

**Estudo e Implementação das Equações Integrais  
de Contorno para Problemas Tridimensionais  
de Elasticidade**

**Alisson Pinto Chaves**

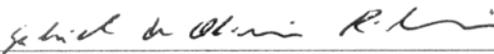
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

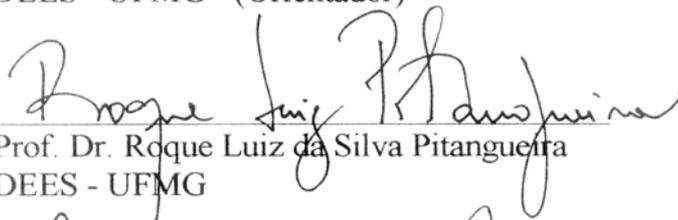
**"ESTUDO E IMPLEMENTAÇÃO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS DE  
CONTORNO PARA PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS DE  
ELASTICIDADE"**

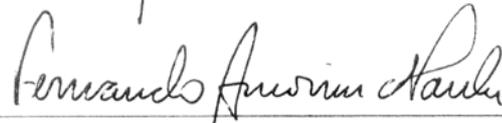
Alisson Pinto Chaves

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Gabriel de Oliveira Ribeiro  
DEES - UFMG - (Orientador)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitanguetra  
DEES - UFMG

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Fernando Amorim de Paula  
DEES - UFMG

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Francisco Célio de Araújo  
UFOP

Belo Horizonte, 28 de março de 2003

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais, e meus irmãos, que sempre me receberam com alegria a cada volta para casa, renovando meu ânimo e confiança, e dando a certeza de ter sempre alguém com quem contar.

Ao Professor Gabriel de Oliveira Ribeiro por exigir o máximo da minha capacidade. A ótima orientação no desenvolvimento deste trabalho, com segurança, paciência e dedicação, ensinaram a maneira de se conduzir com honradez um trabalho de pesquisa.

Aos professores do DEES que contribuíram para a formação deste trabalho, e principalmente àqueles que, mesmo cientes de minhas fraquezas, acreditaram no meu potencial.

Meu agradecimento especial aos colegas do mestrado, principalmente aos que se tornaram mais que somente colegas, mas grandes amigos. Obrigado pela convivência, pelo incentivo, e por compartilhar as dificuldades e alegrias vividas ao longo do curso.

À prestatividade e atenção dispensados pelos funcionários do departamento.

À CAPES pelo suporte financeiro dado ao longo de parte deste curso.

# SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	v
<b>LISTA DE TABELAS</b> .....	vii
<b>LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS</b> .....	viii
<b>RESUMO</b> .....	xi
<b>ABSTRACT</b> .....	xii
<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	1
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	4
<b>3 EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO</b> .....	15
<b>3.1 Equações da Teoria da Elasticidade</b> .....	15
<b>3.2 Solução Fundamental</b> .....	17
3.2.1 - Considerações Iniciais .....	17
3.2.2 - A Solução Fundamental de Kelvin .....	18
<b>3.3 Identidade de Somigliana</b> .....	20
3.3.1 - Considerações Iniciais (Teorema de Betti) .....	20
3.3.2 - A Identidade de Somigliana para Deslocamentos (ISD) .....	21
3.3.3 - A Identidade de Somigliana para Tensões (IST) .....	22
<b>3.4 Equações Integrais de Contorno (EIC)</b> .....	23
<b>3.5 Sobre o Termo <math>C_{ji}(P)</math></b> .....	26
<b>3.6 Formulação Auto-Regularizada da EIC para Deslocamentos</b> .....	28
<b>4 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO</b> .....	30
<b>4.1 Tratamento Numérico das EIC</b> .....	30
<b>4.2 Descontinuidade da Força de Superfície</b> .....	36
<b>4.3 Funções de Interpolação e os Elementos de Contorno</b> .....	37
4.3.1 - O Jacobiano de Superfície .....	37
4.3.2 - Funções de Interpolação .....	39
<b>4.4 Tensões nos Elementos de Contorno</b> .....	40
4.4.1 - Conceitos Gerais .....	40
4.4.2 - Deformações em coordenadas locais .....	41

<b>5 ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO PARA O MEC TRIDIMENSIONAL</b> .....	43
<b>5.1 Elementos Não-Singulares - Integrais Regulares</b> .....	44
<b>5.2 Elementos Singulares</b> .....	47
<b>5.3 Redução na Ordem da Singularidade do Integrand</b> .....	49
<b>5.4 Solução Analítica</b> .....	54
<b>6 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL</b> .....	58
<b>6.1 Metodologia</b> .....	58
<b>6.2 Interface Gráfica</b> .....	61
<b>6.3 Fluxograma</b> .....	61
<b>7 EXEMPLOS E RESULTADOS NUMÉRICOS</b> .....	63
<b>7.1 Exemplo 1 (Avaliação dos esquemas de integração)</b> .....	64
7.1.1 - Integrais Fracamente Singulares .....	64
7.1.2 - Integrais Não-Singulares .....	67
<b>7.2 Exemplo 2 (Cubo Submetido à Tensão Uniforme)</b> .....	71
<b>7.3 Exemplo 3 (Viga em Balanço com Carga Concentrada na Extremidade)</b> .....	75
<b>7.4 Exemplo 4 (Placa Simplesmente Apoiada Sujeita a Carga Uniformemente Distribuída)</b> .....	92
<b>7.5 Exemplo 5 (Corpo Sólido Sujeito a Cargas Diversas)</b> .....	100
<b>7.6 Exemplo 6 (Cavidade Esférica em Cilindro)</b> .....	107
<b>7.7 Exemplo 7 (Exemplar de Ensaio para Mecânica da Fratura)</b> .....	111
<b>8 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES</b> .....	122
<b>9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	127
<b>ANEXO A – ALGUNS CONCEITOS UTILIZADOS</b> .....	A-1
<b>A.1 Funções Delta de Dirac</b> .....	A-1
<b>A.2 Integrais Impróprias e Valor Principal de Cauchy</b> .....	A-1
<b>A.3 Ângulo Sólido</b> .....	A-2
<b>A.4 Continuidade de Hölder</b> .....	A-4
<b>ANEXO B – INFORMAÇÕES SOBRE O PROGRAMA</b> .....	A-5
<b>B.1 Descrição do Código Fonte</b> .....	A-5
<b>B.2 Pré e Pós Processador</b> .....	A-9
<b>B.3 Exemplo Ilustrativo</b> .....	A-10

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - a) Componentes de Tensão; b) Força de superfície ; c) Forças de Volume .....	16
FIGURA 2 - Ilustrações de $p$ , $q$ , $r$ , e as componentes de deslocamento e força .....	18
FIGURA 3 - Posições de $p$ e $Q$ consideradas na ISD .....	22
FIGURA 4 - Região de exclusão da singularidade .....	24
FIGURA 5 - Ponto com angulosidade: a) Cone com vértice em $P$ ; b) Superfície esférica na parte interna do cone tangente .....	27
FIGURA 6 - Área da esfera unitária e matriz $C$ associada .....	27
FIGURA 7 - Exemplos de descontinuidades nas forças de superfície .....	37
FIGURA 8 - Diferencial de área e sistemas de coordenadas .....	38
FIGURA 9 - Elemento triangular plano com aproximação linear .....	39
FIGURA 10 - Elemento triangular com aproximação quadrática .....	39
FIGURA 11 - Sistema de coordenadas locais e componentes de tensão .....	40
FIGURA 12 - Rotação de eixos cartesianos .....	41
FIGURA 13 - (a) Elemento regular; (b) elemento singular. ....	44
FIGURA 14 - Subdivisão em $NS$ subelementos .....	46
FIGURA 15 - Sistemas de coordenadas locais de elementos e subelementos .....	46
FIGURA 16 - Singularidade nos termos das submatrizes de $H$ . ....	47
FIGURA 17 - Singularidade nos termos das submatrizes de $G$ . ....	48
FIGURA 18 - Elemento triangular mapeado em um quadrado unitário .....	49
FIGURA 19 - Seqüência de mapeamento em elementos com aproximação quadrática .....	53
FIGURA 20 - Pontos de integração acumulados próximos do ponto singular .....	54
FIGURA 21 - Segmentos adjacentes concorrendo no nó singular $A$ . ....	56
FIGURA 22 - Posicionamento do ponto de colocação fora do domínio .....	60
FIGURA 23 - Interação entre o programa e a interface gráfica .....	61
FIGURA 24 - Fluxograma básico do programa .....	62
FIGURA 25 - Elementos triangulares utilizados nos testes .....	64
FIGURA 26 - Erro percentual relativo na avaliação de integrais fracamente singulares .....	65
FIGURA 27 - Posições do ponto de colocação utilizadas nos testes .....	67
FIGURA 28 - Perda de precisão na integração.....	68
FIGURA 29 - Avaliação do critério para definição do número de pontos de integração .....	70
FIGURA 30 - Comportamento quase-singular remanescente no domínio mapeado .....	71
FIGURA 31 - Cubo tracionado e malhas analisadas .....	72
FIGURA 32 - Tempo de processamento e erros para integração com subelementos .....	74
FIGURA 33 - Viga em balanço com carregamento e deslocamento $\delta$ na extremidade .....	75
FIGURA 34 - Algumas discretizações estudadas .....	77

FIGURA 35 - Convergência dos resultados para análise da viga em balanço .....	82
FIGURA 36 - Respostas de deslocamentos obtidas em análises com diferentes valores de $\alpha$ .	84
FIGURA 37 - Respostas de tensões obtidas em análises com diferentes valores de $\alpha$ .....	85
FIGURA 38 - Configuração deformada da viga, para valores críticos do parâmetro $\alpha$ .....	85
FIGURA 39 - Variação do número de condicionamento com o parâmetro $\alpha$ .....	86
FIGURA 40 - Discretizações utilizadas para o MEC .....	87
FIGURA 41 - Deslocamentos em pontos internos próximos do contorno .....	89
FIGURA 42 - Tensões no engaste calculadas via MEF .....	90
FIGURA 43 - Distribuição das forças de superfície na linha central da face engastada .....	91
FIGURA 44 - Distribuição das forças de superfície na face engastada .....	91
FIGURA 45 - Placa quadrada simplesmente apoiada com carga distribuída .....	92
FIGURA 46 - Discretizações utilizadas para cálculos pelo MEC .....	93
FIGURA 47 - Deslocamentos no centro da placa para variações no valor de $\alpha$ .....	94
FIGURA 48 - Discretizações consideradas nas análises das placas via MEF .....	96
FIGURA 49 - Convergência dos valores obtidos para flechas .....	97
FIGURA 50 - Tensões $\sigma_{xx}$ analisadas no centro da placa .....	99
FIGURA 51 - Geometria do sólido, propriedades e carregamentos .....	100
FIGURA 52 - Malhas utilizadas no calculo via MEC .....	101
FIGURA 53 - Convergência dos resultados do MEC .....	103
FIGURA 54 - Deslocamentos na direção do eixo $x$ .....	104
FIGURA 55 - Resultados para variações nos valores de $\alpha$ .....	105
FIGURA 56 - Tensões $\sigma_{xz}$ ; $\sigma_{xy}$ e $\sigma_{xx}$ ao longo da linha $BC$ .....	106
FIGURA 57 - Sólido cilíndrico com cavidade esférica .....	107
FIGURA 58 - Concentração de tensões (TIMOSHENKO e GOODIER, 1980) .....	108
FIGURA 59 - Discretizações para o cilindro e a cavidade .....	109
FIGURA 60 - Resultados numéricos para tensões $\sigma_{zz}$ .....	109
FIGURA 61 - Resultados numéricos para tensões $\sigma_{\theta}$ .....	110
FIGURA 62 - Exemplar analisado, dimensões adotadas e propriedades .....	112
FIGURA 63 - Parâmetros para cálculo de $K_I$ .....	113
FIGURA 64 - Modelo utilizado para análises numéricas pelo programa implementado .....	114
FIGURA 65 - Modelo simulando estado plano de deformação .....	114
FIRURA 66 - Exemplos de malhas utilizadas no FRANC3D .....	116
FIGURA 67 - Respostas do FRANC3D para abertura da trinca e $K_I$ ao longo da trinca .....	116
FIGURA 68 - Deformadas dos modelos numéricos e malhas consideradas nas análises .....	117
FIGURA 69 - Resultados para diferentes valores de $\alpha$ .....	118
FIGURA 70 - Deslocamentos $u_y$ para linha central do plano da trinca .....	119
FIGURA 71 - Variação do Fator de Intensidade de Tensão ao longo da frente da trinca .....	120
FIGURA 72 - Tensões normais no plano da trinca .....	121

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - Erros na avaliação de integrais fracamente singulares .....	66
TABELA 2 - Erros percentuais relativos de $C_{ji}$ para pontos $a$ , $b$ , e $c$ .....	73
TABELA 3 - Erros máximos (%) para deslocamentos no contorno .....	74
TABELA 4 - Convergência de resultados do MEF para deslocamentos $u_y$ em viga com $L=80$ .....	76
TABELA 5 - Deslocamentos transversais - elementos lineares (malhas: FIG. 34a e FIG. 34f) .....	78
TABELA 6 - Deslocamentos transversais - elementos lineares (malhas: FIG. 34b e FIG. 34g) .....	78
TABELA 7 - Deslocamentos Transversais - elementos lineares (malhas: FIG. 34c e FIG. 34h) .....	79
TABELA 8 - Deslocamentos transversais - elementos quadráticos (malhas: FIG. 34d e FIG. 34i) .....	80
TABELA 9 - Deslocamentos transversais - elementos quadráticos (malhas: FIG. 34e e FIG. 34j) .....	80
TABELA 10 - Números de condicionamento nos problemas estudados .....	82
TABELA 11 - Resultados adotados como referência .....	87
TABELA 12 - Deslocamentos transversais para várias relações B:L – elementos com aproximação linear (FIG. 40a) .....	88
TABELA 13 - Deslocamentos transversais para várias relações B:L – elementos com aproximação quadrática (FIG. 40b) .....	88
TABELA 14 - Resultados de flecha para elementos <i>lineares</i> .....	94
TABELA 15 - Resultados de flecha para elementos <i>quadráticos</i> .....	95
TABELA 16 - Convergência da análise via MEF .....	95
TABELA 17 - Resultados de flechas para elementos quadráticos (MEF como referência) .....	97
TABELA 18 - Números de condicionamento nas análises das placas .....	98
TABELA 19 - Tensões em pontos internos do centro da placa .....	99
TABELA 20 - Convergência dos resultados do MEF / ANSYS .....	101
TABELA 21 - Deslocamentos no ponto A para elementos triangulares LINEARES .....	103
TABELA 22 - Deslocamentos no ponto A para elementos triangulares QUADRÁTICOS .....	104
TABELA 23 - Tensões obtidas para diferentes discretizações .....	111
TABELA 24 - Respostas para simulação tridimensional de estado plano de deformação .....	115
TABELA 25 - Resultados de $\delta$ e $K_I$ .....	118

## LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

$c_{ji}^*$	Forma limite da integral de valor principal de Cauchy;
$\hat{\mathbf{H}}_{lm}$	Submatrizes de ordem $(3 \times 3)$ , com valores formados pelas integrais com núcleo em força de superfície fundamental;
$\hat{\mathbf{u}}_i$	Matriz identidade de ordem $(3 \times 3)$ ;
$\vec{r}(x_i)$	Vetor posição de um ponto no sistema global;
$\bar{L}$	Média dos lados do triângulo formado pelos três pontos de vértice de um elemento;
$\delta_{ji}$	Delta de Kronecker;
$\sigma_{ji}$	Componentes cartesianas de tensão;
$\mathbf{A}$	Matriz final do sistema de equações, de ordem $(3nn \times 3nn)$ ;
$A, B, C$	Coordenadas dos pontos que definem a região triangular no espaço tridimensional;
$A_e$	Área do triângulo $\Gamma_T$ ;
$B_j$	Componentes de forças de volume na direção $j$ ;
$B_j^*$	Componentes de forças de volume do problema fundamental;
$C^{0,\alpha}$	Classe da função que define a ordem de continuidade no sentido de Hölder;
$c_{ji}$	Forma limite da integral de VPC somada ao delta Kronecker;
$d$	Distância do ponto de colocação ao nó do elemento que está sendo integrado, mais próximo;
$D, E, F, G$	Coordenadas dos pontos que definem o quadrado no espaço bidimensional;
$D_{kji}$	Tensor derivado do tensor de deslocamentos fundamentais;
EIC	Equações Integrais de Contorno;
EPD	Estado Plano de Deformação;
$G$	Módulo de elasticidade transversal, ou módulo de cisalhamento;
$\mathbf{G}$	Hiper-matriz global de ordem $(3nn \times 3nn)$ contendo as submatrizes $\mathbf{G}_{lm}$ ;
GL	Graus de Liberdade;
$\mathbf{G}_{lm}$	Submatrizes de ordem $(3 \times 3)$ , com valores formados pelas integrais com núcleo em deslocamento fundamental;
$\mathbf{H}$	Hipermatriz global de ordem $(3nn \times 3nn)$ contendo as submatrizes $\mathbf{H}_{lm}$ ;
$\mathbf{H}_{lm}$	Submatrizes de ordem $(3 \times 3)$ , idem à matriz anterior, adicionado-se o termo livre adequadamente na diagonal;
$\mathbf{I}$	Matriz identidade de ordem $3 \times 3$ ;
IC	Incógnitas no contorno;
ISD	Identidade Somigliana de Deslocamentos;

---

IST	Identidade Somigliana de Tensões;
$J_A$	Jacobiano relativo à área;
$J_M$	Jacobiano do mapeamento degenerado triângulo-quadrado;
MDF	Método das Diferenças Finitas;
MEC	Método dos Elementos de Contorno;
MEF	Método dos Elementos Finitos;
$\mathcal{N}$	Funções de forma geométrica;
$N$	Funções de interpolação nodal;
$n$	Número de nós de cada elemento;
$n_i$	Componentes do vetor ao plano na direção $i$ ;
$nn$	Número de nós na malha do contorno do sólido;
$NPI$	Número de pontos de integração numérica;
$NS$	Número de subelementos no qual um elemento é subdividido;
$p$	Ponto de colocação, ou ponto fonte, localizado no domínio do problema;
$P$	Ponto de colocação localizado no contorno do sólido;
$q$	Ponto de integração ou ponto campo, localizado no domínio do problema;
$Q$	Ponto de integração localizado no contorno do sólido;
$Q^k$	Pontos de integração no elemento;
$\mathbf{R}$	Matriz de rotação de sistema de coordenadas;
$r(p,q)$	Distância entre os pontos de colocação e de integração;
$\text{round}(f)$	Representa o número inteiro mais próximo do número real $f$ ;
$S_{AB}, S_{BC}, S_{CA}$	Lados do elemento onde são calculadas as integrais de linha;
SE	SubElementos;
$S_{kji}$	Tensor derivado do tensor de forças de superfície fundamentais;
$t_j$	Componentes de forças de superfície na direção $j$ ;
$T_{ji}$	Solução fundamental para forças de superfície;
$\mathbf{U}, \mathbf{t}$	Vetores de ordem $3nn$ contendo coeficientes de deslocamento e forças de superfície, respectivamente;
$u_j$	Componentes de deslocamento na direção $j$ ;
$u_j^*, t_j^*$	Componentes de deslocamento e de forças do problema fundamental;
$U_{ji}$	Solução fundamental para deslocamentos;
VPC	Valor Principal de Cauchy;
$w_k$	Fatores de peso associados aos pontos de integração;
$\mathbf{x}$	Vetor contendo os termos incógnitos de deslocamento e força de superfície;
$x_1, x_2, x_3$	Direções no sistema cartesiano global;

---

$Y$	Vetor contendo os termos prescritos de deslocamento e força de superfície;
$\Gamma$	Superfície de contorno de um sólido;
$\Gamma^*$	Contorno de um meio elástico que contém o sólido em análise;
$\Gamma_Q$	Região de um quadrado unitário, definido num espaço bidimensional;
$\Gamma_T$	Região triangular plana definida num espaço tridimensional;
$\Gamma_\beta$	Superfície de um elemento específico;
$\Gamma_\varepsilon$	Superfície esférica que delimita zona de exclusão;
$\Omega$	Volume de um sólido (domínio do problema);
$\Omega^*$	Domínio de um meio elástico que contém o sólido em análise;
$\alpha$	Parâmetro que define a distância do ponto de colocação fora do domínio até o contorno;
$I_i, \lambda, \psi, \omega, \zeta$	Funções específicas definidas na expressão da solução analítica;
$\delta(p, q)$	Delta de Dirac;
$\varepsilon$	Raio da superfície esférica de exclusão;
$\varepsilon_{ji}$	Componentes do tensor de deformações;
$\varepsilon_{jk}^*(p, q)$	Componentes de deformação para o problema fundamental;
$\eta_i$	Sistema de coordenadas adimensionais do subelemento;
$\eta_j$	Sistema de coordenadas adimensionais;
$\nu$	Coefficiente de Poisson;
$\rho_i$	Sistema de coordenadas do quadrado unitário (coordenadas polares triangulares);
$\sigma_{ji}^*, \varepsilon_{ji}^*$	Tensores de tensão e de deformação do problema fundamental;
$\sigma_{jik}^*(p, q)$	Componentes de tensão para o problema fundamental;
$\xi_i$	Sistema de coordenadas adimensionais, homogêneas ou intrínsecas;

## RESUMO

Neste trabalho desenvolve-se um estudo sobre o método dos elementos de contorno (MEC) aplicado a problemas elásticos tridimensionais, onde são revistas algumas formas de tratamento das integrais envolvidas nos algoritmos do método. São considerados elementos de contorno triangulares isoparamétricos com funções de interpolação lineares ou quadráticas. O cálculo das integrais fortemente singulares é feito de maneira indireta, utilizando-se o conceito de movimento de corpo rígido, e para integrais fracamente singulares têm-se as alternativas de cálculo analítico e numérico. Duas técnicas numéricas de integração são avaliadas. A primeira consiste na quadratura de Hammer para domínios triangulares, a qual se associa à técnica de subelementação, visando o aumento da quantidade de pontos de integração em regiões próximas da singularidade. Na segunda técnica, faz-se uma transformação de coordenadas na qual o elemento triangular é mapeado em um domínio quadrado unitário, para o qual se utiliza a quadratura de Gauss-Legendre. Estas duas técnicas são aplicadas a integrais fracamente singulares e não-singulares. São também revistas expressões para o cálculo analítico de integrais fracamente singulares em elementos com aproximação linear. Alternativamente à formulação clássica do MEC, desenvolve-se um algoritmo em que os pontos de colocação são posicionados fora do domínio do problema, evitando-se assim qualquer tipo de singularidade. Deslocamentos e tensões em pontos internos são determinados numa etapa seguinte, através das formas clássicas da identidade de Somigliana para deslocamento (ISD) e para tensões (IST). Implementou-se também a formulação auto-regularizada da ISD, que apresenta resultados muito superiores ao se considerar pontos internos próximos do contorno, devido à eliminação do problema de quase-singularidade. Um programa foi implementado utilizando as técnicas e formulações revistas, que tiveram sua eficiência avaliada por meio de alguns exemplos numéricos.

*Palavras-Chave: Método dos Elementos de Contorno; Elasticidade Tridimensional; Integrais Fracamente Singulares; Ponto de Colocação Externo; Formulação Auto-Regularizada.*

## ABSTRACT

In this work a study about the boundary element method applied to three-dimensional elastostatic problems is developed. Some approaches used to evaluate the integrals involved in the method are reviewed. Triangular isoparametric boundary elements are used, with linear or quadratic shape functions. The strongly singular integrals are evaluated indirectly using the rigid body motion method, while the weakly singular integrals are performed numerically and analytically. Two schemes are considered in the numerical evaluation. The first one makes use of the Hammer's technique, developed to integrate triangular domains. Such technique is associated with the technique of element subdivision, leading to the use of more integration points near the singularity, in order to enhance the quadrature accuracy. In the second scheme a coordinate transformation is used to map the triangular element onto a square domain of unit side-length where the standard Gauss-Legendre quadrature is applied. Both schemes are used in the evaluation of weakly singular and non-singular integrals. The expressions developed for analytical integration of weakly singular integrals over flat linear elements are also reviewed. In addition to the classical BEM algorithm, in order to avoid any singularities, an algorithm using the collocation points outside the problem domain is presented. The displacements and stresses at internal points are evaluated in a post-process stage, using the standard Somigliana displacement identity (SDI) and the Somigliana's identity for stresses. Furthermore, a self-regularized formulation of SDI has been used in the evaluation of the displacements, providing more accurate results when the point is placed close to the boundary. A program has been developed using these approaches, whose efficiency was evaluated by means of some numerical examples.

*Keywords: Boundary Element Method; Three-Dimensional Elastostatic; Weakly-Singular Integrals; External Collocation Point; Self-Regular Formulations.*

# 1

## Introdução

A complexidade das equações diferenciais usadas na descrição de problemas de engenharia torna inviável a obtenção de soluções gerais, a menos que seja adotado um grande número de simplificações, muitas vezes grosseiras. As técnicas numéricas de análise dispensam a maioria destas simplificações iniciais, permitindo assim, análises mais realistas. É possível tratar problemas complexos através de modelagens discretas, que resultam em sistemas de equações que podem ser resolvidos facilmente com uso de modernas técnicas computacionais.

Na mecânica dos sólidos, o primeiro método numérico amplamente usado foi o Método das Diferenças Finitas (MDF), no qual a equação diferencial do problema é aproximada por uma expansão truncada em série de Taylor e resolvida para alguns pontos do domínio. O mais estudado e divulgado, no entanto, é o Método dos Elementos Finitos (MEF), que pode ser formulado utilizando-se o princípio dos trabalhos virtuais ou o cálculo variacional. Nesta segunda alternativa, por exemplo, faz-se a minimização do funcional de energia potencial em relação aos parâmetros de deslocamentos desconhecidos, produzindo uma solução aproximada para a equação de equilíbrio. Como esta minimização é feita para o sólido como um todo, é necessária a discretização de todo o seu domínio, o que pode resultar em malhas bastante complexas e de difícil geração e representação, especialmente em problemas tridimensionais.

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é uma técnica numérica que, diferentemente das técnicas de domínio (MDF e MEF), requer discretização apenas do contorno do sólido em análise, reduzindo assim, em uma unidade a dimensão do problema. As formulações do MEC se baseiam nas das equações integrais de contorno (EIC) obtidas a partir de manipulações algébricas das equações diferenciais do problema. No caso de problemas de elasticidade, por exemplo, as EIC são obtidas a partir da identidade de Somigliana para deslocamento, fazendo-se um processo de limite para o contorno. O MEC faz aproximações por segmentos do contorno do corpo em análise utilizando funções de forma, possibilitando assim a obtenção de um sistema de equações lineares que contém as incógnitas do problema. Como não há necessidade de discretização do domínio, os sistemas de equações obtidos são menores que os sistemas gerados pelo MEF por exemplo, na análise de um mesmo problema com níveis de discretização similares. As aproximações são feitas somente na superfície, sendo que, no domínio do sólido a solução é contínua, obtida a partir dos valores calculados para as incógnitas do contorno (deslocamentos e forças de superfície).

Estas particularidades do MEC fazem com que este método supere os demais quando aplicado a problemas de domínio infinito ou semi-infinito, assim como em problemas em que ocorrem concentrações de tensão, como os relativos à mecânica da fratura. Além de problemas elastostáticos bi e tridimensionais, existem formulações do MEC para aplicações diversas, como para materiais anisotrópicos, análises não-lineares, problemas elastodinâmicos, elastoplásticos, viscoplásticos, placas, cascas, mecânica das rochas e dos solos, problemas de potencial e de acústica. Dessa maneira, o MEC se apresenta como uma ferramenta de grande versatilidade, e com sua sólida base matemática, aliada às constantes pesquisas que resultam em maior eficiência e resultados cada vez melhores, vem tendo sua aplicação prática bastante ampliada.

Neste trabalho faz-se uma avaliação de alguns esquemas utilizados no cálculo das integrais, principalmente as fracamente singulares, presentes na formulação tradicional do MEC para problemas elásticos tridimensionais. Além disto, é avaliado um algoritmo não-singular que considera pontos de colocação fora do domínio do problema. A

formulação auto-regularizada da identidade de Somigliana de deslocamentos também é utilizada, explorando-se sua eficiência no tratamento de pontos internos próximos do contorno.

No capítulo 2 é feita uma breve revisão bibliográfica, onde as principais publicações consultadas sobre o assunto são apresentadas. No capítulo 3 é apresentada uma revisão dos conceitos básicos envolvidos na formulação, e a obtenção das equações integrais de contorno (EIC). Aborda-se no capítulo 4 o tratamento numérico destas equações, com a obtenção das formulações finais do método dos elementos de contorno padrão e da formulação auto-regularizada. As técnicas de integração utilizadas no trabalho são descritas no capítulo 5, apresentando-se esquemas numéricos para integrais não-singulares e integrais fracamente singulares, e um esquema analítico para elementos planos com aproximação linear. No capítulo 6 descreve-se a metodologia adotada nas análises efetuadas, e também, a implementação computacional elaborada. Os testes numéricos e resultados obtidos são apresentados no capítulo 7, através de alguns exemplos, seguindo-se as considerações finais e conclusões do trabalho.

Considerando abordagens bem conhecidas, desenvolve-se um estudo aprofundado que possa servir como ponto de partida para trabalhos futuros envolvendo o método dos elementos de contorno na análise de problemas tridimensionais mais complexos e abrangentes.

# 2

## Revisão Bibliográfica

Os primeiros a explorarem o uso das equações integrais no tratamento de problemas de engenharia como um método numérico de análise, foram JASWON (1963) e SYMM (1963), sendo a base teórica desenvolvida pelo primeiro autor, enquanto o segundo autor apresenta as técnicas usadas para a solução das equações. Apesar de se concentrar em problemas bidimensionais de potencial, estes trabalhos apontam de forma visionária a extensão da abordagem proposta para problemas de elasticidade e problemas tridimensionais. A proposição de SYMM (1963) pode ser classificada como método indireto, uma vez que faz uso de variáveis fictícias para o cálculo dos valores incógnitos, e utiliza em seu algoritmo elementos com aproximação constante de tamanhos iguais, para se evitar problemas de condicionamento do sistema. Anos mais tarde, com base nestes trabalhos pioneiros, RIZZO (1967) faz a extensão do método proposto para aplicação em problemas bidimensionais de elasticidade. Neste trabalho Rizzo também usa elementos com aproximação constante de tamanhos iguais, porém as variáveis envolvidas representam todas as grandezas físicas reais. Extensões do método para outras aplicações se seguiram a partir deste trabalho.

A apresentação da formulação do método para problemas elásticos tridimensionais só ocorreu no trabalho de CRUSE (1969), que usou elementos triangulares planos com

aproximação constante para as grandezas do contorno. Cruse ressaltou a boa capacidade do método na análise de problemas com concentração de tensões, usando um refinamento mais apurado nas partes do sólido onde estas concentrações ocorriam, mostrando assim que este procedimento não afetava os resultados do problema como um todo, como se acreditava. Esta formulação foi aplicada no estudo de problemas da mecânica da fratura por CRUSE e VANBUREN (1971). Uma revisão geral sobre as formulações das equações integrais de contorno (EIC) para problemas de potencial e de elasticidade é apresentada por CRUSE (1972), que faz também sua extensão para problemas elastoplásticos. CRUSE (1974) apresenta uma formulação melhorada para problemas tridimensionais, em relação ao trabalho original de 1969, utilizando elementos triangulares planos com aproximação linear, e apresenta respostas mais precisas obtidas por meio desta nova abordagem. Neste trabalho, Cruse ressalta a necessidade de novos trabalhos que considerem o uso de elementos com funções de interpolação de ordem superior, visando uma melhora ainda maior nos resultados obtidos pelo MEC, ou método das equações integrais de contorno (MEIC), como era denominado.

As formulações existentes até então se baseavam em complexas soluções analíticas particulares para as integrais envolvidas, quando um grande avanço no desenvolvimento do método das equações integrais de contorno foi obtido por Lachat. Aplicando técnicas usuais do MEF, esse autor assegura uma maior generalidade ao método, com uso de elementos curvos e funções de interpolação de ordem superior, utilizando técnicas numéricas no cálculo das integrais envolvidas, e conseguindo com isto superar os resultados obtidos pelo MEF em problemas planos. LACHAT e WATSON (1976) apresentam técnicas numéricas avançadas para lidar com integrais em problemas elásticos tridimensionais, empregando elementos com aproximação geométrica quadrática e funções de interpolação quadráticas ou cúbicas para as grandezas do contorno. As novas técnicas apresentadas são amplamente aceitas e empregadas na extensão do método para abordagem de novos problemas, como os termo-elásticos em RIZZO e SHIPPY (1977) e os elásticos com materiais anisotrópicos por WILSON e CRUSE (1978).

O dinamismo adquirido pelo método ao abranger diversas áreas da Mecânica dos Sólidos e outras áreas da engenharia conduz ao surgimento de novas formulações, que possuem integrais com núcleos singulares de ordens superiores e tratamento mais difícil. Além disso, com o avanço dos recursos computacionais, o desejo de se obter soluções cada vez mais corretas leva a uma maior preocupação com a precisão na avaliação numérica das integrais envolvidas nas formulações. Um grande esforço se desenvolve no intuito de superar esta questão, e vários trabalhos se seguem, até os dias atuais, procurando soluções cada vez mais precisas e computacionalmente menos dispendiosas, para o cálculo das integrais regulares, quase-singulares, fracamente singulares, fortemente singulares (ou Valores Principais de Cauchy) e hipersingulares.

O cálculo das integrais regulares (não-singulares) não apresenta, a princípio, maiores problemas, sendo entretanto, a parte que consome a maior parcela de tempo de processamento na montagem do sistema de equações dos algoritmos do método dos elementos de contorno (MEC). As técnicas analíticas foram empregadas com sucesso nos primeiros trabalhos, como os de CRUSE (1969) e CRUSE (1974), e ainda atualmente são estudadas e utilizadas como, por exemplo, no trabalho de MILROY *et al.* (1997) aplicado a problemas elásticos tridimensionais. O emprego desta abordagem, entretanto, é limitado a elementos planos, sendo substituída na maioria das implementações, por técnicas de quadratura numérica que são mais gerais e apresentam resultados tão precisos quanto aqueles obtidos por integração analítica, para a maior parte das integrais regulares. Ainda, segundo MILROY *et al.* (1997), as técnicas numéricas são mais econômicas em termos de tempo de processamento quando a distância entre o ponto-fonte (ponto de colocação) e o elemento que está sendo integrado é grande.

Considerando-se porém pontos-fonte próximos dos elementos, seja ao adotar elementos muito pequenos ou pontos internos próximos do contorno, deve-se ter mais cuidado ao se utilizar as técnicas usuais de quadratura. Nestes casos, ao contrário das técnicas analíticas, que mantêm sua eficiência (MILROY *et al.*, 1997), são necessárias adaptações que representem ganho na precisão das avaliações numéricas usuais. Das alternativas existentes, a mais difundida é o método  $h$  (*h-method*), baseado no aumento

da quantidade de pontos de integração em elementos próximos às regiões críticas, utilizando técnicas de subdivisão do elemento. O algoritmo de LACHAT e WATSON (1976) apresenta este tipo de abordagem, determinando, através de um estimador de erro proposto, o número de subdivisões e quantidade de pontos de integração a serem utilizados no cálculo de cada elemento. Apesar da sofisticação deste algoritmo, BU e DAVIES (1995) o apontam como conservador, e através da avaliação de limites de erro na integração de Gauss-Legendre para integrais não-singulares 3D, propõem um novo critério de subdivisão e escolha do número ótimo de pontos de integração, com base em testes numéricos. Para avaliação de tensões em pontos internos de problemas planos, CHIEN *et al.* (1997) apresentam um esquema adaptativo, no qual a divisão dos elementos é feita de forma iterativa, empregando subdivisões sucessivas até que se obtenha convergência nos resultados.

Com o alto custo computacional das técnicas de subelementação para o tratamento das integrais quase-singulares, surgem as opções de técnicas auto-adaptativas de transformação de coordenadas. Uma das proposições se deve a TELLES (1987), que através de uma transformação não-linear de coordenadas, baseada em uma relação polinomial de terceiro grau, faz um mapeamento do intervalo de integração nele mesmo. Telles impõe que a derivada da transformação seja nula no ponto singular, e assim concentra os pontos de integração próximos da região com comportamento singular. Empregando os pontos e pesos da quadratura de Gauss-Legendre no cálculo de integrais quase-singulares clássicas, fica demonstrada em seu artigo a eficiência desta técnica, que depende da quantidade de pontos de integração utilizada, em geral muito maior que o número de pontos necessários na avaliação de integrais totalmente regulares. CRUZ (2001) confirma esta eficiência, ao utilizar a transformação associada à técnica de subelementação em problemas de Potencial. Partindo da mesma idéia de Telles, CERROLAZA e ALARCON (1989) propõem uma transformação muito semelhante, que denominam transformação bicúbica de coordenadas. JOHNSTON (1999) propõe a transformação sigmoideal, que divide o intervalo de integração de acordo com a projeção do ponto fonte no elemento, e concentra os pontos de integração no final dos novos intervalos, obtendo resultados mais precisos que os das transformações anteriores, mas se limitando porém, a problemas planos. Uma técnica alternativa de transformação de

coordenadas para integrais quase-singulares é também proposta por CRUSE e HUANG (1993), que anunciam resultados mais precisos que as técnicas anteriores nos exemplos analisados. Nesta proposição, Cruse e Huang denominam como  $r_o$  a menor distância do ponto fonte ao elemento, e fazem uma transformação  $r - r_o = \rho f(\rho, \theta)$ , onde  $\rho$  e  $\theta$  são coordenadas polares. Porém, segundo DAVEY *et al.* (1999) a condição  $f(\rho, \theta) \neq 0$ , necessária para aplicação do método, não é satisfeita se o ponto fonte estiver em um plano imediatamente acima do elemento, o que não é mencionado explicitamente nem contemplado nos exemplos analisados por CRUSE e HUANG (1993). JONHSTON e ELLIOT (2001) apresentam uma melhoria obtida para a transformação de Telles, ao utilizarem polinômios com ordem ímpar superiores aos do terceiro grau, apontando a baixa eficiência da transformação original para o caso em que o ponto fonte se aproxima dos cantos do elemento.

As integrais fracamente singulares (ver Anexo A.2) são também objeto de muitos estudos, sendo variadas as abordagens propostas para sua avaliação. Em problemas tridimensionais, às abordagens analíticas pioneiras de CRUSE (1969) e CRUSE (1974), somam-se algumas mais recentes propostas por LI *et al.* (1985) e MILROY *et al.* (1997). Aplicando transformações em coordenadas polares a elementos triangulares planos, e usando o teorema de Stokes, as integrais são calculadas de maneira exata. Apesar do atrativo da exatidão das respostas, estas abordagens não se aplicam a elementos com curvatura ou funções de interpolação de ordem superior à linear, para os quais é necessário, novamente, recorrer às técnicas numéricas.

LACHAT e WATSON (1976) utilizam a técnica de mapeamento degenerado, onde um elemento triangular é mapeado num quadrado unitário. Esse mapeamento regulariza a integral fracamente singular, permitindo a aplicação da quadratura gaussiana padrão. Baseados na mesma idéia, LI *et al.* (1985), HUANG (1993) e HALL (1994) apresentam técnicas similares de mapeamento degenerado, porém de maneira mais clara e esquematizada. Apesar da regularização obtida com esta técnica, SLADEK *et al.* (1997) apontam um comportamento com picos remanescentes na coordenada angular da função, ao tratar domínios quadrados (que são divididos em triângulos para aplicação da técnica). Propõem então uma nova transformação, para suavizar esta função, à qual

denominam multitransformação de coordenadas. Ainda, para integrais fracamente singulares em problemas bidimensionais, JONHSTON (2000) aprimora sua transformação de coordenadas, passando a denominá-la transformação semi-sigmoidal, e aplicando-a com sucesso na avaliação de integrais de ordem  $O(\ln r^{-1})$ . Basicamente esta nova versão da transformação difere da anterior por acumular pontos de integração apenas em uma extremidade do subelemento, superando assim os resultados obtidos na primeira transformação.

Na tentativa de se ampliar a aplicação de alguns dos métodos já citados, alguns autores apresentam formulações novas, sem no entanto, obter o sucesso desejado. A transformação bicubica de CERROLAZA e ALARCON (1989) tenta abranger, além das integrais quase-singulares, integrais singulares, alegando que, como o mapeamento proposto distribui simetricamente os pontos de integração em relação à singularidade, a parte singular da integral se cancela, seguindo o princípio das integrais de Valor Principal de Cauchy (VPC). CRUSE e HUANG (1993) afirmam que essa proposta não é correta, pois os valores a serem cancelados são muito grandes em relação aos valores no restante do intervalo, e que o grande número de pontos de integração necessários confirmam a não regularização pretendida. Na tentativa de generalizar o esquema de mapeamento degenerado em coordenadas polares triangulares de LI *et al.* (1985), estendendo sua aplicação para avaliação de integrais com várias ordens de singularidade, ZHANG e XU (1989) apresentam uma formulação com falhas nas funções de mapeamento, a qual denominaram mapeamento em coordenadas polares triangulares estendidas. Estas falhas são apontadas por LIAO e XU (1992), HUANG e CRUSE (1993) e LI *et al.* (1992). Estes últimos propõem uma nova maneira de se fazer esta generalização, que é insuficiente para regularizar as integrais com ordem de singularidade maior que VPC, como demonstram HUANG e CRUSE (1993). Além do mapeamento, LI *et al.* (1992) empregam também transformação cúbica de coordenadas para concentrar os pontos de integração, seguindo a proposta de CERROLAZA e ALARCON (1989).

Outros métodos apresentados para avaliação das integrais do tipo VPC ou com singularidades de ordem superior têm maior sucesso. LIAO e XU (1992) dividem as

integrais do tipo VPC de problemas de elasticidade tridimensionais em duas partes, integrando a parte fortemente singular resultante analiticamente e a outra (fracamente singular) numericamente. Também apresentam as expressões necessárias para o cálculo do termo descontínuo (termo livre). DAVEY *et al.* (1999) propõem, de forma análoga, uma solução semi-analítica aplicável também para o caso de ponto fonte em uma posição qualquer em relação ao elemento, abrangendo também as integrais regulares. Sua aplicação, porém, se limita a problemas elastodinâmicos e elementos triangulares planos com aproximação linear. Para ampliar o campo de aplicação desta última técnica, DAVEY e RASGADO (1999) a utilizam para elementos subparamétricos, onde a função de interpolação pode ser quadrática, mas o elemento deve também ser plano. Em publicação recente, SALVADORI (2002) apresenta um processo analítico para integrais com ordem de singularidade superior em problemas elásticos bidimensionais, de aplicação limitada a elementos lineares retos, mas com funções de interpolação de ordem qualquer (elementos subparamétricos).

Em uma série de publicações, originadas em 1987, Guiggiani e seus colaboradores desenvolveram também uma abordagem semi-analítica geral, aplicável a problemas bi e tridimensionais, para avaliação de integrais fortemente singulares e hipersingulares. Neste método, revisto e apresentado por GUIGGIANI (1998), é feita a subtração da singularidade, após uma manipulação que descreve o núcleo da integral como uma série de Laurent truncada, de modo que a expressão final pode ser resolvida analiticamente. Como as integrais singulares podem ser calculadas analiticamente, e as regulares, numericamente, Guiggiani denominou sua proposição como semi-analítica. O método proposto é estendido por FRANGI e GUIGGIANI (2000) para avaliação de integrais de ordem superior ( $r^{-3}$  e  $r^{-4}$ ) para problemas de placas de Kirchhoff, podendo ser usado em problemas com singularidades semelhantes.

CRUSE e AITHAL (1993) também utilizam a abordagem semi-analítica onde adotam a subtração da singularidade utilizando uma expansão em série de Taylor. Os resultados obtidos confirmam a eficiência do método, especialmente no tratamento de integrais quase-singulares. Uma sumarização das técnicas de transformação é apresentada por DOBLARÉ e GRACIA (1997) de uma forma bastante generalizada, abordando

problemas bi e tridimensionais, integrais quase-singulares, fracamente singulares e VPC, e utilizando sempre o esquema de integração de Gauss.

Alternativamente aos esforços de obtenção de métodos para resolução de integrais singulares, muitos autores preferem evitar seu cálculo direto, adotando técnicas que evitam o emprego de esquemas sofisticados para integração. A primeira solução para se evitar o cálculo direto de integrais fortemente singulares foi apresentada por CRUSE (1974), utilizando o conceito de movimento de corpo rígido. Numa avaliação indireta, os termos correspondentes às integrais fortemente singulares e o termo descontínuo da EIC padrão são determinados pela soma dos demais termos regulares ou fracamente singulares. Esta técnica pode ser aplicada também a problemas de Potencial. Outra forma de se evitar o cálculo de integrais fortemente singulares consiste na regularização da equação integral. Uma regularização direta da EIC de deslocamentos é apresentada por LIU e RUDOLPHI (1991) e CRUSE e RICHARDSON (1996), que demonstram a equivalência entre estas formulações auto-regularizadas e a formulação padrão. Uma grande vantagem na utilização da formulação auto-regularizada baseada na identidade de Somigliana para deslocamentos (ISD) é a eliminação do problema de comportamento quase-singular das integrais quando os pontos internos avaliados são posicionados muito próximos do contorno, como comprovam por resultados numéricos CRUZ (2001) em problemas de Potencial e RICHARDSON e CRUSE (1999) em problemas de elasticidade, ambos em domínios bidimensionais.

No caso da expressão integral para o cálculo de tensões (ou identidade de Somigliana para tensões, IST), que na formulação padrão apresenta núcleos de integrais com singularidades de ordem superior (hipersingulares), a regularização é demonstrada por CRUSE e RICHARDSON (1996), que apresentam analiticamente a dedução da forma auto-regularizada da IST e EIC da força de superfície para problemas de Elasticidade. LIU e RUDOLPHI (1991) fazem esta demonstração utilizando algumas identidades matemáticas particulares das soluções fundamentais em problemas de Potencial e Elasticidade. Anos mais tarde, LIU e RUDOLPHI (1999) refazem esta demonstração acrescentando mais uma identidade às três anteriores. Um ponto de grandes discussões nas formulações auto-regularizadas é a violação do requisito de continuidade do núcleo

fortemente singular ou hipersingular, condição esta suficiente para se garantir a existência destas integrais quando se faz o limite do ponto de colocação para o contorno. No caso da EIC da força de superfície para problemas de Elasticidade, ou da EIC do fluxo para problemas de potencial, este requisito não é atendido quando se utilizam elementos isoparamétricos contínuos, sendo necessário para seu atendimento, o uso de elementos descontínuos ou outros elementos especiais (*Overhauser elements*). Muitos autores, porém, têm questionado a necessidade desta condição, e adotado a hipótese de continuidade relaxada, mostrando alguns resultados numéricos bastante precisos, como RICHARDSON e CRUSE (1999) em problemas bidimensionais de Elasticidade. Ressalta-se a necessidade do uso de funções de interpolação de ordem superior, tais como funções quarto grau. Como os melhores resultados são obtidos ao se utilizar elementos com funções de interpolação de ordem superior, tem-se acreditado que a provável fonte de erros, para alguns resultados obtidos, esteja ligada à derivada tangencial do deslocamento, porém isto não é comprovado diretamente. RIBEIRO *et al.* (2002) demonstram porém, que o conceito de continuidade relaxada constitui uma fonte efetiva de erros, ao obterem ótimos resultados em problemas de elásticos utilizando elementos descontínuos.

Uma outra maneira alternativa de se evitar o cálculo de integrais singulares no MEC é o uso de pontos de colocação fora do domínio do problema. RIBEIRO (1992) e CRUZ (2001) obtiveram sucesso ao empregar esta técnica em problemas de placas e de Potencial, respectivamente. CODA e VENTURINI (1994) também a empregam em um algoritmo desenvolvido para problemas elastodinâmicos. Os problemas principais relatados desta abordagem são relacionados à instabilidade dos resultados ao se posicionar o ponto fonte (externo) muito próximo do contorno, como mostra CRUZ (2001) em problemas bidimensionais de Potencial, e à falta de generalidade, uma vez que sua aplicação torna-se bastante complicada no caso de problemas com contornos reentrantes.

Em problemas de regiões infinitas e semi-infinitas (limitada apenas por um plano) o MEC apresenta a grande vantagem de não necessitar de discretização do domínio. No caso de domínios infinitos, a solução de Kelvin se aplica diretamente, com a adaptação

apresentada por BREBBIA *et al.* (1984) no cálculo indireto das integrais fortemente singulares e do termo livre. Ao se usar a solução de Kelvin para problemas de domínio semi-infinito, o contorno gerado pelo plano infinito deve ser discretizado. Torna-se necessária, então, a delimitação de uma região com um contorno definido a uma distância dos pontos de aplicação de carga que se julgue apropriada, o que implica numa aproximação adicional. A técnica de cálculo indireto de integrais fortemente singulares e do termo livre (movimento de corpo rígido) não se aplica no caso de domínios semi-infinitos. Para se evitar o uso de algoritmos complexos para o cálculo destas integrais, ARAÚJO *et al.* (1997) apresentam os chamados *enclosing elements* em análises elastodinâmicas de problemas tridimensionais. Grosso modo, cria-se um corpo finito que tem uma de suas superfícies discretizadas coincidente com a superfície do plano, sendo a técnica de movimento de corpo rígido aplicada para este corpo fictício, uma vez que os resultados dependem somente da integração dos elementos na vizinhança do ponto singular. HIROSE (1991) aponta um possível aumento considerável no esforço computacional ao se aplicar os *enclosing elements* em problemas tridimensionais, mas como mostram ARAÚJO *et al.* (1997), este acréscimo não é substancial. Ainda, CARRION *et al.* (2001) verificam que os resultados não dependem da forma ou discretização do corpo criado, mas sim da precisão das integrações em seu contorno.

Alternativamente, pode-se adotar a solução fundamental modificada de Mindlin, como no trabalho de NAKAGUMA (1979), o que permite que a discretização da superfície livre seja feita apenas na parte carregada do semiplano, resultando numa economia na quantidade de elementos utilizados. Algumas limitações existem para o emprego da solução de Mindlin como, por exemplo, a necessidade de se ter a superfície do plano semi-infinito livre de forças de superfície. A técnica de movimento de corpo rígido foi usada por Nakaguma para evitar o cálculo direto das integrais fortemente singulares, e as demais integrais foram calculadas pelo esquema de Hammer com uso de subelementos. Para análise elastoplástica de túneis no plano, TEIXEIRA (1992) utiliza a solução fundamental de Melan, equivalente à solução de Mindlin para problemas bidimensionais. MEEK e DAI (1992) apresentam solução analítica para integrais com núcleo contendo a solução fundamental de Melan, para elementos de tensão constante.

Apesar da utilização de poucos elementos na discretização de problemas de domínio semi-infinito, alguns autores consideram seu uso ineficiente, alegando o alto custo computacional necessário para o cálculo das integrais, que crescem em complexidade devido às soluções fundamentais especiais. Para se evitar a simplificação imposta pelo truncamento da malha, necessária ao se utilizar a solução de Kelvin, estes autores propõem o uso de elementos de contorno infinitos. BEER e WATSON (1989) apresentam estes elementos infinitos, empregando funções de decremento, juntamente com as funções de interpolação. Estes novos elementos, além de desonerar computacionalmente o cálculo, cobrem o caso de encontro de sub-regiões que se estendem para o infinito, em que a solução de Mindlin não se aplica. Um comparativo entre o uso dos elementos infinitos no MEC e MEF é apresentado por BEER e POULSEN (1994). DAVIES e BU (1996) empregam elementos infinitos de aproximação quadrática, criando um núcleo com os elementos usuais, cercados por elementos infinitos, ganhando em eficiência em relação ao truncamento simples da malha ou uso da solução fundamental especial. GAO e DAVIES (1998) apresentam solução analítica de integração para os elementos infinitos, eliminando os erros da quadratura numérica.

Com o desenvolvimento de novas técnicas e formulações, o estudo do MEC tem crescido nos últimos anos. Segundo estudo recente de MACKERLE (2002), são publicados atualmente cerca de 800 trabalhos relacionados ao MEC por ano, a maioria se dirigindo a problemas de análise dinâmica, eletromagnetismo, mecânica da fratura e geomecânica, nesta ordem. MACKERLE (2002) estima que as publicações científicas impressas relacionadas ao MEC e MEF, tendem a se duplicar em um período de 10-15 anos, e as publicações 'on-line' a dobrarem a cada 4 anos, gerando a chamada 'information fatigue syndrome' (em MEF, por exemplo, são cerca de 7000 artigos/ano), que torna quase impossível aos profissionais se manterem atualizados. É constatado ainda neste mesmo trabalho, que apenas 10-20 % das publicações apresentam novas abordagens, sendo o restante formado por informações repetidas, dificultando assim, pesquisas bibliográficas precisas.

# 3

## Equações Integrais de Contorno

São apresentadas neste capítulo algumas equações básicas da teoria da Elasticidade relevantes para este trabalho, assim como as formulações das equações integrais de contorno (EIC), da solução fundamental e da identidade de Somigliana para deslocamentos e para tensões.

### 3.1 - Equações da Teoria da Elasticidade

Usa-se exhaustivamente neste trabalho a notação indicial de Einstein, na qual índices repetidos denotam somatórios e vírgula precedendo um índice representa diferenciação em relação à coordenada cartesiana relativa ao índice. Assim, tem-se, por exemplo:

$$\text{grad } f = f_{,j} \cdot e_j = \frac{\partial f}{\partial x_j} e_j = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} e_3 \right) \quad (1)$$

Também muito usada é o delta de Kronecker  $\delta_{ji}$  ( $\delta_{ji} = 1$ , para  $j = i$ ; e  $\delta_{ji} = 0$ , para  $j \neq i$ ). Outras funções ou definições utilizadas são referenciadas oportunamente ao longo do texto. Exceto por especificação contrária, os índices têm variação de um a três.

Em um ponto qualquer de um sólido, as componentes de tensão são expressas por  $\sigma_{ji}$ , conforme apresentado na FIG. 1-a, e as componentes de deslocamento na direção  $j$  são representadas por  $u_j$ . A partir do tensor de tensões, as forças de superfície ( $t_j$ ) equivalentes, que atuam num plano tangente à superfície neste ponto são expressas por:

$$t_j = \sigma_{ji} n_i \quad (2)$$

onde  $n_i$  representa as componentes da normal ao plano em questão (FIG. 1-b).

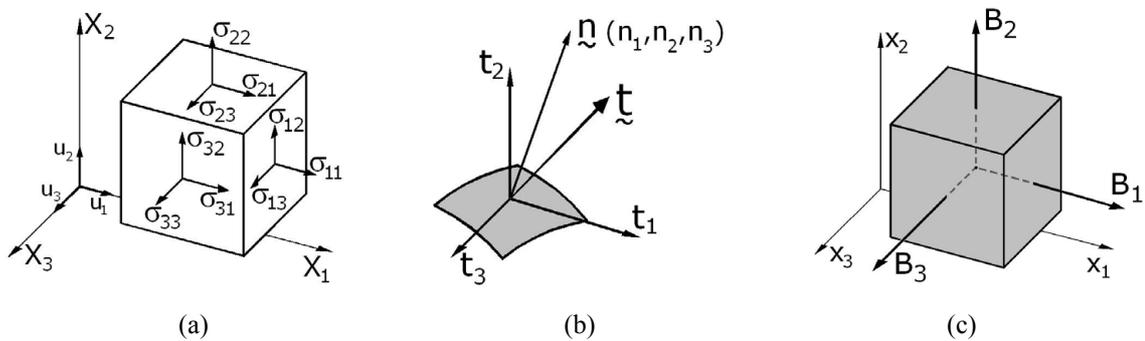


FIGURA 1 : a) Componentes de Tensão; b) Força de superfície; c) Forças de Volume

Considerando-se o regime de pequenas deformações e deslocamentos, determinam-se as componentes de tensor de deformações  $\varepsilon_{ji}$ , a partir dos deslocamentos  $u$ , como:

$$\varepsilon_{ji} = \frac{1}{2} (u_{j,i} + u_{i,j}) \quad (3)$$

Formula-se um problema elástico linear a partir das equações diferenciais parciais de equilíbrio, da relação constitutiva e das relações deformação-deslocamento (Eq. 3), juntamente com as condições de contorno.

As equações de equilíbrio são expressas por:

$$\sigma_{ji,i} + B_j = 0 \quad (4)$$

onde  $B_j$  representa componentes de forças de volume (FIG. 1-c). Para um material elástico linear, a Lei de Hooke é dada por:

$$\sigma_{ji} = 2G \left( \varepsilon_{ji} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ji} \right) \quad (5)$$

$$\varepsilon_{ji} = \frac{1}{2G} \left( \sigma_{ji} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ji} \right) \quad (6)$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson e  $G$  é o módulo de elasticidade transversal do material.

Aplicando-se as relações deformação-deslocamento (Eq. 3), na Eq. 5, tem-se:

$$\sigma_{ji} = \frac{2G}{(1-2\nu)} u_{kk} \delta_{ji} + G(u_{j,i} + u_{i,j}) \quad (7)$$

Substituindo-se adequadamente estas equações (Eq.7) nas equações de equilíbrio (Eq.4), obtém-se a equação de equilíbrio de Navier, expressa por:

$$\frac{1}{(1-2\nu)} u_{j,ji} + u_{i,jj} + \frac{1}{G} B_i = 0 \quad (8)$$

Para completar a formulação do problema as condições de contorno também devem ser prescritas. Para qualquer ponto do contorno  $\Gamma$ , ou são conhecidas as componentes de deslocamento (condição de contorno essencial), ou as componentes de força de superfície (condição de contorno natural). Na maioria dos problemas práticos prescrevem-se condições de contorno mistas, onde, em parte do contorno são prescritos deslocamentos, e na parte restante prescrevem-se forças de superfície.

## 3.2 - Solução Fundamental

### 3.2.1 - Considerações Iniciais

A equação de equilíbrio de Navier (Eq. 8) é uma equação parcial linear de segunda ordem, de natureza elíptica para valores de  $\nu > 0,5$ , conforme demonstra CRUSE (1977). Isto implica que somente soluções contínuas, com primeiras derivadas contínuas

são admitidas. As soluções fundamentais são soluções singulares para a equação de Navier, sendo que, para cada problema especial (ou fundamental) uma solução particular é determinada. Para este trabalho, é de interesse especial a solução do problema de Kelvin, apresentada a seguir.

### 3.2.1 - A Solução Fundamental de Kelvin

No problema fundamental de Kelvin, considera-se uma carga unitária aplicada em um ponto  $p$  de um domínio infinito  $\Omega^*$ , sendo obtidas expressões para deslocamentos  $u_j^*(p,q)$  em um ponto  $q$  (ponto campo), e para forças de superfície  $t_j^*(p,q)$  em um plano que contém este ponto  $q$ . Define-se como  $r(p,q)$  a distância entre os pontos de aplicação e de medida (ponto campo), e as derivadas relativas às coordenadas dos pontos  $p$  e  $q$  são dadas por:

$$r_{,p_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i(p)} = \frac{p_i - q_i}{r} \quad ; \quad r_{,q_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i(q)} = \frac{q_i - p_i}{r} \quad (9)$$

$$\therefore \frac{\partial r}{\partial x_i(p)} = - \frac{\partial r}{\partial x_i(q)}$$

onde  $p_i$  e  $q_i$  são coordenadas de  $p$  e  $q$  na direção  $i$ . Na notação que se segue  $r_{,i} = r_{,q_i}$ , sendo entendida como cossenos diretores de  $r(p,q)$ . Algumas das definições são ilustradas na FIG. 2.

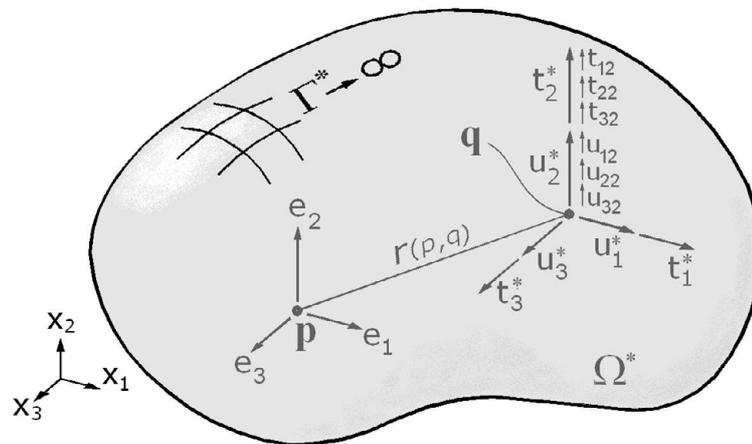


FIGURA 2 – Ilustrações de  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , e as componentes de deslocamento e força.

A carga unitária pontual é assumida como força de volume de aplicação concentrada em  $p$ , representada por:

$$B_j^* = \delta(p, q) e_j \quad (10)$$

onde  $\delta(p, q)$  é a função delta de Dirac (Anexo 1), e  $e_j$  o vetor unitário na direção  $x_j$ . A solução fundamental de Kelvin é a solução da equação de Navier (Eq. 8), ao se usar a Eq. 10 para representar a força de volume. Para obtenção desta solução, é conveniente se escrever os deslocamentos em termos de derivadas do vetor de Galerkin, como se segue:

$$u_j = \nabla^2 G_j - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{j,ji} \quad (11)$$

onde  $G_j$  é o vetor de Galerkin. É possível assim representar a equação de Navier como uma equação biarmônica, que usando a Eq. 10 é expressa por (CRUSE, 1988):

$$\nabla^2 (\nabla^2 G_j) + \frac{\delta(p, q) e_j}{G} = 0 \quad (12)$$

A solução da Eq. 12 é bem conhecida ( $G_j^* = r(p, q) e_j / 8\pi$ ). Ao se fazer derivações necessárias e substituir a solução na Eq. 11, obtém-se a solução fundamental para deslocamentos  $u_j^*$ , expressa por:

$$u_j^*(q) = U_{ji}(p, q) e_i(p) \quad (13)$$

onde, para o caso tridimensional (CRUSE, 1977)

$$U_{ji}(p, q) = \frac{1}{r(p, q)} \frac{[(3-4\nu)\delta_{ji} + r_{,j} r_{,i}]}{16\pi G(1-\nu)} \quad (14)$$

A partir da solução de Kelvin para deslocamentos (Eqs. 13 e 14) e a Eq. 7 é possível obter a solução fundamental para forças de superfície num ponto com normal  $n_i$  como (CRUSE,1977):

$$t_j^*(q) = T_{ji}(p, q) e_i(p) \quad (15)$$

sendo

$$T_{ji}(p, q) = -\frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n(q)} [(1-2\nu)\delta_{ji} + 3r_{,j}r_{,i}] - [(1-2\nu)(n_i r_{,j} - n_j r_{,i})] \right\} \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \quad (16)$$

Nos tensores de segunda ordem  $U_{ji}$  e  $T_{ji}$  (Eqs. 14 e 16), o primeiro índice corresponde à direção da carga unitária aplicada e o segundo às componentes dos deslocamentos e forças.

Pode-se observar que ambos os tensores  $U_{ji}$  e  $T_{ji}$  apresentam singularidade quando  $r(p, q)$  é igual a zero, isto é, se considerarmos como ponto de medida o ponto onde a carga unitária é aplicada ( $q \equiv p$ ), resultado que é esperado, uma vez que uma carga concentrada em um ponto é um modelo não realista. Para todos os pontos não singulares porém, a solução de Kelvin é definida, sendo considerada a mais abrangente e de fácil implementação.

### 3.3 – Identidade de Somigliana

#### 3.3.1 - Considerações Iniciais (Teoremas de Betti)

O teorema do trabalho recíproco de Betti é a base da formulação das equações integrais de contorno (EIC) na mecânica dos sólidos. Para dois sistemas sujeitos a campos de tensão e deformação distintos (índices sobrescritos), as equações constitutivas para materiais elásticos lineares isotrópicos se escrevem como:

$$\sigma_{ji}^1 = 2G \left[ \varepsilon_{ji}^1 + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{kk}^1 \delta_{ji} \right] \quad \text{e} \quad \sigma_{ji}^2 = 2G \left[ \varepsilon_{ji}^2 + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{kk}^2 \delta_{ji} \right] \quad (17)$$

Multiplicando as Eqs. 17 por  $\varepsilon_{ji}^2$  e  $\varepsilon_{ji}^1$  respectivamente, subtraindo-se ambas, e integrando no volume do sólido  $\Omega$ , obtém-se a expressão do primeiro teorema de Betti:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ji}^1 \varepsilon_{ji}^2 d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ji}^2 \varepsilon_{ji}^1 d\Omega \quad (18)$$

Integrando por partes ambos os lados da Eq. 18, e usando o teorema da divergência, obtém-se a expressão do segundo teorema de Betti, em termos de deslocamentos ( $u_j$ ), forças de superfície ( $t_j$ ) e forças de volume ( $B_j$ ) para o sólido ( $\Omega + \Gamma$ ), como:

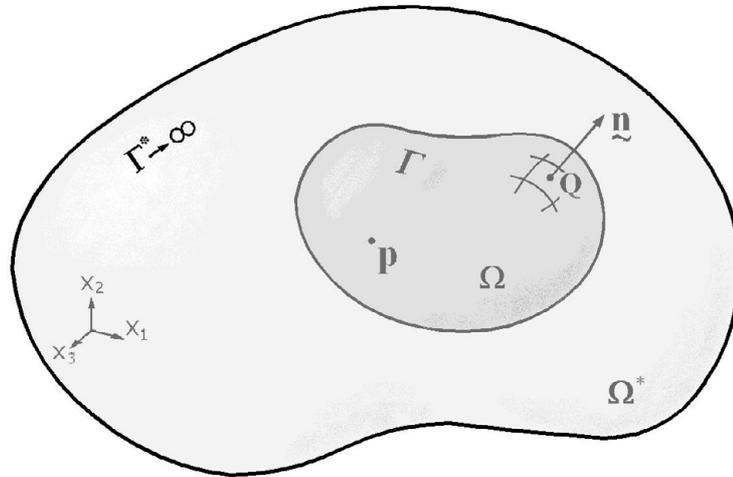
$$\int_{\Gamma} t_j^1 u_j^2 d\Gamma + \int_{\Omega} B_j^1 u_j^2 d\Omega = \int_{\Gamma} t_j^2 u_j^1 d\Gamma + \int_{\Omega} B_j^2 u_j^1 d\Omega \quad (19)$$

### 3.3.2 – A Identidade de Somigliana para Deslocamentos (ISD)

Seja um sólido  $\Omega$  com contorno  $\Gamma$  contido em um outro sólido infinito homogêneo  $\Omega^*$  com contorno  $\Gamma^* \rightarrow \infty$  (FIG. 3). Pode-se considerar o problema fundamental de Kelvin como sistema “1” do teorema de Betti, sendo o ponto  $p$  de aplicação da carga posicionado no interior do volume  $\Omega$ , e o ponto  $Q$  no contorno  $\Gamma$ , conforme mostra a FIG. 3 (letras maiúsculas denotam pontos pertencentes ao contorno). Como sistema “2”, considera-se um problema a ser analisado, com condições de contorno bem definidas. Pode-se então obter a partir da equação do segundo teorema de Betti (Eq. 19), uma equação que tem como única incógnita o deslocamento do ponto  $p$  pertencente ao domínio  $\Omega$ . As grandezas correspondentes ao problema fundamental (sistema 1) passam a ser denotadas com o sobrescrito “\*”, enquanto as grandezas correspondentes ao problema (sistema 2) passam a ser denotadas sem sobrescritos.

Considerando-se as propriedades da função delta de Dirac (ver Anexo A1), e a Eq. 10, a segunda integral do lado esquerdo da Eq. 19 pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega} B_j^1 u_j^2 d\Omega = \int_{\Omega} B_j^* u_j d\Omega = u_j(p) e_j \quad (20)$$

FIGURA 3 – Posições de  $p$  e  $Q$  consideradas na ISD

Substituindo-se apropriadamente a Eq. 20, a Eq. 13 [ $u_j^*(q) = U_{ji}(p, q) e_i(p)$ ] e a Eq. 15 [ $t_j^*(q) = T_{ji}(p, q) e_i(p)$ ] na expressão do segundo teorema de Betti (Eq. 19), obtém-se a Identidade de Somigliana para Deslocamentos (ISD), escrita como:

$$u_j(p) = \int_{\Gamma} U_{ji}(p, Q) t_i(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} T_{ji}(p, Q) u_i(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} U_{ji}(p, q) B_i(q) d\Omega(q) \quad (21)$$

Da equação acima (Eq. 21) pode-se obter valores de deslocamentos em um ponto  $p$  pertencente a  $\Omega$ , a partir apenas de dados do contorno  $\Gamma$  (deslocamentos e forças de superfície) e de forças de volume.

### 3.3.3 – A Identidade de Somigliana para Tensões (IST)

Assim como os deslocamentos, as tensões  $\sigma_{ji}$  em um ponto  $p$  podem ser expressas em termos de dados do contorno e forças de volume. Derivando-se a expressão da identidade de Somigliana para deslocamentos (Eq. 21) em relação às coordenadas  $x_i$ , substituindo-as adequadamente nas relações deformação-deslocamento (Eq. 3), e os resultados na Lei de Hooke (Eq. 5), obtém-se a expressão integral para o cálculo de tensão, aqui denominada Identidade de Somigliana para Tensões (IST), que pode ser escrita, usando a notação definida na Eq. 9, como:

$$\sigma_{ji}(p) = \int_{\Gamma} D_{kij}(p, Q) t_k(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} S_{kij}(p, Q) u_k(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} D_{kij}(p, q) B_k(q) d\Omega(q) \quad (22)$$

onde os tensores  $D_{kij}$  e  $S_{kij}$  para o caso tridimensional são apresentados por CRUSE (1969) como:

$$D_{kij}(p, Q) = \frac{1}{r^2} \left\{ (1-2\nu)(\delta_{ki} r_{,j} + \delta_{kj} r_{,i} - \delta_{ji} r_{,k}) + 3r_{,k} r_{,i} r_{,j} \right\} \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \quad (23)$$

$$S_{kij}(p, Q) = \frac{1}{r^3} \left\{ 3 \frac{dr}{dn} \left[ (1-2\nu)\delta_{ij} r_{,k} + \nu(\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - 5r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] + \right. \\ \left. + 3\nu(n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu)(3n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) + \right. \\ \left. - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right\} \frac{G}{4\pi(1-\nu)} \quad (24)$$

### 3.4 – Equações Integrais de Contorno (EIC)

Para que a expressão da identidade de Somigliana para deslocamentos seja suficiente para representar uma solução para problemas de valores de contorno em um ponto interno, é necessário que as grandezas envolvidas (deslocamentos e forças) sejam conhecidas no contorno do sólido (considerando-se conhecidas as forças de volume). A seguir, são feitas algumas considerações sobre o processo em que o ponto de colocação  $p$  é considerado na forma limite para  $\Gamma$  ( $q \rightarrow Q$ ) na Eq. 21, de modo a se obter uma expressão que envolva apenas valores no contorno.

Considera-se a princípio uma superfície esférica  $\Gamma_\varepsilon$  de raio  $\varepsilon$ , em torno do ponto de aplicação da carga unitária  $p$ , conforme a FIG. 4-a. Ao se aproximar o ponto  $p$  do contorno, a superfície original do sólido  $\Gamma$  é interceptada por  $\Gamma_\varepsilon$ , passando o contorno

do sólido a ser definido por  $\Gamma \cup \Gamma_\varepsilon$  (excluída a parte original do contorno  $\Gamma \cap \Gamma_\varepsilon$ ), como mostram as FIG. 4-b e FIG. 4-c. A equação da ISD (Eq. 21) assume então a forma:

$$u_j(p) = \left[ \int_{\Gamma - (\Gamma \cap \Gamma_\varepsilon)} U_{ji}(p, Q) t_i(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma - (\Gamma \cap \Gamma_\varepsilon)} T_{ji}(p, Q) u_i(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} U_{ji}(p, q) B_i(q) d\Omega(q) \right] + \left[ \int_{\Gamma_\varepsilon} U_{ji}(p, Q) t_i(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma_\varepsilon} T_{ji}(p, Q) u_i(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega_\varepsilon} U_{ji}(p, q) B_i(q) d\Omega(q) \right] \quad (25)$$

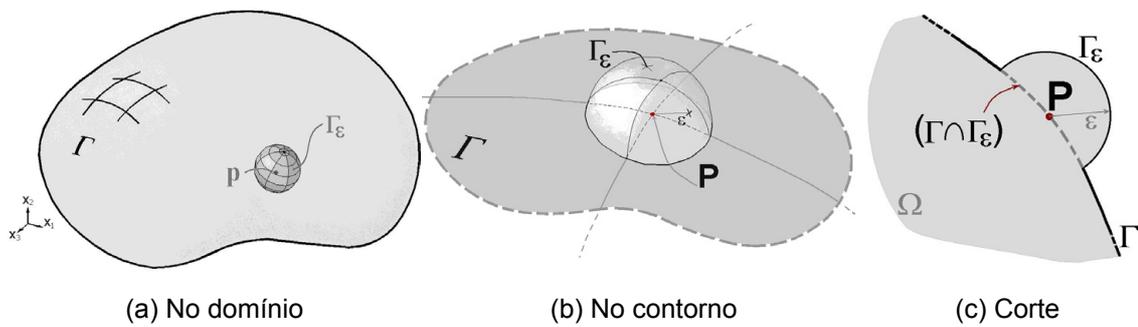


FIGURA 4 – Região de exclusão da singularidade

Faz-se então na Eq. 25 a forma limite  $p \rightarrow P$  para que se tenha uma expressão que envolva apenas pontos do contorno, e também o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  para o raio  $\varepsilon$  da esfera, de modo a não alterar o contorno original do sólido. Na primeira integral do segundo colchete (em  $\Gamma_\varepsilon$ ), a singularidade da solução fundamental no núcleo da integral tem ordem  $O(1/\varepsilon)$ . Como a área da superfície de  $\Gamma$  excluída tem ordem  $d\Gamma = O(\varepsilon^2)$ , a integral é nula no limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . De maneira análoga, na última integral em  $\Omega_\varepsilon$ , a singularidade é de ordem  $O(1/r)$  e a região da esfera  $d\Omega_\varepsilon = O(r^2)$ , o que também torna esta integral nula. Ainda na Eq. 25, a segunda integral do segundo colchetes (em  $\Gamma_\varepsilon$ ) não se anula, e a singularidade no núcleo da integral deve ser regularizada como se segue:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} T_{ji}(p, Q) u_i(Q) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma_\varepsilon} T_{ji}(p, Q) [u_i(Q) - u_i(P)] d\Gamma(Q) + u_i(P) \int_{\Gamma_\varepsilon} T_{ji}(P, Q) d\Gamma(Q) \quad (26)$$

Na equação anterior (Eq. 26), a primeira integral da direita se anula para o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , se é assumido que os deslocamentos  $u_i$  são continuamente diferenciáveis, isto é, se  $[u_i(Q) - u_i(P)] = O(\varepsilon)$ , que é a condição de continuidade de Lipschitz<sup>1</sup>. Resta apenas a segunda integral da direita a ser avaliada. Esta integral é em geral representada em sua forma limite, aqui denominada  $C_{ji}^*(P)$ , como:

$$C_{ji}^*(P) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} T_{ji}(P, Q) d\Gamma(Q) \quad (27)$$

Esta integral da Eq. 27 multiplica uma componente  $u_i(P)$ , como pode ser observado na Eq. 26. Como na equação da ISD há um termo independente  $u_j(P)$ , é conveniente agrupá-los, representando-os por uma única variável, dada por:

$$C_{ji}(P) = \delta_{ji} + C_{ji}^* = \delta_{ji} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} T_{ji}(P, Q) d\Gamma(Q) \quad (28)$$

Atenção especial deve ainda ser dada à segunda integral do primeiro colchete da Eq. 25. Esta integral deve ser considerada no sentido de Valor Principal de Cauchy, VPC (ver Anexo A.2), e tem sua existência provada se  $u_i$  satisfaz a condição de continuidade de Hölder (ver Anexo A.4).

A equação da EIC padrão pode então ser escrita como:

$$C_{ji}(P)u_i(P) + \int_{\langle \Gamma \rangle} T_{ji}(P, Q)u_i(Q) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} U_{ji}(P, Q)t_i(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} U_{ji}(P, q)B_i(q) d\Omega(q) \quad (29)$$

A integral à esquerda da igualdade (com domínio representado por  $\langle \Gamma \rangle$ ) deve ser interpretada no como VPC.

<sup>1</sup> A condição de continuidade de Lipschitz é um caso particular da condição de continuidade de Hölder ( $[u_j(Q) - u_j(P)]^{k < A \rho \alpha}$ ), quando se considera  $\alpha$  igual a um.

### 3.5 – Sobre o Termo $C_{ji}(P)$

A determinação direta do termo livre  $C_{ji}(P)$  é relativamente complexa para problemas tridimensionais. Seu valor é constante e representa um “salto” de descontinuidade da integral fortemente singular (VPC) da EIC. Para problemas de Potencial há uma relação é direta deste termo com o ângulo sólido, já para problemas de Elasticidade, uma integração deve ser efetuada sobre a área da casca esférica  $\bar{\Gamma}_\varepsilon$  (ver Anexo A3). Uma discussão mais ampla sobre as propriedades da descontinuidade na ISD é apresentada por CRUSE (1977).

Assim, para pontos internos e externos ao contorno  $\Gamma$ , o valor de  $C_{ji}(P)$  é definido como:

$$C_{ji}(P) = \begin{cases} \delta_{ji}, & \text{para } p \text{ no interior do sólido, } p \in (\Omega - \Gamma) \\ 0, & \text{para } p \text{ externo.} \end{cases} \quad (30)$$

Para  $P$  no contorno  $\Gamma$ , HARTMANN(1980) *apud* LIAO e XU (1992) obteve a integral de funções trigonométricas para o cálculo de  $C_{ji}$ , expressa matricialmente por:

$$\mathbf{C}(P) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} (1-2\nu)\mathbf{I} + 3 \begin{bmatrix} r_{,1}^2 & r_{,1}r_{,2} & r_{,1}r_{,3} \\ & r_{,2}^2 & r_{,2}r_{,3} \\ \text{sim.} & & r_{,3}^2 \end{bmatrix} d\bar{\Gamma}_\varepsilon \quad (31)$$

onde  $\mathbf{I}$  é uma matriz identidade  $3 \times 3$  ( $\mathbf{I} = \delta_{ij}$ ;  $i,j = 1,2,3$ ) e  $\bar{\Gamma}_\varepsilon$  a superfície da esfera unitária com centro em  $P$ , limitada pela interseção com um cone tangente com vértice também em  $P$  (FIG. 5). Para pontos de geometria bem definida o resultado desta expressão é bem conhecido, e apresentado na FIG. 6, conforme apresentado por HARTMANN (1989).

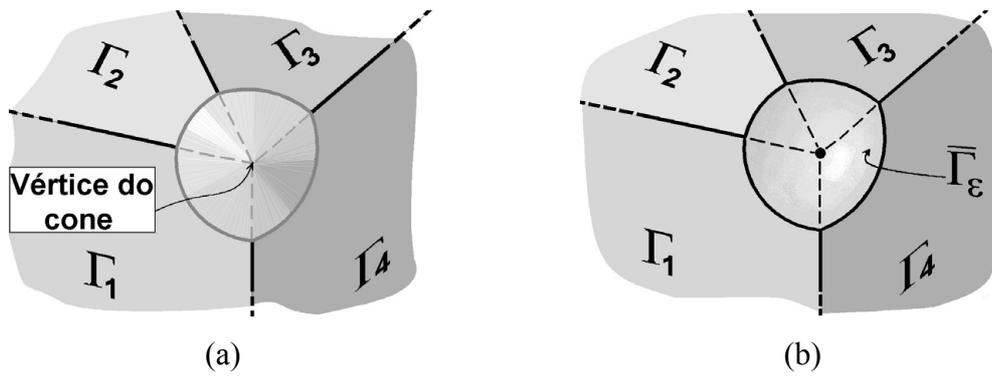
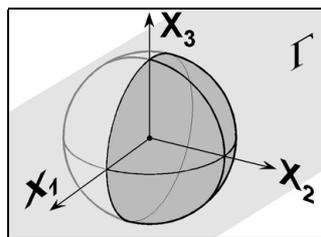


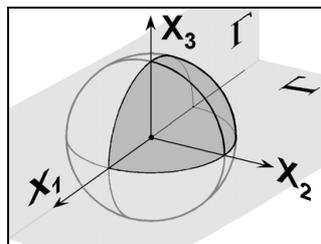
FIGURA 5 – Ponto com angulosidade: a) Cone com vértice em  $P$ ; b) Superfície esférica na parte interna do cone tangente

❖ **Ponto de Contorno SUAVE:**



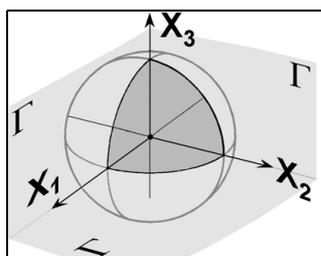
$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \text{Simetr.} & \frac{1}{2} & 0 \\ & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

❖ **Ponto de ARESTA:**



$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \text{Simetr.} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \\ & & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

❖ **Ponto de VÉRTICE:**



$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8\pi(1-\nu)} & \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \\ \text{Simetr.} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \\ & & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

FIGURA 6 – Área da esfera unitária e matriz  $C$  associada

CRUSE (1974) propõe uma maneira indireta para o cálculo do termo  $C_{ji}(P)$ , alternativamente ao cálculo direto, utilizando o fato de a ISD se aplicar também a translações simples na ausência de forças (movimento de corpo rígido). A expressão de  $C_{ji}(P)$  pode ser escrita como:

$$C_{ji}(P) = - \int_{\langle \Gamma \rangle} T_{ji}(P, Q) d\Gamma(Q) \quad (32)$$

A Eq. 32 envolve uma integral fortemente singular (VPC), representada pelo domínio de integração  $\langle \Gamma \rangle$ .

### 3.6 – Formulação Auto-Regularizada da EIC para Deslocamentos

As singularidades que ocorrem ao se posicionar o ponto de colocação no contorno do sólido para obtenção das EIC padrão, podem ter sua ordem reduzida através de um processo de regularização. A obtenção destas EIC auto-regulares é demonstrada em CRUSE e RICHARDSON (1996), que o fazem para a ISD e para a IST. Apresenta-se brevemente a seguir, a metodologia usada por estes autores na obtenção da formulação auto-regularizada da ISD, utilizada neste trabalho.

Desconsiderando-se as forças de volume, a equação da ISD (Eq. 21) é regularizada conforme a expressão seguinte:

$$u_i(p) = - \int_{\Gamma} T_{ji}(p, Q) [u_i(Q) - u_i(P)] d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} U_{ji}(p, Q) t_i(Q) d\Gamma(Q) + \\ - u_i(P) \int_{\Gamma} T_{ji}(p, Q) d\Gamma(Q) \quad (33)$$

Se o campo de deslocamentos no contorno satisfaz a condição de continuidade de Hölder, ou seja, se no contorno  $u_i(Q) \in C^{0,\alpha}$  ( ver Anexo A4), a primeira integral na Eq. 33 é contínua no ponto  $P$  da superfície, e a integral pode ter no máximo singularidade fraca. A segunda integral também é contínua, com singularidade fraca na solução fundamental em deslocamentos. Na terceira integral, o núcleo  $T_{ji}(p, Q)$  pode ser

decomposto em uma parte descontínua e outra singular, conforme CRUSE (1977). A parte singular se anula pela aplicação do Teorema de Stokes, e a parte descontínua é igual à unidade segundo as propriedades do ângulo sólido. A Eq. 33 pode ser então rescrita como:

$$u_i(p) - u_i(P) = - \int_{\Gamma} T_{ji}(p, Q) [u_i(Q) - u_i(P)] d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} U_{ji}(p, Q) t_i(Q) d\Gamma(Q) \quad (34)$$

A Eq. 34 tem um limite contínuo para o contorno se  $u_i(Q)$  tem continuidade  $C^{0,\alpha}$ . As integrais envolvidas são no máximo fracamente singulares. A EIC auto-regularizada é obtida tomando-se o ponto de colocação no contorno, e sua expressão é dada por:

$$0 = - \int_{\Gamma} T_{ji}(P, Q) [u_i(Q) - u_i(P)] d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} U_{ji}(P, Q) t_i(Q) d\Gamma(Q) \quad (35)$$

As formulações padrão e auto-regularizadas da ISD são equivalentes, como demonstram CRUSE e RICHARDSON (1996), ao obter a expressão da EIC padrão (Eq. 29) a partir da Eq. 35. É possível também notar esta equivalência matricialmente, conforme apresentado no capítulo seguinte.

# 4

## Método dos Elementos de Contorno

A impossibilidade de se resolver as equações integrais de contorno (EIC) analiticamente, de forma fechada e genérica, torna necessário o uso de técnicas de aproximação sistemáticas, que são discutidas neste capítulo. Por não serem objetos de estudo deste trabalho, a partir deste capítulo as forças de volume são desconsideradas para efeito de simplificação.

### 4.1 – Tratamento Numérico das EIC

Para o tratamento numérico das EIC, discretiza-se o contorno  $\Gamma$  do sólido em elementos de superfície (elementos de contorno), gerando-se uma malha com uma certa quantidade de nós (pontos do contorno), onde os valores de deslocamentos e forças de superfície podem ser conhecidos ou incógnitos. Sobre cada elemento, a geometria do contorno é aproximada por funções de forma  $\mathcal{N}$ , e os valores de deslocamentos e forças por funções de interpolação  $N$ , a partir dos  $n$  valores nodais de cada elemento.

$$x_k(Q) = \sum_{\alpha=1}^n \mathcal{N}_{\alpha}(\xi_i) x_k^{\alpha} \quad (36)$$

$$u_k(Q) = \sum_{\alpha=1}^n N_{\alpha}(\xi_i) u_k^{\alpha} \quad ; \quad t_k(Q) = \sum_{\alpha=1}^n N_{\alpha}(\xi_i) t_k^{\alpha} \quad (37)$$

onde  $x_k^{\alpha}$ ,  $u_k^{\alpha}$  e  $t_k^{\alpha}$  representam valores nodais (nós  $\alpha$ ) das coordenadas geométricas, deslocamentos e forças de superfície, respectivamente, na direção  $k$ ;  $N_{\alpha}(\xi_i)$  e  $\mathcal{N}_{\alpha}(\xi_i)$  são funções interpoladoras em coordenadas adimensionais (ou homogêneas), expressas matricialmente como:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad (38)$$

Considerando-se a discretização da superfície do sólido  $\Gamma$  em  $NE$  elementos de contorno  $\Gamma_{\beta}$ , a EIC padrão para deslocamentos se torna:

$$C_{ji}(P)u_i(P) + \sum_{\beta=1}^{NE} \int_{\langle \Gamma_{\beta} \rangle} T_{ji}(P, Q) u_i(Q) d\Gamma_{\beta}(Q) = \sum_{\beta=1}^{NE} \int_{\Gamma_{\beta}} U_{ji}(P, Q) t_i(Q) d\Gamma_{\beta}(Q) \quad (39)$$

e usando-se as funções de interpolação:

$$C_{ji}(P)u_i(P) + \sum_{\beta=1}^{NE} \sum_{\alpha=1}^n \int_{\langle \Gamma_{\beta} \rangle} T_{ji}(P, Q) N_{\alpha} u_i^{\alpha}(Q) d\Gamma_{\beta}(Q) = \sum_{\beta=1}^{NE} \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Gamma_{\beta}} U_{ji}(P, Q) N_{\alpha} t_i^{\alpha}(Q) d\Gamma_{\beta}(Q) \quad (40)$$

Como as funções interpoladoras  $N_{\alpha}$  são expressas em coordenadas homogêneas ( $\xi_i$ ), é necessária a transformação do elemento de área  $\Gamma_{\beta}$  do sistema global ( $x_i$ ) para este novo sistema de coordenadas, isto é:

$$d\Gamma_{\beta} = J_A d\xi_1 d\xi_2 \quad (41)$$

onde  $J_A$  é o jacobiano de área da transformação de coordenadas. A expressão algébrica da EIC padrão para deslocamentos fica então:

$$\begin{aligned}
C_{ji}(P)u_i(P) + \sum_{\beta=1}^{NE} \sum_{\alpha=1}^n u_i^\alpha(Q) \int_{\langle \xi_\beta \rangle} T_{ji}(P,Q) N_\alpha J_A d\xi_\beta(Q) &= \\
&= \sum_{\beta=1}^{NE} \sum_{\alpha=1}^n t_i^\alpha(Q) \int_{\xi_\beta} U_{ji}(P,Q) N_\alpha J_A d\xi_\beta(Q)
\end{aligned} \tag{42}$$

ou na forma auto-regularizada:

$$\begin{aligned}
\sum_{\beta=1}^{NE} \sum_{\alpha=1}^n u_i^\alpha(Q) \int_{\langle \xi_\beta \rangle} T_{ji}(P,Q) N_\alpha J_A d\xi_\beta(Q) - \sum_{\beta=1}^{NE} u_i(P) \int_{\langle \xi_\beta \rangle} T_{ji}(P,Q) N_\alpha J_A d\xi_\beta(Q) &= \\
&= \sum_{\beta=1}^{NE} \sum_{\alpha=1}^n t_i^\alpha(Q) \int_{\xi_\beta} U_{ji}(P,Q) N_\alpha J_A d\xi_\beta(Q)
\end{aligned} \tag{43}$$

Na formulação padrão, denominando-se as integrais à esquerda da igualdade na Eq. 42 como  $\hat{\mathbf{H}}_{lm}$ , e as integrais à direita como  $\mathbf{G}_{lm}$ , onde os índices  $l$  e  $m$  se referem à numeração global dos  $nn$  nós do contorno, e ainda considerando-se o ponto de colocação  $P$  situado em um nó  $l$  do contorno ( $l = 1, 2, \dots, nn$ ), pode-se, seguindo as considerações de LIU e RUDOLPHI (1991), escrever a Eq. 42 matricialmente como:

$$\mathbf{C}(P) \mathbf{u}_l + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}}_{l1} & \dots & \hat{\mathbf{H}}_{ll} & \dots & \hat{\mathbf{H}}_{lnn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_l \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{nn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{l1} & \dots & \mathbf{G}_{ll} & \dots & \mathbf{G}_{lnn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{t}_l \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{nn} \end{Bmatrix} \tag{44}$$

Onde cada termo  $\hat{\mathbf{H}}_{lm}$  e  $\mathbf{G}_{lm}$  são matrizes ( $3 \times 3$ ) com componentes relativos às direções  $i$  e  $j$ . Agrupando os termos à esquerda da igualdade, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}}_{l1} & \dots & (\hat{\mathbf{H}}_{ll} + \mathbf{C}(P)) & \dots & \hat{\mathbf{H}}_{lnn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_l \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{nn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{l1} & \dots & \mathbf{G}_{ll} & \dots & \mathbf{G}_{lnn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{t}_l \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{nn} \end{Bmatrix} \tag{45}$$

Considerando-se agora o ponto de colocação sobre todos os nós da malha, e denotando os termos  $(\hat{\mathbf{H}}_{ll} + \mathbf{C}(P))$  por  $\mathbf{H}_{ll}$ , e os demais termos  $\hat{\mathbf{H}}_{lm}$  por  $\mathbf{H}_{lm}$ , obtém-se o sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \cdots & \mathbf{H}_{1nn} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} & \cdots & \mathbf{H}_{2nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_{nn1} & \mathbf{H}_{nn2} & \cdots & \mathbf{H}_{nnnn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{nn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} & \cdots & \mathbf{G}_{1nn} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} & \cdots & \mathbf{G}_{2nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_{nn1} & \mathbf{G}_{nn2} & \cdots & \mathbf{G}_{nnnn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{nn} \end{Bmatrix} \quad (46)$$

ou, resumidamente:

$$\mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{t} \quad (47)$$

onde  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  são matrizes globais ( $3nn \times 3nn$ ) e,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{t}$  vetores de dimensão  $3nn$ .

As componentes  $\mathbf{G}_{lm}$ , assim como as componentes  $\mathbf{H}_{lm}$ , para  $l \neq m$ , são todas determinadas pelas integrais da Eq. 42. Já as componentes de  $\mathbf{H}_{lm}$  para  $l = m$ , são consideradas separadamente devido à sua natureza de VPC. Considerando-se um deslocamento unitário de corpo rígido na ausência de forças, conforme CRUSE (1974), pode-se escrever o sistema Eq. 47 como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \cdots & \mathbf{H}_{1nn} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} & \cdots & \mathbf{H}_{2nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_{nn1} & \mathbf{H}_{nn2} & \cdots & \mathbf{H}_{nnnn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 \\ \hat{\mathbf{u}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_{nn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (48)$$

onde  $\hat{\mathbf{u}}_i$  representam vetores contendo deslocamentos unitários em uma direção  $\alpha$  ( $\hat{\mathbf{u}}_i^1 = [1 \ 0 \ 0]^T$ ;  $\hat{\mathbf{u}}_i^2 = [0 \ 1 \ 0]^T$ ;  $\hat{\mathbf{u}}_i^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$ ). Considerando-se por exemplo a linha  $l$  de submatrizes ( $3 \times 3$ ) do sistema (Eq. 48), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{l1} \hat{\mathbf{u}}_1^1 + \dots + \mathbf{H}_{ll} \hat{\mathbf{u}}_l^1 + \dots + \mathbf{H}_{lnn} \hat{\mathbf{u}}_{nn}^1 &= \mathbf{0} && \text{direção 1} \\ \mathbf{H}_{l1} \hat{\mathbf{u}}_1^2 + \dots + \mathbf{H}_{ll} \hat{\mathbf{u}}_l^2 + \dots + \mathbf{H}_{lnn} \hat{\mathbf{u}}_{nn}^2 &= \mathbf{0} && \text{direção 2} \\ \mathbf{H}_{l1} \hat{\mathbf{u}}_1^3 + \dots + \mathbf{H}_{ll} \hat{\mathbf{u}}_l^3 + \dots + \mathbf{H}_{lnn} \hat{\mathbf{u}}_{nn}^3 &= \mathbf{0} && \text{direção 3} \end{aligned} \quad (49)$$

$$\Rightarrow \mathbf{H}_{ll} = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{nn} \mathbf{H}_{lk}$$

Assim, o sistema  $\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t}$  pode ser rescrito como:

$$\begin{bmatrix} \left(-\sum_{m=2}^{nn} \mathbf{H}_{1m}\right) & \mathbf{H}_{12} & \cdots & \mathbf{H}_{1nn} \\ \mathbf{H}_{21} & \left(-\sum_{m=1; m \neq 2}^{nn} \mathbf{H}_{2m}\right) & \cdots & \mathbf{H}_{2nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_{nn1} & \mathbf{H}_{nn2} & \cdots & \left(-\sum_{m=1}^{nn-1} \mathbf{H}_{nmm}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{nn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} & \cdots & \mathbf{G}_{1nn} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} & \cdots & \mathbf{G}_{2nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_{nn1} & \mathbf{G}_{nn2} & \cdots & \mathbf{G}_{nnn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{nn} \end{Bmatrix} \quad (50)$$

A forma matricial auto-regularizada da EIC de deslocamentos pode ser obtida a partir da Eq.50, demonstrando sua equivalência com a formulação clássica quando se usa o conceito de movimento de corpo rígido. Assim, para um nó  $l$  do contorno, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{l1} & \cdots & \left(-\sum_{m=1; m \neq l}^{nn} \mathbf{H}_{lm}\right) & \cdots & \mathbf{H}_{lnn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_l \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{nn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{l1} & \cdots & \mathbf{G}_{ll} & \cdots & \mathbf{G}_{lnn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{t}_l \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{nn} \end{Bmatrix} \quad (51)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{l1} & \cdots & \mathbf{H}_{ll} & \cdots & \mathbf{H}_{lnn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_l \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{nn} \end{Bmatrix} + \left(-\sum_{m=1}^{nn} \mathbf{H}_{lm}\right) \mathbf{u}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{l1} & \cdots & \mathbf{G}_{ll} & \cdots & \mathbf{G}_{lnn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{t}_l \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{nn} \end{Bmatrix}$$

Ao rearranjar os termos da esquerda, e lembrando ser  $l$  o nó singular, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{l1} & \cdots & \mathbf{H}_{ll} & \cdots & \mathbf{H}_{lnn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_l \\ \vdots \\ \mathbf{u}_l - \mathbf{u}_l \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{nn} - \mathbf{u}_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{l1} & \cdots & \mathbf{G}_{ll} & \cdots & \mathbf{G}_{lnn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{t}_l \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{nn} \end{Bmatrix} \quad (52)$$

A Eq. 52 considerada para os  $l$  nós do contorno é representada pela Eq. 43, constituindo a forma auto-regularizada das EIC, equivalente à formulação clássica. Como se pode observar, as integrais fortemente singulares também não são calculadas diretamente ( $\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_l = 0$ ).

Aplicando as condições de contorno no sistema  $\mathbf{Hu} = \mathbf{Gt}$  (Eq. 47), têm-se alguns valores de  $\mathbf{u}$  prescritos e outros incógnitos, o mesmo acontecendo no vetor  $\mathbf{t}$ . Reordenando o sistema de modo a agrupar os termos de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{t}$  prescritos, multiplicados por seus respectivos coeficientes de  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  em um vetor  $\mathbf{Y}$ , obtém-se o sistema de equações:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{Y} \quad (53)$$

onde o vetor  $\mathbf{x}$  contém os termos incógnitos (de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{t}$ ), e a matriz  $\mathbf{A}$  ( $3nn \times 3nn$ ) seus respectivos coeficientes (de  $\mathbf{H}$  ou  $\mathbf{G}$ ).

Neste trabalho, os coeficientes das matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  não são armazenados, e o sistema da Eq. 53 é gerado diretamente. Os coeficientes de  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  (resultantes das integrações) são multiplicados fora da matriz pelos valores prescritos nas condições de contorno, e os resultados são armazenados diretamente em  $\mathbf{Y}$ , enquanto os coeficientes dos termos desconhecidos ( $\mathbf{x}$ ) são armazenados em  $\mathbf{A}$ .

Em problemas nos quais não se utiliza divisão do domínio em sub-regiões, a matriz  $\mathbf{A}$  do sistema de equações é uma matriz cheia, não permitindo o uso de algoritmos simplificadores de resolução, comuns para matriz banda simétrica. Neste trabalho, o sistema de equações lineares obtido é calculado utilizando-se as rotinas do pacote LINPAK (1978), que usam o algoritmo de eliminação gaussiana padrão, com pivotamento escalonado (fatorização  $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ ). Estas rotinas determinam também um número de condicionamento  $\kappa(\mathbf{A})$  dos coeficientes da matriz  $\mathbf{A}$  que indicam a sensibilidade a erro, nas respostas do sistema de equações. Pode-se ter a partir deste número, uma idéia da quantidade de dígitos significativos que os coeficientes do vetor de  $\mathbf{x}$  (solução do sistema) têm a menos que os coeficientes de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{Y}$ . Os valores do número de condicionamento variam de  $\kappa(\mathbf{A}) = 1$  para matriz identidade a  $\kappa(\mathbf{A}) = \infty$  para matriz singular (HEATH, 1997). Numericamente, é mais comum a ocorrência de mal condicionamento da matriz do que singularidade. Esse mal-condicionamento é indicado por um valor de  $\kappa(\mathbf{A})$  muito alto, indicando que pequenos erros de arredondamento durante o processo de solução do sistema podem afetar de forma significativa as respostas obtidas, tornando-as pouco confiáveis.

## 4.2 – Descontinuidade da Força de Superfície

Conforme mencionado no capítulo anterior, na definição das condições de contorno de um problema, requer-se a prescrição de deslocamentos ou forças de superfície sobre todo o contorno do sólido. Como  $mn$  equações são obtidas para o sistema ao se posicionar o ponto de colocação sobre todos os nós do contorno,  $mn$  incógnitas poderiam ser definidas. A propriedade de continuidade de deslocamentos da teoria da elasticidade garante que somente um valor de deslocamento pode ser definido em um ponto (nó). Já a distribuição de forças de superfície sobre o contorno pode ser descontínua, especialmente em se considerando pontos de vértice ou arestas, podendo-se assim, serem definidos diferentes valores de forças de superfície em um nó. Para que o número de incógnitas não supere  $mn$  é necessário prescrever mais de um nó na posição geométrica onde ocorre a descontinuidade (nós duplos, em problemas bidimensionais), o que aumenta muito o tamanho do sistema, ou seguir procedimentos adequados na definição dos problemas, conforme descritos a seguir.

Um problema bem definido no MEC, em que não são consideradas divisões em sub-regiões (ou outra interface), requer a existência de somente uma incógnita para cada nó em cada direção, podendo ocorrer assim, três situações diferentes. Na primeira situação, o deslocamento é *prescrito* em torno do nó, sendo a *incógnita* um valor para a força de superfície, adotada neste trabalho, como valor médio entre os elementos que compartilham o nó. Esta simplificação força uma continuidade nos valores de forças de superfície em elementos vizinhos. Pode-se observar esta situação, por exemplo, no ponto **a** da FIG. 7. Uma segunda situação ocorre quando a força de superfície é *prescrita* em parte da vizinhança do nó, e o deslocamento é *prescrito* na parte restante, sendo a *incógnita* a força de superfície na parte onde o deslocamento é conhecido. Tem-se como exemplo para esta situação o ponto **b** da FIG. 7. Finalmente, pode-se ter forças de superfície *prescritas* na vizinhança do nó, sendo a *incógnita* um valor único de deslocamento nodal, situação ilustrada pelo ponto **c** da FIG. 7.



FIGURA 7 – Exemplos de descontinuidades nas forças de superfície

### 4.3 – Funções de Interpolação e os Elementos de Contorno

Os elementos de contorno para problemas tridimensionais têm, usualmente, forma triangular ou quadrilateral, podendo as funções interpoladoras ser constantes, lineares, quadráticas ou de ordem superior (no mínimo lineares na representação da geometria). Se as funções de forma (que definem a forma geométrica) e de interpolação (para valores nodais) têm mesma ordem, os elementos são denominados isoparamétricos. Neste trabalho somente são considerados elementos triangulares isoparamétricos lineares e quadráticos. Os elementos subparamétricos, com aproximação constante para valores de contorno, não são usados por apresentarem resultados com precisão muito inferiores se comparados com os obtidos, por exemplo, com aproximação linear, conforme verificam CRUSE (1974) e SOUZA (2001).

#### 4.3.1 – O Jacobiano de Superfície

Para uma superfície qualquer representada por um vetor posição  $\vec{r}(x_i)$ , o jacobiano relaciona a área desta superfície em coordenadas globais à sua representação em coordenadas locais (por exemplo, coordenadas adimensionais utilizadas para integração numérica). O diferencial de área é dado por:

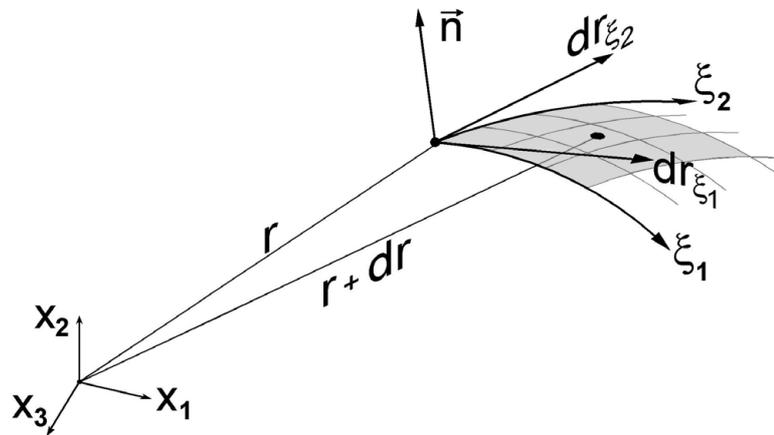


FIGURA 8 – Diferencial de área e sistemas de coordenadas

$$d\Gamma(x_i) = |dr_{\xi_1} \times dr_{\xi_2}| = \left| \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \right| \partial \xi_1 \partial \xi_2 \quad \text{ou} \quad d\Gamma(x_i) = |J_A| \partial \xi_1 \partial \xi_2 \quad (54)$$

Onde:  $\frac{\partial r(x_i)}{\partial \xi_1} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}, \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}, \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \right)$  e  $\frac{\partial r(x_i)}{\partial \xi_2} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}, \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}, \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \right)$ .

Assim, a expressão do jacobiano  $J_A$  é dada por:

$$J_A = \left[ \left( \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (55)$$

A normal unitária em um ponto definido por  $\vec{r}(x_i)$  é dada por:

$$\vec{n} = \frac{r_{,\xi_1} \times r_{,\xi_2}}{|r_{,\xi_1} \times r_{,\xi_2}|} \quad (56)$$

Para o caso específico de elemento triangular plano, a normal é única em todos os pontos do elemento e o jacobiano de superfície pode ser calculado simplesmente como:

$$J_A = 2 \times (\text{área do triângulo}) \quad (57)$$

**4.3.2 – Funções de Interpolação**

Ao se considerar elementos isoparamétricos, todos os nós do elemento são funcionais, isto é, são representativos de posições geométricas e de dados do contorno. Para elementos triangulares planos, com aproximação linear, as funções de interpolação em coordenadas homogêneas são mostradas na FIG. 9 :

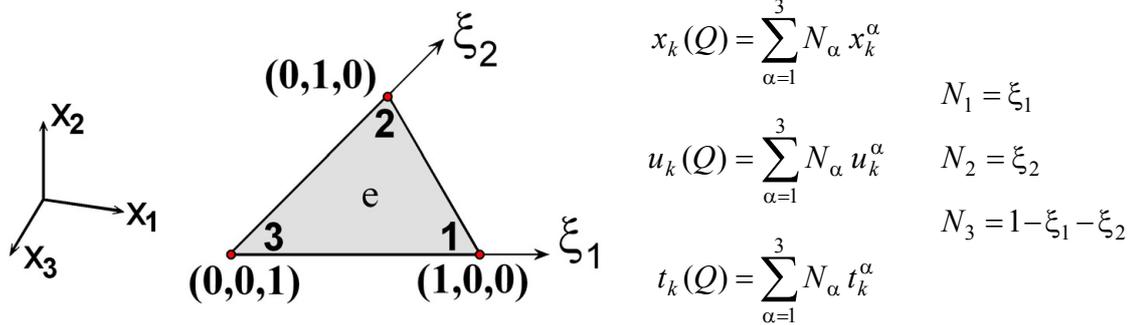


FIGURA 9 – Elemento triangular plano com aproximação linear.

Já para elementos isoparamétricos triangulares com variação quadrática, tem-se:

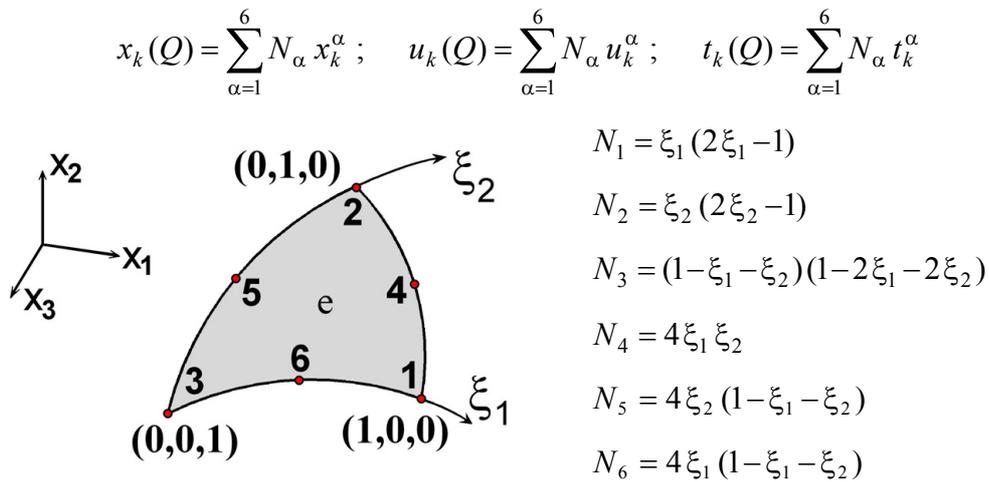


FIGURA 10 – Elemento triangular com aproximação quadrática.

## 4.4 – Tensões nos Elementos de Contorno

A aplicação do método dos elementos de contorno através das equações apresentadas nas seções anteriores fornece como resultados deslocamentos e forças de superfície no contorno de um sólido. Usualmente, entretanto, é de grande interesse o conhecimento da distribuição de tensões resultante das ações atuantes neste sólido. Através da identidade de Somigliana para o cálculo de tensões (IST) pode-se determinar a distribuição de tensões em pontos internos, a partir dos valores de deslocamentos e forças de superfície calculados no contorno. Um processo natural para determinar as tensões no contorno do sólido seria fazer a forma limite desta equação (IST) para o contorno. Esse procedimento porém, gera equações integrais singulares que somente podem ser computadas como VPC, com um elevado custo computacional. Uma forma mais simples pode ser empregada para determinação destas tensões no contorno, como apresentado por BREBBIA *et al.* (1984). Este procedimento, descrito a seguir, foi empregado neste trabalho.

### 4.4.1 – Conceitos Gerais

Considerando-se um sistema de coordenadas local  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  apropriado para um determinado elemento, pode-se expressar algumas componentes do tensor de tensões através das forças de superfície, conhecidas, conforme ilustrado na FIG. 11. As componentes desconhecidas, de imediato, são determinadas a partir das relações tensão-deformação, uma vez que as deformações podem ser obtidas a partir dos deslocamentos interpolados no elemento utilizando-se a Eq. 37.

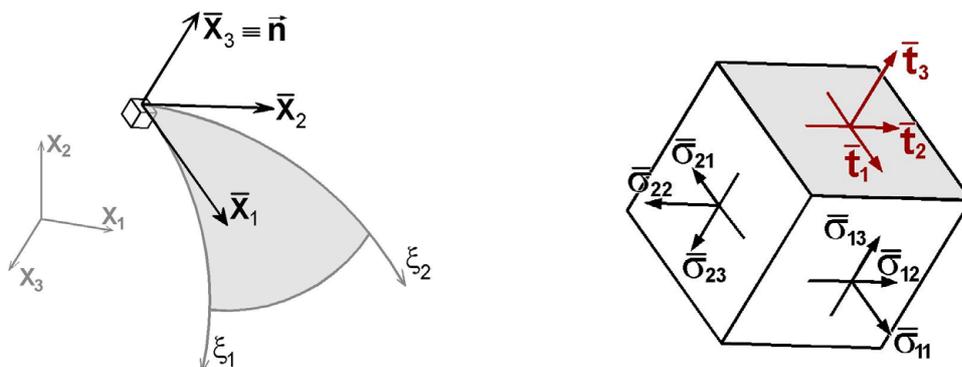


FIGURA 11 – Sistema de coordenadas locais e componentes de tensão

As três componentes de deformação na superfície do elemento no sistema local  $(\bar{\varepsilon}_{11}, \bar{\varepsilon}_{12}, \bar{\varepsilon}_{22})$  podem ser obtidas utilizando-se a Eq. 3  $[\bar{\varepsilon}_{ji} = 0,5(\bar{u}_{j,i} + \bar{u}_{i,j})]$ . Através das componentes de tensão, juntamente com as expressões da Lei de Hooke (Eq. 5 e 6), pode-se determinar após alguma manipulação algébrica, as componentes do tensor de tensões no sistema local, dadas por:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{11} &= \frac{\nu \bar{\sigma}_{33} + 2G(\bar{\varepsilon}_{11} + \nu \bar{\varepsilon}_{22})}{1-\nu}; \\ \bar{\sigma}_{22} &= \frac{\nu \bar{\sigma}_{33} + 2G(\bar{\varepsilon}_{22} + \nu \bar{\varepsilon}_{11})}{1-\nu}; \\ \bar{\sigma}_{33} &= \bar{t}_3; \\ \bar{\sigma}_{12} &= 2G\bar{\varepsilon}_{12}; \\ \bar{\sigma}_{13} &= \bar{t}_1; \\ \bar{\sigma}_{23} &= \bar{t}_2.\end{aligned}\tag{58}$$

As tensões locais podem se agora transformadas para o sistema de coordenadas globais, obtendo-se assim as respostas desejadas.

#### 4.4.2 – Deformações em coordenadas locais

O sistema local de coordenadas é determinado pela normal ao elemento no ponto considerado, que é feito coincidente com o eixo  $\bar{x}_3$ , e as demais eixos ortogonais são arbitrários. Definido o sistema local de coordenadas, é necessária a determinação de uma matriz de rotação  $\mathbf{R}$  para fazer as transformações entre sistemas, conforme a FIG. 12.

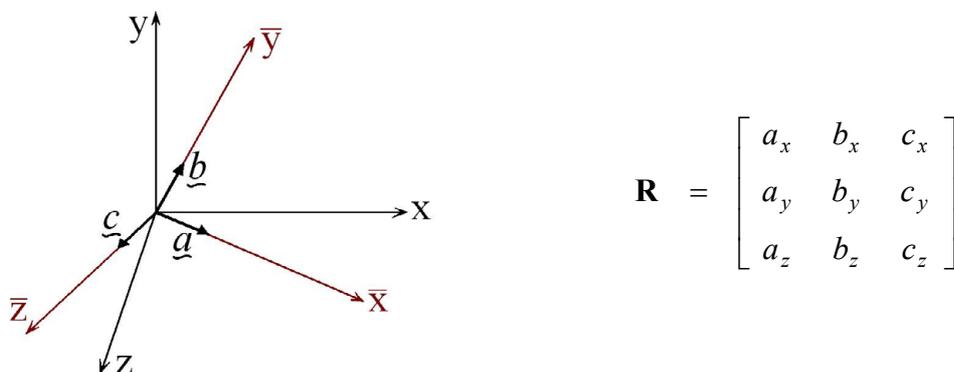


FIGURA 12 – Rotação de eixos cartesianos

As componentes das coordenadas nodais, deslocamentos e forças de superfície no sistema local são obtidas à partir de:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^T \mathbf{x} ; \quad \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{R}^T \mathbf{u} ; \quad \bar{\mathbf{t}} = \mathbf{R}^T \mathbf{t} . \quad (59)$$

Para o cálculo das deformações  $\bar{\varepsilon}_{ji}$  é preciso determinar  $\bar{u}_{i,j}$ , que, no plano definido em um ponto do elemento, pode ser obtido através das relações diferenciais entre uma função em coordenadas cartesianas ( $\bar{x}_i$ ) e em coordenadas homogêneas ( $\xi_j$ ), como mostrado na Eq. 60.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \xi_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_1} \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_2} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_1} \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_2} \end{Bmatrix} \quad \therefore \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_1} \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_2} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \xi_2} \end{Bmatrix} \quad (60)$$

As derivadas em relação às coordenadas homogêneas ( $\xi_j$ ) são obtidas em termos das derivadas das funções de interpolação ( $\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \xi_j} = \sum_k \frac{\partial N^k}{\partial \xi_j} \bar{x}_i^k$  e  $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \xi_j} = \sum_k \frac{\partial N^k}{\partial \xi_j} \bar{u}_i^k$ ).

Determinadas as deformações  $\bar{\varepsilon}_{ji}$  e as componentes de tensão  $\bar{\sigma}_{ji}$  no sistema local (Eq. 5 8), utiliza-se a matriz de rotação previamente estabelecida para se expressar as tensões  $\sigma_{ji}$  no sistema global de coordenadas, através da expressão a seguir:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{R} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{R}^T \quad (61)$$

# 5

## Algoritmos de Integração para o MEC Tridimensional

Conforme apresentado no Capítulo 3, e com as considerações algébricas do Capítulo 4, na formulação das EIC para deslocamentos, duas integrais devem ser calculadas:

$$\int_{\langle \Gamma \rangle} T_{ji}(P, Q) d\Gamma \quad \text{ou} \quad \int_{\langle \xi_\beta \rangle} T_{ji}(P, Q) N_\alpha J_A d\xi_\beta(Q) , \quad (62)$$

consideradas no sentido de Valor Principal de Cauchy, e

$$\int_{\Gamma} U_{ji}(P, Q) d\Gamma \quad \text{ou} \quad \int_{\xi_\beta} U_{ji}(P, Q) N_\alpha J_A d\xi_\beta(Q) . \quad (63)$$

Nas expressões acima (Eq. 62 e 63), as funções  $N_\alpha$  e  $J_A$  são simples e têm comportamento suave, não apresentando qualquer problema para sua integração. Já os núcleos  $T_{ji}$  e  $U_{ji}$  são funções mais complexas, porém suaves para os casos em que  $P$  e  $Q$  (ponto de colocação e de integração, respectivamente) não coincidem ou não estão demasiadamente próximos. Considerando-se a situação discretizada, caso o ponto de colocação não pertença ao elemento no qual a integral está sendo avaliada, nenhuma singularidade ocorre, conforme a situação ilustrada na FIG. 13-a. Por outro lado, se  $P$  pertence ao elemento que está sendo integrado, é possível que  $P$  e  $Q$  coincidam, o que

significa singularidade no integrando, e o elemento é chamado então elemento singular (FIG. 13-b).

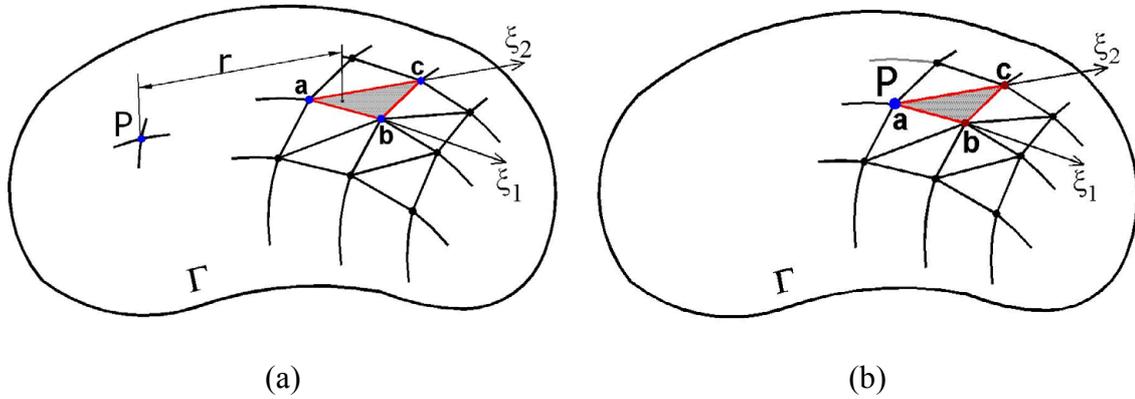


FIGURA 13 – (a) Elemento regular; (b) elemento singular.

Neste capítulo são apresentadas algumas técnicas utilizadas na avaliação destas integrais.

## 5.1 – Elementos Não Singulares – Integrais Regulares

As integrais sobre elementos que não contêm o ponto de colocação  $P$ , nem estão muito próximos a ele são totalmente regulares, podendo ser avaliadas numericamente pelos métodos de integração tradicionais. Neste trabalho, uma das alternativas utilizadas no cálculo das integrais regulares é a quadratura de Gauss em sua versão adaptada para domínios triangulares, apresentada por HAMMER (1956) *apud* BATHE (1982). Neste esquema de integração, denominado aqui como quadratura de Hammer, as integrais são calculadas de forma aproximada como:

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} [T_{ji} N_\alpha J_A d\xi_1] d\xi_2 = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{k=1}^{NPI} T_{ji}(P, Q^k) N_\alpha^k J_A^k w_k$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} [U_{ji} N_\alpha J_A d\xi_1] d\xi_2 = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{k=1}^{NPI} U_{ji}(P, Q^k) N_\alpha^k J_A^k w_k \quad (64)$$

onde  $n$  e  $NPI$  representam respectivamente, números de nós do elemento e número de pontos de integração de Hammer;  $Q^k$  são pontos de integração;  $w_k$  são fatores de peso associados a esses pontos, e  $J_A$  é o jacobiano de superfície.

Conforme apresentam LACHAT e WATSON (1976), para garantir a precisão das integrações sobre elementos mais próximos do ponto de colocação é necessário o uso de mais pontos de integração. Esta concentração de pontos pode ser conseguida através da técnica de subelementação. Neste trabalho, o elemento triangular a ser integrado é subdividido em  $NS$  triângulos menores (subelementos, ver FIG.14), sendo  $NS$  um valor que varia em função da distância do ponto de colocação  $P$  ao elemento. Obviamente, estes subelementos não criam nós funcionais adicionais, que aumentem o número de graus de liberdade do problema, servindo apenas ao propósito de melhorar a precisão da integração.

Na definição da quantidade de subelementos a serem utilizados ( $NS$ ), adota-se um critério baseado no que foi proposto por SOUZA (2001). Definindo-se  $NDIV$  como o número de divisões efetuadas em cada lado do elemento,  $\bar{L}$  como a média dos lados do triângulo formado pelos três pontos nos vértices do elemento e  $d$  a distância de  $P$  ao nó mais próximo do elemento sob integração, ou ao seu centróide, tem-se:

$$NDIV = \text{round} \left( \sqrt{\frac{10}{\alpha}} \right); \quad \alpha = \frac{d}{\bar{L}}; \quad (65)$$

$$\text{Para} \begin{cases} 3\bar{L} \geq d, & NS = (NDIV)^2 \leq 256 \\ 3\bar{L} < d, & \text{não é feita divisão em subelementos.} \end{cases}$$

onde  $\text{round}(f)$  representa o número inteiro mais próximo do número real  $f$ . Por razões práticas de tempo de processamento, optou-se por limitar o número de subelementos utilizados a uma quantidade máxima de 256, o que equivale a um valor de  $\alpha$  de aproximadamente 0,04.

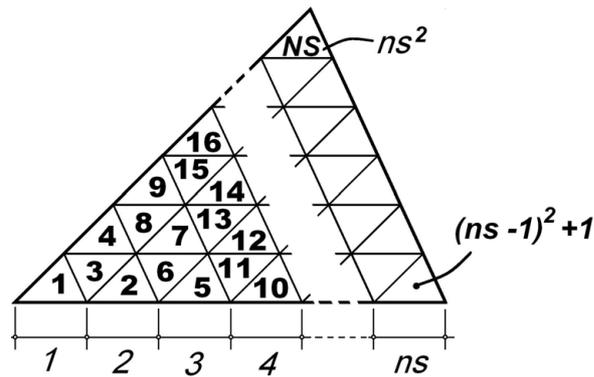


FIGURA 14 – Subdivisão em  $NS$  subelementos.

Ao se criar um subelemento, associa-se a ele um novo sistema de coordenadas  $\eta_i$ , que pode ser relacionado ao sistema de coordenadas adimensionais  $\xi_i$  do elemento original (FIG. 15). Um ponto de integração com coordenadas  $Q(\eta_i)$  pode ser expresso no sistema de coordenadas do elemento original  $Q(\xi_i)$  através da seguinte relação matricial (NAKAGUMA, 1979):

$$\begin{Bmatrix} Q(\xi_1) \\ Q(\xi_2) \\ Q(\xi_3) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1^{\text{nó1}} & \xi_1^{\text{nó2}} & \xi_1^{\text{nó3}} \\ \xi_2^{\text{nó1}} & \xi_2^{\text{nó2}} & \xi_2^{\text{nó3}} \\ \xi_3^{\text{nó1}} & \xi_3^{\text{nó2}} & \xi_3^{\text{nó3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Q(\eta_1) \\ Q(\eta_2) \\ Q(\eta_3) \end{Bmatrix} \quad (66)$$

onde  $\xi_i^{\text{nó}j}$  representam coordenadas do  $j$ -ésimo nó do subelemento no sistema do elemento original e direção  $i$ .

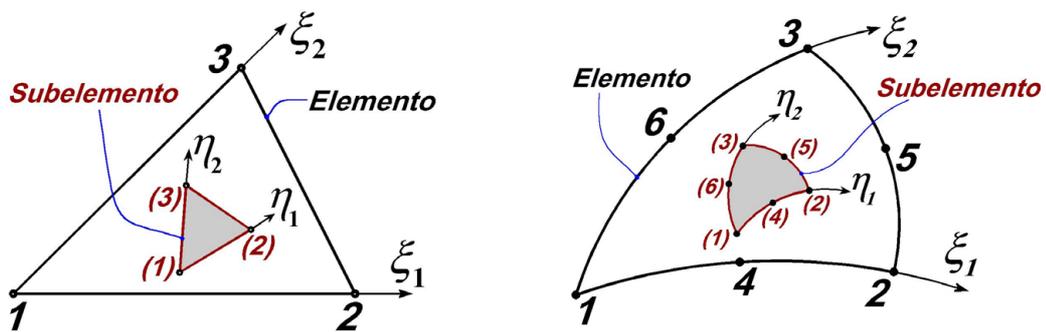


FIGURA 15 – Sistemas de coordenadas locais de elementos e subelementos

Conforme demonstra NAKAGUMA (1979), esta relação pode ser usada também para elementos curvos (aproximação quadrática, por exemplo). As coordenadas dos nós dos subelementos no sistema local do elemento, são conhecidas devido à subdivisão

sistemática adotada, que considera subelementos de mesmo tamanho (áreas iguais). Pode-se portanto, escrever as Eq. 64 como:

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} [T_{ji} N_\alpha J_A d\xi_1] d\xi_2 = \sum_{\alpha=1}^n \left\{ \sum_{l=1}^{NS} \left[ \frac{1}{NS} \sum_{k=1}^{NPI} T_{ji}(P, Q^k) N_\alpha J_A^k w_k \right] \right\} \quad (67)$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} [U_{ji} N_\alpha J_A d\xi_1] d\xi_2 = \sum_{\alpha=1}^n \left\{ \sum_{l=1}^{NS} \left[ \frac{1}{NS} \sum_{k=1}^{NPI} U_{ji}(P, Q^k) N_\alpha J_A^k w_k \right] \right\} \quad (68)$$

onde  $NS$  representa o número de subelementos utilizados.

### 5.2 – Elementos Singulares

Se o ponto de colocação pertence ao elemento em avaliação, este elemento é dito singular, devido às propriedades singulares dos núcleos  $U_{ji}$  e  $T_{ji}$  nas integrais. A singularidade do termo  $T_{ji}(P, Q)$  na Eq. 67, de ordem  $O(1/r^2)$ , é uma singularidade forte, e as integrais que a contêm (Eq. 62) são chamadas fortemente singulares (equivalentes ao potencial de camada dupla). Este tipo de singularidade ocorre, por exemplo, quando o ponto de colocação  $P$  coincide com um dos nós do elemento sob integração, conforme a FIG. 16).

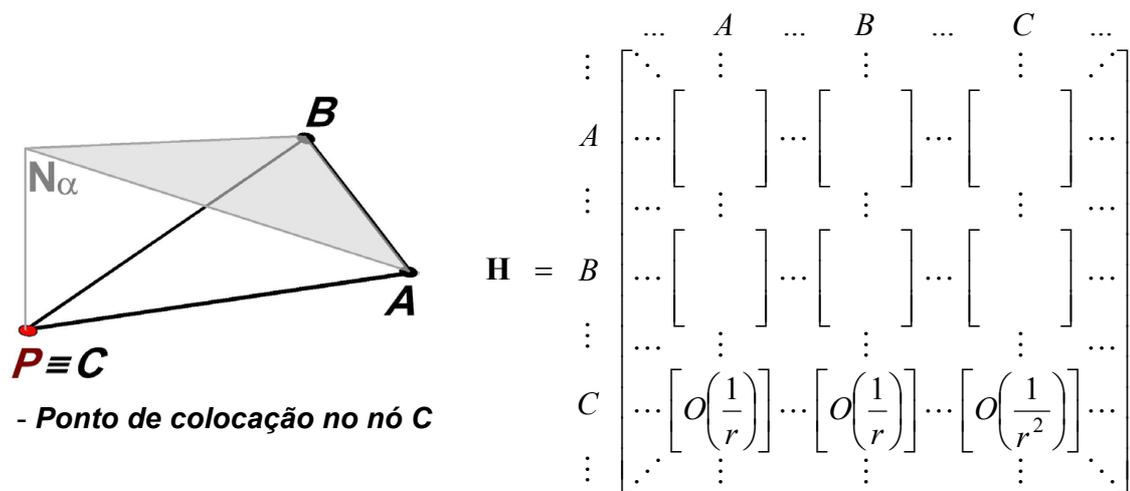


FIGURA 16 – Singularidade nos termos das submatrizes de **H**.

Os coeficientes gerados por estas integrais concentram-se nas submatrizes diagonais da matriz global  $\mathbf{H}$ , e neste trabalho sua avaliação direta não é efetuada. Utiliza-se o conceito de movimento de corpo rígido para esta avaliação indireta (seção 4.1).

Já a singularidade do termo  $U_{ji}(P,Q)$  na Eq. 68, de ordem  $O(1/r)$ , é dita fraca, e as integrais que a contêm são chamadas fracamente singulares (equivalente ao potencial de camada simples). Este tipo de singularidade ocorre quando o ponto de colocação  $P$  coincide com um dos nós do elemento sob integração, constituindo as submatrizes diagonais da matriz global  $\mathbf{G}$ , como mostra a FIG. 17.

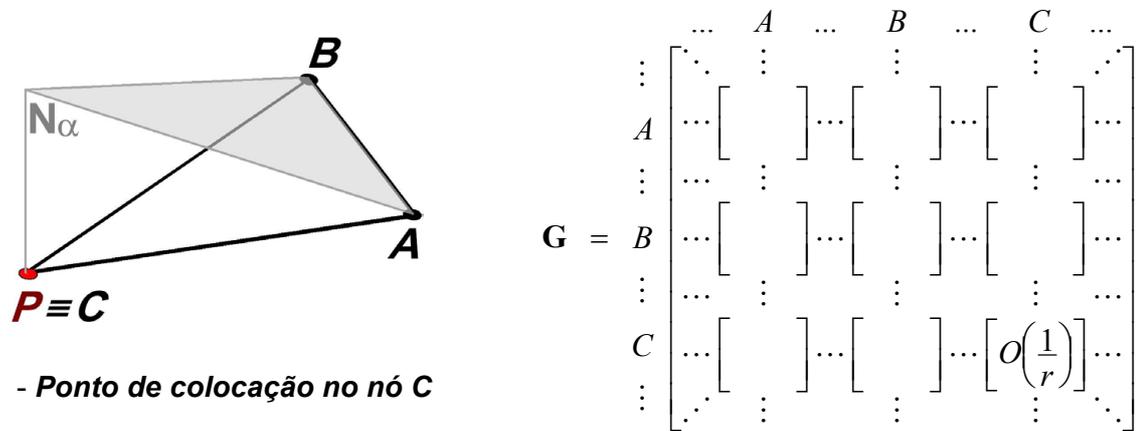


FIGURA 17 – Singularidade nos termos das submatrizes de  $\mathbf{G}$ .

As parcelas relativas aos demais nós não singulares do elemento não requerem técnicas especiais em sua avaliação, conforme será salientado nas seções seguintes.

As singularidades nas equações integrais podem ser reduzidas em um grau ( $O(1/r)$ ), ao se fazer uma transformação de coordenadas apropriada. Nesta transformação, um domínio triangular é mapeado em um quadrado unitário plano, introduzindo-se um termo jacobiano adicional que tem valor nulo no ponto singular. Assim, as integrais fortemente singulares  $O(1/r^2)$  com domínio transformado têm sua ordem reduzida para  $O(1/r)$ , e as fracamente singulares se tornam integrais regulares.

Após esta transformação, com exceção das integrais com singularidade originalmente forte, podem-se aplicar diretamente os esquemas de quadratura tradicionais na avaliação

das integrais envolvidas. As integrais que permanecem singulares (com núcleo  $T_{ji}$ ) são calculadas indiretamente.

### 5.3 – Redução na Ordem da Singularidade do Integrandando

Maneiras diferentes de se fazer a redução na ordem da singularidade podem ser encontradas na literatura, como em LACHAT e WATSON (1976), LI *et al.* (1985), HUANG (1993) e HALL (1994), tendo em comum o mapeamento de um domínio triangular em um quadrado. Apresenta-se a seguir um resumo adaptado do trabalho de LI *et al.* (1985).

A transformação efetuada é denominada mapeamento em coordenadas polares triangulares. Define-se uma região triangular plana  $\Gamma_T$  por três pontos  $A(x_i)$ ,  $B(x_i)$ , e  $C(x_i)$  num espaço tridimensional de coordenadas  $x_i$ , assumindo-se como ponto singular o vértice  $A$ . Este triângulo é mapeado no quadrado unitário  $\Gamma_Q$ , definido num espaço bidimensional de coordenadas locais  $\rho_i$  (coordenadas polares triangulares), com vértices  $D(\rho_j)$ ,  $E(\rho_j)$ ,  $F(\rho_j)$ , e  $G(\rho_j)$ , conforme mostra a FIG. 18.

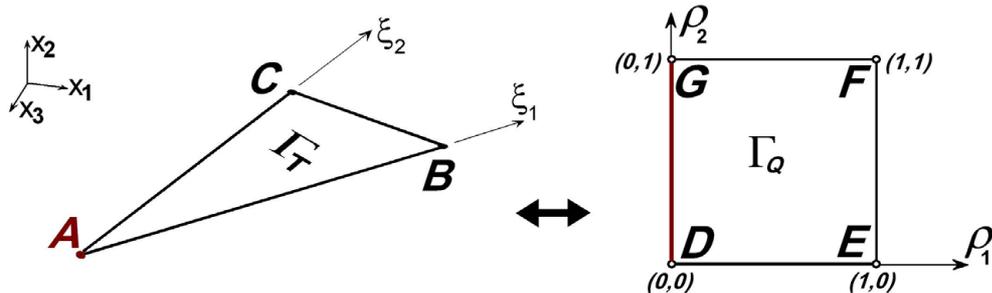


FIGURA 18 – Elemento triangular mapeado em um quadrado unitário

A relação entre as coordenadas  $\rho_i$  e as coordenadas locais do triângulo ( $\xi_i$ ) é direta, sendo as funções de interpolação dadas por:

$$N_1 = \xi_1 = (1 - \rho_1); \quad N_2 = \xi_2 = \rho_1(1 - \rho_2); \quad N_3 = (1 - \xi_1 - \xi_2) = \rho_1 \rho_2 \quad (69)$$

e as coordenadas de um ponto  $(\rho_1, \rho_2)$  pertencente ao domínio quadrado  $\Gamma_Q$  são expressas em coordenadas globais através da equação:

$$x_i = (1 - \rho_1) \cdot x_i^{(A)} + \rho_1(1 - \rho_2) \cdot x_i^{(B)} + \rho_1 \rho_2 \cdot x_i^{(C)} \quad (70)$$

Nota-se que o nó singular do triângulo, definido como vértice  $A(x_i)$  corresponde ao lado  $[G(\rho_j)D(\rho_j)]$  de  $\Gamma_Q$ , e os lados  $[AB]$ ,  $[BC]$ , e  $[CA]$  de  $\Gamma_T$  correspondem respectivamente a  $[DE]$ ,  $[EF]$ , e  $[FG]$  de  $\Gamma_Q$ . A distância de um ponto  $Q \in \Gamma_Q$  ao ponto fonte  $P$  (nó  $A$ ) é expressa por:

$$r = \left[ (Q_1 - x_1^{(A)})^2 + (Q_2 - x_2^{(A)})^2 + (Q_3 - x_3^{(A)})^2 \right]^{1/2} = \rho_1 (a_1 + a_2 \rho_2 + a_3 \rho_2^2)^{1/2} \quad (71)$$

onde:

$$a_1 = (x_1^{(BA)})^2 + (x_2^{(BA)})^2 + (x_3^{(BA)})^2; \quad a_2 = 2(x_1^{(BA)} x_1^{(CB)} + x_2^{(BA)} x_2^{(CB)} + x_3^{(BA)} x_3^{(CB)}) \quad (72)$$

$$a_3 = (x_1^{(CB)})^2 + (x_2^{(CB)})^2 + (x_3^{(CB)})^2; \quad x_i^{(BA)} = x_i^{(B)} - x_i^{(A)}; \quad x_i^{(CB)} = x_i^{(C)} - x_i^{(B)}$$

A derivada parcial  $r_{,i} = \partial r / \partial x_i$ , não depende de  $\rho_1$ , e para um ponto  $Q$  em  $\Gamma_T$  é escrita como:

$$r_{,i} = \frac{Q_i - x_i^{(A)}}{r} = \frac{x_i^{(BA)} + \rho_2 x_i^{(CB)}}{(a_1 + a_2 \rho_2 + a_3 \rho_2^2)^{1/2}} \quad (73)$$

O jacobiano do mapeamento é definido como:

$$J_M = 2\rho_1 A_e, \quad \text{sendo } d\Gamma_T = J_M d\rho_1 d\rho_2 \quad (74)$$

onde  $A_e$  representa a área do triângulo  $\Gamma_T$ . O jacobiano para o elemento triangular plano deixa assim de ser constante, se anulando para  $\rho_1 = 0$  ( $\Rightarrow$  lado  $[GD] \Leftrightarrow$  ponto  $A(x_i)$ ).

Nas expressões das integrais

$$\int_{\langle \Gamma \rangle} T_{ji}(P(x_i), Q(x_i)) u_i(Q(x_i)) d\Gamma(Q(x_i)) \quad \text{e} \quad \int_{\Gamma} U_{ji}(P(x_i), Q(x_i)) t_i(Q(x_i)) d\Gamma(Q(x_i)) \quad (75)$$

denominando as funções  $T_{ji}$  e  $U_{ji}$  genericamente por:

$$F\left(r(x_i), \frac{\partial r}{\partial x_m}\right) = \frac{f\left(\frac{\partial r}{\partial x_m}\right)}{r^s(x_i)}, \quad \text{onde } \begin{cases} s = 1, & \text{para } F \Leftrightarrow U_{ji} \\ s = 2, & \text{para } F \Leftrightarrow T_{ji} \end{cases}; \quad m=1,2,3 \quad (76)$$

e denominando-se como  $q$  as funções  $t_i$  ou  $u_i$ , pode-se escrever as expressões da Eq. 75 de forma genérica como:

$$\int_{\Gamma} \frac{f(r, m)}{r^s(x_i)} q(x_i) d\Gamma(x_i) \quad (77)$$

Considerando-se as funções de interpolação em coordenadas locais ( $\rho_1, \rho_2$ ), e o nó singular como sendo o nó  $A$ , pode-se escrever também, as integrais da Eq. 75 como:

$$\int_{\Gamma} \frac{f(r, m)}{r^s(\rho_i)} \cdot [N_1 q^{(A)} + N_2 q^{(B)} + N_3 q^{(C)}] d\Gamma(\rho_1, \rho_2) \quad (78)$$

Nota-se que, como  $r^s(\rho_j)$  tem ordem  $O(\rho_1^s)$  e as funções de interpolação  $N_2$  e  $N_3$  (respectivamente  $\rho_1(1-\rho_2)$  e  $\rho_1\rho_2$ ) têm ordem  $O(\rho_1)$ , a singularidade é eliminada para  $s = 1$  e reduzida em um grau para  $s = 2$ , na parcela correspondentes aos nós não singulares ( $B$  e  $C$ ). A parcela relativa ao nó singular permanece inalterada, já que  $N_1 = (1 - \rho_1)$ .

Escrevendo-se a integral formalmente em termos de coordenadas polares triangulares (usando Eq. 71 e Eq. 73), e mudando o domínio de integração para o quadrado unitário, tem-se:

$$\int_0^1 \int_0^{1-\rho_1} \frac{f\left[\frac{x_m^{(BA)} + \rho_2 x_m^{(CB)}}{(a_1 + a_2\rho_2 + a_3\rho_2^2)^{1/2}}\right]}{[\rho_1(a_1 + a_2\rho_2 + a_3\rho_2^2)^{1/2}]^s} [(1-\rho_1)q^{(A)} + \rho_1(1-\rho_2)q^{(B)} + \rho_1\rho_2 q^{(C)}] 2\rho_1 A_e d\rho_1 d\rho_2 \quad (79)$$

Fazendo-se as simplificações diretas aplicáveis, nota-se a regularização das integrais com núcleo em deslocamento fundamental, podendo-se escrever:

$$2 A_e \int_0^1 \int_0^1 \frac{f(r, m)}{(a_1 + a_2 \rho_2 + a_3 \rho_2^2)^{1/2}} \left[ (1 - \rho_1) t_i^{(A)} + \rho_1 (1 - \rho_2) t_i^{(B)} + \rho_1 \rho_2 t_i^{(C)} \right] d\rho_1 d\rho_2 \quad (80)$$

A integral da Eq. 80 é regular. A integral com núcleo em força de superfície fundamental conserva a singularidade somente na parcela relativa ao nó singular  $A$  (onde  $\rho_1$  pode ser nulo), sendo as demais regulares, conforme se mostra abaixo:

$$2 A_e \int_0^1 \int_0^1 f(r, m) \left[ \frac{(1 - \rho_1) u_i^{(A)}}{\rho_1 (a_1 + a_2 \rho_2 + a_3 \rho_2^2)^{1/2}} + \frac{(1 - \rho_2) u_i^{(B)} + \rho_2 u_i^{(C)}}{(a_1 + a_2 \rho_2 + a_3 \rho_2^2)^{1/2}} \right] d\rho_1 d\rho_2 \quad (81)$$

Para aplicação direta da quadratura de Gauss padrão, deve-se fazer ainda, o remapeamento para as coordenadas adimensionais de integração  $\eta_j$  (variando de -1 a 1 nas duas direções), da maneira seguinte:

$$\rho_j = \frac{\eta_j + 1}{2} \Rightarrow d\rho_1 d\rho_2 = \frac{1}{4} d\eta_1 d\eta_2 \quad (82)$$

Resumindo-se então, de forma genérica tem-se:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underbrace{\frac{f(r, m)}{r(\eta_j)^s}}_{\substack{s = 2 \text{ para } T_{ji} \\ s = 1 \text{ para } U_{ji}}} \underbrace{\left[ (1 - \rho_1) q^{(A)} + \rho_1 (1 - \rho_2) q^{(B)} + \rho_1 \rho_2 q^{(C)} \right]}_{\substack{\text{funções de interpolação e valores para} \\ \text{os nós } A, B \text{ e } C}} \underbrace{2 \rho_1 A_e \frac{1}{4}}_{\text{jacobianos}} d\eta_1 d\eta_2 \quad (83)$$

E na forma de integração de Gauss escreve-se:

$$\sum_{k=1}^{NPI} \sum_{L=1}^{NPI} \sum_{\alpha=1}^n \left[ F_{ji} \quad N^\alpha \quad J_M \quad \frac{1}{4} \quad w_k \quad w_L \right] \quad (84)$$

Para o caso de elementos com aproximação quadrática (possivelmente curvos), é necessário um mapeamento adicional, que transforma o elemento definido em coordenadas espaciais  $x_i$  num triângulo plano em coordenadas  $\xi_i$ . Sobre este triângulo plano, caso o nó singular seja um dos nós de vértice, aplica-se o procedimento de integração já descrito. Caso contrário, é necessária uma subdivisão do triângulo plano

em dois triângulos que têm como um dos vértices o nó singular, conforme a FIG. 19, para aplicação do procedimento sobre os dois subelementos gerados.

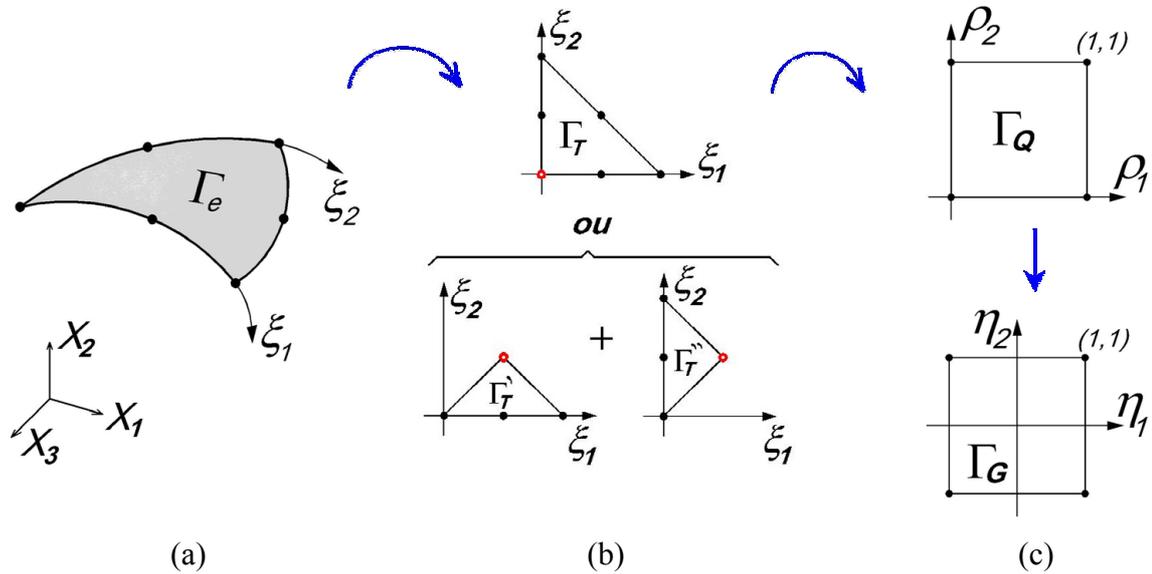


FIGURA 19 – Seqüência de mapeamento em elementos com aproximação quadrática

São necessários neste caso, o uso de três jacobianos, e a Eq. 83 pode ser escrita como:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F \cdot \left[ N_\alpha(\xi_1(\rho_1(\eta_1, \eta_2), \rho_2(\eta_1, \eta_2)), \xi_2(\rho_1(\eta_1, \eta_2), \rho_2(\eta_1, \eta_2))) q^\alpha \right] J_A J_M \frac{1}{4} d\eta_1 d\eta_2 \quad (85)$$

Esta técnica de integração utilizando o mapeamento descrito pode também ser aplicada a elementos regulares. É possível assim, optar pelo uso de uma única técnica de integração em um mesmo algoritmo, caso a clareza e redução no código do programa seja uma preocupação. Para obter melhores resultados, considera-se como o nó A (nó singular) mostrado na FIG. 18, como sendo o nó do elemento que se encontra mais próximo do ponto singular. Assim, a concentração de pontos de integração promovida pelo mapeamento degenerado (FIG. 20) ocorre na região do elemento onde a função tem maior variação.

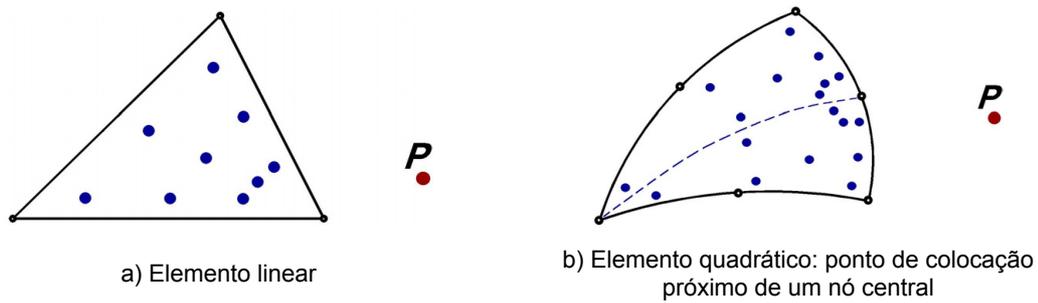


FIGURA 20 – Pontos de integração acumulados próximos do ponto singular.

## 5.4 – Solução Analítica

Soluções analíticas para as integrais da Eq. 75 existem somente para elementos triangulares planos com aproximação constante ou linear, pois sua complexidade inviabiliza a obtenção de soluções fechadas para elementos com funções aproximadoras de ordem superior. A solução analítica para elementos triangulares lineares foi primeiramente demonstrada por CRUSE (1974), seguindo-se outras deduções equivalentes apresentadas por LI *et al.* (1985) e MILROY *et al.* (1997). Aproveitando-se os conceitos introduzidos sobre mapeamento degenerado em coordenadas polares triangulares (Seção 5.3), a solução analítica é brevemente apresentada a seguir.

As integrais com núcleo  $U_{ji}(P,Q)$  podem ser totalmente regularizadas conforme a Eq.80, permitindo-se assim sua solução de forma fechada. Já as integrais com núcleo  $T_{ji}(P,Q)$  podem ser regularizadas apenas nos nós não singulares. Considerando-se apenas elementos planos,  $\frac{\partial r}{\partial n}$  é sempre nulo, obtendo-se:

$$\int_{\Gamma^e} T_{ji}(P,Q) u_i d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma^e} \frac{k}{r^2} (n_i r_{,j} - n_j r_{,i}) u_i d\Gamma(Q) =$$

$$= k \left\{ \int_{\Gamma^e} \frac{(n_i r_{,j} - n_j r_{,i})}{r^2} [N_A u_i^{(A)}] d\Gamma + \int_{\Gamma^e} \frac{(n_i r_{,j} - n_j r_{,i})}{r^2} [N_B u_i^{(B)} + N_C u_i^{(C)}] d\Gamma \right\} \quad (86)$$

onde  $k$  é uma constante da solução fundamental. A segunda integral à direita da igualdade pode ser resolvida analiticamente após a regularização promovida pela

transformação de coordenadas. No caso da primeira integral, considerando-se que  $N_A = I - N_B - N_C$ , tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma^e} \frac{(n_i r_{,j} - n_j r_{,i})}{r^2} N_A u_i^{(A)} d\Gamma = \\ & = u_i^{(A)} \int_{\Gamma^e} \frac{(n_i r_{,j} - n_j r_{,i})}{r^2} d\Gamma + \left[ \int_{\Gamma^e} \frac{(n_i r_{,j} - n_j r_{,i})}{r^2} [N_B u_i^{(B)} + N_C u_i^{(C)}] d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (87)$$

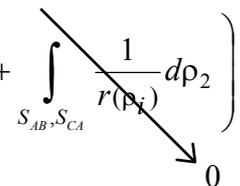
A última integral à direita da igualdade na Eq. 87 é a mesma considerada anteriormente, passível de regularização e solução analítica. Conforme CRUSE (1969), a primeira integral pode ser reduzida para:

$$\int_{\Gamma^e} \frac{(n_i r_{,j} - n_j r_{,i})}{r^2} d\Gamma = \int_{\Gamma^e} \varepsilon_{jik} \varepsilon_{lmk} n_l (r^{-1})_{,m} d\Gamma = \varepsilon_{jik} \oint_S \frac{1}{r} dS_k \quad (88)$$

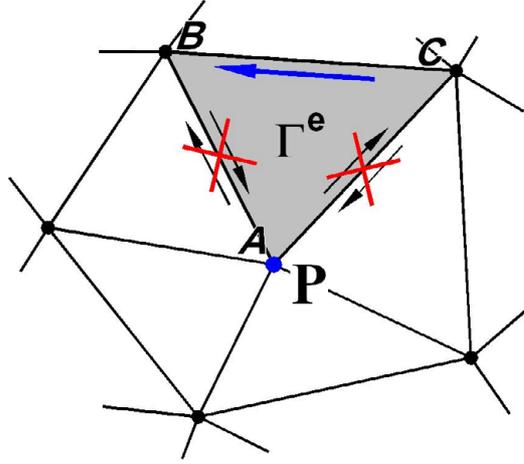
onde  $\varepsilon_{jik}$  é o símbolo de permutação de Levi-Civita. Na Eq. 88, através do teorema de Stokes, a integral foi convertida em integral de linha sobre os lados do elemento ( $S_{AB}$ ,  $S_{BC}$ , e  $S_{CA}$ ). Conforme a FIG. 21, nota-se que quando são considerados os elementos adjacentes, que compartilham o nó singular  $A$ , as integrais sobre os lados  $AB$  e  $CA$  se cancelam (mesmo valor e sinais opostos), sendo necessária apenas a avaliação no lado  $BC$ . Considerando-se as definições básicas de coordenadas polares triangulares (Eq. 71 e 72), o diferencial de linha  $dS_k$ , representado no espaço por  $dx_k$ , pode ser expresso, lembrando que no lado  $BC$  do elemento  $\rho_1 = 1$  e  $d\rho_1 = 0$ , por:

$$dx_k = \frac{\partial x_k}{\partial \rho_1} d\rho_1 = \left[ -x_k^{(A)} + (1 - \rho_2)x_k^{(B)} + \rho_2 x_k^{(C)} \right] d\rho_1 + \left[ -\rho_1 x_k^{(B)} + \rho_1 x_k^{(C)} \right] d\rho_2 = x_k^{(CB)} d\rho_2 \quad (89)$$

A integral é então escrita como:

$$\int_{\Gamma^e} \frac{(n_i r_{,j} - n_j r_{,i})}{r^2} d\Gamma = \varepsilon_{jik} \left( x_k^{(CB)} \int_{S_{BC}} \frac{1}{r(\rho_i)} d\rho_2 + \int_{S_{AB}, S_{CA}} \frac{1}{r(\rho_i)} d\rho_2 \right) \quad (90)$$


A expressão acima é regular, com solução analítica determinada.

FIGURA 21 – Segmentos adjacentes concorrendo no nó singular  $A$ .

Neste trabalho as integrais fortemente singulares não são calculadas diretamente. As expressões das soluções analíticas obtidas podem ser então representadas como se segue (LI *et al.*, 1985):

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma^e} U_{ji} t_i d\Gamma = & t_i^{(A)} \left\{ \frac{A_e}{16\pi(1-\nu)G} \left[ (3-4\nu)\delta_{ji} I_0 + x_j^{(BA)} x_i^{(BA)} I_2 + (x_i^{(CB)} x_j^{(BA)} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + x_j^{(CB)} x_i^{(BA)}) I_3 + x_j^{(CB)} x_i^{(CB)} I_4 \right] \right\} + t_i^{(B)} \left\{ \frac{A_e}{16\pi(1-\nu)G} \left[ (3-4\nu)\delta_{ji} (I_0 - I_1) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + x_j^{(BA)} x_i^{(BA)} (I_2 - I_3) + (x_i^{(CB)} x_j^{(BA)} + x_j^{(CB)} x_i^{(BA)}) (I_3 - I_4) + x_j^{(CB)} x_i^{(CB)} (I_4 + \right. \right. \\
 & \left. \left. - I_5) \right] \right\} + t_i^{(C)} \left\{ \frac{A_e}{16\pi(1-\nu)G} \left[ (3-4\nu)\delta_{ji} I_1 + x_j^{(BA)} x_i^{(BA)} I_3 + (x_i^{(CB)} x_j^{(BA)} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + x_j^{(CB)} x_i^{(BA)}) I_4 + x_j^{(CB)} x_i^{(CB)} I_5 \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{91}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma^e} T_{ji} u_i d\Gamma = & u_i^{(A)} \left\{ \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)} \left[ \varepsilon_{jik} x_k^{(CB)} I_0 + 2A_e (n_i x_j^{(BA)} - n_j x_i^{(BA)}) I_2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2A (n_i x_j^{(CB)} - n_j x_i^{(CB)}) I_3 \right] \right\} + u_i^{(B)} \left\{ \frac{(1-2\nu)A}{4\pi(1-\nu)} \left[ (n_j x_i^{(BA)} - n_i x_j^{(BA)}) I_2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + (n_j x_i^{(CB)} - n_i x_j^{(CB)}) I_3 + (n_i x_j^{(BA)} - n_j x_i^{(BA)}) I_3 + (n_i x_j^{(CB)} - n_j x_i^{(CB)}) I_4 \right] \right\} + \\
 & + u_i^{(C)} \left\{ \frac{(1-2\nu)A_e}{4\pi(1-\nu)} \left[ (n_j x_i^{(BA)} - n_i x_j^{(BA)}) I_3 + (n_j x_i^{(CB)} - n_i x_j^{(CB)}) I_4 \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{92}$$

Onde  $A_e$  é a área do elemento. Os termos  $I_i$  são dados por<sup>1</sup> (HARTMANN, 1989) :

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{\Psi^{1/2}} d\rho_2 = \frac{1}{\sqrt{a_3}} \left\{ \ln \left[ 2\sqrt{\lambda a_3} + a_2 + 2a_3 \right] - \ln \left( 2\sqrt{a_1 a_3} + a_2 \right) \right\}; \quad (93)$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\rho_2}{\Psi^{1/2}} d\rho_2 = \frac{\omega}{a_3} - \frac{\sqrt{a_1}}{a_3} - \frac{a_2}{2a_3} I_0; \quad (94)$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\Psi^{3/2}} d\rho_2 = \frac{2a_2}{\zeta\sqrt{a_1}} - \frac{2(a_2 + 2a_3)}{\zeta\omega}; \quad (95)$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{\rho_2}{\Psi^{3/2}} d\rho_2 = \frac{2(2a_1 + a_2)}{\zeta\omega} - \frac{4a_1}{\zeta\sqrt{a_1}}; \quad (96)$$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{\rho_2^2}{\Psi^{3/2}} d\rho_2 = \frac{2a_1 a_2}{a_3 \zeta \sqrt{a_1}} - \frac{2a_2^2 - 4a_1 a_3 + 2a_1 a_2}{a_3 \zeta \omega} + \frac{1}{a_3} I_0; \quad (97)$$

$$I_5 = \int_0^1 \frac{\rho_2^3}{\Psi^{3/2}} d\rho_2 = \frac{a_1(8a_1 a_3 - 3a_2^2)}{a_3^2 \zeta \sqrt{a_1}} - \frac{3a_2}{2a_3^2} I_0 + \\ - \frac{a_2(10a_1 a_3 - 3a_2^2) - a_3 \zeta + a_1(8a_1 a_3 - 3a_2^2)}{a_3^2 \zeta \omega}. \quad (98)$$

Onde :

$$\begin{aligned} \Psi &= a_1 + a_2 \rho_2 + a_3 \rho_2^2; \\ \lambda &= a_1 + a_2 + a_3; \\ \omega &= \sqrt{\lambda}; \\ \zeta &= a_2^2 - 4a_1 a_3. \end{aligned} \quad (99)$$

<sup>1</sup> As integrais  $I_1$  e  $I_5$  em LI, *et al.* (1985) contêm erros de impressão, assim como a integral  $I_2$  apresentada em HARTMANN (1989).

# 6

## Implementação Computacional

Utilizando a teoria e os algoritmos apresentados até aqui, os problemas foram analisados seguindo a metodologia descrita neste capítulo. O programa implementado tem como base o algoritmo do programa de elementos de contorno para problemas bidimensionais com base nas formulações auto-regularizadas das EIC, desenvolvido por RICHARDSON (1998). Foi utilizada como linguagem de programação o FORTRAN 77, com algumas funções e melhorias disponíveis no FORTRAN 90. Informações mais completas sobre o programa são apresentadas no Anexo B. Como interface gráfica para pré e pós-processador utilizou-se o programa GiD, desenvolvido pelo CIMNE<sup>1</sup>. Apresenta-se também neste capítulo o fluxograma básico do programa implementado no trabalho.

### 6.1 – Metodologia

Neste trabalho nenhuma integral fortemente singular é calculada diretamente, utilizando-se o conceito de movimento de corpo rígido para seu cálculo indireto. Outra alternativa testada foi a utilização da EIC auto-regularizada do deslocamento, em cuja formulação a singularidade forte já foi removida, conforme a Eq. 35. As duas

---

<sup>1</sup> CIMNE – Centro Internacional de Métodos Numéricos em Ingenieria, Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), Barcelona, Espanha.

alternativas são equivalentes, conforme resultados numéricos iguais obtidos, fato já demonstrado analiticamente por CRUSE e RICHARDSON (1996).

As integrais fracamente singulares são calculadas seguindo os esquemas de integração apresentados no Capítulo 5, isto é, para elementos com aproximação linear tem-se a integração analítica e integração numérica de Gauss com mapeamento degenerado. Também foi avaliado o desempenho da integração direta de Hammer com uso de subelementos, processo este utilizado por NAKAGUMA (1979). Para elementos com aproximação quadrática, devido à inexistência de técnicas de integração analíticas, somente as técnicas numéricas são utilizadas.

Para o cálculo das integrais regulares utilizam-se somente técnicas numéricas, que são capazes de fornecer resultados com a precisão requerida, além da simplicidade e generalidade de sua aplicação. Estas integrais são calculadas pelo esquema de quadratura de Hammer ou de Gauss com mapeamento degenerado. Na alternativa em que as integrais fracamente singulares foram calculadas pelo esquema de Hammer, preservou-se este esquema no cálculo das integrais regulares. A mesma consideração é feita para o caso de integração de Gauss com mapeamento degenerado. Na alternativa de integração analítica das integrais fracamente singulares, optou-se por calcular as integrais regulares pelo esquema de Hammer, devido à sua simplicidade, sendo aplicada sempre a técnica de subelementação, seguindo o critério de subdivisão apresentado na Seção 5.1.

Além das técnicas descritas, que consideram o ponto de colocação no contorno, foi implementado um algoritmo alternativo em que os pontos de colocação são posicionados fora do domínio do problema, evitando-se assim qualquer tipo de singularidade nas integrais. A posição do ponto de colocação fora do domínio (ponto fora), é definida na direção da normal média dos elementos que compartilham o nó do contorno. A distância do ponto fora ao nó correspondente no contorno é definida por um parâmetro, denominado  $\alpha$ , que multiplica a média dos lados do elemento. A FIG. 22 apresenta o esquema ilustrativo para elementos planos. No caso de elementos curvos, por simplificação, o valor do lado médio dos elementos foi determinado considerando-

se retas que ligam os nós de vértice do elemento, não sendo calculados os comprimentos das linhas dos lados do elemento. As integrais regulares são calculadas numericamente pelos dois esquemas já citados.

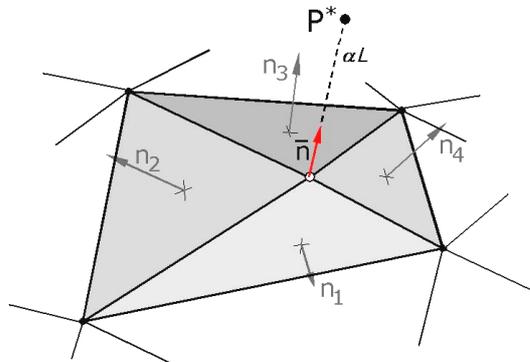


FIGURA 22 – Posicionamento do ponto de colocação fora do domínio

No cálculo de tensões em pontos do contorno, são utilizados os resultados de deslocamentos e forças de superfície obtidas no processamento principal. Trata-se então de uma etapa de pós-processamento, onde nenhuma integração é efetuada. Os resultados das componentes de tensão são calculados em cada nó de cada elemento do contorno, segundo a teoria descrita na Seção 4.3, sendo apresentadas seguindo o sistema de coordenadas globais.

Na avaliação de resultados em pontos internos (etapa de pós-processamento), as integrais são regulares e as técnicas de quadratura numérica (Hammer com subelementos e Gauss com mapeamento degenerado) são empregadas. No caso particular de se considerar pontos muito próximos do contorno, pode ocorrer um comportamento quase singular do integrando, prejudicando assim a qualidade dos resultados. Na análise de deslocamentos, além da formulação clássica, que pode apresentar este tipo de perturbação nos resultados, considera-se também a formulação auto-regularizada da ISD que elimina este tipo de imprecisão, permitindo a análise de pontos internos tão próximos do contorno quanto desejado. Adota-se como ponto  $P$  da Eq. 34, o ponto nodal mais próximo do ponto interno a ser analisado.

## 6.2 – Interface Gráfica

O programa GiD, utilizado como interface gráfica, funciona como um gerenciador do processamento (FIG. 23). Após os procedimentos de modelagem do sólido, geração de malha e entrada de alguns dados específicos para o programa, como por exemplo: escolha do algoritmo, quantidade de pontos a serem usados nas integrações e coordenadas de pontos internos; são gerados arquivos com dados de entrada para o programa implementado, que é acionado dentro do próprio ambiente do GiD. Durante o processamento o programa implementado, que trabalha como um subprograma (*solver*) do GiD, gera novos arquivos com os resultados obtidos. Estes arquivos de resultados são escritos de forma que possam ser reconhecidos e interpretados pelo pós-processador, que os representa graficamente com os recursos disponíveis. Informações mais detalhadas sobre o código do programa e a interação com o GiD são apresentadas no Anexo B.

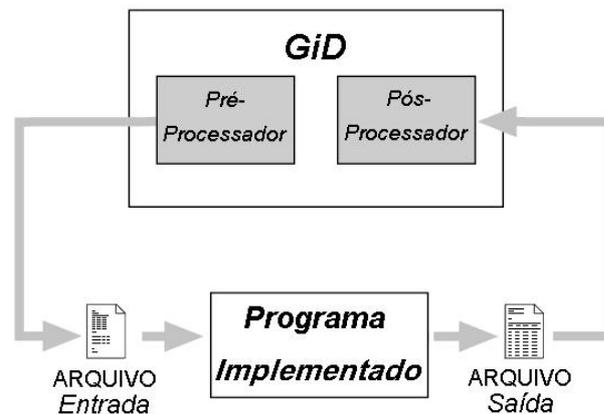


FIGURA 23 – Interação entre o programa e a interface gráfica

## 6.3 – Fluxograma

Um fluxograma descrevendo a seqüência de funcionamento do programa implementado é apresentado na FIG. 24. O arquivo contendo dados de entrada é criado pelo pré-processador (ou editado, se desejado), e os arquivos com resultados são escritos como listagens organizadas e também em arquivos formatados de forma apropriada para interpretação do pós-processador. Caso seja necessário uma avaliação em pontos internos, pode-se fazer apenas um processamento parcial que utiliza um arquivo contendo todos os resultados obtidos no contorno.

## Fluxograma Básico

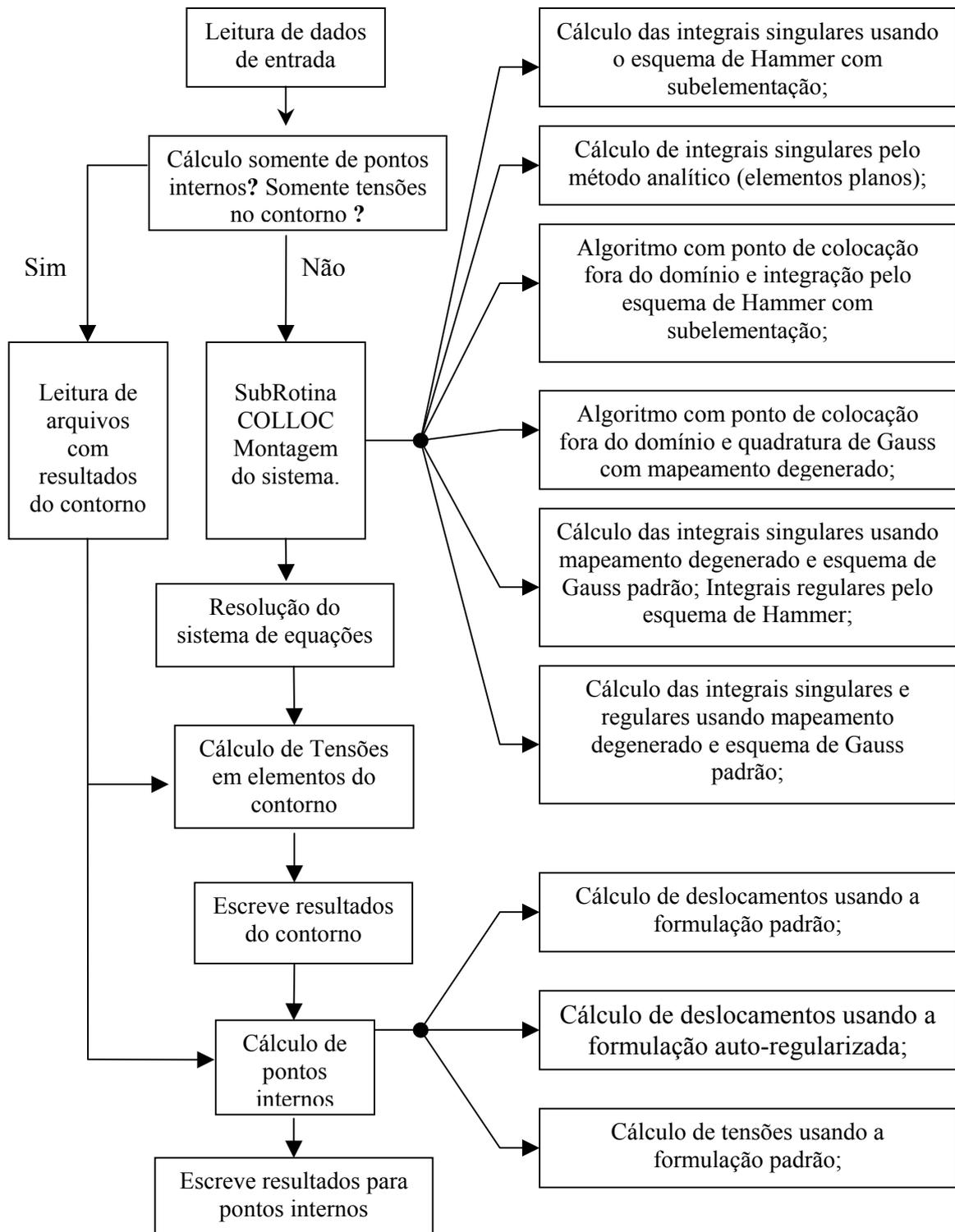


FIGURA 24 – Fluxograma básico do programa

# 7

## **Exemplos e Resultados Numéricos**

Neste capítulo são apresentados exemplos analisados com o programa implementado, utilizando a formulação padrão do MEC no cálculo de valores incógnitos em pontos do contorno e pontos internos, e também a formulação baseada na ISD auto-regularizada no cálculo de deslocamentos de pontos internos. Em todos os exemplos são usados elementos de contorno triangulares isoparamétricos, com funções de forma lineares ou quadráticas (3 ou 6 nós), sendo as integrações numéricas efetuadas através dos algoritmos implementados para a técnica de Hammer com subelementos e de Gauss-Legendre com mapeamento degenerado. Para o caso de elementos triangulares lineares as integrais fracamente singulares são também calculadas analiticamente, através das equações apresentadas no Capítulo 5. As integrais fortemente singulares são calculadas indiretamente, utilizando-se o conceito de movimento de corpo rígido. Exceto especificado o contrário, na quadratura de Hammer são utilizados 13 pontos de integração para cada elemento (ou subelemento), e para quadratura de Gauss utilizam-se 8 pontos de integração em cada direção. A quantidade de pontos de integração utilizada no cálculo de cada elemento varia seletivamente em função destas quantidades inicialmente especificadas, de acordo com a distância do ponto de colocação ao elemento. Os resultados das análises via MEF foram obtidos utilizando-se o programa ANSYS, em sua versão 5.7.

### 7.1 – Exemplo 1 (Avaliação dos esquemas de integração)

Para as análises efetuadas neste exemplo, foram adotados arbitrariamente dois elementos triangulares planos, apresentados na FIG. 25, com 3 ou 6 nós, onde o primeiro triângulo tem forma regular, com lados aproximadamente iguais, e o segundo é um triângulo com forma distorcida, onde o maior lado supera o menor em aproximadamente 3,6 vezes. As funções analisadas são aquelas correspondentes à solução fundamental de Kelvin, presentes nos núcleos das integrais da ISD e IST, para os casos de integrais fracamente singulares e não-singulares. Foram atribuídos arbitrariamente os valores de 1 e 0,3 às constantes correspondentes, respectivamente, ao módulo de elasticidade transversal e coeficiente de Poisson, presentes nas expressões da solução fundamental.

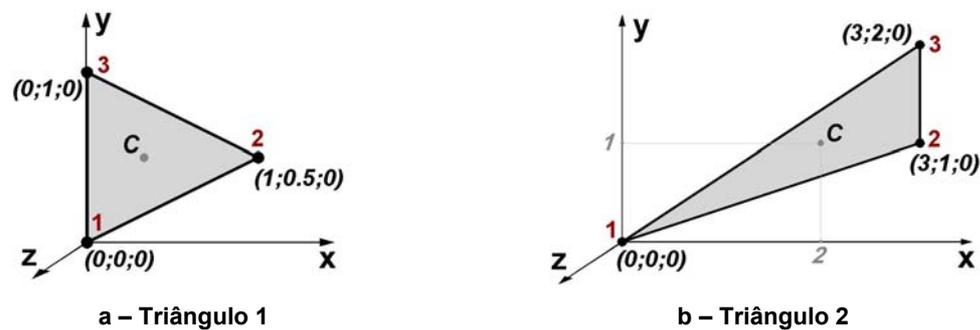


FIGURA 25 – Elementos triangulares utilizados nos testes

#### 7.1.1 – Integrais Fracamente Singulares

O ponto de colocação foi posicionado sobre o nó 2 da FIG. 25-a e FIG. 25-b. Os erros percentuais apresentados são relativos à solução analítica, sendo avaliados os esquemas de integração de Hammer com subelementos, fixando-se em 13 o número de pontos de integração e variando-se a quantidade de subelementos utilizados, limitando a análise a 400 subelementos (total de  $13 \times 400 = 5200$  pontos de integração por elemento). No esquema de integração com regularização do integrando por mapeamento degenerado, é feita a variação na quantidade de pontos de integração de Gauss-Legendre, adotando-se

sempre quantidades iguais de pontos nas duas direções de integração. As análises se limitam à quantidade máxima de 48 pontos de integração em cada direção (total de  $48 \times 48 = 2304$  pontos de integração por elemento). Na FIG. 26 pode-se observar os erros percentuais relativos, obtidos na avaliação das integrais fracamente singulares, utilizando-se os esquemas de Gauss com Mapeamento degenerado (*GM*) e de Hammer com Subelementos (*HS*). São consideradas, representativamente, as integrais com núcleo em deslocamento ( $U_{ji}$ ) e força de superfície ( $T_{ji}$ ) fundamentais abaixo:

$$\int_{\xi} U_{11}(P,Q) N_2 J_A d\xi_{\beta}(Q); \int_{\xi} U_{33}(P,Q) N_2 J_A d\xi_{\beta}(Q); \int_{\xi} T_{13}(P,Q) N_1 J_A d\xi_{\beta}(Q) \text{ e } \int_{\xi} T_{32}(P,Q) N_1 J_A d\xi_{\beta}(Q)$$

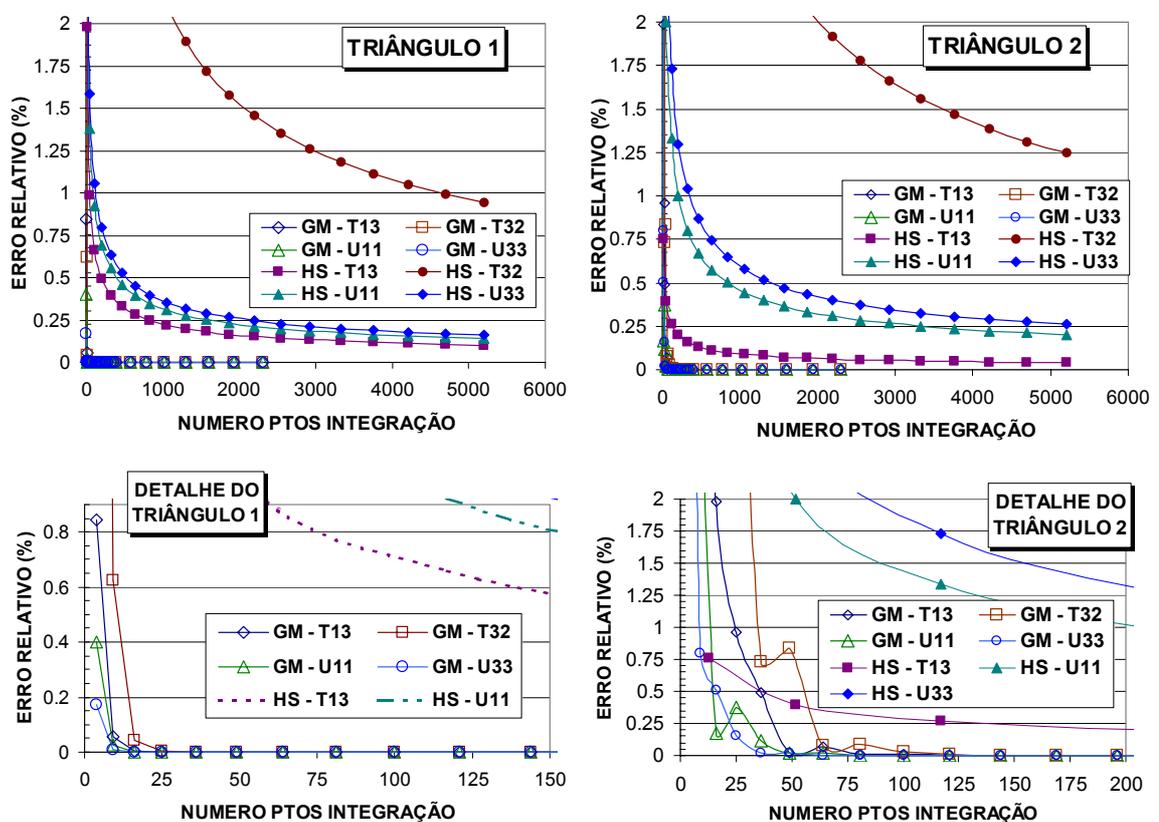


FIGURA 26 – Erro percentual relativo na avaliação de integrais fracamente singulares

Para uma avaliação quantitativa, são apresentados na TAB. 1 os erros obtidos para alguns pontos representativos.

TABELA 1 – Erros na avaliação de integrais **fracamente singulares**

Num. de pontos de integração		Integração de GAUSS COM MAPEAMENTO DEGENERADO			
		Erro Relativo (%)			
<b>TRIÂNGULO 1</b>		$U_{11}$	$U_{33}$	$T_{13}$	$T_{23}$
	4	0,845632825	8,689926966	0,401329379	0,171933357
	16	0,003565753	0,041148663	0,001482313	0,000406623
	36	0,000013371	0,000160882	0,000005252	0,000001060
	64	0,000000048	0,000000585	0,000000018	0,000000003
Num. de pontos de integração		Integração de HAMMER COM SUBELEMENTOS			
		Erro Relativo (%)			
<b>TRIÂNGULO 1</b>		$U_{11}$	$U_{33}$	$T_{13}$	$T_{23}$
	52	0,988224041	9,461517461	1,383031849	1,586873034
	637	0,282349591	2,703292485	0,395151912	0,453392296
	2197	0,152034395	1,455619030	0,212774106	0,244134313
	5200	0,098822357	0,946152370	0,138303169	0,158687304
Num. de pontos de integração		Integração de GAUSS COM MAPEAMENTO DEGENERADO			
		Erro Relativo (%)			
<b>TRIÂNGULO 2</b>		$U_{11}$	$U_{33}$	$T_{13}$	$T_{23}$
	9	3,262488891	0,799709952	9,880576360	16,641088237
	25	0,375071344	0,157617015	0,959424143	5,156426080
	64	0,019217064	0,001350258	0,067229529	0,074635702
	144	0,000103232	0,000059210	0,000221531	0,004466668
Num. de pontos de integração		Integração de HAMMER COM SUBELEMENTOS			
		Erro Relativo (%)			
<b>TRIÂNGULO 2</b>		$U_{11}$	$U_{33}$	$T_{13}$	$T_{23}$
	52	2,000443084	2,598657797	0,392894296	12,509827144
	637	0,571639109	0,742090327	0,113595129	3,560572039
	2197	0,307805731	0,399587077	0,061166878	1,917230034
	5200	0,200073725	0,259731600	0,039758471	1,246199521

A regularização do integrando, promovida pelo mapeamento degenerado, faz com que os resultados sejam bastante satisfatórios mesmo com o uso de, relativamente, poucos pontos de integração, enquanto o esquema de integração de Hammer com subelementos apresenta uma convergência bastante lenta dos resultados. Nota-se também que os erros são consideravelmente maiores ao se considerar o domínio triangular irregular. Assim, deve-se ter um cuidado na geração das malhas de modo a se evitar elementos muito irregulares, que conduzam a integrações imprecisas.

### 7.1.2 – Integrais Não-Singulares

Nesta série de testes, os pontos de colocação são posicionados segundo a direção normal ao centróide dos elementos, como ilustrado na FIG. 27 (triângulo 2). Estas posições, segundo CRUSE e AITHAL (1993), BU e DAVIES (1995) e MILROY *et al.* (1997), acarretam os maiores erros quando o ponto se aproxima do elemento (problemas de quase-singularidade). A distância do ponto à superfície do elemento é determinada em função da média de seus lados. Os valores de referência foram obtidos com uso do programa MATHEMATICA, para integrais regulares com núcleo fracamente singular ( $U_{ji}$ ), fortemente singular ( $T_{ji}$  e  $D_{kij}$ ) e hipersingular ( $S_{kij}$ ).

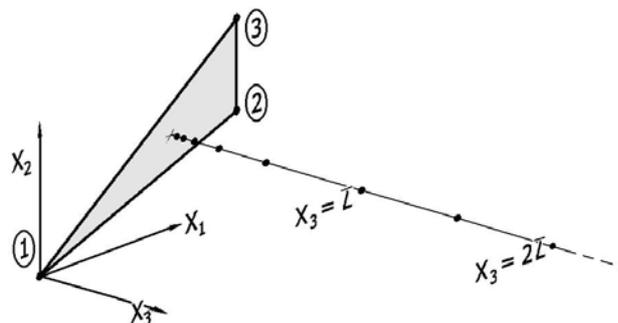


FIGURA 27 – Posições do ponto de colocação utilizadas nos testes

Foram estudados os esquemas de Hammer com divisão em subelementos (*HS*), e de Gauss-Legendre com mapeamento degenerado (*GM*). Este segundo esquema, apesar do mapeamento efetuado, não reduz a ordem da singularidade na integral quando o ponto de colocação não coincide com um dos nós do elemento. A FIG. 28 ilustra a perda de precisão dos resultados quando o ponto de colocação se aproxima da superfície do elemento. Foram fixados 13 pontos de integração no esquema de Hammer, e divisão em 25 subelementos, totalizando 325 pontos, e 18 pontos de integração de Gauss em cada direção, totalizando 324 pontos. As integrais representativas analisadas são:

$$\sum_{\alpha} \int_{\xi} U_{11}(P, Q) N_{\alpha} J_A d\xi_{\beta}(Q); \quad \sum_{\alpha} \int_{\xi} U_{13}(P, Q) N_{\alpha} J_A d\xi_{\beta}(Q); \quad \sum_{\alpha} \int_{\xi} T_{11}(P, Q) N_{\alpha} J_A d\xi_{\beta}(Q); \quad \sum_{\alpha} \int_{\xi} T_{13}(P, Q) N_{\alpha} J_A d\xi_{\beta}(Q);$$

$$\sum_{\alpha} \int_{\xi} D_{111}(P, Q) N_{\alpha} J_A d\xi_{\beta}(Q); \quad \sum_{\alpha} \int_{\xi} D_{223}(P, Q) N_{\alpha} J_A d\xi_{\beta}(Q); \quad \sum_{\alpha} \int_{\xi} S_{111}(P, Q) N_{\alpha} J_A d\xi_{\beta}(Q) \text{ e } \sum_{\alpha} \int_{\xi} S_{223}(P, Q) N_{\alpha} J_A d\xi_{\beta}(Q)$$

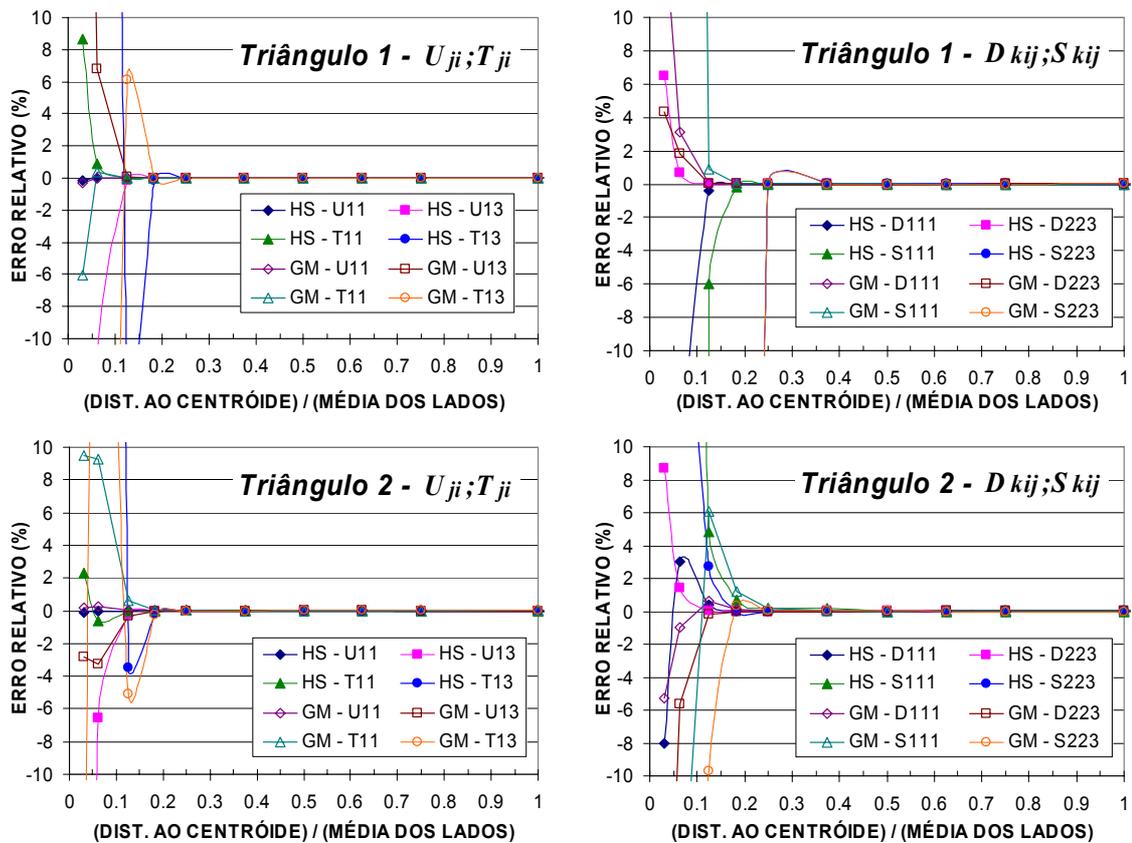


FIGURA 28 – Perda de precisão na integração

Apesar do grande número de pontos de integração utilizados, observa-se uma grande instabilidade dos resultados quando o ponto de colocação se aproxima do elemento em distâncias menores que 0,25 vezes a média de seus lados, sendo que esta instabilidade é mais acentuada nas integrais com grau de singularidade maior. Os resultados apresentados para os elementos planos com 6 nós (variação quadrática) apresentam resultados idênticos aos obtidos para os elementos com 3 nós, até o limite de precisão do computador, e não são apresentados aqui.

O uso de menos pontos de integração, por sua vez, faz com que esta instabilidade seja verificada a distâncias maiores que  $0,25 \bar{L}$ . Ainda, como é esperado, para distâncias menores, o uso de mais pontos assegura uma melhor qualidade dos resultados. Na tentativa de se estabelecer o número ótimo de pontos de integração necessários para assegurar a precisão destas avaliações, muitos algoritmos foram propostos, destacando-

se o de BU e DAVIES (1995), que apresentam tabelas com alguns coeficientes a serem empregados em equações propostas, de acordo com o tipo de singularidade da integral.

Neste trabalho, utilizou-se um critério de escolha do número de pontos de integração baseado em uma série de testes realizados nestes dois domínios triangulares, pretendendo-se manter o erro na integração abaixo de um certo limite desejado. Considera-se como  $\bar{L}$  a média dos lados do triângulo formado pelos três nós de vértice do elemento sob integração, e  $d$  a distância de  $P$  ao nó mais próximo ou ao centróide. O critério para integração de Hammer com subelementos adotado foi apresentado no Capítulo 5 (Eq. 65), onde o número de subelementos  $NS$  é dado por:

$$\text{NDIV} = \text{round} \left( \sqrt{\frac{10}{\alpha}} \right); \quad \alpha = \frac{d}{\bar{L}};$$

$$\text{Para} \begin{cases} 3\bar{L} \geq d, & NS = (\text{NDIV})^2 \\ 3\bar{L} < d, & \text{não é feita divisão em subelementos.} \end{cases}$$

Para a integração de Gauss com mapeamento degenerado, tem-se, a partir de uma certa quantidade de pontos de integração estabelecida *a priori*  $NPI$ , a quantidade de pontos a ser utilizada em cada direção de integração ( $NP$ ) por elemento dada por:

$$\text{Para} \begin{cases} d \geq 10\bar{L}, & NP = \frac{NPI}{2} \\ 10\bar{L} > d \geq 3\bar{L}, & NP = NPI \\ 3\bar{L} > d \geq \bar{L}, & NP = 1,25 NPI \\ \bar{L} > d, & NP = \frac{1,20 NPI}{\alpha} \quad ; \quad \alpha = \frac{d}{\bar{L}} \end{cases} \quad (100)$$

O número total de pontos de integração para um elemento é dado por  $(NP)^2$ . Estes critérios foram estabelecidos por testes numéricos visando limitar os erros na avaliação das integrais a um valor máximo de 0,001 % (menor erro constante nas tabelas de BU e DAVIES, 1995). Na FIG. 29 são mostradas, para as integrais estudadas, as quantidades mínimas de pontos de integração necessária para se manter o erro abaixo do limite fixado para cada integrando, e uma curva em linha contínua mostrando o número de pontos de integração utilizado ao adotar os critérios apresentados. Os critérios

apresentados servem como envoltórias destas quantidades mínimas necessárias, assegurando que ao utilizá-los, os erros estarão abaixo deste limite arbitrado.

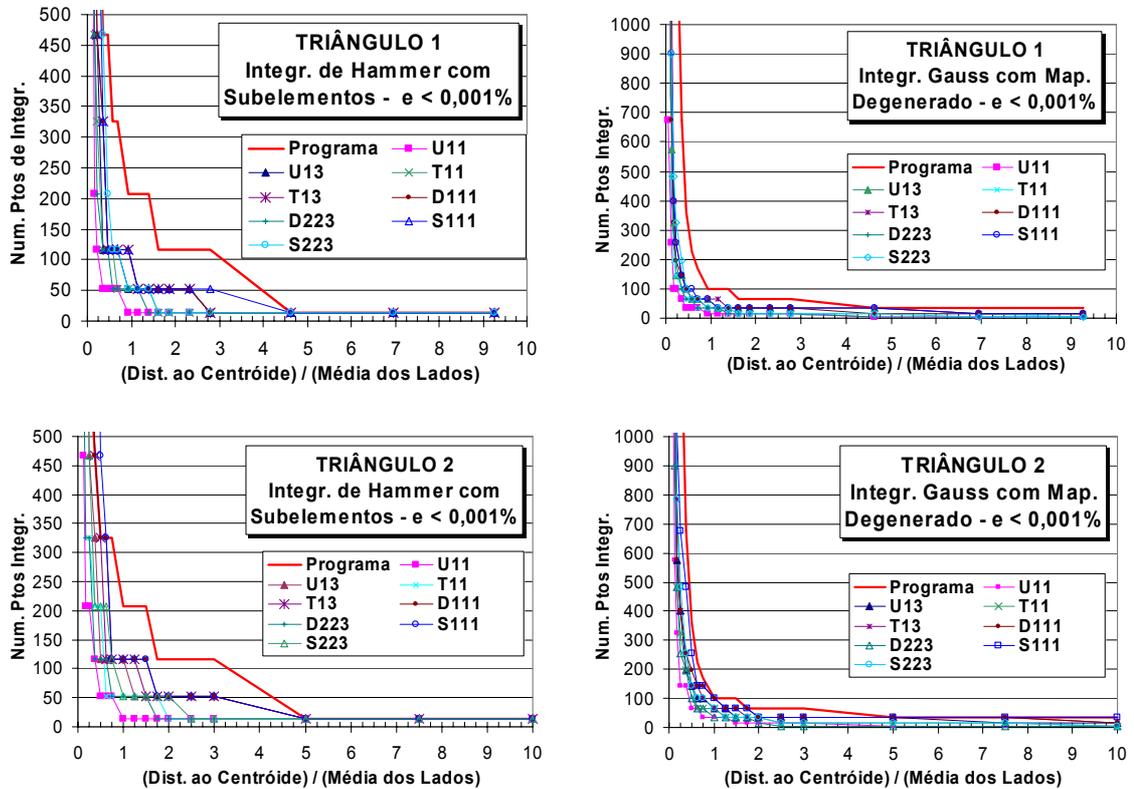


FIGURA 29 – Avaliação do critério para definição do número de pontos de integração

Os resultados foram obtidos ao se considerar inicialmente o número de pontos de integração de Hammer como 13 e de Gauss-Legendre como 8 em cada direção, valores recomendados, que podem ser alterados conforme desejado. Na avaliação das integrais com núcleo  $S_{kij}$  (que apresentam singularidade mais acentuada) pelo método de Hammer com subelementos, é necessário acrescentar-se em duas unidades o número de divisões em cada lado do elemento, quando a distância relativa é menor que 0,75, assegurando uma melhor avaliação destas integrais.

Não se pretende aqui propor um novo critério eficiente de integração seletiva, uma vez que o critério apresentado é muito conservador, mas apenas assegurar a qualidade das integrações efetuadas no programa implementado, eliminando-se uma possível fonte de dúvidas em relação aos resultados. Para pontos muito próximos do elemento (distâncias

menores que  $0,3L$ ), critérios mais elaborados devem ser utilizados, uma vez que a quantidade de pontos de integração se torna muito grande para fins práticos.

No esquema de quadratura de Gauss com mapeamento degenerado, pode-se observar na FIG. 30 o efeito causado pela quase-singularidade na função mapeada sobre o domínio quadrado, uma vez que o mapeamento não reduz a ordem de singularidade do integrando. Como exemplo, as figuras mostram qualitativamente a distribuição da função com núcleo  $D_{223}$ , com singularidade forte, sobre o quadrado mapeado do triângulo 1, para alguns valores do parâmetro de distância  $\alpha$  ( $\alpha = d/\bar{L}$ ). Possivelmente, o uso de subdivisões neste domínio de integração mapeado pode vir a melhorar consideravelmente os resultados para integrais com comportamento quase-singular.

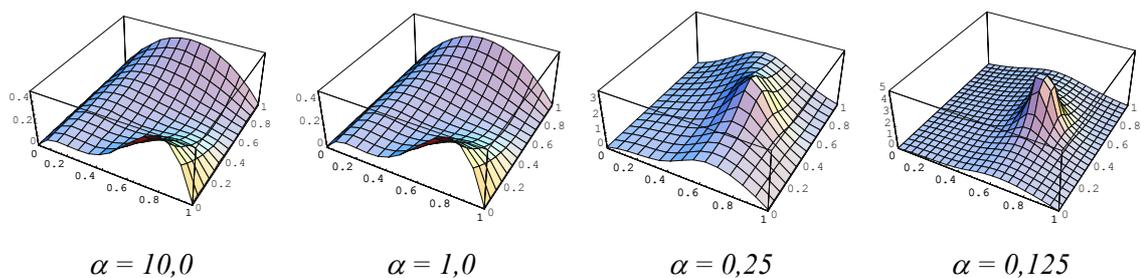


FIGURA 30 – Comportamento quase-singular remanescente no domínio mapeado

## 7.2 – Exemplo 2 (Cubo Submetido à Tensão Uniforme)

Devido à sua simplicidade, este exemplo funciona como um “patch test” para os algoritmos implementados. Um sólido de formato cúbico com dimensões  $2 \times 2 \times 2$ , Módulo de Elasticidade 20501 e Coeficiente de Poisson 0,3, é submetido a uma carga de tração igual a 1000 (unidades compatíveis). Na face oposta à face carregada do cubo,  $x_1=0$ , todos os deslocamentos são restringidos na direção  $x_1$ , e no ponto de canto  $x_2=x_3=1,0$ , a restrição é feita em todas as direções. Ainda, para se evitar deslocamentos de corpo rígido, são feitas restrições adicionais nesta face, impedindo-se o deslocamento na direção  $x_2$ , do ponto  $(x_2 = 1,0; x_3 = -1,0)$ , e na direção  $x_3$ , do ponto

( $x_2 = -1,0$ ;  $x_3 = 1,0$ ). As condições de contorno, e as malhas utilizadas na análise são mostradas na FIG. 31.

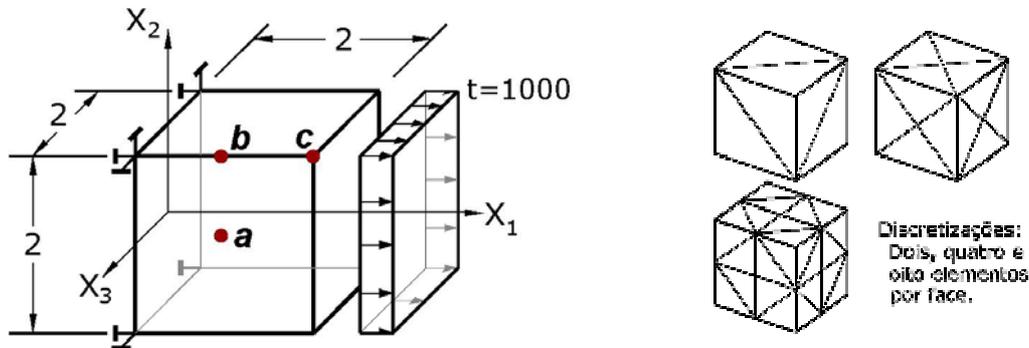


FIGURA 31 – Cubo tracionado e malhas analisadas

As integrais regulares são calculadas pelo esquema de Hammer com uso de subelementos, exceto na alternativa em que se utiliza a quadratura de Gauss com mapeamento degenerado para o cálculo das integrais fracamente singulares, onde este esquema é mantido também para as integrais regulares.

Devido à possível acumulação de erros nos valores calculados para a diagonal principal da matriz  $\mathbf{H}$ , em razão da forma de obtenção destes coeficientes usando a técnica de movimento de corpo rígido (Capítulo 4, Eq.49), os valores obtidos são comparados com os valores exatos apresentados na FIG. 6 do Capítulo 3. São analisados pontos sobre as faces, arestas e vértices do contorno, como por exemplo os pontos  $a$ ,  $b$  e  $c$  respectivamente, na FIG. 31. Esta comparação é feita para a discretização em 8 elementos por face, e os erros são apresentados na TAB. 2, para variações na quantidade de subelementos (SE) utilizados no cálculo das integrais fracamente singulares pelo esquema de Hammer, e variação na quantidade de pontos de integração em cada direção da técnica de Gauss com mapeamento degenerado.

Nota-se que, ao se utilizar as técnicas de integração analítica para integrais fracamente singulares, quadratura de Hammer com 25 subelementos e de Gauss com mapeamento com 12 pontos em cada direção, os erros são mínimos, e praticamente iguais.

TABELA 2 – Erros percentuais relativos de  $C_{ji}$  para pontos  $a$ ,  $b$ , e  $c$ 

Elementos	Integr.	Quadratura de Hammer			Quad. Gauss (Map. Degener.)		
		0 SE	4 SE	25 SE	4×4	8×8	12×12
Lineares	Analítica						
$a$	$1 \times 10^{-9}$	$5 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-5}$	$7 \times 10^{-9}$	$2 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-6}$	$8 \times 10^{-10}$
$b$	$2 \times 10^{-9}$	$3 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-5}$	$9 \times 10^{-9}$	$4 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-7}$	$9 \times 10^{-12}$
$c$	$3 \times 10^{-12}$	$6 \times 10^{-3}$	$7 \times 10^{-8}$	$2 \times 10^{-11}$	$2 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-5}$	$9 \times 10^{-9}$
Elementos Quadráticos							
$a$		$6 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-5}$	$7 \times 10^{-9}$	$1 \times 10^{-2}$	$1 \times 10^{-6}$	$7 \times 10^{-10}$
$b$		$6 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-5}$	$9 \times 10^{-9}$	$5 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-7}$	$9 \times 10^{-12}$
$c$		$6 \times 10^{-5}$	$7 \times 10^{-8}$	$3 \times 10^{-11}$	$2 \times 10^{-2}$	$1 \times 10^{-5}$	$9 \times 10^{-9}$

Os deslocamentos no contorno foram calculados para todas as discretizações apresentadas na FIG. 31, utilizando-se a alternativa com o ponto de colocação sobre o contorno e integrações pelo esquema de Hammer com 100 subelementos ou pelo esquema de Gauss com mapeamento degenerado e 8 pontos de integração em cada direção, ou ainda, cálculo analítico das integrais fracamente singulares em elementos com aproximação linear. Outra alternativa considera os pontos de colocação fora do domínio, posicionados a uma distância de 1,5 vezes a média dos lados dos elementos que compartilham o nó correspondente, na direção da normal média destes. Considerando-se todos os pontos nodais, a TAB. 3 apresenta os erros máximos nos deslocamentos obtidos, nas três direções, relativos aos resultados calculados pela teoria elementar.

Para a quadratura de Hammer direta, sem utilização de subelementos, os erros máximos se situam entre 2% e 9%, sendo descartada a utilização prática desta alternativa. A alternativa que emprega somente a quadratura de Hammer com subelementos foi a que se mostrou menos precisa, como já esperado, apesar da grande quantidade de subelementos utilizados. Os erros obtidos para elementos quadráticos superam sempre àqueles obtidos para elementos lineares, apesar do maior número de graus de liberdade do modelo, devido provavelmente ao maior número de aproximações numéricas efetuadas, que acumulam erros ao longo do processo.

TABELA 3 – Erros máximos (%) para deslocamentos no contorno

	Elementos por face	Graus Liberd. (GL)	Int. Hammer com Subelem. (100 SE)	Pto. Colocação Fora Domínio ( $\alpha = 1,5$ )	Int. Gauss Mapeamento Degen. (8x8)	Int. Sing. Analítica
Linear	2	24	$1,1 \times 10^0$	$2,3 \times 10^{-5}$	$6,4 \times 10^{-5}$	$1,7 \times 10^{-6}$
	4	42	$5,8 \times 10^{-1}$	$1,1 \times 10^{-4}$	$3,1 \times 10^{-4}$	$1,4 \times 10^{-6}$
	8	78	$4,5 \times 10^{-1}$	$5,5 \times 10^{-4}$	$3,3 \times 10^{-5}$	$1,9 \times 10^{-7}$
Quadrático	2	78	$8,9 \times 10^{-1}$	$2,5 \times 10^{-3}$	$3,8 \times 10^{-3}$	-
	4	150	$6,0 \times 10^{-1}$	$5,6 \times 10^{-5}$	$2,4 \times 10^{-3}$	-
	8	294	$4,5 \times 10^{-1}$	$3,5 \times 10^{-2}$	$2,6 \times 10^{-3}$	-

A simplicidade do problema permite que o uso de elementos lineares forneça resultados suficientemente precisos, observando-se também que o refinamento da malha não causa alterações significativas nos resultados em qualquer das alternativas, já que a variação linear dos deslocamentos é bem representada com a discretização mínima.

Para o esquema de integração numérica de Hammer, utilizando-se a mesma quantidade de subelementos para as integrais regulares e fracamente singulares, e considerando-se a discretização em 8 elementos por face, apresenta-se na FIG. 32 o comportamento do programa, relacionando erros e tempo total de processamento à quantidade de subelementos utilizados. A variação no tempo de processamento se deve apenas à fase de montagem do sistema de equações, já que o sistema calculado é o mesmo para todas as análises.

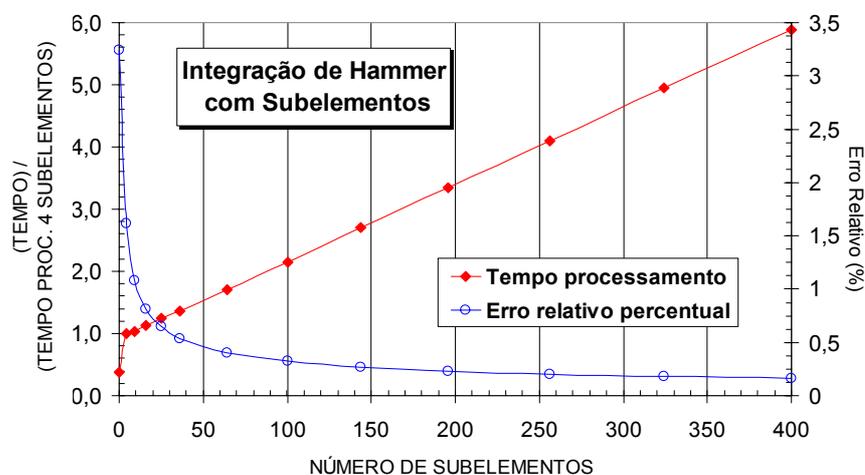


FIGURA 32 – Tempo de processamento e erros para integração com subelementos

Observa-se que há um ganho em precisão nos resultados com o aumento da quantidade de subelementos utilizados, ganho este que, a partir de uma certa quantidade de subelementos, se torna muito pequeno se comparado ao custo computacional, representado pelo tempo de processamento. Os tempos representados no gráfico são normalizados em relação ao tempo obtido ao se utilizar divisões em 4 subelementos.

### 7.3 – Exemplo 3 (Viga em Balanço com Carga na Extremidade)

Este exemplo considera uma viga prismática de seção quadrada de dimensões  $20 \times 20$ . A carga vertical aplicada tem valor 4.000 unidades de força, distribuída na face oposta à face engastada; o módulo de elasticidade considerado é  $2,1 \times 10^5$  e o coeficiente de Poisson igual a 0,3 (são assumidas unidades compatíveis). A carga transversal é representada por uma distribuição parabólica de tensão  $\sigma_{xy}$ , conforme indica a FIG. 33.

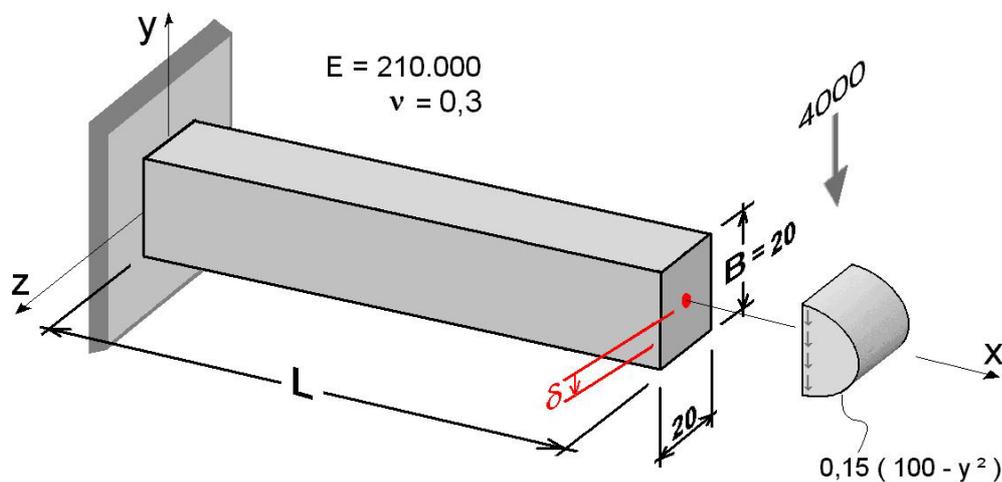


FIGURA 33 – Viga em balanço com carregamento e deslocamento  $\delta$  na extremidade.

Num primeiro momento, considera-se um comprimento fixo  $L = 80$ , pois este problema foi analisado como exemplo nos trabalhos de BARBIRATO (1999) e SOUZA (2001), cujos resultados são usados como base de comparação, juntamente com os resultados da

teoria da elasticidade bidimensional e os resultados obtidos numericamente através da análise via MEF.

Na avaliação dos deslocamentos transversais na direção  $y$  da FIG. 33, na seção longitudinal contida no plano  $xy$ , poder-se-ia utilizar a solução analítica bem conhecida da teoria da elasticidade bidimensional (TIMOSHENKO e GOODIER, 1980). Contudo, devido à impossibilidade de se reproduzir o verdadeiro estado tensional existente na extremidade engastada da barra, uma análise numérica via MEF foi realizada para se ter valores de referência mais adequados, sem as simplificações impostas na obtenção da solução analítica. Para análise de convergência foram utilizados 5 níveis de discretização, onde cada nível contém os elementos hexaédricos quadráticos do nível anterior divididos em 8 elementos. São apresentados na TAB. 4 alguns resultados representativos, de deslocamentos na direção  $y$  de pontos no eixo  $x$  da viga.

TABELA 4 – Convergência de resultados do MEF para deslocamentos  $u_y$  em viga com  $L = 80$

$x$	Teoria da Elasticidade bidimensional	MEF				
		144 G.L.	900 G.L.	4320 G.L.	29376 G.L.	215424 G.L.
20	0,0246667	0,019221	0,022510	0,022786	0,022915	0,022966
40	0,0836191	0,075405	0,079250	0,079738	0,079966	0,080058
60	0,1654286	0,153480	0,158830	0,159540	0,159860	0,160000
80	0,2586667	0,244190	0,250300	0,251010	0,251340	0,251470
Diferença média relativa		-11,18 %	-5,30 %	-4,70 %	-4,42 %	-4,30 %

Observa-se que os valores não convergem exatamente para os valores teóricos, e refinamentos subseqüentes são desnecessários, uma vez que a maior diferença entre os resultados das duas últimas discretizações estudadas não superam 0,25 %. São assumidos então, como valores de referência, os resultados obtidos para a malha com 215.424 graus de liberdade (G.L.). Tendo-se estes valores como referência, algumas discretizações estudadas, e a forma como são aplicados os carregamentos, estão representados na FIG. 34.

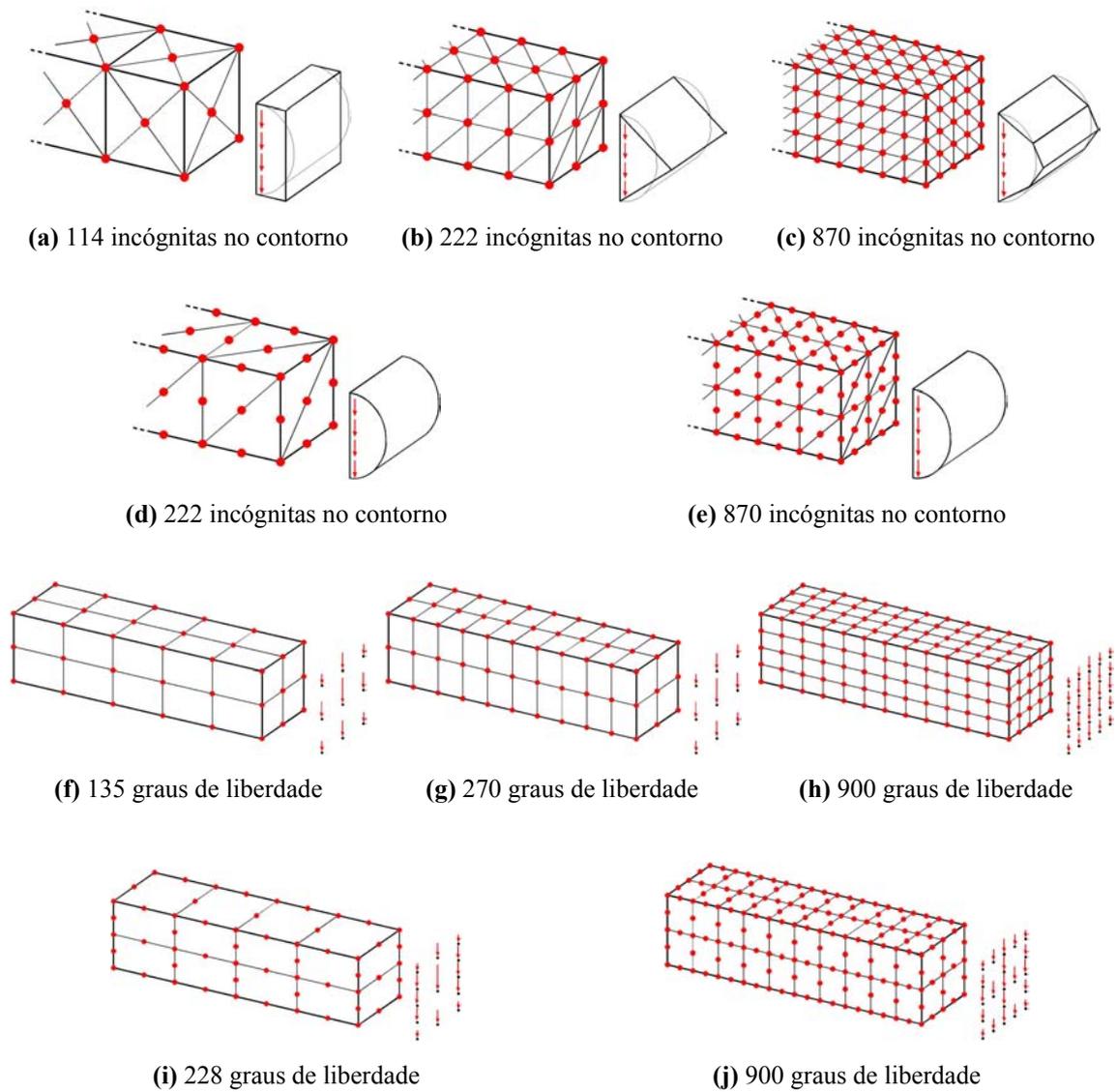


FIGURA 34 – Algumas discretizações estudadas: (a, b, c) elementos de contorno triangulares lineares; (d, e) elementos de contorno triangulares quadráticos; (f, g, h) elementos sólidos Brick 8 – ANSYS; (i, j) elementos sólidos Brick 20 – ANSYS.

Nas TAB. 5, 6 e 7 são apresentados os resultados obtidos para as discretizações com diferentes quantidades de incógnitas no contorno  $IC$ , e os resultados obtidos via MEF com quantidade equivalente de graus de liberdade  $GL$ , assim como resultados obtidos em outros trabalhos.

TABELA 5 – Deslocamentos transversais - elementos lineares (malhas: FIG. 34a e FIG. 34f)

Dist. ao apoio $x_1$	MEF	MEF – ANSYS Elemento Brick 8		MEC Referência A *		MEC Referência A **		MEC Referência B ***	
	215.424 Graus de Liberd.	Desloc. (135 GL)	Difer. (%)	Desloc. (138 IC)	Difer. (%)	Desloc. (138 IC)	Difer. (%)	Desloc. (216 IC)	Difer. (%)
20	0,02297	0,02281	-0,68	0,0236	2,76	0,0236	2,76	0,021	-8,56
40	0,08006	0,07725	-3,51	0,0755	-5,69	0,0808	0,93	0,074	-7,57
60	0,16000	0,15354	-4,04	0,1444	-9,75	0,1602	0,13	0,149	-6,88
80	0,25147	0,24173	-3,87	0,2219	-11,76	0,2507	-0,31	0,235	-6,55
Média das diferenças			-3,02		-6,11		0,88		-7,39

Dist. ao apoio $x_1$	MEF	Integração de Hammer c/ Subelementos		Pto Colocação Fora do Domínio $\alpha = 0,75$		Integr. Gauss e Mapeamento Degenerado		Integração Singular Analítica	
	215.424 Graus de Liberd.	Desloc. (114 IC)	Difer. (%)	Desloc. (114 IC)	Difer. (%)	Desloc. (114 IC)	Difer. (%)	Desloc. (114 IC)	Difer. (%)
20	0,02297	0,02334	1,63	0,02408	4,87	0,02373	3,33	0,02373	3,33
40	0,08006	0,07425	-7,25	0,07920	-1,07	0,07550	-5,69	0,07550	-5,69
60	0,16000	0,14199	-11,25	0,16081	0,51	0,14441	-9,74	0,14441	-9,74
80	0,25147	0,21810	-13,27	0,24999	-0,59	0,22187	-11,77	0,22187	-11,77
Média das diferenças			-7,54		0,93		-5,97		-5,97

\* Referência A : SOUZA (2001) – “Integral Singular Calculada Semi-Analiticamente”

\*\* Referência A : SOUZA (2001) – “Int. quase singular calc. num. com quad. de Gauss e subdivisão progressiva” (ponto de colocação fora do domínio)

\*\*\* Referência B : BARBIRATO (1999) – Elementos triangulares descontínuos (quadratura de Hammer com divisão em até 25 subelementos)

TABELA 6 – Deslocamentos transversais – elementos lineares (malhas: FIG. 34b e FIG. 34g)

Distância ao apoio $x_1$	MEF	MEF – ANSYS Elemento Brick 8		MEC - Referênc. A Pt. coloc. contorno		MEC - Referênc. A Pto. Coloc. externo	
	215424 Graus de Liberdade	Deslocam. (270 GL)	Difer. (%)	Deslocam. (270 IC)	Difer. (%)	Deslocam. (270 IC)	Difer. (%)
20	0,02297	0,02269	-1,20	0,02342	1,98	0,02319	0,98
40	0,08006	0,07801	-2,56	0,07717	-3,61	0,08017	0,14
60	0,16000	0,15712	-1,80	0,15023	-6,11	0,15975	-0,16
80	0,25147	0,24744	-1,60	0,23309	-7,31	0,25072	-0,30
Média das diferenças			-1,79		-3,76		0,17

Dist. ao apoio $x_1$	MEF	Integr. Hammer c/ Subelementos		Ponto Fora do Domínio - $\alpha = 1,0$		Integr. Gauss e Mapeam. Degen.		Integr. Singular Analítica	
	215424 Gr. Lib.	Desloc. (222 IC)	Difer. (%)	Desloc. (222 IC)	Difer. (%)	Desloc. (222 IC)	Difer. (%)	Desloc. (222 IC)	Difer. (%)
20	0,02297	0,02331	1,50	0,02294	-0,11	0,02352	2,41	0,02352	2,41
40	0,08006	0,07675	-4,13	0,07960	-0,57	0,07746	-3,25	0,07746	-3,25
60	0,16000	0,14934	-6,66	0,15889	-0,69	0,15075	-5,78	0,15076	-5,78
80	0,25147	0,23388	-6,99	0,25124	-0,09	0,23387	-7,00	0,23388	-6,99
Média das diferenças			-4,07		-0,37		-3,40		-3,40

TABELA 7 – Deslocamentos Transversais – elementos lineares (malhas: FIG. 34c e FIG. 34h)

Distância ao apoio $x_1$	<b>MEF</b>	<b>MEF - ANSYS</b> Elemento Brick 8		<b>MEC - Referência A</b> Pt. coloc. contorno		<b>MEC - Referência A</b> Pto. coloc. externo	
	215424 Graus de Liberdade	Deslocamento (900 GL)	Difer. (%)	Deslocamento (966 IC)	Difer. (%)	Deslocamento (966 IC)	Difer. (%)
20	0,02297	0,02291	-0,24	0,02340	1,89	0,02323	1,15
40	0,08006	0,07860	-1,82	0,08008	0,03	0,08039	0,41
60	0,16000	0,15777	-1,39	0,15857	-0,89	0,16015	0,09
80	0,25147	0,24845	-1,20	0,24806	-1,36	0,25130	-0,07
Média das diferenças			-1,16		-0,08		0,40

Dist. ao apoio $x_1$	<b>MEF</b>	<b>Integr. Hammer</b> c/ <b>Subelementos</b>		<b>Ponto Fora</b> do Domínio - $\alpha = 0,2$		<b>Integr. Gauss e</b> <b>Map. Degen.</b>		<b>Integr. Singular</b> <b>Analítica</b>	
	215424 Graus de Liberd.	Deslocam. (870 IC)	Difer. (%)	Deslocam. (870 IC)	Difer. (%)	Deslocam. (870 IC)	Difer. (%)	Deslocam. (870 IC)	Difer. (%)
20	0,02297	0,02270	-1,17	0,02335	-0,25	0,02340	1,91	0,02340	1,91
40	0,08006	0,07764	-3,02	0,08127	-0,18	0,08009	0,04	0,08009	0,04
60	0,16000	0,15364	-3,97	0,16210	-0,22	0,15860	-0,88	0,15861	-0,87
80	0,25147	0,24016	-4,50	0,25433	-0,24	0,24810	-1,34	0,24811	-1,33
Média das diferenças			-3,16		-0,22		-0,07		-0,06

Observa-se boa concordância entre os resultados obtidos nas referências A e B, e neste trabalho. Nota-se também que para este problema, com discretização em elementos lineares, a resposta pelo MEC apresenta erros de mesma ordem de grandeza dos erros obtidos via MEF, sendo algumas vezes mais precisos.

Dentre as análises efetuadas para as TAB. 5, 6 e 7, a alternativa que apresentou maior precisão nos resultados foi a que considera o ponto de colocação fora do domínio (à distâncias indicadas), e a menos precisa foi a alternativa que considera somente quadratura de Hammer nas integrações, como esperado, uma vez que a avaliação das integrais fracamente singulares são menos precisas (Exemplo 1). As alternativas em que as integrais fracamente singulares são calculadas analiticamente e numericamente pela quadratura de Gauss com mapeamento apresentam resultados praticamente idênticos, confirmando a precisão das integrações numéricas. Nota-se ainda que o refinamento da malha é essencial para a qualidade dos resultados, principalmente nas alternativas que consideram o ponto de colocação no contorno, onde ocorre uma melhora substancial na precisão dos resultados.

Na seqüência (TAB. 8 e TAB. 9) são apresentados os resultados obtidos para elementos com aproximação quadrática.

TABELA 8 – Deslocam. transversais - elementos quadráticos (malhas: FIG. 34d e FIG. 34i)

Distância ao apoio $x_1$	<b>MEF</b>	<b>MEF - ANSYS</b> Elemento Brick 20		<b>MEC - Referência A *</b> -Pt. coloc. contorno-		<b>MEC - Referência A *</b> - Pt. coloc. externo -	
	215424 Graus de Liberdade	Deslocamento (228 GL)	Difer. (%)	Deslocamento (270 GL)	Difer. (%)	Deslocamento (270 GL)	Difer. (%)
20	0,02297	0,02258	-1,68	0,02248	-2,12	0,02278	-0,81
40	0,08006	0,07847	-1,98	0,07926	-1,00	0,07970	-0,45
60	0,16000	0,15770	-1,44	0,15906	-0,59	0,15943	-0,36
80	0,25147	0,24829	-1,26	0,25046	-0,40	0,25063	-0,33
Média das diferenças			-1,59		-1,03		-0,49

Dist. ao apoio $x_1$	<b>MEF</b>	<b>Integração Hammer</b> com <b>Subelementos</b>		<b>Ponto coloc. Fora do</b> Domínio - $\alpha = 0,375$		<b>Integr. Gauss e</b> <b>Mapeam. Degener.</b>	
	215424 Graus de Liberdade	Deslocam. (222 GL)	Difer. (%)	Deslocam. (222 GL)	Difer. (%)	Deslocam. (222 GL)	Difer. (%)
20	0,02297	0,02203	-4,07	0,02270	-1,16	0,02249	-2,07
40	0,08006	0,07763	-3,03	0,08043	0,46	0,07929	-0,96
60	0,16000	0,15570	-2,68	0,16118	0,74	0,15911	-0,56
80	0,25147	0,24501	-2,57	0,25383	0,94	0,25051	-0,38
Média das diferenças			-3,09		0,25		-0,99

\* Referência A : SOUZA (2001) – Elementos triangulares PLANOS com aproximação quadrática

TABELA 9 – Deslocam. transversais – elementos quadráticos (malhas: FIG. 34e e FIG. 34j)

Dist. ao apoio $x_1$	<b>MEF</b>	<b>MEF ANSYS</b> Elem. Brick 20		<b>Integr. Hammer</b> com <b>Subelem</b>		<b>Ponto Coloc.Fora</b> Domínio - $\alpha=0,81$		<b>Integr. Gauss e</b> <b>Map. Degener.</b>	
	215424 Graus de Lib.	Deslocam. (900 GL)	Difer. (%)	Deslocam. (870 GL)	Difer. (%)	Deslocam. (870 GL)	Difer. (%)	Deslocam. (870 GL)	Difer. (%)
20	0,02297	0,02251	-1,99	0,02244	-2,28	0,02282	-0,64	0,02267	-1,29
40	0,08006	0,07925	-1,01	0,07863	-1,78	0,07986	-0,25	0,07944	-0,77
60	0,16000	0,15883	-0,73	0,15742	-1,61	0,15986	-0,09	0,15908	-0,58
80	0,25147	0,25030	-0,47	0,24752	-1,57	0,25237	0,36	0,25019	-0,51
Média das diferenças			-1,05		-1,81		-0,16		-0,79

Para a malha menos refinada, observa-se que com o uso de elementos quadráticos há uma pequena redução nos erros, se as respostas são comparadas com aquelas obtidas para elementos lineares e uma mesma quantidade de graus de liberdade. O refinamento

da malha neste caso (elementos quadráticos), implicou em uma melhora pequena na precisão das respostas obtidas. A concordância com os resultados obtidos nas referências (SOUZA, 2001 e MEF, ANSYS) verificada com uso de elementos lineares se mantém. Observa-se também que os resultados obtidos com a alternativa que considera o ponto de colocação fora do domínio se mantêm mais precisos do que as alternativas em que os pontos de colocação estão sobre o contorno. Nota-se, ainda, que as respostas obtidas para a alternativa que utiliza a quadratura de Hammer com subelementos, neste caso, não diferem de maneira significativa das demais respostas.

Um estudo simplificado de convergência de resultados é apresentado a seguir, na FIG. 35. Na abordagem que considera o ponto de colocação externo o parâmetro  $\alpha$ , que determina a distância do ponto ao contorno, foi arbitrado como 0,2. Para malhas com diferentes números de incógnitas no contorno analisou-se o deslocamento transversal  $\delta$  (FIG. 33) na extremidade da viga. Também são apresentadas as variações nos erros médios nos deslocamentos  $u_y$  (diferenças em relação aos valores de referência) para diferentes níveis de refinamento. A cada novo nível de refinamento considerado o elemento de contorno triangular é dividido em 4 novos elementos.

Como se nota nos gráficos, com o refinamento da malha os resultados se aproximam daquele considerado como valor de referência, variando a velocidade de convergência para cada alternativa, sendo mais lenta a alternativa que utiliza integração de Hammer com subelementos.

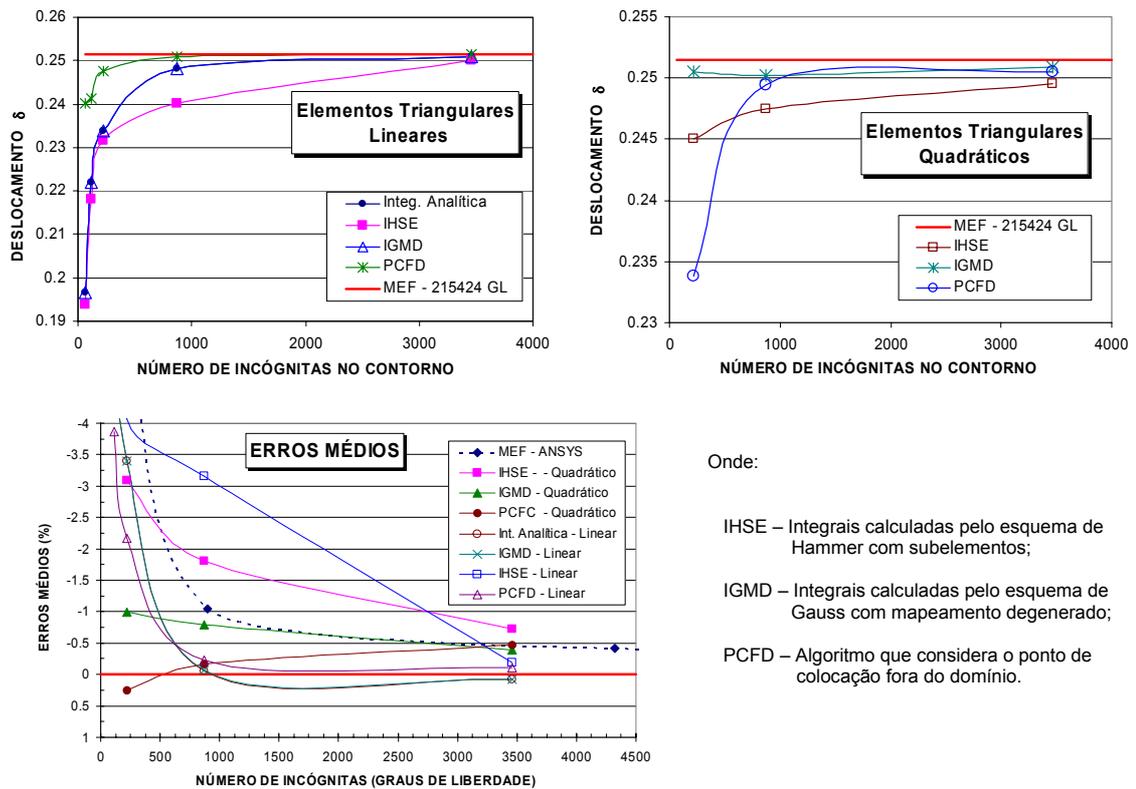


FIGURA 35 – Convergência dos resultados para análise da viga em balanço

A seguir (TAB. 10) são apresentados os números de condicionamento da matriz  $A$  (ver final da Seção 4.1) do sistema, obtidos pelo programa implementado, para as discretizações estudadas.

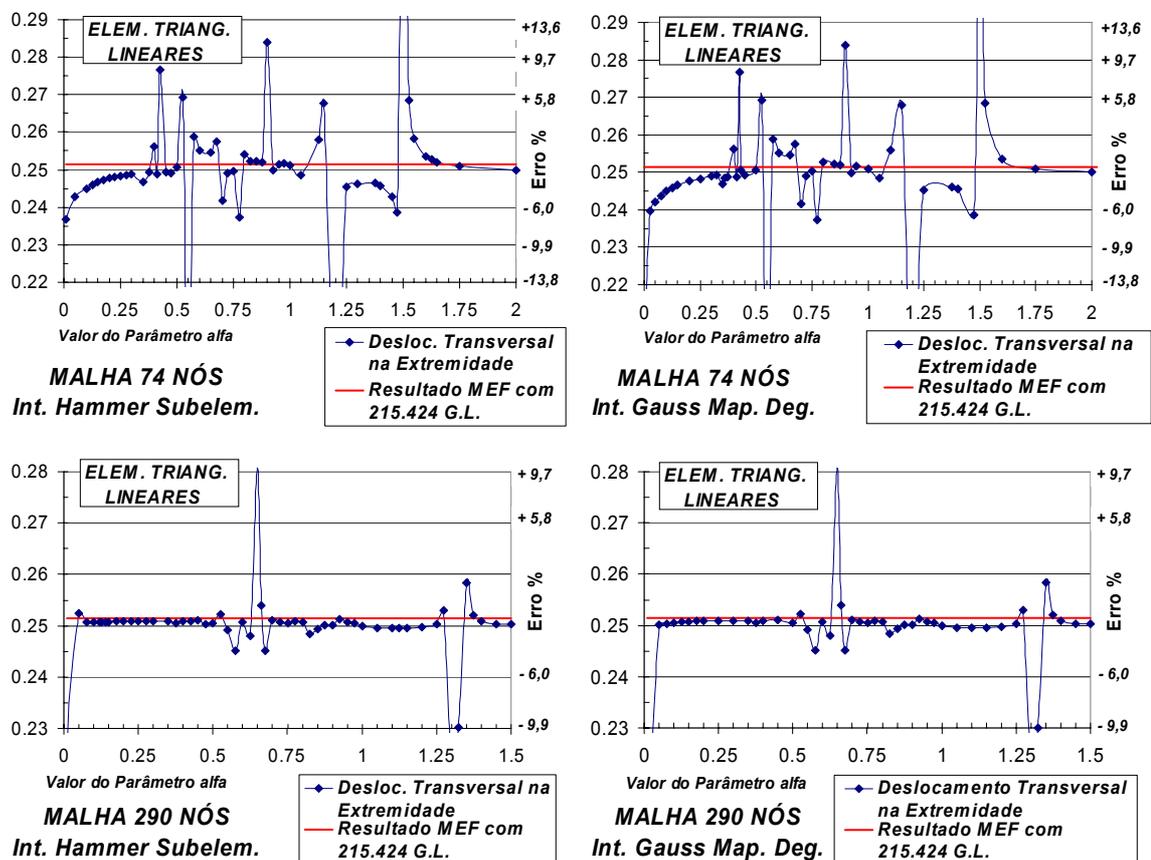
TABELA 10 – Números de condicionamento nos problemas estudados

Alternativa	Int. Singular Analítica	Int. Hammer Subelement.	Int. Gauss Map Degen	Pto Colocaç. Externo
Elem. Triang. Linear (114 GL)	726.562	718.167	729.185	9.144.330
Elem. Triang. Linear (222 GL)	534.618	521.080	534.608	213.488.000
Elem. Triang. Linear (870 GL)	664.831	711.068	664.838	3.972.200.000
El. Triang. Quadratico (222 GL)	-	587.351	589.522	184.215.000
El. Triang. Quadratico (438 GL)	-	826.420	996.716	70.721.500
El. Triang. Quadratico (870 GL)	-	918.325	900.766	6.472.270.000

Observa-se que, apesar de apresentar os melhores resultados, a alternativa para a qual os números de condicionamento são mais desfavoráveis (maiores) é a que considera o ponto de colocação fora do domínio. Em seu trabalho, SOUZA (2001) obteve resultados

com a mesma aparente incoerência, isto é, respostas melhores e números de condicionamento maiores, explicando estes resultados através da análise dos termos das submatrizes diagonais da matriz  $A$  do sistema. Observa-se uma distribuição diferente nos coeficientes da diagonal desta matriz, sendo encontrados termos não nulos fora da diagonal principal das submatrizes diagonais de pontos de face plana. Esta distribuição de coeficientes favoreceria, segundo SOUZA (2001), a obtenção de melhores resultados na solução do sistema, por apresentar mais coeficientes não nulos na diagonal de  $A$ . Souza concluiu a partir destas análises que os valores mais adequados para o parâmetro  $\alpha$  estariam próximos de 0,2 (para elementos lineares por exemplo), para os quais estes valores não nulos são máximos.

Nota-se, entretanto, como é apresentado na FIG. 36, que para outros valores de  $\alpha$  as respostas podem apresentar erros menores, observando-se ainda uma grande instabilidade nos resultados obtidos ao se fazer análises adotando valores diferentes para este parâmetro.



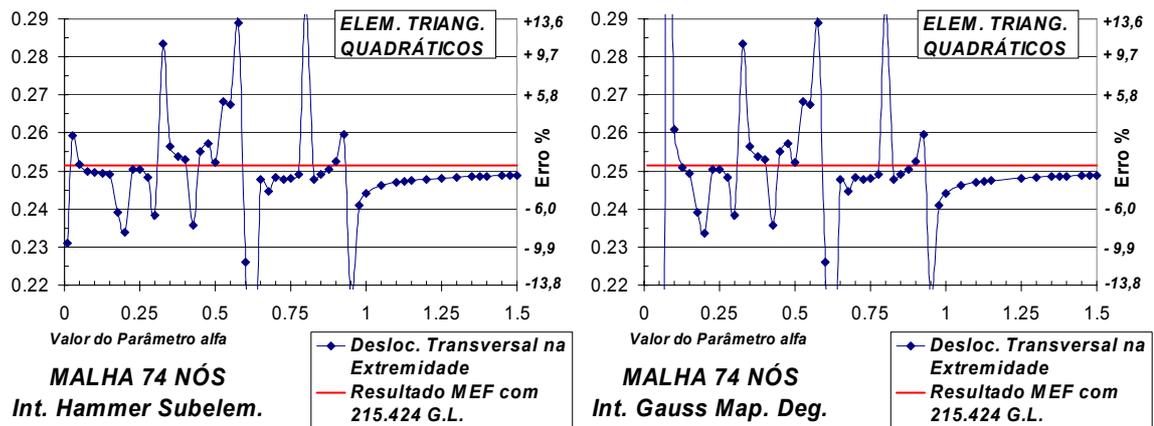


FIGURA 36 – Respostas de deslocamentos obtidas em análises com diferentes valores de  $\alpha$ .

A qualidade dos resultados parece ser independente do esquema de integração adotado (Hammer com subelementos ou Gauss com mapeamento degenerado), e dependente da discretização considerada e do grau da função interpoladora, o que impossibilita, a partir dos estudos efetuados, a determinação de um valor ótimo para o parâmetro  $\alpha$ . Nota-se também nestas análises a equivalência entre os dois esquemas de integração aplicados a integrais regulares, diferindo-se apenas quando o ponto de colocação é posicionado a uma distância muito pequena, o que caracteriza integrais com comportamento quase-singulares.

Valores críticos de  $\alpha$  conduzem a erros elevados (obtidos picos da ordem de 30% em deslocamentos). Estes erros são mais acentuados ainda para as tensões. Considerando-se um ponto de controle na parte superior da viga, com coordenadas  $x=40$ ,  $y=10$ ,  $z=0$ , apresentam-se na FIG. 37 a variação das respostas para análises com diferentes valores de  $\alpha$ . Os valores de erros atingem picos de -270% e 1845% quando se consideram elementos lineares ( $\alpha = 1,2$ ) e quadráticos ( $\alpha = 0,425$ ), respectivamente.

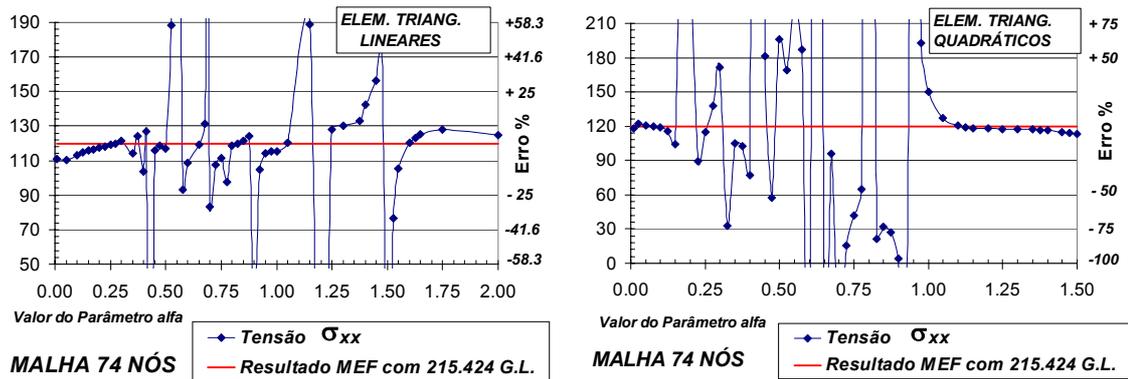
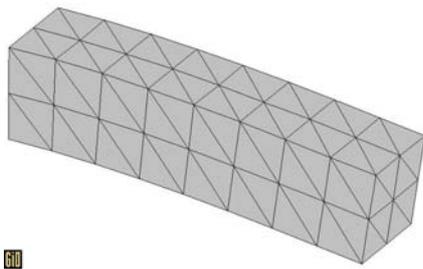
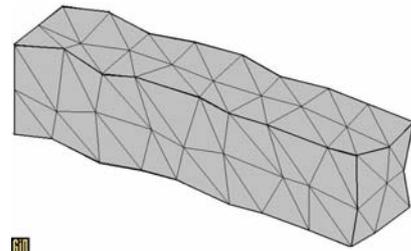


FIGURA 37 – Respostas de tensões obtidas em análises com diferentes valores de  $\alpha$ .

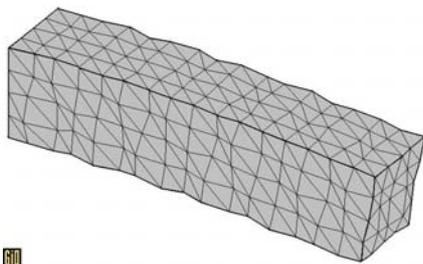
Na FIG. 38 nota-se uma grande perturbação na configuração deformada do sólido para alguns valores críticos de  $\alpha$ .



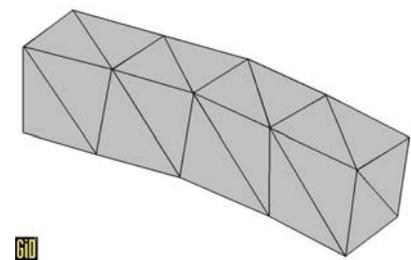
a. – Malha 74 nós,  $\alpha=0,25$ , elementos triangulares lineares.



b. - Malha 74 nós,  $\alpha=1,20$ , elementos triangulares lineares.



c. – Malha 290 nós,  $\alpha=0,65$ , elementos triangulares lineares.



d. - Malha 74 nós,  $\alpha=0,625$ , elementos triangulares quadráticos.

FIGURA 38 – Configuração deformada da viga, para valores críticos do parâmetro  $\alpha$ .

No ponto localizado no centro da seção da extremidade da viga, os erros nos deslocamentos transversais são de 1,22% na FIG. 37-a, 27,37% na FIG. 37-b, 11,68% e 30,41% nas FIG. 37-c e 37-d, respectivamente. Observa-se que os deslocamentos são

irregulares, variando de maneira diferente para cada nó, o que mostra que uma escolha inadequada do parâmetro  $\alpha$  pode resultar numa análise bastante imprecisa.

Para se avaliar a influência direta do número de condicionamento dos sistemas obtidos ( $\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$ ) nos resultados, é apresentado na FIG. 39 a relação entre estes números e o parâmetro  $\alpha$ , para os mesmos casos apresentados anteriormente. Observa-se na figura que, apesar de haver uma variação nos números de condicionamento obtidos, não se nota uma relação explícita entre esta variação e a instabilidade dos resultados (FIG. 37 e 38), isto é, para cada discretização estudada, os valores de  $\alpha$  para os quais os erros são maiores não implicam necessariamente em números de condicionamento destoantes dos demais. Nota-se, também na FIG. 39, uma tendência de crescimento do número de condicionamento do sistema, à medida que se aumenta a distância dos pontos de colocação ao contorno do sólido.

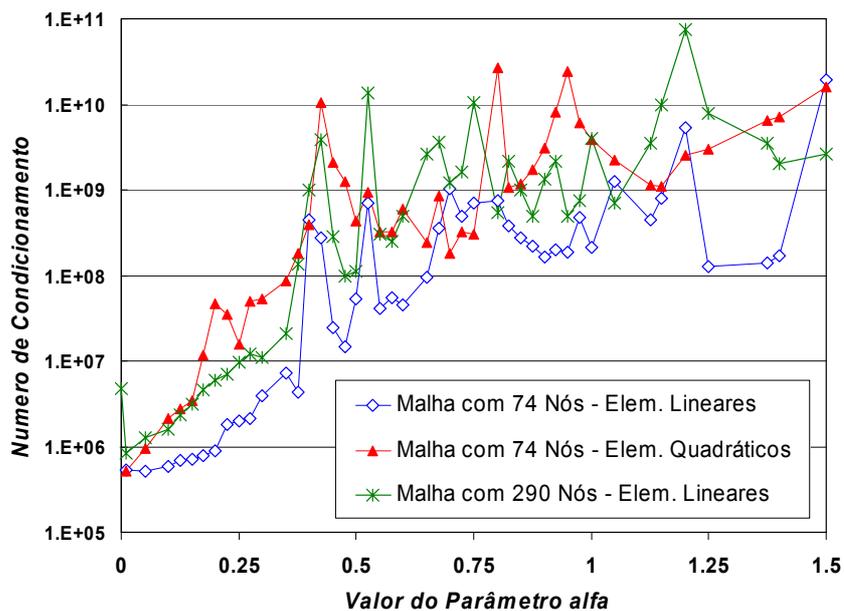


FIGURA 39 – Variação do número de condicionamento com o parâmetro  $\alpha$ .

Na seqüência, são apresentados resultados para comprimentos variáveis desta mesma viga, isto é, são feitas análises para vários valores de comprimento ( $L$ ), mantendo-se a mesma densidade de malha apresentada na FIG. 40, isto é, elementos de mesmo tamanho, sendo 8 elementos na face carregada (9 nós), para o caso de aproximação linear, e 2 elementos (9 nós) para o caso de aproximação quadrática. São analisados os

deslocamentos na extremidade do eixo da viga (ponto assinalado na FIG. 40), para as discretizações.

Para se ter resultados de referência para a análise em vigas com vários comprimentos, fez-se também um estudo numérico via MEF para todas as relações consideradas, já que os resultados teóricos não se aplicam para vigas de comprimentos menores, em que não se pode recorrer ao princípio de Saint-Venant. Através de testes com refinamentos sucessivos de malha, foram obtidos resultados que serão usados como referência, apresentados na TAB. 11, juntamente com o número de graus de liberdade considerado, e a diferença em relação aos resultados obtidos com o refinamento anterior. Também são apresentados os resultados da teoria da elasticidade bidimensional.

TABELA 11 – Resultados adotados como referência

Comprimento L	Num. Graus de Liberd.	MEF Deslocamento $\delta$	Diferença para o refinamento anterior (%)	Teoria da Elasticidade Bidimensional	Diferença relat. ao MEF (%)
20	53.856	0,006548	0,47	0,007524	14,90
40	14.688	0,035381	0,08	0,037905	7,13
60	22.032	0,109350	0,15	0,114000	4,25
80	215.424	0,251470	0,01	0,258667	2,86
100	36.720	0,484210	0,11	0,494762	2,18
120	44.064	0,830830	0,10	0,845143	1,72
140	51.408	1,314000	0,08	1,332667	1,42
160	58.752	1,956700	0,08	1,980190	1,20
180	66.096	2,781700	0,07	2,810571	1,04
200	73.440	3,811800	0,06	3,846667	0,91

Os resultados obtidos e erros percentuais são exibidos nas TAB. 11 e 12.

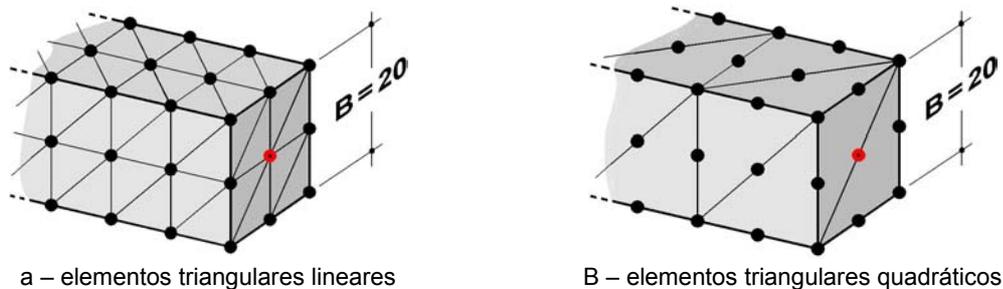


FIGURA 40 – Discretizações utilizadas para o MEC.

TABELA 12 – Deslocamentos transversais para várias relações B:L – elementos com aproximação linear (FIG. 40a)

L	B:L	MEF TAB. 11	IHSE		PCFD $\alpha = 0,25$		IGMD		ISA	
			$\delta$	Difer. (%)	$\delta$	Difer. (%)	$\delta$	Difer. (%)	$\delta$	Difer. (%)
20	1:1	0,00655	0,00578	-11,78	0,00623	-4,89	0,00579	-11,51	0,00579	-11,51
40	1:2	0,03538	0,03162	-10,63	0,03440	-2,78	0,03176	-10,25	0,03176	-10,25
60	1:3	0,10935	0,09921	-9,27	0,10741	-1,77	0,09986	-8,68	0,09986	-8,68
80	1:4	0,25147	0,23161	-7,90	0,24841	-1,22	0,23387	-7,00	0,23388	-7,00
100	1:5	0,48421	0,45360	-6,32	0,48100	-0,66	0,45987	-5,03	0,45990	-5,02
120	1:6	0,83083	0,79152	-4,73	0,82940	-0,17	0,80635	-2,95	0,80642	-2,94
140	1:7	1,31400	1,27255	-3,15	1,31858	0,35	1,30379	-0,78	1,30392	-0,77
160	1:8	1,95670	1,92375	-1,68	1,97441	0,90	1,98405	1,40	1,98405	1,40
180	1:9	2,78170	2,77075	-0,39	2,82370	1,51	2,87951	3,52	2,87951	3,52
200	1:10	3,81180	3,83634	0,64	3,89437	2,17	4,02207	5,52	4,02270	5,53

IHSE – Integração de Hammer com Subelementos;

PCFD – Ponto de Colocação Fora do Domínio;

IGMD – Integração de Gauss com Mapeamento Degenerado;

ISA – Integrais Singulares calculadas Analiticamente.

TABELA 13 – Deslocamentos transversais para várias relações B:L – elementos com aproximação quadrática (FIG. 40b)

L	B:L	MEF TAB. 11	IHSE		PCFD $\alpha = 0,35$		IGMD	
			$\delta$	Difer. (%)	$\delta$	Difer. (%)	$\delta$	Difer. (%)
20	1:1	0,00655	0,00604	-7,72	0,00596	-8,96	0,00608	-7,10
40	1:2	0,03538	0,03419	-3,36	0,03509	-0,81	0,03452	-2,44
60	1:3	0,10935	0,10669	-2,44	0,10758	-1,62	0,10824	-1,02
80	1:4	0,25147	0,24501	-2,57	0,25639	1,96	0,25051	-0,38
100	1:5	0,48421	0,46942	-3,05	0,49319	1,85	0,48386	-0,07
120	1:6	0,83083	0,79846	-3,90	0,82800	-0,34	0,83198	0,14
140	1:7	1,31400	1,24841	-4,99	1,29718	-1,28	1,31768	0,28
160	1:8	1,95670	1,83250	-6,35	1,97665	1,02	1,96401	0,37
180	1:9	2,78170	2,55986	-7,97	2,92422	5,12	2,79415	0,45
200	1:10	3,81180	3,43428	-9,90	3,81861	0,18	3,83118	0,51

IHSE – Integração de Hammer com Subelementos;

PCFD – Ponto de Colocação Fora do Domínio;

IGMD – Integração de Gauss com Mapeamento Degenerado;

A utilização de elementos com aproximação quadrática implicou num ganho de precisão considerável. O esquema de integração numérica por quadratura de Gauss com mapeamento foi o mais eficiente para elementos quadráticos, e no caso dos elementos lineares, apresentou resultados praticamente coincidentes com os obtidos com integração analítica. O algoritmo com ponto de colocação fora do domínio se mostrou superior no caso de elementos lineares, ao contrário do que aconteceu com uso de elementos quadráticos, que apresentou resultados mais precisos apenas para algumas relações.

A precisão dos resultados obtidos ao se considerar pontos internos próximos do contorno é apresentada na FIG. 41, onde são avaliados os deslocamentos transversais de pontos, posicionados sobre o eixo central da viga (eixo  $x$ ). Na avaliação, utilizou-se a malha composta por 1.154 nós, com elementos triangulares lineares e quadráticos, onde os lados médios dos elementos têm 2,845 e 5,690 unidades respectivamente. Como dados de deslocamentos e forças de superfície no contorno, foram considerados aqueles obtidos no cálculo que considera pontos de colocação no contorno e integração de Gauss com mapeamento degenerado. Foram calculados os deslocamentos nos pontos internos através da formulação padrão do MEC e da formulação auto-regularizada dos deslocamentos, para os dois esquemas de quadratura aplicáveis a integrais regulares.

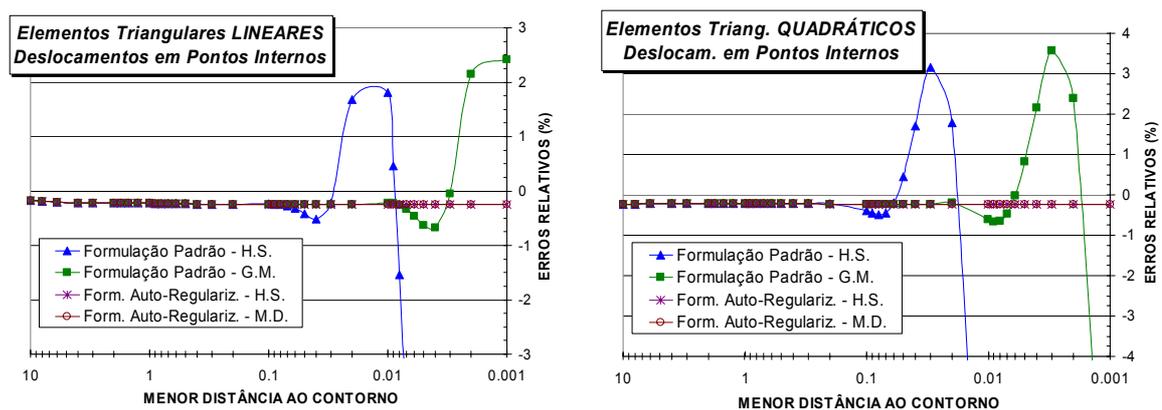


FIGURA 41 – Deslocamentos em pontos internos próximos do contorno

O erro obtido para o ponto do contorno sobre o eixo considerado é 0,248% e 0,232% ao se utilizar elementos com aproximação linear e quadrática, respectivamente, e os erros em pontos internos acompanham estes valores, em pontos internos mais afastados do

contorno. Observa-se que ao se considerar pontos mais próximos do contorno, os resultados obtidos utilizando-se a formulação padrão apresentam perturbações advindas da imprecisão das quadraturas, provocadas pelo comportamento quase-singular dos integrandos. Em ambos os elementos utilizados este comportamento foi verificado, sendo que para elementos quadráticos o comportamento é ligeiramente mais crítico, uma vez que os elementos utilizados são maiores que os elementos triangulares lineares. Para se obter resultados mais precisos faz-se necessário a utilização de esquemas de integração mais eficientes. A formulação auto-regularizada, no entanto, manteve a qualidade dos resultados, independentemente de quão próximo do contorno o ponto seja considerado, confirmando a eliminação dos problemas provocados pela quase-singularidade das integrais. A menor distância ao contorno analisada foi 0,001 unidades, correspondendo a 0,005% da menor dimensão do sólido.

Devido ao engastamento imposto em toda a face do plano  $yz$ , os resultados da teoria da elasticidade não podem ser usados para analisar as tensões  $\sigma_{xx}$  em pontos pertencentes à esta face, ou próximos a ela, sendo necessário se recorrer a análises numéricas. Considerando isto, foram determinadas as tensões  $\sigma_{xx}$  na face engastada da viga através do MEF, para várias discretizações, sendo que os resultados obtidos para as malhas mais refinadas são apresentadas na FIG. 42 abaixo, considerando-se pontos sobre o eixo  $y$  da face.

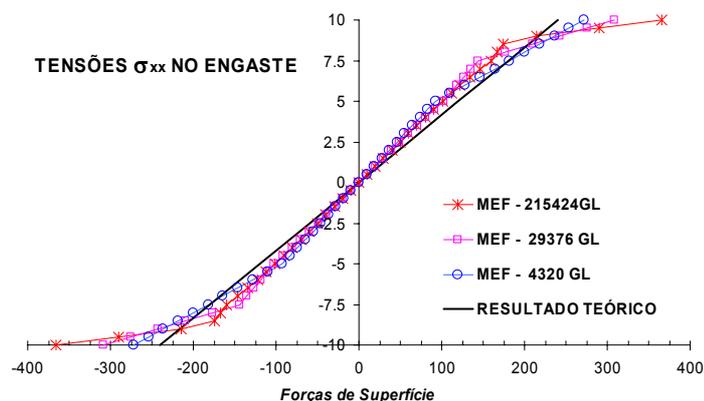


FIGURA 42 – Tensões no engaste calculados via MEF

Observa-se a ocorrência de uma concentração de tensões nos cantos inferior e superior da seção, que se torna mais acentuada a cada nível de discretização. Na FIG. 43 são

apresentados os resultados obtidos com o MEC, considerando-se forças de superfície nesta mesma face, para elementos lineares e quadráticos.

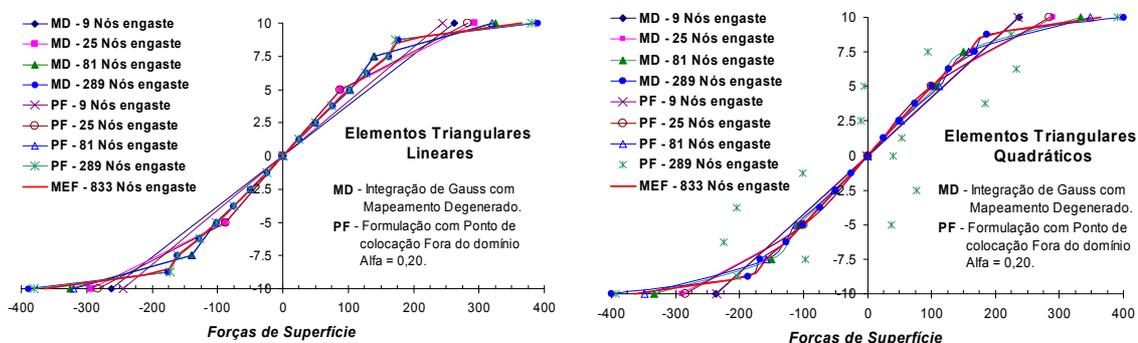


FIGURA 43 – Distribuição das forças de superfície na linha central da face engastada

Observa-se que os resultados obtidos estão coerentes com a resposta do MEF, apresentando o mesmo comportamento ao se considerar discretizações mais refinadas. Os valores obtidos para a malha mais refinada com elementos quadráticos, usando pontos de colocação fora do domínio apresentaram uma oscilação, própria desta abordagem. Isto se deve, provavelmente, ao fato de o valor parâmetro  $\alpha$ , adotado 0,20 para todas as malhas, não ser o mais adequado para este nível de discretização. A distribuição das forças de superfície sobre a face varia também com o eixo de coordenadas  $z$ , apresentando concentrações nos vértices do sólido, como é apresentado na FIG. 44, para respostas do MEF, e do MEC obtidas para elementos quadráticos com integração de Gauss com mapeamento degenerado.

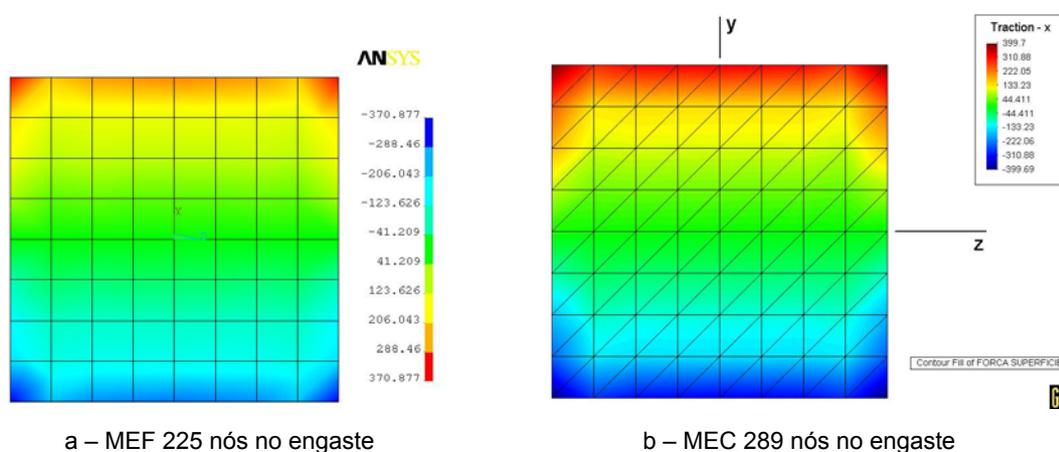


FIGURA 44 – Distribuição das forças de superfície na face engastada

#### 7.4 – Exemplo 4 (Placa Simplesmente Apoiada Sujeita a Carga Uniformemente Distribuída)

Neste exemplo analisam-se placas quadradas simplesmente apoiada nas quatro bordas, com carregamento distribuído aplicado perpendicularmente ao plano da placa. São adotados valores de 100.000 para o módulo de elasticidade, e 0,3 para o coeficiente de Poisson. A espessura da placa é atribuído o valor de 10 unidades, e o vão  $L$  é variável, conforme ilustra a FIG. 45. A placa é apoiada em seu plano médio e tem rotação no plano vertical tangencial ao contorno restringida (*hard condition*). São analisadas placas com relações  $h:L$  iguais a 1:4, 1:5 e 1:10, para as quais se tem, como base de comparação, os resultados obtidos por RIBEIRO (1992), que obteve resultados coincidentes com os valores exatos, calculados pela teoria de Reissner, que leva em consideração as deformações devidas às tensões de cisalhamento transversais. Os resultados obtidos são comparados também com as respostas obtidas por SOUZA (2001), que utilizou o MEC-3D, em formulações com pontos de colocação no contorno e externos.

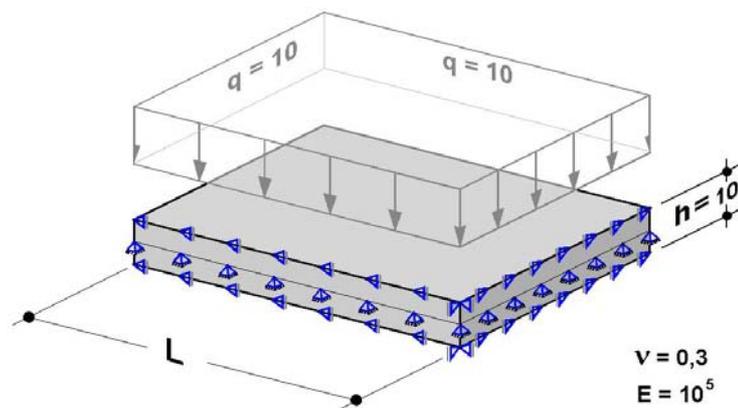


FIGURA 45 – Placa quadrada simplesmente apoiada com carga distribuída

São apresentados a seguir os resultados obtidos para as malhas que apresentam o número de incógnitas no contorno  $IC$  mais próximos possíveis dos que foram utilizados nas análises de SOUZA (2001). Assim, para a placa com dimensão  $L$  igual a 40, utilizam-se as discretizações com 386 e 362 nós, para elementos triangulares lineares e quadráticos, respectivamente. Para  $L$  igual a 50, estes números foram 716 e 770 nós, e para a placa com  $L$  igual a 100 foram utilizados 1.146 e 1.122 nós, respectivamente,

para elementos com aproximação linear e quadrática. SOUZA (2001) utilizou elementos triangulares planos, com aproximação quadrática, e discretizações com 366, 782 e 1.086 nós, para  $L$  iguais a 40, 50 e 100 respectivamente. A FIG. 46 apresenta trechos desta discretização, para se ter idéia da densidade das malha consideradas.

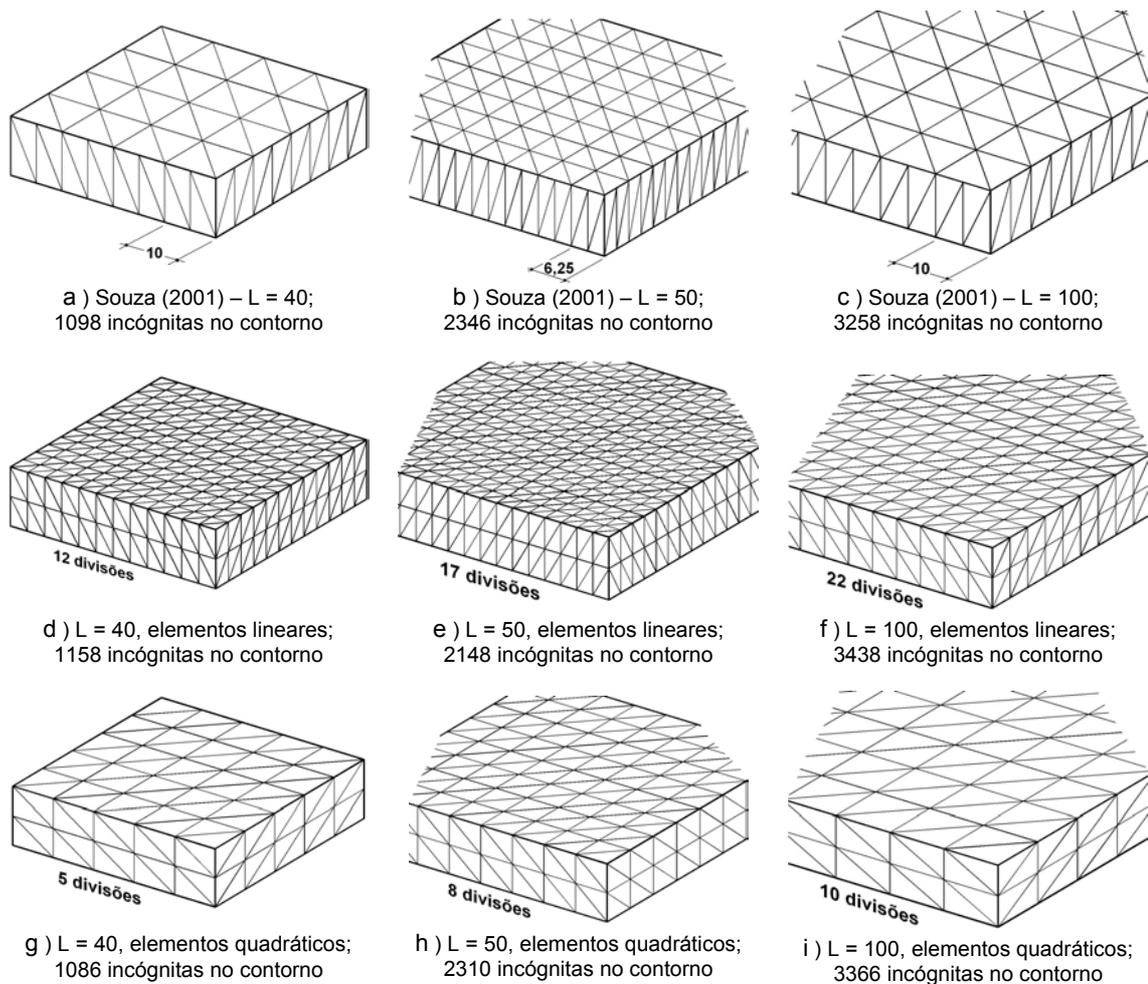
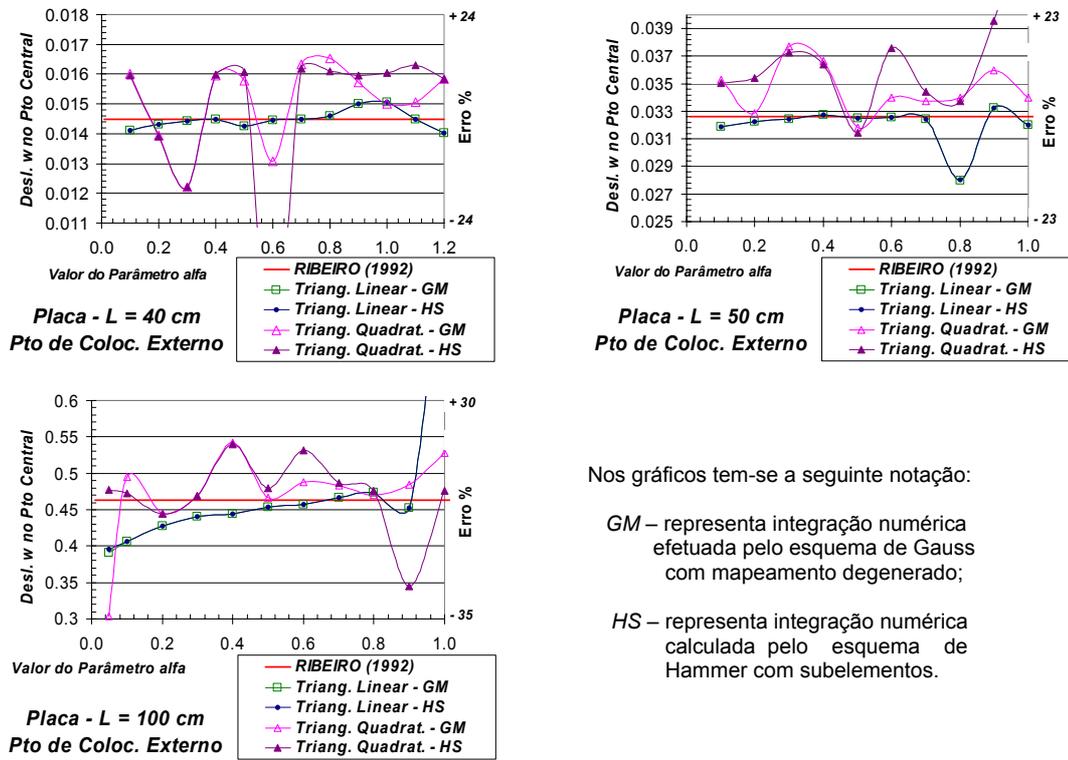


FIGURA 46 – Discretizações utilizadas para cálculos pelo MEC

Para o algoritmo que considera pontos de colocação externos, a FIG. 47 apresenta resultados de flecha no centro das placas, em função do parâmetro  $\alpha$  de distância dos pontos de colocação ao nó correspondente no contorno. Nota-se a instabilidade dos resultados com a variação de  $\alpha$ , principalmente quando se consideram elementos com aproximação quadrática, onde os elementos são maiores que os lineares. Com o uso de elementos lineares, foram obtidos os melhores resultados, praticamente estáveis, para os intervalos de distância considerados.



Nos gráficos tem-se a seguinte notação:

GM – representa integração numérica efetuada pelo esquema de Gauss com mapeamento degenerado;

HS – representa integração numérica calculada pelo esquema de Hammer com subelementos.

FIGURA 47 – Deslocamentos no centro da placa para variações no valor de  $\alpha$ .

Nas TAB. 14 e 15 são apresentados os resultado obtidos para o deslocamento transversal principal no ponto central das placas, para as alternativas estudadas. Na alternativa com ponto de colocação externo, o parâmetro  $\alpha$  é fixado em 0,7, pois em geral os resultados obtidos são mais estáveis para valores de  $\alpha$  próximos a este. Consideram-se nas tabelas os valores adimensionais das flechas dados por

$$f = w \left( \frac{100 D}{q L^4} \right), \text{ onde } w \text{ é o valor da flecha no centro da placa e } q \text{ a carga distribuída.}$$

TABELA 14 – Resultados de flecha para elementos *lineares*

L	h : L	RIBEIRO (1992) F	Formulação c/ Ponto de Colocação no Contorno						Pto Colocação Externo ( $\alpha=0,7$ ) Int. Hammer-SE	
			Int. Hammer Subelementos		Int. Gauss c/ Mapeam. Deg.		Int. Singular Analítica		f	Erro %
			f	Erro %	f	Erro %	f	Erro%		
40	1:4	0,5182	0,484	-6,61	0,484	-6,49	0,484	-6,61	0,518	0,00
50	1:5	0,4779	0,451	-5,69	0,451	-5,58	0,451	-5,69	0,475	-0,57
100	1:10	0,4241	0,335	-21,06	0,336	-20,82	0,335	-21,06	0,427	0,76

TABELA 15 – Resultados de flecha para elementos *quadráticos*

L	RIBEIRO (1992) $f$	SOUZA (2001) ISSA		SOUZA (2001) ISQG		Formulação com Ponto de Colocação no Contorno				Ponto de colocação Fora $\alpha=0,7$	
		F	Erro %	f	Erro %	IHSE		IGMD		f	Erro %
						f	Erro %	f	Erro %		
40	0,5182	0,6042	16,60	0,5901	13,87	0,550	6,12	0,552	6,62	0,579	11,76
50	0,4779	0,5448	13,99	0,5439	13,80	0,503	5,31	0,505	5,67	0,505	5,57
100	0,4241	0,4507	6,26	0,4628	9,11	0,420	-1,03	0,424	0,07	0,446	5,11

ISSA – “Integral singular calculada semi-analiticamente” (Ponto de colocação no contorno);

ISQG – “Integral quase-singular calculada numericamente com quadratura de Gauss” (Ponto de coloc. externo);

IHSE – Integrais calculadas numericamente pelo esquema de Hammer com subelementos;

IGMD – Integrais calculadas numericamente pelo esquema de Gauss com mapeamento degenerado.

Os resultados obtidos com elementos lineares apresentam erros relativamente grandes, à exceção da alternativa em que o ponto é posicionado fora do contorno, onde os resultados foram bastante precisos. No caso dos elementos quadráticos, os erros decrescem à medida que a espessura relativa da placa diminui, destacando-se os resultados obtidos para formulação com ponto de colocação no contorno e integração de Gauss com mapeamento degenerado.

As respostas da teoria de placas usadas como referência podem não ser as mais adequadas, principalmente para as placas com relação  $h:L$  maiores, devido às simplificações assumidas nesta teoria. Assim, fez-se também uma análise numérica via MEF, no intuito de se obter resultados mais corretos, sendo estes resultados apresentados na TAB. 16, onde para cada nível de refinamento a diferença relativa percentual entre deslocamentos  $\Delta w$  é apresentada, para se avaliar a razão de convergência. Nestas análises foram utilizados elementos sólidos hexaédricos com 20 nós (SOLID186 – ANSYS). Trechos das malhas consideradas, com respectivos graus de liberdade  $G.L.$ , são apresentados na FIG. 48.

TABELA 16 – Convergência da análise via MEF

L = 40			L = 50			L = 100		
G.L.	flecha $w$	$\Delta w$ %	G.L.	flecha $w$	$\Delta w$ %	G.L.	flecha $w$	$\Delta w$ %
345	-0,014832	-	345	-0,033126	-	769	-0,46544	-
2.183	-0,015772	+ 6,3	2.183	-0,034520	+ 4,2	4.855	-0,47207	+ 1,4
15.315	-0,016618	+ 5,3	15.315	-0,035959	+ 4,2	33.907	-0,48108	+ 1,9
111.275	-0,017351	+ 4,4	111.275	-0,037103	+ 3,2	247.531	-0,48667	+ 1,2

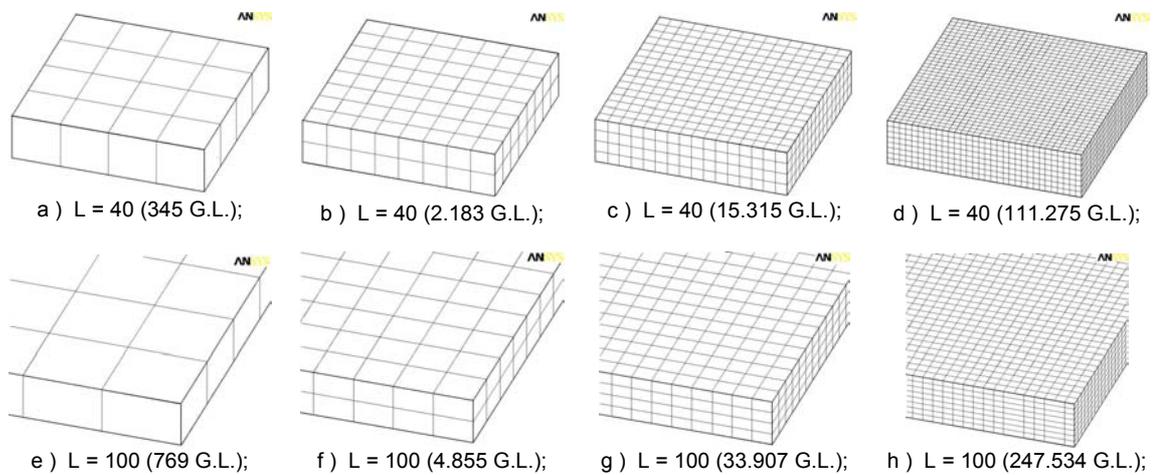
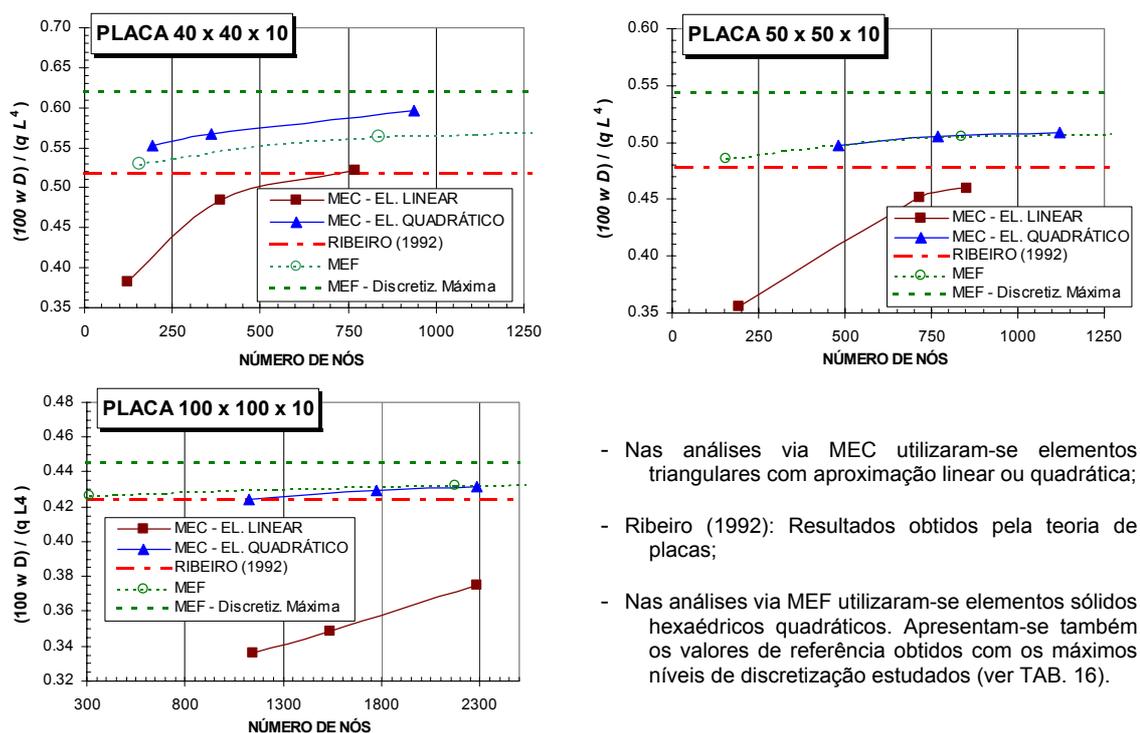


FIGURA 48 – Discretizações consideradas nas análises das placas via MEF

Observa-se que a convergência parece ser muito lenta, sendo necessário o uso de malhas com um número extremamente grande de graus de liberdade para se obter respostas confiáveis, o que é compreensível devido à resposta de quarto grau para os deslocamentos neste problema.

Apresentam-se a na FIG. 49 alguns resultados obtidos para o deslocamento do ponto central das placas, utilizando-se malhas distintas, para se verificar a sensibilidade das respostas ao nível de discretização considerada. São apresentados alguns resultados obtidos com o MEF utilizando elementos hexaédricos de 20 nós, e resultados obtidos pelo MEC com pontos de colocação no contorno, utilizando elementos triangulares lineares e quadráticos. Apresentam-se como resultados de referência os valores da teoria de placas e também os valores obtidos pela análise via MEF com maior nível de discretização permitida na versão disponível.

Nota-se que as respostas obtidas via MEF são sempre maiores que as da teoria de placas, principalmente para espessuras relativas maiores, e também que, ao se utilizar elementos de contorno quadráticos, os resultados parecem acompanhar melhor àqueles obtidos pelo MEF. A convergência é muito lenta ao se utilizar elementos lineares.



- Nas análises via MEC utilizaram-se elementos triangulares com aproximação linear ou quadrática;
- Ribeiro (1992): Resultados obtidos pela teoria de placas;
- Nas análises via MEF utilizaram-se elementos sólidos hexaédricos quadráticos. Apresentam-se também os valores de referência obtidos com os máximos níveis de discretização estudados (ver TAB. 16).

FIGURA 49 – Convergência dos valores obtidos para flechas

Assumindo-se as respostas obtidas via MEF com o maior grau de discretização analisado, como valores de referência, têm-se os valores adimensionais das flechas  $f$  dados por 0,621; 0,544 e 0,446, para respectivamente,  $L$  igual a 40, 50 e 100. Os resultados calculados com elementos de contorno de aproximação quadrática, e via MEF com níveis de discretização equivalentes, são apresentados na TAB. 17, onde se nota a boa concordância entres os resultados dos dois métodos.

TABELA 17 – Resultados de flechas para elementos *quadráticos* (MEF como referência)

L	MEF			Formulação com Ponto de Colocação no Contorno							
	G.L.	$f$	Diferença (%)	Incog. Cont.	IHSE		IGMD		Ponto de colocação Externo $\alpha=0,7$		
					$f$	Diferen. (%)	$f$	Diferença (%)	I.C.	$f$	Diferen. (%)
40	2183	0,564	-9,10	2814	0,565	-8,92	0,567	-8,70	2814	0,548	-11,65
50	2183	0,506	-6,96	2310	0,503	-7,43	0,505	-7,10	2310	0,505	-7,19
100	4855	0,432	-3,00	3366	0,420	-5,82	0,424	-4,77	3366	0,446	0,03

IHSE – Integrais calculadas numericamente pelo esquema de Hammer com subelementos;

IGMD – Integrais calculadas numericamente pelo esquema de Gauss com mapeamento degenerado.

A TAB. 18 apresenta o número de condicionamento dos sistemas calculados, para avaliação da confiabilidade dos resultados em relação à solução do sistema de equações.

TABELA 18 – Números de condicionamento nas análises das placas

	L (cm)	$h : L$	Int.. Sing. Analítica	Hammer c/ subelementos	Gauss com Map. Deg.	Ponto fora $\alpha = 0,7$
Aproxim. Linear	40	1 : 4	$1,219 \times 10^5$	$1,234 \times 10^5$	$1,219 \times 10^5$	$6,342 \times 10^8$
	50	1 : 5	$1,500 \times 10^5$	$1,483 \times 10^5$	$1,500 \times 10^5$	$1,001 \times 10^9$
	100	1 : 10	$7,893 \times 10^4$	$7,957 \times 10^4$	$7,893 \times 10^4$	$7,612 \times 10^8$
Aproxim. Quadrática	40	1 : 4	-	$2,81 \times 10^5$	$2,76 \times 10^5$	$1,52 \times 10^{10}$
	50	1 : 5	-	$3,62 \times 10^5$	$3,57 \times 10^5$	$1,72 \times 10^{10}$
	100	1 : 10	-	$2,39 \times 10^5$	$2,34 \times 10^5$	$1,08 \times 10^{10}$

A análise da TAB. 18 mostra que os números de condicionamento apresentam valores abaixo do limite para o qual os resultados são considerados confiáveis. Nas rotinas adotadas para solução dos sistemas de equações (LINPAK,1978) este limite é definido como  $10^{13}$ . Assim, também os resultados para do algoritmo com ponto de colocação externo, que apresentam número de condicionamento maior, estão abaixo deste limite máximo.

As tensões longitudinais  $\sigma_{xx}$  foram analisadas no centro da placa, ao longo de sua espessura. Os resultados obtidos são apresentados graficamente na FIG. 50, e detalhados em alguns pontos na TAB. 19, tendo-se, como resultados de referência, aqueles obtidos com a discretização mais refinada do MEF. Utilizou-se nas análises as malhas com maior refinamento, e como valores calculados no contorno adotou-se aqueles obtidos através da alternativa que considera o ponto de colocação no contorno e integração pelo esquema de Gauss com mapeamento degenerado, que apresentou os melhores resultados.

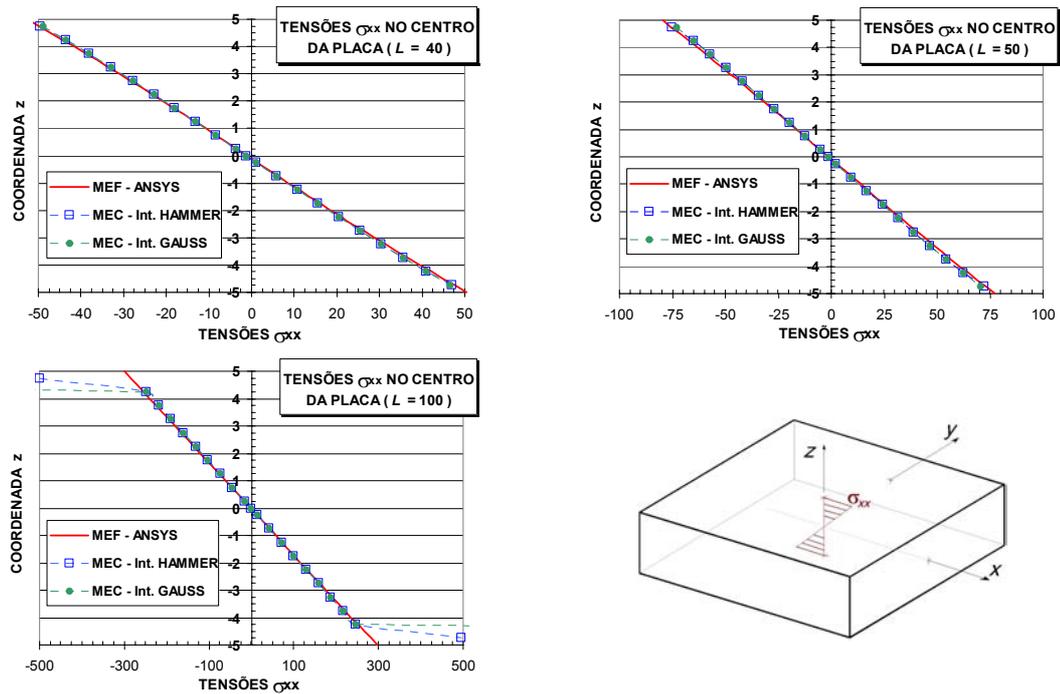
FIGURA 50 – Tensões  $\sigma_{xx}$  analisadas no centro da placa

TABELA 19 – Tensões em pontos internos do centro da placa

	Coordenada z ao longo da espessura	MEF ANSYS $\sigma_{xx}$	MEC		MEC	
			Integrações pelo esquema de <b>Gauss com mapeam. degen.</b>		Integrações pelo esquema de <b>Hammer com subelementos</b>	
			$\sigma_{xx}$	Diferença (%)	$\sigma_{xx}$	Diferença (%)
Placa com vão L = 40	4,75	-49,884	-49,541	-0,688	-48,965	-1,843
	3,25	-33,605	-32,934	-1,996	-32,934	-1,996
	1,25	-13,313	-13,173	-1,051	-13,173	-1,051
	-1,25	11,107	10,685	-3,796	10,685	-3,796
	-3,25	31,396	30,440	-3,046	30,440	-3,046
	-4,75	47,673	47,021	-1,367	46,460	-2,544
Placa com vão L = 50	4,75	-75,507	-75,117	-0,517	-73,149	-3,122
	3,25	-51,178	-49,476	-3,326	-49,476	-3,326
	1,25	-20,153	-19,627	-2,609	-19,627	-2,609
	-1,25	17,685	16,841	-4,774	16,841	-4,774
	-3,25	48,710	46,683	-4,162	46,683	-4,162
	-4,75	73,039	72,283	-1,036	70,340	-3,696
Placa com vão L = 100	4,75	-284,95	-499,945	75,450	-2681,70	841,11
	4,25	-254,72	-249,108	-2,203	-249,079	-2,203
	3,25	-194,59	-190,139	-2,287	-190,139	-2,287
	1,25	-75,511	-73,846	-2,205	-73,845	-2,206
	-1,25	72,390	70,694	-2,342	70,694	-2,342
	-3,25	191,47	186,972	-2,349	186,972	-2,349
	-4,25	251,60	245,924	-2,256	245,891	-2,256
	-4,75	281,83	496,550	76,188	4450,49	1479,14

Assim como os deslocamentos, os valores de tensões acompanham os resultados do MEF. Observam-se diferenças entre os esquemas de integração apenas para resultados em pontos internos mais próximos do contorno, onde pode haver influência de comportamento quase-singular de algumas das integrais calculadas. Os erros na avaliação de integrais quase-singulares tornam as respostas bastante imprecisas, como se pode notar, principalmente, na placa com menor espessura relativa. Nessa placa ( $L=100$ ) os elementos utilizados têm tamanho maior, e conseqüentemente a distância relativa entre o ponto de colocação e o elemento é menor que nas outras placas mais espessas ( $L = 40$  ou  $50$ ).

### 7.5 – Exemplo 5 (Corpo Sólido Sujeito a Cargas Diversas)

Considera-se neste exemplo o corpo sólido apresentado na FIG. 51, ao qual se atribuem valores de módulo de elasticidade igual a 205.010 e coeficiente de Poisson 0,3. Em uma das faces aplicam-se restrições a deslocamentos em todos os nós nas três direções, e em outra são aplicadas cargas uniformemente distribuídas, nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . São avaliados neste exemplo os deslocamentos em um ponto arbitrário representado por  $A$  e tensões ao longo de uma linha representada por  $BC$ .

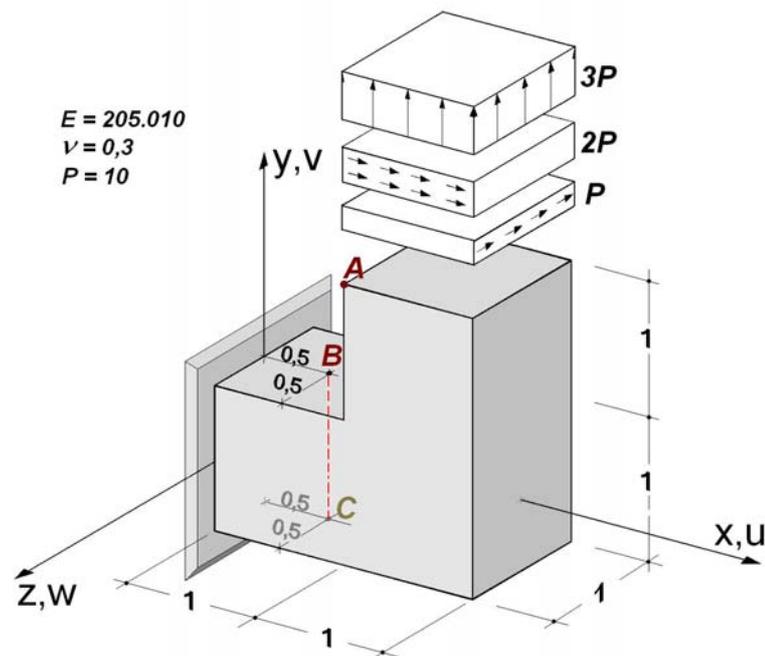


FIGURA 51 – Geometria do sólido, propriedades e carregamentos

Na ausência de resultados analíticos para o problema, determinaram-se os valores a serem usados como referência por meio de uma análise numérica utilizando o MEF, através do programa ANSYS 5.7, onde foram feitos refinamentos sucessivos das malhas até o limite permitido pela versão disponível do programa, para comprovar a convergência dos resultados. Nas análises, foram utilizados elementos sólidos hexaédricos de 20 nós, iniciando-se a discretização com 3 elementos, e fazendo-se divisões de cada elemento original em 8 novos elementos, nos refinamentos seguintes, obtendo-se os resultados apresentados na TAB. 20, para deslocamentos do ponto *A* nas direções dos eixos cartesianos.

TABELA 20 – Convergência dos resultados do MEF / ANSYS

Graus de Liberdade	Deslocam. u	Variação %	Deslocam. v	Variação %	Deslocam. w	Variação %
108	0,0014823	-	0,0019155	-	0,0028934	-
540	0,0017105	+ 15,40	0,0021627	+ 12,91	0,0033070	+ 14,30
3.240	0,0018144	+ 6,07	0,0022599	+ 4,49	0,0034317	+ 3,77
22.032	0,0018626	+ 2,66	0,0022954	+ 1,57	0,0034663	+ 1,01
161.568	0,0018855	+ 1,23	0,0023104	+ 0,65	0,0034787	+ 0,36

São utilizados como resultados de referência aqueles obtidos por meio do MEF/ANSYS para a malha mais refinada, composta por 54.689 nós e 12.288 elementos, resultando numa discretização com 161.568 graus de liberdade. Nas análises numéricas via MEC, utilizaram-se elementos de contorno triangulares com aproximação linear ou quadrática. Em cada novo nível de refinamento considerado, o elemento original é dividido em 4 novos elementos, conforme pode ser observado nas ilustrações da FIG. 52, onde se apresentam as malhas utilizadas.

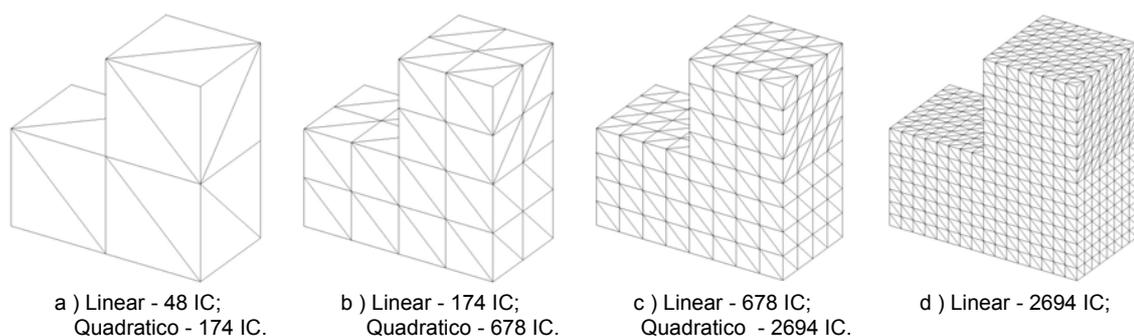
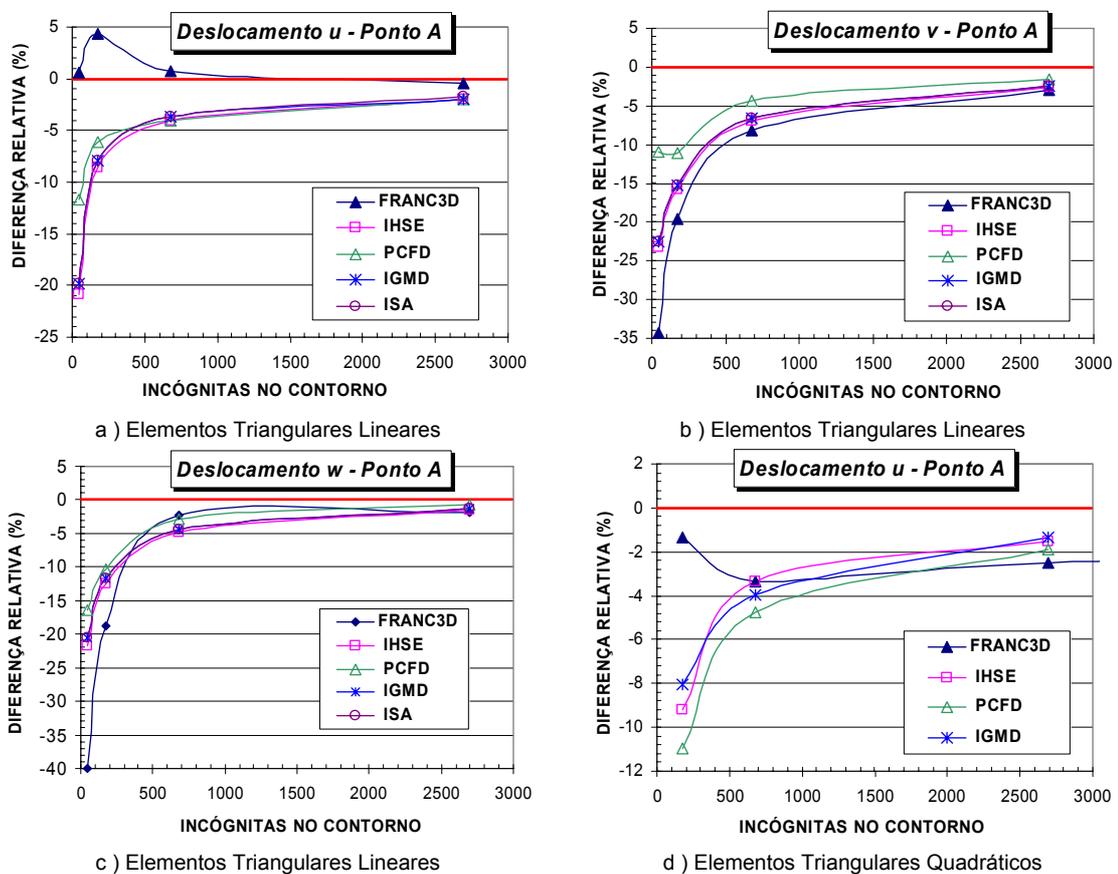


FIGURA 52 – Malhas utilizadas no calculo via MEC

O problema foi analisado numericamente utilizando-se também o programa FRANC3D versão 1.15. Este programa foi desenvolvido por um grupo de pesquisadores da Universidade de Cornell, e se baseia no MEC, tendo sua aplicação dirigida para problemas de mecânica da fratura. As discretizações utilizadas nas análises efetuadas com o programa FRANC3D são as mesmas apresentadas na FIG. 52.

Na FIG. 53 são apresentados os resultados de deslocamentos no ponto *A*, obtidos nas análises via MEC. Para análises com o programa implementado, no algoritmo que considera o ponto de colocação externo (*PCFD*), foram adotados os valores de 0,1 e 0,2 para o parâmetro  $\alpha$ , para elementos lineares e quadráticos respectivamente, por parecerem valores mais estáveis, conforme apresentado na continuação. São apresentadas as diferenças percentuais relativas aos resultados de referência para os diferentes esquemas de integração adotados, ou seja, integração de Hammer com subelementos (*IHSE*), integração de Gauss com mapeamento degenerado (*IGMD*), e integração singular analítica (*ISA*) para elementos lineares.



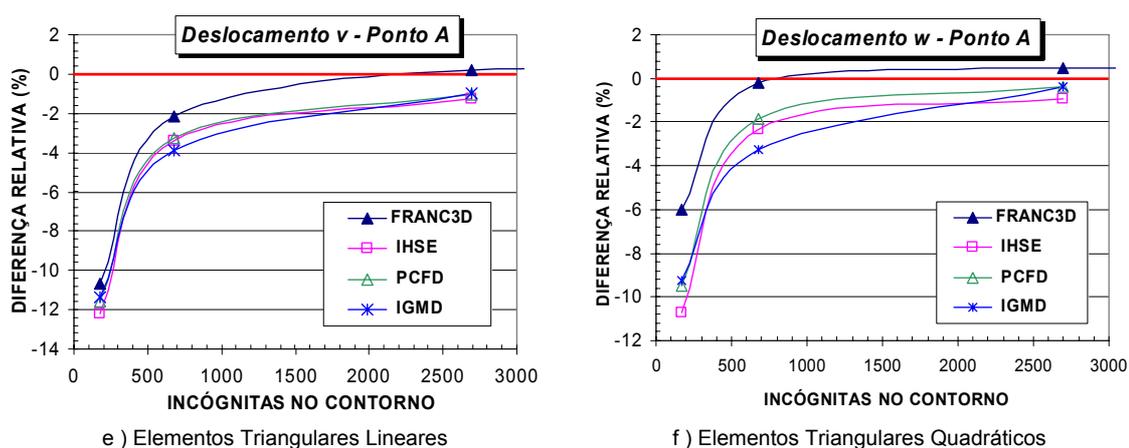


FIGURA 53 – Convergência dos resultados do MEC

Como se pode notar, os resultados parecem convergir para as respostas de referência, para todos os casos considerados, nota-se ainda que os resultados menos precisos ocorrem ao se considerar os deslocamentos na direção  $x$ . Nas TAB. 21 e 22 são apresentados os resultados de deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  para as malhas com 2.694 incógnitas no contorno ( $IC$ ), para uma avaliação comparativa dos resultados.

TABELA 21 – Deslocamentos no ponto A para elementos triangulares LINEARES

Desloc.	MEF/ANSYS 161.568 GL	FRANC3D		Integração de Hammer com subelementos	
		Deslocamento	Diferença (%)	Deslocamento	Diferença (%)
u	0,0018855	0,0018779	-0,404	0,001849	-1,928
v	0,0023104	0,0022438	-2,882	0,002250	-2,597
w	-0,0034787	-0,0034123	-1,909	-0,003427	-1,498

Direção Desloc.	Ponto de colocação fora do domínio ( $\alpha = 0,2$ )		Integração de Gauss com mapeamento degenerado		Integração singular analítica	
	Deslocamento	Difer. (%)	Deslocamento	Difer. (%)	Deslocamento	Difer. (%)
u	0,001849	-1,938	0,001849	-1,932	0,001852	-1,767
v	0,002275	-1,533	0,002254	-2,461	0,002254	-2,461
w	-0,003455	-0,674	-0,003435	-1,263	-0,003435	-1,263

Observa-se nas tabelas acima uma boa concordância entre os resultados obtidos com o programa implementado e os demais. As alternativas de integração se mostraram praticamente equivalentes, sendo que os elementos com aproximação quadrática proporcionaram resultados mais precisos que os lineares.

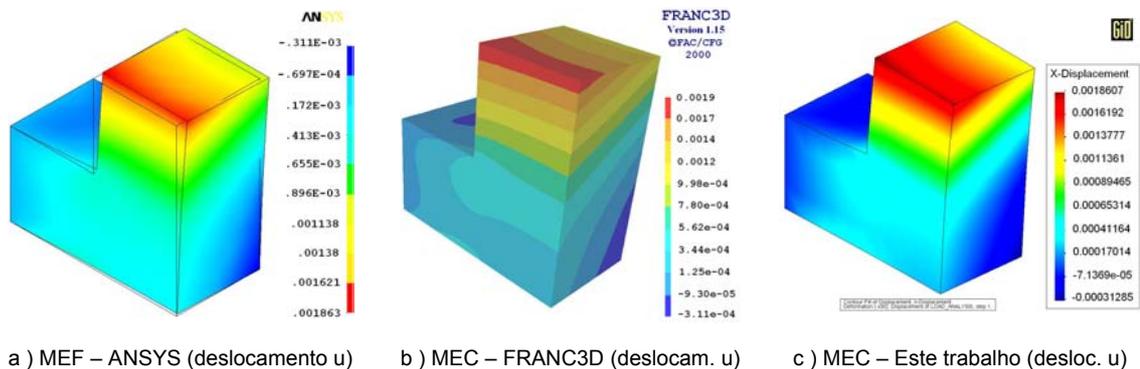
TABELA 22 – Deslocamentos no ponto A para elementos triangulares QUADRÁTICOS

Direção Desloc.	MEF 161.568 GL	FRANC3D		Integração de Hammer com subelementos	
		Deslocamento	Diferença (%)	Deslocamento	Diferença (%)
u	0,0018855	0,0018387	-2,483	0,001857	-1,511
v	0,0023104	0,0023153	0,212	0,002282	-1,222
w	-0,0034787	-0,0034957	0,488	-0,003447	-0,912

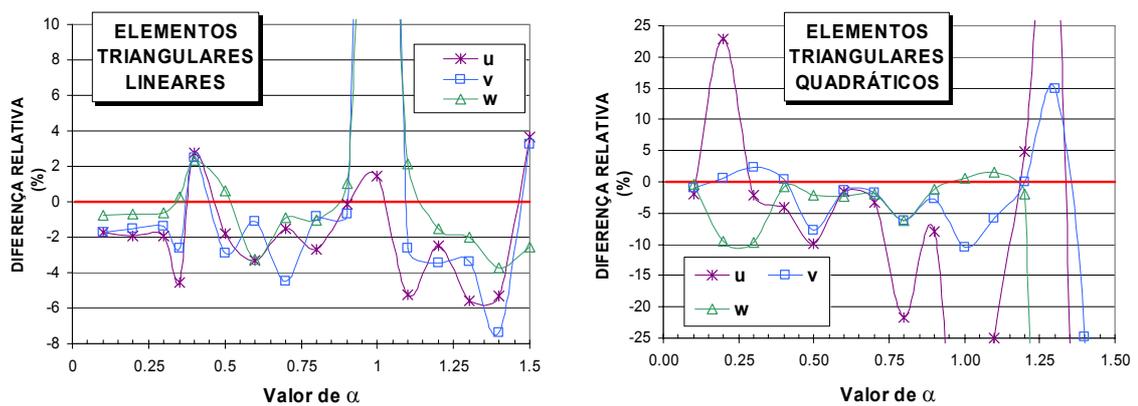
  

Direção Desloc.	MEF 161.568 GL	Ponto de colocação fora do domínio ( $\alpha = 0,1$ )		Integração de Gauss com mapeamento degenerado	
		Deslocamento	Diferença (%)	Deslocamento	Diferença (%)
u	0,0018855	0,001850	-1,908	0,001861	-1,318
v	0,0023104	0,002287	-1,015	0,002288	-0,966
w	-0,0034787	-0,003466	-0,377	-0,003465	-0,387

A concordância entre resultados exposta para o ponto *A* é verificada em todo o sólido na FIG. 54, onde são mostradas as configurações deformadas, com resultados para deslocamentos na direção *x*, por exemplo.

FIGURA 54 – Deslocamentos na direção do eixo *x*

Para o algoritmo que considera o ponto de colocação fora do domínio, foram obtidos resultados para diferentes valores do parâmetro  $\alpha$ , que determina a distância de posicionamento do ponto de colocação ao nó correspondente, utilizando-se a malha com 2.694 incógnitas no contorno, e integração de Hammer com subelementos. As diferenças relativas ao resultado de referência são mostradas na FIG.55.

FIGURA 55 – Resultados para variações nos valores de  $\alpha$ 

Como pode-se observar, a amplitude de variação dos resultados é menor ao se utilizar elementos lineares, onde parece haver uma estabilidade para valores de  $\alpha$  entre 0,1 e 0,3, diferentemente dos elementos quadráticos, onde os resultados são muito instáveis, produzindo erros consideravelmente grandes (até 700% em  $u$ , para  $\alpha=1,5$ ) para alguns valores de  $\alpha$  utilizados. Isto mostra a sensibilidade das respostas em relação ao tipo de elemento e ao parâmetro  $\alpha$ .

As tensões em pontos da linha  $BC$  da FIG. 51 também foram analisadas e comparadas com os resultados obtidos pelo MEF com a malha mais refinada (161.568 graus de liberdade). Na análise pelo MEC, as integrais envolvidas no cálculo são aquelas correspondentes às da IST (Eq. 22), com núcleos  $S_{kij}$  e  $D_{kij}$ . Ao se determinar as tensões em pontos internos estas integrais são todas regulares, e foram utilizados em sua avaliação os esquemas de Hammer com subelementos ( $IHSE$ ) e de Gauss-Legendre com mapeamento degenerado ( $IGMD$ ). Para evitar pontos muito próximos do contorno consideram-se apenas pontos internos que têm sua coordenada  $y$  no intervalo  $[-0.48; 0.48]$ , para que as integrais envolvidas não apresentem comportamento quase-singular, que tornariam os resultados instáveis.

Como se trata de uma etapa de pós-processamento, foram utilizadas as respostas no contorno (deslocamentos de forças) obtidas por meio do algoritmo que considera o ponto de colocação no contorno e integração analítica, para o caso de elementos lineares e quadratura de Gauss com mapeamento degenerado, para elementos quadráticos. As

malhas consideradas são aquelas para as quais se tem 2694 incógnitas no contorno. Os resultados obtidos para as componentes  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{xx}$  são apresentadas na FIG. 56, onde podem ser observadas as respostas equivalentes obtidas por meio dos dois algoritmos de integração.

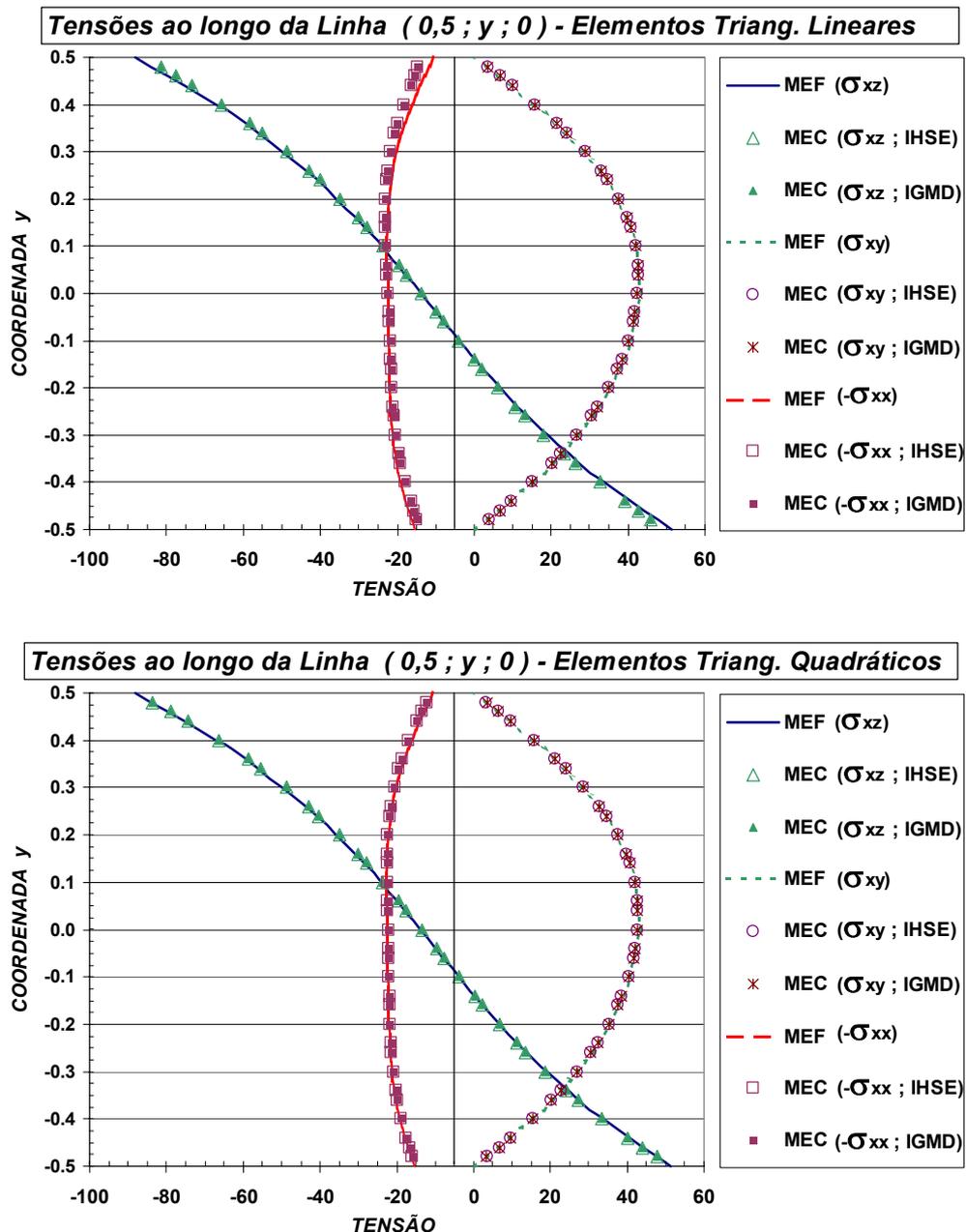


FIGURA 56 – Tensões  $\sigma_{xz}$  ;  $\sigma_{xy}$  e  $\sigma_{xx}$  ao longo da linha BC

Observa-se uma boa concordância entre os resultados obtidos pelos dois esquemas de integração, com os resultados de referência, tanto para elementos com aproximação linear quanto quadrática.

### 7.6 – Exemplo 6 (Cavidade Esférica em Cilindro)

Avaliações precisas em regiões onde ocorrem rápidas variações de tensão são uma necessidade constante na determinação de parâmetros para projetos, especialmente no caso de atuação de cargas cíclicas, que podem levar a estrutura à fadiga. Um caso clássico em que esta concentração de tensões se verifica é considerado neste exemplo, constituindo-se de um sólido de forma cilíndrica no qual se insere uma cavidade esférica, conforme apresentado na FIG. 57.

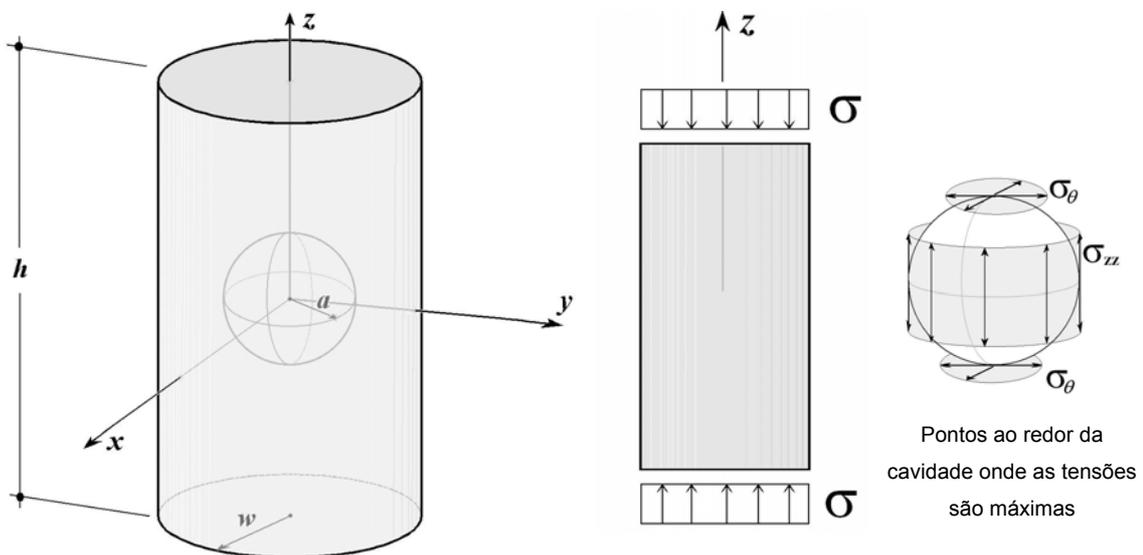


FIGURA 57 – Sólido cilíndrico com cavidade esférica

A solução analítica para tensões locais ao redor de uma cavidade esférica é conhecida e apresentada em TIMOSHENKO e GOODIER (1980). Para pontos no plano  $z = 0$ , as tensões normais  $\sigma_{zz}$  são apresentadas abaixo na Eq. 101, assim como as tensões tangenciais em pontos dos planos  $z = \text{constante}$ , denominadas  $\sigma_\theta$ , dadas por:

$$\sigma_{zz} = \sigma \left[ 1 + \frac{4-5\nu}{2(7-5\nu)} \frac{a^3}{r^3} + \frac{9}{2(7-5\nu)} \frac{a^5}{r^5} \right]$$

$$\sigma_\theta = \sigma \left[ \frac{(9-15\nu)}{(7-5\nu)} \frac{a^3}{r^3} - \frac{6}{(7-5\nu)} \frac{a^5}{r^5} \right]$$
(101)

As tensões  $\sigma_{zz}$  máximas ocorrem no plano  $z = 0$ , em  $r = a$  (equador da cavidade), enquanto que as máximas tensões  $\sigma_\theta$  ocorrem nos pólos da cavidade ( $z = r = a$ ). Para as análises feitas, são adotados as dimensões  $a = 30$ ,  $w = 75$ ,  $h = 300$ , tensão aplicada  $\sigma$  de compressão igual a 250, e como propriedades do material tem-se o módulo de elasticidade  $E = 21.000$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$  (unidades compatíveis). Pretende-se avaliar a eficiência do programa em representar esta rápida variação de tensões, que pode ser observada na FIG. 58, para os valores analíticos. As tensões  $\sigma_{zz}$  têm valor extremo de  $2,045 \sigma$ , enquanto nos pólos da cavidade ocorrem tensões máximas de tração, num valor aproximado de  $0,682 \sigma$ .

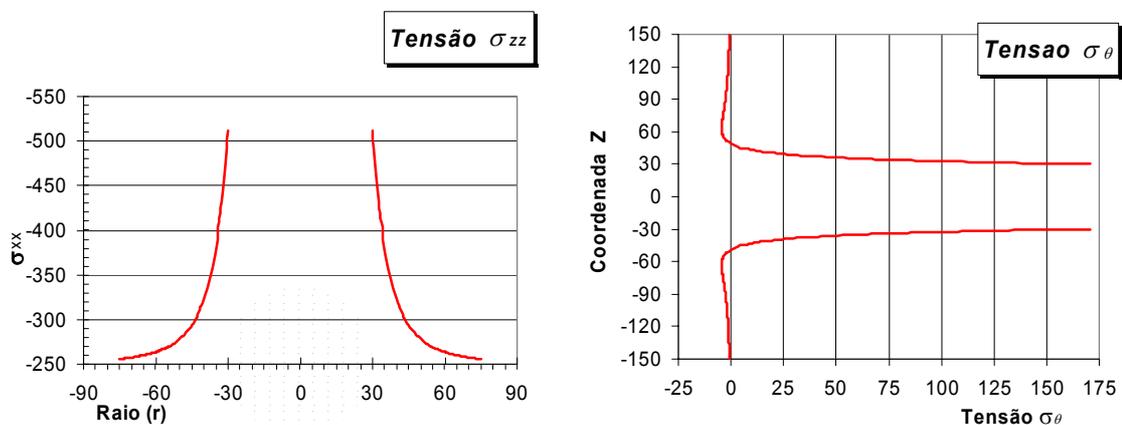


FIGURA 58 – Concentração de tensões (TIMOSHENKO e GOODIER, 1980)

Numericamente, o problema foi analisado via MEC e também pelo MEF, onde, utilizou-se o ANSYS 5.7, adotando-se os valores obtidos com a malha mais refinada, constituída de 44.858 elementos hexaédricos de 20 nós degenerados em tetraedros, totalizando 63.998 nós (FIG. 59a). Na análise pelo MEC foram consideradas as tensões em pontos internos, calculadas a partir de valores de contorno determinados pelo algoritmo com ponto de colocação no contorno e integração analítica, para o caso de elementos com aproximação linear e integração numérica de Gauss com mapeamento degenerado para o caso de elementos quadráticos. As malhas para as quais os resultados são apresentados na seqüência, são compostas por 416 elementos lineares (212 nós) ou 360 elementos quadráticos (724 nós), como mostrado nas FIG. 59b e 59c, respectivamente.

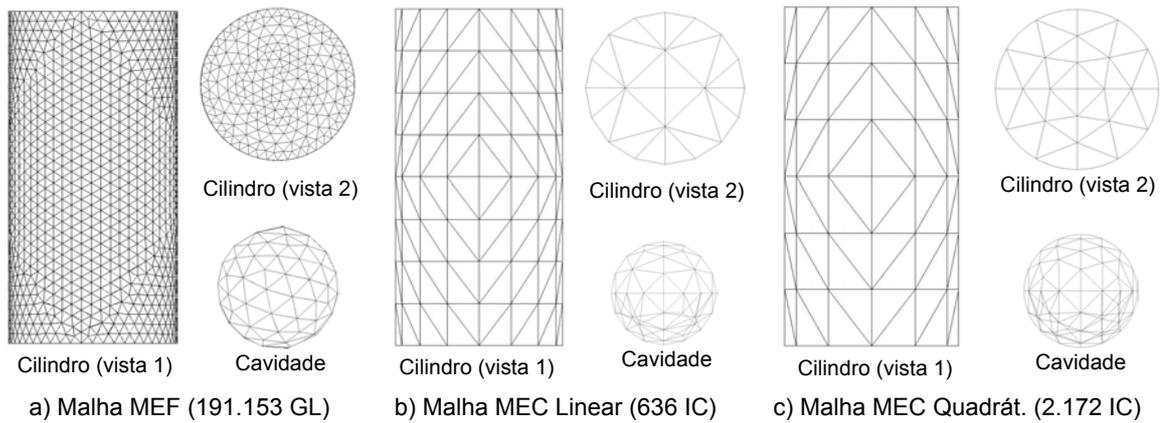
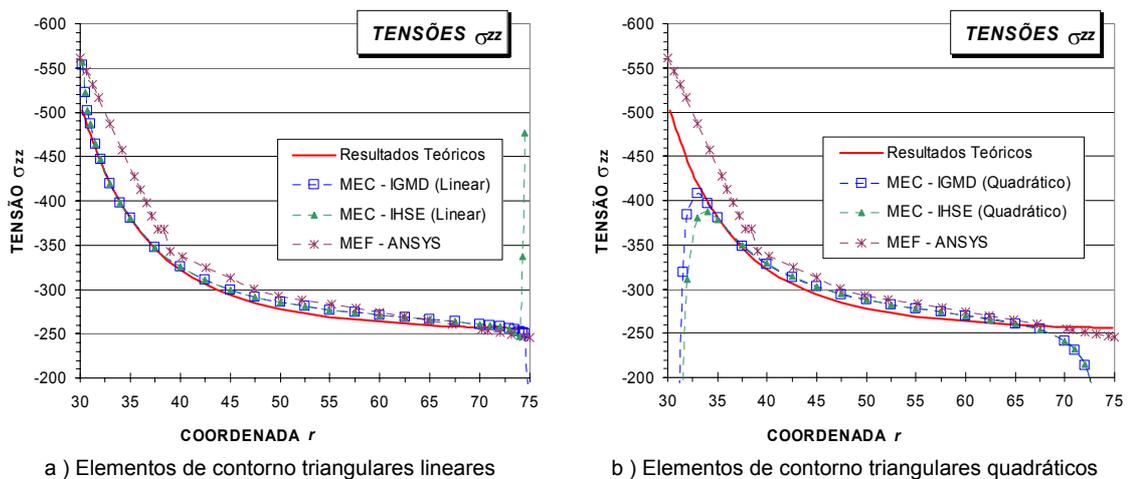


FIGURA 59 – Discretizações para o cilindro e a cavidade

Os resultados numéricos obtidos para tensões  $\sigma_{zz}$  são apresentados na FIG. 60, para uma linha que acompanha a direção do eixo  $x$ , e também são representados os valores teóricos, para comparação visual dos resultados.

FIGURA 60 – Resultados numéricos para tensões  $\sigma_{zz}$ 

Os resultados obtidos com o MEC apresentam uma boa concordância com os valores teóricos, superando em muitos pontos as respostas do MEF. Para o caso da malha com elementos triangulares os resultados são mais precisos, observando-se perturbações nos resultados apenas ao se considerar pontos muito próximos ao contorno do cilindro, a partir de uma distância de uma unidade, sendo que para o contorno da cavidade, os resultados não parecem apresentar perturbações mesmo para distâncias de 0,25 unidades. Já na malha com elementos quadráticos, as perturbações nos resultados aparecem de forma mais intensa, apesar do maior número de incógnitas no contorno

(IC), podendo serem notadas à distâncias de 7,5 a partir do contorno externo e 5,0 a partir do contorno da cavidade.

Para tensões de tração  $\sigma_\theta$  que surgem em pontos sobre o eixo  $z$  mais próximos dos pólos da cavidade, os resultados obtidos são apresentados na FIG. 61.

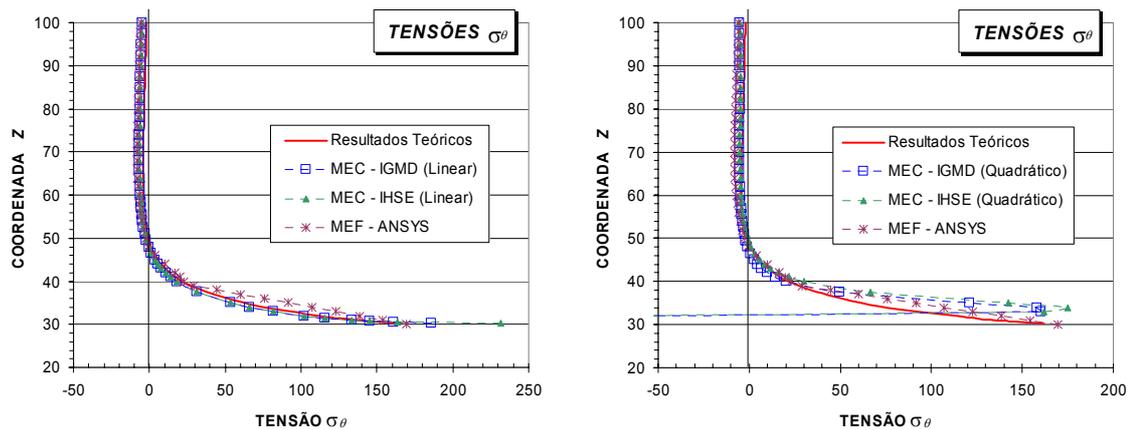


FIGURA 61 – Resultados numéricos para tensões  $\sigma_\theta$

Também para tensões  $\sigma_\theta$  os resultados numéricos representam a rápida variação de forma adequada, destacando-se também aqui os resultados obtidos com uso de elementos de contorno triangulares lineares, posicionados até uma distância mínima de 0,25 unidades do pólo da cavidade. Para o caso de elementos quadráticos e pontos próximos do contorno, os resultados apresentam perturbações, advindas provavelmente da natureza quase-singular dos integrandos, e verificadas para distâncias maiores que 3,0 unidades a partir do pólo da cavidade.

Adotando-se dois pontos de avaliação sobre o eixo  $x$  e o eixo  $z$ , com coordenadas  $A$  (35;0;0) e  $B$  (0;0;35), isto é, distantes 5 unidades do contorno da cavidade, verificam-se na TAB. 23 os resultados obtidos para diferentes níveis de discretização. São apresentadas somente as respostas do algoritmo que usa a integração de Gauss com mapeamento degenerado, já que os resultados obtidos pelo outro algoritmo (Hammer com subelementação) são praticamente iguais. Nota-se que, apesar de a curva obtida para os resultados acompanhar os resultados teóricos, quantitativamente as respostas obtidas apresentam erros consideráveis.

TABELA 23 – Tensões obtidas para diferentes discretizações

Elem. <b>Linear</b>	Result. Teórico	MEF		MEC - Malha 1		MEC - Malha 2		MEC - Malha 3	
		191.153 GL	Erro (%)	636 IC	Erro (%)	1.044 IC	Erro (%)	1.728 IC	Erro (%)
$\sigma_{zz}$ (35;0;0)	-380,4	-437,20	14,9	-380,10	-0,1	-368,19	-3,2	-391,74	3,0
$\sigma_{\theta}$ (0;0;35)	61,78	91,50	48,1	53,41	-13,5	48,01	-22,3	59,13	-4,3
Elem. <b>Quadr.</b>	Result. Teórico	MEF		MEC - Malha 1		MEC - Malha 2		MEC - Malha 3	
		191.153 GL	Erro (%)	1.020 IC	Erro (%)	2.172 IC	Erro (%)	7.116 IC	Erro (%)
$\sigma_{zz}$ (35;0;0)	-380,4	-437,20	14,9	-357,53	-6,0	-380,82	0,1	-389,68	2,4
$\sigma_{\theta}$ (0;0;35)	61,78	91,50	48,1	168,13	172,2	120,90	95,8	58,34	-5,6

Neste problema, a sensibilidade ao comportamento quase-singular das integrais é intensa, sendo necessário o uso de uma grande quantidade de elementos para se reduzir os erros e se obter resultados de tensões com precisão aceitável em pontos internos mais próximos dos contornos.

### 7.7 – Exemplo 7 (Exemplar de Ensaios para Mecânica da Fratura)

Neste último exemplo considera-se um sólido similar às amostras amplamente utilizadas em trabalhos experimentais para determinação de parâmetros essenciais na análise de problemas da mecânica da fratura, como o parâmetro  $K_{Ic}$ . São adotadas as dimensões especificadas pela norma ASTM-E399 (1997) que padroniza os ensaios elásticos. As relações das dimensões são apresentadas abaixo na FIG. 62. A trinca na ponta do entalhe é induzida por fadiga no corpo de prova submetido à carregamento cíclico. Como propriedades do material adotaram-se  $E = 2,05 \times 10^6$  para o módulo de elasticidade e 0,3 para o coeficiente de Poisson. A simetria do problema em relação ao plano de fratura permite a análise utilizando-se a formulação clássica do MEC, uma vez que são evitados problemas relativos à singularidade do sistema, provocados pela coplanaridade das superfícies que compõem a trinca. Os valores das dimensões utilizadas nas análises numéricas são apresentados na FIG. 62.

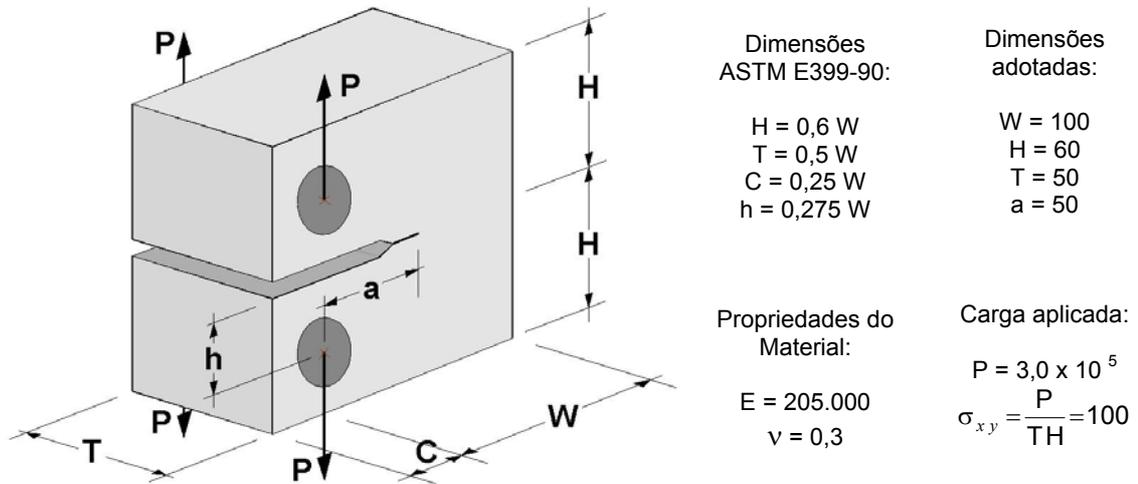


FIGURA 62 – Exemplar analisado, dimensões adotadas e propriedades.

São analisados os parâmetros de abertura da trinca  $\delta$  e o fator de intensidade de tensão no modo I ( $K_I$ ), representativos para problemas de mecânica da fratura. Soluções de referência para este problema são apresentadas em TADA *et al.* (2000) como:

$$K_I = \frac{P\sqrt{a}}{TW} \cdot \frac{2\left(2 + \frac{a}{W}\right)}{\left(1 - \frac{a}{W}\right)^{3/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a/W}} F\left(\frac{a}{W}, \frac{H}{W}, \frac{d}{H}\right) \quad (102)$$

Onde  $F\left(\frac{a}{W}, \frac{H}{W}, \frac{d}{H}\right)$  é dado por uma fórmula empírica função apenas de  $\frac{a}{W}$  para o corpo de prova padrão, com precisão de 0,5% para  $\frac{a}{W} > 0,2$  expressa por:

$$F\left(\frac{a}{W}\right) = 0,443 + 2,32\left(\frac{a}{W}\right) - 6,66\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 7,36\left(\frac{a}{W}\right)^3 - 2,8\left(\frac{a}{W}\right)^4 \quad (103)$$

A fórmula da abertura da trinca, no alinhamento da carga  $P$  é expressa por (TADA *et al.*, 2000):

$$\delta = \frac{P}{TE'} \left( \frac{1 + \frac{a}{W}}{1 - \frac{a}{W}} \right)^2 \cdot \left[ 2,1630 + 12,219\left(\frac{a}{W}\right) - 20,065\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 0,9925\left(\frac{a}{W}\right)^3 + \right. \\ \left. + 20,609\left(\frac{a}{W}\right)^4 - 9,9314\left(\frac{a}{W}\right)^5 \right] \quad (104)$$

onde  $E'=E$  para Estado Plano de Tensão e  $E'=\frac{E}{(1-\nu^2)}$  para Estado Plano de Deformação. Esta fórmula (Eq. 104) tem precisão de 0,5% para  $0,2 \leq \frac{a}{W} \leq 0,95$  segundo TADA *et al.* (2000).

O cálculo de  $K_I$  na análise numérica é baseado nas expressões apresentadas por ALIABADI e ROOKE (1991), com base nos deslocamentos relativos entre pontos da superfície da trinca. Considerando-se a extrapolação de deslocamentos por um ponto, tem-se a expressão:

$$K_I = \frac{G}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \left[ u_y^b(\theta = \pi) - u_y^c(\theta = -\pi) \right] \quad (105)$$

onde  $G$  é o módulo de elasticidade transversal,  $\kappa = (3-4\nu)$  para estado plano de deformação e  $r$  é a distância dos pontos  $b$  e  $c$  à frente da trinca. Antes da abertura da trinca  $b$  e  $c$  são coincidentes, e seu posicionamento é ilustrado na FIG. 63. A Eq. 105 se aplica a elementos lineares e também a elementos bidimensionais, simplesmente considerando-se deslocamentos em planos normais à frente da trinca (ALIABADI e ROOKE, 1991).



FIGURA 63 – Parâmetros para cálculo de  $K_I$

As fórmulas das Eq. 102 e 104 referem-se a problemas planos apenas. Para se utilizar as respostas obtidas da análise tridimensional usando estas fórmulas como referência, aplica-se num primeiro momento uma restrição a deslocamentos na direção  $z$  do modelo numérico. Esta restrição é feita nos planos ( $z = T/2$ ) e ( $z = -T/2$ ), simulando com isso o estado plano de deformação (EPD). Adotou-se 10% do comprimento  $a$  da trinca como parâmetro  $r$  da Eq. 105 para o cálculo de  $K_I$  por extrapolação. A carga é aplicada como tensão uniformemente distribuída nas faces do plano  $x = 0$ , pois conforme se observa em TADA *et al.* (2000), esta distribuição, ou o ponto de aplicação da carga, não

interfere significativamente nas respostas para valores da relação  $\frac{a}{W}$  maiores que 0,40, justificando-se assim esta simplificação.

A FIG. 64 ilustra a relação entre o modelo numérico utilizado para cálculos através do programa implementado e o corpo de prova.

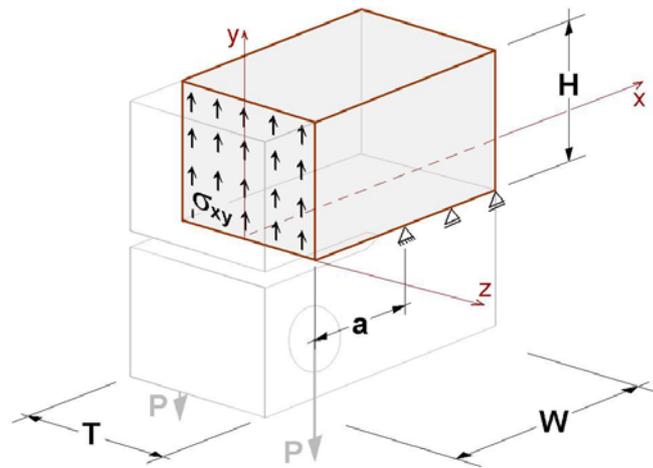


FIGURA 64 – Modelo utilizado para análises numéricas pelo programa implementado

O modelo numérico e as malhas menos refinadas para as quais são apresentados os resultados estão ilustrados na FIG. 65.

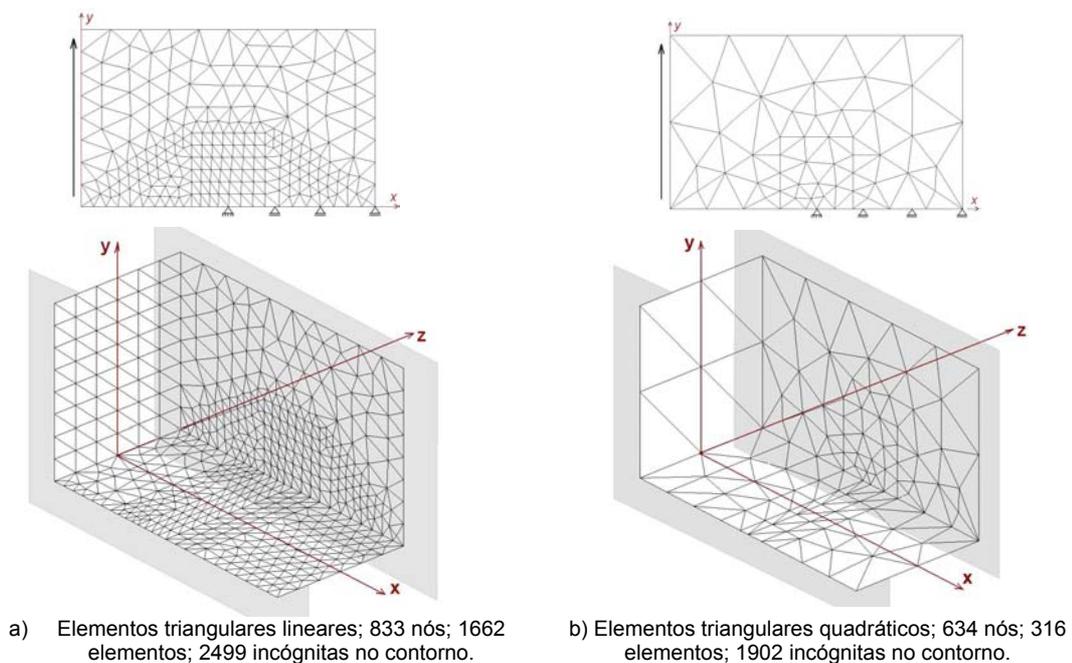


FIGURA 65 – Modelo simulando estado plano de deformação

São apresentados na TAB. 24 os resultados de abertura da trinca  $\delta$  e fator de intensidade de tensão  $K_I$  obtidos para as malhas mostradas na FIG. 65 e outras mais refinadas, compostas por 2014 elementos lineares (1009 nós) ou 486 elementos quadráticos (974 nós) para as alternativas de integração analítica de elementos lineares e quadratura de Gauss com mapeamento degenerado para elementos quadráticos. As respostas apresentadas se basearam nos resultados de deslocamentos nos pontos situados no plano  $z = 0$ .

TABELA 24 – Respostas para simulação tridimensional de estado plano de deformação

Parâmetro	EPD (TADA, <i>et al.</i> )	Elementos Lineares		Elementos Lineares		Elem. Quadráticos		Elem. Quadráticos	
		833 nós	Erro %	1009 nós	Erro %	634 nós	Erro %	974 nós	Erro %
$\delta$	0,98517	1,01342	2,87	0,98661	0,15	0,97920	-0,61	0,98176	-0,35
$K_I$	5795,45	4832,41	-16,62	5742,18	-0,92	5673,77	-2,10	5779,95	-0,27

Para uma análise do problema tridimensional simulando o corpo de prova sem a restrição artificial na direção  $z$ , as respostas de referência para abertura da trinca e fator de intensidade de tensão adotadas, são obtidas a partir de uma análise numérica utilizando o programa FRANC3D. Este programa utiliza um algoritmo próprio para tratamento de problemas de mecânica da fratura, apresentado por LUTZ *et al.* (1992). A superfície da trinca é discretizada em elementos não-conformes (discontínuos), sendo as equações redundantes destas superfícies substituídas por relações que utilizam as forças de superfície na superfície da trinca, que são conhecidas *a priori*. MARTHA *et al.* (1992) apresentam equações integrais de contorno para forças de superfície, análogas às equações de deslocamentos, que se diferenciam nas duas superfícies da fratura pela direção da normal ao elemento. Assim com esta abordagem, domínios simples podem ser tratados, englobando diversos tipos de problemas de fratura, sem a necessidade da utilização de domínios múltiplos (sub-regiões), e sem a limitação de aplicação somente a problemas com trincas no plano de simetria.

Para diferentes níveis de discretização, foi calculada a abertura da trinca na linha central da face carregada ( $x = 0; z = 0$ ), e também o fator de intensidade de tensão  $K_I$  no ponto

central da frente da trinca ( $x = 50$ ;  $y = z = 0$ ). Dois exemplos de discretizações adotadas são apresentados na FIG. 66.

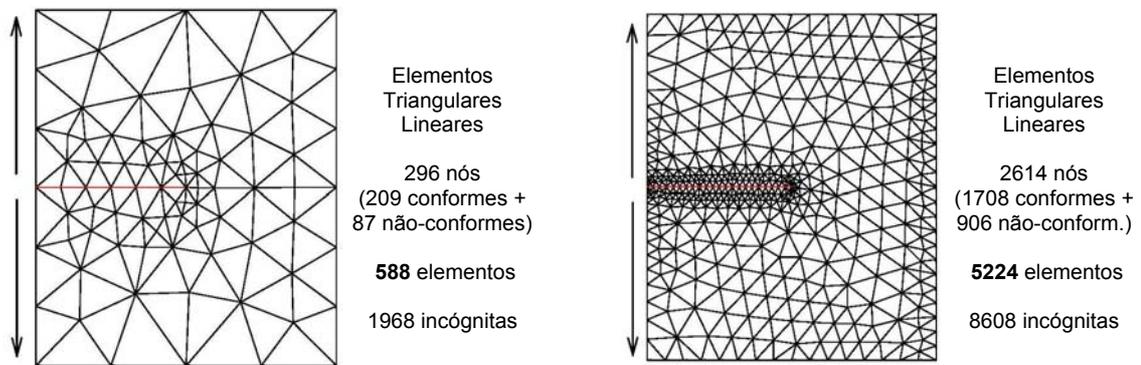


FIGURA 66 – Exemplos de malhas utilizadas no FRANC3D

Os resultados são apresentados na FIG. 67:

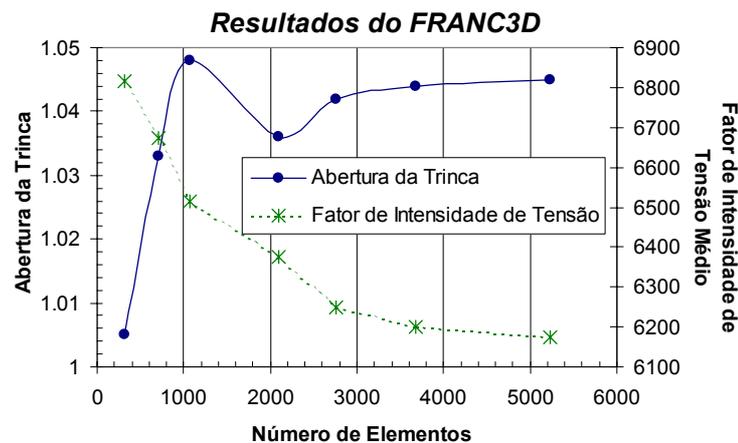
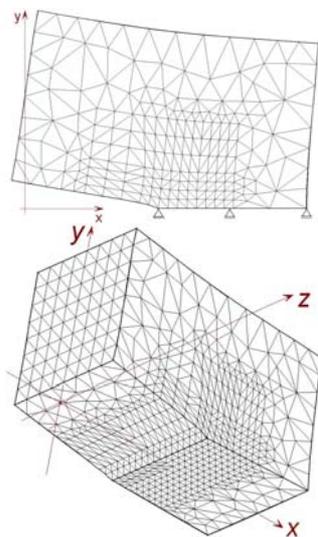


FIGURA 67 – Respostas do FRANC3D para abertura da trinca e média dos valores de  $K_I$  ao longo da trinca

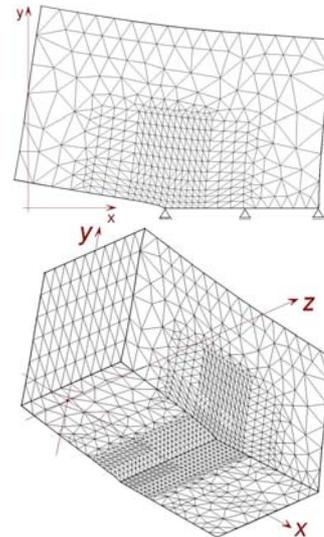
A diferença entre os valores obtidos pelo programa FRANC3D (situação prática) e os valores calculados pelas fórmulas das Eq. 102 e 104 (situação teórica, EPD) é esperada, e observa-se que a liberdade de deslocamentos na direção  $z$  resulta em valores maiores de abertura da trinca e também de  $K_I$ . Nas análises efetuadas com o FRANC3D as malhas não seguem uma divisão seqüencial, em que as malhas mais refinadas contêm as menos refinadas, devido à dificuldade de se fazer uma estruturação (mapeamento) adequada das mesmas. Como há uma convergência aparente das respostas, são adotados como valores de referência aqueles dados pela média dos três últimos níveis de

refinamento, ponderada pelo número de elementos. Assim adotam-se  $\delta = 1,044$ , e  $K_I = 6356$  (medido somente no ponto central da frente da trinca,  $z = 0$ ), que têm uma diferença de 6,0% e 9,7%, respectivamente, em relação ao resultado teórico obtido para EPD.

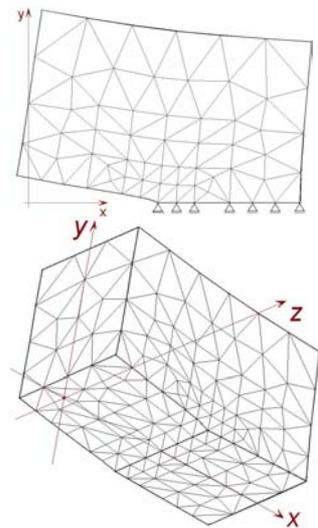
Na análise do problema pelo programa implementado, o modelo foi construído utilizando-se a simetria da amostra em relação ao plano  $y = 0$ . A FIG. 68 mostra a configuração deformada das malhas para as quais os resultados obtidos serão apresentados na seqüência. Foram usados elementos com aproximação linear e quadrática.



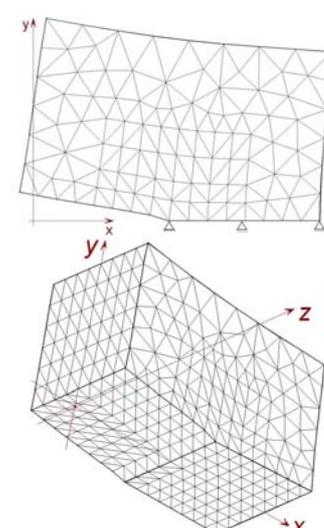
a) Elementos Lineares – 859 nós; 1714 elementos.



b) Elementos Lineares – 1408 nós; 2812 elementos.



c) Elementos Quadráticos – 822 nós; 410 elementos.



d) Elementos Quadráticos - 1862 nós; 930 elementos.

FIGURA 68 – Deformadas dos modelos numéricos e malhas consideradas nas análises

Como parâmetro  $r$  da Eq. 105 para o cálculo de  $K_I$  por extrapolação adotou-se 10% do comprimento  $a$  da trinca. A carga é aplicada como tensão uniformemente distribuída nas faces do plano  $x = 0$ . Os resultados obtidos para o plano  $z = 0$ , para abertura da trinca  $\delta$  e fator de intensidade de tensão  $K_I$  são apresentados na TAB. 25, considerando-se o algoritmo com ponto de colocação no contorno.

TABELA 25 – Resultados de  $\delta$  e  $K_I$ 

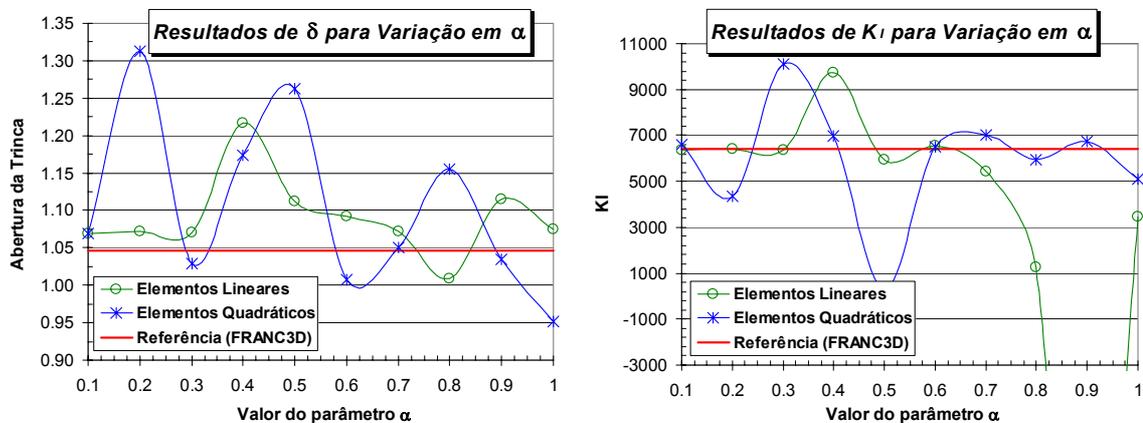
Elementos	Número de nós	Int. Singular Analítica		Int.Gauss Map. Deg.		Int. Hammer Subel.	
		$\delta$	difer. %	$\delta$	difer. %	$\delta$	difer. %
Lineares	859	1,05356	0,92	1,05356	0,92	1,05231	0,80
Lineares	1408	1,06419	1,93	1,06419	1,93	1,06344	1,86
Quadráticos	822	-	-	1,05690	1,24	1,05356	0,92
Quadráticos	1862	-	-	1,05696	1,24	1,05574	1,12

Elementos	Número de nós	Int. Singular Analítica		Int.Gauss Map. Deg.		Int. Hammer Subel.	
		$K_I$	difer. %	$K_I$	difer. %	$K_I$	difer. %
Lineares	859	6039,06	-4,99	6039,06	-4,99	6028,65	-5,99
Lineares	1408	6273,37	-1,30	6273,37	-1,30	6266,36	-1,41
Quadráticos	822	-	-	6359,44	-0,05	6327,92	-0,44
Quadráticos	1862	-	-	6355,85	-0,002	6339,57	-0,26

Valores de referência (FRANC3D):  $\delta = 1,044$  e  $K_I = 6356$

Para o algoritmo que considera o ponto de colocação fora do domínio, os resultados são apresentados abaixo, considerando-se as malhas lineares e quadráticas mais refinadas (1408 e 1862 nós, respectivamente) na FIG. 69.

FIGURA 69 – Resultados para diferentes valores de  $\alpha$

Na FIG. 70 são apresentados os deslocamentos obtidos para uma linha central ( $z = 0$ ;  $y = 0$ ) do plano da trinca, para alguns valores de  $\alpha$ .

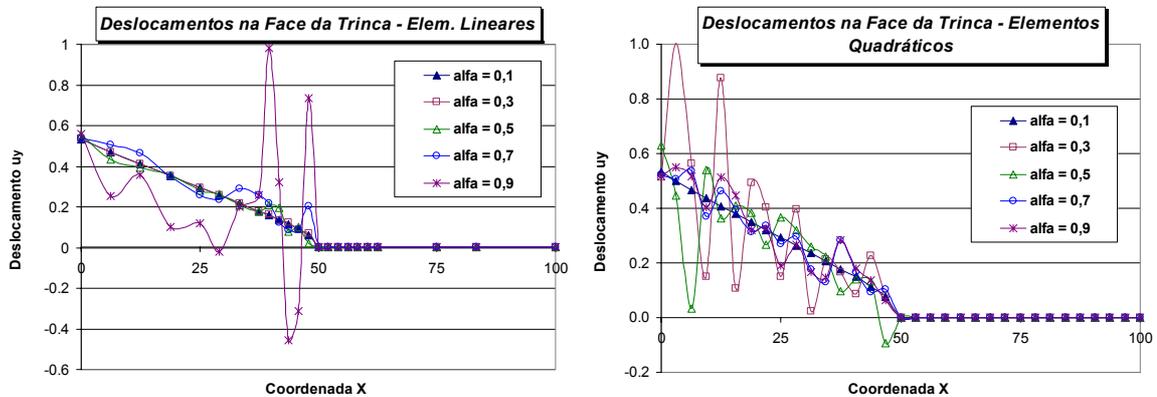


FIGURA 70 – Deslocamentos  $u_y$  para linha central do plano da trinca

Como pode ser observado nas figuras, a instabilidade das respostas ao se variar o valor do parâmetro  $\alpha$  de distância do ponto externo ao contorno é grande. A análise dos valores calculados com base em apenas um ou dois pontos (FIG. 69) pode conduzir a erros na avaliação da qualidade da resposta para determinados valores de  $\alpha$ . A análise da FIG. 70 ajuda na compreensão do comportamento da deformação do modelo em um maior número de pontos nodais. As respostas obtidas pelo algoritmo com ponto de colocação no contorno estão compatíveis com as respostas do FRANC3D, principalmente ao se utilizar elementos com aproximação quadrática.

A variação dos resultados de  $K_I$  ao longo da frente da trinca é apresentada na FIG. 71. Os valores de referência foram obtidos das respostas do FRANC3D, para a malha mais refinada. Os valores calculados pelo programa implementado foram obtidos usando-se o método de extrapolação por um ponto (Eq. 105), adotando-se para o parâmetro  $r$  o valor de 10% do comprimento da trinca  $a$ . Esta equação é aplicada para deslocamentos obtidos em vários planos normais à frente da trinca. São apresentados os resultados para elementos lineares com integrais singulares calculadas analiticamente, e quadráticos com quadratura de Gauss e mapeamento degenerado para as malhas mais refinadas, com 1408 e 1862 nós respectivamente. Além do cálculo automático de  $K_I$  feito pelo FRANC3D, fez-se a análise utilizando-se o modelo igual ao considerado nas análises com programa implementado, isto é, aproveitando da simetria do problema em relação

ao plano da trinca. A malha utilizada no FRANC3D tem 4200 elementos triangulares lineares, totalizando 2102 nós (2085 conformes e 17 não-conformes).

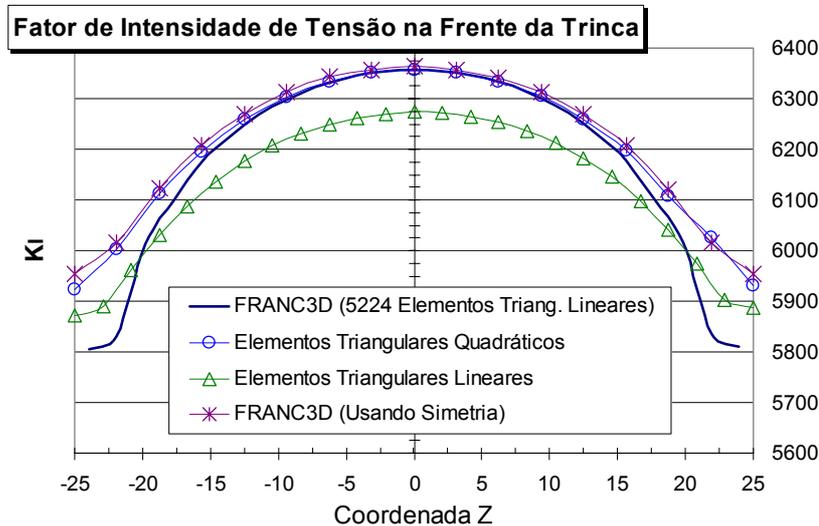


FIGURA 77 – Variação do Fator de Intensidade de Tensão ao longo da frente da trinca

A simetria do parâmetro  $K_I$  em relação ao plano  $z = 0$  é bem representada nas análises efetuadas pelo programa implementado, para os elementos lineares e quadráticos. Esta simetria não é verificada nas respostas automáticas de  $K_I$  do programa FRANC3D, para valores fora do intervalo  $z = [-20,20]$ . Os resultados obtidos na análise com o FRANC3D em que fez-se uso da simetria do corpo de prova, são muito próximos das respostas obtidas com o programa implementado, verificando-se melhor a simetria das respostas em relação ao plano  $z = 0$ . As curvas obtidas das análises se comportam de maneira semelhante na parte central do corpo de prova.

No modelo utilizado para análise com a formulação clássica do MEC (usando simetria), a tensão normal no plano que contém a trinca ( $\sigma_{yy}$ ) pode ser analisada através das respostas para forças de superfície. Na FIG. 72 são apresentados os resultados obtidos para um linha central ( $z = 0$ ) deste plano, utilizando-se as alternativas de integração implementadas.

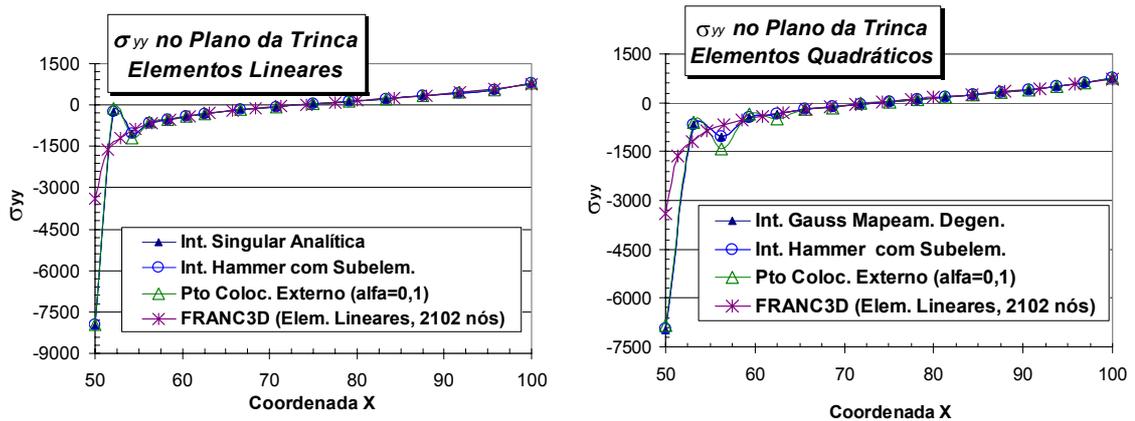


FIGURA 72 – Tensões normais no plano da trinca

Nota-se que a concentração de tensão (teoricamente infinita) na frente da trinca ( $x = 50$ ) é relativamente bem representada pelo programa. Observa-se uma oscilação nas respostas obtidas com o programa implementado, para o ponto nodal mais próximo da frente da trinca (não coincidente), em todos os esquemas de integração, para elementos lineares e quadráticos. Esta oscilação não é verificada nas respostas do FRANC3D onde a convergência é suave, porém com valor máximo menor. Uma causa provável da eliminação desta oscilação é o uso de elementos não-conformes (descontínuos) que o FRANC3D faz para discretização da frente da trinca. A carga aplicada provoca um efeito de flexão no modelo, observando-se para valores de  $x \approx 3a/2$  uma inversão no sinal das tensões, que passam a ser de compressão.

# 8

## Considerações Finais e Conclusões

Na elaboração e implementação de algoritmos do MEC clássico para problemas tridimensionais, tem-se como dificuldade principal a avaliação das integrais necessárias na obtenção dos coeficientes do sistema de equações. O nível de dificuldade varia de acordo com o tipo de elemento utilizado, e se deve à natureza singular da solução fundamental, que gera integrais fortemente singulares com núcleos de ordem  $r^{-2}$  para força de superfície, e fracamente singulares, com núcleo de ordem  $r^{-1}$  para deslocamentos. O cálculo direto das integrais fortemente singulares pode ser evitado ao se utilizar o conceito de movimento de corpo rígido, ou de forma equivalente, ao se utilizar a formulação auto-regularizada baseada na identidade Somigliana de deslocamentos. Restam, porém, as integrais fracamente singulares, para as quais os esquemas tradicionais de quadratura são imprecisos. É necessário então o uso de técnicas mais elaboradas para se obter uma boa precisão no cálculo destas integrais.

Apesar de sua complexidade, a solução analítica elimina qualquer erro numérico na integração. Entretanto, as formulações analíticas estão disponíveis apenas para elementos triangulares planos com esquemas de interpolação linear para as grandezas do contorno. Ao se utilizar elementos de ordem superior aos lineares, torna-se necessário recorrer a técnicas numéricas, aplicáveis a elementos com qualquer ordem de

aproximação. Nesse sentido, foi testada na computação das integrais fracamente singulares a utilização do esquema de quadratura de Hammer para domínios triangulares, aumentando-se a quantidade de pontos de integração através da técnica de subelementação. Porém, os resultados obtidos, mostraram certa ineficiência nesse caso, pois para haver melhoria na precisão das integrações é preciso usar uma quantidade exageradamente grande de pontos de integração, inviabilizando sua aplicação prática.

Outra técnica numérica à qual se recorreu, faz uso de um mapeamento do domínio triangular do elemento em um domínio quadrado de lado unitário, reduzindo com isso a ordem da singularidade em um grau, tornando regulares as integrais fracamente singulares. Sobre este novo domínio aplica-se a quadratura de Gauss-Legendre padrão, obtendo-se resultados bastante precisos na avaliação destas integrais, parecendo ser esta a melhor abordagem para avaliação das integrais fracamente singulares.

No cálculo das integrais não-singulares, caso o ponto de colocação esteja suficientemente distante do elemento sob integração, podem-se aplicar diretamente as técnicas de quadratura gaussiana tradicionais, como o esquema de Hammer para domínios triangulares. Porém, com o intuito de se utilizar um único algoritmo de integração, também foi testado o esquema de mapeamento degenerado com quadratura de Gauss-Legendre nestas integrais não-singulares. Os resultados obtidos foram praticamente iguais para os dois esquemas testados, podendo-se optar portanto, pelo uso do esquema mais conveniente. O esquema de Hammer tem como grande atrativo a simplicidade de implementação e interpretação, parecendo ser a melhor opção, caso não seja usado o esquema de Gauss com mapeamento degenerado na avaliação das integrais fracamente singulares.

Quando as distâncias relativas entre o ponto de colocação e o elemento sob integração são relativamente pequenas, torna-se necessário o uso de mais pontos de integração, para manter a precisão dos resultados. Portanto, é apropriado o uso de integração seletiva, onde a quantidade de pontos de integração é determinada em função desta distância relativa. Na quadratura de Gauss-Legendre a quantidade de pontos de integração é aumentada diretamente, enquanto no esquema de Hammer isto é feito ao se

variar a quantidade de subdivisões do elemento. O algoritmo utilizado, apesar de conservador, assegura que os erros estarão abaixo de um limite previamente estabelecido. Para pontos de colocação muito próximos do elemento, isto é, à distâncias menores que aproximadamente 0,3 vezes a média dos lados do elemento, o comportamento quase-singular dos integrando faz com que estes algoritmos se tornem ineficientes e imprecisos. Esta imprecisão é notada principalmente nas integrais que contêm núcleo fortemente singular, sendo necessário o uso de técnicas especiais adequadas para se obter uma integração precisa.

A comparação entre as respostas numéricas obtidas para as incógnitas do contorno (deslocamentos e forças de superfície) dos problemas analisados ressalta a importância da precisão na avaliação das integrais fracamente singulares. As respostas obtidas ao se utilizarem integração analítica e quadratura de Gauss com mapeamento degenerado são praticamente equivalentes, sendo ambas as alternativas sempre mais precisas que o uso da quadratura de Hammer com subelementação. Em geral os resultados obtidos por este último esquema são os menos precisos, dentre os estudados. O grau de precisão das respostas obtidas com a alternativa de integração de Hammer com subelementos varia para cada problema, mas em alguns casos os resultados são bastante razoáveis se comparados às demais alternativas. A análise de problemas isolados pode então, conduzir a conclusões equivocadas a respeito da eficiência da integração de Hammer com subelementos.

No algoritmo em que o ponto de colocação é posicionado fora do domínio, as integrais são todas regulares, não sendo necessário o uso de técnicas especiais em sua avaliação. Cuidados especiais devem ser tomados ao se utilizar esta alternativa em problemas com cantos reentrantes, onde são necessários algoritmos especiais para determinação do posicionamento do ponto de colocação. O maior problema enfrentado se deve à escolha da melhor distância para posicionamento do ponto em relação ao contorno. A instabilidade dos resultados obtidos ao se variar esta distância faz com que esta técnica pareça pouco confiável. Pelos problemas analisados parece não ser possível, através do algoritmo utilizado, determinar um valor ótimo para o parâmetro  $\alpha$ , que determina a distância do ponto de colocação ao nó correspondente no contorno. Para muitas das

distâncias testadas porém, os resultados obtidos foram compatíveis com os valores de referência, e algumas vezes, mais precisos que os resultados obtidos pelas abordagens que consideram os pontos de colocação no contorno. Estes bons resultados, aliados à simplicidade de implementação são grandes atrativos à continuação de pesquisas para aprimoramento e viabilização do uso deste algoritmo.

Na etapa de pós-processamento, o cálculo de valores em pontos internos (deslocamentos e tensões) envolve apenas integrais regulares. Ao se utilizar a formulação clássica da ISD e IST, para pontos relativamente distantes do contorno, os resultados são bastante satisfatórios, tanto para o esquema de integração de Hammer com subelementos quanto para o esquema de Gauss com mapeamento degenerado. Para pontos internos próximos do contorno, onde as integrais apresentam comportamento quase-singular, os resultados obtidos se tornam imprecisos, ainda que seja utilizado um grande número de pontos de integração no cálculo destas integrais. É necessário então recorrer a técnicas próprias de integração ou às formulações auto-regularizadas, que eliminam este comportamento dos integrandos.

Na formulação auto-regularizada da ISD, as respostas obtidas para deslocamentos em pontos distantes do contorno são equivalentes às respostas obtidas com o uso da formulação clássica. Entretanto, a regularização da ISD elimina as perturbações advindas do comportamento quase-singular presentes nas integrais ao se avaliar pontos muito próximos do contorno. Esta formulação permite então que se obtenham respostas precisas em quaisquer posições do domínio, sendo recomendada seu uso ao invés da formulação clássica, por sua eficiência e simplicidade. No cálculo de tensões em pontos internos, espera-se que a forma auto-regularizada da IST também seja capaz de apresentar melhores respostas em pontos próximos do contorno. As respostas obtidas por esta formulação devem superar as respostas obtidas pela formulação clássica, onde o comportamento quase-singular é notado mais intensamente do que no cálculo de deslocamentos.

Como propostas de continuação deste trabalho poderá ser avaliada a implementação das formulações auto-regularizadas da IST, empregadas com sucesso por RIBEIRO (2003)

---

no cálculo de tensões em pontos internos e de valores de contorno utilizando-se elementos descontínuos em problemas bidimensionais, e também estudos avaliando as hipóteses intrínsecas de continuidade. Outro ponto importante é a otimização computacional do programa, com uso de esquemas mais eficientes de integração seletiva, algoritmos iterativos para solução do sistema de equações e alocação dinâmica de memória. Pode ser feito também o estudo e elaboração de um algoritmo visando a melhoria na precisão da avaliação das integrais quase-singulares. Sugere-se para isso a associação da técnica de mapeamento degenerado à técnica de subelementação, metodologia que tem sido utilizada com sucesso, conforme se pode observar na literatura específica. Outro ponto de grande interesse é a utilização do método aplicado a problemas de domínio semi-infinito, onde seria válida a implementação de elementos infinitos, *enclosing elements* e solução fundamental de Mindlin. A eficiência destas abordagens pode ser avaliada na análise de problemas de fundações e escavação.

# 9

## Referências Bibliográficas

- ALIABADI, M.H.; ROOKE, D.P. : *Numerical Fracture Mechanics*; Solid Mechanics and its Applications; Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, Netherlands; 1991.
- AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIAL: *Standard Test Method for Plane-Strain Fracture Toughness of Metallic Materials*: ASTM E399 (Committee E-8); West Conshohocken, Pennsylvania; 1997.
- ANSYS : *ANSYS Inc.*: Version 5.7; Canonsburg, PA, USA; 2000.
- ARAÚJO, F.C.; NISHIKAVA, L.K.; MANSUR, W.J. : *On the Consideration of Enclosing Elements in 3D Elasto-Dinamic Analyses with the BEM and BE/FE Coupled Process*; In: XVIII CILAMCE – Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia; Anais Vol. 1, p. 423-431, Brasília, Brasil; 1997.
- ARAÚJO, F.C.; MANSUR, W.J.; CARRER, J.A.M. : *Time-Domain Three-Dimensional Analysis*; In: *Boundary Element Acoustics: Fundamentals and Computer Codes*; T.W. Wu (Ed.); Series: Advances in Boundary Elements; Vol. 7; 2000.
- BARBIRATO, J.C.C. : *Método dos Elementos de Contorno com a Reciprocidade Dual para a Análise Transiente Tridimensional da Mecânica do Fraturamento*: São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, EESC/USP, Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas); 246p.; 1999.
- BATHE, K-J. : *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*; Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA; 1982.
- BEER, G.; WATSON, J.O. : *Infinite Boundary Elements*; International Journal for Numerical Methods in Engineering; Vol. 28; p.1233-1247; 1989.
- BEER, G.; POUSEN, B.A. : *Analysis of 'Infinitely Long' Excavations Using Finite and Boundary Elements*; International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics (*Short Communications*); Vol. 18; p. 417-426; 1994.

- BREBBIA, C.A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L.C. : *Boundary Element Techniques - Theory and Applications in Engineering*; Springer-Verlag, Berlin; 1984.
- BU, S.; DAVIES, T.G. : *Effective Evaluation of Non-Singular Integrals in 3D BEM*; Advances in Engineering Software, (Research Note); Vol. 23; p. 121-128; 1995.
- CARRION, R.; MESQUITA NETO, E.; ROMANINI, E. : *On the Modelling of Dynamic Stationary Behavior of 3D Elastic Half-Spaces by the Direct Boundary Element Method Using Enclosing Elements*; In: XXII CILAMCE – Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia; Campinas, S.P., Brasil; 2001.
- CERROLAZA, M.; ALARCON, E. : *A Bi-Cubic Transformation for the Numerical Evaluation of the Cauchy Principal Value Integrals in Boundary Methods*; International Journal for Numerical Methods in Engineering; Vol. 28; p. 987-999; 1989.
- CHIEN, C-C.; YOU, Z-Y.; CHUNG, Y-L. : *Internal Stress Calculation Using an Iterative Subdivision Scheme in the Boundary Element Method*; Engineering Analysis with Boundary Elements; Vol. 20; n. 2; p. 145-153; 1997.
- CIMNE : *GiD – The Personal Pre and Postprocessor*; Version 7.1 (2002) : Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingenieria, Universitat Politècnica de Catalunya, UPC, Barcelona, Espanha; <<http://gid.cimne.upc.es>>.
- CODA, H.B.; VENTURINI, W.S. : *Formulação Não Singular do MEC para Análise de Problemas Dinâmicos no Domínio do Tempo*; In: XV CILAMCE – Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia; Belo Horizonte, M.G., Brasil; 1994.
- COURANT, R.; HILBERT, D. : *Methods of Mathematical Physics*; Interscience Publishers John Wiley & Sons, USA; Vol. II; 1962.
- CRUSE, T.A. : *Numerical Solutions in three dimensional elastostatics*; International Journal of Solids and Structures; Vol. 5; p. 1259-1274; 1969.
- CRUSE, T.A.; VANBUREN, W. : *Three-Dimensional Elastic Stress Analysis of a Fracture Specimen with an Edge Crack*; International Journal of Fracture Mechanics; Vol. 7; n. 1; p. 1-15; 1971.
- CRUSE, T.A. : *Application of the Boundary-Integral Equation Solution Method in Solid Mechanics*; In: Proceedings of an International Conference; *Variational Methods in Engineering*; C. A. Brebbia and H. Tottenham, (Ed.). Southampton University Press, England, sc. 9; p. 1-29; 1972.
- CRUSE, T.A. : *An Improved Boundary-Integral Equation Method for Three Dimensional Elastic Stress Analysis*; Computers & Structures; Vol. 4; p. 741-754; 1974.
- CRUSE, T.A. : *Mathematical Foundations of The Boundary-Integral Equation Method in Solid Mechanics*; AFOSR-TR-77-1002, Special Scientific Report.; 1977.
- CRUSE, T.A. : *Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics*; Dordrecht: Kluwer Academic Publishers; 1988.

- CRUSE, T.A.; AITHAL, R. : *Non-Singular Boundary Integral Equation Implementation*; International Journal for Numerical Methods in Engineering; Vol. 36; p. 237-254; 1993.
- CRUSE, T.A.; RICHARDSON, J.D. : *Non-Singular Somigliana Stress Identities in Elasticity*; International Journal for Numerical Methods in Engineering; Vol. 39; p. 3273-3304; 1996.
- CRUZ, J.P. : *Formulações Não-Singulares do Método dos Elementos de Contorno Aplicadas a Problemas Bidimensionais de Potencial* : Belo Horizonte, Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais – EEUFMG; Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas); 81p.; 2001.
- DAVEY, K.; ALONSO RASGADO, M.T.; ROSINDALE, I. : *The 3-D Elastodynamic Boundary Element Method: Semi-Analytical Integration for Linear Isoparametric Triangular Elements* ; International Journal for Numerical Methods in Engineering; Vol. 44; p. 1031-1054; 1999.
- DAVEY, K.; ALONSO RASGADO, M.T. : *Semi-Analytical Integration of Sub-Parametric Elements Used in the BEM for Three-Dimensional Elastodynamics*; Computers & Structures; Vol. 71; p. 595-615; 1999.
- DAVIES, T.G.; BU, S.: *Infinite Boundary Elements for Analysis of Halfspace Problems*; Computers and Geotechnics; Vol. 19; n. 2; p. 137-151; 1996.
- DOBLARÉ, M.; GRACIA, L. : *On Non-Singular Transformations for the Integration of Weakly-Singular and Cauchy Principal Value Integrals*; International Journal for Numerical Methods in Engineering; Vol. 40; p. 3325-3358; 1997.
- FRANC3D : *A Three Dimensional Fracture Analysis Code*; Version 1.15 (2000) : Cornell University Fracture Group (CFG), Cornell University, Ithaca, NY, USA <<http://www.cfg.cornell.edu/>>.
- FRANGI, A.; GUIGGIANI, M. : *A Direct Approach for Boundary Integral Equations with High-Order Singularities*; International Journal for Numerical Methods in Engineering; Vol. 49; p. 871-898; 2000.
- GAO, X-W.; DAVIES, T.G. : *3-D Infinite Boundary Elements for Half-Space Problems*; Engineering Analysis with Boundary Elements; Vol. 21; p. 207-213; 1998.
- GUIGGIANI, M. : *Formulation and Numerical Treatment of Boundary Integral Equations with Hypersingular Kernels*; In: *Singular Integrals in B. E. Methods*; V. Sladek, and J. Sladek (Ed.); 1998.
- HALL, W.S. : *The Boundary Element Method*; Solid Mechanics and Its Applications G.M.L. Gladwell (series ed.), Kluwer Academic Publishers, Netherlands ; 1994.
- HAMMER, P.C.; MARLOWE, O.J.; STROUD, A.H. : *Numerical Integration Over Simplexes and Cones*; Math. Tables and Others Aids Comput.; Vol. 10; p. 130-139; 1956.
- HARTMANN, F. : *Introduction to Boundary Elements. Theory and Applications*; Springer-Verlag. Berlin; 1989.

- HARTMANN, F. : *Elastostatics*; In: *Progress in Boundary Element Methods*; C. A. Brebbia (Ed.), Pentech Press, London; Vol. 1; chap. 4; p. 84-167; 1981.
- HEATH, M.T. : *Scientific Computing – An Introductory Survey*; (Lecture Notes : Systems of Linear Equations); <<http://math.gmu.edu/~tsauer/class/685/heath2.pdf>>; 1997.
- HIROSE, S. : *Boundary Integral Equation Method for Transient Analysis of 3-D Cavities and Inclusions*; *Engineering Analysis with Boundary Elements*; Vol. 8; p. 146-154; 1991.
- HUANG, Q. : *Boundary Element Methods: An Introduction*; Department of Mechanical Engineering – Vanderbilt University; 1993.
- HUANG, Q.; CRUSE, T.A. : *Some Notes on Singular Integral Techniques in Boundary Element Analysis*; *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; Vol. 36; p. 2643-2659; 1993.
- JASWON, M.A. : *Integral Equation Methods in Potential Theory I*; *Proceedings of The Royal Society*; London; Series A; Vol. 275; p. 23-32; 1963.
- JOHNSTON, P.R. : *Application of Sigmoidal Transformation to Weakly Singular and Nearly-Singular Boundary Element Integrals*; *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; Vol. 45; p. 1333-1348; 1999.
- JOHNSTON, P.R. : *Semi-Sigmoidal Transformation for Evaluating Weakly Singular Boundary Element Integrals*; *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; Vol. 47; p. 1709-1730; 2000.
- JOHNSTON, P.R.; ELLIOTT, D. : *A Generalisation of Telles' Method for Evaluating Weakly Singular Boundary Element Integrals*; *Journal of Computational and Applied Mathematics*; Vol. 131; p. 223-241; 2001.
- LACHAT, J.C.; WATSON, J.O. : *Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations: A Formulation for Three-Dimensional Elastostatics*; *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; Vol. 10; p. 991-1005; 1976.
- LI, H-B.; HAN, G-M.; MANG, H.A. : *A New Method for Evaluating Singular Integrals in Stress Analysis of Solids by The Direct Boundary Element Method*; *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; Vol. 21; p. 2071-2098; 1985.
- LI, Y-S.; OBATA, T.; KOGUCHI, H.; YADA, T. : *Some Improvements of Accuracy and Efficiency in Three Dimensional Direct Boundary Element Method*; *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; Vol. 33; p. 1451-1464; 1992.
- LIAO, H.; XU, Z. : *A Method for Direct Evaluation of Singular Integral in Direct Boundary Element Method*; *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; Vol. 35; p. 1451-1464; 1992.
- LINPAK: *The Linear Equation Package*: LINPAK LIBRARY (1978); Applied Mathematics Division of Argonne National Laboratory; University of New Mexico; (IMSL).

- LIU, Y.; RUDOLPHI, T.J. : *Some Identities for Fundamental Solutions and their Applications to Weakly-Singular Boundary Element Formulations*; Engineering Analysis with Boundary Elements; Vol.8; p.301-311; 1991.
- LUTZ, E.; INGRAFFEA, A.R.; GRAY, L. : *Use of 'Simple Solutions' for Boundary Integral Methods in Elasticity and Fracture Analysis*; International Journal for Numerical Methods in Engineering; Vol. 35; p. 1737-1751; 1992.
- MATHEMATICA : *MATHEMATICA® for Microsoft Windows, Wolfram Research Inc., Enhanced version 2.2.3*; Illinois, USA; 1994.
- MACKERLE, J. : *FEM and BEM in the Context of Information Retrieval*; Computers & Structures; Vol. 80; p. 1595-1604; 2002.
- MARTHA, L.F.; GRAY, L.; INGRAFFEA, A.R.: *Three-Dimensional Fracture Simulation with a Single-Domain, Direct Boundary Element Formulation* ; International Journal for Numerical Methods in Engineering; Vol. 35; p. 1907-1921; 1992.
- MEEK, J.L.; DAI, C. : *The Integration of the Melan Solution over a Line Segment-Implementation for Boundary Element Modelling of Surface Excavations*; International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics; Vol. 16; p. 655-667; 1992.
- MILROY, J.; HINDUJA, S.; DAVEY, K. : *The Elastostatic Three-Dimensional Boundary Element Method: Analytical Integration for Linear Isoparametric Triangular Elements*; Applied Math. Modelling; Vol. 21; p. 763-782; 1997.
- NAKAGUMA, R.K. : *Three Dimensional Elastostatics Using The Boundary Element Method*: Southampton, Faculty of Engineering and Applied Science, Department of Civil Engineering, University of Southampton, UK (PhD. Thesis); 189p.; 1979.
- PÁRIS, F.; CAÑAS, J. : *Boundary Element Method – Fundamentals and Applications*; Oxford Univertisy Press; 1997.
- RIBEIRO, G.O. : *Sobre a Formulação do Método dos Elementos de Contorno para a Flexão de Placas Usando as Hipóteses de Reissner*: São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, EESC/USP, Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas); 1992.
- RIBEIRO, T.S.A : *Algoritmos não-singulares do método dos elementos de contorno para problemas bidimensionais de elasticidade*: Belo Horizonte, Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais – EEUFMG; Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas); 129p.; 2003.
- RIBEIRO, T.S.A; RIBEIRO, G.O.; JORGE, A.B. : *On the Relaxed Continuity Approach for the Self-Regular Traction-BIE*; In: *MECOM (Mecánica Computacional)*; Santa Fe – Paraná, Argentina; S.R. Idelsohn, V.E. Sonzogni & A. Cardona (Ed.); Vol. 21; p. 1263-1281; 2002.
- RICHARDSON, J.D. : *Weakly Singular BEM for Fracture Modelling*: Nashville, Vanderbilt University; TN, USA; Thesis (PhD in Mechanical Engineering);141p.; 1998.

- RICHARDSON, J.D.; CRUSE, T.A.: *Weakly Singular Stress-BEM for 2D Elastostatics*; International Journal for Numerical Methods in Engineering; Vol. 45; p. 13-35; 1999.
- RIZZO, F.J. : *An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics*; Quarterly of Applied Mathematics; Vol. 25; n. 1; p. 83-95; 1963.
- RIZZO, F.J.; SHIPPY, D.J. : *An Advanced Boundary Integral Equation Method for Three-Dimensional Thermoelasticity*; International Journal for Numerical Methods in Engineering; Vol. 11; p. 1753-1768; 1977.
- SALVADORI, A. : *Analytical Integrations in 2D BEM Elasticity*; International Journal for Numerical Methods in Engineering; Vol. 53; p. 1695-1719; 2002.
- SLADEK, V.; SLADEK, J.; TANAKA, M. : *Evaluation of  $1/r$  Integrals in BEM Formulations for 3-D Problems Using Coordinate Multitransformations*; Engineering. Analysis with Boundary Elements; Vol.20; p.229-244; 1997.
- SOUZA, V.J.B. : *Algoritmos de Integração Eficientes para o Método dos Elementos de Contorno Tridimensional*: São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, EESC/USP, Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas); 134p.; 2001.
- SYMM, G.T. : *Integral Equation Methods in Potential Theory II*; Proceedings of The Royal Society; London; Series A; Vol. 275; p. 33-46; 1963.
- TADA, H.; PARIS, P.C.; IRWIN, G.R. : *The Stress Analysis of Cracks Handbook*; ASME Press, 3rd edition; New York, USA; 2000.
- TEIXEIRA, M.C. : *Análise Elastoplástica de Túneis pelo Método do Elementos de Contorno*: Belo Horizonte, Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais – EEUFMG; Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas); 170p.; 1992.
- TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J.N. : *Teoria da Elasticidade*; Trad. S. F. Villaça; H. L. Soriano; H. S. Souza; Rio de Janeiro: Guanabara Dois S. A.; 3<sup>a</sup>. Edição, 545p. (*Original inglês*); 1980.
- TELLES, J.C.F. : *A Self-Adaptive Co-ordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Element Integrals*; International Journal for Numerical Methods in Engineering; Vol. 24; p. 959-973; 1987.
- WILSON, R.B.; CRUSE, T.A. : *Efficient Implementation of Anisotropic Three Dimensional Boundary-Integral Equation Stress Analysis*; International Journal for Numerical Methods in Engineering; Vol. 12; p. 1383-1397; 1978.
- ZHANG, W.; XU, H-R. : *A General and Effective Way for Evaluating the Integrals with Various Orders of Singularity in Direct Boundary Element Method*; International Journal for Numerical Methods in Engineering; Vol. 28; p. 2059-2064; 1989.

## ANEXO A – ALGUNS CONCEITOS UTILIZADOS

Neste apêndice são apresentados alguns conceitos matemáticos citados ao longo do texto. As explicações são voltadas para suas aplicações no MEC simplesmente, não se pretendendo fazer nenhuma dedução com o rigor matemático necessário. São apresentados a função delta de Dirac, conceitos de integrais singulares, definição de ângulo sólido e condição de continuidade de Hölder.

### A.1 – Função Delta de Dirac

A função delta de Dirac<sup>1</sup>, também chamada função impulso unitário, é representada por  $\delta(p,q)$ , e possui as seguintes propriedades específicas:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \delta(p,q) = 0; & \text{se } p \neq q \\ \delta(p,q) = \infty; & \text{se } p \equiv q \end{array} \right. \quad (\text{Eq. A1})$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(p,q) = 1$$

### A.2 – Integrais Singulares

Integrais singulares (impróprias) são aquelas em que os integrandos atingem valor infinito em algum ponto do domínio de integração. Estas integrais são geralmente definidas através da eliminação de uma pequena região (inicialmente arbitrária) que inclui a singularidade, e obtendo-se o limite quando esta pequena região tende a desaparecer (PARÍS e CAÑAS, 1997). O ponto singular  $P$  é excluído das integrais do MEC através da exclusão de superfícies infinitesimais na vizinhança do ponto, definidas pela interseção entre os  $n$  elementos de contorno que compartilham  $P$ , e superfícies esféricas de raio  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), centradas no ponto singular (FIG. A1). Assim, seja uma função  $f(x)$  definida em um domínio  $D$ , singular em  $x=P$ ,  $P \in D$ . Integrais impróprias podem ser computadas como (ARAÚJO, *et al.*, 2000):

---

<sup>1</sup> Paul A. M. Dirac (1902-1984) - Físico-matemático inglês

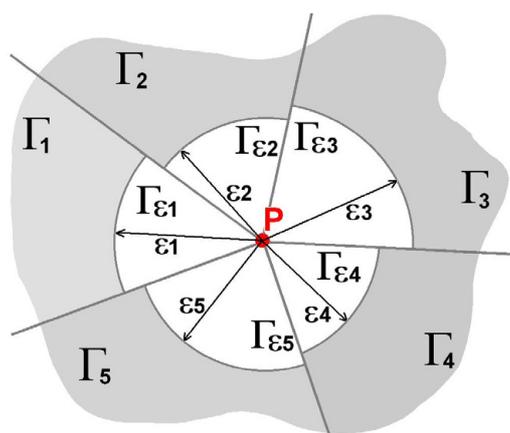


Figura A1 – Região de exclusão

$$\int_D f(x) dD = \sum_{i=1}^n \lim_{\varepsilon_i \rightarrow 0} \int_{D_i - D_{\varepsilon_i}} f(x) dD, \quad (\text{Eq. A2})$$

onde  $D_i$  é o domínio do  $i$ -ésimo elemento na vizinhança de  $P$ .

Se cada limite indicado na Eq. A2 existe de maneira independente, diz-se que a integral imprópria é existente, sendo denominada fracamente singular. Por outro lado, quando um resultado finito para a Eq. A2 somente pode ser obtido se  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_n$ , diz-se que a integral existe somente no sentido de Valor Principal de Cauchy (VPC); este é o caso das integrais fortemente singulares (ARAÚJO *et al.*, 2000). Na definição de VPC, algumas outras condições de continuidade devem ainda ser atendidas, como demonstram PÁRIS e CAÑAS (1997) em exemplos.

### A.3 – Ângulo Sólido

O termo livre  $C_{ji}(P)$  é determinado por uma integral do tipo VPC, equivalente à integral de potencial de dupla-camada definida em problemas de potencial. CRUSE (1977) demonstra a similaridade nas propriedades de continuidade destas integrais, denominando-as integrais de potencial vetorial e potencial escalar :

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \sigma d\Gamma \quad (\text{Eq. A3})$$

O teorema do potencial de dupla-camada com distribuição constante enuncia (COURANT e HILBERT, 1962):

“ Dada uma superfície  $\Gamma$  com borda  $\beta$  e um ponto  $p \notin \Gamma$ , no caso de distribuição constante (função densidade da integral igual à unidade, *i.e.*  $\sigma = 1$ ), o potencial de camada dupla de  $\Gamma$  em  $p$  é igual, em valor absoluto, ao ângulo sólido de  $p$  em  $\beta$  ...”

Por definição, constrói-se uma superfície cônica  $\Gamma_c$  gerada pelas linhas que unem  $p$  aos pontos da curva  $\beta$ , definindo com  $\Gamma$  uma região fechada. A superfície esférica de exclusão  $\Gamma_\varepsilon$  criada em torno de  $p$  (de raio  $\varepsilon$ ) corta então o vértice do cone, conforme a FIG A2. Tem-se agora uma região  $\Omega$  definida pelas superfícies  $\Gamma$ ,  $\Gamma_c$ , e  $\Gamma_\varepsilon$ , na qual  $u=1/r$  é regular em todos os pontos, e do teorema de Gauss tem-se:

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{\partial f}{\partial n} dS = 0 &\Rightarrow \iint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma + \iint_{\Gamma_c} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma_c + \iint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma_\varepsilon = 0 \\ &\Rightarrow \iint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = - \iint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma_\varepsilon \end{aligned} \quad (\text{Eq. A4})$$

Como em  $\Gamma_\varepsilon$ ,  $r = \varepsilon$ , escreve-se:

$$\iint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = - \iint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma_\varepsilon = - \iint_{\Gamma_\varepsilon} -\frac{1}{\varepsilon^2} d\Gamma_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\Gamma_\varepsilon} d\Gamma_\varepsilon \quad (\text{Eq. A5})$$

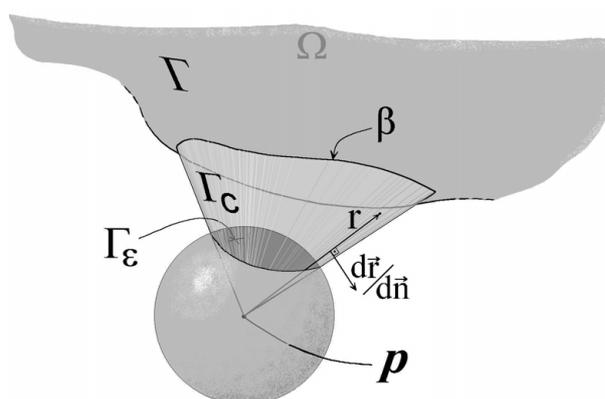


Figura A2 – Área de definição do ângulo sólido

Assim, o ângulo sólido é definido pela área  $\Gamma_\varepsilon$  da esfera, interna ao cone  $\Gamma_c$ . Como casos particulares, o ponto fonte  $p$  pode se localizar em diferentes posições.

No caso do ponto  $p$  pertencente à região  $\Omega$  ( $\Gamma_\varepsilon \cap \Gamma = 0$ ), tem-se:

$$\iint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\Gamma_{\varepsilon}} d\Gamma_{\varepsilon}, \text{ a área da superfície esférica é } 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon^2} 4\pi \varepsilon^2 = 4\pi \quad (\text{Eq. A6})$$

Caso o ponto  $p$  esteja localizado em uma parte de contorno suave, tem-se:

$$\iint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\Gamma_{\varepsilon}} d\Gamma_{\varepsilon}, \frac{1}{2} \text{ área da superfície esférica : } 2\pi r^2 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon^2} 2\pi \varepsilon^2 = 2\pi \quad (\text{Eq. A7})$$

E finalmente, se o ponto  $p$  é externo à região  $\Omega$  ( $\Gamma_{\varepsilon} \cap \Gamma = 0$ ), o contorno  $\Gamma$  da FIG. A2 é fechado, e a área de interseção cone-esfera é nula:

$$\iint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\Gamma_{\varepsilon}} d\Gamma_{\varepsilon}, \text{ mas } \iint_{\Gamma_{\varepsilon}} d\Gamma_{\varepsilon} = 0; \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon^2} 0 = 0 \quad (\text{Eq. A8})$$

#### A.4 – Continuidade de Hölder

Uma exigência para a existência da integral VPC é que a função densidade em seu integrando seja contínua no sentido de Hölder. Uma função é dita satisfazer a condição de continuidade de Hölder se existirem constantes  $K$  e  $\alpha$  ( $K > 0$ ;  $0 < \alpha \leq 1$ ) tais que, para um par de pontos  $p, q$  pertencentes a um intervalo  $[a, b]$ , seja satisfeita a relação:

$$|f(p) - f(q)| < K |p - q|^{\alpha} \quad (\text{Eq. A9})$$

A condição de continuidade de Hölder, representada para uma determinada ordem  $n$  por  $C^{n, \alpha}$ , é uma condição mais restritiva que a continuidade simples, porém com restrição menos forte que a condição de derivabilidade da função.

## ANEXO B – INFORMAÇÕES SOBRE O PROGRAMA

São apresentadas algumas informações consideradas importantes para continuação deste trabalho, referentes ao código fonte do programa implementado e ao programa utilizado como pré e pós-processador.

### B.1 – Descrição do Código Fonte

O programa está implementado em linguagem FORTRAN 77, utilizando alguns recursos do FORTRAN 90, e foi compilado no MicroSoft Developer Studio<sup>®</sup> versão 4.0 (1994). Sua estrutura teve como plataforma base o programa de elementos de contorno para problemas elásticos bidimensionais desenvolvido por RICHARDSON (1998). A alocação de memória é feita de forma estática. O espaço reservado para alocação tem seu valor definido no código do programa, em função do número de graus de liberdade do modelo a ser calculado. As principais sub-rotinas que estruturam o programa de forma modulada, podem ser esquematizadas como apresentado na FIG. B1.

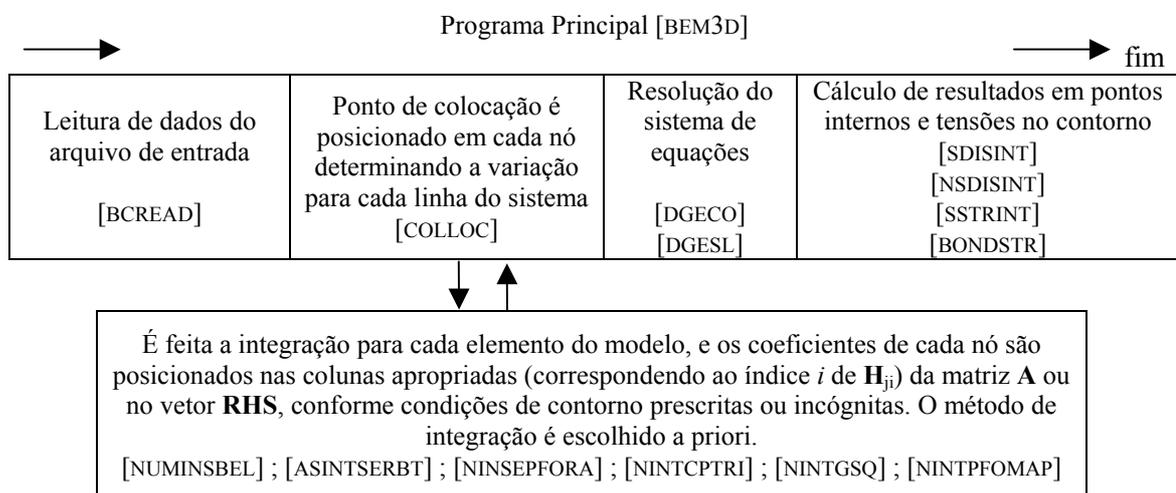


FIGURA B1 – Principais sub-rotinas da estrutura do programa

São apresentadas a seguir, informações resumidas sobre cada sub-rotina implementada.

BEM3D.for : Rotina principal que gerencia todo o processamento. Define-se aqui o espaço reservado na alocação de memória para o processamento;

- ASIntSERBT.for : Nesta rotina são calculados os coeficientes das matrizes **G** e **H** em elementos planos, utilizando as expressões analíticas apresentadas no Capítulo 5 para o cálculo das integrais fracamente singulares e o esquema de Hammer com subelementos para as integrais regulares. Os coeficientes são armazenados diretamente em **A** ou **RHS**, nas colunas correspondentes de cada nó do elemento sob integração;
- BCRead.for : Faz a leitura dos dados de entrada a partir do arquivo, e reedita estes dados em um arquivo de saída de maneira organizada;
- BondStr.for : Faz o cálculo das tensões no contorno, numa etapa de pós-processamento. O cálculo é feito seguindo o esquema apresentado por BREBBIA *et al.* (1984), utilizando para tal os resultados de deslocamentos de forças de superfície obtidas. São determinadas componentes de tensão por elementos, em cada nó individualmente. Também é gerado um arquivo para o pós-processador GiD, com as tensões em cada nó, obtidas através da média das tensões em cada elemento que compartilha o respectivo nó;
- Colloc.for : Aqui é organizada a montagem da matriz **A** e **RHS**, que contém os valores prescritos multiplicados pelos respectivos coeficientes. Assim, os índices  $j$  das matrizes  $\mathbf{H}_{ji}$  são manipulados nesta sub-rotina, e na avaliação de cada linha (3 linhas para cada nó) uma outra sub-rotina é chamada para determinação dos coeficientes da linha  $j$ . Também são chamadas outras rotinas para cálculo de parâmetros essenciais na determinação dos coeficientes, como por exemplo os elementos que compartilham o nó (ponto de colocação) e média dos lados destes elementos;
- DAXPI; DDOT; DGEGO; DGEFA; DSCAL; IDAMAX .for : Pacote de sub-rotinas de domínio público desenvolvido na Universidade do Novo México (LINPAK, 1978), para resolução de sistemas lineares algébricos. O cálculo é feito pelo método de eliminação de Gauss com pivotamento escalonado, sendo também determinado um parâmetro de condicionamento do sistema, que visa identificar possíveis perturbações nos valores dos coeficientes, assim como identificar sistemas singulares;
- DELT.for : Função Delta de Dirac;
- DJACK.for : Determinação do Jacobiano de superfície para elementos triangulares;
- GETINT.for : Atribuição dos pesos e pontos de integração de Hammer para 3, 7, e 13 pontos da tabela de BATHE (1982);
- GiDPosPr.for : Gera o arquivo com dados da malha para pós processador gráfico GiD;
- HeaderWrt.for : Escreve cabeçalho nos arquivos de saída;
- Iaparam.for : Calcula os parâmetros  $I$  das expressões para integração analítica;
- IntSTji.for : Calcula valores de  $T_{ji}$  para cada nó do elemento na integração singular analítica;
- IntSUji.for : Calcula valores de  $U_{ji}$  para cada nó do elemento na integração singular analítica;

- Ladmed.for : Calcula a média dos lados de todos os elementos que compartilham um determinado nó. No caso de elementos curvos, é considerado o triângulo formado pelos vértices do elemento;
- MATZERO.for; VETZERO.for : Atribui zero aos valores de uma matriz e de um vetor;
- NIntSEPfora.for : Nesta sub-rotina os pontos de colocação são posicionados fora do domínio do problema, a uma distância pré-definida na direção da normal média dos elementos que compartilham o nó  $j$ , e são calculados os coeficientes correspondentes aos das matrizes **G** e **H**, utilizando o esquema de Hammer com subelementos no cálculo das integrais. Os coeficientes são armazenados diretamente em **A** ou **RHS**, nas colunas correspondentes de cada nó do elemento sob integração;
- NIntCPTri.for : Calcula os coeficientes correspondentes aos das matrizes **G** e **H**, utilizando o esquema de Gauss com mapeamento degenerado para integrais fracamente singulares e o esquema de Hammer com subelementos para integrais regulares. Os coeficientes são armazenados diretamente em **A** ou **RHS**, nas colunas correspondentes de cada nó do elemento sob integração (resultados equivalente à NIntgsq.for , precisa atualização);
- NIntGSQ.for : Esta sub-rotina calcula os coeficientes correspondentes aos das matrizes **G** e **H**, utilizando o esquema de Gauss com mapeamento degenerado para integração, seguindo as formulações e procedimentos apresentados no Capítulo 5. Os coeficientes são armazenados diretamente em **A** ou **RHS**, nas colunas correspondentes de cada nó do elemento sob integração;
- NIntPFoMap.for : Idem à sub-rotina Nintsepfora, porém utilizando o esquema de Gauss com mapeamento degenerado no cálculo das integrais;
- NIntPFora.for : Idem à sub-rotina Nintsepfora, porém utilizando o esquema de Hammer *SEM* subelementos no cálculo das integrais (resultados ruins, precisa atualização);
- NumInSbEl.for : Calcula os coeficientes correspondentes aos das matrizes **G** e **H**, utilizando o esquema de Hammer com subelementos para integração. Os coeficientes são armazenados diretamente em **A** ou **RHS**, nas colunas correspondentes de cada nó do elemento sob integração;
- NumIntRBT.for : Calcula os coeficientes correspondentes aos das matrizes **G** e **H**, utilizando o esquema de Hammer *SEM* divisão em subelementos para integração. Os coeficientes são armazenados diretamente em **A** ou **RHS**, nas colunas correspondentes de cada nó do elemento sob integração (resultados ruins, precisa atualização);
- NIPCoor.for : Determina as novas coordenadas dos pontos de integração dos subelementos no sistema de coordenadas do elementos original, usando uma multiplicação de matrizes das coordenadas dos nós do subelemento no sistema local, e das coordenadas dos pontos de

- integração de Hammer, como demonstrado por NAKAGUMA (1979), porém adaptado para uma quantidade qualquer de subelementos;
- Normmed.for : Determina a normal média dos elementos que compartilham um determinado nó. Para cada elemento plano é determinada pelo produto vetorial dos lados do elemento, e para elementos curvos é dada pelo Jacobiano;
- NSDisInt.for : Calcula o deslocamento de pontos internos usando as equações da formulação não-singular (auto-regularizadas), pelos métodos de Hammer com subelementos, e de Gauss com mapeamento degenerado;
- RotMatrix.for : Determina a matriz de transformação de um sistema local e o sistema de coordenadas global. Esta rotação é necessária por exemplo para o cálculo de tensões em elementos do contorno.
- SDisInt.for : Calcula o deslocamento de pontos internos usando as equações da formulação clássica, pelos métodos de Hammer com subelementos, e de Gauss com mapeamento degenerado;
- SStrInt : Calcula as tensões nas direções cartesianas em pontos internos, usando as expressões da formulação clássica, e integração pelos métodos de Hammer com subelementos e de Gauss com mapeamento degenerado;
- TimeCtrl.for : Controlador de tempo que assume o tempo dado pelo relógio do computador e armazena em posições diferentes cada vez que é chamado, para no final contabilizar o tempo de processamento de cada estágio, além do tempo total;
- Tpermut.for : Tensor de permutação  $e_{ijk}$  de Levi-Civita;
- VetProd.for : Produto vetorial;
- Z2dn.for : Retorna o valor da função de forma em um nó específico do elemento;
- Znm.for : Retorna a normal em um ponto do elemento plano (igual em todo o elemento);

Algumas destas sub-rotinas recorrem a `FUNCTIONS` simples, para cálculo de valores específicos, de fácil interpretação. As principais variáveis são explicadas no texto introdutório das sub-rotinas, e os comentários ao longo do programa auxiliam na sua interpretação. Algumas bibliotecas internas do Fortran acessadas, tais como `MSFLIB`, `PORTLIB` e `MSIMSL`, são declaradas em sentenças `USES` de algumas sub-rotinas.

Para alteração do limite de memória estática reservada para o programa, deve-se fazer um ajuste nos tamanhos das matrizes e vetores: `A`, `RHS`, `SOLU`, `ZZZ`, `IPVT`, `NNN`, `X`, `U`, `T`, `TD`, `AREAEL`, `NCONN`, `JDBC`, `JTBC` e `IDISC`. Esta alteração deve ser feita no programa principal `BEM3D`, e no arquivo de dependência `COMMSTAT.CMS`, que contém

todas as declarações de variáveis passadas através de *common*, que são declaradas pelo comando INCLUDE no início das sub-rotinas. O valor mínimo necessário corresponde ao número de incógnitas de contorno do problema.

Os dados de entrada são fornecidos por um arquivo, definido por *default* com o nome teste.dat, podendo ser este nome modificado, na linha de comando de execução como: `c:\...\programa.exe exemplo.dat`. Após o processamento, os resultados são gerados em arquivos com diferentes extensões, descritos a seguir:

*exemplo.ACOM* - Contém os termos da matriz  $H_{ji}$  calculados, para acompanhamento;  
*exemplo.BSTR* - Resultados obtidos para tensões no contorno, em cada elemento;  
*exemplo.DADS* - Contém os dados de entrada do programa impressos de maneira organizada;  
*exemplo.DISP* - Resultados obtidos para deslocamentos no contorno e pontos internos;  
*exemplo.FLAVIA.RES* - Contém resultados obtidos, usados pelo pós-processador do *GiD*;  
*exemplo.FLAVIA.MSH* - Contém dados sobre a malha, usados pelo pós-processador do *GiD*;  
*exemplo.RESU* - Arquivo com resultados no contorno a ser usados em pós-processamento para o cálculo de pontos internos;  
*exemplo.STRS* - Contém resultados obtidos para tensões em pontos internos;  
*exemplo.TRAC* - Contém resultados obtidos para forças de superfície nos elementos;  
*exemplo.DISP2*; arquivo *STRS2* - Contém resultados obtidos para processamento de pontos internos somente.

## B.2 – Pré e Pós-Processador

Para maior facilidade na geração de malhas e análises de resultados, pode-se opcionalmente usar como pré e pós-processador para o programa implementado o *software* *GiD* versão 6.0 ou mais recente, desenvolvido pelo CIMNE<sup>1</sup>. O programa *GiD* permite que sejam feitas adaptações para vários tipos de análise, como por exemplo, definir as informações que serão requeridas do usuário, e a maneira como estes dados serão repassados para o “*solver*”. Define-se para isto um subdiretório `...GID\...\ProblemTypes\Tipo_de_Problema.gid`, que deve conter arquivos que

---

<sup>1</sup> CIMNE – Centro Internacional de Métodos Numéricos em Ingenieria, Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), Barcelona, Espanha.

descrevam as condições de contorno, materiais, dados gerais, formato do arquivo de dados para o programa utilizado como “*solver*”, ações a serem executadas quando se inicia o processamento, e o programa de cálculo executável a ser utilizado (.*exe*). Informações detalhadas sobre estas configurações podem ser encontradas no manual de utilização e tutoriais do programa.

Neste trabalho utilizou-se os recursos mais básicos do GiD, suficientes e necessários para se permitir a trabalhabilidade dos problemas estudados. Foi criado o diretório com as definições já citadas, denominado ELASTBEM3D.GID, e os arquivos de configuração descritos a seguir:

ELASTBEM3D.CND – Configura as definições das condições de contorno;

ELASTBEM3D.MAT – Configura as definições de materiais;

ELASTBEM3D.PRB – Configura as definições de dados gerais do problema;

ELASTBEM3D.BAS – Configura a formatação do arquivo gerado com dados de entradas necessários ao programa implementado;

ELASTBEM3D.BAT – Define a seqüência de ações a serem efetuadas ao se executar o comando de cálculo.

A seqüência de procedimentos em uma análise pode ser resumida no fluxograma gráfico da FIG. B2.

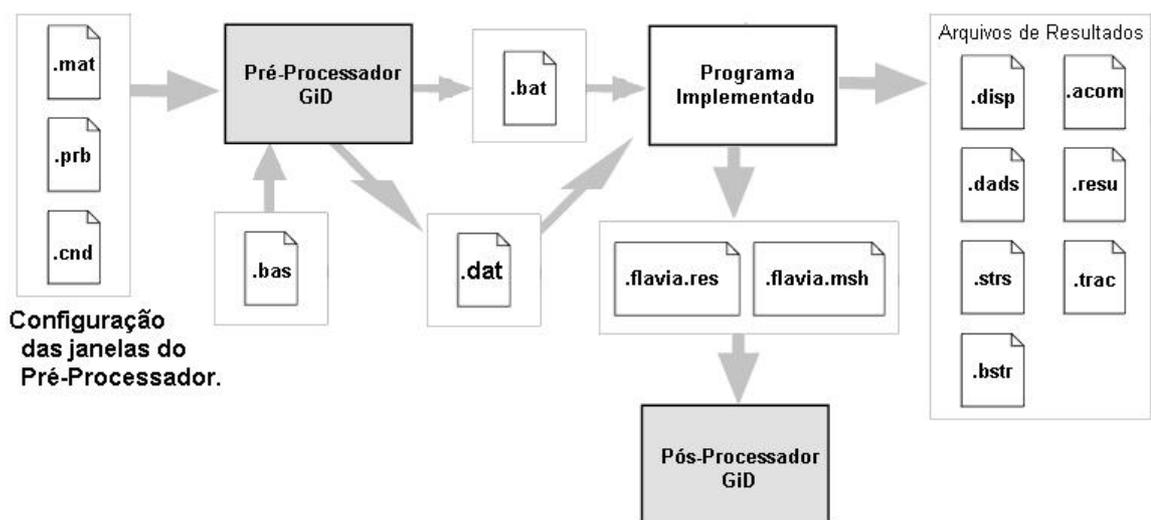


FIGURA B2 – Esquema seqüencial de procedimentos de uma análise

### B.3 – Exemplo Ilustrativo

Como exemplo ilustrativo de uma análise, utiliza-se o Exemplo 5 do Capítulo 7. Criado o modelo e gerada a malha, as condições de contorno, materiais, e dados do problema são definidos em janelas como ilustrado na FIG. B3. Após executado o comando de cálculo, o arquivo com dados de entrada é gerado, e uma cópia do arquivo executável do programa implementado é feita para o diretório de trabalho (...*exemplo.gid*), onde é feito o processamento e criados os arquivos de resultados.

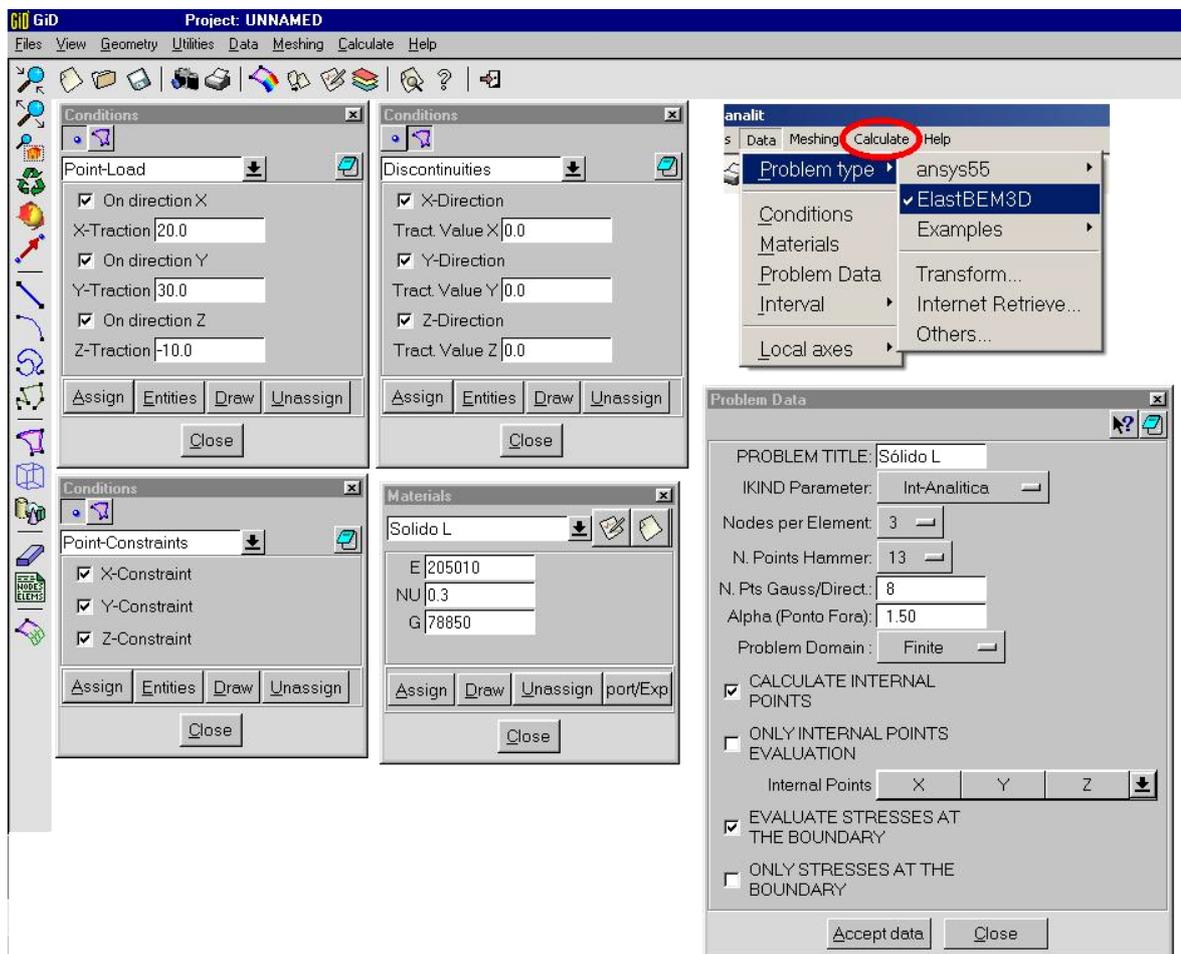


FIGURA B3 – Tela ilustrativa com caixas de entrada do pré-processador (GiD)

Após o processamento os arquivos temporários são excluídos, e as respostas podem ser analisadas no pós-processador, automaticamente. Segue abaixo trechos do arquivo de entrada, com comentários não pertencentes ao arquivo entre parênteses e *itálico*.

C:\... \ exemplo.dat :

```

.....
DominioL      (Título do exemplo)
  5            (Opção de esquema de análise: 4- int. Hammer c/ subelementos; 5-
               int. singular analítica; 6- Pto fora e int. Hammer; 10 -
               int. Gauss c/ map. degen.; 11- Pto. fora e int. Gauss.)
  3            (Número de dimensão do problema)
  3            (Número de pontos nodais por elemento)
  25           (Número de pontos internos a serem avaliados)
  13           (Núm. base de ptos de integr. na quadratura de Hammer; 3,7 ou 13)
  8            (Número base de pontos de integr. na quadratura de Gauss; até 48)
  226          (Número total de nós da malha)
  448          (Número total de elementos)
  N            (Opção de cálculo de pontos internos somente; S ou N)
  S            (Opção de cálculo de tensões no contorno do sólido; S ou N)
  N            (Opção de cálculo de tensões no contorno somente; S ou N)

(0.25)        (Parâm. alfa - pto fora; SOMENTE SE esta for a opção de análise)

                2.00000      1.50000      0.50000      (Coordenadas nodais)
                2.00000      1.50000      0.25000      ( x, y , z )
                2.00000      1.25000      0.50000
                1.75000      1.50000      0.50000
                :              :              :
                0.5          -0.480         0          (Coordenadas de pontos
                0.5          -0.460         0          internos)
                0.5          -0.440         0
                :              :              :

                219      221      226          (Tabela de Conectividade)
                225      219      226          ( nó1  nó2  nó3  ...)
                208      214      221
                219      208      221
                :              :              :
                :              :              :

166      166  1  0.000          (Prescrição de deslocamento)
166      166  2  0.000          (nó  nó  direção  valor)
166      166  3  0.000
172      172  1  0.000
:        :        :        :
99999    0  0  0

  1      1  1  20          (Prescrição das forças de superfície)
  1      1  2  30          ( nó  nó  direção  valor)
  1      1  3  -10
  2      2  1  20
  :      :      :      :
  :      :      :      :
99999  0  0  0

                0.3          (Coeficiente de Poisson)
                78850        (Módulo de elasticidade transversal; G)

  33      33  1  0          (Descontinuidades da força de superfície)
  33      33  2  0          (Elemento Elemento direção valor)
  33      33  3  0          (Por conveniência, este valor é atribuído a todos
  34      34  1  0          os nós do elemento onde não há prescrição)
  :      :      :      :
  :      :      :      :
99999  0  0  0
.....

```