A regularização no Efeito Casimir em placas paralelas

Norberto Akio Kawakami

fevereiro de 2007

A regularização no Efeito Casimir em placas paralelas

Norberto Akio Kawakami

Orientadora: Prof^{a}. Maria Carolina Nemes

Co-orientador: Prof. Walter F. Wreszinski

Dissertação apresentada à UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, como requisito parcial para a obtenção do grau de mestre em Física.

fevereiro de 2007

À Nalu Aline, minha querida esposa
que muito me apoiou.

Agradecimentos

Gostaria, neste momento de expressar meus sinceros agradecimentos:

À Nalu, minha amada esposa, pela paciência e compreensão por eu ter dedicado parte de seu tempo para a Física.

Ao Tariq, meu filho, que me ensinou que a vida é um eterno aprendizado, ainda mais se este é feito com alegria e diversão.

À Namie, minha mãe que com sua quase infindável paciência me mostrou a importância da construção e coerência de meus próprios valores.

Para estas três primeiras pessoas, a minha esperança é que o tempo e o esforço dispendidos nesta dissertação venham de algum modo enriquecer-lhes a vida, talvez com alegria e orgulho, como uma pequena e singela forma de compensação.

À Profª Maria Carolina Nemes que me aceitou como seu orientando, pelas enormes oportunidades de aprendizado, pelo tema da minha dissertação e pelo exemplo de dedicação à ciência que espero alcançar algum dia.

Ao Prof. Walter F. Wreszinski que me mostrou por onde passam alguns meandros da pesquisa científica e por ter me acolhido tão bem em seu escritório no Instituto de Física da USP onde tivemos conversas tão produtivas quanto agradáveis.

Ao Prof. Marcos Donizete Rodrigues Sampaio por ter compartilhado idéias que serviram como fonte de inspiração.

À Profª Ariete Righi cujas dicas foram essenciais para que eu pudesse ingressar na pós-graduação da física na UFMG.

Ao Rodrigo, Lívio, Leonardo, Marcone, Euclides, Kelly, Esdras, Geraldo, enfim, aos companheiros de graduação pelas nossas conversas nos intervalos entre as aulas e durante alguns goles no buteco.

Ao Leozin (também conhecido como Leonardo Antônio), Magneto (também conhecido como Carlos Renato), Júlia, Clarissa, Raphael, Agnaldo, André, Maurisan, Irismar, Jonathan, Guilherme Jean, Joice, José Geraldo, enfim, aos colegas do mestrado e doutorado, pelo apoio, amizade e com quem tive o prazer de conversar.

À FAPEMIG pelo apoio financeiro durante os meses em que durou o mestrado.

Por fim, agradeço a todos a quem conheci e que de uma forma direta ou indireta contribuíram para que eu chegasse aqui.

Resumo

Neste trabalho estudaremos a dependência do regularizador (ou cutoff) no cálculo do efeito Casimir em placas paralelas perfeitamente condutoras em um campo escalar sem massa. Para tanto, utilizaremos como suporte teórico a Eletrodinâmica Quântica desenvolvida por G. Scharf e ainda, algumas ferramentas matemáticas para tratar séries divergentes. Mostramos que o resultado da energia de Casimir não depende do regularizador para uma classe geral de funções regularizadoras e identificamos que as divergências que ocorrem nestes cálculos são termos de superfície. Foi possível tratar tais divergências utilizando-se a regularização de Hadamard e a associamos, neste caso, como uma forma analítica de uma condição de contorno em Teoria Quântica de Campos.

Abstract

In this work we study the regularization (or cutoff) dependence on the Casimir effect of perfect conducting parallel plates in a massless scalar field. We use the framework of Quantum Electrodynamics developed by G. Scharf and some mathematical tools related to the divergent series. We show the regularization independence of the Casimir energy for a large class of regularizing functions and also, we show that counterterms previously introduced by other authors correspond to divergencies coming from surface terms. We use Hadamard regularization to deal with them and associate it to an analytical form of a boundary condition in QFT.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

"A meio caminho entre a fé e a crítica está a estalagem da razão. A razão é a fé no que se pode compreender sem fé; mas é uma fé ainda, porque compreender envolve supor que há qualquer coisa compreensível."

Fernando Pessoa

Em geral, podemos definir o efeito Casimir como um efeito que surge quando colocamos alguma condição de contorno de modo a confinar algum campo quântico em um volume finito no espaço. Assim, as condições de contorno restrigem os modos possíveis que o campo pode assumir fazendo surgir forças mensuráveis que podem ser calculadas de alguma forma.

No caso das placas paralelas, a força atrativa que age entre duas placas paralelas condutoras e sem carga foi inicialmente prevista por Hendrik Casimir [1] em 1948 e confirmado experimentalmente por Spaarnay [2] e mais recentemente por Lamoreaux [3] e por Erdeth [4].

Existem vários meios de calcular o efeito Casimir [5], todas resultando o mesmo valor, o que de uma certa forma nos faz lembrar do artigo "*The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*" de Wigner [6], pois é surpreendente que métodos matematicamente diversos entre si possam apresentar o mesmo resultado.

Ainda que experimentalmente tenha sido confirmado, há recentemente alguns pesquisadores que apontam problemas teóricos quanto a certas prescrições no cálculo da energia de Casimir. Alguns exemplos que podemos destacar são Hagen [7], onde indica que ela é geralmente dependente do cutoff e que não é confiável, mesmo utilizando a prescrição usual da subtração entre as energias resultantes do vácuo, com e sem as condições de contorno; Jaffe [8], onde propõe que a pressão de Casimir não pode ser definida independentemente das propriedades dinâmicas do material que compõe a condição de contorno; e Dietz [9], onde propõe uma regularização que seja dependente do material, mas cujo resultado final pode resultar independente deste.

No presente trabalho desenvolvemos as idéias apresentadas pelo prof. Wreszinski ao longo de diversos artigos ([10], [11], [12] e [13]) sobre o efeito Casimir e a partir de onde pudemos dar alguns passos além ao demonstrarmos a independência do cutoff no cálculo da energia de Casimir para uma classe geral de regularizadores e ao mostrarmos a utilização da regularização de Hadamard como uma forma de eliminar as divergências dos termos de superfície no caso das placas paralelas.

Nas páginas que se seguem, veremos no capítulo 2 os passos necessários para se alcançar a quantização do campo de radiação, inclusive abordando a relatividade, as transformações de calibre e a segunda quantização no espaço de Fock.

No capítulo 3, basicamente, é a obtenção da expressão para a densidade Hamiltoniana do campo de radiação quantizado na configuração do vácuo com as placas paralelas a uma distância d.

No capítulo 4 veremos como o regularizador pode atuar no cálculo da energia de Casimir de modo que o resultado deste fique independente do cutoff. Conseguimos, também, identificar as divergências que ocorrem durante os cálculos desta e mostrar como é possível entender a regularização.

No capítulo 5 terminamos a dissertação com uma discussão sobre os resultados obtidos e a conclusão sobre este trabalho.

Capítulo 2

Quantização do Campo de Radiação

"Natura abhorret vacuum"

Aristóteles

Para estudar o efeito Casimir em um campo escalar sem massa, inicialmente tem-se que quantizar o campo de radiação eletromagnética que envolve as placas no vácuo.

Entretanto, existem vários modos de fazê-lo. O que é adotado nesta dissertação é aquela feita por G. Scharf [16] onde ele impõe a covariança de Lorentz na regra de comutação entre os operadores de criação e aniquilação deste campo.

Mas antes de chegar a este ponto, alguns passos são necessários.

2.1 Relatividade

2.1.1 Transformações de Lorentz

As transformações de Lorentz são transformações entre referenciais inerciais de um evento no espaço-tempo de Minkowski, onde $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = x^\mu \in \mathbb{R}^4$. Como é de praxe, quando um índice é identificado por uma letra latina (i, j, k, ...) nos referimos apenas às coordenadas espaciais ($x^1 = x$, $x^2 = y$ e $x^3 = z$) onde o evento ocorre e quando ele é identificado por um índice grego (μ, ν, α, ...), está-se incluindo, além das espaciais, a coordenada temporal $x^0 = ct$ que é quando o evento ocorre. A velocidade da luz c é introduzida nesta coordenada de modo que tenhamos as mesmas dimensões em todas as componentes.

Ao especificarmos a posição $\vec{x}$ de um objeto como uma função do tempo, estaremos definindo uma curva em $\mathbb{R}^4$. No caso específico da luz, se um feixe parte da origem, temos

$$c^2t^2 - |\vec{x}|^2 = 0 \tag{2.1.1}$$

que define os cones de luz para o passado em $t < 0$ e para o futuro em $t > 0$.

As transformações de Lorentz são tais que mantêm invariante a expressão

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2. \tag{2.1.2}$$

Isto significa que um observador no referencial K e outro no referencial $K^{'}$ obtêm o mesmo resultado para s^2, ou seja,

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^{'0})^2 - (x^{'1})^2 - (x^{'2})^2 - (x^{'3})^2. \tag{2.1.3}$$

Sabendo-se que as componentes covariantes e contravariantes são relacionadas entre si através de

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu \;\text{ ou }\; x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu \tag{2.1.4}$$

onde $g_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu}$, denominados de *tensor de métrica*, dados por

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.1.5}$$

podemos escrever (2.1.3) na forma

$$g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = g_{\alpha\beta}x'^\alpha x'^\beta \tag{2.1.6}$$

onde utilizamos a convenção de Einstein, ou seja, a somatória é feita nos índices repetidos.

Assim, quaisquer transformações do tipo

$$x'^{\mu} = a^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \tag{2.1.7}$$

e que obedeçam a (2.1.6) são denominadas de transformações de Lorentz.

As transformações com que estamos mais acostumados, são mais simples pois consideramos que os referenciais inerciais K e $K^{'}$ têm seus eixos de coordenadas paralelos e que o movimento se dá na direção do eixo x com velocidade v, sendo que em $t = t^{'} = 0$ as origens de ambos referenciais coincidem. Neste caso, na equação (2.1.7), o tensor que fará a transformação das coordenadas entre um referencial e outro é

$$a^{\mu}_{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.1.8}$$

onde

$$\gamma = \left(1 - \beta^{2}\right)^{-1/2} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Neste caso, então, temos que as coordenadas contravariantes se transformam

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \tag{2.1.9}$$

o que nos possibilita encontrar a transformação de coordenadas covariantes, usando (2.1.4), de modo que

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} g^{\nu\rho} x_{\rho} \tag{2.1.10}$$

e multiplicando por $g_{\mu\beta}$

$$g_{\mu\beta} x'^{\mu} = g_{\mu\beta} \Lambda^{\mu}_{\nu} g^{\nu\rho} x_{\rho} \tag{2.1.11}$$

obtemos

$$x'_{\beta} = g_{\mu\beta} \Lambda^{\mu}_{\nu} g^{\nu\rho} x_{\rho}. \tag{2.1.12}$$

Definindo

$$\lambda^{\rho}_{\beta} = g_{\mu\beta}\Lambda^{\mu}_{\nu}g^{\nu\rho} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.1.13}$$

temos que

$$x'_{\beta} = \lambda^{\rho}_{\beta}x_{\rho}. \tag{2.1.14}$$

Com a invariância de s^2 apresentada em (2.1.6), é possível obter uma relação entre os tensores λ e Λ, já que

$$\begin{aligned} x'_{\rho}x'^{\rho} &= x_{\nu}x^{\nu} \Rightarrow \\ \lambda^{\beta}_{\rho}x_{\beta}\Lambda^{\rho}_{\mu}x^{\mu} &= x_{\nu}x^{\nu} \Rightarrow \\ \lambda^{\beta}_{\rho}\Lambda^{\rho}_{\mu} &= \delta^{\beta}_{\mu}. \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

Enfim, o segundo postulado da relatividade diz que as leis físicas devem ser as mesmas em qualquer referencial inercial, ou seja, as leis devem ser covariantes por uma transformação de Lorentz. Exemplificando, se uma lei física pode ser descrita matematicamente como

$$T^{\mu\nu}A_{\nu} = B^{\mu}, \tag{2.1.16}$$

então

$$\begin{aligned} \Lambda^{\alpha}_{\mu}T^{\mu\nu}A_{\nu} &= \Lambda^{\alpha}_{\mu}B^{\mu} \Rightarrow \\ \Lambda^{\alpha}_{\mu}T^{\mu\nu}\delta^{\beta}_{\nu}A_{\beta} &= B'^{\alpha} \Rightarrow \\ \Lambda^{\alpha}_{\mu}T^{\mu\nu}\lambda^{\beta}_{\rho}\Lambda^{\rho}_{\nu}A_{\beta} &= B'^{\alpha} \Rightarrow \\ \Lambda^{\alpha}_{\mu}\Lambda^{\rho}_{\nu}T^{\mu\nu}\lambda^{\beta}_{\rho}A_{\beta} &= B'^{\alpha} \Rightarrow \\ T'^{\alpha\rho}A'_{\rho} &= B'^{\alpha}, \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

mostrando-nos que após a mudança de referencial inercial, a lei física mantém a mesma forma.

2.1.2 Ainda nas equações de Maxwell

As equações de Maxwell podem ser escritas na forma de 4-vetor como na relatividade. Iniciando com as definições

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \partial_{\mu} \equiv \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla\right) \text{ e} \tag{2.1.18}$$

$$j^{\mu} \equiv (c\rho, \vec{j}), \tag{2.1.19}$$

onde ρ é a densidade de cargas e $\vec{j}$ é a corrente, a equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0, \tag{2.1.20}$$

pode ser escrita do seguinte modo

$$\frac{\partial j^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = \partial_{\mu} j^{\mu} = 0. \tag{2.1.21}$$

Agora definindo

$$A^{\mu} \equiv (\phi, \vec{A}) \tag{2.1.22}$$

onde ϕ é o potencial escalar e $\vec{A}$ é o potencial vetor, podemos escrever as equações de onda dadas por

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \tag{2.1.23}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{J} \tag{2.1.24}$$

na forma

$$\nabla^2 A^{\mu} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A^{\mu}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} j^{\mu}. \tag{2.1.25}$$

Pode-se observar que

$$\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{(x^0)^2} = -g^{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} = \partial_{\mu}\partial^{\mu} \equiv \Box \tag{2.1.26}$$

conhecido como D'Alambertiano.

Assim (2.1.25) pode ser escrita como

$$\Box A^{\mu} = -\frac{4\pi}{c} j^{\mu} \qquad (2.1.27)$$

e a condição de Lorenz[1], que é dada por

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \qquad (2.1.28)$$

passa a ser escrita na forma

$$\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0, \text{ ou melhor } \quad \partial_{\mu} A^{\mu} = 0. \qquad (2.1.29)$$

Ao colocarmos as equações do eletromagnetismo na forma covariante, o que estamos dizendo é que estas equações são invariantes sob a transformação de Lorentz, o que significa que independem do referencial inercial adotado.

2.2 Transformações de calibre

As transformações de calibre são tais que mantêm os campos elétrico e magnético invariantes sob estas transformações. Para que o campo magnético e elétrico se mantenham invariantes, podemos fazer a transformação no potencial vetor, tal que

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Lambda \qquad (2.2.1)$$

e simultaneamente a transformação no potencial escalar

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t} \qquad (2.2.2)$$

2.2.1 Calibre de Lorenz

O calibre de Lorenz[2] é o calibre que obedece à condição

$$\partial_{\mu} A^{\mu} = 0, \qquad (2.2.3)$$

[1]Freqüentemente esta condição é erroneamente atribuída a Lorentz.

[2]Do mesmo modo que a condição de Lorenz, este calibre é erroneamente atribuído a Lorentz.

sendo que em uma transformação de calibre, implica que Λ deva obedecer à equação

$$\Box\Lambda = 0. \tag{2.2.4}$$

Este calibre é comumente utilizado pois obedece naturalmente às transformações de Lorentz, ou seja, ele é independente do sistema de coordenadas.

2.2.2 Calibre de Coulomb

Neste calibre, o potencial vetor deve obedecer

$$\partial_i A^i = 0. \tag{2.2.5}$$

Este calibre é bastante útil na eletrodinâmica quântica, já que a descrição quântica dos fótons necessita apenas da quantização do potencial vetor.

2.3 Segunda quantização no espaço de Fock

Quando trabalhamos na mecânica quântica, observamos que os estados que a partícula poderá ocupar representam um espaço de Hilbert.

Ao colocarmos diversas partículas, o que fazemos é um produto tensorial simétrico (no caso dos bósons) ou anti-simétrico (no caso dos férmions) dos espaços de Hilbert pertencentes à cada partícula.

Repetindo matematicamente, considerando n partículas idênticas, temos

$$\psi_n \in H^{\otimes n}, \tag{2.3.1}$$

onde $H^{\otimes n}$ é o produto tensorial dos espaços de Hilbert das n partículas e ψ_n são os estados que eles podem ocupar. A simetrização destes estados, para bósons é dada por

$$S_n^+ \psi_n = \frac{1}{n!} \sum_i \psi_n(x_{i1}, \cdots, x_{in}) \tag{2.3.2}$$

e para férmions é dada por

$$S_n^- \psi_n = \frac{1}{n!} \sum_i (-)^i \psi_n(x_{i1}, \cdots, x_{in}), \tag{2.3.3}$$

onde as somas percorrem todas as i permutações possíveis das n partículas[3]. O símbolo $(-)^i$ significa que para uma permutação i que corresponda a uma permutação cíclica (ou par) o valor é $+1$ e para uma permutação não-cíclica (ou ímpar) o valor é -1.

Com isto, pode-se dizer que o espaço de n partículas com significado físico deve ser tal que

$$H_n^{\pm} = S_n^{\pm} H^{\otimes n}. \tag{2.3.4}$$

Enfim, o espaço de Fock, que é utilizado para a descrição de estados simultâneos de múltiplas partículas, pode ser definido por

$$F^{\pm} \equiv \oplus_{n=0}^{\infty} H_n^{\pm}. \tag{2.3.5}$$

No caso em que não hajam partículas, $n = 0$, define-se um estado que é o estado do vácuo Ω tal que

$$H_0 = \alpha\Omega, \;\; \alpha \in \mathbb{C}. \tag{2.3.6}$$

Um elemento do espaço de Fock é, então, dado por

$$\Phi = (\phi_0, \; \phi_1, \; \cdots, \; \phi_n, \; \cdots) \; \in \; F, \tag{2.3.7}$$

que consiste da infinita sequência de estados ϕ, tal que

$$\phi_0 = \alpha\Omega, \;\; \phi_1 \in H_1, \;\; \cdots, \;\; \phi_n \in H_n^{\pm}, \;\; \cdots \tag{2.3.8}$$

Com isto podemos ver que o produto escalar no espaço de Fock é tal que

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \phi_n | \psi_n \rangle_{H_n}, \tag{2.3.9}$$

ou seja, a soma infinita dos produtos escalares dos vetores (que representam os estados das n partículas) do espaço de Hilbert H_n.

[3]Semelhante ao que conseguimos quando utilizamos o determinante de Slater.

Podemos definir um operador $\tilde{N}$ tal que

$$\left(\tilde{N}\Phi\right)_{H_n} = n\phi_n, \qquad (2.3.10)$$

ou seja, este operador aplicado a um estado do espaço de Fock retorna o número de partículas e em quais estados do espaço de Hilbert eles se encontram.

Os operadores que comutam com $\tilde{N}$, ou seja

$$\left[\tilde{A},\tilde{N}\right] = 0, \qquad (2.3.11)$$

não mudam a quantidade de partículas do estado de Fock.

Entretanto, e o que mais nos interessam, são os operadores que mudam a quantidade de partículas. O operador de criação pode ser definido de tal forma que quando aplicado em um estado do vácuo, gere um estado de uma partícula, ou seja

$$\tilde{a}(f)^{\dagger}\Omega = f \qquad \text{com } f \in H_1, \qquad (2.3.12)$$

e quando aplicado em um estado qualquer do espaço de Fock, temos

$$\left(\tilde{a}(f)^{\dagger}\Phi\right)_{H_n} = \sqrt{n}S_n^{\pm}\left(f \otimes \phi_{n-1}\right), \quad n = 1, 2, \cdots . \qquad (2.3.13)$$

Podemos fazer um mapeamento deste operador no espaço de Fock para o espaço de momentos, de forma que

$$\tilde{a}(f)^{\dagger} = \int d^3x \; \hat{a}(\vec{k})^{*}\hat{f}(\vec{k}). \qquad (2.3.14)$$

Os operadores de aniquilação, também podem ser definidos a partir do estado de vácuo. Assim

$$\tilde{a}(f)\Omega = 0 \qquad (2.3.15)$$

e da mesma forma,

$$\tilde{a}(f) = \int d^3x \; \hat{f}(\vec{k})^{*}\hat{a}(\vec{k}). \qquad (2.3.16)$$

2.4 A quantização do campo de radiação livre

Consideramos inicialmente o potencial vetor $A^\mu(x)$ como sendo o campo fundamental. Assim as equações de campo covariantes podem ser tais que

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0 \tag{2.4.1}$$

para a condição de Lorenz e

$$\Box A^\mu(x) = 0 \tag{2.4.2}$$

para a equação de onda.

No calibre de Coulomb e sem fontes, são satisfeitas as equações

$$A^0 = 0 \tag{2.4.3}$$

e

$$\partial_i A^i = 0 \tag{2.4.4}$$

onde (2.4.4) pode ser escrito de uma forma tal que os campos sejam transversais, ou seja,

$$\vec{k} \cdot \vec{A}(t, \vec{k}) = 0, \tag{2.4.5}$$

significando que não há fótons longitudinais, nem fótons temporais (devido a (2.4.3)) neste calibre.

Quantizando $A^\mu(x)$ como campos escalares reais, temos

$$A^\mu(t, \vec{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} \left(a^\mu(\vec{k}) e^{-i\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)} + a^\mu(\vec{k})^* e^{i\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)} \right) \tag{2.4.6}$$

que consideramos como uma solução real da equação de onda (2.4.2) ao colocarmos o expoente $\vec{k} \cdot \vec{x}$ na forma covariante. Isto pode ser feito se definirmos que

$$\omega(\vec{k}) = \left|\vec{k}\right| \equiv k^0, \text{ com } c = 1.^4 \tag{2.4.7}$$

Com a quantização temos que $A^\mu(x)$ se torna um operador no espaço de

[4] A partir deste momento iremos considerar que $c = \hbar = 1$.

Fock tal que

$$A^\mu(t,f) = \int d^3x\ A^\mu(t,\vec{x}) f(\vec{x}) \tag{2.4.8}$$

onde $f(\vec{x})$ é uma função de teste.

No espaço dos momentos temos

$$\widehat{f}(\vec{k}) = (2\pi)^{3/2} \int d^3x\ f(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \text{ com } \widehat{f}(-\vec{k}) = \widehat{f}(\vec{k})^* \tag{2.4.9}$$

e consequentemente,

$$A^\mu(t,f) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} \left(a^\mu(\vec{k}) \widehat{f}(\vec{k})^* e^{-i\omega t} + a^\mu(\vec{k})^* \widehat{f}(\vec{k}) e^{i\omega t} \right). \tag{2.4.10}$$

Considerando

$$\tilde{a}^\mu(\widehat{f}) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} \widehat{f}(\vec{k})^* a^\mu(\vec{k}) \tag{2.4.11}$$

como sendo operadores no espaço de Fock dos fótons que obedecem as relações de comutação

$$\left[\tilde{a}^\mu(\widehat{f}), \tilde{a}^\nu(\widehat{g})\right] = 0, \tag{2.4.12a}$$

$$\left[\tilde{a}^\mu(\widehat{f})^\dagger, \tilde{a}^\nu(\widehat{g})^\dagger\right] = 0, \tag{2.4.12b}$$

$$\left[\tilde{a}^\mu(\widehat{f}), \tilde{a}^\nu(\widehat{g})^\dagger\right] = \delta^\mu_\nu \int \frac{d^3k}{2\omega} \widehat{f}(\vec{k})^* \widehat{g}(\vec{k}) \tag{2.4.12c}$$

ou de outro modo e respectivamente, no espaço dos momentos

$$\left[a^\mu(\vec{k}), a^\nu(\vec{k}')\right] = 0, \tag{2.4.13a}$$

$$\left[a^\mu(\vec{k})^\dagger, a^\nu(\vec{k}')^\dagger\right] = 0, \tag{2.4.13b}$$

$$\left[a^\mu(\vec{k}), a^\nu(\vec{k}')^\dagger\right] = \begin{cases} \delta(\vec{k}-\vec{k}') & \text{para} \quad \mu = \nu \\ 0 & \text{para} \quad \mu \neq \nu \end{cases} \tag{2.4.13c}$$

onde $a^{\mu\dagger}$ e a^μ são, respectivamente, os operadores de criação e aniquilação dos fótons.

Isto significa que as componentes do potencial vetor podem ser escritas na forma

$$A^\mu(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} \left(a^\mu(\vec{k}) e^{-ikx} + a^\mu(\vec{k})^\dagger e^{ikx} \right) \tag{2.4.14}$$

onde em kx, um produto escalar entre 4-vetores, omitimos os índices para não carregar a notação.

Podemos calcular[5] o comutador entre suas componentes utilizando (2.4.13) e (2.4.14). Assim temos

$$[A^\mu(x),\, A^\nu(y)] = \delta^\mu_\nu \frac{1}{i} D_0(x-y). \tag{2.4.15}$$

Neste ponto a quantização do campo feita por Scharf é diferente, pois o que se quer manter aqui é a covariança em (2.4.15). Para tanto, é necessário que se altere de modo *ad hoc*[6] a componente A^0 de A^μ. O que resulta em

$$A^0(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} \left(a^0(\vec{k}) e^{-ikx} - a^0(\vec{k})^\dagger e^{ikx} \right). \tag{2.4.16}$$

As consequências para tal escolha são a existência de estados no espaço de Fock que possuem norma negativa – os chamados *ghost states* [26], ou seja, estados com fótons longitudinais e fótons temporais sem significado físico. Entretanto, devido a (2.4.5), isto não chega a ser um problema.

Enfim, com a equação (2.4.16), a relação de comutação (2.4.15) é escrita na forma covariante

$$[A^\mu(x),\, A^\nu(y)] = g^{\mu\nu} i D_0(x-y). \tag{2.4.17}$$

Agora, separando os operadores de aniquilação

$$A^\mu_-(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}}\, a^\mu(\vec{k}) e^{-ikx} \tag{2.4.18}$$

[5] Veja o apêndice A.1...

[6] Um procedimento que se mostrará correto, ou não, observando-se as consequências desta escolha. É um preço a pagar, do mesmo modo que o é, o procedimento de S.N.Gupta [17] que leva a um espaço de métrica indefinida.

e criação

$$A_{+}^{\mu}(x) = \mp(2\pi)^{-3/2}\int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}}\, a^{\mu}(\vec{k})^{\dagger}e^{ikx}\begin{cases} - & \text{para} \quad \mu = 0 \\ + & \text{para} \quad \mu = 1,2,3\ , \end{cases} \tag{2.4.19}$$

podemos verificar quais são as relações de comutação entre eles. De fato, resulta[7] que os comutadores diferentes de zero são

$$\left[A_{-}^{\mu}(x), A_{+}^{\nu}(y)\right] = g^{\mu\nu} i D_0^{(+)}(x-y) \tag{2.4.20}$$

$$\left[A_{+}^{\mu}(x), A_{-}^{\nu}(y)\right] = g^{\mu\nu} i D_0^{(-)}(x-y) \tag{2.4.21}$$

Resta ainda introduzir os operadores transversos, dos quais queremos extrair quantidades com algum significado físico. Neste caso

$$A_{m}^{\mu}(x) = (2\pi)^{-3/2}\int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}}\, \epsilon_m^{\mu}(\vec{k})\left[a_m(\vec{k})e^{-ikx} + a_m(\vec{k})^{\dagger}e^{ikx}\right] \tag{2.4.22}$$

onde

$$\epsilon_m^{\mu}(\vec{k}) = (0, \vec{\epsilon}_m), \quad \vec{k}\cdot\vec{\epsilon}_m(\vec{k}) = 0, \quad m = 1,2 \tag{2.4.23}$$

que são os vetores de polarização ortogonais e transversos com relação à direção de propagação, e ainda

$$a_m(\vec{k}) = \epsilon_m^{\nu}(\vec{k}) a^{\nu}(\vec{k}). \tag{2.4.24}$$

[7] Ver apêndice A.1...

Capítulo 3

Energia de Casimir

"Ao infinito... e além!"

Buzz Lightyear[1]

Sabendo-se a quantização do campo de radiação livre, é possível, a partir de sua densidade Hamiltoniana, calcular a energia de ponto zero, ou seja, calcular o valor esperado desta densidade Hamiltoniana para um estado em que não haja nenhuma partícula (vácuo).

3.1 Hamiltoniana do campo de radiação livre

A Hamiltoniana pode ser dada a partir do campo de radiação livre já segundo quantizado que pode ser ordenado normalmente.

$$\begin{aligned} H &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x H(x) = \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left[: \vec{E}(\vec{x})^2 : + : \vec{B}(\vec{x})^2 : \right] \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Mas, para tanto, ainda é necessário colocarmos os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ na forma do potencial vetor cuja segunda quantização já foi feita. Assim sendo[2],

[1] No desenho animado *Toy Story, Disney-Pixar, 1995*

[2] Veja apêndice B

considerando as duas polarizações, temos

$$H(x) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2}\left[: \left(\frac{\partial \vec{A}_m(x)}{\partial x^0}\right)^2 : - : \vec{A}_m(x) \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}_m(x)}{\partial {x^0}^2} : \right]. \tag{3.1.2}$$

Considerando apenas uma das polarizações, podemos omitir o índice m, de tal modo que

$$H(x) = \frac{1}{2}\left[: \left(\frac{\partial \vec{A}(x)}{\partial x^0}\right)^2 : - : \vec{A}(x) \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}(x)}{\partial {x^0}^2} : \right]. \tag{3.1.3}$$

Pelo teorema de Wick, podemos calcular o primeiro termo da densidade de Hamiltoniana

$$\begin{aligned}
: \left(\frac{\partial \vec{A}(x)}{\partial x^0}\right)^2 : &= \lim_{y \to x} : \frac{\partial \vec{A}(x)}{\partial x^0} \cdot \frac{\partial \vec{A}(y)}{\partial y^0} : = \\
&= \lim_{y \to x} \left\{ \frac{\partial \vec{A}(x)}{\partial x^0} \cdot \frac{\partial \vec{A}(y)}{\partial y^0} - \left[\frac{\partial \vec{A}_-(x)}{\partial x^0}, \frac{\partial \vec{A}_+(y)}{\partial y^0} \right] \right\} = \\
&= \lim_{y \to x} \left\{ \frac{\partial \vec{A}(x)}{\partial x^0} \cdot \frac{\partial \vec{A}(y)}{\partial y^0} - \frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial y^0} \left[\vec{A}_-(x), \vec{A}_+(y) \right] \right\} = \\
&= \lim_{y \to x} \left\{ \frac{\partial \vec{A}(x)}{\partial x^0} \cdot \frac{\partial \vec{A}(y)}{\partial y^0} + \frac{1}{i} \frac{\partial^2}{\partial {x^0}^2} D_0^{(+)}(x-y) \right\},
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

onde, na última linha, utilizamos o comutador em (2.4.20).

Do mesmo modo, podemos calcular o segundo termo

$$
\begin{aligned}
:\vec{A}(x)\cdot\frac{\partial^2\vec{A}(x)}{\partial x^{0^2}}: &= \lim_{y\to x} :\vec{A}(x)\cdot\frac{\partial^2\vec{A}(y)}{\partial y^{0^2}}:= \\
&= \lim_{y\to x}\left\{\vec{A}(x)\cdot\frac{\partial^2\vec{A}(y)}{\partial y^{0^2}} - \left[\vec{A}_-(x),\frac{\partial^2\vec{A}_+(y)}{\partial y^{0^2}}\right]\right\} = \\
&= \lim_{y\to x}\left\{\vec{A}(x)\cdot\frac{\partial^2\vec{A}(y)}{\partial y^{0^2}} - \frac{\partial^2}{\partial y^{0^2}}\left[\vec{A}_-(x),\vec{A}_+(y)\right]\right\} = \\
&= \lim_{y\to x}\left\{\vec{A}(x)\cdot\frac{\partial^2\vec{A}(y)}{\partial y^{0^2}} - \frac{1}{i}\frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}}D_0^{(+)}(x-y)\right\}. \qquad (3.1.5)
\end{aligned}
$$

Com (3.1.4) e (3.1.5) temos que a densidade Hamiltoniana é

$$
H(x) = \lim_{y\to x}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial\vec{A}(x)}{\partial x^0}\cdot\frac{\partial\vec{A}(y)}{\partial y^0} - \frac{1}{2}\vec{A}(x)\cdot\frac{\partial^2\vec{A}(y)}{\partial y^{0^2}} + \frac{1}{i}\frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}}D_0^{(+)}(x-y)\right\} \qquad (3.1.6)
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
H(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\vec{A}(x)}{\partial x^0}\right)^2 - \frac{1}{2}\vec{A}(x)\cdot\frac{\partial^2\vec{A}(x)}{\partial x^{0^2}} + \\
+ \frac{1}{i}\lim_{y\to x}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}}D_0^{(+)}(x-y)\right]. \qquad (3.1.7)
\end{aligned}
$$

3.2 Hamiltoniana do vácuo em placas paralelas

O efeito Casimir em placas paralelas surge quando colocamos paralelamente duas placas perfeitamente condutoras a uma certa distância d. Podemos definir, para efeito de cálculos que uma das placas está em $x^3 = 0$ e a outra em $x^3 = d$. Assim, é necessário redefinir os operadores de criação e aniquilação que correspondem ao novo estado de vácuo Ω_d no espaço de Fock, já que a presença das placas altera a configuração espacial de modo que nem todas as freqüências são permitidas.

Para tanto podemos redefinir $\vec{A}(x)$ em (2.4.22) no espaço $0 \leq x^3 \leq d$

impondo as condições de contorno.

$$\vec{A}(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2d}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\frac{dk_1 dk_2}{\sqrt{2\omega_n}}\left[a(\vec{k_n},n)e^{-ik_n x} + a(\vec{k_n},n)^\dagger e^{ik_n x}\right]\vec{\epsilon}(\vec{k_n},n), \tag{3.2.1}$$

onde

$$\omega_n{}^2 = k_1{}^2 + k_2{}^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2, \tag{3.2.2}$$

$$k_n = \left(\omega_n,\, k_1,\, k_2,\, \frac{n\pi}{d}\right), \tag{3.2.3}$$

e as condições de contorno dadas por

$$\begin{aligned}
\epsilon_1(\vec{k_n},-n) &= \epsilon_1(\vec{k_n},n)\\
\epsilon_2(\vec{k_n},-n) &= \epsilon_2(\vec{k_n},n)\\
\epsilon_3(\vec{k_n},-n) &= -\epsilon_3(\vec{k_n},n)\\
a(\vec{k_n},-n) &= -a(\vec{k_n},n)
\end{aligned}$$

para que a componente tangencial de $\vec{E}$ e a componente normal de $\vec{B}$ sejam nulas.

No espaço de Fock, os operadores de aniquilação devem obedecer

$$\tilde{a}(f,n)\Omega_d = \int\frac{d^2k}{\sqrt{2\omega_n}}\widehat{f}(\vec{k_n})^* a(\vec{k_n},n)\Omega_d = 0 \tag{3.2.4}$$

para qualquer n e qualquer $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

Podemos ainda expandir (3.2.1), tal que

$$\vec{A}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\frac{dk_1 dk_2}{\sqrt{2\omega_n}}\Big[a(\vec{k_n},n)u_n(\vec{x})e^{-i\omega_n x^0} + \\ + a(\vec{k_n},n)^\dagger u_n(\vec{x})^* e^{i\omega_n x^0}\Big]\vec{\epsilon}(\vec{k_n},n), \tag{3.2.5}$$

onde $u_n(\vec{x})$ são funções normalizadas que satisfazem as condições de contorno de Dirichlet ou Neumann em $x^3 = 0$ e em $x^3 = d$.

Assim, separando os operadores de aniquilação e criação em (3.2.5) temos

$$A_-(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dk_1 dk_2}{\sqrt{2\omega_n}} \; a(\vec{k_n}, n) u_n(\vec{x}) e^{-i\omega_n x^0} \tag{3.2.6}$$

$$A_+(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dk_1 dk_2}{\sqrt{2\omega_n}} \; a(\vec{k_n}, n)^\dagger u_n(\vec{x})^* e^{i\omega_n x^0} \tag{3.2.7}$$

cujo comutador é tal que[3]

$$[A_-(\vec{x}), A_+(\vec{y})] = \frac{1}{i} D_d^{(+)}(\vec{x} - \vec{y}). \tag{3.2.8}$$

Então, a densidade Hamiltoniana nesta geometria pode ser calculada a partir de (3.1.7), onde fazemos o ordenamento normal com os operadores desta configuração

$$H_d(x) = \frac{1}{2}\left[:: \left(\frac{\partial \vec{A}(x)}{\partial x^0}\right)^2 :: - :: \vec{A}(x) \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}(x)}{\partial x^{0^2}} :: \right] + \\ + \frac{1}{i} \lim_{y \to x} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} D_0^{(+)}(x-y) \right]. \tag{3.2.9}$$

Repetindo os passos da seção anterior, temos

$$:: \left(\frac{\partial \vec{A}(x)}{\partial x^0}\right)^2 :: = \left(\frac{\partial \vec{A}(x)}{\partial x^0}\right)^2 - \frac{1}{i} \lim_{y \to x} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} D_d^{(+)}(x-y) \right] \tag{3.2.10}$$

e também

$$:: \vec{A}(x) \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}(x)}{\partial x^{0^2}} :: = \vec{A}(x) \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}(x)}{\partial x^{0^2}} + \frac{1}{i} \lim_{y \to x} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} D_d^{(+)}(x-y) \right] \tag{3.2.11}$$

de modo que a densidade Hamiltoniana para a geometria das placas paralelas

[3] veja apêndice A.2

resulta em

$$H_d(x) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \vec{A}(x)}{\partial x^0}\right)^2 - \vec{A}(x)\cdot\frac{\partial^2 \vec{A}(x)}{\partial x^{0\,2}}\right] + \\ + \frac{1}{i}\lim_{y\to x}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^{0\,2}}D_0^{(+)}(x-y) - \frac{\partial^2}{\partial x^{0\,2}}D_d^{(+)}(x-y)\right]. \quad (3.2.12)$$

Agora, calculando-se seu o valor esperado no estado do vácuo Ω_d, teremos a densidade de energia de Casimir, ou seja

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_d(x) &= \langle\Omega_d|H_d\Omega_d\rangle = \\ &= +\frac{1}{i}\lim_{y\to x}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^{0\,2}}D_0^{(+)}(x-y) - \frac{\partial^2}{\partial x^{0\,2}}D_d^{(+)}(x-y)\right] \quad (3.2.13)\end{aligned}$$

Reescrevendo (3.2.13) explicitamente, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_d(x) &= \frac{1}{i}\lim_{y\to x}\left[\frac{i}{(2\pi)^3}\frac{\partial^2}{\partial x^{0\,2}}\int\frac{d^3k}{2\omega}e^{-ik(x-y)} - \right. \\ &\qquad \left. - i\frac{\partial^2}{\partial x^{0\,2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\frac{dk_1dk_2}{2\omega_n}u_n(\vec{x})u_n(\vec{y})^*e^{-i\omega_n(x^0-y^0)}\right] = \\ &= \lim_{y\to x}\left[\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{2\omega}(k^0)^2e^{-ik(x-y)} - \right. \\ &\qquad \left. - \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\frac{dk_1dk_2}{2\omega_n}(\omega_n)^2u_n(\vec{x})u_n(\vec{y})^*e^{-i\omega_n(x^0-y^0)}\right] = \\ &= \lim_{y\to x}\left[\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{2}\omega e^{-ik(x-y)} - \right. \\ &\qquad \left. - \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\frac{dk_1dk_2}{2}\omega_nu_n(\vec{x})u_n(\vec{y})^*e^{-i\omega_n(x^0-y^0)}\right]. \quad (3.2.14)\end{aligned}$$

Pode-se notar que o primeiro termo em colchetes em (3.2.12) resulta zero, pois a ordenação normal dos operadores de criação e aniquilação e a equação (3.2.4) implicam nisto. Já o segundo termo diz que cada um de seus elementos é infinito, pois as integrais em $D_0^{(+)}$ e $D_d^{(+)}$ resultam em (3.2.14), o que indica uma indeterminação na densidade de energia de Casimir.

Capítulo 4

A regularização no efeito Casimir em placas paralelas

"Who is afraid of infinities?
Not I, I just cut them off"

Anonymous[1]

Conforme se viu, a densidade de energia de Casimir em (3.2.14) não resulta em um valor determinado. Para o seu cálculo é normalmente inserido uma regularização dependente da freqüência do fóton, com o argumento físico, normalmente utilizado, de que a partir de um determinado valor, as placas seriam transparentes para estas freqüências e portanto tais fótons não participariam no cálculo do efeito Casimir. O que veremos, é que este argumento por si só, é insuficiente. E ao mesmo tempo, demonstramos que para uma classe de regularizadores, o resultado se mostra independente do cutoff.

[1] Do livro de A.Zee: *Quantum field theory in a nutshell, Princ.Univ.Press, 2003, p.145*

4.1 Regularização na densidade de energia de Casimir

Podemos considerar uma classe de regularizadores tal que

$$\begin{aligned} C_\Lambda(\vec{k}) &= C(\Lambda\omega_{\vec{k}}), && (4.1.1)\\ \lim_{\Lambda\to 0} C_\Lambda(\vec{k}) &= \lim_{\Lambda\to 0} C(\Lambda\omega_{\vec{k}}) = 1, && (4.1.2)\\ \lim_{x\to\infty} C^{(j)}(x) &= 0 \quad \forall\, j = 1, 2, \cdots\,, && (4.1.3)\\ \int_0^\infty C^{(j)}(x)dx &< \infty \quad \forall\, j = 1, 2, \cdots\,, && (4.1.4) \end{aligned}$$

sendo Λ um cutoff de dimensões do inverso do comprimento.

Deste modo, podemos regularizar a densidade de energia de Casimir $\mathcal{H}_d(x)$ em (3.2.14) tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{d,\Lambda}(x) &= \lim_{y\to x}\left[\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{2}\omega e^{-ik(x-y)}\times C(\Lambda\omega) - \right.\\ &\left. -\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\frac{dk_1dk_2}{2}\omega_n u_n(\vec{x})u_n(\vec{y})^* e^{-i\omega_n(x^0-y^0)}\times C(\Lambda\omega_n)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\Lambda}\left\{\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\; e^{-i\left[\omega\tau-\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})\right]^{\tau=0}_{\vec{y}=\vec{x}}}\times C(\Lambda\omega) - \right.\\ &\left. -\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int dk_1dk_2\;|u_n(\vec{x})|^2\times C(\Lambda\omega_n)\right\} \qquad (4.1.5) \end{aligned}$$

4.2 Densidade de energia de Casimir independente do cutoff

Para efetuarmos o cálculo da energia de Casimir a partir de (4.1.5) necessitamos efetuar

$$\begin{aligned} E_{d,\Lambda} &= \int d^3x \mathcal{H}_{d,\Lambda} = \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^2}\Bigg\{ -\frac{1}{2\pi}\int d^3k\; k\; C(\Lambda k)\int dx^1\int dx^2\int_0^d dx^3 + \\ &\quad + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int dk_1\int dk_2\; \omega_n\; C(\Lambda\omega_n)\int dx^1\int dx^2\int_0^d |u(\vec{x})|^2 dx^3\Bigg\} = \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^2}\Bigg\{ -\frac{d}{2\pi}4\pi\int_0^\infty dk\; k^3\; C(\Lambda k)\; + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi\int_0^\infty dk\; k\; \omega_n\; C(\Lambda\omega_n)\Bigg\}\int dx^1\int dx^2 \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Entretanto, no plano x^1x^2, o espaço não é limitado, o que resulta em uma energia infinita (em nada relacionado com as divergências em questão). Para contornar isto, fazemos

$$\mathcal{E}_{d,\Lambda} = \frac{E_{d,\Lambda}}{\int dx^1\int dx^2} \tag{4.2.2}$$

de modo que o resultado final que teremos é a energia (por unidade de área) de Casimir $\mathcal{E}$.

Com isto, (4.2.1) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{d,\Lambda} = \frac{1}{2(2\pi)^2}\Bigg\{ &- 2d\int_0^\infty dk\; k^3 C(\Lambda k) + \\ &+ 2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty dk\; k\sqrt{\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 + k^2}\; C\left(\Lambda\sqrt{\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 + k^2}\right)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

Fazendo uma troca de variável, podemos reescrever (4.2.3), de modo que obtemos

$$\mathcal{E}_{d,\Lambda} = -\frac{d}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dk\; k^3 C(\Lambda k) + \frac{1}{8\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n} g(m) \tag{4.2.4}$$

com

$$\begin{aligned} g(m) &= \int_0^\infty du\sqrt{u+\left(\frac{m\pi}{d}\right)^2}\; C\left(\Lambda\sqrt{u+\left(\frac{m\pi}{d}\right)^2}\right) = \\ &= \int_{\left(\frac{m\pi}{d}\right)^2}^\infty du\sqrt{u}\; C(\Lambda\sqrt{u}). \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Podemos introduzir a fórmula de soma de Euler-Mclaurin[2], já que $C(\Lambda\sqrt{u})$ obedece (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3) e (4.1.4), e de onde sabemos que quando $n \to \infty$ temos

$$\sum_{m=1}^{n} g(m) - \frac{2d}{\pi}\int_0^\infty dq\; q^3 C(\Lambda q) - \frac{1}{2}g(0) \to \Sigma_k \tag{4.2.6}$$

onde

$$\Sigma_k \;=\; -\,S_k(0) \;-\; \frac{1}{(2k+2)!}\int_0^\infty dt\; \psi_{2k+2}(t) g^{(2k+2)}(t), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4.2.7}$$

com

$$S_k(0) \;=\; \sum_{r=1}^{k}(-1)^{r-1}\frac{B_r}{(2r)!}g^{(2r-1)}(0), \tag{4.2.8}$$

e

$$\psi_k(t) \;=\; \phi_k(t) \bmod 1 \tag{4.2.9}$$

onde ϕ_k é obtido como segue

$$x\frac{e^{xt}-1}{e^x-1} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\phi_k(t)\frac{x^n}{n!}. \tag{4.2.10}$$

Com isto é possível mostrar a independência do regularizador na energia

[2]Veja apêndice C.1

de Casimir ao demonstrarmos[3] que

$$\Sigma_k = \Sigma_{k+1}, \tag{4.2.11}$$

pois seguindo (4.2.4) e (4.2.6) temos

$$\mathcal{E}_{d,\Lambda} = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{1}{2}g(0) + \Sigma_k\right]. \tag{4.2.12}$$

Assim, tomando $k = 2$ (já que podemos tomar qualquer valor de k devido a (4.2.11)), com (4.2.7) e (4.2.8) temos

$$\Sigma_2 \;=\; -\frac{B_1}{2}g^{(0)}(0) \;+\; \frac{B_2}{24}g^{(3)}(0) \;-\; \frac{1}{6!}\int_0^\infty \psi_6(t)g^{(6)}(t)dt \tag{4.2.13}$$

e com (4.2.5), temos

$$\frac{1}{2}g(0) = \frac{1}{2}\int_0^\infty du\,\sqrt{u}\,C(\Lambda\sqrt{u}) = \frac{1}{\Lambda^3}\int_0^\infty dv\,v^2C(v) \tag{4.2.14}$$

e ainda

$$\frac{d}{\pi}g^{(1)}(m) \;=\; -2\Big(\frac{m\pi}{d}\Big)^2 C\Big(\Lambda\frac{m\pi}{d}\Big) \tag{4.2.15}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{d}{\pi}g^{(3)}(m) = -4\Big(\frac{\pi}{d}\Big)^2 C\Big(\Lambda\frac{m\pi}{d}\Big) - 8\frac{\pi}{d}\Big(\frac{m\pi}{d}\Big)\Big(\frac{\Lambda\pi}{d}\Big)C^{(1)}\Big(\Lambda\frac{m\pi}{d}\Big)- \\ - 2\Big(\frac{m\pi}{d}\Big)^2\Big(\frac{\Lambda\pi}{d}\Big)^2 C^{(2)}\Big(\Lambda\frac{m\pi}{d}\Big).\end{aligned} \tag{4.2.16}$$

Assim, substituindo (4.2.13), (4.2.14), (4.2.15), (4.2.16) em (4.2.12), temos

$$\mathcal{E}_{d,\Lambda} = -\frac{1}{8\pi\Lambda^3}\int_0^\infty dv\,v^2C(v) - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{720d^3} + \mathcal{O}(\Lambda^2), \tag{4.2.17}$$

onde é possível notar que o segundo termo em (4.2.17) é o valor da energia de Casimir, conforme era desejado exceto pelo fator 1/2 que é devido a se ter considerado apenas uma das polarizações possíveis em (3.1.3).

[3] Veja apêndice C.2

4.3 Energia de Casimir e a regularização de Hadamard

Em (4.2.17), quando $\Lambda \to 0$, temos que o primeiro termo diverge. É possível identificar esta divergência utilizando-se a fórmula de soma de Poisson.

Para tanto, devemos tomar o cuidado, em (4.2.1), de não efetuar, a integral em x^3. Assim, podemos denotar tal entidade como $\mathcal{E}'_{d,\Lambda}$.

Usando a equação (4.2.3), um regularizador especial cujas características obedeçam as equações (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3) e (4.1.4), ou seja, utilizando

$$C(x) = e^{-x}, \tag{4.3.1}$$

e ainda considerando que

$$u_n(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{d}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{d}x^3\right) e^{i\left(k_1 x^1 + k_2 x^2\right)} \tag{4.3.2}$$

o qual obedece à condição de contorno de Dirichlet em $x^3 = 0$ e $x^3 = d$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\mathcal{E}'_{d,\Lambda}(x) \;=\; \frac{1}{2}\Bigg[&-\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\; k e^{-\Lambda k} + \\ &\frac{1}{(2\pi)^2}\,\frac{2}{d}\sum_{n=1}^{\infty}\int dk_1 \int dk_2\; \mathrm{sen}^2\left(\frac{n\pi}{d}x^3\right) e^{-\Lambda\omega_n}\Bigg],\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

lembrando novamente que

$$\omega_n{}^2 = k_1{}^2 + k_2{}^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 \tag{4.3.4}$$

e

$$k = \left(\omega_n, k_1, k_2, \frac{n\pi}{d}\right). \tag{4.3.5}$$

O termo com a somatória em (4.3.3) pode ser extendido de modo a acomodar os termos negativos em n, notando que a paridade do integrando é par e que o termo $n = 0$ é nulo. Assim

$$I \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{2}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \int dk_1 \int dk_2 \; \mathrm{sen}^2 \left(\frac{n\pi}{d} x^3\right) e^{-\Lambda\omega_n} \; =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2 d} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int dk_1 \int dk_2 \; \mathrm{sen}^2 \left(\frac{n\pi}{d} x^3\right) e^{-\Lambda\omega_n}. \quad (4.3.6)$$

Com isto, introduzindo a fórmula de soma de Poisson tal que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n) \; = \; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(m) \quad (4.3.7)$$

onde

$$\hat{f}(m) \; = \; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \, e^{-imk} f(k) \quad (4.3.8)$$

e

$$f(2\pi n) \equiv \mathrm{sen}^2 \left(\frac{n\pi}{d} x^3\right) e^{-\Lambda\omega_n} \quad (4.3.9)$$

obtemos

$$I \; = \; \frac{1}{(2\pi)^3 d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_3' \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{k_3'}{2d}\right)^2} \; \times$$

$$\times \; \mathrm{sen}^2 \left(\frac{k_3'}{2d} x^3\right) e^{-\Lambda\sqrt{k_1^2+k_2^2+\left(\frac{k_3'}{2d}\right)^2}} e^{-imk_3'}. \quad (4.3.10)$$

Fazendo a troca de variável $k_3 = k_3'/2d$ em (4.3.10) temos

$$I = I_1 + I_2 \quad (4.3.11)$$

onde

$$I_1 \; = \; \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_3 \; \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} e^{-\Lambda\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}} e^{-i2mdk_3} \quad (4.3.12)$$

e

$$
\begin{aligned}
I_2 &= -\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}dk_1\int_{-\infty}^{+\infty}dk_2\int_{-\infty}^{+\infty}dk_3\,\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}\,\times \\
&\qquad\times\,\cos(2k_3x^3)e^{-\Lambda\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}}e^{-i2mdk_3}. \qquad (4.3.13)
\end{aligned}
$$

Através de (4.3.3), (4.3.11), (4.3.12) e (4.3.13), resulta[4] que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}'_{d,\Lambda}(x^3,d) &= \frac{1}{2}\Bigg\{\frac{4}{(2\pi)^2}\frac{(2x^3)^2-3\Lambda^2}{[\Lambda^2+(2x^3)^2]^3} - \frac{4}{(2\pi)^2}\sum_{m\neq 0}\frac{(2md)^2-3\Lambda^2}{[\Lambda^2+(2md)^2]^3}+ \\
&+\frac{2}{(2\pi)^2}\sum_{m\neq 0}\left[\frac{\left[2(md+x^3)\right]^2-3\Lambda^2}{\left[\Lambda^2+[2(md+x^3)]^2\right]^3}+\frac{\left[2(md-x^3)\right]^2-3\Lambda^2}{\left[\Lambda^2+[2(md-x^3)]^2\right]^3}\right]\Bigg\} \qquad (4.3.14)
\end{aligned}
$$

onde o primeiro termo em (4.3.14) é o termo para $m = 0$ em I_2. O termo para $m = 0$ em I_1 cancela exatamente a primeira integral em (4.3.3). Com isto podemos definir

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}'_d(x^3) \equiv \lim_{\Lambda\to 0}\mathcal{E}'_{d,\Lambda}(x^3,d) &= \frac{1}{2}\Bigg\{\frac{1}{4(2\pi)^2}\frac{1}{(x^3)^4}- \\
&-\frac{1}{2(2\pi)^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(md)^4}+\frac{1}{4(2\pi)^2}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(md+x^3)^4}+\frac{1}{(md-x^3)^4}\right]\Bigg\} \qquad (4.3.15)
\end{aligned}
$$

É possível notar em (4.3.15) que $\mathcal{E}'_d(x^3)$ não é integrável no intervalo entre as placas em $0 \leq x^3 \leq d$. O seu primeiro termo diverge sobre a placa em $x^3 = 0$ e o último termo, para $m = \pm 1$, diverge sobre a outra placa em $x^3 = d$. Estes termos dominantes também podem ser identificados através de pontos estacionários na fórmula de soma de Poisson em (4.3.10) ao escrevermos

$$
\mathrm{sen}^2\left(\frac{k'_3}{2d}x^3\right) = \left(\frac{e^{i\frac{k'_3}{2d}x^3}-e^{-i\frac{k'_3}{2d}x^3}}{2i}\right)^2 \qquad (4.3.16)
$$

[4]Basta efetuarmos inicialmente as integrais em k_1 e k_2 e posteriormente em k_3.

resultando em

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{(2\pi)^3 d}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}dk_1\int_{-\infty}^{+\infty}dk_2\int_{-\infty}^{+\infty}dk_3^{'}\sqrt{k_1^2+k_2^2+\left(\frac{k_3'}{2d}\right)^2}\ \times \\
&\times\, e^{-\Lambda\sqrt{k_1^2+k_2^2+\left(\frac{k_3'}{2d}\right)^2}}\,e^{-imk_3'}\left(\frac{e^{i\frac{k_3'}{2d}x^3}-e^{-i\frac{k_3'}{2d}x^3}}{2i}\right)^2 = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3 d}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}dk_1\int_{-\infty}^{+\infty}dk_2\int_{-\infty}^{+\infty}dk_3'\sqrt{k_1^2+k_2^2+\left(\frac{k_3'}{2d}\right)^2}\ \times \\
&\times e^{-\Lambda\sqrt{k_1^2+k_2^2+\left(\frac{k_3'}{2d}\right)^2}}\left[\frac{e^{-i\left(m-\frac{x^3}{d}\right)k_3'}+e^{-i\left(m+\frac{x^3}{d}\right)k_3'}-2e^{-imk_3'}}{-4}\right]
\end{aligned}
\tag{4.3.17}
$$

onde identificamos os pontos estacionários através de

$$
\frac{\partial}{\partial k_3'}\left[\left(m\pm\frac{x^3}{d}\right)k_3'\right]=0 \tag{4.3.18}
$$

que nos levam a $x^3=0$ para $m=0$ e $x^3=d$ para $m=\pm1$.

Para obtermos a energia de Casimir, é necessário ainda fazer mais uma regularização.

Neste passo final, tomamos como ferramenta a regularização de Hadamard, proposta por Elizalde [18] para trabalharmos com os infinitos que surgem quando lidamos com problemas que incluem condições de contorno. Esta prescrição demonstrou ser capaz de identificar e separar as singularidades na energia de Casimir como também veremos aqui.

Denotamos P(.) como sendo a regularização de Hadamard[5] ou a *"parte finita"* de uma integral divergente, com a qual podemos calcular a energia de Casimir. Assim, sabendo que

$$
\mathrm{P}\left(\int_0^d dx^3\frac{1}{4(2\pi)^2}\frac{1}{(x^3)^4}\right) = -\frac{1}{12(2\pi)^2}\frac{1}{d^3},\ m=0; \tag{4.3.19}
$$

$$
\mathrm{P}\left(\int_0^d dx^3\frac{1}{4(2\pi)^2}\frac{1}{(d-x^3)^4}\right) = -\frac{1}{12(2\pi)^2}\frac{1}{d^3},\ m=1, \tag{4.3.20}
$$

[5] Veja o apêndice D

podemos obtemos a energia de Casimir regularizada, tal que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_d &= \mathrm{P}\left(\int_0^d \mathcal{E}'_d(x^3)dx^3\right) = \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{2(2\pi)^2 d^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4} = \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{720}\frac{1}{d^3}. \qquad (4.3.21)
\end{aligned}
$$

Finalmente, é possível dizer que o termo divergente em (4.2.17) pode ser identificável como sendo as divergências de termos de superfície localizados em $x^3 = 0$ e em $x^3 = d$ que não foram removidas quando colocamos um regularizador visando a região do ultra-violeta, significando que o argumento físico[6] utilizado na introdução do regularizador em (4.1.5) não é suficiente para justificar o resultado do cálculo da energia de Casimir.

[6]Normalmente argumenta-se que para as altas freqüências, as placas seriam transparentes para tais fótons, especialmente se tiverem um comprimento de onda menores que o raio de Bohr.

Capítulo 5

Conclusões

"Há sem dúvida quem ame o infinito,
há sem dúvida quem deseje o impossível,
há sem dúvida quem não queira nada -
três tipos de idealistas, e eu nenhum deles:
porque eu amo infinitamente o finito,
porque eu desejo impossivelmente o possível,
porque quero tudo, ou um pouco mais, se puder ser,
ou até se não puder ser..."

Fernando Pessoa[1]

Neste trabalho mostramos a abordagem de Scharf para a quantização do campo eletromagnético de onde obtivemos a quantização do campo de radiação. Com ele, foi possível determinar o operador Hamiltoniano com o qual pudemos obter seu valor esperado no estado de vácuo Ω. A partir deste, calculamos a energia de Casimir em placas paralelas de duas formas diferentes, através do tratamento de séries divergentes com 1) a fórmula de soma de Euler-Maclaurin, e com 2) a fórmula de soma de Poisson.

Foi possível mostrar a partir do método 1), que apesar do resultado apresentado por Hagen, (em [7], onde ele mostra que o efeito Casimir é dependente do cutoff aplicado e portanto de significado físico duvidoso) existem algumas características que podem ser atribuídas ao regularizador (através de (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3) e (4.1.4)) de modo que o resultado final seja independente do mesmo, significando que os cálculos apresentam relevância física. Vimos também que neste caso, ao fazermos o limite $\Lambda \to 0$, ainda restava um termo

[1]Do livro *Poesia - Álvaro de Campos, Cia. das Letras, 2002, p.475*

divergente. Tal termo foi identificado utilizando-se o método 2), combinado com a análise da fase estacionária, de onde observamos que as divergências estão relacionadas com os termos de superfície em $x^3 = 0$ e em $x^3 = d$.

Symanzik em seu artigo [27] mostrou que todas as divergências podem ser sistematicamente canceladas introduzindo, *a priori*, contratermos de superfície na densidade Hamiltoniana. Entretanto, optamos pela regularização de Hadamard apresentado por Elizalde em [18], pois no caminho desta prescrição, através do método 2), foi possível identificar claramente, *a posteriori*, que são os termos de superfície que contribuem para a divergência e portanto tratá-los de forma a que tenham algum significado físico, ou seja, que é possível (ainda que apresentado neste contexto específico) considerar a regularização de Hadamard como sendo uma representação analítica de uma condição de contorno na Teoria Quântica de Campos.

Apêndice A

Relações de comutação dos operadores no campo de radiação livre

A.1 Relações de comutação para o campo de radiação livre

Sabendo que as componentes do potencial vetor quantizado podem ser escritas na forma

$$A^\mu(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} \left(a^\mu(\vec{k}) e^{-ikx} + a^\mu(\vec{k})^\dagger e^{ikx} \right) \tag{A.1.1}$$

podemos calcular a relação de comutação entre as suas componentes, lembrando da equação (2.4.13), de modo que

$$\begin{aligned}
[A^\mu(x), A^\nu(y)] &= (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3k'}{\sqrt{2\omega'}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} \times \\
&\times \left\{ \left[a^\mu(\vec{k}), a^\nu(\vec{k}')^\dagger \right] e^{-ikx+ik'y} + \left[a^\mu(\vec{k}')^\dagger, a^\nu(\vec{k}) \right] e^{ikx-ik'y} \right\} = \\
&= (2\pi)^{-3} \delta^\mu_\nu \int \frac{d^3k}{2\omega} \left[e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)} \right] = \\
&= (2\pi)^{-3} \delta^\mu_\nu \int d^4k \; \delta(k^2) e^{-ik(x-y)} \, \mathrm{sgn}(k^0) = \\
&= \delta^\mu_\nu \frac{1}{i} D_0(x-y).
\end{aligned} \tag{A.1.2}$$

de onde podemos notar que $D_0(x-y)$ é invariante de Lorentz.

Com a separação dos operadores de aniquilação e criação em (A.1.1), respectivamente

$$A_-^\mu(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} \, a^\mu(\vec{k}) e^{-ikx} \tag{A.1.3}$$

$$A_+^\mu(x) = \mp(2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} \, a^\mu(\vec{k})^\dagger e^{ikx} \left\{ \begin{array}{lll} - & \text{para} & \mu = 0 \\ + & \text{para} & \mu = 1,2,3 \end{array} \right. \tag{A.1.4}$$

as relações de comutação destes operadores que resultam não nulas, devido à (2.4.13) são tais que

$$\begin{aligned} \left[A_-^\mu(x), A_+^\nu(y)\right] &= (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3k'}{\sqrt{2\omega'}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} \left[a^\mu(\vec{k}), a^\nu(\vec{k}')^\dagger\right] e^{-ikx+ik'y} = \\ &= -g^{\mu\nu}(2\pi)^{-3} \int \frac{d^3k}{2\omega} e^{-ik(x-y)} = \\ &= g^{\mu\nu} i D_0^{(+)}(x-y), \end{aligned} \tag{A.1.5}$$

ou seja,

$$D_0^{(+)}(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega} e^{-ik(x-y)}. \tag{A.1.6}$$

Do mesmo modo temos

$$\begin{aligned} \left[A_+^\mu(x), A_-^\nu(y)\right] &= (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3k'}{\sqrt{2\omega'}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} \left[a^\mu(\vec{k})^\dagger, a^\nu(\vec{k}')\right] e^{ikx-ik'y} = \\ &= g^{\mu\nu}(2\pi)^{-3} \int \frac{d^3k}{2\omega} e^{-ik(x-y)} = \\ &= g^{\mu\nu} i D_0^{(+)}(x-y), \end{aligned} \tag{A.1.7}$$

ou seja,

$$D_0^{(-)}(x-y) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega} e^{ik(x-y)}. \tag{A.1.8}$$

A.2 Relações de comutação do campo com placas paralelas

Com a presença das placas, o espaço de Fock se altera já que nem todas as freqüências são permitidas, de modo que o operadores de aniquilação e criação devem refletir tal mudança. Assim

$$A_{-}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dk_1 dk_2}{\sqrt{2\omega_n}}\ a(\vec{k_n}, n) u_n(\vec{x}) e^{-i\omega_n x^0} \tag{A.2.1}$$

$$A_{+}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dk_1 dk_2}{\sqrt{2\omega_n}}\ a(\vec{k_n}, n)^{\dagger} u_n(\vec{x})^{*} e^{i\omega_n x^0} \tag{A.2.2}$$

onde podemos calcular o comutador

$$\begin{aligned}
[A_{-}(x), A_{+}(y)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \int \frac{dk_1 dk_2}{\sqrt{2\omega_n}} \int \frac{dk'_1 dk'_2}{\sqrt{2\omega'_n}} \times \\
&\quad \times \left[a(\vec{k_n}, n), a(\vec{k'_n}, n')^{\dagger} \right] u_n(\vec{x}) u_n(\vec{y})^{*} e^{-i(\omega_n x^0 - \omega'_n y^0)} = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dk_1 dk_2}{2\omega_n} u_n(\vec{x}) u_n(\vec{y})^{*} e^{-i\omega_n (x^0 - y^0)} = \\
&= \frac{1}{i} D_d^{(+)}(x-y).
\end{aligned} \tag{A.2.3}$$

De onde é possível observar que

$$D_d^{(+)}(x-y) = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dk_1 dk_2}{2\omega_n} u_n(\vec{x}) u_n(\vec{y})^{*} e^{-i\omega_n (x^0 - y^0)} \tag{A.2.4}$$

Apêndice B

Densidade Hamiltoniana do campo de radiação livre

A densidade de Hamiltoniana do campo de radiação livre é dada por

$$H(\vec{x}) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left[: \vec{E}(\vec{x})^2 : + : \vec{B}(\vec{x})^2 : \right]. \tag{B.0.1}$$

Como estamos trabalhando no calibre de radiação onde

$$\begin{aligned} A^0 &= 0, && \text{(B.0.2)} \\ \partial_i A^i &= 0, && \text{(B.0.3)} \end{aligned}$$

temos que

$$\vec{E}(\vec{x})^2 = \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^0}\right)^2. \tag{B.0.4}$$

Para o campo magnético, temos que

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{x})^2 &= B_i B^i = \\ &= \epsilon_{ijk}\partial^j A^k \epsilon^{ilm}\partial_l A_m = \\ &= \left(\delta^l_j \delta^m_k - \delta^m_j \delta^l_k\right) \partial^j A^k \partial_l A_m = \\ &= \partial^j A^k \partial_j A_k - \partial^j A^k \partial_k A_j = \\ &= \partial^j \left(A^k \partial_j A_k\right) - A^k \partial^j \partial_j A_k - \partial^j \left(A^k \partial_k A_j\right) + A^k \partial_k \partial^j A_j = \\ &= \partial^j \left(A^k \partial_j A_k\right) - A^k \partial^j \partial_j A_k - \partial^j \left(A^k \partial_k A_j\right). && \text{(B.0.5)} \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\vec{B}^2 d^3x &= \int_{\mathbb{R}^3}\left[\partial^j\left(A^k\partial_j A_k\right) - A^k\partial^j\partial_j A_k - \partial^j\left(A^k\partial_k A_j\right)\right] d^3x = \\ &= -\int_{\mathbb{R}^3} A^k\partial^j\partial_j A_k d^3x \end{aligned} \tag{B.0.6}$$

sendo que o resultado é devido ao primeiro e terceiro termos em (B.0.6) serem nulos no infinito.

Lembrando que neste calibre

$$\Box A^\mu = 0, \tag{B.0.7}$$

temos

$$\partial_j\partial^j A_k = \partial_0\partial^0 A_k, \tag{B.0.8}$$

assim, substituindo (B.0.8) em (B.0.6) e sem considerar cada uma das polarizações, temos que

$$H(x) = \frac{1}{2}\left[:\left(\frac{\partial\vec{A}(x)}{\partial x^0}\right)^2 : - : \vec{A}(x)\cdot\frac{\partial^2\vec{A}(x)}{\partial {x^0}^2} :\right]. \tag{B.0.9}$$

Apêndice C

Fórmula de soma de Euler-Maclaurin

A fórmula de soma de Euler-Maclaurin, conforme [14], é dada por

$$\sum_{m=1}^{n} g(m) = F(n) + \frac{1}{2}g(n) + S_k(n) + C_k + R_{k,n} \tag{C.0.1}$$

onde

$$F(n) = \int_0^n g(t)dt, \tag{C.0.2}$$

$$S_k(n) = \sum_{r=1}^{k}(-1)^{r-1}\frac{B_r}{(2r)!}g^{(2r-1)}(n), \tag{C.0.3}$$

$$C_k = -F(0) + \frac{1}{2}g(0) - S_k(0) - \frac{1}{(2k+2)!}\int_0^\infty \psi_{2k+2}(t)dt, \tag{C.0.4}$$

$$R_{k,n} = \frac{1}{(2k+2)!}\int_n^\infty \psi_{2k+2}(t)g^{(2k+2)}(t)dt, \tag{C.0.5}$$

e ainda

$$\psi_k(t) = \phi_k(t) \mod 1, \tag{C.0.6}$$

com

$$x\frac{e^{xt}-1}{e^x-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\phi_k(t)\frac{x^n}{n!} \tag{C.0.7}$$

expressa uma soma discreta de $g(m)$ em termos de sua integral e de suas derivadas.

C.1 Densidade de energia de Casimir regularizada

No caso em que $n \to \infty$, temos que $R_{k,n} \to 0$ e também

$$\sum_{m=1}^{n} g(m) - F(n) - \frac{1}{2}g(n) - S_k(n) \to \Xi_k \tag{C.1.1}$$

onde

$$\Xi_k = -F(0) + \frac{1}{2}g(0) - S_k(0) - \frac{1}{(2k+2)!}\int_0^\infty \psi_{2k+2}(t) g^{(2k+2)}(t) dt. \tag{C.1.2}$$

Com a equação (4.2.5), ou seja

$$g(m) = \int_{(\frac{m\pi}{d})^2}^{\infty} du\sqrt{u}\, C(\Lambda\sqrt{u}), \tag{C.1.3}$$

temos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} g(n) &= 0, \\ \lim_{n\to\infty} S_k(n) &= 0, \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F(n) &= \int_0^\infty dt \int_{\left(\frac{t\pi}{d}\right)^2}^\infty du \sqrt{u}\, C(\Lambda\sqrt{u}) = \\
&= 2\int_0^\infty dt \int_0^\infty k' dk' \sqrt{\left(\frac{t\pi}{d}\right)^2 + k'^2}\, C(\Lambda\sqrt{\left(\frac{t\pi}{d}\right)^2 + k'^2}) = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty dk_1 \int_{-\infty}^\infty dk_2 \sqrt{\left(\frac{t\pi}{d}\right)^2 + {k_1}^2 + {k_2}^2} \times \\
&\qquad \times C(\Lambda\sqrt{\left(\frac{t\pi}{d}\right)^2 + {k_1}^2 + {k_2}^2}) = \\
&= \frac{d}{2\pi^2}\int_{-\infty}^\infty dk_3 \int_{-\infty}^\infty dk_1 \int_{-\infty}^\infty dk_2 \sqrt{{k_3}^2 + {k_1}^2 + {k_2}^2}\, C(\Lambda\sqrt{{k_3}^2 + {k_1}^2 + {k_2}^2}) = \\
&= \frac{2d}{\pi}\int_0^\infty q^3 C(\Lambda q) dq. \qquad \text{(C.1.4)}
\end{aligned}$$

Assim em (C.1.1), quando $n \to \infty$, temos

$$\sum_{m=1}^{n} g(m) - \frac{2d}{\pi}\int_0^\infty q^3 C(\Lambda q) dq - \frac{1}{2} g(0) \to$$

$$\to -S_k(0) - \frac{1}{(2k+2)!}\int_0^\infty \psi_{2k+2}(t) g^{(2k+2)}(t) dt,$$

ou seja

$$\sum_{m=1}^{n} g(m) - \frac{2d}{\pi}\int_0^\infty dq\, q^3 C(\Lambda q) - \frac{1}{2} g(0) \to \Sigma_k \qquad \text{(C.1.5)}$$

C.2 Demonstrando a independência do regularizador

É possível mostrar a independência do regularizador no cálculo da energia de Casimir ao demonstrar que Σ_k independe de qual termo k é utilizado.

$$\Sigma_k = -S_k(0) - \frac{1}{(2k+2)!}\int_0^\infty \psi_{2k+2}(t) g^{(2k+2)}(t) dt \qquad \text{(C.2.1)}$$

onde

$$S_k(0) = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{r-1} \frac{B_r}{(2r)!} g^{(2r-1)}(0) \tag{C.2.2}$$

e B_r são os números de Bernoulli.

Então,

$$\Sigma_{k+1} = -S_{k+1}(0) - \frac{1}{[2(k+1)+2]!} \int_0^\infty \psi_{2(k+1)+2}(t) g^{[2(k+1)+2]}(t) dt \tag{C.2.3}$$

onde

$$S_{k+1}(0) = \sum_{r=1}^{k+1} (-1)^{r-1} \frac{B_r}{(2r)!} g^{(2r-1)}(0). \tag{C.2.4}$$

Sabendo que

$$g^{(k)}(t \to \infty) = 0; \quad \forall \;\; k > 0 \;\; \text{inteiro}; \tag{C.2.5}$$

e ainda

$$\psi_n(0) = 0 \tag{C.2.6}$$

$$\psi_{2m-1}(x) = \frac{\psi'_{2m}(x)}{2m} \tag{C.2.7}$$

$$\psi_{2m}(x) = \frac{\psi'_{2m+1}(x)}{2m+1} + (-1)^m B_m \tag{C.2.8}$$

podemos calcular Σ_{k+1}.

O primeiro termo em (C.2.3) pode ser escrito em função do primeiro termo em (C.2.1), ou seja,

$$\begin{aligned} S_{k+1}(0) &= \sum_{r=1}^{k+1} (-1)^{r-1} \frac{B_r}{(2r)!} g^{(2r-1)}(0) = \\ &= \sum_{r=1}^{k} (-1)^{r-1} \frac{B_r}{(2r)!} g^{(2r-1)}(0) + (-1)^k \frac{B_{k+1}}{[2(k+1)]!} g^{[2(k+1)-1]}(0) = \\ &= S_k(0) + (-1)^k \frac{B_{k+1}}{[2(k+1)]!} g^{[2(k+1)-1]}(0) \end{aligned} \tag{C.2.9}$$

O segundo termo em (C.2.3) pode ser calculado através do segundo termo em (C.2.1), como segue (onde o símbolo * significa *integração por partes*):

$$\frac{1}{(2k+2)!}\int_0^\infty \psi_{2k+2}(t)g^{(2k+2)}(t)dt \overset{\text{(C.2.8) com } m=k+1}{=}$$

$$= \frac{1}{(2k+2)!}\left[\int_0^\infty \frac{\psi'_{2k+3}(t)}{2k+3}g^{(2k+2)}(t)dt + (-1)^{k+1}B_{k+}\int_0^\infty g^{(2k+2)}(t)dt\right] \overset{*}{=}$$

$$= \frac{1}{(2k+2)!}\left\{\frac{1}{2k+3}\left[\psi_{2k+3}(t)g^{(2k+2)}(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \psi_{2k+3}(t)g^{(2k+3)}(t)dt\right] + \right.$$

$$\left. + (-1)^k B_{k+1}g^{(2k+1)}(0)\right\} \overset{\text{(C.2.7) com } m=k+2}{=}$$

$$= \frac{1}{(2k+2)!}\left\{\frac{-1}{2k+3}\left[\int_0^\infty \frac{\psi'_{2k+4}(t)}{2k+4}g^{(2k+3)}(t)dt\right] + (-1)^k B_{k+1}g^{(2k+1)}(0)\right\} \overset{*}{=}$$

$$= \frac{1}{(2k+2)!}\left\{\frac{-1}{(2k+3)(2k+4)}\left[\psi_{2k+4}(t)g^{(2k+3)}(t)\Big|_0^\infty - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_0^\infty \psi_{2k+4}(t)g^{(2k+4)}(t)dt\right] + (-1)^k B_{k+1}g^{(2k+1)}(0)\right\} =$$

$$= \frac{1}{(2k+4)!}\int_0^\infty \psi_{2k+4}(t)g^{(2k+4)}(t)dt + \frac{1}{(2k+2)!}(-1)^k B_{k+1}g^{(2k+1)}(0),$$

ou seja

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2k+4)!}\int_0^\infty \psi_{2k+4}(t)g^{(2k+4)}(t)dt &= \frac{1}{(2k+2)!}\int_0^\infty \psi_{2k+2}(t)g^{(2k+2)}(t)dt - \\ &- (-1)^k\frac{B_{k+1}}{(2k+2)!}g^{(2k+1)}(0). \qquad \text{(C.2.10)} \end{aligned}$$

E finalmente, substituindo (C.2.9) e (C.2.10) em (C.2.3), temos

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{k+1} &= -S_k(0) - (-1)^k \frac{B_{k+1}}{[2(k+1)]!} g^{[2(k+1)-1]}(0) - \\
&- \frac{1}{(2k+2)!} \int_0^\infty \psi_{2k+2}(t) g^{(2k+2)}(t) dt + \frac{B_{k+1}}{(2k+2)!} (-1)^k g^{(2k+1)}(0) = \\
&= -S_k(0) - \frac{1}{(2k+2)!} \int_0^\infty \psi_{2k+2}(t) g^{(2k+2)}(t) dt = \\
&= \Sigma_k
\end{aligned}
\tag{C.2.11}
$$

conforme queríamos demonstrar.

Apêndice D

Parte finita de Hadamard

Supondo uma função $f(x)$ que seja integrável em um intervalo $[a+\epsilon, b]$ (com $\epsilon > 0$), mas não no intervalo $[a, b]$. Podemos definir uma integral, tal que

$$F(\epsilon) = \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx. \tag{D.0.1}$$

No limite em que $\epsilon \to 0$ temos que $F(\epsilon)$ se torna indefinida, mas que poderá ser separável em uma parte não-divergente e uma parte divergente. Para as distribuições de interesse, podemos aplicar as pseudo-funções de Hadamard onde a integral divergente

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx \tag{D.0.2}$$

possa ser separada em um termo $I(\epsilon)$, que diverge, da parte finita, tal que

$$\mathrm{P}\left(\int_{a}^{b} f(x)dx\right) = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \left\{\int_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx - I(\epsilon)\right\}, \tag{D.0.3}$$

onde

$$I(\epsilon) = \int f(x)dx \mid_{x=a+\epsilon}. \tag{D.0.4}$$

Exemplificando através de nosso caso específico, temos

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\int_0^d dz \frac{1}{4(2\pi)^2}\frac{1}{z^4}\right) &= \frac{1}{4(2\pi)^2}\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int_\epsilon^d \frac{1}{z^4} + \frac{1}{3\epsilon^3}\right\} = \\
&= -\frac{1}{12(2\pi)^2}\frac{1}{d^3},
\end{aligned} \tag{D.0.5}
$$

do mesmo modo para

$$
\mathrm{P}\left(\int_0^d dz \frac{1}{4(2\pi)^2}\frac{1}{(d-z)^4}\right) = -\frac{1}{12(2\pi)^2}\frac{1}{d^3}. \tag{D.0.6}
$$

Bibliografia

[1] COUGO-PINTO,M.V.; FARINA, C.; TORT, A.: *O efeito Casimir*, Rev. Bras. Ens. Fis., V.22, 122-132 (2000). No apêndice 2 deste artigo temos a tradução do artigo original H.B.G.Casimir, *Proc. K. Ned. Akad. Wet.* **51** (1948) 793.

[2] SPARNAAY, M.J.: *Measurements of attractive forces between flat plates*, Physica **24**, 751 (1958).

[3] LAMOREAUX, S.K.: *Demonstration of the Casimir Force in the 0.6 to 6 μm Range*, Phys. Rev. Lett. **78**, 5 (1997).

[4] ERDETH, T.: *Template-stripped gold surfaces with 0.4-nm rms roughness suitable for force measurements: Application to the Casimir force in the 20 to 100-nm range* , Phys. Rev. A **62**, **6** 062104 (2000).

[5] PASSOS SOBRINHO, J.J.; TORT, A.C.. *Uma introdução aos métodos de cálculo da energia de Casimir*, Rev. Bras. Ens. Fis., v. 23, n. 4, 2001, pp. 401-421.

[6] WIGNER, E.: *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, Comm.P.Appl.Math. vol**13**, n.**1** (1960).

[7] HAGEN, C.R.:*Cutoff dependence of the Casimir effect*, Eur. Phys. J. C19 677-680 (2001).

[8] JAFFE, R.L.: *Unnatural acts: Unphysical consequences of imposing boundary conditions on quantum fields*, arXiv:hep-th/0307014 v2 (2003).

[9] DIETZ, K.: *Vacuum fluctuations in radiation- and matter-fields*, Physica Scripta, vol. T21, 65-69, 1988.

[10] SCHARF, G.; WRESZINSKI, W.F.: *On the Casimir effect without cutoff*, Found. Phys. Lett. **5**, 479 (1992).

[11] SCHARF, G.; WRESZINSKI, W.F.: *The Casimir effect and field quantization with boundaries*, Nuovo Cimento vol. 107A, n.12, 2879-2883 (1994).

[12] MANZONI, L.A.; WRESZINSKI, W.F.: *On a theory of the Casimir effect*, Phys. Lett. **292**, 156 (2001).

[13] MANZONI, L.A.; WRESZINSKI, W.F.: *A theory of the Casimir effect for compact regions*, Eur. Phys. J. C 25, 315-325 (2002).

[14] HARDY, G.H.: *Divergent series*, Claredon, Oxford, 1949.

[15] MILONNI, P.W.: *The quantum vacuum: An introduction to quantum electrodynamics*, Academic Press, Boston, 1993.

[16] SCHARF, G.: *Finite quantum electrodynamics: A causal approach*, 2^{nd} ed. Springer, Berlin, 1995.

[17] GUPTA, S.J.: *Quantum electrodynamics*, Gordon and Breach Science Publishers, Inc, New York, 1995.

[18] ELIZALDE, E.: *On the issue of imposing boundary conditions on quantum fields*, J.Phys.A: Math.Gen. **36** (2003) L567-L576.

[19] GRAHAM, N.; JAFFE, R.L.; KHEMANI, V.; QUANDT, M.; SCANDURRA, M.: *Casimir energies in light of quantum field theory*, arXiv:hep-th/0207005 v3 (2003).

[20] RYDER, L.H.: *Quantum field theory*, 2^{nd} ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.

[21] SCHWARTZ, L.: *Théorie des distributions*, ed. Hermann, Paris, 1966.

[22] BRAGA, C.L.R.: *Notas de física matemática*, ed. Livraria da Física, São Paulo, 2006.

[23] AITCHISON, I.J.R.: *Nothing is plenty: The vacuum in modern quantum field theory*, Contemp.Phys. 1985, vol. 26, n^o, 333-391.

[24] JACKSON, John David: *Classical Electrodynamics*, 3^{rd} ed., J.Wiley and Sons Inc., 2001.

[25] MILTON, K.A.: *CASIMIR EFFECT: Physical Manifestations of Zero-Point Energy*, World Scientific, 2001.

[26] HATFIELD, Brian: *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings*, Westview Press, 1992.

[27] SYMANZIK, K.: *Schrödinger representation and Casimir effect in renormalizable quantum field theory*, Nucl.Phys. B **190**,1 (1981).