

**Em busca de um entendimento completo acerca
do emaranhamento**

Daniel Cavalcanti Santos

março de 2006

**Em busca de um entendimento completo acerca do
emaranhamento**

Daniel Cavalcanti Santos

Orientador: Marcelo O. Terra Cunha

Co-orientador: Marcelo França Santos

Dissertação apresentada à UNIVERSIDADE
FEDERAL DE MINAS GERAIS, como requisito
para a obtenção do grau de mestre em Física.

março de 2006

Agradecimentos

Agradeço a todos que contribuíram para a realização deste trabalho e pela minha formação como físico e pessoa. Principalmente aos meus pais, Marina, Ed, fulustrico, a Flavinha e aos meus amigos. Sem eles fazer física não teria a menor graça.

Um agradecimento especialíssimo ao Marcelo Terra Cunha por ter sido, desde o primeiro minuto de conversa, um GRANDE orientador e amigo.

Obrigado ao Marcelo França pela co-orientação com status de orientação, pelas ricas discussões, pelas ajudas, conselhos e cervejas.

Agradeço aos meus colaboradores diretos ou indiretos, em especial ao Fernando e ao Leandro. Ao grupo de sistemas quânticos abertos, aos bons professores deste departamento e ao CNPq pelo \$.

Agradeço ao Lobatu e ao povo de Candeias. Algumas das idéias contidas nesta dissertação foram pensadas lá.

Resumo

Recentemente um imenso esforço tem sido concentrado numa busca por uma compreensão adequada da Informação Quântica. Isto se deve, principalmente, por esta área fornecer métodos superiores para o processamento e armazenamento de dados do que aqueles já conhecidos pela teoria clássica da informação. Dentre os protocolos de maior sucesso estão o teleporte de estados quânticos, a criptografia quântica e a computação quântica. Em todos estes processos, o emaranhamento surge como o principal recurso que põe em vantagem a abordagem quântica. Por outro lado, o estudo de sistemas físicos sob a ótica da Teoria do Emaranhamento vem mostrando ser uma forma alternativa para o entendimento de fenômenos tratados por diversos campos como a física do estado sólido, a física estatística e a ótica quântica, além de trazer novidades para estas áreas. Nesta dissertação objetivamos revisar alguns dos aspectos mais importantes no que concerne a Teoria do Emaranhamento, além de propor resultados originais nesta área. Primeiramente, mostraremos como surge a noção de emaranhamento, como determinar se um estado quântico é emaranhado e como quantificar seu emaranhamento. Concentrando-nos em sistemas de três partículas, mostraremos um procedimento tomográfico que utiliza apenas dois detectores capaz de reconstruir o estado global de sistemas puros de três qubits. Discutiremos as excessões existentes neste procedimento e o papel do emaranhamento multipartite nestas excessões. Obteremos também resultados originais no que diz respeito ao formalismo da Teoria do Emaranhamento. Neste sentido, discutiremos o problema da pureza dos estados maximamente emaranhados. Especificamente, para sistemas de duas partes, a maioria dos quantificadores de emaranhamento indicam que estados maximamente emaranhados são puros. Entretanto, contra-exemplos podem ser explicitados. No contexto multipartite mostramos um quantificador para o qual sempre que um sistema alcança o máximo de emaranhamento disponível, este estado torna-se puro. Finalmente, discutiremos o problema do emaranhamento devido apenas à indistinguibilidade de partículas quânticas.

Abstract

A great effort has been devoted to understand Quantum Information Theory. This interest comes from the fact that this field has given us advanced methods to process and store information. Among these proposals we can cite the teleportation, the quantum cryptography, and the quantum computation. Interestingly, entanglement is the main resource that puts the quantum approach in a higher level than the classical counterpart. On the other hand, the theory of entanglement allows also a better understanding of physical phenomena already treated by the fields of condensed matter, statistical physics, and quantum optics among others. In this dissertation we aim to review the main topics concerning the Theory of Entanglement and propose new results on this theme as well. Firstly, we will discuss how the notion of entanglement raises naturally, how to determine whether a state is entangled, and how to quantify it. Moving on to the three qubit context, we will show a tomographic process able to determine the quantum state of a system using only two detectors. It will be shown the connection between multipartite entanglement and the exceptions to our process. In the multipartite scenario we will obtain novel results in the formalism of the theory. Specifically, we study the question: are all maximally entangled states pure? While for bipartite systems almost all entanglement quantifiers agree in a positive answer, in a more general context this is not the case. Indeed, we will show a multipartite entanglement quantifier for which all maximally entangled states are pure. Finally, we address some questions on identical particle entanglement, *i.e.*: the entanglement coming just from the indistinguishability of quantum particles.

Artigos

1. *Are all maximally entangled states pure?*
D. Cavalcanti, F.G.S.L. Brandão e M.O. Terra Cunha.
Physical Review A **72**, 040303 (2005) - Rapid Communications.
2. *Increasing identical particle entanglement by fuzzy measurements.*
D. Cavalcanti, M.F. Santos, M.O. Terra Cunha, C. Lunke e V. Vedral.
Physical Review A **72**, 062307 (2005).
3. *Tomographic Characterization of Three-Qubit Pure States with Only Two-Qubit Detectors.*
D. Cavalcanti, L.M. Cioletti e M.O. Terra Cunha.
Physical Review A **71**, 014301 (2005).
4. *How to fool the GHZ and W witnesses.*
D. Cavalcanti e M.O. Terra Cunha.
arXiv quant-ph/0506035 (2005).

CONTEÚDO

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Artigos	v
Introdução	5
1 Introdução à questão do emaranhamento	5
1.1 Fixando alguns conceitos	5
1.1.1 Estados Quânticos	6
1.1.2 O espaço de estados e o surgimento da noção de emaranhamento.	7
1.2 Identificando estados emaranhados	9
1.2.1 Decomposição de Schmidt	9
1.2.2 Critério de Peres	10
1.2.3 Critério de Horodecki	12
1.2.4 Critério de Nielsen e Kempe	13

1.2.5	Testemunhas de emaranhamento	15
1.3	Quantificando o emaranhamento	22
1.3.1	Requerimentos para bons quantificadores	22
1.3.2	Emaranhamento Destilável e Custo de Emaranhamento	25
1.3.3	Entropia de Emaranhamento	26
1.3.4	Emaranhamento de Formação e Concorrência	27
1.3.5	Negatividade e Negatividade Logarítmica	29
1.3.6	Entropia Relativa de Emaranhamento	31
1.3.7	Robustez	34
1.3.8	Emaranhamento Testemunhado	36
1.3.9	Unicidade da Entropia de Emaranhamento	37
2	Estados maximamente emaranhados são puros?	39
2.1	Condições para a existência de estados mistos maximamente emaranhados	40
2.2	Estados maximamente emaranhados são puros	42
2.3	Estados maximamente emaranhados <i>não</i> são puros	46
2.4	Emaranhamento distribuído e a monogamia de emaranhamento	47
2.4.1	Poligamia de Emaranhamento	50
2.5	Uma visão geométrica	51
3	Tomografia e emaranhamento	53
3.1	1 qubit - Representação de Bloch	54
3.2	N qubits	55
3.2.1	Caracterização tomográfica de estados puros de três qubits através de seus estados reduzidos	55

4	Emaranhamento de partículas idênticas	61
4.1	Gás de elétrons livres	61
4.1.1	Detecção perfeita	62
4.1.2	O papel da simetria	65
4.1.3	Detecção imperfeita	67
4.2	Um caso bosônico	68
5	Comentários finais	75

Introdução à questão do emaranhamento

Neste capítulo apresentaremos a noção de emaranhamento. Será discutida a definição deste conceito em sistemas quânticos gerais (sec. 1.1). Mostrar como este conceito surgiu e identificar alguns dos principais pontos ainda em aberto é também um dos objetivos aqui.

Veremos que o problema de determinar se um estado quântico geral possui emaranhamento não é simples. Sendo assim, faz-se necessário o desenvolvimento de algumas técnicas para este fim. Descreveremos alguns dos mais importantes critérios para a determinação de emaranhamento na secção 1.2.

Outro passo importante na caracterização do emaranhamento foi a compreensão de que ele pode ser visto como um novo recurso físico, utilizável em várias tarefas desejáveis. Daí, nada mais natural que seguir em busca de uma boa quantificação para este recurso. A secção 1.3 trata deste tema.

1.1 Fixando alguns conceitos

Durante todo o texto adotaremos conceitos e notações padrão em física quântica [Bal95, Per95a, CDL78, Cun05]. Entretanto faremos um rápido apanhado no que consideramos fundamental para que a idéia a ser passada fique clara. Discutiremos as noções de estado puro, misto, e como descrevê-los.

1.1.1 Estados Quânticos

O procedimento padrão na descrição matemática de estados quânticos se faz através de operadores definidos num espaço vetorial complexo conhecido como espaço de estados. Os estados quânticos fornecem toda a informação possível sobre as propriedades de um sistema, assim como sua evolução temporal e possíveis resultados de medições que podemos efetuar neste sistema. Matematicamente, um estado quântico é descrito por um operador hermitiano positivo (semi-definido) e de traço unitário. Ou seja, o operador ρ pode representar um estado quântico se

1. $\rho = \rho^\dagger$;
2. $\rho \geq 0$;
3. $\text{Tr}(\rho) = 1$.

O operador ρ será chamado, muitas vezes, de operador densidade. Entretanto, qualquer operador que satisfaça as condições acima pode ser descrito (de forma não única) através de misturas estatísticas (ou somas convexas) de projetores, ou seja,

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (1.1)$$

tal que

$$\sum_i p_i = 1. \quad (1.2)$$

Um caso especial de ρ são os estados puros, que aparecem quando temos p_i para algum i , *i.e.*:

$$\rho = |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (1.3)$$

Desta forma, o estado quântico pode ser descrito como um projetor unidimensional. Outro fato importante é que o espaço de estados é convexo, ou seja, somas convexas de estados quânticos são também estados quânticos.

1.1.2 O espaço de estados e o surgimento da noção de emaranhamento.

Acabamos de ver que um sistema quântico S é descrito pelo operador $\rho \in D(\mathcal{H})^1$. Entretanto, S pode ser um sistema composto constituído de vários subsistemas (S_A, S_B, \dots, S_N) . Neste contexto o espaço de estados \mathcal{H} pode ser visto como um espaço composto pelos espaços de estados individuais dos vários subsistemas. Sendo assim, somos capazes de realizar uma descrição mais precisa do sistema S se virmos \mathcal{H} constituído por uma estrutura tensorial do tipo

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N, \quad (1.4)$$

onde $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B, \dots, \mathcal{H}_N$, são os espaços de Hilbert nos quais os operadores densidade referentes a cada subsistema $\rho_A, \rho_B, \dots, \rho_N$ estão definidos, respectivamente².

Da estrutura tensorial vista em (1.4) surge a noção de emaranhamento. No caso especial de estados puros temos a seguinte definição³:

Definição 1 Emaranhamento em estados puros:

Alguns estados puros podem ser descritos da forma

$$|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N\rangle, \quad (1.5)$$

ditos estados fatoráveis. Outros não admitem tal representação, sendo estes os estados puros emaranhados.

No caso mais geral de estados mistos a noção de emaranhamento é um pouco mais elaborada:

Definição 2 Emaranhamento em estados mistos:

¹ $D(\mathcal{H})$ é o conjunto dos operadores densidade definidos no espaço vetorial \mathcal{H} . Algumas vezes nos referiremos apenas como D .

²A idéia de se trabalhar com uma estrutura tensorial do tipo mostrado em (1.4) surge naturalmente do requisito de linearidade tanto para os subsistemas quanto para o sistema global.

³Introduzimos a noção de emaranhamento usando estados puros puramente por questões didáticas. Deve sempre ficar claro que os estados puros são um caso especial de estados quânticos.

(i) *Estados mistos que permitem uma descrição do tipo*

$$\rho = \rho_A \otimes \rho_B \otimes \dots \otimes \rho_N, \quad (1.6)$$

são ditos estados mistos fatoráveis.

(ii) *Estados mistos que permitem uma descrição do tipo*

$$\rho = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i \otimes \dots \otimes \rho_N^i, \quad (1.7)$$

são ditos estados mistos separáveis.

(iii) *Estados mistos que não permitem uma descrição do tipo mostrada no (ii) acima são os estados mistos emaranhados.*

Alguns comentários devem ser feitos. O estado em (1.5) é um caso particular de (1.6) quando os estados dos subsistemas são todos puros. A forma (1.6) é um caso particular de (1.7) quando $p_i = 1$ para algum i .

Agora vem a pergunta pertinente à física: o que difere fisicamente os estados emaranhados dos estados separáveis? Resposta: o aspecto das *correlações* envolvidas em tais sistemas. Resultados de medições locais em estados do tipo (1.5) ou (1.6) são totalmente descorrelacionados⁴. Já os sistemas descritos por (1.7) e os sistemas emaranhados apresentam correlações entre seu subsistemas, sendo que as correlações exibidas por estados separáveis podem ser descritas através de distribuições de probabilidades clássicas, enquanto para estados emaranhados isto não é possível.

No contexto de informação quântica diz-se que estados separáveis podem ser construídos à distância através de protocolos clássicos, enquanto estados emaranhados não [NC00]. Surge daí uma noção importante no estudo do emaranhamento, a idéia de operações locais e comunicação clássica (LOCC⁵), onde a teoria do emaranhamento irá se apoiar. Operações locais são aquelas efetuadas individualmente em cada subsistema, enquanto comunicação clássica é aquela que utiliza apenas canais clássicos, como linhas telefônicas ou o sistema de correios. Neste contexto diz-se que estados separáveis são aqueles que podem ser construídos por LOCC, isto não sendo permitido para

⁴Medições locais são aquelas efetuadas em cada subsistema separadamente.

⁵do inglês, local operations and classical communication

os estados emaranhados.

1.2 Identificando estados emaranhados

Dado um estado quântico geral ρ , a pergunta se há ou não emaranhamento em ρ está, em geral, longe de ter uma resposta trivial. Em outras palavras, para estados gerais, saber se estes podem ser escritos como (1.7) não é uma tarefa fácil, mesmo para os melhores computadores que dispomos no momento. Sendo assim, a busca por métodos para tentar resolver esta questão é um dos objetivos da teoria do emaranhamento. Tais métodos têm sido chamados de *critérios de emaranhamento*. Nesta seção apresentaremos alguns dos critérios mais discutidos na literatura até então.

1.2.1 Decomposição de Schmidt

A decomposição de Schmidt é um resultado matemático bastante poderoso, e que vem desempenhando um papel bastante importante na discussão do emaranhamento. Como veremos em breve, esta decomposição forneceu a primeira noção de critério de emaranhamento.

Teorema 1 Teorema de Schmidt [Sch07]⁶: *Dado um vetor geral $|\psi\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |ij\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, podemos sempre encontrar bases locais ortonormais para \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , tais que $|\psi\rangle$ pode ser escrito da forma*

$$|\psi\rangle = \sum_i^m \lambda_i |ii\rangle, \quad (1.8)$$

onde $m = \min[\dim(\mathcal{H}_A), \dim(\mathcal{H}_B)]$ e $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Dizemos então que $|\psi\rangle$, escrito na forma (1.8), está em decomposição de Schmidt. Os coeficientes λ_i são chamados de *coeficientes de Schmidt* e a quantidade de coeficientes λ_i não-nulos necessários para decompor $|\psi\rangle$, denotado por $\#\lambda_i$, é chamado de *número de Schmidt*. A força deste resul-

⁶O termo “teorema” será empregado diversas vezes ao longo deste texto em um sentido um pouco menos preciso do que nos textos de matemática. Na maior parte das vezes ficará um pouco obscuro as hipóteses que estarão sendo tomadas e a generalidade do resultado. Entretanto, este abuso de linguagem é frequentemente utilizado pelos físicos no sentido de mostrar um resultado forte (o que é que isso signifique).

tado pode ser notada na redução de dimensionalidade obtida ao escrevermos um vetor geral em sua forma de Schmidt. A priori, seriam necessários $\dim(\mathcal{H}_A) \times \dim(\mathcal{H}_B)$ coeficientes λ_{ij} para descrever $|\psi\rangle$. A decomposição de Schmidt reduz este número para $\min[\dim \mathcal{H}_A, \dim \mathcal{H}_B]$.

De (1.8) vê-se que, caso o número de Schmidt de um vetor seja 1, este vetor pode ser escrito como (1.5) e é, desta forma, fatorável. Caso $\# \lambda_i \geq 2$, o vetor é emaranhado. Temos aí uma primeira forma para detectar emaranhamento em estados puros bipartites.

Cabe ressaltar que a decomposição de Schmidt não é única. Sua generalização para sistemas compostos por mais de 2 partes também objeto de estudo [Per95b, AAC+00, AAJT01], e demonstrada ser impossível. Uma contagem de parâmetros pode revelar este fato: por exemplo, caso haja 3 partículas envolvidas, cada uma descrita por um espaço d -dimensional, seu estado (puro) combinado, em um espaço d^3 -dimensional, depende de $2(d^3 - 1)$ parâmetros reais (já levando-se em conta que estados quânticos são definidos a menos de normalização e fase global). Por outro lado, as 3 operações unitárias locais que podemos efetuar nas 3 partículas têm somente $3(d^2 - 1)$ parâmetros livres, sendo assim insuficientes para resolver o problema em geral. Apesar disto, formas canônicas para estados puros multipartites foram investigadas, sendo de grande valia no estudo de outros problemas. Por exemplo, qualquer estado puro de 3 qubits pode ser escrito da seguinte forma [AAC+00, AAJT01]:

$$|\psi\rangle = \lambda_0 |000\rangle + \lambda_1 e^{i\alpha} |001\rangle + \lambda_2 |010\rangle + \lambda_3 |100\rangle + \lambda_4 |111\rangle, \quad (1.9)$$

onde $0 \leq \lambda_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha \leq \pi$, e $\sum_i \lambda_i^2 = 1$, através de escolhas apropriadas de bases locais.

1.2.2 Critério de Peres

Apesar da decomposição de Schmidt poder ser encarada como um critério de emaranhamento extremamente útil, ela se mostra, de certa forma, bastante restrita, devido ao fato de lidar apenas com estados puros bipartites. Em busca de um critério que fosse hábil na detecção do emaranhamento em estados bipartites gerais, A. Peres mostrou que a operação de *transposição parcial* está intimamente ligada ao emaranhamento [Per96]. A transposta

parcial do estado

$$\rho = \sum_{ij,kl} \lambda_{ij,kl} |ij\rangle \langle kl| \quad (1.10)$$

é definida como:

$$\rho^{TB} = \sum_{ij,kl} \lambda_{ij,kl} |il\rangle \langle kj|. \quad (1.11)$$

Pode-se ver que, se ρ for um operador separável, ou seja

$$\rho = \sum_i p_i \rho_A^{(i)} \otimes \rho_B^{(i)},$$

sua transposta parcial resultará em um operador positivo. Segue daí o critério de Peres:

Teorema 2 Critério de Peres: *Caso a transposta parcial de ρ não for positiva, ρ é emaranhado.*

Apesar de A. Peres ter conjecturado a suficiência deste resultado para dimensões arbitrárias, M., P. e R. Horodecki mostraram mais tarde que, somente para as dimensões $2 \otimes 2$ e $2 \otimes 3$, o critério de Peres se mostra suficiente, nos outros casos ele é somente uma condição necessária [HHH96]. Em outras palavras, fora das dimensões citadas, alguns estados emaranhados possuem transposta parcial positiva. Nem um pouco óbvio é o fato destes estados possuírem um *emaranhamento preso*⁷, no sentido de que este emaranhamento não pode ser destilado⁸[HHH98]. Um exemplo de tal estado, em $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$, é

$$\rho = \frac{1}{8a+1} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+a}{2} & 0 & \frac{\sqrt{1-a^2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{1-a^2}}{2} & 0 & \frac{1+a}{2} \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

⁷Do inglês *bound entanglement*.

⁸Pedimos aos leitores mais impacientes que nos desculpem. A idéia de destilação do emaranhamento será discutida mais tarde, na sec. 1.3.2.

com $a \in (0, 1)$ [Hor97].

1.2.3 Critério de Horodecki

A idéia principal por detrás do critério de Peres é o fato de que a transposição parcial é um mapa positivo, entretanto, não é completamente positivo. Definamos então o que vêm a ser *mapas positivos* e *mapas completamente positivos*.

Definição 3 *Um mapa $\Lambda : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ é dito positivo quando leva operadores positivos em operadores positivos. I.e., se*

$$\rho \geq 0, \quad (1.13)$$

então

$$\Lambda(\rho) \geq 0. \quad (1.14)$$

Um exemplo de mapa positivo é a transposição de matrizes⁹. A definição de um mapa completamente positivo é mais sutil.

Definição 4 *Um mapa $\Lambda : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ é dito completamente positivo quando é positivo e sua extensão a qualquer produto tensorial é também um mapa positivo. I.e., se*

$$\rho \geq 0, \quad (1.15)$$

então

$$(\Lambda \otimes I_N)(\rho) \geq 0 \quad \forall N, \quad (1.16)$$

onde I_N representa a matriz identidade $N \times N$. O fato de que a transposição não é um mapa completamente positivo leva diretamente ao critério de Peres.

Teorema 3 Critério de Horodecki [HHH96]: *Um estado é separável se, e somente se, para qualquer mapa positivo Λ , o operador $(\Lambda \otimes I)(\rho)$ é também positivo.*

⁹É fácil notar que a transposta de uma matriz positiva é também uma matriz positiva: transposição é uma operação que não muda autovalores.

Os Horodeckis foram além desta generalização do critério de Peres e mostraram a importância de uma caracterização completa dos mapas positivos e completamente positivos no contexto do emaranhamento. Eles notaram, por exemplo, que em $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ e $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$ todos os mapas positivos podem ser construídos por combinações de mapas completamente positivos e a transposição parcial. Sendo assim, nestas dimensões, o critério de Peres é necessário e suficiente, sendo apenas necessário para dimensões maiores.

1.2.4 Critério de Nielsen e Kempe

Podemos dizer que, classicamente, a *desordem* de um sistema de duas partes é sempre maior ou igual à desordem de cada parte. A forma usual de quantificar a desordem de um sistema é através do uso de medidas entrópicas. No contexto clássico a entropia de Shannon, $H(X) \equiv H(p_1, \dots, p_n) = -\sum_i p_i \log p_i$, é extensamente utilizada, enquanto que quanticamente costuma-se usar a entropia de von Neuman¹⁰, $S(\rho) = -\text{Tr}[\rho \log(\rho)]$. Assim, escolhendo-se uma medida de entropia $E(X)$, pode-se definir a entropia condicional de duas variáveis aleatórias X e Y como:

$$E(X|Y) = E(X, Y) - E(Y), \quad (1.17)$$

onde $E(X, Y)$ é a entropia conjunta, ou seja, a entropia do sistema global XY . A entropia condicional pode ser interpretada como a entropia de X , uma vez que conhecemos Y . Classicamente $E(X|Y)$ é sempre positiva (ou nula). Isto é, a entropia de Shanon satisfaz

$$H(X, Y) \geq H(X), H(Y). \quad (1.18)$$

Uma expressão análoga acontece para estados quânticos separáveis:

$$S(\rho_{AB}) \geq S(\rho_A), S(\rho_B). \quad (1.19)$$

Entretanto alguns estados violam esta desigualdade. Segue daí um critério baseado em medidas entrópicas:

Teorema 4 Critério entrópico: *Se $S(A|B) = S(\rho_{AB}) - S(\rho_B) < 0$, então ρ_{AB} é um estado emaranhado.*

¹⁰Usualmente o log é calculado na base 2.

Um exemplo onde isto acontece é no estado de Bell $|\Psi_+\rangle = (1/\sqrt{2})(|01\rangle + |10\rangle)$, para o qual $S(\rho_{AB}) = 0$ (pois o estado global é puro), $S(\rho_A) = S(\rho_B) = 1$ e $S(A|B) = -1$.¹¹

Apesar de medidas entrópicas serem, indiscutivelmente, uma boa forma de quantificar desordem em um sistema, existem outras formas mais sofisticadas para tal quantificação. Um exemplo é a teoria da majoração, que, como será discutido em seguida, fornece um critério mais forte para a existência de emaranhamento do que o critério entrópico.

Antes de enunciar o critério de Nielsen e Kempe precisamos introduzir a idéia de majoração para vetores.

Definição 5 *Sejam os vetores $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{d_1})$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{d_2})$ representem distribuições de probabilidades. Dizemos que x é majorado por y , e denotamos por $x \prec y$, quando*

$$\sum_{j=1}^k x_j^\downarrow \leq \sum_{j=1}^k y_j^\downarrow, \quad (1.20)$$

para todo $k = 1, \dots, d-1$,¹² onde o símbolo \downarrow foi introduzido para denotar que as componentes dos vetores estão arranjadas de maneira decrescente, assim $x^\downarrow = (x_1^\downarrow, x_2^\downarrow, \dots, x_d^\downarrow)$, onde $x_1^\downarrow \geq x_2^\downarrow \geq \dots \geq x_d^\downarrow$.

Diz-se então que x é “mais misturado” que y quando $x \prec y$. Podemos agora enunciar o critério de Nielsen e Kempe:

Teorema 5 Critério de Nielsen e Kempe [NK01]: *Se ρ_{AB} é separável, então*

$$\lambda(\rho_{AB}) \prec \lambda(\rho_A) \quad e \quad \lambda(\rho_{AB}) \prec \lambda(\rho_B), \quad (1.21)$$

onde os vetores $\lambda(\rho_{AB})$, $\lambda(\rho_A)$ e $\lambda(\rho_B)$ representam os autovalores de ρ_{AB} e de suas matrizes reduzidas, respectivamente.

¹¹Tem sido discutida uma interpretação para uma entropia condicional negativa [HOW05, Hay05].

¹²Para $k = d$ a igualdade em (1.20) necessariamente ocorre, pois \vec{x} e \vec{y} são vetores de probabilidades.

Para mostrar a vantagem do critério de Nielsen e Kempe frente ao critério entrópico tome como exemplo o estado de dois qubits

$$\rho_p = p |\Psi_+\rangle \langle \Psi_+| + \frac{(1-p)}{4} I, \quad (1.22)$$

com $0 \leq p \leq 1$ e $|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$. A desigualdade (1.19) é satisfeita caso $p \leq 0.747\dots$, enquanto que, pelo critério de Nielsen e Kempe, ρ_p é separável se, e só se, $p \leq 1/3$ (neste caso o critério de Nielsen e Kempe é equivalente ao critério de Peres).

Outra idéia intimamente relacionada à majoração em estados quânticos é a convertibilidade de uma cópia única de estados de duas partes via operações LOCC.

Teorema 6 Teorema de Nielsen [Nie99]: *O estado puro $|\psi\rangle$ pode ser convertido deterministicamente em $|\phi\rangle$ por LOCC se, e somente se,*

$$\lambda(\text{Tr}_B(|\psi\rangle \langle \psi|)) \prec \lambda(\text{Tr}_B(|\phi\rangle \langle \phi|)). \quad (1.23)$$

Não é o objetivo deste texto entrar em maiores detalhes acerca de convertibilidade e emaranhamento. Para o leitor interessado nestas questões podemos dar algumas referências adicionais. A generalização do teorema 6 para a situação onde o estado transformado é um estado misto foi dada por Jonathan e Plenio em [JP99a]. Um fenômeno curioso, conhecido como catálise do emaranhamento, onde um estado adicional (*ancilla*) permite a convertibilidade de estados anteriormente não-conversíveis, sendo, assim, uma espécie de catalisador, foi descrito em [JP99b]. Ishizaka e Plenio estudaram a convertibilidade também no contexto de operações que preservam a positividade da transposição parcial (operações PPT) [IP05a, IP05b]. Este problema também foi investigado quando outro tipo de operação é permitida, a operação LOCC estocásticas, ou seja, quando aceita-se a convertibilidade via LOCC com uma dada probabilidade de sucesso [Ish04, DVC00].

1.2.5 Testemunhas de emaranhamento

Todos os critérios apresentados até agora servem para atestar apenas emaranhamento em sistemas de duas partes. Quando estamos tratando com emaranhamento multipartido precisamos ser mais cuidadosos e especificar

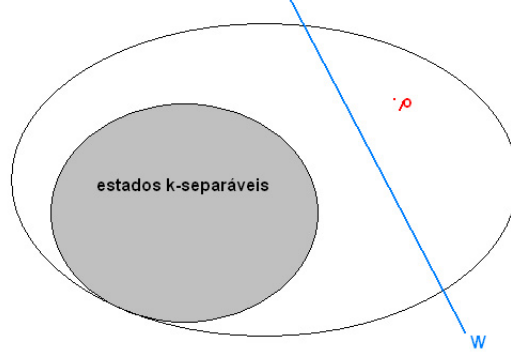


Figura 1.1: O operador W é uma testemunha de emaranhamento para o estado ρ pois separa ρ do conjunto S_k .

a qual emaranhamento estamos nos referindo. Isto porque, neste contexto, podemos estar interessados em diversas partições do sistema global. Por exemplo, em um sistema constituído de três partes A , B e C , podemos procurar pelo emaranhamento entre as partições $A|BC$, $B|CA$, $C|AB$, assim como pelo emaranhamento genuíno tripartite entre A , B e C .

Precisamos então, antes de prosseguirmos, determinar o que chamaremos de k -separabilidade. Chamamos de k -separável, todo estado que pode ser escrito como uma combinação convexa de estados que produtos de k produtos tensoriais. Alternativamente, dizemos que tal estado pertence ao conjunto S_k . Com esta definição fica claro que todo estado ρ é trivialmente 1-separável.

Podemos agora nos ater à discussão das testemunhas. Claramente os conjuntos k -separáveis formam uma cadeia $S_m \subset S_{m-1} \subset \dots \subset S_2 \subset S_1 = D$, onde D denota o conjunto dos operadores densidade. Cada um destes conjuntos é convexo e fechado e, pelos teoremas de análise convexa [Roc96], dado $\rho \notin S_k$, existe um hiperplano W que separa ρ de S_k . Este resultado pode ser visto, simplificadamente, pela figura 1.1.

Equivalentemente, existe algum operador hermitiano W tal que $\text{Tr}(W\rho) < 0$, e $\text{Tr}(W\sigma) \geq 0 \forall \sigma \in S_k$ [HHH96]. Sendo assim, podemos chamar W de uma k -testemunha de emaranhamento¹³. Testemunhas de emaranhamento são a solução teórica para o problema de separabilidade: toda vez que ρ tiver

¹³O nome “testemunha de emaranhamento” é devido a B. Terhal em [Ter00].

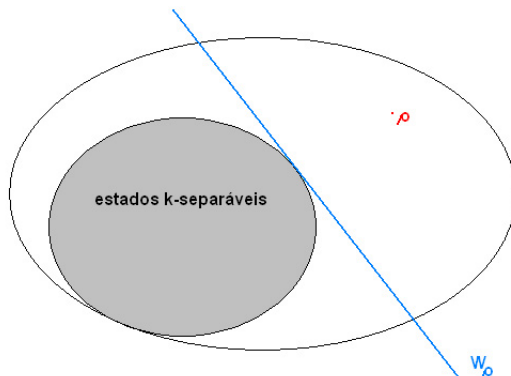


Figura 1.2: O operador de testemunha W_ρ é ótimo para o estado ρ segundo a definição 6. Alternativamente W_ρ pode ser visto como um plano tangente ao conjunto S_k , no espaço de operadores de estado.

algum emaranhamento, há algum W para testemunhá-lo. Infelizmente, não há uma testemunha universal, ou seja, um operador W que testemunhe todos os estados emaranhados. Dado ρ e um tipo específico de emaranhamento temos que procurar por sua testemunha.

Uma classe bastante importante dentro do conjunto dos operadores de testemunha é o que foi chamado de testemunhas ótimas de emaranhamento [LKCH00]. Segundo Lewenstein *et al.* a testemunha W_1 é mais fina do que W_2 se todos os operadores detectados por W_2 são também detectados por W_1 . Vem daí o conceito de testemunhas ótimas de emaranhamento: uma testemunha é dita ótima se não existe nenhuma outra mais fina do que ela. A idéia de otimalidade pode ser alternativamente estabelecida da seguinte maneira:

Definição 6 Testemunha ótima de emaranhamento: *O operador W_ρ é uma testemunha ótima para o estado ρ , caso $|\text{Tr}(W_\rho\rho)|$ seja um máximo dentre um conjunto restrito¹⁴ de operadores testemunha [Ter02].*

Pode-se ver também que, geometricamente, testemunhas ótimas equivalem a hiperplanos tangentes ao conjunto S_k (ver fig 1.2).

¹⁴Precisamos que o conjunto de testemunhas obedeça à alguma restrição para que o processo de otimização seja bem definido. Exemplos de restrições são $\text{Tr}W = 1$ e $W \leq I$.

Na ref. [BV04], Brandão e Vianna propuseram um procedimento de busca por testemunha ótimas de emaranhamento. Posteriormente iremos discutir como testemunhas podem ser usadas para quantificar os diversos tipos de emaranhamento [Bra05a]. A relação entre testemunhas de emaranhamento e desigualdades de Bell [Bel87] foi explorada em [HGB05], onde as desigualdades foram escritas em termos de testemunhas não-ótimas. O uso experimental das testemunhas de emaranhamento tem sido frequente nos últimos anos [BMN+03, BEK+04, RWZ05, AJK+05, HHR+05].

Procedimentos para determinar testemunhas ótimas para estados específicos vêm sendo propostos [BEK+04, WG03, TG05]. Uma forma sistemática para a construção de testemunhas ótimas para estados puros é através da busca pelo elemento ótimo que tem a forma específica

$$\mathcal{W}_\psi = \Lambda_{max}^2 - |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (1.24)$$

Pela condição que $\text{Tr}(W\sigma) \geq 0$ se σ é separável (*i.e.*: $\sigma \in \mathcal{S}$), podemos ver que

$$\Lambda_{max}^2 = \max_{\sigma \in \mathcal{S}} \|\langle\sigma | \psi\rangle\|^2. \quad (1.25)$$

1.2.5.1 Como tapear as testemunhas \mathcal{W}_{GHZ} e \mathcal{W}_W

Para três qubits, Dür, Vidal, e Cirac mostraram que existem somente duas classes diferentes de emaranhamento genuíno, no sentido que, mesmo estatisticamente, constituintes de uma classe não podem ser convertidos em constituintes da outra por LOCC [DVC00]. Os representantes mais consagrados destas classes são o estado GHZ, $|GHZ\rangle = (|000\rangle + |111\rangle)/\sqrt{2}$, que aparece na literatura na referência [GHZ93], e o estado W [CKW00], $|W\rangle = (|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle)/\sqrt{3}$. Ishizaka e Plenio mostraram que mesmo com operações PPT (aquelas que levam operadores com transposta parcial positiva em operadores deste mesmo tipo), GHZ e W continuam inequivalentes [IP05b], entretanto, estocasticamente existe um protocolo para converter GHZ em W via operações PPT com aproximadamente 75% de sucesso [IP05a].

Usando (1.24), podemos determinar testemunhas para estados tipo GHZ,

$$|GHZ(\phi)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + e^{i\phi}|111\rangle) \quad (1.26a)$$

e para estados tipo W,

$$|W(\gamma, \beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + e^{i\gamma}|010\rangle + e^{i\beta}|100\rangle). \quad (1.26b)$$

Estes operadores são, respectivamente,

$$\mathcal{W}_{GHZ(\phi)} = \frac{1}{2} - |GHZ(\phi)\rangle \langle GHZ(\phi)| \quad (1.27a)$$

e

$$\mathcal{W}_{W(\gamma, \beta)} = \frac{2}{3} - |W(\gamma, \beta)\rangle \langle W(\gamma, \beta)|. \quad (1.27b)$$

Motivados pela existência destas duas classes distintas de emaranhamento genuíno de três qubits, alguns autores têm usado as testemunhas de GHZ (1.27a) e de W (1.27b) como um teste para a existência de emaranhamento genuíno tripartite¹⁵. Chamaremos este teste de critério GHZ/W e, como veremos, ele é incompleto no sentido que há estados genuinamente emaranhados que não são detectados por ele.

Primeiramente devemos nos lembrar da decomposição para estados puros de três qubits dada na secção 1.2.1. Podemos escrever qualquer estado puro em $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ como

$$|\psi\rangle = \lambda_0 |000\rangle + \lambda_1 e^{i\alpha} |001\rangle + \lambda_2 |010\rangle + \lambda_3 |100\rangle + \lambda_4 |111\rangle, \quad (1.28)$$

onde $0 \leq \lambda_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha \leq \pi$, e $\sum_i \lambda_i^2 = 1$, após escolhermos bases locais apropriadas para tal. Vamos então determinar quais as condições para que as testemunhas $\mathcal{W}_{GHZ(\phi)}$ e $\mathcal{W}_{W(\gamma, \beta)}$ indiquem emaranhamento em um estado geral (1.28).

- Testemunhas $GHZ(\phi)$:

$$\text{Tr}(\mathcal{W}_{GHZ(\phi)} |\psi\rangle \langle \psi|) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\lambda_0^2 + \lambda_4^2 + 2\lambda_0\lambda_4 \cos(\phi - \alpha)) < 0. \quad (1.29)$$

Como $\lambda_0, \lambda_4 \geq 0$, é suficiente para nosso propósito considerar $\phi = \alpha$. Assim,

$$(\lambda_0 + \lambda_4)^2 > 1 \quad (1.30)$$

¹⁵Ver, por exemplo, arXiv quant-ph/0502122 V1.

deve ocorrer para que o emaranhamento de $|\psi\rangle$ seja detectado por $\mathcal{W}_{GHZ(\phi)}$.

- Testemunhas $W(\gamma, \beta)$:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathcal{W}_{W(\gamma, \beta)} |\psi\rangle \langle \psi|) &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \{ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \\ & 2\lambda_1\lambda_2 \cos(\gamma - \phi) + \\ & 2\lambda_1\lambda_3 \cos(\beta - \phi) + \\ & 2\lambda_2\lambda_3 \cos(\gamma - \beta) \} < 0. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Novamente consideraremos o caso extremo $\gamma = \phi = \beta$. Logo,

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 > 2. \quad (1.32)$$

Com estas condições podemos ver que o estado

$$|\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |100\rangle + |111\rangle) \quad (1.33)$$

não é percebido nem pelas testemunhas de $W(\gamma, \beta)$, nem pelas de $GHZ(\phi)$. Note, entretanto, que $|\xi\rangle$ possui emaranhamento genuíno tripartite, *i.e.*: não pode ser escrito como um estado biseparável. De fato $|\xi\rangle$ é um caso particular de uma família de estados puros que não são detectados por $\mathcal{W}_{GHZ(\phi)}$ e $\mathcal{W}_{W(\gamma, \beta)}$. Os estados

$$|\xi'\rangle = a |GHZ(\phi)\rangle + b |W(\gamma, \beta)\rangle, \quad (1.34)$$

com $|a|^2 + |b|^2 = 1$, alcançam

$$\langle \mathcal{W}_{GHZ(\phi)} \rangle = \frac{1}{2} - |a|^2, \quad (1.35a)$$

e

$$\langle \mathcal{W}_{W(\gamma, \beta)} \rangle = \frac{2}{3} - |b|^2. \quad (1.35b)$$

Isto significa que $|\xi'\rangle$ é testemunhado se $|a|^2 > \frac{1}{2}$ ou $|b|^2 > \frac{2}{3}$. Porém, estas condições excluem todos os estados que satisfazem $\frac{1}{3} \leq |a|^2 \leq \frac{1}{2}$ (ver figura 1.3).

Indo além, misturas estatísticas de estados não-testemunhados são tam-

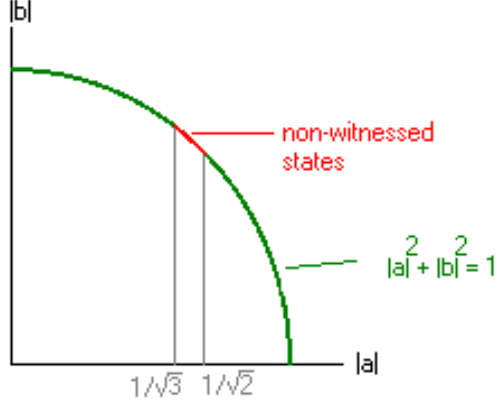


Figura 1.3: Vermelho: família de estados $|\xi'\rangle = a|GHZ(\phi)\rangle + b|W(\gamma, \beta)\rangle$ que não são detectados pelo critério GHZ/W.

bém não-testemunhadas. Para provar isso podemos olhar para o operador densidade:

$$\rho = \sum_i p_i |\xi'_i\rangle \langle \xi'_i|, \quad (1.36)$$

onde os estados $|\xi'_i\rangle$ não são testemunhados pelo critério GHZ/W. Aplicando o critério a ρ temos:

$$\text{Tr}(\mathcal{W}_{GHZ(\phi)}\rho) = \sum_i p_i \text{Tr}(\mathcal{W}_{GHZ(\phi)} |\xi'_i\rangle \langle \xi'_i|) \geq 0 \quad (1.37a)$$

e

$$\text{Tr}(\mathcal{W}_{W(\gamma, \beta)}\rho) = \sum_i p_i \text{Tr}(\mathcal{W}_{W(\gamma, \beta)} |\xi'_i\rangle \langle \xi'_i|) \geq 0, \quad (1.37b)$$

onde foi usada a linearidade do traço e que $p_i \geq 0$, $\text{Tr}(\mathcal{W}_{GHZ(\phi)} |\xi'_i\rangle \langle \xi'_i|) \geq 0$, e $\text{Tr}(\mathcal{W}_{W(\gamma, \beta)} |\xi'_i\rangle \langle \xi'_i|) \geq 0$. É difícil garantir que tais combinações se

mantenham genuinamente emaranhadas, mas continuidade é suficiente para garantir isso em algumas delas.

Um problema interessante seria determinar se existe um conjunto finito de operadores testemunha que determinasse se qualquer estados é ou não genuinamente emaranhado. Isto poderia, por exemplo, ajudar na compreensão da geometria do conjunto dos estados separáveis com respeito a cada tipo de emaranhamento.

1.3 Quantificando o emaranhamento

A partir do momento em que o emaranhamento começou a ser visto como um recurso utilizável em protocolos de informação e computação, tornou-se natural a pergunta: quanto deste recurso é necessário para efetuar determinada tarefa? Sendo assim um novo rumo dentro da teoria do emaranhamento começa a ser traçado: como quantificar apropriadamente esta grandeza?

Nos últimos anos diversas propostas foram feitas neste sentido. Atualmente uma vasta gama de quantificadores está disponível, cada um sendo hábil a quantificar emaranhamento sob um determinado ponto de vista, possuindo virtudes e defeitos. Existem quantificadores baseados em eficiência de protocolos de informação quântica, em aspectos geométricos, em convertibilidade de estados, etc. Nesta seção apresentaremos apenas algumas das propostas mais discutidas. Outras fontes podem ser consultadas para uma revisão mais completa neste sentido, como, por exemplo, as refs. [Bra05c, Cun05, Bru02, QIC01, PV05].

1.3.1 Requerimentos para bons quantificadores

Diversos autores discutem quais seriam os requerimentos naturais que um quantificador de emaranhamento deve satisfazer [VPRK97, VP98, PV98, Vid00, HHH00, DHR02, Bru02]. Este é um assunto delicado, que está longe de ser um consenso geral. Um extenso número de requerimentos foi sumariado, e comentado, na ref. [Bru02] (ver também [Cun05]). São eles:

1. Se ρ é separável, então $E(\rho) = 0$.

2. *Normalização*: O emaranhamento do estado $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{d-1} |j, j\rangle$ é

$$E(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \log d. \quad (1.38)$$

3. *Não-crescente por LOCC*: Seja Λ_{LOCC} um mapa que pode ser implementado por operações locais e comunicação clássica, então

$$E(\Lambda_{LOCC}(\rho)) \leq E(\rho). \quad (1.39)$$

4. *Continuidade*: E deve ser uma função contínua de ρ , *i.e.*:

$$E(\rho) - E(\sigma) \rightarrow 0 \quad \text{para} \quad \|\rho - \sigma\| \rightarrow 0. \quad (1.40)$$

5. *Aditividade parcial*: n cópias idênticas do estado ρ contém n vezes o emaranhamento de ρ ,

$$E(\rho^{\otimes n}) = nE(\rho). \quad (1.41)$$

6. *Subaditividade*: Para sistemas independentes, ρ e σ , dizemos que o sistema global é descrito por $\rho \otimes \sigma$ e os quantificadores E devem obedecer:

$$E(\rho \otimes \sigma) \leq E(\rho) + E(\sigma). \quad (1.42)$$

7. *Convexidade*: E deve ser uma função convexa no espaço dos operadores, *i.e.*:

$$E\left(\sum_i p_i \rho_i\right) \leq \sum_i p_i E(\rho_i), \quad (1.43)$$

onde $p_i > 0$ e $\sum_i p_i = 1$.

Como satisfazer todas estas propriedades é um tanto quanto difícil, relaxações destes requerimentos têm sido levados em conta [Vid00].

Vidal propôs que um bom quantificador de emaranhamento seria aquele que satisfizesse apenas uma propriedade: não crescimento, em média, por operações LOCC [Vid00]. Sendo assim, definiu-se o que se chama um monótono de emaranhamento:

Definição 7 *Será chamado um monótono de emaranhamento, qualquer magnitude $E(\rho)$ que não cresça, em média, sobre transformações locais munidas de comunicação clássica.*

Exemplos destas operações locais são:

1. Operações unitárias locais. Por exemplo, para estados bipartites ρ_{AB} , onde $U = U_A \otimes U_B$:

$$\rho \rightarrow \rho' = U\rho U^\dagger. \quad (1.44)$$

2. Medição local de Von Neuman:

$$\rho \rightarrow \rho' = \sum_k p_k \rho_k, \quad (1.45)$$

onde uma das partes efetua uma medição de Von Neuman incompleta¹⁶, em seu subsistema, deixando o estado ρ igual a ρ_k com probabilidade p_k . Tais medições podem ser descritas por um conjunto de projetores (não necessariamente unidimensionais) $\{P_k\}$, tal que $\sum_k P_k = I$, e $p_k \rho_k = P_k \rho P_k$.

3. Adição de um sistema auxiliar σ (ancilla):

$$\rho \rightarrow \rho' = \rho \otimes \sigma. \quad (1.46)$$

4. Descarte (traço parcial) de uma parte Q do sistema ρ :

$$\rho \rightarrow \rho' = \text{Tr}_Q \rho. \quad (1.47)$$

Vidal também encontrou um conjunto mínimo de condições necessárias e suficientes para que um quantificador E seja um monótono de emaranhamento. Estas são:

¹⁶Uma medição incompleta é aquela onde não se sabe o resultado. Sendo assim, a única descrição que podemos dar ao estado após a medição é (1.45).

1. Para qualquer operação local não-determinística $\mathcal{E}_{i,k}(\rho)$, realizada pela i -ésima parte,

$$E(\rho) \geq \sum_k p_k E(\rho_k), \quad (1.48)$$

onde

$$p_k = \text{Tr}[\mathcal{E}_{i,k}(\rho)]$$

$$\rho_k = \frac{\mathcal{E}_{i,k}(\rho)}{p_k}.$$

2. Convexidade: para qualquer *ensemble* $\{q_k, \rho_k\}$,

$$E(\rho) \leq \sum_k q_k E(\rho_k). \quad (1.49)$$

Todos os quantificadores descritos nas próximas secções são monótonos de emaranhamento.

1.3.2 Emaranhamento Destilável e Custo de Emaranhamento

As primeiras propostas na quantificação do emaranhamento foram baseadas em idéias de sua utilização e do esforço requerido para a produção de estados emaranhados [BBP+96a].

Para 2 qubits, exemplos de estados maximamente emaranhados são os pares EPR (são eles que violam maximamente as desigualdades de Bell [Bel87], realizam teleportação de forma mais desejável [BBC+93], etc). O *custo de emaranhamento* quantifica quantos pares EPR devem ser compartilhados entre duas partes, para que, através de operações LOCC, outro estado ρ_{AB} possa ser produzido. Note que isto nos dá o custo em *ebits*¹⁷ da produção de ρ_{AB} , posto que o emaranhamento de um par EPR é definido como valendo 1 *ebit*. Um ponto importante nesta conversão por LOCC é que deve-se trabalhar no regime assintótico, *i.e.*: nos interessa a razão entre o número de pares EPR e o número de cópias de ρ_{AB} , num limite onde infinitas cópias estão disponíveis.

Sendo assim, caso haja um protocolo LOCC, Λ_{LOCC} , que leve m pares EPR em n pares do estado ρ_{AB} (no limite de m e n arbitrários) concluiríamos

¹⁷Do inglês *entanglement bit*, ou bit de emaranhamento.

que o emaranhamento de ρ_{AB} é $E(\rho_{AB}) = \frac{m}{n} \text{ebits}$. Entretanto pode haver outro protocolo, Λ'_{LOCC} , que obtenha a transformação desejada, a um custo menor. O custo de emaranhamento $E_C(\rho_{AB})$ é definido como

$$E_C(\rho_{AB}) = \inf_{\Lambda_{LOCC}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}. \quad (1.50)$$

O *emaranhamento destilável* toma a rota inversa de E_C : quer-se saber quantos pares EPR podem ser extraídos (destilados) de n pares de um estado ρ_{AB} (novamente no contexto assintótico), usando somente LOCC. Dizemos, então, que o emaranhamento que pode ser destilado de ρ_{AB} é

$$E_D(\rho_{AB}) = \sup_{\Lambda_{LOCC}} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{n}{m}, \quad (1.51)$$

caso m pares EPR possam obtidos por LOCC.

Uma pergunta natural a se fazer é se E_C é igual a E_D . De fato a resposta é: nem sempre. Curiosamente há alguns estados que possuem o que foi chamado de emaranhamento preso [HHH98], ou seja, que não pode ser destilado. Naturalmente $E_D \leq E_C$, sendo a igualdade válida para estados puros ou nos casos $2 \otimes 2$ e $2 \otimes 3$ (foi dito anteriormente que a idéia de emaranhamento preso está intimamente ligada ao critério de Peres).

1.3.3 Entropia de Emaranhamento

Uma das idéias pioneiras na quantificação do emaranhamento foi o uso da entropia de Von Neuman [BBP+96a, BBP+96b]. Como visto anteriormente através do critério entrópico e o de Nielsen e Kempe, caso um sistema puro de duas partes tenha seus estados reduzidos mistos, necessariamente há emaranhamento entre suas partes. Assim, uma forma natural de estabelecer o emaranhamento nestes sistemas é através de funções que quantifiquem a pureza dos estados reduzidos. A *entropia de emaranhamento* E_E usa a entropia de Von Neuman para este propósito.

Para estados puros de duas partes, ψ_{AB} , vimos que uma forma simplificada de escrevermos este estado é através de sua decomposição de Schmidt,

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_i \lambda_i |ii\rangle. \quad (1.52)$$

A entropia de emaranhamento é então definida como

$$E_E(\psi) = S(\rho_A) = S(\rho_B) = - \sum_i \lambda_i^2 \log(\lambda_i^2), \quad (1.53)$$

sendo ρ_A e ρ_B os estados reduzidos de $|\psi\rangle_{AB}$.

Notavelmente E_E possui uma relação bastante adequada com a convertibilidade por operações LOCC de estados quânticos no regime assintótico (*i.e.*: quando trabalha-se no limite de $N \rightarrow \infty$ cópias do mesmo estado). Quando duas partes desejam transformar N cópias de um estado puro $|\psi\rangle$ em M cópias de outro estado $|\phi\rangle$, isto só é possível caso

$$NE_E(\psi) \geq ME_E(\phi). \quad (1.54)$$

Caso haja uma igualdade em (1.54), este processo pode ser reversível.

Apesar da entropia de emaranhamento ser bastante útil, ela falha em quantificar emaranhamento em estados mistos. Isto se deve ao fato do grau de mistura do estado reduzido poder ser também devido à mistura do estado global, e não somente ao emaranhamento. Veremos a seguir algumas formas de lidar com isto.

1.3.4 Emaranhamento de Formação e Concorrência

Ainda no contexto de duas partes, o *emaranhamento de formação*, faz uso, como o próprio nome sugere, da idéia de como construir estados quânticos. É possível escrevermos qualquer estado quântico como uma soma convexa de estados puros, *i.e.*:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (1.55)$$

onde $\{p_i\}$ é uma distribuição de probabilidades. Em seguida podemos calcular o emaranhamento de cada estado puro na decomposição (1.55) e tomar a média destes emaranhamentos, a partir de E_E , dada pelas probabilidades $\{p_i\}$:

$$\bar{E}(\{p_i, |\psi\rangle\}) = \sum_i p_i E_E(\psi_i). \quad (1.56)$$

O emaranhamento de formação de ρ ($E_F(\rho)$) é dado pela minimização de \bar{E} sobre todas as possíveis escolhas $\{p_i, |\psi\rangle\}$ que descrevem ρ [BDS+96c]:

$$E_F(\rho) = \inf_{\{p_i, |\psi\rangle\}} \bar{E}(\{p_i, |\psi\rangle\}). \quad (1.57)$$

Foi mostrado que a versão regularizada de E_F é igual ao custo de emaranhamento [HHT01], isto é

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_F(\rho^{\otimes n})}{n} = E_C(\rho). \quad (1.58)$$

Uma relação deste tipo já era esperada, posto que E_E e E_C estão intimamente relacionados com a convertibilidade de estados.

Infelizmente, por causa do processo de minimização, o cálculo de E_F torna-se inviável na maioria dos casos. Sendo assim, busca-se ainda um método prático para o cálculo de E_F para estados gerais. Em seguida mostraremos que, para estados compostos por 2 qubits, tal método já foi alcançado.

1.3.4.1 Concorrência

Um grande passo da quantificação do emaranhamento foi o método prático para o cálculo de E_F , desenvolvido por Hill e Wootters, para estados de 2 qubits de posto 2 [HW97], e, posteriormente, generalizado por Wootters para qualquer estado de 2 qubits [Woo98].

O primeiro passo tomado para a determinação de $E_F(\rho)$ foi a definição da concorrência de ρ , $C(\rho)$. Esta última função, por sua vez, está relacionada com a operação *spin-flip* de ρ dada por:

$$\tilde{\rho} = \sigma_y \otimes \sigma_y \rho^* \sigma_y \otimes \sigma_y. \quad (1.59)$$

Define-se, então, a concorrência de ρ como

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (1.60)$$

sendo λ_i as raízes quadradas dos autovalores em ordem decrescente da matriz $\rho \tilde{\rho}$. $C(\rho)$ já é, por si só, um quantificador de emaranhamento, sendo 0 para estados separáveis e 1 para estados maximamente emaranhados.

O segundo passo foi mostrar uma expressão analítica para E_F :

$$E_F(\rho) = H_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - C^2(\rho)} \right), \quad (1.61)$$

onde $H_2(x) = -x \log x - (1 - x) \log(1 - x)$ e é assumido que $0 \log 0 = 0$.

Como será visto posteriormente (sec. 2.4), a concorrência permitiu não só o estabelecimento de uma fórmula analítica para E_F , como também resultados interessantes acerca do compartilhamento de emaranhamento em sistemas multipartites.

1.3.5 Negatividade e Negatividade Logarítmica

Uma rota diferente na quantificação do emaranhamento foi o uso do critério de Peres para este fim. Foi visto que, caso a transposição parcial de um operador de estados ρ leve a um operador não-físico, *i.e.*: não-positivo, ρ é necessariamente emaranhado. Mais que isso, nos casos $2 \otimes 2$ e $2 \otimes 3$ este critério torna-se também suficiente, e podemos também afirmar que se $\rho^{TA} > 0$, ρ não possui emaranhamento.

A negatividade de ρ , $N(\rho)$, fará uso dos autovalores negativos de ρ^{TA} . Define-se então [VW02]:

$$N(\rho) = \frac{\|\rho^{TA}\| - 1}{2}, \quad (1.62)$$

onde $\|\star\|$ denota a norma do traço, ou seja, a soma dos módulos dos autovalores.

Uma forma mais natural de entender a expressão (1.62) é ver que $N(\rho)$ corresponde ao valor absoluto da soma dos autovalores negativos de ρ^{TA} . Em outras palavras, a negatividade mede o quanto ρ^{TA} falha em ser positivo semi-definido.

Para 2 qubits, vê-se que $0 \leq N(\rho) \leq 0.5$. Sendo assim, frequentemente define-se a negatividade como o dobro de (1.62), ou seja,

$$N(\rho) = \|\rho^{TA}\| - 1. \quad (1.63)$$

Desta forma a negatividade de um estado maximamente emaranhado de 2

qubits vale 1^{18} .

Após sua proposta, a negatividade passou a ser um quantificador bastante utilizado, ora por ser de fácil manipulação, ora por fornecer uma forma de quantificar emaranhamento em sistemas bipartidos de qualquer dimensão. Cabe lembrar que, fora os caso especificados anteriormente ($2 \otimes 2$ e $2 \otimes 3$), $N(\rho)$ quantifica apenas o emaranhamento NPPT, ou seja, em estados cuja transposta parcial é negativa. Cabe lembrar que estados emaranhados com transposta parcial positiva foram discutidos na secção (1.2.2), e ditos estarem relacionados com emaranhamento não destilável.

Outro quantificador, relacionado à negatividade é a *negatividade logarítmica* [ZHSL98, VW02, APE03], definida como:

$$E_{\mathcal{N}}(\rho) = \log_2(1 + N(\rho)). \quad (1.64)$$

Foi mostrado que, apesar de $E_{\mathcal{N}}$ ser um monótono de emaranhamento, ela não é uma função convexa [P05].

1.3.5.1 Comparação entre concorrência e negatividade

Posto que ambos quantificadores, Concorrência e Negatividade, se prestam a quantificar emaranhamento nos mesmos tipos de estados, e são factíveis de serem calculados, uma questão natural seria compará-los. Além do mais foi visto que, $C(\rho)$ está relacionado com o Emaranhamento de Formação (e também ao Custo de Emaranhamento), enquanto que $N(\rho)$ relaciona-se com o Emaranhamento de Destilação.

Verstraete *et al.* mostraram que, mesmo no caso mais simples de 2 qubits, C e N ordenam diferentemente os estados quanto a seu emaranhamento [VADM01]. Mais ainda, foi mostrado que, para um dado valor de C , existem estados com negatividade na faixa

$$\sqrt{(1 - C)^2 + C^2} - (1 - C) \leq N \leq C. \quad (1.65)$$

A figura 1.4 ilustra a região de valores permitidos em um plano $C \times N$. A igualdade entre C e N é alcançada para estados puros e quando o autovetor de ρ^{TA} correspondente ao autovalor negativo é um par de Bell.

¹⁸Esta última forma para N , (1.63), será adotada ao longo do texto a menos que especificado o contrário.

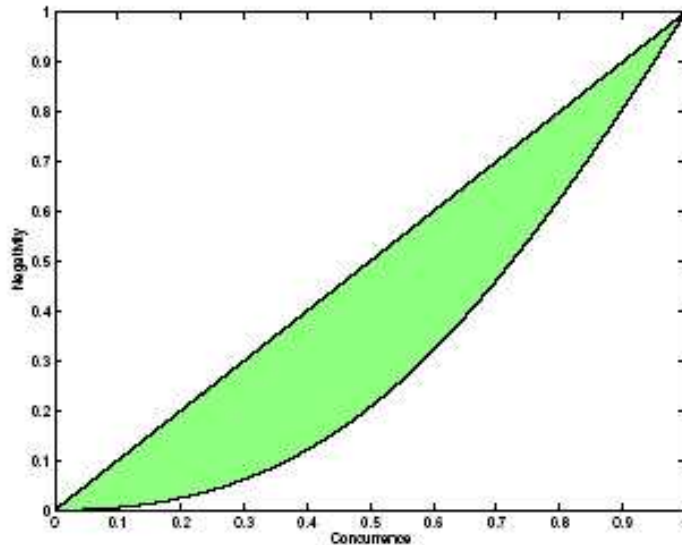


Figura 1.4: Valores de N para uma dada concorrência C - Figura retirada da ref. [VADM01].

1.3.6 Entropia Relativa de Emaranhamento

Até agora discutimos quantificação de emaranhamento apenas no contexto bipartido, ou seja, entre duas partes. Quando diversas partes entram em questão, o problema de quantificar emaranhamento passa a ser mais sutil e difícil. Como discutido, faz-se necessário referir-se a qual emaranhamento estamos tratando. Isto porque em um sistema de muitas partes podemos estar interessados no emaranhamento entre diversas partições do mesmo sistema. Assim como na discussão de testemunhas de emaranhamento (secção 1.2.5) o uso do conceito de k -separabilidade será útil.

Como primeiro exemplo de quantificador de emaranhamento multipartite apresentaremos a *entropia relativa de emaranhamento*, E_R , que faz uso da idéia de distinguibilidade de estados quânticos. Antes, discutamos o conceito de distinguibilidade em teoria de informação clássica.

Um problema importante em protocolos de comunicação é o de distinguir duas distribuições de probabilidades. Suponha, por exemplo, que possuímos uma moeda “viciada”, ou desbalanceada, com distribuição de probabilidades para “cara” e “coroa” dada por $f = (1/3, 2/3)$. Pergunta-se: qual a probabilidade de que esta moeda viciada seja confundida com uma moeda balanceada,

com distribuição de probabilidades $q = (1/2, 1/2)$, após n testes? Para n grande a resposta é

$$p(\text{desbalanceada} \rightarrow \text{balanceada}) = \exp[-nS_{cl}(f||q)], \quad (1.66)$$

sendo $S_{cl}(f||q) = 1/3 \ln(1/3) + 2/3 \ln(2/3) - 1/3 \ln(1/2) - 2/3 \ln(1/2)$ a entropia relativa clássica das duas distribuições [HP91, Ved02, NC00]. Note que para $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$, e passamos a ter certeza da moeda em mãos. Este resultado é verdade, em geral, para quaisquer distribuições de probabilidades $P(x)$ e $Q(x)$. A probabilidade de confundirmos as distribuições $P(x)$ e $Q(x)$ é dada assintoticamente, depois de n testes, por $\exp[-nS_{cl}(P(x)||Q(x))]$, onde

$$S_{cl}(P(x)||Q(x)) = \sum_i p_i \ln p_i - p_i \ln q_i. \quad (1.67)$$

Este resultado é generalizado para o contexto quântico através das probabilidades dos resultados de medidas efetuadas em estados quânticos. A probabilidade de **não** distinguir dois estados quânticos σ e ρ após n medições é [Ved02, VPRK97, VP98, NC00]

$$p(\rho \rightarrow \sigma) = \exp[-nS(\sigma||\rho)], \quad (1.68)$$

onde

$$S(\sigma||\rho) := \text{Tr}[\sigma \ln \sigma - \sigma \ln \rho] \quad (1.69)$$

é a entropia relativa quântica. Usualmente troca-se \ln por \log_2 na expressão acima, o que corresponde apenas a adição de uma constante.

Vedral *et al.* utilizaram-se da idéia de entropia relativa para quantificar emaranhamento multipartite [VPRK97, VP98]. A idéia central é quantificar o quão bem um estado ρ pode ser distinguido de um estado k -separável¹⁹. Ou seja, queremos $S(\sigma||\rho)$ quando $\sigma \in S_k$. A entropia relativa de emaranhamento é então alcançada quando minimizamos $S(\sigma||\rho)$ sobre todos os estados $\sigma \in S_k$, ou seja

$$E_R(\rho) = \min_{\sigma \in S_k} S(\sigma||\rho). \quad (1.70)$$

Apesar da interpretação clara via distinguibilidade, vemos que a definição

¹⁹Lembre-se da definição do conjunto S_k dada na secção 1.2.5.

de E_R não é operacional, ou seja, não há um método prático para efetuar a minimização presente em (1.70) para estados arbitrários. Entretanto, caso o estado em questão possua simetrias tal processo de minimização pode ser facilitado. Nesta direção, Wei *et al.* mostraram uma forma analítica para o cálculo de E_R com relação aos estados completamente separáveis, para estados puros completamente simétricos de n qubits dados por:

$$|k, n - k\rangle = \binom{n}{k}^{-1} S | \underbrace{000\dots 0}_k \underbrace{11\dots 1}_{n-k} \rangle, \quad (1.71)$$

onde S representa o operador de permutação total [WEGM04]. A rota tomada por estes autores forneceu também uma cota inferior para E_R :

Teorema 7 [WEGM04] *Para qualquer estado puro $|\psi\rangle$,*

$$E_R(|\psi\rangle \langle\psi|) \geq -2 \log_2 \Lambda_{max}, \quad (1.72)$$

onde Λ_{max} é definido exatamente como na expressão (1.25).

Na tentativa de encontrar uma cota superior para E_R dos estados (1.71), supôs-se o ansatz

$$\sigma' = \int \frac{d\phi}{2\pi} |\xi(\phi)\rangle \langle\xi(\phi)|, \quad (1.73a)$$

$$|\xi(\phi)\rangle = (\sqrt{p}|0\rangle + e^{i\phi}\sqrt{1-p}|1\rangle)^{\otimes n}, \quad (1.73b)$$

com p escolhido para maximizar $\| \langle k, n - k | \xi \rangle \|$. Calculando-se (1.69) com (1.73a), encontra-se $S(\sigma' || \rho) = -2 \log_2 \Lambda_{max}$, ou seja, as cotas superior e inferior coincidem, e podemos concluir que

$$E_R(|k, n - k\rangle \langle k, n - k|) = -2 \log_2 \Lambda_{max}. \quad (1.74)$$

Vedral foi um pouco adiante neste caminho determinando E_F também para os estados reduzidos de $|k, n - k\rangle$ [Ved04a]. O estado de l qubits provenientes do traço parcial em $n - l$ qubits de $|k, n - k\rangle$ é dado por

$$\rho_l = \sum_{i=0}^l \binom{l}{l-i} \frac{\binom{n-l}{k-i}}{\binom{n}{k}} |i, l - i\rangle \langle i, l - i|. \quad (1.75)$$

A entropia relativa de emaranhamento deste estado com relação aos estados completamente separáveis é [Ved04a]:

$$E_R(\rho_l) = \sum_{i=0}^l \binom{l}{l-i} \frac{\binom{n-l}{k-i}}{\binom{n}{k}} \log \left[\binom{l}{l-i} \frac{\binom{n-l}{k-i}}{\binom{n}{k}} \left(\frac{n}{k}\right)^{l-i} \left(\frac{n}{n-k}\right)^i \binom{l}{i}^{-1} \right]. \quad (1.76)$$

O estudo do emaranhamento nos estados considerados em (1.71) e (1.75) é de grande importância em modelos como o η -pareamento [Ved04a] (que trata da supercondutividade a altas temperaturas), modelo de Dicke [Dic59, HH04, BOR05] (que trata da superradiância), e o modelo de emparelhamento [RCS+05] (que trata de modos internos de núcleos pesados).

1.3.7 Robustez

Outra proposta no sentido de quantificar emaranhamento em sistemas de muitas partes é a Robustez, ou Robustezas, de emaranhamento. Como veremos, esta forma de quantificação permite interpretarmos adequadamente este tema em termos geométricos.

Inicialmente podemos definir o que seja a robustez de um estado ρ relativa a outro estado π , como o mínimo s tal que o estado

$$\sigma = \frac{\rho + s\pi}{1 + s} \quad (1.77)$$

é k -separável. Entretanto, nem sempre isto é possível, ou seja, nem sempre a combinação acima será k -separável. Estaremos interessados em duas situações especiais. A primeira delas chamada *robustez randômica* de ρ , e denotada por $R_r(\rho)$, é obtida quando π é fixado como o estado completamente misto $\frac{I}{d}$, onde I é a matriz identidade $d \times d$. O estado $\frac{I}{d}$ é um ponto interior ao conjunto dos estados completamente separáveis [ZHSL98], o que assegura um valor finito para $R_r(\rho)$. O segundo caso, denotado $R_g(\rho)$ e chamado *robustez generalizada*, é obtido quando a minimização da robustez relativa é sobre todos os estados π . Não é difícil perceber que $R_g(\rho) \leq R_r(\rho)$. Os aspectos geométricos destes quantificadores são explorados nas figuras 1.5 e 1.6.

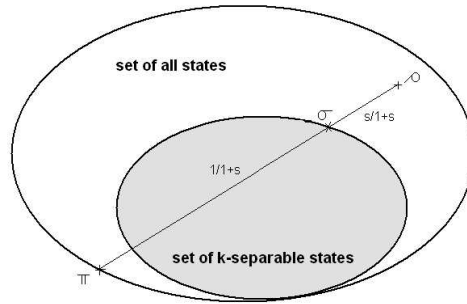


Figura 1.5: Os estados ρ , σ , e π podem ser representados como pontos no espaço de estados quânticos. Um subconjunto de todas as matrizes densidade é o conjunto de estados que não contém um certo tipo de emaranhamento, mostrado na figura como o conjunto dos estados k -separáveis (S_k). A linha conectando ρ e π representa as combinações convexas $\frac{\rho+s\pi}{1+s}$. É possível notar que, para algumas escolhas de π , esta combinação alcança o conjunto S_k , para um determinado valor de s , no ponto σ . A k -robustez generalizada, $R_g^k(\rho)$ é o mínimo valor de s quando todos os possíveis estados π são considerados. Como indicado na figura, pode ser concluído que π está na borda do conjunto de todos os estados, enquanto σ está na borda de S_k .

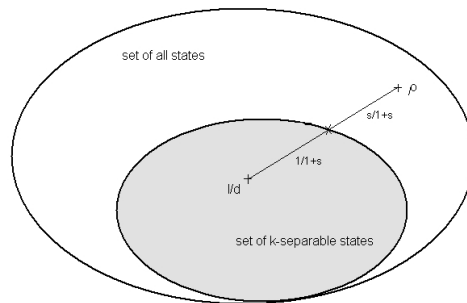


Figura 1.6: A diferença entre R_g^k e R_r^k é que em R_r^k o estado π é mantido fixo como I/d independentemente do estado ρ a ser quantificado. Como I/d é um estado completamente separável, pode ser representado como um ponto interior ao conjunto S_k .

A robustez randômica possui um papel relevante na discussão do uso de estados emaranhados em protocolos de informação [HN03]. Similarmente, a robustez generalizada $R_g(\rho)$ é importante em protocolos de teleportação por estar relacionada com a melhoria destes protocolos ao incluirmos o estado ρ no processo [Bra05b]. Mais que isso, mostraremos que $R_g(\rho)$ proporciona resultados interessantes na caracterização do emaranhamento, como a determinação da *poligamia de emaranhamento* (sec. 2.4.1), e pode ser relacionada a fenômenos críticos e propriedades termodinâmicas de sistemas quânticos (cap. 5).

1.3.8 Emaranhamento Testemunhado

O *emaranhamento testemunhado* foi proposto recentemente por F. Brandão, colaborador e co-autor de alguns dos resultados descritos nesta dissertação. O leitor interessado em se aprofundar nos detalhes desta maneira de quantificar emaranhamento é convidado a consultar as refs. [Bra05a, Bra05c].

O emaranhamento testemunhado do estado ρ , como o próprio nome sugere, utiliza-se da noção de testemunhas de emaranhamento (ver sec. 1.2.5). Para um estado ρ , seu emaranhamento testemunhado é dado por

$$E_W(\rho) = \max\{0, -\min_{W \in \mathcal{M}} \text{Tr}(W\rho)\}, \quad (1.78)$$

onde \mathcal{M} é um conjunto de testemunhas de emaranhamento que garanta que o processo de minimização seja bem definido.

Uma das vantagens de E_W é que este quantificador lida com diferentes aspectos do emaranhamento dependendo da escolha do conjunto \mathcal{M} . Sendo assim, além de poder quantificar emaranhamento multipartite (através da escolha de testemunhas que reconheçam apenas certos tipos de emaranhamento), foi mostrado que outros quantificadores conhecidos podem ser escritos como (1.78). Exemplos são a concorrência, a negatividade e as robustezas [Bra05a].

A conexão entre a robustez e E_W será de particular interesse nos próximos capítulos. Pode-se mostrar que $R_g^k(\rho)$ pode ser escrito como (1.78) com $\mathcal{M} = \{W^k \mid W^k \leq I\}$, onde W^k é uma testemunha de k -emaranhamento. Similarmente, para R_r^k temos $\mathcal{M} = \{W^k \mid \text{Tr}(W^k) = d\}$, onde d é a dimensão

do espaço de Hilbert total²⁰.

1.3.9 Unicidade da Entropia de Emaranhamento

Popescu e Rohrlich mostraram que, para sistemas puros bipartites, existe um único quantificador de emaranhamento que satisfaça todas as propriedades desejadas: a entropia de emaranhamento [PR97]. O argumento utilizado por eles usou apenas fatos termodinâmicos associados com resultados já conhecidos sobre a convertibilidade de estados emaranhados. Estes fatos, junto com a premissa básica de que não se pode aumentar o emaranhamento de um sistema manipulando-o apenas localmente, leva então à unicidade de E_E . Este resultado permitiu, além de outras coisas, uma aproximação da teoria do emaranhamento com a termodinâmica.

Apartir deste ponto, diversos autores buscaram conjuntos mínimos de axiomas que pudessem garantir que um dado quantificador fosse igual a E_E para estados puros bipartites [HHH00, DHR02, Vid00, VK02]. M. Horodecki, P. Horodecki e R. Horodecki estabeleceram resultados bastante apropriados nesta direção [HHH00]. Estes autores mostraram que qualquer monótono de emaranhamento $E(\rho)$ que seja parcialmente aditivo (ver sec. 1.3.1) e contínuo no regime assintótico, satisfaz:

$$E_D(\rho) \leq E(\rho) \leq E_F(\rho), \quad (1.79)$$

sendo $E_D(\rho)$ o emaranhamento destilável e $E_F(\rho)$ o emaranhamento de formação. Além disso, $E_F = E_D = E_E$ para estados puros, o que estabelece E_E como medida única de emaranhamento neste contexto.

Termina aqui a nossa revisão sobre os principais aspectos da teoria do emaranhamento. O que foi exposto até aqui compreende uma quantidade ínfima do que se conhece atualmente no tema. Entretanto julgamos o que foi descrito um ponto de partida adequado para que o leitor interessado possa buscar outros resultados por si só. Em seguida descreveremos alguns resultados originais alcançados por nós no sentido de obter uma compreensão melhor do emaranhamento.

²⁰A letra k em $R_g^k(\rho)$ e R_r^k indica a robustez em relação ao conjunto S_k .

Estados maximamente emaranhados são puros?

No capítulo anterior abordamos alguns aspectos gerais sobre o emaranhamento como maneiras de detectá-lo e quantificá-lo em sistemas físicos. Entretanto, até o presente momento, diversas questões ainda permanecem em aberto, incluindo questões fundamentais como a busca por propriedades físicas mensuráveis que indiquem, de alguma forma, a existência de correlações quânticas. No presente capítulo discutiremos uma destas questões: estados maximamente emaranhados são sempre puros? Apesar da resposta afirmativa a esta pergunta poder ser tratada quase como um senso comum¹ não havia até então, no conhecimento deste autor, qualquer prova formal para tal. A grande barreira a ser enfrentada aqui é o problema da quantificação do emaranhamento. Em primeiro lugar, para atacar esta questão é necessário escolher um quantificador específico. Sendo assim, qualquer conclusão deve ser vista guardadas certas proporções. Além do mais, não há um consenso sobre qual o quantificador mais adequado e, mais do que isso, acredita-se que não há uma medida única de emaranhamento² [MSV04].

Apesar das dificuldades existentes procuramos, no estudo aqui descrito, responder à pergunta-título de forma mais geral possível, procedendo como se segue. Mostramos condições necessárias e suficientes para a existência de estados mistos maximamente emaranhados (estados MME) de acordo com

¹Acreditamos que a existência deste “senso comum” se dá pelo fato de que os exemplos de estados maximamente emaranhados conhecidos, apesar de poucos, são todos puros.

²No capítulo anterior discutimos a unicidade da entropia de emaranhamento. Cabe ressaltar que este resultado é válido apenas para estados puros bipartites.

diversas medidas bem aceitas e utilizadas. Escolhemos um “bom quantificador de emaranhamento” multipartite³, a *Robustêz Generalizada* [VT99], e mostramos que, para ela, estados maximamente emaranhados são sempre puros. Sendo assim, propomos uma generalização da idéia de monogamia de emaranhamento [CKW00, KW04, Ter03], a *poligamia de emaranhamento*. Mostramos também contra-exemplos à nossa poligamia, ou seja, alguns monótonos de emaranhamento permitem a existência de estados MME. Finalizamos o capítulo dando uma interpretação geométrica das discussões anteriores e conjecturamos a possibilidade da inclusão da poligamia como um requisito à uma boa medida de emaranhamento.

Os resultados que compõe este capítulo foram realizados em colaboração com F.G.S.L. Brandão e M.O. Terra Cunha.

2.1 Condições para a existência de estados mistos maximamente emaranhados

Nesta secção nós estudamos a possibilidade de existência de estados mistos maximamente emaranhados (estados MME).

Antes de continuarmos, é importante ressaltar que a idéia de estados MME tratada aqui é um pouco diferente daquela tratada nas refs. [VABM01, WNG+03]. Lá, os autores se perguntam qual o emaranhamento máximo que um estado com um certo valor de mistura (ou entropia) pode ter. A pergunta na qual estamos interessados é: há algum estado misto que alcança o valor máximo de emaranhamento segundo uma dada medida $E(\rho)$? Os próximos resultados, bastante gerais e com provas bem simples, nos ajudarão a caminhar na direção de uma resposta.

Teorema 8 *De acordo com qualquer medida convexa de emaranhamento, existe pelo menos um estado **puro** maximamente emaranhado.*

Prova: Um operador densidade ρ pode ser escrito como uma mistura estatística (ou ensemble) de estados puros $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ (de forma não única se ρ é misto, mas isso não é central neste momento). Para uma medida convexa

³Crítérios formais para a determinação do que se pode chamar de um “bom quantificador” foram discutidos no capítulo 1.

E , convexidade implica

$$E(\rho) = E\left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right) \leq \sum_i p_i E(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|), \quad (2.1)$$

o que significa que o emaranhamento de ρ é no máximo igual a média ponderada dos emaranhamentos de seus constituintes. Então há um i tal que

$$E(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|) \geq E(\rho). \square$$

Corolário 1 *Para um estado misto ser maximamente emaranhado é necessário que todos os componentes $|\psi_i\rangle$ de qualquer ensemble descrevendo ρ sejam também maximamente emaranhados e, ainda assim, a desigualdade (2.1) seja saturada.*

O teorema 8 nos permite reescrever a pergunta-título deste capítulo como: estados maximamente emaranhados são **sempre** puros? O corolário 1 surge como uma condição, de certa forma, forte para a existência de estados MME. Exploreemos então este fato.

A descrição de um operador densidade ρ por misturas estatísticas não é única. Porém, em todas as descrições possíveis, o corolário 1 deve ser verdade. Vamos então explorar esta liberdade em ensembles.

Teorema 9 *Liberdade unitária em ensemble para matrizes densidade: Os conjuntos $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ e $\{q_j, |\phi_j\rangle\}$ geram a mesma matriz densidade se e só se*

$$\sqrt{p_i} |\psi_i\rangle = \sum_j u_{ij} \sqrt{q_j} |\phi_j\rangle$$

com $\{|\psi_i\rangle\}$ e $\{|\phi_j\rangle\}$ sendo vetores normalizados, u_{ij} elementos de uma matriz complexa unitária e podemos preencher de ‘zeros’ o menor dos conjuntos $\{\sqrt{p_i} |\psi_i\rangle\}$ ou $\{\sqrt{q_j} |\phi_j\rangle\}$ para que os dois fiquem com o mesmo número de elementos

A prova deste teorema pode ser encontrada em [NC00] e está além do escopo desta dissertação.

Assim, para $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ e $\{q_j, |\phi_j\rangle\}$ descreverem o mesmo estado físico, cada $|\psi_i\rangle$ é uma combinação linear dos $|\phi_j\rangle$,

$$|\psi_i\rangle = \sum_j c_{ij} |\phi_j\rangle, \quad (2.2)$$

com coeficientes $c_{ij} = u_{ij} \sqrt{\frac{q_j}{p_i}}$. Isto nos permite escrever uma condição mais forte.

Teorema 10 *Se ρ é um estado MME, então todos os estados no subespaço gerado pelos autovetores de ρ são maximamente emaranhados.*

Prova: A prova deste teorema segue dos teoremas 8 e 9 e do fato que podemos tomar $\{|\phi_j\rangle\}$ como os autovetores de ρ . \square

Uma forma bastante usual de estender um quantificador de emaranhamento de estados puros para o conjunto completo de estados (*i.e.*: puros e mistos) é através da construção chamada *convex roof*: dada uma medida $E(\psi)$ válida para estados puros, sua *convex roof* é dada por

$$E(\rho) = \min_{\{p_i, \psi_i\}} \sum p_i E(\psi_i). \quad (2.3)$$

Da equação (2.3) podemos ver que o teorema 10 fornece uma condição necessária e suficiente para a existência de estados-MME de acordo com quantificadores baseados em *convex roof*. É importante notar que algumas das mais consagradas medidas de emaranhamento utilizam esta construção, como é o caso do emaranhamento de formação [BDS+96c] (ver sec. 1.3.4).

2.2 Estados maximamente emaranhados são puros

Vimos anteriormente que, no contexto de estados puros bipartites, emaranhamento está intimamente ligado à “bagunça” local. Ou seja, quanto maior a entropia do estado reduzido, mais emaranhamento é compartilhado entre as duas partes. Além do mais, foi comentado que nesta situação a entropia de emaranhamento surge como o principal quantificador de emaranhamento. Seguindo este ponto de vista, é natural que o estado $|\psi\rangle = 1/\sqrt{d} \sum_{i=1}^d |ii\rangle$ (d é

a dimensão do menor subespaço) seja considerado um estado maximamente emaranhado. Note que este estado possui o número máximo de Schmidt possível (lembre-se da discussão sobre decomposição de Schmidt no Cap. 1).

Podemos mostrar a não-existência de um subespaço maximamente emaranhado de dimensão d , para $d \geq 2$, de uma forma simples, se nos restringirmos a medidas de emaranhamento bipartite tais que todos seus estados puros maximamente emaranhados tem número de Schmidt máximo. Note que assim violaríamos o teorema 10. Este é o caso da maioria dos quantificadores usualmente estudados, tais como o emaranhamento de formação (ver sec. 1.3.4), a negatividade (sec. 1.3.5) e a entropia relativa de emaranhamento (sec. 1.3.6). Enunciamos então o seguinte resultado:

Teorema 11 *De acordo com qualquer medida de emaranhamento bipartite tal que todos seus estados maximamente emaranhados tem número máximo de Schmidt, não existem estados mistos maximamente emaranhados.*

Prova. Esta prova se restringirá ao caso $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$, mas sua generalização é direta. De acordo com o teorema (10), deve existir um subespaço composto apenas por estados maximamente emaranhados para que estados MME existam. Por hipótese, todos eles possuem posto de Schmidt máximo. Sejam dois destes estados,

$$|\psi\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |ij\rangle, \quad |\phi\rangle = \sum_{ij} d_{ij} |ij\rangle. \quad (2.4)$$

Se olharmos para c_{ij} e d_{ij} como coeficientes de matrizes quadradas C e D , posto máximo de Schmidt equivale a invertibilidade da matriz. Entretanto, podemos sempre escolher α e $\beta \in \mathcal{C}$ tais que $\alpha C + \beta D$ não é uma matriz inversível (tome $\frac{-\alpha}{\beta}$ como um autovalor de $C^{-1}D$), sendo assim a combinação $\alpha|\psi\rangle + \beta|\phi\rangle$ não possui posto máximo de Schmidt. \square

Podemos ir um pouco além e estabelecer o seguinte resultado:

Teorema 12 *Para todo monótono de emaranhamento assintoticamente contínuo e parcialmente aditivo, todo estado maximamente emaranhado é puro.*

Prova. Do teorema da unicidade [HHH00, DHR02] (sec. 1.3.9), temos que toda medida de emaranhamento E que satisfaz as condições do presente teo-

rema satisfaz: $E_D \leq E \leq E_F$, onde E_D e E_F são o emaranhamento destilável e o emaranhamento de formação, respectivamente. Então, o resultado segue diretamente do fato que E_F não permite estados MME e $E_D = E_F$ para estados puros. \square

O emaranhamento testemunhado (E_W) usa a idéia de quantificar o emaranhamento através de operadores testemunha [Bra05a] (ver sec. 1.3.8). Aproveitando esta definição podemos analisar quais são as restrições impostas pela existência de um estado MME às suas testemunhas ótimas de emaranhamento.

Seja $\rho = \sum_j q_j |\phi_j\rangle \langle \phi_j|$ a decomposição espectral do estado ρ e $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ outro ensemble descrevendo-o. Pelo teorema 9,

$$|\psi_i\rangle = \sum_j c_{ij} |\phi_j\rangle, \quad (2.5)$$

com coeficientes $c_{ij} = u_{ij} \sqrt{\frac{q_j}{p_i}}$. No caso em que ρ é um estado maximamente emaranhado com emaranhamento E , W precisa ser ótimo para todo $|\psi_i\rangle$ e $|\phi_j\rangle$. Caso contrário o teorema 10 não é satisfeito. Isto nos permite escrever, para um elemento específico $|\psi_k\rangle$,

$$\begin{aligned} -E &= \text{Tr}(W |\psi_k\rangle \langle \psi_k|) \\ &= \sum_i |c_{ki}|^2 \langle \phi_i | W | \phi_i \rangle + \sum_{i \neq j} c_{ki}^* c_{kj} \langle \phi_i | W | \phi_j \rangle \\ &= -E + \sum_{i \neq j} c_{ki}^* c_{kj} \langle \phi_i | W | \phi_j \rangle, \end{aligned} \quad (2.6)$$

que implica

$$\sum_{i \neq j} c_{ki}^* c_{kj} \langle \phi_i | W | \phi_j \rangle = 0.$$

Como a última igualdade deve ser verdade para todo ensemble descrevendo ρ , $\langle \phi_i | W | \phi_j \rangle = 0$ e W é proporcional à matriz identidade no suporte de ρ , com $-E$ como constante de proporcionalidade. Note que E é o módulo do menor autovalor possível para qualquer testemunha W , pois é o maior valor de emaranhamento permitido. Podemos daí concluir que cada autovetor $|\phi_j\rangle$

de ρ é também um autovetor de W^4 , o que nos permite escrever W como

$$W = \underbrace{(-E)I}_{\text{Supp}(\rho)} \oplus \underbrace{D}_{\text{Supp}^\perp(\rho)}, \quad (2.7)$$

onde D é alguma matriz que satisfaz os vínculos impostos por \mathcal{M} (ver sec. 1.3.8).

Uma medida de emaranhamento multipartite importante é a robustez generalizada de emaranhamento [VT99], também definida no capítulo 1 (sec. 1.3.7). Foi mostrado em [Bra05a] que, com a escolha $\mathcal{M} = \{W \mid W \leq I\}$, R_g^k pode ser escrita da forma (1.78).

O próximo passo será mostrar que R_g^k não admite estados MME. Antes precisamos do seguinte resultado:

Lema 1 *Para todo estado $\rho \in D(H)$,*

$$\max_{\sigma \in S_k(H)} \text{Tr}(\rho\sigma) \geq \frac{\text{Tr}(\rho^2)}{1 + R_g^k(\rho)}. \quad (2.8)$$

Prova: Através da escolha de testemunhas de emaranhamento da forma específica $W = \lambda I - \rho$, podemos ver que o valor ótimo para o lado esquerdo da eq. (2.8) é dado por

$$\min \lambda \text{ t.q. } \lambda I - \rho \in \mathcal{W}_k. \quad (2.9)$$

Bastando, para tal, impor a condição $\text{Tr}(W\sigma) \geq 0$, válida para toda testemunha. Seja então $W = \lambda_{opt}I - \rho$ uma solução de (2.9). Desde que $W/\lambda_{opt} \leq I$, encontramos que $R_g^k(\rho) \geq \frac{\text{Tr}(\rho^2)}{\lambda} - 1$, do qual segue o resultado requerido. \square

Vamos agora ao nosso principal objetivo.

Teorema 13 *Não há, para qualquer k , estado misto maximamente emaranhado segundo a robustez generalizada de emaranhamento.*

Prova: Por contradição, seja ρ' um estado MME com respeito à robustez generalizada com decomposição espectral $\rho' = \sum_{i=1}^m \lambda_i |i\rangle \langle i|$. Através de

⁴Esta conclusão se dá pelo fato de que sempre que um elemento diagonal de matriz alcança seu valor extremo, este é um autovalor.

(1.78) pode-se ver que $\rho = \lambda |1\rangle \langle 1| + (1 - \lambda) |2\rangle \langle 2|$ é também maximamente emaranhado para todo $\lambda \in [0, 1]$. Nos restringiremos então, sem perda de generalidade, a estados de posto 2. Para R_g^k , a matriz D de (2.7) deve satisfazer $D \leq I$. Assim, como para toda testemunha $W = (-E)I \oplus D$, com $D \leq I$,

$$W' = \underbrace{(-E)I}_{\text{Supp}(\rho)} \oplus \underbrace{I}_{\text{Supp}^\perp(\rho)} \quad (2.10)$$

é outra testemunha tão ótima quanto W para ρ , assumiremos para W esta forma. Seja $P = |1\rangle \langle 1| + |2\rangle \langle 2|$ o projetor no subespaço do suporte de ρ , $W = I - (1 + E)P$. Do lema 1 encontramos que⁵, para algum $\sigma \in S_k(H)$,

$$\text{Tr}(P\sigma) \geq \frac{\text{Tr}(P^2)}{1 + R_g^k(P)} = \frac{2}{1 + 2E}. \quad (2.11)$$

Sendo assim,

$$\text{Tr}(W\sigma) = 1 - (1 + E)\text{Tr}(\sigma P) \leq 1 - \frac{2(1 + E)}{1 + 2E} < 0, \quad (2.12)$$

o que contradiz o fato de W ser uma testemunha de emaranhamento. \square

2.3 Estados maximamente emaranhados *não* são puros

Obtivemos que estados maximamente emaranhados são sempre puros baseando-nos em um monótono de emaranhamento específico, R_g^k , bem como para outras medidas no contexto bipartite). Pode-se então questionar se esta propriedade ocorre para todos os monótonos. De fato a resposta é não, e para mostrar isto apresentaremos dois exemplos para os quais estados MME são permitidos.

A *medida indicadora*⁶ [VP98], $IM(\rho)$, é definida como 1 para todos os estados emaranhados e 0 para os separáveis. É assim óbvio que todo estado emaranhado misto é maximamente emaranhado para IM . Precisamos, entretanto, ressaltar a estranheza e a falta de utilidade desta medida como

⁵O lema 1 foi desenvolvido para $\rho \in D(H)$. Entretanto, o resultado também é válido para estados não normalizados, como é o caso de P .

⁶ IM do inglês *indicator measure*.

um quantificador de emaranhamento: se trata de uma função descontínua, que só distingue entre emaranhado ou não-emaranhado, portanto incapaz de revelar o quão emaranhado é um estado.

A *melhor aproximação separável*⁷, $BSA(\rho)$, é definida por [KL01]:

$$BSA^k(\rho) = \min \lambda, \text{ t.q. } \rho = (1 - \lambda)\sigma + \lambda\pi, \quad (2.13)$$

com $\sigma \in S_k(H)$, $\pi \in D(H)$ e $\lambda \in [0, 1]$. Esta medida pode ser escrita alternativamente na forma (1.78) com $\mathcal{M} = \{W \mid W \geq -I\}$ [Bra05a]. Para a família de estado mistos

$$\rho_q = q|W\rangle\langle W| + (1 - q)|GHZ\rangle\langle GHZ|, \quad (2.14)$$

$BSA(\rho_q)$ foi calculado na ref. [Bra05a], usando o método numérico apresentado em [BV04], e mostrado ser composto apenas de estados maximamente emaranhados. Note, entretanto que, apesar de $BSA(\rho)$ ser um monótono de emaranhamento [KL01], esta é uma medida um tanto quanto estranha, uma vez que de acordo com ela todo estado emaranhado puro é também maximamente emaranhado.

Podemos observar uma transição suave do regime onde só há estados maximamente emaranhados puros para aquele regime onde estados-MME são permitidos através da família de monótonos de emaranhamento $E_{m:n}$ proposta em [Bra05a]. Para m e n fixos, $E_{m:n}$ é dado por (1.78), com $\mathcal{M} = \{W \mid -mI \leq W \leq nI\}$. Esta família situa-se entre os quantificadores BSA e R^k e é mostrada na figura 2.1 para os estados (2.14).

2.4 Emaranhamento distribuído e a monogamia de emaranhamento

Uma das diferenças mais marcantes entre as correlações clássica e quântica é o fato de que emaranhamento não pode ser compartilhado irrestritamente. Estudos sobre como estados quânticos podem compartilhar emaranhamento foram realizados por Koffman, Kundu e Wootters para 3 qubits na referência [CKW00]. Estes autores mostraram, ao usar uma generalização da concorência como medida de emaranhamento, que a quantidade de

⁷ BSA do inglês *best separable approximation*.

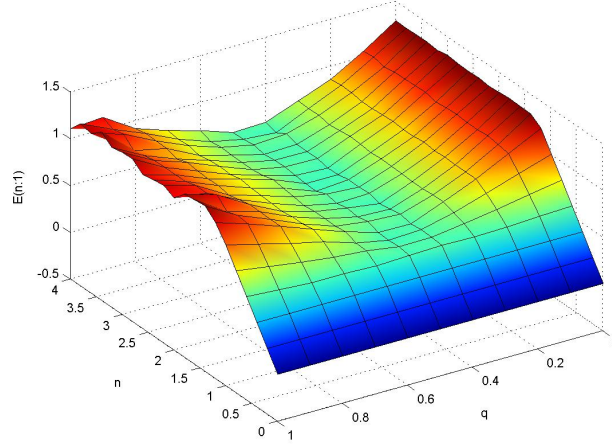


Figura 2.1: $E_{n:1}^1(\rho_q)$ para $0 \leq n \leq 4$ e $0 \leq q \leq 1$. Quando $n \ll 1$, $E_{n:1}^1 = nBSA$ e estados MME são possíveis. No outro limite, $E_{n:1}^1 = R_g$ [Bra05a], e todo estado maximamente emaranhado é um estado puro. A figura foi retirada de [CBT05].

emaranhamento existente entre dois qubits, inibe o emaranhamento que estes podem ter com um terceiro qubit.

A partir da definição da concorrência ($C(\rho)$), apresentada na secção 1.3.4, pode-se notar que seu quadrado pode também ser tratado como uma medida de emaranhamento tão razoável quanto a própria concorrência. Sendo assim, dá-se o nome *tangle* à medida definida por

$$\tau_{AB} = C^2(\rho_{AB}) = \max[0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4]^2, \quad (2.15)$$

onde λ_i são definidos exatamente como na sec. 1.3.4. Daí vê-se que o emaranhamento de formação pode ser escrito como

$$E_f = H_2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \tau}\right).$$

O *tangle* é, assim como $C(\rho)$, igual a 0 para estados separáveis e vale 1 para um estado completamente emaranhado.

Podemos agora expressar matematicamente o resultado de Coffman, Kundu

e Wootters, conhecido como desigualdade CKW:

$$\tau_{AB} + \tau_{AC} \leq \tau_{A(BC)}. \quad (2.16)$$

Este resultado pode ser interpretado da seguinte forma. O qubit A compartilha uma certa quantidade de emaranhamento com o par BC , dado por $\tau_{A(BC)}$ ⁸. Esta quantidade limita o emaranhamento individual que A compartilha com os qubits B e C . Mais que isso, os autores mostram que, para quaisquer valores dos *tangles* satisfazendo (2.16), existe um estado quântico consistente com estes valores. Portanto, a desigualdade CKW expressa um limite no emaranhamento entre A e B devido ao emaranhamento entre A e C .

Um caso extremo da desigualdade (2.16) é quando os qubits A e B estão num estado maximamente emaranhado. Nesta situação, $\tau_{AB} = 1$, $\tau_{AC} = 0$ e conseqüentemente $\tau_{A(BC)} = 1$, saturando a desigualdade. Vemos então que, quando A e B atingem seu emaranhamento máximo, não compartilham qualquer correlação quântica com o sistema C . Este resultado ficou conhecido como *monogamia de emaranhamento* [Ter03]. Tal fenômeno não é tão surpreendente, pois, como se sabe, os estados maximamente emaranhados de 2 qubits são nada mais que os estados de Bell (e seus equivalentes por unitárias locais), que, sendo todos puros, não permitem qualquer correlação com um terceiro sistema. Para ver isto basta constatar o seguinte resultado:

Teorema 14 *Considere um sistema bipartite $S - R$. Se S é descrito por um estado puro, então não compartilha qualquer correlação com R .*

Prova: Por contradição, se houvesse qualquer correlação ρ_S seria escrito como uma combinação convexa não trivial. Entretanto estado puros só podem ser escritos como $\rho_S = |\psi\rangle\langle\psi|$. \square

Apenas recentemente resultados estendendo a desigualdade CKW para sistemas de N qubits foram propostos [YS05, OV05]. A desigualdade CKW

⁸A priori, $\tau_{A(BC)}$ só estaria bem definido no caso de ABC estar num estado puro $|\xi\rangle$, uma vez que, nesta situação apenas 2 dimensões do espaço de estados de BC são necessários para descrever $|\xi\rangle$ (vê-se isso pela decomposição de Schmidt). Entretanto os autores também generalizam a desigualdade (2.16) para estados mistos através da *convex roof*.

generalizada foi então expressa como

$$\tau_{12} + \tau_{13} + \dots + \tau_{1N} \leq \tau_{1:23\dots N}, \quad (2.17)$$

onde $\tau_{1:23\dots N}$ representa o emaranhamento referente à bipartição $1|23\dots N$.

A desigualdade despertou bastante interesse na comunidade de informação quântica, não só por se tratar de um tema sem análogo clássico, mas também por estar relacionada com a segurança de certos protocolos criptográficos (há um limite na quantidade de correlação que um espião pode ter com as partes honestas). Foi mostrado também que a quantidade de emaranhamento em um sistema inibe, não só o emaranhamento deste com outros sistemas, mas também correlações clássicas entre eles [KW04]. O leitor interessado em mais detalhes acerca do compartilhamento de emaranhamento em sistemas mais gerais é convidado a consultar as referências [KBI00, DW01, Bru99].

2.4.1 Poligamia de Emaranhamento

O resultado descrito na secção 2.2 leva a uma generalização da idéia de monogamia de emaranhamento, válida não só para dimensão e número de subsistemas arbitrários, mas também para os diversos tipos de emaranhamento. Atribuímos então o termo *poligamia de emaranhamento* ao fato de que estados maximamente emaranhados não compartilham correlação, seja ela clássica ou quântica, com qualquer outro sistema.

Acreditamos que o teorema 13 seja a primeira prova formal, que utiliza um bom critério para quantificar emaranhamento, da pureza de estados maximamente emaranhados independentemente do tipo de emaranhamento em questão. Este resultado, junto com as evidências para o emaranhamento bipartido, o fato do teorema 9 impor condições duras ao espaço de estados e a estranheza dos contra-exemplos nos permite supor que a poligamia de emaranhamento seja mais do que uma característica corriqueira apresentada por algumas medidas. Assim sendo, finalizamos esta secção conjecturando que a poligamia de emaranhamento pode ser posta como um requisito adicional à uma boa medida de emaranhamento.

2.5 Uma visão geométrica

O resultado apresentado no teorema 13 pode ser interpretado geometricamente. De fato, a robustez generalizada pode ser vista como uma medida de “distância” entre o estado ρ e o conjunto dos estados k -separáveis S_k , ao misturarmos os estado π a ρ .

O que o teorema 13 nos diz é que combinações convexas de dois ou mais estados maximamente emaranhados não podem se manter à mesma distância de S_k . As figuras 2.2 e 2.3 nos ajudam a visualizar esta idéia.

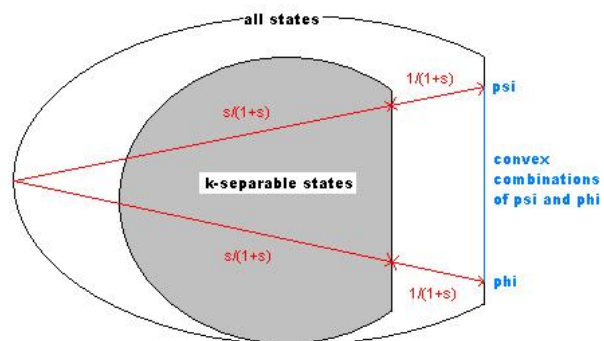


Figura 2.2: Geometria impossível: estados mistos maximamente emaranhados são possíveis: combinações convexas de ψ e ϕ ficam à mesma distância de S_k .

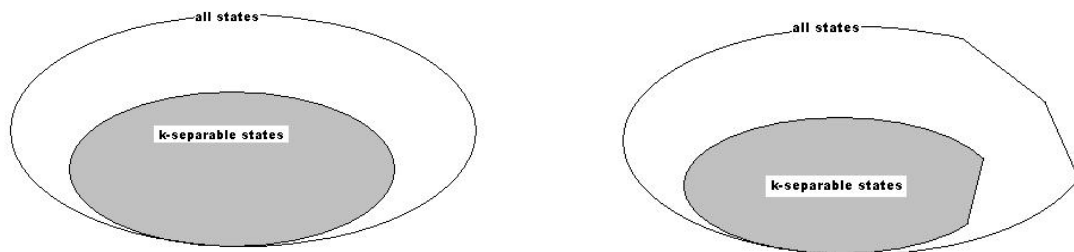


Figura 2.3: Geometrias possíveis: todos os estados maximamente emaranhados são puros.

Tomografia e emaranhamento

Uma forma útil na descrição de estados quânticos de n qubits é através de seus coeficientes tomográficos. Esta descrição permite uma visualização fácil do processo de medição que precisa ser efetuado para que o estado em questão seja determinado. Podemos assim obter informação sobre as correlações entre as partes que compõe o estado global. Este procedimento mostra-se então uma ferramenta útil na caracterização do emaranhamento e na classificação dos estados quânticos.

Neste capítulo desenvolveremos a idéia de caracterizar os estados quânticos de n qubits através de medições tomográficas. Mostraremos que, surpreendentemente, para estados puros de 3 qubits não é necessária a realização de medições em coincidência do trio. Podemos então caracterizar estes sistemas apenas através de medições par-a-par. O processo a ser descrito utiliza-se da generalização da representação de Bloch para sistemas de 2 níveis (qubits). Sendo assim, é válido para sistemas compostos de n sub-sistemas de 2 níveis, ou seja, estados quânticos descritos num espaço de estados da forma $D(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2)$.

O resultado descrito na subsecção 3.2.1 foi desenvolvido em colaboração com Leandro Cioletti e M.O. Terra Cunha.

3.1 1 qubit - Representação de Bloch

Uma forma natural de expandir matrizes 2×2 é através da base constituída pela matriz identidade,

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

mais as 3 matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

As matrizes de Pauli possuem características particulares como:

$$\text{Tr} \sigma_j = 0 \quad (3.2)$$

e

$$\sigma_j \sigma_k = i \sum_l \epsilon_{jkl} \sigma_l + \delta_{jk} I. \quad (3.3)$$

Em especial vamos descrever as matrizes densidade de 2 qubits nesta base:

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 b_\mu \sigma_\mu = \frac{1}{2} (b_0 I + \vec{b} \cdot \vec{\sigma}), \quad (3.4)$$

O vetor real $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ é o vetor de Bloch. Utilizando as expressões (3.2) e (3.3) pode-se mostrar que os coeficientes b_μ podem ser determinados da seguinte maneira:

$$b_\mu = \text{Tr}(\sigma_\mu \rho) = \langle \sigma_\mu \rangle. \quad (3.5)$$

Como $\text{Tr}(\rho) = 1$ (normalização) e as matrizes de Pauli têm traço nulo, $b_0 = 1$. Podemos então determinar os coeficientes b_1, b_2 e b_3 através dos valores esperados dos próprios operadores de Pauli. A representação de Bloch para estados de 2 níveis fornece um processo tomográfico para a determinação desta classe de estados: através de 3 valores esperados determina-se o estado em questão.

A representação (3.4) permite também uma visão geométrica bastante simples e útil dos estados de 1 qubit. Podemos especificar qualquer estado

$\rho \in D(\mathbb{C}^2)$ especificando o vetor de Bloch $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Como os estados quânticos são normalizados, estes vetores podem ser visualizados em uma esfera unitária tridimensional, a esfera de Bloch.

3.2 N qubits

Podemos utilizar a mesma estratégia descrita na secção anterior para determinar o estado quântico de um sistema composto por n qubits. Um base para expandir matrizes $2^n \times 2^n$ é o conjunto gerado pelos produtos tensoriais das matrizes de Pauli:

$$S_{\underbrace{\gamma\mu\dots\nu}_n} \equiv \underbrace{\sigma_\gamma \otimes \sigma_\mu \otimes \dots \otimes \sigma_\nu}_n. \quad (3.6)$$

Assim como antes, podemos escrever o estado $\rho \in D(\mathbb{C}^{2^{\otimes n}})$ como:

$$\rho = \left(\frac{1}{2}\right)^n b_{\mu\nu\dots\gamma} S_{\mu\nu\dots\gamma}, \quad (3.7)$$

onde, de agora em diante, adotamos a convenção de soma em índices repetidos (índices latinos de 1 a 3, índices gregos de 0 a 4). Novamente os coeficientes tomográficos são determinados por:

$$b_{\mu\nu\dots\gamma} = \langle \sigma_\gamma \otimes \sigma_\mu \otimes \dots \otimes \sigma_\nu \rangle = \text{Tr}(S_{\mu\nu\dots\gamma}\rho). \quad (3.8)$$

Essa expressão mostra que, *a priori*, precisamos de medições em coincidência utilizando simultaneamente todos os qubits para determinarmos o estado global do sistema. Veremos agora que este não é sempre o caso.

3.2.1 Caracterização tomográfica de estados puros de três qubits através de seus estados reduzidos

N. Linden, S. Popescu e W. Wootters mostraram que, em um estado puro genérico de 3 qubits, não há mais informação no estado global do que aquela já contida nos estados reduzidos de pares [LPW02]. A palavra “genérico” refere-se ao fato de que há exceções à regra, que como veremos, corresponde à classe dos estados GHZ [GHZ93, GHSZ90, Mer90a, Mer90b]. Como veremos mais adiante, o resultado descrito por Linden, Popescu e Wootters permite a um físico experimental obter genericamente o estado do trio com apenas

dois detectores.

Antes de desenvolver o caso de 3 qubits vamos analisar como a informação é distribuída em um estado puro de 2 qubits. Sabemos que para estados puros bipartidos uma boa ferramenta na sua descrição é a decomposição de Schmidt, discutida na secção 1.2.1. Iremos, neste momento, expressar a decomposição de Schmidt um pouco diferente da forma como foi escrita no capítulo 1. Isso deve-se ao fato de estarmos interessados exatamente em evidenciar os parâmetros envolvidos num estado puro bipartite. Dado um estado puro $|\psi\rangle \in \mathbf{V} \otimes \mathbf{W}$ podem-se escolher bases ortonormais $\{|v_i\rangle\}$ para \mathbf{V} , e $\{|w_j\rangle\}$ para \mathbf{W} de forma a escrever $|\psi\rangle = \sum_{k=1}^d \lambda_k |v_k\rangle \otimes |w_k\rangle$, onde $d = \min(\dim \mathbf{V}, \dim \mathbf{W})$. No caso de 2 qubits, \mathbf{V} e \mathbf{W} tem dimensão 2 e o vetor de estado pode ser escrito como¹

$$|\psi(\theta, \varphi)\rangle = \cos \theta |v_1\rangle \otimes |w_1\rangle + e^{i\varphi} \sin \theta |v_2\rangle \otimes |w_2\rangle, \quad (3.9)$$

com $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$. Escrevendo a matriz densidade na base $\{|v_i\rangle \otimes |w_j\rangle\}$ temos

$$\rho = |\psi\rangle \langle \psi| = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & 0 & 0 & e^{-i\varphi} \cos \theta \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{i\varphi} \cos \theta \sin \theta & 0 & 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Seus estados locais, obtidos pelo traço parcial, são dados por:

$$\rho_a = \rho_b = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Desta expressão fica claro que a fase relativa $e^{i\varphi}$ é localmente inacessível. Em outras palavras, para um ângulo θ fixo todas as matrizes densidade reduzidas são iguais. Assim, **há mais informação no estado global dos 2 qubits do que aquela contida em suas partes** (representadas pelos estados reduzidos).

Suponha agora que um físico experimental gostaria de realizar medições

¹Costuma-se incluir a fase $e^{i\varphi}$ na definição dos vetores da base, entretanto estamos interessados justamente na sua indeterminância através dos estados locais, o que justifica esta decomposição de Schmidt não usual.

tomográficas em estados puros de 3 qubits mas só possui 2 detectores. De acordo com a referência [LPW02] ele sabe que é possível realizar tais medições. Mas como? Que medições devem ser realizadas? Mostraremos a seguir um procedimento prático para responder a estas questões onde ficará clara a importância do experimental se encontrar em posse de estados puros.

Primeiramente vamos rever o argumento de Linden, Popescu e Wootters. Considere um estado puro arbitrário $|\nu\rangle = \sum_{ijk} \nu_{ijk} |ijk\rangle$ de 3 qubits A , B , e C . Um estado geral (puro ou misto) que possui os mesmos estados reduzidos de $|\nu\rangle$ pode ser obtido através de um estado puro $|\Psi\rangle$, descrevendo 3 qubits mais um “ambiente” E [NC00](este processo é chamado uma *purificação*, e sua existência pode ser mostrada através da decomposição de Schimidt). O fato de $|\Psi\rangle$ ter os mesmos estado reduzidos que $|\nu\rangle$ quando restrito a cada subespaço de 2 qubits impõe restrições a sua forma. É mostrado então que, para um estado genérico $|\nu\rangle$, estas restrições fazem com que $|\Psi\rangle$ seja escrito como $|\Psi\rangle = \sum_{ijk} \nu_{ijk} |ijk\rangle \otimes |E\rangle$, onde o “ambiente” é fatorado, logo é puro, e os 3 qubits são necessariamente descritos por $|\nu\rangle$. Este argumento, que permitiu Linden e Wootters generalizarem seu resultado para N qubits [LW02], é, porém, um tanto quanto abstrato e não fornece nenhuma dica para o experimental caracterizar completamente seus 3 qubits.

Mostraremos agora que, descrevendo os 3 qubits em questão através da representação por coeficientes tomográficos, eq.(3.7), é possível mostrar um processo tomográfico para caracterizar completamente os estados puros através de medições par-a-par.

De acordo com (3.7), o estado geral de três qubits pode ser escrito como:

$$\rho = \left(\frac{1}{2}\right)^3 a_{\gamma\mu\nu} S_{\gamma\mu\nu}, \quad (3.12)$$

com

$$S_{\gamma\mu\nu} = \sigma_\gamma \otimes \sigma_\mu \otimes \sigma_\nu \quad (3.13)$$

(onde a convenção de soma sobre índices repetidos deve ser lembrada). Os coeficientes $a_{\gamma\mu\nu}$ podem ser obtidos tomograficamente através da relação

$$a_{\gamma\mu\nu} = \text{Tr} \{ \rho S_{\gamma\mu\nu} \}. \quad (3.14)$$

Podemos ver da eq. (3.14) que $a_{000} = 1$.

Como as matrizes de Pauli tem traço nulo, os operadores reduzidos são dados por

$$\rho_{BC} = \text{Tr}_A(\rho_{ABC}) = \frac{1}{4}a_{0\mu\nu}S_{\mu\nu}, \quad (3.15a)$$

$$\rho_{AC} = \text{Tr}_B(\rho_{ABC}) = \frac{1}{4}a_{\gamma 0\nu}S_{\gamma\nu}, \quad (3.15b)$$

$$\rho_{AB} = \text{Tr}_C(\rho_{ABC}) = \frac{1}{4}a_{\gamma\mu 0}S_{\gamma\mu}, \quad (3.15c)$$

onde $S_{\mu\nu} \equiv \sigma_\mu \otimes \sigma_\nu$.

Para determinar qualquer estado ρ através de (3.12) seria necessário efetuar medições de 63 valores médios. Nove destes (3×3) são as 3 componentes dos vetores de Bloch de cada qubit (a_{i00} , a_{0j0} , a_{00k}), podendo assim serem determinados através de detecções locais (ou individuais). Vinte e sete (3×9) podem ser obtidos através de medidas em coincidência de 2 qubits, pois refletem as correlações entre os pares de partículas (a_{ij0} , a_{i0k} , a_{0jk}). Os outros 27 coeficientes (a_{ijk}) devem ser, *a priori*, obtidos através de medições em coincidência nos 3 qubits. Entretanto, se nos ativermos apenas a estados puros, podemos utilizar a equação de idempotência

$$\rho = \rho^2 \quad (3.16)$$

como uma equação de vínculo, o que reduz o número de coeficientes a serem medidos. Sendo assim, mostraremos como a eq.(3.16) nos permite escrever os coeficientes a_{ijk} a partir daqueles já obtidos através dos estados reduzidos de pares.

Da expressão (3.16) obtemos um sistema de 64 equações que podem ser organizadas em quatro conjuntos. O primeiro deles com apenas uma equação:

$$\sum_{ijk} (a_{i00}^2 + a_{0j0}^2 + a_{00k}^2 + a_{ij0}^2 + a_{i0k}^2 + a_{0jk}^2 + a_{ijk}^2) = 7. \quad (3.17a)$$

O segundo, dado por

$$3a_{i00} = a_{ij0}a_{0j0} + a_{i0k}a_{00k} + a_{ijk}a_{0jk}, \quad (3.17b)$$

e equações similares ao se permutarem os índices. O terceiro conjunto,

$$3a_{ij0} = a_{i00}a_{0j0} + a_{00k}a_{ijk} + a_{0jk}a_{i0k} - \frac{1}{2}\epsilon_{ilt}\epsilon_{jmu}a_{lm0}a_{tu0} - \frac{1}{2}\epsilon_{ilt}\epsilon_{jmu}a_{tuk}a_{lmk}, \quad (3.17c)$$

também com seus análogos em relação às permutações, e onde foi utilizado o tensor antisimétrico ϵ_{ijk} . E, finalmente, o último deles:

$$3a_{ijk} = a_{i00}a_{0jk} + a_{0j0}a_{i0k} + a_{00k}a_{ij0} - \epsilon_{ilt}\epsilon_{jmu}a_{tu0}a_{lmk} - \epsilon_{jmu}\epsilon_{knv}a_{0uv}a_{imn} - \epsilon_{ilt}\epsilon_{knv}a_{t0v}a_{ljn}. \quad (3.17d)$$

O processo tomográfico é então descrito pelos 36 valores médios obtidos através das medidas individuais e em pares do 3 qubits, mais o sistema de 64 equações (3.17), que precisam ser resolvidas para a_{ijk} . O resultado de Linden, Popescu e Wootters garante genericamente a solução deste sistema.

Fomos um pouco além e verificamos numericamente se seria possível obter os coeficientes a_{ijk} através, apenas, do quarto grupo de equações (3.17d). A vantagem deste grupo é o fato de possuir apenas equações lineares e conter o número exato de equações necessário para determinarmos as incógnitas requeridas. Efetuamos mais de uma centena de testes do sistema (3.17d) para estados escolhidos aleatoriamente. Para todos os testes o sistema foi considerado solúvel. Acreditamos que uma solução não numérica do sistema (3.17d) seja possível ². Sendo assim, este estudo poderia ser visto como um rota alternativa para o resultado de Linden, Popescu e Wootters.

E as excessões descritas anteriormente? Devemos frisar que para os estados do tipo GHZ,

$$|GHZ(\theta, \varphi)\rangle = \cos \theta |000\rangle + e^{i\varphi} \sin \theta |111\rangle, \quad (3.18)$$

com $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, a fase relativa $e^{i\varphi}$ é inacessível aos estados reduzidos de pares. Isto pode ser visto exatamente como no caso de 2 qubits (expressão (3.9)): trata-se de uma fase relativa entre estados triortogonais, ausente em qualquer matriz densidade reduzida de pares.

Podemos mostrar, através de uma contagem de parâmetros, quão rara é

²A dificuldade de tal solução provém do fato de que estamos tratando de um resultado genérico, ou seja, há excessões.

a família GHZ. Um vetor em $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ é descrito através de 8 números complexos (*i.e.*: 16 números reais). Como os estados quânticos são normalizados e definidos a menos de fase global, o número de parâmetros reais necessários para descrever este vetor passa para 14. Transformações unitárias locais nos estados de 3 qubits são dadas pela ação de operadores do grupo $SU(2) \otimes SU(2) \otimes SU(2)$, parametrizados por 9 números reais. Sendo assim, os estados de 3 qubits equivalentes por operações unitárias locais representam um variedade de dimensão 5 ($14 - 9$). Entretanto, a família GHZ é descrita, a menos de operações unitárias locais, a um parâmetro, θ . Logo, os estados tipo GHZ formam um subconjunto de 1 dimensão dentro de um conjunto de dimensão 5. Estados deste tipo podem ser vistos, então, como um conjunto de medida nula.

Finalizamos este estudo propondo outra questão referente à tomografia de 3 qubits. Há outro processo tomográfico, restrito a medidas em coincidência de pares, capaz de determinar o estado global com menos medições sem introduzir novas excessões? L. Diósi propôs um método capaz de determinar genericamente o estado do trio com medições em coincidência utilizando apenas 2 do trio de qubits [Dio04]. Porém este resultado introduz novas excessões. Por exemplo, se efetuarmos medições nos qubits ρ_{AB} e ρ_{BC} mas o estado em questão for $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|000\rangle + |010\rangle + e^{i\varphi}|111\rangle)$, será impossível determinar a fase φ . Esta fase está acessível apenas no par ρ_{AC} .

Emaranhamento de partículas idênticas

No final de 2004 iniciou-se uma colaboração com o Grupo de Informação Quântica da Univ. de Leeds (UK), através de seu coordenador, prof. Vlatko Vedral, com o objetivo de se estudar o emaranhamento em sistemas mesoscópicos. Como um primeiro resultado estudamos o emaranhamento em um gás de elétrons devido exclusivamente ao caráter fermiônico destas partículas. Sendo assim, determinamos a distância para os quais dois elétrons do gás não mais estarão quanticamente correlacionados. Além disso justificamos este limite através do processo de medição que é feito nestes elétrons. Pensamos que este resultado possa ser aplicado a outros sistemas físicos de interesse gerando, assim, pesquisas futuras. Neste capítulo descreveremos estes resultados afim de esclarecer qual o papel do aparato de medida no emaranhamento de partículas idênticas. Além disso, discutimos a idéia de uma transição suave entre uma estatística quântica e uma estatística clássica, obedecidas por estas partículas. Os resultados originais descritos aqui se encontram na ref.[CST+05].

4.1 Gás de elétrons livres

Em seu livro “Quantum Theory: concepts and methods”[Per95a], A. Peres questiona se, na descrição de uma partícula quântica, precisamos levar em consideração a existência de outras partículas do mesmo tipo situadas muito distantes da primeira. Talvez esta questão seja melhor compreendida da seguinte forma: O resultado de possíveis medições efetuadas em uma partícula são alterados pela existência de outra partícula idêntica distante?

Nas palavras do próprio autor, “ (...)it is hardly conceivable that observable properties of the particles in our laboratory are affected by the possible existence on the Moon of another particle of the same species(...)” (p.137). Esta idéia parece ser compartilhada entre a comunidade de físicos, de um modo geral. Entretanto, só recentemente resultados formais tem dado uma base sólida para este, até então, “senso comum”.

4.1.1 Detecção perfeita

Um passo importante para o entendimento de correlações em partículas idênticas foi dado por V. Vedral ao estudar um gás de elétrons livres à temperatura zero [Ved03]. Neste trabalho o autor determina o emaranhamento de spin entre 2 elétrons, devido exclusivamente ao caráter fermiônico destas partículas, em função da distância relativa entre elas. Para tal, a matriz densidade de spin de 2 férmions, é definida através da função de correlação de segunda ordem

$$\rho_{ss',tt'} = \langle \Phi_0 | \Psi_{t'}^\dagger(r') \Psi_t^\dagger(r) \Psi_s'(r') \Psi_s(r) | \Phi_0 \rangle, \quad (4.1)$$

que corresponde a medir (perfeitamente, de forma não-destrutiva) estes 2 férmions nas posições r e r' , respectivamente. Note que ρ não está normalizado, o que pode ser feito *a posteriori*.

O estado inicial considerado, $|\phi_0\rangle$, provém do modelo de Fermi para um metal,

$$|\phi_0\rangle = \prod_{s,p} b_s^\dagger(p) |0\rangle. \quad (4.2)$$

O operador $b_s^\dagger(p)$ cria, a partir do vácuo, uma partícula com spin s e momentum p . Sendo assim não há correlação entre os momenta dos elétrons no gás. O operador de detecção em posição r e spin s é dado por

$$\Psi_s^\dagger(r) = \int_0^{p_f} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-ipr} b_s^\dagger(p), \quad (4.3)$$

onde p_f é o momentum de Fermi.

O fato destas partículas serem férmions é refletido na relação de anti-comutação entre os operadores de criação e aniquilação : $[b_s^\dagger(p), b_{s'}(q)]_+ = \delta_{ss'} \delta(p - q)$. Com isto, e levando as equações (4.2) e (4.3) na relação (4.1),

encontra-se,

$$\rho_{ss',tt'} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{d^3q'}{(2\pi)^3} e^{-i(p-p')r} e^{-i(q-q')r'} \times \langle \psi_0 | b_{t'}^\dagger(p) b_t^\dagger(q) b_{s'}(p') b_s(q') | \psi_0 \rangle. \quad (4.4)$$

Calculando o “sanduíche” dos operadores de campo

$$\begin{aligned} \langle \psi_0 | b_{t'}^\dagger(p) b_t^\dagger(q) b_{s'}^\dagger(q') b_s^\dagger(p') | \psi_0 \rangle &= (2\pi)^6 \delta_{st} \delta_{s't'} \delta(p-q) \delta(p'-q') \\ &- (2\pi)^6 \delta_{s't} \delta_{st'} \delta(p'-q) \delta(p'-q), \end{aligned} \quad (4.5)$$

nos permite escrever os elementos de matriz como

$$\rho_{ss',tt'} \propto (\delta_{st} \delta_{s't'} - \delta_{s't} \delta_{st'} f^2(r-r')), \quad (4.6)$$

onde

$$f(r-r') = \int_0^{p_f} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip(r-r')} = \frac{3j_1(k_f|r-r'|)}{k_f|r-r'|} \quad (4.7)$$

e $j_1(k_f|r-r'|)$ é a função esférica de Bessel com $k_f = p_f/\hbar$. Sendo assim, a matriz densidade de spin de 2 elétrons (já normalizada) é dada por

$$\rho = \frac{1}{4-2f^2} \begin{pmatrix} 1-f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -f^2 & 0 \\ 0 & -f^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-f^2 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Para decidir se esta matriz corresponde a um estado emaranhado pode-se aplicar o critério de Peres-Horodecki [?, ?] (já descrito no capítulo 1), que, neste caso, mostra-se necessário e suficiente [?]. Efetuamos a transposição parcial em ρ e calculamos seus auto-valores. ρ^{TA} possui o auto-valor $\frac{1}{4-2f^2}$ triplamente degenerado, e o autovalor $\frac{1-2f^2}{4-2f^2}$. Este último é negativo caso $f^2 > \frac{1}{2}$. Sendo assim, ρ apresenta emaranhamento quando a distância relativa entre os elétrons estiver no intervalo $0 \leq |r-r'| < r_e$, onde r_e é o que foi chamado de “distância de emaranhamento”, e corresponde ao valor de $|r-r'|$ tal que $f^2 = 1/2$.

Podemos calcular o emaranhamento de ρ através da *negatividade* $\mathcal{N}(\rho)$ [VW02], que corresponde a duas vezes o valor absoluto de $1-f^2$ enquanto

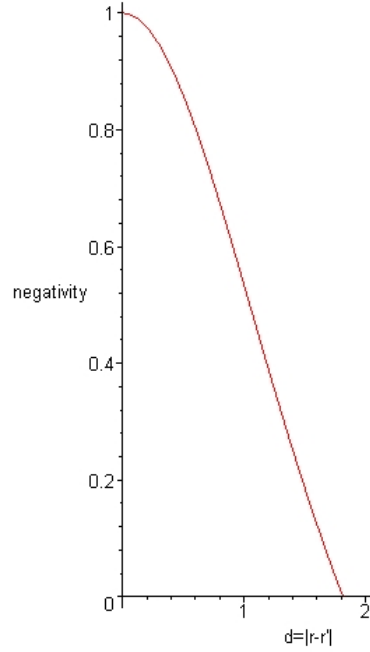


Figura 4.1: Negatividade vs. distância relativa entre 2 elétrons do gás degenerado. ($k_f = 1$)

este for negativo:

$$\mathcal{N}(\rho) = 2\mu\left(\frac{1 - 2f^2}{4 - 2f^2}\right), \quad (4.9)$$

onde $\mu = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$. A figura 4.1 mostra um gráfico de $\mathcal{N}(\rho)$ vs. $|r - r'|$.

A versão multipartida para este problema é apresentada na referência [LBV05a]. Neste trabalho mostra-se que não há emaranhamento genuíno de N partículas para $N > 2$. Sendo assim, a matriz densidade de spin para N elétrons em um gás degenerado pode ser construída através de combinações convexas de estados com apenas emaranhamento entre 2 partículas. O tratamento com temperatura ($T \neq 0$) foi dado em [LBV05b].

4.1.2 O papel da simetria

O argumento padrão para o fato de dois elétrons distantes não influenciarem um ao outro consiste em dizer que suas funções de ondas não possuem um *overlap* considerável. Em primeiro lugar, não há um critério adequado para se determinar o quão considerável, ou desprezível, é o overlap entre duas funções de onda. Segundo, este critério não se aplica aqui, posto que as funções de onda de ambos elétrons são ondas planas (pois são elétrons livres). Buscamos então uma interpretação um pouco mais elucidativa para o fenômeno descrito na secção anterior. Para tal, definimos novos operadores de detecção (agora de duas partículas) a partir dos operadores dados por (4.3):

$$\Pi_{ss'}^+(r, r') = \frac{(\Psi_s(r)\Psi_{s'}(r') + \Psi_{s'}(r)\Psi_s(r'))}{\sqrt{2}} \quad (4.10)$$

e

$$\Pi_{ss'}^-(r, r') = \frac{(\Psi_s(r)\Psi_{s'}(r') - \Psi_{s'}(r)\Psi_s(r'))}{\sqrt{2}}. \quad (4.11)$$

O operador $\Pi_{ss'}^+$ ($\Pi_{ss'}^-$) aniquila uma partícula com função espacial anti-simétrica (simétrica) e, conseqüentemente, função de spin simétrica (anti-simétrica). Em termos destes novos operadores, a função de correlação dada em (4.1) pode ser reescrita como :

$$\rho_{ss',tt'} = \frac{1}{2} \langle \Phi_0 | [\Pi_{tt'}^{+\dagger}(r, r') + \Pi_{tt'}^{-\dagger}(r, r')] [\Pi_{ss'}^+(r, r') + \Pi_{ss'}^-(r, r')] | \Phi_0 \rangle. \quad (4.12)$$

Nesta forma, a matriz densidade de spin dos dois férmions é a soma de 4 termos distintos. Dois deles contém apenas operadores de detecção simétricos ou anti-simétricos (termos diretos), enquanto os outros dois são termos cruzados, que envolvem operador criação simétrico e aniquilação antisimétrico, ou vice-versa. Como estes operadores estão atuando no estado fundamental (4.2), fica claro que os termos cruzados são nulos. Os termos não-nulos são:

$$\rho_{sim} = \frac{1}{2} \langle \Phi_0 | \Pi_{tt'}^{+\dagger}(r, r') \Pi_{ss'}^+(r, r') | \Phi_0 \rangle \quad (4.13)$$

e

$$\rho_{ant} = \frac{1}{2} \langle \Phi_0 | \Pi_{tt'}^{-\dagger}(r, r') \Pi_{ss'}^-(r, r') | \Phi_0 \rangle. \quad (4.14)$$

Sendo assim a matriz densidade pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \rho = \rho_{asim} + \rho_{sim} = & \int \int dpdq \frac{1}{2} \left\{ (1 + e^{i(p-q)(r-r')}) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + (1 - e^{i(p-q)(r-r')}) \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

É interessante notar que, neste formato, a matriz densidade ρ representa uma combinação convexa de dois estados quânticos, σ_1 e σ_2 , da seguinte forma:

$$\rho = p \sigma_1 + (1 - p) \sigma_2, \quad (4.16a)$$

com $0 \leq p \leq 1$,

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.16b)$$

e

$$\sigma_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}. \quad (4.16c)$$

O estado σ_1 é simplesmente o estado anti-simétrico de Bell $|\Psi-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$, correspondente ao singleto, sendo assim, maximamente emaranhado. Já o estado σ_2 é uma mistura igualmente provável dos estados tripleto (todos simétricos) $|00\rangle$, $|11\rangle$ e $|\Psi+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$, e não contém emaranhamento algum (pelo critério de Peres-Horodecki).

Podemos agora interpretar o que ocorre a medida que detectamos elétrons cada vez mais afastados entre si. Quando $r = r'$ o segundo termo em (4.15) é nulo. Sendo assim $\rho = \sigma_1$ como exige o Princípio de Pauli. A medida em que r se torna diferente de r' os dois termos em (4.15) contribuem para formar ρ . Entretanto, como σ_2 não contém emaranhamento, ρ se torna cada

vez menos emaranhado. Assim, ρ terá emaranhamento se e só se a fração de singleto for suficientemente maior que a fração dos tripletos, em um contexto similar à idéia de quantificar emaranhamento através da *robustês relativa* [VT99]. No limite $r - r' \gg 1/k_F$, como as integrais na eq.(4.15) são realizadas sobre os momenta abaixo da superfície de Fermi, os termos $e^{i(p-q)(r-r')}$ oscilam muito rápido, tendo efetivamente como resultado da integração, sua média. Como esta média é zero a matriz densidade se torna, neste limite, proporcional à matriz identidade. Este comportamento pode ser visto como uma transição suave entre uma estatística quântica (Fermi-Dirac) para uma estatística clássica (Maxwell-Boltzmann).

4.1.3 Detecção imperfeita

Uma questão interessante surge ao tratarmos de uma situação mais realista e consideramos detectores não pontuais em posição. Ao invés da eq.(4.3), devemos escrever o operador de detecção como o operador de campo geral

$$\Psi_s(r) = \int \int e^{ipr''} D(r - r'') b_s(p) dr'' dp. \quad (4.17)$$

O caso onde a detecção em posição é perfeita corresponde ao caso particular da eq.(4.17) correspondente a $D(r - r'') = \delta(r - r'')$. Porém, se $D(r - r'')$ apresenta alguma incerteza em posição, por exemplo se for descrito pela gaussiana de largura σ ,

$$D(r - r'') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{|r-r''|^2}{2\sigma^2}}, \quad (4.18)$$

os operadores de campo se tornam

$$\Psi_s(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int \int e^{ipr''} e^{-\frac{|r-r''|^2}{2\sigma^2}} b_s(p) dr'' dp. \quad (4.19)$$

Substituindo estes operadores na eq.(4.1), temos:

$$\rho_{ss',tt'} = \delta_{st}\delta_{s't'} f(d, \sigma) + \delta_{st'}\delta_{s't} g(d, \sigma), \quad (4.20a)$$

com $d = |r - r'|$,

$$f(d, \sigma) = \left(\frac{\text{erf}(\sigma p_f)}{\sigma} \right)^2, \quad (4.20b)$$

$$g(d, \sigma) = \frac{1}{\sigma^2} e^{\frac{-d^2}{2\sigma^2}} \left\{ \operatorname{erf}\left(\sigma p_f - \frac{id}{2\sigma}\right) - \operatorname{erf}\left(-\frac{id}{2\sigma}\right) \right\} \left\{ \operatorname{erf}\left(\sigma p_f + \frac{id}{2\sigma}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{id}{2\sigma}\right) \right\}, \quad (4.20c)$$

onde $\operatorname{erf}(x)$ é a “função erro”, definida por

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt. \quad (4.20d)$$

A matriz de spin (normalizada) é,

$$\rho = \frac{1}{4f - 2g} \begin{pmatrix} f - g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & g & 0 \\ 0 & g & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f - g \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Para mostrar o comportamento do emaranhamento com relação à variações em d , novamente calculamos a negatividade do estado $\rho(d, \sigma, p_f)$:

$$\mathcal{N}(\rho) = 2\mu\left(\frac{f - 2g}{4f - 2g}\right) \quad (4.22)$$

onde $\mu = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$. Esta função é mostrada na figura 4.2 pra alguns valores de σ .

Note que, para detecção imperfeita em posição, o emaranhamento decresce a medida que um detector se torna distante do outro. Porém, $\mathcal{N}(\rho)$ cresce caso a largura na detecção σ se torna maior. O fato de que a incerteza em posição leva a um acréscimo no emaranhamento pode parecer surpreendente à primeira vista. Entretanto, devemos notar que, quanto mais **incerteza** na posição, mais **certeza** no momentum das partículas. No limite $\sigma \rightarrow \infty$, ambos os detectores se tornam perfeitos em momentum (centrados em $p = 0$ como mostra a eq.(4.18)), o que significa que, novamente, os elétrons precisam ter sua função de spin totalmente anti-simetrizada.

4.2 Um caso bosônico

Podemos mostrar um comportamento semelhante ao caso do gás de elétrons livres para um sistema bosônico. Para tal, calculamos o emaran-

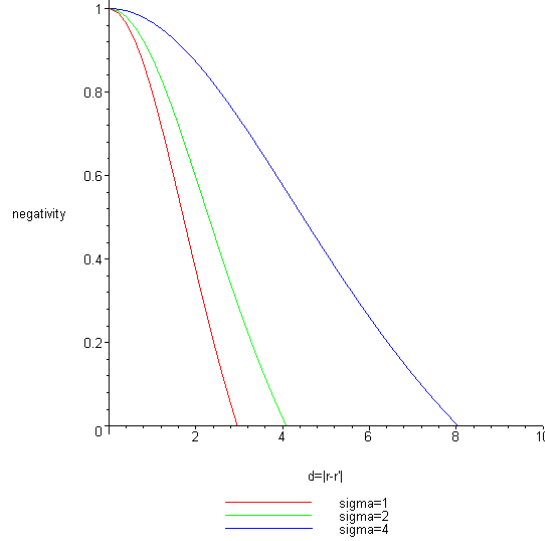


Figura 4.2: $\mathcal{N}(\rho)$ vs. d para $p_f = 1$ e $\sigma = 1$ (vermelho), $\sigma = 2$ (verde) e $\sigma = 4$ (azul).

hamento entre a polarização de dois fótons colocados em um interferômetro tipo Hong-Ou-Mandel [HOM87], porém constituído de um divisor de feixes por polarização (PBS¹). Nesta análise, polarização e frequência dos fótons fazem o papel do spin e da dos elétrons no gás, respectivamente.

Primeiramente escrevemos os modos após o PBS dado os modos anteriores $a_{1,\sigma}$ e $a_{2,\sigma}$ (ver fig.4.3):

$$E_{3,\sigma}(\omega) = T_\sigma a_{1,\sigma}(\omega) + iR_\sigma a_{2,\sigma}(\omega)e^{i\omega\tau}, \quad (4.23a)$$

$$E_{4,\sigma}(\omega) = iR_\sigma a_{1,\sigma}(\omega) + T_\sigma^* a_{2,\sigma}(\omega)e^{i\omega\tau}, \quad (4.23b)$$

com $|T_\sigma|^2$ e $|R_\sigma|^2$ sendo os coeficientes de transmissividade e reflectividade da polarização σ no PBS, $\tau = \tau_1 - \tau_2$, onde τ_1 e τ_2 são os tempos de propagação do cristal aos detectores via braços 1 e 2 do interferômetro.

A matriz densidade de polarização das duas partículas pode ser definida

¹do inglês “polarization beam-splitter”

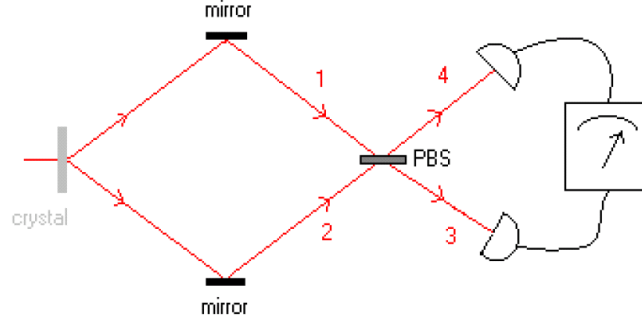


Figura 4.3: Interferômetro Hong-Ou-Mandel.

novamente através da função de correlação de segunda ordem:

$$\rho_{\sigma\sigma',ss'} = \int \int dw_1 dw_2 D(w_1, w_2) \langle \phi_0 | E_{3,s}^\dagger(\omega_1) E_{4,s'}^\dagger(\omega_2) E_{4,\sigma'}(\omega_2) E_{3,\sigma}(\omega_1) | \phi_0 \rangle. \quad (4.24)$$

O estado

$$|\phi_0\rangle = \psi^\dagger |0\rangle \quad (4.25)$$

é preparado pelo operador de criação de dois fótons

$$\psi^\dagger = \sum_{k,k'} \int \int a_{1,k}^\dagger(\nu_1) a_{2,k'}^\dagger(\nu_2) g_{k,k'}(\nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2, \quad (4.26)$$

com distribuição em frequências $g_{k,k'}(\nu_1, \nu_2)$ que é, no caso mais geral, dependente da polarização. É importante notar que o procedimento adotado aqui é mais geral do que para o interferômetro Hong-Ou-Mandel típico, desde de que estamos livres para escolher o estados inicial através de $g_{k,k'}(\nu_1, \nu_2)$. De forma similar a eq.(4.17), a detecção é representada pela função $D(\omega_1, \omega_2)$.

Usando a relação de comutação para bósons, efetuando as integrais em $d\nu_1, d\nu_2$ e os somatórios em k, k' encontra-se:

$$\begin{aligned}
\rho_{\sigma\sigma',s's} &= \int \int \{T_{s'}T_s^*T_{\sigma'}^*T_{\sigma}g_{ss'}^*(\omega_1,\omega_2)g_{\sigma\sigma'}(\omega_1,\omega_2) + R_{s'}R_s^*R_{\sigma'}^*R_{\sigma}g_{s's}^*(\omega_2,\omega_1)g_{\sigma'\sigma}(\omega_2,\omega_1) \\
&- T_{s'}T_s^*R_{\sigma'}^*R_{\sigma}g_{ss'}^*(\omega_1,\omega_2)g_{\sigma'\sigma}(\omega_2,\omega_1)e^{i(\omega_1-\omega_2)\tau} \\
&- T_{\sigma'}^*T_{\sigma}R_{s'}R_s^*g_{\sigma\sigma'}(\omega_1,\omega_2)g_{s's}^*(\omega_2,\omega_1)e^{-i(\omega_1-\omega_2)\tau}\}D(\omega_1,\omega_2)d\omega_1d\omega_2. \tag{4.27}
\end{aligned}$$

O divisor de feixes por polarização é um elemento óptico que permite, como o próprio nome sugere, transmissão em apenas uma polarização (digamos vertical), e reflectão na polarização ortogonal (horizontal). Assim, os coeficientes de transmissividade e reflectividade podem ser escritos como $R_h = T_v = 1$ e $T_h = R_v = 0$. Além disso, assumindo um estado simétrico em polarização ($g_{ss'} = g_{s's}$), os únicos elementos de matriz não nulos são:

$$\rho_{hh,hh} = \int \int |g_{hh}(\omega_1,\omega_2)|^2 D(\omega_1,\omega_2) d\omega_1 d\omega_2, \tag{4.28a}$$

$$\rho_{vv,vv} = \int \int |g_{vv}(\omega_1,\omega_2)|^2 D(\omega_1,\omega_2) d\omega_1 d\omega_2, \tag{4.28b}$$

$$\rho_{hh,vv} = - \int \int g_{vv}^*(\omega_1,\omega_2)g_{hh}(\omega_2,\omega_1)e^{i(\omega_1-\omega_2)\tau} D(\omega_1,\omega_2) d\omega_1 d\omega_2 = \rho_{vv,hh}^*. \tag{4.28c}$$

Podemos agora assumir uma forma particular para as funções $g(\omega_1,\omega_2)$ e $D(\omega_1,\omega_2)$. Desde que estamos mais interessados nas propriedades da detecção assumiremos que $g(\omega_1,\omega_2)$ é constante ². Para os detectores assumimos formas gaussianas independentes, o que significa $D(\omega_1,\omega_2) = D(\omega_1)D(\omega_2)$ e

$$D(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{\omega^2}{2\sigma^2}}. \tag{4.29}$$

Com estas últimas considerações podemos calcular a matriz densidade de polarização :

$$\rho_{hh,hh} = \rho_{vv,vv} = \int \int D(\omega_1)D(\omega_2)d\omega_1d\omega_2 = 1 \tag{4.30}$$

²É claro que deveríamos ter escolhido uma forma normalizada para a função $g(\omega_1,\omega_2)$. Entretanto podemos argumentar que, dentro da faixa em frequências de interesse, $g(\omega_1,\omega_2)$ não varia consideravelmente.

e

$$\rho_{hh,vv} = \rho_{vv,hh}^* = -\frac{1}{2\pi\sigma^2} \int \exp\left(-\frac{w_1^2}{2\sigma^2} + iw_1\tau\right) dw_1 \times \int \exp\left(-\frac{w_2^2}{2\sigma^2} - iw_2\tau\right) dw_2, \quad (4.31)$$

Efetuada estas transformadas de Fourier de funções gaussianas encontramos

$$\rho_{hh,vv} = \rho_{vv,hh} = -\exp(-\sigma^2\tau^2). \quad (4.32)$$

Finalmente, a matriz densidade de polarização (normalizada) é dada por

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

onde $f = \exp(-\sigma^2\tau^2)$.

A transposta parial de ρ tem sempre um auto-valor negativo igual a $-\frac{f}{2}$. Sendo assim, a negatividade de ρ é $\mathcal{N}(\rho) = f = \exp(-\sigma^2\tau^2)$. Este resultado mostra que, a medida em que os detectores se tornam “largos” em frequência (precisos em tempo) ou o atraso entre os fótons aumenta, o emaranhamento entre o par detectado decresce. Devemos ressaltar que o atraso entre os fótons fornece informação do caminho percorrido por eles. Tal informação, por servir como rótulo para as partículas, pode se vista como uma inimiga da indistinguibilidade.

Novamente podemos ver o estado ρ como uma combinação de estados de Bell. Curiosamente, na interferometria descrita aqui, a separação é entre os estados $|\Phi+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ e $|\Phi-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$, da seguinte forma:

$$\rho = \frac{(1-f)}{2} |\Phi+\rangle \langle\Phi+| + \frac{(1+f)}{2} |\Phi-\rangle \langle\Phi-|, \quad (4.34)$$

e não mais entre estados simétricos e anti-simétricos como na equação (4.15).

Deve-se ressaltar que foram sempre assumidas detecções coerentes ao longo deste trabalho, como acontece na maioria dos casos reais. Caso tivéssemos modelado a detecção como um conjunto de detectores perfeitos as coisas

seriam diferentes. Outro ponto que deve ser ressaltado é que o formalismo utilizado aqui permite o estudo de outros sistemas, tais como aqueles com interação. Sendo assim, acreditamos que a diferença (se há alguma) entre emaranhamento devido exclusivamente à indistinguibilidade e emaranhamento devido à interação possa ser melhor entendida com o apoio dos métodos utilizados aqui.

Antes de finalizar este capítulo gostaríamos de dizer que, na nossa opinião, a pesquisa descrita aqui mostra a importância de se discutir emaranhamento num contexto mais realista. Além disso ficamos satisfeitos em ajudar na formalização e na clarificação da idéia de que uma transição suave entre distinguibilidade e indistinguibilidade é possível.

Comentários finais

Como foi visto ao longo dessa dissertação, a teoria do emaranhamento, apesar de ser bastante jovem, tem nos ajudado na compreensão de fenômenos interessantes em diversas áreas da física. Além disso, são estas correlações que permitem novos protocolos de troca de informação e processamento de dados. Antes de finalizar esta dissertação, gostaria de citar alguns tópicos que têm nos interessado e surgem como uma continuação natural deste trabalho.

Com o amadurecimento da teoria do emaranhamento iniciou-se uma busca por uma conexão desta com outros ramos da física. Apesar de incompletos, os resultados já obtidos acerca da caracterização do emaranhamento têm permitido aplicar este conhecimento em modelos em física do estado sólido [ABV01, ON02, OAFF02, VLRK03, VPC04, VDC04, WSL04, BV04, Ved04a, BVZ04, WVB05a, WVB05b, LORV05, WDM+05, VBM+05, PVMC05, Tot05, GTB05, GT05, LBV05b, LBV05a], física molecular [SM02, HH04, LEB04, BOR05], física nuclear [RCS+05], e até mesmo astrofísica [Ved03]. Pretende-se com isto, estudar qual o papel que o emaranhamento tem em fenômenos conhecidos nestas disciplinas.

Alguns resultados recentes mostram a íntima relação entre emaranhamento e fenômenos macroscópicos como a supercondutividade [Ved04a], o efeito Meissner e a quantização do fluxo magnético [Ved04b]. Mostrou-se ainda que o emaranhamento pode ser tomado como o próprio parâmetro de ordem nas transições de fase condutor \rightarrow supercondutor e isolante-Mott \rightarrow superfluido [Bra05d].

Em particular, ligar as idéias de emaranhamento e fenômenos críticos tornou-se natural uma vez que espera-se que, perto da criticalidade, corre-

lações de longo alcance apareçam entre os constituintes do sistema [Sac00]. As primeiras tentativas em obter esta conexão foram realizadas através do estudo do emaranhamento em cadeias de spin. Primeiro, estas cadeias já eram bastante conhecidas e discutidas no contexto da física estatística e matéria condensada. Segundo, modelam razoavelmente alguns comportamentos de sistemas de interesse, como a transição entre paramagnetismo e magnetismo em alguns materiais [Sal05].

Recentemente mostramos que, apesar do emaranhamento poder ser visto como um parâmetro de ordem em diversas transições de fase, diferentes quantificadores de emaranhamento podem indicar ordens diferentes para a mesma transição [CBT05a]. Outro ponto tratado foi a determinação de uma família de quantificadores de emaranhamento multipartite que seve como um indicador de transições de fase quânticas: o emaranhamento testemunhado.

Outra tema que está sendo tratado atualmente é o estudo da geometria por trás da noção de emaranhamento. Provamos que a robustez randômica (R_r) se presta como uma medida de distância entre um estado $\rho \notin S_k$ e o conjunto S_k [CBT05b]. Sendo assim, R_r pode ser usada para investigar o formato de S_k . Entretanto, como visto no capítulo 1, R_r está conectada com a noção de testemunhas de emaranhamento, e pode, assim, ser determinada experimentalmente. Ou seja, podemos estudar o formato do conjunto dos operadores S_k através de experimentos reais. Uma medição experimental usando fótons gêmeos capaz de confirmar nossas previsões está sendo discutida no momento.

Finalmente, temos discutido a possibilidade de extrair o emaranhamento proveniente do Princípio de Exclusão de Pauli para que este possa ser aproveitado em protocolos de informação quântica. Um forte candidato à fonte de emaranhamento de partículas idênticas são poços quânticos gerados em semicondutores.

Agradeço ao leitor paciente que leu esta dissertação até aqui. Espero ter contribuído para que este leitor tenha uma compreensão melhor do que seja o emaranhamento, das suas possíveis aplicações e conexões com outros fenômenos.

BIBLIOGRAFIA

- [Ara96] P.K. Aravind, *Geometry of the Schmidt decomposition and Hardy's theorem*, Am. J. Phys. **64**, 1143 (1996).
- [AAC+00] A. Acín, A. Andrianov, L. Costa, E. Jané, J. I. Latorre e R. Tarrach, *Generalized Schmidt decomposition and classification of three-quantum-bit states*, Phys. Rev. Lett. **85**, 1560 (2000).
- [AAJT01] A. Acín, A. Andrianov, E. Jané e R. Tarrach, *Three-qubit pure-state canonical forms*, J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 6725 (2001).
- [ABV01] M.C. Arnesen, S. Bose e V. Vedral, *Natural thermal and magnetic entanglement in the 1D Heisenberg model*, Phys. Rev. Lett. **87**, 017901 (2001).
- [AJK+05] J.B. Altepeter, E.R. Jeffrey, P.G. Kwiat, S. Tanzilli, N. Gisin e A. Acín, *Experimental methods for detecting entanglement*, Phys. Rev. Lett. **95**, 033601 (2005).
- [APE03] K. Audenaert, M. B. Plenio e J. Eisert, *Entanglement cost under positive-partial-transpose-preserving Operations*, Phys. Rev. Lett. **90**, 027901 (2003).
- [EPR35] A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen, *Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete?*, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
- [Bal95] L.E. Ballentine, *Quantum Mechanics: A Modern Development*, (World Scientific Publishing, 1998).
- [Bel87] J.S. Bell, *Speakable and unspeakable in quantum mechanics* (Cambridge University Press, 1987).

- [BEK+04] M. Bourennane, M. Eibl, C. Kurtsiefer, S. Gaertner, H. Weinfurter, O. Gühne, P. Hyllus, D. Bruß, M. Lewenstein e A. Sanpera, *Experimental detection of multipartite entanglement using witness operators*, Phys. Rev. Lett. **92**, 087902 (2004).
- [BV04] F.G.S.L. Brandão e R.O. Vianna, *Separable Multipartite Mixed States: Operational Asymptotically Necessary and Sufficient Conditions*, Phys. Rev. Lett. **93**, 220503 (2004).
- [Bra05a] F.G.S.L. Brandão, *Quantifying entanglement with witness operators*, Phys. Rev. A **72**, 022310 (2005).
- [Bra05b] F.G.S.L. Brandão, *Quantifying the activation power of bipartite entangled states*, arXiv quant-ph/0510078 (2005).
- [Bra05c] F.G.S.L. Brandão, *Characterizando e quantificando o emaranhamento em sistemas de muitas partes*, dissertação de mestrado apresentada ao Depto. de Física da UFMG (2005).
- [Bra05d] F.G.S.L. Brandão, *Entanglement as a quantum order parameter*, New J. Phys. **7**, 254 (2005).
- [Bru99] D. Bruß, *Entanglement splitting of pure bipartite quantum states* Phys. Rev. A **60**, 4344 (1999).
- [Bru02] D. Bruß, *Characterizing entanglement*, J. Math. Phys. **43**, 4237 (2002).
- [BBC+93] C.H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres e W. K. Wootters, *Teleporting an unknown quantum state via dual classical and EPR channels*, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).
- [BBP+96a] C.H. Bennett, H.J. Bernstein, S. Popescu e B. Schumacher, *Concentrating partial entanglement by local operations*, Phys. Rev. A **53**, 2046 (1996).
- [BBP+96b] C.H. Bennett, G. Brassard, S. Popescu, B. Schumacher, J.A. Smolin, e W.K. Wootters, *Purification of noisy entanglement and faithful teleportation via noisy channels*, Phys. Rev. Lett. **76**, 722 (1996).

- [BDS+96c] C.H. Bennett, D.P. DiVincenzo, J.A. Smolin e W.K. Wootters, *Mixed-state entanglement and quantum error correction*, Phys. Rev. A **54**, 3824 (1996).
- [BMN+03] M. Barbieri, F. De Martini, G. Di Nepi, P. Mataloni, G.M. D'Ariano e C. Macchiavello, *Detection of entanglement with polarized photons: experimental realization of an entanglement witness*, Phys. Rev. Lett. **91**, 227901 (2003).
- [BOR05] V. Bužek, M. Orszag e M. Roško, *Instability and Entanglement of the Ground State of the Dicke Model*, Phys. Rev. Lett. **94**, 163601 (2005).
- [BV04] Č. Brukner e V. Vedral, *Macroscopic thermodynamical witnesses of quantum entanglement*, arXiv quant-ph/0406040 (2004).
- [BVZ04] Č. Brukner, V. Vedral e A. Zeilinger, *Crucial role of quantum entanglement in bulk properties of solids*, Phys. Rev. A **73**, 012110 (2006).
- [Cun05] M.O. Terra Cunha, *Emaranhamento: caracterização, manipulação e conseqüências*, tese de doutorado apresentada ao Depto. de Física da UFMG (2005).
- [CBT05] D. Cavalcanti, F.G.S.L. Brandão e M.O. Terra Cunha, *Are all maximally entangled states pure?*, Phys. Rev. A **72**, 040303(R) (2005).
- [CBT05a] D. Cavalcanti, F.G.S.L. Brandão e M.O. Terra Cunha, *Entanglement quantifiers and phase transitions*, arXiv quant-ph/0510132 (2005).
- [CBT05b] D. Cavalcanti, F.G.S.L. Brandão e M.O. Terra Cunha, *Geometric phase transition: direct measurement of a mathematical abstraction*, arXiv quant-ph/0510068 (2005).
- [CCT05] D. Cavalcanti, L.M. Cioletti e M.O. Terra Cunha, *Tomographic Characterization of Three-Qubit Pure States with Only Two-Qubit Detectors*, Phys. Rev. A **71**, 014301 (2005).
- [CST+05] D. Cavalcanti, M.F. Santos, M.O. Terra Cunha, C. Lunke e V. Vedral, *Increasing identical particle entanglement by fuzzy measurements*, Phys. Rev. A **72**, 062307 (2005).

- [CDL78] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Lalöe *Quantum Mechanics*, (John Wiley and Sons - 1978).
- [CKW00] V. Coffman, J. Kundu e W.K. Wootters, *Distributed Entanglement*, Phys. Rev. A **61**, 052306 (2000).
- [Dic59] R.H. Dicke, *Coherence in spontaneous radiation processes*, Phys. Rev. **93**, 99 (1959).
- [Dio04] L. Diósi, *Three-party pure quantum states are determined by two two-party reduced states*, Phys. Rev. A **70**, 010302(R) (2004).
- [DHR02] M.J. Donald, M. Horodecki e O. Rudolph, *The uniqueness theorem for entanglement measures*, J. Math. Phys. **43**, 4252 (2002).
- [DVC00] W. Dür, G. Vidal e J.I. Cirac, *Three qubits can be entangled in two inequivalent ways*, Phys. Rev. A **62**, 062314 (2000).
- [DW01] K.A. Dennison e W.K. Wootters, *Entanglement sharing among quantum particles with more than two orthogonal states*, Phys. Rev. A **65**, 010301(R) (2001).
- [Eke91] Artur K. Ekert, *Quantum cryptography based on Bell's theorem*, Phys. Rev. Lett. **67**, 661 (1991).
- [EK95] A. Ekert e P. L. Knight, *Entangled quantum systems and the Schmidt decomposition*, Am. J. Phys. **63**, 415 (1995).
- [GHB02] O. Gühne, P. Hyllus, D. Bruß, A. Ekert, M. Lewenstein, C. Macchiavello e A. Sanpera, *Detection of entanglement with few local measurements*, Phys. Rev. A **66**, 062305 (2002).
- [GTB05] O. Gühne, G. Tóth e H.J. Briegel, *Multipartite entanglement in spin chains*, New J. Phys. **7**, 229 (2005).
- [GT05] O. Gühne e G. Tóth, *Energy and multipartite entanglement in spin models*, Phys. Rev. A **73**, 052319 (2006).
- [GHSZ90] D. M. Greenberger, M. A. Horne, A. Shimony e A. Zeilinger, *Bell's theorem without inequalities*, Am. J. Phys. **58**, 1131 (1990).

- [GHZ93] D. M. Greenberger, M. A. Horne e A. Zeilinger, *Multipartite interference and the superposition principle*, Phys. Today, 22 (August, 1993);
- [Hay05] P. Hayden, *Quantum Information: Putting certainty in the bank*, Nature **436**, 633 (2005).
- [HGB05] P. Hyllus, O. Gühne, D. Bruß e M. Lewenstein, *Relations between entanglement witnesses and Bell inequalities*, Phys. Rev. A **71**, 012321 (2005).
- [HH04] X.-W. Hou and B. Hu, *Decoherence, entanglement, and chaos in the Dicke model*, Phys. Rev. A **69**, 042110 (2004).
- [Hor97] P. Horodecki, *Separability criterion and inseparable mixed states with positive partial transposition*, Phys. Lett. A **232**, 333 (1997).
- [HHH96] M. Horodecki, P. Horodecki e R. Horodecki, *Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions*, Phys. Lett. A **223**, 1 (1996).
- [HHH98] M. Horodecki, P. Horodecki e R. Horodecki, *Mixed-state entanglement and distillation: is there a “bound” entanglement in nature?*, Phys. Rev. Lett. **80**, 5239 (1998).
- [HHH00] M. Horodecki, P. Horodecki and R. Horodecki, *Limits for entanglement measures*, Phys. Rev. Lett. **84**, 2014 (2000);
- [HOW05] M. Horodecki, J. Oppenheim e A. Winter, *Partial quantum information*, Nature **436**, 673 (2005).
- [HHR+05] H. Häffner, W. Hänsel, C.F. Roos, J. Benhelm, D. Chek-al-kar, M. Chwalla, T. Körber, U.D. Rapol, M. Riebe, P.O. Schmidt, C. Becher, O. Gühne, W. Dür e R. Blatt, *Scalable multipartite entanglement of trapped ions*, Nature **438**, 643 (2005).
- [HHT01] P.M. Hayden, M. Horodecki e B.M. Terhal, *The asymptotic entanglement cost of preparing a quantum state*, J. Phys. A: Math. Gen **34**, 6891 (2001).
- [HN03] A.W. Harrow e M.A. Nielsen, *Robustness of quantum gates in the presence of noise*, Phys. Rev. A **68**, 012308 (2003).

- [HOM87] C.K. Hong, Z.Y. Ou e L. Mandel, *Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference*, Phys. Rev. Lett. **59**, 2044 (1987).
- [HP91] F. Hiai e D. Petz, *The proper formula for relative entropy and its asymptotics in quantum probability*, Commun. Math. Phys. **143**, 99 (1991).
- [HW97] S. Hill e W.K. Wootters, *Entanglement of a pair of quantum bits*, Phys. Rev. Lett. **78**, 5022 (1997).
- [Ish04] S. Ishizaka, *Bound entanglement provides convertibility of pure entangled states*, Phys. Rev. Lett. **93**, 190501 (2004).
- [IP05a] S. Ishizaka e M.B. Plenio, *Multi-particle entanglement manipulation under positive partial transpose preserving operations*, Phys. Rev. A **71**, 052303 (2005).
- [IP05b] S. Ishizaka e M.B. Plenio, *Multi-particle entanglement under asymptotic positive partial transpose preserving operations*, Phys. Rev. A **72**, 042325 (2005).
- [JP99a] D. Jonathan e M.B. Plenio, *Minimal conditions for local pure-state entanglement manipulation*, Phys. Rev. Lett. **83**, 1455 (1999).
- [JP99b] D. Jonathan e M.B. Plenio, *Entanglement-assisted local manipulation of pure quantum states*, Phys. Rev. Lett. **83**, 3566 (1999).
- [KW04] M. Koashi e A. Winter, *Monogamy of Entanglement and Other Correlations*, Phys. Rev. A **69**, 022309 (2004).
- [KL01] S. Karnas and M. Lewenstein, *Separable approximations of density matrices of composite quantum systems*, J. Phys. A **34**, 318 (2001).
- [KBI00] M. Koashi, V. Bužek e N. Imoto, *Entangled webs: Tight bound for symmetric sharing of entanglement*, Phys. Rev. A **62**, 050302(R) (2000).
- [LBV05a] C. Lunkes, C. Brukner e V. Vedral, *Natural multiparticle entanglement*, Phys. Rev. Lett. **95**, 030503 (2005).

- [LBV05b] C. Lunkes, C. Brukner e V. Vedral, *Equation of state for entanglement in a Fermi gas*, Phys. Rev. A **71**, 034309 (2005).
- [LEB04] N. Lambert, C. Emary e T. Brandes, *Entanglement and the Phase Transition in Single-Mode Superradiance*, Phys. Rev. Lett. **92**, 073602 (2004).
- [LKCH00] M. Lewenstein, B. Kraus, J. I. Cirac e P. Horodecki, *Optimization of entanglement witnesses*, Phys. Rev. A **62**, 052310 (2000).
- [LRV04] J.I. Latorre, E. Rico e G. Vidal, *Ground state entanglement in quantum spin chains*, Quant. Inf. and Comp. **4**, 048 (2004).
- [LORV05] J.I. Latorre, R. Orús, E. Rico e J. Vidal, *Entanglement entropy in the Lipkin-Meshkov-Glick model*, Phys. Rev. A **71**, 064101 (2005).
- [LPW02] N. Linden, S. Popescu e W.K. Wootters, *Almost every pure state of three qubits is completely determined by its two-particle reduced density matrices*, Phys. Rev. Lett. **89**, 207901 (2002).
- [LW02] N. Linden e W. K. Wootters, *The parts determine the whole in a generic pure quantum state*, Phys. Rev. Lett. **89**, 277906 (2002).
- [Mer90a] N. D. Mermin, *What's wrong with these elements of reality?*, Phys. Today, 9 (June, 1990).
- [Mer90b] N. D. Mermin, *Quantum mysteries revisited*, Am. J. Phys. **58**, 731 (1990).
- [MSV04] F. Morikoshi, M. F. Santos e V. Vedral, *Accessibility of physical states and non-uniqueness of entanglement measure*, J. Phys. A: Math. Gen. **37**, 5887 (2004).
- [Nie99] M.A. Nielsen, *Conditions for a class of entanglement transformations*, Phys. Rev. Lett. **83**, 436 (1999).
- [NC00] M.A. Nielsen e I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, 2000).
- [NK01] M. Nielsen e J. Kempe, *Separable states are more disordered globally than locally*, Phys. Rev. Lett. **86**, 5184 (2001).

- [OAFF02] A. Osterloh, L. Amico, G. Falci e R. Fazio, *Scaling of entanglement close to a quantum phase transition*, Nature **416**, 608 (2002).
- [OV05] T.J. Osborne e F. Verstraete, *General monogamy inequality for bipartite qubit entanglement*, Phys. Rev. Lett. **96**, 220503 (2006).
- [ON02] T.J. Osborne e M.A. Nielsen, *Entanglement in a simple quantum phase transition*, Phys. Rev. A **66**, 032110 (2002).
- [Par04] K.R. Parthasarathy, *On the maximal dimension of a completely entangled subspace for finite level quantum systems*, arXiv quant-ph/0405077 (2004).
- [Per95a] Asher Peres, *Quantum theory: concepts and methods* (Kluwer Academic Publishers, 1995).
- [Per95b] A. Peres, *Higher order Schmidt decompositions*, Phys. Lett. A **202**, 16 (1995).
- [Per96] A. Peres, *Separability criterion for density matrices*, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996).
- [PR97] S. Popescu e D. Rohrlich, *Thermodynamics and the measure of entanglement*, Phys. Rev. A **56**, 3319(R) (1997).
- [PVMC05] M. Popp, V. Verstraete, M.A. Martín-Delgado e J.I. Cirac, *Localizable entanglement*, Phys. Rev. A **71**, 042306 (2005).
- [PV98] M.B. Plenio e V. Vedral, *Teleportation, Entanglement and Thermodynamics in the Quantum World*, Contemp. Phys. **39**, 431 (1998).
- [PV05] M.B. Plenio e S. Virmani, *An introduction to entanglement measures*, arXiv quant-ph/0504163 (2005).
- [P05] M.B. Plenio, *Logarithmic negativity: a full entanglement monotone that is not convex*, Phys. Rev. Lett. **95**, 090503 (2005).
- [QIC01] Edição especial da revista Quantum Information and Computation, vol.1 n.1, jul. 2001 - disponível em [http : //www.rintonpress.com/journals/qiconline.html#v1n1](http://www.rintonpress.com/journals/qiconline.html#v1n1).
- [Roc96] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis* (Princeton University Press, 1996).

- [RCS+05] M. Reis, D. Cavalcanti, M.F. Santos *et al.*, comunicação privada.
- [RWZ05] K.J. Resch, P. Walther e A. Zeilinger, *Full characterization of a three-photon Greenberger-Horne-Zeilinger state using quantum state tomography*, Phys. Rev. Lett. **94**, 070402 (2005).
- [Sac00] S. Sachdev, *Quantum phase transitions* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999). O primeiro capítulo está gratuitamente disponível em <http://sachdev.physics.harvard.edu/qptweb/toc.html>.
- [Sal05] S. Salinas, *Introdução à física estatística* (Edusp, 2ª Edição - 2005).
- [Sch07] E. Schmidt, *Math. Ann.* **63**, 433 (1907);
- [Sch94] P. Schor, *Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring*, Proceedings, 37th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, IEEE Press, Los Alamitos, CA, 1994.
- [SM02] S. Schneider e G.J. Milburn, *Entanglement in the steady state of a collective-angular-momentum (Dicke) model*, Phys. Rev. A **65**, 042107 (2002).
- [Ter00] B.M. Terhal, *Bell inequalities and the separability criterion*, Phys. Lett. A **271**, 319 (2000).
- [Ter02] B.M. Terhal, *Detecting entanglement*, Journal of Theoretical Computer Science **287**, 313-335 (2002).
- [Ter03] B.M. Terhal, *Is entanglement monogamous?*, arXiv quant-ph/0307120 (2003).
- [Tot05] G. Tóth, *Entanglement witnesses in spin models*, Phys. Rev. A **71**, 010301(R) (2005).
- [TG05] G. Tóth e O. Gühne, *Detecting genuine multipartite entanglement with two local measurements*, Phys. Rev. Lett. **94**, 060501 (2005).
- [VABM01] F. Verstraete, K. Audenaert, T. De Bie e B. De Moor, *Maximally entangled mixed states of two qubits*, Phys. Rev. A **64**, 012316 (2001);
- [VADM01] F. Verstraete, K. Audenaert, J. Dehaene e B. De Moor, *A comparison between entanglement measures negativity and concurrence*, J. Phys. A: Math. Gen **34**, 10327 (2001).

- [VDDV02] F. Verstraete, J. Dehaene, B. De Moor and H. Verschelde, *Four qubits can be entangled in nine different ways*, Phys. Rev. A **65**, 052112 (2002).
- [VPC04] F. Verstraete, M. Popp e J.I. Cirac, *Entanglement versus correlations in spin systems*, Phys. Rev. Lett. **92**, 027901 (2004).
- [VDC04] F. Verstraete, M.A. Martín-Delgado e J.I. Cirac, *Diverging entanglement length in gapped quantum spin systems*, Phys. Rev. Lett. **92**, 087201 (2004).
- [VBM+05] L.C. Venuti, C.D.E. Boschi, G. Morandi, M. Roncaglia e A. Scaramucci, *Local measures of entanglement and critical exponents at quantum phase transitions*, Phys. Rev. A **73**, 010303(R) (2006).
- [Ved02] V. Vedral, *Quantum information theory from the relative entropy*, Rev. Mod. Phys. **74**, 197 (2002).
- [Ved03] V. Vedral, *Entanglement in the second-quantization formalism* Cent. Eur. J. Phys. **2**, 289 (2003).
- [Ved04a] V. Vedral, *High Temperature Macroscopic Entanglement*, New J. Phys. **6**, 102 (2004).
- [Ved04b] V. Vedral, *The Meissner effect and massive particles as witnesses of macroscopic entanglement*, arXiv quant-ph/0410021 (2004).
- [VK02] V. Vedral e E. Kashefi, *Uniqueness of entanglement measure and thermodynamics*, Phys. Rev. Lett. **89**, 037903 (2002).
- [VPRK97] V. Vedral, M. B. Plenio, M. A. Rippin e P. L. Knight, *Quantifying entanglement*, Phys. Rev. Lett. **78**, 2275 (1997).
- [VP98] V. Vedral and M.B. Plenio, *Entanglement measures and purification procedures*, Phys. Rev. A **57**, 1619 (1998).
- [Vid00] G. Vidal, *Entanglement monotones*, J. Mod. Opt. **47**, 355 (2000).
- [VLRK03] G. Vidal, J.I. Latorre, E. Rico e A. Kitaev, *Entanglement in quantum critical phenomena*, Phys. Rev. Lett. **90**, 227902 (2003).
- [VT99] G. Vidal e R. Tarrach, *Robustness of entanglement*, Phys. Rev. A **59**, 141 (1999).

- [VW02] G. Vidal e R.F. Werner, *Computable measure of entanglement*, Phys. Rev. A **65**, 032314 (2002).
- [Woo98] W.K. Wootters, *Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits*, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).
- [WBSL05] L.-A. Wu, S. Bandyopadhyay, M.S. Sarandy e D.A. Lidar, *Entanglement observables and witnesses for interacting quantum spin systems*, Phys. Rev. A **72**, 032309 (2005).
- [WSL04] L.-A. Wu, M.S. Sarandy e D.A. Lidar, *Quantum phase transitions and bipartite entanglement*, Phys. Rev. Lett. **93**, 250404 (2004).
- [WEGM04] T.-C. Wei, M. Ericsson, P.M. Goldbart e W.J. Munro, *Connections between relative entropy of entanglement and geometric measure of entanglement*, Quant. Inf. and Comp. **4**, 252 (2004).
- [WDM+05] T.-C. Wei, D. Das, S. Mukhopadhyay, S. Vishveshwara e P.M. Goldbart, *Global entanglement and quantum criticality in spin chains*, Phys. Rev. A **71**, 060305(R) (2005).
- [WG03] T.-C. Wei e P.M. Goldbart, *Geometric measure of entanglement and applications to bipartite and multipartite quantum states*, Phys. Rev. A **68**, 042307 (2003). Ver também: *Connecting the geometric measure of entanglement and entanglement witnesses*, arXiv quant-ph/0303079 (2003).
- [WNG+03] T.-C. Wei, K. Nemoto, P.M. Goldbart, P.G. Kwiat, W.J. Munro e F. Verstraete, *Maximal entanglement versus entropy for mixed quantum states*, Phys. Rev. A **67**, 022110 (2003).
- [WVB05a] M. Wieśniak, V. Vedral e Č. Brukner, *Magnetic susceptibility as a macroscopic entanglement witness*, New J. Phys. **7**, 258 (2005).
- [WVB05b] M. Wieśniak, V. Vedral e Č. Brukner, *Quantum entanglement from the third law of thermodynamics*, arXiv quant-ph/0508193 (2005).
- [YS05] C.-S. Yu e H.-S. Song, *Multipartite entanglement measure*, Phys. Rev. A **71**, 042331 (2005).
- [ZHSL98] K. Życzkowski, P. Horodecki, A. Sanpera e M. Lewenstein, *Volume of the set of separable states*, Phys. Rev. A **58**, 883 (1998).