

**AVALIAÇÃO DOS EFEITOS DE 2ª ORDEM EM EDIFÍCIOS DE  
AÇO UTILIZANDO MÉTODOS APROXIMADOS E ANÁLISE  
RIGOROSA**

**Renata Gomes Lanna da Silva**

*A Deus, sempre presente em minha vida.  
Aos meus pais José e Maria da Glória pela educação e incentivo,  
Ao meu marido Leonardo pelo amor e companheirismo,  
Aos meus queridos filhos Letícia e Lucas  
Dedico com carinho este trabalho.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus por mais esta conquista e à todas as pessoas que me ajudaram para a realização deste trabalho e me incentivaram ao longo desta jornada:

Ao Prof. Dr. Armando Cesar Campos Lavall, pela orientação segura e objetiva, e pelo incentivo, apoio e amizade.

Aos meus pais, José e Maria da Glória, meus primeiros mestres e modelos de vida. Aos meus irmãos Roberta e Pitágoras e à minha avó Maria, pelo carinho e pelas palavras de apoio. Ao meu marido Leonardo, que torna a minha vida mais plena, pelo seu apoio, dedicação e incentivo constantes. Aos meus sogros, Raimundo e Magna, pelo incentivo e interesse demonstrados durante a realização deste trabalho. À Sônia pela ajuda generosa.

Aos professores e funcionários do Departamento de Estruturas da UFMG, pela atenção, amizade e colaboração durante o curso de Mestrado.

Aos amigos, aos colegas da Pós-Graduação, especialmente à Danielle e ao Ricardo pela colaboração e ajuda generosa.

Aos Engenheiros Roberval José Pimenta e Luciene Antinossi C. da Mata, pela valiosa colaboração na seleção de alguns exemplos deste trabalho.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq, pelo suporte financeiro.

# SUMÁRIO

<b>Lista de Símbolos.....</b>	<b>i</b>
<b>Lista de Figuras.....</b>	<b>iv</b>
<b>Lista de Tabelas.....</b>	<b>vii</b>
<b>Resumo.....</b>	<b>viii</b>
<b>Abstract.....</b>	<b>ix</b>
<b>1 Introdução.....</b>	<b>1</b>
1.1 Considerações Iniciais.....	1
1.2 Objetivos.....	5
1.3 Organização do Texto.....	6
<b>2 Estudo da Estabilidade de Pórticos Planos.....</b>	<b>8</b>
2.1 Introdução.....	8
2.2 Tipos de Análise.....	9
2.3 Comportamento Global dos Pórticos.....	11
2.3.1 Análise Qualitativa.....	11
2.3.2 Análise Quantitativa.....	13
2.4 Classificação das Estruturas Aporticadas.....	28
2.4.1 Considerações Iniciais.....	28
2.4.2 Classificação.....	30
2.4.3 Comprimento Efetivo na Flambagem Elástica.....	32
<b>3 Formulações para Análise em Teoria de 2ª Ordem de Pórticos Planos.....</b>	<b>39</b>
3.1 Introdução.....	39
3.2 Formulação para Análise Rigorosa em Teoria de 2ª ordem.....	41
3.2.1 Considerações Iniciais.....	41
3.2.2 Definições de Deformações e Tensões.....	41
3.2.3 Relações Constitutivas.....	43
3.2.4 Sistemas de Coordenadas.....	45
3.2.5 Teoria Estrutural.....	48
3.2.6 Cinemática de Elemento.....	49
3.2.7 Equilíbrio Estático do Elemento.....	52
3.2.8 Expressões Analíticas para a Matriz de Rigidez Tangente.....	54
3.2.9 O Programa.....	57

<b>3.3 Análise Elástica Aproximada em 2ª Ordem.....</b>	<b>59</b>
3.3.1 Considerações Iniciais.....	59
3.3.2 Método de Amplificação dos Momentos (B <sub>1</sub> -B <sub>2</sub> ).....	60
3.3.3 Método da Força Lateral Equivalente.....	72
3.3.4 Coeficiente $\gamma_z$ .....	74
<b>4 Aplicações Numéricas.....</b>	<b>77</b>
<b>4.1 Introdução.....</b>	<b>77</b>
<b>4.2 Pórticos Planos Não Contraventados.....</b>	<b>78</b>
4.2.1 Pórtico Não Contraventado de Um Andar e Um Vão.....	78
4.2.2 Pórtico Não Contraventado de Três Andares e Um Vão.....	84
4.2.3 Pórtico Não Contraventado de Onze Andares e Dois Vãos.....	87
<b>4.3 Pórticos Planos Contraventados.....</b>	<b>96</b>
4.3.1 Pórtico Contraventado de Onze Andares e Um Vão.....	97
4.3.2 Pórtico Parcialmente Contraventado de Dois Andares e Um Vão.....	105
<b>4.4 Análise Estrutural Proposta no Texto Base de Revisão da NBR-8800.....</b>	<b>110</b>
4.4.1 Pórtico Não Contraventado de Onze Andares e Um Vão.....	112
4.4.2 Pórtico Não Contraventado de Quinze Andares e Um Vão.....	118
<b>5 Conclusões.....</b>	<b>130</b>
<b>6 Referências Bibliográficas.....</b>	<b>137</b>

## LISTA DE SÍMBOLOS

- $A_g$  - Área bruta da seção transversal da barra  
 $A_r$  - Área da seção transversal de uma fibra na configuração de referência ou inicial  
 $A_c$  - Área da seção transversal de uma fibra na configuração corrigida ou deformada  
 $B_0$  - Fator de amplificação da barra de uma estrutura pouco sensível ou muito sensível, sendo igual a  $B_1$  quando a força normal solicitante for de compressão e igual a 1 quando for de tração  
 $B_1$  - Fator de amplificação da barra de uma estrutura contraventada (nenhuma translação lateral nas extremidades da barra)  
 $B_2$  - Fator de amplificação da barra de uma estrutura não-contraventada  
 $B_{2,n}$  - Fator de amplificação da barra de uma estrutura não-contraventada do andar  $n$   
 $C$  - Função de estabilidade  
 $C_m$  - Coeficiente baseado em análise de 1ª ordem, com os nós da estrutura impedidos de se deslocar lateralmente, dependente da curvatura do pilar causado pelos momentos aplicados e das restrições de extremidades da barra no plano de flexão considerado.  
 $D_m$  - Módulo de rigidez do material da fibra  
 $D_m^e$  - Módulo de rigidez elástico da fibra  
 $D_m^{ep}$  - Módulo de rigidez elastoplástico da fibra  
 $E$  - Módulo de elasticidade do aço  
 $F_{hid}$  - Força horizontal de cálculo aplicada no pavimento  $i$   
 $h_i$  - Altura do pavimento  $i$  em relação à base  
 $H$  - Altura do andar  
 $H'_i$  - Força lateral fictícia no andar  $i$   
 $\sum H_{Sd}$  - Somatório de todas as forças horizontais de cálculo que produzem  $\Delta_{oh}$  no andar considerado.  
 $l_r$  - Comprimento longitudinal de uma fibra na configuração inicial  
 $l_c$  - Comprimento longitudinal de uma fibra na configuração corrigida  
 $I$  - Momento de inércia no plano de flexão  
 $I_c$  - Momento de inércia no plano de flexão do pilar  
 $I_v$  - Momento de inércia no plano de flexão da viga  
 $K$  - Fator do comprimento efetivo  
 $k_E$  - Matriz de rigidez elástica  
 $k_G$  - Matriz de rigidez geométrica  
 $k_t$  - Matriz de rigidez tangente  
 $\bar{k}_M$  - Matriz de rigidez constitutiva do elemento de barra reta no sistema local cartesiano  
 $\bar{k}_G$  - Matriz de rigidez geométrica do elemento de barra reta no sistema local cartesiano  
 $\bar{k}_M^{ep}$  - Matriz de rigidez constitutiva do elemento de barra reta no sistema local cartesiano

$\bar{k}_G^{ep}$	- Matriz de rigidez geométrica do elemento de barra reta no sistema local cartesiano
$k_{i,j}$	- Matriz tangente do elemento em notação indicial
$L$	- Comprimento do andar
$L_c$	- Comprimento do pilar
$L_v$	- Comprimento da viga
$M_a$	- Momento na extremidade a de uma barra flexo-comprimida
$M_b$	- Momento na extremidade b de uma barra flexo-comprimida
$M_1$	- Menor momento das extremidades da barra não-contraventada no plano de flexão considerado
$M_2$	- Maior momento das extremidades da barra não-contraventada no plano de flexão considerado
$M_p$	- Momento plástico
$M_{Sd}$	- Momento fletor solicitante de cálculo
$M_{Sd,x}$	- Momento fletor solicitante de cálculo (baseado em cargas majoradas) incluindo os efeitos de 2ª ordem em relação ao eixo x
$M_{Sd,y}$	- Momento fletor solicitante de cálculo (baseado em cargas majoradas) incluindo os efeitos de 2ª ordem em relação ao eixo y
$M_{Sd,1}$	- Momento fletor solicitante da barra obtido por análise estrutural elástica de 1ª ordem
$M_{Sd,2}$	- Momento fletor solicitante da barra considerando-se as ações que provocam os deslocamentos horizontais na estrutura por 0,95 vezes o maior $B_2$
$M_{nt}$	- Momento fletor solicitante de cálculo, obtido por análise elástica de 1ª ordem, assumindo não existir translação lateral da estrutura
$M_{lt}$	- Momento fletor solicitante de cálculo, obtido por análise elástica de 1ª ordem devido à translação lateral da estrutura (deslocamentos horizontais dos nós)
$M_{1,tot,d}$	- Somatório dos momentos fletores em 1ª ordem de cálculo devido a todas as forças horizontais em relação à base da estrutura
$N_{e1}$	- Carga de flambagem elástica de Euler de uma estrutura contraventada para o cálculo do fator de majoração $B_1$
$\sum N_{e2}$	- Somatório de $N_e$ de todos os pilares do andar em consideração de uma estrutura não contaventada para cálculo do fator de majoração $B_2$
$N_{Sd}$	- Força normal de compressão atuante de cálculo
$\sum N_{Sd}$	- Somatório das forças atuantes de cálculo em todos os pilares do andar, ou seja, somatório de todas as cargas verticais majoradas das pilares do andar em questão
$P$	- Carga vertical concentrada
$P_{cr}$	- Carga crítica de flambagem elástica
$P_p$	- Carga limite plástica
$P_u$	- Carga máxima ou carga última da estrutura
$P_w$	- Carga de trabalho
$P_i$	- Forças internas nodais do elemento
$P_{id}$	- Força vertical de cálculo atuante no pavimento i
$p_i^T$	- Vetor 6x1 dos graus de liberdade cartesianos
$q_\alpha^T$	- Vetor 3x1 dos graus de liberdade corrotacionais
$r$	- Distância de uma fibra em relação ao eixo
$S$	- Função de estabilidade

$u_i$	- Deslocamento horizontal do pavimento i
$u_1^n$	- Deslocamento lateral de 1ª ordem no andar n
$u_2^n$	- Deslocamento lateral de 2ª ordem no andar n
$v$	- Deslocamento lateral da estrutura
$v_w$	- Deslocamento lateral referente a carga de trabalho
$V_i^f$	- Cortante fictícia do andar i
$V_r$	- Volume de uma fibra na configuração inicial
$V_c$	- Volume de uma fibra na configuração corrigida
$x, y$	- Sistema global de coordenadas
$x_r, y_r$	- Sistema local de coordenadas corrotacionais
$x_c, y_c$	- Sistema local de coordenadas
$\alpha H$	- Incremento de carga horizontal concentrada no nó
$\alpha P$	- Incremento de carga vertical concentrada no nó
$\alpha q$	- Incremento de carga distribuída no vão da viga
$\varepsilon_m$	- Família de deformações
$\Delta$	- O deslocamento lateral referente ao movimento elástico estável de uma estrutura devido às forças laterais
$\Delta_{fl}$	- O deslocamento lateral de flambagem
$\Delta_i$	- Deslocamento horizontal do nível i
$\Delta_{i+1}$	- Deslocamento horizontal do nível i+1
$\Delta_{0h}$	- Deslocamento transversal de 1ª ordem do andar em consideração devido a $\sum H_{Sd}$
$\Delta_n$	- Deslocamento relativo no andar n
$\Delta M_{tot,d}$	- Acréscimo de momentos de 1ª ordem de cálculo devido a todas as forças horizontais em relação à base da estrutura
$\gamma_z$	- Coeficiente para definição da ordem de grandeza dos deslocamentos horizontais
$\delta$	- Deslocamento lateral devido a flambagem da estrutura.
$\delta e$	- Deformação virtual da fibra
$\delta p_i$	- Deslocamento virtual nodal do elemento
$\lambda$	- Medida básica de deformação denominada de estiramento da fibra
$\rho$	- Rotação da barra
$\sigma_c$	- Tensão de Cauchy
$\sigma_m$	- Família de tensões
$\sigma_N$	- Tensão de engenharia da fibra
$\sigma_{KT}$	- Tensão de Kirchhoff-Trefftz
$\sigma_y$	- Tensão de escoamento
$\sigma_r$	- Tensão residual
$\theta$	- Ângulo referente a configuração deformada de uma barra ou estrutura



## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1	- Tipos de análises.....	10
FIGURA 2.2	- Pórtico plano com carregamento qualquer.....	12
FIGURA 2.3	- Curvas parâmetro de carga x parâmetro de deslocamento para pórticos com carregamento qualquer.....	12
FIGURA 2.4	- Deslocamentos de uma barra flexo-comprimida.....	14
FIGURA 2.5	- Pórtico estudado: (a) Dimensões e carregamentos (b) Esforços e deslocamentos desconhecidos.....	17
FIGURA 2.6	- Curvas parâmetro de carga x deslocamento para as análises elásticas e rígido-plásticas – Adaptada de LAVALL (1988).....	21
FIGURA 2.7	- Forças e deslocamentos do pórtico após a formação das primeiras rótulas.....	25
FIGURA 2.8	- Curvas parâmetro de carga x deslocamento do pórtico de um andar -Adaptada de LAVALL (1988).....	27
FIGURA 2.9	- Momentos fletores e forças cortantes devido ao efeito P- $\Delta$ Adaptada de SALMON (1996).....	29
FIGURA 2.10	- Classificação dos pórticos: (a) Indeslocável, (b) Deslocável.....	30
FIGURA 2.11	- Classificação dos pórticos: (a) Contraventado, (b) Não-Contraventado.....	31
FIGURA 2.12	- Comprimento efetivo KL para pilares isolados e pórticos contraventados ou indeslocáveis.....	33
FIGURA 2.13	- Comprimento efetivo KL para pilares isolados e pórticos não-contraventados ou deslocáveis.....	34
FIGURA 2.14	- Pórtico indeslocável rotulado na base.....	35
FIGURA 2.15	- Fator do comprimento efetivo K para o pórtico indeslocável da FIG. 2.14 – Adaptada de SALMON (1996).....	36
FIGURA 2.16	- Pórtico deslocável rotulado na base.....	37
FIGURA 2.17	- Fator do comprimento efetivo K para o pórtico deslocável da FIG. 2.16 – Adaptada de SALMON (1996).....	38
FIGURA 3.1	- Configurações de uma fibra de material.....	42
FIGURA 3.2	- Comportamento de uma fibra: (a) comportamento elastoplástico e (b) comportamento elástico perfeitamente plástico.....	44
FIGURA 3.3	- Elemento de pórtico plano em sua configuração de referência e em sua configuração corrigida.....	45
FIGURA 3.4	- Elemento diferencial de barra reta.....	49
FIGURA 3.5	- Fluxograma geral do programa PPLANLEP.....	57
FIGURA 3.6	- Divisão em fatias do perfil I - Adaptada de LAVALL (1996).....	59

FIGURA 3.7	- Modelo de pórtico para cálculo de $M_{nt}$ e $M_{lt}$ .....	61
FIGURA 3.8	- Efeitos de 2ª ordem: (a) Pilar contraventado, (b) Pilar não- Contraventado.....	61
FIGURA 3.9	- Carregamento geral de uma barra de pórtico.....	61
FIGURA 3.10	- Barra submetida a momentos de extremidades sem carregamento transversal.....	63
FIGURA 3.11	- Barra submetida a momentos iguais de extremidades sem carregamento transversal.....	64
FIGURA 3.12	- Barra submetida a um carregamento transversal uniforme sem momentos de extremidade.....	65
FIGURA 3.13	- Momento fletor e deslocamento de 1ª e 2ª ordem.....	65
FIGURA 3.14	- Resumo das forças atuando sobre todos os pilares de um andar de um pórtico de andares múltiplos: (a) Análise de 1ª ordem (b) Análise de 2ª ordem.....	67
FIGURA 3.15	- Pórtico de n andares: (a) Carregamento genérico, (b) deslocamento lateral em 1ª ordem, (c) deslocamento lateral em 2ª ordem.....	70
FIGURA 3.16	- Consideração dos efeitos globais de segunda ordem.....	73
FIGURA 4.1	- Pórtico de um andar e um vão.....	78
FIGURA 4.2	- Curvas parâmetro de carga x deslocamento horizontal do pórtico.....	80
FIGURA 4.3	- Curvas parâmetro de carga x momento fletor máximo (nó 1) do pórtico.....	81
FIGURA 4.4	- Curvas parâmetro de carga x força normal máxima (nó 4) do pórtico.....	82
FIGURA 4.5	- Curvas parâmetro de carga x força cortante (nó 1) do pórtico.....	83
FIGURA 4.6	- Pórtico de três andares e um vão.....	84
FIGURA 4.7	- Curva parâmetro de carga x deslocamento horizontal do nó 8.....	87
FIGURA 4.8	- Pórtico de onze andares e dois vãos: dimensões básicas.....	88
FIGURA 4.9	- Pórtico de onze andares e dois vãos: carregamento de cálculo.....	89
FIGURA 4.10	- Curvas parâmetro de carga x deslocamento lateral no topo.....	90
FIGURA 4.11	- Curvas parâmetro de carga x momento fletor nos pilares dos 1º, 5º e 11º andares.....	92
FIGURA 4.12	- Curvas parâmetro de carga x força normal nos pilares dos 1º, 5º e 11º andares.....	93
FIGURA 4.13	- Curvas parâmetro de carga x força cortante nos pilares dos 1º, 5º e 11º andares.....	94
FIGURA 4.14	- Variação do momento fletor, força normal e cortante para os pilares 23 do 1º andar, 27 do 5º andar e 33 do 11º andar para as diversas análises elásticas.....	96

FIGURA 4.15	- Pórtico contraventado de onze andares e um vão.....	98
FIGURA 4.16	- Gráfico do deslocamento lateral do pórtico contraventado de onze andares e um vão para $P/P_w=4,0$ .....	100
FIGURA 4.17	- Curvas parâmetro de carga x deslocamento lateral no topo.....	100
FIGURA 4.18	- Curvas parâmetro de carga x momento fletor máximo para o 1º, 6º e 9º andares.....	102
FIGURA 4.19	- Curvas parâmetro de carga x força normal máxima para o 1º, 6º e 9º andares.....	104
FIGURA 4.20	- Pórtico parcialmente contraventado de dois andares e um vão.....	105
FIGURA 4.21	- Curvas parâmetro de carga x deslocamento horizontal no topo....	107
FIGURA 4.22	- Curvas parâmetro de carga x momento fletor.....	109
FIGURA 4.23	- Curvas parâmetro de carga x força normal.....	110
FIGURA 4.24	- Pórtico de onze andares e um vão.....	112
FIGURA 4.25	- Curvas parâmetro de carga x deslocamento horizontal no topo,...	114
FIGURA 4.26	- Curvas parâmetro de carga x momento fletor para os pilares dos 1º, 5º e 11º andares.....	115
FIGURA 4.27	- Pórtico de quinze andares e um vão.....	119
FIGURA 4.28	- Gráfico de deslocamento lateral para todos os andares do pórtico.....	120
FIGURA 4.29	- Curvas parâmetro de carga x momento fletor para os pilares 16, 19 e 25 do pórtico.....	124
FIGURA 4.30	- Curvas parâmetro de carga x força normal para os pilares 16,19 e 25 do pórtico.....	126
FIGURA 4.31	- Curvas parâmetro de carga x força cortante para os pilares 16, 19 e 25 do pórtico.....	128

## LISTA DE TABELAS

TABELA 4.1	- Relações entre as cargas $P$ e $P_y$ aplicadas de forma incremental...	79
TABELA 4.2	- Coeficientes de majoração e deslocamento horizontal do nó 2 do pórtico para diversos tipos de análises.....	79
TABELA 4.3	- Momento fletor máximo (nó 1) do pórtico para os diversos tipos de análises.....	81
TABELA 4.4	- Força normal máxima (nó 4) do pórtico para diversos tipos de análises.....	82
TABELA 4.5	- Força Cortante (nó 1) do pórtico para os diversos tipos de análises.....	83
TABELA 4.6	- Carregamentos aplicados à estrutura para análise.....	85
TABELA 4.7	- Perfis adotados para os pilares e vigas.....	85
TABELA 4.8	- Momento fletor nos pilares 4,5 e 6 do pórtico.....	86
TABELA 4.9	- Perfis adotados para os pilares e vigas – Dimensões em mm.....	88
TABELA 4.10	- Coeficientes de majoração $\gamma_z$ e $B_2$ .....	90
TABELA 4.11	- Momento fletor para os 1º, 5º e 11º andares.....	91
TABELA 4.12	- Coeficiente de majoração global $\gamma_z$ e local $B_2$ .....	99
TABELA 4.13	- Momento fletor máximo para os 1º, 6º e 9º andares.....	101
TABELA 4.14	- Força normal máxima para o 1º, 6º e 9º andares.....	103
TABELA 4.15	- Coeficientes de majoração global $\gamma_z$ e local $B_2$ .....	106
TABELA 4.16	- Deslocamento horizontal no topo do pórtico.....	107
TABELA 4.17	- Momento fletor para o 1º e 2º andares.....	108
TABELA 4.18	- Força normal para o 1º e 2º andares.....	109
TABELA 4.19	- Perfis para pilares e vigas.....	113
TABELA 4.20	- Coeficiente Local $B_2$ .....	114
TABELA 4.21	- Tipos de análises para cada incremento de carga em função do coeficiente $B_2$ .....	116
TABELA 4.22	- Momento fletor utilizando as propostas da NBR 8800 (2003).....	117
TABELA 4.23	- Valores do coeficiente $B_2$ para todos os andares do pórtico.....	120
TABELA 4.24	- Tipos de análises para cada incremento de carga em função do coeficiente $B_2$ .....	121
TABELA 4.25	- Momento fletor utilizando-se as propostas da NBR 8800 (2003).....	122
TABELA 4.26	- Força normal utilizando-se as propostas da NBR 8800 (2003).....	125
TABELA 4.27	- Força cortante utilizando-se as propostas da NBR 8800 (2003).....	127
TABELA 5.1	- Primeira Proposta.....	134
TABELA 5.2	- Segunda Proposta.....	135

## RESUMO

A análise elástica em teoria de segunda ordem deve ser utilizada pelos engenheiros para o dimensionamento e projeto de sistemas estruturais, principalmente naqueles que apresentam deslocamentos horizontais consideráveis, tornando os efeitos de segunda ordem mais significativos. O objetivo deste trabalho consiste, portanto, em avaliar os efeitos de segunda ordem em pórticos planos de aço, contraventados e não-contraventados, de vários andares, utilizando-se diversos métodos aproximados de análise elástica em 2ª ordem. Para isso, conceitos fundamentais e uma visão do comportamento global de pórticos planos são apresentados, a fim de se obter um bom conhecimento da estabilidade dessas estruturas. Em seguida, são apresentados os métodos aproximados de análise em 2ª ordem: o método de Amplificação dos Momentos ( $B_1$ - $B_2$ ), da Força Lateral Equivalente ou Fictícia (P-Delta) e do Coeficiente  $\gamma_z$ . Esses métodos são comparados com métodos de análise rigorosa em 2ª ordem, utilizando-se para os pórticos não-contraventados, o programa PPLANLEP, baseado numa formulação teórica consistente para análise não-linear, física e geométrica, via métodos dos elementos finitos e para os pórticos contraventados, o programa ANSYS 6.1 (2002). Finalmente, exemplos são apresentados com a finalidade de avaliar a consistência e a precisão dos resultados encontrados pelos diversos métodos aproximados de análise e obter conclusões de caráter prático que poderão servir como sugestões para o dimensionamento das estruturas de aço. Uma análise estimada, proposta no texto base de revisão da NBR 8800 (2003), é também apresentada com o objetivo de verificar a sua aplicabilidade na análise estrutural de pórticos planos de aço.

Palavras-Chave: Análise em 2ª ordem, Estabilidade dos pórticos planos de aço, Métodos aproximados de análise

## ABSTRACT

Second-order elastic analysis must be used by engineers for designing and project of structural systems, mainly in those that present considerable horizontal deflections, becoming more significant the second-order effects. The objective of this work consists, therefore, in evaluating the second-order effects in multistory steel plane frames; braced and unbraced, using several approximates second-order analysis. For this, fundamental concepts and an overview of the global behavior of steel plane frames are presented, in order to get a good knowledge of the stability of these structures. After that, approximate second-order methods are presented: the method of the Moments Amplification ( $B_1$ - $B_2$ ), the Equivalent or Fictitious Lateral Forces and the  $\gamma_z$  Coefficient. These methods are compared to second-order rigorous analysis methods, using the software PPLANLEP for the unbraced frames, based on a consistent theoretical formulation for a non-linear analysis, physical and geometrical, by the finite elements method and, for the braced frames, the software ANSYS 6.1 (2002). Finally, examples are presented with the purpose to evaluate the consistency and accuracy of the results obtained by the several approximate methods, and to get conclusions of practical character that will be able to serve like suggestions for steel structures design. An estimate analysis, proposal in the base text of review of NBR 8800 (2003), also is presented will the objective to check its usefulness in the structural analysis of steel plane frames.

Keywords: Second-order analysis, Steel plane frame stability, Approximate methods of analysis.

# 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 Considerações Iniciais

A estabilidade dos pórticos exige que o equilíbrio da estrutura como um todo e o equilíbrio de cada elemento componente devem ser garantidos, considerando os efeitos significativos das ações na estrutura deformada.

As análises estruturais realizadas na prática da engenharia, em geral têm como base a análise elástica em 1ª ordem. A característica principal de uma análise estrutural em teoria de 1ª ordem é aquela que define que o equilíbrio da estrutura deve ser feito considerando-a na sua posição indeslocada. Está implícito nesta definição que os deslocamentos não afetam o equilíbrio da estrutura, ou seja, eles são pequenos e, necessariamente, vale a hipótese de pequenos deslocamentos.

Na análise em teoria de 2ª ordem, a característica principal é aquela que define que o equilíbrio deve ser feito considerando a estrutura na sua posição deslocada. Neste caso está implícito que os deslocamentos afetam o equilíbrio da estrutura, entretanto, esta

análise pode ser feita tanto em regime de pequenos quanto de grandes deslocamentos. É importante enfatizar que o estudo da estabilidade da estrutura só pode ser feito em teoria de 2ª ordem.

Os pilares de pórticos em geral são barras submetidas às ações combinadas de momentos fletores e força normal. Quando essa força normal atua nos deslocamentos de 1ª ordem, surgem momentos fletores e deslocamentos de 2ª ordem que são adicionados aos de 1ª ordem.

Em geral, pelo menos dois tipos de efeitos de 2ª ordem podem ser identificados: o efeito P- $\delta$  e o efeito P- $\Delta$ . O efeito P- $\delta$  está relacionado com a estabilidade de cada barra (efeito local), na qual a força normal atuando na deformação barra relativa a sua corda produz o momento de 2ª ordem. Este efeito ocorre tanto nas barras contraventadas quanto nas barras não-contraventadas. O efeito P- $\Delta$  está relacionado com a estabilidade da estrutura (efeito global), na qual as cargas verticais atuando no deslocamento lateral da mesma produz momentos de tombamento de 2ª ordem. Este efeito ocorre apenas nas estruturas não-contraventadas ou deslocáveis. Esses efeitos causam aumento de deformação e, conseqüentemente, de tensão na barra, provocando redução em sua resistência e desestabilização na estrutura. A fim de assegurar um dimensionamento seguro esses efeitos devem ser considerados.

Pode-se dizer que a partir de meados da década de 1960, uma considerável quantidade de trabalhos teóricos, levando-se em conta os efeitos das não-linearidades geométrica e física no comportamento das estruturas, tem sido realizada. Mesmo assim, a análise não-linear é um tema que ainda desperta a curiosidade de diversos pesquisadores em todo mundo, considerando a sua relevância para estruturas esbeltas e mais complexas.

Dessa forma, as publicações de WOOD et al (1976), LE MESSURIER (1977), MACGREGOR e HAGE (1977), na década de 1970, representaram um marco para o dimensionamento prático das estruturas, ao introduzir o uso da análise em 2ª ordem considerando o efeito P- $\Delta$  para avaliar a estabilidade dos pórticos.



No Brasil, os trabalhos de FRANCO (1985, 1991) e VASCONCELOS (1985) contribuíram bastante para o estudo dos problemas de estabilidade dos edifícios de concreto armado, quando mostraram que a influência da não-linearidade geométrica na análise de pórticos planos em edifícios altos pode ser determinada, de forma aproximada, a partir de parâmetros de instabilidade.

Com o grande desenvolvimento da informática, em hardwares e softwares, é possível realizar análises mais rigorosas incluindo efeitos como as imperfeições iniciais dos elementos da estrutura, tensões residuais, ligações semi-rígidas, efeitos térmicos, além de outros efeitos de segunda ordem. Atualmente, a literatura na área de estruturas de aço, especialmente no campo da estabilidade, tem mostrado que as pesquisas apontam para o desenvolvimento da *análise estrutural avançada*.

A *análise estrutural avançada* é uma técnica que procura introduzir nos modelos de comportamento dos elementos representativos da estrutura e dos seus materiais hipóteses mais próximas da realidade e, unir a isto, procedimentos numéricos e iterativos sofisticados para se estimar o comportamento não-linear dessas estruturas, de tal forma que o método, sozinho, é suficiente para a verificação da estrutura com respeito aos seus estados limites. Dessa maneira, a análise avançada engloba as análises não-lineares, física e geométrica, no dimensionamento dos sistemas estruturais e seus elementos componentes.

Nesta linha, a partir da década de 1990, têm sido importantes os trabalhos de CHEN e ZHOU (1994), CHEN e TOMA (1994), CHEN, GOTO e LIEW (1996), WHITE e HAJJAR (1991, 1997, 2000), entre outros, que têm estudado a análise elástica em 2ª ordem de pórticos semi-rígidos, a análise em 2ª ordem com rótulas plásticas e com cargas nocionais. Com base nesses trabalhos, em 2003, LANDESMANN (2003) apresentou um modelo não-linear inelástico para analisar as estruturas planas de aço em condições de incêndio.

Segundo GALAMBOS (1998), algumas normas estrangeiras indicam procedimentos diferentes para a verificação da estabilidade das estruturas. Por exemplo, a CAN3-S16.1 – CSA (1994), eliminou o uso do fator do comprimento efetivo na verificação da

estabilidade dos pórticos, que é feita através de procedimentos de análises em 2ª ordem, exigindo a aplicação de cargas nocionais em combinação com cargas verticais majoradas, para levar em conta os efeitos inelásticos e as imperfeições geométricas da estrutura. O AISC/LRFD (1999) continua usando o fator do comprimento efetivo na combinação com a análise em 2ª ordem na verificação da estabilidade do pórtico. O Eurocode 3 ECS (1993) exige a aplicação de cargas horizontais nocionais juntamente com todas as combinações de carga, incluindo combinações com cargas horizontais.

Os pesquisadores, professores e engenheiros envolvidos na elaboração de normas técnicas e especificações para projetos têm a incumbência de trazer para esses códigos toda essa complexidade, mas de uma forma relativamente simples e ainda segura e econômica.

Nos últimos anos a análise em teoria de segunda ordem tem sido freqüentemente utilizada pelos engenheiros para o dimensionamento e projeto de sistemas estruturais, principalmente naqueles que apresentam deslocamentos horizontais consideráveis, tornando os efeitos de segunda ordem mais significativos.

Porém, as análises teóricas que envolvem a não-linearidade geométrica e a não-linearidade do material são geralmente complicadas e trabalhosas, não sendo, portanto, utilizadas como a prática comum nos escritórios de cálculo. Por esta razão é mais conveniente o uso de métodos computacionais, que envolvem uma análise mais rigorosa, para o cálculo dos esforços nas barras considerando-se os efeitos de 2ª ordem. Contudo, até o presente momento, softwares que considerem rigorosamente esses efeitos não-lineares, no projeto de sistemas estruturais mais complexos, não são ainda adequados para a prática nos escritórios.

Então, métodos aproximados de análise em 2ª ordem, que possam garantir um cálculo seguro e também econômico, são recomendados por diversas normas e especificações técnicas atuais. Esses métodos consideram apenas os efeitos da estabilidade da estrutura, não fornecendo nenhuma informação sobre a resistência real inelástica da mesma. Sabe-se que, no dimensionamento, a combinação desses efeitos (estabilidade e inelasticidade) deve ser considerada para a verificação da capacidade das barras.

Portanto, a utilização desses métodos aproximados de análise deve ser feita considerando-se também as equações de interação para a verificação da resistência e da estabilidade das barras do sistema estrutural.

## 1.2 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho, é avaliar os efeitos de 2ª ordem em edifícios altos de aço utilizando o método aproximado B<sub>1</sub>-B<sub>2</sub>, adotado pelo AISC/LRFD (1999), que considera a amplificação dos momentos de primeira ordem pelos fatores de majoração B<sub>1</sub> e B<sub>2</sub>; o método aproximado da Força Lateral Equivalente ou Fictícia (P-Delta), adotado pela NBR 8800 (1986) e CSA-S16.1 (1994), que combina as forças laterais atuantes na estrutura com as forças laterais equivalente induzidas pelos momentos P-Delta e o método do Coeficiente  $\gamma_z$ , adotado pela NBR 6118 (2003), que verifica a necessidade ou não de se considerar os efeitos de 2ª ordem na análise e pode ser empregado como coeficiente majorador dos esforços horizontais que atuam na estrutura.

Esses métodos aproximados são então comparados com métodos de análise rigorosa. Neste trabalho será utilizado o programa PPLANLEP, elaborado por LAVALL (1996), para os pórticos não-contraventados. O programa, baseado numa formulação teórica consistente para análise não-linear, física e geométrica via MEF, exige um procedimento de análise incremental e iterativo, onde o equilíbrio é verificado para cada incremento de carga utilizando um critério de convergência adequado. O programa PPLANLEP realiza as análises, elástica em 1ª ordem, elástica e elastoplástica em 2ª ordem. Para os pórticos contraventados, aqueles onde as ligações das vigas e diagonais são rotuladas nas suas extremidades, será utilizado o programa ANSYS 6.1 (2002) para as análises elásticas em 1ª ordem e 2ª ordem rigorosa.

Finalmente é apresentada uma análise estimada, proposta no texto base de revisão da NBR 8800 (2003), com o objetivo de verificar a sua aplicabilidade na análise estrutural de pórticos planos de aço.

### 1.3 Organização do Texto

Para se alcançar os objetivos deste trabalho, apresenta-se no capítulo 2 um estudo sobre a estabilidade dos pórticos planos de aço, visando ao entendimento do comportamento global dessas estruturas. São apresentados alguns conceitos fundamentais importantes que envolvem o estudo da estabilidade dos pórticos, incluindo as definições teóricas das análises utilizadas no cálculo das estruturas, a classificação das estruturas aporricadas, uma revisão dos tipos de análise usados para examinar a resposta das estruturas de pórticos em aço submetidas a carregamentos estáticos aplicados. Analisa-se o comportamento global dos pórticos planos, de forma qualitativa, por meio de gráficos parâmetro de carga x parâmetro de deslocamento e de forma quantitativa, com um exemplo simples visando mostrar os tipos de análises que tentam explicar todas as fases do comportamento real.

No capítulo 3 diversos métodos de análises são apresentados. Primeiramente, é apresentada uma formulação teórica para análise não-linear, física e geométrica, via MEF, que realiza as análises rigorosas, elástica e elastoplástica, em teoria de 2ª ordem para os pórticos planos de aço, formulação essa adaptada de PIMENTA (1986) e LAVALL (1996). Posteriormente, alguns métodos aproximados de análise em teoria de 2ª ordem são apresentados: o método de amplificação dos momentos  $B_1$ - $B_2$ , adotado pelo AISC/LRFD (1999), o método aproximado da Força Lateral Equivalente ou Fictícia (P-Delta), adotado pela NBR 8800 (1986) e CSA-S16.1 (1994) e o método do Coeficiente  $\gamma_z$ , adotado pela NBR 6118 (2003).

No capítulo 4 são analisados diversos casos de pórticos planos de aço, contraventados e não-contraventados, de vários andares, utilizando-se os métodos aproximados apresentados no capítulo anterior. Com o objetivo de avaliar a consistência e precisão desses métodos aproximados, os resultados são comparados com os resultados de uma análise rigorosa em 2ª ordem, obtidos pelo programa PPLANLEP desenvolvido por LAVALL (1996) para os pórticos não-contraventados e pelo programa ANSYS 6.1 (2002) para os pórticos contraventados. Em seguida, é apresentada uma proposta de

análise estrutural contida no texto base de revisão da NBR 8800 (2003) cuja avaliação de sua aplicabilidade prática é verificada.

Finalmente, no capítulo 5 são apresentadas as conclusões do trabalho, onde são avaliados os métodos aproximados de análise e são apresentadas sugestões para trabalhos futuros.

# 2

## **ESTUDO DA ESTABILIDADE DE PÓRTICOS PLANOS**

### **2.1 Introdução**

Uma visão geral dos tipos de análise utilizados para o cálculo de pórticos planos é apresentada no início deste capítulo. Em seguida, uma análise do comportamento global destes pórticos é feita, primeiramente, sob um aspecto qualitativo, procurando-se conhecer este comportamento por meio das curvas parâmetro de carga  $\times$  deslocamento lateral do pórtico. Após esta visão qualitativa, é apresentada uma análise quantitativa aproximada deste comportamento, utilizando-se de um exemplo simples, mostrando-se os métodos teóricos de análises.

Finalmente, uma classificação das estruturas aporticadas, considerando-se conceitos teóricos e práticos é abordada, bem como o comprimento efetivo de flambagem elástica dessas estruturas.

## 2.2 Tipos de Análise

Uma visão geral dos tipos de análise utilizados no cálculo de pórticos planos é necessária para uma melhor compreensão do seu comportamento global. A FIG. 2.1 mostra, esquematicamente, as curvas carga x deslocamento lateral de um pórtico rígido submetido a carregamentos estáticos, para cada tipo de análise a ser considerado. As distinções básicas entre os tipos de análise representados por cada curva são: se o equilíbrio é estudado considerando a estrutura na sua posição indeslocada ou deslocada e se a plastificação das barras é considerada.

O fato de se considerar a geometria indeslocada ou deslocada no cálculo das estruturas permite classificar teoricamente as análises em teoria de 1ª ordem ou teoria de 2ª ordem.

A característica principal de uma *análise em teoria de 1ª ordem* é que o equilíbrio da estrutura é formulado considerando-a na sua posição indeslocada, ou seja, segundo sua geometria original. Está implícito nesta definição que os deslocamentos existentes são pequenos e não afetam o equilíbrio da estrutura, conseqüentemente, vale a hipótese de pequenos deslocamentos.

Na *análise em teoria de 2ª ordem* a característica principal é que o equilíbrio é formulado considerando a estrutura na sua posição deslocada. Neste caso está implícito que os deslocamentos existentes afetam o equilíbrio da estrutura; entretanto esta análise pode ser feita tanto em regime de pequenos deslocamentos quanto de grandes deslocamentos. É importante enfatizar que o estudo da estabilidade de qualquer estrutura só pode ser feito em teoria de 2ª ordem.

Essa classificação teórica das análises permite fazer a distinção entre os conceitos de linearidade e não-linearidade geométrica. A *linearidade geométrica* refere-se à proporcionalidade entre os esforços aplicados e os deslocamentos, angulares ou lineares, provocados na estrutura. Logo, uma análise é geometricamente linear quando feita em teoria de 1ª ordem e geometricamente não-linear quando feita em teoria de 2ª ordem.

O fato de se considerar ou não a plastificação das barras na análise permite fazer a distinção entre os conceitos de linearidade e não-linearidade física. A *linearidade física* refere-se à proporcionalidade entre as tensões e as deformações, existentes nos materiais que obedecem a lei de Hooke. Quando o material não obedece a esta lei, ou seja, quando não existe essa proporcionalidade entre as tensões e deformações, ocorre a *não-linearidade física*.

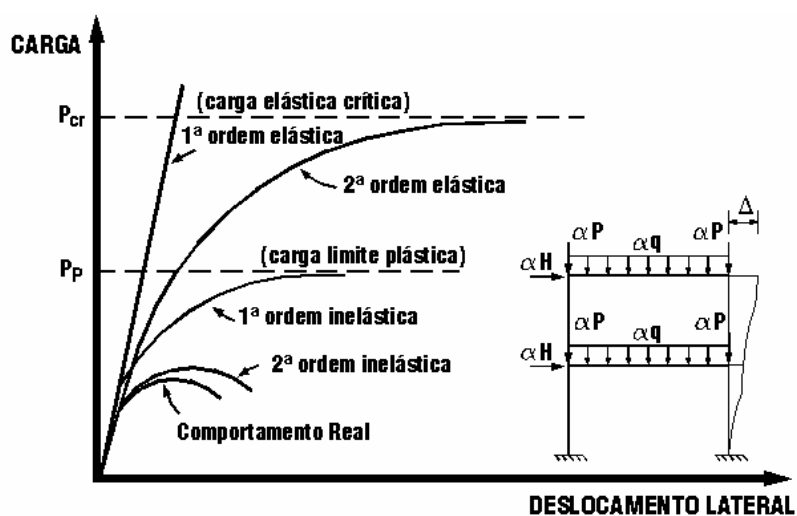


FIGURA 2.1 - Tipos de análises

**Análise Elástica de Primeira Ordem:** Neste tipo de análise o equilíbrio da estrutura é formulado considerando-a na sua posição indesejada, ou seja, segundo sua geometria original (linearidade geométrica) e o material é modelado como elástico linear (linearidade física). Dessa forma, esta análise considera a hipótese de pequenos deslocamentos e, sendo o material elástico linear, vale o princípio da superposição dos efeitos. Embora a análise elástica de primeira ordem, ou simplesmente *análise elástica linear*, seja a mais usada nas rotinas de cálculo, ela não fornece resultados sobre a estabilidade dos pórticos.

**Análise Elástica de Segunda Ordem:** Nesta análise o equilíbrio é formulado considerando a estrutura na sua posição deslocada (não-linearidade geométrica) e o material ainda é elástico linear (linearidade física). A resposta da curva carga x deslocamento tende assintoticamente para a carga crítica elástica ( $P_{cr}$ ) da estrutura. Esta análise já considera os efeitos da estabilidade elástica, mas não fornece nenhuma



informação direta da resistência inelástica real do pórtico. Trata-se de uma *análise não-linear geométrica*.

**Análise Inelástica de Primeira Ordem:** Na análise inelástica de primeira ordem o equilíbrio é verificado considerando a geometria indeslocada da estrutura (linearidade geométrica) e considera-se a não-linearidade física do material. Este tipo de análise inclui os efeitos de plastificação das barras, que podem ser representados desde os modelos simples de rótulas plásticas até modelos mais detalhados que consideram a propagação da plastificação no interior das mesmas. Quando o material é elastoplástico perfeito, a resposta da curva carga x deslocamento de uma análise inelástica de primeira ordem aproxima assintoticamente da carga limite plástica ( $P_P$ ), calculada por análise de mecanismo plástico. Trata-se de uma *análise não-linear física*.

**Análise Inelástica de Segunda Ordem:** Nesta análise o equilíbrio é formulado considerando a estrutura na sua posição deslocada (não-linearidade geométrica) e considera-se a não-linearidade física do material. A carga limite obtida pela análise inelástica de segunda ordem é a que mais se aproxima da resistência real, sendo esta a análise que melhor representa o verdadeiro comportamento de um pórtico. Trata-se de uma *análise não-linear física e geométrica*.

## 2.3 Comportamento Global dos Pórticos

### 2.3.1 Análise Qualitativa

Para se analisar uma estrutura visando adequá-la ao objetivo para o qual está sendo projetada, deve-se conhecer a sua geometria, as seções transversais adotadas, as propriedades e características do material utilizado, bem como as características do carregamento. Após a verificação das condições de equilíbrio e de compatibilidade, o comportamento da estrutura pode ser caracterizado ao se estudar o gráfico que relaciona o carregamento atuante e os deslocamentos resultantes.

Considere-se o pórtico simples, submetido a um carregamento proporcional qualquer atuando no plano da estrutura, conforme mostra a FIG. 2.2. Nesse caso, o pórtico sempre apresenta deslocamento lateral para o carregamento proporcional, aumentando monotonamente e as curvas que representam o comportamento do pórtico tem a forma indicada na FIG. 2.3. Para a medida do parâmetro de deslocamento considera-se o deslocamento horizontal ( $v$ ) no topo do pórtico.

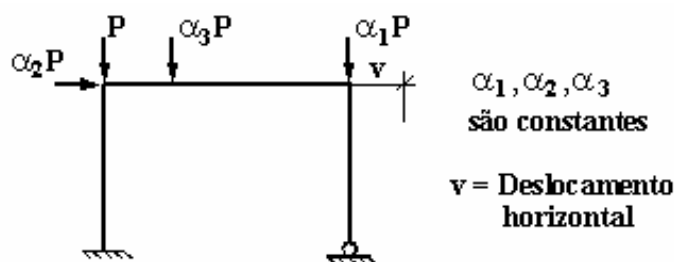


FIGURA 2.2- Pórtico plano com carregamento qualquer

A curva 1 da FIG. 2.3 representa o comportamento sempre elástico desta estrutura, ou seja, um comportamento teórico, que tende assintoticamente para a carga crítica de flambagem elástica,  $P_{cr}$  (análise elástica em 2ª ordem). A curva 2 representa o comportamento típico dos pórticos e a diferença entre o comportamento real e esta curva depende do modelo matemático a ser adotado, que considera a não-linearidade geométrica e a não-linearidade física (análise inelástica em 2ª ordem).

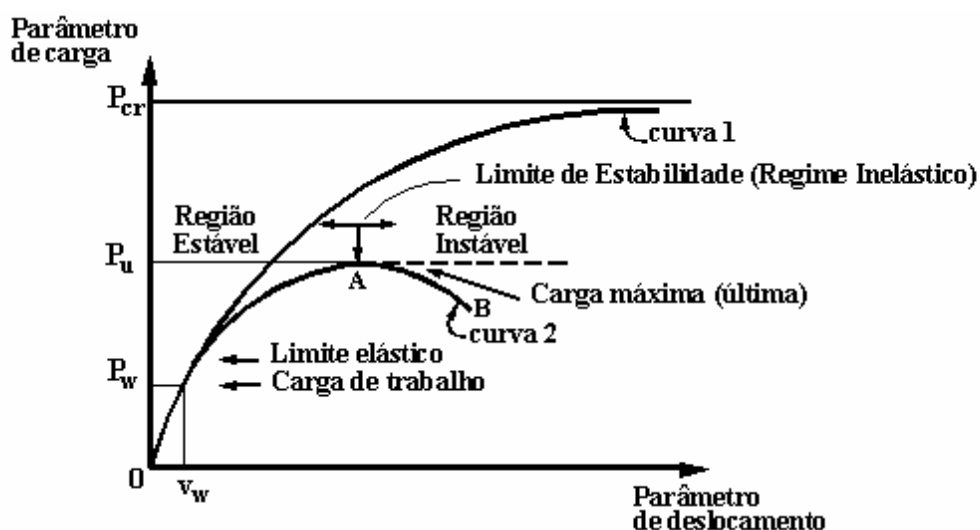


FIGURA 2.3 – Curvas parâmetro de carga x parâmetro de deslocamento para pórticos com carregamento qualquer

Observa-se pelo gráfico que tanto a curva 1 quanto a curva 2 são não-lineares desde o início devido a influência dos efeitos geométricos de 2ª ordem. Considerando-se a curva 2, antes da carga atingir o valor correspondente ao limite elástico, o comportamento é elástico de 2ª ordem, ou seja, o comportamento apresenta apenas não-linearidade geométrica. O limite elástico caracteriza o fim do comportamento elástico e o início do comportamento inelástico. Caso ocorra um descarregamento da estrutura para um carregamento inferior ao valor limite elástico, não haverá deformações permanentes. Após este limite, a declividade da curva 2 reduz mais rapidamente devido à não-linearidade física do material, uma vez que seções do pórtico começam a escoar tornando-o menos rígido. Caso ocorra um descarregamento nesta fase, haverá deformações permanentes.

O ramo ascendente da curva 2 (região 0-A) corresponde a uma região estável de equilíbrio e o ramo descendente (região A-B) corresponde a uma região instável. O comportamento do pórtico é então classificado como inelástico de 2ª ordem. Quando esta carga atinge a carga máxima última,  $P_u$ , a inclinação da curva torna-se zero e o pórtico entra em colapso por instabilidade inelástica ou formação de mecanismo.

### 2.3.2 Análise Quantitativa

Após uma visão qualitativa sobre o comportamento dos pórticos descrita no item anterior, será apresentada, a seguir, uma análise quantitativa, visando a compreensão de todas as fases do comportamento real da estrutura.

Como os pórticos são elementos estruturais formados por barras submetidas à força normal e momento fletor, será abordado neste item, o método “slope-deflection” para barras flexo comprimidas. Neste método, os momentos nas extremidades das barras, as rotações nestas extremidades e as rotações das cordas estão relacionados entre si. A equação diferencial que representa os deslocamentos de uma barra flexo comprimida é dada por:

$$EI_x v^{IV} + P v'' = 0 \quad (2.1)$$

onde  $EI_x$  é o módulo de rigidez à flexão,  $P$  é a força normal de compressão e  $v$  o deslocamento oriundo da flexão da barra.

A solução geral para esta equação diferencial pode ser escrita da seguinte forma:

$$v = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \cos kx + C_3 x + C_4 \quad (2.2)$$

onde  $k^2 = P/EI_x$  e os coeficientes  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$  são determinados a partir das condições de contorno indicadas na FIG. 2.4-a, onde atuam a força de compressão e o momento  $M_a$ . Fazendo-se  $v(0) = v(L) = v''(L) = 0$  e  $v''(0) = -M_a/EI_x$ , tem-se:

$$v = \frac{M_a}{P} \left( \cos kx - \frac{\operatorname{sen} kx}{\operatorname{tg} kL} + \frac{x}{L} - 1 \right) \quad (2.3)$$

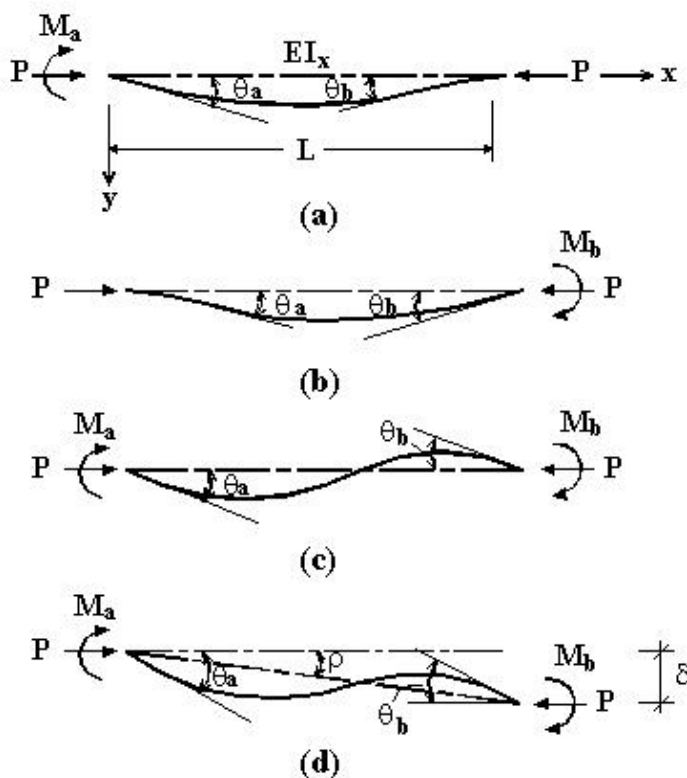


FIGURA 2.4 – Deslocamentos de uma barra flexo-comprimida

As rotações de extremidades são obtidas por diferenciação, resultando em:

$$\begin{aligned} v'(0) = \theta_a &= \frac{M_a}{P} \left( \frac{1}{L} - \frac{k}{\text{tg}(kL)} \right) \\ v'(L) = \theta_b &= \frac{M_a}{P} \left( \frac{1}{L} - \frac{k}{\text{sen}(kL)} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Da mesma maneira, podem ser encontradas as rotações de extremidade para a situação da FIG. 2.4-b, onde atuam a força de compressão e o momento  $M_b$ .

$$\begin{aligned} v'(0) = \theta_a &= \frac{M_b}{P} \left( \frac{1}{L} - \frac{k}{\text{sen}(kL)} \right) \\ v'(L) = \theta_b &= \frac{M_b}{P} \left( \frac{1}{L} - \frac{k}{\text{tg}(kL)} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Para a situação da FIG. 2.4-c são superpostas as situações das FIG. 2.4-a e 2.4-b; então as rotações  $\theta_a$  e  $\theta_b$  nas extremidades são respectivamente:

$$\begin{aligned} v'(0) = \theta_a &= \frac{L(cM_a - sM_b)}{EI_x} \\ v'(L) = \theta_b &= \frac{L(-sM_a + cM_b)}{EI_x} \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde,

$$c = \frac{1 - \left( \frac{kL}{\text{tg}(kL)} \right)}{(kL)^2} \quad (2.7)$$

$$s = \frac{\left( \frac{kL}{\text{sen}(kL)} \right) - 1}{(kL)^2} \quad (2.8)$$

Acrescentando-se a rotação  $\rho$  da barra (FIG. 2.4-d), tem-se:

$$v'(0) = \theta_a = \frac{L(cM_a - sM_b)}{EI_x} + \rho$$

$$v'(L) = \theta_b = \frac{L(-sM_a + cM_b)}{EI_x} + \rho$$
(2.9)

Determinando-se os valores de  $M_a$  e  $M_b$ :

$$M_a = \frac{EI_x}{L} [C\theta_a + S\theta_b - \rho(C + S)]$$
(2.10)

$$M_b = \frac{EI_x}{L} [S\theta_a + C\theta_b - \rho(C + S)]$$
(2.11)

onde,

$$C = \frac{c}{c^2 - s^2}$$
(2.12)

$$S = \frac{s}{c^2 - s^2}$$
(2.13)

Os coeficientes  $C$  e  $S$  são conhecidos como funções de estabilidade. As Eqs. (2.10) e (2.11) relacionam deslocamentos e momentos nas extremidades de uma barra submetida a uma força normal de compressão  $P$ . Quando não existe força de compressão atuando na barra, pode-se mostrar que  $C=4$  e  $S=2$  e as Eqs. (2.10) e (2.11) podem ser escritas como:

$$M_a = \frac{EI_x}{L} (4\theta_a + 2\theta_b - 6\rho)$$
(2.14)

$$M_b = \frac{EI_x}{L} (2\theta_a + 4\theta_b - 6\rho)$$
(2.15)

A FIG. 2.5-a ilustra um pórtico simples, de nós rígidos, com um andar de altura  $L$  e um vão de comprimento  $2L$ . O pórtico está submetido à forças verticais  $P$  nos pilares e à uma força horizontal  $\alpha P$ . A tensão de escoamento e o módulo de elasticidade do aço são, respectivamente,  $34,5 \text{ kN/cm}^2$  e  $20500 \text{ kN/cm}^2$ . O momento de inércia da viga é o dobro do momento de inércia dos pilares e a área da seção transversal da viga é 40%

maior que as áreas dos pilares. Este pórtico foi estudado por diversos autores como GALAMBOS (1968) e LAVALL (1988).

Algumas simplificações são consideradas na análise: a) a força normal na viga é relativamente pequena e será desprezada; b) os esforços normais nos dois pilares são aproximadamente iguais e seus valores serão iguais à força externa vertical  $P$  atuante nos nós  $B$  e  $C$ ; c) devido às simplificações anteriores, as alterações na geometria causadas por deformação longitudinal da viga e dos pilares serão desconsideradas e os nós  $B$  e  $C$  terão deslocamentos horizontais iguais. Então, os únicos deslocamentos desconhecidos são as rotações dos nós  $B$  e  $C$ , respectivamente  $\theta_b$  e  $\theta_c$ , e a translação  $\delta$ , conforme mostra a FIG. 2.5-b.

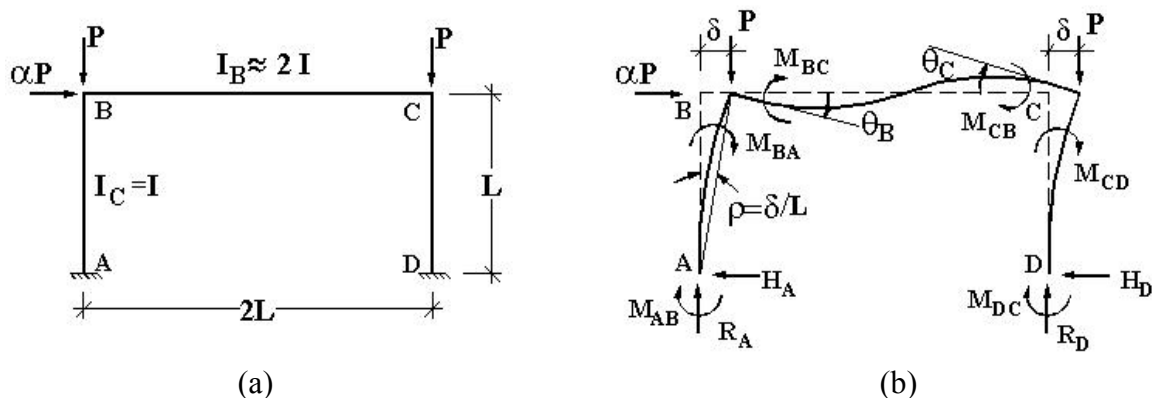


FIGURA 2.5 – Pórtico estudado: (a) Dimensões e carregamentos (b) Esforços e deslocamentos desconhecidos

Considerando-se a estrutura na sua posição deslocada, determinam-se as seguintes equações de equilíbrio:

$$\sum H = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A + H_D = \alpha P \quad (2.16)$$

$$\sum V = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A + R_D = 2P \quad (2.17)$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha P(L) + P(\rho L) + P(2L + \rho L) - R_D(2L) + M_{AB} + M_{DC} = 0 \quad (2.18)$$

Das Eqs. (2.17) e (2.18) obtêm-se  $R_A$  e  $R_D$ :

$$R_A = P \left( 1 - \rho - \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{M_{AB} + M_{DC}}{2L} \quad (2.19)$$

$$R_D = P \left( 1 + \rho + \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{M_{AB} + M_{DC}}{2L} \quad (2.20)$$

Do equilíbrio entre os nós tem-se:

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (2.21)$$

$$M_{CB} + M_{CD} = 0 \quad (2.22)$$

Do somatório das equações de equilíbrio das barras AB e CD obtém-se:

$$(R_A + R_D)(\rho L) + (H_A + H_D)(L) + M_{AB} + M_{BA} + M_{DC} + M_{CD} = 0 \quad (2.23)$$

que pode ser escrita utilizando as Eqs. (2.16) e (2.17):

$$PL(2\rho + \alpha) + M_{AB} + M_{BA} + M_{DC} + M_{CD} = 0 \quad (2.24)$$

O comportamento do pórtico fica definido se forem conhecidos  $\rho$ ,  $\theta_B$ ,  $\theta_C$ , uma vez que a partir deles podem ser determinados os esforços solicitantes que atuam em cada uma das três barras.

### **Análise Elástica de 1ª ordem**

Na análise elástica de 1ª ordem desprezam-se os efeitos dos deslocamentos nas equações de equilíbrio, ou seja, tem-se  $\rho$  igual a zero nas Eqs. (2.19), (2.20) e (2.24), e a influência da força normal na rigidez das barras é desconsiderada, ou seja,  $P=0$ ,  $C=4$  e  $S=2$ .



Atendendo às condições de contorno do problema, ou seja, fazendo-se  $\theta_A = \theta_D = 0$  e  $\rho_{BC} = 0$ , determinam-se os momentos nas extremidades das barras:

$$\left\{ \begin{array}{ll} M_{AB} = \frac{EI}{L}(2\theta_B - 6\rho); & M_{BA} = \frac{EI}{L}(4\theta_B - 6\rho) \\ M_{BC} = \frac{2EI}{2L}(4\theta_B + 2\theta_C); & M_{CB} = \frac{2EI}{2L}(2\theta_B + 4\theta_C) \\ M_{CD} = \frac{EI}{L}(4\theta_C - 6\rho); & M_{DC} = \frac{EI}{L}(2\theta_C - 6\rho) \end{array} \right. \quad (2.25)$$

Como existem 3 deslocamentos desconhecidos ( $\rho$ ,  $\theta_B$  e  $\theta_C$ ), necessitam-se de três equações independentes de equilíbrio. Então, levando-se os valores dos momentos obtidos acima nas Eqs. (2.21), (2.22) e (2.24), obtém-se o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} 8\theta_B + 2\theta_C - 6\rho = 0 \\ 2\theta_B + 8\theta_C - 6\rho = 0 \\ 6\theta_B + 6\theta_C - 24\rho = -\frac{PL^2\alpha}{EI} \end{array} \right. \quad (2.26)$$

Resolvendo o sistema, determinam-se os deslocamentos desconhecidos e conseqüentemente os momentos nas barras. Portanto, todo o comportamento do pórtico fica definido:

$$\theta_B = \theta_C = \frac{PL^2}{28EI}; \quad \rho = \frac{5PL^2\alpha}{84EI} \quad (2.27)$$

$$M_{AB} = M_{DC} = -\frac{2PL\alpha}{7} \quad (2.28)$$

$$M_{BA} = M_{CD} = -M_{BC} = -M_{CB} = -\frac{3PL\alpha}{14}$$

Considerando-se  $\alpha=0,1$ ,  $L=500$  cm e perfil HPL 200 para os pilares do pórtico da FIG. 2.5, a relação entre carga e deslocamento é dada pela Eq.(2.29) e mostrada no gráfico da FIG. 2.6.

$$\frac{P}{P_y} = 27,4\rho \quad (2.29)$$

onde,  $P_y=A_g\sigma_y$ , sendo  $A_g$  a área bruta da seção transversal e  $\sigma_y$  a tensão de escoamento. Na análise elástica de 1ª ordem, o deslocamento tende ao infinito quando  $P/P_y \rightarrow \infty$ , ou seja, não se define  $P_{cr}$ .

### Análise Elástica de 2ª ordem

Na análise elástica de 2ª ordem consideram-se os efeitos dos deslocamentos nas equações de equilíbrio, ou seja, tem-se  $\rho$  diferente de zero nas Eqs. (2.19), (2.20) e (2.24), e a influência da força normal na rigidez das barras não pode ser desconsiderada, ou seja,  $P \neq 0$  e  $C$  e  $S$  devem ser calculados.

Outras hipóteses foram consideradas por GALAMBOS (1968) e adotadas nesta análise: a) a força normal na viga é pequena, podendo-se admitir  $C_{BC}=4$  e  $S_{BC}=2$  e b) as forças axiais nos dois pilares são aproximadamente iguais, admitindo-se  $C_{AB}=C_{CD}=C$  e  $S_{AB}=S_{CD}=S$ .

Das equações independentes de equilíbrio e das Eqs. (2.10) e (2.11), determina-se o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} (C+4)\theta_B + 2\theta_C - (C+S)\rho = 0 \\ 2\theta_B + (C+4)\theta_C - (C+S)\rho = 0 \\ (C+S)\theta_B + (C+S)\theta_C + \left[ \frac{2PL^2}{EI} - 4(C+S) \right] \rho = -\frac{PL^2\alpha}{EI} \end{array} \right. \quad (2.30)$$

Resolvendo-se o sistema, determinam-se os deslocamentos desconhecidos e, conseqüentemente, os momentos nas barras. Portanto o comportamento do pórtico fica definido.

$$\theta_B = \theta_C = \frac{\alpha(PL^2/EI)(C+S)}{2(C+S)(C-S+12) - 2(PL^2/EI)(C+6)} \quad (2.31)$$

$$\rho = \frac{\alpha(PL^2/EI)(C+6)}{2(C+S)(C-S+12) - 2(PL^2/EI)(C+6)} \quad (2.32)$$

$$M_{AB} = M_{DC} = \alpha PL \left[ \frac{S(C+S) - (C+S)(C+6)}{2(C+S)(C-S+12) - 2(PL^2/EI)(C+6)} \right] \quad (2.33)$$

$$M_{BA} = M_{CD} = -M_{BC} = -M_{CB} = \alpha PL \left[ \frac{C(C+S) - (C+S)(C+6)}{2(C+S)(C-S+12) - 2(PL^2/EI)(C+6)} \right] \quad (2.34)$$

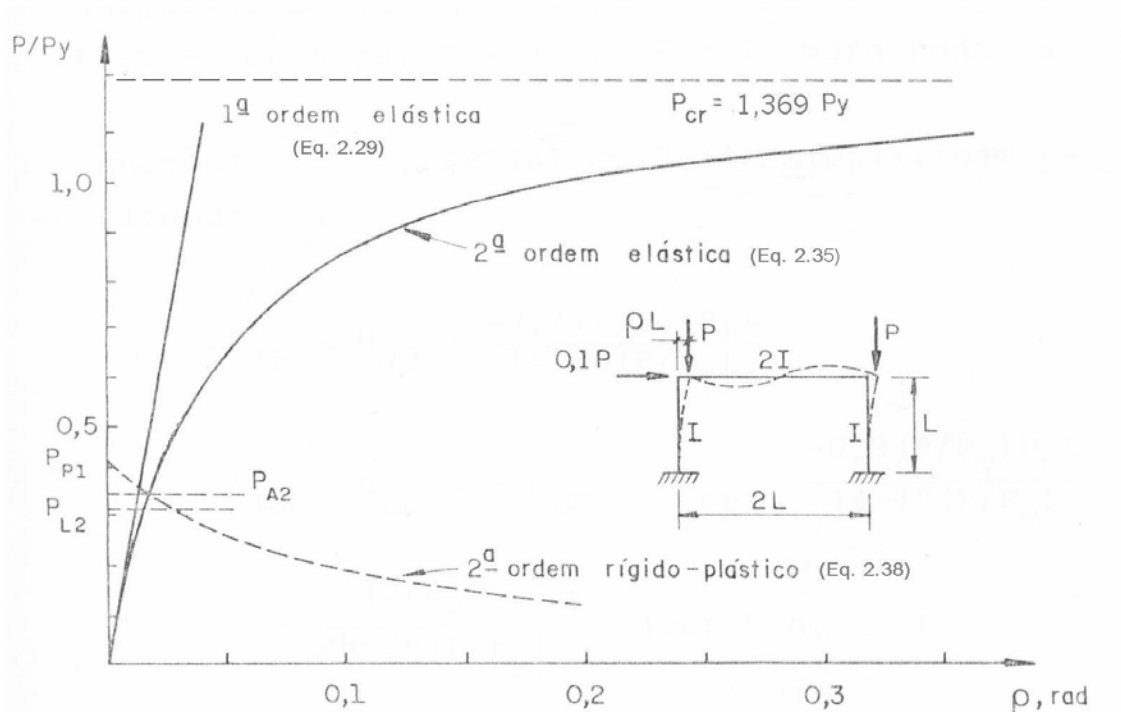


FIGURA 2.6 – Curvas parâmetro de carga x deslocamento para as análises elásticas e rígido-plásticas – Adaptada de LAVALL (1988)

Considerando-se novamente  $\alpha=0,1$ ,  $L=500$  cm e perfil HPL 200 para os pilares a relação entre carga e deslocamento é dada pela Eq. (2.35) e mostrada no gráfico da FIG. 2.6.

$$\rho = \frac{(C + 6) \frac{P}{P_Y}}{3,26(C + S)(C - S + 12) - 20(C + 6) \frac{P}{P_Y}} \quad (2.35)$$

Na análise elástica de 2ª ordem, o deslocamento tende ao infinito quando  $P/P_Y = 1,369$ , definindo-se a carga crítica elástica do pórtico,  $P_{Ecr}=1,369 P_Y$ .

### **Análise Rígido-Plástica em 1ª e 2ª ordem**

A análise rígido-plástica é baseada na determinação do mecanismo de colapso final da estrutura. Essa análise utiliza o conceito de rótulas plásticas, onde se considera que toda a plastificação está concentrada em pontos distintos da estrutura. O mecanismo de colapso se forma quando se desenvolve um número suficiente de rótulas plásticas na estrutura e nenhuma outra redistribuição de momentos é possível para qualquer aumento de carga. A partir da formação da primeira rótula plástica o comportamento elástico não é mais válido.

Segundo a teoria rígido-plástica, a estrutura permanece indeslocável até que o momento fletor seja igualado ao momento plástico nos pontos onde se formaram as rótulas plásticas. Por meio desta teoria pode-se estimar a carga limite a ser suportada pela estrutura.

Para o pórtico em estudo, o mecanismo ocorre quando se formam rótulas plásticas nas extremidades dos dois pilares, porque a força normal na viga é pequena e seu momento plástico maior que o momento plástico dos pilares ( $M_{PC}$ ). Admitindo-se as forças normais nos dois pilares iguais a  $P$ , o momento plástico nas extremidades dos mesmos é dado pela Eq.(2.36), conforme mostra SALMON (1996). (Obs.: esta equação é obtida através da equação de interação de resistência, quando nenhuma instabilidade ocorre,

fornecendo resultados aproximados, uma vez que tenta reproduzir resultados obtidos de ensaios).

$$M_{PC} = 1,18 M_p \left( 1 - \frac{P}{P_Y} \right) \quad (2.36)$$

Então,  $M_{AB}=M_{BA}=M_{CD}=M_{DC}=M_{PC}$ . Na Eq. (2.36),  $M_p=Z\cdot\sigma_y$ , sendo  $Z$  o módulo de resistência plástica da seção transversal,  $P_Y=A_g\cdot\sigma_y$  e  $P$  a carga aplicada no pórtico.

Substituindo-se os valores dos momentos de extremidade da Eq. (2.24) e resolvendo-se para a carga  $P$ , tem-se:

$$\frac{P}{P_Y} = \frac{1}{1 + A\sigma_y L(2\rho + \alpha)/4,72M_p} \quad (2.37)$$

Para  $\alpha=0,1$  e  $M_p=Z\cdot\sigma_y$  a Eq. (2.37) pode ser escrita como:

$$\frac{P}{P_Y} = \frac{1}{2,325 + 26,507\rho} \quad (2.38)$$

A Eq. (2.38) corresponde à análise rígido-plástica de 2ª ordem, uma vez que envolve  $\rho$ . Quando  $\rho=0$  tem-se o início do mecanismo plástico e este é denominado de análise rígido-plástica de 1ª ordem. A carga máxima para este mecanismo de 1ª ordem é igual a  $P_{P1}=0,43 P_Y$ . O comportamento rígido plástico de 1ª e 2ª ordem para o pórtico em estudo está representado detalhadamente no gráfico da FIG. 2.8. A carga limite superior que este pórtico pode suportar ( $P_{A2}$ ) é igual a  $0,358 P_Y$ , obtida igualando-se as equações de 2ª ordem elástica (Eq. (2.35)) e a rígido plástica (Eq. (2.38)). Uma carga limite inferior pode ser determinada quando surge a primeira rótula plástica, tornando-se a partir deste momento, inválida a análise elástica de 2ª ordem.

Desprezando-se os efeitos da força normal na rigidez de todas as barras do pórtico, ou seja, fazendo-se  $C=4$  e  $S=2$  e considerando-se novamente  $\alpha=0,1$ ,  $L=500$  cm e perfil

HPL 200 para os pilares nas Eqs. (2.33) e (2.34) nota-se que os momentos nas bases dos pilares são maiores que os momentos nas outras extremidades. Portanto, as primeiras rótulas se formam nas bases.

$$M_{AB} = M_{DC} = -\frac{36309,6(P/P_Y)}{1,37 - P/P_Y} \quad (2.39)$$

$$M_{BA} = M_{CD} = -\frac{27232,2(P/P_Y)}{1,37 - P/P_Y} \quad (2.40)$$

Quando surgem essas primeiras rótulas nas bases, a análise elástica de 2ª ordem torna-se inválida e a partir deste ponto, o momento nas bases ( $M_{AB}$ ) se igualam ao momento plástico ( $M_{PC}$ ).

$$\frac{36309,6(P/P_Y)}{1,37 - P/P_Y} = -1,18M_p \left(1 - \frac{P}{P_Y}\right) \quad (2.41)$$

Da relação acima retira-se  $P_{L2}=0,333P_Y$ , que representa a carga limite inferior que o pórtico pode suportar (FIG. 2.8).

### **Análise Elastoplástica em 2ª ordem**

Esta análise, em relação às anteriores, é a que melhor descreve o comportamento do pórtico. Ela é baseada na formação sucessiva de rótulas plásticas até a formação de um mecanismo.

O comportamento do pórtico para esta análise é elástico quando os momentos ainda não atingiram o momento plástico, ou seja, quando ainda não se formaram rótulas plásticas na estrutura. Após a formação das rótulas plásticas nas bases, o pórtico funciona como se existissem rótulas reais nestes pontos e deslocamentos adicionais ( $\delta\theta_A$ ,  $\delta\theta_B$  e  $\delta\rho$ ) surgem na estrutura (Fig. 2.7).

As barras do pórtico são elásticas exceto nos pontos onde existem rótulas, portanto as equações de equilíbrio anteriores podem ser usadas. Admitindo  $C=4$ ,  $S=2$ ,  $\delta\theta_A=\delta\theta_D$ ,  $\delta\theta_B=\delta\theta_C$  e  $\delta M_{BA}=\delta M_{CD}$ .

$$\delta M_{AB} = \delta M_{DC} = 0 = \frac{EI_x}{L}(4\delta\theta_A + 2\delta\theta_B - 6\delta\rho) \quad (2.42)$$

Resultando em:

$$\delta\theta_A = 1,5\delta\rho - 0,5\delta\theta_B \quad (2.43)$$

Os outros momentos valem:

$$\delta M_{BA} = \frac{EI}{L}(4\delta\theta_B + 2\delta\theta_A - 6\delta\rho) = \frac{3EI(\delta\theta_B - \delta\rho)}{L} \quad (2.44)$$

$$\delta M_{BC} = \frac{2EI}{2L}(4\delta\theta_B + 2\delta\theta_C) = \frac{6EI\delta\theta_B}{L} \quad (2.45)$$

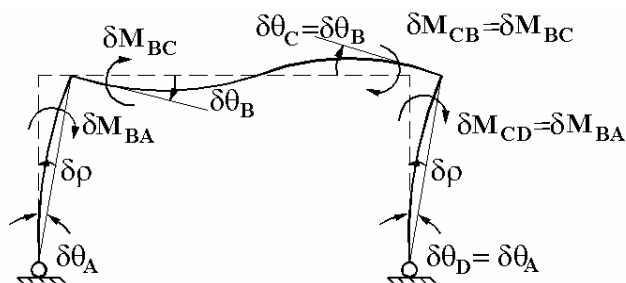


FIGURA 2.7 – Forças e deslocamentos do pórtico após a formação das primeiras rótulas

O equilíbrio nos nós exige que  $\delta M_{BA} + \delta M_{BC} = 0$ , resultando em  $\delta\theta_B = -(1/3)\delta\rho$ , conseqüentemente  $\delta M_{BA} = -2EI\delta\rho/L$ . Após a formação das rótulas plásticas nas bases surgem na estrutura deslocamentos adicionais  $\delta\theta_A$ ,  $\delta\theta_B$  e  $\delta\rho$ . Logo:

$$\rho = \rho_{L2} + \delta\rho \quad (2.46)$$

onde  $\rho_{L2}$  é a rotação no momento de formação das rótulas na base e  $\delta\rho$  a mudança na rotação devido ao carregamento adicional. Considerando-se  $C=4$  e  $S=2$  na Eq. (2.32), determina-se:

$$\rho = \frac{5\alpha(PL^2/EI)}{84 - 10(PL^2/EI)} \quad (2.47)$$

Do estudo anterior calculou-se  $P_{L2}=0,333P_Y$ . Substituindo esta carga na Eq. (2.47) pode-se obter a rotação quando se formam as primeiras rótulas na base. Então, tem-se  $\rho_{L2}=0,016$  rad. Os momentos nas extremidades das barras são dados por:

$$M_{AB} = M_{DC} = 1,18 M_p \left(1 - P/P_Y\right) \quad (2.48)$$

$$M_{BA} = M_{CD} = (M_{BA})_{L2} + \delta M_{BA} \quad (2.49)$$

onde,  $(M_{BA})_{L2}$  vem da Eq. (2.34) para  $P=P_{L2}=0,333P_Y$ . Então,  $(M_{BA})_{L2} = 0,00942 P_Y L$  e  $\delta M_{BA}$  dado por:

$$\delta M_{BA} = -\frac{2EI(\rho - 0,016)}{L} = 0,326(\rho - 0,016)P_Y L \quad (2.50)$$

E a equação de equilíbrio Eq. (2.24) pode ser escrita como:

$$\frac{P}{P_Y}(2\rho + \alpha) + 2 \cdot 1,18 \frac{M_p}{P_Y L} \left(1 - \frac{P}{P_Y}\right) + 2[0,00942 + 0,326(\rho - 0,016)] = 0 \quad (2.51)$$

Substituindo-se os valores de  $M_p$ ,  $\alpha$  e  $L$ , a Eq. (2.51) pode ser escrita como sendo:

$$\frac{P}{P_Y} = \frac{0,652\rho + 0,0461}{2\rho + 0,1377} \quad (2.52)$$

A Eq. (2.52) representa a análise elastoplástica de 2ª ordem, onde já se formaram as primeiras rótulas nas bases, mas ainda não se formou o mecanismo (FIG. 2.8).



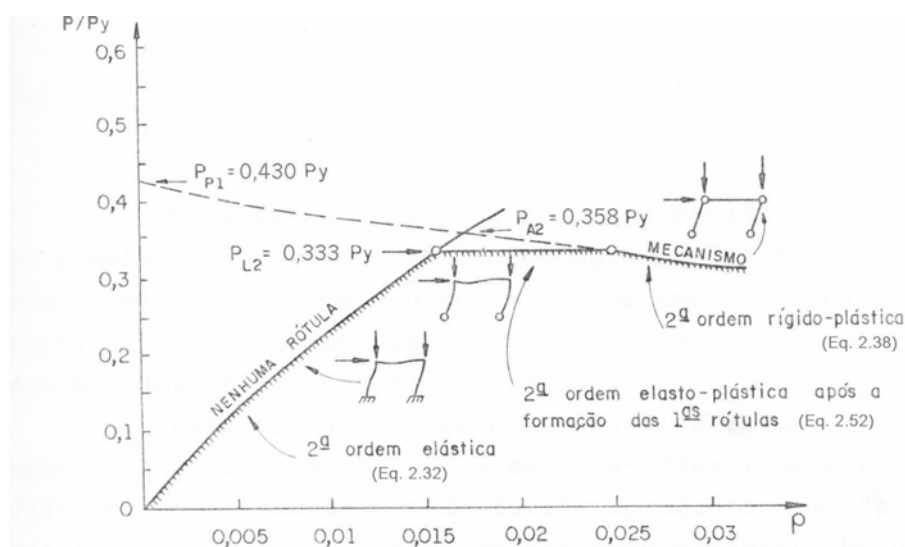


FIGURA 2.8 – Curvas parâmetro de carga x deslocamento do pórtico de um andar -  
Adaptada de LAVALL (1988)

Conforme dito anteriormente, o objetivo deste exemplo era apresentar um estudo que permitisse um bom entendimento sobre o comportamento estrutural de pórticos planos. Para isso, o pórtico plano da FIG. 2.5 foi estudado segundo vários tipos teóricos de análise a fim de explicar este comportamento real. A FIG. 2.8 mostra que o comportamento do pórtico ficou limitado por três curvas representando: o comportamento elástico em 2ª ordem; o comportamento elastoplástico em 2ª ordem (rigorosamente, um comportamento inelástico em 2ª ordem) e o comportamento rígido-plástico em 2ª ordem.

Pode-se concluir que a análise elastoplástica em 2ª ordem é a hipótese teórica que mais se aproxima do comportamento real, mas a rigor, tem sido demonstrado que os pórticos de edifícios estruturais de aço de proporções usuais, provavelmente, falham por instabilidade antes que um mecanismo de colapso plástico seja alcançado, devido a diversos fatores que influenciam no colapso da estrutura, como:

Efeitos Geométricos:

- Efeitos  $P-\delta$  e  $P-\Delta$ ;
- Influência da força normal na rigidez das barras;

- Mudança no comprimento das barras devido às deformações longitudinais;
- Imperfeições geométricas iniciais das barras;
- Variações nas dimensões da geometria dos pórticos devido às tolerâncias de fabricação e montagem;
- Deformações por cortante;
- Deformação nas ligações;
- Flambagem local e lateral com torção das barras;
- Deslocamento do pórtico fora do seu plano.

Efeitos dos Materiais:

- Relação tensão x deformação não-linear;
- Presença de tensões residuais nas barras resultantes dos processos de fabricação;
- Propagação da zona inelástica nas barras;
- “Strain Hardening”.

Esses fatores, entre outros, podem influenciar no comportamento de um pórtico tornando prematuro o seu colapso.

## **2.4 Classificação das Estruturas Aporticadas**

### **2.4.1 Considerações Iniciais**

A fim de compreender o comportamento dos pórticos como um sistema estrutural capaz de garantir a resistência e fornecer rigidez lateral que assegure a estabilidade de uma edificação, considere a FIG. 2.9 que apresenta os esforços que surgem num pilar de um pórtico como resultado da interação entre as cargas verticais e o deslocamento lateral devido a uma força horizontal, como por exemplo, o vento.

Conforme SALMON (1996), os momentos  $M_{\Delta}$  e as cortantes  $Q_{\Delta}$  são os esforços necessários para equilibrar o momento  $P-\Delta$ , resultante da interação entre as cargas

verticais ( $P$ ) e o deslocamento lateral ( $\Delta$ ). O equilíbrio mostrado na FIG. 2.9-a exige que:

$$P\Delta = Q_{\Delta} h + 2M_{\Delta} \quad (2.53)$$

As parcelas  $Q_{\Delta}h$  e  $2M_{\Delta}$  dependem das condições de restrição das barras. Se o pórtico for treliçado, isto é, se as barras forem articuladas em suas extremidades, a parcela  $2M_{\Delta}$  será nula (FIG. 2.9-b), conseqüentemente:

$$Q_{\Delta} = \frac{P\Delta}{h} \quad (2.54)$$

Neste caso, as diagonais e as barras horizontais devem absorver a cortante  $Q_{\Delta}$ . Por outro lado, se o pórtico apresenta barras rigidamente ligadas, mas sem diagonais de contraventamento, a rigidez à cortante é muito pequena e o momento  $P\Delta$  deve ser resistido pelos momentos  $M_{\Delta}$ . Então, conforme mostra a FIG. 2.9-c, tem-se:

$$M_{\Delta} = \frac{P\Delta}{2} \quad (2.55)$$

Nesse caso as vigas e os pilares devem absorver o momento  $M_{\Delta}$ .

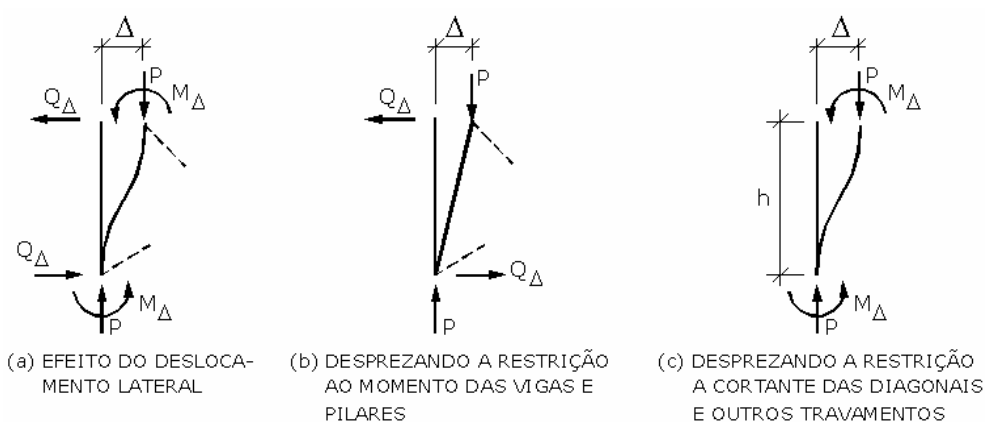


FIGURA 2.9 – Momentos fletores e forças cortantes devido ao efeito  $P-\Delta$  – Adaptada de SALMON (1996)

Os pórticos contraventados e não-contraventados possuem tanto a rigidez ao momento fletor quanto a rigidez à força cortante. O valor relativo dessas grandezas é que faz a diferença entre o pórtico ser considerado contraventado ou não-contraventado. Sendo assim, admite-se que os pórticos contraventados possuem rigidez ao momento fletor relativamente pequena em relação a rigidez à força cortante. Neste caso, a Eq. (2.54) representa os pórticos contraventados nos procedimentos práticos de dimensionamento. Para os pórticos não-contraventados admite-se que a rigidez à força cortante seja relativamente pequena em relação a rigidez ao momento fletor e a Eq. (2.55) pode ser aplicada para representar esses pórticos.

#### 2.4.2 Classificação

Os pórticos podem ser classificados como indeslocáveis e deslocáveis ou contraventados e não-contraventados, considerando-se conceitos teóricos e práticos, respectivamente.

##### Pórtico Indeslocável e Pórtico Deslocável

Um pórtico é classificado como *indeslocável* quando a eventual situação de instabilidade ocorrer sem que haja o deslocamento lateral dos nós, ou seja, os pilares do pórtico não possuem movimentos laterais relativos nas suas extremidades (FIG. 2.10-a). Porém, se a instabilidade ocorrer com o deslocamento lateral brusco dos nós ( $\Delta_{fl}$ ), os pilares possuirão movimentos laterais relativos nas suas extremidades, e o pórtico é classificado como *deslocável* (FIG. 2.10-b).

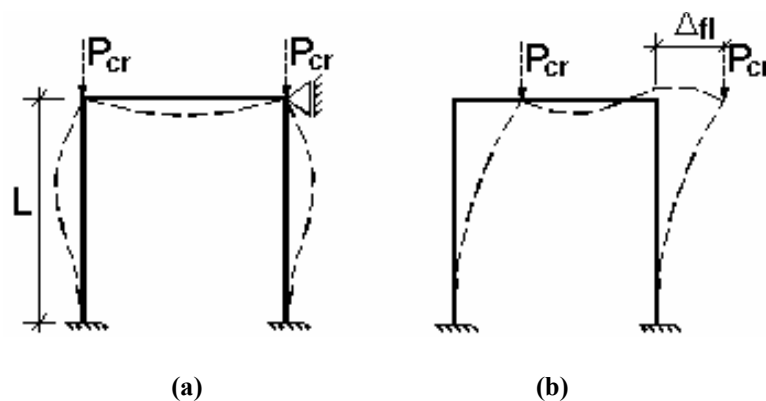


FIGURA 2.10 – Classificação dos pórticos: (a) Indeslocável, (b) Deslocável

### Pórtico Contraventado e Pórtico Não-contraventado

O deslocamento lateral  $\Delta$ , indicado nas FIG. 2.11-a e 2.11-b, refere-se ao movimento lateral elástico estável da estrutura, devido às forças laterais (H). O deslocamento lateral  $\Delta_{fl}$ , representado nas FIG. 2.10-b e 2.11-b, refere-se ao movimento lateral brusco, causado por forças verticais que atingem o valor crítico. Este deslocamento devido a instabilidade só pode ocorrer nas estruturas deslocáveis ou não-contraventadas.

Um pórtico *contraventado* (FIG. 2.11-a) é aquele no qual a estabilidade lateral é garantida por sistemas adequados de contraventamentos diagonais. Quando esses sistemas de contraventamentos possuem rigidez suficiente para resistir aos carregamentos laterais atuantes, os pórticos contraventados possuem comportamento próximo ao dos pórticos indeslocáveis. O movimento lateral brusco devido à instabilidade ( $\Delta_{fl}$ ) é impedido por esses sistemas de contraventamento e o fator do comprimento efetivo de flambagem K é sempre igual ou menor do que a unidade, conforme afirma SALMON (1996). Os valores dos deslocamentos laterais estáveis ( $\Delta$ ), oriundos dos carregamentos laterais atuantes são pequenos, de tal forma que os momentos de 2ª ordem provenientes do efeito P- $\Delta$  podem ser desprezados.

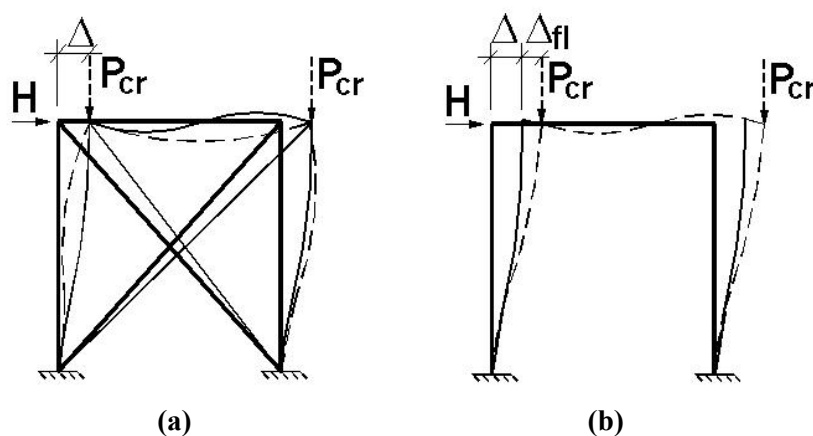


FIGURA 2.11 – Classificação dos pórticos: (a) Contraventado, (b) Não-Contraventado

SALMON (1996) define um pórtico contraventado como sendo aquele no qual o movimento lateral brusco devido à instabilidade é impedido por elementos de contraventamentos e o pórtico torna-se indeslocável se esses contraventamentos forem infinitamente rígidos.

Um pórtico *não-contraventado* (FIG. 2.11-b) é aquele no qual a estabilidade lateral depende da rigidez à flexão de vigas e pilares rigidamente ligados entre si. Esses pórticos podem ser classificados como pórticos deslocáveis. Quando o carregamento vertical atuante atinge o valor crítico ocorre um deslocamento lateral brusco ( $\Delta_{fl}$ ) denominado deslocamento lateral devido a instabilidade. Para essas estruturas o fator do comprimento efetivo de flambagem  $K$  será sempre maior que a unidade, conforme afirma SALMON (1996). O deslocamento lateral estável ( $\Delta$ ), devido ao carregamento horizontal, é relativamente grande surgindo um momento de segunda ordem  $P-\Delta$  que deverá ser suportado pela estrutura.

### 2.4.3 Comprimento Efetivo na Flambagem Elástica

Segundo YURA (1971) o conceito do comprimento efetivo de flambagem é, simplesmente, um método matemático para simplificar o problema do cálculo da carga crítica de pilares de pórticos com diferentes restrições de extremidades, utilizando-se pilares bi-rotulados e indeslocáveis equivalentes.

A carga de flambagem elástica de Euler para um pilar indeslocável, com ambas as extremidades rotuladas, de rigidez  $EI$  e comprimento  $L$ , é dada por:

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.56)$$

Esta Eq. (2.56) pode ser usada para todos os problemas de flambagem elástica de pilares substituindo-se o comprimento real do pilar por um comprimento efetivo ou equivalente  $KL$ . O comprimento de um pilar com quaisquer condições de extremidade pode ser entendido como sendo igual ao comprimento efetivo ou equivalente de um pilar bi-rotulado de mesma rigidez  $EI$  e mesma carga de flambagem. O fator  $K$  é u'a maneira de fornecer soluções simples para os problemas complexos de flambagem de pórticos.

A FIG. 2.12 ilustra o significado físico do comprimento de flambagem para os pórticos contraventados ou indeslocáveis.

A FIG. 2.12-a mostra pilares isolados, indeslocáveis e rotulados na base e um pórtico contraventado com bases rotuladas. Tendo como referência os pilares isolados, conclui-se que o comprimento de flambagem efetivo ou equivalente ( $KL$ ) dos pilares do pórtico deve variar entre  $0,7L < KL < 1,0L$ .

Na FIG. 2.12-b são mostrados pilares isolados, indeslocáveis e engastados na base e um pórtico contraventado com bases engastadas. Neste caso, tendo como referência os pilares isolados, conclui-se que o comprimento de flambagem efetivo ou equivalente ( $KL$ ) dos pilares do pórtico deve variar entre  $0,5L < KL < 0,7L$ . Logo, em termos práticos, pode-se considerar que, para os pórticos contraventados ou indeslocáveis, o fator do comprimento efetivo de flambagem  $K$  varia entre  $0,5 < K \leq 1,0$ .

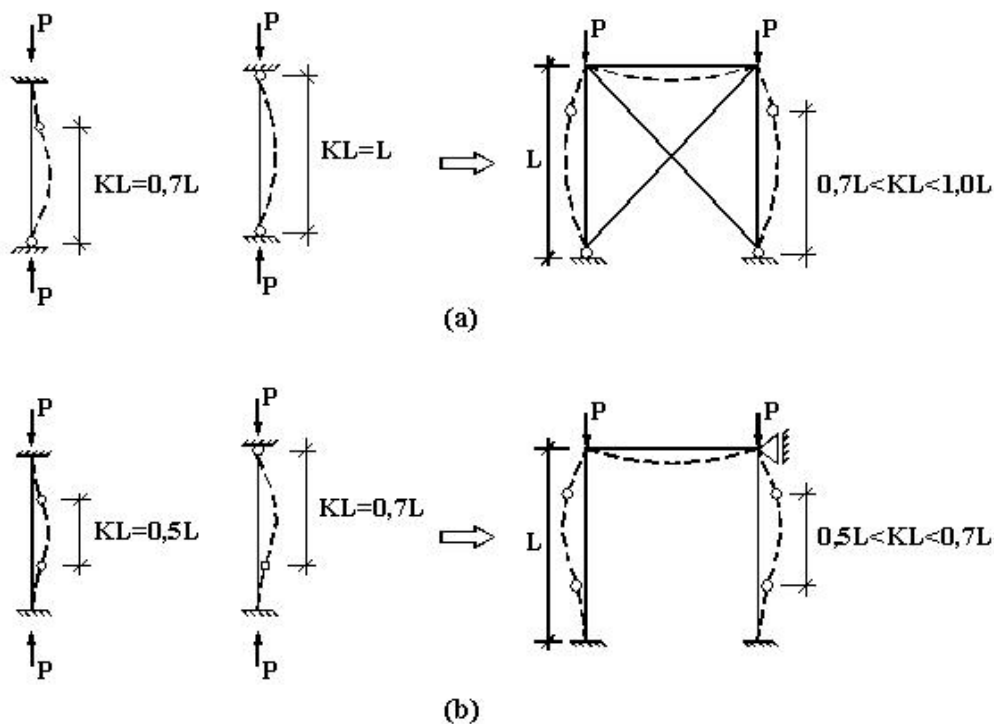


FIGURA 2.12 – Comprimento efetivo  $KL$  para pilares isolados e pórticos contraventados ou indeslocáveis

A FIG. 2.13 ilustra o significado físico do comprimento de flambagem para os pórticos não-contraventados ou deslocáveis.

A FIG. 2.13-a mostra pilares isolados, deslocáveis e engastados na base e um pórtico não-contraventado ou deslocável com bases engastadas. Tendo como referência os pilares isolados, conclui-se que o comprimento de flambagem efetivo ou equivalente (KL) dos pilares do pórtico deve variar entre  $1,0L < KL < 2,0L$ .

Na FIG. 2.13-b são mostrados pilares isolados, deslocáveis e rotulados na base e um pórtico não-contraventado ou deslocável com bases rotuladas. Neste caso, tendo como referência os pilares isolados, conclui-se que o comprimento de flambagem efetivo ou equivalente (KL) dos pilares do pórtico deve ser  $KL > 2,0L$ . Logo, em termos práticos, pode-se considerar que, para os pórticos não-contraventados ou deslocáveis, o fator do comprimento efetivo de flambagem K é sempre maior que a unidade.

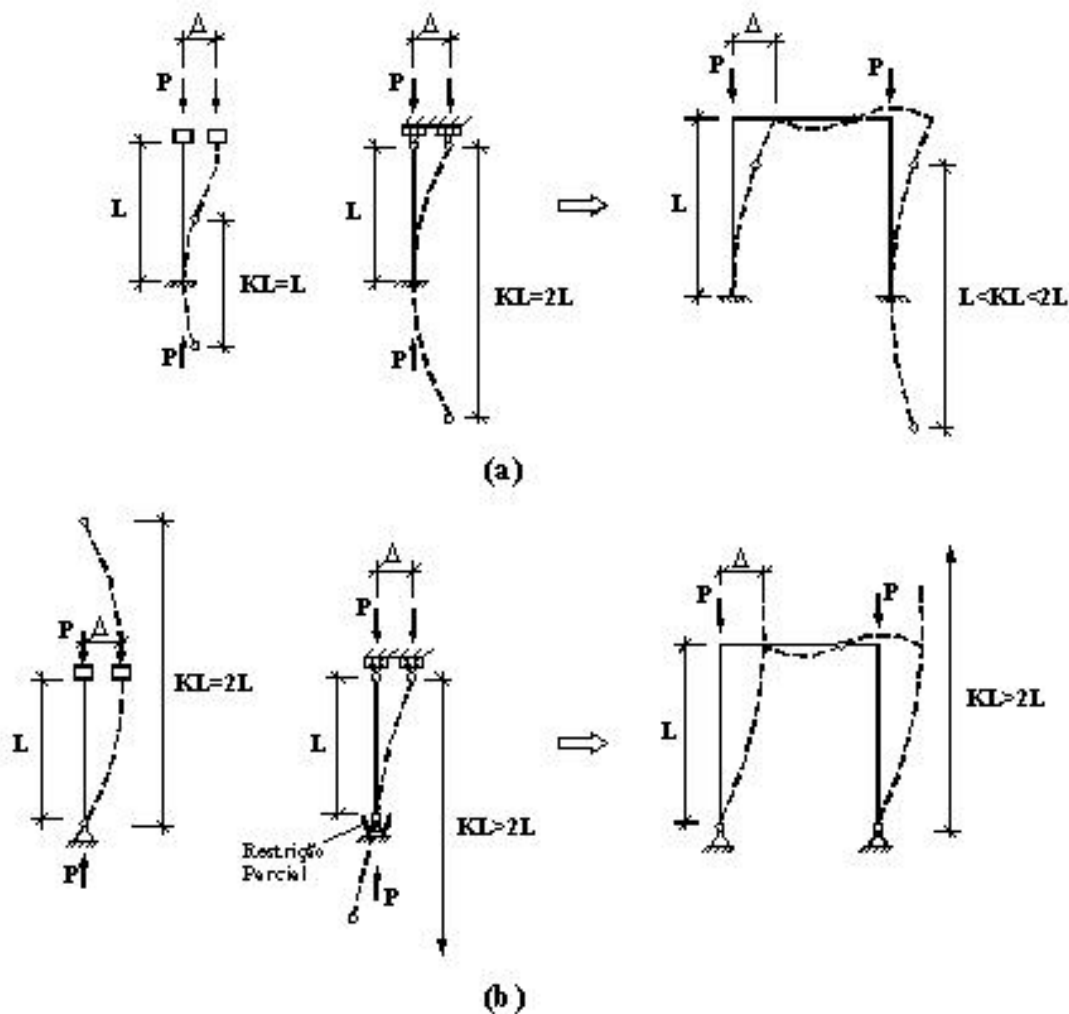


FIGURA 2.13 – Comprimento efetivo KL para pilares isolados e pórticos não-contraventados ou deslocáveis



Uma análise utilizando as Eq. (2.10) e (2.11) do método “Slope-Deflection” é apresentada por SALMON (1996) mostrando matematicamente a variação do fator do comprimento efetivo para os pórticos indeslocáveis e deslocáveis.

Para o pórtico indeslocável mostrado na FIG. 2.14, fazendo-se  $\rho$  igual a zero nas Eq. (2.10) e (2.11), obtém-se a seguinte relação:

$$\frac{(kL)^2 \text{sen}(kL)}{\text{sen}(kL) - kL \cos(kL)} = -\frac{2I_v L_c}{I_c L_v} \quad (2.57)$$

onde  $k^2=P/EI$ ,  $I_v$  e  $L_v$  são o momento de inércia e o vão da viga, respectivamente e  $I_c$  e  $L_c$  são o momento de inércia e a altura dos pilares, respectivamente.

Admitindo-se  $I_v \cong 2,64I_c$  e  $L_v \cong 2,57L_c$ , pode-se obter o valor da carga crítica que corresponde ao menor valor de  $kL$  na Eq. (2.58), obtida invertendo-se a Eq. (2.57):

$$\frac{\text{sen}(kL) - kL \cos(kL)}{(kL)^2 \text{sen}(kL)} = -0,487 \quad (2.58)$$

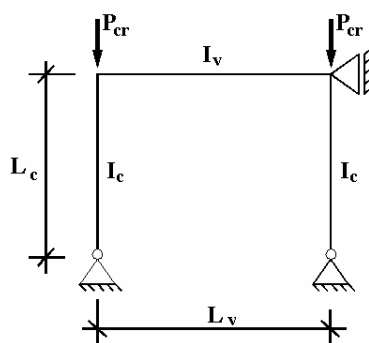


FIGURA 2.14 – Pórtico indeslocável rotulado na base

Quando a rigidez da viga se aproxima de zero,  $kL=\pi$  e tem-se um pilar isolado rotulado nas extremidades. Quando a rigidez da viga aumenta,  $kL$  torna-se maior que  $\pi$ . Se essa rigidez tende ao infinito  $kL = 4,493=\pi/0,7$ . A solução para  $kL=3,6$  obtida por tentativas usando-se valores entre  $\pi$  e 4,49, é mostrada no gráfico da FIG. 2.15. Pode-se notar que o fator do comprimento efetivo pode ser escrito como:

$$K = \frac{\pi}{kL} \quad (2.59)$$

Então para a Eq. (2.58) tem-se  $kL=3,60$  e o fator do comprimento efetivo  $K$  é igual a  $0,875$ . Em outras palavras, para considerar a flambagem do pórtico, o pilar deve ser calculado utilizando-se  $0,875L_c$  como sendo o comprimento de uma barra rotulada isolada.

A carga de flambagem do pórtico indeslocável é dada por:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_c}{(K L_c)^2} = \frac{\pi^2 EI_c}{(0,875 L_c)^2} \quad (2.60)$$

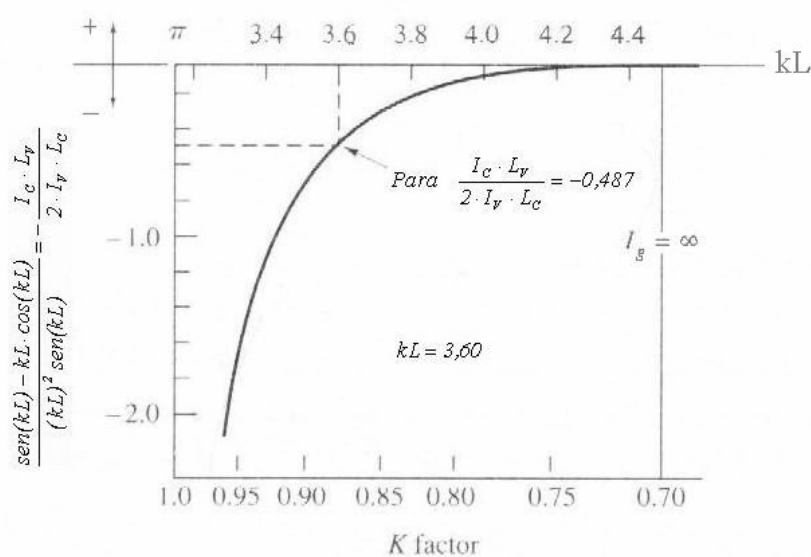


FIGURA 2.15 – Fator do comprimento efetivo  $K$  para o pórtico indeslocável da FIG.

2.14 – Adaptada de SALMON (1996)

Para analisar um pórtico deslocável, considera-se o mesmo pórtico da FIG. 2.14, porém retira-se o apoio móvel que impede o deslocamento lateral, conforme mostra a FIG.2.16.

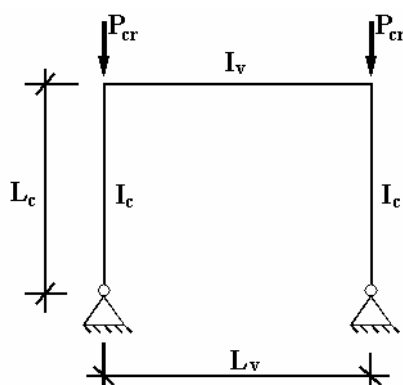


FIGURA 2.16 – Pórtico deslocável rotulado na base

Utilizando-se as Eq. (2.10) e (2.11) do método Slope-Deflection obtém-se a seguinte relação:

$$kL \tan(kL) = \frac{6I_v L_c}{I_c L_v} \quad (2.61)$$

Admitindo-se novamente as relações  $I_v \cong 2,64I_c$  e  $L_v \cong 2,57L_c$ , a Eq. (2.61) fica:

$$kL \tan(kL) = 6,163 \quad (2.62)$$

Resolvendo-se a Eq. (2.62) por tentativas obtém-se  $kL=1,35$ , o menor valor que satisfaz a equação.

$$K = \frac{\pi}{kL} = 2,33 \quad (2.63)$$

Então, se o pórtico é deslocável, ele pode ser calculado como uma barra isolada de comprimento efetivo  $2,33 L_c$ . A variação do valor de  $K$  para o pórtico em estudo é mostrada na FIG. 2.17. Para pórticos deslocáveis com as bases rotuladas e considerando-se a viga com rigidez infinita, o fator do comprimento efetivo  $K$  é sempre maior que dois.

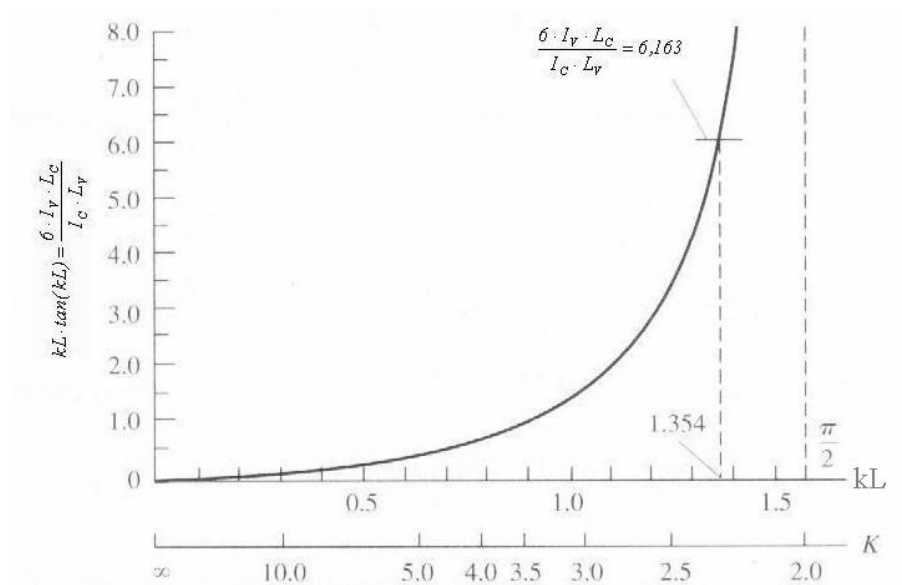


FIGURA 2.17 – Fator do comprimento efetivo K para o pórtico deslocável da FIG. 2.16  
– Adaptada de SALMON (1996)

A carga de flambagem do pórtico deslocável é dada por:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_c}{(KL_c)^2} = \frac{\pi^2 EI_c}{(2,33 L_c)^2} \quad (2.64)$$

Os casos apresentados consideraram pórticos indeslocável e deslocável com apenas um andar. No caso de pórticos de andares múltiplos a maioria dos engenheiros utiliza os ábacos para a determinação do fator K (YURA, 1971), tanto para estruturas indeslocáveis quanto para estruturas deslocáveis. Esses ábacos fornecem uma solução elástica aproximada do fator do comprimento efetivo K, em substituição a uma análise de estabilidade “exata”, como a mostrada no item anterior, por ser mais complexa.

Entretanto, a utilização desses ábacos deve ser bastante criteriosa porque o uso incorreto pode resultar em valores inadequados para o coeficiente K. Muitas das dificuldades e desentendimentos do conceito do comprimento efetivo ocorre devido ao uso dos ábacos em situações que violam algumas das hipóteses básicas assumidas na dedução das equações do método.

# 3

## FORMULAÇÕES PARA ANÁLISE EM TEORIA DE 2ª ORDEM DE PÓRTICOS PLANOS

### 3.1 Introdução

Devido ao grande desenvolvimento computacional, tanto em hardware quanto em software, tem ocorrido um aumento do uso da análise em teoria de 2ª ordem para consideração dos efeitos de estabilidade e resistência no dimensionamento e projeto de sistemas estruturais.

Uma formulação mais precisa para o cálculo estrutural é aquela que considera todos os efeitos não-lineares significativos na análise. Contudo, até o presente momento, softwares que considerem rigorosamente esses efeitos não-lineares no projeto de sistemas estruturais mais complexos não são ainda adequados para a prática nos escritórios de cálculo.

Uma alternativa recomendada por diversas normas e especificações técnicas atuais é se obter os esforços solicitantes diretamente de uma análise elástica em teoria de segunda

ordem. Esta análise é formulada com base na configuração deformada da estrutura e, embora considere os efeitos da instabilidade, não fornece nenhuma informação sobre a resistência real inelástica da estrutura. No dimensionamento, a combinação dos efeitos de instabilidade e inelasticidade deve ser considerada para verificação da capacidade das barras.

De outra forma, essas normas têm permitido o uso de métodos mais simples ou aproximados de análise e utilizam as equações de interação para a verificação da resistência e da estabilidade das barras e do sistema estrutural.

Diversos métodos de análises serão abordados neste capítulo. Primeiramente, será apresentado um método de análise rigorosa, elástica e elastoplástica, em teoria de segunda ordem, o qual exige um procedimento de análise incremental e iterativo, onde o equilíbrio é verificado para cada incremento de carga, utilizando um critério de convergência adequado. Este método é baseado numa formulação teórica consistente para análise não-linear, física e geométrica, de pórticos planos de aço e utiliza o MEF para a solução numérica.

Posteriormente, alguns métodos aproximados de análise em teoria de 2ª ordem serão apresentados. O método aproximado de Amplificação de Momentos ( $B_1$ - $B_2$ ), adotado pelo AISC/LRFD (1999), que considera a amplificação dos momentos de primeira ordem pelos fatores de majoração  $B_1$  e  $B_2$ ; o método aproximado da Força Lateral Equivalente ou Fictícia (P-Delta), adotado pela NBR 8800 (1986) e CSA-S16.1 (1994), que combina as forças laterais atuantes na estrutura com as forças laterais equivalente induzidas pelos momentos P-Delta e o método do Coeficiente  $\gamma_z$ , adotado pela NBR 6118 (2003), que verifica a necessidade ou não de se considerar os efeitos de 2ª ordem na análise e pode ser empregado como coeficiente majorador dos esforços horizontais que atuam na estrutura.

O método aproximado  $B_1$ - $B_2$  considera na sua formulação ambos os efeitos P- $\delta$  e P- $\Delta$ , enquanto que o método P-Delta e o método do Coeficiente  $\gamma_z$  consideram apenas o efeito P- $\Delta$ .

## 3.2 Formulação para Análise Rigorosa em Teoria de 2ª Ordem

### 3.2.1 Considerações Iniciais

Visando uma análise elastoplástica consistente para as estruturas de aço, é apresentada uma teoria geral para a análise não-linear de pórticos planos pelo método dos elementos finitos, onde a formulação desenvolvida considera ambos os comportamentos não-lineares, o físico (NLF) e o geométrico (NLG), das estruturas.

A formulação apresentada pretende ser a mais geral possível, permitindo que os nós sofram grandes deslocamentos e rotações e as barras sofram grandes alongamentos e curvaturas e, além disso, estas barras podem ser não prismáticas, constituídas de material homogêneo e apresentar comportamento elastoplástico.

O desenvolvimento teórico apresentado a seguir é adaptado de LAVALL (1996) e PIMENTA (1986) e é feito dentro de uma rigorosa formulação Lagrangiana atualizada utilizando a técnica corrotacional para a dedução consistente das matrizes do elemento de pórtico plano.

Os efeitos não-lineares físico e geométrico considerados nessa análise rigorosa, dentre aqueles apresentados no final do item 2.3.2 estão os efeitos P- $\delta$  e P- $\Delta$ , a influência da força normal na rigidez das barras, a mudança no comprimento das barras devido às deformações longitudinais, a relação tensão x deformação não-linear e a propagação da região plástica ao longo do comprimento das barras e ao longo da altura da seção.

### 3.2.2 Definições de Deformações e Tensões

Considere-se a fibra submetida a uma força normal  $N$ , de volume  $V_r$ , área da seção transversal  $A_r$  e comprimento  $l_r$  na configuração inicial conforme representada na FIG. 3.1-a. Na configuração deformada, conforme a FIG. 3.1-b, o volume, a área da seção transversal e o comprimento são designados respectivamente por  $V_c$ ,  $A_c$  e  $l_c$ .

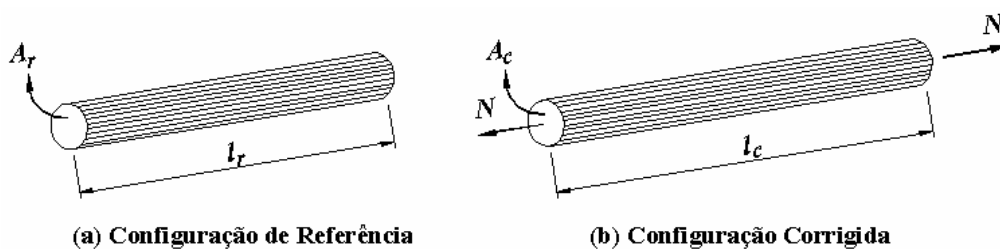


FIGURA 3.1 – Configurações de uma fibra de material

Uma medida de deformação é definida como qualquer grandeza que compare os comprimentos da fibra nas configurações inicial e deformada. Uma família de medidas de deformação pode ser definida como:

$$\varepsilon_m = \begin{cases} \frac{\lambda^{2m} - 1}{2m} & \text{para } m \neq 0 \\ \ln \lambda & \text{para } m = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $\lambda = l_c/l_r$  é uma medida básica de deformação, denominada estiramento da fibra.

Para cada valor de  $m$  está associado um membro da família. LAVALL (1996) adotou  $m=1/2$  para o cálculo da deformação linear. Então, com a ajuda da Eq. (3.1) a deformação linear pode ser escrita como:

$$\varepsilon_{1/2} = \lambda - 1 = \frac{l_c}{l_r} - 1 = \frac{l_c - l_r}{l_r} = \frac{\Delta l}{l_r} \quad (3.2)$$

A tensão de Cauchy e a tensão de engenharia na fibra são definidas, respectivamente por:

$$\sigma_c = \frac{N}{A_c} \quad \text{e} \quad \sigma_N = \frac{N}{A_r} \quad (3.3)$$

Usando-se o Princípio das Potências Virtuais para definir medidas de tensão e deformação conjugadas e com auxílio da tensão de Kirchhoff-Trefftz dada por:



$$\sigma_{KT} = \frac{V_c}{V_r} \sigma_c \quad (3.4)$$

Obtém-se a Eq. (3.5) que representa a família de tensões  $\sigma_m$  conjugada à família de deformações  $\varepsilon_m$ .

$$\sigma_m = \lambda^{-2m} \sigma_{KT} \quad (3.5)$$

Da mesma forma, para cada valor de  $m$  está associado um membro da família de tensões. Após algumas substituições,  $\sigma_m$  pode ser escrito como:

$$\sigma_m = \lambda^{(1-2m)} \sigma_N \quad (3.6)$$

Para  $m=1/2$ , tem-se a tensão de engenharia, dada por:

$$\sigma_{1/2} = \sigma_N \quad (3.7)$$

### 3.2.3 Relações Constitutivas

Considere-se a relação tensão x deformação dada pela Eq. (3.8).

$$\sigma_m = \sigma_m(\varepsilon_m) \quad (3.8)$$

Derivando-se em relação ao tempo, tem-se:

$$\dot{\sigma}_m = D_m \dot{\varepsilon}_m \quad (3.9)$$

Na Eq. (3.9) define-se o módulo de rigidez do material da fibra:

$$D_m = \frac{d\sigma_m}{d\varepsilon_m} \quad (3.10)$$

Após algumas substituições e considerando-se  $m=1/2$  e  $D_{1/2}=D$ , obtém-se a equação que representa uma família de módulos de rigidez, dada por:

$$D_m = \lambda^{2-4m}D + (1-2m)\lambda^{1-4m}\sigma_N \quad (3.11)$$

LAVALL (1996) adotou o modelo constitutivo elastoplástico, apropriado para o estudo de pilares de aço. A FIG. 3.2 mostra dois modelos teóricos simplificados de um diagrama tensão x deformação de um corpo de prova de aço submetido a um estado de tensão unidimensional. A FIG. 3.2-a representa o comportamento elastoplástico e a FIG. 3.2-b representa o comportamento elástico perfeitamente plástico de uma fibra de aço.

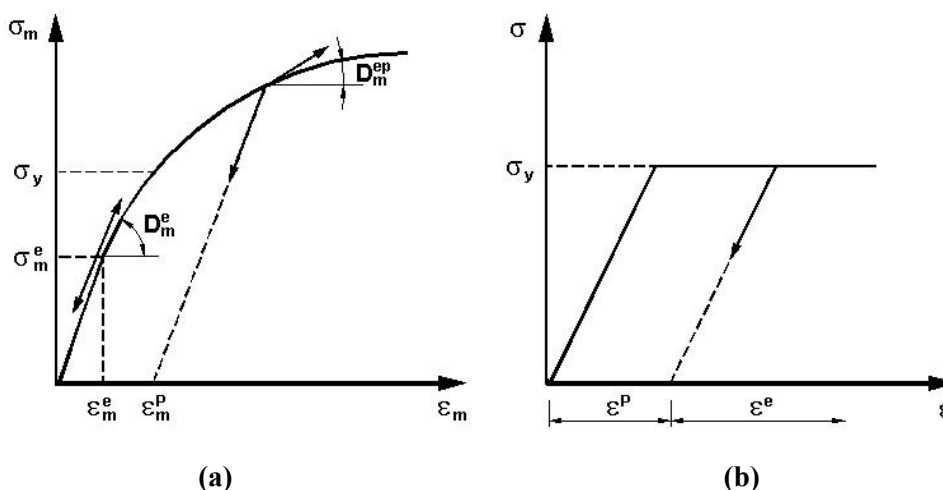


FIGURA 3.2 – Comportamento de uma fibra: (a) comportamento elastoplástico e (b) comportamento elástico perfeitamente plástico

Analisando-se a FIG. 3.2-a, observa-se que existem duas regiões distintas. Uma região elástica onde  $\sigma_m$  é menor que  $\sigma_y$  e uma região elastoplástica onde  $\sigma_m$  é maior que  $\sigma_y$ . A fibra está em regime elástico se existe uma relação que associa cada deformação a uma só tensão. O módulo de rigidez elástico é dado por:

$$D_m^e = \frac{d\sigma_m}{d\epsilon_m} \quad (3.12)$$

Assim, se  $(\sigma_m - \sigma_y) < 0$  a fibra está na fase elástica, tanto em carga ( $\epsilon_m \dot{\epsilon}_m > 0$ ) quanto em descarga ( $\epsilon_m \dot{\epsilon}_m < 0$ ).

A fibra está em regime elastoplástico quando:

$$\dot{\sigma}_m = \begin{cases} D_m^e \dot{\varepsilon}_m, & \text{se } \varepsilon_m \dot{\varepsilon}_m < 0 \\ D_m^{ep} \dot{\varepsilon}_m, & \text{se } \varepsilon_m \dot{\varepsilon}_m > 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

onde  $D_m^{ep}$  é o módulo de rigidez elastoplástico. Então, se  $(\sigma_m - \sigma_y) > 0$ , a fibra está na fase elastoplástica.  $D_m = D_m^e$  se estiver em descarga ( $\varepsilon_m \dot{\varepsilon}_m < 0$ ) e  $D_m = D_m^{ep}$  se estiver em carga ( $\varepsilon_m \dot{\varepsilon}_m > 0$ ). Quando a fibra está em regime elástico-perfeitamente plástico (FIG. 3.2-b), tem-se  $D_m^{ep} = 0$ .

### 3.2.4 Sistemas de Coordenadas

A FIG. 3.3 mostra um elemento de pórtico plano com extremidades  $a$  e  $b$  em sua configuração inicial. No sistema global de referência  $(x, y)$ , os nós possuem três graus de liberdade, sendo duas translações  $u$  e  $v$  nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente e uma rotação  $\theta$ , considerada positiva quando medida no sentido anti-horário.

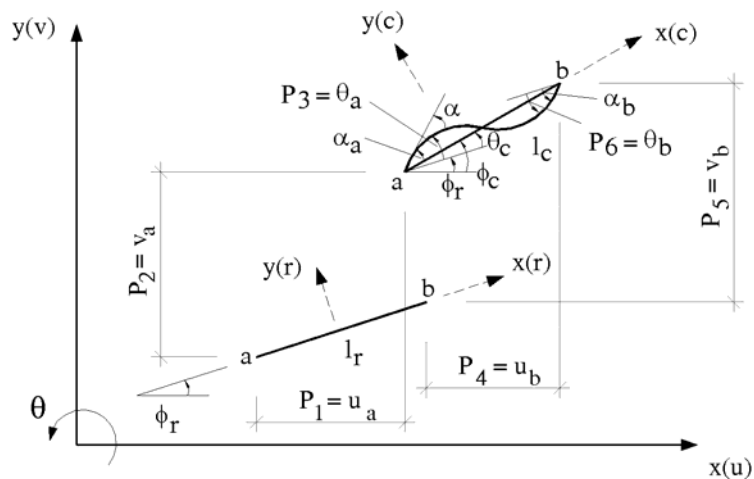


FIGURA 3.3 – Elemento de pórtico plano em sua configuração de referência e em sua configuração corrigida

Considerando-se o sistema local de coordenadas corrotacional  $(x_r, y_r)$ , com origem no centro do elemento, define-se  $l_r$  como sendo o comprimento do elemento entre os seus nós de extremidade, cujo ângulo com o eixo de referência global é  $\phi_r$ .

Para um determinado nível de carregamento, o elemento encontra-se deformado na posição atualizada ou corrigida. Da mesma forma, introduz-se um sistema local de coordenadas  $(x_c, y_c)$ , sendo  $\phi_c$  o ângulo entre a corda e o eixo global  $x$ . Para esta posição deformada, o ângulo entre a corda e a tangente é dado por  $(\alpha)$ .

O estiramento da corda e sua deformação são dados respectivamente por:

$$\lambda = \frac{l_c}{l_r} \quad \text{e} \quad \varepsilon = \lambda - 1 \quad (3.14)$$

Os graus de liberdade, denominados naturais ou corrotacionais podem ser agrupados no vetor  $3 \times 1$ , definido por:

$$\mathbf{q}^T_{\alpha} = \{ q_1, q_2, q_3 \} \quad (3.15)$$

sendo,  $q_1 = l_c - l_r$ ,  $q_2 = \alpha_a$  e  $q_3 = \alpha_b$ , onde estes dois últimos independem da rotação de corpo rígido  $\theta_c = \phi_c - \phi_r$ .

Os graus de liberdade cartesianos podem ser agrupados em um vetor  $6 \times 1$ , dado por:

$$\mathbf{p}^T_i = \{ u_a, v_a, \theta_a, u_b, v_b, \theta_b \} \quad (3.16)$$

Os graus de liberdade em coordenadas corrotacionais  $\mathbf{q}_{\alpha}$ , e os graus de liberdade em coordenadas globais cartesianos  $\mathbf{p}_i$ , podem ser relacionados conforme as expressões a seguir, deduzidas com auxílio da FIG. 3.3.

$$\begin{cases} q_1 = l_c - l_r \\ q_2 = \alpha_a = \theta_a - \theta_c = p_3 - \varphi_c + \varphi_r \\ q_3 = \alpha_b = \theta_b - \theta_c = p_6 - \varphi_c + \varphi_r \end{cases} \quad (3.17)$$

onde:

$$\begin{cases} l_c = \left[ (x_b - x_a + p_4 - p_1)^2 + (y_b - y_a + p_5 - p_2)^2 \right]^{1/2} \\ l_r = \left[ (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 \right]^{1/2} \\ \text{sen}\varphi_c = \frac{y_b - y_a + p_5 - p_2}{l_c}, \text{cos}\varphi_c = \frac{x_b - x_a + p_4 - p_1}{l_c} \\ \varphi_c = \text{arctg} \left( \frac{y_b - y_a + p_5 - p_2}{x_b - x_a + p_4 - p_1} \right) \\ \varphi_r = \text{arccos} \left( \frac{x_b - x_a}{l_r} \right) \end{cases} \quad (3.18)$$

Nas equações acima (Eq. (3.18)),  $x_a$ ,  $x_b$ ,  $y_a$  e  $y_b$  são as coordenadas dos elementos na configuração de referência.

As relações diferenciais entre as coordenadas locais corrotacionais e as coordenadas globais cartesianas podem ser escritas numa matriz  $\mathbf{B}_{3 \times 6}$  ao se derivar  $q_\alpha$  em relação a  $p_i$ , isto é,  $\partial q_\alpha / \partial p_i$ , ou  $q_{\alpha,i}$ .

$$\mathbf{q}_{\alpha,i} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\text{cos}\varphi_c & -\text{sen}\varphi_c & 0 & \text{cos}\varphi_c & \text{sen}\varphi_c & 0 \\ -\frac{\text{sen}\varphi_c}{l_c} & \frac{\text{cos}\varphi_c}{l_c} & 1 & \frac{\text{sen}\varphi_c}{l_c} & -\frac{\text{cos}\varphi_c}{l_c} & 0 \\ -\frac{\text{sen}\varphi_c}{l_c} & \frac{\text{cos}\varphi_c}{l_c} & 0 & \frac{\text{sen}\varphi_c}{l_c} & -\frac{\text{cos}\varphi_c}{l_c} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

onde a matriz  $\mathbf{B}$  é uma matriz de mudança de coordenadas.

As derivadas segunda de  $q_\alpha$  em relação a  $p_i$ , isto é  $\partial^2 q_\alpha / \partial q_i \partial q_j$ , ( $\alpha=1,2,3$  e  $i=j=1,\dots,6$ ), ou  $q_{\alpha,ij}$  serão também necessárias e podem ser colocadas em três matrizes simétricas  $\mathbf{G}_\alpha$  ( $6 \times 6$ ) dadas por:

$$\mathbf{G}_1 = \frac{1}{I_c} \begin{bmatrix} \text{sen}^2 \varphi_c & -\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 & -\text{sen}^2 \varphi_c & \text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & \cos^2 \varphi_c & 0 & \text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & -\cos^2 \varphi_c & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \text{sen}^2 \varphi_c & -\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & \text{simétrica} & & & \cos^2 \varphi_c & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_3 = \frac{1}{I_c^2} \begin{bmatrix} -2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & (\cos^2 \varphi_c - \text{sen}^2 \varphi_c) & 0 & 2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & -(\cos^2 \varphi_c - \text{sen}^2 \varphi_c) & 0 \\ & 2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 & -(\cos^2 \varphi_c - \text{sen}^2 \varphi_c) & -2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & (\cos^2 \varphi_c - \text{sen}^2 \varphi_c) & 0 \\ & \text{simétrica} & & & 2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Esta derivada segunda  $q_{\alpha,ij}$  é uma relação que envolve apenas geometria, ou seja, deslocamentos em coordenadas corrotacionais e cartesianas, e será uma parcela da matriz geométrica oriunda da teoria de segunda ordem.

### 3.2.5 Teoria Estrutural

A teoria estrutural utilizada neste trabalho parte da hipótese cinemática atribuída a Bernoulli-Euler, onde se afirma o seguinte: “*As seções transversais planas e ortogonais ao eixo da barra permanecem planas, indeformáveis e ortogonais ao eixo, após a deformação*”.

A hipótese acima despreza o empenamento das seções transversais, ao afirmar que as seções permanecem planas, e o efeito da deformação transversal ou de Poisson, quando afirma que as seções da barra permanecem indeformáveis ( $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \nu = 0$ ). Despreza também as distorções no plano da barra, quando diz que as seções transversais permanecem ortogonais ao eixo da barra e, neste caso,  $\gamma_{xy} = 0$ ; conseqüentemente os efeitos da tensão de cisalhamento,  $\tau_{xy} = 0$ . Decorre de tudo isto que a única deformação relevante é portanto, a deformação longitudinal  $\varepsilon_{xx}$ .

### 3.2.6 Cinemática de Elemento

#### Campo de Deformação

A Eq. (3.22) mostra que o estiramento de uma fibra assim como a sua deformação linear são dados, respectivamente, por:

$$\lambda = l_c/l_r \quad \text{e} \quad \varepsilon = \lambda - 1 \quad (3.22)$$

Para se definir o campo de deformação consistente com a teoria estrutural apresentada, considere-se um elemento diferencial de barra reta de pórtico plano na configuração inicial, como mostra a FIG. 3.4-a. Este elemento é limitado por duas seções transversais ortogonais a um eixo longitudinal arbitrariamente definido e distante  $dx_r$  uma da outra.

Denominando-se fibra a um conjunto de pontos materiais sobre uma reta paralela a este eixo longitudinal, verifica-se que uma fibra a uma distância  $y_r$  do eixo e uma fibra neste eixo têm os comprimentos  $dS_r$  e  $d\bar{S}_r$  respectivamente, dados por:

$$dS_r = d\bar{S}_r = dx_r \quad (3.23)$$

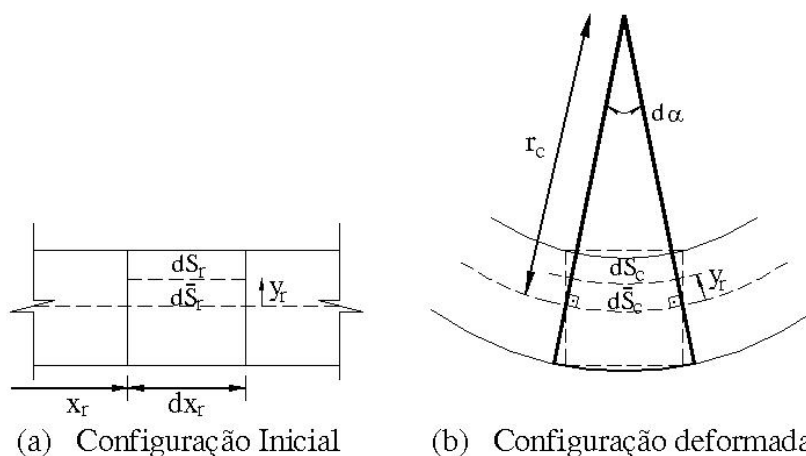


FIGURA 3.4 – Elemento diferencial de barra reta

Considera-se agora o mesmo elemento diferencial na configuração deformada, conforme FIG. 3.4-b. Observando-se a hipótese de Bernoulli-Euler, obtém-se para uma fibra a uma distância  $y_r$  do eixo e uma fibra no eixo os seguintes comprimentos, respectivamente:

$$dS_c = (r_c - y_r) d\alpha \quad \text{e} \quad d\bar{S}_c = r_c d\alpha \quad (3.24)$$

onde  $r_c$  é o raio de curvatura local e  $d\alpha$  é o ângulo interno do setor definido pelas seções transversais, formado após a deformação. Da Eq. (3.24) tem-se que:

$$dS_c = d\bar{S}_c - y_r d\alpha \quad (3.25)$$

O estiramento de uma fibra a uma distância  $y_r$  do eixo,  $\lambda$ , e o estiramento de uma fibra no eixo,  $\bar{\lambda}$ , são definidos por:

$$\lambda = dS_c/dS_r \quad \text{e} \quad \bar{\lambda} = d\bar{S}_c/d\bar{S}_r \quad (3.26)$$

Estiramentos são grandezas positivas, sendo que os valores maiores que um correspondem a esticamentos e valores menores que um a encurtamentos. Levando-se a Eq. (3.25) na Eq.(3.26) com o auxílio da Eq. (3.23), tem-se o estiramento dado por:

$$\lambda = \bar{\lambda} - y_r \alpha' \quad (3.27)$$

onde  $\alpha' = d\alpha/dx_r$ .

Subtraindo-se a unidade de ambos os lados, chega-se à expressão analítica do campo de deformação consistente com a teoria estrutural adotada, dada por:

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} - y_r \alpha' \quad (3.28)$$

### **Campo de Deslocamento**

Da Hipótese de Bernoulli-Euler adotada neste trabalho, o campo de deslocamento dos pontos da barra fica caracterizado completamente se conhecidos os deslocamentos axiais  $\bar{u}$  e transversais  $\bar{v}$  dos pontos situados sobre o eixo, bem como a rotação  $\alpha$  das seções transversais.



No sistema corrotacional  $x_c, y_c$  os deslocamentos denotados por  $u_c$  e  $v_c$  representam os campos de deslocamento e são dados exatamente por:

$$u_c(x, y) = \bar{u}_c(x) - y_r \operatorname{sen} \alpha \quad \text{e} \quad v_c(x, y) = \bar{v}_c(x) - y_r(1 - \cos \alpha) \quad (3.29)$$

onde  $\bar{v}_c$  e  $\bar{u}_c$  são os deslocamentos do eixo da barra no sistema corrotacional. A rotação  $\alpha$  das seções transversais vale:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left( \frac{\bar{v}'_c}{1 + \bar{u}'_c} \right) \quad (3.30)$$

Para este campo de deslocamento e após algumas substituições chega-se à expressão analítica do campo de deformação consistente com a teoria estrutural adotada, dada pela Eq. (3.28), que fica:

$$\varepsilon = (1 + \bar{u}'_c) \sec \alpha - 1 - y_r \alpha' \quad (3.31)$$

Este será o campo de deformação a ser utilizado neste trabalho. Para sua determinação definem-se as funções de interpolação para o deslocamento  $\bar{u}_c$  do eixo da barra e para o ângulo  $\alpha$  de rotação deste eixo:

$$\bar{u}_c(x_r) = q_1 \left( \frac{x_r}{l_r} + \frac{1}{2} \right) = q_1 \Psi_1(x_r) \quad (3.32)$$

$$\alpha(x_r) = q_2 \left( \frac{3x_r^2}{l_r^2} - \frac{x_r}{l_r} - \frac{1}{4} \right) + q_3 \left( \frac{3x_r^2}{l_r^2} + \frac{x_r}{l_r} - \frac{1}{4} \right) = q_2 \Psi_2(x_r) + q_3 \Psi_3(x_r) \quad (3.33)$$

Utilizando-se aproximações de segunda-ordem para as funções trigonométricas e adotando-se um valor constante  $\bar{\varepsilon}$ , representado pelo valor médio  $\bar{\varepsilon}_m = 1/l_r \int \bar{\varepsilon} dx_r$  tem-se o campo de deformação, em função das coordenadas corrotacionais:

$$\varepsilon = \frac{q_1}{l_r} + \left( 1 + \frac{q_1}{l_r} \right) \left( \frac{q_2^2}{15} + \frac{q_3^2}{15} - \frac{q_2 q_3}{30} \right) - y_r (q_2 \Psi_2'' + q_3 \Psi_3'') \quad (3.34)$$

### 3.2.7 Equilíbrio Estático do Elemento

Uma vez conhecido o campo de deformação do elemento e usando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais, o equilíbrio estático pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\int_{V_r} \sigma \delta \varepsilon dV_r = P_i \delta p_i \quad (3.35)$$

onde  $V_r$  é o volume do elemento na configuração de referência,  $\sigma$  a tensão normal da fibra,  $\delta \varepsilon$  a deformação virtual da fibra,  $P_i$  as forças nodais internas do elemento e  $\delta p_i$  o deslocamento virtual nodal do elemento.

A deformação virtual da fibra é dada, com o auxílio da regra da cadeia por:

$$\delta \varepsilon = \varepsilon_{,\alpha} q_{\alpha,i} \delta p_i \quad (3.36)$$

onde  $q_{\alpha,i}$  representa uma transformação de coordenadas do sistema corrotacional para o sistema cartesiano, inicialmente em coordenadas locais e após uma rotação de eixos, colocando-o no sistema global.

Portanto, a equação de equilíbrio do elemento é dada por:

$$P_i = \left( \int_{V_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha} dV_r \right) q_{\alpha,i} \quad (3.37)$$

Fazendo-se  $\int_{V_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha} dV_r = Q_\alpha$ , em notação indicial tem-se:

$$P_i = Q_\alpha q_{\alpha,i} \quad (3.38)$$

Reunindo-se  $P_i$  e  $Q_\alpha$  em dois vetores  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$ , respectivamente, pode-se escrever a Eq. (3.38), com auxílio da Eq. (3.19), na forma matricial:

$$\mathbf{P} = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{Q} \quad (3.39)$$

### Matriz de Rigidez Tangente do Elemento

Os componentes da matriz de rigidez tangente do elemento são obtidos das derivadas de  $P_i$  em relação às coordenadas cartesianas  $p_j$ . Portanto derivando-se a Eq. (3.38), com o auxílio da regra da cadeia, obtém-se:

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_j} = k_{ij} = q_{\alpha,i} Q_{\alpha,\beta} q_{\beta,j} + Q_\alpha q_{\alpha,ij} \quad (3.40)$$

Resolvendo-se a derivada  $Q_{\alpha,\beta}$  conclui-se que:

$$Q_{\alpha,\beta} = \int_{V_r} (\varepsilon_{,\alpha} D \varepsilon_{,\beta} + \sigma \varepsilon_{,\alpha\beta}) dV_r \quad (3.41)$$

de onde são definidos  $D_{\alpha,\beta}$  e  $H_{\alpha,\beta}$ , respectivamente por:

$$D_{\alpha,\beta} = \int_{V_r} \varepsilon_{,\alpha} D \varepsilon_{,\beta} dV_r \quad \text{e} \quad H_{\alpha,\beta} = \int_{V_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha\beta} dV_r \quad (3.42)$$

Levando-se a Eq. (3.41) na Eq. (3.39), com o auxílio da Eq. (3.42), tem-se a matriz de rigidez tangente para o elemento, dada por:

$$k_{i,j} = \underbrace{q_{\alpha,i} (D_{\alpha,\beta} + H_{\alpha,\beta}) q_{\beta,j}}_{\text{Parcela objetiva}} + \underbrace{Q_\alpha q_{\alpha,ij}}_{\text{Parcela do movimento de corpo rígido}} \quad (3.43)$$

Podendo também ser escrita como:

$$k_{i,j} = \underbrace{q_{\alpha,i} D_{\alpha,\beta} q_{\beta,j}}_{\text{Parcela constitutiva}} + \underbrace{q_{\alpha,i} H_{\alpha,\beta} q_{\beta,j} + Q_\alpha q_{\alpha,ij}}_{\text{Parcela geométrica}} \quad (3.44)$$

Na parcela geométrica da Eq. (3.44) a expressão  $q_{\alpha,i} H_{\alpha,\beta} q_{\beta,j}$  é responsável pelo efeito P- $\delta$  e a expressão  $Q_\alpha q_{\alpha,ij}$  pelo efeito P- $\Delta$ .

Escrevendo em notação matricial, a matriz de rigidez constitutiva vem da parcela constitutiva da Eq. (3.43). Usando-se  $q_{\alpha,i}=q_{\beta,j}=\mathbf{B}_{(3 \times 6)}$  e  $\mathbf{D}_{\alpha,\beta}=\mathbf{D}_{(3 \times 3)}$ , simétrica, resulta em:

$$\mathbf{k}_M = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \quad (3.45)$$

(6x6) também simétrica.

A matriz de rigidez geométrica é obtida da parcela geométrica da Eq. (3.44) com o auxílio de  $H_{\alpha,\beta}=\mathbf{H}_{(3 \times 3)}$  e  $q_{\alpha,ij}=\mathbf{G}_{\alpha(6 \times 6)}$ , ambas simétricas e  $\alpha=1,2,3$ :

$$\mathbf{k}_G = \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} + Q_\alpha \mathbf{G}_\alpha \quad (3.46)$$

(6x6) também simétrica.

Finalmente, escreve-se a matriz de rigidez tangente, simétrica (6x6), nas seguintes formas:

$$\mathbf{k}_t = \mathbf{k}_M + \mathbf{k}_G \quad (3.47)$$

ou

$$\mathbf{k}_t = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} + Q_\alpha \mathbf{G}_\alpha \quad (3.48)$$

### 3.2.8 Expressões Analíticas para a Matriz de Rigidez Tangente

A matriz de rigidez tangente do elemento no sistema local cartesiano, pode ser explícita na forma matricial através de uma forma local da Eq. (3.48).

$$\bar{\mathbf{k}}_t = \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{B}} + Q_\alpha \bar{\mathbf{G}}_\alpha \quad (3.49)$$

onde as matrizes de rigidez, constitutiva e geométrica, no sistema local cartesiano são dadas, respectivamente, por:

$$\bar{\mathbf{k}}_M = \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{B}} \quad (3.50)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_G = \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{H} \bar{\mathbf{B}} + Q_\alpha \bar{\mathbf{G}}_\alpha \quad (3.51)$$

### Regime Elástico

Em regime elástico linear o material obedece a Lei de Hooke  $\sigma = E \varepsilon$  e as matrizes constitutivas  $\bar{\mathbf{k}}_M$  e geométrica  $\bar{\mathbf{k}}_G$  são dadas, respectivamente por:

- Matriz de rigidez constitutiva do elemento de barra reta no sistema local cartesiano ( $\bar{\mathbf{k}}_M$ ):

$$\bar{\mathbf{k}}_M = \begin{bmatrix} \frac{E A_r}{l_r} & 0 & 0 & -\frac{E A_r}{l_r} & 0 & 0 \\ & \frac{12 E I}{l_r l_c^2} & \frac{6 E I}{l_r l_c} & 0 & -\frac{12 E I}{l_r l_c^2} & \frac{6 E I}{l_r l_c} \\ & & \frac{4 E I}{l_r} & 0 & -\frac{6 E I}{l_r l_c} & \frac{2 E I}{l_r} \\ & & & \frac{E A_r}{l_r} & 0 & 0 \\ & \text{simétrica} & & & \frac{12 E I}{l_r l_c^2} & -\frac{6 E I}{l_r l_c} \\ & & & & & \frac{4 E I}{l_r} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

- Matriz de rigidez geométrica do elemento de barra reta no sistema local cartesiano ( $\bar{\mathbf{k}}_G$ ):

$$\bar{\mathbf{k}}_G = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{l_c^2} (M_b - M_a) & 0 & 0 & -\frac{1}{l_c^2} (M_b - M_a) & 0 \\ & \frac{6 N}{5 l_c} & \frac{1}{10} N & -\frac{1}{l_c^2} (M_b - M_a) & -\frac{6 N}{5 l_c} & \frac{1}{10} N \\ & & \frac{2}{15} N l_c & 0 & -\frac{1}{10} N & -\frac{1}{30} N l_c \\ & & & 0 & \frac{1}{l_c^2} (M_b - M_a) & 0 \\ & \text{simétrica} & & & \frac{6 N}{5 l_c} & -\frac{1}{10} N \\ & & & & & \frac{2}{15} N l_c \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

### Regime Elastoplástico

Em regime elastoplástico altera-se a lei constitutiva para  $\sigma = D \varepsilon$  e as matrizes constitutiva  $\bar{\mathbf{k}}_M^{\text{ep}}$  e geométrica  $\bar{\mathbf{k}}_G^{\text{ep}}$  são dadas, respectivamente, por:

- Matriz de rigidez constitutiva do elemento de barra reta no sistema local cartesiano

( $\bar{\mathbf{k}}_M^{\text{ep}}$ ):

$$\bar{\mathbf{k}}_M^{\text{ep}} = \begin{bmatrix} \frac{C_{1m}}{l_r} & 0 & -\frac{C_{2m}}{l_r} & -\frac{C_{1m}}{l_r} & 0 & \frac{C_{2m}}{l_r} \\ & \frac{12 C_{3m}}{l_r l_c^2} & \frac{6 C_{3m}}{l_r l_c} & 0 & -\frac{12 C_{3m}}{l_r l_c^2} & \frac{6 C_{3m}}{l_r l_c} \\ & & \frac{4 C_{3m}}{l_r} & \frac{C_{2m}}{l_r} & -\frac{6 C_{3m}}{l_r l_c} & \frac{2 C_{3m}}{l_r} \\ & & & \frac{C_{1m}}{l_r} & 0 & -\frac{C_{2m}}{l_r} \\ & \text{simétrica} & & & \frac{12 C_{3m}}{l_r l_c^2} & -\frac{6 C_{3m}}{l_r l_c} \\ & & & & & \frac{4 C_{3m}}{l_r} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

- Matriz de rigidez geométrica do elemento de barra reta no sistema local cartesiano

( $\bar{\mathbf{k}}_G^{\text{ep}}$ ):

$$\bar{\mathbf{k}}_G = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{l_c^2}(M_b - M_a) & 0 & 0 & -\frac{1}{l_c^2}(M_b - M_a) & 0 \\ & \frac{6 N}{5 l_c} & \frac{1}{10} N & -\frac{1}{l_c^2}(M_b - M_a) & -\frac{6 N}{5 l_c} & \frac{1}{10} N \\ & & \frac{2}{15} N l_c & 0 & -\frac{1}{10} N & -\frac{1}{30} N l_c \\ & & & 0 & \frac{1}{l_c^2}(M_b - M_a) & 0 \\ & \text{simétrica} & & & \frac{6 N}{5 l_c} & -\frac{1}{10} N \\ & & & & & \frac{2}{15} N l_c \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

### 3.2.9 O Programa

Apresenta-se na FIG. 3.5 o fluxograma geral do programa principal PPLANLEP, de LAVALL (1996), utilizado para fazer a análise não-linear elastoplástica de pórtico planos. Este programa, escrito na linguagem Fortran, foi desenvolvido utilizando a formulação ora apresentada.

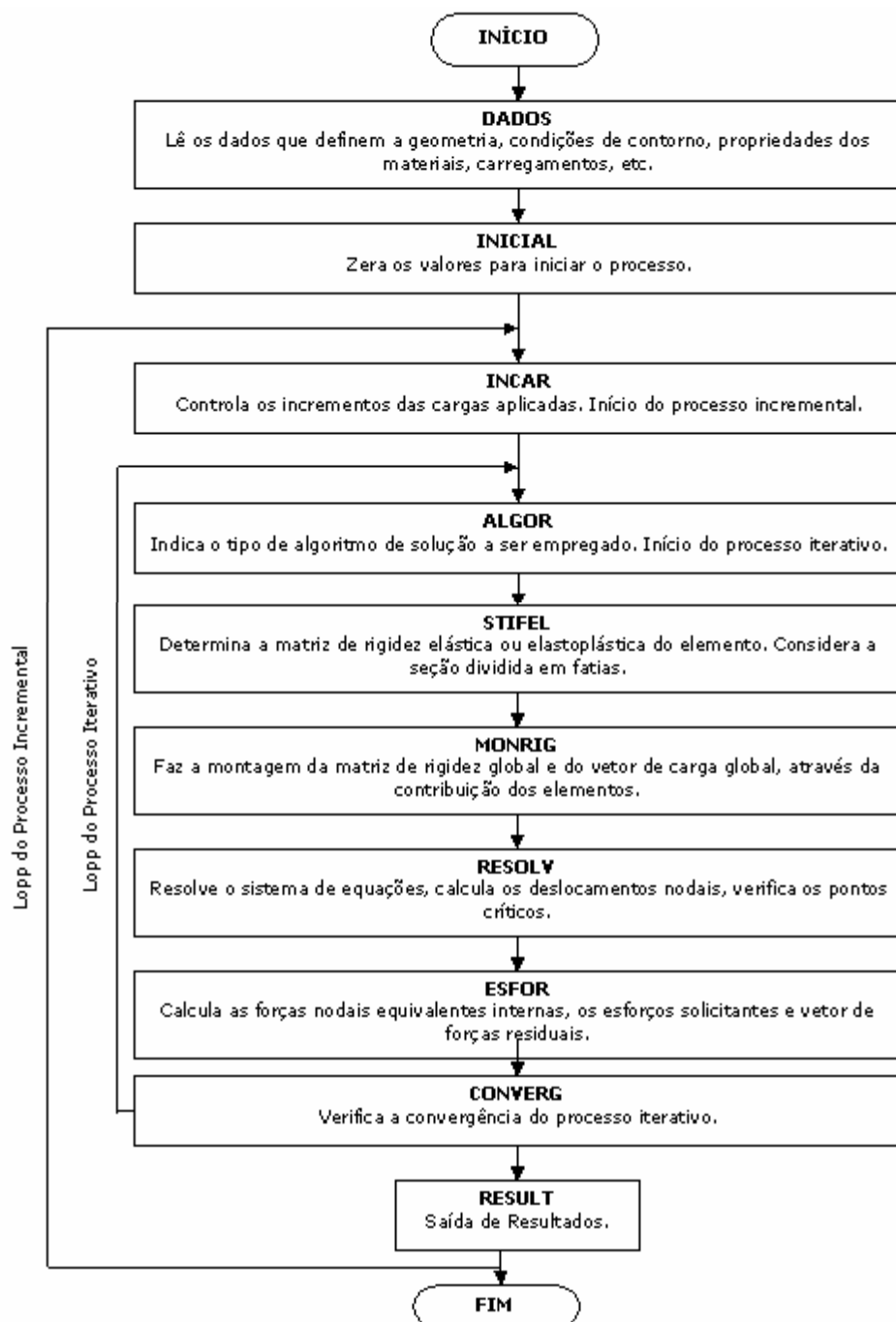


FIGURA 3.5 - Fluxograma geral do programa PPLANLEP

Observa-se que num processo incremental e iterativo dois “loops” são necessários: um para incrementar o carregamento aplicado e outro para iterar a solução até a convergência.

Para a solução numérica das equações não-lineares foi utilizado o método de Newton-Raphson puro, o qual tem provado ser uma das técnicas mais eficientes de solução para análise não-linear via MEF.

No processo incremental-iterativo, o equilíbrio é verificado em cada iteração segundo um critério de convergência baseado nos deslocamentos. O processo numérico será convergente se:

$$\frac{\sqrt{\left\| \sum_{i=1}^n (p_i^j)^2 - \sum_{i=1}^n (p_i^{j-1})^2 \right\|}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i^1)^2}} 100 \leq \text{Tolerância} \quad (3.56)$$

onde  $p_i$  são os deslocamentos nodais,  $n$  é o número total de incógnitas do problema e  $j-1$  e  $j$  são as iterações sucessivas. Nos cálculos utilizando-se este programa foi adotada uma tolerância igual a 0,5.

Para que sejam determinados a força normal (N) e momento fletor (M) é necessário realizar integração sobre toda a área de seção transversal da barra. Para tanto adotou-se no programa a técnica das fatias, onde a seção transversal da barra é dividida em um grande número de fatias retangulares, buscando captar as variações de tensões e a propagação do escoamento na seção transversal.

A FIG. 3.6 mostra um exemplo típico da seção transversal de um perfil I subdividida em fatias. As chapas componentes são fatiadas conforme indicado, permitindo o acompanhamento da plastificação ao longo da altura da seção.

Na implementação da formulação por fatias, considera-se que o valor do estado de tensão no centro da fatia é considerado com o valor de toda ela. Admite-se então que se



a tensão no centro de uma fatia alcançar a tensão local de escoamento, toda a fatia se torna plástica, enquanto que aquelas com tensão inferior à tensão de escoamento local permanecem elásticas.

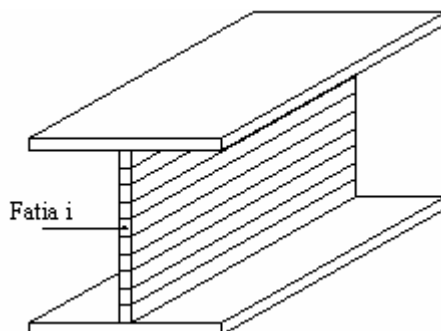


FIGURA 3.6 – Divisão em fatias do perfil I - Adaptada de LAVALL (1996).

### 3.3 Análise Elástica Aproximada em 2ª Ordem

#### 3.3.1 Considerações Iniciais

Os pilares de pórticos em geral são barras submetidas às ações combinadas de momentos fletores e força normal. Devido a essa força normal, momentos e deslocamentos de 2ª ordem surgem na estrutura e são adicionados aos momentos e deslocamentos de 1ª ordem. Em geral, pelo menos dois tipos de efeitos de 2ª ordem são definidos: o efeito  $P-\delta$  e o efeito  $P-\Delta$ . Esses efeitos causam deformação e aumento de tensão na barra, reduzindo conseqüentemente a sua resistência e desestabilizando a estrutura. Portanto, para garantir um cálculo seguro, pelo menos esses efeitos devem ser considerados.

Os métodos aproximados em 2ª ordem de Amplificação dos Momentos ( $B_1-B_2$ ), da Força Lateral Equivalente ou Fictícia ( $P$ -Delta) e do Coeficiente  $\gamma_z$  são apresentados a seguir. Nestes métodos os efeitos de 2ª ordem são obtidos a partir de uma análise elástica em 1ª ordem. Diversos outros métodos, como LE MESSURIER (1977), CHEONG-SIAT-MOY (1972), YURA (1971), avaliam as análises aproximadas em 2ª ordem usando a mesma filosofia do método aproximado  $B_1-B_2$ .

O método aproximado  $B_1$ - $B_2$  considera na sua formulação ambos os efeitos P- $\delta$  e P- $\Delta$ , enquanto que o método P-Delta e o método do Coeficiente  $\gamma_z$  consideram apenas o efeito P- $\Delta$ , sendo necessário que as equações de interação considerem implicitamente o efeito P- $\delta$ .

### 3.3.2 Método de Amplificação dos Momentos ( $B_1$ - $B_2$ )

Uma análise em teoria de 2ª ordem é aquela na qual as equações de equilíbrio são obtidas considerando a posição deslocada da estrutura. Segundo o AISC/LRFD (1999), em estruturas calculadas com base na análise elástica, os momentos fletores solicitantes  $M_{Sd}$ , devem ser determinados de uma análise elástica rigorosa de 2ª ordem ou de uma análise de 2ª ordem aproximada, conforme o seguinte:

$$M_{Sd} = B_1 M_{nt} + B_2 M_{lt} \quad (3.57)$$

onde duas análises elásticas de primeira ordem são necessárias para o cálculo das parcelas  $M_{nt}$  e  $M_{lt}$ .  $M_{nt}$  é o momento fletor solicitante de cálculo, assumindo não existir deslocamento lateral na estrutura, ou seja, os nós são impedidos de se deslocar horizontalmente. Essa parcela inclui os momentos de 1ª ordem devido ao carregamento total (forças ou ações verticais e horizontais) da estrutura.

Para o cálculo de  $M_{nt}$  utiliza-se na análise uma contenção horizontal fictícia em cada andar, conforme mostrado na FIG. 3.7-b.  $M_{lt}$  é o momento fletor solicitante de cálculo devido ao deslocamento lateral do pórtico e obtido também por análise elástica de 1ª ordem. Esta parcela inclui os momentos devido apenas ao efeito dos deslocamentos horizontais dos nós da estrutura (efeito das reações das contenções fictícias aplicadas nos mesmos pontos e em sentido contrário), conforme mostrado na FIG. 3.7-c.

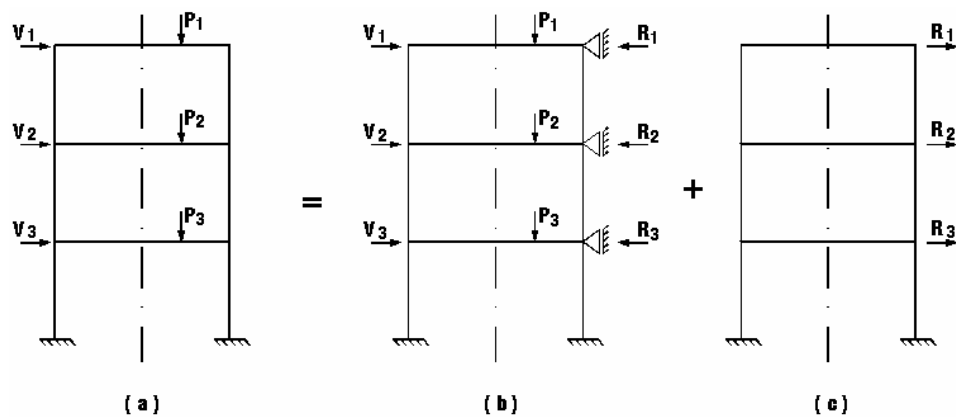


FIGURA 3.7 – Modelo de pórtico para cálculo de  $M_{nt}$  e  $M_{lt}$

Os momentos  $M_{nt}$  e  $M_{lt}$  são multiplicados por seus respectivos coeficientes de amplificação,  $B_1$  e  $B_2$ , e somados para obter o momento majorado aproximado de 2ª ordem,  $M_{Sd}$ . Como mostrado na FIG. 3.8,  $B_1$  leva em conta o efeito de 2ª ordem P- $\delta$  que ocorre em ambas as situações (estrutura contraventada e não-contraventada) e  $B_2$  considera o efeito P- $\Delta$  que ocorre em estrutura não-contraventada.

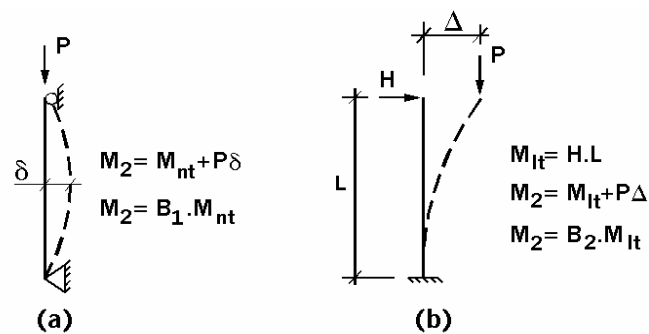


FIGURA 3.8 – Efeitos de 2ª ordem: (a) Pilar contraventado, (b) Pilar não-contraventado

### Efeito P- $\delta$ – Coeficiente $B_1$

A FIG. 3.9 mostra uma barra indeslocável submetida a uma força normal de compressão  $P$ , a um carregamento distribuído  $q(z)$  em todo o seu vão e aos momentos  $M_1$  e  $M_2$  nas extremidades.

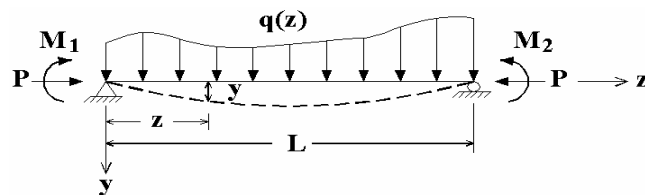


FIGURA 3.9 – Carregamento geral de uma barra de pórtico

Esse carregamento produz momento fletor e deslocamento de 1ª ordem,  $M_I$  e  $y_I$ , respectivamente. A força normal de compressão  $P$  atuará no deslocamento de 1ª ordem para produzir momento fletor e deslocamento de 2ª ordem,  $M_{II}$  e  $y_{II}$ , respectivamente. Esses momento e deslocamento adicionais são resultados do chamado efeito P- $\delta$ . Então, o momento total e o deslocamento total são dados pela soma dos momento e deslocamento de 1ª ordem com os respectivos momento e deslocamento adicionais devido ao feito P- $\delta$ . A equação de equilíbrio é formulada na posição deformada e a equação do momento fletor  $M_z$  é dada por:

$$M_z = M_I + M_{II} = M_I + Py = -EI \frac{d^2 y}{dz^2} \quad (3.58)$$

Rearranjando a Eq. (3.58), derivando-a duas vezes e fazendo  $k^2=P/EI$ , sendo  $EI$  constante, tem-se a equação diferencial final:

$$\frac{d^2 M_z}{dz^2} + k^2 M_z = \frac{d^2 M_I}{dz^2} \quad (3.59)$$

A solução geral da Eq. (3.59) pode ser escrita como:

$$M_z = A \operatorname{sen} kz + B \operatorname{cos} kz + f_1(z) \quad (3.60)$$

onde  $f_1(z)$  é o valor de  $M_z$  que satisfaz a Eq. (3.59). Quando  $M_z$  é uma função contínua, seu valor máximo pode ser encontrado derivando a Eq. (3.60) em relação a  $z$ , igualando a zero e fazendo  $df_1(z)/dz = 0$ , sendo  $A$  e  $B$  as constantes da Eq. (3.60).

$$M_{z_{\max}} = \frac{A^2}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{B^2}{\sqrt{A^2 + B^2}} + f_1(z) = \sqrt{A^2 + B^2} + f_1(z) \quad (3.61)$$

**CASO 1: Momentos desiguais nas extremidades da barra sem carregamento transversal:**

Admitindo-se  $q(z)=0$  e  $M_2 > M_1$  como mostra a FIG. 3.10, o momento de 1ª ordem pode ser escrito como:

$$M_1 = M_1 + \frac{M_2 - M_1}{L} z \quad (3.62)$$

Sendo  $d^2M_1/dz^2 = 0$ , a Eq. (3.59) torna-se uma equação homogênea. O momento máximo é obtido fazendo-se  $f_1(z) = 0$  e as constantes  $A$  e  $B$  são obtidas aplicando as condições de contorno na equação geral (Eq. (3.60)).

$$M_{z_{MAX}} = M_2 \sqrt{\frac{1 - 2(M_1/M_2) \cos(kL) + (M_1/M_2)^2}{\sin^2(kL)}} \quad (3.63)$$

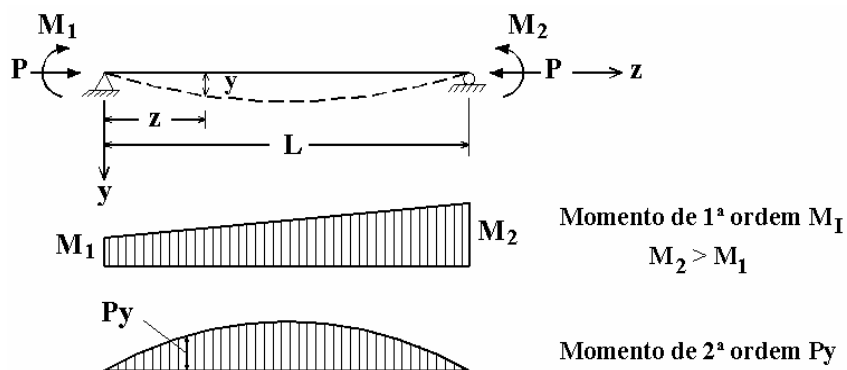


FIGURA 3.10 - Barra submetida a momentos de extremidades sem carregamento transversal

**CASO 2: Momentos iguais nas extremidades da barra sem carregamento transversal:**

Este é um caso particular do anterior, onde  $M_1=M_2=M$  (FIG. 3.11), que levando na Eq. (3.63), tem-se  $M_{z_{max}}$ .

$$M_{z_{MAX}} = M \sec\left(\frac{kL}{2}\right) \quad (3.64)$$

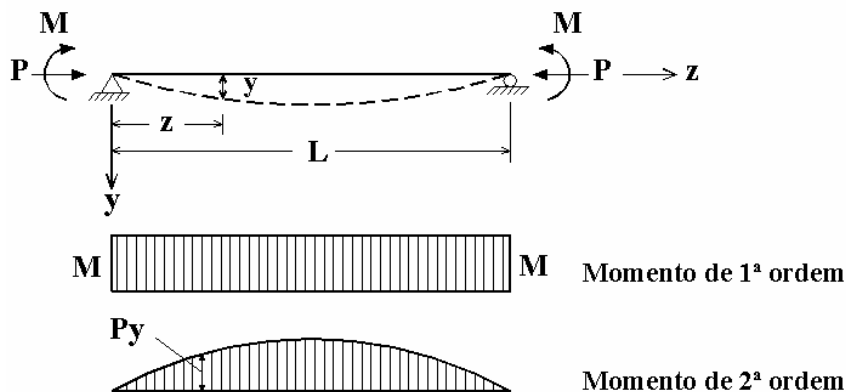


FIGURA 3.11 - Barra submetida a momentos iguais de extremidades sem carregamento transversal

### CASO 3: Carregamento uniformemente distribuído

Considerando-se a mesma barra submetida somente a um carregamento uniformemente distribuído  $q(z)$ , conforme mostra a FIG. 3.12. O momento de 1ª ordem é dado por:

$$M_1 = \frac{q}{2} z (L - z) \quad (3.65)$$

Então  $d^2M_1/dz^2 = -q$  e  $f_1(z) \neq 0$ . Considerando-se solução particular o polinômio  $f_1(z) = C_1 + C_2z$  e obtendo todas as constantes da equação da Eq. (3.61), o  $M_{z_{MAX}}$  é dado por:

$$M_{z_{MAX}} = \frac{qL^2}{8} \left[ \left( \frac{8}{(kL)^2} \right) \left( \sec\left(\frac{kL}{2} - 1\right) \right) \right] \quad (3.66)$$

Observa-se em todos os casos que  $M_{z_{max}}$  de 2ª ordem é igual ao momento máximo de 1ª ordem multiplicado por um fator de majoração devido a carga axial de compressão.

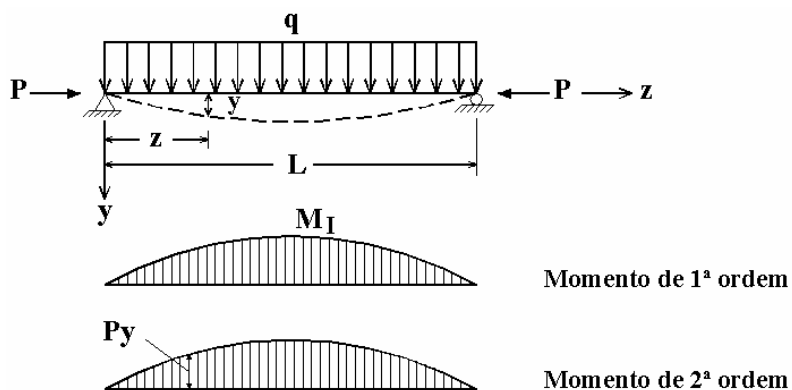


FIGURA 3.12 - Barra submetida a um carregamento transversal uniforme sem momentos de extremidade

Como alternativa ao método da equação diferencial, é conveniente usar um procedimento simplificado para determinar  $M_{z,max}$ .

A FIG. 3.13 mostra uma barra com carga distribuída  $q(z)$  e um deslocamento  $\delta_1$  de 1ª ordem devido a esse carregamento.

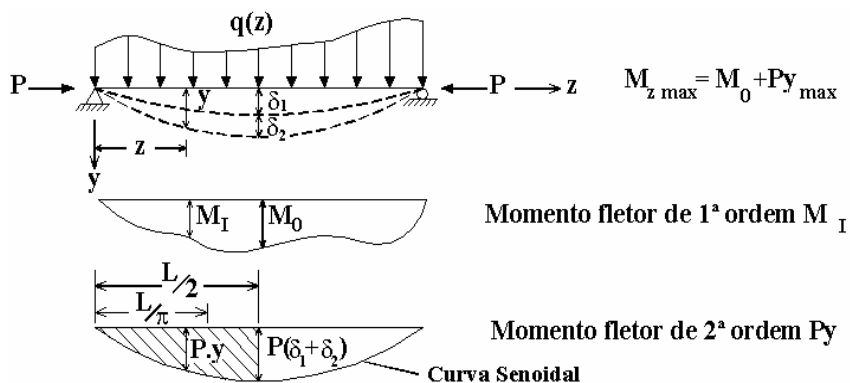


FIGURA 3.13 – Momento fletor e deslocamento de 1ª e 2ª ordem

Assumindo para o momento fletor de 2ª ordem uma curva senoidal, a deslocamento  $\delta_2$  de 2ª ordem é dada por:

$$\delta_2 = \delta_1 \left[ \frac{N_{sd}/N_{el}}{1 - N_{sd}/N_{el}} \right] = \delta_1 \left( \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) \quad (3.67)$$

onde  $\alpha = N_{Sd}/N_{e1}$ , sendo  $N_{Sd}$  a força normal de compressão majorada da barra e  $N_{e1}$  a carga de flambagem de Euler considerando o fator do comprimento efetivo  $K$  da barra igual a unidade. A deslocamento final máxima,  $y_{max} = \delta_1 + \delta_2$ , e o momento fletor máximo,  $M_{z,max}$ , considerando os efeitos de 2ª ordem são dados respectivamente por:

$$y_{MAX} = \delta_1 + \delta_2 = \delta_1 / (1 - \alpha) \quad (3.68)$$

$$M_{ZMAX} = M_0 + P y_{MAX} \quad (3.69)$$

Substituindo a Eq. (3.68) na Eq. (3.69),  $M_{Zmax}$  pode ser escrito como o momento máximo de 1ª ordem  $M_0$  multiplicado pelo coeficiente de amplificação  $B_1$ .

$$M_{ZMAX} = B_1 M_0 \quad (3.70)$$

O coeficiente  $B_1$  é o coeficiente de amplificação do momento para barra com nós indeslocáveis, determinado por:

$$B_1 = \frac{C_m}{(1 - N_{Sd}/N_{e1})} \geq 1,0 \quad (3.71)$$

onde,

$$C_m = 1 + \psi \alpha = 1 + \left( \frac{\pi^2 EI \delta_1}{M_0 L^2} - 1 \right) \left( \frac{N_{Sd}}{N_{e1}} \right) \quad (3.72)$$

Um caso especial surge quando uma barra com nós indeslocáveis está submetida apenas aos momentos desiguais de extremidades. Neste caso o valor de  $C_m$  é redefinido como sendo um coeficiente de equivalência de momentos e vale:

$$C_m = 0,6 - 0,4(M_1/M_2) \quad (3.73)$$



O AISC/LRFD (1999) adota a Eq. (3.73) para o cálculo de  $C_m$  quando as barras comprimidas não estão submetidas às forças transversais entre os nós.  $M_1/M_2$  é a relação entre o menor e o maior dos momentos fletores de cálculo no plano de flexão, nas extremidades apoiadas da barra, tomada positiva quando os momentos provocarem curvatura reversa e negativa quando provocarem curvatura simples.

Para barras comprimidas sujeitas a forças transversais entre os nós, o valor de  $C_m$  é determinado por análise racional (Eq. (3.72)) ou tomado igual a 0,85 no caso de barras com ambas extremidades engastadas, ou igual a 1,0 para os demais casos.

### Efeito P- $\Delta$ – Coeficiente $B_2$

Conforme mostra SALMON (1996), a FIG. 3.14 apresenta um resumo das forças que atuam em todos os pilares de um andar de um pórtico de andares múltiplos.

O equilíbrio em teoria de 1ª ordem é definido como:

$$M_{lt1} + M_{lt2} = \sum H_{sd} L \quad (3.74)$$

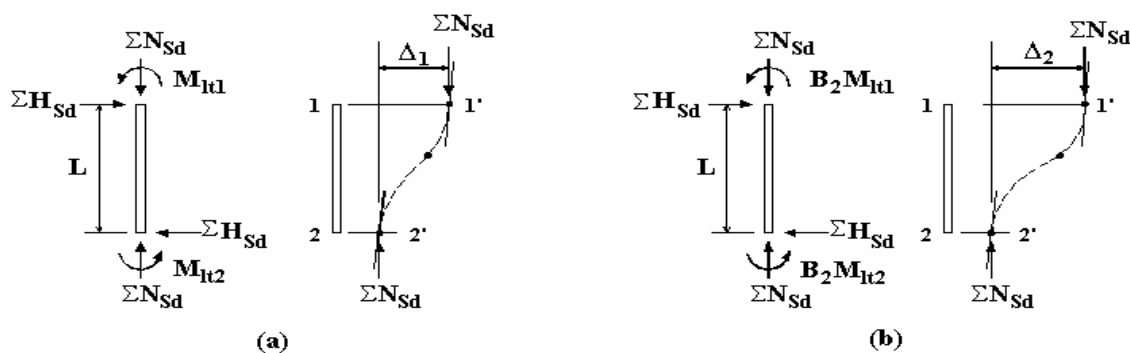


FIGURA 3.14 – Resumo das forças atuando sobre todos os pilares de um andar de um pórtico de andares múltiplos: (a) Análise de 1ª ordem (b) Análise de 2ª ordem

Quando todas as forças horizontais  $\sum H_{sd}$  atuarem nesta estrutura, ela se deslocará lateralmente até que uma posição de equilíbrio em 1ª ordem seja atingida. Esse deslocamento lateral  $\Delta_l$  é definido como o deslocamento de 1ª ordem, pois é obtido com

base na configuração indeformada da estrutura. As forças verticais  $\Sigma N_{sd}$  irão interagir com este deslocamento lateral e o momento fletor de 1ª ordem (Eq. (3.74)) será acrescido de  $\Sigma N_{sd} \Delta_1$ , resultando em um momento atuante de  $\Sigma H_{sd} L + \Sigma N_{sd} \Delta_1$ . Dessa forma, o deslocamento lateral relativo aumentará para  $\Delta_2$ , quando a estrutura atinge o equilíbrio na posição deformada final. Esse fenômeno é baseado no conceito de rigidez do andar conforme afirmam CHEN e LUI (1985, 1987) e definido como efeito P- $\Delta$ .

Em teoria de 2ª ordem o equilíbrio final incluindo este efeito P- $\Delta$  pode ser escrito por:

$$B_2(M_{lt1} + M_{lt2}) = \Sigma H_{sd} L + \Sigma N_{sd} \Delta_2 \quad (3.75)$$

onde  $B_2$  é o coeficiente de amplificação e  $M_{lt1}$  e  $M_{lt2}$  são os momentos de 1ª ordem.

Utilizando-se as Eq. (3.74) e Eq. (3.75) determina-se  $B_2$ :

$$B_2 = \frac{\Sigma H_{sd} + \Sigma N_{sd} \Delta_2}{\Sigma H_{sd} L} \quad (3.76)$$

Com referência na FIG. 3.14-a e usando um fator de proporcionalidade  $\eta$ , define-se:

$$\Delta_{0h} = \eta \Sigma H_{sd} \quad (3.77)$$

Do equilíbrio da FIG. 3.14-b determina-se a força lateral equivalente amplificada (análise de 2ª ordem),  $H_{equiv}$ , dada por:

$$H_{equiv} = \Sigma H_{sd} + \frac{\Sigma N_{sd} \Delta_2}{L} \quad (3.78)$$

Analogamente,

$$\Delta_2 = \eta H_{equiv} = \eta \left( \Sigma H_{sd} + \frac{\Sigma N_{sd} \Delta_2}{L} \right) \quad (3.79)$$

Com o auxílio da Eq. (3.77) determina-se:

$$\Delta_2 = \Delta_{0h} + \frac{\Delta_{0h} \sum N_{sd} \Delta_2}{\sum H_{sd} L} \quad (3.80)$$

Resolvendo-se para determinar  $\Delta_2$  vem que:

$$\Delta_2 = \frac{\Delta_{0h}}{1 - \frac{\sum N_{sd} \Delta_{0h}}{\sum H_{sd} L}} \quad (3.81)$$

Substituindo a Eq. (3.81) na Eq. (3.76), determina-se, finalmente:

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{\Delta_{0h} \sum N_{sd}}{L \sum H_{sd}}} \quad (3.82)$$

onde,  $\sum N_{sd}$  é o somatório das forças normais de compressão solicitantes de cálculo em todos os pilares e outros elementos resistentes a cargas verticais do andar,  $\Delta_{0h}$  o deslocamento horizontal relativo,  $\sum H_{sd}$  o somatório de todas as forças horizontais de cálculo no andar (força cortante no andar) que produzem  $\Delta_{0h}$ .

Uma alternativa para o cálculo de  $B_2$  foi desenvolvida com base no conceito de flambagem múltipla de pilares (CHEN e LUI, 1985 e 1987). Essa expressão também é apresentada pelo AISC/LRFD (1999):

$$B_2 = \frac{1}{1 - \sum N_{sd} / \sum N_{e2}} \quad (3.83)$$

sendo,  $\sum N_{e2}$  é o somatório das forças que provocam a flambagem elástica das barras que efetivamente pertencem ao sistema lateral resistente no andar considerado, utilizando o fator do comprimento efetivo para a estrutura sem as contenções laterais fictícias ( $K > 1$ ).

Segundo ROKACH (1991) a Eq. (3.82) é a mais conveniente entre as duas fórmulas para cálculo de  $B_2$ , onde o valor  $\Delta_{0h}/L$  representa a inclinação do andar. Segundo o autor a inclinação máxima do andar é geralmente um critério de cálculo, especialmente para os edifícios altos e o seu uso na Eq. (3.82) facilita o cálculo de  $B_2$ . Para os pilares com flexão em ambas as direções principais, são necessários dois valores de  $B_1$  ( $B_{1x}$  e  $B_{1y}$ ) e dois valores de  $B_2$  ( $B_{2x}$  e  $B_{2y}$ ).

### Cálculo do Deslocamento Lateral

Para a determinação do deslocamento lateral em 2ª ordem pelo Método  $B_1$ - $B_2$ , é considerado um pórtico de  $n$  andares sujeito a um carregamento genérico, conforme mostra a FIG. 3.15.

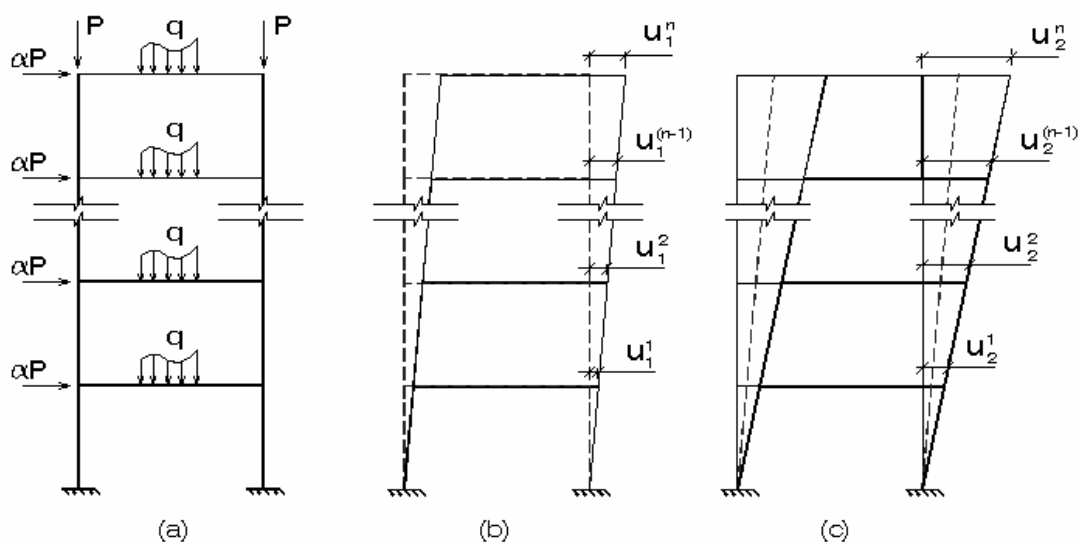


FIGURA 3.15 –Pórtico de  $n$  andares: (a) carregamento genérico, (b) deslocamento lateral em 1ª ordem, (c) deslocamento lateral em 2ª ordem

Com o auxílio das Eq. (3.81) e Eq. (3.82) determina-se o deslocamento lateral relativo, em 2ª ordem do andar  $i$ ,  $\Delta_2^i$ , em função do deslocamento lateral relativo em 1ª ordem no mesmo andar  $i$ ,  $\Delta_1^i$ , por:

$$\Delta_2^i = B_{2,i} \Delta_1^i \quad (3.84)$$

Dessa forma, o deslocamento lateral final em 2ª ordem do 1º andar do pórtico da FIG. 3.15-c, ( $u_2^1$ ) é dado por:

$$u_2^1 = u_2^0 + \Delta_2^1 \quad (3.85)$$

sendo  $u_2^0$  o deslocamento em 2ª ordem na base do pórtico igual a zero ( $u_2^0=0$ ) e conforme a Eq. (3.84),  $\Delta_2^1 = B_{2,1} \Delta_1^1$ , tem-se que:

$$u_2^1 = B_{2,1} \Delta_1^1 \quad (3.86)$$

Para o 2º andar e com o auxílio das Eq. (3.84) e Eq. (3.86) determina-se:

$$u_2^2 = u_2^1 + \Delta_2^2 = B_{2,1} \Delta_1^1 + B_{2,2} \Delta_1^2 \quad (3.87)$$

Da mesma forma, com o auxílio das Eq. (3.84) e Eq. (3.87), tem-se para o 3º andar:

$$u_2^3 = u_2^2 + \Delta_2^3 = B_{2,1} \Delta_1^1 + B_{2,2} \Delta_1^2 + B_{2,3} \Delta_1^3 \quad (3.88)$$

Estendendo-se para o enésimo andar, determina-se:

$$u_2^n = u_2^{n-1} + \Delta_2^n = B_{2,1} \Delta_1^1 + B_{2,2} \Delta_1^2 + B_{2,3} \Delta_1^3 + \dots + B_{2,n-1} \Delta_1^{n-1} + B_{2,n} \Delta_1^n \quad (3.89)$$

A Eq. (3.89) pode ser escrita na forma de somatório por:

$$u_2^n = \sum_{i=1}^n B_{2,i} \Delta_1^i \quad (3.90)$$

onde  $u_2^n$  é o deslocamento lateral em 2ª ordem do andar n do pórtico;  $B_{2,i}$  é o coeficiente de  $B_2$  do andar  $i$  e  $\Delta_1^i$  é o deslocamento lateral relativo em 1ª ordem do andar  $i$ .

Da FIG. 3.15-b pode-se concluir que o deslocamento lateral relativo em 1ª ordem do andar  $i$  é dado por:

$$\Delta_1^i = u_1^i - u_1^{i-1} \quad (3.91)$$

Finalmente, o valor de  $u_2^n$  pode ser escrito como:

$$u_2^n = \sum_{i=1}^n B_{2,i} \Delta_1^i = \sum_{i=1}^n B_{2,i} (u_1^i - u_1^{i-1}) \quad (3.92)$$

### 3.3.3 Método da Força Lateral Equivalente

O método da Força Lateral Equivalente ou Fictícia é um procedimento simplificado para análise elástica de segunda ordem de pórticos planos, que considere apenas o efeito global P- $\Delta$ . Este método é adotado por algumas normas, como a brasileira NBR 8800 (1986) e a canadense CSA-S16.1 (1994). Com a incidência das forças laterais atuantes, os nós da estrutura sofrem deslocamentos denominados de 1ª ordem. As forças verticais aplicadas nesses nós, agora deslocados, provocam o aparecimento de novos esforços, que causam novos deslocamentos, e assim sucessivamente. Esses esforços e deslocamentos adicionais são obtidos pelo chamado método P- $\Delta$ , através de um processo iterativo, no qual buscam-se novas condições de equilíbrio para a estrutura.

O sistema da FIG. 3.16 apresenta forças laterais e verticais aplicadas nos nós. Com os deslocamentos laterais resultantes, calculados de uma análise em teoria de 1ª ordem, determinam-se os deslocamentos relativos entre pavimentos. Considerando-se a estrutura deformada, a cortante fictícia,  $V'_i$ , no andar  $i$ , resultante do efeito P- $\Delta$ , é dada pela equação:

$$V'_i = \frac{\sum P_i}{h_i} (\Delta_{i+1} - \Delta_i) \quad (3.93)$$

onde,  $\Sigma P_i$  é o somatório das forças normais nos pilares do andar  $i$ , inclusive nos pilares que não pertençam ao sistema resistente a cargas horizontais,  $h_i$  altura do andar  $i$ ,  $\Delta_{i+1}$ ,  $\Delta_i$ , os deslocamentos horizontais dos níveis  $i+1$  e  $i$ , respectivamente.

A força lateral fictícia,  $H'_i$ , no nível  $i$ , é calculada por:

$$H'_i = V'_{i-1} - V'_i \quad (3.94)$$

Esta força lateral fictícia deve ser somada a uma outra carga lateral inicial que poderá existir no mesmo nível, resultando nas forças horizontais modificadas, com as quais é feita a análise seguinte. Novos deslocamentos são obtidos e novas forças horizontais fictícias são calculadas, dando-se continuidade ao processo. Portanto, este processo é iterativo uma vez que após cada análise a força lateral fictícia difere da força do ciclo anterior devido às variações nos deslocamentos. Quando o deslocamento  $\Delta_i$  apresentar um valor praticamente igual àquele do ciclo anterior o método converge e as forças e momentos resultantes nas barras agora incluem o efeito P- $\Delta$ .

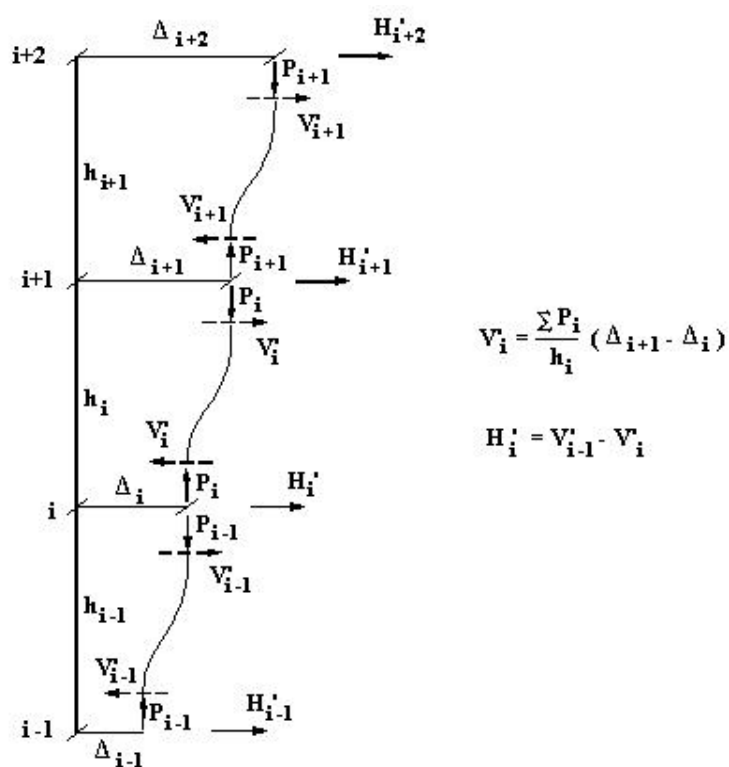


FIGURA 3.16 – Consideração dos efeitos globais de segunda ordem

Em estruturas elásticas que apresentam uma rigidez adequada, o método converge geralmente após um ou dois ciclos de iteração. Se após cinco ciclos de iteração os resultados não convergirem a estrutura é considerada excessivamente flexível. Segundo MACGREGOR e HAGE (1977), o processo pode ser interrompido quando os deslocamentos de uma dada iteração não excedem em mais de 5% os da iteração anterior. Neste trabalho, o critério de convergência adotado estabelece que os deslocamentos de uma dada iteração não podem exceder em mais de 1% os da iteração anterior.

Recomenda-se ainda que esse Método seja utilizado apenas quando a relação entre os deslocamentos finais obtidos e os deslocamentos correspondentes decorrentes da análise em 1ª ordem, em todos os níveis considerados, não supera 1,4.

### 3.3.4 Coeficiente $\gamma_z$

MACGREGOR e HAGE (1977) e FRANCO (1985) mostraram que a influência da não-linearidade geométrica na análise de pórticos planos em edifícios altos pode ser determinada, de forma aproximada, a partir de parâmetros de instabilidade. Em 1991 FRANCO e VASCONCELOS (1991) definiram o coeficiente  $\gamma_z$  que atualmente é utilizado pela NBR 6118 (2003).

FRANCO e VASCONCELOS (1991) observaram que utilizando-se o método P- $\Delta$  em estruturas regulares submetidas às forças laterais e verticais, as razões entre os acréscimos de deslocamentos referentes a uma iteração e os acréscimos referentes à iteração anterior eram aproximadamente iguais, podendo-se aproximar os deslocamentos horizontais por uma progressão geométrica. Foi com base neste raciocínio, que os autores definiram o coeficiente  $\gamma_z$ .

Conforme OLIVEIRA (2002), o momento de 1ª ordem  $M_{1^a}$  em relação à base da estrutura e os deslocamentos horizontais de seus nós podem ser calculados através de uma análise linear. Acréscimos de momentos  $\Delta M_l$  surgem na estrutura devido aos deslocamentos laterais combinados com as ações verticais. Conseqüentemente, novos



deslocamentos e esforços aparecem na estrutura. Este processo é iterativo, gerando em estruturas estáveis, acréscimos de momentos cada vez menores. Portanto, o momento final  $M_{2^a}$  é definido como:

$$M_{2^a} = M_{1^a} + \Delta M_1 + \Delta M_2 + \dots + \Delta M_j \quad (3.95)$$

onde  $j$  é o número de iterações. Admitindo-se que os momentos  $M_{1^a}$ ,  $\Delta M_1$ ,  $\Delta M_2, \dots$ ,  $\Delta M_j$  constituam uma progressão geométrica, a razão é dada por:

$$r = \frac{\Delta M_1}{M_{1^a}} = \frac{\Delta M_2}{\Delta M_1} = \dots = \frac{\Delta M_j}{\Delta M_{j-1}} \quad (3.96)$$

Então o momento de 2ª ordem pode ser escrito como:

$$M_{2^a} = (1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{j-1}) M_{1^a} \quad (3.97)$$

Fazendo-se  $j$  tender ao infinito, a Eq. (3.97) fica:

$$M_{2^a} = \frac{1}{1-r} M_{1^a} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_1}{M_{1^a}}} M_{1^a} \quad (3.98)$$

Portanto, o coeficiente  $\gamma_z$  é dado pela Eq. (3.99) e definido como sendo a soma de uma progressão geométrica cuja razão é a relação entre o acréscimo de momentos  $\Delta M_{tot,d}$  e o momento de primeira ordem  $M_{1,tot,d}$ , em ambos utilizando-se os valores de cálculo.

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{tot,d}}{M_{1,tot,d}}} \quad (3.99)$$

onde  $M_{1,tot,d}$  é a soma dos momentos fletores de cálculo, devido a todas as forças horizontais, em relação à base da estrutura e definida pela Eq. (3.100).

$$M_{1,tot,d} = \sum (F_{hid} h_i) \quad (3.100)$$

sendo,  $F_{hid}$  a força horizontal de cálculo aplicada no pavimento  $i$  e  $h_i$  a altura do pavimento  $i$  em relação à base.  $\Delta M_{tot,d}$  é a soma dos produtos de todas as forças verticais de cálculo atuantes na estrutura, pelos deslocamentos horizontais de seus respectivos pontos de aplicação, dado por:

$$\Delta M_{tot,d} = \sum (P_{id} u_i) \quad (3.101)$$

onde  $P_{id}$  é a força vertical de cálculo atuante no pavimento  $i$  e  $u_i$  o deslocamento horizontal do pavimento  $i$ .

Conforme LIMA (2001), nas estruturas projetadas em concreto armado o coeficiente  $\gamma_z$  pode ser usado para classificar as estruturas quanto à deslocabilidade dos nós e também como coeficiente majorador dos efeitos de 1ª ordem. Nos procedimentos para a consideração dos efeitos de 2ª ordem segundo a NBR 6118 (2003) deve-se considerar a majoração adicional dos esforços horizontais como sendo igual a  $0,95\gamma_z$ . Entretanto nos exemplos a serem apresentados no capítulo 4, os esforços horizontais serão majorados pelo próprio valor de  $\gamma_z$ .

### **Cálculo do Deslocamento Lateral em 2ª Ordem**

Adotando-se o mesmo procedimento utilizado no caso do Método B<sub>1</sub>-B<sub>2</sub> e com o auxílio da Eq. (3.92), chega-se à:

$$u_2^n = \sum_{i=1}^n \gamma_{z,i} \Delta_1^i = \sum_{i=1}^n \gamma_{z,i} (u_1^i - u_1^{i-1}) \quad (3.102)$$

Sendo o coeficiente  $\gamma_z$  constante para todos os andares, portanto único para todo o pórtico, determina-se:

$$u_2^n = \gamma_{z,i} \sum_{i=1}^n \Delta_1^i = \gamma_{z,i} \sum_{i=1}^n (u_1^i - u_1^{i-1}) \quad (3.103)$$

onde  $u_2^n$  é o deslocamento lateral em 2ª ordem do andar  $n$  do pórtico,  $u_1^i$  e  $u_1^{i-1}$  são os deslocamentos laterais em 1ª ordem dos andares  $i$  e  $i-1$ .

# 4

## APLICAÇÕES NUMÉRICAS

### 4.1 Introdução

Neste capítulo são analisados pórticos planos, contraventados e não-contraventados, de vários andares em aço utilizando-se os métodos aproximados de Amplificação dos Momentos ( $B_1$ - $B_2$ ), da Força Lateral Equivalente ou Fictícia (P-Delta) e do Coeficiente  $\gamma_z$ , apresentados no capítulo anterior.

Os pórticos não-contraventados também serão analisados utilizando-se o programa PPLANLEP elaborado por LAVALL (1996), que foi desenvolvido com base na formulação apresentada no item 3.2 e realiza a análise elástica em 1ª ordem e as análises elástica e elastoplástica em 2ª ordem. Os pórticos contraventados serão analisados utilizando-se o programa ANSYS 6.1 (2002) para realizar as análises elástica em 1ª ordem e elástica rigorosa em 2ª ordem. Os resultados obtidos por esses programas serão então comparados com os resultados obtidos pelos métodos aproximados em 2ª ordem, com o objetivo avaliar a eficiência e precisão dos métodos aproximados.

Além disso, dois exemplos são estudados a fim de verificar a aplicabilidade da análise estrutural proposta no texto base de revisão da NBR 8800 (2003), a qual é apresentada no item 4.4 a seguir.

Portanto, este capítulo tem a finalidade de avaliar a precisão dos resultados encontrados pelos diversos métodos de análises e obter conclusões de caráter prático que poderão servir como sugestões para o dimensionamento das estruturas de aço.

## 4.2 Pórticos Planos Não-Contraventados

### 4.2.1 Pórtico Não-Contraventado de Um Andar e Um Vão

A FIG. 4.1 mostra um pórtico de um andar e um vão e nós rígidos. Os pilares e a viga são constituídos pelos perfis soldados CS 400x137 e CVS 500x217, respectivamente. O pórtico apresenta uma altura de 5 metros e vão de 10 metros e está sujeito a duas forças verticais  $P$  e a uma força horizontal  $\alpha P$  no seu topo, sendo  $\alpha=0,10$ . O aço apresenta uma tensão de escoamento  $\sigma_y=35\text{kN/cm}^2$  e módulo de elasticidade  $E=20500\text{ kN/cm}^2$ .

O mesmo pórtico foi estudado no capítulo 2, utilizando-se as funções de estabilidade. Neste item, o pórtico será estudado, considerando-se as análises rigorosas em 2ª ordem, elástica e elastoplástica, e os métodos aproximados de 2ª ordem, todos apresentados no capítulo 3.

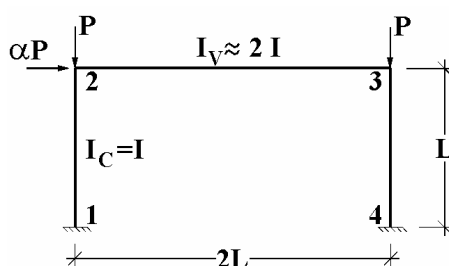


FIGURA 4.1 – Pórtico de um andar e um vão

Para implementação dos dados do programa PPLANLEP, as seções dos perfis foram divididas em 20 fatias, sendo uma fatia para cada mesa e 18 para a alma. As barras foram divididas em 10 elementos de igual comprimento e as forças verticais e

horizontal foram aplicadas de forma incremental, conforme mostra a TAB. 4.1. As cargas são dadas em função da carga  $P_y$  dos pilares, sendo  $P_y = A_c \cdot \sigma_y = 6090$  kN.

TABELA 4.1 – Relações entre as cargas P e  $P_y$  aplicadas de forma incremental

Incremento	P/ $P_y$	Incremento	P/ $P_y$	Incremento	P/ $P_y$
1	0,10	6	0,55	11	0,90
2	0,20	7	0,58	12	1,00
3	0,30	8	0,60	13	1,50
4	0,40	9	0,70	14	2,00
5	0,50	10	0,80	15	3,00

Os resultados do deslocamento horizontal no topo do pórtico e dos esforços solicitantes máximos para os diversos tipos de análises são apresentados nas tabelas e gráficos a seguir. Observa-se nas tabelas, que os resultados das análises em 2ª ordem estão sempre relacionados com os resultados da análise elástica em 1ª ordem para melhor comparação.

Os valores para os coeficientes de majoração  $B_1$ ,  $B_2$  e  $\gamma_z$  são apresentados na TAB. 4.2. A tabela também apresenta o deslocamento horizontal no topo do pórtico para os diversos tipos de análises, a saber: análise elástica em 1ª ordem, análises elásticas aproximadas em 2ª ordem ( $B_1$ - $B_2$ , P-Delta e  $\gamma_z$ ), análise rigorosa elástica e elastoplástica em 2ª ordem.

TABELA 4.2 – Coeficientes de majoração e deslocamento horizontal do nó 2 do pórtico para diversos tipos de análises

P/ $P_y$ (A)	Coeficientes de majoração			Deslocamento Horizontal no nó 2 (cm)										
				1ª Ordem Elástica (E)	2ª ordem						Rigorosa			
	$B_1$ (B)	$B_2$ (C)	$\gamma_z$ (D)		Elástica Aproximada			$\gamma_z$			Elástica		Elastoplástica	
					$B_1$ - $B_2$ (F)	(Eq. 3.82) (F/E)	P-Delta (G)	(G/E)	(H)	(H/E)	(I)	(I/E)	(J)	(J/E)
0,10	1,00	1,02	1,02	0,415	0,422	(1,016)	0,422	(1,016)	0,418	(1,006)	0,423	(1,019)	0,423	(1,019)
0,20	1,00	1,03	1,03	0,830	0,857	(1,033)	0,859	(1,034)	0,859	(1,034)	0,862	(1,038)	0,862	(1,038)
0,30	1,00	1,05	1,05	1,246	1,308	(1,050)	1,310	(1,052)	1,310	(1,052)	1,317	(1,058)	1,317	(1,058)
0,40	1,00	1,07	1,07	1,661	1,773	(1,067)	1,779	(1,071)	1,779	(1,071)	1,791	(1,078)	1,791	(1,078)
0,50	1,00	1,09	1,09	2,076	2,254	(1,086)	2,264	(1,091)	2,264	(1,091)	2,284	(1,100)	2,284	(1,100)
0,58	1,00	1,10	1,11	2,408	2,651	(1,101)	2,665	(1,107)	2,665	(1,107)	2,692	(1,118)	4,838	(2,009)
0,60	1,00	1,11	1,11	2,491	2,752	(1,105)	2,764	(1,109)	2,767	(1,111)	2,797	(1,123)	-	-
0,70	1,00	1,13	1,13	2,906	3,268	(1,124)	3,288	(1,131)	3,289	(1,132)	3,331	(1,146)	-	-
0,80	1,00	1,15	1,15	3,322	3,803	(1,145)	3,830	(1,153)	3,831	(1,153)	3,888	(1,171)	-	-
0,90	1,00	1,17	1,18	3,737	4,358	(1,166)	4,393	(1,176)	4,393	(1,176)	4,470	(1,196)	-	-
1,00	1,00	1,19	1,20	4,152	4,933	(1,188)	4,978	(1,199)	4,979	(1,199)	5,078	(1,223)	-	-
1,50	1,00	1,32	1,33	6,228	8,173	(1,312)	8,293	(1,332)	8,294	(1,332)	8,578	(1,377)	-	-
2,00	1,00	1,48	1,50	8,304	12,176	(1,466)	12,433	(1,497)	12,430	(1,497)	13,097	(1,577)	-	-
3,00	1,00	1,94	1,99	12,456	23,908	(1,919)	24,779	(1,989)	24,825	(1,993)	27,702	(2,224)	-	-

Nota-se que, os valores para  $B_2$  e  $\gamma_z$  crescem com o incremento de carga apresentando valores muito próximos, enquanto que, os valores para  $B_1$  obtidos pela Eq. (3.71) foram menores que um, portanto sendo tomados iguais à unidade.

A FIGURA 4.2 apresenta as curvas parâmetro de carga x deslocamento horizontal no topo do pórtico para os diversos tipos de análises.

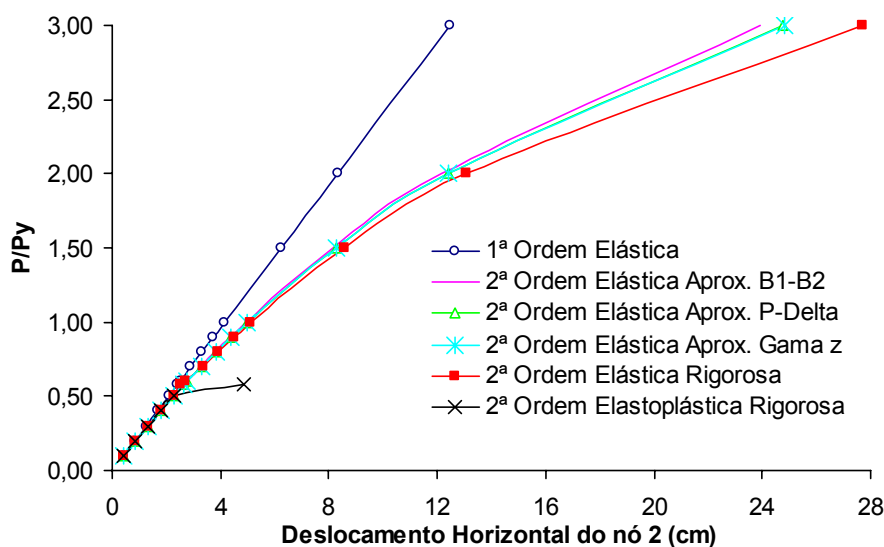


FIGURA 4.2 – Curvas parâmetro de carga x deslocamento horizontal do pórtico

Das análises rigorosas em 2ª ordem, elástica e elastoplástica, obtiveram-se a carga crítica elástica  $P_{cr} \approx 21315$  kN ( $P/P_y \approx 3,50$ ) e a carga última de colapso  $P_{ult} = 3532$  kN ( $P/P_y=0,58$ ), respectivamente, indicando que a carga crítica elástica não tem sentido prático no dimensionamento do pórtico, uma vez que, para valores bem inferiores, a estrutura já teria entrado em colapso.

Verifica-se na TAB. 4.2 e FIG. 4.2 a boa correlação entre os comportamentos do pórtico nas análises elásticas em 2ª ordem, tanto as aproximadas ( $B_1$ - $B_2$ , P-Delta e  $\gamma_z$ ) quanto a rigorosa, em praticamente toda a variação de  $P/P_y$ . Observam-se, também, as diferenças esperadas entre os comportamentos das análises elástica em 1ª ordem, elástica e elastoplástica em 2ª ordem.

A TAB. 4.3 e a FIG. 4.3 apresentam o valor do momento fletor máximo no nó 1 do pórtico para os diversos tipos de análises, mostrando a excelente correlação entre as

análises de 2ª ordem aproximada e rigorosa, indicando a validade de todos os métodos aproximados apresentados para o pórtico de um andar na faixa de variação de  $B_2$  estudada.

TABELA 4.3 – Momento fletor máximo (nó 1) do pórtico para os diversos tipos de análises

Momento Fletor Máximo (nó 1) (kN.cm)											
P/Py (A)	1ª Ordem Elástica (B)	2ª Ordem									
		Elástica Aproximada					Rigorosa				
		B <sub>1</sub> -B <sub>2</sub> (C)	(Eq. 3.82) (C/B)	P-Delta (D)	(D/B)	$\gamma_z$ (E)	(E/B)	Elástica (F)	(F/B)	Elastoplástica (G)	(G/B)
0,10	8705	8804	(1,011)	8815	(1,013)	8815	(1,013)	8798	(1,011)	8798	(1,011)
0,20	17410	17895	(1,028)	17940	(1,030)	17940	(1,030)	17873	(1,027)	17873	(1,027)
0,30	26116	27288	(1,045)	27395	(1,049)	27395	(1,049)	27243	(1,043)	27243	(1,043)
0,40	34821	36999	(1,063)	37191	(1,068)	37193	(1,068)	36923	(1,060)	36923	(1,060)
0,50	43526	47045	(1,081)	47354	(1,088)	47356	(1,088)	46994	(1,080)	46994	(1,080)
0,58	50490	55335	(1,096)	55756	(1,104)	55761	(1,104)	55069	(1,091)	55321	(1,096)
0,60	52231	57444	(1,100)	57844	(1,107)	57902	(1,109)	57295	(1,097)	-	-
0,70	60936	68215	(1,119)	68850	(1,130)	68855	(1,130)	68030	(1,116)	-	-
0,80	69642	79379	(1,140)	80231	(1,152)	80236	(1,152)	79162	(1,137)	-	-
0,90	78347	90958	(1,161)	92087	(1,175)	92070	(1,175)	90718	(1,158)	-	-
1,00	87052	102976	(1,183)	104373	(1,199)	104387	(1,199)	102727	(1,180)	-	-
1,50	130578	170639	(1,307)	174287	(1,335)	174303	(1,335)	170781	(1,308)	-	-
2,00	174104	254245	(1,460)	261857	(1,504)	261894	(1,504)	256504	(1,473)	-	-
3,00	261156	499374	(1,912)	524197	(2,007)	525176	(2,011)	525005	(2,010)	-	-

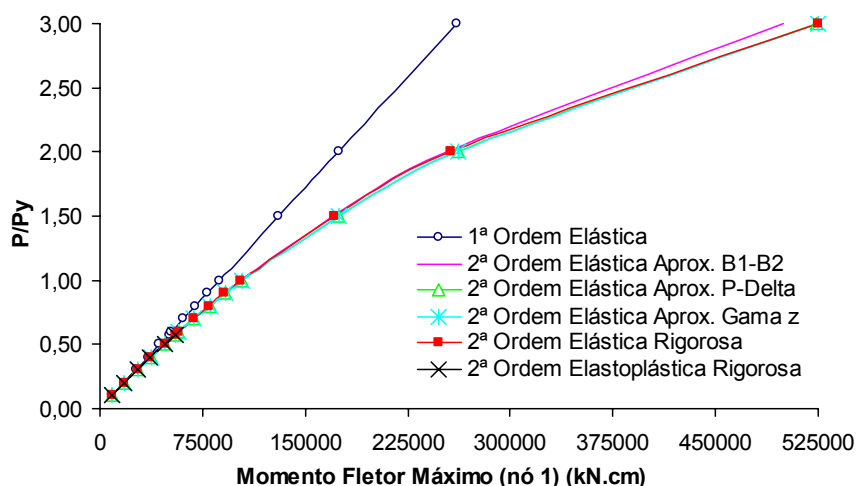


FIGURA 4.3 – Curvas parâmetro de carga x momento fletor máximo (nó 1) do pórtico

A TAB 4.4 e a FIG.4.4 mostram a variação da força normal máxima do pórtico para os diversos tipos de análises. Observa-se que os resultados da análise elástica em 1ª ordem são praticamente os mesmos obtidos da análise em 2ª ordem, não sendo, portanto, necessário majorar os resultados da força normal, obtidos da análise em 1ª ordem.

TABELA 4.4 – Força normal máxima (nó 4) do pórtico para diversos tipos de análises

Força Normal Máxima (nó 4) kN											
P/Py (A)	2ª ordem										
	1ª Ordem	Elástica Aproximada						Rigorosa			
	Elástica (B)	B <sub>1</sub> -B <sub>2</sub> (Eq. 3.82) (C) (C/B)		P-Delta (D) (D/B)		$\gamma_z$ (E) (E/B)		Elástica (F) (F/B)		Elastoplástica (G) (G/B)	
0,10	621	622	(1,000)	622	(1,001)	622	(1,001)	622	(1,002)	622	(1,002)
0,20	1243	1244	(1,001)	1245	(1,002)	1245	(1,002)	1245	(1,002)	1245	(1,002)
0,30	1864	1866	(1,001)	1868	(1,002)	1868	(1,002)	1869	(1,003)	1869	(1,003)
0,40	2486	2489	(1,001)	2491	(1,002)	2491	(1,002)	2493	(1,003)	2493	(1,003)
0,50	3107	3112	(1,002)	3115	(1,003)	3115	(1,003)	3117	(1,003)	3117	(1,003)
0,58	3604	3611	(1,002)	3613	(1,002)	3613	(1,002)	3617	(1,004)	3624	(1,006)
0,60	3728	3736	(1,002)	3738	(1,003)	3738	(1,003)	3743	(1,004)	-	-
0,70	4350	4361	(1,003)	4362	(1,003)	4362	(1,003)	4368	(1,004)	-	-
0,80	4971	4986	(1,003)	4987	(1,003)	4987	(1,003)	4995	(1,005)	-	-
0,90	5593	5611	(1,003)	5612	(1,003)	5612	(1,003)	5622	(1,005)	-	-
1,00	6214	6238	(1,004)	6237	(1,004)	6237	(1,004)	6250	(1,006)	-	-
1,50	9321	9380	(1,006)	9366	(1,005)	9366	(1,005)	9405	(1,009)	-	-
2,00	12428	12545	(1,009)	12501	(1,006)	12501	(1,006)	12591	(1,013)	-	-
3,00	18642	18988	(1,019)	18763	(1,007)	18764	(1,007)	19133	(1,026)	-	-

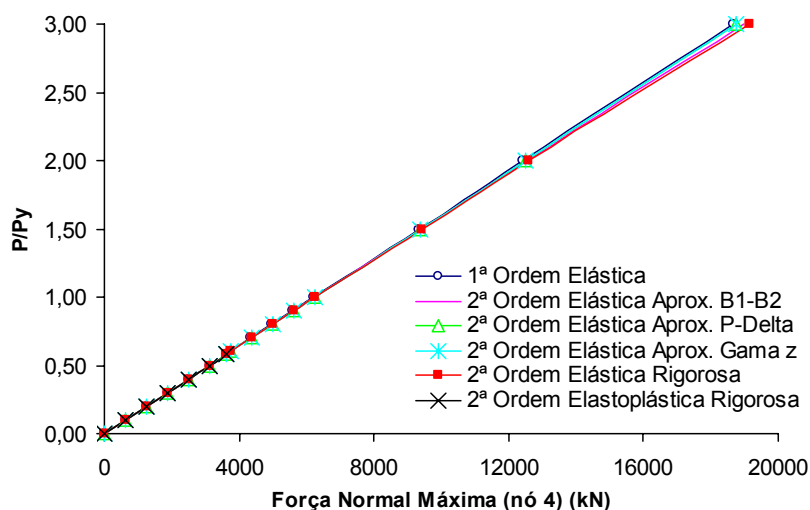


FIGURA 4.4 – Curvas parâmetro de carga x força normal máxima (nó 4) do pórtico

A variação da força cortante é mostrada na TAB. 4.5 e na FIG. 4.5 para os diversos tipos de análises. Comparando-se a análise rigorosa elástica em 2ª ordem com a análise elástica em 1ª ordem, observa-se que os resultados variam menos de 10% até  $P/P_y=1,50$ , que corresponde a  $B_2=1,32$  e  $\gamma_z=1,33$ . Sabe-se que para esta estrutura o colapso ocorre para  $P/P_y=0,58$ , com uma variação do esforço cortante de apenas 3%. Os resultados das análises aproximadas apresentam boa correlação entre si, mas são conservadoras quando comparadas com as análises rigorosas. Em termos práticos, neste exemplo, não



seria necessário majorar os valores da força cortante obtidos de uma análise elástica de 1ª ordem.

TABELA 4.5 – Força Cortante (nó 1) do pórtico para os diversos tipos de análises

Força Cortante (nó 1) kN											
P/Py (A)	1ª Ordem Elástica (B)	2ª ordem									
		Aproximada						Rigorosa			
		B <sub>1</sub> -B <sub>2</sub> (C)	(Eq. 3.82) (C/B)	P-Delta (D) (D/B)		$\gamma_z$ (E) (E/B)		Elástica (F) (F/B)		Elastoplástica (G) (G/B)	
0,10	30,60	31,09	(1,016)	31,00	(1,013)	31,00	(1,013)	30,72	(1,004)	30,72	(1,004)
0,20	61,19	63,19	(1,033)	64,00	(1,046)	64,00	(1,046)	61,69	(1,008)	61,69	(1,008)
0,30	91,79	96,36	(1,050)	98,00	(1,068)	98,00	(1,068)	92,94	(1,013)	92,94	(1,013)
0,40	122,38	130,65	(1,068)	134,00	(1,095)	134,00	(1,095)	124,48	(1,017)	124,48	(1,017)
0,50	152,98	166,13	(1,086)	171,00	(1,118)	171,00	(1,118)	156,31	(1,022)	156,31	(1,022)
0,58	177,46	195,41	(1,101)	203,00	(1,144)	203,00	(1,144)	182,00	(1,026)	199,00	(1,121)
0,60	183,57	202,85	(1,105)	210,00	(1,144)	211,00	(1,149)	188,48	(1,027)	-	-
0,70	214,17	240,89	(1,125)	252,00	(1,177)	252,00	(1,177)	221,00	(1,032)	-	-
0,80	244,77	280,31	(1,145)	295,00	(1,205)	295,00	(1,205)	254,00	(1,038)	-	-
0,90	275,36	321,20	(1,166)	340,00	(1,235)	340,00	(1,235)	287,00	(1,042)	-	-
1,00	305,96	363,64	(1,189)	387,26	(1,266)	387,00	(1,265)	321,00	(1,049)	-	-
1,50	458,94	602,60	(1,313)	661,00	(1,440)	661,00	(1,440)	497,00	(1,083)	-	-
2,00	611,92	897,87	(1,467)	1016,00	(1,660)	1016,00	(1,660)	690,00	(1,128)	-	-
3,00	917,87	1763,62	(1,921)	2121,00	(2,311)	2125,00	(2,315)	1174,00	(1,279)	-	-

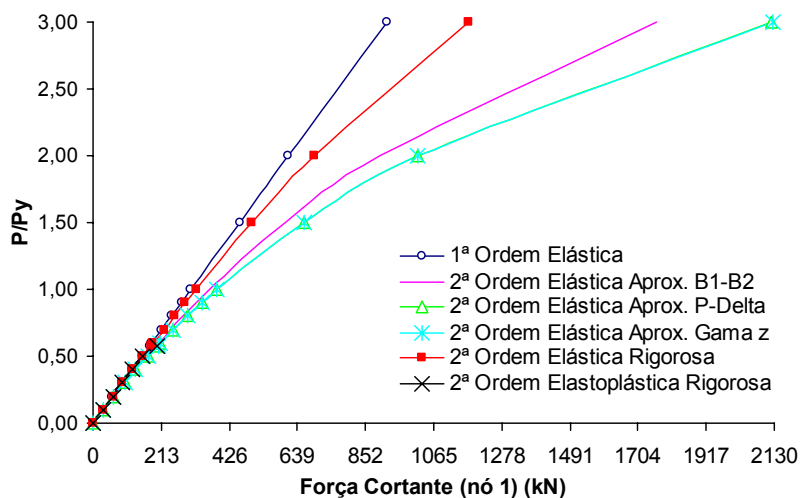


FIGURA 4.5 – Curvas parâmetro de carga x força cortante (nó 1) do pórtico

Pode-se concluir, que todos os métodos aproximados em 2ª ordem apresentaram resultados satisfatórios quando comparados com os resultados da análise elástica rigorosa para este pórtico de um andar e um vão.

Além disso, observou-se que as diferenças nos resultados das análises em 1ª ordem e em 2ª ordem, tanto pelos métodos aproximados quanto pelos métodos rigorosos, são

bastante significativas para o deslocamento horizontal e para o momento fletor. Para as forças normais as diferenças são irrelevantes. Para a força cortante os resultados das análises aproximadas são bastante conservadores em relação aos resultados das análises rigorosas, com pequena vantagem para o método  $B_1-B_2$ .

#### 4.2.2 Pórtico Não-Contraventado de Três Andares e Um Vão

O segundo exemplo a ser analisado considera um pórtico de três pavimentos e um vão, conforme mostra a FIG. 4.6. As ligações entre os pilares e as vigas são rígidas. O mesmo pórtico também foi estudado por GOTO e CHEN (1987) e por LAVALL (1988), ambos em teoria elástica de 2ª ordem.

Neste exemplo, além da verificação da eficiência dos métodos aproximados, deseja-se também confirmar a validade da formulação teórica rigorosa desenvolvida ao comparar seus resultados com os resultados da formulação de GOTO e CHEN (1987).

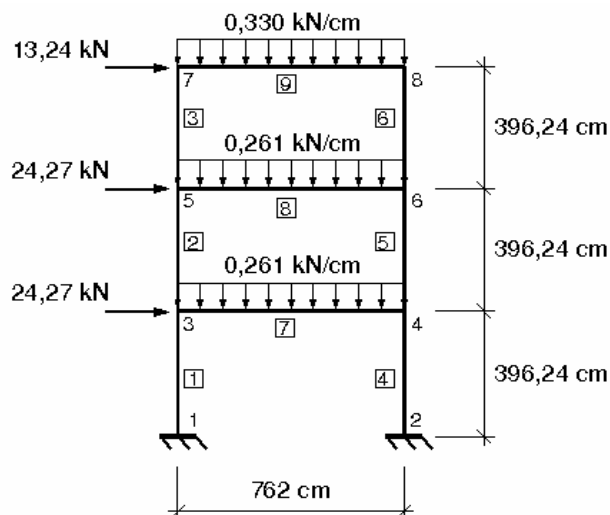


FIGURA 4.6 – Pórtico de três andares e um vão

O pórtico possui pé direito de 396,24 cm e vão de 762 cm e está sujeito a uma carga horizontal de 24,27 kN para os dois primeiros andares e 13,24 para o último andar. As vigas apresentam um carregamento vertical distribuído de 0,261 kN/cm para os dois primeiros andares e 0,33 kN/cm para último andar conforme mostra a FIG. 4.6. As referidas cargas são consideradas de trabalho ( $P_w$ ) e a variação deste carregamento na

análise é mostrada na TAB. 4.6, onde  $P/P_w$  é a relação entre o carregamento atuante e o carregamento de trabalho. Os perfis adotados são de padrão americano e estão indicados na TAB. 4.7.

TABELA 4.6 – Carregamentos aplicados à estrutura para análise

<b>Incremento</b>	1	2	3	4	5
<b><math>P/P_w</math></b>	1	2	3	4	5

TABELA 4.7 – Perfis adotados para os pilares e vigas

<b>Barra</b>	<b>Perfil</b>
1	W 8 x 48
2	W 8 x 35
3	W 8 x 35
4	W 8 x 48
5	W 8 x 35
6	W 8 x 35
7	W 21 x 44
8	W 21 x 44
9	W 14 x 30

Para implementação dos dados do programa, as seções dos perfis foram divididas em 20 fatias, sendo uma fatia para cada mesa e 18 para a alma. Os pilares foram divididos em 4 elementos de igual comprimento e as vigas em 10 elementos também de mesmo comprimento. As forças verticais e horizontais foram aplicadas proporcionalmente de forma incremental, variando de 1 a 5 vezes  $P_w$ , conforme apresentado anteriormente na TAB. 4.6.

A TAB. 4.8 mostra o valor do momento fletor no pilar de cada andar do pórtico (nós 4,6 e 8), considerando a relação de carga  $P/P_w$  indicada na coluna (A). Os resultados da análise elástica em 1ª ordem são mostrados na coluna (B) e servirão de referência para comparação entre os diversos métodos estudados. Os resultados das diversas análises aproximadas em 2ª ordem e suas relações com a análise em 1ª ordem também são apresentados. Nas pilares C, E, G e I, apresentam-se, respectivamente, os resultados das análises pelos métodos  $B_1$ - $B_2$  (Eq. 3.82),  $B_1$ - $B_2$  (Eq. 3.83), P-Delta e Coeficiente  $\gamma_z$ . Os resultados das análises rigorosas, LAVALL (1996) e GOTO e CHEN (1987), estão nas pilares K e M, respectivamente.

TABELA 4.8 – Momento fletor nos pilares 4, 5 e 6 do pórtico

MOMENTO FLETOR (kN cm)													
P/P <sub>w</sub>	1ª Ordem Elástica	2ª Ordem Elástica											
		Aproximada								Rigorosa			
		B <sub>1</sub> -B <sub>2</sub> (Eq. 3.82) (C)	C/B (D)	B <sub>1</sub> -B <sub>2</sub> (Eq. 3.83) (E)	E/B (F)	P-Delta (G)	G/B (H)	$\gamma_z$ (I)	I/B (J)	LAVALL (1996)		GOTO e CHEN (1987)	
										(K)	K/B (L)	(M)	M/B (N)
(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)	(G)	(H)	(I)	(J)	(K)	(L)	(M)	(N)
Primeiro Andar – Pilar 4 (Nó 4)													
1	9524	9723	<b>1,021</b>	9753	<b>1,024</b>	9727	<b>1,021</b>	9737	<b>1,022</b>	9716	<b>1,020</b>	9724	<b>1,021</b>
2	19048	19885	<b>1,044</b>	20017	<b>1,051</b>	19897	<b>1,045</b>	19956	<b>1,048</b>	19859	<b>1,043</b>	19867	<b>1,043</b>
3	28572	30539	<b>1,069</b>	30864	<b>1,080</b>	30577	<b>1,070</b>	30694	<b>1,074</b>	30491	<b>1,067</b>	30515	<b>1,068</b>
4	38096	41748	<b>1,096</b>	42379	<b>1,112</b>	41809	<b>1,097</b>	42059	<b>1,104</b>	41686	<b>1,094</b>	41715	<b>1,095</b>
5	47620	53585	<b>1,125</b>	54667	<b>1,148</b>	53704	<b>1,128</b>	54135	<b>1,137</b>	53532	<b>1,124</b>	53620	<b>1,126</b>
Segundo Andar – Pilar 5 (Nó 6)													
1	7055	7231	<b>1,025</b>	7259	<b>1,029</b>	7231	<b>1,025</b>	7207	<b>1,022</b>	7220	<b>1,023</b>	7210	<b>1,022</b>
2	14110	14852	<b>1,053</b>	14978	<b>1,062</b>	14850	<b>1,052</b>	14760	<b>1,046</b>	14810	<b>1,050</b>	14759	<b>1,046</b>
3	21165	22924	<b>1,083</b>	23239	<b>1,098</b>	22925	<b>1,083</b>	22680	<b>1,072</b>	22827	<b>1,079</b>	22710	<b>1,073</b>
4	28220	31517	<b>1,117</b>	32142	<b>1,139</b>	31497	<b>1,116</b>	31048	<b>1,100</b>	31342	<b>1,111</b>	31127	<b>1,103</b>
5	35275	40718	<b>1,154</b>	41818	<b>1,185</b>	40448	<b>1,147</b>	39695	<b>1,125</b>	40442	<b>1,146</b>	40108	<b>1,137</b>
Terceiro Andar – Pilar 6 (Nó 8)													
1	11584	11626	<b>1,004</b>	11622	<b>1,003</b>	11630	<b>1,004</b>	11638	<b>1,005</b>	11647	<b>1,005</b>	11642	<b>1,005</b>
2	23168	23342	<b>1,008</b>	23328	<b>1,007</b>	23361	<b>1,008</b>	23395	<b>1,010</b>	23419	<b>1,011</b>	23400	<b>1,010</b>
3	34752	35159	<b>1,012</b>	35126	<b>1,011</b>	35203	<b>1,013</b>	35269	<b>1,015</b>	35326	<b>1,017</b>	35308	<b>1,016</b>
4	46336	47086	<b>1,016</b>	47023	<b>1,015</b>	47143	<b>1,017</b>	47298	<b>1,021</b>	47379	<b>1,023</b>	47355	<b>1,022</b>
5	57920	59137	<b>1,021</b>	59032	<b>1,019</b>	59206	<b>1,022</b>	59479	<b>1,027</b>	59590	<b>1,029</b>	59542	<b>1,028</b>

Observando-se a TAB. 4.8 algumas conclusões podem ser obtidas. As duas formulações utilizadas para a análise elástica rigorosa em 2ª ordem apresentam resultados muito próximos, podendo-se considerá-los como sendo “exatos” para efeito de comparação. Os valores obtidos por todas as análises aproximadas apresentaram excelente correlação com as análises rigorosas. O método P-Delta apresentou bons resultados mas demonstrou ser o processo mais trabalhoso; o método do Coeficiente  $\gamma_z$ , além de apresentar bons resultados, demonstrou ser o menos trabalhoso. Comparando-se os métodos B<sub>1</sub>-B<sub>2</sub>, observa-se que os resultados obtidos utilizando-se a Eq. (3.83) são mais conservadores do que aqueles obtidos da Eq. (3.82) que, por sua vez, são os que mais se aproximam do valor exato entre todas as análises aproximadas.

A FIG. 4.7 mostra o gráfico parâmetro de carga x deslocamento horizontal do nó 8 (topo do pórtico) para os diversos tipos de análises mostrando a excelente correlação entre elas, confirmando as observações anteriores. Os resultados das análises rigorosas são praticamente os mesmos e os resultados das análises aproximadas são intermediárias entre as análises elástica em 1ª ordem e elástica rigorosa em 2ª ordem, sendo que os valores obtidos do método B<sub>1</sub>-B<sub>2</sub> (Eq. (3.82)) se aproximam melhor do comportamento “exato”.

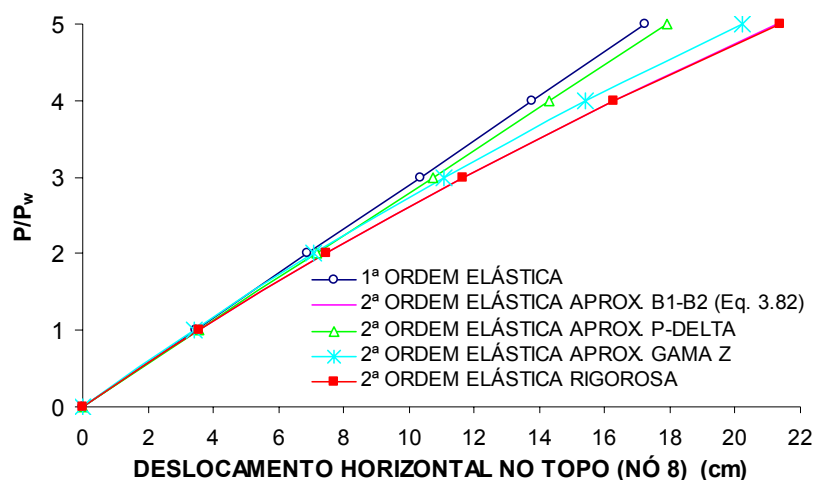


FIGURA 4.7 - Curvas parâmetro de carga x deslocamento horizontal do nó 8

#### 4.2.3 Pórtico Não-Contraventado de Onze Andares e Dois Vãos

A FIG. 4.8 mostra um pórtico não-contraventado de onze andares e dois vãos de um edifício alto, onde são também indicados os comprimentos dos vãos das vigas, as alturas dos andares e a numeração dos nós e das barras.

Os pilares e as vigas de aço são constituídos por perfis soldados ( $\sigma_y=30 \text{ kN/cm}^2$ ) e laminados ( $\sigma_y=34,5 \text{ kN/cm}^2$ ), respectivamente, conforme mostra a TAB. 4.9. O módulo de elasticidade do aço é  $E=20500 \text{ kN/cm}^2$ .

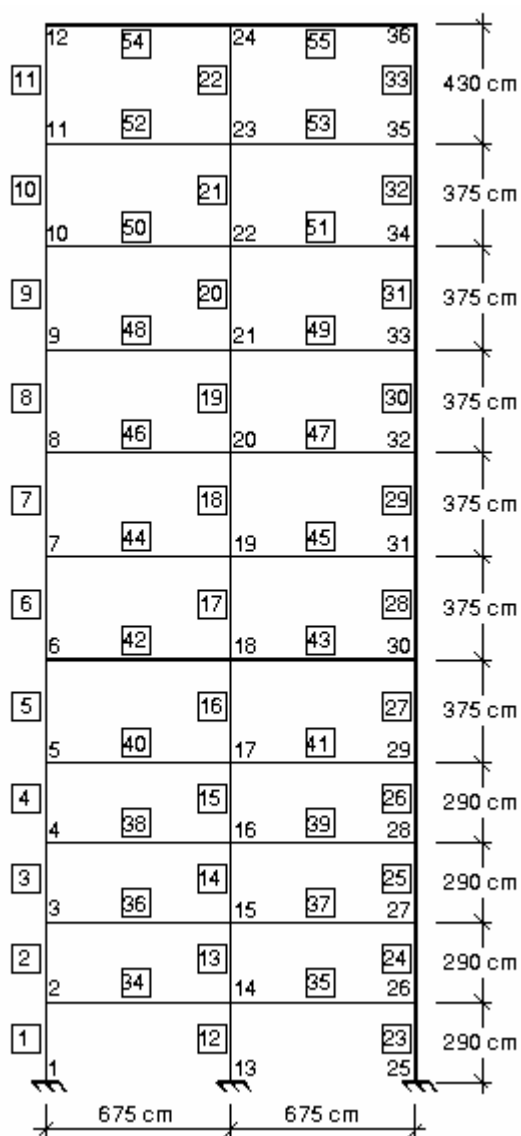


FIGURA 4.8 - Pórtico de onze andares e dois vãos: dimensões básicas

TABELA 4.9 – Perfis adotados para os pilares e vigas – Dimensões em mm.

BARRAS	PERFIL
1 a 4 e 23 a 26	PS 500 x 300 x 16 x 8
12 a 15	PS 500 x 300 x 19 x 9,5
5 a 7, 16 a 18 e 27 a 29	PS 500 x 300 x 12,5 x 8
8 a 11, 19 a 22 e 30 a 33	PS 500 x 300 x 9,5 x 6,5
34 a 55	W 530 x 66

As FIG. 4.9-a e 4.9-b mostram, respectivamente, o carregamento vertical de cálculo concentrado nos pilares e distribuído nas vigas (constituídos pelo carregamento

permanente majorado de 1,4 e pela sobrecarga majorada de 1,5) e o carregamento horizontal de cálculo devido à ação do vento (distribuído ao longo da altura e ponderado por 0,84 da ação nominal de vento), que somados representam o carregamento de referência  $P_w$ .

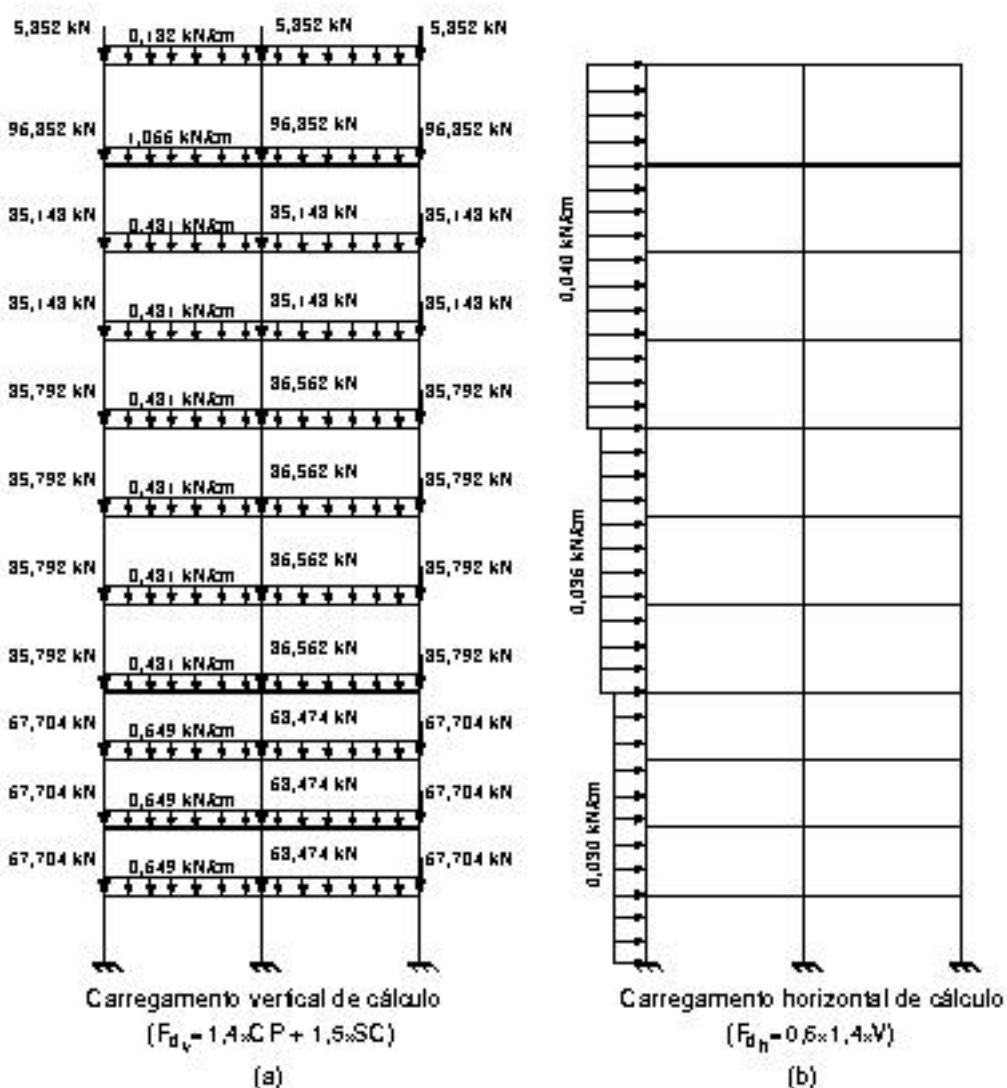


FIGURA 4.9 - Pórtico de onze andares e dois vãos: carregamento de cálculo

A TAB. 4.10 apresenta os valores do coeficiente  $\gamma_z$ , dos coeficientes  $B_2$  para todos os andares do pórtico, para determinados valores de incrementos de carga. Nota-se que os coeficientes  $B_2$  variam para cada andar, constituindo-se num coeficiente local de cada barra, enquanto que o coeficiente  $\gamma_z$  constitui-se num coeficiente global para todo o edifício.

TABELA 4.10 - Coeficientes de majoração  $\gamma_z$  e  $B_2$ 

P/P <sub>w</sub>	Coeficiente Global $\gamma_z$	Coeficiente Local $B_2$ (Eq. 3.82)										
		1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°
		andar	andar	andar	andar	andar	andar	andar	andar	andar	andar	andar
0,10	1,010	1,006	1,010	1,011	1,011	1,012	1,011	1,009	1,008	1,006	1,004	1,001
0,30	1,031	1,019	1,032	1,034	1,032	1,036	1,032	1,028	1,024	1,019	1,012	1,002
0,50	1,054	1,032	1,055	1,058	1,055	1,062	1,055	1,047	1,040	1,032	1,020	1,003
0,70	1,077	1,046	1,078	1,083	1,079	1,088	1,079	1,067	1,057	1,045	1,028	1,004
1,00	1,113	1,066	1,116	1,124	1,117	1,131	1,117	1,099	1,083	1,066	1,040	1,006
1,10	1,126	1,074	1,129	1,138	1,130	1,146	1,130	1,110	1,092	1,073	1,044	1,006
1,50	1,180	1,103	1,184	1,198	1,186	1,211	1,187	1,156	1,130	1,102	1,061	1,008
2,00	1,256	1,142	1,262	1,282	1,265	1,302	1,265	1,219	1,182	1,140	1,083	1,011
3,00	1,440	1,230	1,452	1,492	1,457	1,534	1,459	1,368	1,300	1,227	1,130	1,017
5,00	2,036	1,452	2,080	2,221	2,097	2,383	2,103	1,814	1,624	1,445	1,238	1,028

Os resultados do deslocamento horizontal no topo do pórtico (nó 36) para os diversos tipos de análises são apresentados na FIG. 4.10, mostrando uma boa correlação entre os comportamentos do pórtico para todas as análises em 2ª ordem para qualquer relação de P/P<sub>w</sub>.

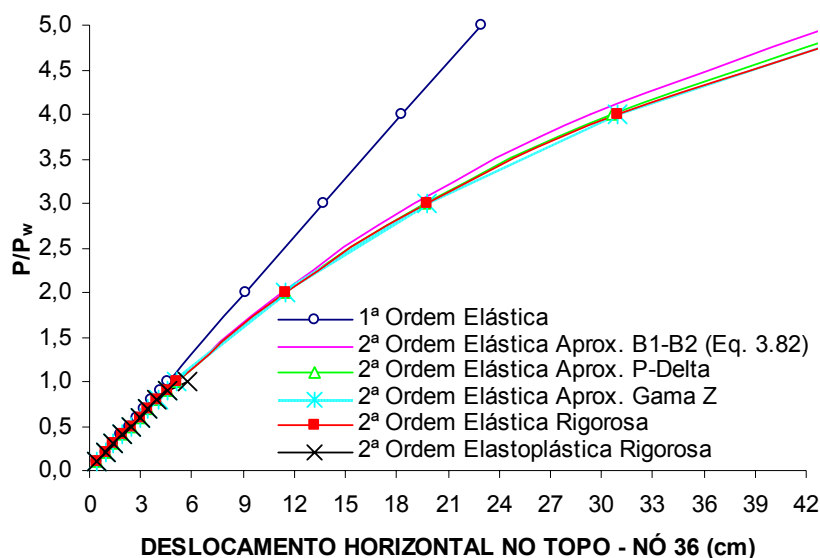


FIGURA 4.10 - Curvas parâmetro de carga x deslocamento lateral no topo

A TAB. 4.11 mostra os valores do momento fletor para os pilares 23, 27 e 33 dos 1º, 5º e 11º andares, respectivamente, considerando a relação de carga P/P<sub>w</sub> indicada, para os diversos tipos de análise elástica em 1ª ordem, elástica em 2ª ordem aproximada B<sub>1</sub>-B<sub>2</sub>, P-Delta e  $\gamma_z$  e elástica e elastoplástica em 2ª ordem rigorosa.



TABELA 4.11 - Momento fletor para os 1º, 5º e 11º andares.

MOMENTO FLETOR (kNcm)											
P/P <sub>w</sub>	1ª Ordem Elástica (A)	2ª Ordem									
		Elástica Aproximada						Rigorosa			
		B <sub>1</sub> -B <sub>2</sub> (Eq. 3.82) (C) (C/B)		P-Delta (D) (D/B)		γ <sub>z</sub> (E) (E/B)		Elástica (F) (F/B)		Elastoplástica (G) (G/B)	
<b>1º ANDAR ( PILAR 23)</b>											
0,10	1591	1599	(1,004)	1600	(1,005)	1602	(1,007)	1598	(1,004)	1598	(1,004)
0,30	4774	4839	(1,014)	4856	(1,017)	4878	(1,022)	4839	(1,014)	4839	(1,014)
0,50	7957	8139	(1,023)	8180	(1,028)	8270	(1,039)	8142	(1,023)	8142	(1,023)
0,70	11140	11502	(1,032)	11584	(1,040)	11725	(1,053)	11509	(1,033)	11509	(1,033)
1,00	15915	16668	(1,047)	16849	(1,059)	17131	(1,076)	16691	(1,049)	26932	(1,692)
1,10	17506	18423	(1,052)	18763	(1,072)	19157	(1,094)	18456	(1,054)	-	
1,50	23872	25625	(1,073)	26420	(1,107)	27259	(1,142)	25716	(1,077)	-	
2,00	31829	35056	(1,101)	35991	(1,131)	37386	(1,175)	35301	(1,109)	-	
3,00	47744	55560	(1,164)	58369	(1,223)	62040	(1,299)	56610	(1,186)	-	
5,00	79573	105213	(1,322)	119536	(1,502)	135585	(1,704)	113771	(1,430)	-	
<b>5º ANDAR (PILAR 27)</b>											
0,10	1409	1415	(1,004)	1416	(1,005)	1415	(1,004)	1415	(1,004)	1415	(1,004)
0,30	4227	4282	(1,013)	4293	(1,016)	4282	(1,013)	4281	(1,013)	4281	(1,013)
0,50	7045	7203	(1,022)	7237	(1,027)	7220	(1,025)	7199	(1,022)	7199	(1,022)
0,70	9863	10180	(1,032)	10225	(1,037)	10158	(1,030)	10171	(1,031)	10171	(1,031)
1,00	14090	14762	(1,048)	14834	(1,053)	14700	(1,043)	14742	(1,046)	15184	(1,078)
1,10	15499	16323	(1,053)	16513	(1,065)	16334	(1,054)	16298	(1,052)	-	
1,50	21134	22755	(1,077)	23228	(1,099)	22870	(1,082)	22703	(1,074)	-	
2,00	28179	31277	(1,110)	31621	(1,122)	31040	(1,102)	31176	(1,106)	-	
3,00	42269	50481	(1,194)	51288	(1,213)	49558	(1,172)	50194	(1,187)	-	
5,00	70448	105876	(1,503)	106396	(1,510)	98855	(1,403)	104026	(1,477)	-	
<b>11º ANDAR (PILAR 33)</b>											
0,10	1355	1355	(1,000)	1355	(1,000)	1356	(1,001)	1355	(1,000)	1355	(1,000)
0,30	4065	4065	(1,000)	4068	(1,001)	4082	(1,004)	4069	(1,001)	4069	(1,001)
0,50	6774	6775	(1,000)	6792	(1,003)	6811	(1,005)	6788	(1,002)	6788	(1,002)
0,70	9484	9485	(1,000)	9510	(1,003)	9533	(1,005)	9511	(1,003)	9511	(1,003)
1,00	13548	13552	(1,000)	13583	(1,003)	13632	(1,006)	13605	(1,004)	15509	(1,145)
1,10	14903	14907	(1,000)	14961	(1,004)	15032	(1,009)	14917	(1,001)	-	
1,50	20323	20330	(1,000)	20472	(1,007)	20629	(1,015)	20451	(1,006)	-	
2,00	27110	27110	(1,000)	27361	(1,009)	27626	(1,019)	27328	(1,008)	-	
3,00	40645	40674	(1,001)	41074	(1,011)	41769	(1,028)	41187	(1,013)	-	
5,00	67742	67823	(1,001)	68746	(1,015)	71579	(1,057)	69428	(1,025)	-	

Considerando-se apenas as análises elásticas observa-se a excelente correlação entre os resultados das análises aproximadas em 2ª ordem e da análise rigorosa em 2ª ordem para todos os andares. Observa-se que os métodos B<sub>1</sub>-B<sub>2</sub> (Eq. (3.82)) e P-Delta fornecem excelentes aproximações em toda a variação de P/P<sub>w</sub>, sendo que o método P-Delta é o mais trabalhoso. O método do coeficiente γ<sub>z</sub>, a partir da relação P/P<sub>w</sub> = 1,10 apresenta maiores variações nos resultados.

Considerando-se a análise elastoplástica observa-se que o pórtico resiste ao carregamento até uma relação de  $P/P_w = 1,00$ , a partir do qual entra em colapso. Isto indica que, em termos práticos, os métodos aproximados apresentam bons resultados para o cálculo e dimensionamento das estruturas.

As FIG. 4.11, FIG. 4.12 e FIG. 4.13 mostram respectivamente, a variação do momento fletor, da força normal e da força cortante para as diversas análises para os pilares 23 do 1º andar, 27 do 5º andar e 33 do 11º andar, em função da relação de carga  $P/P_w$ .

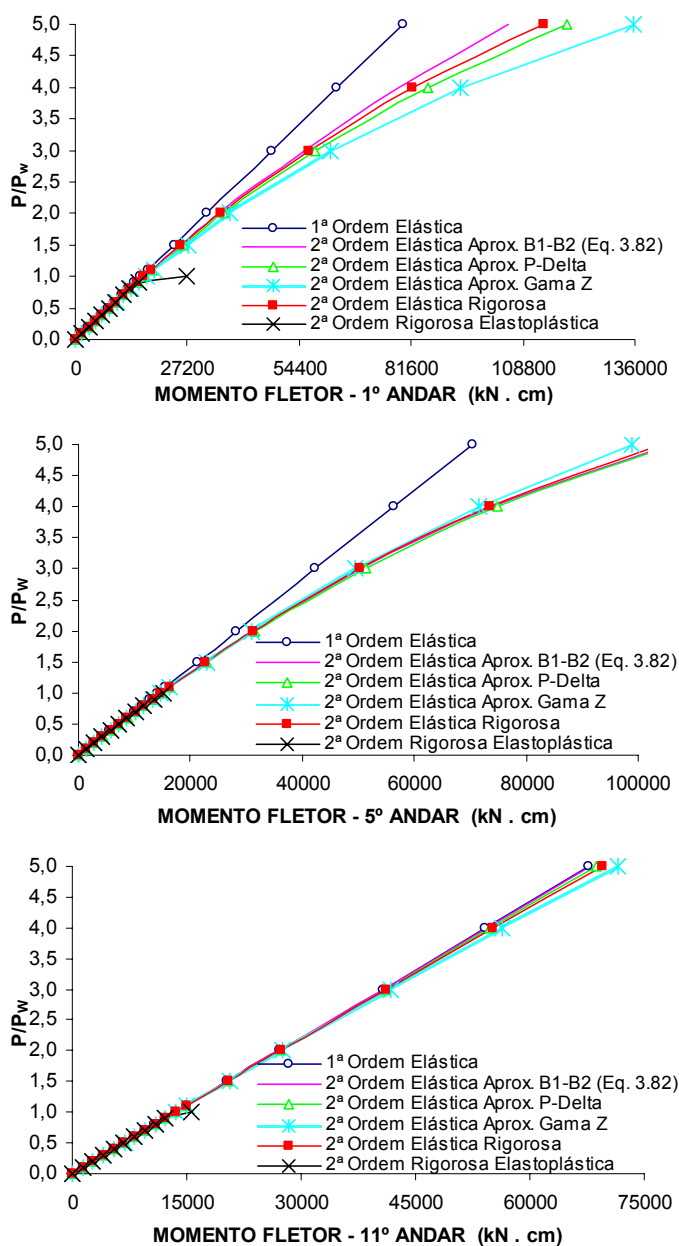


FIGURA 4.11 - Curvas parâmetro de carga x momento fletor nos pilares dos 1º, 5º e 11º andares.

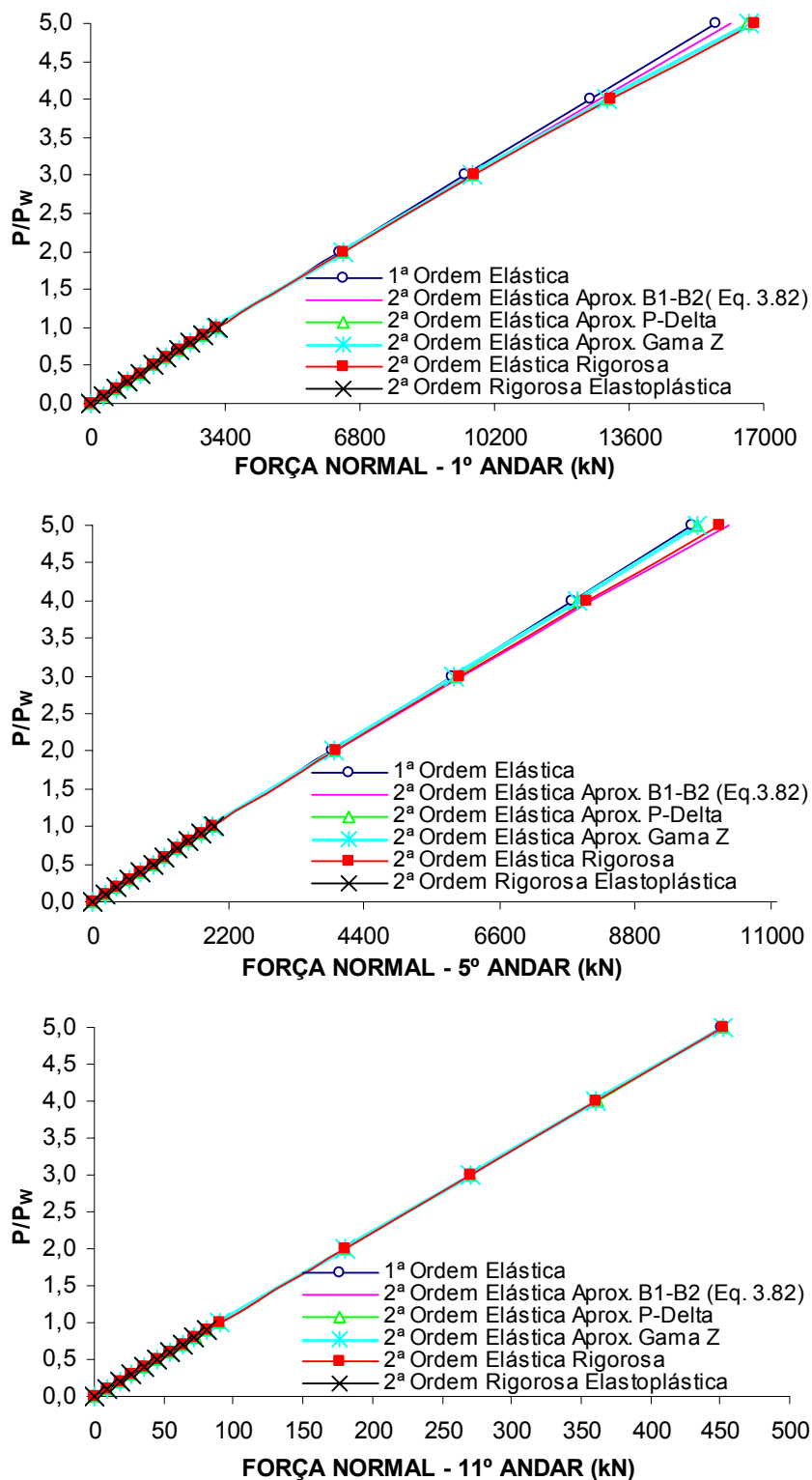


FIGURA 4.12 - Curvas parâmetro de carga x força normal nos pilares dos 1º, 5º e 11º andares.

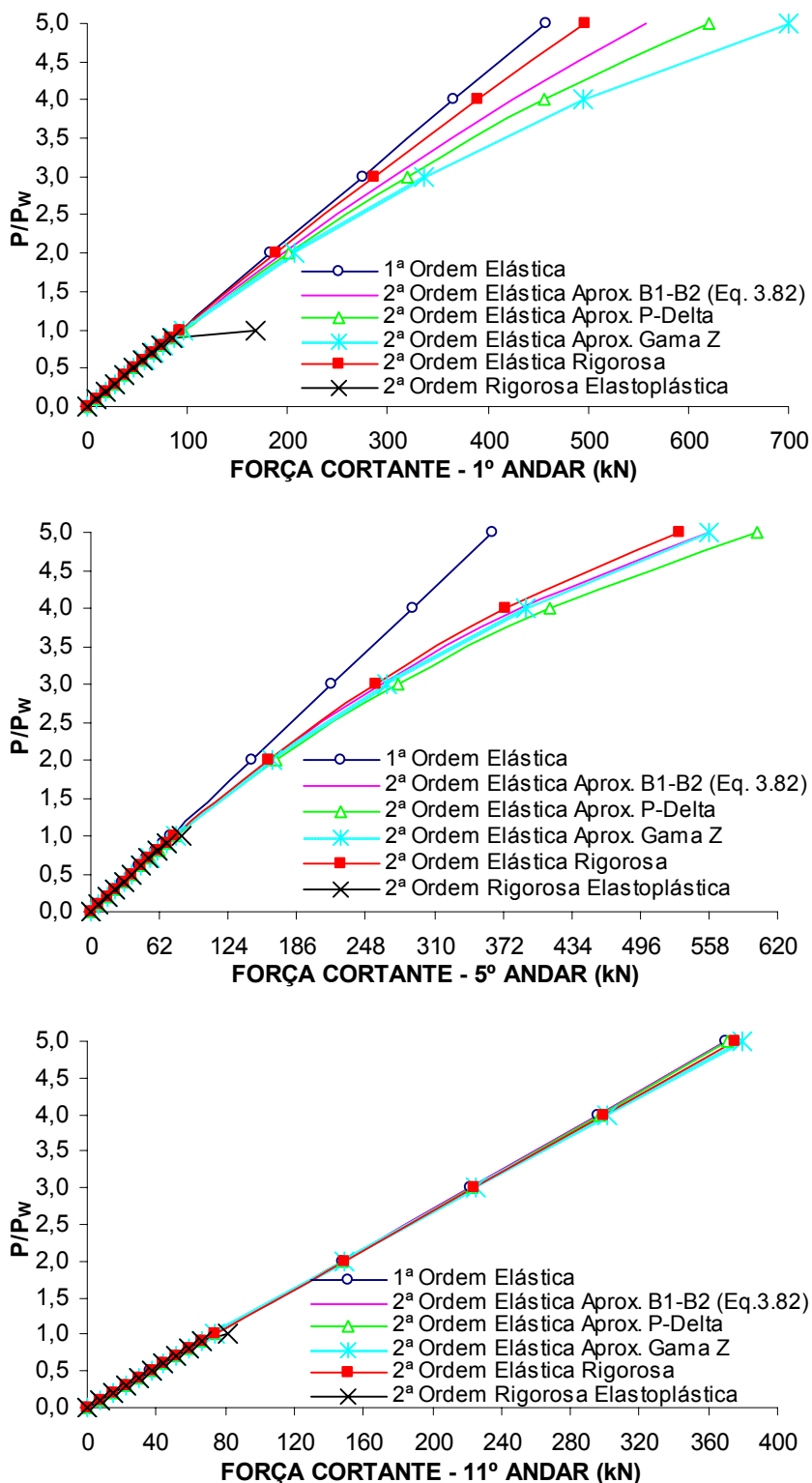


FIGURA 4.13 - Curvas parâmetro de carga x força cortante nos pilares dos 1º, 5º e 11º andares.

Considerando-se o momento fletor, observa-se uma excelente correlação entre os resultados das análises elásticas em 2ª ordem, aproximadas e rigorosa, em toda a variação de  $P/P_w$ , para todos os andares. A diferença, já esperada, entre as análises elásticas em 2ª ordem e a análise elástica em 1ª ordem é confirmada.

Para a força normal nos mesmos pilares, observa-se na FIG. 4.12 que os resultados da análise elástica em 1ª ordem são praticamente os mesmos das análises elásticas em 2ª ordem, tanto aproximada quanto a rigorosa, para qualquer incremento de carga, podendo-se, na prática, adotar os resultados da análise em 1ª ordem.

Para a força cortante, a FIG 4.13 mostra que até a relação de carga  $P/P_w=1,0$ , os resultados da análise elástica em 1ª ordem e os resultados de todas as outras análises em 2ª ordem são muito próximos. A partir daí, as análises em 2ª ordem diferem mais da análise em 1ª ordem e, embora as análises aproximadas tenham boa correlação entre si, são mais conservadoras do que a análise elástica rigorosa em 2ª ordem, sendo que o método  $B_1-B_2$  apresenta melhores resultados entre as análises aproximadas. Em termos práticos, não seria necessário majorar os valores da força cortante obtida da análise elástica em 1ª ordem.

Os gráficos da FIG. 4.14 mostram os resultados máximos dos momentos fletores, das forças normais e cortantes para os mesmos pilares (23, 27 e 33) considerando-se as análises elásticas em 1ª e 2ª ordem (aproximadas e rigorosa) para 100% e 500% da carga de referência aplicada. Verifica-se que, para 100% do carregamento aplicado, ou seja, para o carregamento último que o pórtico suporta antes de entrar em colapso, os efeitos de 2ª ordem foram pouco significativos, ocorrendo um pequeno acréscimo nos esforços em 1ª ordem. À medida que o carregamento aumenta esses efeitos tende a ser mais significativos, conforme ilustra a figura para 500% do carregamento, com exceção para a força normal que permanece praticamente constante em todas as análises.

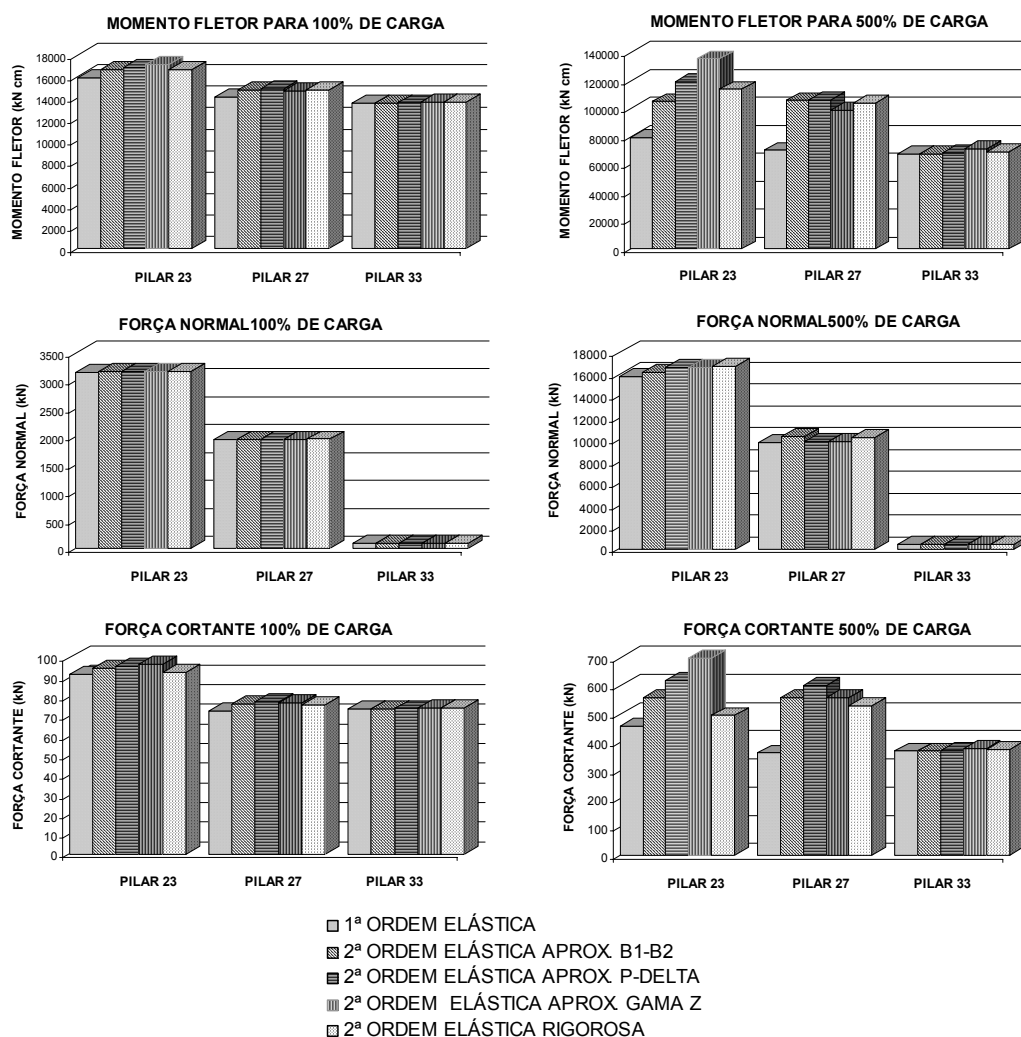


FIGURA 4.14 – Variação do momento fletor, força normal e cortante para os pilares 23 do 1º andar, 27 do 5º andar e 33 do 11º andar para as diversas análises elásticas.

### 4.3 Pórticos Planos Contraventados

Neste item, serão apresentados dois exemplos de pórticos planos contraventados: um pórtico de onze andares contraventado em todos os seus andares e um pórtico de dois andares parcialmente contraventado, apenas no seu segundo andar.

Para essas estruturas, foram utilizados sistemas treliçados de contraventamento visando garantir a estabilidade lateral da edificação. As vigas e diagonais são, portanto,

rotuladas nas suas extremidades, eliminando os momentos fletores nas ligações entre as vigas e diagonais com os pilares. O carregamento lateral é absorvido, em grande parte, pelas diagonais, tornando o comportamento deste tipo de estrutura, quanto aos deslocamentos horizontais, mais eficiente em relação aos pórticos não-contraventados.

Nestes exemplos a análise elástica rigorosa em 2ª ordem será realizada utilizando-se o programa ANSYS 6.1 (2002), no seu modo de análise não-linear geométrica com grandes deslocamentos.

O processo de solução numérica do sistema de equações não-lineares é iterativo para cada incremento de carga e utiliza-se o algoritmo Newton-Raphson “puro” para a solução desse sistema de equações. Foram utilizados nestes exemplos, os elementos de barra tipo BEAM3 e LINK1. O elemento BEAM3 é um elemento de barra, bidimensional, com dois nós e três graus de liberdade por nó, que permite a análise elástica com grandes deslocamentos, ou seja, a análise não-linear geométrica. O elemento LINK1 é um elemento de treliça, bidimensional, com dois nós e dois graus de liberdade por nó, que também permite a análise elástica com grandes deslocamentos.

#### **4.3.1 Pórtico Contraventado de Onze Andares e Um Vão**

Neste exemplo é analisado um pórtico contraventado de onze andares e um vão de um edifício alto, conforme mostra a FIG. 4.15-a, onde também estão indicadas as numerações das barras e dos nós e as dimensões básicas da estrutura. Os pilares, as vigas e as diagonais são constituídos pelos perfis laminados padrão Açominas HP 310x79, W 310x23,8 e W 200x35,9, respectivamente. As vigas e as diagonais são rotuladas nas suas extremidades. O aço adotado apresenta uma tensão de escoamento  $\sigma_y=34,5 \text{ kN/cm}^2$  e módulo de elasticidade  $E=20500 \text{ kN/cm}^2$ .

As FIG. 4.15-b e 4.15-c mostram, respectivamente, o carregamento vertical de cálculo ( $F_{dv}$ ) concentrado nos pilares e distribuído nas vigas (constituídos pelo carregamento permanente majorado de 1,4 e pela sobrecarga majorada de 1,5) e o carregamento horizontal de cálculo ( $F_{dh}$ ) devido à ação do vento (distribuído ao longo da altura e

ponderado por 0,84 da ação nominal de vento), que somados representam o carregamento de referência  $P_w$ .

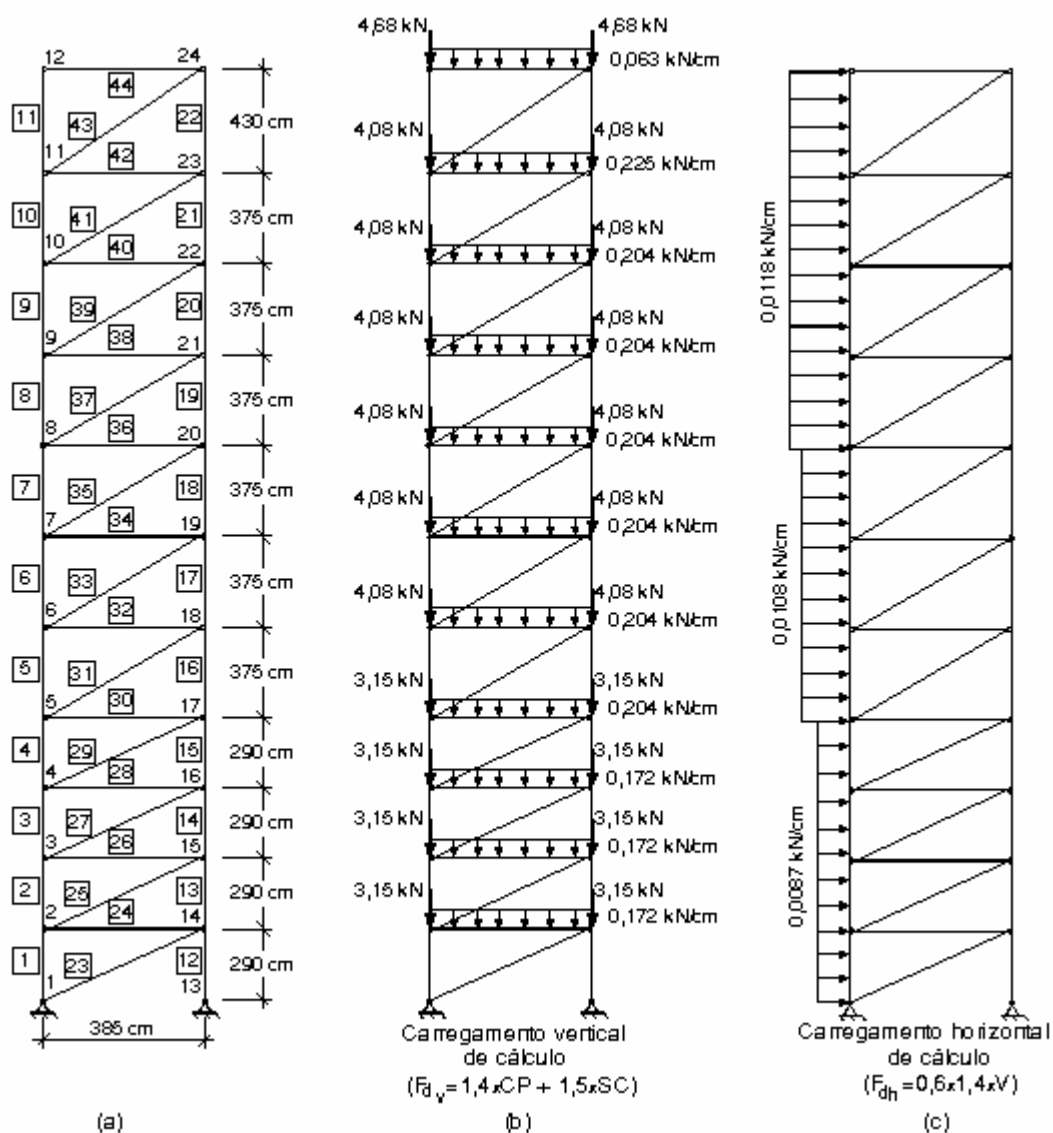


FIGURA 4.15 – Pórtico contraventado de onze andares e um vão

Os resultados para a análise não-linear em 2ª ordem elástica foram obtidos utilizando-se o programa ANSYS-6.1. Os pilares do pórtico foram representados através de elementos de barras do tipo BEAM3, divididos em dez elementos cada um. Como as vigas e as diagonais são rotuladas nas suas extremidades, foi utilizado para as mesmas apenas um elemento de treliça do tipo LINK1. Para efeito de cálculo os carregamentos distribuídos foram concentrados nos nós.



Os valores do coeficiente de amplificação  $B_1$  para todos os pilares do pórtico, calculados conforme a Eq. (3.71) foram menores que um sendo, portanto, tomados iguais à unidade.

A TAB. 4.12 mostra os valores dos coeficientes de majoração global  $\gamma_z$  e local  $B_2$ . Observa-se que esses coeficientes crescem com incremento de carga e são sempre maiores que a unidade. Nota-se também que no caso dos pórticos contraventados os valores de  $\gamma_z$  representam a média dos valores de  $B_2$  e são bem menores quando comparados com aqueles encontrados para os pórticos não-contraventados.

TABELA 4.12 – Coeficiente de majoração global  $\gamma_z$  e local  $B_2$

P/P <sub>w</sub>	Coeficiente Global $\gamma_z$	Coeficiente local $B_2$										
		1º andar	2º andar	3º andar	4º andar	5º andar	6º andar	7º andar	8º andar	9º andar	10º andar	11º andar
0,10	1,001	1,001	1,001	1,001	1,001	1,002	1,002	1,002	1,002	1,002	1,001	1,001
0,20	1,003	1,002	1,002	1,003	1,003	1,003	1,003	1,003	1,003	1,003	1,003	1,002
0,30	1,004	1,002	1,004	1,004	1,004	1,005	1,005	1,005	1,005	1,005	1,004	1,003
0,40	1,005	1,003	1,005	1,005	1,006	1,006	1,006	1,006	1,006	1,006	1,006	1,004
0,50	1,007	1,004	1,006	1,007	1,007	1,008	1,008	1,008	1,008	1,008	1,007	1,005
0,60	1,008	1,005	1,007	1,008	1,009	1,009	1,010	1,010	1,009	1,009	1,008	1,006
0,70	1,010	1,005	1,008	1,009	1,010	1,011	1,011	1,011	1,011	1,011	1,010	1,007
0,80	1,011	1,006	1,009	1,011	1,012	1,013	1,013	1,013	1,013	1,012	1,011	1,008
0,90	1,012	1,007	1,011	1,012	1,013	1,014	1,015	1,015	1,014	1,014	1,013	1,009
1,00	1,014	1,008	1,012	1,014	1,015	1,016	1,016	1,016	1,016	1,015	1,014	1,010
2,00	1,028	1,016	1,024	1,027	1,030	1,032	1,033	1,033	1,032	1,031	1,029	1,020
3,00	1,042	1,024	1,036	1,042	1,045	1,049	1,051	1,051	1,049	1,047	1,043	1,030
4,00	1,057	1,032	1,049	1,056	1,061	1,066	1,069	1,069	1,067	1,064	1,059	1,041
5,00	1,073	1,040	1,062	1,071	1,078	1,084	1,087	1,087	1,085	1,081	1,074	1,052

A FIG. 4.16 apresenta o comportamento da estrutura quanto aos deslocamentos laterais ao longo de toda a sua altura, para as análises elásticas em 1ª e 2ª ordem (aproximadas e rigorosa), considerando-se  $P/P_w=4,0$ , relação de carga um pouco maior do que a relação de carga de colapso da estrutura ( $P/P_w=3,8$ ), calculada através das equações de interação da NBR 8800 (1986). Observa-se que as curvas apresentam um comportamento, como já era esperado, de painéis rígidos.

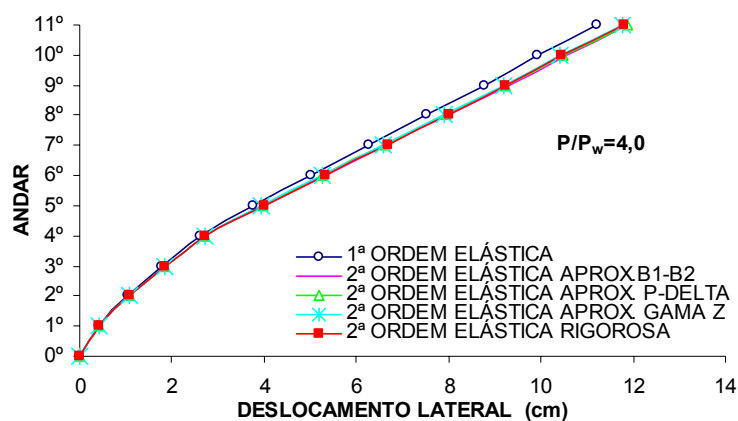


FIGURA 4.16 – Gráfico do deslocamento lateral do pórtico contraventado de onze andares e um vão para  $P/P_w=4,0$ .

Analisando-se as curvas do gráfico da FIG. 4.16, observa-se que os resultados das análises em 2ª ordem elástica, aproximadas e rigorosa, estão próximos dos resultados da análise elástica de 1ª ordem, indicando que para estruturas contraventadas, garantido o dimensionamento adequado das barras de contraventamento (diagonais e vigas), a sensibilidade da estrutura aos deslocamentos horizontais é pequena e os efeitos de 2ª ordem em relação aos de 1ª ordem são irrelevantes. Observa-se também que os resultados de todas as análises aproximadas têm boa correlação entre si e se aproximam do comportamento real do pórtico.

A FIG. 4.17 mostra as curvas parâmetro de carga x deslocamento lateral no topo do pórtico (nó 24) para todas as análises elásticas. Assim como no caso da FIG. 4.16, os resultados da análise elástica rigorosa em 2ª ordem confirmam que as estruturas contraventadas são pouco sensíveis aos deslocamentos horizontais.

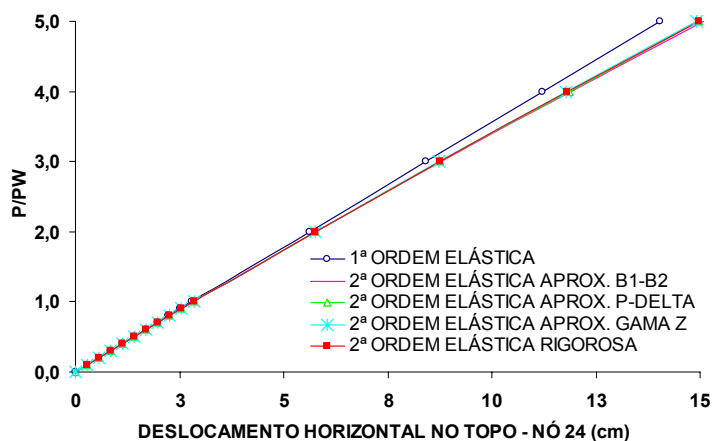


FIGURA 4.17 – Curvas parâmetro de carga x deslocamento lateral no topo

Os valores dos momentos fletores da TAB. 4.13 e os comportamentos das curvas do gráfico da FIG. 4.18, mais uma vez, vêm confirmar as conclusões anteriores. As diferenças dos resultados da análise elástica rigorosa em 2ª ordem em relação aos da análise elástica em 1ª ordem são relativamente pequenas, por volta de 4,6% para o carregamento de cálculo ( $P/P_w=1,0$ ), mostrando a pouca sensibilidade das estruturas contraventadas aos deslocamentos horizontais.

TABELA 4.13- Momento fletor máximo para os 1º, 6º e 9º andares.

MOMENTO FLETOR (kNcm)									
P/P <sub>w</sub> (A)	1ª Ordem Elástica (B)	2ª Ordem Elástica							
		Aproximada						Rigorosa (F) (F/B)	
		B <sub>1</sub> -B <sub>2</sub> (C) (C/B)		P-Delta (D) (D/B)		γ <sub>z</sub> (E) (E/B)			
<b>1º ANDAR ( PILAR 12)</b>									
0,10	31,36	31,39	(1,001)	31,41	(1,002)	31,39	(1,001)	31,36	(1,000)
0,30	94,08	94,30	(1,002)	94,50	(1,004)	94,48	(1,004)	94,05	(1,000)
0,50	156,81	157,42	(1,004)	157,92	(1,007)	158,00	(1,008)	156,83	(1,000)
0,70	219,53	220,72	(1,005)	221,71	(1,010)	221,91	(1,011)	219,67	(1,001)
0,90	282,25	284,23	(1,007)	285,88	(1,013)	286,15	(1,014)	282,56	(1,001)
1,00	313,61	316,06	(1,008)	318,55	(1,016)	318,28	(1,015)	314,04	(1,001)
2,00	627,23	637,08	(1,016)	645,24	(1,029)	645,89	(1,030)	629,48	(1,004)
3,00	940,84	963,17	(1,024)	981,24	(1,043)	982,82	(1,045)	946,09	(1,006)
4,00	1254,46	1294,47	(1,032)	1332,92	(1,063)	1330,37	(1,061)	1263,60	(1,007)
<b>6º ANDAR (PILAR 17)</b>									
0,10	2,51	2,51	(1,002)	2,52	(1,005)	2,51	(1,002)	2,52	(1,007)
0,30	7,52	7,56	(1,005)	7,61	(1,012)	7,58	(1,008)	7,64	(1,015)
0,50	12,53	12,63	(1,008)	12,77	(1,019)	12,73	(1,016)	12,83	(1,024)
0,70	17,54	17,74	(1,011)	18,01	(1,026)	17,94	(1,022)	18,12	(1,033)
0,90	22,56	22,89	(1,015)	23,32	(1,034)	23,27	(1,031)	23,49	(1,041)
1,00	25,06	25,47	(1,016)	26,10	(1,042)	25,94	(1,035)	26,21	(1,046)
2,00	50,13	51,79	(1,033)	53,94	(1,076)	53,24	(1,062)	54,64	(1,090)
3,00	75,19	79,00	(1,051)	83,80	(1,114)	82,18	(1,093)	85,43	(1,136)
4,00	100,26	107,15	(1,069)	117,05	(1,167)	112,90	(1,126)	118,63	(1,183)
<b>9º ANDAR (PILAR 20)</b>									
0,10	2,68	2,68	(1,002)	2,68	(1,000)	2,68	(1,001)	2,68	(1,001)
0,30	8,03	8,07	(1,005)	8,05	(1,003)	8,05	(1,003)	8,06	(1,004)
0,50	13,38	13,48	(1,008)	13,44	(1,004)	13,42	(1,003)	13,48	(1,007)
0,70	18,74	18,93	(1,011)	18,84	(1,005)	18,80	(1,004)	18,92	(1,010)
0,90	24,09	24,42	(1,014)	24,25	(1,007)	24,18	(1,004)	24,39	(1,013)
1,00	26,77	27,17	(1,015)	26,99	(1,008)	26,90	(1,005)	27,14	(1,014)
2,00	53,53	55,18	(1,031)	54,34	(1,015)	54,05	(1,010)	55,06	(1,029)
3,00	80,30	84,08	(1,047)	82,16	(1,023)	81,47	(1,015)	83,84	(1,044)
4,00	107,06	113,89	(1,064)	110,58	(1,033)	109,17	(1,020)	113,51	(1,060)

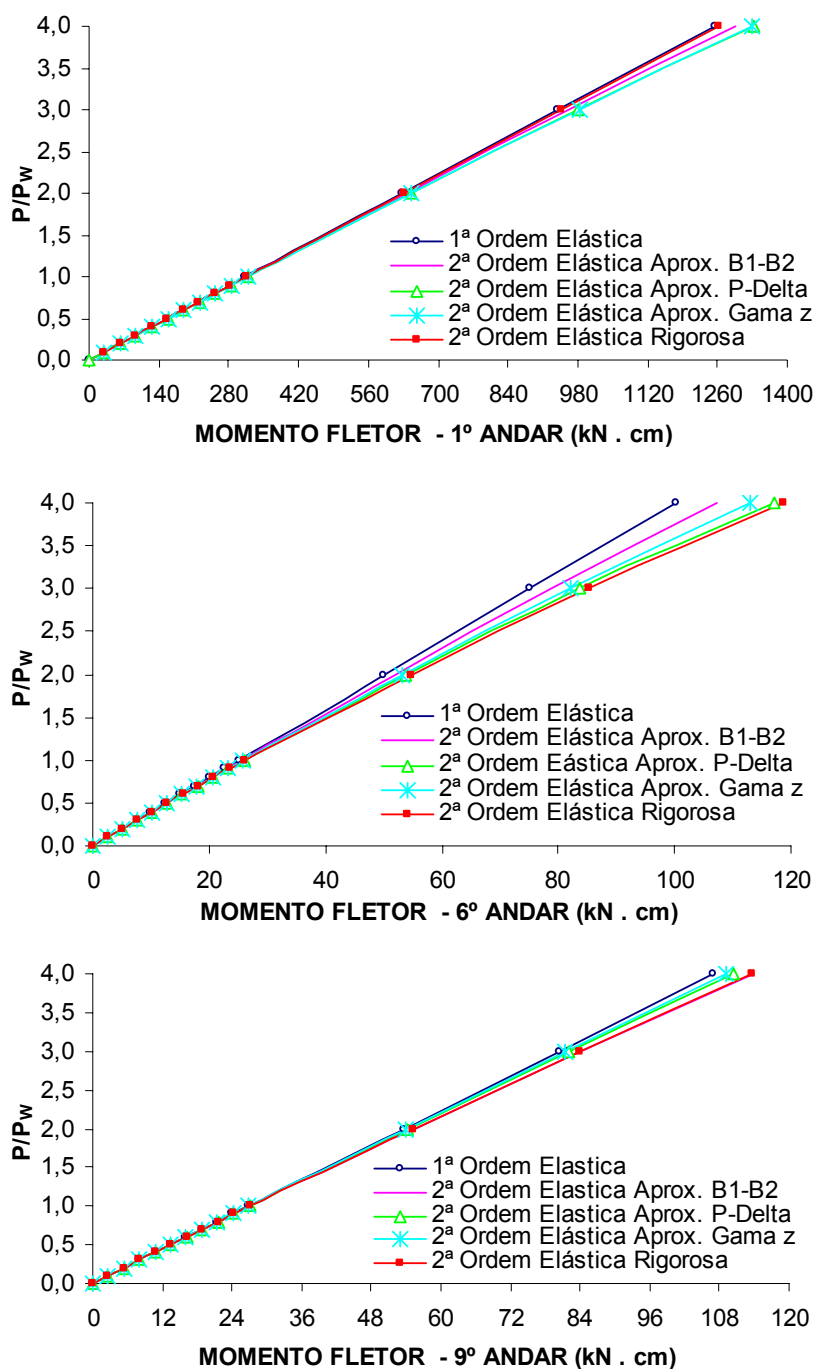


FIGURA 4.18 – Curvas parâmetro de carga x momento fletor máximo para o 1º, 6º e 9º andares

A TAB. 4.14 e a FIG. 4.19 mostram os valores da força normal máxima para os mesmos pilares (12, 17 e 20), considerando a relação de carga  $P/P_w$  indicada, para as análises elásticas em 1ª ordem e 2ª ordem aproximada ( $B_1-B_2$ , P-Delta e  $\gamma_z$ ) e rigorosa.

TABELA 4.14 – Força normal máxima para o 1º, 6º e 9º andares.

FORÇA NORMAL (kN)									
P/P <sub>w</sub>	1ª Ordem Elástica	2ª Ordem Elástica							
		Aproximada						Rigorosa	
		B <sub>1</sub> -B <sub>2</sub>		P-Delta		γ <sub>z</sub>			
(A)	(B)	(C)	(C/B)	(D)	(D/B)	(E)	(E/B)	(F)	(F/B)
<b>1º ANDAR ( PILAR 12)</b>									
0,10	64,77	64,79	(1,000)	64,80	(1,000)	64,78	(1,000)	64,78	(1,000)
0,30	194,30	194,50	(1,001)	194,57	(1,001)	194,36	(1,000)	194,51	(1,001)
0,50	323,83	324,40	(1,002)	324,57	(1,002)	324,06	(1,001)	324,48	(1,002)
0,70	453,37	454,47	(1,002)	454,81	(1,003)	454,91	(1,003)	454,69	(1,003)
0,90	582,90	584,73	(1,003)	585,30	(1,004)	585,45	(1,004)	585,13	(1,004)
1,00	647,67	649,93	(1,003)	650,94	(1,005)	650,69	(1,005)	650,44	(1,004)
2,00	1295,33	1304,44	(1,007)	1307,28	(1,009)	1307,42	(1,009)	1306,90	(1,009)
3,00	1943,00	1963,66	(1,011)	1969,73	(1,014)	1970,18	(1,014)	1969,60	(1,014)
4,00	2590,66	2627,69	(1,014)	2642,77	(1,020)	2639,84	(1,019)	2638,80	(1,019)
<b>6º ANDAR (PILAR 17)</b>									
0,10	31,82	31,83	(1,000)	31,83	(1,000)	31,82	(1,000)	31,83	(1,000)
0,30	95,45	95,56	(1,001)	95,57	(1,001)	95,53	(1,001)	95,56	(1,001)
0,50	159,08	159,40	(1,002)	159,40	(1,002)	159,37	(1,002)	159,40	(1,002)
0,70	222,71	223,35	(1,003)	223,33	(1,003)	223,29	(1,003)	223,33	(1,003)
0,90	286,35	287,39	(1,004)	287,37	(1,004)	287,35	(1,003)	287,37	(1,004)
1,00	318,16	319,46	(1,004)	319,56	(1,004)	319,29	(1,004)	319,42	(1,004)
2,00	636,33	641,59	(1,008)	641,42	(1,008)	640,83	(1,007)	641,41	(1,008)
3,00	954,49	966,54	(1,013)	965,97	(1,012)	964,63	(1,011)	966,08	(1,012)
4,00	1272,65	1294,45	(1,017)	1295,01	(1,018)	1290,99	(1,014)	1293,50	(1,016)
<b>9º ANDAR (PILAR 20)</b>									
0,10	12,90	12,90	(1,000)	12,90	(1,000)	12,90	(1,000)	12,91	(1,001)
0,30	38,70	38,71	(1,000)	38,72	(1,001)	38,70	(1,000)	38,73	(1,001)
0,50	64,49	64,53	(1,001)	64,57	(1,001)	64,57	(1,001)	64,57	(1,001)
0,70	90,29	90,37	(1,001)	90,44	(1,002)	90,44	(1,002)	90,44	(1,002)
0,90	116,09	116,21	(1,001)	116,34	(1,002)	116,38	(1,003)	116,34	(1,002)
1,00	128,99	129,14	(1,001)	129,32	(1,003)	129,29	(1,002)	129,30	(1,002)
2,00	257,98	258,59	(1,002)	259,20	(1,005)	259,17	(1,005)	259,21	(1,005)
3,00	386,96	388,37	(1,004)	389,76	(1,007)	389,65	(1,007)	389,76	(1,007)
4,00	515,95	518,50	(1,005)	521,35	(1,010)	520,82	(1,009)	520,98	(1,010)

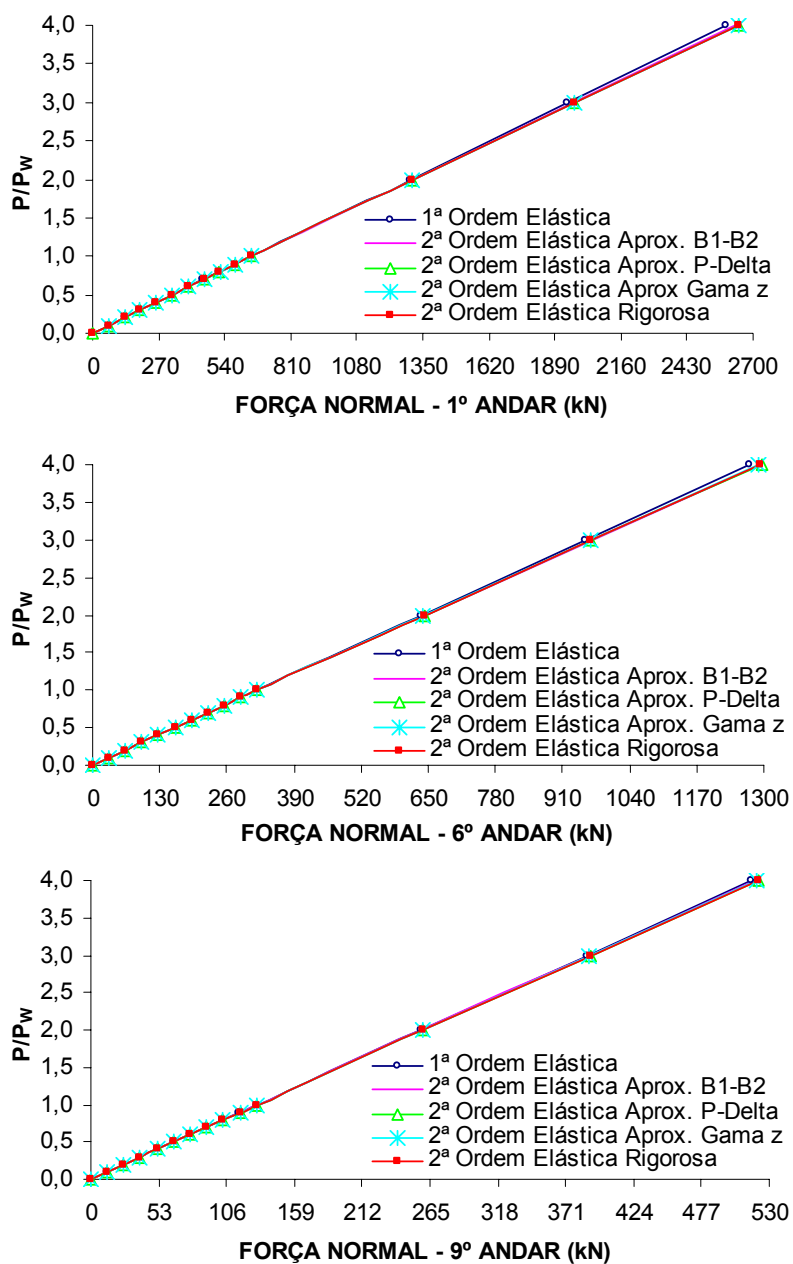


FIGURA 4.19 – Curvas parâmetro de carga x força normal máxima para os 1º, 6º e 9º andares.

Comparando-se os resultados da força normal máxima nos pilares indicados para as diversas análises elásticas, verifica-se que os acréscimos oriundos da análise elástica rigorosa em 2ª ordem em relação à análise elástica em 1ª ordem são irrelevantes. Observa-se que os resultados de todas as análises em 2ª ordem aproximadas têm boa correlação entre si e com os resultados da análise rigorosa em 2ª ordem.

Com relação ao esforço cortante, os valores obtidos através da análise elástica em 2ª ordem foram praticamente os mesmos da análise elástica em 1ª ordem em todas as análises consideradas, mostrando a irrelevância da análise em teoria de 2ª ordem para cálculo do esforço cortante nas barras de pórticos contraventados.

#### 4.3.2 Pórtico Parcialmente Contraventado de Dois Andares e Um Vão

Os exemplos apresentados anteriormente considerando os pórticos planos não-contraventados (item 4.2) e o pórtico plano contraventado (item 4.3.1) mostraram uma boa correlação entre todos os métodos aproximados de análise elástica em 2ª ordem ( $B_1$ - $B_2$ , P-Delta e  $\gamma_z$ ) em relação à análise elástica rigorosa em 2ª ordem.

Considera-se neste exemplo um pórtico de dois andares e um vão, com pé direito de 3 m, vão de 3,85 m, contraventado apenas no segundo andar (pórtico parcialmente contraventado) e submetido a forças verticais e horizontal concentradas, conforme mostra a FIG. 4.20. As bases da estrutura são engastadas e as vigas e as diagonais rotuladas nas suas extremidades. A forma deslocada do pórtico é também mostrada na Fig. 4.20 como ilustração. Utilizou-se para os pilares, vigas e diagonais os perfis laminados padrão Açominas HP 310x79, W 310x23,80 e W 200x35,9, respectivamente. O aço adotado possui tensão de escoamento  $\sigma_y=34,5 \text{ kN/cm}^2$  e módulo de elasticidade  $E=20500 \text{ kN/cm}^2$ .

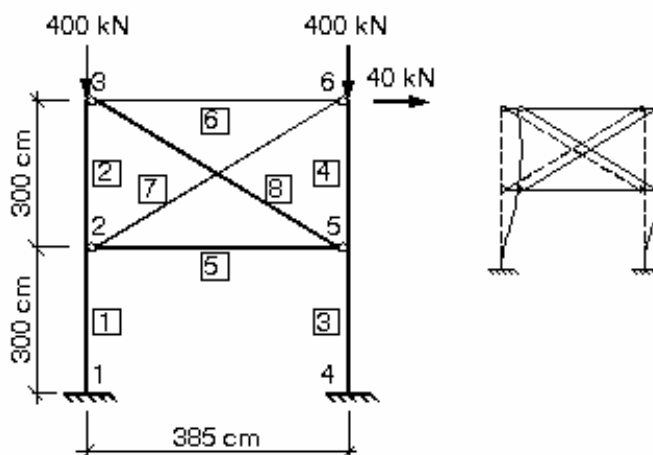


FIGURA 4.20 – Pórtico parcialmente contraventado de dois andares e um vão

Para a análise não-linear elástica em 2ª ordem, utilizou-se o programa ANSYS-6.1. Os pilares do pórtico foram representados através de elementos de barras do tipo BEAM3, e divididos em dez elementos cada um. Para as vigas e as diagonais foi utilizado apenas um elemento de treliça do tipo LINK1.

Inicialmente, a TAB. 4.15 mostra os valores dos coeficientes de majoração  $\gamma_z$  (Eq. (3.99)) e  $B_2$  (Eq. (3.82)) para as relações  $P/P_w$  indicadas. Sendo o coeficiente  $\gamma_z$  constante para toda a estrutura, ele apresenta valores inferiores aos do coeficiente  $B_2$  para o 1º andar e valores superiores para o 2º andar, sugerindo, a princípio, que a utilização do método do coeficiente  $\gamma_z$  para análise deste tipo de estrutura pode ser inadequada.

TABELA 4.15 – Coeficientes de majoração global  $\gamma_z$  e local  $B_2$

P/P <sub>w</sub>	Coeficiente Global $\gamma_z$	Coeficiente Local $B_2$	
		1º andar	2º andar
1,0	1,010	1,020	1,001
2,0	1,020	1,040	1,001
3,0	1,031	1,061	1,002
4,0	1,041	1,083	1,003
5,0	1,052	1,106	1,003
6,0	1,063	1,130	1,004
7,0	1,074	1,155	1,005
8,0	1,086	1,181	1,005
9,0	1,098	1,209	1,006
10,0	1,110	1,237	1,007
15,0	1,174	1,404	1,010
20,0	1,247	1,622	1,013

As TAB. 4.16 a 4.18 e as FIG. 4.21 a 4.23 apresentam resultados para o pórtico considerando os diversos tipos de análises, a saber: análise elástica em 1ª ordem, análises elásticas aproximadas em 2ª ordem ( $B_1$ - $B_2$ , P-Delta e  $\gamma_z$ ) e análise rigorosa elástica em 2ª ordem obtida pelo programa ANSYS 6.1 (2002).

Analisando-se a TAB. 4.16 e o gráfico da FIG. 4.21, que relacionam o parâmetro de carga  $P/P_w$  x deslocamento horizontal no topo do pórtico, pode-se observar que os resultados obtidos utilizando-se o método aproximado  $B_1$ - $B_2$  foram próximos daqueles obtidos pela análise rigorosa em 2ª ordem para todo o incremento de carga  $P/P_w$ , mostrando a validade do método também para os pórticos parcialmente contraventados.



O método aproximado P-Delta apresentou bons resultados com relação à análise elástica rigorosa até um incremento de carga  $P/P_w=7,0$ , a partir do qual se distancia da análise rigorosa com valores menores para o deslocamento horizontal. Já o método do Coeficiente  $\gamma_z$  não apresentou bons resultados desde o início do carregamento.

TABELA 4.16 - Deslocamento horizontal no topo do pórtico

DESLOCAMENTO HORIZONTAL NO TOPO - NÓ 6 (cm)									
P/P <sub>w</sub>	1ª Ordem Elástica	2ª Ordem Elástica							
		Aproximada						Rigorosa	
		B <sub>1</sub> -B <sub>2</sub>		P-Delta		$\gamma_z$			
(A)	(B)	(C)	(C/B)	(D)	(D/B)	(E)	(E/B)	(F)	(F/B)
1,0	0,297	0,303	(1,019)	0,302	(1,015)	0,300	(1,010)	0,303	(1,017)
2,0	0,595	0,618	(1,039)	0,613	(1,030)	0,606	(1,019)	0,622	(1,046)
3,0	0,892	0,945	(1,059)	0,933	(1,046)	0,919	(1,030)	0,941	(1,055)
4,0	1,190	1,285	(1,080)	1,264	(1,063)	1,237	(1,040)	1,286	(1,081)
5,0	1,487	1,640	(1,103)	1,605	(1,079)	1,562	(1,050)	1,630	(1,096)
6,0	1,784	2,009	(1,126)	1,960	(1,098)	1,893	(1,061)	2,003	(1,122)
7,0	2,082	2,394	(1,150)	2,315	(1,112)	2,231	(1,072)	2,375	(1,141)
8,0	2,379	2,797	(1,176)	2,649	(1,113)	2,577	(1,083)	2,781	(1,169)
9,0	2,677	3,217	(1,202)	2,982	(1,114)	2,931	(1,095)	3,187	(1,191)
10,0	2,974	3,657	(1,230)	3,451	(1,160)	3,291	(1,107)	3,620	(1,217)
15,0	4,461	6,205	(1,391)	5,691	(1,276)	5,213	(1,169)	6,134	(1,375)
20,0	5,948	9,531	(1,602)	7,930	(1,333)	7,371	(1,239)	9,456	(1,590)

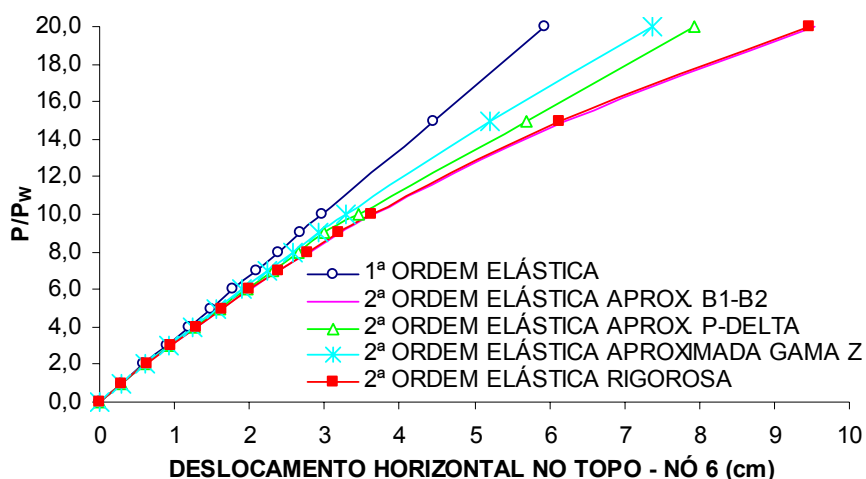


FIGURA 4.21 - Curvas parâmetro de carga x deslocamento horizontal no topo

Os valores dos momentos fletores para os pilares 1 e 2 do pórtico da FIG. 4.20 para as diversas análises elásticas e para os incrementos de carga indicados, são mostrados na TAB. 4.17 e apresentados em forma de gráficos na FIG. 4.22.

Considerando-se o pilar 1 do 1º andar, nota-se que a análise aproximada utilizando-se o método B<sub>1</sub>-B<sub>2</sub> apresentou bons resultados quando comparados com a análise rigorosa, o mesmo podendo-se concluir em relação ao método P-Delta. Já o método do coeficiente  $\gamma_z$  apresentou resultados bem menores quando comparados com a análise rigorosa, ficando portanto, contra a segurança.

Para o pilar 2 do 2º andar, a análise pelo método B<sub>1</sub>-B<sub>2</sub> é consistente com a análise rigorosa até uma relação de carga P/P<sub>w</sub>=5,0; após este incremento apresenta resultados inferiores aos da análise rigorosa. É importante salientar que neste caso a carga de colapso da estrutura ocorre para uma relação P/P<sub>w</sub>≅3,8, calculada através das equações de interação NBR 8800 (1986). Os resultados dos métodos P-Delta e  $\gamma_z$  são conservadores desde o início do carregamento.

TABELA 4.17 - Momento fletor para os 1º e 2º andares

MOMENTO FLETOR (kNcm)									
P/P <sub>w</sub>	1ª Ordem Elástica	2ª Ordem Elástica							
		Aproximada						Rigorosa	
		B <sub>1</sub> -B <sub>2</sub>		P-Delta		$\gamma_z$			
(A)	(B)	(C)	(C/B)	(D)	(D/B)	(E)	(E/B)	(F)	(F/B)
<b>1º ANDAR (BARRA 1)</b>									
1,0	3745	3823	(1,021)	3810	(1,017)	3783	(1,010)	3807	(1,017)
2,0	7489	7810	(1,043)	7751	(1,035)	7644	(1,021)	7818	(1,044)
3,0	11234	11970	(1,066)	11834	(1,053)	11595	(1,032)	11829	(1,053)
4,0	14978	16314	(1,089)	16063	(1,072)	15615	(1,043)	16141	(1,078)
5,0	18723	20854	(1,114)	20448	(1,092)	19732	(1,054)	20452	(1,092)
6,0	22467	25602	(1,140)	25060	(1,115)	23935	(1,065)	25107	(1,117)
7,0	26212	30573	(1,166)	29673	(1,132)	28223	(1,077)	29762	(1,135)
8,0	29956	35782	(1,194)	34452	(1,150)	32628	(1,089)	34812	(1,162)
9,0	33701	41245	(1,224)	39231	(1,164)	37126	(1,102)	39862	(1,183)
10,0	37446	46980	(1,255)	44523	(1,189)	41717	(1,114)	45247	(1,208)
<b>2º ANDAR (BARRA 2)</b>									
1,0	2120	2121	(1,001)	2157	(1,018)	2142	(1,010)	2120	(1,000)
2,0	4239	4245	(1,001)	4391	(1,036)	4327	(1,021)	4239	(1,000)
3,0	6359	6372	(1,002)	6706	(1,055)	6563	(1,032)	6359	(1,000)
4,0	8478	8502	(1,003)	9107	(1,074)	8839	(1,043)	8478	(1,000)
5,0	10598	10635	(1,003)	11597	(1,094)	11170	(1,054)	10669	(1,007)
6,0	12717	12771	(1,004)	14224	(1,119)	13549	(1,065)	13173	(1,036)
7,0	14837	14909	(1,005)	16852	(1,136)	15977	(1,077)	15677	(1,057)
8,0	16956	17051	(1,006)	19280	(1,137)	18471	(1,089)	18442	(1,088)
9,0	19076	19196	(1,006)	21708	(1,138)	21017	(1,102)	21206	(1,112)
10,0	21196	21344	(1,007)	24670	(1,164)	23617	(1,114)	24192	(1,141)

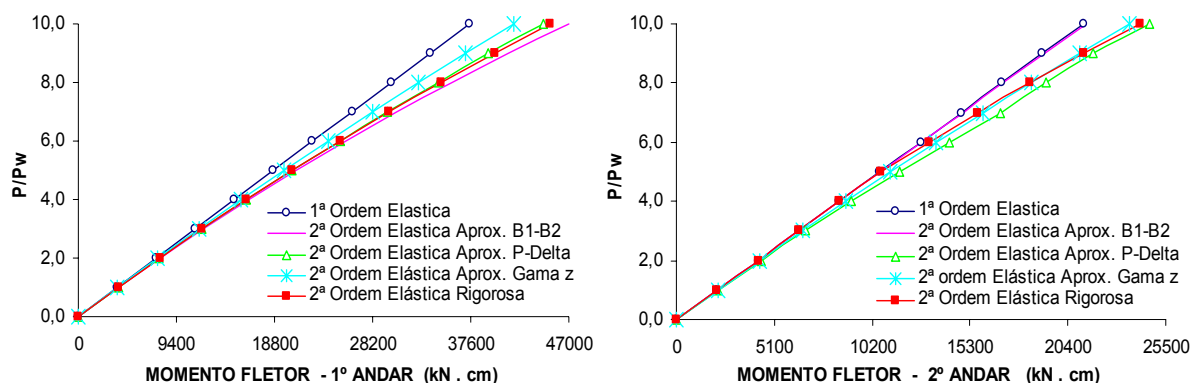


FIGURA 4.22 – Curvas parâmetro de carga x momento fletor

Os valores das forças normais para os pilares 1 e 2 do pórtico da FIG. 4.20 são mostrados na TAB. 4.18 e apresentados em forma de gráficos na FIG. 4.23.

TABELA 4.18 – Força normal para os 1º e 2º andares

FORÇA NORMAL (kN)									
P/P <sub>w</sub>	1ª Ordem Elástica (B)	2ª Ordem Elástica							
		Aproximada						Rigorosa (F) (F/B)	
		B <sub>1</sub> -B <sub>2</sub> (C) (C/B)		P-Delta (D) (D/B)		γ <sub>z</sub> (E) (E/B)			
(A)	(B)	(C)	(C/B)	(D)	(D/B)	(E)	(E/B)	(F)	(F/B)
<b>1º ANDAR (BARRA 1)</b>									
1,0	357,65	356,81	(0,998)	357,36	(0,999)	357,224	(0,999)	357,38	(0,999)
2,0	715,29	711,86	(0,995)	714,14	(0,998)	713,601	(0,998)	713,89	(0,998)
3,0	1072,94	1065,07	(0,993)	1070,31	(0,998)	1069	(0,996)	1070,4	(0,998)
4,0	1430,59	1416,30	(0,990)	1425,84	(0,997)	1423,64	(0,995)	1425,7	(0,997)
5,0	1788,24	1765,44	(0,987)	1780,71	(0,996)	1777,225	(0,994)	1781	(0,996)
6,0	2145,88	2112,34	(0,984)	2136,21	(0,995)	2129,875	(0,993)	2134,85	(0,995)
7,0	2503,53	2456,87	(0,981)	2491,70	(0,995)	2481,59	(0,991)	2488,7	(0,994)
8,0	2861,18	2798,85	(0,978)	2847,53	(0,995)	2832,04	(0,990)	2841	(0,993)
9,0	3218,82	3138,11	(0,975)	3203,36	(0,995)	3181,47	(0,988)	3193,3	(0,992)
10,0	3576,47	3474,46	(0,971)	3552,32	(0,993)	3529,885	(0,987)	3544,3	(0,991)
<b>2º ANDAR (BARRA 2)</b>									
1,0	358,75	358,73	(1,000)	358,66	(1,000)	358,57	(1,000)	358,62	(1,000)
2,0	717,49	717,44	(1,000)	717,13	(0,999)	716,77	(0,999)	716,86	(0,999)
3,0	1076,24	1076,13	(1,000)	1075,41	(0,999)	1074,56	(0,998)	1075,10	(0,999)
4,0	1434,98	1434,79	(1,000)	1433,50	(0,999)	1432,03	(0,998)	1432,75	(0,998)
5,0	1793,73	1793,43	(1,000)	1791,38	(0,999)	1789,05	(0,997)	1790,40	(0,998)
6,0	2152,48	2152,05	(1,000)	2149,76	(0,999)	2145,66	(0,997)	2147,45	(0,998)
7,0	2511,22	2510,64	(1,000)	2508,14	(0,999)	2501,89	(0,996)	2504,50	(0,997)
8,0	2869,97	2869,21	(1,000)	2866,42	(0,999)	2857,57	(0,996)	2860,75	(0,997)
9,0	3228,71	3227,75	(1,000)	3224,69	(0,999)	3212,82	(0,995)	3217,00	(0,996)
10,0	3587,46	3586,27	(1,000)	3581,17	(0,998)	3567,63	(0,994)	3572,70	(0,996)

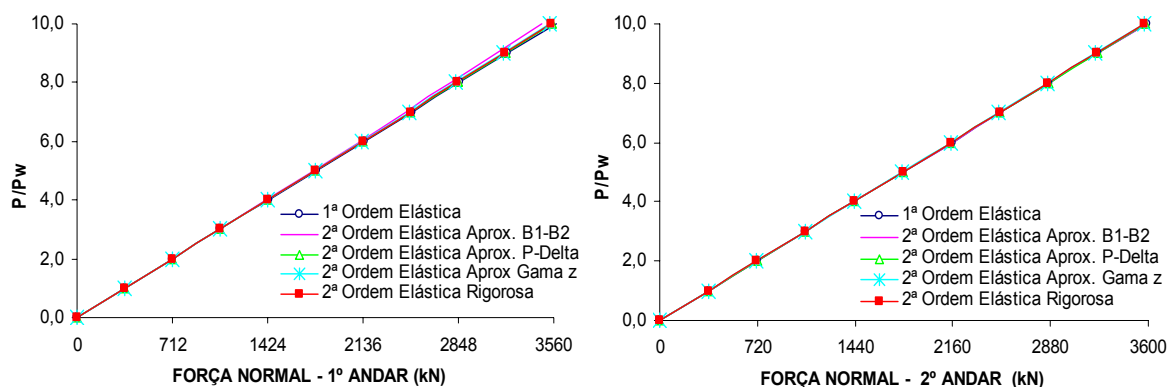


FIGURA 4.23 – Curvas parâmetro de carga x força normal

Observando-se os valores indicados e as curvas mostradas conclui-se que os resultados de todas as análises em 2ª ordem, tanto as aproximadas quanto a rigorosa, são praticamente os mesmos da análise em 1ª ordem, indicando que as forças normais obtidas em 1ª ordem não se alteram quando calculadas em 2ª ordem. O fato dos resultados para todas as análises em 2ª ordem terem sido menores do que aqueles obtidos da análise em 1ª ordem, porém muito próximos, pode ser explicado, devido ao efeito  $P-\Delta$  oriundo da análise em 2ª ordem, provocando tração nestes pilares.

Com relação à força cortante, devido à sua irrelevância em comparação com os efeitos das forças normais e momentos fletores atuantes, pode-se desprezar o seu cálculo em 2ª ordem.

#### 4.4 Análise Estrutural Proposta no Texto Base de Revisão da NBR-8800

O texto base de revisão da NBR 8800 (2003), Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios permite que o cálculo das estruturas de aço possa ser feito por meio da análise elástica de 2ª ordem rigorosa, em princípio, quando os efeitos de 2ª ordem não ultrapassarem em 40% os efeitos da análise de 1ª ordem. Se esses efeitos superarem este limite, deve-se então aumentar a rigidez da estrutura para que os deslocamentos horizontais diminuam ou realizar uma análise elastoplástica em 2ª ordem, a menos que seja demonstrado que as tensões atuantes nas estruturas, incluindo as tensões residuais, não excedam a tensão de escoamento do aço em nenhuma seção transversal.

Entretanto, a análise elástica rigorosa em 2ª ordem pode ser substituída por uma análise estimada, dependendo da sensibilidade da estrutura a deslocamentos horizontais. Define-se que uma estrutura é considerada pouco sensível a deslocamentos horizontais se em todos os seus andares o coeficiente  $B_2$  não superar o valor de 1,1. Se  $B_2$  for maior que esse valor em pelo menos um de seus andares, a estrutura será considerada muito sensível a deslocamentos horizontais.

Quando as estruturas são classificadas como pouco sensíveis a deslocamentos horizontais, os efeitos globais de 2ª ordem (P- $\Delta$ ) podem ser desprezados e os efeitos locais (P- $\delta$ ) são calculados de forma simplificada. Então o momento fletor solicitante de cálculo  $M_{Sd}$  é dado por:

$$M_{Sd} = B_0 M_{Sd,1} \quad (4.1)$$

onde  $B_0$  é igual a  $B_1$  dado pela Eq. (3.71), quando a força normal solicitante de cálculo da barra  $N_{Sd}$  for de compressão. Quando  $N_{Sd}$  for de tração  $B_0$  é igual a 1.  $M_{Sd,1}$  é o momento fletor solicitante de cálculo da barra, obtido por análise estrutural elástica em 1ª ordem. Os demais esforços solicitantes a serem usados na verificação dos estados limites últimos podem ser aqueles obtidos diretamente por análise elástica em 1ª ordem.

Nas estruturas muito sensíveis a deslocamentos horizontais com o maior coeficiente  $B_2$  não superior a 1,3, considera-se uma solução simplificada para avaliação dos efeitos globais de 2ª ordem, que consiste em multiplicar as ações que provocam os deslocamentos horizontais, da combinação de ações consideradas, por 0,95 vezes o maior  $B_2$ , e determinar os esforços solicitantes com base na análise elástica de 1ª ordem. Então o momento fletor solicitante de cálculo é dado por:

$$M_{Sd} = B_0 M_{Sd,2} \quad (4.2)$$

onde  $B_0$  é calculado conforme definido anteriormente e  $M_{Sd,2}$  é o momento fletor solicitante de cálculo da barra, obtido desta análise citada. Os valores obtidos desta análise para as forças normais e cortantes devem ser usados na verificação dos estados limites últimos.

Nas estruturas muito sensíveis a deslocamentos horizontais com o maior coeficiente  $B_2$  superior a 1,3 e inferior a 1,4, a única opção permitida, em lugar da análise elástica rigorosa, é o uso da análise aproximada por meio dos métodos  $B_1$ - $B_2$  ou P-Delta.

A seguir são apresentados dois exemplos de pórtico não-contraventado com os objetivos de mostrar um estudo comparativo entre os diversos tipos de análise já citados, exceto o método do coeficiente  $\gamma_z$  e verificar a aplicabilidade da análise estrutural proposta no texto base de revisão da NBR 8800 (2003). Nestes exemplos, a análise elástica em 1ª ordem e as análises em 2ª ordem rigorosas, tanto a elástica quanto a elastoplástica, foram realizadas por meio do programa PPLANLEP desenvolvido por LAVALL (1996).

#### 4.4.1 Pórtico Não-Contraventado de Onze Andares e Um Vão

A FIG. 4.24-a mostra um pórtico de onze andares e um vão de um edifício alto, onde também se indicam os comprimentos dos vãos das vigas e as alturas dos andares.

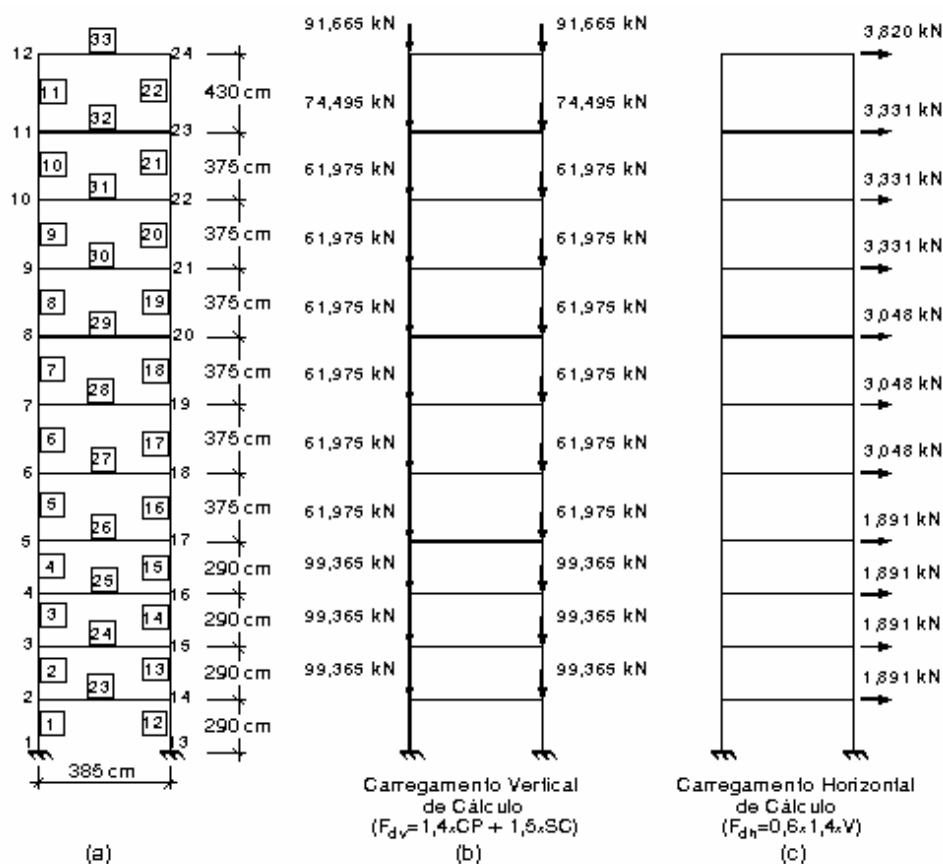


FIGURA 4.24 - Pórtico de onze andares e um vão

As FIG. 4.24-b e 4.24-c mostram, respectivamente, o carregamento vertical de cálculo concentrado nos pilares e o carregamento horizontal de cálculo concentrado devido à ação do vento, que somados representam o carregamento de referência  $P_w$ .

Os pilares e as vigas são constituídos por perfis de aço laminados com tensão de escoamento  $\sigma_y=34,5 \text{ kN/cm}^2$  e módulo de elasticidade  $E=20500\text{kN/cm}^2$ , conforme a TAB. 4.19.

TABELA 4.19 - Perfis para pilares e vigas

BARRAS	PERFIL
1 a 4 e 12 a 15	W 310 x 107
5 a 7 e 16 a 18	HP 310 x 93
8 a 11 e 19 a 22	HP 310 x 79
23 a 32	W 310 x 21
33	W 310 x 23,8

Para implementação dos dados do programa, as seções dos perfis foram divididas em 20 fatias, sendo uma fatia para cada mesa e 18 para a alma. As barras correspondentes aos pilares foram divididas em 3 elementos e as barras correspondentes às vigas foram divididas em 4 elementos. As forças verticais e horizontais foram aplicadas de forma incremental.

A TAB. 4.20 apresenta os valores dos coeficientes  $B_2$ , calculados conforme a Eq. (3.82), para todos os andares do pórtico e para os incrementos de carga  $P/P_w$  indicados. Observa-se que os valores de  $B_2$  variam para cada andar, constituindo-se num coeficiente local de cada barra. Os menores valores encontrados para o 1º andar se devem ao efeito do engastamento na base do pórtico que aumenta a sua rigidez, diminuindo os deslocamentos relativos ( $\Delta_{0h}$ ). Do 2º ao 7º andares encontram-se os maiores valores de  $B_2$ , uma vez que esta é a região de maiores deslocamentos relativos entre andares, devido à forma do deslocamento de pórticos não-contraventados. A partir do 8º andar os valores de  $B_2$  começam a decrescer, devido às cargas verticais atuantes ( $\Sigma N_{sd}$ ) serem relativamente menores quando comparadas às cargas dos outros andares.

TABELA 4.20 –Coeficiente Local  $B_2$ 

$P/P_w$	Coeficiente Local $B_2$										
	1º andar	2º andar	3º andar	4º andar	5º andar	6º andar	7º andar	8º andar	9º andar	10º andar	11º andar
0,10	1,006	1,015	1,016	1,016	1,016	1,016	1,014	1,012	1,010	1,009	1,007
0,20	1,013	1,030	1,032	1,032	1,033	1,032	1,029	1,025	1,021	1,017	1,013
0,30	1,019	1,045	1,050	1,048	1,050	1,049	1,044	1,038	1,032	1,026	1,020
0,40	1,026	1,061	1,067	1,065	1,068	1,066	1,059	1,052	1,043	1,035	1,027
0,50	1,032	1,078	1,085	1,083	1,087	1,084	1,075	1,065	1,054	1,045	1,034
0,60	1,039	1,095	1,104	1,101	1,106	1,102	1,092	1,079	1,066	1,054	1,041
0,70	1,046	1,112	1,124	1,120	1,126	1,121	1,109	1,094	1,078	1,064	1,048
0,80	1,053	1,130	1,144	1,140	1,146	1,141	1,126	1,109	1,090	1,073	1,055
0,90	1,060	1,149	1,165	1,160	1,168	1,161	1,144	1,124	1,103	1,083	1,062
1,00	1,067	1,168	1,187	1,181	1,190	1,182	1,163	1,140	1,115	1,094	1,070
1,50	1,104	1,276	1,309	1,299	1,315	1,301	1,265	1,225	1,183	1,147	1,108
1,85	1,131	1,363	1,410	1,396	1,419	1,399	1,349	1,294	1,236	1,188	1,137
1,86	1,132	1,366	1,413	1,399	1,422	1,402	1,352	1,296	1,238	1,189	1,138
2,00	1,143	1,405	1,459	1,443	1,469	1,446	1,388	1,325	1,261	1,206	1,150
3,00	1,232	1,761	1,893	1,853	1,919	1,862	1,723	1,582	1,449	1,345	1,242

A FIG. 4.25 apresenta as curvas parâmetro de carga x deslocamento horizontal no topo do pórtico (nó 24) para os diversos tipos de análises, mostrando as diferenças esperadas entre os comportamentos advindos das análises elástica em 1ª ordem, elástica em 2ª ordem e elastoplástica em 2ª ordem. Observa-se também a excelente correlação entre os resultados obtidos das análises elásticas em 2ª ordem, aproximadas e rigorosa, em toda a variação de  $P/P_w$ .

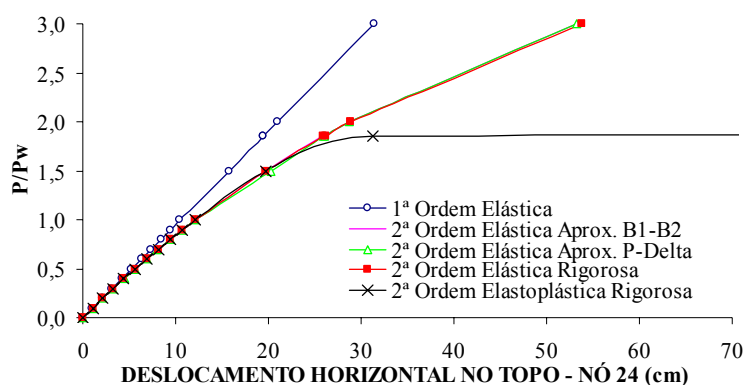


FIGURA 4.25 - Curvas parâmetro de carga x deslocamento horizontal no topo

Das análises rigorosas em 2ª ordem, elástica e elastoplástica, obteve-se a relação crítica na fase elástica  $P_{cr}/P_w = 6,70$  e a relação última na fase inelástica  $P_{ult}/P_w = 1,86$ , indicando que a carga crítica elástica não tem sentido prático no dimensionamento do pórtico, uma vez que, para valores bem inferiores, a estrutura já entrou em colapso elastoplástico.



A FIG. 4.26 mostra os valores do momento fletor para os pilares 12, 16 e 22 dos 1º, 5º e 11º andares, respectivamente, considerando-se a relação de carga  $P/P_w$  indicada, para os diversos tipos de análise. Considerando-se o pilar 16 do 5º andar (nó 18) e apenas as análises elásticas em 2ª ordem, observa-se a excelente correlação entre os resultados das análises aproximadas ( $B_1-B_2$  e P-Delta) e da análise rigorosa em toda variação de  $P/P_w$ . Para os pilares do 1º e 11º andares a correlação entre os resultados obtidos do método  $B_1-B_2$  e da análise rigorosa é muito boa até a relação  $P/P_w=1,00$ . Considerando-se que, pela análise elastoplástica o pórtico resiste a uma relação máxima de carga  $P/P_w=1,86$ , pode-se admitir que os métodos aproximados apresentam bons resultados para o cálculo e dimensionamento das estruturas na prática.

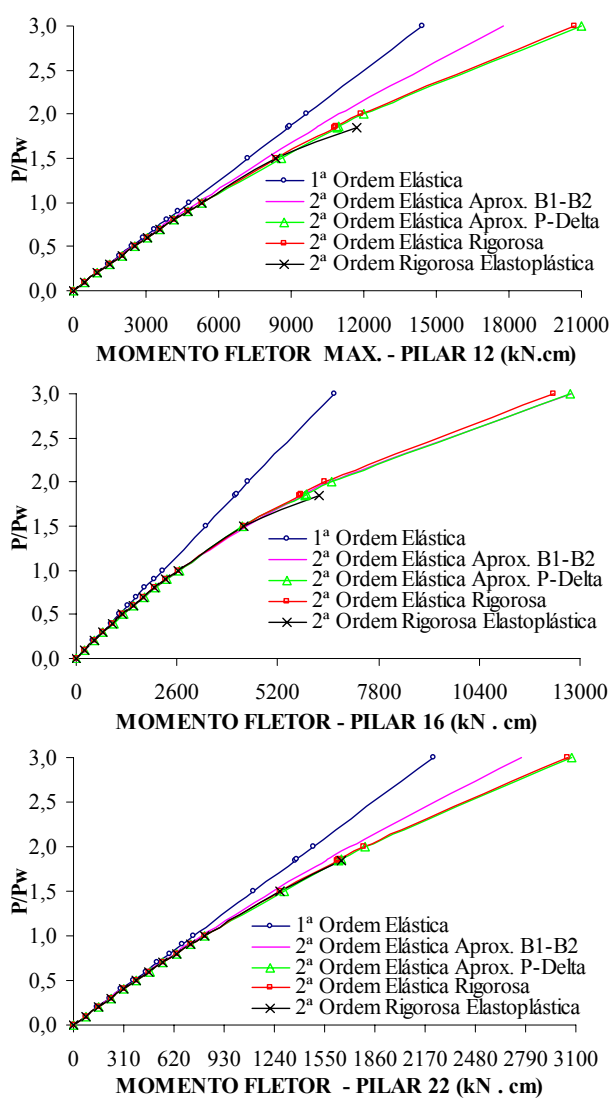


FIGURA 4.26 – Curvas parâmetro de carga x momento fletor para os pilares dos 1º, 5º e 11º andares

O mesmo pórtico será utilizado agora para verificar a aplicabilidade da análise estrutural proposta no texto base de revisão da NBR 8800 (2003).

Considerando-se a TAB. 4.20, observa-se que o 5º andar do pórtico apresenta os maiores valores do coeficiente  $B_2$ , podendo-se construir a TAB. 4.21 a seguir, onde se mostram os tipos de análises que podem ser utilizadas para cada incremento de carga, em função dos limites impostos ao coeficiente  $B_2$ .

TABELA 4.21 – Tipos de análises para cada incremento de carga em função do coeficiente  $B_2$

Classificação da Estrutura	Coeficiente $B_2$	P/P <sub>w</sub>	Tipo de Análise
Pouco sensível a deslocamentos horizontais	$B_2 \leq 1,10$	0,10	Elástica Estimada (Eq.(4.1)) ou Elástica aproximada $B_1$ - $B_2$ ou Elástica aproximada P-Delta ou Elástica Rigorosa
		0,20	
		0,30	
		0,40	
		0,50	
Muito sensível a deslocamentos horizontais	$1,10 < B_2 \leq 1,30$	0,60	Elástica Estimada (Eq.(4.2)) ou Elástica aproximada $B_1$ - $B_2$ ou Elástica aproximada P-Delta ou Elástica Rigorosa
		0,70	
		0,80	
		0,90	
		1,00	
	$1,30 < B_2 \leq 1,40$	1,50	Elástica aproximada $B_1$ - $B_2$ ou Elástica aproximada P-Delta ou Elástica Rigorosa
	$B_2 > 1,40$	1,85	Elastoplástica Rigorosa
		1,86	

A TAB. 4.22 mostra os valores do momento fletor para os pilares 12, 16 e 22 dos 1º, 5º e 11º andares, respectivamente, considerando-se a análise estrutural estimada proposta no texto base de revisão da NBR 8800 (2003) e os valores das análises elástica em 1ª ordem, elásticas aproximadas  $B_1$ - $B_2$  e P-Delta e análises rigorosas elástica e elastoplástica em 2ª ordem, para a relação de carga P/P<sub>w</sub> indicada.

TABELA 4.22 - Momento fletor utilizando as propostas da NBR 8800 (2003)

MOMENTO FLETOR (kN cm)											
P/P <sub>w</sub>	1ª Ordem Elástica (A) (B)	2ª Ordem									
		Elástica Estimada NBR 8800 (2003)		Elástica Aproximada				Rigorosa			
		(C)	(C/B)	B <sub>1</sub> -B <sub>2</sub>		P-Delta		Elástica		Elastoplástica	
				(D)	(D/B)	(E)	(E/B)	(F)	(F/B)	(G)	(G/B)
<b>1º ANDAR (PILAR 12)</b>											
0,10	480	480	(1,000)	483	(1,006)	485	(1,009)	485	(1,009)	485	(1,009)
0,20	961	961	(1,000)	973	(1,013)	983	(1,023)	978	(1,018)	978	(1,018)
0,30	1441	1441	(1,000)	1469	(1,019)	1481	(1,028)	1481	(1,027)	1481	(1,027)
0,40	1922	1922	(1,000)	1971	(1,026)	2000	(1,041)	1993	(1,037)	1993	(1,037)
0,50	2402	2402	(1,000)	2480	(1,032)	2519	(1,049)	2515	(1,047)	2515	(1,047)
0,60	2882	3024	(1,049)	2995	(1,039)	3058	(1,061)	3047	(1,057)	3047	(1,057)
0,70	3363	3621	(1,077)	3518	(1,046)	3598	(1,070)	3590	(1,068)	3590	(1,068)
0,80	3843	4181	(1,088)	4047	(1,053)	4163	(1,083)	4145	(1,078)	4145	(1,078)
0,90	4324	4793	(1,109)	4583	(1,060)	4728	(1,094)	4711	(1,090)	4711	(1,090)
1,00	4804	5426	(1,130)	5126	(1,067)	5310	(1,105)	5290	(1,101)	5290	(1,101)
1,50	7206	-		7956	(1,104)	8589	(1,192)	8389	(1,164)	8389	(1,164)
1,85	8887	-		-		-		-		11712	(1,318)
1,86	8936	-		-		-		-		-	
<b>5º ANDAR (PILAR 16)</b>											
0,10	222	222	(1,000)	226	(1,016)	226	(1,016)	225	(1,014)	225	(1,014)
0,20	444	444	(1,000)	459	(1,033)	464	(1,043)	458	(1,031)	458	(1,031)
0,30	667	667	(1,000)	700	(1,050)	702	(1,053)	698	(1,047)	698	(1,047)
0,40	889	889	(1,000)	949	(1,068)	957	(1,077)	946	(1,065)	946	(1,065)
0,50	1111	1111	(1,000)	1207	(1,087)	1213	(1,092)	1203	(1,083)	1203	(1,083)
0,60	1333	1411	(1,058)	1474	(1,106)	1487	(1,115)	1469	(1,102)	1469	(1,102)
0,70	1555	1677	(1,078)	1751	(1,126)	1761	(1,132)	1743	(1,121)	1743	(1,121)
0,80	1777	1984	(1,116)	2038	(1,146)	2058	(1,158)	2028	(1,141)	2028	(1,141)
0,90	2000	2244	(1,122)	2335	(1,168)	2355	(1,178)	2323	(1,161)	2323	(1,161)
1,00	2222	2544	(1,145)	2644	(1,190)	2668	(1,201)	2628	(1,183)	2628	(1,183)
1,50	3333	-		4382	(1,315)	4288	(1,287)	4339	(1,302)	4339	(1,302)
1,85	4110	-		-		-		-		6251	(1,521)
1,86	4133	-		-		-		-		-	
<b>11º ANDAR (PILAR 22)</b>											
0,10	74	74	(1,000)	75	(1,007)	75	(1,008)	75	(1,008)	75	(1,008)
0,20	148	148	(1,000)	150	(1,013)	152	(1,021)	151	(1,016)	151	(1,016)
0,30	223	223	(1,000)	227	(1,020)	228	(1,026)	229	(1,027)	229	(1,027)
0,40	297	297	(1,000)	305	(1,027)	308	(1,037)	307	(1,033)	307	(1,033)
0,50	371	371	(1,000)	383	(1,034)	387	(1,044)	387	(1,042)	387	(1,042)
0,60	445	469	(1,054)	463	(1,041)	470	(1,055)	468	(1,051)	468	(1,051)
0,70	519	556	(1,071)	544	(1,048)	552	(1,063)	551	(1,061)	551	(1,061)
0,80	594	647	(1,090)	626	(1,055)	638	(1,074)	635	(1,070)	635	(1,070)
0,90	668	742	(1,111)	709	(1,062)	723	(1,083)	721	(1,080)	721	(1,080)
1,00	742	840	(1,133)	793	(1,070)	811	(1,094)	808	(1,090)	808	(1,090)
1,50	1113	-		1233	(1,108)	1299	(1,167)	1273	(1,144)	1273	(1,144)
1,85	1372	-		-		-		-		1654	(1,205)
1,86	1380	-		-		-		-		-	

Analisando-se a TAB. 4.22, observa-se que para a relação de carga  $P/P_w \leq 0,50$  a estrutura é pouco sensível a deslocamentos horizontais, uma vez que o maior valor de  $B_2$  não supera 1,10. Dessa forma, a análise estimada realizada utilizando-se a Eq. (4.1), onde  $B_0$  é calculado e adotado igual a 1, apresenta resultados inferiores à análise elástica rigorosa em até 8,3% como ocorre no 5º andar. Nos 1º e 11º andares essas diferenças não ultrapassam 4,7% e 4,2%, respectivamente. As análises aproximadas  $B_1$ - $B_2$  e P-Delta apresentam uma melhor correlação com a análise rigorosa em todos os andares, em relação à análise estimada.

Para a relação de carga  $0,60 \leq P/P_w \leq 1,00$  a estrutura é considerada muito sensível a deslocamentos horizontais, uma vez que  $1,1 < B_2 \leq 1,3$  no 5º andar. A análise estimada fornece valores muito conservadores para os 1º e 11º andares (em torno de 4,3%), mas apresenta resultados não conservadores para o 5º andar com diferenças de até 4,4%. Novamente os métodos  $B_1$ - $B_2$  e P-Delta apresentam uma melhor correlação com a análise rigorosa em todos os andares em relação à análise estimada.

Para a relação de carga  $P/P_w = 1,50$  a estrutura é considerada muito sensível a deslocamentos horizontais e  $1,3 < B_2 \leq 1,4$ . Neste caso a análise estimada não pode ser aplicada, podendo ser utilizada as análises aproximadas  $B_1$ - $B_2$  ou P-Delta que apresentam bons resultados quando comparada com a análise elástica rigorosa.

Para  $P/P_w \geq 1,85$  só se aplica a análise elastoplástica rigorosa em 2ª ordem, uma vez que  $B_2 > 1,40$ , sendo que para a relação de carga  $P/P_w \geq 1,86$  a estrutura entrou em colapso elastoplástico.

#### 4.4.2 Pórtico Não-Contraventado de Quinze Andares e Um Vão

A FIG. 4.27 mostra um pórtico de 15 andares de um edifício alto. Os pilares e as vigas são constituídos pelos perfis soldados CS 400x186 e VS 600x140, respectivamente. Cada andar possui pé-direito de 3 metros e um vão de 6 metros. Este pórtico está sujeito a um carregamento vertical  $P$  e a um carregamento horizontal proporcional  $\alpha P$  em todos os andares, estritamente crescente, onde  $\alpha = 0,10$  e  $P$  uma carga de referência de

1000 kN. O aço adotado apresenta tensão de escoamento de  $\sigma_y=35 \text{ kN/cm}^2$  e módulo de elasticidade  $E=20500 \text{ kN/cm}^2$ .

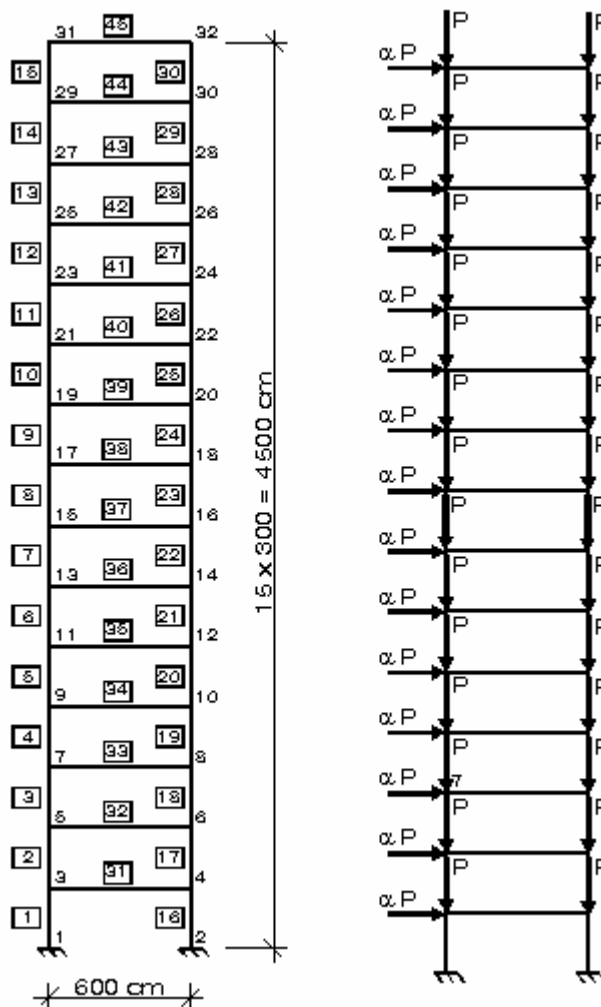


FIGURA 4.27 – Pórtico de quinze andares e um vão

Para implementação dos dados do programa, as seções dos perfis foram divididas em 20 fatias, sendo uma fatia para cada mesa e 18 para a alma. As barras correspondentes aos pilares foram divididas em 3 elementos e as barras correspondentes às vigas foram divididas em 4 elementos. As forças verticais e horizontais foram aplicadas de forma incremental.

A TAB. 4.23 apresenta os valores do coeficiente  $B_2$  para todos os andares do pórtico para os diversos incrementos de carga. Observa-se que o 4º andar apresentou os maiores valores de  $B_2$ .

TABELA 4.23 - Valores do coeficiente  $B_2$  para todos os andares do pórtico

P/P <sub>w</sub>	B <sub>2</sub>														
	1º andar	2º andar	3º andar	4º andar	5º andar	6º andar	7º andar	8º andar	9º andar	10º andar	11º andar	12º andar	13º andar	14º andar	15º andar
0,10	1,017	1,026	1,028	1,028	1,028	1,027	1,026	1,025	1,024	1,023	1,021	1,020	1,018	1,016	1,015
0,20	1,034	1,054	1,057	1,058	1,057	1,056	1,054	1,052	1,049	1,047	1,043	1,040	1,037	1,033	1,030
0,30	1,051	1,084	1,089	1,089	1,088	1,086	1,083	1,080	1,076	1,071	1,067	1,062	1,056	1,051	1,046
0,37	1,064	1,105	1,112	1,112	1,111	1,108	1,104	1,100	1,095	1,090	1,084	1,077	1,070	1,064	1,057
0,40	1,070	1,115	1,122	1,122	1,121	1,118	1,114	1,109	1,104	1,098	1,091	1,084	1,077	1,069	1,062
0,50	1,088	1,147	1,157	1,157	1,155	1,152	1,147	1,140	1,133	1,125	1,116	1,107	1,098	1,088	1,079
0,60	1,108	1,182	1,194	1,195	1,192	1,188	1,181	1,173	1,164	1,154	1,143	1,132	1,119	1,107	1,096
0,70	1,128	1,219	1,234	1,235	1,232	1,226	1,218	1,208	1,197	1,184	1,171	1,157	1,142	1,128	1,114
0,80	1,149	1,259	1,277	1,278	1,274	1,267	1,257	1,245	1,231	1,216	1,200	1,184	1,166	1,148	1,132
0,90	1,171	1,301	1,323	1,324	1,319	1,311	1,299	1,285	1,268	1,250	1,231	1,211	1,190	1,170	1,151
1,00	1,194	1,346	1,372	1,374	1,368	1,357	1,343	1,326	1,307	1,286	1,263	1,241	1,216	1,193	1,171

A FIG. 4.28 apresenta o comportamento da estrutura quanto aos deslocamentos laterais ao longo de toda a sua altura, para as análises elásticas em 1ª ordem e em 2ª ordem, aproximadas e rigorosa, quando a estrutura atinge a carga última, ou seja,  $P/P_w=0,37$  (obtida da análise em 2ª ordem elastoplástica). Observa-se que as curvas apresentam um comportamento, como já era esperado, de pórticos não-contraventados.

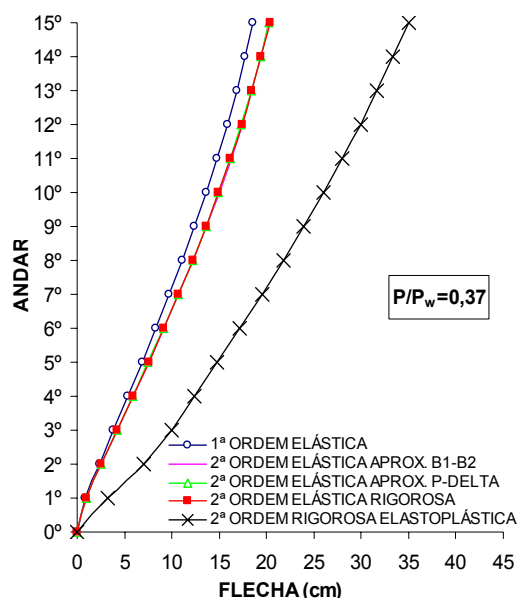


FIGURA 4.28 – Gráfico de deslocamento lateral para todos os andares do pórtico

Analisando-se as curvas do gráfico da FIG. 4.28, verifica-se que os valores dos deslocamentos em toda a altura do pórtico considerando-se os métodos aproximados B<sub>1</sub>-

$B_2$  e P-Delta, apresentaram excelentes resultados quando comparados com a análise elástica rigorosa em 2ª ordem. Pode-se observar também, que os valores dos deslocamentos obtidos pela análise elastoplástica foram muito maiores que as outras análises elásticas, o que já era esperado, uma vez que se trata da carga última do pórtico.

Visando verificar a aplicabilidade da análise estrutural proposta no texto base de revisão da NBR 8800 (2003), pode-se construir a TAB. 4.24, a seguir, onde se mostram os tipos de análise que podem ser utilizadas para cada incremento de carga, em função dos limites impostos ao coeficiente  $B_2$ . Esta tabela é construída com base nos valores do coeficiente  $B_2$  do 4º andar (TAB. 4.23).

TABELA 4.24 – Tipos de análises para cada incremento de carga em função do coeficiente  $B_2$

<b>Classificação da Estrutura</b>	<b>Coeficiente <math>B_2</math></b>	<b>P/P<sub>w</sub></b>	<b>Tipo de Análise</b>
Pouco sensível a deslocamentos horizontais	$B_2 \leq 1,10$	0,10	Elástica Estimada (Eq.(4.1)) ou Elástica aproximada $B_1$ - $B_2$ ou Elástica aproximada P-Delta ou Elástica Rigorosa
		0,20	
		0,30	
Muito sensível a deslocamentos horizontais	$1,10 < B_2 \leq 1,30$	0,37	Elástica Estimada (Eq.(4.2)) ou Elástica aproximada $B_1$ - $B_2$ ou Elástica aproximada P-Delta ou Elástica Rigorosa
		0,40	
		0,50	
		0,60	
		0,70	
	$1,30 < B_2 \leq 1,40$	0,80	Elástica aproximada $B_1$ - $B_2$ ou Elástica aproximada P-Delta ou Elástica Rigorosa
		0,90	
		1,00	

A TAB. 4.25 mostra os valores do momento fletor para os pilares 16, 19 e 25 dos 1º, 4º e 10º andares, respectivamente, considerando-se a análise estrutural estimada proposta no texto base de revisão da NBR 8800 (2003) e os valores das análises elástica em 1ª ordem, elásticas aproximadas  $B_1$ - $B_2$  e P-Delta e elástica rigorosa em 2ª ordem, para a relação de carga P/P<sub>w</sub> indicada.

TABELA 4.25 - Momento fletor utilizando-se as propostas da NBR 8800 (2003)

MOMENTO FLETOR (kNcm)									
P/P <sub>w</sub> (A)	1ª Ordem Elástica (B)	2ª Ordem							
		Elástica Aproximada				Elástica Estimada (E) (E/B)	Elástica Rigorosa (F) (F/B)		
		B <sub>1</sub> -B <sub>2</sub> (C) (C/B)		P-Delta (D) (D/B)					
<b>1º ANDAR (PILAR 16)</b>									
0,10	15285	15537	(1,017)	15539	(1,017)	15285	(1,000)	15473	(1,012)
0,20	30569	31596	(1,034)	31694	(1,037)	30569	(1,000)	31427	(1,028)
0,30	45854	48204	(1,051)	48688	(1,062)	45854	(1,000)	47891	(1,044)
0,37	56553	60172	(1,064)	60586	(1,071)	60016	(1,061)	59736	(1,056)
0,40	61139	65390	(1,070)	66049	(1,080)	65516	(1,072)	64896	(1,061)
0,50	76423	83183	(1,088)	84340	(1,104)	84286	(1,103)	82477	(1,079)
0,60	91708	101617	(1,108)	103868	(1,133)	104942	(1,144)	100670	(1,098)
0,70	106993	120728	(1,128)	123397	(1,153)	125800	(1,176)	119517	(1,117)
0,80	122278	140552	(1,149)	144776	(1,184)	148865	(1,217)	139063	(1,137)
0,90	137562	161132	(1,171)	166155	(1,208)	-		159356	(1,158)
1,00	152847	182510	(1,194)	196825	(1,288)	-		180452	(1,181)
<b>4º ANDAR (PILAR 19)</b>									
0,10	9159	9415	(1,028)	9373	(1,023)	9159	(1,000)	9333	(1,019)
0,20	18319	19373	(1,058)	19331	(1,055)	18319	(1,000)	19194	(1,048)
0,30	27478	29920	(1,089)	30178	(1,098)	27478	(1,000)	29627	(1,078)
0,37	33890	37683	(1,112)	37772	(1,115)	36145	(1,067)	37297	(1,101)
0,40	36637	41111	(1,122)	41395	(1,130)	39492	(1,078)	40682	(1,110)
0,50	45797	53007	(1,157)	53525	(1,169)	50951	(1,113)	52416	(1,145)
0,60	54956	65677	(1,195)	66996	(1,219)	63620	(1,158)	64891	(1,181)
0,70	64115	79198	(1,235)	80468	(1,255)	76483	(1,193)	78179	(1,219)
0,80	73275	93659	(1,278)	95945	(1,309)	90767	(1,239)	92359	(1,260)
0,90	82434	109162	(1,324)	111423	(1,352)	-		107521	(1,304)
1,00	91593	125824	(1,374)	137906	(1,506)	-		123768	(1,351)
<b>10º ANDAR (PILAR 25)</b>									
0,10	4706	4813	(1,023)	4815	(1,023)	4706	(1,000)	4801	(1,020)
0,20	9412	9850	(1,047)	9884	(1,050)	9412	(1,000)	9828	(1,044)
0,30	14118	15127	(1,071)	15287	(1,083)	14118	(1,000)	15098	(1,069)
0,37	17413	18973	(1,090)	19070	(1,095)	18593	(1,068)	18942	(1,088)
0,40	18825	20662	(1,098)	20858	(1,108)	20306	(1,079)	20631	(1,096)
0,50	23531	26473	(1,125)	26845	(1,141)	26166	(1,112)	26446	(1,124)
0,60	28237	32582	(1,154)	33337	(1,181)	32631	(1,156)	32568	(1,153)
0,70	32943	39013	(1,184)	39828	(1,209)	39177	(1,189)	39021	(1,185)
0,80	37649	45792	(1,216)	47111	(1,251)	46430	(1,233)	45835	(1,217)
0,90	42355	52947	(1,250)	54394	(1,284)	-		53042	(1,252)
1,00	47061	60512	(1,286)	65711	(1,396)	-		60678	(1,289)



Analisando-se a TAB. 4.25, observa-se que para a relação de carga  $P/P_w \leq 0,30$  a estrutura é pouco sensível a deslocamentos horizontais, uma vez que o maior valor de  $B_2$  não supera 1,10. Dessa forma, a análise estimada realizada utilizando-se a Eq. (4.1), onde  $B_0$  é calculado e adotado igual a 1, apresenta resultados inferiores à análise elástica rigorosa em até 7,8% e inferiores também às análises aproximadas  $B_1$ - $B_2$  em até 8,9% e P-Delta em até 9,8%. Nota-se, que a análise aproximada  $B_1$ - $B_2$  apresenta uma melhor correlação com a análise rigorosa em todos os andares, em relação à análise estimada.

Para a relação de carga  $0,37 \leq P/P_w \leq 0,80$  a estrutura é considerada muito sensível a deslocamentos horizontais, uma vez que  $1,1 < B_2 \leq 1,3$  no 4º andar. A análise estimada fornece valores conservadores para os 1º e 10º andares, mas apresenta resultados contra a segurança para o 4º andar. Novamente o método  $B_1$ - $B_2$  apresenta uma melhor correlação com a análise rigorosa em todos os andares em relação à análise estimada.

Para a relação de carga  $0,90 \leq P/P_w \leq 1,00$  a estrutura é considerada muito sensível a deslocamentos horizontais uma vez que  $1,3 < B_2 \leq 1,4$  no 4º andar. Neste caso a análise estimada não pode ser aplicada, podendo ser utilizada a análise aproximada  $B_1$ - $B_2$  (que apresenta bons resultados quando comparada com a análise elástica rigorosa), ou a análise aproximada P-Delta, ou ainda a análise elástica rigorosa.

A FIG. 4.29 mostra as curvas parâmetro de carga x momento fletor para os 1º, 4º e 10º andares do pórtico. Observa-se no gráfico uma excelente correlação entre os resultados de todas as análises elásticas em 2ª ordem, em toda a variação de  $P/P_w$ , para todos os andares. Nota-se que, o comportamento da curva referente à análise elástica estimada apresenta-se muito próximo do comportamento das outras análises em 2ª ordem, tanto as aproximadas quanto à rigorosa, ficando conservadora para os 1º e 10º andares e contra a segurança para o 4º andar.

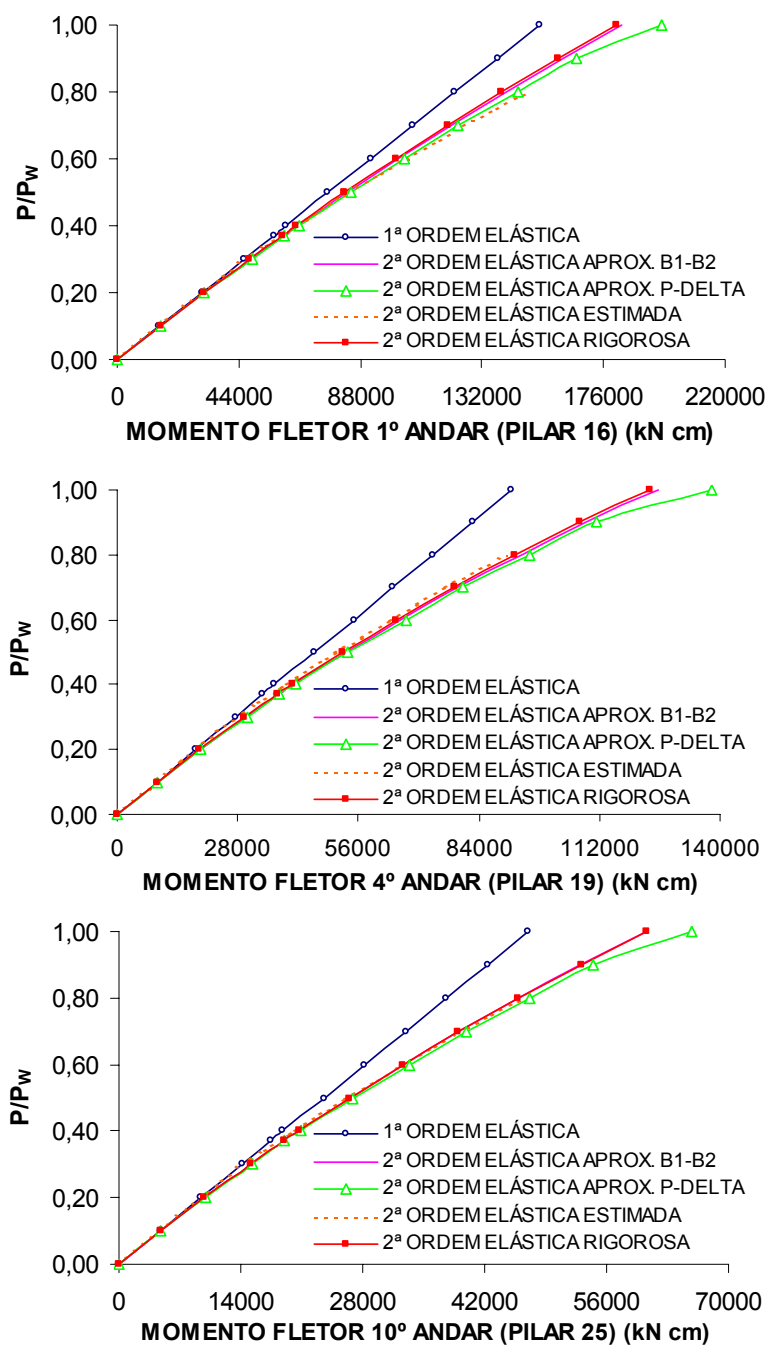


FIGURA 4.29 – Curvas parâmetro de carga x momento fletor para os pilares 16,19 e 25 do pórtico

A TAB. 4.26 e a FIG 4.30 mostram os valores da força normal para os mesmos pilares considerando-se as análises elásticas em 1ª e 2ª ordem (aproximadas e rigorosa) e a análise estimada, para a relação de carga  $P/P_w$  indicada.

TABELA 4.26 – Força normal utilizando-se as propostas da NBR 8800 (2003)

FORÇA NORMAL (kN)									
P/P <sub>w</sub>	1ª Ordem Elástica (B)	2ª Ordem							
		Elástica Aproximada				Elástica Estimada		Elástica Rigorosa	
		B <sub>1</sub> -B <sub>2</sub>		P-Delta		(E)	(E/B)	(F)	(F/B)
(A)	(B)	(C)	(C/B)	(D)	(D/B)	(E)	(E/B)	(F)	(F/B)
<b>1º ANDAR (PILAR 16)</b>									
0,10	2043	2052	(1,004)	2062	(1,009)	2043	(1,000)	2063	(1,010)
0,20	4086	4122	(1,009)	4151	(1,016)	4086	(1,000)	4154	(1,017)
0,30	6129	6212	(1,014)	6277	(1,024)	6129	(1,000)	6277	(1,024)
0,37	7559	7688	(1,017)	7765	(1,027)	7694	(1,018)	7782	(1,030)
0,40	8172	8323	(1,018)	8419	(1,030)	8339	(1,020)	8433	(1,032)
0,50	10215	10455	(1,024)	10606	(1,038)	10502	(1,028)	10625	(1,040)
0,60	12258	12610	(1,029)	12848	(1,048)	12727	(1,038)	12857	(1,049)
0,70	14301	14789	(1,034)	15090	(1,055)	14956	(1,046)	15132	(1,058)
0,80	16344	16993	(1,040)	17417	(1,066)	17258	(1,056)	17455	(1,068)
0,90	18387	19224	(1,046)	19744	(1,074)	-		19829	(1,078)
1,00	20430	21484	(1,052)	22515	(1,102)	-		22259	(1,090)
<b>4º ANDAR (PILAR 19)</b>									
0,10	1519	1528	(1,006)	1564	(1,030)	1519	(1,000)	1568	(1,032)
0,20	3039	3076	(1,012)	3138	(1,033)	3039	(1,000)	3155	(1,038)
0,30	4558	4643	(1,019)	4720	(1,036)	4558	(1,000)	4762	(1,045)
0,37	5622	5754	(1,024)	5828	(1,037)	5789	(1,030)	5899	(1,049)
0,40	6078	6234	(1,026)	6307	(1,038)	6266	(1,031)	6390	(1,051)
0,50	7597	7848	(1,033)	7910	(1,041)	7856	(1,034)	8042	(1,059)
0,60	9116	9490	(1,041)	9520	(1,044)	9472	(1,039)	9719	(1,066)
0,70	10636	11162	(1,049)	11130	(1,046)	11075	(1,041)	11423	(1,074)
0,80	12155	12866	(1,058)	12749	(1,049)	12704	(1,045)	13157	(1,082)
0,90	13675	14607	(1,068)	14369	(1,051)	-		14924	(1,091)
1,00	15194	16388	(1,079)	16612	(1,093)	-		16728	(1,101)
<b>10º ANDAR (PILAR 25)</b>									
0,10	663	665	(1,002)	690	(1,040)	663	(1,000)	692	(1,044)
0,20	1326	1332	(1,004)	1377	(1,038)	1326	(1,000)	1389	(1,047)
0,30	1990	2003	(1,007)	2058	(1,034)	1990	(1,000)	2089	(1,050)
0,37	2454	2475	(1,009)	2535	(1,033)	2533	(1,032)	2581	(1,052)
0,40	2653	2677	(1,009)	2738	(1,032)	2738	(1,032)	2793	(1,053)
0,50	3316	3355	(1,012)	3415	(1,030)	3415	(1,030)	3502	(1,056)
0,60	3979	4038	(1,015)	4081	(1,025)	4092	(1,028)	4216	(1,060)
0,70	4642	4724	(1,018)	4746	(1,022)	4758	(1,025)	4936	(1,063)
0,80	5306	5415	(1,021)	5393	(1,017)	5420	(1,022)	5661	(1,067)
0,90	5969	6111	(1,024)	6041	(1,012)	-		6393	(1,071)
1,00	6632	6813	(1,027)	6525	(0,984)	-		7131	(1,075)

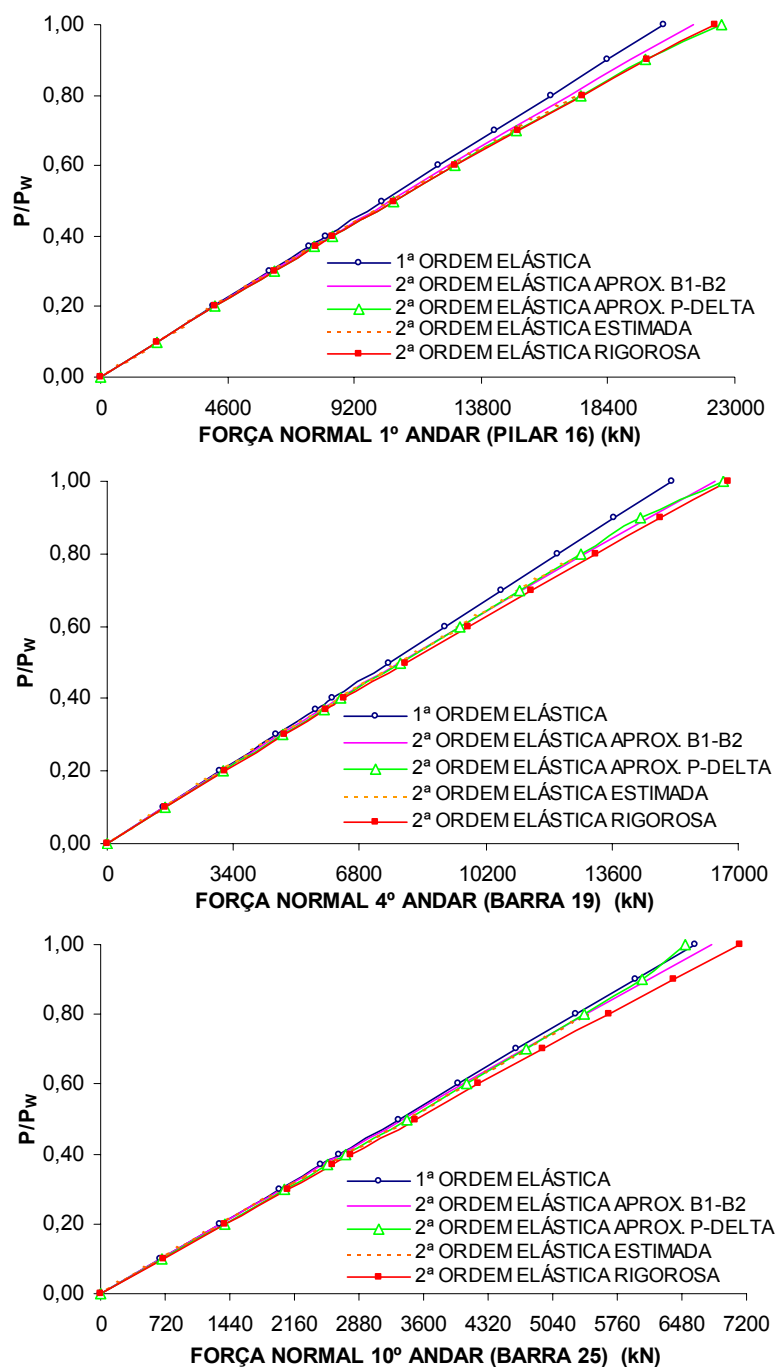


FIGURA 4.30 – Curvas parâmetro de carga x força normal para os pilares 16,19 e 25 do pórtico

Considerando-se os valores da TAB. 4.26 e os gráficos da FIG. 4.30, verifica-se que os resultados obtidos para a força normal para as análises em 2ª ordem foram próximos dos resultados obtidos da análise em 1ª ordem, para toda a relação de carga  $P/P_w$ . A diferença máxima da análise estimada para a análise rigorosa não ultrapassa 4,5%.

A TAB. 4.27 e a FIG. 4.31 mostram os valores da força cortante para os mesmos pilares considerando-se novamente as análises elásticas em 1ª e 2ª ordem (aproximadas e rigorosa) e a análise estimada, para a relação de carga  $P/P_w$  indicada.

TABELA 4.27 – Força cortante utilizando-se as propostas da NBR 8800 (2003)

FORÇA CORTANTE (kN)									
P/P <sub>w</sub>	1ª Ordem Elástica (A) (B)	2ª Ordem							
		Elástica Aproximada				Elástica Estimada		Elástica Rigorosa	
		B <sub>1</sub> -B <sub>2</sub> (C) (C/B)		P-Delta (D) (D/B)		(E)	(E/B)	(F)	(F/B)
<b>1º ANDAR (PILAR 16)</b>									
0,10	75,8	77,0	(1,017)	76,5	(1,009)	75,8	(1,000)	76,5	(1,009)
0,20	151,6	156,6	(1,034)	156,3	(1,032)	151,6	(1,000)	156,3	(1,032)
0,30	227,3	239,0	(1,051)	240,9	(1,059)	227,3	(1,000)	239,9	(1,055)
0,37	280,4	298,3	(1,064)	300,0	(1,070)	298,8	(1,066)	300,7	(1,072)
0,40	303,1	324,2	(1,070)	327,4	(1,080)	326,5	(1,077)	327,4	(1,080)
0,50	378,9	412,4	(1,088)	418,9	(1,106)	421,7	(1,113)	419,1	(1,106)
0,60	454,7	503,8	(1,108)	517,3	(1,138)	527,1	(1,159)	515,5	(1,134)
0,70	530,4	598,5	(1,128)	615,7	(1,161)	634,3	(1,196)	616,9	(1,163)
0,80	606,2	696,8	(1,149)	724,4	(1,195)	753,7	(1,243)	723,8	(1,194)
0,90	682,0	798,8	(1,171)	833,1	(1,222)	-		836,6	(1,227)
1,00	757,8	904,8	(1,194)	994,0	(1,312)	-		956,0	(1,262)
<b>4º ANDAR (PILAR 19)</b>									
0,10	61,6	63,3	(1,028)	62,4	(1,014)	61,6	(1,000)	61,6	(1,000)
0,20	123,1	130,2	(1,058)	130,0	(1,056)	123,1	(1,000)	126,4	(1,027)
0,30	184,7	201,1	(1,089)	204,8	(1,109)	184,7	(1,000)	194,8	(1,055)
0,37	227,8	253,3	(1,112)	257,3	(1,129)	246,0	(1,080)	245,0	(1,076)
0,40	246,2	276,3	(1,122)	282,8	(1,148)	269,5	(1,094)	267,1	(1,085)
0,50	307,8	356,3	(1,157)	368,4	(1,197)	350,4	(1,138)	343,6	(1,116)
0,60	369,4	441,4	(1,195)	465,5	(1,260)	441,1	(1,194)	424,7	(1,150)
0,70	430,9	532,3	(1,235)	562,7	(1,306)	534,4	(1,240)	510,8	(1,185)
0,80	492,5	629,5	(1,278)	677,1	(1,375)	639,3	(1,298)	602,5	(1,223)
0,90	554,1	733,7	(1,324)	791,5	(1,429)	-		700,2	(1,264)
1,00	615,6	845,7	(1,374)	1001,0	(1,626)	-		804,6	(1,307)
<b>10º ANDAR (PILAR 25)</b>									
0,10	30,3	31,0	(1,023)	31,0	(1,022)	30,3	(1,000)	30,6	(1,012)
0,20	60,6	63,4	(1,047)	63,9	(1,055)	60,6	(1,000)	62,7	(1,035)
0,30	90,8	97,3	(1,071)	99,5	(1,095)	90,8	(1,000)	96,1	(1,058)
0,37	112,0	122,1	(1,090)	124,3	(1,110)	121,5	(1,085)	120,5	(1,075)
0,40	121,1	132,9	(1,098)	136,3	(1,125)	132,9	(1,098)	131,2	(1,083)
0,50	151,4	170,3	(1,125)	176,3	(1,165)	172,3	(1,138)	167,9	(1,109)
0,60	181,7	209,6	(1,154)	220,3	(1,212)	216,1	(1,189)	206,4	(1,136)
0,70	211,9	251,0	(1,184)	264,2	(1,247)	260,9	(1,231)	247,0	(1,165)
0,80	242,2	294,6	(1,216)	314,3	(1,298)	310,9	(1,284)	289,7	(1,196)
0,90	272,5	340,6	(1,250)	364,4	(1,337)	-		334,7	(1,228)
1,00	302,8	389,3	(1,286)	445,1	(1,470)	-		382,2	(1,262)

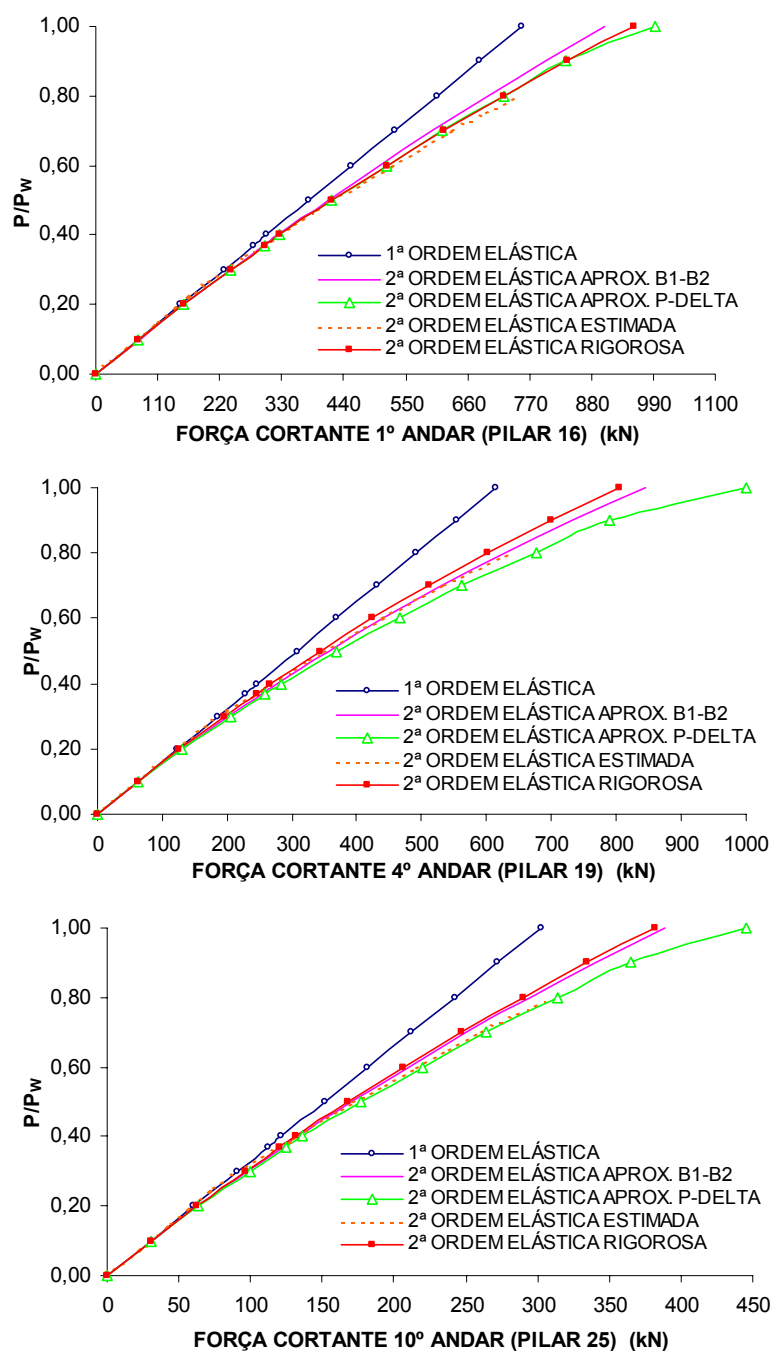


FIGURA 4.31 – Curvas parâmetro de carga x força cortante para os pilares 16,19 e 25 do pórtico

Analisando-se a TAB. 4.27 e a FIG. 4.31, e considerando-se o 4º andar, observa-se que para a relação de carga  $P/P_w \leq 0,30$ , a análise estimada realizada utilizando-se a Eq. (4.1), onde  $B_0$  é calculado e adotado igual a 1, apresenta resultados inferiores à análise

elástica rigorosa (em até 5,5%) e resultados inferiores às análises aproximadas B<sub>1</sub>-B<sub>2</sub> (em até 8,9%) e P-Delta (em até 10,9%).

Para a relação de carga  $0,37 \leq P/P_w \leq 0,80$  e considerando-se novamente apenas o 4º andar, a análise estimada fornece valores conservadores para todos os andares.

Para a relação de carga  $0,90 \leq P/P_w \leq 1,00$ , a análise estimada não pode ser aplicada, podendo ser utilizada as análises aproximadas B<sub>1</sub>-B<sub>2</sub> ou P-Delta, ou a análise elástica rigorosa.

# 5

## CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi avaliar os efeitos de 2ª ordem em edifícios altos de aço utilizando-se os métodos aproximados de Amplificação dos Momentos (B<sub>1</sub>-B<sub>2</sub>), da Força Lateral Equivalente ou Fictícia (P-Delta) e do Coeficiente  $\gamma_z$ . Os resultados obtidos por esses métodos aproximados foram comparados com os resultados obtidos por métodos de análise rigorosa, com a finalidade de verificar a consistência e a precisão dos resultados.

Para se alcançar esses objetivos foi necessário realizar um estudo sobre a estabilidade dos pórticos planos de aço, visando ao entendimento do comportamento global dessas estruturas. Em seguida, as formulações teóricas dos métodos aproximados foram apresentadas, assim como uma formulação geral para as análises rigorosas, elástica e elastoplástica, em teoria de 2ª ordem, para os pórticos planos. Essas formulações foram utilizadas nas análises de diversos casos de pórticos, contraventados e não-contraventados, de vários andares, que permitiram avaliar comparativamente os diversos métodos.



Essas análises mostraram que os métodos aproximados apresentaram resultados satisfatórios independente da classificação dos pórticos.

Observando-se o comportamento dos pórticos por meio dos gráficos parâmetro de carga  $x$  deslocamento horizontal no topo (FIG. 4.2, FIG. 4.7, FIG. 4.10 e FIG. 4.17), pode-se concluir que, todos os métodos aproximados,  $B_1$ - $B_2$ , P-Delta e  $\gamma_z$ , apresentaram boa correlação entre si e com a análise elástica rigorosa em 2ª ordem, em praticamente toda a variação da relação de carga  $P/P_w$ , sendo que os valores obtidos no método  $B_1$ - $B_2$  (Eq. (3.82)) se aproximaram melhor do comportamento “exato”.

O método do *Coefficiente*  $\gamma_z$  mostrou ser o “menos trabalhoso” dentre todos os métodos aproximados apresentados e tem como característica o fato de seu valor ser constante para todo o edifício, não variando em cada andar, constituindo-se num coeficiente global para toda a estrutura. Por isso, observou-se que:

- Os resultados obtidos para os momentos fletores, conforme mostrados na TAB 4.11 e FIG. 4.11 e na TAB 4.13 e FIG. 4.18, são conservadores para os primeiros e últimos andares dos edifícios e têm boa correlação para os andares intermediários, quando comparados com a análise elástica rigorosa em 2ª ordem.
- Para a força normal, conforme mostram as FIG. 4.12 e FIG. 4.19, os resultados têm boa correlação com os resultados da análise “exata” e são praticamente os mesmos obtidos na análise em 1ª ordem.
- Para o esforço cortante, os resultados são conservadores para os primeiros andares e têm boa aproximação para os andares intermediários, assim como para os últimos andares, conforme mostra a FIG. 4.13.

O método da *Força Lateral Equivalente (P-Delta)* apresentou bons resultados, mas mostrou ser o “mais trabalhoso” dentre todos os métodos aproximados.

- Os resultados obtidos para os momentos fletores, conforme mostrados na TAB 4.11 e FIG. 4.11 e na TAB 4.13 e FIG. 4.18, apresentam boa correlação em toda a variação da relação de carga  $P/P_w$ , para todos os andares.

- Para a força normal, conforme mostram as FIG. 4.12 e FIG. 4.19, os resultados têm boa correlação com os resultados da análise “exata” e são praticamente os mesmos obtidos da análise em 1ª ordem.
- Para o esforço cortante, os resultados são conservadores para todos os andares, apesar da boa correlação com os resultados da análise “exata”, conforme mostra a FIG. 4.13.

O método de *Amplificação dos Momentos ( $B_1$ - $B_2$ )* mostrou ser “um pouco mais trabalhoso” do que o método do Coeficiente  $\gamma_z$ , porém “menos trabalhoso” do que o método P-Delta. Ao contrário do coeficiente  $\gamma_z$ , os coeficiente  $B_2$  variam para cada andar, constituindo-se num coeficiente local de cada barra. Observou-se que:

- Os resultados obtidos para os momentos fletores, conforme mostrados na TAB 4.11 e FIG. 4.11 e na TAB 4.13 e FIG. 4.18, apresentam boa correlação em toda a variação da relação de carga  $P/P_w$ , sendo que os seus resultados são os que mais se aproximaram do valor “exato”, entre todas as análises aproximadas, para os pórticos não-contraventados.
- Para a força normal, assim como as outras análises, os resultados têm boa correlação com os resultados da análise “exata” e foram praticamente os mesmos obtidos da análise em 1ª ordem, conforme mostram as FIG. 4.12 e FIG. 4.19.
- Para o esforço cortante, os resultados apresentaram boa correlação com os resultados da análise “exata” e se mostraram menos conservadores em relação às outras análises aproximadas, conforme mostra a FIG. 4.13.

Das análises apresentadas, pode-se concluir que os efeitos de 2ª ordem são mais relevantes nos pórticos não-contraventados. Nos pórticos contraventados os resultados da análise em 2ª ordem elástica rigorosa estão próximos dos resultados da análise elástica de 1ª ordem, indicando que para essas estruturas, garantido o dimensionamento adequado das barras de contraventamento (diagonais e vigas), a sensibilidade aos deslocamentos horizontais é pequena e os efeitos de 2ª ordem em relação aos de 1ª ordem são irrelevantes.

Ao se analisar o *pórtico parcialmente contraventado* de dois andares e um vão do item 4.3.2, observou-se que o coeficiente  $\gamma_z$ , constante para toda a estrutura, apresentou valores bem inferiores aos do coeficiente  $B_2$  para o 1º andar e valores bem superiores para o 2º andar. Dessa forma, enquanto o método  $B_1$ - $B_2$  apresentou excelentes resultados nos dois andares, quando comparados com os da análise rigorosa, o método do coeficiente  $\gamma_z$  levou a resultados não satisfatórios, mostrando a sua inadequação na análise em 2ª ordem dessas estruturas.

Atualmente, as principais normas técnicas internacionais afirmam que os efeitos de 2ª ordem devem ser levados em conta no cálculo e dimensionamento das estruturas. Com o objetivo de minimizar o trabalho ao se considerar os efeitos em 2ª ordem, essas normas permitem o uso de métodos aproximados de análise. A NBR 8800 (2003), no seu texto base de revisão, apresenta uma proposta onde a análise elástica rigorosa em 2ª ordem pode ser substituída por uma análise estimada, dependendo da sensibilidade da estrutura aos deslocamentos horizontais.

A NBR 8800 (2003) define que uma estrutura é considerada pouco sensível aos deslocamentos horizontais se, em todos os seus andares, o coeficiente  $B_2$  não superar o valor de 1,1. Se  $B_2$  for maior que esse valor em pelo menos um de seus andares, a estrutura será considerada muito sensível aos deslocamentos horizontais.

Considerando-se os resultados obtidos no item 4.4 deste trabalho, quando se analisou a proposta da análise estrutural contida no texto base de revisão da NBR 8800, pôde-se observar que para  $B_2 \leq 1,10$ , a análise estimada apresentava valores subestimados em até 10%, para todos os andares. Quando  $1,10 < B_2 \leq 1,30$ , a análise estimada, ao utilizar a Eq. (4.2) com  $0,95B_{2\max}$ , apresentava resultados subestimados para todos os andares.

Após todos esses estudos, apresenta-se, como contribuição, duas propostas a serem analisadas:

## Primeira Proposta

TABELA 5.1 – Primeira Proposta

Classificação da Estrutura	Coefficiente $B_2$	Tipo de Análise
Pouco sensível a deslocamentos horizontais	$B_2 \leq 1,10$	Elástica Estimada (Eq.(4.1)) ou Elástica aproximada $B_1$ - $B_2$ ou Elástica aproximada P-Delta ou Elástica Rigorosa
Muito sensível a deslocamentos horizontais	$1,10 < B_2 \leq 1,20$	Elástica Estimada (Eq.(4.2)) ou Elástica aproximada $B_1$ - $B_2$ ou Elástica aproximada P-Delta ou Elástica Rigorosa
	$1,20 < B_2 \leq 1,40$	Elástica aproximada $B_1$ - $B_2$ ou Elástica aproximada P-Delta ou Elástica Rigorosa
	$B_2 > 1,40$	Elastoplástica Rigorosa

Para  $B_2 \leq 1,10$ , a estrutura é considerada pouco sensível a deslocamentos horizontais. Neste caso, podem ser usadas as análises elásticas rigorosa de 2ª ordem, aproximadas  $B_1$ - $B_2$  ou P-Delta ou a estimada utilizando-se a Eq. (4.1) para o cálculo do momento fletor. Os demais esforços solicitantes podem ser aqueles obtidos diretamente da análise elástica de 1ª ordem.

Nas estruturas muito sensíveis a deslocamentos horizontais, quando  $1,10 < B_2 \leq 1,20$ , podem ser usadas as análises elásticas rigorosa de 2ª ordem, aproximadas  $B_1$ - $B_2$  ou P-Delta ou a estimada utilizando-se a Eq. (4.2), porém considerando-se o valor de  $B_{2max}$  como majorador dos esforços horizontais e não  $0,95B_{2max}$ , para o cálculo do momento fletor. Os valores obtidos para força normal e força cortante são aqueles oriundos diretamente da análise elástica de 1ª ordem.

Quando  $1,20 < B_2 \leq 1,40$  recomenda-se a análise elástica rigorosa de 2ª ordem ou as aproximadas  $B_1$ - $B_2$  ou P-Delta. Finalmente, para  $B_2 > 1,40$ , recomenda-se a análise elastoplástica rigorosa em 2ª ordem.

## Segunda Proposta

TABELA 5.2 – Segunda Proposta

<b>Classificação da Estrutura</b>	<b>Coefficiente <math>B_2</math></b>	<b>Tipo de Análise</b>
Pouco sensível a deslocamentos horizontais	$B_2 \leq 1,10$	Elástica Estimada (Eq.(4.1)) ou Elástica aproximada $B_1$ - $B_2$ ou Elástica aproximada P-Delta ou Elástica Rigorosa
Muito sensível a deslocamentos horizontais	$1,10 < B_2 \leq 1,40$	Elástica aproximada $B_1$ - $B_2$ ou Elástica aproximada P-Delta ou Elástica Rigorosa
	$B_2 > 1,40$	Elastoplástica Rigorosa

Para  $B_2 \leq 1,10$ , a estrutura é considerada pouco sensível a deslocamentos horizontais. Neste caso, podem ser usadas as análises elásticas rigorosa em 2ª ordem, aproximadas  $B_1$ - $B_2$  ou P-Delta ou a estimada utilizando-se a Eq. (4.1) para o cálculo do momento fletor. Os demais esforços solicitantes podem ser aqueles obtidos diretamente da análise elástica de 1ª ordem.

Nas estruturas muito sensíveis a deslocamentos horizontais, quando  $1,10 < B_2 \leq 1,40$ , podem ser usadas as análises elásticas rigorosa em 2ª ordem ou as aproximadas  $B_1$ - $B_2$  ou P-Delta para o cálculo do momento fletor. Os valores obtidos para força normal e força cortante são aqueles oriundos diretamente da análise elástica de 1ª ordem. Quando  $B_2 > 1,40$  recomenda-se a análise elastoplástica rigorosa em 2ª ordem.

### Propostas para Trabalhos Futuros

A partir da década de 1990 vários pesquisadores têm desenvolvido e validado várias formulações de análise inelástica em teoria de 2ª ordem, especialmente para pórticos em estruturas de aço. Essas formulações podem ser classificadas em dois grupos: o da plasticidade concentrada, baseado no conceito de rótula plástica e o da plasticidade distribuída, também chamado método da zona plástica, que considera a distribuição da plasticidade ao longo do comprimento dos elementos estruturais e na área de suas seções transversais.

Dessa forma, sugere-se para trabalhos futuros a realização de análises que considerem a distribuição da plasticidade, as tensões residuais, as imperfeições geométricas iniciais, as ligações semi-rígidas, as cargas nocionais, entre outros efeitos não-lineares, apontando para o desenvolvimento da *análise estrutural avançada*.

A análise avançada é uma técnica que procura introduzir nos modelos do comportamento dos elementos representativos da estrutura e seus materiais hipóteses mais próximas da realidade e, unir a isto, procedimentos numéricos e iterativos sofisticados para se estimar o comportamento não-linear dessas estruturas, de tal forma que o método, sozinho, seja suficiente para a verificação da estrutura com respeito aos seus estados limites. Dessa maneira, a análise avançada engloba os efeitos não-lineares, físicos e geométricos, nas análises dos sistemas estruturais e seus elementos componentes.

# 6

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABNT Associação Brasileira de Normas Técnicas - *NBR8800 Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios*. Rio de Janeiro, 1986.

ABNT Associação Brasileira de Normas Técnicas - *Projeto de Revisão da NBR 8800 – Projeto e Execução de Estruturas de Aço e de Estruturas Mistas Aço-Concreto de Edifícios*. Rio de Janeiro, 2003.

ABNT Associação Brasileira de Normas Técnicas - *NBR 6118 Projeto de Estruturas de Concreto*. Rio de Janeiro, 2003.

ANSYS *Structural Nonlinearities. User guide for revision 6.1*, 2002.

AISC American Institute of Steel Construction - *Load and Resistance Factor Design Specification for Structural Steel Buildings*, Chicago, 1999.

ASCE American Society of Civil Engineers. *Effective Length and Notional Load Approaches for Assessing Frame Stability: Implications for American Steel Design*, 1997.

CHEN, W. F. *Approximate Solution of Beam-Columns*. ASCE Journal of the Structural Division, V. 97, N° ST2, p.743-751, February, 1971.

CHEN, W. F; LUI, E. M. *Stability Design Criteria for Steel Members and Frames in the United States*. Journal of Constructional Steel Research, V.5 N° 2, p.31-74, 1985.

CHEN, W. F.; LUI, E. M. *Structural Stability: Theory and Implementation*. New Jersey: Elsevier Science Publishing Co., Inc., 1987, p.490.

CHEN, W. F.; ZHOU S. *On  $C_m$  Factor in Load and Resistance Factor Design*. ASCE Journal of Structural Engineering, V.113, N° 8, p. 1738-1754, August, 1994.

CHEN, W. F.; TOMA, S. *Advanced Analysis of Steel Frames*. Boca Raton: CRC-Press, 1994, p. 384.

CHEN, W. F.; GOTO, Y.; LIEW, J. Y. R. *Stability Design of Semi-Rigid Frames*. New York: John Wiley e Sons, Inc., 1996, p. 468.

CHEN, W. F. *Structural Stability: From Theory to Practice*. Engineering Structures, p.116-122, February, 2000.

CHEONG-SIAT-MOY, F. *Consideration of Secondary Effects in Frames Design*. ASCE Journal of the Structural Division, V. 103, N° ST10, p. 2005-2019, October, 1977.

CSA Limits States Design of Steel Structures, CAN/CSA-S16.1-M94, Canadian Standards Association, Rexdale, Ontario, 1994.

DANIELS, J. H.; LU, L. *Plastic Subassemblage Analysis for Unbraced Frames*. ASCE Journal of the Structural Division, V. 98, p. 1769-1788, August, 1972.

ECS, Eurocode 3 – European Committee for Standardization, *Design of Steel Structures* Brussels, Belgium, 1993.

FERREIRA, R. P. *Uma Formulação Consistente para Análise Elastoplástica de Estruturas de Aço*. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia (UFMG), 1999, p.162.

FRANCO, M. *Problemas de Estabilidade nos Edifícios de Concreto Armado*. In: Colóquio sobre Estabilidade Global das Estruturas de Concreto Armado, IBRACON, São Paulo, 1985.

FRANCO, M.; VASCONCELOS, A. C. *Practical Assessment of Second Order Effects in Tall Buildings*. In: Colóquium on the CEB-FIP MC90, Rio de Janeiro, 1991. Proceedings, p. 307-323.

GALAMBOS, T. V. *Structural Members and Frames*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1968, p. 373.

GALAMBOS, T. V. *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*, 5<sup>th</sup> Edition, John Willey & Sons, 1998.

GOTO, Y.; CHEN, W. F. *Second Order Elastic Analysis for Frame Design*. ASCE Journal of Structural Engineering, V.113, N° 7, p. 1501-1519, July, 1987.



LANDESMANN, A. *Modelo Não-Linear Inelástico para Análise de Estruturas Metálicas Aporticadas em Condições de Incêndio*. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia do Rio de Janeiro (UFRJ), 2003, p. 295.

LAVALL, A. C. C. *Análise Elástica em Segunda Ordem de Pórticos Planos Metálicos*. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos (USP), 1988, p. 198.

LAVALL, A.C.C.; SILVA, R. M. Efeitos de 2ª Ordem em Edifícios Metálicos de Andares Múltiplos. São Carlos. Seminário – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1989.

LAVALL, A. C. C. *Uma Formulação Teórica Consistente para a Análise Não-linear de Pórticos Planos pelo Método dos Elementos Finitos Considerando Barras com Imperfeições Iniciais e Tensões Residuais nas Seções Transversais*. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos (USP), 1996, p. 265.

LE MESSURIER, W. J. (1977). A Practical Method of Second Order Analysis: Part 2 – Rigid Frames. *AISC Engineering Journal*. V. 14, Nº 2, p. 49-67, 1977.

LIMA, J. S. *Verificações da Punção e da Estabilidade Global em Edifícios de Concreto: Desenvolvimento e Aplicação de Recomendações Normativas*. São Carlos. Dissertação de Mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2001.

MACGREGOR, J. G; HAGE, S. E. *Stability Analysis and Design of Concrete Frames*. *ASCE Journal of the Structural Division*, V. 103, Nº ST10, p. 1953-1970, October, 1977.

MASSONNET, C. *Stability Considerations in the Design of Steel Columns*. *ASCE Journal of the Structural Division*, V. 85, p. 75-111, September, 1959.

MOREIRA, D. F. *Análise Matricial das Estruturas*. São Paulo. Editora da Universidade de São Paulo, 1977. p. 404.

NETHERCOT, D. A. *Frame Structures: Global Performance, Static and Stability Behavior: General Report*. *Journal of Constructional Steel Research*, p.109-124, July, 2000.

OLIVEIRA, D. M. *Parâmetros de Instabilidade Global das Estruturas de Concreto Armado Segundo a Nova NB-1*. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia (UFMG), 2002, p. 133.

PIMENTA, P. M. *Análise Não-Linear de Pórticos Planos*. São Paulo, EPUSP, 1986. (Boletim Técnico do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, 8611).

RACHID, M.; MORI, D. D. *Instabilidade: Conceitos – Aplicação na flambagem por flexão*. São Carlos, EESC-USP, 1989, p.130.

ROKACH A. J. *Theory and problems of Structural Steel Design*. United States of America, McGraw-Hill, Inc. 1991, p. 187.

SALMON, C. G.; JOHNSON, J. E. *Steel Structures: Design and Behavior*, 4<sup>th</sup> Edition, HarperCollins Publishers Co., Inc., 1996.

VASCONCELOS, A. C. *Critérios para Dispensa de Consideração do Efeito de 2ª Ordem*. In. REUNIÃO ANUAL DO IBRACON: Colóquio sobre Estabilidade Global das Estruturas de Concreto Armado. São Paulo, 1985, Anais.

WHITE, D. W.; HAJJAR, J. F. *Application of Second-Order elastic Analysis in LRFD: Research to Practice*. AISC Journal Engineering, p. 133-147, Fourth Quarter, 1991.

WHITE, D. W.; HAJJAR, J. F. *Buckling Models and Stability Design of Steel Frames: a Unified Approach*. Journal of Constructional Steel Research, V. 42, N° 3, p.171-207, June, 1997.

WHITE, D. W.; HAJJAR, J. F. *Stability of Steel Frames: The Cases for Simple Elastic and Rigorous Inelastic Analysis /Design Procedures*. Engineering Structures, V. 22, N° 2, p. 155-167, 2000.

WOOD, B. R.; BEAULIEU, D.; ADAMS, P. F. *Column Design by P Delta Method*. ASCE Journal of the Structural Division, V. 102, N° ST2, p. 411-427, February, 1976.

YURA, J. A.; GALAMBOS, T.V. *Strength of Single-Story Steel Frames*. ASCE Journal of the Structural Division, V. 91, ST5, p. 81-101, October, 1965.

YURA, J. A. *The Effective Length of Columns in Unbraced Frames*. AISC Journal Engineering, V. 8(2), p. 37-42, April, 1971.