

**ALGORITMOS NÃO-SINGULARES DO MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PROBLEMAS
BIDIMENSIONAIS DE ELASTICIDADE**

Tatiana Souza Antunes Ribeiro

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**"ALGORITMOS NÃO-SINGULARES DO MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PROBLEMAS
BIDIMENSIONAIS DE ELASTICIDADE"**

Tatiana Souza Antunes Ribeiro

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Gabriel de Oliveira Ribeiro
DEES-UFMG - (Orientador)

Prof. Dr. Ariosto Bretanha Jorge
EFEI

Prof. Dr. Alcebíades de Vasconcellos Filho
DEES - UFMG

Prof. Dr. Clóvis Sperb Barcellos
PUC - MG

Belo Horizonte, 15 de fevereiro de 2003

A Deus, que sempre ilumina meu caminho,
Aos meus pais e ao meu irmão, que sempre
me incentivaram, apoiaram minhas decisões
e festejaram minhas conquistas.

AGRADECIMENTOS

Nós sempre necessitamos de pessoas, que com sua experiência e dedicação nos mostrem caminhos, despertem em nós idéias, apóiem e nos entendam nas horas difíceis. Ao Professor Gabriel de Oliveira Ribeiro, que sintetiza tudo isso, meus sinceros agradecimentos.

Aos professores do departamento, principalmente àqueles que desde a graduação acreditaram no meu potencial, me abriram as portas e me incentivaram.

Aos colegas que compartilharam experiências durante o curso, e agora as alegrias pela certeza do dever cumprido e a felicidade pelos ideais alcançados.

À todos funcionários do departamento, por tudo aquilo que no dia a dia esqueci de agradecer.

À CAPES pelo apoio financeiro ao longo do curso.

SUMÁRIO

Lista de Figuras	i
Lista de Tabelas	iv
Lista de Abreviaturas, Siglas e Símbolos	vi
Resumo	viii
Abstract	ix
1 Introdução	1
2 Revisão Bibliográfica	5
3 Equações Integrais de Contorno	20
3.1 Introdução	20
3.2 Equação Integral de Contorno Clássica	21
3.3 Equações Integrais de Contorno Auto-Regularizadas	26
3.3.1 EIC Auto-Regularizada do Deslocamento	26
3.3.2 EIC Auto-Regularizada da Força de Superfície	28
4 Algoritmos do Método dos Elementos de Contorno	31
4.1 Introdução	31
4.2 Discretização	32
4.3 Formas Discretizadas das EIC	37
4.3.1 Formulação Clássica	37
4.3.2 Formulação Auto-Regularizada do Deslocamento	39
4.3.3 Formulação Auto-Regularizada da Força de Superfície	40
4.3.4 Formulações para Pontos Internos	44
4.4 Programa Computacional	45

5 Resultados Numéricos	49
5.1 Exemplo 1 – Domínios Quadrados Sujeitos a Carregamentos Simples	49
5.2 Exemplo 2 – Tubo de Parede Espessa Sujeito a Pressão Interna	56
5.3 Exemplo 3 – Viga em Balanço	71
5.4 Exemplo 4 – Domínio Retangular Sujeito a Carga Concentrada	84
5.5 Exemplo 5 – Domínio L Sujeito a Carga Tangencial	92
5.6 Exemplo 6 – Problemas de Mecânica da Fratura	101
6 Conclusões	116
7 Referências Bibliográficas	122
Anexo A	A-1
Anexo B	A-3

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - Geometria do Problema	21
FIGURA 2 - Região de Exclusão para Equação Integral de Contorno	23
FIGURA 3 - Definição de β	24
FIGURA 4 - Elementos de contorno contínuos	33
FIGURA 5 - Localização dos nós funcionais e geométricos	34
FIGURA 6 - Descontinuidade da normal no contorno	36
FIGURA 7 - Descontinuidade da força de superfície	36
FIGURA 8 - Pontos de colocação fora do domínio	38
FIGURA 9 - Estrutura do programa computacional	46
FIGURA 10 - Domínios Quadrados – Geometria dos Problemas: (a) Tração Simples, (b) Cisalhamento Puro, (c) Flexão Pura	50
FIGURA 11 - Exemplo 1 – Modificações nas Condições de Contorno ao Adotar Elementos Descontínuos	54
FIGURA 12 - Tubo de Parede Espessa Sujeito a Pressão Interna	56
FIGURA 13 - Exemplo 2 – Formulação Padrão com Ponto de Colocação Fora do Domínio	59
FIGURA 14 - Exemplo 2 – Erro Máximo com Variação de α	59
FIGURA 15 - Exemplo 2 – Formulação Auto-Regularizada do Deslocamento ...	63
FIGURA 16 - Exemplo 2 - Formulação Auto-Regularizada da Força de Superfície com Elementos Contínuos	63
FIGURA 17 - Exemplo 2 – Formulação Auto-Regularizada da Força de Superfície com Elementos Descontínuos	67
FIGURA 18 - Exemplo 2 – Formulação Auto-Regularizada da Força de Superfície – Elementos Contínuos versus Elementos Descontínuos	68
FIGURA 19 - Exemplo 2 – Deslocamento Radial em Pontos Internos	70

FIGURA 20 - Exemplo 2 – Tensão Radial em Pontos Internos	70
FIGURA 21 - Exemplo 2 – Tensão Circunferencial em Pontos Internos	71
FIGURA 22 - Viga em Balanço – Geometria do Problema	72
FIGURA 23 - Exemplo 3 – Malha com Elementos Semicontínuos nos Cantos ...	76
FIGURA 24 - Exemplo 3 – Comparação entre as Formulações Auto- Regularizadas	78
FIGURA 25 - Exemplo 3 – Elástica do Problema	79
FIGURA 26 - Exemplo 3 - Malha do MEC e Pontos Internos	80
FIGURA 27 - Exemplo 3 – Deslocamento Vertical – MEC	81
FIGURA 28 - Exemplo 3 – Deslocamento Vertical –MEF	81
FIGURA 29 - Exemplo 3 – Força de Superfície na Direção x – Comparação entre as Formulações	82
FIGURA 30 - Exemplo 3 – Deslocamento Vertical em Pontos Internos	83
FIGURA 31 - Exemplo 3 – Tensão de Cisalhamento em Pontos Internos	83
FIGURA 32 - Domínio Retangular Sujeito a Carga Concentrada – Geometria do Problema	85
FIGURA 33 - Exemplo 4 – Discretização do Contorno	85
FIGURA 34 - Exemplo 4 – Erro Relativo no Deslocamento e Força de Superfície – Elementos Lineares e Quadráticos	89
FIGURA 35 - Exemplo 4 – Erro Relativo no Deslocamento e Força de Superfície – Elementos Cúbicos e Quárticos	90
FIGURA 36 - Exemplo 4 - Força de Superfície na Direção y – Comparação entre as Formulações	91
FIGURA 37 - Domínio L – Geometria do Problema	92
FIGURA 38 - Exemplo 5 – Discretização Inicial do Contorno	93
FIGURA 39 - Exemplo 5 – Erro Relativo no Deslocamento	97
FIGURA 40 - Exemplo 5 – Erro Relativo na Força de Superfície	98
FIGURA 41 - Exemplo 5 – Deslocamento na Direção Vertical – MEF	98
FIGURA 42 - Exemplo 5 –Deslocamento na Direção Vertical – MEC	99
FIGURA 43 - Exemplo 5 – Tensão Normal em Pontos Internos	99
FIGURA 44 - Exemplo 5 – Tensão Normal Sigma X – MEC	100
FIGURA 45 - Exemplo 5 – Tensão Normal Sigma X – Ampliação do Canto	100

FIGURA 46 - Mecânica da Fratura – Geometria dos Problemas: (a) Trinca Centrada, (b) Trinca de Borda	101
FIGURA 47 - Exemplo 6 – Localização dos Nós Utilizados no Cálculo de K_I	103
FIGURA 48 - Exemplo 6 – Contorno do Problema: (a) Trinca Centrada, (b) Trinca de Borda	104
FIGURA 49 - Exemplo 6 – Discretização do Contorno: (a) Face AB; (b) Ampliação do Trecho AO	104
FIGURA 50 - Exemplo 6 – Estudo de Convergência – Chapa com Trinca Centrada	111
FIGURA 51 - Exemplo 6 – Estudo de Convergência – Chapa com Dupla Trinca de Borda	111
FIGURA 52 - Exemplo 6 – Deslocamento Vertical em Pontos Próximos à Ponta da Trinca	113
FIGURA 53 - Exemplo 6 – Força de Superfície em Pontos Próximos à Ponta da Trinca	114

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - Problema 1 – Tração Simples – Erros Relativos Máximos	52
TABELA 2 - Problema 2 – Cisalhamento Puro – Erros Relativos Máximos	52
TABELA 3 - Problema 3 – Flexão Pura – Erros Relativos Máximos	52
TABELA 4 - Problema 1 – Tração Simples – Estudo de Convergência	54
TABELA 5 - Problema 2 – Cisalhamento Puro – Estudo de Convergência	55
TABELA 6 - Problema 3 – Flexão Pura – Estudo de Convergência	55
TABELA 7 - Exemplo 2 – Formulação Padrão com Ponto de Colocação Fora do Domínio	58
TABELA 8 - Exemplo 2 – Formulação Padrão com Ponto de Colocação Fora do Domínio – Variação de α	60
TABELA 9 - Exemplo 2 – Formulação Auto-Regularizada do Deslocamento versus Formulação Clássica para Deslocamento	61
TABELA 10 - Exemplo 2 – Formulação Auto-Regularizada do Deslocamento ...	62
TABELA 11 - Exemplo 2 – Formulação Auto-Regularizada da Força de Superfície com Elementos Contínuos	64
TABELA 12 - Exemplo 2 - Formulação Auto-Regularizada da Força de Superfície com Elementos Descontínuos	66
TABELA 13 - Exemplo 3 – Formulação Auto-Regularizada do Deslocamento ...	73
TABELA 14 - Exemplo 3 – Formulação Auto-Regularizada da Força de Superfície – Interpolação Linear e Quadrática	74
TABELA 15 - Exemplo 3 – Formulação Auto-Regularizada da Força de Superfície – Interpolação Cúbica e Quártica	75
TABELA 16 - Exemplo 3 – Formulação Auto-Regularizada da Força de Superfície com Elementos Semicontínuos nos Cantos	77
TABELA 17 - Exemplo 3 – Tensões em Pontos Internos	82

TABELA 18 - Exemplo 3 – Grandezas nos Pontos Internos Próximos ao Contorno	84
TABELA 19 - Exemplo 4 – Deslocamento Vertical no Ponto A	87
TABELA 20 - Exemplo 4 – Força de Superfície Vertical em B	88
TABELA 21 - Exemplo 5 – Deslocamento Vertical no Ponto A	94
TABELA 22 - Exemplo 5 – Força de Superfície Horizontal em B	95
TABELA 23 - Exemplo 6 – Fator de Intensidade de Tensão – Trinca Centrada ...	106
TABELA 24 - Exemplo 6 – Fator de Intensidade de Tensão – Dupla Trinca de Borda	107
TABELA 25 - Exemplo 6 – Abertura da Trinca – Trinca Centrada	109
TABELA 26 - Exemplo 6 – Abertura da Trinca – Dupla Trinca de Borda	110

LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E SÍMBOLOS

$\langle \Gamma \rangle$	- Domínio de integração da integral de valor principal de Cauchy
$\langle\langle \Gamma \rangle\rangle$	- Domínio de integração da integral de parte finita de Hadamard
a	- Distância entre o primeiro nó funcional do elemento e sua extremidade
b	- Distância entre o último nó funcional do elemento e sua extremidade
$D_{kij}(p, Q)$	- Solução fundamental fortemente singular na EIC da força de superfície
EIC	- Equações Integrais de Contorno
FARD	- Formulação auto-regularizada do deslocamento
FARD-D	- Formulação auto-regularizada do deslocamento com elementos descontínuos
FARFS	- Formulação auto-regularizada da força de superfície
FARFS-D	- Formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos descontínuos
FARFS-SC	- Formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos semicontínuos
FCD	- Formulação clássica para deslocamentos
FPPF	- Formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio
ISD	- Identidade de Somigliana para deslocamento
IST	- Identidade de Somigliana para tensão
$J(\xi)$	- Jacobiano da transformação de coordenadas
m	- Número de pontos nodais do elemento
M	- Número de elementos de contorno
MEC	- Método dos Elementos de Contorno
MEF	- Método dos Elementos Finitos
$N(\xi)$	- Funções de Interpolação

$n_j(p)$	- Componentes do vetor normal no ponto p
P	- Ponto de colocação no contorno
p	- Ponto interno
P'	- Ponto de colocação fora do domínio
PFH	- Parte Finita de Hadamard
Q	- Ponto de integração
$r(P1, P2)$	- Distância entre os pontos $P1$ e $P2$
$S_{kij}(p, Q)$	- Solução fundamental hipersingular na EIC da força de superfície
$t_j(Q)$	- Campo de força de superfície
$T_{ji}(p, Q)$	- Solução fundamental para força de superfície
t_k^i	- Força de superfície nos pontos nodais do contorno
$t_k^L(Q)$	- Estado linearizado da força de superfície
$u_{i,j}$	- Gradientes do deslocamento
$u_j(Q)$	- Campo de deslocamentos
$U_{ji}(p, Q)$	- Solução fundamental para deslocamentos
u_k^i	- Deslocamento nos pontos nodais do contorno
$u_k^L(Q)$	- Estado linearizado de deslocamentos
VPC	- Valor Principal de Cauchy
X_i	- Eixos cartesianos
$x_i(p)$	- Coordenadas cartesianas do ponto p
x_k^i	- Coordenadas dos pontos nodais do contorno
$\Delta(p, Q)$	- Função delta de Dirac
$\Delta\Gamma_I$	- Contorno do elemento
Γ	- Contorno do domínio Ω
Γ_ε	- Contorno da região de exclusão
Ω	- Domínio do problema
β	- Ângulo entre dois elementos adjacentes
δ_{ij}	- Função delta de Kronecker
ε	- Raio da superfície de exclusão
ℓ	- Comprimento do elemento de contorno
ξ	- Coordenada adimensional intrínseca

RESUMO

Neste trabalho foram implementados três algoritmos não-singulares do método dos elementos de contorno (MEC) para elasticidade bidimensional. O primeiro algoritmo se baseia na equação integral de contorno (EIC) padrão com ponto de colocação fora do domínio. Os outros dois algoritmos são baseados nas EIC auto-regularizadas do deslocamento e da força de superfície. A formulação auto-regularizada da força de superfície requer continuidade $C^{1,\alpha}$ no sentido de Hölder para o campo de deslocamentos, o que não é atendido ao se utilizar elementos de contorno usuais. Utiliza-se então o conceito de “continuidade relaxada”, permitindo que os deslocamentos sejam apenas contínuos $C^{1,\alpha}$ por partes. Esta formulação contém derivadas tangenciais do deslocamento, que não estão presentes na EIC original, e são obtidas com base nas derivadas das funções de interpolação do elemento. Portanto, duas possíveis fontes adicionais de erro são introduzidas quando da implementação da formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos contínuos. Com intuito de determinar a fonte de erro dominante, são implementados elementos descontínuos, os quais satisfazem os requisitos de continuidade em todos os pontos de colocação. Em etapa de pós-processamento são obtidos deslocamentos e tensões em pontos internos, através das formulações clássicas do MEC, e das formulações auto-regularizadas. A formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio produziu em geral bons resultados. Entretanto, a formulação auto-regularizada do deslocamento parece ser a melhor abordagem na análise de problemas de elasticidade. A formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos contínuos não apresentou resultados suficientemente precisos em todos os problemas, e em alguns casos não foi possível garantir convergência. Todavia, a adoção de elementos descontínuos representou ganho significativo na precisão, o que leva a crer que a adoção da hipótese de “continuidade relaxada” é a fonte de erros mais importante neste algoritmo. Resultados bastante precisos foram obtidos na análise das grandezas em pontos internos por meio das formulações auto-regularizadas, mesmo para pontos localizados muito próximos ao contorno.

Palavras-chaves: Algoritmos Não-singulares do Método dos Elementos de Contorno, Equações Integrais de Contorno Auto-Regularizadas, Hipótese de Continuidade Relaxada no MEC, Teoria da Elasticidade

ABSTRACT

Three non-singular boundary element algorithms for bidimensional elastostatics have been implemented in this work. The first algorithm is based on the standard boundary integral equation (BIE) with external collocation points. The other two algorithms are based on the self-regular form of the displacement and traction BIE. The displacement field is required to achieve $C^{1,\alpha}$ Hölder continuity in the self-regular traction formulation. This requirement is not met by the use of standard boundary elements. Thus, a “relaxed continuity” hypothesis is adopted, allowing the displacement field to be $C^{1,\alpha}$ piecewise continuous. This formulation makes use of the displacement tangential derivatives, which are not part of the original BIE and are obtained from the derivatives of the element interpolation functions. Therefore, two additional possible sources of error are introduced in the implementation of the self-regular traction formulation with continuous elements. In order to establish the dominant error source, discontinuous elements are adopted. These elements satisfy the continuity requirement at each collocation point, so the sources of error can be split. In a post-processing stage, the displacements and stresses at internal points are obtained, either through the classical boundary element formulations, or through the self-regular formulations. In general, the standard formulation with external collocation points have provided accurate results. Nevertheless, the self-regular displacement formulation seems to be the best approach on the evaluation of elastostatic problems. The self-regular traction formulation with continuous elements have not presented results accurate enough, for all problems, and in some cases it was not possible to guarantee the results convergence. However, the use of discontinuous elements represented a significant gain in results accuracy, which led us to believe that the “relaxed continuity” approach is probably the most important error source in this algorithm. The self-regular formulations for displacements and stresses at internal points are shown to be very reliable. The results obtained by means of these formulations are very accurate and stable, and do not depend on the internal point location regarding the boundary.

Keywords: Non-singular Boundary Element Algorithms, Self-regular Boundary Integral Equations, “Relaxed Continuity” Hypothesis on the Boundary Element Method, Theory of Elasticity

1

INTRODUÇÃO

Atualmente, o método dos elementos de contorno (MEC) encontra-se bastante difundido nos círculos de pesquisa, constituindo-se uma alternativa robusta aos métodos de domínio, como o método dos elementos finitos (MEF), na análise de vários problemas em engenharia. O sucesso do método se deve principalmente à redução da dimensão do problema em uma ordem, uma vez que o MEC requer discretização apenas do contorno do problema. Além disso, em geral é necessário menor número de graus de liberdade na análise de um problema pelo MEC para um grau de precisão comparável ao obtido na análise através do MEF. Para alguns problemas, especialmente aqueles envolvendo singularidades, obtém-se substancial ganho na precisão dos resultados ao se utilizar o método dos elementos de contorno ao invés dos métodos de domínio.

O método dos elementos de contorno se baseia nas equações integrais de contorno (EIC) que contém integrais singulares advindas das soluções fundamentais. A busca de uma abordagem computacional eficaz para a avaliação das integrais singulares tem sido uma das principais preocupações na implementação do MEC, desde o seu surgimento. Várias pesquisas vêm sendo desenvolvidas com intuito de lidar de forma correta e prática com as integrais singulares, dando origem a uma grande variedade de algoritmos

com diferentes graus de sucesso. Dentre os algoritmos desenvolvidos, aqueles baseados nas formas regularizadas das equações integrais de contorno parecem dar origem às abordagens mais apropriadas na implementação do MEC.

Os procedimentos de regularização empregados para reduzir a ordem de singularidade das EIC podem ser tanto locais quanto globais. Nas formulações mais usuais do MEC, são em geral utilizados algoritmos de regularização local, onde ao integrar o elemento que contém o ponto de colocação, são utilizados esquemas especiais de integração. Em contra-partida, nas formulações auto-regularizadas é adotada técnica de regularização global, onde as equações integrais de contorno, originalmente singulares, são reescritas de forma a se auto-regularizarem nos pontos onde seriam singulares na formulação clássica, dando origem a formulações que contêm no máximo integrais fracamente singulares ao longo de todo domínio. Portanto, a avaliação das integrais singulares no sentido do valor principal de Cauchy (VPC), ou parte finita de Hadamard (PFH), como usualmente empregado no MEC clássico pode ser evitada nos algoritmos baseados nas formulações auto-regularizadas das equações integrais de contorno.

Este trabalho tem como objetivo básico o estudo e aplicação das formulações auto-regularizadas do MEC para problemas bidimensionais da teoria da elasticidade. São implementadas as formulações auto-regularizadas do deslocamento e força de superfície, bem como a formulação padrão com pontos de colocação fora do domínio, associada à técnica de subelementação. Devido à presença de núcleos hipersingulares na formulação auto-regularizada da força de superfície, é exigido que o campo de deslocamentos seja contínuo $C^{1,\alpha}$ no sentido de Hölder para que a equação integral possua limite finito. Este requisito de continuidade não é atendido ao se utilizar elementos de contorno isoparamétricos contínuos baseados em funções de interpolação de classe C^0 . Duas abordagens são adotadas para superar este problema. A primeira consiste em assumir a hipótese de “continuidade relaxada”, permitindo que o campo de deslocamentos seja $C^{1,\alpha}$ contínuo apenas por partes. A segunda abordagem consiste na utilização de elementos descontínuos. Tais elementos satisfazem a condição de continuidade, uma vez que todos os pontos de colocação se localizam no interior do elemento onde o requisito de continuidade é atendido.

Duas possíveis fontes de erro são introduzidas pela formulação auto-regularizada da força de superfície utilizando elementos contínuos. Tais erros não ocorrem quando adota-se a formulação clássica do MEC ou a formulação auto-regularizada do deslocamento. O termo regularizador na EIC auto-regularizada da força de superfície contém derivadas tangenciais do deslocamento que não fazem parte da equação integral original. No algoritmo implementado, as derivadas tangenciais são avaliadas de forma local através do uso das derivadas das funções de interpolação do elemento. Desta forma, as derivadas tangenciais são aproximadas por polinômios de uma ordem inferior àqueles adotados na interpolação das demais grandezas do contorno, representando portanto uma possível fonte de erro na formulação auto-regularizada da força de superfície.

Outra possível fonte de erro é a adoção da hipótese de “continuidade relaxada”. Quando esta hipótese é adotada no presente algoritmo, os gradientes do deslocamento, que são parte do termo regularizador, não possuem valor único nos pontos de colocação compartilhados por dois elementos, conforme requisito analítico para a obtenção da formulação. Diferentes valores para o gradiente do deslocamento são adotados de acordo com a localização do ponto de colocação e o elemento a ser integrado.

No presente trabalho são implementados elementos descontínuos com intuito de separar estas possíveis fontes de erro e identificar a predominante. Ao empregar elementos descontínuos na formulação auto-regularizada da força de superfície, as derivadas tangenciais do deslocamento continuam sendo avaliadas através das derivadas das funções de interpolação, entretanto os gradientes do deslocamento passam a ser únicos em cada ponto de colocação.

Os deslocamentos e tensões em pontos internos são obtidos em uma etapa de pós-processamento, podendo-se utilizar tanto as formulações clássicas quanto as formulações auto-regularizadas do MEC. Neste caso, a principal vantagem ao se utilizar as formulações auto-regularizadas é que estas dão origem a uma representação contínua dos deslocamentos e tensões ao longo do domínio. Portanto, não existe tendência a

quase-singularidade, mesmo para pontos internos tão próximos ao contorno quanto se queira.

No capítulo 2 é apresentada uma breve revisão bibliográfica sobre o método dos elementos de contorno, dando ênfase ao estudo e aplicação das formulações auto-regularizadas. Os principais aspectos na obtenção das equações integrais de contorno para problemas bidimensionais de elasticidade são apresentados no capítulo 3, e a implementação dos respectivos algoritmos do MEC no capítulo 4.

O capítulo 5 contém alguns exemplos numéricos utilizados para testar e comparar a precisão dos algoritmos implementados. As conclusões obtidas ao longo do desenvolvimento do trabalho são apresentadas no capítulo 6.

Bons resultados são obtidos ao se utilizar a formulação padrão com pontos de colocação fora do domínio. Entretanto, a formulação auto-regularizada do deslocamento parece ser a abordagem mais apropriada na análise de problemas de elasticidade, uma vez que foram obtidos resultados bastante precisos, totalmente equivalentes àqueles obtidos através da formulação clássica para deslocamentos. A formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos contínuos não apresenta resultados tão precisos, e a convergência dos mesmos não pode ser assegurada para todos os casos, principalmente quando se utilizam funções de interpolação quadráticas. Entretanto, o uso de elementos descontínuos na mesma formulação apresenta significativo ganho na precisão dos resultados, apontando portanto a adoção da hipótese de “continuidade relaxada” como mais provável fonte de erro na formulação auto-regularizada da força de superfície.

2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O surgimento do método dos elementos de contorno (MEC) se deu na década de sessenta, tendo como pioneiros JASWON (1963) e SYMM (1963). Estes autores desenvolveram e aplicaram as equações integrais de contorno (EIC) para problemas bidimensionais de teoria de potencial. JASWON (1963) trata em seu artigo dos aspectos teóricos do método. O artigo de SYMM (1963) por sua vez, trata da implementação computacional, bem como da apresentação de resultados numéricos utilizando elementos constantes. São obtidos resultados convergentes com o refinamento da malha, confirmando a validade do método. Segundo SYMM (1963), o condicionamento ótimo do problema é alcançado quando se utilizam elementos de mesmo comprimento ao longo de todo o contorno. Estes autores apontam também a possibilidade de estender a aplicação das EIC para problemas de teoria da elasticidade, tendo em vista a analogia entre as equações básicas que regem os problemas de potencial e elasticidade.

RIZZO (1967) apresenta a formulação do MEC para problemas bidimensionais de elasticidade. As formulações são desenvolvidas com base na analogia entre elasticidade e potencial, conforme sugerido por JASWON (1963) e SYMM (1963). No trabalho de RIZZO (1967), além das implementações computacionais, são apresentados alguns

resultados numéricos utilizando os mesmos elementos adotados por SYMM (1963). RIZZO (1967) aponta que os núcleos singulares que surgem na obtenção da EIC para elasticidade são mais complicados que aqueles para o problema de potencial. Este autor ressalta que deve-se dar atenção especial aos núcleos singulares cujas integrais só existem no sentido do valor principal de Cauchy (VPC). CRUSE (1969) demonstra a obtenção e a utilização das EIC para problemas tridimensionais de elasticidade. Este autor utiliza em sua implementação elementos triangulares com aproximação linear para a geometria do problema, e funções de interpolação constantes para aproximar as grandezas do contorno (forças de superfície e deslocamentos nodais). Os resultados numéricos apresentados por CRUSE (1969) mostram que não há necessidade de se utilizar mesmo grau de refinamento para toda malha, conforme acreditava-se anteriormente (JASWON (1963) e SYMM (1963)).

CRUSE e VAN BUREN (1971) aplicam as equações integrais de contorno para análise elástica tridimensional de tensões em corpos de prova de mecânica da fratura com trinca de borda. Eles utilizam a equação integral de contorno para deslocamento na obtenção dos deslocamentos e forças de superfície no contorno, lançando mão da simetria do problema. Em etapa de pós-processamento obtêm-se as tensões nos pontos internos por meio da forma discretizada da identidade de Somigliana para tensão (IST). Segundo CRUSE e VAN BUREN (1971) as soluções obtidas por eles são compatíveis com os resultados obtidos via método dos elementos finitos, apresentados por CHAN et al. (1968). CRUSE e VAN BUREN (1971) afirmam que resultados mais precisos para as componentes de tensão avaliadas em pontos internos podem ser obtidos caso seja subtraída uma solução correspondente a um movimento de corpo rígido na identidade de Somigliana para tensão. CRUSE (1972) apresenta as equações integrais de contorno para problemas de potencial e elasticidade obtidas anteriormente ressaltando a analogia entre estas formulações. No mesmo artigo CRUSE (1972) desenvolve a EIC para problemas de elasto-plasticidade considerando pequenas deformações.

CRUSE (1978) apresenta a formulação clássica do MEC para problemas de mecânica da fratura e aponta suas deficiências matemáticas. Para o caso de trincas carregadas, uma vez que qualquer par de forças de superfície iguais e opostas geram equações

integrais idênticas, não é possível obter-se resultado único para o problema ao se utilizar a formulação clássica. Adicionalmente, existem duas variáveis incógnitas para cada nó localizado na superfície da trinca, ao passo que apenas uma equação pode ser escrita para cada um destes nós. CRUSE (1978) desenvolve portanto uma equação integral de contorno adicional para possibilitar a solução do problema de mecânica da fratura. Obtém-se a equação integral de contorno para força de superfície com base na identidade de Somigliana para tensão. Com intuito de suprir as deficiências da EIC primária, vários autores obtêm as equações integrais de contorno baseadas no gradiente da função campo, em diferentes áreas de aplicação. Tais equações são comumente chamadas de equações integrais de contorno hipersingulares.

Embora o método dos elementos de contorno encontre-se atualmente bastante desenvolvido, sendo aplicado a diversas áreas da engenharia, o tratamento das integrais singulares presentes nas equações integrais de contorno ainda é a principal dificuldade na implementação do método. Uma das primeiras abordagens utilizadas para a computação das integrais de diversas ordens de singularidade é o cálculo analítico das mesmas, como adotado, por exemplo, por SYMM (1963), RIZZO (1967) e CRUSE (1969) para problemas bidimensionais de potencial e problemas de elasticidade bidimensionais e tridimensionais, respectivamente. Nestes três casos as funções de interpolação para as grandezas do contorno são constantes, resultando em formas razoavelmente simples para as integrais singulares. CRUSE (1974) utiliza funções lineares na aproximação de deslocamentos e forças de superfície para problemas de elasticidade 3D, computando analiticamente as integrais fracamente singulares envolvidas. As equações obtidas por CRUSE (1974) são portanto mais elaboradas do que as utilizadas anteriormente. Mais recentemente GRAY et al. (1990) adotaram esquema de integração analítico na avaliação das integrais singulares, bem como das derivadas tangenciais envolvidas na formulação hipersingular do MEC para mecânica da fratura. FRANGI e GUIGGIANI (1999) apresentam método direto para avaliação das integrais singulares presentes na formulação do MEC para análise de placas, utilizando teoria de Kirchhoff. As integrais singulares são computadas analiticamente, porém em termos de coordenadas intrínsecas, de forma a possibilitar sua aplicação a elementos de contorno de qualquer ordem.

As integrais singulares podem também ser calculadas por meio de integração semi-analítica. PORTELA et al. (1992), bem como GALLEGO e DOMÍNGUEZ (1996), separam os integrandos singulares e hipersingulares em uma parte regular e outra singular, onde os termos regulares são avaliados numericamente e a parte singular calculada analiticamente. PORTELA et al. (1992) empregam este método quando da implementação da formulação dual do MEC para mecânica da fratura. Já GALLEGO e DOMÍNGUEZ (1996) utilizam-no na análise de problemas transientes de elasto-dinâmica.

A adoção de transformação de coordenadas, seguida de integração numérica padrão é outra abordagem amplamente utilizada na avaliação das integrais singulares presentes nas equações integrais de contorno. LI et al. (1985) adotam transformação de coordenadas polares triangulares para reduzir o grau de singularidade em uma ordem, na análise de problemas tridimensionais de elasto-plasticidade. Estes autores mapeiam as coordenadas dos elementos de contorno triangulares em quadrados, e as células internas tetraédricas em cubos. Os integrandos remanescentes não são regulares e portanto técnicas complementares são adotadas para computação das integrais. HUANG e CRUSE (1993) utilizam transformação de coordenadas polares em coordenadas cartesianas para tratar integrais quase-singulares. Ao adotar esta técnica obtém-se melhor precisão dos resultados em pontos internos, principalmente quando estes encontram-se próximos do contorno. TELLES (1987) propõe uma transformação não-linear de coordenadas que resulta em jacobiano nulo quando a distância entre o ponto de integração e o ponto de colocação tende a zero. Desta forma os pontos de integração são reposicionados próximos ao ponto de colocação, possibilitando uma melhor representação do comportamento singular do integrando. CERROLAZA e ALARCON (1989) empregam transformação bi-cúbica de coordenadas para avaliação de integrais fracamente e fortemente singulares. Resultados numéricos utilizando a transformação proposta são comparados com as soluções obtidas por meio da transformação de TELLES (1987) e quadratura de Gauss padrão. A transformação bi-cúbica de CERROLAZA e ALARCON (1989) mostra-se superior tanto à utilização de quadratura padrão quanto à transformação proposta por TELLES (1987). Entretanto, HUANG e CRUSE (1993) afirmam que a função obtida por CERROLAZA e ALARCON (1989)

após a transformação de coordenadas não é regular como estes autores esperavam, devido ao grande número de pontos de integração necessários para obtenção de resultados confiáveis. Além disso, a comparação das respostas obtidas por meio desta transformação com a solução via transformação de TELLES (1987) não é apropriada, uma vez que esta última foi desenvolvida apenas para tratamento de integrais quase-singulares cujo núcleo tem comportamento no máximo fortemente singular quando a distância entre os pontos de integração e colocação tende a zero. LI et al. (1992) adotam duas transformações de coordenadas combinadas para análise de integrais singulares em problemas tridimensionais. Primeiramente adotam a transformação proposta por LI et al. (1985) e em seguida é aplicada transformação cúbica de coordenadas. Estes autores obtêm resultados bastante precisos utilizando elementos quadráticos isoparamétricos, e afirmam que a técnica desenvolvida pode também ser empregada em análise de problemas não-lineares. DOBLARÉ e GRACIA (1997) apresentam transformação de coordenadas quártica não-linear na computação das integrais fracamente e fortemente singulares em problemas bidimensionais e tridimensionais. Os resultados obtidos por estes autores são comparados com outras técnicas de tratamento das integrais singulares, mostrando a eficiência do método proposto. DOBLARÉ e GRACIA (1997) apontam como vantagem da abordagem apresentada, a possibilidade de utilização de um único esquema de integração numérico para análise de todas integrais envolvidas no problema. JOHNSTON (2000) propõe uma transformação semi-sigmoidal de coordenada para avaliação das integrais fracamente singulares em problemas bidimensionais. Nesta transformação o elemento singular é dividido em dois intervalos e os pontos de integração são agrupados na extremidade do intervalo, próximos ao ponto singular. CRUZ (2001) utiliza a transformação de coordenadas proposta por TELLES (1987) para avaliação da integral fracamente singular presente na formulação auto-regularizada do potencial, para problemas bidimensionais, e obtêm resultados bastante precisos ao aumentar o número de pontos de integração.

A subelementação do elemento singular é empregada por vários autores quando da análise numérica das integrais singulares. Os elementos que contêm o nó singular são subdivididos em elementos menores, melhorando a integração próximo à singularidade. LACHAT e WATSON (1976) adotam subelementação adaptativa, onde o número de

divisões de cada elemento varia de acordo com a distância do elemento a ser integrado ao ponto de colocação. Esta abordagem pode tanto ser empregada isoladamente, como adotado por LACHAT e WATSON (1976), quanto associada a outra técnica. CASTOR e TELLES (2000) adotam esquema de subelementação juntamente com transformação de coordenadas cartesianas para coordenadas polares na avaliação das integrais singulares presentes no método dos elementos de contorno baseado nas funções de Green numéricas para problemas tridimensionais de mecânica da fratura. Embora alguns autores utilizem a técnica de subelementação para computação de integrais singulares, esta encontra sua maior aplicação na análise das integrais quase-singulares que surgem quando da avaliação das grandezas em pontos internos localizados a pequenas distâncias do contorno. HUANG e CRUSE (1994) adotam esta técnica para análise bidimensional de tensões em pontos internos. CHIEN et al. (1997) utilizam método de subdivisão adaptativa para cálculo de integrais quase-singulares, também com intuito de obter tensão em pontos internos. A subelementação empregada por estes autores é iterativa, sendo repetida sucessivamente até que sejam obtidos resultados convergentes.

As integrais singulares podem também ser avaliadas por meio de esquemas de integração numérica especial, como adotado, por exemplo, por IOAKIMIDIS (1995). Este autor emprega as quadraturas de Kutt e Radau na análise de integrais de parte finita, ou integrais hipersingulares, mostrando a rápida convergência de ambas quadraturas quando aplicadas a funções simples.

Outra abordagem possível na análise das integrais singulares é a modificação das equações integrais de contorno de forma a reduzir a ordem de singularidade do problema. POLCH et al. (1987) reduzem o grau de singularidade da EIC para força de superfície para problemas de mecânica da fratura com trinca plana, empregando integração por partes. Seguindo a mesma linha, CRUSE e NOVATI (1992) aplicam teorema da divergência juntamente com teorema de Stokes transformando as integrais de superfície em integrais de linha, e regularizando a integral hipersingular. CRUSE e NOVATI (1992) adotam esta metodologia na implementação da equação integral de

contorno para força de superfície para análise de problemas de mecânica da fratura com trincas curvas e múltiplas trincas.

Alguns autores utilizam a chamada subtração de singularidade quando da análise das integrais singulares. Nesta abordagem subtrai-se a parte singular do integrando, regularizando-o e possibilitando sua avaliação numérica por meio de quadratura Gaussiana padrão. Os termos remanescentes podem ser computados analiticamente ou numericamente. CRUSE e AITHAL (1993) subtraem termos da expansão do integrando em série de Taylor possibilitando emprego de quadratura numérica e analisam a parte singular remanescente analiticamente, como adotado por PORTELA et al. (1992). CRUSE e AITHAL (1993) utilizam esta abordagem na implementação do método dos elementos de contorno para problemas tridimensionais de elasticidade. FABRIKANT (1986) separa a integral singular em dois termos, um regular e outro singular, que é avaliado por meio de transformação de coordenadas polares. HALL e HIBBS (1991) regularizam a integral fracamente singular em elasticidade 3D através da subtração dos termos da expansão em série da função núcleo em termos de coordenadas locais paramétricas, e aplicam transformação de coordenadas polares para computar o termo singular remanescente. WILDE e ALIABADI (1999) subtraem a singularidade do integrando utilizando expansão em série na análise das integrais hipersingulares presentes na formulação para fratura geomecânica. LACERDA e WROBEL (2001) empregam esta técnica quando da implementação da formulação hipersingular do MEC para problemas axissimétricos de elasticidade.

Embora muitas das técnicas citadas sejam bastante eficientes e os estudos e desenvolvimentos das mesmas perdurem até o presente, estas não parecem ser o tratamento mais prático das singularidades, uma vez que são necessárias abordagens diferentes para o cálculo das integrais envolvidas na formulação, de acordo com a localização do ponto de colocação. A adoção de formulações não-singulares do método dos elementos de contorno parece ser uma alternativa interessante e eficiente à utilização das formulações singulares.

A adoção da formulação padrão do método dos elementos de contorno com pontos de colocação fora do domínio é uma das alternativas possíveis dentre as formulações não-singulares. Nesta formulação os pontos de colocação não se localizam sobre o contorno do problema, e sim externos ao domínio. Desta forma, os pontos de integração não coincidem com os pontos de colocação, não havendo portanto singularidades. No entanto podem surgir integrais quase-singulares se o ponto externo se localizar muito próximo ao contorno, e neste caso é necessário tratamento especial das integrais para evitar imprecisões numéricas. RIBEIRO (1992), bem como SILVA (1996) adotam esta formulação na análise de placas. SILVA (1996) emprega técnica de subelementação para minimizar os possíveis erros numéricos introduzidos quando o ponto de colocação se localiza a pequenas distâncias do contorno. CRUZ (2001) emprega a formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio associada à técnica de subelementação na avaliação de problemas bidimensionais de teoria de potencial utilizando elementos quadráticos, cúbicos e quárticos.

As formulações auto-regularizadas do método dos elementos de contorno, que surgem na década de 90 com intuito de remover as singularidades presentes nas equações integrais de contorno, parecem ser a abordagem mais natural para computação das EIC. Nas formulações auto-regularizadas, a EIC é reescrita de maneira a se regularizar nos pontos onde seria singular, evitando análise das integrais singulares no sentido do valor principal de Cauchy (VPC), ou parte finita de Hadamard (PFH), no caso de integrais hipersingulares. Nestas formulações a regularização da equação integral de contorno é feita antes da discretização da mesma. Embora as formulações auto-regularizadas utilizadas atualmente tenham sido apresentadas somente na década de 90, segundo LIU (2000), o primeiro autor a adotar regularização global da EIC foi CRUSE (1974), ao analisar de forma indireta a integral de valor principal de Cauchy através da consideração de movimento de corpo rígido.

RUDOLPHI (1991) foi um dos primeiros a desenvolver as formulações auto-regularizadas empregando a abordagem adotada até o presente. Em seu artigo RUDOLPHI (1991) apresenta a formulação auto-regularizada do potencial, obtida através da imposição na equação integral de uma solução simples correspondente a um

campo de potencial constante. Este autor desenvolve ainda a formulação auto-regularizada do gradiente do potencial de forma análoga, através da subtração de um campo linear de potencial. O termo regularizador é obtido através da expansão em série de Taylor do campo de potencial. Segundo RUDOLPHI (1991), as variáveis envolvidas na EIC auto-regularizada são as mesmas da EIC clássica. Além disso, o significado da equação integral de contorno original não é modificado devido à regularização.

Os algoritmos do MEC baseados nas formulações auto-regularizadas apresentam como vantagem a possibilidade de utilização de um único esquema de integração numérica para computação de todas as integrais envolvidas na formulação, além da utilização de baixa ordem de integração. As equações integrais de contorno auto-regularizadas vêm se difundindo na comunidade do método dos elementos de contorno, tendo vários campos de aplicação.

LUTZ et al. (1992) apresentam as formulações auto-regularizadas do MEC para problemas tridimensionais de mecânica da fratura. São apresentadas a formulação auto-regularizada do deslocamento e a formulação auto-regularizada da força de superfície. A primeira é obtida impondo-se movimento de corpo rígido ao problema. Para obtenção da segunda formulação impõe-se uma solução correspondente a um campo de deformação constante. Segundo LUTZ et al. (1992), as equações integrais de contorno auto-regularizadas conforme desenvolvidas para elasticidade não podem ser diretamente aplicadas a problemas de mecânica da fratura, pois neste caso o equilíbrio seria violado. Utiliza-se então um contorno auxiliar em torno do elemento singular, permitindo a aplicação das EIC auto-regularizadas desenvolvidas na formulação dual do MEC. RICHARDSON e CRUSE (1998) apresentam novamente a EIC auto-regularizada para mecânica da fratura. Entretanto, ao invés de adotar a formulação dual do método dos elementos de contorno, desenvolvem a formulação auto-regularizada da força de superfície escrita em termos da abertura da trinca. RICHARDSON e CRUSE (1998) mostram que a formulação para mecânica da fratura pode ser vista como uma extensão da formulação para elasticidade. LIU e RIZZO (1992) apresentam a formulação fracamente singular para a EIC hipersingular aplicada a problemas tridimensionais de onda acústica. Na continuação do trabalho de 1992, LIU e RIZZO (1993) desenvolvem

as equações integrais de contorno auto-regularizadas para problemas de radiação e propagação de ondas elásticas em 3D. Embora tenham obtido bons resultados, estes autores chamam atenção para o fato de que o problema vetorial parece necessitar de malha mais refinada que o problema escalar (onda acústica) para alcançar o mesmo grau de precisão. CRUSE e SUWITO (1993) demonstram a obtenção da EIC auto-regularizada da força de superfície para problemas tridimensionais de elasticidade, e afirmam que a natureza regular da identidade de Somigliana para tensão é intrínseca à mesma. Neste trabalho os autores ressaltam que a equação integral de contorno deve ser computada em pontos onde haja continuidade de tensão. Para o caso de descontinuidade de normal ou força de superfície é necessário utilizar duas equações, por exemplo, com adoção de nós duplos nos cantos, ou elementos semicontínuos. MATSUMOTO et al. (1993) apresentam uma versão modificada da formulação auto-regularizada do gradiente do deslocamento, onde não são envolvidas derivadas tangenciais. O processo de regularização utilizado por eles se baseia na remoção de uma das soluções triviais da equação que rege o problema. Adota-se um campo constante de gradiente de deslocamento, e tem-se como variáveis do problema os gradientes do deslocamento ao invés dos deslocamentos. HUANG e CRUSE (1994) apresentam resultados para problemas bidimensionais da teoria da elasticidade e estendem as formulações auto-regularizadas do deslocamento e força de superfície para pontos de canto. CRUSE e RICHARDSON (1996) demonstram analiticamente que as formulações auto-regularizadas do deslocamento e da força de superfície são totalmente equivalentes às formulações clássicas do método dos elementos de contorno, que envolvem integrais de valor principal de Cauchy e parte finita de Hadamard. SLADEK e SLADEK (1995) aplicam as formulações não-singulares na análise de placas fletidas, utilizando teoria de Kirchhoff. POON et al. (1998) obtêm a forma auto-regularizada da EIC hipersingular para problemas de elasto-plasticidade. A equação integral de contorno obtida por estes autores é válida para todos os pontos do contorno, inclusive para cantos, desde que seja garantida continuidade de tensões e deformações plásticas nestes pontos. MUKHERJEE et al. (1999) apresentam utilização das soluções simples na regularização das integrais hipersingulares para problemas de mecânica da fratura termo-elástica. MUKHERJEE (2002) desenvolve formulação auto-regularizada para problemas axissimétricos de elasticidade. Este autor aponta que a dificuldade de se aplicar as regularizações usuais

para estes problemas é o fato de que o emprego de solução correspondente ao movimento de corpo rígido na direção radial viola a axissimetria. MUKHERJEE (2002) adota então movimento de corpo rígido na direção perpendicular ao plano axissimétrico, e campo de deslocamento linear na regularização de equação integral de contorno hipersingular.

As equações integrais de contorno auto-regularizadas mostram-se bastante eficientes não só na análise das grandezas no contorno, como também na obtenção das respostas em pontos internos. SLADEK et al. (1993), RICHARDSON e CRUSE (1999) e CRUZ (2001), entre outros, empregam as formulações auto-regularizadas para avaliação das grandezas em pontos internos para problemas de elasticidade (SLADEK et al., 1993 e RICHARDSON e CRUSE, 1999) e potencial (CRUZ, 2001). Estes autores mostram que as formulações auto-regularizadas são bastante eficientes para pontos internos, mesmo quando estes se localizam muito próximos ao contorno.

Devido à presença dos núcleos singulares nas equações integrais de contorno, deve-se ter atenção especial quanto à suavidade das funções densidade, de forma a garantir que as EIC tenham limite finito (COURANT e HILBERT, 1962). Segundo KRISHNASAMY et al. (1992) e MARTIN e RIZZO (1996), o requisito de continuidade das funções densidade para as equações integrais de contorno auto-regularizadas é o mesmo que para a respectiva EIC fortemente singular ou hipersingular. A ordem de singularidade do núcleo é que determina o requisito de suavidade para a função densidade (LIU e RIZZO, 1992).

Na equação integral de contorno primária para elasticidade, isto é, na EIC para deslocamento, o campo de deslocamento deve ser contínuo $C^{0,\alpha}$ no sentido de Hölder. Tal requisito é em geral atendido quando se utilizam os elementos contínuos padrão. Entretanto, ao lidar com a equação integral de contorno baseada no gradiente, ou seja, no caso de elasticidade a EIC para a força de superfície, o requisito de continuidade é mais forte. As equações integrais de contorno baseadas no gradiente da função campo são obtidas através da derivação das EIC primárias, resultando em equações integrais que contém núcleos cujas ordens de singularidade são mais altas (fortemente singulares

e hipersingulares). Neste caso, para problemas de elasticidade o campo de deslocamentos deve ser contínuo $C^{1,\alpha}$ no sentido de Hölder. A discretização do contorno em elementos contínuos padrão implica na perda da continuidade requerida para deslocamentos nos nós localizados na junção entre elementos (MARTIN e RIZZO, 1996). Portanto, *a priori* somente elementos de contorno que garantem continuidade $C^{1,\alpha}$ no sentido de Hölder em cada ponto de colocação podem ser utilizados na discretização desta EIC. Tendo em vista os requisitos de continuidade para as EIC hipersingulares, cinco abordagens básicas são adotadas pelos pesquisadores do MEC.

A primeira abordagem trata-se do uso de elementos de contorno contínuos baseados em funções de interpolação de classe C^1 . Tais elementos englobam tanto os chamados elementos “Overhauser” quanto os “Hermite”. Quando se utilizam elementos “Overhauser” (CAMP e GIBSON, 1991; JOHNSTON, 1997), a continuidade da primeira derivada da variável campo é garantida de forma implícita, sem introduzir novas variáveis à formulação original. A continuidade é obtida através do uso das informações (deslocamento e força de superfície) dos nós adjacentes ao elemento, em ambos lados do mesmo. Entretanto, as funções de forma dos elementos “Overhauser” são mais complexas e ainda não estão bem desenvolvidas para alguns casos. Além disso, estes elementos apresentam algumas desvantagens, como por exemplo sua incapacidade de modelar descontinuidades geométricas. LIU e RIZZO (1992), LIU e RIZZO (1993) e SLADEK e SLADEK (1995) utilizam estes elementos na discretização das equações integrais de contorno auto-regularizadas para problemas de onda acústica, radiação e propagação de onda elástica, e placas, respectivamente. O uso de elementos “Hermite” por sua vez, introduz novas variáveis no problema, uma vez que a continuidade é obtida incorporando-se as derivadas tangenciais nas funções de forma. Neste caso as variáveis extras são computadas através do uso da equação integral da derivada tangencial. Portanto, esta abordagem acarreta em custo computacional mais elevado e maior dificuldade de implementação. Exemplos da aplicação destes elementos podem ser vistos para problemas de elasticidade, em MUCI-KÜCKLER e RUDOLPHI (1993) e para mecânica da fratura, em GRAY e SOUCIE (1993) e WATSON (1995).

A segunda abordagem utiliza elementos descontínuos padrão, como adotado por RUDOLPHI (1991), LIU e RIZZO (1992), PORTELA et al. (1992), LIU e RIZZO (1993) e LACERDA e WROBEL (2001) para problemas de potencial, onda acústica, mecânica da fratura, onda elástica, e elasticidade axissimétrica, respectivamente. Os elementos descontínuos preservam a continuidade $C^{1,\alpha}$, uma vez que todos pontos de colocação se localizam no interior do elemento, onde o requisito de continuidade é satisfeito. Entretanto podem surgir quase-singularidades, pois os nós funcionais se localizam a pequenas distâncias da extremidade dos elementos, podendo gerar desta forma um sistema de equações mal condicionado. Adicionalmente, o uso de tais elementos implica em um maior sistema de equações a ser resolvido, já que um nó extra é criado para cada nó localizado na interseção entre elementos. Além disso, esta abordagem permite a descontinuidade da variável campo nas junções entre elementos, embora os resultados reportados na literatura indiquem continuidade da solução.

A terceira alternativa consiste em utilizar elementos contínuos baseados em funções de interpolação de classe C^0 , porém com pontos de colocação localizados apenas no interior do elemento, onde o requisito de continuidade é satisfeito. Neste caso os nós geométricos do elemento se localizam nas extremidades dos mesmos, assim como para os elementos padrão, e as funções de interpolação são escritas para estes nós. Alguns exemplos da utilização desta abordagem são vistos em LUTZ et al. (1992) para problemas de mecânica da fratura elástica, SLADEK et al. (1993) e DOMÍNGUEZ et al. (2000) para teoria de potencial e elasticidade, e GALLEGO e DOMÍNGUEZ (1996) para problemas transientes de elasto-dinâmica.

Uma quarta alternativa trata-se do uso do princípio variacional, como apresentado por JORGE et al. (2002) para problemas bidimensionais de elasticidade. Neste caso força-se a continuidade da função campo na interseção entre elementos, e novas incógnitas, escritas como multiplicadores de Lagrange, são introduzidas. São escritas equações de restrição subsidiárias para as descontinuidades da derivada da função campo nos nós entre elementos, igualando-se a descontinuidade a zero. O requisito de continuidade é então satisfeito no sentido variacional. A desvantagem desta abordagem é o aumento do

número de graus de liberdade para uma dada discretização, quando comparada com a utilização de elementos contínuos padrão.

A quinta abordagem se baseia na relaxação dos requisitos de continuidade para a variável campo. Ao assumir a hipótese de “continuidade relaxada” pode-se adotar elementos contínuos padrão, e permite-se a utilização de pontos de colocação na interseção entre elementos, onde somente continuidade $C^{1,\alpha}$ por partes é garantida. CHIEN et al. (1991) foram uns dos primeiros a relaxar os requisitos de continuidade quando do desenvolvimento da equação integral de contorno para tensão, visando avaliar estas grandezas no contorno em etapa de pós-processamento. Estes autores mostram que os resultados obtidos são coerentes com os obtidos através do emprego de diferenças finitas (BREBBIA et al., 1984), entretanto quando se trata de problemas que envolvem singularidade de tensão a forma regularizada parece conduzir a uma melhor representação das tensões próximo ao ponto singular. Vários autores tentaram relaxar os requisitos de continuidade em diversos campos de aplicação, como por exemplo, MATSUMOTO et al. (1993), HUANG e CRUSE (1994), CRUSE e RICHARDSON (1996) e YOUNG (1997) para problemas de elasticidade, YOUNG (1996) e RICHARDSON e CRUSE (1998) para mecânica da fratura elástica, POON et al. (1998) para elasto-plasticidade, LIU e CHEN (1999) para problemas de acústica, CRUSE e RICHARDSON (2000) e JORGE et al. (2001) para teoria de potencial, entre outros.

Embora bons resultados tenham sido obtidos pelos autores supracitados utilizando o conceito de “continuidade relaxada”, MARTIN e RIZZO (1996) afirmam que a hipótese de “continuidade relaxada” não pode ser justificada teoricamente. Em trabalho anterior, KRISHNASAMY et al. (1992) afirmam que o preenchimento dos requisitos de continuidade é condição necessária, e na maioria dos casos suficiente, para garantir a existência de limite finito para a equação integral de contorno. Tendo em vista os bons resultados numéricos obtidos por CRUSE e seus co-autores (HUANG e CRUSE, 1994; RICHARDSON et al., 1997), e os requisitos de continuidade teóricos, MARTIN et al. (1998) retomam a discussão sobre a validação da hipótese de “continuidade relaxada”. Estes autores apontam que uma das possibilidades de relaxar os requisitos de continuidade é assumir continuidade suficiente para se obter a EIC auto-regularizada e

então relaxar estes requisitos quando da discretização da EIC. Todavia, MARTIN et al. (1998) afirmam que a convergência e precisão dos resultados não podem ser asseguradas, pois esta abordagem contém inconsistências matemáticas. Com base nestas discussões, LIU e RUDOLPHI (1999) apontam a necessidade de se apresentar um estudo de convergência, numérico e analítico, ou um contra-exemplo mostrando divergência, de forma a validar a utilização da hipótese de “continuidade relaxada” nos algoritmos do método dos elementos de contorno. CRUZ et al. (2001) usam esta hipótese na formulação auto-regularizada do fluxo para análise de problemas não-triviais de transmissão de calor e obtêm convergência oscilatória dos resultados. Na continuação do trabalho de 2001, RIBEIRO, G. et al. (2002) analisam problemas de potencial que contêm singularidade de fluxo por meio da mesma formulação adotada no trabalho anterior, e novamente obtêm resultados oscilatórios. Observações análogas são feitas por RIBEIRO, T. et al. (2002 b, d) ao adotar o conceito de “continuidade relaxada” na formulação auto-regularizada da força de superfície para análise de problemas bidimensionais de elasticidade.

3

EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO

3.1 - Introdução

As equações integrais de contorno (EIC) descrevem as incógnitas do problema em termos das grandezas do contorno. O desenvolvimento destas equações depende de alguns fatores básicos a saber: (a) o operador diferencial deve ser elíptico, garantindo desta forma a continuidade da solução, bem como de sua derivada primeira, (b) a equação diferencial que rege o problema deve ter solução fundamental conhecida, (c) deve existir uma relação integral recíproca entre duas soluções da equação diferencial.

Neste capítulo as equações integrais de contorno clássicas para problemas bidimensionais da teoria da elasticidade são mostradas de forma breve. O foco do capítulo é a apresentação dos principais passos para a obtenção das equações integrais de contorno auto-regularizadas do deslocamento e força de superfície. Mostra-se também a EIC clássica para deslocamentos com pontos de colocação fora do domínio, que dá origem a uma terceira formulação não-singular.

3.2 – Equação Integral de Contorno Clássica

A equação integral de contorno é aquela que satisfaz de forma exata a equação diferencial que rege o problema. Para elasticidade esta equação diferencial é representada pela equação de equilíbrio de Navier, que para um corpo isotrópico é dada por:

$$\frac{1}{1-2\nu} u_{j,ij} + u_{i,jj} + \frac{1}{G} f_i = 0 \quad (1)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson, G é o módulo de elasticidade transversal, $u_{i,jj}$ são as derivadas segundas do deslocamento (u_i) e f_i são as forças de volume. O operador diferencial desta equação é elíptico para todo valor de $\nu < 0,5$ garantindo que os deslocamentos e tensões sejam contínuos em todo o domínio Ω .

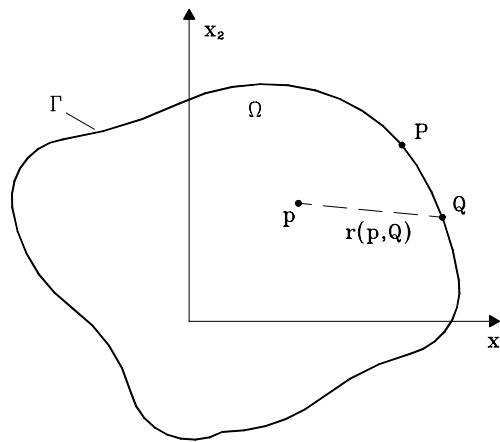


FIGURA 1 - Geometria do Problema

A solução fundamental para a equação de Navier, que corresponde à solução de Kelvin para uma carga pontual em um corpo infinito, é obtida através da substituição da força de volume na Eq.1 pela função delta de Dirac ($\Delta(p,Q)$) em sua forma vetorial.

$$\frac{1}{1-2\nu} u_{j,ij} + u_{i,jj} + \frac{1}{G} \Delta(p,Q) \cdot e_i = 0 \quad (2)$$

onde e_i são vetores unitários na direção dos eixos cartesianos x_i . Para problemas bidimensionais a solução fundamental para deslocamentos é dada pela Eq.3:

$$u_i^*(p, Q) = U_{ji}(p, Q) \cdot e_j = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] \quad (3)$$

sendo $r=r(p, Q)$ a distância entre o ponto fonte (p) e o ponto campo (Q), conforme FIG.1, $r_{,j}$ a derivada de r em relação a x_j e δ_{ij} a função delta de Kronecker. O campo de forças de superfície correspondente à solução fundamental é dado por:

$$\begin{aligned} t_i^*(p, Q) &= T_{ji}(p, Q) \cdot e_j = \\ &= -\frac{1}{4\pi r G(1-\nu)} \left\{ \frac{dr}{dn} \left[(1-2\nu) \delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j} \right] - (1-2\nu) \left[n_j r_{,i} - n_i r_{,j} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

A relação integral recíproca necessária para o desenvolvimento da EIC para problemas de elasticidade é dada pelo teorema do trabalho recíproco de Betti, que relaciona dois estados de tensão em um corpo linear elástico (Eq.5):

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^2 d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^2 \varepsilon_{ij}^1 d\Omega \quad (5)$$

onde os sobrescritos 1 e 2 denotam estados correspondentes a soluções distintas para a equação diferencial.

Seja o estado 1 correspondente às funções densidade do problema e o estado 2 às soluções fundamentais ($2 \equiv *$). Substituindo-se as relações deslocamento-deformação, integrando por partes e aplicando o teorema da divergência no lado esquerdo da Eq.5 obtém-se na ausência de forças de volume (CRUSE, 1988):

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{i,j}^* d\Omega = \int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma \quad (6)$$

Operando-se de forma análoga no lado direito da Eq.5, devido à natureza singular da solução fundamental, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* u_{i,j} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \Delta(p, Q) \cdot e_i \cdot u_i d\Omega \quad (7)$$

A propriedade da função delta de Dirac reduz então a integral de volume a um termo livre envolvendo o deslocamento u_i avaliado no ponto fonte p . Reorganizando os termos e utilizando as igualdades para as soluções fundamentais (Eq.3 e Eq.4) obtém-se a identidade de Somigliana para deslocamentos (ISD) (CRUSE, 1988).

$$u_j(p) = - \int_{\Gamma} u_i(Q) T_{ji}(p, Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} t_i(Q) U_{ji}(p, Q) d\Gamma(Q) \quad (8)$$

A equação integral de contorno para deslocamentos é então obtida ao se fazer o ponto fonte tender ao contorno ($p \rightarrow P$). Devido à descontinuidade da ISD faz-se necessário o uso de uma região de exclusão envolvendo o ponto de colocação, mostrada na FIG.2, para a obtenção da EIC.

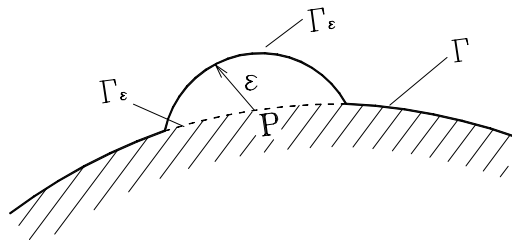


FIGURA 2 - Região de Exclusão para Equação Integral de Contorno

$$\begin{aligned} u_i(P) = & \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} U_{ji}(P, Q) t_i(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma_\varepsilon} U_{ji}(P, Q) t_i(Q) d\Gamma(Q) \\ & - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} T_{ji}(P, Q) u_i(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma_\varepsilon} T_{ji}(P, Q) u_i(Q) d\Gamma(Q) \end{aligned} \quad (9)$$

Todas as integrais em $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$ são regulares quando o ponto fonte tende ao contorno e o parâmetro ε tende a zero. Devido à ordem de singularidade da solução fundamental para

deslocamentos e da superfície de exclusão, tem-se que no limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$, a segunda integral da Eq.9 é nula. A solução em termos de força de superfície por sua vez possui ordem de singularidade mais elevada. Portanto, para que a quarta integral da Eq.9 tenha limite finito, o campo de deslocamentos deverá ser contínuo $C^{0,\alpha}$ no sentido de Hölder no ponto de colocação P (COURANT e HILBERT, 1962). Aplicando-se esta condição de continuidade à segunda integral da Eq.9 e fazendo o parâmetro ε tender a zero, obtém-se um termo livre proveniente da descontinuidade da integral. Desta forma, reorganizando os termos obtém-se a forma final da equação integral de contorno clássica para deslocamentos:

$$C_{ij}(P)u_j(P) = - \int_{\langle \Gamma \rangle} u_i(Q)T_{ji}(P,Q)d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} t_i(Q)U_{ji}(P,Q)d\Gamma(Q) \quad (10)$$

onde a primeira integral, cujo domínio de integração é representado por $\langle \Gamma \rangle$, deverá ser analisada no sentido do valor principal de Cauchy (VPC), devido à presença do núcleo fortemente singular ($T_{ji}(P,Q)$). O parâmetro $C_{ij}(P)$ advém do conceito de ângulo sólido, e é dado por:

$$C_{ij}(P) = \begin{cases} 1/2 & \text{para contornos suaves} \\ 1 & \text{para pontos internos ao contorno (p)} \\ 0 & \text{para pontos externos ao contorno (P')} \\ \beta/2\pi & \text{para contornos não-suaves. Onde } \beta \text{ é o ângulo interno formado} \\ & \text{por dois elementos adjacentes, conforme FIG.3} \end{cases} \quad (11)$$

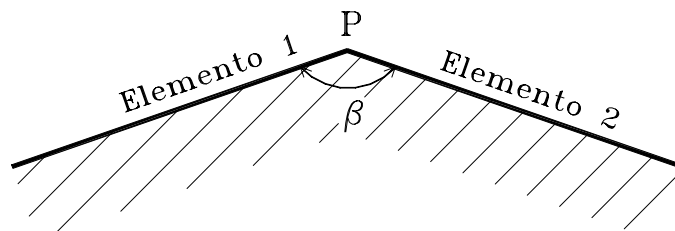


FIGURA 3 - Definição de β

A equação integral de contorno com ponto de colocação fora do domínio é obtida a partir da Eq.10, lembrando-se apenas que para pontos externos o parâmetro $C_{ij}(P')$ é nulo.

$$0 = - \int_{\Gamma} u_i(Q) T_{ji}(P', Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} t_i(Q) U_{ji}(P', Q) d\Gamma(Q) \quad (12)$$

Esta equação não é singular, uma vez que o ponto de colocação P' e de integração Q não serão coincidentes, não necessitando portanto de avaliação de nenhuma das integrais no sentido do valor principal de Cauchy.

Derivando-se a identidade de Somigliana para deslocamentos (Eq.8) e substituindo-a na Lei de Hooke obtém-se a identidade de Somigliana para tensões (IST), que é a representação integral da tensão σ_{ij} em um ponto interno p em função das grandezas do contorno. A IST é expressa pela Eq.13:

$$\sigma_{ij}(p) = - \int_{\Gamma} u_k(Q) S_{kij}(p, Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} t_k(Q) D_{kij}(p, Q) d\Gamma(Q) \quad (13)$$

onde $S_{kij}(p, Q)$ e $D_{kij}(p, Q)$ são as soluções fundamentais apresentadas na Eq.14.

$$S_{kij}(p, Q) = \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2 \frac{dr}{dn} \left[(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \right. \\ \left. + 2\nu(n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu)(2n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right\} \quad (14)$$

$$D_{kij}(p, Q) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ (1-2\nu)(\delta_{ki}r_{,j} + \delta_{kj}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right\}$$

A Eq.13 contém um núcleo fortemente singular ($D_{kij}(p, Q)$) e outro hipersingular ($S_{kij}(p, Q)$) no limite quando o ponto fonte tende ao contorno ($p \rightarrow P$). As integrais hipersingulares existem quando a função densidade é contínua $C^{1,\alpha}$ no sentido de Hölder no ponto de colocação (MARTIN e RIZZO, 1996). Neste caso, as derivadas primeiras do deslocamento devem ser contínuas no sentido de Hölder. A abordagem mais usual para lidar com as integrais fortemente singulares e hipersingulares é utilizar os conceitos

de valor principal de Cauchy e parte finita de Hadamard (PFH) para se obter a EIC da tensão. Este procedimento é análogo ao utilizado para a obtenção da EIC do deslocamento.

$$C_{ij}(P)\sigma_{ij}(P) = - \int_{\langle\langle\Gamma\rangle\rangle} u_k(Q)S_{kij}(P,Q)d\Gamma(Q) + \int_{\langle\Gamma\rangle} t_k(Q)D_{kij}(P,Q)d\Gamma(Q) \quad (15)$$

Conforme mencionado anteriormente, devido à ordem de singularidade dos núcleos, a primeira integral na Eq.15, cujo domínio de integração é representado por $\langle\langle\Gamma\rangle\rangle$, é avaliada no sentido de parte finita de Hadamard e a segunda no sentido do valor principal de Cauchy.

3.3 – Equações Integrais de Contorno Auto-Regularizadas

As formas auto-regularizadas das equações integrais de contorno são obtidas através da regularização das identidades de Somigliana para deslocamento e tensão, de forma que as equações resultantes do processo de regularização possuam integrais no máximo fracamente singulares. Conseqüentemente, a avaliação das integrais no sentido de VPC ou PFH como usualmente empregado no MEC clássico podem ser evitadas. É importante ressaltar que o processo de regularização empregado não modifica o significado da EIC original, tratando-se apenas de manipulação algébrica da mesma.

3.3.1 – EIC Auto-Regularizada do Deslocamento

A formulação auto-regularizada do deslocamento é obtida operando-se sobre a Identidade de Somigliana para Deslocamentos (Eq.8, repetida abaixo).

$$u_j(p) = - \int_{\Gamma} u_i(Q)T_{ji}(p,Q)d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} t_i(Q)U_{ji}(p,Q)d\Gamma(Q)$$

Conforme mencionado na seção anterior, esta equação possui uma integral fortemente singular, e uma integral fracamente singular, respectivamente, quando o ponto fonte tende ao contorno ($p \rightarrow P$). Desta forma, devido à presença do núcleo fortemente singular, para que a Eq.8 tenha limite finito quando $p \rightarrow P$, o campo de deslocamentos deve atender à condição de continuidade no sentido de Hölder ($u \in C^{0,\alpha}$). Aplicando as condições de continuidade na Eq.8, obtém-se (CRUSE e RICHARDSON, 1996):

$$u_j(p) = - \int_{\Gamma} [u_i(Q) - u_i(P)] T_{ji}(p, Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} t_i(Q) U_{ji}(p, Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} u_i(P) T_{ji}(p, Q) d\Gamma(Q) \quad (16)$$

A primeira integral da Eq.16 é regular em todos os pontos onde o requisito de continuidade de Hölder para deslocamentos seja satisfeito. A segunda integral na Eq.16 também é contínua devido à ordem de singularidade fraca da solução fundamental para deslocamentos. O núcleo fortemente singular presente na terceira integral da Eq.16 pode ser decomposto em um termo descontínuo e outro singular. Sendo o contorno fechado, a integral do termo singular do núcleo é nula pela aplicação do teorema de Stokes. O termo descontínuo do núcleo, por sua vez, pode ser analisado de forma análoga ao apresentado na seção anterior, dando origem a um termo livre (Eq.17).

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u_i(P) T_{ji}(p, Q) d\Gamma(Q) = u_i(P) \delta_{ij} = u_j(P) \quad (17)$$

A Identidade de Somigliana para deslocamento assume portanto a seguinte forma auto-regularizada (CRUSE e RICHARDSON, 1996):

$$u_j(p) - u_j(P) = - \int_{\Gamma} [u_i(Q) - u_i(P)] T_{ji}(p, Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} t_i(Q) U_{ji}(p, Q) d\Gamma(Q) \quad (18)$$

A Eq.18 apresenta uma transição suave dos deslocamentos quando os pontos internos tendem ao contorno, uma vez satisfeito o requisito de continuidade. A regularização não foi completa, pois a segunda integral na Eq.18 não foi regularizada. Esta integral é uma

integral imprópria e possui limite finito quando o ponto interno tende ao contorno. O deslocamento no ponto interno ($u_j(p)$) é igual ao seu valor no contorno ($u_j(P)$) quando $p \rightarrow P$.

A EIC auto-regularizada do deslocamento é obtida ao se fazer o ponto fonte tender ao contorno ($p \rightarrow P$) na identidade de Somigliana auto-regularizada (Eq.18).

$$0 = - \int_{\Gamma} [u_i(Q) - u_i(P)] T_{ji}(P, Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} t_i(Q) U_{ji}(P, Q) d\Gamma(Q) \quad (19)$$

Observa-se aqui que devido ao processo de regularização, não é necessária avaliação das integrais no sentido do VPC, uma vez que todos os termos descontínuos e singulares foram previamente regularizados. Este processo de regularização é equivalente à aplicação de uma solução simples correspondente a um deslocamento de corpo rígido na Eq.8, de forma análoga ao apresentado por RUDOLPHI (1991) para problemas de potencial. Ao aplicar o deslocamento de corpo rígido não há modificação no problema original, uma vez que não são introduzidas tensões ou deformações no corpo.

3.3.2 – EIC Auto-Regularizada da Força de Superfície

A obtenção da forma auto-regularizada da equação integral de contorno para força de superfície se dá por meio de operações algébricas sobre a Identidade de Somigliana para Tensão (Eq.13, repetida abaixo).

$$\sigma_{ij}(p) = - \int_{\Gamma} u_k(Q) S_{kij}(p, Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} t_k(Q) D_{kij}(p, Q) d\Gamma(Q)$$

Quando o ponto fonte tende ao contorno ($p \rightarrow P$), observa-se a presença de uma integral hipersingular (primeira integral) e outra fortemente singular (segunda integral) na Identidade de Somigliana para Tensão (Eq.13). Devido à presença da integral hipersingular, o campo de deslocamento deve ter a sua primeira derivada contínua no

sentido de Hölder ($u \in C^{1,\alpha}$) para que a EIC tenha limite finito quando $p \rightarrow P$ (MARTIN e RIZZO, 1996).

A forma regularizada da IST pode ser obtida através da adição e subtração dos dois primeiros termos da expansão em série de Taylor da função densidade de deslocamentos em torno do ponto de colocação e da solução correspondente para força de superfície, como mostrado por exemplo por RUDOLPHI (1991), CRUSE e SUWITO (1993), GALLEGU e DOMINGUÉZ (1996). Conforme demonstrado por CRUSE e RICHARDSON (1996), outra abordagem para se obter a IST auto-regularizada é derivar a identidade de Somigliana para deslocamento auto-regularizada (Eq.18) com relação às coordenadas do ponto de colocação. Ambos procedimentos correspondem à adição e subtração de um estado de tensão constante equivalente à tensão no ponto de colocação, dando origem à seguinte expressão para a IST auto-regularizada:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(p) = & \sigma_{ij}(P) - \int_{\Gamma} [u_k(Q) - u_k^L(Q)] S_{kij}(p, Q) d\Gamma(Q) \\ & + \int_{\Gamma} [t_k(Q) - t_k^L(Q)] D_{kij}(p, Q) d\Gamma(Q) \end{aligned} \quad (20)$$

onde $u_k^L(Q)$ e $t_k^L(Q)$ são estados linearizados do deslocamento e força de superfície, respectivamente, correspondentes à tensão no ponto de colocação P do contorno, e são dados por (RICHARDSON et al., 1997):

$$\begin{aligned} u_k^L(Q) = & u_k(P) + u_{k,m}(P)[x_m(Q) - x_m(P)] \\ t_k^L(Q) = & \sigma_{km}(P)n_m(Q) \end{aligned} \quad (21)$$

sendo $u_{k,m}(P)$ as derivadas dos deslocamentos com relação às coordenadas do ponto de colocação, x_m as coordenadas dos pontos de colocação e integração, $\sigma_{km}(P)$ as componentes de tensão no ponto P e $n_m(Q)$ as componentes do vetor normal à superfície no ponto de integração (Q). De forma análoga ao observado para a ISD auto-regularizada (Eq.18), a Eq.20 conduz a uma transição suave para a representação do campo de tensões em pontos internos e em pontos do contorno, devido ao cancelamento

dos termos descontínuos e singulares durante o processo de regularização. Esta equação é regular para todos os pontos internos próximos ao contorno, inclusive para aqueles próximos aos cantos onde a condição de continuidade $u(Q) \in C^{1,\alpha}$ for satisfeita. Nesta equação nota-se o surgimento de um termo relativo à derivada tangencial do deslocamento, contida no campo de deslocamentos linearizado, que não está presente na IST original (Eq.13). Tomando o limite quando o ponto fonte tende ao contorno $p \rightarrow P$ obtém-se:

$$0 = - \int_{\Gamma} [u_k(Q) - u_k^L(Q)] S_{kij}(P, Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} [t_k(Q) - t_k^L(Q)] D_{kij}(P, Q) d\Gamma(Q) \quad (22)$$

A equação acima (Eq.22) é super-especificada, uma vez que esta é uma equação tensorial correspondendo a duas equações vetoriais nas mesmas variáveis. Portanto, uma destas equações vetoriais é redundante, e é usual operar sobre a equação integral (Eq.22) com a normal no ponto de colocação, dando origem à equação integral de contorno auto-regularizada da força de superfície (CRUSE e SUWITO, 1993):

$$\int_{\Gamma} [u_k(Q) - u_k^L(Q)] S_{kij}(P, Q) n_i(P) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} [t_k(Q) - t_k^L(Q)] D_{kij}(P, Q) n_i(P) d\Gamma(Q) \quad (23)$$

A Eq.23 é totalmente regular, válida para todos os pontos do contorno onde o requisito de continuidade seja satisfeito. Não é necessária análise de nenhuma das integrais envolvidas na EIC auto-regularizada da força de superfície no sentido do valor principal de Cauchy ou parte finita de Hadamard.

4

ALGORITMOS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

4.1 - Introdução

As implementações numéricas aqui apresentadas têm como ponto de partida o algoritmo do método dos elementos de contorno baseado nas formulações auto-regularizadas, desenvolvido por RICHARDSON e CRUSE (1999) para problemas bidimensionais da teoria da elasticidade. As principais características dos algoritmos implementados são descritas neste capítulo. Utilizam-se as equações integrais de contorno auto-regularizadas do deslocamento e força de superfície, bem como a equação integral de contorno padrão com pontos de colocação fora do domínio apresentadas no capítulo anterior. São adotados elementos isoparamétricos lineares, quadráticos, cúbicos e quárticos na discretização das equações integrais de contorno para problemas de domínio finito. É feito ainda um breve comentário sobre as principais sub-rotinas do programa computacional obtido com base nas implementações apresentadas neste trabalho.

4.2 - Discretização

O contorno Γ , que delimita o domínio Ω do problema (FIG.1), é dividido em um número finito M de segmentos, denominados elementos de contorno. O contorno real é portanto substituído por um contorno aproximado, baseado em esquemas de interpolação previamente definidos. Da mesma forma, as grandezas do contorno (deslocamentos e forças de superfície) são aproximadas por funções de interpolação definidas em termos de seus valores nodais no contorno.

Os algoritmos do método dos elementos de contorno implementados neste trabalho utilizam elementos de contorno isoparamétricos contínuos e descontínuos, baseados em funções de interpolação de classe C^0 . A adoção de elementos isoparamétricos implica que as mesmas funções de interpolação utilizadas para aproximar a geometria serão usadas para aproximar as grandezas do contorno. Neste trabalho são adotados esquemas de interpolação lineares, quadráticos, cúbicos e quárticos. Os deslocamentos, forças de superfície e coordenadas do contorno são descritos portanto pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned} u_k(Q) &\approx u_k(\xi) = \sum_{i=1}^m N_i(\xi) u_k^i \\ t_k(Q) &\approx t_k(\xi) = \sum_{i=1}^m N_i(\xi) t_k^i \\ x_k(Q) &\approx x_k(\xi) = \sum_{i=1}^m N_i(\xi) x_k^i \end{aligned} \quad (24)$$

onde u_k^i , t_k^i , x_k^i são, respectivamente, os valores do deslocamento, força de superfície e coordenadas dos pontos nodais do contorno. O parâmetro m presente no somatório corresponde ao número de pontos nodais do elemento assumindo os valores 2, 3, 4 e 5 para elementos lineares, quadráticos, cúbicos e quárticos, respectivamente, conforme mostrado na FIG.4. Na Eq.24, $N_i(\xi)$ representa as funções de interpolação em termos da coordenada intrínseca ξ . Embora não seja comum a utilização de interpolações lineares na implementação das formulações auto-regularizadas do MEC, mostra-se no presente trabalho que este procedimento é possível, tendo sido adotado anteriormente por outros

autores, tais como RUDOLPHI (1991) e LUTZ et al. (1992) quando da análise de problemas de potencial e mecânica da fratura, respectivamente.

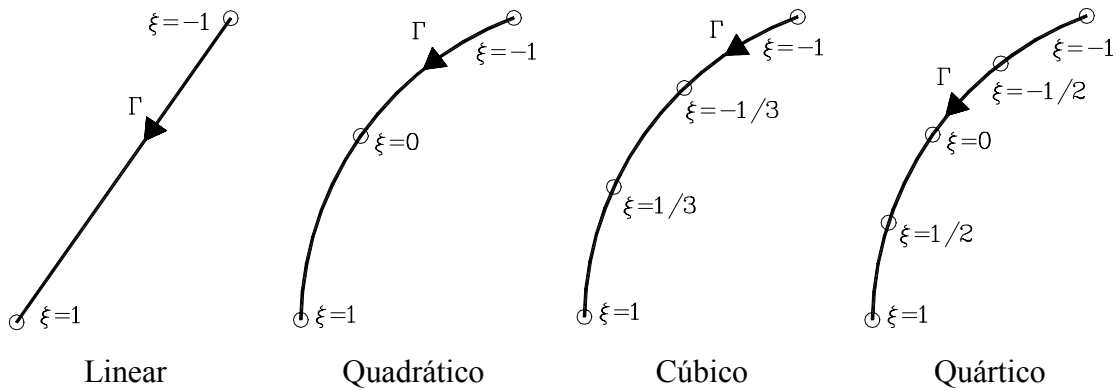
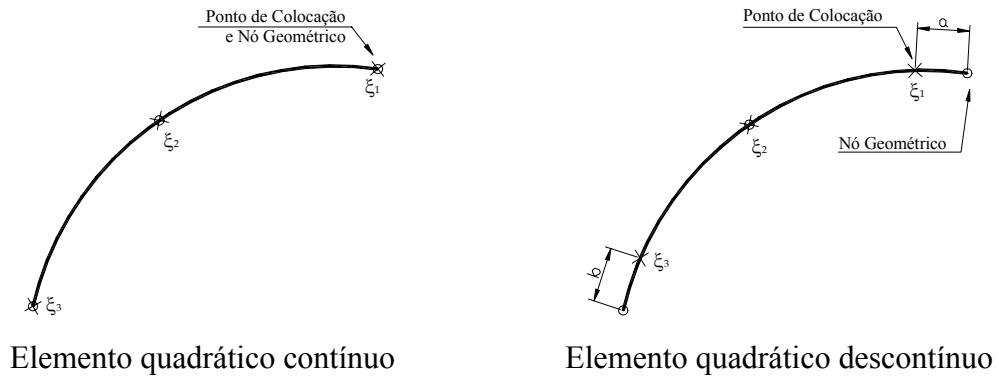


FIGURA 4 - Elementos de contorno contínuos

Com intuito de possibilitar a avaliação numérica das integrais presentes nas EIC, faz-se necessária a transformação das coordenadas cartesianas globais dos elementos em coordenadas adimensionais locais. Tendo em vista a utilização de integração numérica por meio de quadratura Gaussiana padrão, as coordenadas cartesianas dos nós dos elementos são parametrizadas em função das coordenadas dos nós de extremidade de forma que as coordenadas adimensionais assumam valores entre -1 e 1 . O Jacobiano da transformação de coordenadas globais (x_i) para coordenadas adimensionais intrínsecas (ξ) é dado por:

$$J(\xi) = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi}\right)^2} \quad (25)$$

As coordenadas parametrizadas dos nós dos elementos contínuos adotados neste trabalho são mostradas na FIG.4, onde observa-se a existência de nós nas extremidades dos elementos. A adoção de elementos descontínuos, por sua vez, implica na não existência de nós funcionais nas extremidades dos elementos. Nesse caso, os nós funcionais são deslocados para o interior do elemento, conforme exemplificado na FIG.5.



Elemento quadrático contínuo

Elemento quadrático descontínuo

FIGURA 5 - Localização dos nós funcionais e geométricos

Os parâmetros a e b na FIG.5 representam a distância, em coordenadas intrínsecas, entre os nós funcionais e geométricos mais extremos do elemento. Em outras palavras, a distância entre o nó funcional e o nó geométrico do elemento será uma porcentagem do comprimento do elemento (ℓ), ou seja, se $a = 0,1 \therefore a = 5\% \cdot \ell$. Além disto, a adoção dos valores de a e b em termos de coordenadas intrínsecas facilita a entrada de dados do problema, uma vez que não é necessário saber *a priori* o comprimento do elemento. As funções de forma usuais são reescritas de forma geral para elementos lineares,

$$N_1 = \frac{\xi + b - 1}{a + b - 2} \qquad N_2 = \frac{a - \xi - 1}{a + b - 2} \qquad (26)$$

elementos quadráticos,

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(\xi + b - 1)\xi}{(2 - a - b)(1 - a)} & N_2 &= \frac{(a - b - \xi)\xi}{(1 - b)(1 - a)} + 1 \\ N_3 &= \frac{(\xi - a + 1)\xi}{(2 - a - b)(1 - b)} \end{aligned} \qquad (27)$$

elementos cúbicos,

$$N_1 = \frac{9\xi^3 + 9\xi^2(b - 1) - \xi + 1 - b}{(8 - 18a + 9a^2)(a + b - 2)} \qquad (28)$$

$$N_2 = \frac{27\xi^3 + 9\xi^2(3b - 3a - 1) + 9\xi(4a + 2b - 3ab - 3) + 9(a - 1)(b - 1)}{2 \cdot (3a - 2)(3b - 4)}$$

$$N_3 = \frac{-27\xi^3 + 9\xi^2(3a - 3b - 1) + 9\xi(-2a - 4b + 3ab + 3) + 9(a - 1)(b - 1)}{2 \cdot (3a - 4)(3b - 2)}$$

$$N_4 = \frac{-9\xi^3 + 9\xi^2(a - 1) + \xi + 1 - a}{(8 - 18b + 9b^2)(a + b - 2)}$$

e elementos quárticos,

$$N_1 = \frac{4\xi^4 + 4\xi^3(b - 1) - \xi^2 + \xi(1 - b)}{(a - 1)(2a - 3)(2a - 1)(a + b - 2)}$$

$$N_2 = \frac{-8\xi^4 + 4\xi^3(1 + 2a - 2b) + 4\xi^2(2 - 3a - b + 2ab) + 4\xi(1 - b)(a - 1)}{(2a - 1)(2b - 3)}$$

$$N_3 = \frac{4\xi^4 + 4\xi^3(b - a) + \xi^2(4a + 4b - 4ab - 5) + \xi(a - b) + 1}{(a - 1)(b - 1)} + 1 \quad (29)$$

$$N_4 = \frac{-8\xi^4 + 4\xi^3(2a - 2b - 1) + 4\xi^2(2 - a - 3b + 2ab) + 4\xi(b - 1)(a - 1)}{(2b - 1)(2a - 3)}$$

$$N_5 = \frac{4\xi^4 + 4\xi^3(1 - a) - \xi^2 + \xi(a - 1)}{(b - 1)(2b - 3)(2b - 1)(a + b - 2)}$$

Adotando-se ambos a e b nulos nas Eq.26 a 29 acima, obtêm-se as funções de forma usuais para elementos contínuos. Se elementos semicontínuos forem utilizados basta adotar a ou b nulo, conforme o caso nas Eq.26 a 29.

Atenção especial deve ser dada às junções entre elementos quando da discretização do contorno do problema. Ao se utilizar elementos contínuos de classe C^0 , tem-se valores únicos para as componentes do deslocamento nas interseções entre elementos. Entretanto, o mesmo não pode ser assegurado para as componentes da força de superfície. Podem existir descontinuidades na força de superfície em pontos onde a normal ao contorno não seja única, como por exemplo em pontos angulosos (FIG.6). Mesmo em partes suaves do contorno, a força de superfície pode apresentar descontinuidades (FIG.7), o que não é raro ocorrer em casos práticos.

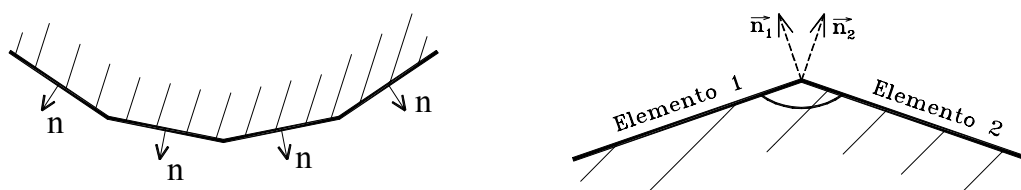


FIGURA 6 - Descontinuidade da normal no contorno

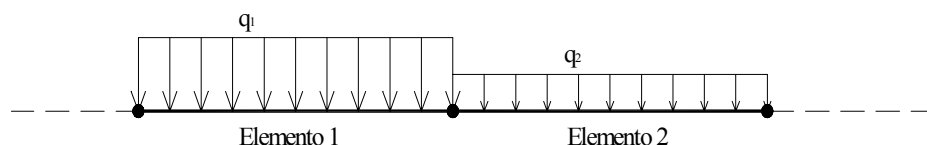


FIGURA 7 - Descontinuidade da força de superfície

O algoritmo do MEC implementado permite a existência de descontinuidades da normal ou das forças de superfície utilizando um único nó nas junções entre elementos. É possível prescrever diferentes valores de força de superfície nos elementos anterior e posterior ao nó compartilhado. Pode-se ainda prescrever a força de superfície na extremidade de um elemento e o deslocamento na extremidade do outro elemento. Entretanto, se a força de superfície for incógnita nas extremidades comuns dos dois elementos, apenas o valor médio da força de superfície no nó compartilhado pode ser calculada pelo algoritmo. Uma das abordagens usualmente adotadas para lidar com descontinuidades de normal e força de superfície trata-se da utilização de elementos semicontínuos, onde o nó funcional se localiza no interior do elemento, conforme explicado anteriormente. No presente algoritmo esta abordagem pode ser adotada na análise dos problemas por meio das formulações auto-regularizadas, informando-se apenas a distância entre o nó geométrico e o nó funcional extremo (a ou b), e as condições de contorno no nó, conforme prescrito para elementos contínuos. Alguns autores tratam deste problema utilizando nós duplos onde ocorram as descontinuidades. Neste caso a distância entre os dois nós deve ser pequena e a escolha de seu valor é restrita, devido aos possíveis problemas numéricos decorrentes da existência de um par de equações cujos coeficientes possuem valores bastante próximos uns dos outros (BREBBIA E DOMINGUEZ, 1989).

4.3 – Formas Discretizadas das EIC

4.3.1 – Formulação Clássica

A forma discretizada da EIC clássica em termos de deslocamentos é obtida com base na Eq.10, e é dada por:

$$C_{ij}(P)u_j(P) = -\sum_{I=1}^M \int_{\Delta\Gamma_I} u_i(\xi)T_{ji}(P,\xi)J(\xi)d\Gamma(\xi) + \sum_{I=1}^M \int_{\Delta\Gamma_I} t_i(\xi)U_{ji}(P,\xi)J(\xi)d\Gamma(\xi) \quad (30)$$

sendo M o número de elementos, $\Delta\Gamma_I$ o contorno do elemento e $J(\xi)$ o Jacobiano da transformação de coordenadas.

Quando o ponto de integração está sobre o elemento a ser integrado, a primeira integral da Eq.30 se torna fortemente singular e a segunda integral fracamente singular. Devido à presença do núcleo fortemente singular, a primeira integral na Eq.30 deverá ser interpretada no sentido do valor principal de Cauchy. A segunda integral por sua vez não necessita de interpretação especial, entretanto deve-se tomar cuidado no sentido da correta avaliação desta integral, tendo em vista a natureza logarítmica da solução fundamental.

As integrais presentes na Eq.30 podem ser calculadas através de esquema de integração analítico, semi-analítico ou numérico. Exemplos recentes da aplicação de esquema de integração analítica podem ser vistos em GRAY et al. (1990) e FRANGI e GUIGGIANI (1999), na análise de problemas de mecânica da fratura e placas, respectivamente. PORTELA et al. (1992) e GALLEGO e DOMÍNGUEZ (1996) por sua vez, adotam esquema de integração semi-analítico na avaliação das integrais singulares presentes nas EIC para mecânica da fratura e elasto-dinâmica, respectivamente. Em geral, os esquemas de integração analítico e semi-analítico são mais dispendiosos, tornando-se até inviáveis dependendo da função de interpolação utilizada. Vários autores adotam portanto esquemas de integração numérica na computação das integrais singulares.

A avaliação numérica da primeira integral da Eq.30 pode ser feita através de esquema de quadratura de Gauss padrão, exceto para o elemento que contém o ponto fonte, que deverá ser avaliada de forma diferenciada. GUIGGIANI (1991) por exemplo, calcula a integral de VPC de forma direta, utilizando transformação não-linear de coordenadas, ao passo que CRUSE (1974), BREBBIA et al. (1984), entre outros, avaliam a integral fortemente singular indiretamente, adotando deslocamento de corpo rígido. A segunda integral da Eq.30 pode ser calculada por meio de esquema de quadratura logarítmica, ou ainda esquema de quadratura de Gauss padrão associado a uma transformação de coordenadas.

Uma das alternativas para se evitar a presença de integrais singulares na formulação padrão é a utilização de pontos de colocação fora do domínio. Esta abordagem consiste basicamente na criação de pontos de colocação fora do domínio (P') correspondentes a cada nó do contorno, conforme mostrado na FIG.8.

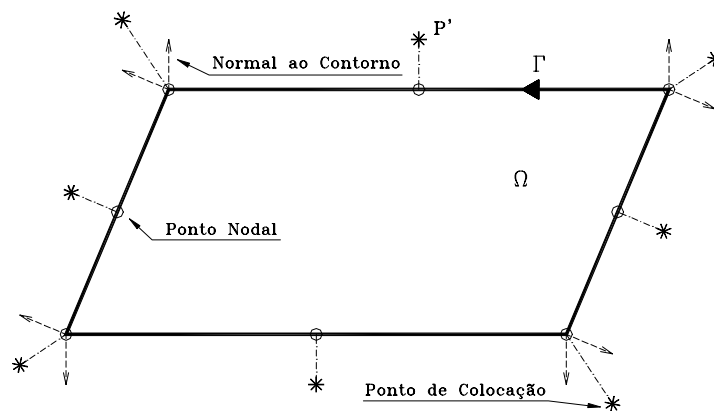


FIGURA 8 - Pontos de colocação fora do domínio

Os pontos de colocação se localizam na direção da normal ao elemento no nó do contorno, ou na direção da normal média quando o ponto nodal correspondente é um canto compartilhado por dois elementos. A distância entre o ponto nodal e o ponto de colocação pode ser definida, tal como neste trabalho, como sendo função do comprimento do elemento. Sendo assim, a distância entre o ponto de integração e o ponto de colocação ($r(P',Q)$) não será nula mesmo quando o ponto de integração coincidir com o ponto nodal correspondente ao ponto de colocação externo, pois neste

caso o ponto de colocação difere do ponto nodal. Conforme dito anteriormente, o coeficiente $C_{ij}(P)$ é nulo para pontos externos a um contorno fechado, e portanto a forma discretizada da EIC com ponto de colocação fora do domínio será dada por:

$$0 = -\sum_{I=1}^M \int_{\Delta\Gamma_I} u_i(\xi) T_{ji}(P', \xi) J(\xi) d\Gamma(\xi) + \sum_{I=1}^M \int_{\Delta\Gamma_I} t_i(\xi) U_{ji}(P', \xi) J(\xi) d\Gamma(\xi) \quad (31)$$

Embora a Eq.31 não possua integrais singulares, existe uma tendência à quase-singularidade quando o ponto de colocação aproxima-se do contorno, gerando imprecisões na integração dos elementos adjacentes ao ponto de colocação. Estas imprecisões podem ser evitadas empregando-se a técnica de subelementação. Esta técnica consiste basicamente na subdivisão gradativa do(s) elemento(s) que contém o ponto nodal correspondente ao ponto de colocação, conforme algoritmo apresentado de forma detalhada por CRUZ (2001). Cada subelemento é integrado utilizando-se quadratura de Gauss padrão, com mesma ordem de integração numérica do elemento original.

Outra alternativa para evitar as singularidades na formulação do MEC é a utilização das formulações auto-regularizadas, principal objetivo do presente trabalho.

4.3.2 – Formulação Auto-regularizada do Deslocamento

Ao dividir o contorno Γ em M elementos obtém-se, a partir da EIC auto-regularizada para deslocamentos (Eq.19), a forma discretizada da mesma (Eq.32):

$$0 = -\sum_{I=1}^M \int_{\Delta\Gamma_I} [u_i(\xi) - u_i(P)] T_{ji}(P, \xi) J(\xi) d\Gamma(\xi) + \sum_{I=1}^M \int_{\Delta\Gamma_I} t_i(\xi) U_{ji}(P, \xi) J(\xi) d\Gamma(\xi) \quad (32)$$

Assim como na EIC auto-regularizada do deslocamento (Eq.19), a sua forma discretizada (Eq.32) contém uma integral regular e outra fracamente singular que não necessita de regularização. A Eq.32 possui limite finito se o requisito de continuidade

para deslocamentos ($u(Q) \in C^{0,\alpha}$) for satisfeito em todos pontos de colocação. Esta condição é atendida quando se utilizam elementos de contorno contínuos baseados em funções de interpolação de classe C^0 , como usualmente empregado no MEC.

Uma vez que a primeira integral da Eq.32 é regular para qualquer ponto do contorno, não é necessária análise da mesma no sentido do Valor Principal de Cauchy, ou emprego de outro esquema especial de integração numérica quando o ponto de colocação está localizado sobre o elemento a ser integrado. Portanto, no algoritmo implementado neste trabalho, é adotado esquema de integração de Gauss padrão para cálculo da primeira integral da Eq.32. A segunda integral desta equação por sua vez, necessita de tratamento especial devido à presença da função logarítmica. Neste trabalho é adotado esquema de integração logarítmica, conforme procedimento apresentado por HUANG (1993), e seguindo algoritmo detalhado por CRUZ (2001). Este procedimento requer nova transformação de coordenadas (além da transformação de coordenadas globais para coordenadas intrínsecas), uma vez que os limites de integração são diferentes. Após essa transformação de coordenadas, a integral fracamente singular é dividida em uma parte regular e outra singular, sendo a primeira avaliada através de esquema de quadratura Gaussiana padrão, e a segunda por meio de quadratura logarítmica.

4.3.3 – Formulação Auto-Regularizada da Força de Superfície

A discretização da EIC auto-regularizada para força de superfície requer atenção especial. Isto se deve ao forte requisito de continuidade para o campo de deslocamentos ($u(Q) \in C^{1,\alpha}$), de forma a garantir a existência de limite finito para a integral que contém o núcleo hipersingular.

O algoritmo do MEC desenvolvido por RICHARDSON e CRUSE (1999) para elasticidade bidimensional é tomado como base para este estudo. O algoritmo para a formulação auto-regularizada da força de superfície (FARFS) requer representação explícita do gradiente do deslocamento, como avaliado no contorno. Os gradientes do

deslocamento são obtidos para cada elemento de contorno, em termos das derivadas tangenciais locais do deslocamento e das forças de superfície locais. As forças de superfície são escritas em termos dos gradientes do deslocamento fazendo-se uso da lei de Hooke e das relações deformação-deslocamento.

$$t_j = \sigma_{ij} n_i = \left\{ \frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{i,l} \delta_{ij} + G(u_{i,j} + u_{j,i}) \right\} n_i \quad (33)$$

As derivadas tangenciais do deslocamento são avaliadas em termos das coordenadas intrínsecas para cada elemento, da seguinte maneira:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \Gamma} + \frac{\partial u_k}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \Gamma} = \frac{du_k}{d\Gamma} \approx \frac{du_k(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{d\Gamma} = \frac{1}{J(\xi)} \sum_{i=1}^m N'_i(\xi) u_k^i \quad \text{sendo } N'_i = \frac{dN_i}{d\xi} \quad (34)$$

onde $\partial x_i / \partial \Gamma$ são as componentes do vetor tangente à superfície, m é o número de nós do elemento e N'_i são as derivadas da função de forma com relação à coordenada intrínseca ξ . Portanto, as derivadas tangenciais são interpoladas utilizando-se polinômios de uma ordem inferior àqueles adotados na obtenção das derivadas normais. Sendo assim, os gradientes do deslocamento são obtidos, de certa forma, de maneira desbalanceada (JORGE et al., 2001).

As componentes do vetor tangente podem ser expressas em termos das componentes do vetor normal, ou seja, $\partial x_1 / \partial \Gamma = -n_2$ e $\partial x_2 / \partial \Gamma = n_1$. Desta maneira, as derivadas tangenciais do deslocamento podem ser escritas em termos dos gradientes do deslocamento no sistema de coordenadas globais conforme Eq.35.

$$\sum_{i=1}^m N'_i(\xi) u_k^i = -J(\xi) n_2 u_{k,1} + J(\xi) n_1 u_{k,2} \quad (35)$$

Pode-se escrever um sistema de equações relacionando as forças de superfície e derivadas tangenciais do deslocamento no sistema de coordenadas locais com os gradientes do deslocamento no sistema global, utilizando as Eq.33 e Eq.35.

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ u_{1,\xi} \\ u_{2,\xi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2G}{1-2\nu}(1-\nu)n_1 & Gn_2 & Gn_2 & \frac{2G\nu}{1-2\nu}n_1 \\ \frac{2G\nu}{1-2\nu}n_2 & Gn_1 & Gn_1 & \frac{2G}{1-2\nu}(1-\nu)n_2 \\ -n_2J(\xi) & 0 & n_1J(\xi) & 0 \\ 0 & -n_2J(\xi) & 0 & n_1J(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,2} \end{Bmatrix} \quad (36)$$

Por fim, através da inversão do sistema de equações apresentado acima escrevem-se os gradientes do deslocamento no ponto de colocação em função das forças de superfície e deslocamentos nodais, conforme Eq.37.

$$u_{k,l}(P) \approx u_{k,l}(\xi^P) = A_{klr}(\xi^P)t_r(\xi^P) + B_{klr}(\xi^P) \sum_{i=1}^m N'_i(\xi^P)u_r^i \quad (37)$$

onde A_{klr} e B_{klr} são as matrizes de rotação, apresentadas de forma detalhada no Anexo A.

O algoritmo implementado neste trabalho permite tanto o uso de elementos contínuos quanto descontínuos. Quando se utilizam elementos descontínuos, o requisito de continuidade para os deslocamentos, que é a primeira derivada contínua no sentido de Hölder, é satisfeito devido ao fato de que para tais elementos todos pontos de colocação se localizam no interior do elemento, onde a continuidade $C^{1,\alpha}$ é preservada. Se por outro lado elementos contínuos são adotados, como feito por RICHARDSON e CRUSE (1999), a continuidade $C^{1,\alpha}$ no sentido de Hölder não é preservada nas junções entre elementos. Com o objetivo de superar este problema é então adotada a hipótese de “continuidade relaxada”. Ao assumir esta hipótese, permite-se que os deslocamentos sejam contínuos $C^{1,\alpha}$ apenas por partes, de forma que elementos contínuos possam ser empregados, sendo possível a utilização de pontos de colocação na junção entre dois elementos. Segundo RICHARDSON et al. (1997), o algoritmo do MEC baseado na hipótese de “continuidade relaxada” proporciona a condição de continuidade requerida analiticamente para que a EIC tenha limite finito, embora o campo de deslocamentos não pertença à classe $C^{1,\alpha}$.

Devido à adoção da hipótese de “continuidade relaxada”, os termos regularizadores (u_k^L e t_k^L), os quais envolvem os gradientes do deslocamento, não possuem valor único nas interseções entre elementos. Este depende da localização do ponto de colocação com relação ao elemento a ser integrado da seguinte forma (Eq.38):

$$u_k^{L'}(\xi) = \begin{cases} u_k(P) + u_{k,m}(P)[x_m(\xi) - x_m(P)] & \text{para } P \in \Delta\Gamma_I \\ u_k(P) + \left(\frac{1}{M} \sum_{n=1}^M u_{k,m}(P_n)\right)[x_m(\xi) - x_m(P)] & \text{para } P \notin \Delta\Gamma_I \end{cases}$$

$$t_k^{L'}(\xi) = \begin{cases} \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{i,l}(P)\delta_{ik} + G[u_{i,k}(P) + u_{k,i}(P)] \right] n_i(P) & \text{para } P \in \Delta\Gamma_I \\ \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{i,l}(P_n)\delta_{ik} + G[u_{i,k}(P_n) + u_{k,i}(P_n)] \right] n_i(P) & \text{para } P \notin \Delta\Gamma_I \end{cases} \quad (38)$$

sendo M o número de elementos que compartilham o ponto de colocação, e $u_{k,m}(P_n)$ o valor do gradiente do deslocamento no ponto P , avaliado com base nas interpolações do elemento n . O valor nodal médio do gradiente avaliado com base nos elementos que compartilham o ponto de colocação é adotado no cálculo das integrais de todos elementos, exceto quando o elemento a ser integrado contenha o ponto de colocação. Neste caso os valores de u_k^L e t_k^L são calculados localmente com base no esquema de interpolação deste elemento.

Portanto, com base na Eq.23 e levando-se em consideração a adoção de elementos contínuos juntamente com a hipótese de “continuidade relaxada”, ou ainda a utilização de elementos descontínuos, obtém-se a formulação auto-regularizada da força de superfície:

$$0 = - \sum_{I=1}^M \int_{\Delta\Gamma_I} [u_k(\xi) - u_k^{L'}(\xi)] S_{kij}(P, \xi) J(\xi) n_i(P) d\Gamma(\xi) + \sum_{I=1}^M \int_{\Delta\Gamma_I} [t_k(\xi) - t_k^{L'}(\xi)] D_{kij}(P, \xi) J(\xi) n_i(P) d\Gamma(\xi) \quad (39)$$

Na Eq.39, para nós de canto, ao utilizar elementos contínuos, a normal no ponto de colocação ($n_i(P)$) é tomada como a normal média entre os dois elementos que compartilham o nó.

4.3.3 – Formulações para Pontos Internos

Em uma etapa de pós-processamento, de posse dos deslocamentos e forças de superfície em todos os pontos do contorno, é feito o cálculo dos deslocamentos e tensões nos pontos internos. Este cálculo pode ser feito por meio das formulações padrão ou das formulações auto-regularizadas.

As formas discretizadas da formulação padrão para deslocamentos (Eq.40) e para tensão (Eq.41) em pontos internos são baseadas nas Eq.8 e Eq.13, respectivamente.

$$u_j(p) = -\sum_{I=1}^M \int_{\Delta\Gamma_I} u_i(\xi) T_{ji}(p, \xi) J(\xi) d\Gamma(\xi) + \sum_{I=1}^M \int_{\Delta\Gamma_I} t_i(\xi) U_{ji}(p, \xi) J(\xi) d\Gamma(\xi) \quad (40)$$

$$\sigma_{ij}(p) = -\sum_{I=1}^M \int_{\Delta\Gamma_I} u_k(\xi) S_{kij}(p, \xi) J(\xi) d\Gamma(\xi) + \sum_{I=1}^M \int_{\Delta\Gamma_I} t_k(\xi) D_{kij}(p, \xi) J(\xi) d\Gamma(\xi) \quad (41)$$

As Eq.18 e Eq.20 por sua vez, dão origem às formas discretizadas da formulação auto-regularizada do deslocamento (Eq.42) e tensão (Eq.43) em pontos internos.

$$u_j(p) - u_j(P) = -\sum_{I=1}^M \int_{\Delta\Gamma_I} [u_i(\xi) - u_i(P)] T_{ji}(p, \xi) J(\xi) d\Gamma(\xi) + \sum_{I=1}^M \int_{\Delta\Gamma_I} t_i(\xi) U_{ji}(p, \xi) J(\xi) d\Gamma(\xi) \quad (42)$$

$$\sigma_{ij}(p) = \sigma_{ij}(P) - \sum_{I=1}^M \int_{\Delta\Gamma_I} [u_k(\xi) - u_k^L(\xi)] S_{kij}(p, \xi) J(\xi) d\Gamma(\xi) + \sum_{I=1}^M \int_{\Delta\Gamma_I} [t_k(\xi) - t_k^L(\xi)] D_{kij}(p, \xi) J(\xi) d\Gamma(\xi) \quad (43)$$

No algoritmo implementado é pesquisado qual ponto nodal está localizado mais próximo ao ponto interno analisado. Os termos regularizadores são então calculados com base nos valores nodais obtidos para as grandezas do contorno nos elementos que compartilham este ponto.

4.4 – Programa Computacional

O programa computacional desenvolvido durante este trabalho permite ao usuário analisar problemas bidimensionais da teoria da elasticidade. São obtidos deslocamentos e forças de superfície no contorno, bem como tensões e deslocamentos em pontos internos especificados pelo usuário. As seguintes formulações podem ser adotadas na análise dos problemas:

- Formulação clássica para deslocamentos (FCD)
- Formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio (FPPF)
- Formulação auto-regularizada do deslocamento (FARD)
- Formulação auto-regularizada da força de superfície (FARFS)

Quando da adoção da FPPF, esta pode ou não estar associada à técnica de subelementação. Para as formulações auto-regularizadas, além de elementos contínuos, podem também ser adotados elementos descontínuos, ou ainda semicontínuos.

O programa final é composto pela rotina principal, além de 48 sub-rotinas ou funções. A estrutura do programa é apresentada de forma esquemática na FIG.9. É feita a seguir uma breve descrição das principais sub-rotinas que compõem o programa. A descrição do arquivo de entrada, bem como a explicação da utilização do programa são apresentadas no Anexo B.

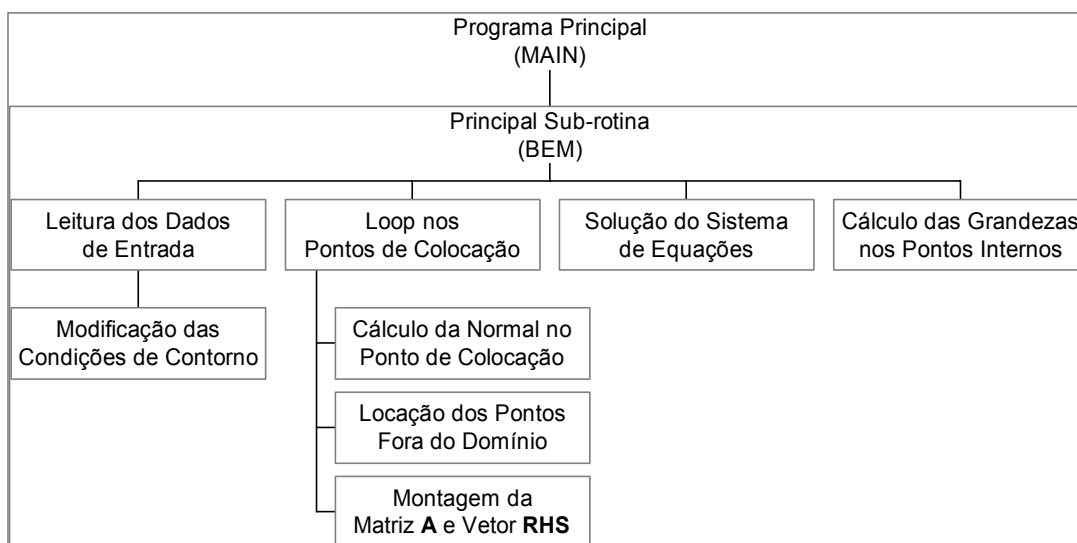


FIGURA 9 - Estrutura do programa computacional

Na rotina principal (MAIN) são definidas as dimensões máximas das matrizes e vetores contidos no programa. Esta rotina chama a sub-rotina BEM, que é a principal sub-rotina do programa. Dentro da BEM é chamada a sub-rotina BCREAD, onde são lidos todos os dados do problema.

Na sub-rotina BCREAD é verificado o tipo de elemento adotado. Caso sejam adotados elementos descontínuos ou semicontínuos, a rotina BCCHANGE é chamada. Na BCCHANGE são criados os nós adicionais na interseção dos elementos, que são em seguida deslocados para o interior dos elementos. É feita renumeração nodal, bem como determinada a nova incidência dos elementos. As discontinuidades prescritas são consideradas e então zeradas de forma apropriada. As grandezas prescritas nos nós funcionais dos elementos são calculadas através da interpolação de seus valores prescritos para os nós geométricos. Ao proceder desta maneira pode-se utilizar o mesmo arquivo de entrada de dados para análise com elementos contínuos, descontínuos ou semicontínuos, modificando-se ou acrescentando-se somente as informações específicas referentes a estes elementos, como distância entre o nó funcional e geométrico a ser utilizado, conforme explicado no Anexo B.

Após a finalização da BCREAD, é chamada a sub-rotina COLLOC onde é feito o ciclo sobre os pontos de colocação, sejam eles pertencentes ao contorno, ou localizados fora

do domínio. Nesta sub-rotina é montado o sistema de equações para análise através do MEC, de acordo com a formulação adotada. As sub-rotinas ADISPINTLOG, ALOCINT, ADISTINT, ADISPINTFO, ADISPINTFO2 e ADISSTAND calculam numericamente as integrais de contorno, gerando desta forma os coeficientes da matriz e do vetor do sistema de equações do MEC. Todas as integrais, exceto a integral logarítmica presente na formulação auto-regularizada do deslocamento são calculadas através de esquema de quadratura Gaussiana. A sub-rotina COLLOC pode chamar uma ou duas dessas sub-rotinas, conforme detalhado a seguir.

A sub-rotina ADISSTAND é utilizada quando da análise do MEC por meio da formulação clássica para deslocamentos. Caso seja adotada a formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio é chamada a sub-rotina ADISPINTFO quando não se utiliza a técnica de subelementação, e a sub-rotina ADISPINTFO2 quando se utiliza esta técnica. A sub-rotina ADISPINTLOG é utilizada quando se opta pela análise através da formulação auto-regularizada do deslocamento. Neste caso a integral fracamente singular será calculada por meio de esquema de quadratura logarítmica. As sub-rotinas ALOCINT e ADISTINT são utilizadas quando da adoção da formulação auto-regularizada da força de superfície. Neste caso, a integração local, ou seja, quando o ponto de colocação pertence ao elemento que está sendo integrado, é feita pela sub-rotina ALOCINT, e a integração global, quando o ponto de colocação não pertence ao elemento integrado, é feita pela ADISTINT.

Após a montagem do sistema de equações, este é resolvido numericamente através do método de eliminação de Gauss com pivotamento parcial, utilizando para tal as sub-rotinas e funções DASUM, DAXPY, DDOT, DGECO, DGEFA, DGSEL, DSCAL e IDAMAX. Este procedimento também ocorre dentro da sub-rotina BEM. De posse dos resultados é gerado o arquivo de saída, onde as forças de superfície são escritas por elemento, lançando mão das descontinuidades prescritas. Caso se queira analisar deslocamentos e tensões em pontos internos, a rotina BEM chama as rotinas SDISINT e SSTRINT, onde as grandezas são calculadas por meio das formulações clássicas, e as rotinas DISINT e STRESSINT, as quais computam as grandezas através das

formulações auto-regularizadas. Na BEM também é chamada a rotina para cálculo isolado e impressão das derivadas tangenciais do deslocamento (TANDERIV).

5

RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos das análises de problemas bidimensionais de elasticidade linear e problemas duplamente simétricos de mecânica da fratura elástico-linear, por meio das formulações não-singulares apresentadas anteriormente. Os problemas de elasticidade analisados englobam problemas triviais, problemas não-triviais com solução analítica conhecida, e problemas cuja solução analítica é desconhecida e que são portanto comparados com os resultados obtidos via método dos elementos finitos. A análise de problemas de mecânica da fratura tem como intuito a avaliação da capacidade das formulações desenvolvidas de representar numericamente a solução de problemas que contêm singularidades.

5.1 – Exemplo 1 – Domínios Quadrados Sujeitos a Carregamentos Simples

Este exemplo é composto por três problemas de domínio quadrado de lado igual a 6,0, sujeitos a carregamentos simples aplicados conforme mostrado na FIG.10. O primeiro

problema trata de uma chapa sujeita a tração simples. A força de superfície uniformemente distribuída na direção x é prescrita na borda $x=6,0$, sendo $t=10$ (FIG.10a). O segundo problema consiste de uma chapa sujeita a cisalhamento puro, com força de cisalhamento uniforme ao longo da face, prescrita $t=10$ (FIG.10b). Já o terceiro problema trata de uma chapa sujeita a flexão pura, sendo a força de superfície prescrita na face $x=6,0$, com variação linear $t=10y/3$ (FIG.10c).

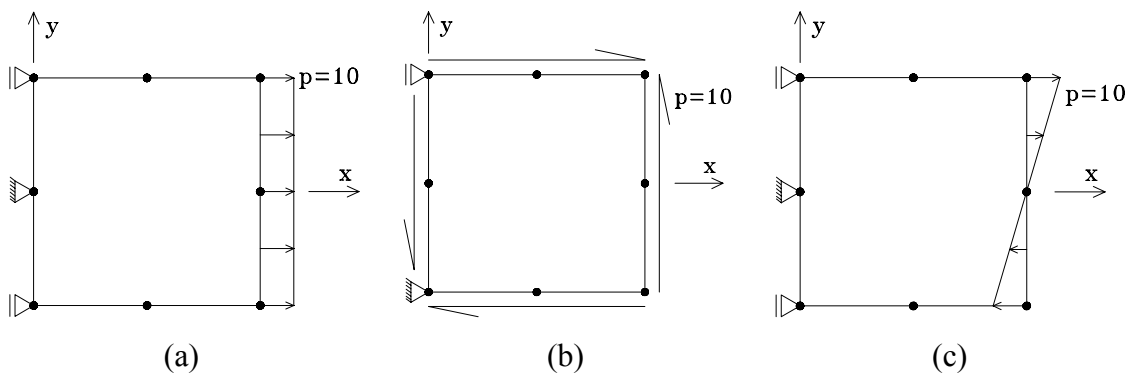


FIGURA 10 - Domínios Quadrados – Geometria dos Problemas: (a) Tração Simples, (b) Cisalhamento Puro, (c) Flexão Pura

Por serem problemas simples, estes funcionaram como “patch test” para as formulações estudadas, onde a precisão da solução numérica obtida estaria no limite da precisão do computador, a partir de uma ordem mínima de integração. Para todos os problemas considerou-se estado plano de tensão, e foram adotadas como propriedades do material, o módulo de elasticidade $E=205010$ e o coeficiente de Poisson $\nu=0,3$.

Foram feitas análises por meio da formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio associada à técnica de subelementação com elementos contínuos (FPPF), formulação auto-regularizada do deslocamento com elementos contínuos (FARD) e elementos descontínuos (FARD-D), e formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos contínuos (FARFS) e descontínuos (FARFS-D). Quando da utilização da formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio com subelementação foi adotado $\alpha=0,25$, como recomendado por RIBEIRO (1992). Ao assumir $\alpha=0,25$, significa que a distância entre o ponto de colocação e o ponto nodal correspondente, equivale a um quarto do comprimento do elemento. Para os elementos

descontínuos, a distância entre o nó funcional extremo do elemento e o respectivo nó geométrico foi tomada como sendo $a=b=0,1$, ou seja, a e b equivalem a 5% do comprimento do elemento. Tais valores foram adotados seguindo recomendação de KARAM (1986). Em todos os casos analisados foi utilizada ordem de integração igual a doze tanto no esquema de integração por meio de quadratura de Gauss-Legendre quanto no esquema de integração logarítmica. São analisadas as respostas do método dos elementos de contorno obtidas com elementos de interpolação linear, quadrática, cúbica e quártica, adotando-se a malha menos refinada possível. Foram utilizados oito elementos lineares, quatro elementos quadráticos, oito elementos cúbicos e quatro elementos quárticos, de forma a manter as mesmas condições de contorno e garantir a simetria no contorno, para todos os tipos de elementos, nos três problemas estudados.

Os resultados obtidos para estes problemas são comparados com as respostas analíticas da teoria da elasticidade apresentadas nas Eq.44 a 46 para os problemas de tração simples, cisalhamento puro e flexão pura, respectivamente. Estas equações são obtidas considerando os eixos cartesianos mostrados na FIG.10. Tem-se que h é a altura da chapa e p é o valor da carga, igual a 10 neste exemplo, para os três casos.

$$u(x) = \frac{p}{E} x \quad v(y) = -\frac{\nu p}{E} y \quad \sigma_x = p \quad (44)$$

$$v(x) = \frac{p}{G} x \quad \tau_{xy} = p \quad (45)$$

$$u(x, y) = \frac{-2p}{Eh} xy \quad v(x, y) = \frac{p}{Eh} (x^2 + \nu y^2) \quad \sigma_x(y) = \frac{2p}{h} y \quad (46)$$

Em nenhum dos problemas deste exemplo ocorre erro na interpolação da geometria do contorno. Para os problemas de tração simples e cisalhamento puro também não existe erro na aproximação das grandezas do contorno, uma vez que as funções de interpolação utilizadas são no mínimo lineares e nestes problemas os deslocamentos e forças de superfície têm variação no máximo desta mesma ordem. Ou seja, as aproximações dos valores do contorno por meio dos quatro tipos de elementos estudados seriam teoricamente suficientes para representar de forma exata a resposta destes problemas caso não houvesse erros de integração. Entretanto, para o problema de

flexão, a adoção de elementos lineares introduz erros na aproximação do deslocamento vertical, pois este varia quadraticamente. Os elementos de ordem mais alta (quadráticos, cúbicos e quárticos) não introduzem erros na interpolação das grandezas neste problema.

Foram determinados o erro relativo máximo para deslocamentos ao longo da face $x=6,0$ e forças de superfície na face restringida ($x=0$), com relação às soluções exatas (Eq.44 a 46), sendo os valores apresentados na TAB.1 para o problema de tração simples, TAB.2 para o caso de cisalhamento puro, e TAB.3 para flexão pura.

TABELA 1 - Problema 1 – Tração Simples – Erros Relativos Máximos

Formulação	Erro no Deslocamento (%)				Erro na Força de Superfície (%)			
	Linear	Quadrático	Cúbico	Quártico	Linear	Quadrático	Cúbico	Quártico
FPPF	$<10^{-14}$	$<10^{-9}$	$<10^{-8}$	$<10^{-5}$	$<10^{-12}$	$<10^{-9}$	$<10^{-7}$	$<10^{-4}$
FARD	$<10^{-12}$	$<10^{-8}$	$<10^{-6}$	$<10^{-5}$	$<10^{-12}$	$<10^{-7}$	$<10^{-5}$	$<10^{-4}$
FARFS	$<10^{-9}$	$<10^{-9}$	$<10^{-11}$	$<10^{-10}$	$<10^{-10}$	$<10^{-9}$	$<10^{-10}$	$<10^{-9}$

TABELA 2 - Problema 2 – Cisalhamento Puro – Erros Relativos Máximos

Formulação	Erro no Deslocamento (%)				Erro na Força de Superfície (%)			
	Linear	Quadrático	Cúbico	Quártico	Linear	Quadrático	Cúbico	Quártico
FPPF	$<10^{-12}$	$<10^{-9}$	$<10^{-7}$	$<10^{-6}$	$<10^{-14}$	$<10^{-10}$	$<10^{-8}$	$<10^{-7}$
FARD	$<10^{-12}$	$<10^{-7}$	$<10^{-6}$	$<10^{-5}$	$<10^{-14}$	$<10^{-12}$	$<10^{-14}$	$<10^{-12}$
FARFS	$<10^{-9}$	$<10^{-9}$	$<10^{-11}$	$<10^{-10}$	$<10^{-10}$	$<10^{-12}$	$<10^{-12}$	$<10^{-11}$

TABELA 3 - Problema 3 – Flexão Pura – Erros Relativos Máximos

Formulação	Erro no Deslocamento (%)				Erro na Força de Superfície (%)			
	Linear	Quadrático	Cúbico	Quártico	Linear	Quadrático	Cúbico	Quártico
FPPF	$< 9,9$	$<10^{-9}$	$<10^{-7}$	$<10^{-4}$	$< 2,0$	$<10^{-9}$	$<10^{-7}$	$<10^{-4}$
FARD	$< 18,7$	$<10^{-7}$	$<10^{-6}$	$<10^{-4}$	$< 8,0$	$<10^{-7}$	$<10^{-5}$	$<10^{-4}$
FARFS	$< 332,3$	$<10^{-5}$	$<10^{-4}$	$<10^{-2}$	$< 230,8$	$<10^{-5}$	$<10^{-3}$	$<10^{-2}$

Observa-se que as três formulações com elementos contínuos (FPPF, FARD e FARFS) apresentam resultados bastante precisos, exceto para o problema de flexão se adotados elementos de interpolação linear. Como dito anteriormente, os elementos lineares

introduzem erros na aproximação das grandezas do contorno para o problema de flexão pura. Entretanto, espera-se que tais erros sejam minimizados com refinamento da malha.

Nota-se pelas TAB.1 a 3 que ao adotar a formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio com subelementação obtém-se maior precisão para elementos de baixa ordem que para elementos de ordem superior, exceto novamente para elementos lineares no terceiro problema. Estes erros parecem ser numéricos, uma vez que para elementos de ordem mais elevada é efetuado maior número de operações. A princípio a utilização de elementos de ordem superior na solução destes problemas é desnecessária, tendo em vista a simplicidade dos problemas. A formulação auto-regularizada do deslocamento com elementos contínuos se mostrou altamente eficiente na solução destes problemas para todas ordens de interpolação. Para os problemas de tração simples e cisalhamento puro, a formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos contínuos mostra-se, em alguns casos, superior às demais formulações, entretanto, para o problema de flexão pura esta apresenta resultados menos precisos do que a formulação padrão com ponto fora e subelementação e a formulação auto-regularizada do deslocamento para todos os tipos de elementos.

A adoção de elementos descontínuos nas formulações auto-regularizadas, em geral resultou em perda na precisão dos resultados quando comparada com as respectivas formulações com elementos contínuos, exceto para o primeiro problema, onde a utilização de elementos quadráticos e quárticos descontínuos apresentou ligeiro ganho na precisão. Entretanto, a utilização de elementos descontínuos modifica as condições de contorno dos três problemas para todos os tipos de elementos, seja ao deslocar os apoios das extremidades, seja ao criar um vínculo vertical adicional, como pode ser visto na FIG.11 para elementos lineares, onde ambas modificações ocorrem. Os problemas analisados deixam de ser aqueles apresentados na FIG.10, e portanto a comparação com as soluções apresentadas nas Eq.44 a 46 conduzem a erros elevados. Tais erros tendem a ser minimizados caso a distância entre o nó funcional extremo do elemento e o respectivo nó geométrico tenda a zero. Todavia, neste caso poderiam surgir quase-singularidades, comprometendo a validade das respostas. Outra forma de minimizar os erros obtidos com adoção de elementos descontínuos é refinar a malha.

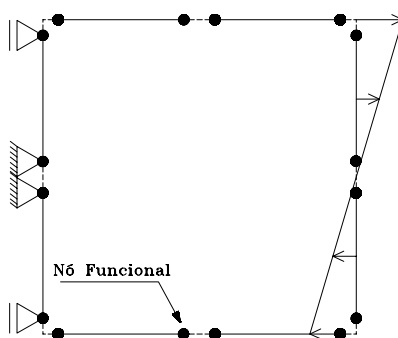


FIGURA 11 - Exemplo 1 – Modificações nas Condições de Contorno ao Adotar Elementos Descontínuos

Fez-se um estudo de convergência para as formulações auto-regularizadas com elementos descontínuos, visando validar a utilização destes elementos. A partir da malha inicial (M1), foram criadas três malhas mais refinadas, denominadas M2, M3 e M4, para cada uma das interpolações, através de refinamentos sucessivos, subdividindo-se os elementos da malha anterior em dois elementos de mesmo tamanho. Os erros máximos obtidos para deslocamentos na face $x=6,0$ por meio da formulação auto-regularizada do deslocamento (FARD-D) e formulação auto-regularizada da força de superfície (FARFS-D) são apresentados nas TAB.4, 5 e 6 para os problemas de tração simples, cisalhamento puro e flexão pura, respectivamente. Na computação dos erros não se analisam as respostas obtidas para força de superfície, uma vez que estas são bastante afetadas pela modificação das condições de restrição. Os deslocamentos em pontos distantes da distribuição de carga sofrem alterações menos significativas, sendo a resposta para os mesmos mais próxima às das soluções de referência.

TABELA 4 - Problema 1 – Tração Simples – Estudo de Convergência

Formulação	Malha	Erro no Deslocamento (%)			
		Linear	Quadrático	Cúbico	Quártico
FARD-D	M1	< 2,999	< 6,194	< 3,324	< 6,551
	M2	< 1,574	< 3,177	< 1,680	< 3,367
	M3	< 0,793	< 1,591	< 0,836	< 1,712
	M4	< 0,398	< 0,783	< 0,412	< 0,857
FARFS-D	M1	< 0,606	< 10^{-10}	< 0,024	< 10^{-10}
	M2	< 0,423	< 0,094	< 0,006	< 0,065
	M3	< 0,224	< 0,031	< 0,003	< 0,032
	M4	< 0,115	< 0,015	< 0,002	< 0,015

TABELA 5 - Problema 2 – Cisalhamento Puro – Estudo de Convergência

Formulação	Malha	Erro no Deslocamento (%)			
		Linear	Quadrático	Cúbico	Quártico
FARD-D	M1	< 1,430	< 2,098	< 2,244	< 3,406
	M2	< 0,608	< 1,075	< 1,081	< 1,747
	M3	< 0,258	< 0,502	< 0,526	< 0,846
	M4	< 0,105	< 0,233	< 0,257	< 0,410
FARFS-D	M1	< 0,341	< 1,253	< 0,371	< 0,670
	M2	< 0,162	< 0,488	< 0,175	< 0,321
	M3	< 0,085	< 0,230	< 0,087	< 0,152
	M4	< 0,043	< 0,115	< 0,044	< 0,076

TABELA 6 - Problema 3 – Flexão Pura – Estudo de Convergência

Formulação	Malha	Erro no Deslocamento (%)			
		Linear	Quadrático	Cúbico	Quártico
FARD-D	M1	< 10,115	< 9,830	< 4,293	< 9,011
	M2	< 2,692	< 4,427	< 2,094	< 4,267
	M3	< 0,842	< 2,112	< 1,031	< 2,084
	M4	< 0,502	< 1,027	< 0,507	< 1,028
FARFS-D	M1	< 62,608	< 0,177	< 0,065	< 0,151
	M2	< 38,875	< 0,074	< 0,018	< 0,062
	M3	< 22,998	< 0,021	< 0,005	< 0,017
	M4	< 13,013	< 0,006	< 0,002	< 0,005

Observa-se que os erros introduzidos pela modificação das condições de contorno dos problemas da FIG.10 tendem a ser minimizados com refinamento da malha em todos os casos. Nota-se que há convergência dos resultados para a solução de referência nos três problemas, para todas as ordens de interpolação, na medida em que as condições de contorno dos problemas analisados com elementos descontínuos se aproximam daquelas para os problemas apresentados na FIG.10. A perda significativa de precisão no primeiro refinamento do problema de tração simples com elementos quadráticos e quárticos na formulação auto-regularizada da força de superfície se deve à introdução de fonte de erro não existente na malha menos refinada, que trata-se da inclusão de vínculo vertical adicional, uma vez que o nó restringido nessa direção se localizará nestes casos na junção entre dois elementos, tal como ocorre para o uso de elementos lineares e cúbicos.

Pode-se perceber pelas TAB.4 a 6 que para estes problemas a formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos descontínuos apresenta resultados mais precisos que a formulação auto-regularizada do deslocamento com estes mesmos elementos. Parece que o fato dos elementos descontínuos não garantirem a continuidade da função campo de deslocamentos nas junções entre elementos tem influência significativa nos resultados obtidos por meio da formulação auto-regularizada do deslocamento com tais elementos.

Através dos resultados apresentados neste exemplo fica demonstrada a eficiência da utilização das formulações não-singulares do método nos elementos de contorno na análise de problemas triviais da teoria da elasticidade.

5.2 – Exemplo 2 – Tubo de Parede Espessa Sujeito a Pressão Interna

Um tubo de parede espessa de raio interno $r_i=1$ e raio externo $r_e=2$ é submetido a uma pressão interna $p_i=1000$. Devido à simetria axial do problema, apenas um quarto da seção transversal do tubo necessita ser avaliada. Conseqüentemente, o deslocamento vertical na face $y=0$ e o deslocamento horizontal na face $x=0$ são prescritos nulos. O domínio analisado, bem como suas condições de contorno são mostrados na FIG.12.

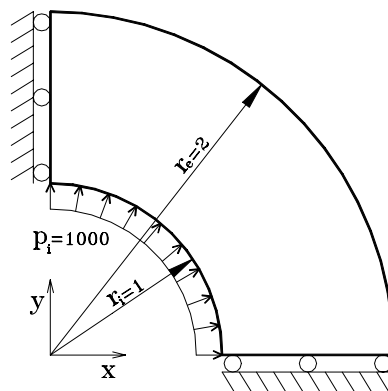


FIGURA 12 - Tubo de Parede Espessa Sujeito a Pressão Interna

As constantes do material são o coeficiente de Poisson $\nu=0,3$ e o módulo de elasticidade $E=205010$. A solução analítica deste problema, adotando estado plano de tensão, é conhecida e dada por:

$$\begin{aligned}
 u(r) &= \frac{p_i r_i^2}{Er} \frac{1}{(r_e^2 - r_i^2)} \left[(r_e^2 + r^2) + \nu (r_e^2 - r^2) \right] \\
 \sigma_r(r) &= \frac{p_i r_i^2}{r^2} \frac{(r_e^2 - r^2)}{(r_e^2 - r_i^2)} \\
 \sigma_\theta(r) &= \frac{p_i r_i^2}{r^2} \frac{(r_e^2 + r^2)}{(r_e^2 - r_i^2)}
 \end{aligned} \tag{47}$$

onde $u(r)$ é o deslocamento radial, $\sigma_r(r)$ a tensão radial e $\sigma_\theta(r)$ a tensão circunferencial.

O contorno da seção transversal do tubo foi discretizado com malha inicial de seis elementos, composta por um elemento em cada uma das bordas radiais retas e dois elementos em cada uma das bordas circulares, para cada uma das quatro ordens de interpolação. Foram efetuados refinamentos sucessivos a partir desta malha, subdividindo-se cada elemento da malha anterior em dois elementos de mesmo tamanho.

Foram efetuadas análises por meio dos três algoritmos implementados. Adotou-se doze pontos tanto no esquema de integração por meio de quadratura de Gauss-Legendre quanto no esquema de integração logarítmica presente na formulação auto-regularizada do deslocamento (FARD).

As soluções do MEC para deslocamentos e forças de superfície ao longo da face horizontal ($y=0$; $1 \leq x \leq 2$), para diversas malhas utilizando interpolações lineares, quadráticas, cúbicas e quárticas, são comparadas com a solução exata para determinar o máximo erro relativo. Estes resultados são apresentados nas TAB.7 a 12 e FIG.13 a 18.

TABELA 7 - Exemplo 2 – Formulação Padrão com Ponto de Colocação Fora do Domínio

Nº de Elementos Lineares	Número de Nós	Erro Relativo no Deslocamento (%)	Erro Relativo na Força de Superfície (%)
12	12	9,1659528	21,0487153
24	24	2,5930025	17,1181777
48	48	0,5855771	5,5069937
96	96	0,1465608	2,3101501
192	192	0,0369268	0,3016747
384	384	0,0092792	0,4960490
768	768	0,0022882	0,2394495
1536	1536	0,0006010	0,1170904
Nº de Elementos Quadráticos	Número de Nós	Erro Relativo no Deslocamento (%)	Erro Relativo na Força de Superfície (%)
6	12	1,6762709	9,5928357
12	24	1,0217952	5,9917725
24	48	0,0724606	0,6339162
48	96	0,0508070	0,5379828
96	192	0,0035348	0,0660794
192	384	0,0016856	0,0550519
384	768	0,0002008	0,0149007
768	1536	0,0000350	0,0015233
Nº de Elementos Cúbicos	Número de Nós	Erro Relativo no Deslocamento (%)	Erro Relativo na Força de Superfície (%)
6	18	0,8791634	1,9016736
12	36	0,2124100	1,9396158
24	72	0,0203041	0,3880264
48	144	0,0007207	0,0232244
96	288	0,0001186	0,0095033
192	576	0,0000251	0,0002760
384	1152	0,0000250	0,0002640
Nº de Elementos Quárticos	Número de Nós	Erro Relativo no Deslocamento (%)	Erro Relativo na Força de Superfície (%)
6	24	8,0602222	10,4764778
12	48	0,0286799	0,5596366
24	96	0,0033632	0,1036433
48	192	0,0000380	0,0020534
96	384	0,0000222	0,0012016
192	768	0,0000408	0,0052094
384	1536	0,0000411	0,0117403

Na TAB.7 são mostrados os erros percentuais máximos para as grandezas do contorno, utilizando a formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio, associada à técnica de subelementação, com elementos lineares, quadráticos, cúbicos e quárticos

contínuos. Adotou-se $\alpha = 0,25$, ou seja, a distância entre o ponto de colocação e o nó correspondente no contorno é igual a um quarto do comprimento médio dos elementos que compartilham o nó. Os erros máximos obtidos são representados graficamente na FIG.13.

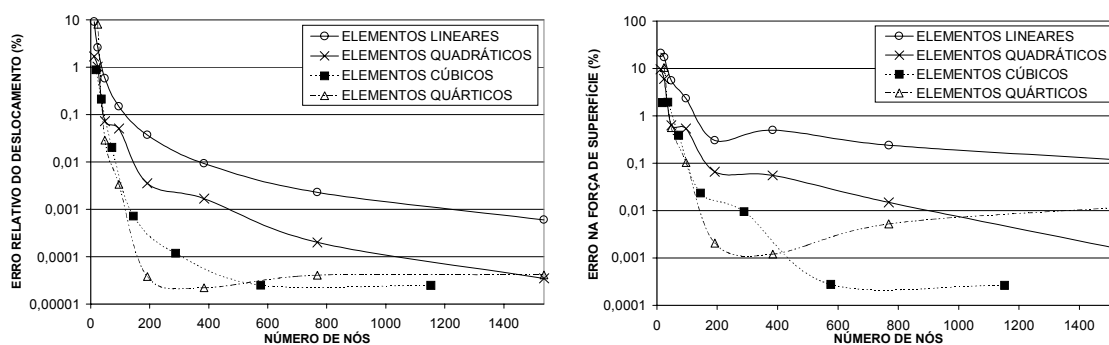


FIGURA 13 - Exemplo 2 – Formulação Padrão com Ponto de Colocação Fora do Domínio

Com base nos resultados apresentados, nota-se que tanto o deslocamento quanto a força de superfície tendem à solução exata a partir de um certo nível de refinamento para todos os elementos. Percebe-se ainda uma convergência mais rápida dos resultados obtidos utilizando-se elementos quárticos que ao utilizar elementos de ordem inferior.

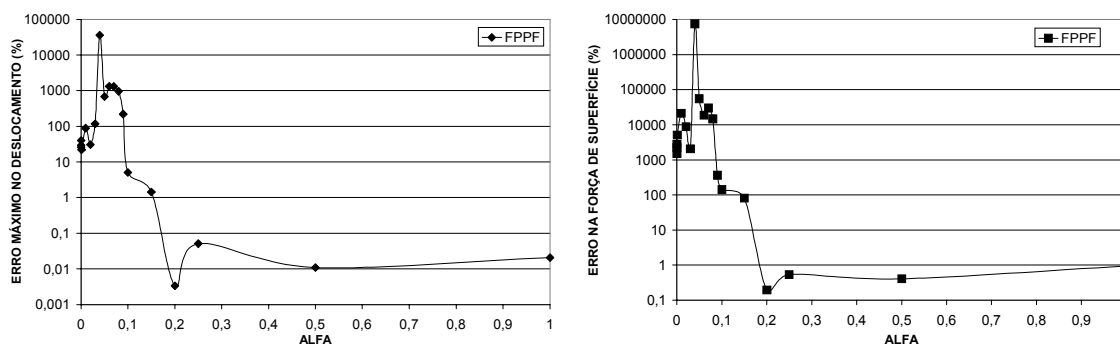


FIGURA 14 - Exemplo 2 – Erro Máximo com Variação de α

Foi estudada a sensibilidade da formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio associada à técnica de subelementação à variação da distância do ponto fonte ao contorno. Adotou-se uma malha de 48 elementos quadráticos, variando o valor de α entre 10^{-6} e 1, ou seja, o ponto de colocação se localiza a uma distância perpendicular ao

contorno entre $10^{-6} \ell$ e ℓ , onde ℓ é o comprimento do elemento. Os erros percentuais para deslocamento e força de superfície na borda horizontal são apresentados na FIG.14 e TAB.8 em função do valor de α .

TABELA 8 - Exemplo 2 – Formulação Padrão com Ponto de Colocação Fora do Domínio – Variação de α

Valor de α	Erro Relativo no Deslocamento (%)	Erro Relativo na Força de Superfície (%)
1	0,020840859	0,941038351
0,5	0,010891181	0,407479377
0,25	0,050807027	0,537982819
0,2	0,003338463	0,196214385
0,15	1,43373562	81,01263638
0,1	5,08572257	143,2198078
0,09	220,0957625	365,4714164
0,08	958,2071047	14692,81047
0,07	1310,642756	30108,57423
0,06	1318,535034	18700,96154
0,05	673,3376278	55416,84767
0,04	35623,58138	7527341,774
0,03	116,1106968	2057,903217
0,02	30,61496921	8886,53073
0,01	88,48170051	21243,66381
10^{-3}	22,14298307	5151,023797
10^{-4}	29,34802572	1517,894208
10^{-5}	39,62506155	2783,10207
10^{-6}	25,78111583	2246,82835

Observa-se que esta formulação é bastante sensível em relação à posição do ponto de colocação e o contorno. Entretanto, valores de α entre 20% e 100% do comprimento médio dos elementos que compartilham o ponto de colocação apresentam precisão satisfatória. Os resultados poderiam ser mais precisos caso fosse utilizada uma subelementação adaptativa, a exemplo de CHIEN et al. (1997). Estes autores utilizam a técnica de subelementação para avaliação de tensões em pontos internos. A subdivisão dos elementos é feita de forma gradativa para todos elementos de contorno, e não somente para aqueles que contém o ponto nodal mais próximo ao ponto interno analisado. Adicionalmente, CHIEN et al. (1997) adotam esquema de subelementação iterativa, onde a subdivisão é repetida até que sejam obtidos resultados convergentes.

Com intuito de mostrar a equivalência entre a formulação auto-regularizada do deslocamento (FARD) e a formulação clássica da equação integral de contorno para deslocamentos baseada no valor principal de Cauchy (FCD), conforme demonstrado analiticamente por CRUSE e RICHARDSON (1996), foi feita análise do problema por meio de ambas formulações utilizando elementos contínuos. Os erros relativos máximos para deslocamento e força de superfície ao longo da face horizontal são apresentados na TAB.9 para algumas malhas escolhidas aleatoriamente, para cada uma das interpolações utilizadas.

TABELA 9 - Exemplo 2 – Formulação Auto-Regularizada do Deslocamento versus Formulação Clássica para Deslocamento

Nº de Elementos Lineares	Número de Nós	Erro Relativo no Deslocamento (%)		Erro Relativo na Força de Superfície (%)	
		FARD	FCD	FARD	FCD
24	24	2,7748673	2,7748673	14,2186537	14,2186537
384	384	0,0116982	0,0116982	0,4638532	0,4638532
Nº de Elementos Quadráticos	Número de Nós	Erro Relativo no Deslocamento (%)		Erro Relativo na Força de Superfície (%)	
		FARD	FCD	FARD	FCD
6	12	0,2188590	0,2188590	5,5331352	5,5331352
96	192	0,0000604	0,0000604	0,0371561	0,0371561
Nº de Elementos Cúbicos	Número de Nós	Erro Relativo no Deslocamento (%)		Erro Relativo na Força de Superfície (%)	
		FARD	FCD	FARD	FCD
48	144	0,0000952	0,0000952	0,0067259	0,0067259
768	2304	0,0000377	0,0000377	0,0001207	0,0001207
Nº de Elementos Quárticos	Número de Nós	Erro Relativo no Deslocamento (%)		Erro Relativo na Força de Superfície (%)	
		FARD	FCD	FARD	FCD
12	48	0,0006084	0,0006084	0,0585396	0,0585396
192	768	0,0000378	0,0000378	0,0011235	0,0011235

Nota-se que a formulação auto-regularizada do deslocamento com integração logarítmica é totalmente equivalente à formulação clássica do MEC, comprovando portanto a afirmação de CRUSE e RICHARSON (1996). A precisão da solução do MEC para ambas formulações é a mesma até à décima sexta casa decimal, inclusive para as malhas não apresentadas.

TABELA 10 - Exemplo 2 – Formulação Auto-Regularizada do Deslocamento

Nº de Elementos Lineares	Número de Nós	Erro Relativo no Deslocamento (%)	Erro Relativo na Força de Superfície (%)
12	12	10,7536904	35,8762514
24	24	2,7748673	14,2186537
48	48	0,7203792	5,7075367
96	96	0,1839160	2,3795168
192	192	0,0465142	0,0893615
384	384	0,0116982	0,4638532
768	768	0,0029246	0,2147791
1536	1536	0,0007357	0,1017552
Nº de Elementos Quadráticos	Número de Nós	Erro Relativo no Deslocamento (%)	Erro Relativo na Força de Superfície (%)
6	12	0,2188590	5,5331352
12	24	0,0091176	1,8252233
24	48	0,0029322	0,5316514
48	96	0,0004533	0,1433628
96	192	0,0000604	0,0371561
192	384	0,0000076	0,0094473
384	768	0,0000386	0,0024174
768	1536	0,0000378	0,0006092
Nº de Elementos Cúbicos	Número de Nós	Erro Relativo no Deslocamento (%)	Erro Relativo na Força de Superfície (%)
6	18	0,2077023	1,5374164
12	36	0,0167332	0,3033966
24	72	0,0011916	0,0483623
48	144	0,0000952	0,0067259
96	288	0,0000287	0,0008704
192	576	0,0000254	0,0001385
384	1152	0,0000252	0,0001225
768	2304	0,0000377	0,0001207
Nº de Elementos Quárticos	Número de Nós	Erro Relativo no Deslocamento (%)	Erro Relativo na Força de Superfície (%)
6	24	0,0129201	0,4856454
12	48	0,0006084	0,0585396
24	96	0,0000296	0,0055446
48	192	0,0000080	0,0007303
96	384	0,0000033	0,0010589
192	768	0,0000378	0,0011235
384	1536	0,0000378	0,0011421

Na TAB.10 e FIG.15 são mostrados os erros relativos percentuais máximos obtidos na análise do problema por meio da formulação auto-regularizada do deslocamento. Percebe-se que os resultados obtidos através desta formulação são bastante precisos,

mesmo para as malhas menos refinadas. Assim como para a formulação padrão com ponto fora do domínio, observa-se que quanto maior o grau do polinômio de interpolação adotado, mais rápida é a convergência dos resultados para a solução exata.

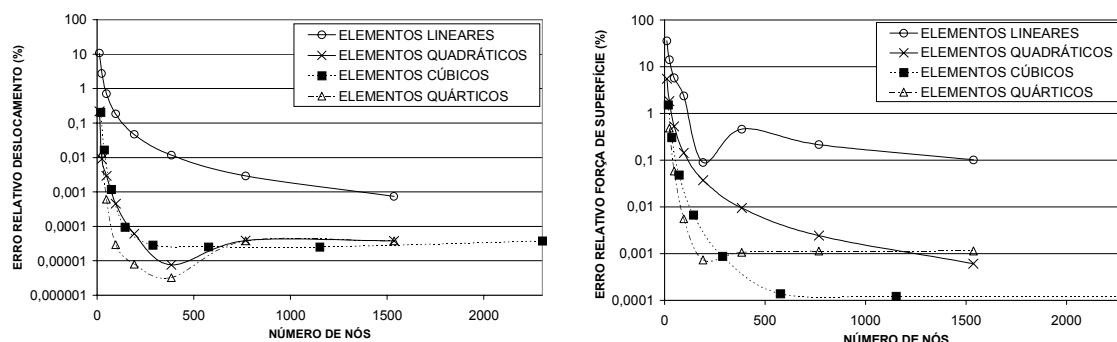


FIGURA 15 - Exemplo 2 – Formulação Auto-Regularizada do Deslocamento

Na FIG.16 e TAB.11 são apresentados os erros obtidos ao se utilizar a formulação auto-regularizada da força de superfície (FARFS) com elementos contínuos. É adotada portanto a hipótese de “continuidade relaxada”, como explicado na seção 4.3.2.

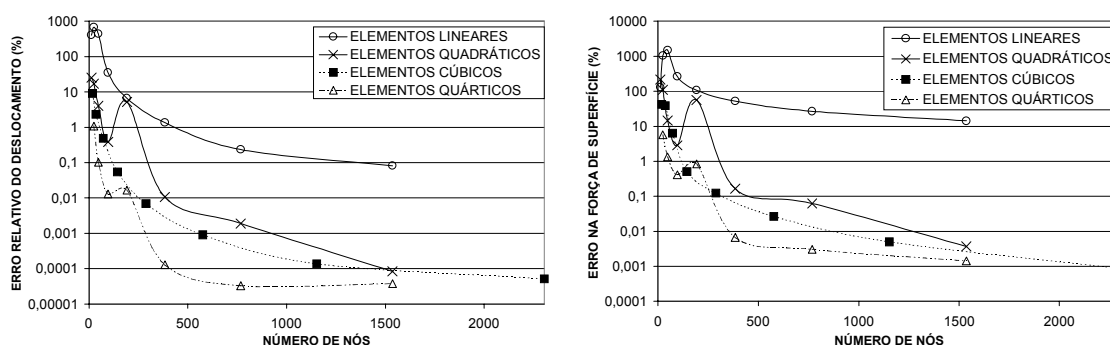


FIGURA 16 - Exemplo 2 - Formulação Auto-Regularizada da Força de Superfície com Elementos Contínuos

Pode-se observar pela FIG.16 que resultados obtidos através do emprego de elementos lineares e quadráticos convergem de forma oscilatória para a solução exata, ao passo que a adoção de elementos de ordem superior apresenta resultados que convergem monotonicamente para a solução de referência.

TABELA 11 - Exemplo 2 – Formulação Auto-Regularizada da Força de Superfície com Elementos Contínuos

Nº de Elementos Lineares	Número de Nós	Erro Relativo no Deslocamento (%)	Erro Relativo na Força de Superfície (%)
12	12	400,6889240	130,6560475
24	24	681,8086564	1031,7392274
48	48	435,9877198	1491,7826110
96	96	35,6032745	263,9171439
192	192	6,5841567	106,9427806
384	384	1,3519003	51,9090267
768	768	0,2322827	26,9191360
1536	1536	0,0813189	14,3240440
Nº de Elementos Quadráticos	Número de Nós	Erro Relativo no Deslocamento (%)	Erro Relativo na Força de Superfície (%)
6	12	25,3872018	215,5221491
12	24	17,0598464	109,6332087
24	48	4,0275330	14,4739382
48	96	0,3882490	2,8512394
96	192	5,2512479	56,2747249
192	384	0,0105917	0,1652003
384	768	0,0018758	0,0629785
768	1536	0,0000842	0,0037055
Nº de Elementos Cúbicos	Número de Nós	Erro Relativo no Deslocamento (%)	Erro Relativo na Força de Superfície (%)
6	18	8,9886441	42,8298028
12	36	2,3470424	39,0166888
24	72	0,4902800	6,3780405
48	144	0,0542842	0,5071416
96	288	0,0069006	0,1234986
192	576	0,0009080	0,0266575
384	1152	0,0001373	0,0050323
768	2304	0,0000510	0,0008655
Nº de Elementos Quárticos	Número de Nós	Erro Relativo no Deslocamento (%)	Erro Relativo na Força de Superfície (%)
6	24	1,0804036	5,7235210
12	48	0,1014808	1,3302699
24	96	0,0128674	0,4081458
48	192	0,0165104	0,8391894
96	384	0,0001297	0,0067500
192	768	0,0000331	0,0030480
384	1536	0,0000373	0,0014287

Admitindo como critério de convergência um erro relativo máximo de 1% para qualquer valor nodal de deslocamento ou força de superfície ao longo da face horizontal, conclui-

se que para a formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio associada à técnica de subelementação é necessária uma malha de 192 elementos lineares, 24 elementos quadráticos, 24 elementos cúbicos, ou 12 elementos quárticos, que correspondem respectivamente a 192, 48, 72 e 48 nós do contorno. Ao utilizar a formulação auto-regularizada do deslocamento esta precisão é alcançada com malha de 192 elementos lineares, 24 elementos quadráticos, 12 elementos cúbicos ou 6 elementos quárticos, correspondendo a 192, 48, 36 e 24 nós do contorno, respectivamente. A formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos contínuos por sua vez requer mais de 1536 elementos lineares, ou 192 elementos quadráticos, 48 elementos cúbicos ou 24 elementos quárticos, que correspondem a 1536, 384, 144 e 96 nós do contorno, respectivamente. Os resultados obtidos por meio da FARFS juntamente com a hipótese de “continuidade relaxada” mostram que a utilização de elementos lineares, quadráticos e cúbicos não é computacionalmente eficiente para o caso de estado de tensão não-trivial. Respostas confiáveis para esta formulação com elementos contínuos lineares, quadráticos e cúbicos somente são alcançados com malhas altamente refinadas.

Os altos erros obtidos ao se utilizar a formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos contínuos podem estar associados à adoção da hipótese de “continuidade relaxada” no respectivo algoritmo do MEC, ou à avaliação local da derivada tangencial do deslocamento.

Visando identificar a principal fonte de erros dentre as duas mencionadas, introduzida pela formulação auto-regularizada da força de superfície, é feita análise do problema utilizando esta formulação, adotando-se entretanto elementos descontínuos. Conforme explicado anteriormente, ao empregar elementos descontínuos, a utilização do conceito de “continuidade relaxada” se faz desnecessária, pois o requisito de continuidade para os deslocamentos é satisfeito em todos os pontos de colocação. Porém, as derivadas tangenciais do deslocamento são avaliadas adotando-se o mesmo procedimento utilizado para elementos contínuos. Desta forma torna-se possível isolar a fonte de erro advinda da adoção da hipótese de “continuidade relaxada”, e conseqüentemente a identificação da fonte de erro dominante nesta formulação.

TABELA 12 - Exemplo 2 - Formulação Auto-Regularizada da Força de Superfície com Elementos Descontínuos

Nº de Elementos Lineares	Número de Nós	Erro Relativo no Deslocamento (%)	Erro Relativo na Força de Superfície (%)
12	24	10,8068176	24,8278230
24	48	5,8576104	11,8090511
48	96	3,1060543	6,9613271
96	192	1,5964197	4,4331288
192	384	0,8047328	2,6734659
384	768	0,4021198	1,5393501
768	1536	0,2003058	0,8466811
Nº de Elementos Quadráticos	Número de Nós	Erro Relativo no Deslocamento (%)	Erro Relativo na Força de Superfície (%)
6	18	1,4858551	1,2382232
12	36	0,3977246	0,4772518
24	72	0,0702665	0,1683854
48	144	0,0103479	0,0551674
96	288	0,0013183	0,0181716
192	576	0,0000909	0,0064821
384	1152	0,0000432	0,0025219
768	2304	0,0000322	0,0009942
Nº de Elementos Cúbicos	Número de Nós	Erro Relativo no Deslocamento (%)	Erro Relativo na Força de Superfície (%)
6	24	0,2826304	0,2988528
12	48	0,0313443	0,1067139
24	96	0,0028274	0,0368242
48	192	0,0007516	0,0148324
96	384	0,0003083	0,0068951
192	768	0,0001061	0,0034686
384	1152	0,0000500	0,0017073
Nº de Elementos Quárticos	Número de Nós	Erro Relativo no Deslocamento (%)	Erro Relativo na Força de Superfície (%)
6	30	0,1018145	0,2108679
12	60	0,0162149	0,0686439
24	120	0,0043576	0,0309474
48	240	0,3077722	0,5822744
96	480	0,3336074	0,6851352
192	960	0,0001366	0,0036058
384	1920	0,0000189	0,0017725

As malhas com elementos descontínuos adotadas foram geradas automaticamente pelo programa computacional tomando como base as malhas com elementos contínuos utilizadas anteriormente, para os quatro tipos de elemento. Adotou-se a e b iguais a 0,1,

ou seja, a distância entre o nó funcional e os nós geométricos extremos do elemento equivale a 5% do comprimento do elemento. Os erros relativos máximos obtidos no cálculo dos deslocamentos e forças de superfície, em cada nó funcional da malha, ao longo da face horizontal são apresentados na TAB.12 e FIG.17.

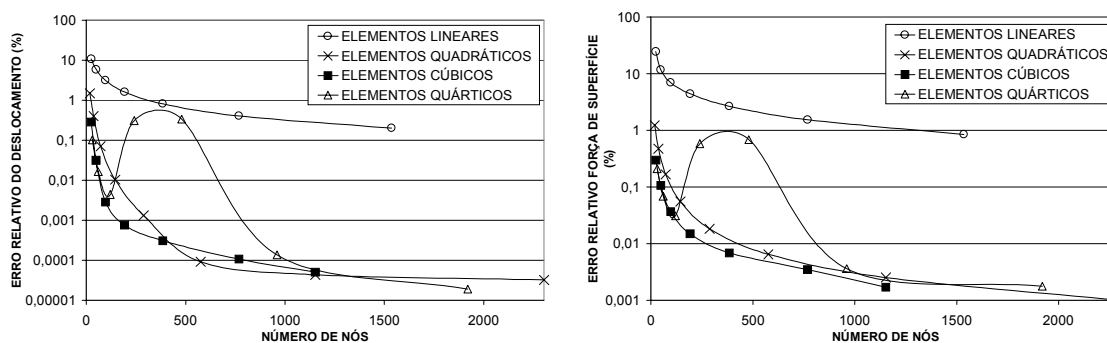


FIGURA 17 - Exemplo 2 – Formulação Auto-Regularizada da Força de Superfície com Elementos Descontínuos

Adotando o mesmo critério de convergência anterior, erro máximo de 1% para deslocamentos e forças de superfície, os resultados do MEC baseado na formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos descontínuos mostram que são necessários 768 elementos lineares, 12 elementos quadráticos, 6 elementos cúbicos ou 6 elementos quárticos, que correspondem a 1536, 36, 24 e 30 nós de contorno. Portanto, a utilização de elementos descontínuos na formulação auto-regularizada da força de superfície apresenta significativo ganho na precisão dos resultados, principalmente para interpolações lineares e quadráticas. Além disso, a convergência oscilatória dos resultados obtidos com elementos lineares e quadráticos contínuos não é observada para elementos descontínuos de mesma ordem. Embora haja ganho na precisão dos resultados com o uso de elementos cúbicos descontínuos comparados com o uso de elementos contínuos desta ordem, este ganho não é tão significativo quanto para elementos quadráticos e lineares. A melhoria na precisão é ainda menor para interpolações quárticas. Na realidade, a partir de um certo nível de refinamento há uma perda na precisão dos resultados para elementos quárticos descontínuos. Estes resultados podem ser observados de forma mais clara na FIG.18 onde é feita uma comparação entre a utilização de elementos contínuos e descontínuos na formulação auto-regularizada da força de superfície, para as quatro ordens de interpolação.

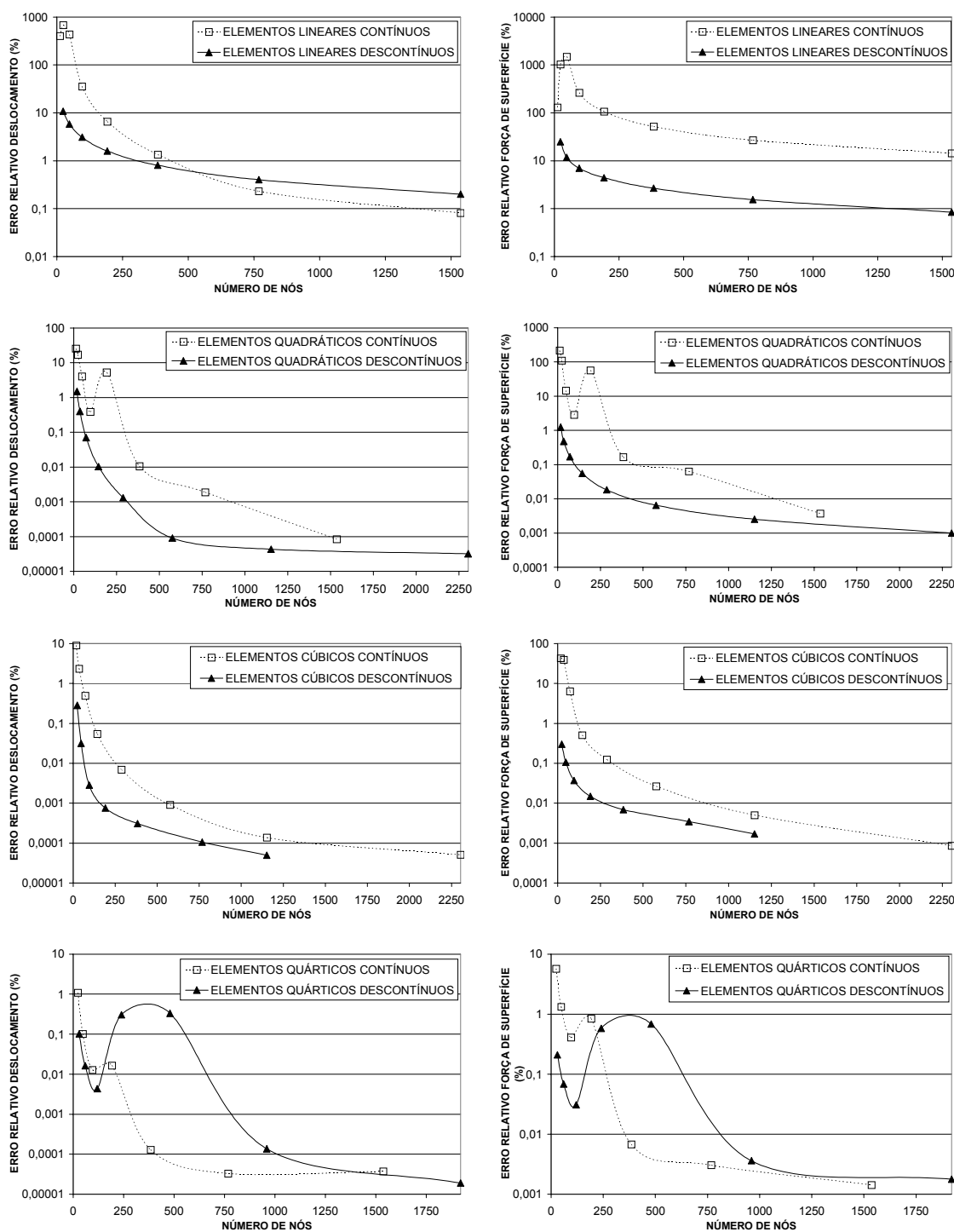


FIGURA 18 - Exemplo 2 – Formulação Auto-Regularizada da Força de Superfície – Elementos Contínuos versus Elementos Descontínuos

Acredita-se que os diferentes ganhos de precisão obtidos para cada um dos quatro elementos estão relacionados com a proporção de pontos de colocação correspondentes a nós internos ao elemento para pontos de colocação correspondentes a nós localizados

na junção entre dois elementos. Em um contorno fechado, o uso de elementos quadráticos implica que para cada nó localizado no interior do elemento existe um nó compartilhado por dois elementos, resultando em uma proporção de 1:1. Isto significa que para cada ponto de colocação para o qual a derivada tangencial possui valor único, existe um ponto de colocação para o qual esta derivada assume diferentes valores de acordo com o elemento a ser integrado, como explicado na seção 4.3.2. Esta situação é ainda mais crítica para elementos lineares, pois neste caso não haverá nenhum ponto de colocação para o qual a derivada tangencial seja única, representando portanto uma proporção de 0:1. Por outro lado, proporções mais altas são obtidas se elementos cúbicos ou quárticos forem empregados. Para estes casos esta taxa é de 2:1 e 3:1 respectivamente. Portanto, a influência da adoção da hipótese de “continuidade relaxada” parece ser mais evidente para elementos de contorno lineares e quadráticos que para elementos de ordem superior, devido à baixa proporção de pontos de colocação localizados no interior do elemento, onde a derivada tangencial possui valor único.

Uma investigação do código do MEC baseado na formulação auto-regularizada da força de superfície indica que a perda na precisão com o uso de elementos descontínuos quárticos pode estar relacionada com a precisão computacional. A função de interpolação quártica para elementos descontínuos é mais elaborada que as funções de interpolação para os elementos de ordem inferior. Observa-se um erro cumulativo na avaliação da função de interpolação para alguns nós, que não ocorrem quando os demais tipos de elementos são adotados. Este erro pode não ser significativo para malhas menos refinadas, mas uma vez que para malhas mais refinadas um maior número de operações é realizado, esta pode ser uma importante fonte de erros. Entretanto, a aproximação da derivada tangencial do deslocamento pode ser a principal fonte de erros para elementos quárticos.

Foram analisados o deslocamento radial, a tensão radial e a tensão circunferencial em pontos internos localizados sobre a bissetriz do quadrante estudado, por meio das formulações clássicas e auto-regularizadas. Em se tratando de uma etapa de pós-processamento, é necessário que os resultados das grandezas do contorno sejam confiáveis. Foram utilizadas neste caso a formulação auto-regularizada do

deslocamento, malha composta por 48 elementos quárticos e integração numérica de ordem igual a doze. Nas FIG.19 a 21 são apresentados os resultados obtidos, comparando-os com a solução exata. Foi tomado apenas o intervalo $1,95 \leq r < 2$, uma vez que os resultados mais críticos são observados quando o ponto interno se localiza a pequenas distâncias do contorno.

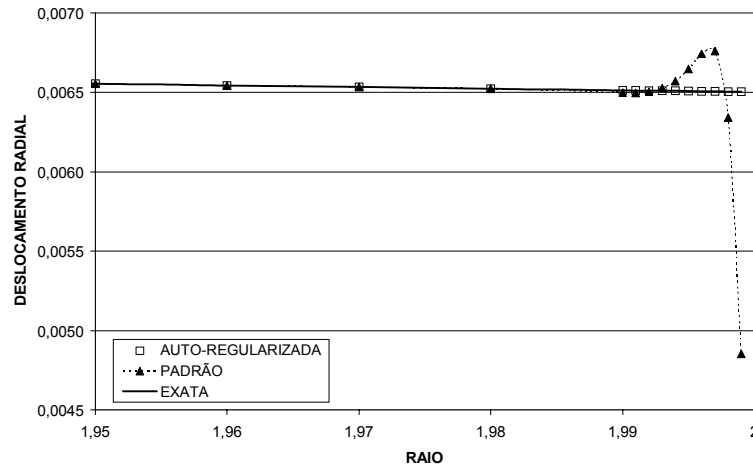


FIGURA 19 - Exemplo 2 – Deslocamento Radial em Pontos Internos

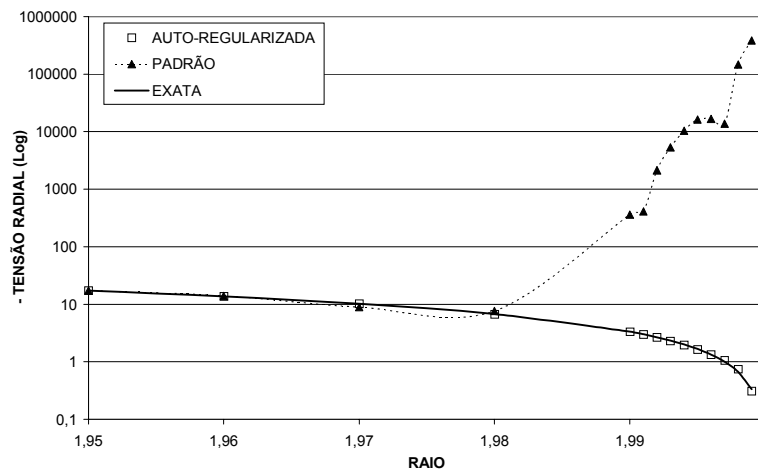


FIGURA 20 - Exemplo 2 – Tensão Radial em Pontos Internos

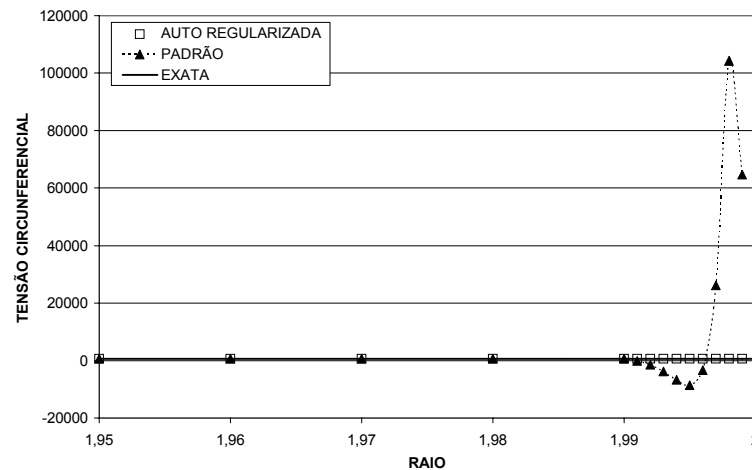


FIGURA 21 - Exemplo 2 – Tensão Circunferencial em Pontos Internos

Pode-se notar que as formulações auto-regularizadas superam totalmente as formulações clássicas quando o ponto interno tende ao contorno. A melhor precisão nos resultados das formulações auto-regularizadas em comparação com as formulações clássicas se deve ao fato de não existirem no primeiro caso perturbações numéricas decorrentes do comportamento quase-singular do integrando, que pode afetar a formulação clássica nestes casos. A idéia de se utilizar as formulações auto-regularizadas também para análise das grandezas em pontos internos já havia sido empregada por RICHARDSON e CRUSE (1999) para cálculo de tensões em pontos internos. Entretanto, o algoritmo adotado por estes autores avalia os termos regularizadores com base nos valores obtidos para as grandezas no ponto do contorno mais próximo do ponto interno, ao invés de utilizar as soluções obtidas para o ponto nodal mais próximo, como adotado no presente trabalho.

5.3 – Exemplo 3 – Viga em Balanço

Este exemplo consiste da análise de uma viga em balanço de comprimento 50 e altura 10, sujeita a um carregamento vertical com distribuição parabólica correspondente a uma carga concentrada de 1000 unidades aplicada em sua extremidade. Adotou-se como constantes do material o módulo de elasticidade $E=205010$ e o coeficiente de Poisson

$\nu=0,3$. O problema em análise possui solução analítica conhecida da teoria da elasticidade, dada em estado plano de tensão pelas Eq.48 a 50.

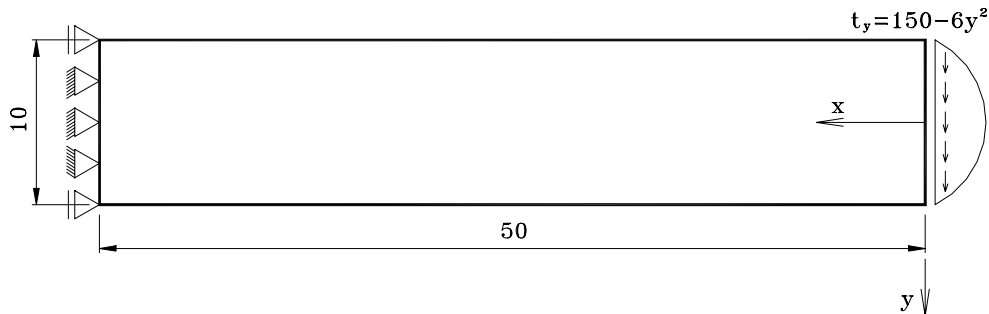


FIGURA 22 - Viga em Balanço – Geometria do Problema

$$v = \frac{F}{12EI} (2x^3 + 2L^2(2L - 3x) + 3h^2(1 + \nu)(L - x)) \quad (48)$$

$$\sigma_x = \frac{-F \cdot x \cdot y}{I} \quad (49)$$

$$\tau_{xy} = \frac{-F}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (50)$$

A geometria do problema e suas condições de contorno são mostradas na FIG.22. A malha mais pobre para as interpolações quadráticas, cúbicas e quárticas é construída com doze elementos de contorno de mesmo tamanho, onde cada face vertical é modelada com um elemento, e cada face horizontal é modelada com cinco elementos. Quando da utilização de elementos lineares, a respectiva malha menos refinada é construída mantendo-se o mesmo número e posição de nós da malha quadrática mais pobre. Para elementos lineares o carregamento parabólico aplicado não pode ser aplicado de forma exata como para as demais interpolações. A aproximação linear do carregamento é então efetuada de tal forma que seja mantido o valor da carga concentrada equivalente.

Em refinamentos subsequentes, cada elemento da malha anterior é subdividido em dois elementos de mesmo tamanho. São utilizadas as formulações auto-regularizadas para a análise do problema, adotando-se doze pontos nos esquemas de integração numérica. As soluções do MEC para deslocamento ao longo do contorno para várias malhas usando

interpolações lineares, quadráticas, cúbicas e quárticas são comparadas com a solução exata de forma a determinar o erro relativo máximo. Estes resultados são apresentados nas TAB.13 a 16 e FIG.24. As regiões para as quais a solução da teoria de vigas não é válida, e que portanto podem apresentar perturbações nos resultados são excluídas quando da avaliação do erro relativo máximo.

TABELA 13 - Exemplo 3 – Formulação Auto-Regularizada do Deslocamento

Nº de Elementos Lineares	Número de Nós	Erro Relativo no Deslocamento (%)
24	24	31,7071846
48	48	11,3389249
96	96	3,9895894
192	192	1,9645121
384	384	1,4446217
768	768	1,3105068
1536	1536	1,2746974
Nº de Elementos Quadráticos	Número de Nós	Erro Relativo no Deslocamento (%)
12	24	1,6356994
24	48	0,8845082
48	96	1,0981848
96	192	1,2077942
192	384	1,2443039
384	768	1,2553278
768	1536	1,2586595
Nº de Elementos Cúbicos	Número de Nós	Erro Relativo no Deslocamento (%)
12	36	0,9257734
24	72	1,1560836
48	144	1,2386918
96	288	1,2590915
192	576	1,2616712
384	1152	1,2612261
768	2304	1,2607180
Nº de Elementos Quárticos	Número de Nós	Erro Relativo no Deslocamento (%)
12	48	0,9215232
24	96	1,1227882
48	192	1,2169221
96	384	1,2466867
192	768	1,2558561
384	1536	1,2587546

Percebe-se através da TAB.13, na qual são apresentados os erros relativos percentuais máximos utilizando a formulação auto-regularizada do deslocamento com elementos contínuos, que estes resultados tendem a um valor constante de aproximadamente 1,25% a partir de certo nível de refinamento, para todas ordens de interpolação.

Os erros relativos para as soluções do MEC baseado na formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos contínuos (FARFS) e descontínuos (FARFS-D) são apresentados nas TAB.14 e 15. Observa-se novamente que a adoção de elementos descontínuos na formulação auto-regularizada da força de superfície conduz, na maioria dos casos, a uma melhoria expressiva dos resultados. Para todos os tipos de elemento e interpolações, os resultados convergem para a solução exata com o refinamento da malha. Entretanto, ao utilizar elementos contínuos esta convergência se dá de forma oscilatória para elementos quadráticos, cúbicos e quárticos, ao passo que para elementos descontínuos de mesma ordem observa-se uma convergência monotônica dos resultados para a solução analítica.

TABELA 14 - Exemplo3 – Formulação Auto-Regularizada da Força de Superfície –
Interpolação Linear e Quadrática

Nº de Elementos Lineares	Erro Relativo no Deslocamento (%)	
	FARFS	FARFS-D
24	145,6532945	777,7930786
48	108,3693338	314,4341333
96	70,1877006	138,2194336
192	39,1080506	64,38128425
384	20,4773048	31,2082083
768	10,4630428	15,57927183
1536	5,6612119	-
Nº de Elementos Quadráticos	Erro Relativo no Deslocamento (%)	
	FARFS	FARFS-D
12	22,4028948	1,8600070
24	1922,1489788	1,9384137
48	60,9976316	1,1586141
96	72,6655939	1,1467673
192	96,8301382	1,2118728
384	434,3556028	1,2392645
768	54,5383232	1,2506705

TABELA 15 - Exemplo3 – Formulação Auto-Regularizada da Força de Superfície –
Interpolação Cúbica e Quártica

Nº de Elementos Cúbicos	Erro Relativo no Deslocamento (%)	
	FARFS	FARFS-D
12	11,2689099	2,4955737
24	46,8051022	1,5056251
48	1,0221072	1,0618541
96	4,8526374	1,1615270
192	3,6471282	1,2109296
384	2,4803511	1,2347832
768	1,8625244	-
Nº de Elementos Quárticos	Erro Relativo no Deslocamento (%)	
	FARFS	FARFS-D
12	8,4062125	1,6843649
24	19,9833416	1,0438263
48	9,8490816	1,1600534
96	4,7670761	1,2139652
192	2,7486646	1,2382712
384	1,9594415	1,2494060

A utilização de elementos descontínuos lineares não representou ganho algum na solução do problema através da formulação auto-regularizada da força de superfície. Na verdade, há piora significativa dos resultados, principalmente para malhas menos refinadas. A adoção de elementos lineares nesta formulação é crítica, uma vez que além do erro possivelmente introduzido pela adoção da hipótese de “continuidade relaxada”, a aproximação da derivada tangencial é bastante pobre, sendo aproximada por funções constantes. Não descarta-se a hipótese de que para este problema a aproximação da derivada tangencial do deslocamento introduza erros significativos quando da utilização da formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos lineares. Entretanto, os valores de a e b adotados (distância entre o nó funcional e o nó geométrico extremo) podem não ser apropriados para este caso específico. Outras abordagens poderiam ser empregadas para comprovação dos resultados e determinação da principal fonte de erros introduzida pela formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos contínuos. A utilização do princípio variacional, conforme adotado por JORGE et al. (2002) garante continuidade da derivada tangencial, no sentido variacional, nas junções entre elementos, e dispensa portanto o uso da hipótese de “continuidade relaxada”, representando uma alternativa para comprovação dos

resultados aqui obtidos. A adoção de elementos de classe C^1 , como, por exemplo, os elementos “Overhauser” é outra alternativa viável para validação das respostas. Neste caso a continuidade da derivada tangencial do deslocamento é garantida de forma implícita, utilizando-se os valores de deslocamentos e forças de superfície nos nós adjacentes ao elemento integrado.

A formulação auto-regularizada da força de superfície faz uso da normal ao contorno no ponto de colocação. Para nós de canto adota-se a normal média aos elementos que compartilham este nó, ou seja, substitui-se o canto real por um canto arredondado. Visando identificar a influência da consideração de cantos arredondados nos resultados obtidos através da formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos contínuos, foram adotados elementos semicontínuos nos cantos geométricos, como mostrando na FIG.23, garantindo desta forma a unicidade da normal em todos pontos de colocação.

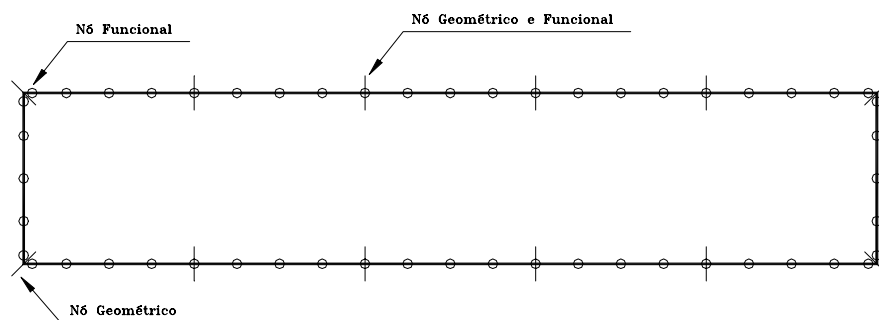


FIGURA 23 - Exemplo 3 – Malha com Elementos Semicontínuos nos Cantos

Os erros percentuais relativos máximos para deslocamento utilizando a abordagem mencionada são mostrados na TAB.16, onde é possível perceber que a adoção de normal média nos cantos pode representar uma importante fonte de erros ao se utilizar a formulação auto-regularizada da força de superfície. Esta conclusão se deve ao fato que na maioria dos casos houve um aumento na precisão ao adotar normais únicas em cada ponto de colocação.

TABELA 16 - Exemplo 3 – Formulação Auto-Regularizada da Força de Superfície com Elementos Semicontínuos nos Cantos

Nº de Elementos Lineares	Número de Nós	Erro Relativo no Deslocamento (%)
24	24	125,2932978
48	48	110,5967690
96	96	68,2868367
192	192	37,6801195
384	384	19,7576089
768	768	10,1641889
1536	1536	5,5417855
Nº de Elementos Quadráticos	Número de Nós	Erro Relativo no Deslocamento (%)
12	24	6,2548831
24	48	4,3157664
48	96	12,7165022
96	192	49,1717783
192	384	368,4214692
384	768	10,4873831
768	1536	7,1850700
Nº de Elementos Cúbicos	Número de Nós	Erro Relativo no Deslocamento (%)
12	36	2,0671394
24	72	1,2772166
48	144	1,0476688
96	288	1,0385416
192	576	1,0933835
384	1152	1,1495574
768	2304	1,1909281
Nº de Elementos Quárticos	Número de Nós	Erro Relativo no Deslocamento (%)
12	48	1,1140295
24	96	1,1946177
48	192	1,3127774
96	384	1,3141502
192	768	1,2978623
384	1536	1,2839563

A FIG.24 traz uma comparação gráfica entre os erros máximos obtidos através da utilização da formulação auto-regularizada do deslocamento (FARD) e da formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos contínuos (FARFS), elementos descontínuos (FARFS-D) e elementos semicontínuos nos cantos (FARFS-SC). Pode-se observar nesta figura que a formulação auto-regularizada do deslocamento apresenta os

resultados mais confiáveis. A adoção de elementos descontínuos na formulação auto-regularizada da força de superfície elimina o comportamento oscilatório obtido com o uso de elementos contínuos quadráticos, cúbicos e quárticos. Assim como para o segundo exemplo, ao adotar elementos descontínuos, o ganho na precisão dos resultados é mais significativo para elementos de ordem mais baixa que para elementos de ordem superior. Além disso, é possível notar que a consideração de normal média nos cantos conduz a piores resultados que a utilização de normais únicas em cada ponto de colocação quando se utilizam elementos semicontínuos. A precisão das respostas com a adoção de elementos descontínuos na formulação auto-regularizada da força de superfície é da mesma ordem de grandeza da precisão da formulação auto-regularizada do deslocamento.

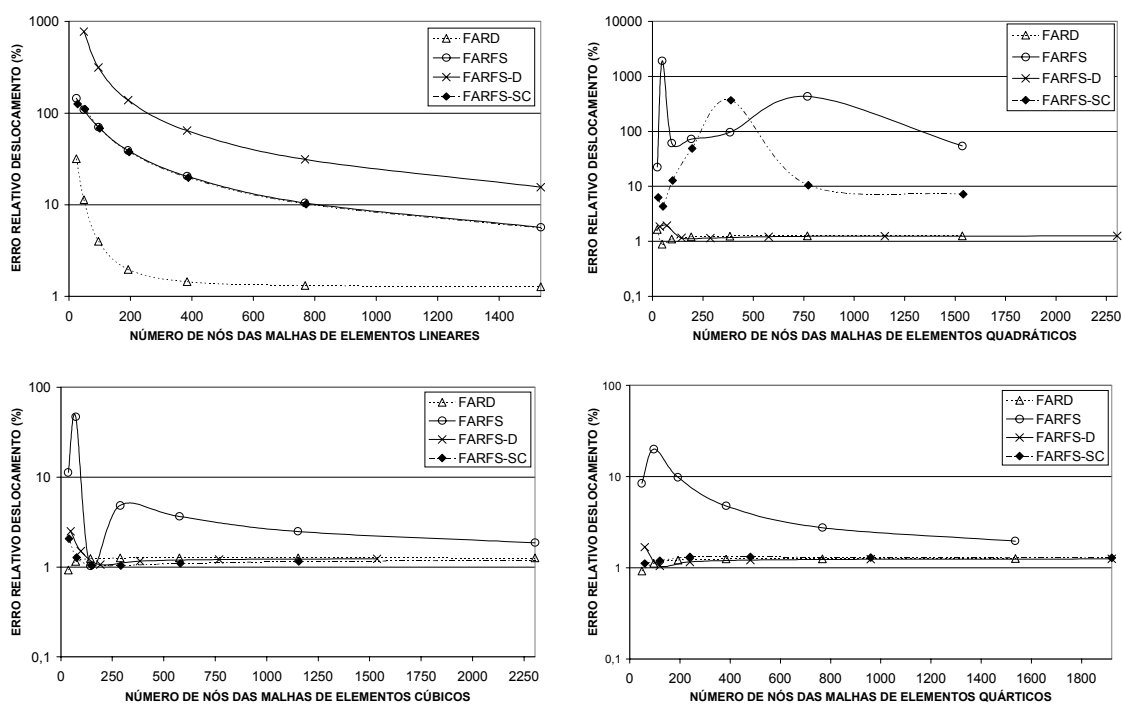


FIGURA 24 - Exemplo 3 – Comparação entre as Formulações Auto-Regularizadas

A elástica da viga em balanço obtida por meio da formulação auto-regularizada do deslocamento e da formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos contínuos, descontínuos e semicontínuos nos cantos para uma malha de 192 elementos quadráticos é representada na FIG.25, onde também é mostrada a elástica exata.

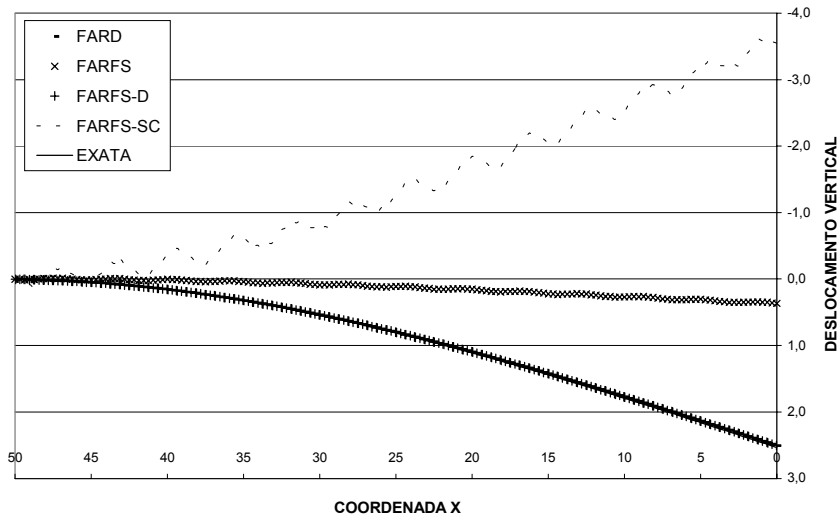


FIGURA 25 - Exemplo 3 – Elástica do Problema

Observa-se que a formulação auto-regularizada do deslocamento e a formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos descontínuos são capazes de representar de forma bastante precisa o eixo deformado da viga. Por outro lado, a formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos contínuos e semicontínuos apresentam resultados oscilatórios que não condizem com a realidade. Escolheu-se a malha de 192 elementos quadráticos para comparação devido ao fato de que a mesma possibilita melhor visualização do comportamento oscilatório dos resultados ao adotar elementos semicontínuos nos cantos na formulação auto-regularizada da força de superfície. Os resultados obtidos com as demais malhas de elementos quadráticos utilizando a mesma abordagem também apresentam oscilações, porém em menores escalas. Portanto, apesar da utilização de elementos semicontínuos na formulação auto-regularizada da força de superfície conduzir a erros globais bastante inferiores aos obtidos com elementos contínuos nesta formulação, esta abordagem não se mostra eficiente na representação da elástica da viga ao adotar elementos quadráticos. Isto indica que apesar da adoção de normal média nos cantos influenciar a precisão dos resultados do MEC baseado na formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos contínuos, a descontinuidade do gradiente nos pontos de colocação localizados nas junções entre dois elementos, que é a base da hipótese de “continuidade relaxada”, parece ser realmente a principal fonte de erros introduzida por esta formulação.

Embora os resultados obtidos para este problema não sejam tão precisos quanto para o Exemplo 2, pode-se dizer que a formulação auto-regularizada do deslocamento e a formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos descontínuos representam satisfatoriamente a solução do problema. A modelagem numérica deste problema, quer seja através do MEC ou através do MEF, não permite a representação fiel das condições de contorno assumidas na obtenção da solução exata. Com intuito de demonstrar a eficácia da análise deste problema através do MEC baseado nas formulações supracitadas, fez-se uma comparação entre os resultados do MEC e do MEF. Quando da análise por meio do MEC, foi utilizada a formulação auto-regularizada do deslocamento na obtenção das soluções no contorno, e as formulações auto-regularizadas para obter as respostas nos pontos internos. Foi adotada uma malha de 48 elementos de contorno quadráticos contínuos, resultando em espaçamento nodal igual a 1,25. Os pontos internos analisados são também espaçados de 1,25 unidades, conforme FIG.26. As soluções do MEF foram obtidas utilizando o software ANSYS, versão 5.7, adotando-se malha de 80 elementos de estado plano de tensão quadráticos, mantendo o mesmo espaçamento nodal da malha do MEC (FIG.26).

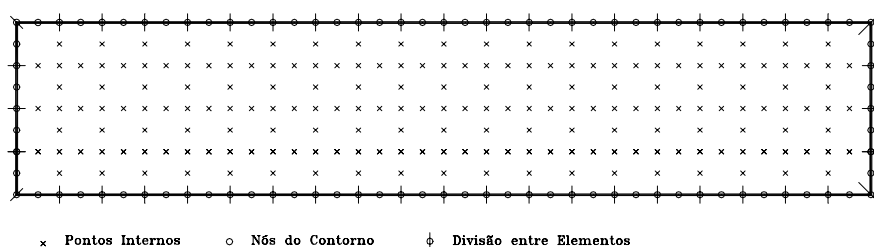


FIGURA 26 - Exemplo 3 - Malha do MEC e Pontos Internos

Os mapas de deslocamento vertical ao longo da viga obtidos através do MEC baseado na formulação auto-regularizada do deslocamento, e por meio do MEF são apresentados nas FIG.27 e 28 respectivamente. Utilizou-se o pós-processador do programa GID, versão 7.1 para geração do mapa de deslocamentos baseado nas soluções do MEC. A partir destes mapas é possível notar que os resultados obtidos através do MEC são semelhantes à solução do MEF, evidenciando o fato de que a menor precisão dos resultados para este exemplo, em comparação com os do Exemplo 2, estão relacionados com a incapacidade dos modelos numéricos de representar as condições de contorno

utilizadas quando da dedução da solução do problema através da teoria da elasticidade. A solução obtida pela teoria da elasticidade considera restrição em apenas um ponto na face $x=50$ (FIG.22), localizado à meia altura, permitindo que haja rotação nesta face. Ao analisar este problema numericamente, é necessário restringir os deslocamentos nesta face, impedindo desta forma qualquer rotação ao longo da altura.

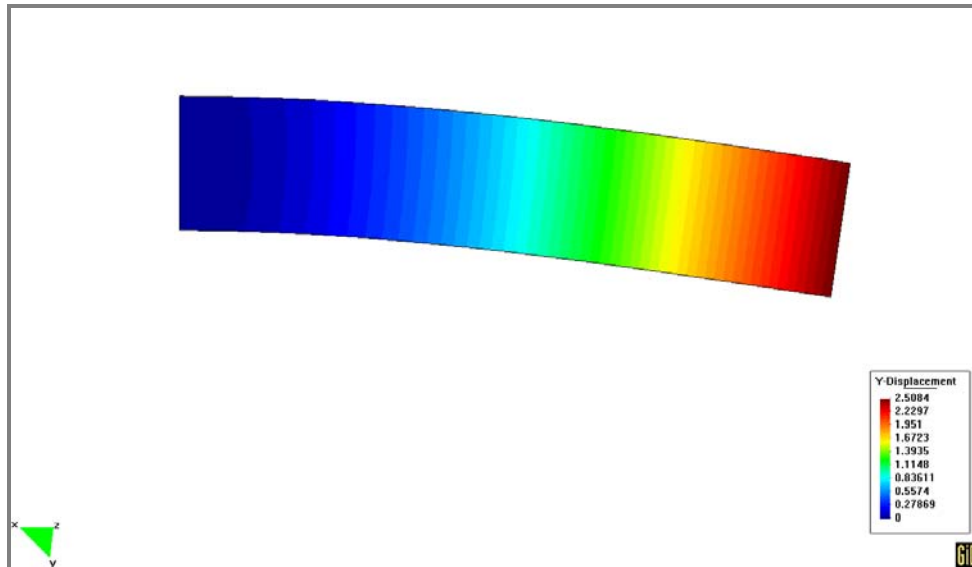


FIGURA 27 - Exemplo 3 – Deslocamento Vertical – MEC

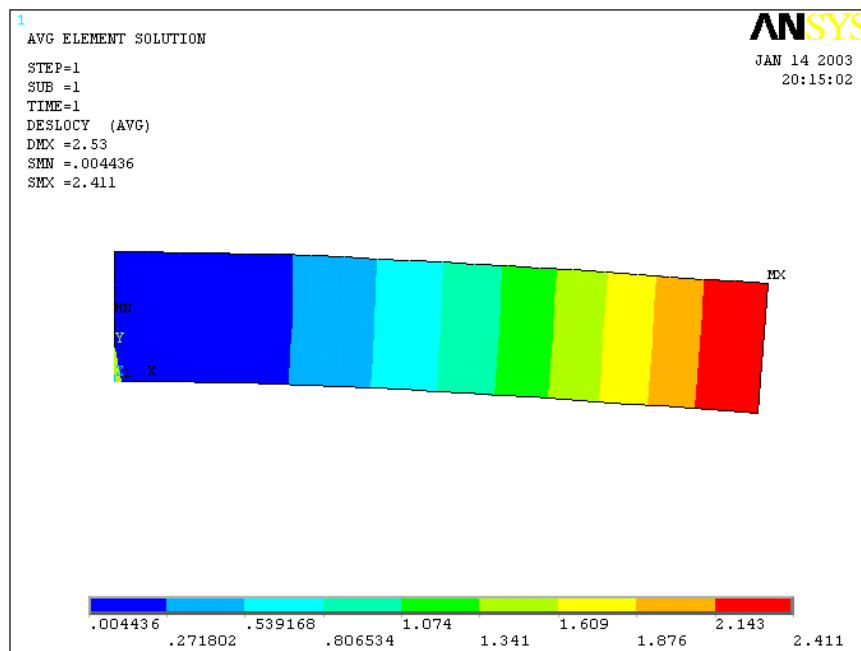


FIGURA 28 - Exemplo 3 –Deslocamento Vertical –MEF

A FIG.29 apresenta os resultados para força de superfície na face restringida, comparando as formulações do MEC adotadas neste exemplo, bem como a solução via elementos finitos. É possível notar que ao utilizar a formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos descontínuos obtém-se a melhor representação para estes resultados, sem os picos na extremidade ou desvios ao longo da altura, como observado para as demais formulações.

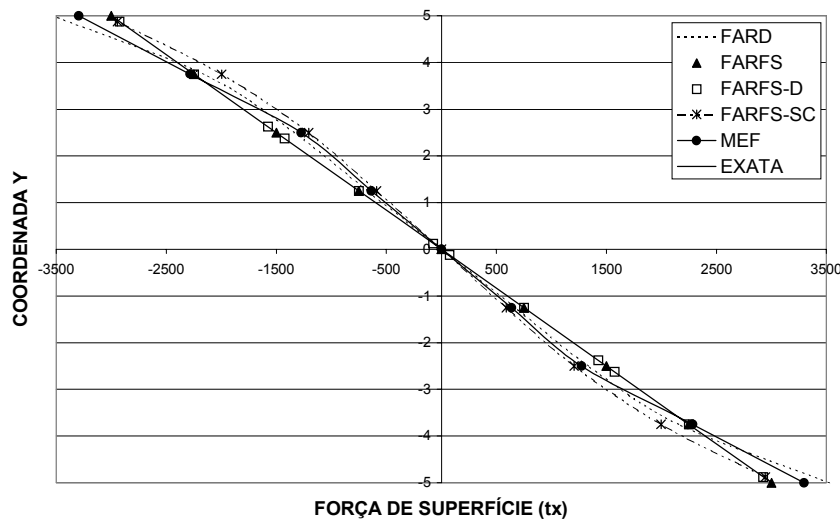


FIGURA 29 - Exemplo 3 - Força de Superfície na Direção x – Comparação entre as Formulações

Na TAB.17 são mostrados alguns resultados para a tensão normal σ_x e tensão de cisalhamento τ_{xy} em pontos internos localizados na seção $x = 25$ (FIG.22), obtidos através das formulações auto-regularizadas (FAR). Estes resultados são comparados com a solução exata. Observa-se que as formulações auto-regularizadas representam de forma bastante satisfatória as tensões em pontos internos.

TABELA 17 - Exemplo 3 – Tensões em Pontos Internos

Coordenada Y	Tensão Normal σ_x		Tensão de Cisalhamento τ_{xy}	
	Exata	FAR	Exata	FAR
-3,75	1125,000	1125,163	-65,625	-65,800
-2,5	750,000	750,109	-112,500	-112,537
-1,25	375,000	375,055	-140,625	-140,653
0,0	0,000	0,000	-150,000	-150,029

Foram analisados deslocamentos e tensões em pontos internos próximos ao contorno. São comparadas as soluções utilizando-se as formulações auto-regularizadas e as formulações clássicas do MEC. A solução exata é prescrita em cada ponto de colocação, evitando-se portanto que as imprecisões na avaliação das grandezas do contorno conduzam a respostas pouco precisas nos pontos internos. Os nós do contorno são igualmente espaçados de 1,25 unidades. Nas FIG.30 e 31 estão representados o deslocamento vertical e a tensão de cisalhamento, respectivamente. Alguns destes resultados são também apresentados na TAB.18, juntamente com a solução exata. Pode-se confirmar a superioridade das formulações auto-regularizada sobre as formulações clássicas na análise das grandezas em pontos internos próximos ao contorno.

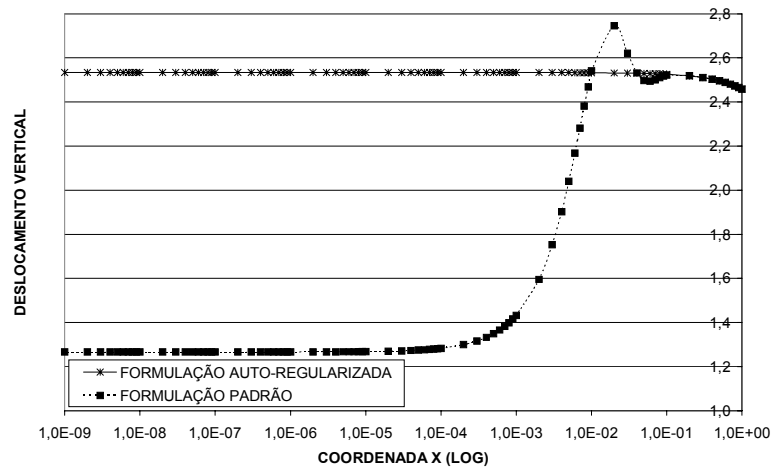


FIGURA 30 - Exemplo 3 – Deslocamento Vertical em Pontos Internos

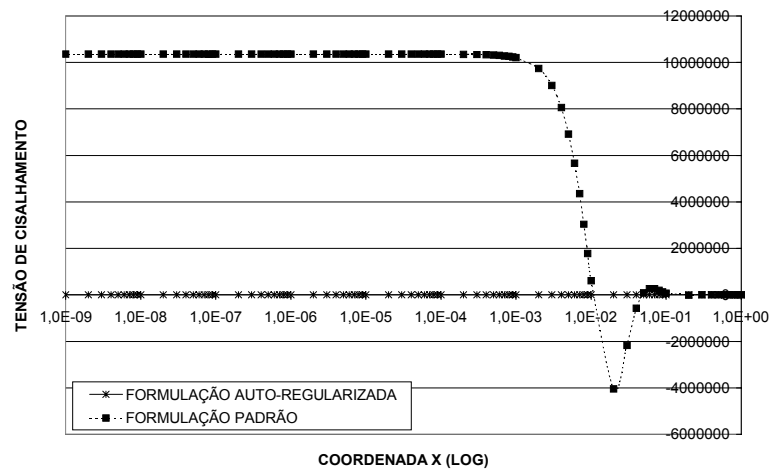


FIGURA 31 - Exemplo 3 – Tensão de Cisalhamento em Pontos Internos

TABELA 18 - Exemplo 3 – Grandezas nos Pontos Internos Próximos ao Contorno

Coordenada X	Deslocamento Vertical u_y			Tensão de Cisalhamento τ_{xy}		
	Exata	Padrão	FAR	Exata	Padrão	FAR
1,0	2,45896	2,45812	2,45812	-150	-152,5317	-152,5278
0,1	2,52652	2,52240	2,52578	-150	74438,348	-152,1417
0,01	2,53327	2,54102	2,53254	-150	608362,56	-151,6007
10^{-3}	2,53395	1,43236	2,53324	-150	10195814	-151,4405
10^{-4}	2,53402	1,28293	2,53328	-150	10349963	-151,4154
10^{-5}	2,53402	1,26794	2,53328	-150	10351562	-151,4129

Quando da análise das grandezas em pontos internos próximos ao contorno por meio das formulações clássicas, poder-se-ia utilizar técnica de subelementação, conforme adotado por CHIEN et al. (1997), entre outros, para obtenção de melhores resultados. Outra alternativa seria a utilização de transformações de coordenadas para tratamento de integrais quase-singulares, como a proposta por TELLES (1987). Este propõe uma transformação não-linear de coordenadas, de forma a concentrar os pontos de integração na região próxima ao ponto interno, reduzindo de forma significativa as perturbações numéricas causadas pelo comportamento quase-singular do integrando.

5.4 – Exemplo 4 – Domínio Retangular Sujeito a Carga Concentrada

Um domínio retangular de dimensões 2 x 1, sujeito a uma carga concentrada $P=1000$ é analisado neste exemplo. A geometria e condições de contorno do problema são mostradas na FIG.32. O carregamento dito concentrado, é na verdade uniformemente distribuído ao longo de um pequeno elemento cujo comprimento equivale a um décimo do comprimento dos elementos adjacentes. Na análise deste problema considerou-se estado plano de tensão e foram adotadas para as propriedades do material, o módulo de elasticidade $E = 205010$ e o coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$.

A malha mais grosseira para cada uma das quatro interpolações adotadas neste trabalho é construída com sete elementos, onde cada face vertical é modelada com um elemento, a face inferior é modelada com dois elementos de mesmo tamanho, e a face superior é modelada com três elementos, sendo dois elementos de mesmo tamanho e um elemento

menor, como ilustrado na FIG.33 para malha quadrática, na qual somente o número dos elementos é mostrado.

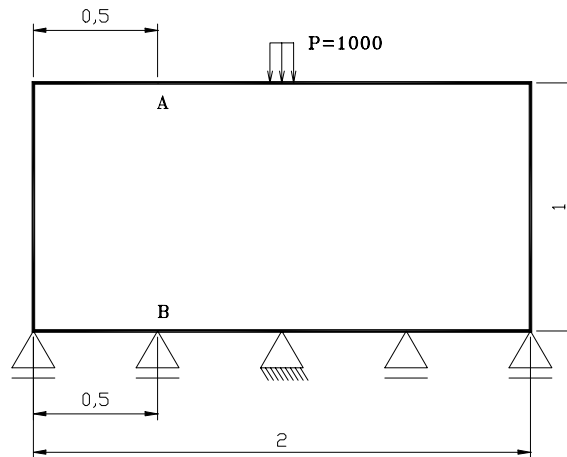


FIGURA 32 - Domínio Retangular Sujeito a Carga Concentrada – Geometria do Problema

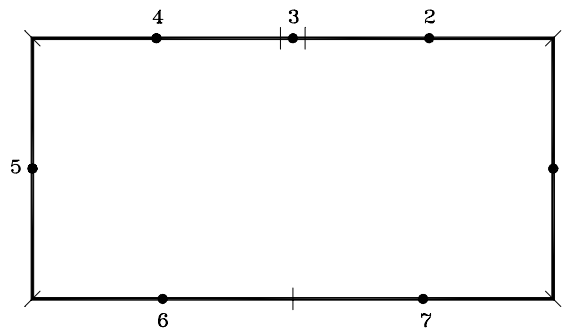


FIGURA 33 - Exemplo 4 – Discretização do Contorno

Várias malhas refinadas, para cada uma das interpolações, são geradas tomando como base a respectiva malha citada anteriormente. Cada malha refinada é criada através da subdivisão dos elementos das faces verticais e da face inferior da malha anterior, em dois elementos de mesmo tamanho. O refinamento na face superior é feito de forma que esta face seja modelada com um elemento a mais que a face inferior, e que a proporção do menor elemento para os elementos adjacentes seja mantida igual a 10%.

Este problema não possui solução exata conhecida da teoria da elasticidade, portanto tomou-se a solução do método dos elementos finitos, obtida via ANSYS, versão 5.7,

como referência. Adotou-se malha de 41472 elementos finitos de estado plano, quadriláteros quadráticos, de forma a garantir a precisão da solução de referência, com base em estudo de convergência realizado para este caso.

As soluções do método dos elementos de contorno são obtidas adotando-se as formulações auto-regularizadas do deslocamento (FARD) e da força de superfície (FARFS), utilizando elementos contínuos e doze pontos para os esquemas de integração numérica.

Este problema apresenta descontinuidade na força de superfície, e segundo CRUSE e SUWITO (1993), a formulação auto-regularizada da força de superfície não pode ser utilizada para pontos onde existam descontinuidades de força de superfície ou normal. Estes autores sugerem que nestes pontos sejam utilizadas duas equações, adotando-se, por exemplo, nó duplo ou elementos semicontínuos. Entretanto, RICHARDSON e CRUSE (1998) afirmam que os erros obtidos quando se escreve a equação integral de contorno para força de superfície em pontos onde haja descontinuidade são finitos e não influenciam de forma significativa os resultados em pontos distantes da descontinuidade. No presente trabalho são adotados elementos semicontínuos na formulação auto-regularizada da força de superfície (FARFS-SC) nas descontinuidades de força de superfície e normal com intuito de verificar a influência destas descontinuidades na solução do MEC baseado nesta formulação, assim como analisado no Exemplo 2. Quando da adoção da formulação auto-regularizada da força de superfície são também utilizados elementos descontínuos (FARFS-D) visando identificar a influência da adoção do conceito de “continuidade relaxada”.

Nas TAB.19 e 20 são mostrados os resultados do método dos elementos de contorno para deslocamento vertical no ponto A e força de superfície vertical no ponto B, respectivamente, para as diversas malhas de elementos lineares, quadráticos, cúbicos e quárticos, utilizando as formulações citadas acima. A solução de referência nestes pontos também é apresentada nas respectivas tabelas. Quando os pontos A e B não coincidem com o nó funcional do elemento, obtém-se a resposta nestes pontos através da interpolação dos resultados no elemento que contém o ponto em questão.

TABELA 19 - Exemplo 4 – Deslocamento Vertical no Ponto A

Solução de Referência (MEF) – $u_v = -0,0014764$				
Nº de Elementos Lineares	FARD	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC
7	-0,0045184	0,0066566	-0,0012357	-0,0012861
13	-0,0016792	0,0014566	-0,0009990	0,0006910
25	-0,0013782	-0,0050504	-0,0011642	0,0003964
49	-0,0014102	-0,0056152	-0,0012304	0,0004369
97	-0,0014406	-0,0060287	-0,0012507	0,0004339
193	-0,0014579	-0,0062343	-0,0012560	-0,0064113
385	-0,0014670	-0,0063363	-0,0012573	0,0004305
769	-0,0014717	-0,0063867	-0,0012576	0,0004298
1537	-0,0014740	-0,0064114	-	0,0004294
Nº de Elementos Quadráticos	FARD	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC
7	-0,0016044	-0,0157706	-0,0010719	-0,0010900
13	-0,0012369	0,0508968	-0,0008347	-0,0071032
25	-0,0014459	-0,3597940	-0,0008400	0,0124448
49	-0,0014631	0,0078946	-0,0008446	0,0044236
97	-0,0014701	8,3389063	-0,0008455	0,0182609
193	-0,0014733	0,0822257	-0,0008457	0,0048325
385	-0,0014749	-0,1105755	-0,0008457	-0,0928043
769	-0,0014756	0,0423993	-0,000846	0,0069658
Nº de Elementos Cúbicos	FARD	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC
7	-0,0015551	-0,0015805	-0,0014568	-0,0014637
13	-0,0015734	0,0007931	-0,0014119	-0,0020126
25	-0,0014851	-0,0072738	-0,0013679	-0,0020414
49	-0,0014776	-0,0046489	-0,0013608	-0,0019149
97	-0,0014763	-0,0041840	-0,0013589	-0,0018627
193	-0,0014762	-0,0040524	-0,0013584	-0,0018512
385	-0,0014763	-0,0040042	-0,0013583	-0,0018485
769	-0,0014763	-0,0039838	-	-0,0018478
Nº de Elementos Quárticos	FARD	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC
7	-0,0015509	-0,0016523	-0,0014328	-0,0014416
13	-0,0014796	-0,0016687	-0,0013800	-0,0012134
25	-0,0014841	-0,0018894	-0,0013681	-0,0012768
49	-0,0014782	-0,0019208	-0,0013628	-0,0012767
97	-0,0014767	-0,0019349	-0,0013617	-0,0012776
193	-0,0014764	-0,0019401	-0,0013616	-0,0012779
385	-0,0014764	-0,0019421	-0,0013616	-0,0012780

TABELA 20 - Exemplo 4 – Força de Superfície Vertical em B

Solução de Referência (MEF) – $t_v= 506,5$				
Nº de Elementos Lineares	FARD	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC
7	850,06	1548,72	416,82	389,24
13	669,55	1134,97	481,59	366,40
25	583,26	781,98	483,10	356,17
49	541,07	863,52	485,68	354,67
97	523,29	892,04	487,26	353,93
193	514,80	902,34	488,10	907,67
385	510,63	906,05	488,52	353,51
769	508,56	907,08	488,73	353,48
1537	507,53	907,03	-	353,47
Nº de Elementos Quadráticos	FARD	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC
7	523,12	1187,25	487,05	470,62
13	523,76	35,39	437,47	725,65
25	515,30	11264,40	455,19	-126,00
49	511,34	2109,02	455,78	519,08
97	509,03	-358915,92	455,84	-242,49
193	507,79	4725,22	455,84	382,46
385	507,15	4790,82	455,85	4147,82
769	506,83	-542,55	455,85	141,78
Nº de Elementos Cúbicos	FARD	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC
7	519,09	433,28	515,05	507,35
13	509,50	423,22	514,21	524,38
25	508,29	865,69	497,76	536,71
49	507,27	739,62	497,21	537,41
97	506,85	717,20	497,06	536,72
193	506,66	710,04	497,02	536,42
385	506,58	707,44	497,01	536,33
769	506,54	706,47	-	536,30
Nº de Elementos Quárticos	FARD	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC
7	514,15	523,80	499,84	502,08
13	509,47	539,04	482,51	491,40
25	507,45	542,28	497,63	490,64
49	506,85	543,61	497,33	490,56
97	506,65	543,92	497,27	490,56
193	506,57	543,98	497,27	490,56
385	506,53	543,98	497,28	490,57

Pode-se perceber que os resultados obtidos por meio da formulação auto-regularizada do deslocamento são bastante próximos da solução de referência, confirmando a boa

performance desta formulação na análise de problemas que envolvem descontinuidade de força de superfície. Nota-se ainda que há convergência dos resultados com refinamento da malha para todas as formulações e tipos de elementos, e que esta é mais rápida para elementos de alta ordem do que para elementos de ordem mais baixa.

As mesmas soluções do método dos elementos de contorno nos pontos A e B (FIG.32) são comparadas com a solução do método dos elementos finitos para determinação do erro relativo. As FIG.34 e 35 apresentam graficamente o estudo de convergência para este problema, fazendo uma comparação entre os tipos de elementos adotados na formulação auto-regularizada da força de superfície e entre as formulações auto-regularizadas.

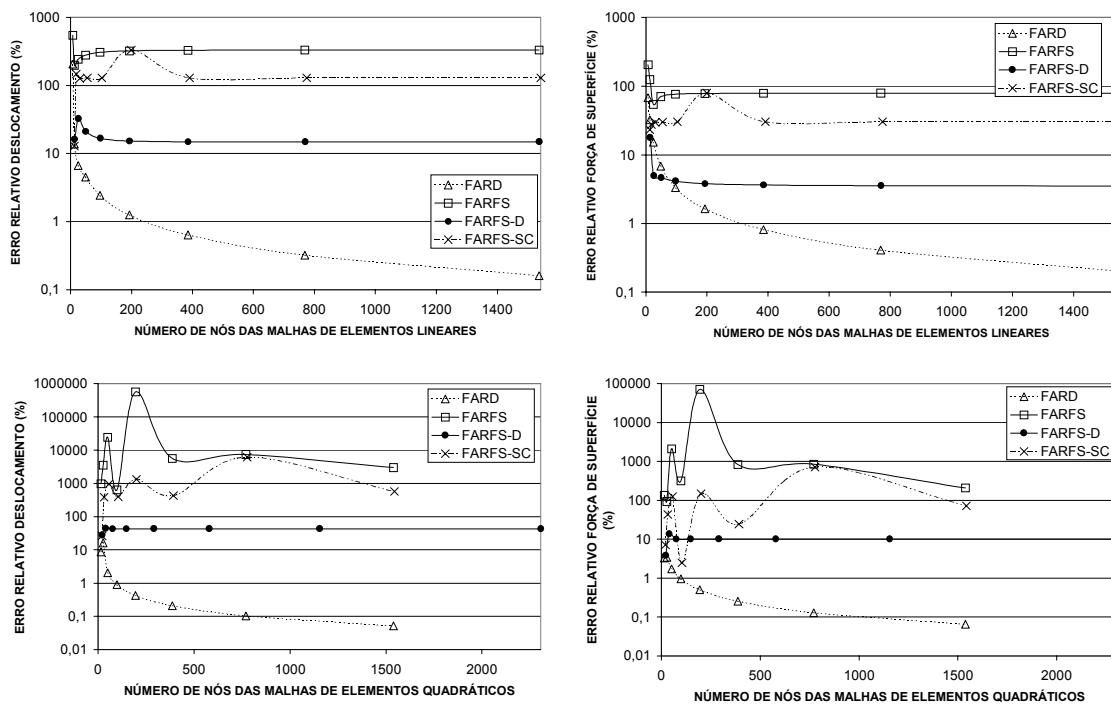


FIGURA 34 - Exemplo 4 – Erro Relativo no Deslocamento e Força de Superfície – Elementos Lineares e Quadráticos

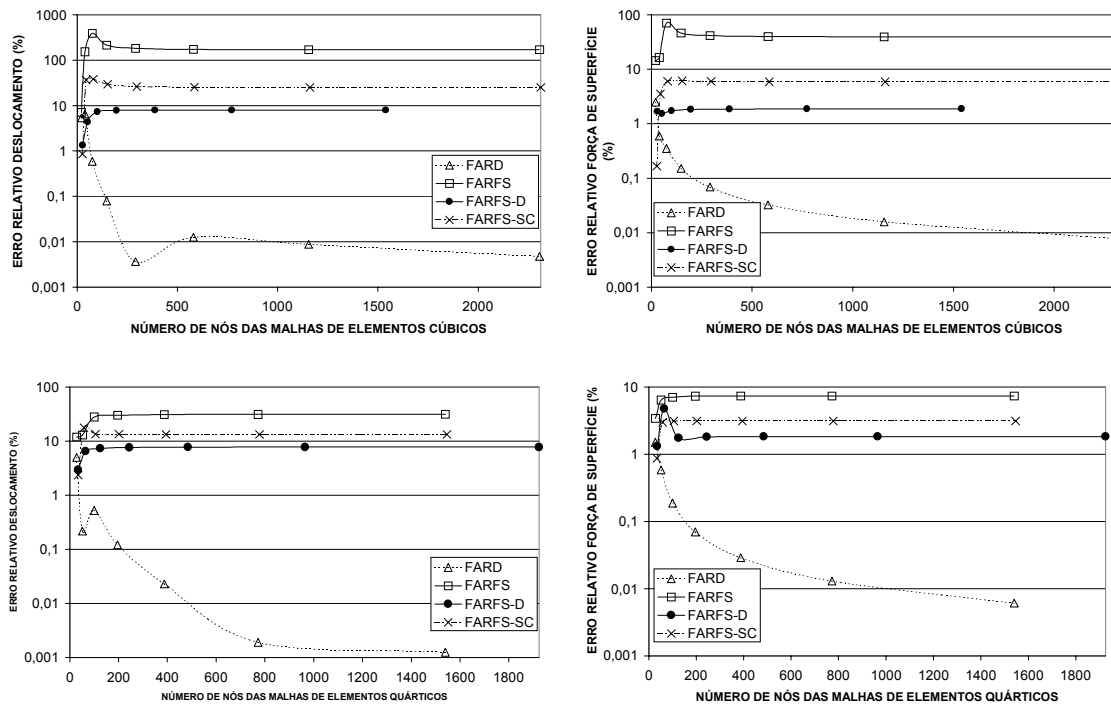


FIGURA 35 - Exemplo 4 – Erro Relativo no Deslocamento e Força de Superfície – Elementos Cúbicos e Quárticos

Observa-se que a adoção de elementos contínuos nos pontos de descontinuidade de força de superfície introduz erros significativos na solução do MEC baseado na formulação auto-regularizada da força de superfície, pois nota-se ganho na precisão dos resultados ao adotar elementos semicontínuos nesta formulação. Neste caso não é forçada a continuidade da função campo onde ela não exista de fato. Entretanto, a utilização destes elementos não eliminou a oscilação na convergência dos resultados da formulação auto-regularizada da força de superfície (FARFS), principalmente para elementos quadráticos.

A utilização de elementos descontínuos neste problema introduz erros na discretização das condições de contorno. Uma vez que o algoritmo implementado cria dois nós funcionais para cada nó localizado na junção entre elementos, e assume as condições de contorno através da interpolação das mesmas no elemento, ao adotar elementos descontínuos existem dois nós restringidos na direção horizontal, ao invés de apenas um como no problema original (FIG.32). Esta consideração implica em maiores erros na região próxima aos nós restringidos, e é menos significativa para nós mais distantes.

Entretanto, o erro introduzido pela modificação das condições de contorno é minimizado com o refinamento da malha. Apesar destes erros, a utilização de elementos descontínuos na formulação auto-regularizada da força de superfície apresenta significativo ganho na precisão quando comparada com a utilização de elementos contínuos e semicontínuos nesta formulação. Estes resultados indicam que a adoção da hipótese de continuidade relaxada na FARFS é importante fonte de erros na solução do problema.

Novamente percebe-se que o ganho na precisão dos resultados ao adotar elementos descontínuos ao invés de elementos contínuos na formulação auto-regularizada da força de superfície é mais evidente para elementos de ordem mais baixa do que para elementos de ordem superior. Este fato reforça a conclusão de que a influência da consideração da hipótese de “continuidade relaxada” na solução do MEC baseado na formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos contínuos está de certa forma relacionada com a proporção de nós internos ao elemento para nós localizados na junção entre dois elementos.

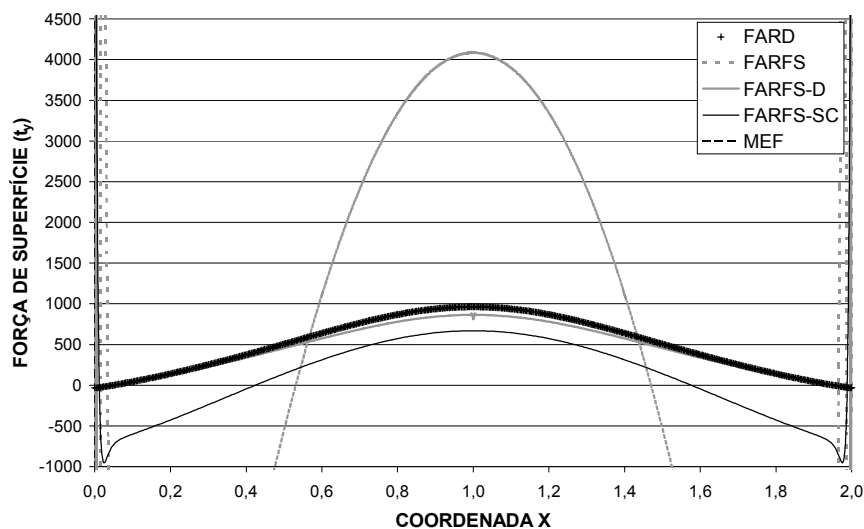


FIGURA 36 - Exemplo 4 - Força de Superfície na Direção y – Comparação entre as Formulações

Na FIG. 36 são apresentadas as soluções do MEC para força de superfície vertical ao longo da borda inferior, obtidas por meio das formulações mencionadas neste exemplo,

para uma malha de 769 elementos quadráticos. Pode-se perceber que os resultados obtidos através da formulação auto-regularizada do deslocamento, bem como da formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos descontínuos são os que mais se aproximam da solução obtida via método dos elementos finitos. As respostas para a formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos contínuos e semicontínuos nos cantos não representam de forma satisfatória a solução do problema. Observa-se neste caso desvios significativos com relação às demais soluções nas regiões próximas aos cantos.

5.5 – Exemplo 5 – Domínio L Sujeito a Carga Tangencial

Neste exemplo analisa-se uma chapa em estado plano de tensão, com espessura unitária, totalmente restringida em uma das faces e sujeita a um carregamento tangencial, $t=10$, uniformemente distribuído ao longo de outra face, conforme mostrado na FIG.37. As constantes do material adotado na análise deste problema são o coeficiente de Poisson $\nu=0,3$ e o módulo de elasticidade $E=205010$.

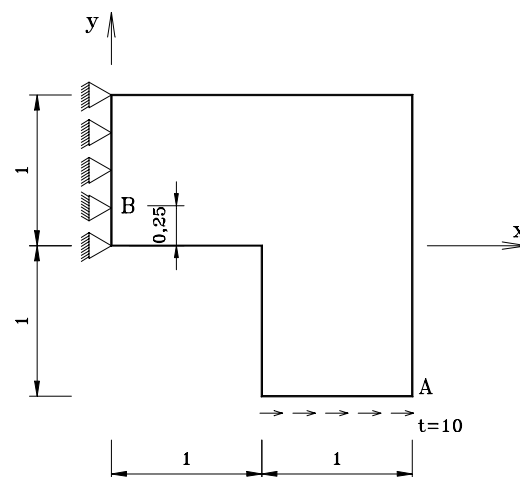


FIGURA 37 - Domínio L – Geometria do Problema

O contorno do problema foi discretizado com malhas iniciais uniformes de oito elementos lineares, quadráticos, cúbicos ou quárticos, como mostrado na FIG.38, onde somente o número dos elementos é apresentado. Foram efetuados refinamentos

sucessivos a partir destas malhas, onde cada elemento da malha anterior é subdividido em dois elementos de mesmo tamanho.

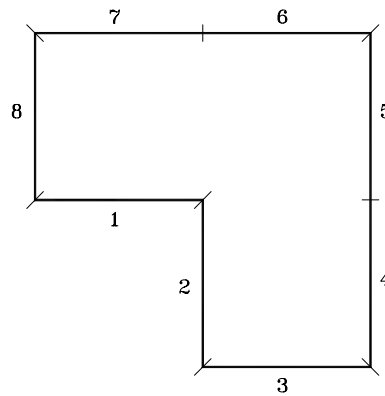


FIGURA 38 - Exemplo 5 – Discretização Inicial do Contorno

São utilizadas as formulações auto-regularizadas do método dos elementos de contorno para análise do problema, adotando-se doze pontos de integração tanto no esquema de quadratura de Gauss, quanto na quadratura logarítmica. São empregados elementos contínuos em ambas formulações. Quando da análise por meio da formulação auto-regularizada da força de superfície, são também adotados elementos descontínuos, visando identificar a influência da adoção da hipótese de continuidade relaxada na solução do problema. Com intuito de comprovar a observação feita para o Exemplo 3 de que a adoção de normal média nos cantos representa importante fonte de erros na formulação auto-regularizada da força de superfície, são utilizados elementos semicontínuos nesta formulação. Ao empregar elementos descontínuos ou semicontínuos, a distância entre a extremidade do elemento e o nó funcional correspondente é tomada em coordenadas adimensionais como sendo 0,1.

Uma vez que não existe solução analítica fechada na teoria da elasticidade para este problema, a solução do método dos elementos finitos obtida via ANSYS, versão 5.7 foi tomada como referência. Adotou-se malha composta por 49152 elementos finitos de estado plano, quadriláteros, quadráticos (PLANE82), tendo sido realizado estudo de convergência para garantir a precisão destas respostas.

TABELA 21 - Exemplo 5 – Deslocamento Vertical no Ponto A

Solução de Referência (MEF) – $u_y = 0,0019292$				
Nº de Elementos Lineares	FARD	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC
8	-0,0011281	-0,0007221	0,0042938	0,0011699
16	0,0068668	0,0000980	0,0032004	0,0009670
32	0,0023147	0,0032067	0,0027194	0,0014029
64	0,0019911	0,0023746	0,0024153	0,0016257
128	0,0019353	0,0020932	0,0022168	0,0017565
256	0,0019270	0,0019897	0,0020944	0,0018341
512	0,0019272	0,0019508	0,0020221	0,0018787
1024	0,0019282	0,0019364	0,0019807	0,0019035
2048	0,0019289	0,0019313	-	0,0019169
Nº de Elementos Quadráticos	FARD	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC
8	0,0017550	0,0048166	0,0018819	-0,0010621
16	0,0018784	-0,0112409	0,0019499	0,0021723
32	0,0019057	-0,0104311	0,0019518	0,0028767
64	0,0019183	0,0135673	0,0019461	0,0014927
128	0,0019244	0,0003429	0,0019414	0,0015075
256	0,0019273	0,0022160	0,0019380	0,0016599
512	0,0019286	0,0016486	0,0019355	0,0016890
1024	0,0019292	0,0033585	-	0,0018869
Nº de Elementos Cúbicos	FARD	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC
8	0,0018483	-0,0000182	0,0019050	0,0017496
16	0,0018950	-0,0000854	0,0019428	0,0018406
32	0,0019137	-0,0022684	0,0019452	0,0019184
64	0,0019225	-0,0002448	0,0019424	0,0019421
128	0,0019264	0,0004095	0,0019393	0,0019416
256	0,0019282	0,0008958	0,0019368	0,0019376
512	0,0019290	0,0012598	0,0019348	0,0019345
Nº de Elementos Quárticos	FARD	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC
8	0,00188856	-0,00487841	0,0019199	0,0019017
16	0,00190879	-0,00152115	0,0019411	0,0019601
32	0,00191995	-0,00036223	0,0019430	0,0019468
64	0,00192524	0,00068178	0,0019408	0,0019424
128	0,00192766	0,00131489	0,0019383	0,0019392
256	0,00192876	0,00164659	0,0019360	0,0019368
512	0,00192927	0,00180866	-	0,0019349

TABELA 22 - Exemplo 5 – Força de Superfície Horizontal em B

Solução de Referência (MEF) – $t_x = -51,530$				
Nº de Elementos Lineares	FARD	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC
8	56,934	-21,507	-182,439	-31,322
16	-258,177	53,933	-129,757	-8,736
32	-59,702	-63,705	-80,969	-32,241
64	-54,771	-54,211	-68,566	-41,118
128	-52,079	-51,643	-61,099	-46,091
256	-51,632	-51,103	-56,750	-48,798
512	-51,546	-51,115	-54,319	-50,232
1024	-51,530	-51,238	-52,994	-50,964
2048	-51,529	-51,350	-	-51,323
Nº de Elementos Quadráticos	FARD	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC
8	-51,194	87,220	-55,921	72,459
16	-49,694	247,549	-52,289	-66,203
32	-53,231	385,392	-54,187	-58,093
64	-51,561	-358,769	-52,377	-41,375
128	-51,459	-6,523	-52,116	-38,974
256	-51,501	-56,040	-51,937	-45,457
512	-51,519	-39,367	-51,811	-45,113
1024	-51,526	-81,296	-	-50,711
Nº de Elementos Cúbicos	FARD	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC
8	-50,717	11,912	-52,687	-46,660
16	-48,286	-13,422	-51,417	-48,811
32	-49,483	37,243	-52,464	-52,045
64	-51,502	0,978	-52,242	-52,141
128	-51,488	-9,893	-52,038	-51,956
256	-51,514	-19,927	-51,888	-51,789
512	-51,524	-29,220	-51,780	-51,682
Nº de Elementos Quárticos	FARD	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC
8	-49,487	130,969	-52,226	-51,271
16	-51,303	29,875	-52,635	-52,985
32	-52,801	-2,967	-53,720	-52,411
64	-51,517	-28,066	-52,175	-52,260
128	-51,505	-42,114	-51,987	-52,058
256	-51,520	-48,637	-51,852	-51,907
512	-51,526	-51,326	-	-51,797

A solução do método dos elementos de contorno para deslocamento vertical no ponto A e força de superfície horizontal no ponto B (FIG.37), obtidas para as diversas malhas, são apresentadas nas TAB.21 e 22, respectivamente, as quais também contêm a solução

de referência nestes pontos. Para os casos nos quais os pontos de controle (pontos A e B) não coincidem com os nós funcionais dos elementos, é feita interpolação ou extrapolação dos resultados obtidos para o elemento que contém o ponto, para a obtenção da resposta de interesse. No caso de respostas com elementos descontínuos, e estando o ponto de controle localizado na junção entre dois elementos pertencentes a uma mesma face, apenas a solução mais desfavorável em comparação com a resposta do MEF é apresentada nas TAB.21 e 22.

Pode-se observar que a formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos contínuos (FARFS) conduz a resultados ruins, inclusive absurdos em alguns casos, tanto para respostas de deslocamento quanto para os resultados de força de superfície, para todas as ordens de interpolação. A utilização de elementos descontínuos nesta formulação (FARFS-D) representa melhora significativa dos resultados na maioria dos casos. As respostas obtidas com elementos descontínuos lineares são uma exceção a este comentário, pois neste caso nota-se perda na precisão quando comparadas com as soluções para elementos contínuos de mesma ordem. Conforme comentado no Exemplo 3, onde obteve-se comportamento semelhante, a escolha dos valores de a e b pode não ter sido a mais adequada para este caso. Além disso, a aproximação da derivada tangencial pode ser fonte de erros mais significativa para esta interpolação que a adoção do conceito de “continuidade relaxada”. Outras abordagens poderiam ser utilizadas para identificar a fonte de erros predominante neste caso. A formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos semicontínuos nos cantos (FARFS-SC) apresenta, em alguns casos, resultados mais próximos das soluções de referência que a mesma formulação com elementos contínuos. No entanto algumas respostas absurdas ainda são obtidas com esta abordagem, principalmente para elementos lineares e quadráticos. Apesar da adoção de normal média influenciar as soluções obtidas via FARFS, esta consideração não parece ser a principal fonte de erros nesta formulação. A formulação auto-regularizada do deslocamento (FARD), em geral apresentou os resultados mais próximos das soluções obtidas por meio do método dos elementos finitos, mesmo para malhas pouco refinadas. A FARD mostra-se bastante estável, com respostas tanto para deslocamento quanto para força de superfície, que tendem a um valor constante a partir de um certo nível de refinamento, para todas as interpolações.

Nas FIG.39 e 40 apresenta-se o estudo de convergência para este problema. Para tal, foram determinados os erros relativos percentuais das soluções do MEC mostradas nas TAB.21 a 24 com relação à solução de referência. É feita uma comparação da precisão das soluções obtidas por meio da formulação auto-regularizada do deslocamento com elementos contínuos, e da formulação auto-regularizada da força de superfície usando elementos contínuos, descontínuos e semicontínuos apenas nos cantos. Através destas figuras pode-se perceber as oscilações na convergência dos resultados ao se utilizar a formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos contínuos. Tal comportamento é eliminado na maioria dos casos ao adotar elementos descontínuos, indicando a adoção da hipótese de “continuidade relaxada” como mais provável fonte de erros significativos na FARFS. Observa-se também que o ganho na precisão obtido com a implementação de elementos descontínuos é mais significativo para elementos quadráticos que para elementos cúbicos e quárticos. Para elementos lineares houve perda na precisão, conforme observado anteriormente. Nota-se claramente a superioridade da formulação auto-regularizada do deslocamento em relação à formulação auto-regularizada da força de superfície na análise deste problema.

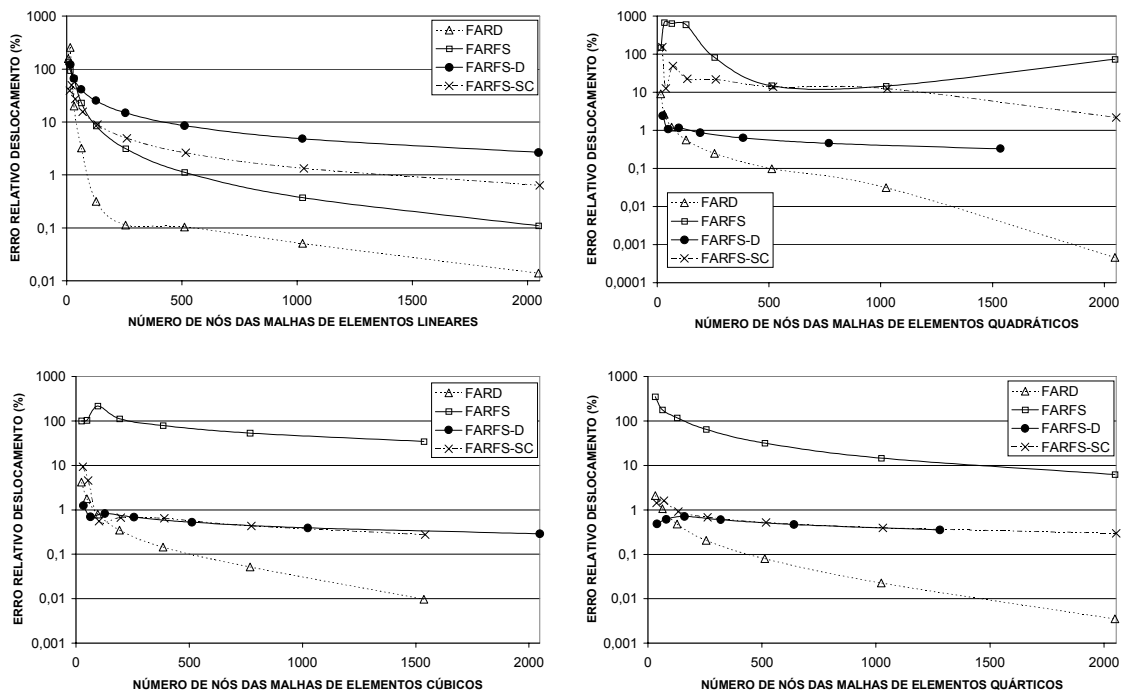


FIGURA 39 - Exemplo 5 – Erro Relativo no Deslocamento

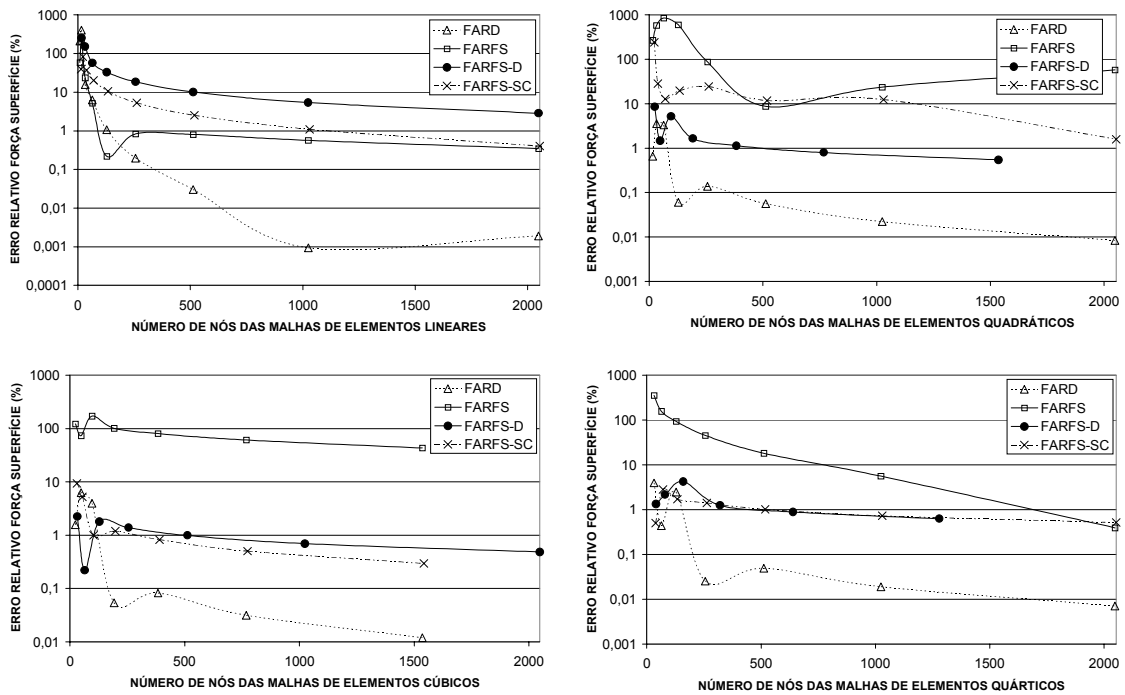


FIGURA 40 - Exemplo 5 – Erro Relativo na Força de Superfície

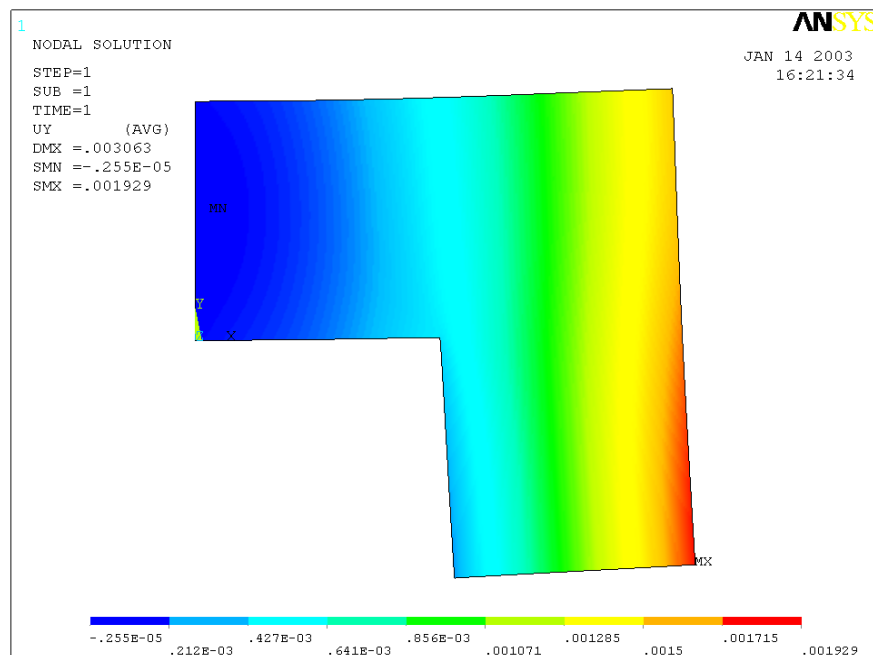


FIGURA 41 - Exemplo 5 – Deslocamento na Direção Vertical – MEF

Em etapa de pós-processamento foram analisados os deslocamentos e tensões em pontos internos, bem como tensões no contorno. As respostas obtidas são comparadas com as soluções do método dos elementos finitos. Adotou-se a formulação auto-

regularizada do deslocamento e malha de 256 elementos quadráticos contínuos para obtenção das respostas no contorno. Os resultados em pontos internos são obtidos por meio das formulações auto-regularizadas. Os nós do contorno e pontos internos são igualmente espaçados de 0,015625 unidades. Utiliza-se o pós-processador do programa GID, versão 7.1, para geração das figuras baseadas nas respostas do MEC. A solução do MEF para deslocamento vertical ao longo de todo o domínio, obtida com a mesma malha adotada anteriormente, é apresentada na FIG.41. Na FIG.42 é mostrada a respectiva resposta do método dos elementos de contorno.

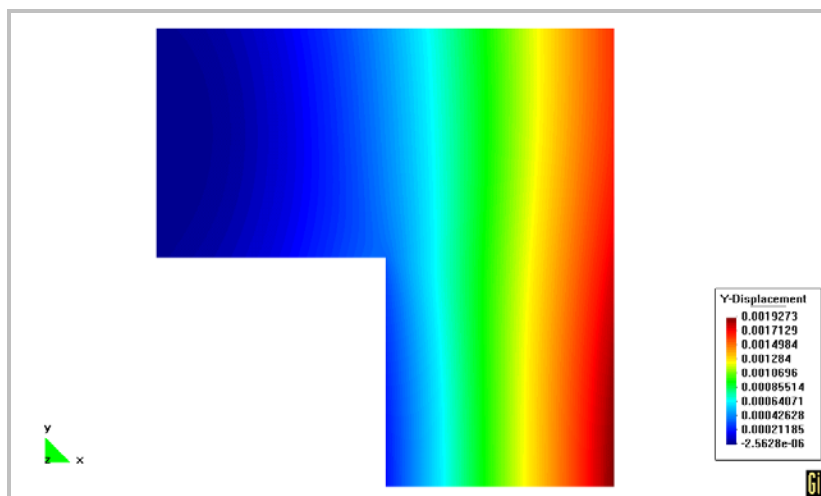


FIGURA 42 - Exemplo 5 –Deslocamento na Direção Vertical - MEC

A FIG.43 apresenta uma comparação entre as soluções do MEC e MEF obtidas com as malhas acima mencionadas, para tensão normal σ_x na seção $x=0,5$.

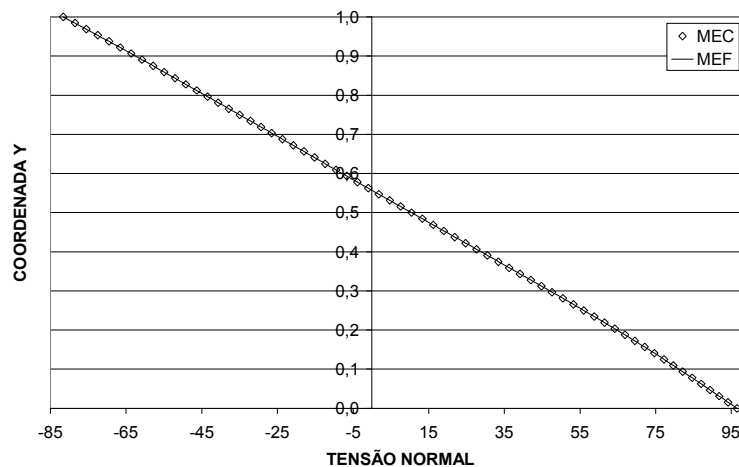


FIGURA 43 - Exemplo 5 – Tensão Normal em Pontos Internos

Pode-se observar que as soluções do método dos elementos de contorno são bastante semelhantes às obtidas via método dos elementos finitos. Além disso, não observam-se perturbações nas soluções para pontos internos, mesmo para pontos próximos às bordas, o que poderia ocorrer caso fossem utilizadas as formulações clássicas ao invés das formulações auto-regularizadas. Conforme pode-se notar nas FIG.44, onde é mostrada a solução do MEC para tensão σ_x , e na FIG.45, onde é efetuado um detalhe ampliado da distribuição de σ_x no canto, a concentração de tensões no canto reentrante é representada de forma clara pelo algoritmo adotado.

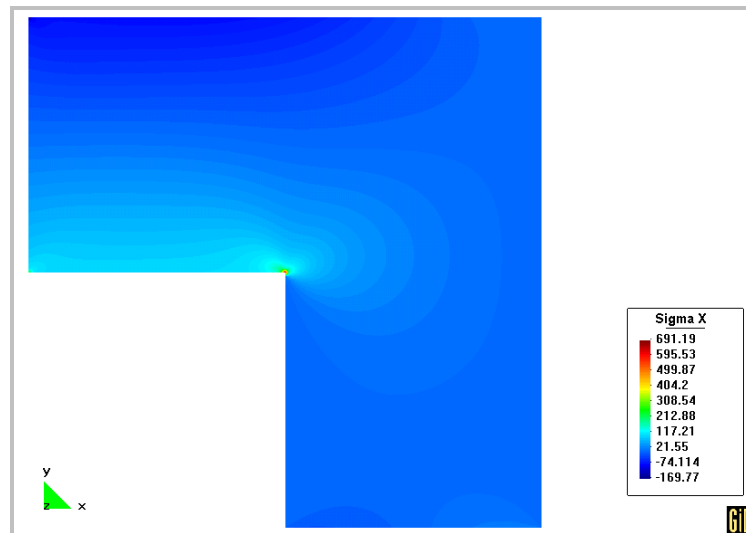


FIGURA 44 - Exemplo 5 – Tensão Normal Sigma X - MEC

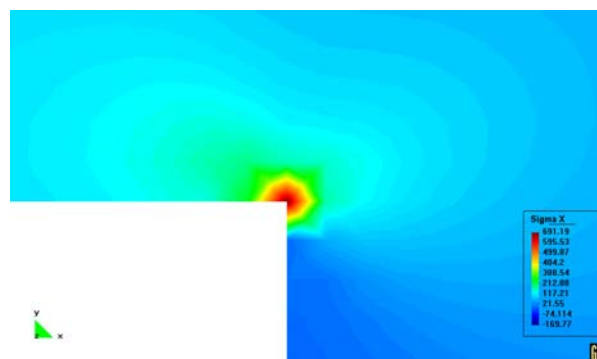


FIGURA 45 - Exemplo 5 – Tensão Normal Sigma X – Ampliação do Canto

5.6 – Exemplo 6 – Problemas de Mecânica da Fratura

Dois problemas de mecânica da fratura elástica linear são analisados neste exemplo. Ambos problemas são duplamente simétricos, e aproveitando-se desta característica é possível analisá-los utilizando as formulações para elasticidade bidimensional. Nos dois casos uma chapa fina de dimensões 20 x 40 é sujeita a uma tensão remota de tração $\sigma=1000$. O primeiro problema considera uma trinca centrada de comprimento $2a=2$, e o segundo problema contém duas trincas de borda de comprimento $a=1$. A geometria de ambos problemas é mostrada na FIG.46.

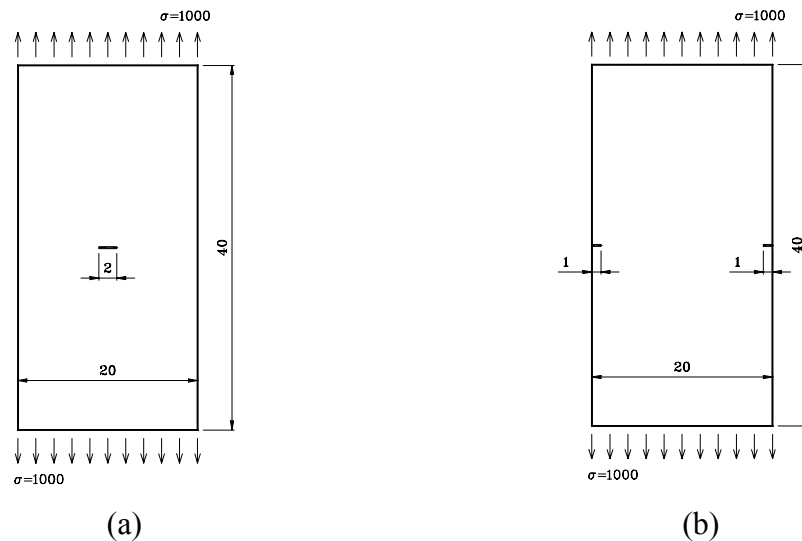


FIGURA 46 - Mecânica da Fratura – Geometria dos Problemas: (a) Trinca Centrada, (b) Trinca de Borda

São adotadas como propriedades do material o módulo de elasticidade $E=2,1 \times 10^6$ e o coeficiente de Poisson $\nu=0,25$. Por se tratar de uma chapa fina, o problema é caracterizado como estado plano de tensão. Parâmetros representativos para problemas de mecânica da fratura são o fator de intensidade de tensão (K_I), e a abertura máxima da trinca (COD). Para o primeiro problema (FIG.46a), o fator de intensidade de tensão e a abertura da trinca são dados, respectivamente, por TADA et al. (2000) como:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \cdot \sqrt{\sec \frac{\pi a}{W}}$$

$$COD = \frac{4\sigma a}{E} \cdot \left\{ -0,071 - 0,535 \left(\frac{a}{b} \right) + 0,169 \left(\frac{a}{b} \right)^2 - 0,09 \left(\frac{a}{b} \right)^3 \right. \\ \left. + 0,02 \left(\frac{a}{b} \right)^4 - 1,071 \frac{1}{a/b} \ln \left(1 - \frac{a}{b} \right) \right\} \quad (51)$$

onde W é a largura da chapa, e $b=W/2$. Segundo TADA et al (2000), a precisão da fórmula para cálculo do fator de intensidade de tensão é de 0,3% para valores de $a/b \leq 0,7$, e da fórmula para cálculo da abertura da trinca de 0,6% para qualquer valor de a/b . Para o problema de chapa com dupla trinca de borda (FIG.46b), o fator de intensidade de tensão e a abertura da trinca podem ser estimados, conforme apresentado em TADA et al. (2000) por:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \cdot \left\{ \frac{1,122 - 0,561 \left(\frac{a}{b} \right) - 0,205 \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 0,471 \left(\frac{a}{b} \right)^3 - 0,19 \left(\frac{a}{b} \right)^4}{\sqrt{1 - \frac{a}{b}}} \right\}$$

$$COD = \frac{4\sigma a}{E} \cdot \frac{1}{\pi a/W} \left\{ 0,454 \left(\operatorname{sen} \frac{\pi a}{W} \right) - 0,065 \left(\operatorname{sen} \frac{\pi a}{W} \right)^3 \right. \\ \left. - 0,007 \left(\operatorname{sen} \frac{\pi a}{W} \right)^5 + a \operatorname{cosh} \left(\operatorname{sec} \frac{\pi a}{W} \right) \right\} \quad (52)$$

sendo as variáveis as mesmas da Eq.51. A fórmula para obtenção de K_I tem precisão de 0,5%, e a fórmula para cálculo da abertura da trinca tem precisão de 2%, ambas para qualquer razão a/b (TADA et al., 2000).

ALIABADI e ROOKE (1991) apresentam várias fórmulas para computação numérica do fator de intensidade de tensão, que podem ser utilizadas para qualquer tipo de elemento de contorno. Tais fórmulas se baseiam na extrapolação por um ou mais pontos das soluções numéricas para deslocamento ou força de superfície próximo à ponta da

trinca. No presente trabalho, o fator de intensidade de tensão é calculado através da extrapolação por um ponto da solução do deslocamento, segundo Eq.53 (ALIABADI e ROOKE, 1991),

$$K_I = \frac{G}{k+1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} (u_2^L - u_2^M) \quad (53)$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal, $k=(3-\nu)/(1+\nu)$ para estado plano de tensão, r é a distância do ponto L à ponta da trinca e u_2^L e u_2^M são respectivamente os deslocamentos na direção perpendicular à face da trinca nos pontos L e M , representados na FIG.47, na qual $\Delta u_2 = u_2^L + u_2^M$.

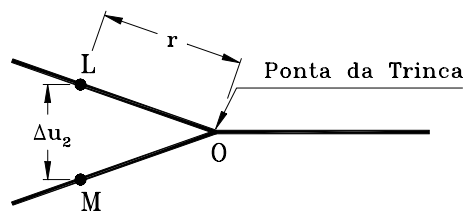


FIGURA 47 - Exemplo 6 – Localização dos Nós Utilizados no Cálculo de K_I

Para ambos problemas, a malha inicial do método dos elementos de contorno com elementos contínuos é construída com aproximadamente cento e quarenta nós para todas as interpolações adotadas, resultando em malha de 140 elementos lineares, 70 elementos quadráticos, 44 elementos cúbicos ou 35 elementos quárticos. Os pontos nodais de todas as malhas são igualmente espaçados em todas as faces do contorno, exceto nos trechos AO e OB, para os quais foi feita gradação da malha seguindo uma progressão geométrica, onde a proporção do maior elemento para o menor elemento é igual a 10. Desta forma, maior número de elementos, e conseqüentemente de pontos nodais, são agrupados próximo ao ponto singular, permitindo melhor representação das soluções nestes trechos. Os contornos analisados são mostrados na FIG.48, e a discretização inicial com elementos lineares na face AB, para o problema de trinca centrada, é mostrada na FIG.49. O problema de dupla trinca de borda possui malha análoga à do problema de trinca centrada, e portanto esta não será apresentada. Em

ambos casos o ponto O coincide com a ponta da trinca, e o ponto A é o ponto de medida da abertura da trinca.

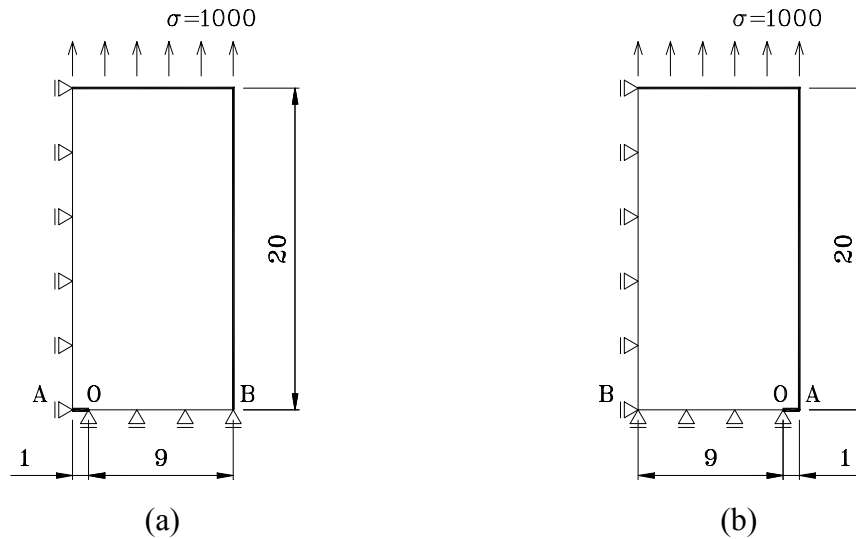


FIGURA 48 - Exemplo 6 – Contorno do Problema: (a) Trinca Centrada, (b) Trinca de Borda

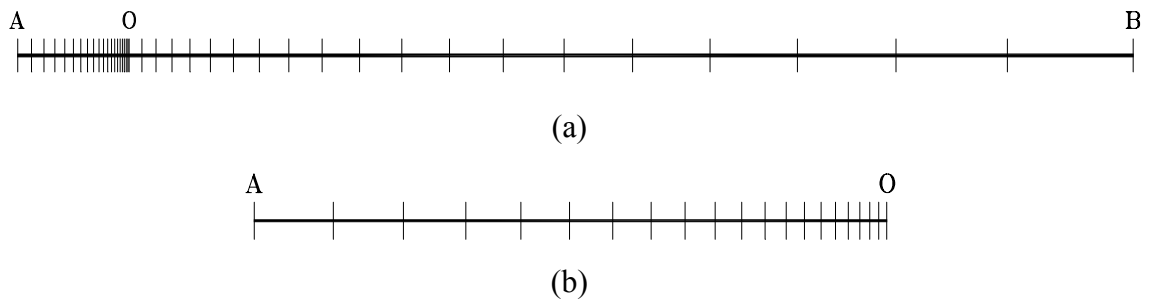


FIGURA 49 - Exemplo 6 – Discretização do Contorno: (a) Face AB; (b) Ampliação do Trecho AO

Em refinamentos sucessivos, para as malhas de elementos lineares, quadráticos e quárticos, é dobrado o número de elementos da malha anterior, e é feito reposicionamento dos nós nas faces AO e OB seguindo a mesma progressão geométrica adotada para as malhas iniciais. O refinamento das malhas de elementos cúbicos é ligeiramente diferente, pois neste caso, ao invés de dobrar o número de elementos da malha anterior, é criada uma malha que possua o número de nós mais próximo ao das respectivas malhas de elementos lineares, quadráticos e quárticos. Sendo assim, as malhas de elementos contínuos analisadas possuem 140, 280, 560, 1120 e 2240 nós.

Foram efetuadas análises utilizando a formulação auto-regularizada do deslocamento (FARD), formulação auto-regularizada da força de superfície (FARFS) e formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio associada à técnica de subelementação (FPPF), todas com elementos contínuos. Para a formulação padrão com ponto fora, a distância entre o ponto externo e o ponto nodal correspondente foi tomada como sendo $\frac{1}{4}$ do comprimento do elemento ($\alpha=0,25$). Elementos descontínuos também são adotados quando da avaliação dos problemas por meio das formulações auto-regularizadas, uma vez que é prática comum na análise de problemas de mecânica da fratura por meio do método dos elementos de contorno, o emprego de elementos descontínuos, pelo menos nas faces da trinca (PORTELA et al, 1992; SÁEZ et al, 1995; MUKHERJEE et al, 1999). Estes elementos foram portanto utilizados não só na formulação auto-regularizada da força de superfície (FARFS-D) como também na formulação auto-regularizada do deslocamento (FARD-D). Assim como nos exemplos anteriores, foram adotados elementos semicontínuos na formulação auto-regularizada da força de superfície, de forma a verificar a influência da consideração de normal média nos cantos, bem como da utilização desta formulação em pontos para os quais o campo de tensão seja descontínuo. As malhas de elementos descontínuos e semicontínuos são geradas automaticamente pelo programa computacional com base nas malhas de elementos contínuos. Para estes tipos de elementos adotou-se a e b , ou ambos, iguais a 0,1, o que significa que o nó funcional extremo do elemento dista de 5% do comprimento do elemento da junção deste com o elemento adjacente. Adotou-se ordem de integração igual a doze para avaliação numérica de todas integrais envolvidas.

O fator de intensidade de tensão calculado para ambos problemas conforme descrito anteriormente, utilizando as diversas malhas de elementos contínuos, descontínuos e semicontínuos, e as quatro interpolações, são apresentados na TAB.23 para a chapa com trinca centrada, e na TAB.24 para a chapa com dupla trinca de borda, juntamente com as soluções obtidas através das Eq.51 e 52. O valor de r na Eq.53 é adotado igual a $a/10=0,1$. Para os casos nos quais $r =0,1$ não coincide com um ponto nodal, é feita interpolação da solução no elemento que contém o ponto, com base nas funções de forma do elemento.

TABELA 23 - Exemplo 6 – Fator de Intensidade de Tensão – Trinca Centrada

Solução de Referência (TADA et al, 2000): $K_I = 1783,467$						
Nº de Elementos Lineares	FARD	FARD-D	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC	FPPF
140	1565,146	1732,931	1732,073	1598,269	1717,443	1604,675
280	1640,362	1732,975	1747,805	1654,852	1724,608	1662,113
560	1685,775	1735,304	1749,570	1688,393	1725,515	1697,309
1120	1710,957	1736,940	1746,270	1707,987	1726,665	1716,950
2240	1724,231	-	1743,080	-	1728,359	1727,296
Nº de Elementos Quadráticos	FARD	FARD-D	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC	FPPF
70	1588,662	1809,281	-3210,945	1742,844	3337,072	2328,729
140	1654,275	1775,284	450,918	1741,690	-282,622	1771,817
280	1693,417	1757,657	424,609	1739,996	842,743	1777,785
560	1715,047	1748,434	1916,017	1739,135	1362,599	1758,955
1120	1726,386	-	1215,043	-	1554,110	1746,993
Nº de Elementos Cúbicos	FARD	FARD-D	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC	FPPF
44	1585,541	1868,382	6756,122	1756,674	1611,285	2839,137
93	1655,386	1802,678	160,878	1749,864	1704,920	2296,096
187	1694,799	1770,903	2079,980	1745,276	1728,838	1730,239
373	1715,086	1755,499	1848,385	1742,737	1734,536	2722,908
747	1726,415	-	1785,201	-	1736,567	2461,469
Nº de Elementos Quárticos	FARD	FARD-D	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC	FPPF
35	1607,169	1889,798	1944,039	1766,913	1791,522	1771,444
70	1662,586	1819,968	1879,911	1756,753	1763,361	1839,783
140	1697,323	1781,326	1841,982	1750,046	1753,594	1727,424
280	1716,887	1760,604	1812,610	1745,859	1748,048	-
560	1727,273	-	1790,912	-	1744,595	-

TABELA 24 - Exemplo 6 – Fator de Intensidade de Tensão – Dupla Trinca de Borda

Solução de Referência (TADA et al, 2000): $K_I = 1988,468$						
Nº de Elementos Lineares	FARD	FARD-D	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC	FPPF
140	1754,984	1945,253	3082,696	1893,268	1842,285	1791,298
280	1840,147	1945,270	3109,540	1916,726	1882,668	1861,016
560	1891,829	1948,097	1087,460	1931,287	1902,776	1903,277
1120	1920,557	1950,090	1784,603	1939,841	1916,021	1926,603
2240	1935,711	-	1886,220	-	1925,558	1938,827
Nº de Elementos Quadráticos	FARD	FARD-D	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC	FPPF
70	1779,772	2031,337	-21526,923	1955,330	3645,713	1762,672
140	1855,611	1993,567	699,876	1955,954	-2380,601	1857,759
280	1900,456	1973,648	1530,707	1953,584	-1471,023	1912,152
560	1925,206	1963,238	1737,849	1952,556	2337,789	1931,663
1120	1938,171	-	3953,733	-	1893,175	1941,349
Nº de Elementos Cúbicos	FARD	FARD-D	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC	FPPF
44	1775,692	2098,192	2460,657	1975,012	1856,485	3917,611
93	1856,779	2024,848	2082,859	1967,673	1959,794	3098,209
187	1902,010	1988,763	2010,910	1961,496	1972,490	2401,986
373	1925,236	1971,291	1978,334	1958,037	1969,534	3395,602
747	1938,199	-	1963,345	-	1965,066	2987,123
Nº de Elementos Quárticos	FARD	FARD-D	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC	FPPF
35	1800,596	2122,585	1667,771	1988,962	2003,608	2061,619
70	1865,081	2044,601	2023,767	1976,093	1970,651	1848,954
140	1904,912	2000,689	2073,525	1967,561	1963,311	1861,991
280	1927,305	1977,126	2056,698	1962,092	1959,072	2056,698
560	1939,183	-	2032,563	-	1956,297	1975,929

Pode-se observar que as formulações auto-regularizadas com elementos descontínuos conduziram aos melhores resultados no cálculo de K_I , embora apresentem, em alguns casos, pequenas oscilações dos resultados à medida que se refinam as malhas. A formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos descontínuos apresentou resultados aproximadamente constantes para os dois problemas com elementos quadráticos, cúbicos e quárticos. Para a chapa com trinca centrada, ao utilizar elementos descontínuos quadráticos na formulação auto-regularizada da força de

superfície, obtém-se erro médio de 2,4%. O erro médio para este problema com elementos cúbicos é de 2,0% e com elementos quárticos de 1,6%. Já para o problema de dupla trinca de borda, a precisão da solução com elementos descontínuos nesta mesma formulação é de aproximadamente 1,7% com elementos quadráticos, 1,2% com elementos cúbicos e 0,8% com elementos quárticos.

Embora os resultados obtidos por meio da formulação auto-regularizada do deslocamento com elementos contínuos não sejam tão precisos quanto para as formulações auto-regularizadas com elementos descontínuos, esta formulação mostrou-se bastante estável, com resultados convergentes para ambos problemas e todas interpolações adotadas. A precisão desta formulação na computação do fator de intensidade de tensão é de aproximadamente 3,2% no primeiro problema para as malhas mais refinadas de elementos lineares, quadráticos, cúbicos e quárticos, as quais contém 2240 nós, e de 2,5% no segundo problema, também para as malhas mais refinadas.

Os melhores resultados obtidos na análise destes problemas por meio da formulação padrão com ponto fora e subelementação são para elementos de baixa ordem (lineares e quadráticos). O algoritmo adotado parece portanto ser mais adequado para elementos lineares e quadráticos do que para cúbicos e quárticos. Além disso, observa-se oscilação considerável na convergência dos resultados em vários casos. Estes resultados pobres podem estar relacionados ao tipo de malha adotado nestes problemas, pois podem surgir quase-singularidades se o elemento a ser integrado, embora não contenha o ponto nodal correspondente ao ponto de colocação, se localize muito próximo ao mesmo. Neste caso seria desejável subdividir estes elementos, minimizando os possíveis erros numéricos introduzidos por esta abordagem.

A formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos contínuos, em geral apresentou resultados bastante pobres e oscilações significativas na convergência dos resultados. A adoção de elementos semicontínuos apresentou na maioria dos casos um ganho considerável na precisão, entretanto o comportamento oscilatório dos resultados, observado principalmente para elementos quadráticos, não foi eliminado. É importante notar que em alguns casos são obtidos resultados absurdos ao adotar

elementos contínuos, ou elementos semicontínuos nos cantos na discretização da formulação auto-regularizada da força de superfície.

TABELA 25 - Exemplo 6 – Abertura da Trinca – Trinca Centrada

Solução de Referência (TADA et.al, 2000): $COD = 0,0019153$						
Nº de Elementos Lineares	FARD	FARD-D	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC	FPPF
140	0,0018663	0,0019346	0,0025172	0,0018109	0,0017423	0,0018879
280	0,0018919	0,0019279	0,0022057	0,0018392	0,0018226	0,0019002
560	0,0019042	0,0019231	0,0020561	0,0018614	0,0018553	0,0019077
1120	0,0019103	0,0019202	0,0019815	0,0018776	0,0018742	0,0019118
2240	0,0019133	-	0,0019468	-	0,0018867	0,0019140
Nº de Elementos Quadráticos	FARD	FARD-D	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC	FPPF
70	0,0018770	0,0019644	-0,0003240	0,0019076	0,0037591	0,0019568
140	0,0018965	0,0019409	0,0001559	0,0019180	-0,0031975	0,0019250
280	0,0019063	0,0019292	-0,0004641	0,0019177	-0,0007406	0,0019259
560	0,0019113	0,0019231	0,0019799	0,0019173	-0,0004965	0,0019208
1120	0,0019138	-	0,0018625	-	0,0021371	0,0019182
Nº de Elementos Cúbicos	FARD	FARD-D	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC	FPPF
44	0,0018762	0,0019882	0,0137233	0,0019325	0,0018418	0,0011554
93	0,0018965	0,0019507	-0,0017248	0,0019312	0,0018892	0,0010465
187	0,0019065	0,0019342	0,0029501	0,0019267	0,0019057	0,0010098
373	0,0019112	0,0019257	0,0022721	0,0019236	0,0019102	0,0009084
747	0,0019138	-	0,0020455	-	0,0019121	0,0009381
Nº de Elementos Quárticos	FARD	FARD-D	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC	FPPF
35	0,0018833	0,0019968	0,0023993	0,0019479	0,0019800	0,0020873
70	0,0018986	0,0019585	0,0022217	0,0019412	0,0019506	0,0018753
140	0,0019072	0,0019385	0,0021281	0,0019343	0,0019405	0,0018944
280	0,0019117	0,0019278	0,0020663	0,0019291	0,0019337	-
560	0,0019140	-	0,0020227	-	0,0019287	-

Na TAB.25 são apresentados os valores obtidos para a abertura da trinca para o problema de trinca centrada, bem como a resposta obtida através da Eq.51. A TAB.26 contém os valores desta mesma grandeza para o problema de dupla trinca de borda, juntamente com a solução obtida por meio da Eq.52. Quando da utilização de elementos semicontínuos e descontínuos, a solução do método dos elementos de contorno é

extrapolada para obtenção do deslocamento no ponto A, para ambos problemas. Novamente observam-se resultados inconsistentes ao adotar a formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos contínuos ao longo de todo contorno, bem como semicontínuos nas descontinuidades de normal e força de superfície.

TABELA 26 - Exemplo 6 – Abertura da Trinca – Dupla Trinca de Borda

Solução de Referência (TADA et.al, 2000): $COD= 0,0027708$						
Nº de Elementos Lineares	FARD	FARD-D	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC	FPPF
140	0,0026619	0,0027481	0,0143877	0,0028313	0,0023809	0,0026944
280	0,0027152	0,0027577	0,0179712	0,0027926	0,0025451	0,0027276
560	0,0027377	0,0027588	-0,0100703	0,0027740	0,0026188	0,0027425
1120	0,0027477	0,0027583	0,0001116	0,0027652	0,0026625	0,0027497
2240	0,0027523	-	0,0016958	-	0,0026916	0,0027532
Nº de Elementos Quadráticos	FARD	FARD-D	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC	FPPF
70	0,0027000	0,0027991	-0,0289442	0,0027449	0,0043243	0,0027114
140	0,0027287	0,0027770	0,0002303	0,0027599	-0,0088841	0,0027083
280	0,0027424	0,0027667	-0,0049662	0,0027583	-0,0171679	0,0027536
560	0,0027495	0,0027618	-0,0020060	0,0027573	0,0013444	0,0027560
1120	0,0027531	-	-0,0115434	-	0,0029969	0,0027540
Nº de Elementos Cúbicos	FARD	FARD-D	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC	FPPF
44	0,0027024	0,0028279	0,0064561	0,0027900	0,0027957	0,0013551
93	0,0027287	0,0027855	0,0036939	0,0027796	0,0028410	0,0014139
187	0,0027424	0,0027707	0,0033864	0,0027717	0,0028253	0,0016190
373	0,0027493	0,0027641	0,0029074	0,0027672	0,0028072	0,0017455
747	0,0027531	-	0,0027993	-	0,0027920	0,0018437
Nº de Elementos Quárticos	FARD	FARD-D	FARFS	FARFS-D	FARFS-SC	FPPF
35	0,0027132	0,0028324	-0,0003056	0,0028146	0,0028205	0,0026905
70	0,0027312	0,0027894	0,0017627	0,0027888	0,0027664	0,0027644
140	0,0027433	0,0027738	0,0024984	0,0027806	0,0027659	0,0027803
280	0,0027500	0,0027656	0,0027396	0,0027739	0,0027642	0,0027396
560	0,0027534	-	0,0028176	-	0,0027620	-

Os valores da abertura da trinca apresentados nas TAB.25 e 26 são comparados com as respectivas soluções de referência para determinação do erro relativo para as diversas malhas. O estudo de convergência para o problema de chapa com trinca centrada é

apresentado na FIG.50. A FIG.51 por sua vez mostra o mesmo estudo para chapa com dupla trinca de borda.

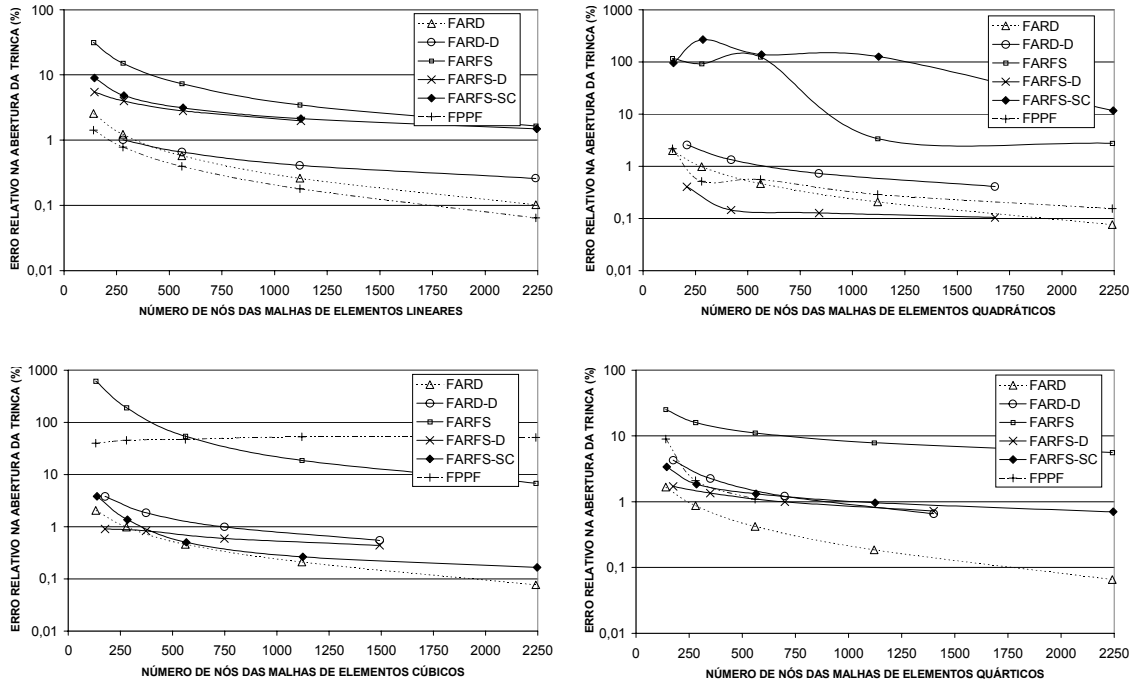


FIGURA 50 - Exemplo 6 – Estudo de Convergência – Chapa com Trinca Centrada

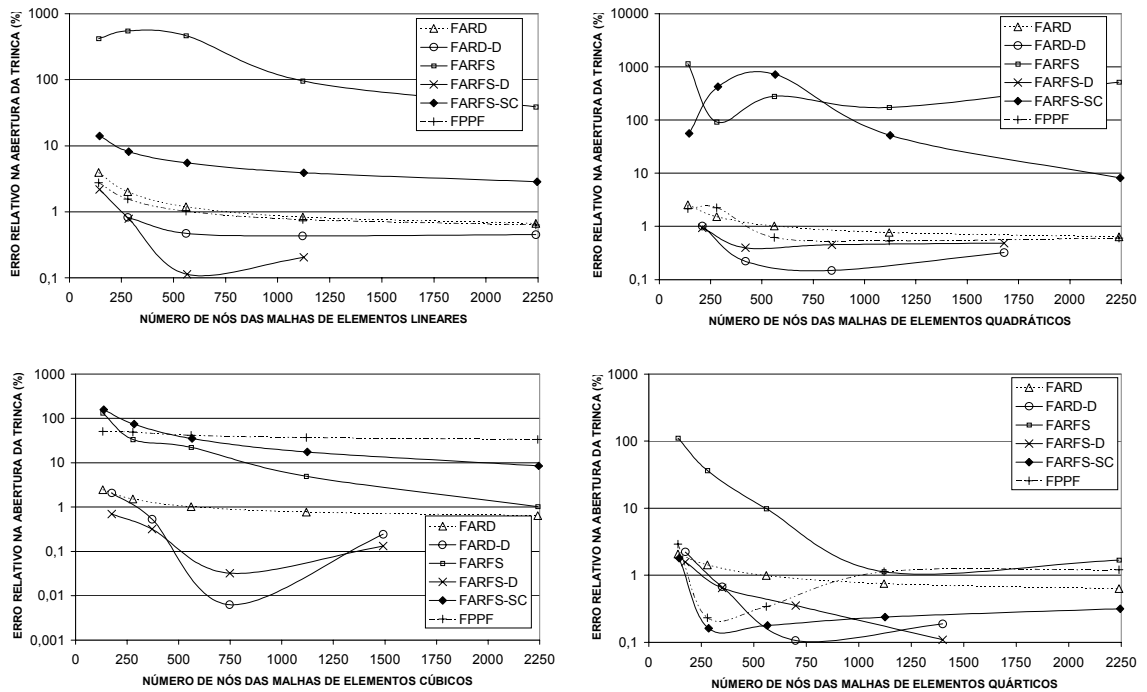


FIGURA 51 - Exemplo 6 – Estudo de Convergência – Chapa com Dupla Trinca de Borda

A formulação auto-regularizada do deslocamento mostra-se bastante eficiente na computação da abertura da trinca, em ambos problemas. Neste caso, ao contrário do cálculo de K_I , a utilização de elementos descontínuos nesta formulação não apresentou ganho tão significativo na precisão dos resultados, sendo inclusive a solução, em alguns casos, menos precisa que a obtida com adoção de elementos contínuos. Uma vez que este parâmetro é avaliado a maiores distâncias da ponta da trinca do que o fator de intensidade de tensão, espera-se que a representação contínua do campo de tensão descontínuo na ponta da trinca tenha menor influência na computação do mesmo. Além disso, este valor é obtido de forma direta através da solução do MEC, não envolvendo erros numéricos adicionais, como ocorre na obtenção de K_I através da extrapolação do deslocamento.

A formulação padrão com ponto fora e subelementação não conduz a resultados muito precisos para a computação da abertura da trinca, principalmente com elementos cúbicos e quárticos. Entretanto, a convergência oscilatória dos resultados não é tão pronunciada quanto para a avaliação do fator de intensidade de tensão.

Os resultados para a abertura da trinca obtidos por meio da formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos contínuos são bastante pobres para todas interpolações analisadas, apresentando em alguns casos convergência oscilatória, e em outros casos não é possível garantir convergência dos resultados. A implementação de elementos semicontínuos nesta formulação apresentou em vários casos uma piora significativa dos resultados, indicando que a consideração de solução contínua nos pontos onde a mesma é descontínua pode não introduzir erros tão significativos na solução em pontos distantes da descontinuidade, como afirmam RICHARDSON e CRUSE (1998). A utilização de elementos descontínuos, por sua vez, representou melhora significativa dos resultados na maioria dos casos, apontando desta forma a hipótese de “continuidade relaxada” como principal fonte de erros na formulação auto-regularizada da força de superfície. Pode-se observar que o ganho na precisão dos resultados com elementos descontínuos nesta formulação é mais evidente para elementos de baixa ordem do que para elementos de ordem superior, confirmando os comentários apresentados anteriormente. Os erros parecem estar de certa forma

relacionados com a proporção de nós internos ao elemento, para nós localizados na junção entre dois elementos. Ou ainda, os erros parecem estar relacionados com a proporção de nós onde termo regularizador é único, para nós onde o termo regularizador assume diferentes valores de acordo com o elemento a ser integrado.

Na FIG.52 são mostradas as soluções para deslocamento vertical na face da trinca, em pontos próximos à mesma, obtidas para a chapa com trinca centrada, adotando-se uma malha de 280 elementos quadráticos. É feita uma comparação entre as formulações e tipos de elementos utilizados na presente análise.

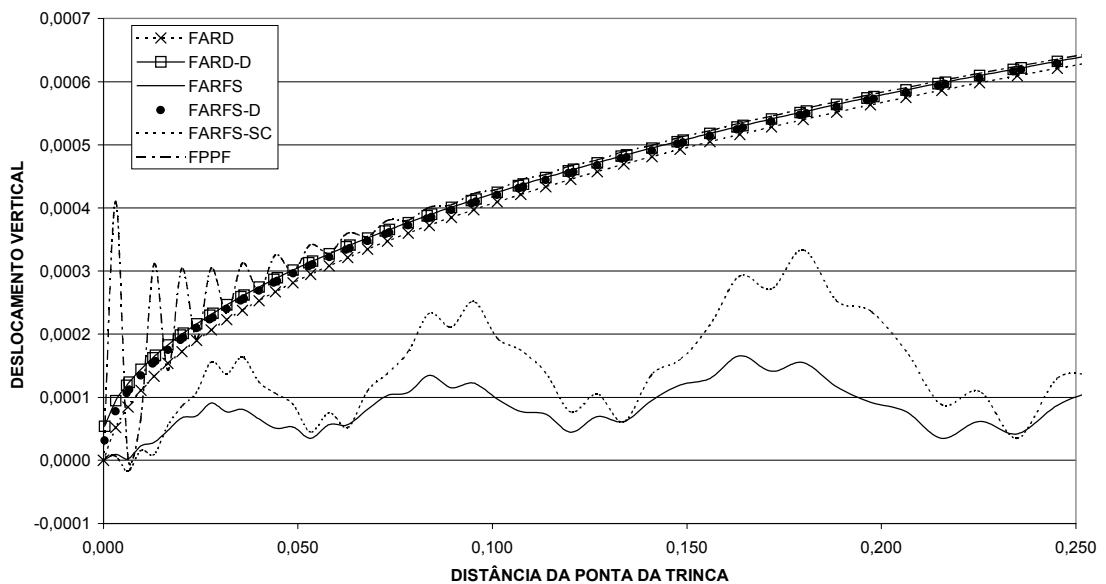


FIGURA 52 - Exemplo 6 – Deslocamento Vertical em Pontos Próximos à Ponta da Trinca

Conforme observa-se pela FIG.52, embora a adoção de elementos semicontínuos na formulação auto-regularizada da força de superfície tenha melhorado a precisão da solução quando comparada com a resposta obtida com elementos contínuos, esta não é eficiente na representação dos deslocamentos verticais na face da trinca, conduzindo a resultados oscilatórios, assim como esta mesma formulação com elementos contínuos. Oscilações também são observadas quando da adoção da formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio, associada à técnica de subelementação, em pontos próximos ao nó singular. Todavia, tais oscilações tendem a desaparecer à medida que se

distancia da ponta da trinca. As formulações auto-regularizadas com elementos descontínuos, bem como a formulação auto-regularizada do deslocamento com elementos contínuos representam de forma satisfatória o comportamento dos resultados para deslocamento, mesmo em pontos muito próximos à ponta da trinca.

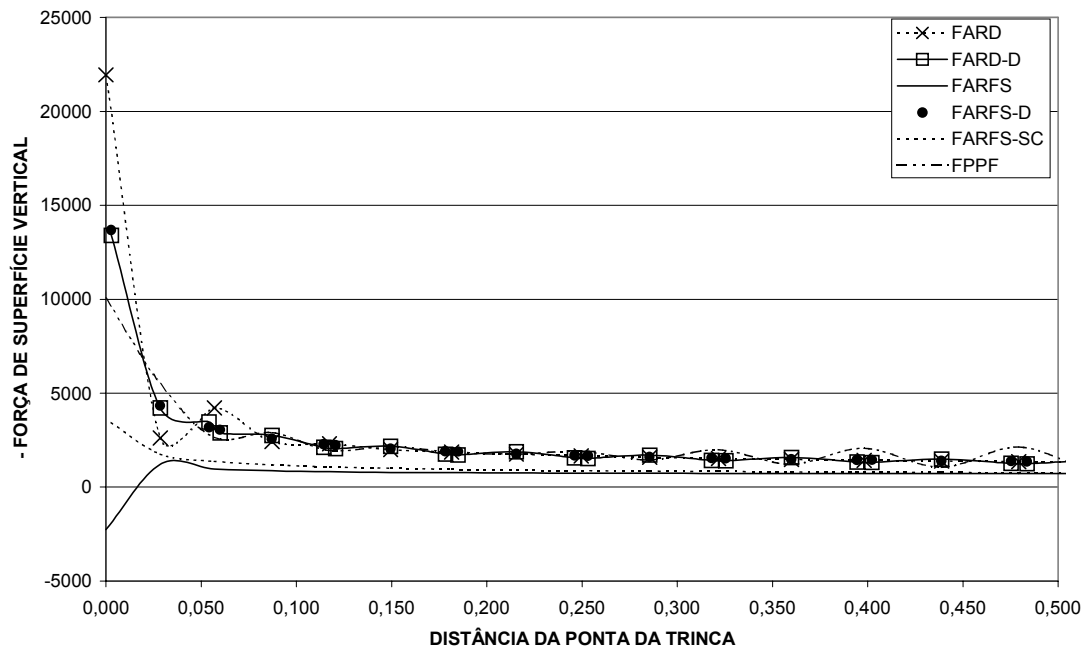


FIGURA 53 - Exemplo 6 – Força de Superfície em Pontos Próximos à Ponta da Trinca

Através da FIG.53, onde são mostrados os resultados para força de superfície próximo à ponta da trinca para o mesmo problema e malha utilizados na análise dos deslocamentos verticais, pode-se notar que dentre as abordagens estudadas, a formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos descontínuos é a que melhor representa as soluções dos problemas de mecânica da fratura. Ao adotar esta formulação percebe-se de forma clara o comportamento singular da solução, sem qualquer oscilação nas proximidades do ponto singular. A formulação auto-regularizada do deslocamento com elementos descontínuos também apresentou bons resultados para força de superfície, entretanto pequenas oscilações na solução podem ser observadas ao longo do trecho analisado. A formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos contínuos, bem como semicontínuos, consegue representar, a menos do nó funcional coincidente com a ponta da trinca, o caráter singular da solução, porém de forma menos

evidente do que as demais formulações. Tanto a formulação auto-regularizada do deslocamento com elementos contínuos, quanto a formulação padrão com ponto fora e subelementação representam claramente a solução singular. Todavia, ambas formulações apresentam oscilações nos resultados em pontos próximos à ponta da trinca. Para a formulação padrão com ponto fora e subelementação, tal oscilação é mais pronunciada, estendendo-se também para pontos mais distantes.

Melhores resultados seriam obtidos para este problema, com todas as formulações, se fossem implementados elementos singulares como os chamados “quarter-point elements”, que permitem melhor representação da singularidade de força de superfície na ponta da trinca. Vários autores, tais como GRAY et al. (1990), ARIZA et al. (1997) e DOMÍNGUEZ et al. (2000) adotam os elementos “quarter-point” na análise de problemas bidimensionais e tridimensionais de mecânica da fratura, obtendo resultados bastante precisos.

6

CONCLUSÕES

Três algoritmos não-singulares do método dos elementos de contorno (MEC) para elasticidade bidimensional foram estudados neste trabalho. O primeiro algoritmo se baseia na formulação padrão do MEC com pontos de colocação fora do domínio. No presente algoritmo esta formulação é associada à técnica de subelementação de forma a minimizar os possíveis erros numéricos introduzidos quando o ponto externo se localiza a pequenas distâncias do contorno. O segundo algoritmo é baseado na forma auto-regularizada da equação integral de contorno (EIC) para deslocamento. O processo de regularização desta equação integral não é completo, e a mesma permanece com uma integral fracamente singular, a qual é avaliada no presente algoritmo através de quadratura logarítmica. O terceiro algoritmo apresentado tem como base a equação integral de contorno auto-regularizada da força de superfície, que é totalmente regular. Entretanto, devido à presença do núcleo hipersingular na EIC, esta formulação requer continuidade $C^{1,\alpha}$ no sentido de Hölder para o campo de deslocamentos de forma a garantir a existência de limite finito para a equação integral. Este forte requisito de continuidade não é atendido quando se utilizam os elementos de contorno contínuos comumente empregados na implementação do MEC. Adotam-se portanto duas alternativas. A primeira consiste em utilizar elementos descontínuos, que preservam o

requisito de continuidade em todos os pontos de colocação, e a segunda trata da adoção da hipótese de “continuidade relaxada”, permitindo que o campo de deslocamentos seja contínuo $C^{1,\alpha}$ apenas por partes.

Apresentou-se um estudo sobre os possíveis erros introduzidos na implementação computacional da formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos contínuos. A aproximação da derivada tangencial e a adoção da hipótese de “continuidade relaxada” são apontadas como possíveis fontes de erros introduzidas na discretização da EIC auto-regularizada da força de superfície. No presente algoritmo, ao se utilizar o conceito de “continuidade relaxada”, o gradiente do deslocamento nos pontos de colocação compartilhados por dois elementos é considerado como a média dos gradientes no ponto de colocação, ou como o gradiente avaliado localmente com base em um elemento, de acordo com o elemento a ser integrado. Ao adotar-se elementos contínuos na formulação auto-regularizada da força de superfície, ambas fontes de erro podem ser importantes na avaliação das grandezas do contorno. A implementação de elementos descontínuos permitiu a separação destas fontes de erro, uma vez que para tais elementos não é necessária a adoção do conceito de “continuidade relaxada”. Neste caso todos os pontos de colocação se localizam no interior do elemento, onde o requisito de continuidade é atendido.

Sete problemas de elasticidade, bem como dois problemas duplamente simétricos de mecânica da fratura foram analisados através das formulações auto-regularizadas do deslocamento (FARD) e força de superfície (FARFS), bem como da formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio associada à técnica de subelementação (FPPF). Esta última formulação em geral apresentou resultados satisfatórios. Entretanto, a mesma mostrou-se bastante sensível em relação à distância entre o ponto de colocação e o contorno. O tipo de malha adotado também parece exercer influência significativa nos resultados obtidos por meio da formulação padrão com ponto fora e subelementação. A subdivisão dos elementos que não contêm o ponto nodal correspondente ao ponto de colocação, mas que no entanto se localizam próximos ao mesmo parece ser necessária para melhorar a precisão alcançada. O algoritmo para

posicionamento dos pontos externos deve ser modificado de forma a possibilitar uma análise mais eficiente de problemas que possuem contornos mais complexos.

A formulação auto-regularizada do deslocamento, com elementos contínuos, conduziu a respostas bastante precisas em todos os exemplos analisados. Os resultados obtidos através desta formulação convergem de forma monotônica para a solução de referência em todos os casos, com elementos lineares, quadráticos, cúbicos e quárticos. Além disso, comprovou-se numericamente a equivalência entre a formulação auto-regularizada do deslocamento, utilizando quadratura logarítmica para computação da integral fracamente singular, e a formulação clássica para deslocamento, baseada no valor principal de Cauchy. A adoção de elementos descontínuos nesta formulação apresentou algumas oscilações dos resultados em torno da solução de referência, não comprometendo entretanto a precisão das respostas.

A adoção de elementos contínuos na formulação auto-regularizada da força de superfície, juntamente com a hipótese de “continuidade relaxada”, não apresentou bons resultados, principalmente com elementos lineares e quadráticos. De fato, algumas respostas absurdas são observadas ao se utilizar esta abordagem. A convergência dos resultados obtidos por meio da FARFS se deu, na maioria dos casos, de forma oscilatória, e em alguns casos não foi possível garantir convergência até o nível de refinamento estudado. A utilização de elementos semicontínuos nos locais onde existem descontinuidades de normal ou força de superfície possibilitou, em alguns casos, reduzir os erros obtidos na análise numérica através da formulação auto-regularizada da força de superfície. No entanto, tal abordagem não eliminou o caráter oscilatório da convergência dos resultados e não se mostrou eficiente na representação das soluções para deslocamento e força de superfície ao longo do contorno. Por outro lado, a adoção de elementos descontínuos, ao longo de todo o contorno, nesta formulação apresentou convergência monotônica dos resultados para as soluções de referência. A formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos descontínuos representou de forma bastante eficiente as soluções para as grandezas do contorno. Além disso, a precisão dos resultados obtidos por meio desta abordagem é bastante próxima, e em alguns casos até superior àquela obtida através da formulação auto-regularizada do

deslocamento. Na maioria dos casos observa-se ganho significativo na precisão dos resultados ao utilizarem-se elementos descontínuos lineares e quadráticos na FARFS ao invés de elementos contínuos de mesma ordem. A adoção de elementos descontínuos cúbicos e quárticos por sua vez não apresenta ganho tão evidente na precisão quando comparados com os resultados obtidos com os respectivos elementos contínuos.

A aproximação da derivada tangencial do deslocamento utilizando-se as derivadas das funções de interpolação não parece ser a fonte de erro mais importante na implementação da formulação auto-regularizada da força de superfície, como afirmado anteriormente na literatura. Este trabalho, ao contrário, mostrou que a descontinuidade do gradiente nos pontos de colocação localizados nas junções entre elementos parece ser a principal fonte de erros. O fato de o gradiente regularizador nestes pontos assumir diferentes valores de acordo com o elemento a ser integrado, que é a essência da hipótese de “continuidade relaxada”, parece introduzir erros significativos nos resultados obtidos por meio da formulação auto-regularizada da força de superfície com elementos contínuos. Este tipo de erro não ocorre quando o ponto de colocação se localiza no interior do elemento, onde o requisito de continuidade é preservado. Portanto, a influência da “continuidade relaxada” na precisão dos resultados parece estar de certa forma relacionada com a proporção de nós internos ao elemento para nós localizados nas junções entre elementos. Para um contorno fechado, ao adotarem-se elementos quadráticos contínuos, para cada equação relacionada a um nó interno ao elemento, há uma equação relacionada a um nó de extremidade, representando uma proporção de 1:1. No caso de elementos lineares esta situação é mais crítica, pois não há nós internos ao elemento, sendo a proporção 0:1. Para elementos cúbicos e quárticos a análise é mais favorável, pois esta proporção é maior, sendo 2:1 e 3:1 respectivamente.

As formulações auto-regularizadas conduziram a resultados bastante precisos quando da análise de deslocamentos e tensões em pontos internos. Estas formulações proporcionam uma representação contínua entre os deslocamentos e tensões em pontos internos e pontos do contorno. Não é observado qualquer tipo de oscilação nos resultados quando os pontos internos se aproximam do contorno, como usualmente ocorre com as formulações clássicas do método dos elementos de contorno. As

formulações auto-regularizadas parecem ser a abordagem mais apropriada na análise das grandezas em pontos internos, sem necessidade de esquemas especiais de integração, independentemente da localização destes pontos com relação ao contorno.

A implementação de elementos contínuos na formulação auto-regularizada da força de superfície é mais prática que a utilização de elementos descontínuos ou elementos baseados em funções de interpolação de classe C^1 , como os “Overhauser” ou “Hermite”. Entretanto, com base nos resultados obtidos neste trabalho, parece que os elementos contínuos não podem ser utilizados nesta formulação. Ao que tudo indica, os requisitos de continuidade devem ser atendidos para garantir a convergência e precisão dos resultados, principalmente se adotadas interpolações lineares ou quadráticas.

Ao longo deste trabalho as formulações auto-regularizadas mostraram-se bastante eficientes na análise de problemas bidimensionais de elasticidade e mecânica da fratura quando atendidos os requisitos de continuidade para validação das mesmas. As formulações auto-regularizadas parecem ser a abordagem mais natural para tratamento das integrais singulares presentes no método dos elementos de contorno, consistindo numa alternativa robusta às formulações baseadas no valor principal de Cauchy ou parte finita de Hadamard.

O programa computacional obtido ao final deste trabalho é bastante completo para análise de problemas bidimensionais de elasticidade linear via método dos elementos de contorno. É possível utilizar as formulações auto-regularizadas do deslocamento e força de superfície, a formulação padrão com ponto de colocação fora do domínio, com ou sem técnica de subelementação, bem como a formulação clássica do método dos elementos de contorno baseada no valor principal de Cauchy para obtenção das grandezas no contorno. Podem também ser obtidos os deslocamentos e as tensões em pontos internos por meio das formulações auto-regularizadas e das formulações clássicas do MEC. No caso da análise das grandezas do contorno através das formulações auto-regularizadas, podem ser adotados os elementos de contorno isoparamétricos usualmente empregados no MEC, bem como elementos descontínuos e semicontínuos.

Em trabalhos futuros, elementos de contorno baseados em funções de interpolação de classe C^1 podem ser facilmente implementados neste programa, para confirmar os resultados aqui obtidos. Os algoritmos de locação dos pontos externos e de subelementação, utilizados na formulação padrão com ponto fora, podem ser otimizados, para possibilitar a análise de problemas com contornos mais complicados. O presente algoritmo pode também ser estendido, em trabalho posterior, para análise de problemas gerais de mecânica da fratura, utilizando, por exemplo, a formulação dual do MEC. É possível ainda incluir avaliação de problemas elasto-plásticos, através da adição da integral correspondente às deformações plásticas. Em estudo posterior, implementações análogas às apresentadas no presente trabalho podem ser feitas para análise de placas sujeitas a flexão.

7

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aliabadi, M. H., Rooke, D. P. *Numerical Fracture Mechanics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. 276p.

ANSYS Inc. Corporate. *ANSYS*. version 5.7. Canonsburg: ANSYS Inc., 2000.

Ariza, M. P., Sáez, A., Dominguez, J. *A Singular Element for Three-Dimensional Fracture Mechanics Analysis*. Eng. Anal. Boundary Elements, v.20, p.275-285, 1997

Brebbia, C. A., Dominguez, J. *Boundary Element Methods – An Introductory Course*. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1989. 293p.

Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., Wrobel, L. C. *Boundary Element Technique: Theory and Applications in Engineering*. Berlin: Springer-Verlag, 1984. 464p.

Castor, G. S., Telles, J. C. F. *The 3-D BEM Implementation of a Numerical Green's Function for Fracture Mechanics Applications*. Int. J. Num. Meth. Eng., v.48, p.1199-1214, 2000

Camp, C. V., Gipson, G. S. *Overhauser Elements in Boundary Element Analysis*. Mathl. Comput. Modelling, v.15, p.59-69, 1991

Cerrolaza, M., Alarcon, E. *A Bi-cubic Transformation for the Numerical Evaluation of the Cauchy Principal Value Integrals in Boundary Methods*. Int. J. Num. Meth. Eng., v.28, p.987-999, 1989

- Chan, S. K., Tuba, I. S., Wilson, W. K. *On the Finite Element Method in Linear Fracture Mechanics*. Scientific Paper 68-1D7-FMPWR-P1, Pittsburg: Westinghouse Research Laboratories, April 1968
- Chen, H. B., Lu, P., Schnack, E. *Regularized Algorithms for the Calculation of Values on and Near Boundaries in 2D Elastic BEM*. Eng. Anal. Boundary Elements, v.25, p.851-876, 2001
- Chien, C. C., Rajiyah, H., Atluri, S. N. *On The Evaluation of Hyper-singular Integrals Arising in the Boundary Element Method for Linear Elasticity*. Comput. Mech., v.8, p.57-70, 1991
- Chien, C.-C., You, Z.-Y., Chung, Y.-L. *Internal Stress Calculation Using an Iterative Subdivision Scheme in the Boundary Element Method*. Eng. Anal. Boundary Elements, v.20, p.145-153, 1997
- CIMNE – Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingenieria. *GID*. version 7.1. Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), 2002. Disponível em <<http://www.gid.cimne.upc.es>>
- Courant, R., Hilbert, D. *Methods of Mathematical Physics*. New York: John Wiley & Sons, 1962. 830p.
- Cruse, T. A. *Numerical Solutions in Three Dimensional Elastostatics*. Int. J. Solids Structures, v.5, p.1259-1274, 1969
- Cruse, T. A. *Application of the Boundary-Integral Equation Solution Method in Solid Mechanics*. In: Variational Methods in Engineering II. 1972, Southampton. *Proceedings...* Southampton: [s. n.], 1972. p.9/1-9/29
- Cruse, T. A. *An Improved Boundary-Integral Equation Method for Three Dimensional Elastic Stress Analysis*. Comp. Struc., v.4, p.741-754, 1974
- Cruse, T. A. *Mathematical foundations of the Boundary-Integral Equation Method in Solid Mechanics*. U.S. Air Force Report AFOSR-TR-77-1002, p.1-115, Jul 1977
- Cruse, T. A. *Two-Dimensional BIE Fracture Mechanics Analysis*. Appl. Math. Modelling, v.2, p.287-293, 1978
- Cruse, T. A. *Recent Advances in Boundary Element Analysis Methods*. Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg., v.62, p.227-244, 1987
- Cruse, T. A. *Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988. 162p.
- Cruse, T. A., Aithal, R. *Non-Singular Boundary Integral Equation Implementation*. Int. J. Num. Meth. Eng., v.36, p.237-254, 1993

- Cruse, T. A., Novati, G. *Traction Boundary Integral Equation (BIE) Formulations and Applications to Nonplanar and Multiple Cracks*. In: *Fracture Mechanics: Twenty-Second Symposium*, 1992. p.314-332
- Cruse, T. A., Richardson, J. D. *Non-singular Somigliana Stress Identity in Elasticity*. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.39, p.3273-3304, 1996
- Cruse, T. A., Richardson, J. D. *Self-regularized Hypersingular BEM for Laplace's Equation*. In: *Mathematical Aspects of Boundary Element Methods*, 2000, Boca Raton. *Proceedings...* Boca Raton: Chapman & Hall, 2000
- Cruse, T. A., Suwito, W. *On the Somigliana Stress Identity in Elasticity*. *Comp. Mech.*, v.11, p.1-10, 1993
- Cruse, T. A., VanBuren, W. *Three-Dimensional Elastic Stress Analysis of a Fracture Specimen with an Edge Crack*. *Int. Journ. of Fracture Mech.*, v.7, p.1-15, 1971
- Cruz, J. P., Ribeiro, G. O., Jorge, A. B. *On the Application of the Self-regular Flux Boundary Integral Equation for Potential Problems*, In: *CILAMCE - Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, 2001, Campinas. *Proceedings...* Campinas: [s.n], 2001. 20p.
- Cruz, J. P. *Formulações Não-Singulares do Método dos Elementos de Contorno Aplicadas a Problemas Bidimensionais de Potencial*. 2001. 81f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte
- Doblaré, M., Gracia, L. *On Non-Linear Transformations for the Integration of Weakly-Singular and Cauchy Principal Value Integrals*. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.40, p.3325-3358, 1997
- Dominguez, J., Ariza, M. P., Gallego, R. *Flux and Traction Boundary Elements Without Hypersingular or Strongly Singular Integrals*. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.48, p.111-135, 2000
- Fabrikant, V. I. *Computer Evaluation of Singular Integrals and Their Applications*. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.23, p.1439-1453, 1986
- Frangi, A., Guiggiani, M. *Boundary Element Analysis of Kirchhoff Plates with Direct Evaluation of Hypersingular Integrals*. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.46, p.1845-1863, 1999
- Gallego, R., Domínguez, J. *Hypersingular BEM for Transient Elastodynamics*. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.39, p.1681-1705, 1996
- Granados, J. J., Gallego, R. *Regularization of Nearly Hypersingular Integrals in the Boundary Element Method*. *Eng. Anal. Boundary Elements*, v.25, p.165-184, 2001

- Gray, L. J., Martha, L. F., Ingrassia, A. R. *Hypersingular Integrals in Boundary Element Fracture Analysis*. Int. J. Num. Meth. Eng., v.29, p.1135-1158, 1990
- Gray, L. J., Soucie, C. S. *A Hermite Interpolation Algorithm for Hypersingular Boundary Integrals*. Int. J. Num. Meth. Eng., v.36, p.2357-2367, 1993
- Guiggiani, M. *The Evaluation of Cauchy Principal Value Integrals in the Boundary Element Method – A Review*. Mathl. Comput. Modelling, v.15, p.175-184, 1991
- Guiggiani, M., Casalini, P. *Direct Computation of Cauchy Principal Value Integrals in Advanced Boundary Elements*. Int. J. Num. Meth. Eng., v.24, p.1711-1720, 1987
- Hall, W. S., Hibbs, T. T. *Subtraction, Expansion and Regularizing Transformation Methods for Singular Kernel Integrations in Elastostatics*. Mathl. Comput. Modelling, v.15, p.313-323, 1991
- Huang, Q. *Boundary Element Methods: An Introduction*. Nashville: Department of Mechanical Engineering, Vanderbilt University., 1993, 39p.
- Huang, Q., Cruse, T. A. *Some Notes on Singular Integral Techniques in Boundary Element Analysis*. Int. J. Num. Meth. Eng., v.36, p.2643-2659, 1993
- Huang, Q., Cruse, T. A. *On the Non-singular Traction-BIE in Elasticity*. Int. J. Num. Meth. Eng., v.37, p.2041-2072, 1994
- Ioakimidis, N. I. *Remarks on the Gauss Quadrature Rule for a Particular Class of Finite-Part Integrals*. Int. J. Num. Meth. Eng., v.38, p.2433-2448, 1995
- Jaswon, M. A. *Integral Equation Methods in Potential Theory I*. In: The Royal Society. London: Royal Society, 1963. p.23-32
- Johnston, P. R. *C^2 -Continuous Elements for Boundary Element Analysis*. Int. J. Num. Meth. Eng., v.40, p.2087-2108, 1997
- Johnston, P. R. *Semi-sigmoidal Transformations for Evaluating Weakly Singular Boundary Element Integrals*. Int. J. Num. Meth. Eng., v.47, p.1709-1730, 2000
- Jorge, A. B., Cruse, T. A., Fisher, T. S., Ribeiro, G. O. *Variational Self-Regular Traction-BEM Formulation for Continuous Inter-Element Displacement Derivatives*. In: IABEM 2002, International Association for Boundary Element Methods, 2002, Austin. *Proceedings...* Austin: [s.n], 2002. 17p
- Jorge, A. B., Ribeiro, G. O., Cruse, T. A., Fisher, T. S. *Self-Regular Boundary Integral Equation Formulations for Laplace's Equation in 2-D*. Int. J. Num. Meth. Eng., v.51, p.1-29, 2001

- Karam, V. J. *Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Teoria de Reissner para Flexão de Placas*. 1986. 142f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro
- Krishnasamy, G., Rizzo, F. J., Rudolphi, T. J. *Continuity Requirements for Density Funcions in the Boundary Integral Equation Method*. *Comput. Mech.*, v.9, p.267-284, 1992
- Lacerda, L. A., Wrobel, L. C. *Hypersingular Boundary Elements for Axisymmetric Elasticity Problems*. In: *Advances in Boundary Element Techniques II*. Geneva: Hoggar Press, 2001. p.337-345
- Lachat, J. C., Watson, J. O. *Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations: A Formulation for Three Dimensional Elastostatics*. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.10, p.991-1005, 1976
- Li, H.-B., Han, G.-M., Mang, H. A. *A New Method for Evaluating Singular Integrals in Stress Analysis of Solids by the Direct Boundary Element Method*. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.21, p.2071-2098, 1985
- Li, Y.-S., Obata, T., Koguchi, H., Yada, T. *Some Improvements of Accuracy and Efficiency in Three Dimensional Direct Boundary Element Method*. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.33, p.1451-1464, 1992
- Liu, Y. J. *On the Simple-Solution Method and Non-Singular Nature of the BIE / BEM – a Review and Some New Results*. *Eng. Anal. Boundary Elements*, v.24, p.789-795, 2000
- Liu, Y., Chen, S. *A New Form of the Hypersingular Boundary Integral Equation for 3-D Acoustics and its Implementation with C^0 Boundary Elements*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v.173, p.375-386, 1999
- Liu, Y., Rizzo, F. J. *A Weakly Singular Form of the Hypersingular Boundary Integral Equation Applied to 3-D Acoustic Wave Problems*. *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, v.96, p.271-287, 1992
- Liu, Y., Rizzo, F. J. *Hypersingular Boundary Integral Equations for Radiation and Scatering of Elastic Waves in Three Dimensions*. *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, v.107, p.131-144, 1993
- Liu, Y. J., Rudolphi, T. J. *New Identities for Fundamental Solutions and Their Applications to Non-Singular Boundary Element Formulations*. *Comp. Mech.*, v.24, p.286-292, 1999
- Lutz, E., Ingraffea, A. R., Gray, L. J. *Use of ‘Simple Solutions’ for Boundary Integral Methods in Elasticity and Fracture Analysis*. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.35, p.1735-1751, 1992

- Martha, L. F., Gray, L. J., Ingraffea, A. R. *Three-Dimensional Fracture Simulation with a Single-Domain, Direct Boundary Element Formulation*. Int. J. Num. Meth. Eng., v.35, p.1907-1921, 1992
- Martin, P. A., Rizzo, F. J. *Hypersingular Integrals: How Smooth Must the Density Be?* Int. J. Num. Meth. Eng., v.39, p.687-704, 1996
- Martin, P. A., Rizzo, F. J., Cruse, T. A. *Smoothness-relaxation Strategies for Singular and Hypersingular Integral Equations*. Int. J. Num. Meth. Eng., v.42, p.885-906, 1998
- Matsumoto, T., Tanaka, M., Hirata, H. *Boundary Stress Calculation Using Regularized Boundary Integral Equation for Displacement Gradients*. Int. J. Num. Meth. Eng., v.36, p.783-797, 1993
- Muci-Küchler, K. H., Rudolphi, T. J. *Coincident Collocation of Displacement and Tangent Derivative Boundary Integral Equations in Elasticity*. Int. J. Num. Meth. Eng., v.36, p.2837-2849, 1993
- Mukherjee, Y. X., Shah, K., Mukherjee, S. *Thermoelastic Fracture Mechanics with Regularized Hypersingular Boundary Integral Equations*. Eng. Anal. Boundary Elements, v.23, p.89-96, 1999
- Mukherjee, S. *Finite Parts of Singular and Hypersingular Integrals with Irregular Boundary Source Points*. Eng. Anal. Boundary Elements, v.24, p.767-776, 2000
- Mukherjee, S. *Regularization of Hypersingular Boundary Integral Equations: A New Approach for Axisymmetric Elasticity*. Eng. Anal. Boundary Elements, v.26, p.839-844, 2002
- Polch, E. Z., Cruse, T. A., Huang, C. J. *Traction BIE Solutions for Flat Cracks*. Comp. Mech., v.2, p.253-267, 1987
- Poon, H., Mukherjee, S., Ahmad, M. F. *Use of "Simple Solutions" in Regularizing Hypersingular Boundary Integral Equations in Elastoplasticity*. J. Appl. Mech., v.65, p.39-45, 1998
- Portela, A., Aliabadi, M. H., Rooke, D. P. *The Dual Boundary Element Method: Effective Implementation for Crack Problems*. Int. J. Num. Meth. Eng., v.33, p.1269-1287, 1992
- Ribeiro, G. O. *Sobre a Formulação do Método dos Elementos de Contorno para a Flexão de Placas Usando as Hipóteses de Reissner*. 1992. 266p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- Ribeiro, G. O., Cruz, J. P., Jorge, A. B. *Non-Singular BEM Applications Based on Self-Regular Boundary Integral Equations for Potential Problems*, In: World Congress on Computational Mechanics, 5th, 2002, Vienna. *Proceedings...* Vienna: [s.n], 2002. 10p

- Ribeiro, T. S. A., Ribeiro, G. O., Jorge, A. B. *Aplicação das Formulações Regularizadas do Método dos Elementos de Contorno para Problemas Bidimensionais da Teoria da Elasticidade*, In: Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, 30, 2002, Brasília. *Anais...* Brasília: [s.n], 2002 (a). p149 (texto completo em CD ROM)
- Ribeiro, T. S. A., Ribeiro, G. O., Jorge, A. B. *Evaluation of the Relaxed Continuity Interpretation on the Self-Regular Traction-BIE*, In: Joint Conference of Italian Group of Computational Mechanics and Ibero-Latin American Association of Computational Methods in Engineering, 3, 2002 (b), Giulianova. *Proceedings...* Giulianova: [s.n], 2002. 10p (texto completo em CD ROM)
- Ribeiro, T. S. A., Ribeiro, G. O., Jorge, A. B. *On the Relaxed Continuity Approach for the Self-Regular Traction-BIE*, In: MECOM 2002, V, 2002, Santa Fe. *Anais...* Santa Fe: [s.n], 2002 (c). p.1261-1281
- Ribeiro, T. S. A., Ribeiro, G. O., Jorge, A. B. *The Relaxed Continuity Hypothesis as an Error Source for the Conforming Self-Regular Traction-BIE Formulation*, In: Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional, V, 2002 (d), Juiz de Fora. *Anais...* Juiz de Fora: [s.n], 2002. p69-76
- Richardson, J. D., Cruse, T. A. *Nonsingular BEM for Fracture Modeling*. *Comp. Struc.*, v.66, p.695-703, 1998
- Richardson, J. D., Cruse, T. A. *Weakly Singular Stress-BEM for 2D Elastostatics*. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.45, p.13-35, 1999
- Richardson, J. D., Cruse, T. A., Huang, Q. *On the Validity of Conforming BEM Algorithms for Hypersingular Boundary Integral Equations*. *Comput. Mech.*, v.20, p.213-220, 1997
- Rizzo, F. J. *An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics*. *Quart. of Appl. Math.*, v.15, p.83-95, 1967
- Rudolphi, T. J. *The Use of Simple Solutions in the Regularization of Hypersingular Boundary Integral Equations*. *Mathl. Comput. Modelling*, v.15, p.269-278, 1991
- Sáez, A., Gallego, R., Domínguez, J. *Hypersingular Quarter-Point Boundary Elements for Crack Problems*. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.38, p.1681-1701, 1995
- Silva, N. A. *Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Análise de Placas com Enrijecedores Utilizando a Teoria de Reissner*. 1996. 230p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- Sladek, V., Sladek, J. *Non-Singular Boundary Integral Representation of Stresses*. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.33, p.1481-1499, 1992

- Sladek, V., Sladek, J., Tanaka, M. *Regularization of Hypersingular and Nearly Singular Integrals in the Potential Theory and Elasticity*. Int. J. Num. Meth. Eng., v.36, p.1609-1628, 1993
- Sladek, V., Sladek, J. *Plate Bending Problems Using the Nonsingular Boundary Element Formulation and C^1 -Continuous Elements*. Comp. Struc. Eng., v.54, p.679-688, 1995
- Smith, R. N. L. *Direct Gauss Quadrature Formulae for Logarithmic Singularities on Isoparametric Elements*. Eng. Anal. Boundary Elements, v.24, p.161-167, 2000
- Symm, G. T. *Integral Equation Methods in Potential Theory II*. In: The Royal Society. London: Royal Society, 1963. p.33-46
- Tada, H., Paris, P. C., Irwin, G. R. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. 3rd ed. New York: The American Society of Mechanical Engineers, 2000. 677p.
- Telles, J. C. F. *A Self-Adaptive Co-ordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Element Integrals*. Int. J. Num. Meth. Eng., v.24, p.959-973, 1987
- Watson, J. O. *Singular Boundary Elements for the Analysis of Cracks in Plane Strain*. Int. J. Num. Meth. Eng., v.38, p.2389-2411, 1995
- Wilde, A. J., Aliabadi, M. H. *Boundary Element Analysis of Geomechanical Fracture*. Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., v.23, p.1195-1214, 1999
- Young, A. *A Single-Domain Boundary Element Method for 3-D Elastostatic Crack Analysis Using Continuous Elements*. Int. J. Num. Meth. Eng., v.39, p.1265-1293, 1996
- Young, A. *Improved Numerical Method for the Traction Boundary Integral Equation by Application of Stokes' Theorem*. Int. J. Num. Meth. Eng., v.40, p.3141-3161, 1997

ANEXOS

ANEXO A – OBTENÇÃO DOS GRADIENTES DO DESLOCAMENTO

No algoritmo apresentado, os gradientes do deslocamento no sistema global são escritos em termos das derivadas tangenciais do deslocamento, e das forças de superfície locais. Escreve-se um sistema de equações que relaciona as forças de superfície e derivadas tangenciais do deslocamento no sistema de coordenadas local com os gradientes do deslocamento no sistema global de coordenadas. Este sistema de equações, apresentado na Seção 4.3.2 é repetido abaixo (Eq.A1)

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ u_{1,\xi} \\ u_{2,\xi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2G}{1-2\nu}(1-\nu)n_1 & Gn_2 & Gn_2 & \frac{2G\nu}{1-2\nu}n_1 \\ \frac{2G\nu}{1-2\nu}n_2 & Gn_1 & Gn_1 & \frac{2G}{1-2\nu}(1-\nu)n_2 \\ -n_2J(\xi) & 0 & n_1J(\xi) & 0 \\ 0 & -n_2J(\xi) & 0 & n_1J(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,2} \end{Bmatrix} \quad (A1)$$

Ao inverter o sistema de equações mostrado acima, obtém-se os gradientes do deslocamento em função das forças de superfície e deslocamentos nodais (Eq.A2).

$$u_{k,l}(P) \approx u_{k,l}(\xi^P) = A_{klr}(\xi^P)t_r(\xi^P) + B_{klr}(\xi^P) \sum_{i=1}^m N'_i(\xi^P)u_r^i \quad (A2)$$

Onde A_{klr} e B_{klr} são as matrizes de rotação, dadas pelas Eq. A3 e A4, respectivamente.

$$A_{klr}(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{n_1(n_1^2(2\nu-1)+n_2^2(2\nu-2))}{2G(\nu-1)(n_1^2+n_2^2)^2} & \frac{n_1^2n_2}{2G(\nu-1)(n_1^2+n_2^2)^2} \\ \frac{n_1^2n_2}{2G(\nu-1)(n_1^2+n_2^2)^2} & \frac{n_1(n_1^2(2\nu-2)+n_2^2(2\nu-1))}{2G(\nu-1)(n_1^2+n_2^2)^2} \\ \frac{n_2(n_1^2(2\nu-1)+n_2^2(2\nu-2))}{G(\nu-1)(n_1^2+n_2^2)^2} & \frac{n_1n_2^2}{2G(\nu-1)(n_1^2+n_2^2)^2} \\ \frac{n_1n_2^2}{2G(\nu-1)(n_1^2+n_2^2)^2} & \frac{n_2(n_1^2(2\nu-2)+n_2^2(2\nu-1))}{2G(\nu-1)(n_1^2+n_2^2)^2} \end{bmatrix} \quad (\text{A3})$$

$$B_{klr}(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{-n_2(n_1^2\nu+n_2^2(\nu-1))}{J(\nu-1)(n_1^2+n_2^2)^2} & \frac{n_1(n_1^2\nu+n_2^2(\nu-1))}{J(\nu-1)(n_1^2+n_2^2)^2} \\ \frac{n_1(n_1^2(1-\nu)-n_2^2\nu)}{J(\nu-1)(n_1^2+n_2^2)^2} & \frac{n_2(n_1^2(2-\nu)+n_2^2(1-\nu))}{J(\nu-1)(n_1^2+n_2^2)^2} \\ \frac{n_1(n_1^2(\nu-1)+n_2^2(\nu-2))}{J(\nu-1)(n_1^2+n_2^2)^2} & \frac{n_2(n_1^2\nu+n_2^2(\nu-1))}{J(\nu-1)(n_1^2+n_2^2)^2} \\ \frac{n_2(n_1^2(1-\nu)-n_2^2\nu)}{J(\nu-1)(n_1^2+n_2^2)^2} & \frac{n_1(n_1^2(\nu-1)+n_2^2\nu)}{J(\nu-1)(n_1^2+n_2^2)^2} \end{bmatrix} \quad (\text{A4})$$

ANEXO B – DESCRIÇÃO DO ARQUIVO DE ENTRADA DE DADOS

A entrada de dados do programa é feita a partir de um arquivo de dados, o qual deve conter as seguintes informações:

- **Dados Gerais**

IKIND
IQKIND (somente informado se IKIND=0 ou 2)
ALFA (somente informado se IKIND=2)
IPS
NDIM
NPE
INO
INLOC
NUMNODE
NUMELEM
NUMPI
NDBC
NTBC
NELDISC

- **Coordenadas dos Nós Geométricos**

X Y Z

- **Conectividade dos Elementos**

NCONN1 NCONN2
NCONN1 NCONN2 NCONN3
NCONN1 NCONN2 NCONN3 NCONN4
NCONN1 NCONN2 NCONN3 NCONN4 NCONN5

- **Deslocamentos Prescritos**

NUMNOD NUMDIR ZU

- Forças de Superfície Prescritas

NUMNOD NUMDIR ZT

- Dados do Material

ZNU

ZMU

- Descontinuidade de Força de Superfície (quando esta é prescrita com um valor em uma direção para um elemento e o deslocamento, ou outro valor para força de superfície é prescrito na mesma direção para outro elemento que compartilha o nó)

NUMDISC

IWHELM LPOS KDIRECT INODE TVALUE

- Dados Específicos para Elementos Descontínuos (se adotados em todo o contorno)

AL BL

- Dados Específicos para Elementos Semicontínuos (quando adotados os três tipos de elemento no mesmo contorno)

NUMELDISC

NEL AL BL

- Coordenadas dos Pontos Internos

X Y Z

Onde:

- IKIND – tipo de formulação adotada:
 - Formulação auto-regularizada do deslocamento: 0
 - Formulação auto-regularizada da força de superfície: 1
 - Formulação padrão com ponto fora: 2
 - Formulação padrão: 3
- IQKIND – sub-tipo da formulação:
 - Para IKIND=0:
 - Integral fracamente singular calculada através da transformação de Telles: 1
 - Integral fracamente singular calculada através de quadratura logarítmica: 2

- Para IKIND=2:
 - Sem utilização da técnica de subelementação: 0
 - Com utilização da técnica de subelementação: 1
- ALFA – Valor de α - Proporção do comprimento do elemento utilizada para locação dos pontos de colocação externos ao contorno
- IPS – Tipo de problema analisado:
 - Estado plano de tensão: 0
 - Estado plano de deformação: 1
- NDIM – Dimensão do problema (no caso, sempre 2)
- NPE – Número de nós por elemento (2, 3, 4 ou 5)
- INO – Número de pontos de integração global
- INLOC – Número de pontos de integração local (utilizado na integração dos elementos que contém o ponto de colocação)
- NUMNODE – Número de nós do contorno
- NUMELEM – Número de elementos de contorno
- NUMPI – Número de pontos internos
- NDBC – Número de componentes de deslocamento prescritas
- NTBC – Número de componentes de força de superfície prescritas
- NELDISC – Tipo de elemento utilizado:
 - Somente elementos contínuos: 0
 - Somente elementos descontínuos: 1
 - Elementos contínuos, semicontínuos e descontínuos: 2
- NCONNn – Número do n-ésimo nó do elemento (numeração global)
- NUMNOD – Número do nó com deslocamento ou força de superfície prescritos
- NUMDIR – Direção do deslocamento ou força de superfície prescritos
- ZU – Valor do deslocamento prescrito no nó NUMNOD, na direção NUMDIR
- ZT – Valor da força de superfície prescrita no nó NUMNOD, na direção NUMDIR
- ZNU – Coeficiente de Poisson
- ZMU – Módulo de Elasticidade
- NUMDISC – Número de descontinuidades de força de superfície

- IWHELEM – Número do elemento que contém descontinuidade de força de superfície
- LPOS – Posição do nó que contém descontinuidade, em relação ao elemento.
- KDIRECT – Direção da descontinuidade de força de superfície (1 para x, 2 para y).
- INODE – Número do nó que contém a descontinuidade – Numeração Global
- TVALUE – Valor da descontinuidade de força de superfície
- AL – Distância em coordenadas adimensionais da extremidade inicial do elemento para o respectivo nó funcional
- BL – Distância em coordenadas adimensionais da extremidade final do elemento para o respectivo nó funcional
- NUMELDISC – Número de elementos semicontínuos ou descontínuos (somente informado se NELDISC =2)
- NEL – Número do elemento semicontínuo ou descontínuo (somente informado se NELDISC = 2)

Exemplo:

Problema de tubo de parede espessa sujeito a pressão interna, calculado através da formulação auto-regularizada da força de superfície, com elementos semicontínuos nos cantos geométricos. Adotou-se malha de 6 elementos quadráticos, resultando em 12 nós. Foram utilizados doze pontos de integração, tanto global quanto local. Não são analisadas grandezas em dois pontos internos. Considerou-se estado plano de tensão. Na FIG.A é mostrada a geometria do problema, bem como a malha adotada na análise. São mostradas as localizações de todos os nós do contorno, entretanto apenas os elementos são numerados.

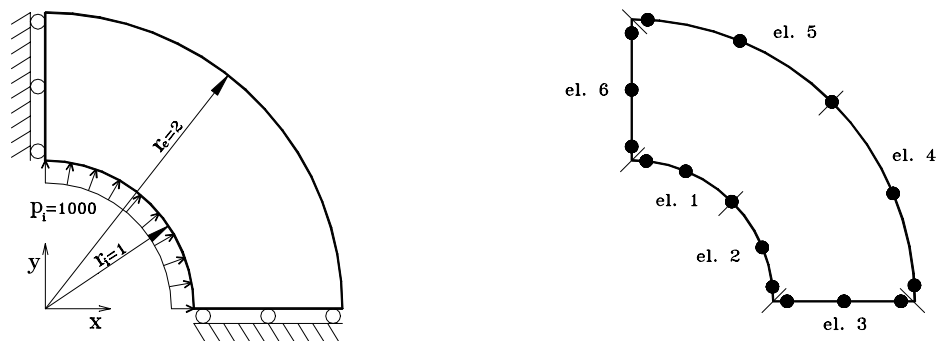


FIGURA A - Exemplo – Geometria do Problema e Malha do MEC Adotada

1
0
2
3
12
12
12
6
0
6
18
2

.0000000000000000	1.0000000000000000	1.0000000000000000
.37561277541511	.92677669529664	1.0000000000000000
.70710678118655	.70710678118655	1.0000000000000000
.92677669529664	.37561277541511	1.0000000000000000
1.0000000000000000	.0000000000000000	1.0000000000000000
1.5000000000000000	.0000000000000000	1.0000000000000000
2.0000000000000000	.0000000000000000	1.0000000000000000
1.85355339059327	.75122555083023	1.0000000000000000
1.41421356237310	1.41421356237309	1.0000000000000000
.75122555083023	1.85355339059327	1.0000000000000000
.0000000000000000	2.0000000000000000	1.0000000000000000
.0000000000000000	1.5000000000000000	1.0000000000000000

1	2	3
3	4	5
5	6	7
7	8	9
9	10	11
11	12	1

11	1	.0000000000000000
12	1	.0000000000000000
1	1	.0000000000000000
5	2	.0000000000000000
6	2	.0000000000000000
7	2	.0000000000000000
11	2	.0000000000000000
12	2	.0000000000000000
6	1	.0000000000000000
7	1	.0000000000000000
8	1	.0000000000000000
8	2	.0000000000000000
9	1	.0000000000000000
9	2	.0000000000000000
10	1	.0000000000000000
10	2	.0000000000000000
1	2	1000.0000000000000000
5	1	1000.0000000000000000
2	1	375.61277541511380
2	2	926.77669529663680
3	1	707.10678118654740
3	2	707.10678118654760
4	1	926.77669529663680
4	2	375.61277541511380

.3000000000000000
78850

6				
1	1	1	1	.0000000000000000
2	3	2	5	.0000000000000000
3	1	1	5	.0000000000000000
4	1	2	7	.0000000000000000
5	3	1	11	.0000000000000000
6	3	2	1	.0000000000000000

6		
1	0.1	0.0
2	0.0	0.1
3	0.1	0.1
4	0.1	0.0
5	0.0	0.1
6	0.1	0.1