

**Campo médio generalizado para a descrição da
Bi-estabilidade Óptica gerada por polaritons em
uma microcavidade semicondutora**

Héliques Mesquita Frazão

Março de 2008

**Campo médio generalizado para a descrição da
Bi-estabilidade Óptica gerada por polaritons em uma
microcavidade semicondutora**

Héliques Mesquita Frazão

Orientadora: Profa. Maria Carolina Nemes

Dissertação apresentada à UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, como requisito parcial para a obtenção do grau de mestre em Física.

Março de 2008

*"Grandes são as obras do Senhor,
Dignas de estudo para quem as ama."
Salmo 110*

Agradecimentos

À Deus.

Aos meus pais pelo apoio incondicional.

À Carolina por toda a paciência e atenção.

Às pessoas que contribuíram diretamente para a realização deste trabalho: Eduardo Adriano Cotta (Doutorando da UFMG), pela orientação sobre bi-estabilidade óptica e sobre o experimento da microcavidade semicondutora; Júlia Esteves Parreira (Doutoranda da UFMG), pelas contas detalhadas do artigo [6]; e José Geraldo Peixoto de Faria (Professor do CEFET-MG), pelo cálculo do valor esperado em um estado gaussiano que motivou a transformação (3.59).

Aos colegas do mestrado pela amistosa convivência. Em especial, André, Maurisan, Jonathan e Irismar, por todo o apoio nestes dois anos.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho fazemos a aplicação da aproximação Gaussiana para a descrição da propriedade de bi-estabilidade óptica gerada por polaritons numa microcavidade semicondutora. Esta aproximação corresponde a uma generalização da aproximação de estado coerente, que adiciona mais propriedades quânticas na descrição do sistema: o *squeezing* e a possibilidade de estados mistos. A demonstração da propriedade de bi-estabilidade é feita tomando a solução estacionária das equações de evolução temporal fornecidas pela aproximação. Estas equações por sua vez, podem ser escritas numa forma Hamiltoniana clássica, em que as quadraturas do campo de polárítos, e as variáveis de *squeezing* introduzidas pela aproximação, correspondem às variáveis canonicamente conjugadas. Uma análise de estabilidade da curva característica da propriedade de bi-estabilidade, obtida pela nossa aproximação para o sistema, também é realizada, resultando na estabilidade dos ramos superior e inferior, e na instabilidade do ramo intermediário.

Abstract

In this work we describe the optical bistability produced by polaritons in a semiconductor microcavity using a Gaussian mean-field approximation. It generalizes a coherent mean-field approximation and adds extra quantum properties in the description of the system: the squeezing and the possibility of mixed states. We demonstrate the effect of optical bistability by means of the stationary solutions of the time evolution equations provided by the approximation. These equations can be written in a classical Hamiltonian form, where the canonical variables are the quadratures of the polariton field and the squeezing variables introduced by the approximation. We also make a stability analysis which results in the stability of upper and lower branches of the bistability curve, and in the instability of the intermediate branch.

CONTEÚDO

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
1 Introdução	6
2 Ferramentas	10
2.1 A física da Bi-estabilidade	10
2.1.1 Mecanismos básicos da Bi-estabilidade Óptica	11
2.1.2 Hamiltoniano descrevendo a Bi-estabilidade dispersiva	18
2.1.3 Propriedade de Bi-estabilidade Óptica do sistema	21
2.2 Uma implementação experimental	25
2.3 Aproximação Gaussiana	30
3 Descrição teórica da Bi-estabilidade	36
3.1 Modelo e aproximação de estado coerente	36
3.2 Usando a Aproximação Gaussiana	43
3.2.1 Equações de evolução temporal	44

3.2.2	Forma Hamiltoniana para as equações de evolução temporal	46
3.2.3	Solução estacionária e Bi-estabilidade	48
3.2.4	Análise de estabilidade	58
4	Conclusões	67
A	Tabela de Traços	69
B	Valor esperado do Hamiltoniano	70
C	Cálculos de $Tr([p, H]\rho_0)$, $Tr(\frac{d}{dt}(\eta\eta)\rho_0)$ e $Tr([\eta\eta, H]\rho_0)$	74

LISTA DE FIGURAS

1.1	Diagrama da bi-estabilidade ótica	7
1.2	Microcavidade semicondutora formada por espelhos de Bragg (DBR - <i>Distributed Bragg Reflector</i>) e contendo um poço quântico no seu interior (figura adaptada a partir de [2]).	8
2.1	Cavidade Fabry-Perot formada por dois espelhos planos paralelos (M_1 e M_2) preenchida por um meio não-linear.	11
2.2	Valores de contorno do campo resultante de sucessivas reflexões, transmissões e absorções no meio.	12
2.3	Relação entre a intensidade transmitida I_T e a incidente I_i para a bi-estabilidade absorpsiva com diferentes valores de $C = 2\alpha_0 LR/T$	15
2.4	Curva para a relação I_T/I_i em função de ψ	17
2.5	Curva característica da bi-estabilidade dispersiva para diferentes valores de $\sqrt{\frac{4R}{T}}A$	18
2.6	I_T versus I_i para diferentes valores de $\Delta\omega$	23
2.7	Uma estrutura típica para um espelho DBR formada por camadas alternadas de $Al_xGa_{1-x}As$ e $AlAs$ com comprimentos e índices de refração L_1, n_1 e L_2, n_2 , respectivamente (figura adaptada a partir de [2]).	26

2.8	Curvas de reflectância para o caso de incidência normal de um espelho DBR planar, com <i>stop band</i> centrada em $\lambda_0 = 8000 \text{ \AA}$ (figura retirada de [2]).	27
2.9	Curvas de reflectância para o caso de incidência normal de uma cavidade Fabry-Perot formada por espelhos DBR com ressonância em $\lambda_0 = 8000 \text{ \AA}$ (figura retirada de [2]).	27
2.10	Distribuição das bandas de energia na formação de um poço quântico (figura adaptada a partir de [2]).	28
2.11	Medidas da intensidade emitida por uma microcavidade semicondutora (\sim e-p power) em função da intensidade de bombeio de um laser (\sim pump power), para diferentes valores de frequência do laser ($\sim \Delta_L$) (figura retirada de [10]).	29
3.1	Nível de energia e energia de ligação para o exciton.	37
3.2	Comparação entre as energias dos excitons, fótons e polaritons (figura retirada de [2]).	39
3.3	Relação entre n_p e I^{in} para diferentes valores de δ_p	42
3.4	Análise gráfica do denominador $d_{(\pm)}$ da expressão (3.83). $d_{(+)}$ corresponde à escolha de $\cos(\phi_0 - 2 \arg\langle p \rangle_0) = +1$ e $d_{(-)}$ à $\cos(\phi_0 - 2 \arg\langle p \rangle_0) = -1$	52
3.5	Gráficos de n_{p0} em função de r_0 a partir da equação (3.85). No destaque temos a região para r_0 pequeno ($\sim 10^{-3}$), onde comparamos as equações (3.85) e (3.92).	54
3.6	Gráfico da relação entre r_0 e $ f_3 ^2$. No destaque temos a região para r_0 pequeno ($\sim 10^{-3}$).	54
3.7	Gráfico da relação (3.96) entre $ f_3 ^2$ e n_{p0} , com $\nu = 0$ e diferentes valores de δ_p	56
3.8	Gráfico da relação (3.96) entre $ f_3 ^2$ e n_{p0} , com $\delta_p = -2.5\gamma_p$ e diferentes valores de ν	56
3.9	Solução numérica obtida para n_{p0} , $\arg\langle p \rangle_0$, r_0 e ϕ_0 em função de $ f_3 ^2$ utilizando o <i>Maple</i>	59

-
- 3.10 Gráficos das dispersões Δq , Δp e da incerteza $\Delta q \Delta p$ como função de n_{p0} , obtidos a partir da solução numérica de n_{p0} , $\arg\langle p \rangle_0$, r_0 e ϕ_0 . Para comparação, observamos também a curva de bi-estabilidade e suas diferentes regiões. 60
- 3.11 Gráficos das dispersões Δq , Δp e da incerteza $\Delta q \Delta p$ como função de $|f_3|^2$ 61
- 3.12 Parte real de λ em função do valor estacionário de n_p . Para comparação, observamos também a curva de bi-estabilidade e suas diferentes regiões. 65

Introdução

Um tópico de grande interesse em óptica quântica é a **bi-estabilidade óptica**¹, que já tem sido extensivamente investigada ao longo das últimas décadas, tanto teórica como experimentalmente. Uma motivação de seu estudo está no desenvolvimento de dispositivos opto-eletrônicos para aplicação na chamada computação ótica, onde utiliza-se pulsos de luz ao invés de voltagens e correntes para representar, armazenar e manipular os *bits* de dados.

A bi-estabilidade ótica em um sistema é caracterizada por uma curva de histerese entre as intensidades de luz incidente e transmitida (ou refletida), como a mostrada na figura 1.1. Nela, observamos que para baixas intensidades incidentes I_i , temos intensidades transmitidas I_T menores que I_i (segmento OA), devido à absorção e dispersão do meio. Mas ao ser atingido um valor I_B de intensidade incidente, acontece um salto do sistema para estados de altas intensidades transmitidas (segmento CE), devido à saturação da absorção e dispersão do meio. Uma vez aí, o sistema permanece nestes estados, mesmo ao diminuirmos a intensidade incidente a valores menores que I_B (segmento CD). Somente ao atingir um valor I_A de intensidade incidente, o sistema dá um salto inverso para baixos valores de intensidade transmitida. Na região ABCD da figura, vemos que existem dois valores possíveis de intensidade transmitida para uma mesma intensidade incidente, nesta situação é que dizemos estar acontecendo a bi-estabilidade ótica. Com o sistema nesta região bi-estável, uma transição para o ramo superior de intensidade transmitida CE pode ser forçada pela injeção de um pulso de luz tal que a intensidade incidente exceda o valor I_B na figura, ou o sistema pode ser

¹A bi-estabilidade ótica foi primeiramente discutida teoricamente por Szoke *et al.* em 1969, e observada experimentalmente por Gibbs *et al.* em 1976 [1].

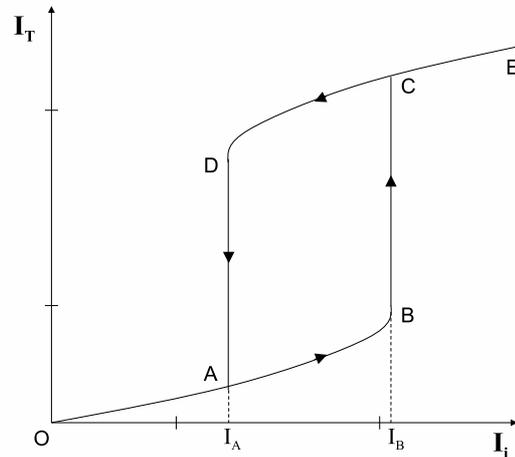


Figura 1.1: Diagrama da bi-estabilidade ótica

forçado a fazer uma transição para o ramo inferior OA pela diminuição da intensidade incidente abaixo de I_A por um pulso de luz injetado no sistema com um efeito contrário. Assim, o sistema pode vir a constituir um **transistor óptico**, com o pulso injetado no sistema controlando a intensidade transmitida.

Uma implementação experimental de um sistema que apresenta a bi-estabilidade ótica, consiste numa microcavidade semicondutora formada por dois **espelhos de Bragg** contendo um poço quântico no seu interior, como mostrado na figura 1.2. Os espelhos de Bragg são formados por camadas alternadas de dois materiais com diferentes índices de refração (veja a figura 1.2), com a espessura das camadas escolhida de forma que a luz refletida por todas as camadas interfiram construtivamente, resultando em um espelho de alta refletividade para uma determinada região do espectro. No poço quântico contido na cavidade, existem estados ligados entre elétrons da banda de condução e buracos (comportando-se como partículas positivas) da banda de valência do material semiconductor, formados por atração de Coulomb. Estes pares elétron-buraco denominados de **excitons**², que estão confinados

²O conceito de exciton foi introduzido por Wannier em 1937 [3].

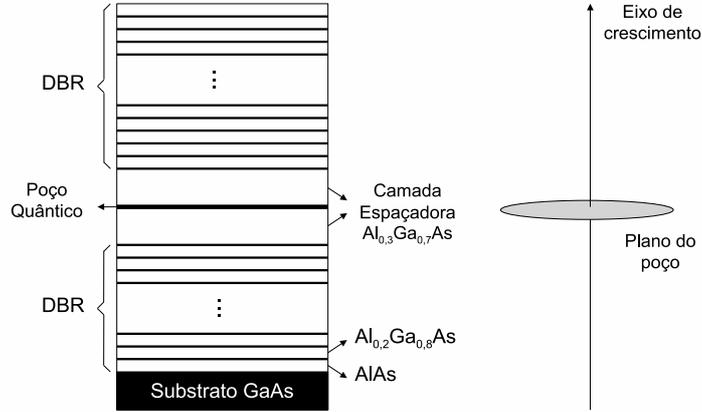


Figura 1.2: Microcavidade semicondutora formada por espelhos de Bragg (DBR - *Distributed Bragg Reflector*) e contendo um poço quântico no seu interior (figura adaptada a partir de [2]).

na direção do eixo de crescimento, mas livres para se movimentar no plano do poço (veja a figura 1.2), vão interagir com os fótons dentro da cavidade. O Hamiltoniano quântico que descreve esta interação entre os excitons e os fótons da cavidade pode ser diagonalizado em termos de uma nova quase-partícula denominada de **polariton**³. É a densidade destes polaritons na cavidade, e não a densidade de fótons, a responsável pela propriedade de bi-estabilidade exibida por este sistema.

O Hamiltoniano para os polaritons na microcavidade semicondutora pode ser escrito como [5]

$$H = E_{LP}(0)p^\dagger p + \frac{1}{2}V_0^{PP}p^\dagger p^\dagger pp - i\hbar\sqrt{2\lambda_l}[E^{in}e^{-i\omega_l t}v_0p^\dagger - H.c.], \quad (1.1)$$

onde $p^\dagger(p)$ corresponde ao operador de criação (aniquilação) para os polaritons. Com esta descrição, podemos demonstrar a propriedade de bi-estabilidade para o sistema, tomando a solução estacionária de um campo

³Os polaritons foram previstos teoricamente por Hopfield em 1958 [4].

médio de estado coerente da equação de Heisenberg para o operador p [5]. O propósito deste trabalho é estudar o Hamiltoniano (1.1), mas considerando um campo médio generalizado tomado sobre um estado gaussiano. Fazemos isso através da utilização da **aproximação Gaussiana** [6, 7], que consiste na substituição do operador densidade ρ , que descreve o estado do sistema, por uma projeção gaussiana ρ_0 , que corresponde a uma aproximação de estado gaussiano para ρ . A vantagem da utilização desta técnica é a de adicionar mais propriedades quânticas para descrição do sistema que estão associadas a um estado gaussiano, como o *squeezing*.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: no Capítulo 2, fazemos uma descrição da física da bi-estabilidade óptica, discutimos a implementação experimental mostrada na figura 1.2 de uma microcavidade semicondutora, e definimos a nossa ferramenta da aproximação Gaussiana; no Capítulo 3, fazemos uma descrição do modelo para os polaritons na microcavidade semicondutora, discutimos a aproximação de estado coerente na descrição da bi-estabilidade óptica neste sistema, e encerramos com a aplicação da aproximação Gaussiana para a microcavidade semicondutora. Finalmente, no Capítulo 4, apresentamos nossas conclusões.

Ferramentas

Neste capítulo apresentamos a física da bi-estabilidade óptica, descrevendo o mecanismo de formação do efeito e a definição de uma descrição quântica, tomando como exemplo uma cavidade Fabry-Perot contendo um meio não-linear. Descrevemos também uma implementação experimental de um sistema que apresenta a bi-estabilidade óptica, uma microcavidade semicondutora contendo um poço quântico. Completamos o capítulo, definindo a aproximação Gaussiana que será utilizada no Capítulo 3 para descrição da propriedade de bi-estabilidade óptica de uma microcavidade semicondutora.

2.1 A física da Bi-estabilidade

Um exemplo de sistema que apresenta a propriedade de bi-estabilidade óptica, mostrado na figura 2.1, consiste numa cavidade Fabry-Perot preenchida por um meio não-linear, que podemos considerar como um meio puramente absorptivo ou puramente dispersivo (ou uma combinação de ambos). A característica não-linear do meio de absorção ou dispersão associada com um efeito de amplificação (retroalimentação) proporcionado pela cavidade levam ao surgimento da bi-estabilidade neste sistema. No caso dispersivo, é possível construir uma descrição quântica através do Hamiltoniano

$$H = \hbar\omega_c a^\dagger a + \hbar\chi'' a^{\dagger 2} a^2 + i\hbar[a^\dagger A(t)e^{-i\omega t} - aA^*(t)e^{i\omega t}] \quad (2.1)$$

onde $a^\dagger(a)$ corresponde ao operador criação (aniquilação) de fótons de energia $\hbar\omega_c$ na cavidade. Nesta descrição, a propriedade de bi-estabilidade é demonstrada pela solução estacionária de um campo médio de estado coerente da

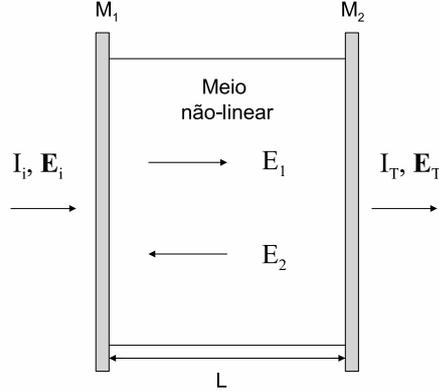


Figura 2.1: Cavidade Fabry-Perot formada por dois espelhos planos paralelos (M_1 e M_2) preenchida por um meio não-linear.

equação de Heisenberg para o operador a . Nesta seção¹, detalhamos tudo isso: os mecanismos de produção da bi-estabilidade óptica em uma cavidade Fabry-Perot, a construção da descrição quântica da bi-estabilidade dispersiva, e a demonstração da propriedade de bi-estabilidade através do campo médio de estado coerente.

2.1.1 Mecanismos básicos da Bi-estabilidade Óptica

Um exemplo de um sistema opticamente bi-estável consiste numa cavidade Fabry-Perot preenchida por um meio não-linear (figura 2.1). Consideramos os espelhos da cavidade idênticos, e com coeficientes de reflectância R e transmitância T definidos como

$$R = |\rho|^2, \quad T = |\tau|^2 \quad (2.2)$$

¹A discussão desta seção é baseada no Capítulo 8 do texto de *Jin-Sheng Peng e Gao-Xiang Li* [8].

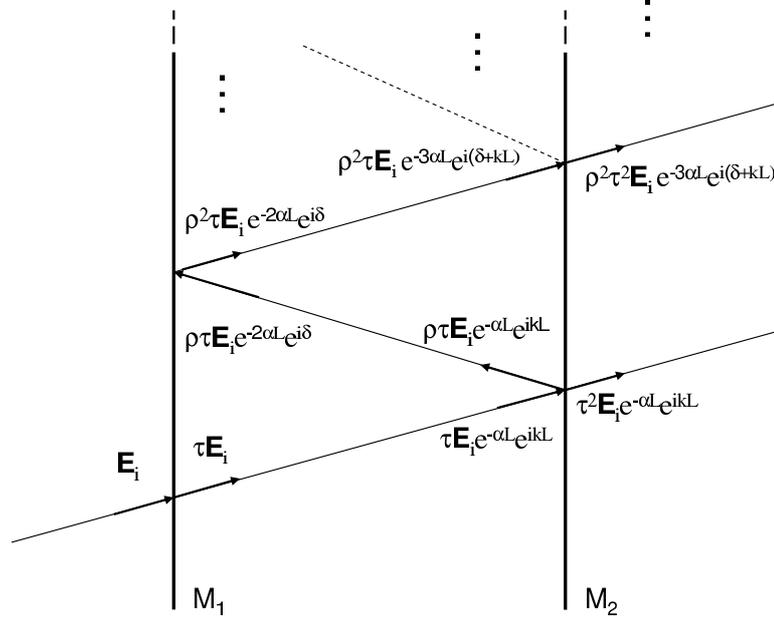


Figura 2.2: Valores de contorno do campo resultante de sucessivas reflexões, transmissões e absorções no meio.

onde ρ e τ são as amplitudes de reflectância e transmitância correspondentes a R e T , respectivamente. Consideramos o meio preenchendo a cavidade constituído por átomos idênticos e homogêneos, e com coeficiente de absorção α . Por superposição, determinamos a amplitude dos campos internos à cavidade E_1 (onda propagando-se para a direita) e E_2 (onda propagando-se para a esquerda) (veja a figura 2.1) nos contornos do meio (figura 2.2). Temos assim

$$E_1 = \tau E_i + \rho^2 \tau E_i e^{-2\alpha L + i\delta} + \rho^4 \tau E_i e^{-4\alpha L + i2\delta} + \dots \quad (2.3)$$

$$E_2 = \rho \tau E_i e^{-2\alpha L + i\delta} + \rho^3 \tau E_i e^{-4\alpha L + i2\delta} + \dots \quad (2.4)$$

na interface do espelho M_1 , e

$$E_1 = \tau E_i e^{-\alpha L + i(kL)} + \rho^2 \tau E_i e^{-3\alpha L + i(\delta + kL)} + \dots \quad (2.5)$$

$$E_2 = \rho \tau E_i e^{-\alpha L + i(kL)} + \rho^3 \tau E_i e^{-3\alpha L + i(\delta + kL)} + \dots \quad (2.6)$$

na interface do espelho M_2 , onde E_i é a amplitude da onda incidente e denominamos δ a fase adquirida devido ao caminho ótico numa reflexão sucessiva nos dois espelhos, ou seja,

$$\delta = 2kL \quad (2.7)$$

onde L é o comprimento da cavidade (veja a figura 2.1) e $k = n\omega_L/c$ é o número de onda do campo dentro da cavidade, com ω_L sendo a frequência da onda incidente, n o índice de refração do meio e c a velocidade da luz. Também podemos determinar a amplitude da onda transmitida E_T

$$E_T = \tau^2 E_i e^{-\alpha L + i(kL)} + \rho^2 \tau^2 E_i e^{-3\alpha L + i(\delta + kL)} + \rho^4 \tau^2 E_i e^{-5\alpha L + i(2\delta)} + \dots \quad (2.8)$$

De acordo com estas condições de contorno, E_1 , E_2 , E_T e E_i satisfazem

$$E_1 = \tau E_i + \rho E_2, \quad (2.9)$$

$$E_T = \tau E_1, \quad (2.10)$$

$$E_2 = \rho E_1 e^{i(\delta - 2\alpha L)}. \quad (2.11)$$

A partir destas expressões podemos encontrar uma relação entre as intensidades incidente $I_i = |E_i|^2$ e transmitida $I_T = |E_T|^2$. Substituindo (2.10) e (2.11) em (2.9) obtemos

$$E_T = \frac{\tau^2 E_i}{1 - \rho^2 e^{i\delta - 2\alpha L}} \quad (2.12)$$

e então,

$$I_T = \frac{T^2 I_i}{1 + |\rho|^4 e^{-4\alpha L} - e^{-2\alpha L} [\rho^2 e^{i\delta} + \rho^{*2} e^{-i\delta}]}. \quad (2.13)$$

Dessa forma, como α e δ são funções não-lineares da intensidade do campo dentro da cavidade, e conseqüentemente do campo incidente, I_T na relação acima deve depender não-linearmente de I_i .

Se o meio preenchendo a cavidade é puramente absorvivo, ou seja, se não existe dispersão, temos que o índice de refração n , e conseqüentemente a diferença de fase δ através da relação $\delta = 2n\omega_L L/c$, é independente da intensidade do campo dentro da cavidade. Nesta situação, a não-linearidade na relação entre I_T e I_i , (2.13), será devida apenas ao coeficiente de absorção α . Considerando $\alpha L \ll 1$, que significa fazer a variação espacial do campo

dentro da cavidade desprezível, e ajustando L de modo que tenhamos $\rho^2 e^{i\delta} = |\rho|^2 = R$, a expressão (2.13) pode ser escrita como

$$I_T = \frac{T^2 I_i}{[1 - R(1 - 2\alpha L)]^2}. \quad (2.14)$$

Assumimos que a absorção do meio seja saturável, de forma que o coeficiente α obedeça a relação [8]

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + (I_1 + I_2)/I_0} \quad (2.15)$$

onde α_0 denomina o coeficiente de absorção saturado e I_0 a intensidade de saturação correspondente a α_0 . E tomando um limite de um tempo longo em que as intensidades dos campos internos à cavidade são aproximadamente iguais, ou seja, $I_1 \approx I_2$, podemos escrever a relação (2.14) como

$$I_T = \frac{T^2 I_i}{\left[1 - R \left(1 - \frac{2\alpha_0 L}{1 + 2I_T/TI_0}\right)\right]^2} \quad (2.16)$$

onde utilizamos $I_T = TI_1$, obtida através de (2.10). Na expressão acima podemos obter I_i como função de I_T ,

$$I_i = \frac{I_T}{T^2} \left[1 - R \left(1 - \frac{\alpha_0 L}{1 + \frac{2}{TI_0} I_T}\right)\right]^2. \quad (2.17)$$

Para eliminar a dependência de I_0 , utilizando a relação $R + T = 1$, reescrevemos (2.17) como

$$\tilde{I}_i = \tilde{I}_T \left[1 + \frac{C}{1 + \frac{2}{T} \tilde{I}_T}\right] \quad (2.18)$$

onde $\tilde{I}_i = I_i/I_0$, $\tilde{I}_T = I_T/I_0$, e $C = 2\alpha_0 LR/T$. Uma análise gráfica desta relação aparece na figura 2.3, onde observamos o aparecimento de uma curva em formato de S para um determinado valor de C . Nos ramos superior e inferior desta curva em S, temos $\frac{dI_T}{dI_i} > 0$ que significa situações de estabilidade. Dessa forma, para certas regiões de valores de I_i temos dois valores de I_T que correspondem a situações estáveis, ou seja, observamos a bi-estabilidade óptica. No ramo intermediário da curva em S, temos $\frac{dI_T}{dI_i} < 0$ que significa uma situação de instabilidade, e se o sistema encontrar-se inicialmente neste estado, rapidamente ele tenderá para um dos ramos estáveis devido a

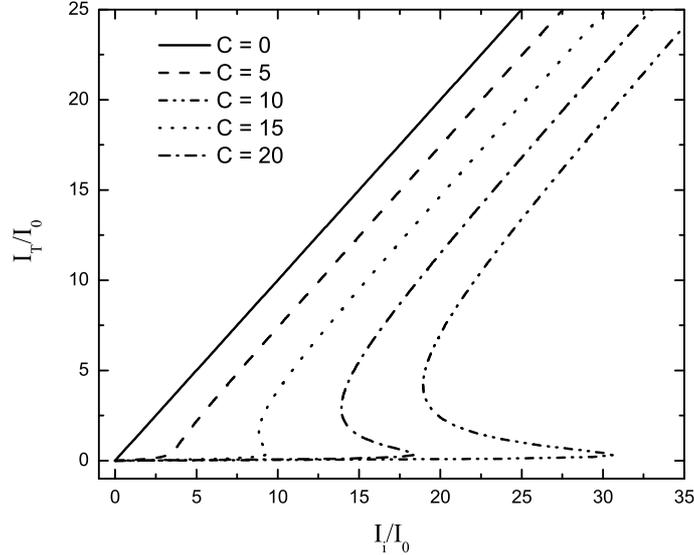


Figura 2.3: Relação entre a intensidade transmitida I_T e a incidente I_i para a bi-estabilidade absorpsiva com diferentes valores de $C = 2\alpha_0 LR/T$.

qualquer pequena perturbação do processo de excitação. Esta bi-estabilidade observada originou-se da não-linearidade da absorção do meio, e por isso nós a denominamos de bi-estabilidade absorpsiva.

Fisicamente, a bi-estabilidade absorpsiva surge devido à absorção não-linear do meio e de um efeito de retroalimentação positiva dentro da cavidade. Quando o campo incidente é de baixa intensidade, a absorção insaturada do meio leva a intensidade transmitida a ter uma dependência linear com a intensidade incidente. À medida que o campo incidente é aumentado, a absorção do meio tende a saturação, e esta saturação leva ao aumento do campo dentro da cavidade. Mas quanto mais intenso o campo interno à cavidade, menor é o efeito de absorção. E isto corresponde ao efeito de retroalimentação positiva. Esta situação de amplificação do campo interno devido a esta realimentação atinge um limite tal que, para um determinado valor do campo incidente, a intensidade transmitida faz uma transição do ramo inferior para o superior de valores (figura 2.3).

Se o meio na cavidade não possui absorção, ou seja, se $\alpha = 0$, a não-

linearidade na relação entre I_T e I_i em (2.13), lembrando que $\delta = 2n\omega_L L/c$, será devida apenas ao índice de refração n que varia não-linearmente com o campo dentro da cavidade. Neste caso, considerando $\rho^2 = Re^{i\phi}$, a expressão (2.13) resulta em

$$I_T = \frac{T^2 I_i}{1 + R^2 - [Re^{i\phi} e^{i\delta} + Re^{-i\phi} e^{-i\delta}]}. \quad (2.19)$$

Considerando o meio preenchendo a cavidade como um meio dispersivo do tipo Kerr [8], o índice de refração é dado por

$$n(I) = n_0 + n_2 I \quad (2.20)$$

onde n_0 e n_2 são parâmetros independentes de I , o campo dentro do meio. Com isto, e usando novamente $R + T = 1$, podemos reescrever a expressão (2.19) como

$$I_T = \frac{I_i}{1 + \frac{4R}{T^2} \sin^2\left(\frac{\phi}{2} + \frac{(n_0 T + 2n_2 I_T)\omega_L L}{Tc}\right)}, \quad (2.21)$$

onde fizemos $I \approx I_1 + I_2 \approx 2I_1$. Podemos escrever, a partir de (2.21), a transmitância I_T/I_i como

$$\frac{I_T}{I_i} = \frac{1}{1 + \frac{4R}{T^2} \sin^2(\psi)}, \quad (2.22)$$

onde

$$\psi = \frac{\phi}{2} + \frac{(n_0 T + 2n_2 I_T)\omega_L L}{Tc}. \quad (2.23)$$

Um gráfico desta transmitância como função de ψ pode ser visualizado na figura 2.4, onde observamos que ela atinge um valor máximo em $\psi = m\pi$, ($m = 0, 1, 2, \dots$). Com a escolha apropriada dos parâmetros R , T , n_2 e L , podemos fazer a largura dos picos bastante estreita como mostrado na figura. Neste caso, podemos expandir $\sin(\psi)$ em torno de $\psi = m\pi$ (onde a função tem um valor mais considerável) e tomar apenas termos até primeira ordem,

$$\sin(\psi) \approx \psi - m\pi = \phi_0 + \frac{2n_2\omega_L L}{Tc} I_T, \quad (2.24)$$

onde $\phi_0 = \frac{\phi}{2} + \frac{n_0\omega_L L}{c} - m\pi$. Inserindo (2.24) em (2.21) obtemos a relação

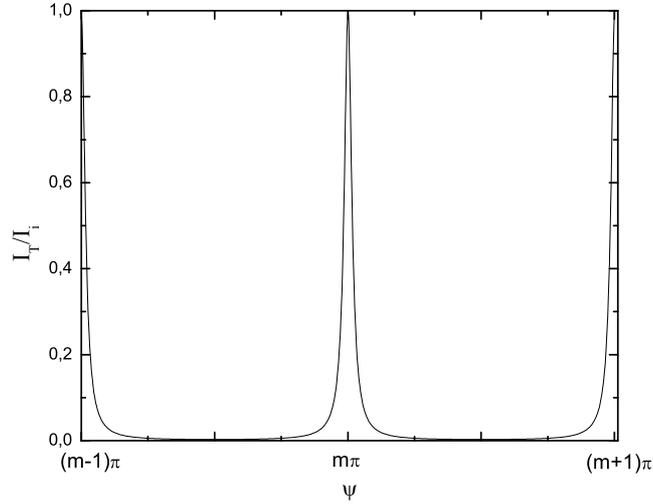


Figura 2.4: Curva para a relação I_T/I_i em função de ψ .

entre I_i e I_T ,

$$I_i = I_T \left[1 + 4R \frac{[\phi_0 + (2n_2\omega_L L/c)(I_T/T)]^2}{T^2} \right], \quad (2.25)$$

que podemos reescrever como

$$I_i = I_T \left\{ 1 + \frac{4R}{T^2} [A + BI_T]^2 \right\}, \quad (2.26)$$

onde $A = \frac{\phi}{2} - m\pi + \frac{n_0\omega_L}{c}L$ e $B = \frac{n_2\omega_L}{c} \frac{2L}{T}$. Uma análise gráfica desta relação, para diferentes valores de $\sqrt{\frac{4R}{T}}A$, pode ser vista na figura 2.5, onde observamos o surgimento da curva em S característica da bi-estabilidade. Desde que o meio foi considerado como apenas dispersivo, esta bi-estabilidade óptica é chamada de dispersiva.

De forma semelhante a bi-estabilidade absorpsiva, a origem física da geração da bi-estabilidade dispersiva é devida à característica não-linear do meio, através do índice de refração, e à um efeito de retroalimentação dentro da cavidade. Desde que o índice de refração depende não-linearmente da intensidade do campo interno à cavidade I , o comprimento de onda ressonante da

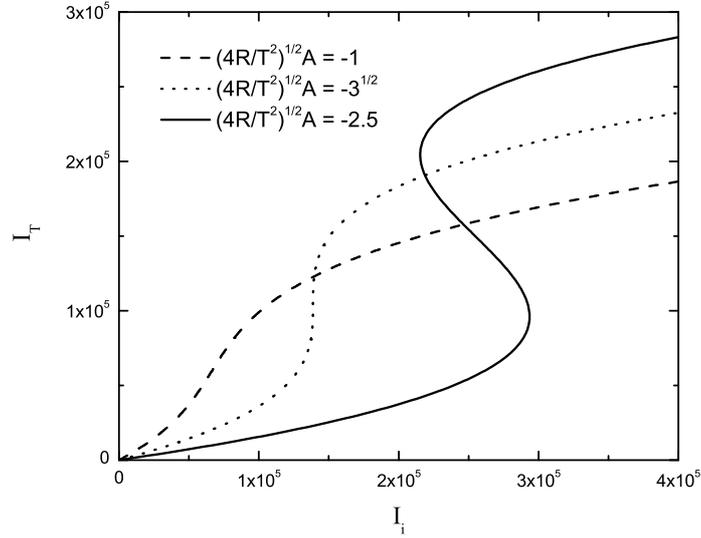


Figura 2.5: Curva característica da bi-estabilidade dispersiva para diferentes valores de $\sqrt{\frac{4R}{T}} A$.

cavidade está relacionado à I . A diferença entre o comprimento de onda ressonante e o comprimento de onda λ_L do campo incidente altera o coeficiente da transmissão I_T/I_i , que por sua vez leva a intensidade I a ser alterada. Este é o mecanismo de retroalimentação para o meio dispersivo, que numa situação limite induzirá a transição entre os estados estáveis da curva em S entre I_T e I_i associada a bi-estabilidade dispersiva (figura 2.5). No tópico que segue discutimos uma descrição quântica para esta bi-estabilidade dispersiva.

2.1.2 Hamiltoniano descrevendo a Bi-estabilidade dispersiva

Considerando uma cavidade com frequência de ressonância ω_c contendo um meio dispersivo, temos a polarização do meio interagindo com o campo de modo único da cavidade expressa por [8]

$$\mathbf{P} = \chi^{(1)} \cdot \mathbf{E} + \chi^{(2)} \cdot \mathbf{E}\mathbf{E} + \chi^{(3)} \cdot \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots, \quad (2.27)$$

onde \mathbf{P} é a polarização do meio, \mathbf{E} é o campo elétrico, e $\chi^{(n)}$ é o tensor de suscetibilidade de ordem $(n + 1)$. Nesta situação, as equações de Maxwell

são dadas por

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (2.28)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}), \quad (2.29)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \mathbf{0}, \quad (2.30)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.31)$$

De acordo com estas equações, a densidade de energia do campo interagindo com o meio não-linear obedece

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} \right) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}. \quad (2.32)$$

onde $\mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$ corresponde ao vetor de Poynting. A interpretação da equação acima é que a taxa de fluxo da energia eletromagnética por unidade de volume, no lado esquerdo, é igual à taxa de decréscimo da densidade de energia eletromagnética armazenada na cavidade, no lado direito. Inserindo (2.27) em (2.32) obtemos

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} U(\mathbf{r}, t), \quad (2.33)$$

onde

$$U(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} \right) + \frac{1}{2} \left(\mathbf{E} \cdot \chi^{(1)} \cdot \mathbf{E} + \frac{2}{3} \mathbf{E} \cdot \chi^{(2)} \cdot \mathbf{E}\mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \chi^{(3)} \cdot \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots \right) \quad (2.34)$$

representa a densidade de energia eletromagnética instantânea. Dessa forma, o Hamiltoniano do meio não-linear interagindo com o campo, tomado como a energia total, pode ser escrito como

$$H = \int d^3\mathbf{r} \left\{ \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 + \mathbf{E} \cdot \left[\frac{1}{2} (\epsilon_0 + \chi^{(1)}) \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{3} \chi^{(2)} \cdot \mathbf{E}\mathbf{E} + \frac{1}{4} \cdot \chi^{(3)} \cdot \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots \right] \right\}. \quad (2.35)$$

Se o efeito de polarização de terceira ordem é dominante, tal que podemos ignorar os termos contendo $\chi^{(2)}$ e $\chi^{(n)}$, escrevemos o Hamiltoniano como

$$H \approx \int d^3\mathbf{r} \left\{ \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 + \mathbf{E} \cdot \left[\frac{1}{2} (\epsilon_0 + \chi^{(1)}) \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{4} \cdot \chi^{(3)} \cdot \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} \right] \right\}. \quad (2.36)$$

Procedemos agora à quantização, partindo da expressão (2.36) para o Hamiltoniano, e tomando o operador correspondente ao campo elétrico como sendo [8]

$$E = i \left(\frac{\hbar\omega_c}{2\epsilon_0} \right)^{1/2} [a\mathbf{u}(\mathbf{r})e^{-i\omega_c t} - a^\dagger\mathbf{u}^*(\mathbf{r})e^{i\omega_c t}], \quad (2.37)$$

onde a função \mathbf{u} é definida de modo a satisfazer

$$\frac{1}{2} \int \mathbf{u}^*(\mathbf{r}) \cdot (1 + \chi^{(1)}/\epsilon_0) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = 1. \quad (2.38)$$

Inserindo (2.37) em (2.36), usando (2.38), e considerando a aproximação de onda-girante [8], ou seja, negligenciando termos tais como $a^4 e^{-i4\omega_c t}$ e $a^{\dagger 3} a e^{2i\omega_c t}$, após as devidas manipulações obtemos

$$H = \hbar\omega_c a^\dagger a + \hbar\chi'' a^{\dagger 2} a^2, \quad (2.39)$$

onde

$$\chi'' = \frac{3\hbar\omega_c^2}{8\epsilon_0^2} \int d^3\mathbf{r} \chi^{(3)} |\mathbf{u}(\mathbf{r})|^4. \quad (2.40)$$

Esta equação (2.39) corresponde a expressão quantizada do Hamiltoniano descrevendo o campo dentro da cavidade interagindo com um meio não-linear.

Para o sistema mostrado na figura 2.1, se o campo incidente corresponde a um forte campo de laser, podemos caracterizá-lo por um campo eletromagnético clássico, de modo que a interação do campo da cavidade com este campo incidente pode ser representada pelo Hamiltoniano [8]

$$V = i\hbar[a^\dagger A(t) \exp(-i\omega_l t) - aA^*(t) \exp(i\omega_l t)], \quad (2.41)$$

onde $A(t)$ e ω_l correspondem a amplitude e frequência do laser, respectivamente. Dessa forma, temos o Hamiltoniano total do sistema dado por

$$H = \hbar\omega_c a^\dagger a + \hbar\chi'' a^{\dagger 2} a^2 + i\hbar[a^\dagger A(t) \exp(-i\omega_l t) - aA^*(t) \exp(i\omega_l t)]. \quad (2.42)$$

Podemos agora, partindo deste Hamiltoniano, demonstrar a propriedade de bi-estabilidade óptica para o sistema, utilizando uma aproximação de estado coerente para a equação de Heisenberg, como será realizado no tópico

seguinte.

2.1.3 Propriedade de Bi-estabilidade Óptica do sistema

Se o espelho M_2 na figura 2.1 possui uma alta transmitância, podemos tomar o valor esperado do operador a como correspondendo a amplitude do campo transmitido. Para facilitar a análise posterior, ao invés de procurarmos diretamente $\langle a \rangle$, fazemos primeiramente a seguinte transformação

$$\tilde{a} = ae^{i\omega_l t}, \quad (2.43)$$

de modo que $\langle \tilde{a} \rangle$ difira do valor esperado $\langle a \rangle$ apenas por uma fase. Reescrevendo o Hamiltoniano (2.42) com esta transformação, temos

$$H = \hbar\omega_c \tilde{a}^\dagger \tilde{a} + \hbar\chi'' \tilde{a}^{\dagger 2} \tilde{a}^2 + i\hbar[\tilde{a}^\dagger A(t) - \tilde{a} A^*(t)]. \quad (2.44)$$

Calculando a Equação de Heisenberg para o operador \tilde{a} ,

$$i\hbar \frac{d\tilde{a}}{dt} = [\tilde{a}, H] + i\hbar \frac{\partial \tilde{a}}{\partial t}, \quad (2.45)$$

a partir de (2.44) obtemos

$$i\hbar \frac{d\tilde{a}}{dt} = \hbar\omega_c \tilde{a} + 2\hbar\chi'' \tilde{a}^\dagger \tilde{a}^2 + i\hbar A(t) - \hbar\omega_l \tilde{a}. \quad (2.46)$$

Podemos reescrever esta equação como

$$\frac{d\tilde{a}}{dt} = -i\hbar\Delta\omega\tilde{a} - 2i\chi'' \tilde{a}^\dagger \tilde{a}^2 + A(t) - \gamma\tilde{a}. \quad (2.47)$$

onde $\Delta\omega \equiv \omega_c - \omega_l$, e $-\gamma\tilde{a}$ corresponde a um termo fenomenológico adicionado para representar as perdas internas na cavidade. Considerando o valor médio tomado em um estado coerente² temos que

$$\langle \tilde{a} \rangle = \alpha \quad (2.48)$$

²Os estados coerentes correspondem aos autovetores $|\psi_\alpha\rangle$ do operador a , tal que $a|\psi_\alpha\rangle = \alpha|\psi_\alpha\rangle$ e $\langle \tilde{a} \rangle = \langle \psi_\alpha | \tilde{a} | \psi_\alpha \rangle = \alpha$. Estes estados também são caracterizados por ter uma incerteza mínima nas quadraturas do campo.

e

$$\langle \tilde{a}^\dagger a^2 \rangle = \langle \tilde{a}^\dagger \rangle \langle \tilde{a}^2 \rangle = \alpha^* \alpha^2. \quad (2.49)$$

Então, tomando o valor médio de (2.47) obtemos uma equação para $\langle \tilde{a} \rangle = \alpha$,

$$\frac{d\alpha}{dt} = -i\hbar\Delta\omega\alpha - 2i\chi''\alpha^*\alpha^2 + A(t) - \gamma\alpha. \quad (2.50)$$

Conjugando (2.50) encontramos uma equação para $\langle \tilde{a}^\dagger \rangle = \alpha^*$,

$$\frac{d\alpha^*}{dt} = i\hbar\Delta\omega\alpha^* + 2i\chi''\alpha\alpha^{*2} + A^*(t) - \gamma\alpha^*. \quad (2.51)$$

Desde que α e α^* correspondem a variáveis independentes, (2.50) e (2.51) podem ser reescritas como

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) - (\gamma + i\Delta\omega)\alpha - 2i\chi''\alpha^*\alpha^2 \\ A^*(t) - (\gamma - i\Delta\omega)\alpha^* + 2i\chi''\alpha\alpha^{*2} \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

Estamos interessados somente na situação estacionária da amplitude do campo transmitido, isso significa tomar apenas a solução estacionária da equação acima. A solução estacionária de (2.52) fornece

$$\begin{aligned} A &= (\gamma + i\Delta\omega)\alpha + 2i\chi''\alpha^*\alpha^2 \\ A^* &= (\gamma - i\Delta\omega)\alpha^* - 2i\chi''\alpha\alpha^{*2}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Considerando a intensidade do campo transmitido como equivalente ao valor médio do número de fótons na cavidade, temos

$$|E_T|^2 = \alpha^*\alpha. \quad (2.54)$$

Então, a partir da solução estacionária (2.53) encontramos uma relação entre a intensidade do campo transmitido e a intensidade do campo incidente $I_i = |A|^2$ (correspondente ao laser)

$$I_i = |E_T|^2[\gamma^2 + (\Delta\omega + 2|E_T|^2\chi'')^2]. \quad (2.55)$$

Uma análise gráfica da relação acima é mostrada na figura 2.6 usando diferentes valores de $\Delta\omega$. Observamos que, para determinados valores deste parâmetro encontramos uma curva em formato de S característica da bi-

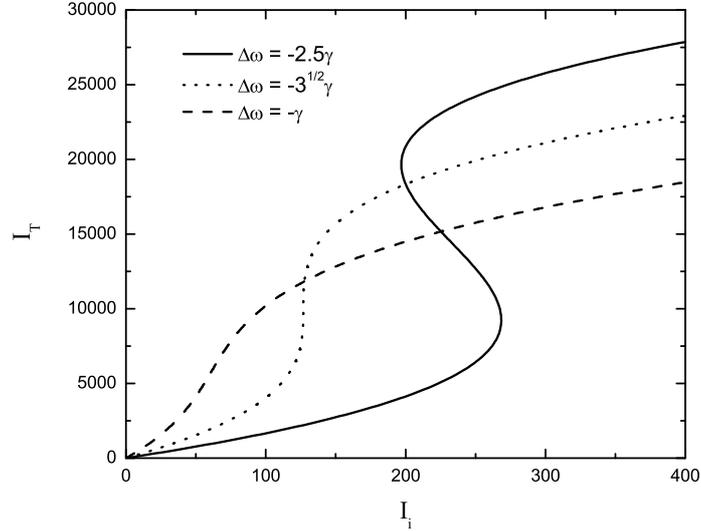


Figura 2.6: I_T versus I_i para diferentes valores de $\Delta\omega$.

estabilidade. Se invertermos os eixos do gráfico, fazendo I_i em função de $I_T = |E_T|^2$, notamos que na situação de bi-estabilidade, a função $I_i = I_i(I_T)$ tem dois pontos extremos, que podem ser determinados a partir da equação

$$\frac{dI_i}{dI_T} = 0 \quad \therefore \quad 12\chi''^2 I_T^2 + 8\Delta\omega\chi'' I_T + \gamma^2 + (\Delta\omega)^2 = 0. \quad (2.56)$$

O discriminante desta equação é dado por

$$4\chi''^2((\Delta\omega)^2 - 3\gamma^2). \quad (2.57)$$

A existência de dois pontos extremos distintos, que significa termos a curva no formato de s, é permitida apenas para valores positivos do discriminante (2.57), ou seja, para $\Delta\omega^2 > 3\gamma^2$. Além disso, as soluções para I_i , devem ser números reais positivos. Combinando estas condições, a curva da bi-estabilidade será obtida quando

$$\Delta\omega < -\sqrt{3}\gamma, \quad (2.58)$$

ou seja,

$$\omega_l > \omega_c + \sqrt{3}\gamma. \quad (2.59)$$

Esta condição (2.58) pode ser verificada na figura 2.6. Na situação de bi-estabilidade, os valores de I_i correspondentes aos pontos extremos da bi-estabilidade são dados por

$$I_{i(\pm)} = [-2\Delta\omega \pm \sqrt{(\Delta\omega)^2 - 3\gamma^2}]/6\chi''. \quad (2.60)$$

Resta ainda analisarmos a estabilidade da solução estacionária que encontramos, e isso será feito utilizando o método da linearização. A idéia básica da análise de linearização é introduzir uma pequena variação em torno da solução estacionária

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \delta\alpha(t), \quad (2.61)$$

onde α é a solução estacionária e $\delta\alpha$ a pequena variação. Inserindo (2.61) e seu conjugado complexo em (2.52) e considerando apenas termos até primeira ordem em $\delta\alpha$, obtemos, então, o seguinte conjunto de equações linearizadas para $\delta\alpha(t)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \delta\alpha(t) \\ \delta\alpha^*(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \kappa + 4\chi I_T & 2\chi\alpha_0^2 \\ 2\chi^*\alpha_0^{*2} & \kappa^* + 4\chi^* I_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\alpha(t) \\ \delta\alpha^*(t) \end{pmatrix} \equiv A \begin{pmatrix} \delta\alpha(t) \\ \delta\alpha^*(t) \end{pmatrix}, \quad (2.62)$$

onde $\chi = i\chi''$, $\kappa = \gamma + i\Delta\omega$. Supondo a variação ter a forma $\delta\alpha(t) \sim e^{\lambda t}$, a equação (2.62) resulta em

$$\lambda \begin{pmatrix} \delta\alpha(t) \\ \delta\alpha^*(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta\alpha(t) \\ \delta\alpha^*(t) \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Na expressão acima observamos que os expoentes λ são determinados pelos autovalores da matriz A . A equação característica correspondente é

$$\begin{vmatrix} \kappa + 4\chi I_T - \lambda & 2\chi\alpha_0^2 \\ 2\chi^*\alpha_0^{*2} & \kappa^* + 4\chi^* I_T - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.64)$$

que fornece os autovalores

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - (\gamma^2 + \Delta\omega^2 + 8\Delta\omega\chi'' I_T + 12\chi''^2 I_T^2)}. \quad (2.65)$$

Utilizando (2.56) podemos reescrever estes autovalores como

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \frac{dI_i}{dI_T}}. \quad (2.66)$$

Pela forma escolhida para a variação em torno da solução estacionária, $\delta\alpha(t) \sim e^{\lambda t} = e^{Re(\lambda)t + iIm(\lambda)t}$, concluímos que a solução estacionária corresponderá a uma solução estável somente quando a parte real do expoente λ for negativa. Nessa situação, teremos para um tempo longo $\alpha(t) \rightarrow \alpha_0$. Analisando, então, a equação (2.66), observamos que, para $\frac{dI_i}{dI_T} > 0$ e $\frac{dI_i}{dI_T} < \gamma^2$, temos

$$\gamma > \sqrt{\gamma^2 - \frac{dI_i}{dI_T}} \quad \therefore \quad Re(\lambda_{\pm}) < 0. \quad (2.67)$$

E para $\frac{dI_i}{dI_T} > 0$ e $\frac{dI_i}{dI_T} > \gamma^2$, temos o radical $\sqrt{\gamma^2 - \frac{dI_i}{dI_T}}$ imaginário puro, e por isso continuamos a ter $Re(\lambda_{\pm}) < 0$. Isso significa que os ramos superior e inferior da curva da em s, em que $\frac{dI_i}{dI_T} > 0$, são efetivamente estáveis, caracterizando de fato a condição bi-estabilidade. Para o ramo intermediário, em que $\frac{dI_i}{dI_T} < 0$, a equação (2.66) implica em

$$\gamma < \sqrt{\gamma^2 - \frac{dI_i}{dI_T}} \quad \therefore \quad Re(\lambda_+) > 0, \quad (2.68)$$

demonstrando que este ramo corresponde a uma solução estacionária instável.

A análise que acabamos de fazer partiu do fato de tomarmos os valores esperados em um estado coerente, tal que $\langle \tilde{a} \rangle = \alpha$ e $\langle \tilde{a}^\dagger a^2 \rangle = \langle \tilde{a}^\dagger \rangle \langle \tilde{a}^2 \rangle = \alpha^* \alpha^2$. Um dos propósitos deste trabalho é generalizar este campo médio utilizando a aproximação gaussiana, que será discutida na seção 2.3. Na próxima seção, descrevemos uma implementação experimental de um sistema que apresenta a bi-estabilidade óptica.

2.2 Uma implementação experimental

Um sistema em que se verificam experimentalmente efeitos de Bi-estabilidade óptica, consiste numa microcavidade semicondutora planar formada por dois espelhos de Bragg (DBR - *Distributed Bragg Reflector*) e contendo um poço quântico entre estes espelhos. A figura 1.2, no Capítulo 1, mostra uma

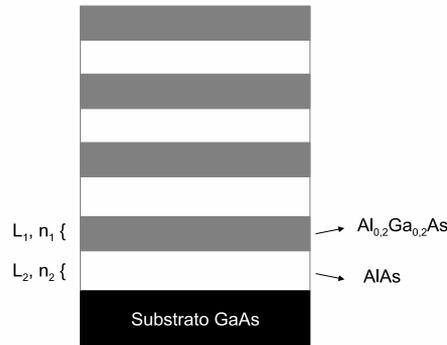


Figura 2.7: Uma estrutura típica para um espelho DBR formada por camadas alternadas de $Al_xGa_{1-x}As$ e $AlAs$ com comprimentos e índices de refração L_1, n_1 e L_2, n_2 , respectivamente (figura adaptada a partir de [2]).

representação esquemática deste sistema. Os espelhos DBR que compõem a cavidade são formados por camadas alternadas de dois materiais semicondutores distintos, com índices de refração diferentes, sobrepostos uns sobre os outros formando pares de camadas, como ilustrado na figura 2.7. As espessuras das camadas do DBR são escolhidas tal que a luz refletida por todas as interfaces interfiram construtivamente, resultando num espelho de altíssima reflectividade numa faixa espectral chamada de *stop band*. Esta característica do DBR é diretamente proporcional ao número de pares e à diferença no índice de refração das camadas que compõem o par, como ilustra a figura 2.8. A cavidade formada pelos dois espelhos DBR, constitui uma cavidade Fabry-Perot. Uma característica importante deste tipo de cavidade está no fato dela selecionar de forma eficiente um determinado modo de oscilação (frequência), chamado de *modo da cavidade*. Podemos observar como esta seleção é feita, analisando a equação (2.22) para transmitância de uma cavidade Fabry-Perot e o gráfico para esta transmitância (figura 2.4). Considerando que a variação do parâmetro ψ no gráfico seja devida unicamente à variação da frequência do campo incidente ω_l , para uma determinada frequência, correspondente ao modo da cavidade, temos um pico bastante pronunciado e estreito, como o

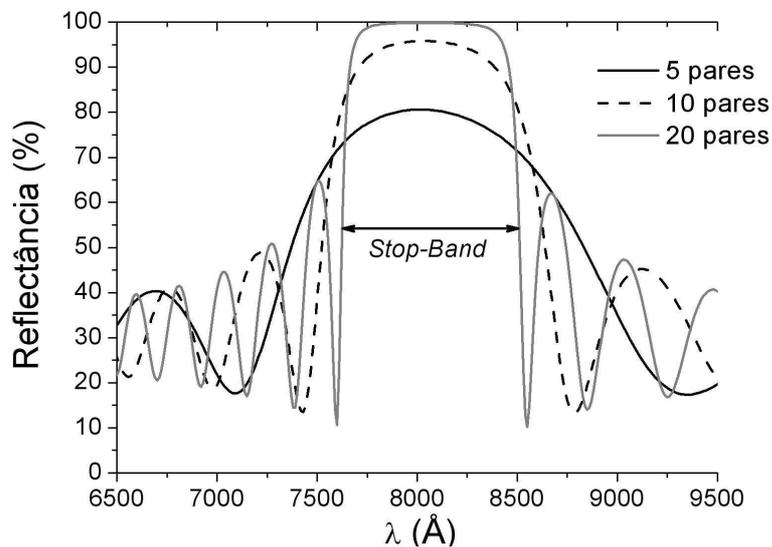


Figura 2.8: Curvas de reflectância para o caso de incidência normal de um espelho DBR planar, com *stop band* centrada em $\lambda_0 = 8000 \text{ \AA}$ (figura retirada de [2]).

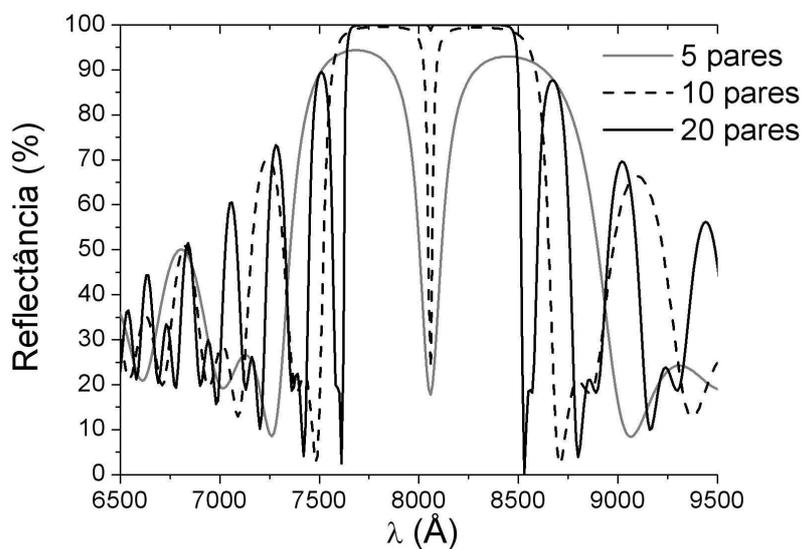


Figura 2.9: Curvas de reflectância para o caso de incidência normal de uma cavidade Fabry-Perot formada por espelhos DBR com ressonância em $\lambda_0 = 8000 \text{ \AA}$ (figura retirada de [2]).

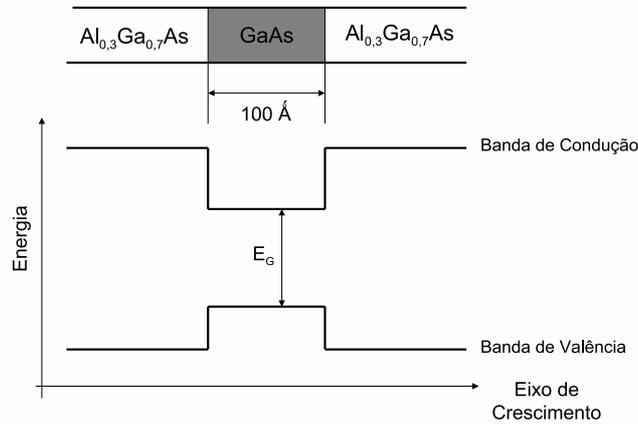


Figura 2.10: Distribuição das bandas de energia na formação de um poço quântico (figura adaptada a partir de [2]).

mostrado na figura. O resultado da associação desta característica da cavidade com as propriedades dos espelhos DBR é ilustrada na figura 2.9, onde observamos o surgimento de uma janela de ressonância dentro da região do *stop-band*. O poço quântico contido na cavidade, consiste de uma camada fina (geralmente de alguns Angstroms) de um material semiconductor localizado entre duas camadas de outro material semiconductor (ver figura 1.2). O material do poço deve ser escolhido de tal forma que a energia de sua banda proibida E_g (energia do *gap*) seja menor que a do material em ele se encontra imerso, formando uma barreira de potencial. A figura 2.10 ilustra a formação de um poço quântico de 100 Å de espessura constituído de *GaAs* entre camadas *Al_{0,3}Ga_{0,7}As*. Medidas experimentais em um sistema deste tipo foram realizadas pelo laboratório de fotônica do Departamento de Física da UFMG [10]. Resultados para a intensidade emitida pela cavidade em função da intensidade de bombeio de um laser são mostrados na figura 2.11, para diferentes valores da frequência do bombeio. Observamos nestes resultados o aparecimento da curva de histerese característica da bi-estabilidade óptica, para determinados valores da frequência do laser de bombeio.

Como já foi mencionado no Capítulo 1, o comportamento de bi-estabilidade

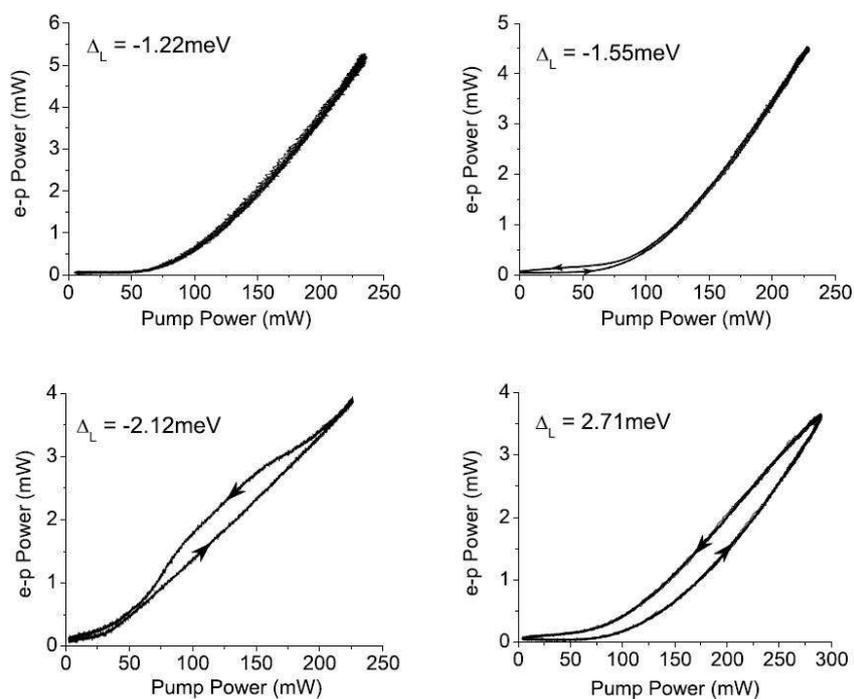


Figura 2.11: Medidas da intensidade emitida por uma microcavidade semicondutora (\sim e-p power) em função da intensidade de bombeio de um laser (\sim pump power), para diferentes valores de frequência do laser ($\sim \Delta_L$) (figura retirada de [10]).

óptica apresentado por este sistema é provocado não pela densidade de fótons confinados na cavidade, mas pela densidade de *polaritons*. No próximo capítulo, descreveremos este mecanismo de produção da bi-estabilidade óptica para cavidades semicondutoras, onde utilizaremos a aproximação Gaussiana, que é discutida na seção que segue.

2.3 Aproximação Gaussiana

O Hamiltoniano total do sistema do meio não-linear interagindo com o campo da cavidade e com um campo incidente do laser é dado pela expressão (2.42),

$$H = \hbar\omega_c a^\dagger a + \hbar\chi'' a^{\dagger 2} a^2 + i\hbar[a^\dagger A(t) \exp(-i\omega_l t) - a A^*(t) \exp(i\omega_l t)]. \quad (2.69)$$

Os operadores de campo, a e a^\dagger , que aparecem nesta equação, devem satisfazer as relações de comutação

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad (2.70)$$

$$[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0. \quad (2.71)$$

Podemos descrever o estado quântico do sistema em termos de um operador densidade ρ , de traço unitário, que de forma geral descreve o sistema em um estado de mistura estatística, em que $\rho^2 \neq \rho$, ou um estado quântico puro, em que $\rho^2 = \rho$. Nesta descrição, os valores esperados são dados por

$$\langle a \rangle = \text{Tr}(a\rho), \quad \langle a^\dagger a^2 \rangle = \text{Tr}(a^\dagger a^2 \rho), \quad (2.72)$$

e assim por diante. A aproximação gaussiana que queremos utilizar, consiste em substituir o operador densidade do sistema ρ por um operador densidade truncado ρ_0 , também de traço unitário, dado pela projeção gaussiana de ρ . Todos os valores esperados serão, então, determinados a partir de ρ_0 . O operador densidade ρ_0 é dado por [6, 7]

$$\rho_0 = \frac{1}{1 + \nu} \left(\frac{\nu}{1 + \nu} \right)^{\eta^\dagger \eta}, \quad (2.73)$$

mas também pode ser expresso na forma

$$\rho_0 = P(t)\rho, \quad (2.74)$$

onde $P(t)$ é um projetor dependente do tempo escrito como [6]

$$\begin{aligned} P(\cdot) = P^2(\cdot) = & \left\{ \left[1 - \frac{\eta^\dagger \eta - \nu}{1 + \nu} \right] Tr(\cdot) + \frac{\eta^\dagger \eta - \nu}{\nu(1 + \nu)} Tr(\eta^\dagger \eta \cdot) \right. \\ & + \frac{\eta}{\nu} Tr(\eta^\dagger \cdot) \frac{\eta^\dagger}{1 + \nu} Tr(\eta \cdot) + \frac{\eta \eta}{2\nu^2} Tr(\eta^\dagger \eta^\dagger \cdot) \\ & \left. + \frac{\eta^\dagger \eta^\dagger}{2(1 + \nu)^2} Tr(\eta \eta \cdot) \right\} \rho_0. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Os operadores η e η^\dagger que surgem na expressão de ρ_0 , são determinados pela transformação de Bogolyubov

$$\begin{aligned} \eta &= x^* b + y^* b^\dagger \\ \eta^\dagger &= x b^\dagger + y b, \end{aligned} \quad (2.76)$$

onde os operadores b e b^\dagger são obtidos a partir de a e a^\dagger pelo deslocamento

$$b = a - \langle a \rangle, \quad b^\dagger = a^\dagger - \langle a \rangle^*. \quad (2.77)$$

Para os operadores transformados η e η^\dagger preservarem as relações de comutação (2.70), com $[\eta, \eta^\dagger] = 1$ e $[\eta, \eta] = [\eta^\dagger, \eta^\dagger] = 0$, os coeficientes da transformação (2.76) devem satisfazer a condição $|x|^2 - |y|^2 = 1$. Além disso, a transformação (2.76) é escolhida de forma que tenhamos

$$Tr(\rho \eta \eta) = 0. \quad (2.78)$$

O parâmetro ν que também surge na expressão de ρ_0 , corresponde ao valor esperado do operador $\eta^\dagger \eta$,

$$Tr(\rho \eta^\dagger \eta) = \nu, \quad (2.79)$$

que é interpretado como o número médio dos bósons representados pelos operadores η e η^\dagger . No caso em que $\nu = 0$, temos ρ_0 descrevendo um estado quântico puro. Para vermos isso, definimos o operador

$$\tilde{a} = x^* a + y^* a^\dagger = \eta + \langle \tilde{a} \rangle, \quad (2.80)$$

onde

$$\langle \tilde{a} \rangle = Tr(\rho_0 \tilde{a}) = x^* Tr(\rho_0 a) + y^* Tr(\rho_0 a^\dagger). \quad (2.81)$$

Tomando os traços de

$$\tilde{a}\tilde{a} = \eta\eta + 2\langle \tilde{a} \rangle \eta + \langle \tilde{a} \rangle^2, \quad (2.82)$$

$$\tilde{a}^\dagger \tilde{a} = \eta^\dagger \eta + \langle \tilde{a} \rangle^* \eta + \langle \tilde{a} \rangle \eta^\dagger + |\langle \tilde{a} \rangle|^2 \quad (2.83)$$

e

$$\tilde{a}^\dagger \tilde{a}^2 = \eta^\dagger \eta \eta + \langle \tilde{a} \rangle^* \eta \eta + 2\langle \tilde{a} \rangle \eta^\dagger \eta + 2|\langle \tilde{a} \rangle|^2 \eta + \langle \tilde{a} \rangle^2 \eta^\dagger + \langle \tilde{a} \rangle \eta^\dagger |\langle \tilde{a} \rangle|^2, \quad (2.84)$$

obtemos

$$Tr(\rho_0 \tilde{a}^2) = \langle \tilde{a} \rangle^2, \quad Tr(\rho_0 \tilde{a}^\dagger \tilde{a}) = |\langle \tilde{a} \rangle|^2 \quad (2.85)$$

e

$$Tr(\rho_0 \tilde{a}^\dagger \tilde{a}^2) = \langle \tilde{a} \rangle |\langle \tilde{a} \rangle|^2, \quad (2.86)$$

onde usamos a tabela de traços do apêndice A, fazendo $\nu = 0$. As expressões (2.85) e (2.86), como (2.48) e (2.49), correspondem a relações de um estado coerente, e nesse caso, ρ_0 representa um estado coerente do operador \tilde{a} , que é um estado puro.

Toda esta construção do operador truncado ρ_0 é feita de tal forma a reproduzir os valores esperados de a e a^\dagger e dos operadores $a^\dagger a$ e aa tomados com respeito ao operador completo ρ , ou seja,

$$Tr(a\rho) = Tr(a\rho_0), \quad Tr(a^\dagger\rho) = Tr(a^\dagger\rho_0) \quad (2.87)$$

$$Tr(aa\rho) = Tr(aa\rho_0), \quad Tr(a^\dagger a\rho) = Tr(a^\dagger a\rho_0). \quad (2.88)$$

Como ρ_0 descreve um estado gaussiano³, os traços (2.87) são toda a informação necessária para determiná-lo completamente. A forma de ρ_0 em (2.73) corresponde a uma forma condensada para uma representação mais geral de um estado Gaussiano dada por

$$\rho_{\text{Gauss}} = D(\alpha)S(\xi)\rho_{\langle n \rangle}S(\xi)^\dagger D(\alpha)^\dagger, \quad (2.89)$$

³O conceito de estado gaussiano que usamos é o de um estado que pode ser caracterizado completamente a partir seus primeiro e segundo momentos: $\langle a \rangle$, $\langle a^\dagger \rangle$ e $\langle aa \rangle$, $\langle a^\dagger a \rangle$.

onde D e S são operadores correspondentes a transformações unitárias,

$$D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a) \quad (2.90)$$

representa uma transformação de deslocamento equivalente à (2.77), e

$$S(\xi) = \exp \left[\frac{1}{2} \xi (a^\dagger)^2 - \frac{1}{2} \xi^* a^2 \right] \quad (2.91)$$

representa uma transformação canônica equivalente à (2.76), com $\xi = r e^{i\phi}$ e $x = \cosh(r)$, $y = -e^{-i\phi} \sinh(r)$. Esta transformação de coordenadas $x, y \rightarrow r, \phi$ será útil na solução estacionária realizada na seção 3.2.3. $\rho_{\langle n \rangle}$ em (2.89) corresponde ao operador densidade de um estado térmico⁴ dado por

$$\rho_{\langle n \rangle} = \frac{1}{1 + \langle n \rangle} \exp \left[\ln \left(\frac{\langle n \rangle}{1 + \langle n \rangle} \right) a^\dagger a \right], \quad (2.92)$$

onde $\langle n \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$ é o número médio de excitações (fótons, neste caso).

Definiremos agora o *squeezing* nesta aproximação de estado Gaussiano, partindo da discussão das dispersões nas quadraturas do campo da cavidade. Introduzindo as quadraturas do campo da cavidade, q e p , como

$$\langle a \rangle = Tr(a \rho_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip), \quad (2.93)$$

podemos determinar as dispersões nestas quadraturas

$$\begin{aligned} \Delta q^2 &= \frac{1}{2} [\langle (a^\dagger + a)^2 \rangle - (\langle a \rangle^* + \langle a \rangle)^2] \\ &= \frac{1}{2} [1 + 2|x|^2\nu + 2|y|^2(1 + \nu) - (1 + 2\nu)(x^*y + xy^*)] \end{aligned} \quad (2.94)$$

e

$$\begin{aligned} \Delta p^2 &= -\frac{1}{2} [\langle (a^\dagger - a)^2 \rangle - (\langle a \rangle^* - \langle a \rangle)^2] \\ &= \frac{1}{2} [1 + 2|x|^2\nu + 2|y|^2(1 + \nu) + (1 + 2\nu)(x^*y + xy^*)]. \end{aligned} \quad (2.95)$$

⁴Este estado térmico (2.92) pode ser obtido para um campo de modo único em uma cavidade em equilíbrio térmico à temperatura T [8].

Reparametrizando a transformação de Bogolyubov (2.76) com

$$\begin{aligned} x &= \cosh(\sigma) + i\frac{\tau}{2} \\ y &= \sinh(\sigma) + i\frac{\tau}{2}, \end{aligned} \quad (2.96)$$

que satisfaz a condição $|x|^2 - |y|^2 = 1$, podemos reescrever as dispersões (2.94) e (2.95) de uma forma mais simples

$$\Delta q^2 = \left(\frac{1+2\nu}{2}\right) [\cosh(\sigma) - \sinh(\sigma)]^2, \quad (2.97)$$

$$\Delta p^2 = \left(\frac{1+2\nu}{2}\right) [(\cosh(\sigma) + \sinh(\sigma))^2 + \tau^2]. \quad (2.98)$$

Introduzindo as variáveis Q e P ,

$$P = \tau\sqrt{\frac{1+2\nu}{2}}, \quad Q = e^{-\sigma}\sqrt{\frac{1+2\nu}{2}}, \quad (2.99)$$

simplificamos ainda mais, obtendo

$$\Delta q^2 = Q^2, \quad (2.100)$$

$$\Delta p^2 = P^2 + \frac{(1+2\nu)^2}{4Q^2}. \quad (2.101)$$

Com isso, a relação de incerteza nas quadraturas resulta em

$$\Delta q \Delta p \equiv \sqrt{\Delta q^2} \sqrt{\Delta p^2} = \sqrt{\frac{(1+2\nu)^2}{4} + P^2 Q^2} \geq \frac{1+2\nu}{2}. \quad (2.102)$$

Na equação acima, observamos que para Q , P e ν arbitrários temos as dispersões

$$\Delta q^2 \neq 1/2, \quad \Delta p^2 \neq 1/2, \quad (2.103)$$

e uma incerteza diferente de seu valor mínimo, $1/2$. Esta situação da dispersão das quadraturas (2.103) é que chamamos de *squeezing*, que resulta da descrição de ρ_0 como um estado Gaussiano. Entretanto, para o caso em que $Q = \sqrt{1/2}$, $P = 0$ e $\nu = 0$ a incerteza é mínima, o que significa que nesta situação ρ_0 descreve um estado coerente. Observe que isso significa $\tau = 0$,

$\sigma = 0$ na equação (2.99) e $x = 1, y = 0$ na equação (2.96), e então, a transformação (2.76) corresponde a uma identidade neste caso. Assim, fazendo este limite,

$$Q \rightarrow \sqrt{1/2}, \quad P \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow 0, \quad (2.104)$$

que significa

$$\Delta q^2 \rightarrow 1/2, \quad \Delta p^2 \rightarrow 1/2 \quad \therefore \quad \Delta q \Delta p \rightarrow 1/2, \quad (2.105)$$

as expressões encontradas pela aplicação da aproximação Gaussiana devem corresponder à aproximação de estado coerente. No próximo capítulo, em que aplicamos a aproximação Gaussiana para os polaritons da microcavidade semicondutora, faremos esta comparação entre os resultados das aproximações.

Descrição teórica da Bi-estabilidade

Neste capítulo, descrevemos um modelo para os polaritons em uma microcavidade semicondutora, discutimos a aproximação de estado coerente na demonstração da propriedade de bi-estabilidade do sistema, e finalizamos, com a aplicação da aproximação Gaussiana com o propósito de fazer uma generalização da aproximação de estado coerente.

3.1 Modelo e aproximação de estado coerente

No material semicondutor contido em um poço quântico, como o GaAs no mostrado na figura 2.10 do Capítulo 2, existem estados ligados formados por elétrons da banda de condução e buracos da banda de valência (que se comportam como partículas de carga positiva) confinados ao longo do eixo de crescimento z , mas livres para se movimentar no plano do poço. Denominamos este par elétron-buraco, agrupado devido à atração Coulombiana, de um *exciton*. É importante observar que devido ao confinamento ocorre uma discretização dos níveis de energia para os elétrons confinados da banda de condução. E na formação do exciton, a energia do elétron é menor do que o menor destes níveis de energia, e a diferença entre estas energias corresponde à energia de ligação do exciton, como ilustrado na figura 3.1. Com o poço quântico localizado dentro da microcavidade formada por espelhos DBR, como mostrado na figura 1.2 do Capítulo 1, os excitons devem entrar em interação com o campo da cavidade. Considerando a descrição quântica dos excitons como bósons com operadores de criação (aniquilação) $b^\dagger(b)$, o Hamiltoniano para a interação dos excitons com os fótons da cavidade é dado

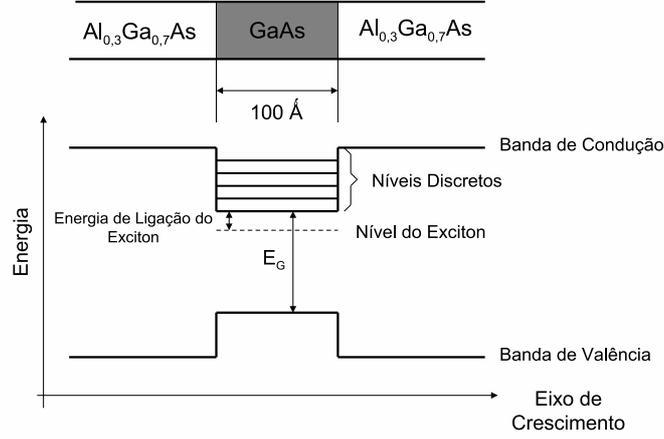


Figura 3.1: Nível de energia e energia de ligação para o exciton.

por [5]

$$H = \sum_k E_{exc}(k) b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + E_{cav}(k) a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{\Omega_R}{2} (a_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}). \quad (3.1)$$

Nesta equação $a^\dagger(a)$ são os operadores de criação (aniquilação) para os fótons com um vetor de onda \mathbf{k} no plano da cavidade. Por causa da invariância translacional no plano da cavidade, os fótons podem interagir apenas com excitons tendo o mesmo vetor de onda \mathbf{k} . $E_{cav}(k)$ e $E_{exc}(k)$ são as energias dos fótons e dos excitons, respectivamente, que dependem do módulo de \mathbf{k} , e Ω_R corresponde à energia de interação de Rabi entre excitons e fótons.

Podemos diagonalizar o Hamiltoniano (3.1) através da transformação

$$\begin{aligned} p_k &= u_k b_{\mathbf{k}} - v_k a_{\mathbf{k}}, \\ q_k &= v_k b_{\mathbf{k}} + u_k a_{\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde u_k e v_k são os denominados coeficientes de Hopfield [4] dados por

$$u_k = \left(\frac{\delta_k + \sqrt{\delta_k^2 + \Omega_R^2}}{2\sqrt{\delta_k^2 + \Omega_R^2}} \right)^{1/2}, \quad (3.3)$$

$$v_k = \left(\frac{\Omega_R^2}{2\sqrt{\delta_k^2 + \Omega_R^2}(\delta_k + \sqrt{\delta_k^2 + \Omega_R^2})} \right)^{1/2}, \quad (3.4)$$

com $\delta_k = E_{cav}(k) - E_{exc}(k)$. O Hamiltoniano transformado tem, então, a forma

$$H = \sum_k E_{low}(k) p_{\mathbf{k}}^\dagger p_{\mathbf{k}} + E_{up}(k) q_{\mathbf{k}}^\dagger q_{\mathbf{k}}, \quad (3.5)$$

onde os operadores transformados $p_{\mathbf{k}}$ e $q_{\mathbf{k}}$ obedecem às relações de bósons

$$[q_{\mathbf{k}}, q_{\mathbf{k}}^\dagger] = 1, \quad [q_{\mathbf{k}}, q_{\mathbf{k}}] = [q_{\mathbf{k}}^\dagger, q_{\mathbf{k}}^\dagger] = 0, \quad (3.6)$$

$$[p_{\mathbf{k}}, p_{\mathbf{k}}^\dagger] = 1, \quad [p_{\mathbf{k}}, p_{\mathbf{k}}] = [p_{\mathbf{k}}^\dagger, p_{\mathbf{k}}^\dagger] = 0. \quad (3.7)$$

Estes operadores descrevem uma quase-partícula, que surge da interação entre excitons e fótons, denominada de *polariton*. E_{up} e E_{low} correspondem às energias dos polaritons *upper* e *lower*, respectivamente, dadas por

$$E_{low(up)} = \frac{E_{cav}(k) + E_{exc}(k)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\delta_k^2 + \Omega_R^2}. \quad (3.8)$$

A figura 3.2 mostra as dispersões para estas energias (de onde surge a nomenclatura *upper* e *lower*) comparadas com a energia dos excitons (aproximadamente constante para k pequeno) e com a energia dos fótons (aproximadamente parabólica na mesma região).

A interação Coulombiana existente entre elétrons e buracos leva ao surgimento de termos adicionais ao Hamiltoniano (3.1): um termo de interação efetiva exciton-exciton e um termo de saturação do acoplamento fóton-exciton. O termo de interação exciton-exciton é dado por

$$H_{exc-exc} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} V_q b_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'}, \quad (3.9)$$

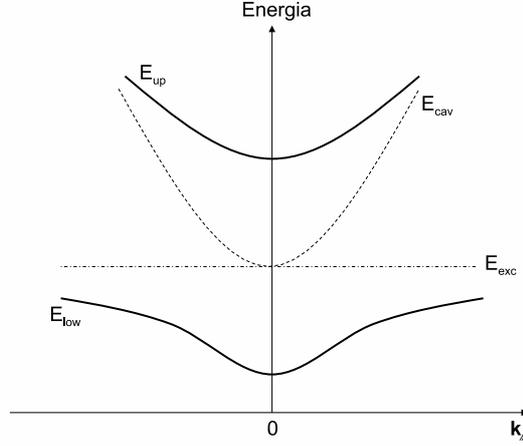


Figura 3.2: Comparação entre as energias dos excitons, fótons e polaritons (figura retirada de [2]).

com $V_q \simeq V_0 = 6e^2 a_{exc} / \epsilon_0 A$, no caso $q a_{exc} \ll 1$, onde a_{exc} é raio de Bohr bi-dimensional do exciton, ϵ_0 é a constante dielétrica do poço quântico, e A a área de quantização [5]. O termo de saturação é dado por

$$H_{sat} = - \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} V_{sat} (a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'} + a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} b_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}} b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}'}^\dagger), \quad (3.10)$$

com $V_{sat} = \Omega_R / 2n_{sat} A$, onde $n_{sat} = 7 / (16\pi a_{exc}^2)$ é a densidade de saturação dos excitons [5]. Usando a transformação (3.2) podemos escrever (3.10) e (3.9) em função dos polaritons $p_{\mathbf{k}}$ e $q_{\mathbf{k}}$, encontrando assim termos, adicionais ao Hamiltoniano (3.5), de interação entre os polaritons. Na situação em que os coeficientes não-lineares V_0 e V_{sat} são pequenos comparados à energia de Rabi Ω_R , é possível desprezar os termos não-lineares de interação entre os polaritons upper e lower. Neste caso, os dois polaritons estão praticamente desacoplados e a representação do Hamiltoniano em termos de $p_{\mathbf{k}}$ e $q_{\mathbf{k}}$ é mais simplificada. Se considerarmos ainda que somente o ramo *lower* de energias (veja a figura 3.2) é excitado pelo campo da cavidade, então, somente a evolução temporal do polariton lower $p_{\mathbf{k}}$ será de interesse. Com estas considerações, o Hamiltoniano em termos apenas do polariton lower é escrito

como

$$H = \sum_{\mathbf{k}} E_{low} p_{\mathbf{k}}^\dagger p_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}}^{PP} p_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger p_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger p_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}'}, \quad (3.11)$$

onde

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}}^{PP} &= V_0 u_{|\mathbf{k}'-\mathbf{q}|} u_{\mathbf{k}} u_{|\mathbf{k}+\mathbf{q}|} u_{\mathbf{k}'} \\ &+ 2V_{sat} u_{|\mathbf{k}'-\mathbf{q}|} u_{\mathbf{k}} (v_{|\mathbf{k}+\mathbf{q}|} u_{\mathbf{k}'} + v_{\mathbf{k}'} u_{|\mathbf{k}+\mathbf{q}|}). \end{aligned} \quad (3.12)$$

O primeiro termo de (3.11) descreve o polariton livre e o segundo corresponde ao termo de interação efetiva polariton-polariton. Para valores típicos dos parâmetros Ω_R , a_{exc} e ϵ_0 , encontramos que V_{sat}/V_0 é muito pequeno (usualmente da ordem de 10^{-2} [10]), de modo que podemos desprezar o termo de saturação em comparação com o termo de interação em (3.12),

$$V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}}^{PP} \simeq V_0 u_{|\mathbf{k}'-\mathbf{q}|} u_{\mathbf{k}} \cdot u_{|\mathbf{k}+\mathbf{q}|} u_{\mathbf{k}'}. \quad (3.13)$$

Consideraremos agora, a excitação do campo da cavidade em incidência normal ao plano da cavidade, na direção de $\mathbf{k} = 0$, e estudaremos o campo refletido na mesma direção. Consideramos também uma situação em que nós podemos desprezar a interação entre polaritons com $\mathbf{k} = 0$ e outros polaritons com modos $\mathbf{k} \neq 0$, e manter apenas o termo de menor ordem na segunda somatória de (3.11), correspondente à interação polariton-polariton com $\mathbf{k} = 0$,

$$\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}}^{PP} p_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger p_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger p_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}'} \approx \frac{1}{2} V_0^{PP} p_0^\dagger p_0^\dagger p_0 p_0. \quad (3.14)$$

Devemos incluir ainda em (3.11) o efeito do campo incidente de um laser sobre a microcavidade, adicionando um termo semelhante a (2.41), correspondente ao acoplamento entre o modo da cavidade e o campo externo de bombeio, de frequência ω_l , tratado como um campo clássico com amplitude E^{in}

$$V = i\hbar\sqrt{2\lambda_l}[E^{in}e^{-i\omega_l t}a^\dagger - H.c.], \quad (3.15)$$

onde λ_l corresponde a um coeficiente de dissipação dos espelhos da cavidade [5]. Mas observe que no termo acima existe ainda uma dependência do polariton upper q contida no operador a . Tomando a transformação inversa de (3.2) temos que $a = u_0 q_0 - v_0 p_0$. Substituindo isto em (3.15) e ignorando os

termos em q_0 , obtemos

$$V = -i\hbar\sqrt{2\lambda_l}[E^{in}e^{-i\omega_l t}v_0p_0^\dagger - H.c.]. \quad (3.16)$$

Com tudo isso, obtemos

$$H = E_{low}(0)p_0^\dagger p_0 + \frac{1}{2}V_0^{PP}p_0^\dagger p_0^\dagger p_0 p_0 - i\hbar\sqrt{2\lambda_l}[E^{in}e^{-i\omega_l t}v_0p_0^\dagger - H.c.]. \quad (3.17)$$

O Hamiltoniano (3.17) obtido para a microcavidade semicondutora tem a mesma forma de (2.42), obtido no capítulo 2 para a bi-estabilidade óptica dispersiva. Desse modo, todo o desenvolvimento feito na seção 2.1.3, para a obtenção da propriedade da bi-estabilidade óptica usando a aproximação de um estado coerente, pode ser aplicado para a microcavidade semicondutora. Como em (2.43), primeiramente fazemos a transformação $p = p_0e^{i\omega_l t}$ para simplificar o Hamiltoniano

$$H = E_{low}(0)p^\dagger p + \frac{1}{2}V_0^{PP}p^\dagger p^\dagger pp - i\hbar\sqrt{2\lambda_l}[E^{in}v_0p^\dagger - H.c.]. \quad (3.18)$$

Calculamos a equação de Heisenberg para p

$$i\hbar\frac{dp}{dt} = [p, H] + i\hbar\frac{\partial p}{\partial t}, \quad (3.19)$$

$$i\hbar\frac{dp}{dt} = E_{low}p + V_0^{PP}p^\dagger pp - i\hbar\sqrt{2\lambda_l}E^{in}v_0 + i\hbar(i\omega_l p), \quad (3.20)$$

que reescrevemos como

$$\frac{dp}{dt} = -[\gamma_p + i\delta_p]p - i\alpha_p p^\dagger pp - v_0\sqrt{2\lambda_l}E^{in} \quad (3.21)$$

onde $\delta_p = E_{low}(0)/\hbar - \omega_l$, $\alpha = V_0^{PP}/\hbar$ e $-\gamma_p p$, como em (2.47), corresponde à um termo adicionado para representar as perdas internas na cavidade. Tomamos então, o valor médio de (3.21) em um estado coerente, tal que

$$\langle p^\dagger pp \rangle = \langle p \rangle |\langle p \rangle|^2, \quad (3.22)$$

que resulta

$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = -[\gamma_p + i\delta_p]\langle p \rangle - i\alpha_p \langle p \rangle |\langle p \rangle|^2 - v_0\sqrt{2\lambda_l}E^{in}. \quad (3.23)$$

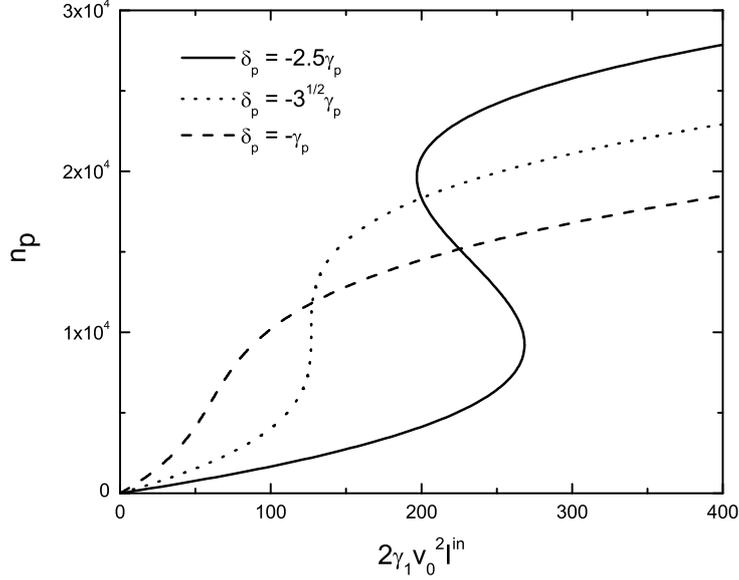


Figura 3.3: Relação entre n_p e I^{in} para diferentes valores de δ_p .

Em seguida, combinamos a solução estacionária de (3.23) e de seu conjugado,

$$-[\gamma_p + i\delta_p]\langle p \rangle - i\alpha_p \langle p \rangle |\langle p \rangle|^2 = v_0 \sqrt{2\lambda_l} E^{in}, \quad (3.24)$$

$$-[\gamma_p - i\delta_p]\langle p \rangle^* - i\alpha_p \langle p \rangle^* |\langle p \rangle|^2 = v_0 \sqrt{2\lambda_l} E^{in*}, \quad (3.25)$$

como em (2.53) e (2.55), para obtermos

$$v_0^2 (2\lambda_l) |E^{in}|^2 = n_p [\gamma_p + (\delta_p + \alpha_p n_p)^2], \quad (3.26)$$

Na equação acima definimos $n_p = |\langle p \rangle|^2$, que representa o número médio de polaritons na cavidade. Com a intensidade incidente sobre a cavidade proporcional $I^{in} = |E^{in}|^2$, e com a intensidade transmitida proporcional n_p , uma vez que toda a emissão da cavidade deve ser proporcional ao número de polaritons, a equação (3.26) fornece então, a relação característica da bi-estabilidade, como mostrado na figura 3.3. Na figura observamos o surgimento da curva em S da bi-estabilidade a partir de um determinado valor de δ_p . Por uma análise equivalente à realizada em (2.56), (2.57) e (2.58),

obtemos a condição para ocorrer a bi-estabilidade

$$\delta_p < -\sqrt{3}\gamma_p \quad \therefore \quad \omega_l > \omega_c + \sqrt{3}\gamma_p. \quad (3.27)$$

Do mesmo modo, uma análise da estabilidade da curva em S utilizando a linearização, como a realizada em (2.61)-(2.68), resulta na estabilidade dos ramos superior e inferior da curva e na instabilidade do ramo intermediário.

Na próxima seção, tentamos generalizar todo este procedimento, que partiu da aproximação de estado coerente (3.23), através da aplicação da aproximação gaussiana.

3.2 Usando a Aproximação Gaussiana

Como discutido na seção 2.3, a aproximação gaussiana consiste na substituição,

$$\rho \rightarrow \rho_0 = \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right)^{\eta^\dagger \eta}, \quad (3.28)$$

de ρ , o operador densidade completo descrevendo o sistema, por ρ_0 , a aproximação de um estado gaussiano para ρ . Os operadores η e η^\dagger são dados pela transformação de Bogolyubov (2.76),

$$\eta = x^*b + y^*b^\dagger, \quad \eta^\dagger = xb^\dagger + yb, \quad (3.29)$$

com

$$b = p - \langle p \rangle, \quad (3.30)$$

onde fizemos $a \rightarrow p$ em (2.77). O parâmetro ν é dado pela relação (2.79),

$$Tr(\rho\eta^\dagger\eta) = \nu. \quad (3.31)$$

Tomada essa aproximação para a descrição dos polaritons na microcavidade semicondutora (3.17), nesta seção realizamos os seguintes passos: (i) determinamos as equações para a evolução temporal de $\langle p \rangle$, e dos parâmetros x e y introduzidos pela aproximação; (ii) reescrevemos estas equações em uma forma Hamiltoniana clássica, onde também discutimos a propriedade de *squeezing* introduzida pela aproximação; (iii) analisamos a solução estacionária destas equações, de onde demonstramos a propriedade de bi-estabilidade do sistema; (iv) e por fim, analisamos as condições de ocorrência e de estabili-

dade da curva característica da propriedade.

3.2.1 Equações de evolução temporal

Procedemos agora à determinação da equação de evolução temporal para $\langle p_0 \rangle = Tr(p_0 \rho_0)$. Consideramos novamente a transformação $p = p_0 e^{i\omega_l t}$, e usamos o Hamiltoniano simplificado (3.18), onde os valores esperados $\langle p_0 \rangle$ e $\langle p \rangle = Tr(p \rho_0)$ diferem apenas por uma fase. Derivando $\langle p \rangle = Tr(p \rho_0)$ com relação ao tempo, obtemos

$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = Tr \left(p \frac{d\rho_0}{dt} \right) + i\omega_l Tr(p \rho_0). \quad (3.32)$$

Usando a eq. de Liouville-von Neumann,

$$i\hbar \frac{d\rho_0}{dt} = [H, \rho_0], \quad (3.33)$$

temos

$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} Tr(p[H, \rho_0]) + i\omega_l \langle p \rangle. \quad (3.34)$$

Podemos utilizar a propriedade cíclica do traço para escrever $Tr(p[H, \rho_0]) = Tr([p, H]\rho_0)$. Com o cálculo do comutador $[p, H]$ e do traço $Tr([p, H]\rho_0)$, demonstrado no apêndice C, obtemos a equação para $\frac{d\langle p \rangle}{dt}$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d\langle p \rangle}{dt} &= (4f_2[|x|^2\nu + |y|^2(1 + \nu)] + f_1)\langle p \rangle \\ &\quad - 2f_2xy^*(1 + 2\nu)\langle p \rangle^* + 2f_2\langle p \rangle|\langle p \rangle|^2 + f_3, \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde $f_1 = E_{low}$, $f_2 = \frac{V_0^{PP}}{2}$ e $f_3 = -i\hbar\sqrt{2\lambda_l}E^{in}v_0$.

Na construção da aproximação, foram introduzidos os parâmetros x , y e ν , que podem depender do tempo. Devemos então, analisar a evolução temporal destas quantidades. Partindo de (3.31) temos que

$$\frac{d\nu}{dt} = Tr \left(\eta^\dagger \eta \frac{d\rho_0}{dt} \right). \quad (3.36)$$

Usando (3.33) e a propriedade cíclica do traço obtemos

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \text{Tr}(\eta^\dagger \eta [H, \rho_0]) \quad (3.37)$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \text{Tr}(H[\eta^\dagger \eta, \rho_0]). \quad (3.38)$$

Pela forma de ρ_0 dada em (3.28), observamos que $\eta^\dagger \eta$ comuta com ρ_0 , $[\eta^\dagger \eta, \rho_0] = 0$. Com isso, segue de (3.37) que

$$\frac{d\nu}{dt} = 0, \quad (3.39)$$

ou seja, ν é constante no tempo, e seu valor deve ser determinado pelas condições iniciais para a densidade completa ρ . Para encontrar uma equação para x e y , derivamos a relação $\text{Tr}(\eta\eta\rho_0) = 0$ no tempo,

$$\text{Tr}\left(\frac{d}{dt}(\eta\eta)\rho_0\right) + \text{Tr}\left(\eta\eta\frac{d\rho_0}{dt}\right) = 0. \quad (3.40)$$

Usando (3.33), podemos reescrever a equação acima como

$$i\hbar \text{Tr}\left(\frac{d}{dt}(\eta\eta)\rho_0\right) - \text{Tr}([\eta\eta, H]\rho_0) = 0. \quad (3.41)$$

Calculando os traços acima (demonstrados no Apêndice C) e tomando o conjugado complexo, obtemos

$$\begin{aligned} i(\dot{x}y - x\dot{y}) &= 2f_1xy - 2f_2[\langle p \rangle^* x^2 - 4|\langle p \rangle|^2 xy + \langle p \rangle^2 y^2] + \\ &+ 2f_2[(1 + 2\nu) + 4\nu]xy|y|^2 + 2f_2[(1 + 2\nu) + 4(1 + \nu)]xy|y|^2, \end{aligned} \quad (3.42)$$

que corresponde à equação para a evolução temporal de x e y .

As equações (3.35) e (3.42) correspondem ao resultado principal deste trabalho. A partir desse resultado, através de duas transformações de coordenadas apropriadas para x , y e $\langle p \rangle$, conforme discutido na introdução desta seção: 1) podemos escrever as equações de evolução temporal numa forma Hamiltoniana clássica; e 2) obtemos a solução estacionária para as equações de evolução temporal. No tópico que segue demonstramos como é possível escrever as equações de evolução temporal como equações de Hamilton clássicas.

3.2.2 Forma Hamiltoniana para as equações de evolução temporal

Podemos reescrever as equações encontradas (3.35) e (3.42), definindo as quadraturas do campo para o operador p , semelhante à (2.93),

$$\langle p \rangle = Tr(p\rho_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{q} + i\tilde{p}), \quad (3.43)$$

e utilizando a reparametrização para x e y ,

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{1+2\nu}} \left[\left(\frac{(1+2\nu)}{2} \frac{1}{Q} + Q \right) + iP \right] \\ y &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{1+2\nu}} \left[\left(\frac{(1+2\nu)}{2} \frac{1}{Q} - Q \right) + iP \right] \end{aligned} \quad (3.44)$$

obtida combinando (2.96) e (2.99). Substituindo (3.43) e (3.44), e seus respectivos conjugados, em (3.35), obtemos, separando em partes real e imaginária, as equações

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{p}}{dt} &= -2f_2 \left\{ \left[\frac{(1+2\nu)^2}{4Q^2} + Q^2 + P^2 \right] - 1 \right\} \tilde{q} + \\ &+ f_2 \left[\frac{(1+2\nu)^2}{4Q^2} - Q^2 + P^2 \right] \tilde{q} - 2f_2 PQ\tilde{p} + \\ &- f_2(\tilde{q}^2 + \tilde{p}^2)\tilde{q} - f_1\tilde{q} - \sqrt{2}Re(f_3) \end{aligned} \quad (3.45)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{q}}{dt} &= 2f_2 \left\{ \left[\frac{(1+2\nu)^2}{4Q^2} + Q^2 + P^2 \right] - 1 \right\} \tilde{p} + \\ &+ f_2 \left[\frac{(1+2\nu)^2}{4Q^2} - Q^2 + P^2 \right] \tilde{p} + 2f_2 PQ\tilde{q} + \\ &+ f_2(\tilde{q}^2 + \tilde{p}^2)\tilde{p} + f_1\tilde{p} + \sqrt{2}Im(f_3). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Fazendo o mesmo procedimento com (3.42), obtemos as equações

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= f_1 \left[\frac{(1+2\nu)^2}{4Q^3} - Q \right] + 2f_2(\tilde{q}^2 + \tilde{p}^2) \left[\frac{(1+2\nu)^2}{4Q^3} - Q \right] + \\ &- f_2(\tilde{q}^2 - \tilde{p}^2) \left[\frac{(1+2\nu)^2}{4Q^3} + Q \right] - 2f_2\tilde{q}\tilde{p}P + \end{aligned}$$

$$+3f_2 \left[\frac{(1+2\nu)^2}{4Q^3} + Q \right] \left\{ \frac{(1+2\nu)^2}{4Q^2} + Q^2 + P^2 \right\} - 2f_2 \left[\frac{(1+2\nu)^2}{4Q^3} - Q \right] \quad (3.47)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} = & f_1 P + 2f_2(\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2)P - f_2(\tilde{q}^2 - \tilde{p}^2)P + 2f_2\tilde{q}\tilde{p}Q + \\ & + 3f_2 \left[\frac{(1+2\nu)^2}{4Q^2} + Q^2 + P^2 \right] P - 2f_2 P. \end{aligned} \quad (3.48)$$

As equações (3.45), (3.46), (3.47) e (3.48), podem ser escritas em função do valor esperado do Hamiltoniano (3.17). No apêndice B, é feito o cálculo deste valor esperado $\langle H \rangle$, e a partir da expressão encontrada pode ser verificado que

$$\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial \tilde{q}} = -\frac{d\tilde{p}}{dt}, \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial \tilde{p}} = \frac{d\tilde{q}}{dt} \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial Q} = -\frac{dP}{dt}, \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial P} = \frac{dQ}{dt}. \quad (3.52)$$

As expressões acima correspondem a equações Hamiltonianas clássicas para a evolução temporal das quadraturas \tilde{p} e \tilde{q} e das variáveis de *squeezing* P e Q . Neste sentido, \tilde{p} , \tilde{q} , P e Q formam um conjunto de variáveis canonicamente conjugadas. Esta mesma estrutura foi obtida na referência [6] onde a dinâmica é também quadrática. A presente generalização mostra que na aproximação de campo médio Gaussiano a mesma forma continua a ser válida.

Como já foi discutido na seção (2.3), as variáveis Q e P estão associadas ao *squeezing* das quadraturas do campo. Calculando as dispersões na quadraturas \tilde{p} e \tilde{q} ,

$$\Delta \tilde{q}^2 = \frac{1}{2} [\langle (p^\dagger + p)^2 \rangle - (\langle p \rangle^* + \langle p \rangle)^2], \quad (3.53)$$

$$\Delta \tilde{p}^2 = -\frac{1}{2} [\langle (p^\dagger - p)^2 \rangle - (\langle p \rangle^* - \langle p \rangle)^2], \quad (3.54)$$

temos, usando (3.29) e (3.30),

$$\Delta\tilde{q}^2 = \frac{1}{2}[1 + 2\nu|x|^2 + 2(1 + \nu)|y|^2 - (xy^* + x^*y)(1 + 2\nu)] = Q^2 \quad (3.55)$$

e

$$\Delta\tilde{p}^2 = \frac{1}{2}[1 + 2\nu|x|^2 + 2(1 + \nu)|y|^2 + (xy^* + x^*y)(1 + 2\nu)] = P^2 + \frac{(1 + 2\nu)}{4Q^2}, \quad (3.56)$$

que resulta na relação de incerteza

$$\Delta\tilde{q}\Delta\tilde{p} \equiv \sqrt{\Delta\tilde{q}^2}\sqrt{\Delta\tilde{p}^2} = \sqrt{\frac{(1 + 2\nu)^2}{4} + P^2Q^2} \geq \frac{1 + 2\nu}{2}. \quad (3.57)$$

Na situação em que $Q = \sqrt{1/2}$, $P = 0$ e $\nu = 0$, obtemos $\Delta\tilde{q}^2 = 1/2$, $\Delta\tilde{p}^2 = 1/2$ e a incerteza mínima $\Delta\tilde{q}\Delta\tilde{p} = 1/2$. Entretanto, para situações arbitrárias de Q e P , com o estado puro ($\nu = 0$) ou não, devemos ter o que denominamos de *squeezing* nas quadraturas

$$\Delta q \neq 1/\sqrt{2}, \quad \Delta p \neq 1/\sqrt{2}. \quad (3.58)$$

No próximo tópico, discutimos a solução estacionária das equações de evolução temporal utilizando outra parametrização para x e y , em que as variáveis de *squeezing* serão dadas por r e ϕ . De posse da solução estacionária de r e ϕ veremos então, qual é o comportamento estacionário para as dispersões nas quadraturas $\Delta\tilde{q}^2$ e $\Delta\tilde{p}^2$.

3.2.3 Solução estacionária e Bi-estabilidade

Para facilitar a obtenção da solução estacionária das equações de evolução temporal (3.35) e (3.42), utilizamos uma outra parametrização para x e y , diferente de (3.44), dada por

$$\begin{aligned} x &= \cosh r, \\ y &= -e^{-i\phi} \sinh r. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Com (3.59) reescrevemos (3.35) como

$$\begin{aligned} \frac{d\langle p \rangle}{dt} = & -(\gamma_p + i\delta_p)\langle p \rangle - i\alpha_p[2\langle p \rangle\nu \cosh r^2 + 2\langle p \rangle(1 + \nu) \sinh r^2 + \\ & + \langle p \rangle^*(1 + 2\nu)e^{i\phi} \cosh r \sinh r + |\langle p \rangle|^2\langle p \rangle] - v_0\sqrt{2\gamma_1}\langle A^{in} \rangle. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Observe que com $r = 0$, $\phi = 0$ e $\nu = 0$ a equação acima se torna idêntica à (3.21) obtida pela aproximação de estado coerente. Isso demonstra como a análise pela aproximação Gaussiana adiciona mais elementos à descrição do problema, o *squeezing* através de r e ϕ e a possibilidade de um estado misto através de ν . Utilizamos também uma outra expressão para $\langle p \rangle$,

$$\langle p \rangle = \sqrt{n_p}e^{i \arg\langle p \rangle}. \quad (3.61)$$

Devemos encontrar agora equações para o módulo quadrado de $\langle p \rangle$, n_p , e para seu argumento, $\arg\langle p \rangle$. A derivação no tempo de (3.61) fornece

$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{n_p}} \frac{dn_p}{dt} e^{i \arg\langle p \rangle} + i \frac{d \arg\langle p \rangle}{dt} \sqrt{n_p} e^{i \arg\langle p \rangle}. \quad (3.62)$$

Multiplicando (3.62) por $\langle p \rangle^*$, temos

$$\langle p \rangle^* \frac{d\langle p \rangle}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dn_p}{dt} + in_p \frac{d \arg\langle p \rangle}{dt}, \quad (3.63)$$

que conjugada fornece

$$\langle p \rangle \frac{d\langle p \rangle^*}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dn_p}{dt} - in_p \frac{d \arg\langle p \rangle}{dt}. \quad (3.64)$$

Somando e subtraindo (3.63) e (3.64), obtemos

$$\langle p \rangle^* \frac{d\langle p \rangle}{dt} + \langle p \rangle \frac{d\langle p \rangle^*}{dt} = \frac{dn_p}{dt} \quad (3.65)$$

e

$$\langle p \rangle^* \frac{d\langle p \rangle}{dt} - \langle p \rangle \frac{d\langle p \rangle^*}{dt} = 2in_p \frac{d \arg\langle p \rangle}{dt}. \quad (3.66)$$

Substituindo (3.60) e (3.61), e seus conjugados complexos, em (3.65) e (3.66), obtemos, após manipulações algébricas simples de exponenciais,

$$\begin{aligned} \frac{dn_p}{dt} = & -2\gamma_p n_p + 2\alpha_p n_p \sin(\phi - 2 \arg\langle p \rangle)(1 + 2\nu) \cosh(r) \sinh(r) \\ & + 2 \frac{|f_3|}{\hbar} \sqrt{n_p} \sin(\arg(f_3) - \arg\langle p \rangle) \end{aligned} \quad (3.67)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d \arg\langle p \rangle}{dt} = & -\delta_p - \alpha_p [2\nu \cosh^2(r) + 2(1 + \nu) \sinh^2(r) + n_p] \\ & - \alpha_p \cos(\phi - 2 \arg\langle p \rangle)(1 + 2\nu) \cosh(r) \sinh(r) \\ & - \frac{1}{\sqrt{n_p}} \frac{|f_3|}{\hbar} \cos(\arg(f_3) - \arg\langle p \rangle), \end{aligned} \quad (3.68)$$

onde usamos $f_3 = |f_3|e^{i \arg(f_3)}$. As equações acima determinam a evolução temporal de $\langle p \rangle$ através de seu módulo n_p e seu argumento $\arg\langle p \rangle$. Partindo de (3.59), temos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{i}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} \cosh(r) \frac{d\phi}{dt} + e^{i\frac{\phi}{2}} \sinh(r) \frac{dr}{dt} \quad (3.69)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{i}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} \sinh(r) \frac{d\phi}{dt} - e^{-i\frac{\phi}{2}} \sinh(r) \frac{dr}{dt}. \quad (3.70)$$

Substituindo (3.59), (3.69), (3.61) e seu conjugado, $\langle p \rangle^* = \sqrt{n_p} e^{-i \arg\langle p \rangle}$, em (3.42), obtemos

$$\begin{aligned} i \left(-i \cosh(r) \sinh(r) \frac{d\phi}{dt} + \frac{dr}{dt} \right) = & -2f_1 \cosh(r) \sinh(r) \\ & -2f_2 \{ n_p [\cos(\phi - 2 \arg\langle p \rangle) + i \sin(\phi - 2 \arg\langle p \rangle)] \cosh^2(r) \\ & + n_p [\cos(\phi - 2 \arg\langle p \rangle) - i \sin(\phi - 2 \arg\langle p \rangle)] \sinh^2(r) \\ & + 4n_p \cosh(r) \sinh(r) \} - 2f_2 (1 + 6\nu) \cosh^3(r) \sinh(r) \\ & - 2f_2 (5 + 6\nu) \cosh(r) \sinh^3(r). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Tomando as partes real e imaginária de (3.71), podemos escrever

$$\frac{d\phi}{dt} = -2f_1 - 2f_2 n_p \left[\cos(\phi - 2 \arg\langle p \rangle) \left(\frac{\cosh^2(r) + \sinh^2(r)}{\cosh(r) \sinh(r)} \right) + 4 \right]$$

$$-2f_2(1 + 6\nu) \cosh^2(r) - 2f_2(5 + 6\nu) \sinh^2(r) \quad (3.72)$$

e

$$\frac{dr}{dt} = -2f_2 n_p \sin(\phi - 2 \arg\langle p \rangle), \quad (3.73)$$

considerando que $r > 0$. As equações acima determinam a evolução temporal de x e y através dos parâmetros r e ϕ . Procederemos agora à solução do estado estacionário de (3.67), (3.68), (3.72) e (3.73),

$$\frac{dn_p}{dt} = 0, \quad \frac{d \arg\langle p \rangle}{dt} = 0, \quad \frac{d\phi}{dt} = 0, \quad \frac{dr}{dt} = 0, \quad (3.74)$$

no qual temos

$$0 = -2\gamma_p n_{p0} + 2\alpha_p n_0 p \sin(\phi_0 - 2 \arg\langle p \rangle_0) (1 + 2\nu) \cosh(r_0) \sinh(r_0) \\ + 2 \frac{|f_3|}{\hbar} \sqrt{n_{p0}} \sin(\arg(f_3) - \arg\langle p \rangle_0) \quad (3.75)$$

$$0 = -\delta_p - \alpha_p [2\nu \cosh^2(r_0) + 2(1 + \nu) \sinh^2(r_0) + n_p] \\ - \alpha_p \cos(\phi_0 - 2 \arg\langle p \rangle_0) (1 + 2\nu) \cosh(r_0) \sinh(r_0) \\ - \frac{1}{\sqrt{n_{p0}}} \frac{|f_3|}{\hbar} \cos(\arg(f_3) - \arg\langle p \rangle_0) \quad (3.76)$$

$$0 = -2f_1 - 2f_2 n_{p0} \left[\cos(\phi_0 - 2 \arg\langle p \rangle_0) \left(\frac{\cosh^2(r_0) + \sinh^2(r_0)}{\cosh(r_0) \sinh(r_0)} \right) + 4 \right] \\ - 2f_2(1 + 6\nu) \cosh^2(r_0) - 2f_2(5 + 6\nu) \sinh^2(r_0) \quad (3.77)$$

$$0 = -2f_2 n_{p0} \sin(\phi_0 - 2 \arg\langle p \rangle_0). \quad (3.78)$$

onde n_{p0} , $\arg\langle p \rangle_0$, ϕ_0 e r_0 correspondem aos valores estacionários. Para (3.78) ser satisfeita, com f_2 e n_p arbitrários, devemos ter

$$\sin(\phi_0 - 2 \arg\langle p \rangle_0) = 0, \quad (3.79)$$

que implica,

$$\cos(\phi_0 - 2 \arg\langle p \rangle_0) = \pm 1. \quad (3.80)$$

Substituindo (3.79) em (3.75), obtemos

$$\sin(\arg(f_3) - \arg\langle p \rangle_0) = \frac{\hbar \gamma_p}{|f_3|} \sqrt{n_{p0}}, \quad (3.81)$$

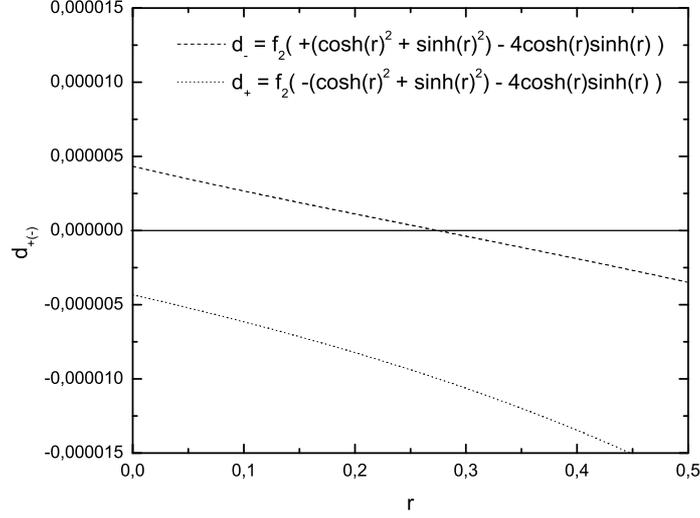


Figura 3.4: Análise gráfica do denominador $d_{(\pm)}$ da expressão (3.83). $d_{(+)}$ corresponde à escolha de $\cos(\phi_0 - 2 \arg\langle p \rangle_0) = +1$ e $d_{(-)}$ à $\cos(\phi_0 - 2 \arg\langle p \rangle_0) = -1$.

que implica

$$\begin{aligned} \cos(\arg(f_3) - \arg\langle p \rangle_0) &= \pm \sqrt{1 - \sin^2(\arg(f_3) - \arg\langle p \rangle_0)} \\ &= \pm \sqrt{1 - \frac{(\hbar\gamma_p)^2}{|f_3|^2} n_{p0}}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Substituindo (3.80) em (3.77), obtemos

$$n_{p0} = \frac{[f_1 + f_2(1 + 6\nu) \cosh^2(r_0) + f_2(5 + 6\nu) \sinh^2(r_0)] \cosh(r_0) \sinh(r_0)}{-f_2 [\pm(\cosh^2(r_0) + \sinh^2(r_0)) + 4 \cosh(r_0) \sinh(r_0)]}. \quad (3.83)$$

Pela definição devemos ter $n_p = |\langle p \rangle|^2 \geq 0$. Analisando o denominador em (3.83), $d_{(\pm)} = -f_2[\pm(\cosh^2(r_0) + \sinh^2(r_0)) + 4 \cosh(r_0) \sinh(r_0)]$ (veja a figura 3.4), observamos que para esta condição ser satisfeita devemos ter

$$\cos(\phi_0 - 2 \arg\langle p \rangle_0) = -1, \quad (3.84)$$

que implica em

$$n_{p0} = \frac{[f_1 + f_2(1 + 6\nu) \cosh^2(r_0) + f_2(5 + 6\nu) \sinh^2(r_0)] \cosh(r_0) \sinh(r_0)}{f_2 [(\cosh^2(r_0) + \sinh^2(r_0)) - 4 \cosh(r_0) \sinh(r_0)]}. \quad (3.85)$$

Substituindo (3.84) e (3.82) em (3.76), temos

$$-\delta_p - \alpha_p[2\nu \cosh^2(r) + 2(1 + \nu) \sinh^2(r) + n_p] + \alpha_p(1 + \nu) \cosh(r) \sinh(r) - \frac{1}{\sqrt{n_p}} \frac{|f_3|}{\hbar} \left(\pm \sqrt{1 - \frac{(\hbar\gamma_p)^2}{|f_3|^2} n_p} \right) = 0, \quad (3.86)$$

que podemos reescrever como

$$\delta_p + \alpha_p[2\nu \cosh^2(r) + 2(1 + \nu) \sinh^2(r) + n_p] - \alpha_p(1 + \nu) \cosh(r) \sinh(r) = \mp \sqrt{\frac{|f_3|^2}{\hbar^2 n_p} - \gamma_p^2}. \quad (3.87)$$

Elevando ao quadrado a equação acima, podemos escrever

$$\frac{|f_3|^2}{\hbar^2} = n_{p0} \{ [\delta_p + \alpha_p(2\nu \cosh^2(r) + 2(1 + \nu) \sinh^2(r) - (1 + 2\nu) \cosh(r) \sinh(r) + n_p)]^2 + \gamma_p^2 \}. \quad (3.88)$$

A equação (3.88) juntamente com (3.79), (3.81), (3.82), (3.84) e (3.85) determinam as soluções estacionárias n_{p0} , $\arg\langle p \rangle_0$, ϕ_0 e r_0 para (3.67), (3.68), (3.72) e (3.73). A equação (3.85) relaciona os valores estacionários n_{p0} e r_0 . Uma análise gráfica desta equação é mostrada na figura 3.5¹, onde observamos uma relação aproximadamente linear para r_0 pequeno ($\sim 10^{-3}$), mas que para um determinado valor de r_0 (acima de 0.25) existe uma divergência de n_p . Esta divergência ocorre no ponto em que a função $[-(\cosh^2(r_0) + \sinh^2(r_0)) + 4 \cosh(r_0) \sinh(r_0)]$ anula-se, que pode ser observado na figura 3.4. Podemos substituir (3.85) na equação (3.88), e encontrar uma relação entre $|f_3|^2$ e r_0 . Um análise gráfica desta relação, $|f_3|^2 = f(r_0)$, é mostrada na figura 3.6. Para r_0 pequeno ($\sim 10^{-3}$), temos uma curva em formato de um

¹Neste gráfico (figura 3.5) e nos demais gráficos (figuras 3.6-3.12) deste capítulo, utilizamos valores experimentais para f_1 , f_2 , f_3 , γ_p e δ_p retirados de [10]. Com exceção da figura 3.8, em todos os gráficos utilizamos $\nu = 0$.

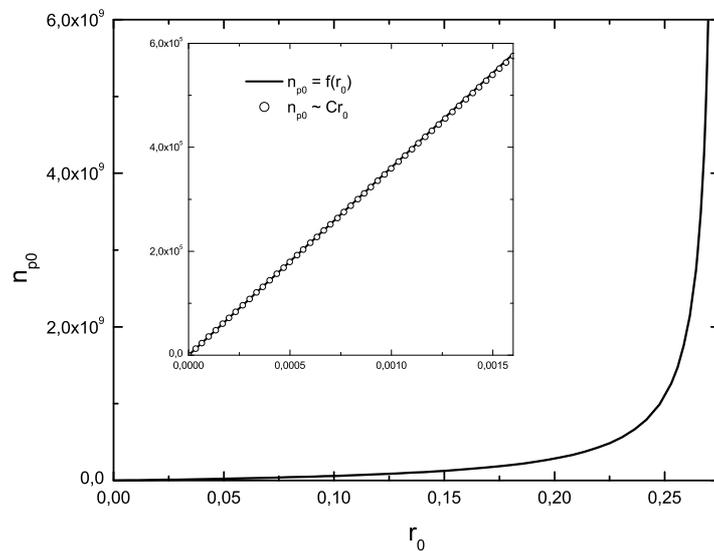


Figura 3.5: Gráficos de n_{p0} em função de r_0 a partir da equação (3.85). No destaque temos a região para r_0 pequeno ($\sim 10^{-3}$), onde comparamos as equações (3.85) e (3.92).

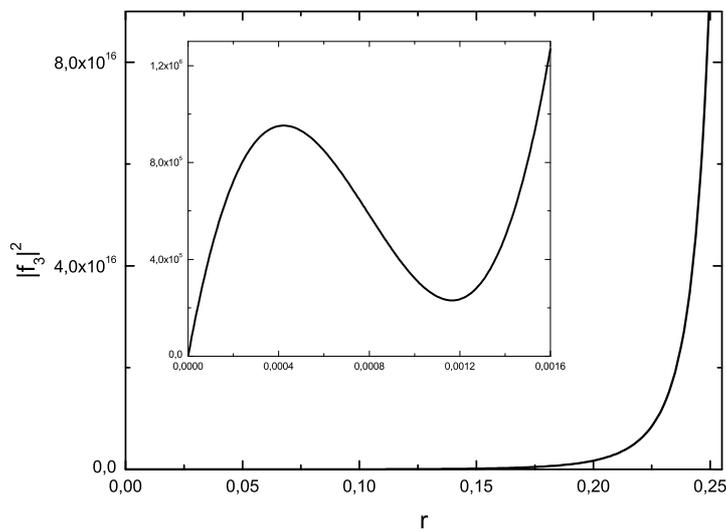


Figura 3.6: Gráfico da relação entre r_0 e $|f_3|^2$. No destaque temos a região para r_0 pequeno ($\sim 10^{-3}$).

s na horizontal, mas para um determinado valor de r_0 temos uma divergência em $|f_3|^2$, que corresponde ao mesmo ponto de divergência de n_{p0} . Na região de r_0 pequeno, sabemos que n_{p0} e r_0 são aproximadamente proporcionais, e portanto, devemos esperar também uma curva em forma de s para a relação entre $|f_3|^2$ e n_{p0} . Mas não é uma tarefa simples obter uma relação $r_0 = f(n_{p0})$ a partir de (3.85), para depois substituímos em (3.88). O que podemos fazer é utilizar o fato de que na região em que n_{p0} é linear com r_0 , temos $r_0 \ll 1$, e tomar aproximações até a primeira ordem em r_0

$$\cosh(r_0) \approx 1, \quad \sinh(r_0) \approx r_0, \quad (3.89)$$

e em (3.85),

$$n_{p0} \approx \frac{[2f_1 + 2f_2(1 + 6\nu) + 2f_2(5 + 6\nu)r_0^2]r_0}{2f_2[(1 + r_0^2) - 4r_0]} \quad (3.90)$$

$$\approx \frac{[2f_1 + 2f_2(1 + 6\nu)]r_0}{2f_2}, \quad (3.91)$$

Obtendo então,

$$r \approx Cn_{p0}, \quad (3.92)$$

com

$$C = \frac{2f_2}{[2f_1 + 2f_2(1 + 6\nu)]}. \quad (3.93)$$

Na figura 3.5 observamos uma comparação entre esta aproximação (3.92) e a relação exata. Substituindo (3.89) em (3.88), obtemos nesta aproximação de primeira ordem em r_0 ,

$$\frac{|f_3|^2}{\hbar^2} \approx n_{p0} \{ [\delta_p + \alpha_p(2\nu + 2(1 + \nu)r_0^2 - (1 + \nu)r_0 + n_{p0})]^2 + \gamma_p^2 \} \quad (3.94)$$

$$\approx n_{p0} \{ [(\delta_p + 2\nu\alpha_p) - \alpha_p(1 + \nu)r_0 + n_{p0}]^2 + \gamma_p^2 \}. \quad (3.95)$$

Usando (3.92), obtemos finalmente

$$\frac{|f_3|^2}{\hbar^2} \approx n_{p0} \{ [(\delta_p + 2\nu\alpha_p) + \alpha_p(1 - C(1 + \nu))n_{p0}]^2 + \gamma_p^2 \}, \quad (3.96)$$

uma relação entre $|f_3|^2$ e n_{p0} . Observando que

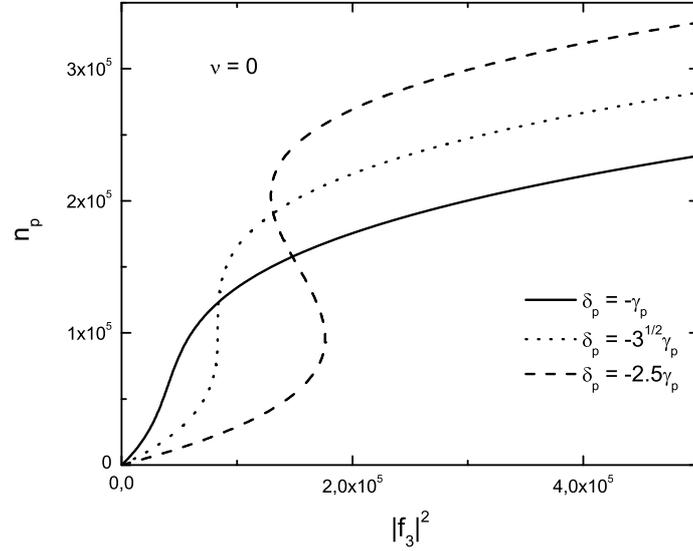


Figura 3.7: Gráfico da relação (3.96) entre $|f_3|^2$ e n_{p0} , com $\nu = 0$ e diferentes valores de δ_p .

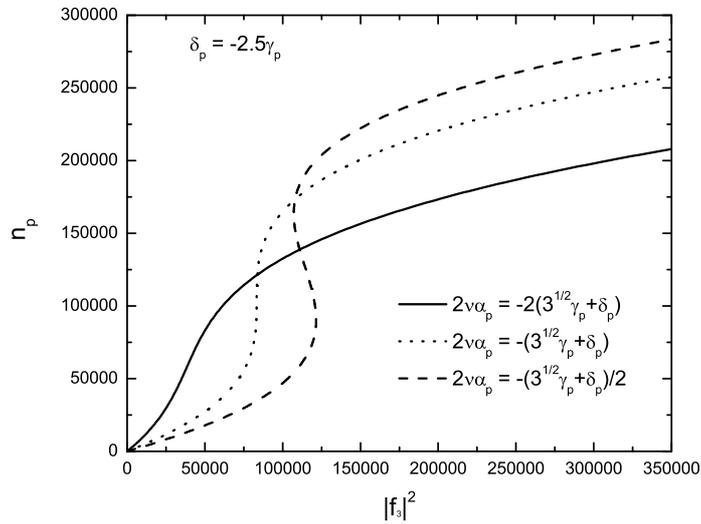


Figura 3.8: Gráfico da relação (3.96) entre $|f_3|^2$ e n_{p0} , com $\delta_p = -2.5\gamma_p$ e diferentes valores de ν .

$$\frac{|f_3|^2}{\hbar^2} = 2\gamma_l v_0^2 |E^{in}|^2 \sim I_{in}, \quad (3.97)$$

ou seja, $\frac{|f_3|^2}{\hbar^2}$ é proporcional à intensidade do campo incidente na cavidade, e observando também que, para $r \ll 1$,

$$\langle p^\dagger p \rangle = n_p - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \nu\right) \cosh(2r) \sim n_p \quad (3.98)$$

ou seja, $n_p = |\langle p \rangle|^2$ é proporcional ao número médio de polaritons na cavidade $\langle p^\dagger p \rangle$, que podemos considerar proporcional à intensidade do campo transmitido pela cavidade I_T . Então, $n_p \sim I_T$, e podemos concluir que a equação (3.96) representa na realidade uma relação entre I_{in} e I_T para a cavidade, onde observamos o comportamento característico da bi-estabilidade (figuras 3.7 e 3.8). Novamente, podemos recuperar o resultado equivalente da aproximação de estado coerente (3.26) fazendo $r = 0$ e $\nu = 0$ na equação (3.88).

As figuras (3.6) e (3.8) mostram o comportamento estacionário de n_{p0} e r_0 em função do bombeio externo sobre a cavidade. Vamos a analisar agora o comportamento estacionário das dispersões nas quadraturas \tilde{q} e \tilde{p} . É interessante observar que o parâmetro r juntamente com ϕ correspondem às variáveis de *squeezing*. Calculando as dispersões

$$\Delta\tilde{q}^2 = \frac{1}{2}[1 + 2\nu|x|^2 + 2(1 + \nu)|y|^2 - (xy^* + x^*y)(1 + 2\nu)] \quad (3.99)$$

e

$$\Delta\tilde{p}^2 = \frac{1}{2}[1 + 2\nu|x|^2 + 2(1 + \nu)|y|^2 + (xy^* + x^*y)(1 + 2\nu)], \quad (3.100)$$

usando (3.59), temos

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{q}^2 &= \frac{1}{2}[1 + 2\nu \cosh^2(r) + 2(1 + \nu) \sinh^2(r) \\ &\quad + 2(1 + 2\nu) \cos(\phi) \cosh(r) \sinh(r)] \end{aligned} \quad (3.101)$$

e

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{p}^2 &= \frac{1}{2}[1 + 2\nu \cosh^2(r) + 2(1 + \nu) \sinh^2(r) \\ &\quad - 2(1 + 2\nu) \cos(\phi) \cosh(r) \sinh(r)], \end{aligned} \quad (3.102)$$

onde podemos observar que, para $r = 0$, $\phi = 0$ e $\nu = 0$ obtemos a incerteza

mínima $\Delta q \Delta p = 1/2$, e para r e ϕ arbitrários obtemos $\Delta q, \Delta p \neq 1/\sqrt{2}$, que como já foi mencionado, interpretamos como *squeezing*.

Até agora temos discutido resultados analíticos da solução estacionária obtida de (3.75), (3.76), (3.77) e (3.78). Mas também foram obtidos resultados numéricos para a solução destas equações utilizando o programa *Maple*. A figura 3.9 mostra as soluções estacionárias obtidas n_{p0} , $\arg\langle p \rangle_0$, r_0 e ϕ_0 em função de $|f_3|^2$. Nesta figura, observamos que as quatro quantidades exibem o comportamento característico da propriedade de bi-estabilidade. Utilizando esta solução numérica podemos analisar o comportamento estacionário para as dispersões Δq , Δp e para a incerteza $\Delta q \Delta p$. As figuras 3.10 e 3.11 mostram o resultado obtido. Na figura 3.10 é mostrada uma curva da bi-estabilidade de n_{p0} em comparação com as dispersões e a incerteza, onde podemos observar que para o ramo inferior $\Delta q \approx 1/\sqrt{2}$, $\Delta p \approx 1/\sqrt{2}$, ou seja, praticamente não temos *squeezing*. No ramo intermediário temos Δq aumentando enquanto Δp diminui, mas com a incerteza $\Delta q \Delta p$ sempre crescendo. No ramo superior a situação se inverte entre Δq e Δp , com a incerteza oscilando um pouco, mas voltando a crescer. Podemos observar esse mesmo comportamento na figura 3.11, onde temos as dispersões e a incerteza como função de $|f_3|^2$.

Em todas as soluções estacionárias obtidas, n_{p0} , $\arg\langle p \rangle_0$, r_0 e ϕ_0 na figura 3.9, e inclusive a incerteza na figura 3.11, onde temos a variação com o bombeio externo observamos o comportamento característico da bi-estabilidade. No tópico que segue, analisamos as condições para ocorrência e de estabilidade destas curvas.

3.2.4 Análise de estabilidade

Analisamos primeiro a condição para ocorrer a bi-estabilidade na curva $|f_3|^2 = f(n_{p0})$. Nesta situação, a curva apresenta dois pontos extremos, que podem ser determinados através de

$$\frac{d|f_3|^2}{dn_{p0}} = 0. \quad (3.103)$$

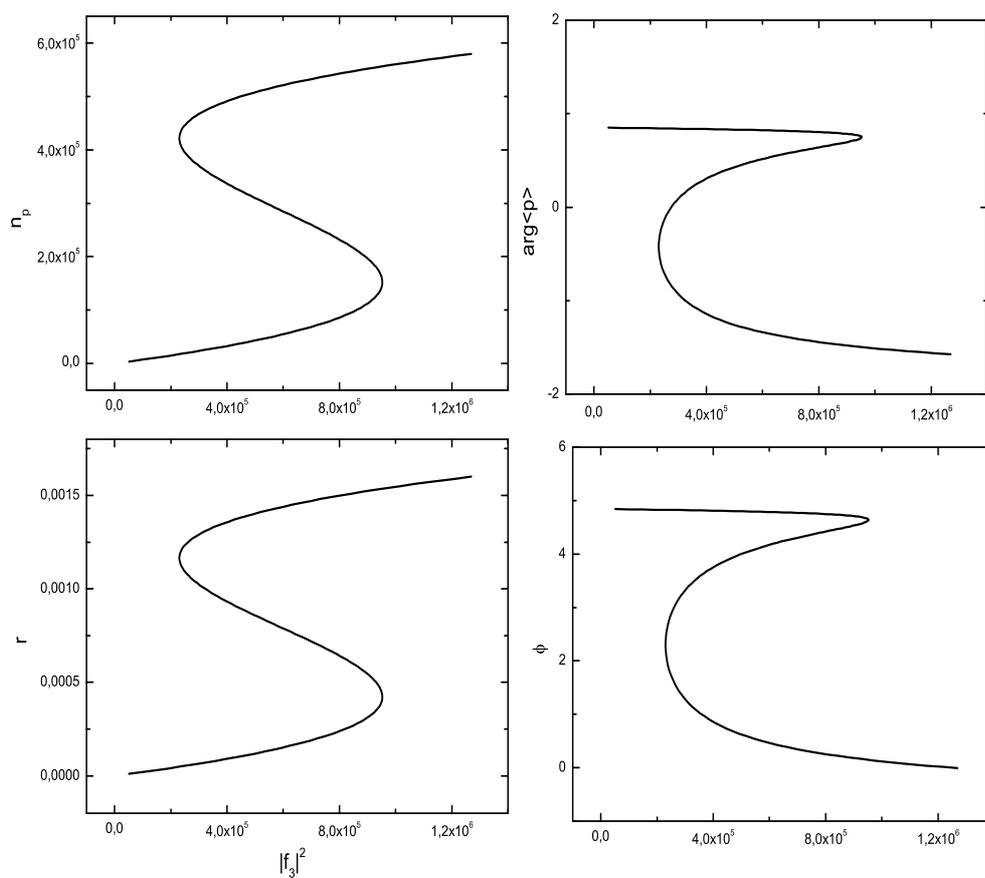


Figura 3.9: Solução numérica obtida para n_{p0} , $\arg\langle p \rangle_0$, r_0 e ϕ_0 em função de $|f_3|^2$ utilizando o *Maple*.

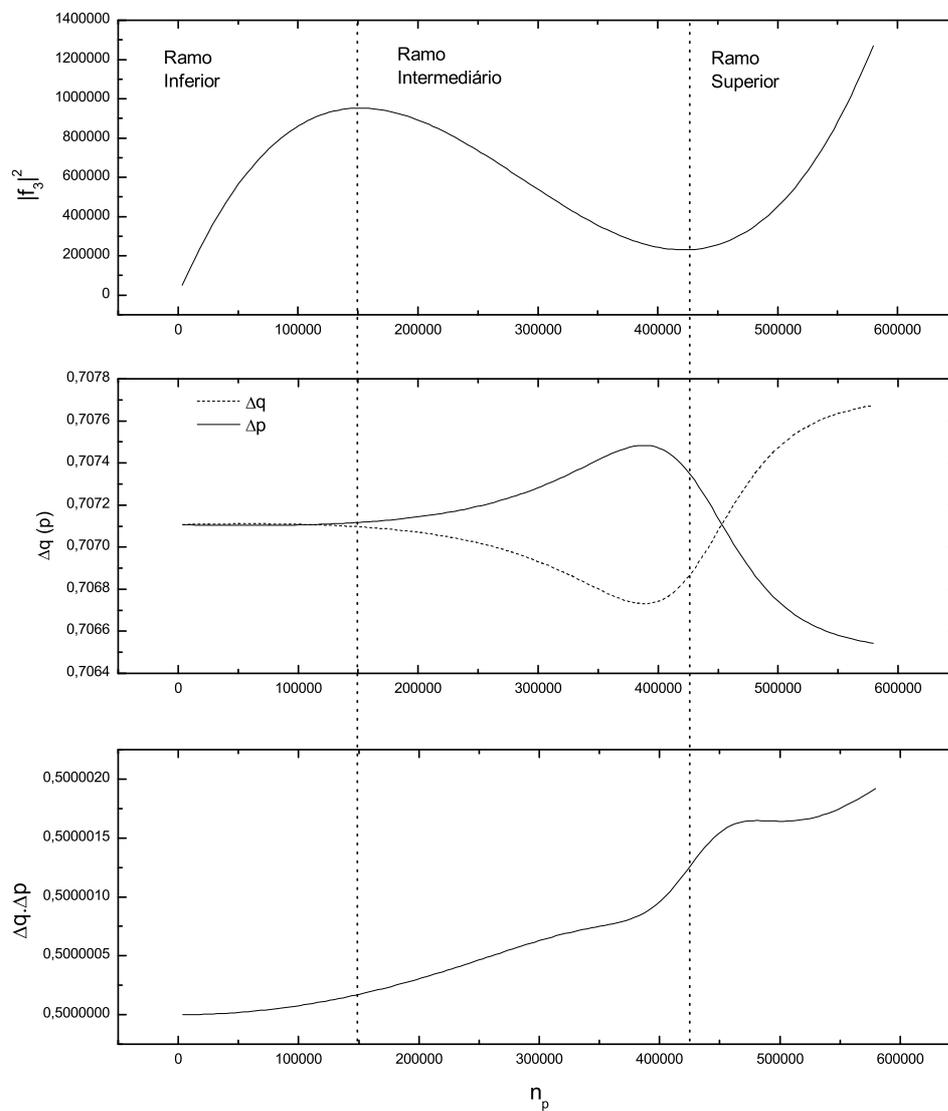


Figura 3.10: Gráficos das dispersões Δq , Δp e da incerteza $\Delta q \Delta p$ como função de n_{p0} , obtidos a partir da solução numérica de n_{p0} , $\arg\langle p \rangle_0$, r_0 e ϕ_0 . Para comparação, observamos também a curva de bi-estabilidade e suas diferentes regiões.

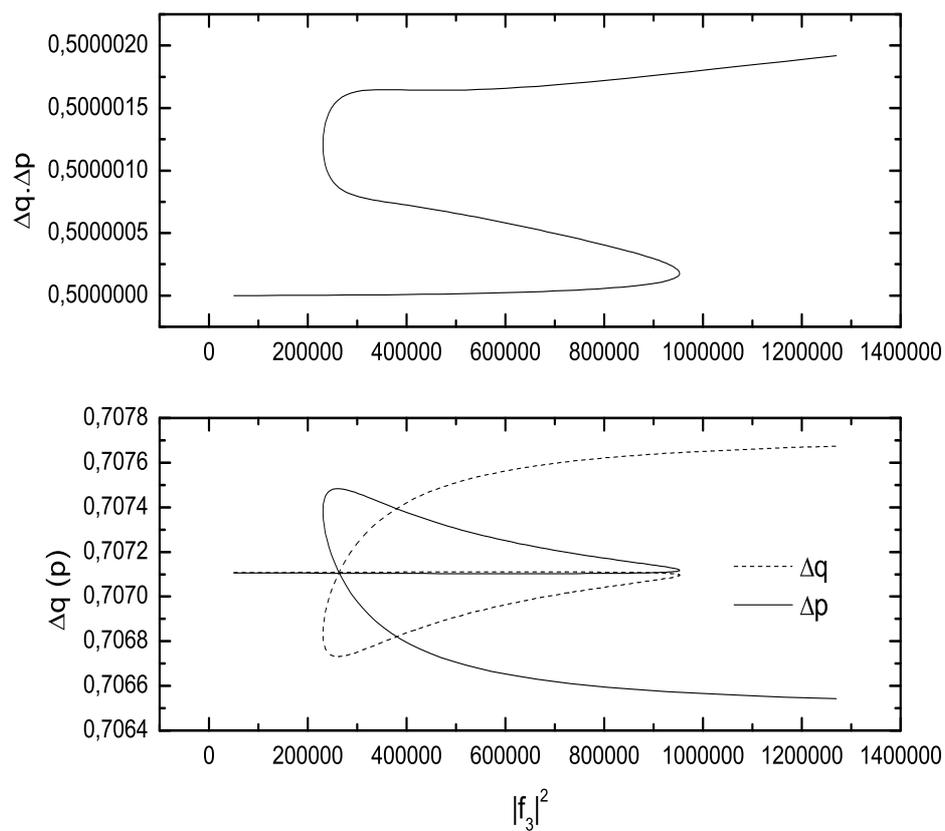


Figura 3.11: Gráficos das dispersões Δq , Δp e da incerteza $\Delta q \Delta p$ como função de $|f_3|^2$.

Como a bi-estabilidade se manifesta na região de r_0 pequeno, usamos a expressão aproximada (3.96) em (3.103), que fornece

$$3n_{p0}^2\alpha_p^2[1 - C(1 + 2\nu)]^2 + 4(\delta_p + 2\nu\alpha_p)\alpha_p[1 - C(1 + 2\nu)]n_{p0} + (\delta_p + 2\nu\alpha)^2 + \gamma_p^2 = 0. \quad (3.104)$$

O discriminante da equação acima é dado por

$$\Delta = 4\alpha_p^2(1 - C(1 + 2\nu))^2[(\delta_p + 2\nu\alpha_p)^2 - 3\gamma_p^2]. \quad (3.105)$$

Para termos dois pontos extremos, situação em que ocorre a bi-estabilidade, devemos ter o discriminante $\Delta > 0$, que implica

$$(\delta_p + 2\nu\alpha_p)^2 - 3\gamma_p^2 > 0 \quad \therefore \quad (\delta_p + 2\nu\alpha_p)^2 > 3\gamma_p^2. \quad (3.106)$$

Nesse caso, os valores n_{p0} correspondentes aos pontos extremos são

$$n_{p0(\pm)} = \frac{-2(\delta_p + 2\nu\alpha_p) \pm \sqrt{(\delta_p + 2\nu\alpha_p)^2 - 3\gamma_p^2}}{3\alpha_p[1 - C(1 + 2\nu)]}. \quad (3.107)$$

Como n_{p0} representa o valor médio do número de polaritons, seu valor deve ser positivo, desse modo devemos ter em (3.107)²,

$$(\delta_p + 2\nu\alpha_p) \leq 0. \quad (3.108)$$

Para satisfazer as duas condições (3.106) e (3.108), devemos ter

$$(\delta_p + 2\nu\alpha_p) < -\sqrt{3}\gamma_p, \quad (3.109)$$

esta é então, a condição para que ocorra a bi-estabilidade. Nos gráficos 3.7 e 3.8, observamos que esta condição é satisfeita. Observe que para um estado puro, $\nu = 0$, esta condição torna-se idêntica à (2.58) obtida na aproximação do estado coerente.

Analisaremos agora a condição de estabilidade da solução estacionária obtida para n_p , $\arg\langle p \rangle$, ϕ e r . Faremos isto, do mesmo modo que na seção

²Observe que devemos ter também em (3.107), $1 > C(1 + 2\nu)$. Mas essa condição, para os valores experimentais que usamos [10], é sempre satisfeita.

2.1.3, tomando uma pequena variação em torno da solução estacionária

$$\begin{aligned} n_p(t) &= n_{p0} + \delta n_p(t), \\ \arg\langle p \rangle(t) &= \arg\langle p \rangle_0 + \delta \arg\langle p \rangle(t), \\ \phi(t) &= \phi_0 + \delta \phi(t), \\ r(t) &= r_0(t) + \delta r, \end{aligned} \quad (3.110)$$

onde δn_p , $\delta \arg\langle p \rangle$, $\delta \phi$ e δr correspondem a pequenas variações. Substituindo (3.110) nas equações (3.67), (3.68), (3.72) e (3.73), e tomando até a primeira ordem nas variações δ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta n_p &= \left[-2\gamma_p + \frac{|f_3|}{\hbar \sqrt{n_{p0}}} \sin(\arg(f_3) - \arg\langle p \rangle_0) \right] \delta n_p \\ + \left[4\alpha_p n_{p0} (1 + 2\nu) \cosh(r_0) \sinh(r_0) - 2 \frac{|f_3|}{\hbar} \sqrt{n_{p0}} \cos(\arg(f_3) - \arg\langle p \rangle_0) \right] \delta \arg\langle p \rangle \\ - 2\alpha_p n_{p0} (1 + 2\nu) \cosh(r_0) \sinh(r_0) \delta \phi, \end{aligned} \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta \arg\langle p \rangle &= \left[-\alpha_p + \frac{|f_3|}{2\hbar (n_{p0})^{3/2}} \cos(\arg(f_3) - \arg\langle p \rangle_0) \right] \delta n_p \\ - \frac{|f_3|}{\hbar \sqrt{n_{p0}}} \sin(\arg(f_3) - \arg\langle p \rangle_0) \delta \arg\langle p \rangle + [-4\alpha_p (1 + 2\nu) \cosh(r_0) \sinh(r_0) \\ + \alpha_p (1 + 2\nu) (\cosh^2(r_0) + \sinh^2(r_0))] \delta r, \end{aligned} \quad (3.112)$$

$$\frac{d}{dt} \delta r = -4f_2 n_{p0} \delta \arg\langle p \rangle + 2f_2 n_{p0} \delta \phi, \quad (3.113)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta \phi &= 2f_2 \left[\left(\frac{\cosh^2(r_0) + \sinh^2(r_0)}{\cosh(r_0) \sinh(r_0)} \right) - 4 \right] \delta n_p \\ - 2f_2 \left[\frac{n_{p0}}{\cosh^2(r_0) \sinh^2(r_0)} + 2(6 + 12\nu) \cosh(r_0) \sinh(r_0) \right] \delta r, \end{aligned} \quad (3.114)$$

onde usamos (3.75), (3.76), (3.77) e (3.78). Podemos escrever as equações

(3.111), (3.112), (3.113) e (3.114), na forma matricial

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta n_p \\ \delta \arg\langle p \rangle \\ \delta r \\ \delta \phi \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \delta n_p \\ \delta \arg\langle p \rangle \\ \delta r \\ \delta \phi \end{pmatrix}. \quad (3.115)$$

Supondo a forma exponencial para as variações

$$\delta n_p \sim e^{\lambda t}, \quad \delta \arg\langle p \rangle \sim e^{\lambda t}, \quad \delta r \sim e^{\lambda t}, \quad \delta \phi \sim e^{\lambda t}, \quad (3.116)$$

a equação (3.115) resulta em

$$\lambda \begin{pmatrix} \delta n_p \\ \delta \arg\langle p \rangle \\ \delta r \\ \delta \phi \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \delta n_p \\ \delta \arg\langle p \rangle \\ \delta r \\ \delta \phi \end{pmatrix}. \quad (3.117)$$

Os expoentes λ correspondem assim, aos autovalores da matriz M . Pela forma escolhida para as variações, $\delta f \sim e^{\lambda t} = e^{Re(\lambda)t + iIm(\lambda)t}$, devemos ter a parte real dos expoentes $Re(\lambda)$ negativas, para que tenhamos em (3.110)

$$n_p(t) \rightarrow n_{p0}, \quad \arg\langle p \rangle(t) \rightarrow \arg\langle p \rangle_0, \quad \phi(t) \rightarrow \phi_0, \quad r(t) \rightarrow r_0(t), \quad (3.118)$$

para um tempo suficientemente longo. Nessa situação, o efeito da variação é apenas uma oscilação, com frequência $Im(\lambda)$, amortecida com o tempo, em torno da solução estacionária, o que caracteriza a estabilidade da solução estacionária. No caso contrário, $Re(\lambda) > 0$, as variações divergem exponencialmente da solução estacionária, caracterizando a instabilidade. Realizamos um cálculo numérico, usando o programa *Maple*, dos autovalores da matriz M . Os resultados obtidos, mostrando a variação da parte real de λ em função do valor estacionário de n_p , estão ilustrados na figura 3.12. Para comparação, vemos também nesta figura, a curva da bi-estabilidade, onde podemos separar as regiões de estabilidade, $Re(\lambda) < 0$, e de instabilidade, $Re(\lambda) > 0$. Nesta figura, é importante ressaltar que a linha de autovalores que vista próximo à origem é de valores negativos, mas da ordem de 10^{-12} . Observamos assim, que o ramo intermediário é instável e que os ramos superior e inferior da curva são de fato estáveis, o que caracteriza a situação de bi-estabilidade.

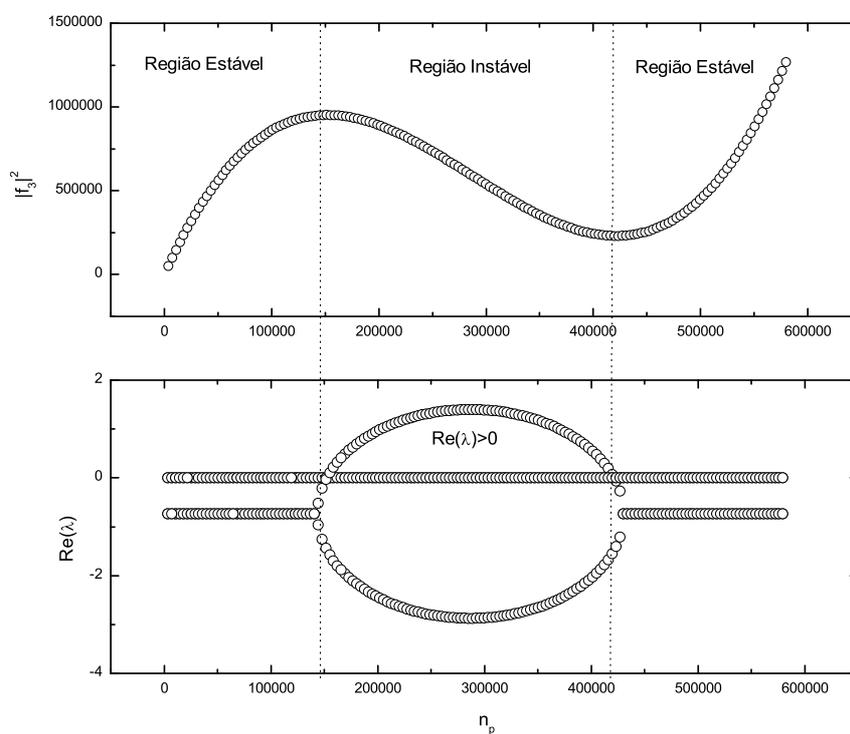


Figura 3.12: Parte real de λ em função do valor estacionário de n_p . Para comparação, observamos também a curva de bi-estabilidade e suas diferentes regiões.

Com essa análise de estabilidade encerramos nossa discussão da aplicação da aproximação Gaussiana para os polaritons em uma microcavidade semicondutora. No próximo capítulo apresentamos nossas conclusões sobre este trabalho.

Conclusões

Neste trabalho vimos como é possível a aplicação da aproximação Gaussiana para a descrição da bi-estabilidade óptica gerada por poláritons numa microcavidade semicondutora. Com esta aproximação generalizamos o campo médio de estado coerente para o campo médio de um estado gaussiano, o que possibilitou a adição de mais propriedades quânticas na descrição do problema, o *squeezing* e a possibilidade de estados mistos. Assim, foi possível verificar todos os resultados da aproximação de estado coerente, tomando a situação da ausência de *squeezing* e de um estado quântico puro na nossa aproximação.

Como resultado da aproximação, obtivemos a descrição das equações de evolução temporal em termos do valor esperado do Hamiltoniano, na forma de equações de Hamilton clássicas. As variáveis canonicamente conjugadas neste caso foram as quadraturas do campo de poláritons p , e as variáveis associadas ao *squeezing* Q e P da nossa descrição Gaussiana.

Pela solução estacionária das equações de evolução temporal obtidas pela aproximação, demonstramos a propriedade de bi-estabilidade para o sistema. Verificamos esta propriedade em todos os parâmetros utilizados, em n_p e $\arg\langle p \rangle$ associados ao valor esperado $\langle p \rangle$, e em r e ϕ associados ao *squeezing*. Dessa forma, obtemos a curva característica da bi-estabilidade entre as intensidades incidente e transmitida, e além disso, obtemos também uma curva de bi-estabilidade para a incerteza nas quadraturas do campo em função do bombeio externo na cavidade. Nesta curva, observamos um ramo inferior em que praticamente não existe *squeezing* e um ramo superior em que verificamos o *squeezing*.

Fizemos ainda uma análise de estabilidade, tomando uma pequena variação em torno das soluções estacionárias obtidas, e linearizando as equações de evolução temporal. Esta análise comprovou a estabilidade dos ramos superior e inferior, e a instabilidade do ramo intermediário da curva característica de bi-estabilidade obtida pela nossa aproximação, comprovando assim a propriedade para o sistema.

Tabela de Traços

Neste apêndice listamos os traços envolvendo η que são utilizados nos cálculos da aproximação Gaussiana¹:

1. $Tr(\rho_0\eta^\dagger\eta) = \nu$
2. $Tr(\rho_0\eta\eta^\dagger) = 1 + \nu$
3. $Tr(\rho_0\eta^\dagger\eta^\dagger\eta\eta) = 2\nu^2$
4. $Tr(\rho_0\eta^\dagger\eta\eta^\dagger\eta) = \nu(1 + \nu) + \nu^2$
5. $Tr(\rho_0\eta^\dagger\eta\eta\eta^\dagger) = 2\nu(1 + \nu)$
6. $Tr(\rho_0\eta\eta^\dagger\eta\eta^\dagger) = (1 + \nu)^2 + \nu(1 + \nu)$
7. $Tr(\rho_0\eta\eta^\dagger\eta^\dagger\eta) = 2\nu(1 + \nu)$
8. $Tr(\rho_0\eta\eta\eta^\dagger\eta^\dagger) = 2(1 + \nu)^2$

Todos os demais traços, até a quarta ordem em η , se anulam.

¹Estas expressões foram derivadas a partir do Apêndice B de [7].

Valor esperado do Hamiltoniano

Podemos escrever o Hamiltoniano (3.18) para os poláritons na microca-
vidade como

$$H = f_1 p^\dagger p + f_2 p^\dagger p^\dagger p p + f_3 p^\dagger + f_3^* p, \quad (\text{B.1})$$

onde

$$f_1 = E_{LP}(0), \quad f_2 = \frac{V_0^{PP}}{2}, \quad f_3 = -i\hbar\sqrt{2\lambda_l v_0} E^{in}. \quad (\text{B.2})$$

Fazendo o deslocamento

$$b = p - \langle p \rangle \quad \therefore \quad p = b + \langle p \rangle \quad (\text{B.3})$$

em (B.1), obtemos

$$\begin{aligned} H = & g_1 b^\dagger b^\dagger b b + g_2 b^\dagger b^\dagger b + g_3 b^\dagger b b + g_4 b^\dagger b^\dagger \\ & + g_5 b^\dagger b + g_6 b b + g_7 b^\dagger + g_8 b + g_9, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

onde

$$\begin{aligned} g_1 = & f_2, \quad g_2 = 2\langle p \rangle f_2, \quad g_3 = 2\langle p \rangle^* f_2, \\ g_4 = & \langle p \rangle^2 f_2, \quad g_5 = f_1 + 4|\langle p \rangle|^2 f_2, \quad g_6 = f_2(\langle p \rangle^*)^2, \\ g_7 = & \langle p \rangle f_1 + 2\langle p \rangle |\langle p \rangle|^2 f_2 + f_3, \quad g_8 = \langle p \rangle^* f_1 + 2\langle p \rangle^* |\langle p \rangle|^2 f_2 + f_3^*, \\ g_9 = & f_1 |\langle p \rangle|^2 + f_2 |\langle p \rangle|^4 + f_3 \langle p \rangle^* + f_3^* \langle p \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Fazendo a transformação de Bogolyubov

$$b = x\eta - y^*\eta^\dagger, \quad b^\dagger = x^*\eta^\dagger - y\eta \quad \therefore \quad (\text{B.6})$$

$$\eta = x^*b + y^*b^\dagger, \quad \eta^\dagger = yb + x^*b^\dagger, \quad (\text{B.7})$$

podemos reescrever (B.4) como

$$H = H_3 + H_4, \quad (\text{B.8})$$

com H_3 contendo os termos até terceira ordem em η ,

$$\begin{aligned} H_3 = & h_1\eta^\dagger\eta^\dagger\eta + h_2\eta^\dagger\eta^\dagger\eta^\dagger + h_3\eta^\dagger\eta\eta + h_4\eta^\dagger\eta\eta^\dagger \\ & + h_5\eta\eta^\dagger\eta + h_6\eta\eta^\dagger\eta^\dagger + h_7\eta\eta\eta + h_8\eta\eta\eta^\dagger + h_9\eta^\dagger\eta^\dagger \\ & + h_{10}\eta^\dagger\eta + h_{11}\eta\eta^\dagger + h_{12}\eta\eta + h_{13}\eta^\dagger + h_{14}\eta + g_9, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

onde

$$\begin{aligned} h_1 = g_2(x^*)^2x - g_3|x|^2y^*, & \quad h_2 = g_3x^*(y^*)^2 - g_2(x^*)^2y^*, \\ h_3 = g_3x^*x^2 - g_2|x|^2y, & \quad h_4 = g_2x^*|y|^2 - g_3|x|^2y^*, \\ h_5 = g_3x|y|^2 - g_2|x|^2y, & \quad h_6 = g_2x^*|y|^2 - g_3y(y^*)^2, \\ h_7 = g_2xy^2 - g_3x^2y, & \quad h_8 = g_3x|y|^2 - g_2y^2y^*, \\ h_9 = g_4(x^*)^2 - g_5x^*y^* + g_6(y^*)^2, & \quad h_{10} = g_5|x|^2 - g_4x^*y - g_6xy^*, \\ h_{11} = g_5|y|^2 - g_4x^*y - g_6xy^*, & \quad h_{12} = g_4y^2 - g_5xy + g_6x^2, \\ h_{13} = g_7x^* - g_8y^*, & \quad h_{14} = g_8x - g_7y, \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

e com H_4 contendo os termos de quarta ordem,

$$\begin{aligned} H_4 = & g_1\{|x|^4\eta^\dagger\eta^\dagger\eta\eta - x^*y^*|x|^2\eta^\dagger\eta^\dagger\eta\eta^\dagger - x^*y^*|x|^2\eta^\dagger\eta^\dagger\eta^\dagger\eta + (x^*y^*)^2\eta^\dagger\eta^\dagger\eta^\dagger\eta^\dagger \\ & - xy|x|^2\eta\eta^\dagger\eta\eta + |x|^2|y|^2\eta\eta^\dagger\eta\eta^\dagger + |x|^2|y|^2\eta\eta^\dagger\eta^\dagger\eta - x^*y^*|y|^2\eta\eta^\dagger\eta^\dagger\eta^\dagger \\ & - xy|x|^2\eta^\dagger\eta\eta\eta + |x|^2|y|^2\eta^\dagger\eta\eta\eta^\dagger + |x|^2|y|^2\eta^\dagger\eta\eta^\dagger\eta - x^*y^*|y|^2\eta^\dagger\eta\eta^\dagger\eta^\dagger \\ & + x^2y^2\eta\eta\eta\eta - xy|y|^2\eta\eta\eta\eta^\dagger - xy|y|^2\eta\eta\eta^\dagger\eta + |y|^4\eta\eta\eta^\dagger\eta^\dagger\}. \end{aligned}$$

Calculando o valor esperado

$$\langle H \rangle = Tr(\rho_0 H) = Tr(\rho_0 H_3) + Tr(\rho_0 H_4), \quad (\text{B.11})$$

temos

$$\begin{aligned}
Tr(\rho_0 H_3) &= h_1 Tr(\rho_0 \eta^\dagger \eta^\dagger \eta) + h_2 Tr(\rho_0 \eta^\dagger \eta^\dagger \eta^\dagger) + h_3 Tr(\rho_0 \eta^\dagger \eta \eta) \\
&+ h_4 Tr(\rho_0 \eta^\dagger \eta \eta^\dagger) + h_5 Tr(\rho_0 \eta \eta^\dagger \eta) + h_6 Tr(\rho_0 \eta \eta^\dagger \eta^\dagger) + h_7 Tr(\rho_0 \eta \eta \eta) \\
&+ h_8 Tr(\rho_0 \eta \eta \eta^\dagger) + h_9 Tr(\rho_0 \eta^\dagger \eta^\dagger) + h_{10} Tr(\rho_0 \eta^\dagger \eta) + h_{11} Tr(\rho_0 \eta \eta^\dagger) \\
&+ h_{12} Tr(\rho_0 \eta \eta) + h_{13} Tr(\rho_0 \eta^\dagger) + h_{14} Tr(\rho_0 \eta) + g_9 Tr(\rho_0) \\
&= (f_1 + 4|\langle p \rangle|^2 f_2)[|x|^2 \nu + |y|^2(1 + \nu)] - [\langle p \rangle^2 f_2 x^* y + f_2 (\langle p \rangle^*)^2 x y^*](1 + 2\nu) \\
&\quad + f_1 |\langle p \rangle|^2 + f_2 |\langle p \rangle|^4 + f_3 \langle p \rangle^* + f_3^* \langle p \rangle
\end{aligned} \tag{B.12}$$

e

$$\begin{aligned}
Tr(\rho_0 H_4) &= g_1 \{ |x|^4 Tr(\rho_0 \eta^\dagger \eta^\dagger \eta \eta) - x^* y^* |x|^2 Tr(\rho_0 \eta^\dagger \eta^\dagger \eta \eta^\dagger) \\
&- x^* y^* |x|^2 Tr(\rho_0 \eta^\dagger \eta^\dagger \eta^\dagger \eta) + (x^* y^*)^2 Tr(\rho_0 \eta^\dagger \eta^\dagger \eta^\dagger \eta^\dagger) - xy |x|^2 Tr(\rho_0 \eta \eta^\dagger \eta \eta) \\
&+ |x|^2 |y|^2 Tr(\rho_0 \eta \eta^\dagger \eta \eta^\dagger) + |x|^2 |y|^2 Tr(\rho_0 \eta \eta^\dagger \eta^\dagger \eta) - x^* y^* |y|^2 Tr(\rho_0 \eta \eta^\dagger \eta^\dagger \eta^\dagger) \\
&- xy |x|^2 Tr(\rho_0 \eta^\dagger \eta \eta \eta) + |x|^2 |y|^2 Tr(\rho_0 \eta^\dagger \eta \eta \eta^\dagger) + |x|^2 |y|^2 Tr(\rho_0 \eta^\dagger \eta \eta^\dagger \eta) \\
&- x^* y^* |y|^2 Tr(\rho_0 \eta^\dagger \eta \eta^\dagger \eta^\dagger) + x^2 y^2 Tr(\rho_0 \eta \eta \eta \eta) - xy |y|^2 Tr(\rho_0 \eta \eta \eta \eta^\dagger) \\
&\quad - xy |y|^2 Tr(\rho_0 \eta \eta \eta^\dagger \eta) + |y|^4 Tr(\rho_0 \eta \eta \eta^\dagger \eta^\dagger) \} \\
&= f_2 \{ 2\nu^2 |x|^4 + |x|^2 |y|^2 [1 + 8\nu(1 + \nu)] + 2(1 + \nu)^2 |y|^4 \}
\end{aligned} \tag{B.13}$$

onde usamos $Tr(\rho_0) = 1$, os traços fornecidos no Apêndice A e as definições (B.5) e (B.10). Escrevendo $\langle p \rangle$ em termos das quadraturas

$$\langle p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{q} + i\tilde{p}) \tag{B.14}$$

e fazendo a reparametrização (3.44)

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{1+2\nu}} \left[\left(\frac{(1+2\nu)}{2} \frac{1}{Q} + Q \right) + iP \right], \tag{B.15}$$

$$y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{1+2\nu}} \left[\left(\frac{(1+2\nu)}{2} \frac{1}{Q} - Q \right) + iP \right], \tag{B.16}$$

obtemos

$$|\langle p \rangle|^2 = \frac{1}{2}(\tilde{q}^2 + \tilde{p}^2), \quad |\langle p \rangle|^4 = \frac{1}{4}(\tilde{q}^4 + 2\tilde{q}^2 \tilde{p}^2 + \tilde{p}^4) \tag{B.17}$$

$$\langle p \rangle^2 = \frac{1}{2}(\tilde{q}^2 - \tilde{p} + i2\tilde{q}\tilde{p}), \quad (\langle p \rangle^*)^2 = \frac{1}{2}(\tilde{q}^2 - \tilde{p} - i2\tilde{q}\tilde{p}) \quad (\text{B.18})$$

$$|x|^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1+2\nu} \left[\frac{(1+2\nu)^2}{4} \frac{1}{Q^2} + Q^2 + P^2 \right] + 1 \right\}, \quad (\text{B.19})$$

$$|y|^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1+2\nu} \left[\frac{(1+2\nu)^2}{4} \frac{1}{Q^2} + Q^2 + P^2 \right] - 1 \right\} \quad (\text{B.20})$$

$$x^*y = \frac{1}{1+2\nu} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{(1+2\nu)^2}{4} \frac{1}{Q^2} - Q^2 + P^2 \right] + iPQ \right\} \quad (\text{B.21})$$

$$xy^* = \frac{1}{1+2\nu} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{(1+2\nu)^2}{4} \frac{1}{Q^2} - Q^2 + P^2 \right] - iPQ \right\}, \quad (\text{B.22})$$

e então,

$$\begin{aligned} Tr(\rho_0 H_3) = & \\ & \frac{1}{2}[f_1 + 2(\tilde{q}^2 + \tilde{p}^2)f_2] \left\{ \left[\frac{(1+2\nu)^2}{4} \frac{1}{Q^2} + Q^2 + P^2 \right] - 1 \right\} \\ & - \frac{1}{2}f_2(\tilde{q}^2 - \tilde{p}^2) \left[\frac{(1+2\nu)^2}{4} \frac{1}{Q^2} - Q^2 + P^2 \right] + 2f_2\tilde{p}\tilde{q}PQ + \frac{1}{2}f_1(\tilde{q}^2 + \tilde{p}^2) \\ & + \frac{1}{4}f_2(\tilde{q}^2 - \tilde{p}^2)^2 + \sqrt{2}\tilde{q}Re(f_3) + \sqrt{2}\tilde{p}Im(f_3) \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

$$\begin{aligned} Tr(\rho_0 H_4) = & \\ & \frac{f_2}{4} \frac{1}{(1+2\nu)^2} \left[\frac{(1+2\nu)^2}{4} \frac{1}{Q^2} + Q^2 + P^2 \right]^2 \{2\nu^2 + [1 + 8\nu(1 + \nu)] + 2(1 + \nu)^2\} \\ & + f_2 \frac{1}{(1+2\nu)} \left[\frac{(1+2\nu)^2}{4} \frac{1}{Q^2} + Q^2 + P^2 \right] [\nu^2 - (1 + \nu)^2] \\ & + \frac{f_2}{4} \{2\nu^2 - (1 + 8\nu(1 + \nu)) + (1 + \nu)^2\}. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

onde usamos $f_3 = Re(f_3) + iIm(f_3)$. Com (B.23) e (B.24) em (B.11), temos o valor esperado do hamiltoniano em termos das quadraturas \tilde{q} e \tilde{p} e das variáveis de squeezing Q e P .

Cálculos de $Tr([p, H]\rho_0)$, $Tr(\frac{d}{dt}(\eta\eta)\rho_0)$ e $Tr([\eta\eta, H]\rho_0)$

Neste apêndice demonstramos o cálculo de alguns traços que são utilizados no capítulo 3: (a) $Tr([p, H]\rho_0)$, (b) $Tr(\frac{d}{dt}\eta\eta\rho_0)$ e (c) $Tr([\eta\eta, H]\rho_0)$.

(a) Considerando o deslocamento

$$b = p - \langle p \rangle \quad \therefore \quad p = b + \langle p \rangle \quad (C.1)$$

e a transformação de Bogolyubov

$$b = x\eta - y^*\eta^\dagger, \quad b^\dagger = x^*\eta^\dagger - y\eta \quad (C.2)$$

$$\eta = x^*b + y^*b^\dagger, \quad \eta^\dagger = yb + xb^\dagger, \quad (C.3)$$

podemos escrever

$$p = x\eta - y^*\eta^\dagger + \langle p \rangle, \quad (C.4)$$

Usando (C.4) e a expressão do Hamiltoniano em termos de η do apêndice B, (B.8), podemos calcular o comutador $[p, H]$. Observando que o comutador de p com um termo de quarta ordem em η resulta em um termo de terceira ordem, como por exemplo,

$$[p, \eta\eta\eta\eta] = -y^*[\eta^\dagger, \eta\eta\eta\eta] = 4y^*\eta\eta\eta, \quad (C.5)$$

e considerando que, de acordo com o apêndice A, o traço de termos de terceira

em η são nulos, devemos ter, então,

$$Tr([p, H_4]\rho_0) = 0 \quad (C.6)$$

onde H_4 contém os termos de quarta ordem em η de H . Dessa forma, apenas os termos resultantes de $[p, H_3]$, onde H_3 contém os termos até terceira ordem, contribuirão para o traço $Tr([p, H]\rho_0)$. Com H_3 dado por (B.9) do apêndice B, calculamos

$$\begin{aligned} [p, H_3] &= x[\eta, H_3] - y^*[\eta^\dagger, H_3] \\ &= x\{h_1[\eta, \eta^\dagger\eta^\dagger\eta] + h_2[\eta, \eta^\dagger\eta^\dagger\eta^\dagger] + h_3[\eta, \eta^\dagger\eta\eta] \\ &\quad + h_4[\eta, \eta^\dagger\eta\eta^\dagger] + h_5[\eta, \eta\eta^\dagger\eta] + h_6[\eta, \eta\eta^\dagger\eta^\dagger] + h_8[\eta, \eta\eta\eta^\dagger] \\ &\quad + h_9[\eta, \eta^\dagger\eta^\dagger] + h_{10}[\eta, \eta^\dagger\eta] + h_{11}[\eta, \eta\eta^\dagger] + h_{13}[\eta, \eta^\dagger]\} \\ &\quad - y^*\{h_1[\eta^\dagger, \eta^\dagger\eta^\dagger\eta] + h_3[\eta^\dagger, \eta^\dagger\eta\eta] + h_4[\eta^\dagger, \eta^\dagger\eta\eta^\dagger] + h_5[\eta^\dagger, \eta\eta^\dagger\eta] \\ &\quad + h_6[\eta^\dagger, \eta\eta^\dagger\eta^\dagger] + h_7[\eta^\dagger, \eta\eta\eta] + h_8[\eta^\dagger, \eta\eta\eta^\dagger] + h_{10}[\eta^\dagger, \eta^\dagger\eta] \\ &\quad + h_{11}[\eta^\dagger, \eta\eta^\dagger] + h_{12}[\eta^\dagger, \eta\eta] + h_{14}[\eta^\dagger, \eta]\}. \end{aligned} \quad (C.7)$$

Usando os comutadores

$$[\eta, \eta\eta^\dagger] = \eta, \quad [\eta^\dagger, \eta\eta^\dagger] = -\eta^\dagger, \quad (C.8)$$

$$[\eta, \eta^\dagger\eta] = \eta, \quad [\eta^\dagger, \eta^\dagger\eta] = -\eta^\dagger, \quad (C.9)$$

$$[\eta, \eta^\dagger\eta^\dagger] = 2\eta^\dagger, \quad [\eta^\dagger, \eta\eta] = -2\eta, \quad (C.10)$$

$$[\eta, \eta\eta\eta^\dagger] = \eta\eta, \quad [\eta^\dagger, \eta\eta\eta^\dagger] = -2\eta\eta^\dagger, \quad (C.11)$$

$$[\eta, \eta\eta^\dagger\eta^\dagger] = 2\eta\eta^\dagger, \quad [\eta^\dagger, \eta\eta^\dagger\eta^\dagger] = -\eta^\dagger\eta^\dagger, \quad (C.12)$$

$$[\eta, \eta\eta^\dagger\eta] = \eta\eta, \quad [\eta^\dagger, \eta\eta^\dagger\eta] = -\eta^\dagger\eta - \eta\eta^\dagger, \quad (C.13)$$

$$[\eta, \eta^\dagger\eta\eta^\dagger] = \eta\eta^\dagger + \eta^\dagger\eta, \quad [\eta^\dagger, \eta^\dagger\eta\eta^\dagger] = -\eta^\dagger\eta^\dagger, \quad (C.14)$$

$$[\eta, \eta^\dagger\eta\eta] = \eta\eta, \quad [\eta^\dagger, \eta^\dagger\eta\eta] = -2\eta^\dagger\eta, \quad (C.15)$$

$$[\eta, \eta^\dagger\eta^\dagger\eta^\dagger] = 3\eta^\dagger\eta^\dagger, \quad [\eta^\dagger, \eta\eta\eta] = -3\eta\eta, \quad (C.16)$$

$$[\eta, \eta^\dagger\eta^\dagger\eta] = 2\eta^\dagger\eta, \quad [\eta^\dagger, \eta^\dagger\eta^\dagger\eta] = -\eta^\dagger\eta^\dagger, \quad (C.17)$$

e agrupando os termos em ordem de η , (C.7) resulta em

$$[p, H_3] = [x(2h_1 + h_4) + y^*(2h_3 + h_5)]\eta^\dagger\eta + [3xh_2 + y^*(h_1 + h_4 + h_6)]\eta^\dagger\eta^\dagger$$

$$\begin{aligned}
& +[x(h_3 + h_5 + h_8) + 3y^*h_7]\eta\eta + [x(h_4 + 2h_6) + y^*(h_5 + 2h_8)]\eta\eta^\dagger \\
& +[2xh_9 + y^*(h_{10} + h_{11})]\eta^\dagger + [x(h_{10} + h_{11}) + 2y^*h_{12}]\eta + [xh_{13} + y^*h_{14}]. \quad (\text{C.18})
\end{aligned}$$

Utilizando os traços do apêndice A, calculamos

$$\begin{aligned}
Tr(\rho_0[p, H]) &= Tr(\rho_0[p, H_3]) = \\
& [x(2h_1 + h_4) + y^*(2h_3 + h_5)]Tr(\rho_0\eta^\dagger\eta) + [3xh_2 + y^*(h_1 + h_4 + h_6)]Tr(\rho_0\eta^\dagger\eta^\dagger) \\
& +[x(h_3 + h_5 + h_8) + 3y^*h_7]Tr(\rho_0\eta\eta) + [x(h_4 + 2h_6) + y^*(h_5 + 2h_8)]Tr(\rho_0\eta\eta^\dagger) \\
& +[2xh_9 + y^*(h_{10} + h_{11})]Tr(\rho_0\eta^\dagger) + [x(h_{10} + h_{11}) + 2y^*h_{12}]Tr(\rho_0\eta) \\
& +[xh_{13} + y^*h_{14}]Tr(\rho_0) = [x(2h_1 + h_4) + y^*(2h_3 + h_5)]\nu \\
& +[x(h_4 + 2h_6) + y^*(h_5 + 2h_8)](1 + \nu) + [xh_{13} + y^*h_{14}]. \quad (\text{C.19})
\end{aligned}$$

Usando as definições dos parâmetros h_i , (B.10) no apêndice B, podemos reescrever (C.19) como

$$\begin{aligned}
Tr(\rho_0[p, H]) &= \{4f_2[|x|^2\nu + |y|^2(1 + \nu)] + f_1\}\langle p \rangle \\
& -2f_2xy^*(1 + 2\nu)\langle p \rangle^* + 2f_2\langle p \rangle|\langle p \rangle|^2 + f_3, \quad (\text{C.20})
\end{aligned}$$

onde também usamos a condição $|x|^2 - |y|^2 = 1$.

(b) Usando a transformação

$$b = x\eta - y^*\eta^\dagger, \quad b^\dagger = x^*\eta^\dagger - y\eta \quad \therefore \quad (\text{C.21})$$

$$\eta = x^*b + y^*b^\dagger, \quad \eta^\dagger = yb + xb^\dagger, \quad (\text{C.22})$$

podemos escrever

$$\eta\eta = (x^*)^2bb + x^*y^*bb^\dagger + x^*y^*b^\dagger b + (y^*)b^\dagger b^\dagger. \quad (\text{C.23})$$

Derivando no tempo esta equação, obtemos

$$\frac{d}{dt}\eta\eta = 2x^*\dot{x}^*bb + (\dot{x}^*y^* + x^*\dot{y}^*)(b^\dagger b + bb^\dagger) + 2y^*\dot{y}^*b^\dagger b^\dagger. \quad (\text{C.24})$$

Usando novamente a transformação (C.21), podemos escrever

$$\frac{d}{dt}\eta\eta = [2x|x|^2\dot{x}^* - 2xy(\dot{x}^*y^* + x^*\dot{y}^*) + 2y|y|^2\dot{y}^*]\eta\eta$$

$$\begin{aligned}
&+[-2|x|^2\dot{x}^*y^* + (\dot{x}^*y^* + x^*\dot{y}^*)(|x|^2 + |y|^2) - 2x^*|y|^2\dot{y}^*](\eta\eta^\dagger + \eta^\dagger\eta) \\
&+ [2x^*\dot{x}^*(y^*)^2 - 2x^*y^*(\dot{x}^*y^* + x^*\dot{y}^*) + 2(x^*)^2y^*\dot{y}^*]\eta^\dagger\eta^\dagger. \quad (C.25)
\end{aligned}$$

Tomando o traço da equação acima, obtemos

$$\begin{aligned}
Tr(\rho_0 \frac{d}{dt}\eta\eta) &= [2x|x|^2\dot{x}^* - 2xy(\dot{x}^*y^* + x^*\dot{y}^*) + 2y|y|^2\dot{y}^*]Tr(\rho_0\eta\eta) \\
&+ [-2|x|^2\dot{x}^*y^* + (\dot{x}^*y^* + x^*\dot{y}^*)(|x|^2 + |y|^2) - 2x^*|y|^2\dot{y}^*][Tr(\rho_0\eta\eta^\dagger) + Tr(\rho_0\eta^\dagger\eta)] \\
&+ [2x^*\dot{x}^*(y^*)^2 - 2x^*y^*(\dot{x}^*y^* + x^*\dot{y}^*) + 2(x^*)^2y^*\dot{y}^*]Tr(\rho_0\eta^\dagger\eta^\dagger) \\
&= (x^*\dot{y}^* - \dot{x}^*y^*)(1 + 2\nu) \quad (C.26)
\end{aligned}$$

onde usamos os traços do apêndice A e a condição $|x|^2 - |y|^2 = 1$.

(c) Usando a expressão do hamiltoniano em termos de η do apêndice B, (B.8), calculamos o comutador

$$[\eta\eta, H] = [\eta\eta, H_3] + [\eta\eta, H_4], \quad (C.27)$$

com

$$\begin{aligned}
[\eta\eta, H_3] &= h_1[\eta\eta, \eta^\dagger\eta^\dagger\eta] + h_2[\eta\eta, \eta^\dagger\eta^\dagger\eta^\dagger] + h_3[\eta\eta, \eta^\dagger\eta\eta] \\
&+ h_4[\eta\eta, \eta^\dagger\eta\eta^\dagger] + h_5[\eta\eta, \eta\eta^\dagger\eta] + h_6[\eta\eta, \eta\eta^\dagger\eta^\dagger] + h_8[\eta\eta, \eta\eta\eta^\dagger] \\
&+ h_9[\eta\eta, \eta^\dagger\eta^\dagger] + h_{10}[\eta\eta, \eta^\dagger\eta] + h_{11}[\eta\eta, \eta\eta^\dagger] + h_{13}[\eta\eta, \eta^\dagger] \quad (C.28)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[\eta\eta, H_4] &= g_1\{|x|^4[\eta\eta, \eta^\dagger\eta^\dagger\eta\eta] - x^*y^*|x|^2[\eta\eta, \eta^\dagger\eta^\dagger\eta\eta^\dagger] \\
&- x^*y^*|x|^2[\eta\eta, \eta^\dagger\eta^\dagger\eta^\dagger\eta] + (x^*y^*)^2[\eta\eta, \eta^\dagger\eta^\dagger\eta^\dagger\eta^\dagger] \\
&- xy|x|^2[\eta\eta, \eta\eta^\dagger\eta\eta] + |x|^2|y|^2[\eta\eta, \eta\eta^\dagger\eta\eta^\dagger] \\
&+ |x|^2|y|^2[\eta\eta, \eta\eta^\dagger\eta^\dagger\eta] - x^*y^*|y|^2[\eta\eta, \eta\eta^\dagger\eta^\dagger\eta^\dagger] \\
&- xy|x|^2[\eta\eta, \eta^\dagger\eta\eta\eta] + |x|^2|y|^2[\eta\eta, \eta^\dagger\eta\eta\eta^\dagger] \\
&+ |x|^2|y|^2[\eta\eta, \eta^\dagger\eta\eta^\dagger\eta] - x^*y^*|y|^2[\eta\eta, \eta^\dagger\eta\eta^\dagger\eta^\dagger] \\
&- xy|y|^2[\eta\eta, \eta\eta\eta\eta^\dagger] - xy|y|^2[\eta\eta, \eta\eta\eta^\dagger\eta] \\
&+ |y|^4[\eta\eta, \eta\eta\eta^\dagger\eta^\dagger]\}. \quad (C.29)
\end{aligned}$$

Usando os comutadores

$$[\eta\eta, \eta^\dagger] = 2\eta, \quad (\text{C.30})$$

$$[\eta\eta, \eta\eta^\dagger] = 2\eta\eta, \quad (\text{C.31})$$

$$[\eta\eta, \eta^\dagger\eta] = 2\eta\eta \quad (\text{C.32})$$

$$[\eta\eta, \eta^\dagger\eta^\dagger] = 2\eta\eta^\dagger + 2\eta^\dagger\eta, \quad (\text{C.33})$$

$$[\eta\eta, \eta\eta\eta^\dagger] = 2\eta\eta\eta, \quad (\text{C.34})$$

$$[\eta\eta, \eta\eta^\dagger\eta^\dagger] = 2\eta\eta\eta^\dagger + 2\eta\eta^\dagger\eta, \quad (\text{C.35})$$

$$[\eta\eta, \eta\eta^\dagger\eta] = 2\eta\eta\eta, \quad (\text{C.36})$$

$$[\eta\eta, \eta^\dagger\eta\eta^\dagger] = 2\eta\eta\eta^\dagger + 2\eta^\dagger\eta\eta, \quad (\text{C.37})$$

$$[\eta\eta, \eta^\dagger\eta\eta] = 2\eta\eta\eta, \quad (\text{C.38})$$

$$[\eta\eta, \eta^\dagger\eta^\dagger\eta^\dagger] = 2\eta\eta^\dagger\eta^\dagger + 2\eta^\dagger\eta\eta^\dagger + 2\eta^\dagger\eta^\dagger\eta, \quad (\text{C.39})$$

$$[\eta\eta, \eta^\dagger\eta^\dagger\eta] = 2\eta\eta^\dagger\eta + 2\eta^\dagger\eta\eta, \quad (\text{C.40})$$

$$[\eta\eta, \eta^\dagger\eta^\dagger\eta\eta] = 2\eta\eta^\dagger\eta\eta + 2\eta^\dagger\eta\eta\eta, \quad (\text{C.41})$$

$$[\eta\eta, \eta^\dagger\eta^\dagger\eta\eta^\dagger] = 2\eta\eta^\dagger\eta\eta^\dagger + 2\eta^\dagger\eta\eta\eta^\dagger + 2\eta^\dagger\eta^\dagger\eta\eta, \quad (\text{C.42})$$

$$[\eta\eta, \eta^\dagger\eta^\dagger\eta^\dagger\eta] = 2\eta\eta^\dagger\eta^\dagger\eta + 2\eta^\dagger\eta\eta^\dagger\eta + 2\eta^\dagger\eta^\dagger\eta\eta, \quad (\text{C.43})$$

$$[\eta\eta, \eta^\dagger\eta^\dagger\eta^\dagger\eta^\dagger] = 2\eta\eta^\dagger\eta^\dagger\eta^\dagger + 2\eta^\dagger\eta\eta^\dagger\eta^\dagger + 2\eta^\dagger\eta^\dagger\eta\eta^\dagger + 2\eta^\dagger\eta^\dagger\eta^\dagger\eta \quad (\text{C.44})$$

$$[\eta\eta, \eta\eta^\dagger\eta\eta] = 2\eta\eta\eta\eta, \quad (\text{C.45})$$

$$[\eta\eta, \eta\eta^\dagger\eta\eta^\dagger] = 2\eta\eta\eta\eta^\dagger + 2\eta\eta^\dagger\eta\eta, \quad (\text{C.46})$$

$$[\eta\eta, \eta\eta^\dagger\eta^\dagger\eta] = 2\eta\eta\eta^\dagger\eta + 2\eta\eta^\dagger\eta\eta, \quad (\text{C.47})$$

$$[\eta\eta, \eta\eta^\dagger\eta^\dagger\eta^\dagger] = 2\eta\eta\eta^\dagger\eta^\dagger + 2\eta\eta^\dagger\eta\eta^\dagger + 2\eta\eta^\dagger\eta^\dagger\eta, \quad (\text{C.48})$$

$$[\eta\eta, \eta^\dagger\eta\eta\eta] = 2\eta\eta\eta\eta, \quad (\text{C.49})$$

$$[\eta\eta, \eta^\dagger\eta\eta\eta^\dagger] = 2\eta\eta\eta\eta^\dagger + 2\eta^\dagger\eta\eta\eta, \quad (\text{C.50})$$

$$[\eta\eta, \eta^\dagger\eta\eta^\dagger\eta] = 2\eta\eta\eta^\dagger\eta + 2\eta^\dagger\eta\eta\eta, \quad (\text{C.51})$$

$$[\eta\eta, \eta^\dagger\eta\eta^\dagger\eta^\dagger] = 2\eta\eta\eta^\dagger\eta^\dagger + 2\eta^\dagger\eta\eta\eta^\dagger + 2\eta^\dagger\eta\eta^\dagger\eta, \quad (\text{C.52})$$

$$[\eta\eta, \eta\eta\eta\eta^\dagger] = 2\eta\eta\eta\eta \quad (\text{C.53})$$

$$[\eta\eta, \eta\eta\eta^\dagger\eta] = 2\eta\eta\eta\eta \quad (\text{C.54})$$

$$[\eta\eta, \eta\eta\eta^\dagger\eta^\dagger] = 2\eta\eta\eta\eta^\dagger + 2\eta\eta\eta^\dagger\eta, \quad (\text{C.55})$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} [\eta\eta, H_3] &= 2(h_1 + h_6)\eta\eta^\dagger\eta + 2(h_1 + h_4)\eta^\dagger\eta\eta + 2h_2\eta\eta^\dagger\eta^\dagger \\ &+ 2h_2\eta^\dagger\eta\eta^\dagger + 2h_2\eta^\dagger\eta^\dagger\eta + 2(h_3 + h_5 + h_8)\eta\eta\eta + 2(h_4 + h_6)\eta\eta\eta^\dagger + 2h_9\eta\eta^\dagger + 2h_9\eta^\dagger\eta \\ &+ 2(h_{10} + h_{11})\eta\eta + 2h_{13}\eta \end{aligned} \quad (\text{C.56})$$

e

$$\begin{aligned} [\eta\eta, H_4] &= f_2\{2|x|^2(|x|^2 + 2|y|^2)\eta\eta^\dagger\eta\eta + 2|x|^2(|x|^2 + 2|y|^2)\eta^\dagger\eta\eta\eta \\ &- 2x^*y^*(|x|^2 + |y|^2)\eta\eta^\dagger\eta\eta^\dagger - 2x^*y^*(|x|^2 + |y|^2)\eta^\dagger\eta\eta\eta^\dagger - 4x^*y^*|x|^2\eta^\dagger\eta^\dagger\eta\eta \\ &- 2x^*y^*(|x|^2 + |y|^2)\eta\eta^\dagger\eta^\dagger\eta - 2x^*y^*(|x|^2 + |y|^2)\eta^\dagger\eta\eta^\dagger\eta + 2(x^*y^*)^2\eta\eta^\dagger\eta^\dagger\eta^\dagger \\ &+ 2(x^*y^*)^2\eta^\dagger\eta\eta^\dagger\eta^\dagger + 2(x^*y^*)^2\eta^\dagger\eta^\dagger\eta\eta^\dagger + 2(x^*y^*)^2\eta^\dagger\eta^\dagger\eta^\dagger\eta \\ &- 4xy(|x|^2 + |y|^2)\eta\eta\eta\eta + 2|y|^2(|y|^2 + 2|x|^2)\eta\eta\eta\eta^\dagger \\ &+ 2|y|^2(|y|^2 + 2|x|^2)\eta\eta\eta^\dagger\eta - 4x^*y^*|y|^2\eta\eta\eta^\dagger\eta^\dagger\}. \end{aligned} \quad (\text{C.57})$$

Tomando o traço de (C.56) e (C.57), com os resultados apêndice A, obtemos

$$\begin{aligned} Tr(\rho_0[\eta\eta, H_3]) &= 2(h_1 + h_6)Tr(\rho_0\eta\eta^\dagger\eta) + 2(h_1 + h_4)Tr(\rho_0\eta^\dagger\eta\eta) \\ &+ 2h_2Tr(\rho_0\eta\eta^\dagger\eta^\dagger) + 2h_2Tr(\rho_0\eta^\dagger\eta\eta^\dagger) + 2h_2Tr(\rho_0\eta^\dagger\eta^\dagger\eta) + 2(h_3 + h_5 + h_8)Tr(\rho_0\eta\eta\eta) \\ &+ 2(h_4 + h_6)Tr(\rho_0\eta\eta\eta^\dagger) + 2h_9Tr(\rho_0\eta\eta^\dagger) + 2h_9Tr(\rho_0\eta^\dagger\eta) + 2(h_{10} + h_{11})Tr(\rho_0\eta\eta) + 2h_{13}Tr(\rho_0\eta) \\ &= 2[\langle p \rangle^2 f_2(x^*)^2 - (f_1 + 4|\langle p \rangle|^2 f_2)x^*y^* + (\langle p \rangle^*)^2 f_2(y^*)^2](1 + 2\nu) \end{aligned} \quad (\text{C.58})$$

e

$$\begin{aligned} Tr(\rho_0[\eta\eta, H_4]) &= f_2\{2|x|^2(|x|^2 + 2|y|^2)Tr(\rho_0\eta\eta^\dagger\eta\eta) + 2|x|^2(|x|^2 + 2|y|^2)Tr(\rho_0\eta^\dagger\eta\eta\eta) \\ &- 2x^*y^*(|x|^2 + |y|^2)Tr(\rho_0\eta\eta^\dagger\eta\eta^\dagger) - 2x^*y^*(|x|^2 + |y|^2)Tr(\rho_0\eta^\dagger\eta\eta\eta^\dagger) \\ &- 4x^*y^*|x|^2Tr(\rho_0\eta^\dagger\eta^\dagger\eta\eta) - 2x^*y^*(|x|^2 + |y|^2)Tr(\rho_0\eta\eta^\dagger\eta^\dagger\eta) \\ &- 2x^*y^*(|x|^2 + |y|^2)Tr(\rho_0\eta^\dagger\eta\eta^\dagger\eta) + 2(x^*y^*)^2Tr(\rho_0\eta\eta^\dagger\eta^\dagger\eta^\dagger) \\ &+ 2(x^*y^*)^2Tr(\rho_0\eta^\dagger\eta\eta^\dagger\eta^\dagger) + 2(x^*y^*)^2Tr(\rho_0\eta^\dagger\eta^\dagger\eta\eta^\dagger) \\ &+ 2(x^*y^*)^2Tr(\rho_0\eta^\dagger\eta^\dagger\eta^\dagger\eta) - 4xy(|x|^2 + |y|^2)Tr(\rho_0\eta\eta\eta\eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2|y|^2(|y|^2 + 2|x|^2)Tr(\rho_0\eta\eta\eta\eta^\dagger) + 2|y|^2(|y|^2 + 2|x|^2)Tr(\rho_0\eta\eta\eta^\dagger\eta) \\
& -4x^*y^*|y|^2Tr(\rho_0\eta\eta\eta^\dagger\eta^\dagger)\} = -2f_2[(1 + 2\nu)^2 + 4\nu(1 + 2\nu)]x^*y^*|x|^2 \\
& \quad -2f_2[(1 + 2\nu)^2 + 4\nu(1 + \nu)(1 + 2\nu)]x^*y^*|y|^2. \tag{C.59}
\end{aligned}$$

Usando (C.58) e (C.59), temos então,

$$\begin{aligned}
& Tr(\rho_0[\eta\eta, H]) = Tr(\rho_0[\eta\eta, H_3]) + Tr(\rho_0[\eta\eta, H_4]) \\
& = -2f_1x^*y^*(1 + 2\nu) + 2f_2[\langle p \rangle^2(x^*)^2 - 4|\langle p \rangle|^2x^*y^* + (\langle p \rangle^*)^2(y^*)^2](1 + 2\nu) \\
& \quad -2f_2[(1 + 2\nu)^2 + 4\nu(1 + 2\nu)]x^*y^*|x|^2 \tag{C.60} \\
& \quad -2f_2[(1 + 2\nu)^2 + 4\nu(1 + \nu)(1 + 2\nu)]x^*y^*|y|^2.
\end{aligned}$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. Szoke, V. Daneu, J. Goldhar e N. A. Kurnit, *Appl. Phys. Lett.* **15**, 376 (1969).
H. M. Gibbs, S. L. McCall e T. N. C. Venkatesan, *Phys. Rev. Lett.* **36**, 1135 (1976).
- [2] E. A. Cotta, *Estudo de Efeitos eletrodinâmicos numa Microcavidade Semicondutora com um poço quântico (SQW) de GaAs*, Dissertação de Mestrado, Departamento de Física da UFMG (2004).
- [3] G. H. Wannier, *Phys. Rev.* **52**, 191 (1937).
- [4] J. J. Hopfield, *Phys. Rev.* **112**, 1555 (1958).
- [5] A. Baas, J. Ph. Karr, H. Eleuch e E. Giacobino, *Optical bistability in semiconductor microcavities*, *Phys. Rev. A* **69**, 023809 (2004).
- [6] A. F. R. de Toledo Piza, *Classical equations for quantum squeezing and coherent pumping by the time-dependent quadratic Hamiltonian*, *Phys. Rev. A* **51**, 1612 (1995).
- [7] P. R. I. Tommasini, *Aproximação Gaussiana para um sistema não-ideal de muitos bosons*, Tese de Doutorado, Ifusp (1995).
- [8] Jin-Sheng Peng e Gao-Xiang Li, *Introduction to Modern Quantum Optics*, World Scientific (1998).
- [9] E. A. Cotta, *Bi-estabilidade ótica & Self-Oscillations de polárítions em uma microcavidade semicondutora*, Tese de Doutorado, Departamento de Física da UFMG (2008).
- [10] E. A. Cotta e F. M. Matinaga, *Phys. Rev. B* **76**, 073308 (2007).