores de acelerações adequados à conveniente utilização da mesma.

4.3 Simulação dos Carregamentos Dinâmicos

Muitos problemas de vibrações em estruturas civis se devem ao fato das normas de projeto (estruturas de concreto armado e metálicas) não prescreverem os carregamentos dinâmicos e simularem os mesmos através de carregamentos estáticos equivalentes. Portanto, o primeiro passo para se tentar solucionar os problemas de vibrações excessivas em pisos, é que se faça um estudo aprofundado a respeito do carregamento atuante, e então, a partir deste prévio conhecimento, dar prosseguimento aos cálculos levando-se em consideração a dinâmica da estrutura.

Vários estudos têm sido realizados no campo da dinâmica para avaliar os efeitos da vibração sobre as pessoas e estruturas.

Neste trabalho serão utilizados os parâmetros dinâmicos, bem como métodos simplificados de cálculo sugeridos por ALLEN *et al.* (1985), ALLEN e MURRAY (1993) e MURRAY *et al.* (1997) mostrados a seguir.

ALLEN *et al.* (1985), desenvolveram um procedimento de cálculo para vários tipos de ocupações, tais como salas de dança, shows, exercícios aeróbicos, etc. Os autores sugerem frequências de excitação representativas destas atividades, f , e fatores de carregamento dinâmico, α .

TABELA 1 – Estimativa de carregamentos para eventos rítmicos

Atividade	Frequência da excitação f , Hz	Peso dos participantes w_p , kPa	Fator de carregamento dinâmico, α	Carregamento dinâmico αw_p , kPa
Dança	1,5-3	0,6	0,5	0,3
Shows ou eventos esportivos	1,5-3	1,5	0,25	0,4
Exercícios aeróbicos (1º harmônico)	1,5-3	0,4	1,5	0,6
Exercícios aeróbicos (2º harmônico)	3-6	0,4	0,25	0,1

Para determinação dos valores do fator de carregamento dinâmico, α_i , os autores basearam-se em eventos que envolviam pelo menos 20 participantes e estimaram a densidade dos participantes para condições normais de utilização.

ALLEN e MURRAY (1993) desenvolveram um critério de análise de vibrações de pisos submetidos a excitações devido ao caminhar. O carregamento dinâmico devido ao caminhar pode ser representado pela série de Fourier, segundo a Eq. (4.1), considerando as quatro primeiras componentes harmônicas com frequências múltiplas da frequência da excitação.

Os autores sugerem valores de α_i para cada componente harmônico como mostrado na Tabela 2. Para a determinação do carregamento os autores consideraram o peso de uma pessoa sendo 0,70 kN e recomendam fatores de amortecimento de 0,01 para passarelas, 0,02 para pisos de lojas em shoppings e 0,03 para pisos de escritórios, residências e igrejas.

TABELA 2 – Fatores de carregamento dinâmico para o caminhar

Fatores de Carregamento dinâmico para o caminhar		
Harmônico i	Frequência if	Fator de carregamento dinâmico, α_i
1	1,6-2,2	0,5
2	3,2-4,4	0,2
3	4,8-6,6	0,1
4	6,4-8,8	0,05

MURRAY *et al.* (1997) reuniram seus trabalhos em uma publicação do AISC (*American Institute of Steel Construction*) onde indicaram vários procedimentos de cálculo para análise dinâmica de pisos com diferentes tipos de ocupação, tais como caminhar e atividades rítmicas. Alguns parâmetros dinâmicos são também sugeridos, como segue:

TABELA 3 - Parâmetros recomendados

Valores de parâmetros dinâmicos recomendados e limites de a_0/g			
	Força Constante P_0	Fator de Amortecimento ζ	Aceleração limite $a_0/g \times 100\%$
Escritórios, residências e igrejas	0,29kN	*0,02 – 0,05	0,5%
Shopping	0,29kN	0,02	1,5%
Passarelas - internas	0,41kN	0,01	1,5%
Passarelas – externas	0,41kN	0,01	5,0%

*0,02 para pisos com poucos elementos não estruturais, como shopping e igrejas
 0,03 para pisos com elementos não estruturais e divisórias, como em escritórios
 0,05 para pisos com paredes ou divisórias entre pisos

A Tabela 4 já havia sido sugerida por ALLEN *et al.* (1985), no entanto, após diversas pesquisas os autores perceberam a necessidade da consideração de três componentes harmônicas para atividades aeróbicas.

TABELA 4 – Parâmetros para atividades rítmicas

Atividade	Frequência da excitação f, Hz	Peso dos participantes $^*W_p, \text{kPa}$	Coefficiente Dinâmico α_i	Carga dinâmica $\alpha_i W_p$
Dança: 1ºharmônico	1,5 – 3,0	0,6	0,5	0,30
Shows, Eventos esportivos: 1ºharmônico	1,5 – 3,0	1,5	0,25	0,40
2ºharmônico	3,0 – 5,0	1,5	0,05	0,075
Exercícios aeróbicos: 1ºharmônico	2,0 – 2,75	0,2	1,5	0,30
2ºharmônico	4,0 – 5,50	0,2	0,6	0,12
3ºharmônico	6,0 – 8,25	0,2	0,1	0,020

*baseados na densidade máxima em uma área ocupada de um piso

ESTEFANI *et al.*(2001) avaliaram o comportamento dinâmico da arquibancada superior do estádio Mané Garrincha para verificarem a segurança do estádio devido à ocorrência de vibrações excessivas causadas pela ação do público.

Em suas análises, os autores utilizaram coeficientes de carga para cada tipo de atividade humana segundo o documento CEB-209 (1991). Estes valores são apresentados na Tabela 5.

TABELA 5 – Coeficientes de carga para cada tipo de atividade humana. (CEB-209, 1991)

Atividades humanas	Taxa de frequência (Hz)		Coeficiente de Fourier			Densidade (pessoas/m ²)
			α_1	α_2	α_3	
Caminhar	Vertical	2,0	0,4	0,1	0,1	~1
		2,4	0,5	-	-	
	Adiante	2,0	$0,5(\alpha_{1/2}=0,1)$	0,2	-	
	Lateral	2,0	$\alpha_{1/2}=0,1$	$\alpha_{3/2}=0,1$	-	
Correr		2,0-3,0	1,6	0,7	0,2	~0,25
Saltar	Normal	2,0	1,8	1,3	0,7	
		3,0	1,7	1,1	0,5	
	Altos	2,0	1,9	1,6	1,1	
		3,0	1,8	1,3	0,8	
Oscilar lateralmente o corpo	Sentado	0,6	$\alpha_{1/2}=0,4$	-	-	~3-4
	De pé e parado	0,6	$\alpha_{1/2}=0,5$	-	-	

Os autores observaram que o número de pessoas que realizam a atividade tem grande influência nas vibrações, devido ao fato de que um grupo de pessoas em movimentos sincronizados produz um fator de impacto elevado. Eles sugerem que uma análise de vibração forçada seja realizada para obtenção dos deslocamentos e acelerações máximas geradas na estrutura durante a excitação, os quais deverão ser comparados com limites recomendados para conforto humano.

4.4 Limites de Conforto Humano a Vibrações de Pisos

As cargas dinâmicas induzidas pelo homem produzem vibrações nas estruturas ou membros estruturais e estas dependem, principalmente, da relação entre a frequência da excitação dominante e as frequências naturais da estrutura. Para frequências com valores próximos a amplitude de vibração aumenta, sendo regulada apenas pela quantidade de amortecimento presente no sistema.

O aumento da amplitude do movimento poderá causar tanto o desconforto do usuário ao utilizar a estrutura, quanto produzir danos à mesma, já que os esforços de cada um dos elementos estruturais estão ligados com as deformações presentes no sistema. Desse modo, a fim de evitar efeitos indesejáveis ocasionados pelos movimentos com grandes amplitudes, a frequência natural do sistema precisa ser conhecida e cuidadosamente analisada.

Pessoas em escritórios ou residências percebem vibrações em torno de 0,5% da aceleração da gravidade (g), enquanto pessoas fazendo alguma atividade física irão aceitar vibrações de até 5% g ou mais.

A NBC (*National Building Code of Canada*) (MURRAY *et al.* (1997)) recomenda um conjunto de acelerações limites para cada ocupação.

TABELA 6 – Limites de Aceleração Recomendados

Tipo de ambiente afetado pela vibração	Aceleração limite, % de g
Escritórios e residências	0,4 – 0,7
Restaurantes e salas de musculação	1,5 – 2,5
Atividades rítmicas somente	4,0 – 7,0

Em geral, a ocorrência de vibração em pisos é desagradável. Durante anos, estudos têm sido feitos para avaliar os limites de conforto humano a vibrações de pisos. Diversas normas específicas sobre análise dinâmica, como a escala da CSA (*Canadian Standard Association*), a norma DIN 4150 Parte 2 (*German Institute for Standardization*), ANSI (*American National Standards Institute*), ISO (*International Organization for Standardization*), NBC (*National Building Code of Canada*) e BSI (*British Standards Institution*) (CAVERSON *et al.* (1994), possuem recomendações sobre os limites máximos de aceleração de pisos para o conforto humano e também recomendações sobre coeficientes de participação dos harmônicos de excitação para simulação de carregamentos provenientes de atividades humanas.

Na FIG.17 são apresentadas algumas das escalas utilizadas para a determinação de limites máximos de aceleração em pisos.

TOLAYMAT (1988) avaliou alguns métodos de análise dinâmica, dentre eles uma das escalas mais utilizadas para determinação dos níveis de aceleração em pisos publicada por Reiher e Meister, em 1946 (FIG.17(b)). O autor observou que nesta escala, Reiher e Meister não consideraram a influência do amortecimento sobre a percepção humana a vibrações. LENZEN (1966), visando compensar essa falta, modificou a escala de Reiher e Meister multiplicando as ordenadas por um fator 10. Esta escala modificada apresentou bons resultados em pisos com fatores de amortecimento de até 0,05 (FIG.17(b)).

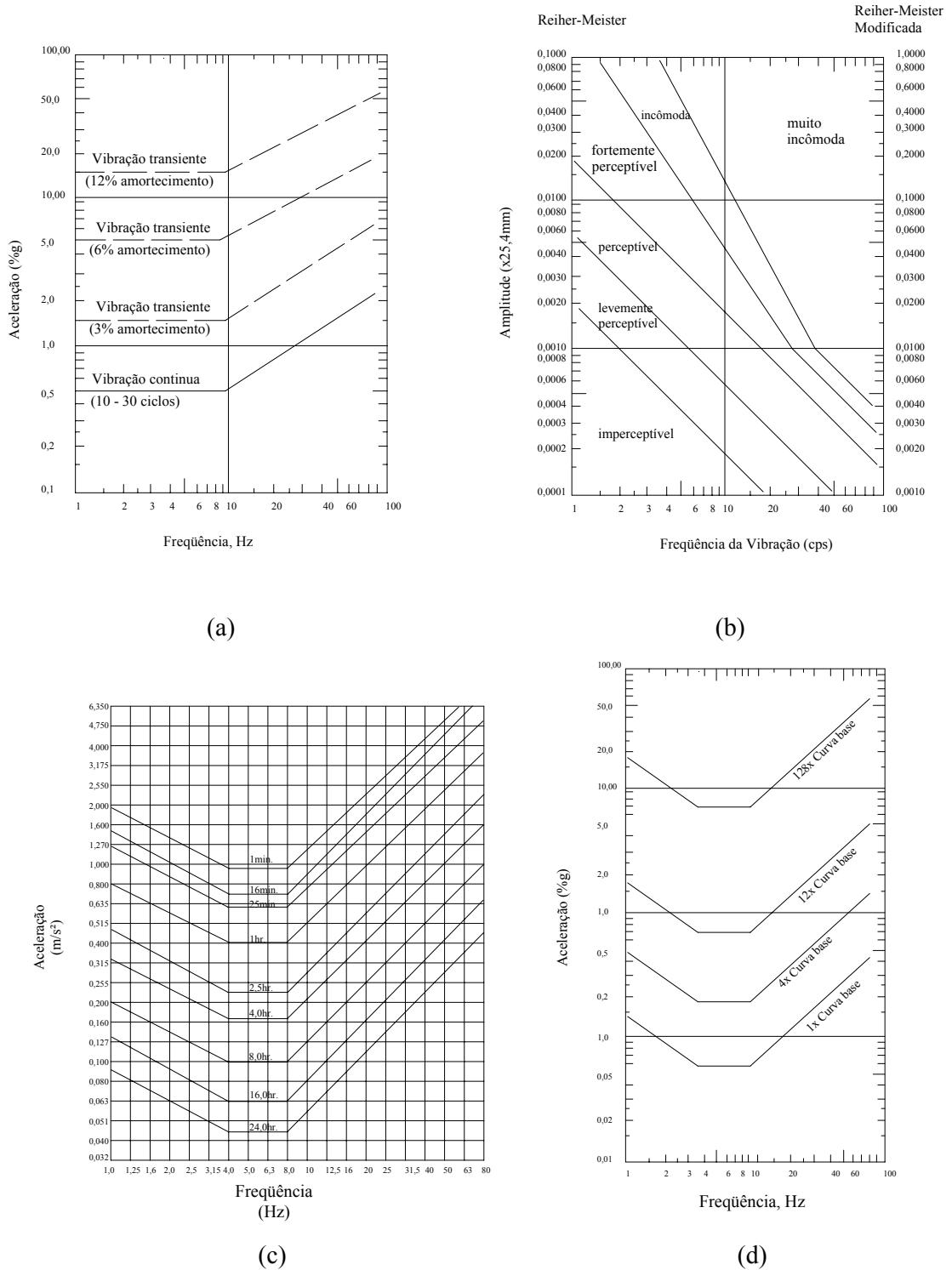


FIGURA 17 – Critérios de análise de vibrações: (a) CSA Standard, (b) Escalas Reisher-Meister e Reisher-Meister modificada, (c) Escala ISO (1980), (d) Escala ISO (1989)

4.5 Métodos Simplificados de Cálculo

Vários métodos simplificados de cálculo permitem a análise dos pisos quanto ao conforto humano, para a utilização de uma atividade específica e para adaptação de equipamentos sensíveis. Geralmente, estas análises requerem o cálculo da primeira frequência natural do piso e da amplitude máxima de aceleração, velocidade ou deslocamento para uma referida excitação. Uma estimativa sobre o amortecimento do piso também é necessária, em alguns casos.

4.5.1 Modelo simplificado de piso misto

O modelo numérico de um sistema de piso possui vários graus de liberdade. Este, ao ser avaliado quando submetido a carregamentos dinâmicos, tem sua equação do movimento definida pela formação de matrizes de massa, amortecimento e rigidez e vetores de aceleração, velocidade e deslocamento. Entre outros métodos para a solução deste sistema de equações matricial de grau n , CRAIG (1981) apresenta o *Método da Superposição Modal* através do qual um conjunto de n equações com n incógnitas pode ser desacoplado, utilizando a transformação para coordenadas principais através da matriz modal. Apesar deste sistema desacoplado ser de fácil solução, ele exige o conhecimento prévio das frequências naturais e modos de vibração da estrutura.

No entanto, sistemas de pisos complexos podem ser avaliados de forma rápida através de métodos simplificados de cálculo.

Um piso com n graus de liberdade pode ser simulado por um sistema de um grau de liberdade representativo de uma viga bi-apoiada com carregamento distribuído, como mostra a FIG.18. Assumindo-se que a viga irá se deformar de acordo com a função de forma $\psi(x) = \text{sen}\pi\frac{x}{L}$, pode-se obter expressões generalizadas para a massa, m , a rigidez, k , e o carregamento atuante, P_o (CRAIG (1981)).

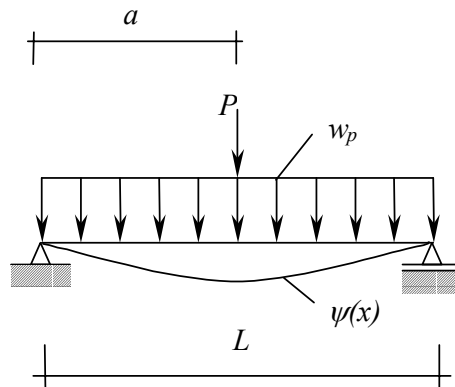


FIGURA 18 – Viga bi-apoiada com carregamento distribuído

Assim, P_o será:

$$P_o = \int_0^l P(x,t)\psi(x)dx + P_j(t)\psi_j \quad (4.2)$$

Considerando apenas a carga distribuída w_p atuando sobre a viga da FIG.18, vem:

$$P_o = \int_0^l w_p \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} dx = w_p \frac{L}{\pi} \left[-\cos \frac{\pi x}{L} \right]_0^L = \frac{2}{\pi} w_p L \quad (4.3)$$

onde w_p : carga distribuída equivalente ao peso dos participantes.

O valor de P_o , considerando, também, a influência da carga concentrada aplicada na FIG.18, será:

$$P_o = \int_0^l P(x,t)\psi(x)dx + P_j(t)\psi_j = w_p L \frac{2}{\pi} + P \operatorname{sen} \frac{\pi a}{L} \quad (4.4)$$

Similarmente, a massa equivalente, m , pode ser obtida na forma:

$$m = \int_0^l \bar{m}\psi^2(x)dx + \sum_s m_s \psi^2(x_s) \quad (4.5)$$

onde \bar{m} é a massa por unidade de comprimento da viga, obtida pela carga total do piso, w_t , incluindo participantes, dividido por g ($9,86\text{m/s}^2$), e m_s é uma massa concentrada em um ponto de coordenada x_s . Na FIG.18, a massa equivalente, m , sem a presença de massa concentrada, será:

$$m = \int_0^L \bar{m} \frac{\pi x}{L} \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx = \bar{m} \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2(\pi/L)}{4(\pi/L)} \right]_0^L = \frac{\bar{m}L}{2} \quad (4.6)$$

A rigidez desta viga, utilizando-se esta função de forma, é dada por (CRAIG (1981)):

$$K = \int_0^L E_a I_a (\psi'')^2 dx = \frac{E_a I_a \pi^4}{2L^3} \quad (4.7)$$

O valor da frequência natural deste sistema simplificado de um grau de liberdade é dado por:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.8)$$

Utilizando-se os valores obtidos nas Eqs. (4.6) e (4.7), tem-se:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{EI\pi^4}{2L^3} \cdot \frac{2}{\bar{m}L}} \quad (4.9)$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{EI\pi^4}{\bar{m}L^4}} \quad (4.10)$$

$$f_n = \frac{\pi^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EIg}{w_t L^4}} \quad (4.11)$$

$$f_n = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{gEI}{w_t L^4}} \quad (4.12)$$

onde: f_n : frequência natural, Hz

g : aceleração da gravidade, $g = 9,807\text{m/s}^2$

E : módulo de elasticidade do material, N/m^2

I : momento de inércia, m^4

w_t : carga distribuída, N/m

L : comprimento do vão, m

Para a estrutura de piso reduzida a um sistema UGL, todas as equações apresentadas no Capítulo 2 são válidas. Deste modo, o valor da aceleração pode ser expresso pela Eq. (2.21). Assim:

$$a = \frac{P_o}{k} \frac{\Omega^2}{\left[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2 \right]^{1/2}} \quad (4.13)$$

Como mostrado no item anterior, o carregamento harmônico é composto por várias componentes harmônicas, i , com frequências múltiplas da frequência da excitação. Cada múltiplo harmônico, i , possui um coeficiente dinâmico de participação, α_i , apresentados na Tabela 4 para algumas atividades associadas a movimentos de pessoas.

Para cada uma destas componentes tem-se uma aceleração máxima que pode ser obtida

a partir da Eq. (4.13). Sabendo-se que $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$ $\therefore k = m\omega_n^2$, $\bar{m} = \frac{w_t}{g}$ e $P_o = \alpha_i \frac{2}{\pi} w_p L$

vem:

$$a_i = \frac{\alpha_i w_p}{w_t} \frac{4gL}{\pi} \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 \left[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2 \right]^{1/2}} \quad (4.14)$$

$$\frac{a_i}{g} = \frac{4}{\pi} \frac{I}{r^2} \frac{\alpha_i w_p / w_t}{\left[(1-r)^2 + (2\zeta r)^2 \right]^{1/2}} \quad (4.15)$$

$$\frac{a_i}{g} = \frac{1,3\alpha_i w_p/w_i}{\sqrt{\left[\left(\frac{f_n}{f}\right)^2 - 1\right]^2 + \left(2\zeta \frac{f_n}{f}\right)^2}} \quad (4.16)$$

onde : a_i : amplitude de aceleração, em m/s^2

g : aceleração da gravidade, $9,807m/s^2$

w_p : carga distribuída equivalente ao peso dos participantes

w_i : carga total do piso, incluindo participantes

f : frequência da excitação

f_n : frequência natural da estrutura

α_i : coeficiente de participação dos harmônicos de excitação

ζ : fator de amortecimento

Para um sistema com um grau de liberdade a aceleração apresentada na Eq. (4.16) representa a máxima aceleração obtida para a componente de carregamento a ela associada. Cada múltiplo componente do carregamento harmônico possui uma aceleração máxima calculada pela Eq. (4.16). Quando se torna necessário considerar a contribuição de vários harmônicos, uma aceleração efetiva deve ser estimada a partir da equação (ALLEN, 1990; MURRAY *et al.*, 1997):

$$a_m = \left[\sum a_i^{1,5} \right]^{1/1,5} \quad (4.17)$$

onde : a_i é a amplitude de aceleração de cada harmônico.

A importância deste procedimento pode ser visualizada em um exemplo onde foram avaliadas a combinação de acelerações máximas para a combinação de carregamentos de diferentes frequências.

No caso de um sistema estrutural de piso constituído por uma viga transversal secundária (V2), apoiada em vigas longitudinais principais (V1), como representado na

FIG.19, a frequência natural estimada, f_n , para o sistema pode ser obtida pela relação de Dunkerley (BEER *et al.*(1994)):

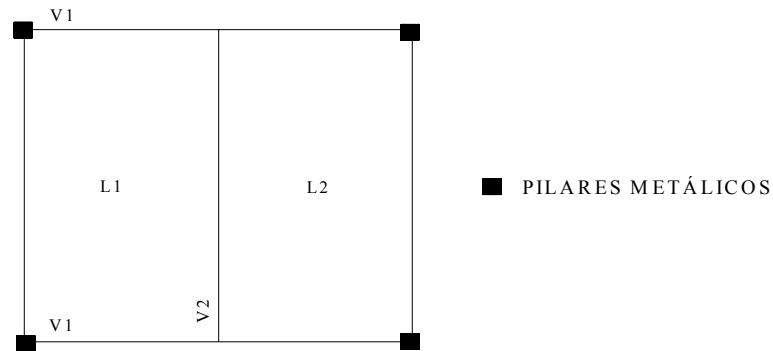


FIGURA 19 – Estrutura de piso misto

$$\frac{1}{f_n^2} = \frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2} \quad (4.18)$$

onde : f_1 : frequência da viga principal (V1),

f_2 : frequência da viga secundária (V2)

são obtidas com a equação (4.12).

O deslocamento estático do piso pode ser obtido, de forma simplificada, através da seguinte equação:

$$\Delta_{est} = \frac{P_o}{K} \quad (4.19)$$

onde: P_o é a carga equivalente aplicada sobre a viga

K é a rigidez da viga obtida pela Eq.(4.7)

O deslocamento estático final é a combinação obtida em um sistema de viga apoiada sobre viga, sendo, de acordo com a FIG.19:

$$\Delta_f = \Delta_{V2} + \Delta_{V1} \quad (4.20)$$

onde Δ_{V_2} e Δ_{V_1} são os deslocamentos das vigas V_2 e V_1 , respectivamente. Além destas propriedades dinâmicas deve-se considerar detalhes importantes na análise do piso como, por exemplo, onde está e qual é a origem da vibração, a que tipo de carregamento o piso está sujeito, para qual tipo de solicitação o piso foi projetado e quais os limites de aceitação dos usuários para uma adequada análise da estrutura de piso.

4.5.2 Avaliação da aceleração máxima efetiva em uma viga bi-apoiada

Seja a viga bi-apoiada apresentada na FIG.20, a seguir:

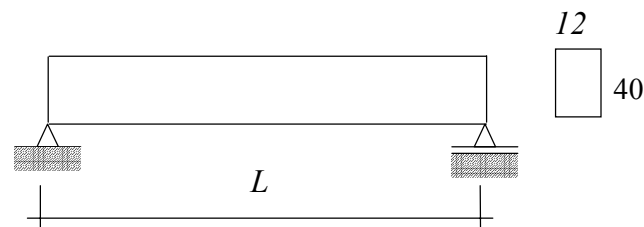


FIGURA 20 – Viga bi-apoiada

Dados: Viga 12x40 cm

$$\text{Área} = 0,048 \text{ m}^2$$

$$\text{Momento de inércia} = 0,00064 \text{ m}^4$$

$$\text{Módulo de elasticidade} = 2,8 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$\text{Densidade do concreto} = 2500 \text{ kg/m}^3$$

$$L = 6,00 \text{ m}$$

Através do programa ANSYS 5.7 (1996) foi realizada uma análise dinâmica do sistema estrutural apresentado, para a obtenção das 3 primeiras freqüências naturais da estrutura.

As freqüências naturais foram obtidas pela análise modal e seus valores foram:

$$f_1 = 16,861 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 67,438 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 139,300 \text{ Hz}$$

Aplicando-se a Eq. (4.12), tem-se para a 1ª frequência natural da estrutura:

$$f_n = 16,85 \text{ Hz}$$

Uma vez obtidos os valores das frequências naturais da estrutura, são feitas análises da mesma quando ocorrem excitações com frequências próximas à frequência natural da estrutura.

Foram realizadas análises harmônicas e transientes, para a obtenção do deslocamento máximo, u_o , e da aceleração máxima, \ddot{u}_o . A análise harmônica avalia o estado estacionário do movimento e a análise transiente, através de um histórico do carregamento no tempo, permite avaliar a influência da perturbação inicial do movimento nos resultados dos deslocamentos e acelerações.

A eficiência da expressão para cálculo da aceleração efetiva, Eq. (4.17), será verificada a partir da comparação dos resultados obtidos nas análises, as quais foram, também, realizadas com a utilização do programa ANSYS 5.7 (1996).

Considerou-se o carregamento de 100N aplicado no meio do vão, segundo o esquema apresentado na FIG. 21 a seguir.

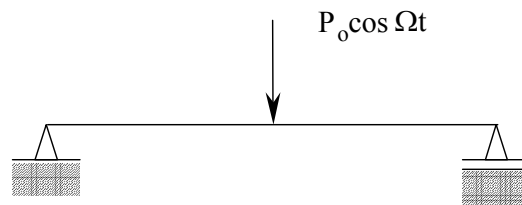


FIGURA 21 – Esquema de aplicação do carregamento

Análise Harmônica

Para a realização da análise harmônica da viga apresentada considerou-se a aplicação de uma carga dinâmica no valor de $100 \cos \Omega t$ e um fator de amortecimento $\zeta = 0,06$. Sendo,

$$u_o = U_o \cos \Omega t$$

$$\ddot{u} = -\Omega^2 U_o \cos \Omega t \therefore \ddot{u} = -\Omega^2 u_o$$

os valores máximos de deslocamento e aceleração foram obtidos considerando-se que os carregamentos aplicados possuíam as frequências de excitação, Ω , de 10Hz, 14Hz, 16,9Hz, 20Hz e 28Hz.

TABELA 7 – Resultados da análise harmônica

Frequência (Hz)	$u_{o_{máx}}$ (m)	$\ddot{u}_{o_{máx}}$ (m/s ²)
10	$0,3790 \times 10^{-4}$	0,14962
14	$0,7468 \times 10^{-4}$	0,5778
16,9	$0,2061 \times 10^{-3}$	2,3241
20	$0,5799 \times 10^{-4}$	0,9159
28	$0,1368 \times 10^{-4}$	0,4235

Análise Transiente

Para a realização da análise transiente considerou-se a viga inicialmente em repouso. O fator de amortecimento adotado foi $\zeta = 0,06$ e os valores máximos de deslocamento e aceleração foram obtidos para as frequências de excitação, Ω , de 10Hz, 14Hz, 16,9Hz, 20Hz e 28Hz.

Na análise transiente um fator de amortecimento, β , Eq. (2.62), deve ser obtido para cada frequência da excitação.

$$\beta = \frac{2\zeta}{\Omega} \quad (4.21)$$

Na Tabela 8 são apresentados os resultados máximos obtidos e nas figuras 22 a 26 os resultados para deslocamento e aceleração obtidos para os diversos valores de frequência da excitação.

TABELA 8 – Resultados da análise transiente

Frequência (Hz)	β	$u_{o\max}$ (m)	$\ddot{u}_{o\max}$ (m/s ²)
10	0,0019098	$0,37996 \times 10^{-4}$	0,149094
14	0,0013640	$0,742478 \times 10^{-4}$	0,578558
16,9	0,0011300	$0,20304 \times 10^{-3}$	2,26991
20	0,00095493	$0,58019 \times 10^{-4}$	0,911018
28	0,00068209	$0,138477 \times 10^{-4}$	0,422284

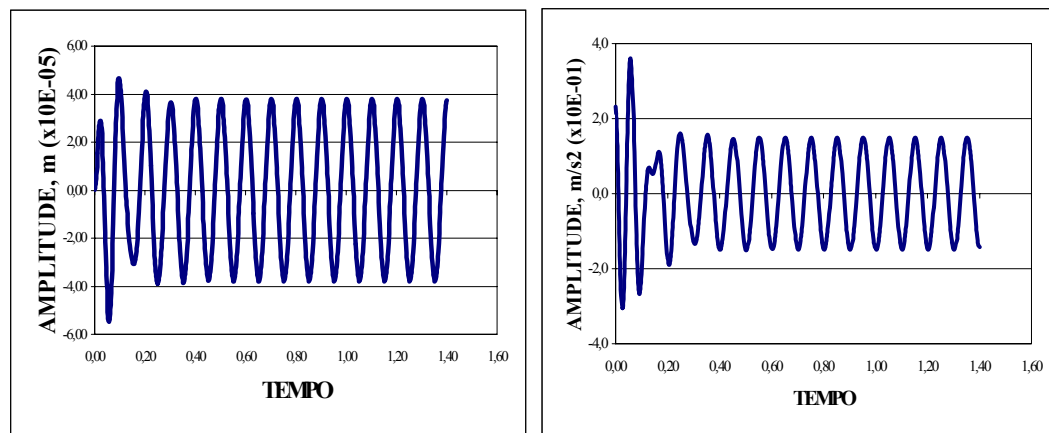


FIGURA 22 – Deslocamento e aceleração na análise transiente para frequência de 10Hz

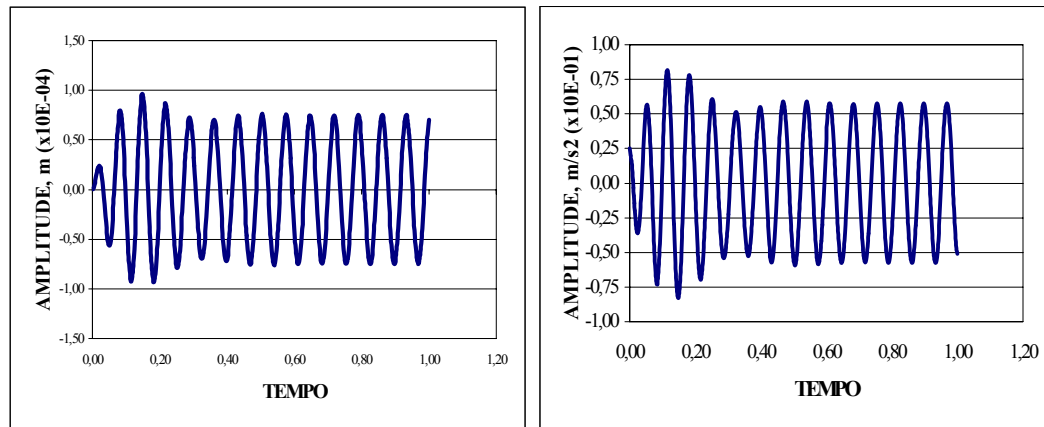


FIGURA 23 – Deslocamento e aceleração na análise transiente para frequência de 14Hz

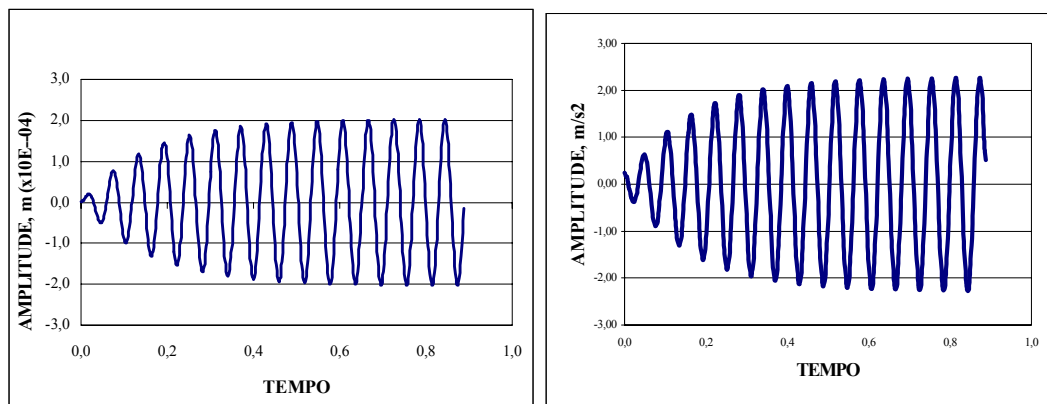


FIGURA 24–Deslocamento e aceleração na análise transiente para frequência de 16,9Hz

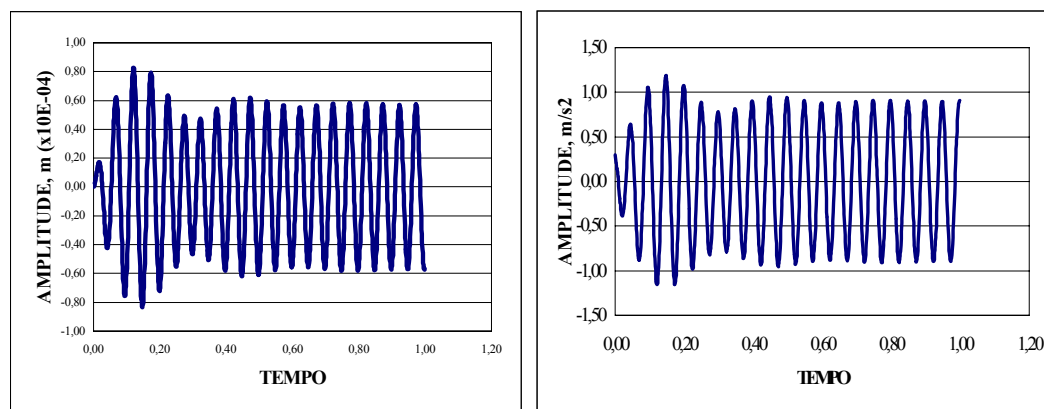


FIGURA 25 – Deslocamento e aceleração na análise transiente para frequência de 20Hz

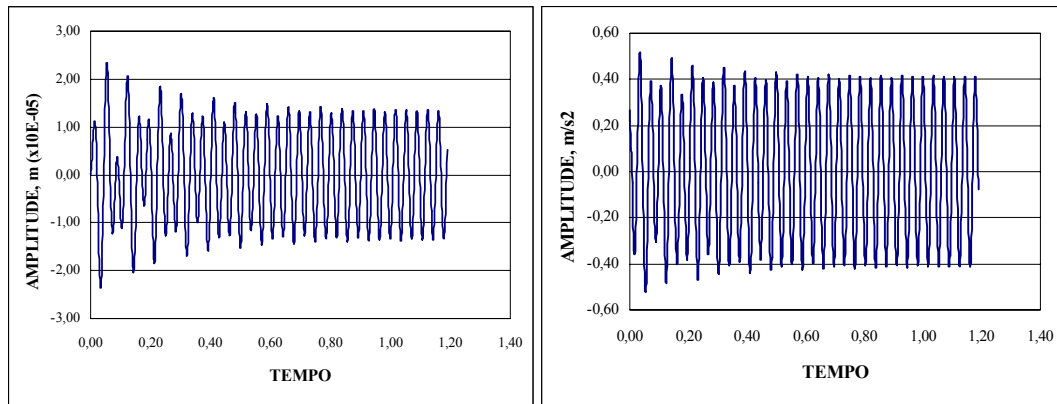


FIGURA 26 – Deslocamento e aceleração na análise transiente para frequência de 28Hz

Observou-se que para as frequências fora do regime ressonante, tais como 10Hz, 14Hz, 20Hz e 28Hz, as condições iniciais do movimento causam grandes perturbações, que são rapidamente amortecidas, atingindo uma resposta estável correspondente à resposta permanente do sistema.

Uma segunda etapa na análise dinâmica da viga em questão foi avaliar a confiabilidade da combinação de acelerações obtidos de frequências múltiplas, Eq.(4.17). Este recurso é muito importante para a análise dinâmica de carregamentos com frequências múltiplas, onde os 2º e 3º harmônicos possam exercer influência sobre os resultados, como por exemplo, os carregamentos oriundos de exercícios aeróbicos.

Nesta etapa da análise uma aceleração combinada, ou efetiva, será estimada utilizando-se os resultados para as duas primeiras componentes harmônicas, obtidos anteriormente nas análises harmônicas. Partindo-se da Eq.(4.17), vem:

$$\ddot{u}_{comb} = \sqrt[1.5]{\ddot{u}_1^{1.5} + \ddot{u}_2^{1.5}} \quad (4.22)$$

onde \ddot{u}_1 e \ddot{u}_2 são acelerações em frequências múltiplas.

A partir de uma análise transiente, com a aplicação de carregamento de frequências múltiplas combinadas, via ANSYS 5.7 (1996), poder-se-á verificar a qualidade dos resultados obtidos na combinação das acelerações, Eq.(4.22). Segundo ALLEN (1990),

uma aceleração efetiva máxima, a_{rmq} , pode ser obtida integrando-se as acelerações resultantes dessa análise transiente, segundo a equação a seguir:

$$a_{rmq} = \left[\frac{1}{T} \int_0^T a^4(t) dt \right]^{1/4} \quad (4.23)$$

onde,

T é o período, $1/f$, da menor frequência entre as combinadas;

a é a aceleração obtida pela análise transiente.

Os dois métodos apresentados para estimar uma aceleração efetiva são correspondentes. Para que seja possível compará-los, seus resultados devem ser ajustados, ou seja, deve-se dividir a_{rmq} por 0,78254. Este é o valor de a_{rmq} considerando-se a atuação de um carregamento senoidal, composta por apenas uma componente harmônica que tem seu pico aceleração igual a 1,0 (ALLEN (1990)).

Combinação de Frequências

$$f_1 = 10\text{Hz e } f_2 = 20\text{Hz}$$

Análise Harmônica

$$\ddot{u}_1 = 0,14962 \text{ m/s}^2$$

$$\ddot{u}_2 = 0,915869 \text{ m/s}^2$$

Utilizando-se os coeficientes dinâmicos $\alpha_1 = 1,50$ e $\alpha_2 = 0,60$ tem-se:

$$\ddot{u}_1 = 1,50 \cdot 0,14962 = 0,224430 \text{ m/s}^2$$

$$\ddot{u}_2 = 0,60 \cdot 0,915869 = 0,5495214 \text{ m/s}^2$$

$$\ddot{u}_{comb} = \sqrt[1,5]{\ddot{u}_1^{1,5} + \ddot{u}_2^{1,5}}$$

$$\ddot{u}_{comb} = 0,64140 \text{ m/s}^2$$

Análise Transiente

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$$

$$\begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/\Omega_1 & \Omega_1 \\ 1/\Omega_2 & \Omega_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix}$$

$$\text{Sendo, } \Omega_1 = 10\text{Hz} = 2\pi 10 = 62,831\text{rad/s}$$

$$\Omega_2 = 20\text{Hz} = 2\pi 20 = 125,664\text{rad/s}$$

$$\zeta_1 = \zeta_2 = 0,06$$

$$\alpha_1 = 1,50 \text{ e } \alpha_2 = 0,60$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5,02654824 \\ 0,0006366198 \end{Bmatrix}$$

$$P(t) = 1,50 \cdot 100 \cos(62,831853 t) + 0,60 \cdot 100 \cos(125,663706 t)$$

$$a_{rmq} = \left[\frac{1}{T} \int_0^T a^4(t) dt \right]^{1/4} = \left[\frac{1}{0,09875} (0,005249967) \right]^{1/4} = 0,480181$$

$$a_{rmq} = \frac{0,480181}{0,78254} = 0,613618 \text{ m/s}^2$$

Os resultados obtidos nas análises são apresentados na Tabela 9 e a FIG.27 representa a aceleração na combinação das frequências de 10 e 20 Hz.

TABELA 9 – Resultados das combinações de frequências, 10 e 20Hz

Análise	Harmônica (\ddot{u}_{comb})	Transiente ($a_{rmq}/0,78254$)	Erro (%)
$\ddot{u}_{o_{m\acute{a}x}}$ (m/s ²)	0,64140	0,613618	4,53

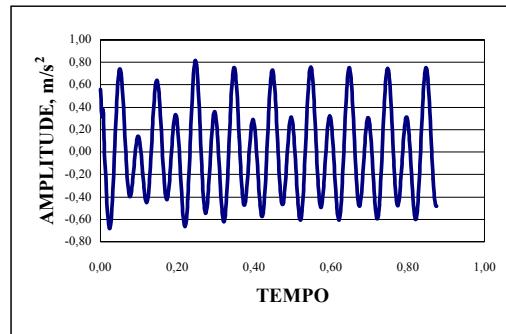


FIGURA 27 – Combinação de frequências: aceleração, 10Hz e 20Hz

$$f_1 = 14\text{Hz e } f_2 = 28\text{Hz}$$

Análise Harmônica

$$\ddot{u}_1 = 0,577838 \text{ m/s}^2$$

$$\ddot{u}_2 = 0,423538 \text{ m/s}^2$$

Utilizando-se os coeficientes dinâmicos $\alpha_1 = 1,50$ e $\alpha_2 = 0,60$ tem-se:

$$\ddot{u}_1 = 1,50 \cdot 0,577838 = 0,866757 \text{ m/s}^2$$

$$\ddot{u}_2 = 0,60 \cdot 0,423538 = 0,254123 \text{ m/s}^2$$

$$\ddot{u}_{comb} = \sqrt{1,5^2 \ddot{u}_1^{1,5} + \ddot{u}_2^{1,5}}$$

$$\ddot{u}_{comb} = 0,956220 \text{ m/s}^2$$

Análise Transiente

$$C = \alpha M + \beta K$$

$$\begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/\Omega_1 & \Omega_1 \\ 1/\Omega_2 & \Omega_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix}$$

Sendo, $\Omega_1 = 14\text{Hz} = 2\pi \cdot 14 = 87,9645 \text{ rad/s}$

$$\Omega_2 = 28\text{Hz} = 2\pi \cdot 28 = 175,9292 \text{ rad/s}$$

$$\zeta_1 = \zeta_2 = 0,06$$

$$\alpha_1 = 1,50 \text{ e } \alpha_2 = 0,60$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7,03716736 \\ 0,0004547288 \end{Bmatrix}$$

$$P(t) = 1,50 \cdot 100 \cos(87,964594 t) + 0,60 \cdot 100 \cos(175,929186 t)$$

$$a_{rmq} = \left[\frac{1}{T} \int_0^T a^4(t) dt \right]^{1/4} = \left[\frac{1}{0,070410} (0,0217902) \right]^{1/4} = 0,745859$$

$$a_{rmq} = \frac{0,745859}{0,78254} = 0,953126 \text{ m/s}^2$$

A comparação dos resultados obtidos nas análises das frequências de 14 e 28Hz é apresentada na Tabela 10. A aceleração obtida pela combinação das frequências é apresentada na FIG.28.

TABELA 10 – Resultados das combinações de frequências, 14 e 28Hz

Análise	Harmônica (a_{ef})	Transiente ($a_{rmq}/0,78254$)	Erro (%)
$\ddot{u}_{o,m\acute{a}x}$ (m/s ²)	0,956220	0,953126	0,325

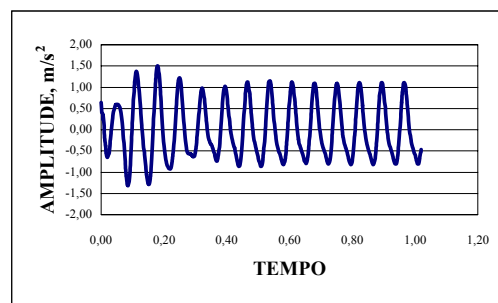


FIGURA 28 – Combinação de frequências: aceleração, 14Hz e 28Hz

A partir dos resultados obtidos, pode-se observar que a formulação para a combinação de harmônicos apresenta resultados compatíveis com os obtidos na análise transiente. O cálculo de uma aceleração efetiva, utilizando-se a Eq.(4.22), mostrou-se , obtendo-se uma aceleração 4,50% maior do que a obtida na análise transiente.

Buscando conhecer a influência da presença do ângulo de fase em uma combinação de carregamentos harmônicos de frequências múltiplas, foi realizada uma análise transiente variando-se o ângulo de fase, ϕ , de 0° a 360° . Na Tabela 11 são apresentados os resultados obtidos para o deslocamento e a aceleração com a combinação de frequências de 10 e 20 Hz.

TABELA 11 – Resultados da influência do ângulo de fase nas combinações de frequências, 10 e 20Hz

Ângulo de fase, ϕ	$\ddot{u}_{o_{m\acute{a}x}}$ (m/s ²)
0°	0,6136183
30°	0,6128259
60°	0,6122923
90°	0,6118566
120°	0,6121217
150°	0,6135501
180°	0,6148342
210°	0,6153235
240°	0,6155426
270°	0,6152935
300°	0,6146821
330°	0,6142417
360°	0,6136193

Pode-se observar que a presença do ângulo de fase não ocasionou alterações significativas na aceleração, logo se conclui que a presença do ângulo de fase pode ser desconsiderada na avaliação dos níveis de aceleração de um piso.

5

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

5.1 Introdução

Neste capítulo apresentam-se exemplos de pisos mistos aço/concreto, de dimensões usuais, onde o comportamento dinâmico é considerado. A funcionalidade desses pisos, quanto ao conforto dos usuários e estado limite de utilização relacionado a vibrações, é avaliada utilizando-se critérios de projeto apresentados em normas e publicações técnicas específicas.

Os problemas são analisados utilizando-se programa computacional de elementos finitos e os resultados obtidos numericamente são comparados a outros obtidos a partir de um método analítico aproximado.

5.2 – Exemplo 1

Um sistema de piso misto aço/concreto, de dimensões usuais, foi submetido a carregamentos dinâmicos oriundos de atividades rítmicas. O programa computacional utilizando elementos finitos, ANSYS 5.7, foi utilizado para o desenvolvimento do modelo numérico do piso misto e para a realização das análises dinâmicas.

Na concepção do modelo, utilizaram-se elementos de placa para simular a laje de concreto e elementos de barra tridimensionais para as vigas de aço. Estes elementos foram locados em planos correspondentes aos centros de gravidade de cada elemento estrutural. Através da criação de um trecho rígido entre os nós das vigas e das lajes de concreto, garantiu-se que as seções transversais permaneçam planas e que a laje de concreto trabalhe em conjunto com as vigas de aço. Para a realização da análise dinâmica foram aplicados sobre o piso carregamentos harmônicos, considerando-se a superposição de efeitos para representar os carregamentos representativos de cada atividade mencionada.

Na FIG. 29, vê-se um croqui da estrutura que é composta de vigas e pilares metálicos e lajes de concreto armado colaborantes com as vigas, com interação total. O módulo de elasticidade usado para o concreto foi de 23479 MPa, com base na NBR-6118 (1978), para $f_{ck} = 20$ MPa.

Propriedades dos materiais:

Vigas de aço – $E_a = 205000$ MPa; $\rho_a = 7,85$ t/m³ ; $\nu_a = 0,3$

Lajes de concreto – $E_c = 23479$ MPa ; $\rho_c = 2,5$ t/m³ ; $\nu_c = 0,2$; Espessura=10 cm

TABELA 12 – Propriedades geométricas das vigas de aço

Vigas	V1 – VS800x111	V2 – IP200	V3 – VS800x111	V4 – VS550x75
Área (m ²)	14,2E-3	28,5E-4	14,2E-3	95,6E-4
I _{yy} (m ⁴)	6,83E-5	14,2E-7	6,83E-5	32,6E-6
I _{xx} (m ⁴)	15,51E-4	194E-7	15,51E-4	52,75E-5
I _{zz} (m ⁴)	54,9E-8	7,01E-8	54,9E-8	36,9E-8

A análise foi realizada em duas etapas, para efeito de comparação de resultados. O fator de amortecimento, ζ , foi considerado valendo 0,05 para toda a estrutura.

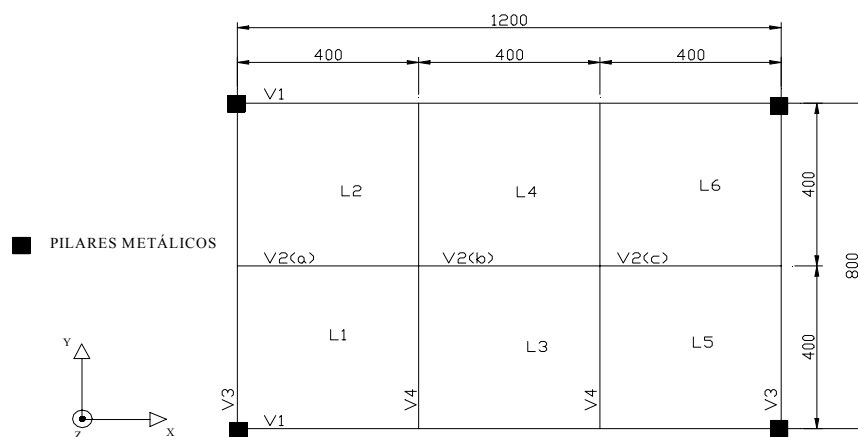


FIGURA 29 – Croqui da estrutura

5.2.1 Etapa 1

Análise dinâmica, pelo método dos elementos finitos, de um modelo numérico para determinação de frequências naturais e modos de vibração da estrutura; adicionalmente foram determinadas as respostas dinâmicas da estrutura (deslocamentos e acelerações nos pontos críticos). Foram utilizadas as seguintes recomendações, baseados nos trabalhos de ALLEN *et al.*(1985), ALLEN (1990) e MURRAY *et al.*(1997):

Cargas dinâmicas

$$F(t) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i w_p \text{sen}(2\pi f t) \quad (5.1)$$

Atividade: aeróbica

$$w_p: 200\text{N/m}^2$$

f_1 : frequência do primeiro harmônico, variando de 2,0 a 2,75Hz

f_2 : frequência do segundo harmônico, variando de 4,0 a 5,5Hz

f_3 : frequência do terceiro harmônico, variando de 6,0 a 8,25Hz

α_i : coeficiente dinâmico, igual a 1,5 para o primeiro harmônico, 0,6 para o segundo harmônico e 0,1 para o terceiro harmônico.

Atividade: dança

$$w_p: 600\text{N/m}^2$$

f_1 : frequência do primeiro harmônico, variando de 1,8 a 2,8Hz

f_2 : frequência do segundo harmônico, variando de 3,6 a 5,6Hz

α_i : coeficiente dinâmico, igual a 0,5 para o primeiro harmônico e 0,1 para o segundo harmônico.

Atividade: shows, eventos esportivos

$$w_p: 1500\text{N/m}^2$$

f_1 : frequência do primeiro harmônico, variando de 1,5 a 3,0Hz

f_2 : frequência do segundo harmônico, variando de 3,0 a 5,0Hz

α_i : coeficiente dinâmico, igual a 0,25 para o primeiro harmônico e 0,05 para o segundo harmônico.

As respostas da estrutura (deslocamentos e acelerações) foram obtidas para cada harmônico separadamente, e superpostas de acordo com a Eq. (4.17):

$$a_m = [a_1^{1,5} + a_2^{1,5} + a_3^{1,5}]^{1/1,5} \quad (4.17)$$

Os coeficientes a_1 , a_2 e a_3 são as respostas do 1º, 2º e 3º harmônicos, respectivamente.

Limite de aceleração recomendado para vibrações devidas a atividades rítmicas:

4 a 7% de g , sendo g a aceleração da gravidade, $9,807\text{m/s}^2$ (Allen, 1990).

Ao realizar-se uma análise estática do piso misto, com uma carga de $1,5\text{ kN/m}^2$, foi obtido o deslocamento máximo para o ponto central da viga V2(b) de $0,386 \times 10^{-2}\text{m}$.

Para avaliações das acelerações máximas, foram adotados para valores das frequências básicas das excitações aqueles que levam à maior resposta, ou seja, aproximando um dos harmônicos da ressonância. Além da massa da estrutura considerou-se uma massa adicional, em todo o pavimento, correspondente à massa do público sobre o piso de 20 kg/m^2 , 60 kg/m^2 e 150 kg/m^2 para as atividades aeróbica, dança e shows, respectivamente.

Atividade: aeróbica

Após uma análise modal, obteve-se a primeira frequência natural de $f_1 = 6,648\text{ Hz}$. As acelerações máximas no piso, a_m , foram obtidas abaixo considerando a situação do terceiro harmônico estar ressonante ou do segundo harmônico estar o mais próximo possível da ressonância:

$f_1 = 2,20\text{ Hz}$	$u_1 = 0,865 \times 10^{-3}\text{ m}$	$a_1 = 0,165\text{m/s}^2$	$a_1/g = 0,01685$
$f_2 = 4,40\text{ Hz}$	$u_2 = 0,554 \times 10^{-3}\text{ m}$	$a_2 = 0,423\text{m/s}^2$	$a_2/g = 0,04317$
$f_3 = 6,60\text{ Hz}$	$u_3 = 0,542 \times 10^{-3}\text{ m}$	$a_3 = 0,933\text{m/s}^2$	$a_3/g = 0,0951$

$$a_m = 1,157\text{ m/s}^2 \therefore a_m/g = 0,118$$

$f_1 = 2,75\text{ Hz}$	$u_1 = 0,932 \times 10^{-3}\text{ m}$	$a_1 = 0,278\text{m/s}^2$	$a_1/g = 0,0284$
$f_2 = 5,50\text{ Hz}$	$u_2 = 0,971 \times 10^{-3}\text{ m}$	$a_2 = 1,1596\text{m/s}^2$	$a_2/g = 0,1182$
$f_3 = 8,25\text{ Hz}$	$u_3 = 0,1095 \times 10^{-3}\text{ m}$	$a_3 = 0,294\text{m/s}^2$	$a_3/g = 0,0300$

$$a_m = 1,344\text{ m/s}^2 \therefore a_m/g = 0,137$$

Atividade: dança

Para a atividade Dança, a primeira frequência natural obtida foi de $f_1 = 6,251$ Hz. Neste caso, com o segundo harmônico aproximando-se da ressonância foi possível obter-se a aceleração máxima no piso, a_m :

$$\begin{array}{llll} f_1 = 2,80 \text{ Hz} & u_1 = 0,967 \times 10^{-3} \text{ m} & a_1 = 0,299 \text{ m/s}^2 & a_1/g = 0,03053 \\ f_2 = 5,60 \text{ Hz} & u_2 = 0,733 \times 10^{-3} \text{ m} & a_2 = 0,908 \text{ m/s}^2 & a_2/g = 0,0925 \end{array}$$

$$a_m = 1,019 \text{ m/s}^2 \therefore a_m/g = 0,1039$$

Atividade: shows, eventos esportivos

Para a primeira frequência natural de $f_1 = 5,566$ Hz a aceleração máxima no piso, a_m , foi obtida, também, com o segundo harmônico o mais próximo possível da ressonância:

$$\begin{array}{llll} f_1 = 2,80 \text{ Hz} & u_1 = 0,1297 \times 10^{-2} \text{ m} & a_1 = 0,401 \text{ m/s}^2 & a_1/g = 0,0409 \\ f_2 = 5,60 \text{ Hz} & u_2 = 0,934 \times 10^{-3} \text{ m} & a_2 = 0,921 \text{ m/s}^2 & a_2/g = 0,09396 \end{array}$$

$$a_m = 1,0905 \text{ m/s}^2 \therefore a_m/g = 0,1112$$

Para facilitar a análise do carregamento harmônico, foram traçados espectros das respostas em função da frequência da excitação.

A FIG. 30 ilustra o deslocamento máximo sofrido pela viga V2(b) quando o piso está sujeito ao carregamento harmônico para shows, $w_p = 1500 \text{ N/m}^2$. Utilizando-se os respectivos coeficientes dinâmicos ($\alpha_1 = 0,25$ e $\alpha_2 = 0,05$) chega-se aos deslocamentos e às acelerações máximas segundo as Eqs (2.18) e (2.20), respectivamente. Os demais carregamentos foram avaliados de forma semelhante.

$$\begin{array}{lll} f_1 = 2,80 \text{ Hz} & u_1 = 0,25 \times 0,519 \times 10^{-2} \text{ m} & u_1 = 0,1297 \times 10^{-2} \text{ m} \\ f_2 = 5,60 \text{ Hz} & u_2 = 0,05 \times 1,868 \times 10^{-2} \text{ m} & u_2 = 0,934 \times 10^{-3} \text{ m} \end{array}$$

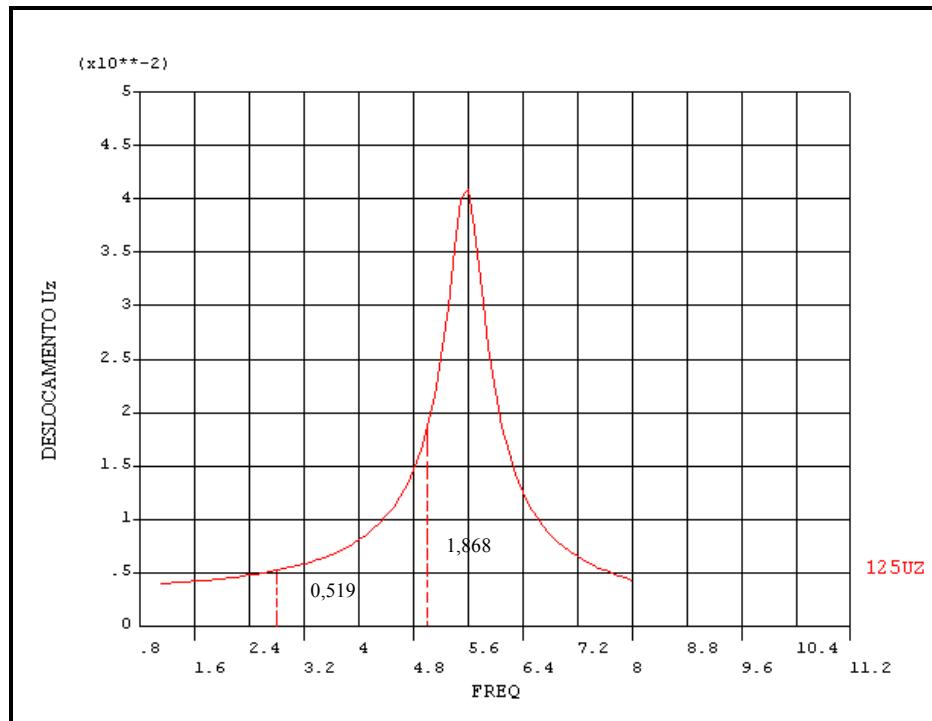


FIGURA 30 – Deslocamento Uz no ponto central da viga V2(b)

5.2.2 Etapa 2

Análise dinâmica, segundo métodos simplificados de cálculo, do sistema de piso misto apresentado. Tais métodos são aplicáveis para o cálculo da primeira frequência natural, cálculo do deslocamento máximo e da aceleração máxima da estrutura e consideram que a mesma esteja reduzida a um sistema UGL. Foram considerados os seguintes dados: Espessura da laje = 10 cm, $f_{ck} = 20$ Mpa, $E_c = 23479$ Mpa, $E_a = 205000$ MPa; $n = E_a/E_c = 9,0$.

As reações das lajes nas vigas foram obtidas com as tabelas de Kalmanok (RABELO(1984)), considerando o peso próprio da estrutura mais o carregamento aplicado, e são apresentadas na FIG.31.

	2,56		1,76		2,56	
2,56		5,44	5,12	5,12	5,44	2,56
	5,44		4,32		5,44	
	5,44		4,32		5,44	
2,56		5,44	5,12	5,12	5,44	2,56
	2,56		1,76		2,56	

FIGURA 31 – Reações das lajes para o carregamento $w_p = 1500\text{N/m}^2$

Para a determinação aproximada da massa das lajes incorporadas a cada viga, que influencia as frequências naturais, utilizou-se as reações das lajes obtidas pelo processo de Kalmanok. Além da massa da estrutura considerou-se uma massa adicional de 20 kg/m^2 para atividade aeróbica, 60 kg/m^2 para da atividade dança e 150 kg/m^2 para atividade shows, referente à massa do público participante destas atividades.

As larguras efetivas das faixas de laje colaborantes para a rigidez do conjunto foram determinadas segundo recomendações da NBR8800 (1986).

A seguir são apresentados os resultados obtidos para as vigas V2(vão b), FIG.32, V4, FIG.33, e V1, FIG.34.

VIGA V2(b)

IP 200 ($A=28,5\text{cm}^2$)

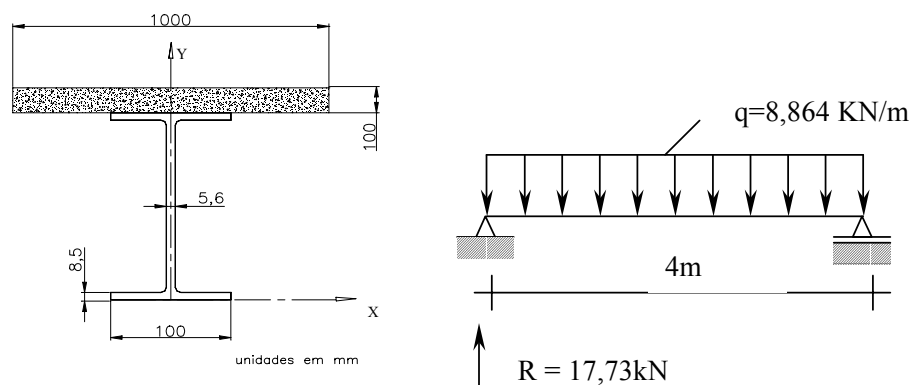


FIGURA 32 – Seção transversal e esquema estrutural da viga V2(b)

Largura efetiva da laje, transformada = $100/9 = 11,1\text{cm}$
 Momento de inércia da seção transformada = $7965,6\text{cm}^4$
 Vão da viga (bi-apoiada) = $4,00\text{m}$
 Rigidez da viga (bi-apoiada) = $12427,50\text{kN/m}$

Atividade: aeróbica

Massa por metro linear, da viga mista = $618,334\text{kg/m}$
 Primeira frequência natural = $f_{v2(b)} = 15,96\text{Hz}$

Atividade: dança

Massa por metro linear, da viga mista = $706,026\text{kg/m}$
 Primeira frequência natural = $f_{v2(b)} = 14,93\text{Hz}$

Atividade: shows, eventos esportivos

Massa por metro linear, da viga mista = $903,844\text{kg/m}$
 Primeira frequência natural = $f_{v2(b)} = 13,20\text{Hz}$

VIGA V4

VS500x75 ($A=95,6\text{cm}^2$)

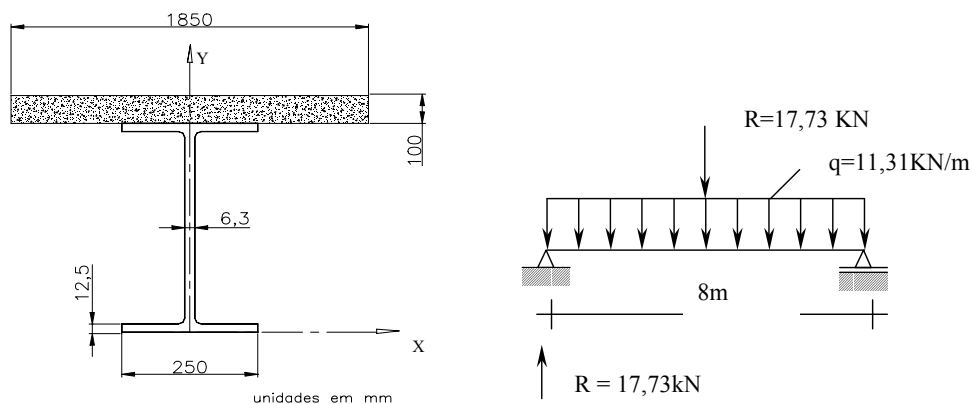


FIGURA 33 – Seção transversal e esquema estrutural da viga V4

Largura efetiva da laje, transformada = $185/9 = 20,56\text{cm}$

Momento de inércia da seção transformada = $123379,1\text{cm}^4$

Vão da viga (bi-apoiada) = $8,00\text{m}$

Rigidez da viga (bi-apoiada) = $24059,95\text{kN/m}$

Atividade: aeróbica

Massa por metro linear, da viga mista = $1112,47\text{kg/m}$

Primeira frequência natural = $f_{v,4} = 11,70\text{Hz}$

Atividade: dança

Massa por metro linear, da viga mista = $1264,40\text{kg/m}$

Primeira frequência natural = $f_{v,4} = 10,98\text{Hz}$

Atividade: shows, eventos esportivos

Massa por metro linear, da viga mista = $1604,98\text{kg/m}$

Primeira frequência natural = $f_{v,4} = 9,74\text{Hz}$

VIGA V1

VS800x111 ($A=142\text{cm}^2$)

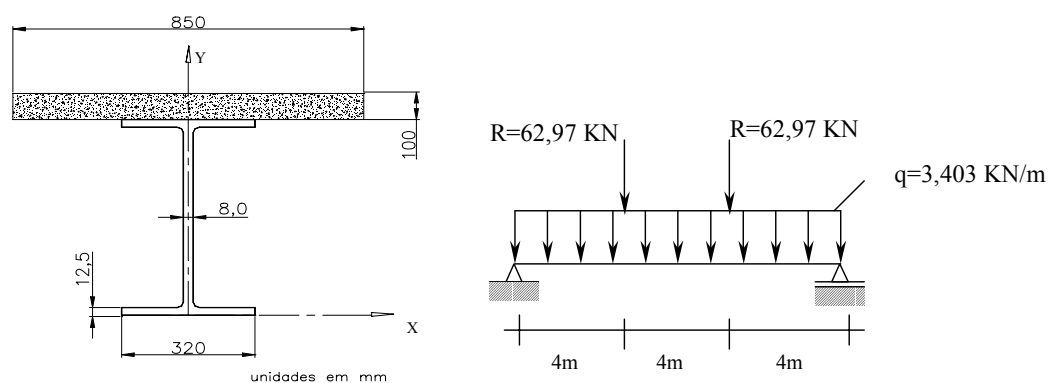


FIGURA 34 – Seção transversal e esquema estrutural da viga V1

Largura efetiva da laje, transformada = $85/9 = 9,44\text{cm}$

Momento de inércia da seção transformada = $270676,20\text{cm}^4$

Vão da viga (bi-apoiada) = $12,00\text{m}$

Rigidez da viga (bi-apoiada) = 15639,73kN/m

Atividade: aeróbica

Massa por metro linear, da viga mista = 1013,05kg/m

Primeira freqüência natural = $f_{v1} = 8,07\text{Hz}$

Atividade: dança

Massa por metro linear, da viga mista = 1136,94kg/m

Primeira freqüência natural = $f_{v1} = 7,62\text{Hz}$

Atividade: shows, eventos esportivos

Massa por metro linear, da viga mista = 1417,35kg/m

Primeira freqüência natural = $f_{v1} = 6,83\text{Hz}$

Atividade: aeróbica

Freqüência resultante: $1/f^2 = 1/f_{V4}^2 + 1/f_{V2(b)}^2 + 1/f_{V1}^2$, logo $f = 6,133\text{Hz}$

Atividade: dança

Freqüência resultante: $1/f^2 = 1/f_{V4}^2 + 1/f_{V2(b)}^2 + 1/f_{V1}^2$, logo $f = 5,773\text{Hz}$

Atividade: shows, eventos esportivos

Freqüência resultante: $1/f^2 = 1/f_{V4}^2 + 1/f_{V2(b)}^2 + 1/f_{V1}^2$, logo $f = 5,149\text{Hz}$

A aceleração máxima, a_m , obtida a partir da Eq. (4.16) e da Eq. (4.17) foi de:

Atividade: aeróbica

$$f_1 = 2,00 \text{ Hz} \quad a_1/g = 0,0172$$

$$f_2 = 4,00 \text{ Hz} \quad a_2/g = 0,0426$$

$$f_3 = 6,00 \text{ Hz} \quad a_3/g = 0,0866$$

$$a_m/g = 0,110$$

$$f_1 = 2,75 \text{ Hz} \quad a_1/g = 0,0363$$

$$f_2 = 5,50 \text{ Hz} \quad a_2/g = 0,2167$$

$$f_3 = 8,25 \text{ Hz}$$

$$a_3/g = 0,02121$$

$$a_m/g = 0,231$$

Atividade: dança

$$f_1 = 2,80 \text{ Hz}$$

$$a_1/g = 0,0387$$

$$f_2 = 5,60 \text{ Hz}$$

$$a_2/g = 0,2096$$

$$a_m/g = 0,221$$

Atividade: shows, eventos esportivos

$$f_1 = 3,00 \text{ Hz}$$

$$a_1/g = 0,0624$$

$$f_2 = 5,00 \text{ Hz}$$

$$a_2/g = 0,2037$$

$$a_m/g = 0,226$$

Para o cálculo do deslocamento estático do piso, pelo método simplificado apresentado no Capítulo 4, foi utilizado o processo de Kalmanok (RABELO(1984)) para a determinação das cargas atuantes nas vigas para o carregamento estático, $w_p = 1500\text{N/m}^2$, aplicado sobre todo o piso.

A partir das Eqs. (4.3), (4.4), (4.7) e (4.19) tem-se para as vigas V2(b), V4 e V1 os seguintes deslocamentos:

VIGA V2(b)

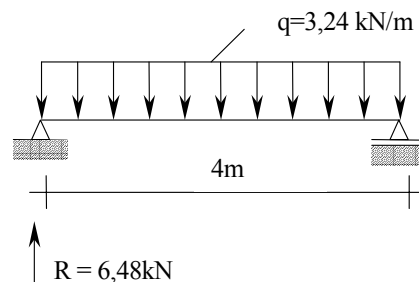


FIGURA 35 – Esquema estrutural da viga V2(b)-Análise estática

$$P_o = 8,251 \text{ kN}$$

$$K = 12427,50 \text{ kN/m}$$

$$\Delta_{V2(b)} = 0,0006639 \text{ m}$$

VIGA V4

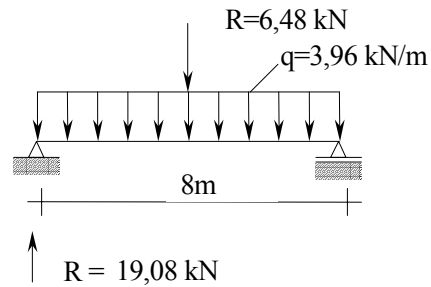


FIGURA 36 – Esquema estrutural da viga V4-Análise estática

$$P_o = 26,648 \text{ kN}$$

$$K = 24059,95 \text{ kN/m}$$

$$\Delta_{V4} = 0,0011076 \text{ m}$$

VIGA V1

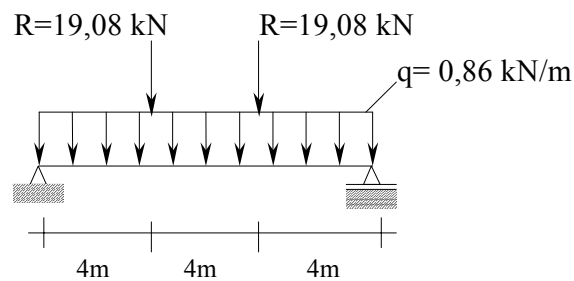


FIGURA 37 – Esquema estrutural da viga V1-Análise estática

$$P_o = 39,6174 \text{ kN}$$

$$K = 15639,73 \text{ kN/m}$$

$$\Delta_{V1} = 0,00253313 \text{ m}$$

Considerando-se o sistema de viga apoiada sobre viga, segundo a Eq.(4.20), o deslocamento máximo obtido para o sistema de piso será:

$$\Delta_f = \Delta_{V2(b)} + \Delta_{V4} + \Delta_{V1}$$

$$\Delta_f = 0,0006639 + 0,0011076 + 0,00253313 = 0,0043046 \text{ m}$$

5.2.3 Análise dos resultados

Os resultados apresentados nos métodos computacional e simplificado apresentaram boa conformidade para a obtenção da frequência natural como mostra a Tabela 13. No entanto, os valores das acelerações apresentaram uma grande diferença devido às frequências naturais obtidas estarem próximas da ressonância, dificultando a análise dos resultados.

Na FIG.30, que representa o deslocamento de um ponto do piso em função do carregamento harmônico, pode-se observar a grande contribuição da primeira frequência da estrutura. Este fato proporcionou a obtenção de bons resultados pelo método simplificado de cálculo da frequência natural sendo indicado para avaliações preliminares de sistemas de piso simples.

Os resultados dos métodos utilizados para a obtenção dos níveis de aceleração do piso mostraram que o sistema de piso analisado não é adequado para a realização de atividades rítmicas devido aos elevados níveis de aceleração encontrados. Logo, torna-se necessário a execução de medidas corretivas para a redução da aceleração a níveis recomendados (ALLEN, 1990).

TABELA 13 – Comparação das 1^{as} frequências naturais

1 ^{as} FREQUÊNCIAS NATURAIS (Hz)			
ATIVIDADE MÉTODO	AERÓBICA	DANÇA	EVENTOS ESPORTIVOS
COMPUTACIONAL	6,648	6,251	5,566
SIMPLIFICADO	6,133	5,773	5,149
ERRO (%)	8,40	8,28	8,10

TABELA 14 – Comparação das acelerações máximas

ACELERAÇÕES MÁXIMAS (a_m/g)			
ATIVIDADE	MÉTODO COMPUTACIONAL	MÉTODO SIMPLIFICADO	ERRO (%)
AERÓBICA $q=0,2 \text{ kN/m}^2$	0,137	0,231	68,6
DANÇA $q=0,6 \text{ kN/m}^2$	0,104	0,211	102,9
SHOWS $q=1,5 \text{ kN/m}^2$	0,111	0,226	103,2

Ao utilizar-se, por exemplo, a frequência natural obtida pelo método computacional para o cálculo da aceleração máxima do piso, será obtida para a atividade de shows e eventos esportivos:

$$f_1 = 3,00 \text{ Hz}$$

$$a_1/g = 0,0774$$

$$f_2 = 5,00 \text{ Hz}$$

$$a_2/g = 0,0938$$

$$a_m/g = 0,1363$$

Pode-se concluir que uma variação em torno de 20% dos resultados pode levar a uma condição de ressonância que irá ocasionar uma avaliação errônea dos níveis de aceleração da estrutura.

TABELA 15 – Comparação dos deslocamentos

DESLOCAMENTO ESTÁTICO (m)	
MÉTODO COMPUTACIONAL	MÉTODO SIMPLIFICADO
0,003852	0,0043046
ERRO(%)	11,74

5.3 - Exemplo 2

O comportamento dinâmico de um sistema de piso misto aço/concreto, dimensionado originalmente apenas a cargas estáticas, é avaliado quando este é submetido a atividades rítmicas.

O piso é analisado utilizando-se o programa computacional em elementos finitos, ANSYS 5.7, e o comportamento misto da estrutura é obtido com a introdução de equações de restrições que garantam que as seções planas permaneçam planas no estado deformado.

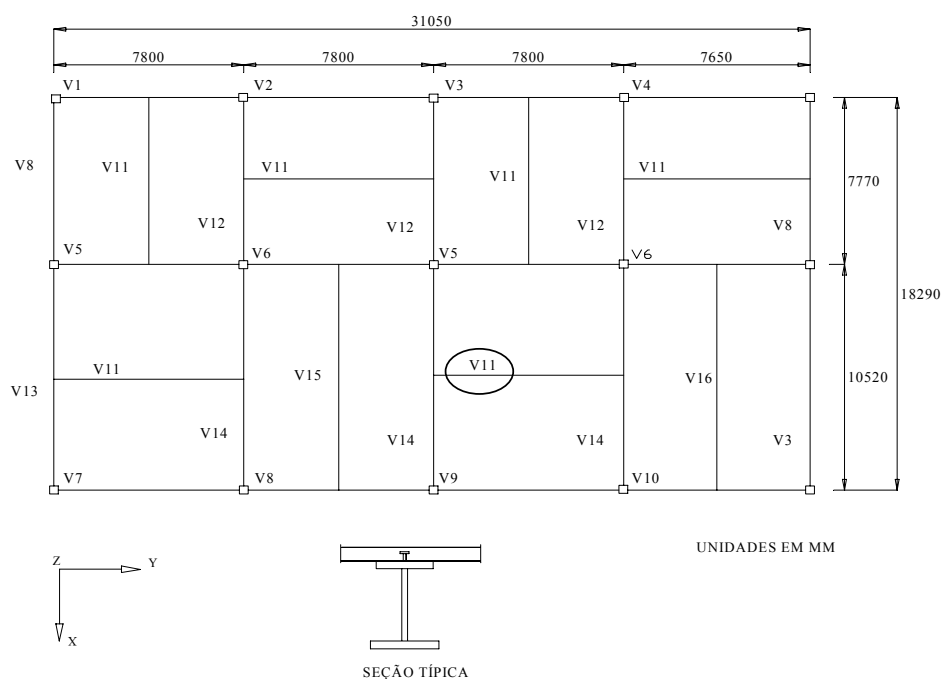


FIGURA 38 – Croquis do piso

O piso mostrado na FIG.38 tem dimensões 31,05m x 18,29m. As vigas são mistas e a laje de concreto é fixada às vigas através de conectores de cisalhamento que garantem a interação total entre os dois materiais. As vigas são formadas por perfis soldados, cujas

propriedades geométricas são apresentadas na Tabela 16. Os pilares possuem a dimensão 300x300 mm.

TABELA 16 – Propriedades geométricas das vigas metálicas

Vigas	Perfil PS (mm)	Área (m ²)	Iz (m ⁴)	Iy (m ⁴)	Ix (m ⁴)	Y _{CG} (m)
V1	500x200x9,5/25x9,5	0,011322	2,303x10 ⁻⁵	4,3499x10 ⁻⁴	1,232x10 ⁻⁶	0,311
V2	500x250x8/16x8	0,009808	3,125x10 ⁻⁵	4,0570x10 ⁻⁴	4,65x10 ⁻⁷	0,297
V3	500x200x16/25x9,5	0,012561	2,737x10 ⁻⁵	5,3408x10 ⁻⁴	1,446x10 ⁻⁶	0,281
V4	500x250x8/19x8	0,010534	3,517x10 ⁻⁵	4,2896x10 ⁻⁴	6,95x10 ⁻⁷	0,310
V5	500x150x6,3/16x6,3	0,006355	6,28x10 ⁻⁶	2,3805x10 ⁻⁴	2,57x10 ⁻⁷	0,302
V6	500x200x6,3/16x6,3	0,007469	1,4877x10 ⁻⁵	2,9459x10 ⁻⁴	3,296x10 ⁻⁷	0,310
V7	500x300x16x8	0,013344	7,2x10 ⁻⁵	6,3075x10 ⁻⁴	8,99x10 ⁻⁷	0,250
V8	500x200x8/19x8	0,009184	1,802	3,6023x10 ⁻⁴	5,72x10 ⁻⁷	0,305
V9	500x200x6,3/12,5x6,3	0,006792	1,254x10 ⁻⁵	2,7158x10 ⁻⁴	1,87x10 ⁻⁷	0,293
V10	500x250x19/25x9,5	0,015332	5,73x10 ⁻⁵	6,9579x10 ⁻⁴	2,0x10 ⁻⁶	0,271
V11	500x150x6,3x6,3	0,00496	3,554x10 ⁻⁶	1,7596x10 ⁻⁴	6,56x10 ⁻⁸	0,250
V12	500x150x6,3/12,5x6,3	0,05852	5,3x10 ⁻⁶	2,1969x10 ⁻⁴	1,5x10 ⁻⁷	0,287
V13	500x250x12,5/25x12,5	0,015156	4,89x10 ⁻⁵	6,1076x10 ⁻⁴	1,766x10 ⁻⁶	0,295
V14	500x250x12,5/19x8	0,011623	4,104x10 ⁻⁵	5,1751x10 ⁻⁴	8,14x10 ⁻⁷	0,282
V15	500x200x12,5x6,3	0,007992	1,6677x10 ⁻⁵	3,534x10 ⁻⁴	3,0x10 ⁻⁷	0,250
V16	500x250x9,5/12,5x6,3	0,008511	2,866x10 ⁻⁵	3,8234x10 ⁻⁴	2,74x10 ⁻⁷	0,271

Os perfis metálicos possuem aço com limite de escoamento de 300 Mpa e módulo de elasticidade de 205000MPa. O concreto da laje possui resistência característica à compressão de 18 Mpa e módulo de elasticidade de 22270 Mpa, com base na NBR6118 (1978). O peso próprio do piso por unidade de área é de 2,7kN/m² e o peso dos participantes por unidade de área é apresentado na Tabela 17.

No modelo de elementos finitos utilizado, a laje de concreto é simulada por elementos de casca e as vigas metálicas com elementos de barra. Os deslocamentos dos nós dos dois tipos de elementos foram compatibilizados de forma a se obter o comportamento misto.

O carregamento dinâmico representativo da atividade rítmica é simulado através de carregamentos harmônicos, onde se considera a frequência básica da excitação e alguns de seus múltiplos. Conforme MURRAY *et al.* (1997) alguns valores de frequências e coeficientes dinâmicos para diversas atividades rítmicas são mostrados na Tabela 17.

TABELA 17 – Parâmetros dinâmicos para atividades rítmicas

Atividade	Frequência da excitação f , Hz	Coefficiente Dinâmico, α_i	Peso dos Participantes $W_p(N/m^2)$
Shows ou Evento esportivo			
1° Harmônico	1,5 – 3,0	0,25	1500
2° Harmônico	3,0 – 5,0	0,05	1500
Dança			
1° Harmônico	1,8 – 2,8	0,50	600
2° Harmônico	3,6 – 5,6	0,10	600
Aeróbica			
1° Harmônico	2,0 – 2,75	1,5	200
2° Harmônico	4,0 – 5,50	0,6	200
3° Harmônico	6,0 – 8,25	0,1	200

Limite de aceleração recomendado para vibrações devidas a atividades rítmicas: 4 a 7% de g , sendo g a aceleração da gravidade, $9,807m/s^2$ (Allen, 1990).

5.3.1 Tipo de Ligações

A análise dinâmica do piso misto é realizada observando-se a influência do tipo de ligação utilizada, ou seja, ligação flexível, semi-rígida ou rígida. As ligações mistas serão representadas, no modelo computacional, por molas de rigidezes devidamente calculadas de forma a representarem o comportamento da ligação. A FIG.39 mostra a

posição das ligações no sistema de piso em questão. Para a representação da ligação flexível, a rigidez das ligações será adotada com $k = 1 \times 10^{-6} \text{Nm/rad}$.

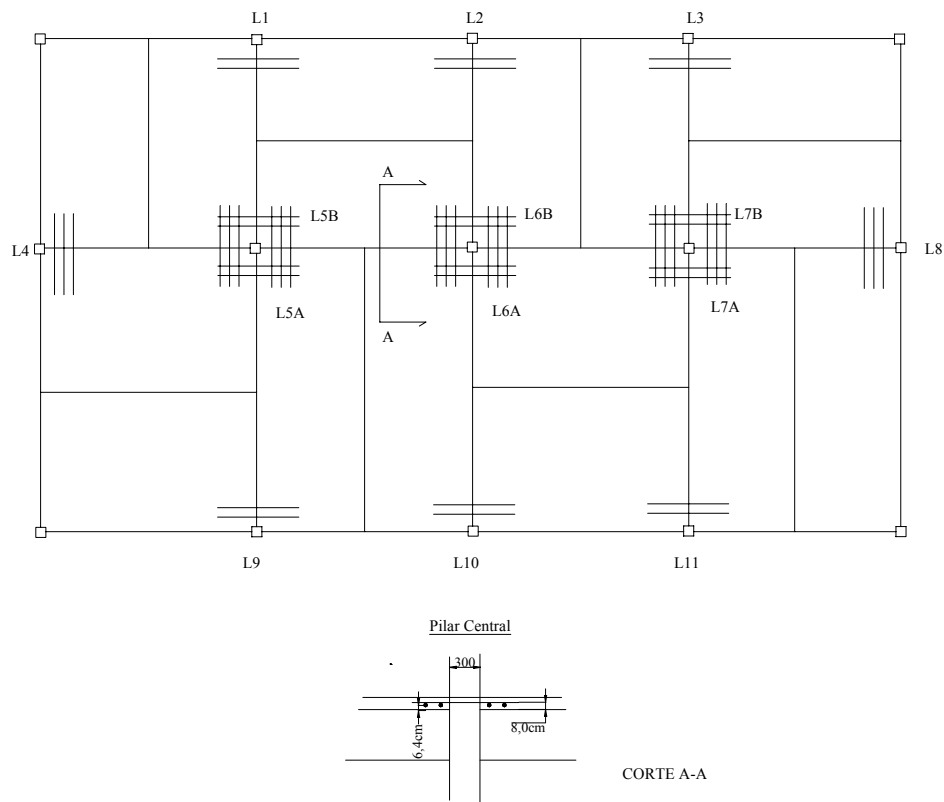


FIGURA 39 – Locação das Ligações Mistas

Para consideração das ligações semi-rígidas será adotado um modelo simplificado, onde a rigidez da mola correspondente à ligação será considerada a mesma para momento negativo ou positivo. Esta consideração é satisfatória, pois a flutuação de tensões é pequena na análise dinâmica (FIG.40).

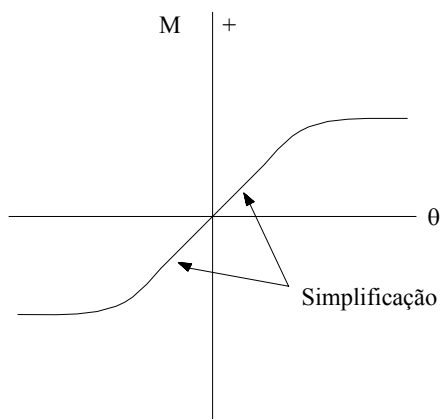


FIGURA 40 – Diagrama M-θ da ligação flexível

O cálculo das ligações mistas foi realizado segundo recomendações de QUEIROZ (2001) como segue.

Cálculo das Ligações Mistas

A classificação de uma ligação, seguindo a análise elástica, baseia-se em sua rigidez. Normalmente, uma ligação mista tem grande rigidez inicial sem, no entanto, superar a resistência à flexão da viga mista por ela suportada, sendo, portanto, uma ligação de resistência parcial. Ligações de resistência parcial devem ter capacidade de rotação suficiente para não sofrerem colapso antes que a viga atinja uma determinada situação prevista (QUEIROZ (2001)).

A rigidez inicial de uma ligação mista pode ser obtida segundo a Eq. (3.1),

$$\frac{M}{\theta} = \frac{(d+y)^2}{\left(\frac{1}{K_r} + \frac{1}{K_i} + \frac{1}{K_c}\right)} + c$$

Neste exemplo, a rigidez rotacional, c , das cantoneiras da alma está sendo considerada nula.

Segundo QUEIROZ (2001), para o cálculo de uma ligação mista deve-se dividir os componentes da ligação mista em três grupos: barras da armadura, conectores de cisalhamento e ligação metálica. A partir da combinação das propriedades dos componentes da ligação determinar-se-á as características da ligação como um todo.

A seguir é apresentado em detalhes o cálculo de uma das ligações mistas, utilizando as expressões desenvolvidas no Capítulo 3.

Ligação L1 – Vigas V1 e V2

- Barras da armadura (2 ϕ 16.0)

$$K_r = \frac{2A_s E_s}{h_c}$$

$$A_s = 4,02 \text{ cm}^2$$

$$h_c = 30,0 \text{ cm} \quad \therefore \quad K_r = 5494 \text{ kN} / \text{cm}$$

Resistência última

$$P_u = f_{ys} A_s = 50 \cdot 4,02 = 201 \text{ kN}$$

- Conectores de cisalhamento (ϕ 19,0 mm)

Resistência do conector de cisalhamento = 68kN

$$K_c = \frac{nK_{sc}}{\alpha}$$

$$n \geq \frac{201}{68} = 2,95 \quad \therefore \text{Adotar } n=3$$

$$K_{sc} = 1000 \text{ kN} / \text{cm} \quad \text{para conectores de } \phi = 19\text{mm}$$

1) Viga V1 – 500x200x9,5/25x9,5

$$A_a = 113,22 \text{ cm}^2$$

$$I_a = 43499 \text{ cm}^4$$

$$\alpha = \nu - \frac{(\nu - 1)(d + y)}{[D_s(\xi + 1)]}$$

$$\nu = \left[\frac{(\xi + 1)nK_{sc}L_1(D_s)^2}{(EI_a)} \right]^{1/2}$$

$$L_1 \cong 117 \text{ cm}$$

$$D_s = \frac{50}{2} + 8 = 33 \text{ cm}$$

$$\xi = \frac{I_a}{D_s^2 A_s} = 9,94$$

$$\nu = 2,166 \therefore \alpha = 1,979$$

$$K_c = 1516 \text{ kN / cm}$$

2) Viga V2 – 500x250x8/16x8

$$A_a = 98,08 \text{ cm}^2$$

$$I_a = 40570 \text{ cm}^4$$

$$L_1 \cong 117 \text{ cm}$$

$$D_s = \frac{50}{2} + 8 = 33 \text{ cm}$$

$$\xi = \frac{I_a}{D_s^2 A_s} = 9,27$$

$$\nu = 2,173 \therefore \alpha = 1,972$$

$$K_c = 1521 \text{ kN / cm}$$

$$P_u = nP_{rk} = 3 \cdot 68 = 204 \text{ kN} > 201 \text{ kN}$$

- Ligação inferior

$$K_i = \frac{n}{\left(\frac{1}{K_{p1}} + \frac{1}{K_{p2}} + \frac{1}{K_b} \right)}$$

Parafuso ϕ 1"

$n = 4$ (número de parafusos)

$$K_{p1} = 24K_s K_{t1} d_b f_{u1} \quad \therefore \quad K_{p1} = 3857 \text{ kN / cm}$$

$$K_{p2} = 24K_s K_{t2} d_b f_{u2}$$

$$K_b = \frac{16 f_{ub} d_b^2}{d_m}$$

1) Viga V1 – 500x200x9,5/25x9,5

$$K_{p2} = 6361 \text{ kN / cm}$$

2) Viga V2 – 500x250x8/16x8

$$K_{p2} = 4071 \text{ kN / cm}$$

$$K_b = 5323 \text{ kN / cm}$$

Sendo a rigidez da ligação inferior dada pela equação (3.4), tem-se:

1) Viga V1 – 500x200x9,5/25x9,5

$$K_i = 6619 \text{ kN / cm}$$

2)Viga V2 – 500x250x8/16x8

$$K_i = 5774 \text{ kN} / \text{cm}$$

- Rigidez inicial da ligação mista

1)Viga V1 – 500x200x9,5/25x9,5

$$\frac{M}{\theta} = 3.388.644 \text{ kNcm} / \text{rad}$$

2)Viga V2 – 500x250x8/16x8

$$\frac{M}{\theta} = 3.321.914 \text{ kNcm} / \text{rad}$$

Rigidez Equivalente da Ligação Mista

Para que o funcionamento da ligação seja o mais real possível considerar-se-á que a rigidez final da mola será a combinação em série das rigidezes correspondentes a cada viga atuante na ligação.

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{3.388.644} + \frac{1}{3.321.914} \quad \therefore \quad K = 1.677.474 \text{ kNcm} / \text{rad}$$

As rigidezes correspondentes às demais ligações são calculadas de forma semelhante e seus valores são apresentados na Tabela 18.

TABELA 18 – Rigidezes das Ligações Mistas

Rigidez das Ligações	
Ligação	Rigidez, k (Nm/rad)
Ligação L1	16774740
Ligação L2	16734500
Ligação L3	21973500
Ligação L4	23505980
Ligação L5 A	40499040
B	25951410
Ligação L6 A	40499040
B	25951410
Ligação L7 A	40549620
B	25951410
Ligação L8	23572390
Ligação L9	16637820
Ligação L10	16715440
Ligação L11	16724350

Para as ligações rígidas as molas correspondentes às ligações têm rigidezes infinitas. Situação similar é obtida impedindo-se a rotação relativa dos nós das extremidades das molas.

5.3.2 Análise dinâmica

A análise dinâmica foi realizada em duas etapas para efeito de comparação dos resultados. Foi considerado um fator de amortecimento, ζ , de 0,06 para toda a estrutura.

Etapa 1

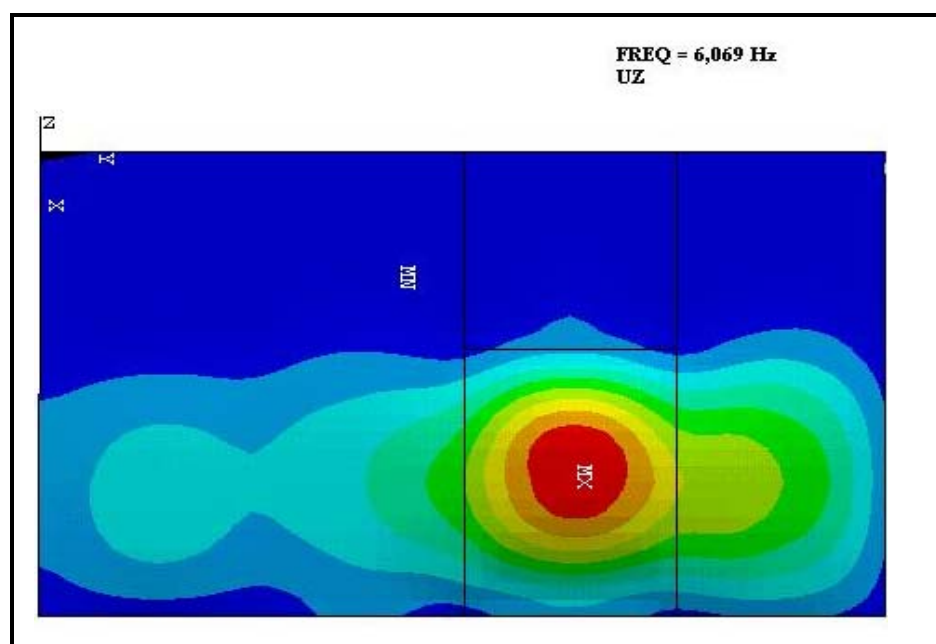
Na análise dinâmica do piso, várias hipóteses de carregamento foram avaliadas. O piso foi verificado na situação inicial (lajes não revestidas, estrutura sem sobrecarga) e na situação final (pisos acabados, estrutura com sobrecarga) obtendo-se assim as primeiras frequências naturais e a aceleração máxima no piso.

Para a situação inicial as primeiras frequências naturais do piso são apresentadas na Tabela 19.

TABELA 19 – Frequências naturais do piso

Situação Inicial			
Frequências (Hz)	Ligação flexível	Ligação semi-rígida	Ligação rígida
f_1	6,069	6,238	6,408
f_2	6,136	6,262	6,425
f_3	6,457	6,558	6,659

Os modos de vibração correspondentes às primeiras frequências naturais do piso com ligações flexíveis são ilustrados na FIG.41.



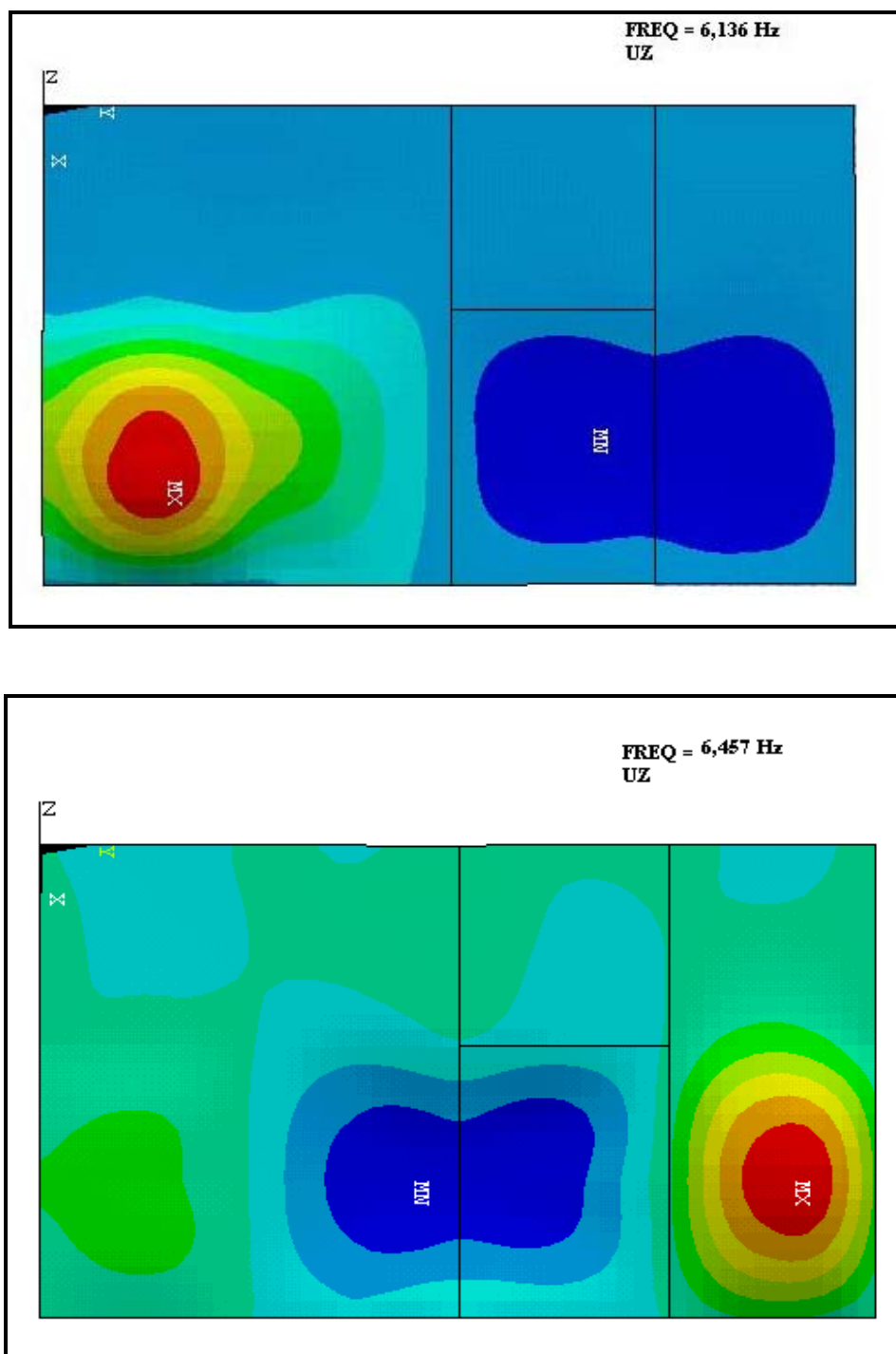


FIGURA 41 –Frequências naturais do piso com ligações flexíveis

Na análise da situação final, vários carregamentos foram aplicados sobre todo o piso a fim de avaliar os níveis de aceleração e desconforto no piso.

TABELA 20 – Frequência natural para situação final de carregamento, show

Shows			
Frequências (Hz)	Ligação flexível	Ligação semi-rígida	Ligação rígida
f_1	4,180	4,297	4,414
f_2	4,230	4,314	4,425
f_3	4,455	4,522	4,587

TABELA 21 – Frequência natural para situação final de carregamento, dança

Dança			
Frequências (Hz)	Ligação flexível	Ligação semi-rígida	Ligação rígida
f_1	4,495	4,621	4,746
f_2	4,548	4,639	4,758
f_3	4,790	4,862	4,933

TABELA 22 – Frequência natural para situação final de carregamento, aeróbica

Aeróbica			
Frequências (Hz)	Ligação flexível	Ligação semi-rígida	Ligação rígida
f_1	4,659	4,790	4,920
f_2	4,714	4,809	4,933
f_3	4,964	5,039	5,113

As acelerações máximas foram obtidas através da análise harmônica do piso. Em todas as análises a atividade que apresentou um maior nível de aceleração foi a aeróbica, com uma aceleração máxima de 28,0% de g.

Os resultados apresentados a seguir foram obtidos para o piso com ligação semi-rígida, o que melhor representa a estrutura real.

Além da massa da estrutura considerou-se uma massa adicional em todo o pavimento de 20 kg/m², 60 kg/m² e 150 kg/m² devido ao público participante das atividades aeróbica, dança e shows, respectivamente. As acelerações máximas, a_m , obtidas no piso foram de:

Atividade: aeróbica

$$\begin{array}{llll} f_1 = 2,40 \text{ Hz} & u_1 = 0,1099 \times 10^{-2} \text{ m} & a_1 = 0,2498 \text{ m/s}^2 & a_1/g = 0,02548 \\ f_2 = 4,80 \text{ Hz} & u_2 = 0,2955 \times 10^{-2} \text{ m} & a_2 = 2,6882 \text{ m/s}^2 & a_2/g = 0,27411 \\ f_3 = 7,20 \text{ Hz} & u_3 = 0,7497 \times 10^{-4} \text{ m} & a_3 = 0,1534 \text{ m/s}^2 & a_3/g = 0,01564 \end{array}$$

$$a_m = 2,763 \text{ m/s}^2 \therefore a_m/g = 0,282$$

Atividade: dança

$$\begin{array}{llll} f_1 = 2,30 \text{ Hz} & u_1 = 0,1094 \times 10^{-2} \text{ m} & a_1 = 0,2285 \text{ m/s}^2 & a_1/g = 0,02330 \\ f_2 = 4,60 \text{ Hz} & u_2 = 0,1478 \times 10^{-2} \text{ m} & a_2 = 1,2348 \text{ m/s}^2 & a_2/g = 0,126 \end{array}$$

$$a_m = 1,299 \text{ m/s}^2 \therefore a_m/g = 0,133$$

Atividade: shows, eventos esportivos

$$\begin{array}{llll} f_1 = 2,10 \text{ Hz} & u_1 = 0,1351 \times 10^{-2} \text{ m} & a_1 = 0,2353 \text{ m/s}^2 & a_1/g = 0,02399 \\ f_2 = 4,20 \text{ Hz} & u_2 = 0,1741 \times 10^{-2} \text{ m} & a_2 = 1,2122 \text{ m/s}^2 & a_2/g = 0,1236 \end{array}$$

$$a_m = 1,280 \text{ m/s}^2 \therefore a_m/g = 0,131$$

A FIG. 42 representa o deslocamento máximo sofrido pela viga V11, em destaque na FIG.38, quando o piso está sujeito ao carregamento dinâmico, $w_p = 200 \text{ N/m}^2$. Utilizando-se os respectivos coeficientes dinâmicos chega-se aos deslocamentos apresentados.

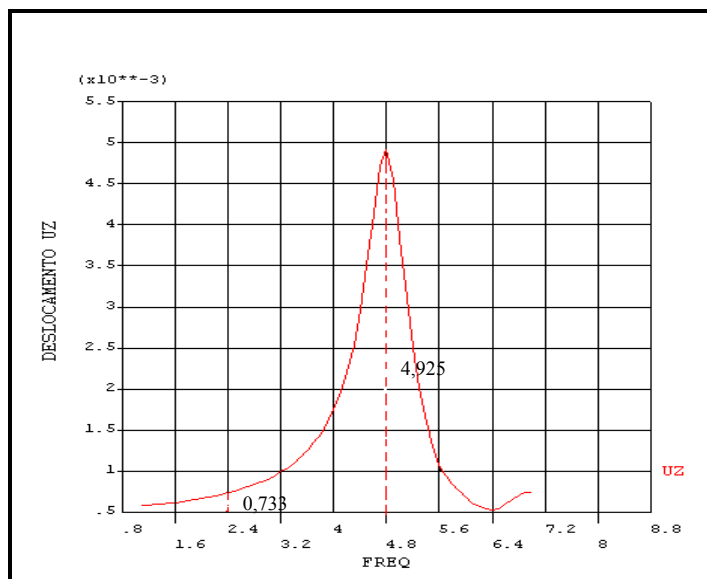


FIGURA 42 – Deslocamento Uz no ponto central da viga V11

$$f_1 = 2,40\text{Hz}$$

$$u_1 = 1,50 \times 0,733 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$u_1 = 0,1099 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$f_2 = 4,80\text{Hz}$$

$$u_2 = 0,05 \times 4,925 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$u_2 = 0,2955 \times 10^{-2} \text{ m}$$

Etapa2

Análise dinâmica, segundo métodos simplificados de cálculo, do sistema de piso misto apresentado. Foi realizada para o cálculo da primeira frequência natural, cálculo do deslocamento máximo e aceleração máxima da estrutura considerando-se que a mesma esteja reduzida a um sistema UGL. Foram considerados os seguintes dados:

Espessura da laje = 12 cm, $f_{ck} = 18 \text{ Mpa}$, $E_c = 22270 \text{ Mpa}$, $E_a = 205000 \text{ MPa}$;

$$n = E_a/E_c = 9,2.$$

Esta análise foi realizada para o painel de piso que compreende a viga V11, em destaque na FIG.38, considerado o ponto crítico do piso. Este painel é apresentado na FIG. 43.

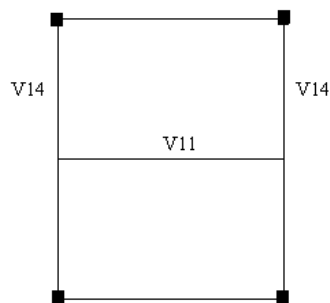


FIGURA 43 – Painel de piso avaliado pelo método simplificado

A massa das lajes incorporadas às vigas, que influencia as frequências naturais das mesmas, foram determinadas a partir das reações das lajes obtidas pelo processo de Kalmanok. Além da massa da estrutura considerou-se uma massa adicional devido ao público sobre o piso de 20 kg/m^2 para a análise da atividade aeróbica, 60 kg/m^2 para a análise da atividade dança e 150 kg/m^2 para a análise da atividade shows e eventos esportivos.

As larguras efetivas das faixas de laje colaborantes para a rigidez do conjunto foram determinadas segundo recomendações da NBR8800 (1986).

A seguir são apresentados os resultados obtidos para as vigas V11 e V14.

VIGA V11 – PS $500 \times 150 \times 6,3 \times 6,3$ ($A=49,6 \text{ cm}^2$)

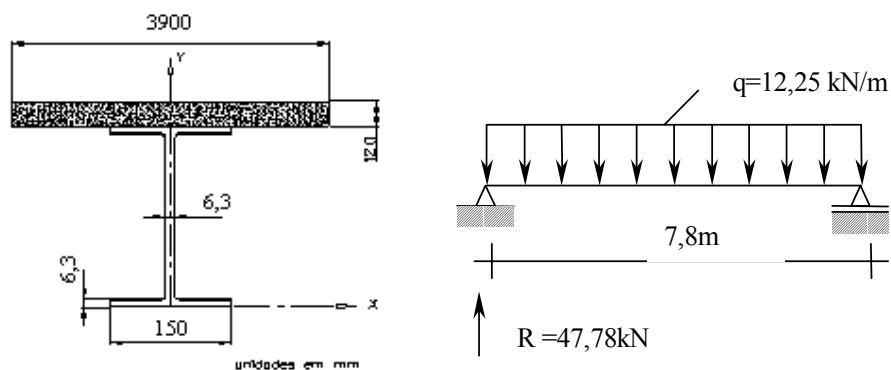


FIGURA 44 – Seção transversal e esquema estrutural da viga V11

Largura efetiva da laje, transformada = $390/9,2 = 42,4\text{cm}$

Momento de inércia da seção transformada = 66317cm^4

Vão da viga (bi-apoiada) = $7,80\text{m}$

Atividade: aeróbica

Massa por metro linear, da viga mista = 1250 kg/m

Primeira frequência natural = $f_{V11} = 8,51\text{Hz}$

Atividade: dança

Massa por metro linear, da viga mista = 1403kg/m

Primeira frequência natural = $f_{V11} = 8,033\text{Hz}$

Atividade: shows, eventos esportivos

Massa por metro linear, da viga mista = 2121kg/m

Primeira frequência natural = $f_{V11} = 6,533\text{Hz}$

VIGA V14 – PS $500 \times 250 \times 12,5/19 \times 8,0$ ($A=116,2\text{ cm}^2$)

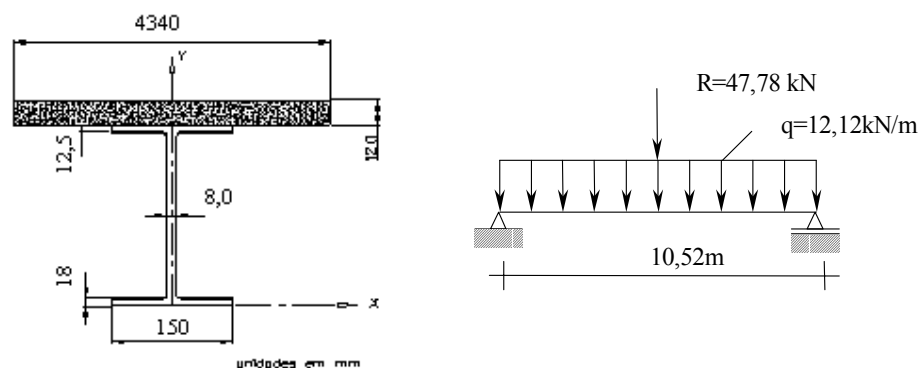


FIGURA 45 – Seção transversal e esquema estrutural da viga V14

Largura efetiva da laje, transformada = $434/9,2 = 47,17\text{cm}$

Momento de inércia da seção transformada = 170095cm^4

Vão da viga (bi-apoiada) = $10,52\text{m}$

Atividade: aeróbica

Massa por metro linear, da viga mista = 1700kg/m

Primeira frequência natural = $f_{V14} = 6,42$ Hz

Atividade: dança

Massa por metro linear, da viga mista = 1900kg/m

Primeira frequência natural = $f_{V14} = 6,08$ Hz

Atividade: shows, eventos esportivos

Massa por metro linear, da viga mista = 2092kg/m

Primeira frequência natural = $f_{V14} = 5,8$ Hz

Combinação de Frequências

Atividade: aeróbica

Frequência resultante: $1/f^2 = 1/f_{V11}^2 + 1/f_{V14}^2$, logo $f = 5,125$ Hz

Atividade: dança

Frequência resultante: $1/f^2 = 1/f_{V11}^2 + 1/f_{V14}^2$, logo $f = 4,85$ Hz

Atividade: shows, eventos esportivos

Frequência resultante: $1/f^2 = 1/f_{V11}^2 + 1/f_{V14}^2$, logo $f = 4,33$ Hz

A aceleração máxima, a_m , obtida a partir da Eq. (4.16) e da Eq. (4.17) foi de:

Atividade: aeróbica

$$f_1 = 2,6 \text{ Hz}$$

$$a_1/g = 0,042$$

$$f_2 = 5,2 \text{ Hz}$$

$$a_2/g = 0,141$$

$$f_3 = 7,8 \text{ Hz}$$

$$a_3/g = 0,013$$

$$a_m/g = 0,158$$

Atividade: dança

$$f_1 = 2,45 \text{ Hz}$$

$$a_1/g = 0,037$$

$$f_2 = 4,90 \text{ Hz}$$

$$a_2/g = 0,180$$

$$a_m/g = 0,191$$

Atividade: shows, eventos esportivos

$$f_1 = 2,15 \text{ Hz}$$

$$a_1/g = 0,029$$

$$f_2 = 4,30 \text{ Hz}$$

$$a_2/g = 0,146$$

$$a_m/g = 0,154$$

Devido à dificuldade de se aplicar o efeito das ligações mistas no método simplificado de cálculo, serão utilizados, para a devida comparação dos resultados obtidos pelos métodos computacional e simplificado, os resultados referentes ao piso com ligações flexíveis. Estes resultados são apresentados nas Tabela 23 e Tabela 24.

TABELA 23 – Comparação das 1^{as} frequências naturais

1 ^{as} FREQUÊNCIAS NATURAIS (Hz)			
ATIVIDADE MÉTODO	AERÓBICA	DANÇA	EVENTOS ESPORTIVOS
COMPUTACIONAL	4,66	4,49	4,18
SIMPLIFICADO	5,12	4,85	4,33
ERRO (%)	9,8	8,0	3,6

Os resultados apresentados nos métodos computacional e simplificado para a obtenção da frequência natural apresentaram boa conformidade como mostra a Tabela 23. No entanto, os valores das acelerações apresentaram uma grande diferença devido às frequências naturais obtidas estarem muito próximas da ressonância.

TABELA 24 – Comparação das acelerações máximas

ACELERAÇÕES MÁXIMAS (a_m/g)			
ATIVIDADE	MÉTODO COMPUTACIONAL	MÉTODO SIMPLIFICADO	ERRO (%)
AERÓBICA $q=0,2 \text{ kN/m}^2$	0,282	0,158	78,5
DANÇA $q=0,6 \text{ kN/m}^2$	0,133	0,191	14,36
SHOWS $q=1,5 \text{ kN/m}^2$	0,131	0,154	17,56

Neste exemplo, foi realizada uma comparação dos esforços obtidos em uma análise estática com um coeficiente de impacto e uma análise dinâmica, e também uma avaliação da fadiga do material.

Peças de aço quando sujeitas a esforços variáveis podem sofrer colapso a uma tensão inferior à resistência obtida em ensaios estáticos, através da propagação de fissuras de fadiga.

A resistência à fadiga de peças estruturais é influenciada basicamente por pontos de concentração de tensões, pelo número de ciclos de aplicação das cargas e pela faixa de variação de tensões (PFEIL (1982); ANDRADE (1994)).

A verificação à fadiga é feita comparando-se uma faixa de tensões atuantes, com uma faixa admissível determinada de acordo com recomendações da NBR 8800 (1986). para não haver fadiga, a faixa de tensões atuantes deve igual ou inferior à faixa admissível. Segundo a NBR 8800 (1986), a análise da fadiga para emenda soldada sem esmerilhamento ou enrijecedor soldado à mesa inferior (linha C), sujeita a uma sollicitação de mais de 2×10^6 ciclos resiste a uma faixa admissível de variação de tensão de $\Delta\sigma_{adm}=69\text{Mpa}$.

Nas análises foram utilizadas as seguintes condições de carregamento:

1) Carregamento estático

A análise estática do piso foi realizada considerando-se uma sobrecarga, segundo NB-5 (1978), de $3,0 \text{ kN/m}^2$ aplicada em todo o piso. Foi utilizado um coeficiente de impacto igual a 2 para consideração do efeito dinâmico, procedimento comumente utilizado por projetistas.

2) Carregamento dinâmico

Foram realizadas as análises estática e dinâmica do piso. Para a análise estática foi considerada uma sobrecarga de $3,0 \text{ kN/m}^2$, sem coeficiente de impacto, e para a análise dinâmica foi considerado um carregamento de $1,50 \text{ kN/m}^2$.

Nas Tabelas 25 e 26 estão relacionados os valores dos esforços cortantes e tensões normais nos perfis de aço que compõem o painel de piso apresentado na FIG.38. O índice "E" indica a resposta correspondente à massa incorporada sujeita à aceleração g , e o índice "D" indica a resposta dinâmica.

TABELA 25 – Forças cortantes máximas nos perfis de aço em kN

Viga	Condição 1	Condição2				
		V_E	V_D	V_E+V_D	V_D/V_E (%)	ΔV
V14	184,1	122,7	16,1	138,8	13,1	32,2

TABELA 26 – Tensões normais nos perfis de aço em Mpa

Viga	Condição 1	Condição2				
		σ_E	σ_D	$\sigma_E+\sigma_D$	σ_D/σ_E (%)	σ_V
V11	140,3	93,6	15,6	109,2	16,7	31,2
V14	185,1	123,4	18,2	141,6	14,7	36,4

5.3.3 Análise dos resultados

A partir da análise dos resultados pode-se observar que as acelerações máximas obtidas, para o piso são muito superiores aos valores recomendados para atividades rítmicas.

Visando garantir e melhorar o conforto dos usuários, as acelerações devem ser reduzidas. Para isto, pode-se, por exemplo, executar reforço nas vigas metálicas das regiões de maior aceleração.

A utilização das ligações mistas ocasionou um aumento na frequência natural do piso. Isto é bastante interessante para a avaliação dinâmica do piso, pois diminui a probabilidade da ocorrência da ressonância.

Nas comparações dos esforços obtidos pelas análises estática e dinâmica observou-se que a análise estática considerando o coeficiente de impacto de 2 apresentou, para este piso, resultados conservadores. Na avaliação da fadiga pôde-se observar que a maior faixa de variação de tensões normais no centro das vigas ($\Delta\sigma = 36,4 \text{ Mpa}$) é inferior ao valor permitido pela NBR 8800 (1986), $\Delta\sigma_{adm}=69\text{Mpa}$.

6

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

6.1 – Introdução

A execução de estruturas de piso mais esbeltas, vencendo grandes vãos livres, juntamente com a popularização de atividades rítmicas ocasionaram um aumento da incidência de problemas de vibração em pisos. Devido à dificuldade existente para a determinação de parâmetros dinâmicos utilizados em uma análise dinâmica, a maioria dos projetistas limita-se a efetuar a análise estática das estruturas.

Visando ampliar a utilização da análise dinâmica em sistemas estruturais foi realizado, neste trabalho, a comparação entre métodos simplificados de cálculo e métodos computacionais, para a validação dos resultados obtidos através de métodos simplificados de cálculo.

Para a realização deste estudo foi escolhido o sistema estrutural misto devido a sua crescente utilização no mercado de construção brasileiro.

Este sistema, em um mercado altamente competitivo, proporciona soluções econômicas, com menor gasto de material e mão de obra, além de menor tempo de execução. A escolha deste sistema foi conveniente, também, por proporcionar a execução de estruturas esbeltas, as quais são mais susceptíveis a vibrações devido a excitações dinâmicas.

Em uma análise dinâmica de um sistema de piso a verificação dos estados limites últimos e de utilização do mesmo são realizadas levando-se em conta duas grandezas básicas: a largura efetiva da laje de concreto que trabalha com a viga de aço e a carga assumida pela viga mista (NBR 8800 (1986)). Tais grandezas variam em função das características do piso e, em geral, têm valores diferentes para os dois tipos de estados limites.

Na análise computacional o Método dos Elementos Finitos (MEF), devido a sua praticidade e eficiência, foi utilizado para as análises dinâmica e estática dos pisos. Através do MEF, o piso pode ser analisado como um todo e as influências das grandezas básicas (carga assumida pela viga e largura efetiva da laje de concreto) são automaticamente avaliadas, sem a necessidade de se recorrer à simplificações de normas. O programa computacional utilizando elementos finitos, ANSYS 5.7, foi utilizado para o desenvolvimento do modelo numérico do piso misto e para a realização das análises.

Na concepção do modelo numérico, considerou-se que as seções planas permanecem planas após a deformação e que a laje de concreto trabalhe em conjunto com as vigas de aço através da criação de um trecho rígido entre os nós das vigas e das lajes de concreto.

A análise dinâmica do piso misto foi realizada aplicando-se um carregamento representativo de uma atividade rítmica sobre o piso. A maioria dos carregamentos que originam problemas de vibrações em pisos são periódicos, que através da série de Fourier podem ser representados por uma combinação de várias forças harmônicas.

Neste trabalho pôde-se observar que a decomposição em série de Fourier permite uma análise fácil para a obtenção das respostas da estrutura em termos de deslocamentos e acelerações. Este método é de grande importância, pois permite que o projetista tenha um sentimento da adequabilidade de seu projeto quanto a conforto, esforços, modelo estrutural utilizado e da necessidade da utilização de medidas corretivas.

O coeficiente de participação dos harmônicos de excitação, α_i é obtido experimentalmente pela medição das excitações causadas pelas atividades rítmicas tais como caminhar, dançar, pular ou atividades aeróbicas. Neste trabalho foram utilizados os coeficientes sugeridos por ALLEN *et al.* (1985), ALLEN e MURRAY (1993) e MURRAY *et al.* (1997), os quais melhor representaram as atividades acima mencionadas.

Vários métodos simplificados de cálculo permitem a análise dos pisos quanto ao conforto humano, para a utilização de uma atividade específica e para adaptação de equipamentos sensíveis. Geralmente, estas análises requerem o cálculo da primeira frequência natural do piso e da amplitude máxima de aceleração, velocidade ou deslocamento para uma referida excitação. Uma estimativa sobre o amortecimento do piso também é necessária.

Observou-se que para estruturas mais simples os modelos simplificados podem ser utilizados com a obtenção de excelentes resultados para um pré-dimensionamento. Entretanto, deve-se ter cuidado para que o modelo matemático adotado represente adequadamente o sistema real, pois uma variação em torno de 20% nas frequências naturais pode levar a condições de ressonância, gerando dificuldades na avaliação dos resultados para estruturas com frequências naturais mais baixas.

Com o método adotado para a determinação da frequência natural fundamental da estrutura o erro médio de 8,23% obtido pode ser aceito e indicado para análises preliminares por fornecer valores conservativos. Este método aproximado utiliza a

fórmula de Dunkerley, a qual fornece bons resultados para sistemas onde a primeira frequência natural é a predominante.

No entanto, para a verificação dos níveis de aceleração os resultados do método simplificado foram muito ruins, pois as frequências do piso estavam muito próximas da frequência ressonante. Observou-se que ao utilizar-se a frequência natural obtida pelo método computacional no método simplificado, para a determinação das acelerações máximas, houve uma melhora significativa dos resultados.

O método utilizado para a obtenção do deslocamento estático, por exemplo, apresentou uma variação em torno de 11,74% nos resultados.

No capítulo 4 foi apresentada uma aplicação do cálculo de uma aceleração efetiva, ou seja, quando se considera a contribuição de vários múltiplos componentes harmônicos, e pôde-se observar que este método apresentou bons resultados quando comparado aos resultados obtidos em uma análise transiente. A influência do ângulo de fase em uma combinação de frequências foi, também, avaliada e pôde-se observar que sua presença pode ser desconsiderada na análise, pois não ocasionou alterações significativas nos resultados.

Outro sistema misto utilizado neste trabalho foi a ligação mista. Apesar de ainda ser pouco utilizada no mercado brasileiro, a ligação mista oferece grande economia, uma vez que ao propiciar uma melhor distribuição de cargas entre os elementos estruturais permite, em alguns casos, utilizar vigas menores para uma dada solicitação. Do ponto de vista dinâmico as ligações mistas apresentaram um bom funcionamento representando de forma adequada uma estrutura real. A sua utilização proporcionou um aumento de 2,75 % na frequência natural do piso. Este valor apesar de ser pouco significativo, pode representar uma melhora das respostas dinâmicas de um piso submetido a atividades rítmicas.

O bom desempenho obtido pelos métodos simplificados de análise mostrou a importância de sua utilização em avaliações preliminares. No entanto, os sistemas de piso complexos devem ser avaliados de forma mais precisa, devido ao grande número de variáveis que envolvem uma análise dinâmica. Logo, a utilização de programas computacionais baseados em elementos finitos é a maneira mais indicada para avaliar sistemas estruturais sujeitos a excitações dinâmicas.

6.2 – Sugestões para estudos posteriores

Baseando-se nos resultados apresentados, as seguintes sugestões para estudos posteriores podem ser feitas:

- i. Dimensionamento de um isolamento das fontes excitadoras, através da utilização de materiais com alto poder de amortecimento;
- ii. Utilização de materiais que proporcionem ao concreto um maior amortecimento;
- iii. Realizar análises experimentais para obtenção de novos coeficientes de participação dos harmônicos de excitação;
- iv. Verificar a contribuição da forma metálica utilizada nos pisos “slim floor” na rigidez do piso e, conseqüentemente, sua influência sobre as respostas dinâmicas do mesmo;
- v. Realizar análises experimentais para determinação da variação máxima do ângulo de fase.

BIBLIOGRAFIA

AD HOC COMMITTEE ON SERVICEABILITY RESEARCH – *Structural Serviceability: A Critical Appraisal and Research Needs* – Journal of Structural Engineering, Vol. 112, N°.12, 2646-2664, December, 1986.

ALLEN, D.E.; RAINER, J.H.; PERNICA, G. – *Vibration criteria for assembly occupancies* – Canadian Journal of Civil Engineering 12, 617-623. ‘ 1985.

ALLEN, D. E. – *Floor vibration from aerobics* – Canadian Journal of Civil Engineering 17, 771-779. ‘ 1990a.

ALLEN, D. E. – *Building Vibrations from Human Activities* – Concrete International, 66-73 ‘June 1990b.

ALLEN, D.E.; MURRAY, T.M. – *Design Criterion for Vibrations Due to Walking* – Engineering Journal, American Institute of Steel Construction, FOURTH QUARTER/1993, p.117-129.

ALLEN, D. E.; RAINER J.H. – *CBD – 173 Floor Vibration* – Canadian Building Digest, www.nrc.ca/irc/cbd/cbd173e.html.

ANDRADE, P.B. – *Curso Básico de Estruturas de Aço* – IEA Editora, 1994.

ANSYS – *Engineering Analysis System – Theoretical Manual* – Swanson Analysis Systems Inc., Houston, USA, 1996.

BACHMANN, H. – *Case Studies of Structures with Man-Induced Vibrations* – Journal of Structural Engineering, Vol.118, N°.3, 631-647, March, 1992.

BEARDS, C.F. – *Structural Vibration – Analysis and Damping* – New York, John Wiley & Sons, Inc., 1996.

BERANEK, L. L.; VÉR, I. L. – *Noise and Vibration Control Engineering* – New York, John Wiley & Sons, Inc., 1992.

BRITISH STANDARDS INSTITUTION – *Guide to Evaluation of Human Exposure to Vibration in Buildings (1 Hz to 80 Hz)* – (1989).

CAVERSON, R. G.; WALDRON, P.; WILLIAMS, M. S. – *Review of vibration guidelines for suspended concrete slabs* – Canadian Journal of Civil Engineering 21, 931-938. ‘ 1994.

CHEN, Y. – *Finite Element Analysis for Walking Vibration Problems for Composite Precast Building Floors Using ADINA: Modeling, Simulation and Comparison* – Computers and Structures, vol.72, pp. 109-126, Elsevier Science Ltd.,1999.

CLOUGH, R. W. & PENZIEN, J. – *Dynamics of Structures* – New York, Mc Graw-Hill Inc., 1975.

CRAIG, R. R. Jr. – *Structural Dynamics* – New York, John Wiley & Sons, Inc., 1981.

DE PAULA, F.A.;QUEIROZ, G. – *Uso do MEF na Adaptação de uma Estrutura para Resistir a Solicitações Oriundas de Atividades Rítmicas* – Anais do II Simpósio de Mecânica Computacional, Ouro Preto, 1998.

DE CARVALHO, F.W.L.; DE PAULA, F.A. – *Estudo Comparativo da Resposta Dinâmica em Estruturas Mistas Aço-Concreto Utilizando Diferentes Considerações para o Amortecimento* – Anais do IV Simpósio de Mecânica Computacional, Uberlândia, 2000.

EBRAHIMPOUR, A.; SACK, R.L. – *Modeling Dynamic Occupant Loads* – Journal of Structural Engineering, Vol. 115, Nº.6, 1476-1496, June, 1989.

EBRAHIMPOUR, A.; SACK, R.L. – *Design Live Loads for Coherent Crowd Harmonic Movements* – Journal of Structural Engineering, Vol. 118, Nº.4, 1121-1136, April, 1992.

EBRAHIMPOUR, A.; FITTS, L.L. – *Measuring Coherency of Human Induced Rhythmic Loads Using Force Plates* – Journal of Structural Engineering, Vol. 122, Nº.7, 829-831, July 1996.

ELLINGWOOD, B.; TAILLIN,A. – *Structural Serviceability: Floor Vibrations* – Journal of Structural Engineering, Vol.110, Nº.2, 401-418, February, 1984.

EL-SHEIKH, A. – *Approximate dynamic analysis of space trusses* – Engineering Structures, Vol.22, p.26-38. ‘2000.

ESTEFANI, C.; BRITO, J.L.VL.; DOZ, G. – *Análise Dinâmica da Arquibancada Superior do Estádio Mané Garrincha* – XXII Cilamce - Iberian Latin-American Congress on Computacional Methods inEngineering, 2001.

EUROCODE 4 – *Design of Composite Steel and Concrete Structures* – Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings, European Prestandart, April, 1992.

FAKURY, R.H. – *Notas de Aula* – Estruturas Metálicas II, Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG, 1989.

FOSCHI, R.O.; GUPTA, A. – *Reliability of floors under impact vibration* – Canadian Journal of Civil Engineering 14, 683-689 ‘1987.

FOSCHI, R. O.; NEUMANN, G. A.; YAO, F.; FOLZ, B. – *Floor vibration due to occupants and reliability-based design guidelines* – Canadian Journal of Civil Engineering 22, 471-479 ‘1995.

GENTA, G. – *Vibration of Structures and Machines – Practical Aspects* – Third Edition New York, Springer - Verlag, Inc., 1999.

GÉRADIN, M.; RIXEN, D. – *Mechanical Vibrations – Theory and Application to Structural Dynamics* – Second Edition, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1997.

GREIMANN, L.F.; KLAIBER, F.W. – *Dynamic Forces Induced by Spectators* – Journal of the Structural Division, Vol.104, N°.ST2, 348-351, February, 1978.

HALE, R. – *Design and Development of Vibration Sensitive Equipment* – Response Dynamics, 1999 www.responsedynamics.com.

HANAGAN, L. M.; MURRAY, T. M. – *Active Control Approach for Reducing Floor Vibrations* – Journal of Structural Engineering, 1497-1505 ‘November 1997.

HANAGAN, L. M.; MURRAY, T. M. – *Experimental Implementation of Active Control to Reduce Annoying Floor Vibrations* – Engineering Journal, American Institute of Steel Construction, FOURTH QUARTER/1998, p.123-127.

HATFIELD, F.J. – *Design Chart for Vibration of Office and Residential Floors* – Engineering Journal, American Institute of Steel Construction, FOURTH QUARTER/1992, p.141-144.

HUNAIDI, O.; TREMBLAY, M. – *Traffic-induced building vibrations in Montreal* – Canadian Journal of Civil Engineering 24, 736-753 ‘1997.

INTERNATIONAL STANDARD - ISO 2631-1 – *Mechanical vibration and shock – Evaluation of human exposure to whole – body vibration – Part 1: General requirements.*

INTERNATIONAL STANDARD - ISO 2631-2 – *Evaluation of human exposure to whole – body vibration – Part 2: Continuous and shock- induced vibration in buildings (1 to 80 Hz).*

JOHNSON, R. P. – *Composite Structures of Steel and Concrete – Vol.I, Conrado Monographs, Granada Pub. Ltd., ‘1975.*

KANG, B. S.; CHOI, W.S.; PARK, G.J. – *Structural Optimization under Equivalent Static Loads Transformed from Dynamic Loads Based on Displacement – Computer and Structures, vol.79, pp.145-154, Elsevier Science Ltd., 2001.*

KERR, S. C.; BISHOP, N.W.M. – *Human Induced Loading on Flexible Staircases – Engineering Structures, vol.23, pp.37-45, Elsevier Science Ltd., 2001.*

KORENEV, B. G.; REZNIKOV, L. M. – *Dynamic vibration absorbers: theory and technical applications – New York, John Wiley & Sons, Inc., 1992.*

LENZEN, K.H. – *Vibration of Steel Joist-Concrete Slab Floors – Engineering Journal, American Institute of Steel Construction, July/1966, p.133-136.*

LOPEZ, A.R. – *La Construcion Metálica (2 Tomos) – Traducion de La Obra Alemana ‘Stahlbau’ – Escuela Tecnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid, 1968.*

MATA, L.A.C. – *Análise Não-Linear Pelo Método dos Elementos Finitos de Ligações por Chapa Simples, Levando em Conta o Comportamento Semi-Rígido – Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Engenharia de Estruturas ‘ 1998.*

MEIROVITCH, L. – *Dynamic and Control of Structures* – New York, John Wiley & Sons, Inc., 1990.

MOORE, D.B.; COUCHMAN, G.H. – *The Development of Design Guide for Standardised Composite Connections* – Journal of Constructional Steel Research, 1998, vol46:1-3 Paper nº141.

MULLET, D. L. – *Composite Floor Systems* – Blackwell Science, 1998.

MURRAY, T. M.; ALLEN, D. E.; UNGAR, E. E. – *Floor vibration due to Human Activities* – AISC Steel Design Guide Series, vol 11, 1997.

MURRAY, T.M. – *Acceptability Criterion for Occupant-Induced Floor Vibrations* – Engineering Journal, American Institute of Steel Construction, SECOND QUARTER/1981, p.62-70.

MURRAY, T.M. – *Building Floor Vibrations* – Engineering Journal, American Institute of Steel Construction, THIRD QUARTER/1991, p.102-109.

NBR 6118 – *Projeto e execução de obras de concreto armado* – ABNT, 1978.

NBR8800 – *Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios* – ABNT, 1986.

PAVIC, A.; REYNOLDS, P.; WALDRON, P.; BENNET, K. – *Dynamic Modeling of Post-tensioned Concrete Floors using Finite Element Analysis* – Finite Elements in Analysis and Design, vol.37, pp.305-232, Elsevier Science Ltd., 2001.

PERNICA, G. – *Dynamic load factors for pedestrian movements and rhythmic exercises* – Canadian Acoustics, 18(2), 3-18. '1990.

PFEIL, W. – *Estruturas de Aço* – LTC - Livros Técnicos e Científicos Editoras S.A., 3ª edição '1982.

QUEIROZ, G.; PIMENTA, R.J.; MATA, L.A.C. – *Elementos das Estruturas de Aço-Concreto* – Ed. O Lutador, ‘2001.

RABELO, A.C.N.; JÚNIOR, L.L.; SILVA, M.D. – *Introdução ao Estudo das Lajes e Pilares Usuais dos Edifícios* – Estruturas de Concreto Armado, Faculdade de Engenharia e Arquitetura da FUMEC, 1984.

RAINER, J.H.; SWALLOW, J.C. – *Dynamic behavior of a gymnasium floor* – Canadian Journal of Civil Engineering 13, 270-277 ‘1986.

RAINER, J.H.; PERNICA, G.; ALLEN, D.E. – *Dynamic loading and response of footbridges* – Canadian Journal of Civil Engineering 15, 66-71 ‘1988.

RIBEIRO, S.E.C. – *Análise Não Linear de Sistemas Mistos pelo Método dos Elementos Finitos, Visando a Obtenção de Larguras Efetivas e Carregamentos de Vigas no Estado Limite Último* – Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Engenharia de Estruturas ‘1997.

SAUL, W.E.; TUAN, C.Y. – *Review of Live Loads Due to Human Movements* – Journal of Structural Engineering, Vol.112, N°.5, 995-1005, May, 1986.

SETAREH, M.; HANSON, R.D. – *Tuned Mass Dampers for Balcony Vibration Control* – Journal of Structural Engineering, Vol. 118, N°.3, 723-740, March, 1992.

SETAREH, M.; HANSON, R.D. – *Tuned Mass Dampers to Control Floor Vibration from Humans* – Journal of Structural Engineering, Vol. 118, N°.3, 740-762, March, 1992.

SMITH, I.; CHUI, Y.H. – *Design of Lightweight Wooden Floors to Avoid Human Discomfort* – Canadian Journal of Civil Engineering 15, 254-262 ‘1988.

STEPHENSON, A. C.; HUMPHREYS, A. W. – *Quantification of Steel Floor Vibration and Its Relationship to Human Comfort* – Journal of Constructional Steel Research vol.46, Nos.1-3, pp.106-107, paper number 256, Elsevier Science Ltd., 1998.

TOLAYMAT,R.A. – *A New Approach to Floor Vibration Analysis* – Engineering Journal, American Institute of Steel Construction, FOURTH QUARTER/1988, p.137-143.

TUAN,C.Y.; SAUL, W.E. – *Loads Due to Spectator Movements* – Journal of Structural Engineering, Vol.111, N°2, 418-434, February, 1985.

VECCI, M. A. M. ;FAKURY, R. H.; MAGALHÃES, M. C. – *Análise do Comportamento Dinâmico de Pisos Metálicos Submetidos a Excitações Rítmicas* – Anais do II Simpósio de Mecânica Computacional,Ouro Preto, 1998.

WEBSTER, A. C.; VAICAITIS, R. – *Application of Tuned Mass Dampers to Control Vibrations of Composite Floor Systems* – Engineering Journal, American Institute of Steel Construction, THIRD QUARTER/1992, p.116-124.

WISS, J.F.; PARMELEE,R.A. – *Human Perception of Transient Vibrations* – Journal of the Structural Division, Vol.100, N°ST4, 773-787, April, 1974.

WRIGHT, R.N.; WALKER, W.H. – *Vibration and Deflection of Steel Bridges* – Engineering Journal, American Institute of Steel Construction, January/1972, p.20-31.