

**Geração de estados emaranhados de
qudits espaciais e análises experimentais
visando sua utilização prática**

Gustavo de Aquino Moreira Lima

Setembro de 2006

GERAÇÃO DE ESTADOS EMARANHADOS DE
QUDITS ESPACIAIS E ANÁLISES EXPERIMENTAIS
VISANDO SUA UTILIZAÇÃO PRÁTICA

Gustavo de Aquino Moreira Lima

Orientador: Prof. Sebastião José Nascimento de Pádua

Co-orientador: Prof. Carlos Enrique Saavedra Rubilar*

**Center for Quantum Optics and Quantum Information,
Departamento de Física, Universidad de Concepción, Chile*

Tese apresentada à Universidade Federal de Minas
Gerais, como parte dos requisitos para obtenção
do título de *Doutor em Física*.

Setembro de 2006

Resumo

Nesta tese, inicialmente apresentamos um experimento para a geração de estados emaranhados de sistemas quânticos D -dimensionais, qudits, explorando a correlação transversal dos fótons gerados no processo da conversão paramétrica. Aberturas com D -fendas, colocadas ao longo dos braços dos fótons gêmeos, definem o espaço de Hilbert destes qudits. Devido a uma manipulação adequada do perfil transversal do feixe do laser, os fótons gêmeos irão passar somente através de fendas simetricamente opostas, gerando estados emaranhados entre os diferentes caminhos possíveis para a transmissão do par através destas aberturas. Resultados experimentais para qudits com $D = 4$ e 8 são mostrados. Nós demonstramos também que a correlação entre os qudits gerados é quântica.

Em seguida, mostramos que estes estados de qudits podem ser propagados. Sua distribuição ao longo do espaço livre foi realizada em nosso laboratório e os estados propagados mantiveram uma fidelidade muito alta quando comparados com a sua forma original. Estudos sobre a propagação de estados de qudits são importantes porque seu uso permite um aumento na quantidade da informação que pode ser transmitida por par compartilhado e pode também garantir mais privacidade para as partes que se comunicam.

No terceiro trabalho descrito nesta tese, demonstramos como uma pequena modificação do esquema adotado nos trabalhos anteriores pode ser usada para se gerar estados mistos de qudits. Investigamos, também, a discriminação dos estados quânticos de sistemas compostos de dois qubits espaciais, motivados pelo fato de que os protocolos de Informação Quântica podem ser mais fáceis de ser implementados neste caso. Por meio de operações locais nos fótons gêmeos, realizamos o processo da tomografia quântica para reconstruir a matriz densidade de um estado misto de dois qubits espaciais. As matrizes densidade reconstruídas são úteis porque quantidades tais como a entropia e a concorrência de um sistema quântico, podem ser calculadas a partir delas.

E em nosso último trabalho, depois de ter tido demonstrado a geração de estados puros e mistos de qudits espaciais, a sua propagação através do espaço livre e sua reconstrução através da técnica da tomografia quântica, mostramos que este tipo de estado espacial pode ser usado na prática, para se fazer um teste das desigualdades da Bell.

Abstract

In this thesis, we first report an experiment to generate maximally entangled states of \mathcal{D} -dimensional quantum systems, *qudits*, by using transverse spatial correlations of two parametric down-converted photons. Apertures with \mathcal{D} -slits in the arms of the twin photons define the qudit space. By manipulating the pump beam correctly the twin photons will pass only by symmetrically opposite slits, generating entangled states between these different paths. Experimental results for qudits with $\mathcal{D} = 4$ and 8 are shown. We also demonstrate that we have quantum correlations between the generated qudits.

We then show that these entangled states can be propagated. Their free-space distribution was performed at the laboratory scale and the propagated states maintained a high-fidelity with their original form. Studies about propagating qudits states are important because their use allow an increase in the quantity of information that can be transmitted and may also guarantee more privacy for communicating parties.

In our third work, we show how a slight modification of the scheme adopted before, can be used to generate mixed states of qudits. We also investigate the state determination for composite systems of two spatial qubits, motivated by the fact that quantum information protocols may be easier to be implemented for this case. By means of local operations on the twin photons we were able to perform the quantum tomography process to reconstruct the density matrix of a mixed state of spatial qubits. Reconstructed density matrixes are useful because quantities such as entropy and concurrence of a quantum system can be calculated directly from them.

And in our last work, after had demonstrated the generation of pure and mixed states of spatial qudits, their propagation through the free space and their reconstruction by using the Quantum Tomography technique, we show that this type of spatial state can be used in practice for doing a test of the Bell's Inequalities.

Agradecimentos

Agradeço em especial ao meu orientador Sebastião de Pádua, cuja orientação foi muito mais do que profissional. Gostaria de dizer que sua postura para com seus alunos se tornou um modelo que pretendo seguir.

Agradeço ao Prof. Aldo Delgado e ao Prof. Carlos Saavedra, por todo o apoio com a parte teórica desta tese e pela amizade durante minha estadia no Chile.

Agradeço aos companheiros de grupo: Caio, Marquinho, Ivan, Olavo e Leo, pelo apoio e conversas durante todo este tempo em que estivemos trabalhando juntos. Nossas conversas moldaram a forma com que vejo o mundo hoje.

Agradeço à minha família, e em especial ao meus Pais e minhas tias: Eleonora, Teresa e Wanda. Agradeço a Isabela por ser essa menina tão especial que inspira paz e alegria nas pessoas com quem convive.

Agradeço à Marianna por todo o companherismo e dedicação com a Isabela. Aproveito a oportunidade para me desculpar por não ter citado seu nome nos agradecimentos de minha tese de mestrado.

Agradeço aos amigos chilenos: José Aguirre, Luís Roa, Fabian, Paulina (deusa das coincidências), Paola, Gina e Fabíola, por terem me recebido tão bem no Chile. Em especial a Fabian e Paulina por todo o tempo extra lab juntos.

Agradeço aos amigos físicos, não físicos, de infância e de DAoC, pelos momentos de lazer sem laser.

Agradeço à Marluce pelos inúmeros favores feitos.

Agradeço a agência CAPES pelo apoio financeiro.

Sumário

Prefácio	3
1 INTRODUÇÃO	5
1.1 Contexto histórico-científico	5
1.2 Revisão teórica	12
2 GERAÇÃO DE ESTADOS EMARANHADOS DE QUDITS	22
2.1 Introdução	22
2.2 Teoria	23
2.3 Experimento	28
2.4 Conclusão	37
3 TRANSMITINDO QUDITS EMARANHADOS	39
3.1 Introdução	39
3.2 Teoria	40
3.3 Experimento	43
3.4 Conclusão	46
4 CARACTERIZAÇÃO VIA TOMOGRAFIA QUÂNTICA	50
4.1 Introdução	50
4.2 Geração controlada de estados mistos	52
4.3 Reconstrução	55
4.4 Discussão e Conclusão	65

5	TESTES DE BELL COM QUBITS ESPACIAIS	70
5.1	<i>Introdução</i>	70
5.2	<i>Proposta teórica</i>	72
5.3	<i>Conclusão</i>	75
A	O OPERADOR $E^{(+)}(x; z)$ APÓS UMALENTE CONVERGENTE	78
B	CÁLCULO DO ELEMENTO DE MATRIZ $\langle \text{vac} \hat{E}^{(+)}(x; z) l \rangle$	81
C	AS RELAÇÕES DE TRANSFORMAÇÃO USADAS NA TOMOGRAFIA	84
D	DETERMINANDO ρ E OS ESTADOS DO INTERFERÔMETRO	91
	<i>Referências Bibliográficas</i>	101

Prefácio

Hoje vejo que escrever uma Tese de Doutorado é mais complicado do que me parecia a pouco tempo atrás. O Doutorado nos possibilita amadurecimento científico quando nos deparamos com problemas teóricos ou experimentais que devem ser superados para a sua conclusão. Essa eterna luta vivida modifica a nossa forma de encarar a vida e proporciona um importante enriquecimento humano. Assim, se formos capazes de mostrar como este processo de crescimento foi experimentado, ao descrevermos os trabalhos realizados, permitiremos que os futuros estudantes encarem desafios semelhantes de maneiras mais suaves e produtivas. Acredito que a melhor forma de se fazer isto é destacar ao longo do texto as informações que consideramos mais valiosas e foi isso que tentei fazer ao longo desta apresentação.

Esta Tese possui, salvo a Introdução, quatro capítulos que estão baseados, principalmente, nos seguintes artigos:

1. “Generation and detection of magnified images via illumination by entangled photon pairs”, I. F. Santos, Leonardo Neves, G. Lima, C. H. Monken and S. Pádua, *Physical Review A* **72**, 033802 (2005).
2. “Generation of entangled states of qudits using twin photons”, Leonardo Neves, G. Lima, J. G. Aguirre Gomez, C. H. Monken, C. Saavedra and S. Pádua, *Physical Review Letters* **94**, 100501 (2005).
3. “Propagation of spatially entangled qudits through free space”, G. Lima, Leonardo Neves, I. F. Santos, J. G. Aguirre Gomez, C. Saavedra and S. Pádua, *Physical Review A* **73**, 032340 (2006).
4. “Two-photon high-dimensional spatial entanglement: theory and experiment”, Leonardo Neves, G. Lima, J. G. Aguirre Gomez, C. H. Monken, C. Saavedra and S. Pádua, *Modern Physics Letters B* **20**, 1-23 (2006).

5. “Optimal state determination for composite systems of two spatial qubits”, G. Lima, F. A. Torres-Ruiz, Leonardo Neves, A. Delgado, C. Saavedra and S. Pádua, *New Journal of Physics*, **Submitted**.
6. “Quantifying entanglement in qubits created with spatially correlated twin photons”, Leonardo Neves, G. Lima and S. Pádua, *Physical Review A*, **Submitted**.

O primeiro capítulo é uma revisão que dividi em duas partes. O intuito da primeira parte, na qual faço um breve relato da evolução de algumas das principais idéias da teoria quântica, é mostrar que existe todo um contexto histórico-científico no qual a Tese foi elaborada. O da segunda parte é fornecer as ferramentas e conceitos que considero fundamentais para a compreensão do restante do texto. Os três capítulos subsequentes descrevem três experimentos distintos que estão concluídos. No segundo capítulo é mostrado como a correlação de momentum transversal dos fótons gêmeos, gerados na conversão paramétrica descendente, pode ser explorada para se gerar estados emaranhados de sistemas quânticos de mais dimensões. O capítulo seguinte é dedicado ao estudo da propagação no espaço livre destes estados e o capítulo quatro à demonstração de que eles podem ser completamente caracterizados através do processo da tomografia quântica. No quinto capítulo é apresentada uma proposta teórica para a utilização prática deste tipo de estado. A idéia é utilizar estados emaranhados de qubits espaciais para se realizar um teste de Bell.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Neste primeiro capítulo é feita uma revisão de óptica quântica para permitir uma melhor compreensão do conteúdo da Tese. Inicialmente apresento uma resumida história da evolução da mecânica quântica, numa tentativa de inserir essa Tese dentro de seu contexto histórico-científico. Em seguida, destaco os elementos físicos e matemáticos que devem ser compreendidos antes de se iniciar a leitura dos demais capítulos.

1.1 Contexto histórico-científico

O teorema EPR

O trabalho de Einstein, Podolsky e Rosen em 1935 [1] confrontou a visão padrão da mecânica quântica, conhecida como a interpretação de Copenhagen, onde se considera que a função de onda fornece uma descrição completa do sistema físico que ela descreve. Inicialmente os autores estabelecem dois conceitos fundamentais:

1. O conceito de uma teoria completa
 - Para cada elemento (para cada propriedade física) de uma realidade física (de um objeto) deve haver uma representação correspondente na teoria física.
2. E a condição para se identificar um elemento da realidade física
 - Ser capaz de prever, com certeza absoluta, o valor deste elemento da realidade física sem perturbar o sistema.

Em posse destas definições e fazendo considerações sobre um experimento idealizado, os autores mostram que dois operadores que não comutam podem, em certas situações, ser considerados elementos da mesma realidade física. Como a função de onda de um objeto não permite que se estabeleça valores precisos para observáveis que não comutam, eles concluem que a descrição que o estado quântico fornece de um sistema físico é, na verdade, *incompleta*.

Uma destas situações foi claramente ilustrada por Bohm em 1951 [2]. Ele apresentou uma versão mais simples do experimento idealizado de Einstein, Podolsk e Rosen, na qual diferentes medidas de spin em um sistema de duas partículas são consideradas. Estas partículas são preparadas em um estado inicial *instável* de spin total nulo

$$|\Psi\rangle_0 = \frac{|u+, u-\rangle - |u-, u+\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (1.1)$$

onde $|u+\rangle$ é o autovetor referente ao valor $+1$ para o autovalor de $\hat{\sigma}_z$. O par se separa e uma das partículas é enviada através do campo magnético de um aparelho Stern-Gerlach (Ver Fig. 1.1).

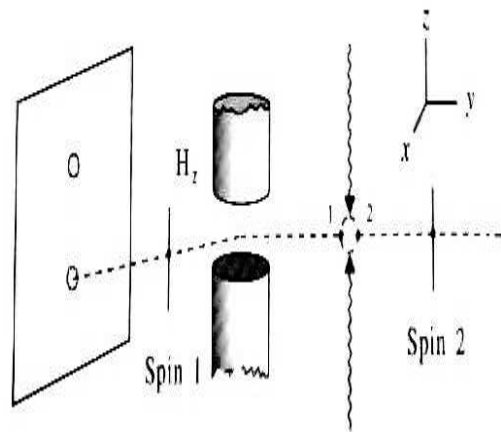


Figura 1.1: Versão de Bohm para o experimento EPR usando medidas de spin.

Considerando que a interação entre as partículas é nula após separadas, podemos escrever o Hamiltoniano do sistema apenas em termos da interação entre o aparelho SG e a partícula 1, que o atravessou. O estado das partículas em um tempo, τ , após a interação é dado por

$$|\Psi\rangle_\tau = \frac{\exp(-iH'\tau z_1/\hbar)|u+, u-\rangle - \exp(iH'\tau z_1/\hbar)|u-, u+\rangle}{2}, \quad (1.2)$$

onde H' é o módulo do gradiente do campo magnético. Existe, assim, uma correlação entre o momentum da partícula 1 na direção z , o seu spin e o spin da partícula 2. Se $p_{1z} = -H'\tau$ então: $\sigma_{1z} = +1$ e $\sigma_{2z} = -1$. Desta forma podemos dizer que σ_{2z} é de acordo com a definição 2, um elemento da realidade física. No entanto, o estado singlete inicial é invariante em torno de uma rotação para o plano- x e poderíamos, de forma análoga, concluir que σ_{2x} também é um elemento da realidade física da partícula 2. Como estes observáveis não comutam, a mecânica quântica não pode estabelecê-los com valores definidos e portanto, conclui-se que a teoria é incompleta. Podemos enunciar o teorema EPR como:

As duas afirmações a seguir são incompatíveis:

1. Um estado quântico fornece uma descrição completa de um certo sistema físico.
2. As condições físicas de dois objetos espacialmente separados (não-interagentes) são independentes.

Não-localidade na mecânica quântica

A afirmação 2 é considerada incorreta e surgem os conceitos de emaranhamento e estados emaranhados. Os estados emaranhados são formados quando os subsistemas interagem entre si. Um exemplo clássico é o estado singlete, $|\Psi\rangle_0$. Para estes estados, o processo de medida em um dos subsistemas passa a ser visto como um processo de filtragem. Quando σ_{1z} da partícula 1 é medido positivo, por exemplo, a componente $|u+, u-\rangle$ é selecionada. Medidas subsequentes na partícula 2 apenas confirmam que o sistema ainda está no estado $|u+, u-\rangle$.

Esta interpretação exige a existência de uma nova propriedade física entre os subsistemas chamada de emaranhamento e que é a responsável pelo comportamento não-local da mecânica quântica. O emaranhamento nos diz que o tipo de medida realizada no subsistema A interfere no resultado da medida sobre o subsistema B . Por exemplo, se realizarmos uma medida de σ_z sobre o subsistema A e medirmos também o valor de σ_{Bz} , observaremos a existência de uma correlação entre os resultados das medidas. No entanto, se medirmos σ_{Bx} não haverá correlação.

Embora a mecânica quântica seja consistente e tenha tido sucesso em explicar e prever uma grande quantidade de novos fenômenos, sua adoção foi um processo gradual e marcado por muitas disputas e discussões filosóficas. Isto se deveu, principalmente, porque a teoria nos força a abrir mão de vários princípios físicos fundamentais e que nos parecem intuitivamente corretos. Por exemplo, a indeterminação inerente aos objetos quânticos, ilustrada pelo caráter probabilístico desta teoria, impossibilita a previsão do resultado de qualquer evento individual. A dualidade de partícula-onda contraria nossa intuição e o próprio conceito de estado emaranhado é estranho quando consideramos sistemas macroscópicos.

O gato de Shrödinger

O paradoxo do gato de Shrödinger ilustra bem esta situação. Vamos supor que em uma caixa colocamos um gato, um átomo radioativo e um dispositivo que o matará quando o átomo decair. Se $\Psi(t)$, Υ e Γ representarem a função de onda do sistema, átomo e gato, respectivamente, o estado inicial do sistema pode ser escrito como

$$\Psi(0) = \Upsilon_{atomo}\Gamma_{vivo}. \quad (1.3)$$

A medida que o tempo passa, o estado muda sua forma e a probabilidade de que o gato esteja vivo é cada vez menor. Sua evolução temporal é dada por

$$\Psi(t) = a(t)\Upsilon_{atomo}\Gamma_{vivo} + b(t)\Upsilon_{dec}\Gamma_{morto}. \quad (1.4)$$

O estranho é que $\Psi(t)$ é uma superposição coerente dos estados do gato vivo e morto. O que quer dizer que o gato está morto e ainda vivo dentro da caixa. Surge, então, uma questão interessante. O que $\Psi(t)$ representa na verdade? Se a função representa nosso conhecimento sobre o sistema,

a mecânica quântica é incompleta. Se representa o real estado do sistema, que durante a observação do conteúdo da caixa muda subitamente para gato vivo ou morto, nos deparamos com um problema filosófico interessante: o inexplicável colapso da função de onda. Será o curioso cientista, que observou o conteúdo da caixa, o real responsável pela morte do gato?

Este paradoxo, além de ser útil para se discutir as peculiaridades do conceito de estado emaranhado, ressalta outra característica atribuída à Teoria: o não-realismo. No entanto, considero este ponto vista extremista. Para mim a Mecânica Quântica não contraria o conceito de realismo. Uma teoria realista é uma teoria na qual os resultados das medidas feitas sobre um sistema, dependem das características físicas do próprio sistema. Na Mecânica Quântica, as distribuições estatísticas dos observáveis estão intimamente relacionadas com a função de onda do sistema. No meu ponto de vista, a Mecânica Quântica apenas acrescenta que os resultados das medidas também dependem do observador.

O teorema de Bell

A impossibilidade de se prever resultados de eventos individuais utilizando a mecânica quântica e a dificuldade em se aceitar a sua não-localidade, motivou a busca por teorias deterministas e locais. A primeira teoria desenvolvida foi a teoria de variáveis ocultas. Nesta teoria o resultado de um evento individual é determinado por certas variáveis. Elas são chamadas de “variáveis ocultas” pois não são descritas pela mecânica quântica e não são controláveis durante o processo de preparação e evolução do estado. As distribuições estatísticas da M.Q. seriam, então, médias destas variáveis ocultas.

Uma discussão com relação a qual das teorias era a correta se iniciou quando Bohm em 1952 [3], mostrou que um modelo simples de variáveis ocultas, obtinha resultados idênticos aos fornecidos pela mecânica quântica para certos sistemas físicos. Este debate permaneceu com características filosóficas até o surgimento do teorema proposto por John Bell em 1964.

O teorema de Bell [4, 5] tem a forma de uma desigualdade que é obedecida pelos resultados previstos por qualquer teoria determinista-local, mas nem sempre pelas previsões da mecânica quântica. O Teorema de Bell é a prova da existência de tal conflito entre estas teorias.

Testes de Bell

Com a descoberta do teorema de Bell, o debate entre estas duas teorias mudou drasticamente. Era agora possível, a princípio, determinar experimentalmente se o comportamento probabilístico e não-local dos corpos materiais está correto.

Experimentos que possam testar uma violação desta desigualdade não são simples. Primeiramente, precisa-se ter uma fonte eficiente e estável de pares EPR e em seguida, ser capaz de realizar medidas específicas em cada uma das partículas, simultaneamente. Os primeiros experimentos que implementaram testes de Bell, utilizavam fótons correlacionados em polarização produzidos em processos de decaimento radioativo em cascata [6, 7, 8, 9, 10]. O problema que havia era que os fótons produzidos eram fracamente correlacionados em direção (momentum). Como cada fóton é sempre detectado em uma região limitada do espaço, as chances de se detectar o par do fóton detectado eram muito pequenas. Isso originava baixas taxas de coincidências o que impedia a violação da desigualdade. Para contornar este problema foi inventada a hipótese do “fair-sample”, onde os fótons detectados em coincidência, são considerados com um “retrato” fiel do ensemble total de pares EPR emitidos pela fonte. A desigualdade teve então sua forma alterada e sua violação constatada. No entanto, a adoção da hipótese do “fair-sample” (hoje chamada de “loophole” de detecção) impede que consideremos estes experimentos como conclusivos a favor da teoria quântica.

Conversão paramétrica descendente

Nos anos seguintes, uma nova fonte de fótons correlacionados foi descoberta [11, 12, 13, 14]. No processo da conversão paramétrica descendente (CPD), um fóton de energia $\hbar\omega_0$, incide em um cristal não-linear e é convertido, espontaneamente, em dois outros fótons com energia $\hbar\omega_i$ e $\hbar\omega_s$. Por causa das condições de casamento de fase do cristal, os fótons gerados são fortemente correlacionados em momentum. Sendo, portanto, possível prever a região na qual os fótons estão. Isto permite uma obtenção de taxas de coincidências muito superiores aos experimentos anteriores. Testes de Bell, utilizando a CPD como fonte [15, 16], se mostraram ainda mais favoráveis à mecânica quântica. Outra vantagem na utilização da CPD é a possibilidade de se criar estados emaranhados utilizando-se um grau de liberdade diferente de

polarização [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25].

Informação Quântica

Com os testes de Bell se mostrando favoráveis à mecânica quântica, a crença no emaranhamento como uma propriedade física real, entre duas partículas que interagiram, se firmou. Surgiram, então, novas áreas da Física que tratam o emaranhamento como um recurso utilizável importante. No novo campo da Informação Quântica [27] estudamos os processos de transmissão de informação entre duas partes que se comunicam. A consideração do uso de qubits emaranhados nestes processos possibilitou, por exemplo, a descoberta do teletransporte [28, 29, 30], do superdense coding [31] e a criação de protocolos quânticos de criptografia como o proposto por Ekert [32].

Geração de Estados Emaranhados de Qudits

Em nosso primeiro trabalho [26], mostramos como gerar estados emaranhados de sistemas quânticos de D -dimensões, qudits, utilizando a correlação de momentum transversal dos fótons gerados na CPD. Aberturas com uma quantidade D de fendas-simples são posicionadas nos caminhos dos fótons convertidos e através de uma manipulação adequada do perfil transversal do feixe do laser incidente no cristal, estes fótons irão passar apenas através de fendas-simples opostas e simétricas, gerando desta forma, emaranhamento entre os diferentes caminhos possíveis para o par de fótons. Como o grau de liberdade do fóton depende do número de caminhos possíveis para a sua transmissão (D), o chamamos de qudit espacial.

Transmitindo estados emaranhados de qudits

Buscando uma aplicação para os estado emaranhados dos qudits espaciais e sabendo que na maioria dos protocolos de informação quântica é necessário transmitir partículas emaranhadas de forma eficiente para as partes que se comunicam, nós iniciamos um estudo teórico e experimental investigando o processo de propagação destes estados.

Realizando com o auxílio de lentes a propagação dos qudits no espaço-livre, conseguimos obter um estado propagado cuja fidelidade, para com o estado original, foi superior a 98 % [33].

Tomografia dos qudits espaciais

No entanto, o fato de sermos capazes de propagar estes estados não é suficiente para afirmarmos que somos capazes de utilizá-los para transmissão de informação. Precisamos ainda de saber caracterizá-los.

Foi com este intuito que iniciamos as pesquisas de nosso terceiro trabalho, no qual mostramos como realizar a reconstrução tomográfica dos estados emaranhados de qudits espaciais. O processo da tomografia [34, 35] é um processo de caracterização completa de estados quânticos que pode ser aplicado tanto a estados puros quanto mistos. A tomografia é de vital importância na área da Informação Quântica, pois a capacidade de caracterizar o estado detectado nos permite lidar com processos mais gerais de propagação de estados. Podemos, por exemplo, considerar canais de transmissão mais realistas nos quais o estado propagado perde coerência devido a interações com o meio ambiente e tem a sua forma final dada como uma mistura estatística.

Um novo tipo de teste de Bell

Assim que concluímos estes dois trabalhos e soubemos que era possível propagar e caracterizar os estados gerados no primeiro trabalho, pudemos pesquisar uma forma para sua utilização prática. A primeira aplicação que encontramos foi o uso de estados emaranhados de qubits espaciais para se fazer um teste de Bell. Embora o esquema que estamos considerando seja semelhante ao realizado por Rarity e Tapster [36], o seu estudo é ainda importante. Primeiro, porque ele é original ao utilizarmos fótons indistinguíveis em frequência e seu resultado pode ser visto como uma medida do grau de emaranhamento [37, 38, 39, 40, 41] dos estados que conseguimos gerar. Depois, porque talvez seja possível generalizá-lo a fim de se implementar um teste com estados emaranhados de qudits. Neste novo teste utilizaríamos as inequações generalizadas de Bell desenvolvidas em [42, 43].

1.2 Revisão teórica

Como a transformada de Fourier bi-dimensional tem um papel de destaque na descrição teórica de nossos experimentos, iniciarei esta seção com um rápido resumo onde destaco suas principais características.

Transformada de Fourier

Seja $g(x, y)$ uma função seccionalmente contínua, absolutamente integrável e limitada no plano- xy . Sua transformada de Fourier é dada pela expressão

$$\mathcal{F}\{g(x, y)\} \equiv \iint dx dy g(x, y) e^{-2\pi i(f_x x + f_y y)}, \quad (1.5)$$

que representa uma função dependente das frequências f_x e f_y , e cujo valor pode ser complexo.

Sua operação inversa, chamada de transformada inversa de Fourier, é definida de forma similar. Se $G(f_x, f_y) = \mathcal{F}\{g(x, y)\}$, temos que

$$\mathcal{F}^{-1}\{G(f_x, f_y)\} = \iint df_x df_y G(f_x, f_y) e^{2\pi i(f_x x + f_y y)}. \quad (1.6)$$

Nos pontos de continuidade da função $g(x, y)$, podemos fazer

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\{g(x, y)\} \\ &= \iint df_x df_y G(f_x, f_y) e^{2\pi i(f_x x + f_y y)}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

O interessante é que podemos pensar na transformada de Fourier como a decomposição de uma função em termos de exponenciais complexas mais simples. Na equação (1.7), escrevemos $g(x, y)$ como uma combinação linear de funções do tipo $e^{2\pi i(f_x x + f_y y)}$, onde $G(f_x, f_y)$ é um número complexo que pesa a contribuição de cada função.

Durante o desenvolvimento de nossa parte teórica, conseguimos grandes simplificações ao consideramos as propriedades das operações com transformadas de Fourier. No cálculo da convolução de duas funções, por exemplo, basta calcularmos a transformada inversa de Fourier, do produto das transformadas das duas funções, para obtermos o seu resultado. Os teoremas, a seguir, ilustram as propriedades que mais utilizamos.

Teorema 1.2.1 (Linearidade)

$$\mathcal{F}(\alpha g + \beta h) = \alpha \mathcal{F}(g) + \beta \mathcal{F}(h)$$

Teorema 1.2.2 (Similaridade) Se $\mathcal{F}\{g(x, y)\} = G(f_x, f_y)$, então

$$\mathcal{F}\{g(\alpha x, \beta y)\} = \frac{1}{|\alpha\beta|} G\left(\frac{f_x}{\alpha}, \frac{f_y}{\beta}\right)$$

Teorema 1.2.3 (Fase global) *Se $\mathcal{F}\{g(x, y)\} = G(f_x, f_y)$, então*

$$\mathcal{F}\{g(x - \alpha, y - \beta)\} = G(f_x, f_y)e^{-2\pi i(f_x\alpha + f_y\beta)}$$

Teorema 1.2.4 (Convolação) *Sejam $G = \mathcal{F}\{g\}$ e $H = \mathcal{F}\{h\}$, então*

$$g \star h = \mathcal{F}^{-1}\{G H\}$$

onde α e β são constantes.

Para obter as demonstrações destes teoremas ou para estudar o tema de transformadas de Fourier de forma mais detalhada, sugiro a leitura das referências [44, 45].

O espectro angular

Introduziremos agora o conceito do espectro angular, que é uma ferramenta valiosa para a solução de problemas na área da Óptica. O tratamento que será apresentado aqui foi desenvolvido em [46, 47].

Considere um campo elétrico monocromático que propaga ao longo do eixo- z e cuja dependência temporal é harmônica. Sua transformada de Fourier ao longo do plano $z = 0$ é dada por

$$\tilde{E}(f_x, f_y) = \iint dx dy E(x, y) e^{-2\pi i(f_x x + f_y y)}, \quad (1.8)$$

e chamamos $\tilde{E}(f_x, f_y)$ de o espectro angular do campo. f_x e f_y são as frequências espaciais.

Invertendo a transformada, obtemos a seguinte fórmula para o campo elétrico

$$E(x, y) = \iint df_x df_y \tilde{E}(f_x, f_y) e^{2\pi i(f_x x + f_y y)}. \quad (1.9)$$

O significado do espectro angular fica mais claro se lembrarmos que esta equação pode ser vista como uma decomposição do campo elétrico em termos das exponenciais complexas $e^{2\pi i(f_x x + f_y y)}$, que neste caso representam ondas planas propagando em diferentes direções.

As equações (1.8) e (1.9) podem ser simplificadas se adotarmos

$$2\pi f_x = k_x, \quad 2\pi f_y = k_y,$$

e

$$k_x \hat{\mathbf{i}} + k_y \hat{\mathbf{j}} = \mathbf{q}, \quad x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} = \boldsymbol{\rho},$$

onde \mathbf{q} e $\boldsymbol{\rho}$ são as projeções transversais de \mathbf{k} e \mathbf{r} , respectivamente.

O campo elétrico fica, então,

$$E(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} \tilde{E}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}}, \quad (1.10)$$

e o espectro angular

$$\tilde{E}(\mathbf{q}) = \int d\boldsymbol{\rho} E(\boldsymbol{\rho}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}}. \quad (1.11)$$

Como a dependência temporal do campo elétrico é harmônica, ele deverá obedecer à equação de Helmholtz

$$\nabla^2 E(\mathbf{r}) + k^2 E(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.12)$$

Substituindo a Eq. (1.10) na Eq. (1.12), obtemos uma equação diferencial para o espectro angular cuja solução é

$$\tilde{E}(\mathbf{q}, z) = \tilde{E}(\mathbf{q}, 0) e^{ik_z z}, \quad (1.13)$$

mostrando, portanto, que a propagação do espectro angular ao longo do eixo- z é descrita simplesmente pelo fator de fase $e^{ik_z z}$. Esta propriedade do espectro angular é muito importante porque nos permite escrever o campo elétrico, que propagou livremente a partir da origem, apenas como sendo

$$E(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} \tilde{E}(\mathbf{q}, 0) e^{i(\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho} + k_z z)}. \quad (1.14)$$

Uma outra propriedade importante do espectro angular, que facilita em muito o cálculo do campo elétrico, aparece quando consideramos o problema da radiação espalhada por uma abertura. O espectro angular da luz transmitida por um orifício, imediatamente após este orifício, é dado por

$$\tilde{E}_t(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{q}' \tilde{E}_i(\mathbf{q}') T(\mathbf{q} - \mathbf{q}'), \quad (1.15)$$

onde

$$T(\mathbf{q}) = \int d\boldsymbol{\rho} A(\boldsymbol{\rho}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}}, \quad (1.16)$$

representa a função de transmissão da abertura e $A(\boldsymbol{\rho})$, a função que descreve a abertura. $\tilde{E}_i(\mathbf{q})$ é o espectro angular incidente nesta abertura.

Assim, para calcularmos o campo elétrico em uma região posterior a este obstáculo, basta que tomemos a transformada inversa de $\tilde{E}_t(\mathbf{q})e^{ik_z z}$. Temos, portanto, que o campo elétrico transmitido e propagado até uma certa região após esta abertura é

$$E_{t\&p}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \tilde{E}_i(\mathbf{q}') T(\mathbf{q} - \mathbf{q}') e^{i(\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho} + k_z z)}. \quad (1.17)$$

Operador Campo Elétrico

A Eq. (1.17) pode ser simplificada se considerarmos a aproximação paraxial. Nesta aproximação assumimos que o campo elétrico é observado apenas em pontos próximos ao eixo- z de propagação. Inicialmente reescrevemos a equação como

$$E_{t\&p}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \tilde{E}_i(\mathbf{q}') T(\mathbf{q} - \mathbf{q}') e^{i(\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho} + \sqrt{k^2 - q^2}(z - z_A))}, \quad (1.18)$$

onde consideramos que a abertura está no plano $z = z_A$ e que o campo é detectado a uma distância $z - z_A$ desta abertura. Se $\tilde{E}_0(\mathbf{q})$ for o espectro angular do feixe no plano $z = 0$, teremos que o espectro angular do feixe incidente na abertura será

$$\tilde{E}_i(\mathbf{q}) = \tilde{E}_0(\mathbf{q}) e^{i\sqrt{k^2 - q^2} z_A}, \quad (1.19)$$

e, assim, que

$$E_{t\&p}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \tilde{E}_0(\mathbf{q}') T(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \times e^{i(\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho} + \sqrt{k^2 - q^2}(z - z_A) + \sqrt{k^2 - q'^2} z_A)}. \quad (1.20)$$

Na aproximação paraxial, podemos fazer a seguinte substituição

$$\sqrt{k^2 - q^2} \simeq k - \frac{q^2}{2k}, \quad (1.21)$$

de forma que

$$\begin{aligned} E_{t\&p}(\boldsymbol{\rho}) &\simeq \frac{1}{(2\pi)^2} e^{ikz} \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \tilde{E}_0(\mathbf{q}') T(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \\ &\times e^{i(\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho} - \frac{q^2}{2k}(z-z_A) - \frac{q'^2}{2k} z_A)}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

O operador campo elétrico é, então, definido através de uma analogia com o caso clássico. Suas frequências positiva e negativa são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}) &\propto \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \hat{a}(\mathbf{q}') T(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \\ &\times e^{i(\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho} - \frac{q^2}{2k}(z-z_A) - \frac{q'^2}{2k} z_A)}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

e

$$\begin{aligned} \hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{\rho}) &\propto \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \hat{a}^\dagger(\mathbf{q}') T(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \\ &\times e^{-i(\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho} - \frac{q^2}{2k}(z-z_A) - \frac{q'^2}{2k} z_A)}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

onde $\hat{a}(\mathbf{q})$ é o operador de destruição de fótons no modo \mathbf{q} e $\hat{a}^\dagger(\mathbf{q})$, o operador criação.

O operador campo elétrico total é

$$\hat{E}(\boldsymbol{\rho}) = \hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}) + \hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{\rho}). \quad (1.25)$$

Estados quânticos de sistemas compostos

Antes de continuarmos com esta discussão, afim de apresentar o estado dos fótons gerados no processo da conversão paramétrica descendente, é interessante que revisemos os tipos de estados possíveis para sistemas compostos.

Estados Puros: Para um estado composto de dois sistemas quânticos A e B (associados ao Espaço de Hilbert \mathcal{H}_A de dimensão N_A e ao espaço \mathcal{H}_B de dimensão N_B , respectivamente), existe em um espaço de Hilbert dado por [48, 49]

$$\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \quad (1.26)$$

onde, $N_{AB} = N_A \times N_B$ e \otimes representa o produto tensorial. Se $\{|a_i\rangle\}$ pertencente ao espaço \mathcal{H}_A e $\{|b_j\rangle\}$ pertencente à \mathcal{H}_B são bases ortonormais, teremos que um estado puro arbitrário do sistema composto pode ser escrito como

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{N_A} \sum_{j=1}^{N_B} c_{ij} |a_i\rangle \otimes |b_j\rangle, \quad (1.27)$$

onde $c_{ij} = \langle a_i b_j | \Psi \rangle$. Estes estados se dividem em dois tipos distintos. Se os subsistemas foram gerados de forma que não houve interação entre eles, o estado é dito produto e tem uma forma fatorável

$$|\Psi\rangle_{prod} = \sum_{i=1}^{N_A} a_i |a_i\rangle \otimes \sum_{j=1}^{N_B} b_j |b_j\rangle. \quad (1.28)$$

Quando os subsistemas interagem gerando emaranhamento, o estado não pode ser fatorado. Podemos, então, associar a fatorabilidade dos estados puros de sistemas compostos, com a existência ou não de emaranhamento entre os subsistemas. Estados puros emaranhados têm uma forma não-fatorável.

Estados Mistos: Assim como os estados puros, os estados mistos podem apresentar correlações quânticas ou clássicas [50]. Os estados classicamente correlacionados são dados por uma mistura de estados produto do tipo

$$\rho_{AB} = \sum_i w_i \rho_A \otimes \rho_B, \quad (1.29)$$

onde ρ_{AB} representa o operador densidade global e ρ_A (ρ_B) o operador densidade do subsistema A (B). Um caso particular é o próprio estado produto. Os estados mistos emaranhados são os estados que não podem ser expressos como uma mistura do tipo da Eq. (1.29). Nem todos os estados desta classe

violam as desigualdades de Bell. Para estes casos, as previsões teóricas da Mecânica Quântica podem ser perfeitamente reconstruídas por uma teoria determinista-local.

O estado dos fótons gêmeos

Os fótons gêmeos são os fótons gerados no processo da conversão paramétrica descendente, que discutimos brevemente na seção anterior.

Como foi dito, a CPD é um processo no qual um fóton de energia $\hbar\omega_0$, incide em um meio não-linear e é convertido, espontaneamente, em dois outros fótons com energia $\hbar\omega_i$ e $\hbar\omega_s$. Os fótons convertidos obedecem à conservação da energia ($\hbar\omega_0 = \hbar\omega_i + \hbar\omega_s$) e à conservação do momentum ($\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_i + \mathbf{k}_s$). Existem dois tipos de CPD. No tipo I, os feixes gerados possuem polarizações lineares ortogonais à polarização do feixe do laser. No tipo II, os feixes sinal e idler são perpendicularmente polarizados entre si e um deles possui polarização linear paralela à polarização do feixe do laser. As condições de conservação de energia e momentum implicam em vínculos sobre os valores das frequências dos fótons convertidos e sobre as direções dos vetores de onda destes fótons. Se escolhermos um sistema de coordenadas tal que \mathbf{k}_0 esteja sobre o eixo z , então, as componentes \mathbf{k}_i e \mathbf{k}_s serão espelhadas e devido à simetria das relações de conservação em torno do eixo z , a luz convertida sai do cristal em forma de cones de luz (Ver Fig. 1.2).

O estado dos fótons gêmeos foi calculado em [51], considerando-se as aproximações paraxial, monocromática e de cristal fino. Neste trabalho os autores mostraram que no processo da CPD, o espectro angular do feixe do laser incidente é transferido para o estado dos fótons convertidos. O estado dos fótons gêmeos é dado por

$$|\Psi\rangle = |vac\rangle + \text{const} \int d\mathbf{q}_i \int d\mathbf{q}_s v(\mathbf{q}_i + \mathbf{q}_s) |1\mathbf{q}_i\rangle |1\mathbf{q}_s\rangle, \quad (1.30)$$

onde \mathbf{q}_j é a componente transversal do vetor de onda \mathbf{k}_j do fóton no modo $j = i, s$. $|1\mathbf{q}\rangle$ é um estado de Fock e representa 1 fóton no modo \mathbf{q} . $v(\mathbf{q})$ é o espectro angular do feixe incidente no plano do cristal ($z = 0$). As referências [52, 53, 54, 55, 56] ilustram algumas aplicações práticas deste resultado teórico.

Esta transferência do espectro angular pode ser vista como uma forma de se controlar a correlação transversal dos fótons gêmeos. Podemos alterar as

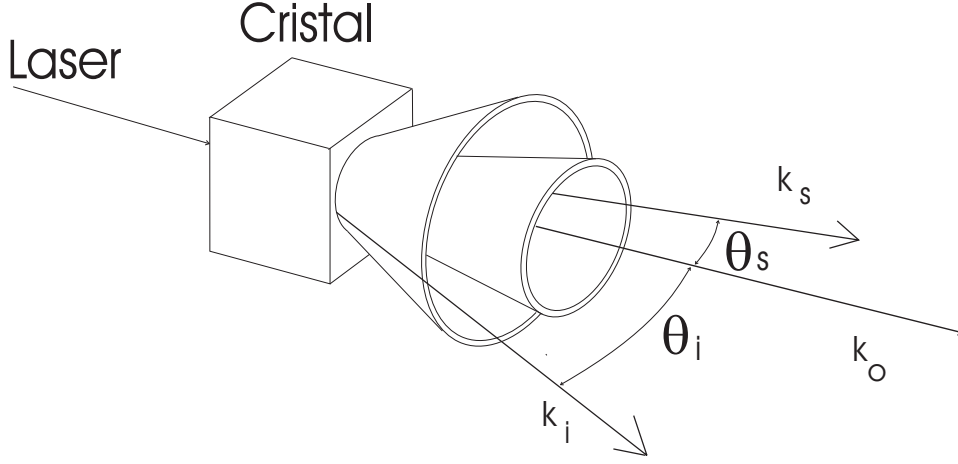


Figura 1.2: Conversão Paramétrica Tipo I. Neste processo os feixes convertidos idler (k_i) e sinal (k_s), possuem polarizações lineares ortogonais à polarização do feixe do laser.

propriedades desta correlação ao manipularmos o perfil transversal do feixe de laser incidente. A figura 1.3 ilustra duas situações distintas quando os fótons gêmeos são transmitidos por fendas duplas idênticas. Na letra (a) temos um feixe gaussiano focalizado no plano destas aberturas e a correlação dos fótons é tal que, quando um fóton passa pela abertura superior (inferior) de sua fenda dupla, o seu par passará pela abertura inferior (superior). Na letra (b), o perfil do feixe do laser é alterado por um fio e temos, então, os fótons sendo transmitidos pelas mesmas aberturas de suas respectivas fendas duplas.

Amplitude de probabilidade de detecção em coincidência

Seja $|\Phi\rangle$ um estado de dois fótons. A probabilidade de detectá-los em coincidência, nas posições \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 , é dada por [57, 58]

$$\mathcal{C}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \propto \text{Tr}\{\rho \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1) \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_2) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1)\}. \quad (1.31)$$

Se $\rho = |\Phi\rangle\langle\Phi|$, teremos que

$$\mathcal{C}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \propto \langle\Phi| \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1) \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_2) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1) |\Phi\rangle. \quad (1.32)$$

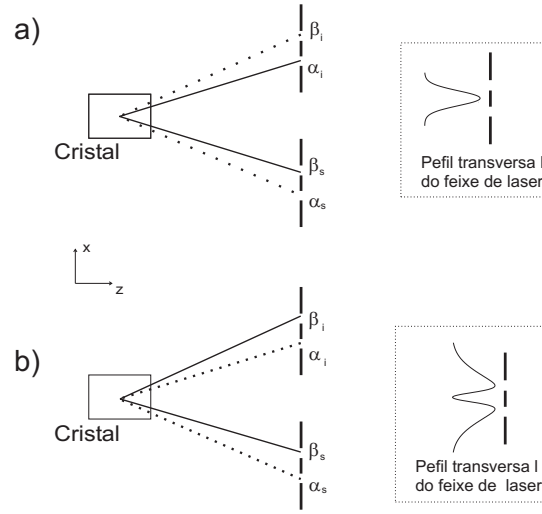


Figura 1.3: Correlação dos pares de fótons gêmeos. a) O perfil transversal do feixe do laser está focalizado no plano das fendas duplas. b) A imagem de um fio está projetada no plano das fendas duplas.

Ao inserirmos a relação de completeza formada pelos estados de Fock na Eq. (1.32), vemos que

$$\mathcal{C}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = |\mathcal{A}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2, \quad (1.33)$$

onde

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \propto \langle vac | \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1) | \Phi \rangle. \quad (1.34)$$

$\mathcal{A}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ representa, então, a amplitude de probabilidade de detecção de coincidência e o seu cálculo nos permitiu obter o estado dos fótons gêmeos para diferentes situações experimentais, que discutiremos nos capítulos a seguir.

Capítulo 2

GERAÇÃO DE ESTADOS EMARANHADOS DE QUDITS

Neste capítulo apresentamos um trabalho experimental no qual mostramos como a correlação de momentum transversal dos fótons gêmeos pode ser explorada para se gerar estados emaranhados de qudits.

2.1 *Introdução*

A consideração de estados emaranhados de sistemas quânticos de mais dimensões é importante porque enriquece os estudos acerca dos fundamentos da Teoria Quântica, permite o desenvolvimento de novos protocolos de comunicação [59] e traz vantagens significativas para a área da Criptografia Quântica [60, 61]. Na Ref. [62], por exemplo, os autores mostram que a diferença entre as previsões de um teoria determinista-local e a Mecânica Quântica, neste domínio, é ainda maior do que em sistemas bi-dimensionais. Portanto, pode ser que a utilização de qudits emaranhados permita a realização de um teste conclusivo a favor de uma destas teorias. Na Criptografia Quântica estes estados permitem que uma maior quantidade de informação seja enviada por par compartilhado. Além disso, a sua utilização pode garantir maior segurança à informação transmitida. Como é mostrado na Ref. [63], protocolos quânticos de criptografia se tornam ainda mais seguros com o uso de estados emaranhados de qudits, quando a informação é violada a partir de um processo de interceptação, clonagem e reenvio de apenas um dos componentes do par emaranhado (este processo chamado de: “individual eavesdropping attack”, seria o processo mais acessível a um espião do futuro com recurso de processamento computacional limitado).

Devido a sua relevância, a geração de estados emaranhados de qudits tem sido tema de investigações recentes. Em [64], os autores mostram que podemos utilizar a correlação de polarização, quando dois pares de fótons convertidos são gerados simultaneamente no processo da CPD, para gerar estados emaranhados de qutrits. Uma outra proposta para geração deste tipo de estado baseia-se no emaranhamento de momentum angular orbital dos fótons gêmeos [65, 66]. Na Ref. [67] um interferômetro construído com fibras ópticas e com três braços desbalanceados é utilizado, antes do laser incidir em um cristal não-linear, para se obter um estado de qutrits emaranhados em tempo de emissão e energia.

Em nosso trabalho demonstramos que a correlação de momentum transversal dos fótons produzidos na CPD pode ser utilizada para a geração de estados emaranhados de qudits [26]. Cada fóton convertido do par é enviado a uma fenda múltipla e devido a transferência do espectro angular para o estado dos dois fótons (Ver Eq. (1.30)), podemos controlar como a transmissão destes fótons ocorrerá através das duas aberturas. Este controle é feito a partir da manipulação do perfil transversal do feixe do laser no plano destas aberturas. Se o perfil do feixe do laser for bastante estreito neste plano, a correlação dos fótons gêmeos fará com que estes sejam transmitidos apenas por fendas simetricamente opostas. Desta forma, criamos emaranhamento entre os diferentes caminhos possíveis para a transmissão do par de fótons através das fendas múltiplas. Como a quantidade D de fendas nestas aberturas definem a dimensão do espaço de Hilbert de cada fóton, os chamamos de qudits espaciais. Na seção a seguir apresentamos parte da teoria que descreve o nosso experimento. Em seguida discutimos os seus detalhes e apresentamos os resultados experimentais obtidos para $D = 4$ e $D = 8$.

2.2 Teoria

Consideremos inicialmente a situação ilustrada pela figura 2.2, na qual os fótons gerados no processo da CPD são enviados através de aberturas quaisquer. Como foi mostrado em [68, 69], o estado destes fótons logo após a sua transmissão por estas aberturas, pode ser calculado a partir da expressão da amplitude de probabilidade de detecção em coincidência (Ver Eq. (1.34)). Inicialmente se considera o calculo desta amplitude usando o estado dado pela Eq. (1.30) e o operador campo elétrico (Eq. (1.23)) evoluindo do cristal

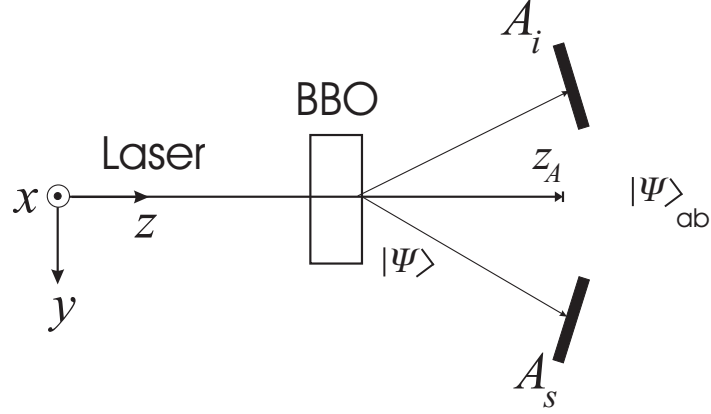


Figura 2.1: Estado após as aberturas

até um certo plano posterior a estas aberturas. Em seguida, calcula-se novamente o valor desta amplitude mas agora com o estado após as aberturas em uma forma geral e o operador campo elétrico evoluindo somente das aberturas até o plano considerado anteriormente. Como o valor da amplitude deve ser independente da forma usada para seu cálculo, podemos igualar as duas expressões obtidas de maneiras distintas. Da igualdade obtemos a expressão exata do estado dos fótons gêmeos após as aberturas. Para o caso unidimensional temos que

$$|\Psi\rangle_{ab} \propto \int dq_i \int dq_s \mathcal{F}(q_i, q_s) |1q_i\rangle |1q_s\rangle, \quad (2.1)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(q_i, q_s) = & \int dx_i \int dx_s e^{i\frac{k}{8z_A}(x_s - x_i)^2} e^{-i(q_i x_i + q_s x_s)} \\ & \times A_i(x_i) A_s(x_s) W\left(\frac{1}{2}(x_i + x_s); z_A\right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde q_j e x_j são, respectivamente, as componentes transversais do vetor de onda e da posição dos fótons convertidos nos modos $j = i, s$. $A_j(x_j)$ é a função que representa a abertura no modo j e $W(\xi; z_A)$ é uma função que descreve o perfil transversal do feixe do laser no plano das aberturas (z_A). Pode-se perceber, portanto, que ao modificarmos o perfil do laser ou ao utilizarmos

diferentes tipo de aberturas, modificamos a forma final do estado dos dois fótons após as aberturas.

Veamos como este estado se modifica quando consideramos que as aberturas são fendas múltiplas idênticas, cujas aberturas possuem largura $2a$ e estão separadas por uma distância d (Ver figura 2.2).

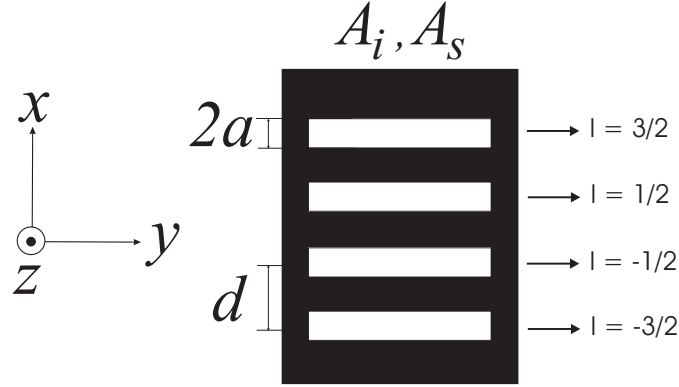


Figura 2.2: Fenda Quádrupla

A função que descreve estas fendas múltiplas é dada por

$$A_j(x_j) = \sum_{l=-l_D}^{l_D} \Pi\left(\frac{x_j - ld}{2a}\right), \quad (2.3)$$

onde $j = i, s$, $l_D \equiv (\mathcal{D} - 1)/2$, $\Pi(\xi)$ representa a função retângulo e D é o número de fendas da abertura. Perceba que o índice l pode ser visto como um identificador das aberturas das fendas múltiplas. Por exemplo, o valor de $l = \frac{3}{2}$ para uma fenda quádrupla é correspondente à fenda simples superior.

Substituindo a equação (2.3) na equação (2.2) teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(q_i, q_s) &= \sum_{l=-l_D}^{l_D} \sum_{m=-l_D}^{l_D} \int_{ld-a}^{ld+a} dx_i \int_{md-a}^{md+a} dx_s e^{i\frac{k}{8z_A}(x_s-x_i)^2} \\ &\quad \times W\left(\frac{1}{2}(x_i + x_s); z_A\right) e^{-i(q_i x_i + q_s x_s)}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Esta expressão pode ser simplificada se considerarmos os valores de k ,

z_A e d que utilizamos experimentalmente. Desta forma, após fazermos as seguintes mudanças de variáveis

$$x'_i = x_i - ld, \quad (2.5)$$

e

$$x'_s = x_s - md, \quad (2.6)$$

obtemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(q_i, q_s) &= \sum_{l=-l_D}^{l_D} \sum_{m=-l_D}^{l_D} e^{-id(q_i l + q_s m)} e^{i \frac{kd^2}{8z_A} (m-l)^2} \\ &\times \int_{-a}^a dx'_i \int_{-a}^a dx'_s W\left(\frac{(x'_i + x'_s)}{2} + \frac{(l+m)d}{2}; z_A\right) e^{-i(q_i x'_i + q_s x'_s)}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Se assumirmos ainda que o perfil transversal do feixe do laser, $W(\xi)$, é praticamente constante sobre o intervalo $[-a, a]$, teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(q_i, q_s) &= \sum_{l=-l_D}^{l_D} \sum_{m=-l_D}^{l_D} e^{-id(q_i l + q_s m)} e^{i \frac{kd^2}{8z_A} (m-l)^2} \\ &\times W\left(\frac{(l+m)d}{2}; z_A\right) \int_{-a}^a dx'_i e^{-iq_i x'_i} \int_{-a}^a dx'_s e^{-iq_s x'_s}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

e ao substituírmos a equação (2.8) na equação (2.1), obtemos o estado dos fótons gêmeos transmitidos pelas fendas múltiplas

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{ab} &\propto \sum_{l=-l_D}^{l_D} \sum_{m=-l_D}^{l_D} W\left(\frac{(l+m)d}{2}; z_A\right) e^{i \frac{kd^2}{8z_A} (m-l)^2} \\ &\times \int dq_i e^{-iq_i ld} \text{sinc}(q_i a) |1q_i\rangle \int dq_s e^{-iq_s md} \text{sinc}(q_s a) |1q_s\rangle. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Reescrevendo $|\Psi\rangle_{ab}$

Queremos agora mostrar que este estado pode ser visto com um estado de dois qudits. Para tanto, definimos os estados de um fóton $|l\rangle$ (ou $|m\rangle$) como

sendo

$$|l\rangle \equiv \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int dq e^{-iqld} \text{sinc}(qa) |1q\rangle. \quad (2.10)$$

O interessante é observar que na representação de posição [70], este estado pode ser visto como o estado de um fóton que foi transmitido através da fenda simples que está a uma distância ld do centro da fenda múltipla ($x = 0$)

$$|l\rangle = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \int dx \Pi[(x - ld)/2a] |1x\rangle.$$

Isto é, o estado $|l\rangle$ representa o fóton transmitido pela abertura l .

Como

$$\langle l|l'\rangle = \delta_{ll'},$$

podemos usar estes estados para definir o espaço de Hilbert de cada um dos fótons gêmeos transmitidos pelas fendas múltiplas. A dimensão deste espaço de um fóton é, então, definida pela quantidade de fendas simples presentes na fenda múltipla (D) a qual este fóton foi enviado. O estado da equação (2.9) pode ser escrito como

$$|\Psi\rangle_{ab} \propto \sum_{l=-l_D}^{l_D} \sum_{m=-l_D}^{l_D} W\left(\frac{(l+m)d}{2}; z_A\right) e^{i\frac{kd^2}{8z_A}(m-l)^2} |l\rangle_i \otimes |m\rangle_s, \quad (2.11)$$

e fica evidente, portanto, que ele representa o estado de um sistema composto de dois qudits.

Estados emaranhados de qudits

Se considerarmos o caso particular no qual a distribuição espacial do feixe do laser no plano das fendas múltiplas é menor do que a separação central entre as duas primeiras fendas simples, isto é, que $W(x; z_A) = \text{const}$ para $-a < x < a$ e $W(x; z_A) = 0$ para $|x| > a$, teremos após a normalização que

$$|\Psi\rangle_{ab} = \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{l=-l_D}^{l_D} e^{ik\frac{d^2 l^2}{2z_A}} |l\rangle_i \otimes |-l\rangle_s. \quad (2.12)$$

Este tipo de perfil transversal pode ser conseguido ao focalizarmos o laser no plano das fendas múltiplas.

No estado da equação (2.12), a correlação dos fótons gêmeos é tal que quando o fóton idler passa através da fenda l , o fóton signal irá passar através da fenda simetricamente oposta $-l$. Estes fótons estão emaranhados nos modos transversais $|l\rangle_i | -l\rangle_s$. Como os coeficientes da superposição são idênticos podemos dizer que este estado é um estado maximamente emaranhado de dois qudits. Para duas fendas quádruplas, por exemplo, teríamos

$$|\Psi\rangle_{ab} = \frac{1}{2} \left[|+\frac{1}{2}\rangle_i |-\frac{1}{2}\rangle_s + |-\frac{1}{2}\rangle_i |+\frac{1}{2}\rangle_s + e^{i\frac{kd^2}{z_A}} (|-\frac{3}{2}\rangle_i |+\frac{3}{2}\rangle_s + |+\frac{3}{2}\rangle_i |-\frac{3}{2}\rangle_s) \right], \quad (2.13)$$

e se o fóton idler fosse transmitido pela fenda $l = \frac{1}{2}$ de sua respectiva fenda múltipla, observaríamos o fóton signal passando pela fenda $l = -\frac{1}{2}$.

Quando alargamos o perfil transversal do feixe do laser no plano das aberturas, novos modos transversais aparecem na superposição coerente da equação (2.12). Isto quer dizer que o estado perde emaranhamento ao variarmos a distribuição espacial do laser desta forma. Podemos, portanto, gerar também estados parcialmente emaranhados ao utilizarmos perfis transversais mais largos.

2.3 Experimento

Para demonstrarmos que a geração de estados emaranhados de qudits espaciais é realmente possível, realizamos um teste experimental utilizando fendas múltiplas com $D = 4$ e $D = 8$. A figura 2.3 ilustra nossa montagem experimental. Um cristal não-linear de BBO (β -barium borate) cortado para o tipo II da CPD é iluminado por um laser operando no comprimento de onda de 413 nm e com uma potência de 100 mW. Fótons com um comprimento de onda degenerado de 826 nm são produzidos em um ângulo de 2.5° com relação à direção de propagação do pump incidente. Fendas múltiplas idênticas, A_i e A_s , são colocadas ao longo da direção de propagação dos feixes convertidos a uma distância $z_A = 200$ mm do cristal. Para estas fendas múltiplas temos que $2a = 0.09$ mm e $d = 0.17$ mm. Detectores D_i e D_s , colocados a uma distância de 2 mm após estas aberturas, registram suas contagens simples e em coincidência. Na frente de cada detector existe uma fenda simples de 0.1 mm de largura, seguida de um filtro de interferência centrado em 826 nm e com largura de banda de 8 nm. Uma lente de distância focal $f = 250$ mm

é colocada a 50 mm a frente do cristal, de forma que seu foco coincida com o plano das aberturas ($z_A = 200$ mm). O perfil transversal gerado no plano das aberturas está ilustrado na figura 2.3 e de acordo com a teoria apresentada na seção anterior ele deve ser suficiente para garantir a geração do estado da equação (2.12).

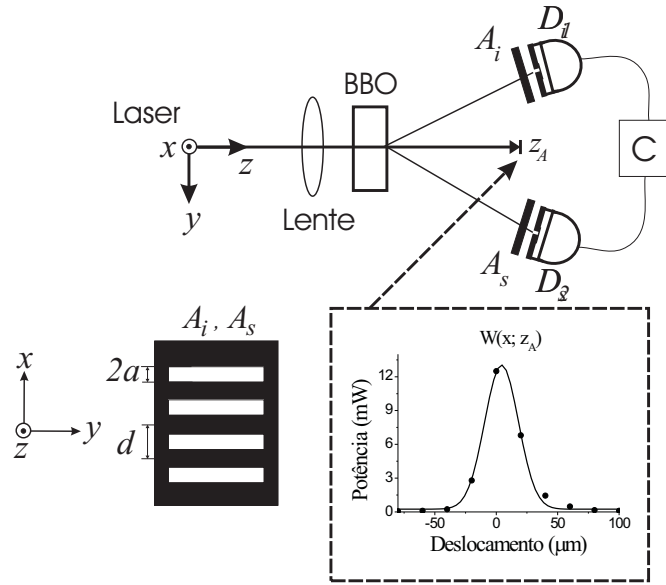


Figura 2.3: Montagem experimental.

Para identificarmos os estados que estavam sendo gerados realizamos medidas na base $\{|l\rangle_i |l'\rangle_s\}$, da seguinte maneira: fixamos o detector D_i atrás da fenda simples l e varremos o detector D_s , ao longo da direção- x , por toda a região de sua respectiva fenda múltipla. Em seguida, mudamos o detector D_i para a fenda simples seguinte e varremos novamente o detector D_s . Após uma quantidade D de medidas deste tipo (O detector D_i deve ser fixado inicialmente atrás da fenda simples $l = \frac{-(D-1)}{2}$ e depois ir até a fenda na qual $l = \frac{D-1}{2}$) conseguimos determinar as amplitudes de probabilidades para todos os D^2 estados da base $\{|l\rangle_i |l'\rangle_s\}$. Se o estado gerado é realmente um estado maximamente emaranhado, devemos observar coincidências apenas quando o detector D_s passar atrás da fenda simples para a qual $l' = -l$. Neste tipo de medida não observamos efeito de interferência ou difração pois

os detectores estão muito próximos das fendas múltiplas (Fig. 2.3).

Os resultados experimentais obtidos quando utilizamos fendas múltiplas com $D = 4$ e $D = 8$ são dados pelas figuras Figs. 2.4 e 2.5, respectivamente. Pode-se perceber que os resultados experimentais estão em pleno acordo com o que foi dito anteriormente: picos de coincidência só foram observados quando o detector D_s estava na fenda simples que era simetricamente oposta à aquela na qual o detector D_i estava fixo. É importante observar que estes picos têm aproximadamente o mesmo valor máximo. Isto nos diz que as amplitudes do estado experimental terão valores muito próximos, o que também está de acordo com o que foi previsto teoricamente na equação (2.12). Para um estado maximamente emaranhando os coeficientes da superposição coerente são iguais. Para obter as amplitudes dos estados experimentais gerados, devemos calcular as probabilidades de todos os estados das bases consideradas. Este cálculo é feito usando-se que

$$P_{l_1 l_2} = C_{l_1 l_2} / \sum_{\{l_1, l_2\}} C_{\{l_1, l_2\}},$$

onde $C_{l_1 l_2}$ é o número de coincidência entre o detector D_i na fenda l e D_s em l' . Nos histogramas das figuras Figs. 2.4(e) e 2.6 são mostrados os valores encontrados para estas probabilidades. Considerando os erros experimentais e a estrutura destes histogramas, podemos dizer que os estados gerados são estados maximamente emaranhados. Para $\mathcal{D} = 4$ o erro no cálculo das amplitudes é de 4% e o estado experimental tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle = & 0,50 \left| -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle + 0,50 \left| +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ & + e^{i \frac{kd^2}{z_A}} (0,49 \left| -\frac{3}{2}, +\frac{3}{2} \right\rangle + 0,49 \left| +\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle), \end{aligned} \quad (2.14)$$

cuja fidelidade para com o estado teórico da equação (2.13) é $F = 0.98 \pm 0.08$. A fidelidade entre um estado $|\Omega\rangle$ e $|\Lambda\rangle$ é definida como $F_{\Omega\Lambda} \equiv \langle \Omega | \rho_\Lambda | \Omega \rangle$.

Para $\mathcal{D} = 8$, os erros das amplitudes estão por volta de 3% e o estado é dado por

$$\begin{aligned}
 |\Psi\rangle = & 0,36 \left| -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle + 0,34 \left| +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\
 & + e^{i\frac{kd^2}{z_A}} (0,34 \left| -\frac{3}{2}, +\frac{3}{2} \right\rangle + 0,34 \left| +\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle) \\
 & + e^{i\frac{3kd^2}{z_A}} (0,34 \left| -\frac{5}{2}, +\frac{5}{2} \right\rangle + 0,36 \left| +\frac{5}{2}, -\frac{5}{2} \right\rangle) \\
 & + e^{i\frac{6kd^2}{z_A}} (0,36 \left| -\frac{7}{2}, +\frac{7}{2} \right\rangle + 0,35 \left| +\frac{7}{2}, -\frac{7}{2} \right\rangle), \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

e apresenta uma fidelidade de $F = 0.96 \pm 0.05$ para com o estado previsto pela equação (2.12). As fases que aparecem nestes estado não foram medidas. Estas fases aparecem por causa da diferença de caminho que existe do cristal até cada uma das fenda simples da abertura. No entanto, estas fases podem ser canceladas ao acrescentarmos fases externas a estas fendas. Isto pode ser feito escolhendo valores apropriados para d e z_A , ou inserindo placas de vidro em algumas das fendas de nossas fendas múltiplas.

Correlações: Quânticas ou Clássicas?

Embora os resultados experimentais obtidos concordem com as previsões teóricas, eles não são suficientes para garantir que o estado os fótons gêmeos seja realmente como descrevemos nas equações (2.14) e (2.15). Os mesmo resultados seriam obtidos caso o estado destes fótons fosse uma mistura do tipo

$$\rho_{cc} = \frac{1}{D} \sum_{l=-l_D}^{l_D} |l\rangle_{ii}\langle l| \otimes |-l\rangle_{ss}\langle -l|. \quad (2.16)$$

Este estado classicamente correlacionado apresenta, no plano das fendas duplas, o mesmo tipo de correlação que o estado da equação (2.12) descreve. Teoricamente, a maneira mais simples de se determinar qual o tipo da correlação dos fótons gêmeos, seria realizar as medidas que fizemos em bases distintas e observar se ainda teríamos picos de coincidência como os observados anteriormente. No entanto, neste tipo de experimento com correlação transversal esta mudança de base não é trivial e por isso buscamos uma outra forma de demonstrar que os estados gerados eram realmente emaranhados. O que descobrimos é que embora os estados (2.12) e (2.16) gerem resultados semelhantes no plano das aberturas, o mesmo não ocorre em um plano

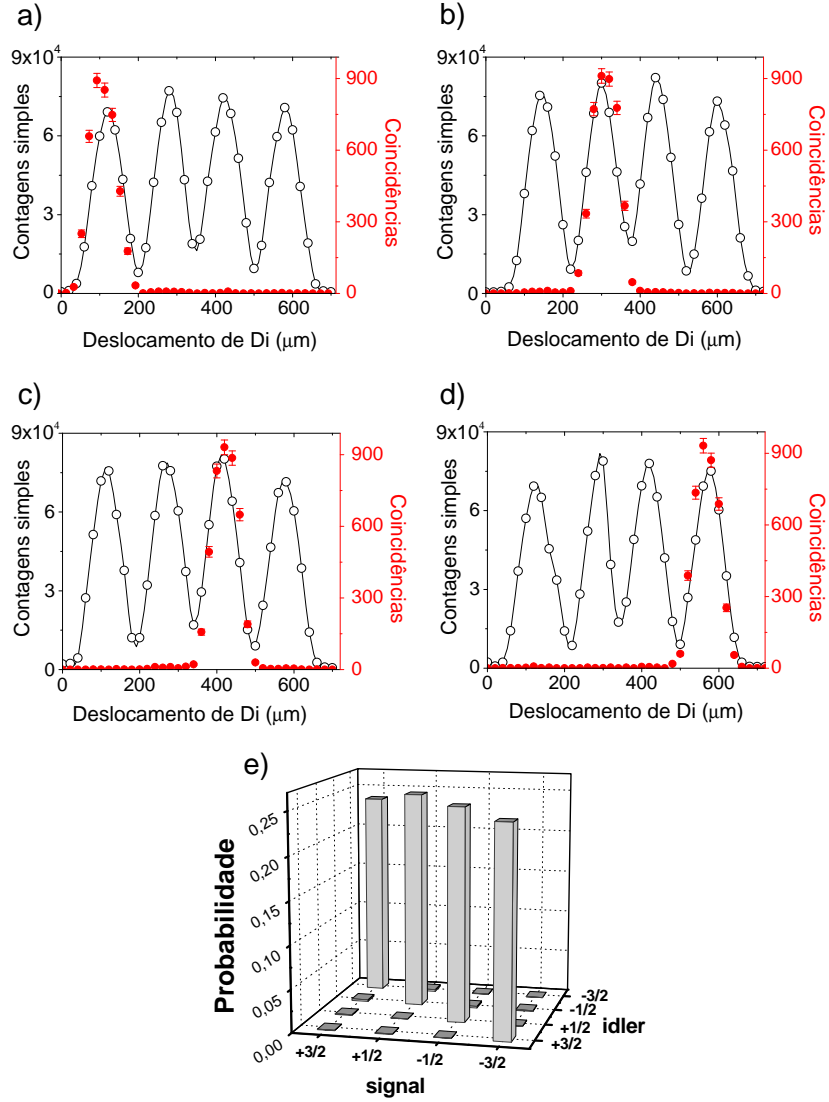


Figura 2.4: $\mathcal{D} = 4$. A contagem simples do detector D_i está representada por (○) e a contagem em coincidência dos detectores D_i, D_s por (●). Nestas medidas D_s está fixado logo após a fenda simples l e D_i variando por toda a região de sua respectiva abertura, ao longo da direção- x . Os picos de contagem simples correspondem a $l' = -\frac{3}{2}, \dots, +\frac{3}{2}$ quando vistos da esquerda para a direita. Em (a) D_i está fixo na fenda simples para a qual $l = +\frac{3}{2}$, em (b) $l = +\frac{1}{2}$, (c) $l = -\frac{1}{2}$ e em (d) $l = -\frac{3}{2}$. (e) Histograma das probabilidades medidas para todos os estados da base $\{|l\rangle_1 |l'\rangle_2\}$.

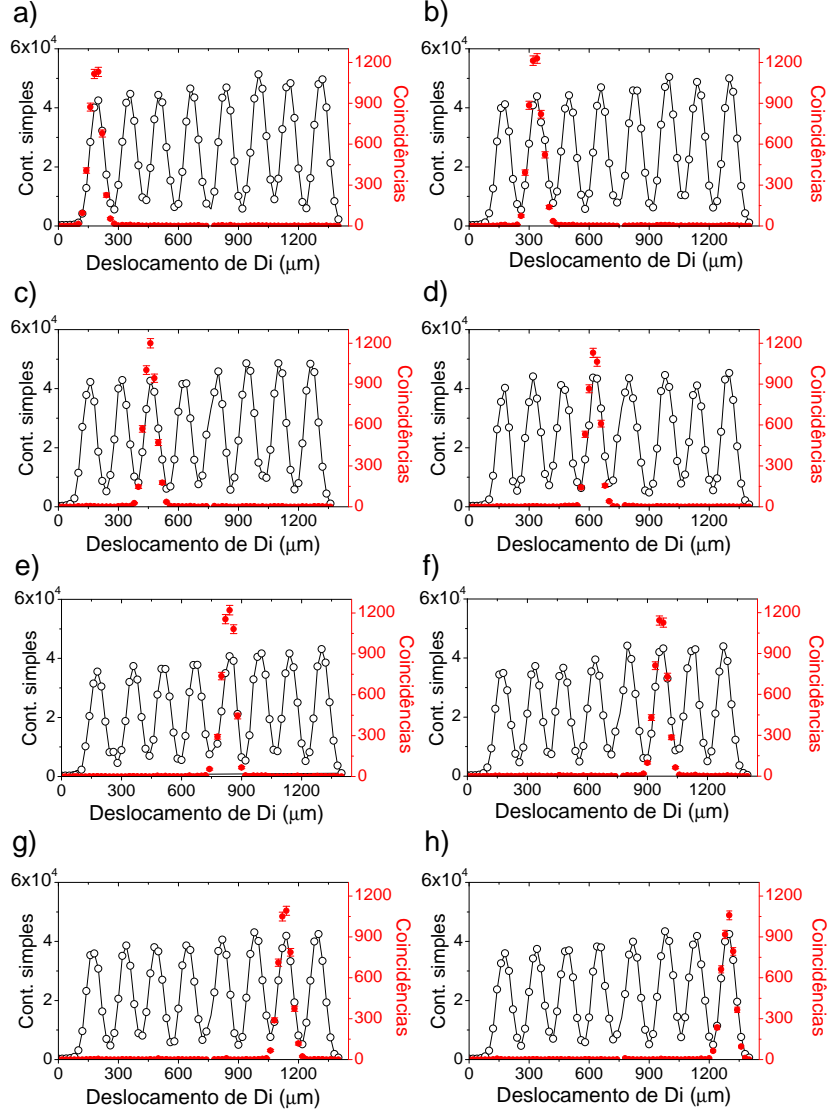


Figura 2.5: $\mathcal{D} = 8$. A contagem simples do D_i está representada por (o) e a contagem em coincidência dos detectores D_i - D_s por (●). Nestas medidas o detector D_s está fixado logo após a fenda simples l e D_i variando na direção x por toda a região de sua respectiva abertura. Os picos de contagem simples correspondem a $l' = -\frac{7}{2}, \dots, +\frac{7}{2}$. Em (a) D_i está fixo na fenda simples para a qual $l = +\frac{7}{2}$, em (b) $l = +\frac{5}{2}$, (c) $l = +\frac{3}{2}$, (d) $l = +\frac{1}{2}$, (e) $l = -\frac{1}{2}$, (f) $l = -\frac{3}{2}$, (g) $l = -\frac{5}{2}$ e em (h) $l = -\frac{7}{2}$.

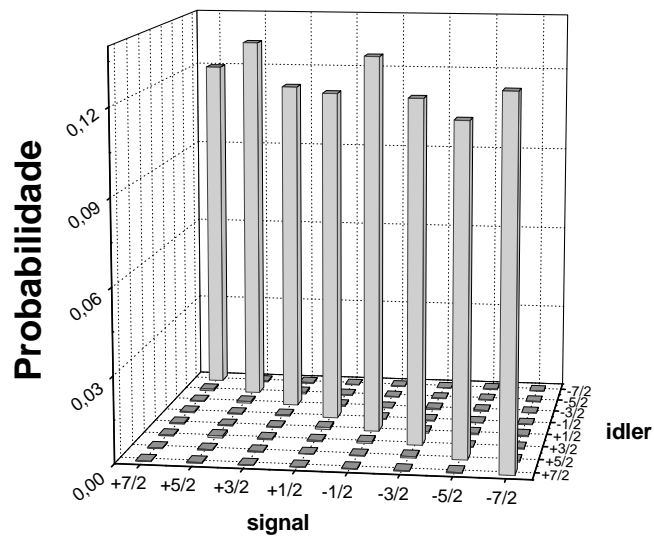


Figura 2.6: Histograma das probabilidades medidas para todos os estados da base $\{|l\rangle_i |l'\rangle_s\}$ com as fendas múltiplas de $D = 8$.

de detecção mais afastado. É possível utilizar o padrão de interferência em coincidência [71] como uma medida do tipo de correlação.

O padrão de interferência em coincidência como uma evidência de emaranhamento

Para entendermos porque o padrão de interferência em coincidência pode ser visto como uma evidência de emaranhamento, consideremos primeiramente o cálculo da probabilidade de detectar os fótons gêmeos em coincidência em um plano- z posterior às fendas múltiplas. Como vimos no capítulo anterior, esta probabilidade para o caso unidimensional é dada por

$$\mathcal{C}(x_i, x_s; z) \propto \text{Tr} \rho \hat{E}^{(-)}(x_i; z) \hat{E}^{(-)}(x_s; z) \hat{E}^{(+)}(x_s; z) \hat{E}^{(+)}(x_i; z), \quad (2.17)$$

onde ρ é o estado de dois fótons e $\hat{E}_j^{(+)}(x_j; z)$ é o operador campo elétrico associado ao modo $j = i, s$. x_j é a posição de detecção no plano z .

Para o estado da Eq. (2.12), a probabilidade de detecção em coincidência será

$$\mathcal{C}_{\Psi_{ab}}(x_i, x_s) \propto \left| \sum_{l=-l_D}^{l_D} e^{ik \frac{d^2 l^2}{2zA}} \langle \text{vac} | \hat{E}^{(+)}(x_s; z) \hat{E}^{(+)}(x_i; z) | l, -l \rangle \right|^2, \quad (2.18)$$

e para o estado classicamente correlacionado teremos que

$$\mathcal{C}_{cc}(x_i, x_s) \propto \sum_{l=-l_D}^{l_D} \left| \langle \text{vac} | \hat{E}^{(+)}(x_s; z) \hat{E}^{(+)}(x_i; z) | l, -l \rangle \right|^2. \quad (2.19)$$

Como a quantidade de luz transmitida pelas fendas múltiplas é muito baixa, tivemos que utilizar lentes convergentes ao longo do caminho de propagação dos fótons para que pudéssemos detectá-los em coincidência no plano- z . O plano de detecção estava a uma distância $z = 800\text{mm}$ do cristal. Duas lentes idênticas de foco $f = 150\text{mm}$ foram inseridas após cada uma das fendas múltiplas a uma distância $z_L = 650\text{mm}$ do cristal. O operador campo elétrico que descreve a evolução de um dos fótons partindo das fendas múltiplas, passando por sua lente convergente e então sendo detectado no plano- z é dado por (Ver Apêndice A)

$$\begin{aligned} \hat{E}^{(+)}(x; z) &= \int dq \int dq' \hat{a}_j(q') \exp \left[i \left(qx - \frac{q^2}{2k} (z - z_L) \right) \right] \\ &\times \exp \left[i \left(-\frac{q'^2}{2k} (z_L - z_A) + \frac{(q - q')^2}{2k} f \right) \right], \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde $\hat{a}_j(q')$ é o operador destruição para o fóton no modo j .

A partir do cálculo do elemento de matriz $\langle \text{vac} | \hat{E}^{(+)}(x; z) | l \rangle$ feito no Apêndice B, podemos mostrar que a taxa de coincidência da equação (2.18) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\Psi_{ab}} &\propto \sum_{l=-l_D}^{l_D} V_{ll}(x_i, x_s) + 2 \sum_{l=-l_D}^{l_D-1} \sum_{m=l+1}^{l_D} V_{lm}(x_i, x_s) \\ &\times \cos(\beta(l - m)[x_i - x_s + (l + m)\phi]), \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde os parâmetros β e ϕ são dados por

$$\beta = \frac{kfd}{2[f^2 - (z - z_L - f)(z_L - z_A - f)]}, \quad \phi = \frac{d[f^2 - (z - z_L - f)(z_L - f)]}{fz_A},$$

e onde $V_{lm}(x_i, x_s)$ é uma função que descreve a difração causada pelas fendas das aberturas

$$V_{lm}(x_i, x_s) \equiv \prod_{j=l,m} \text{sinc}(a\beta[x_s - j\eta d]/d) \text{sinc}(a\beta[x_i + j\eta d]/d), \quad (2.22)$$

com $\eta = (z - z_L - f)/f$. A fase ϕ pode ser cancelada mudando a posição z_L das lentes.

A equação (2.21), para os estados maximamente emaranhados de qudits, descreve um padrão de interferência cujas franjas são condicionais. Isto quer dizer que a forma do padrão de interferência muda quando a posição de um dos detectores varia. Por exemplo, se o detector D_i é fixado em $x_i = 0$ e o detector D_s varre o plano- z ao longo da direção- x , observaremos um padrão de interferência que apresenta uma máximo central quando $x_s = 0$. No entanto, se o detector D_i for fixado no ponto de mínimo de coincidência do padrão anterior, o novo padrão de interferência medido em coincidência, terá

suas franjas deslocadas e agora em $x_s = 0$ observaremos um ponto de mínimo [72].

A probabilidade de coincidência \mathcal{C}_{cc} , referente ao estado classicamente relacionado, é dada em termos do primeiro somatório da Eq. (2.21). Estes termos estão relacionados apenas com o efeito de difração das fendas simples e portanto, \mathcal{C}_{cc} não apresenta interferência em coincidência. Assim, podemos afirmar que a observação de padrões de interferência de quarta ordem condicionais é uma evidência suficiente para garantir que os qudits gerados são emaranhados.

A figura 2.7 ilustra os resultados das medidas em coincidências que realizamos após os fótons gêmeos terem sido transmitidos por fendas quádruplas. As medidas foram feitas em função da posição x_s do detector D_s , enquanto o detector D_i estava fixo. Em (a) D_i está fixo em $x_i = 0\mu\text{m}$ e o padrão de interferência apresenta um máximo central. Em (b) D_i foi fixado em $x_i = 300\mu\text{m}$ e o padrão de interferência observado apresentou anti-franjas. A curva sólida foi obtida teoricamente a partir da Eq. (2.21). Podemos perceber claramente a condicionalidade dos padrões de interferência medidos e como foi dito, isto é uma prova de que existe emaranhamento entre os qudits espaciais. Portanto, podemos afirmar que os estados gerados em nosso experimento são estados puros e emaranhados de qudits com $D = 4$ (Eq. (2.14)) e $D = 8$ (Eq. (2.15)).

2.4 Conclusão

Neste capítulo apresentamos um esquema para a geração de estados emaranhados de qudits, explorando a correlação de momentum transversal dos fótons produzidos no processo da conversão paramétrica descendente. Duas aberturas idênticas e com uma quantidade D de fendas simples, são colocadas ao longo do caminho de propagação dos fótons idler e signal para definir a dimensão de seu espaço de Hilbert. O método apresentado é simples e bastante vantajoso, pois além de possibilitar a geração de qudits com altas dimensões, ele permite o controle do grau de emaranhamento dos estados gerados. Os estados experimentais apresentaram uma fidelidade alta para com os estados previstos teoricamente. Neste trabalho a existência de emaranhamento entre os qudits foi comprovada experimentalmente. Resultados experimentais confirmaram a geração de qudits emaranhados com $D = 4$ e $D = 8$.

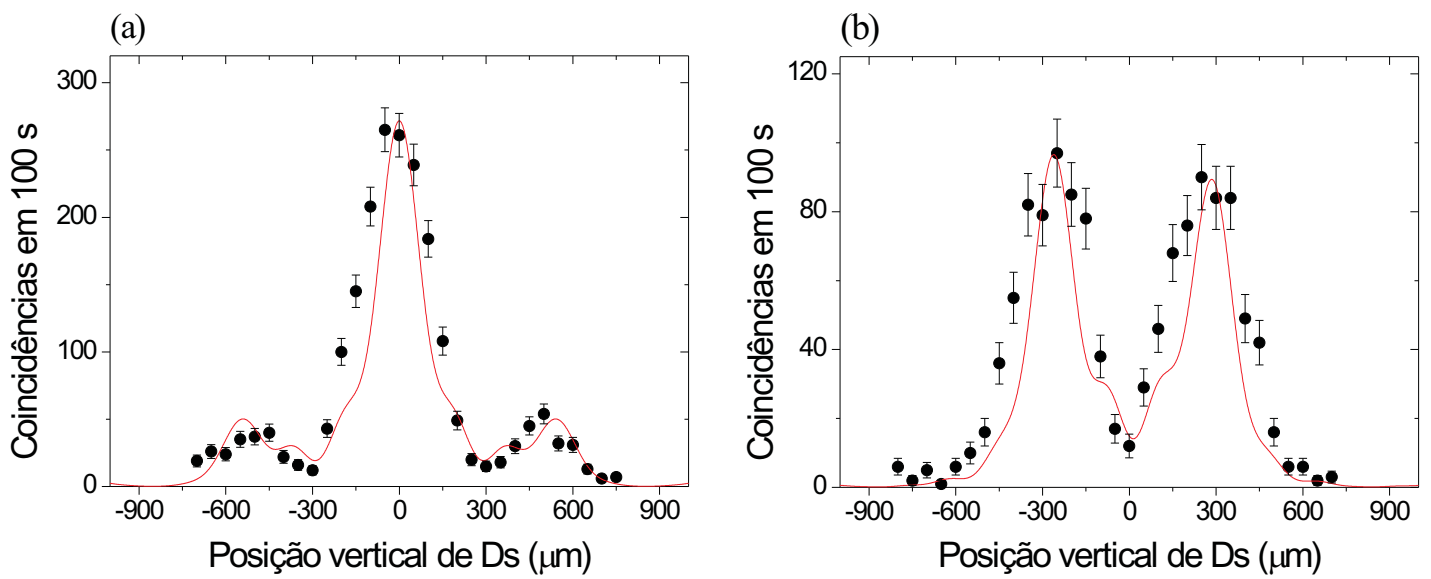


Figura 2.7: Padrões de interferência de quarta ordem observados após a transmissão dos fótons gêmeos por fendas quádruplas. (a) D_i está fixo em $x_i = 0 \mu\text{m}$. (b) D_i está fixo em $x_i = 300 \mu\text{m}$.

Capítulo 3

TRANSMITINDO QUDITS EMARANHADOS

Neste capítulo demonstramos que os estados de qudits espaciais, gerados usando a correlação de momentum transversal dos fóton gêmeos, podem ser transmitidos com o auxílio de lentes colocadas ao longo da direção de propagação destes fótons. A propagação foi realizada no espaço livre e o estado propagado manteve uma fidelidade alta quando comparado com sua forma original.

3.1 Introdução

A maioria das aplicações da área da computação quântica, como o teletransporte [28] e a criptografia quântica [60], assume que as partes que se comunicam são capazes de compartilhar emaranhamento. Por causa do potencial prático que a implementação de uma destas aplicações poderia ter a longas distâncias, a propagação de estados emaranhados tem sido tema de estudos importantes. O primeiro trabalho de destaque baseou-se no uso de fibras ópticas para enviar estados de qubits emaranhados em energia e tempo de emissão para receptores separados por mais de 10 *Km* [73]. Um teste de Bell garantiu que o estado transmitido ainda era um estado emaranhado. Outro trabalho interessante foi o realizado por Aspelmeyer *et al.*, no qual os autores mostram que estados de qubits emaranhados em polarização podem ser transmitidos através da atmosfera [74]. Como é enfatizado neste trabalho, a propagação no espaço livre pode oferecer o benefício de se superar grandes distâncias de transmissão através do uso de estruturas espaciais.

Mesmo que trabalhos mais recentes tenham conseguido propagar estados

emaranhados de qubits a distâncias superiores [75, 76], um estudo teórico feito por E. Waks *et al.*, demonstrou que devido a perdas que ocorrem naturalmente nos canais quânticos, a distância de comunicação não pode superar a ordem de 100 *km* quando lidamos com fótons correlacionados e medidas em coincidência [77]. Por este motivo o controle da técnica para geração e transmissão de estado emaranhados de sistemas quânticos de mais dimensões pode ser um passo crucial para a comunicação quântica em uma escala global. A maior quantidade de informação que pode ser enviada por par compartilhado, requer um menor esforço das partes que se comunicam e dos repetidores quânticos, que serão necessários ao se enviar uma mensagem através de distâncias superiores a 100 *km*.

Neste trabalho mostramos que os estados de qudits espaciais podem ser transmitidos através do espaço livre [33]. Um estado de ququarts espaciais foi gerado de acordo com o que foi dito no capítulo anterior e em seguida propagado com o auxílio de duas lentes idênticas. A propagação ocorreu na escala de nosso laboratório e os estados propagados apresentaram uma fidelidade superior a 98% quando comparados com sua forma original no plano das fendas quádruplas. Neste trabalho também utilizamos a observação do padrão de interferência como uma demonstração da existência de emaranhamento entre os fótons gêmeos.

3.2 Teoria

Como demonstramos no capítulo anterior, ao focalizarmos o feixe do laser no plano de duas fendas quádruplas pelas quais os fótons gêmeos são transmitidos, estamos gerando um estado maximamente emaranhado de ququarts espaciais, que é dado por (Ver Eq. (2.13))

$$|\Psi\rangle_{ab} = \frac{1}{2} \sum_{l=-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} e^{ik\frac{a^2 l^2}{2z_A}} |l\rangle_i \otimes |-l\rangle_s, \quad (3.1)$$

onde

$$|l\rangle_j \equiv \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int dq_j e^{-iq_j l d} \text{sinc}(q_j a) |1q_j\rangle. \quad (3.2)$$

Agora queremos mostrar que o estado da Eq. (3.1) pode ser propagado no

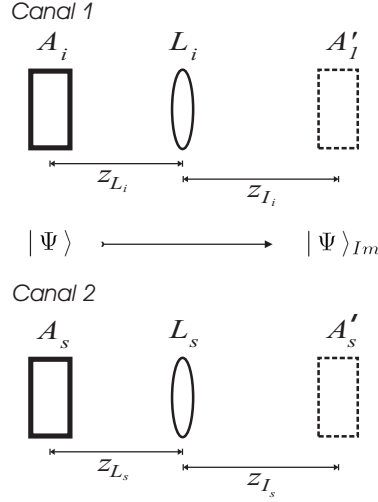


Figura 3.1: Canais usados para a propagação dos ququarts espaciais. A_i e A_s são aberturas quaisquer. L_i e L_s são lentes convergentes com foco f_i e f_s , respectivamente. A'_i e A'_s são as imagens das aberturas.

espaço livre. A propagação dos bifótons será através de dois canais independentes que possuem lentes cujos comprimentos focais f_1 e f_2 são distintos (Fig. 3.1). Estas lentes estão a uma distância z_{L_i} de sua respectiva abertura. A propagação dos fótons gêmeos a ser considerada é, então, do plano das aberturas até o plano de formação de imagem que está em uma região posterior a estas lentes.

Inicialmente calculamos o estado geral dos fótons transmitidos por aberturas genéricas e propagados através destes canais até os planos z_{I_i} e z_{I_s} . Para simplificar, consideramos que as condições de formação de imagem são dadas por $z_{I_i} - z_{L_i} = z_{L_i} - z_A = 2f_i$. A fim de obtermos o estado de imagem, devemos inicialmente assumir uma forma geral para ele

$$|\Psi\rangle_{Im} \propto \int dq_i \int dq_s \mathcal{I}(q_i, q_s) |1q_i\rangle |1q_s\rangle. \quad (3.3)$$

Com o intuito de obtermos a expressão de $\mathcal{I}(q_i, q_s)$, realizamos o cálculo da amplitude de probabilidade de detecção em coincidência dos fótons gêmeos no plano de formação de imagem ($\mathcal{A}_{Im}(x_i, x_s; z_{I_i}, z_{I_s})$), utilizando dois métodos distintos.

Método 1

Neste primeiro cálculo da amplitude, utilizamos o estado da equação (2.1) e o operador campo elétrico que representa a evolução de um fóton das aberturas até o plano onde sua imagem é formada (Ver Apêndice A)

$$\hat{E}_1^{(+)}(x; z_I) = \int dq \int dq' \hat{a}(q') \exp \left[i \left(qx - \frac{f}{2k} (q + q')^2 \right) \right]. \quad (3.4)$$

Desta forma teremos que (Ver Eq. (1.34))

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{Im}(x_i, x_s; z_{I_i}, z_{I_s}) &\propto \langle vac | \hat{E}_1^{(+)}(x_i; z_{I_i}) \hat{E}_1^{(+)}(x_s; z_{I_s}) | \Psi \rangle_{ab} \\ &= \int dq_i \int dq'_i \int dq_s \int dq'_s \mathcal{F}(q'_i, q'_s) \\ &\quad \times \exp \left[i \left(q_i x_i - \frac{f_i}{2k} (q_i + q'_i)^2 \right) \right] \\ &\quad \times \exp \left[i \left(q_s x_s - \frac{f_s}{2k} (q_s + q'_s)^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Método 2

No segundo método calculamos $\mathcal{A}_{Im}(x_i, x_s; z_{I_i}, z_{I_s})$ utilizando o estado $|\Psi\rangle_{Im}$ e o operador campo elétrico dado apenas como

$$\hat{E}_2^{(+)}(x; z_I) = \int dq \hat{a}(q) e^{i(qx)}. \quad (3.6)$$

Assim, obtemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{Im}(x_i, x_s; z_{I_i}, z_{I_s}) &\propto \langle vac | \hat{E}_2^{(+)}(x_i; z_{I_i}) \hat{E}_2^{(+)}(x_s; z_{I_s}) | \Psi \rangle_{Im} \\ &= \int dq_i \int dq_s \mathcal{I}(q_i, q_s) e^{[i(q_i x_i + q_s x_s)]}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Podemos, portanto, obter a expressão para $\mathcal{I}(q_i, q_s)$ ao igualarmos as equações (3.5) e (3.7). O resultado é

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(q_i, q_s) &\propto \int dq'_i \int dq'_s \mathcal{F}(q'_i, q'_s) \\ &\quad \times e^{-if_i(q_i + q'_i)^2/2k} e^{-if_s(q_s + q'_s)^2/2k}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

de maneira que o estado geral dos fótons gêmeos nos planos de formação de imagem de duas aberturas quaisquer, é dado por

$$|\Psi\rangle_{Im} \propto \int dq_i \int dq'_i \int dq_s \int dq'_s \mathcal{F}(q'_i, q'_s) \times e^{-if_i(q_i+q'_i)^2/2k} e^{-if_s(q_s+q'_s)^2/2k}. \quad (3.9)$$

A função $\mathcal{F}(q_1, q_2)$ será dada por

$$\mathcal{F}(q_i, q_s) \propto \sum_{l=-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} e^{ik\frac{d^2l^2}{2z_A}} e^{-iq_i ld} \text{sinc}(q_i a) e^{iq_s ld} \text{sinc}(q_s a), \quad (3.10)$$

quando as duas aberturas pelas quais os fótons gêmeos são transmitidos forem fendas quádruplas (Ver Fig. (2.2) e quando o perfil transversal do feixe do laser no plano destas aberturas for bastante estreito.

Substituindo a equação (3.10) na equação (3.9), obtemos o estado dos fótons gêmeos nos planos das imagens das fendas quádruplas

$$|\Psi\rangle_{Im} = \frac{1}{2} \sum_{l=-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} e^{ik\frac{d^2l^2}{2z_A}} | -l \rangle_i \otimes | l \rangle_s, \quad (3.11)$$

que tem a mesma forma do estado destes fótons no plano das fendas quádruplas (Eq. (3.1)). Isto quer dizer, portanto, que podemos propagar os estados emaranhados de qudits espaciais, quando consideramos canais de transmissão que são equivalentes aos considerados neste cálculo teórico (Ver Fig. 3.1). É importante destacar que neste cálculo foi considerado que as lentes têm focos diferentes e podem, assim, formar as imagens em planos que não estão equidistantes das aberturas. Desta forma, é possível que estes qudits sejam enviados a receptores que estão a distâncias diferentes da fonte e que estes ainda estejam em um estado maximamente emaranhado. Como foi mostrado na Ref [78], este tipo de propriedade do canal de transmissão pode ser fundamental para comunicações a longas distâncias.

3.3 Experimento

O esquema representado na Fig. 3.2, permitiu a demonstração experimental de que os estados de qudits espaciais podem ser propagados no espaço livre.

Um cristal de BBO (β -barium borate) com 5-mm de espessura foi utilizado para gerar conversão paramétrica do tipo-II, ao incidirmos sobre ele, um laser operando em 413nm e com potência de 100 mW. Fótons convertidos com o comprimento de onda de 826 nm foram selecionados para detecção com o uso de filtros de interferência. Duas fendas quádruplas idênticas (A_i e A_s) foram colocadas ao longo da direção de propagação destes fótons, a uma distância $z_A = 200$ mm do cristal ($z = 0$). A separação das fendas destas aberturas é $d \approx 0.17$ mm e a largura de cada fenda $2a \approx 0.09$ mm. Assim como no experimento anterior, focalizamos o laser no plano- z_A para garantir que a função $W(\xi; z_A)$ não seja nula apenas em uma pequena região do espaço. Após serem transmitidos pelas fendas quádruplas os fótons gêmeos foram propagados pelo espaço livre e através de duas lentes idênticas (L_i e L_s), cujas distâncias focais são $f = 150$ mm. Estas lentes estavam a uma distância $z_L = 500$ mm do cristal. No plano de formação de imagem ($z_I = 800$ mm), dois detectores (D_i e D_s) foram utilizados para se realizar medidas em coincidência. Em frente de cada detector havia uma fenda simples de largura 0.1 mm, paralela às fendas das aberturas.

Medidas em coincidência na base $\{|l\rangle_1 |l'\rangle_2\}$, foram utilizadas para determinar o estado dos dois fótons no plano de formação de imagem. Estas medidas são análogas às medidas feitas no experimento de geração de qudits. O detector D_i foi fixado na região do espaço onde se formava a imagem da fenda l , enquanto o detector D_s varria, ao longo da direção- x , toda a região na qual se dava a formação da imagem da outra fenda quádrupla. Quatro medidas deste tipo, com o detector D_i indo da imagem da fenda para a qual $l = \frac{-3}{2}$ até a imagem da fenda com $l = \frac{3}{2}$, determinaram a amplitude de probabilidade dos dezesseis estados da base $\{|l\rangle_i |l'\rangle_s\}$.

Se o resultado teórico obtido para o estado destes fótons no plano de imagem (Eq. (3.11)) estiver correto, observaremos picos de coincidência somente quando o detector D_s passar pela imagem da fenda para a qual $l' = -l$. No entanto, assim como ocorria no plano das fendas múltiplas, um estado classicamente correlacionado do tipo

$$\rho_{cc} = \frac{1}{2} \sum_{l=-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} |l\rangle_i \langle l| \otimes |-l\rangle_s \langle -l|, \quad (3.12)$$

prevê os mesmo resultados experimentais. Assim, para garantirmos que os

estado do plano de imagem é realmente dado por uma superposição coerente, movemos os detectores para uma distância de 200 mm após o plano de formação de imagem e medimos padrões de interferência condicionais. Como vimos no capítulo anterior, este tipo de padrão de interferência é evidência suficiente para afirmarmos a existência de emaranhamento.

A figura 3.3 mostra os resultados experimentais obtidos no plano de formação de imagem. Podemos ver que os resultados estão de acordo com as previsões teóricas, pois, picos de coincidência só foram observados quando o detector D_s estava na região da imagem da fenda simples simetricamente oposta àquela na qual o detector D_i estava fixo. Na figura 3.3(e) temos um histograma construído a partir das coincidências observadas nos quatro tipos de medidas realizadas. Estas probabilidades estão relacionadas com a chance de que o estado de ququarts esteja em um dos estados da base $\{|l\rangle_i |l'\rangle_s\}$. O fato das probabilidades para os estados $|l\rangle_i | -l\rangle_s$ serem quase iguais, indica que o estado $|\Psi\rangle_{Im}$ gerado com fendas quádruplas, é um estado maximamente emaranhado de ququarts.

Os padrões de interferência observados estão ilustrados na Fig. 3.4. Medidas em coincidência foram realizadas em função da posição x_i do detector D_i , enquanto o detector D_2 estava fixo. Em (a) D_s está fixo em $x_s = 0$ mm; Em (b) D_s foi fixado em $x_s = 0.6$ mm. As visibilidades destes padrões de interferência são $v_a = 0.86 \pm 0.05$ e $v_b = 0.83 \pm 0.04$, respectivamente. A condicionalidade destes padrões de interferência é facilmente notada, o que garante que os fótons gêmeos ainda estão quanticamente correlacionados.

O estado propagado dos ququarts, obtido a partir de nossas medidas, pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
 |\Psi\rangle_{Im} &= 0.49 |-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle + 0.50 |+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \\
 &+ e^{i\frac{kd^2}{zA}} (0.47 |-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\rangle + 0.49 |+\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle),
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

e tem uma fidelidade de $F = 0.98 \pm 0.06$ com o estado original de ququarts da equação (3.1). Este resultado prova, portanto, que os estados emaranhados de qudits espaciais podem ser propagados no espaço livre e ainda manter uma fidelidade alta para com sua forma original.

3.4 Conclusão

Embora a propagação estudada tenha ocorrido em uma escala pequena, nós acreditamos que ela pode ser estendida a distâncias superiores, pois como foi mostrado, o estado propagado manteve uma fidelidade muito alta no nosso caso. Além disso, é sabido que diferentes configurações de lentes podem ser utilizadas para fazer com que o plano de formação de imagem de um certo objeto esteja mais afastado do que estaria com apenas uma lente. Na referência [74], dois telescópios foram usados para propagar qubits emaranhados por mais de 500 m.

Concluindo, foi apresentado um princípio para a propagação de estados emaranhados de qudits espaciais, gerados ao se explorar a correlação transversal dos fótons convertidos no processo da CPD. Até onde sabemos, este trabalho é o primeiro a implementar a propagação de qudits emaranhados. No teste experimental realizado para validar a hipótese da propagação, obtivemos um estado propagado de ququarts emaranhados que apresentou uma fidelidade superior a 98% quando comparado com sua forma original. As vantagens com relação a utilização de estados de qudits são consideráveis na área da Informação Quântica e por este motivo acreditamos que este trabalho é um passo importante a ser considerado no esforço de se construir redes quânticas de comunicação.

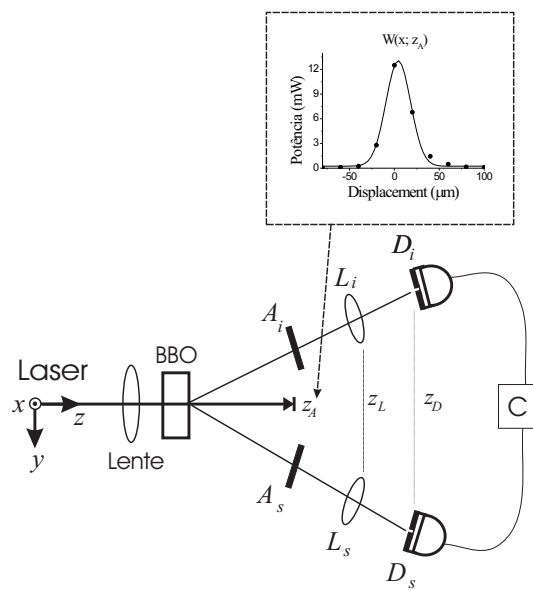


Figura 3.2: Montagem experimental. A_i e A_2 são as aberturas quádruplas, L_j lentes, D_j detectores e C um contador de coincidência.

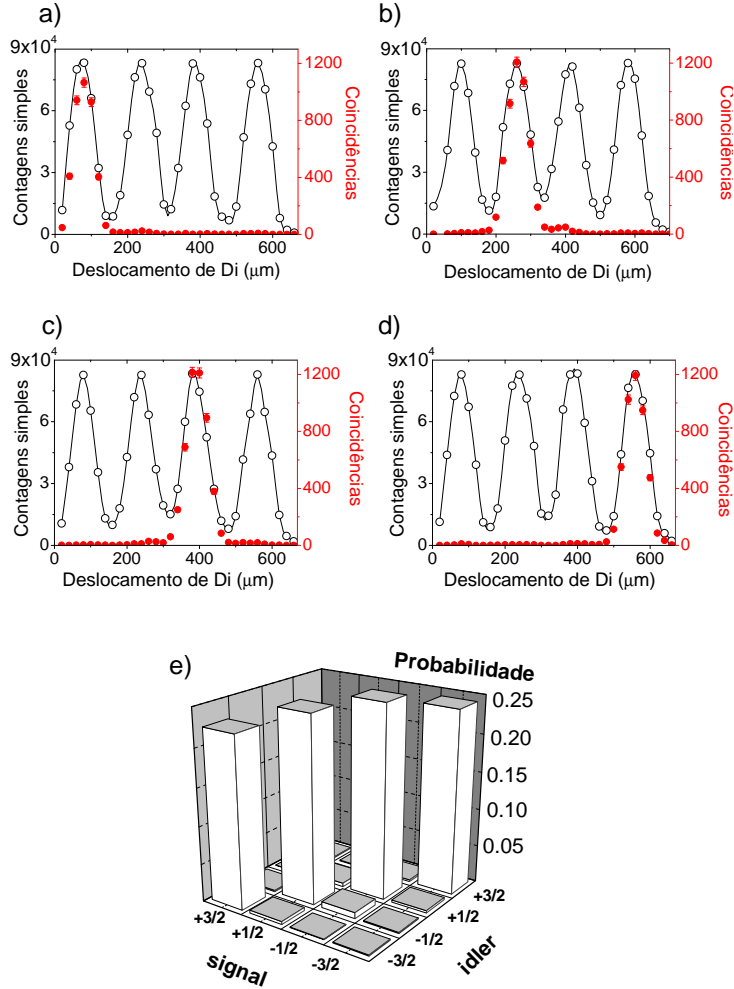


Figura 3.3: Contagem simples (\circ) no detector D_i e contagem em coincidência (\bullet) medidas em 20 s, simultaneamente, com D_s fixo na imagem da fenda l no canal 1 e D_i variando na direção- x , ao longo de toda a imagem da fenda quádrupla do canal i . Da esquerda para a direita, os picos de contagem simples são $l' = -\frac{3}{2}, \dots, +\frac{3}{2}$. Nestas medidas D_s está fixo na imagem da fenda l igual (a) $+\frac{3}{2}$, (b) $+\frac{1}{2}$, (c) $-\frac{1}{2}$ and (d) $-\frac{3}{2}$. (e) Histograma-3D das probabilidades medidas para todos os estados da base $\{|l\rangle_i |l'\rangle_s\}$.

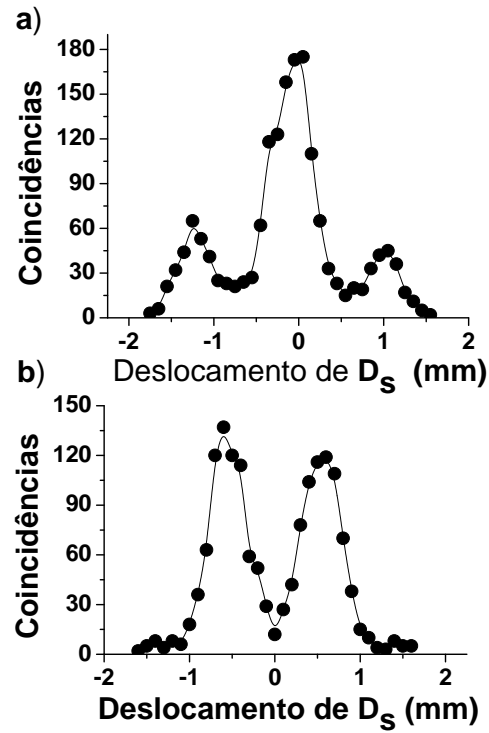


Figura 3.4: Padrões de interferência em quarta ordem medidos como função da posição transversal do detector D_s . Estes padrões foram obtidos ao detectarmos os fótons gêmeos a uma distância de 200 mm do plano de formação de imagens das fendas quádruplas. Em (a) D_i está fixo em $x_2 = 0$ mm. Em (b) D_i está fixo em $x_2 = 0.6$ mm.

Capítulo 4

CARACTERIZAÇÃO VIA TOMOGRÁFIA QUÂNTICA

Neste capítulo é mostrado como uma pequena variação do esquema discutido no Capítulo 2, para geração de estados puros e emaranhados de qudits espaciais, pode ser utilizada para se gerar estados mistos. Em seguida, investigamos a caracterização dos estados compostos de dois qubits, motivado pelo fato de que os protocolos de comunicação quântica são mais simples de serem implementados neste domínio. Demonstramos, então, que o processo da Tomografia Quântica permite a reconstrução do operador densidade de um estado misto de dois qubits espaciais. Para tornar a leitura mais suave, mostramos as equações de transformação utilizadas e o cálculo completo do operador densidade, nos Apêndices C e D, respectivamente.

4.1 Introdução

O estado quântico é visto como sendo a descrição mais completa possível para um certo sistema físico. As distribuições estatísticas dos observáveis de um dado sistema são completamente caracterizadas pelo seu estado. Portanto, o desenvolvimento de técnicas que permitem a determinação de estados quânticos é um assunto de grande importância. Além disso, o descobrimento de novos campos de pesquisa tem trazido mais motivações para o estudo destas técnicas. Na área da Informação Quântica, por exemplo, protocolos como o de Teletransporte [28], requerem o uso de estados quânticos conhecidos. Um outro caso especial é o uso de matrizes densidades para o cálculo da concorrência [40] de um sistema composto.

As técnicas de determinação de estado têm sido utilizadas para se estimar

o estado quântico de vários sistemas físicos distintos. Na área da Física Atômica, a endoscopia quântica foi empregada para se caracterizar o estado de ions e átomos [79, 80]. Na Óptica Quântica, a função de Wigner de campos multi-modais pôde ser medida através da detecção homodina [81, 82, 83] e a técnica de reconstrução da Tomografia Quântica (RTQ) foi utilizada para se obter o estado de polarização dos fótons convertidos no processo da CPD [84].

Estes métodos de reconstrução são baseados numa inversão linear dos dados obtidos experimentalmente. No caso da RTQ, os dados são obtidos com uma série de medidas realizadas em sistemas físicos preparados em um mesmo estado. O fato da inversão de dados ser linear, faz com que ela seja fortemente dependente dos erros experimentais. Estes erros experimentais são em geral uma conseqüência do ruído nas medidas ou do desalinhamento da montagem. Portanto, em geral o estado reconstruído é apenas uma aproximação do estado real do sistema. A matriz densidade que é obtida pode ter propriedades que não são completamente compatíveis com a descrição de um estado quântico. Um outra alternativa que tem sido considerada para a determinação de estados, é a técnica numérica chamada de “maximum likelihood estimation” [85, 86]. Ela é baseada em uma relação entre os resultados experimentais e o estado quântico que os poderia ter gerado. Mesmo que esta técnica gere sempre matrizes quanticamente aceitáveis, ela tem a desvantagem de aumentar a incerteza na determinação do estado real do sistema físico.

Como mostramos no Capítulo 2, é possível utilizar a correlação de momentum transversal dos fótons gêmeos para se gerar estados puros e emaranhados de qudits. Agora mostraremos como uma pequena variação da montagem experimental utilizada, permite a geração de estados mistos. O estudo de estados mistos é importante porque ele permite que consideremos situações mais reais de geração e propagação, onde um estado puro perde coerência devido a interações com o seu ambiente e se torna uma mistura estatística. Em seguida, investigamos a caracterização dos estados compostos de dois qubits espaciais. Damos ênfase a este tipo de sistema porque planejamos utilizá-los para comunicação quântica e algum método para sua caracterização poderá ser necessário. Nós, então, mostramos que a RTC pode ser implementada para a reconstrução de um estado misto de qubits espaciais. A qualidade da reconstrução feita é discutida. Mesmo que a reconstrução tenha sido feita

apenas para qubits, é possível mostrar que o método aqui utilizado pode ser generalizado para dimensões superiores.

4.2 Geração controlada de estados mistos

Como vimos, o estado geral dos fótons gêmeos quando estes são transmitidos através de fendas múltiplas, cujas aberturas consecutivas estão separadas por uma distância d e têm largura $2a$, pode ser escrito como

$$|\Psi\rangle \propto \sum_{l=-l_D}^{l_D} \sum_{m=-l_D}^{l_D} W_{lm} e^{i\frac{kd^2}{8z_A}(m-l)^2} |l\rangle_i \otimes |m\rangle_s, \quad (4.1)$$

onde $l_D = (D - 1)/2$ e D é o número de fendas nestas aberturas. A função W_{lm} está relacionada com a distribuição espacial do laser no plano das aberturas ($z = z_A$) e é dada por

$$W_{lm} = W \left[\frac{(l+m)d}{2}; z_A \right]. \quad (4.2)$$

O estado $|l\rangle$ (ou $|m\rangle$) é definido como

$$|l\rangle_j \equiv \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int dq_j e^{-iq_j l d} \text{sinc}(q_j a) |1q_j\rangle, \quad (4.3)$$

e representa o fóton no modo j transmitido pela fenda l .

Como discutimos, também, é possível gerar diferentes tipos de estados ao variarmos a distribuição espacial do laser do plano das fendas múltiplas. Enquanto um perfil bem focalizado gera um estado maximamente emaranhado, nos diferentes caminhos possíveis para transmissão do par de fótons, um perfil mais largo acaba por gerar estados que são parcialmente emaranhados.

Suponhamos agora que antes de incidir no cristal, o laser passe através de um interferômetro de Mach-Zehnder desbalanceado, cujos braços modificam de forma distinta o perfil transversal do feixe do laser. Se a diferença de caminho entre os braços do interferômetro for feita maior do que o comprimento de coerência do laser, obteremos uma superposição incoerente dos estados de dois fótons gerados (no cristal através da CPD) por cada um dos braços do interferômetro. É interessante observar que este tipo de geração de estado misto pode ser completamente controlada. Além do fato de podermos controlar quais são os estados que serão gerados, podemos também controlar as

probabilidades da superposição, através do uso de atenuadores nos braços do interferômetro.

Na próxima seção, mostramos como é possível utilizar a técnica da RTQ para determinar a matriz densidade destes estados. O estado cujo operador densidade foi reconstruído, experimentalmente, é um estado misto de qubits espaciais. A Fig. 4.1(a) ilustra o esquema do experimento utilizado para sua geração. Novamente tivemos um cristal de β -barium borate sendo iluminado por um laser operando em 413 nm, para se gerar fótons gêmeos através da CPD tipo-II. Antes que o laser incidisse no cristal, o enviamos através de um interferômetro de Mach-Zehnder desbalanceado. A diferença de caminho entre os braços do interferômetro (200 mm) foi feita maior que o comprimento de coerência do laser (80 mm). Duas fendas duplas idênticas A_i e A_s , foram alinhadas ao longo da direção de propagação dos feixes idler e signal, respectivamente. Estas aberturas estavam a uma distância de 200 mm do cristal. Suas fendas estavam separadas por uma distância $2d = 0.18$ mm e possuíam largura de $2a = 0.09$ mm. No braço 1 do interferômetro, colocamos uma lente que focalizava o feixe do laser no plano das aberturas. No braço 2, utilizamos duas lentes que alargavam o perfil transversal do feixe do laser neste mesmo plano. Os perfis transversais gerados em cada braço são dados na Fig. 4.1(b). Os fótons transmitidos pelas fendas duplas foram detectados em coincidência com o uso de dois detectores D_i e D_s .

Usando a Eq. (4.1) e a Eq. (4.2), podemos mostrar teoricamente que o estado dos dois fótons, após as fendas duplas, quando apenas o braço 1 está liberado é dado por

$$|\Psi\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_s|-\rangle_i + |-\rangle_s|+\rangle_i). \quad (4.4)$$

Para simplificar a notação, usamos o estado $|+\rangle_j$ ($|-\rangle_j$) para representar o fóton no modo j sendo transmitido pela abertura superior (inferior) de sua respectiva fenda dupla. O estado da equação (4.4) é um estado maximamente emaranhado de dois qubits espaciais. No entanto, se o laser cruzar apenas o braço 2, o estado dos fótons gêmeos transmitidos pelas fendas duplas será um estado parcialmente emaranhado do tipo

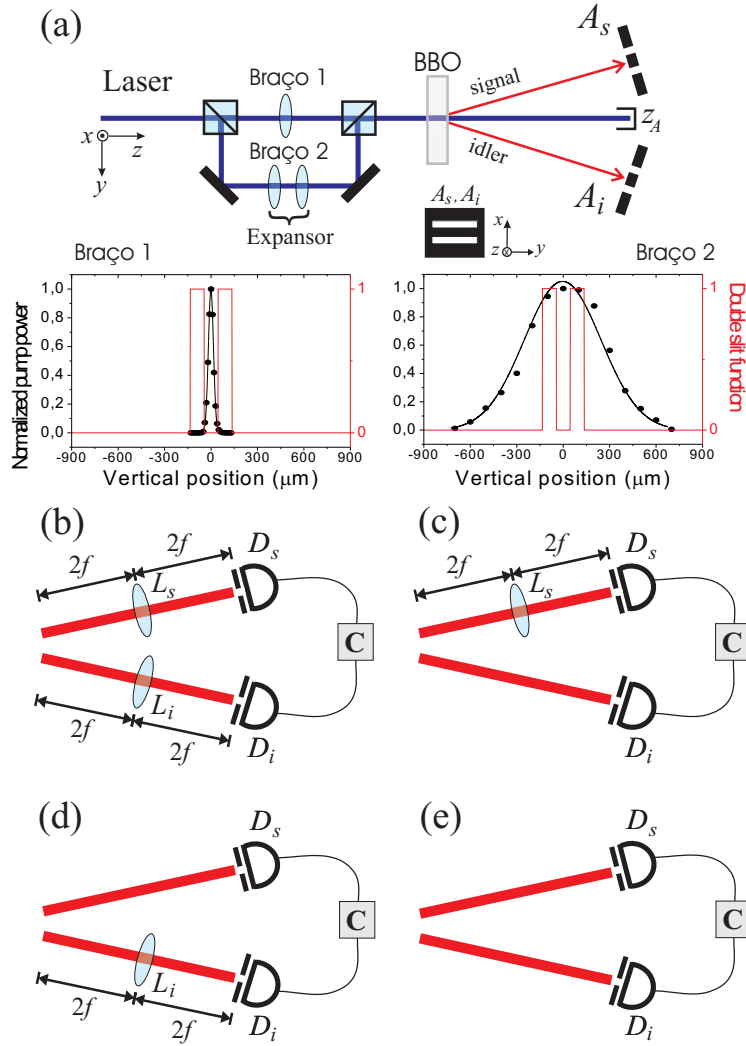


Figura 4.1: Esquema da montagem experimental utilizada para a geração de estados mistos de qubits espaciais. A_i e A_s são fendas duplas idênticas. D_i e D_s são detectores e C é um contador de coincidências. A configuração usada para determinar os elementos da diagonal de ρ é representada em (b). (c) e (d) foram usadas no segundo tipo de medida e (e) no terceiro tipo.

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle_2 &= \frac{1}{2} e^{i\phi} (|-\rangle_s |+\rangle_i + |+\rangle_s |-\rangle_i) \\
&\quad + \frac{1}{2} (|-\rangle_s |-\rangle_i + |+\rangle_s |+\rangle_i),
\end{aligned} \tag{4.5}$$

que possui um grau de emaranhamento pequeno.

Portanto, o estado teórico de dois fótons gerados em nosso experimento, quando os dois braços do interferômetro estão liberados, é uma mistura estatística do estado espacial maximamente emaranhado da Eq. (4.4) e do estado da Eq. (4.5). Ele pode, então, ser representado por

$$\rho_{the} = A|\Psi\rangle_{11}\langle\Psi| + B|\Psi\rangle_{22}\langle\Psi|, \tag{4.6}$$

onde A e B são as probabilidades de se gerar os estados de dois fótons do braço 1 e braço 2, respectivamente.

4.3 Reconstrução

A seguir mostraremos que RTQ pode ser experimentalmente implementada para a reconstrução da matriz densidade dos estados de qubits espaciais, como o gerado em nosso experimento, sem que tenhamos qualquer tipo de informação com respeito ao processo de geração, isto é, não sabemos se houve ou não o uso de um interferômetro e se houve, não sabemos também suas propriedades (quantidade de braços, modificações feitas, etc..).

O processo de reconstrução da tomografia quântica, que é melhor descrito nas Refs [34, 35], é bastante simples de ser compreendido. A primeira coisa que devemos destacar, é que sempre é possível medir diretamente os elementos da diagonal de qualquer operador densidade. Portanto, a RTQ é apenas um protocolo para determinar os elementos que não são diagonais. Esta técnica consiste no uso de operações locais nos subsistemas de um sistema composto, para que possamos detectá-los em diferentes bases. Como a forma do operador densidade total depende das bases em que os subsistemas são detectados, podemos dizer que estas operações locais têm como efeito a geração de novos operadores globais. Como sabemos quais são as operações efetuadas nos subsistemas, podemos relacionar os elementos diagonais (que são mensuráveis) dos novos operadores, $\tilde{\rho}$, com o elementos não diagonais (que não são mensuráveis) do operador densidade original, ρ .

Para caracterizarmos os estado que estava sendo gerado em nosso experimento, nós inicialmente assumimos a seguinte forma geral para sua matriz densidade

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{++++} & \rho_{+--+} & \rho_{-+++} & \rho_{----+} \\ \rho_{++++} & \rho_{+--+} & \rho_{-+++} & \rho_{----+} \\ \rho_{+--+} & \rho_{+--+} & \rho_{-+++} & \rho_{----+} \\ \rho_{+--+} & \rho_{+--+} & \rho_{-+++} & \rho_{----+} \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

onde $\rho_{j_s j_i k_s k_i} = \langle j_s j_i | \rho | k_s k_i \rangle$ e $j, k = \pm$.

Elementos Diagonais

Os elementos diagonais podem ser determinados com medidas em coincidência realizadas com os detectores logo após as fendas duplas [26], ou no plano de formação de imagem destas aberturas [33]. Este tipo de medida é idêntico ao que descrevemos nos Capítulos 2 e 3. Um detector é fixado atrás de uma das fendas da abertura, enquanto o outro detector varre ao longo da direção- x , a região correspondente a sua abertura. A Figura 4.2 ilustra os resultados experimentais obtidos. Em (a) o detector D_i está fixo na abertura “+”. Em (b) ele foi fixado na fenda “-”. Após uma normalização dos dados (Ver Apêndice D), obtemos a seguinte diagonal para a Eq. (4.7): $\rho_{++++} = 0.042$, $\rho_{+--+} = 0.468$, $\rho_{-+++} = 0.462$ and $\rho_{----+} = 0.028$.

Mudanças de base

Como mencionamos acima, no processo de reconstrução é necessário que operações locais sejam aplicadas nos subsistemas, para que assim mudemos a base na qual o operador densidade global é escrito. O que é interessante no uso de qubits espaciais, é que esta mudança de base ocorre naturalmente enquanto eles evoluem livremente no espaço após as fendas duplas. Precisamos, portanto, apenas de variar a posição do detector para que tenhamos os qubits espaciais sendo detectados em bases distintas. Para que isso fique mais claro, consideremos primeiramente a expressão para o estado dos fótons gêmeos, em um plano transversal que está a uma distância $z - z_A$ do plano das aberturas

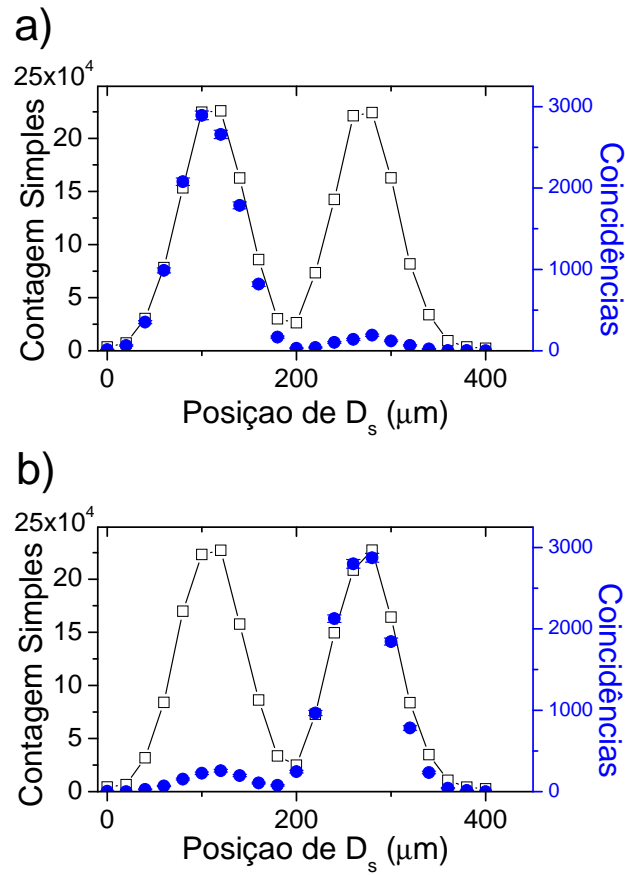


Figura 4.2: (\square) Contagem simples em D_s e (\bullet) contagens em coincidência medidas, simultaneamente, enquanto o detector D_i estava fixo (a) atrás da fenda “+” e (b) atrás da fenda “-”.

$$\begin{aligned}
 |\Psi\rangle_z \propto & W(d; z_A) |g_+\rangle_s |g_+\rangle_i \\
 & + W(-d; z_A) |g_-\rangle_s |g_-\rangle_i \\
 & + W(0; z_A) (|g_+\rangle_s |g_-\rangle_i + |g_-\rangle_s |g_+\rangle_i),
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

onde os estados normalizados $|g_+\rangle_j$ ($|g_-\rangle_j$) são dados por

$$\begin{aligned}
 |g_\pm\rangle_j \equiv & \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int dq_j e^{i[\frac{-q_j^2(z-z_A)}{2k_j}]} \\
 & \times e^{\mp i q_j d} \text{sinc}(q_j a) |1q_j\rangle,
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

com $j = s, i$ e representam o fóton no modo j , no plano- z , que foi transmitido pela fenda “+” (ou “-”) da fenda dupla. O estado da Eq. (4.9) foi obtido de maneira similar ao cálculo feito para o estado $|\Psi\rangle_{Im}$ do Capítulo 3. Calculamos a amplitude de probabilidade de detecção em coincidência no plano- z de duas maneiras distintas. Na primeira, consideramos o estado dos dois fótons no plano das fendas duplas e o operador campo elétrico evoluindo deste plano até o plano- z . No segundo cálculo da amplitude, consideramos uma forma geral para $|\Psi\rangle_z$. Igualando estas expressões, obtivemos a Eq. (4.9).

Como o fóton que está no plano- z foi certamente transmitido por uma das aberturas da fenda dupla e como os estados $|g_\pm\rangle$ formam uma base ortonormal, podemos usá-los para definir o espaço de Hilbert deste fóton. Por exemplo, se focarmos o perfil transversal do feixe do laser no plano- z_A , de forma que $W(-d; z_A) = W(d; z_A) = 0$, o estado $|\Psi\rangle_z$ (após normalização) será dado por

$$|\Psi\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g_+\rangle_s |g_-\rangle_i + |g_-\rangle_s |g_+\rangle_i), \tag{4.10}$$

que representa um estado maximamente emaranhado dos modos $|g_\pm\rangle |g_\pm\rangle$. Neste caso, o estado de cada fóton do par deve ser escrito como uma mistura estatística máxima dos estados $|g_\pm\rangle$.

Suponha, no entanto, que os detectores possuem aberturas transversais muito pequenas e que estas estão sobre o plano- z . Estas aberturas irão,

então, selecionar um fóton em um certo estado transversal para detecção. Isto acontece da mesma forma que ocorre com os polarizadores para um estado de dois fótons emaranhados em polarização [14]. O estado do fóton selecionado para detecção pode ser escrito como

$$|h\rangle_j = f_+(x, z)|g_+\rangle_j + f_-(x, z)|g_-\rangle_j, \quad (4.11)$$

onde

$$|_j\langle g_\pm|h\rangle_j|^2 = |f_\pm(x, z)|^2, \quad (4.12)$$

são as probabilidades de que o fóton selecionado no ponto (x, z) , tenha cruzado a fenda “+” ou “-”, respectivamente.

A amplitude de probabilidade f é obtida usando-se o operador campo elétrico

$$\mathbb{E} = \int dq \hat{a}(q) e^{i\left(qx - q^2 \frac{(z-z_A)}{2k}\right)}, \quad (4.13)$$

para calcular $\langle vac|\mathbb{E}(x, z)|\pm\rangle$. Após a normalização do estado da Eq. (4.11), temos que

$$f_\pm(x, z) = \frac{\exp\left(i\frac{k(x\mp d)^2}{2(z-z_A)}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{ka(x\mp d)}{(z-z_A)}\right)}{\sqrt{\operatorname{sinc}^2\left(\frac{ka(x\mp d)}{(z-z_A)}\right) + \operatorname{sinc}^2\left(\frac{ka(x\pm d)}{(z-z_A)}\right)}}. \quad (4.14)$$

E, portanto, ao variarmos a posição transversal x de um detector, podemos fazer medidas nos subsistemas em bases ortonormais diferentes e obter, experimentalmente, a diagonal de distintos operadores globais.

Elementos não diagonais

Para simplificarmos um pouco mais a notação, reescrevemos o estado $|h\rangle$ como

$$|h\rangle = \cos\theta|g_+\rangle + e^{i\eta}\sin\theta|g_-\rangle, \quad (4.15)$$

onde

$$\eta = \frac{2kd x}{(z - z_A)}, \quad (4.16)$$

$\cos \theta \equiv |f_+(x, z)|$ e $\sin \theta \equiv |f_-(x, z)|$.

Perceba que ao selecionarmos um determinado valor para η , definimos também o valor do ângulo θ . Considerando os valores experimentais dos parâmetros: $z - z_A$, k , d , e a , podemos mostrar que para o estado

$$|h'\rangle = \cos \theta' |g+\rangle + e^{i(\eta+\pi)} \sin \theta' |g-\rangle \quad (4.17)$$

teremos que $|\langle h'|h\rangle| \leq 10^{-3}$, quando $-\pi \leq \eta \leq \pi$. Podemos, então, considerar na prática a base $\{|h\rangle, |h'\rangle\}$ como uma base ortonormal, já que este valor é muito menor que o erro experimental para a determinação das probabilidades das diferentes bases a serem consideradas.

O segundo tipo de medida em coincidência foi realizado colocando-se o detector idler atrás da abertura “+” (“-”) de sua fenda dupla e variando transversalmente, no plano- z , o detector signal (Ver Fig. 4.1(c)) de forma que os fótons signal detectados eram selecionados na posição x para a qual $\eta = \frac{-\pi}{2}$ ($|h_{-\pi/2}\rangle$ selecionado em $x_{-\pi/2} = -0,688$ mm e $|h'_{\pi/2}\rangle$, em $x_{\pi/2} = 0,688$ mm). O padrão de interferência medido em coincidência quando D_i estava na fenda “+” é mostrado na Fig. 4.3. Para continuar com a reconstrução, detectamos também os fótons signal nas posições x para as quais $\eta = 0$ ($|h_0\rangle$ selecionado em $x_0 = 0$ mm e $|h'_\pi\rangle$ em $x_\pi = 1,376$ mm). Após todas estas medidas pudemos, então, determinar a diagonal dos operadores densidade escritos em termos das bases: $\{|+, h_k\rangle, |+, h'_k\rangle, |-, h_k\rangle, |-, h'_k\rangle\}$, onde $k = \frac{-\pi}{2}$ e 0 . Considerando, em seguida, o mesmo tipo de procedimento de medida, mas agora com o detector idler no plano- z e o detector idler após as fendas duplas, obtivemos os elementos diagonais dos operadores densidade escritos em termos das bases: $\{|h_k, +\rangle, |h_k, -\rangle, |h'_k, +\rangle, |h'_k, -\rangle\}$.

Relacionando a diagonal destes novos operadores com os elementos não diagonais de ρ , através das equações de transformação dadas no Apêndice C, determinamos: ρ_{++++} (ρ_{----}), ρ_{+---} (ρ_{-++-}), ρ_{+++-} (ρ_{-++-}) e ρ_{-+--} (ρ_{----}) (O cálculo explícito destes elementos está feito no Apêndice D). Mostramos, a seguir, a transformação usada para o cálculo de ρ_{++++}

$$\begin{aligned} \text{Re}(\rho_{++++}) &= \frac{(\tilde{\rho}_{\theta_1+\theta_1+} - \rho_{++++} \cos^2 \theta_1 - \rho_{-+--} \sin^2 \theta_1) \cos \eta}{\sin 2\theta_1} \\ &\quad - \frac{(\tilde{\rho}_{\theta_2+\theta_2+} - \rho_{++++} \cos^2 \theta_2 - \rho_{-+--} \sin^2 \theta_2) \sin \eta}{\sin 2\theta_2}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

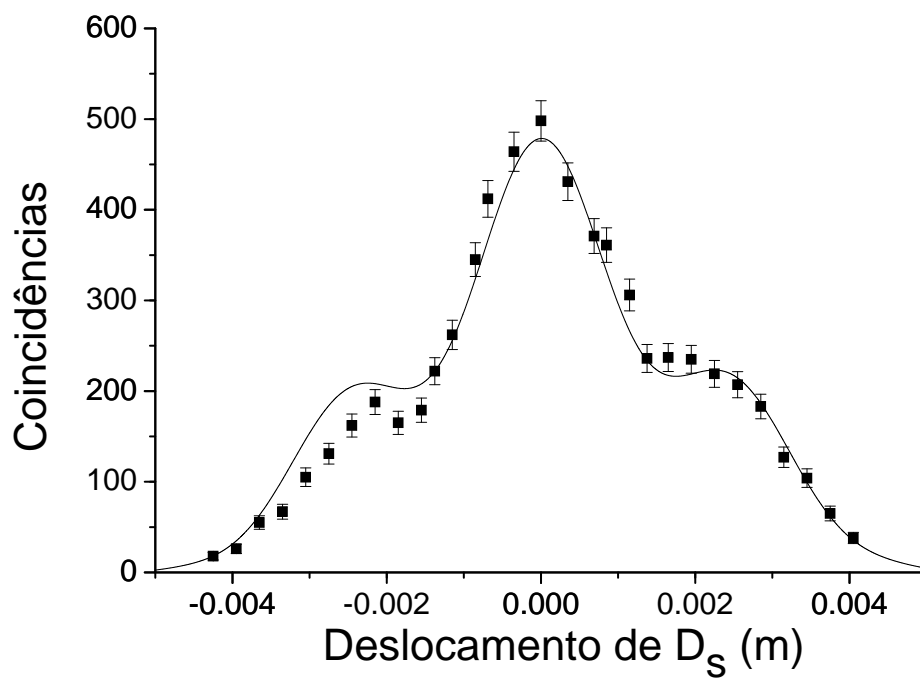


Figura 4.3: Padrão de interferência de quarta ordem medido como função da posição do detector D_s . Nestas medidas o detector idler estava fixado após a fenda “+”. A curva sólida foi obtida teoricamente .

$$\begin{aligned}
\text{Im}(\rho_{++++}) = & -\frac{(\tilde{\rho}_{\theta_1+\theta_1+} - \rho_{++++} \cos^2 \theta_1 - \rho_{-+-+} \sin^2 \theta_1) \sin \eta}{\sin 2\theta_1} \\
& -\frac{(\tilde{\rho}_{\theta_2+\theta_2+} - \rho_{++++} \cos^2 \theta_2 - \rho_{-+-+} \sin^2 \theta_2) \cos \eta}{\sin 2\theta_2},
\end{aligned} \tag{4.19}$$

onde $\tilde{\rho}_{\theta_1+\theta_1+}$ é um elemento diagonal do operador escrito com a base $\{|+, h_1\rangle, |+, h'_1\rangle, |-, h_1\rangle, |-, h'_1\rangle\}$.

No terceiro tipo de medida que está ilustrado pela Fig. 4.1(e), os detectores signal e idler foram posicionados no plano- z e usados para medir padrões de interferência de quarta ordem. Um dos detectores estava fixo enquanto o outro detector variava transversalmente detectando fótons em coincidência. Cinco padrões de interferência, como o mostrado na Fig. 4.4, foram medidos com os detectores fixados nas posições transversais relacionadas com $\eta = -\pi, -\pi/2, 0, \pi/2, \text{ e } \pi$. E, então, a partir da determinação da diagonal dos novos operadores formados com a evolução dos dois fótons e de relações de transformação como as consideradas acima (Ver Apêndice C), pudemos determinar os demais elementos de ρ e obter sua forma final.

O operador densidade reconstruído

Realizando a reconstrução tomográfica, da maneira descrita acima, obtemos a seguinte forma para o operador densidade dos fótons gêmeos gerados em nosso experimento (Ver Apêndice D)

$$\rho = \begin{bmatrix} 0.042 & 0.083 + 0.004i & 0.081 + 0.005i & -0.129 + 0.062i \\ 0.083 - 0.004i & 0.468 & 0.444 - 0.058i & 0.097 - 0.008i \\ 0.081 - 0.005i & 0.444 + 0.058i & 0.462 & 0.096 - 0.006i \\ -0.129 - 0.062i & 0.097 + 0.008i & 0.096 + 0.006i & 0.028 \end{bmatrix}. \tag{4.20}$$

Os elementos de um operador deste tipo devem sempre satisfazer à desigualdade de Schwarz, i. e., $|\rho_{\alpha\beta}| \leq \sqrt{\rho_{\alpha\alpha}\rho_{\beta\beta}}$, onde $\alpha, \beta = ++, +-, -+, --$, se ele realmente descreve um estado quântico. Este, no entanto, não é o nosso caso para o elemento de matriz ρ_{++--} , já que

$$|\rho_{++--}| > \sqrt{\rho_{++++}\rho_{----}}.$$

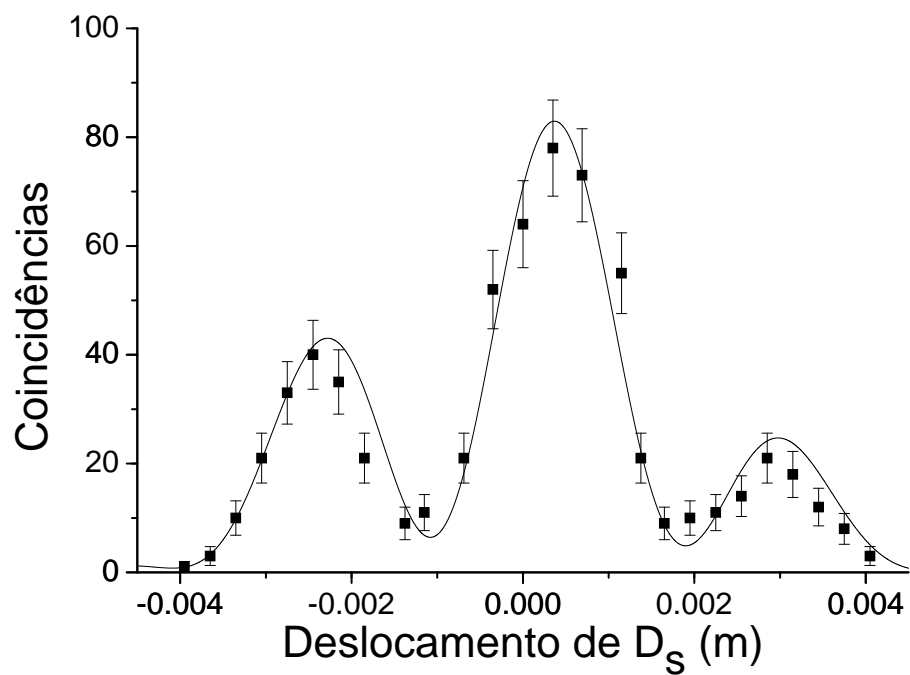


Figura 4.4: Padrão de interferência de quarta ordem medido como função da posição do detector D_s . Este padrão foi obtido quando o detector idler estava fixo na posição transversal $x = 0,688$ mm. A curva sólida foi obtida teoricamente.

Isto se deu por causa das flutuações presentes nas medidas em coincidência, que acabam por afetar o resultado deste elemento de maneira mais intensa do que nos demais. Como pode ser visto no final do Apêndice C, as equações de transformação para ρ_{++--} envolvem outros elementos do operador ρ e pode ter havido, então, uma propagação de erros em seu cálculo. Mesmo que o nosso operador densidade apresente propriedades não completamente compatíveis com a descrição de um estado quântico, é possível mostrar que o resultado obtido é coerente com a teoria desenvolvida na Seção II deste capítulo. Faremos isso na próxima seção, aonde também damos evidências experimentais da boa qualidade da reconstrução feita.

É possível argumentar que porque detectamos os fótons que sofreram operações locais em um plano distinto do plano das aberturas, estamos reconstruindo um operador densidade, digamos ρ' , que descreve na verdade o estado dos fótons gêmeos no plano de detecção (plano- z) e não no plano- z_A . Estaríamos, então, determinando os elementos não diagonais do operador ρ' que é escrito em termos da base formada pelos estados $|g_{\pm}\rangle$. Mostraremos, no entanto, que os operadores ρ' e ρ possuem os mesmos coeficientes, pois existe um operador unitário U que representa a evolução dos estados $|l\rangle$ para $|g_l\rangle$

Se

$$U = \int dq e^{-i[q^2(z-z_A)/2k]} |1q\rangle\langle 1q|, \quad (4.21)$$

teremos que

$$|g_l\rangle = U|l\rangle, \quad (4.22)$$

onde $l = +, -$.

A conexão entre ρ' e ρ é então

$$\rho' = U_1 \rho U_1^\dagger \quad (4.23)$$

e se

$$\rho = \sum_{l,m,l',m'} \rho_{l,m,l',m'} |l,m\rangle\langle l',m'| \quad (4.24)$$

iremos ter que

$$\begin{aligned}\rho' &= U_1 \rho U_1^\dagger = \sum_{l,m,l',m'} \rho_{l,m,l',m'} U_1 |l, m\rangle \langle l', m'| U_1^\dagger \\ &= \sum_{l,m,l',m'} \rho_{l,m,l',m'} |gl, gm\rangle \langle gl', gm'|,\end{aligned}\quad (4.25)$$

de onde podemos ver que ao fazermos a reconstrução de ρ' , estamos também fazendo a de ρ , uma vez que os seus elementos de matriz são idênticos.

4.4 Discussão e Conclusão

O operador densidade da Eq. (4.20) pode ser escrito aproximadamente como (Ver Apêndice D)

$$\rho = 0.87|\Phi\rangle_{11}\langle\Phi| + 0.13|\Phi\rangle_{22}\langle\Phi|,\quad (4.26)$$

onde os estados $|\Phi\rangle$ são dados por

$$\begin{aligned}|\Phi\rangle_1 &= 0.077e^{i\phi_1}|++\rangle + 0.704e^{i\phi_2}|+-\rangle \\ &\quad + 0.699e^{i\phi_2}|-+\rangle + 0.099e^{i\phi_3}|--\rangle,\end{aligned}\quad (4.27)$$

e

$$\begin{aligned}|\Phi\rangle_2 &= 0.514|++\rangle + 0.502e^{i\theta}|+-\rangle \\ &\quad + 0.501e^{i\theta}|-+\rangle + 0.483|--\rangle,\end{aligned}\quad (4.28)$$

com $\phi_1 \simeq \phi_2 \simeq \phi_3 \approx 4.2$ e $\theta = 0.07$.

No entanto, o fato de sermos capazes de decompor o operador densidade, ρ , em termos dos projetores de um estado, $|\Phi\rangle_1$, que tem um grau de emaranhamento muito alto e um estado, $|\Phi\rangle_2$, da forma prevista pela Eq. (4.5), não é suficiente para os associarmos com os estados gerados por cada um dos braços do interferômetro. Devemos ainda dar uma evidência experimental de que a decomposição da Eq. (4.26) é uma aproximação razoável para o estado dos fótons gêmeos de nosso experimento, i. e., devemos mostrar que

os valores de $A = 0.87$ e $B = 0.13$, obtidos matematicamente, são valores razoáveis para as probabilidades de se gerar os estados do braço 1 e do braço 2, respectivamente.

Medimos, então, os valores de A e B . Para isto bloqueamos um dos braços do interferômetro e detectamos, em coincidência, todos os fótons que foram transmitidos pelas fendas A_i e A_s . Para detectarmos todos estes fótons, posicionamos os detectores, que estavam completamente abertos, em regiões muito próximas destas aberturas. A (B) é então, a taxa entre o número de coincidência observado quando o braço 2 (braço 1) está bloqueado e o número total de coincidência que é medido quando os dois braços do interferômetro estão liberados. Nestas medidas obtivemos que $A = 0.85 \pm 0.03$ e $B = 0.15 \pm 0.03$, indicando, portanto, que a expressão da Eq. (4.26) é válida para a decomposição do operador densidade reconstruído.

Uma outra evidência experimental do alto valor de A pode ser vista nos padrões de interferência observados no terceiro tipo das medidas realizadas. Como o estado $|\Phi\rangle_1$ é praticamente um estado maximamente emaranhado, devemos esperar, de acordo com o que foi descrito no Capítulo 2, que estes padrões de interferência apresentem franjas condicionais. No caso de valores elevados de B , observaríamos uma condicionalidade destas franjas que seria muito pequena. A condicionalidade observada nestes padrões é mostrada na Fig. 4.5. A explicação para termos tido a probabilidade de geração do estado do braço 1 muito superior à do braço 2 é bastante simples. O feixe do laser que cruzou o braço 1 do interferômetro, foi focalizado no plano das fendas duplas e, então, a correlação dos pares gerados propiciava sua transmissão através das fendas duplas. O mesmo não ocorria quando o laser passava pelo braço 2. No entanto como dissemos, estes valores de A e B podem ser manipulados com o uso de atenuadores colocados ao longo do interferômetro.

Estas observações experimentais podem ser vistas como uma demonstração da boa qualidade da reconstrução tomográfica feita e podemos dizer, então, que os estados $|\Phi\rangle_1$ e $|\Phi\rangle_2$ são boas aproximações para os estados de dois fótons gerados por cada um dos braços do interferômetro. A Fig. 4.6 mostra um histograma das partes reais dos elementos de (a) do operador densidade medido (Eq. (4.20)), (b) do operador densidade dado pela Eq. (4.26) e (c) do operador densidade previsto na Seção II. Considerando os erros dos coeficientes de ρ , que são da ordem de 3.5% para os elementos diagonais e de 30% para as partes reais dos elementos não diagonais, podemos ver um bom

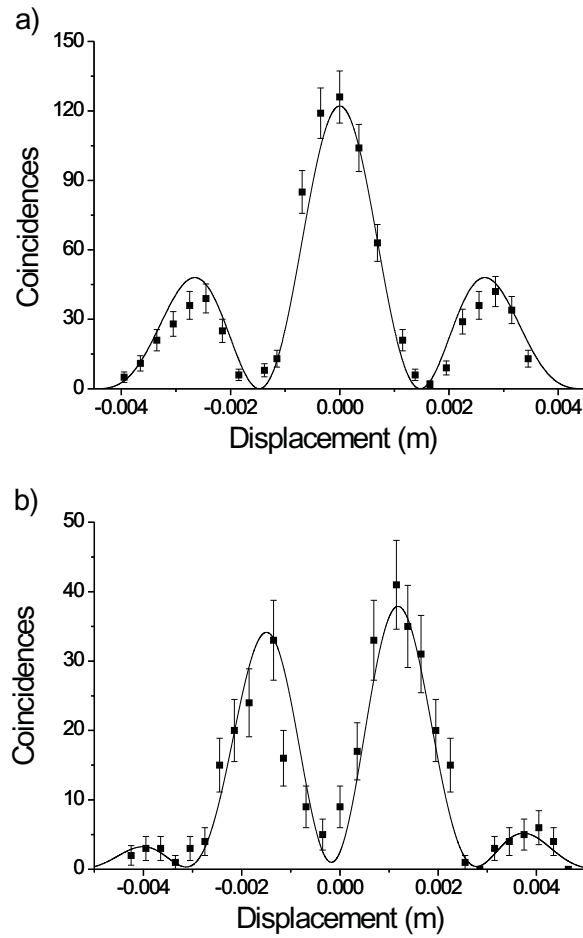


Figura 4.5: Padrões de interferência de quarta ordem medidos como função da posição do detector D_s . Em (a) o detector idler estava fixo em $x = 0$ mm. Em (b) ele foi fixado em $x = 1,376$ mm.. A curva sólida foi obtida teoricamente.

fit entre os resultados experimentais obtidos e a teoria desenvolvida.

Concluindo, demonstramos ser possível gerar estados mistos de qubits espaciais explorando a correlação transversal dos fótons gerados no processo da conversão paramétrica descendente. Uma mistura estatística de qubits espaciais foi utilizada para demonstrarmos, também, que a técnica da Tomografia Quântica pode ser utilizada para a reconstrução completa deste tipo de sistema composto. Mesmo que tenhamos considerado apenas a determinação de estados de dois qubits, nós acreditamos que o método aqui desenvolvido pode ser generalizado para mais dimensões. A importância deste trabalho vem do fato de que o uso de estados mistos na área da Comunicação Quântica pode permitir a consideração de canais de transmissão de informação mais realistas. A capacidade de caracterizar completamente os estados de dois qubits espaciais, é fundamental para o seu uso prático.

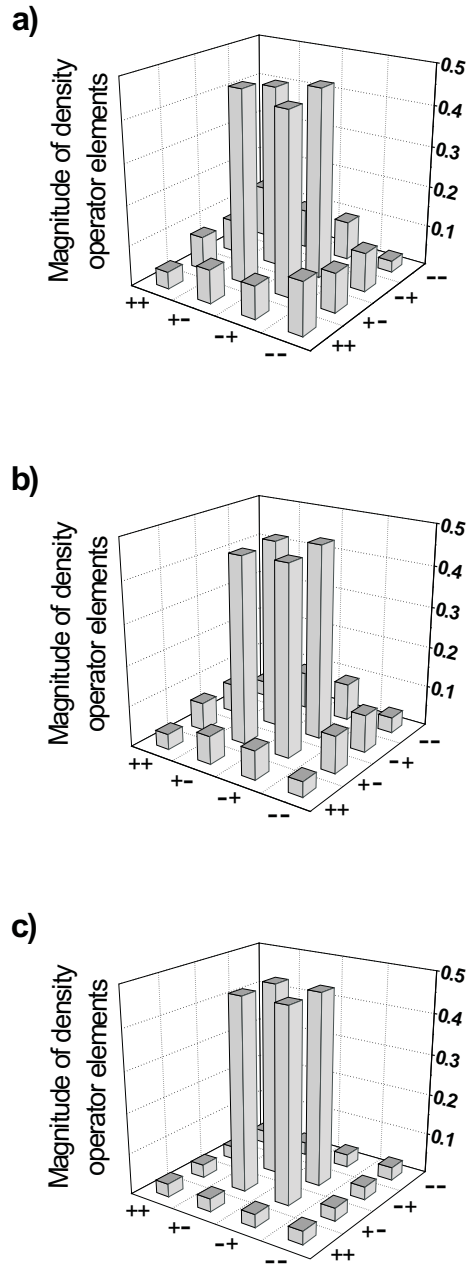


Figura 4.6: Histograma das parte reais dos elementos de (a) do operador densidade medido (Eq. (4.20)), (b) do operador densidade dado pela Eq. (4.26) e (c) do operador densidade previsto na Seção II.

Capítulo 5

TESTES DE BELL COM QUBITS ESPACIAIS

Neste capítulo mostramos que os estados de qubits espaciais podem ser utilizados para se realizar testes de Bell. Iniciamos com uma introdução onde revisamos a desigualdade de Bell e a de Clauser, Horner, Shimony e Holt (a desigualdade CHSH). Em seguida, apresentamos a nossa proposta teórica.

5.1 Introdução

Quando Bell postulou seu teorema foi observado a existência de condições físicas que teorias como a de variáveis ocultas devem satisfazer. O teorema foi derivado a partir de considerações determinísticas e locais para as probabilidades de detecção simples e em coincidência, em um experimento de detecção de duas partículas correlacionadas. Ele tem a forma de uma desigualdade que é obedecida por qualquer teoria determinista-local, mas nem sempre pelas previsões da mecânica quântica [4, 5]

$$P(A, B) + P(C, B) + P(A, D) - P(C, D) \leq P(A) + P(B), \quad (5.1)$$

onde $P(A, B)$ representa a probabilidade de detecção em coincidência com os detectores das partículas 1 e 2 com os “parâmetros controláveis” descritos por A e B, respectivamente. A e B poderiam ser, por exemplo, direções de aparelhos-SG para partículas de spin- $\frac{1}{2}$. $P(A)$ representa a probabilidade de detecção da partícula quando seu respectivo detector tem o “parâmetro controlável” A.

Em 1969 Clauser, Horne, Shimony e Holt [87], fizeram uma proposta para a violação da desigualdade de Bell usando-se pares de fótons correlacionados

em polarização. Os autores derivaram um novo tipo de desigualdade na qual apenas as probabilidades de detecção em coincidência eram relevantes para o experimento

$$S \equiv E(A, B) + E(C, B) + E(A, D) - E(C, D) \leq 2, \quad (5.2)$$

onde A e C são direções para o polarizador no caminho do primeiro fóton e B e D, as direções para o polarizador no caminho do segundo. A correlação entre as probabilidades de detecção em coincidência para certas orientações dos polarizadores no experimento, $E(X, Y)$, é definida por

$$E(X, Y) \equiv p(X, Y) + p(X^\perp, Y^\perp) - p(X, Y^\perp) - p(X^\perp, Y), \quad (5.3)$$

sendo que $p(X, Y^\perp)$ representa a probabilidade de detecção em coincidência quando o polarizador no caminho do fóton 1 está na direção X e o polarizador no caminho do fóton 2 está em uma direção normal à direção Y. Considerando que a soma das probabilidades envolvidas na Eq. (5.3) é unitária, isto é

$$p(X, Y) + p(X^\perp, Y^\perp) + p(X, Y^\perp) + p(X^\perp, Y) = 1, \quad (5.4)$$

pode-se demonstrar a completa equivalência entre as inequações (5.2) e (5.1).

No entanto, logo foi percebido que nenhum tipo de experimento seria capaz de evidenciar qualquer tipo de violação destas desigualdades a partir de seus resultados reais. Isto decorre da baixa eficiência quântica dos atuais detectores, implicando que as contagens simples observadas são sempre muito superiores às contagens em coincidências, impedindo de forma evidente a violação da Eq. (5.1). Este fato também impede que consideremos a desigualdade CHSH como sendo uma desigualdade “genuína de Bell”, uma vez que a expressão (5.4) não será verdadeira.

A solução encontrada para este problema é chamada de “fair sample assumption” e se baseia na normalização das probabilidades de detecção em coincidência observadas no experimento, definindo as correlações por

$$E^*(X, Y) \equiv \frac{p(X, Y) + p(X^\perp, Y^\perp) - p(X, Y^\perp) - p(X^\perp, Y)}{p(X, Y) + p(X^\perp, Y^\perp) + p(X, Y^\perp) + p(X^\perp, Y)}, \quad (5.5)$$

e usando a seguinte forma para a desigualdade CHSH

$$S^* \equiv E^*(A, B) + E^*(C, B) + E^*(A, D) - E^*(C, D) \leq 2. \quad (5.6)$$

Esta é a desigualdade que realmente é violada nos experimentos [6, 7, 8, 9, 10, 15, 16, 36]. Apesar de não poder ser considerada uma desigualdade autêntica e portanto não conclusiva [88], seus resultados indicam um comportamento não-local da natureza. Como Bell mesmo disse: “... It is hard for me to believe that quantum mechanics works so nicely for inefficient practical setups and is yet going to fail badly when sufficient refinements are made...”.

5.2 Proposta teórica

A figura 5.1 ilustra a montagem experimental que utilizaremos para realizar um teste de Bell com os estados emaranhados de qubits espaciais.

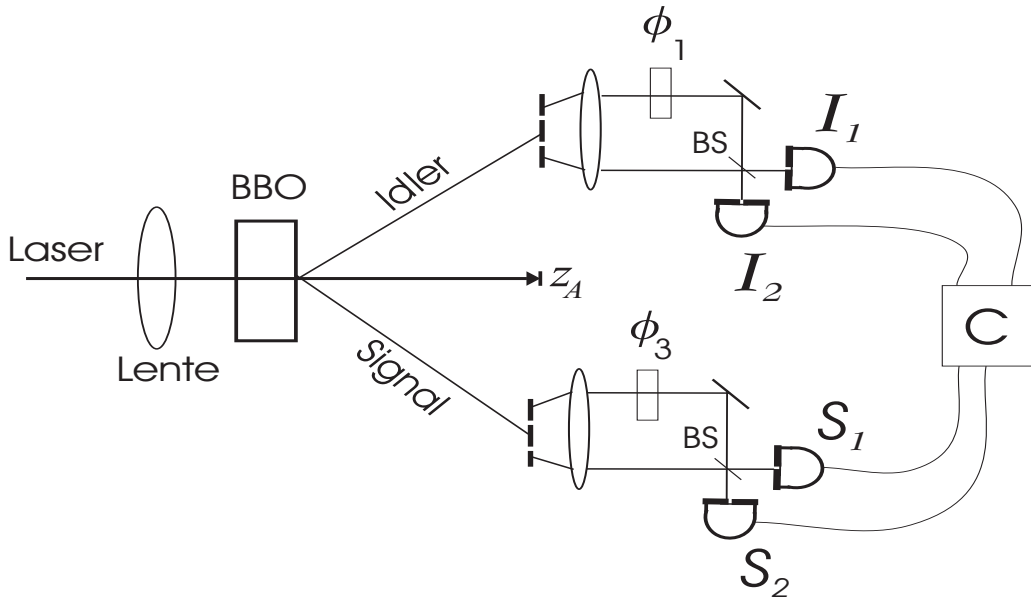


Figura 5.1: Montagem experimental para o teste de Bell com qubits espaciais.

O estado de Bell que consideraremos

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_s |-\rangle_i + |-\rangle_s |+\rangle_i), \quad (5.7)$$

é gerado de acordo com o que foi dito nos capítulos anteriores e em seguida os fótons gêmeos são enviados a dois interferômetros idênticos e detectados

em coincidência entre os detectores I e S . ϕ_1 e ϕ_3 são fases introduzidas com placas de vidro. Queremos agora calcular as amplitudes de probabilidades de detecção em coincidência. Como após as fendas duplas não lidamos com interferência espacial, realizaremos os cálculos destas amplitudes de uma forma distinta da que utilizamos até agora. Para obter maiores detalhes o leitor deve consultar a Ref. [89].

A amplitude de probabilidade

$$A_\alpha(I_1, S_1|\phi_1, \phi_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{ie^{i\phi_1}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{ie^{i\phi_3}}{\sqrt{2}} \right) \right], \quad (5.8)$$

é referente à detecção de um fóton do par no detector I_1 e do outro fóton no detector S_1 . Seu valor depende dos valores das fases dadas nos interferômetros. O primeiro e o terceiro parênteses estão relacionados com os possíveis caminhos do fóton idler para chegar à I_1 . O segundo e o quarto parênteses com o caminho do fóton signal até o detector S_1 .

As demais amplitudes de probabilidades de detecção em coincidência são dadas por

$$A_\beta(I_1, S_2|\phi_1, \phi_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{ie^{i\phi_1}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{i}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{e^{i\phi_3}}{\sqrt{2}} \right) \right], \quad (5.9)$$

$$A_\gamma(I_2, S_1|\phi_1, \phi_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{e^{i\phi_1}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{i}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{ie^{i\phi_3}}{\sqrt{2}} \right) \right], \quad (5.10)$$

$$A_\chi(I_2, S_2|\phi_1, \phi_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{e^{i\phi_1}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{i}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{i}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{e^{i\phi_3}}{\sqrt{2}} \right) \right]. \quad (5.11)$$

Considerando que os detectores possuem eficiência quântica dada por η e ainda que problemas de alinhamento podem gerar padrões de interferência cujas visibilidades são menores do que 1, podemos escrever as probabilidades de detecção em coincidência, ao tomar o módulo quadrado das expressões acima, como

$$P_\alpha(I_1, S_1|\phi_1, \phi_3) = P_\chi(I_2, S_2|\phi_1, \phi_3) = \frac{\eta^2}{4} [1 + V \cos(\phi_3 - \phi_1)], \quad (5.12)$$

e

$$P_{\beta}(I_1, S_2|\phi_1, \phi_3) = P_{\gamma}(I_2, S_1|\phi_1, \phi_3) = \frac{\eta^2}{4} [1 - V \cos(\phi_3 - \phi_1)], \quad (5.13)$$

onde V é a visibilidade dos padrões de interferência a serem observados.

Para testar a desigualdade de Bell devemos utilizar as expressões para as correlações entre as probabilidades de detecção em coincidência como utilizaram Rarity e Tapster em um experimento semelhante [36]

$$E^*(\phi_1, \phi_3) \equiv \frac{P_{\alpha}(\phi_1, \phi_3) + P_{\chi}(\phi_1, \phi_3) - P_{\beta}(\phi_1, \phi_3) - P_{\gamma}(\phi_1, \phi_3)}{P_{\alpha}(\phi_1, \phi_3) + P_{\chi}(\phi_1, \phi_3) + P_{\beta}(\phi_1, \phi_3) + P_{\gamma}(\phi_1, \phi_3)}, \quad (5.14)$$

e considerar a seguinte forma normalizada da desigualdade CHSH

$$S^* \equiv E^*(\phi_1, \phi_3) + E^*(\phi'_1, \phi_3) + E^*(\phi_1, \phi'_3) - E^*(\phi'_1, \phi'_3) \leq 2. \quad (5.15)$$

O experimento é então realizado da seguinte maneira: Inicialmente fixamos as fases ϕ_1 e ϕ_3 e medimos a taxa de coincidência entre os 4 detectores em um certo intervalo de tempo. Desta forma determinamos $E^*(\phi_1, \phi_3)$. Depois mudamos a fase 1 para ϕ'_1 e repetimos a medida para obtermos $E^*(\phi'_1, \phi_3)$. Fazemos isto até determinarmos os valores de todos os E^* da Eq. (5.15). Em seguida, calculamos o valor de S^* .

No entanto, existe uma forma teórica de verificar se o experimento pode funcionar. Utilizando as expressões (5.12) e (5.13) que obtivemos para as taxas de coincidência do experimento, calculamos os valores das correlações E^* diretamente. Desta forma obtém-se que

$$E^*(\xi, \delta) = V \cos(\delta - \xi). \quad (5.16)$$

Note que neste caso normalizado, este valor é independente das eficiências quânticas dos detectores.

Substituindo na Eq. (5.15) teremos

$$\begin{aligned} S^* &= V \cos(\phi_3 - \phi_1) + V \cos(\phi'_3 - \phi_1) \\ &\quad + V \cos(\phi_3 - \phi'_1) - V \cos(\phi'_3 - \phi'_1). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Agora perceba que se as fases que utilizarmos forem

$$\phi_1 = \frac{\pi}{4}; \phi_3 = 0; \phi'_1 = -\frac{\pi}{4} \text{ e } \phi'_3 = \frac{\pi}{2}, \quad (5.18)$$

obtemos que

$$S^* = 2\sqrt{2}V. \quad (5.19)$$

E, portanto, caso observemos no experimento interferências de dois fótons cujas visibilidades são superiores a 71%, conseguiremos violar a desigualdade CHSH.

Podemos ainda, utilizando as expressões para a taxa de coincidência e a forma genuína da desigualdade de CHSH (Eq. (5.2)), estimar qual seria a eficiência quântica dos detectores necessária para que o experimento fosse um teste de Bell conclusivo. Realizando os cálculos encontrei que

$$S = 2\eta^2\sqrt{2}V, \quad (5.20)$$

e que precisamos, então, de ter

$$\eta^2 \geq 0,71.$$

Ou seja, que precisamos de detectores cujas eficiências quânticas sejam superiores a 84%...

5.3 Conclusão

O experimento encontra-se atualmente em fase de teste. Embora os resultados obtidos ainda sejam pouco expressivos, acreditamos que a realização do experimento é viável. A princípio, o que precisamos agora é de apenas obter um alinhamento mais refinado para os nossos interferômetros. No entanto, existem problemas interessantes que estão dificultando este alinhamento. Por exemplo, como os interferômetros são montados em três dimensões, os espelhos ficam fortemente sujeitos a ação da gravidade (Ver Fig. 5.2). Isto faz com que todo o interferômetro seja mais instável e, assim, durante as medidas em coincidência acabamos por evidenciar um desalinhamento gradual dos dois interferômetros. A realização experimental deste teste de Bell abrirá caminho para a utilização dos qudits espaciais em campos de pesquisa mais modernos e

com grande desenvolvimento tecnológico. Na área da comunicação quântica, por exemplo, a possibilidade de se realizar um teste de Bell garante que protocolos de distribuições de chaves para criptografia sejam implementados de forma segura.

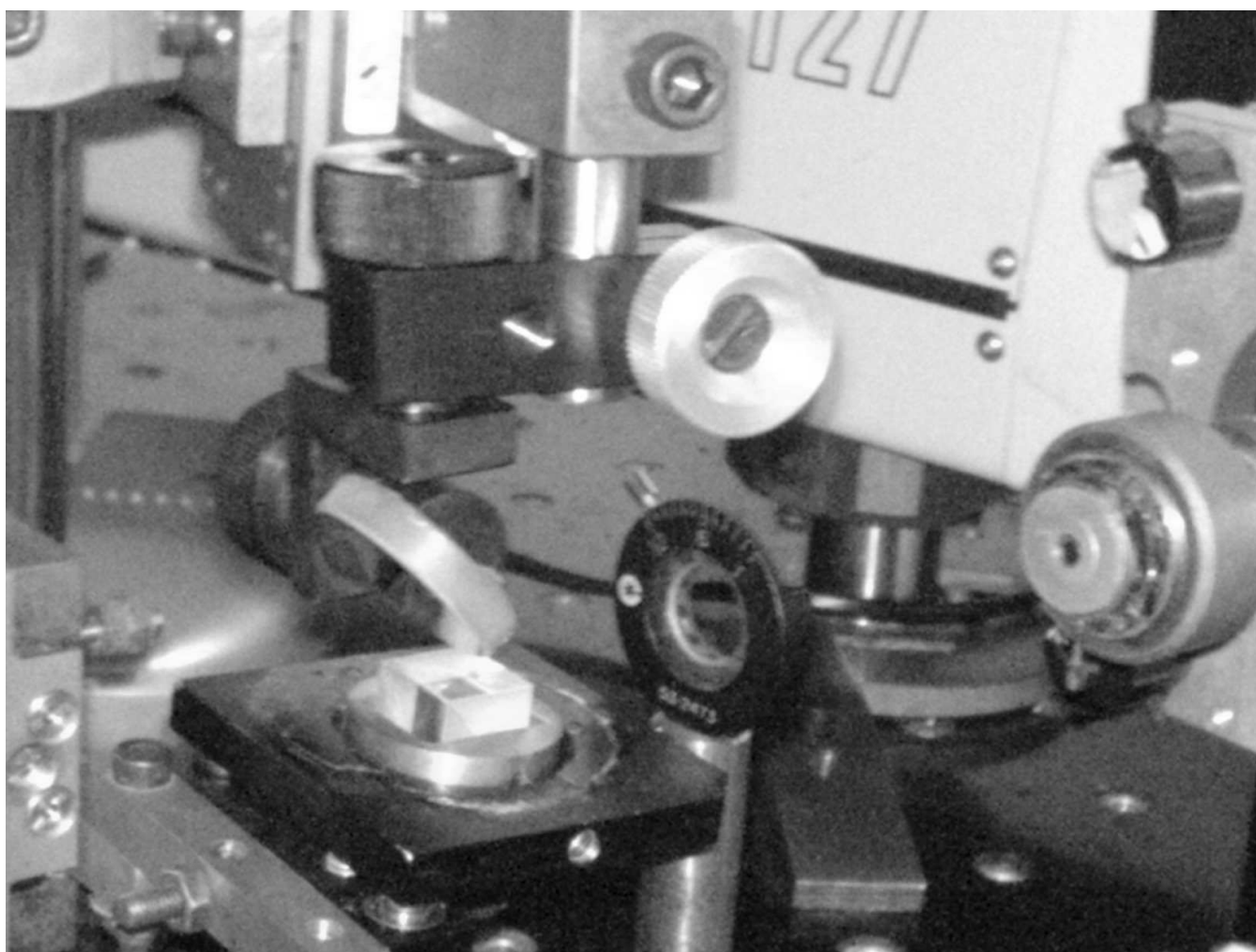


Figura 5.2: Foto de parte de um interferômetro.

Apêndice A

O OPERADOR $E^{(+)}(x; z)$ APÓS UMA LENTE CONVERGENTE

Neste apêndice calculamos o operador campo elétrico, que representa a evolução de um dos fótons gêmeos do plano- z_A de sua abertura até o plano de detecção- z , quando ao longo desta propagação inserimos uma lente convergente de foco f (Ver figura A.1).

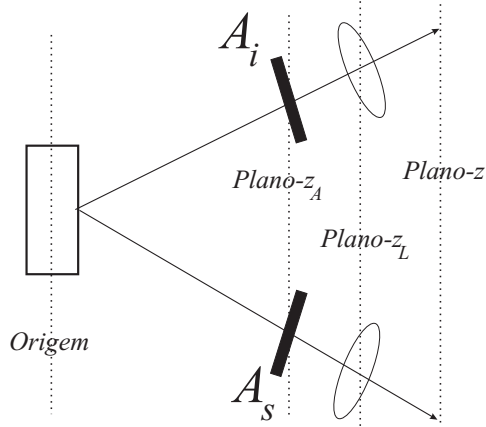


Figura A.1: Esquema da evolução considerada para o cálculo do operador $E^{(+)}(x; z)$.

Como vimos no capítulo de introdução (Eq. (1.10)), o campo elétrico no plano de detecção- z , considerando o caso unidimensional, é dado por

$$E(x; z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dq \tilde{E}_z(q) e^{iqx}. \quad (\text{A.1})$$

De acordo com a equação (1.13) para a propagação do espectro angular, podemos escrever que

$$\tilde{E}_z(q) = \tilde{E}_{tl}(q) e^{ik_z(z-z_L)}, \quad (\text{A.2})$$

onde $\tilde{E}_{tl}(q)$ representa o espectro angular do campo elétrico logo após a sua transmissão pela lente.

Sabemos, no entanto, que o espectro angular transmitido pela lente está relacionado com o espectro angular incidente, $\tilde{E}_{il}(q)$, através da seguinte expressão

$$\tilde{E}_{tl}(q) = \int d\mathbf{q}' \tilde{E}_{il}(q') T_L(q - q'), \quad (\text{A.3})$$

onde $T_L(q)$ representa a função de transmissão da lente.

Se considerarmos que

$$\tilde{E}_{il}(q) = \tilde{E}_{z_A}(q) e^{ik_z(z_L-z_A)}, \quad (\text{A.4})$$

teremos a seguinte expressão para o campo elétrico no plano de detecção- z

$$\begin{aligned} E(x; z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int dq \int dq' \tilde{E}_{z_A}(q) T_L(q - q') e^{iqx} \\ &\times \exp \left[i \left(-\frac{q^2}{2k_j} (z - z_L) \right) \right] \\ &\times \exp \left[i \left(-\frac{q'^2}{2k_j} (z_L - z_A) \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

A função que descreve a lente (considerando apenas o eixo- x) é dada por

$$t_L(x) = \exp \left(-i \left[\frac{kx^2}{2f} \right] \right),$$

e portanto teremos que (Ver Eq. (1.16))

$$T_L(q - q') = \exp \left[\frac{if}{2k} (q - q')^2 \right]. \quad (\text{A.6})$$

Assim, ao substituírmos a equação (A.6) na equação (A.5), acabamos por obter a forma final do campo elétrico no plano de detecção- z

$$\begin{aligned}
 E(x; z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int dq \int dq' \tilde{E}_{z_A}(q') e^{iqx} \exp \left[i \left(-\frac{q^2}{2k} (z - z_L) \right) \right] \\
 &\quad \times \exp \left[i \left(-\frac{q'^2}{2k} (z_L - z_A) \right) \right] \exp \left[i \left(\frac{f}{2k} (q - q')^2 \right) \right]. \quad (\text{A.7})
 \end{aligned}$$

O operador campo elétrico $\hat{E}^+(x; z)$ é, então, obtido a partir de uma analogia com o caso clássico

$$\begin{aligned}
 \hat{E}^+(x; z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int dq \int dq' \hat{a}(q') e^{iqx} \exp \left[i \left(-\frac{q^2}{2k} (z - z_L) \right) \right] \\
 &\quad \times \exp \left[i \left(-\frac{q'^2}{2k} (z_L - z_A) \right) \right] \exp \left[i \left(\frac{f}{2k} (q - q')^2 \right) \right]. \quad (\text{A.8})
 \end{aligned}$$

Apêndice B

CÁLCULO DO ELEMENTO DE MATRIZ $\langle \text{vac} | \hat{E}^{(+)}(x; z) | l \rangle$

Calcularemos a seguir o valor do elemento de matriz $\langle \text{vac} | \hat{E}^{(+)}(x; z) | l \rangle$, onde o estado $|l\rangle$ é dado por

$$|l\rangle \equiv \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int dq e^{-iqld} \text{sinc}(qa) |1q\rangle, \quad (\text{B.1})$$

e o operado campo elétrico por

$$\begin{aligned} \hat{E}^+(x; z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int dq \int dq' \hat{a}(q') e^{iqx} \exp \left[i \left(-\frac{q^2}{2k} (z - z_L) \right) \right] \\ &\times \exp \left[i \left(-\frac{q'^2}{2k} (z_L - z_A) \right) \right] \exp \left[i \left(\frac{f}{2k} (q - q')^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Desta forma temos que

$$\begin{aligned} \langle \text{vac} | \hat{E}^{(+)}(x; z) | l \rangle &\propto \int dq \int dq' \int dq'' e^{iqx} \\ &\times \exp \left[i \left(-\frac{q^2}{2k} (z - z_L) \right) \right] \\ &\times \exp \left[i \left(-\frac{q'^2}{2k} (z_L - z_A) \right) \right] \\ &\times \exp \left[i \left(\frac{f}{2k} (q - q')^2 \right) \right] \\ &\times e^{-iq''ld} \text{sinc}(q''a) \langle \text{vac} | \hat{a}(q') | 1q'' \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Como

$$\langle \text{vac} | \hat{a}(q') | 1q'' \rangle = \delta(q' - q''),$$

podemos reescrever $\langle \text{vac} | \hat{E}^{(+)}(x; z) | l \rangle$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \langle \text{vac} | \hat{E}^{(+)}(x; z) | l \rangle &\propto \int dq' \exp \left[-i \left(\frac{q'^2}{2k} (z_L - z_A) - f \right) \right] \\ &\times \mathcal{K}(q', x) e^{-iq'ld} \text{sinc}(q'a), \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

onde

$$\mathcal{K}(q', x) = \int dq \exp \left[iq \left(x - \frac{q'f}{k} \right) \right] \exp \left[-i \left(\frac{q^2}{2k} (z - z_L) - f \right) \right]. \quad (\text{B.5})$$

Utilizando as seguintes mudanças de variáveis

$$\chi = x - \frac{q'f}{k},$$

e

$$\alpha = \frac{(z - z_L) - f}{2k},$$

obtemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(q', x) &= \int dq \exp [-i(\alpha q^2)] \exp (iq\chi) \\ &= \exp \left[\frac{ik}{2(z - z_L - f)} \left(x - \frac{q'f}{k} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Substituindo a Eq. (B.6) na Eq. (B.4), pode-se mostrar que

$$\langle \text{vac} | \hat{E}^{(+)}(x; z) | l \rangle \propto e^{\frac{i\alpha^2}{4\alpha}} \int dq' \exp [i\gamma (q'^2 - 2\xi q')] \text{sinc}(q'a), \quad (\text{B.7})$$

onde

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{(z_L - z_A) - f}{2k}, \quad \lambda = \frac{xf}{2\alpha k} + ld, \\ \gamma &= \frac{1}{4\alpha} \left(\frac{f}{k} \right)^2 - \beta \quad \text{e} \quad \xi = \frac{\lambda}{2\gamma}. \end{aligned}$$

Ao completarmos o quadrado da equação (B.7), conseguimos escrever o elemento de matriz $\langle \text{vac} | \hat{E}^{(+)}(x; z) | l \rangle$ em termos de uma convolução

$$\langle \text{vac} | \hat{E}^{(+)}(x; z) | l \rangle \propto e^{\frac{i\pi^2}{4\alpha}} e^{i\gamma\xi^2} f(q') \star g(q'), \quad (\text{B.8})$$

onde

$$f(q) = \text{sinc}(q'a),$$

e

$$g(q) = e^{i\gamma q'^2}.$$

Realizando este cálculo obtemos que

$$\langle \text{vac} | \hat{E}^{(+)}(x; z) | l \rangle \propto e^{-i\gamma\xi^2} \text{sinc}(\xi a). \quad (\text{B.9})$$

Substituindo o valor de ξ nesta expressão, obtemos a fórmula final do elemento de matriz $\langle \text{vac} | \hat{E}^{(+)}(x; z) | l \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \text{vac} | \hat{E}^{(+)}(x; z) | l \rangle &\propto \exp \left[\frac{-i}{4\phi^2\gamma} (x + ld\phi)^2 \right] \\ &\times \text{sinc} \left[\frac{a}{2\gamma\phi} (x + ld\phi) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

onde $\phi = \frac{2\alpha k}{f}$.

Apêndice C

AS RELAÇÕES DE TRANSFORMAÇÃO USADAS NA TOMOGRAFIA

A seguir mostramos como as equações de transformação, que nos permitiram calcular os elementos não diagonais do operador densidade dado pela equação (4.20), foram obtidas.

Para simplificar a notação, façamos as seguintes definições

$$\begin{aligned} |\theta_{j+}\rangle &\equiv |h_j\rangle \\ &= \cos \theta_j |g_+\rangle + e^{i\eta_j} \sin \theta_j |g_-\rangle, \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

e

$$\begin{aligned} |\theta_{j-}\rangle &\equiv |h'_j\rangle \\ &= \sin \theta_j |g_+\rangle + e^{i(\eta_j+\pi)} \cos \theta_j |g_-\rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Inicialmente consideremos a mudança de base ocorrendo apenas para o fóton signal. Lembramos que esta mudança de base ocorre naturalmente enquanto o fóton evolui livremente após sua abertura. Precisamos apenas de saber onde selecionar este fóton para que tenhamos ele em um estado específico.

Propagação no caminho “Idler”

O operador densidade transformado pode ser escrito como

$$\tilde{\rho}_i = \sum_{l,l',k,k'} \tilde{\rho}_{\theta_l,l',\theta_k,k'} |\theta_{jl}, l'\rangle \langle \theta_{jk}, k'|. \quad (\text{C.3})$$

Reescrevendo algum dos antigos projetores na nova base temos que

$$\begin{aligned} \rho_{+, \pm; +, \pm} |g_+, \pm\rangle \langle g_+, \pm| &= \rho_{+, \pm; +, \pm} (\cos \theta_j |\theta_{j+}, \pm\rangle - e^{i\gamma_j} \sin \theta_j |\theta_{j-}, \pm\rangle) \\ &\quad \times (\cos \theta_j \langle \theta_{j+}, \pm| - e^{-i\gamma_j} \sin \theta_j \langle \theta_{j-}, \pm|), \\ \rho_{+, \pm; -, \pm} |g_+, \pm\rangle \langle g_-, \pm| &= \rho_{+, \pm; -, \pm} (\cos \theta_j |\theta_{j+}, \pm\rangle - e^{i\gamma_j} \sin \theta_j |\theta_{j-}, \pm\rangle) \\ &\quad \times (e^{i\gamma_j} \sin \theta_j \langle \theta_{j+}, \pm| + \cos \theta_j \langle \theta_{j-}, \pm|), \\ \rho_{-, \pm; +, \pm} |g_-, \pm\rangle \langle g_+, \pm| &= \rho_{-, \pm; +, \pm} (e^{-i\gamma_j} \sin \theta_j |\theta_{j+}, \pm\rangle + \cos \theta_j |\theta_{j-}, \pm\rangle) \\ &\quad \times (\cos \theta_j \langle \theta_{j+}, \pm| - e^{-i\gamma_j} \sin \theta_j \langle \theta_{j-}, \pm|), \\ \rho_{-, \pm; -, \pm} |g_-, \pm\rangle \langle g_-, \pm| &= \rho_{-, \pm; -, \pm} (e^{-i\gamma_j} \sin \theta_j |\theta_{j+}, \pm\rangle + \cos \theta_j |\theta_{j-}, \pm\rangle) \\ &\quad \times (e^{i\gamma_j} \sin \theta_j \langle \theta_{j+}, \pm| + \cos \theta_j \langle \theta_{j-}, \pm|). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{+, \pm; +, \pm} |g_+, \pm\rangle \langle g_+, \pm| &= \rho_{+, \pm; +, \pm} (\cos^2 \theta_j |\theta_{j+}, \pm\rangle \langle \theta_{j+}, \pm| + \sin^2 \theta_j |\theta_{j-}, \pm\rangle \langle \theta_{j-}, \pm| + \dots), \\ \rho_{+, \pm; -, \pm} |g_+, \pm\rangle \langle g_-, \pm| &= \rho_{+, \pm; -, \pm} (\cos \theta_j \sin \theta_j e^{i\gamma_j} |\theta_{j+}, \pm\rangle \langle \theta_{j+}, \pm| - \dots), \\ \rho_{-, \pm; +, \pm} |g_-, \pm\rangle \langle g_+, \pm| &= \rho_{-, \pm; +, \pm} (e^{-i\gamma_j} \sin \theta_j \cos \theta_j |\theta_{j+}, \pm\rangle \langle \theta_{j+}, \pm| - \dots), \\ \rho_{-, \pm; -, \pm} |g_-, \pm\rangle \langle g_-, \pm| &= \rho_{-, \pm; -, \pm} (\sin^2 \theta_j |\theta_{j+}, \pm\rangle \langle \theta_{j+}, \pm| + \cos^2 \theta_j |\theta_{j-}, \pm\rangle \langle \theta_{j-}, \pm| + \dots). \end{aligned}$$

E desta forma podemos escrever os elementos diagonais do novo operador da equação (C.3) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{\theta_+, +; \theta_+, +} &= \rho_{+, +; +, +} \cos^2 \theta_j + \rho_{-, +; -, +} \sin^2 \theta_j + 2 \cos \theta_j \sin \theta_j \text{Re} (e^{i\gamma_j} \rho_{+, +; -, +}), \\ \tilde{\rho}_{\theta_+, -; \theta_+, -} &= \rho_{+, -, +, -} \cos^2 \theta_j + \rho_{-, -, -, -} \sin^2 \theta_j + 2 \cos \theta_j \sin \theta_j \text{Re} (e^{i\gamma_j} \rho_{+, -, -, -}), \\ \tilde{\rho}_{\theta_-, +; \theta_-, +} &= \rho_{+, -, +, -} \sin^2 \theta_j + \rho_{-, +; -, +} \cos^2 \theta_j - 2 \cos \theta_j \sin \theta_j \text{Re} (e^{i\gamma_j} \rho_{+, +; -, +}), \\ \tilde{\rho}_{\theta_-, -; \theta_-, -} &= \rho_{+, -, +, -} \sin^2 \theta_j + \rho_{-, +; -, +} \cos^2 \theta_j - 2 \cos \theta_j \sin \theta_j \text{Re} (e^{i\gamma_j} \rho_{+, -, -, -}). \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema de equações conseguimos mostrar que

$$\operatorname{Re}(\rho_{+,+;-,+} e^{i\gamma_j}) = \frac{\tilde{\rho}_{\theta_1,+;\theta_1,+} - \rho_{+,+;+,+} \cos^2 \theta_j - \rho_{-,+;-,+} \sin^2 \theta_j}{\sin 2\theta_j}$$

e que

$$\operatorname{Re}(\rho_{+,-;-,-} e^{i\gamma_j}) = \frac{\tilde{\rho}_{\theta_1,+;\theta_1,+} - \rho_{+,-;+,-} \cos^2 \theta_j - \rho_{-,-;-,-} \sin^2 \theta_j}{\sin 2\theta_j}.$$

Se assumirmos que: $\gamma_1 = \eta$ e $\gamma_2 = \eta + \pi/2$ podemos determinar as componentes reais e imaginárias dos elementos de matriz, pois

$$\operatorname{Re}(\rho_{+,+;-,+}) \cos \eta - \operatorname{Im}(\rho_{+,+;-,+}) \sin \eta = \frac{\tilde{\rho}_{\theta_1,+;\theta_1,+} - \rho_{+,+;+,+} \cos^2 \theta_1 - \rho_{-,+;-,+} \sin^2 \theta_1}{\sin 2\theta_1},$$

e

$$\operatorname{Re}(\rho_{+,+;-,+}) \sin \eta + \operatorname{Im}(\rho_{+,+;-,+}) \cos \eta = -\frac{\tilde{\rho}_{\theta_2,+;\theta_2,+} - \rho_{+,+;+,+} \cos^2 \theta_2 - \rho_{-,+;-,+} \sin^2 \theta_2}{\sin 2\theta_2},$$

onde usamos que $\operatorname{Re}(\rho_{+,+;-,+} e^{i\gamma_j}) = \operatorname{Re}(\rho_{+,+;-,+}) \cos \gamma_j - \operatorname{Im}(\rho_{+,+;-,+}) \sin \gamma_j$. Assim, finalmente obtemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\rho_{+,+;-,+}) &= \frac{(\tilde{\rho}_{\theta_1,+;\theta_1,+} - \rho_{+,+;+,+} \cos^2 \theta_1 - \rho_{-,+;-,+} \sin^2 \theta_1)}{\sin 2\theta_1} \cos \eta \\ &\quad - \frac{(\tilde{\rho}_{\theta_2,+;\theta_2,+} - \rho_{+,+;+,+} \cos^2 \theta_2 - \rho_{-,+;-,+} \sin^2 \theta_2)}{\sin 2\theta_2} \sin \eta, \\ \operatorname{Im}(\rho_{+,+;-,+}) &= -\frac{(\tilde{\rho}_{\theta_1,+;\theta_1,+} - \rho_{+,+;+,+} \cos^2 \theta_1 - \rho_{-,+;-,+} \sin^2 \theta_1)}{\sin 2\theta_1} \sin \eta \\ &\quad - \frac{(\tilde{\rho}_{\theta_2,+;\theta_2,+} - \rho_{+,+;+,+} \cos^2 \theta_2 - \rho_{-,+;-,+} \sin^2 \theta_2)}{\sin 2\theta_2} \cos \eta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Re}(\rho_{+,-;-,-}) &= \frac{(\tilde{\rho}_{\theta_1,-;\theta_1,-} - \rho_{+,-;+,-} \cos^2 \theta_1 - \rho_{-,-;-,-} \sin^2 \theta_1)}{\sin 2\theta_1} \cos \eta \\
 &\quad - \frac{(\tilde{\rho}_{\theta_2,-;\theta_2,-} - \rho_{+,-;+,-} \cos^2 \theta_2 - \rho_{-,-;-,-} \sin^2 \theta_2)}{\sin 2\theta_2} \sin \eta, \\
 \text{Im}(\rho_{+,-;-,-}) &= -\frac{(\tilde{\rho}_{\theta_1,-;\theta_1,-} - \rho_{+,-;+,-} \cos^2 \theta_1 - \rho_{-,-;-,-} \sin^2 \theta_1)}{\sin 2\theta_1} \sin \eta \\
 &\quad - \frac{(\tilde{\rho}_{\theta_2,-;\theta_2,-} - \rho_{+,-;+,-} \cos^2 \theta_2 - \rho_{-,-;-,-} \sin^2 \theta_2)}{\sin 2\theta_2} \cos \eta.
 \end{aligned}$$

Propagação no caminho “Signal”

Neste caso o operador densidade transformado deve ser escrito como

$$\tilde{\rho}_s = \sum_{l,l',k,k'} \tilde{\rho}_{l,\theta'_l,k,\theta'_k} |l, \theta'_{j'_l}\rangle \langle k, \theta_{j_{k'}}|, \quad (\text{C.4})$$

e realizando os cálculos de forma análoga ao que foi feito para a propagação no caminho idler, podemos mostrar que

$$\begin{aligned}
 \text{Re}(\rho_{+,+;+,-}) &= \frac{\tilde{\rho}_{+, \theta_1; +, \theta_1} - \rho_{+,+;+,-} \cos^2 \theta_1 - \rho_{+,-;+,-} \sin^2 \theta_1}{\sin 2\theta_1} \cos \eta \\
 &\quad - \frac{\tilde{\rho}_{+, \theta_2; +, \theta_2} - \rho_{+,+;+,-} \cos^2 \theta_2 - \rho_{+,-;+,-} \sin^2 \theta_2}{\sin 2\theta_2} \sin \eta, \\
 \text{Im}(\rho_{+,+;+,-}) &= -\frac{\tilde{\rho}_{+, \theta_1; +, \theta_1} - \rho_{+,+;+,-} \cos^2 \theta_1 - \rho_{+,-;+,-} \sin^2 \theta_1}{\sin 2\theta_1} \sin \eta \\
 &\quad - \frac{\tilde{\rho}_{+, \theta_2; +, \theta_2} - \rho_{+,+;+,-} \cos^2 \theta_2 - \rho_{+,-;+,-} \sin^2 \theta_2}{\sin 2\theta_2} \cos \eta. \\
 \\
 \text{Re}(\rho_{-,+;-,-}) &= \frac{(\tilde{\rho}_{-, \theta_1; -, \theta_1} - \rho_{-,+;-,-} \cos^2 \theta_1 - \rho_{-,-;-,-} \sin^2 \theta_1)}{\sin 2\theta_1} \cos \eta \\
 &\quad - \frac{(\tilde{\rho}_{-, \theta_2; -, \theta_2} - \rho_{-,+;-,-} \cos^2 \theta_2 - \rho_{-,-;-,-} \sin^2 \theta_2)}{\sin 2\theta_2} \sin \eta, \\
 \text{Im}(\rho_{-,+;-,-}) &= -\frac{(\tilde{\rho}_{-, \theta_1; -, \theta_1} - \rho_{-,+;-,-} \cos^2 \theta_1 - \rho_{-,-;-,-} \sin^2 \theta_1)}{\sin 2\theta_1} \sin \eta \\
 &\quad - \frac{(\tilde{\rho}_{-, \theta_2; -, \theta_2} - \rho_{-,+;-,-} \cos^2 \theta_2 - \rho_{-,-;-,-} \sin^2 \theta_2)}{\sin 2\theta_2} \cos \eta.
 \end{aligned}$$

Propagação nos caminhos "signal" e "idler"

Quando consideramos a propagação nos dois caminhos, devemos considerar as seguintes equações de transformação

$$\begin{aligned}
 |\theta_s, \theta_i\rangle &= \cos \theta_s \cos \theta_i |g_+, g_+\rangle \\
 &\quad + e^{i\gamma_i} \cos \theta_s \sin \theta_i |g_+, g_-\rangle \\
 &\quad + e^{i\gamma_s} \sin \theta_s \cos \theta_i |g_-, g_+\rangle \\
 &\quad + e^{i(\gamma_s + \gamma_i)} \sin \theta_s \sin \theta_i |g_-, g_-\rangle,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\theta_s, \theta'_i\rangle &= -e^{-i\gamma_i} \cos \theta_s \cos \theta'_i |g_+, g_+\rangle + \cos \theta_s \sin \theta'_i |g_+, g_-\rangle \\
 &\quad - e^{i(\gamma_s - \gamma_i)} \sin \theta_s \cos \theta'_i |g_-, g_+\rangle \\
 &\quad + e^{i\gamma_s} \sin \theta_s \sin \theta'_i |g_-, g_-\rangle,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\theta'_s, \theta_i\rangle &= -e^{-i\gamma_s} \cos \theta'_s \cos \theta_i |g_+, g_+\rangle \\
 &\quad - e^{-i(\gamma_s - \gamma_i)} \cos \theta'_s \sin \theta_i |g_+, g_-\rangle + \sin \theta'_s \cos \theta_i |g_-, g_+\rangle \\
 &\quad + e^{i\gamma_i} \sin \theta'_s \sin \theta_i |g_-, g_-\rangle,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\theta'_s, \theta'_i\rangle &= e^{-i(\gamma_s + \gamma_i)} \cos \theta'_s \cos \theta'_i |g_+, g_+\rangle \\
 &\quad - e^{-i\gamma_s} \cos \theta'_s \sin \theta'_i |g_+, g_-\rangle \\
 &\quad - e^{-i\gamma_i} \sin \theta'_s \cos \theta'_i |g_-, g_+\rangle + \sin \theta'_s \sin \theta'_i |g_-, g_-\rangle,
 \end{aligned}$$

e o operador densidade dos dois fótons escrito usando estas novas bases é dado por

$$U = \begin{pmatrix}
 \cos \theta_s \cos \theta_i & e^{i\gamma_i} \cos \theta_s \sin \theta_i & e^{i\gamma_s} \sin \theta_s \cos \theta_i & e^{i(\gamma_s + \gamma_i)} \sin \theta_s \sin \theta_i \\
 -e^{-i\gamma_i} \cos \theta_s \cos \theta'_i & \cos \theta_s \sin \theta'_i & -e^{i(\gamma_s - \gamma_i)} \sin \theta_s \cos \theta'_i & e^{i\gamma_s} \sin \theta_s \sin \theta'_i \\
 -e^{-i\gamma_s} \cos \theta'_s \cos \theta_i & -e^{-i(\gamma_s - \gamma_i)} \cos \theta'_s \sin \theta_i & \sin \theta'_s \cos \theta_i & e^{i\gamma_i} \sin \theta'_s \sin \theta_i \\
 e^{-i(\gamma_s + \gamma_i)} \cos \theta'_s \cos \theta'_i & -e^{-i\gamma_s} \cos \theta'_s \sin \theta'_i & -e^{-i\gamma_i} \sin \theta'_s \cos \theta'_i & \sin \theta'_s \sin \theta'_i
 \end{pmatrix}$$

Invertendo as relações de transformação dadas acima podemos relacionar os elemento do operador densidade U com os elemento do operador densidade ρ . Temos, então, que

$$\begin{aligned}
 \tilde{\rho}_{g_+,g_+;g_+,g_+} = & \cos \theta_s \cos \theta_i \left(\cos \theta_s \cos \theta_i \rho_{++,+} + \rho_{++,+} e^{i\gamma_i} \cos \theta_s \sin \theta_i \right) \\
 & + \cos \theta_s \cos \theta_i \left(+e^{i\gamma_s} \sin \theta_s \cos \theta_i \rho_{+,-,+} + e^{i(\gamma_s+\gamma_i)} \sin \theta_s \sin \theta_i \rho_{+,-,-} \right) \\
 & + e^{-i\gamma_i} \cos \theta_s \sin \theta_i \left(\cos \theta_s \cos \theta_i \rho_{+,-,+} + e^{i\gamma_i} \cos \theta_s \sin \theta_i \rho_{+,-,+} \right) \\
 & + e^{-i\gamma_i} \cos \theta_s \sin \theta_i \left(+e^{i\gamma_s} \sin \theta_s \cos \theta_i \rho_{+,-,+} + e^{i(\gamma_s+\gamma_i)} \sin \theta_s \sin \theta_i \rho_{+,-,-} \right) \\
 & + e^{-i\gamma_s} \sin \theta_s \cos \theta_i \left(\cos \theta_s \cos \theta_i \rho_{-,-,+} + e^{i\gamma_i} \cos \theta_s \sin \theta_i \rho_{-,-,+} \right) \\
 & + e^{-i\gamma_s} \sin \theta_s \cos \theta_i \left(+e^{i\gamma_s} \sin \theta_s \cos \theta_i \rho_{-,-,+} + e^{i(\gamma_s+\gamma_i)} \sin \theta_s \sin \theta_i \rho_{-,-,-} \right) \\
 & + e^{-i(\gamma_s+\gamma_i)} \sin \theta_s \sin \theta_i \left(\cos \theta_s \cos \theta_i \rho_{-,-,+} + e^{i\gamma_i} \cos \theta_s \sin \theta_i \rho_{-,-,+} \right) \\
 & + e^{-i(\gamma_s+\gamma_i)} \sin \theta_s \sin \theta_i \left(+e^{i\gamma_s} \sin \theta_s \cos \theta_i \rho_{-,-,+} + e^{i(\gamma_s+\gamma_i)} \sin \theta_s \sin \theta_i \rho_{-,-,-} \right).
 \end{aligned}$$

Para simplificar a notação definimos que

$$\begin{aligned}
 A(\eta_s, \eta_i) = & \cos^2 \theta_s \cos^2 \theta_i \rho_{++,+} + \cos^2 \theta_s \sin^2 \theta_i \rho_{+,-,+} + \sin^2 \theta_s \cos^2 \theta_i \rho_{-,-,+} \\
 & + \sin^2 \theta_s \sin^2 \theta_i \rho_{-,-,-} + \cos^2 \theta_s \sin 2\theta_i \operatorname{Re} \left(\rho_{++,+} e^{i\gamma_i} \right) \\
 & + \sin 2\theta_s \cos^2 \theta_i \operatorname{Re} \left(\rho_{+,-,+} e^{i\gamma_s} \right) + \sin 2\theta_s \sin^2 \theta_i \operatorname{Re} \left(e^{i\gamma_s} \rho_{+,-,-} \right) \\
 & + \sin^2 \theta_s \sin 2\theta_i \operatorname{Re} \left(e^{i\gamma_i} \rho_{-,-,-} \right).
 \end{aligned}$$

Desta forma se pode mostrar que

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(\rho_{+,-,+}) + \operatorname{Re}(e^{2i\eta} \rho_{++,-}) &= 2 \frac{\tilde{\rho}_{g_+,g_+;g_+,g_+}(\eta, \eta) - A(\eta, \eta)}{\sin 2\theta_1 \sin 2\theta_1}, \\
 \operatorname{Re}(\rho_{+,-,+}) - \operatorname{Re}(e^{2i\eta} \rho_{++,-}) &= 2 \frac{\tilde{\rho}_{g_+,g_+;g_+,g_+}(\eta + \pi/2, \eta + \pi/2) - A(\eta + \pi/2, \eta + \pi/2)}{\sin 2\theta_2 \sin 2\theta_2}, \\
 \operatorname{Re}(i\rho_{+,-,+}) + \operatorname{Re}(ie^{2i\eta} \rho_{++,-}) &= 2 \frac{\tilde{\rho}_{g_+,g_+;g_+,g_+}(\eta + \pi/2, \eta) - A(\eta + \pi/2, \eta)}{\sin 2\theta_2 \sin 2\theta_1}, \\
 -\operatorname{Re}(i\rho_{+,-,+}) + \operatorname{Re}(ie^{2i\eta} \rho_{++,-}) &= 2 \frac{\tilde{\rho}_{g_+,g_+;g_+,g_+}(\eta, \eta + \pi/2) - A(\eta, \eta + \pi/2)}{\sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2}.
 \end{aligned}$$

e, então, que

$$\begin{aligned}
 Re(\rho_{+-,-+}) &= \frac{\tilde{\rho}_{g_+,g_+;g_+,g_+}(\eta, \eta) - A(\eta, \eta)}{\sin 2\theta_1 \sin 2\theta_1} \\
 &\quad - \frac{\tilde{\rho}_{g_+,g_+;g_+,g_+}(\eta + \pi/2, \eta + \pi/2) - A(\eta + \pi/2, \eta + \pi/2)}{\sin 2\theta_2 \sin 2\theta_2}, \\
 Im(\rho_{+-,-+}) &= -\frac{\tilde{\rho}_{g_+,g_+;g_+,g_+}(\eta + \pi/2, \eta) - A(\eta + \pi/2, \eta)}{\sin 2\theta_2 \sin 2\theta_1} \\
 &\quad + \frac{\tilde{\rho}_{g_+,g_+;g_+,g_+}(\eta, \eta + \pi/2) - A(\eta, \eta + \pi/2)}{\sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2}.
 \end{aligned}$$

Para determinar $\rho_{++,-}$ usamos as seguintes equações

$$\begin{aligned}
 Re(\rho_{++,-}) &= \cos(2\eta) \left(\frac{\tilde{\rho}_{g_+,g_+;g_+,g_+}(\eta, \eta) - A(\eta, \eta)}{\sin 2\theta_1 \sin 2\theta_1} \right) \\
 &\quad \cos(2\eta) \left(-\frac{\tilde{\rho}_{g_+,g_+;g_+,g_+}(\eta + \pi/2, \eta + \pi/2) - A(\eta + \pi/2, \eta + \pi/2)}{\sin 2\theta_2 \sin 2\theta_2} \right) \\
 &\quad \sin(2\eta) \left(\frac{\tilde{\rho}_{g_+,g_+;g_+,g_+}(\eta + \pi/2, \eta) - A(\eta + \pi/2, \eta)}{\sin 2\theta_2 \sin 2\theta_1} \right) \\
 &\quad \sin(2\eta) \left(+\frac{\tilde{\rho}_{g_+,g_+;g_+,g_+}(\eta, \eta + \pi/2) - A(\eta, \eta + \pi/2)}{\sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2} \right), \\
 Im(\rho_{++,-}) &= \sin(2\eta) \left(\frac{\tilde{\rho}_{g_+,g_+;g_+,g_+}(\eta, \eta) - A(\eta, \eta)}{\sin 2\theta_1 \sin 2\theta_1} \right) \\
 &\quad \left(-\frac{\tilde{\rho}_{g_+,g_+;g_+,g_+}(\eta + \pi/2, \eta + \pi/2) - A(\eta + \pi/2, \eta + \pi/2)}{\sin 2\theta_2 \sin 2\theta_2} \right) \\
 &\quad \cos(2\eta) \left(\frac{\tilde{\rho}_{g_+,g_+;g_+,g_+}(\eta + \pi/2, \eta) - A(\eta + \pi/2, \eta)}{\sin 2\theta_2 \sin 2\theta_1} \right) \\
 &\quad \cos(2\eta) \left(+\frac{\tilde{\rho}_{g_+,g_+;g_+,g_+}(\eta, \eta + \pi/2) - A(\eta, \eta + \pi/2)}{\sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2} \right).
 \end{aligned}$$

Apêndice D

DETERMINANDO ρ E OS ESTADOS DO INTERFERÔMETRO

Nesta parte da tese mostramos como as relações de transformação descritas no Apêndice C foram utilizadas para obtermos o operador densidade da equação (4.20). Em seguida, mostramos como os estados gerados pelos braços do interferômetro podem ser calculados a partir deste operador.

Definições e Valores

Para o nosso experimento temos que se

$$\eta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow x_{-\frac{\pi}{2}} = -688\mu m, \quad (\text{D.1})$$

$$\eta = 0 \Rightarrow x_0 = 0\mu m, \quad (\text{D.2})$$

$$\eta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_{\frac{\pi}{2}} = 688\mu m, \quad (\text{D.3})$$

e se

$$\eta = \pi \Rightarrow x_{\pi} = 1376\mu m. \quad (\text{D.4})$$

Temos ainda que

$$\cos\theta_j = |f(x_j, z)|, \quad (\text{D.5})$$

e

$$\text{sen}\theta_j = |l(x_j, z)|, \quad (\text{D.6})$$

onde $j = -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}$ e π . f e l são as amplitudes de probabilidade de detecção simples dadas no capítulo 4.

Os valores dos cossenos e senos, usando-se os valores de x_j acima, são dados a seguir

$$\cos\theta_{-\frac{\pi}{2}} = 0.702, \quad (\text{D.7})$$

$$\sin\theta_{-\frac{\pi}{2}} = 0.712, \quad (\text{D.8})$$

$$\cos\theta_0 = 0.707, \quad (\text{D.9})$$

$$\sin\theta_0 = 0.707, \quad (\text{D.10})$$

$$\cos\theta_{\frac{\pi}{2}} = 0.712, \quad (\text{D.11})$$

$$\sin\theta_{\frac{\pi}{2}} = 0.702, \quad (\text{D.12})$$

$$\cos\theta_{\pi} = 0.717, \quad (\text{D.13})$$

e

$$\sin\theta_{\pi} = 0.697. \quad (\text{D.14})$$

Determinando a diagonal de $\tilde{\rho}(\pm; \pm)$

Para determinar a diagonal deste operador usamos as duas medidas realizadas com os detectores atrás das fendas duplas. Pegamos seis pontos de coincidência após cada situação experimental [(1) Det1 na ab1 e det2 na ab2, (2) Det1 na ab1 e det2 na ab2 , (3) Det1 na ab2 e det2 na ab1 e , (4) Det1 na ab2 e det2 na ab2].

Os coeficientes da diagonal são, então, obtidos considerando as a soma das coincidências dos seis pontos para uma certa situação experimental e, então, dividindo este valor por 24291.

Tivemos, assim, que:

$$\rho_{++++} = \frac{1011}{24291} = 0,042, \quad (\text{D.15})$$

$$\rho_{+--+} = \frac{11391}{24291} = 0,468, \quad (\text{D.16})$$

$$\rho_{-++-} = \frac{11224}{24291} = 0,462, \quad (\text{D.17})$$

e que

$$\rho_{----} = \frac{665}{24291} = 0,028. \quad (\text{D.18})$$

Determinando $\rho_{+--+}(\rho_{-+++})$, $\rho_{+----}(\rho_{-+-})$, $\rho_{++++}(\rho_{+--+})$ e $\rho_{-+---}(\rho_{----+})$

Para determinar estes coeficientes temos de determinar antes a diagonal de quatro operadores densidade distintos:

$$\tilde{\rho}(\theta_1, \theta'_1; \pm), \tilde{\rho}(\theta_2, \theta'_2; \pm), \tilde{\rho}(\pm; \theta_1, \theta'_1) \text{ e } \tilde{\rho}(\pm; \theta_2, \theta'_2),$$

onde $|\theta_1\rangle \Rightarrow \eta = -\frac{\pi}{2}$, $|\theta'_1\rangle \Rightarrow \eta = \frac{\pi}{2}$, $|\theta_2\rangle \Rightarrow \eta = 0$ e $|\theta'_2\rangle \Rightarrow \eta = \pi$.

Para determinar estas diagonais usamos as medidas em que um detector tinha lente e o outro não.

Diagonal de $\tilde{\rho}(\pm; \theta_1, \theta'_1)$

O padrão está centrado em 9600 microns e então os pontos de coincidência considerados foram $x_{-\frac{\pi}{2}} = 8912$ e $x_{\frac{\pi}{2}} = 10288$.

Realizando os cálculos temos que

$$\rho_{+\theta_1;+\theta_1} = \frac{321}{1264,5} = 0,254, \quad (\text{D.19})$$

$$\rho_{+\theta'_1;+\theta'_1} = \frac{318}{1264,5} = 0,251, \quad (\text{D.20})$$

$$\rho_{-\theta_1;\theta_1} = \frac{313,5}{1264,5} = 0,248, \quad (\text{D.21})$$

e que

$$\rho_{-\theta'_1;-\theta'_1} = \frac{312}{1264,5} = 0,247. \quad (\text{D.22})$$

Diagonal de $\tilde{\rho}(\pm; \theta_2, \theta'_2)$

Padrão centrado em 9700.

$$x_0 = 9700 \text{ e } x_\pi = 11076.$$

Segue que

$$\rho_{+\theta_2;+\theta_2} = \frac{411}{1198} = 0,343, \quad (\text{D.23})$$

$$\rho_{+\theta'_2;+\theta'_2} = \frac{192}{1198} = 0,16, \quad (\text{D.24})$$

$$\rho_{-\theta_2;-\theta_2} = \frac{400}{1198} = 0,334, \quad (\text{D.25})$$

e que

$$\rho_{-\theta'_2;-\theta'_2} = \frac{195}{1198} = 0,163. \quad (\text{D.26})$$

Observe que quando usamos como mudança de base os vetores $|\theta_1\rangle$ e $|\theta'_1\rangle$ o operado densidade tem a diagonal com termos idênticos a 0,25. No entanto, quando os estados da nova base são $|\theta_2\rangle$ e $|\theta'_2\rangle$ ele perde essa propriedade. Isto se deve a queda não linear da taxa de coincidência com o aumento da distância do centro do padrão. Quando é $\theta_1 e \theta_1$ estas distâncias do centro são simétricas e fica tudo parecido.

Diagonal de $\tilde{\rho}(\theta_1, \theta'_1 \pm)$

Padrão centrado em 8850.

$$x_{-\frac{\pi}{2}} = 8162 \text{ e } x_{\frac{\pi}{2}} = 9538.$$

Segue que

$$\rho_{\theta_1+\theta_1+} = \frac{373}{1493} = 0,250, \quad (\text{D.27})$$

$$\rho_{\theta_1-\theta_1-} = \frac{378}{1493} = 0,253, \quad (\text{D.28})$$

$$\rho_{\theta'_1+\theta'_1+} = \frac{369}{1493} = 0,247, \quad (\text{D.29})$$

e que

$$\rho_{\theta'_1 - \theta'_1 -} = \frac{373}{1493} = 0,250. \quad (\text{D.30})$$

Diagonal de $\tilde{\rho}(\theta_1, \theta'_1 \pm)$

Padrão centrado em 8850.

$$x_0 = 8850 \text{ e } x_\pi = 10226.$$

Segue que:

$$\rho_{\theta_2 + \theta_2 +} = \frac{478}{1414} = 0,338, \quad (\text{D.31})$$

$$\rho_{\theta_2 - \theta_2 -} = \frac{478}{1414} = 0,338, \quad (\text{D.32})$$

$$\rho_{\theta'_2 + \theta'_2 +} = \frac{222}{1414} = 0,157, \quad (\text{D.33})$$

e que

$$\rho_{\theta'_2 - \theta'_2 -} = \frac{236}{1414} = 0,167. \quad (\text{D.34})$$

Coefficientes

Usando estes valores para os coeficientes das diagonais destes operadores densidade e que $\text{sen}2\theta'_1 = \text{sen}2\theta'_2 \approx 1$, obtemos que

$$\rho_{+ + - +} = 0.081 - 0.005i, \quad (\text{D.35})$$

$$\rho_{- + + +} = 0.081 + 0.005i, \quad (\text{D.36})$$

$$\rho_{+ - - -} = 0.097 + 0.008i, \quad (\text{D.37})$$

$$\rho_{- - + -} = 0.097 - 0.008i, \quad (\text{D.38})$$

$$\rho_{+ + + -} = 0.083 - 0.004i, \quad (\text{D.39})$$

$$\rho_{+-++} = 0.083 - 0.004i, \quad (\text{D.40})$$

$$\rho_{-+--} = 0.096 + 0.006i, \quad (\text{D.41})$$

e que

$$\rho_{--++} = 0.096 - 0.006i. \quad (\text{D.42})$$

Determinando o resto dos coeficientes do operador densidade ρ

Para determinar os últimos quatro coeficientes ,precisamos antes calcular a diagonal de mais 4 operadores densidades:

$$\rho(\eta; \eta), \rho(\eta + \frac{\pi}{2}; \eta), \rho(\eta; \eta + \frac{\pi}{2}) \text{ e } \rho(\eta + \frac{\pi}{2}; \eta + \frac{\pi}{2}).$$

Diagonal de $\tilde{\rho}(\eta; \eta)$

Pega-se primeiro os pontos $x1_{-\frac{\pi}{2}}$ e $x1_{\frac{\pi}{2}}$ no padrão em que o detector 2 estava em $x2_{-\frac{\pi}{2}}$. Em seguida, pega-se os mesmos valores de x1 mas agora no padrão de interferência no qual o detector 2 estava em $x2_{\frac{\pi}{2}}$. Obtemos, então que

$$\rho_{++++}(\eta; \eta) = \frac{72}{179} = 0,402, \quad (\text{D.43})$$

$$\rho_{+--+}(\eta; \eta) = \frac{18}{179} = 0,1, \quad (\text{D.44})$$

$$\rho_{-+++}(\eta; \eta) = \frac{16}{179} = 0,09, \quad (\text{D.45})$$

e que

$$\rho_{----}(\eta; \eta) = \frac{73}{179} = 0,408. \quad (\text{D.46})$$

“+” aqui quer dizer que o fóton estava no estado definido por η e “-” quer dizer que o estado do fóton selecionado foi o ortogonal, definido por $\eta + \pi$.

Diagonal de $\tilde{\rho}(\eta + \frac{\pi}{2}; \eta + \frac{\pi}{2})$

Pega-se primeiro os pontos $x1_0$ e $x1_\pi$ no padrão em que o detector 2 estava em $x2_0$. Em seguida, pega-se os mesmos valores de $x1$ mas agora no padrão de interferência no qual o detector 2 estava em $x2_\pi$. Obtemos, então, que

$$\rho_{++++}(\eta + \frac{\pi}{2}; \eta + \frac{\pi}{2}) = \frac{122}{164,5} = 0,741, \quad (\text{D.47})$$

$$\rho_{+--+}(\eta + \frac{\pi}{2}; \eta + \frac{\pi}{2}) = \frac{4}{164,5} = 0,024, \quad (\text{D.48})$$

$$\rho_{-++-}(\eta + \frac{\pi}{2}; \eta + \frac{\pi}{2}) = \frac{2,5}{164,5} = 0,015, \quad (\text{D.49})$$

e que

$$\rho_{----}(\eta + \frac{\pi}{2}; \eta + \frac{\pi}{2}) = \frac{36}{164,5} = 0,22. \quad (\text{D.50})$$

Diagonal de $\tilde{\rho}(\eta; \eta + \frac{\pi}{2})$

Pega-se primeiro os pontos $x1_{-\frac{\pi}{2}}$ e $x1_{\frac{\pi}{2}}$ no padrão em que o detector 2 estava em $x2_0$. Em seguida, pega-se os mesmos valores de $x1$ mas agora no padrão de interferência no qual o detector 2 estava em $x2_\pi$. Obtemos, então, que

$$\rho_{++++}(\eta; \eta + \frac{\pi}{2}) = \frac{70,5}{172,5} = 0,41, \quad (\text{D.51})$$

$$\rho_{+--+}(\eta; \eta + \frac{\pi}{2}) = \frac{12}{172,5} = 0,07, \quad (\text{D.52})$$

$$\rho_{-++-}(\eta; \eta + \frac{\pi}{2}) = \frac{63}{172,5} = 0,365, \quad (\text{D.53})$$

e que

$$\rho_{----}(\eta; \eta + \frac{\pi}{2}) = \frac{27}{172,5} = 0,155. \quad (\text{D.54})$$

Diagonal de $\tilde{\rho}(\eta + \frac{\pi}{2}; \eta)$

Pega-se primeiro os pontos $x1_0$ e $x1_\pi$ no padrão em que o detector 2 estava em $x2_{-\frac{\pi}{2}}$. Em seguida, pega-se os mesmos valores de $x1$ as agora no padrão de interferência no qual o detector 2 estava em $x2_{\frac{\pi}{2}}$. Obtemos, então, que

$$\rho_{++++}(\eta + \frac{\pi}{2}; \eta) = \frac{71,5}{176} = 0,41, \quad (\text{D.55})$$

$$\rho_{+--+}(\eta + \frac{\pi}{2}; \eta) = \frac{70}{176} = 0,40, \quad (\text{D.56})$$

$$\rho_{-++-}(\eta + \frac{\pi}{2}; \eta) = \frac{13,5}{176} = 0,07, \quad (\text{D.57})$$

e que

$$\rho_{----}(\eta + \frac{\pi}{2}; \eta) = \frac{21}{176} = 0,12. \quad (\text{D.58})$$

O Operador Densidade Final

Usando-se estas diagonais e calculando o valor das funções A, obtemos o restante dos coeficientes. A forma final do operador densidade é

$$\rho = \begin{bmatrix} 0.042 & 0.083 + 0.004i & 0.081 + 0.005i & -0.129 + 0.062i \\ 0.083 - 0.004i & 0.468 & 0.444 - 0.058i & 0.097 - 0.008i \\ 0.081 - 0.005i & 0.444 + 0.058i & 0.462 & 0.096 - 0.006i \\ -0.129 - 0.062i & 0.097 + 0.008i & 0.096 + 0.006i & 0.028 \end{bmatrix}.$$

Obtendo os estado dos braços do interferômetro

Queremos agora escrever este operador densidade como sendo

$$\rho = A|\Psi_1\rangle\langle\Phi_1| + B|\Psi_2\rangle\langle\Phi_2|, \quad (\text{D.59})$$

onde

$$|\Phi_1\rangle = \alpha_1|++\rangle + \alpha_2|+-\rangle + \alpha_3|-+\rangle + \alpha_4|--\rangle, \quad (\text{D.60})$$

represente um estado maximamente emaranhado e

$$|\Phi_2\rangle = \beta_1|++\rangle + \beta_2|+-\rangle + \beta_3|-+\rangle + \beta_4|--\rangle, \quad (\text{D.61})$$

represente um estado parcialmente emaranhado.

A primeira coisa que temos de determinar, então, são os valores de A e B. O valor de $A = 0.87$ e $B = 0.13$ parece satisfatório porque teremos que

$$|\alpha_1|^2 = 0.005633, \quad (\text{D.62})$$

$$|\alpha_2|^2 = 0.500574, \quad (\text{D.63})$$

$$|\alpha_3|^2 = 0.493678, \quad (\text{D.64})$$

$$|\alpha_4|^2 = 0.000115, \quad (\text{D.65})$$

e também que

$$|\beta_1|^2 = 0.27, \quad (\text{D.66})$$

$$|\beta_2|^2 = 0.23, \quad (\text{D.67})$$

$$|\beta_3|^2 = 0.25, \quad (\text{D.68})$$

$$|\beta_4|^2 = 0.25. \quad (\text{D.69})$$

Agora queremos encontrar os coeficientes α e β . Para isso escrevemos que

$$\alpha_j = x_j + y_j i, \quad (\text{D.70})$$

e que

$$\beta_j = z_j + w_j i. \quad (\text{D.71})$$

Caímos então em um sistema de 12 equações não lineares e 16 variáveis. Estas equações são obtidas diretamente da equação (D.59). Elas têm a seguinte forma geral

Da Parte Real de ρ_{+-++} temos que

$$0.87(x_1 x_2 + y_1 y_2) + 0.13(z_1 z_2 + w_1 w_2) = 0.083, \quad (\text{D.72})$$

e da parte imaginária de ρ_{+-++} que

$$0.87(-x_1y_2 + y_1x_2) + 0.13(-z_1w_2 + w_1z_2) = 0.004. \quad (\text{D.73})$$

Para resolver o sistema temos ainda de considerar as equações de módulo dadas anteriormente. Uma outra condição deve ser satisfeita para que os estados sejam aproximadamente maximamente e parcialmente emaranhados. Devemos ter que as fases de certos coeficientes sejam iguais.

O mathcad consegue resolver este sistema aproximadamente dando o menor erro possível em cima de x_1 e z_1 . As demais variáveis são quase exatas.

O resultados dos coeficientes x_i , y_i , z_i e w_i dão os seguintes estados como consequência das soluções do sistema

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle_1 = & 0.077e^{i\phi_1}|++\rangle + 0.704e^{i\phi_2}|+-\rangle \\ & + 0.699e^{i\phi_2}|-+\rangle + 0.099e^{i\phi_3}|--\rangle, \end{aligned} \quad (\text{D.74})$$

que foi determinado com um erro de 4%. Este estado é aproximadamente um estado maximamente emaranhado, pois, temos que $\phi_1 \simeq \phi_2 \simeq \phi_3 \approx 4.2$.

O estado $|\Phi_2\rangle$ é

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle_2 = & 0.514|++\rangle + 0.502e^{i\theta}|+-\rangle \\ & + 0.501e^{i\theta}|-+\rangle + 0.483|--\rangle, \end{aligned} \quad (\text{D.75})$$

determinado com um erro de 0.5%. Este estado representa um estado parcialmente emaranhado. O valor de θ é 0.07.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, *Physical Review* **47**, 777-780 (1935).
- [2] D. Bohm, *Quantum Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 614 (1951).
- [3] D. Bohm, *A suggested interpretation of quantum theory in terms of "hidden" variables. I*, *Physical Review* **85**, 166 (1952); *A suggested interpretation of quantum theory in terms of "hidden" variables. II*, *Physical Review* **85**, 180 (1952).
- [4] J. S. Bell, *On the Einstein-Podolski-Rosen paradox*, *Physics* **1**, 195-200 (1964).
- [5] J. F. Clauser and M. A. Horne, *Experimental Consequences of Objective Local Theories*, *Physical Review D* **10**, 526-535 (1974).
- [6] S. J. Freedman and J. F. Clauser, *Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories*, *Physical Review Letters* **28**, 938-941 (1972).
- [7] E. S. Fry and R. C. Thompson, *Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories*, *Physical Review Letters* **37**, 465 (1976).
- [8] J. F. Clauser and A. Shimony, *Rep. Prog. Phys.* **41**, 1881 (1978).
- [9] A. Aspect, P. Grangier and G. Roger, *Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem*, *Physical Review Letters* **47**, 460-463 (1981).
- [10] J. D. Franson, *Bell inequality for position and time*, *Physical Review Letters* **62**, 2205-2208 (1989).

- [11] David C. Burnham and Donald L. Weinberg, *Observation of Simultaneity in Parametric Production of Optical Photon Pairs*, *Physical Review Letters* **25**, 84-87 (1970).
- [12] Y. H. Shih and C. O. Alley, *New type of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm experiment using pairs of light quanta produced by optical parametric down conversion*, *Physical Review Letters* **61**, 2921-2924 (1988).
- [13] N. Boeuf *et al.*, *Calculating Characteristics of Non-collinear Phase-matching in Uniaxial and Biaxial Crystals*, <http://physics.nist.gov/Divisions/Div844/facilities/cprad/cprad.htm>.
- [14] P. G. Kwiat, E. Waks, A. G. White, I. Appelbaum and P. H. Eberhard, *Ultrabright source of polarization-entangled photons*, *Physical Review A* **60**, R773-R776 (1999).
- [15] Z. Y. Ou and L. Mandel, *Violation of Bell's inequality and classical probability in a twophoton correlation experiment*, *Physical Review Letters* **61**, 50-53 (1988).
- [16] P. G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter and A. Zeilinger, *New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs*, *Physical Review Letters* **75**, 4337-4341 (1995).
- [17] A. Vaziri, G. Weihs and A. Zeilinger, *Experimental two-photon, three-dimensional entanglement for quantum communication*, *Physical Review Letters* **89**, 240401 (2002).
- [18] D. N. Klyshko, *Transverse photon bunching and two-photon processes in the field of parametrically scattered light*, *Zh. Ekso. Teor. Fiz.* **83**, 1313 (1982) [*Sov. Phys. JETP* **56**, 753-759 (1982)].
- [19] T. P. Grayson and G. A. Barbosa, *Spatial properties of spontaneous parametric down-conversion and their effect on induced coherence without induced emission*, *Physical Review A* **49**, 2948-2961 (1994).
- [20] M. H. Rubin, *Transverse correlation in optical spontaneous parametric down-conversion*, *Physical Review A* **54**, 5349-5360 (1996).

- [21] C. K. Law and J. H. Eberly, *Analysis and interpretation of high transverse entanglement in optical parametric down-conversion*, *Physical Review Letters* **92**, 127903 (2004).
- [22] P. H. S. Ribeiro, C. H. Monken and G. A. Barbosa, *Measurement of coherence area in parametric downconversion luminescence*, *Applied Optics* **33**, 352-355 (1994).
- [23] E. J. S. Fonseca, G. A. Barbosa, C. H. Monken and S. Pádua, *Transverse coherence length of down-converted light in the two-photon state*, *Physical Review A* **59**, 1608-1614 (1999).
- [24] J. Brendel, N. Gisin, W. Tittel and H. Zbinden, *Pulsed energy-time entangled twin photon source for quantum communication*, *Physical Review Letters* **82**, 2594-2597 (1999).
- [25] M. N. O'Sullivan-Hale, I. A. Khan, R. W. Boyd and J. C. Howell, *Pixel entanglement: Experimental realization of optically entangled $d = 3$ and $d = 6$ qudits*, *Physical Review Letters* **94**, 220501 (2005).
- [26] Leonardo Neves, G. Lima, J. G. A. Gómez, C. H. Monken, C. Saavedra and S. Pádua, *Generation of entangled states of qudits using twin photons*, *Physical Review Letters* **94**, 100501 (2005).
- [27] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge, (2000).
- [28] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres and W. Wothers, *Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels*, *Physical Review Letters* **70**, 1895-1899 (1993).
- [29] D. Boschi, S. Branca, F. De Martini, L. Hardy and S. Popescu, *Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels*, *Physical Review Letters* **80**, 1121-1125 (1998).
- [30] D. Bouwmeester, J. W. Pan, K. Mattle, H. Weinfurter and A. Zeilinger, *Experimental quantum teleportation*, *Nature* **390**, 575-579 (1997).

- [31] C. H. Bennett and S. J. Wiesner, *Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolski-Rosen states*, *Physical Review Letters* **69**, 2881-2884 (1992).
- [32] A. K. Ekert, *Quantum cryptography based on Bell's theorem*, *Physical Review Letters* **67**, 661-663 (1991).
- [33] G. Lima, Leonardo Neves, Ivan F. Santos, J. G. Aguirre Gómez, C. Saavedra and S. Pádua, *Propagation of spatially entangled qudits through the free space*, *Physical Review A* **73**, 032340 (2006).
- [34] K. Blum, *Density Matrix Theory and Applications*, Plenum Press, New York (1981).
- [35] U. Leonhardt, *Measuring the Quantum State of Light*, Cambridge University Press, Cambridge (1997).
- [36] J. G. Rarity and P. R. Tapster, *Experimental violation of Bell's inequality based on phase and momentum*, *Physical Review Letters* **64**, 2495-2498 (1990).
- [37] N. Gisin, *Bell's inequality holds for all non-product states*, *Physics Letters A* **154**, 201-202 (1991).
- [38] V. Vedral, M. B. Plenio, M. A. Rippin e P. L. Knight, *Quantifying entanglement*, *Physical Review Letters* **78**, 2275-2279 (1997).
- [39] S. Popescu and D. Rohrlich, *Thermodynamics and the measure of entanglement*, *Physical Review A* **56**, R3319-R3321 (1997).
- [40] W. K. Wootters, *Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits*, *Physical Review Letters* **80**, 2245-2248 (1998).
- [41] A. F. Abouraddy, B. E. A. Saleh, A. V. Sergienko and M. C. Teich, *Degree of entanglement for two qubits*, *Physical Review A* **64**, 050101R (2001).
- [42] D. Collins, N. Gisin, N. Linden, S. Massar and S. Popescu, *Bell inequalities for arbitrarily high-dimensional systems*, *Physical Review Letters* **88**, 040404 (2002).

- [43] B. S. Cirel'son, *Quantum generalizations of Bell's inequality*, *Letters in Mathematical Physics* **4**, 93-100 (1980).
- [44] Gilcione Nonato Costa, *A transformada de Fourier*, Publicação interna, Dept. de Matemática-UFMG (1999).
- [45] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill, Inc., New York, NY, (1996).
- [46] C. H. Monken, *Teoria da Difração Através da Óptica de Fourier*, Publicação interna, Dept. de Física-UFMG (1998).
- [47] C. H. Monken, *Transferência de Espectro Angular na Conversão Paramétrica Descendente*, Publicação interna, Dept. de Física-UFMG (2002).
- [48] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloë, *Quantum Mechanics*, Hermann, Paris, (1977).
- [49] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Massachusetts, (1994).
- [50] R. F. Werner, *Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model*, *Physical Review A* **40**, 4277-4281 (1989).
- [51] C. H. Monken, P. H. S. Ribeiro and S. Pádua, *Transfer of angular spectrum and image formation in spontaneous parametric down-conversion*, *Physical Review A* **57**, 3123-3126 (1998).
- [52] E. J. S. Fonseca, Z. Paulini, P. Nussensweig, C. H. Monken and S. Pádua, *Nonlocal de Broglie wavelength of a two-photon system*, *Physical Review A* **56**, 191-196 (2001).
- [53] W. A. T. Nogueira, S. P. Walborn, S. Pádua and C. H. Monken, *Experimental observation of spatial antibunching of photons*, *Physical Review Letters* **86**, 4009-4012 (2001).
- [54] W. A. T. Nogueira, S. P. Walborn, S. Pádua and C. H. Monken, *Spatial antibunching of photons with parametric down-conversion*, *Physical Review A* **66**, 053810 (2002).

- [55] I. F. Santos, M. A. Sagiuro, C. H. Monken and S. Pádua, *Resolution and apodization in images generated by twin photons*, *Physical Review A* **67**, 033812 (2003).
- [56] I. F. Santos, L. Neves, G. Lima, C. H. Monken and S. Pádua, *Generation and detection of magnified images via illumination by entangled photon pairs*, *Physical Review A* **72**, 033802 (2005).
- [57] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge (1997).
- [58] L. Mandel e E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge, (1995).
- [59] Valerio Scarani, N. Gisin, Nicolas Brunner, Lluís Masanes, Sergi Pino, and Antonio Acín, *Secrecy extraction from no-signalling correlations*, quant-ph/0606197.
- [60] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel, and H. Zbinden, *Quantum cryptography*, *Review of Modern Physics* **74**, 145 (2002).
- [61] C. H. Bennett and G. Brassard, *Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing*, *Proceedings of IEEE Conference on Computers, Systems, and Signal Processing*, p. 175 (IEEE, New York, 1984).
- [62] D. Kaszlikowski, P. Gnaniński, M. Żukowski, W. Miklaszewski and A. Zeilinger, *Violations of local realism by two entangled N-dimensional systems are stronger than for two qubits*, *Physical Review Letters* **85**, 4418-4421 (2000).
- [63] T. Durt, N. J. Cerf, N. Gisin and M. Żukowski, *Security of quantum key distribution with entangled qutrits*, *Physical Review A* **67**, 012311 (2003).
- [64] J. C. Howell, A. L. Linares and D. Bouwmeester, *Experimental violation of a spin-1 Bell inequality using maximally entangled four-photon states*, *Physical Review Letters* **88**, 030401 (2002).
- [65] A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs and A. Zeilinger, *Entanglement of the orbital angular momentum states of photons*, *Nature* **412**, 313-316 (2001).

- [66] X. F. Ren, G. P. Guo, Bo Yu, J. Li and G. C. Guo, *The orbital angular momentum of down-converted photons*, *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* **6**, 243-247 (2004).
- [67] R. T. Thew, A. Acín, H. Zbinden and N. Gisin, *Bell-Type Test for Energy-Time Entangled Qutrits*, *Physical Review Letters* **93**, 010503 (2004).
- [68] Leonardo Neves, *Estudo do emaranhamento em experimentos de interferência de Young com dois fótons*, Dissertação de Mestrado, Dept de Física-UFMG (2002).
- [69] Leonardo Neves, S. Pádua and C. Saavedra, *Controlled generation of maximally entangled qudits using twin photons*, *Physical Review A* **69**, 042305 (2004).
- [70] A. F. Abouraddy, B. E. Saleh, A. V. Sergienko and M. C. Teich, *Role of Entanglement in Two-Photon Imaging*, *Physical Review Letters* **87**, 123602 (2002).
- [71] D. M. Greenberger, M. A. Horne and A. Zeilinger, *Multipartite interferometry and the superposition principle*, *Physics Today* **46**, 22-29 (1993).
- [72] E. J. S. Fonseca, J. C. M. da Silva, C. H. Monken and S. Pádua, *Controlling two-particle conditional interference*, *Physical Review A* **61**, 023801 (2000).
- [73] W. Tittel, J. Brendel, B. Gisin, T. Herzog, H. Zbinden and N. Gisin, *Experimental demonstration of quantum correlations over more than 10 km*, *Physical Review A* **57**, 3229-3232 (1998).
- [74] M. Aspelmeyer, H. R. Böhm, T. Gyatso, T. Jennewein, R. Kaltenbaek, M. Lindenthal, G. M.-Terriza, A. Poppe, K. Resch, M. Taraba, R. Ursin, P. Walther and A. Zeilinger, *Long-distance free-space distribution of quantum entanglement*, *Science* **301**, 621-623 (2003).
- [75] W. Tittel, H. Zbinden, M. Legré and N. Gisin, *Distribution of Time-Bin Entangled Qubits over 50 km of Optical Fiber*, *Physical Review A* **93**, 180502 (2004).

- [76] K.J. Resch *et al.*, *Distributing entanglement and single photons through an intra-city, free space quantum channel*, *Physical Review A Opt. Express* **13**, 202 (2005).
- [77] E. Waks, A. Zeevi and Y. Yamamoto, *Security quantum key distribution with entangled photons against individual attacks*, *Physical Review A* **65**, 052310 (2002).
- [78] A. Bayat, V. Karimipour and I. Marvian, *Efficiency of transmission of EPR pairs*, quant-ph/0504177.
- [79] S. Wallentowitz and W. Vogel, *Reconstruction of the Quantum Mechanical State of a Trapped Ion*, *Physical Review Letters* **75**, 2932 (1996).
- [80] T. J. Dunn, I. A. Walmsley and S. Mukamel, *Experimental Determination of the Quantum Mechanical State of a Molecular Vibrational Mode Using Fluorescence Tomography*, *Physical Review Letters* **74**, 884 (1995).
- [81] K. Vögel e H. Rinsken, *Determination of quasiprobability distribution in terms of probability distributions for the rotated quadrature phase*, *Physical Review A* **40**, 2847-2849 (1989).
- [82] D. T. Smithey, M. Beck and M. G. Raymer, *Measurement of the Wigner Distribution and the Density Matrix of a Light Mode Using Optical Homodyne Tomography: Application to Squeezes States and the Vacuum*, *Physical Review Letters* **70**, 1244 (1993).
- [83] H. Kuhn, D. G. Welsch and W. Vogel, *Reconstruction of the quantum state of a multimode light*, *Physical Review A* **51**, 4240 (1995).
- [84] A. G. White, D. F. V. James, P. H. Eberhard and P. G. Kwiat, *Non-maximally Entangled States: Production, Characterization, and Utilization*, *Physical Review Letters* **83**, 3103 (1999).
- [85] Z. Hradil, *Quantum-state estimation*, *Physical Review A* **55**, R1561 (1997).
- [86] D. F. V. James, P. G. Kwiat, W. J. Munro e A. G. White, *Measurement of qubits*, *Physical Review A* **64**, 052312 (2001).

- [87] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony and R. A. Holt, *Proposed experiment to test local hidden-variable theories*, *Physical Review Letters* **23**, 880-884 (1969).
- [88] Emílio Santos, *Bell's theorem and the experiments: Increasing empirical support to local realism?*, quant-ph/0410193.
- [89] M. A. Horne, A. Shimony and A. Zeilinger, *Two-particle interferometry*, *Physical Review Letters* **62**, 2209-2212 (1989).