

Correntes persistentes: uma abordagem
supersimétrica

Erlon Henrique Martins Ferreira

Erlon Henrique Martins Ferreira

CORRENTES PERSISTENTES:
uma abordagem supersimétrica

Tese apresentada ao Curso de Doutorado do Departamento de Física da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de concentração: Física

Orientadora: Prof^ª Dr^ª Maria Carolina Nemes

Coorientador: Prof. Hans A. Weidenmüller
MPI-Heidelberg

Belo Horizonte

Departamento de Física da UFMG

Maio de 2005

À memória de meu pai.

“O cientista não estuda a natureza porque ela é útil; estuda-a porque se delicia com ela, e se delicia com ela porque ela é bela. Se a natureza não fosse bela, não valeria a pena conhecê-la e, se não valesse a pena conhecer a natureza, não valeria a pena viver.”

Jules Henri Poincaré (1854-1912)

AGRADECIMENTOS

A Carol, por ser muito mais do que uma orientadora, e cujos todos os predicados não caberiam nessa tese.

Ao Prof. Hans A. Weidenmüller, pessoa amiga e generosa, sem quem esse trabalho não seria possível.

Ao Departamento de Física da UFMG e as pessoas que fazem parte dele, pelo apoio técnico necessário.

Aos amigos com quem não compartilho o meu trabalho, mas compartilho a minha vida.

À minha família, que não entende o que faço, mas apóia e tem orgulho incondicional.

Por fim, a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, colaboraram para que este trabalho pudesse ser realizado.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

SUMÁRIO

| | |
|--|-----------|
| Agradecimentos | 6 |
| Sumário | 7 |
| Lista de Figuras | 9 |
| Lista de Tabelas | 10 |
| Resumo | 11 |
| Abstract | 12 |
| Introdução | 13 |
| 1 Correntes persistentes | 16 |
| 1.1 Primeiros anos | 16 |
| 1.2 Corrente num anel unidimensional limpo | 17 |
| 1.3 Efeitos topológicos | 21 |
| 1.4 Experimentos | 27 |
| 1.5 Tratando a desordem | 28 |
| 2 Supersimetria | 31 |
| 2.1 Variáveis de Grassmann | 31 |
| 2.2 Supervetores e supermatrizes | 35 |
| 2.3 Supertraço e superdeterminante | 39 |
| 2.4 Superintegrais | 41 |
| 3 Cálculo perturbativo | 43 |
| 3.1 Modelo IWZ | 43 |
| 3.2 Funcional gerador e supersimetria | 45 |
| 3.3 Média no <i>ensemble</i> | 50 |
| 3.4 Transformação de Hubbard–Stratonovitch | 51 |

| | |
|--|------------|
| <i>Sumário</i> | 8 |
| 3.5 Aproximação do ponto de sela | 52 |
| 3.6 Propriedades de simetria | 56 |
| 3.7 Expansão assintótica | 57 |
| 4 Cálculo exato do modo zero | 66 |
| 4.1 Separação do modo zero | 66 |
| 4.2 Parametrização | 67 |
| 4.3 Cálculo dos supertraços | 68 |
| 4.4 Integrando sobre as variáveis de Grassmann | 76 |
| 4.5 Discussão dos resultados | 79 |
| 5 Corrente num anel com um ponto quântico | 82 |
| 5.1 Introdução | 82 |
| 5.2 Formulação supersimétrica para a corrente | 82 |
| 5.3 Resultados | 86 |
| 6 Conclusão | 90 |
| A Autoenergias do sistema sem desordem | 92 |
| B Espaçamento médio entre níveis | 94 |
| C Integral gaussiana sobre $d[\Psi]$ | 97 |
| D Geradores t_{12} e t_{21} | 99 |
| E Contrações de Wick | 102 |
| E.1 Variáveis ordinárias | 102 |
| E.2 Variáveis de Grassmann | 103 |
| E.3 Diffusions e Cooperons | 104 |
| F Superintegrais e falsas divergências | 107 |
| Referências Bibliográficas | 108 |

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|----|--|----|
| 1 | Anel unidimensional atravessado por um fluxo magnético Φ | 17 |
| 2 | Níveis de energia em função da fase de Aharonov-Bohm num anel unidimensional sem desordem | 19 |
| 3 | Correntes persistentes em função da fase A-B para diferentes números elétrons num anel unidimensional sem desordem | 20 |
| 4 | Imagens de cristais de NbSe ₃ feitas por um microscópio eletrônico de varredura | 22 |
| 5 | Níveis de energia eletrônicos em função da fase A-B para em uma fita para canais transversais par e ímpar. | 24 |
| 6 | Modo zero da corrente em função do parâmetro $X \equiv \sqrt{K\zeta} \phi$ no limite difusivo ($K \gg 1$). | 79 |
| 7 | Gráfico da corrente persistente em um anel no limite balístico ($K = 1$). . . | 80 |
| 8 | Imagem de micrografia por varredura eletrônica de um ponto quântico imerso em um anel de Aharonov-Bohm. | 83 |
| 9 | Parte imaginária de σ_0 como função da energia. | 85 |
| 10 | Corrente em função do fluxo magnético. | 87 |
| 11 | Corrente persistente em função da energia do ponto quântico. | 88 |

LISTA DE TABELAS

| | | |
|---|--|----|
| 1 | Geometria e propriedades físicas de um anel semiconductor mesoscópico. . . | 87 |
| 2 | Corrente persistente para alguns valores da largura de linha da ressonância com o ponto quântico. | 89 |

RESUMO

A partir de um modelo simples para a corrente persistente em um anel limpo unidimensional na presença de um campo magnético uniforme, mostramos as propriedades dessa corrente no caso ideal, sem desordem, tanto para uma geometria plana quanto para uma fita de Möbius. Mostramos como incluir a desordem e calcular a corrente média para um *ensemble* de anéis metálicos mesoscópicos, quase unidimensionais e isolados, na presença de uma desordem fraca. Modelamos a desordem por meios da Teoria de Matrizes Aleatórias, que combinada a técnicas de supersimetria, possibilitam o cálculo analítico da corrente persistente média. Mostramos a equivalência do modelo IWZ, que é um modelo discreto, com o modelo contínuo, calculando a corrente de maneira exata para o modo zero e perturbativamente para os modos superiores. Calculamos ainda a corrente média para um anel com um ponto quântico imerso na presença de desordem. Concluimos que a presença do ponto quântico aumenta significativamente a amplitude da corrente sem alterar as suas propriedades de simetria e periodicidade com relação ao fluxo magnético externo.

ABSTRACT

Starting from a simple model for the persistent current on a clean one-dimensional ring in the presence of an homogeneous magnetic field, we show the properties of that current in the ideal case, without disorder, for both a plane and a Möbius-like geometry. We also show how to treat disorder and calculate the averaged current for an ensemble of isolated mesoscopic, quasi one-dimensional metal rings with a weak disorder. We model the disorder by means of Random Matrix Theory, which combined with supersymmetry techniques, has made possible to obtain the averaged persistent current. We show the equivalence between the IWZ model, which is discrete, and the continuous model, by calculating the current exactly for the zero mode and perturbatively for higher order modes. We also calculate the averaged persistent current for a ring with an embedded quantum dot with disorder. We conclude that the very presence of the quantum dot increases significantly the current amplitude but does not alter the symmetry and periodicity of the current with the external flux.

INTRODUÇÃO

As duas últimas décadas do século XX presenciaram um progresso espetacular no estudo de metais e semicondutores com desordem. Esses sistemas são interessantes não apenas do ponto de vista das diferentes aplicações tecnológicas, mas também porque revelam propriedades físicas novas e incomuns, muito diferentes daquilo que se esperaria em materiais limpos comuns. Embora características termodinâmicas sejam influenciadas pela desordem, os efeitos mais notáveis são observados na cinética. É claro que, em muitos casos, pode-se usar a teoria clássica de transporte baseada na equação de Boltzmann para a descrição do movimento do elétron. Entretanto, se a desordem for forte ou a temperatura baixa, efeitos quânticos tornam-se importantes, e para construir uma teoria nesse caso, deve-se partir da equação de Schrödinger num potencial assumido aleatório.

Durante muito tempo, o único método analítico de estudo desses sistemas foi a teoria de perturbação no potencial aleatório por meio do uso de funções de Green [1]. Grande progresso foi feito no estudo do fenômeno que é hoje conhecido como “localização fraca”. Mais tarde, a perturbação diagramática mostrou-se bastante útil para a investigação de efeitos mesoscópicos, em especial para as “flutuações universais da condutância”. Embora poderosas e úteis, expansões diagramáticas funcionam bem apenas quando os efeitos quânticos são fracos e as propriedades do sistema são quase clássicas. Por exemplo, ela não se mostra muito útil no estudo de condutores mesoscópicos fracamente desordenados que estão completamente isolados ou fracamente conectados a fios condutores ou, ainda, condutores fracamente desordenados de geometria unidimensional, onde localização é sempre possível [2, 3].

O artigo pioneiro de Efetov [4] trouxe uma nova luz aos métodos de cálculo nessa área. Ao utilizar o método de supersimetria usando tanto variáveis comuns quanto as de Grassmann, foi possível estudar efeitos mesoscópicos, localização, efeito Hall quântico inteiro e até mesmo funções de correlação para modelos unidimensionais de partículas com algum tipo de interação especial. Usando a abordagem supersimétrica, pôde-se também derivar

um modelo σ não-linear. Esse modelo contém supermatrizes Q (8×8) com a restrição $Q^2 = 1$, cujo tamanho reduzido permite cálculos diretos.

O primeiro caso não trivial para o qual o modelo σ foi resolvido foi o de uma pequena partícula metálica desordenada. Para encontrar, por exemplo, a função de correlação nível-nível, deve-se resolver uma versão zero-dimensional do modelo σ . De forma inesperada, a função de correlação coincide exatamente com a função correspondente conhecida a partir da teoria de matrizes aleatórias. Esta foi inicialmente proposta numa base puramente fenomenológica para a descrição de núcleos complexos. A solução do modelo σ zero-dimensional foi a primeira confirmação analítica da teoria de matrizes aleatórias. Além disso, algum tempo depois, o modelo σ zero-dimensional foi derivado a partir da teoria de matrizes aleatórias, demonstrando, portanto, a equivalência entre as duas teorias [5].

Mostrou-se ainda que os problemas de caos quântico são equivalentes aos problemas de desordem e, conseqüentemente, àqueles da física de núcleos complexos. Todas essas teorias são bastante populares hoje devido aos novos desenvolvimentos na física de objetos mesoscópicos. O sucesso recente em nanotecnologia tornou possível a criação de objetos muito pequenos onde modelos teóricos, como bilhares quânticos, podem ser aplicados diretamente a objetos experimentalmente acessíveis (pontos quânticos), ou, em especial, no estudo de correntes persistentes em anéis metálicos mesoscópicos isolados. O modelo σ zero-dimensional é, portanto, uma ferramenta bastante conveniente e adequada para a descrição teórica desses objetos mesoscópicos.

Alguns trabalhos aplicaram o método de supersimetria para estudar as propriedades de correntes persistentes em anéis metálicos com uma desordem fraca, porém sem incluir a interação entre partículas [6, 7]. Outros trabalhos se concentraram no estudo das interações, porém sem a presença de desordem [8–11]. A solução de um problema com desordem e interação é do ponto de vista teórico bastante difícil.

Neste trabalho, calculamos a corrente persistente num anel quase unidimensional e com desordem, porém sem interação entre partículas, numa abordagem diferente dos trabalhos

existentes. Esta abordagem, proposta por Iida, Weidenmüller e Zuk [12], para o cálculo da condutância, oferece uma maneira mais simples de se incluir a interação entre partículas. Weidenmüller e Richert calcularam os efeitos da interação na localização em um condutor linear [13]. Embora não tenhamos incluído a interação entre partículas neste trabalho em especial, conseguimos mostrar a equivalência entre esta abordagem, e a abordagem tradicional. A inclusão da desordem é um passo natural no estudo deste problema, que no entanto ainda é de difícil tratamento analítico.

O modelo IWZ também oferece uma maneira simples de se incluir o acoplamento do anel com condutores externos ou outros dispositivos, como por exemplo um ponto quântico. No último capítulo calculamos portanto a corrente num anel mesoscópico com um ponto quântico embebido nele.

1

CORRENTES PERSISTENTES

1.1 Primeiros anos

O interesse no estudo de correntes persistentes remonta à primeira metade do século XX, quando F. London [14], em 1937, e F. Hund [15], no ano seguinte, escreveram trabalhos sobre propriedades magnéticas de moléculas anulares. Mais tarde, com a formulação da teoria de supercondutividade [16] em 1957, e os trabalhos de Aharonov e Bohm [17] e Byers e Yang [18] alguns anos depois, foi criado o conceito de corrente persistente no contexto da supercondutividade.

Aharonov e Bohm mostraram que, devido a efeitos puramente quânticos, um elétron sente o efeito de um campo magnético \mathbf{B} próximo, mesmo estando numa região onde este campo é nulo. Isso porque, numa região onde $\mathbf{B} = 0$, não é necessariamente nulo o potencial vetor \mathbf{A} , tal que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Como se sabe, é esse potencial que entra no cálculo da ação quântica e, portanto, modifica a fase da função de onda do elétron. Assim, a função de onda do elétron depende do caminho que ele percorre, e pode-se, por exemplo, observar fenômenos de interferência semelhantes ao da fenda dupla.

Byers e Yang por sua vez mostraram que em um cilindro supercondutor oco, sujeito a um campo magnético interno, devemos ter um campo magnético nulo no seu interior, porém há um fluxo magnético Φ não nulo na parte oca. Nesse caso, os níveis de energia são funções periódicas pares em Φ com um período de hc/e , e a corrente no interior do supercondutor pode ser calculada como a derivada da energia livre do sistema em relação a Φ . O efeito Meissner garante que, no equilíbrio, o campo magnético e a corrente no interior do supercondutor são zero, o que corresponde ao mínimo da energia livre. Caso o campo externo seja tal que o sistema não esteja num desses mínimos, correntes na superfície do supercondutor aparecem de forma a alterar o fluxo magnético e levar o

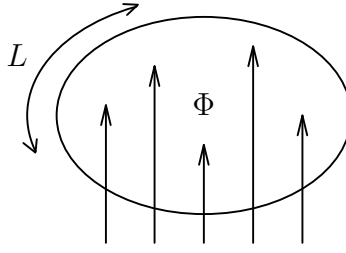


FIGURA 1 - Anel unidimensional atravessado por um fluxo magnético Φ .

sistema para um ponto de mínimo da curva.

Os trabalhos de Bloch [19,20], Schick [21], e Gunther e Imry [22] mencionam a possibilidade de haver correntes circulantes para elétrons livres em anéis ou cilindros suficientemente pequenos. A idéia de correntes persistentes que são periódicas com o fluxo em anéis metálicos comuns é mais recente e se baseia na observação de que a função de onda do elétron pode se estender coerentemente sobre toda a circunferência do anel. Para sistemas estritamente unidimensionais, esta teoria foi proposta por Büttiker, Imry e Landauer em diferentes artigos [23–25], onde se discute que o efeito de espalhamentos elásticos, da temperatura finita e espalhamentos inelásticos fracos é de criar um alargamento e separação dos níveis de energia, sem destruir a coerência de fase.

1.2 Corrente num anel unidimensional limpo

Cheung et al [26] calcularam de forma analítica a expressão para a corrente de elétrons livres em anéis unidimensionais na presença de um campo magnético externo estático. A forma de se tratar esse problema é equivalente ao estudo do movimento de um elétron em um sistema infinito com um potencial periódico. Independentemente de quão complicado seja o potencial das impurezas, a questão central é que, após uma volta completa no anel, obtém-se o mesmo potencial, embora a função de onda possa mudar sua fase dependendo do fluxo magnético através do anel.

A presença do campo magnético externo através do anel (Fig. 1) pode ser reduzida,

simplesmente, às seguintes condições de fronteira para a função de onda (Cf. Ap. A):

$$\psi(x + L) = e^{i\phi} \psi(x), \quad \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x=L} = e^{i\phi} \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x=0}, \quad (1.1)$$

onde definimos a fase de Aharonov-Bohm (A-B) por $\phi = 2\pi\Phi/\Phi_0$. Aqui, $\Phi_0 = hc/e$ é o *quantum* de fluxo magnético, x a coordenada ao longo da circunferência e L o comprimento da circunferência. As Eqs. (1.1) implicam que os autoestados e autoenergias ϵ_n , portanto, todas as propriedades de equilíbrio do anel são periódicos com período Φ_0 em Φ , ou equivalentemente, 2π na fase ϕ . Essas equações são equivalentes àquelas que determinam as ondas de Bloch para elétrons se movendo num potencial periódico, com o parâmetro ϕ/L fazendo o papel do momento; os níveis de energia do anel formam microbandas como função de ϕ com período 2π , análogas às bandas eletrônicas de Bloch na visão da zona- k estendida.

A corrente total $I(\phi)$ é a soma de todas as contribuições i_n de todos os estados ponderados com a probabilidade de ocupação apropriada. A corrente i_n carregada por um nível ϵ_n é

$$i_n = -\frac{2ev_n}{L}, \quad v_n = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \epsilon_n}{\partial k} \quad (1.2)$$

(o fator 2 é devido ao spin). Usando a analogia com o movimento de um elétron num potencial periódico, podemos reescrever essa equação como

$$i_n = -\frac{2e}{\hbar} \frac{\partial \epsilon_n}{\partial \phi} = -2c \frac{\partial \epsilon_n}{\partial \Phi}, \quad (1.3)$$

onde usamos a equivalência $k = \phi/L$. Esse cálculo se aplica a temperatura nula. Para temperatura finita, devemos tomar a derivada da energia livre com relação ϕ . Na Fig. 2, vemos as energias dos autoestados ϵ_n como função do fluxo magnético para uma cadeia unidimensional. Na ausência de desordem, as curvas formam parábolas que se intersectam. A inclusão de desordem leva a uma repulsão entre os níveis e, como resultado, aparecem *gaps* nas intersecções.

As propriedades básicas da corrente persistente total podem ser melhor compreendidas considerando o modelo mais simples de anéis ideais com um único canal e sem desordem, atravessado por um fluxo magnético. Nesse modelo, as energias ϵ_n e correntes i_n são

$$\epsilon_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{2\pi}{L} \left(n + \frac{\phi}{2\pi} \right) \right]^2 \quad \text{e} \quad i_n = -\frac{2he}{mL^2} \left(n + \frac{\phi}{2\pi} \right), \quad (1.4)$$

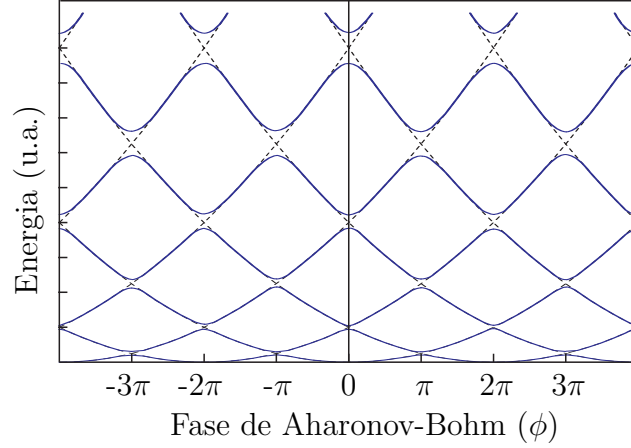


FIGURA 2 - Níveis de energia eletrônica (u.a.) em função da fase A-B $\phi = 2\pi\Phi/\Phi_0$ em um anel unidimensional. As linhas cheias (tracejadas) correspondem à presença (ausência) de desordem.

com $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ e m a massa do elétron.

A corrente total a temperatura nula é obtida pela soma das contribuições de todos os níveis com energias menores do que o potencial químico μ . No caso unidimensional com um número fixo de elétrons (ensemble canônico), o potencial químico é determinado pela relação $\mu = (\hbar K \pi)^2 / 2mL^2$, onde $2K$ é o número total de elétrons num anel, e K , portanto, o número de níveis.

Como a corrente é periódica em ϕ com um período 2π , podemos nos restringir ao intervalo $[-\pi, \pi]$, o que seria equivalente à primeira de zona de Brillouin num cristal. A soma em n para a corrente é diferente dependendo se K é par ou ímpar. No caso de $K = 2K_0 + 1$ ímpar, temos que

$$I(\phi) = \sum_{n=-K_0}^{K_0} i_n = -2I_0 \frac{\phi}{\pi}, \quad (1.5)$$

onde $I_0 = ev_F/L = \hbar eK/(2mL^2)$. Para $K = 2K_0$ par, a soma é diferente:

$$\phi > 0: \quad I(\phi) = \sum_{n=-K_0+1}^{K_0} i_n = -2I_0 \left(\frac{\phi}{\pi} - 1 \right), \quad (1.6)$$

$$\phi < 0: \quad I(\phi) = \sum_{n=-K_0}^{K_0-1} i_n = -2I_0 \left(\frac{\phi}{\pi} + 1 \right). \quad (1.7)$$

A Fig. 3 mostra ambos os casos, e também a corrente média. Vemos que a corrente é periódica em ϕ com período π quando fazemos a média.

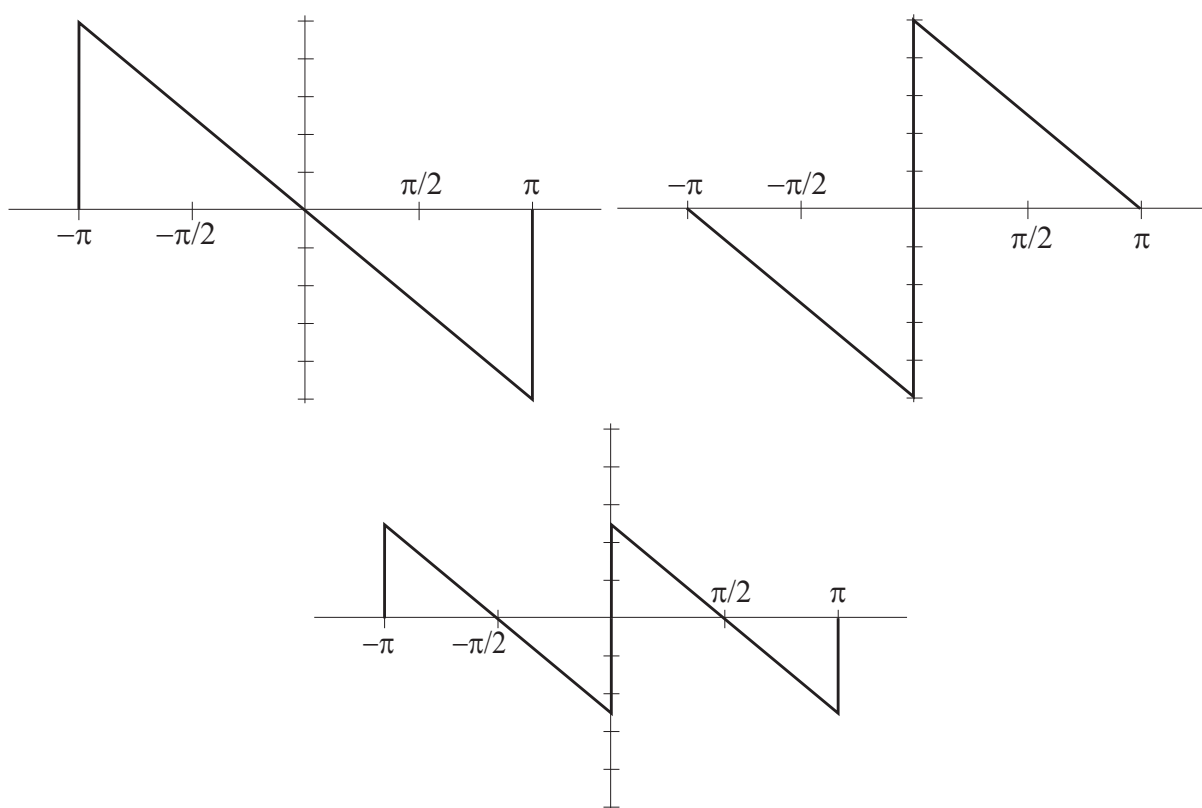


FIGURA 3 - Correntes persistentes em função da fase A-B ϕ para diferentes valores de K : (a) K ímpar, (b) K par e (c) corrente média. A escala do eixo vertical é em unidades de $0,4I_0$, com $I_0 = ev_F/L$ e v_F a velocidade de Fermi.

No trabalho de Cheung et al [26], foi mostrado ainda que a corrente decresce exponencialmente com a temperatura e também decresce com $e^{-L/\xi}$ para uma desordem forte ($\xi < L$), onde ξ é o comprimento de localização.

1.3 Efeitos topológicos

A realização experimental de anéis mesoscópicos com as topologias das fitas de Möbius com torções simples e dupla [27] levantou a questão se as propriedades da corrente persistente dependeriam da forma do anel. Uma afirmativa positiva implicaria uma estreita relação entre topologia e coerência quântica.

Alguns artigos teóricos sobre o assunto foram escritos [28–31], mas nenhum abordou os aspectos gerais dessa corrente, e os resultados dos cálculos numéricos são específicos para os modelos escolhidos. Calculamos então a corrente de forma genérica, como feita no artigo pioneiro de Cheung et al [26], com a diferença agora que o sistema não é mais unidimensional, e devemos, por isso, tomar um cuidado especial com as condições de contorno tanto dos modos longitudinais quanto dos transversais [32].

Vamos tratar, de forma geral, fitas com um número n de torções. Uma fita simples corresponde a $n = 0$, a fita de Möbius, $n = 1$, a fita em 8, $n = 2$, etc (Cf. Fig. 4). Tomamos um anel bidimensional com uma largura d muito menor do que a circunferência L . Dessa forma, o movimento dos elétrons na direção transversal é sempre balístico ($\ell > d$). O anel pode então ser modelado como um retângulo sujeito a condições de contorno apropriadas. Introduzimos as coordenadas cartesianas (x, y) , com $x = (L/2\pi)\theta$ a coordenada na direção longitudinal e y na transversal. Os valores de $\theta = 0, 2\pi$ e $y = \pm d/2$ definem as fronteiras do retângulo.

O Hamiltoniano livre tem a forma

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{(2\pi)^2}{L^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right], \quad (1.8)$$

onde μ é a massa (efetiva) dos elétrons. A função de onda de um elétron é separável da

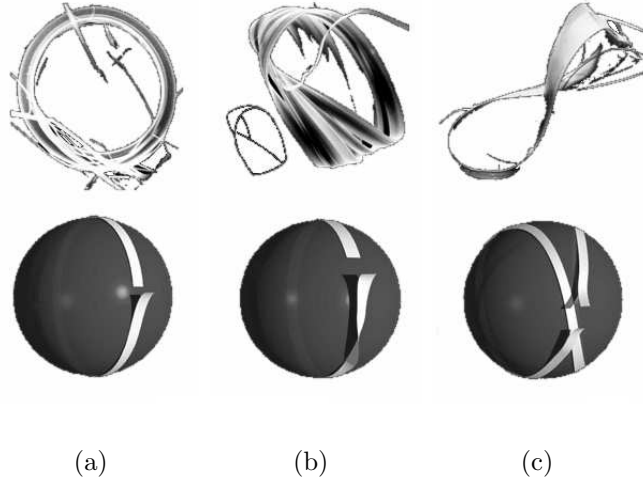


FIGURA 4 - Imagens de cristais de NbSe₃ feitas por um microscópio eletrônico de varredura [27]. (a) Estrutura anular ($n = 0$). (b) Fita de Möbius ($n = 1$). (c) Fita em 8 ($n = 2$).

seguinte forma

$$\Psi_{j,m}(\theta, y) = \chi_{j,m}(\theta)\psi_j(y) , \quad (1.9)$$

e os autovalores serão $E_{j,m} = E_j + E_j^m$.

Os modos transversais $\psi_j(y)$ obedecem as condições de contorno

$$\psi_j(-d/2) = 0 = \psi_j(d/2) , \quad (1.10)$$

e os autovalores associados são

$$E_j = \frac{j^2 \pi^2 \hbar^2}{2\mu d^2} . \quad (1.11)$$

O índice $j = 1, 2, \dots$ define o canal transversal.

As condições de contorno dos modos longitudinais dependem, como antes, da fase de A-B ϕ , mas devemos ter também atenção especial com os modos transversais. Se $n = 1$, por exemplo, quando o elétron parte do ponto (θ, y) , após uma volta completa no anel, ele se encontrará no ponto $(\theta \pm 2\pi, -y)$. A condição de contorno para a função de onda completa será $\Psi_{j,m}(\theta \pm 2\pi, -y) = e^{\pm i\phi} \Psi_{j,m}(\theta, y)$. O efeito da volta no anel depende se o modo transversal $\psi_j(y)$ é par ou ímpar com relação à troca de sinal de y . Modos pares (correspondentes a valores de j ímpares) permanecem inalterados, enquanto os modos

ímpares (j par) trocam de sinal. Assim, obtemos

$$\Psi_{j,m}(\theta \pm 2\pi, y) = (-1)^{j+1} e^{\pm i\phi} \Psi_{j,m}(\theta, y) . \quad (1.12)$$

Esta condição é válida para qualquer n ímpar. Caso $n = 0$ ou n par, não há nenhuma alteração nos modos transversais, e portanto, não depende de j . Usando a condição de contorno da Eq. (1.12), obtemos as autoenergias dos modos longitudinais

$$E_j^m = \frac{\hbar^2}{2\mu L^2} \left[m + \frac{\phi}{2\pi} + \delta_{j,n} \right]^2 , \quad (1.13)$$

com j definido acima, e $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. A fase $\delta_{j,n}$ leva em conta a simetria dos modos transversais e a topologia do anel. Ela é definida como

$$\delta_{j,n} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{para } j \text{ par, } n \text{ ímpar,} \\ 0, & \text{em outro caso.} \end{cases} \quad (1.14)$$

Enfatizamos as diferenças entre os casos com n par e ímpar. No primeiro caso, as energias, como função de ϕ , são parábolas com mínimos em $\phi = 2\pi m$. No outro caso, há duas classes de parábolas: as correspondentes aos canais transversais com j ímpar são idênticas ao caso de n par; já quando j é par, as parábolas possuem mínimos em $\phi = 2\pi m + \pi$. A Fig. 5 ilustra o caso para dois canais transversais com paridades opostas. Concluimos, portanto, que existe uma diferença entre o espectro de energia de uma fita de Möbius com um número par ou ímpar de torções. Vejamos se esta diferença também se manifesta de forma genérica na corrente persistente.

A $T = 0$, a corrente persistente é dada pela fórmula

$$I(\phi) = -2c \frac{\partial E_0}{\partial \Phi} = -\frac{2e}{\hbar} \frac{\partial E_0}{\partial \phi} , \quad (1.15)$$

onde E_0 é a energia do estado fundamental dada por

$$E_0 = \sum_{j,m} p_{j,m} E_{j,m} . \quad (1.16)$$

Num sistema com $2K$ elétrons, os números de ocupação $p_{j,m}$ são iguais a 0 ou 1, escolhidos de forma que E_0 seja mínimo e $\sum_{j,m} p_{j,m} = K$. Da Eq. (1.13) vemos que uma mudança do tipo $\phi \rightarrow \phi \pm 2\pi$ equivale a $m \rightarrow m \pm 1$, e portanto a energia é periódica em ϕ com

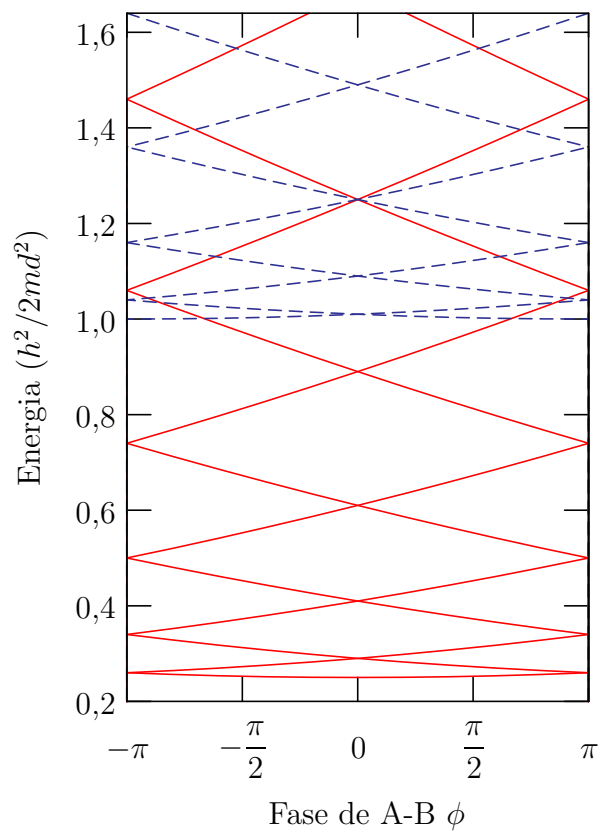


FIGURA 5 - Níveis de energia eletrônica em função da fase A-B $\phi = 2\pi\Phi/\Phi_0$ para $j = 1$ (linha cheia) e $j = 2$ (linha pontilhada) com $L/d = 5$.

um período de 2π . A corrente persistente compartilha a mesma propriedade e por isso podemos nos restringir ao intervalo $[-\pi, \pi]$.

Antes de olharmos o caso mais geral, vamos abordar o caso de um único canal onde a soma em j na Eq. (1.16) é restrita a um único valor de j . O número de elétrons nesse canal é $2K_j$. O caso $n = 0$ é idêntico ao que foi discutido na Seção 1.2 e independe de j . Vejamos, portanto, o caso $n = 1$. Comparativamente ao caso sem torção ($n = 0$), não há nenhuma mudança para os canais pares (j ímpar). No entanto, a situação muda qualitativamente neste caso para os canais ímpares devido a nova forma do espectro. Para $K_j = 2K_0$ par, a soma em m vai de $-K_0$ até $+K_0 - 1$. A corrente é idêntica à da Eq. (1.5). Para $K_j = 2K_0 + 1$ ímpar, a soma em m se estende de $-K_0$ até $+K_0$ para $\phi < 0$, e de $-K_0 - 1$ até $+K_0 - 1$ para $\phi > 0$, e portanto, igual às Eqs. (1.6) e (1.7). Assim, para os canais ímpares da fita de Möbius, a corrente persistente muda em comparação com o caso sem torção: a corrente para K_j par no caso $n = 0$ é igual à corrente para K_j ímpar no caso $n = 1$, e vice-versa. Esta diferença reflete diretamente a mudança no espectro de uma partícula. Se fosse então possível preparar uma fita de Möbius com um único canal ímpar e um número conhecido de elétrons nele, então o padrão em forma de dente-de-serra da corrente persistente poderia ser usado para diferenciar genericamente uma fita com um número par ou ímpar de torções.

Infelizmente, esse exemplo simples se torna obscurecido quando consideramos o caso de muitos canais. Isso se faz necessário porque o número de elétrons num anel de dimensões realísticas é, pelo menos, da ordem de milhares, se não muito maior, e a soma em j não pode se restringir a um único valor de j . Vamos considerar, inicialmente, o caso de n par e muitos canais. O número K_j de elétrons no canal j dependerá da relação entre as energias E_j e $E_{k \neq j}$. Assim, a forma precisa da corrente dependerá tanto da largura d do anel e do número K de elétrons no anel. Porém, os seguintes argumentos se aplicam de forma geral. Primeiramente, suponhamos por um instante que o número de elétrons por canal não varie com ϕ . Esta suposição não é realística, mas ajuda a esclarecer a situação. Então, todos os canais com um número ímpar de elétrons irão contribuir conjuntamente com uma função dente-de-serra para a corrente que é descontínua em $\phi = 0$, enquanto

todos os canais com um número par de elétrons, com uma função que é descontínua em $\phi = \pm\pi$. As amplitudes dessas discontinuidades são dadas pelo número de elétrons em cada caso. Como resultado, a corrente é periódica em ϕ com um período 2π , mas possui dentro de cada período uma estrutura de dente-de-serra dupla. Será somente no caso em que o número de elétrons nos canais pares for igual ao dos canais ímpares que a corrente terá um período π . Nossa suposição, de que o número de elétrons em cada canal é fixo, é no entanto irreal. Isso porque quando variamos ϕ , níveis pertencentes a diferentes canais se cruzam. Os valores de ϕ onde tais cruzamentos ocorrem dependem dos valores de j dos canais e de d , e não são, portanto, genéricos. Tais cruzamentos alteram o número de elétrons nos canais. Como resultado, a corrente irá adquirir outras estruturas tipo dente-de-serra em valores de ϕ que diferem de 0 e $\pm\pi$. Contudo, a periodicidade de 2π da corrente não será afetada. Quando fazemos a média sobre sistemas contendo diferentes números de elétrons (como é feito quando se quer fazer uma média sobre o ensemble de impurezas), espera-se que o período da corrente seja π , pois existe agora um peso igual para todas as possíveis realizações do sistema.

Se considerarmos agora o caso $n = 1$, vemos que situação para os canais com j ímpar é a mesma da descrita no parágrafo anterior, enquanto os papéis de valores de K_j par e ímpar são trocados quando j for par. Uma vez que esses números não são conhecidos individualmente, o resultado para a corrente persistente é genericamente o mesmo: a corrente tem a forma de dente-de-serra com discontinuidades em $\phi = 0$ e $\phi = \pm\pi$. Outras discontinuidades aparecem porque os números K_j mudam com ϕ . A corrente resultante é periódica com período 2π e não é genericamente diferente daquela para valores de n par.

Concluimos, assim, que não há uma diferença genérica entre a corrente persistente em anéis simples ou com um número arbitrário de torções. A corrente tem genericamente uma periodicidade 2π e (pelo menos) uma estrutura de dente-de-serra dupla. Em detalhe, a estrutura depende do ordenamento preciso das energias dos modos transversais e do número de elétrons no anel. Para uma desordem fraca, o efeito do espalhamento elástico entre diferentes canais promove, como antes, a remoção da intersecção entre os níveis. Como resultado, a corrente tem o seu perfil suavizado nas discontinuidades e há uma

diminuição da amplitude. A corrente média é, portanto, independente do número de torções.

1.4 Experimentos

As observações experimentais das correntes persistentes em pequenos anéis metálicos na última década do século XX, especialmente por Lévy et al. [33], Chandrasekhar et al. [34] e Mailly, Chapelier e Benoit [35] forneceram finalmente dados reais após anos de discussões teóricas [25, 26, 36–38]. Nesses experimentos, foi possível observar a presença de correntes persistentes em amostras bastante impuras, nas quais o livre caminho médio elástico ℓ era muito menor do que a circunferência L [33, 34] ou da ordem deste [35]. Nos dois primeiros casos, temos o elétron se movendo num regime difusivo, enquanto no terceiro, o regime é aproximadamente balístico. No trabalho de Lévy et al., a experiência foi realizada num conjunto de 10^7 anéis de cobre, com uma circunferência média L e largura dos anéis de $2,2 \mu\text{m}$ e $0,13 \mu\text{m}$ respectivamente, e o livre caminho médio elástico era $\ell \simeq 10 \text{ nm} \ll L$. Encontrou-se uma corrente com período $\Phi_0/2$ e amplitude de aproximadamente $0,5 cE_C/\Phi_0$, onde E_C é a energia de Thouless. O experimento de Chandrasekhar et al. foi realizado para anéis de ouro isolados, e a corrente encontrada tinha período Φ_0 e amplitude da ordem de ev_F/L , onde v_F é a velocidade de Fermi. O terceiro experimento usou uma heteroestrutura de GaAs, encontrando, mais uma vez, um período de Φ_0 e uma amplitude de aproximadamente ev_F/L .

Embora as predições teóricas estivessem de acordo com a experiência no que se refere à periodicidade da corrente, não há uma concordância precisa entre as amplitudes previstas e os valores medidos [39]. Diferentes métodos teóricos para o tratamento da desordem nesses anéis encontraram valores de uma a duas ordens de grandeza menores do que os resultados experimentais. Tais cálculos são baseados em modelos de elétrons não interagentes e que se movem em um potencial periódico. A inclusão da interação Coulombiana combina as dificuldades de um problema de muitos corpos com aqueles da teoria estocástica e um tratamento correto ainda é uma questão em aberto.

1.5 Tratando a desordem

Para se fazer um tratamento analítico da desordem, descrevemos as impurezas como um potencial aleatório e então fazemos uma média sobre as possíveis realizações desse potencial. Para tanto, devemos reescrever a corrente em termos de funções de Green. Partindo da expressão para a corrente dada pela Eq. (1.3), encontramos

$$\begin{aligned}
 I(\Phi) &= -2c \sum_{n=1}^K \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial \Phi} = -2c \int_0^E dE' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial \Phi} \delta(E' - \varepsilon_n) \\
 &= -2c \int_0^E dE' \operatorname{Tr} \left\{ \frac{\partial H}{\partial \Phi} \delta(E' - H) \right\} \\
 &= -\frac{ic}{\pi} \int_0^E dE' \operatorname{Tr} \left\{ \frac{\partial H}{\partial \Phi} [(E'^+ - H)^{-1} - (E'^- - H)^{-1}] \right\},
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

onde $2K$ é o número total de elétrons no anel, $E'^{\pm} = E' \pm i\eta$, e o limite $\eta \rightarrow 0$ está implícito. O limite da integral E deve ser escolhido tal que

$$\varepsilon_K < E < \varepsilon_{K+1}. \tag{1.18}$$

Esta condição nos mostra que não podemos escolher E independente de Φ ou da realização do potencial aleatório, pois ε_K e ε_{K+1} variam com ambas as grandezas, e não podemos relaxar a condição acima pois cálculos para anéis ideais mostraram aqui que a principal contribuição para a corrente total vem do último nível ocupado.

Para se resolver esse problema, Altland et al. [6] sugeriram uma generalização do ensemble canônico, que se aplica bem à descrição do experimento realizado com um grande número de anéis [33]: exige-se que o número de elétrons em cada anel seja inteiro e fixo, mas permite-se que ele varie de anel para anel em torno de um valor médio \bar{K} dentro de uma faixa $\delta K \ll \bar{K}$; calcula-se a corrente média $\bar{I}(\Phi)$ tomando-se a média não só sobre o potencial das impurezas, mas também sobre δK . Na situação experimental da Ref. [33], o grande número de anéis implica uma incerteza em suas geometrias e volumes, e conseqüentemente no número de elétrons que eles carregam. Assumindo que tais incertezas sejam uma fração de 1%, encontramos que $\delta K \approx 10^7 \dots 10^8 \gg 1$ dentro de um número total de elétrons por anel estimando em 10^{10} . Fazendo a média da Eq. (1.17) sobre um conjunto de δK inteiros vizinhos, com autovalores ε_K correspondentes num intervalo S ,

temos

$$I(\Phi) = -\frac{2c}{\delta K} \int_S dE \int_0^E dE' \left\{ \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial \Phi} \delta(E' - \varepsilon_n) \right] \left[\sum_{K=1}^{\infty} \delta(E - \varepsilon_K - \delta) \right] \right\}, \quad (1.19)$$

onde δ é um infinitesimal positivo. A restrição (1.18) para E se traduz (para δK par) nas seguintes condições para os limites E_1 e E_2 do intervalo S :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\bar{K}-\delta K/2-1} &< E_1 < \varepsilon_{\bar{K}-\delta K/2} \\ \varepsilon_{\bar{K}+\delta K/2-1} &< E_2 < \varepsilon_{\bar{K}+\delta K/2} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Ambos E_1 e E_2 dependem novamente de Φ e da realização do potencial das impurezas, porém para $\delta K \gg 1$, podemos desconsiderar as restrições (1.20) e, portanto, manter S independente dessas grandezas. Assim, é possível calcular $\bar{I}(\Phi)$ fazendo a média no ensemble apenas do termo entre chaves na Eq. (1.19). Tal aproximação pode ser justificada com argumentos simples.

Cálculos numéricos mostram que, para uma dada realização do potencial das impurezas, $\varepsilon_n(\Phi)$ oscila com Φ com uma amplitude da ordem de d , o espaçamento médio dos níveis de energia na superfície de Fermi. Dos δK autovalores contidos em $S = [E_1, E_2]$ para $\Phi = 0$, por exemplo, apenas alguns deixarão o intervalo enquanto Φ varia de 0 a Φ_0 , e alguns outros entrarão em S . O erro devido a manutenção de S fixo é da ordem de $(\delta K)^{-1}$, o que é desprezível no caso em questão.

No caso da mudança do potencial aleatório, Al'tshuler e Shklovskii [40] estimaram, para Φ fixo, a variação ΔK com a desordem do número de autoestados num intervalo de comprimento E . Para $E > E_C$ (a energia de Thouless dada por $E_C = \hbar\pi^2 D/L^2$, D a constante de difusão), eles encontraram que $\Delta K \sim (E/E_C)^{3/4}$. Para manter o número de autovalores no intervalo $[0, E]$ fixo, E deveria variar de uma quantidade correspondente, $\Delta E \sim d(E/E_C)^{3/4}$. Para o experimento em questão, $E/d \cong 10^{10}$ e $E_C/d \cong 300$, tal que $\Delta E \approx 10^4 d$ é grande comparado a d , e nesse caso não podemos justificar o relaxamento das restrições (1.20) usando o fato de que δK é grande, como feito antes. Nesse caso, a justificativa é dada *a posteriori*: a média no ensemble da Eq. (1.19) depende explicitamente apenas da diferença $E - E'$; a dependência com a variável $E + E'$ é implícita através do espaçamento médio entre níveis. Mas este não muda significativamente quando a energia

varia alguns milhares de espaçamentos médios. Neste sentido, a média sobre o termo entre chaves da Eq. (1.19) é independente de E , e portanto também do comprimento do intervalo S , justificando a aproximação.

Antecipando os resultados a serem obtidos no Cap. 3, usamos que a média do termo entre colchetes da Eq. (1.19), escrito como $g(E, E')$, é uma função ímpar apenas da variável $\omega = E - E'$ e que cai rapidamente quando $|\omega|$ cresce. Assim,

$$\begin{aligned}
\bar{I}(\Phi) &= -\frac{2c}{\delta K} \int_S dE \int_0^E dE' g(E - E') \\
&= -\frac{2c}{\delta K} \int_S dE \int_0^E d\omega g(\omega) \\
&\cong -\frac{2c}{\delta K} \int_S dE \int_0^\infty d\omega g(\omega) \\
&= -2cd \int_0^\infty d\omega g(\omega).
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Mantivemos S fixo com comprimento $d\delta K$. Usando os mesmos passos no desenvolvimento da Eq. (1.17), podemos escrever $g(\omega)$ como

$$\begin{aligned}
g(\omega) &= \overline{\text{Tr}\{\delta(E - H)\} \text{Tr}\left\{\frac{\partial H}{\partial \Phi} \delta(E' - H)\right\}} \Big|_{\omega=E-E'} \\
&= (4\pi^2)^{-1} \left[\overline{\text{Tr}\left\{\frac{\partial H}{\partial \Phi} (E'^+ - H)^{-1}\right\} \text{Tr}\{(E^- - H)^{-1}\} + \text{c.c.}} \right] \Big|_{\omega=E-E'}.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

A barra representa a média sobre a desordem. Ao escrever a segunda linha da Eq. (1.22), foram omitidos os termos contendo produtos de duas funções de Green avançadas ou retardadas. Tais termos dão contribuições que caem rapidamente para distâncias maiores que as dimensões atômicas.

2

SUPERSIMETRIA

2.1 Variáveis de Grassmann

As variáveis de Grassmann são introduzidas de maneira completamente formal e se referem a elementos de uma álgebra não-comutativa conhecida como Álgebra de Grassmann. Num grupo com n elementos desse tipo, χ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, todos os elementos obedecem à seguinte regra de anticomutação:

$$\{\chi_i, \chi_j\} \stackrel{\text{def}}{=} \chi_i \chi_j + \chi_j \chi_i = 0, \quad (2.1)$$

para $1 \leq i, j \leq n$.

No caso particular em que $i = j$, encontramos que o quadrado de uma variável arbitrária χ_i é zero, e portanto também para qualquer potência maior do que um, isto é,

$$\chi_i^n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0; \\ \chi_i, & \text{se } n = 1; \\ 0, & \text{se } n \geq 2. \end{cases} \quad (2.2)$$

Com essa propriedade, vemos que qualquer função K de variáveis de Grassmann é um polinômio finito nessas variáveis, ou seja,

$$K(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n) = \sum_{\alpha_i=0,1} a(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \chi_1^{\alpha_1} \chi_2^{\alpha_2} \cdots \chi_n^{\alpha_n}. \quad (2.3)$$

Introduzimos aqui uma transformação linear de um conjunto de variáveis grassmannianas ρ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ no conjunto de variáveis χ_i :

$$\chi_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} \rho_k. \quad (2.4)$$

Calculando o produto das diferentes χ_i , podemos verificar que

$$\chi_1 \chi_2 \cdots \chi_n = \rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n \det a . \quad (2.5)$$

Podemos definir também a operação de conjugação complexa de uma variável de Grassmann em analogia a uma variável complexa comum. Nesse caso, temos que

$$(\chi)^* = \chi^* , \quad (2.6a)$$

$$(\chi^*)^* = -\chi , \quad (2.6b)$$

$$(\chi_1 \chi_2)^* = \chi_1^* \chi_2^* . \quad (2.6c)$$

Note que a segunda operação difere da definição usual, isto é, ao contrário do que ocorre para variáveis comuns, tomar duas vezes o complexo conjugado de uma variável de Grassmann não é igual à própria variável, mas sim *menos* ela. No entanto, esta propriedade combinada com a terceira garante que o objeto $\chi \chi^*$ é invariante sobre a operação de conjugação complexa. Vejamos:

$$(\chi \chi^*)^* = -\chi^* \chi = \chi \chi^* \quad (\text{c.q.d.})$$

Além disso, devemos notar que χ e χ^* devem ser tratadas como duas variáveis independentes, assim como uma variável complexa comum tem duas variáveis independentes, a parte real e a parte imaginária. No entanto, no caso das variáveis de Grassmann não existe uma maneira de fazer tal decomposição.

Duas outras operações que podem ser definidas para as variáveis de Grassmann são a derivação e a integração. Seja F uma função de uma única variável grassmanniana χ , então podemos calcular a derivada de F em relação a χ da maneira usual. Calculamos a variação ΔF relativa a uma variação $\Delta \chi$, isto é,

$$\Delta F = F(\chi + \Delta \chi) - F(\chi) . \quad (2.7)$$

Expandindo $F(\chi) = a + b\chi$, encontramos que

$$\Delta F = b\Delta \chi \quad \Rightarrow \quad \frac{dF}{d\chi} = b . \quad (2.8)$$

Caso F seja uma função de muitas variáveis, $F(\chi_1, \dots, \chi_n)$, é necessário definir dois tipos de derivadas, à esquerda e à direita, isto devido à propriedade de anticomutação

das variáveis. Vejamos a derivada parcial de F em relação a χ_i . Calculamos a variação ΔF fazendo a substituição $\chi_i \rightarrow \Delta\chi_i$ e então, usando a propriedade de anticomutação, movemos $\Delta\chi_i$ para a esquerda ou para a direita. A derivada à esquerda (direita) da função F em relação a χ_i é definida como o coeficiente de ΔF depois (antes) de $\Delta\chi_i$. Usando a notação $\overrightarrow{\partial}/\partial\chi_i$ para derivada à esquerda e $\overleftarrow{\partial}/\partial\chi_i$ para derivada à direita, temos

$$\Delta F = \Delta\chi_i \left(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\chi_i} F \right) = \left(F \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\chi_i} \right) \Delta\chi_i . \quad (2.9)$$

Exemplo 2.1 : *Seja $F = \chi_1 + 2\chi_1\chi_2$. Calcule a derivada à esquerda e à direita de F em relação a χ_1 .*

Calculemos a variação ΔF :

$$\Delta F = \Delta\chi_1 + 2\Delta\chi_1\chi_2 .$$

Pelas definições, encontramos

$$\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\chi_1} F = 1 + 2\chi_2 \quad \text{e} \quad F \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\chi_1} = 1 - 2\chi_2 .$$



A anticomutação das variáveis χ_i implica na anticomutação das operações de derivação em relação a muitas variáveis, em especial,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\chi_1\partial\chi_2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial\chi_2\partial\chi_1} . \quad (2.10)$$

A integração é definida de maneira completamente formal e coincide com a definição da derivada, como segue:

$$\int d\chi = \int d\chi^* = 0 \quad \text{e} \quad \int \chi d\chi = \int \chi^* d\chi^* = 1 . \quad (2.11)$$

Deve-se ressaltar que o símbolo de integração é puramente formal e não deve ser pensado como o limite de uma soma. Da mesma forma, o número 1 é arbitrário e definido por conveniência. Assim como no caso da derivação, no caso de uma integral múltipla, a

ordem da integração deve ser definida e respeitada devido à anticomutação das variáveis χ_i e $d\chi_i$. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \int \chi_1 \chi_2 d\chi_1 d\chi_2 &= - \int \chi_1 d\chi_1 \int \chi_2 d\chi_2 = -1 \\ \int \chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_4 d\chi_1 d\chi_2 d\chi_3 d\chi_4 &= \int \chi_1 d\chi_1 \int \chi_2 d\chi_2 \int \chi_3 d\chi_3 \int \chi_4 d\chi_4 = 1 . \end{aligned}$$

O resultado depende portanto do número de integrações. Para evitar tal dependência, definimos a integração múltipla com a ordem invertida das variáveis χ_i e das integrais, como segue

$$\int \chi_1 \chi_2 \cdots \chi_n d\chi_n d\chi_{n-1} \cdots d\chi_1 = 1 , \quad (2.12)$$

e obtemos sempre o valor +1. Para uma função K de n variáveis $\{\chi_i\}$ definida pela Eq. (2.3), temos que

$$\int K(\chi) d[\chi] = a(1, 1, \dots, 1) , \quad (2.13)$$

onde $d[\chi] \equiv d\chi_n d\chi_{n-1} \cdots d\chi_1$.

Uma transformação linear nas variáveis de integração como definida pela Eq. (2.4), implica que as diferenciais se transformam como

$$d\chi_i = \sum_{k=1}^n (a^{-1})_{ik} d\rho_k , \quad (2.14)$$

onde a^{-1} é a matriz inversa da matriz de transformação a . Nesse caso, o elemento de volume também se transforma como

$$d[\chi] = (\det a)^{-1} d[\rho] , \quad (2.15)$$

e as integrais se transformam como

$$\int K(\chi) d[\chi] = (\det a)^{-1} \int K(a\rho) d[\rho] . \quad (2.16)$$

É fácil também verificar com a ajuda das propriedades (2.3) e (2.11), que um “shift” nas variáveis de integração não altera o valor da integral, ou seja,

$$\int K(\chi + \rho) d[\chi] = \int K(\chi) d[\chi] . \quad (2.17)$$

Uma das integrais mais importantes e cujo uso será muito explorado, é a integral gaussiana. Sendo χ um vetor com n variáveis χ_i e $\chi^\dagger = (\chi^*)^T$, o seu transposto conjugado,

então temos que

$$I = \int \exp(-\chi^\dagger A \chi) \prod_{i=1}^n d\chi_i^* d\chi_i = \det A, \quad (2.18)$$

sendo A uma matriz hermitiana $n \times n$. Podemos provar a equação acima diagonalizando a matriz $A = u^\dagger \hat{\lambda} u$, onde $\hat{\lambda}$ é uma matriz diagonal com elementos reais e u uma matriz unitária. Fazendo a mudança de variáveis $\rho = u\chi$ e $\rho^\dagger = \chi^\dagger u^\dagger$, temos

$$I = \int \exp\left(-\sum_{i=1}^n \rho_i^* \lambda_i \rho_i\right) \prod_{i=1}^n d\rho_i^* d\rho_i. \quad (2.19)$$

Escrevendo a exponencial da soma como o produto de exponenciais e expandindo cada termo, encontramos

$$\begin{aligned} I &= \prod_{i=1}^n \int \exp(-\rho_i^* \lambda_i \rho_i) d\rho_i^* d\rho_i = \prod_{i=1}^n \int (1 - \lambda_i \rho_i^* \rho_i) d\rho_i^* d\rho_i \\ &= \prod_{i=1}^n \lambda_i = \det A. \end{aligned} \quad (2.20)$$

É interessante notar nesse ponto que uma integral gaussiana sobre variáveis complexas comuns S fornece

$$\int \exp(-S^\dagger A S) \prod_{i=1}^n (\pi)^{-1} d \operatorname{Re}(S_i) d \operatorname{Im}(S_i) = (\det A)^{-1}. \quad (2.21)$$

2.2 Supervetores e supermatrizes

É comum em física da matéria condensada o uso do prefixo *super* para se referir a todo objeto matemático que envolve a combinação dos dois tipos de variáveis: as comuns, com propriedades comutativas, e as grassmannianas, com propriedades anticomutativas. Embora, como veremos, os supervetores (ou supercampos) que aparecem na teoria não tenham uma interpretação física, pois são introduzidos apenas como uma ferramenta matemática, a linguagem se confunde com aquela usada na Supersimetria da Teoria Quântica dos Campos. Então, é usual se referir às variáveis comuns como bosônicas e às grassmannianas como fermiônicas em analogia. Deve-se ressaltar que em Matemática formal, costuma-se chamar um espaço de elementos comutativos e anticomutativos de espaço graduado, e portanto também vetores e matrizes graduados.

Um supervetor é definido como uma seqüência de variáveis comutativas S e anticomutativas χ da seguinte forma¹:

$$\theta = \begin{pmatrix} S \\ \chi \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_m \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \vdots \\ \chi_n \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

O supervetor transposto é obtido de forma usual

$$\theta = (S^T \quad \chi^T) \quad (2.23)$$

$$S^T = (S_1 \ S_2 \ \cdots \ S_m), \quad \chi^T = (\chi_1 \ \chi_2 \ \cdots \ \chi_n).$$

As operações de adição e subtração de supervetores, e a multiplicação por um escalar é feita da maneira usual para vetores.

O conjugado hermitiano θ^\dagger de um supervetor é definido por

$$\theta^\dagger = (\theta^T)^* \quad (2.24)$$

onde a operação de conjugação complexa (*) para as variáveis grassmannianas é a dada pelas Eq. (2.6) e para as variáveis comuns da forma usual.

O produto escalar (ou interno) de dois supervetores θ^i e θ^j é dado por

$$\theta^{i\dagger} \theta^j = \sum_{\alpha=1}^m S_\alpha^{i*} S_\alpha^j + \sum_{\alpha=1}^n \chi_\alpha^{i*} \chi_\alpha^j. \quad (2.25)$$

O módulo (ou comprimento) de um supervetor é dado pela Eq. (2.25) no caso em que $i = j$. É fácil notar que o módulo de um supervetor é uma grandeza real no sentido da conjugação complexa, ou seja,

$$(\theta^{i\dagger} \theta^i)^* = \theta^{i\dagger} \theta^i. \quad (2.26)$$

No caso de $i \neq j$, encontramos a seguinte propriedade do produto escalar:

$$(\theta^{i\dagger} \theta^j)^* = \theta^{j\dagger} \theta^i. \quad (2.27)$$

¹Neste ponto, preferimos seguir a convenção de Verbaarschot, Weidenmüller e Zirnbauer [5] diferentemente de Efetov [4] que define o supervetor com os primeiros elementos anticomutativos e depois os comutativos. Isso gera pequenas diferenças de sinal na definição da supertransposição e do supertraço.

Uma supermatriz é definida como sendo uma transformação linear F no superspaço \mathbb{S} , $F : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$, que leva um supervetor θ em outro supervetor $\tilde{\theta}$,

$$\tilde{\theta} = F\theta. \quad (2.28)$$

É claro que $\tilde{\theta}$ deve ter a mesma estrutura do supervetor θ , o que implica que F deve ser da seguinte forma:

$$F = \begin{pmatrix} a & \sigma \\ \rho & b \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

onde a e b são matrizes de elementos comutativos e dimensões $m \times m$ e $n \times n$ respectivamente, e σ e ρ matrizes com elementos anticomutativos e dimensões $m \times n$ e $n \times m$. É usual que se represente os elementos comutativos de supervetores e supermatrizes por letras latinas, e os anticomutativos por letras gregas.

O produto de duas supermatrizes F e G de ordem $(m+n) \times (m+n)$ é feito segundo as regras convencionais

$$(FG)_{ij} = \sum_{k=1}^{m+n} F_{ik}G_{kj}. \quad (2.30)$$

A supermatriz transposta F^T é introduzida a partir da definição usual como segue

$$\theta_1^T F^T \theta_2 = (F\theta_1)^T \theta_2, \quad (2.31)$$

e a transposta de uma matriz comum, seja com elementos comutativos ou anticomutativos, é dada simplesmente pela troca dos índices. Devido a anticomutação dos elementos grassmannianos, a transposição de uma supermatriz não é análoga à de uma matriz comum. Testemos num exemplo.

Exemplo 2.2 : *Determine a transposta da seguinte supermatriz bidimensional:*

$$F = \begin{pmatrix} a & \sigma \\ \rho & b \end{pmatrix}.$$

Sejam $\theta_1^T = (S_1 \ \chi_1)$ e $\theta_2^T = (S_2 \ \chi_2)$ dois supervetores quaisquer e

$$F^T = \begin{pmatrix} a' & \sigma' \\ \rho' & b' \end{pmatrix},$$

a supermatriz transposta de F . Usando a definição da Eq. (2.31), vemos que

$$S_1(a'S_2 + \sigma'\chi_2) + \chi_1(\rho'S_2 + b\chi_2) = (aS_1 + \sigma\chi_1)S_2 + (\rho S_1 + b\chi_1)\chi_2.$$

Usando a anticomutatividade das variáveis grassmannianas, encontramos que

$$F^T = \begin{pmatrix} a & \rho \\ -\sigma & b \end{pmatrix}.$$



O exemplo acima pode ser generalizado para mais dimensões, e de forma geral encontramos que

$$F^T = \begin{pmatrix} a^T & \rho^T \\ -\sigma^T & b^T \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

onde, como já mencionado, a operação de transposição das matrizes a, b, σ e ρ é feita da maneira usual. Notamos então que a supertransposição difere da transposição comum pela mudança de sinal no bloco esquerdo inferior². Usando ainda a definição dada na Eq. (2.31), é fácil verificar a seguinte propriedade

$$(F_1 F_2)^T = F_2^T F_1^T. \quad (2.33)$$

A matriz conjugada hermitiana é definida da maneira usual

$$F^\dagger = (F^T)^*, \quad (2.34)$$

com as seguintes propriedades

$$(F_1 F_2)^\dagger = F_2^\dagger F_1^\dagger \quad \text{e} \quad (F^\dagger)^\dagger = F. \quad (2.35)$$

Vale notar que a operação inversa à conjugação hermitiana é ela própria, enquanto a da supertransposição não, ou seja, uma dupla supertransposição não leva uma supermatriz de volta a ela mesma.

²Na notação de Efetov [4], é o bloco superior direito que tem o sinal negativo

2.3 Supertraço e superdeterminante

Uma operação fundamental na teoria de matrizes é tomar o traço de uma matriz. No entanto, a definição usual do traço como a soma de todos os elementos da diagonal principal não é útil no caso de supermatrizes pois não preserva uma propriedade importante: a invariância por permutações cíclicas. Para uma supermatriz F do tipo da Eq. (2.28), temos que o supertraço (trg) é definido como

$$\text{trg } F = \text{tr } a - \text{tr } b \quad (2.36)$$

onde tr representa a operação convencional de traço³.

Exemplo 2.3 : *Mostre que o supertraço como definido na Eq. (2.36) preserva a invariância por permutação cíclica.*

Sejam F_1 e F_2 duas supermatrizes do tipo da Eq. (2.28). Calculando o supertraço do produto dessas matrizes, temos

$$\begin{aligned} \text{trg } F_1 F_2 &= \text{trg} \begin{pmatrix} a_1 & \sigma_1 \\ \rho_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & \sigma_2 \\ \rho_2 & b_2 \end{pmatrix} \\ &= \text{tr}[a_1 a_2 + \sigma_1 \rho_2 - \rho_1 \sigma_2 - b_1 b_2] \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \text{trg } F_2 F_1 &= \text{trg} \begin{pmatrix} a_2 & \sigma_2 \\ \rho_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \sigma_1 \\ \rho_1 & b_1 \end{pmatrix} \\ &= \text{tr}[a_2 a_1 + \sigma_2 \rho_1 - \rho_2 \sigma_1 - b_2 b_1] \end{aligned}$$

Podemos usar agora a propriedade de invariância cíclica do traço convencional, e a anticomutação das matrizes σ e ρ para mostrar que

$$\text{trg } F_1 F_2 = \text{trg } F_2 F_1 .$$



³Na convenção de Efetov, teríamos o sinal oposto para o traço, ou seja $\text{trg } F = \text{tr } b - \text{tr } a$.

Além disso, a seguinte relação é válida:

$$\text{trg } F = \text{trg } F^T . \quad (2.37)$$

Exemplo 2.4 : *Mostre que o produto escalar de dois supervetores pode ser escrito com o supertraço do diádico formado por esses supervetores, isto é*

$$\varphi_1^T \cdot \varphi_2 = \text{trg}[\varphi_2 \varphi_1^T] .$$

Sejam S_1^i e S_2^i variáveis comuns e χ_1^i e χ_2^i variáveis de Grassmann. Os supervetores são dados por

$$\varphi_1^T = (S_1^i \quad \chi_1^i) \quad \text{e} \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} S_2^i \\ \chi_2^i \end{pmatrix} .$$

O produto escalar é portanto:

$$\varphi_1^T \cdot \varphi_2 = \sum_i S_1^i S_2^i + \chi_1^i \chi_2^i .$$

Sendo M o diádico de φ_2 e φ_1^T , então suas componentes são

$$M_{ij} = (\varphi_2 \varphi_1^T)_{ij} = \begin{pmatrix} S_2^i S_1^j & S_2^i \chi_1^j \\ \chi_2^i S_1^j & \chi_2^i \chi_1^j \end{pmatrix} .$$

É fácil ver pela definição do supertraço que

$$\begin{aligned} \text{trg } M &= \text{tr } S_2^i S_1^j - \text{tr } \chi_2^i \chi_1^j = \sum_i (S_2^i S_1^i - \chi_2^i \chi_1^i) \\ &= \sum_i (S_1^i S_2^i + \chi_1^i \chi_2^i) . \end{aligned}$$



O superdeterminante pode ser definido a partir do supertraço em analogia ao determinante e traço convencionais. A relação é a seguinte

$$\text{detg } F = \exp(\text{trg } \ln F) . \quad (2.38)$$

A partir dessa igualdade, podemos derivar uma fórmula para calcular o superdeterminante de uma supermatriz do tipo da Eq. (2.28). Partimos da identidade

$$F = \begin{pmatrix} a & \sigma \\ \rho & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}\sigma \\ b^{-1}\rho & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

e calculamos o argumento da exponencial da Eq. (2.38) como

$$\begin{aligned} \text{trg ln } F &= \text{trg ln} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \text{trg ln} \left[1 + \begin{pmatrix} 0 & a^{-1}\sigma \\ b^{-1}\rho & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \text{tr ln } a - \text{tr ln } b + \frac{1}{2} \text{trg ln} \left[1 - \begin{pmatrix} a^{-1}\sigma b^{-1}\rho & 0 \\ 0 & b^{-1}\rho a^{-1}\sigma \end{pmatrix} \right] \\ &= \text{tr ln } a - \text{tr ln } b + \text{tr ln}[1 - a^{-1}\sigma b^{-1}\rho] \\ &= \text{tr ln}[a - \sigma b^{-1}\rho] + \text{tr ln } b^{-1} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Da relação acima e da igualdade $\det M = \exp(\text{tr ln } M)$ para matrizes comuns, obtemos

$$\detg F = \det[a - \sigma b^{-1}\rho] \det b^{-1}. \quad (2.41)$$

Por fim, é fácil mostrar, usando a relação do superdeterminante com o supertraço, que

$$\detg F_1 F_2 = \detg F_1 \detg F_2. \quad (2.42)$$

2.4 Superintegrais

A definição de uma superintegral é uma simples generalização de uma integral sobre muitas variáveis, onde agora combinamos variáveis comuns com variáveis de Grassmann. Se $f(S, \chi)$ é uma função de m variáveis ordinárias S e n variáveis grassmannianas χ , então a seguinte integral é bem definida:

$$I_{mn} = \int f(S, \chi) d[S] d[\chi], \quad (2.43)$$

com o elementos de volume

$$d[S] = \pi^{-m/2} dS_1 dS_2 \cdots dS_m,$$

$$d[\chi] = d\chi_n d\chi_{n-1} \cdots d\chi_1.$$

As variáveis S devem ser integradas dentro de um domínio de integração B , onde se assume que a integral seja convergente.

Assim como no cálculo com variáveis comuns, uma transformação de variáveis gera um Jacobiano, no cálculo supersimétrico, aparece o seu equivalente, chamado Bereziniano [41]. Para uma função f que se anula nas fronteiras do domínio de integração B , temos

$$\int f(S, \chi) d\chi dS = \int f(S(X, \eta), \chi(X, \eta)) J(S, \chi|X, \eta) d\eta dX. \quad (2.44)$$

O Bereziniano $J(S, \chi|X, \eta)$ é o superdeterminante da supermatriz R das derivadas parciais.

$$J(S, \chi|X, \eta) = \text{detg } R, \quad R = \begin{pmatrix} p & \alpha \\ \beta & q \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

$$p_{ik} = \frac{\partial S_i}{\partial X_k} \quad \alpha_{ik} = S_i \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \eta_k}}$$

$$\beta_{ik} = \frac{\partial \chi_i}{\partial X_k} \quad q_{ik} = \chi_i \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \eta_k}}$$

Claramente, a superintegral de maior interesse é a gaussiana. Sendo θ um supervetor e F uma supermatriz, então a seguinte integral gaussiana é obtida:

$$\int \exp(-\theta^\dagger F \theta) d\theta^* d\theta = (\text{detg } F)^{-1} \quad (2.46)$$

$$d\theta^* d\theta = \pi^{-m} \prod_{k=1}^m dS_k^* dS_k \prod_{i=1}^n d\chi_i^* d\chi_i \quad (2.47)$$

É fácil verificar que no caso em que $m = n$ e F é bloco-diagonal com blocos idênticos em relação às variáveis S e χ , o superdeterminante é um. Essa característica se mostra muito conveniente na hora de se escrever uma função de partição de um sistema.

CÁLCULO PERTURBATIVO

3.1 Modelo IWZ

O modelo IWZ, em referência às iniciais de seus autores Iida, Weidenmüller e Zuk [12], foi proposto como uma nova abordagem ao problema das flutuações da condutância, g , em sistemas mesoscópicos que, em particular, leva em conta a influência do acoplamento com os condutores externos. Nesse trabalho é estudada uma amostra linear, de comprimento L com desordem no regime metálico. A abordagem consiste em dividir a amostra em K fatias de largura ℓ igual ao caminho livre médio, e assumir que as desordens em diferentes fatias não são correlacionadas. O Hamiltoniano da desordem é descrito por uma matriz aleatória com uma estatística descrita pelo Ensemble Ortogonal Gaussiano (sigla GOE em inglês). Foi mostrado na Ref. [12] que existe uma nova escala de comprimento L_0 que define a dependência da condutância com o acoplamento aos condutores externos. Para $L > L_0$, as propriedades de g dependem fracamente do acoplamento externo, e para L muito grande, coincidem com os resultados para condutores quase unidimensionais no limite de localização fraca. Por outro lado, para $L < L_0$, o acoplamento com os condutores afeta fortemente o comportamento tanto da condutância média quanto de sua variância. Além disso, mostrou-se que a suposição de uma estatística GOE para o Hamiltoniano é suficiente para se obter as flutuações universais da condutância.

No nosso caso, consideramos um anel metálico mesoscópico, quase unidimensional, a baixa temperatura. O perímetro do anel é L . Um campo magnético constante e homogêneo, \mathbf{B} , atravessa o anel perpendicularmente ao plano deste. Consideramos apenas a fase de Aharonov-Bohm, $\Phi = A\mathbf{B}$, dada pela área do anel A e o campo magnético, e desprezamos o efeito deste no movimento orbital dos elétrons no anel. Quando um elétron completa uma volta no anel, ele adquire uma fase $\exp(\pm 2i\pi\Phi/\Phi_0)$, o sinal no expoente dependendo

do sentido de circulação do elétron. O elétron é espalhado difusamente pelas impurezas no anel, e assumimos que essa desordem é fraca, tal que $k_F \ell \gg 1$, onde k_F é o número de onda de Fermi e ℓ é o caminho livre médio elástico. Chamamos o comprimento de coerência de fase de L_ϕ e assumimos ao longo do trabalho que L_ϕ é menor do que o comprimento de localização ξ . Exceto para o efeito do comprimento de coerência de fase, desprezamos a interação Coulombiana entre os elétrons. Assim, efetivamente, lidamos com um problema de um único elétron.

Seguindo o modelo IWZ, consideramos o anel como sendo formado de K fatias com índices $k = 1, \dots, K$. As superfícies separando fatias vizinhas são arranjadas radialmente (ou, equivalentemente, transversalmente à direção da corrente através do anel). A distância entre superfícies vizinhas, isto é, a espessura longitudinal de cada fatia, é dada por $d = L/K \sim \ell$. Eventualmente, consideraremos o limite contínuo fazendo $K \rightarrow \infty$ e $d \rightarrow 0$. Em cada fatia, introduzimos uma base ortonormal de estados de uma partícula $|k\mu\rangle$ e associamos os operadores de criação e aniquilação $\alpha_{k\mu}^\dagger$ e $\alpha_{k\mu}$. Aqui, $\mu = 1, 2, \dots, N$ é um índice corrente. Eventualmente, tomamos o limite $N \rightarrow \infty$. O Hamiltoniano do sistema é a soma de dois termos. A dinâmica dentro de cada fatia é descrita pelo Hamiltoniano

$$H_0 = \sum_k \sum_{\mu\nu} (H_0)_{\mu\nu}^{(k)} \alpha_{k\mu}^\dagger \alpha_{k\nu} . \quad (3.1)$$

Desordem é simulada supondo que o Hamiltoniano $(H_0)^{(k)}$ em cada fatia é um membro de um *ensemble* de matrizes aleatórias. Na ausência do campo magnético externo, \mathbf{B} , o sistema tem invariância por inversão temporal. Introduzimos \mathbf{B} de forma explícita, de modo que podemos usar um *ensemble* gaussiano ortogonal (GOE) para $(H_0)^{(k)}$. Os elementos de matriz $(H_0)_{\mu\nu}^{(k)}$ são variáveis aleatórias reais distribuídas de forma gaussiana, com valor médio nulo e um segundo momento dado por

$$\overline{(H_0)_{\mu\nu}^{(k)} (H_0)_{\mu'\nu'}^{(k')}} = \frac{\lambda^2}{N} \delta_{kk'} [\delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'} + \delta_{\mu\nu'} \delta_{\nu\mu'}] . \quad (3.2)$$

A barra denota a média no *ensemble*. O parâmetro λ define a largura 4λ do espectro e o espaçamento médio entre níveis de uma partícula na superfície de Fermi é $d \propto \lambda/N^1$. Os Hamiltonianos de desordem em diferentes fatias não são correlacionados. O movimento

¹Cf. Ap. B

do elétron através do anel é causado pelo Hamiltoniano de “pulo”, H_1 , conectando fatias vizinhas e dado por

$$H_1 = \sum_{k=1}^K \sum_{\mu=1}^N [v \alpha_{k\mu}^\dagger \alpha_{(k+1)\mu} + v^* \alpha_{(k+1)\mu}^\dagger \alpha_{k\mu}] . \quad (3.3)$$

Usamos uma notação cíclica tal que $\alpha_{(K+1)\mu}^\dagger = \alpha_{1\mu}^\dagger$. Assumimos que os termos de “pulo” são diagonais nos índices $\{\mu\nu\}$ e as amplitudes são complexas,

$$v = v_0 \exp(2i\pi\Phi/(K\Phi_0)) , \quad v^* = v_0 \exp(-2i\pi\Phi/(K\Phi_0)) , \quad (3.4)$$

onde v_0 é real. O fatores de fase na Eq. (3.4) garantem que, quando um elétron dá uma volta completa no anel, ele adquire um fator de fase total correto $\exp\{2\pi i\Phi/\Phi_0\}$. Na Ref. [12], foi mostrada a equivalência desse modelo com um modelo onde a desordem é simulada por um Hamiltoniano da forma $T+V$, com T a energia cinética e V um potencial de desordem aleatório.

Para calcular a corrente persistente, usamos o resultado obtido na Eq. (1.21) do Cap. 1.

$$\bar{I}(\Phi) = -\frac{2cd}{4\pi^2} \int_0^\infty d\omega \left[\overline{\text{Tr} \left\{ \frac{\partial H}{\partial \Phi} (E'^+ - H)^{-1} \right\} \text{Tr} \{ (E^- - H)^{-1} \} + \text{c.c.}} \right] \Big|_{\omega=E-E'} . \quad (3.5)$$

As energias E'^+ e E^- carregam incrementos imaginários infinitesimais positivo e negativo respectivamente.

3.2 Funcional gerador e supersimetria

Para se calcular a média no *ensemble* do produto dos dois traços da Eq. (3.5), usamos a técnica de supersimetria, em especial a combinação de integrais gaussianas de variáveis de Grassmann e comuns. Inicialmente, precisamos construir um funcional gerador, a partir do qual obteremos a Eq. (3.5).

Sejam, portanto, $S_{k\mu}$ ($\chi_{k\mu}$) o elemento de um vetor KN -dimensional de variáveis complexas ordinárias (de Grassmann) e D uma matriz $KN \times KN$, com uma parte imaginária positiva de forma a assegurar a convergência das integrais gaussianas como definidas nas

Eqs. (2.18) e (2.21). Usamos a identidade $\det D = \exp(\text{Tr} \ln D)$ e escrevemos explicitamente todos os índices nas multiplicações dentro da exponencial:

$$\int d[S] \exp \left\{ i \sum_{kl} \sum_{\mu\nu} S_{k\mu}^* D_{\mu\nu}^{(kl)} S_{l\nu} \right\} = \exp \{ -\text{Tr} \ln D \} \quad (3.6)$$

$$\int d[\chi] \exp \left\{ i \sum_{kl} \sum_{\mu\nu} \chi_{k\mu}^* D_{\mu\nu}^{(kl)} \chi_{l\nu} \right\} = \exp \{ \text{Tr} \ln D \}. \quad (3.7)$$

Definimos, agora, o seguinte funcional gerador a partir do vetor S :

$$\begin{aligned} Z_S[\delta\Phi] &\equiv \int d[S] \exp \left\{ i \sum_{kl} \sum_{\mu\nu} S_{k\mu}^* (E'^+ \delta_{\mu\nu} \delta_{kl} - H_{\mu\nu}^{(kl)}(\Phi + \delta\Phi)) S_{l\nu} \right\} \\ &= \exp \{ -\text{Tr} \ln (E'^+ - H(\Phi + \delta\Phi)) \}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde $\delta\Phi$ é uma variável auxiliar que servirá apenas como artifício matemático para se obter o primeiro traço da Eq. (3.5). Derivando, portanto, o funcional acima em relação a $\delta\Phi$, encontramos

$$\left. \frac{\partial Z_S[\delta\Phi]}{\partial \delta\Phi} \right|_{\delta\Phi=0} = (\det[E'^+ - H(\Phi)])^{-1} \text{Tr} \left\{ \frac{\partial H}{\partial \Phi} (E'^+ - H(\Phi))^{-1} \right\}. \quad (3.9)$$

Podemos, igualmente, definir um funcional em termos dos vetores χ ,

$$\begin{aligned} Z_\chi[\delta\Phi] &\equiv \int d[\chi] \exp \left\{ i \sum_{kl} \sum_{\mu\nu} \chi_{k\mu}^* (E'^+ \delta_{\mu\nu} \delta_{kl} - H_{\mu\nu}^{(kl)}(\Phi - \delta\Phi)) \chi_{l\nu} \right\} \\ &= \exp \{ \text{Tr} \ln (E'^+ - H(\Phi - \delta\Phi)) \}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

e obter

$$\left. \frac{\partial Z_\chi[\delta\Phi]}{\partial \delta\Phi} \right|_{\delta\Phi=0} = \det[E'^+ - H(\Phi)] \text{Tr} \left\{ \frac{\partial H}{\partial \Phi} (E'^+ - H(\Phi))^{-1} \right\}. \quad (3.11)$$

Tomando, finalmente, a derivada do produto desses dois funcionais em relação a $\delta\Phi$, obtemos

$$\left. \frac{\partial Z_S[\delta\Phi] Z_\chi[\delta\Phi]}{\partial \delta\Phi} \right|_{\delta\Phi=0} = 2 \text{Tr} \left\{ \frac{\partial H}{\partial \Phi} (E'^+ - H(\Phi))^{-1} \right\}, \quad (3.12)$$

que fornece o traço que queríamos.

Usaremos agora o formalismo de supersimetria ao combinar ambas as variáveis ordinárias e as de Grassmann num único supervetor, assim definido

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} S_1 \\ \chi_1 \end{pmatrix} \quad \varphi_1^\dagger = (S_1^* \quad \chi_1^*). \quad (3.13)$$

(Aqui omitimos os índices k, l, μ e ν). Da mesma forma, introduzimos a supermatriz

$$D_1 = \begin{pmatrix} D^+(\phi + \delta\phi) & 0 \\ 0 & D^+(\phi - \delta\phi) \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

onde $D^+(\phi) = E'^+ - H(\phi)$ e ϕ é uma notação breve para $2\pi\Phi/(K\Phi_0)$. Explicitando todos os índices e termos, temos

$$(D_1)_{\mu\nu}^{(kl)} = [E'^+ \delta_{\mu\nu} - (H_0)_{\mu\nu}^{(k)}] \otimes \mathbf{1}_2 \delta_{kl} - v_0 [e^{i(\phi\mathbf{1}_2 + \delta\phi k_1)} \delta_{k,l-1} + e^{-i(\phi\mathbf{1}_2 + \delta\phi k_1)} \delta_{k,l+1}] \delta_{\mu\nu}, \quad (3.15)$$

onde $k_1 = \text{diag}(1, -1)$ e $\mathbf{1}_2 = \text{diag}(1, 1)$ é a matriz unitária 2×2 .

Com essa notação, o funcional gerador é facilmente escrito como (Cf. Eq. (2.46))

$$Z_1 = \int d[\varphi_1] e^{i\varphi_1^\dagger D_1 \varphi_1} = (\text{Detg } D_1)^{-1}, \quad (3.16)$$

onde $d[\varphi_1]$ representa o produto $d[S]d[\chi]$ e Detg , o superdeterminante, corre sobre todos os índices (k, μ e do superespaço).

Agora, se tomamos a derivada de Z_1 em relação a $\delta\phi$, encontramos

$$\left. \frac{\partial Z_1}{\partial \delta\phi} \right|_{\delta\phi=0} = (\text{Detg } D_1)^{-1} \Big|_{\delta\phi=0} \text{Trg} \left\{ \left. \frac{\partial H}{\partial \phi} k_1 (D_1)^{-1} \right|_{\delta\phi=0} \right\}. \quad (3.17)$$

É fácil notar que $\text{Detg } D_1 = 1$ quando $\delta\phi = 0$ e que, para uma matriz bloco-diagonal \tilde{M} da forma $\tilde{M} = \text{diag}(M, M)$, o supertraço $\text{Trg } \tilde{M} k_1 = 2 \text{Tr } M$. Assim, obtemos

$$\left. \frac{\partial Z_1}{\partial \delta\phi} \right|_{\delta\phi=0} = 2 \text{Tr} \left\{ \left. \frac{\partial H}{\partial \phi} [E'^+ - H(\phi)]^{-1} \right\}, \quad (3.18)$$

ou, equivalentemente,

$$\text{Tr} \left\{ \left. \frac{\partial H}{\partial \Phi} [E'^+ - H(\Phi)]^{-1} \right\} = \frac{2\pi}{K\Phi_0} \frac{1}{2} \left. \frac{\partial Z_1}{\partial \delta\phi} \right|_{\delta\phi=0}. \quad (3.19)$$

Pelo mesmo procedimento, podemos obter o segundo traço da Eq. (3.5), definindo um supervetor $\varphi_2^T = (S_2, \chi_2)$ e uma supermatriz D_2 dada por

$$(D_2)_{\mu\nu}^{(kl)} = [E^- \delta_{\mu\nu} \delta_{kl} - H_{\mu\nu}^{(kl)}(\Phi)] \otimes \mathbf{1}_2 - j k_2 \delta_{\mu\nu} \delta_{kl}, \quad (3.20)$$

onde $k_2 = \text{diag}(1, -1)$. O funcional gerador nesse caso é

$$Z_2 = \int d[\varphi_2] e^{-i\varphi_2^\dagger D_2 \varphi_2} = (\text{Detg } D_2)^{-1}. \quad (3.21)$$

Note o sinal negativo da exponencial para garantir a convergência da integral pois a parte imaginária de D_2 é negativa. Tomando a derivada de Z_2 com respeito a j e fazendo $j = 0$, encontramos o traço que queríamos:

$$\text{Tr}\{[E^- - H(\Phi)]^{-1}\} = \frac{1}{2} \frac{\partial Z_2}{\partial j} \Big|_{j=0}. \quad (3.22)$$

Para simplificar ainda mais a notação, introduzimos um supervetor φ , dado por

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

e redefinimos as matrizes k_1 e k_2 de forma a acompanhar o aumento dimensional:

$$k_1 = \text{diag}(1, -1, 0, 0), \quad (3.24)$$

$$k_2 = \text{diag}(0, 0, 1, -1). \quad (3.25)$$

Introduzimos ainda uma nova supermatriz $L = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$, e definimos $E = (E'^+ + E^-)/2$ e $\omega = E^- - E'^+$. Com essa nova notação, temos

$$Z = \int d[\varphi] e^{i\varphi^\dagger L^{1/2} D L^{1/2} \varphi} = (\text{Detg } D)^{-1}, \quad (3.26)$$

onde

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}^{(kl)} &= \left(E \mathbf{1}_4 - \frac{\omega}{2} L \right) \delta_{\mu\nu} \delta_{kl} - (H_0)_{\mu\nu}^{(k)} \delta_{kl} \mathbf{1}_4 \\ &\quad - [V(\phi + \delta\phi k_1) \delta_{k,l-1} + V(-\phi - \delta\phi k_1) \delta_{k,l+1}] \delta_{\mu\nu} - j k_2 \delta_{\mu\nu} \delta_{kl} \end{aligned} \quad (3.27)$$

e $V(\phi) = v_0 \exp\{i\phi \mathbf{1}_4\}$.

Assim, temos que o produto dos traços da Eq. (3.5) pode ser obtido de

$$\text{Tr}\left\{\frac{\partial H}{\partial \Phi}(E'^+ - H)^{-1}\right\} \text{Tr}\{(E^- - H)^{-1}\} = \frac{2\pi}{K\Phi_0} \frac{1}{4} \frac{\partial Z}{\partial j \partial \delta \phi} \Big|_{\delta\phi=0=j}. \quad (3.28)$$

Até o presente momento, o supervetor $\varphi_{k\mu}$ tem dimensão quatro, com duas variáveis ordinárias $S_{pk\mu}$ ($p = 1, 2$) e duas variáveis de Grassmann, $\chi_{pk\mu}$. No entanto, por questões técnicas, precisamos dobrar o espaço, de forma a dar prosseguimento aos cálculos, sem qualquer prejuízo ao formalismo. Usamos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} \varphi^\dagger L^{1/2} D L^{1/2} \varphi &= \frac{1}{2} \varphi^\dagger L^{1/2} D L^{1/2} \varphi + \frac{1}{2} [\varphi^\dagger L^{1/2} D L^{1/2} \varphi]^T \\ &= \frac{1}{2} \Psi^\dagger L^{1/2} D' L^{1/2} \Psi. \end{aligned} \quad (3.29)$$

O supervetor Ψ pode ser construído pela simples justaposição de φ e φ^* , isto é,

$$\Psi^T = (\varphi, \varphi^*) \Rightarrow (S_1, \chi_1, S_2, \chi_2, S_1^*, \chi_1^*, S_2^*, \chi_2^*), \quad (3.30)$$

e as supermatrizes têm a forma

$$D' = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D^T \end{pmatrix}, \quad L' = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L^T \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Não é difícil ver que $L^T = L$ e $D^T(\phi) = D(-\phi)$. Para uma melhor clareza na notação, reordenamos o vetor Ψ da seguinte forma

$$\Psi^T = (S_1, S_1^*, \chi_1, \chi_1^*, S_2, S_2^*, \chi_2, \chi_2^*). \quad (3.32)$$

As supermatrizes devem ser modificadas de acordo, e se escrevem

$$L' = \text{diag}(1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1) \quad (3.33)$$

$$k_1 = \text{diag}(1, 1, -1, -1, 0, 0, 0, 0) \quad (3.34)$$

$$k_2 = \text{diag}(0, 0, 0, 0, 1, 1, -1, -1) \quad (3.35)$$

Introduzimos ainda uma supermatriz

$$\tau_3 = \text{diag}(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1)$$

para dar conta da transposição da supermatriz $V(\phi)$. Assim temos

$$\begin{aligned} D'_{\mu\nu}{}^{(kl)} &= [E\mathbf{1}_8 - \frac{\omega}{2}L']\delta_{\mu\nu}\delta_{kl} - (H_0)_{\mu\nu}^{(k)}\delta_{kl} \otimes \mathbf{1}_8 \\ &\quad - [V(\phi + \delta\phi k_1)\delta_{k,l-1} + V(-\phi - \delta\phi k_1)\delta_{k,l+1}]\delta_{\mu\nu} - jk_2 \delta_{\mu\nu}\delta_{kl} \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$V(\phi) = v_0 \exp\{i\phi\tau_3\}. \quad (3.37)$$

Observamos que exceto por H_0 , todas as outras matrizes são diagonais no espaço dos estados $|\mu\rangle$ gerados pela desordem. Aproveitamos então aqui para simplificar a notação e definir as seguintes supermatrizes:

$$\hat{E} = E\mathbf{1}_8 \otimes \mathbf{1}_K \quad (3.38a)$$

$$\hat{\omega} = \omega L' \otimes \mathbf{1}_K \quad (3.38b)$$

$$\hat{V}_{kl} = V(\phi + \delta\phi k_1)\delta_{k,l-1} + V(-\phi - \delta\phi k_1)\delta_{k,l+1} \quad (3.38c)$$

$$\hat{J} = jk_2 \otimes \mathbf{1}_K \quad (3.38d)$$

Todas essas são supermatrizes num espaço de $(8K \times 8K)$ dimensões e diagonais, exceto por V que é tridiagonal no espaço K .

O funcional gerador é agora escrito como

$$Z = \int d[\Psi] \exp\left\{\frac{i}{2}\Psi^\dagger L^{1/2} D' L^{1/2} \Psi\right\} = (\text{Det}g D')^{-1} \quad (3.39)$$

onde $d[\Psi] = \sum_p d[S_p]d[\chi_p]$. Note que, embora a dimensão do superespaço tenha sido dobrada, o número de variáveis de integração continua o mesmo, o que é compensado pelo fator $\frac{1}{2}$ que aparece agora no expoente.

A expressão para a corrente fica

$$\bar{I}(\Phi) = -\frac{cd}{4\pi K \Phi_0} \int_0^\infty d\omega \left(\left. \frac{\partial^2 \bar{Z}}{\partial \delta \phi \partial j} \right|_{\delta \phi=0=j} + \text{c.c.} \right). \quad (3.40)$$

3.3 Média no *ensemble*

Para um Hamiltoniano H de dimensão $N \times N$, membro do *GOE* com média zero, podemos mostrar a seguinte igualdade

$$\overline{e^{-i \text{Tr} HA}} = e^{-\frac{1}{2} \overline{(\text{Tr} HA)^2}}, \quad (3.41)$$

onde A é uma matrix fixa $N \times N$. Uma vez que $\bar{H} = 0$, podemos expandir a exponencial da seguinte forma

$$\begin{aligned} \overline{e^{-i \text{Tr} HA}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \overline{(\text{Tr} HA)^{2n}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (2n-1)!! \left[\overline{(\text{Tr} HA)^2} \right]^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{2} \overline{(\text{Tr} HA)^2} \right]^n \end{aligned} \quad (3.42)$$

Aqui usamos o teorema de Wick para expressar o fato de que para qualquer distribuição gaussiana, todos os momentos se fatorizam em segundos momentos e há $(2n-1)!! = (2n)!/(2^n n!)$ maneiras de se combinar os pares.

Usando a propriedade do supertraço descrita no Ex. 2.4, podemos escrever

$$(A^{(k)})_{\mu\nu} \equiv L^{1/2} \Psi_{k\mu} \Psi_{k\nu}^\dagger L^{1/2}, \quad (3.43)$$

tal que

$$\frac{i}{2} \sum_{k,l} \sum_{\mu,\nu} \Psi_{k\mu}^\dagger L^{1/2} (-H_0)_{\mu\nu}^{(k)} \delta_{kl} L^{1/2} \Psi_{l\nu} = -i \text{Trg} \frac{1}{2} H_0 A. \quad (3.44)$$

Usando a Eq. (3.2), encontramos que

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{1}{2} \text{Trg} H_0 A\right)^2} &= \frac{\lambda^2}{4N} \sum_{k,k'} \sum_{\substack{\mu,\mu' \\ \nu,\nu'}} (\delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'} + \delta_{\mu\nu'} \delta_{\nu\mu'}) \delta_{kk'} \Psi_{k\mu}^\dagger L \Psi_{k\nu} \Psi_{k'\mu'}^\dagger L \Psi_{k'\nu'} \\ &= \frac{\lambda^2}{4N} \sum_k \sum_{\mu,\nu} [\Psi_{k\mu}^\dagger L \Psi_{k\nu} \Psi_{k\mu}^\dagger L \Psi_{k\nu} + \Psi_{k\mu}^\dagger L \Psi_{k\nu} \Psi_{k\nu}^\dagger L \Psi_{k\mu}] \\ &= \frac{\lambda^2}{2N} \text{Trg} A^2. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Na última passagem usamos o fato de que o produto escalar $\Psi^\dagger L \Psi$ é simétrico nos índices μ, ν .

Assim, temos que

$$\overline{\exp\left\{-\frac{i}{2} \Psi^\dagger L^{1/2} H_0 L^{1/2} \Psi\right\}} = \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{4N} \text{Trg} A^2\right\}. \quad (3.46)$$

A média no ensemble do funcional gerador é agora de ordem quatro nos “supercampos” Ψ devido ao termo A^2 e é escrita como

$$\bar{Z} = \int d[\Psi] \exp\left\{\frac{i}{2} \Psi^\dagger L^{1/2} D'_0 L^{1/2} \Psi - \frac{\lambda^2}{4N} \text{Trg} A^2\right\}, \quad (3.47)$$

com $D'_0 = \hat{E} - \hat{\omega}/2 - \hat{V} - \hat{J}$.

3.4 Transformação de Hubbard–Stratonovitch

A média no ensemble das matrizes aleatórias introduz um termo quártico na exponencial do funcional gerador, o que cria uma dificuldade na realização da integração. A transformação de Hubbard–Stratonovitch ajuda a resolver esse problema por meio da introdução de um supercampo auxiliar. Definimos assim, para cada índice k , uma supermatriz σ_k de dimensão 8×8 que obedece a seguinte condição

$$\int d[\sigma_k] \exp\left\{-\frac{N}{4} \text{trg}(\sigma_k)^2\right\} = 1. \quad (3.48)$$

Fazemos então uma mudança de variável $\sigma_k \rightarrow \sigma_k + (1/N)A_k$. É mostrado na Ref. [4] e facilmente verificável que a integral da Eq. (3.48) não muda de valor sob esta transformação.

Assim

$$\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{4N} \text{Trg} A^2\right\} = \int d[\sigma] \exp\left\{-\frac{N}{4} \sum_k \text{trg}(\sigma_k)^2 - \frac{1}{2} \sum_k \text{trg}(\sigma_k A_k)\right\}. \quad (3.49)$$

Chamamos a atenção que o símbolo trg soma apenas sobre os índices do superespaço, enquanto Trg soma também sobre os índices k . Para que essa transformação seja possível, σ deve ter as mesmas propriedades de simetria da matriz A .

Explicitamente mostramos que

$$\text{trg} \sigma_k A_k = i\lambda \sum_{\mu} \Psi_{k\mu}^{\dagger} L^{1/2} \sigma_k L^{1/2} \Psi_{k\mu} = i \sum_{k,l} \sum_{\mu\nu} \Psi_{k\mu}^{\dagger} L^{1/2} (\lambda \sigma_k \delta_{\mu\nu} \delta_{kl}) L^{1/2} \Psi_{l\nu}. \quad (3.50)$$

Temos portanto que \bar{Z} é dado por

$$\bar{Z} = \int d[\sigma] \exp\left\{-\frac{N}{4} \sum_k \text{trg}(\sigma_k)^2\right\} \int d[\Psi] \exp\left\{\frac{i}{2} \Psi^{\dagger} L^{1/2} \mathcal{N}(j, \phi) L^{1/2} \Psi\right\} \quad (3.51)$$

onde definimos

$$\mathcal{N}(j, \phi) = \hat{E} - \frac{\hat{\omega}}{2} - \lambda \hat{\Sigma} - \hat{V} - \hat{J}, \quad (3.52)$$

e

$$\hat{\Sigma} = \{\sigma_k\}. \quad (3.53)$$

A integral agora, embora gaussianiana, não é direta pois $\mathcal{N}(j, \phi)$ não é mais uma matriz diagonal nos índices do superespaço devido à supermatriz σ . No Ap. C calculamos explicitamente essa integral. Como resultado obtemos

$$\bar{Z} = \int d[\sigma] e^{\mathcal{L}[\sigma]}, \quad (3.54)$$

onde

$$\mathcal{L}[\sigma] = -\frac{N}{4} \sum_k \text{trg}(\sigma_k)^2 - \frac{N}{2} \text{Trg} \ln \mathcal{N}(j, \phi). \quad (3.55)$$

3.5 Aproximação do ponto de sela

No limite $N \rightarrow \infty$, podemos usar o método do ponto de sela para avaliar a integral da Eq. (3.54). O método consiste em fazer uma expansão de $\mathcal{L}[\sigma]$ em torno do seu mínimo,

escrevendo

$$\sigma_k = \sigma_k^G + N^{-1/2} \delta\sigma_k, \quad (3.56)$$

onde σ_k^G é a solução da equação

$$\left. \frac{\delta\mathcal{L}[\sigma]}{\delta\sigma_k} \right|_{\sigma_k=\sigma_k^G} = 0. \quad (3.57)$$

Tal equação é resolvida fazendo $\omega = j = V = 0$, de onde obtemos

$$\sigma_k^G (E - \lambda\sigma_k^G) = \lambda. \quad (3.58)$$

Inicialmente procuramos pelas soluções diagonais que são obtidas simplesmente tratando $\sigma_k^G = \sigma_D$ como um escalar. Para todo k , encontramos duas soluções:

$$\sigma_D^\pm = \frac{E}{2\lambda} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{E}{2\lambda}\right)^2}. \quad (3.59)$$

Para garantir a convergência da integral em σ , devemos escolher soluções diferentes para os blocos 1 (relativo à energia E') e 2 (relativo à energia E) na representação do superespaço. Assim, a solução diagonal é escrita na forma de uma supermatriz dada por

$$\sigma_D = \frac{E}{2\lambda} \mathbf{1}_8 - i\Delta L, \quad (3.60)$$

onde $\Delta = \sqrt{1 - (E/2\lambda)^2}$ está relacionado à densidade média de níveis, $\rho(E)$, por $\rho(E) = N\Delta/\pi\lambda$ (Cf. Ap. B). Esta é a lei do semicírculo de Wigner encontrada para uma distribuição gaussiana [42].

Vemos que a Eq. (3.58) é invariante sobre uma transformação de simetria T_k , o que implica que $T_k^{-1}\sigma_D T_k$ também é uma solução. As soluções da equação de ponto de sela formam portanto uma variedade que é parametrizada pelas transformações T_k . No Ap. D falamos de maneira breve sobre essas matrizes; uma discussão mais completa e extensa pode ser encontrada na Ref. [5]. Ressaltamos aqui que essas transformações são determinadas por questões de simetria e convergência. Assim, a forma geral de σ_k^G é

$$\sigma_k^G = T_k^{-1} \sigma_D T_k. \quad (3.61)$$

e

$$\delta\sigma_k = T_k^{-1} \delta P_k T_k \quad (3.62)$$

define as direções do “steepest descent”. A decomposição de σ tal como na Eq. (3.56) é análoga à separação dos modos de Goldstone (σ^G) e dos modos massivos ($\delta\sigma$) num modelo de teoria quântica dos campos. Veremos adiante que o fluxo magnético faz o papel da massa dos modos de Goldstone, o quais se tornam sem massa para $\phi = 0$.

Uma vez que σ_k é parametrizada pelas matrizes T_k e δP_k , podemos escrever a métrica da integração como

$$d[\sigma] = \mathcal{F}(\delta P)d[\delta P]d\mu(t). \quad (3.63)$$

Aqui, $\mathcal{F}(\delta P)$ é o jacobiano da transformação e depende somente dos autovalores de δP , e $d\mu(t)$ apenas dos autovalores das matrizes t_{12}^k e t_{21}^k que são os geradores das transformações T_k . Explicitamente temos

$$\delta P_k = \begin{pmatrix} \delta P_{11}^k & 0 \\ 0 & \delta P_{22}^k \end{pmatrix}, \quad (3.64)$$

$$T_k = \begin{pmatrix} (1 + t_{12}^k t_{21}^k)^{1/2} & it_{12}^k \\ -it_{21}^k & (1 + t_{21}^k t_{12}^k)^{1/2} \end{pmatrix}. \quad (3.65)$$

Retornando à Lagrangeana da Eq. (3.55), primeiramente removemos a dependência do logaritmo com ω fazendo a mudança de variável $\Sigma \rightarrow \Sigma - \hat{\omega}/(2\lambda)$. Depois usamos a Eq. (3.56) para obter

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sigma] = & -\frac{N}{4} \sum_k [\text{trg}(\sigma_k^G + N^{-1/2}\delta\sigma_k)^2 + \frac{\omega}{\lambda} \text{trg}([\sigma_k^G + N^{-1/2}\delta\sigma_k]L)] \\ & - \frac{N}{2} \text{Trg} \ln[E - \lambda(\Sigma_G + N^{-1/2}\delta\Sigma) - V - J] \end{aligned} \quad (3.66)$$

Como estamos interessados no limite $N \rightarrow \infty$, observamos que ω é da ordem de N^{-1} pois mede flutuações que são da ordem do espaçamento médio entre os níveis $d \propto \lambda/N$, e λ e E são independentes de N . Além disso, guiados por resultados anteriores [5, 12, 43], temos que Nv_0^2 é da ordem de unidade. Expandimos então o logaritmo em relação a $\delta\Sigma$ e desprezamos os termos de ordem N^{-1} para obter a Lagrangeana efetiva do sistema

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ef}}[\sigma] = & -\frac{1}{4} \sum_k \text{trg}(\delta\sigma_k)^2 + \frac{N\omega}{4\lambda} \sum_k \text{trg}(\sigma_k^G L) \\ & - \frac{N}{2} \text{Trg} \ln[E - \lambda\Sigma_G - V - J] + \frac{1}{4} \text{Trg}(\Sigma_G \delta\Sigma)^2. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Notamos que $\text{Trg}(\Sigma_G)^2 = 0$ e os termos lineares em $\delta\Sigma$ se cancelam. Além disso, vemos que devido ao fato de que $[\sigma_D, \delta P_k] = 0$, temos

$$(\sigma_k^G \delta\sigma_k)^2 = T_k^{-1} (\sigma_D \delta P_k)^2 T_k. \quad (3.68)$$

As variáveis T e δP ficam então desacopladas, e a Lagrangeana efetiva também se desacopla em

$$\mathcal{L}_{\text{ef}}[\sigma] = -\frac{1}{2} \text{Trg} \left[\left(1 - \frac{E^2}{4\lambda^2} - i \frac{E}{2\lambda} \Delta L \right) (\delta P_k)^2 \right] + \mathcal{L}_{\text{ef}}^0[\sigma^G], \quad (3.69)$$

onde

$$\mathcal{L}_{\text{ef}}^0[\sigma^G] = \frac{N\omega}{4\lambda} \sum_k \text{trg}(\sigma_k^G L) - \frac{N}{2} \text{Trg} \ln[E - \lambda\Sigma_G - V - J]. \quad (3.70)$$

A integral sobre os modos massivos δP é gaussiana, e portanto direta. Como mostrado na Ref. [5], o jacobiano $\mathcal{F}(\delta P)$ é igual a um próximo à variedade σ_k^G e sobre ela, exceto por termos que se anulam no limite $N \rightarrow \infty$. Como consequência, a integral sobre os modos massivos resulta na unidade (mais detalhes sobre a parametrização de δP e sua integral podem ser encontrados na Ref. [44]). Assim, ficamos apenas com a integral sobre os geradores das transformações T_k , e o funcional gerador é dado por

$$\bar{Z} = \int d\mu(t) e^{\mathcal{L}_{\text{ef}}^0[\sigma^G]}. \quad (3.71)$$

Podemos ainda expandir o logaritmo de $\mathcal{L}_{\text{ef}}^0$ em potências de V e J . Como J é infinitesimal e V é proporcional a v_0 , tal que $v_0^2 \sim N^{-1}$, no limite $N \rightarrow \infty$ retemos somente termos lineares em J e quadráticos em V . Usamos ainda a condição do ponto de sela, $E - \lambda\Sigma_G = \lambda/\Sigma_G$ e encontramos

$$\begin{aligned} \text{Trg} \ln[E - \lambda\Sigma_G - V - J] &= \text{Trg} \ln[\lambda/\Sigma_G] + \text{Trg} \ln[1 - \frac{1}{\lambda}\Sigma_G(V + J)] \\ &\approx -\frac{1}{\lambda}\Sigma_G J - \frac{1}{2\lambda^2}(\Sigma_G V)^2. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Aqui usamos o fato de que $\text{Tr}_k V = 0$ e que, sendo Σ_G e J diagonais no espaço dos índices k , o traço do produto destes com V também se anula. Além disso, podemos reescalar J tal que $J \rightarrow J/N$ e assim desprezamos termos de ordem JV^2 . Logo, calculando a derivada do funcional gerador em relação às fontes j e $\delta\phi$, encontramos

$$\left. \frac{\partial^2 \bar{Z}}{\partial j \partial \delta\phi} \right|_{j=0=\delta\phi} = \frac{N^2}{4\lambda^3} \int d\mu(t) \text{Trg}(\Sigma_G k_2) \text{Trg}(\Sigma_G V' \Sigma_G V) e^{\mathcal{L}_0[\sigma^G]}, \quad (3.73)$$

onde

$$V'_{kl} = i e^{i\phi\tau_3} \tau_3 k_1 \delta_{k,l-1} - i e^{-i\phi\tau_3} \tau_3 k_1 \delta_{k,l+1} \quad (3.74)$$

e

$$\mathcal{L}_0[\sigma^G] = \frac{N\omega}{4\lambda} \text{Trg}(\Sigma_G L) + \frac{N}{4\lambda^2} \text{Trg}(\Sigma_G V)^2. \quad (3.75)$$

3.6 Propriedades de simetria

Seguindo a Ref. [6], mostramos que o funcional gerador \bar{Z} e, portanto, também a corrente persistente são periódicos em Φ com período $(1/2)\Phi_0$, e que a corrente persistente é ímpar em Φ . Para tanto, analisamos \bar{Z} na forma da Eq. (3.71).

Para provar o primeiro argumento, consideremos a transformação de variáveis $T_k \rightarrow T_k(U_\alpha^\dagger)^k$ ou

$$\sigma_k \rightarrow (U_\alpha)^k \sigma_k (U_\alpha^\dagger)^k \quad (3.76)$$

onde a supermatriz U_α tem dimensão oito, é unitária e dada por

$$U_\alpha = \exp(2i\pi\alpha\tau_3). \quad (3.77)$$

O ângulo α é real. A condição cíclica $\sigma_{(K+1)} = \sigma_1$ implica que $\alpha = m/(2K)$ com m inteiro. Através da substituição (3.76), a medida de integração na expressão (3.71) é invariante e também o termo proporcional a ω no expoente. Para o termo $\text{Trg} \ln[1 - (\Sigma_G/\lambda)(V + J)]$, escrevemos o argumento do logaritmo como uma matriz bloco-diagonal, cada bloco com índices de fatia (j, k) . Nos elementos $(\Sigma_G/\lambda)V$ que aparecem acima da diagonal principal, os V 's são proporcionais à supermatriz unitária $\exp(i\phi\tau_3)$, enquanto os V 's abaixo da diagonal principal são proporcionais à conjugada Hermitiana da mesma matriz. Fazemos a substituição (3.76) em $\text{Trg} \ln[1 - (\Sigma_G/\lambda)(V + J)]$ e inserimos no logaritmo, como pré-fator, a matriz identidade na forma $1 = A^\dagger A$. Aqui A é unitária e escolhida como uma matriz bloco-diagonal com os blocos dados por $A = \text{diag}(U_\alpha, (U_\alpha)^2, (U_\alpha)^3, \dots)$. Usamos a invariância cíclica do traço para mover o fator A^\dagger para a última posição do argumento do logaritmo. Usamos que V comuta com U_α , e que $(U_\alpha)^{K+1} = U_\alpha$. Como resultado, encontramos que os fatores V nos blocos acima da diagonal principal ficam multiplicados

por U_α e aqueles nos abaixo da diagonal principal, por U_α^\dagger , enquanto cada um dos termos $U_\alpha^j \sigma_j (U_\alpha^\dagger)^j$ volta a ser σ_j . Assim, a substituição de variáveis (3.76) induz a mudança $\phi \rightarrow \phi - 2\pi\alpha$ no argumento do logaritmo. Uma vez que U_α comuta com k_2 , o termo proporcional a J também é invariante sobre a transformação (3.76). Concluimos que \bar{Z} é invariante sob a substituição $\Phi \rightarrow \Phi - (m/2)\Phi_0$ e, assim, periódico em Φ com período $(1/2)\Phi_0$. Chamamos a atenção que na Ref. [6], este resultado foi atribuído ao fato de que a média no *ensemble* na Eq. (3.5) envolve anéis com um número par e ímpar de elétrons.

Para mostrar que a corrente persistente é ímpar em Φ , primeiro mostramos que \bar{Z} é par em Φ . Isso segue da observação que a mudança $\Phi \rightarrow -\Phi$ é equivalente a transpor os blocos (não as matrizes dentro dos blocos) na matriz $1 - (\Sigma_G/\lambda)(V + J)$. Tal transposição pode ser feita numa seqüência de dois passos. No primeiro passo, multiplicamos a matriz $1 - (\Sigma_G/\lambda)(V + J)$ em ambos os lados pela matriz B . Aqui B consiste de K matrizes unidade $\mathbf{1}_8$ e zeros. As matrizes unidade são colocadas nos blocos $(1, K), (2, K - 1), \dots, (K, 1)$. A matriz B^2 é a matriz unidade. Portanto, e por causa da invariância cíclica do traço, a multiplicação nos dois lados de $1 - (\Sigma_G/\lambda)(V + J)$ por B deixa invariante o valor do termo $\text{Tr} \ln[1 - \Sigma_G/\lambda)(V + J)]$. Fazendo a multiplicação, descobrimos que $V(\phi)$ foi substituído em todo lugar por $V(-\phi)$, e que a seqüência $\sigma_1^G, \sigma_2^G, \dots, \sigma_K^G$ dos sigma's em $1 - (\Sigma_G/\lambda)(V + J)$ foi invertida. Renomeando os índices dos sigma's, obtemos a transposição procurada. Logo, \bar{Z} é par em Φ . Uma vez que a corrente persistente é obtida desta função pela diferenciação com respeito a Φ , segue que \bar{I} é ímpar em Φ .

Em suma, verificamos que a corrente persistente é ímpar em Φ , i.e., se anula em $\Phi = 0$. Além disso, a corrente é periódica em Φ com período $(1/2)\Phi_0$.

3.7 Expansão assintótica

Queremos fazer uma expansão assintótica da corrente persistente em potências de $(k_F\ell)^{-1}$. Foi mostrado na Ref. [12] que $(k_F\ell)^{-1}$ pode ser identificado com o parâmetro Nv_0^2/λ^2 que aparece no expoente da Eq. (3.73). Portanto, a expansão assintótica em questão é gerada pela expansão do expoente na Eq. (3.73) em potência dos geradores t^k das matrizes T_k ,

retendo no expoente apenas termos até segunda ordem, expandindo o restante numa série de Taylor e fazendo as integrais gaussianas resultantes.

3.7.1 Expansão em série

Usando a parametrização das transformações T_k dada pela Eq. (3.65), podemos escrever $T_k^{-1}LT_k$ da seguinte forma

$$T_k^{-1}LT_k = L + 2M_k \quad (3.78)$$

onde as matrizes M_k são dadas por

$$M_k = \begin{pmatrix} t_{12}^k t_{21}^k & it_{12}^k \sqrt{(1 + t_{21}^k t_{12}^k)} \\ it_{21}^k \sqrt{(1 + t_{12}^k t_{21}^k)} & -t_{21}^k t_{12}^k \end{pmatrix}. \quad (3.79)$$

Eq. (3.61) e (3.78) implicam

$$\sigma_k^G = \sigma_D - 2i\Delta M_k. \quad (3.80)$$

Para o primeiro termo no expoente da Eq. (3.73), usamos Eq. (3.80) e (3.79) e obtemos

$$\frac{N\omega}{4\lambda} \text{Trg}(\Sigma_G L) \rightarrow -i\pi\rho\omega \sum_k \text{trg}(t_{12}^k t_{21}^k), \quad (3.81)$$

onde $\rho = N\Delta/(\pi\lambda) = (Kd)^{-1}$ é a densidade local de níveis de energia por fatia. Está implícito que agora o supertraço sobre as matrizes t^k deve ser pensado como sendo sobre supermatrizes de dimensão quatro apenas.

Para o segundo termo do expoente de Eq. (3.73), encontramos

$$\frac{N}{4\lambda^2} \text{Trg}(\Sigma_G V)^2 = -\frac{\zeta}{2} \sum_k \text{trg}(M_k L + M_k e^{i\phi\tau_3} M_{k+1} e^{-i\phi\tau_3}), \quad (3.82)$$

onde $\zeta = 4Nv_0^2\Delta^2/\lambda^2$. Como mostrado na Ref. [12], o parâmetro ζ está relacionado com a constante de difusão por

$$D = \frac{\zeta\ell^2}{2\pi\hbar\rho}. \quad (3.83)$$

Usamos a Eq. (3.79) e mantemos apenas os termos de ordem mais baixa não-nulos nos

t^k 's. Então

$$\frac{N}{4\lambda^2} \text{Trg}[\Sigma_G V]^2 \rightarrow -\frac{\zeta}{2} \sum_k \text{trg}(2t_{12}^k t_{21}^k - t_{12}^k e^{i\phi\bar{\tau}_3} t_{21}^{k+1} e^{-i\phi\bar{\tau}_3} - t_{21}^k e^{i\phi\bar{\tau}_3} t_{12}^{k+1} e^{-i\phi\bar{\tau}_3}), \quad (3.84)$$

com a definição $\bar{\tau}_3 = \text{diag}(1, -1, 1, -1)$.

O lado direito desta equação possui, claramente, as propriedades de simetria mostradas na Seção 3.6: é simétrico em Φ (se a mudança $\Phi \rightarrow -\Phi$ é seguida por uma adequada renomeação dos índices dos t^k 's), e é periódico em Φ com período $(1/2)\Phi_0$. A última afirmativa segue, como na Seção 3.6, da substituição $t^k \rightarrow (U_\alpha)^k t^k (U_\alpha^\dagger)^k$. Esta substituição deixa a medida $d\mu$ invariante. O primeiro termo no expoente da Eq. (3.73) é independente de ϕ e, logo, trivialmente compartilha das propriedades de simetria apresentadas.

A medida de integração $d\mu(t)$ é calculada no Ap. D. Para a ordem mais baixa em t^k , $d\mu(t)$ é simplesmente dada pelo produto das diferenciais das variáveis de integração independentes.

Consideremos agora os termos de fonte na Eq. (3.73). Notamos que a corrente persistente é dada pela contribuição *conexa* do produto $\text{Trg}(\Sigma_G V' \Sigma_G V) \text{Trg}(\Sigma_G k_2)$. Isto, porque o termo $\text{Tr}\{(E^- - H)^{-1}\}$ na Eq. (3.5) tem origem na grandeza chamada de δK na Seção 1.5. Essa grandeza representa a diferença entre o número real e médio de partículas e, assim, se anula depois de feita a média sobre o *ensemble*. Dessa forma, mantemos apenas aqueles termos na expansão em potências dos t^j 's que contribuem com termos conexos. Chamamos a atenção para o fato de que a contribuição *desconexa* se anula identicamente. Substituindo a solução de ponto de sela pelo termo de menor ordem σ_D no fator $\text{Trg}(\Sigma_G k_2)$, gera-se um termo desconexo. Além disso, substituindo um ou ambos os σ 's do fator $\text{Trg}[\Sigma_G V \Sigma_G V']$ por σ_D faz com que este fator se anule. Assim, temos

$$\text{Trg}(\Sigma_G V \Sigma_G V') \text{Trg}(\Sigma_G k_2) \rightarrow 8i\Delta^3 \text{Trg}(M V M V') \sum_k \text{trg}(M_k k_2). \quad (3.85)$$

Usando as expressões explícitas para V e V' , obtemos

$$\begin{aligned} \text{Trg}(MV MV') = \\ - iv_0^2 \sum_k \text{trg}(M_k e^{i\phi\tau_3} M_{k+1} e^{-i\phi\tau_3} \tau_3 k_1 - M_k e^{-i\phi\tau_3} M_{k-1} e^{i\phi\tau_3} \tau_3 k_1) \end{aligned} \quad (3.86)$$

Em ordem mais baixa nos geradores t , encontramos

$$\begin{aligned} \text{Trg}(\Sigma_G V \Sigma_G V') \\ \rightarrow 4iv_0^2 \Delta^2 \sum_k \text{trg}([t_{12}^{k+1} e^{-i\phi\bar{\tau}_3} t_{21}^k e^{i\phi\bar{\tau}_3} - t_{12}^k e^{i\phi\bar{\tau}_3} t_{21}^{k+1} e^{-i\phi\bar{\tau}_3}] \bar{\tau}_3 \bar{k}) \end{aligned} \quad (3.87)$$

Aqui $\bar{k} = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$. O outro termo de fonte é simples, e fornece

$$\text{Trg} \sum_k (M_k k_2) = 2i\Delta \sum_k \text{trg}(t_{21}^k t_{12}^k \bar{k}). \quad (3.88)$$

Agrupando os termos, encontramos para a corrente persistente

$$\bar{I}(\Phi) = -\frac{c\zeta}{8K^2\Phi_0} \int_0^\infty d\omega \int d[t] e^{-\mathcal{L}[t]} g_0(t) g_1(t) (1 + \dots) + \text{c.c.}, \quad (3.89)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t] = \frac{\zeta}{2} \sum_k \text{trg}(2t_{12}^k t_{21}^k - t_{12}^k e^{i\phi\bar{\tau}_3} t_{21}^{k+1} e^{-i\phi\bar{\tau}_3} - t_{21}^k e^{i\phi\bar{\tau}_3} t_{12}^{k+1} e^{-i\phi\bar{\tau}_3}) \\ + i\pi\rho\omega \sum_k \text{trg}(t_{12}^k t_{21}^k), \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$g_0(t) = \sum_k \text{trg}(t_{21}^k t_{12}^k \bar{k}), \quad (3.91)$$

$$g_1(t) = \sum_k \text{trg}([t_{12}^{k+1} e^{-i\phi\bar{\tau}_3} t_{21}^k e^{i\phi\bar{\tau}_3} - t_{12}^k e^{i\phi\bar{\tau}_3} t_{21}^{k+1} e^{-i\phi\bar{\tau}_3}] \bar{\tau}_3 \bar{k}). \quad (3.92)$$

As reticências indicam os termos de ordem superior nos t^k 's.

3.7.2 Diffusons e cooperons

A Eq. (3.89) dá a corrente persistente em termos de integrais gaussianas sobre as variáveis de integração contidas nas matrizes t_{12}^k e t_{21}^k . Essas integrais podem ser feitas usando as contrações de Wick. Seguindo o Ap. D, escrevemos as matrizes t_{12}^k e t_{21}^k definidas na Eq. (3.65) nas formas

$$t_{12}^k = \begin{pmatrix} D_1^k & C_1^k \\ C_2^k & D_2^k \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad t_{21}^k = \begin{pmatrix} \bar{D}_1^k & \bar{C}_2^k \\ \bar{C}_1^k & \bar{D}_2^k \end{pmatrix}. \quad (3.93)$$

As supermatrizes bidimensionais D e C estão definidas no Ap. D. Esta é uma nova representação, na qual as matrizes \bar{k} e $\bar{\tau}_3$ têm as formas

$$\bar{k} = \text{diag}(1, -1, 1, -1) ; \bar{\tau}_3 = \text{diag}(1, 1, -1, -1) . \quad (3.94)$$

A operação trg deve ser também modificada de acordo.

As matrizes D_1 e \bar{D}_2 contêm as mesmas variáveis de integração, e similarmente, os pares $D_2, \bar{D}_1, C_1, \bar{C}_2$ e C_2, \bar{C}_1 . O cálculo explícito mostra que para todo par de índices j, l , as seguintes relações são verdadeiras:

$$\text{trg}[D_1^j \bar{D}_1^l] = \text{trg}[D_2^l \bar{D}_2^j] \quad \text{trg}[C_1^j \bar{C}_1^l] = \text{trg}[C_2^l \bar{C}_2^j], \quad (3.95)$$

$$\text{trg}[D_1^j \bar{D}_1^l k] = \text{trg}[D_2^l \bar{D}_2^j k] \quad \text{trg}[C_1^j \bar{C}_1^l k] = \text{trg}[C_2^l \bar{C}_2^j k]. \quad (3.96)$$

Usando as definições (3.93) e as identidades (3.96), escrevemos a Lagrangeana efetiva, i.e., o expoente da Eq. (3.89) na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t] &= -\zeta \sum_k \text{trg} \left[(2+a)(D_1^k \bar{D}_1^k) - D_1^k \bar{D}_1^{k+1} - D_1^{k+1} \bar{D}_1^k \right. \\ &\quad \left. + (2+a)(C_1^k \bar{C}_1^k) - e^{-2i\phi} C_1^k \bar{C}_1^{k+1} - e^{2i\phi} C_1^{k+1} \bar{C}_1^k \right] \\ &= -\zeta \sum_{k,l} \left\{ (\Pi_d^{-1})_{kl} \text{trg}[D_1^k \bar{D}_1^l] + (\Pi_c^{-1})_{kl} \text{trg}[C_1^k \bar{C}_1^l] \right\}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Aqui, $a = (i\pi\omega)/(\zeta d)$. Eq. (3.97) mostra que decomposemos a Lagrangeana efetiva em uma contribuição que depende de ϕ e em outra que não depende. Tal decomposição corresponde ao que chamamos de modos de *diffuson* e de *cooperon* na teoria de perturbação diagramática de impurezas. Os inversos dos propagadores de diffusons e cooperons são dados por

$$\begin{aligned} (\Pi_d^{-1})_{kl} &= (2+a)\delta_{kl} - \delta_{l,k+1} - \delta_{l,k-1}, \\ (\Pi_c^{-1})_{kl} &= (2+a)\delta_{kl} - e^{-2i\phi} \delta_{l,k+1} - e^{2i\phi} \delta_{l,k-1}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Para os termos de fonte encontramos

$$g_0(t) = 2 \sum_k \left\{ \text{trg}[D_1^k k \bar{D}_1^k] + \text{trg}[C_1^k k \bar{C}_1^k] \right\} \quad (3.99)$$

$$g_1(t) = 2 \sum_k \left\{ \text{trg}[D_1^{k+1} \bar{D}_1^k k] - \text{trg}[D_1^k \bar{D}_1^{k+1} k] \right. \\ \left. + e^{2i\phi} \text{trg}[C_1^{k+1} \bar{C}_1^k k] - e^{-2i\phi} \text{trg}[C_1^k \bar{C}_1^{k+1} k] \right\} \quad (3.100)$$

3.7.3 Propriedades espectrais dos inversos dos propagadores das funções definidas no sistema

Vamos discutir as propriedades espectrais das matrizes $(\Pi_d^{-1})_{jk}$ e $(\Pi_c^{-1})_{jk}$. Vamos inicialmente fazer $a = 0$ (a inclusão de $a\delta_{jl}$, um múltiplo da matriz unidade, afeta nossa conclusão de maneira trivial). É suficiente discutir o espectro da matriz $(\Pi_c^{-1})_{jk}$, já que $(\Pi_d^{-1})_{jk}$ é um caso especial de $(\Pi_c^{-1})_{jk}$, que pode ser obtida da matriz anterior fazendo $\phi = 0$. A multiplicação da matriz diagonal $\text{diag}(\exp(4i\pi\alpha), \exp(8i\pi\alpha), \dots, \exp(4Ki\pi\alpha))$ (a conjugada Hermitiana dessa matriz), com $\alpha = m/(2K)$ como na Seção 3.6, pelo lado esquerdo (direito) de $(\Pi_c^{-1})_{jk}$ é equivalente à troca de ϕ por $\phi - 2\pi\alpha$. Segue que o traço de $(\Pi_c^{-1})_{jk}$ e todos os outros invariantes construídos de $(\Pi_c^{-1})_{jk}$ são periódicos em Φ com período $(1/2)\Phi_0$. Trocar ϕ por $-\phi$ é equivalente a tomar a transposta de $(\Pi_c^{-1})_{jk}$ e deixa o conjunto de autovalores inalterado. Portanto, esse conjunto é simétrico em ϕ para $\phi = 0$. Simetria e periodicidade combinadas implicam que podemos nos limitar ao intervalo $0 \leq \Phi \leq (1/4)\Phi_0$. A matriz $(\Pi_c^{-1})_{jk}$ é positiva semi-definida para $\Phi = 0$ e $\Phi = (1/2)\Phi_0$ e é positiva definida para $0 < \Phi < (1/2)\Phi_0$. Os autovalores nulos correspondem aos autovetores $(1, 1, \dots, 1)^T$ ($\Phi = 0$) e $(\exp(2i\pi/K), \exp(4i\pi/K), \dots, \exp(2i\pi))^T$ ($\Phi = (1/2)\Phi_0$). Estas últimas afirmações espelham o fato que a representação supersimétrica da corrente persistente possui um modo zero. A integração sobre este modo deve ser feita de forma exata, em vez de perturbativamente. Tal cálculo será comentado adiante.

A construção dos autovalores e autovetores de $(\Pi_c^{-1})_{jk}$ é direta. A equação de autovalor

se escreve como

$$(2 + a)\psi_j - \exp(2i\phi)\psi_{j+1} - \exp(-2i\phi)\psi_{j-1} = \lambda\psi_j . \quad (3.101)$$

As soluções têm a forma $\psi_j = \exp(ij\beta)$ com β real. A restrição $\psi_{K+1} = \psi_1$ limita β ao conjunto de valores $\beta = (2\pi m)/K$ com $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Evitamos redundância restringindo m aos valores $m = 0, 1, \dots, (K - 1)$. Os autovalores $\lambda_m(\Phi)$ são dados por

$$\lambda_m(\Phi) = a + 2[1 - \cos\{2\pi m/K - 4\pi\Phi/(K\Phi_0)\}] . \quad (3.102)$$

Notamos que o conjunto de autovalores é simétrico em $\phi = 0$ e periódico em Φ com período $\Phi_0/2$. A asserção não se aplica a cada autovalor individualmente porque, como funções de ϕ , os autovalores se cruzam. Em $\phi = 0$, o autovalor mais baixo se anula. A expansão em série de potência desse autovalor em $\phi = 0$ começa com um termo quadrático.

O conjunto de autovalores e autovetores de $(\Pi_d^{-1})_{jk}$ é trivialmente obtido fazendo $\phi = 0$. Eq. (3.102) mostra que os autovalores $\lambda_m(0)$ e $\lambda_{(K-m)}(0)$ são degenerados. Portanto, nos restringimos aos valores de $m = 0, 1, \dots, K/2$ para K par e $m = 0, 1, \dots, (K - 1)/2$ para K ímpar. Os autovalores com $m = 0$ e $m = K/2$ não são degenerados e têm os autovetores normalizados $\psi^{(0)} = (1/\sqrt{K})(1, \dots, 1)^T$ e $\psi^{(K/2)} = (1/\sqrt{K})(-1, 1, \dots, -1, 1)^T$, respectivamente. Todos os outros autovalores são duplamente degenerados com autovetores $\psi_j^{(m)} = (2/\sqrt{K}) \cos(2\pi mj/K)$ e $\psi_j^{(m)} = (2/\sqrt{K}) \sin(2\pi mj/K)$. A expansão de Π_d^{-1} em seus autovetores tem, assim, a forma

$$(\Pi_d^{-1})_{jl} = \sum_m \frac{2 - \delta_{m0} - \delta_{K\text{par}}}{K} (a + 2[1 - \cos(2\pi m/K)]) \cos(2\pi m(j - l)/K) . \quad (3.103)$$

A soma se estende de $m = 0$ até $m = K/2$ (K par) ou até $m = (K - 1)/2$ (K ímpar).

3.7.4 Integração gaussiana

A integração é feita com a ajuda das contrações de Wick para o produto $g_0(t)g_1(t)$. Encontramos três tipos de termos: aqueles que envolvem apenas as matrizes D , aqueles que envolvem apenas as matrizes C e os termos de interferência entre *diffusons* e *cooperons*. Lembramos que devemos calcular a contribuição conexa. Os termos de interferência não

contribuem pois a Lagrangeana efetiva é uma soma de termos de *diffuson* e *cooperon*. Vamos calcular então os termos de *cooperon*. A contribuição dos *diffusons* é obtida fazendo $\phi = 0$ no resultado.

Para a contribuição dos *cooperons*, a integral sobre os modos dos *diffusons* dá um, restando somente a integral gaussiana sobre os termos

$$4 \sum_k \left\{ e^{2i\phi} \text{trg}[C_1^{k+1} \bar{C}_1^k k] - e^{-2i\phi} \text{trg}[C_1^k \bar{C}_1^{k+1} k] \right\} \sum_l \text{trg}[C_1^l k \bar{C}_1^l]. \quad (3.104)$$

No Ap. E, derivamos as regras para as contrações dessas matrizes. Notamos que devemos sempre contrair uma matriz C_1 com uma matriz \bar{C}_1 . As regras de contração são as seguintes:

$$\langle \text{trg}[AC_1^j B \bar{C}_1^l] \rangle = \zeta^{-1} (\Pi_c)_{l,j} \text{trg} A \text{trg} B, \quad (3.105)$$

$$\langle \text{trg}[AC_1^j] \text{trg}[B \bar{C}_1^l] \rangle = \zeta^{-1} (\Pi_c)_{l,j} \text{trg}(AB), \quad (3.106)$$

onde A e B são supermatrizes 2×2 . Com o auxílio do teorema de Wick, temos, por exemplo,

$$\begin{aligned} & \langle \text{trg}(C_1^{k+1} \bar{C}_1^k k) \text{trg}(C_1^l k \bar{C}_1^l) \rangle \\ &= \langle \text{trg}(C_1^{k+1} \bar{C}_1^k k) \rangle \langle \text{trg}(C_1^l k \bar{C}_1^l) \rangle + \zeta^{-1} (\Pi_c)_{l,k+1} \langle \text{trg}(\bar{C}_1^k k C_1^l k) \rangle \\ &= 0 + \zeta^{-2} (\Pi_c)_{l,k+1} (\Pi_c)_{k,l} (\text{trg} k)^2 \\ &= 4\zeta^{-2} (\Pi_c)_{k,l} (\Pi_c)_{l,k+1}. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Assim, a integração da contribuição dos *cooperons* dados na Eq. (3.104) é

$$\frac{16}{\zeta^2} \sum_k \left\{ e^{2i\phi} (\Pi_c^2)_{k,k+1} - e^{-2i\phi} (\Pi_c^2)_{k+1,k} \right\}. \quad (3.108)$$

Fazemos $\phi = 0$, substituímos Π_c por Π_d , usamos a simetria de Π_d e encontramos que a contribuição dos *diffusons* se anula.

É mais útil escrever a expressão dada na Eq. (3.108) em termos dos autovalores de Π_c^{-1} ,

que já foram obtidos na seção anterior. Para tanto consideremos

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\phi}[\Pi_c^{-1}\Pi_c^2] &= \frac{d\Pi_c^{-1}}{d\phi}\Pi_c^2 + \Pi_c^{-1}\frac{d\Pi_c^2}{d\phi} \\ \frac{d\Pi_c}{d\phi} &= \frac{d\Pi_c^{-1}}{d\phi}\Pi_c^2 + 2\Pi_c^{-1}\Pi_c\frac{d\Pi_c}{d\phi} \\ \frac{d\Pi_c}{d\phi} &= -\frac{d\Pi_c^{-1}}{d\phi}\Pi_c^2.\end{aligned}\tag{3.109}$$

Usando a expressão para Π_c^{-1} dada na Eq. (3.98), temos

$$\frac{d(\Pi_c^{-1})_{kj}}{d\phi} = 2i\left(e^{-2i\phi}\delta_{j,k+1} - e^{2i\phi}\delta_{j,k-1}\right),\tag{3.110}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}\frac{d(\Pi_c)_{kk}}{d\phi} &= -\sum_j \frac{d(\Pi_c^{-1})_{kj}}{d\phi}(\Pi_c^2)_{jk} \\ &= 2i\left(e^{2i\phi}(\Pi_c^2)_{k-1,k} - e^{-2i\phi}(\Pi_c^2)_{k+1,k}\right).\end{aligned}\tag{3.111}$$

Assim, Eq. (3.108) é igual a

$$-\frac{8i}{\zeta^2}\sum_k \frac{d(\Pi_c)_{kk}}{d\phi} = -\frac{8i}{\zeta^2}\frac{K\Phi_0}{2\pi}\frac{d}{d\Phi}\sum_m [\lambda_m(\Phi)]^{-1}.\tag{3.112}$$

A expressão para a corrente é então

$$\begin{aligned}\bar{I}(\Phi) &= -i\frac{c}{2\pi K\zeta}\int_0^\infty d\omega\frac{d}{d\Phi}\sum_m [\lambda_m(\Phi)]^{-1} + \text{c.c.} \\ &= i\frac{c}{2\pi K\zeta}\int_0^\infty d\omega\sum_m \frac{\lambda'_m(\Phi)}{\lambda_m^2(\Phi)} + \text{c.c.}\end{aligned}\tag{3.113}$$

Usamos a Eq. (3.102), a relação $a = (i\pi\rho\omega)/\zeta$, e fazemos a integração sobre ω . Encontramos

$$\bar{I}(\Phi) = -\frac{2cd}{\pi\Phi_0}\frac{1}{K}\sum_{m=0}^{K-1} \frac{\sin\{(2\pi m/K) - 4\pi\Phi/(K\Phi_0)\}}{1 - \cos\{(2\pi m/K) - 4\pi\Phi/(K\Phi_0)\}}\tag{3.114}$$

Para $\Phi = 0$, o modo zero carrega o índice $m = 0$ e dá uma contribuição singular. A corrente é anti-simétrica em $\Phi = 0$ e periódica em Φ com período $\Phi_0/2$. A menos da singularidade espúria, a corrente deve se anular em $\Phi = 0$ e em $\Phi = (1/4)\Phi_0$. Portanto, é suficiente considerar \bar{I} no intervalo $0 \leq \Phi \leq (1/4)\Phi_0$.

A existência da singularidade associada ao modo zero é comum em modelos com certas simetrias quando é feito um tratamento perturbativo. Para remover essa singularidade devemos tratar esse modo de maneira exata, como faremos no próximo capítulo.

4

CÁLCULO EXATO DO MODO ZERO

No capítulo anterior encontramos uma singularidade no cálculo da corrente persistente associada ao modo zero para um fluxo magnético nulo. Foi mencionado que o fluxo magnético faz o papel da massa dos modos de Goldstone do modelo sigma não-linear. Quando a massa se anula, o cálculo perturbativo não se aplica ao modo zero, e devemos calculá-lo de modo exato.

4.1 Separação do modo zero

Usando a Eq. (3.73), podemos escrever a corrente persistente como

$$\bar{I} = -\frac{cd}{4\pi K\Phi_0} \frac{N^2}{4\lambda^3} \int_0^\infty d\omega \int d[\sigma^G] e^{\mathcal{L}_0[\sigma^G]} \text{Trg}(\Sigma_G V \Sigma_G V') \text{Trg}(\Sigma_G k_2) + \text{c.c.}, \quad (4.1)$$

onde

$$\mathcal{L}_0[\sigma^G] = \frac{N}{4\lambda^2} \text{Trg}(\Sigma_G V)^2 + \frac{N\omega}{4\lambda} \text{Trg}(\Sigma_G L) \quad (4.2)$$

$$V_{kl} = v_0 [e^{i\phi\tau_3} \delta_{k,l-1} + e^{-i\phi\tau_3} \delta_{k,l+1}] \quad (4.3)$$

$$V'_{kl} = iv_0 [e^{i\phi\tau_3} \tau_3 k_1 \delta_{k,l-1} - e^{-i\phi\tau_3} \tau_3 k_1 \delta_{k,l+1}]. \quad (4.4)$$

A matriz Σ_G é uma supermatriz que no espaço dos índices k , é diagonal com elementos $\{\sigma_k^G\}$. Para determinarmos o modo zero, podemos fazer uma transformada de Fourier discreta na rede k , e escrever essas matrizes como

$$\sigma_j^G = \sum_{m=0}^{K-1} \tilde{\sigma}_m \exp\{2i\pi m j / K\}. \quad (4.5)$$

Vemos que o modo zero ($m = 0$), é constante no espaço k . Escrevemos então o modo zero como

$$\tilde{\sigma}_0 = \frac{E}{2\lambda} - i\Delta Q, \quad (4.6)$$

onde Q é uma supermatriz que independe dos índices k . Em termos de Q , podemos escrever

$$\begin{aligned} \bar{I} = \frac{c\zeta}{2^6\Phi_0} \int_0^\infty d\omega \int d[Q] \exp \left\{ -y \operatorname{trg}(e^{-i\phi\tau_3} Q e^{i\phi\tau_3} Q) - i\frac{x}{4} \operatorname{trg}(QL) \right\} \\ \times \operatorname{trg}[e^{-i\phi\tau_3} Q, e^{i\phi\tau_3} Q] \tau_3 k_1 \operatorname{trg}(Qk_2) + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde definimos $y = (Nv_0^2\Delta^2K)/(2\lambda^2) = \zeta K/8$ e $x = NK\omega\Delta/\lambda = \pi/d$. No primeiro supertraço dos termos de fonte, $[\cdot, \cdot]$ representa o comutador.

4.2 Parametrização

Seguindo a Ref. [7], escolhemos a seguinte parametrização para Q :

$$Q = U_D^{-1} V_C^{-1} Q_C^0 V_C U_D. \quad (4.8)$$

Esta parametrização é adequada para modelos com a presença de campo magnético, onde a matriz τ_3 está presente, pois temos que U_D e V_C comutam com τ_3 .

As supermatrizes da Eq. (4.8) são escritas como

$$Q_C^0 = \begin{bmatrix} \cos \hat{\theta}(C) & i \sin \hat{\theta}(C) \times C_0 \\ -i \sin \hat{\theta}(C) \times C_0^T & -\cos \hat{\theta}(C) \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

$$U_D = V_2(D)^{-1} U_D^0 V_2(D) V_1(D), \quad (4.10)$$

$$V_C = V_2(C) V_1(C), \quad (4.11)$$

com

$$U_D^0 = \begin{bmatrix} \cos(\hat{\theta}(D)/2) & i \sin(\hat{\theta}(D)/2) \\ i \sin(\hat{\theta}(D)/2) & \cos(\hat{\theta}(D)/2) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_2 \\ L_g & 0 \end{pmatrix}, \quad L_g = \operatorname{diag}(1, -1) \quad (4.13)$$

$$\hat{\theta}(j) = \begin{pmatrix} i\theta_B(j) & 0 \\ 0 & \theta_F(j) \end{pmatrix}, \quad \theta_B(j), \theta_F(j) \in \mathbb{R} \quad (4.14)$$

com $j = B, C$ e as matrizes $V_{1,2}(j)$ dadas por

$$V_1(j) = \text{diag}((v_1(j)^T)^{-1}, v_1(j), (v_2(j)^T)^{-1}, v_2(j)) \quad (4.15)$$

$$v_1(j) = \exp \begin{pmatrix} 0 & -\xi_1^*(j) \\ \xi_1(j) & 0 \end{pmatrix} ; \quad v_2(j) = \exp i \begin{pmatrix} 0 & -\xi_2^*(j) \\ \xi_2(j) & 0 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

$$V_2(j) = \begin{pmatrix} e^{i\phi(j)\bar{\tau}_3} & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_4 \end{pmatrix} ; \quad \phi(j) = \begin{pmatrix} \phi_B(j) & 0 \\ 0 & \phi_F(j) \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

$\xi_{1,2}(j)$ são variáveis complexas de Grassmann e $\phi_{B,F}(j)$ variáveis reais ordinárias.

Devemos notar que nesta representação, as matrizes $\bar{\tau}_3$ e \bar{k} assumem a forma

$$\bar{\tau}_3 = \text{diag}(1, 1, -1, -1) \quad \text{and} \quad \bar{k} = \text{diag}(1, -1, 1, -1).$$

e portanto, $\{C_0^{(T)}, \bar{\tau}_3\} = 0$. Esta relação de anti-comutação implica

$$e^{i\phi\bar{\tau}_3} C_0^{(T)} = C_0^{(T)} e^{-i\phi\bar{\tau}_3}. \quad (4.18)$$

4.3 Cálculo dos supertraços

4.3.1 Termos da Lagrangeana

Começemos com os termos da exponencial. O primeiro deles é:

$$\text{trg}(Q e^{i\phi\tau_3} Q e^{-i\phi\tau_3}) = \text{trg}(Q_C^0 e^{i\phi\tau_3} Q_C^0 e^{-i\phi\tau_3}). \quad (4.19)$$

Aqui usamos a invariância do supertraço por permutações cíclicas e o fato de que τ_3 comuta com U_D e V_C . O supertraço pode assim ser facilmente obtido e fornece

$$\begin{aligned} \text{trg}(Q_C^0 e^{i\phi\tau_3} Q_C^0 e^{-i\phi\tau_3}) &= 2 \text{trg}(\cos^2 \hat{\theta}(C) + \sin^2 \hat{\theta}(C) e^{-2i\phi\tau_3}) \\ &= 4 \text{trg}(\cos^2 \hat{\theta}(C) + \cos 2\phi \sin^2 \hat{\theta}(C)) \\ &= 4(1 - \cos 2\phi) [\lambda_B^2(C) - \lambda_F^2(C)], \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde $\lambda_B(j) = \cosh(\theta_B(j))$ e $\lambda_F(j) = \cos(\theta_F(j))$.

O segundo termo da exponencial é

$$\begin{aligned}\text{trg}(QL) &= \text{trg}(U_D^{-1}V_C^{-1}Q_C^0V_CU_DL) \\ &= \text{trg}(V_2(D)V_C^{-1}Q_C^0V_CV_2(D)^{-1}U_D^0L(U_D^0)^{-1}).\end{aligned}\quad (4.21)$$

Nessa passagem, usamos que $V_1(D)$ e $V_2(D)$ comutam com L .

$$U_D^0L(U_D^0)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \hat{\theta}(D) & -i \sin \hat{\theta}(D) \\ i \sin \hat{\theta}(D) & -\cos \hat{\theta}(D) \end{pmatrix}.\quad (4.22)$$

Simplificamos a notação escrevendo:

$$V_CV_2(D)^{-1} \equiv \text{diag}(u_1, \tilde{u}_1, u_2, \tilde{u}_2)\quad (4.23)$$

$$u_1 = e^{i\phi(C)}(v_1(C)^T)^{-1}e^{-i\phi(D)} \quad u_2 = (v_2(C)^T)^{-1}\quad (4.24)$$

$$\tilde{u}_1 = e^{-i\phi(C)}v_1(C)e^{i\phi(D)} \quad \tilde{u}_2 = v_2(C)\quad (4.25)$$

Para tornar mais claro o produto das matrizes, escrevemos as matrizes Q_C^0 e $U_D^0L(U_D^0)^{-1}$ em blocos 2×2 , como segue:

$$Q_C^0 = \begin{bmatrix} \cos \hat{\theta}(C) & 0 & 0 & i \sin \hat{\theta}(C) \\ 0 & \cos \hat{\theta}(C) & i \sin \hat{\theta}(C)L_g & 0 \\ 0 & -i \sin \hat{\theta}(C)L_g & -\cos \hat{\theta}(C) & 0 \\ -i \sin \hat{\theta}(C) & 0 & 0 & -\cos \hat{\theta}(C) \end{bmatrix},\quad (4.26)$$

$$U_D^0L(U_D^0)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \hat{\theta}(D) & 0 & -i \sin \hat{\theta}(D) & 0 \\ 0 & \cos \hat{\theta}(D) & 0 & -i \sin \hat{\theta}(D) \\ i \sin \hat{\theta}(D) & 0 & -\cos \hat{\theta}(D) & 0 \\ 0 & i \sin \hat{\theta}(D) & 0 & -\cos \hat{\theta}(D) \end{bmatrix}.\quad (4.27)$$

Assim o supertraço é dado por

$$\begin{aligned}\text{trg}(QL) &= \text{trg}(u_1^{-1} \cos \hat{\theta}(C)u_1 \cos \hat{\theta}(D) + \tilde{u}_1^{-1} \cos \hat{\theta}(C)\tilde{u}_1 \cos \hat{\theta}(D)) \\ &\quad + \text{trg}(u_2^{-1} \cos \hat{\theta}(C)u_2 \cos \hat{\theta}(D) + \tilde{u}_2^{-1} \cos \hat{\theta}(C)\tilde{u}_2 \cos \hat{\theta}(D)).\end{aligned}\quad (4.28)$$

Expandimos a exponencial nas matrizes $v_1(C)$, $v_1(C)^T$ etc, em termos das variáveis $\xi_1(C)$ e $\xi_1^*(C)$. Como estas são variáveis de Grassmann, obtemos um polinômio finito de grau

máximo $\xi_1^2(C) \equiv \xi_1(C)\xi_1^*(C)$. Essas matrizes se escrevem, portanto, como

$$\begin{aligned} v_1(C) &= \begin{bmatrix} 1 + \xi_1^2(C)/2 & -\xi_1^*(C) \\ \xi_1(C) & 1 - \xi_1^2(C)/2 \end{bmatrix} \\ v_1(C)^T &= \begin{bmatrix} 1 + \xi_1^2(C)/2 & \xi_1(C) \\ \xi_1^*(C) & 1 - \xi_1^2(C)/2 \end{bmatrix} \\ (v_1(C))^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 + \xi_1^2(C)/2 & \xi_1^*(C) \\ -\xi_1(C) & 1 - \xi_1^2(C)/2 \end{bmatrix} \\ (v_1(C)^T)^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 + \xi_1^2(C)/2 & -\xi_1(C) \\ -\xi_1^*(C) & 1 - \xi_1^2(C)/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Calculamos então o primeiro supertraço da Eq. (4.28):

$$\begin{aligned} &\text{trg}(u_1^{-1} \cos \hat{\theta}(C) u_1 \cos \hat{\theta}(D)) = \\ &= \text{trg}(e^{i\phi(D)} v_1(C)^T e^{-i\phi(C)} \cos \hat{\theta}(C) e^{i\phi(C)} (v_1(C)^T)^{-1} e^{-i\phi(D)} \cos \hat{\theta}(D)) \\ &= \text{trg}(v_1(C)^T \cos \hat{\theta}(C) (v_1(C)^T)^{-1} \cos \hat{\theta}(D)) \\ &= \text{trg} \begin{bmatrix} 1 + \xi_1^2(C)/2 & \xi_1(C) \\ \xi_1^*(C) & 1 - \xi_1^2(C)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_B(C) & 0 \\ 0 & \lambda_F(C) \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} 1 + \xi_1^2(C)/2 & -\xi_1(C) \\ -\xi_1^*(C) & 1 - \xi_1^2(C)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_B(D) & 0 \\ 0 & \lambda_F(D) \end{bmatrix} \tag{4.29} \\ &= \text{trg} \begin{bmatrix} \lambda_B(C)\lambda_B(D)(1 + \xi_1^2(C)) & \dots \\ -\lambda_F(C)\lambda_B(D)\xi_1^2(C) & \\ \dots & \lambda_B(C)\lambda_F(D)\xi_1^2(C) \\ & +\lambda_F(C)\lambda_F(D)(1 - \xi_1^2(C)) \end{bmatrix} \\ &= [\lambda_B(C)\lambda_B(D) - \lambda_F(C)\lambda_F(D)] + \Delta\lambda(C)\Delta\lambda(D)\xi_1^2(C) \end{aligned}$$

com $\Delta\lambda(j) \equiv \lambda_B(j) - \lambda_F(j)$.

O supertraço $\text{trg}(\tilde{u}_1^{-1} \cos \hat{\theta}(C) \tilde{u}_1 \cos \hat{\theta}(D))$ pode ser obtido diretamente de resultado anterior fazendo as seguintes substituições:

$$\phi(j) \rightarrow -\phi(j), (v_1(C)^T)^{-1} \rightarrow v_1(C) : \xi_1(C) \rightarrow \xi_1^*(C), \xi_1^*(C) \rightarrow -\xi_1(C).$$

Então podemos ver que o resultado obtido é o mesmo:

$$\begin{aligned} \text{trg}(\tilde{u}_1^{-1} \cos \hat{\theta}(C) \tilde{u}_1 \cos \hat{\theta}(D)) \\ = [\lambda_B(C)\lambda_B(D) - \lambda_F(C)\lambda_F(D)] + \Delta\lambda(C)\Delta\lambda(D)\xi_1^2(C). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Os dois outros supertraços são obtidos também pelas substituições $\xi_1(j) \rightarrow i\xi_2(j)$ e então:

$$\begin{aligned} \text{trg}(u_2^{-1} \cos \hat{\theta}(C) u_2 \cos \hat{\theta}(D)) + \text{trg}(\tilde{u}_2^{-1} \cos \hat{\theta}(C) \tilde{u}_2 \cos \hat{\theta}(D)) = \\ 2[\lambda_B(C)\lambda_B(D) - \lambda_F(C)\lambda_F(D)] - 2\Delta\lambda(C)\Delta\lambda(D)\xi_2^2(C) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Somando todos os termos, obtemos:

$$\text{trg}(QL) = 4[\lambda_B(C)\lambda_B(D) - \lambda_F(C)\lambda_F(D)] + 2\Delta\lambda(C)\Delta\lambda(D)(\xi_1^2(C) - \xi_2^2(C)) \quad (4.32)$$

A Lagrangeana agora, em termos das variáveis que parametrizam Q é

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -4y(1 - \cos 2\phi) [\lambda_B^2(C) - \lambda_F^2(C)] \\ & - ix[\lambda_B(C)\lambda_B(D) - \lambda_F(C)\lambda_F(D)] \\ & - i\frac{x}{2}\Delta\lambda(C)\Delta\lambda(D)[\xi_1^2(C) - \xi_2^2(C)] \end{aligned} \quad (4.33)$$

4.3.2 Termos de fonte

Os termos de fonte são mais trabalhosos pois envolvem as matrizes k_1 e k_2 que não comutam com as matrizes que parametrizam Q . Vamos introduzir aqui algumas definições para simplificar a notação.

$$\begin{aligned}
V_2(D) &= \begin{bmatrix} e^{i\phi(D)\bar{\tau}_3} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_4 \end{bmatrix} \\
V_1(D) &= \begin{bmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{bmatrix}, \quad w_i = \begin{bmatrix} (v_i(D)^T)^{-1} & 0 \\ 0 & v_i(D) \end{bmatrix} \\
U_D &= \begin{bmatrix} C_d w_1 & iS_d^\dagger w_2 \\ iS_d w_1 & C_d w_2 \end{bmatrix} \\
C_d &= \begin{bmatrix} c_d & 0 \\ 0 & c_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\hat{\theta}(D)/2) & 0 \\ 0 & \cos(\hat{\theta}(D)/2) \end{bmatrix} \\
S_d &= \begin{bmatrix} s_d & 0 \\ 0 & s_d^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\hat{\theta}(D)/2) e^{i\phi(D)} & 0 \\ 0 & \sin(\hat{\theta}(D)/2) e^{-i\phi(D)} \end{bmatrix} \\
S_d^\dagger &= \begin{bmatrix} s_d^* & 0 \\ 0 & s_d \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_C &= V_1(C)V_2(C) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} \\
x_1 &= \begin{bmatrix} e^{i\phi(C)}(v_1(C)^T)^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi(C)} v_1(C) \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} (v_2(C)^T)^{-1} & 0 \\ 0 & v_2(C) \end{bmatrix} \\
V_C^{-1}Q_C^0V_C &= \begin{bmatrix} x_1^{-1}C_c x_1 & ix_1^{-1}S_c x_2 \\ -ix_2^{-1}S_c^T x_1 & -x_2^{-1}C_c x_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$C_c = \cos \hat{\theta}(C), \quad S_c = \sin \hat{\theta}(C)C_0, \quad S_c^T = \sin \hat{\theta}(C)C_0^T.$$

É útil também calcular os produtos:

$$\begin{aligned}
U_D k_2 U_D^{-1} &= \begin{bmatrix} S_d^\dagger w_2 \bar{k} w_2^{-1} S_d & iS_d^\dagger w_2 \bar{k} w_2^{-1} C_d \\ -iC_d w_2 \bar{k} w_2^{-1} S_d & C_d w_2 \bar{k} w_2^{-1} C_d \end{bmatrix} \\
U_D k_1 U_D^{-1} &= \begin{bmatrix} C_d w_1 \bar{k} w_1^{-1} C_d & -iC_d w_1 \bar{k} w_1^{-1} S_d^\dagger \\ iS_d^\dagger w_1 \bar{k} w_1^{-1} C_d & S_d w_1 \bar{k} w_1^{-1} S_d^\dagger \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Calculemos então o seguinte supertraço

$$\text{trg}(Qk_2) = \text{trg}(V_C^{-1}Q_C^0V_C U_D k_2 U_D^{-1}). \quad (4.34)$$

Com as definições acima, encontramos facilmente que este traço é igual a

$$\text{trg}(x_1^{-1} C_c x_1 S_d^\dagger w_2 \bar{k} w_2^{-1} S_d) - \text{trg}(x_2^{-1} C_c x_2 C_d w_2 \bar{k} w_2^{-1} C_d) \quad (4.35)$$

Observe que os supertraços envolvendo as supermatrizes S_c e S_c^T são nulos por causa das supermatrizes C_0 e C_0^T . O primeiro termo da Eq. (4.35) pode ser escrito como a soma de dois supertraços

$$\begin{aligned} & \text{trg}(v_1(C)^T \cos \hat{\theta}(C) (v_1(C)^T)^{-1} s_d^* (v_2(D)^T)^{-1} L_g v_2(D)^T s_d) \\ & + \text{trg}(v_1(C)^{-1} \cos \hat{\theta}(C) v_1(C) s_d v_2(D) L_g v_2(D)^{-1} s_d^*) \end{aligned}$$

Calculando os supertraços acima, encontramos

$$\begin{aligned} & [1 - \lambda_B(D)][\lambda_B(C) + \Delta\lambda(C)\xi_1^2(C)][1 - 2\xi_2^2(D)] \\ & + [1 - \lambda_F(D)][\lambda_F(C) + \Delta\lambda(C)\xi_1^2(C)][1 + 2\xi_2^2(D)] \\ & - 4\Delta\lambda(C) \sinh\left(\frac{\theta_B(D)}{2}\right) \sinh\left(\frac{\theta_F(D)}{2}\right) [e^{i\Delta\phi(D)} \xi_1(C)\xi_2^*(D) - e^{-i\Delta\phi(D)} \xi_1^*(C)\xi_2(D)], \end{aligned}$$

onde $\Delta\phi(D) = \phi_B(D) - \phi_F(D)$.

O segundo termo da Eq. (4.35) pode ser obtido diretamente do anterior fazendo as substituições:

$$\xi_1(C) \rightarrow i\xi_2(C), \quad \sin(\hat{\theta}(D)/2) \rightarrow \cos(\hat{\theta}(D)/2), \quad \Delta\phi(D) = 0$$

Assim, obtemos, já com o sinal negativo,

$$\begin{aligned} & - [1 + \lambda_B(D)][\lambda_B(C) - \Delta\lambda(C)\xi_2^2(C)][1 - 2\xi_2^2(D)] \\ & - [1 + \lambda_F(D)][\lambda_F(C) - \Delta\lambda(C)\xi_2^2(C)][1 + 2\xi_2^2(D)] \\ & + 4\Delta\lambda(C) \cosh\left(\frac{\theta_B(D)}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_F(D)}{2}\right) [\xi_2(C)\xi_2^*(D) - \xi_2^*(C)\xi_2(D)], \end{aligned}$$

Somando os dois termos, encontramos

$$\begin{aligned} \text{trg}(Qk_2) = & - 2[\lambda_B(C)\lambda_B(D) + \lambda_F(C)\lambda_F(D)] \\ & + 4[\lambda_B(C)\lambda_B(D) - \lambda_F(C)\lambda_F(D)]\xi_2^2(D) \\ & + \Delta\lambda(C)[2 - \lambda_B(D) - \lambda_F(D)]\xi_1^2(C) \\ & + \Delta\lambda(C)[2 + \lambda_B(D) + \lambda_F(D)]\xi_2^2(C) \\ & + 2\Delta\lambda(C)\Delta\lambda(D)[\xi_1^2(C) - \xi_2^2(C)]\xi_2^2(D) + (\dots). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Omitimos aqui os termos proporcionais a $\xi_2(D)$, $\xi_2^*(D)$ que não contribuirão para o resultado final.

Vamos agora calcular o supertraço do outro termo de fonte que envolve o comutador. O primeiro termo do comutador é

$$\text{trg}(Q e^{-i\phi\tau_3} Q e^{i\phi\tau_3} \tau_3 k_1) = \text{trg}(V_C^{-1} Q_C^0 e^{-i\phi\tau_3} Q_C^0 e^{i\phi\tau_3} V_C \tau_3 U_D k_1 U_D^{-1}) \quad (4.37)$$

Usando as definições acima, podemos escrever

$$Q_C^0 e^{-i\phi\tau_3} Q_C^0 e^{i\phi\tau_3} = \begin{bmatrix} C_c^2 + S_c S_c^T e^{2i\phi\tau_3} & iC_c S_c (e^{2i\phi\tau_3} - 1) \\ -iC_c S_c^T (1 - e^{2i\phi\tau_3}) & C_c^2 + S_c S_c^T e^{2i\phi\tau_3} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Podemos desconsiderar os termos fora da diagonal da matriz acima, pois novamente, devido à forma da matriz C_0 , o supertraço de termos envolvendo S_c ou S_c^T apenas, e não o seu produto, se anula. Definindo a supermatriz A de dimensão 4×4

$$A = \cos^2 \hat{\theta}(C) + \sin^2 \hat{\theta}(C) e^{2i\phi\tau_3} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^* \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

onde $a = \cos^2 \hat{\theta}(C) + \sin^2 \hat{\theta}(C) e^{2i\phi}$ tem dimensão 2×2 , podemos escrever

$$V_C^{-1} Q_C^0 e^{-i\phi\tau_3} Q_C^0 e^{i\phi\tau_3} V_C \tau_3 = \begin{bmatrix} x_1^{-1} A x_1 \bar{\tau}_3 & \cdots \\ \cdots & x_2^{-1} A x_2 \bar{\tau}_3 \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

Combinando o resultado acima, com a expressão para $U_D k_1 U_D^{-1}$, encontramos que o traço (4.37) é igual a

$$\text{trg}(x_1^{-1} A x_1 \bar{\tau}_3 C_d w_1 \bar{k} w_1^{-1} C_d) + \text{trg}(x_2^{-1} A x_2 \bar{\tau}_3 S_d w_1 \bar{k} w_1^{-1} S_d^\dagger). \quad (4.41)$$

O primeiro termo é igual à soma de dois supertraços,

$$\begin{aligned} & \text{trg}(v_1(C)^T a (v_1(C)^T)^{-1} \cos(\hat{\theta}(D)/2) (v_1(D)^T)^{-1} L_g v_1(D)^T \cos(\hat{\theta}(D)/2)) \\ & - \text{trg}(v_1(C)^{-1} a^* v_1(C) \cos(\hat{\theta}(D)/2) v_1(D) L_g v_1(D)^{-1} \cos(\hat{\theta}(D)/2)). \end{aligned}$$

Calculando esses supertraços encontramos

$$\begin{aligned}
i \operatorname{sen}(2\phi) \times & \{ [1 - \lambda_B^2(C)][1 + \lambda_B(D)] + [1 - \lambda_F^2(C)][1 + \lambda_F(D)] \\
& - [\lambda_B^2(C) - \lambda_F^2(C)][2 + \lambda_B(D) + \lambda_F(D)]\xi_1^2(C) \\
& + 2([1 - \lambda_B^2(C)][1 + \lambda_B(D)] - [1 - \lambda_F^2(C)][1 + \lambda_F(D)])\xi_1^2(D) \\
& - 2\Delta\lambda(D)[\lambda_B^2(C) - \lambda_F^2(C)]\xi_1^2(C)\xi_1^2(D) + (\dots) \} \quad (4.42)
\end{aligned}$$

Os termos omitidos são termos proporcionais a $\xi_2(D)$, $\xi_2^*(D)$ e que não contribuirão para o resultado final.

Podemos facilmente obter o segundo termo da Eq. (4.41) fazendo as seguintes substituições no resultado para o primeiro termo:

$$\xi_1^2(C) \rightarrow -\xi_2^2(C), \quad \lambda_j(D) \rightarrow -\lambda_j(D).$$

Assim, encontramos

$$\begin{aligned}
i \operatorname{sen}(2\phi) \times & \{ [1 - \lambda_B^2(C)][1 - \lambda_B(D)] + [1 - \lambda_F^2(C)][1 - \lambda_F(D)] \\
& + [\lambda_B^2(C) - \lambda_F^2(C)][2 - \lambda_B(D) - \lambda_F(D)]\xi_2^2(C) \\
& + 2([1 - \lambda_B^2(C)][1 - \lambda_B(D)] - [1 - \lambda_F^2(C)][1 - \lambda_F(D)])\xi_1^2(D) \\
& - 2\Delta\lambda(D)[\lambda_B^2(C) - \lambda_F^2(C)]\xi_2^2(C)\xi_1^2(D) + (\dots) \} \quad (4.43)
\end{aligned}$$

Somando esses dois resultados, encontramos que a Eq. (4.41) é igual a

$$\begin{aligned}
i \operatorname{sen}(2\phi) \times & \{ 2[2 - \lambda_B^2(C) - \lambda_F^2(C)] \\
& - 4[\lambda_B^2(C) - \lambda_F^2(C)]\xi_1^2(D) \\
& - [\lambda_B^2(C) - \lambda_F^2(C)][2 + \lambda_B(D) + \lambda_F(D)]\xi_1^2(C) \\
& + [\lambda_B^2(C) - \lambda_F^2(C)][2 - \lambda_B(D) - \lambda_F(D)]\xi_2^2(C) \\
& - 2\Delta\lambda(D)[\lambda_B^2(C) - \lambda_F^2(C)][\xi_1^2(C) + \xi_2^2(C)]\xi_1^2(D) \}. \quad (4.44)
\end{aligned}$$

O segundo termo do comutador é obtido trivialmente do primeiro pela troca de sinal de ϕ . Como resultado, encontramos menos o primeiro termo, e portanto o supertraço do comutador é exatamente igual a 2 vezes o resultado (4.44).

4.4 Integrando sobre as variáveis de Grassmann

A integração em Q é escrita, nesta parametrização, como

$$\int d[Q] = \int d\mu(D)d\mu(C) \left[\frac{2\lambda_F(C)}{\lambda_B(C) + \lambda_F(C)} \right]^2 \quad (4.45)$$

onde

$$\int d\mu(j) = (2\pi)^2 \int d\tilde{\mu}(j) \int d\xi_1(j)d\xi_1^*(j)d\xi_2(j)d\xi_2^*(j) \quad (4.46)$$

$$\int d\tilde{\mu}(j) = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi_B(j)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi_F(j)}{2\pi} \int_1^\infty d\lambda_B(j) \int_{b(j)}^1 d\lambda_F(j) \frac{1}{(\lambda_B(j) - \lambda_F(j))^2} \quad (4.47)$$

e $b(j) = 0$ (-1) para $j = C$ (D). Pelas propriedades das variáveis de Grassmann, deveríamos esperar que apenas os termos que contêm todas as variáveis anticomutativas dão uma integral não-nula. No entanto, uma vez que as medidas de integração $d\tilde{\mu}(j)$ divergem em $\lambda_B(j) = \lambda_F(j) = 1$, a integração sobre as variáveis anticomutativas não pode ser feita diretamente, mas deve seguir uma prescrição especial. No Ap. F mostramos num exemplo simples que essas “falsas” divergências se devem ao caráter peculiar das variáveis de Grassmann e aparecem no cálculo do Jacobiano quando é feita uma transformação de variáveis.

Usamos o teorema demonstrado na Ref. [45], para calcular a integral sobre as variáveis de Grassmann. Este teorema foi generalizado para o caso em questão na Ref. [7], e diz que, expandindo o integrando nas variáveis de Grassmann, apenas os termos

$$f = f_{00} + f_{04} \xi^4(D) + f_{40} \xi^4(C) + f_{44} \xi^8, \quad (4.48)$$

onde $\xi^4(j) \equiv \xi_1(j)\xi_1^*(j)\xi_2(j)\xi_2^*(j)$ e $\xi^8 = \xi^4(C)\xi^4(D)$, contribuem para a integral. Os termos f_{ab} com $a, b \neq 0, 4$ dão uma contribuição nula. A integração resulta em

$$\int d[Q]f = h_{00} + h_{04} + h_{40} + h_{44}, \quad (4.49)$$

onde

$$h_{00} = f_{00}(\lambda_g(C) = 1, \lambda_g(D) = 1) \quad (4.50a)$$

$$h_{04} = \int d\tilde{\mu}(D) f_{04}(\lambda_g(C) = 1, \lambda_g(D)) \quad (4.50b)$$

$$h_{40} = \int d\tilde{\mu}(C) \left[\frac{2\lambda_F(C)}{\lambda_B(C) + \lambda_F(C)} \right]^2 f_{40}(\lambda_g(C), \lambda_g(D) = 1) \quad (4.50c)$$

$$h_{44} = \int d\tilde{\mu}(D) \int d\tilde{\mu}(C) \left[\frac{2\lambda_F(C)}{\lambda_B(C) + \lambda_F(C)} \right]^2 f_{44}(\lambda_g(C), \lambda_g(D)) \quad (4.50d)$$

Vamos inicialmente expandir a exponencial da Lagrangeana da Eq. (4.33) em termos das variáveis de Grassmann. A exponencial do terceiro termo da Eq. (4.33) é igual a

$$\begin{aligned} \exp \left\{ -i \frac{x}{2} \Delta\lambda(C) \Delta\lambda(D) [\xi_1^2(C) - \xi_2^2(C)] \right\} \\ = 1 - i \frac{x}{2} \Delta\lambda(C) \Delta\lambda(D) [\xi_1^2(C) - \xi_2^2(C)] \\ + \frac{x^2}{4} [\Delta\lambda(C) \Delta\lambda(D)]^2 \xi_1^2(C) \xi_2^2(C) \quad (4.51) \end{aligned}$$

Colecionamos, então, os termos proporcionais às variáveis de Grassmann no integrando. Precisamos então multiplicar as Eqs. (4.36), (4.44) e (4.51). A menos de um fator $2i \sin(2\phi)$, que passa a multiplicar toda a integral, encontramos que

$$f_{00} = -4[\lambda_B(C)\lambda_B(D) + \lambda_F(C)\lambda_F(D)][2 - \lambda_B^2(C) - \lambda_F^2(C)]g_0 \quad (4.52a)$$

$$f_{04} = -16[\lambda_B^2(C) - \lambda_F^2(C)][\lambda_B(C)\lambda_B(D) - \lambda_F(C)\lambda_F(D)]g_0 \quad (4.52b)$$

$$\begin{aligned} f_{40} &= \frac{x^2}{4} [\Delta\lambda(C) \Delta\lambda(D)]^2 f_{00} \\ &+ 4ix \Delta\lambda(C) \Delta\lambda(D) [\lambda_B(C)\lambda_B(D) + \lambda_F(C)\lambda_F(D)] [\lambda_B^2(C) - \lambda_F^2(C)] g_0 \\ &- 2ix (\Delta\lambda(C))^2 \Delta\lambda(D) [\lambda_B(D) + \lambda_F(D)] [2 - \lambda_B^2(C) - \lambda_F^2(C)] g_0 \\ &- 16 \Delta\lambda(C) [\lambda_B(D) + \lambda_F(D)] [\lambda_B^2(C) - \lambda_F^2(C)] g_0 \quad (4.52c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{44} &= -4i [\Delta\lambda(C) \Delta\lambda(D)]^2 [\lambda_B^2(C) - \lambda_F^2(C)] \\ &\times \left(2x - ix^2 [\lambda_B(C)\lambda_B(D) - \lambda_F(C)\lambda_F(D)] \right) g_0 \\ &= -4i (\Delta\lambda(C))^2 (\Delta\lambda(D))^2 [\lambda_B^2(C) - \lambda_F^2(C)] \frac{d}{dx} [x^2 g_0] \quad (4.52d) \end{aligned}$$

onde definimos

$$g_0 = \exp \left\{ -f(\phi) [\lambda_B^2(C) - \lambda_F^2(C)] - ix [\lambda_B(C)\lambda_B(D) - \lambda_F(C)\lambda_F(D)] \right\} \quad (4.53)$$

com $f(\phi) = 4y(1 - \cos 2\phi)$ e o pré-fator que multiplica a integral é

$$C = i \frac{c\zeta}{2^5 \Phi_0} \text{sen } 2\phi .$$

Usando as prescrições (4.50), encontramos que h_{00} e h_{04} se anulam e

$$h_{40} = -2^6 \int_1^\infty d\lambda_B(C) \int_0^1 d\lambda_F(C) \frac{\lambda_F^2(C)}{\lambda_B(C) + \lambda_F(C)} \times \exp \left\{ -f(\phi) [\lambda_B^2(C) - \lambda_F^2(C)] - ix [\lambda_B(C) - \lambda_F(C)] \right\} \quad (4.54)$$

$$h_{44} = -4i \frac{d}{dx} x^2 \int_1^\infty d\lambda_B(C) \int_0^1 d\lambda_F(C) \int_1^\infty d\lambda_B(D) \int_{-1}^1 d\lambda_F(D) \times \left[\frac{2\lambda_F(C)}{\lambda_B(C) + \lambda_F(C)} \right]^2 [\lambda_B^2(C) - \lambda_F^2(C)] \times \exp \left\{ -f(\phi) [\lambda_B^2(C) - \lambda_F^2(C)] - ix [\lambda_B(C)\lambda_B(D) - \lambda_F(C)\lambda_F(D)] \right\} \quad (4.55)$$

As integrais nas variáveis $\lambda_B(D)$ e $\lambda_B(C)$ podem ser feitas lembrando que $x \propto \omega$ tem uma parte imaginária negativa, o que garante que as integrais convirjam. Assim, temos que

$$h_{44} = 16i \frac{d}{dx} \int_1^\infty d\lambda_B(C) \int_0^1 d\lambda_F(C) \frac{\lambda_B(C) - \lambda_F(C)}{\lambda_B(C) + \lambda_F(C)} \frac{\lambda_F(C)}{\lambda_B(C)} \times e^{-f(\phi)[\lambda_B^2(C) - \lambda_F^2(C)]} [e^{-ix[\lambda_B(C) - \lambda_F(C)]} - e^{-ix[\lambda_B(C) + \lambda_F(C)]}] \quad (4.56)$$

A integral para a corrente pode ser escrita como

$$\bar{I}(\Phi) = C \int_0^\infty d\omega (h_{40} + h_{44}) + \text{c.c.} = C' \int_0^\infty dx (h_{40} + h_{44}) + \text{c.c.} , \quad (4.57)$$

onde agora

$$C' = i \frac{cd\zeta}{2^5 \pi \Phi_0} \text{sen } 2\phi . \quad (4.58)$$

A integração em x faz com que o termo h_{44} se anule. Integrando em x o termo restante, chegamos à seguinte expressão para a corrente:

$$\bar{I}(\Phi) = -\frac{4cd\zeta}{\pi \Phi_0} \sin 2\phi \mathcal{K}(f(\phi)) , \quad (4.59)$$

onde a função

$$\mathcal{K}(w) = \int_1^\infty d\lambda_B(C) \int_0^1 d\lambda_F(C) \frac{\lambda_F^2(C)}{\lambda_B^2(C) - \lambda_F^2(C)} e^{-w[\lambda_B^2(C) - \lambda_F^2(C)]} \quad (4.60)$$

deve ser avaliada numericamente.

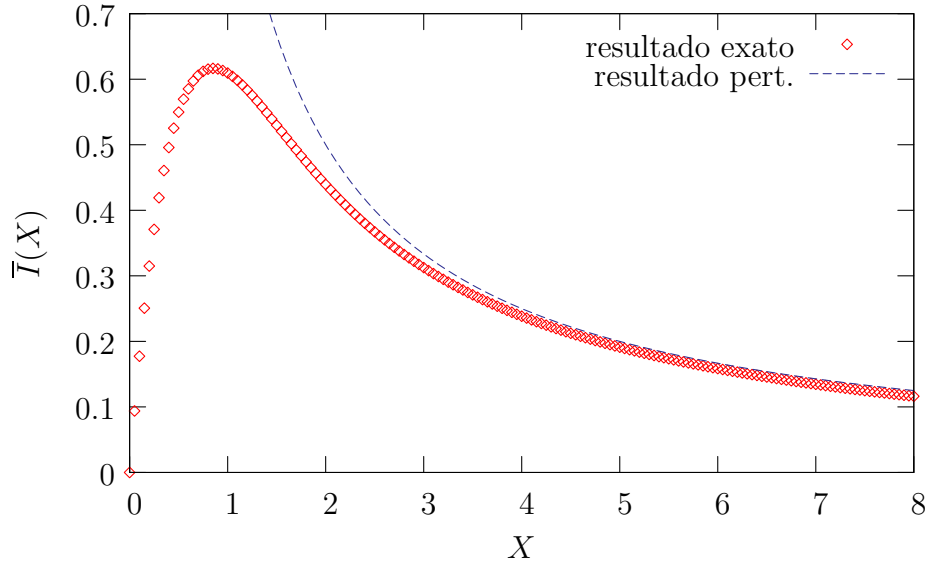


FIGURA 6 - Gráfico do modo zero da corrente em função do parâmetro $X \equiv \sqrt{K\zeta} \phi$ no limite difusivo ($K \gg 1$), em unidades de $2cd\sqrt{\zeta}/(\pi\Phi_0 K^{1/2})$. Para fluxo magnético pequeno ($\Phi \ll \Phi_0$), o resultado exato dá uma contribuição finita, e o resultado perturbativo é divergente.

4.5 Discussão dos resultados

Podemos explorar dois casos distintos: o regime difusivo, em que $K \gg 1$, e o regime balístico em que $K \sim 1$. O primeiro caso, expandimos o seno e o cosseno de ϕ e escrevemos

$$f(\phi) = 4y(1 - \cos 2\phi) \simeq 8y\phi^2 = K\zeta\phi^2 \equiv X^2, \\ \sin 2\phi \simeq 2\phi = \frac{2}{(K\zeta)^{1/2}}X,$$

tal que a corrente é

$$\bar{I}(X) = -\frac{8cd\sqrt{\zeta}}{\pi\Phi_0 K^{1/2}} X\mathcal{K}(X^2). \quad (4.61)$$

Podemos comparar o resultado da integração exata do modo zero com o resultado perturbativo obtido no capítulo anterior. Lá, temos, também no limite $K \gg 1$, que

$$I_{\text{pert.}} = -\frac{2cd\sqrt{\zeta}}{\pi\Phi_0 K^{1/2}} \frac{1}{X}. \quad (4.62)$$

Na Fig. 6, comparamos os resultados exato e perturbativo para o modo zero. Vemos que o resultado exato, diferentemente do resultado perturbativo, não diverge para $\phi = 0$. Temos

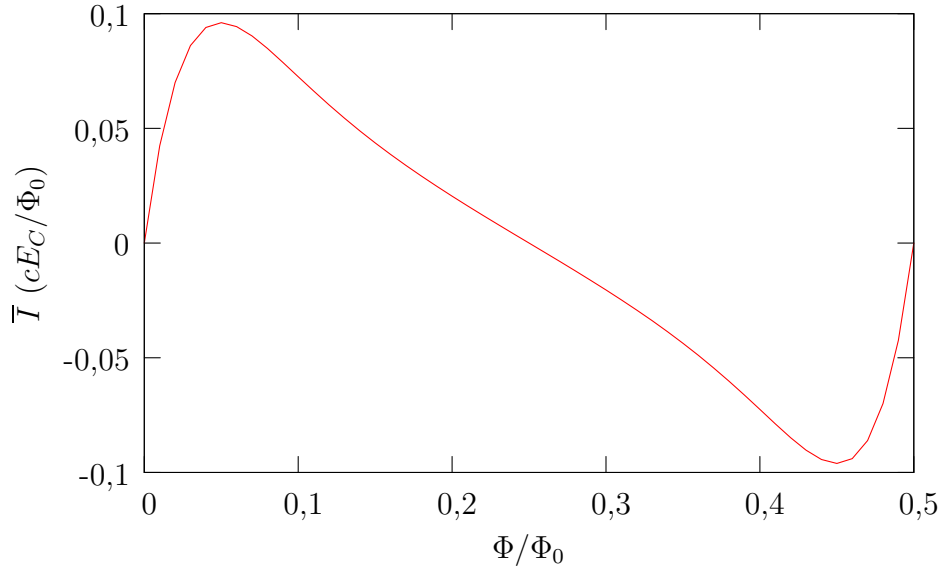


FIGURA 7 - Gráfico da corrente persistente em um anel no limite balístico ($K = 1$). Observamos agora que modo zero tem uma periodicidade de $\Phi_0/2$, pois este se torna o único modo presente, e também um aumento na amplitude da corrente.

que a corrente do modo zero tem um valor máximo para $X \simeq 0.88$, e assintoticamente o cálculo perturbativo se iguala ao exato. O valor máximo da corrente pode ser obtido, observando que o parâmetro ζ se relaciona com a energia de Thouless, E_C , e com o espaçamento médio entre níveis na superfície de Fermi, por

$$\frac{\zeta}{K} = \frac{2E_C}{\pi d} .$$

O valor característico da corrente é portanto

$$I_{\text{caract}} \cong 0,3 \frac{c\sqrt{E_C d}}{\Phi_0} . \quad (4.63)$$

Para o experimento com muitos anéis [33], temos $E_C/d \simeq 100$, o que resulta

$$I_{\text{caract}} \cong 0,03 \frac{cE_C}{\Phi_0} . \quad (4.64)$$

Este resultado é uma ordem de grandeza menor do que os resultados experimentais. A corrente aqui encontrada não apresenta as propriedades de simetria e periodicidade em ϕ . Chamamos a atenção que é a corrente total igual à soma de todos os modos, e não cada modo individualmente, que tem tais propriedades.

No limite oposto, para $K = 1$, estamos no regime balístico, que é o caso do experimento com o anel semiconductor [35]. Neste caso, temos que o caminho livre médio é $\ell = 11 \mu\text{m}$ é da ordem da circunferência do anel, e o comprimento de onda de Fermi $\lambda_F = 42 \text{ nm}$. Estimamos o número de elétrons no anel da ordem de 10^3 e a razão $E_C/d \sim 10$. O gráfico da Fig. 7 mostra o cálculo numérico da Eq. (4.59). O que se observa agora é que o modo zero possui as propriedades de simetria da corrente total pois ele se torna o único modo. Além disso, a corrente é significativamente maior, sendo da ordem de $0,2 ev_F/L$, porém ainda menor do que experimento ($I_{\text{exp}} \approx 0,8 ev_F/L$). No entanto, guiados pelos resultados do Cap. 1 para o caso sem desordem, esperamos que o nosso resultado seja menor do que para o cálculo da corrente em um único anel. Isso porque a média no número de elétrons tem dois resultados imediatos: a mudança do período de oscilação de Φ_0 para $\Phi_0/2$ e a redução da amplitude da corrente.

CORRENTE NUM ANEL COM UM PONTO QUÂNTICO

5.1 Introdução

Pontos quânticos são sistemas quânticos de dimensões mesoscópicas e que se comportam essencialmente como um átomo artificial. Assim, consegue-se experimentalmente controlar diferentes propriedades desses “átomos” e estudar vários fenômenos de natureza quântica que podem apenas ser observados em átomos reais. De forma simples, um ponto quântico é um gás de elétrons bidimensional, que está confinado entre duas camadas de materiais semicondutores, e que pode ainda ser confinado a uma região menor do espaço com a aplicação de potenciais externos. A Fig. 8 mostra uma foto de um destes dispositivos [46].

Com técnicas de MBE e litografia podem-se ser construídas diferentes estruturas com esses pontos. Os chamados interferômetros de Aharonov-Bohm tornaram-se os mais comuns, pois permitem testar fenômenos relacionados à coerência da função de onda de elétrons. São vários os fenômenos observados, como efeito Fano, efeito Kondo, flutuações da condutância em função de um fluxo magnético externo entre outros. Ainda pouco explorado é o efeito desse ponto quântico na corrente persistente de um anel de Aharonov-Bohm.

5.2 Formulação supersimétrica para a corrente

Seguindo o modelo IWZ, vamos modelar o problema do anel com um ponto quântico da maneira mais simples, como um sistema com duas caixas: uma do ponto quântico e a outra do anel. Este modelo representa o sistema no regime balístico, adequado para anéis

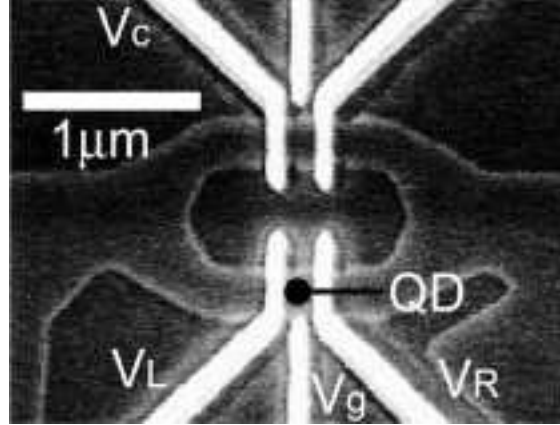


FIGURA 8 - Imagem de micrografia por varredura eletrônica de um ponto quântico imerso em um anel de Aharonov-Bohm.

semicondutores. Consideramos a desordem somente no anel e a modelamos com uma matriz aleatória H_{GOE} de dimensão $N \times N$ do Ensemble Ortogonal Gaussiano. Para o ponto quântico, consideramos apenas um nível de energia desocupado e não degenerado ε . Essa energia pode ser alterada através da variação do “potencial de gate” V_g aplicado ao ponto quântico. Incluímos a fase de A-B – devida a um campo magnético perpendicular ao plano do anel – nos termos de acoplamento entre o anel e o ponto quântico, de forma que o elétron adquire metade da fase ao entrar no ponto quântico e a outra metade ao sair. Desta forma, temos que o acoplamento é descrito pelo vetor V de dimensão N e com elementos

$$v(\phi) = v_E e^{i\phi/2} + v_D e^{-i\phi/2} = v_0 \cos(\phi/2). \quad (5.1)$$

Aqui $v_{E,D}$ são os acoplamentos pelo lado esquerdo e direito do anel, que podemos considerar essencialmente iguais, e $\phi = 2\pi\Phi/\Phi_0$. Dessa forma, o Hamiltoniano do sistema tem dimensão $(1 + N) \times (1 + N)$ e é descrito por

$$H = \begin{pmatrix} \varepsilon & V^T \\ V & H_{\text{GOE}} \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Ao contrário de antes, a corrente agora não é tão sensível à separação entre níveis no anel, mas tem uma forte dependência com a energia do nível do ponto quântico. Podemos, assim, fazer apenas a média na realização das impurezas e a corrente é, então, dada por

uma função de um ponto apenas (c.f. Eq. (1.17))

$$I(\phi) = \frac{4c}{\Phi_0} \int_{-\infty}^{E_F} dE \operatorname{Im} \operatorname{Tr} \left\{ \frac{\partial H}{\partial \phi} (E^+ - H)^{-1} \right\}. \quad (5.3)$$

Note que aqui devemos tomar o limite inferior da integral a partir de menos infinito para garantir que serão consideradas todas as energias abaixo da energia de Fermi. Ao contrário do caso do anel sem o ponto quântico, onde as principais contribuições para a corrente vinham dos elétrons com energia próxima ao nível de Fermi, aqui a contribuição maior vem dos elétrons com energias próximas a ε .

Como no Cap. 3, definimos um funcional gerador supersimétrico para calcular Eq. (5.3)

dado por

$$Z[\delta\phi] = \int d[\psi] \exp\left\{ \frac{i}{2} \psi^\dagger D[\delta\phi] \psi \right\} = \exp\left\{ -\operatorname{Trg} \ln D[\delta\phi] \right\}, \quad (5.4)$$

onde $\psi_\mu^T = (S_\mu, S_\mu^*, \chi_\mu, \chi_\mu^*)$ é um supervetor, $D[\delta\phi]$ é uma supermatriz dada por

$$D[\delta\phi] = E^+ - H(\phi + k\delta\phi) \quad (5.5)$$

e $k = \operatorname{diag}(1, 1, -1, -1)$.

Com essas definições temos que $Z[0] = 1$ e a corrente média é dada por

$$\bar{I}(\phi) = \frac{2c}{\Phi_0} \int_{-\infty}^{E_F} dE \operatorname{Im} \left. \frac{\partial \overline{Z[\delta\phi]}}{\partial \delta\phi} \right|_{\delta\phi=0}. \quad (5.6)$$

Procedemos da maneira usual para realizar a média no ensemble e a transformação de Hubbard–Stratonovitch. Obtemos a média no funcional gerador igual a

$$\overline{Z[\delta\phi]} = \int d[\sigma] \exp\{\mathcal{L}[\sigma]\}, \quad (5.7)$$

onde a Lagrangeana é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sigma] &= \frac{N}{4} \operatorname{trg} \sigma^2 + \frac{1}{2} \operatorname{Trg} \ln \begin{pmatrix} E - \varepsilon & V^T \\ V & E - \lambda\sigma \end{pmatrix} \\ &= \frac{N}{4} \operatorname{trg} \sigma^2 + \frac{N}{2} \operatorname{trg} \ln[E - \lambda\sigma] + \frac{1}{2} \operatorname{trg} \ln[1 - (E - \varepsilon)^{-1} V^T (E - \lambda\sigma)^{-1} V]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

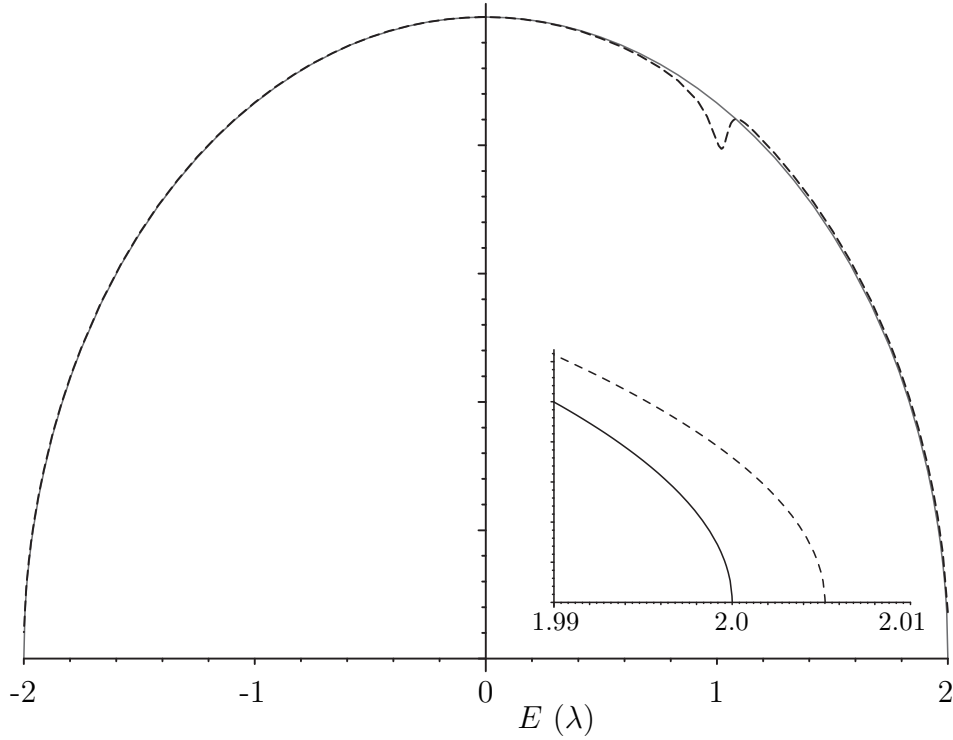


FIGURA 9 - Parte imaginária de σ_0 como função da energia E (linha tracejada) comparado com $\sqrt{1 - (E/2\lambda)^2}$ (linha cheia). O gráfico em detalhe mostra o alargamento da curva. Os valores dos parâmetros são $\lambda = 1$, $\varepsilon = 1$, $N = 10$, $v_0^2 \cos^2(\phi/2) = 0.005$

5.2.1 Solução de ponto-de-sela

Tomando a derivada de $\mathcal{L}[\sigma]$ com respeito a σ (com $\delta\phi = 0$), encontramos a equação de ponto-de-sela

$$\sigma_0 = \frac{\lambda}{E - \lambda\sigma_0} \left\{ 1 + \frac{1}{N} \frac{Nv_0^2 \cos^2(\phi/2)}{(E - \varepsilon)(E - \lambda\sigma_0) - Nv_0^2 \cos^2(\phi/2)} \right\}. \quad (5.9)$$

Esta equação tem uma solução que pode ser escrita como

$$\sigma_0 = \frac{E}{2\lambda} + i\sqrt{\zeta - \left(\frac{E}{2\lambda}\right)^2}, \quad \text{com } |E| < 2\lambda\zeta^{1/2}. \quad (5.10)$$

A lei do semicírculo de Wigner é agora um pouco diferente, uma vez que ζ também depende de σ_0 . O gráfico da parte imaginária de σ_0 é mostrado na Fig. 9. Podemos notar que o espectro é ligeiramente alargado devido à repulsão de níveis e também que ele possui uma deformação próxima à energia de ressonância do ponto quântico.

Expandindo σ em torno do ponto-de-sela, e integrando sobre os modos massivos, encontramos

$$\overline{Z[\delta\phi]} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{trg} \ln \left[1 - \frac{Nv_0^2 \cos^2[(\phi + k\delta\phi)/2]}{(E - \varepsilon)(E - \lambda\sigma_0)} \right] \right\} \quad (5.11)$$

Finalmente, tomando a derivada do funcional gerador com respeito a $\delta\phi$ e fazendo $\delta\phi = 0$, encontramos que a corrente média é dada por

$$\bar{I}(\phi) = -\frac{2c}{\Phi_0} \int_{-\infty}^{E_F} dE \text{Im} \frac{Nv_0^2 \sin(\phi)}{(E - \varepsilon)(E - \lambda\sigma_0) - Nv_0^2 \cos^2(\phi/2)} \quad (5.12)$$

5.3 Resultados

A Eq. (5.12) para a corrente deve ser resolvida iterativamente como segue: para cada valor de E e ε , resolvemos a Eq. (5.9) e escolhemos apenas a solução com uma parte imaginária positiva. Usamos tal solução em Eq. (5.12) e a integramos numericamente. Não precisamos nos preocupar com o limite inferior da integral porque quando E está fora do espectro, σ_0 se torna real e o integrando se anula.

É útil reescrever a Eq. (5.12) numa escala de energia dada em unidades de λ , em que definimos a largura da ressonância por $\Gamma(\phi) = (Nv^2/\lambda) \cos^2(\phi/2)$, e as variáveis adimensionais $\tilde{E} = E/\lambda$, $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/\lambda$ e $\tilde{\Gamma} = \Gamma/\lambda$. Assim, obtemos

$$\bar{I}(\phi) = -\frac{2\lambda c}{\Phi_0} \text{sen}(\phi) \int_{-\infty}^{\tilde{E}_F} d\tilde{E} \text{Im} \frac{\tilde{\Gamma}(0)}{(\tilde{E} - \tilde{\varepsilon})(\tilde{E} - \sigma_0) - \tilde{\Gamma}(\phi)} \quad (5.13)$$

Primeiramente verificamos a dependência da corrente com o fluxo magnético como mostrado na Fig. 10. Notamos que a periodicidade da corrente é de Φ_0 , e que a forma da corrente é essencialmente senoidal pra valores pequeno de Γ , e portanto o máximo ocorre em aproximadamente $\Phi_0/2$. Para valores de Γ irrealisticamente grandes, o gráfico se deforma, e o máximo se desvia para valores maiores do que $\Phi_0/2$.

Para efetuar os cálculos e poder comparar o nosso resultado com as medidas de um experimento realista, usamos os dados da Ref. [35] listados na Tab. 1. Com esses dados podemos determinar as grandezas de interesse do nosso modelo. Calculamos inicialmente

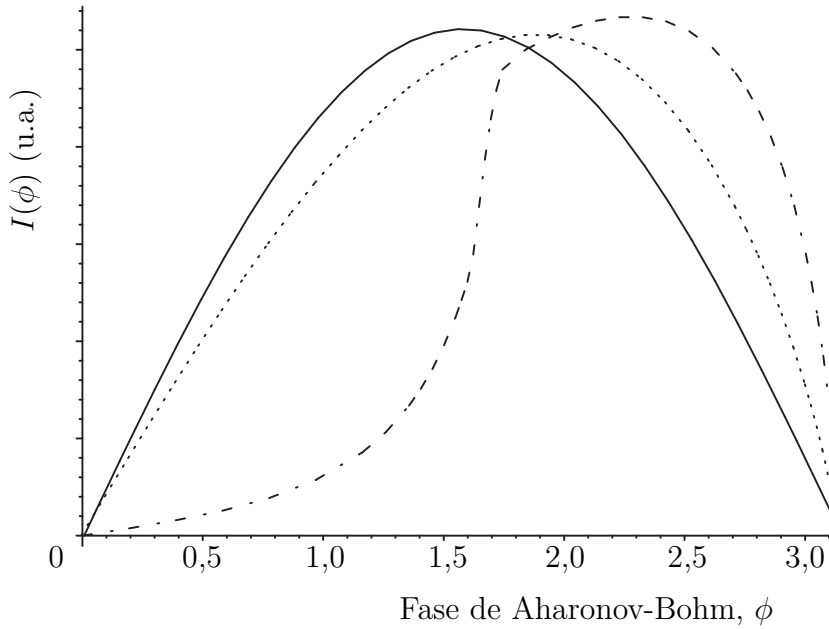


FIGURA 10 - Corrente em função do fluxo magnético para dois valores de $\tilde{\Gamma}(0)$ ($\tilde{\Gamma}(0) = 0,1$ - linha pontilhada, $\tilde{\Gamma}(0) = 5$ - linha tracejada) em comparação com a função seno (linha cheia). As funções foram normalizadas para efeito de comparação.

| | |
|--|---|
| Circunferência média (L) | $8,5 \mu\text{m}$ |
| Área do anel (A) | $1,36 \times 10^{-8} \text{ cm}^2$ |
| Densidade de elétrons (ρ) | $3,6 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ |
| Mobilidade (μ) | $1,14 \times 10^6 \text{ cm}^2/\text{V} \cdot \text{s}$ |
| Velocidade de Fermi (v_F) | $2,6 \times 10^5 \text{ m/s}$ |
| Comprimento de onda de Fermi (λ_F) | 42 nm |
| Caminho livre médio (ℓ) | $11 \mu\text{m}$ |

TABELA 1 - Geometria e propriedades físicas do anel semiconductor mesoscópico usado na experiência da Ref. [35] para efeito de comparação com o modelo teórico.

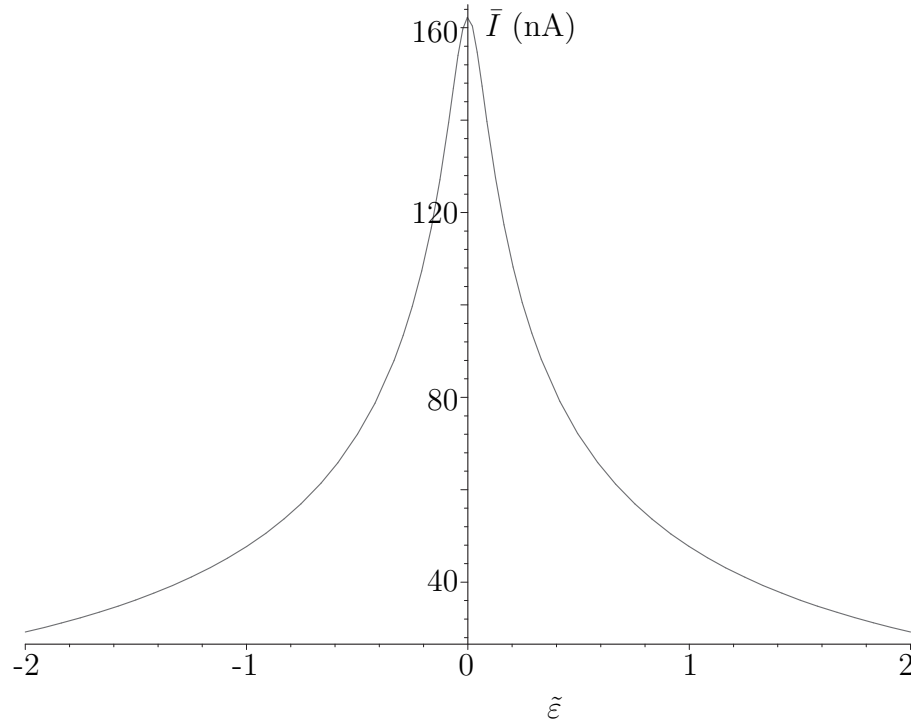


FIGURA 11 - Corrente persistente, \bar{I} , em função da energia do ponto quântico reduzida $\tilde{\epsilon}$ para $\tilde{\Gamma}(0) = 0,1$ e $\phi = \pi/2$.

a energia de Fermi. Esta é dada por

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{h\nu_F}{2\lambda_F} = 13 \text{ meV} . \quad (5.14)$$

O número de níveis no espectro também pode ser estimado sendo igual à metade do número de elétrons, e este é igual a área do anel vezes a densidade de elétrons. Encontramos então $N \sim 2500$. Assumimos o caso do espectro semi-cheio, onde a energia de Fermi cai no centro do espectro, e portanto temos que $\lambda = E_F/2 = 6,5 \text{ meV}$. O espaçamento médio entre níveis no centro do espectro é portanto $d = \pi\lambda/N = 8 \text{ } \mu\text{eV}$. Para $\tilde{\Gamma}(0)$, escolhemos um valor que seja grande comparado a d mas bem menor do que a Energia de Fermi, no caso, $\tilde{\Gamma}(0) = 0,1$. Com esses dados, calculamos a corrente em função da da energia do ponto quântico, como mostrado na Fig. 11. Encontramos uma corrente máxima igual a $\bar{I}_{\text{max}} \simeq 160 \text{ nA}$.

É interessante comparar este resultado com o que foi obtido para o caso sem o ponto quântico. Podemos usar o resultado obtido no Cap. 4 para o caso $K = 1$ e com uma

| $\tilde{\Gamma}(0)$ | Corrente, I (nA) |
|---------------------|--------------------|
| 0,001 | 3,84 |
| 0,01 | 27,0 |
| 0,1 | 162 |

TABELA 2 - Corrente persistente para alguns valores da largura de linha reduzida $\tilde{\Gamma}(0)$, com $N = 2500$, $\varepsilon = 0$ e $\phi = \pi/2$.

energia de Thouless que é dada por

$$E_C = \frac{\hbar\pi^2 D}{L^2} = \frac{\hbar\pi^2 v_F \ell}{L^2} = 0,26 \text{ meV} . \quad (5.15)$$

Usando então a razão $E_C/d \approx 30$, encontramos que a corrente máxima pra o caso sem o ponto quântico é

$$\bar{I}_{\text{caract}} = 0,056 \frac{cE_C}{\Phi_0} = 0,56 \text{ nA} . \quad (5.16)$$

Comparando os resultados obtidos com o valor experimental medido $I_{\text{exp}} = 4 \text{ nA}$ (que coincide com a corrente em uma amostra sem desordem ($I_0 = ev_F/L$)), vemos que a presença do ponto quântico aumenta a corrente em mais de duas ordens de grandeza comparativamente ao resultado teórico obtido para o caso simples, e é cerca de 30 vezes maior do que a amplitude da corrente num anel limpo.

É também interessante calcular o valor da corrente para outros valores da constante de acoplamento Γ , como mostrado na Tab. 2. Mesmo para valores pequenos ($\Gamma(0) \sim d$), o valor obtido para corrente na ressonância é ainda bem maior do que para o caso sem o ponto quântico. Vale notar que a presença do ponto quântico não afeta de forma significativa a dependência da corrente com o fluxo magnético, como foi discutido na Fig. 10. Isto é interessante do ponto de vista experimental, uma vez que a presença do ponto quântico causa apenas um aumento na amplitude da corrente, tornando mais fáceis as medidas experimentais.

6

CONCLUSÃO

As conclusões obtidas nesse trabalho podem ser divididas em três partes distintas. Na primeira parte, estudamos a corrente persistente em estruturas com topologias não-triviais como a fita de Möbius. Usando um cálculo simples e argumentos bastante gerais, pudemos demonstrar que não é possível observar diferenças nas propriedades globais das correntes persistentes em sistemas anulares com topologias distintas. Contrariamente a resultados obtidos em outros trabalhos [30, 31], não observamos a redução do período nem outra característica que pudesse distinguir um anel simples (plano) de uma fita de Möbius com base somente na corrente persistente.

Na segunda parte, estendemos a aplicação do modelo IWZ [12], originalmente proposto para o estudo de flutuações da condutância em amostras lineares, para estudar a corrente persistente em um conjunto de anéis mesoscópicos metálicos com uma desordem fraca. Pudemos mostrar que o modelo IWZ é equivalente ao modelo contínuo [6, 7] no limite em que o número de fatias (ou caixinhas) é muito maior do que um. Encontramos que a corrente persistente média tem uma periodicidade que é metade da corrente num único anel e que o efeito da desordem é reduzir a amplitude da corrente e suavizar a sua curva. A vantagem desse modelo é sua analogia ao modelo de cadeia de Hubbard, o que possibilita a inclusão de forma simples e direta de novas características ao sistema, como, por exemplo, a ligação do anel a um reservatório ou a condutores externos, ou qualquer outro tipo de acoplamento.

Finalmente, fazemos uma utilização dessas características desse modelo para incluir um ponto quântico no anel e estudar a corrente persistente nesse caso. Encontramos que a presença do ponto quântico causa um aumento significativo na amplitude da corrente – cerca de uma ordem de grandeza maior do que para um anel sem desordem, e mais de duas ordem de grandeza comparado ao resultado teórico incluindo desordem. Além disso,

as características de simetria e periodicidade da corrente com o fluxo magnético externo não são alteradas. Dadas as pequenas amplitudes da corrente persistente em anéis de dimensões mesoscópicas, a inclusão de um ponto quântico neste anéis torna mais fáceis a detecção e medida destas correntes, e, assim, as correntes persistentes poderiam ser usadas para a realização de medidas de outras propriedades de tais sistemas.

A

AUTOENERGIAS DO SISTEMA SEM DESORDEM

As energias dos elétrons num potencial vetor \mathbf{A} são dadas por

$$\frac{1}{2m} \left(-i\hbar\nabla + \frac{e}{c}\mathbf{A} \right)^2 \Psi + V\Psi = E\Psi, \quad (\text{A.1})$$

com a condição de contorno $\Psi(L) = \Psi(0)$. Dentro do anel temos que $\nabla \times \mathbf{A} = 0$, e portanto $\mathbf{A} = \nabla\chi$. Pelo teorema do gradiente, vemos que depois de uma volta no anel, a função χ varia de

$$\chi(L) - \chi(0) = \int_0^L (\nabla\chi) \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \Phi. \quad (\text{A.2})$$

Inicialmente, vamos abrir o termo entre parênteses da Eq. (A.1)

$$\begin{aligned} \left(-i\hbar\nabla + \frac{e}{c}\mathbf{A} \right)^2 \Psi &= -\hbar^2\nabla^2\Psi - \frac{i\hbar e}{c}\nabla \cdot (\mathbf{A}\Psi) - \frac{i\hbar e}{c}\mathbf{A} \cdot \nabla\Psi + \frac{e^2}{c^2}\mathbf{A}^2\Psi \\ &= -\hbar^2\nabla^2\Psi - \frac{i\hbar e}{c}(\nabla \cdot \mathbf{A})\Psi - \frac{2i\hbar e}{c}\mathbf{A} \cdot \nabla\Psi + \frac{e^2}{c^2}A^2\Psi \end{aligned}$$

Escrevendo

$$\Psi = e^{-ie\chi/\hbar c} \Psi', \quad (\text{A.3})$$

calculamos o gradiente de Ψ e obtemos

$$\begin{aligned} \nabla\Psi &= -\frac{ie}{\hbar c}\mathbf{A} e^{-ie\chi/\hbar c} \Psi' + e^{-ie\chi/\hbar c} \nabla\Psi' \\ -\frac{2i\hbar e}{c}\mathbf{A} \cdot \nabla\Psi &= -\frac{e^2}{c^2}A^2\Psi - \frac{2i\hbar e}{c} e^{-ie\chi/\hbar c} \mathbf{A} \cdot \nabla\Psi' \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Já o Laplaciano de Ψ fornece

$$\begin{aligned} -\hbar^2\nabla^2\Psi &= \frac{ie\hbar}{c}[(\nabla \cdot \mathbf{A})\Psi + \mathbf{A} \cdot \nabla\Psi + e^{-ie\chi/\hbar c} \mathbf{A} \cdot \nabla\Psi'] - \hbar^2 e^{-ie\chi/\hbar c} \nabla^2\Psi' \\ &= \frac{ie\hbar}{c}(\nabla \cdot \mathbf{A})\Psi + \frac{e^2}{c^2}A^2\Psi + \frac{2ie\hbar}{c} e^{-ie\chi/\hbar c} \mathbf{A} \cdot \nabla\Psi' - \hbar^2 e^{-ie\chi/\hbar c} \nabla^2\Psi' \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Somando todos os termos, removemos a dependência direta do Hamiltoniano do potencial vetor \mathbf{A} , e obtemos, em termos da nova função de onda Ψ' ,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi' + V\Psi' = E\Psi' , \quad (\text{A.6})$$

que obedece as novas condições de contorno

$$\Psi'(L) = e^{ie\chi(L)/\hbar c} \Psi(L) = e^{ie[\Phi+\chi(0)]/\hbar c} \Psi(0) = e^{2i\pi\Phi/\Phi_0} \Psi'(0) , \quad (\text{A.7})$$

onde $\Phi_0 = hc/e$.

Na ausência de desordem ($V = 0$), as autofunções são ondas planas e as autoenergias do sistema serão simplesmente

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2mL^2} \left(n + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots . \quad (\text{A.8})$$

B

ESPAÇAMENTO MÉDIO ENTRE NÍVEIS

Consideremos uma energia ϵ e um intervalo $\delta\epsilon$ centrado em ϵ . Então, a razão entre o tamanho do intervalo e o número de níveis de energia dentro deste intervalo define o espaçamento médio de níveis, d . No limite em que $\delta\epsilon \rightarrow 0$, obtemos $d(\epsilon)$ que é uma função da energia ϵ e define o espaçamento local dos níveis de energia. Equivalentemente, a densidade local de níveis de energia é dada por

$$\rho(\epsilon) = [d(\epsilon)]^{-1}.$$

Se $n(\epsilon)$ é igual ao número de níveis de energia abaixo de ϵ , podemos escrever

$$n(\epsilon) = \int_0^\epsilon d\epsilon' \sum_n \delta(\epsilon' - \epsilon_n),$$

onde a soma n corre sobre todos os níveis e a integral combinada com a função δ garantem que apenas os níveis de energia menores do que ϵ serão contados.

A densidade média de níveis num intervalo de energia $2\delta\epsilon$ centrado em ϵ , é simplesmente

$$\bar{\rho}(\epsilon) = \frac{n(\epsilon + \delta\epsilon) - n(\epsilon - \delta\epsilon)}{2\delta\epsilon} \quad (\text{B.1})$$

que no limite em que $\delta\epsilon \rightarrow 0$, dá a densidade local de níveis. Esta é, portanto, simplesmente igual à derivada de $n(\epsilon)$, ou seja,

$$\rho(\epsilon) = \frac{dn(\epsilon)}{d\epsilon} = \sum_n \delta(\epsilon - \epsilon_n). \quad (\text{B.2})$$

Usando a seguinte identidade para representar a função delta,

$$\delta(x) = \frac{i}{2\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{x + i\eta} - \frac{1}{x - i\eta}, \quad (\text{B.3})$$

podemos escrever $\rho(E)$ como

$$\rho(E) = \frac{i}{2\pi} \text{Tr}[(E^+ - H)^{-1} - (E^- - H)^{-1}], \quad (\text{B.4})$$

onde $E^\pm = E \pm i\eta$ e o limite de $\eta \rightarrow 0$ está implícito.

Vamos então usar uma representação supersimétrica para escrever $\rho(E)$. Definimos

$$D = E \mathbf{1}_4 + i\eta L - H - jk \quad (\text{B.5})$$

onde

$$L = \text{diag}(1, 1, -1, -1) \quad (\text{B.6})$$

$$k = \text{diag}(1, -1, -1, 1) \quad (\text{B.7})$$

e j é uma variável de fonte introduzida por conveniência, tal que a derivada do funcional gerador $Z[j]$, definido abaixo, em relação a ela, gera os traços que queremos calcular.

Definimos então o supervetor

$$\varphi^T = (S_1 \ \chi_1 \ S_2 \ \chi_2) , \quad (\text{B.8})$$

e o funcional gerador

$$Z[j] = \int d[\varphi] \exp\{i\varphi^\dagger L^{1/2} D L^{1/2}\} . \quad (\text{B.9})$$

É fácil ver, então, que

$$\rho(E) = \frac{i}{4\pi} \left. \frac{\partial \bar{Z}[j]}{\partial j} \right|_{j=0} . \quad (\text{B.10})$$

Fazemos a média no ensemble das matrizes H e a transformação de Hubbard–Stratonovitch de maneira usual. Como resultado, podemos fazer a integral sobre as variáveis φ , mas resta ainda a integral sobre σ . O funcional gerador pode ser escrito como

$$\bar{Z}[j] = \int d[\sigma] \exp\{-\mathcal{L}_{\text{ef}}[\sigma]\} , \quad (\text{B.11})$$

onde

$$\mathcal{L}_{\text{ef}}[\sigma] = \frac{N}{2} \text{trg}(\sigma^2) + N \text{trg} \ln[E - \lambda\sigma - jk] . \quad (\text{B.12})$$

No limite $N \rightarrow \infty$, a exponencial é dominada pelas soluções estacionárias da equação de ponto-de-sela. Esta solução é dada por

$$\sigma_0 = \frac{E}{2\lambda} - i\Delta(E)L , \quad (\text{B.13})$$

onde $\Delta(E) = \sqrt{1 - (E/2\lambda)^2}$ obedece a lei do semi-círculo de Wigner. Expandimos σ em torno da solução de ponto-de-sela como

$$\sigma = \sigma_0 + N^{-1/2}\delta\sigma , \quad (\text{B.14})$$

e expandimos a Lagrangeana efetiva no limite assintótico $N \rightarrow \infty$, desprezando os termos de ordem $1/N$. Obtemos que

$$\mathcal{L}_{\text{ef}}[\sigma] \simeq -\frac{1}{2} \text{trg}[(1 - (\sigma_0)^2)(\delta\sigma)^2] - N \text{trg} \ln[1 - j\sigma_0 k/\lambda] \quad (\text{B.15})$$

A integral sobre $\delta\sigma$ é gaussiana e portanto direta. Como resultado, obtemos

$$\overline{Z}[j] = \exp\{-N \text{trg} \ln[1 - j\sigma_0 k/\lambda]\}. \quad (\text{B.16})$$

Tomando as derivadas em relação a j , encontramos

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \overline{Z}[j]}{\partial j} \right|_{j=0} &= \frac{N}{\lambda} \text{trg}(\sigma_0 k) \\ &= -i \frac{N\Delta(E)}{\lambda} \text{trg}(Lk) = -i \frac{4N\Delta(E)}{\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

E portanto, o espaçamento médio local local dos níveis de energia é dado por

$$d(E) = \frac{1}{\rho(E)} = \frac{\pi\lambda}{N\Delta(E)} \quad (\text{B.18})$$

C

INTEGRAL GAUSSIANA SOBRE $D[\Psi]$

Queremos calcular a integral gaussiana que aparece na Eq. (3.51),

$$\int d[\Psi] \exp\left\{\frac{i}{2}\Psi_{k\alpha}^\dagger (L^{1/2}\mathcal{N}(j)L^{1/2})_{\alpha\beta}^{kl} \Psi_{l\beta}\right\} \quad (\text{C.1})$$

com $1 \leq k, l \leq K$ o índice das caixas e $1 \leq \alpha, \beta \leq 8$ os índices do superespaço (os índices μ, ν do espaço gerado pela desordem foram omitidos pois a matriz é diagonal nesse espaço). Vamos então reordenar o supervetor Ψ escrevendo-o da seguinte maneira

$$\Psi^T = (S_1 \ S_1^* \ S_2 \ S_2^* \ \chi_1 \ \chi_1^* \ \chi_2 \ \chi_2^*). \quad (\text{C.2})$$

e trocamos no supervetor Ψ^\dagger as componentes adjacentes $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$, $\alpha = 3$ e $\alpha = 4$, etc. Por fim multiplicamos por menos um as componentes de índices $\alpha = 5$ e $\alpha = 7$. Fazemos o mesmo com os índices α da matriz $M = i(L^{1/2}\mathcal{N}(j)L^{1/2})$. Como resultado temos que $\Psi_{k\alpha}^\dagger \rightarrow \Psi_{k\alpha}^T$ e $M \rightarrow \tilde{M}$. Escrevemos esta matriz na seguinte forma

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

A simetria do supervetor Ψ implica que $A^T = A$, $D^T = -D$, $C^T = -B$ e $B^T = -C$. Tais relações vem da condição de que o produto $\Psi^T \tilde{M} \Psi$ é invariante pela transposição.

Renomeamos as variáveis de integração introduzindo

$$T = (S_1 \ S_1^* \ S_2 \ S_2^*) \quad \text{e} \quad \tau = (\chi_1 \ \chi_1^* \ \chi_2 \ \chi_2^*). \quad (\text{C.4})$$

A integral assume a forma

$$\int d[T]d[\tau] \exp\left\{\frac{1}{2}T^T A T + T^T B \tau + \tau^T C T + \tau^T D \tau\right\}. \quad (\text{C.5})$$

Fazendo a mudança de variável $\tau \rightarrow \tau - D^{-1}C T$, sabemos que a integral não muda de valor. Fazemos também a mudança de τ^T correspondente, $\tau^T \rightarrow \tau^T - T^T C^T (D^{-1})^T$.

Usando que $D^T = -D$ e $C^T = -B$, obtemos $\tau^T \rightarrow \tau^T - T^T B D^{-1}$. Assim conseguimos desacoplar as integrais em T e τ da seguinte forma

$$\int d[T] \exp\left\{\frac{1}{2}T^T(A - B D^{-1}C)T\right\} \int d[\tau] \exp\left\{\frac{1}{2}\tau^T D \tau\right\}, \quad (\text{C.6})$$

cujo resultado é simplesmente

$$(\det[A - B D^{-1}C])^{-1/2}(\det D)^{1/2} = (\det \tilde{M})^{-1/2}. \quad (\text{C.7})$$

A igualdade acima vem diretamente da Eq. (2.41). Usando a definição de \tilde{M} e o fato de que o determinante da matriz não muda sobre as transformações que levaram M em \tilde{M} e também que $\text{Detg}(iL) = 1$, temos que

$$\int d[\Psi] \exp\left\{\frac{i}{2}\Psi^\dagger L^{1/2} \mathcal{N}(j) L^{1/2} \Psi\right\} = (\text{Detg } \mathcal{N}(j))^{-N/2}. \quad (\text{C.8})$$

Pelo fato de que $\mathcal{N}(j)$ é uma matriz diagonal no espaço $\mu\nu$, entende-se que Detg corre apenas sobre os índices k e α e o fator N aparece explicitamente no expoente.

D

GERADORES t_{12} E t_{21}

Consideremos as transformações lineares T definidas como segue:

$$\psi'_{k\mu\alpha} = \sum_{\beta=1}^8 \hat{T}_{\alpha\beta} \psi_{k\mu\beta}. \quad (\text{D.1})$$

Desejamos que (i) esta transformação deixe invariante a forma

$$\psi_{k\mu\alpha}^\dagger L_{\alpha\beta} \psi_{k\nu\beta} = \sum_{p=1}^2 (-1)^{p+1} \{ S_{k\mu p}^* S_{k\nu p} + S_{k\mu p} S_{k\nu p}^* + \chi_{k\mu p}^* \chi_{k\nu p} - \chi_{k\mu p} \chi_{k\nu p}^* \}, \quad (\text{D.2})$$

e (ii) que ψ' tenha as mesmas simetrias de ψ . A primeira condição se traduz em

$$\hat{T}^\dagger L \hat{T} = L \quad \text{ou equivalentemente,} \quad \hat{T}^{-1} = L \hat{T}^\dagger L. \quad (\text{D.3})$$

O vetor ψ obedece a seguinte simetria $\psi_{k\mu} = C \psi_{k\mu}^*$, onde C é uma supermatriz 8×8 definida como

$$C = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \text{com} \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ & 0 & -1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.4})$$

Logo, a segunda condição se traduz em $\psi'_{k\mu} = C \psi'_{k\mu}^*$ ou

$$\hat{T} = C \hat{T}^* C. \quad (\text{D.5})$$

Tais transformações formam um grupo de Lie graduado. Não entraremos em mais detalhes sobre as questões de simetria e convergência dessas matrizes. Uma discussão cuidadosa e extensa pode ser encontrada no Apêndice D da Ref. [5]. Vamos apenas dizer que essas transformações podem ser decompostas como $T = R T_0$, e que estes T_0 podem ser escritos em termos dos geradores t_{12} e t_{21} da seguinte forma

$$T_0 = \begin{pmatrix} (1 + t_{12} t_{21})^{1/2} & i t_{12} \\ -i t_{21} & (1 + t_{21} t_{12})^{1/2} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.6})$$

Esses geradores obedecem a seguinte relação de simetria

$$t_{21} = \bar{k} t_{12}^\dagger, \quad (\text{D.7})$$

onde \bar{k} é uma matriz diagonal 4×4 com elementos $(1, 1, -1, -1)$. A forma explícita desses geradores é

$$t_{12} = \begin{pmatrix} a_d & a_c & i\eta_d & i\eta_c^* \\ a_c^* & a_d^* & i\eta_c & i\eta_d^* \\ -\rho_d^* & -\rho_c^* & iz_d & iz_c^* \\ \rho_c & \rho_d & -iz_c & iz_d^* \end{pmatrix} \quad (\text{D.8})$$

$$t_{21} = \begin{pmatrix} a_d^* & a_c & \rho_d & \rho_c^* \\ a_c^* & a_d & \rho_c & \rho_d^* \\ -i\eta_d^* & -i\eta_c^* & iz_d^* & -iz_c^* \\ i\eta_c & i\eta_d & iz_c & iz_d \end{pmatrix} \quad (\text{D.9})$$

Os índices c e d , introduzidos por conveniência, dizem respeito aos modos de *diffusion* e *cooperon* que aparecem na teoria. Portanto é conveniente rearranjar essas matrizes, agrupando os índices c e d da seguinte forma. Trocamos as colunas 2 e 3 entre si e também as linhas 2 e 3. Dessa forma, as matrizes têm a seguinte forma:

$$t_{12} = \begin{pmatrix} a_d & i\eta_d & a_c & i\eta_c^* \\ -\rho_d^* & iz_d & -\rho_c^* & iz_c^* \\ a_c^* & i\eta_c & a_d^* & i\eta_d^* \\ \rho_c & -iz_c & \rho_d & iz_d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & C_1 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \quad (\text{D.10})$$

$$t_{21} = \begin{pmatrix} a_d^* & \rho_d & a_c & \rho_c^* \\ -i\eta_d^* & iz_d^* & -i\eta_c^* & -iz_c^* \\ a_c^* & \rho_c & a_d & \rho_d^* \\ i\eta_c & iz_c & i\eta_d & iz_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{D}_1 & \bar{C}_2 \\ \bar{C}_1 & \bar{D}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{D.11})$$

Nesta nova representação as matrizes $\bar{\tau}_3$ e \bar{k} são dadas por

$$\bar{\tau}_3 = \text{diag}(1, 1, -1, -1) \quad ; \quad \bar{k} = \text{diag}(1, -1, 1, -1). \quad (\text{D.12})$$

O supertraço também deve ser modificado de acordo:

$$\text{trg } t_{12} = \text{trg } D_1 + \text{trg } D_2 = a_d - iz_d + a_d^* - iz_d^*. \quad (\text{D.13})$$

E

CONTRAÇÕES DE WICK

Vamos primeiro derivar as regras de contração de Wick para integrais com variáveis ordinárias apenas. Em seguida, derivamos para variáveis de Grassmann, e por fim para os supertraços das matrizes C e D que são combinações de variáveis ordinárias e de Grassmann.

E.1 Variáveis ordinárias

Consideremos a seguinte integral gaussiana

$$I = \int e^{-a^\dagger C a} da^* da = (\det C)^{-1}, \quad (\text{E.1})$$

onde a é um vetor de variáveis complexas de dimensão N e C uma matriz hermitiana $N \times N$. Queremos calcular integrais do tipo

$$I_2(ij) = \int a_i a_j^* e^{-a^\dagger C a} da^* da, \quad (\text{E.2})$$

$$I_4(ij, kl) = \int a_i a_j^* a_k a_l^* e^{-a^\dagger C a} da^* da, \text{ etc.} \quad (\text{E.3})$$

Podemos encontrar essas integrais definindo termos de fonte, e tomando derivadas em relação a eles. Vamos fazer a seguinte mudança de variáveis:

$$a \rightarrow a - C^{-1} J,$$

onde J é um vetor N -dimensional de variáveis ordinárias também. Sabemos que a integral gaussiana é invariante por uma transformação deste tipo, tal que

$$\int e^{-(a+C^{-1}J)^\dagger C (a+C^{-1}J)} da^* da = \int e^{-a^\dagger C a + J^\dagger a + a^\dagger J - J^\dagger C J} da^* da = (\det C)^{-1},$$

ou equivalentemente

$$I(J, J^\dagger) = \int e^{-a^\dagger C a + J^\dagger a + a^\dagger J} da^* da = (\det C)^{-1} e^{J^\dagger C^{-1} J}. \quad (\text{E.4})$$

É fácil ver que as integrais que queremos calcular podem ser obtidas da Eq. (E.4), por

$$I_2(ij) = \frac{\partial^2}{\partial J_i^* \partial J_j} I(J, J^\dagger) \Big|_{J=0}, \quad (\text{E.5})$$

$$I_4(ij, kl) = \frac{\partial^4}{\partial J_i^* \partial J_j \partial J_k^* \partial J_l} I(J, J^\dagger) \Big|_{J=0}. \quad (\text{E.6})$$

O cálculo dessas integrais resume-se portanto em calcular as derivadas de $\exp(J^\dagger C^{-1} J)$, no que resulta:

$$I = (\det C)^{-1}$$

$$I_2(ij) = (\det C)^{-1} (C^{-1})_{ij}$$

$$I_4(ij, kl) = (\det C)^{-1} [(C^{-1})_{ij} (C^{-1})_{kl} + (C^{-1})_{il} (C^{-1})_{kj}]$$

De forma geral, a prescrição diz que, para um conjunto de n pares de índices $(n_1 n_2)$, devemos somar todas combinações distintas do primeiro com o segundo índice de todos os pares.

E.2 Variáveis de Grassmann

Para as variáveis de Grassmann, o processo é semelhante. Devemos apenas tomar cuidado com anticomutatividade dessas variáveis. Mostramos no Cap. 2 como calcular a seguinte integral gaussiana:

$$I = \int e^{-\chi^\dagger C \chi} d\chi^* d\chi = \det C. \quad (\text{E.7})$$

Seguindo os passos acima, definimos a integral:

$$I(J, J^\dagger) = \int e^{-\chi^\dagger C \chi + J^\dagger \chi + \chi^\dagger J} d\chi^* d\chi = (\det C) e^{J^\dagger C^{-1} J}. \quad (\text{E.8})$$

As integrais se escrevem:

$$I_2(ij) = \int \chi_i \chi_j^* e^{-\chi^\dagger C \chi} d\chi^* d\chi = \frac{\partial^2}{\partial J_j \partial J_i^*} I(J, J^\dagger) = \det C (C^{-1})_{ij}$$

$$\begin{aligned} I_4(ij, kl) &= \int \chi_i \chi_j^* \chi_k \chi_l^* e^{-\chi^\dagger C \chi} d\chi^* d\chi = \frac{\partial^4}{\partial J_j \partial J_i^* \partial J_l \partial J_k^*} I(J, J^\dagger) \\ &= \det C [(C^{-1})_{ij} (C^{-1})_{kl} - (C^{-1})_{il} (C^{-1})_{kj}] \end{aligned}$$

Na forma geral, como no caso das variáveis ordinárias, devemos fazer todas combinações possíveis dos pares de índices, porém aqui, aparece um sinal negativo para cada permutação de índices. Como exemplo, consideremos três pares de índices $\{ij, kl, mn\}$. A prescrição diz que as combinações possíveis são

$$(ij)(kl)(mn) + (in)(kj)(ml) + (il)(kn)(mj) \\ - (il)(kj)(mn) - (in)(kl)(mj) - (ij)(kn)(ml) .$$

E.3 Diffusions e Cooperons

Queremos derivar agora uma regra similar para a contração de índices, porém para integrais sobre os *cooperons* e *diffusions*. Vamos considerar, inicialmente, as matrizes C_1 e \bar{C}_1 .

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_c & i\eta_c^* \\ -\rho_c^* & iz_c^* \end{pmatrix}, \quad \bar{C}_1 = \begin{pmatrix} a_c^* & \rho_c \\ i\eta_c & iz_c \end{pmatrix}$$

No expoente aparece o supertraço do produto dessas matrizes, que é

$$\text{trg}(C_1^i \bar{C}_1^j) = a_c^i (a_c^*)^j - (\eta_c^*)^i \eta_c^j + (\rho_c^*)^i \rho_c^j + (z_c^*)^i z_c^j$$

Vemos que o supertraço é uma combinação dos produtos de variáveis ordinárias e de Grassmann como aqueles que aparecem nas integrais I_2 , I_4 , etc. Podemos, então, usar os resultados anteriores para calcularmos as integrais da combinação de supertraços dessas matrizes.

Primeiro calculamos a integral gaussiana apenas, e notamos que devido à presença dos dois tipos de variáveis, o resultado é um.

$$I = \int e^{-(\Pi^{-1})_{ij} \text{trg}(C_1^i \bar{C}_1^j)} d[C] \\ = \int e^{-(\Pi^{-1})_{ij} (a_c^i (a_c^*)^j - (\eta_c^*)^i \eta_c^j + (\rho_c^*)^i \rho_c^j + (z_c^*)^i z_c^j)} d[C] = 1, \quad (\text{E.9})$$

onde

$$d[C] = da^* da d\eta^* d\eta d\rho^* d\rho dz^* dz .$$

Definimos a contração de uma função $f_{ij}[C]$ de duas matrizes C_1^i e \bar{C}_1^j por

$$\langle f_{ij}[C] \rangle \equiv \int f_{ij}[C] e^{-(\Pi^{-1})_{ij} \text{trg}(C_1^i \bar{C}_1^j)} d[C]. \quad (\text{E.10})$$

Vamos então calcular a contração de $\text{trg}(C_1^m \bar{C}_1^n)$:

$$\begin{aligned} \langle \text{trg}(C_1^m \bar{C}_1^n) \rangle = & \\ & \int [a_c^m (a_c^*)^n - (\eta_c^*)^m \eta_c^n + (\rho_c^*)^m \rho_c^n + (z_c^*)^m z_c^n] e^{-(\Pi^{-1})_{ij} \text{trg}(C_1^i \bar{C}_1^j)} d[C] \quad (\text{E.11}) \end{aligned}$$

Temos dois tipos de integrando, um com variáveis ordinárias e outro com variáveis de Grassmann. Eles fornecem

$$\begin{aligned} \int a_c^m (a_c^*)^n e^{-(\Pi^{-1})_{ij} \text{trg}(C_1^i \bar{C}_1^j)} d[C] &= \Pi_{nm}, \\ \int (\rho_c^*)^m \rho_c^n e^{-(\Pi^{-1})_{ij} \text{trg}(C_1^i \bar{C}_1^j)} d[C] &= -\Pi_{nm}, \\ \int (\eta_c^*)^m \eta_c^n e^{-(\Pi^{-1})_{ij} \text{trg}(C_1^i \bar{C}_1^j)} d[C] &= -(-\Pi)_{nm}. \end{aligned}$$

Assim, encontramos que

$$\langle \text{trg}(C_1^m \bar{C}_1^n) \rangle = 0. \quad (\text{E.12})$$

Vamos derivar uma fórmula mais geral. Sejam, portanto, A e B duas supermatrizes de dimensão 2×2 . Vamos calcular $\langle \text{trg}(AC_1^m B\bar{C}_1^n) \rangle$. Primeiramente, calculamos o supertraço explicitamente:

$$\begin{aligned} \text{trg}(AC_1^m B\bar{C}_1^n) &= \text{trg} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_c^m & i(\eta_c^*)^m \\ -(\rho_c^*)^m & i(z_c^*)^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a_c^*)^n & \rho_c^n \\ i\eta_c^n & iz_c^n \end{pmatrix} \\ &= \text{trg} \begin{pmatrix} a_{11}a_c^m - a_{12}(\rho_c^*)^m & ia_{11}(\eta_c^*)^m + ia_{12}(z_c^*)^m \\ a_{21}a_c^m - a_{22}(\rho_c^*)^m & ia_{21}(\eta_c^*)^m + ia_{22}(z_c^*)^m \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} b_{11}(a_c^*)^n + ib_{12}\eta_c^n & b_{11}\rho_c^n + ib_{12}z_c^n \\ b_{21}(a_c^*)^n + ib_{22}\eta_c^n & b_{21}\rho_c^n + ib_{22}z_c^n \end{pmatrix} \\ &= a_{11}b_{11} a_c^m (a_c^*)^n - a_{11}b_{22} (\eta_c^*)^m \eta_c^n + a_{22}b_{11} (\rho_c^*)^m \rho_c^n + a_{22}b_{22} (z_c^*)^m z_c^n \end{aligned}$$

Usando então os resultados conhecidos, encontramos

$$\begin{aligned} \langle \text{trg}(AC_1^m B\bar{C}_1^n) \rangle &= [a_{11}b_{11} - a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11} + a_{22}b_{22}] \Pi_{nm} \\ &= \Pi_{nm} \text{trg}(A) \text{trg}(B). \quad (\text{E.13}) \end{aligned}$$

De forma análoga, calculamos $\langle \text{trg}(AC_1^m) \text{trg}(B\overline{C}_1^n) \rangle$. O produto dos traços é igual

$$\begin{aligned}
& \text{trg}(AC_1^m) \text{trg}(B\overline{C}_1^n) = \\
& = \text{trg} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_c^m & i(\eta_c^*)^m \\ -(\rho_c^*)^m & i(z_c^*)^m \end{pmatrix} \text{trg} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a_c^*)^n & \rho_c^n \\ i\eta_c^n & iz_c^n \end{pmatrix} \\
& = [a_{11}a_c^m - a_{12}(\rho_c^*)^m - ia_{21}(\eta_c^*)^m - ia_{22}(z_c^*)^m] \\
& \quad \times [b_{11}(a_c^*)^n + ib_{12}\eta_c^n - b_{21}\rho_c^n - ib_{22}z_c^n] \\
& = a_{11}b_{11} a_c^m (a_c^*)^n - a_{12}b_{21} (\rho_c^*)^m \rho_c^n - a_{21}b_{12} (\eta_c^*)^m \eta_c^n - a_{22}b_{22} (z_c^*)^m z_c^n
\end{aligned}$$

De onde encontramos

$$\begin{aligned}
\langle \text{trg}(AC_1^m) \text{trg}(B\overline{C}_1^n) \rangle &= [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12} - a_{22}b_{22}] \Pi_{nm} \\
&= \Pi_{nm} \text{trg}(AB)
\end{aligned} \tag{E.14}$$

A aplicação do teorema de Wick neste caso diz que, para o caso de n pares de matrizes $C_1^{i_n}$ e $\overline{C}_1^{j_n}$, devemos contrair as matrizes C_1 com as matrizes \overline{C}_1 , para todas as combinações possíveis e seguindo prescrição para cada tipo de traço. Por exemplo

$$\begin{aligned}
\langle \text{trg}(AC_1^i) \text{trg}(B\overline{C}_1^j) \text{trg}(A'C_1^k B'\overline{C}_1^l) \rangle &= \\
& \Pi_{ji} \text{trg}(AB) \Pi_{lk} \text{trg}(A') \text{trg}(B') + \Pi_{li} \Pi_{jk} \text{trg}(BB' AA')
\end{aligned} \tag{E.15}$$

O mesmo procedimento pode ser feito para as supermatrizes D .

Como resultado, temos

$$\langle \text{trg}(AC_1^m B\overline{C}_1^n) \rangle = \Pi_{nm} \text{trg}(A) \text{trg}(B) \tag{E.16}$$

$$\langle \text{trg}(AC_1^m) \text{trg}(B\overline{C}_1^n) \rangle = \Pi_{nm} \text{trg}(AB) \tag{E.17}$$

F

SUPERINTEGRAIS E FALSAS DIVERGÊNCIAS

As superintegrais, que envolvem variáveis de Grassmann e ordinárias, merecem uma atenção especial, pois a mudança das variáveis de integração não é nada trivial neste caso. Como exemplo, considere uma integral gaussiana do tipo

$$I = \int dpdq d\chi d\bar{\chi} e^{-\frac{1}{2}(p^2+q^2)+\bar{\chi}\chi} = 1 . \quad (\text{F.1})$$

Façamos então as substituições

$$\begin{aligned} p &= k_1 + \bar{\eta}\eta(k_1 - ik_2) , & iq &= ik_2 + \bar{\eta}\eta(k_1 - ik_2) \\ \chi &= -\bar{\eta}(k_1 - ik_2) & \bar{\chi} &= \eta(k_1 - ik_2) \\ \Rightarrow \left| \frac{\partial(p, q, \chi, \bar{\chi})}{\partial(k_1, k_2, \eta, \bar{\eta})} \right| &= (k_1 - ik_2)^{-2} . \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Esta transformação remove todas as variáveis de Grassmann do integrando:

$$I = \int dk_1 dk_2 d\eta d\bar{\eta} (k_1 - ik_2)^{-1} e^{-\frac{1}{2}(k_1^2+k_2^2)} . \quad (\text{F.3})$$

Poderíamos concluir que a $I = 0$ [em completa discordância com a Eq. (F.1)] uma vez que o integrando não contém η e $\bar{\eta}$. Tal conclusão não pode ser derivada, no entanto, devido à singularidade em $k_1 = k_2 = 0$ que torna a integral indefinida.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ABRIKOSOV, A. A.; GORKOV, L. P.; DZYALOSHINSKY, I. E. *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*. New York: Prentice Hall, 1963.
- [2] GORKOV, L. P.; LARKIN, A. I.; KHMELNITSKII, D. E. *Sov. Phys. JETP Lett.*, v. 30, p. 228, 1979.
- [3] ABRAHAMS, E.; ANDERSON, P. W.; RAMAKRISHNAN, T. V. *Phil. Mag.*, v. 42, p. 827, 1980.
- [4] EFETOV, K. B. *Adv. Physics*, v. 32, p. 53, 1983.
- [5] VERBAARSHOT, J. J. M.; WEIDENMÜLLER, H. A.; ZIRNBAUER, M. *Phys. Rep.*, v. 129, p. 367, 1985.
- [6] ALTLAND, A.; IIDA, S.; MÜLLER-GROELING, A.; WEIDENMÜLLER, H. A. *Ann. Phys. (NY)*, v. 219, p. 148, 1992.
- [7] ALTLAND, A.; IIDA, S.; EFETOV, K. B. *J. Phys. A*, v. 26, p. 3545, 1993.
- [8] AMBEGAOKAR, V.; ECKERN, U. *Phys. Rev. Lett.*, v. 65, p. 381, 1990.
- [9] ECKERN, U.; SCHMID, A. *Europhys. Lett.*, v. 18, p. 457, 1992.
- [10] KOPIETZ, P. *Phys. Rev. Lett.*, v. 70, p. 3123, 1993.
- [11] KATO, H.; YOSHIOKA, D. *Phys. Rev. B*, v. 50, p. 4943, 1994.
- [12] IIDA, S.; WEIDENMÜLLER, H. A.; ZUK, J. A. *Ann. Phys. (NY)*, v. 200, p. 219, 1990.
- [13] RICHERT, J.; WEIDENMUELLER, H. A. *Ann. Phys. (N.Y.)*, v. 306, p. 96, 2003.
- [14] LONDON, F. *J. Phys. (Paris)*, v. 8, p. 379, 1937.
- [15] HUND, F. *Annln Phys. (Leipzig)*, v. 32, p. 102, 1938.

- [16] BARDEEN, J.; COOPER, L. N.; SCHRIEFFER, J. R. *Phys. Rev.*, v. 108, p. 1175, 1957.
- [17] AHARONOV, Y.; BOHM, D. *Phys. Rev.*, v. 115, p. 485, 1959.
- [18] BYERS, N.; YANG, C. N. *Phys. Rev. Lett.*, v. 7, p. 46, 1961.
- [19] BLOCH, F. *Phys. Rev.*, v. 137, p. A787, 1965.
- [20] BLOCH, F. *Phys. Rev.*, v. 166, p. 415, 1968.
- [21] SCHICK, M. *Phys. Rev.*, v. 166, p. 401, 1968.
- [22] GUNTHER, L.; IMRY, Y. *Solid State Commun.*, v. 7, p. 1391, 1969.
- [23] BÜTTIKER, M.; IMRY, Y.; LANDAUER, R. *Phys. Lett. A*, v. 96, p. 365, 1983.
- [24] LANDAUER, R.; BÜTTIKER, M. *Phys. Rev. Lett.*, v. 54, p. 2049, 1985.
- [25] BÜTTIKER, M. *Phys. Rev. B*, v. 32, p. 1846, 1985.
- [26] CHEUNG, H. F.; GEFEN, Y.; RIEDEL, E. K.; SHIH, W. H. *Phys. Rev. B*, v. 37, p. 6050, 1988.
- [27] TANDA, S.; TSUNETTA, T.; OKAJIMA, Y.; INAGAKI, K.; YAMAYA, K.; HATAKENAKA, N. *Nature*, v. 417, p. 397, 2002.
- [28] MILA, F.; STAFFORD, C. A.; CAPONI, S. *Phys. Rev. B*, v. 57, p. 1457, 1998.
- [29] YAKUBO, K.; AVISHAI, Y.; COHEN, D. *Phys. Rev. B*, v. 67, p. 125319, 2003.
- [30] HAYASHI, H.; EBISAWA, H. *J. Phys. Soc. Jpn.*, v. 70, p. 3495, 2001.
- [31] DENG, W. J.; XU, J. H.; LIU, P. *Chin. Phys. Lett.*, v. 19, p. 988, 2002.
- [32] FERREIRA, E. H. M.; NEMES, M. C.; SAMPAIO, M. D.; WEINDENÜLLER, H. A. Persistent currents in n-fold twisted moebius strips. *Phys. Lett. A*, v. 333, p. 146, 2004.
- [33] LÉVY, L. P.; DOLAN, G.; DUNSMUIR, J.; BOUCHIAT, H. *Phys. Rev. Lett.*, v. 64, p. 2074, 1990.

- [34] CHANDRASEKHAR, V.; WEBB, R. A.; BRADY, M. J.; KETCHEN, M.; GALLAGHER, W. J.; KLEINSASSER, A. *Phys. Rev. Lett.*, v. 67(3), p. 3578, 1991.
- [35] MAILLY, D.; CHAPELIER, C.; BENOIT, A. *Phys. Rev. Lett.*, v. 70, p. 2020, 1993.
- [36] CHEUNG, H. F.; GEFEN, Y.; RIEDEL, E. K.; SHIH, W. H. *IBM J. Res. Devel.*, v. 32, p. 379, 1988.
- [37] BOUCHIAT, H.; MONTAMBAUX, G. *J. Phys. (Paris)*, v. 50, p. 379, 1989.
- [38] MONTAMBAUX, G.; BOUCHIAT, H.; SIGETI, D.; FRIESNER, R. *Phys. Rev. B*, v. 42, p. 7647, 1990.
- [39] WEIDENMÜLLER, H. A. *Physica A*, v. 200, p. 104, 1993.
- [40] AL'TSHULER, B. L.; SHKLOVSKII, B. I. *Sov. Phys. JETP*, v. 64, p. 127, 1986.
- [41] BEREZIN, F. A. *Introduction to superanalysis*. Dordrecht: MPAM, 1987.
- [42] WIGNER, E. *Ann. Math*, v. 53, p. 36, 1951.
- [43] WEIDENMÜLLER, H. A. *Ann. Phys. (NY)*, v. 158, p. 120, 1984.
- [44] ZUK, J. Introduction to the supersymmetry method for the gaussian random-matrix ensembles. e-print cond-mat/9412060.
- [45] ZIRNBAUER, M. R. *Nuc. Phys. B*, v. 265, p. 375, 1986.
- [46] KOBAYASHI, K.; AIKAWA, H.; KATSUMOTO, S.; IYE, Y. *Physica E*, v. 22, p. 468, 2004.

ÍNDICE REMISSIVO

- comprimento de localização, 21
- constante de difusão, 29
- corrente persistente
 - cálculo sem desordem, 19
 - coerência de fase, 17
 - definição, 18
 - desordem, 28
 - efeitos topológicos, 21
 - energias com desordem, 18
 - experimentos, 27
 - expressão supersimétrica, 50
 - fita de Möbius, 21
 - função de onda, 18
 - média na desordem, 50
 - média no número de elétrons, 29
 - origem, 16
 - propriedades de simetria, 56
 - supercondutividade, 16
- densidade média de níveis, 53
- efeito Aharanov-Bohm, 16
- energia de Thouless, 29
- espaçamento médio entre níveis, 44, 94
- expansão assintótica, 57
- funcional gerador, 45
- hamiltoniano da desordem, 44
- hamiltoniano de pulo, 45
- matrizes aleatórias, 44
- modelo IWZ, 43
- modos de Goldstone e modos massivos, 54
- ponto de sela
 - aproximação, 52
 - equação, 53
 - solução, 53
- ponto quântico, 82
- potencial de gate, 83
- semicírculo de Wigner, 53
- superálgebra
 - produto escalar, 36
 - superdeterminante, 40
 - superintegral, 41
 - supermatriz, 37
 - supertraço, 39
 - supervetor, 36
 - transposição, 37
- supercampo auxiliar, 51
- transformação de Hubbard–Stratonovitch, 51
- variável de Grassmann
 - conjugação complexa, 32
 - definição, 31
 - derivada, 32
 - integração, 33

transformação linear, 31