

**Sistematização do Cálculo das Funções do Grupo de Renormalização
através da Regularização Implícita**

Helvécio Geovani Fagnoli Filho

Agosto de 2008

**Sistematização do Cálculo das Funções do Grupo
de Renormalização através da Regularização
Implícita**

Helvécio Geovani Fagnoli Filho

Orientadora: Profa. Maria Carolina Nemes

Co-orientador: Luiz Cléber Tavares de Brito

Dissertação apresentada à UNIVERSIDADE
FEDERAL DE MINAS GERAIS, como requisito
parcial para a obtenção do grau de mestre em
Física.

Agosto de 2008

*À vovó Altair (in memoriam), à
mamãe e aos meus irmãos Lú, Jô
e Binho.*

Agradecimentos

Se fosse citar todos os nomes das pessoas que foram importantes na minha vida e que me ajudaram a chegar até aqui, sem dúvidas, esta seção seria maior do que todo o resto da dissertação. Diante desta impossibilidade, não citarei muitos nomes. E sem todas estas pessoas, com certeza, eu não teria conseguido.

A Deus por, simplesmente, tudo.

A toda minha família que é fantástica e me deu todo o necessário para ser feliz. Aí eu incluo irmãos: Lú, Jô e Binho, tios, tias, primos, primas, padrinhos, madrinhas, avó, pai, agregados, namorada: Adriana. E, especialmente, minha mãe Vera a quem devo todo meu aprendizado.

Aos grandes amigos que tive a felicidade de conhecer e conviver em Curvelo, Sete Lagoas e Belo Horizonte. Desculpem por não citar nomes. A lista é, realmente, imensa.

A todos os membros, sem exceção, do grupo de Teoria Quântica de Campos da UFMG que foram sensacionais e me ajudaram demais. À Carolina, matriarca do grupo, que me orienta desde a graduação e está me ensinando o que é ser cientista e ao Cléber que também me ajudou muito e que teve as idéias da sistematização.

Aos professores das escolas por onde passei porque acredito que educação é algo contínuo. E aos professores da Universidade, em especial, os do Departamento de Física e do Departamento de Matemática.

Aos funcionários da UFMG que foram prestativos e resolveram os problemas burocráticos.

Enfim, este trabalho é mais de todas estas pessoas do que propriamente meu!

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Regularização Implícita é um recente processo de regularização no espaço dos momentos. Dentre outras vantagens, foi mostrado que dentro deste esquema as divergências podem ser escritas de uma maneira sistemática em n loops. Com isso, foi possível desenvolver um método geral para calcular as funções do grupo de renormalização em um número arbitrário de loops. Esta é a principal contribuição deste trabalho. Aplicamos o método ao modelo de Yukawa e calculamos tais funções até dois loops. Apesar de termos aplicado em um modelo particular, o método pode ser estendido para o estudo perturbativo de outras teorias quânticas de campos.

Abstract

Implicit Regularization is a recent momentum space framework regularization process. Among others advantages it was shown that within it the divergences can be written in a systematic manner in n loops. With this in mind it was possible to develop a general method to compute the renormalization group functions in an arbitrary number of loops. This is the main contribution of this dissertation. We applied this method to the Yukawa's model and we calculated such functions up to two loops. Although we used it in a particular model, the method can be extended to the perturbative study of others quantum field theories.

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
1 Introdução	1
2 Regularização e Renormalização	4
2.1 A Regularização Implícita	4
2.2 Exemplo do uso da RI	6
2.3 Renormalização	7
2.4 Método dos Contratermos	8
2.5 Grupo de Renormalização	9
3 Modelo de Yukawa	11
3.1 Regras de Feynman	12
3.2 Renormalização da Teoria de Yukawa	12
3.3 Cálculos em 1 Loop	14
3.4 Cálculos em 2 Loops	16
4 Cálculo das Funções do Grupo de Renormalização através da RI	22
4.1 Funções Beta	23
4.2 Dimensões Anômalas	24
4.3 Derivadas das Integrais Básicas	25
4.4 Modelo de Yukawa em 2 loops	26
4.5 Cancelamento da Parte Divergente	27

5	Conclusão	29
A	Diagramas aninhados	30
B	Cálculo da parte finita de $\frac{\partial I_{log}^{(j)}(\mu^2)}{\partial \mu^2}$	32
C	Integrais em k	34
	Referências Bibliográficas	35

Capítulo 1

Introdução

A Teoria Quântica de Campos (TQC) surgiu da união da mecânica quântica com a relatividade restrita. Uma característica dessa teoria é que ela é aplicável para sistemas de muitos corpos. E como há a possibilidade de criação e destruição de partículas em sistemas quânticos relativísticos, a TQC mostrou-se muito útil para o estudo da física de partículas. Ela foi usada para estruturar o Modelo Padrão que explica as interações eletromagnética, forte e fraca. A Eletrodinâmica Quântica, um exemplo de uma TQC, fornece resultados com uma precisão surpreendente.

No desenvolvimento da Teoria Quântica de Campos os físicos depararam com expressões que eram infinitas. Essas divergências surgem ao se somar sobre os momentos de todos os estados intermediários - um passo necessário no cálculo dos termos da série do estudo perturbativo. Elas são classificadas como divergência infravermelha - que surge em teorias não massivas no limite em que o momento destes estados vão para zero - e como divergência ultravioleta - que surge no limite em que o momento vai para infinito. Acredita-se que a primeira seja devido a idealizações do modelo que são feitas e por isso ela não traz muitos problemas [1]. As divergências ultravioletas, porém, parecem ser intrínsecas da TQC. Em uma primeira análise, esse fato seria suficiente para descartar uma teoria. Entretanto, foram encontradas maneiras de reinterpretar os parâmetros físicos e, assim, contornar este problema: os processos de regularização/renormalização. Mais tarde verificou-se que esses infinitos, de fato, são importantes para a teoria, como por exemplo, para o estudo de anomalias [1].

Na regularização implementamos, de alguma forma, artifícios que justifiquem manipulações algébricas das integrais que, antes do processo, eram divergentes. É importante enfatizar que, neste ponto, a integral é finita e só quando retiramos a regu-

larização é que ela volta a divergir. Ao longo do trabalho cometeremos um abuso de linguagem ao referir às integrais regularizadas como divergentes. O próximo passo é isolar termos que são genuinamente finitos daqueles que divergem ao ser retirada a regularização.

O processo seguinte é a renormalização. Ela é empregada para tornar finitas grandezas antes divergentes. Nesta etapa subtraímos os termos infinitos que foram isolados no processo de regularização. Isso pode ser feito redefinindo os parâmetros físicos e será discutido na seção 2.4.

Existem vários esquemas de regularização. Porque a divergência aparece ao tomarmos o limite em que o momento vai para infinito, o mais intuitivo, talvez, seja introduzir um corte Λ (regularização via cut-off) nas integrais de momento, executar os cálculos e depois fazer $\Lambda \rightarrow \infty$. Porém, o método mais popular é a Regularização Dimensional (RD). Este esquema consiste em modificar a dimensão do espaço-tempo para d , realizar as integrais e depois tomar o limite $d \rightarrow 4$. Há outros métodos como a regularização de Pauli-Villars, na rede etc. No início da década de 90 surgiu a Regularização Diferencial (RDf) [2] que trabalha no espaço das posições e não apresenta divergências. E, no final da mesma década, surgiu a Regularização Implícita (RI) que trabalha no espaço dos momentos e possui infinitos explícitos e sistematizados [3], [4].

Quando se propõe um novo método, ou mesmo uma nova teoria, uma pergunta surge naturalmente:

- por que devemos usar este novo método em detrimento do existente? No caso de esquemas de regularização, muitos não são aplicáveis em todas teorias. A RD, por exemplo, apresenta problemas ao tratar teorias quânticas de campos de dimensão específica como teorias quirais, supersimétricas e topológicas. Não é imediato, por exemplo, uma continuação analítica do objeto γ_5 - que está presente no lagrangeano deste trabalho - em dimensões arbitrárias. Apesar de existirem modificações da RD (e.g. Redução Dimensional), em geral, elas são inconsistentes em ordens de loops arbitrárias [5]. Por não modificar a dimensão do espaço-tempo, a RI pode ser empregada nestas teorias. De fato, ela vem sendo usada com sucesso em vários trabalhos como [3], [4], [6] e [7].

Seria interessante que esquemas de regularização possuíssem as seguintes características:

(1) preservar a simetria de calibre sem precisar impô-la ordem a ordem através de

equações de vínculos;

(2) não adicionar novas estruturas no lagrangeano, o que complica as regras de Feynman;

(3) para teorias de dimensão específica, não modificar a dimensão do espaço-tempo.

A RI e a RDf atendem a estes propósitos.

A recente generalização da RI para n loops ([3], [4]) trouxe, entre outras vantagens, a sistematização das divergências em todas as ordens. Mostrar como isto pode facilitar o cálculo das funções do grupo de renormalização e como podemos relacionar os coeficientes de diferentes ordens é o principal objetivo deste trabalho. Apresentaremos o cálculo das funções do grupo de renormalização - que serão apresentadas no capítulo 2 - dentro do esquema da Regularização Implícita e calcularemos até dois loops tais funções do modelo de Yukawa. A dissertação está assim organizada:

- capítulo 1: introdução;
- capítulo 2: apresentação do processo de renormalização, método de contratermos, grupo de renormalização, a RI e um exemplo de seu uso;
- capítulo 3: apresentação da teoria de Yukawa e os cálculos dos diagramas de Feynman divergentes de 1 e 2 loops;
- capítulo 4: sistematização do cálculo das funções do grupo de renormalização usando a RI e o cálculo até dois loops destas funções do modelo de Yukawa;
- capítulo 5: conclusão.

Capítulo 2

Regularização e Renormalização

2.1 A Regularização Implícita

A idéia da RI é isolar os infinitos como integrais básicas independentes do momento externo e que não precisarão ser calculadas explicitamente. Para isso assumimos implicitamente uma função reguladora $G(k^2, \Lambda_i)$ para justificar manipulações no integrando das amplitudes divergentes. Λ_i são parâmetros da distribuição G para os quais assumimos apenas que eles sejam par no momento k que é integrado e que existe um limite de conexão $\lim_{\Lambda_i \rightarrow \infty} G(k^2, \Lambda_i) = 1$ para garantir que as amplitudes finitas não sejam modificadas.

Podemos, assim, utilizar a equação

$$\frac{1}{[(p_i \pm k)^2 - m^2]} = \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^j (p_i^2 \pm 2p_i \cdot k)^j}{(k^2 - m^2)^{j+1}} + \frac{(-1)^{N+1} (p_i^2 \pm 2p_i \cdot k)^{N+1}}{(k^2 - m^2)^{N+1} [(p_i \pm k)^2 - m^2]} \quad (2.1)$$

no nível do integrando para eliminar os momentos externos p_i e ficar com as integrais básicas mais os termos finitos - N é tal que o último termo é finito sob integração em k . Com isso, trabalhamos no espaço dos momentos.

Uma vantagem da RI é que ela não modifica a dimensão do espaço-tempo e nem introduz um regulador explícito em nenhuma etapa dos cálculos (essas também são vantagens da RDef que trabalha, porém, no espaço das posições).

As integrais básicas em primeira ordem em loops são do tipo:

$$I_{log}(m^2) \equiv \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \quad (2.2)$$

$$I_{quad}(m^2) \equiv \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \quad (2.3)$$

onde usamos $\int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} F(k, m)$ para designar $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} F(k, m) G(k^2, \Lambda_i)$. De agora para frente, também usaremos \int_k para $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$.

Uma outra vantagem da RI é que é possível escrever, em n loops, os contratermos de uma forma geral ([3], [4]). Para n loops, além de produtos - de no máximo n termos - das integrais básicas acima, existem as integrais do tipo:

$$I_{log}^{(n)}(m^2) = \int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} Z_0^{n-1}(k^2, m^2, \mu^2) \quad (2.4)$$

$$I_{quad}^{(n)}(m^2) = \int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2 - m^2)} Z_0^{n-1}(k^2, m^2, \mu^2) \quad (2.5)$$

onde $Z_0^{n-1}(k^2, m^2, \mu^2)$ são termos finitos típicos da ordem $n - 1$.

Para teorias sem massa as integrais básicas $I_{quad}^{(n)}$ são nulas e as $I_{log}^{(n)}$ tornam-se:

$$I_{log}^{(n)}(m^2) = \int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \left[\ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\mu^2} \right) \right]^{n-1} \quad (2.6)$$

O papel de μ será descrito abaixo. E m , aqui, é apenas um regulador infravermelho que é colocado para evitar as divergências infravermelhas. Após os cálculos toma-se o limite $m \rightarrow 0$.

Consideremos a equação (2.2). Ao derivá-la em relação a m^2 teremos:

$$\frac{d}{d(m^2)} I_{log}(m^2) = \int_k^\Lambda \frac{2}{(k^2 - m^2)^3} = -\frac{b}{m^2} \quad (2.7)$$

onde $b \equiv \frac{i}{(4\pi)^2}$. Na última passagem usamos $C.1$.

Integrando (2.7)

$$\begin{aligned} \int_{\mu^2}^{m^2} dI_{log}(m^2) &= -b \int_{\mu^2}^{m^2} \frac{d(m^2)}{m^2} \\ I_{log}(m^2) &= I_{log}(\mu^2) - b \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

A expressão (2.8) nos fornece uma relação de escala. O parâmetro μ será a nossa escala do grupo de renormalização.

Seguindo o mesmo raciocínio chegamos à relação de escala (esta de segunda ordem):

$$I_{log}^{(2)}(m^2) = I_{log}^{(2)}(\mu^2) - b \left\{ \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) + \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \right\} \quad (2.9)$$

Para cada ordem temos relações análogas a (2.8) e (2.9). Apenas após o uso dessas relações é que podemos tomar o limite $m \rightarrow 0$.

Um importante ingrediente deste método são as relações de consistência (RC) que são expressas como diferenças entre integrais divergentes do mesmo grau de divergência.

Consideremos a derivada de $\frac{k_\mu}{(k^2-m^2)^2}$ em relação a k_ν :

$$\frac{\partial}{\partial k_\nu} \frac{k_\mu}{(k^2-m^2)^2} = \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2-m^2)^2} - \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)^3}$$

Integrando em ambos os lados com relação a k no espaço-tempo, teremos

$$\int_k^\Lambda \frac{\partial}{\partial k_\nu} \frac{k_\mu}{(k^2-m^2)^2} = g_{\mu\nu} \int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2-m^2)^2} - 4 \int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)^3}$$

Com auxílio do teorema de Gauss, vemos que o lado esquerdo da equação é um termo de superfície e o chamaremos de $g_{\mu\nu}\alpha$. Assim,

$$g_{\mu\nu} \int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2-m^2)^2} - 4 \int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)^3} = g_{\mu\nu}\alpha \quad (2.10)$$

Essa é uma das relações de consistência que aparece na Regularização Implícita. Procedendo de forma análoga chegamos a:

$$\int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)^3} \ln\left(-\frac{(k^2-m^2)}{\mu^2}\right) - \frac{g_{\mu\nu}}{4} \left(I_{\log}^{(2)}(m^2) + \frac{1}{2} I_{\log}(m^2) \right) = g_{\mu\nu}\sigma \quad (2.11)$$

Há outras relações de consistência, entretanto, só precisaremos destas duas. Neste trabalho todos os termos de superfície foram cancelados pelos contratermos.

2.2 Exemplo do uso da RI

Para ilustrar o esquema da RI calcularemos o diagrama da figura 2.1 que representa a amplitude, em 1 loop, da função de 4-pontos da teoria ϕ^4 que possui o lagrangeano de interação $\mathcal{L}_{INT} = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4$ (que é uma parte do lagrangeano estudado no capítulo 3).

Antecipando o capítulo 3 que apresenta as regras de Feynman, traduzimos o diagrama na expressão:

$$A = \lambda^2 \int_k \frac{1}{(k^2-m^2)[(p-k)^2-m^2]} \quad (2.12)$$

Usando (2.1) com $N = 0$, temos:

$$A = \lambda^2 \int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2-m^2)^2} + \lambda^2 \int_k^\Lambda \frac{2p \cdot k - p^2}{(k^2-m^2)^2[(p-k)^2-m^2]}$$

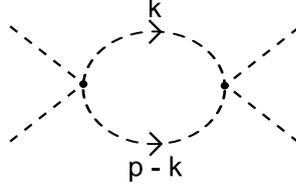


Figura 2.1: Função de 4-pontos da teoria ϕ^4 em 1 loop.

Observe que o segundo termo do lado direito é finito. Podemos calculá-lo com auxílio da parametrização de Feynman (e de C.1) encontrando:

$$\int_k^\Lambda \frac{2p \cdot k - p^2}{(k^2 - m^2)^2 [(p - k)^2 - m^2]} = -bZ_0(p^2, m^2),$$

onde $Z_0 \equiv \int_0^1 dx \ln \left[\frac{m^2 + p^2 x(x-1)}{m^2} \right]$.

Logo,

$$A = \lambda^2 I_{log}(m^2) - b\lambda^2 Z_0(p^2, m^2) \quad (2.13)$$

Note que em $Z_0(p^2, m^2)$ temos uma divergência quando $m \rightarrow 0$.

Usando (2.8):

$$A = \lambda^2 I_{log}(\mu^2) - b\lambda^2 \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) - b\lambda^2 \int_0^1 dx \ln \left[\frac{m^2 + p^2 x(x-1)}{m^2} \right]$$

ou

$$A = \lambda^2 I_{log}(\mu^2) - b\lambda^2 \int_0^1 dx \ln \left[\frac{m^2 + p^2 x(x-1)}{\mu^2} \right] \quad (2.14)$$

Aqui já não há mais divergências no limite $m \rightarrow 0$.

2.3 Renormalização

Como dissemos no capítulo 1 é necessário renormalizar teorias quânticas de campos para extrairmos resultados físicos.

Primeiramente, devemos localizar em quais diagramas de Feynman estão as divergências. Seja $d(G)$ o grau de divergência superficial de um diagrama G , D a dimensão do espaço-tempo, d_a a dimensão de um vértice V_a , N_B e N_F os números de linhas externas a G do tipo bosônico e fermiônico, respectivamente. Se $d(G) < 0$ o gráfico G é chamado de superficialmente convergente, caso contrário, ele é superficialmente divergente. Um diagrama de Feynman é absolutamente convergente se todos

subdiagramas possíveis (incluindo o próprio gráfico) forem superficialmente convergentes [8]. De acordo com [8]:

$$d(G) = D - \left(\frac{D-2}{2}\right) N_B - \left(\frac{D-1}{2}\right) N_F - \sum_a (D - d_a) \quad (2.15)$$

O somatório é sobre o número de vértices de G e d_a é dado por

$$d_a = D_a + \left(\frac{D-2}{2}\right) \nu_a^B + \left(\frac{D-1}{2}\right) \nu_a^F, \quad (2.16)$$

onde D_a é o número de derivadas no termo de interação do vértice V_a , ν_a^B e ν_a^F os números de linhas bosônicas e fermiônicas que se juntam em V_a .

Se $d_a < D$ o vértice V_a é dito super-renormalizável, se $d_a = D$ ele é renormalizável e se $d_a > D$ ele é não-renormalizável. Analisando (2.15) vemos que, neste último caso, quando aumentamos o número de vértices V_a no diagrama G a tendência é piorar a convergência de G .

Por exemplo, para o vértice da teoria ϕ^4 , o grau de divergência superficial do vértice será $d(a) = 0 + 1 \times 4 = 4$. Para a dimensão $D = 4$ esta teoria é renormalizável.

2.4 Método dos Contratermos

Este método consiste em adicionar termos que são infinitos no lagrangeano de tal forma que eles cancelem as divergências. Os novos termos - ou contratermos - são tratados como interações e dão novas regras de Feynman.

Voltemos à teoria ϕ^4 . Consideremos a amplitude A da função de 4-pontos em 1 loop. Por (2.15) concluímos que ela é logaritmicamente divergente e, de fato, vimos isso na seção anterior:

$$A = \lambda^2 I_{log}(\mu^2) - b\lambda^2 \int_0^1 dx \ln \left[\frac{m^2 + p^2 x(x-1)}{\mu^2} \right]$$

Se introduzirmos um contratermo, isto é, uma nova interação tal que a amplitude, na ordem de λ^2 , do diagrama da função de 4-pontos com este novo vértice seja $-\lambda^2 I_{log}(\mu^2) + \eta$ (veja figura (2.2)) teremos uma amplitude total A_T para a função de 4-pontos igual a:

$$\begin{aligned} A_T &= \lambda^2 I_{log}(\mu^2) - b\lambda^2 \int_0^1 dx \ln \left[\frac{m^2 + p^2 x(x-1)}{\mu^2} \right] - \lambda^2 I_{log}(\mu^2) + \eta \\ A_T &= -b\lambda^2 \int_0^1 dx \ln \left[\frac{m^2 + p^2 x(x-1)}{\mu^2} \right] + \eta \end{aligned}$$

onde η é finito.

$$A_T = \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2}$$

Figura 2.2: Exemplo do uso de contratermos.

A escolha de η determina o esquema de subtração. Usaremos neste trabalho $\eta = 0$ o que caracteriza o esquema de subtração mínimo. Veremos um exemplo em 2 loops no capítulo 3.

Para teorias renormalizáveis, este processo é feito de maneira sistemática ordem a ordem na expansão da série perturbativa sendo necessário, apenas, um número finito de contratermos.

Tudo isso é equivalente a redefinir os parâmetros da teoria como o produto de novos parâmetros por constantes (infinitas) de renormalização. Assim, teremos um novo lagrangeano \mathcal{L}_{FIS} que é igual ao inicial \mathcal{L}_0 menos o lagrangeano de contratermos \mathcal{L}_{CT} . \mathcal{L}_{FIS} é que dá os resultados finitos que são confrontados com os experimentos. Um exemplo é a redefinição das funções 1PI de n-pontos:

$$\Gamma_r^{(n)}(p_i, g_r(\mu), m_r(\mu), \mu) = Z_\phi^{\frac{n}{2}}(g_r(\mu), m_r(\mu), \mu) \Gamma^{(n)}(p_i, m, g) \quad (2.17)$$

onde o subscrito r significa renormalizado, g é uma constante de acoplamento e μ é o parâmetro de escala introduzido no processo de regularização.

2.5 Grupo de Renormalização

O processo de renormalização nos leva da teoria nua que possui grandezas divergentes para uma teoria renormalizada onde estas grandezas são finitas. Para cada escolha de regularização e/ou subtração obtemos uma teoria renormalizada. As transformações entre estas teorias renormalizadas formam um semi-grupo: o chamado grupo de renormalização. Não importa como regularizamos - desde que sejam respeitadas simetrias internas - ou qual esquema de subtração usamos, a teoria física deve fornecer os mesmos resultados e, portanto, ela é invariante sob o grupo de renormalização [9].

Este fato pode ser quantificado em uma equação. Em uma teoria quântica de campos um importante objeto é a matriz de espalhamento S . Para construir tal matriz é necessário conhecermos as funções de Green ou funções de n -pontos. Logo, em última análise, o importante são as funções de Green $\Gamma^{(n)}$. Devemos ter que [10]:

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Gamma^{(n)} = 0$$

Da expressão (2.17):

$$\mu \frac{d}{d\mu} \left[Z_\phi^{-\frac{n}{2}} \Gamma_r^{(n)}(p_i, g_r(\mu), m_r(\mu), \mu) \right] = 0$$

ou

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g_r) \frac{\partial}{\partial g_r} - n\gamma(g_r) + m_r \gamma_m(g_r) \frac{\partial}{\partial m_r} \right) \Gamma_r^{(n)} = 0 \quad (2.18)$$

onde

$$\gamma(g_r) \equiv \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sqrt{Z_\phi} \quad (2.19)$$

$$\beta(g_r) \equiv \mu \frac{\partial}{\partial \mu} g_r \quad (2.20)$$

$$m_r \gamma_m(g_r) \equiv \mu \frac{\partial}{\partial \mu} m_r \quad (2.21)$$

A expressão (2.18) é a equação do grupo de renormalização (equação GR). Ela expressa a invariância de $\Gamma^{(n)}$ renormalizada sob mudanças no parâmetro μ introduzido na regularização.

A função β nos diz como a constante de acoplamento varia com a escala e mostra o regime de validade do estudo perturbativo: pequenas distâncias ou grandes distâncias [10]. Já a chamada dimensão anômala γ mostra que o campo varia não com sua dimensão clássica d , mas com $d + \gamma$ [9].

Capítulo 3

Modelo de Yukawa

Na década de 30 Hideki Yukawa propôs uma teoria para explicar a interação nuclear forte entre núcleons (prótons e neutrons). De acordo com esta proposta, a interação entre os núcleons seria mediada por partículas massivas: os píons - que são mésons pseudo-escalares.

Atualmente, a teoria mais aceita é a Cromodinâmica Quântica que nos diz que as partículas que mediam a interação forte são os glúons. Porém, a teoria de Yukawa ainda é estudada, pois ela é usada no Modelo Padrão para descrever o acoplamento entre campos de Higgs e campos de quarks e léptons.

Esta teoria é descrita pelo seguinte lagrangeano:

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 + V(\phi) + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_\psi)\psi + ig\phi\bar{\psi}\gamma_5\psi \quad (3.1)$$

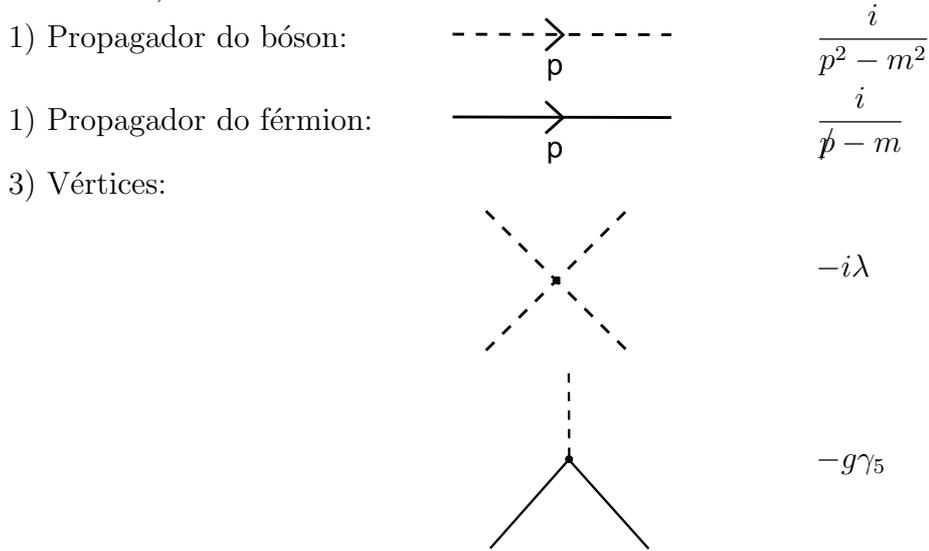
Em \mathcal{L}_{Yukawa} os dois primeiros termos são o lagrangeano de Klein-Gordon para um campo escalar real ϕ , o terceiro é um termo de auto-interação do campo ϕ , o quarto é o lagrangeano de Dirac para o campo ψ , o último termo é o lagrangeano da interação de Yukawa entre o campo escalar e mésons pseudo-escalares e g é a constante de acoplamento desta interação.

Neste trabalho, vamos lidar com partículas não massivas e, portanto, $m_\phi = m_\psi = 0$. Consideraremos também o potencial de auto-interação como $V(\phi) = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4$, λ sendo a constante de acoplamento. Assim,

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi + ig\phi\bar{\psi}\gamma_5\psi \quad (3.2)$$

3.1 Regras de Feynman

Um método eficiente e simplificador para o cálculo dos termos da série perturbativa das funções de Green são os diagramas de Feynman. Eles ilustram, pictoriamente, esses termos e através das regras de Feynman traduzimos essas figuras em expressões matemáticas. As regras de Feynman desta e de outras teorias estão deduzidas em vários livros texto (veja, por exemplo, [11]). Aqui, vamos apenas expô-las (no espaço dos momentos).



4) Loop de férmion fechado: multiplica por -1 e toma o traço das matrizes de Dirac.

Na teoria estudada neste trabalho, como já dissemos, m é apenas um regulador infravermelho.

3.2 Renormalização da Teoria de Yukawa

O que vemos em (3.2) é o lagrangeano nu - aquele que dá origem aos infinitos. Redefinido os parâmetros da teoria como:

$$\phi_0 = Z_\phi^{\frac{1}{2}} \phi \tag{3.3}$$

$$\psi_0 = Z_\psi^{\frac{1}{2}} \psi \tag{3.4}$$

$$\lambda_0 = \frac{Z_\lambda}{Z_\phi^2} \lambda \quad (3.5)$$

$$g_0 = \frac{Z_g}{Z_\phi^{\frac{1}{2}} Z_\psi} g \quad (3.6)$$

e escrevendo as constantes de renormalização como

$$Z_\phi = 1 + A, \quad Z_\lambda = 1 + B, \quad Z_\psi = 1 + C, \quad Z_g = 1 + D$$

conseguimos separar o lagrangeano em dois: o físico e o de contratermos. Assim,

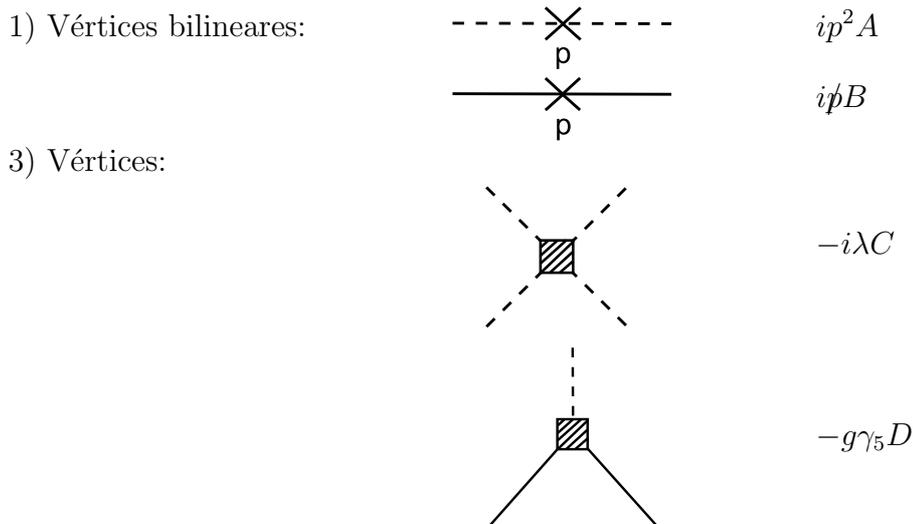
$$\mathcal{L}_{FISICO} = \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_{CT} \quad (3.7)$$

Ou

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{FIS} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_0)^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi_0^4 + \bar{\psi}_0 i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_0 + i g \phi_0 \bar{\psi}_0 \gamma_5 \psi_0 - \\ & - \frac{A}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + B \frac{\lambda}{4!} \phi^4 - C \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - D i g \phi \bar{\psi} \gamma_5 \psi \end{aligned} \quad (3.8)$$

Com (3.8) obtemos grandezas físicas finitas e podemos usar o cálculo perturbativo para tentar encontrar os valores medidos experimentalmente.

As regras de Feynman no espaço dos momentos para o lagrangeano de contratermos são:



3.3 Cálculos em 1 Loop

Na figura abaixo vemos os diagramas de Feynman 1PI divergentes em um loop do modelo de Yukawa. Entre parênteses encontra-se o número de diagramas daquele tipo.

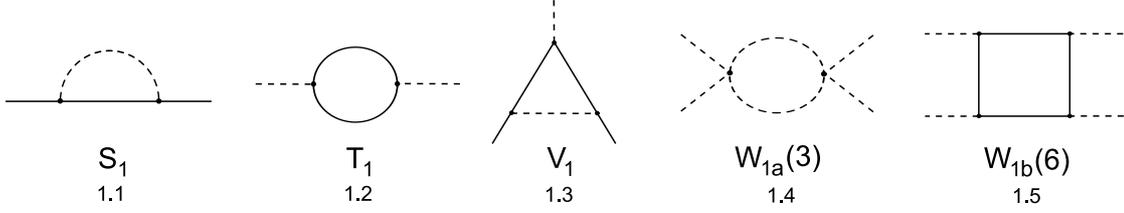


Figura 3.1: Diagramas de Feynman 1PI de 1 loop.

Apresentaremos o cálculo da auto-energia do férmion como ilustração dos cálculos de primeira ordem. Aplicando as regras de Feynman para o diagrama (1.1) da figura 3.1 teremos:

$$S_1 = \int_k^\Lambda \frac{i}{(p-k)^2 - m^2} (-g\gamma_5) \frac{i}{k^2 - m^2} (-g\gamma_5) \quad (3.9)$$

Fazendo a mudança de variáveis $p - k = k'$ reescrevemos (3.9) como

$$S_1 = g^2 \frac{\not{p}}{2} \int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2 - m^2)[(p-k)^2 - m^2]} \quad (3.10)$$

Usando o resultado (2.14) e tomando o limite $m \rightarrow 0$ encontramos:

$$S_1 = g^2 \frac{\not{p}}{2} \left(I_{\log}(\mu^2) - b \ln \left(\frac{-p^2}{\mu^2} \right) + 2b \right) \quad (3.11)$$

Os resultados em um loop estão apresentados na tabela 3.1 (nesta e nas outras tabelas os fatores de simetria já foram levados em conta). Uma explicação de como encontra-se os contratermos que aparecem na terceira coluna é dada na próxima seção.

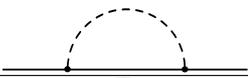
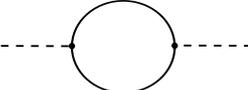
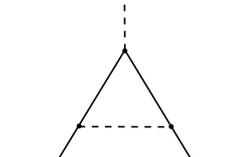
Diagrama	Parte Divergente	Contratermo
	$\frac{g^2}{2} \not{p} I_{log}(\mu^2)$	$i \frac{g^2}{2} I_{log}(\mu^2)$
	$2g^2 p^2 I_{log}(\mu^2)$	$2ig^2 I_{log}(\mu^2)$
	$-ig^3 \gamma_5 I_{log}(\mu^2)$	$-ig^2 I_{log}(\mu^2)$
	$\frac{3}{2} \lambda^2 I_{log}(\mu^2)$	$-\frac{3}{2} i \lambda I_{log}(\mu^2)$
	$-24g^4 I_{log}(\mu^2)$	$24i \lambda^{-1} g^4 I_{log}(\mu^2)$

Tabela 3.1: Tabela das partes divergentes dos diagramas de 1 loop.

3.4 Cálculos em 2 Loops

Os diagramas de dois loops 1PI divergentes se encontram na figura abaixo. Mais uma vez, em parênteses está o número de diagramas daquele tipo.

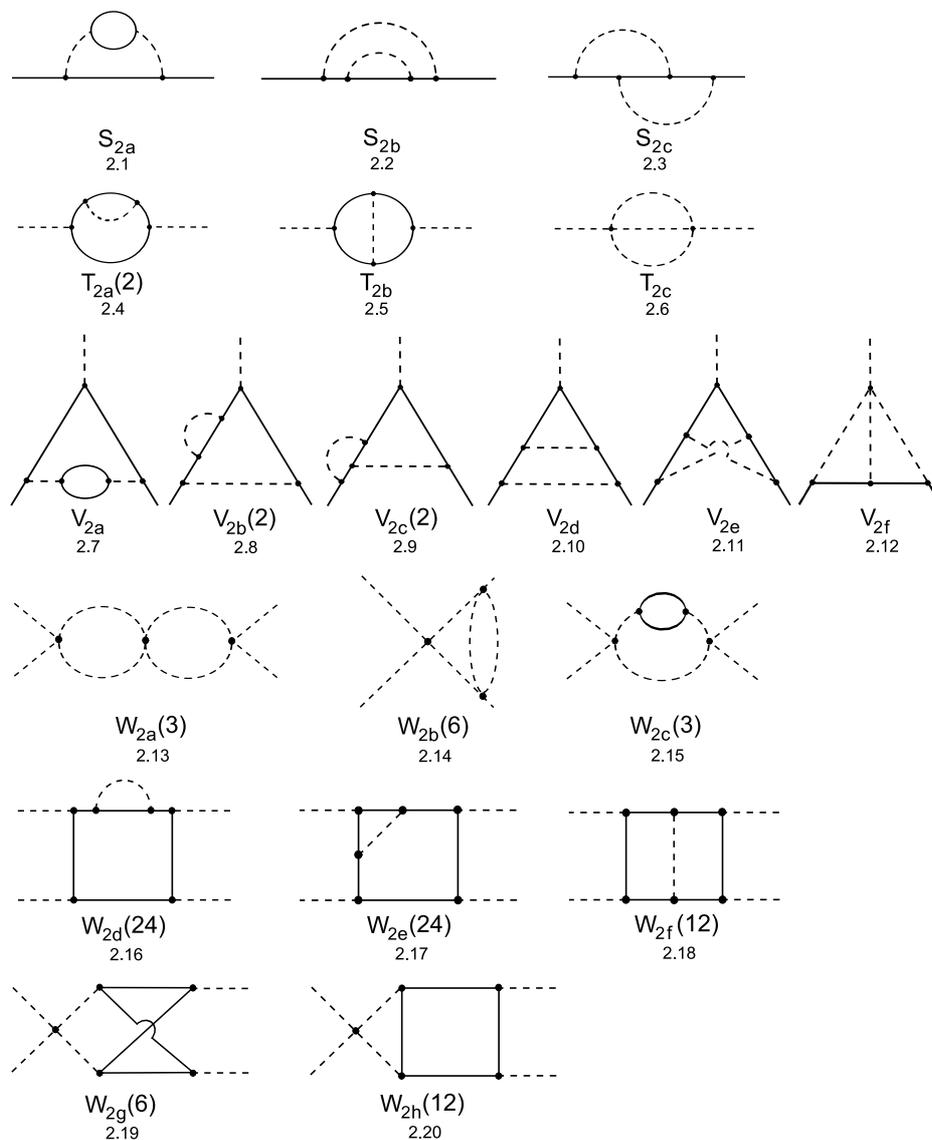


Figura 3.2: Diagramas 1PI de 2 loops.

A prescrição aqui é essencialmente a mesma: utilizar (2.1) para separar os infinitos. Porém, temos que remover as subdivergências, que aparecem devido aos subdiagramas, para permanecer apenas as divergências da ordem. Isso é feito somando os

diagramas de contratermos. Vemos um exemplo na figura 3.3.

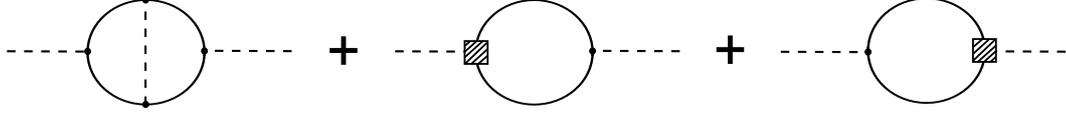


Figura 3.3: Exemplo da remoção de subdivergências.

Os diagramas (2.1), (2.2), (2.4), (2.7), (2.8), (2.10), (2.13)-(2.17) e (2.20) são chamados aninhados. Nestes gráficos, calcular a amplitude e somar com as amplitudes dos diagramas de contratermos é equivalente a calcular o gráfico original substituindo os subdiagramas por suas partes finitas. O que justifica essa equivalência é o fato de os subdiagramas - que são de ordem mais baixa do que o diagrama original - já terem sido renormalizados, afinal, a renormalização é feita ordem a ordem. No apêndice A exemplificamos esta equivalência.

Para os diagramas restantes temos que executar todos os passos da prescrição. Calcularemos a seguir o diagrama (2.5):

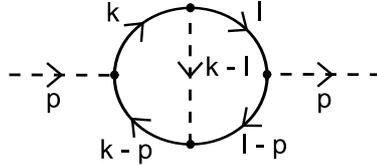


Figura 3.4: Diagrama que representa a amplitude T_{2b} .

De acordo com as regras de Feynman:

$$T_{2b}^{(diag)} = -\text{tr} \int_k^\Lambda \int_l^\Lambda (-g\gamma_5) \frac{i}{\not{l}} (-g\gamma_5) \frac{i}{\not{k}} (-g\gamma_5) \frac{i}{\not{k}-\not{p}} (-g\gamma_5) \frac{i}{\not{l}-\not{p}} \frac{i}{(k-l)^2} \quad (3.12)$$

Simplificando e tomando o traço das 4 matrizes de Dirac teremos:

$$T_{2b}^{(diag)} = -2ig^4 \int_k^\Lambda \int_l^\Lambda \frac{k^2(p-l)^2 + l^2(p-k)^2 - p^2(l-k)^2}{l^2 k^2 (k-p)^2 (l-p)^2 (k-l)^2} \quad (3.13)$$

Separando cada integral e efetuando os cálculos:

$$T_{2b}^{(diag)} = -2ig^4 p^2 \left(-I_{log}^2(\mu^2) + 2I_{log}(\mu^2) b \ln \left(-\frac{p^2}{\mu^2} \right) - 5bI_{log}(\mu^2) + \text{finito} \right) \quad (3.14)$$

Devemos agora calcular os subdiagramas:

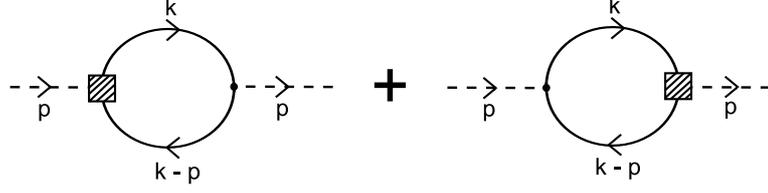


Figura 3.5: Subdiagramas obtidos com as regras de Feynman dos contratermos.

As amplitudes dos dois são iguais. Usando as regras de Feynman:

$$T_{2b}^{(sub)} = 2 \times (-1) \text{tr} \int_k^\Lambda (-g\gamma_5) \frac{i}{\not{k}} (-g\gamma_5 D) \frac{i}{\not{k} - \not{p}} \quad (3.15)$$

onde o contratermo D é dado por (ver tabela 3.1) $D = -ig^2 I_{log}(\mu^2)$. Este é o mesmo diagrama do propagador do bóson que foi calculado em 1 loop. Assim:

$$T_{2b}^{(sub)} = 2ig^4 p^2 \left(-2I_{log}^2(\mu^2) + 2I_{log}(\mu^2) b \ln \left(-\frac{p^2}{\mu^2} \right) - 4bI_{log}(\mu^2) \right) \quad (3.16)$$

Somando (3.14) e (3.16), a amplitude total será:

$$T_{2b} = ig^4 p^2 \left(-2I_{log}^2(\mu^2) + 2bI_{log}(\mu^2) \right) \quad (3.17)$$

Na tabela 3.2 apresentamos os resultados dos cálculos das partes divergentes dos diagramas de 2 loops. Ressaltamos que nestes resultados já foram levados em conta os subdiagramas (como no exemplo acima).

Diagrama	Parte Divergente	Contratermo
	$ig^4 b \not{p} \left(-I_{log}^{(2)}(\mu^2) + \frac{5}{2} I_{log}(\mu^2) \right)$	$-g^4 b \left(-I_{log}^{(2)}(\mu^2) + \frac{5}{2} I_{log}(\mu^2) \right)$
	$ig^4 b \not{p} \left(-\frac{1}{4} I_{log}^{(2)}(\mu^2) + \frac{3}{8} I_{log}(\mu^2) \right)$	$-g^4 b \left(-\frac{1}{4} I_{log}^{(2)}(\mu^2) + \frac{3}{8} I_{log}(\mu^2) \right)$
	$ig^4 b \not{p} \left(-I_{log}^{(2)}(\mu^2) + I_{log}(\mu^2) \right)$	$-g^4 b \left(-I_{log}^{(2)}(\mu^2) + I_{log}(\mu^2) \right)$
	$2ig^4 b p^2 \left(-I_{log}^{(2)}(\mu^2) + \frac{5}{2} I_{log}(\mu^2) \right)$	$-2g^4 b \left(-I_{log}^{(2)}(\mu^2) + \frac{5}{2} I_{log}(\mu^2) \right)$
	$ig^4 p^2 \left(-2I_{log}^2(\mu^2) + 2b I_{log}(\mu^2) \right)$	$-g^4 \left(-2I_{log}^2(\mu^2) + 2b I_{log}(\mu^2) \right)$
	$-\frac{i}{12} \lambda^2 b p^2 I_{log}(\mu^2)$	$\frac{b}{12} \lambda^2 I_{log}(\mu^2)$
	$g^5 \gamma_5 b \left(-2I_{log}^{(2)}(\mu^2) + 4I_{log}(\mu^2) \right)$	$g^4 b \left(-2I_{log}^{(2)}(\mu^2) + 4I_{log}(\mu^2) \right)$
	$2g^5 \gamma_5 b \left(-\frac{1}{2} I_{log}^{(2)}(\mu^2) + I_{log}(\mu^2) \right)$	$2g^4 b \left(-\frac{1}{2} I_{log}^{(2)}(\mu^2) + I_{log}(\mu^2) \right)$
	$2g^5 \gamma_5 b \left(-I_{log}^{(2)}(\mu^2) + I_{log}(\mu^2) \right)$	$2g^4 b \left(-I_{log}^{(2)}(\mu^2) + I_{log}(\mu^2) \right)$
	$g^5 \gamma_5 b \left(-I_{log}^{(2)}(\mu^2) + 2I_{log}(\mu^2) \right)$	$g^4 b \left(-I_{log}^{(2)}(\mu^2) + 2I_{log}(\mu^2) \right)$
	$-g^5 \gamma_5 b I_{log}(\mu^2)$	$-g^4 b I_{log}(\mu^2)$
	$\lambda g^3 \gamma_5 b I_{log}(\mu^2)$	$\lambda g^2 b I_{log}(\mu^2)$

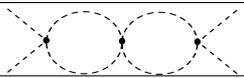
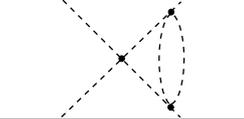
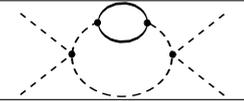
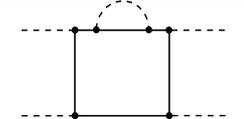
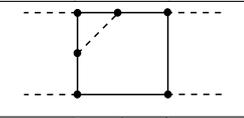
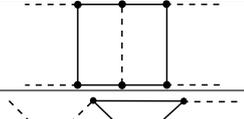
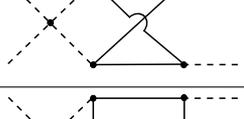
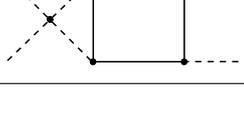
Diagrama	Parte Divergente	Contratermo
	$-\frac{3}{4}i\lambda^3 I_{log}^2(\mu^2)$	$-\frac{3}{4}\lambda^2 I_{log}^2(\mu^2)$
	$3i\lambda^3 b \left(-I_{log}^{(2)}(\mu^2) + 2I_{log}(\mu^2) \right)$	$3\lambda^2 b \left(-I_{log}^{(2)}(\mu^2) + 2I_{log}(\mu^2) \right)$
	$3i\lambda^2 g^2 b \left(-2I_{log}^{(2)}(\mu^2) + 4I_{log}(\mu^2) \right)$	$3\lambda g^2 b \left(-2I_{log}^{(2)}(\mu^2) + 4I_{log}(\mu^2) \right)$
	$24ig^6 b \left(2I_{log}^{(2)}(\mu^2) - 4I_{log}(\mu^2) \right)$	$24\lambda^{-1} g^6 b \left(2I_{log}^{(2)}(\mu^2) - 4I_{log}(\mu^2) \right)$
	$24ig^6 \left(-4I_{log}^2(\mu^2) + 4bI_{log}^{(2)}(\mu^2) - 8bI_{log}(\mu^2) \right)$	$24\lambda^{-1} g^6 \left(-4I_{log}^2(\mu^2) + 4bI_{log}^{(2)}(\mu^2) - 8bI_{log}(\mu^2) \right)$
	$-48ig^6 b I_{log}(\mu^2)$	$-48\lambda^{-1} g^6 b I_{log}(\mu^2)$
	$6i\lambda g^4 \left(-4I_{log}^2(\mu^2) + 4bI_{log}^{(2)}(\mu^2) - 8bI_{log}(\mu^2) \right)$	$6g^4 \left(-4I_{log}^2(\mu^2) + 4bI_{log}^{(2)}(\mu^2) - 8bI_{log}(\mu^2) \right)$
	$12i\lambda g^4 \left(-4I_{log}^2(\mu^2) + 4bI_{log}^{(2)}(\mu^2) - 4bI_{log}(\mu^2) \right)$	$12g^4 \left(-4I_{log}^2(\mu^2) + 4bI_{log}^{(2)}(\mu^2) - 4bI_{log}(\mu^2) \right)$

Tabela 3.2: Partes divergentes dos diagramas de 2 loops.

Neste ponto é interessante ilustrar como funciona o método dos contratermos exposto na seção 2.4. Consideremos os diagramas da auto-energia do férmion. Em 1 loop, a amplitude é dada por



$$+$$


Já calculamos o diagrama da esquerda. Assim,

$$S_1 = \frac{g^2}{2} \not{p} I_{log}(\mu^2) + \text{finito} + i\not{p} B \quad (3.18)$$

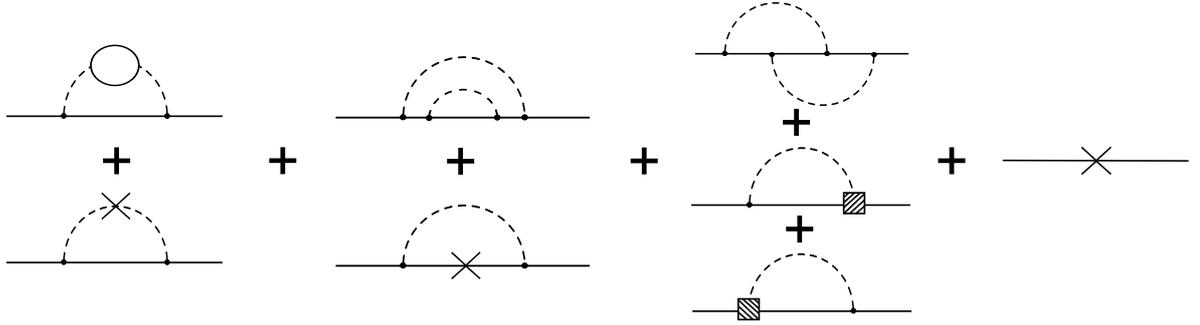
O valor de B é dado na terceira coluna da tabela 3.1. Substituindo:

$$S_1 = \frac{g^2}{2} \not{p} I_{log}(\mu^2) + i\not{p} \left(\frac{i}{2} g^2 I_{log}(\mu^2) \right) + \text{finito}$$

$$S_1 = \text{finito} \quad (3.19)$$

Como esperávamos, após a renormalização, a função de 2-pontos torna-se finita - em 1 loop. Observe que B foi escolhido de modo conveniente para que isso fosse possível.

Passemos para a ordem seguinte. Há contribuições dos diagramas (2.1), (2.2) e (2.3) da figura 3.2, de seus subdiagramas e mais a contribuição de um diagrama de contratermo de segunda ordem:



Usando os resultados da tabela 3.2 podemos escrever:

$$S_2 = ig^4 b \not{p} \left(-I_{log}^{(2)}(\mu^2) + \frac{5}{2} I_{log}(\mu^2) \right) + ig^4 b \not{p} \left(-\frac{1}{4} I_{log}^{(2)}(\mu^2) + \frac{3}{8} I_{log}(\mu^2) \right) + ig^4 b \not{p} \left(-I_{log}^{(2)}(\mu^2) + I_{log}(\mu^2) \right) + i \not{p} B + \text{finito} \quad (3.20)$$

Agora B deve ser escolhido de maneira adequada para cancelar as expressões que divergem. Essa escolha está mostrada na terceira coluna da tabela 3.2. Logo, ficamos com S_2 finita. Assim, o processo de renormalização é repetido de ordem em ordem e obtemos grandezas finitas na ordem desejada.

Capítulo 4

Cálculo das Funções do Grupo de Renormalização através da RI

Como apresentado no capítulo 2, na Regularização Implícita existe uma forma geral de escrevermos os contratermos como integrais básicas em n loops. Este fato pode ser explorado para desenvolvermos uma sistematização do cálculo das funções do grupo de renormalização. Neste capítulo, desenvolveremos este método e obteremos uma expressão fechada para o cálculo, em n loops, de tais funções.

É importante ressaltar que, embora o desenvolvimento foi feito para o modelo de Yukawa, ele pode ser estendido para outras teorias mudando apenas as redefinições -(3.3), (3.4), (3.5) e (3.6) - das grandezas da teoria. Portanto, temos um método que pode ser aplicado no estudo perturbativo de várias teorias e, além disso, é geral para o número de loops.

O modelo de Yukawa foi escolhido porque o uso da Regularização Dimensional não é imediato, já que ele possui o objeto γ_5 que não tem continuação analítica para dimensões arbitrárias. Esse modelo também não possui simetria de calibre. As identidades entre as constantes de renormalização, que surgem devido a essas simetrias, em geral, simplificam os cálculos. Com as expressões das funções do grupo de renormalização em mãos, calcularemos as mesmas até dois loops explicitamente.

4.1 Funções Beta

De acordo com (3.6),

$$g_0 = g \frac{Z_g}{Z_\phi^{\frac{1}{2}} Z_\psi} \quad (4.1)$$

Como g_0 não pode depender da escala temos que

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} (g_0) = 0 \quad (4.2)$$

Substituindo (4.1) e (2.20) veremos que:

$$\beta_g = -g\mu \left(\frac{1}{Z_g} \frac{\partial Z_g}{\partial \mu} - \frac{1}{Z_\psi} \frac{\partial Z_\psi}{\partial \mu} - \frac{1}{2} \frac{1}{Z_\phi} \frac{\partial Z_\phi}{\partial \mu} \right) \quad (4.3)$$

A idéia é escrever as constantes de renormalização (Z_g , Z_ψ e Z_ϕ) como uma série nas constantes de acoplamento g e λ . Em geral, podemos escrever

$$Z = 1 + \sum_{n=1}^N \lambda^{f(n)} Z_n + \sum_{n=1}^N g^{h(n)} \bar{Z}_n + \sum_{n=1}^N \lambda^{a(n)} g^{b(n)} \tilde{Z}_n \quad (4.4)$$

onde n é o número de loops, N é a ordem em que truncamos os cálculos e $f(n)$, $h(n)$, $a(n)$ e $b(n)$ são funções naturais a serem determinadas a partir dos diagramas de Feynman.

A expansão (4.4) deve ser feita para Z_g , Z_ψ e Z_ϕ apenas mudando as funções que aparecem no expoente das constantes de acoplamento. Assim, (4.3) torna-se

$$\begin{aligned} \beta_g = & -\frac{1}{Z_g} \sum_{n=1}^N \left(f(n) \lambda^{f(n)-1} g \beta_\lambda Z_{g_n} + \lambda^{f(n)} g \mu \frac{\partial Z_{g_n}}{\partial \mu} + \right. \\ & + h(n) g^{h(n)} \beta_g \bar{Z}_{g_n} + g^{h(n)+1} \mu \frac{\partial \bar{Z}_{g_n}}{\partial \mu} + \\ & \left. + a(n) \lambda^{a(n)-1} g^{b(n)+1} \tilde{Z}_{g_n} \beta_\lambda + b(n) \lambda^{a(n)} g^{b(n)} \tilde{Z}_{g_n} \beta_g + \lambda^{a(n)} g^{b(n)+1} \mu \frac{\partial \tilde{Z}_{g_n}}{\partial \mu} \right) + \\ & + \frac{1}{Z_\psi} \sum_{n=1}^N (\text{Idem } \psi) + \frac{1}{2} \frac{1}{Z_\phi} \sum_{n=1}^N (\text{Idem } \phi) \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde o símbolo Idem ψ significa que temos a mesma expressão anterior apenas com as trocas: $Z_{g_n} \rightarrow Z_{\psi_n}$; $\bar{Z}_{g_n} \rightarrow \bar{Z}_{\psi_n}$; $\tilde{Z}_{g_n} \rightarrow \tilde{Z}_{\psi_n}$; $f(n) \rightarrow f'(n)$; $g(n) \rightarrow g'(n)$; $a(n) \rightarrow a'(n)$; $b(n) \rightarrow b'(n)$. E similarmente para o símbolo Idem ϕ .

Os termos que são proporcionais a constantes de renormalização são divergentes ao retirarmos a regularização. É válido fazer uma expansão nos termos envolvendo $\frac{1}{Z}$. E, com exceção do primeiro termo desta expansão, que é igual a 1, os restantes serão proporcionais a constantes de renormalização que quando multiplicados por outros termos também serão proporcionais a termos divergentes. Como a função beta deve ser finita toda esta parte divergente (mais a parte divergente que vem das derivadas das constantes de renormalização) deve se anular. Na seção 4.5 veremos esse cancelamento até 2 loops. Portanto, coletando os termos que não são proporcionais a constantes de renormalização e substituindo $\mu \frac{\partial}{\partial \mu}$ por $2\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2}$ teremos:

$$\begin{aligned} \beta_g = & -\mu^2 \sum_{n=1}^N \left(2\lambda^{f(n)} g \frac{\partial Z_{g_n}}{\partial \mu^2} + 2g^{h(n)+1} \frac{\partial \bar{Z}_{g_n}}{\partial \mu^2} + 2\lambda^{a(n)} g^{b(n)+1} \frac{\partial \tilde{Z}_{g_n}}{\partial \mu^2} \right) + \\ & + \mu^2 \sum_{n=1}^N (\text{Idem } \psi) + \frac{1}{2} \mu^2 \sum_{n=1}^N (\text{Idem } \phi) \end{aligned} \quad (4.6)$$

É importante notar que a função beta depende apenas das derivadas das constantes de renormalização.

Procedendo da mesma maneira, encontramos para a função β_λ a seguinte expressão (lembrando de (3.5)):

$$\begin{aligned} \beta_\lambda = & -\mu^2 \sum_{n=1}^N \left(2\lambda^{v(n)+1} \frac{\partial Z_{\lambda_n}}{\partial \mu^2} + 2\lambda g^{r(n)} \frac{\partial \bar{Z}_{\lambda_n}}{\partial \mu^2} + 2\lambda^{t(n)+1} g^{s(n)} \frac{\partial \tilde{Z}_{\lambda_n}}{\partial \mu^2} \right) + \\ & + 2\mu^2 \sum_{n=1}^N (\text{Idem } \phi) \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.2 Dimensões Anômalas

A dimensão anômala foi definida no capítulo 1. Como a teoria de Yukawa possui dois campos, teremos duas dimensões anômalas: γ_ϕ e γ_ψ . Fazendo a mesma expansão de (4.4) e seguindo o mesmo raciocínio da seção anterior, teremos:

$$\gamma_\psi = \mu^2 \sum_{n=1}^N \left(\lambda^{c(n)} \frac{\partial Z_{\psi_n}}{\partial \mu^2} + g^{d(n)} \frac{\partial \bar{Z}_{\psi_n}}{\partial \mu^2} + \lambda^{j(n)} g^{p(n)} \frac{\partial \tilde{Z}_{\psi_n}}{\partial \mu^2} \right) \quad (4.8)$$

$$\gamma_\phi = \mu^2 \sum_{n=1}^N \left(\lambda^{c'(n)} \frac{\partial Z_{\phi_n}}{\partial \mu^2} + g^{d'(n)} \frac{\partial \bar{Z}_{\phi_n}}{\partial \mu^2} + \lambda^{j'(n)} g^{p(n)} \frac{\partial \tilde{Z}_{\phi_n}}{\partial \mu^2} \right) \quad (4.9)$$

4.3 Derivadas das Integrais Básicas

Nas duas seções acima vimos que todos os termos das funções do grupo de renormalização são proporcionais às derivadas dos contratermos. Dentro da Regulação Implícita, podemos escrever o contratermo como uma expansão em potências de $I_{log}(\mu^2)$ e de $I_{log}^{(j)}(\mu^2)$ definidos em (2.2) e (2.6), respectivamente. Assim,

$$Z_n = \sum_{j=1}^n a_j^{(n)} [I_{log}(\mu^2)]^j + \sum_{j=2}^n b_j^{(n)} I_{log}^{(j)}(\mu^2) \quad (4.10)$$

Repare que o segundo somatório começa com $j = 2$ pois, os contratermos de 1 loop não têm contribuições desta natureza. Para o cálculo das funções beta e das dimensões anômalas precisamos determinar as derivadas de Z_n :

$$\frac{\partial Z_n}{\partial \mu^2} = \sum_{j=1}^n j a_j^{(n)} [I_{log}(\mu^2)]^{j-1} \frac{\partial I_{log}(\mu^2)}{\partial \mu^2} + \sum_{j=2}^n b_j^{(n)} \frac{\partial I_{log}^{(j)}(\mu^2)}{\partial \mu^2} \quad (4.11)$$

Para $j = 1$, ficamos apenas com o termo $a_1^{(n)} \frac{\partial I_{log}(\mu^2)}{\partial \mu^2}$. Através do mesmo raciocínio que nos conduziu a (2.7) concluímos que:

$$\frac{\partial}{\partial(\mu^2)} I_{log}(\mu^2) = -\frac{b}{\mu^2} \quad (4.12)$$

Para $j \geq 2$, o primeiro somatório é proporcional a $[I_{log}(\mu^2)]^{j-1}$ (que é divergente). Como as funções do grupo de renormalização devem ser finitas estes termos podem ser desprezados - lembrando que eles serão considerados na seção 4.5.

Consideremos a derivada do segundo somatório:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{log}^{(j)}(\mu^2)}{\partial \mu^2} &= 2 \int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^3} \left[\ln \left(-\frac{k^2 - \mu^2}{\mu^2} \right) \right]^{j-1} - \\ &- \int_k^\Lambda \frac{(j-1)}{(k^2 - \mu^2)^3} \left[\ln \left(-\frac{k^2 - \mu^2}{\mu^2} \right) \right]^{j-2} - \\ &- \int_k^\Lambda \frac{(j-1)}{\mu^2 (k^2 - \mu^2)^2} \left[\ln \left(-\frac{k^2 - \mu^2}{\mu^2} \right) \right]^{j-2} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ou,

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{log}^{(j)}(\mu^2)}{\partial \mu^2} &= 2 \int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^3} \left[\ln \left(-\frac{k^2 - \mu^2}{\mu^2} \right) \right]^{j-1} - \\ &- \int_k^\Lambda \frac{(j-1)}{(k^2 - \mu^2)^3} \left[\ln \left(-\frac{k^2 - \mu^2}{\mu^2} \right) \right]^{j-2} - \frac{(j-1)}{\mu^2} I_{log}^{(j-1)}(\mu^2) \end{aligned} \quad (4.14)$$

O último termo de (4.14) é divergente e, nesta seção vamos desprezá-lo. Entretanto, os dois primeiros são finitos e estão calculados no apêndice B.

Lembrando de (4.11), (4.12) e (B.6) a parte finita \mathcal{F}_n de $\frac{\partial Z_n}{\partial \mu^2}$ será:

$$\mathcal{F}_n = -\frac{b}{\mu^2} a_1^{(n)} - \frac{b}{\mu^2} \sum_{j=2}^n b_j^{(n)} (j-1)! \quad (4.15)$$

Esta expressão junto com (4.6), (4.7), (4.8) e (4.9) é a forma fechada para o cálculo das funções do grupo de renormalização prometida no início do capítulo. Substituindo (4.15) nas expressões de β_g , β_λ , γ_ψ e γ_ϕ vemos que a dependência com a escala μ desaparece como era esperado.

4.4 Modelo de Yukawa em 2 loops

Em 2 loops a expansão (4.4) para o modelo apresentado no capítulo 3 é:

$$Z_\phi = 1 + g^2 \bar{Z}_{\phi_1} + g^4 \bar{Z}_{\phi_2} + \lambda^2 Z_{\phi_2} \quad (4.16)$$

$$Z_\psi = 1 + g^2 \bar{Z}_{\psi_1} + g^4 \bar{Z}_{\psi_2} \quad (4.17)$$

$$Z_g = 1 + g^2 \bar{Z}_{g_1} + g^4 \bar{Z}_{g_2} + \lambda g^2 \tilde{Z}_{g_2} \quad (4.18)$$

$$Z_\lambda = 1 + \lambda Z_{\lambda_1} + \lambda^2 Z_{\lambda_2} + \lambda^{-1} g^4 \bar{Z}_{\lambda_1} + \lambda^{-1} g^6 \bar{Z}_{\lambda_2} + \lambda g^2 \tilde{Z}_{\lambda_2} + g^4 \tilde{Z}'_{\lambda_2} \quad (4.19)$$

Para calcularmos a função β_λ temos que usar as expansões acima em (4.7). Em 1 loop temos:

$$\beta_\lambda^{(1)} = -2\mu^2 \left(\lambda^2 \frac{\partial Z_{\lambda_1}}{\partial \mu^2} + g^4 \frac{\partial \bar{Z}_{\lambda_1}}{\partial \mu^2} - 2\lambda g^2 \frac{\partial \bar{Z}_{\phi_1}}{\partial \mu^2} \right) \quad (4.20)$$

Lembrando de (4.10) e das derivadas das integrais básicas (4.15):

$$\beta_\lambda^{(1)} = 2b \left(\lambda^2 a_{\lambda_1}^{(1)} + g^4 \bar{a}_{\lambda_1}^{(1)} - 2\lambda g^2 \bar{a}_{\phi_1}^{(1)} \right) \quad (4.21)$$

E, portanto, usando os coeficientes dos contratermos da tabela 3.1:

$$\beta_\lambda^{(1)} = 3 \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} - 48 \frac{g^4}{(4\pi)^2} + 8 \frac{\lambda g^2}{(4\pi)^2} \quad (4.22)$$

Seguindo os mesmos passos encontramos

$$\begin{aligned} \beta_\lambda^{(2)} = & \left[\lambda^3 \left((a_{\lambda_1}^{(2)} + b_{\lambda_2}^{(2)}) - 2(a_{\phi_1}^{(2)} + b_{\phi_2}^{(2)}) \right) + g^6 \left(\bar{a}_{\lambda_1}^{(2)} + \bar{b}_{\lambda_2}^{(2)} \right) + \right. \\ & \left. + \lambda^2 g^2 \left(\tilde{a}_{\lambda_1}^{(2)} + \tilde{b}_{\lambda_2}^{(2)} \right) + \lambda g^4 \left((\tilde{a}'_{\lambda_1}^{(2)} + \tilde{b}'_{\lambda_2}^{(2)}) - 2(\bar{a}_{\phi_1}^{(2)} + \bar{b}_{\phi_2}^{(2)}) \right) \right] \quad (4.23) \end{aligned}$$

É útil lembrar que coeficientes do tipo $a_1^{(2)}$ estão relacionados com $I_{log}(\mu^2)$ e os do tipo $b_2^{(2)}$ com $I_{log}^{(2)}(\mu^2)$. Recorrendo a tabela 3.2:

$$\beta_\lambda^{(2)} = -\frac{17}{3} \frac{\lambda^3}{(4\pi)^4} + 384 \frac{g^6}{(4\pi)^4} - 12 \frac{\lambda^2 g^2}{(4\pi)^4} + 28 \frac{\lambda g^4}{(4\pi)^4} \quad (4.24)$$

O mesmo processo repete-se para a função β_g e para as dimensões anômalas. A seguir mostramos até 2 loops as funções do grupo de renormalização do modelo de Yukawa calculadas no esquema da RI:

$$\gamma_\phi = 2 \frac{g^2}{(4\pi)^2} + \frac{1}{12} \frac{\lambda^2}{(4\pi)^4} - 5 \frac{g^4}{(4\pi)^4} \quad (4.25)$$

$$\gamma_\psi = \frac{1}{2} \frac{g^2}{(4\pi)^2} - \frac{13}{8} \frac{g^4}{(4\pi)^4} \quad (4.26)$$

$$\beta_g = 5 \frac{g^3}{(4\pi)^2} - \frac{57}{4} \frac{g^5}{(4\pi)^4} + \frac{1}{12} \frac{\lambda^2 g}{(4\pi)^4} - 2 \frac{\lambda g^3}{(4\pi)^4} \quad (4.27)$$

$$\beta_\lambda = 3 \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} - 48 \frac{g^4}{(4\pi)^2} + 8 \frac{\lambda g^2}{(4\pi)^2} - \frac{17}{3} \frac{\lambda^3}{(4\pi)^4} + 384 \frac{g^6}{(4\pi)^4} - 12 \frac{\lambda^2 g^2}{(4\pi)^4} + 28 \frac{\lambda g^4}{(4\pi)^4} \quad (4.28)$$

Este resultado é o mesmo encontrado em [12]¹ e [13] que utilizaram outras regularizações.

4.5 Cancelamento da Parte Divergente

Exemplificaremos o cancelamento dos termos proporcionais às integrais básicas no caso da dimensão anômala associada ao campo ϕ definida na seção 2.5:

$$\gamma_\phi = \mu^2 \frac{1}{Z_\phi} \frac{\partial}{\partial \mu^2} Z_\phi \quad (4.29)$$

Lembrando de (4.16) e expandindo $\frac{1}{Z_\phi}$:

$$\begin{aligned} \gamma_\phi &= (1 - g^2 \bar{Z}_{\phi_1} - g^4 \bar{Z}_{\phi_2} - \lambda^2 Z_{\phi_2} + O(2)) \left(g \bar{Z}_{\phi_1} \beta_g + g^2 \mu^2 \frac{\partial \bar{Z}_{\phi_1}}{\partial \mu^2} + 2g^3 \bar{Z}_{\phi_2} \beta_g + \right. \\ &\quad \left. + g^4 \mu^2 \frac{\partial \bar{Z}_{\phi_2}}{\partial \mu^2} + \lambda Z_{\phi_2} \beta_\lambda + \lambda^2 \mu^2 \frac{\partial Z_{\phi_2}}{\partial \mu^2} \right) \\ \gamma_\phi &= g \bar{Z}_{\phi_1} \beta_g + g^2 \mu^2 \frac{\partial \bar{Z}_{\phi_1}}{\partial \mu^2} + g^4 \mu^2 \frac{\partial \bar{Z}_{\phi_2}}{\partial \mu^2} + \lambda^2 \mu^2 \frac{\partial Z_{\phi_2}}{\partial \mu^2} - g^4 \mu^2 \bar{Z}_{\phi_1} \frac{\partial \bar{Z}_{\phi_1}}{\partial \mu^2} + O(g^5, \lambda^3) \end{aligned}$$

¹Neste artigo as funções do grupo de renormalização foram definidas como $\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2}$ e por isso há uma diferença de um fator 2 entre os resultados do artigo e deste trabalho.

Em segunda ordem a equação (4.11) reduz-se a:

$$\frac{\partial Z_2}{\partial \mu^2} = -\frac{b}{\mu^2} \left(a_1^{(2)} + b_2^{(2)} \right) - \frac{I_{log}(\mu^2)}{\mu^2} \left(2ba_2^{(2)} + b_2^{(2)} \right) \quad (4.30)$$

O primeiro termo é finito e foi usado para calcular a dimensão anômala. Substituindo (4.30) e o termo de primeira ordem da função β_g na expressão de γ_ϕ :

$$\begin{aligned} \gamma_\phi = & g^4 I_{log}(\mu^2) \left[2b \left(\bar{a}_{g_1}^{(1)} - \bar{a}_{\psi_1}^{(1)} - \frac{1}{2} \bar{a}_{\phi_1}^{(1)} \right) \bar{a}_{\phi_1}^{(1)} - \left(2b \bar{a}_{\phi_2}^{(2)} + \bar{b}_{\phi_2}^{(2)} \right) + b \left(\bar{a}_{\phi_1}^{(1)} \right)^2 \right] - \\ & - b\lambda^2 I_{log}(\mu^2) \left(2ba_{\phi_2}^{(2)} + b_{\phi_2}^{(2)} \right) + \text{termos finitos} + O(g^5, \lambda^3) \end{aligned} \quad (4.31)$$

A parte que é proporcional a λ^2 é trivialmente nula, pois de acordo com o diagrama (2.6) os coeficientes de $I_{log}^2(\mu^2)$ e $I_{log}^{(2)}(\mu^2)$ são iguais a zero. No primeiro termo temos que substituir os coeficientes dos gráficos das tabelas 3.1 e 3.2:

$$\begin{aligned} \gamma_\phi &= g^4 I_{log}(\mu^2) \left[(-5bi)(2i) - (2b(2) + (2b)) + b(2i)^2 \right] + \text{termos finitos} + O(g^5, \lambda^3) \\ \gamma_\phi &= g^4 I_{log}(\mu^2) (10b - 6b - 4b) + \text{termos finitos} + O(g^5, \lambda^3) \\ \gamma_\phi &= \text{termos finitos} + O(g^5, \lambda^3) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Como dissemos, na ordem considerada, os termos que são proporcionais às integrais básicas se anulam deixando, assim, a dimensão anômala finita. Esse tipo de cancelamento também ocorre para as outras funções do grupo de renormalização. Por seguir os mesmos passos, não exporemos os outros cálculos no trabalho.

Repare que se impusermos que os termos em (4.31) sejam nulos encontraremos relações entre coeficientes de diferentes ordens.

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho mostramos que é possível obter uma expressão fechada para as funções do grupo de renormalização em uma ordem arbitrária de loops. E isso é possível porque a Regularização Implícita fixa os contratermos como uma soma de integrais básicas regularizadas. O resultado depende apenas dos coeficientes dessas integrais e o método de cálculo pode ser aplicado a várias teoria de campos.

Até hoje a comparação entre a RI e a RDf mostra um empate no que se refere ao tratamento de teorias em 4 dimensões. O presente resultado mostra pela primeira vez uma vantagem da RI, uma vez que os infinitos podem ser sistematizados e o cálculo das funções do grupo de renormalização em $n > 1$ loops é muito mais fácil do que no contexto da RDf que necessita das partes finitas para o cálculo, sendo as mesmas mais difíceis de obter.

O método foi aplicado na teoria de Yukawa e obtivemos as funções β e as dimensões anômalas até a ordem de dois loops. Esse modelo é interessante porque não é direta a modificação da dimensão do espaço-tempo. E é fundamental para o estudo de teorias supersimétricas efetuar os cálculos em uma dimensão fixa do espaço-tempo. Além disso, a Regularização Implícita não modifica explicitamente a forma dos integrandos das amplitudes de Feynman, propriedade interessante nas teorias de calibre.

Teorias de calibre supersimétricas são, de fato, uma das principais motivações para continuar o estudo que iniciamos neste projeto. Extensões supersimétricas do Modelo Padrão são tema de intensa pesquisa, devido, principalmente, à expectativa de identificar partículas supersimétricas nos experimentos que serão realizados no LHC. O cálculo das funções do grupo de renormalização persistirão como instrumentos válidos para a análise do comportamento assintótico dos modelos.

Apêndice A

Diagramas aninhados

Consideremos o diagrama (2.1). Ele é traduzido pelas regras de Feynman na seguinte expressão:

$$S_{2a}^{(diag)} = \int_k^\Lambda (-g\gamma_5) \frac{i}{(\not{p} - \not{k}) - m} (-g\gamma_5) \left(-\text{tr} \int_q^\Lambda (-g\gamma_5) \frac{i}{\not{q} - m} (-g\gamma_5) \frac{i}{\not{k} + \not{q} - m} \right) \times \left(\frac{i}{k^2 - m^2} \right)^2$$

O termo entre parênteses já foi calculado. Substituindo seu valor, após algumas manipulações diretas e tomando o limite $m \rightarrow 0$, teremos:

$$S_{2a}^{(diag)} = 2ig^4 \left\{ \frac{\not{p}}{2} I_{log}^2(\mu^2) - \frac{\not{p}}{2} b I_{log}(\mu^2) \ln \left(-\frac{p^2}{\mu^2} \right) + \frac{9}{4} \not{p} b I_{log}(\mu^2) - \not{p} \frac{b}{2} I_{log}^{(2)}(\mu^2) + \text{termos finitos} \right\} \quad (\text{A.1})$$

Temos agora que calcular

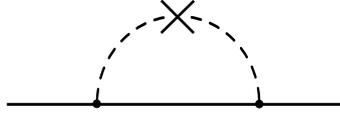


Figura A.1: Diagrama de contratermo.

Onde o contratermo é o contratermo do propagador do bóson dado pela tabela 3.1. Assim,

$$S_{2a}^{(sub)} = \int_k^\Lambda (-g\gamma_5) \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m} (-g\gamma_5) \frac{i}{k^2 - m^2} (iAk^2) \frac{i}{k^2 - m^2} \quad (\text{A.2})$$

No final teremos

$$S_{2a}^{(sub)} = -2ig^4 \left\{ \frac{\not{p}}{2} I_{log}^2(\mu^2) - \frac{\not{p}}{2} b I_{log}(\mu^2) \ln \left(-\frac{p^2}{\mu^2} \right) + \not{p} b I_{log}(\mu^2) \right\} \quad (A.3)$$

Somando (A.1) e (A.3) :

$$S_{2a} = ig^4 b \left(-I_{log}^{(2)}(\mu^2) + \frac{5}{2} I_{log}(\mu^2) + \text{termos finitos} \right) \quad (A.4)$$

Calculemos o diagrama abaixo

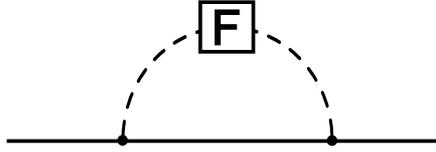


Figura A.2: Diagrama obtido ao se substituir o subdiagrama pela parte finita deste.

Onde o símbolo F denota a parte finita do subdiagrama que ele substitui. Novamente, recorrendo à tabela 3.1:

$$G = \int_k^\Lambda (-g\gamma_5) \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m} (-g\gamma_5) \frac{i}{k^2 - m^2} \left[2g^2 k^2 \left(-b \ln \left(-\frac{k^2}{\mu^2} \right) + 2b \right) \right] \frac{i}{k^2 - m^2} \quad (A.5)$$

Fazendo os cálculos chegamos a:

$$G = ig^4 b \left(-I_{log}^{(2)}(\mu^2) + \frac{5}{2} I_{log}(\mu^2) + \text{termos finitos} \right) \quad (A.6)$$

Como vemos (A.4) é igual a (A.6). A figura A.3 ilustra, pictoriamente, a equivalência que acabamos de verificar.

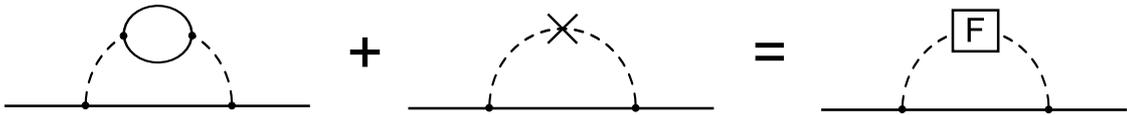


Figura A.3: Equivalência descrita no texto.

Apêndice B

Cálculo da parte finita de $\frac{\partial I_{\log}^{(j)}(\mu^2)}{\partial \mu^2}$

Chamemos a parte finita de $\frac{\partial I_{\log}^{(j)}(\mu^2)}{\partial \mu^2}$ de F . Após fazer a rotação de Wick, escrever em coordenadas esféricas e calcular as derivadas angulares chegamos a:

$$F = -\frac{i}{8\pi} \left(2 \int_0^\infty dk \frac{k^3}{(k^2 + \mu^2)^3} \left[\ln \left(\frac{k^2 + \mu^2}{\mu^2} \right) \right]^{j-1} - (j-1) \int_0^\infty dk \frac{k^3}{(k^2 + \mu^2)^3} \left[\ln \left(\frac{k^2 + \mu^2}{\mu^2} \right) \right]^{j-2} \right) \quad (\text{B.1})$$

Sabendo que

$$\frac{d}{dk} \left[\ln \left(\frac{k^2 + \mu^2}{\mu^2} \right) \right]^{j-1} = 2(j-1) \frac{k}{(k^2 + \mu^2)} \left[\ln \left(\frac{k^2 + \mu^2}{\mu^2} \right) \right]^{j-2} \quad (\text{B.2})$$

podemos escrever

$$F = -\frac{i}{8\pi} \left(2 \int_0^\infty dk \frac{k^3}{(k^2 + \mu^2)^3} \left[\ln \left(\frac{k^2 + \mu^2}{\mu^2} \right) \right]^{j-1} - \frac{1}{2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{(k^2 + \mu^2)^2} \frac{d}{dk} \left[\ln \left(\frac{k^2 + \mu^2}{\mu^2} \right) \right]^{j-1} \right) \quad (\text{B.3})$$

Fazendo uma integração por partes no segundo termo ficamos com

$$F = -\frac{i}{8\pi} \int_0^\infty \frac{k}{(k^2 + \mu^2)^2} \left[\ln \left(\frac{k^2 + \mu^2}{\mu^2} \right) \right]^{j-1} \quad (\text{B.4})$$

Com a mudança de variável $x = \frac{k^2 + \mu^2}{\mu^2}$, (B.4) torna-se

$$F = -\frac{i}{8\pi} \frac{1}{2\mu^2} \int_1^\infty dx \frac{(\ln x)^{j-1}}{x^2} \quad (\text{B.5})$$

Finalmente, integrando por partes $j - 1$ vezes:

$$F = -\frac{i}{8\pi} \frac{(j-1)!}{2\mu^2} \quad (\text{B.6})$$

Apêndice C

Integrais em k

Integrais em k usadas no trabalho:

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 + 2kQ - M^2)^\alpha} = i \frac{(-1)^\alpha \Gamma(\alpha - \frac{n}{2})}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma(\alpha)} \frac{1}{(Q^2 + M^2)^{\alpha - \frac{n}{2}}} \quad (\text{C.1})$$

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2kQ - M^2)^\alpha} = i \frac{(-1)^\alpha \Gamma(\alpha - \frac{n}{2})}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma(\alpha)} \frac{k_\mu}{(Q^2 + M^2)^{\alpha - \frac{n}{2}}} \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + 2kQ - M^2)^\alpha} &= i \frac{(-1)^\alpha}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma(\alpha)} \frac{1}{(Q^2 + M^2)^{\alpha - \frac{n}{2}}} \times \\ &\times \left[Q_\mu Q_\nu \Gamma(\alpha - \frac{n}{2}) - g_{\mu\nu} (M^2 + Q^2) \Gamma(\alpha - 1 - \frac{n}{2}) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^2}{(k^2 + 2kQ - M^2)^\alpha} &= i \frac{(-1)^\alpha}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma(\alpha)} \frac{1}{(Q^2 + M^2)^{\alpha - \frac{n}{2}}} \times \\ &\times \left[Q^2 \Gamma(\alpha - \frac{n}{2}) - \frac{n}{2} (M^2 + Q^2) \Gamma(\alpha - 1 - \frac{n}{2}) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Referências Bibliográficas

- [1] JACKIW, R. The Unreasonable Effectiveness of Quantum Field Theory. *70 Years of Quantum Mechanics*. jan. 1996.
- [2] FREEDMAN, D. Z.; JOHNSON, K.; LATORRE, J. I. Differential Regularization and Renormalization: A New Method of Calculation in Quantum Field Theory. *Nuclear Physics B*, v. 371, n. 1-2, p. 353-414. mar. 1992.
- [3] DIAS, E. W.; BAËTA SCARPELLI, A. P.; BRITO, L. C. T.; SAMPAIO, M. D.; NEMES, M. C. Implicit Regularization Beyond One Loop Order: Gauge Field Theories. *The European Physical Journal C*, v. 55, n. 4, p. 667-681. jun. 2008.
- [4] PONTES, C. R.; BAËTA SCARPELLI, A. P.; SAMPAIO, M. D.; NEMES, M. C. Implicit Regularization Beyond One Loop Order: Scalar Field Theories. *Journal of Physics G*, v. 34, p. 2215-2234. set. 2007.
- [5] SIEGEL, W. Inconsistency of supersymmetric Dimensional Regularization. *Physics Letters B*, v. 94, n. 1, p. 37-40. jul. 1980.
- [6] SAMPAIO, M. D.; BAËTA SCARPELLI, A. P.; OTTONI, J. E.; NEMES, M. C. Implicit Regularization and Renormalization of QCD. *International Journal of Theoretical Physics*, v. 45, n. 2, p. 436-457. fev. 2006.
- [7] BAËTA SCARPELLI, A. P.; SAMPAIO, M. D.; NEMES, M. C. Consistency Relations for an Implicit n-dimensional Regularization Scheme. *Physical Review D*, v. 63, n. 4, p. 046004 (12 páginas). jan. 2001.
- [8] GOMES, M. O. C. *Teoria Quântica de Campos*. EDUSP, 2002.
- [9] HATFIELD, B. *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings*, Addison Wesley, 1992.

- [10] RYDER, L. H. *Quantum Field Theory*. 2 ed. Cambridge University Press, 1996.
- [11] PESKIN, M. E.; SHROEDER, D. V. *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison Wesley, 1995.
- [12] SCHUBERT, C. The Yukawa Model as an Example for Dimensional Renormalization with γ_5 . *Nuclear Physics B*, v. 323, n. 2, p. 478-492. set. 1989.
- [13] MANUEL, C. Differential Renormalization of a Yukawa Model with γ_5 . *International Journal of Modern Physics A*, v. 8, n. 18, p. 3223 - 3234. jul. 1993.
- [14] DIAS, E. W. *Tese de doutorado em andamento*. UFMG. Minas Gerais.