

**Polarização da luz em estados quânticos
multimodais**

Nadja Kolb Bernardes

Agosto de 2006

Polarização da luz em estados quânticos multimodais

Nadja Kolb Bernardes

Orientador: Prof. Carlos Henrique Monken

Dissertação apresentada à
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS,
como requisito parcial para a obtenção do grau de
MESTRE EM FÍSICA.

Agosto de 2006

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, figuras indispensáveis para a realização deste trabalho. Aos dois pelo amor e carinho incondicionais. À minha mãe por toda preocupação e cuidados sem limites, por se empolgar pelo trabalho, mesmo sem entender. Ao meu pai pelo apoio, pelas tardes de estudos no domingo, mas principalmente por ter me mostrado toda a beleza dos fenômenos da natureza. Amo vocês! Ao Alex, meu Gatinho, pelo amor e carinho ilimitados, pelo suporte e paciência... simplesmente por tornar a minha vida poesia.

Agradeço ao meu orientador Carlos H. Monken, por todos os ensinamentos, pela paciência em me explicar repetidamente as mesmas coisas, por se mostrar bastante disponível para os assuntos da física e da vida. Aos meus colegas e amigos de laboratório, por todas as conversas esclarecedoras, pelos sorrisos no momento final do desespero e pela paciência de me aguentar dia e noite ocupando o computador.

Muito obrigada àquelas pessoas que contribuíram para que a minha vida durante este período fosse bem mais divertida. Principalmente às minhas amigas/irmãs Nina, Bruna e Jana... À minha amiga Gabi, grande companheira nesta caminhada, sem você isso tudo teria sido muito monótono. À Deborah e Clarissa pela convivência, fofocas e conversas. Ao Pablis, por se mostrar sempre otimista e alegre e por toda a ajuda na realização desse trabalho.

Agradeço também ao Grupo Sarandeiros, por me mostrar que a dança e a física podem andar juntas.

Por fim, agradeço a todos os outros que de alguma forma foram presentes no momento de realização dessa dissertação.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Conteúdo

RESUMO	v
ABSTRACT	vi
1 Introdução	1
2 Parâmetros de Stokes	4
2.1 Método de Jones	5
2.2 Formalismo da matriz de coerência	6
2.3 Os parâmetros de Stokes	7
2.4 Método de Müller	10
2.5 Parâmetros de Stokes no domínio quântico	11
2.5.1 Parâmetros de Stokes de segunda ordem	13
2.5.2 Estados de um fóton	17
2.5.3 Parâmetros de Stokes de quarta ordem	18
2.5.4 Estados de dois fótons	21
2.5.5 Grau de polarização para dois fótons	23
3 Estados de Polarização	25
3.1 Estados de polarização clássicos	25
3.2 Estados quânticos de polarização	27
3.3 Matriz densidade reduzida efetiva	29
3.3.1 Traço sobre o momento	30
3.3.2 Matriz densidade reduzida efetiva para um fóton	32
3.3.3 Matriz densidade reduzida efetiva para dois fótons	33

4	Estados de dois fótons e a conversão paramétrica descendente	35
4.1	Conversão paramétrica descendente (CPD)	35
4.2	Estados emaranhados de dois fótons	40
5	Estudo do grau de polarização para os estados de bifotons gerados na CPD	47
5.1	Cálculo da matriz densidade reduzida efetiva	47
5.2	Cálculo do grau de polarização	62
6	Conclusão	65
A		67
A.1	Vetores de polarização ordinária e extraordinária	67
A.2	Cálculo do produto interno da equação (5.1)	67

Lista de Figuras

2.1	Esquema de uma onda passando por um instrumento óptico.	4
2.2	Arranjo experimental para determinar os elementos dos parâmetros de Stokes.	8
2.3	Esfera de Poincaré: i) em S_1 estados com polarização linear $\pm 45^\circ$; ii) em S_2 estados de polarização circular; iii) em S_3 estados de polarização linear horizontal e vertical.	10
2.4	Arranjo experimental para medir as propriedades de polarização de um feixe de luz monocromática. A luz passa por um compensador C e depois por um divisor de feixe em polarização, que separa o campo em duas componentes ortogonais de polarização (x,y). Dois detectores medem as intensidades n'_x e n'_y . Tanto a orientação quanto o atraso relativo da placa de onda são ajustáveis.	15
2.5	Arranjo para medir os s_{ij} através das medidas em coincidência dos detectores D_1 e D_2 . Os dois feixes de luz passam por compensadores C_1 e C_2 e por polarizadores P_1 e P_2 que podem estar orientados de formas diferentes.	20
3.1	Esquema de um feixe de luz propagando na direção $\hat{\mathbf{k}}$ passando por um polarizador perpendicular a $\hat{\mathbf{z}}$	26
4.1	Ilustração do processo da conversão paramétrica descendente em um cristal não linear com susceptibilidade até $\chi^{(2)}$	36

4.2	Dois diferentes tipos de CPD. a) CPD do tipo I: os fótons gêmeos possuem polarização ortogonal a do laser. Os cones internos possuem fótons com maior energia. b) CPD do tipo II: os fótons têm polarizações mutuamente ortogonais, sendo que um deles tem polarização idêntica a do feixe de bombeamento. As marcas com \times ligadas por uma linha pontilhada indicam exemplos de regiões em que se encontram pares de fótons gêmeos . c) CPD do tipo II com cones se sobrepondo. As marcas com \star são fótons gêmeos indistinguíveis.	38
4.3	Interseções das superfícies do vetor de onda vista num plano para a) cristais biaxiais (com dois eixos ópticos) b) cristais uniaxiais (um eixo óptico) positivo c) cristais uniaxiais negativos.	42
4.4	Vetor de onda num cristal birrefringente uniaxial. Existe sempre dois valores possíveis para o módulo de \mathbf{k} , um referente ao índice de refração extraordinário e outro referente ao índice de refração ordinário.	43
4.5	Representação para os vetores de polarização, sendo a polarização ordinária e extraordinária na mesma direção que os vetores unitários esféricos $\hat{\phi}$ e $\hat{\theta}$, respectivamente.	44
5.1	Cristal birrefringente uniaxial com o eixo óptico no plano xz , formando um ângulo ξ com o eixo \mathbf{z}	49
5.2	Gráfico da função $\text{sinc}(x^2) = \frac{\text{sen}(x^2)}{x^2}$	52
5.3	Gráfico da função $\text{sinc}(x^2) = \frac{\text{sen}(x^2)}{x^2}$ com interseção da função degrau em 1.	53

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma forma de caracterizar estados de polarização através dos parâmetros de Stokes. Mais especificamente, estamos interessados nos estados de polarização dos bifotons de multimodos gerados na conversão paramétrica descendente. Além disso, esclarecemos o conceito de matriz densidade reduzida, que no regime multimodal não é bem definido, e calculamos a matriz densidade reduzida efetiva para os estados dos fótons gêmeos. Mostramos então que a aproximação de monomodo para a polarização de tais estados é adequada.

Abstract

In this work we characterize the polarization states using the Stokes parameters. More specifically, we are interested in the two photon states of polarization generated by the parametric down-conversion. Furthermore, we clarify the concept of a reduced matrix which in the multimode regime is not well defined. We calculate the effective reduced matrix for the twin photon states. Finally, we show that a single mode approximation for the polarization of these states is very appropriate.

Capítulo 1

Introdução

Na teoria eletromagnética, os modos de polarização linear de uma onda plana monocromática são facilmente entendidos, já que o campo elétrico pode ser decomposto em duas ondas com oscilações perpendiculares. Na óptica clássica a polarização de uma onda plana é então definida por duas componentes. Existem vários métodos que são satisfatórios na caracterização das propriedades de polarização, entre os quais estão os parâmetros de Stokes. Os quatro parâmetros de Stokes provêm classicamente uma descrição completa do estado de polarização da luz. Tais parâmetros são definidos através das correlações de segunda ordem das amplitudes do campo elétrico e são mensuráveis. A teoria pode ser expandida também para campos quase-monocromáticos, que devem ser tratados estatisticamente e naturalmente poderemos definir um grau de polarização.

Contudo as coisas não são bem assim na óptica quântica. A óptica quântica consiste na aplicação do formalismo e dos conceitos da mecânica quântica relacionados à radiação eletromagnética. As conseqüências surpreendentes da mecânica quântica poderão ser observadas na óptica quântica. Uma dessas conseqüências é o emaranhamento de duas partículas que estão separadas espacialmente. Para estados de duas partículas que podem ser considerados maximamente emaranhados o valor de um observável não é determinado para nenhuma das partículas. Contudo, se medirmos o valor de um observável para uma partícula, conseguimos determinar com 100% de certeza o estado da outra partícula, independente da distância entre as partículas [1]. A luz agora passa a ser composta por fótons, espécies de “partículas” que correspondem às excitações no campo eletromagnético. Assim, os

fótons podem estar emaranhados em vários graus de liberdade, dentro deles: energia, momento e polarização.

Estados de fótons emaranhados em polarização são extremamente importantes, devido ao seu papel na prova de aspectos fundamentais da mecânica quântica, e além disso, mais recentemente, à sua aplicação no campo de informação e computação quântica [2]. Dessa forma, conseguir caracterizar o estado de polarização para fótons é de extrema valia. Para isso devemos ser capazes de estender a definição dos parâmetros de Stokes para o domínio quântico. Porém para os campos quânticos as correlações de ordem maior que segunda ordem podem ser bastante significativas. Para distinguir então entre estados quânticos que possuem propriedades de polarização bastante distintas, os parâmetros de Stokes devem levar isso em consideração.

Um processo para gerar pares de fótons emaranhados é o da conversão paramétrica descendente (CPD) [3]. Neste processo incidimos um fóton com uma determinada frequência num cristal não-linear e observamos a geração de dois fótons com frequências mais baixas, os fótons gêmeos. Os fótons gerados na CPD podem ser representados através de uma expansão em vários modos de ondas planas. Cada modo de onda plana corresponde a um vetor de onda e uma polarização, que depende do vetor de onda. Assim várias dificuldades surgem quando estamos no regime de multimodos. Quando aproximamos o estado dos fótons gêmeos por uma onda plana separamos (grosseiramente) o estado quântico de polarização e momento em um produto tensorial do estado de polarização com o estado de momento. Será que poderemos fazer isso para um estado multimodal? Vários experimentos feitos com fótons gêmeos estão interessados apenas no estado de polarização. Seria então interessante escrever uma matriz densidade reduzida que contivesse informação apenas sobre a polarização. Mas será que para um estado expandido em vários modos de onda plana, existe uma matriz densidade reduzida única que descreve este estado de polarização?

O objetivo deste trabalho então é entender como caracterizamos os estados de polarização para estados de fótons de multimodos. Veremos que no regime multimodal o estado não é separável e que nem sempre é possível definir uma matriz densidade reduzida. Através dos parâmetros de Stokes, definiremos uma matriz densidade reduzida efetiva. Calcularemos então esta matriz e o grau de polarização

para estados emaranhados em polarização de dois fótons gerados a partir da CPD.

No capítulo 2 definiremos os parâmetros de Stokes no domínio clássico e quântico. Como no domínio quântico as componentes do campo elétrico podem apresentar correlações de segunda e quarta ordem significativas (ou de ordem maior), vamos introduzir os parâmetros de Stokes de segunda e quarta ordem e depois especificá-los para campos monomodais de um e dois fótons. Além disso, definiremos o grau de polarização em função dos parâmetros de Stokes.

No capítulo 3 desenvolveremos uma teoria para caracterizar estados de multimodos e definiremos uma matriz densidade reduzida efetiva.

Falaremos então no capítulo 4 sobre o processo de conversão paramétrica descendente e os estados de dois fótons emaranhados em polarização gerados através da CPD.

Por fim, usando todo o aparato operacional dos capítulos 2 e 3 calcularemos no capítulo 5 a matriz densidade reduzida efetiva e o grau de polarização para os estados emaranhados de dois fótons gerados na CPD.

Capítulo 2

Parâmetros de Stokes

Para estudarmos o estado de polarização de dois fótons, é necessário antes desenvolver uma teoria que leve em conta a natureza vetorial da luz. O formalismo que discutiremos abaixo, além de fazer isso de uma forma bastante elegante, é também de enorme simplicidade ao tratarmos o efeito de instrumentos polarizadores no campo. O conteúdo das seções 2.1, 2.2 e 2.3 terá como referência o capítulo 9 do livro *Introduction to statistical optics* de E.L.O'Neill [4].

Vamos supor que uma onda plana está se propagando na direção \hat{z} e que uma série de instrumentos ópticos são colocados atuando nessa onda, resultando em uma outra onda plana, como descrito na figura 2.1. Esses instrumentos ópticos polarizadores, representados como a caixa preta na figura 2.1 estarão atuando (operando) na onda incidente produzindo uma onda resultante.

Historicamente, G.G.Stokes (1852) [5] foi o primeiro a especificar o estado de polarização do campo em termos de observáveis, conhecidos como os quatro parâmetros de Stokes, dos quais um refere-se a intensidade total do campo e os

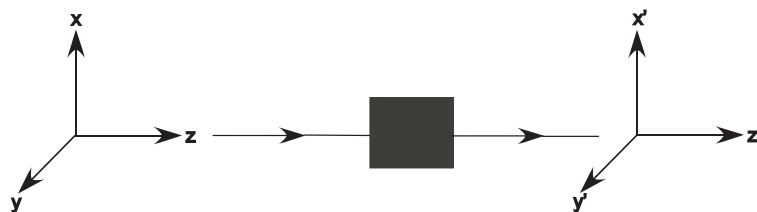


Figura 2.1: Esquema de uma onda passando por um instrumento óptico.

outros três ao estado de polarização. Mais tarde, Poincaré introduziu o que chamamos hoje de a esfera de Poincaré, na qual um ponto na esfera define um vetor em 3 dimensões, freqüentemente chamado de vetor de Stokes, que corresponde a um estado de polarização. Uma operação de um instrumento óptico na onda incidente corresponde a um deslocamento desse ponto na esfera.

Em 1941, Jones [6] reconsiderou o problema de um feixe monocromático e pela primeira vez introduziu um método matricial para tratar a polarização. No método de Jones, do qual falaremos logo a seguir, o campo é tratado a partir de suas componentes e o instrumento óptico é especificado através de uma matriz 2×2 . Contudo, o que medimos não são as componentes do campo. Percebendo isso, Müller desenvolveu um tratamento através dos parâmetros de Stokes, que são os observáveis do campo. Os parâmetros do campo transmitido são obtidos da seguinte maneira: o instrumento é representado por uma matriz 4×4 real (chamada de matriz de Müller) que opera nos quatro parâmetros de Stokes reunidos em um vetor coluna, resultando em um outro vetor de Stokes para o campo transmitido.

2.1 Método de Jones

Vamos considerar campos puramente monocromáticos e totalmente polarizados. Ao campo monocromático de onda plana incidente da figura 2.1, vamos associar um vetor coluna bidimensional \mathbf{E} ,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

onde E_x e E_y são harmônicos no tempo, isso é com dependência com o tempo da forma $\exp(-i\omega t)$, onde ω é a freqüência angular.

O instrumento será representado por uma matriz \mathbf{L} , da seguinte forma,

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Então, o campo que sai do instrumento pode ser facilmente caracterizado como,

$$\mathbf{E}' = \mathbf{L}\mathbf{E}. \quad (2.3)$$

2.2 Formalismo da matriz de coerência

A matriz de coerência é uma matriz que representa as correlações das componentes do vetor campo elétrico complexo nas direções $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$, como mostraremos na equação (2.5). Ela fornece informações sobre o estado de polarização do campo.

Vamos formular agora a representação matemática para a matriz de coerência de um campo quase-monocromático. Considere uma onda de luz quase-monocromática com frequência média $\bar{\omega}$ propagando na direção positiva de $\hat{\mathbf{z}}$. As componentes ortogonais do campo em um ponto \mathbf{x} no tempo t vão ser representadas da seguinte forma [7] :

$$\begin{aligned} E_x(t) &= a_1(t) \exp[i(\phi_1(t) - \bar{\omega}t)], \\ E_y(t) &= a_2(t) \exp[i(\phi_2(t) - \bar{\omega}t)] \end{aligned} \quad (2.4)$$

Seguindo a referência [5], a matriz de coerência \mathbf{J} é definida em função das correlações das componentes x e y do campo elétrico,

$$\mathbf{J} = \langle \mathbf{E} \otimes \mathbf{E}^\dagger \rangle = \begin{bmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_y E_x^* \rangle & \langle E_y E_y^* \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Aqui os elementos E_x e E_y do vetor coluna \mathbf{E} são os dados pela equação (2.4) e \mathbf{E}^\dagger é o conjugado Hermitiano de \mathbf{E} , i.e. a matriz linha

$$\mathbf{E}^\dagger = [E_x^* \quad E_y^*]. \quad (2.6)$$

Na equação (2.5), o símbolo \otimes significa o produto de Kronecker (produto direto) de \mathbf{E} com \mathbf{E}^\dagger , enquanto $\langle \dots \rangle$ é a média no tempo.

Se considerarmos o campo de uma luz quase-monocromática totalmente despolariada, a direção de vibração do vetor campo elétrico é indeterminada. As componentes E_x e E_y do campo são portanto descorrelacionadas, isto é,

$$\langle E_x E_y^* \rangle = 0 = \langle E_y E_x^* \rangle. \quad (2.7)$$

Além disso, as médias das intensidades nas componentes x e y devem ser iguais, i.e.,

$$\langle E_x E_x^* \rangle = \langle E_y E_y^* \rangle. \quad (2.8)$$

Sendo a intensidade total I igual a

$$I = \langle E_x E_x^* \rangle + \langle E_y E_y^* \rangle, \quad (2.9)$$

podemos ver que a matriz de coerência \mathbf{J} é simplesmente um múltiplo da identidade:

$$\mathbf{J} = \frac{I}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Voltando a um feixe de luz quase-monocromático polarizado, observamos que quando este passa por um instrumento representado por \mathbf{L} ,

$$\mathbf{E}' = \mathbf{L}\mathbf{E}, \quad (2.11)$$

e assim, a matriz de coerência \mathbf{J}' do feixe resultante é

$$\mathbf{J}' = \langle \mathbf{E}' \otimes \mathbf{E}'^\dagger \rangle = \langle \mathbf{L}\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}^\dagger \mathbf{L}^\dagger \rangle, \quad (2.12)$$

ou fazendo uso da equação 2.5,

$$\mathbf{J}' = \mathbf{L}\mathbf{J}\mathbf{L}^\dagger. \quad (2.13)$$

2.3 Os parâmetros de Stokes

A partir dos elementos da matriz de coerência, vamos definir um vetor coluna da seguinte forma

$$\mathcal{J} = \langle \mathbf{E} \otimes \mathbf{E}^* \rangle = \begin{bmatrix} J_{xx} \\ J_{xy} \\ J_{yx} \\ J_{yy} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Vamos fazer uma transformação unitária nesse vetor, de tal forma que os novos elementos sejam todos reais:

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}\mathcal{J}, \quad (2.15)$$

onde \mathbf{T} é a transformação unitária.

Desenvolvendo isso, temos,

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{xx} \\ J_{xy} \\ J_{yx} \\ J_{yy} \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

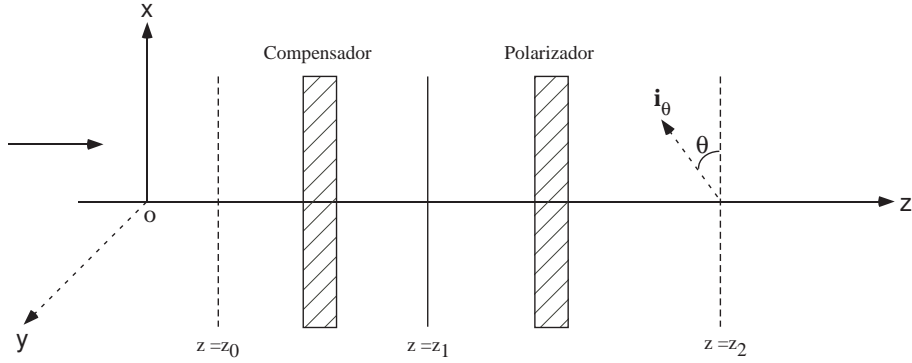


Figura 2.2: Arranjo experimental para determinar os elementos dos parâmetros de Stokes.

Os novos elementos definidos são chamados de *parâmetros de Stokes* e são todos reais. Desenvolvendo a equação 2.16, podemos escrevê-los mais explicitamente,

$$\begin{aligned}
 S_0 &= (\langle E_x E_x^* \rangle + \langle E_y E_y^* \rangle) \\
 S_1 &= (\langle E_x E_y^* \rangle + \langle E_y E_x^* \rangle) \\
 S_2 &= i(\langle E_x E_y^* \rangle - \langle E_y E_x^* \rangle) \\
 S_3 &= (\langle E_x E_x^* \rangle - \langle E_y E_y^* \rangle).
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Assim como a matriz de coerência, os parâmetros de Stokes são suficientes para especificar completamente o estado de polarização de um campo clássico. Uma forma simples de medir tais parâmetros é através de um compensador e um polarizador. Vamos supor que incidimos um feixe de luz, que tem componentes ortogonais como na equação (2.4), numa montagem que consiste de um compensador e um polarizador, como mostrado na figura 2.2. Sejam α_1 e α_2 as mudanças de fase produzidas em E_x e E_y , respectivamente, ao passar pelo compensador saindo de $z = z_0$ para $z = z_1$ e θ o ângulo entre a direção de vibração do campo elétrico ($\hat{\mathbf{i}}_\theta$) e o eixo $\hat{\mathbf{x}}$ depois do polarizador. O vetor campo elétrico em $z = z_2$ após passar pelos dois aparatos ópticos, é dado por,

$$\mathbf{E}'(t; \alpha_1, \alpha_2, \theta) = [E_x(t)e^{i\alpha_1} \cos\theta + E_y(t)e^{i\alpha_2} \sin\theta] \hat{\mathbf{i}}_\theta. \tag{2.18}$$

A intensidade média do campo elétrico em qualquer ponto do plano $z = z_2$ será

dada por [5],

$$\langle w'_e(\alpha_1, \alpha_2, \theta) \rangle = \langle \mathbf{E}'^*(t; \alpha_1, \alpha_2, \theta) \cdot \mathbf{E}'(t; \alpha_1, \alpha_2, \theta) \rangle. \quad (2.19)$$

Substituindo a equação (2.18) na (2.19), obtemos a seguinte expressão,

$$\begin{aligned} \langle w'_e(\delta, \theta) \rangle = & \langle E_x^*(t)E_x(t)\cos^2\theta + E_x^*(t)E_y(t)e^{i\delta}\cos\theta\sin\theta + \\ & E_y^*(t)E_x(t)e^{-i\delta}\cos\theta\sin\theta + E_y^*(t)E_y(t)\sin^2\theta \rangle, \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde

$$\delta = \alpha_2 - \alpha_1. \quad (2.21)$$

Podemos então determinar os parâmetros de Stokes, usando diferentes pares de δ e θ . Por exemplo, se quisermos medir S_1 basta medirmos a intensidade do campo elétrico, com um compensador de tal forma que a diferença de fase seja zero, $\delta = 0$ e um polarizador com $\theta = 45^\circ$, depois com o mesmo compensador, medimos a intensidade do campo elétrico com um polarizador com $\theta = 135^\circ$. Subtraindo o primeiro resultado pelo segundo, obtemos S_1 . É fácil perceber também, que S_0 é a intensidade total do campo elétrico do feixe incidente.

Vamos definir agora o grau de polarização P em função dos parâmetros de Stokes, como

$$P = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0}. \quad (2.22)$$

Podemos facilmente ver, através das equações (2.16) e (2.22), que para uma luz totalmente despolarizada (luz natural), o grau de polarização P será igual a zero. Porém, $P = 1$ para luz totalmente polarizada. Logo P está variando entre 0 e 1, ou melhor, $0 \leq P \leq 1$. Para uma onda totalmente polarizada, temos então,

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2. \quad (2.23)$$

A equação (2.23) pode ser interpretada como a equação de uma esfera no subespaço S_1, S_2 e S_3 com raio S_0 ; tal esfera é chamada de esfera de Poincaré. Cada ponto desta esfera corresponde a valores definidos dos parâmetros S_0, S_1, S_2 e S_3 , definindo assim um estado de polarização. Para luz parcialmente polarizada, $P < 1$ e tais estados serão representados por pontos dentro da esfera. Para luz totalmente despolarizada, $P = 0$ e esses estados estão no centro da esfera. Finalmente, para luz totalmente

polarizada, esses pontos vão se encontrar na superfície da esfera. Na figura 2.3 mostramos uma esfera de Poincaré e os pontos das polarizações circulares e lineares (horizontal e vertical e $+45^\circ$ e -45°).

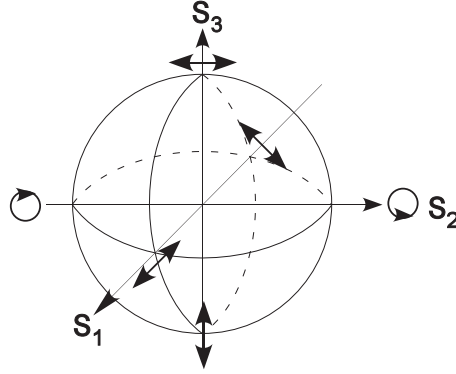


Figura 2.3: Esfera de Poincaré: i) em S_1 estados com polarização linear $\pm 45^\circ$; ii) em S_2 estados de polarização circular; iii) em S_3 estados de polarização linear horizontal e vertical.

2.4 Método de Müller

Como já dito anteriormente, esse método dá a transformação dos parâmetros de Stokes quando a luz passa por um instrumento óptico. Seguindo os passos da equação (2.3), o vetor coluna \mathcal{J} se transformará da seguinte forma:

$$\mathcal{J}' = \langle \mathbf{E}' \otimes \mathbf{E}'^* \rangle = \langle \mathbf{L}\mathbf{E} \otimes \mathbf{L}^*\mathbf{E}^* \rangle \quad \text{ou} \quad \mathcal{J}' = (\mathbf{L} \otimes \mathbf{L}^*)\mathcal{J}. \quad (2.24)$$

Na equação acima usamos a relação

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}' \otimes \mathbf{B}\mathbf{B}') = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{A}' \otimes \mathbf{B}'), \quad (2.25)$$

onde \mathbf{A} , \mathbf{A}' , \mathbf{B} e \mathbf{B}' são matrizes.

Além disso, fazendo uso da matriz de transformação \mathbf{T} da equação (2.15), nós facilmente encontramos que

$$\mathbf{S}' = \mathbf{T}\mathcal{J}' = \mathbf{T}(\mathbf{L} \otimes \mathbf{L}^*)\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\mathcal{J} = [\mathbf{T}(\mathbf{L} \otimes \mathbf{L}^*)\mathbf{T}^{-1}]\mathbf{S}, \quad (2.26)$$

ou definindo a matriz de Müller \mathbf{M} por

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(\mathbf{L} \otimes \mathbf{L}^*)\mathbf{T}^{-1}, \quad (2.27)$$

que

$$\mathbf{S}' = \mathbf{M}\mathbf{S}. \quad (2.28)$$

Como podemos ver, usando esse método podemos facilmente saber como os parâmetros de Stokes se transformam sob a ação de um instrumento óptico, bastando apenas saber a matriz de Müller que representa o instrumento.

2.5 Parâmetros de Stokes no domínio quântico

O formalismo apresentado nas seções 2.1, 2.2, 2.3 embora bastante elegante, não se aplica de forma direta para o domínio quântico como mostraremos a seguir. No domínio da óptica quântica, os campos elétricos não serão mais representados como na equação (2.4). Agora o campo elétrico será representado por um operador \mathbf{E} e será expandido em ondas planas monocromáticas, da seguinte forma [5]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z; t) &= \mathbf{E}_x(z; t)\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{E}_y(z; t)\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{x}}[\mathbf{E}_{x1}(z; t) + \mathbf{E}_{x2}(z; t) + \dots] + \\ &\quad \hat{\mathbf{y}}[\mathbf{E}_{y1}(z; t) + \mathbf{E}_{y2}(z; t) + \dots], \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\alpha l}(z; t) &= \mathbf{E}_{\alpha l}^{(-)}(z; t) + \mathbf{E}_{\alpha l}^{(+)}(z; t), \quad \mathbf{E}_{\alpha l}^{(+)}(z; t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\epsilon V}}\mathbf{a}_{\alpha l}e^{i\omega_l[\frac{z}{c}-t]}, \\ \mathbf{E}_{\alpha l}^{(+)}(z; t) &= (\mathbf{E}_{\alpha l}^{(-)}(z; t))^\dagger, \end{aligned}$$

onde $\mathbf{a}_{\alpha j}^\dagger$ ($\mathbf{a}_{\alpha j}$) são os operadores de criação (aniquilação) dos fótons com frequência ω_j e polarização α , V o volume de quantização, ϵ a permissividade do meio e $\hat{\mathbf{z}}$ a direção de propagação do feixe de luz.

A partir dessas definições, poderíamos pensar que para achar os parâmetros de Stokes no domínio quântico ¹, bastaria substituir o novo operador campo elétrico \mathbf{E} nas equações (2.5) e (2.16). Mas essa é uma idéia ingênua, que não é verdade. Se

¹Agora no domínio quântico, usaremos s minúsculo para os parâmetros de Stokes e S maiúsculo para os operadores de Stokes.

agíssemos de tal forma, os parâmetros de Stokes seriam definidos assim

$$\begin{aligned}
 s_0^{cl}(t) &= \langle \mathbf{E}_x^{(-)}(z; t) \mathbf{E}_x^{(+)}(z; t) \rangle + \langle \mathbf{E}_y^{(-)}(z; t) \mathbf{E}_y^{(+)}(z; t) \rangle \\
 s_1^{cl}(t) &= \langle \mathbf{E}_x^{(-)}(z; t) \mathbf{E}_y^{(+)}(z; t) \rangle + \langle \mathbf{E}_y^{(-)}(z; t) \mathbf{E}_x^{(+)}(z; t) \rangle \\
 s_2^{cl}(t) &= i \langle \mathbf{E}_x^{(-)}(z; t) \mathbf{E}_y^{(+)}(z; t) \rangle - i \langle \mathbf{E}_y^{(-)}(z; t) \mathbf{E}_x^{(+)}(z; t) \rangle \\
 s_3^{cl}(t) &= \langle \mathbf{E}_x^{(-)}(z; t) \mathbf{E}_x^{(+)}(z; t) \rangle - \langle \mathbf{E}_y^{(-)}(z; t) \mathbf{E}_y^{(+)}(z; t) \rangle.
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Inserindo as equações (2.29) nas equações (2.30), nós obtemos as seguintes expressões

$$\begin{aligned}
 s_0^{cl}(t) &= \sum_{j,k=1}^m \Lambda_j \Lambda_k e^{i(\omega_k - \omega_j)\tau} \langle \mathbf{a}_{xj}^\dagger \mathbf{a}_{xk} + \mathbf{a}_{yj}^\dagger \mathbf{a}_{yk} \rangle \\
 s_1^{cl}(t) &= \sum_{j,k=1}^m \Lambda_j \Lambda_k e^{i(\omega_k - \omega_j)\tau} \langle \mathbf{a}_{xj}^\dagger \mathbf{a}_{yk} + \mathbf{a}_{yj}^\dagger \mathbf{a}_{xk} \rangle \\
 s_2^{cl}(t) &= \sum_{j,k=1}^m \Lambda_j \Lambda_k e^{i(\omega_k - \omega_j)\tau} i \langle \mathbf{a}_{xj}^\dagger \mathbf{a}_{yk} - \mathbf{a}_{yj}^\dagger \mathbf{a}_{xk} \rangle \\
 s_3^{cl}(t) &= \sum_{j,k=1}^m \Lambda_j \Lambda_k e^{i(\omega_k - \omega_j)\tau} \langle \mathbf{a}_{xj}^\dagger \mathbf{a}_{xk} - \mathbf{a}_{yj}^\dagger \mathbf{a}_{yk} \rangle,
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

onde $\tau = \frac{z}{c} - t$ e $\Lambda_j = \left(\frac{\hbar\omega_j}{2\epsilon V}\right)^{1/2}$.

Podemos ver que esses parâmetros de Stokes derivados da definição clássica não são adequados para caracterizar as propriedades de polarização do campo de estados quânticos. Isso porque os fatores $e^{i(\omega_k - \omega_j)\tau}$ e $\Lambda_j \Lambda_k$ não têm conexão alguma com a polarização da luz, além de variarem no tempo. Assim, como no domínio clássico, queremos que os parâmetros de Stokes no domínio quântico contenham informação apenas sobre a polarização. Logo, os parâmetros de Stokes deverão ser definidos de outra forma.

Além disso, para que possamos definir os parâmetros de Stokes no domínio quântico, devemos lembrar que a luz que no domínio clássico era considerada totalmente despolarizada, neste domínio pode apresentar o que alguns autores chamam de polarização escondida [8], devido à flutuação de intensidade nos modos de polarização (ou a correlação entre elas). Assim, para uma descrição completa, vamos introduzir parâmetros de polarização de segunda e quarta ordem e depois especificar tais parâmetros para campos em estados de um e dois fótons.

2.5.1 Parâmetros de Stokes de segunda ordem

Uma onda plana monocromática é descrita pelos operadores de criação \mathbf{a}_x^\dagger e \mathbf{a}_y^\dagger e os operadores de aniquilação \mathbf{a}_x e \mathbf{a}_y para fótons em modos ortogonais de polarização x , y . Vamos assumir que o modo x é o da polarização linear vertical e o modo y é o da polarização linear horizontal. As propriedades quânticas do campo são determinadas pelas seguintes relações de comutação,

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_x^\dagger] &= [\mathbf{a}_y, \mathbf{a}_y^\dagger] = 1, \\ [\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_x] &= [\mathbf{a}_y, \mathbf{a}_y] = [\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y] = [\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y^\dagger] = 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

As propriedades de polarização de uma onda plana monocromática são determinadas em termos do conjunto de momentos de segunda ordem [8]:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}_x^\dagger \mathbf{a}_x \rangle &= \langle \mathbf{N}_x \rangle = n_x, & \langle \mathbf{a}_y^\dagger \mathbf{a}_y \rangle &= \langle \mathbf{N}_y \rangle = n_y, \\ \langle \mathbf{a}_x^\dagger \mathbf{a}_y \rangle &= \langle \mathbf{S}_+ \rangle = s_+, & \langle \mathbf{a}_y^\dagger \mathbf{a}_x \rangle &= s_- = s_+^* \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde n é o número médio de fótons de cada modo. Os momentos $\langle \mathbf{a}_x^2 \rangle$, $\langle \mathbf{a}_x^{\dagger 2} \rangle$, $\langle \mathbf{a}_x \mathbf{a}_y \rangle$, $\langle \mathbf{a}_y^2 \rangle$ e $\langle \mathbf{a}_y^{\dagger 2} \rangle$ não foram considerados por não apresentarem nenhum efeito nas quantidades observáveis.

As quantidades definidas em (2.33) formam o que podemos chamar da versão quântica da matriz de coerência \mathbf{J} , que chamaremos de \mathbf{K} , sendo dada por,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{a}_x^\dagger \mathbf{a}_x \rangle & \langle \mathbf{a}_y^\dagger \mathbf{a}_x \rangle \\ \langle \mathbf{a}_x^\dagger \mathbf{a}_y \rangle & \langle \mathbf{a}_y^\dagger \mathbf{a}_y \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & s_- \\ s_+ & n_y \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Um conjunto alternativo de números também empregados paralelamente aos momentos da equação (2.33) são os parâmetros de Stokes quânticos s_0 , s_1 , s_2 e s_3 . Nós vamos defini-los como os valores médios $s_m \equiv \langle \mathbf{S}_m \rangle$ dos seguintes operadores, que chamaremos de operadores de Stokes:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_0 &= \mathbf{a}_x^\dagger \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y^\dagger \mathbf{a}_y, & \mathbf{S}_1 &= \mathbf{a}_x^\dagger \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_x \mathbf{a}_y^\dagger, \\ \mathbf{S}_2 &= -i(\mathbf{a}_x^\dagger \mathbf{a}_y - \mathbf{a}_x \mathbf{a}_y^\dagger), & \mathbf{S}_3 &= \mathbf{a}_x^\dagger \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y^\dagger \mathbf{a}_y. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Das equações (2.33) e (2.35) seguem as relações

$$\begin{aligned} s_0 &= n_x + n_y, & s_1 &= 2\text{Re}s_+, & s_2 &= 2\text{Im}s_+, \\ s_3 &= n_x - n_y. \end{aligned} \quad (2.36)$$

As relações inversas das equações (2.35) têm a forma

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{1}{2}(S_0 + S_3), & S_+ &= \frac{1}{2}(S_1 + iS_2) \\ N_y &= \frac{1}{2}(S_0 - S_3), & S_- &= \frac{1}{2}(S_1 - iS_2) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Em termos dos operadores de Stokes, a matriz de coerência pode ser escrita como

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} s_0 + s_3 & s_1 - is_2 \\ s_1 + is_2 & s_0 - s_3 \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Os momentos n_x , n_y e s_+ dados pela equação (2.33) e os parâmetros de Stokes s_m são unicamente relacionados e carregam informações idênticas. Porém, os parâmetros s_m possuem propriedades de transformações mais simples e admitem uma representação geométrica mais clara. Assim, as propriedades estatísticas de segunda ordem das amplitudes do campo são determinadas por quatro parâmetros reais, que podem ser representados por um ponto no espaço quadridimensional. A ação de um polarizador sobre este campo faz com que esse ponto se mova através de alguma trajetória.

Num processo em que perdas não estão envolvidas, a intensidade total $s_0 = n_x + n_y$ da onda se conserva e assim para fazer um estudo das propriedades de polarização do campo só devemos levar em consideração três parâmetros, como por exemplo, as três componentes s_k ($k = 1, 2, 3$). É conveniente representá-las graficamente como um vetor \mathbf{s} num espaço tridimensional, que chamaremos, em analogia com o caso clássico, de espaço de Poincaré-Stokes [8]. Sejam $\hat{\mathbf{e}}_k$ os vetores que formam uma base ortonormal deste espaço, i.e. $\hat{\mathbf{e}}_k \cdot \hat{\mathbf{e}}_l = \delta_{k,l}$,

$$\mathbf{s} = \sum_{k=1}^3 s_k \hat{\mathbf{e}}_k, \quad (2.39)$$

onde $s_k = \hat{\mathbf{e}}_k \cdot \mathbf{s}$. A norma do vetor de Stokes será

$$s = \sqrt{\sum_k s_k^2} = P_2 s_0, \quad (2.40)$$

onde P_2 , em analogia com a equação (2.22), é o grau de polarização (de segunda ordem). Veremos a seguir que esse grau de polarização P_2 é equivalente à visibi-

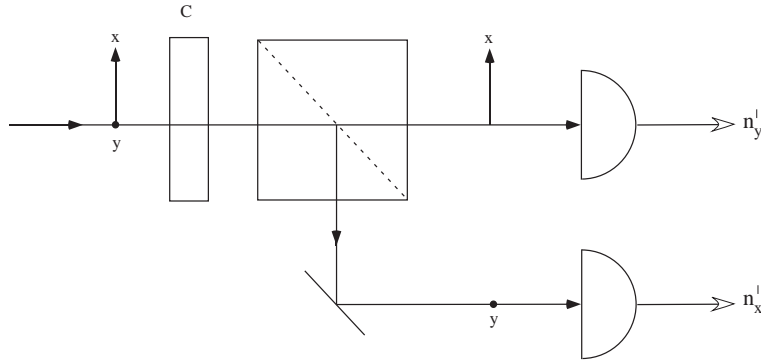


Figura 2.4: Arranjo experimental para medir as propriedades de polarização de um feixe de luz monocromática. A luz passa por um compensador C e depois por um divisor de feixe em polarização, que separa o campo em duas componentes ortogonais de polarização (x,y). Dois detectores medem as intensidades n'_x e n'_y . Tanto a orientação quanto o atraso relativo da placa de onda são ajustáveis.

lidade máxima possível de interferência no espaço de polarização [8]. Para isso, vamos primeiro pensar num arranjo experimental para medir as propriedades de polarização de um feixe de luz monocromática. Um possível arranjo experimental é o esquematizado na figura 2.4, análogo ao da figura 2.2, no qual o feixe de luz passa por um compensador seguido de um divisor de feixe por polarização e detectores. Podemos ver que os detectores medem as intensidades “instantâneas”, ou melhor, os autovalores de \mathbf{N}'_x e \mathbf{N}'_y . Fazendo medidas em coincidência, podemos achar os momentos na forma $\langle \mathbf{N}'_x^k \mathbf{N}'_y^l \rangle$. Mas como são os resultados das medidas (n'_x e n'_y) desses operadores \mathbf{N}'_x e \mathbf{N}'_y ? Podemos achá-los usando o mesmo desenvolvimento do método de Jones das seção 2.1, o conjunto compensador mais divisor de feixe em polarização será representado por uma matriz \mathbf{L} que atuará na matriz de coerência \mathbf{K} ,

$$\mathbf{K}' = \mathbf{L}\mathbf{K}\mathbf{L}^\dagger. \quad (2.41)$$

No domínio quântico, as matrizes de Jones atuam nos operadores de criação e destruição. Sejam \mathbf{a}_x e \mathbf{a}_y operadores de aniquilação correspondentes aos modos incidentes no elemento óptico e \mathbf{a}'_x e \mathbf{a}'_y os operadores correspondentes aos modos transmitidos. Assim,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}'_x \\ \mathbf{a}'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{a}_y \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}'_x \\ \mathbf{a}'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{xx}^* & L_{xy}^* \\ L_{yx}^* & L_{yy}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{a}_y \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

Vamos admitir que não há perdas no elemento óptico. Isto quer dizer que $\mathbf{a}_x^\dagger \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y^\dagger \mathbf{a}_y = \mathbf{a}'_x{}^\dagger \mathbf{a}'_x + \mathbf{a}'_y{}^\dagger \mathbf{a}'_y$. Além disso, as relações de comutação $[\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_x^\dagger] = [\mathbf{a}_y, \mathbf{a}_y^\dagger] = [\mathbf{a}'_x, \mathbf{a}'_x{}^\dagger] = [\mathbf{a}'_y, \mathbf{a}'_y{}^\dagger] = 1$ e $[\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}_\beta] = [\mathbf{a}_\alpha^\dagger, \mathbf{a}_\beta^\dagger] = [\mathbf{a}'_\alpha, \mathbf{a}'_\beta] = [\mathbf{a}'_\alpha{}^\dagger, \mathbf{a}'_\beta{}^\dagger] = 0$ para quaisquer valores (x ou y) de α e β devem ser preservadas.

As condições acima garantem que as matrizes de Jones para elementos ópticos sem perdas podem ser sempre escritas, a menos de uma fase global, como

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mu & \nu \\ -\nu^* & \mu^* \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

onde $|\mu|^2 + |\nu|^2 = 1$.

A partir da equação (2.41) encontramos então n'_x ,

$$n'_x = \mu\mu^* n_x + \nu\nu^* n_y + \mu^* \nu s_+ + \nu^* \mu s_-. \quad (2.44)$$

Variando continuamente os parâmetros do compensador C, como por exemplo o seu ângulo de orientação, a quantidade n'_x variará periodicamente. A visibilidade máxima dessa curva de variação de n'_x dependerá dos valores máximo e mínimo para n'_x . Vamos reescrever (2.44) da seguinte forma:

$$n'_x = \mathbf{r}^\dagger \mathbf{K} \mathbf{r}, \quad \text{onde} \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mu \\ \nu \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Seja agora \mathbf{U} a matriz (unitária) que diagonaliza a matriz (hermitiana) \mathbf{K} : $\mathbf{U} \mathbf{K} \mathbf{U}^\dagger = \mathbf{D}$. Logo,

$$n'_x = \mathbf{r}^\dagger \mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} \mathbf{K} \mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} \mathbf{r} = \mathbf{u}^\dagger \mathbf{D} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1^* & u_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 u_1 \\ \lambda_2 u_2 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

onde $\mathbf{u} = \mathbf{U} \mathbf{r}$. Como \mathbf{U} é unitária, $|\mathbf{u}| = |\mathbf{r}| = 1$.

Calculando os autovalores λ_1 e λ_2 de \mathbf{K} , encontramos

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(s_0 \pm \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}). \quad (2.47)$$

Podemos ver que $\lambda_1 + \lambda_2 = s_0$, e $\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} = s$.

Assim a equação (2.46) pode ser escrita como

$$n'_x = \lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta, \quad (2.48)$$

onde o parâmetro θ caracteriza os pesos relativos $|u_1|^2$ e $|u_2|^2$, já que $|u_1|^2 + |u_2|^2 = 1$. Variar continuamente os parâmetros do compensador C significa variar o parâmetro θ . Logo,

$$(n'_x)_{max,min} = \lambda_{max,min}. \quad (2.49)$$

A visibilidade máxima possível obtida na montagem da figura 2.4 será então

$$V_{max} = \frac{n'_{x\ max} - n'_{x\ min}}{n'_{x\ max} + n'_{x\ min}} = \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} = \frac{s}{s_0} = P_2, \quad (2.50)$$

que é o grau de polarização do campo incidente.

2.5.2 Estados de um fóton

É interessante notar que os operadores de Stokes definidos em (2.35) satisfazem à mesma álgebra das matrizes de Pauli:

$$[S_i, S_j] = 2i\epsilon_{ijk} S_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (2.51)$$

onde ϵ_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita [9].

Para modos de onda plana contendo apenas 1 fóton, os operadores \mathbf{a}_x , \mathbf{a}_y , \mathbf{a}_x^\dagger e \mathbf{a}_y^\dagger admitem as representações

$$\mathbf{a}_x = |0\rangle\langle x|, \quad \mathbf{a}_y = |0\rangle\langle y|, \quad \mathbf{a}_x^\dagger = |x\rangle\langle 0|, \quad \mathbf{a}_y^\dagger = |y\rangle\langle 0|, \quad (2.52)$$

onde $|x\rangle$ e $|y\rangle$ representam estados de 1 fóton com polarização x e y, respectivamente.

As relações (2.51) e (2.52) garantem que para campos de 1 fóton, os operadores de Stokes S_0 , S_1 , S_2 e S_3 são adequadamente representados pela identidade σ_0 , junto com as matrizes de Pauli σ_1 , σ_2 , σ_3 [10]. Assim,

$$s_i = \langle S_i \rangle = \langle \sigma_i \rangle = \text{Tr}\{\rho_1 \sigma_i\}, \quad (2.53)$$

onde $i = 0, \dots, 3$ e ρ_1 é o operador de estado no espaço (bidimensional) de polarização para o campo de 1 fóton em um modo de onda plana.

Como o operador de estado pode ser escrito como $\rho = \sum_j r_j \sigma_j$ e como $\text{Tr}\{\sigma_i \sigma_j\} = 2\delta_{i,j}$ para $i, j = 0, 1, 2, 3$, podemos utilizar a equação (2.53) e escrever

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 s_i \sigma_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} s_0 + s_3 & s_1 - i s_2 \\ s_1 + i s_2 & s_0 - s_3 \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

Comparando a equação (2.54) com a (2.38), vemos que para campos monomodais de 1 fóton, o operador de estado no espaço de polarização é a própria matriz de coerência \mathbf{K} .

Como o operador de estado contém toda a informação possível de se obter de um estado quântico, vemos que as propriedades de polarização para campos monomodais de 1 fóton são completamente caracterizadas pelos parâmetros de Stokes. A partir da equação (2.54), chegamos ao importante resultado que todo estado puro monomodo de 1 fóton é totalmente polarizado, pois

$$\text{Tr}\rho_1^2 = \frac{1}{4} \sum_{i,j} s_i s_j \text{Tr}\{\sigma_i \sigma_j\} = \frac{1}{2} \sum_i s_i^2 = \frac{1}{2}(s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = \frac{1}{2}(1 + P_2^2). \quad (2.55)$$

Sabendo que para um estado puro $\text{Tr}\rho_1^2 = 1$, podemos ver que P_2 deve ser igual a um, o que significa que o estado é totalmente polarizado. Por outro lado, o estado maximamente misturado (não-puro) é totalmente despolarizado.

2.5.3 Parâmetros de Stokes de quarta ordem

Como já dissemos anteriormente, mesmo que o campo não apresente correlação de segunda ordem em polarização, é possível que ele apresente correlações de quarta ordem. Assim, é interessante definir parâmetros de polarização de quarta ordem. As correlações poderão ser calculadas para campos com expansão em um único modo de onda plana ou em dois modos. Sejam \mathbf{a}_x^\dagger , \mathbf{a}_y^\dagger e \mathbf{a}_x , \mathbf{a}_y os operadores de criação e aniquilação, respectivamente, para um modo de onda plana. E \mathbf{b}_x^\dagger , \mathbf{b}_y^\dagger e \mathbf{b}_x , \mathbf{b}_y os operadores de criação e aniquilação, respectivamente, para o outro modo de onda plana. Se definirmos o operador tensorial \mathbf{K} tal que $\mathbf{K}_{11} = \mathbf{a}_x^\dagger \mathbf{a}_x$, $\mathbf{K}_{12} = \mathbf{a}_y^\dagger \mathbf{a}_x$, $\mathbf{K}_{21} = \mathbf{a}_x^\dagger \mathbf{a}_y$ e $\mathbf{K}_{22} = \mathbf{a}_y^\dagger \mathbf{a}_y$, temos que a matriz de coerência de segunda ordem é dada por $\mathbf{K} = \langle \mathbf{K} \rangle$. Vamos então definir uma matriz de momentos de quarta ordem, fazendo o produto tensorial : $\mathbf{K}^{(1)} \otimes \mathbf{K}^{(2)}$: (os dois pontos (:)) significam em ordem

normal), isto é, $\mathbf{K}_4 = \langle : \mathbf{K}^{(1)} \otimes \mathbf{K}^{(2)} : \rangle$, onde $\mathbf{K}^{(1)}$ e $\mathbf{K}^{(2)}$ são os operadores tensoriais para cada modo de onda plana, respectivamente. Após colocar na ordem normal e tirar o valor esperado, temos

$$\mathbf{K}_4 = \begin{bmatrix} A & G & D & E \\ G^* & H & I & J \\ D^* & I^* & C & F \\ E^* & J^* & F^* & B \end{bmatrix}, \quad (2.56)$$

onde

$$A = \langle \mathbf{a}_x^\dagger \mathbf{b}_x^\dagger \mathbf{b}_x \mathbf{a}_x \rangle, B = \langle \mathbf{a}_y^\dagger \mathbf{b}_y^\dagger \mathbf{b}_y \mathbf{a}_y \rangle, C = \langle \mathbf{a}_y^\dagger \mathbf{b}_x^\dagger \mathbf{b}_x \mathbf{a}_y \rangle, D = \langle \mathbf{a}_y^\dagger \mathbf{b}_x^\dagger \mathbf{b}_x \mathbf{a}_x \rangle, E = \langle \mathbf{a}_y^\dagger \mathbf{b}_y^\dagger \mathbf{b}_x \mathbf{a}_x \rangle, \quad (2.57)$$

$$F = \langle \mathbf{a}_y^\dagger \mathbf{b}_y^\dagger \mathbf{b}_x \mathbf{a}_y \rangle, G = \langle \mathbf{a}_x^\dagger \mathbf{b}_y^\dagger \mathbf{b}_x \mathbf{a}_x \rangle, H = \langle \mathbf{a}_x^\dagger \mathbf{b}_y^\dagger \mathbf{b}_y \mathbf{a}_x \rangle, I = \langle \mathbf{a}_y^\dagger \mathbf{b}_x^\dagger \mathbf{b}_y \mathbf{a}_x \rangle \text{ e } J = \langle \mathbf{a}_y^\dagger \mathbf{b}_y^\dagger \mathbf{b}_x \mathbf{a}_x \rangle.$$

Para um único modo de onda plana, a matriz \mathbf{K}_4 apresentará linhas e colunas repetidas. Eliminando essas linhas e colunas redundantes, temos que a matriz de coerência de quarta ordem para um modo de onda plana \mathbf{K}'_4 , pode ser dada por

$$\mathbf{K}'_4 = \begin{bmatrix} A' & D' & E' \\ D'^* & C' & F' \\ E'^* & F'^* & B' \end{bmatrix}, \quad (2.58)$$

onde

$$A' = \langle \mathbf{a}_x^{\dagger 2} \mathbf{a}_x^2 \rangle, B' = \langle \mathbf{a}_y^{\dagger 2} \mathbf{a}_y^2 \rangle, C' = \langle \mathbf{a}_x^\dagger \mathbf{a}_y^\dagger \mathbf{a}_y \mathbf{a}_x \rangle, \quad (2.59)$$

$$D' = \langle \mathbf{a}_x^\dagger \mathbf{a}_y^\dagger \mathbf{a}_x^2 \rangle, E' = \langle \mathbf{a}_y^{\dagger 2} \mathbf{a}_x^2 \rangle \text{ e } F' = \langle \mathbf{a}_y^{\dagger 2} \mathbf{a}_y \mathbf{a}_x \rangle.$$

A definição para os parâmetros de Stokes de quarta ordem não é única. Como esses parâmetros são mensuráveis, dependendo de como vamos medir tais parâmetros, podemos ter diferentes definições [8, 11, 12]. Vamos então defini-los primeiro para um campo em dois modos de onda plana. Os parâmetros de Stokes de quarta ordem para este regime serão definidos como os valores esperados dos seguintes operadores

$$S_{ij} = S_i^{(1)} S_j^{(2)}, \quad (2.60)$$

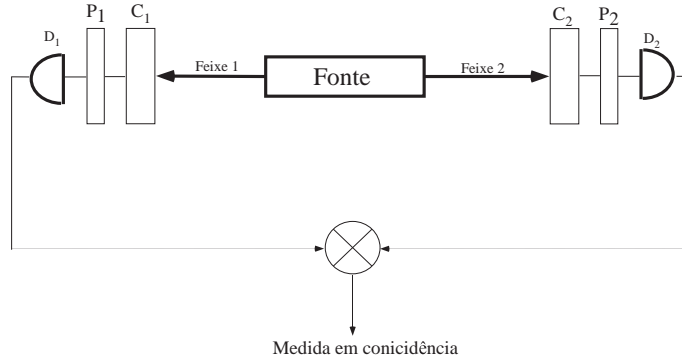


Figura 2.5: Arranjo para medir os s_{ij} através das medidas em coincidência dos detectores D_1 e D_2 . Os dois feixes de luz passam por compensadores C_1 e C_2 e por polarizadores P_1 e P_2 que podem estar orientados de formas diferentes.

onde $i, j = 0, \dots, 3$. Para este caso serão 16 parâmetros. Para encontrá-los, devemos medir as correlações entre as medidas dos detectores da figura 2.5, onde cada compensador C e polarizador P atua no feixe separadamente. Um exemplo de 16 medidas de coincidência suficientes para determinar os s_{ij} é o seguinte [12]:

$$\longrightarrow \otimes \longrightarrow, \longrightarrow \otimes \nearrow, \longrightarrow \otimes \curvearrowright, \longrightarrow \otimes \curvearrowleft, \quad (2.61)$$

$$\nearrow \otimes \longrightarrow, \nearrow \otimes \nearrow, \nearrow \otimes \curvearrowright, \nearrow \otimes \curvearrowleft, \quad (2.62)$$

$$\curvearrowright \otimes \longrightarrow, \curvearrowright \otimes \nearrow, \curvearrowright \otimes \curvearrowright, \curvearrowright \otimes \curvearrowleft, \quad (2.63)$$

$$\curvearrowleft \otimes \longrightarrow, \curvearrowleft \otimes \nearrow, \curvearrowleft \otimes \curvearrowright, \curvearrowleft \otimes \curvearrowleft, \quad (2.64)$$

onde $\longrightarrow, \nearrow$ são os compensadores alinhados horizontalmente e a 45° (em relação a alguma direção escolhida) e \curvearrowright e \curvearrowleft são os compensadores que polarizam a luz circularmente para a direita e para a esquerda, respectivamente.

Para o campo em um modo de onda plana, as propriedades de polarização serão determinadas através de três operadores “duplos” de aniquilação:

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{a}_x \mathbf{a}_x, \quad \mathbf{c}_2 = \sqrt{2} \mathbf{a}_x \mathbf{a}_y \quad \text{e} \quad \mathbf{c}_3 = \mathbf{a}_y \mathbf{a}_y. \quad (2.65)$$

Os conjugados hermitianos $\mathbf{c}_1^\dagger, \mathbf{c}_2^\dagger$ e \mathbf{c}_3^\dagger são os operadores “duplos” de criação. Como estamos interessados nas quantidades mensuráveis, vamos relacionar os parâmetros de Stokes como a combinação dos produtos entre um operador “duplo” de criação com um de aniquilação. Desta forma teremos 9 operadores de Stokes como podemos

ver abaixo

$$S'_{ij} = \begin{cases} (: S_i S_j :), & \text{se } i \neq j \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (: S_i^2 - S_0^2 :), & \text{se } i = j. \end{cases} \quad (2.66)$$

Definimos os operadores em ordem normal, pois usando a montagem da figura 2.4, conseguimos medi-los olhando para a correlação das medidas dos detectores. Podemos demonstrar que $S'_{ij} = S'_{ji}$.

2.5.4 Estados de dois fótons

Em completa analogia com o estado de 1 fóton, veremos agora que os operadores de Stokes de quarta ordem também podem ser representados por matrizes (as quais iremos especificar em breve). Como existe uma diferença entre o parâmetros de Stokes de quarta ordem para campos em um e dois modos de onda plana, vamos separar os dois casos. Falaremos primeiro do campo de 2 fótons em um modo de onda plana, e depois do caso de nosso real interesse, que é o campo de 2 fótons em dois modos de ondas planas.

Para campos em um modo de onda plana contendo 2 fótons, os operadores c_1 , c_1^\dagger , c_2 , c_2^\dagger , c_3 e c_3^\dagger admitem as representações

$$c_1 = \sqrt{2}|0, 0\rangle\langle 2, 0|, \quad c_2 = \sqrt{2}|0, 0\rangle\langle 1, 1|, \quad c_3 = \sqrt{2}|0, 0\rangle\langle 0, 2| \quad (2.67)$$

$$c_1^\dagger = \sqrt{2}|2, 0\rangle\langle 0, 0|, \quad c_2^\dagger = \sqrt{2}|1, 1\rangle\langle 0, 0|, \quad \text{e } c_3^\dagger = \sqrt{2}|0, 2\rangle\langle 0, 0|, \quad (2.68)$$

onde $\langle 2, 0|$ é um estado de 2 fótons com polarização x, $\langle 1, 1|$ é um estado de 2 fótons, onde cada fóton tem polarização x e y e $\langle 0, 2|$ é um estado de 2 fótons com polarização y.

Os nove operadores de Stokes poderão então ser representados da seguinte forma:

$$S'_{ij} = \mathbf{Q}_{ij}, \quad (2.69)$$

onde as nove matrizes $\mathbf{Q}_{i,j}$ são

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{01} &= \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{02} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{03} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Q}_{11} &= \sqrt{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{12} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{13} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{Q}_{22} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_{23} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_{33} = 2\sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

Similarmente às matrizes de Pauli, as matrizes \mathbf{Q} obedecem relações de ortogonalidade

$$\text{Tr}\{\mathbf{Q}_{\alpha\beta}\mathbf{Q}_{\alpha'\beta'}\} = 8\delta_{\alpha,\alpha'}\delta_{\beta,\beta'}. \quad (2.71)$$

Como vimos antes, os parâmetros de Stokes de quarta ordem para campos de 2 fótons em um modo de onda plana podem ser representados como

$$s'_{ij} = \langle S'_{ij} \rangle = \langle \mathbf{Q}_{ij} \rangle = \text{Tr}\{\rho'_2 \mathbf{Q}_{ij}\}, \quad (2.72)$$

onde ρ'_2 é o operador de estado no espaço de polarização para o campo de dois fótons em um modo de onda plana. Usando então as relações (2.71), podemos isolar o operador de estado

$$\rho'_2 = \frac{1}{8} \sum_{i,j=0}^3 s'_{ij} \mathbf{Q}_{ij}. \quad (2.73)$$

Ao fazer o cálculo do operador de estado em função dos elementos K_{ij} da matriz de coerência \mathbf{K}'_4 :

$$\rho'_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}K_{11} & \frac{1}{\sqrt{2}}K_{12} & K_{13} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}K_{21} & K_{22} & \frac{1}{\sqrt{2}}K_{23} \\ K_{31} & \frac{1}{\sqrt{2}}K_{32} & \frac{1}{2}K_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.74)$$

percebemos que as duas matrizes não são iguais. Entretanto, os seus elementos são proporcionais, logo podemos tirar as mesmas informações sobre a polarização do estado com as duas matrizes.

Vamos olhar agora para o caso do campo em dois modos de onda plana. Os operadores de Stokes de quarta ordem para este regime não serão mais definidos como em (2.69). Temos que os parâmetros de Stokes de segunda ordem de estados de 1 fóton são dados por $s_i = \langle \sigma_i \rangle$, logo para estados de 2 fótons, os operadores de Stokes de quarta ordem \mathbf{S}_{ij} podem ser representados pelos produtos das matrizes de Pauli $\sigma_i \otimes \sigma_j = \sigma_{ij}$, $j = 0, 1, 2, 3$. Assim, o operador de estado no espaço de polarização é

$$\rho_2 = \frac{1}{4} \sum_{i,j=0}^3 s_{ij} \sigma_{ij}, \quad s_{ij} = \text{Tr}(\sigma_{ij} \rho_2),$$

$$(2.75)$$

$$s_{00} = \text{Tr} \rho_2 = 1.$$

Uma característica importante dos parâmetros de Stokes para estados de 2 fótons em dois modos é que os parâmetros de Stokes para estados monomodais de 1 fóton estão incluídos neles. A matriz densidade parcial de um fóton (fazendo o traço no subespaço do outro fóton em ρ_2) é

$$\rho_1 = \begin{bmatrix} \rho_{11} + \rho_{22} & \rho_{13} + \rho_{24} \\ \rho_{13}^* + \rho_{24}^* & \rho_{33} + \rho_{44} \end{bmatrix}, \quad (2.76)$$

onde os elementos indicados são aqueles associados com ρ_2 , de tal forma que

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} + \rho_{44} \\ 2\text{Re}\rho_{13} + 2\text{Re}\rho_{24} \\ 2\text{Im}\rho_{13} + 2\text{Im}\rho_{24} \\ \rho_{11} + \rho_{22} - \rho_{33} - \rho_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{00} \\ s_{10} \\ s_{20} \\ s_{30} \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

e similarmente \mathbf{s}_2 .

O próximo passo agora será definir um grau de polarização para dois fótons. Como estamos interessados apenas no caso de campos de dois fótons em dois modos de onda plana, não entraremos em detalhe para o grau de polarização para campos de dois fótons em um modo de onda plana. O grau de polarização para este caso será definido a partir da visibilidade máxima possível da interferência de quarta ordem, observadas de acordo com as flutuações dos operadores de Stokes. Maiores informações podem ser encontradas na referência [8].

2.5.5 Grau de polarização para dois fótons

Para construirmos um grau de polarização para campos de dois fótons, devemos ser capazes de distinguir não apenas entre estados puros e mistos, mas estados fatoráveis e emaranhados. Assim, o grau de polarização deve conter informação sobre o grau de emaranhamento do estado. Além disso, sabemos que o grau de polarização deve ser capaz de medir as correlações em quarta ordem das componentes do campo dos estados quânticos de dois fótons.

Se o estado for puro e fatorável, os fótons são independentes entre si, e podemos facilmente perceber que os s_{ij} são fatoráveis em função dos s_i , ou $s_{ij} = s_{i0}s_{0j}$. Logo,

podemos descobrir os parâmetros de Stokes fazendo medidas locais, em cada feixe separadamente. Outro resultado direto para esse estado é:

$$\sum_{j=1}^3 s_{0j}^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^3 s_{i0}^2 = 1, \quad \sum_{i,j=1}^3 s_{ij}^2 = 1. \quad (2.78)$$

Para o caso de um estado puro maximamente emaranhado temos [13]:

$$s_{01} = s_{02} = s_{03} = 0, \quad s_{10} = s_{20} = s_{30} = 0, \\ \sum_{i,j=1}^3 s_{ij}^2 = 3, \quad (2.79)$$

de tal forma que, cada feixe considerado separadamente um do outro é despolarizado, e para medir os parâmetros s_{ij} devemos medir a correlação entre os dois feixes com medidas em coincidência.

Assim, vamos construir o nosso grau de polarização para dois fótons P_4 de tal forma que quando o estado for puro fatorável ele é igual a 0 e quando o estado for puro maximamente emaranhado ele é igual a 1. Devemos lembrar também que estados que apresentam correlação de segunda ordem entre as amplitudes do seu campo, podem não ter correlação em quarta ordem e assim $P_4 = 0$. Tendo isso em mente e os resultados das equações (2.78) e (2.79), P_4 em função dos s_{ij} será:

$$P_4^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1}^3 s_{ij}^2 - 1 \right) = 1 - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 s_{i0}^2 + \sum_{j=1}^3 s_{0j}^2 \right). \quad (2.80)$$

Note que a quantidade P_4 está relacionada com $P_2^{(1)}$ e $P_2^{(2)}$, pois o grau de polarização para cada fóton separadamente é $P_2^{(1)} = \sqrt{s_{10}^2 + s_{20}^2 + s_{30}^2}$ e $P_2^{(2)} = \sqrt{s_{01}^2 + s_{02}^2 + s_{03}^2}$, logo da equação (2.80), $P_4^2 + \frac{1}{2}(P_2^{(1)})^2 + \frac{1}{2}(P_2^{(2)})^2 = 1$. Outro fato importante é que, para estados puros, P_4^2 coincide com o quadrado da concorrência, que é uma medida de emaranhamento [14]. Assim, a partir de P_4 podemos obter informações sobre o grau de emaranhamento do estado.

Para estados mistos também é possível definir um grau de polarização, mas por ser a descrição um pouco mais complexa e por não ser de nosso interesse nesse trabalho, não vamos falar sobre ele. Interessados no assunto podem consultar a referência [12].

Capítulo 3

Estados de Polarização

O aparato operacional desenvolvido no capítulo 2, embora bastante simples, foi desenvolvido para campos de um único modo (onda plana). Contudo, os estados que queremos estudar são estados gerados por campos de multimodos. Como podemos então fazer um estudo da polarização dos nossos estados? Baseado na referência [15], vamos construir uma matriz densidade reduzida efetiva 2×2 e assim veremos, que mesmo sendo o nosso campo multimodal, poderemos usar o grau de polarização da equação (2.80).

Para começar esse capítulo vamos olhar como o estado de um único fóton é alterado ao passar por um polarizador arbitrariamente orientado, como na figura 3.1. Usando então essa informação, construiremos uma matriz densidade reduzida efetiva, da qual falaremos mais adiante.

3.1 Estados de polarização clássicos

Um polarizador ideal linear [16] é um aparato que é completamente transparente para a luz linearmente polarizada na direção do eixo de transmissão. Vamos considerar um polarizador perpendicular a $\hat{\mathbf{z}}$ com orientação $\hat{\mathbf{p}}$ formando um ângulo β com o eixo $\hat{\mathbf{x}}$: $\hat{\mathbf{p}} = \cos \beta \hat{\mathbf{x}} + \sin \beta \hat{\mathbf{y}}$. Sejam \mathbf{E}^I e \mathbf{E}^T os campos elétricos incidentes e transmitidos, respectivamente. Vamos assumir que \mathbf{E}^I e \mathbf{E}^T são os campos elétricos de ondas planas propagando na direção de $\hat{\mathbf{k}}$, onde $\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$ é o vetor unitário do vetor de onda. Podemos escrever explicitamente

$$\mathbf{E}^I = E_1^I \hat{\mathbf{e}}_1 + E_2^I \hat{\mathbf{e}}_2,$$

$$\mathbf{E}^T = E_1^T \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1 + E_2^T \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2, \quad (3.1)$$

onde $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2$ são dois vetores ortogonais e unitários, como representado na figura 3.1. Se θ e ϕ são as coordenadas esféricas de $\hat{\mathbf{k}}$ em relação a $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$ e $\hat{\mathbf{z}}$ (onde $\hat{\mathbf{z}}$ é o eixo de rotação do polarizador),

$$\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{x}} \sin\theta \cos\phi + \hat{\mathbf{y}} \sin\theta \sin\phi + \hat{\mathbf{z}} \cos\theta, \quad (3.2)$$

$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1$ e $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2$ serão definidos de tal maneira que

$$\hat{\mathbf{k}} = \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1 \times \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2. \quad (3.3)$$

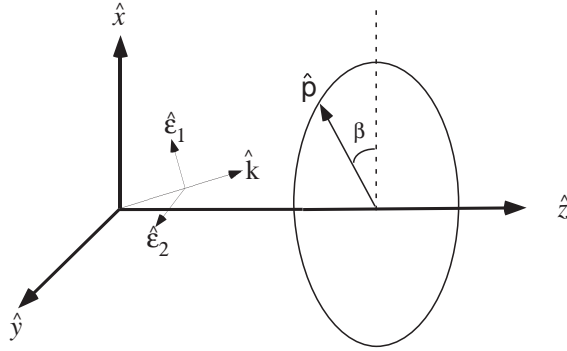


Figura 3.1: Esquema de um feixe de luz propagando na direção $\hat{\mathbf{k}}$ passando por um polarizador perpendicular a $\hat{\mathbf{z}}$.

Dada uma certa direção de propagação $\hat{\mathbf{k}}$ da onda plana, a condição (3.3) sozinha não é suficiente para determinar $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1$ e $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2$. Por hora, no entanto, vamos deixar livre a orientação do sistema $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2$ em torno de $\hat{\mathbf{k}}$.

A ação do polarizador pode ser encontrada exigindo que a polarização $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{(p)}$ do campo transmitido esteja no plano definido pelo eixo de polarização $\hat{\mathbf{p}}$ e pela direção de propagação da onda plana $\hat{\mathbf{k}}$: $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{(p)} = c_1 \hat{\mathbf{p}} + c_2 \hat{\mathbf{k}}$. As duas constantes reais c_1 e c_2 podem ser encontradas impondo as condições de normalização $|\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{(p)}| = 1$ e ortogonalidade com $\hat{\mathbf{k}}$, $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{(p)} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$. O resultado final é

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{(p)} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2}} \hat{\mathbf{p}} - \frac{\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2}} \hat{\mathbf{k}}. \quad (3.4)$$

Em termos de $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1$ e $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2$ temos,

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{(p)} = \frac{\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2}} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1 + \frac{\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2}} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2. \quad (3.5)$$

Como \mathbf{E}^I , \mathbf{E}^T , $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1$, $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2$ e $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{(p)}$ são coplanares, podemos escrever a atuação do polarizador como,

$$\mathbf{E}^T = (\mathbf{E}^I \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{(p)}) \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{(p)}. \quad (3.6)$$

isto é,

$$\mathbf{E}^T = \mathbf{T} \mathbf{E}^I, \quad (3.7)$$

onde

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{(\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1)^2}{1 - (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2} & \frac{(\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1)(\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2)}{1 - (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2} \\ \frac{(\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1)(\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2)}{1 - (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2} & \frac{(\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2)^2}{1 - (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2} \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Lembrando que $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1$, $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2$ e $\hat{\mathbf{k}}$ formam um sistema cartesiano, e que conseqüentemente $(\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1)^2 + (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2)^2 + (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 = |\hat{\mathbf{p}}|^2 = 1$, é fácil verificar que \mathbf{T} representa um projetor, isto é $\mathbf{T}\mathbf{T} = \mathbf{T}$.

3.2 Estados quânticos de polarização

Seguindo a referência [5], vamos definir o operador vetorial amplitude de campo incidente como

$$\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^I = a_{1,\mathbf{k}} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1 + a_{2,\mathbf{k}} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2, \quad (3.9)$$

onde $a_{1,\mathbf{k}}$ e $a_{2,\mathbf{k}}$ são operadores de aniquilação de fótons no modo de onda plana com vetor de onda \mathbf{k} e polarizações $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1$ e $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2$, respectivamente.

O vetor de amplitude de campo transmitido pelo polarizador será:

$$\mathbf{a}^T = \mathbf{T} \mathbf{a}^I = (\mathbf{T}_{11} a_1 + \mathbf{T}_{12} a_2) \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1 + (\mathbf{T}_{21} a_1 + \mathbf{T}_{22} a_2) \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2 \quad (3.10)$$

onde a dependência em \mathbf{k} foi omitida para simplificar a notação.

Se chamarmos

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{11} a_1 + \mathbf{T}_{12} a_2 &= \mathbf{a}^T \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1 \\ \mathbf{T}_{21} a_1 + \mathbf{T}_{22} a_2 &= \mathbf{a}^T \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2, \end{aligned} \quad (3.11)$$

concluimos finalmente, com o auxílio das expressões (3.5) e (3.8), que

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T &= a_p \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(p)} \quad \text{onde} \\ a_p &= \frac{\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2}} a_1 + \frac{\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2}} a_2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

O operador a_p satisfaz à relação de comutação $[a_p, a_p^\dagger] = 1$, o que o qualifica como um operador de aniquilação de fótons no modo de onda plana com vetor de onda \mathbf{k} e polarização $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(p)}$. Logo, a expressão (3.10) descreve corretamente a ação do polarizador no domínio quântico.

Podemos então utilizar o operador a_p^\dagger para gerar estados transmitidos pelo polarizador em qualquer orientação de β e vetor de onda incidente \mathbf{k} . Por exemplo,

$$|\mathbf{k}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(p)}\rangle = a_p^\dagger |vac\rangle = \frac{\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2}} |\mathbf{k}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1\rangle + \frac{\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2}} |\mathbf{k}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\rangle \quad (3.13)$$

representa o estado de 1 fóton com vetor de onda \mathbf{k} transmitido pelo polarizador. Em particular,

$$|\mathbf{k}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_V\rangle = \frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2}} |\mathbf{k}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1\rangle + \frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2}} |\mathbf{k}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\rangle \quad (3.14)$$

descreve o estado de 1 fóton com vetor de onda \mathbf{k} e polarização vertical (no plano xz) transmitido pelo polarizador quando este está orientado com $\beta = 0$ (ver figura 3.1), e

$$|\mathbf{k}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_H\rangle = \frac{\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2}} |\mathbf{k}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1\rangle + \frac{\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2}} |\mathbf{k}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\rangle \quad (3.15)$$

descreve o estado de 1 fóton com vetor de onda \mathbf{k} e polarização horizontal (no plano yz) transmitido pelo polarizador quando este está orientado com $\beta = \pi/2$.

Assim, a amplitude de probabilidade de que um fóton incidente no estado $|\mathbf{k}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1\rangle$, seja qual for $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1$ (ainda não definido), ser transmitido pelo polarizador orientado na direção $\hat{\mathbf{x}}$ ($\beta = 0$) é

$$\langle \mathbf{k}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_V | \mathbf{k}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 \rangle = \frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2}}. \quad (3.16)$$

As demais amplitudes relevantes são

$$\langle \mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_V | \mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_2 \rangle = \frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\varepsilon}_2}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2}}, \quad (3.17)$$

$$\langle \mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_H | \mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_1 \rangle = \frac{\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\varepsilon}_1}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2}}, \quad (3.18)$$

$$\langle \mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_H | \mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_2 \rangle = \frac{\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\varepsilon}_2}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2}}. \quad (3.19)$$

É interessante notar que, embora $|\mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_H\rangle$ e $|\mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_V\rangle$ formem uma base, eles não são necessariamente ortogonais:

$$\langle \mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_H | \mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_V \rangle = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2][1 - (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2]}} [(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\varepsilon}_1)(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\varepsilon}_1) + (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\varepsilon}_2)(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\varepsilon}_2)]. \quad (3.20)$$

De acordo com a expressão (3.5),

$$\langle \mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_H | \mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_V \rangle = \hat{\varepsilon}_H \cdot \hat{\varepsilon}_V. \quad (3.21)$$

Por outro lado, de acordo com a equação (3.8),

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_H \cdot \hat{\varepsilon}_V &= \left[\frac{1}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2}} \hat{\mathbf{y}} - \frac{\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2}} \hat{\mathbf{k}} \right] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2}} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2}} \hat{\mathbf{k}} \right] \\ &= -\frac{(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{k}})(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{k}})}{\sqrt{[1 - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2][1 - (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2]}} = \frac{-\text{sen}^2\theta \text{sen}\phi \cos\phi}{\sqrt{(1 - \text{sen}^2\theta \cos^2\phi)(1 - \text{sen}^2\theta \text{sen}^2\phi)}} \quad (3.22) \end{aligned}$$

onde θ e ϕ são os ângulos esféricos do vetor de onda \mathbf{k} .

Vemos então que $|\mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_H\rangle$ e $|\mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_V\rangle$ só são ortogonais para certas direções de propagação \mathbf{k} , isto é, quando \mathbf{k} está no plano xz ($\phi = 0$), no plano yz ($\phi = \pi/2$) ou ao longo de \hat{z} ($\theta = 0$).

3.3 Matriz densidade reduzida efetiva

Nessa seção, a partir da matriz densidade de um único fóton, vamos tentar calcular uma matriz densidade reduzida 2×2 e mostrar que em geral não é possível construir tal matriz quando muitos modos do campo estão envolvidos. A partir daí vamos definir uma matriz densidade reduzida efetiva.

3.3.1 Traço sobre o momento

Antes de começarmos, devemos falar sobre o fato de podermos separar os estados da base do espaço de um fóton em produtos de estados de momento e polarização, usualmente escrito como

$$|\mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_i(\mathbf{k})\rangle = |\mathbf{k}\rangle \otimes |\hat{\varepsilon}_i(\mathbf{k})\rangle, \quad (3.23)$$

onde $|\mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_i(\mathbf{k})\rangle$ representa o estado do modo \mathbf{k} com polarização $\hat{\varepsilon}_i(\mathbf{k})$, excitado com 1 fóton.

Apesar da notação ser bastante usual, devemos perceber que, rigorosamente, apenas a parte à esquerda da equação (3.23) é um estado genuinamente definido pela Mecânica Quântica, sendo que a parte a direita é só uma forma de representar o estado. Isso porque, na Mecânica quântica não existe um operador de criação que cria do vácuo um estado apenas de momento $|\mathbf{k}\rangle$, nem um operador de criação que cria um estado apenas de polarização $|\hat{\varepsilon}_i(\mathbf{k})\rangle$ no vácuo. Contudo, apesar do estado $|\mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_i(\mathbf{k})\rangle$ não ser fatorável, não há nenhum problema em usarmos a representação “momento \otimes polarização” para campos de um só modo.

O fato de podermos separar os graus de liberdade do momento dos graus de liberdade da polarização, torna-se bastante importante quando os fótons estão sujeitos a testes apenas de polarização e os graus de liberdade do momento tornam-se irrelevantes. Nestes casos, tem-se como prática [17] introduzir uma matriz densidade reduzida obtida a partir do traço da matriz densidade completa sobre o conjunto das componentes do momento.

Seja ρ o operador de estado que descreve o estado multimodal de um único fóton, onde os modos variam de 1 até N . Podemos representar ρ no espaço de Hilbert, definindo as N^2 matrizes 2×2 , que vamos chamar de $R(n, m)$, das quais os elementos são calculados como

$$R_{i'i'}(n, m) = Z_1 \langle \mathbf{k}_n, \hat{\varepsilon}_i(\mathbf{k}_n) | \hat{\rho} | \mathbf{k}_m, \hat{\varepsilon}_{i'}(\mathbf{k}_m) \rangle, \quad (3.24)$$

onde Z_1 é uma constante de normalização e $i, i' = 1, 2$.

Para que fique mais claro, para cada (n, m) existe uma matriz 2×2 igual a

$$R(n, m) = \begin{bmatrix} R_{11}(n, m) & R_{12}(n, m) \\ R_{21}(n, m) & R_{22}(n, m) \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Essas matrizes $R(n, m)$ são os blocos formadores da representação total de ρ , que ficará

$$\rho = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11}(1, 1) & R_{12}(1, 1) \\ R_{21}(1, 1) & R_{22}(1, 1) \end{bmatrix} & \cdots & R(1, N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R(N, 1) & \cdots & R(N, N) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

A partir de agora, escolhemos Z_1 de tal forma que $\text{Tr}\rho = 1$. Agora, se quisermos calcular a matriz reduzida ρ_1^R , fazendo o traço nos graus de liberdade do momento, basta apenas somar as diagonais dos blocos $R(n, n)$, isso porque,

$$\rho_1^R = \sum_{n=1}^N \langle \mathbf{k}_n, \hat{\varepsilon}_i(\mathbf{k}_n) | \hat{\rho} | \mathbf{k}_n, \hat{\varepsilon}_{i'}(\mathbf{k}_n) \rangle = \sum_{n=1}^N R(n, n) = \rho_1^R. \quad (3.27)$$

A matriz ρ_1^R é uma matriz 2×2 bem definida e não há ambigüidade na sua determinação. Usamos o subscrito 1 para escrever ρ_1^R para distingüí-la da matriz densidade reduzida efetiva, que introduziremos na próxima subseção. Contudo, a matriz reduzida introduzida na (3.27) não tem sentido, pois não apresenta propriedades de transformação bem definidas, como pode ser melhor entendido na referência [18]. Sob o efeito de rotações, cada componente $R(n, n)$ adquire uma fase que depende do momento e assim a matriz ρ_1^R não tem propriedades de transformação bem estabelecidas.

Vamos supor que estamos trabalhando com um operador X que opera exclusivamente nas componentes de polarização, ou melhor que pode ser escrito na base fatorável $\{|\mathbf{k}_j, \hat{\varepsilon}_i(\mathbf{k}_j)\rangle\}$. Isso quer dizer, que ele pode ser representado da seguinte forma,

$$X = |X\rangle\langle X| \otimes \sum_{n=1}^N |\mathbf{k}_n\rangle\langle \mathbf{k}_n|, \quad (3.28)$$

onde a parte direita desta equação é na verdade um produto de uma matriz 2×2 (dependente da polarização e independente do momento) por uma matriz $N \times N$ (dependente do momento e independente da polarização). Logo, o valor esperado $\langle X \rangle = \text{Tr}(\rho X)$ pode ser representado por

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &= \text{Tr}(\rho X) = \sum_{i, i'} \sum_j \langle \mathbf{k}_j, \hat{\varepsilon}_i(\mathbf{k}_j) | \left(|X\rangle\langle X| \otimes \sum_{n=1}^N |\mathbf{k}_n\rangle\langle \mathbf{k}_n| \right) \rho | \mathbf{k}_j, \hat{\varepsilon}_{i'}(\mathbf{k}_j) \rangle \\ &= \text{Tr}(\rho_1^R |X\rangle\langle X|). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Aparentemente não há nenhum problema em usar ρ_1^R . O ponto chave aqui é que a representação do operador (equação(3.28)) com respeito à base fatorável $\{|\mathbf{k}_j, \hat{\varepsilon}_i(\mathbf{k}_j)\rangle\}$ pode não ter sentido, pois o estado de polarização da equação (3.28) não depende de \mathbf{k} , enquanto o estado de polarização de um fóton está sempre ligado a um dado vetor de onda. Então, num processo onde muitos vetores de onda estão envolvidos, é impossível definir uma única matriz reduzida 2×2 , pois para cada valor diferente do vetor de onda, devemos ter uma matriz diferente. Resumindo, como para um campo de multimodos não faz sentido uma representação fatorável para um dado operador, a idéia de uma única matriz reduzida em relação a uma variável é também sem sentido.

Na próxima seção, vamos então redefinir a matriz reduzida partindo de um outro caminho.

3.3.2 Matriz densidade reduzida efetiva para um fóton

Vimos no capítulo 2 que o operador de estado no subespaço de polarização para campos monomodais de 1 fóton pode ser escrito através dos parâmetros de Stokes. Como tal operador fornece todas as propriedades de polarização do campo, vamos usar tal definição para escrever a matriz densidade reduzida efetiva para um fóton como

$$\rho_{ef} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} s_0 + s_3 & s_1 - is_2 \\ s_1 + is_2 & s_0 - s_3 \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Para um dado momento \mathbf{k} e um eixo de rotação do polarizador fixo em $\hat{\mathbf{z}}$, $\mathcal{B}_{\mathbf{k}} = \{|\mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_V(\mathbf{k})\rangle, |\mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_H(\mathbf{k})\rangle\}$ será a base de polarização linear definida pelas duas orientações ortogonais do polarizador $\hat{\mathbf{p}}(0) \equiv \hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{p}}(\pi/2) \equiv \hat{\mathbf{y}}$, respectivamente. Podemos então escrever os operadores de Stokes nesta base, da seguinte forma,

$$\begin{aligned} S_0 &= |\mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_V(\mathbf{k})\rangle\langle\mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_V(\mathbf{k})| + |\mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_H(\mathbf{k})\rangle\langle\mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_H(\mathbf{k})| \\ S_1 &= |\mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_V(\mathbf{k})\rangle\langle\mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_H(\mathbf{k})| + |\mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_H(\mathbf{k})\rangle\langle\mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_V(\mathbf{k})| \\ S_2 &= -i(|\mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_V(\mathbf{k})\rangle\langle\mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_H(\mathbf{k})|) + i(|\mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_H(\mathbf{k})\rangle\langle\mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_V(\mathbf{k})|) \\ S_3 &= |\mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_V(\mathbf{k})\rangle\langle\mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_V(\mathbf{k})| - |\mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_H(\mathbf{k})\rangle\langle\mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_H(\mathbf{k})| \end{aligned} \quad (3.31)$$

Sabemos que os parâmetros de Stokes, quantidades mensuráveis, são os valores esperados dos operadores de (3.31). Contudo quando estamos fazendo tais medidas não detectamos apenas um único valor de \mathbf{k} , mas um conjunto. Logo, para

encontrarmos os parâmetros de Stokes, devemos calcular os valores esperados dos seguintes operadores,

$$P_{\sigma\tau} = \sum_{\mathbf{k} \in K_D} |\mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_\sigma(\mathbf{k})\rangle \langle \mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_\tau(\mathbf{k})|, \quad (3.32)$$

onde $\sigma, \tau = V, H$ e K_D é o conjunto de modos detectados.

A matriz densidade reduzida efetiva pode então ser escrita da seguinte forma,

$$\frac{\rho_{ef}}{Z_{ef}} = \begin{bmatrix} \langle P_{VV} \rangle & \langle P_{HV} \rangle \\ \langle P_{VH} \rangle & \langle P_{HH} \rangle \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

onde $Z_{ef} = 1/(\langle P_{VV} \rangle + \langle P_{HH} \rangle)$ é uma constante de normalização que garante que $\text{Tr } \rho_{ef} = 1$.

3.3.3 Matriz densidade reduzida efetiva para dois fótons

Seguindo o mesmo caminho da subseção 3.3.2, vamos introduzir agora uma matriz densidade reduzida efetiva 4×4 para o caso de dois fótons. No capítulo 2, vimos que podemos escrever a matriz densidade no subespaço de polarização em função dos parâmetros de Stokes (2.75). Vamos então usar tal definição para escrever a matriz densidade reduzida efetiva para dois fótons,

$$\rho_{2ef} = \frac{1}{4} \sum_{i,j=0}^3 s_{ij} (\sigma_i \otimes \sigma_j). \quad (3.34)$$

De uma forma mais explícita ρ_{2ef} fica

$$\rho_{2ef} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} s_{33} + s_{30} + s_{03} + s_{00} & s_{31} - is_{32} + s_{01} - is_{02} & s_{13} - is_{23} + s_{10} - is_{20} & s_{11} - is_{12} - is_{21} - s_{22} \\ s_{31} + is_{32} + s_{01} + is_{02} & -s_{33} + s_{30} - s_{03} + s_{00} & s_{11} + is_{12} - is_{21} + s_{22} & -s_{13} + is_{23} + s_{10} - is_{20} \\ s_{13} + is_{23} + s_{10} + is_{20} & s_{11} - is_{12} + is_{21} + s_{22} & -s_{33} - s_{30} + s_{03} + s_{00} & -s_{31} + is_{32} + s_{01} - is_{02} \\ s_{11} + is_{12} + is_{21} - s_{22} & -s_{13} - is_{23} + s_{10} + is_{20} & -s_{31} - is_{32} + s_{01} + is_{02} & s_{33} - s_{30} - s_{03} + s_{00} \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio do caso de um fóton, note que podemos escrever,

$$(\rho_{2ef})_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'} = Z_{2ef} \langle P_{\alpha'\alpha} \otimes P_{\beta'\beta} \rangle, \quad (3.36)$$

onde

$$\begin{aligned} P_{\alpha'\alpha} &= \sum_{\mathbf{k} \in K_D} |\mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_{\alpha'}(\mathbf{k})\rangle \langle \mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{k})| & (\alpha, \alpha' = V, H), \\ P_{\beta'\beta} &= \sum_{\mathbf{k}' \in K'_D} |\mathbf{k}', \hat{\varepsilon}_{\beta'}(\mathbf{k}')\rangle \langle \mathbf{k}', \hat{\varepsilon}_\beta(\mathbf{k}')| & (\beta, \beta' = V, H), \end{aligned} \quad (3.37)$$

e Z_{2ef} é tal que $\text{Tr}\rho_{2ef} = 1$. Explicitamente em função de $P_{\alpha'\alpha}$ e $P_{\beta'\beta}$, ρ_{2ef} fica

$$\frac{\rho_{2ef}}{Z_{2ef}} = \begin{bmatrix} \langle P_{VV} \otimes P_{VV} \rangle & \langle P_{VV} \otimes P_{HV} \rangle & \langle P_{HV} \otimes P_{VV} \rangle & \langle P_{HV} \otimes P_{HV} \rangle \\ \langle P_{VV} \otimes P_{VH} \rangle & \langle P_{VV} \otimes P_{HH} \rangle & \langle P_{HV} \otimes P_{VH} \rangle & \langle P_{HV} \otimes P_{HH} \rangle \\ \langle P_{VH} \otimes P_{VV} \rangle & \langle P_{VH} \otimes P_{HV} \rangle & \langle P_{HH} \otimes P_{VV} \rangle & \langle P_{HH} \otimes P_{HV} \rangle \\ \langle P_{VH} \otimes P_{VH} \rangle & \langle P_{VH} \otimes P_{HH} \rangle & \langle P_{HH} \otimes P_{VH} \rangle & \langle P_{HH} \otimes P_{HH} \rangle \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Apesar da grande semelhança entre ρ_{2ef} e ρ_{ef} , há também uma grande diferença conceitual entre elas [12]. Ao contrário do caso de um fóton, para dois fótons, ρ_{2ef} não pode ser determinada através apenas de medidas locais (em cada feixe separadamente), mas é necessário fazer medidas em coincidência, com o intuito de não perder (possíveis) efeitos de emaranhamento dos dois fótons.

Capítulo 4

Estados de dois fótons e a conversão paramétrica descendente

Neste capítulo falaremos sobre o processo de óptica não-linear chamado de conversão paramétrica descendente e os possíveis estados emaranhados de dois fótons gerados a partir deste processo.

4.1 Conversão paramétrica descendente (CPD)

Quando uma onda eletromagnética se propaga através de um meio dielétrico, momentos de dipolo são induzidos nos átomos do meio, produzindo uma polarização elétrica \mathbf{P} . Para muitos materiais, quando a intensidade do campo elétrico é muito menor que a intensidade do campo que liga o elétron ao átomo, o efeito de polarização é proporcional ao campo elétrico da onda incidente,

$$P_i = \epsilon_0 \chi_{i,j} E_j, \quad (4.1)$$

onde χ é o tensor de susceptibilidade elétrica.

Por outro lado, se a intensidade do campo incidente for mais forte e estiver próxima à intensidade do campo elétrico atômico, termos não-lineares aparecem na expressão da polarização,

$$P_i = \epsilon_0 \chi_{i,j} E_j + \chi_{i,j,k}^{(2)} E_j E_k + \chi_{i,j,k,l}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots \quad (4.2)$$

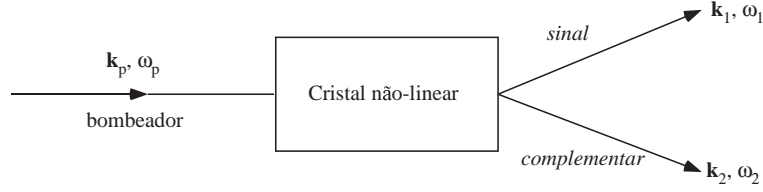


Figura 4.1: Ilustração do processo da conversão paramétrica descendente em um cristal não linear com susceptibilidade até $\chi^{(2)}$.

Dois exemplos de processos de óptica não-linear são a geração de 2^{Q} harmônico e a conversão paramétrica descendente (CPD). No primeiro processo dois fótons do campo incidente num meio dielétrico não-linear são convertidos em um fóton de energia maior. No processo da CPD, incidimos um fóton com vetor de onda \mathbf{k}_p e frequência ω_p num dielétrico não-linear e geramos dois fótons, chamados de fótons gêmeos, com frequências menores ω_1 e ω_2 e vetores de onda \mathbf{k}_1 e \mathbf{k}_2 , como mostrado na figura 4.1. Os fótons gerados são chamados de *sinal* e *complementar*. Para garantir a conservação de energia e momento no processo, devemos ter

$$\begin{aligned}\hbar\omega_p &= \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2, \\ \hbar\mathbf{k}_p &= \hbar\mathbf{k}_1 + \hbar\mathbf{k}_2.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Para dar um tratamento mais formal a este processo, vamos nos inspirar no artigo de Hong e Mandel [3]. O campo eletromagnético será quantizado dentro do volume do meio, um cristal não-linear e não-magnético, com Hamiltoniano dado por:

$$H = \frac{1}{2} \int_V [P_i(\mathbf{r}, t)E_i(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t)] d\mathbf{r}.\tag{4.4}$$

Vamos considerar que $P_i(\mathbf{r}, t)$ é o mesmo da equação (4.2), mas com a expansão apenas até o termo de segunda ordem da susceptibilidade $\chi^{(2)}$. Podemos então ver que o Hamiltoniano pode ser separado em duas partes, uma parte linear, onde o termo é proporcional ao Hamiltoniano do vácuo, dado por

$$H_{vac} = \frac{1}{2} \int_V \left[\varepsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \right] d\mathbf{r}\tag{4.5}$$

Capítulo 4. Estados de dois fótons e a conversão paramétrica descendente 37

e outra parte não-linear,

$$H_I = \frac{1}{2} \int_V \left[(\chi_{i,j,k}^{(2)} E_j E_k) E_i \right] d\mathbf{r}. \quad (4.6)$$

Fazendo a quantização do campo elétrico, sabemos que a variável campo elétrico será substituída pelo operador campo elétrico que é dado por [5],

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \left(\frac{\hbar \omega(\mathbf{k}, \alpha)}{2V \epsilon(\mathbf{k}, \alpha)} \right)^{1/2} \mathbf{a}_{\mathbf{k}, \alpha} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}, \alpha} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + c.h., \quad (4.7)$$

onde o somatório é feito sobre o conjunto discreto e infinito de valores do vetor de onda $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ e da polarização α , $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}, \alpha}$ é um vetor de polarização unitário, $\mathbf{a}_{\mathbf{k}, \alpha}$ e $\mathbf{a}_{\mathbf{k}, \alpha}^\dagger$ são os operadores de aniquilação e criação para os modos definidos por (\mathbf{k}, α) , respectivamente, $\epsilon(\mathbf{k}, \alpha)$ é a permissividade do meio e $c.h.$ significa o conjugado hermitiano. Substituindo este operador campo elétrico em (4.6), desprezando termos que não satisfazem a conservação de energia, chegamos a termos com $\mathbf{a}_{\mathbf{k}_1, \alpha_1}^\dagger \mathbf{a}_{\mathbf{k}_2, \alpha_2}^\dagger \mathbf{a}_{\mathbf{k}_p, \alpha_p}$, que operam no estado do campo aniquilando um fóton no modo (\mathbf{k}_p, α_p) e criando dois outros fótons, no modos (\mathbf{k}_1, α_1) e (\mathbf{k}_2, α_2) . Sabendo que a evolução temporal do estado é dada pela atuação do operador $\exp[-\frac{i}{\hbar} H t]$, esses termos acabam por converterem fótons do campo incidente em pares de fótons, chamados de fótons gêmeos.

Vamos voltar agora à equação (4.3) de conservação de energia e momento, sabemos que $\mathbf{k} = \frac{n\omega}{c} \hat{\mathbf{k}}$. Logo para fótons gêmeos com vetor de onda na mesma direção do fóton incidente,

$$\begin{aligned} \hbar \omega_p &= \hbar \omega_1 + \hbar \omega_2, \\ n_p \omega_p &= n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2, \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde n_i é o índice de refração do meio e c é a velocidade da luz. Se os índices de refração n_i são iguais, a equação para a conservação de momento concorda com a equação para a conservação de energia. Contudo sabemos que na realidade efeitos de dispersão do meio, exceto no vácuo, sempre são observados, onde o índice de refração aumenta com a frequência. Sendo assim, como ω_p é maior que ω_1 e ω_2 , n_p será maior que n_2 e n_1 e as duas equações não são satisfeitas simultaneamente. Uma forma para contornar este problema é usar um cristal não-linear birrefringente uniaxial. Para tais cristais o índice de refração depende da frequência, polarização e

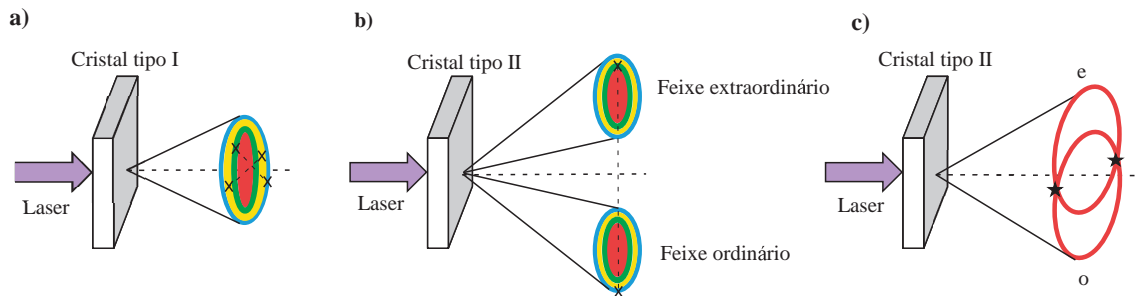


Figura 4.2: Dois diferentes tipos de CPD. a) CPD do tipo I: os fótons gêmeos possuem polarização ortogonal a do laser. Os cones internos possuem fótons com maior energia. b) CPD do tipo II: os fótons têm polarizações mutuamente ortogonais, sendo que um deles tem polarização idêntica a do feixe de bombeamento. As marcas com \times ligadas por uma linha pontilhada indicam exemplos de regiões em que se encontram pares de fótons gêmeos. c) CPD do tipo II com cones se sobrepondo. As marcas com \star são fótons gêmeos indistinguíveis.

direção de propagação do campo. Para uma dada polarização, chamada de ordinária, o índice de refração não depende da direção de propagação do campo, já para uma outra polarização ortogonal a esta, denominada de polarização extraordinária, o índice de refração depende da direção de propagação do campo. Voltando a equação (4.8), podemos então posicionar o cristal de tal forma que o efeito de birrefringência anule o efeito de dispersão, fazendo com que as duas equações sejam satisfeitas simultaneamente, permitindo que o processo ocorra. Daremos uma explicação um pouco mais detalhada logo adiante sobre cristais birrefringentes.

Existem dois tipos de conversões paramétricas descendentes. Na CPD do tipo I, os fótons gêmeos gerados têm polarizações iguais, e ambas ortogonais à polarização do campo incidente (ou de bombeamento). Para satisfazer as condições de conservação de energia e momento, os fótons de mesma frequência saem do cristal ao longo de um cone com vértice no cristal e com eixo de simetria coincidente com a direção de propagação do feixe incidente. Pares de fótons gêmeos são encontrados em cones cuja a soma de frequências resulta na frequência do feixe incidente e em lados opostos dos cones em relação ao eixo, como mostrado na figura 4.2 a).

Por outro lado, na CPD do tipo II, um dos fótons gêmeos tem a mesma polarização do fóton incidente (extraordinária) e o outro tem polarização ortogonal (ordinária). Novamente para satisfazer as condições de conservação, os fótons com

Capítulo 4. Estados de dois fótons e a conversão paramétrica descendente 39

uma determinada frequência saem em cones cujo o eixo depende de sua polarização e não é mais coincidente com a direção de propagação do feixe incidente, como mostrado na figura 4.2 b). Dependendo do ângulo em que o eixo óptico faz com a direção de propagação do feixe incidente, o eixo dos cones ordinário e extraordinário se afastam ou se aproximam. Em geral o par deixa o cristal no regime não-colinear, isso quer dizer, em direções diferentes da do eixo do feixe de bombeamento. Contudo, dependendo de certas condições o par pode exibir colineariedade com o feixe incidente. Como podemos ver na figura 4.2 c), dependendo do posicionamento do cristal, os cones podem se interceptar. Os fótons nos pontos de sobreposição serão indistinguíveis, pois não sabemos a que cone cada fóton pertence.

Para escrever o estado de dois fótons gerados na conversão paramétrica, vamos fazer algumas aproximações. Primeiro, vamos utilizar a aproximação monocromática e, segundo, a aproximação paraxial, que consiste em dizer que os vetores de onda dos fótons *signal* e *complementar* não estão necessariamente colineares com o vetor de onda do feixe incidente, mas formam com este um ângulo pequeno. Além disso vamos aproximar o cristal por um cristal fino. Levando tudo isso em consideração, podemos ver que o estado de dois fótons gerados na CPD não-colinear é [19],

$$|\psi\rangle_{\text{CPD}} = C_1|vac\rangle + C_2|\psi\rangle, \quad (4.9)$$

onde

$$|\psi\rangle = \sum_{\hat{\epsilon}_s, \hat{\epsilon}_i} C_{\hat{\epsilon}_s, \hat{\epsilon}_i} \int \int_D d\mathbf{q}_s d\mathbf{q}_i \Phi(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) |\mathbf{q}_s, \hat{\epsilon}_s\rangle |\mathbf{q}_i, \hat{\epsilon}_i\rangle. \quad (4.10)$$

Os coeficientes C_1 e C_2 são tais que $|C_2| \ll |C_1|$. C_2 depende do tamanho do cristal, do coeficiente de não-linearidade, da magnitude do campo de bombeamento, além de outros fatores. Os kets $|\mathbf{q}_j, \hat{\epsilon}_j\rangle$ representam estados de um fóton com \mathbf{q}_j , que é a componente transversal do vetor de onda \mathbf{k}_j , e polarização $\hat{\epsilon}_j$ dos modos $j = s$ ou i (*signal* e *complementar*). $C_{\hat{\epsilon}_s, \hat{\epsilon}_i}$ são coeficientes que definem o estado de polarização do par de fótons da CPD. Quando o ângulos de saída dos fótons *signal* e *complementar* são pequenos, a função $\Phi(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)$, que pode ser considerada como o espectro angular normalizado de um campo de dois fótons, é dada por [19]

$$\Phi(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2L}{K}} v(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) \text{sinc} \left(\frac{L|\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_i|^2}{4K} \right), \quad (4.11)$$

onde $v(\mathbf{q})$ é o espectro angular normalizado do feixe incidente, L é o tamanho do cristal na direção em que o feixe de bombeamento incide, K é a magnitude do vetor

de onda do feixe de bombeamento e $\text{sinc}(x) = \text{sen}(x)/x$. O domínio de integração D é, a princípio, definido pelas condições $q_s^2 \leq k_s^2$ e $q_i^2 \leq k_i^2$.

Podemos ver que o estado da equação (4.9) é um estado emaranhado, pois não podemos escrevê-lo como o produto tensorial de estados para os fótons *signal* e *complementar* separadamente. A partir desse estado de dois fótons emaranhados, podemos então gerar os estados de Bell, dos quais falaremos mais na próxima seção.

4.2 Estados emaranhados de dois fótons

Uma das conseqüências mais surpreendente da Mecânica Quântica é o emaranhamento de duas ou mais partículas espacialmente separadas. O estado emaranhado mais popular é o estado emaranhado de dois fótons. Para estados de duas partículas que podem ser considerados maximamente emaranhados o valor de um observável não é determinado para nenhuma das partículas. Contudo, se medirmos o valor de um observável para uma partícula, conseguimos determinar com 100% de certeza o estado da outra partícula, indiferente da distância entre as partículas [1].

O primeiro exemplo clássico para um estado emaranhado (em posição e momento) de duas partículas foi sugerido por Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) em 1935 [20]. Contudo os estados emaranhados de duas partículas (neste caso fótons) mais populares são os estados de Bell. Os estados de Bell são estados emaranhados de dois níveis que formam uma base completa ortonormal no espaço de Hilbert e, na base de polarização, são dados por,

$$\begin{aligned} |\Psi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\hat{\epsilon}_a\rangle_1|\hat{\epsilon}_b\rangle_2 \pm |\hat{\epsilon}_b\rangle_1|\hat{\epsilon}_a\rangle_2\} \\ |\Phi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\hat{\epsilon}_a\rangle_1|\hat{\epsilon}_a\rangle_2 \pm |\hat{\epsilon}_b\rangle_1|\hat{\epsilon}_b\rangle_2\}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Aqui $\hat{\epsilon}_a$ e $\hat{\epsilon}_b$ representam duas polarizações ortogonais e os kets 1 e 2 representam modos de onda plana. Os estados podem ser classificados em respeito à troca entre os fótons 1 e 2. Os estados simétricos em relação a troca, que são três, são chamados de tripletos, dados por $|\Psi^+\rangle$ e $|\Phi^\pm\rangle$. Já o estado antisimétrico é o singlete que é dado por $|\Psi^-\rangle$. Como estamos tratando com fótons, que são bósons, sabemos que a função de onda total deve ser simétrica, por isso a função espacial para fótons no estado de polarização singlete deve ser antisimétrica, logo fótons neste estado não podem ocupar o mesmo modo de onda plana.

Capítulo 4. Estados de dois fótons e a conversão paramétrica descendente 41

Olhando para o estado da equação (4.9) podemos ter uma idéia de que a CPD é uma fonte para preparar os estados de Bell. Uma forma de preparar os estados de Bell é a partir da CPD não-colinear do tipo II. Como já vimos na seção anterior, neste processo o par de fótons *sinial* e *complementar* são emitidos em dois cones, um ordinariamente e outro extraordinariamente polarizado. Ao longo da interseção, onde os cones se sobrepõem, os fótons gêmeos são indistinguíveis, já que não dá para saber a que cone cada fóton pertence. Posicionamos então na interseção dos cones dois orifícios numerados com 1 e 2 definindo a direção dos vetores de onda \mathbf{k} do par de fótons. O estado de polarização do par de fótons *sinial* e *complementar* será dado por,

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\hat{\epsilon}_{o1}\hat{\epsilon}_{e2}\rangle + |\hat{\epsilon}_{e1}\hat{\epsilon}_{o2}\rangle). \quad (4.13)$$

Parece direto então, que para medir os estados de Bell devemos simplesmente posicionar um analisador de polarização em série com o detector de contagem de fótons atrás de cada orifício 1 e 2. Na verdade, além disso devemos também posicionar um compensador, que pode ser um pedaço de material birrefringente, para cancelar os efeitos de retardamento causados pela propagação dentro do cristal, fazendo com que cada fóton tenha velocidade diferente um do outro. Os outros estados podem ser obtidos através da manipulação de placas de onda.

O estado escrito na equação (4.13) é na verdade uma simplificação do estado real. Quando posicionamos os orifícios ao longo da interseção dos cones, não selecionamos apenas um vetor de onda \mathbf{k} para cada fóton, mas uma pequena região de \mathbf{k} . Logo devemos expandir o campo elétrico não em um modo de onda plana, mas em vários modos. Um complicador que surge quando consideramos uma expansão em multimodos é que para cada vetor de onda \mathbf{k} , temos duas direções de polarização (extraordinária e ordinária) e o estado total não pode mais ser fatorado em um estado de polarização e outro de momento. Por que isso acontece?

Vamos considerar que o cristal não-linear que estamos usando é um cristal birrefringente uniaxial negativo. Isso quer dizer que para uma certa direção de polarização ele tem um índice de refração ordinário n_o e para uma direção ortogonal a esta ele tem um índice de refração extraordinário n_e , sendo $n_o > n_e$, daí o termo negativo. Considerando que o meio é não magnético, eletricamente neutro e que não

Capítulo 4. Estados de dois fótons e a conversão paramétrica descendente 42

há cargas condutoras no meio, as equações de Maxwell se reduzem a,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (4.14)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad (4.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (4.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (4.17)$$

Para encontrar a equação de onda para o campo elétrico \mathbf{E} , devemos tirar o rotacional da equação (4.14) e a derivada no tempo da equação (4.15), eliminando \mathbf{H} . Levando em conta só o termo linear da polarização $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$, chegamos a seguinte equação de onda,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} \chi \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (4.18)$$

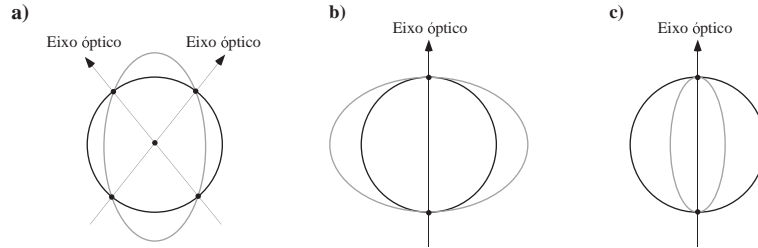


Figura 4.3: Interseções das superfícies do vetor de onda vista num plano para a) cristais biaxiais (com dois eixos ópticos) b) cristais uniaxiais (um eixo óptico) positivo c) cristais uniaxiais negativos.

Usando a aproximação do campo elétrico por uma onda plana monocromática da forma usual $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ e resolvendo esta equação, chegamos a duas equações para as componentes cartesianas do vetor de onda \mathbf{k} , uma para cada componente de polarização. Uma é a equação de um círculo e a outra de uma elipse. Logo em três dimensões a superfície de \mathbf{k} consiste em uma esfera para a polarização ordinária e um elipsóide de revolução para a polarização extraordinária. Podemos ver na figura 4.3, a interseção das duas superfícies para um plano escolhido. O eixo que une os pontos de interseção das duas curvas é chamado de eixo óptico. Como podemos

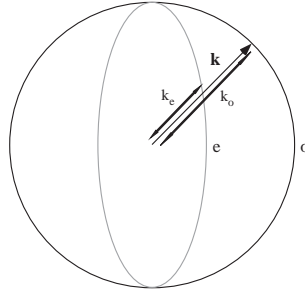


Figura 4.4: Vetor de onda num cristal birrefringente uniaxial. Existe sempre dois valores possíveis para o módulo de \mathbf{k} , um referente ao índice de refração extraordinário e outro referente ao índice de refração ordinário.

então ver na figura 4.4 para cada direção de \mathbf{k} , tem-se dois valores possíveis para o módulo de \mathbf{k} e assim dois valores possíveis para a velocidade de fase, definida por $\frac{\omega}{k}$. Cada velocidade de fase corresponde a direções de polarização ortogonais. Sabendo que a velocidade de fase é igual a $\frac{c}{n}$, onde n é o índice de refração e c é a velocidade da luz, para cada direção do vetor de onda \mathbf{k} , temos dois valores para os índices de refração, um que corresponde à polarização extraordinária e outro que corresponde à polarização ordinária. No eixo óptico, o módulo de \mathbf{k} é o mesmo para as duas curvas e logo os índices de refração têm o mesmo valor. Assim para cada direção de \mathbf{k} temos duas direções de polarização.

As direções de polarização são definidas da seguinte maneira: traçamos um plano que contém o eixo óptico e o vetor de onda, chamado de plano principal. O campo que está oscilando no plano principal, tem polarização extraordinária. Já o campo que está oscilando ortogonal ao plano principal tem polarização ordinária. Para o feixe fora do cristal, sabemos que esses eixos de polarização são ortogonais a \mathbf{k} . Em coordenadas esféricas então, estando o eixo óptico na direção do eixo $\hat{\mathbf{z}}$ e \mathbf{k} na direção do vetor unitário $\hat{\mathbf{r}}$, os vetores de polarização extraordinária e ordinária estão na direção dos vetores unitários $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, respectivamente. Imaginando que o eixo óptico não está mais em $\hat{\mathbf{z}}$, mas no plano xz , podemos então representar os vetores de polarização como os vetores unitários $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ para um dado $\hat{\mathbf{r}}$, como representado na figura 4.5. Podemos ver na figura 4.5 que próximo ao eixo $\hat{\mathbf{z}}$, os vetores de polarização ordinária e extraordinária estão praticamente com a mesma direção dos vetores $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$.

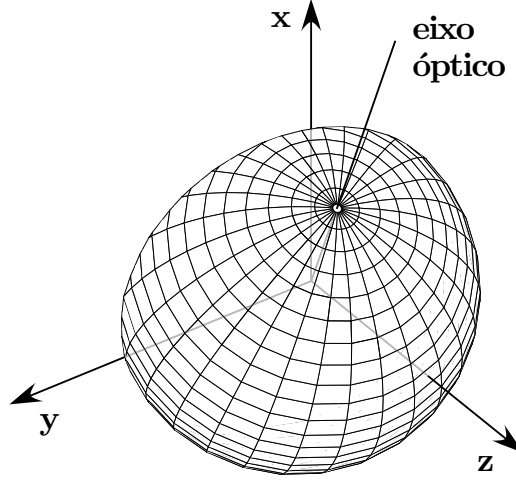


Figura 4.5: Representação para os vetores de polarização, sendo a polarização ordinária e extraordinária na mesma direção que os vetores unitários esféricos $\hat{\phi}$ e $\hat{\theta}$, respectivamente.

Depois de todas essas considerações, vamos então escrever os possíveis estados dos bifótons gerados a partir da CPD. Os subíndices 1 e 2 serão usados para os fótons provenientes dos orifícios 1 e 2,

$$|\Psi^\pm\rangle = A \int d\mathbf{q}_1 \int d\mathbf{q}_2 v(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \text{sinc} \left(\frac{L|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^2}{4K} \right) [|\mathbf{q}_1, \hat{\epsilon}_o(\mathbf{q}_1)\rangle |\mathbf{q}_2, \hat{\epsilon}_e(\mathbf{q}_2)\rangle \pm |\mathbf{q}_1, \hat{\epsilon}_e(\mathbf{q}_1)\rangle |\mathbf{q}_2, \hat{\epsilon}_o(\mathbf{q}_2)\rangle], \quad (4.19)$$

$$|\Phi^\pm\rangle = A \int d\mathbf{q}_1 \int d\mathbf{q}_2 v(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \text{sinc} \left(\frac{L|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^2}{4K} \right) [|\mathbf{q}_1, \hat{\epsilon}_o(\mathbf{q}_1)\rangle |\mathbf{q}_2, \hat{\epsilon}_o(\mathbf{q}_2)\rangle \pm |\mathbf{q}_1, \hat{\epsilon}_e(\mathbf{q}_1)\rangle |\mathbf{q}_2, \hat{\epsilon}_e(\mathbf{q}_2)\rangle].$$

Aqui A é uma constante de normalização e $\hat{\epsilon}_e$ e $\hat{\epsilon}_o$ são as polarizações extraordinária e ordinária. A integração está sendo realizada sobre a área de detecção.

Lembrando que $v(\mathbf{q})$ é o espectro angular normalizado do feixe incidente, vamos calculá-lo agora. É conhecido que os feixes eletromagnéticos satisfazem a equação de Helmholtz. Para a aproximação paraxial, um conjunto de soluções que

Capítulo 4. Estados de dois fótons e a conversão paramétrica descendente 45

satisfazem essa equação é o dos feixes Hermite-Gaussiano. No plano $z = 0$ a amplitude do feixe Hermite-Gaussiano é dada pelo produto entre os polinômios de Hermite e uma função Gaussiana. A função que representa este feixe é a seguinte,

$$HG_{m,n}(x, y, z) = A_1 \left[\frac{w_o}{w(z)} \right] \sqrt{\frac{1}{2^{m+n} m! n!}} H_m \left(\frac{x\sqrt{2}}{w(z)} \right) H_n \left(\frac{y\sqrt{2}}{w(z)} \right) \times \exp \left[\frac{-(x^2 + y^2)}{w(z)^2} \right] \exp \left[\frac{ik(x^2 + y^2)}{2R(z)} - i(m + n + 1)\xi(z) \right], \quad (4.20)$$

onde os parâmetros são,

$$\begin{aligned} w(z) &- \text{Raio do feixe, sendo } w(0) = w_0 \text{ a cintura do feixe} \\ R(z) &- \text{Raio de curvatura,} \\ \xi(z) &- \text{Fase de Gouy.} \end{aligned}$$

A_1 é uma constante de normalização e $H_m(x)$ representa o polinômio de Hermite de ordem m . Como exemplo, temos $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$. O espectro angular será dado pela transformada de Fourier do perfil transversal do campo em um plano $z = \text{const.}$ [21]. Logo $v(\mathbf{q})$, será dado pela transformada de Fourier da função da equação (4.20), ou melhor,

$$v(\mathbf{q}) = A' \int HG_{m,n}(x, y, z) e^{-i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}} d\boldsymbol{\rho}, \quad (4.21)$$

onde

$$\mathbf{q} = k(p\hat{\mathbf{x}} + q\hat{\mathbf{y}}), \quad \boldsymbol{\rho} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}, \quad (4.22)$$

A' é uma constante de normalização¹. O espectro angular do feixe, à medida que este se propaga em z , conserva o seu valor, exceto por uma fase que ele adquire [21]. Logo, simplificando bastante os cálculos, é possível calcular a integral da equação (4.21) no plano $z = 0$ e generalizar o resultado para todos os outros pontos. Para este ponto, a fase de Gouy será igual a zero, o raio de curvatura tende a infinito e $w(z) = w_0$. É fácil perceber então, que a integral reduz-se a transformada de Fourier de um polinômio de Hermite e uma função gaussiana, e assim,

$$v_{nm}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) = v_{nm}(k(p_1 + p_2), k(q_1 + q_2)) = A_{m,n} w_0 (i)^{n,m} \sqrt{\frac{1}{2\pi n! m! 2^{n+m}}} H_m \left(\frac{K w_0 (p_1 + p_2)}{2\sqrt{2}} \right) \times H_n \left(\frac{K w_0 (q_1 + q_2)}{2\sqrt{2}} \right) e^{-\frac{K^2 w_0^2}{16} ((p_1 + p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2)}, \quad (4.23)$$

¹Para que a notação não se torne obscura, é importante ressaltar que \mathbf{q} é o vetor transversal de \mathbf{k} e p, q (sem negrito) são as componentes cartesianas de \mathbf{q} , $\mathbf{q} = \frac{n\omega}{c} (p\hat{\mathbf{x}} + q\hat{\mathbf{y}})$.

Capítulo 4. Estados de dois fótons e a conversão paramétrica descendente⁴⁶

onde $A_{m,n}$ é uma constante de normalização.

Após todo esse desenvolvimento, somos então capazes de caracterizar completamente os estados de dois fótons gerados a partir da CPD. Finalmente, como será mostrado no próximo capítulo, somos capazes de calcular a matriz densidade reduzida efetiva e fazer um estudo do grau de polarização destes estados.

Capítulo 5

Estudo do grau de polarização para os estados de bifotons gerados na CPD

No capítulo 2 introduzimos os parâmetros de Stokes, que medem as correlações em polarização do campo eletromagnético e definimos então os graus de polarização para estados de multimodo através de tais parâmetros. No capítulo 3 definimos a matriz densidade reduzida efetiva através destes parâmetros. No capítulo 4 falamos sobre os estados emaranhados de dois fótons gerados na CPD. Como podemos ver já temos toda a base teórica apresentada, para finalmente apresentarmos os resultados deste trabalho, que foram o cálculo da matriz densidade reduzida efetiva e o estudo do grau de polarização de estados emaranhados de dois fótons gerados na CPD.

5.1 Cálculo da matriz densidade reduzida efetiva

A matriz densidade reduzida efetiva fornece-nos todas as informações sobre as propriedades de polarização para estados multimodos de dois fótons. Vamos então calculá-la para os estados $|\Psi^+\rangle$ e $|\Psi^-\rangle$ da equação (4.19) e assim ver como se comportam as propriedades de polarização para tais estados. Vamos usar as definições

Capítulo 5. Estudo do grau de polarização para os estados de bifotons gerados na CPD48

(3.38) e (3.37), lembrando,

$$\frac{\rho_{2ef}}{Z_{2ef}} = \begin{bmatrix} \langle P_{VV} \otimes P_{VV} \rangle & \langle P_{VV} \otimes P_{HV} \rangle & \langle P_{HV} \otimes P_{VV} \rangle & \langle P_{HV} \otimes P_{HV} \rangle \\ \langle P_{VV} \otimes P_{VH} \rangle & \langle P_{VV} \otimes P_{HH} \rangle & \langle P_{HV} \otimes P_{VH} \rangle & \langle P_{HV} \otimes P_{HH} \rangle \\ \langle P_{VH} \otimes P_{VV} \rangle & \langle P_{VH} \otimes P_{HV} \rangle & \langle P_{HH} \otimes P_{VV} \rangle & \langle P_{HH} \otimes P_{HV} \rangle \\ \langle P_{VH} \otimes P_{VH} \rangle & \langle P_{VH} \otimes P_{HH} \rangle & \langle P_{HH} \otimes P_{VH} \rangle & \langle P_{HH} \otimes P_{HH} \rangle \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} P_{\alpha'\alpha} &= \sum_{\mathbf{k} \in K_D} |\mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_{\alpha'}(\mathbf{k})\rangle \langle \mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_{\alpha}(\mathbf{k})| & (\alpha, \alpha' = V, H), \\ P_{\beta'\beta} &= \sum_{\mathbf{k}' \in K'_D} |\mathbf{k}', \hat{\varepsilon}_{\beta'}(\mathbf{k}')\rangle \langle \mathbf{k}', \hat{\varepsilon}_{\beta}(\mathbf{k}')| & (\beta, \beta' = V, H). \end{aligned}$$

Para que esse cálculo fique mais claro, vamos mostrar como calculamos $\langle P_{VV} \otimes P_{HH} \rangle$ para o estado $|\Psi^+\rangle$, que foi o primeiro estado que fizemos nossas contas.

Primeiro, vamos substituir o somatório sobre as variáveis \mathbf{k} e \mathbf{k}' por uma integral seguindo a regra geral $\sum_{\vec{k}} \longrightarrow \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int d^3k$, onde L^3 é o volume de normalização quando fazemos a expansão do campo elétrico em modos de onda plana [5]. Depois, como estamos trabalhando no regime quase-monocromático, o módulo do vetor de onda \mathbf{k} é constante. Logo sabendo o valor de \mathbf{k} , basta saber o valor de duas das suas componentes (k_x e k_y), para determinarmos a terceira (k_z). Assim para especificarmos o estado do fóton, não precisamos informar \mathbf{k} , mas apenas o vetor \mathbf{q} que é a componente transversal de \mathbf{k} . Logo,

$$\begin{aligned} \langle P_{VV} \otimes P_{HH} \rangle &= \langle \Psi^+ | P_{VV} \otimes P_{HH} | \Psi^+ \rangle & (5.1) \\ &= A' \int d\mathbf{q} \int d\mathbf{q}' \int d\mathbf{q}_1 \int d\mathbf{q}_2 \int d\mathbf{q}'_1 \int d\mathbf{q}'_2 \psi^{+*}(\mathbf{q}'_1, \mathbf{q}'_2) \psi^+(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \\ &\quad [\langle \mathbf{q}'_1, \hat{\varepsilon}_o(\mathbf{q}'_1) | \langle \mathbf{q}'_2, \hat{\varepsilon}_e(\mathbf{q}'_2) | + \langle \mathbf{q}'_1, \hat{\varepsilon}_e(\mathbf{q}'_1) | \langle \mathbf{q}'_2, \hat{\varepsilon}_o(\mathbf{q}'_2) |] \\ &\quad [| \mathbf{q}, \hat{\varepsilon}_V(\mathbf{q}) \rangle | \mathbf{q}', \hat{\varepsilon}_H(\mathbf{q}') \rangle \langle \mathbf{q}, \hat{\varepsilon}_V(\mathbf{q}) | \langle \mathbf{q}', \hat{\varepsilon}_H(\mathbf{q}') |] \\ &\quad [| \mathbf{q}_1, \hat{\varepsilon}_o(\mathbf{q}_1) \rangle | \mathbf{q}_2, \hat{\varepsilon}_e(\mathbf{q}_2) \rangle + | \mathbf{q}_1, \hat{\varepsilon}_e(\mathbf{q}_1) \rangle | \mathbf{q}_2, \hat{\varepsilon}_o(\mathbf{q}_2) \rangle], \end{aligned}$$

onde

$$\psi^+(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2L}{K}} v(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \text{sinc} \left(\frac{L|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^2}{4K} \right).$$

Vamos olhar agora só para os termos das multiplicações dos *bra's* e *ket's*. Sabemos calcular esses produtos pelas equações (3.16-3.19). Como os nossos fótons têm polarização ordinária e extraordinária, vamos substituir $(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2)$ por $(\hat{\varepsilon}_e, \hat{\varepsilon}_o)$,

Capítulo 5. Estudo do grau de polarização para os estados de bifotons gerados na CPD49

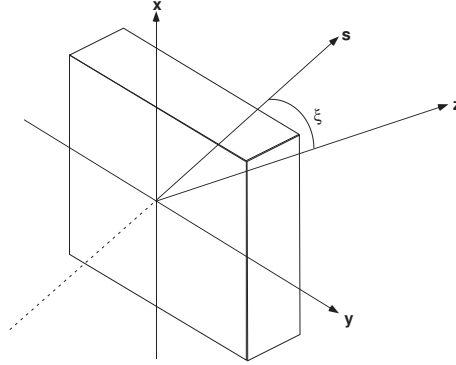


Figura 5.1: Cristal birrefringente uniaxial com o eixo óptico no plano xz , formando um ângulo ξ com o eixo z .

resultando,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_V | \mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_e \rangle &= \frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\varepsilon}_e}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2}} \\ \langle \mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_V | \mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_o \rangle &= \frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\varepsilon}_o}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2}}, \\ \langle \mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_H | \mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_e \rangle &= \frac{\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\varepsilon}_e}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2}}, \\ \langle \mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_H | \mathbf{k}, \hat{\varepsilon}_o \rangle &= \frac{\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\varepsilon}_o}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2}}.\end{aligned}$$

Com a ajuda do trabalho desenvolvido em [22], que foi inspirado em [23], encontramos uma forma de escrever esses vetores de polarização. Vamos nos restringir a apenas expor as equações, não mostrando suas origens, pois as suas deduções estão além do objetivo desta dissertação.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_o &= \hat{\mathbf{s}} \times \mathbf{k}_o, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_e &= (\mathbf{k}_e \cdot \hat{\mathbf{s}}) \mathbf{k}_e - \left(\frac{n_o \omega}{c} \right)^2 \hat{\mathbf{s}},\end{aligned}\tag{5.2}$$

onde \mathbf{k}_o e \mathbf{k}_e são os vetores de onda referentes a polarização ordinária e extraordinária, $\hat{\mathbf{s}}$ é um vetor unitário na direção do eixo óptico que está contido no plano xz e faz um ângulo ξ com o eixo $\hat{\mathbf{z}}$, como mostrado na figura 5.1. Devemos prestar atenção que os vetores $\boldsymbol{\varepsilon}_o$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ ainda não estão normalizados. Vamos escrever os vetores \mathbf{k}_o e \mathbf{k}_e em função das suas coordenadas cartesianas,

$$\mathbf{k}_o = \frac{n_o \omega}{c} (p \hat{\mathbf{x}} + q \hat{\mathbf{y}} + m \hat{\mathbf{z}}),\tag{5.3}$$

sendo $k_o = \frac{n_o \omega}{c}$ e

Capítulo 5. Estudo do grau de polarização para os estados de bifotons gerados na CPD50

$$k_x = \frac{n_o\omega}{c}p, k_y = \frac{n_o\omega}{c}q \text{ e } k_z = \frac{n_o\omega}{c}m$$

$$\rightarrow p^2 + q^2 + m^2 = 1 \rightarrow m = \sqrt{1 - p^2 - q^2} \quad (5.4)$$

$$\mathbf{k}_e = \frac{\eta\omega}{c}(p'\hat{\mathbf{x}} + q'\hat{\mathbf{y}} + m'\hat{\mathbf{z}}), \quad (5.5)$$

$$m' = -\alpha p' + \sqrt{1 - \beta^2 p'^2 - \gamma^2 q'^2} \quad (5.6)$$

O resultado da equação (5.3) e (5.5) podem ser deduzidos através da solução da equação de onda para o campo elétrico (4.18) [16]. As constantes que aparecem na equação (5.5) são as seguintes:

$$\eta^2 = \frac{n_o^2 n_e^2}{n_o^2 \text{sen}^2 \xi + n_e^2 \text{cos}^2 \xi} \quad (5.7)$$

$$\alpha = \frac{(n_o^2 - n_e^2) \text{sen} \xi \text{cos} \xi}{n_o^2 \text{sen}^2 \xi + n_e^2 \text{cos}^2 \xi}$$

$$\gamma = \frac{n_o^2}{n_o^2 \text{sen}^2 \xi + n_e^2 \text{cos}^2 \xi}$$

$$\beta = b - \alpha^2, \text{ onde } b = \frac{n_o^2 \text{cos}^2 \xi + n_e^2 \text{sen}^2 \xi}{n_o^2 \text{sen}^2 \xi + n_e^2 \text{cos}^2 \xi}$$

Podemos agora calcular os vetores de polarização, o resultado estará explicitado no apêndice A.1. Para calcular esses vetores e fazer o cálculo de todo o resto do trabalho usamos o programa *Mathematica 5*. A partir desses vetores, podemos voltar então ao cálculo de $\langle \mathbf{P}_{VV} \otimes \mathbf{P}_{HH} \rangle$.

Finalmente, somos capazes de calcular os produtos dos *bra's* e *ket's*. Tal desenvolvimento foi deixado para o apêndice A.2, limitaremos-nos em escrever aqui apenas o resultado:

$$\langle \mathbf{P}_{VV} \otimes \mathbf{P}_{HH} \rangle = \left(\frac{L}{2\pi} \right)^6 \int_{\mathbf{q}_{1D}} d\mathbf{q}_1 \int_{\mathbf{q}_{2D}} d\mathbf{q}_2 \frac{\psi^{+*}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \psi^+(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)}{(\sqrt{1 - p_1^2} \sqrt{1 - q_2^2})^2} [(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_e(\mathbf{q}_1))(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_o(\mathbf{q}_2)) + (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_o(\mathbf{q}_1))(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_e(\mathbf{q}_2))]^2 \quad (5.8)$$

O próximo passo então é calcular ψ^+ . Sabemos do capítulo 4 que

$$\psi^+(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2L}{K}} v(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \text{sinc} \left(\frac{L|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^2}{4K} \right).$$

Capítulo 5. Estudo do grau de polarização para os estados de bifotons gerados na CPD 51

Sabemos também que $v(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$ é o espectro angular normalizado do feixe incidente, que pode ser descrito por

$$v_{nm}(p_1 + p_2, q_1 + q_2) = A_{m,n} w_o(i)^{n,m} \sqrt{\frac{1}{2\pi n! m! 2^{n+m}}} H_m \left(\frac{K w_o(p_1 + p_2)}{2\sqrt{2}} \right) \times H_n \left(\frac{K w_o(q_1 + q_2)}{2\sqrt{2}} \right) e^{-\frac{K^2 w_o^2}{16} ((p_1 + p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2)}.$$

Do capítulo 4, vimos que para os estados simétricos, suas funções ψ^+ , ϕ^+ e ϕ^- devem ser simétricas. Logo podemos usar a solução $n = m = 0$ para o espectro angular

$$v_{00}(p_1 + p_2, q_1 + q_2) = A_{00} e^{-\frac{w_o^2 K^2}{16} ((p_1 + p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2)}. \quad (5.9)$$

Usando essa função, vamos então normalizar $\psi^+(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$,

$$A_+^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 \int_{-\infty}^{\infty} dp_2 \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \int_{-\infty}^{\infty} dq_2 \psi^{+*}(p_1 + p_2, q_1 + q_2) \psi^+(p_1 + p_2, q_1 + q_2) = A_+^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 \int_{-\infty}^{\infty} dp_2 \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \int_{-\infty}^{\infty} dq_2 e^{-\frac{w_o^2 K^2}{8} ((p_1 + p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2)} \left[\text{sinc} \left(\frac{LK((p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2)}{16} \right) \right]^2.$$

Vamos fazer então algumas mudanças de variáveis:

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= \alpha_1, \\ q_1 + q_2 &= \alpha_2, \\ p_1 - p_2 &= 2\beta_1, \\ q_1 - q_2 &= 2\beta_2, \end{aligned}$$

A integral (5.10) fica então da seguinte forma:

$$A_+^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\beta_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\beta_2 e^{-\frac{w_o^2 K^2}{8} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \left[\text{sinc} \left(\frac{LK(\beta_1^2 + \beta_2^2)}{4} \right) \right]^2. \quad (5.10)$$

Mais uma vez, vamos fazer uma mudança de variáveis:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= r_1 \cos(\phi_1), \\ \alpha_2 &= r_1 \text{sen}(\phi_1), \\ \beta_1 &= r_2 \cos(\phi_2), \\ \beta_2 &= r_2 \text{sen}(\phi_2), \end{aligned}$$

Capítulo 5. Estudo do grau de polarização para os estados de bifotons gerados na CPD52

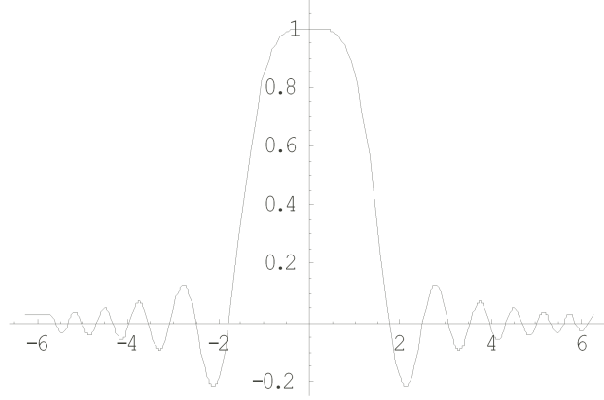


Figura 5.2: Gráfico da função $\text{sinc}(x^2) = \frac{\text{sen}(x^2)}{x^2}$.

resultando em

$$A_+^2 \int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^{2\pi} d\phi_2 r_1 r_2 e^{-\frac{w_0^2 K^2}{8} (r_1^2)} \left[\text{sinc} \left(\frac{LK(r_2^2)}{4} \right) \right]^2 \quad (5.11)$$

Vamos olhar somente para a função $\text{sinc} \left(\frac{LK(r_2^2)}{4} \right)$. Olhando para o gráfico de $\text{sinc}(x^2)$, traçado na figura 5.2, podemos ver que existe intervalo onde podemos aproximar tal função por 1. Para evitar o termo oscilante da função então, com o intuito de viabilizar nossos cálculos, aproximamos tal função por uma função degrau, como mostrado na figura 5.3:

$$h(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.12)$$

No nosso caso $x^2 = \frac{LK}{4} r_2^2$, logo r_2 deve estar contido no intervalo $0 < r_2 < \frac{2}{\sqrt{KL}}$ para fazemos a aproximação. A integral de normalização, será então,

$$A_+^2 \int_0^\infty dr_1 \int_0^{\frac{2}{\sqrt{KL}}} dr_2 \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^{2\pi} d\phi_2 r_1 r_2 e^{-\frac{w_0^2 K^2}{8} r_1^2} \quad (5.13)$$

Resolvendo essa integral achamos a constante de normalização igual a

$$A_+ = \frac{K w_0 \sqrt{KL}}{4\pi\sqrt{2}}. \quad (5.14)$$

Encontrando a função ψ^+ e a sua constante de normalização estamos aptos a terminar o cálculo de $\langle P_{VV} \otimes P_{HH} \rangle$, que agora tem a seguinte forma,

Capítulo 5. Estudo do grau de polarização para os estados de bifotons gerados na CPD53

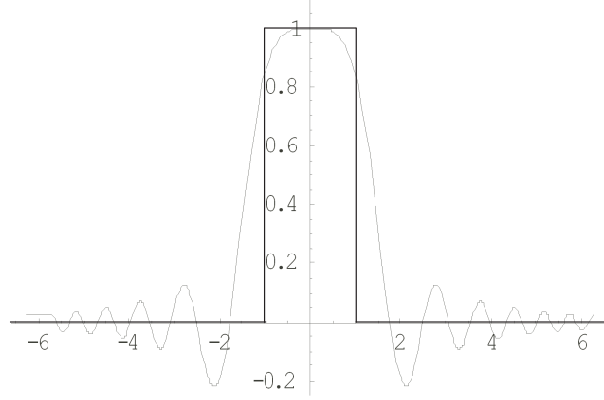


Figura 5.3: Gráfico da função $\text{sinc}(x^2) = \frac{\text{sen}(x^2)}{x^2}$ com interseção da função degrau em 1.

$$\begin{aligned}
 \langle P_{VV} \otimes P_{HH} \rangle &= \frac{K^3 L w_0^2}{32\pi^2} \int_0^\infty dr_1 \int_0^{\frac{2}{\sqrt{KL}}} dr_2 \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^{2\pi} d\phi_2 \\
 &\quad \frac{r_1 r_2 e^{-\frac{w_0^2 K^2}{8} r_1^2}}{(\sqrt{1 - (\frac{r_1 \cos \phi_1}{2} + r_2 \cos \phi_2)^2} \sqrt{1 - (\frac{r_1 \sin \phi_1}{2} - r_2 \sin \phi_2)^2})^2} \times \\
 &\quad [(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2))(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_o(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2)) + \\
 &\quad (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_o(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2))(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2))]^2.
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Resolvemos essa integral e as das outras componentes da matriz densidade reduzida efetiva numericamente. Fizemos alguns testes e observamos que os nossos resultados não seriam afetados se aproximássemos a razão entre o índice de refração ordinário e extraordinário por 1. Tal aproximação então foi feita por economizar drasticamente o tempo de cálculo das integrais. Outra aproximação feita para economizar o tempo de cálculo foi nos limites de integração de r_1 . Como o termo entre colchetes [...] está sendo multiplicado por uma função gaussiana que decai mais rápido, observamos que, se integrássemos r_1 de 0 até dez vezes a largura da gaussiana, os nossos resultados não seriam alterados, assim não precisaríamos integrar até infinito. Para o cálculo escolhemos alguns valores típicos para a largura do cristal L (0,5mm, 1mm, 5mm e 10mm) e para a cintura do feixe w_0 (15 μ m, 20 μ m, 100 μ m, 200 μ m). Observando a curva de casamento de fase de um cristal de β -BaB₂O₄

Capítulo 5. Estudo do grau de polarização para os estados de bifotons gerados na CPD54

(BBO), que é um cristal usado na CPD, escolhemos os ângulos de inclinação do eixo óptico ξ como 26° e 49° . A razão dessa escolha foi que 49° é bem próximo ao ângulo que conseguimos a produção de fótons gêmeos na CPD do tipo II para um comprimento de onda do feixe incidente de aproximadamente 700nm. Escolhemos esse comprimento de onda, pois o aparelho de laser (Spectra-Physics 2020) do laboratório atua próximo a esse comprimento de onda. Já o ângulo de 26° é a menor inclinação do eixo óptico para o qual conseguimos geração de fótons gêmeos na CPD do tipo II para um cristal BBO. Os resultados estão listados nas tabelas abaixo.

L (mm)	$\xi = 26^\circ$				$\xi = 49^\circ$			
	$w_0 (\mu m)$				$w_0 (\mu m)$			
	15	20	100	200	15	20	100	200
0,5	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
1	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
5	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
10	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999

Tabela 5.1: $\langle P_{VV} \otimes P_{HH} \rangle$ para o estado $|\Psi^+\rangle$.

L (mm)	$\xi = 26^\circ$				$\xi = 49^\circ$			
	$w_0 (\mu m)$				$w_0 (\mu m)$			
	15	20	100	200	15	20	100	200
0,5	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
1	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
5	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
10	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999

Tabela 5.2: $\langle P_{HH} \otimes P_{VV} \rangle$ para o estado $|\Psi^+\rangle$.

Capítulo 5. Estudo do grau de polarização para os estados de bifotons gerados na CPD55

L (mm)	$\xi = 26^0$				$\xi = 49^0$			
	$w_0 (\mu m)$				$w_0 (\mu m)$			
	15	20	100	200	15	20	100	200
0,5	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
1	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
5	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
10	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999

Tabela 5.3: $\langle P_{HV} \otimes P_{VH} \rangle$ para o estado $|\Psi^+\rangle$.

L (mm)	$\xi = 26^0$				$\xi = 49^0$			
	$w_0 (\mu m)$				$w_0 (\mu m)$			
	15	20	100	200	15	20	100	200
0,5	$-3,33 \times 10^{-4}$	$-1,88 \times 10^{-4}$	$-8,51 \times 10^{-6}$	$-2,90 \times 10^{-6}$	$-1,49 \times 10^{-5}$	$-8,41 \times 10^{-6}$	$-3,51 \times 10^{-7}$	$-9,96 \times 10^{-8}$
1	$-3,32 \times 10^{-4}$	$-1,87 \times 10^{-4}$	$-7,72 \times 10^{-6}$	$-2,12 \times 10^{-6}$	$-1,49 \times 10^{-5}$	$-8,40 \times 10^{-6}$	$-3,39 \times 10^{-7}$	$-8,79 \times 10^{-8}$
5	$-3,32 \times 10^{-4}$	$-1,86 \times 10^{-4}$	$-7,48 \times 10^{-6}$	$-1,87 \times 10^{-6}$	$-1,49 \times 10^{-5}$	$-8,39 \times 10^{-6}$	$-3,36 \times 10^{-7}$	$-8,41 \times 10^{-8}$
10	$-3,32 \times 10^{-4}$	$-1,86 \times 10^{-4}$	$-7,47 \times 10^{-6}$	$-1,87 \times 10^{-6}$	$-1,49 \times 10^{-5}$	$-8,39 \times 10^{-6}$	$-3,35 \times 10^{-7}$	$-8,40 \times 10^{-8}$

Tabela 5.4: $\langle P_{HV} \otimes P_{HV} \rangle$ para o estado $|\Psi^+\rangle$.

L (mm)	$\xi = 26^0$				$\xi = 49^0$			
	$w_0 (\mu m)$				$w_0 (\mu m)$			
	15	20	100	200	15	20	100	200
0,5	$3,33 \times 10^{-4}$	$1,88 \times 10^{-4}$	$8,31 \times 10^{-6}$	$2,70 \times 10^{-6}$	$1,49 \times 10^{-5}$	$-8,40 \times 10^{-6}$	$3,42 \times 10^{-7}$	$9,07 \times 10^{-8}$
1	$3,32 \times 10^{-4}$	$1,87 \times 10^{-4}$	$7,68 \times 10^{-6}$	$2,07 \times 10^{-6}$	$1,49 \times 10^{-5}$	$8,39 \times 10^{-6}$	$3,37 \times 10^{-7}$	$8,56 \times 10^{-8}$
5	$3,32 \times 10^{-4}$	$1,87 \times 10^{-4}$	$7,48 \times 10^{-6}$	$1,87 \times 10^{-6}$	$1,49 \times 10^{-5}$	$8,39 \times 10^{-6}$	$3,36 \times 10^{-7}$	$8,40 \times 10^{-8}$
10	$3,32 \times 10^{-4}$	$1,87 \times 10^{-4}$	$7,47 \times 10^{-6}$	$1,87 \times 10^{-6}$	$1,49 \times 10^{-5}$	$8,39 \times 10^{-6}$	$3,35 \times 10^{-7}$	$8,39 \times 10^{-8}$

Tabela 5.5: $\langle P_{VV} \otimes P_{VV} \rangle$ para o estado $|\Psi^+\rangle$.

L (mm)	$\xi = 26^0$				$\xi = 49^0$			
	$w_0 (\mu m)$				$w_0 (\mu m)$			
	15	20	100	200	15	20	100	200
0,5	$3,33 \times 10^{-4}$	$1,88 \times 10^{-4}$	$8,76 \times 10^{-6}$	$3,15 \times 10^{-6}$	$1,49 \times 10^{-5}$	$-8,43 \times 10^{-6}$	$3,72 \times 10^{-7}$	$1,40 \times 10^{-7}$
1	$3,32 \times 10^{-4}$	$1,87 \times 10^{-4}$	$7,79 \times 10^{-6}$	$2,19 \times 10^{-6}$	$1,49 \times 10^{-5}$	$8,40 \times 10^{-6}$	$3,45 \times 10^{-7}$	$9,30 \times 10^{-8}$
5	$3,32 \times 10^{-4}$	$1,86 \times 10^{-4}$	$7,48 \times 10^{-6}$	$1,88 \times 10^{-6}$	$1,49 \times 10^{-5}$	$8,39 \times 10^{-6}$	$3,36 \times 10^{-7}$	$8,43 \times 10^{-8}$
10	$3,32 \times 10^{-4}$	$1,86 \times 10^{-4}$	$7,47 \times 10^{-6}$	$1,87 \times 10^{-6}$	$1,49 \times 10^{-5}$	$8,39 \times 10^{-6}$	$3,35 \times 10^{-7}$	$8,40 \times 10^{-8}$

Tabela 5.6: $\langle P_{HH} \otimes P_{HH} \rangle$ para o estado $|\Psi^+\rangle$.

Capítulo 5. Estudo do grau de polarização para os estados de bifotons gerados na CPD56

L (mm)	$\xi = 26^0$				$\xi = 49^0$			
	$w_0 (\mu m)$				$w_0 (\mu m)$			
	15	20	100	200	15	20	100	200
0,5	$< 10^{-17}$	$< 10^{-16}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-19}$
1	$< 10^{-17}$	$< 10^{-16}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-19}$
5	$< 10^{-17}$	$< 10^{-16}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-19}$
10	$< 10^{-17}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-19}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-19}$

Tabela 5.7: $\langle P_{VV} \otimes P_{HV} \rangle$ para o estado $|\Psi^+\rangle$.

L (mm)	$\xi = 26^0$				$\xi = 49^0$			
	$w_0 (\mu m)$				$w_0 (\mu m)$			
	15	20	100	200	15	20	100	200
0,5	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-19}$
1	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-19}$
5	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-19}$
10	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-19}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-19}$

Tabela 5.8: $\langle P_{HV} \otimes P_{VV} \rangle$ para o estado $|\Psi^+\rangle$.

L (mm)	$\xi = 26^0$				$\xi = 49^0$			
	$w_0 (\mu m)$				$w_0 (\mu m)$			
	15	20	100	200	15	20	100	200
0,5	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$
1	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-19}$
5	$< 10^{-17}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-19}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-19}$
10	$< 10^{-17}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-19}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-19}$

Tabela 5.9: $\langle P_{HV} \otimes P_{HH} \rangle$ para o estado $|\Psi^+\rangle$.

L (mm)	$\xi = 26^0$				$\xi = 49^0$			
	$w_0 (\mu m)$				$w_0 (\mu m)$			
	15	20	100	200	15	20	100	200
0,5	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$
1	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-19}$
5	$< 10^{-17}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-19}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-19}$
10	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-19}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-19}$

Tabela 5.10: $\langle P_{HH} \otimes P_{HV} \rangle$ para o estado $|\Psi^+\rangle$.

Capítulo 5. Estudo do grau de polarização para os estados de bifotons gerados na CPD57

Algumas observações devem ser feitas. Primeiro, podemos observar que ao invés de 16 valores esperados, calculamos aqui apenas 10 valores. A razão disso é que ρ_{2ef} é uma matriz hermitiana, como podemos ver mais facilmente na equação (3.35), assim para calculá-la, basta apenas calcular os elementos da diagonal principal e os elementos situados acima dela. Outra observação é que para alguns valores (tabelas 5.7, 5.8, 5.9, 5.10) não obtivemos convergência, mesmo utilizando diferentes métodos numéricos. A única afirmação que podemos fazer é que os valores têm ordem de grandeza inferior àsquelas listadas na tabela.

Para os estado $|\Psi^-\rangle$,

$$|\Psi^-\rangle = A \int d\mathbf{q}_1 \int d\mathbf{q}_2 v(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \text{sinc} \left(\frac{L|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^2}{4K} \right) [|\mathbf{q}_1, \hat{\epsilon}_o(\mathbf{q}_1)\rangle |\mathbf{q}_2, \hat{\epsilon}_e(\mathbf{q}_2)\rangle - |\mathbf{q}_1, \hat{\epsilon}_e(\mathbf{q}_1)\rangle |\mathbf{q}_2, \hat{\epsilon}_o(\mathbf{q}_2)\rangle],$$

não vamos repetir todas as contas, pois o processo é bastante parecido. Além do sinal positivo (+) que é substituído por um sinal negativo (-), a única mudança a ser feita é, como já falamos no capítulo 4, que a função ψ^- deve ser anti-simétrica. Logo, os fótons não podem ocupar o mesmo estado de onda plana. Assim, escolhemos para a solução do espectro angular $n = 1$ e $m = 0$,

$$v_{10}(p_1 + p_2, q_1 + q_2) = A_{10}(p_1 + p_2) e^{-\frac{w_0^2 K^2}{16}((p_1 + p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2)}. \quad (5.16)$$

Utilizando essa função e as mesmas mudanças de variáveis realizadas anteriormente, normalizamos a função ψ^- e chegamos à seguinte constante de normalização:

$$A_- = \frac{K^2 w_0^2 \sqrt{KL}}{8\pi\sqrt{2}}. \quad (5.17)$$

Então realizando as mesmas aproximações feitas para $|\Psi^+\rangle$ e usando os mesmos valores para as constantes L , K e w_0 , calculamos os elementos da matriz densidade reduzida para o estado $|\Psi^-\rangle$.

Capítulo 5. Estudo do grau de polarização para os estados de bifotons gerados na CPD58

L (mm)	$\xi = 26^0$				$\xi = 49^0$			
	$w_0 (\mu m)$				$w_0 (\mu m)$			
	15	20	100	200	15	20	100	200
0,5	0,997	0,997	0,997	0,997	0,999	0,999	0,999	0,999
1	0,998	0,998	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999	0,999
5	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
10	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999

Tabela 5.11: $\langle P_{VV} \otimes P_{HH} \rangle$ para o estado $|\Psi^-\rangle$.

L (mm)	$\xi = 26^0$				$\xi = 49^0$			
	$w_0 (\mu m)$				$w_0 (\mu m)$			
	15	20	100	200	15	20	100	200
0,5	0,997	0,997	0,997	0,997	0,999	0,999	0,999	0,999
1	0,998	0,998	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999	0,999
5	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
10	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999

Tabela 5.12: $\langle P_{HH} \otimes P_{VV} \rangle$ para o estado $|\Psi^-\rangle$.

L (mm)	$\xi = 26^0$				$\xi = 49^0$			
	$w_0 (\mu m)$				$w_0 (\mu m)$			
	15	20	100	200	15	20	100	200
0,5	-0,997	-0,997	-0,997	-0,997	-0,999	-0,999	-0,999	-0,999
1	-0,998	-0,998	-0,998	-0,998	-0,999	-0,999	-0,999	-0,999
5	-0,999	-0,999	-0,999	-0,999	-0,999	-0,999	-0,999	-0,999
10	-0,999	-0,999	-0,999	-0,999	-0,999	-0,999	-0,999	-0,999

Tabela 5.13: $\langle P_{HV} \otimes P_{VH} \rangle$ para o estado $|\Psi^-\rangle$.

L (mm)	$\xi = 26^0$				$\xi = 49^0$			
	$w_0 (\mu m)$				$w_0 (\mu m)$			
	15	20	100	200	15	20	100	200
0,5	$2,23 \times 10^{-3}$	$2,23 \times 10^{-3}$	$2,23 \times 10^{-3}$	$2,23 \times 10^{-3}$	$2,01 \times 10^{-4}$	$2,01 \times 10^{-4}$	$2,01 \times 10^{-4}$	$2,01 \times 10^{-4}$
1	$1,12 \times 10^{-3}$	$1,12 \times 10^{-3}$	$1,12 \times 10^{-3}$	$1,12 \times 10^{-3}$	$1,00 \times 10^{-4}$	$1,00 \times 10^{-4}$	$1,00 \times 10^{-4}$	$1,00 \times 10^{-4}$
5	$2,24 \times 10^{-4}$	$2,24 \times 10^{-4}$	$2,24 \times 10^{-4}$	$2,24 \times 10^{-4}$	$2,01 \times 10^{-5}$	$2,01 \times 10^{-5}$	$2,01 \times 10^{-5}$	$2,01 \times 10^{-5}$
10	$1,12 \times 10^{-4}$	$1,12 \times 10^{-4}$	$1,12 \times 10^{-4}$	$1,12 \times 10^{-4}$	$1,00 \times 10^{-5}$	$1,00 \times 10^{-5}$	$1,00 \times 10^{-5}$	$1,00 \times 10^{-5}$

Tabela 5.14: $\langle P_{VV} \otimes P_{VV} \rangle$ para o estado $|\Psi^-\rangle$.

Capítulo 5. Estudo do grau de polarização para os estados de bifotons gerados na CPD59

L (mm)	$\xi = 26^0$				$\xi = 49^0$			
	$w_0 (\mu m)$				$w_0 (\mu m)$			
	15	20	100	200	15	20	100	200
0,5	$1,11 \times 10^{-3}$	$1,11 \times 10^{-3}$	$1,11 \times 10^{-3}$	$1,11 \times 10^{-3}$	$1,00 \times 10^{-4}$	$1,00 \times 10^{-4}$	$1,00 \times 10^{-4}$	$1,00 \times 10^{-4}$
1	$5,60 \times 10^{-4}$	$5,60 \times 10^{-4}$	$5,60 \times 10^{-4}$	$5,60 \times 10^{-4}$	$5,03 \times 10^{-5}$	$5,03 \times 10^{-5}$	$5,03 \times 10^{-5}$	$5,03 \times 10^{-5}$
5	$1,12 \times 10^{-4}$	$1,12 \times 10^{-4}$	$1,12 \times 10^{-4}$	$1,12 \times 10^{-4}$	$1,00 \times 10^{-5}$	$1,00 \times 10^{-5}$	$1,00 \times 10^{-5}$	$1,00 \times 10^{-5}$
10	$5,60 \times 10^{-5}$	$5,60 \times 10^{-5}$	$5,60 \times 10^{-5}$	$5,60 \times 10^{-5}$	$5,03 \times 10^{-6}$	$5,03 \times 10^{-6}$	$5,03 \times 10^{-6}$	$5,03 \times 10^{-6}$

Tabela 5.15: $\langle P_{HH} \otimes P_{HV} \rangle$ para o estado $|\Psi^-\rangle$.

L (mm)	$\xi = 26^0$				$\xi = 49^0$			
	$w_0 (\mu m)$				$w_0 (\mu m)$			
	15	20	100	200	15	20	100	200
0.5	-2.23×10^{-3}	-2.23×10^{-3}	-2.23×10^{-3}	-2.23×10^{-3}	-2.01×10^{-4}	-2.01×10^{-4}	-2.01×10^{-4}	-2.01×10^{-4}
1	-1.12×10^{-3}	-1.12×10^{-3}	-1.12×10^{-3}	-1.12×10^{-3}	-1.00×10^{-4}	-1.00×10^{-4}	-1.00×10^{-4}	-1.00×10^{-4}
5	-2.24×10^{-4}	-2.24×10^{-4}	-2.24×10^{-4}	-2.24×10^{-4}	-2.01×10^{-5}	-2.01×10^{-5}	-2.01×10^{-5}	-2.01×10^{-5}
10	-1.12×10^{-4}	-1.12×10^{-4}	-1.12×10^{-4}	-1.12×10^{-4}	-1.00×10^{-5}	-1.00×10^{-5}	-1.00×10^{-5}	-1.00×10^{-5}

Tabela 5.16: $\langle P_{HV} \otimes P_{HV} \rangle$ para o estado $|\Psi^-\rangle$.

L (mm)	$\xi = 26^0$				$\xi = 49^0$			
	$w_0 (\mu m)$				$w_0 (\mu m)$			
	15	20	100	200	15	20	100	200
0,5	$8,50 \times 10^{-4}$	$8,26 \times 10^{-4}$	$7,96 \times 10^{-4}$	$7,96 \times 10^{-4}$	$1,24 \times 10^{-4}$	$1,24 \times 10^{-4}$	$1,24 \times 10^{-4}$	$1,24 \times 10^{-4}$
1	$4,52 \times 10^{-4}$	$4,28 \times 10^{-4}$	$3,99 \times 10^{-4}$	$3,99 \times 10^{-4}$	$6,27 \times 10^{-5}$	$6,24 \times 10^{-5}$	$6,20 \times 10^{-5}$	$6,20 \times 10^{-5}$
5	$1,33 \times 10^{-4}$	$1,10 \times 10^{-4}$	$8,08 \times 10^{-5}$	$8,08 \times 10^{-5}$	$1,31 \times 10^{-5}$	$1,27 \times 10^{-5}$	$1,24 \times 10^{-5}$	$1,24 \times 10^{-5}$
10	$9,40 \times 10^{-5}$	$7,03 \times 10^{-5}$	$4,10 \times 10^{-5}$	$4,10 \times 10^{-5}$	$6,89 \times 10^{-6}$	$6,59 \times 10^{-6}$	$6,22 \times 10^{-6}$	$6,20 \times 10^{-6}$

Tabela 5.17: $\langle P_{HH} \otimes P_{HH} \rangle$ para o estado $|\Psi^-\rangle$.

L (mm)	$\xi = 26^0$				$\xi = 49^0$			
	$w_0 (\mu m)$				$w_0 (\mu m)$			
	15	20	100	200	15	20	100	200
0,5	$< 10^{-16}$	$< 10^{-16}$	$< 10^{-16}$	$< 10^{-16}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$
1	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-16}$	$< 10^{-16}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$
5	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$
10	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-19}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$

Tabela 5.18: $\langle P_{VV} \otimes P_{HV} \rangle$ para o estado $|\Psi^-\rangle$.

Capítulo 5. Estudo do grau de polarização para os estados de bifotons gerados na CPD60

L (mm)	$\xi = 26^0$				$\xi = 49^0$			
	$w_0 (\mu m)$				$w_0 (\mu m)$			
	15	20	100	200	15	20	100	200
0,5	$< 10^{-16}$	$< 10^{-16}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-16}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$
1	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-16}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$
5	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$
10	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-18}$

Tabela 5.19: $\langle P_{HV} \otimes P_{VV} \rangle$ para o estado $|\Psi^-\rangle$.

L (mm)	$\xi = 26^0$				$\xi = 49^0$			
	$w_0 (\mu m)$				$w_0 (\mu m)$			
	15	20	100	200	15	20	100	200
0,5	$< 10^{-16}$	$< 10^{-16}$	$< 10^{-16}$	$< 10^{-16}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$
1	$< 10^{-16}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-16}$	$< 10^{-16}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$
5	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$
10	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$	$< 10^{-17}$

Tabela 5.20: $\langle P_{HV} \otimes P_{HH} \rangle$ para o estado $|\Psi^-\rangle$.

Os resultados obtidos tanto para $|\Psi^+\rangle$ quanto para $|\Psi^-\rangle$ podem ser considerados satisfatórios, pois de certa forma já eram esperados. Isso porquê como podemos ver na figura 4.5 perto do eixo $\hat{\mathbf{z}}$, o vetor de polarização ordinária tem direção bastante próxima à direção do eixo $\hat{\mathbf{y}}$ e o vetor de polarização extraordinária próxima à direção do eixo $\hat{\mathbf{x}}$. Assim para os termos que medem as correlações das projeções dos vetores $\hat{\mathbf{e}}_e$ e $\hat{\mathbf{e}}_o$ com $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$ (5.1, 5.2, 5.3, 5.11, 5.12 e 5.13), já era de se esperar que obteríamos valores altos. O que não sabíamos quão altos e maiores que os outros seriam essas correlações.

Desta forma os resultados obtidos são bastante esclarecedores. Encontramos os maiores valores quando nos termos (5.1, 5.2, 5.3, 5.11, 5.12 e 5.13) são encontrados o quadrado dos produtos das seguintes projeções: $((\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_e)(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_o))^2$. Os outros termos, onde o quadrado desse produto não aparece, têm valor bem menor. Comparando os resultados das tabelas, concluímos então que mesmo para um tratamento em multimodos, podemos aproximar os vetores de polarização dos estados de Bell gerados a partir da CPD pelos vetores $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$ do referencial do laboratório.

Uma outra forma de se enxergar isso é comparando a matriz densidade reduzida efetiva com a matriz densidade para os estados monomodais de polarização

Capítulo 5. Estudo do grau de polarização para os estados de bifotons gerados na CPD61

$|\Psi^+\rangle$ e $|\Psi^-\rangle$ dados pela equação (4.12) com polarizações ortogonais $\hat{\varepsilon}_V$ e $\hat{\varepsilon}_H$, que apontam nas direções de \hat{x} e \hat{y} , respectivamente. Para o estado $|\Psi^+\rangle$ em um modo de onda plana, a matriz densidade será dada por:

$$\rho_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

Vamos calcular ρ_{2ef} apenas para $L=5$ mm, $w_0 = 200\mu m$ e $\xi = 49^0$, pois podemos generalizar este resultado depois para os outros valores. Considerando os termos com ordem de grandeza menor que 10^{16} iguais a zero, a matriz densidade reduzida efetiva para o estado de multimodos $|\Psi^+\rangle$ será dada por

$$\rho_{2ef} = \frac{1}{Z_{2ef}} \begin{bmatrix} 8,40 \times 10^{-8} & 0 & 0 & -9,96 \times 10^{-8} \\ 0 & 0,999 & 0,999 & 0 \\ 0 & 0,999 & 0,999 & 0 \\ -9,96 \times 10^{-8} & 0 & 0 & 8,43 \times 10^{-8} \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

onde,

$$Z_{2ef} = 1,99. \quad (5.20)$$

Uma forma de medir o quanto dois estados quânticos são próximos é através da fidelidade [2]. A fidelidade de dois estados ρ e σ é dada por

$$F(\rho, \sigma) = \text{Tr}(\sqrt{\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2}}). \quad (5.21)$$

Note que a fidelidade de dois operadores de estados iguais é máxima (igual a 1). Calculando então a fidelidade de ρ_2 e ρ_{2ef} para o estado $|\Psi^+\rangle$ encontramos o valor 0,99.

Repetindo o cálculo para o estado singleto,

$$\rho_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

e

$$\rho_{2ef} = \frac{1}{Z_{2ef}} \begin{bmatrix} 2,01 \times 10^{-5} & 0 & 0 & -2,01 \times 10^{-5} \\ 0 & 0,999 & -0,999 & 0 \\ 0 & -0,999 & 0,999 & 1,00 \times 10^{-5} \\ -2,01 \times 10^{-5} & 0 & 1,00 \times 10^{-5} & 1,24 \times 10^{-5} \end{bmatrix}, \quad (5.23)$$

Capítulo 5. Estudo do grau de polarização para os estados de bifotons gerados na CPD62

onde,

$$Z_{2ef} = 1,99, \quad (5.24)$$

também encontramos a fidelidade igual a 0,99. Logo, para os dois estados, podemos aproximar os vetores de polarização $\hat{\epsilon}_e$ e $\hat{\epsilon}_o$ pelos vetores de polarização ortogonais $\hat{\epsilon}_V$ e $\hat{\epsilon}_H$, que não dependem do vetor de onda \mathbf{k} . Assim, podemos desprezar a dependência dos vetores de polarização com o vetor de onda. Logo, mesmo no regime multimodal, para os estados de Bell gerados a partir do processo da CPD, é aceitável separar o estado quântico de momento e polarização em um produto entre um estado de momento e outro estado de polarização.

5.2 Cálculo do grau de polarização

Vamos agora calcular o grau de polarização para os estados $|\Psi^+\rangle$ e $|\Psi^-\rangle$. Como já vimos no capítulo 2, o grau de polarização para campos de dois fótons é dado por (2.80),

$$P_4^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1}^3 s_{ij}^2 - 1 \right) = 1 - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 s_{i0}^2 + \sum_{j=1}^3 s_{0j}^2 \right).$$

Sabemos também que, a partir dos elementos da matriz densidade reduzida efetiva, podemos calcular os parâmetros de Stokes, pois esta pode ser também definida como (3.35)

$$\rho_{2ef} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} s_{33} + s_{30} + s_{03} + s_{00} & s_{31} - is_{32} + s_{01} - is_{02} & s_{13} - is_{23} + s_{10} - is_{20} & s_{11} - is_{12} - is_{21} - s_{22} \\ s_{31} + is_{32} + s_{01} + is_{02} & -s_{33} + s_{30} - s_{03} + s_{00} & s_{11} + is_{12} - is_{21} + s_{22} & -s_{13} + is_{23} + s_{10} - is_{20} \\ s_{13} + is_{23} + s_{10} + is_{20} & s_{11} - is_{12} + is_{21} + s_{22} & -s_{33} - s_{30} + s_{03} + s_{00} & -s_{31} + is_{32} + s_{01} - is_{02} \\ s_{11} + is_{12} + is_{21} - s_{22} & -s_{13} - is_{23} + s_{10} + is_{20} & -s_{31} - is_{32} + s_{01} + is_{02} & s_{33} - s_{30} - s_{03} + s_{00} \end{bmatrix}.$$

Olhando para a definição do grau de polarização (2.80), vemos que podemos calcular os parâmetros de Stokes a partir dos s_{ij} , sendo $i, j = 1, \dots, 3$, ou dos s_{0j} e s_{i0} . Na primeira opção são nove parâmetros e na segunda seis, optamos então por calcular o grau de polarização através dos s_{0j} e s_{i0} . Em função dos elementos calculados na seção 5.1, os parâmetros de Stokes de interesse são dados por

$$s_{10} = \frac{(\langle P_{HV} \otimes P_{VV} \rangle + \langle P_{HV} \otimes P_{HH} \rangle + \langle P_{VH} \otimes P_{VV} \rangle + \langle P_{VH} \otimes P_{HH} \rangle)}{Z_{2ef}}$$

$$s_{20} = \frac{-i(\langle P_{VH} \otimes P_{VV} \rangle + \langle P_{VH} \otimes P_{HH} \rangle - \langle P_{HV} \otimes P_{VV} \rangle - \langle P_{HV} \otimes P_{HH} \rangle)}{Z_{2ef}}$$

Capítulo 5. Estudo do grau de polarização para os estados de bifotons gerados na CPD63

$$\begin{aligned}
s_{30} &= \frac{(\langle P_{VV} \otimes P_{VV} \rangle + \langle P_{VV} \otimes P_{HH} \rangle - \langle P_{HH} \otimes P_{VV} \rangle - \langle P_{HH} \otimes P_{HH} \rangle)}{Z_{2ef}} \\
s_{01} &= \frac{(\langle P_{VV} \otimes P_{VH} \rangle + \langle P_{VV} \otimes P_{HV} \rangle + \langle P_{HH} \otimes P_{VH} \rangle + \langle P_{HH} \otimes P_{HV} \rangle)}{Z_{2ef}} \\
s_{02} &= \frac{(\langle P_{VV} \otimes P_{VH} \rangle + \langle P_{HH} \otimes P_{VH} \rangle - \langle P_{HH} \otimes P_{HV} \rangle - \langle P_{VV} \otimes P_{HV} \rangle)}{Z_{2ef}} \\
s_{03} &= \frac{(\langle P_{VV} \otimes P_{VV} \rangle + \langle P_{HH} \otimes P_{VV} \rangle - \langle P_{HH} \otimes P_{HH} \rangle - \langle P_{VV} \otimes P_{HH} \rangle)}{Z_{2ef}} \quad (5.25)
\end{aligned}$$

Da seção 5.1 vimos que os elementos de ρ_{2ef} para o estado $|\Psi^+\rangle$ e $|\Psi^-\rangle$ são todos reais. Como tal matriz é hermitiana, é fácil perceber que s_{20} e s_{02} serão zero não importa a escolha de L , ξ e w_0 . Novamente, vamos calcular o grau de polarização apenas para $L=5$ mm, $w_0 = 200\mu\text{m}$ e $\xi = 49^\circ$, pois podemos generalizar este resultado depois para os outros valores. A partir dos elementos da matriz densidade reduzida efetiva dada na equação (5.19), calculamos os parâmetros de Stokes, que são dados por

$$\begin{aligned}
s_{10} &= 0 & s_{01} &= 0 \\
s_{20} &= 0 & s_{02} &= 0 \\
s_{30} &= \frac{-3,00 \times 10^{-10}}{1,99} & s_{03} &= \frac{3,00 \times 10^{-10}}{1,99}. \quad (5.26)
\end{aligned}$$

E assim,

$$P_4 = 1 - (2,25 \times 10^{-20}). \quad (5.27)$$

Como podemos ver P_4 é praticamente 1. Para outras escolhas de L , ξ e w_0 , isso irá ocorrer também.

Repetimos os cálculos para o estado $|\Psi^-\rangle$. Agora iremos usar a matriz densidade reduzida efetiva dada pela equação (5.23). Encontramos então,

$$\begin{aligned}
s_{10} &= 0 & s_{01} &= \frac{2,00 \times 10^{-5}}{1,99} \\
s_{20} &= 0 & s_{02} &= 0 \\
s_{30} &= \frac{0,77 \times 10^{-5}}{1,99} & s_{03} &= \frac{0,77 \times 10^{-5}}{1,99}. \quad (5.28)
\end{aligned}$$

E assim,

$$P_4 = 1 - (2,15 \times 10^{-10}). \quad (5.29)$$

Capítulo 5. Estudo do grau de polarização para os estados de bifotons gerados na CPD64

Como podemos ver, P_4 é praticamente 1 novamente, mas se compararmos os resultados obtidos para $|\Psi^+\rangle$ e $|\Psi^-\rangle$, P_4 para o estado $|\Psi^+\rangle$ está mais próximo de 1 que para o estado $|\Psi^-\rangle$. Contudo, mesmo os dois resultados sendo diferentes, ambos podem ser aproximados por 1. Assim tanto o estado $|\Psi^+\rangle$ quanto o estado $|\Psi^-\rangle$ podem ser considerados totalmente emaranhados em polarização mesmo que a largura do cristal (L), a cintura do feixe (w_0) e o ângulo de inclinação do eixo óptico (ξ) variem dentro de valores realistas.

Capítulo 6

Conclusão

Nesta dissertação estudamos como caracterizar o estado de polarização clássico e quântico através dos parâmetros de Stokes, que são quantidades mensuráveis. Mostramos como as definições clássicas podem ser estendidas para o domínio quântico, tendo em mente que efeitos de correlações de ordem maior que a segunda podem aparecer. Desenvolvemos então a definição dos parâmetros de Stokes de quarta ordem para um campo em um e dois modos de onda plana, juntamente com o grau de polarização em quarta ordem.

Em seqüência, exibimos uma teoria para caracterizar estados de polarização com expansão em multimodos de onda plana. Apresentamos as dificuldades que o regime em multimodos traz, como a não existência de uma definição clara para a matriz densidade reduzida. Definimos uma matriz densidade reduzida efetiva no subespaço de polarização através dos parâmetros de Stokes.

Mais especificamente, voltamos a nossa atenção para os estados de Bell emaranhados em polarização, gerados a partir da conversão paramétrica descendente. Desta forma, neste trabalho demos uma rápida introdução sobre o processo da CPD e os estados de Bell. Explicitamos então os estados de Bell multimodais gerados a partir da CPD.

Usando todo o aparato desenvolvido ao longo da dissertação, foi possível calcular a matriz densidade reduzida efetiva para um dos estados do tripleto e para o estado singlete de polarização, assim como os graus de polarização de quarta ordem. Um resultado bastante interessante foi obtido a partir destes cálculos: para as condições experimentais mais comuns, os vetores de polarização ordinária e extraor-

dinária têm projeção praticamente 1 nos eixos $\hat{\mathbf{y}}$ e $\hat{\mathbf{x}}$, mesmo quando consideramos a expansão multimodal e $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_o$ e $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e$ dependentes do vetor de onda $\hat{\mathbf{k}}$. Assim, o tratamento escalar para os vetores de polarização, mesmo que no regime de multimodos, pode ser considerado como uma boa aproximação para estes estados, sem maiores problemas. Além disso, percebemos que a matriz densidade reduzida efetiva calculada para esses estados é bastante parecida (fidelidade igual a 0,99) com a matriz densidade calculada para estados monomodais de polarização. Logo, podemos concluir que é bastante aceitável fatorarmos o nosso estado em um produto entre um estado de momento e outro estado de polarização para os estados de Bell gerados a partir da CPD. Encontramos também que o grau de polarização de quarta ordem para esses dois estados é praticamente 1, o que quer dizer que eles estão totalmente emaranhados, independente de alguns valores típicos da largura do cristal (L), de cintura do feixe (w_0) e do ângulo de inclinação do eixo óptico.

Apêndice A

A.1 Vetores de polarização ordinária e extraordinária

Usando as equações (5.2), (5.3) e (5.5), chegamos a expressões para os vetores de polarização em coordenadas cartesianas,

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_o = -\frac{q \cos \xi}{\sqrt{q^2 + (p \cos \xi - m \operatorname{sen} \xi)^2}} \hat{\mathbf{x}} + \frac{p \cos \xi - m \operatorname{sen} \xi}{\sqrt{q^2 + (p \cos \xi - m \operatorname{sen} \xi)^2}} \hat{\mathbf{y}} + \frac{q \operatorname{sen} \xi}{\sqrt{q^2 + (p \cos \xi - m \operatorname{sen} \xi)^2}} \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e = & \frac{-\operatorname{sen} \xi + \frac{p'(m' \cos \xi + p' \operatorname{sen} \xi)}{\cos^2 \xi + r \operatorname{sen}^2 \xi}}{\sqrt{1 + \frac{(-1+m'^2+p'^2+q'^2-r+(-1+r) \cos(2\xi))(m' \cos \xi + p' \operatorname{sen} \xi)^2}{(\cos^2 \xi + r \operatorname{sen}^2 \xi)^2}}} \hat{\mathbf{x}} \\ & \frac{q'(m' \cos \xi + p' \operatorname{sen} \xi)}{(\cos^2 \xi + r \operatorname{sen}^2 \xi) \sqrt{1 + \frac{(-1+m'^2+p'^2+q'^2-r+(-1+r) \cos(2\xi))(m' \cos \xi + p' \operatorname{sen} \xi)^2}{(\cos^2 \xi + r \operatorname{sen}^2 \xi)^2}}} \hat{\mathbf{y}} \\ & \frac{-\cos \xi + \frac{m'(m' \cos \xi + p' \operatorname{sen} \xi)}{\cos^2 \xi + r \operatorname{sen}^2 \xi}}{\sqrt{1 + \frac{(-1+m'^2+p'^2+q'^2-r+(-1+r) \cos(2\xi))(m' \cos \xi + p' \operatorname{sen} \xi)^2}{(\cos^2 \xi + r \operatorname{sen}^2 \xi)^2}}} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

onde $r = \frac{n_o}{n_e}$.

A.2 Cálculo do produto interno da equação (5.1)

A equação (5.1) é a seguinte:

$$\langle \mathbf{P}_{VV} \otimes \mathbf{P}_{HH} \rangle = \langle \Psi^+ | \mathbf{P}_{VV} \otimes \mathbf{P}_{HH} | \Psi^+ \rangle$$

$$\begin{aligned}
 &= A' \int d\mathbf{q} \int d\mathbf{q}' \int d\mathbf{q}_1 \int d\mathbf{q}_2 \int d\mathbf{q}'_1 \int d\mathbf{q}'_2 \psi^{+*}(\mathbf{q}'_1, \mathbf{q}'_2) \psi^+(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \\
 &\quad [(\langle \mathbf{q}'_1, \hat{\varepsilon}_o(\mathbf{q}'_1) | \langle \mathbf{q}'_2, \hat{\varepsilon}_e(\mathbf{q}'_2) | + \langle \mathbf{q}'_1, \hat{\varepsilon}_e(\mathbf{q}'_1) | \langle \mathbf{q}'_2, \hat{\varepsilon}_o(\mathbf{q}'_2) |) \\
 &\quad (|\mathbf{q}, \hat{\varepsilon}_V(\mathbf{q}) \rangle | \mathbf{q}', \hat{\varepsilon}_H(\mathbf{q}') \rangle \langle \mathbf{q}, \hat{\varepsilon}_V(\mathbf{q}) | \langle \mathbf{q}', \hat{\varepsilon}_H(\mathbf{q}') |) \\
 &\quad (|\mathbf{q}_1, \hat{\varepsilon}_o(\mathbf{q}_1) \rangle | \mathbf{q}_2, \hat{\varepsilon}_e(\mathbf{q}_2) \rangle + |\mathbf{q}_1, \hat{\varepsilon}_e(\mathbf{q}_1) \rangle | \mathbf{q}_2, \hat{\varepsilon}_o(\mathbf{q}_2) \rangle)].
 \end{aligned}$$

Queremos calcular o produto que está dentro dos colchetes da equação:

$$\begin{aligned}
 [\dots] &= \\
 &[(\langle \mathbf{q}'_1, \hat{\varepsilon}_o(\mathbf{q}'_1) | \langle \mathbf{q}'_2, \hat{\varepsilon}_e(\mathbf{q}'_2) | + \langle \mathbf{q}'_1, \hat{\varepsilon}_e(\mathbf{q}'_1) | \langle \mathbf{q}'_2, \hat{\varepsilon}_o(\mathbf{q}'_2) |) \\
 &(|\mathbf{q}, \hat{\varepsilon}_V(\mathbf{q}) \rangle | \mathbf{q}', \hat{\varepsilon}_H(\mathbf{q}') \rangle \langle \mathbf{q}, \hat{\varepsilon}_V(\mathbf{q}) | \langle \mathbf{q}', \hat{\varepsilon}_H(\mathbf{q}') |) \\
 &(|\mathbf{q}_1, \hat{\varepsilon}_o(\mathbf{q}_1) \rangle | \mathbf{q}_2, \hat{\varepsilon}_e(\mathbf{q}_2) \rangle + |\mathbf{q}_1, \hat{\varepsilon}_e(\mathbf{q}_1) \rangle | \mathbf{q}_2, \hat{\varepsilon}_o(\mathbf{q}_2) \rangle)] \\
 &= \langle \mathbf{q}'_1, \hat{\varepsilon}_o(\mathbf{q}'_1) | \mathbf{q}, \hat{\varepsilon}_V(\mathbf{q}) \rangle \langle \mathbf{q}'_2, \hat{\varepsilon}_e(\mathbf{q}'_2) | \mathbf{q}', \hat{\varepsilon}_H(\mathbf{q}') \rangle \langle \mathbf{q}, \hat{\varepsilon}_V(\mathbf{q}) | \mathbf{q}_1, \hat{\varepsilon}_o(\mathbf{q}_1) \rangle \langle \mathbf{q}', \hat{\varepsilon}_H(\mathbf{q}') | \mathbf{q}_2, \hat{\varepsilon}_e(\mathbf{q}_2) \rangle + \\
 &\langle \mathbf{q}'_1, \hat{\varepsilon}_o(\mathbf{q}'_1) | \mathbf{q}, \hat{\varepsilon}_V(\mathbf{q}) \rangle \langle \mathbf{q}'_2, \hat{\varepsilon}_e(\mathbf{q}'_2) | \mathbf{q}', \hat{\varepsilon}_H(\mathbf{q}') \rangle \langle \mathbf{q}, \hat{\varepsilon}_V(\mathbf{q}) | \mathbf{q}_1, \hat{\varepsilon}_e(\mathbf{q}_1) \rangle \langle \mathbf{q}', \hat{\varepsilon}_H(\mathbf{q}') | \mathbf{q}_2, \hat{\varepsilon}_o(\mathbf{q}_2) \rangle + \\
 &\langle \mathbf{q}'_1, \hat{\varepsilon}_e(\mathbf{q}'_1) | \mathbf{q}, \hat{\varepsilon}_V(\mathbf{q}) \rangle \langle \mathbf{q}'_2, \hat{\varepsilon}_o(\mathbf{q}'_2) | \mathbf{q}', \hat{\varepsilon}_H(\mathbf{q}') \rangle \langle \mathbf{q}, \hat{\varepsilon}_V(\mathbf{q}) | \mathbf{q}_1, \hat{\varepsilon}_o(\mathbf{q}_1) \rangle \langle \mathbf{q}', \hat{\varepsilon}_H(\mathbf{q}') | \mathbf{q}_2, \hat{\varepsilon}_e(\mathbf{q}_2) \rangle + \\
 &\langle \mathbf{q}'_1, \hat{\varepsilon}_e(\mathbf{q}'_1) | \mathbf{q}, \hat{\varepsilon}_V(\mathbf{q}) \rangle \langle \mathbf{q}'_2, \hat{\varepsilon}_o(\mathbf{q}'_2) | \mathbf{q}', \hat{\varepsilon}_H(\mathbf{q}') \rangle \langle \mathbf{q}, \hat{\varepsilon}_V(\mathbf{q}) | \mathbf{q}_1, \hat{\varepsilon}_e(\mathbf{q}_1) \rangle \langle \mathbf{q}', \hat{\varepsilon}_H(\mathbf{q}') | \mathbf{q}_2, \hat{\varepsilon}_o(\mathbf{q}_2) \rangle.
 \end{aligned}$$

Usando as equações (3.16-3.19), substituindo $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ por $(\varepsilon_e, \varepsilon_o)$ e considerando que os fótons gêmeos indistinguíveis que saem do cristal têm vetores de onda com a mesma norma, o produto acima adquire a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 [\dots] &= \\
 &\frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\varepsilon}_o(\mathbf{q}'_1)}{\sqrt{1-p_1^2}} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}'_1) \frac{\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\varepsilon}_e(\mathbf{q}'_2)}{\sqrt{1-q_2^2}} \delta(\mathbf{q}' - \mathbf{q}'_2) \frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\varepsilon}_o(\mathbf{q}_1)}{\sqrt{1-p_1^2}} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_1) \frac{\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\varepsilon}_e(\mathbf{q}_2)}{\sqrt{1-q_2^2}} \delta(\mathbf{q}' - \mathbf{q}_2) + \\
 &\frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\varepsilon}_o(\mathbf{q}'_1)}{\sqrt{1-p_1^2}} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}'_1) \frac{\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\varepsilon}_e(\mathbf{q}'_2)}{\sqrt{1-q_2^2}} \delta(\mathbf{q}' - \mathbf{q}'_2) \frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\varepsilon}_e(\mathbf{q}_1)}{\sqrt{1-p_1^2}} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_1) \frac{\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\varepsilon}_o(\mathbf{q}_2)}{\sqrt{1-q_2^2}} \delta(\mathbf{q}' - \mathbf{q}_2) + \\
 &\frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\varepsilon}_e(\mathbf{q}'_1)}{\sqrt{1-p_1^2}} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}'_1) \frac{\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\varepsilon}_o(\mathbf{q}'_2)}{\sqrt{1-q_2^2}} \delta(\mathbf{q}' - \mathbf{q}'_2) \frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\varepsilon}_o(\mathbf{q}_1)}{\sqrt{1-p_1^2}} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_1) \frac{\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\varepsilon}_e(\mathbf{q}_2)}{\sqrt{1-q_2^2}} \delta(\mathbf{q}' - \mathbf{q}_2) + \\
 &\frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\varepsilon}_e(\mathbf{q}'_1)}{\sqrt{1-p_1^2}} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}'_1) \frac{\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\varepsilon}_o(\mathbf{q}'_2)}{\sqrt{1-q_2^2}} \delta(\mathbf{q}' - \mathbf{q}'_2) \frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\varepsilon}_e(\mathbf{q}_1)}{\sqrt{1-p_1^2}} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_1) \frac{\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\varepsilon}_o(\mathbf{q}_2)}{\sqrt{1-q_2^2}} \delta(\mathbf{q}' - \mathbf{q}_2)
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 [\dots] &= \\
 &\left[\frac{((\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\varepsilon}_e(\mathbf{q}_1))(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\varepsilon}_o(\mathbf{q}_2)) + (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\varepsilon}_o(\mathbf{q}_1))(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\varepsilon}_e(\mathbf{q}_2)))^2}{(\sqrt{1-p_1^2}\sqrt{1-q_2^2})^2} \right]
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Bibliografia

- [1] M. de O. T. Cunha. *Emaranhamento: caracterização, manipulação e consequências*. Tese de doutorado, UFMG, 2005.
- [2] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [3] C. K. Hong and L. Mandel. Theory of parametric frequency down conversion of light. *Phys. Rev. A*, 31:2409, 1985.
- [4] E. L. O'Neill. *Introduction to Statistical Optics*. Dover, New York, 1992.
- [5] L. Mandel and E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, New York, 1995.
- [6] R. C. Jones. New calculus for the treatment of optical systems. *J. Opt. Soc. Am.*, 46:126, 1956.
- [7] M. Born and E. Wolf. *Principles of Optics*. Macmillan, New York, 2nd edition, 1964.
- [8] D. M. Klyshko. Polarization of light: fourth-order effects and polarization-squeezed states. *Jetp*, 84:1065, 1997.
- [9] E. Butkov. *Física Matemática*. LCT Editora, Rio de Janeiro, 1988.
- [10] J. J Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison Wesley, San Francisco, 1994.
- [11] Y. Shi, W. M. MacClain and R. A. Harris. Generalized Stokes-Mueller formalism for two-photon absorption, frequency doubling, and hyper-Raman scattering. *Phys. Rev. A*, 49:1999, 1994.

- [12] A. F. Abouraddy, A. V. Sergienko, B. E. A. Saleh and M. C. Teich. Quantum entanglement and the two-photon Stokes parameters. *Opt. Commun.*, 201:050101, 2002.
- [13] A. F. Abouraddy, B. E. A. Saleh, A. V. Sergienko and M. C. Teich. Degree of entanglement for two qubits. *Phys. Rev. A*, 64:050101, 2001.
- [14] G. Jaeger *et al.* Multiphoton Stokes-parameter invariant for entangled states. *Phys. Rev. A*, 67:032307, 2003.
- [15] A. Aiello and J. P. Woerdman. Intrinsic entanglement degradation by multi-mode detection. *Phys. Rev. A*, 70:023808, 2004.
- [16] Grant R. Fowles. *Introduction to Modern Optics*. Dover, New York, 2nd edition, 1975.
- [17] L. E. Ballentine. *Quantum Mechanics: a Modern Development*. World Scientific Publishing Company, London, 1998.
- [18] N. H. Lindner and D. R. Terno. The effect of focusing on polarization qubits. *e-print quant-ph/0403029*, 2005.
- [19] S. P. Walborn, A. N. de Oliveira, S. Pádua and C. H. Monken. Multimode Hong-Ou-Mandel interference. *Phys. Rev. Lett*, 90:143601, 2003.
- [20] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777, 1935.
- [21] Joseph W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. McGraw-Hill, Singapura, 2nd edition, 1996.
- [22] A. G. Costa Moura. Propagação do espectro angular em meios uniaxiais. Comunicação interna.
- [23] J. J. Stannes and G. C. Sherman. Reflection and refraction of an arbitrary wave at a plane interface separating two uniaxial crystals. *J. Opt. Soc. Am.*, 67:683, 1977.