

FLÁVIA DEISIANE TRINDADE OZÓLIO

*Distribuição de Chuvas e Secas:  
Efeitos da Condição de Fronteira no Sistema de  
Vórtices*

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Belo Horizonte, MG, BRASIL  
2006

*Distribuição de Chuvas e Secas:  
Efeitos da Condição de Fronteira no Sistema de Vórtices*

*Flávia Deisiane Trindade Ozólio*

*Distribuição de Chuvas e Secas:  
Efeitos da Condição de Fronteira no Sistema de  
Vórtices*

Flávia Deisiane Trindade Ozólio

Orientador:

Ronald Dickman

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Física da Universidade Federal de Minas Gerais em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Belo Horizonte, MG, Brasil  
2006

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
CURSO DE MESTRADO EM FÍSICA

A COMISSÃO EXAMINADORA, ABAIXO ASSINADA, APROVA A DISSERTAÇÃO

**Distribuição de Chuvas e Secas: Efeitos da Condição  
de Fronteira no Sistema de Vórtices**

ELABORADA POR  
**Flávia Deisiane Trindade Ozólio**

COMO REQUISITO PARCIAL PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE  
**MESTRE EM FÍSICA**

COMISSÃO EXAMINADORA:

\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Ronald Dickman - Orientador

\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Jafferson Kamphorst Leal da Silva

\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. José Marcos de Andrade Figueiredo

\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Oscar Nassif de Mesquita - Suplente

Belo Horizonte, agosto de 2006.

*"Somos assim: sonhamos o vôo mas tememos a altura. Para voar é preciso ter coragem para enfrentar o terror do vazio. Porque é só no vazio que o vôo acontece."*

*Rubem Alves*

## Agradecimentos

Ao Prof. Dickman por sua grande sensibilidade e compreensão. Aos meus colegas de laboratório Guilherme, Fabrício, Mancebo e Lauro pela atenção que sempre dispunham. Às amigas Adriana e Sabrina - companheiras de militância - pela constante presença. À minha mãe que, com amor, sempre soube de tudo. Ao meu pai pela admiração ao estudo que cultivou em mim. Aos meus irmãos Doriane e Ricardo pelos interesse e apoio às principais decisões. À minha irmã Cecília por seu afeto. Ao meu namorado Robson pelo seu carinho e conforto.

Este trabalho foi financiado pelo CNPq.

## RESUMO

Nesse trabalho, o modelo de tracejadores passivos num fluido ideal regido por dinâmica de vórtices é estudado com fronteira aberta. O uso da hidrodinâmica como ferramenta para obter leis de potência em distribuições de chuvas e secas é uma linha de pesquisa nova e com várias facetas ainda inexploradas. Para usar os conceitos básicos da hidrodinâmica, aproximou-se a atmosfera terrestre como um fluido ideal no qual certo número de vórtices são abandonados. As precipitações são representadas por tracejadores passivos dentro do fluido. Em trabalhos anteriores, as fronteiras eram periódicas para simular todo o globo. Seguindo essa abordagem, uma nova etapa de estudo é a análise de possíveis efeitos causados pela fronteira aberta. De fato, um sistema de dois regimes de leis de potência em algumas distribuições de chuvas foi observado pela primeira vez. Além disso, obtivemos curvas aproximadas à exponencial estendida em distribuição de secas, um comportamento não esperado *a priori*. Apesar de não termos elementos suficientes para uma caracterização completa, podemos associar esses resultados ao efeito da fronteira aberta.

## ABSTRACT

In this work, we study a model of passive tracers in an ideal fluid governed by vortex dynamics with open boundaries. The use of hydrodynamics as a tool to obtain rainfall-drought distributions is a new line of research with many facets not explored yet. To make use of basic hydrodynamics concepts, we consider the Earth's atmosphere as an ideal fluid with a certain number of vortices. Rainfall is represented by passive tracers in the fluid. In previous work this model was studied using periodic boundaries. To probe the effect of boundary conditions on this system, we study the same model with open boundaries, that is, an infinite fluid. In fact, a system of double power law was found in some rain distributions for the first time while a regime of stretched exponential was observed in drought distributions. The latter represents an unexpected behavior. Even without enough elements for a full characterization, we can attribute these results to the open boundary effects.



# Índice

---

<b>1</b>	<b>A Dinâmica dos Fluidos</b>	<b>4</b>
1.0.1	Apresentação . . . . .	4
1.0.2	Métodos de Descrição . . . . .	4
1.0.3	Forças, Pressões e Tensões nos Fluidos . . . . .	6
1.0.4	A Equação de Continuidade . . . . .	11
1.0.5	Circulação e Vorticidade . . . . .	13
1.0.6	Tipos de Escoamentos . . . . .	14
1.0.7	Viscosidade . . . . .	18
1.0.8	A Equação de Navier-Stokes . . . . .	19
1.0.9	O Número de Reynolds . . . . .	19
1.1	Fluido Ideal . . . . .	20
1.1.1	Definição . . . . .	20
1.1.2	A Equação de Euler . . . . .	20
1.1.3	O Teorema de Bernoulli . . . . .	22
1.1.4	Escoamento potencial . . . . .	23
1.1.5	Dinâmica de Vórtices . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Método Computacional</b>	<b>31</b>
2.1	História do FORTRAN . . . . .	31
2.1.1	Linguagem de Programação . . . . .	31

2.1.2	O FORTRAN e suas Versões . . . . .	32
2.1.3	O FORTRAN e o Trabalho Científico . . . . .	34
2.2	Integração Numérica . . . . .	34
2.2.1	O Método da Linha Tangente . . . . .	35
2.2.2	Erro, Convergência e Validade do Método . . . . .	36
2.2.3	Método de Euler Modificado . . . . .	38
2.2.4	Método de Integração de Runge-Kutta . . . . .	40
2.2.5	A Quarta Ordem do Runge-Kutta . . . . .	42
2.2.6	As Outras Ordens do Runge-Kutta . . . . .	44
<b>3</b>	<b>A Pesquisa Motivadora e o Modelo Estudado</b>	<b>47</b>
3.1	Sobre o Estudo de chuvas e Secas . . . . .	47
3.2	Sobre a Pesquisa Motivadora . . . . .	47
3.3	Sobre o Modelo Estudado . . . . .	49
3.3.1	Descrição do Modelo . . . . .	49
3.3.2	Apliação do Modelo na Distribuição de chuvas e secas . . . . .	50
3.3.3	O Modelo e a Simulação . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Resultados e Discussões</b>	<b>54</b>
4.1	Resultados . . . . .	54
4.1.1	Distribuição de Chuvas . . . . .	54
4.1.2	Distribuição de Secas . . . . .	64
4.2	Discussões . . . . .	69
4.2.1	Tendências . . . . .	69
4.2.2	Comparação com Resultados de Trabalhos Similares . . . . .	84
<b>5</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>87</b>

5.1	Conclusões . . . . .	87
5.2	Perspectivas . . . . .	88
	<b>Apêndice</b>	<b>88</b>
<b>A</b>	<b>Dedução da Equação de Navier-Stokes</b>	<b>89</b>
<b>B</b>	<b>Rotinas Elaboradas no Trabalho</b>	<b>92</b>
B.1	Programa Powerlaw7.f . . . . .	92
B.2	Programa Powerlaw8.f . . . . .	101
B.3	Programa trdf.f . . . . .	101

# Lista de Figuras

---

1.1	Uma força externa, $F_{ext}$ , é aplicada na bola que se deforma até que sejam produzidas forças internas de reação, $F_{int}$ . Na figura, tanto $F_{ext}$ como $F_{int}$ não aparecem no ponto de atuação(Figura adaptada) [5]. . . . .	5
1.2	a) Linhas de corrente num fluido em escoamento; b) Tubo formado por linhas de corrente. . . . .	7
1.3	(a) Uma força externa, $F_{ext}$ aplicada em uma das faces de um elemento cúbico do fluido. $F_{ext}$ é decomposta em uma componente na direção do eixo $z$ , $P_z$ , e em duas componentes nas direções $x$ e $y$ , $S_x$ e $S_y$ , respectivamente; (b) Representação dos pares de pressão, $(\mathbf{P}_x - \mathbf{P}'_x, \mathbf{P}_y - \mathbf{P}'_y$ e $\mathbf{P}_z - \mathbf{P}'_z)$ , atuando em todo o cubo; (c) Representação do conjunto $\mathbf{S}_x$ de tensões tangenciais, formado por $(\mathbf{S}_{yz} - \mathbf{S}_{zy}$ e $\mathbf{S}'_{yz} - \mathbf{S}'_{zy})$ , atuando nas faces do cubo. . . . .	9
1.4	Porção de massa, $dm$ , que atravessa $d\zeta$ , onde $\mathbf{v}$ é a velocidade e $\mathbf{n}$ é a normal em $d\zeta$ . . . . .	12
1.5	a) Caminho $C$ com orientação dada pelo círculo interno; b) Subcírculos orientados. A soma da circulação de todos os caminhos é igual ao de $C$ . . . . .	13
1.6	Vetor vorticidade apontando na direção perpendicular a superfície na qual se obtêm a circulação. . . . .	14
1.7	Tubo de corrente: a porção de massa que se desloca com velocidade $\mathbf{u}_1$ entrando no tubo, é igual a que sai com velocidade $\mathbf{u}_2$ na outra ponta. . . . .	15
1.8	Diferença entre circulação e vorticidade: em a) o elemento apresenta apenas circulação e em b) circulação e vorticidade. . . . .	17
1.9	Linha de corrente fechada $C$ em escoamento: $u(c_a)$ é igual a $u(c_b) + du$ enquanto $C'$ corresponde á nova posição de $C$ após o tempo $dt$ . . . . .	21

1.10	Linhas de corrente resultante da soma de dois escoamentos potênciais: (a) Escoamento paralelamente uniforme e um sorvedouro; (b) Escoamento paralelamente uniforme e um sumidouro (Figura adaptada) [13]. . . . .	25
1.11	Trajectoria de 2 vórtices com circulações de mesmo módulo e sinais opostos.	27
1.12	Trajectoria de 2 vórtices com circulações de mesmo módulo e sinal. . . . .	27
1.13	Trajectoria de 2 vórtices com circulações de módulos diferentes e sinais opostos.	29
1.14	Trajectoria de 2 vórtices com circulações de mesmo sinal e módulos diferentes.	30
2.1	Método de Euler; a solução aproximada, $y(x_n + 1)$ , está na reta tangente à curva no ponto $y(x_n)$ [19]. . . . .	37
2.2	Erro local e Global; $l(x)$ : erro local; $G(x)$ : erro global; $s_a$ : solução aproximada; $f(x_{n-1}, y_{n-1})$ : reta tangente à curva no ponto $y_{n-1}$ . . . . .	39
2.3	Método de Euler modificado; Esquema comparativo entre as soluções dadas pelos métodos de Euler, $Y_{n+1}$ , e Euler modificado $Y'_{n+1}$ ; $f(x_n, y_n)$ : reta tangente à curva exata no ponto $y(x_n)$ ; $f(x_{n+1}, y_{n+1})$ : reta tangente no ponto $(x_{n+1}, y_{n+1})$ ; $f_{\text{médio}}$ : inclinação média entre as tangentes; $f(x_n, y_n)$ e $f(x_{n+1}, y_{n+1})$ . . . . .	41
2.4	Método de Runge-Kutta; $t_1$ : reta tangente à curva $s_1$ no ponto $y(x_n)$ ; $t_2$ : reta tangente à curva $s_2$ no ponto $p_1$ ; $t_3$ : reta tangente à curva $s_3$ no ponto $p_2$ ; $t_4$ : reta tangente à curva $s_4$ no ponto $p_3$ . . . . .	43
3.1	<b>Configuração inicial do modelo no qual podemos ver as posições iniciais das partículas (quadrado preenchido) e dos vórtices (círculo); as posições das estações (quadrado vazio).</b> . . . . .	51
4.1	<b>Gráficos de <math>\log N</math> versus <math>\log S</math> para distribuição de chuvas para os estudos com <math>N_v = 10, 50</math> e <math>l = 0.01</math>.</b> . . . . .	55
4.2	<b>Gráficos de <math>\log N</math> versus <math>\log S</math> para distribuição de chuvas para os estudos com <math>N_v = 100, 200</math> e <math>l = 0.01</math>.</b> . . . . .	56
4.3	<b>Gráficos de <math>\log N</math> versus <math>\log S</math> para distribuição de chuvas para os estudos com <math>N_v = 10, 50</math> e <math>l = 0.005</math>.</b> . . . . .	57
4.4	<b>Gráficos de <math>\log N</math> versus <math>\log S</math> para distribuição de chuvas para os estudos com <math>N_v = 100</math> e <math>l = 0.005</math>.</b> . . . . .	58

4.5	<b>Gráficos de <math>\log N</math> versus <math>\log S</math> para distribuição de chuvas para os estudos com <math>N_v = 200</math> e <math>l = 0.005</math>.</b>	59
4.6	<b>Gráficos de <math>\log N</math> versus <math>\log D</math> para distribuição de chuvas para os estudos com <math>N_v = 10, 50</math> e <math>l = 0.01</math>.</b>	60
4.7	<b>Gráficos de <math>\log N</math> versus <math>\log D</math> para distribuição de chuvas para os estudos com <math>N_v = 100, 200</math> e <math>l = 0.01</math>.</b>	61
4.8	<b>Gráficos de <math>\log N</math> versus <math>\log D</math> para distribuição de chuvas para os estudos com <math>N_v = 10, 50</math> e <math>l = 0.005</math>.</b>	62
4.9	<b>Gráficos de <math>\log N</math> versus <math>\log D</math> para distribuição de chuvas para os estudos com <math>N_v = 100</math> e <math>l = 0.005</math>.</b>	63
4.10	<b>Gráficos de <math>\log N</math> versus <math>\log D</math> para distribuição de chuvas para os estudos com <math>N_v = 200</math> e <math>l = 0.005</math>.</b>	64
4.11	<b>Regressão linear aplicada ao estudo com <math>N_v = 10</math> e <math>l = 0.01</math> para distribuição de chuvas.</b>	65
4.12	<b>Regressão linear aplicada ao estudo com <math>N_v = 50</math> e <math>l = 0.01</math> para distribuição de chuvas.</b>	66
4.13	<b>Regressão linear aplicada ao estudo com <math>N_v = 100, 200</math> e <math>l = 0.01</math> para distribuição de chuvas: podemos observar sistemas de dois regimes.</b>	67
4.14	<b>Regressão linear aplicada aos estudos com <math>N_v = 200</math> e <math>l = 0.01</math> para distribuição de chuvas.</b>	68
4.15	<b>Regressão linear aplicada aos estudos com <math>N_v = 100</math> e <math>l = 0.005</math> para distribuição de chuvas.</b>	68
4.16	<b>Regressão linear aplicada aos estudos com <math>N_v = 200</math> e <math>l = 0.005</math> para distribuição de chuvas.</b>	69
4.17	<b>Tabela 1 - Relação dos expoentes encontrados para distribuição de chuvas nos estudos com <math>l = 0.01</math>.</b>	70
4.18	<b>Tabela 2 - Relação dos expoentes encontrados para distribuição de chuvas nos estudos com <math>l = 0.005</math>.</b>	70
4.19	<b>Gráficos de <math>\log N</math> versus <math>\log D</math> para distribuição de secas para os estudos com <math>N_v = 10, 50</math> e <math>l = 0.01</math>.</b>	71

4.20	Gráficos de $\log N$ versus $\log D$ para distribuição de secas para os estudos com $N_v = 100, 200$ e $l = 0.01$ . . . . .	72
4.21	Gráficos de $\log N$ versus $\log D$ para distribuição de secas para os estudos com $N_v = 10, 50$ e $l = 0.005$ . . . . .	73
4.22	Gráficos de $\log N$ versus $\log D$ para distribuição de secas para os estudos com $N_v = 100$ e $l = 0.005$ . . . . .	74
4.23	Gráficos de $\log N$ versus $\log D$ para distribuição de secas para os estudos com $N_v = 200$ e $l = 0.005$ . . . . .	75
4.24	Determinação de expoentes para distribuição de secas para os estudos com $N_v = 50, l = 0.01$ e $P_r = 0.2, 0.8$ . . . . .	76
4.25	Determinação de expoentes para distribuição de secas para os estudos com $N_v = 50, l = 0.01$ e $P_r = 0.8, 1.0$ . . . . .	77
4.26	Determinação de expoentes para distribuição de secas para os estudos com $N_v = 100, l = 0.01$ e $P_r = 0.2, 0.4$ . . . . .	78
4.27	Determinação de expoentes para distribuição de secas para os estudos com $N_v = 200, l = 0.005$ e $P_r = 1.2$ . . . . .	79
4.28	Determinação de expoentes para distribuição de secas para os estudos com $N_v = 200, l = 0.005$ e $P_r = 1.4$ . . . . .	79
4.29	Determinação de expoentes para distribuição de secas para os estudos com $N_v = 100, l = 0.005$ e $P_r = 0.2, 0.4, 1.0$ . . . . .	80
4.30	Tabela 3 - Relação dos expoentes encontrados para distribuição de secas nos estudos com $l = 0.01$ . . . . .	80
4.31	Tabela 4 - Relação dos expoentes encontrados para distribuição de secas nos estudos com $l = 0.005$ . . . . .	81
4.32	Expoentes para o estudo com $l = 0.005, N_v = 200$ e $P_r = 0.1, 0.4, 0.8, 1.2$ . . . . .	81
4.33	Posição final dos tracejadores para os estudos com $l = 0.005, N_v = 200$ e $P_r = 0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4$ . . . . .	82
4.34	Expoentes para os estudos com $l = 0.005, P_r = 0.8$ e $N_v = 10, 50, 100, 200$ . . . . .	83
4.35	Expoentes para os estudos com $P_r = 0.8, N_v = 200$ e $l = 0.01, 0.005$ . . . . .	84

4.36	Posição final dos tracejadores para os estudos com $N_v = 50$ , $P_r = 0.8$ e $l = 0.01, 0.005$ . . . . .	85
------	---	----



# Introdução

---

Em 2001, uma pesquisa realizada por Peters *et al.*[1, 2] sobre o comportamento de distribuições de chuvas e secas demonstraram a presença de leis de potências em histogramas de números de eventos de chuvas *versus* intensidade do evento e de números de eventos de secas *versus* duração do evento. Aqui, entende-se por eventos de chuva cada precipitação registrada com duração igual ou superior a 1 minuto. De mesma forma, define-se evento de seca cada período de estio de duração igual ou superior a 1 minuto. O aparelho de medida possui resolução de 30 segundos entre um evento e outro. A definição de intensidade de chuva está relacionada à porção de massa de água acumulada ao final de uma precipitação. Em 2002, um estudo feito por Dickman[3, 4], numa abordagem totalmente diferenciada, também apresentou leis de potências. Do confronto dos dois modelos elaborados, surgiu uma nova fonte de estudos sobre distribuição de chuvas e secas envolvendo desde fenômenos de criticalidade auto-organizada a dinâmica de vórtices.

Na abordagem utilizada por Dickman, o modelo de tracejadores passivos foi todo contextualizado em hidrodinâmica em que se buscou a origem das leis de potências em alguns aspectos do movimentos turbulentos. Para simular a atmosfera, concebeu-se um modelo com fronteiras periódicas no qual a turbulência foi alcançada pela superposição da dinâmica de escoamento de um conjunto de vórtices num fluido ideal. Já os tracejadores são partículas pontuais e sem massa, que obedecem à dinâmica do fluido sem apresentar qualquer resistência. Assim, um aspecto interessante que ainda não havia sido estudado é o efeito da condição de fronteira aberta no modelo de tracejadores passivos. Esse é o objetivo do presente trabalho: analisar o efeito da fronteira aberta no modelo de tracejadores passivos além de endossar a natureza hidrodinâmica da atmosfera como um dos principais responsáveis pelo surgimento das leis de potências nas distribuições de chuvas e secas.

No capítulo 1 são apresentados os principais conceitos de hidrodinâmica com ênfase naqueles mais relevantes ao nosso estudo. No capítulo 2 discutimos a linguagem escolhida na realização deste trabalho, o FORTRAN 77. Apresentamos, também, os métodos de integração de Euler e Runge-Kutta usados na simulação. No capítulo 3 fazemos a descrição pura do modelo vinculando a hidrodinâmica envolvida aos métodos computacionais utilizados. Descrevemos, também, a pesquisa desenvolvida por Peters *et*

*al.*, a partir da qual se deu a idéia deste trabalho. E, por fim, no capítulo 4, apresentaremos os resultados, as análises feitas e as conclusões. No capítulo 4 confrontaremos nossos resultados tanto com a pesquisa motivadora quanto com trabalhos semelhantes realizados por Dickman com fronteira periódica. Na parte de análise, consideramos aspectos como caracterizações qualitativas e quantitativas das curvas e tendências com relação ao tamanho da caixa, número de vórtices e período de integração.

# Capítulo 1

---

## A Dinâmica dos Fluidos

### 1.0.1 Apresentação

Na vida corriqueira, numa análise mais descompromissada, é natural que o senso comum seja usado na identificação de fluidos. Qualquer pessoa poderia designá-lo como qualquer substância, ou um estado da matéria, que pode fluir.

Numa definição mais rigorosa, um fluido é tudo aquilo que não se opõe a forças de deformação. Um sólido qualquer, se submetido a uma força tangencial, como mostra a Fig. 1.1, se deforma até o limite em que tensões tangenciais internas se oponham àquela, equilibrando o sistema. Essas forças internas de reação são originadas a partir das ligações químicas existentes entre as substâncias que compõem o sólido. A natureza dessas ligações determina a estrutura interna do sólido e sua presença, ou ausência, define como essa estrutura responde a ações externas.

No lugar de uma força reação, um fluido sempre responde à atuação de uma força de deformação, de qualquer intensidade, escoando sem restaurar a forma. Isso explica sua falta de forma fixa e o fato de nunca voltar a sua forma original.

### 1.0.2 Métodos de Descrição

O primeiro passo na interpretação de um problema físico é a caracterização de sua porção elementar e é nesse ponto que entra a idéia de partícula. Num fluido define-se por *partículas* elementos deste de volume suficientemente pequenos para serem considerados macroscopicamente, mas infinitamente grandes quando comparados com ordens de grandeza microscópica.



**Figura 1.1:** Uma força externa,  $F_{ext}$ , é aplicada na bola que se deforma até que sejam produzidas forças internas de reação,  $F_{int}$ . Na figura, tanto  $F_{ext}$  como  $F_{int}$  não aparecem no ponto de atuação (Figura adaptada) [5].

O próximo passo é, então, decifrar a dinâmica de uma partícula ou sistema de partículas. No método de descrição de Lagrange, isso é feito através da obtenção da trajetória da partícula ou, em outras palavras, pela solução da equação-posição  $\mathbf{r}(r_0, t_0, t)$ , onde  $r_0$  e  $t_0$  são posição e tempo iniciais, respectivamente. De  $\mathbf{r}(r_0, t_0, t)$ , pode-se obter ainda a velocidade,  $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$  e aceleração,  $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ . No entanto, em hidrodinâmica, solucionar  $\mathbf{r}(r_0, t_0, t)$  é, na maioria dos casos, complicado o suficiente para ser utilizado.

Numa abordagem mais funcional, o método de descrição de Euler considera a variação da velocidade do fluido com o tempo em cada ponto fixo do mesmo,  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Em cada instante  $t$  uma partícula diferente do fluido passa pelo ponto  $\mathbf{r}$ . Assim, para cada  $t$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  fornece a velocidade da partícula que está passando por  $\mathbf{r}$  naquele momento. Um aspecto importante dessa descrição é que, dado  $\mathbf{u}$ , a derivada  $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$  não representa a mesma variação como ocorre em Lagrange. Isso porque  $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$  descreve como a velocidade de uma partícula do fluido varia no tempo enquanto esta se desloca no espaço. Já  $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$  deve figurar duas taxas de variação distintas :

★ aquela ocorrida entre dois pontos do fluido, separados de  $d\mathbf{r}$ , num mesmo instante  $t \rightarrow \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \frac{dz}{dt}$  ;

★ aquela ocorrida no tempo para um ponto fixo do fluido  $\rightarrow \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ .

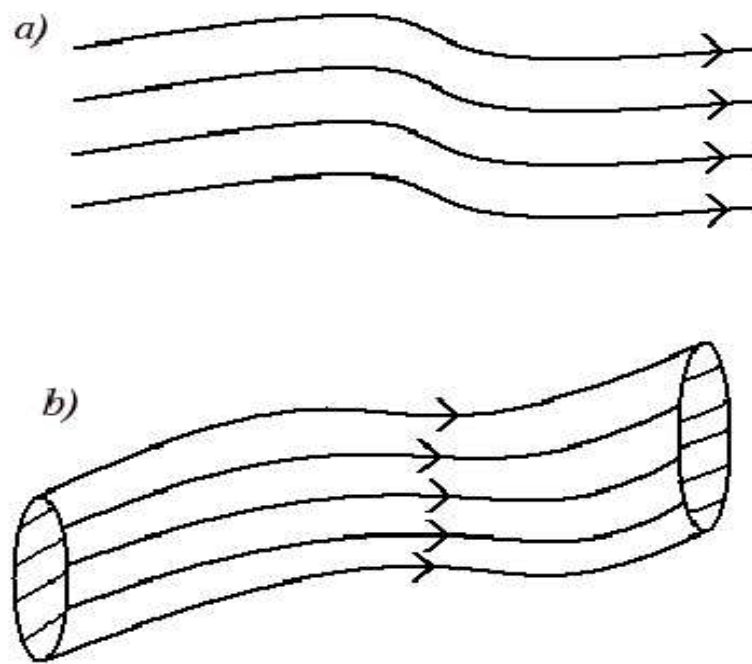
Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \left\{ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right) \right\} \mathbf{u}; \\ \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Esboçando o vetor velocidade para cada um dos pontos, pode-se construir um campo vetorial que representa o campo de velocidades do fluido. Dada essa configuração, traçando uma linha tangente aos vetores de  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , tem-se uma *linha de corrente*. Duas linhas de correntes não podem se interceptar, pois, nesse caso haveria dois vetores associados a um mesmo ponto. Uma linha de corrente não descreve a trajetória de uma partícula do fluido, portanto, o caminho desta não necessariamente coincide com aquela [6, 7]. Uma curva fechada formada por linhas de corrente gera um tubo de corrente como mostra a figura 1.2(b).

### 1.0.3 Forças, Pressões e Tensões nos Fluidos

As forças que atuam num fluido são classificadas, de acordo com sua natureza, em volumétricas e superficiais. Forças volumétricas atuam em todo o meio, podendo ser medidas em uma parte deste apenas, isso



**Figura 1.2:** a) Linhas de corrente num fluido em escoamento; b) Tubo formado por linhas de corrente.

porque são proporcionais à porção do meio considerada. São forças de longo alcance e, na maior parte das vezes, externas, como força elétrica ou gravitacional. Num fluido em movimento, forças volumétricas internas podem aparecer devido ao atrito entre camadas adjacentes do mesmo, ocasionando o que chamamos de tensão tangencial. Forças dessa natureza são chamadas de *viscosas* e caracterizam um fluido real. Forças superficiais são exclusivamente internas e originadas entre partes adjacentes do fluido. Algumas são de natureza interatômica, enquanto outras são causadas em cada porção do fluido por toda a vizinhança que o cerca. Portanto, forças superficiais são consideradas de curto alcance.

Trabalhando com uma partícula do fluido, por conveniência um cubo, aplica-se uma força em uma das faces, em que a normal a cada uma delas aponta para fora. Define-se *tensão tangencial* a componente da força paralela à face e de *pressão* a componente normal, ambas divididas pela área da face, Fig. 1.3(a). As tensões e pressões atuantes no cubo obedecem a regras de simetrias a saber:

★ Na Fig. 1.3(b), tem-se a pressão na face cuja normal aponta na direção  $z$ ,  $\mathbf{P}_z$ , e a pressão na face oposta,  $\mathbf{P}'_z$ . Se  $\mathbf{P}_z$  e  $\mathbf{P}'_z$  possuírem magnitudes diferentes, a pressão resultante seria  $\mathbf{P}_R = |\mathbf{P}_z - \mathbf{P}'_z|$ , o que daria uma força resultante proporcional a

$$\mathbf{P}_R l^2 \propto l^3 \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \propto \frac{\mathbf{P}_R}{l}$$

onde  $\mathbf{a}$  é a aceleração e  $l$  é o lado do cubo. No limite  $l \rightarrow 0$

$$\lim_{l \rightarrow 0} \mathbf{a} \rightarrow \infty$$

o que é um absurdo. Portanto,  $\mathbf{P}_z = \mathbf{P}'_z$ . Esse raciocínio vale para cada uma das três direções, o que resulta em 3 pares de pressão,  $(\mathbf{P}_x - \mathbf{P}'_x, \mathbf{P}_y - \mathbf{P}'_y, \mathbf{P}_z - \mathbf{P}'_z)$ , direcionados em cada um dos eixos. Por conclusão, tem-se que a pressão num ponto qualquer do fluido depende da posição do ponto e é contínua em  $\mathbf{r}$  de tal forma que as derivadas  $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial z}$  existem e são bem determinadas.

★ Na Fig. 1.3(c), tem-se a tensão tangencial direcionada para  $y$ ,  $\mathbf{S}_{yz}$ , e a tensão direcionada para  $z$ ,  $\mathbf{S}_{zy}$  e seus opostos,  $\mathbf{S}'_{yz}$  e  $\mathbf{S}'_{zy}$ . De modo análogo, se  $\mathbf{S}_{yz} \neq \mathbf{S}_{zy}$ , tem-se um torque resultante,  $\tau_R$ , dado por

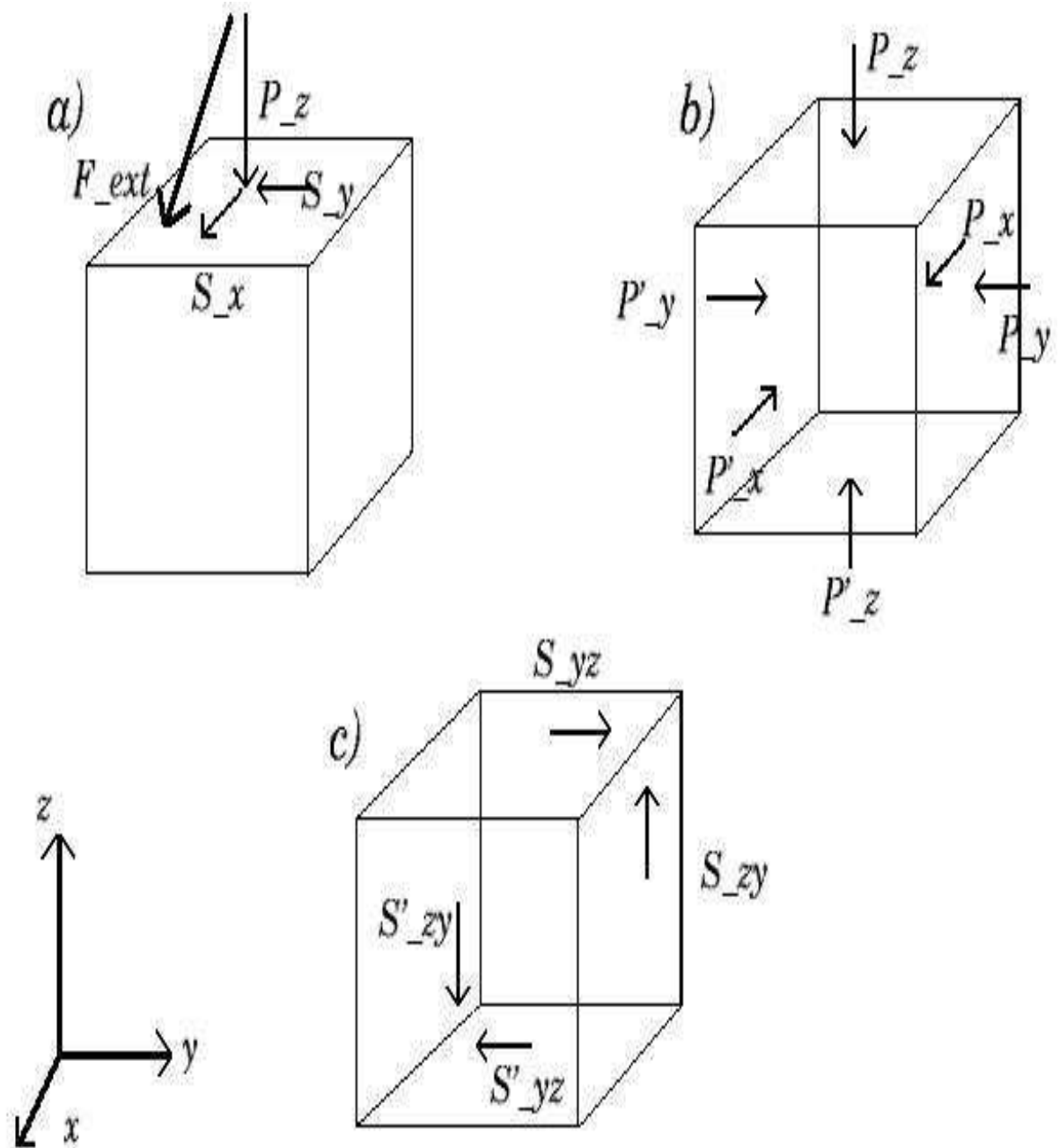
$$\tau_R = (\mathbf{S}_{yz} - \mathbf{S}_{zy}) l^2 \times \mathbf{d}$$

$$\tau_R \propto |\mathbf{S}_{yz} - \mathbf{S}_{zy}| l^3$$

onde  $\mathbf{d}$  é o braço de alavanca. Esse torque provocaria uma rotação do cubo em torno do eixo  $x$ . O momento de inércia nesse caso é

$$I \propto ml^2$$

$$I \propto l^5$$



**Figura 1.3:** (a) Uma força externa,  $F_{ext}$  aplicada em uma das faces de um elemento cúbico do fluido.  $F_{ext}$  é decomposta em uma componente na direção do eixo  $z$ ,  $P_z$ , e em duas componentes nas direções  $x$  e  $y$ ,  $S_x$  e  $S_y$ , respectivamente; (b) Representação dos pares de pressão,  $(P_x - P'_x, P_y - P'_y$  e  $P_z - P'_z)$ , atuando em todo o cubo; (c) Representação do conjunto  $S_x$  de tensões tangenciais, formado por  $(S_{yz} - S'_{zy})$  e  $(S'_{yz} - S_{zy})$ , atuando nas faces do cubo.



Como

$$\tau_R = I\alpha$$

$$\alpha \propto \frac{|\mathbf{S}_{yz} - \mathbf{S}_{zy}|}{l^2}$$

onde  $\alpha$  é a aceleração angular. E no limite  $l \rightarrow 0$

$$\lim_{l \rightarrow 0} \alpha \longrightarrow \infty$$

o que é um absurdo. Assim,  $\mathbf{S}_{yz} = \mathbf{S}_{zy}$  com uma relação idêntica para o par  $\mathbf{S}'_{yz}$  e  $\mathbf{S}'_{zy}$ . Para simplificar a notação, denomina-se  $\mathbf{S}_i = \mathbf{S}_{kj} = \mathbf{S}_{jk}$ , onde  $i, j, k = x, y, z$  e  $i \neq j \neq k$ . Considerando todas as faces, existem 6 pares de tensão tangencial,  $[(\mathbf{S}_x \text{ e } \mathbf{S}'_x), (\mathbf{S}_y \text{ e } \mathbf{S}'_y), (\mathbf{S}_z \text{ e } \mathbf{S}'_z)]$ , formando 3 conjuntos, onde cada um destes atua paralelo a um dos planos dos eixos coordenados ( $x - y$ ,  $x - z$ ,  $y - z$ ).

Esses dois resultados, aliados a condição de equilíbrio no fluido, levam a consequências importantes, que são objeto de estudo na hidrostática e, além disso, podem ser aplicados em hidrodinâmica. Uma delas é que todas as tensões tangenciais são identicamente nulas. Ou seja, uma das condições de repouso é a não existência de tensões tangenciais no fluido. A outra é que todos os pares de pressão devem ser iguais entre si para garantir a estática. Daí, segue que a pressão no fluido depende apenas da posição do elemento em questão, já que aquela é a mesma em todas as direções das faces do cubo. Para formular isso, considere a força aplicada em um elemento de volume  $V$

$$- \int_S P d\mathbf{S} \quad (1.2)$$

onde  $S$  é a superfície que compreende o volume  $V$ . O sinal negativo indica que a força aponta na direção oposta ao vetor normal á superfície. Usando teorema de Gauss

$$- \int_S P d\mathbf{S} = - \int_V \nabla P dV \quad (1.3)$$

Desta forma, pode-se dizer que a densidade de força,  $\mathbf{f}$ , é

$$\mathbf{f} = \nabla P \quad (1.4)$$

que é a equação que rege a hidrostática.

*Exemplo:* Seja uma porção de um fluido de densidade constante em equilíbrio na superfície da terra. Aqui, a força externa atuando é a gravidade,  $\mathbf{F}_g$ . Logo,

$$\mathbf{f} = \frac{m}{V} \mathbf{g}$$

$$\nabla P = \rho \mathbf{g}$$

onde  $\rho$  é a densidade do fluido. Como,  $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ ,

$$\frac{\partial P}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} = \rho \mathbf{g}$$

Integrando

$$P = \rho g z + K$$

onde  $K$  é a constante de integração. Essa constante pode adquirir qualquer valor de acordo com as condições sob as quais a superfície do fluido está submetida. Para o caso da superfície livre, a constante  $K$  assume o valor da pressão atmosférica,  $P_a$ .

$$P = \rho g z + P_a \quad (1.5)$$

A equação (1.5) é chamada *lei de Stevin* e é a mais conhecida relação da hidrostática.

#### 1.0.4 A Equação de Continuidade

A equação de continuidade enuncia a lei de conservação de massa num fluido. Dado um volume fixo qualquer  $\varpi$  do fluido contido na superfície  $\varsigma$  e parado no sistema Euleriano, existe um fluxo de massa passando por  $\varsigma$  devido ao escoamento. Na ausência de uma fonte e/ou um sumidouro, a lei de conservação estabelece que a taxa de variação de massa dentro de  $\varpi$  é igual ao negativo do fluxo de massa que atravessa a superfície. Seja  $d\varsigma$  um elemento infinitesimal da superfície,  $\mathbf{n}$  a normal à  $\varsigma$  direcionada para fora e  $\mathbf{u}$  a velocidade associada à posição de  $d\varsigma$ , Fig. 1.4. A porção de massa que atravessa o elemento  $d\varsigma$  é dada por  $\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\varsigma$ . Ou seja,

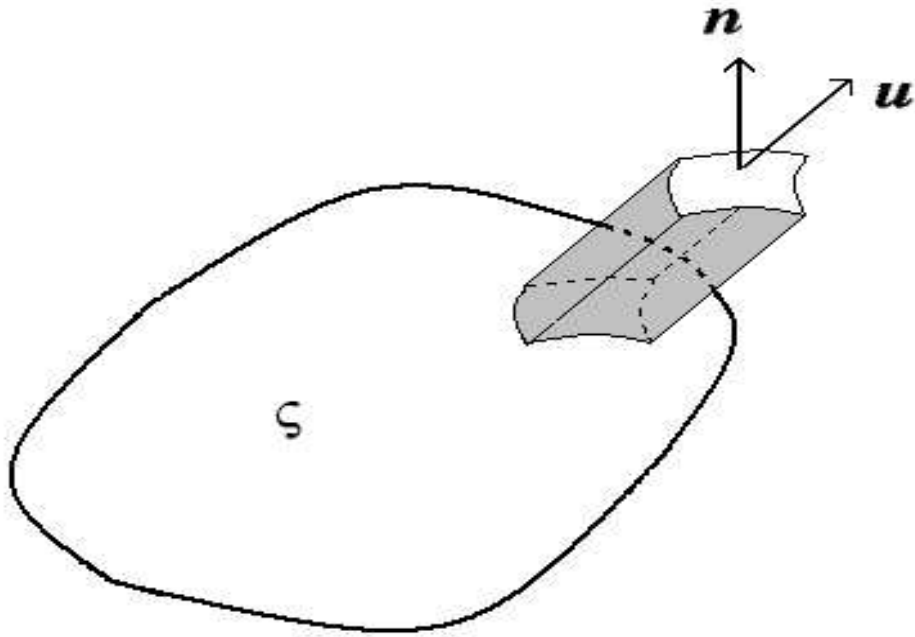
$$\frac{dm}{dt} = - \int_{\varsigma} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\varsigma \quad (1.6)$$

A massa total contida em  $\varpi$  é

$$m = \int_{\varpi} \rho d\varpi \quad (1.7)$$

Assim,

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d \int_{\varpi} \rho d\varpi}{dt} = \int_{\varpi} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\varpi$$



**Figura 1.4:** Porção de massa,  $dm$ , que atravessa  $d\zeta$ , onde  $\mathbf{v}$  é a velocidade e  $\mathbf{n}$  é a normal em  $d\zeta$ .

Substituindo em (1.6)

$$\int_{\varpi} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\varpi = - \int_{\zeta} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\zeta$$

e aplicando o teorema da divergência

$$\int_{\varpi} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\varpi = - \int_{\varpi} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) d\varpi$$

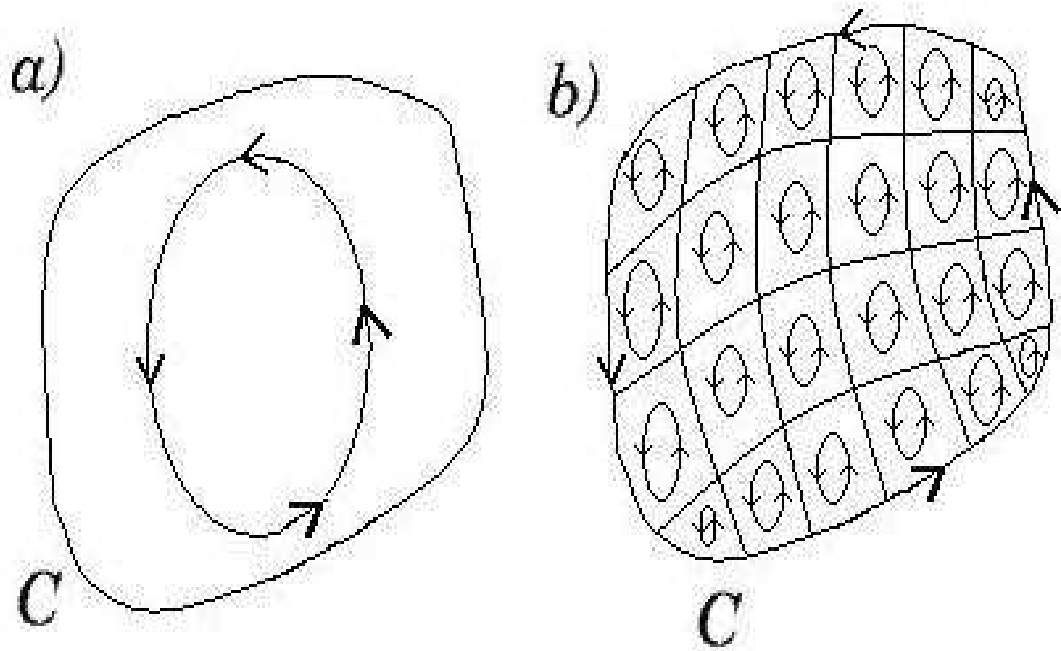
$$\int_{\varpi} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] d\varpi = 0$$

Como  $\varpi$  é arbitrário, vale a igualdade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \rho) \cdot \mathbf{u} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (1.8)$$

que é a equação de continuidade.



**Figura 1.5:** a) Caminho  $C$  com orientação dada pelo círculo interno; b) Subcírculos orientados. A soma da circulação de todos os caminhos é igual ao de  $C$ .

### 1.0.5 Circulação e Vorticidade

Circulação e Vorticidade são duas das grandezas utilizadas na caracterização de tipos de escoamento. Esse é o tema da próxima seção, onde mais detalhes serão discutidos; por hora apenas as definições devem ser apresentadas.

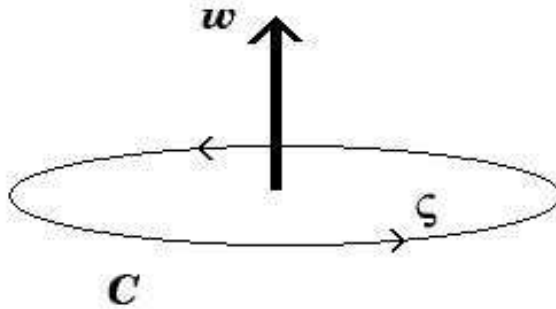
*Circulação* - Suponha um caminho  $C$  fechado no interior do fluido em escoamento e com orientação determinada. Defini-se circulação,  $k_C$ , a integral de linha ao longo de  $C$

$$C = \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{c} \quad (1.9)$$

onde  $d\mathbf{c}$  é um deslocamento na direção de  $C$  e  $\mathbf{u}$  é a velocidade do fluido. A circulação possui duas propriedades importantes:

★  $k_C$  é aditiva. Ou seja, dividindo  $C$  em vários subcírculos de mesma orientação,  $k_C$  será igual ao somatório das circulações em cada subcírculo, Fig. 1.5.

★  $k_C$  é localizada. Se os subcírculos forem tomados tão pequenos quanto se queira, infinitesimais, então, a circulação pode ser determinada em cada ponto de fluido.



**Figura 1.6:** Vetor vorticidade apontando na direção perpendicular a superfície na qual se obtêm a circulação.

*Vorticidade* - Considere a circulação ao longo de um dos subcírculos infinitesimais citados

$$C = \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{c} \quad (1.10)$$

Usando o teorema de Stokes,

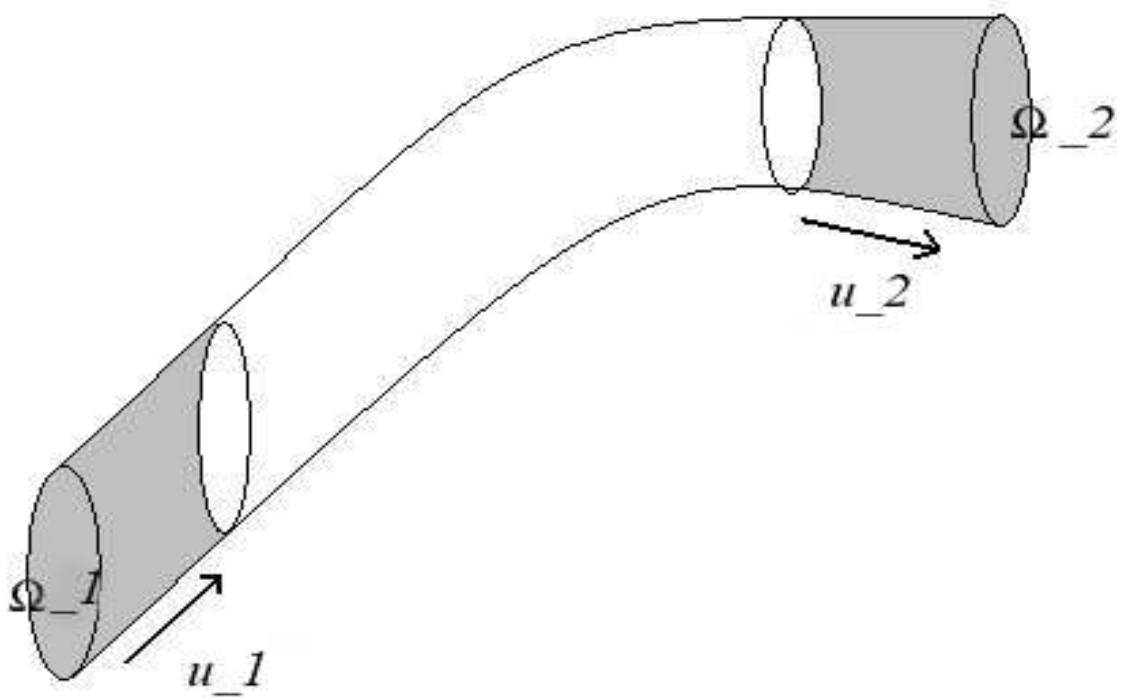
$$C = \int_{\varsigma} \nabla \times \mathbf{u} d\varsigma \quad (1.11)$$

onde  $\varsigma$  é a superfície cujo limite é dado por  $C$ . A grandeza  $\nabla \times \mathbf{u}$  é denominada vorticidade,  $\omega$ . A vorticidade é um vetor com direção perpendicular a  $\varsigma$ , Fig. 1.6, cuja magnitude corresponde à taxa de rotação do fluido. Um outra forma de interpretação é que  $\omega$  mede a circulação por unidade de área no limite  $C \rightarrow 0$ .

### 1.0.6 Tipos de Escoamentos

Um fluido pode escoar de várias maneiras. Os tipos de escoamentos mais importantes serão discutidos agora.

*Escoamento permanente ou estacionário* - É aquele em que a velocidade em cada ponto do fluido não varia com o tempo, ou seja, depende apenas da posição,  $v = v(r)$ . Como principal consequência, tem-se que a trajetória de uma partícula do fluido passa a coincidir com as linhas de corrente do fluido. Em outras palavras, ao se olhar um escoamento permanente em dois instantes distintos, este apresentará a mesma aparência, embora a partícula vista no primeiro momento na posição  $\mathbf{r}_a$  não seja a mesma do segundo momento. Agora, considere um tubo de corrente com seção reta pequena o suficiente para desprezar qualquer mudança nas variáveis usadas.



**Figura 1.7:** Tubo de corrente: a porção de massa que se desloca com velocidade  $\mathbf{u}_1$  entrando no tubo, é igual a que sai com velocidade  $\mathbf{u}_2$  na outra ponta.

A taxa com que a massa entra em um dos lados é  $\rho_1 u_1 \Omega_1$ , e a taxa com que sai do outro é  $\rho_2 u_2 \Omega_2$ , Fig. 1.7.

Como o escoamento é permanente,  $\frac{\partial m}{\partial t} = 0$  dentro de tubo e

$$\rho_a u_a \sigma_a = \rho_b u_b \sigma_b$$

$$u_a = \frac{\rho_b u_b \sigma_b}{\rho_a} \frac{1}{\sigma_a}$$

Ou, para um ponto qualquer do tubo onde  $\sigma_a = \sigma_b$

$$u \propto \frac{1}{\sigma}$$

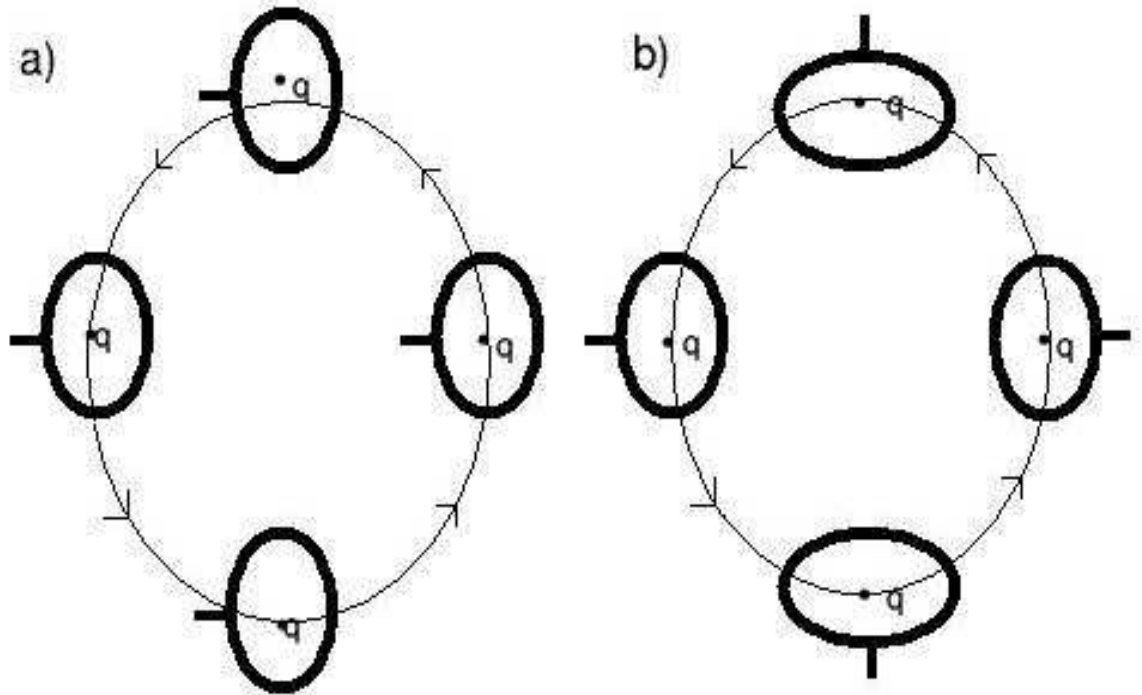
Esse resultado mostra que a velocidade num ponto do tubo é inversamente proporcional à seção reta neste ponto. Assim, numa região do fluido onde  $\mathbf{u}$  for maior, as linhas estarão mais próximas, e, onde  $\mathbf{u}$  for menor, as linhas estarão afastadas.

*Escoamentos compressível e incompressível* - Estão vinculados à densidade do fluido. Um fluido compressível é aquele em que a densidade varia de um ponto para outro, e o incompressível é o que tem densidade constante no espaço e no tempo.

Assim, um escoamento compressível obedece à dinâmica de um fluido seguindo as relações de força e pressão apresentadas bem como a equação de continuidade. No entanto, a partir de agora deve-se saber como  $\rho$  varia com  $\mathbf{r}$  na formulação das equações. Outras relações importantes, como as de Euler e de Bernoulli também, apresentarão modificações. Porém, a maioria dos problemas estudados e nas aplicações das principais equações ignora-se, quase sempre, a compressibilidade do fluido. Um dos incentivos é devido aos bons resultados que a aproximação permite, mas o fator primordial é a condição sob a qual se pode desprezar a compressibilidade. Qualquer escoamento, mesmo o de um gás, cuja velocidade seja muito menor que a velocidade do som em todos os pontos pode ser considerado incompressível. Isto porque ondas sonoras são formadas a partir da compressão e expansão das moléculas do meio, o que implica grande variação de densidade entre pontos distintos desse meio. Assim, sob esse ponto de vista, escoamentos *subsônicos* são incompressíveis enquanto escoamentos próximos à velocidade do som ou *supersônicos* são compressíveis. As equações de Euler e Bernoulli serão apresentadas mais adiante.

O escoamento incompressível, por sua vez, possui simplificadores, uma vez que  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ . A equação de continuidade fica

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{1.12}$$



**Figura 1.8:** Diferença entre circulação e vorticidade: em a) o elemento apresenta apenas circulação e em b) circulação e vorticidade.

e sua dinâmica obedece a equações mais simples, como será visto em secções próximas.

*Escoamentos rotacional e irrotacional* - Estão vinculados à circulação no fluido. O escoamento rotacional é qualquer um que tenha vorticidade não nula em todos os pontos. E o escoamento irrotacional é o que possui vorticidade nula em todos os pontos, embora isso não implique uma circulação nula. Para entender melhor a ligação entre circulação e vorticidade, suponha o elemento  $Q$  do fluido centrado no ponto  $\mathbf{q}$ , como mostra a figura. Num escoamento rotacional,  $Q$  apresenta rotação em torno de  $\mathbf{q}$  enquanto é transportado, indicando que  $\omega$  é não nula. Já num escoamento irrotacional,  $Q$  não gira em torno de seu eixo durante seu transporte e, assim,  $\omega = 0$ . O interessante é que nos dois casos a circulação pode ser nula ou não. Os exemplos a seguir tornam essa afirmação mais compreensível.

*Exemplo 1* - Considere um escoamento em que cada partícula do fluido descreve um caminho circular,  $C$ , em torno do eixo  $z$  com velocidade, em coordenadas polares, dada por

$$u_\phi = \frac{a}{r}, u_r = u_z = 0$$

onde  $a$  é uma constante qualquer. A vorticidade fica

$$\omega = \nabla \times u = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r u_\phi)}{\partial r} \right) \hat{\mathbf{z}} = 0$$



para  $r \neq 0$ . A circulação ao longo de  $C$ , para um dado  $r$ , é

$$\kappa_C = a \int \frac{1}{r} r d\phi = 2\pi a$$

Nota-se que a circulação possui mesmo valor para todo o caminho que contenha o eixo  $z$ . Como

$$\int_{\sigma} \nabla \times \mathbf{u} d\sigma = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{c}$$

Então,  $\omega = 2\pi a$  para  $r = 0$ . Assim, tem-se um escoamento irrotacional em todo fluido, exceto no eixo. Nota-se que, apesar de estarem se movendo em círculos, as partículas não apresentam vorticidade.

*Exemplo 2* - Seja um escoamento laminar tal que a velocidade é dada por

$$u_x = by, u_y = u_z = 0$$

onde  $b$  é uma constante. Assim, tem-se

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u} = -\frac{\partial(u_x)}{\partial y} \hat{\mathbf{z}} = -b$$

e mesmo estando em movimento retilíneo, as partículas possuem vorticidade associada.

### 1.0.7 Viscosidade

Para compreender de forma mais clara a idéia de viscosidade, imagine-se o fluido como se dividido em lâminas que podem deslizar umas sobre as outras sob a ação de uma força. Assim, no escoamento existirá um atrito interno entre camadas adjacentes e forças internas tangenciais ao movimento surgem em suas superfícies. Esse fenômeno é denominado *viscosidade*, e a intensidade com que ocorre é uma medida de o quão viscoso é um fluido. Essa força de atrito por área compõe as tensões tangenciais,  $\mathbf{S}_i$ , ( $i = x, y, z$ ). Como a força de viscosidade só ocorrerá entre pontos que estiverem a velocidades diferentes (pontos a mesma velocidade não se atritam), supõe-se que as tensões tangenciais se relacionem com o gradiente da velocidade de escoamento,  $\mathbf{u}$ . Assim, cada  $\mathbf{S}_i$  estará vinculada á taxa de variação da componente de  $\mathbf{u}$ , que aponta na mesma direção daquela, na direção da normal à superfície em que a tensão atua [8, 9, 10]. Considerando o elemento cúbico da seção anterior, a tensão  $\mathbf{S}_{yz}$  será proporcional à variação na direção  $z$  da componente  $u_y$

$$S_{yz} \propto \frac{\partial u_y}{\partial z}$$

enquanto

$$S_{zy} \propto \frac{\partial u_z}{\partial y}$$

Como  $S_{yz} = S_{zy}$

$$S_x = \eta \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \quad (1.13)$$

onde  $\eta$  é o coeficiente de viscosidade com valores específicos para cada material. Se em (1.13)  $\eta$  não depender de  $\mathbf{u}$ , o fluido é chamado *newtoniano*. As outras formulas são

$$S_y = \eta \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (1.14)$$

e

$$S_z = \eta \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (1.15)$$

### 1.0.8 A Equação de Navier-Stokes

A equação Navier-Stokes é aquela que descreve o movimento de uma partícula de um fluido newtoniano em escoamento incompressível. A dedução da mesma não é um processo elementar e está no apêndice A. Por hora, será apresentada apenas a expressão com breve discussão sobre suas implicações. Dessa forma, temos

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = - \left[ \frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} \right] \quad (1.16)$$

que é a equação de Navier-Stokes. Observando (1.18), vê-se que a não linearidade da relação torna a obtenção da solução muito mais difícil. A segunda derivada em  $\mathbf{u}$  implica mais uma condição de contorno. Nesse caso tem-se que a camada em contato com a superfície de um obstáculo deve estar em repouso, ou seja,  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial l} = 0$ , onde  $l$  é a direção tangencial à superfície. O fato de um fluido não poder penetrar em um sólido indica a outra condição de contorno. A velocidade  $\mathbf{u}$  não pode ter componentes normais na superfície de um obstáculo, assim,  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = 0$ , onde  $n$  é a direção normal.

### 1.0.9 O Número de Reynolds

O número de Reynolds é uma grandeza adimensional que está relacionada com o tipo de fluido que pode ocorrer num escoamento. Trata-se da razão entre grandezas que caracterizam o escoamento, tais como velocidade média de escoamento  $U$ , densidade  $\rho$ , viscosidade  $\eta$  e tamanho característico do fluxo  $L$ . Assim

$$R_e = \frac{\rho U^2}{\eta \frac{U}{L}} = \frac{UL}{\nu}$$

onde  $\nu$  é  $\frac{\eta}{\rho}$ .

Portanto, podem-se dividir os fluidos em dois tipos: aqueles com alto número de Reynolds e aqueles com baixo número de Reynolds. No regime de baixo número de Reynolds, o escoamento é dominado por tensões tangenciais de magnitudes relevantes. São fluidos muito viscosos, com baixa velocidade de escoamento e, logo, apresentam fluxo bastante estável. Já no regime de alto número de Reynolds, tem-se fluidos com viscosidade muito baixa em escoamentos a altas velocidades. O fluxo é muito menos estável com ocorrência de movimentos turbulentos geralmente advindos de superposição de vórtices.

## 1.1 Fluido Ideal

### 1.1.1 Definição

Na definição padrão, fluido ideal é aquele que não possui viscosidade e, portanto, apresenta tensões tangenciais nulas. A principal implicação é que um fluido ideal, mesmo escoando, responderá apenas à atuação das pressões normais. É claro que essa idealização não teria valor se não pudesse ser aplicada, e o que se tem na prática é que o fluido ideal é um modelo que descreve muito bem sistemas reais, com resultados suficientemente satisfatórios. Por isso o fluido ideal é largamente estudado em livros de hidrodinâmica e desponta em um grande número de trabalhos científicos.

Especificamente para a realização deste trabalho, acrescentamos algumas propriedades à definição anterior. Assim, o *nosso* fluido ideal é, também, incompressível, irrotacional e, portanto, está em escoamento potencial. Nas próximas seções será apresentado todo o tratamento relacionado ao fluido ideal padrão.

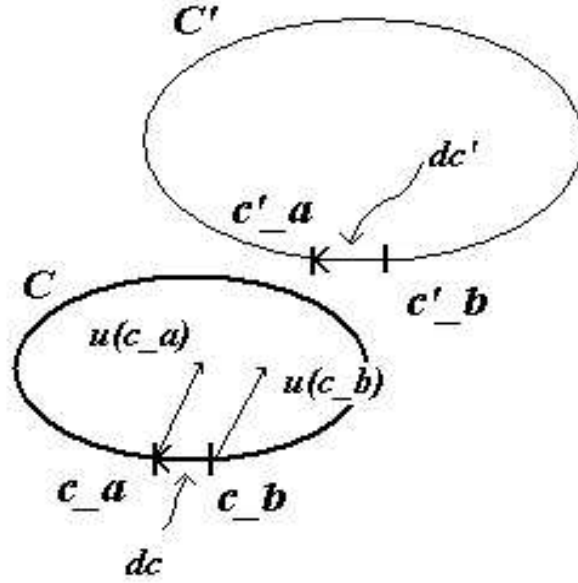
### 1.1.2 A Equação de Euler

A equação de Euler é a equação de movimento que governa um fluido ideal. Para encontrá-la, deve-se remeter as fórmulas (1.1) e (1.4).

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla P \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{-\nabla P}{\rho} \quad (1.18)$$

que é a equação de Euler. Essa é a relação que substitui a Navier-Stokes para fluidos não viscosos.



**Figura 1.9:** Linha de corrente fechada  $C$  em escoamento:  $u(c_a)$  é igual a  $u(c_b) + du$  enquanto  $C'$  corresponde á nova posição de  $C$  após o tempo  $dt$ .

**Teorema de Kelvin** - O teorema de Kelvin é uma lei de conservação da circulação aplicável a qualquer fluido incompressível regido pela equação de Euler. Para determiná-la, considere um caminho fechado,  $C$ , e formada pelas mesmas partículas. O conjunto segue o escoamento do fluido enquanto mantém o caminho  $C$ , Fig. 1.9. O que se quer é analisar a derivada total da circulação em relação ao tempo. Dessa forma, está-se pegando a variação do conjunto enquanto escoar e não apenas a variação na linha de corrente num ponto fixo do fluido.

$$\frac{d\kappa_C}{dt} = \frac{d}{dt} \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{c} = \oint \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot d\mathbf{c} + \oint \mathbf{u} \cdot \frac{d(d\mathbf{c})}{dt} \quad (1.19)$$

Examinando cada termo de (1.21) separadamente, substituindo (1.19) no primeiro deles, tem-se

$$\oint \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot d\mathbf{c} = \frac{-1}{\rho} \oint \nabla P \cdot d\mathbf{c} = \frac{-1}{\rho} \oint \frac{dP}{dc} dc = 0$$

ao longo de um caminho fechado. No segundo termo de (1.21), vê-se que, sendo  $c_a$  e  $c_b$  dois pontos distintos de  $C$ , a derivada  $\frac{d(d\mathbf{c})}{dt}$  pode ser escrita na forma

$$\frac{d(d\mathbf{c})}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{c}' - d\mathbf{c}}{dt}$$

onde  $d\mathbf{c} = c_a - c_b$  e  $d\mathbf{c}' = c_a + \mathbf{u}(c_a)dt - c_b - \mathbf{u}(c_b)dt$ . Assim,

$$\frac{d(d\mathbf{c})}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \mathbf{u}(c_a) - \mathbf{u}(c_b) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial c} dc$$

E, substituindo

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{u} \cdot \frac{d(d\mathbf{c})}{dt} &= \oint \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial c} dc = \oint \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{\partial c} dc \\ &= \oint d\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

Portanto,  $\frac{d\kappa_C}{dt} = 0$  e  $\kappa_C = \text{constante}$  para um caminho fechado qualquer dentro do fluido. Como consequência, tem-se que um fluido inicialmente em repouso, ou seja,  $\kappa_C = 0$  em  $t_0 = 0$ , nunca apresentará uma configuração em que a circulação seja diferente de 0. Enfim, conclui-se que um fluido inicialmente irrotacional jamais deixará de ser irrotacional.

### 1.1.3 O Teorema de Bernoulli

O teorema de Bernoulli é, na verdade, uma equação de conservação de energia ao longo de uma linha de corrente. Suponha um fluido incompressível em escoamento estacionário. A equação de Euler fica

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \frac{-\nabla P}{\rho}$$

Considere uma linha de corrente,  $L$ , desse fluido de tal forma que o deslocamento ao longo desta ocorre na direção  $l$ . A equação de Euler em cada ponto de  $L$  é dada por

$$u \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial l}$$

$$\frac{\partial}{\partial l} \left[ \frac{u^2}{2} + \frac{1}{\rho} P \right] = 0$$

ou seja,

$$\frac{u^2}{2} + \frac{1}{\rho} P = k \tag{1.20}$$

ou

$$\frac{\rho u^2}{2} + P = \kappa \tag{1.21}$$

onde  $\kappa = \rho k$  e  $k$  é uma constante específica de cada linha. Essa relação, que é o conhecido teorema de Bernoulli, diz que dentro de  $L$  a velocidade será maior onde a pressão for menor. Como cada termo de (1.22) possui unidade  $\frac{J}{Kg}$ , pode-se afirmar que o teorema de Bernoulli é na verdade uma equação de conservação de energia ao longo de uma linha de corrente. Aqui  $\frac{u^2}{2}$  é a energia cinética por volume, enquanto  $\frac{P}{\rho}$  é o trabalho realizado sobre o fluido pela pressão.

Se o escoamento for, também, irrotacional, tem-se  $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ . Como

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) \implies (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \frac{u^2}{2}$$

Substituindo na equação de Euler

$$\nabla \frac{u^2}{2} = \frac{-\nabla P}{\rho}$$

$$\nabla \left[ \frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right] = 0$$

ou seja,

$$\frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} = k', \quad (1.22)$$

onde  $k'$  é a mesma constante para todas as linhas de corrente no fluido.

#### 1.1.4 Escoamento potencial

Trata-se do escoamento irrotacional de um fluido incompressível que permite uma abordagem matemática muito apreciada. As propriedades citadas implicam

$$(*) \quad \nabla \times \mathbf{u} = 0 \implies \mathbf{u} = \nabla \Phi;$$

e

$$(**) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla^2 \Phi = 0;$$

onde  $\Phi$ , uma função escalar, é o *potencial de velocidade* de  $\mathbf{u}$ . Como (\*\*) é a equação de Laplace, todo tratamento e peculiaridades conhecidas na obtenção de sua solução  $\Phi$  podem ser aplicadas aqui.

Quanto às condições de contorno, não há qualquer restrição a componentes tangenciais de  $\mathbf{u}$ . Se  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$ , o número de especificações do problema passa a ser tal que não existe solução possível que as satisfaça. Assim,

o fluido em contato com um obstáculo pode deslizar paralelamente a sua superfície. Da mesma forma que ocorre quando em contato com um sólido, na interface entre dois fluidos ideais tem-se

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial n_1} = \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial n_2} = 0,$$

onde  $n_1$  e  $n_2$  denotam as direções normais das interfaces dos fluidos 1 e 2, respectivamente.

Quanto à unicidade de  $\Phi$ , pode-se afirmar que a equação de Laplace admite uma única solução [11, 12]. No entanto, a linearidade da equação aceita a superposição de soluções como solução. Como consequência pode-se observar padrões de fluxo resultantes da soma de 2 ou mais escoamentos. Outra consideração é que o fato de  $\Phi$  não depender explicitamente do tempo indica que o padrão instantâneo de fluxo do fluido está vinculado exclusivamente às condições de contorno instantâneas. Apesar disso, o escoamento potencial descreve tanto escoamentos estacionários quanto não-estacionários.

Um resultado importante vem da aplicação do teorema de Kelvin: como  $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ , tem-se que a circulação em torno de qualquer caminho fechado é nula e assim permanecerá por todo o tempo. Então, pode-se afirmar que um escoamento inicialmente potencial nunca deixará de ser potencial. Além disso, um fluido inicialmente em repouso só desenvolverá um escoamento do tipo potencial.

*Exemplo 3* - Sorvedouro, é dado por

$$u_r = \frac{U}{4\pi r^2} \hat{r}$$

Como solução  $\Phi = -\frac{U}{4\pi r}$  para  $r \neq 0$ . As linhas de corrente são radiais e partem todas de um mesmo ponto, nesse caso a origem do plano coordenado, indicando a presença de uma fonte de fluido. A constante  $U$  indica a intensidade da fonte. Mudando o sinal de  $\mathbf{u}$ , a expressão passa a representar um sumidouro.

*Exemplo 4* - Escoamento paralelamente uniforme em  $2 - D$  - é aquele em que

$$u_x = u_a; u_y = u_z = 0$$

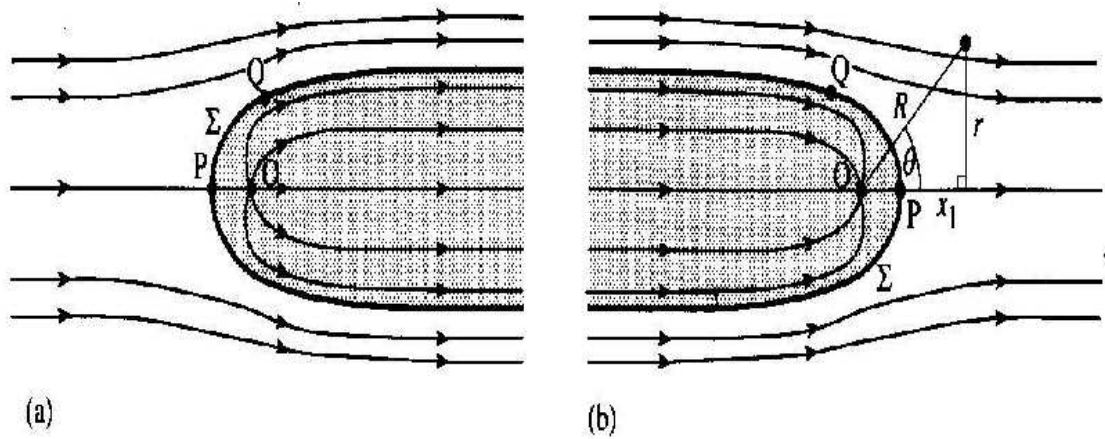
onde  $u_a$  é constante. A solução é  $\Phi = u_a x$ .

Uma solução interessante é a superposição dos dois potenciais apresentados

$$\Phi = u_a r \cos\theta - \frac{U}{4\pi r}$$

equivalente à velocidade de escoamento, em coordenadas polares

$$\mathbf{u} = \left( u_a r \cos\theta + \frac{U}{4\pi r} \right) \hat{r} - u_a r \sin\theta \hat{\theta}$$



**Figura 1.10:** Linhas de corrente resultante da soma de dois escoamentos potênciais: (a) Escoamento paralelamente uniforme e um sorvedouro; (b) Escoamento paralelamente uniforme e um sumidouro (Figura adaptada) [13].

A figura 1.10 mostra as linhas de corrente, a fonte e uma interface,  $\Sigma$ , onde existe um ponto de estagnação,  $P$ , onde  $\mathbf{u} = 0$ . A linha de corrente que vem exatamente de encontro ao ponto  $P$  se bifurca contornando  $\Sigma$ . A superfície  $\Sigma$  separa em (a) o fluido que vem de  $-\infty$  em direção à fonte do fluido que sai dela; (b) o fluido que vai para  $+\infty$  do fluido que vai em direção ao sumidouro.

### 1.1.5 Dinâmica de Vórtices

Um caso de escoamento potencial totalmente vinculado ao trabalho desta dissertação é o que descreve um *vórtice*. Este tipo de escoamento ocorre quando a velocidade do fluido é dada por

$$\mathbf{u} = \frac{\kappa}{r} \hat{\theta} \quad (1.23)$$

onde  $\kappa$  é uma constante qualquer.

Calculando a circulação no círculo de raio  $r$ , tem-se

$$K_c = \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{\kappa}{r} \hat{\theta} \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{\kappa}{r} r d\theta = \kappa 2\pi$$

Assim,

$$\kappa = \frac{K_c}{2\pi} \implies \mathbf{u} = \frac{K_c}{2\pi r} \hat{\theta}$$



Em duas dimensões, em coordenadas cartesianas,  $\mathbf{u}$  toma a forma

$$\mathbf{u} = \frac{K_c}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \hat{i} + \frac{K_c}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{j} \quad (1.24)$$

O padrão de linhas apresentadas no fluido é dominado por círculos no entorno do ponto  $r = 0$ . A intensidade de  $\mathbf{u}$  decai com o valor de  $r$ : quanto maior for a distância do ponto onde se quer medir ao eixo de rotação, menor será  $\mathbf{u}$ . A circulação no fluido é nula em todo o caminho fechado que não englobe a origem do plano coordenado onde só, e somente só, a vorticidade possui valor diferente de zero. Portanto, trata-se de um caso específico de escoamento irrotacional com um ponto singular em  $r = 0$ . Na verdade esse tipo de escoamento é irreal. Primeiro porque está totalmente baseado no teorema de Kelvin e este só é válido para o fluido ideal, que, por sua vez, não existe. Segundo porque um fluido real não apresenta pontos singulares ou, em outras palavras, vorticidade concentrada em um só ponto, pois a viscosidade atua como um elemento dispersor no fluido. No entanto, estudar esse tipo de escoamento continua sendo válido pelos mesmos argumentos que torna válido o estudo do fluido ideal.

Voltando á discussão anterior, vale ressaltar que o ponto singular não está, necessariamente, localizado na origem sempre. Vórtices podem estar espalhados por toda uma região de um fluido. A expressão de  $\mathbf{u}$ , para cada um deles, estará transladada no plano. Nesses casos de escoamento com mais de um vórtice, o regime obedecido pelos elementos do fluido é dado por dinâmica simples. Pelo princípio da superposição, a velocidade num ponto qualquer,  $\mathbf{u}_R$ , desde que não esteja ocupado por um vórtice, deve ser a soma das velocidades de cada um deles no ponto. Formulando

$$\mathbf{u}_R = \sum_{q=1}^N \mathbf{v}_q = \sum_{q=1}^N \frac{(K_c)_q}{2\pi} \frac{y_q}{x_q^2 + y_q^2} \hat{i} + \frac{(K_c)_q}{2\pi} \frac{x_q}{x_q^2 + y_q^2} \hat{j} \quad (1.25)$$

onde  $x_q^2$  e  $y_q^2$  são dados pela diferença entre as coordenadas do ponto  $R$  e do vórtice  $q$  e  $N$  é o número de vórtices.

De mesma forma, cada vórtice possui uma velocidade  $\mathbf{v}_q$ , que é a resultante entre as velocidades de todos os outros vórtices no ponto ocupado pelo primeiro, exceto a sua própria velocidade, já que não pode atuar em si mesmo.

$$\mathbf{v}_q = \sum_{p=1, p \neq q}^{N-1} \mathbf{v}_p = \sum_{p=1, p \neq q}^{N-1} \frac{(K_c)_p}{2\pi} \frac{y_p}{x_p^2 + y_p^2} \hat{i} + \frac{(K_c)_p}{2\pi} \frac{x_p}{x_p^2 + y_p^2} \hat{j} \quad (1.26)$$

As expressões (1.27) e (1.28) foram as usadas no nosso trabalho para calcular as velocidades de um ponto do fluido e de um vórtice.

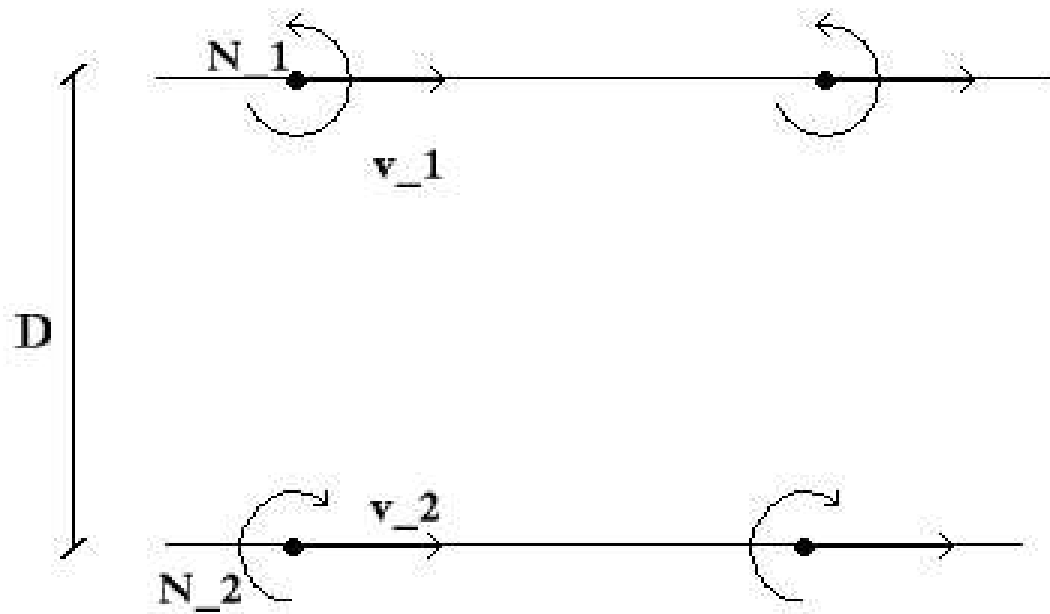


Figura 1.11: Trajetória de 2 vórtices com circulações de mesmo módulo e sinais opostos.

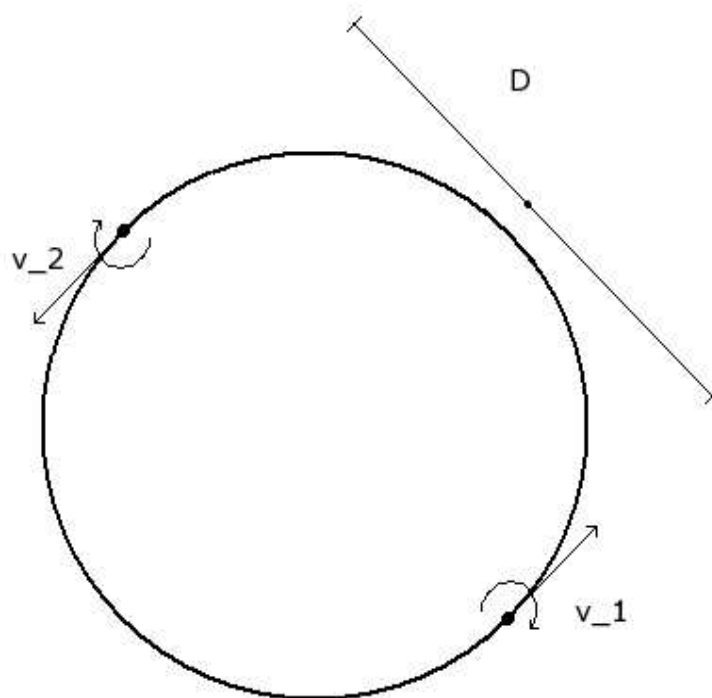
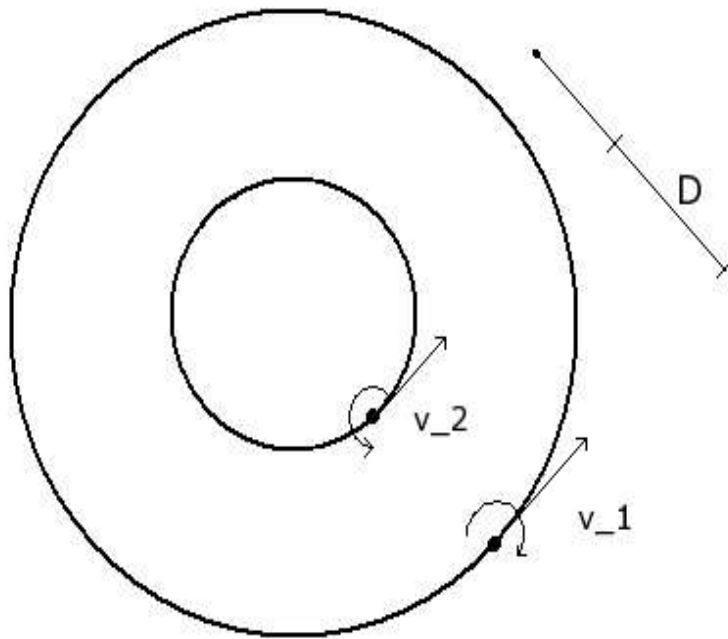


Figura 1.12: Trajetória de 2 vórtices com circulações de mesmo módulo e sinal.

*Exemplo 5* - Dois vórtices,  $N_1$  e  $N_2$ , separados por uma distância  $D$  com :

a) circulação de mesma magnitude,  $\kappa$ , e sinais opostos - Considere  $N_1$  e  $N_2$  no eixo  $Y$ . Assim, os vórtices andarão paralelos um ao outro na direção de  $X$  com velocidades de módulo, Fig. 1.11.

$$v_1 = v_2 = \frac{\kappa}{2\pi D}$$



**Figura 1.13:** Trajetória de 2 vórtices com circulações de módulos diferentes e sinais opostos.

b) circulação de mesma magnitude,  $\kappa$ , e sinais iguais - Agora, a composição entre  $v_1$  e  $v_2$  é tal que  $N_1$  e  $N_2$  passam a descrever a mesma órbita em torno do ponto médio entre eles, fig. 1.12.

c) circulação de magnitudes diferentes,  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$ , e sinais opostos - As velocidades ficam

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\kappa_2}{2\pi D} \hat{\theta}; \mathbf{v}_2 = \frac{\kappa_1}{2\pi D} \hat{\theta}$$

e os vórtices descrevem, andando em paralelo, órbitas concêntricas, Fig. 1.13.

d) circulação de magnitudes diferentes,  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$ , e sinais iguais - As velocidades ficam

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\kappa_2}{2\pi D} \hat{\theta}; \mathbf{v}_2 = -\frac{\kappa_1}{2\pi D} \hat{\theta}$$

e os vórtices apresentam-se também em órbitas concêntricas, porém antiparalelos, Fig.1.14.

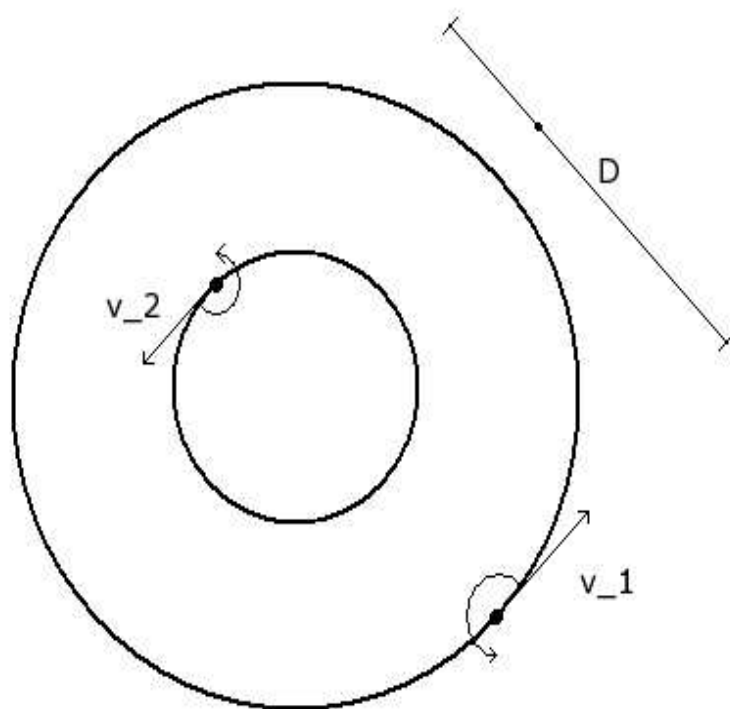


Figura 1.14: Trajetória de 2 vórtices com circulações de mesmo sinal e módulos diferentes.

# Capítulo 2

---

## Método Computacional

### 2.1 História do FORTRAN

#### 2.1.1 Linguagem de Programação

O surgimento da programação de computadores proporcionou aos profissionais em computação e aos cientista de todas as áreas uma ferramenta poderosa de aperfeiçoamento tecnológico e de estudo. No entanto, em meados da década de 40, os primeiros programadores enfrentaram grandes barreiras, em termos de tempo e eficiência operacional, no método disponível na época, a linguagem ou código de máquina [14, 15]. Esta última corresponde a uma extensa e exaustiva lista de instruções em formato binário, onde cada sequência numérica representa uma tarefa a ser realizada pelo computador. Assim, programar em uma linguagem equivalente à da máquina, porém, num formato acessível ao programador, era uma necessidade real na época.

Essa nova linguagem, denominada linguagem de programação, constitui-se um conjunto de notações sintáticas e semânticas, o código fonte, que expressam, de modo padronizado, comandos que serão traduzidos para o código de máquina e realizados pelo processador. A primeira linguagem de programação criada, o *assembly*, resumia-se a um grupo de instruções mneumônicas dependentes exclusivamente das CPU, aos quais pertenciam e com correspondência muito estreita com a linguagem da máquina. Por isso, na década de 50, um bom programador deveria saber detalhadamente sobre a arquitetura do computador no qual executaria sua rotina.

O *assembly* é o que consideramos de linguagem de baixo nível e, apesar da evolução que representa na programação, seu manuseio ainda era

bastante inconveniente. Fazia-se mister, agora, uma linguagem com uma sintaxe de fácil leitura para o programador e que pudesse ser codificada para a máquina, independente desta. Foi nesse contexto que, em 1957, a IBM (*International Business Machines*), como resultado de um projeto liderado por John Backus, apresentou o FORTRAN como a primeira linguagem de programação de alto nível.

### 2.1.2 O FORTRAN e suas Versões

Uma rotina escrita em código fonte não pode ser interpretada pelo processador, é necessário que seja traduzida em linguagem de máquina. Chama-se **compilador** o programa que realiza esse trabalho de tradução. Portanto, com o surgimento das linguagens de alto nível adiciona-se dos compiladores.

O trabalho de um compilador consiste em uma fase de análise e outra de síntese do código fonte. É na fase de análise que o compilador identifica e notifica ao programador os erros gramaticais da rotina, de acordo com as regras de sintaxe da linguagem usada, quando esses ocorrem. Na fase de síntese, os comandos são traduzidos para uma linguagem intermediária que será analisada e otimizada. Esta não é ainda o código de máquina e, portanto, não será executada pelo processador. Lendo a linguagem intermediária, o compilador detecta operações repetidas num dado bloco ou uso de dados redundantes e reestrutura a rotina ganhando tempo operacional. A partir desse novo código, a tradução para a linguagem de máquina é feita e a última etapa do processo é concluída.

FOR - TRAN são as iniciais de Formula Translation indicando sua relação com compiladores. Sua primeira versão, o FORTRAN I, tinha como principal função traduzir equações largamente usadas em problemas científicos e, apesar de ser ainda muito primitiva, caracterizava-se pelo ganho de tempo obtido tanto na programação quanto na execução [16, 17, 18]. Isso transformou o FORTRAN na linguagem mais usada em todo o mundo. Esse avanço estimulou a elaboração das versões FORTRAN II e FORTRAN III, cada qual com um número de maior de inovações em relação à versão anterior. No FORTRAN II aparece, em 1958, com o dispositivo das subrotinas, enquanto o FORTRAN III não chega a ser comercializado antes da versão seguinte.

Em 1961, é lançado o FORTRAN IV com adaptações que o tornavam compatível ao FORTRAN II. Até então, a sintaxe do FORTRAN consistia de limitado números de comandos e o uso de variáveis inteiras e reais apenas. Havia o extenso uso de arranjos do tipo **goto**, o que empobrecia a rotina, e o inconveniente de se ter de chegar a um código de fonte limpo de erros de escrita que não geravam erros de compilação, porém levavam a erros de execução.

Adaptações à linguagem continuavam, mas, agora, não apenas a IBM trabalha nisso como também outras empresas, popularizando-se em todo o mundo versões do FORTRAN não desenvolvidas por aquela. As discordâncias entre as diferentes versões levaram a uma indispensável uniformidade no formato do compilador. Em 1966, a ANSI (*American National Standards Institute*) apresenta o FORTRAN 66, que nada mais era do que uma padronização da linguagem, tornando-a legível em qualquer máquina.

Durante toda essa década e meados da seguinte, surgem desarranjos entre o código fonte, escrito em de mais uma das versões FORTRAN, e os compiladores gerando rotinas ilegíveis. Assiste-se ao fenômeno da crise dos *softwares*, desencadeada por programadores pouco habilidosos no formato padrão da ANSI. Como solução desse impasse, recorreu-se ao uso de *pré - processadores*, programas que reescreviam o código fonte convertendo comandos escritos fora da linguagem padrão. Ao mesmo tempo, a aplicação do FORTRAN a sistemas cada vez mais complexos aumentou o tamanho das rotinas e, conseqüentemente, os problemas com erros de programação e quanto às limitações da linguagem. Portanto, mesmo com o recurso dos pré-processadores, os códigos gerados eram, com certa frequência, dificilmente legíveis.

Em 1978, a ANSI lança a versão padrão para o FORTRAN 77. O FORTRAN 77 apresenta grande evolução na estrutura da programação com os inovadores blocos **IF.THEN.ELSE.ENDIF** e com o aparecimento da variável **Character**, capaz de manipular caracteres com mais simplicidade. O FORTRAN 77 não incorpora o FORTRAN 66 e ambos são incompatíveis em muitos aspectos, como o **Do** estendido, que não entrou na versão 77. A partir de então, o desenvolvimento de compiladores cada vez mais eficientes deixou claras algumas funções obsoletas do FORTRAN 77. Entre elas tem-se o formato desnecessário do *cartão perfurado* que condiciona a escrita a colunas específicas, a falta de dinâmica no trato de dados com o uso dos *arrays* e a falta da programação paralela.

Durante toda a década de 80, versões revisadas do FORTRAN foram perseguidas sem sucesso (FORTRAN 82, FORTRAN 8x, FORTRAN 88) até que, em 1992, é lançada, pela ISO (*International Standards Organisation*), o FORTRAN 90. O FORTRAN 90 opera com todo o FORTRAN 77, além de trazer todas as melhorias almejadas: formato livre para a escrita, comentários em linhas com comandos, mais de um comando por linha, uso de *arrays* dinâmicos, programação paralela, etc. Porém, o perfil “versão conjunta e adicionada” do FORTRAN 90 acabou por enfraquecê-la uma vez que trazia todo o aparato ultrapassado, para muitos, da versão 77. Nos dois anos seguintes a sua publicação, muitos erros foram identificados e, em 1995, surge o FORTRAN 95 com novas revisões e um pequeno número de extensões na área de programação paralela. Para evitar os erros do FORTRAN 90, grande parte das funções ditas obsoletas foram cortadas.

Por fim, a mais recente versão da linguagem existente é o FORTRAN



2003, lançada no final de 2004, que contém como novas funções a interoperabilidade com o *C* e com o *objeto orientado*.

### 2.1.3 O FORTRAN e o Trabalho Científico

A computação científica vem crescendo a largos passos em todo o mundo. A possibilidade de estudar um grande número de problemas através do uso de simulações constitui um cenário rico e profundamente explorado.

Desde seu início, esse ramo da ciência gerou uma demanda tamanha que desencadeou a criação de uma série de linguagens de programação as quais proporcionavam ganho no tempo operacional, além de permitir sua execução em máquinas cada vez mais simples. Entre elas tem-se o FORTRAN, que, por certo tempo, figurou dominante com sua eficiente atuação em problemas numéricos. Muitas das simulações usadas na obtenção de soluções de equações diferenciais puderam ser escritas em FORTRAN, que se apresentava como uma linguagem mais simples e adaptada. Sua grande popularidade nesse campo é, principalmente, porque a linguagem atende às necessidades dos cientistas.

Portanto, devido a todas as suas aplicabilidades, optamos pelo uso do FORTRAN (versão 77) no desenvolvimento deste trabalho.

## 2.2 Integração Numérica

Na matemática, ao se trabalhar com equações de toda natureza, está-se sempre em busca de soluções. Para tal fim, o primeiro passo a se dar é a procura da solução analítica da equação. Porém, quando esta é complexa o bastante para tornar inviável ou mesmo impossível o método analítico, faz-se uso, então, da análise numérica.

Em sua essência, a análise numérica consiste na aproximação do valor de uma função ou de sua solução por um conjunto de valores obtidos através de algum método numérico. Este trata-se de um algoritmo que pode ser executado num computador. Os valores calculados podem ser analisados tanto por visualização gráfica quanto por uma tabela de dados. A área de atuação da análise numérica se estende a engenharia, matemática, química, ecologia, economia, física, entre outros, e sua aplicação remete aos mais variados problemas.

Chama-se *integração numérica* o ramo de aplicação do método numérico na solução de equações diferenciais ordinárias, EDO. Métodos de integração numérica podem ser classificados, entre outros, por passo único ou múltiplos passos. A natureza dos problemas envolvendo EDO é deter-

minada pelas condições de contorno. Para problemas de valor inicial, os dois mais importantes métodos do tipo passo único utilizados na integração numérica são os de Euler e Runge-Kutta. Toda integração numérica está validada ou não pelos conceitos de convergência e erro. O erro total é a soma dos erros local e global - cujos valores são estimados por cada método utilizado - e do erro associado à capacidade de cálculo do computador. Seja  $y(x_n)$  a solução exata e  $y(n, h)$  a solução numérica. Definimos por erro local aquele atribuído a  $y(n, h)$  num único passo de integração quando assumimos que os dados de entrada são exatos. O erro global,  $G_n$ , é a diferença entre os valores obtidos para as soluções exata e numérica, assim

$$G_n = y(x_n) - y(n, h) \quad (2.1)$$

O erro global é acrescido, em cada passo, tanto pela equação usada para calcular  $y(n, h)$  quanto pelo próprio valor aproximado de  $y(n, h)$ , que entra como dado no cálculo de  $y(n + 1, h)$ . Já o erro computacional,  $\varsigma_n$ , existe devido ao arredondamento feito pela máquina. Ou seja, se  $\rho_n$  é o resultado alcançado pelo computador, então

$$\varsigma_n = y(n, h) - \rho_n \quad (2.2)$$

A convergência mede o quão próximo o valor obtido numericamente está do valor exato. Assim, um método é dito convergente quando

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max \|y(t_n) - y(n, h)\| \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

onde  $h$  é o tamanho do passo.

### 2.2.1 O Método da Linha Tangente

O método da Linha Tangente, também conhecido por método de Euler, é um método de integração numérica do tipo linear feita via passos únicos. Aqui, a solução de uma EDO, conjunto  $(y_0, y_1, y_2, \dots)$ , é aproximada por um grupo de valores da variável independente desta,  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ , onde  $x_2 - x_1 = h_1, x_3 - x_2 = h_2, \dots$  são os passos de integração. A peculiaridade do método de Euler está na obtenção de  $y_{n+1}$  feita de tal forma que estes sempre se encontram na linha tangente à curva da solução numérica da EDO no ponto anterior,  $y_n$ .

Uma das soluções mais comumente procuradas em pesquisas é a do problema de valor inicial. A aplicação do método de Euler se faz muito pertinente nesse caso. Seja a equação de primeira ordem com valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (2.4)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (2.5)$$

onde  $f(x, y)$  e  $f_y(x, y)$  - derivada parcial de  $f(x, y)$  - são contínuas nos intervalos  $x_a \leq x \leq x_b$  e  $y_a \leq y \leq y_b$ , que contêm o ponto  $(x_0, y_0)$ , garantindo a unicidade da solução na região. Supomos que o passo  $h$  terá o mesmo valor entre quaisquer dois pontos consecutivos do conjunto solução e, assim, o iniciamos por  $y_0$ . A equação da reta tangente à curva nesse ponto é dada por

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) \quad (2.6)$$

onde  $f(x_0, y_0)$  é a inclinação.

Com a solução aproximada,  $y_1$ , temos para a reta tangente à curva nesse ponto

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) \quad (2.7)$$

Portanto, após  $n + 1$  passos, teremos

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (2.8)$$

No processo, o cálculo de  $f(x_n, y_n)$  é feito usando  $y_n$  como se este fosse a solução exata da equação e, além disso, considera-se que a inclinação da tangente seja constante no intervalo  $(x_n, x_{n+1})$ .

### 2.2.2 Erro, Convergência e Validade do Método

O cuidado que sempre se deve ter no estudo do erro local,  $l(x)$ , é atribuir valores exatos para  $y_n$  no cálculo de  $y_{n+1}$ . Dessa forma garantimos a obtenção do erro associado ao passo  $n$  como pede a definição. Assim,

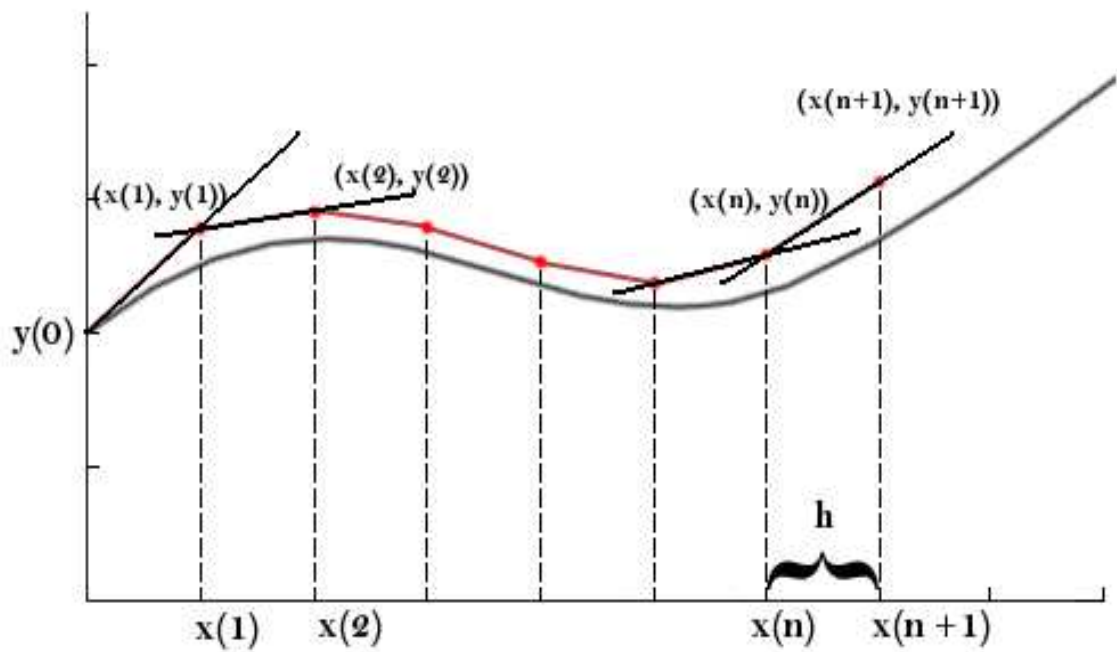
$$y_{n+1} = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) \quad (2.9)$$

Expandindo a solução exata em torno de  $x_n$ , temos

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2!}[f^1(x_n, y(x_n))f_y + f_x] + \dots + \frac{h^p}{p!}y^p(x_n) \quad (2.10)$$

onde  $f_x, f_y$  são as derivadas parciais de primeira ordem de  $f$  e

$$\begin{aligned} \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}[y^1] &= y^p(x_n); \\ y^1 &= f(x_n, y_n). \end{aligned} \quad (2.11)$$



**Figura 2.1:** Método de Euler; a solução aproximada,  $y(x_n + 1)$ , está na reta tangente à curva no ponto  $y(x_n)$ [19].

Usando a definição de erro local e ignorando termos de ordem superior a  $h^2$ ,

$$\begin{aligned} l(x) &= y(x_n + h) - y_{n+1} \\ l(x) &= \frac{h^2}{2} \mathfrak{S}(x) \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde

$$\mathfrak{S}(x) = [f^1(x_n, y(x_n))f_y + f_x]$$

Portanto, o erro local é proporcional a  $h^2$  e basta diminuir o tamanho do intervalo de certo fator para diminuirmos  $l(x)$  com o dobro do mesmo. O limite para o tamanho mínimo de  $h$  será o de precisão e/ou o de trabalho computacional. A idéia é tornar  $h$  tão pequeno quanto possível, mas evitando o erro de arredondamento. Pode ser provado[20, 21] que o erro global para Euler é proporcional a uma função,  $\phi(x)$  vezes  $h$ . Essa demonstração não será feita aqui. Ao invés disso, mostraremos, de forma não rigorosa, que  $G(x)$  é da ordem de  $h$ . O raciocínio usado pode ser aplicado em intervalos finitos com boa aceitação. Partindo do conceito de erro local, para  $q$  passos de tamanho  $h$  entre  $x_n$  e  $x_{n+q}$ , podemos considerar

$$G(x) \propto ql(x)$$

mas,

$$q = \frac{x_{n+q} - x_n}{h}$$

assim,

$$G(x) \propto \frac{x_{n+q} - x_n}{h} \frac{h^2}{2} \mathfrak{S}(x)$$

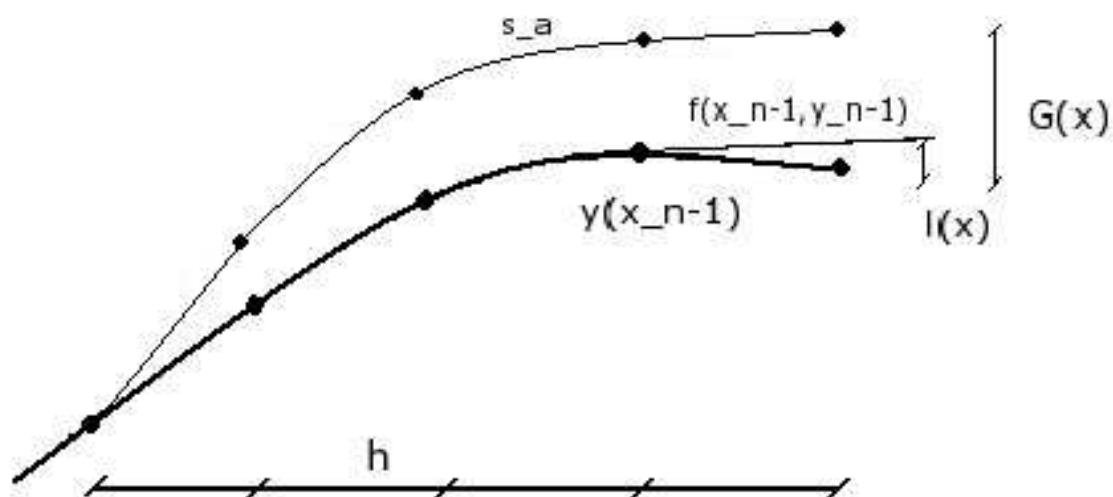
$$G(x) \propto \phi(x)h$$

onde,

$$\phi = \frac{(x_{n+q} - x_n) \mathfrak{S}(x)}{2}$$

### 2.2.3 Método de Euler Modificado

Entre as características mais relevantes do método de Euler está a simplicidade de suas equações e de seu algoritmo. No entanto, o grau de imprecisão que propaga nos cálculos é um fator desfavorável e torna seu uso desaconselhável na maioria dos problemas estudados. Assim, várias modificações podem ser feitas no método, sempre com o intuito de melhorar sua eficiência sem abrir mão de sua simplicidade. Entre elas, a alteração que mais interessa para nosso trabalho é a que realiza o cálculo de mais



**Figura 2.2:** Erro local e Global;  $l(x)$ : erro local;  $G(x)$ : erro global;  $s_a$ : solução aproximada;  $f(x_{n-1}, y_{n-1})$ : reta tangente à curva no ponto  $y_{n-1}$ .

de um valor de  $f(x, y)$  dentro de cada passo. Os argumentos de  $f$  são os pontos  $(x_n, y_n)$  e  $(x_{n+1}, y_{n+1})$ , onde

$$x_n - x_{n+1} = h. \quad (2.13)$$

Obtemos, então,  $\bar{f}$  tal que

$$\bar{f}(x, y) = \frac{[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]}{2} \quad (2.14)$$

Assim, calculamos  $y_{n+1}$  a partir de  $\bar{f}$

$$y_{n+1} = y_n + h\bar{f}(x, y) \quad (2.15)$$

Substituindo em (2.15),

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] \quad (2.16)$$

Como o ponto  $y_{n+1}$  ainda não foi obtido, o valor de  $f(x_{n+1}, y_{n+1})$  é dado por

$$f(x_{n+1}, y_{n+1}) = f[x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)] \quad (2.17)$$

Portanto,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n) + \frac{h}{2}f[x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)] \quad (2.18)$$

Geometricamente, a tangente que une  $(x_n, y_n)$  e  $(x_{n+1}, y_{n+1})$ , via Euler não modificado, é substituída por uma tangente de inclinação dada pela média entre  $f(x_n, y_n)$  e  $f(x_{n+1}, y_{n+1})$  como mostra a Fig. 2.3.

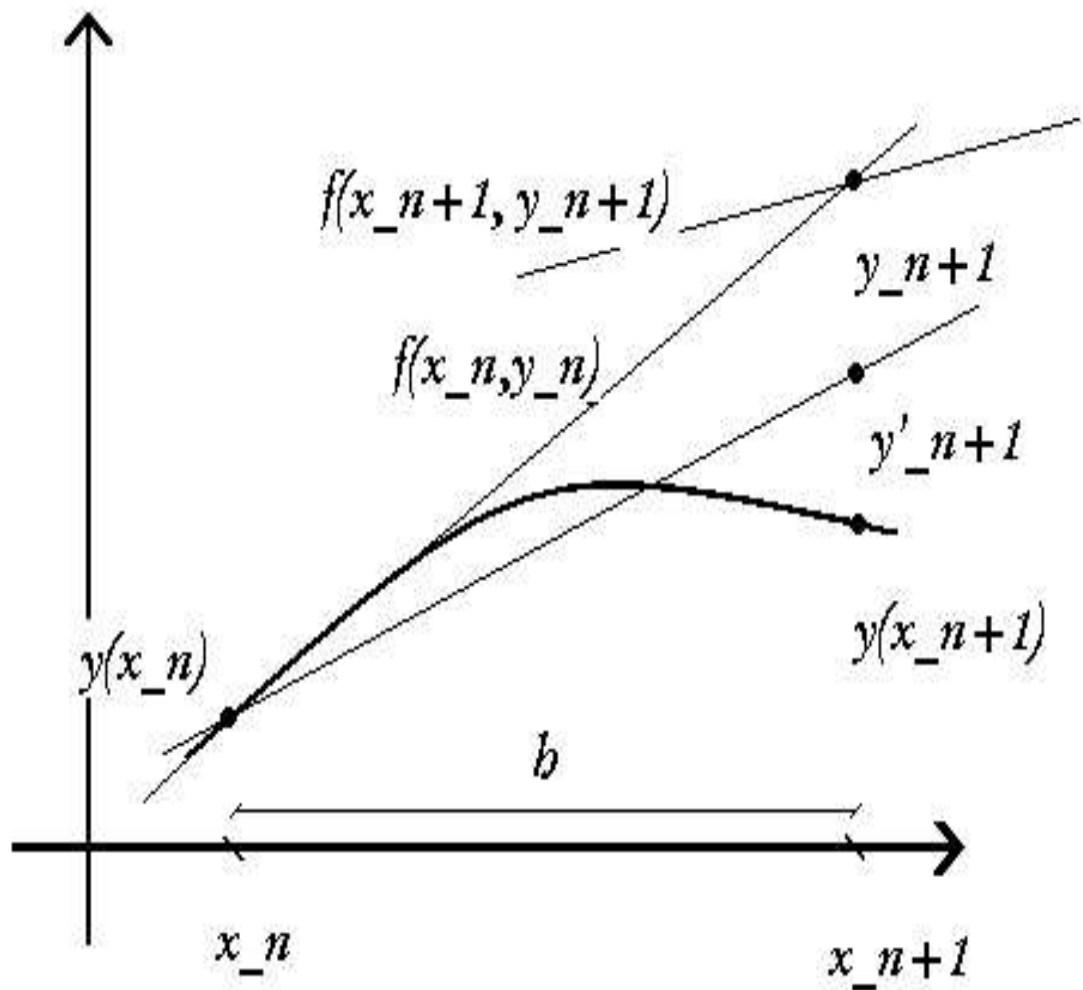
Com uma precisão maior na obtenção da solução aproximada, o erro local do Euler modificado chega à ordem de  $h^3$ . Da definição de erro local, usando (2.10) até ordem 3 e (2.18), temos

$$\begin{aligned} l(x) &= y(x_n + h) - y_{n+1} \\ l(x) &= \sigma(h^3) \end{aligned} \quad (2.19)$$

#### 2.2.4 Método de Integração de Runge-Kutta

O método de Runge-Kutta pode ser considerado uma extensão do Euler modificado em que vários cálculos de  $f(x, y)$  em pontos diversos, mas não aleatórios, são realizados em cada passo.

Assim como Euler modificado, a idéia principal desse método é de que existe um ponto no intervalo  $h$  tal que a tangente a ele pode ser empregada



**Figura 2.3:** Método de Euler modificado; Esquema comparativo entre as soluções dadas pelos métodos de Euler,  $Y_{n+1}$ , e Euler modificado  $Y'_{n+1}$ ;  $f(x_n, y_n)$ : reta tangente à curva exata no ponto  $y(x_n)$ ;  $f(x_{n+1}, y_{n+1})$ : reta tangente no ponto  $(x_{n+1}, y_{n+1})$ ;  $f_{\text{médio}}$ : inclinação média entre as tangentes;  $f(x_n, y_n)$  e  $f(x_{n+1}, y_{n+1})$ .



para se obter o ponto no extremo de  $h$ . Aqui, aquele ponto corresponde a solução aproximada dentro do intervalo  $h$  obtida via Euler,  $y_{n+qh}$ , onde  $q < 1$ , sempre usando a inclinação da tangente no ponto anterior,  $y_n$ .

O número de cálculos de  $f(x, y)$  realizados por passo define a ordem do método.

Uma montagem de ordem  $r$  equivale a:

★ um conjunto de inclinações  $k_n$ , com  $n = 1, 2, 3, \dots, r$ , que serão encontradas em  $p_l$  pontos, com  $l = 1, 2, 3, \dots, r - 1$ , dentro do intervalo  $h$ ;

★ uma fórmula geral onde  $y_{n+1}$ , solução aproximada geral do método, é calculado através de uma média das  $k$ 's.

Para cada um das  $k$ 's inclinações bem como para a fórmula geral do método, temos coeficientes correspondentes. Um modelo dessa ordem gera um sistema de equações cuja solução define os multiplicadores que devem ser utilizados na montagem. A princípio pode-se montar um Runge-Kutta de qualquer ordem, mas apenas algumas delas são mais usadas por questão de praticidade.

### 2.2.5 A Quarta Ordem do Runge-Kutta

O que chamamos de Runge-Kutta de quarta ordem corresponde a uma das montagens possíveis do método, na ordem 4, que se tornou extremamente popular. Aqui um conjunto específico de coeficientes são usados na obtenção da inclinação média conforme mostrado a seguir.

$$\bar{f}(x_n, y_n, h) = \frac{1}{6}hk_1 + \frac{1}{3}hk_2 + \frac{1}{3}hk_3 + \frac{1}{6}hk_4 \quad (2.20)$$

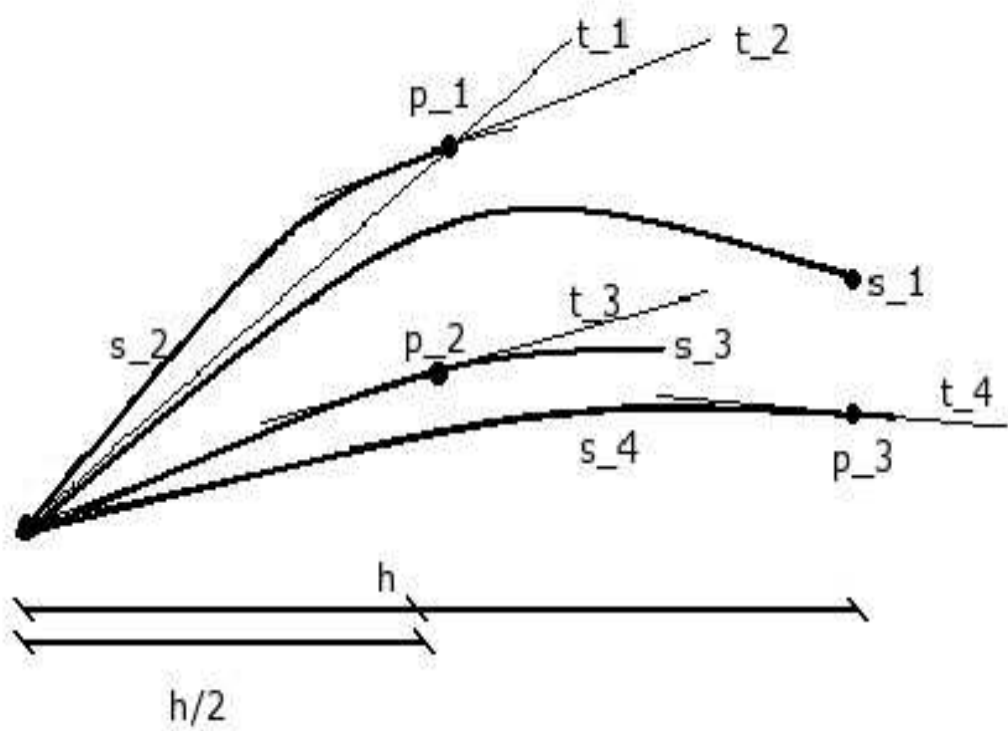
onde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3) \end{aligned} \quad (2.21)$$

com a fórmula geral

$$y_{n+1} = y_n + h\bar{f}(x, y) \quad (2.22)$$

A figura (2.4) ilustra como as tangentes associadas às inclinações  $k$ 's e a média correspondente  $\bar{f}$  são localizadas geometricamente. Nela podemos ver que:



**Figura 2.4:** Método de Runge-Kutta;  $t_1$ : reta tangente à curva  $s_1$  no ponto  $y(x_n)$ ;  $t_2$ : reta tangente à curva  $s_2$  no ponto  $p_1$ ;  $t_3$ : reta tangente à curva  $s_3$  no ponto  $p_2$ ;  $t_4$ : reta tangente à curva  $s_4$  no ponto  $p_3$ .

★  $k_1 \Rightarrow$  inclinação da tangente,  $t_1$ , à curva exata,  $s_1$ , no ponto  $y_n$ , usada para calcular a solução aproximada  $s_2$ ;

★  $k_2 \Rightarrow$  inclinação da tangente,  $t_2$ , à curva aproximada,  $s_2$ , no ponto  $p_1$ , usada para calcular a solução aproximada  $s_3$ ;

★  $k_3 \Rightarrow$  inclinação da tangente,  $t_3$ , à curva aproximada,  $s_3$ , no ponto  $p_2$ , usada para calcular a solução aproximada  $s_4$ ;

★  $k_4 \Rightarrow$  inclinação da tangente,  $t_4$ , à curva aproximada,  $s_4$ , no ponto  $p_3$ ;

★  $\bar{f} \Rightarrow$  inclinação média usada para calcular o ponto da solução aproximada geral,  $y_{n+1}$ .

O erro local no Runge-Kutta depende tanto de  $h$  como da ordem do método. A equação geral do erro é a mesma de Euler, tendo como diferença apenas a expressão da função  $\mathfrak{S}(x)$  [21, 22, 23, 24, 25]. Exclusivamente para a ordem 4, temos  $l(x)$  proporcional a  $h^5$ . Como sabemos ser o erro global proporcional à  $l(x)/h$ , temos  $G(x)$  da ordem de  $h^4$ .

## 2.2.6 As Outras Ordens do Runge-Kutta

Nesta seção, o método de Runge-Kutta será apresentado de forma geral. Assim, definiremos por Runge-Kutta de *ordem-r*

$$y_{n+1} = y_n + h\bar{f}(x_n, y_n, h) \quad (2.23)$$

onde cada termo corresponde:

★ à média entre as  $r$ -derivadas calculadas dentro de cada passo,

$$\bar{f}(x_n, y_n, h) = \sum_{l=1}^r c_l \kappa_l; \quad (2.24)$$

★ à derivada relativa ao ponto inicial, considerado de valor exato,

$$\kappa_1 = f(x_n, y_n); \quad (2.25)$$

★ às  $r - 1$  derivadas relativas aos  $r - 1$  possíveis valores de  $y_{n+1}$ ,

$$\kappa_l = f(x_n + ha_l, y_n + h \sum_{m=1}^{l-1} b_{lm} \kappa_m), l = 2, 3, \dots, r; \quad (2.26)$$

★ aos  $r - 1$  coeficientes do intervalo  $h$ ,  $a_l$ , e da inclinação  $\kappa$ ,  $b_{lm}$ ,

$$a_l = \sum_{m=1}^{l-1} b_{lm}, l = 2, 3, \dots, r. \quad (2.27)$$

A solução desse sistema nos fornece os coeficientes possíveis para diferentes montagens do método. Cada conjunto de coeficientes obtido, dentro de uma mesma ordem, determina uma delas. A abordagem na resolução do sistema pode ser usada para qualquer ordem e a natureza da solução é sempre a mesma.

Para  $r = 2$  teremos as expressões

$$\bar{f}(x_n, y_n, h) = c_1 k_1 + c_2 k_2; \quad (2.28)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n); \quad (2.29)$$

$$k_2 = f[x_n + a_2 h, y_n + h b_{21} k_1]; \quad (2.30)$$

$$a_2 = b_{21} \quad (2.31)$$

Considerando que as derivadas parciais de  $f(x_n, y_n)$  existem, podemos expandir  $k_2$  como série de Taylor em torno de  $(x_n, y_n)$

$$\begin{aligned} k_2 = f(x_n, y_n) &+ \frac{(x_{n+a_2} - x_n)}{1!} f_x + \frac{(y_{n+a_2} - y_n)}{1!} f_y + \\ &\frac{(x_{n+a_2} - x_n)^2}{2!} f_{xx} + \frac{(y_{n+a_2} - y_n)^2}{2!} f_{yy} + \\ &2 \frac{(x_{n+a_2} - x_n)(y_{n+a_2} - y_n)}{2!} f_{xy} + \sigma(h^3) \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde  $f_{xx}$ ,  $f_{xy}$  e  $f_{yy}$  são as derivadas parciais de segunda ordem de  $f$  e

$$x_{n+a_2} = x_n + h a_2; \quad (2.33)$$

$$y_{n+a_2} = y_n + h a_2 k_1 \quad (2.34)$$

Assim,

$$\begin{aligned} k_2 = f(x_n, y_n) &+ h a_2 [f_x + k_1 f_y] + \frac{h^2 a_2^2}{2} [f_{xx} + k_1^2 f_{yy}] \\ &+ h^2 a_2^2 k_1 f_{xy} + \sigma(h^3) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Substituindo (2.35) e (2.29) em (2.28), temos

$$\begin{aligned} \bar{f}(x_n, y_n, h) &= (c_1 + c_2) f(x_n, y_n) + c_2 h a_2 [f_x + f(x_n, y_n) f_y] \\ &+ \frac{c_2 h^2 a_2^2}{2} [f_{xx} + f(x_n, y_n)^2 f_{yy}] + c_2 h^2 a_2^2 k_1 f_{xy} f(x_n, y_n) \\ &+ \sigma(h^3) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Para que as equações (2.23) e (2.18) sejam equivalentes, recorremos à definição

$$\bar{f}(x_n, y_n, h) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2}[f_x + f(x_n, y_n)f_y] + \sigma(h^2) \quad (2.37)$$

Comparando (2.36) e (2.37), temos

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1; \\ c_2 a_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Este sistema de equações lineares possui infinitos conjuntos de valores para  $c_1$ ,  $c_2$  e  $a_2$  - onde um deles é parâmetro - que o satisfaz. Para o conjunto  $c_1 = \frac{1}{2}$ ,  $c_2 = \frac{1}{2}$  e  $a_2 = 1$ , as expressões (2.28) e (2.30) ficam

$$\begin{aligned} \bar{f}(x_n, y_n, h) &= k_1 + k_2; \\ k_2 &= f[x_n + h, y_n + hk_1] \end{aligned} \quad (2.39)$$

Portanto, temos para (2.23)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\{[f(x_n, y_n) + f[x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)]]\} \quad (2.40)$$

que é a relação para o método de Euler modificado.

Assim, para  $r = 4$  temos dois conjuntos de valores mais difundidos para os coeficientes:

$$\star c_1 = 1/8, c_2 = 3/8, c_3 = 3/8, c_4 = 1/8, a_2 = 1/3, a_3 = 2/3, a_4 = 1, b_{21} = 1/3, b_{31} = 1/3, b_{32} = 1, b_{41} = 1, b_{42} = -1, b_{43} = 1$$

$\star c_1 = 1/6, c_2 = 1/3, c_3 = 1/3, c_4 = 1/6, a_2 = 1/2, a_3 = 1/2, a_4 = 1, b_{21} = 1/2, b_{32} = 1/2, b_{43} = 1$ . Este último é o conjunto mais utilizado e corresponde aos valores apresentados na seção anterior para o Runge-Kutta de quarta-ordem.

## Capítulo 3

---

# A Pesquisa Motivadora e o Modelo Estudado

### 3.1 Sobre o Estudo de chuvas e Secas

A importância da água na vida humana justifica todo interesse e estudo sobre chuvas e secas. Entre os muitos aspectos, o mais tradicional é aquele que descreve o regime pluvial dos mais variados climas e microclimas. Um dos aspectos mais estudados sobre precipitações é a forma apresentada pelo pingo de chuva. Vários trabalhos, experimentais e teóricos, tratam tanto a relação entre o tamanho das gotas e a forma que adquirem ao atravessar a atmosfera quanto a influência das pressões hidrostática interna e aerodinâmica externa no equilíbrio dessa forma[26]. Em outro ramo, medidas de distribuição volumétrica dos pingos em chuvas de várias intensidades foram realizadas[27], enquanto experimentos demonstram que a distribuição espacial de gotas de chuvas é fractal[28, 29]. Já a associação da distribuição dos períodos de precipitação e estio com fenômenos de criticidade auto-organizada é a linha de pesquisa que mais interessa a este trabalho. Mais detalhes sobre esse ramo de estudo serão discutidos a seguir.

### 3.2 Sobre a Pesquisa Motivadora

Em 2001 foi realizado um estudo relacionado com o regime de chuvas e secas de certa região da Alemanha. O estudo refere-se à análise de dados experimentais colhidos na estação meteorológica do Max-Planck Instituto de Meteorologia de Hamburgo, na Costa Báltica Zingst, no período de janeiro a julho de 1999. Essas análises são referentes ao número de eventos de chuva, I, e de seca, N, tamanho do evento, S, e duração do evento,

D. Na construção dos gráficos  $\log I$  versus  $\log S$  e  $\log N$  versus  $\log D$ , os pesquisadores Peters *et al.*(2002) mostraram que distribuições de chuvas e secas obedecem a uma simples lei de potência.

Segundo Peters *et al.*(2002), esse fato aproxima os regimes pluviais a um grupo de eventos naturais cuja dinâmica apresenta fenômenos de criticalidade auto-organizada, SOC. Entre outras características, as que especificam uma SOC são:

- ★ Capacidade do sistema de alcançar seu estado crítico sem a necessidade do ajuste de seus parâmetros;

- ★ Tempo de resposta do sistema, que é infinitamente pequeno quando comparado com seu tempo de evolução macroscópica;

- ★ dinâmica do sistema, que ocorre por meio de avalanches, redistribuições de energia ou de uma outra grandeza localmente conservada dentro do sistema, transformando seu estado do ativo para absorvente[30, 31, 32, 33].

Eventos envolvendo SOC constituem uma classe dentro da família de fenômenos críticos. Estes últimos ocorrem em sistemas complexos, sistemas compostos por grande número de entidades relacionando-se de forma não-linear. Fenômenos críticos podem ser observados nesses sistemas quando em processo de transição de fase desencadeado por uma perturbação. Geralmente, para o sistema chegar ao estado, crítico deve-se variar algum, ou alguns, de seus parâmetros. É justamente nesse estado crítico que encontramos grandezas do sistema se relacionando através de lei de potência. Quando leis de potência descrevem determinado fenômeno em sistemas complexos, isso implica ausência de uma escala típica na sua ocorrência. Ou seja, não é possível prever quando ocorrerá esse fenômeno e o quão intenso ele será, mas é possível dizer qual a probabilidade de que ocorra um fenômeno de determinada magnitude. Assim, ao se determinar o expoente de uma lei de potência, estão-se descrevendo as características estatísticas do sistema[34].

Nesse contexto, Peters *et al.*(2002) descreveram um modelo para distribuições de chuvas e secas permissivo de ligação entre os dados e a SOC. Nele, a atmosfera figura como sistema aberto regido à constante e baixa taxa de entrada de energia cedida pelo sol. Esta é acumulada na forma de vapor d'água proveniente dos rios e oceanos que, em certo momento, será transformada na forma de precipitações em uma escala de tamanho imprevisível.

Esta é nossa pesquisa motivadora. Baseado no que foi apresentado por ela é que questionamentos diversos surgiram a respeito do que realmente poderia ser responsável pelas distribuições. O modelo unânime na descrição de SOC's é o da pilha de areia apresentado por Bak, Tang e Wiensfeldt, em 1987. Nele estão bem determinados as entidades, os sítios, o tipo de interação entre sítios vizinhos, o limite em que o sistema entra no estado

crítico e a avalanche em si. Comparativamente, no modelo de Peters *et al.*(2002) não estão caracterizados elementos constituintes do sistema - entidade, sítio - bem como propriedades relevantes para a obtenção de expoentes críticos - avalanches, limite para uma transição de fase ocorra. Também não há uma especificação sobre o mecanismo gerador da avalanche. Nem mesmo um modelo concreto foi apresentado [35, 36, 37]. Por outro lado, é sabido que em movimentos turbulentos certas grandezas também apresentam relações do tipo lei de potência. E é sabido que a dinâmica da atmosfera apresenta, mais do que em qualquer outra, turbulência nas regiões dominadas pelas tempestades. Ora, considerando todas as evidências mostradas, é natural que se procure uma explicação para a natureza das relações das distribuições de chuvas e secas na dinâmica da atmosfera terrestre.

Utilizando-se dessa abordagem, leis de potência similares às apresentadas por Peters *et al.*(2002) foram encontradas em estudo com tracejadores passivos num campo de velocidade gerado por vórtices com fronteira periódica. Para enriquecer essa linha de trabalho, seria de grande valor uma análise de um sistema irmão daquele com fronteira aberta. Esse é o objetivo do nosso trabalho. Procuramos, através da dinâmica do fluido-atmosfera, o efeito da fronteira aberta nas relações encontradas entre o número de eventos de chuva/seca, a intensidade e duração do evento.

### 3.3 Sobre o Modelo Estudado

#### 3.3.1 Descrição do Modelo

O sistema consiste de um fluido ideal no espaço bidimensional em que um número  $N_v$  de vórtices pontuais são inicialmente abandonados, aleatoriamente, numa região unitária  $\Omega$ . Essa área,  $\Omega$ , foi tomada por um quadrado cujos vértices estão localizados nos pontos  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(0,1)$  e  $(1,1)$  do plano  $x - y$ . Pela dinâmica dos  $N_v$  vórtices, um campo de velocidades é estabelecido no qual direção e magnitude são determinadas pelas relações (1.27) e (1.28) apresentadas em capítulo anterior. A partir dessas equações, pode-se chegar a campos de velocidades variados de acordo com o valor e o sinal da circulação e, portanto, esta constitui um importante parâmetro na construção do modelo. Para fundamentar a escolha de qual circulação usar, basta analisar como o arranjo de módulos e sinais influenciam nos resultados. Sabemos que a combinação de módulos não afeta na obtenção das distribuições. Quanto ao sinal, alguns testes preliminares foram realizados, nos quais foi observado que sistemas com circulação de mesmo módulo e sinais opostos tendiam a formar pares de vórtices que escapavam completamente da região unitária inicial. Esse fato não nos era interessante, pois faz parte da montagem do modelo garantir que o número de vórtices dado como parâmetro fosse o mesmo durante toda a simulação.



Em contrapartida, nos testes realizados com circulação de mesmos módulo e sinal, observou-se que a dinâmica resultante confinava o sistema a uma região pouco maior que a inicial, mantendo os vórtices dentro de um limite espacial confortável. Assim, optou-se pelo uso de circulação de mesma magnitude e sinal, tal que em todas as simulações o valor usado é igual a +1.0.

Assim como com os vórtices,  $N_e$  sítios ou estações são espalhados na região. Estas são quadrados de área igual a  $10^{-4}$ , centrados em pontos fixos de  $\Omega$  escolhidos aleatoriamente. Nelas serão coletados dados como :

- ★ Número total de partículas que cada estação contém em cada intervalo de tempo;

- ★ Período em que pelo menos uma partícula visitou determinada estação;

- ★ Período em que nenhuma partícula esteve em certa estação.

As estações não estão sujeitas ao campo de velocidades criado pelos vórtices e, portanto, mantêm suas posições iniciais. Ainda em  $\Omega$ ,  $N_t$  partículas ou tracejadores são inicialmente confinadas em um quadrado de lados  $l$ , a determinar, e centrado em um ponto predefinido. Foram estudados sistemas com duas medidas para  $l$ :  $1 \cdot 10^{-2}$  e  $5 \cdot 10^{-3}$ . As posições iniciais dos tracejadores são aleatórias dentro do quadrado que os confina. Outra determinação importante do modelo é trabalhar com tracejadores passivos, ou seja, partículas que apenas escoam pelo fluido obedecendo ao campo de velocidades sem oferecer resistência ao movimento. Isso elimina quaisquer efeitos de inércia inerentes à trajetória das partículas. A Fig 3.1 nos mostra a configuração inicial do sistema, em que encontramos as estações e, em suas posições iniciais, as partículas e os vórtices.

### 3.3.2 Aplicação do Modelo na Distribuição de chuvas e secas

Em nosso modelo, o fluido ideal representa uma parte da atmosfera, denominada aqui massa de ar seco, no qual estão imersas as nuvens, eventos localizados de condensação. Sendo a primeira em volume notavelmente superior à segunda, foi considerado que a dinâmica da massa de ar seco é dominante a das nuvens. Assim estas foram aproximadas a um conjunto de tracejadores passivos com suas trajetórias obedecendo à dinâmica de um campo de velocidades característico de nosso fluido ideal.

Os sítios representam estações meteorológicas de uma cidade, estado ou país onde sabemos ser coletados os índices pluviiais da região durante todo o ano. Com o sistema montado, o próximo passo é deixá-lo evoluir por certo período  $T$ . Desta forma, sempre que um tracejador entrar em uma estação, equivale a uma precipitação. Em contrapartida, todo o intervalo de tempo em que nenhuma partícula visitou determinada estação equivale

$$N_v = 100; N_t = 10000; N_e = 50$$

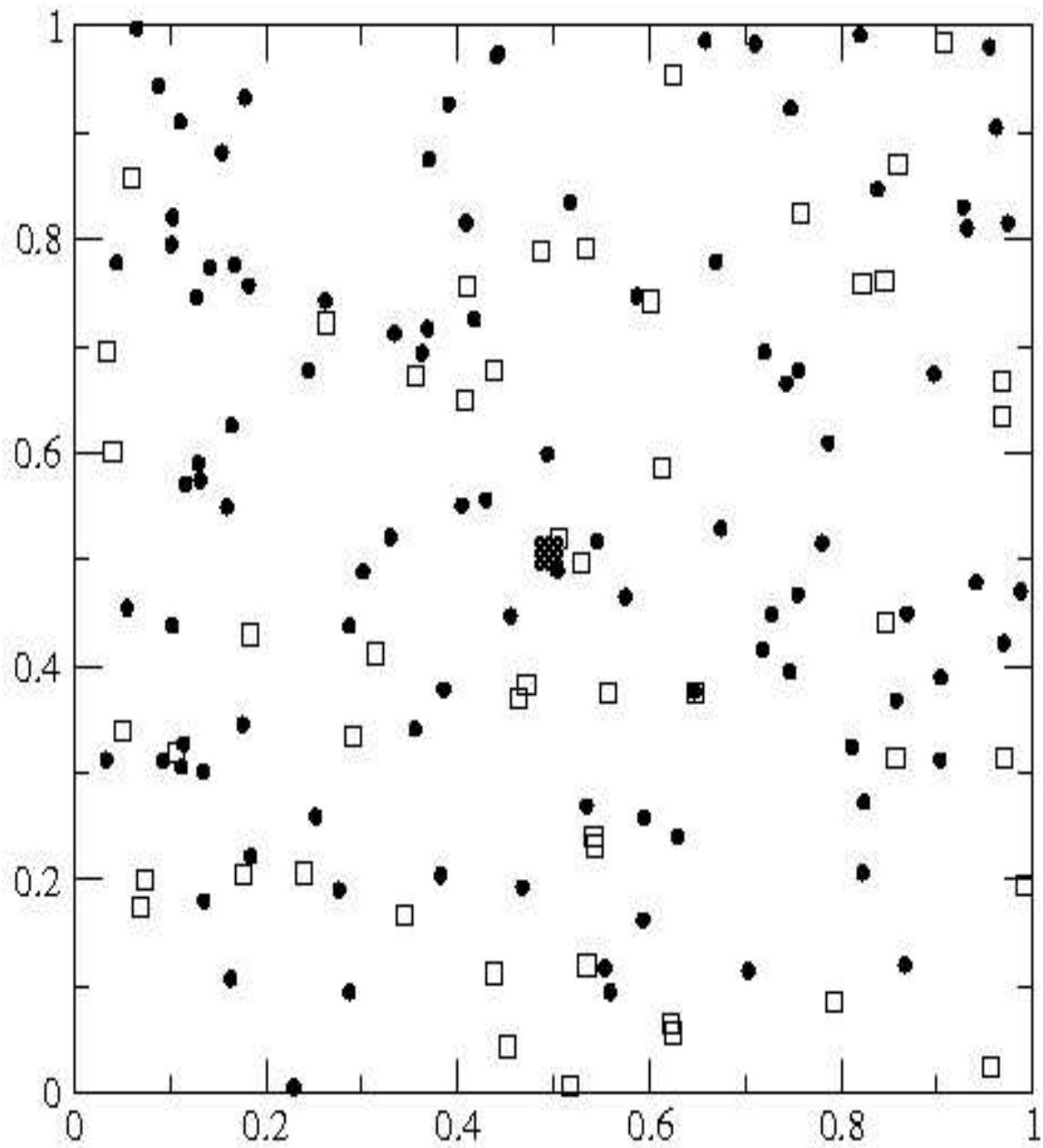


Figura 3.1: Configuração inicial do modelo no qual podemos ver as posições iniciais das partículas (quadrado preenchido) e dos vórtices (círculo); as posições das estações (quadrado vazio).

a um período de estio.

Como trabalhamos com fronteira aberta, não podemos estender o sistema a toda atmosfera. Não existe, aqui, um limite preciso a respeito da extensão territorial e temporal alcançada pelo sistema. Ou seja, não nos é possível afirmar que as distribuições obtidas representam os índices pluviiais da cidade de Búzios nos meses de junho à dezembro de 2004, por exemplo. Além disso, o modelo não inclui as peculiaridades topográficas e/ou geográficas de uma região específica.

### 3.3.3 O Modelo e a Simulação

Apresentaremos agora os recursos da linguagem computacional que foram usados na abordagem do problema. Todas as posições iniciais aleatórias,  $(x, y)$ , foram obtidas por meio do gerador de números aleatórios de tal forma que este sempre devolvesse valores contidos no intervalo  $[0, 1]$ . Assim limitou-se todo o sistema inicial - fluido, vórtices, tracejadores e estações - ao quadrado unitário.

Para os tracejadores foi feito ainda o confinamento a partir do ponto no qual centramos a caixa que os contém. Ou seja, de toda posição lançada pelo gerador foi subtraída, das coordenadas, a porção que os distava dos limites da caixa. Os limites das estações foram determinados a partir das posições de seus centros. Mais uma vez, de todo  $(x, y)$  lançado foi atribuído um intervalo contendo cada coordenada. O tamanho do intervalo deve ser determinado anteriormente e entra como um parâmetro da rotina. Para cada uma das estações são atribuídos contadores que em cada passo de integração conferem a presença ou não de tracejadores em seus limites. A conferência é realizada através da comparação entre as coordenadas de posição das partículas e as coordenadas de posição dos limites do sítio.

Uma das funções do contador é enumerar períodos de duração de eventos de chuva e seca. Sempre que uma partícula entra em um desses sítios que no passo de integração anterior estava vazio, um período de seca é fechado e um período de chuva é iniciado nesse sítio. É sempre que a última partícula deixa um sítio, fecha-se um período de chuva e inicia-se um período de seca. A outra função é fornecer o número de partículas em cada estação por passo de integração, dado que será armazenado ao final do passo e acumulado até que se feche um período de chuva. Ao final desse processo, temos a quantidade total de partículas que visitaram certo sítio dentro de certo período, importância essa denominada *intensidade de chuva*. Esses dados contendo informações sobre duração e intensidade de chuvas e duração de secas são armazenados e utilizados na construção dos histogramas.

É necessário ressaltar que os  $N_e$  sítios representam uma mesma estação meteorológica. O objetivo de ser ter um número grande desses sítios é

melhorar a estatística na obtenção dos dados. A evolução temporal dos vórtices e dos tracejadores é dada pelas equações da dinâmica dos vórtices e foram integradas utilizando o método de integração de Runge-Kutta de 4ª ordem. A rotina usada na simulação tem como parâmetros principais:

- ★ Tamanho da caixa que contém os tracejadores,  $l$ ;
- ★ Número de vórtices,  $N_v$ ;
- ★ Número de tracejadores,  $N_t$ ;
- ★ Número de estações,  $N_e$ ;
- ★ Intervalo de integração,  $\Delta t$ ;
- ★ Número de passos de integração,  $P$ ;
- ★ Semente do gerador aleatório;
- ★ Período de reinserção,  $P_r$ .

Este último item trata-se de uma característica específica da rotina *powerlaw7.f*. Esta foi elaborada de forma a permitir a independência entre o tempo de integração total da rotina e o tempo de evolução dos tracejadores. A simulação poderia ocorrer em  $P$  passos equivalentes, ao mesmo tempo, a um período de evolução  $T_t$  para as partículas e a um período de evolução  $T_{total} = P \times (\text{intervalo de integração})$  para os vórtices. Isso é feito atribuindo às partículas suas posições iniciais sempre que a simulação alcance determinado passo. É o período de reinserção,  $P_r$ , que define qual é esse passo. Um vez que  $T_t = P_r \times (\text{intervalo de integração})$ ,  $P_r$  é o número de passos referentes à  $T_t$  dado o *(intervalo de integração)*. Como exemplo, para  $T_{total} = 1$ , onde  $P = 100$ , se quisermos que  $T_t = 0.2$ , então devemos escolher  $P_r = 20$ . Assim, o programa insere as partículas dentro da caixa de 20 em 20 passos.

Nas simulações, apenas duas combinações principais entre os possíveis valores dos parâmetros foram realizadas:

★ Para um mesmo valor de  $l$ , variamos o número de vórtices entre  $N_v = 10, 50, 100, 200$ .

★ Para cada par  $[l, N_v]$ , variamos o período de reinserção entre  $P_r = 0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1.0$ . Exclusivamente para o caso  $l = 0.005$  e  $N_v = 200$  fizemos também  $P_r = 1.2, 1.4, 1.6$ .

Os demais parâmetros foram mantidos com fixos e com quantias iguais a :  $N_t = 10000$ ;  $N_e = 50$ ;  $\Delta t = 0.00001$ . O número de passos de integração variou entre  $P = 100000, 200000, 400000$  de acordo com a necessidade da programação, mas sempre obedecendo as condições principais citadas.

# Capítulo 4

---

## Resultados e Discussões

### 4.1 Resultados

Em todas as simulações realizadas, os resultados se concentraram em torno de um número resumido de particularidades. Assim, em quase todos os histogramas de número de eventos de chuva por intensidade de evento, observamos leis de potência simples e, em alguns casos, evidências de dois regimes. De mesma forma, nos histogramas de número de eventos de seca por duração do evento, observamos curvas que podem ser aproximadas por uma exponencial estendida. E, finalmente, nos histogramas de número de eventos de chuva por duração do evento, obtivemos curvas com decaimento exponencial. Para todos os valores usados nos parâmetros, nenhum outro traço dominante além destes foram obtidos. Apresentamos a seguir os resultados simulacionais na seguinte ordem: dados de distribuição de chuvas com a caracterização da natureza das curvas e a determinação dos expoentes para alguns casos; dados de distribuição de secas com a mesma sequência de análises; tendências com a variação de certos parâmetros; comparação com dados observacionais e com dados referentes à fronteira periódica.

#### 4.1.1 Distribuição de Chuvas

Nesta seção denominamos  $N$  o número de eventos de chuva,  $S$  a intensidade do evento e  $D$  a duração do evento. A seguir temos sequências de gráficos de  $\log N$  versus  $\log S$ . Os gráficos apresentados nas figuras 4.1 e 4.2 correspondem aos dados dos modelos com  $N_v = 10, 50, 100, 200$  e  $l = 0.01$ , enquanto os apresentados nas figuras 4.3, 4.4 e 4.5 são para  $l = 0.005$ . Para cada valor de  $N_v$  dispomos todos os  $P_r$  estudados, onde  $P_r$  é o período de restituição das partículas à caixa que as contém.

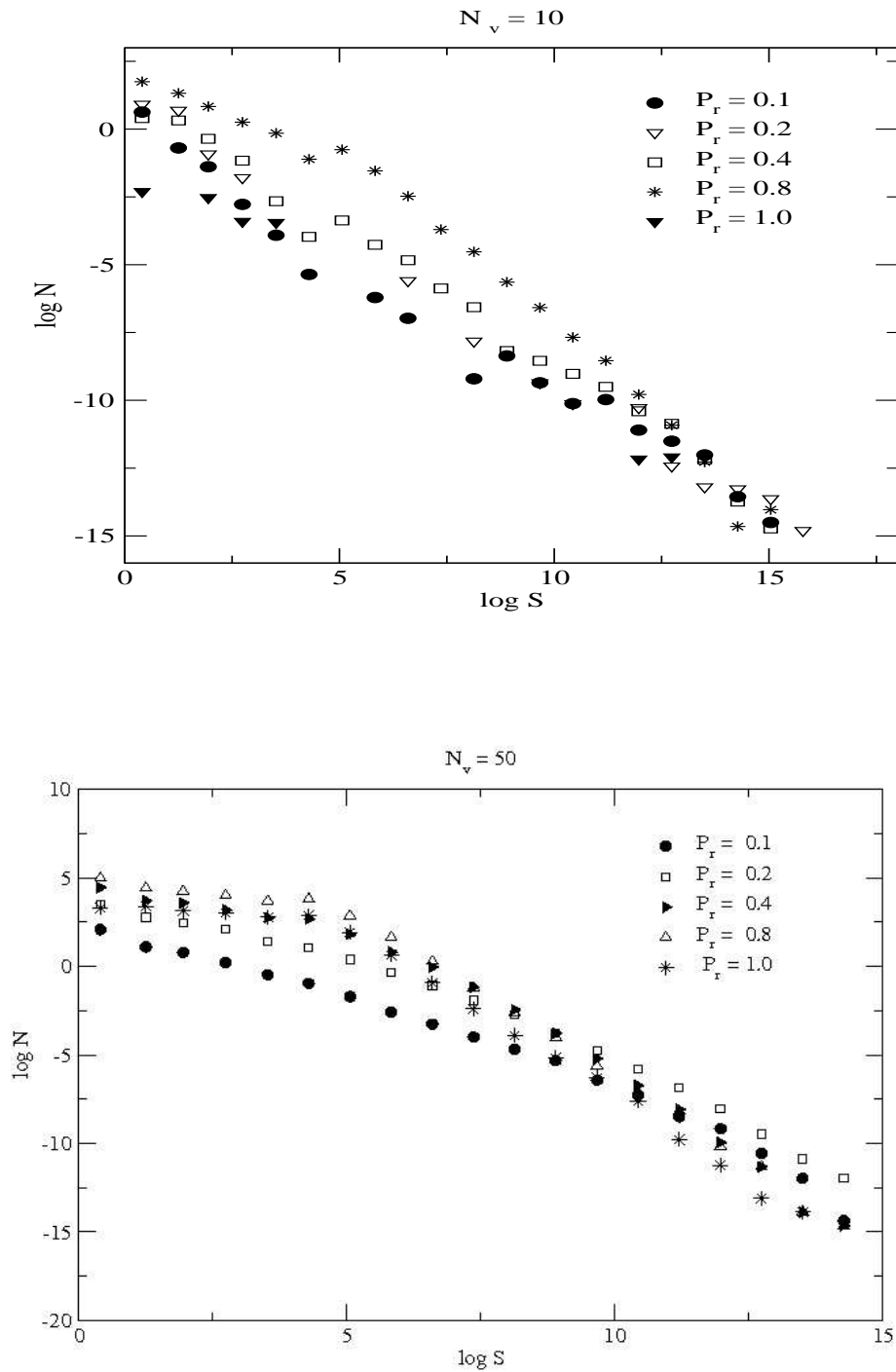


Figura 4.1: Gráficos de  $\log N$  versus  $\log S$  para distribuição de chuvas para os estudos com  $N_v = 10, 50$  e  $l = 0.01$ .

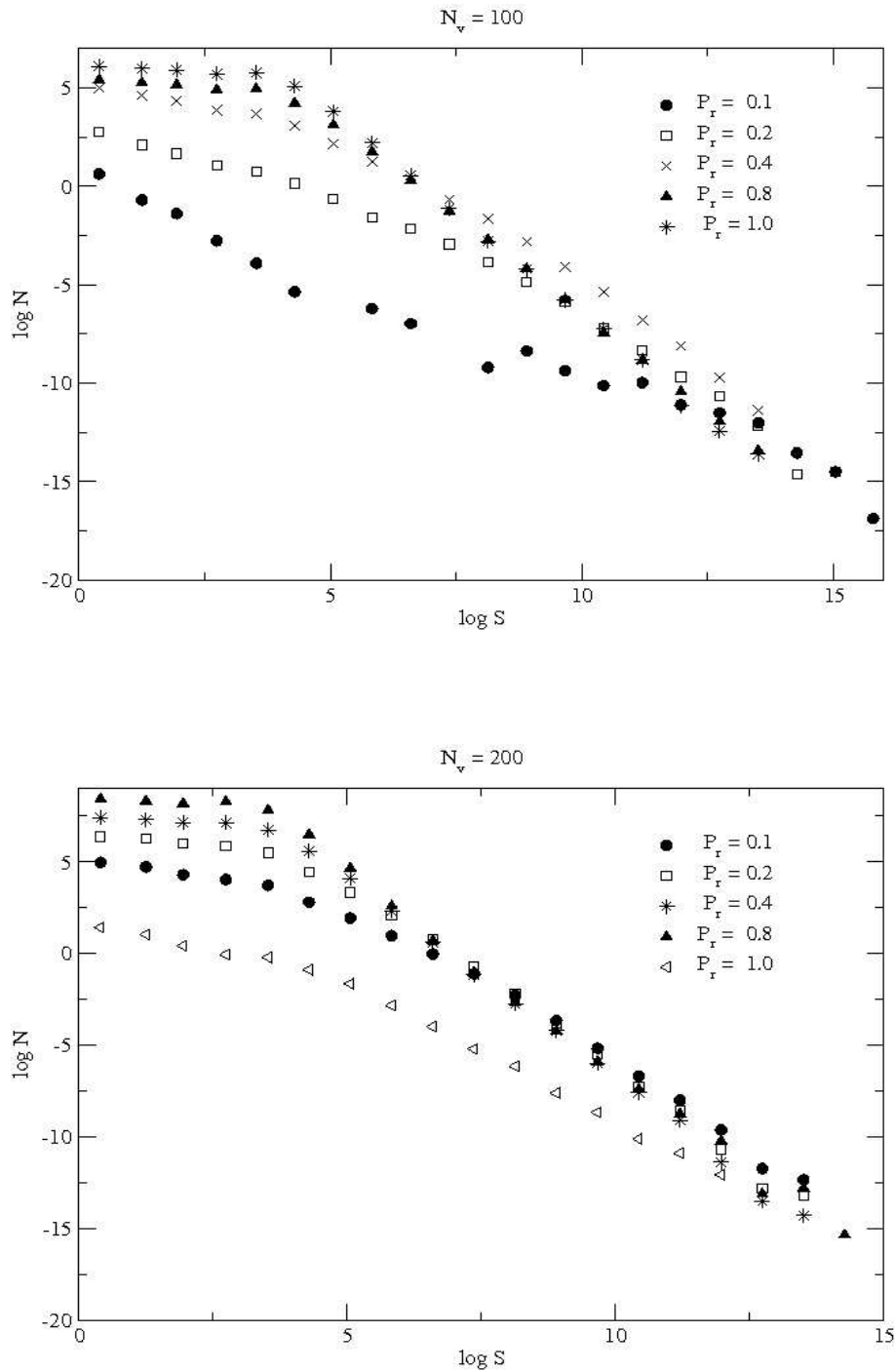
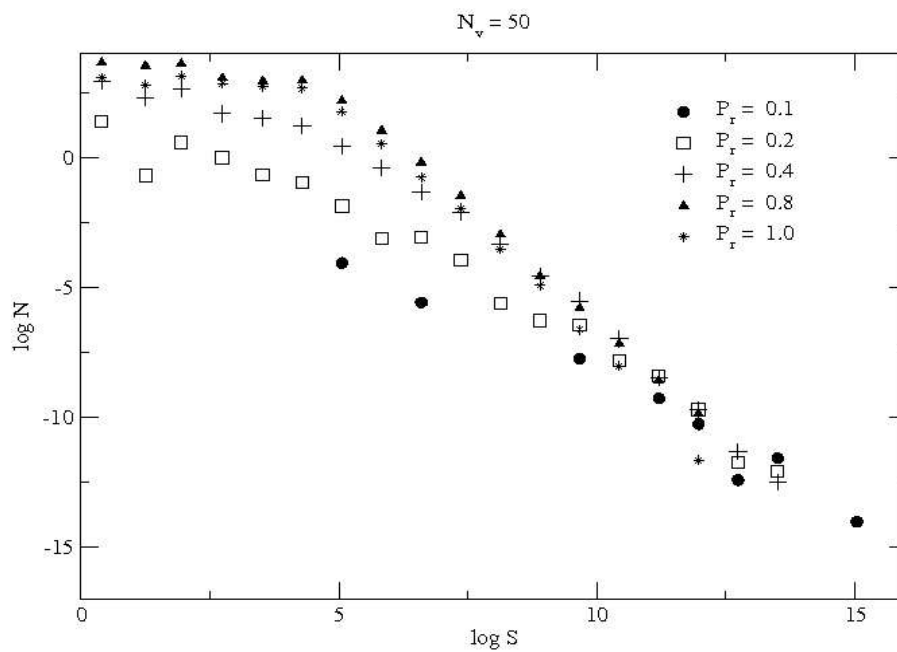
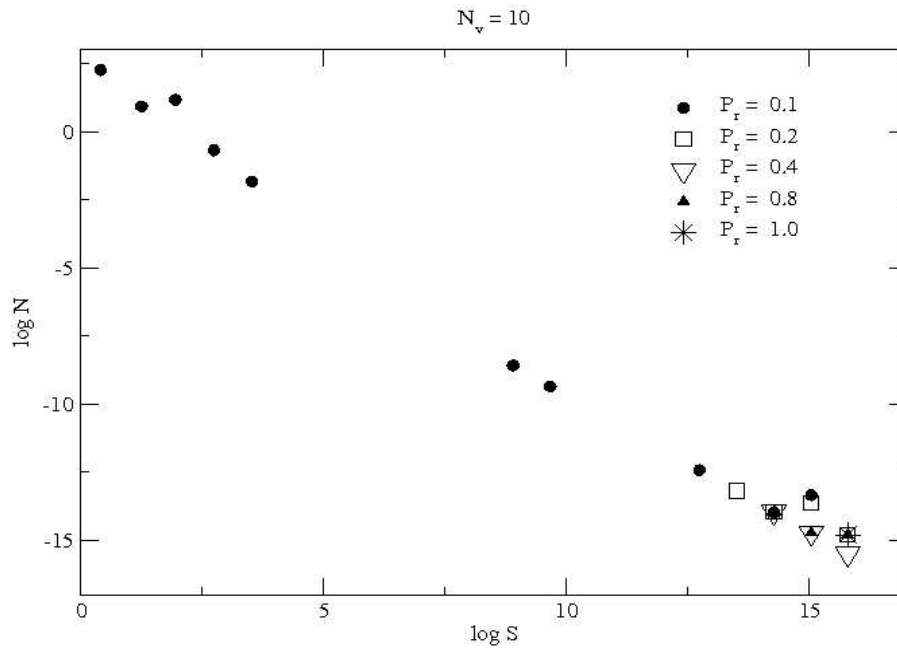
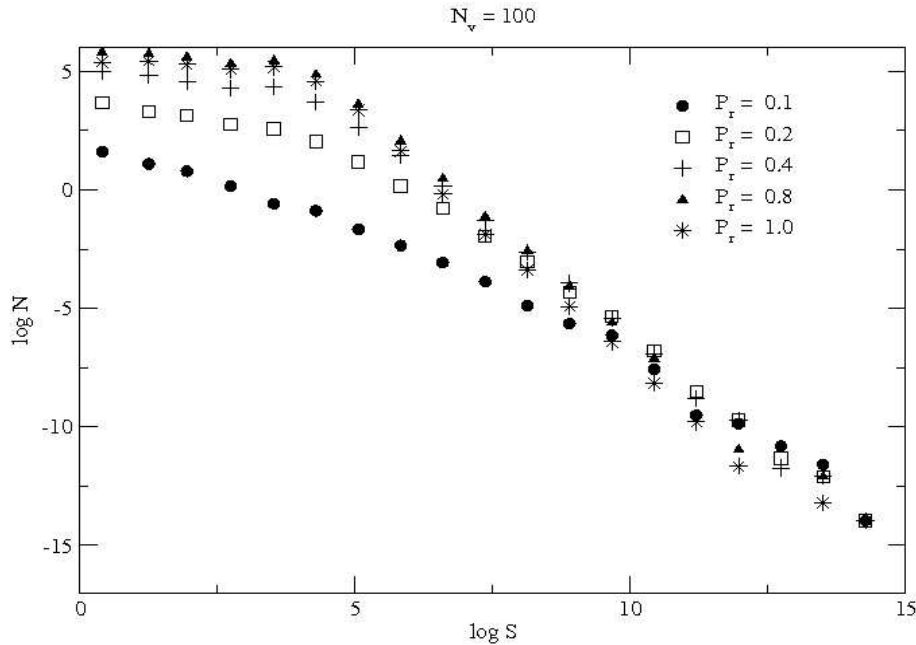


Figura 4.2: Gráficos de  $\log N$  versus  $\log S$  para distribuição de chuvas para os estudos com  $N_v = 100, 200$  e  $l = 0.01$ .



**Figura 4.3:** Gráficos de  $\log N$  versus  $\log S$  para distribuição de chuvas para os estudos com  $N_v = 10, 50$  e  $l = 0.005$ .

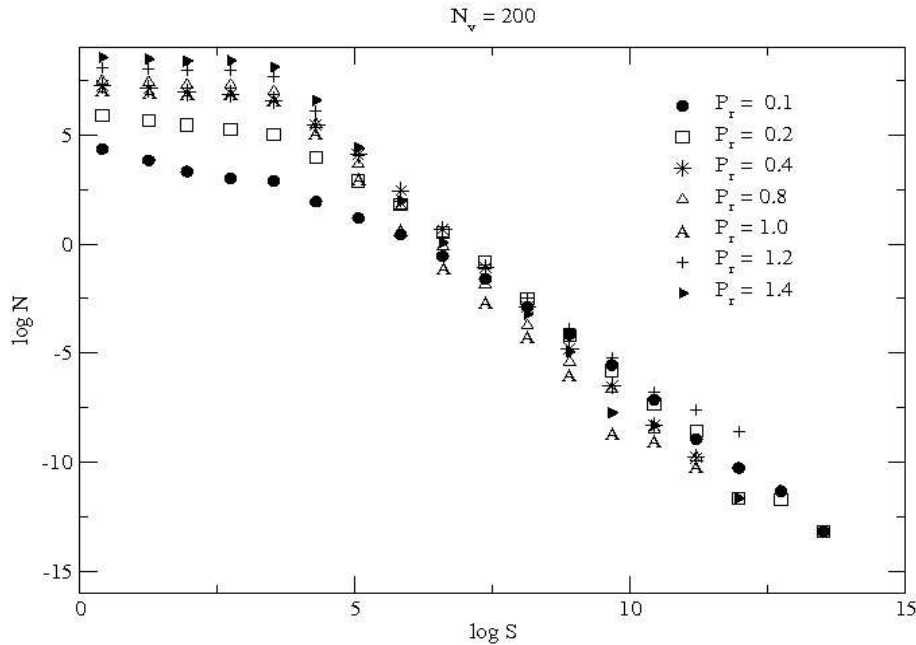




**Figura 4.4:** Gráficos de  $\log N$  versus  $\log S$  para distribuição de chuvas para os estudos com  $N_v = 100$  e  $l = 0.005$ .

Observamos em quase todos os resultados que as curvas mostram um perfil de lei de potência. Existem aqueles casos cujo perfil não permite uma caracterização completa. Em alguns deles o número de pontos não é suficiente para qualificar uma lei de potência. Podemos perceber isso nas curvas da Fig 4.3 com  $N_v = 10$  para todos os valores de  $P_r$  e  $N_v = 50$  para  $P_r = 0.1$ . Isso ocorre devido ao fato de o tempo de evolução das partículas ser pequeno para se obter uma 'mistura' suficiente das partículas considerando o número de vórtices dado. O mesmo caso,  $N_v = 50$ , com um tempo de evolução maior nos devolve o perfil de lei de potência de mesma forma que os casos com número maior de vórtices também nos devolve o perfil de lei de potência desde os menores valores de  $P_r$ . Também influencia no resultado o tamanho inicial da caixa que contém os tracejadores: a configuração com a caixa menor gera, tipicamente, tracejadores menos distribuídos no espaço em comparação com a caixa maior para os mesmos número de vórtices e período.

Em outros casos, mais relevante que o pequeno número de pontos é a oscilação dos valores que exibem como encontrado nos casos  $N_v = 10$  para  $P_r = 0.1, 0.2, 1.0$ , Fig 4.1. Nestes, a disposição dos pontos é tal que o ajuste dos dados devolveria um valor com uma incerteza grande para o expoente. Portanto, a associação de um expoente a esses exemplos traz pouco informação ao estudo e não será realizada. Outro aspecto importante



**Figura 4.5:** Gráficos de  $\log N$  versus  $\log S$  para distribuição de chuvas para os estudos com  $N_v = 200$  e  $l = 0.005$ .

é que certos histogramas exibem dois regimes de lei de potência como nos mostram a Fig 4.2 para  $N_v = 100, 200$  e  $P_r = 0.1, 0.2$  e as Fig 4.4 e 4.5, ambas para  $P_r = 0.1$ . Percebe-se que esse carácter é presente em períodos de evolução curtos.

Os histogramas das durações  $D$  são apresentados nas Fig 4.6 e 4.7 (para  $l = 0.01$ ) e 4.8, 4.9 e 4.10 (para  $l = 0.005$ ). O perfil típico das curvas é o de decaimento exponencial após um decaimento tipo lei de potência. Assim como ocorre nos dados anteriores, algumas curvas não admitem uma caracterização simples. Para os casos com  $N_v = 10$  para  $P_r = 1.0$  e  $l = 0.01$ , com  $N_v = 50$  para  $P_r = 0.1, 0.2$  e  $l = 0.01$ , Fig 4.6, e com  $N_v = 50$  para  $P_r = 0.1, 0.2$  e  $l = 0.005$ , Fig 4.8, a qualificação fica prejudicada pela grande oscilação dos pontos. Para o caso  $N_v = 10$  para todos os  $P_r$  e  $l = 0.005$ , Fig 4.8, a qualificação é indeterminada pelo números insuficientes de pontos.

**Determinação de Expoentes** - É objetivo principal da análise dos dados a obtenção dos expoentes relacionados às curvas exibidas. Especificamente para as leis de potência, uma curva típica é expressa na forma

$$\begin{aligned} \log Y &= -\beta \log x + B = \log x^{-\beta} + B \\ Y(x) &\propto x^{-\beta} \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde  $\beta$  é o expoente que procuramos em nosso tratamento. Os cálculos

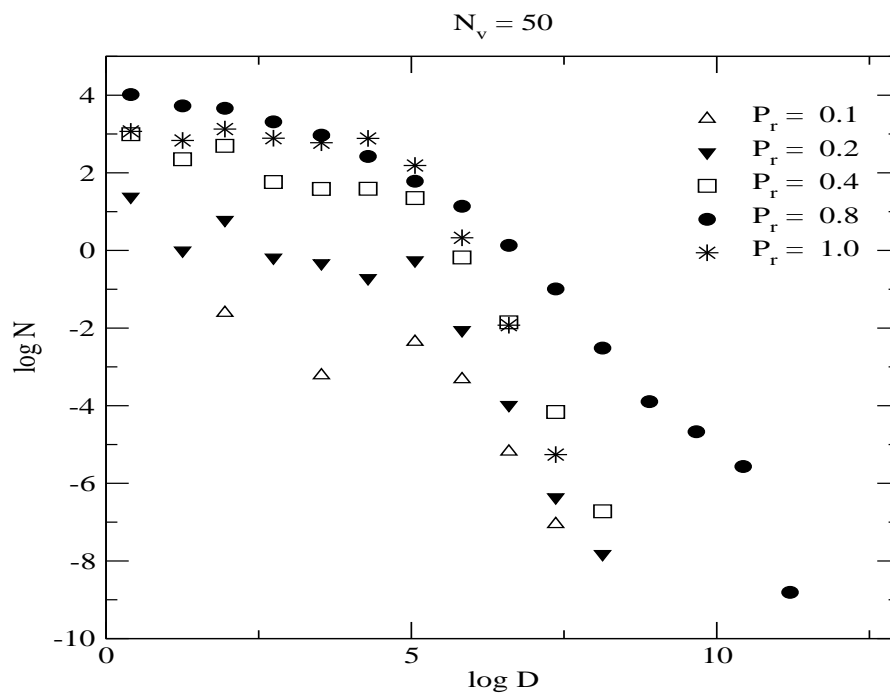
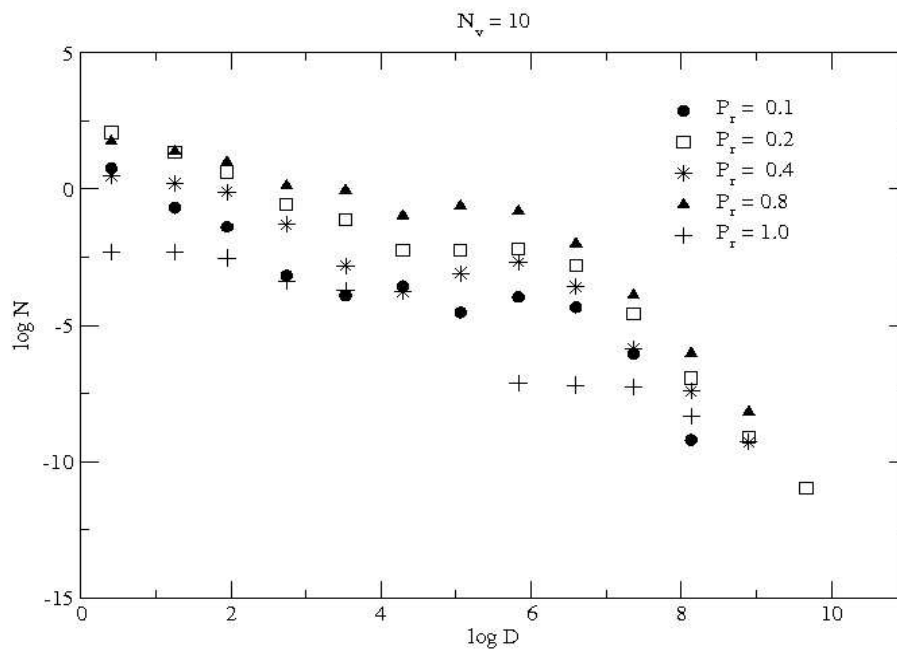
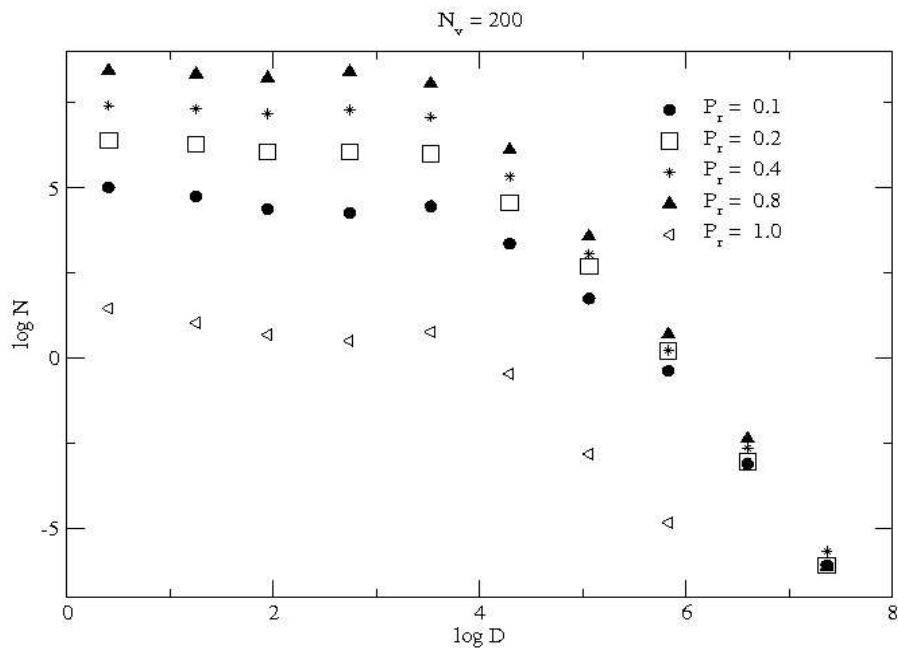
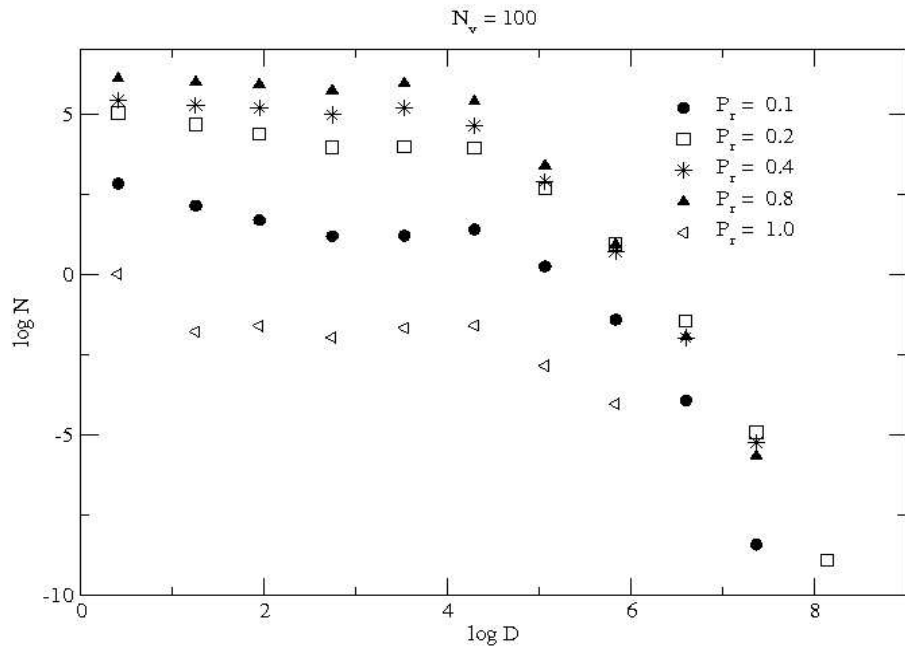


Figura 4.6: Gráficos de  $\log N$  versus  $\log D$  para distribuição de chuvas para os estudos com  $N_v = 10, 50$  e  $l = 0.01$ .



**Figura 4.7:** Gráficos de  $\log N$  versus  $\log D$  para distribuição de chuvas para os estudos com  $N_v = 100, 200$  e  $l = 0.01$ .

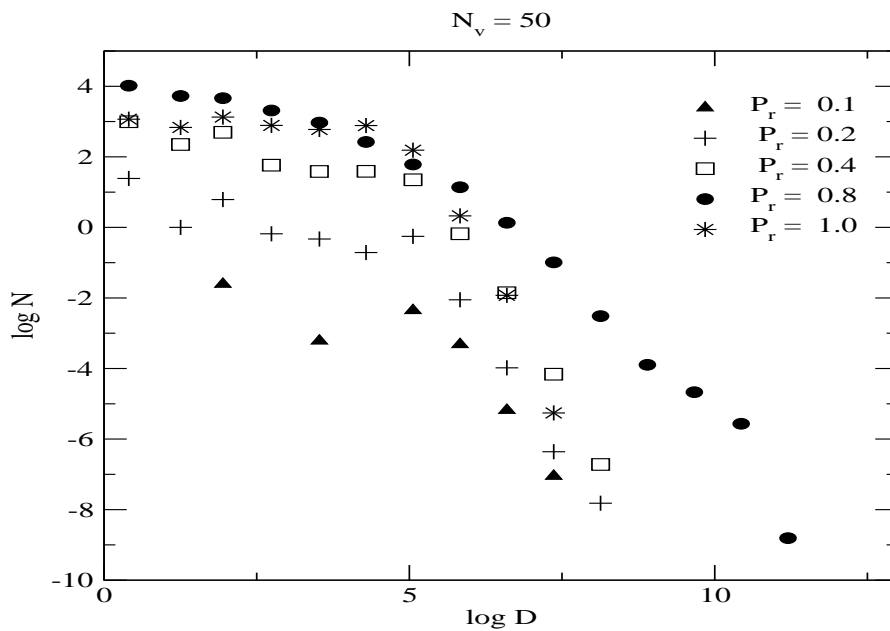
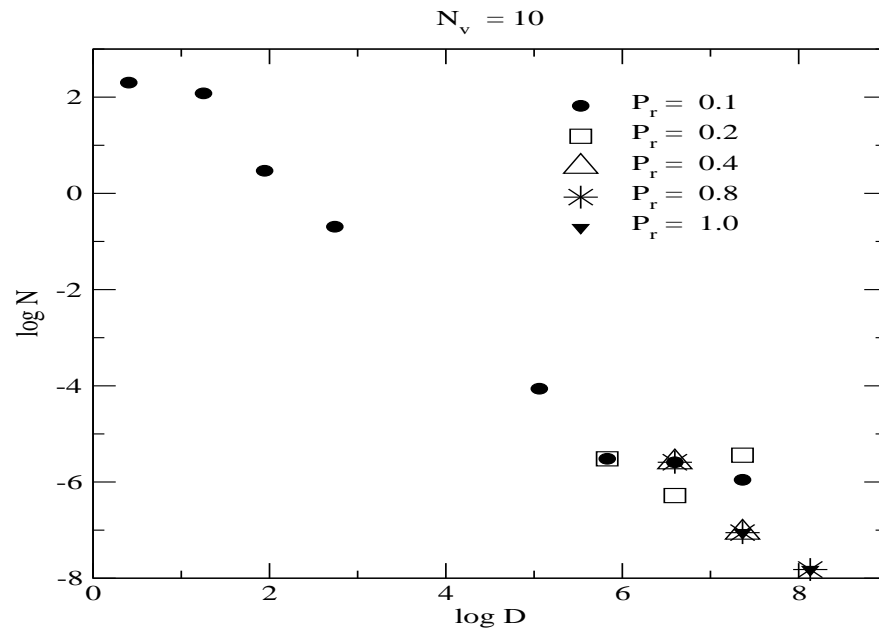
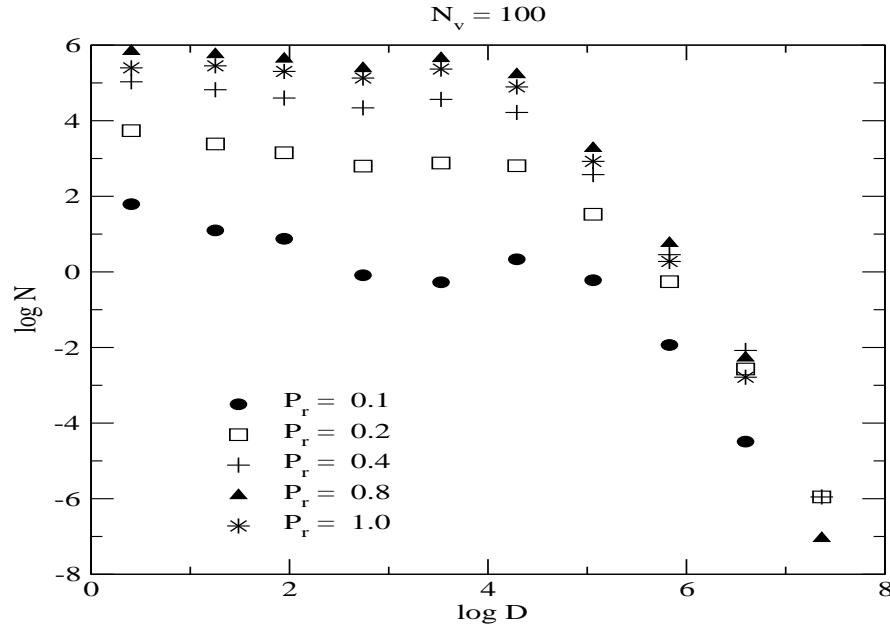


Figura 4.8: Gráficos de  $\log N$  versus  $\log D$  para distribuição de chuvas para os estudos com  $N_v = 10, 50$  e  $l = 0.005$ .



**Figura 4.9:** Gráficos de  $\log N$  versus  $\log D$  para distribuição de chuvas para os estudos com  $N_v = 100$  e  $l = 0.005$ .

realizados nessa seção estão ligados à distribuição de chuvas das Fig 4.1 a 4.5. Para a estimativa dos expoentes foi utilizado o método de regressão linear de  $\log Y$  como função de  $\log x$ . As TAB 1 e 2 apresentam todos os expoentes encontrados. Os estudos foram separados em dois grupos de acordo com a variável  $l$ :

★ Para  $l = 0.01$ , ( Fig 4.11 – 14 ), destacamos os casos com dois regimes em que os valores obtidos para  $\beta$  são, com  $N_v = 100$ ,  $\beta_1 = 0.81(3)$  para a primeira curva e  $\beta_2 = 1.55(3)$  para a segunda quando  $P_r = 0.1$ , enquanto para  $N_v = 200$ , temos  $\beta_1 = 1.29(4)$  e  $\beta_2 = 2.05(8)$  para a primeira e segunda curvas, respectivamente. Para  $P_r = 0.2$ , temos os valores  $\beta_1 = 1.22, 1.90$  da primeira curva e  $\beta_2 = 1.67, 2.29$  da segunda, para  $N_v = 100, 200$ , respectivamente. Entre todas as curvas com lei de potência simples, podemos destacar para  $P_r = 0.8$  e  $N_v = 10, 50$ , os expoentes  $\beta = 1.35(2)$  e  $\beta = 1.84(3)$ , respectivamente. Os outros valores obtidos estão dispostos nas figuras. Observamos que as leis de potência obtidas ocorrem sobre uma faixa de 4 – 9 décadas.

★ Para  $l = 0.005$ , ( fig 4.15 e 4.16 ), no sistema de dois regimes, para  $N_v = 200$ , temos os expoentes,  $\beta_1 = 0.76(6)$  para primeira curva e  $\beta_2 = 1.90(4)$  para segunda curva quando  $P_r = 0.1$ , enquanto para  $N_v = 100$ , temos  $\beta_1 = 0.79(3)$  para primeira e  $\beta_2 = 1.33(8)$  para segunda curvas. Para o regime simples, com  $P_r = 0.4$  e  $N_v = 100$ , temos o valor  $\beta = 1.86(3)$

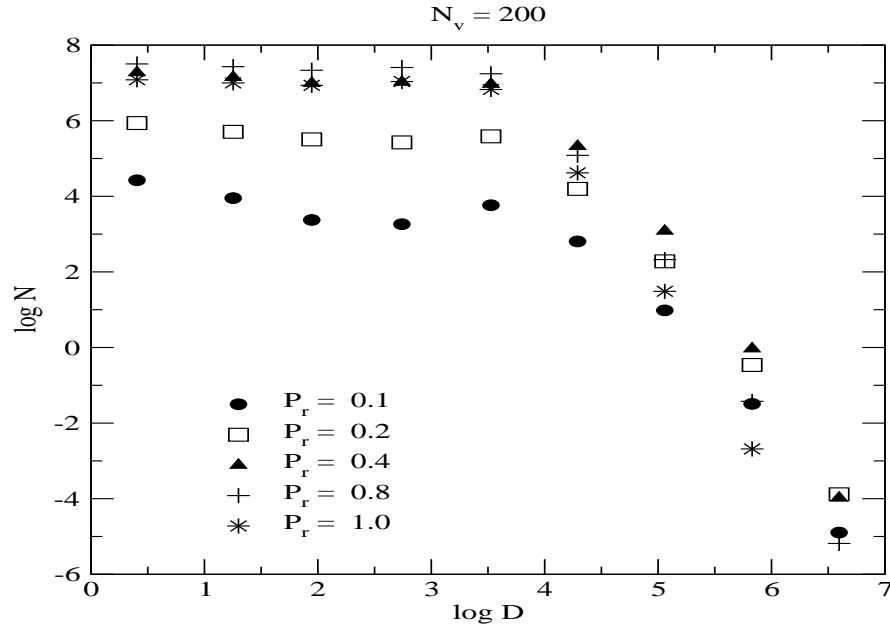


Figura 4.10: Gráficos de  $\log N$  versus  $\log D$  para distribuição de chuvas para os estudos com  $N_v = 200$  e  $l = 0.005$ .

e com  $P_r = 0.8$  e  $N_v = 200$ ,  $\beta = 2.3(3)$ , em que o número de décadas correspondente é, também, de 4–7. Encontramos a faixa de 7–9 décadas para  $N_v = 100, 200$  e  $P_r = 0.4, 0.8, 1.0$ .

#### 4.1.2 Distribuição de Secas

Nesta seção denominamos  $N$  o número de eventos de seca e  $D$  a duração de cada evento. Os gráficos das figuras 4.19 e 4.20 são  $\log N$  versus  $\log D$  e correspondem aos modelos com  $l = 0.01$ , enquanto os das Fig 4.21, 4.22 e 4.22, correspondem aos modelos com  $l = 0.005$  para  $N_v = 10, 50, 100, 200$ . Para cada valor de  $N_v$  dispomos todos os  $P_r$  estudados.

Nos dados encontrados para essa distribuição, a maioria exibe perfil que pode ser aproximado por uma exponencial estendida, como pode ser visto nessas figuras em que o decaimento típico dessa curva ocorre. No entanto, em alguns casos, em que a caracterização é frágil, percebemos que mais de um tipo de ajuste poderia ser aplicado. Assim, conseguimos observar tanto perfis tipo lei de potência como do tipo função quadrática. Como nas distribuições vistas anteriormente, obtivemos gráficos com números insuficientes de dados, como podemos ver para  $N_v = 10$  para todos os valores de  $P_r$  e  $N_v = 50$  para  $P_r = 0.1$  quando  $l = 0.005$  (Fig 4.21). E

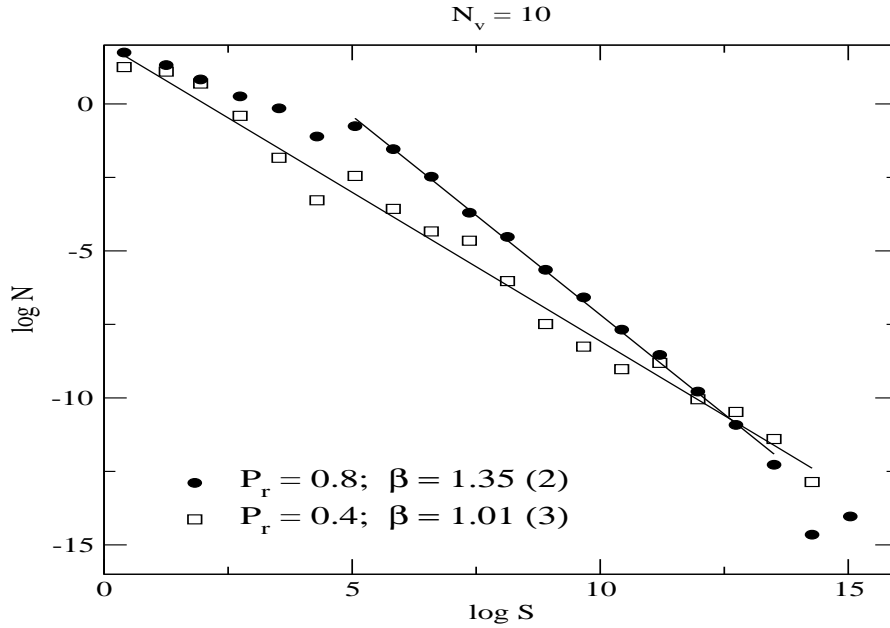


Figura 4.11: Regressão linear aplicada ao estudo com  $N_v = 10$  e  $l = 0.01$  para distribuição de chuvas.

obtivemos também valores com grandes oscilações como em  $N_v = 10$  para  $P_r = 0.1, 1.0$  e  $l = 0.01$  (Fig 4.19).

**Determinação de Expoentes** - A expressão de uma exponencial estendida é dada por

$$\begin{aligned} \log Y &= -Ax^\gamma + B \\ Y &= 10^{-Ax^\gamma + B} \\ Y(x) &\propto 10^{-Ax^\gamma} \end{aligned}$$

onde  $\gamma$  é o expoente que procuramos. Os cálculos realizados nessa seção estão ligados à distribuição de secas das Fig 4.19 a 4.23. A estimativa dos expoentes foi realizada manualmente por substituição direta de  $\gamma$  em (4.2). Várias tentativas com valores diferentes para  $\gamma$  foram feitas. Os expoentes selecionados são os que melhor aproximam a curva dada por (4.2) de uma reta. Como esse processo é demorado e muito trabalhoso, apenas alguns casos mais expressivos são apresentados.

Para o ajuste quadrático, tem-se a expressão

$$(\log Y)^2 = C_0(\log x)^2 + C_1 \log x + C_2 \quad (4.2)$$

onde  $C_0, C_1$  e  $C_2$  são os parâmetros que procuramos. As TAB 3 e 4 apresentam todos os expoentes encontrados. Os estudos foram separados em dois grupos de acordo com a variável  $l$ :



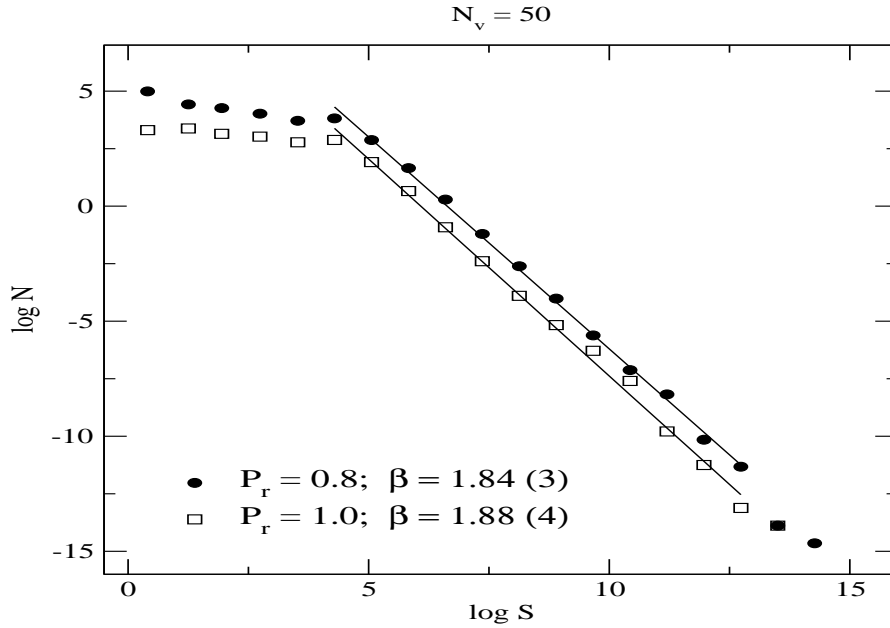


Figura 4.12: Regressão linear aplicada ao estudo com  $N_v = 50$  e  $l = 0.01$  para distribuição de chuvas.

★ Para  $l = 0.01$ , ( Fig 4.24, 4.25 e 4.26 ), encontramos, para  $N_v = 50$ , quando  $P_r = 0.2$ , os expoentes  $\gamma = 0.20$  e  $0.25$  para primeira e segunda curvas, respectivamente. Quando  $P_r = 0.8$  ajustamos os dados a três curvas de natureza distintas: a uma reta obtida por regressão linear de  $\log N$  por  $\log D$ ; a uma parábola cujos coeficientes foram obtidos por regressão quadrática de  $\log N$  por  $\log D$ ; a uma reta pelo método descrito. A regressão linear nos devolve o valor  $\beta = 1.59(5)$  do expoente e representa uma lei de potência ruidosa sobre aproximadamente 5 décadas. Do tratamento feito interpretando os dados como exponencial extentida obtemos o expoente  $\gamma = 0.33$ , mas observamos que a curvatura negativa indica um decaimento maior que o exponencial. Na aproximação por uma parábola, não chegamos a uma expressão simples entre as variáveis  $N$  e  $D$ . Os valores dos coeficientes encontrados estão na figura também para o caso em que  $P_r = 1.0$ . Esse comportamento multi-assinalado também foi identificado para o estudo com  $N_v = 100$  e  $P_r = 0.4$ . Devido a esse carácter plural, consideramos esses casos como inconclusivos, onde um número maior de ensaios se faz necessário para se chegar a um afirmação concreta. Outros valores para  $\gamma$  são mostrados nas figuras.

★ Para  $l = 0.005$ , ( Fig 4.27 e 4.28 ), obtivemos  $\gamma = 0.25$ ,  $0.35$  e  $0.47$  com  $N_v = 100$  e  $P_r = 0.2, 0.4, 1.0$ . No caso  $P_r = 1.2, 1.4$  e  $N_v = 200$ , observamos carácter plural com os valores  $\beta = 2.15(7)$ , sobre 5 décadas, e

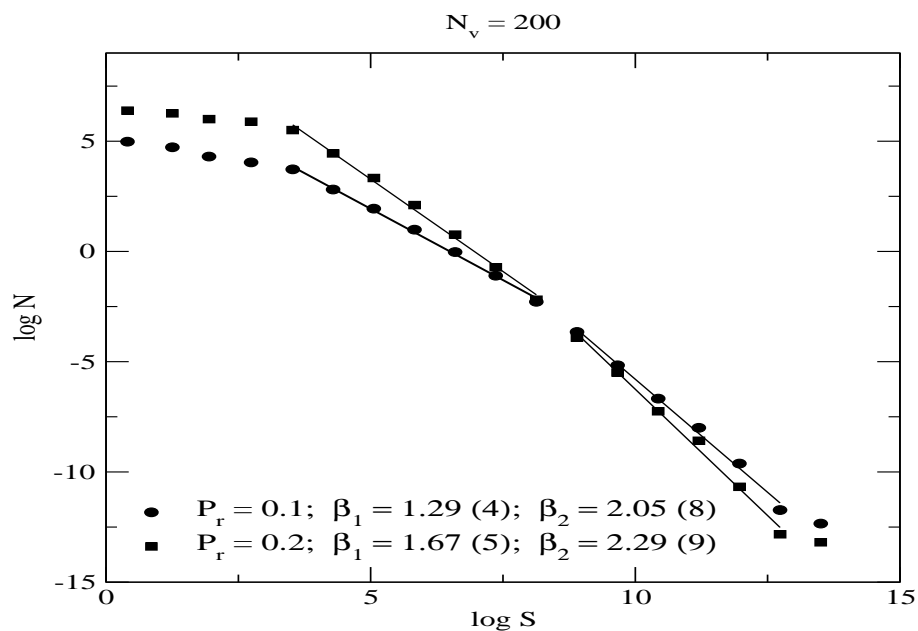
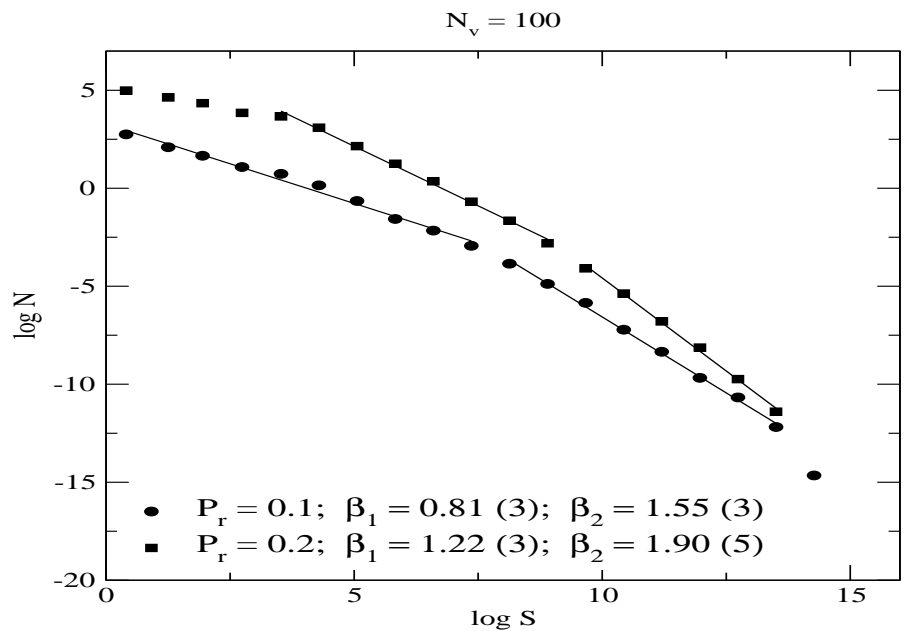
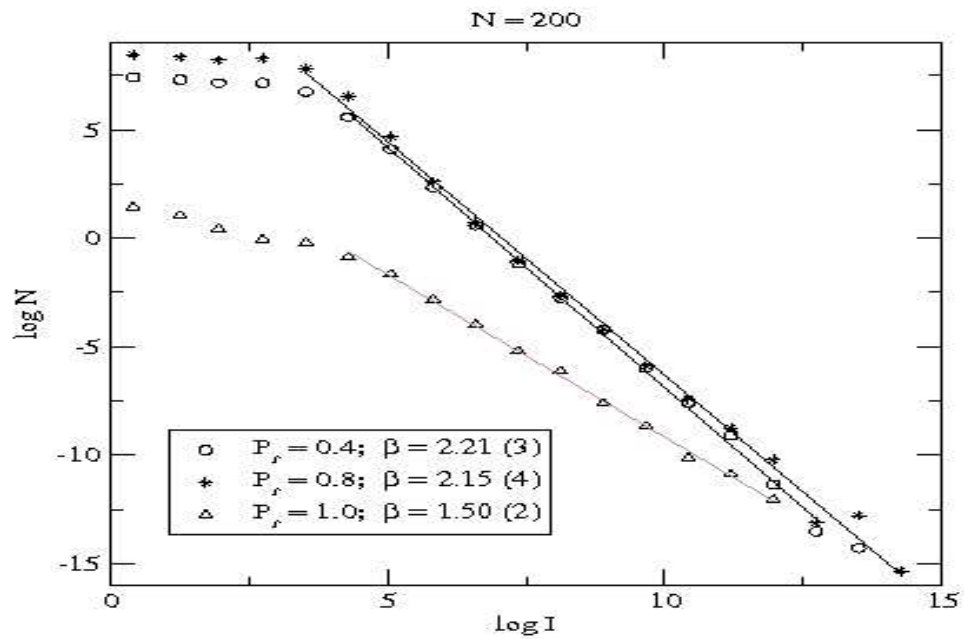
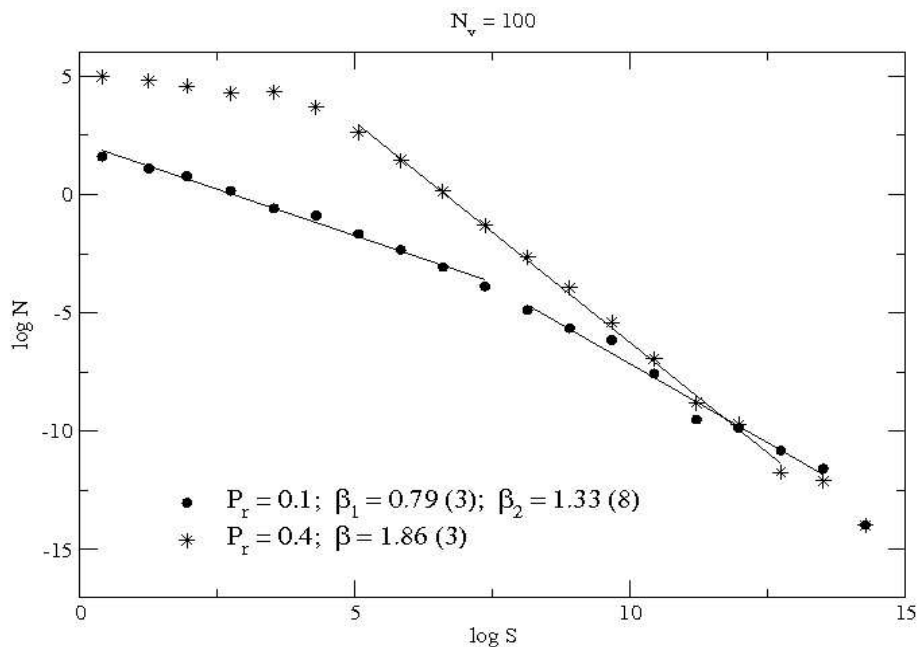


Figura 4.13: Regressão linear aplicada ao estudo com  $N_v = 100, 200$  e  $l = 0.01$  para distribuição de chuvas: podemos observar sistemas de dois regimes.



**Figura 4.14:** Regressão linear aplicada aos estudos com  $N_v = 200$  e  $l = 0.01$  para distribuição de chuvas.



**Figura 4.15:** Regressão linear aplicada aos estudos com  $N_v = 100$  e  $l = 0.005$  para distribuição de chuvas.

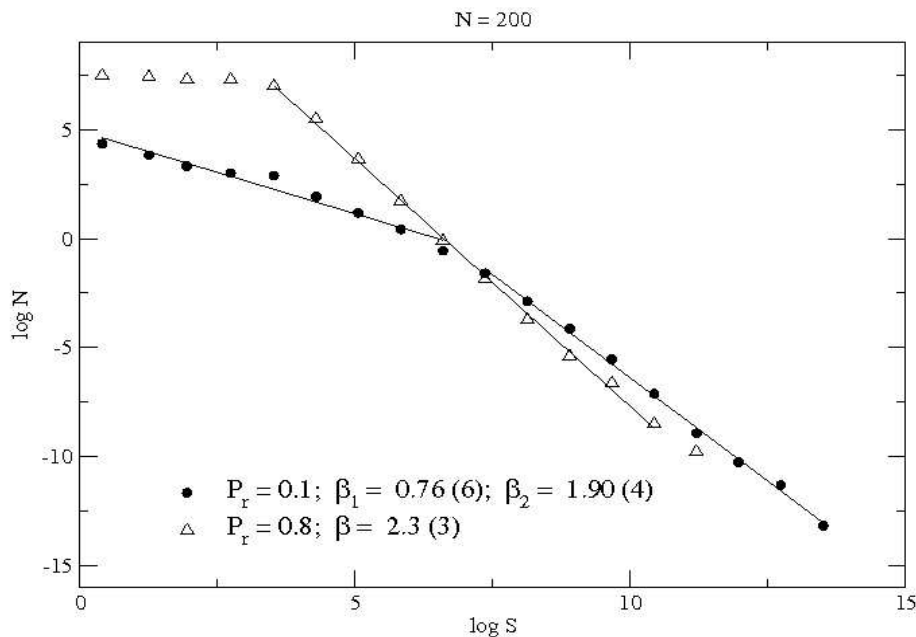


Figura 4.16: Regressão linear aplicada aos estudos com  $N_v = 200$  e  $l = 0.005$  para distribuição de chuvas.

$$\gamma = 0.29.$$

## 4.2 Discussões

### 4.2.1 Tendências

Devido à gama de parâmetros utilizados e ao número variado de modelos que podem ser obtidos, achamos pertinente analisar o comportamento do sistemas em relação a um ou outro parâmetro. Assim, nessa seção vamos apresentar as tendências mais relevantes apresentadas pelos resultados das simulações. Ao final da seção temos uma tabela na qual podemos visualizar todas as tendências estudadas.

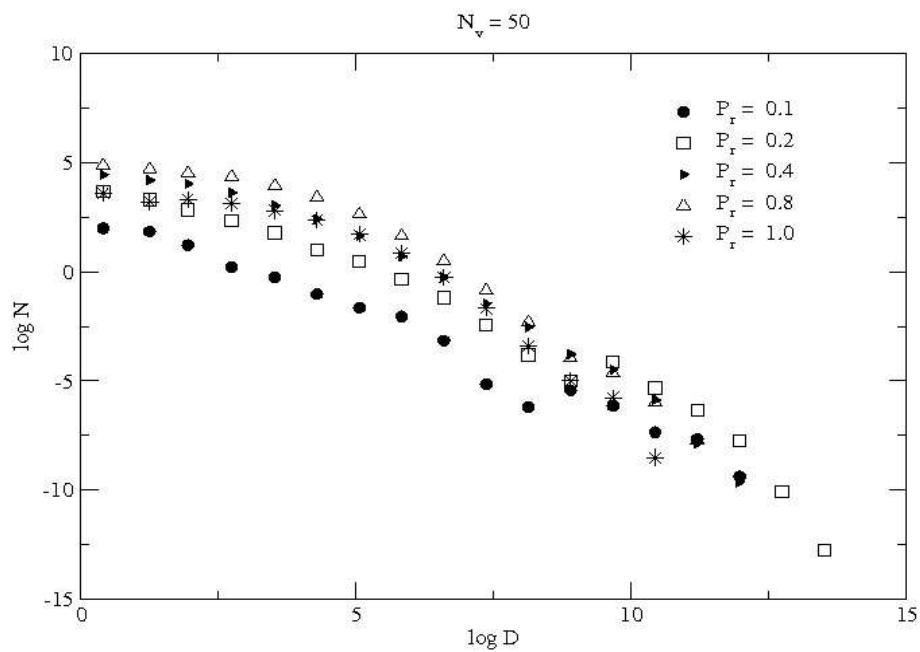
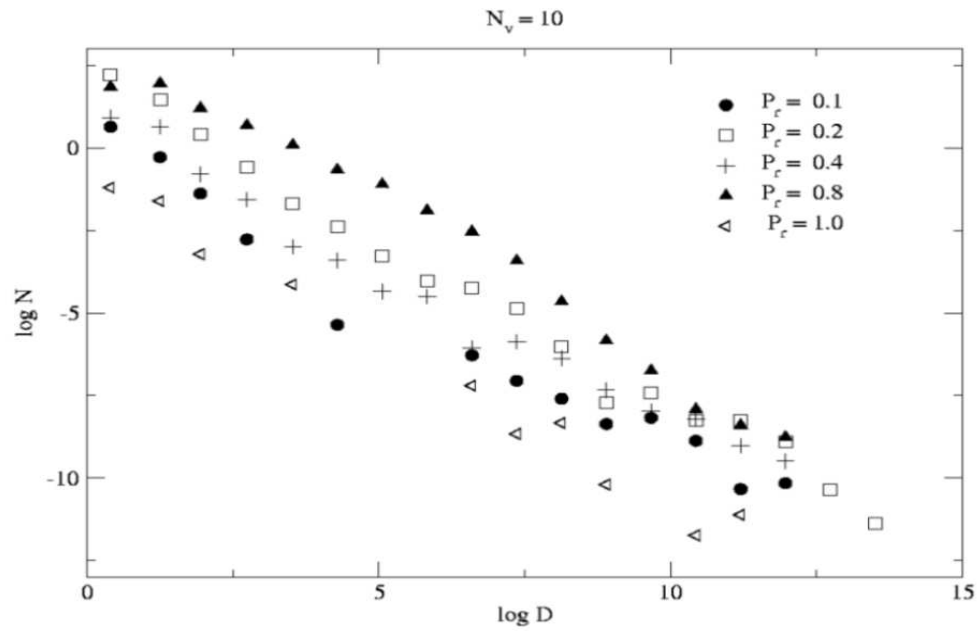
**Tendência com  $P_r$**  - Quanto à distribuição de chuvas, os casos escolhidos para exemplificar a resposta do sistema à riação de período de evolução foram os com  $N_v = 200$  e  $l = 0.005$ . Percebemos que o valor dos expoentes  $\beta$  aumentam conforme  $P_r$  cresce até 0.8, Fig 4.31 em que os valores de  $\beta$  estão entre 0.76 – 2.21. Para  $P_r = 1.2$ , vemos que o expoente diminui, sendo igual a 2.18. Baseado nesse fato, sentimos a necessidade de verificar outro exemplo. Se acrescentarmos à nossa análise os expoentes mostrados

		l = 0.01		
		$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta$
P <sub>r</sub> = 0.1	N <sub>v</sub> = 100	0.81 (3)	1.55 (3)	—
	N <sub>v</sub> = 200	1.29 (4)	2.05 (8)	—
P <sub>r</sub> = 0.2	N <sub>v</sub> = 100	1.22 (3)	1.90 (5)	—
	N <sub>v</sub> = 200	1.67 (5)	2.29 (9)	—
P <sub>r</sub> = 0.4	N <sub>v</sub> = 10	—	—	1.01 (3)
	N <sub>v</sub> = 200	—	—	2.21 (3)
P <sub>r</sub> = 0.8	N <sub>v</sub> = 10	—	—	1.35 (2)
	N <sub>v</sub> = 50	—	—	1.84 (3)
	N <sub>v</sub> = 200	—	—	2.15 (4)
P <sub>r</sub> = 1.0	N <sub>v</sub> = 50	—	—	1.88 (4)
	N <sub>v</sub> = 200	—	—	1.50 (2)

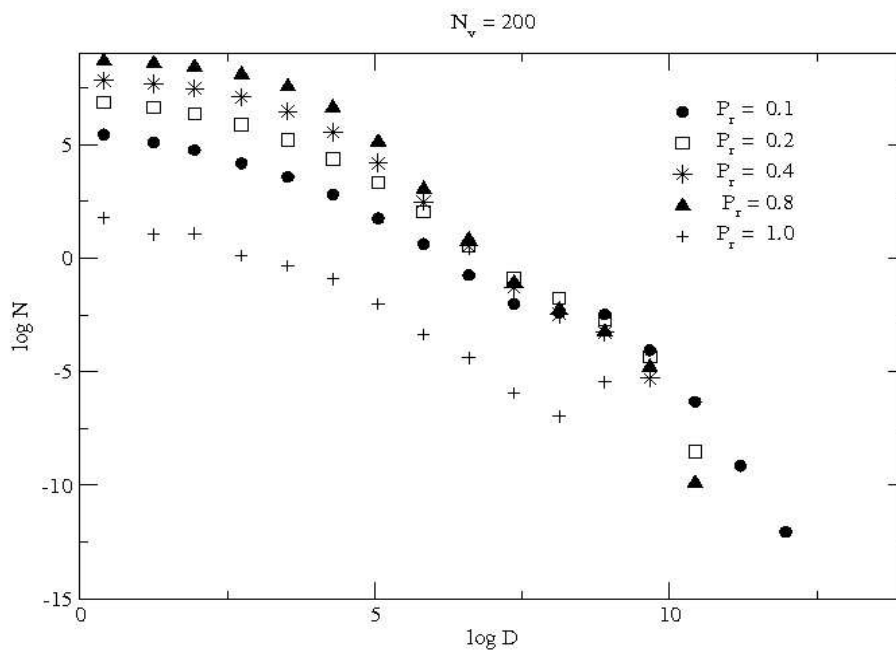
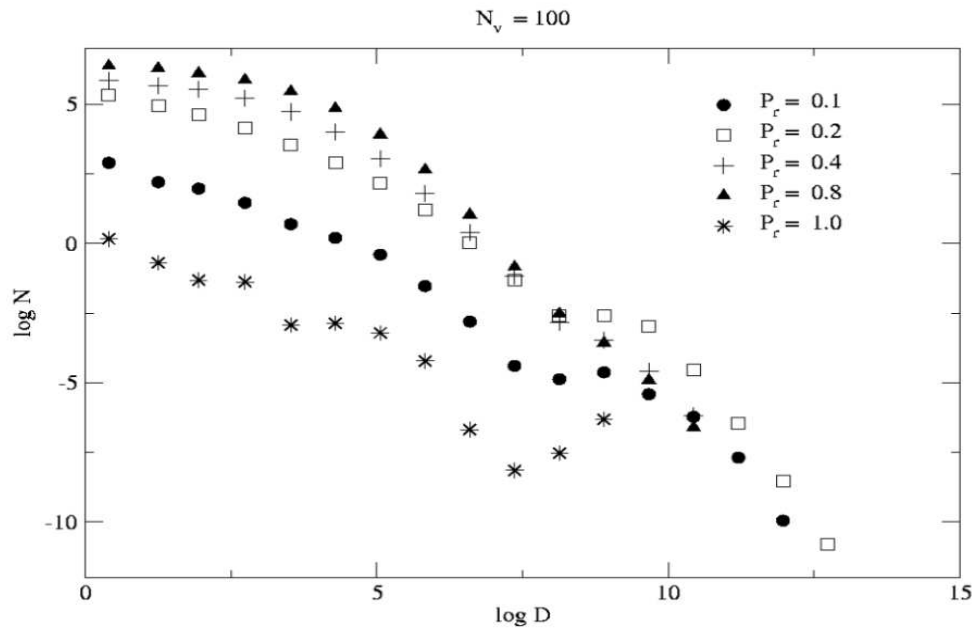
Figura 4.17: Tabela 1 - Relação dos expoentes encontrados para distribuição de chuvas nos estudos com  $l = 0.01$ .

		l = 0.005		
		$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta$
P <sub>r</sub> = 0.1	N <sub>v</sub> = 100	0.79 (3)	1.33 (8)	—
	N <sub>v</sub> = 200	0.76 (6)	1.90 (2)	—
P <sub>r</sub> = 0.4	N <sub>v</sub> = 100	—	—	1.86 (3)
P <sub>r</sub> = 0.8	N <sub>v</sub> = 200	—	—	2.3 (3)

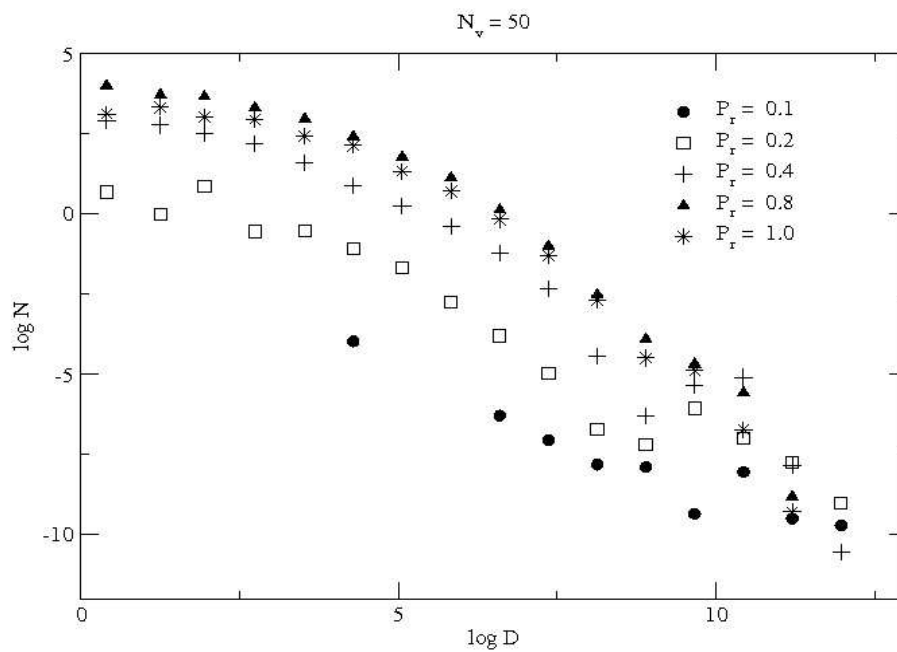
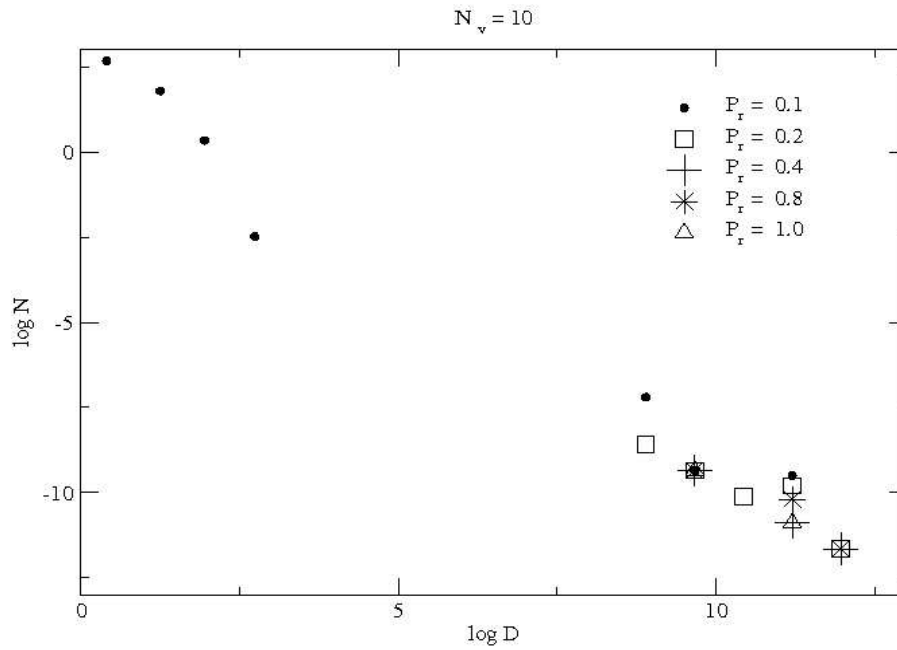
Figura 4.18: Tabela 2 - Relação dos expoentes encontrados para distribuição de chuvas nos estudos com  $l = 0.005$ .



**Figura 4.19:** Gráficos de  $\log N$  versus  $\log D$  para distribuição de secas para os estudos com  $N_v = 10, 50$  e  $l = 0.01$ .

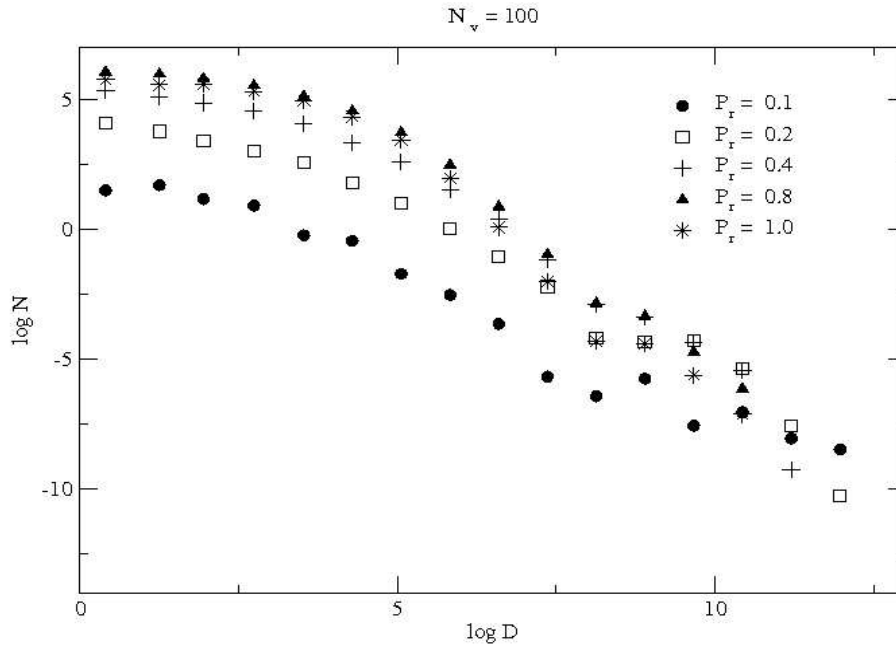


**Figura 4.20:** Gráficos de  $\log N$  versus  $\log D$  para distribuição de secas para os estudos com  $N_v = 100, 200$  e  $l = 0.01$ .



**Figura 4.21:** Gráficos de  $\log N$  versus  $\log D$  para distribuição de secas para os estudos com  $N_v = 10, 50$  e  $l = 0.005$ .



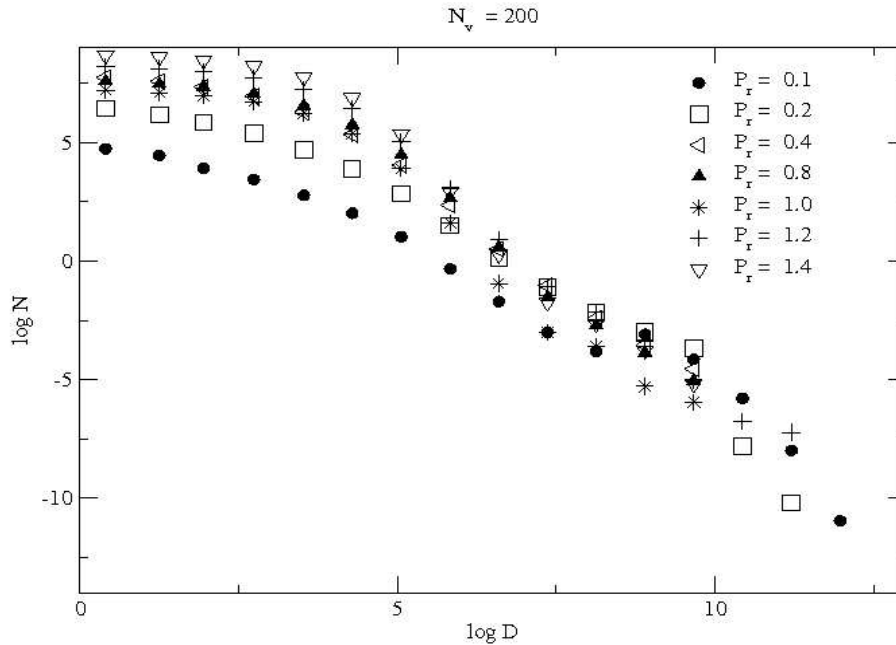


**Figura 4.22:** Gráficos de  $\log N$  versus  $\log D$  para distribuição de secas para os estudos com  $N_v = 100$  e  $l = 0.005$ .

na Fig 4.14, notamos o efeito contrário em que os expoentes diminuem conforme  $P_r$  cresce. Assim, estudando cada modelo separadamente, fica claro qual a tendência que apresentam, mas, quando confrontamos os dados exibidos nos exemplos, percebemos que não são compatíveis e, portanto, não conclusivos. Ou seja, para sistemas com o mesmo número de vórtices, os expoentes associados a diferentes períodos de evolução tendem a aumentar ou diminuir, mas não temos como saber qual das formas o sistema vai apresentar.

Quanto a distribuição de secas, discutiremos sobre os casos apresentados na Fig 4.28. Percebemos que, para  $N_v = 100$ , os expoentes aumentam com  $P_r$ . No entanto, dado o comportamento multicaracterizado dos outros casos, optamos por não assumir esse estudo como exemplo para uma afirmação geral. Analisando como um todo, consideramos essa questão sobre as distribuições em aberto.

Um outro aspecto interessante é a posição final dos tracejadores que apresentou tendência muito bem caracterizada. Aquelas apresentadas na Fig 4.32 correspondem ao estudo escolhido para essa seção em que podemos notar que os tracejadores tendem a se espalhar uniformemente pela região limitada por um quadrado de lado médio aproximadamente igual a  $1.7(1)$  à medida que o sistema evolui no tempo. A uniformidade das posições está claramente relacionada com o tempo de evolução do sistema, uma vez



**Figura 4.23:** Gráficos de  $\log N$  versus  $\log D$  para distribuição de secas para os estudos com  $N_v = 200$  e  $l = 0.005$ .

que também ocorre nas outras simulações. Quanto ao confinamento em torno da região, este deve ser registrado como comportamento próprio da dinâmica de vórtices. Isso porque, apesar de o sistema apresentar fronteira aberta, podemos comprovar que os vórtices não saem de uma certa região, o que mantém as partículas restritas à mesma.

**Tendência com  $N_v$**  - Para exemplificar a tendência com o número de vórtices para distribuição de chuvas, escolhemos modelos com  $l = 0.005$  e  $P_r = 0.8$ . A Fig 4.33 mostra a variação nos valores dos expoentes para os sistemas com  $N_v = 10, 50, 100, 200$ . Podemos observar que, exceto para  $N_v = 10$ , os expoentes correspondentes a um mesmo período de evolução do sistema aumentam com o aumento do número de vórtices. Os valores de  $\beta$  estão entre 1.78 – 2.3. Esse comportamento também foi observado nos modelos com  $l = 0.01$ . Para o caso  $N_v = 10$ , a lei de potência não foi obtida por motivos já apresentados na seção anterior. Em relação a secas, mais uma vez, optamos por não relacionar os dados obtidos a esse aspecto do sistema, também.

**Tendência com  $l$**  - Os estudos escolhidos para distribuição de chuvas foram aqueles com  $N_v = 200$  e  $P_r = 0.8$ . Na Fig 4.34 podemos ver que os expoentes aumentam conforme diminui o tamanho da célula que contém os tracejadores. Os valores de  $\beta$  são 2.15, 2.3 para  $l = 0.01, 0.005$ , respectivamente. No entanto, ao confrontar esse resultados com o apresenta-

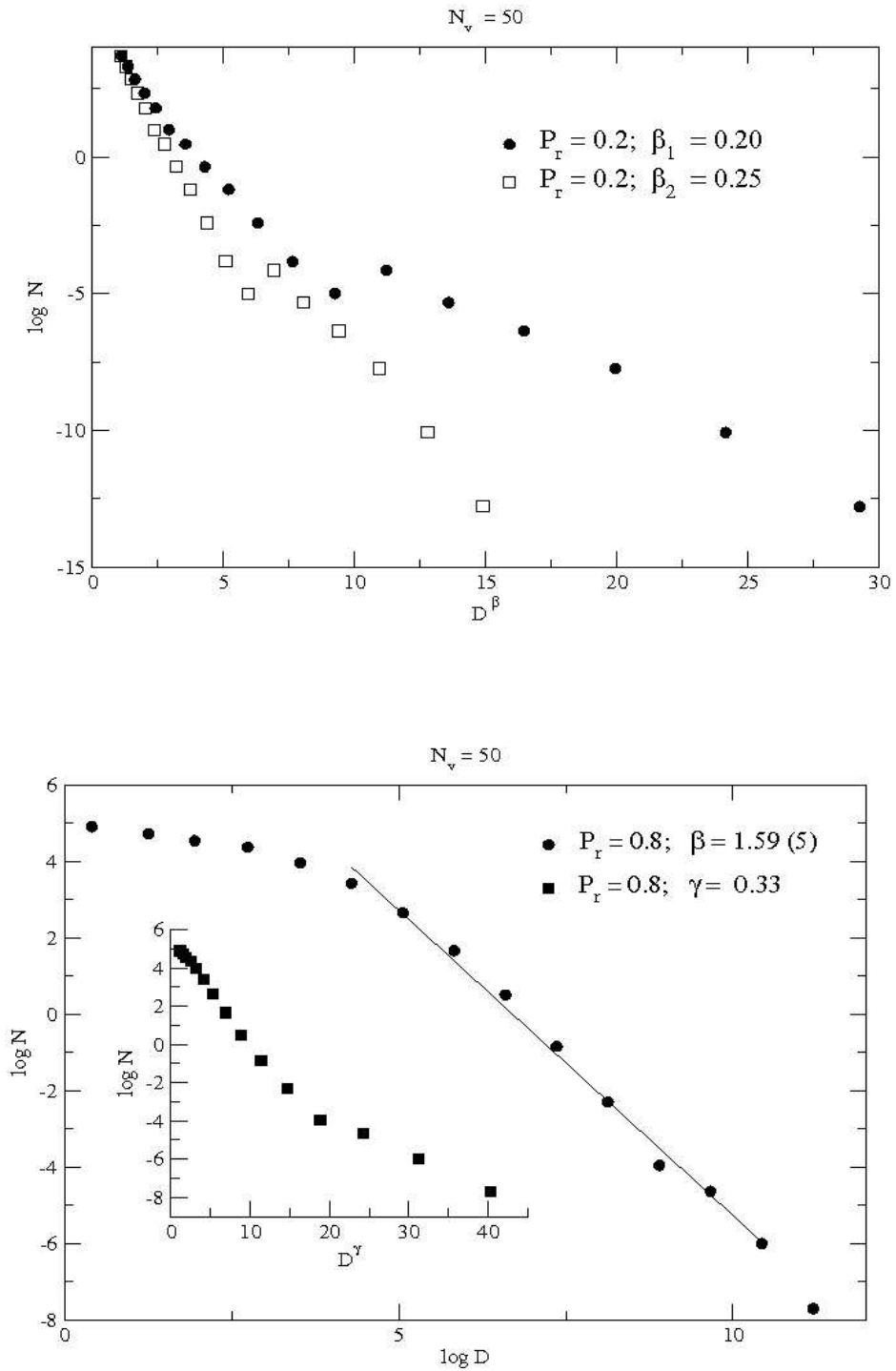
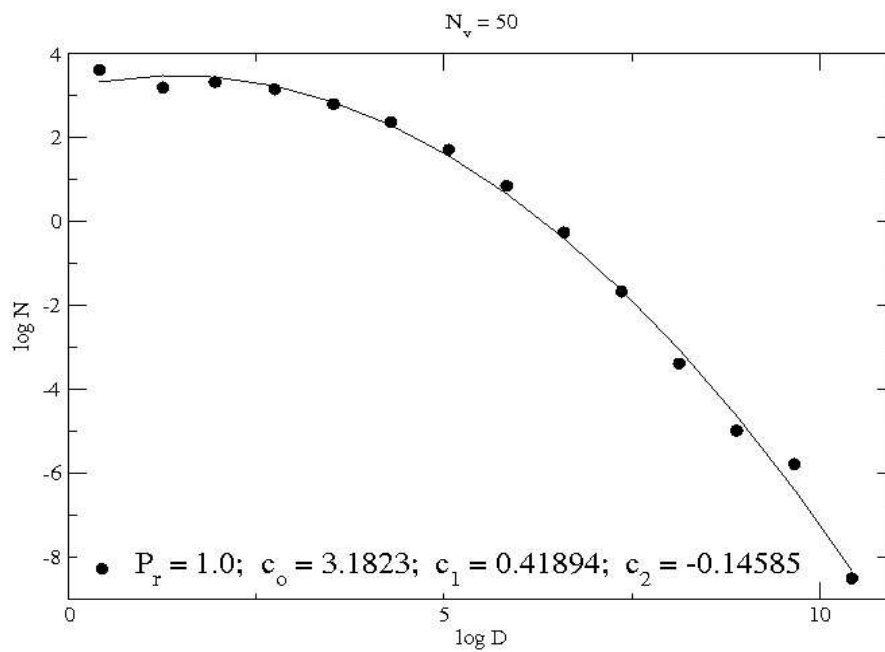
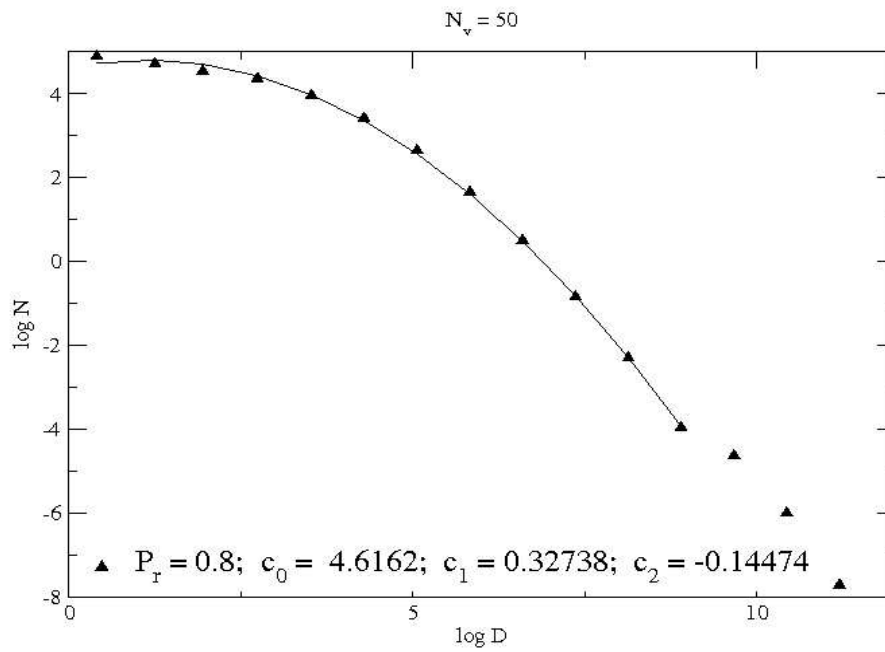


Figura 4.24: Determinação de expoentes para distribuição de secas para os estudos com  $N_v = 50$ ,  $l = 0.01$  e  $P_r = 0.2, 0.8$ .



**Figura 4.25:** Determinação de expoentes para distribuição de secas para os estudos com  $N_v = 50$ ,  $l = 0.01$  e  $P_r = 0.8, 1.0$ .

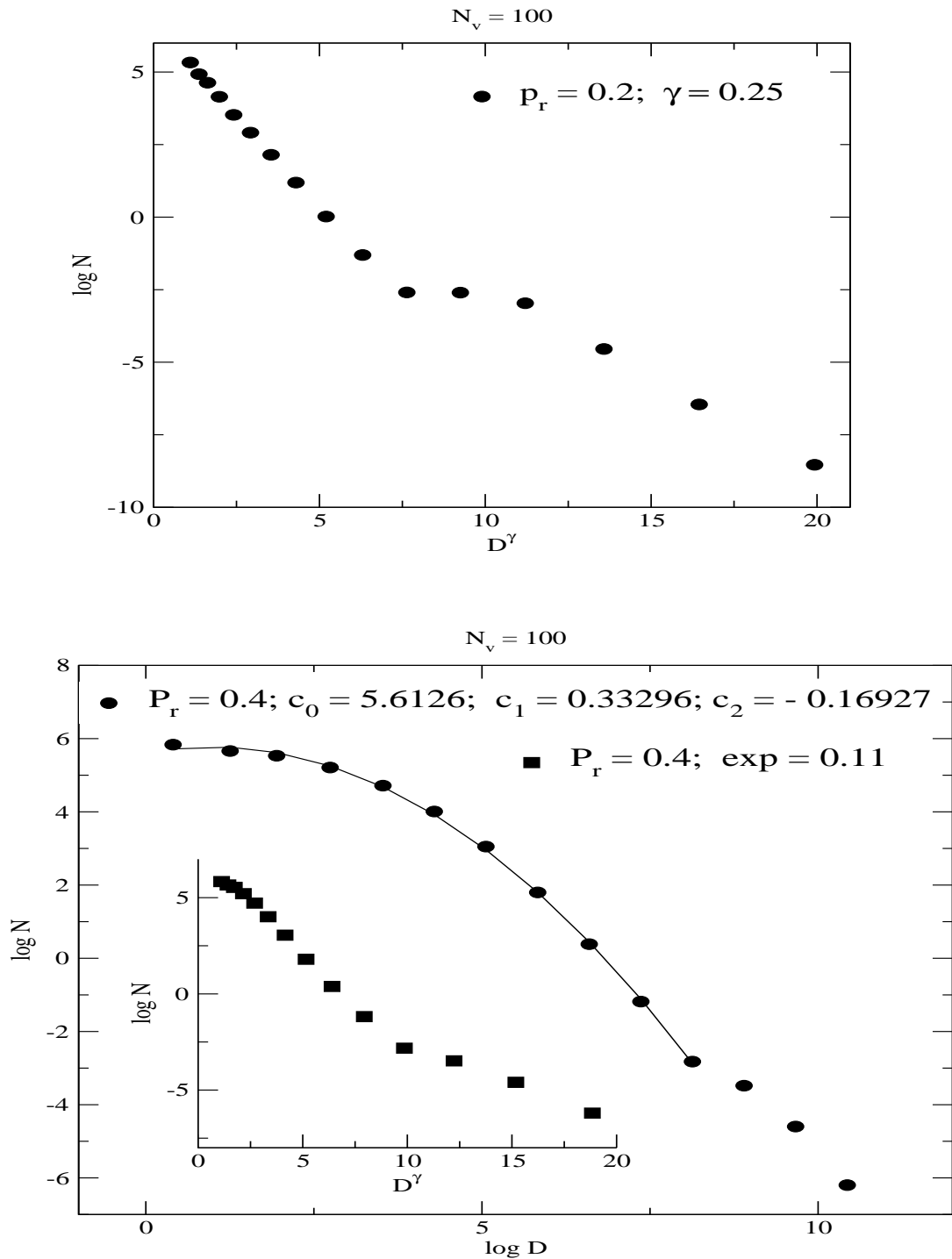


Figura 4.26: Determinação de expoentes para distribuição de secas para os estudos com  $N_v = 100$ ,  $l = 0.01$  e  $P_r = 0.2, 0.4$ .

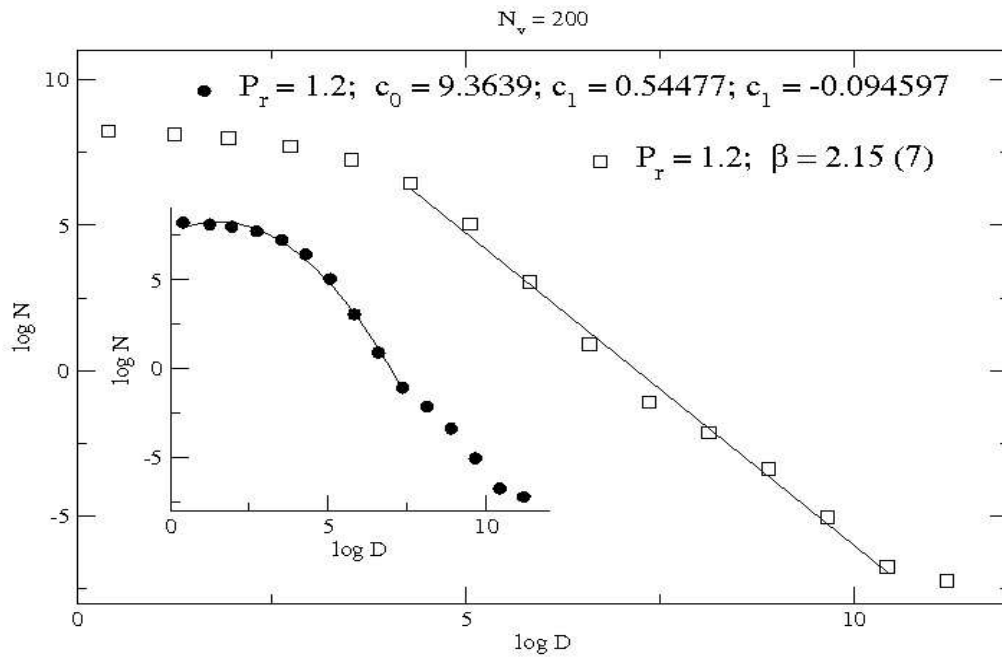


Figura 4.27: Determinação de expoentes para distribuição de secas para os estudos com  $N_v = 200$ ,  $l = 0.005$  e  $P_r = 1.2$ .

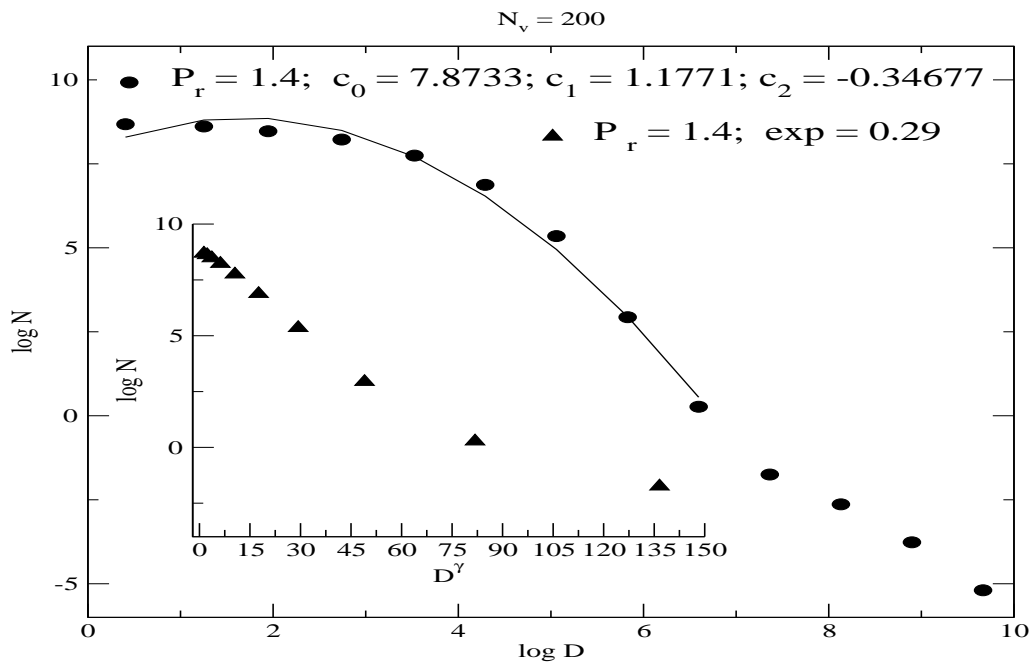


Figura 4.28: Determinação de expoentes para distribuição de secas para os estudos com  $N_v = 200$ ,  $l = 0.005$  e  $P_r = 1.4$ .

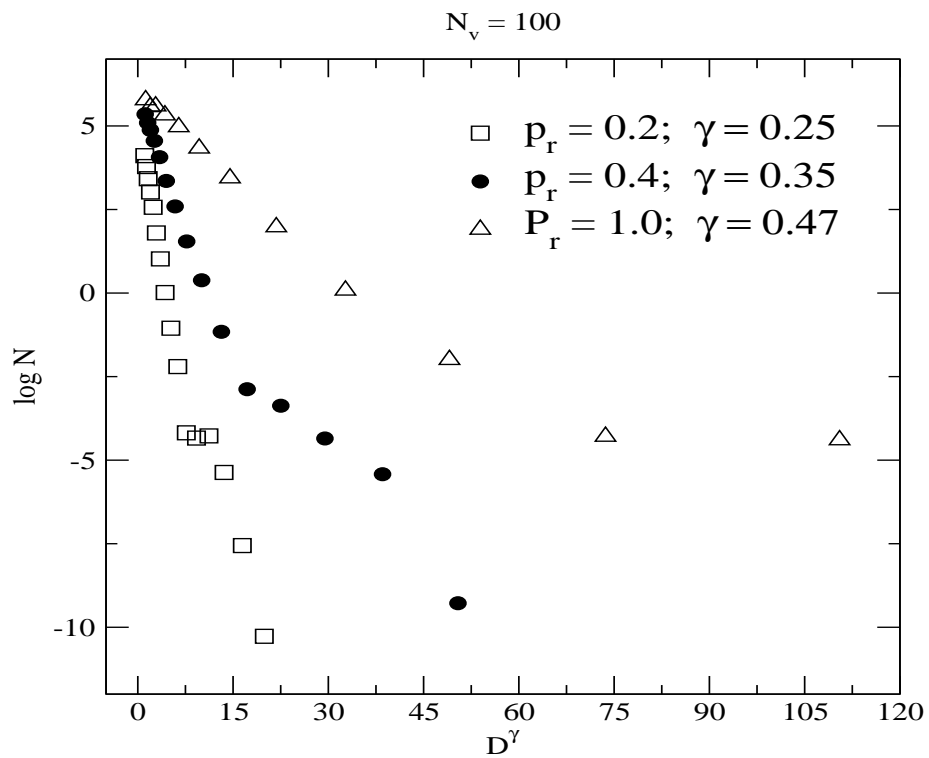


Figura 4.29: Determinação de expoentes para distribuição de secas para os estudos com  $N_v = 100$ ,  $l = 0.005$  e  $P_r = 0.2, 0.4 \leq 1.0$ .

		$l=0.005$				
		$\beta$	$\gamma$	$C_0$	$C_1$	$C_2$
$N_v = 100$	$P_r = 0.2$	—	0.25	—	—	—
	$P_r = 0.4$	—	0.35	—	—	—
	$P_r = 1.0$	—	0.47	—	—	—
$N_v = 200$	$P_r = 1.2$	2.15 (7)	—	9.3639	0.54477	-0.094597
	$P_r = 1.4$	—	0.29	7.8733	1.1771	-0.34677

Figura 4.30: Tabela 3 - Relação dos expoentes encontrados para distribuição de secas nos estudos com  $l = 0.01$ .

		l=0.01						
		$\beta$	$\gamma$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	C_0	C_1	C_2
N_v = 50	P_r=0.2	—	—	0.20	0.25	—	—	—
	P_r=0.8	1.59 (3)	0.33	—	—	4.6162	0.32739	-0.14474
	P_r=1.0	—	—	—	—	3.1823	0.41894	-0.14585
N_v = 100	P_r=0.2	—	0.25	—	—	—	—	—
	P_r=0.4	—	0.11	—	—	5.6126	0.33296	-0.16927

Figura 4.31: Tabela 4 - Relação dos expoentes encontrados para distribuição de secas nos estudos com  $l = 0.005$ .

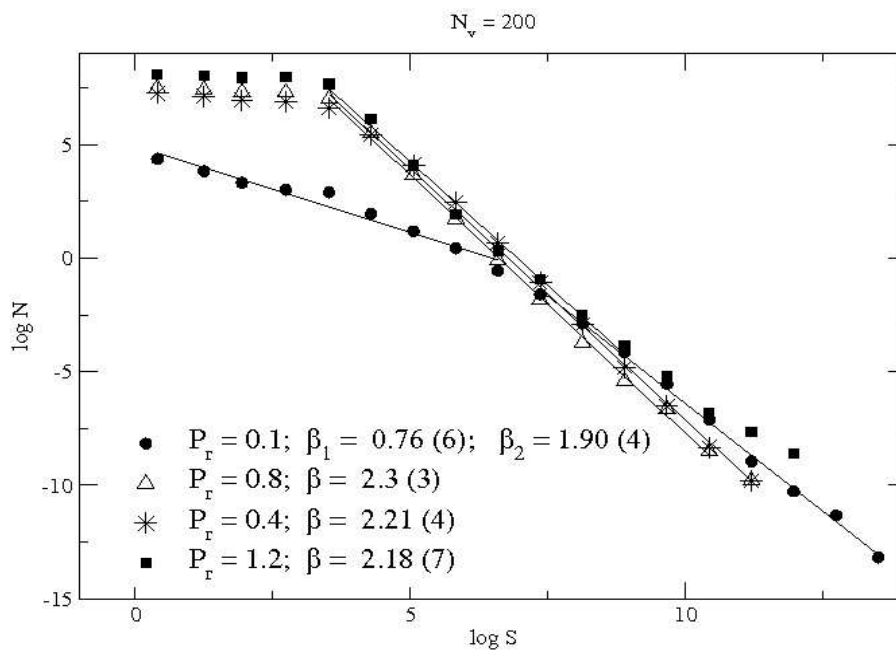


Figura 4.32: Expoentes para o estudo com  $l = 0.005$ ,  $N_v = 200$  e  $P_r = 0.1, 0.4, 0.8, 1.2$ .



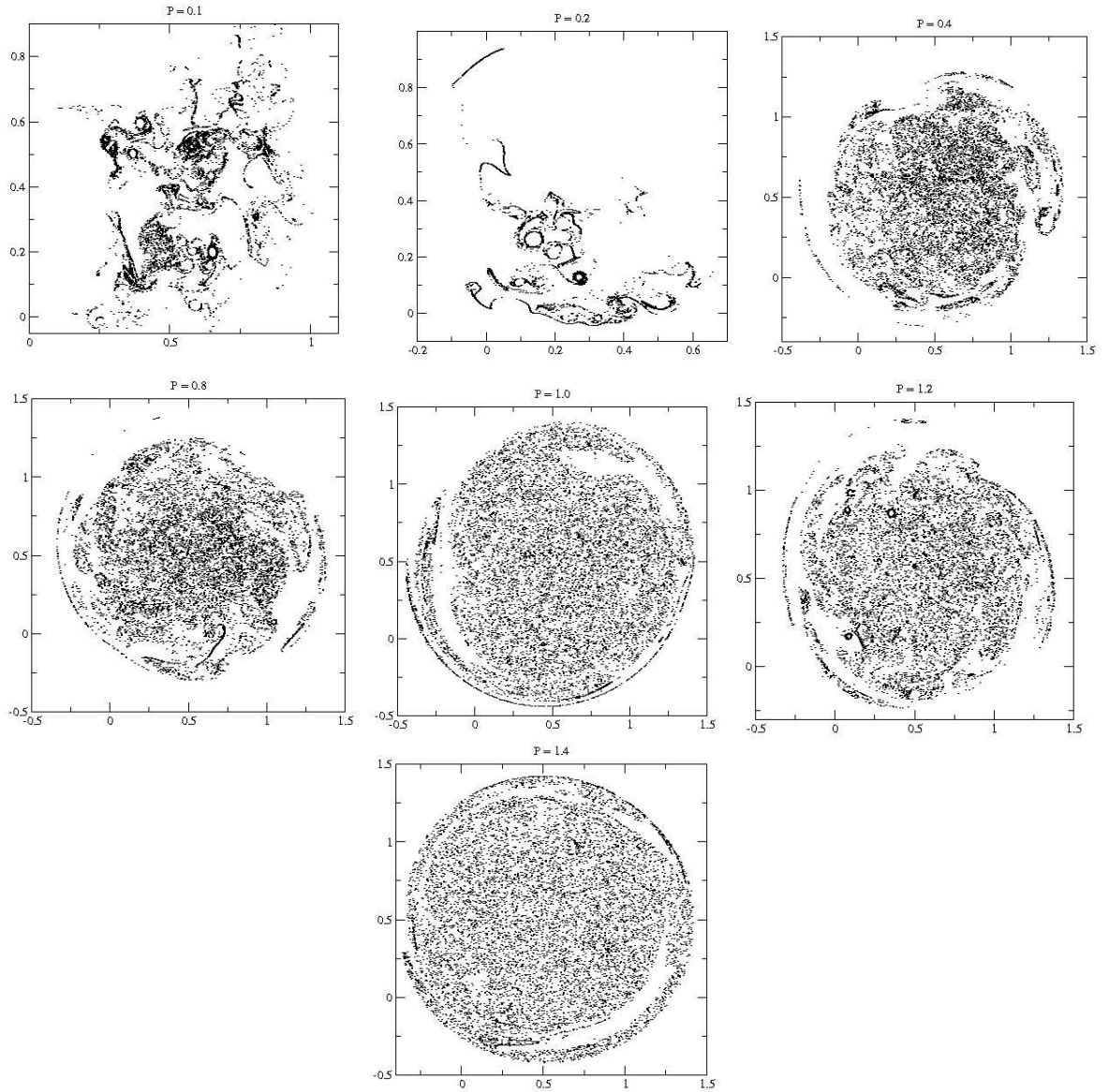


Figura 4.33: Posição final dos tracejadores para os estudos com  $l = 0.005$ ,  $N_v = 200$  e  $P_r = 0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4$ .

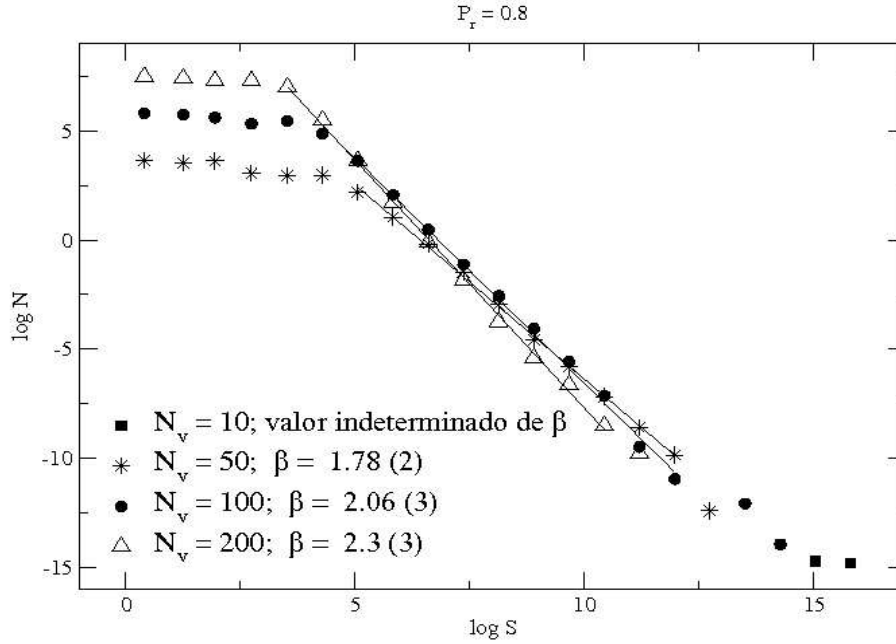


Figura 4.34: Expoentes para os estudos com  $l = 0.005$ ,  $P_r = 0.8$  e  $N_v = 10, 50, 100, 200$ .

do por outros casos, percebemos se tratar de uma exceção ou, antes, uma minoria. Isto porque em dados observados para o mesmo  $N_v$  mas com  $P_r = 0.1$  o resultado é um comportamento oposto. De mesma forma, para os sistemas com  $N_v = 100$  e  $P_r = 0.1$  também encontramos resultados controversos ao primeiro. Nestes últimos casos, os expoentes cresceram com o aumento do lado da célula. Os valores de  $\beta$  para  $N_v = 200$  e  $P_r = 0.1$  estão entre  $0.76 - 1.29$  para a primeira curva e  $1.90 - 2.05$  para a segunda, como mostram as Fig 4.16 e 4.13. Já aqueles obtidos para  $N_v = 100$  e  $P_r = 0.1$  estão entre  $0.79 - 0.81$  e  $1.33 - 1.55$  para primeira e segunda curvas como mostram as Fig 4.15 e 4.13. Como essa tendência ocorre para a maioria dos casos, podemos afirmar que sistemas com mesmo número de vórtices tendem a aumentar seu expoente associado conforme aumenta o lado da caixa com os tracejadores. Para distribuição de secas, observamos que, ao comparar os modelos  $N_v = 100$  e  $P_r = 0.2$ , Fig 4.26 e 4.28, o valor de  $\gamma$  é igual no dois casos. Como temos apenas esse estudo para comparação devido ao comportamento plural já salientado, não temos como afirmar uma tendências e deixamos esse aspecto em aberto.

Em relação à posição final dos tracejadores, encontramos que a mudança em  $l$  não afeta qualitativamente a disposição dos mesmos, Fig 4.35. Em ambos os sistemas, a *aparência* final exibida é semelhante onde os tracejadores já se encontram em avançado processo de distribuição uniforme.

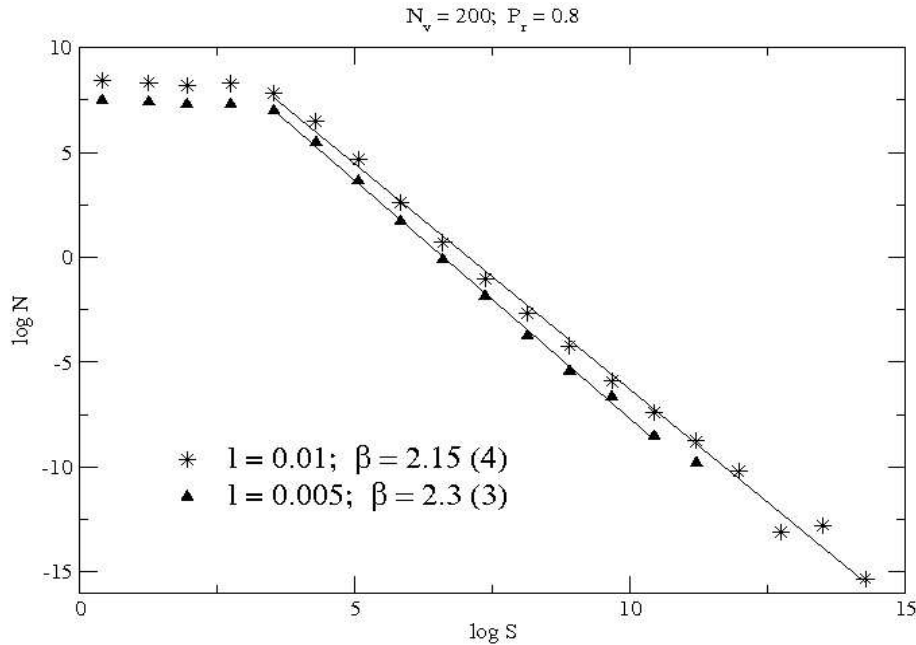


Figura 4.35: Expoentes para os estudos com  $P_r = 0.8$ ,  $N_v = 200$  e  $l = 0.01, 0.005$ .

#### 4.2.2 Comparação com Resultados de Trabalhos Similares

A comparação de resultados será feita com o intuito de relacionar dois aspectos principais: dados experimentais e dados simulacionais; efeitos das fronteiras periódica e aberta. Sobre o aspecto de comparação de dados, a idéia essencialmente é confrontar modelos. Isto porque o modelo associado ao dados observacionais não coincide com o desenvolvido na simulação. Portanto, relacionar dados reflete, na verdade, a validade de um ou outro modelo, ou até mesmo de ambos. Sobre o aspecto da fronteira usada, o que queremos é avaliar como a fronteira pode influenciar a evolução do sistema, visto que os modelos estudados são tecnicamente idênticos. Os trabalhos cujos resultados serão usados como referência são os apresentados por Peters *et al.*(2002) e os elaborados por Dickman(2003).

**Paralelo com dados experimentais** - Os dados experimentais utilizados para comparação são os apresentados na pesquisa realizada por Peters *et al.*(2002). Com relação à distribuição de chuvas, as simulações nos devolveram leis de potência para os gráficos de  $\log N$  versus  $\log I$  assim como as obtidas experimentalmente. Os expoentes de ambos os trabalhos apresentam a mesma ordem de grandeza em que temos expoentes entre 0.73 – 2.3, enquanto Peters *et al.*(2002) apresentaram expoente de valor igual a 1.36. Quanto ao número de décadas associadas, os dados experimentais apresentam leis de potência sobre um mínimo de 3 décadas,

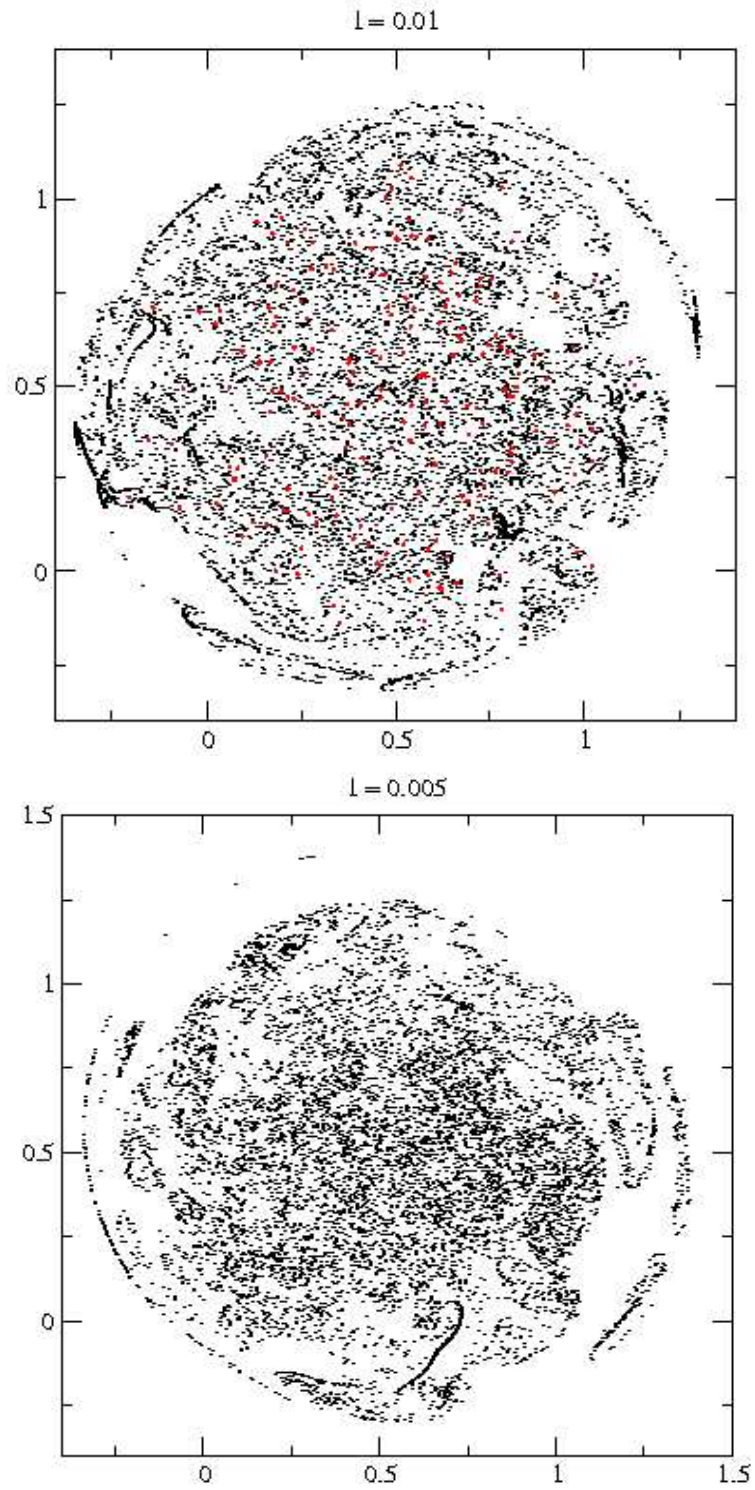


Figura 4.36: Posição final dos tracejadores para os estudos com  $N_v = 50$ ,  $P_r = 0.8$  e  $l = 0.01, 0.005$ .

enquanto, em nosso trabalho, observamos leis sobre um número de décadas que variam de 4 – 9. Quanto à distribuição de secas, encontramos em nosso trabalho um comportamento não esperado: os dados experimentais apresentam leis de potência, enquanto os dados simulacionais apresentam, principalmente, perfil de exponencial estendida. Os expoentes encontrados em nosso trabalho variam entre 0.11 – 0.47.

**Paralelo com sistemas com fronteira periódica-** Os dados usados para comparação são provenientes de simulações realizadas nos trabalhos de Dickman (2003). Tanto esse trabalho quanto o de Dickman possuem sistemas semelhantes. Do modelo elaborado e comentado no capítulo anterior, apenas a fronteira periódica é o diferencial. Ambos são formados por fluido ideal, ambos possuem campo de velocidade dominado por dinâmica vórtices e ambos partem dos mesmos parâmetros como  $N_v, N_t, N_e, \Delta t, P$ . Se considerarmos que os dados experimentais concordam com os resultados do modelo com fronteira periódica, então, qualquer informação além da esperada pode ser interpretada como efeito da condição de fronteira aberta. Assim, para distribuição de chuvas obtivemos leis de potências para  $\log N$  versus  $\log I$  com expoentes de mesma ordem de grandeza, onde os expoentes obtidos com fronteira periódica têm valores entre 0.93 – 1.02. No entanto, um novo fator foi observado em nosso trabalho: o sistema de dois regimes encontrado em alguns casos. Esse regimes não foram encontrados anteriormente e podem ser associados à fronteira aberta. Nos gráficos de  $\log N$  versus  $\log D$  encontramos decaimento exponencial, assim como ocorre com fronteira periódica. Mas, para distribuição de secas, as leis de potência não foram observadas, como ocorrem nos estudos de Dickman(2003) e de Peters *et al.*(2002). Apesar de não podermos afirmar a partir dos resultados deste estudo apenas, esse novo fato, juntamente com sistema o dois regimes obtido para chuvas, reflete o efeito da fronteira aberta.

# Capítulo 5

---

## Conclusões e Perspectivas

### 5.1 Conclusões

Estudamos as distribuições de chuvas e secas através de um modelo de fronteira aberta, de tracejadores passivos imersos em um fluido ideal submetidos a um campo de velocidades gerado pela dinâmica de determinado número de vórtices abandonados no fluido. O fluido representa a atmosfera terrestre e os tracejadores, uma porção desta com alto índice de condensação. A posição de cada tracejador evolui pelo campo de velocidades dos vórtices e é calculada pelo método de integração de Runge-Kutta de quarta ordem. Um evento de chuva é registrado sempre que tracejadores são encontrados em certas unidades (estações de observação) espalhadas pela região compreendida pelo modelo. Em contrapartida, um evento de seca é registrado enquanto há ausência de tracejadores nessas unidades.

Verificamos leis de potências para distribuição de chuvas nos histogramas de  $\log N$  versus  $\log I$  com expoentes que variam entre  $\beta = 1.35 - 2.3$ . Observamos também sistemas de dois regimes de leis de potência com valores para os expoentes entre  $\beta_1 = 0.73 - 1.67$  para o primeiro regime e entre  $\beta_2 = 1.33 - 2.29$  para o segundo regime. Esses perfis ocorrem sobre um mínimo e 4 a um máximo de 9 décadas. Com relação a tendências, concluímos que sistemas com mesmo número de vórtices tendem a aumentar ou diminuir os expoentes  $\beta$  com o aumento de  $P_r$ . Além disso percebemos que os tracejadores tendem a se distribuir uniformemente em uma região quadrada. Observamos que sistemas com mesmo tempo de evolução apresentam acréscimos em seus expoentes  $\beta$  quando aumenta o número de vórtices. E, finalmente, encontramos que sistemas com mesmo número de vórtices e mesmo período de evolução tendem a aumentar seus expoentes  $\beta$  conforme aumenta o lado da caixa com os tracejadores.

Ainda em distribuições de chuvas, nos histogramas de  $\log N$  versus  $\log D$  encontramos decaimento exponencial. Até aqui, os resultados concordam com os obtidos tanto experimentalmente quanto com os advindos de trabalhos com fronteira periódica, em que conferimos a mesma ordem de grandeza para os expoentes e para o número de décadas.

Verificamos para distribuição de secas, na maioria dos casos, um perfil aproximado a uma exponencial estendida com valores para os expoentes entre  $\gamma = 0.11 - 0.47$ . Observamos, também, um comportamento multi-assinalado, o que nos permitiu mais de um tipo de ajuste. Devido a essa pluralidade, não foi possível obter uma resposta concreta em relação às tendências. Esse comportamento foi observado pela primeira vez entre todos os trabalhos que segue essa linha de pesquisa e, portanto, não possui relação com nenhum resultado anterior. Apesar de considerarmos o número de ensaios realizados insuficientes para uma conclusão, associamos esse fato e o de sistemas de regime duplo encontrado em algumas curvas de chuvas ao efeito da condição de fronteira aberta.

## 5.2 Perspectivas

Devido ao comportamento não esperado para a distribuição de secas, uma continuação válida para esse trabalho seria a realização de um número maior de ensaios. Esses poderiam ser feitos tanto mantendo-se os mesmos parâmetros porém renovando-se a semente do gerador aleatório quanto se muda os próprios parâmetros. Essa última sugestão nos permite um número grande de opções para estudos, no entanto, dada a experiência adquirida no *manuseio* do modelo, percebemos que alguns parâmetros influenciam nos resultados muito mais do que outros. Assim, é importante frisar os parâmetros  $N_v$  e  $P_r$  na obtenção de novos resultados. Agora, dentro da abordagem do trabalho, um novo seguimento seria substituir, no modelo desenvolvido, o fluido ideal por fluido real. Os tracejadores deixariam de ser passivo ou não, e o modelo corresponderia mais ao problema real de distribuição de chuvas e secas.

# Apêndice A

---

## Dedução da Equação de Navier-Stokes

Juntamente com as tensões, as pressões  $P_i$  também contribuem para o deslizamento entre camadas quando não há equilíbrio. Para o caso compressível, pode ser mostrado que a pressão se relaciona com  $\mathbf{u}$  na forma [38, 39]

$$\begin{aligned} p_x &= P + \mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ p_y &= P + \mu \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ p_z &= P + \mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \tag{A.1}$$

onde a constante  $\mu$  é chamada segunda viscosidade. As relações (A.1) podem ser reunidas na fórmula

$$p_R = P + \mu \nabla \cdot \mathbf{u} \tag{A.2}$$

As equações acima expressam uma das formas de se deformar um corpo dada pela extensão ou contração nas três direções. Esse tipo de deformação é, na verdade, a única responsável pelo surgimento das tensões. Para as outras duas formas, translação e rotação, pode-se mostrar que não geram atritos internos [40].

Para se obter a equação de Navier-Stokes, é necessário chegar à expressão final para a 2ª lei de Newton. A incompressibilidade elimina o segundo termo da equação (1.17) do capítulo 1. A força resultante no elemento será a soma das forças atuando em cada face do cubo. Começando com a componente  $x$  da força - veja Fig. 1.3(b) e (c) do capítulo 1 - tem-se as contribuições dadas pela pressão  $P_x$  e pelas tensões  $\tilde{S}_y$  e  $S_z$ . A força de



viscosidade fica.

$$f_x = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P_x}{\partial x} - \frac{\partial s_z}{\partial y} - \frac{\partial s_y}{\partial z} \right)$$

Em que todos os termos correspondem à força por massa. Substituindo as expressões de  $S_y$  e  $S_z$

$$f_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_x}{\partial x} - \frac{\eta}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right] \right\} \quad (\text{A.3})$$

Agora, o segundo e terceiro termos de (A.3) podem escritos como

$$f_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_x}{\partial x} - \frac{\eta}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \times \mathbf{u})_z - \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \times \mathbf{u})_y \right\} \quad (\text{A.4})$$

enquanto o segundo termo de (A.4) pode ser escrito como

$$f_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_x}{\partial x} - \frac{\eta}{\rho} [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})]_x$$

Estendendo o raciocínio para as outras componentes da força, tem-se

$$f_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_y}{\partial y} - \frac{\eta}{\rho} [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})]_y$$

$$f_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_z}{\partial z} - \frac{\eta}{\rho} [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})]_z$$

com a expressão final

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \frac{\eta}{\rho} [\nabla \times \boldsymbol{\omega}]$$

onde  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ . Igualando à aceleração

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P - \frac{\eta}{\rho} [\nabla \times \boldsymbol{\omega}] \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P - \frac{\eta}{\rho} [\nabla \times \boldsymbol{\omega}] \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Que é a equação de movimento de um elemento do fluido viscoso. Na relação anterior, vê-se que o primeiro termo à direita corresponde à pressão total normal à superfície do elemento. Para um líquido em repouso sob a ação da gravidade  $P = P_0 + \rho h g$ ; o segundo termo representa a força de viscosidade, ou, tensão superficial.

Usando a identidade  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u}$ , chega-se a

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \frac{\eta}{\rho} [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u}]$$

Mas, como o fluido é incompressível,  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . Portanto,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\left[\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u}\right]$$

(A.6)

que é a equação de Navier-Stokes.

# Apêndice B

---

## Rotinas Elaboradas no Trabalho

### B.1 Programa Powerlaw7.f

*Distribuição de Chuvas e Secas*

```
implicit none
integer a, b, c, d, i, j, nstep, Nmax, ltime, nseed, irand, nbox, nrain
integer l, m, n, q, ka, nboxold, ntime, ncaixa1, ncaixa2, ncaixa3, acaixa,
nrenov

real p, s, r, cs, vcaixa, lsize, lnum, ymax, dxdy, dyt, ymin, lmaxx, lmaxy,
lminx
real lminy, subx, suby, xye, xyp, limest, velo, veloc, xmin, xmax
real h6, h, hh, dt, T, x, y, xf, r231, k, kp, pi, pi2, xyi, xyo, xy, dym, xyf, vel

parameter( m = 2, pi = 3.14159, pi2 = 2*pi, cs = 1.3029, d = 10000,
c Número de estações
a = 50,
c Número de vórtices:
n = 200,
c Número de tracejadores:
b = 10000,
c Intervalo de integração:
dt = .00001,
c Número de passos de integração:
q = 199999,
c Período de reinserção:
nrenov = 80000,
c irand = 1 para circulações aleatórias, irand = 0 para circulações regulares:
```

```

irand = 0,
c Limites da "caixa" que contêm as partículas em suas posições iniciais:
lmaxx = .500d0,
lminx = .490d0,
lmaxy = .510d0,
lminy = .500d0,
Nmax = (q*b)/10)

```

```

dimension nbox(a), nboxold(a), nrain(a), limest(a,m,m)
dimension xye(a,m), ntime(a), xyi(b,m), ncaixa3(0:d), xyp(b,m)
dimension xyo(n,m), xy(n,m), dym(b,m), xyf(b,m), dxdy(b,m)
dimension vel(n,m), velo(n,m), veloc(n,m), k(n), kp(n), dyt(b,m)
dimension acaixa(0:d), vcaixa(0:d), ncaixa1(0:d), ncaixa2(0:d)

```

```

open(unit = 1, file = 'pl7vort52.dat', status = 'unknown')
open(unit = 2, file = 'pl7traj52.dat', status = 'unknown')
open(unit = 3, file = 'posi.dat', status = 'unknown')
open(unit = 4, file = 'pl7posif52.dat', status = 'unknown')
open(unit = 10, file = 'pl7ensaio52c.dat', status = 'unknown')
open(unit = 20, file = 'pl7ensaio52s.dat', status = 'unknown')
open(unit = 30, file = 'pl7ensaio52p.dat', status = 'unknown')
open(unit = 7, file = 'posest.dat', status = 'unknown')

```

```

c Semente do gerador de número aleatório:
nseed = 236473321
r231 = 1.d0/2147483647.d0

```

```

c Posições iniciais dos vórtices:
do i = 1, n
do j = 1, m
ka = nseed/127773
nseed = 16807*(nseed - ka*127773) -2836*ka
if (nseed.lt.0) nseed = nseed + 2147483647
xyo(i,j) = nseed*r231
enddo
enddo

```

```

c Arquivo com as posições iniciais dos 6 primeiros vórtices:
write(1,33) ((xyo(i,j), j = 1,2), i = 1,6)

```

```

c Distribuição do valores das circulações dos vórtices:
if (irand.eq.0) then
do i = 1, n
k(i) = .5
kp(i) = k(i)/pi2
enddo

```

```

else
do i = 1, n
ka = nseed/127773
nseed = 16807*(nseed - ka*127773) -2836*ka
if (nseed.lt.0) nseed = nseed + 2147483647
k(i) = nseed*r231
kp(i) = k(i)/pi2
enddo
endif

```

```

      c Posições iniciais dos tracejadores:
do i = 1, b
do j = 1, m
ka = nseed/127773
nseed = 16807*(nseed - ka*127773) -2836*ka
if (nseed.lt.0) nseed = nseed + 2147483647
xyi(i,j) = nseed*r231
enddo
enddo

```

```

      c Confina os tracejadores no quadrado de lado 0.01:
subx = (lmaxx - lminx)
suby = (lmaxy - lminy)

```

```

do i = 1, b
xyi(i,1) = lminx + subx*xyi(i,1)
xyi(i,2) = lminy + suby*xyi(i,2)
enddo

```

```

do i = 1, b
do j = 1, m
xyp(i,j) = xyi(i,j)
enddo
enddo

```

```

      c Arquivo com as posições iniciais dos 6 primeiros tracejadores:
write(2,33) ((xyi(i,j), j = 1,2), i = 1,6)

```

```

      c Arquivo com as posições iniciais de todos os tracejadores:
write(3,34) (xyi(i,1), xyi(i,2), i = 1,b)

```

```

      c Posição das estações e definição de seus limites:
do i = 1, a
do j = 1, m
ka = nseed/127773
nseed = 16807*(nseed - ka*127773) -2836*ka
if (nseed.lt.0) nseed = nseed + 2147483647
xye(i,j) = nseed*r231

```

```

limest(i,j,1) = xye(i,j) + 0.005
limest(i,j,2) = xye(i,j) - 0.005
enddo
enddo

```

```

      c Arquivo com as posições das estações:
write(7,34) (xye(i,1), xye(i,2), i = 1,a)

```

```

      c Condições iniciais dos contadores:
do i = 1, a
nrain(i) = 0
ntime(i) = 0
nboxold(i) = 0
enddo

```

```

      c Condições iniciais das variáveis usadas no histograma:
do j = 0, d
acaixa(j) = 0
vcaixa(j) = 0
ncaixa1(j) = 0
ncaixa2(j) = 0
ncaixa3(j) = 0
enddo

```

```

      c Cálculo das variáveis do histograma:
do i = 1, Nmax
r = i
c = cs*alog(r)
acaixa(c) = acaixa(c) + 1
vcaixa(c) = vcaixa(c) + r
enddo

```

```

do j = 0, d
if (acaixa(j).gt.0) then
vcaixa(j) = vcaixa(j)/acaixa(j)
endif
enddo

```

```

      c Condições do método Runge-Kutta:
h = Dt
hh = .5*h
h6 = h/6.

```

```

      c Condições iniciais do modelo:
t = 0
p = 0
s = 0
ltime = 0
nstep = nrenov

```

```

      c Loop principal da rotina (Runge-Kutta, contadores e distribuição):
do l = 1, q
ltime = ltime+1

      c Loop de reinserção: testa o valor do módulo entre l e nstep, onde l
é o número de passos e o valor de nstep é redefinido a partir de nrenov.
if (mod(l,nstep).eq.0) then
do i = 1, b
do j = 1, m
xyi(i,j) = xyp(i,j)
enddo
enddo
c write(2,34) (xyi(i,1), xyi(i,2), i = 1,b)
nstep = l + nrenov
endif

do i = 1, a
nbox(i) = 0
enddo

call derivs1(xyo,vel,kp)
call derivs2(xyi,xyo,dxdy,kp)

do i = 1, n
do j = 1, m
xy(i,j) = xyo(i,j) + hh*vel(i,j)
enddo
enddo

do i = 1, b
do j = 1, m
xyf(i,j) = xyi(i,j) + hh*dxdy(i,j)
enddo
enddo

call derivs1(xy,velo,kp)
call derivs2(xyf,xy,dyt,kp)

do i = 1, n
do j = 1, m
xy(i,j) = xyo(i,j) + hh*velo(i,j)
enddo
enddo

do i = 1, b
do j = 1, m
xyf(i,j) = xyi(i,j) + hh*dyt(i,j)

```

```
enddo  
enddo
```

```
call derivs1(xy,veloc,kp)  
call derivs2(xyf,xy,dym,kp)
```

```
do i = 1, n  
do j = 1, m  
xy(i,j) = xyo(i,j) + h*veloc(i,j)  
veloc(i,j) = velo(i,j) + veloc(i,j)  
enddo  
enddo
```

```
do i = 1, b  
do j = 1, m  
xyf(i,j) = xyi(i,j) + h*dym(i,j)  
dym(i,j) = dyt(i,j) + dym(i,j)  
enddo  
enddo
```

```
call derivs1(xy,velo,kp)  
call derivs2(xyf,xy,dyt,kp)
```

```
do i = 1, n  
do j = 1, m  
xyo(i,j) = xyo(i,j) + h6*(vel(i,j) + velo(i,j) + 2.*veloc(i,j))  
enddo  
enddo
```

```
do i = 1, b  
do j = 1, m  
xyi(i,j) = xyi(i,j) + h6*(dxdy(i,j) + dyt(i,j) + 2.*dym(i,j))  
enddo  
enddo
```

*c Arquivos com as posições dos 6 primeiros vórtices e tracejadores ao final de cada passo:*

```
if (ltime.lt.1000) then  
write(1,33) ((xyo(i,j), j = 1,2), i = 1,6)  
write(2,33) ((xyi(i,j), j = 1,2), i = 1,6)  
endif
```

*c Contadores das estações:*

```
do i = 1, b  
do j = 1, a  
if (xyi(i,1).le.limest(j,1,1)) then  
if (xyi(i,1).ge.limest(j,1,2)) then
```



```

if (xyi(i,2).le.limest(j,2,1)) then
if (xyi(i,2).ge.limest(j,2,2)) then
nbox(j) = nbox(j) + 1
go to 20
endif
endif
endif
endif
enddo
20 enddo

```

*c Distribuição (intensidade e período de duração de eventos nas estações):*

```

do i = 1, a
if (nbox(i).eq.0) then
if (nboxold(i).eq.0) then
ntime(i) = ntime(i) + 1
else
p = ntime(i)
s = nrain(i)
if (s.gt.0) then
c = cs*alog(s)
ncaixa1(c) = ncaixa1(c) + 1
endif
if (p.gt.0) then
c = cs*alog(p)
ncaixa3(c) = ncaixa3(c) + 1
endif
nrain(i) = 0
ntime(i) = 1
endif
else
if (nboxold(i).eq.0) then
p = ntime(i)
if (p.gt.0) then
c = cs*alog(p)
ncaixa2(c) = ncaixa2(c) + 1
endif
ntime(i) = 1
nrain(i) = nbox(i)
else
ntime(i) = ntime(i) + 1
nrain(i) = nrain(i) + nbox(i)
endif
endif
nboxold(i) = nbox(i)
enddo

```

$T = T + h$

```

enddo
  c Fim do loop principal.

  c Arquivo com as posições finais dos tracejadores:
write(4,34) (xyi(i,1), xyi(i,2), i = 1,b)

  c Construção dos histogramas:
do i = 0, d
if (vcaixa(i).gt.0) then
  lsize = alog(vcaixa(i))
if (acaixa(i).gt.0) then
  r = acaixa(i)
  lnum = -100
if (ncaixa1(i).gt.0) then
  lnum = alog(ncaixa1(i)/r)
write(10,34) lsize, lnum
endif
if (ncaixa2(i).gt.0) then
  lnum = alog(ncaixa2(i)/r)
write(20,34) lsize, lnum
end if
if (ncaixa3(i).gt.0) then
  lnum = alog(ncaixa3(i)/r)
write(30,34) lsize, lnum
endif
endif
endif
enddo

31 FORMAT(1(f7.3,1x))
32 FORMAT(2(i10,1x))
33 FORMAT(12(f7.3,1x))
34 FORMAT(2(f12.6,1x))

end

```

\*\*\*\*\*

### *Subrotina Campo de Velocidades dos Vórtices*

```

subroutine derivs1(xy,vel,kp)

implicit none

integer i, j, n, m
real f, k, kp, x, y, x2, y2, pi, pi2, xy, vel
parameter ( n = 10, m = n, pi = 3.1415, pi2 = 2*pi )

```

**dimension** xy(n,m), vel(n,m), k(n), kp(n)

*c Posição dos vórtices: xy(n,m).*  
*c Velocidade do campo: vel(n,m).*  
*c Circulação: kp(n).*

```
do i = 1, n
vel(i,1) = 0
vel(i,2) = 0
do j = 1, m
if (j.eq.i) go to 10
y = xy(i,2) - xy(j,2)
x = xy(i,1) - xy(j,1)
y2 = Y*Y
x2 = X*X
F = X2 + Y2
vel(i,1) = vel(i,1) - kp(j)*y/f
vel(i,2) = vel(i,2) + kp(j)*x/f
10 enddo
enddo
```

**end**

\*\*\*\*\*

### *Subrotina Velocidades dos Tracejadores*

**subroutine** derivs2(xyi,xy,vel,kp)

**implicit none**

**integer** b, j, i, m, n  
**real** f, x, y, x2, y2, xyi, xyo, xy, vel, k, kp, pi, pi2  
**parameter** ( n = 10, b = 10000, pi = 3.1415, pi2 = 2\*pi, m = 2 )

**dimension**xyi(b,m), xy(n,m), vel(b,m), k(n), kp(n)

*c Posição dos tracejadores: xyi(l,m).*  
*c Posição dos vórtices: xy(n,m).*  
*c Velocidade do campo: vel(n,m).*  
*c Circulação: kp(n).*

```
do i = 1, b
vel(i,1) = 0
vel(i,2) = 0
do j = 1, n
```

```

y = xyi(i,2) - xy(j,2)
x = xyi(i,1) - xy(j,1)
x2 = X*X
y2 = Y*Y
F = X2 + Y2
vel(i,1) = vel(i,1) - kp(j)*y/f
vel(i,2) = vel(i,2) + kp(j)*x/f
enddo
enddo
end

```

## B.2 Programa Powerlaw8.f

As rotinas *Powerlaw7.f* e *Powerlaw8.f* são semelhantes exceto pela ausência do período de reinserção das partículas à caixa em *Powerlaw8.f*, discutido no capítulo 3. Assim, não há mais a necessidade de declarar as variáveis *nrenov* e *nstep*. Além disso, também deixa de existir o loop transcrito abaixo,

```

if (mod(1,nstep).eq.0) then
do i = 1, b
do j = 1, m
xyi(i,j) = xyp(i,j)
enddo
enddo
c write(2,34) (xyi(i,1), xyi(i,2), i = 1,b)
nstep = 1 + nrenov
endif

```

que ocorre depois de iniciado o *DO* de integração do sistema, via Runge-Kutta, em *Powerlaw7.f*.

Fora esta específica característica, o processo de integração, de coleta de dados e o tipo de distribuições obtidas são indênticos. Portanto, a rotina *Powerlaw8.f* não será transcrita para evitarmos a apresentação redundante de informações.

## B.3 Programa trdf.f

Na realização do trabalho, alguns ensaios foram refeitos, de 3 à 5 vezes, com o intuito de incrementar a estatística de seus dados. Os executáveis destes eram compilados com novos valores para o gerador de números aleatórios, *nseed*, assim obtíamos novas distribuições para um mesmo sistema.

Ao final, a média dos dados de todas as repetições deveria ser calculada. No entanto, para cada ensaio refeito, verificamos que arquivos apresentavam um número diferente de linhas impossibilitando o cálculo ponto a ponto da média. E se analisarmos com mais cuidado fica evidente que não é possível fazer a média ponto a ponto mesmo que os arquivos tivessem números de linhas iguais. Independente do tamanho dos arquivos, é necessário que façamos uma verificação anterior de que a média está sendo realizada entre pontos correspondentes dos dados. Assim, precisávamos de um programa que comparasse os dados, ponto a ponto, ordenasse os correspondentes e preenchesse, em cada arquivo, aqueles que não tinham seus pares. A rotina *trdf.f* foi elaborada para sanar esses empecilhos. O critério na escolha de qual ensaio seria repetido foi sempre a qualidade de suas distribuições.

### *Tratamento de Dados*

*c Idéia: os arquivos entram como são salvos no programas POWER-LAW\*.f. A rotina conta o número de linhas de cada um dos arquivos tem e fica salva este valor. Depois, reescreve os arquivos tornando-os idênticos em número de linhas. Por fim, a média é feita e salva num novo arquivo.*

**program** trd

*c Primeira parte: contador de linhas + rotina rwa.f*

*c rwa.f: reescreve os arquivos com o número de linhas qualquer, número este que deve ser dado como parâmetro*

**implicit none**

**real** r, cs, acaixa, vcaixa, am, dout, dab, a, rn, an, rs, s

**integer** c, Nmax, i, j, d, Lout, L, k, n, b, q, p, nf, il

**dimension** dout(100, 0:100), am(2), a(0:1000, 10), an(0:1000, 10)

**dimension** acaixa(0:1000), vcaixa(0:1000), nf(100), s(100)

**open** (unit = 1, file = 'pl7ensaio26as.dat', status = 'old')

**open** (unit = 2, file = 'pl7ensaio26bs.dat', status = 'old')

**open** (unit = 3, file = 'pl7ensaio26cs.dat', status = 'old')

**open** (unit = 4, file = 'pl7ensaio26s.dat', status = 'old')

**open** (unit = 51, file = 'trd51.dat', status = 'new')

**open** (unit = 52, file = 'trd52.dat', status = 'new')

**open** (unit = 53, file = 'trd53.dat', status = 'new')

**open** (unit = 54, file = 'trd54.dat', status = 'new')

**open** (unit = 99, file = 'secae26.dat', status = 'new')

*c número de arquivos:*

n = 4

```

        c número de linhas do arquivo final:
Lout = 25

L = 0

do i = 1, 100
nf(i) = 0
c write(*,*) nf(i)
enddo

        c contador de linhas (fornece valores por arquivo apenas):
do i = 1, n
do il = 1, 1000
read (i,*,err = 112)
L = L + 1
enddo
112 nf(i) = L
L = 0
enddo

        c rwa.f

        c cálculo das variáveis do histograma
Nmax = 60000000
cs = 1.3029
rs = 0

do i = 1, 100
do j = 0, 100
dout(i,j) = 0
enddo
enddo

do i = 1, Nmax
r = i
c = cs*log(r)
acaixa(c) = acaixa(c) + 1
vcaixa(c) = vcaixa(c) + r
enddo

do j = 0, 100
do i = 1, n
dout(i,j) = 0
enddo
if (acaixa(j).gt.0) then
vcaixa(j) = vcaixa(j)/acaixa(j)
vcaixa(j) = log(vcaixa(j))
c write (*,*) j, vcaixa(j)

```

```
end if
enddo
```

```
do i = 1, n
rewind(i)
enddo
```

```
do i = 1, n
k = 0
do 11 j = 1, nf(i)
read (i,*) (am(q), q = 1, 2)
am(2) = exp(am(2))
10 dab = abs(am(1) - vcaixa(k))
if (dab.lt.0.1) then
dout(i,k) = am(2)
go to 11
else
k = k + 1
go to 10
endif
11 continue
enddo
```

```
c do i = 1, n
c write (*,*) dout(4,1)
c enddo
```

```
      c Loop que preenche os arquivos com novo número de linhas:
k = 0
do i = 51, 54, 1
k = k + 1
do j = 0, Lout
write (i,*) vcaixa(j), dout(k,j)
enddo
enddo
```

```
      c write (*,*) (vcaixa(j), dout(2,j), j=0,lout)
```

```
      c Segunda parte: rotina avd.f
```

```
      c avd.f:calcula a média linha a linha de um número qualquer de arquivos,
número este que deve ser dado como parâmetro.
```

```
rn = 1./n
```

```
do i = 51, 54, 1
rewind(i)
enddo
```

```

do j = 0, Lout
a(j,2) = 0.d0
enddo

do i = 51, 54, 1
do j = 0, Lout
read (i,*) an(j,1), an(j,2)
a(j,2) = a(j,2) + an(j,2)
enddo
enddo

do j = 0, lout
a(j,2) = a(j,2)*rn
if (a(j,2).gt.0.) then
a(j,2) = alog(a(j,2))
write (99,24) vcaixa(j), a(j,2)
endif
enddo

      c write (*,*) (a(0,q), q = 1, 2)

24 format (6(f11.6, 1x))

stop
end

```



## Referências

---

- [1] O. Peters, K. Christesen, Phys. Rev. E **66**, 036120 (2002)
- [2] O. Peters, C. Hertlein and K. Christesen, Phys. Rev. Lett. **88**, 018701 (2002)
- [3] R. Dickman, Phys. Rev. Lett. **90**, 108701 (2003)
- [4] R. Dickman, Braz. J. Phys., **34**, no. 2, 337 (2004)
- [5] [www.charges.uol.com.br](http://www.charges.uol.com.br)
- [6] H. M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica*, São Paulo, Editora Blucher, (1996-98)
- [7] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, volume 2, Addison-Wesley Publishing Company, (1970)
- [8] D. J. Tritton, *Physical Fluid Dynamics*, second edition, Oxford Science Publications, (1988)
- [9] W. D. McComb, *The Physics of Fluid Turbulence*, Oxford Science Publications, New York, (1990)
- [10] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics - Course of Theoretical Physics*, volume 6, Pergamon Press, (1987)
- [11] E. Guyon, J. P. Hulin, L. Petit, C. D. Mitescu, *Physical Hydrodynamics*, Oxford University Press, (2001).
- [12] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, third edition, Prentice Hall, New Jersey, (1999)
- [13] G. K. Batchelor, *Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, New York, (1967)
- [14] Site, [www.pt.wikipedia.org](http://www.pt.wikipedia.org)
- [15] Site, [www.en.wikipedia.org](http://www.en.wikipedia.org)
- [16] Site, [www.inventors.about.com](http://www.inventors.about.com)
- [17] M.E. Hehl, *Linguagem de Programação Estruturada: Fortran 77*, São Paulo, McGraw-Hill (1986)

- [18] F. L. Friedman, E. B. Koffman, *Problem Solving and Structured Programming in Fortran*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Philippines (1981)
- [19] Site, <http://www-rohan.sdsu.edu>
- [20] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley and Sons Inc., Rensselaer Polytechnic Institute, (1992)
- [21] J. C. Butcher, *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations Runge-Kutta and general linear methods*, John Wiley and Sons Inc., (1993).
- [22] Site, [www.myphysicslab.com](http://www.myphysicslab.com)
- [23] G. Arfken, *Mathematical methods for physicists*, Academic Press, (1970).
- [24] W. H. Press, S. A. Teukolsky, B. P. Flannery, W. T. Vetterling *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, New York, (1986)
- [25] J. D. Lambert, *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*, John Wiley and Sons Inc., University of Dundee, (1973)
- [26] *Veja as várias citações de trabalhos realizados sobre esse aspecto em:* K. V. Beard, C. Chuang, *Journal of the Atmospheric Science* **44**, 1509-1524 (1986)
- [27] J. S. Marshall, W. M. Palmer, *Journal of Meteorology*, vol 5, 165-166 (1948)
- [28] S. Lovejoy, D. Schertzer, *American Meteorological Society*, vol 29, 1167-1170 (1990)
- [29] S. Lovejoy, M. Lilley, N. Desaulniers-Soucy, D. Schertzer, *Phys. Rev. E* **68**, 025301(R), (2003)
- [30] M. J. M. CAMPELO, Tese de mestrado, *Criticalidade auto organizada sem fronteiras*, UFMG Departamento de Física, (2003).
- [31] R. Dickman, M. A. Muñoz, A. Vespignani, and S. Zapperi, *Braz. J. Phys.*, **30**, no. 1, 27, (2000)
- [32] N. Wislow, *Introduction to Self-Organized Criticality and Earthquakes*, Department of Geological Sciences, University Of Michigan.
- [33] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 381-384 (1987)
- [34] I. Gleria, R. Matsushita, S. Silva, *Revista Brasileira de Física*, vol 26, n.2, 99-108 (2004)
- [35] S. T. R. Pinho, R. F. S. Andrade, *Physica A* **255**, 483-495 (1998)

- [36] R. F. S. Andrade, S. T. R. Pinho, S. C. Fraga and A.P.M. Tanajur, *Physica A* **314**, 405-410 (2002)
- [37] S. T. R. Pinho, R. F. S. Andrade, *Physica A* **344**, 601-607 (2004)
- [38] R. Dickman, *Hidrodinâmica*, (notas de aula).
- [39] A. Sommerfeld, *Mechanics of Deformable Bodies*, Academic Press, New York, (1950)
- [40] T. E. Faber, *Fluid Dynamics For Physicists*, Cambridge University Press, New York, (1995)