

**Limite gravitacional pós-newtoniano da teoria
TeVeS de Bekenstein**

JULIANA DINIZ BOLZAN DE OLIVEIRA

Fevereiro 2007

Limite gravitacional pós-newtoniano da teoria

TeVes de Bekenstein

Juliana Diniz Bolzan de Oliveira

Orientador: Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio

Co-orientador: Ronaldo Penna Neves

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Minas Gerais como
requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Física.

Fevereiro 2007

Aos meus pais e irmãs,

ao meu anjo

Agradecimentos

Aos meus pais, pelo amor e incentivo, pela luta e pela dedicação a mim, às minhas irmãs, e a toda a família.

Às minhas irmãs, pelo companheirismo e total apoio em tudo.

Ao meu anjo, pela atenção, preocupação, cumplicidade, força, amizade e amor que dão razão à minha vida.

Ao meu orientador Marcos, pela confiança, pelos conselhos e pela amizade.

Ao meu co-orientador Ronaldo, pelas inúmeras sugestões e correções, pela empolgação e por aturar e esclarecer minuciosamente todas as minhas dúvidas.

À professora Maria Carolina Nemes, pela receptividade e apoio de sempre.

À vó Zana, aos avós Estévam, Geralda e Sílvio (*in memoriam*), à minha madrinha, tias, tios, primas, primos, cunhados, sobrinha e sobrinho, por me darem a melhor família do mundo.

Aos amigos da Física, especialmente Sil, Fred, Pi, Marcella, Elton e Francisco pelos sofrimentos e alegrias compartilhados e pela amizade incondicional.

Aos amigos Ana Paula, Igor, Júlio, Elisa, Gui e André, por serem tão especiais.

Aos professores e funcionários do Colégio Sagrado Coração de Jesus por terem consolidado a formação que recebi de meus pais.

Aos professores e funcionários do Departamento de Física da UFMG, por terem contribuído para minha formação acadêmica.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho é estudado o limite de campos fracos e velocidades baixas da teoria TeVeS de Bekenstein através do formalismo parametrizado pós-newtoniano, possibilitando seu confronto com dados experimentais, bem como a análise dos limites específicos nos quais a teoria se reduz à Relatividade Geral e ao modelo não-relativístico da MOND. Também são discutidos a motivação e o desenvolvimento das idéias para se chegar a essa teoria, que se apresenta como uma alternativa à suposição da existência de Matéria Escura.

Abstract

In this work the slow-motion, weak-field limit of Bekenstein's TeVeS theory is studied through the parametrized post-newtonian formalism, making possible its confrontation with experimental data, as well as the analysis of the specific limits in which the theory reduces to General Relativity and to the non-relativistic MOND model. The motivation and the development of ideas to support this theory, which is presented as an alternative to the assumption of the existence of Dark Matter, are also discussed.

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Lista de Figuras	vi
Lista de Tabelas	vii
Convenções utilizadas neste trabalho	viii
Introdução	1
1 Da Relatividade Geral à TeVeS	6
1.1 Relatividade Geral	7
1.2 Curva de velocidade de rotação das galáxias	11
1.3 MOND	14
1.4 Teorias Relativísticas para a MOND	18
1.5 TeVeS	21
1.5.1 Ações	22
1.5.2 Equações de movimento	24
1.5.3 Previsões da teoria	31
2 O formalismo PPN	32
2.1 Limite newtoniano	34

2.2	Limite pós-newtoniano	36
2.2.1	Potenciais pós-newtonianos	37
2.2.2	Parâmetros PPN	39
2.2.3	Interpretação dos parâmetros PPN	41
2.2.3.1	Leis de conservação	41
2.2.3.2	Efeitos de sistemas de coordenadas preferenciais	42
2.2.3.3	Valores experimentais	43
2.3	O exemplo da Relatividade Geral	44
3	O formalismo PPN na TeVeS	50
3.1	Expansões	51
3.1.1	Equação para φ	56
3.1.2	Equação para v^i	58
3.1.3	Equações para $\psi_{\mu\nu}$	60
3.1.3.1	Componentes ψ_{ij}	62
3.1.3.2	Componentes ψ_{0i}	63
3.1.3.3	Componente ψ_{00}	64
3.1.4	Soluções	67
3.2	Parâmetros PPN	72
3.3	Limite MONDiano da TeVeS	77
	Conclusão	81
	Apêndice A – Relação entre os formalismos para o campo escalar	84
	Apêndice B – Expansão de λ	88
	Referências bibliográficas	91

Lista de Figuras

1.1	Esquerda: Curvas de rotação observadas para várias galáxias espirais (Adaptada de [22]). Direita: Padrão das curvas experimentais da velocidade de rotação de galáxias espirais para cada componente da galáxia (Adaptada de [21])	13
1.2	Curva de rotação para várias galáxias espirais. As linhas pontilhadas e tracejadas são as curvas newtonianas da matéria visível e da componente gasosa das galáxias, respectivamente. A linha contínua é a curva prevista pela MOND e os pontos são os dados experimentais. A distância (eixo horizontal) é dada em kpc e a velocidade (eixo vertical) em km/s (Retirada de [27])	16
1.3	Tentativas de ajuste da curva de rotação de uma galáxia falsa. Na esquerda , pela MOND e na direita pela Matéria Escura, com a curva ponto-tracejada representando o halo da Matéria Escura. Os outros símbolos e unidades são os mesmos usados na Figura 1.2. [26] . .	17
1.4	Gráficos de $f(y)$, $\mu(y)$ e $\hat{\mu}(y)$ para o modelo proposto para $f(y)$	80

Lista de Tabelas

2.1	Interpretação dos parâmetros PPN (Adaptado de [16])	44
2.2	Valores experimentais para os parâmetros PPN (Adaptado de [16])	45
3.1	Papel de cada métrica na manipulação de índices	53
3.2	Parâmetros PPN da TeVeS e da Relatividade Geral	76

Convenções utilizadas neste trabalho

- Métrica de Minkowski: $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1,1,1,1)$
- Índices gregos correm de 0 a 3: $\alpha, \beta, \mu, \nu, \dots = 0,1,2,3$
- Índices latinos correm de 1 a 3: $i, j, k, l, \dots = 1,2,3$
- Convenção da somatória de Einstein: quando um índice é repetido, soma-se sobre ele:

$$A_{\alpha}B^{\alpha} = \sum_{\alpha=0}^3 A_{\alpha}B^{\alpha} \quad \text{ou} \quad A_iB^i = \sum_{i=1}^3 A_iB^i$$

- Simetrização: $A^{(\mu}B^{\nu)} = A^{\mu}B^{\nu} + A^{\nu}B^{\mu}$
- Anti-simetrização: $A^{[\mu}B^{\nu]} = A^{\mu}B^{\nu} - A^{\nu}B^{\mu}$
- Símbolos para derivada parcial: $\frac{\partial A}{\partial x^{\alpha}} \equiv \partial_{\alpha}A \equiv A_{,\alpha}$
- Símbolos para derivada covariante: $\nabla_{\alpha}A \equiv A_{;\alpha}$

Introdução

A Relatividade Geral é hoje a teoria aceita da gravitação. Formulada em 1915 e publicada em 1916 por Albert Einstein, ela substituiu os conceitos da gravitação de Isaac Newton, introduzidos em 1687 no *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, e tidos como verdadeiros durante mais de duzentos anos. A base da teoria está no Princípio de Equivalência, que assume uma total equivalência entre um campo gravitacional e um referencial correspondentemente acelerado, ou seja, a massa inercial de um objeto é igual à sua massa gravitacional, e todos os corpos sentem a influência da gravidade da mesma forma. Uma consequência disso é a descrição da gravidade como um efeito da geometria do espaço-tempo, ou seja, a presença de matéria (energia) produz uma curvatura no espaço-tempo. Teorias que aceitam o Princípio de Equivalência têm sempre um tensor métrico com o qual a matéria se acopla universalmente, e são por isso denominadas ‘teorias métricas da gravitação’. A Relatividade Geral corresponde a uma generalização da Relatividade Restrita, de 1905; enquanto a segunda diz que as leis da Física são as mesmas em qualquer referencial inercial, a primeira, através do Princípio de Covariância Geral, diz que as leis da Física são as mesmas em qualquer sistema de referência, sendo totalmente livre a escolha do referencial.

A Relatividade Geral explica e prevê vários fenômenos, tendo levado a inovações radicais na Física que permitiram grandes desenvolvimentos na Astronomia, na Astrofísica e na Cosmologia. Ela descreve satisfatoriamente, por exemplo, a deflexão e o desvio para o vermelho do comprimento de onda da luz ao passar por um campo gravitacional, assim como a precessão do periélio dos planetas interiores [1]; prevê um Universo em expansão, a

radiação cósmica de fundo, a abundância relativa dos elementos mais leves no Universo (quando combinada com a Física de Partículas) e o efeito das lentes gravitacionais. Prevê também a radiação na forma de ondas gravitacionais, embora se tenham apenas indícios indiretos de sua observação. Ela vem sendo testada há mais de 90 anos e é a teoria da gravitação mais bem sucedida até o momento. Entretanto, apesar das inúmeras previsões e explicações, ela descreve incorretamente alguns fenômenos astrofísicos e cosmológicos, sendo necessária a introdução de conceitos como Matéria e Energia Escuras*. A hipótese da Matéria Escura surgiu da tentativa de consertar as falhas da Relatividade Geral na descrição da rotação de galáxias espirais e de efeitos de lentes gravitacionais produzidos por aglomerados de galáxias. Como o próprio nome diz, a Matéria Escura não emite luz, sendo detectável apenas através da sua interação gravitacional. Supondo que as galáxias são envoltas por um halo de Matéria Escura, é possível conciliar teoria e observação. A Matéria Escura também contribui para a densidade de massa total do Universo, no modelo cosmológico padrão aceito atualmente, juntando-se à Energia Escura, que se supõe existir para corrigir algumas das falhas da Relatividade Geral no domínio da Cosmologia.

Para se explicar corretamente os fenômenos cuja descrição pela Relatividade Geral é falha, sem se supor a existência de Matéria Escura, torna-se necessária a formulação de uma nova teoria da gravitação. Várias idéias foram propostas para esse fim, e um passo importante foi dado em 1983, com a criação do modelo MOND (*Modified Newtonian Dynamics*) por Milgrom [2-4]. Esse modelo modifica a mecânica newtoniana em situações de baixas acelerações de origem gravitacional, explicando corretamente o comportamento da curva de rotação das galáxias espirais sem a necessidade de Matéria Escura. Aprimoramentos desse modelo foram feitos em 1984 por Milgrom e Bekenstein [5], introduzindo uma formulação

* Existe a possibilidade da Energia Escura estar contida na Relatividade Geral através da Constante Cosmológica.

lagrangiana e relativística para ele. Em 2004, Bekenstein publicou sua teoria TeVeS [6], que se mostra promissora na tentativa de compatibilizar os aspectos positivos da Relatividade Geral e da MOND. Ela é uma extensão relativística do modelo da MOND, e é capaz de substituir a necessidade da Matéria Escura porque possui graus de liberdade a mais que a Relatividade Geral, propiciados pela introdução de dois campos dinâmicos extras: um campo escalar e outro vetorial.

A idéia de descrever a gravitação usando campos extras vem da teoria de Brans-Dicke de 1961 [7]. Ela apresenta uma “constante gravitacional variável”, tendo sido motivada por considerações a respeito do Princípio de Mach, o qual relaciona a inércia em um dado lugar do Universo com a influência de corpos distantes. A teoria de Brans-Dicke é ainda hoje a mais conhecida teoria alternativa da gravitação, por ser tão bem aparada experimentalmente quanto a Relatividade Geral, e por ter inaugurado a introdução de campos gravitacionais auxiliares e estimulado o aprimoramento de estratégias para a comparação entre diferentes teorias da gravitação. Assim, surgiu e se desenvolveu um formalismo bastante completo, capaz de analisar qualquer teoria métrica para a gravitação, permitindo que elas sejam comparadas entre si e confrontadas com fatos experimentais. Esse é o chamado ‘formalismo parametrizado pós-newtoniano’ (formalismo PPN) que, baseado nas idéias de Eddington [8], Robertson [9] e Schiff [10], foi desenvolvido, nas décadas de 60 e 70, por Nordtvedt [11,12] e Will [13-15].

Neste trabalho, será calculado, usando o formalismo PPN, o limite gravitacional pós-newtoniano da TeVeS. Como exemplo, a Relatividade Geral, em seu limite de campos gravitacionais fracos e velocidades pequenas se comparadas à da luz, reproduz a teoria da gravitação newtoniana numa primeira aproximação. Como num cálculo de perturbação, pode-se prosseguir a ordens superiores desse limite, e a primeira correção do limite newtoniano é a

chamada ‘correção pós-newtoniana’, na qual já se incluem descrições de fenômenos não contemplados pela teoria newtoniana* . Seguir-se-á neste trabalho a versão mais recente do formalismo PPN dado por Will [16].

Através de um conjunto de dez parâmetros, chamados ‘parâmetros parametrizados pós-newtonianos’ (parâmetros PPN), obtêm-se várias informações sobre a teoria analisada, como: conservação de energia, de momento linear e de momento angular, suas previsões para fenômenos como deflexão e desvio do comprimento de onda da luz, precessão do periélio e quebra do princípio de equivalência, dentre outros. Como já dito, a Relatividade Geral concorda muito bem com as observações experimentais destes fenômenos e serve como uma base comparativa para o limite pós-newtoniano de outras teorias.

O objetivo deste trabalho é avaliar o limite pós-newtoniano da teoria TeVeS de Bekenstein e discutir seus resultados comparando-os com os da Relatividade Geral. No primeiro capítulo será apresentada a teoria TeVeS, assim como sua motivação, o desenvolvimento das idéias para se chegar até ela, suas principais semelhanças e diferenças com a Relatividade Geral e as condições em que a primeira tem a última como limite. Será usada uma notação diferente, que parece ser equivalente, porém mais simples, que a utilizada pelo autor da teoria, levando a resultados mais gerais e a uma proposta de um novo modelo específico para a lagrangiana de um dos campos. A relação entre as duas notações será examinada no Apêndice A. No segundo capítulo será apresentado o formalismo PPN, com uma discussão dos significados dos vários parâmetros, e tendo como exemplo o cálculo para a Relatividade Geral. A principal contribuição do trabalho será a aplicação do formalismo PPN à TeVeS, feita no terceiro capítulo. O Apêndice B apresenta um cálculo intermediário particularmente trabalhoso. Serão obtidas restrições experimentais para os valores dos

* No Capítulo 2 ficará mais claro o significado das ordens dessa expansão.

parâmetros livres da teoria, bem como uma relação previamente desconhecida entre eles. Será estudada a lei de conservação do momento e energia de acordo com a TeVeS na ausência de gravidade, chegando-se num resultado inesperado. Por fim, serão dadas as conclusões e discussões do trabalho, que proporciona um melhor entendimento de certos aspectos da TeVeS.

Capítulo 1

Da Relatividade Geral à TeVeS

Apesar de a Relatividade Geral explicar com êxito testes referentes ao sistema solar (como será visto no capítulo posterior), algumas divergências existem quando se trata de sistemas maiores, como galáxias e aglomerados de galáxias. As previsões da teoria não são boas ao se analisar a curva de velocidade de rotação das galáxias [17] e os efeitos de lente gravitacional. Há uma discrepância entre a massa dinâmica e a massa “luminosa”: para explicar esses fenômenos usando a Relatividade Geral, deveria haver mais massa do que a realmente vista [18]. Devido a esse problema, alguns físicos sugeriram a idéia da Matéria Escura [19], que tem hoje bastante aceitação.

Uma outra possibilidade seria a de que o lado esquerdo da equação de Einstein (que descreve a geometria do espaço-tempo) deveria ser reconsiderado, ao invés do lado direito (que descreve a matéria), ou seja, uma nova teoria da gravitação deveria ser formulada a fim de explicar corretamente tais fenômenos. Atualmente, a teoria mais promissora para esse fim é a TeVeS de Bekenstein. Como o objetivo deste trabalho é analisar o limite pós-newtoniano dessa teoria, neste capítulo será descrito o desenvolvimento para se chegar a ela, desde a idéia inicial de Milgrom para modificar a mecânica newtoniana até os conceitos e conseqüências da TeVeS.

1.1 Relatividade Geral

Uma rápida passagem pela Relatividade Geral é necessária para se compreender melhor os aspectos da TeVeS na Seção 1.5. Em uma teoria métrica da gravitação, a medida invariante infinitesimal da distância espaço-temporal entre dois eventos é:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.1)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo. A Relatividade Geral é formulada no contexto da geometria riemanniana, na qual o tensor de Riemann descreve a curvatura do espaço-tempo:

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = (\Gamma^\alpha_{\beta\nu})_{,\mu} - (\Gamma^\alpha_{\beta\mu})_{,\nu} + \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\nu} \Gamma^\lambda_{\beta\mu}, \quad (1.2)$$

onde $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ é a conexão métrica (suas componentes são também conhecidas como símbolos de Christoffel) dada por

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\delta} (g_{\delta\beta,\alpha} + g_{\delta\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,\delta}), \quad (1.3)$$

onde $g^{\mu\nu}$ é a inversa de $g_{\mu\nu}$, no sentido que $g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$ (onde δ_α^γ é o delta de Kronecker 4-dimensional).

Na presença de curvatura do espaço-tempo, para que o resultado de uma diferenciação seja um tensor, as derivadas são trocadas por derivadas covariantes (ver página viii), dadas por:

$$A^{\nu}{}_{;\mu} = A^{\nu}{}_{,\mu} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} A^{\lambda}$$

$$A_{\nu}{}_{;\mu} = A_{\nu}{}_{,\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} A_{\lambda}$$

$$A^{\alpha\beta}{}_{;\mu} = A^{\alpha\beta}{}_{,\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} A^{\lambda\beta} + \Gamma^{\beta}_{\lambda\mu} A^{\lambda\alpha}$$

$$A_{\alpha\beta}{}_{;\mu} = A_{\alpha\beta}{}_{,\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} A_{\lambda\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} A_{\alpha\lambda}, \quad (1.4)$$

cujas ordens de aplicação não comutam, existindo a relação:

$$A^{\mu}{}_{;\beta\alpha} - A^{\mu}{}_{;\alpha\beta} = R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} A^{\nu} . \quad (1.5)$$

Para um campo escalar, não há distinção entre as derivadas simples e covariante, ou seja, $\phi_{;\mu} = \phi_{,\mu}$. A métrica possui a propriedade de ser constante em relação à derivação covariante, ou seja, $g_{\alpha\beta}{}_{;\mu} = 0$.

Através do tensor de Riemann, são construídos outros dois objetos, o tensor de Ricci

$R_{\mu\nu}$:

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} = (\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha})_{,\alpha} - (\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha})_{,\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} \quad (1.6)$$

e o escalar de curvatura R , dado por $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. A Relatividade Geral relaciona a geometria riemanniana com a matéria (a presença de matéria e/ou energia modifica a geometria do espaço-tempo) através de uma equação de movimento para a métrica, conhecida como equação de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} , \quad (1.7)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento da matéria, e κ é uma constante que será explicitada no final desta seção. O objeto do lado esquerdo de (1.7) é chamado ‘tensor de Einstein’, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$, possuindo a divergência covariante nula, $G^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$. Essa propriedade garante a consistência da equação, dado que $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$ pela lei de conservação de energia-momento. Além disso, (1.7) é suficiente para determinar totalmente a métrica, a menos da definição do sistema de coordenadas, o que tem como consequência a existência de uma liberdade de calibre com quatro graus de liberdade para a teoria. Das definições (1.6) e (1.3), vê-se que (1.7) é uma equação não-linear em $g_{\mu\nu}$, e fisicamente isso significa que o campo gravitacional interage consigo mesmo.

A equação de Einstein (1.7) pode ser derivada da ação de Einstein-Hilbert,

$$S_{(g)} = \frac{1}{2\kappa} \int R \sqrt{-g} d^4x + S_{(m)} \quad , \quad (1.8)$$

sendo g o determinante da métrica, $g = \det(g_{\mu\nu})$, e $S_{(m)}$ a ação da matéria e de campos não-gravitacionais que dará origem a $T_{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\delta S_{(m)}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) ; \quad T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\delta S_{(m)}}{\delta g_{\mu\nu}} \right) . \quad (1.9)$$

Dada a maneira como o espaço é curvo, pode-se prever como é o movimento de um corpo sujeito apenas à força gravitacional através da equação da geodésica:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad , \quad (1.10)$$

sendo τ o tempo próprio do corpo em movimento e $dx^\alpha/d\tau$ sua quadri-velocidade. Num espaço plano, uma partícula livre se movimenta de acordo com uma linha reta. Na presença de um campo gravitacional, a equação (1.10) diz que ela se movimenta por uma curva que dá a menor distância entre dois pontos, chamada geodésica. A geodésica, por causa da curvatura do espaço-tempo, não é necessariamente uma reta.

A Relatividade Geral contém a teoria newtoniana como um caso especial. As equações (1.7) e (1.10), para o limite de campos fracos e velocidades baixas se comparadas à da luz, dão exatamente as equações fundamentais da teoria da gravitação newtoniana:

$$\nabla^2 \Phi_N = 4\pi G \rho \quad \text{e} \quad \vec{a} = -\nabla \Phi_N \quad , \quad (1.11)$$

onde Φ_N é o potencial gravitacional newtoniano. Para estudar esse limite, escreve-se a métrica como $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \psi_{\alpha\beta}$, onde $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1,1,1,1)$ é a métrica de Minkowski para o espaço-tempo plano e $\psi_{\alpha\beta}$ é uma pequena perturbação da solução plana. A partir da propriedade $g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$, chega-se na expansão infinita para a métrica contravariante, dada

por $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - \psi^{\alpha\beta} + \psi^{\alpha\mu}\psi^{\beta}_{\mu} + \dots$. Fazendo-se então os limites $|\psi_{\mu\nu}| \ll 1$ (desconsideração dos termos não-lineares em $\psi_{\mu\nu}$) e $|v^i| \ll c$, e também considerando a situação de campos estáticos (ou seja, desprezando derivadas temporais), a equação (1.10) dá

$$a^i = -c^2 \Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} c^2 \psi_{00,i} . \quad (1.12)$$

Se for feita a correspondência $\psi_{00} = -2\Phi_N/c^2$, retoma-se a segunda lei de Newton para a gravitação, ou seja, a segunda das equações (1.11).

Utilizando os mesmos limites em (1.7) e considerando o calibre

$$\left(\psi^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \psi \eta^{\mu\nu} \right)_{,v} = 0 , \quad (1.13)$$

onde ψ é o chamado traço de $\psi_{\alpha\beta}$, $\psi = \eta^{\alpha\beta} \psi_{\alpha\beta}$, chega-se em $G_{00} = -\nabla^2 \psi_{00}$, que é a parte linear da componente temporal da equação de Einstein. Dentro dos mesmos limites, pode-se considerar o tensor de energia-momento como sendo $T_{\mu\nu} = \rho \frac{dx_{\mu}}{d\tau} \frac{dx_{\nu}}{d\tau}$, ou seja, $T_{00} = \rho c^2$.

Igualando os dois lados da equação (1.7), tem-se que*

$$\nabla^2 \psi_{00} = -\kappa \rho c^2 . \quad (1.14)$$

Usando o resultado $\psi_{00} = -2\Phi_N/c^2$, vê-se que (1.14) se reduz a $\nabla^2 \Phi_N = 4\pi G \rho$ se $\kappa = 8\pi G/c^4$. Esse cálculo é uma forma resumida de se encontrar o limite newtoniano da Relatividade Geral. Na Seção 2.3 ele será refeito com maiores detalhes dentro do formalismo PPN.

Daqui em diante, por simplicidade, adotar-se-á o sistema de unidades geometrizadas, em que $c = G = 1$, de tal forma que $\kappa = 8\pi$.

A solução mais simples para a equação de Einstein é a para uma distribuição central, neutra e estática de massas, a conhecida ‘métrica de Schwarzschild’:

* As outras componentes da equação (1.7) simplesmente reproduzem esse resultado.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.15)$$

Fazendo-se uma mudança para coordenadas isotrópicas (sistema em que o coeficiente para as componentes espaciais é o mesmo) através da transformação $r = \bar{r} \left(1 - \frac{2M}{\bar{r}}\right)^2$, (1.15) se torna

[20]:

$$ds^2 = -\left(\frac{1 - M/2\bar{r}}{1 + M/2\bar{r}}\right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2\bar{r}}\right)^4 \left[d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (1.16)$$

Expandindo os coeficientes até ordem $\frac{1}{\bar{r}^2}$ e passando para coordenadas cartesianas, tem-se as

componentes da métrica:

$$g_{00} = -1 + \frac{2M}{\bar{r}} - 2\left(\frac{M}{\bar{r}}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\bar{r}^3}\right)$$

$$g_{ij} = \left[1 + \frac{2M}{\bar{r}} + \frac{3}{2}\left(\frac{M}{\bar{r}}\right)^2 \right] \delta_{ij} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\bar{r}^3}\right)$$

$$g_{0i} = 0 \quad (1.17)$$

Será visto no Capítulo 2 que o formalismo PPN surgiu, inicialmente, na tentativa de generalizar este resultado para outras teorias.

1.2 Curva de velocidade de rotação das galáxias

Como visto na seção anterior, no limite de campos fracos e velocidades baixas, a Relatividade Geral se reduz à teoria da gravitação newtoniana. Ao se estudar a dinâmica de rotação de galáxias, esse limite se aplica. Galáxias espirais são formadas basicamente pelo

núcleo central, pelo fino disco galáctico que cerca esse núcleo, por braços espirais e por halos que circundam o disco. Considerando as duas primeiras estruturas, pode-se inferir a velocidade de rotação desse tipo de galáxia* [21]: igualando a força da gravitação universal, $F = Mm/r^2$, com a força centrípeta mv_r^2/r , chega-se na relação entre a velocidade radial e a distância ao centro de massa:

$$v_r = \sqrt{\frac{M}{r}}. \quad (1.18)$$

Estando a distância r dentro do núcleo, pode-se aproximá-lo por uma esfera homogênea, tal que $M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$, ou seja, $v_r \propto r$. Entretanto, estando fora do núcleo, M é constante e $v_r \propto r^{-1/2}$. Essa é a previsão da teoria da gravitação newtoniana para a velocidade de rotação das galáxias espirais, que discorda totalmente do observado para distâncias grandes do núcleo, como se pode ver pela Figura 1.1. O comportamento perto do núcleo é crescente como o esperado, mas para distâncias grandes, ao invés da curva seguir o padrão $v_r \propto r^{-1/2}$, ela se torna constante, o que é chamado pelos astrônomos de “achatamento das curvas de rotação das galáxias” (*Flattening of the galaxies rotation curves*).

A primeira tentativa de explicação para tal discrepância foi supor que no halo das galáxias há matéria simetricamente distribuída que só é detectável através de sua interação gravitacional [21]. Da equação (1.18), para uma velocidade constante v_0 tem-se que

$$M(r) = rv_0^2, \quad \frac{dM(r)}{dr} = v_0^2. \quad (1.19)$$

Da equação de continuidade de massa,

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r), \quad \rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dM(r)}{dr}. \quad (1.20)$$

* Galáxias elípticas não possuem um eixo de rotação e sua dinâmica é dominada por movimentos aleatórios (várias direções) das estrelas, portanto essa aproximação não é válida para a galáxia como um todo.

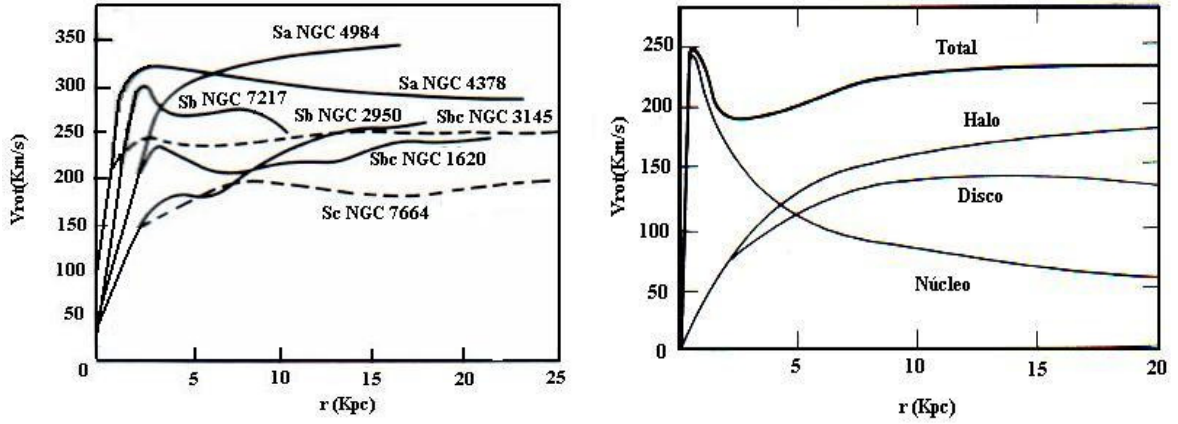


Figura 1.1: **Esquerda:** Curvas de rotação observadas para várias galáxias espirais (Adaptada de [22]). **Direita:** Padrão das curvas experimentais da velocidade de rotação de galáxias espirais para cada componente da galáxia (Adaptada de [21]).

Juntando (1.19) e (1.20), vê-se que, para que a distribuição dessa matéria reproduza a curva de rotação observada, ela deve obedecer:

$$\rho(r) = \frac{v_0^2}{4\pi r^2}. \quad (1.21)$$

Assim, supõe-se que o halo das galáxias é preenchido pela chamada ‘Matéria Escura’, com uma distribuição dada, grosso modo, por (1.21). Hoje a hipótese da existência da Matéria Escura é a aceita pela comunidade física, sendo ela usada também para explicar outros problemas astronômicos e cosmológicos [23,24].

Uma outra tentativa seria supor que, a partir de certa distância r_0 da fonte, a lei do inverso do quadrado é atenuada, com a força caindo com r^{-1} . A velocidade de rotação para grandes distâncias seria então constante, $v_r = \sqrt{M}$. Entretanto tal modificação não está de acordo com a chamada relação de Tully-Fisher [25], que associa a velocidade assintótica de rotação em galáxias espirais com sua luminosidade, na forma $L \propto v^4$. Assumindo que a razão massa-luminosidade M/L de uma galáxia é uma constante Λ , a relação de Tully-Fisher fica:

$$v^4 \propto L = \frac{L}{M} M = \frac{1}{\Lambda} M \Rightarrow M \propto v^4. \quad (1.22)$$

A modificação da lei do inverso do quadrado para r^{-1} , portanto, não é uma boa alternativa.

1.3 MOND

Levando em conta o achatamento da curva de rotação das galáxias e a lei de Tully-Fisher, Milgrom propôs, em 1983, uma modificação da dinâmica de Newton conhecida como MOND (*Modified Newtonian Dynamics*) [2-4]. O desvio da curva experimental de velocidade de rotação das galáxias em relação à previsão teórica acontece para distâncias grandes do centro de massa, ou seja, em situações onde a força gravitacional é fraca e, conseqüentemente, a aceleração das estrelas também. A novidade da MOND é então introduzir uma constante a_0 , criando uma escala de aceleração. A dinâmica de Newton seria uma boa aproximação apenas para acelerações gravitacionais muito maiores do que a_0 . A expressão padrão para a aceleração fica

$$\hat{\mu}(a/a_0)\vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi_N, \quad (1.23)$$

onde a função $\hat{\mu}(x)$ satisfaz as condições extremas $\hat{\mu}(x) \approx 1$ para $x \gg 1$ e $\hat{\mu}(x) \approx x$ para $x \ll 1$. Com esta prescrição, a aceleração no limite fraco ($a \ll a_0$) é modificada de acordo com

$$\frac{a}{a_0}a = \frac{M}{r^2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{Ma_0}}{r} = \sqrt{a_N a_0}. \quad (1.24)$$

E a velocidade radial fica

$$\frac{v^2}{r} = \frac{\sqrt{Ma_0}}{r} \Rightarrow v = \sqrt[4]{Ma_0}, \quad (1.25)$$

ou seja, torna-se constante e concorda com (1.22). Milgrom ressaltou em seu trabalho que (1.23) é válida para sistemas isolados. Para sistemas sob a influência de um campo externo (como a dinâmica interna de um aglomerado de estrelas sob influência de toda a galáxia), é preciso levar em conta a aceleração desse campo:

$$\hat{\mu}(| a_{\text{int}} + a_{\text{ext}} | / a_0) \bar{a}_{\text{int}} = a_{N_{\text{int}}} . \quad (1.26)$$

Então um subsistema com aceleração abaixo de a_0 poderá ser governado pela dinâmica newtoniana desde que $a_{\text{ext}} \gg a_0$.

O ajuste da curva de rotação das galáxias espirais pela MOND supõe um único parâmetro livre, a razão constante da massa para a luminosidade M/L da galáxia (em contrapartida, o ajuste através da Matéria Escura é bem mais flexível, contendo três parâmetros livres [26]). Geralmente a observação é feita na banda do infravermelho próximo já que essa emissão é menos afetada pela poeira interestelar da galáxia (como o comprimento de onda é relativamente grande, a luz é pouco difratada) e leva em conta a emissão de estrelas velhas. A Figura 1.2 mostra o ajuste da MOND para diversas galáxias, sendo evidente a concordância entre o modelo e os dados experimentais.

Milgrom criou a MOND para que ela previsse uma velocidade assintótica de rotação constante, não que ela concordasse com os detalhes de toda a curva de rotação com apenas um parâmetro livre, o que é surpreendente. Na figura 1.3, observa-se um fato interessante: foi feita uma tentativa de ajuste da curva de rotação de uma galáxia falsa (criada com informações de velocidade de uma galáxia real e fotometria de outra) pela MOND e pela Matéria Escura. A MOND não consegue se ajustar aos dados falsos, o que é um bom sinal, mas a Matéria Escura, com sua maior liberdade de parâmetros, sim. Isso, no mínimo, se faz duvidar da credibilidade das curvas obtidas pelo método da Matéria Escura.

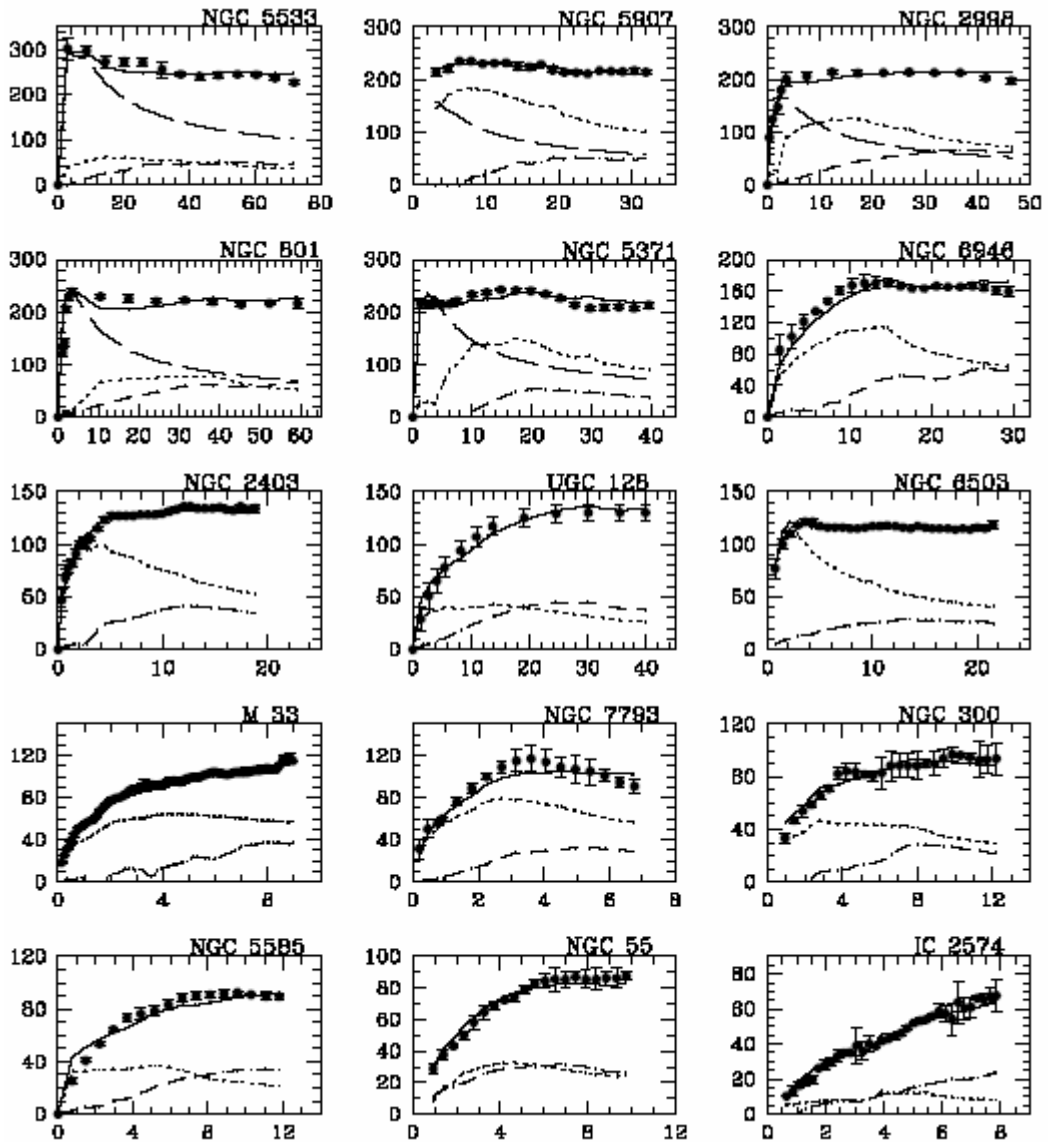


Figura 1.2: Curva de rotação para várias galáxias espirais. As linhas pontilhadas e tracejadas são as curvas newtonianas da matéria visível e da componente gasosa das galáxias, respectivamente. A linha contínua é a curva prevista pela MOND e os pontos são os dados experimentais. A distância (eixo horizontal) é dada em kpc e a velocidade (eixo vertical) em km/s (Retirada de [27]).

A constante a_0 introduzida na MOND é inferida fazendo-a ser também um parâmetro livre na análise de curvas de rotação bem determinadas [28], e assumindo o valor da constante de Hubble como sendo $H_0 = 75 \text{ km}/(\text{s Mpc})$. Seu valor experimental atual é de $(1,20 \pm 0,27)10^{-8} \text{ cm}/\text{s}^2$. Alguns estudiosos da MOND ressaltam a proximidade desse valor com o de cH_0 por um fator de 5 ou 6, sugerindo que talvez a MOND reflita efeitos

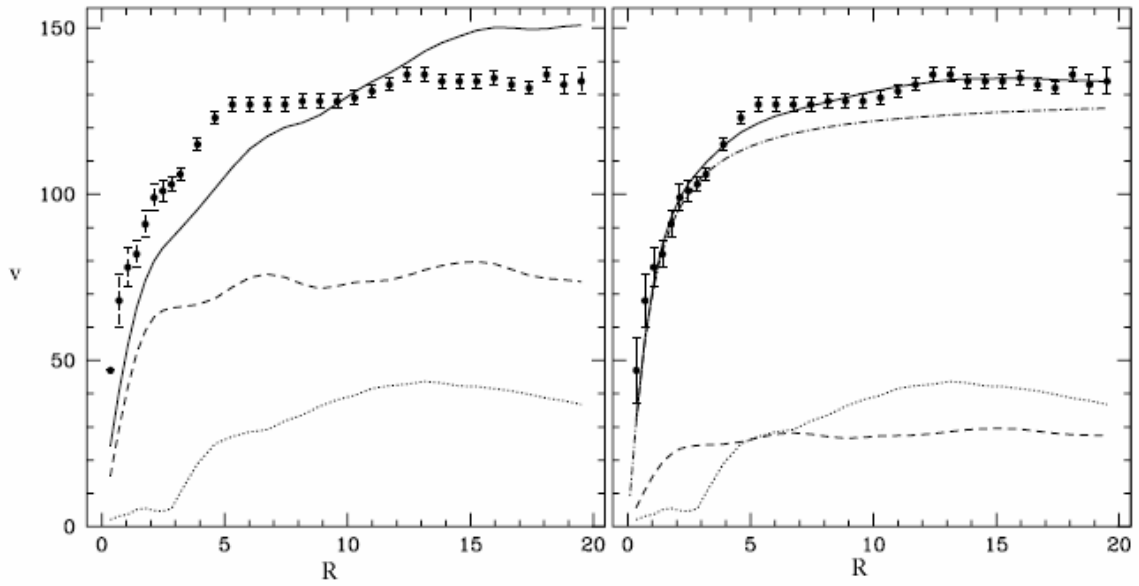


Figura 1.3: Tentativas de ajuste da curva de rotação de uma galáxia falsa. Na **esquerda**, pela MOND e na **direita** pela Matéria Escura, com a curva ponto-tracejada representando o halo da Matéria Escura. Os outros símbolos e unidades são os mesmos usados na Figura 1.2. [26]

cosmológicos na dinâmica local das partículas.

A MOND traz outras conseqüências que são observadas em sistemas galácticos. Dela surge naturalmente uma explicação, por exemplo, da diferença entre as curvas de rotação das galáxias LSB (*low surface brightness*) e das galáxias HSB (*high surface brightness*); as primeiras apresentam uma discrepância da curva newtoniana muito maior que as das segundas, o que pode ser compreendido através de um valor crítico de densidade de superfície dado por $\Sigma \approx a_0/G$ [27]. Dentre outras coisas, a MOND também fornece a relação de Faber-Jackson [27] para galáxias elípticas, relacionando corretamente a massa da galáxia com as velocidades radiais de dispersão.

Apesar de seus sucessos, a MOND é um modelo e não uma teoria completa, e apresenta graves problemas como a não-conservação de energia para um sistema de partículas puntiformes [29]. Além de que, sendo uma modificação da gravitação newtoniana, ela é não-

relativística e não oferece ferramentas para se calcular, por exemplo, o efeito de lente gravitacional, que também é usado para justificar a existência da Matéria Escura.

1.4 Teorias Relativísticas para a MOND

Várias tentativas foram feitas para se chegar a uma teoria relativística baseada na MOND (ou seja, que tivesse como limite não-relativístico a MOND ao invés da teoria da gravitação newtoniana). Um passo intermediário, entretanto, é a formulação lagrangiana não-relativística da MOND para resolver os problemas de conservação de energia e momento. Isso é conseguido através da teoria AQUAL proposta por Bekenstein e Milgrom em 1984 [5], baseada na lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{a_0^2}{8\pi} f\left(\frac{|\vec{\nabla}\Phi|^2}{a_0^2}\right) - \rho\Phi, \quad (1.27)$$

onde ρ é a densidade de massa, Φ é o potencial gravitacional real (no sentido de que $\vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi$ em comparação com (1.23)) e f é uma função qualquer, podendo então a lagrangiana ser não-linear em $|\vec{\nabla}\Phi|^2$ (daí o nome *AQUAdratic Lagrangian*). Usando-se a equação de Euler-Lagrange do princípio variacional, chega-se na equação de movimento

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\hat{\mu}\left(\frac{|\vec{\nabla}\Phi|}{a_0}\right) \vec{\nabla}\Phi \right] = 4\pi\rho, \quad (1.28)$$

onde $\hat{\mu}(\sqrt{y}) \equiv df(y)/dy$. Comparando com a equação de Poisson, $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\Phi_N = 4\pi\rho$, pode-se escrever (usando a propriedade $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{h}) = 0$, sendo h um campo vetorial):

$$\hat{\mu}\left(\frac{|\vec{\nabla}\Phi|}{a_0}\right) \vec{\nabla}\Phi = \vec{\nabla}\Phi_N - \vec{\nabla} \times \vec{h}, \quad (1.29)$$

que é a equação (1.23) com uma correção $\vec{\nabla} \times \vec{h}$ que reflete as leis de conservação da lagrangiana [29], se supor-se que

$$f(y) \rightarrow \begin{cases} y & y \gg 1 \\ \frac{2}{3} y^{3/2} & y \ll 1 \end{cases} . \quad (1.30)$$

Para distribuições de massa com simetria esférica, cilíndrica ou planar (caso do disco das galáxias), a equação (1.28) pode ser integrada diretamente e o campo h é nulo, ou seja, (1.29) se torna exatamente (1.23).

Com a AQUAL em mãos, é natural generalizar a teoria para sua formulação relativística. Entretanto, buscando uma analogia com (1.27), fazer a mudança $R \Rightarrow f(R)$ em (1.8) não resolve o problema porque, além de aparecerem indesejados termos quadráticos nas derivadas segundas do campo tensorial (que dominariam os termos que compõem a equação de Einstein), é necessário um grau de liberdade a mais do que a métrica fornece [6]. Inspirada na teoria de Brans-Dicke [7], na qual a interação gravitacional é mediada por um campo escalar ϕ que corresponde a uma constante gravitacional G variável, a RAQUAL (*Relativistic AQUAL*) [5] promove o potencial Φ a um campo escalar ϕ , que tem a sua própria lagrangiana,

$$\mathcal{L}_{(\phi)} = -\frac{a_0^2}{8\pi} f\left(\frac{g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta}}{a_0^2}\right) . \quad (1.31)$$

O grau de liberdade ϕ entra na definição da ‘métrica física’ através de uma transformação conforme:

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = e^{2\phi} g_{\alpha\beta} . \quad (1.32)$$

A relação (1.32) deve ser interpretada da seguinte forma: ϕ e $g_{\alpha\beta}$ são campos gravitacionais dinâmicos e auxiliares, a partir dos quais é determinada a forma de $\tilde{g}_{\alpha\beta}$, e essa métrica

determina o modo como a matéria reage à gravitação. Campos gravitacionais auxiliares têm o papel único de mediar o modo como a matéria e campos não-gravitacionais geram a métrica, mas eles não interagem com a matéria, cabendo esse papel apenas à ‘métrica física’. Os campos auxiliares adicionais a $g_{\alpha\beta}$ existem do “ponto de vista” de $g_{\alpha\beta}$, propagando então relativamente a esse campo. Portanto, $g_{\alpha\beta}$ aparece nas ações $S_{(g)} = (2\kappa)^{-1} \int R \sqrt{-g} d^4x$ e $S_{(\phi)} = \int \mathcal{L}_{(\phi)} \sqrt{-g} d^4x$, enquanto $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ se acopla com a matéria:

$$ds^2 = \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu ; S_{(m)} = \int \mathcal{L}_{(m)} \sqrt{-\tilde{g}} d^4x ; \tilde{T}_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-\tilde{g}}} \left(\frac{\delta S_m}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} \right). \quad (1.33)$$

A teoria é descrita então pela soma $S_{(g)} + S_{(\phi)} + S_{(m)}$ que, ao ser variada em relação ao campo ϕ , gera a equação*

$$[\mu(\frac{g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}}{a_0^2})g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}]_{;\beta} = -4\pi e^{4\phi} \tilde{g}^{\alpha\beta} \tilde{T}_{\alpha\beta}, \quad (1.34)$$

sendo agora $\mu(y) \equiv df(y)/dy$. Usando a prescrição (1.30), a equação (1.34) é a versão relativística de (1.28).

A teoria RAQUAL, entretanto, apresenta dois problemas: o campo ϕ pode se propagar com velocidade maior que a da luz [29], e o efeito de lente gravitacional é o mesmo previsto pela Relatividade Geral [30], uma conseqüência do tipo de relação entre $g_{\alpha\beta}$ e $\tilde{g}_{\alpha\beta}$: uma transformação conforme preserva o cone de luz, ou seja, a trajetória para fótons é a mesma nas duas métricas. Como a proposta da MOND é explicar esse efeito sem a necessidade de Matéria Escura (ou seja, ele deve ser mais forte do que na Relatividade Geral), é necessária outra formulação relativística para ela.

* Na referência [29], parece haver um erro já que o lado direito dessa equação aparece sem o fator $e^{4\phi}$.

Em 1996, Sanders [31] propôs uma relação “estratificada” para a métrica que, alterando o cone de luz em relação ao da Relatividade Geral, resolve o problema da lente gravitacional. Um novo campo deve ser introduzido: um vetor \mathfrak{u}_α fixo, unitário, com componentes $\mathfrak{u}_\alpha = (1,0,0,0)$. A receita é construir uma métrica com duas partes: uma ortogonal a \mathfrak{u}_α , multiplicada por $e^{-2\phi}$, e outra colinear a \mathfrak{u}_α , multiplicada por $e^{2\phi}$:

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = e^{-2\phi}(g_{\alpha\beta} + \mathfrak{u}_\alpha \mathfrak{u}_\beta) - e^{2\phi} \mathfrak{u}_\alpha \mathfrak{u}_\beta . \quad (1.35)$$

Entretanto, a definição do vetor \mathfrak{u}_α traz problemas já que ele sempre aponta na direção do tempo, ou seja, há uma direção preferencial, o que quebra a invariância de Lorentz e a covariância da teoria.

Coletando todas os aspectos bem sucedidos dessas propostas e introduzindo novas idéias, Bekenstein formulou a TeVeS, que será apresentada a seguir.

1.5 TeVeS

A TeVeS é descrita por três campos dinâmicos: um tensorial $g_{\alpha\beta}$, um vetorial \mathfrak{u}_α e um escalar ϕ (daí o nome *Tensor Vector Scalar*). A métrica física é baseada na proposta por Sanders,

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\alpha\beta} &= e^{-2\phi}(g_{\alpha\beta} + \mathfrak{u}_\alpha \mathfrak{u}_\beta) - e^{2\phi} \mathfrak{u}_\alpha \mathfrak{u}_\beta \\ &= e^{-2\phi} g_{\alpha\beta} - 2 \mathfrak{u}_\alpha \mathfrak{u}_\beta \sinh(2\phi) , \end{aligned} \quad (1.36)$$

sendo agora ϱ_α um campo dinâmico sem orientação pré-definida, obedecendo à normalização

$$\varrho_\mu \varrho_\nu g^{\mu\nu} = -1. \quad (1.37)$$

A inversa da métrica física é

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{\alpha\beta} &= e^{2\phi} (g^{\alpha\beta} + \varrho^\alpha \varrho^\beta) - e^{-2\phi} \varrho^\alpha \varrho^\beta \\ &= e^{2\phi} g^{\alpha\beta} + 2 \varrho^\alpha \varrho^\beta \sinh(2\phi). \end{aligned} \quad (1.38)$$

É importante ressaltar que os índices referentes a ϱ_α e ϕ são manipulados por $g_{\alpha\beta}$ (por exemplo, $\varrho^\alpha = g^{\alpha\beta} \varrho_\beta$, $\phi^{;\alpha} = g^{\alpha\beta} \phi_{;\beta}$), enquanto $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ manipula índices de objetos relacionados à matéria, como $\tilde{T}^{\mu\nu}$.

1.5.1 Ações

A TeVeS é formada pela soma de quatro ações, $S = S_{(g)} + S_{(s)} + S_{(v)} + S_{(m)}$. Assim como na Relatividade Geral, o campo $g_{\alpha\beta}$ é descrito por

$$S_{(g)} = \frac{1}{16\pi} \int R \sqrt{-g} d^4x. \quad (1.39)$$

A ação do campo vetorial é

$$S_{(v)} = -\frac{K}{32\pi} \int \left[g^{\alpha\beta} g^{\epsilon\gamma} \varrho_{[\alpha,\epsilon]} \varrho_{[\beta,\gamma]} - \frac{2\lambda}{K} (g^{\alpha\beta} \varrho_\alpha \varrho_\beta + 1) \right] \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.40)$$

onde K é um parâmetro adimensional e λ é um multiplicador de Lagrange que garante a normalização (1.37). O modo como é construído o termo dinâmico para ϱ_α impede que termos com derivadas segundas do campo apareçam em seu tensor de energia-momento,

como será visto na próxima seção. Pode-se também ver uma analogia entre ϖ_α e o potencial vetor A_α da teoria eletromagnética. As equações de Maxwell podem ser derivadas de uma lagrangiana proporcional a $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, sendo

$$F_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} A_{\nu]} , \quad (1.41)$$

ou seja, a lagrangiana de ϖ_α é semelhante à do campo eletromagnético em termos de A_α . Bekenstein então considerou natural escrever a lagrangiana de ϖ_α como (1.40), baseando-se numa teoria vetorial conhecida.

Para o campo escalar ϕ , escreve-se, nos mesmos moldes de (1.31):

$$S_{(s)} = -\frac{1}{2k^2 l^2} \int f(kl^2 h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta}) \sqrt{-g} d^4 x , \quad (1.42)$$

onde k é um parâmetro positivo adimensional, l estabelece uma escala de comprimento, e $h^{\alpha\beta} \equiv g^{\alpha\beta} - \varpi^\alpha \varpi^\beta$. O termo adicional $\varpi^\alpha \varpi^\beta \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta}$ é o que elimina a possibilidade do campo ϕ se propagar com velocidade superior à da luz. No trabalho original de Bekenstein [6], a ação para o campo escalar é apresentada de outra forma. Aqui se optou por escrevê-la assim já que é um caminho natural depois de (1.27) e (1.31). A relação entre as duas notações é apresentada no Apêndice A.

Por último, a lagrangiana da matéria é acoplada à métrica física $\tilde{g}_{\alpha\beta}$, sendo escrita como (1.33).

Variando a ação total $S = S_{(g)} + S_{(s)} + S_{(v)} + S_{(m)}$ com respeito a cada um dos três campos dinâmicos, obtêm-se as três equações de movimento da teoria, ficando claras as relações com a MOND e com a Relatividade Geral.

1.5.2 Equações de movimento

Da ação da teoria, apenas os termos $S_{(s)}$ e $S_{(m)}$ dependem de ϕ . Variando a ação da matéria e usando (1.33) e (1.38),

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{(m)}}{\delta \phi} &= \frac{\delta S_{(m)}}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} \frac{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}}{\delta \phi} = -\frac{1}{2} \sqrt{\tilde{g}} \tilde{T}_{\mu\nu} \times [2e^{2\phi} g^{\mu\nu} + 4 \mathfrak{z}^\mu \mathfrak{z}^\nu \cosh(2\phi)] \\ &= -\sqrt{\tilde{g}} [e^{2\phi} g^{\mu\nu} + 2 \mathfrak{z}^\mu \mathfrak{z}^\nu \cosh(2\phi)] \tilde{T}_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (1.43)$$

Para variar a ação do campo escalar, é conveniente usar a equação de Euler-Lagrange do princípio variacional; para um campo ψ qualquer ($L = \mathcal{L} \sqrt{-g}$),

$$\frac{\delta S}{\delta \psi} \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial \psi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right]. \quad (1.44)$$

Para o segundo termo de (1.44), é conveniente transformar a derivada normal pela covariante através da propriedade geral

$$A^\mu{}_{;\mu} = \frac{(\sqrt{-g} A^\mu)_{;\mu}}{\sqrt{-g}}. \quad (1.45)$$

Usando

$$y = kl^2 h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta}, \quad (1.46)$$

tem-se então

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{(\phi)}}{\partial \phi} &= \frac{\partial L_{(\phi)}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \phi} = 0; \\ \frac{\partial L_{(\phi)}}{\partial \phi_{,\mu}} &= \frac{\partial L_{(\phi)}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \phi_{,\mu}} = -\frac{1}{2k^2 l^2} \sqrt{-g} f'(y) \times kl^2 h^{\alpha\beta} (\phi_{,\alpha} \delta_\beta^\mu + \phi_{,\beta} \delta_\alpha^\mu) = -\frac{1}{k} \sqrt{-g} f'(y) h^{\alpha\mu} \phi_{,\alpha}; \\ \partial_\mu \left(\frac{\partial L_{(\phi)}}{\partial \phi_{,\mu}} \right) &= -\frac{1}{k} \partial_\mu [\sqrt{-g} f'(y) h^{\alpha\mu} \phi_{,\alpha}] = -\frac{1}{k} \sqrt{-g} [f'(y) h^{\alpha\mu} \phi_{,\alpha}]_{;\mu}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Juntando (1.47) e (1.43), a variação $\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0$ dá

$$\frac{1}{k} [f'(y) h^{\alpha\mu} \phi_{,\alpha}]_{,\mu} = \frac{\sqrt{-\tilde{g}}}{\sqrt{-g}} [e^{2\phi} g^{\mu\nu} + 2 \varrho^\mu \varrho^\nu \cosh(2\phi)] \tilde{T}_{\mu\nu} . \quad (1.48)$$

Para encontrar a razão entre os determinantes das duas métricas, escreve-se, usando (1.38):

$$\tilde{g}^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} = e^{2\phi} [\delta_\alpha^\mu + (1 - e^{-4\phi}) \varrho^\mu \varrho_\alpha] . \quad (1.49)$$

Usando propriedades da álgebra matricial, tem-se que

$$\tilde{g}^{-1} g = e^{8\phi} \text{Det}[I + (1 - e^{-4\phi}) \cup] , \quad (1.50)$$

sendo I a matriz identidade e \cup a matriz com componentes $\varrho^\mu \varrho_\alpha$. O lado esquerdo de

(1.50) é um escalar, então o lado direito também deve ser. Escolhendo um referencial onde

$\varrho^\mu = (1,0,0,0)$, a única componente não-nula de \cup é $\cup_0^0 = -1$, ou seja,

$$\tilde{g}^{-1} g = e^{8\phi} [1 - (1 - e^{-4\phi})] \times 1 \times 1 \times 1 = e^{4\phi} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{\tilde{g}}{g}} = e^{-2\phi} . \quad (1.51)$$

A equação de movimento para o campo escalar fica então

$$[f'(y) h^{\alpha\mu} \phi_{,\alpha}]_{,\mu} = k [g^{\mu\nu} + (1 + e^{-4\phi}) \varrho^\mu \varrho^\nu] \tilde{T}_{\mu\nu} . \quad (1.52)$$

Comparando (1.52) com (1.34), pode-se fazer a correspondência

$$f'(y) = \mu(y) , \quad (1.53)$$

ou seja,

$$[\mu(y) h^{\alpha\mu} \phi_{,\alpha}]_{,\mu} = k [g^{\mu\nu} + (1 + e^{-4\phi}) \varrho^\mu \varrho^\nu] \tilde{T}_{\mu\nu} . \quad (1.54)$$

Essa equação é a que liga a TeVeS à RAQUAL, se, semelhantemente a (1.30), supor-se que

$$f(y) \rightarrow \begin{cases} y & y \gg b^2 \\ \frac{2}{3b} y^{3/2} & y \ll b^2 \end{cases} , \quad (1.55)$$

ou, usando (1.53),

$$\mu(y) \rightarrow \begin{cases} 1 & y \gg b^2 \\ \frac{1}{b} y^{1/2} & y \ll b^2 \end{cases} . \quad (1.56)$$

Uma constante positiva b foi introduzida como parte da liberdade de escolha da função f da lagrangiana para ϕ . Nos casos de $y \gg b^2$, a constante multiplicativa é escolhida como unitária pois um valor diferente equivaleria a uma mera redefinição de k , além do que espera-se que o valor de μ seja exatamente 1. A prescrição para o limite newtoniano se dá em $y \gg b^2$, sendo então f uma função linear de y e $\mu = 1$. O regime da MOND aparece no caso $y \ll b^2$ com restrições adicionais como a de distribuição simétrica (como visto no estudo da AQUAL). Através dessa análise, é possível relacionar as constantes da TeVeS com a constante a_0 de Milgrom. Ela também dependerá de b , que deve ser da ordem de grandeza da unidade. O limite MONDiano da TeVeS será mostrado no final deste trabalho, já que é preciso usar alguns resultados do Capítulo 3.

Com relação ao campo vetorial, apenas os termos $S_{(v)}$, $S_{(s)}$ e $S_{(m)}$ dependem dele.

Variando a ação da matéria e usando (1.33) e (1.38),

$$\begin{aligned} \delta S_{(m)} / \delta \varpi_{\mu} &= \frac{\delta S_{(m)}}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} (\delta \tilde{g}^{\alpha\beta} / \delta \varpi_{\mu}) = -\frac{1}{2} \sqrt{\tilde{g}} \tilde{T}_{\alpha\beta} \times 4 g^{\alpha\mu} \varpi^{\beta} \sinh(2\phi) \\ &= -2\sqrt{\tilde{g}} g^{\alpha\mu} \sinh(2\phi) \varpi^{\beta} \tilde{T}_{\alpha\beta} . \end{aligned} \quad (1.57)$$

Para variar a ação $S_{(s)}$ é necessário reescrever $h^{\alpha\beta}$ para explicitar as componentes ϖ_{α} :

$$h^{\alpha\beta} \equiv g^{\alpha\beta} - g^{\alpha\lambda} g^{\beta\sigma} \varpi_{\lambda} \varpi_{\sigma} , \quad (1.58)$$

e, então,

$$\partial L_{(\phi)} / \partial (\varpi_{\mu,\nu}) = 0 ,$$

$$\begin{aligned}
\partial L_{(\phi)} / \partial \varrho_{\mu} &= \frac{\partial L_{(\phi)}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial h^{\alpha\beta}} (\partial h^{\alpha\beta} / \partial \varrho_{\mu}) = -\frac{1}{2k^2 l^2} \sqrt{-g} f'(y) \times kl^2 \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} \times (-g^{\alpha\mu} \varrho_{\mu}{}^{\beta} - g^{\beta\mu} \varrho_{\mu}{}^{\alpha}) \\
&= \sqrt{-g} \frac{\mu(y)}{k} g^{\alpha\mu} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} \varrho_{\mu}{}^{\beta} .
\end{aligned} \tag{1.59}$$

E, da ação $S_{(v)}$,

$$\partial L_{(v)} / \partial \varrho_{\mu} = \sqrt{-g} \frac{\lambda}{16\pi} \times (\varrho_{\alpha}{}^{\mu} \delta_{\alpha}^{\mu} + \varrho_{\beta}{}^{\mu} \delta_{\beta}^{\mu}) = \sqrt{-g} \frac{\lambda}{8\pi} \varrho_{\mu}{}^{\mu} ,$$

$$\begin{aligned}
\partial L_{(v)} / \partial (\varrho_{\mu,\nu}) &= -\frac{K}{32\pi} \sqrt{-g} \times 4 [g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \varrho_{\alpha,\beta} - g^{\nu\alpha} g^{\mu\beta} \varrho_{\alpha,\beta}] \\
&= -\frac{K}{8\pi} \sqrt{-g} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\nu\alpha} g^{\mu\beta}) [\varrho_{\alpha,\beta} + (\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}) \varrho_{\lambda}] \\
&= -\frac{K}{8\pi} \sqrt{-g} \varrho_{\mu}{}^{[\mu;\nu]} ,
\end{aligned}$$

$$[\partial L_{(v)} / \partial (\varrho_{\mu,\nu})]_{,\nu} = -\frac{K}{8\pi} \partial_{\nu} (\sqrt{-g} \varrho_{\mu}{}^{[\mu;\nu]}) = -\frac{K}{8\pi} \sqrt{-g} \varrho_{\mu}{}^{[\mu;\nu]}_{;\nu} . \tag{1.60}$$

Juntando (1.57), (1.59) e (1.60), e usando (1.51), a equação de movimento para o campo vetorial fica:

$$K \varrho_{\mu}{}^{[\mu;\nu]}_{;\nu} + \lambda \varrho_{\mu}{}^{\mu} + \frac{8\pi\mu(y)}{k} g^{\mu\alpha} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} \varrho_{\mu}{}^{\beta} = 8\pi(1 - e^{-4\phi}) g^{\mu\alpha} \varrho_{\mu}{}^{\beta} \tilde{T}_{\alpha\beta} . \tag{1.61}$$

A equação (1.61) fornece três componentes do campo vetorial mais o valor do multiplicador de Lagrange. A quarta componente de ϱ_{μ} vem da normalização (1.37). Multiplicando (1.61)

por ϱ_{μ} , o termo de λ pode ser isolado, fornecendo

$$\lambda = K \varrho_{\epsilon} \varrho_{\mu}{}^{[\epsilon;\sigma]}_{;\sigma} + \frac{8\pi\mu(y)}{k} \varrho_{\epsilon} \varrho_{\mu}{}^{\sigma} \phi_{,\epsilon} \phi_{,\sigma} - 8\pi(1 - e^{-4\phi}) \varrho_{\epsilon} \varrho_{\mu}{}^{\sigma} \tilde{T}_{\epsilon\sigma} . \tag{1.62}$$

A equação (1.61) fica então

$$\begin{aligned}
K(\varrho^{[\mu;\nu]}{}_{;\nu} + \varrho^\mu{}_{\varrho^\varepsilon} \varrho^{[\varepsilon;\sigma]}{}_{;\sigma}) + \frac{8\pi\mu(y)}{k} [g^{\mu\alpha} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} \varrho^\beta + \varrho^\mu (\varrho^\beta \phi_{,\beta})^2] = \\
= 8\pi(1 - e^{-4\phi}) [g^{\mu\alpha} \varrho^\beta \tilde{T}_{\alpha\beta} + \varrho^\mu \varrho^\varepsilon \varrho^\sigma \tilde{T}_{\varepsilon\sigma}] .
\end{aligned} \tag{1.63}$$

Finalmente, deve-se variar a ação total da teoria por $g^{\mu\nu}$. Nesse caso, todas as quatro ações $S_{(g)}$, $S_{(s)}$, $S_{(v)}$ e $S_{(m)}$ dependem do campo tensorial. $S_{(g)}$ é a ação da Relatividade Geral, portanto sua variação fornece o tensor de Einstein,

$$\frac{\delta S_{(g)}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi} G_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) . \tag{1.64}$$

Para variar $S_{(m)}$, é preciso reescrever (1.38):

$$\tilde{g}^{\alpha\beta} = e^{2\phi} g^{\alpha\beta} + 2g^{\alpha\gamma} g^{\beta\sigma} \varrho_\gamma \varrho_\sigma \sinh(2\phi) . \tag{1.65}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S_{(m)}}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{\delta S_{(m)}}{\tilde{g}^{\alpha\beta}} \frac{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{T}_{\alpha\beta} \times \{e^{2\phi} \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta + 2[\varrho_{\nu} \varrho^\beta \delta_\mu^\alpha + \varrho_\nu \varrho^\alpha \delta_\mu^\beta] \sinh(2\phi)\} \\
&= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} [\tilde{T}_{\mu\nu} + (1 - e^{-4\phi}) \varrho^\beta \tilde{T}_{\beta(\mu} \varrho_{\nu)}] .
\end{aligned} \tag{1.66}$$

É interessante notar que, como a métrica física é $\tilde{g}^{\alpha\beta}$ e não $g^{\alpha\beta}$, a variação da ação da matéria não fornece meramente o tensor de energia-momento, mas uma expressão deste envolvendo os outros campos da teoria.

Para variar as ações dos campos escalar e vetorial, é necessário levar em conta a relação

$$\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} . \tag{1.67}$$

Então:

$$\frac{\partial L_{(\phi)}}{\partial(g^{\mu\nu}, \gamma)} = 0 \quad ;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{(\phi)}}{\partial g^{\mu\nu}} &= -\frac{1}{2k^2 l^2} f(y) \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2k^2 l^2} \sqrt{-g} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{1}{4k^2 l^2} \sqrt{-g} f(y) g_{\mu\nu} + \\ &\quad - \frac{1}{2k^2 l^2} \sqrt{-g} f'(y) k l^2 \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} \times [\delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} - \delta_{\nu}^{\beta} \delta_{\mu}^{\alpha} - \delta_{\nu}^{\alpha} \delta_{\mu}^{\beta}] \\ &= \frac{1}{4k^2 l^2} \sqrt{-g} f(y) g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \sqrt{-g} \frac{\mu(y)}{k} [\phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \delta_{\nu}^{\beta} \phi_{,\beta} \delta_{(\nu} \phi_{,\mu)}] . \end{aligned} \quad (1.68)$$

E, finalmente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{(v)}}{\partial g^{\mu\nu}} &= -\frac{K}{32\pi} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} g^{\alpha\beta} g^{\varepsilon\gamma} \delta_{[\alpha,\varepsilon]} \delta_{[\beta,\gamma]} - \frac{K\sqrt{-g}}{32\pi} (g^{\varepsilon\gamma} \delta_{[\mu,\varepsilon]} \delta_{[\nu,\gamma]} + g^{\alpha\beta} \delta_{[\alpha,\mu]} \delta_{[\beta,\nu]}) + \\ &\quad + \frac{\lambda\sqrt{-g}}{16\pi} \delta_{\mu} \delta_{\nu} \\ &= -\frac{K\sqrt{-g}}{16\pi} [g^{\alpha\beta} \delta_{[\alpha,\mu]} \delta_{[\beta,\nu]} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g^{\varepsilon\gamma} \delta_{[\alpha,\varepsilon]} \delta_{[\beta,\gamma]} g_{\mu\nu}] + \frac{\lambda\sqrt{-g}}{16\pi} \delta_{\mu} \delta_{\nu} . \end{aligned} \quad (1.69)$$

Juntando (1.64), (1.66), (1.68) e (1.69), chega-se em

$$G_{\mu\nu} = 8\pi [\tilde{T}_{\mu\nu} + (1 - e^{-4\phi}) \delta_{\nu}^{\beta} \tilde{T}_{\beta(\mu} \delta_{\nu)} + \tau_{\mu\nu} + \Omega_{\mu\nu}] , \quad (1.70)$$

sendo

$$\begin{aligned} \tau_{\mu\nu} &= \frac{\mu(y)}{k} [\phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \delta_{\nu}^{\beta} \phi_{,\beta} \delta_{(\nu} \phi_{,\mu)}] - \frac{1}{2k^2 l^2} f(y) g_{\mu\nu} , \\ \Omega_{\mu\nu} &= \frac{K}{8\pi} [g^{\alpha\beta} \delta_{[\alpha,\mu]} \delta_{[\beta,\nu]} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g^{\varepsilon\gamma} \delta_{[\alpha,\varepsilon]} \delta_{[\beta,\gamma]} g_{\mu\nu}] - \frac{\lambda}{8\pi} \delta_{\mu} \delta_{\nu} , \end{aligned} \quad (1.71)$$

os tensores energia-momento dos campos escalar e vetorial respectivamente.

As equações (1.54), (1.63) e (1.70) descrevem a teoria TeVeS. Nota-se que a constante l não aparece explicitamente em nenhuma delas. Essa constante está diretamente ligada à

escolha de um dos limites de (1.55). Pela definição (1.46), se $l \rightarrow \infty$, tem-se o limite newtoniano, e se $l \rightarrow 0$, o da MOND.

A Relatividade Geral é recuperada fazendo-se $l \rightarrow \infty$ e $K \rightarrow 0$: com $K \rightarrow 0$, é fácil ver que a ação do campo vetorial se anula; no caso do campo escalar, é preciso fazer a seguinte análise: ao formular a teoria, a métrica (1.36) poderia ser mais geral, incluindo duas constantes:

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = e^{-2m\phi} (g_{\alpha\beta} + n \varpi_{\alpha} \varpi_{\beta}) - n e^{2m\phi} \varpi_{\alpha} \varpi_{\beta} . \quad (1.72)$$

Tomando o limite $m \rightarrow 0$, $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ se reduz a $g_{\alpha\beta}$ independentemente da escolha de n . Isso é equivalente a fazer uma transformação de escala $\phi \rightarrow \phi' = m\phi$. Fazendo $\phi \rightarrow \phi' = l\phi$ em

(1.36), chega-se em $\tilde{g}_{\alpha\beta} = e^{-\frac{2\phi'}{l}} (g_{\alpha\beta} + \varpi_{\alpha} \varpi_{\beta}) - e^{\frac{2\phi'}{l}} \varpi_{\alpha} \varpi_{\beta}$, e a relação (1.46) fica

$y = kh^{\alpha\beta} \phi'_{,\alpha} \phi'_{,\beta}$. Então o limite $l \rightarrow \infty$ reduz $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ a $g_{\alpha\beta}$ e a ação do campo escalar se anula,

recuperando, junto com $K \rightarrow 0$, a Relatividade Geral.

A equação (1.54) é a que faz a conexão com a MOND. No Capítulo 3, onde será feito o cálculo do limite pós-newtoniano da TeVeS, o valor de $\mu(y)$ deverá ser tomado como unitário. Esse é o limite newtoniano da prescrição da MOND e garantirá a consistência dos cálculos, já que no caso específico deste trabalho, não se está interessado no limite MONDiano.

1.5.3 Previsões da teoria

Em seu trabalho de apresentação da TeVeS [6], Bekenstein mostra que, num sistema de coordenadas isotrópico, a teoria tem, no limite de campos fracos, uma solução para uma distribuição central, neutra e estática de massas equivalente à da Relatividade Geral, a métrica (1.17). No regime de acelerações pequenas, o efeito de lente gravitacional é mostrado como tendo a magnitude correta para explicar as observações sem a necessidade da Matéria Escura. Também é discutido um modelo cosmológico que apresenta características similares aos da Relatividade Geral, impondo a restrição $k < 10^{-2}$. Em [32] e [33], é argumentado que a TeVeS pode reproduzir corretamente as anisotropias observadas na radiação cósmica de fundo. Em [34], dados experimentais de efeitos de lente gravitacional são confrontados com a teoria, fornecendo previsões satisfatórias em vários casos, mas resultados incompatíveis em outros.

A TeVeS não precisa ser vista como uma teoria relativística final para a MOND. De fato, ela ainda deve ser exaustivamente testada e há tentativas de refinar a lagrangiana do campo escalar [35] e até de introduzir um outro campo escalar dinâmico [36]. Mas, num aspecto geral, a TeVeS se apresenta como uma boa teoria alternativa à Relatividade Geral. No Capítulo 3, onde se mostrará seu limite pós-newtoniano, essa constatação será reforçada.

Capítulo 2

O formalismo PPN

O sistema solar é a fonte de experimentos para se analisar os limites newtoniano e pós-newtoniano, pois seus constituintes possuem campos gravitacionais fracos e velocidades baixas. Para tal análise é suficiente considerar os corpos astronômicos como compostos por fluidos perfeitos, ou seja, o tensor energia-momento de todo o cálculo será o de um fluido perfeito [16]:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + \rho\Pi + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} , \quad (2.1)$$

onde ρ é a sua densidade de energia de repouso, Π é a densidade de energia específica (razão entre a densidade de outras formas de energia (térmica, radiação, etc) para a energia de repouso), p é a pressão e u^α é a quadri-velocidade do fluido. No sistema solar, o potencial newtoniano, dado por*:

$$U(\vec{x}, t) = \int \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' ; \quad \nabla^2 U = -4\pi\rho , \quad (2.2)$$

nunca é maior do que 10^{-5} (em unidades geometrizadas, U é adimensional). Através do Teorema do Virial, as velocidades dos planetas são relacionadas a U tal que $v^2 \sim U$. A densidade de energia específica também é da mesma ordem de U ($\Pi \sim 10^{-5}$ para o Sol), tal

* No primeiro capítulo foi usado o símbolo Φ_N para o potencial newtoniano, e os sinais de (2.2) são contrários aos de (1.11). Fez-se essa mudança simplesmente porque a convenção (2.2) é a classicamente usada no formalismo PPN. A relação entre as duas notações é $U = -\Phi_N$.

como a razão p/ρ . A densidade de energia ρ também deve ser considerada da mesma ordem devido às equações (2.2). Por último, a evolução temporal é representada pela derivada $\partial/\partial t \sim \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$, ou seja, $\partial/\partial t$ é da ordem de v .

Sintetizando, pode-se escrever a ordem de todos esses elementos em função de um número pequeno ε :

$$\frac{\partial}{\partial x} \sim \text{O}(1) \quad v \sim \frac{\partial}{\partial t} \sim \text{O}(\varepsilon) \quad U \sim v^2 \sim \rho \sim \Pi \sim \text{O}(\varepsilon^2) \quad p \sim \text{O}(\varepsilon^4). \quad (2.3)$$

O objetivo do formalismo PPN é obter uma expansão da métrica nessas ordens a fim de comparar diferentes teorias métricas da gravitação. Uma versão primitiva do formalismo PPN foi desenvolvida por Eddington [8], Robertson [9] e Schiff [10], onde o sistema solar era tratado como uma distribuição central de massas. A métrica é dada por

$$g_{00} = -1 + \frac{2M}{r} - 2\beta \left(\frac{M}{r} \right)^2 \quad g_{ij} = \left(1 + \frac{2\gamma M}{r} \right) \delta_{ij} \quad g_{0i} = 0, \quad (2.4)$$

onde β e γ são parâmetros dados por cada teoria. Essa versão ainda é bastante usada por ter um cálculo bem mais rápido que o do formalismo atual, mas ela não fornece os valores de outros parâmetros que são importantes na análise de leis de conservação, como será visto mais adiante. Comparando a expansão (1.17) da métrica de Schwarzschild com (2.4), chega-se em $\gamma = \beta = 1$ para a Relatividade Geral (o termo de ordem r^{-2} em g_{ij} é uma ordem além da necessária nessa análise). Tal resultado será re-obtido na Seção 2.3 usando o formalismo PPN completo.

2.1 Limite newtoniano

Escrevendo a ação relativística para uma partícula livre

$$S = -m_0 \int \left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right)^{1/2} dt = -m_0 \int (-g_{00} - 2g_{0i}v^i - g_{ij}v^i v^j)^{1/2} dt \quad (2.5)$$

e introduzindo a notação “ $A_{\alpha\beta}^{[a]} = A_{\alpha\beta}$ até ordem ε^a ” (ou seja, inclui ordens menores que ε^a , se presentes), é fácil ver que, para se escrever a lagrangiana até ordem ε , precisa-se das seguintes componentes da métrica:

$$g_{00}^{[2]}, \quad g_{0i}^{[1]}, \quad g_{ij}^{[0]}. \quad (2.6)$$

Este é o limite newtoniano. Para obter tais expansões da métrica, deve-se expandi-la em torno de um valor assintótico que seja solução das equações para o espaço plano (primeira aproximação quando se está sob influência de um campo fraco). De modo geral, escreve-se:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \psi_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

onde $g_{\mu\nu}^{(0)} = \text{diag}(-c_0, c_1, c_1, c_1)$, e $\psi_{\mu\nu}$ é uma perturbação das soluções para o espaço plano.

É importante ressaltar que os índices de $\psi_{\mu\nu}$ são manipulados pela métrica assintótica $g_{\mu\nu}^{(0)}$ e não por $g_{\mu\nu}$, pois, ao se fazer a expansão acima, é do “ponto de vista” de $g_{\mu\nu}^{(0)}$ que $\psi_{\alpha\beta}$ entra na métrica*. Para o limite newtoniano, é fácil ver que, a partir de (2.6) e (2.7), tem-se:

$$g_{00}^{[2]} = -c_0 + \psi_{00}^{[2]}, \quad g_{0i}^{[1]} = \psi_{0i}^{[1]}, \quad g_{ij}^{[0]} = \delta_{ij} c_1. \quad (2.8)$$

* Deve-se tomar um cuidado especial com isto quando se for manipular índices na teoria TeVeS, já que nela se trabalha com três métricas diferentes, cada uma sendo própria para um tipo de objeto. No Capítulo 3 será explicitada a métrica a ser usada em cada situação.

Utilizando essa expansão da métrica, deve-se reproduzir a lei de Newton $\vec{a} = \vec{\nabla}U$. Geralmente a componente ψ_{0i} é de ordem ε^3 e $\psi_{00}^{[2]} = 2\alpha U$,* onde α é uma função de parâmetros cosmológicos e constantes definidos na teoria métrica em questão. Então, no limite newtoniano, tem-se:

$$g_{00}^{[2]} = -c_0 + 2\alpha U, \quad g_{0i}^{[1]} = 0, \quad g_{ij}^{[0]} = \delta_{ij}c_1. \quad (2.9)$$

Devido à definição de $g_{\mu\nu}^{(0)}$ e à invariância do intervalo infinitesimal de espaço-tempo, $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, as coordenadas x^μ devem ser transformadas para $x^{\bar{\mu}}$ a fim de “descontar” as constantes c_0 e c_1 :

$$x^0 = c_0^{-1/2}x^{\bar{0}}; \quad x^i = c_1^{-1/2}x^{\bar{i}}, \quad (2.10)$$

e, da mesma forma,

$$g_{\bar{0}\bar{0}} = c_0^{-1}g_{00}, \quad g_{\bar{0}\bar{i}} = (c_0c_1)^{-1/2}g_{0i}, \quad g_{\bar{i}\bar{j}} = c_1^{-1}g_{ij}. \quad (2.11)$$

O potencial U também se modifica:

$$U(\vec{x}, t) = \int \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \Rightarrow U(\vec{x}, t) = \int \frac{\rho(\vec{x}', t)}{c_1^{-1/2}|\vec{x} - \vec{x}'|} c_1^{-3/2} d^3x' \Rightarrow U = c_1^{-1}\bar{U}, \quad (2.12)$$

e, então, no limite newtoniano, a métrica é

$$g_{\bar{0}\bar{0}}^{[2]} = -1 + 2(\alpha/c_0c_1)\bar{U}, \quad g_{\bar{0}\bar{i}}^{[1]} = 0, \quad g_{\bar{i}\bar{j}}^{[0]} = \delta_{ij}. \quad (2.13)$$

O coeficiente α/c_0c_1 faz o papel da constante gravitacional G e, como neste trabalho adota-se um sistema de unidades em que $G = 1$, deve-se escrever:

$$\alpha = c_0c_1. \quad (2.14)$$

Essa relação entre as três constantes simplifica enormemente as contas, como será visto no

Capítulo 3.

* Essas afirmações serão demonstradas no final deste capítulo para a Relatividade Geral e no Capítulo 3 para a TeVeS.

2.2 Limite pós-newtoniano

Para o limite pós-newtoniano, precisa-se da lagrangiana (2.5) até ordem ε^2 (a ordem $\varepsilon^{3/2}$ não aparece porque seriam necessários termos de ordem ímpar na velocidade ou nas derivadas temporais. Esses termos mudam de sinal numa inversão temporal e significariam dissipação ou perda de energia pelo sistema. Mas a conservação de energia no limite newtoniano proíbe tais termos). A métrica então deve ser dada por:

$$g_{00}^{[4]}, \quad g_{0i}^{[3]}, \quad g_{ij}^{[2]}, \quad (2.15)$$

sendo posteriormente também necessária a transformação (2.11).

A análise para este caso não é tão simples e deve ser feita através das equações de movimento da teoria (no caso da Relatividade Geral, através da equação de Einstein). Por isso, também será preciso expandir o tensor de energia-momento (2.1). Até a ordem necessária, deve-se obter:

$$T_{[4]}^{00}, \quad T_{[3]}^{0i}, \quad T_{[4]}^{ij}. \quad (2.16)$$

Reescrevendo (2.1) e usando a expansão infinita $g^{\alpha\beta} = g_{(0)}^{\alpha\beta} - \psi^{\alpha\beta} + \psi^{\alpha\mu}\psi^{\beta}_{\mu} + \dots$, tem-se:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + \rho\Pi + p) \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + p(g_{(0)}^{\mu\nu} - \psi^{\mu\nu} + \psi^{\alpha\mu}\psi^{\beta}_{\mu} + \dots). \quad (2.17)$$

Através do intervalo infinitesimal de espaço-tempo,

$$-d\tau^2 = ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (g_{\mu\nu}^{(0)} + \psi_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu = (-c_0 + 2\alpha U) dt^2 + (c_1 \delta_{ij} + \psi_{ij}) dx^i dx^j + O(\varepsilon^4).$$

Levando em conta (2.14),

$$\left(\frac{d\tau}{dt} \right)_{[2]}^2 = (c_0 - 2c_0 c_1 U) - c_1 \delta_{ij} v^i v^j = c_0 (1 - 2c_1 U - c_1 c_0^{-1} v^2). \quad (2.18)$$

Como $U \sim v^2 \sim O(\varepsilon^2)$, é apropriada a expansão $(1+x)^y \approx 1+yx$:

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)_{[2]}^2 = c_0^{-1}(1 + 2c_1U + c_1c_0^{-1}v^2). \quad (2.19)$$

Chega-se então aos tensores (2.16) até a ordem necessária:

$$T_{[4]}^{00} = c_0^{-1}\rho[1 + \Pi + 2c_1U + c_0^{-1}c_1v^2], \quad T_{[3]}^{0j} = c_0^{-1}\rho v^j, \quad T_{[4]}^{ij} = c_0^{-1}\rho v^i v^j + c_1^{-1}p\delta^{ij}. \quad (2.20)$$

2.2.1 Potenciais pós-newtonianos

Para escrever as componentes (2.15) da métrica, é preciso usar potenciais pós-newtonianos, da mesma forma em que foi usado o potencial newtoniano U para escrever (2.9). Tais potenciais podem ser inferidos através de certas propriedades que eles devem ter:

1. Devem ser adimensionais (no sistema de unidades geometrizadas);
2. Devem decrescer no mínimo com r^{-1} para $r \rightarrow \infty$, garantindo que neste limite o espaço-tempo seja minkowskiano;
3. As correções ψ_{00} , ψ_{0i} e ψ_{ij} devem se transformar sob rotações espaciais como um escalar, um vetor e um tensor respectivamente;
4. Assume-se, por simplicidade, que são gerados apenas por ρ , Π , p e v , e não por seus gradientes.

Através dessas propriedades, pode-se escrever um conjunto de potenciais possíveis para cada componente da métrica:

$$g_{ij}^{[2]} : U\delta_{ij}, \chi_{,ij}$$

onde $\chi(\vec{x}, t)$ é o chamado ‘super-potencial’ e é dado por:

$$\chi(\bar{x}, t) \equiv -\int \rho(\bar{x}', t) |\bar{x} - \bar{x}'| d^3 x', \quad \nabla^2 \chi = -2U. \quad (2.21)$$

$g_{0i}^{[3]}: V_i, W_i$

onde

$$\begin{aligned} V_i(\bar{x}, t) &\equiv \int \frac{\rho(\bar{x}', t) v'_j}{|\bar{x} - \bar{x}'|} d^3 x', & \nabla^2 V_i &= -4\pi\rho v_i, \\ W_i(\bar{x}, t) &\equiv \int \frac{\rho(\bar{x}', t) \vec{v} \cdot (\bar{x} - \bar{x}') (x - x')_j}{|\bar{x} - \bar{x}'|^3} d^3 x'. \end{aligned} \quad (2.22)$$

$g_{00}^{[4]}: U^2, \Phi_w, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \mathcal{A}, \mathcal{B}$

onde

$$\begin{aligned} \Phi_w(\bar{x}, t) &\equiv \int \rho(\bar{x}', t) \rho(\bar{x}'', t) \frac{\bar{x} - \bar{x}'}{|\bar{x} - \bar{x}'|^3} \cdot \left(\frac{\bar{x}' - \bar{x}''}{|\bar{x} - \bar{x}''|} - \frac{\bar{x} - \bar{x}''}{|\bar{x}' - \bar{x}''|} \right) d^3 x' d^3 x'', \\ \Phi_1(\bar{x}, t) &\equiv \int \frac{\rho(\bar{x}', t) v'^2}{|\bar{x} - \bar{x}'|} d^3 x', & \nabla^2 \Phi_1 &= -4\pi\rho v^2, \\ \Phi_2(\bar{x}, t) &\equiv \int \frac{\rho(\bar{x}', t) U(\bar{x}', t)}{|\bar{x} - \bar{x}'|} d^3 x', & \nabla^2 \Phi_2 &= -4\pi\rho U, \\ \Phi_3(\bar{x}, t) &\equiv \int \frac{\rho(\bar{x}', t) \Pi(\bar{x}', t)}{|\bar{x} - \bar{x}'|} d^3 x', & \nabla^2 \Phi_3 &= -4\pi\rho \Pi, \\ \Phi_4(\bar{x}, t) &\equiv \int \frac{p(\bar{x}', t)}{|\bar{x} - \bar{x}'|} d^3 x', & \nabla^2 \Phi_4 &= -4\pi p, \\ \mathcal{A}(\bar{x}, t) &\equiv \int \frac{\rho(\bar{x}', t) [\vec{v}' \cdot (\bar{x} - \bar{x}')]^2}{|\bar{x} - \bar{x}'|^3} d^3 x', & \mathcal{B}(\bar{x}, t) &\equiv \int \frac{\rho(\bar{x}', t)}{|\bar{x} - \bar{x}'|} (\bar{x} - \bar{x}') \cdot \frac{d\vec{v}'}{dt} d^3 x'. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Existem várias relações entre estes potenciais, listadas a seguir:

$$\begin{aligned}
\chi_{,0j} &= V_j - W_j ; & V_{j,j} &= -U_{,0} ; & \nabla^2(\Phi_w + 2U^2 - 3\Phi_2) &= 2\chi_{,ij}U_{,ij} ; \\
\chi_{,00} &= \mathcal{A} + \mathcal{B} - \Phi_1 ; & |\bar{\nabla}U|^2 &= \nabla^2(\frac{1}{2}U^2 - \Phi_2) ; & U\nabla^2U &= \Phi_2 .
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Assim como em (2.12), os potenciais definidos acima se transformam de acordo com:

$$\begin{aligned}
\chi &= c_1^{-2}\bar{\chi} ; & V_j &= c_0^{1/2}c_1^{-3/2}\bar{V}_j ; & W_j &= c_0^{1/2}c_1^{-3/2}\bar{W}_j ; \\
\Phi_1 &= c_0c_1^{-2}\bar{\Phi}_1 ; & \Phi_2 &= c_1^{-2}\bar{\Phi}_2 ; & \Phi_3 &= c_1^{-1}\bar{\Phi}_3 ; & \Phi_4 &= c_1^{-1}\bar{\Phi}_4 ; \\
\Phi_w &= c_1^{-2}\bar{\Phi}_w ; & \mathcal{A} &= c_0c_1^{-2}\bar{\mathcal{A}} ; & \mathcal{B} &= c_0c_1^{-2}\bar{\mathcal{B}} ;
\end{aligned} \tag{2.25}$$

2.2.2 Parâmetros PPN

Dados os potenciais definidos acima, a métrica é escrita em função deles com coeficientes arbitrários, que serão os parâmetros parametrizados pós-newtonianos. A partir de uma transformação infinitesimal de coordenadas, pode-se escolher um calibre específico no qual a métrica tem uma forma mais simples*. Tal procedimento é feito da seguinte maneira: com a mudança de coordenadas

$$\bar{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x^\nu) , \tag{2.26}$$

a métrica se transforma como

$$\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}^\alpha) = g_{\mu\nu}(\bar{x}^\alpha) - \xi_{\mu;\nu} - \xi_{\nu;\mu} . \tag{2.27}$$

O termo $\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}$ deve ser pós-newtoniano e obedecer às propriedades listadas na seção anterior. Segue que a forma mais simples para ξ_μ é o gradiente do super potencial,

* Tal transformação é válida desde que a ação da teoria seja invariante sob ela, como no caso da Relatividade Geral.

$$\xi_0 = \lambda_1 \chi_{,0} \quad \xi_i = \lambda_2 \chi_{,i} , \quad (2.28)$$

onde λ_1 e λ_2 são constantes que podem ser escolhidas para eliminar certos termos da métrica*. Manipulando (2.27) com a escolha (2.28), chega-se em:

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ij} &= g_{ij} - 2\lambda_2 \chi_{,ij} ; & \bar{g}_{0k} &= g_{0k} - (\lambda_1 + \lambda_2)(V_k - W_k) ; \\ \bar{g}_{00} &= g_{00} - 2\lambda_2(U^2 + \Phi_w - \Phi_2) - 2\lambda_1(\mathcal{A} + \mathcal{B} - \Phi_1). \end{aligned} \quad (2.29)$$

O calibre que será adotado neste trabalho supõe uma escolha das constantes λ_1 e λ_2 de tal forma que os potenciais $\chi_{,ij}$ e \mathcal{B} não apareçam nas componentes \bar{g}_{ij} e \bar{g}_{00} respectivamente. Assim, a métrica será escrita em função de nove potenciais pós-newtonianos, sendo necessários entretanto dez parâmetros PPN, denominados $\gamma, \beta, \xi, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$. Após fazer as transformações (2.11) e (2.29), a métrica pós-newtoniana se escreve:

$$\begin{aligned} \bar{g}_{00} &= -1 + 2\bar{U} - 2\beta\bar{U}^2 - 2\xi\bar{\Phi}_w + (2\gamma + 2 + \alpha_3 + \zeta_1 - 2\xi)\bar{\Phi}_1 + 2(3\gamma - 2\beta + 1 + \zeta_2 + \xi)\bar{\Phi}_2 + \\ &\quad + 2(1 + \zeta_3)\bar{\Phi}_3 + 2(3\gamma + 3\zeta_4 - 2\xi)\bar{\Phi}_4 - (\zeta_1 - 2\xi)\bar{\mathcal{A}} \\ \bar{g}_{0j} &= -\frac{1}{2}(4\gamma + 3 + \alpha_1 - \alpha_2 + \zeta_1 - 2\xi)\bar{V}_j - \frac{1}{2}(1 + \alpha_2 - \zeta_1 + 2\xi)\bar{W}_j \\ \bar{g}_{jk} &= (1 + 2\gamma\bar{U})\delta_{jk} . \end{aligned} \quad (2.30)$$

Poder-se-ia ter colocado um parâmetro como coeficiente de cada potencial, mas, escritos desta forma, os parâmetros PPN têm significados e aplicações especiais que serão discutidos na próxima seção.

* Pela transformação (2.26), poder-se-ia ter uma liberdade de escolha de quatro constantes; a prescrição (2.28), no entanto, impõe o mesmo valor para as componentes espaciais, reduzindo o número de constantes para apenas duas.

2.2.3 Interpretação dos parâmetros PPN

Através da componente espacial da métrica em (2.30), vê-se que o parâmetro γ é o coeficiente do potencial U , ou seja, ele pode ser interpretado como a quantidade de curvatura espacial produzida por uma unidade de massa. Já o parâmetro β está associado ao termo U^2 , dizendo quão não-linear é a teoria*. O potencial Φ_w em (2.30) está relacionado a anisotropias na constante gravitacional G devido à influência de uma massa externa [15], levando à expressão $\frac{\Delta G}{G} \propto \frac{\xi}{r}$, onde r é a distância do sistema solar até essa massa externa. Portanto ξ pode ser visto como um indicador de efeitos de localização preferencial.

2.2.3.1 Leis de Conservação

Toda teoria métrica e covariante da gravitação baseada numa lagrangiana possui leis de conservação na forma [37]:

$$\Theta^{\mu\nu}{}_{, \nu} = 0, \quad (2.31)$$

onde $\Theta^{\mu\nu}$ pode ser deduzido da lagrangiana da teoria e se reduz a $T^{\mu\nu}$ na ausência de gravidade (ou seja, supondo as soluções assintóticas para cada campo presente na teoria)**.

Através da existência de $\Theta^{\mu\nu}$ assegura-se a conservação de energia e momento, dados respectivamente por

* É importante notar que este significado de β só é possível se a métrica está no calibre descrito por (2.29), pois o coeficiente de U^2 em (2.30) depende da escolha de λ_2 em (2.29).

** Ou seja, se reduz à conhecida lei de conservação $T^{\mu\nu}{}_{, \nu} = 0$ na ausência de gravidade. A TeVeS parece ser um caso peculiar, como poderá ser visto na Seção 3.2

$$P^0 = \int \Theta^{\mu 0} d^3 x, \quad P^i = \int \Theta^{\mu i} d^3 x. \quad (2.32)$$

Se $\Theta^{\mu\nu}$ é simétrico, o momento angular também é conservado, sendo dado por

$$J^{\mu\nu} = \int x^{[\mu} \Theta^{\nu]0} d^3 x. \quad (2.33)$$

De acordo com Will [16], escrevendo $\Theta^{\mu\nu}$ da seguinte forma:

$$\Theta^{\mu\nu} = (1 - aU)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}), \quad (2.34)$$

sendo $t^{\mu\nu}$ função dos potenciais pós-newtonianos (anulando-se no espaço plano), e a uma constante, pode-se, após um cálculo extenso, associar os seguintes significados a alguns dos parâmetros PPN:

$\alpha_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$: dizem se há violação na conservação de energia e momento na teoria [estão diretamente ligados à integrabilidade das equações (2.32)]. Se todos eles são nulos, energia e momento são conservados (como é de se esperar para qualquer teoria baseada numa lagrangiana);

α_1, α_2 : dizem se há violação na conservação de momento angular (estão associados à simetria de $\Theta^{\mu\nu}$).

2.2.3.2 Efeitos de sistemas de coordenadas preferenciais

O sistema de coordenadas no qual a métrica (2.30) foi escrita está em repouso em relação ao referencial inercial do universo. Fazendo uma transformação de Lorentz do sistema de coordenadas (t, \vec{x}) para um $(\tau, \vec{\xi})$, onde este último se move com velocidade \vec{w} ($|\vec{w}| \sim O(\epsilon)$) em relação ao primeiro, aparecem termos adicionais na métrica relacionados à

\bar{w} . Obviamente os resultados de experimentos não dependem de qual sistema se escolhe, mas essa transformação é útil para avaliar-se o significado de alguns parâmetros, como pode ser visto através da diferença entre as métricas nos dois sistemas:

$$\begin{aligned}\Delta\bar{g}_{\bar{0}\bar{0}} &= (\alpha_1 - \alpha_3)w^2\bar{U} + \alpha_2 w^i w^j \bar{\chi}_{,ij} - (2\alpha_3 - \alpha_1)w^i \bar{V}_i \\ \Delta\bar{g}_{\bar{0}\bar{i}} &= \frac{1}{2}(\alpha_1 - 3\alpha_2)w^i \bar{U} - \alpha_2 w^j \bar{\chi}_{,ij} \\ \Delta\bar{g}_{\bar{i}\bar{j}} &= 0.\end{aligned}\tag{2.35}$$

Os termos adicionais dependem apenas de α_1, α_2 e α_3 e sugerem que podem haver efeitos relacionados ao movimento do centro de massa do sistema em relação ao do universo em repouso. Isso é chamado de “efeito de sistema de coordenadas preferencial”*. Se os três parâmetros são nulos, não há, até ordem pós-newtoniana, um sistema preferencial na teoria.

2.2.3.3 Valores experimentais

A partir dos diversos significados dos parâmetros PPN, testes específicos podem ser feitos para determinar seus valores ou limites. A Tabela 2.1 traz um resumo dos significados dos parâmetros PPN e seus valores exatos para a Relatividade Geral (como será visto na Seção 3.3), e valores gerais para teorias conservativas (todas as leis de conservação são satisfeitas) e semiconservativas (não conservação do momento angular). A Tabela 2.2 mostra restrições experimentais para os valores dos parâmetros, servindo então como base para a aceitação ou não de uma teoria da gravitação.

* *Preferred-frame effect*

Parâmetro	Interpretação	Relatividade Geral	Teorias semi-conservativas	Teorias conservativas
γ	Quanta curvatura espacial é produzida por unidade de massa em repouso	1	γ	γ
β	Quanta não-linearidade há no princípio de superposição da gravidade na teoria	1	β	β
ξ	Efeitos de localização preferencial	0	ξ	ξ
α_1, α_2	Conservação de momento angular e efeitos de sistemas de coordenadas preferenciais	0	α_1, α_2	0
α_3	Conservação de momento e energia e efeitos de sistema de coordenadas preferenciais	0	0	0
$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$	Conservação de momento e de energia	0	0	0

Tabela 2.1: Interpretação dos parâmetros PPN (Adaptado de [16])

2.3 O exemplo da Relatividade Geral

Como dito na Seção 2.2, a análise deve ser feita através das equações de movimento da teoria em questão, sendo, neste caso, a equação de Einstein (1.7). É conveniente reescrever (1.7) a fim de eliminar R : tira-se o traço da equação, chegando-se em

$$R_{\mu\nu} = 8\pi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}). \quad (2.36)$$

Como já visto no primeiro capítulo, para a Relatividade Geral faz-se a expansão $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \psi_{\alpha\beta}$, ou seja, $c_0 = c_1 = 1$. Deve-se escrever as componentes de $R_{\mu\nu}$ até a ordem necessária estipulada por (2.15). Tendo em mente que $\partial/\partial t \sim O(\varepsilon)$, chega-se em [16]:

Parâmetro	Experimento	Valor ou limite	Método de obtenção ou considerações
γ	Desvio do comprimento de onda da luz Deflexão da luz	$1,000 \pm 0,002$ $1,000 \pm 0,002$	Dados da missão Viking VLBI (Very Long Baseline Interferometry)
β	Precessão do periélio de Mercúrio	$1,000 \pm 0,003$	Momento de quadrupolo do Sol suposto como 10^{-7}
$ \xi $	Efeitos de maré	$< 10^{-3}$	Medições com gravitômetros
$ \alpha_1 $	Efeitos orbitais de sistema preferencial	$< 4 \times 10^{-4}$	Dados do sistema solar
$ \alpha_2 $	Efeitos de maré Precessão do spin solar	$< 4 \times 10^{-4}$ $< 4 \times 10^{-7}$	Medições com gravitômetros Suposição de que o alinhamento do equador com a eclíptica solar não é coincidência
$ \alpha_3 $	Precessão de periélios Aceleração de pulsares	$< 2 \times 10^{-7}$ $< 2 \times 10^{-10}$	Estatística de dP/dt para pulsares
$ 4\beta - \gamma - 3 - \frac{10}{3}\xi - \alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 - \frac{2}{3}\zeta_1 - \frac{1}{2}\zeta_2 $	Efeito Nordtvedt	$< 1,5 \times 10^{-3}$	Medição da distância Terra-Lua com <i>laser</i>
$ \zeta_2 $	Auto aceleração	$< 4 \times 10^{-5}$	Pulsar binário
$ \zeta_3 $	Terceira lei de Newton	$< 10^{-8}$	Aceleração lunar

Tabela 2.2: Valores experimentais para os parâmetros PPN (Adaptado de [16])

$$\begin{aligned}
R_{00}^{[4]} &= -\frac{1}{2}\nabla^2\psi_{00}^{[4]} - \frac{1}{2}(\psi_{jj,00}^{[2]} - 2\psi_{j0,j0}^{[3]}) + \frac{1}{2}\psi_{00,j}^{[2]}(\psi_{jk,k}^{[2]} - \frac{1}{2}\psi_{kk,j}^{[2]}) - \frac{1}{4}|\vec{\nabla}\psi_{00}^{[2]}|^2 + \frac{1}{2}\psi_{jk}^{[2]}\psi_{00,jk}^{[2]} \\
R_{0j}^{[3]} &= -\frac{1}{2}(\nabla^2\psi_{0j}^{[3]} - \psi_{k0,jk}^{[3]} + \psi_{kk,0j}^{[2]} - \psi_{kj,0k}^{[2]}) \\
R_{ij}^{[2]} &= -\frac{1}{2}(\nabla^2\psi_{ij}^{[2]} - \psi_{00,ij}^{[2]} + \psi_{kk,ij}^{[2]} - \psi_{ki,kj}^{[2]} - \psi_{kj,ki}^{[2]}). \tag{2.37}
\end{aligned}$$

Na Relatividade Geral, há um calibre com quatro graus de liberdade possíveis, os quais serão escolhidos como*:

$$\psi^{\mu}_{i,\mu} - \frac{1}{2}\psi_{,i} = 0 \quad (\text{três graus de liberdade correspondendo a } i = 1,2,3) \tag{2.38a}$$

$$\psi^{\mu}_{0,\mu} - \frac{1}{2}\psi_{,0} = -\frac{1}{2}\psi_{00,0}, \quad \text{que também pode ser escrito como} \tag{2.38b}$$

$$\psi_{k0,k} - \frac{1}{2}\psi_{kk,0} = 0. \tag{2.38c}$$

Assim, as componentes (2.37) se tornam:

$$\begin{aligned}
R_{00}^{[4]} &= -\frac{1}{2}\nabla^2\psi_{00}^{[4]} - \frac{1}{2}|\vec{\nabla}\psi_{00}^{[2]}|^2 + \frac{1}{2}\psi_{jk}^{[2]}\psi_{00,jk}^{[2]} \\
R_{0j}^{[3]} &= -\frac{1}{2}(\nabla^2\psi_{0j}^{[3]} + \frac{1}{2}\psi_{00,0j}^{[2]}) \\
R_{ij}^{[2]} &= -\frac{1}{2}\nabla^2\psi_{ij}^{[2]}. \tag{2.39}
\end{aligned}$$

Para utilizar a equação (2.36), é preciso abaixar os índices das componentes (2.20) do tensor energia-momento:

$$\begin{aligned}
T_{00} &= g_{0\mu}g_{0\nu}T^{\mu\nu} = \eta_{0\mu}\eta_{0\nu}T^{\mu\nu} + 2\eta_{0\mu}\psi_{0\nu}T^{\mu\nu} + O(\varepsilon^6) = T^{00} - 2\psi_{00}T^{00} + O(\varepsilon^6) \\
T_{00}^{[4]} &= \rho(1 + \Pi + 2U + v^2) - 2\psi_{00}^{[2]}T_{[2]}^{00}. \tag{2.40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{0i} &= g_{0\mu}g_{i\nu}T^{\mu\nu} = \eta_{0\mu}\eta_{i\nu}T^{\mu\nu} + \eta_{0\mu}\psi_{i\nu}T^{\mu\nu} + \eta_{i\nu}\psi_{0\mu}T^{\mu\nu} + O(\varepsilon^6) = -\delta_{ij}T^{j0} + O(\varepsilon^4) \\
T_{0i}^{[3]} &= -\rho v_i. \tag{2.41}
\end{aligned}$$

* O calibre aqui escolhido é diferente de (1.13) porque agora não é feita a consideração de que o campo é estático.

$$T_{ij} = g_{i\mu} g_{j\nu} T^{\mu\nu} = \eta_{i\mu} \eta_{j\nu} T^{\mu\nu} + O(\varepsilon^5) = T^{ij} + O(\varepsilon^5)$$

$$T_{ij}^{[4]} = \rho v_i v_j + p \delta_{ij}. \quad (2.42)$$

Jogando todos os objetos (2.39), (2.40), (2.41) e (2.42) na equação (2.36), deve-se encontrar nessa seqüência: $\psi_{00}^{[2]}$, $\psi_{ij}^{[2]}$, $\psi_{0i}^{[3]}$ e, por último, $\psi_{00}^{[4]}$.

$\psi_{00}^{[2]}$: A primeira das equações (2.39), até ordem ε^2 , fica

$$R_{00}^{[2]} = -\frac{1}{2} \nabla^2 \psi_{00}^{[2]}. \quad (2.43)$$

E, até a mesma ordem,

$$T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = T_{00}^{[2]} - \frac{1}{2} \eta_{00} \eta^{00} T_{00}^{[2]} = \frac{1}{2} T_{00}^{[2]} = \frac{1}{2} \rho, \quad (2.44)$$

ou seja,

$$-\frac{1}{2} \nabla^2 \psi_{00}^{[2]} = 4\pi\rho = -\nabla^2 U. \quad (2.45)$$

dando, finalmente (e de acordo com o resultado da Seção 1.1),

$$\psi_{00}^{[2]} = 2U. \quad (2.46)$$

$\psi_{ij}^{[2]}$: Até ordem ε^2 , a componente ij de (2.36) é

$$T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \delta_{ij} \eta^{00} T_{00}^{[2]} = \frac{1}{2} \delta_{ij} T_{00}^{[2]} = \frac{1}{2} \rho \delta_{ij}, \quad (2.47)$$

ou seja,

$$-\frac{1}{2} \nabla^2 \psi_{ij}^{[2]} = 4\pi\rho \delta_{ij} = -\delta_{ij} \nabla^2 U, \quad (2.48)$$

e, finalmente,

$$\psi_{ij}^{[2]} = 2U \delta_{ij} = \psi_{00}^{[2]} \delta_{ij}. \quad (2.49)$$

$\psi_{0i}^{[3]}$: A segunda equação de (2.39), com o resultado $\psi_{00}^{[2]} = 2U$, fica

$$R_{0j}^{[3]} = -\frac{1}{2}(\nabla^2 \psi_{0j}^{[3]} + U_{,0j}), \quad (2.50)$$

e, até ordem ε^3 , a componente $0i$ de (2.36) é

$$T_{0i} - \frac{1}{2} g_{0i} g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = T_{0i}^{[3]} = -\rho v_i, \quad (2.51)$$

ou seja (utilizando (2.21), (2.22), (2.23) e (2.24)),

$$-\frac{1}{2} \nabla^2 \psi_{0j}^{[3]} = -8\pi\rho v_j + \frac{1}{2} U_{,0j} = 2\nabla^2 V_j - \frac{1}{4} \nabla^2 \chi_{,0j} = \nabla^2 (2V_j - \frac{1}{4} V_j + \frac{1}{4} W_j) = \frac{1}{4} \nabla^2 (7V_j + W_j),$$

e, finalmente,

$$\psi_{0j}^{[3]} = -\frac{7}{2} V_j - \frac{1}{2} W_j. \quad (2.52)$$

$\psi_{00}^{[4]}$: Jogando todas as soluções já encontradas em (2.39) e utilizando (2.24),

$$R_{00}^{[4]} = -\frac{1}{2} \nabla^2 \psi_{00}^{[4]} - 2|\vec{\nabla}U|^2 + 2U\nabla^2 U = -\frac{1}{2} \nabla^2 \psi_{00}^{[4]} - \nabla^2 (U^2 - 4\Phi_2). \quad (2.53)$$

O tensor energia-momento (2.40) fica

$$T_{00}^{[4]} = \rho(1 + \Pi - 2U + v^2) \quad (2.54)$$

e a componente 00 de (2.36):

$$\begin{aligned} T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} &= T_{00}^{[4]} - \frac{1}{2} \eta_{00} \eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}^{[4]} - \frac{1}{2} (\eta^{\alpha\beta} \psi_{00}^{[2]} - \eta_{00} \psi^{\alpha\beta}) T_{\alpha\beta}^{[2]} = \frac{1}{2} T_{00}^{[4]} + \frac{1}{2} T_{ii}^{[4]} \\ &= \frac{1}{2} \rho(1 + \Pi - 2U + 2v^2) + \frac{3}{2} p, \end{aligned} \quad (2.55)$$

ou seja (utilizando (2.24)),

$$-\frac{1}{2} \nabla^2 \psi_{00}^{[4]} = \nabla^2 (U^2 - 4\Phi_2) - \nabla^2 (U + \Phi_3 - 2\Phi_2 + 2\Phi_1 + 3\Phi_4), \quad (2.56)$$

o que dá, finalmente,

$$\psi_{00}^{[4]} = 2U - 2U^2 + 4\Phi_1 + 4\Phi_2 + 2\Phi_3 + 6\Phi_4. \quad (2.57)$$

Tem-se então, para a Relatividade Geral, a métrica escrita em função dos potenciais pós-newtonianos:

$$g_{00} = -1 + 2U - 2U^2 + 4\Phi_1 + 4\Phi_2 + 2\Phi_3 + 6\Phi_4$$

$$g_{0j} = -\frac{7}{2}V_j - \frac{1}{2}W_j$$

$$g_{jk} = (1 + 2U)\delta_{jk}. \quad (2.58)$$

Como $c_0 = c_1 = 1$ e os potenciais $\chi_{,ij}$ e \mathcal{B} não aparecem, pode-se comparar diretamente as equações (2.58) com (2.30), o que fornece os parâmetros

$$\gamma = \beta = 1; \quad \xi = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = 0. \quad (2.59)$$

Esses valores estão listados na Tabela 2.1. Vê-se que, de acordo com a interpretação dos parâmetros PPN dados pela mesma tabela, na Relatividade Geral há conservação de energia, de momento, de momento angular e não há efeitos de sistemas nem de localização preferenciais. A partir da Tabela 2.2, vê-se também que ela prevê muito bem os valores dos parâmetros encontrados experimentalmente. Assim, nesse caso específico, a Relatividade Geral tem grande êxito, e ela se coloca como referência com a qual outras teorias podem ser comparadas. No próximo capítulo o formalismo PPN será aplicado na TeVeS para esse fim.

Capítulo 3

O formalismo PPN na TeVeS

Após a apresentação da TeVeS no primeiro capítulo e do formalismo PPN no segundo, este capítulo traz o objetivo principal do trabalho, que é o estudo do limite pós-newtoniano da TeVeS. O cálculo de todos os parâmetros PPN dessa teoria é ainda inédito e permitirá seu confronto com dados experimentais, colocando restrições numéricas às constantes que aparecem nas ações da TeVeS (correspondendo então a quão “influentes” são os campos adicionais). Como a Relatividade Geral prevê com sucesso esse limite, esse cálculo também permitirá a comparação entre as duas teorias, mostrando em que circunstâncias a TeVeS se reduz à Relatividade Geral.

Como dito no final do primeiro capítulo, Bekenstein mostrou que no limite de campos fracos a solução para uma distribuição central, neutra e estática de massas na TeVeS é equivalente à solução (1.17) da Relatividade Geral; ou seja, a partir do formalismo primitivo (2.4) que leva em conta justamente essa situação, os parâmetros γ e β têm os mesmos valores que na Relatividade Geral, $\gamma = \beta = 1$.

A partir das discussões das seções 2.2.3.1 e 2.2.3.2, pode-se argumentar que, como a TeVeS é baseada em lagrangianas para todos os campos, ela possui uma lei de conservação na forma (2.31), ou seja, espera-se que os parâmetros $\alpha_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ sejam todos nulos. Os parâmetros α_1 e α_2 estão relacionados a efeitos de sistema de coordenadas preferenciais. A

presença de um campo vetorial na TeVeS e o modo como foi construída a métrica física (com componentes ortogonais e colineares a esse vetor) podem ter como consequência a não-nulidade desses parâmetros, assim como acontece em outras teorias métricas que envolvem campos vetoriais [16]. Segundo Will, em teorias nas quais esses dois parâmetros não são nulos, espera-se que o momento angular total não seja conservado, ou seja, que o objeto (2.34) não seja simétrico.

A seguir será feita a análise completa dos parâmetros PPN da TeVeS a fim de corroborar as afirmações acima acerca de seus valores. Lembrando que se está interessado no limite pós-newtoniano da teoria, o valor de $\mu(y)$ deve ser tomado como 1. Conseqüentemente, de (1.55) e (1.46), tem-se que

$$f(y) = kl^2 h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta}. \quad (3.1)$$

3.1 Expansões

Para o limite pós-newtoniano, cada componente da métrica deve ser expandida até a ordem dada por (2.15). No caso da TeVeS, deve-se deixar claro que os resultados são obtidos através da métrica física, ou seja, precisa-se de:

$$\tilde{g}_{00}^{[4]}, \quad \tilde{g}_{0i}^{[3]}, \quad \tilde{g}_{ij}^{[2]}. \quad (3.2)$$

O primeiro passo é escrever cada campo da teoria como uma expansão em torno de uma solução para o espaço plano. Para o campo ϕ , vê-se, através de (1.54), que na ausência de fonte ($\tilde{T}_{\mu\nu} = 0$), um campo constante ϕ_c é solução. Em (1.63), com $\tilde{T}_{\mu\nu} = 0$ e $\phi = \phi_c$, sobra

apenas o termo multiplicado por K . Fazendo \mathfrak{z}^α igual a um $\mathfrak{z}_{(0)}^\alpha$ também constante, resolve-se a equação. Levando em conta a normalização (1.37), uma escolha inteligente para $\mathfrak{z}_{(0)}^\alpha$ é $\mathfrak{z}_{(0)}^\alpha = \delta_0^\alpha$, de forma que $\mathfrak{z}_{(0)}^{(0)} = -\delta_\alpha^0$. Em (1.70), fazendo $\tilde{T}_{\mu\nu} = 0$, $\phi = \phi_c$, $\mathfrak{z}_\alpha = -\delta_\alpha^0$ e levando em conta (3.1), a equação se torna $G_{\mu\nu} = 0$, que tem como solução a métrica de Minkowski, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. A métrica física depende desses três campos e também deve ser expandida como em (2.7). Resumindo:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu}^{(0)} + \tilde{\psi}_{\mu\nu} ; \quad (3.3a)$$

$$\phi = \phi_c + \varphi ; \quad (3.3b)$$

$$\mathfrak{z}^\alpha = \mathfrak{z}_{(0)}^\alpha + v^\alpha = \delta_0^\alpha + v^\alpha ; \quad (3.3c)$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \psi_{\mu\nu} , \quad (3.3d)$$

onde $\tilde{\psi}_{\mu\nu}$, φ , v^α e $\psi_{\mu\nu}$ são pequenas perturbações das soluções assintóticas ($\tilde{\psi}_{\mu\nu}$ sendo função das outras perturbações) e $\tilde{g}_{\mu\nu}^{(0)} = \text{diag}(-c_0, c_1, c_1, c_1)$. Aqui é imprescindível deixar claro o papel de cada métrica. A Tabela 3.1 apresenta um esquema desses papéis.

A partir da definição (3.3c), a expansão para \mathfrak{z}_μ fica:

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_\mu &= g_{\mu\nu} \mathfrak{z}^\nu = (\eta_{\mu\nu} + \psi_{\mu\nu})(\mathfrak{z}_{(0)}^\nu + v^\nu) = \mathfrak{z}_{(0)\mu} + v_\mu + \psi_{\mu 0} + \psi_{\mu\alpha} v^\alpha \\ \mathfrak{z}_\mu &= -\delta_\mu^0 + v_\mu + \psi_{\mu 0} + \psi_{\mu\alpha} v^\alpha . \end{aligned} \quad (3.3e)$$

Geralmente a ordem de cada uma das perturbações é dada por:

$$\begin{aligned} \psi_{00} &\sim O(\varepsilon^2) + O(\varepsilon^4), \quad \psi_{0i} \sim O(\varepsilon^3), \quad \psi_{ij} \sim O(\varepsilon^2); \\ \varphi &\sim O(\varepsilon^2) + O(\varepsilon^4); \\ v^0 &\sim O(\varepsilon^2) + O(\varepsilon^4), \quad v^i \sim O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (3.4)$$

Objeto	Métrica para manipulação	Exemplo
$\tilde{T}^{\mu\nu}$	$\tilde{g}_{\mu\nu}$	$\tilde{g}_{i\mu} \tilde{g}_{j\nu} \tilde{T}^{\mu\nu} = \tilde{T}_{ij}$
$\tilde{g}_{\mu\nu}^{(0)}$	$\tilde{g}_{\mu\nu}^{(0)}$	$\tilde{g}_{\mu\nu}^{(0)} \tilde{g}^{\mu\alpha}_{(0)} = \delta_{\nu}^{\alpha}$
$\tilde{\psi}_{\mu\nu}$	$\tilde{g}_{\mu\nu}^{(0)}$	$\tilde{g}_{\mu\nu}^{(0)} \tilde{\psi}^{\alpha\nu} = \tilde{\psi}_{\mu}^{\alpha}$
ϕ	$g_{\mu\nu}$	$g^{\alpha\beta} \phi_{,\beta} = \phi^{;\alpha}$
\varkappa^{α}	$g_{\mu\nu}$	$g^{\alpha\beta} \varkappa_{\beta} = \varkappa^{\alpha}$
$\varkappa_{(0)}^{\alpha}$	$\eta_{\mu\nu}$	$\eta^{\alpha\beta} \varkappa_{\beta}^{(0)} = \varkappa_{(0)}^{\alpha}$
φ	$\eta_{\mu\nu}$	$\eta^{\alpha\beta} \varphi_{,\beta} = \varphi^{\alpha}$
v^{α}	$\eta_{\mu\nu}$	$\eta^{\alpha\beta} v_{\beta} = v^{\alpha}$
$\psi_{\mu\nu}$	$\eta_{\mu\nu}$	$\eta_{\mu\nu} \psi^{\alpha\nu} = \psi_{\mu}^{\alpha}$

Tabela 3.1: Papel de cada métrica na manipulação de índices

o que será suposto daqui em diante e comprovado no final dos cálculos.

A normalização (1.37) fornece uma das quatro componentes de \varkappa_{μ} (a equação de movimento fornece três outras componentes mais o multiplicador de Lagrange). Usando as expansões (3.3) e levando em consideração as ordens (3.4), (1.37) fica:

$$\varkappa_{\mu} \varkappa_{\nu} g^{\mu\nu} = -1 \quad \Rightarrow \quad \varkappa_{\mu} \varkappa^{\mu} = -1 \quad \Rightarrow \quad (-\delta_{\mu}^0 + v_{\mu} + \psi_{\mu 0} + \psi_{\mu\alpha} v^{\alpha})(\delta_0^{\mu} + v^{\mu}) = -1;$$

$$-1 - v^0 + v_0 + \psi_{00} + \psi_{0\alpha} v^{\alpha} + v_{\mu} v^{\mu} + \psi_{\mu 0} v^{\mu} + \psi_{\mu\alpha} v^{\alpha} v^{\mu} = -1;$$

$$2 v_0 + 2\psi_{0\beta} v^{\beta} + v_{\beta} v^{\beta} + \psi_{\alpha\beta} v^{\alpha} v^{\beta} + \psi_{00} = 0;$$

$$v_0 = -\frac{1}{2}\psi_{00} + \frac{1}{2}(v_0)^2 + \psi_{00} v_0 + O(\varepsilon^6) \quad \Rightarrow \quad v_0^{[2]} = -\frac{1}{2}\psi_{00}^{[2]}; \quad (3.5)$$

$$v_0^{[4]} = -\frac{1}{2}\psi_{00}^{[4]} + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right)(\psi_{00}^{[2]})^2 \quad \Rightarrow \quad v_0^{[4]} = -\frac{1}{2}\psi_{00}^{[4]} - \frac{3}{8}(\psi_{00}^{[2]})^2. \quad (3.6)$$

Tem-se então a componente v_0 até a ordem necessária; vê-se que ela depende do valor de ψ_{00} . No caso das componentes espaciais, nas seções 3.1.2 e 3.1.3.2, será visto que elas têm equações acopladas às componentes ψ_{0i} .

Encontra-se então as componentes (3.2) da métrica jogando esses resultados em (1.36):

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{\mu\nu} &= e^{-2\phi_c} (1 - 2\varphi + 2\varphi^2) [\eta_{\mu\nu} + \psi_{\mu\nu} + (-\delta_\mu^0 + v_\mu + \psi_{\mu 0} + \psi_{\mu\alpha} v^\alpha) (-\delta_\nu^0 + v_\nu + \psi_{\nu 0} + \psi_{\nu\alpha} v^\alpha)] + \\ &\quad - e^{2\phi_c} (1 + 2\varphi + 2\varphi^2) (-\delta_\mu^0 + v_\mu + \psi_{\mu 0} + \psi_{\mu\alpha} v^\alpha) (-\delta_\nu^0 + v_\nu + \psi_{\nu 0} + \psi_{\nu\alpha} v^\alpha) + O(\varepsilon^5); \\ \tilde{g}_{ij} &= e^{-2\phi_c} (1 - 2\varphi) (\delta_{ij} + \psi_{ij}) + O(\varepsilon^3); \\ \tilde{g}_{ij}^{[2]} &= e^{-2\phi_c} (\delta_{ij} + \psi_{ij}^{[2]} - 2\varphi^{[2]} \delta_{ij}).\end{aligned}\tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{0i} &= e^{-2\phi_c} [\psi_{0i} + (-1 + v_0 + \psi_{00} + \psi_{0\alpha} v^\alpha) (v_i + \psi_{i0} + \psi_{i\alpha} v^\alpha)] - e^{2\phi_c} (1 + 2\varphi + 2\varphi^2) (-1 + v_0 + \\ &\quad + \psi_{00} + \psi_{0\alpha} v^\alpha) (v_i + \psi_{i0} + \psi_{i\alpha} v^\alpha) + O(\varepsilon^4); \\ \tilde{g}_{0i} &= e^{-2\phi_c} (\psi_{0i} - v_i - \psi_{i0}) - e^{2\phi_c} (-v_i - \psi_{i0}) + O(\varepsilon^4); \\ \tilde{g}_{0i}^{[3]} &= e^{2\phi_c} \psi_{0i}^{[3]} + (e^{2\phi_c} - e^{-2\phi_c}) v_i^{[3]}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{00} &= e^{-2\phi_c} (1 - 2\varphi + 2\varphi^2) [-1 + \psi_{00} + (-1 + v_0 + \psi_{00} + \psi_{00} v^0)^2] - e^{2\phi_c} (1 + 2\varphi + 2\varphi^2) (-1 + v_0 + \\ &\quad + \psi_{00} + \psi_{00} v^0)^2 + O(\varepsilon^5); \\ \tilde{g}_{00} &= e^{-2\phi_c} (1 - 2\varphi + 2\varphi^2) (-1 + \psi_{00} + 1 - \psi_{00}) - e^{2\phi_c} (1 + 2\varphi + 2\varphi^2) (1 - \psi_{00}) + O(\varepsilon^5); \\ \tilde{g}_{00}^{[2]} &= e^{2\phi_c} (-1 + \psi_{00}^{[2]} - 2\varphi^{[2]}); \\ \tilde{g}_{00}^{[4]} &= e^{2\phi_c} [-1 + \psi_{00}^{[4]} - 2\varphi^{[4]} + 2\varphi^{[2]} \psi_{00}^{[2]} - 2(\varphi^{[2]})^2].\end{aligned}\tag{3.9}$$

$$\tilde{g}_{00}^{[4]} = e^{2\phi_c} [-1 + \psi_{00}^{[4]} - 2\varphi^{[4]} + 2\varphi^{[2]} \psi_{00}^{[2]} - 2(\varphi^{[2]})^2].\tag{3.10}$$

A partir da expansão (3.3a), da definição de $\tilde{g}_{\mu\nu}^{(0)}$, de (3.7) e (3.9), tem-se os valores

das constantes:

$$c_0 = e^{2\phi_c}, \quad c_1 = e^{-2\phi_c}. \quad (3.11)$$

Para achar a solução das equações dos campos até a ordem necessária, é preciso abaixar os índices dos tensores (2.20):

$$\tilde{T}_{00} = \tilde{g}_{0\mu}\tilde{g}_{0\nu}\tilde{T}^{\mu\nu} = \tilde{g}_{0\mu}^{(0)}\tilde{g}_{0\nu}^{(0)}\tilde{T}^{\mu\nu} + 2\tilde{g}_{0\mu}^{(0)}\tilde{\psi}_{0\nu}\tilde{T}^{\mu\nu} + O(\mathcal{E}^6) = e^{4\phi_c}\tilde{T}^{00} - 2e^{2\phi_c}\tilde{\psi}_{00}\tilde{T}^{00} + O(\mathcal{E}^6);$$

$$\tilde{T}_{00}^{[2]} = e^{2\phi_c}\rho; \quad (3.12)$$

$$\tilde{T}_{00}^{[4]} = e^{2\phi_c}\rho(1 + \Pi + 2e^{-2\phi_c}U + e^{-4\phi_c}v^2) - 2e^{2\phi_c}\tilde{\psi}_{00}^{[2]}\tilde{T}_{[2]}^{00}. \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{0i} &= \tilde{g}_{0\mu}\tilde{g}_{i\nu}\tilde{T}^{\mu\nu} = \tilde{g}_{0\mu}^{(0)}\tilde{g}_{i\nu}^{(0)}\tilde{T}^{\mu\nu} + \tilde{g}_{0\mu}^{(0)}\tilde{\psi}_{i\nu}\tilde{T}^{\mu\nu} + \tilde{g}_{i\nu}^{(0)}\tilde{\psi}_{0\mu}\tilde{T}^{\mu\nu} + O(\mathcal{E}^6) = -\delta_{ij}\tilde{T}^{j0} + O(\mathcal{E}^4) \\ &= -\tilde{T}_{[3]}^{i0} + O(\mathcal{E}^4); \end{aligned}$$

$$\tilde{T}_{0i}^{[3]} = -e^{-2\phi_c}\rho v_i. \quad (3.14)$$

$$\tilde{T}_{ij} = \tilde{g}_{i\mu}\tilde{g}_{j\nu}\tilde{T}^{\mu\nu} = \tilde{g}_{i\mu}^{(0)}\tilde{g}_{j\nu}^{(0)}\tilde{T}^{\mu\nu} + O(\mathcal{E}^5) = e^{-4\phi_c}\tilde{T}^{ij} + O(\mathcal{E}^5);$$

$$\tilde{T}_{ij}^{[4]} = e^{-6\phi_c}\rho v_i v_j + e^{-2\phi_c}p\delta_{ij}. \quad (3.15)$$

O termo $\tilde{\psi}_{00}^{[2]}$ que aparece em (3.13) pode ser obtido de (3.9),

$$\tilde{\psi}_{00}^{[2]} = e^{2\phi_c}(\psi_{00}^{[2]} - 2\phi^{[2]}). \quad (3.16)$$

Pode-se interpretar o termo adicional $2\phi^{[2]}$ como uma substituição ao potencial da Matéria Escura.

Para encontrar as componentes (3.7), (3.8) e (3.10) da métrica em função dos potenciais pós-newtonianos, é preciso resolver as equações expandidas de cada campo da teoria, obtendo as soluções nas ordens dadas por (3.4).

3.1.1 Equação para ϕ

De acordo com (3.4), é preciso encontrar $\phi^{[2]}$ e $\phi^{[4]}$. A equação (1.54) com $\mu = 1$ fica

$$h^{\alpha\mu}{}_{;\mu}\phi_{,\alpha} + h^{\alpha\mu}\phi_{,\alpha;\mu} = k[g^{\mu\nu} + (1 + e^{-4\phi})\varrho^{\mu}\varrho^{\nu}]\tilde{T}_{\mu\nu}. \quad (3.17)$$

Com a expansão $\phi = \phi_c + \phi$, o primeiro termo de (3.17) é de no mínimo ordem ε^2 ; precisa-se então encontrar $h^{\alpha\mu}{}_{;\mu}$ até ordem ε^2 . Sabendo que $h^{\alpha\mu} \equiv g^{\alpha\mu} - \varrho^{\alpha}\varrho^{\mu}$ e que a métrica tem derivada covariante nula, sobram apenas os termos $\varrho^{\alpha}{}_{;\mu}\varrho^{\mu}$ e $\varrho^{\alpha}\varrho^{\mu}{}_{;\mu}$. Da primeira das definições em (1.4) e fazendo a expansão (3.3c), segue que

$$\varrho^{\alpha}{}_{;\mu} = v^{\alpha}{}_{,\mu} + \Gamma_{0\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha}v^{\lambda}. \quad (3.18)$$

Aqui é importante lembrar a forma de $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$, que, com a expansão (3.3d) e sua inversa

$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - \psi^{\alpha\beta} + \psi^{\alpha\mu}\psi^{\beta}{}_{\mu} + \dots$, fica:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\delta} - \psi^{\mu\delta} + \psi^{\mu\lambda}\psi^{\delta}{}_{\lambda} + \dots)(\psi_{\delta\beta,\alpha} + \psi_{\delta\alpha,\beta} - \psi_{\alpha\beta,\delta}), \quad (3.19)$$

ou seja, é de no mínimo ordem ε^2 . O último termo de (3.18) pode então ser descartado.

Multiplicando (3.18) por ϱ^{μ} :

$$\varrho^{\mu}\varrho^{\alpha}{}_{;\mu} = v^{\alpha}{}_{,0} + \Gamma_{00}^{\alpha} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\varepsilon}(2\psi_{\varepsilon 0,0} - \psi_{00,\varepsilon}) = -\frac{1}{2}\psi_{00}{}^{,\alpha}, \quad (3.20)$$

onde foram descartados termos de ordem maior que ε^2 , e usado que $\partial/\partial t \sim O(\varepsilon)$, ou seja, a derivada temporal aumenta uma ordem do objeto. Fazendo $\mu = \alpha$ em (3.18) e multiplicando por ϱ^α :

$$\varrho^\alpha \varrho^\mu{}_{;\mu} = v^\mu{}_{,\mu} \delta_0^\alpha + \Gamma_{0\mu}^\mu \delta_0^\alpha = \frac{1}{2} \delta_0^\alpha \eta^{\mu\varepsilon} (\psi_{\varepsilon 0,\mu} + \psi_{\varepsilon\mu,0} - \psi_{0\mu,\varepsilon}) = \frac{1}{2} \delta_0^\alpha \delta^{ij} (\psi_{j0,i} - \psi_{0i,j}) = 0. \quad (3.21)$$

Portanto, até ordem ε^4 ,

$$h^{\alpha\mu}{}_{;\mu} \phi_{,\alpha} = \frac{1}{2} \psi_{00,i} \phi_{,i}. \quad (3.22)$$

O segundo termo de (3.17), devido à expansão (3.3b), também é de no mínimo ordem ε^2 , portanto $h^{\alpha\mu}$ até ordem ε^2 fica

$$h^{\alpha\mu} = \eta^{\alpha\mu} - \psi^{\alpha\mu} - \delta_0^\alpha \delta_0^\mu - \delta_0^\alpha v^\mu - \delta_0^\mu v^\alpha. \quad (3.23)$$

Até ordem ε^4 e da segunda das definições em (1.4), tem-se

$$\varphi_{,\alpha;\mu} = \varphi_{,\alpha\mu} - \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda \varphi_{,\lambda} = \varphi_{,\alpha\mu} - \frac{1}{2} \varphi_{,i} \delta^{ij} (\psi_{j\alpha,\mu} + \psi_{j\mu,\alpha} - \psi_{\alpha\mu,j}). \quad (3.24)$$

Multiplicando (3.23) por (3.24) e retendo termos até ordem ε^4 ,

$$h^{\alpha\mu} \varphi_{,\alpha;\mu} = (\eta^{\alpha\mu} - \psi^{\alpha\mu} - \delta_0^\alpha \delta_0^\mu) [\varphi_{,\alpha\mu} - \frac{1}{2} \varphi_{,i} (\psi_{i\alpha,\mu} + \psi_{i\mu,\alpha} - \psi_{\alpha\mu,i})] = \nabla^2 \varphi - \varphi_{,00} - \psi^{ij} \varphi_{,ij} + \\ - \varphi_{,00} - \frac{1}{2} \varphi_{,i} \psi_{00,i} - \frac{1}{2} \varphi_{,i} \delta^{kl} (\psi_{ik,l} + \psi_{il,k} - \psi_{kl,i}) - \frac{1}{2} \varphi_{,i} \psi_{00,i};$$

$$h^{\alpha\mu} \varphi_{,\alpha;\mu} = \nabla^2 \varphi - 2\varphi_{,00} - \psi_{00,i} \varphi_{,i} - \psi_{ij} \varphi_{,ij} - \psi_{ik,k} \varphi_{,i} + \frac{1}{2} \psi_{kk,i} \varphi_{,i}. \quad (3.25)$$

No lado direito de (3.17), o termo $g^{\mu\nu} \tilde{T}_{\mu\nu}$, até ordem ε^4 , dá

$$g^{\mu\nu} \tilde{T}_{\mu\nu} = (\eta^{\mu\nu} - \psi^{\mu\nu}) \tilde{T}_{\mu\nu} = -\tilde{T}_{00} + \tilde{T}_{ii} - \psi_{00} \tilde{T}_{00}. \quad (3.26)$$

Usando (3.5), $\varrho^\mu \varrho^\nu \tilde{T}_{\mu\nu}$ dá:

$$\varrho^\mu \varrho^\nu \tilde{T}_{\mu\nu} = (\delta_0^\mu + v^\mu) (\delta_0^\nu + v^\nu) \tilde{T}_{\mu\nu} = \tilde{T}_{00} + 2v^0 \tilde{T}_{00} = \tilde{T}_{00} (1 + \psi_{00}), \quad (3.27)$$

e, multiplicando por $(1 + e^{-4\phi})$:

$$\begin{aligned}
(1 + e^{-4\phi}) \mathfrak{z}^\mu \mathfrak{z}^\nu \tilde{T}_{\mu\nu} &= (1 + e^{-4\phi_c} - 4\phi e^{-4\phi_c})(1 + \psi_{00})\tilde{T}_{00} \\
&= (1 + e^{-4\phi_c})\tilde{T}_{00} + (1 + e^{-4\phi_c})\psi_{00}\tilde{T}_{00} - 4e^{-4\phi_c}\phi\tilde{T}_{00} .
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Juntando (3.22), (3.25), (3.26) e (3.28), tem-se a equação para o campo escalar até ordem ε^4 :

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \varphi^{[4]} &= 2\varphi_{,00}^{[2]} + \frac{1}{2}\psi_{00,i}^{[2]}\varphi_{,i}^{[2]} + \psi_{ij}^{[2]}\varphi_{,ij}^{[2]} + \psi_{ik,k}^{[2]}\varphi_{,i}^{[2]} - \frac{1}{2}\psi_{kk,i}^{[2]}\varphi_{,i}^{[2]} + k\tilde{T}_{ii}^{[4]} + \\
&+ k e^{-4\phi_c} [\tilde{T}_{00}^{[4]} + \tilde{T}_{00}^{[2]}(\psi_{00}^{[2]} - 4\varphi^{[2]})] ;
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Usando (3.12) e (2.2), pode-se achar a solução para φ até ordem ε^2 :

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \varphi^{[2]} &= k e^{-4\phi_c} \tilde{T}_{00}^{[2]} = k e^{-2\phi_c} \rho = -\frac{k}{4\pi} e^{-2\phi_c} \nabla^2 U , \\
\varphi^{[2]} &= -\frac{k}{4\pi} e^{-2\phi_c} U .
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Substituindo (3.30) em (3.29) e obtendo as componentes de $\psi_{\mu\nu}$, chega-se na solução $\varphi^{[4]}$. Esse cálculo será feito na Seção 3.1.4.

3.1.2 Equação para v^i

Como a componente v_0 já foi estabelecida em (3.6), a equação de movimento para o campo vetorial fornecerá as componentes espaciais da perturbação v_α . De acordo com (3.4), é preciso achar v^i até ordem ε^3 . De (1.63), vê-se que, com a expansão (3.3b), os termos multiplicados por $\mu(y)$ são de no mínimo ordem ε^4 e podem ser descartados. O termo $\mathfrak{z}^\mu \mathfrak{z}^\varepsilon \mathfrak{z}^\sigma \tilde{T}_{\varepsilon\sigma}$ também será desprezado já que $\tilde{T}_{\varepsilon\sigma}$ é de no mínimo ordem ε^2 e como se está interessado na componente i da equação, o objeto \mathfrak{z}^μ será \mathfrak{z}^i , que, por (3.3c), se torna v^i ,

que é de ordem ε^3 . O termo $\mathfrak{L}^{[i;\sigma]}_{;\sigma}$, como pode ser visto na fórmula (B.3) do Apêndice B, é de no mínimo ordem ε^2 ; portanto o segundo termo do lado esquerdo de (1.63) também não precisa ser levado em conta. Até então, a componente i da equação (1.63), até ordem ε^3 é

$$K \mathfrak{L}^{[i;\nu]}_{;\nu} = 8\pi(1 - e^{-4\phi})(g^{i\alpha} \mathfrak{L}^{\beta} \tilde{T}_{\alpha\beta}) . \quad (3.31)$$

Analisando melhor (3.31), pode-se reduzi-la ainda mais: como $\tilde{T}_{\alpha\beta}$ é de no mínimo ordem ε^2 , a expansão até ordem ε^3 do lado direito da equação fica

$$(1 - e^{-4\phi})(g^{i\alpha} \mathfrak{L}^{\beta} \tilde{T}_{\alpha\beta}) = (1 - e^{-4\phi_c})\delta^{i\alpha} \delta_0^{\beta} \tilde{T}_{\alpha\beta} = (1 - e^{-4\phi_c})\tilde{T}_{i0} . \quad (3.32)$$

Fazendo $\varepsilon = i$ e $\sigma = \nu$ em (B.3) e retendo termos até ordem ε^3 ,

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^{[i;\nu]}_{;\nu} &= \mathfrak{v}^{i,\nu}_{;\nu} - \mathfrak{v}^{\nu,i}_{;\nu} + \eta^{\beta\nu} \eta^{i\lambda} \psi_{0\lambda,\beta\nu} - \eta^{\beta i} \eta^{\nu\lambda} \psi_{0\lambda,\beta\nu} = \nabla^2 \mathfrak{v}^i - \mathfrak{v}^k_{,ik} + \mathfrak{v}_{0,i0} + \nabla^2 \psi_{0i} - \psi_{0k,ik} + \psi_{00,i0} \\ &= \nabla^2 (\mathfrak{v}_i + \psi_{0i}) - (\mathfrak{v}_k + \psi_{0k})_{,ik} + \frac{1}{2} \psi_{00,i0} . \end{aligned} \quad (3.33)$$

Juntando (3.32) e (3.33), tem-se a equação para o campo vetorial até ordem ε^3 :

$$\nabla^2 (\mathfrak{v}_i^{[3]} + \psi_{0i}^{[3]}) - (\mathfrak{v}_k^{[3]} + \psi_{0k}^{[3]})_{,ik} + \frac{1}{2} \psi_{00,i0}^{[2]} = \frac{8\pi}{K} (1 - e^{-4\phi_c}) \tilde{T}_{i0}^{[3]} . \quad (3.34)$$

Diferentemente de (3.29), não existe apenas um termo $\mathfrak{v}_i^{[3]}$, nem ele é isolado, sendo essa equação acoplada à de $\psi_{0i}^{[3]}$, como já mencionado anteriormente. Como a TeVeS foi construída também com a ação da Relatividade Geral, a equação (1.70) é matematicamente a mesma de (1.7), apenas com uma fonte mais complexa no lado direito, ou seja, continua existindo uma liberdade de calibre para $\psi_{\mu\nu}$. Seria natural usar os mesmos calibres (2.38), mas levando em conta o acoplamento de \mathfrak{v}_i com ψ_{0i} , é conveniente modificar (2.38c) para

$$\psi_{k0,k} - \frac{1}{2} \psi_{kk,0} = -\mathfrak{v}_{k,k} , \quad (3.35)$$

de forma que, usando (3.5), (2.38b) fica, até ordem ε^3 :

$$\psi^{\mu}_{0,\mu} - \frac{1}{2}\psi_{,0} = -v^{\mu}_{,\mu} \quad , \quad (3.36)$$

sendo o calibre (2.38a) mantido. Usando (3.35), a equação (3.34) se torna

$$\nabla^2 (v_i^{[3]} + \psi_{0i}^{[3]}) - \frac{1}{2}\psi_{,i0}^{[2]} = \frac{8\pi}{K} (1 - e^{-4\phi_c}) \tilde{T}_{i0}^{[3]} \quad . \quad (3.37)$$

O acoplamento com $\psi_{0i}^{[3]}$ continua, mas agora apenas um termo $v_i^{[3]}$ está presente. Será preciso encontrar a equação para $\psi_{0i}^{[3]}$ e resolvê-la conjuntamente com (3.37), o que será feito nas Seções 3.1.3.2 e 3.1.4.

3.1.3 Equações para $\psi_{\mu\nu}$

Para resolver a equação (1.70), é conveniente reescrevê-la como (2.36) a fim de utilizar a já dada expansão de $R_{\mu\nu}$ em (2.37). Chamando todo o lado direito de (1.70) de $X_{\mu\nu}$, essa equação fica:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi(X_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}X_{\alpha\beta}) \quad , \quad (3.38)$$

sendo

$$X_{\alpha\beta} = \tilde{T}_{\alpha\beta} + (1 - e^{-4\phi}) \mathfrak{z}^\lambda \tilde{T}_{\lambda(\alpha} \mathfrak{z}_{\beta)} + \tau_{\alpha\beta} + \Omega_{\alpha\beta} \quad . \quad (3.39)$$

O objeto $\tau_{\mu\nu}$, com $\mu(y) = 1$ e (3.1), fica

$$\tau_{\mu\nu} = \frac{1}{k} [\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \mathfrak{z}^\beta \phi_{,\beta} \mathfrak{z}_{(\nu} \phi_{,\mu)} - \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} g_{\mu\nu}] \quad , \quad (3.40)$$

e é fácil ver que, fazendo $\phi = \phi_c + \varphi$, só sobram termos que envolvem $\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu}$, ou seja, $\tau_{\mu\nu}$ é de no mínimo ordem ε^4 e não precisa ser levado em conta nos cálculos de $\psi_{ij}^{[2]}$ e $\psi_{0i}^{[3]}$.

De (3.38), vê-se que, para qualquer componente de $R_{\mu\nu}$, é preciso calcular o termo $g^{\alpha\beta} X_{\alpha\beta}$, embora em ordens diferentes. Tem-se, de (3.39), até ordem ε^4 :

$$g^{\alpha\beta} \tilde{T}_{\alpha\beta} = -\tilde{T}_{00} + \tilde{T}_{ii} - \psi_{00} \tilde{T}_{00}. \quad (3.41)$$

O segundo termo, até mesma ordem, fica:

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} (1 - e^{-4\phi}) \varepsilon_{\lambda}^{\lambda} \tilde{T}_{\lambda(\alpha} \varepsilon_{\beta)} &= 2g^{\alpha\beta} (1 - e^{-4\phi}) \varepsilon_{\lambda}^{\lambda} \tilde{T}_{\lambda\alpha} \varepsilon_{\lambda\beta} = 2(\eta^{\alpha\beta} - \psi^{\alpha\beta})(1 - e^{-4\phi_c} + 4\phi e^{-4\phi_c})(-\delta_0^\lambda \delta_\beta^0 + \\ &+ \delta_0^\lambda v_\beta + \delta_\lambda^0 \psi_\beta^0 - \delta_\beta^0 v^\lambda) \tilde{T}_{\lambda\alpha} \\ &= 2\{\eta^{\alpha\beta} (1 - e^{-4\phi_c})(-\delta_\beta^0 + v_\beta + \psi_{\beta 0} - \delta_\beta^0 v^0) - \delta_\beta^0 [4\eta^{\alpha\beta} \phi e^{-4\phi_c} - \psi^{\alpha\beta} (1 - e^{-4\phi_c})]\} \tilde{T}_{0\alpha} \\ &= 2[(1 - e^{-4\phi_c})(1 - v_0 - \psi_{00} + v^0 + \psi_{00}) + 4\phi e^{-4\phi_c}] \tilde{T}_{00} \\ &= 2[(1 - e^{-4\phi_c})(1 + \psi_{00}) + 4\phi e^{-4\phi_c}] \tilde{T}_{00}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

O termo de $\tau_{\alpha\beta}$ fica, usando $h^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} - \varepsilon_{\lambda}^{\mu} \varepsilon_{\lambda}^{\nu}$,

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta} &= \frac{1}{k} [g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} - 2 \varepsilon_{\lambda}^{\lambda} \phi_{,\lambda} \varepsilon_{\lambda}^{\alpha} \phi_{,\alpha} - 2g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + 2 \varepsilon_{\lambda}^{\mu} \varepsilon_{\lambda}^{\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu}] = -\frac{1}{k} g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta}; \\ \tau_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta} &= \frac{1}{k} \{\phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \varepsilon_{\lambda}^{\alpha} \phi_{,\alpha} [\varepsilon_{\lambda(\mu} \phi_{,\nu)} - \frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda}^{\beta} \phi_{,\beta} g_{\mu\nu}]\}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Como visto, esse termo só será relevante para a componente 00:

$$\tau_{00} - \frac{1}{2} g_{00} g^{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{k} \{\phi_{,0} \phi_{,0} - \varepsilon_{\lambda}^{\alpha} \phi_{,\alpha} [\varepsilon_{\lambda(0} \phi_{,0)} - \frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda}^{\beta} \phi_{,\beta} g_{00}]\}, \quad (3.44)$$

mas é fácil ver que, com as expansões (3.3), esse termo é de no mínimo ordem ε^5 e portanto pode ser descartado de todo o cálculo.

Finalmente, de (1.71) e usando (1.37), o termo de $\Omega_{\alpha\beta}$ fica:

$$g^{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\beta} = \frac{K}{8\pi} [g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \varepsilon_{[\alpha,\mu]} \varepsilon_{[\beta,\nu]} - g^{\mu\nu} g^{\varepsilon\gamma} \varepsilon_{[\mu,\varepsilon]} \varepsilon_{[\nu,\gamma]}] - \frac{\lambda}{8\pi} g^{\alpha\beta} \varepsilon_{\lambda\alpha} \varepsilon_{\lambda\beta} = \frac{\lambda}{8\pi}. \quad (3.45)$$

A expansão de λ é calculada no Apêndice B, sendo ele de no mínimo ordem ε^2 . Juntando (3.41), (3.42), (B.13) e (B.14), chega-se em:

$$(g^{\alpha\beta} X_{\alpha\beta})^{[4]} = \tilde{T}_{ii}^{[4]} - e^{-4\phi_c} \tilde{T}_{00}^{[4]} - e^{-4\phi_c} \psi_{00}^{[2]} \tilde{T}_{00}^{[2]} + 4e^{-4\phi_c} \phi^{[2]} \tilde{T}_{00}^{[2]} + \frac{K}{8\pi} \left[\frac{1}{2} \nabla^2 \psi_{00}^{[4]} - \frac{3}{8} \nabla^2 [(\psi_{00}^{[2]})^2] + \right. \\ \left. - \psi_{i0,i0}^{[3]} + \frac{3}{4} \psi_{00}^{[2]} \nabla^2 \psi_{00}^{[2]} + \frac{3}{2} |\vec{\nabla} \psi_{00}^{[2]}|^2 \right]; \quad (3.46)$$

$$(g^{\alpha\beta} X_{\alpha\beta})^{[3]} = (g^{\alpha\beta} X_{\alpha\beta})^{[2]} = -e^{-4\phi_c} \tilde{T}_{00}^{[2]} + \frac{K}{16\pi} \nabla^2 \psi_{00}^{[2]}. \quad (3.47)$$

Com esses resultados, fica mais fácil calcular cada componente de (3.38), o que será feito nas três seções seguintes.

3.1.3.1 Componentes ψ_{ij}

Tomando as componentes Ω_{ij} do tensor energia-momento $\Omega_{\mu\nu}$ do campo vetorial (fórmula (1.71)):

$$\Omega_{ij} = \frac{K}{8\pi} \left[g^{\alpha\beta} \varrho_{[\alpha,i]} \varrho_{[\beta,j]} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g^{\varepsilon\gamma} \varrho_{[\alpha,\varepsilon]} \varrho_{[\beta,\gamma]} \delta_{ij} \right] - \frac{\lambda}{8\pi} \varrho_{,i} \varrho_{,j}. \quad (3.48)$$

Fazendo a expansão (3.3e), vê-se que os termos com derivadas são de no mínimo ordem ε^4 , porque os termos relativos a $\varrho_{\alpha}^{(0)} = -\delta_{\alpha}^0$ se anulam (ou porque $\varrho_{\alpha}^{(0)}$ é constante, $[\varrho_{\alpha}^{(0)}]_{,\beta} = 0$, ou porque tem componentes espaciais nulas, $\varrho_i^{(0)} = 0$), sobrando apenas termos do tipo $\varrho_{[\alpha,\mu]} \varrho_{[\beta,\nu]}$. O último termo, multiplicado por λ , também é de no mínimo ordem ε^4 porque $\varrho_i^{(0)} = 0$. Pode-se então descartar esse tensor no cálculo de ψ_{ij} .

Os termos de (3.39) que sobram então são \tilde{T}_{ij} e $(1 - e^{-4\phi}) \mathfrak{g}^{\beta} \tilde{T}_{\beta(i} \mathfrak{g}_{j)}$. Este último pode ser descartado pelo mesmo motivo, $\mathfrak{g}_i^{(0)} = 0$, e \tilde{T}_{ij} também porque é de no mínimo ordem ε^4 .

Da equação (3.38) para as componentes ij resta então apenas

$$R_{ij} = -4\pi(\delta_{ij} + \psi_{ij})g^{\alpha\beta}X_{\alpha\beta}. \quad (3.49)$$

Usando (3.47), (3.12) e (2.2),

$$\begin{aligned} R_{ij}^{[2]} &= -4\pi\delta_{ij}(-e^{-4\phi_c}\tilde{T}_{00}^{[2]} + \frac{K}{16\pi}\nabla^2\psi_{00}^{[2]}) = (4\pi e^{-2\phi_c}\rho - \frac{K}{4}\nabla^2\psi_{00}^{[2]})\delta_{ij} \\ &= -\nabla^2(e^{-2\phi_c}U + \frac{K}{4}\psi_{00}^{[2]})\delta_{ij}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

De (2.37) e usando o calibre (2.38a),

$$R_{ij}^{[2]} = -\frac{1}{2}\nabla^2\psi_{ij}^{[2]}. \quad (3.51)$$

Igualando (3.50) e (3.51), chega-se em

$$\psi_{ij}^{[2]} = (2e^{-2\phi_c}U + \frac{K}{2}\psi_{00}^{[2]})\delta_{ij}. \quad (3.52)$$

Assim como acontece em (3.29), é preciso então conhecer primeiro a solução $\psi_{00}^{[2]}$ para achar $\psi_{ij}^{[2]}$, o que será feito nas Seções 3.1.3.3 e 3.1.4.

3.1.3.2 Componentes ψ_{0i}

De (1.71), a componente $0i$ é

$$\Omega_{i0} = \frac{K}{8\pi}[g^{\alpha\beta}\mathfrak{g}_{[\alpha,i]}\mathfrak{g}_{[\beta,0]} - \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}g^{\varepsilon\gamma}\mathfrak{g}_{[\alpha,\varepsilon]}\mathfrak{g}_{[\beta,\gamma]}\psi_{i0}] - \frac{\lambda}{8\pi}\mathfrak{g}_i\mathfrak{g}_{i0}. \quad (3.53)$$

Pelos mesmos argumentos da Seção 3.1.3.1, os termos com derivadas são de ordem ε^4 e podem ser desprezados. O último termo, multiplicado por λ , é de no mínimo ordem ε^3 , e como λ é de no mínimo ordem ε^2 , todo o objeto (3.53) pode ser desprezado.

Do termo $(1 - e^{-4\phi}) \varrho^\lambda \tilde{T}_{\lambda(i) \varrho_{0}}$ de (3.39), a parte da simetrização com ϱ_i pode ser descartada já que ϱ_i é de ordem ε^3 e $\tilde{T}_{\lambda i}$ é de no mínimo ordem ε^3 . Sobra então $(1 - e^{-4\phi}) \varrho^\lambda \tilde{T}_{\lambda i \varrho_0}$ que será da ordem desejada apenas se o índice $\lambda = 0$ e se considerar-se os valores assintóticos de (3.3b), (3.3c) e (3.3e), ou seja, esse termo fica $(1 - e^{-4\phi_c})(-\tilde{T}_{0i})$.

Somando-o com o outro termo restante de (3.39), \tilde{T}_{0i} , a equação (3.38) fica

$$R_{0i} = 8\pi(e^{-4\phi_c} \tilde{T}_{0i} - \frac{1}{2} \psi_{0i} g^{\alpha\beta} X_{\alpha\beta}). \quad (3.54)$$

O último termo pode ser descartado devido a (3.4) e (3.47). De (2.37) e utilizando os calibres (3.35) e (2.38a) e a relação (3.5),

$$R_{0j}^{[3]} = -\frac{1}{2}(\nabla^2 \psi_{0j}^{[3]} + \frac{1}{2} \psi_{00,0j}^{[2]} + v_{k,kj}^{[3]}) = -\frac{1}{2}[\nabla^2 \psi_{0j}^{[3]} + (v^\mu{}_{,\mu j})^{[3]}]. \quad (3.55)$$

Igualando (3.54) e (3.55) e usando (3.14) e (2.22),

$$\nabla^2 \psi_{0j}^{[3]} + (v^\mu{}_{,\mu j})^{[3]} = -16\pi e^{-4\phi_c} \tilde{T}_{0j}^{[3]} = 16\pi e^{-6\phi_c} \rho v_j = -4e^{-6\phi_c} \nabla^2 V_j. \quad (3.56)$$

Essa é a equação para ψ_{0i} , que deve ser resolvida junto com (3.37). Na Seção 3.1.4 será obtida sua solução.

3.1.3.3 Equação para ψ_{00}

Esse é o cálculo mais longo já que todos os termos de ordem ε^4 que foram ignorados devem ser levados em conta agora. De (1.71),

$$\Omega_{00} = \frac{K}{8\pi} [g^{\alpha\beta} \varrho_{[\alpha,0]} \varrho_{[\beta,0]} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g^{\varepsilon\gamma} \varrho_{[\alpha,\varepsilon]} \varrho_{[\beta,\gamma]} g_{00}] - \frac{\lambda}{8\pi} \varrho_0 \varrho_0. \quad (3.57)$$

Os termos com derivadas são de no mínimo ordem ε^4 porque $[\varrho_\alpha^{(0)}]_{,\beta} = 0$. Então, das anti-simetrizações, os termos com derivadas temporais podem ser descartados já que ela aumenta

uma ordem do objeto. Além disso, a expansão de todos os $g_{\varepsilon\sigma}$ deve parar no termo $\eta_{\varepsilon\sigma}$ já que a multiplicação por $\psi_{\varepsilon\sigma}$ também aumentaria no mínimo duas ordens de cada parcela. O primeiro termo fica, usando (3.5):

$$g^{\alpha\beta} \varepsilon_{[\alpha,0]} \varepsilon_{[\beta,0]} = \eta^{\alpha\beta} v_{0,\alpha} v_{0,\beta} = (v_{0,i})^2 = \frac{1}{4} |\vec{\nabla} \psi_{00}|^2. \quad (3.58)$$

Como não pode haver derivadas temporais, na segunda parcela de (3.57), pode-se descartar os termos nos quais o índice vetorial de v_μ é somado com um índice sob o sinal da derivada, como em $v_{\alpha,\varepsilon} v^{\varepsilon,\alpha}$:

$$g^{\alpha\beta} g^{\varepsilon\gamma} \varepsilon_{[\alpha,\varepsilon]} \varepsilon_{[\beta,\gamma]} = \eta^{\alpha\beta} \eta^{\varepsilon\gamma} (v_{\alpha,\varepsilon} v_{\beta,\gamma} + v_{\varepsilon,\alpha} v_{\gamma,\beta}) = 2 v^0_{,i} v_{0,i} = -\frac{1}{2} |\vec{\nabla} \psi_{00}|^2. \quad (3.59)$$

Como λ é de no mínimo ordem ε^2 , precisa-se do termo $\varepsilon_{0,0} \varepsilon_{0,0}$, até ordem ε^2 :

$$\varepsilon_{0,0} \varepsilon_{0,0} = (-1 + v_0 + \psi_{00})^2 = (-1 + \frac{1}{2} \psi_{00})^2 = 1 - \psi_{00}. \quad (3.60)$$

Juntando então (3.58), (3.59), (3.60), (B.13) e (B.14), (3.57) fica

$$\begin{aligned} \Omega_{00}^{[4]} &= \frac{K}{8\pi} \left[\frac{1}{4} |\vec{\nabla} \psi_{00}|^2 + \frac{1}{8} |\vec{\nabla} \psi_{00}|^2 \eta_{00} \right] - \frac{\lambda^{[4]}}{8\pi} + \frac{\lambda^{[2]} \psi_{00}^{[2]}}{8\pi} = \frac{K}{64\pi} |\vec{\nabla} \psi_{00}|^2 + (1 - e^{-4\phi_c}) \tilde{T}_{00}^{[4]} + \\ &+ (1 - e^{-4\phi_c}) \psi_{00}^{[2]} \tilde{T}_{00}^{[2]} + 4e^{-4\phi_c} \varphi^{[2]} \tilde{T}_{00}^{[2]} - \frac{K}{8\pi} \left[\frac{1}{2} \nabla^2 \psi_{00}^{[4]} - \frac{3}{8} \nabla^2 (\psi_{00}^{[2]})^2 - \psi_{i0,i0}^{[3]} + \frac{3}{4} \psi_{00}^{[2]} \nabla^2 \psi_{00}^{[2]} + \right. \\ &+ \left. \frac{3}{2} |\vec{\nabla} \psi_{00}^{[2]}|^2 \right] - (1 - e^{-4\phi_c}) \psi_{00}^{[2]} \tilde{T}_{00}^{[2]} + \frac{K}{16\pi} \psi_{00}^{[2]} \nabla^2 \psi_{00}^{[2]}; \\ \Omega_{00}^{[4]} &= (1 - e^{-4\phi_c}) \tilde{T}_{00}^{[4]} + 4e^{-4\phi_c} \varphi^{[2]} \tilde{T}_{00}^{[2]} - \frac{K}{8\pi} \left[\frac{1}{2} \nabla^2 \psi_{00}^{[4]} - \frac{3}{8} \nabla^2 (\psi_{00}^{[2]})^2 - \psi_{i0,i0}^{[3]} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{4} \psi_{00}^{[2]} \nabla^2 \psi_{00}^{[2]} + \frac{11}{8} |\vec{\nabla} \psi_{00}^{[2]}|^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\Omega_{00}^{[2]} = -\frac{K}{16\pi} \nabla^2 \psi_{00}^{[2]} + (1 - e^{-4\phi_c}) \tilde{T}_{00}^{[2]}. \quad (3.62)$$

A componente 00 do segundo termo de (3.39), até ordem ε^4 é:

$$\begin{aligned} (1 - e^{-4\phi}) \varepsilon_{\lambda(0)}^\lambda \tilde{T}_{\lambda(0)} \varepsilon_{0,0} &= 2(1 - e^{-4\phi_c} + 4e^{-4\phi_c} \varphi) (-1 + v_0 + \psi_{00} - v^0) \tilde{T}_{00} \\ &= -2(1 - e^{-4\phi_c} + 4e^{-4\phi_c} \varphi) \tilde{T}_{00}; \end{aligned}$$

$$[(1 - e^{-4\phi}) \mathfrak{g}^\lambda \tilde{T}_{\lambda(0) \mathfrak{g}^l(0)}]^{[4]} = -2\tilde{T}_{00}^{[4]} + 2e^{-4\phi_c} \tilde{T}_{00}^{[4]} - 8e^{-4\phi_c} \varphi^{[2]} \tilde{T}_{00}^{[2]}. \quad (3.63)$$

$$[(1 - e^{-4\phi}) \mathfrak{g}^\lambda \tilde{T}_{\lambda(0) \mathfrak{g}^l(0)}]^{[2]} = -2\tilde{T}_{00}^{[2]} + 2e^{-4\phi_c} \tilde{T}_{00}^{[2]}. \quad (3.64)$$

Somando o primeiro termo de (3.39), \tilde{T}_{00} com (3.46), (3.61) e (3.63), a equação (3.38)

fica, até ordem ε^4 :

$$\begin{aligned} R_{00}^{[4]} = & 8\pi \left[\frac{1}{2} \tilde{T}_{ii}^{[4]} + \frac{1}{2} e^{-4\phi_c} \tilde{T}_{00}^{[4]} - 2e^{-4\phi_c} \varphi^{[2]} \tilde{T}_{00}^{[2]} \right] + K \left[-\frac{1}{4} \nabla^2 \psi_{00}^{[4]} - \frac{5}{8} |\vec{\nabla} \psi_{00}^{[2]}|^2 + \frac{3}{16} \nabla^2 (\psi_{00}^{[2]})^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \psi_{i0,i0}^{[3]} - \frac{1}{8} \psi_{00}^{[2]} \nabla^2 \psi_{00}^{[2]} \right]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Esse objeto é, até ordem ε^2 :

$$R_{00}^{[2]} = 4\pi e^{-4\phi_c} \tilde{T}_{00}^{[2]} - \frac{K}{4} \nabla^2 \psi_{00}^{[2]}. \quad (3.66)$$

De (2.37) e utilizando os calibres (3.35) e (2.38a):

$$R_{00}^{[4]} = -\frac{1}{2} \nabla^2 \psi_{00}^{[4]} - \mathfrak{v}_{k,k0}^{[3]} - \frac{1}{2} |\vec{\nabla} \psi_{00}^{[2]}|^2 + \frac{1}{2} \psi_{jk}^{[2]} \psi_{00,jk}^{[2]}. \quad (3.67)$$

Ou, até ordem ε^2 :

$$R_{00}^{[2]} = -\frac{1}{2} \nabla^2 \psi_{00}^{[2]}. \quad (3.68)$$

Igualando (3.67) a (3.65):

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{K}{2}\right) \nabla^2 \psi_{00}^{[4]} = & 8\pi \left[-\tilde{T}_{ii}^{[4]} - e^{-4\phi_c} \tilde{T}_{00}^{[4]} + 4e^{-4\phi_c} \varphi^{[2]} \tilde{T}_{00}^{[2]} \right] - \left(1 - \frac{5K}{4}\right) |\vec{\nabla} \psi_{00}^{[2]}|^2 + \psi_{jk}^{[2]} \psi_{00,jk}^{[2]} + \\ & + K \left[-\frac{3}{8} \nabla^2 (\psi_{00}^{[2]})^2 - \psi_{i0,i0}^{[3]} + \frac{1}{4} \psi_{00}^{[2]} \nabla^2 \psi_{00}^{[2]} \right] - 2\mathfrak{v}_{k,k0}^{[3]}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Essa é a equação para $\psi_{00}^{[4]}$, que depende das soluções das outras componentes e dos outros

campos da teoria. Até ordem ε^2 , pode-se achar a solução igualando (3.68) a (3.66) e usando

(3.12) e (2.2):

$$\left(1 - \frac{K}{2}\right) \nabla^2 \psi_{00}^{[2]} = -8\pi e^{-4\phi_c} \tilde{T}_{00}^{[2]} = 8\pi e^{-2\phi_c} \rho = 2e^{-2\phi_c} \nabla^2 U ;$$

$$\psi_{00}^{[2]} = \frac{4}{2-K} e^{-2\phi_c} U. \quad (3.70)$$

Com essa solução em mãos, é possível encontrar todas as outras necessárias e então escrever as componentes (3.7), (3.8) e (3.10) da métrica em função dos potenciais pós-newtonianos.

3.1.4 Soluções

A partir de (3.70), a componente ψ_{ij} , dada por (3.52) tem como solução

$$\psi_{ij}^{[2]} = \left(2 + \frac{2K}{2-K}\right) e^{-2\phi_c} U \delta_{ij} = \frac{4}{2-K} e^{-2\phi_c} U \delta_{ij} = \psi_{00}^{[2]} \delta_{ij} . \quad (3.71)$$

É possível chegar em outra solução para $\psi_{00}^{[2]}$ e ela deve ser confrontada com (3.70). Para tanto, tira-se o divergente de (3.56),

$$\nabla^2 \{ \psi_{0j,j}^{[3]} + (v^{\mu}_{,\mu})^{[3]} \} = -4e^{-6\phi_c} \nabla^2 (V_{j,j}) ; \quad (3.72)$$

de (3.35) tem-se que $\psi_{j0,j} = \frac{1}{2} \psi_{jj,0} - v_{j,j}$ e de (2.24), $V_{j,j} = -U_{,0}$; usando também (3.5) e (3.71),

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{2} \psi_{jj,0}^{[2]} - v_{j,j}^{[3]} + v_{k,k}^{[3]} - v_{0,0}^{[2]} \right) = 4e^{-6\phi_c} \nabla^2 (U_{,0}) \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \left(\frac{3}{2} \psi_{00}^{[2]} + \frac{1}{2} \psi_{00}^{[2]} \right)_{,0} = 4e^{-6\phi_c} \nabla^2 (U)_{,0} ;$$

$$\psi_{00}^{[2]} = 2e^{-6\phi_c} U + \text{função}(x^i) . \quad (3.73)$$

Para que a teoria seja consistente, vê-se que, comparando (3.73) com (3.70), a função das coordenadas espaciais é nula e

$$\frac{4}{2-K} e^{-2\phi_c} = 2e^{-6\phi_c} \quad \Rightarrow \quad K = 2(1 - e^{4\phi_c}) , \quad \text{ou} \quad \phi_c = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{2-K}{2} \right) . \quad (3.74)$$

Supondo ϕ_c positivo, vê-se da expressão acima que a constante K é negativa. Em seu segundo artigo sobre a TeVeS [29], Bekenstein diz que K é positivo apesar de não argumentar ou demonstrar a afirmação. Se ϕ_c é arbitrário, então a única imposição a K é $K < 2$. Mais

adiante será visto que essa constante deve ser considerada negativa, sem que nenhuma conta ou resultado fique inconsistente.

As relações (3.74) são importantes porque ligam uma constante da teoria TeVeS ao valor assintótico de um de seus campos. Nota-se que, se um dos dois se anula, o outro também. A constante K aparece na lagrangiana e na equação de movimento do campo vetorial mas está relacionada ao valor assintótico do campo escalar. Essa interdependência entre os dois campos será reforçada adiante com uma relação entre K e k . Como é mais fácil trabalhar com exponenciais, utilizar-se-á a partir de agora as soluções

$$\psi_{00}^{[2]} = 2e^{-6\phi_c} U, \quad (3.75)$$

$$\psi_{ij}^{[2]} = 2e^{-6\phi_c} U \delta_{ij}. \quad (3.76)$$

De posse de (3.75) e (3.30), já é possível calcular (3.16):

$$\tilde{\psi}_{00}^{[2]} = 2(e^{-4\phi_c} + \frac{k}{4\pi})U. \quad (3.77)$$

De acordo com as discussões no início da Seção 2.1 e com (2.9) e (2.14), a constante multiplicando $2U$ em (3.77) é α , e $G = \alpha/c_0 c_1$. De (3.11) e usando a convenção de unidades em que $G = 1$,

$$(e^{-4\phi_c} + \frac{k}{4\pi}) = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 4\pi(1 - e^{-4\phi_c}) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{4\pi K}{K - 2}. \quad (3.78)$$

Conclui-se, portanto, que as constantes K e k não são independentes, e a TeVeS poderia ser escrita em função de apenas uma delas. Além disso, se ϕ_c é positivo, k também é e então K é negativo. Na última seção deste capítulo, um resultado mostrará que a constante k deve ser positiva. Portanto, neste trabalho, considera-se $k > 0$, $\phi_c > 0$ e $K < 0$. Continuando com o uso preferencial da exponencial, (3.30) se escreve

$$\varphi^{[2]} = (e^{-6\phi_c} - e^{-2\phi_c})U = \frac{1}{2}(1 - e^{4\phi_c})\psi_{00}^{[2]}. \quad (3.79)$$

As soluções para $\psi_{i0}^{[3]}$ e $v_i^{[3]}$ devem ser achadas analisando-se conjuntamente (3.37) e (3.56); de (3.37) e usando (3.76), (3.74) e (3.14),

$$\begin{aligned}\nabla^2 v_i^{[3]} &= -\nabla^2 \psi_{0i}^{[3]} + \frac{1}{2} \psi_{kk,i0}^{[2]} - \frac{1}{2} \psi_{00,i0}^{[2]} - \frac{8\pi}{K} \left(1 - \frac{2}{2-K}\right) e^{-2\phi_c} \rho v_i \\ &= -\nabla^2 \psi_{0i}^{[3]} + \psi_{00,i0}^{[2]} + \frac{2}{K} \left(\frac{-K}{2-K}\right) e^{-2\phi_c} \nabla^2 V_i = -\nabla^2 \psi_{0i}^{[3]} + \psi_{00,i0}^{[2]} - 2 \left(\frac{1}{2e^{4\phi_c}}\right) e^{-2\phi_c} \nabla^2 V \\ \nabla^2 v_i^{[3]} &= -\nabla^2 \psi_{0i}^{[3]} + \psi_{00,i0}^{[2]} - e^{-6\phi_c} \nabla^2 V_i.\end{aligned}\quad (3.80)$$

De (3.56) e usando (3.5),

$$\nabla^2 \psi_{0j}^{[3]} = -v_{k,kj}^{[3]} + v_{0,0j}^{[2]} - 4e^{-6\phi_c} \nabla^2 V_j = -v_{k,kj}^{[3]} - \frac{1}{2} \psi_{00,0j}^{[2]} - 4e^{-6\phi_c} \nabla^2 V_j.\quad (3.81)$$

Jogando (3.81) em (3.80) e usando (3.75),

$$\nabla^2 v_i^{[3]} = \frac{3}{2} \psi_{00,i0}^{[2]} + 3e^{-6\phi_c} \nabla^2 V_i - v_{k,ki}^{[3]} = 3e^{-6\phi_c} U_{,i0} + 3e^{-6\phi_c} \nabla^2 V_i - v_{k,ki}^{[3]}.\quad (3.82)$$

De (2.21) e (2.24),

$$U_{,i0} = -\frac{1}{2} \nabla^2 \chi_{,i0} = -\frac{1}{2} \nabla^2 (V_i - W_i).\quad (3.83)$$

Jogando (3.83) em (3.82), chega-se em

$$\nabla^2 v_i^{[3]} = \frac{3}{2} e^{-6\phi_c} \nabla^2 (V_i + W_i) - v_{k,ki}^{[3]}.\quad (3.84)$$

O último termo da equação acima aparentemente impede que seja encontrada facilmente a solução para $v_i^{[3]}$. Entretanto, supondo-se que a solução seja dada apenas pelos primeiros termos,

$$v_i^{[3]} = \frac{3}{2} e^{-6\phi_c} (V_i + W_i).\quad (3.85)$$

De (2.24),

$$\chi_{,0ii} = V_{,ii} - W_{,ii} \quad \Rightarrow \quad W_{,ii} = V_{,ii} - \nabla^2 \chi_{,0}.\quad (3.86)$$

Mas, de (2.24) e (2.21),

$$V_{,ii} = -U_{,0} = \frac{1}{2} \nabla^2 \chi_{,0}.\quad (3.87)$$

Jogando (3.87) em (3.86),

$$W_{i,i} = -\frac{1}{2}\nabla^2\chi_{,0} = -V_{i,i} \quad , \quad (3.88)$$

ou seja, $v_{i,i}^{[3]} \propto (V_i + W_i)_{,i} = 0$ e o último termo de (3.84) se anula. A solução para a componente espacial do campo vetorial é então, realmente, (3.85). Usando esse mesmo fato em (3.81), tem-se

$$\begin{aligned} \nabla^2\psi_{0j}^{[3]} &= -\frac{1}{2}\psi_{00,0j}^{[2]} - 4e^{-6\phi_c}\nabla^2V_j = -e^{-6\phi_c}U_{,0j} - 4e^{-6\phi_c}\nabla^2V_j = \frac{1}{2}e^{-6\phi_c}\nabla^2\chi_{,0j} - 4e^{-6\phi_c}\nabla^2V_j \\ &= \frac{1}{2}e^{-6\phi_c}\nabla^2(V_j - W_j) - 4e^{-6\phi_c}\nabla^2V_j = -\frac{1}{2}e^{-6\phi_c}\nabla^2(7V_j + W_j) ; \end{aligned}$$

$$\psi_{0j}^{[3]} = -\frac{1}{2}e^{-6\phi_c}(7V_j + W_j). \quad (3.89)$$

Com as soluções (3.89), (3.85), (3.79), (3.76) e (3.75) e as relações (3.74) e (3.78), é finalmente possível resolver (3.69) e (3.29). O primeiro termo do lado direito de (3.29) é $2\phi_{,00}^{[2]}$, ou, usando (3.79), (2.21) e (2.24):

$$\begin{aligned} 2\phi_{,00}^{[2]} &= 2(e^{-6\phi_c} - e^{-2\phi_c})U_{,00} = -(e^{-6\phi_c} - e^{-2\phi_c})\nabla^2\chi_{,00} \\ &= (e^{-2\phi_c} - e^{-6\phi_c})\nabla^2(\mathcal{A} + \mathcal{B} - \Phi_1); \end{aligned} \quad (3.90)$$

os quatro termos seguintes são, usando (3.75), (3.76), (3.79) e (2.24),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\psi_{00,i}^{[2]}\phi_{,i}^{[2]} + \psi_{ij}^{[2]}\phi_{,ij}^{[2]} + \psi_{ik,k}^{[2]}\phi_{,i}^{[2]} - \frac{1}{2}\psi_{kk,i}^{[2]}\phi_{,i}^{[2]} &= \frac{1}{4}(1 - e^{4\phi_c})|\vec{\nabla}\psi_{00,i}^{[2]}|^2 + \frac{1}{2}(1 - e^{4\phi_c})\psi_{00}^{[2]}\nabla^2\psi_{00}^{[2]} + \\ &+ \frac{1}{2}(1 - e^{4\phi_c})|\vec{\nabla}\psi_{00,i}^{[2]}|^2 - \frac{3}{4}(1 - e^{4\phi_c})|\vec{\nabla}\psi_{00,i}^{[2]}|^2 = \frac{1}{2}(1 - e^{4\phi_c})\psi_{00}^{[2]}\nabla^2\psi_{00}^{[2]} \\ &= 2(e^{-12\phi_c} - e^{-8\phi_c})U\nabla^2U = 2(e^{-12\phi_c} - e^{-8\phi_c})\nabla^2\Phi_2 ; \end{aligned} \quad (3.91)$$

os últimos termos, envolvendo os tensores energia-momento, ficam, usando (3.12), (3.13), (3.15) e (3.77):

$$\begin{aligned} k\{\tilde{T}_{ii}^{[4]} + e^{-4\phi_c}[\tilde{T}_{00}^{[4]} + \tilde{T}_{00}^{[2]}(\psi_{00}^{[2]} - 4\phi^{[2]})]\} &= 4\pi(1 - e^{-4\phi_c})\left[e^{-6\phi_c}\rho v^2 + 3e^{-2\phi_c}p + \right. \\ &\left. + e^{-2\phi_c}\rho(1 + \Pi + 2e^{-2\phi_c}U + e^{-4\phi_c}v^2) - 2e^{-2\phi_c}\tilde{\psi}_{00}^{[2]}\tilde{T}_{[2]}^{00} + e^{-2\phi_c}\rho(-1 + 2e^{4\phi_c})\psi_{00}^{[2]}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4\pi(1 - e^{-4\phi_c}) \left[e^{-2\phi_c} \rho + 2e^{-6\phi_c} \rho v^2 + 2e^{-4\phi_c} \rho U + e^{-2\phi_c} \rho \Pi + 3e^{-2\phi_c} p - 4e^{-4\phi_c} \rho U + \right. \\
&\quad \left. + (4e^{-4\phi_c} - 2e^{-8\phi_c}) \rho U \right] \\
&= 4\pi(1 - e^{-4\phi_c}) \left[e^{-2\phi_c} \rho + 2e^{-6\phi_c} \rho v^2 + (2e^{-4\phi_c} - 2e^{-8\phi_c}) \rho U + e^{-2\phi_c} \rho \Pi + 3e^{-2\phi_c} p \right], \quad (3.92)
\end{aligned}$$

e, usando (2.2) e (2.24),

$$\begin{aligned}
k\{\tilde{T}_{ii}^{[4]} + e^{-4\phi_c} [\tilde{T}_{00}^{[4]} + \tilde{T}_{00}^{[2]} (\psi_{00}^{[2]} - 4\varphi^{[2]})]\} = (e^{-4\phi_c} - 1) \nabla^2 [e^{-2\phi_c} U + 2e^{-6\phi_c} \Phi_1 + 2(e^{-4\phi_c} - e^{-8\phi_c}) \Phi_2 + \\
+ e^{-2\phi_c} \Phi_3 + 3e^{-2\phi_c} \Phi_4]. \quad (3.93)
\end{aligned}$$

Somando (3.90), (3.91) e (3.93),

$$\begin{aligned}
\varphi^{[4]} = (e^{-6\phi_c} - e^{-2\phi_c}) U - (e^{-2\phi_c} + e^{-6\phi_c} - 2e^{-10\phi_c}) \Phi_1 - 2(e^{-4\phi_c} - e^{-8\phi_c}) \Phi_2 + (e^{-6\phi_c} - e^{-2\phi_c}) \Phi_3 + \\
+ 3(e^{-6\phi_c} - e^{-2\phi_c}) \Phi_4 + (e^{-2\phi_c} - e^{-6\phi_c}) (\mathcal{A} + \mathcal{B}). \quad (3.94)
\end{aligned}$$

O último termo de (3.69) é nulo devido à propriedade da solução (3.85). Os primeiros termos de (3.69), envolvendo os tensores energia-momento, ficam

$$\begin{aligned}
8\pi[-\tilde{T}_{ii}^{[4]} - e^{-4\phi_c} \tilde{T}_{00}^{[4]} + 4e^{-4\phi_c} \varphi^{[2]} \tilde{T}_{00}^{[2]}] = -8\pi[e^{-6\phi_c} \rho v^2 + 3e^{-2\phi_c} p + e^{-2\phi_c} \rho(1 + \Pi - 2e^{-2\phi_c} U + \\
+ e^{-4\phi_c} v^2) - 4e^{-2\phi_c} (e^{-6\phi_c} - e^{-2\phi_c}) \rho U] = -8\pi[e^{-2\phi_c} \rho + e^{-2\phi_c} \rho \Pi + (2e^{-4\phi_c} - 4e^{-8\phi_c}) \rho U + \\
+ 2e^{-6\phi_c} \rho v^2 + 3e^{-2\phi_c} p]; \\
8\pi[-\tilde{T}_{ii}^{[4]} - e^{-4\phi_c} \tilde{T}_{00}^{[4]} + 4e^{-4\phi_c} \varphi^{[2]} \tilde{T}_{00}^{[2]}] = 2\nabla^2 [e^{-2\phi_c} U + 2e^{-6\phi_c} \Phi_1 + (2e^{-4\phi_c} - 4e^{-8\phi_c}) \Phi_2 + \\
+ e^{-2\phi_c} \Phi_3 + 3e^{-2\phi_c} \Phi_4]. \quad (3.95)
\end{aligned}$$

Os termos restantes do lado direito de (3.69) são, usando (3.88) e (2.24):

$$\begin{aligned}
\psi_{jk}^{[2]} \psi_{00,jk}^{[2]} - (1 - \frac{5K}{4}) |\bar{\nabla} \psi_{00}^{[2]}|^2 + K[-\frac{3}{8} \nabla^2 (\psi_{00}^{[2]})^2 - \psi_{i0,i0}^{[3]} + \frac{1}{4} \psi_{00}^{[2]} \nabla^2 \psi_{00}^{[2]}] = 4e^{-12\phi_c} U \nabla^2 U + \\
+ 2e^{-12\phi_c} (3 - 5e^{4\phi_c}) |\bar{\nabla} U|^2 + 2(1 - e^{4\phi_c}) [-\frac{3}{2} e^{-12\phi_c} \nabla^2 U^2 + e^{-12\phi_c} U \nabla^2 U + \\
+ \frac{1}{4} e^{-6\phi_c} (7 - 1) \nabla^2 \chi_{,00}]
\end{aligned}$$

$$= \nabla^2 [8e^{-8\phi_c} \Phi_2 - 2e^{-8\phi_c} U^2 - 3(e^{-2\phi_c} - e^{-6\phi_c})(\mathcal{A} + \mathcal{B} - \Phi_1)]. \quad (3.96)$$

Igualando o termo do lado esquerdo de (3.69) com a soma de (3.95) e (3.96):

$$\begin{aligned} e^{4\phi_c} \nabla^2 \psi_{00}^{[4]} &= \nabla^2 [2e^{-2\phi_c} U - 2e^{-8\phi_c} U^2 + (e^{-6\phi_c} + 3e^{-2\phi_c})\Phi_1 + 4e^{-4\phi_c} \Phi_2 + 2e^{-2\phi_c} \Phi_3 + \\ &\quad + 6e^{-2\phi_c} \Phi_4 - 3(e^{-2\phi_c} - e^{-6\phi_c})(\mathcal{A} + \mathcal{B})]; \\ \psi_{00}^{[4]} &= 2e^{-6\phi_c} U - 2e^{-12\phi_c} U^2 + (e^{-10\phi_c} + 3e^{-6\phi_c})\Phi_1 + 4e^{-8\phi_c} \Phi_2 + 2e^{-6\phi_c} \Phi_3 + \\ &\quad + 6e^{-6\phi_c} \Phi_4 - 3(e^{-6\phi_c} - e^{-10\phi_c})(\mathcal{A} + \mathcal{B}). \end{aligned} \quad (3.97)$$

Agora, já com todas as soluções necessárias, o último passo é escrever as componentes da métrica em função dos potenciais para se chegar nos valores dos parâmetros PPN.

3.2 Parâmetros PPN

De (3.76) e (3.79), a componente $\tilde{g}_{ij}^{[2]}$ em (3.7) fica

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{ij}^{[2]} &= e^{-2\phi_c} [\delta_{ij} + 2e^{-6\phi_c} U \delta_{ij} - 2(e^{-6\phi_c} - e^{-2\phi_c}) U \delta_{ij}] \\ &= e^{-2\phi_c} (1 + 2e^{-2\phi_c} U) \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

De (3.85) e (3.89), a componente $\tilde{g}_{0i}^{[3]}$ em (3.8) fica

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{0i}^{[3]} &= -\frac{1}{2} e^{-4\phi_c} (7V_i + W_i) + \frac{3}{2} (e^{-4\phi_c} - e^{-8\phi_c}) (V_i + W_i) \\ &= -\frac{1}{2} [(4e^{-4\phi_c} + 3e^{-8\phi_c}) V_i + (3e^{-8\phi_c} - 2e^{-4\phi_c}) W_i]. \end{aligned} \quad (3.99)$$

De (3.75), (3.79), (3.94) e (3.97), a componente $\tilde{g}_{00}^{[4]}$ em (3.10) fica

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{00}^{[4]} &= -e^{2\phi_c} + 2e^{-4\phi_c}U - 2e^{-10\phi_c}U^2 + (e^{-8\phi_c} + 3e^{-4\phi_c})\Phi_1 + 4e^{-6\phi_c}\Phi_2 + 2e^{-4\phi_c}\Phi_3 + 6e^{-4\phi_c}\Phi_4 + \\
&- 3(e^{-4\phi_c} - e^{-8\phi_c})(\mathcal{A} + \mathcal{B}) - 2(e^{-4\phi_c} - 1)U + 2(1 + e^{-4\phi_c} - 2e^{-8\phi_c})\Phi_1 + 4(e^{-2\phi_c} - e^{-6\phi_c})\Phi_2 + \\
&- 2(e^{-4\phi_c} - 1)\Phi_3 - 6(e^{-4\phi_c} - 1)\Phi_4 - 2(1 - e^{-4\phi_c})(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + (2e^{-10\phi_c} - 2e^{-2\phi_c})U^2 \\
&= -e^{2\phi_c} + U - 2e^{-2\phi_c}U^2 + (2 - 3e^{-8\phi_c} + 5e^{-4\phi_c})\Phi_1 + 4e^{-2\phi_c}\Phi_2 + 2\Phi_3 + 6\Phi_4 + \\
&+ (3e^{-8\phi_c} - e^{-4\phi_c} - 2)(\mathcal{A} + \mathcal{B}). \tag{3.100}
\end{aligned}$$

De acordo com a discussão da Seção 2.2.2, deve-se eliminar o potencial \mathcal{B} de (3.100).

Como $\chi_{,ij}$ não aparece em (3.98), tem-se, de acordo com (2.29), $\lambda_2 = 0$. Já para λ_1 , de (2.29) e (3.100),

$$2\lambda_1 = (3e^{-8\phi_c} - e^{-4\phi_c} - 2), \tag{3.101}$$

de forma que

$$\begin{aligned}
\bar{g}_{ij} &= e^{-2\phi_c} (1 + 2e^{-2\phi_c}U)\delta_{ij}; \\
\bar{g}_{0i} &= -\frac{1}{2}[(6e^{-8\phi_c} + 3e^{-4\phi_c} - 2)V_i + (2 - e^{-4\phi_c})W_i]; \\
\bar{g}_{00} &= -e^{2\phi_c} + U - 2e^{-2\phi_c}U^2 + 4e^{-4\phi_c}\Phi_1 + 4e^{-2\phi_c}\Phi_2 + 2\Phi_3 + 6\Phi_4. \tag{3.102}
\end{aligned}$$

Ainda é preciso fazer a transformação de coordenadas (2.10), levando em conta (2.11), (2.12) e (2.25). Usando (3.11),

$$\begin{aligned}
\bar{g}_{ij} &= (1 + 2\bar{U})\delta_{ij}; \\
\bar{g}_{0i} &= -\frac{1}{2}[(6e^{-4\phi_c} + 3 - 2e^{4\phi_c})\bar{V}_i + (2e^{4\phi_c} - 1)\bar{W}_i]; \\
\bar{g}_{00} &= -1 + \bar{U} - 2\bar{U}^2 + 4\bar{\Phi}_1 + 4\bar{\Phi}_2 + 2\bar{\Phi}_3 + 6\bar{\Phi}_4. \tag{3.103}
\end{aligned}$$

Pode-se comparar então (3.103) com (2.30) a fim de se obter os parâmetros PPN; é direto ver que

$$\gamma = \beta = 1;$$

$$\alpha_3 = \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = 0 ;$$

$$\xi = 0 . \quad (3.104)$$

Os resultados para $\gamma, \beta, \alpha_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ e ζ_4 estão de acordo com a discussão no início do capítulo; os dois primeiros concordam com os valores obtidos por Bekenstein através de outro cálculo e os outros têm o valor esperado para um teoria baseada em lagrangianas. Para α_1 e α_2 , obtém-se, usando (3.74) e (3.78):

$$1 + \alpha_2 = 2e^{4\phi_c} - 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 2(e^{4\phi_c} - 1) \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = -K ; \quad (3.105)$$

$$7 + \alpha_1 - 2(e^{4\phi_c} - 1) = 6e^{-4\phi_c} + 3 - 2e^{4\phi_c} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 6(e^{-4\phi_c} - 1) = -\frac{3k}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{6K}{2 - K} . \quad (3.106)$$

Como era esperado, devido à presença de um campo vetorial na teoria, esses parâmetros não são nulos e estão relacionados a efeitos de coordenadas preferenciais como visto na Seção 2.2.3.2. Pela discussão da Seção 2.2.3.1, o momento angular total é conservado se o objeto $\Theta^{\mu\nu}$ da teoria é simétrico, estando os parâmetros α_1 e α_2 ligados também à conservação do momento angular se $\Theta^{\mu\nu}$ existir. Qual seria o objeto $\Theta^{\mu\nu}$ para a TeVeS? Sabe-se que o tensor de Einstein tem a divergência covariante nula, $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, o que, de acordo com (1.70) e (3.39), equivaleria a $X^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$. Essa divergência pode ser escrita como

$$G_{(l)}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \left[8\pi X^{\mu\nu} - G_{(nl)}^{\mu\nu} \right]_{;\nu} = 0 , \quad (3.107)$$

onde $G_{(l)}^{\mu\nu}$ é a parte linear em $\psi^{\mu\nu}$ do tensor de Einstein e $G_{(nl)}^{\mu\nu}$ é sua parte não-linear (não tratando-se porém de um tensor), representando a energia e o momento gravitacionais relacionados a $\psi^{\mu\nu}$, assim como $\tau^{\mu\nu}$ e $\Omega^{\mu\nu}$ o são para os campos escalar e vetorial,

respectivamente. A lei de conservação $\Theta^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ está então presente na teoria se

$\Theta^{\mu\nu} = \left[X^{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi} G_{(nl)}^{\mu\nu} \right]$. Como $G_{(nl)}^{\mu\nu}$ é simétrico, deve-se investigar o objeto $X^{\mu\nu}$:

$$X^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} X_{\alpha\beta} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \tilde{T}_{\alpha\beta} + (1 - e^{-4\phi}) g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \varrho_{\lambda}^{\lambda} \tilde{T}_{\lambda(\alpha} \varrho_{\beta)} + \tau^{\mu\nu} + \Omega^{\mu\nu}. \quad (3.108)$$

De (1.71), é claro que $\tau^{\mu\nu}$ e $\Omega^{\mu\nu}$ são simétricos nos índices $\mu\nu$; quanto aos outros termos de (3.108), eles podem ser escritos como

$$\{ g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + (1 - e^{-4\phi}) [g^{\alpha\mu} \varrho_{\lambda}^{\beta} \varrho_{\lambda}^{\nu} + g^{\beta\nu} \varrho_{\lambda}^{\alpha} \varrho_{\lambda}^{\mu}] \} \tilde{T}_{\alpha\beta}, \quad (3.109)$$

e, devido ao fato de $\tilde{T}_{\alpha\beta}$ ser simétrico em $\alpha\beta$, todo o objeto $X^{\mu\nu}$ é simétrico. Isso significa que $\Theta^{\mu\nu}$ é simétrico e, de acordo com (2.33), há conservação de momento angular na TeVeS e a teoria é totalmente conservativa.

Ainda pela Seção 2.2.3.1, na ausência de gravidade, $\Theta^{\mu\nu}$ deve se reduzir ao tensor energia-momento. Ausência de gravidade significa tomar-se as soluções assintóticas dos campos, dadas em (3.3):

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu}^{(0)} = \text{diag}(-e^{2\phi_c}, e^{-2\phi_c}, e^{-2\phi_c}, e^{-2\phi_c});$$

$$\phi = \phi_c;$$

$$\varrho_{\lambda}^{\alpha} = \delta_0^{\alpha};$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \quad (3.110)$$

sendo $G_{(nl)}^{\mu}$ nulo nessas condições, assim como $\tau^{\mu\nu}$; de $\Omega^{\mu\nu}$, sobra apenas o termo de λ e, de acordo com (1.62), apenas seu último termo não é nulo. Ou seja, na ausência de gravidade, $\Theta^{\mu\nu}$ fica

$$\Theta^{\mu\nu} = \left[\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + (1 - e^{-4\phi_c}) (\delta_0^{\mu} \delta_0^{\nu} \delta_0^{\alpha} \delta_0^{\beta} + \delta_0^{\mu} \delta_0^{\alpha} \eta^{\nu\beta} + \delta_0^{\nu} \delta_0^{\beta} \eta^{\mu\alpha}) \right] \tilde{T}_{\alpha\beta}, \quad (3.111)$$

o que equivale a

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta^{00} = e^{-4\phi_c} \tilde{T}^{00} = \tilde{T}^{00} \\ \Theta^{ij} = \tilde{T}^{ij} = e^{-4\phi_c} \tilde{T}^{ij} \\ \Theta^{0i} = -e^{-4\phi_c} \tilde{T}^{0i} = e^{-4\phi_c} \tilde{T}^{0i} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^{2\phi_c} \tilde{T}^{00}_{,0} + e^{-2\phi_c} \tilde{T}^{0i}_{,i} = 0 \\ \tilde{T}^{i0}_{,0} + \tilde{T}^{ij}_{,j} = 0 \end{array} \right. \quad (3.112)$$

O que a equação (3.112) diz é que a lei de conservação $\Theta^{\mu\nu}_{, \nu} = 0$ não se reduz a $\tilde{T}^{\mu\nu}_{, \nu} = 0$, o que leva à conclusão de que ϕ_c deve ser muito pequeno, ou igualmente, $|K| \ll 1$.

De acordo com Will, se os parâmetros α_1 e α_2 não são nulos, a teoria não conserva momento angular e tem efeitos de coordenadas preferenciais. Na análise feita acima, concluiu-se que a TeVeS tem efeitos de coordenadas preferenciais mas conserva momento angular apesar de α_1 e α_2 não serem nulos. Neste caso não se pode associar uma coisa à outra porque o objeto $\Theta^{\mu\nu}$ da TeVeS não se reduz exatamente a $\tilde{T}^{\mu\nu}$ na ausência de gravidade, violando as suposições feitas por Will.

Para sintetizar os resultados deste capítulo, a Tabela 3.2 traz os valores dos parâmetros PPN da TeVeS comparando-os com os da Relatividade Geral. É possível confirmar que no limite $l \rightarrow \infty$ (que corresponde à escolha $\mu = 1$) e $K \rightarrow 0$, a TeVeS se reduz à Relatividade Geral, produzindo os mesmos valores para os parâmetros PPN (no Capítulo 1 foi mostrado que as equações e a métrica da teoria também se reduzem às da Relatividade Geral).

Parâmetro	γ	β	ξ	α_1	α_2	α_3	$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$	Teoria Conservativa?	Coordenadas preferenciais?
Relatividade Geral	1	1	0	0	0	0	0	Sim	Não
TeVeS	1	1	0	$6K/(2-K)$	$-K$	0	0	Sim	Sim

Tabela 3.2: Parâmetros PPN da TeVeS e da Relatividade Geral

Pela Tabela 2.2, vê-se que a TeVeS também se ajusta bem aos resultados experimentais referentes ao sistema solar. No caso dos parâmetros α_1 e α_2 , os valores

experimentais permitem colocar limites nas constantes da TeVeS. As quatro possíveis limitações produzem as seguintes restrições:

$$|\alpha_1| < 4 \times 10^{-4} \Rightarrow |K| < 1,3 \times 10^{-4};$$

$$|\alpha_2| < 4 \times 10^{-4} \Rightarrow |K| < 4 \times 10^{-4};$$

$$|\alpha_2| < 4 \times 10^{-7} \Rightarrow |K| < 4 \times 10^{-7};$$

$$\left| \frac{2}{3} \alpha_2 - \alpha_1 \right| < 1,5 \times 10^{-3} \Rightarrow |K| < 10,998 \text{ e } |K| < 4,1 \times 10^{-4}. \quad (3.113)$$

Portanto a maior restrição ao valor de K é $|K| < 4 \times 10^{-7}$. Em termos de k , isso se traduz em $k < 2,5 \times 10^{-6}$, que é um limite mais rígido que o de $k < 10^{-2}$ encontrado por Bekenstein através de um modelo cosmológico para a TeVeS, e concorda com a conclusão anterior de que $|K| \ll 1$.

3.3 Limite MONDiano da TeVeS

Para recuperar a MOND, é preciso tomar o limite não-relativístico da TeVeS através das mesmas expansões (3.3). A componente (3.9) da métrica, utilizando (2.11) e (3.11), fica

$$\tilde{g}_{00}^{[2]} = -1 + \psi_{00}^{[2]} - 2\phi^{[2]}, \quad (3.114)$$

o que implica

$$\tilde{\psi}_{00}^{[2]} = \psi_{00}^{[2]} - 2\phi^{[2]}. \quad (3.115)$$

Será necessário obter as soluções para $\psi_{00}^{[2]}$ e $\phi^{[2]}$, mas sem tomar o limite $\mu = 1$, já que ele está relacionado ao regime newtoniano. A solução (3.75) não depende da escolha de μ ,

portanto pode ser utilizada. Já a solução (3.30) de $\varphi^{[2]}$ não é mais válida. É preciso reavaliar a equação (1.54); considerando uma distribuição de massa simétrica e estática (derivadas temporais podem ser desprezadas), (1.54) fica, até ordem ε^2 :

$$\vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{\nabla} \varphi) = k e^{-2\phi_c} \rho . \quad (3.116)$$

Comparando (3.116) com a equação de Poisson $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} U = -4\pi\rho$, tem-se que

$$\varphi = -\frac{e^{-2\phi_c} k}{4\pi\mu} U . \quad (3.117)$$

Jogando este resultado e (3.75) em (3.115), tem-se

$$\tilde{\psi}_{00}^{[2]} = 2 \left(e^{-6\phi_c} + \frac{e^{-2\phi_c} k}{4\pi\mu} \right) U . \quad (3.118)$$

Da expressão (3.114), pode-se dizer que $\tilde{\psi}_{00}^{[2]} = 2U_R$, onde, assim como em (1.27), U_R é o potencial gravitacional real. Ou seja, utilizando (3.118) e (1.23),

$$\hat{\mu} = \left(e^{-6\phi_c} + \frac{e^{-2\phi_c} k}{4\pi\mu} \right)^{-1} \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{4\pi\mu}{4\pi\mu e^{-6\phi_c} + e^{-2\phi_c} k} . \quad (3.119)$$

Tem-se então uma relação entre a função $\hat{\mu}$ de Milgrom e a μ da TeVeS. Agora deve-se

tomar o limite MONDiano de (1.56), $\mu(y) = \frac{1}{b} \sqrt{y}$. De (1.46), $y = kl^2 |\vec{\nabla} \varphi|^2$, portanto

$$\mu = \frac{l\sqrt{k}}{b} |\vec{\nabla} \varphi| . \quad (3.120)$$

Usando (3.117) em (3.120),

$$|\vec{\nabla} U| = \frac{4\pi b \mu^2 e^{2\phi_c}}{lk^{3/2}} . \quad (3.121)$$

De acordo com (1.23) e usando (3.119) e (3.121),

$$\hat{\mu} |\vec{\nabla} U_R| = |\vec{\nabla} U| \Rightarrow \frac{4\pi\mu}{4\pi\mu e^{-6\phi_c} + e^{-2\phi_c} k} |\vec{\nabla} U_R| = \frac{4\pi b \mu^2 e^{2\phi_c}}{lk^{3/2}}$$

$$\Rightarrow 4\pi e^{-4\phi_c} \mu^2 + k\mu - \frac{1}{b} l k^{3/2} |\vec{\nabla} U_R| = 0 ;$$

$$\mu = \frac{ke^{4\phi_c}}{8\pi} \left[-1 \pm \sqrt{1 + 4 \times \frac{4\pi l}{b\sqrt{k}e^{4\phi_c}} |\vec{\nabla} U_R|} \right]. \quad (3.122)$$

De acordo com (1.56), o limite $y \ll b^2$ implica $\mu \ll 1$. A solução (3.122) reproduz esse

limite se $\frac{4\pi l}{b\sqrt{k}e^{4\phi_c}} |\vec{\nabla} U_R| \ll 1$, ou seja, se $|\vec{\nabla} U_R| \ll \frac{b\sqrt{k}e^{4\phi_c}}{4\pi l}$. Pela formulação da MOND,

pode-se então fazer a identificação

$$a_0 = \frac{b\sqrt{k}e^{4\phi_c}}{4\pi l}. \quad (3.123)$$

Usando (3.78), pode-se reescrever (3.123) em função apenas de k ,

$$a_0 = \frac{b\sqrt{k}}{l(4\pi - k)}. \quad (3.124)$$

Para que a constante a_0 seja real, é preciso considerar $k > 0$. Por isso assumiu-se que $\phi_c > 0$ e $K < 0$.

A raiz positiva de (3.122) no limite $|\vec{\nabla} U_R| \ll a_0$ é $\mu \approx \frac{ke^{4\phi_c}}{4\pi} \frac{|\vec{\nabla} U_R|}{a_0}$, e inserindo essa solução em (3.119), $\hat{\mu} \approx e^{6\phi_c} |\vec{\nabla} U_R| / a_0$, o que está de acordo com a forma esperada da função $\hat{\mu}$ no limite MONDiano: $\hat{\mu}(x) \approx x$ para $x \ll 1$. De (3.124), vê-se que a_0 não é uma constante fundamental da TeVeS pois ela é escrita em função do parâmetro b , ou, em outras palavras, ela depende do modelo específico escolhido para a lagrangiana do campo escalar. Na notação de Bekenstein exposta no Apêndice A, a constante a_0 depende da forma da função $F(\mu)$, que para a escolha (A.8) feita por ele, daria $b = \sqrt{3}$. Na notação utilizada neste trabalho, uma possível escolha de $f(y)$, que parece mais simples que (A.8) proposta por Bekenstein, seria

$$f(y) = \frac{243b^2}{32} \left[-1 + \left(1 + \frac{81b^2}{16y} \right)^{3/2} \right]^{-1}, \quad (3.125)$$

que obedece aos valores extremos de (1.55) nos limites $y \gg b^2$ e $y \ll b^2$ e não faz uma escolha prévia do valor de b . Escolhendo $b = 1$, $k = 2,5 \times 10^{-6}$ (seu valor máximo imposto a partir de resultados experimentais) e usando a relação (3.78), tem-se os gráficos da função (3.125), sua derivada μ e também $\hat{\mu}$ dada por (3.119); percebe-se o comportamento esperado de tais funções, dados por (1.55), (1.56) e (1.23) respectivamente.

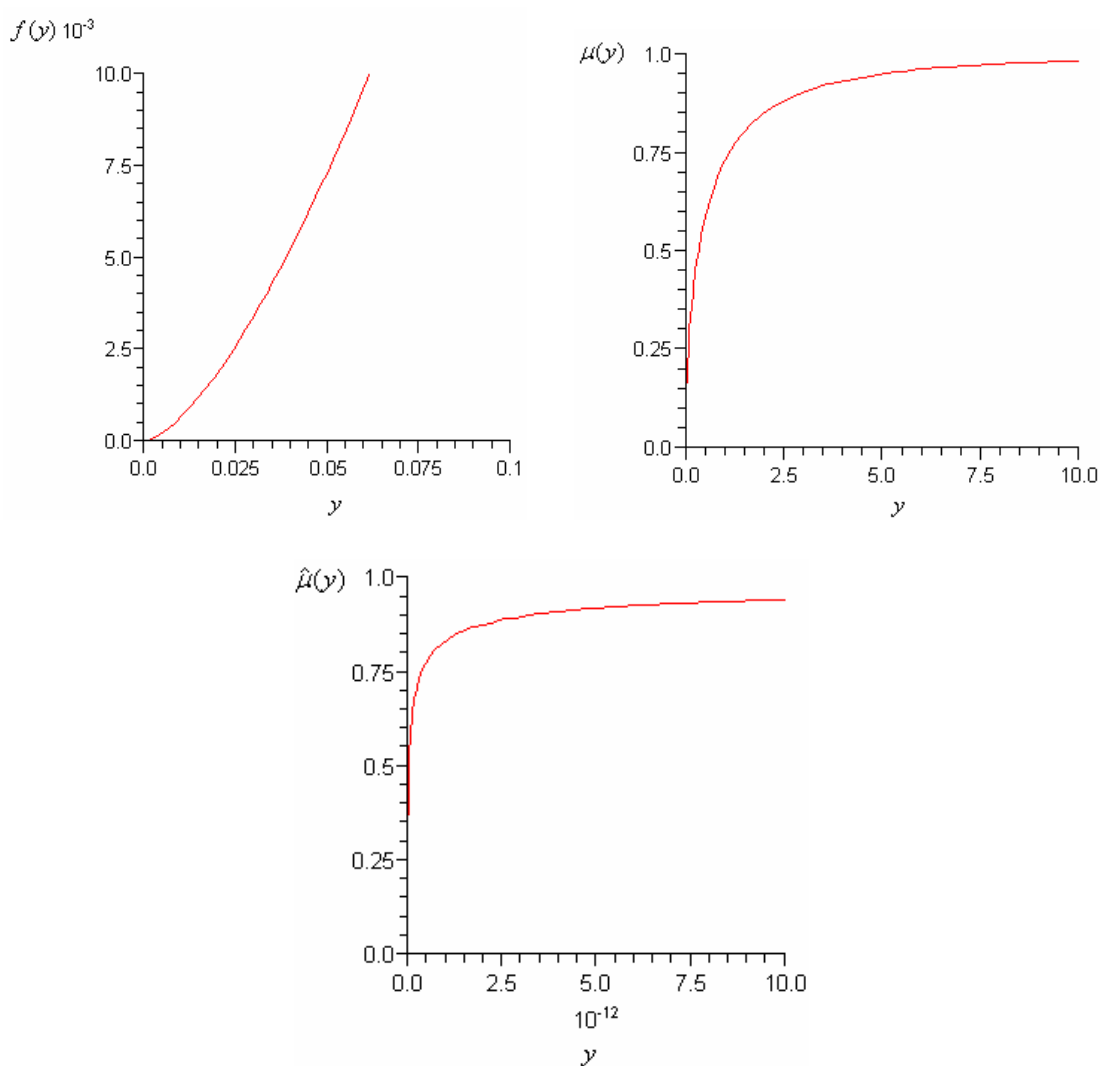


Figura 1.4: Gráficos de $f(y)$, $\mu(y)$ e $\hat{\mu}(y)$ para o modelo proposto para $f(y)$.

Conclusão

Neste trabalho foi feita uma apresentação da teoria TeVeS de Bekenstein e o cálculo de seu limite gravitacional pós-newtoniano. A TeVeS é uma teoria relativística para o modelo da MOND, que foi uma das primeiras tentativas de se explicar corretamente fenômenos astronômicos sem a necessidade de se recorrer à Matéria Escura. A motivação e formulação da MOND foram totalmente empíricas, sua base é fenomenológica. Inclusive, não é claro se a MOND seria uma modificação da gravitação ou da inércia. Alguns físicos preferem essa última opção [27,38], embora seu uso mais amplamente divulgado e estudado, inclusive neste trabalho, seja o de uma modificação da gravitação. A formulação de uma base teórica para a MOND foi se desenvolvendo a partir de idéias provenientes de teorias alternativas da gravitação, e a TeVeS agrupa algumas dessas idéias bem sucedidas. A incorporação de campos extras, um escalar e um vetorial, torna a teoria complexa; os cálculos são trabalhosos e muitas vezes capciosos, dificultando a frequência de trabalhos sobre a TeVeS. Apesar disso, ela tem se mostrado como um campo de pesquisa promissor.

A contribuição deste trabalho está ligada não aos aspectos “de ponta”, como cosmologia e lente gravitacional, mas sim à consistência da teoria, já que para ser no mínimo viável, ela deve ter como limites em casos específicos a Relatividade Geral e a mecânica newtoniana, concordando com dados experimentais com os quais esses dois ramos da Física se saem muito bem. Felizmente, existe toda uma formulação que foi desenvolvida durante décadas para se comparar teorias da gravitação no âmbito do limite newtoniano. O formalismo parametrizado pós-newtoniano fornece uma receita de como deve ser analisada

qualquer teoria métrica, extraindo informações como conservação de energia e permitindo a obtenção de valores que podem ser comparados com experimentos. A Relatividade Geral causou um grande impacto na Física, prevendo fenômenos nunca imaginados ou explicados, como a deflexão da luz e a precessão de periélios. Além disso, como visto no final do Capítulo 2, ela prevê bem esses fenômenos, concordando satisfatoriamente com os dados experimentais. Qualquer teoria alternativa da gravitação deve então ser rigorosamente comparada à Relatividade Geral nas áreas em que essa obtém sucesso. É por essa razão que a parte tensorial da TeVeS utiliza a base da Relatividade Geral: é razoável pensar que uma boa teoria não deve se afastar demais da formulada por Einstein.

Os cálculos deste trabalho permitiram chegar-se aos resultados (3.104), (3.105) e (3.106) para os parâmetros PPN. Como visto na Tabela 3.2, eles são praticamente idênticos aos da Relatividade Geral, com exceção de α_1 e α_2 que estão ligados à existência de um campo vetorial na teoria. Os valores encontrados para esses dois parâmetros são escritos em função das constantes da TeVeS e portanto impõem restrições sobre elas. Estando a constante K na faixa de valores $-4 \times 10^{-7} < K < 0$ ou, equivalentemente, $0 < k < 2,5 \times 10^{-6}$, a TeVeS também passa nos testes pós-newtonianos.

No processo de aplicação do formalismo PPN na TeVeS, foi encontrada uma relação entre as constantes K e k . Apesar das contas terem sido feitas num caso específico da teoria ($\mu = 1$), essa relação deve valer sempre, já que se tratam de duas constantes. A fórmula (3.78) permite então entrelaçar de uma forma indireta os campos vetorial e escalar da TeVeS. Além disso, para que o limite da MOND apareça e forneça a constante a_0 em função de k e l , K deve ser considerada negativa.

A constante a_0 que cria uma escala de aceleração na MOND é escrita em função das constantes da TeVeS de acordo com (3.124). Ela acaba dependendo explicitamente da escolha

feita para a lagrangiana do campo escalar, através da aparição de b . No formalismo adotado neste trabalho, isso está ligado à função $f(y)$, tendo sido proposta uma forma específica para ela em (3.125). Pela notação de Bekenstein, é a função $F(\mu)$ que dita o valor de b , sendo pela escolha dele, $b = \sqrt{3}$.

No que diz respeito a leis de conservação, foi visto que a TeVeS é uma teoria totalmente conservativa. A existência do objeto $\Theta^{\mu\nu}$ e o fato dele ser simétrico garantem a conservação de energia, de momento linear e de momento angular. A consequência dos parâmetros α_1 e α_2 serem diferentes de zero está na equação $\tilde{T}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ que não é satisfeita na TeVeS, na ausência de gravidade, a não ser que $\phi_c = 0$. Esses parâmetros também dizem que existe um sistema de coordenadas preferenciais, ou seja, há efeitos observáveis devido ao movimento de um objeto em relação ao referencial de repouso do universo. Pela Tabela 2.2, eles estão ligados a efeitos de maré, precessão do spin solar, efeitos orbitais e ao Efeito Nordtvedt, que, se observado, viola o princípio de equivalência forte, dizendo que corpos podem cair a taxas diferentes num campo gravitacional se sua auto-energia gravitacional contribui para a sua massa gravitacional mas não para sua massa inercial. Desde que $|K| < 4 \times 10^{-7}$, esses efeitos não são observáveis experimentalmente para a TeVeS.

Através dos resultados deste trabalho, um próximo cálculo natural seria o da radiação gravitacional na TeVeS, que utiliza alguns resultados do formalismo PPN. É possível obter informações como, por exemplo, se há radiação por dipolo. Na Relatividade Geral, que nesse caso específico também prevê muito bem o fenômeno, o primeiro termo da radiação é o de quadrupolo.

Apêndice A

Relação entre os formalismos para o campo escalar

Em seu trabalho original, Bekenstein introduz a ação do campo escalar como

$$S_{(s)} = -\frac{1}{2} \int \left[\sigma^2 h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} + \frac{\sigma^4}{2l^2} F(k\sigma^2) \right] \sqrt{-g} d^4x, \quad (\text{A.1})$$

onde F é uma função livre e σ é um campo escalar auxiliar e não-dinâmico que permite que a parte cinética de ϕ seja escrita como quadrática, embora não o seja. Variando $S_{(s)}$ em relação ao campo σ :

$$\frac{\delta S_{(s)}}{\delta \sigma} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} \left[2\sigma h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} + \frac{2\sigma^3}{l^2} F(k\sigma^2) + \frac{\sigma^4}{2l^2} \frac{\partial F}{\partial(k\sigma^2)} \frac{\partial(k\sigma^2)}{\partial \sigma} \right] = 0;$$

$$\left[2\sigma h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} + \frac{2\sigma^3}{l^2} F(k\sigma^2) + \frac{k\sigma^5}{l^2} \frac{\partial F}{\partial(k\sigma^2)} \right] = 0;$$

$$2\sigma h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} + \frac{2\sigma}{kl^2} \left[k\sigma^2 F(k\sigma^2) + \frac{k^2\sigma^4}{2} \frac{\partial F}{\partial(k\sigma^2)} \right] = 0;$$

se $\sigma \neq 0$, então

$$y = -\mu F(\mu) - \frac{1}{2} \mu^2 F'(\mu), \quad (\text{A.2})$$

onde $y = kl^2 h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta}$ como em (1.46) e $\mu = k\sigma^2$. Variando (A.1) em relação ao campo ϕ :

$$\frac{\delta S_{(s)}}{\delta \phi_{,\mu}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} \sigma^2 h^{\alpha\beta} (\phi_{,\alpha} \delta_{\beta}^{\mu} + \phi_{,\beta} \delta_{\alpha}^{\mu}) = -\sqrt{-g} \sigma^2 h^{\alpha\mu} \phi_{,\alpha} = -\sqrt{-g} \frac{\mu(y)}{k} h^{\alpha\mu} \phi_{,\alpha};$$

$$\partial_{\mu} \left(\frac{\partial S_{(s)}}{\partial \phi_{,\mu}} \right) = -\frac{1}{k} \partial_{\mu} \left[\sqrt{-g} \mu(y) h^{\alpha\mu} \phi_{,\alpha} \right] = -\frac{1}{k} \sqrt{-g} \left[\mu(y) h^{\alpha\mu} \phi_{,\alpha} \right]_{,\mu}. \quad (\text{A.3})$$

Juntando (A.3) com (1.43), a variação total do campo escalar dá

$$\left[\mu(y) h^{\alpha\mu} \phi_{,\alpha} \right]_{,\mu} = k [g^{\mu\nu} + (1 + e^{-4\phi}) \varrho^{\mu} \varrho^{\nu}] \tilde{T}_{\mu\nu}, \quad (\text{A.4})$$

que é exatamente a equação (1.54). A diferente notação da ação de ϕ tem também efeitos nas equações de movimento do campo vetorial e do campo tensorial:

$$\begin{aligned} \partial S_{(s)} / \partial \varrho_{\mu} &= \frac{\partial S_{(s)}}{\partial h^{\alpha\beta}} (\partial h^{\alpha\beta} / \partial \varrho_{\mu}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} \sigma^2 \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} \times (-g^{\alpha\mu} \varrho^{\beta} - g^{\beta\mu} \varrho^{\alpha}) \\ &= \sqrt{-g} \sigma^2 g^{\alpha\mu} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} \varrho^{\beta}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Usando a relação $\mu = k\sigma^2$, (A.5) é exatamente (1.59) e portanto (1.61) não muda. Quanto ao campo $g^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{(s)}}{\partial g^{\mu\nu}} &= -\frac{1}{2} \left[\sigma^2 h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} + \frac{\sigma^4}{2l^2} F(\mu) \right] \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} \sqrt{-g} \sigma^2 \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} \frac{\partial h^{\alpha\beta}}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{1}{4} \sqrt{-g} \left[\sigma^2 h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma^4}{2l^2} F(\mu) \right] g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \sqrt{-g} \sigma^2 \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} [\delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} - \varrho_{\nu} \varrho^{\beta} \delta_{\mu}^{\alpha} - \varrho_{\nu} \varrho^{\alpha} \delta_{\mu}^{\beta}]; \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{-g} \left[\frac{\mu(y)}{k} h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} + \frac{\mu^2(y)}{2k^2 l^2} F(\mu) \right] g_{\mu\nu} + \\ &\quad - \frac{1}{2} \sqrt{-g} \frac{\mu(y)}{k} [\phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \varrho^{\beta} \phi_{,\beta} \varrho_{\nu} \phi_{,\mu}], \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

o que, aparentemente, é um pouco diferente de (1.68), embora sejam equivalentes, já que para

que as ações (1.42) e (A.1) sejam iguais, $\frac{\mu}{k} h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} + \frac{\mu^2}{2k^2 l^2} F(\mu) = \frac{1}{k^2 l^2} f(y)$. O objeto

$\tau_{\mu\nu}$ fica

$$\tau_{\mu\nu} = \frac{\mu(y)}{k} \left\{ \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} g_{\mu\nu} - \mathfrak{z}_\beta \phi_{,\beta} \left[\mathfrak{z}_\nu \phi_{,\mu} - \frac{1}{2} \mathfrak{z}_\alpha \phi_{,\alpha} g_{\mu\nu} \right] \right\} - \frac{\mu^2(y)}{4k^2 l^2} F(\mu) g_{\mu\nu}, \quad (\text{A.7})$$

que também corresponde a (1.71).

Bekenstein escolhe em seu trabalho a função $F(\mu)$ como sendo

$$F(\mu) = \frac{3}{8} \mu^{-2} \left\{ \mu(4 + 2\mu - 4\mu^2 + \mu^3) + 2 \ln[(1 - \mu)^2] \right\}, \quad (\text{A.8})$$

e quando $\mu(y) = 1$, a função (A.8) diverge para o infinito e o único modo de se fazer o último termo de (A.7) não ser infinito é tomar o limite $l \rightarrow \infty$, embora ainda se tenha uma indeterminação. Essa é uma das razões por ter-se optado pelo formalismo apresentado nas Seções 1.5.1 e 1.5.2 para o campo escalar, já que esse problema não ocorre, além de ser uma generalização natural do desenvolvimento visto na Seção 1.4.

De (A.2) e (A.8), chega-se em

$$y = \frac{3}{4} \mu^2 (\mu - 2)^2 (1 - \mu)^{-1}, \quad (\text{A.9})$$

de forma que para y pequeno, $\mu \propto \sqrt{y}$ e o caso de y grande ocorre quando $\mu \rightarrow 1$. Esses limites são exatamente os da equação (1.56), mas neste caso Bekenstein escolhe o comportamento total da função $\mu(y)$ e não somente seus limites, como foi feito neste trabalho.

A relação entre a função $f(y)$ adotada neste trabalho e a $F(\mu)$ de Bekenstein pode ser tirada igualando-se (1.42) a (A.1), e usando $\mu = k\sigma^2$ e (1.53):

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{k} h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} + \frac{\mu^2}{2k^2 l^2} F(\mu) &= \frac{1}{k^2 l^2} f(y) \quad \Rightarrow \quad [f'(y)]^2 F(\mu) = 2f(y) - 2kl^2 f'(y) h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} \\ \Rightarrow \quad F(\mu) &= 2 \frac{f(y) - yf'(y)}{[f'(y)]^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

De (A.10), tem-se, no caso $f(y) \rightarrow y$ [que é o limite newtoniano e corresponde a $\mu(y) \rightarrow 1$], $F(\mu) = 0$. Esse seria o comportamento esperado já que (A.7) se igualaria a (3.40), mas a função (A.8) de Bekenstein é singular nesse limite.

Apêndice B

Expansão de λ

No limite de interesse deste trabalho ($\mu = 1$), o multiplicador de Lagrange λ , como visto em (1.62), é dado por

$$\lambda = K \mathfrak{z}_\varepsilon \mathfrak{z}_\sigma^{[\varepsilon;\sigma]} + \frac{8\pi}{k} \mathfrak{z}_\varepsilon \mathfrak{z}_\sigma \phi_{,\varepsilon} \phi_{,\sigma} - 8\pi(1 - e^{-4\phi}) \mathfrak{z}_\varepsilon \mathfrak{z}_\sigma \tilde{T}_{\varepsilon\sigma} . \quad (\text{B.1})$$

É necessário calcular (B.1) até ordem ε^4 ; vê-se que o termo do meio, utilizando as expansões (3.3), é de no mínimo ordem ε^6 , já que o termo de ordem mais baixa seria $\phi_{,0} \phi_{,0}$. O último termo fica, até ordem ε^4 :

$$\begin{aligned} (1 - e^{-4\phi}) \mathfrak{z}_\varepsilon \mathfrak{z}_\sigma \tilde{T}_{\varepsilon\sigma} &= (1 - e^{-4\phi})(\delta_0^\varepsilon + v^\varepsilon)(\delta_0^\sigma + v^\sigma) \tilde{T}_{\varepsilon\sigma} = (1 - e^{-4\phi_c} + 4e^{-4\phi_c} \phi)(1 + 2v^0) \tilde{T}_{00} \\ &= (1 - e^{-4\phi_c} + 4e^{-4\phi_c} \phi)(1 + \psi_{00}) \tilde{T}_{00} = (1 - e^{-4\phi_c})(1 + \psi_{00}) \tilde{T}_{00} + 4e^{-4\phi_c} \phi \tilde{T}_{00} . \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

O primeiro termo de (B.1) é trabalhoso e será feito por partes; usando (1.4) e (3.3c),

$$\mathfrak{z}_{\varepsilon;\lambda} = \mathfrak{z}_{\varepsilon,\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^\varepsilon \mathfrak{z}^\mu = v_{\varepsilon,\lambda} + \Gamma_{0\lambda}^\varepsilon + \Gamma_{\mu\lambda}^\varepsilon v^\mu ;$$

$$\mathfrak{z}_{\varepsilon;\sigma} = g^{\lambda\sigma} \mathfrak{z}_{\varepsilon;\lambda} = (\eta^{\lambda\sigma} - \psi^{\lambda\sigma})(v_{\varepsilon,\lambda} + \Gamma_{0\lambda}^\varepsilon + \Gamma_{\mu\lambda}^\varepsilon v^\mu) = v^{\varepsilon,\sigma} + \eta^{\lambda\sigma}(\Gamma_{0\lambda}^\varepsilon + \Gamma_{\mu\lambda}^\varepsilon v^\mu) - \psi^{\lambda\sigma}(v_{\varepsilon,\lambda} + \Gamma_{0\lambda}^\varepsilon) ;$$

$$\mathfrak{z}_{\varepsilon;\sigma;\sigma} = v^{\varepsilon,\sigma} + \eta^{\lambda\sigma}(\Gamma_{0\lambda,\sigma}^\varepsilon + \Gamma_{\mu\lambda,\sigma}^\varepsilon v^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\varepsilon v^{\mu,\sigma}) - \psi^{\lambda\sigma}{}_{,\sigma}(v_{\varepsilon,\lambda} + \Gamma_{0\lambda}^\varepsilon) - \psi^{\lambda\sigma}(v_{\varepsilon,\lambda,\sigma} + \Gamma_{0\lambda,\sigma}^\varepsilon) +$$

$$+ \Gamma_{\nu\sigma}^\varepsilon(v^{\nu,\sigma} + \eta^{\lambda\sigma} \Gamma_{0\lambda}^\nu) + \Gamma_{\nu\sigma}^\sigma(v^{\varepsilon,\nu} + \eta^{\lambda\nu} \Gamma_{0\lambda}^\varepsilon) ;$$

$$\mathfrak{z}_{\varepsilon;\sigma}^{[\varepsilon;\sigma]} = v^{[\varepsilon,\sigma]} + \eta^{[\lambda\sigma]}(\Gamma_{0\lambda,\sigma}^{[\varepsilon]} + \Gamma_{\mu\lambda,\sigma}^{[\varepsilon]} v^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^{[\varepsilon]} v^{\mu,\sigma}) - \psi^{\lambda[\sigma}{}_{,\sigma}(v^{\varepsilon],\lambda} + \Gamma_{0\lambda}^{\varepsilon]}) - \psi^{\lambda[\sigma}(v^{\varepsilon],\lambda,\sigma} + \Gamma_{0\lambda,\sigma}^{\varepsilon]}) +$$

$$+ (\mathbf{v}^{\nu, [\sigma} + \Gamma_{0\lambda}^{\nu} \eta^{\lambda[\sigma}]) \Gamma_{\nu\sigma}^{]} + \Gamma_{\nu\sigma}^{[\sigma} (\mathbf{v}^{\varepsilon], \nu} + \Gamma_{0\lambda}^{\varepsilon]} \eta^{\lambda\nu}). \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_\varepsilon \mathfrak{L}_\lambda^{[\varepsilon; \sigma]} ; \sigma = & -\mathbf{v}^{[0, \sigma]}_\sigma - \eta^{\lambda[\sigma} (\Gamma_{0\lambda, \sigma}^{0]} + \Gamma_{\mu\lambda, \sigma}^{0]} \mathbf{v}^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^{0]} \mathbf{v}^{\mu, \sigma}) + \psi^{\lambda[\sigma}{}_{, \sigma} (\mathbf{v}^{0]}_{, \lambda} + \Gamma_{0\lambda}^{0]} + \psi^{\lambda[\sigma} (\mathbf{v}^{0]}_{, \lambda\sigma} + \\ & + \Gamma_{0\lambda, \sigma}^{0]} - (\mathbf{v}^{\nu, [\sigma} + \Gamma_{0\lambda}^{\nu} \eta^{\lambda[\sigma}]) \Gamma_{\nu\sigma}^{]} - \Gamma_{\nu\sigma}^{[\sigma} (\mathbf{v}^{0], \nu} + \Gamma_{0\lambda}^{0]} \eta^{\lambda\nu}) + (\mathbf{v}_\varepsilon + \psi_{\varepsilon 0}) (\mathbf{v}^{[\varepsilon, \sigma]}_{, \sigma} + \eta^{\lambda[\sigma} \Gamma_{0\lambda, \sigma}^{\varepsilon]}). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Fazendo separadamente cada termo de (B.4), até ordem ε^4 :

$$-\mathbf{v}^{[0, \sigma]}_\sigma = \mathbf{v}^0_{, 00} - \nabla^2 \mathbf{v}^0 - \mathbf{v}^0_{, 00} - \mathbf{v}^i_{, 0i} = -\nabla^2 \mathbf{v}^0 = -\frac{1}{2} \nabla^2 \psi_{00}^{[4]} - \frac{3}{8} \nabla^2 (\psi_{00}^{[2]})^2 ; \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} -\eta^{\lambda[\sigma} (\Gamma_{0\lambda, \sigma}^{0]} + \Gamma_{\mu\lambda, \sigma}^{0]} \mathbf{v}^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^{0]} \mathbf{v}^{\mu, \sigma}) = & -\frac{1}{2} \eta^{\lambda[\sigma} (\eta^{0]\nu} - \psi^{0]\nu}) [(\psi_{0\nu, \lambda\sigma} + \psi_{\nu\lambda, 0\sigma} - \psi_{0\lambda, \nu\sigma}) (1 + \mathbf{v}^0) + \\ & + (\psi_{0\nu, \lambda} - \psi_{0\lambda, \nu}) \mathbf{v}^0_{, \sigma}] = (\nabla^2 \psi_{00} - \psi_{0i, 0i} + \frac{1}{2} \psi_{00} \nabla^2 \psi_{00} - \frac{1}{2} \psi_{ij} \psi_{00, ij}) (1 + \frac{1}{2} \psi_{00}) \psi_{00, i} + \frac{1}{2} \psi_{00, i} \\ & = \nabla^2 \psi_{00}^{[4]} - \psi_{0i, 0i}^{[3]} + \frac{1}{2} \psi_{00}^{[2]} \nabla^2 \psi_{00}^{[2]} + \frac{1}{2} |\bar{\nabla} \psi_{00}^{[2]}|^2 ; \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\psi^{\lambda[\sigma}{}_{, \sigma} (\mathbf{v}^{0]}_{, \lambda} + \Gamma_{0\lambda}^{0]} = \frac{1}{2} \psi_{ij, j} \psi_{00, i} - \frac{1}{2} \psi_{00, i} \psi_{ij, j} + \frac{1}{2} \psi_{00, i} \psi_{00, i} = \frac{1}{2} |\bar{\nabla} \psi_{00}^{[2]}|^2 ; \quad (\text{B.7})$$

$$\psi^{\lambda[\sigma} (\mathbf{v}^{0]}_{, \lambda\sigma} + \Gamma_{0\lambda, \sigma}^{0]} = \frac{1}{2} \psi_{ij} \psi_{00, ij} - \frac{1}{2} \psi_{ij} \psi_{00, ij} + \frac{1}{2} \psi_{00} \nabla^2 \psi_{00} = \frac{1}{2} \psi_{00}^{[2]} \nabla^2 \psi_{00}^{[2]} ; \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} -(\mathbf{v}^{\nu, [\sigma} + \Gamma_{0\lambda}^{\nu} \eta^{\lambda[\sigma}]) \Gamma_{\nu\sigma}^{]} = & \frac{1}{4} \psi_{00, i} \psi_{00, i} + \frac{1}{4} \psi_{00, i} \psi_{00, i} - \frac{1}{4} \psi_{00, i} \psi_{00, i} - \frac{1}{4} \psi_{00, i} \psi_{00, i} + \\ & + \frac{1}{4} \psi_{00, i} \psi_{kk, i} = \frac{3}{4} |\bar{\nabla} \psi_{00}^{[2]}|^2 ; \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} -\Gamma_{\nu\sigma}^{[\sigma} (\mathbf{v}^{0], \nu} + \Gamma_{0\lambda}^{0]} \eta^{\lambda\nu}) = & \frac{1}{4} \psi_{00, i} \psi_{00, i} - \frac{3}{4} \psi_{00, i} \psi_{00, i} - \frac{1}{4} \psi_{00, i} \psi_{00, i} + \frac{3}{4} \psi_{00, i} \psi_{00, i} - \frac{1}{4} \psi_{00, i} \psi_{00, i} + \\ & + \frac{1}{4} \psi_{00, i} \psi_{00, i} - \frac{1}{4} \psi_{00, i} \psi_{00, i} = -\frac{1}{4} |\bar{\nabla} \psi_{00}^{[2]}|^2 ; \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned}
(v_\varepsilon + \psi_{\varepsilon 0})(v^{[\varepsilon, \sigma]}_{,\sigma} + \eta^{\lambda[\sigma} \Gamma_{0\lambda, \sigma}^{\varepsilon]}) &= -\frac{1}{4} \psi_{00} \nabla^2 \psi_{00} + \frac{1}{2} \psi_{00} \nabla^2 \psi_{00} + \frac{1}{4} \psi_{00} \nabla^2 \psi_{00} + \frac{1}{4} \psi_{00} \nabla^2 \psi_{00} + \\
-\frac{1}{2} \psi_{00} \nabla^2 \psi_{00} - \frac{1}{2} \psi_{00} \nabla^2 \psi_{00} &= -\frac{1}{4} \psi_{00}^{[2]} \nabla^2 \psi_{00}^{[2]}. \tag{B.11}
\end{aligned}$$

Somando os resultados de (B.5) até (B.11),

$$\mathfrak{L}_\varepsilon \mathfrak{L}^{[\varepsilon; \sigma]}_{,\sigma} = \frac{1}{2} \nabla^2 \psi_{00}^{[4]} - \frac{3}{8} \nabla^2 (\psi_{00}^{[2]})^2 - \psi_{i_0, i_0}^{[3]} + \frac{3}{4} \psi_{00}^{[2]} \nabla^2 \psi_{00}^{[2]} + \frac{3}{2} |\vec{\nabla} \psi_{00}^{[2]}|^2. \tag{B.12}$$

Juntando (B.12) e (B.2), tem-se, finalmente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{[4]} &= K \left[\frac{1}{2} \nabla^2 \psi_{00}^{[4]} - \frac{3}{8} \nabla^2 (\psi_{00}^{[2]})^2 - \psi_{i_0, i_0}^{[3]} + \frac{3}{4} \psi_{00}^{[2]} \nabla^2 \psi_{00}^{[2]} + \frac{3}{2} |\vec{\nabla} \psi_{00}^{[2]}|^2 \right] - 8\pi \left\{ (1 - e^{-4\phi_c}) \tilde{T}_{00}^{[4]} + \right. \\
&\quad \left. + [(1 - e^{-4\phi_c}) \psi_{00}^{[2]} + 4e^{-4\phi_c} \varphi^{[2]}] \tilde{T}_{00}^{[2]} \right\}; \tag{B.13}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{[2]} = \frac{\kappa}{2} \nabla^2 \psi_{00}^{[2]} - 8\pi (1 - e^{-4\phi_c}) \tilde{T}_{00}^{[2]}. \tag{B.14}$$

Referências Bibliográficas

- [1] Ohanian, H. C., Ruffini, R., *Gravitation and Spacetime*, W. W. Norton & Company; 2nd edition (1994)
- [2] Milgrom, M.; *A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis* , *Astrophys. J.* **270** 365 (1983)
- [3] Milgrom, M.; *A modification of the Newtonian dynamics - Implications for galaxies*, *Astrophys. J.* **270** 371 (1983)
- [4] Milgrom, M.; *A Modification of the Newtonian Dynamics - Implications for Galaxy Systems*, *Astrophys. J.* **270** 384 (1983)
- [5] Bekenstein, J. D. & Milgrom, M., *Does the missing mass problem signal the breakdown of Newtonian gravity?*, *Astrophys. J.* **286**:7 (1984)
- [6] Bekenstein, J. D., *Relativistic gravitation theory for the MOND paradigm*, *Phys. Rev D* **70**, 083509 (2004); erratum: *Phys. Rev. D* **71**, 069901(E) (2005); Versão atualizada: arXiv:astro-ph/0403694 (2006)
- [7] Brans, C. & Dicke, R. H., *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation*, *Phys. Rev.* **124**: 925 (1961)

- [8] Eddington, A.A., *The Mathematical Theory of Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge (1922)
- [9] Robertson, H. P., *Relativity and cosmology*, em *Space age astronomy*, ed. A. J. Deutsch and W. B. Klemperer, pg 228-235 (1962)
- [10] Schiff, L. I., *Comparison of theory and observation in general relativity*, em *Relativity Theory and Astrophysics, I. Relativity and Cosmology*, ed. J. Ehlers, American Mathematical Society, Providence (1967)
- [11] Nordtvedt, K., *Equivalence principle for massive bodies II: Theory*, *Phys. Rev.* **169**, 1017-1025 (1968)
- [12] Nordtvedt, K., *Equivalence principle for massive bodies including rotational energy and radiation pressure*, *Phys. Rev.* **180**, 1293-1298 (1969)
- [13] Will, C.M., *Theoretical frameworks for testing relativistic gravity II: Parametrized post-newtonian hydrodynamics and the Nordtvedt effect*, *Astrophys. J.* **163**, 611-628 (1971)
- [14] Will, C.M., *The theoretical tools of experimental gravitation*, Italian Physical Society series, edited by B. Bertotti, Library of Congress Catalog Card Number **74-407** (1972)
- [15] Will, C.M., *Relativistic gravity in the solar system III: Experimental disproof of a class of linear theories of gravitation*, *Astrophys. J.* **185** - 31 (1973)

- [16] Will, Clifford, *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, Cambridge University, Cambridge (1986)
- [17] Bosma, A., *The Distribution and Kinematics of Neutral Hydrogen in Spiral Galaxies of Various Morphological Types*, PhD Dissertation, University of Groningen, The Netherlands (1978)
- [18] Zwicky, F.; *Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln*, *Helv. Phys. Acta* **6**, 110 (1933)
- [19] Faber, S.M. & Gallagher, J. S., *Masses and mass-to-light ratios of galaxies*, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **17**:135-87 (1979)
- [20] Wheeler, J., Thorne, K., Misner, C. W., *Gravitation*, pg 840, San Francisco: W.H. Freeman and Company (1973)
- [21] Zeilik, M, Gregory, S. A., *Introductory astronomy & astrophysics*, 4th ed. Fort Worth: Saunders College Pub. (1998)
- [22] Rubin, V. C., Thonnard, N., Ford, N.W., *Extended rotation curves of high-luminosity spiral galaxies. IV - Systematic dynamical properties, SA through SC*, *The Astrophys. J.* **225**: L107-111 (1978)
- [23] Primack, J. R., *Status of cold dark matter cosmology*, *Nuclear Physics B – Proceedings Supplements* **124**:3-12 (2003)

- [24] Frenk, C. S., Efstathiou, G., Davist, M., White, S. D. M., *Galaxy distribution in a cold dark matter universe*, Nature **330**, 451 - 453 (1987)
- [25] Tully, R. B., Fisher, J. R., *A new method of determing distances to galaxies*, Astron. Astrophys. **54**:661-673 (1977)
- [26] Scarpa, R. *Modified Newtonian Dynamics, an Introductory Review*, AIP Conference Proceedings v. **822**, pg. 253-265; arXiv: astro-ph/0601478 (2006)
- [27] Sanders, R. H., McGaugh, S. S., *Modified Newtonian Dynamics as an alternative to dark matter*, Ann.Rev.Astron.Astrophys. **40**, 263-317 (2002)
- [28] Begeman, K. G., Broeils, A. H., Sanders, R. H., *Extended rotation curves of spiral galaxies: dark haloes and modified dynamics*, Mon. Not. R. Astr. Soc. **249**, 523-537 (1991)
- [29] Bekenstein, J. D., *Modified gravity vs dark matter: relativistic theory for MOND*, PoS JHW2004 012; arXiv: astro-ph/0412652 (2005)
- [30] Bekenstein J. D., em Proceedings of the Sixth Marcel Grossman Meeting on General Relativity, H. Sato and T. Nakamura, pg 905; Ed. World Scientific, Singapore (1992)
- [31] Sanders, R. H., *A stratified framework for scalar-tensor theories of modified dynamics*, Astrophys. J. **480**:492 (1997)

- [32] Skordis, C., Mota, D. F., Ferreira, P. G., Boehm, C., *Large Scale Structure in Bekenstein's Theory of Relativistic Modified Newtonian Dynamics*, Physical Review Letters, **96**, 011301 (2006)
- [33] Dodelson, S., Liguori, M., *Can cosmic structure form without dark matter?*, Phys. Rev. Lett. **97**, 231301 (2006)
- [34] Zhao, H. S., Bacon, D. J., Taylor, A. N., Horne, K., *Testing Bekenstein's Relativistic MOND gravity with Lensing Data*, Mon. Not. R. Astr. Soc. **368**, Issue 1, pg 171 (2006)
- [35] Zhao, H. S., Famaey, B., *Refining the MOND Interpolating Function and TeVeS Lagrangian*, The Astrophys. J. **638**:L9–L12 (2006)
- [36] Sanders, R. H., *A tensor–vector–scalar framework for modified dynamics and cosmic dark matter*, Mon. Not. R. Astr. Soc. **363**, 459 (2005)
- [37] Lee, D. L., *Conservation laws, gravitational waves and mass losses in the Dicke-Brans-Jordan theory of gravity*, Phys. Rev. D. **10**, 2374-2383 (1974)
- [38] Milgrom, M., *Dynamics with a Nonstandard Inertia-Acceleration Relation: An Alternative to Dark Matter in Galactic Systems*, Annals. Phys **229**: 384-415 (1994)