

**Espaços de Parâmetros para um
Circuito Caótico Experimental**

Emilson Ribeiro Viana Junior

09 de Março de 2010

EMILSON RIBEIRO VIANA JUNIOR

**Espaços de Parâmetros para um
Circuito Caótico Experimental**

Dissertação apresentada à UNIVERSIDADE FEDERAL DE
MINAS GERAIS, como requisito parcial para a obtenção do
grau de MESTRE EM FÍSICA.

Área de concentração: Teoria do Caos - Caos Experimental

Orientador: Prof. Alfredo Gontijo de Oliveira (UFMG)

Coorientador: Prof. Rero Marques Rubinger (UNIFEI)

Departamento de Física - ICEX - UFMG

09 de Março de 2010

*"Caos é o nome de qualquer ordem que
produz confusão em nossas mentes."*

(George Santayana)

*"O Mundo não está ameaçado pelas pessoas más, e sim
por aquelas que permitem que a maldade seja feita."*

(Albert Einstein)

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus. Agradecer a Ele é meio incomum na comunidade científica, mas sem Ele não teríamos a Terra, não teríamos a Natureza e principalmente não teríamos a VIDA!

Gostaria de agradecer ao meus pais, pelo apoio incondicional, pelas alegrias, pelas brigas, resumindo: pelo AMOR! Vocês são tudo para mim! Mãe, obrigado pelas caronas, pelos lanchinhos no final da tarde, pela superproteção e pelo conforto que você proporciona à todos nós! Sim, você é uma mãe 24 horas ao dia e 7 dias por semana! Pai, obrigado pela amizade, pelo apoio financeiro e pelo ensinamentos que moldaram o meu caráter. Obrigado também pelo sítio, pelos papos na sacada, pelas pescarias, pelos acampamentos, pelos ótimos almoços aos domingos e pelos presentes que você ganha, mas dá para mim! Desculpe pelo Chevectra e por todos os dias que não pude ir te ajudar no sítio, ora por ter milhares de coisas "da física" para fazer ora por preguiça, não nego. Amo vocês!

Quero agradecer as minhas irmãs, Vanessa, Mary, Vivi e Lavínia, vocês são parte importante da minha vida, obrigado pelo carinho, pelas briguinhas, pelas piadinhas, pelos "teatros" e pelo carinho! Vou aproveitar aqui para mandar um beijo para a lindeza da minha sobrinha, Duda! E um abraço pro meu cunhado Daniel!

Agora eu gostaria de falar, Eu Te Amo Xu! Você é linda, inteligente, educada, carinhosa e o melhor, é só minha! Obrigado pelo carinho, pelos beijos e abraços, pelos cochilos de domingo à tarde, pelos brigadeiros e chocolates, pelas idas ao Baby Beef e Pinguim, pelos presentes, pelas mensagens de celular, pelos recadinhos no orkut ... Te amo para sempre! Ps: você é a mulher mais cheirosa! Vou aproveitar aqui para mandar um beijo para a minha sogra e para a minha cunhada, um abraço para o sogrão e para o cunhado, obrigado por serem minha segunda casa, na Bahia!

Gostaria de agradecer a minha família em geral, principalmente aos primos porque não chamar de irmãos: Michel, Vinicius, Fabiano, Rafa, Larissa, Frans, Nariga, Leo, Polly, Tati, Guilherme... Aos tios e tias! Vovós (Maria Faustina e Ivone) e Vovôs (Roberto e Oliveira, *in memorian*). Obrigado pelas festas quase todo o fim de semana, pelo apoio, pelo carinho e principalmente por continuar fazendo valer o sentido do que é ser família... Muitas saudades Tia Cely!

Gostaria de agradecer aos meus amigos da bagunça: Igor, Chicão, Lucão, Alex, Ronan, Dudu, Trow, Vegetal, Marculino, Magrelo, Kleiton, Tosqueira, Brunão, Valadão, Diguin, Pedol, Thales ... Obrigado pelo apoio, pelos churrascos sem carne e sem hora marcada, pelos papos "cabeça" no Mano's, pelas reuniões na casa do Dudu nos dias de jogo do Cruzeiro (ps: São Paulooooo! nem adianta me chamar de cruzeirilson). Amizade é Mato !!!

Agradecer também as minhas amigas, Nathane, Ana Lúcia, Michele, Simone e Ivone, pelo carinho, pelo companheirismo e principalmente por me agüentarem durante esses anos!

Gostaria também de agradecer ao meu Prof. Nataniel Barbosa e aos amigos do Taekwondo, pelos treinos, pelos *poomse*, pelas lutas de três ataques, pelas lutas combinadas *rambon* e *dudbon*, e pelos treinos de técnicas de competição. Treinos que "quase" me mantêm em forma, mas que mantêm a minha cabeça equilibrada e livre de problemas...

Gostaria também de agradecer a todos os amigos da Física principalmente: Diogão, Markin, Romero, Rabelo, Samuca, Babi, Pri, Kaká, Jow, Luiz, Breno, Dudu, Baiano, Camila, Ive, Jaque, Rosinha, Anderson, Dani, Livia, Adriano, Bretas, Fabito, Além, "Anasbougoulis", Wendell, Gustavo, Guilherme, Felipe, Samir, Alex ... Agradeço pelos papos na sala do café e na sala do mestrado, pelas cervejinhas nos horários de descontração, pelas noites de Pôker, pelos papos na hora do almoço, pelos grupos de estudos para as provas/seleções e principalmente pela amizade. E a todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para esse trabalho (clichê, mas muito eficiente). Segue um "desagrado" ao Edmilson.

Gostaria de agradecer também aos meus orientadores, Prof. Rero (UNIFEI) e Prof. Alfredo, e aos professores, Prof. Holokx (UESC) e Prof. Mathias. Obrigado pelos ensinamentos, pelos trabalhos que me fortalecem nesse início da carreira de Físico, e pelas correções dessa dissertação, sem elas, o trabalho não teria o mesmo valor. Obrigado por estarem sempre dispostos a me ensinar e ajudar, por sempre trazerem novos trabalhos e principalmente por se dedicarem a profissão de PROFESSORES, sem vocês não teríamos Ciência! Aproveitando gostaria também de agradecer a todos os meus professores ao longo da vida, do maternal à pós-graduação.

Gostaria de agradecer o aluno de iniciação científica do nosso laboratório, Felipe Oliveira, pela ajuda na aquisição das medidas experimentais e por me ajudar no desenvolvimento dos programas em Labview.

Gostaria também de agradecer a Shirley e a Maria Clarice, pela eficiência nos COMUTS (obrigado mesmo!), pela educação e pela atenção ao nos atender quase que diariamente.

Gostaria também de agradecer as agências financiadoras: CNPq, FAPEMIG e CAPES, pelas bolsas de iniciação científica e mestrado, e pelo financiamento dos congressos que participei.

Por fim gostaria de agradecer todos que eu esqueci de citar diretamente ou indiretamente.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS.....	III
LISTA DE TABELAS.....	VIII
RESUMO.....	IX
ABSTRACT.....	X
 CAPÍTULO 1) INTRODUÇÃO	
1.1) MOTIVAÇÃO.....	01
1.2) INTRODUÇÃO À TEORIA DO CAOS.....	03
1.3) SEÇÃO DE POINCARÉ.....	06
1.4) EXEMPLOS DE SISTEMAS CAÓTICOS	
1.4.1) MAPA LOGÍSTICO.....	08
1.4.2.) MODELO DE LORENZ.....	09
REFERÊNCIAS DO CAPÍTULO 1.....	10
 CAPÍTULO 2) CIRCUITO ELÉTRICOS OSCILADORES	
2.1) CIRCUITOS OSCILADORES - CIRCUITO RLC.....	11
2.2) CIRCUITO DE CHUA	
2.2.1) HISTÓRIA.....	13
2.2.2) FUNCIONAMENTO DO DIODO CHUA.....	16
2.2.3) FUNCIONAMENTO DO CIRCUITO DE CHUA.....	19
2.3) CIRCUITO DE CHUA COM O INDUTOR ELETRÔNICO	
2.3.1) INTRODUÇÃO.....	20
2.3.2) FUNCIONAMENTO DO CIRCUITO DO INDUTOR ELETRÔNICO.....	22
2.4) CIRCUITO DE CHUA FORÇADO POR UMA FONTE DC	
2.4.1) INTRODUÇÃO.....	25
2.4.2) NOVO PARÂMETRO DE CONTROLE, V_{DC}	27
REFERÊNCIAS DO CAPÍTULO 2.....	30
 CAPÍTULO 3) CIRCUITO DE CHUA EXPERIMENTAL E TÉCNICAS	
3.1) IMPLEMENTAÇÃO EXPERIMENTAL DO CIRCUITO DE CHUA COM A FONTE DC	
3.1.1) PROJETO DO CIRCUITO DE CHUA EXPERIMENTAL.....	31
3.1.2) MONTAGEM EXPERIMENTAL DO CIRCUITO DE CHUA.....	36
3.1.3) MONTAGEM PARA A DETERMINAÇÃO DA CURVA I(V) DO DIODO CHUA.....	37
3.2) AQUISIÇÃO DOS DADOS EXPERIMENTAIS.....	39
3.3) <u>TÉCNICA</u> : DETECÇÃO DA PERIODICIDADE	41
3.4) <u>TÉCNICA</u> : CÁLCULO DOS EXPOENTES DE LYAPUNOV	
3.4.1) MAIOR EXPOENTE DE LYAPUNOV.....	46
3.4.2) ESPECTRO DOS EXPOENTE DE LYAPUNOV/ MÉTODO DO SANO E SAWADA.....	47
3.4.3) SOFTWARE LYAP_SPEC - TISEAN	49
REFERÊNCIAS DO CAPÍTULO 3.....	53

CAPÍTULO 4) RESULTADOS EXPERIMENTAIS E DISCUSSÕES	
4.1) INTRODUÇÃO.....	55
4.2) SÉRIES E ATRADORES EXPERIMENTAIS.....	55
4.3) DIAGRAMAS DE BIFURCAÇÃO EXPERIMENTAIS.....	62
4.4) BIFURCAÇÕES POR ADIÇÃO DE PERÍODO.....	70
4.5) ESPAÇO DE PARÂMETROS EXPERIMENTAL DA PERIODICIDADE.....	76
4.6) ESPAÇO DE PARÂMETROS DO MAIOR EXPOENTE DE LYAPUNOV	
4.6.1) EXPERIMENTAL.....	83
4.6.2) SIMULADO.....	88
REFERÊNCIAS DO CAPÍTULO 4.....	92
 CAPÍTULO 5) CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS.....	 94
 APÊNDICE) DICIONÁRIO DE TERMOS TÉCNICOS E ABREVIATURAS.....	 97

Lista de Figuras

Capítulo 1)

Figura 1.1) O expoente de Lyapunov representa a taxa média de divergência $\lambda > 0$ (ou de convergência, $\lambda < 0$) das trajetórias. Considere os dois pontos próximos, x_0 e $(x_0 + dx)$ e deixando-os evoluir no tempo, observando $x(t)$ e $x'(t)$, podemos perceber que os pontos podem divergir (meio) ou convergir (final) no fluxo. pág.04

Figura 1.2) Trajetória no espaço de estados de dimensão m , irá cruzar o hiperplano de dimensão $(m-1)$ marcando pontos (A,B) sobre esse plano. Os pontos de interseção (A,B) definem a seção de Poincaré da série temporal que representa essa trajetória. pág.07

Figura 1.3) Seção de Poincaré de uma série temporal de tempo contínuo. Os pontos de máximo ou de mínimo da série temporal original são selecionados e depois salvos em uma nova série ($\vec{x}_{\text{máx}}$) ou ($\vec{x}_{\text{mín}}$) dependendo da escolha. A nova série temporal representa a seção de Poincaré feita sobre a série original. pág.07

Figura 1.4) Atrator de Lorenz obtido para os parâmetros $\rho = 28$, $\sigma = 10$ e $\beta = 8/3$ pág.09

Capítulo 2)

Figura 2.1) Circuito RLC em série. Circuito elétrico oscilatório composto por uma fonte de tensão contínua V , um resistor R , um capacitor C e um indutor L pág.11

Figura 2.2) Padrão $i \times t$ para as condições 1, 2 e 3. (a) condição 1 : superamortecimento, equação 2.6, (b) condição 2 : amortecimento crítico, equação 2.7 e (c) condição 3 : oscilação sub-amortecida, equação 2.8. pág.12

Figura 2.3) Primeiro atrator caótico em formato Duplo-Rolo obtido experimental para o circuito de Chua, em 1985, apresentado por Takashi Matsumoto, Leon O. Chua, e Motomasa Komuro no artigo “ The Double Scroll”. pág.14

Figura 2.4) Diagrama esquemático do circuito de Chua. Composto por um Diodo Chua (destacado pela linha pontilhada), dois capacitores C_1 e C_2 , um indutor L , os resistores R e r_L . Temos como variáveis do sistema as tensões x , y sobre os capacitores C_1 e C_2 respectivamente, e a corrente z que passa sobre o indutor L pág.14

Figura 2.5) Circuito equivalente do Diodo de Chua. O circuito do Diodo de Chua é constituído de dois amplificadores operacionais A_1 e A_2 e de seis resistências, R_1 até R_6 pág.15

Figura 2.6) Curva I(V) do Diodo de Chua composta por cinco segmentos de reta, sendo dois desses com inclinação negativa m_0 (em preto), um com inclinação negativa mais acentuada m_1 , e dois com inclinação ôhmica m_2 (em vermelho). A linha em azul é a chamada “linha de carga” que em interseção com a curva I(V) define os pontos, $(-V_o, I_o)$ e $(V_o, -I_o)$, de operação do circuito de Chua. $\pm V_{B1}$ são os valores da tensão que definem a mudança de inclinação das curvas de m_1 para m_0 . $\pm V_{B2}$ são os valores de tensão de saturação dos amplificadores operacionais, conseqüentemente do Diodo de Chua. pág.19

Figura 2.7) Circuito equivalente do indutor eletrônico. O circuito é constituído por dois amplificadores operacionais, A_3 e A_4 , quatro resistências, R_7 até R_{10} , e um capacitor C_3 .
..... pág.22

Figura 2.8) Diagrama esquemático do circuito de Chua com o indutor eletrônico e com uma fonte de tensão contínua DC em série com o diodo Chua. À esquerda, podemos ver a disposição dos componentes do circuito de Chua, e à direita, o circuito equivalente do indutor L. pág.25

Figura 2.9) Diagrama esquemático do circuito de Chua no equilíbrio sem a fonte DC em série. Na condição de equilíbrio teremos apenas o diodo de Chua ligado em série com o resistor R.
..... pág.27

Figura 2.10) Diagrama esquemático do circuito de Chua com a fonte DC no equilíbrio. Na condição de equilíbrio teremos apenas o diodo de Chua ligado em série ao resistor R e a fonte DC. pág.28

Figura 2.11) Soluções de Equilíbrio, que definem os pontos de operação do circuito $(V_o, -I_o)$ e $(-V_o, I_o)$ obtidos através da análise das "Linhas de Carga". (a) Variando-se a tensão VDC, porém mantendo a inclinação $(-1/R)$ fixa. (b) Variando a inclinação $(-1/R)$, porém mantendo $V_{DC} = 0$.
..... pág.29

Capítulo 3)

Figura 3.1) Diagrama Esquemático do projeto experimental do Circuito de Chua com a fonte DC. *A medida P apresentada no diagrama é apenas esquemática já que a medida de tensão é feita no circuito equivalente do indutor eletrônico. pág.32

Figura 3.2) (a) Projeto do Circuito de Chua com fonte DC. (b) Vista por cima da placa do circuito de Chua. pág.33

Figura 3.3) Diagrama esquemático do painel de controle do circuito de Chua experimental.
..... pág.35

Figura 3.4) Diagrama esquemático da montagem experimental do circuito de Chua com a fonte DC. Na montagem experimental temos a esquerda o computador com LabView, placa GPIB e DAQmx, a direita temos os aparelhos Keithley 196 e Keithley 230, e o circuito de Chua.
..... pág.36

Figura 3.5) Curva $I(V)$ experimental do diodo de Chua, composta por 5 regiões lineares, sendo três delas de condutividade diferencial negativa (regiões 2, 3 e 4) e sendo outras duas ôhmicas (regiões 1 e 5), devido a saturação dos amplificadores operacionais. pág.38

Figura 3.6) Fluxograma da metodologia aplicada as medidas experimentais do circuito de Chua com a fonte DC. pág.40

Figura 3.7) Painel Gráfico do programa de aquisição das séries temporais experimentais ("Chua Fonte 230.vi"). pág.41

Figura 3.8) (a) Série temporal da variável x , periódica de período-7, medida $R = 1676,00 \Omega$ e $V_{DC} = -0,2095 V$, (b) Atrator, (c) a transformada FFT e (D) a transformada UFFT, da série temporal. pág.43

Figura 3.9) (a) Série temporal da variável x , caótica, medida $R = 1676,00 \Omega$ e $V_{DC} = -0,1385 V$, (b) Atrator, (c) a transformada FFT e (D) a transformada UFFT, da série temporal. pág.44

Figura 3.10) Painel gráfico do programa ("*Atratores_CHUA_Periodicidade.vi*") de detecção da periodicidade que realiza os cálculos da transformada UFFT. Esse programa automaticamente lê todas as séries temporais, determina e grava em um arquivo a periodicidade correspondente. pág.45

Capítulo 4)

Figura 4.1) Série temporal x , y e z e seus respectivos atratores 3D para as medidas experimentais $R = 1676,00 \Omega$ e $V_{DC} = -0,7495 V$ (figuras 4.1.a e 4.1.c) e $-0,3510 V$ (figuras 4.1.b e 4.1.e). pág.56

Figura 4.2) Série temporal x , y e z e seus respectivos atratores 3D para as medidas experimentais $R = 1676,00 \Omega$ e $V_{DC} = -0,2400 V$ (figuras 4.2.a e 4.2.c) e $-0,2095 V$ (figuras 4.2.b e 4.2.e). pág.57

Figura 4.3.a e 4.3.b) Série temporal x , y e z para as medidas experimentais: $R = 1676,00 \Omega$ e $V_{DC} = +0,0385 V$ (fig.4.3.a) e $-0,1385 V$ (fig.4.3.b). pág.57

Figura 4.3.c e 4.3.d) Atrator 3D (x y z) para as medidas experimentais: $R = 1676,00 \Omega$ e $V_{DC} = +0,0385 V$ (fig.4.3.c) e $-0,1385 V$ (fig.4.3.d). pág.58

Figura 4.4.a e 4.4.b) Atrator 3D (x y z) para as medidas experimentais: $R = 1620,00 \Omega$ e $V_{DC} = -0,4990 V$ (fig.4.4.a) e $-0,4700 V$ (fig.4.4.b). pág.58

Figura 4.5.a e 4.5.b) Atrator 3D (x y z) para as medidas experimentais: $R = 1620,00 \Omega$ e $V_{DC} = -0,4580 V$ (fig.4.5.a) e $-0,4080 V$ (fig.4.5.b). pág.69

Figura 4.6.a e 4.6.b) Atrator 3D (x y z) para as medidas experimentais: $R = 1620,00 \Omega$ e $V_{DC} = -0,3880 V$ (fig.4.6.a) e $-0,3720 V$ (fig.4.6.b). pág.59

Figura 4.7.a e 4.7.b) Atrator 3D (x y z) para as medidas experimentais: $R = 1620,00 \Omega$ e $V_{DC} = -0,3490 V$ (fig.4.7.a) e $-0,3410 V$ (fig.4.7.b). pág.60

Figura 4.8.a e 4.8.b) Atrator 3D ($x y z$) para as medidas experimentais: $R = 1620,00 \Omega$ e $V_{DC} = -0,3020 V$ (fig.4.8.a) e $-0,2120 V$ (fig.4.8.b).	pág.60
Figura 4.9.a e 4.9.b) Atrator 3D ($x y z$) para as medidas experimentais: $R = 1620,00 \Omega$ e $V_{DC} = -0,1880 V$ (fig.4.9.a) e $-0,1670 V$ (fig.4.9.b).	pág.61
Figura 4.10.a e 4.10.b) Atrator 3D ($x y z$) para as medidas experimentais: $R = 1620,00 \Omega$ e $V_{DC} = -0,1660 V$ (fig.4.10.a) e $-0,1650 V$ (fig.4.10.b).	pág.61
Figura 4.11) Diagrama de bifurcação $R = 1620,00 \Omega$, V_{DC} entre $-0,7500 V$ e $+0,7500 V$, passo $0,5 mV$	pág.63
Figura 4.12) Diagrama de bifurcação $R = 1620,00 \Omega$, V_{DC} entre $+0,0500 V$ e $+0,4000 V$. Amplificação da região do diagrama de bifurcação para V_{DC} positivo.	pág.63
Figura 4.13) Diagrama de bifurcação $R = 1620,00 \Omega$, V_{DC} entre $-0,6000 V$ e $-0,1800 V$. Amplificação da região do diagrama de bifurcação para V_{DC} negativo.	pág.64
Figura 4.14) Diagrama de bifurcação $R = 1600,00 \Omega$, V_{DC} entre $-0,7500 V$ e $+0,7500 V$	pág.65
Figura 4.15) Diagrama de bifurcação $R = 1640,00 \Omega$, V_{DC} entre $-0,7500 V$ e $+0,7500 V$	pág.66
Figura 4.16) Diagrama de bifurcação $R = 1668,00 \Omega$, V_{DC} entre $-0,7500 V$ e $+0,7500 V$	pág.67
Figura 4.17) Diagrama de bifurcação $R = 1680,00 \Omega$, V_{DC} entre $-0,7500 V$ e $+0,7500 V$	pág.67
Figura 4.18) Diagrama de bifurcação $R = 1700,00 \Omega$, V_{DC} entre $-0,7500 V$ e $+0,7500 V$	pág.68
Figura 4.19) Diagrama de bifurcação $R = 1720,00 \Omega$, V_{DC} entre $-0,7500 V$ e $+0,7500 V$	pág.69
Figura 4.20) Diagrama de Bifurcação Experimental do Circuito de Chua com a fonte DC para $R = 1677,00 \Omega$ e V_{DC} entre $-0,7500 V$ e $+0,7500 V$, passo de $0,5 mV$. Foi selecionada uma região em vermelho na parte de V_{DC} positiva do diagrama de bifurcação para mostrarmos com mais detalhes as regiões de alternância entre caóticas e periódicas.	pág.72
Figura 4.21) Amplificação na parte positiva do Diagrama de Bifurcação da figura 4.20, apresentando as janelas complexas periódicas de período-2 até período-6, cada cor representando uma janela de periodicidade diferente.	pág.72
Figura 4.22) (a) Diagrama de Bifurcação obtido a partir das séries temporais experimentais para $R = 1677,00 \Omega$ e V_{DC} entre $0,0000 V$ e $+0,5000 V$, passo de $0,5 mV$. (b) Diagrama de Bifurcação simulado obtido a partir da integração das equações diferenciais do circuito de Chua para $R = 1720,00 \Omega$ e V_{DC} entre $0,0000 V$ e $+0,5000 V$, passo de $0,5 mV$	pág.74
Figura 4.23) Regressão não linear de decaimento exponencial do tamanho das janelas periódicas ΔP em relação à periodicidade, para os diagramas de bifurcação da simulação e o experimental, representados em vermelho e azul, respectivamente.	pág.75

- Figura 4.24)** Espaço de Parâmetros da Periodicidade para R entre 160,00 Ω e 1720,00 Ω e V_{DC} entre -0,7500 V e +0,7500 V. Escala de 13 cores, uma cor para cada valor da periodicidade P da série temporal, sendo que para as séries caóticas ou de periodicidade acima de 12, foi definida a mesma cor, preta. pág.78
- Figura 4.25)** Amplificação no Espaço de Parâmetros da Periodicidade para R entre 1600,00 Ω e 172,00 Ω , e V_{DC} entre -0,5100 V e +0,2000 V. Amplificação realizada para melhor visualização das regiões periódicas das janelas complexas periódicas. pág.79
- Figura 4.26)** Amplificação no Espaço de Parâmetros da Periodicidade: R entre 1650,00 Ω e 1720,00 Ω , V_{DC} entre -0,4000 V e -0,1500 V. pág.81
- Figura 4.27)** Amplificação do Espaço de Parâmetros da Periodicidade: R entre 1600,00 Ω e 1720,00, V_{DC} entre +0,1000 V e +0,5000 V. pág.81
- Figura 4.28)** Amplificação no Espaço de Parâmetros da Periodicidade para R entre 1650,00 Ω e 1720,00 Ω , V_{DC} entre +0,0500 V e +0,3500 V. Evidenciando as mesmas características encontradas no lado esquerdo do espaço de parâmetros da periodicidade, figura 4.26. pág.82
- Figura 4.29)** Espaço de Parâmetros Experimental do maior expoente de Lyapunov λ_{maior} , V_{DC} entre -0,7500 V e +0,7500V ao passo de 0,5 mV e R variando entre 1600,00 Ω e 1720,00 Ω pág.84
- Figura 4.30)** Amplificação da região caixa A do espaço de parâmetros da figura 4.29. V_{DC} entre 0,0000 V e 0,2000V, R entre 1600,00 Ω e 1720,00 Ω . Apresentando estruturas em formato de "garras" alternando entre caóticas e periódicas. pág.85
- Figura 4.31)** Espaço de Parâmetros Simulado do maior expoente de Lyapunov para o circuito de Chua com a fonte DC. V_{DC} entre -0,7000 V e +0,7000 V com 600 valores intermediários eqüidistantes, R entre 1600,00 Ω e 1760,00 Ω com 600 valores intermediários eqüidistantes. pág.89
- Figura 4.32)** Amplificação na figura 4.31 do Espaço de Parâmetros Simulado do maior expoente de Lyapunov, para o circuito de Chua com a fonte DC. V_{DC} entre 0,0000 V e +0,30000 V com 600 valores intermediários eqüidistantes, R entre 1600,00 Ω e 1740,00 Ω , com 600 valores intermediários e eqüidistantes. pág.91
- Figura 4.33)** Ampliação da figura 4.32 do Espaço de Parâmetros Simulado do maior expoente de Lyapunov para o circuito de Chua com a fonte DC. V_{DC} entre 0,0000 V e +0,15000 V com 300 valores intermediários eqüidistantes, R entre 1600,00 Ω e 1740,00 Ω , com 600 valores intermediários e eqüidistantes. Apresentando estruturas auto-similares no formato de camarões. pág.91

Lista de Tabelas

Capítulo 1)

Tabela 1.1) Valores de x_n e y_n para as condições iniciais $A=3,7$ e $x_0=0,1000$ e $y_0=0,1001$.
..... pág.08

Capítulo 3)

Tabela 3.1) Valores dos Componentes utilizados do circuito de Chua. pág.34

Tabela 3.2) Regiões da curva $I(V)$ do diodo de Chua experimental. pág.38

Tabela 3.3) Tipos de Movimento do atrator em relação ao maior expoente de Lyapunov.
..... pág.46

Tabela 3.4) Especificações do programa *Tisean: Lyap_Spec*. pág.50

Capítulo 4)

Tabela 4.1) Tamanho das janelas periódicas ΔP em função da periodicidade P para o diagrama de bifurcação $R = 1677,00 \Omega$, da figura 4.20. pág.73

Tabela 4.2) Escala de codificação de cores do espaço de parâmetros da periodicidade. Uma cor para cada valor de periodicidade P do atrator. pág.77

Tabela 4.3) Relações entre os expoentes de Lyapunov e os tipos de séries temporais. pág.83

Tabela 4.4) Exemplos de algumas células da matriz que representa o espaço de parâmetros do maior expoente de Lyapunov, λ_{maior} pág.88

Resumo

A quantidade de estudos de bifurcações de dimensão-2 em sistemas caóticos de tempo contínuo, ao variarmos dois parâmetros de controle do sistema, vem crescendo continuamente nos últimos anos. As estruturas complexas periódicas imersas em regiões de regimes caóticos foram primeiramente observadas em mapas de tempo discreto. Recentemente, alguns trabalhos relataram a existência dessas estruturas periódicas, em sistemas descritos por modelos de tempo contínuo, através de simulações e experimentalmente. Porém, os espaços de parâmetros experimentais apresentados eram de resolução baixa. O objetivo desse trabalho é apresentar espaços de parâmetros experimentais de grande resolução. Os resultados nessa dissertação são inéditos em um sistema caótico experimental, no caso, um circuito de Chua.

O circuito de Chua que utilizamos foi forçado através da adição de uma fonte de tensão contínua DC em série com o Diodo Chua. A tensão aplicada pela fonte de tensão, V_{DC} , atua como um novo parâmetro de controle do circuito, pois ao variarmos V_{DC} mudamos os pontos de operação do circuito, que são definidos pela interseção da curva $I(V)$ do diodo Chua com a "linha de carga". Variando-se a tensão V_{DC} temos um deslocamento vertical na linha de carga, em relação à curva $I(V)$ do diodo, e variando a resistência R , do circuito de Chua, mudamos a inclinação ($-1/R$) da linha de carga. Ou seja, teremos pontos de interseção diferentes, conseqüentemente uma dinâmica diferente para o circuito de Chua, para os diferentes valores dos parâmetros de controle (V_{DC}, R) utilizados.

Nesse trabalho são apresentados dois espaços de parâmetros experimentais de resolução $(3001) \times (120)$, um para a periodicidade das séries temporais, e outro para o maior expoente de Lyapunov dessas. Os espaços de parâmetros mostram em abundância, estruturas complexas periódicas, similares as encontradas anteriormente em mapas discretos. Essas estruturas periódicas se auto-organizam em uma cascata de bifurcação com adição de período por: (período-2)-(caos)-(período-3)-(caos)-(período-4)-(caos)... e assim por diante, até se acumularem na região caótica próxima a tensão $V_{DC} = 0,0000$ V. Investigações por simulação, do modelo dinâmico do Circuito de Chua com a fonte DC, também foram realizadas para corroborar com os resultados experimentais apresentados nos espaços de parâmetros e nos diagramas de bifurcação.

Esse circuito serve como uma plataforma para o estudo das redes periódicas formadas pelas estruturas auto-similares, que são delimitadas por regiões caóticas. Levando em consideração comunicação baseada em caos, saber exatamente onde as regiões complexas periódicas estão imersas, na região caótica, é uma importante questão. Já que domínios extensos de regiões caóticas são importantes para aplicações em comunicação segura.

Abstract

The interest in codimension-two bifurcations in flows, when we vary simultaneously two of the system's parameters, have grown substantially in last years. This is due to the observation of complex periodic structures, immersed in chaotic regions, until recently just observed in discrete time maps. More recently, some works reported the existence of those periodic structures inside the chaotic phases in some systems described by continuous-time models. Regarding experimental data, few works reported those structures in two-dimensional parameter spaces with low-resolution. Therefore, the aim of this work is to report two high-resolution experimental parameter space for a chaotic circuit, in this case, a Chua's Circuit.

The Chua's Circuit is forced by a voltage source d.c., in series with the Chua's Diode. Such resolution in the parameter spaces was propitiated by the use of a 0.5 mV step d.c. voltage source as the new control parameter. The voltage V_{DC} change the equilibrium points, defined by the intersection of the "line charge" and the Chua's $I(V)$ curve. The voltage d.c. shifts the "line charge" vertically in the coordinated axe of this $I(V)$ curve and the resistance R , present in the Chua's Circuit, change the slope ($-1/R$) of the "line charge". So we have different intersections points for different control parameters (V_{DC}, R).

The two high-resolution codimension-two parameter-spaces presented in this work, one for the periodicity and one for the largest Lyapunov Exponent, show abundance of complex periodic structures. Those complex periodic structures organize themselves in a period-adding bifurcation cascade, as (period-2)-(chaos)-(period-3)-(chaos)-(period-4)- and so on ... , that accumulates in the chaotic region, for $V_{DC} = 0.0000$ V. Numerical investigations on the dynamical model of this forced circuit were also carried out to corroborate several new features observed in those experimental high-resolution parameter-space.

This forced circuit consists in a platform for the study of this intricate periodic networks formed by periodic self-similar structures surrounded by chaotic phases. Regarding chaos based communication systems, the knowledge of what exactly is embedded in the regions of chaos, in dynamical systems, is an important question since clean and extended domains of chaos are important for applications in secure communications.

Capítulo 1) Introdução

1.1) Motivação

Nesse trabalho estaremos desenvolvendo um estudo sobre as oscilações periódicas e caóticas das séries temporais do circuito eletrônico oscilatório, conhecido como Circuito de Chua. O circuito de Chua original, proposto em 1984 ⁽¹⁾, é composto por dois resistores, R e r_L , dois capacitores C_1 e C_2 , um indutor L e um elemento não-linear, o Diodo Chua. Mas para desenvolvermos um circuito de Chua estável é preciso utilizar, no lugar do indutor físico L , um circuito que o simulará, como proposto por Tôrres e Aguire ⁽²⁾. Essa implementação, com o indutor eletrônico, torna o circuito de Chua robusto e mais estável, já que para pequenas modificações nos parâmetros de controle do sistema, a resistências R e r_L (adicionada em série com o indutor), pode-se obter uma grande variedade de resultados.

O circuito utilizado nesse trabalho, e proposto por nós, é o circuito de Chua ⁽¹⁾ com o indutor eletrônico ⁽²⁾ forçado por uma fonte de tensão contínua DC, aplicada em série com o diodo Chua. A tensão aplicada no diodo Chua, V_{DC} , atuará como um novo parâmetro de controle do sistema, afetando a dinâmica das equações diferenciais que o regem. E como utilizamos uma fonte de tensão com precisão na escala de milivolts (mV), teremos então um parâmetro de controle muito preciso, tornando possível a obtenção de diversas séries temporais, uma para cada parâmetro de controle (R, r_L, V_{DC}). Nesse trabalho manteremos o parâmetro de controle r_L fixo e iremos variar a resistência R através de *trimpots* multi-volta e a tensão V_{DC} automaticamente, através da automação da fonte de tensão contínua *Keithley-230*.

Os parâmetros de controle, R e V_{DC} , afetam as equações diferenciais do circuito de Chua, pois ao variarmos (R, V_{DC}) mudaremos os pontos de operação do circuito de Chua. Os pontos de operação são definidos pelo cruzamento da reta "linha de carga" com a curva $I(V)$ do diodo Chua. Ao variarmos a resistência R iremos variar a inclinação da linha de carga em relação a curva $I(V)$, e ao variarmos a tensão V_{DC} iremos deslocar a linha de carga paralelamente à curva de V_{DC} nulo (e R fixo). Dessa forma, para cada condição inicial, (R, V_{DC}), teremos interseções diferentes e, conseqüentemente, uma dinâmica diferente para as séries temporais do nosso circuito. As séries temporais do circuito de Chua, x , y e z , são obtidas através das medidas de tensão sobre os capacitores, C_1 e C_2 , e da medida da corrente que passa pelo circuito equivalente do indutor eletrônico, respectivamente.

Esse é o primeiro trabalho que se propõe a obter experimentalmente:

1. Diagramas de Bifurcação, R fixo e V_{DC} variável;
2. Bifurcações por Adição de Período;
3. Janelas Complexas Periódicas;
4. Espaços de Parâmetros V_{DC} por R para a Periodicidade;
5. Espaços de Parâmetros V_{DC} por R para o Maior Expoente de Lyapunov.

Essa dissertação está dividida em cinco capítulos:

Capítulo 1: Que agora estamos desenvolvendo, contém a motivação do trabalho e uma pequena introdução sobre a Teoria do Caos. Na introdução à Teoria do Caos, seção 1.2, discutiremos sobre a hipersensibilidade às condições iniciais ("efeito borboleta") das séries temporais caóticas, as condições para obtermos séries temporais caóticas em um sistema não-linear, definiremos como é obtida a seção de Poincaré de uma série temporal e para finalizar apresentaremos dois exemplos emblemáticos de sistemas caóticos: mapa Logístico e modelo de Lorenz.

Capítulo 2: Esse capítulo contém um pouco da teoria básica de circuitos eletrônicos osciladores. Nesse também apresentaremos a história do circuito de Chua. Em seguida, analisaremos as equações diferenciais que regem a sua dinâmica não-linear e comentaremos sobre as modificações propostas por nós e sobre o seu funcionamento.

Capítulo 3: Discutiremos a implementação experimental do circuito de Chua forçado pela fonte DC e sobre a montagem experimental para a determinação da curva $I(V)$ do diodo Chua. Apresentaremos os métodos para aquisição das séries temporais experimentais xyz e as técnicas de análises utilizadas nesse trabalho, "detecção da periodicidade" e "espectro dos expoentes de Lyapunov".

Capítulo 4: Apresentaremos os resultados experimentais obtidos a partir da análise das séries temporais do circuito de Chua com a fonte, que são: os atratores caóticos e periódicos de periodicidades elevadas, os diagramas de bifurcação, as rotas de bifurcação por adição de período, as janelas periódicas complexas, os espaços de parâmetros da periodicidade e do maior expoente de Lyapunov, e as estruturas auto-similares contidas nesses dois últimos.

Capítulo 5: Nesse capítulo faremos as discussões finais e as conclusões, e apresentaremos as perspectivas para os próximos trabalhos.

Apresentamos no início da dissertação, os agradecimentos, a lista de figuras e de tabelas, o resumo e o *abstract* do trabalho.

As **referências bibliográficas** citadas nos textos estão **divididas por capítulo** e serão apresentadas na última página de cada capítulo, respectivamente.

No final dessa dissertação apresentamos o apêndice, **dicionário de termos técnicos e abreviaturas** que servirá como uma breve explicação, de alguns dos termos comumente utilizados nos trabalhos de Teoria do Caos. Esse dicionário contém informações relevantes para o entendimento de alguns conceitos, das discussões e dos resultados que serão apresentados nessa dissertação. Podendo ser consultado sempre que necessário.

1.2) Introdução à Teoria do Caos

Na ciência, Caos é um termo usado para descrever o comportamento complexo de um sistema. O comportamento caótico quando observado ao acaso, parece errático ou até mesmo aleatório, e parecendo possuir muitos graus de liberdade. Porém caos pode estar presente até em sistemas muito simples, porém com pelo menos 3 graus de liberdade, como será discutido a seguir. Ou seja, mesmo que o seu comportamento pareça complexo é possível que esse sistema esteja em um comportamento caótico simples e muito bem definido ⁽³⁾. Mesmo para sistemas caóticos que parecem ser completamente diferentes, alguns comportamentos parecem universais, como os comportamentos obtidos ao variarmos um dos parâmetros de controle. Podem ocorrer mudanças bruscas de comportamento mesmo para pequenas variações de parâmetros, como por exemplo, bifurcações e até a emergência de um comportamento caótico vindo de uma série temporal periódica.

Os primeiros trabalhos sobre caos iniciaram-se na década de 1880 com o matemático e físico teórico francês, **Henri Poincaré**, nos seus estudos sobre a dinâmica das órbitas no problema de três corpos. Poincaré descobriu que algumas órbitas não eram periódicas (ciclos limites), nem se aproximavam de um ponto fixo e nem aumentavam indefinidamente. Ou seja, elas preenchiam um espaço de estados completamente, porém numa região limitada e sem explosão para tempos longos.

Com essa descoberta Poincaré abriu uma nova abordagem no estudo de órbitas celestes. Poincaré não resolveu o problema de três corpos, esse foi resolvido em 1912 por Karl F. Sundman ao mostrar a convergência das séries infinitas de solução desse problema. Porém, as descobertas de Poincaré abriram portas para um novo ramo da ciência, a Teoria do Caos, tão estudada nos últimos 100 anos, principalmente por físicos e matemáticos.

Além disso, Poincaré foi um dos primeiros a considerar a possibilidade de caos em sistemas determinísticos ao estudar o problema da imprevisibilidade em longo prazo. Seus estudos sobre topologia, geometria algébrica, teoria de funções abelianas, estudo de funções analíticas de muitas variáveis, entre outros, o tornaram um dos cientistas de grande destaque no século passado.

Podemos destacar os trabalhos de alguns indivíduos que consideramos os precursores da área Teoria do Caos:

- O matemático francês, **Jacques Hadamard**, alguns estudos desenvolvidos no final da década de 1890 foram sobre o movimento caótico de partículas livres deslizando sem atrito sobre uma superfície de curvatura constante e negativa, os "bilhares de Hadamard". Ele mostrou que as trajetórias eram instáveis e que elas divergiam entre si, exponencialmente.

- O matemático russo, **Aleksandr Mikhailovich Lyapunov** cujos estudos foram desenvolvidos no contexto de sistemas dinâmicos não lineares. Muito dos conceitos desenvolvidos por ele são utilizados até hoje, como por exemplo, os Expoentes de Lyapunov que estão definidos na seção 3.4.
- O meteorologista e matemático americano, **Edward Norton Lorenz**, que interessado em estudar e prever o clima acabou encontrando certos comportamentos que se tornaram símbolos de sistemas caóticos, os conhecidos atratores de Lorenz ⁽⁴⁾ ou atratores estranhos que serão discutidos mais detalhadamente a seguir.

Uma condição para dizermos que um sistema tem comportamento caótico é que esse apresente uma **alta sensibilidade às condições iniciais**, por exemplo, dado dois sistemas idênticos com condições iniciais infinitesimalmente próximas, representados pelas equações 1.1 e 1.2, temos:

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \quad (\text{eq.1.1})$$

$$\vec{x}'(t_0) = (\vec{x}_0 + d\vec{x}) = \vec{x}'_0 \quad (\text{eq.1.2})$$

Deixando-os evoluir a partir da distância inicial:

$$\vec{D}_0(\vec{x}(t_0), \vec{x}'(t_0)) = (\vec{x}'_0 - \vec{x}_0) \quad (\text{eq.1.3})$$

Onde \vec{D}_0 é a distância inicial entre eles no tempo t_0 . A evolução é dada pelas equações não-lineares que regem o sistema e com o passar do tempo a diferença entre as trajetórias dos dois sistemas, no tempo t é dada por:

$$\vec{D}(\vec{x}(t), \vec{x}'(t)) = (\vec{x}'(t) - \vec{x}(t)) \quad (\text{eq.1.4})$$

Essas trajetórias divergem exponencialmente segundo uma equação do tipo:

$$\vec{D}(\vec{x}(t), \vec{x}'(t)) = \vec{D}_0(\vec{x}(t_0), \vec{x}'(t_0)) \cdot e^{\lambda t}, \quad (\lambda > 0) \quad (\text{eq.1.5})$$

Esse comportamento e essa equação se prestam a definir, λ , que é o chamado expoente de Lyapunov. Esse expoente caracteriza a divergência das trajetórias próximas.

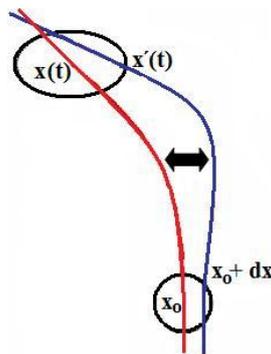


Figura 1.1: O expoente de Lyapunov representa a taxa média de divergência $\lambda > 0$ (ou de convergência, $\lambda < 0$) das trajetórias. Considere os dois pontos próximos, x_0 e $(x_0 + dx)$ e deixando-os evoluir no tempo, observando $x(t)$ e $x'(t)$, podemos perceber que os pontos podem divergir (meio) ou convergir (final) no fluxo.

A alta sensibilidade às condições iniciais têm sido poeticamente retratada através da expressão *efeito borboleta*. A idéia do efeito borboleta foi introduzida por Edward Lorenz em seus trabalhos da década de 1960. Outros trabalhos utilizaram-se desse mesmo conceito dizendo que se a teoria não linear de Lorenz sobre a convecção da atmosfera fosse verdadeira, o simples bater das asas de uma borboleta no Brasil poderia afetar um tornado no Texas ⁽⁵⁾.

O efeito borboleta refere-se à idéia de que o bater das asas da borboleta poderia criar pequenas modificações na atmosfera local, que no futuro poderiam alterar o caminho de um tornado, ou acelerando-o, ou freando-o ou até mesmo desviando-o de seu curso original.

O bater das asas representa a variação infinitesimal das condições iniciais, como nas equações 1.1 e 1.2, que afetam a resposta do sistema para tempos longos, por causa da alta sensibilidade. É importante ressaltar que o "bater das asas" não causa o tornado no Texas em si, no sentido de fornecer energia para a sua criação, esse "bater de asas" é apenas a modificação da condição inicial nas equações não lineares que regem a criação desse tornado.

Comentamos sobre a possibilidade de caos em sistemas dinâmicos, sobre as características importantes apresentadas, porém não definimos para quais sistemas podemos observar comportamentos caóticos.

As condições necessárias para que um sistema regido por equações diferenciais determinísticas apresente um comportamento caótico são:

- **Condição 1:** Alta sensibilidade às condições iniciais, divergência exponencial de trajetórias, em uma certa direção do espaço.
- **Condição 2:** O atrator que representa o estado deve ser limitado no espaço de estados e não pode haver cruzamento de trajetórias (que caracteriza um atrator cíclico);
- **Condição 3:** A dimensão do sistema dinâmico deve ser no mínimo três;

Em sistemas de dimensão 1 não é possível o aparecimento de caos, pois a condição 2 entraria em contradição com a 1. Nessa dimensão não é possível termos uma divergência exponencial de trajetórias em uma única direção (condição 1) e ao mesmo tempo termos o atrator limitado no espaço (condição 2).

No caso de sistemas de dimensão 2, as condições 1 e 2 também não podem ao mesmo tempo serem satisfeitas, a divergência exponencial de trajetórias acarretaria em cruzamento de órbitas.

O **Teorema de Poincaré-Bendixson**, na página 104 referência (3), afirma que apenas em duas dimensões podemos separar o espaço 2D em duas regiões, R_{dentro} e R_{fora} , por uma curva fechada, de tal forma que uma trajetória de ciclo-limite começando na região R_{dentro} nunca poderá ir para a região R_{fora} , assim como uma trajetória começando em R_{fora} nunca poderá ir para R_{dentro} . Logo existem apenas duas possibilidades de trajetórias para um sistema de dimensão 2 que são:

- A trajetória se aproxima para um ponto fixo, para $t \rightarrow \infty$;
- A trajetória se aproxima para um ciclo periódico, para $t \rightarrow \infty$.

O Teorema de Poincaré-Bendixson é um excelente exemplo de como argumentos topológicos são importantes no estudo de sistemas dinâmicos. E, dos resultados do teorema, podemos obter a condição 3, de que apenas podem ocorrer trajetórias caóticas para sistemas descritos por equações diferenciais, de no mínimo três dimensões, como é o caso do circuito de Chua.

Para um espaço de estados de três dimensões descrito por três equações diferenciais de primeira ordem, teremos três expoentes de Lyapunov associados a uma das séries temporais desse sistema. Para obter-se resultados caóticos deve-se ter um dos expoentes de Lyapunov positivo e maior do que zero (associado a divergência das trajetórias em uma certa direção), um expoente nulo (associado a direção do fluxo do sistema) e um negativo (associado a contração das trajetórias próximas em outra direção). A condição 2, está relacionada com o fato de a soma dos expoentes de Lyapunov ser negativa, pois se o sistema divergisse em todas as direções ou mais em uma do que nas outras duas juntas, não teríamos o espaço de fase limitado no espaço.

Não devemos confundir séries temporais caóticas com séries temporais aleatórias, como por exemplo, ruído branco. As duas séries apresentam características muito diferentes quanto ao seu espectro de frequências da transformada de Fourier (FFT). Em séries temporais caóticas temos que o seu espectro FFT apresenta uma quantidade muito grande de picos de oscilações, porém esse espectro não é distribuído em todas as faixas de frequências da mesma forma. Os picos de oscilação são distribuídos em torno de um ou mais picos de oscilações centrais (os que apresentam as maiores amplitudes de sinal). Em séries temporais de um ruído branco temos também uma quantidade muito grande de picos de oscilação, porém a distribuição desses picos não é ponderada por picos centrais, ela é distribuída de forma homogênea para todas as faixas de frequências.

Comportamento caótico pode aparecer em uma infinidade de sistemas, como por exemplo: sistemas climáticos ⁽⁴⁾, movimento de partículas ⁽⁶⁾, reações químicas ⁽⁷⁾, circuitos elétricos, osciladores biológicos ⁽⁸⁾, na economia ⁽⁹⁾, nuvem interestelares ⁽¹⁰⁾ ...

Os modelos de sistemas dinâmicos podem ser apresentados basicamente em duas formas: ou em um sistema de equações diferenciais ou em funções de tempo discreto. Antes de apresentarmos alguns exemplos de sistemas dinâmicos caóticos é importante apresentarmos o conceito da **Seção de Poincaré**, que faz diretamente a relação entre esses dois tipos de modelos.

1.3) Seção de Poincaré

Por definição, mapas são regras de evolução de sistemas dinâmicos na forma discreta (exemplo: mapa logístico, mapas quadráticos etc..). Um mapa pode ser descrito em termos de uma função de iteração $F(x_n)$, sendo x_n o valor da variável no tempo discreto n , por:

$$x_{(n+1)} = F(x_n) \quad (\text{eq.1.6})$$

Para um sistema dinâmico descrito por equações diferenciais e de dimensão m , podemos reduzir a sua análise ao estudo de mapas de tempo discreto, ou os chamados mapas de primeiro retorno, através da seção de Poincaré. A consequência prática disso é que estaremos reduzindo o estudo do sistema no fluxo (tempo contínuo) de dimensão m , para o estudo do sistema no tempo discreto.

Na seção de Poincaré utilizaremos um hiper-plano de dimensão $(m-1)$ para seccionar o atrator no espaço de estados, gerado a partir da série temporal do sistema. A órbita do atrator irá cruzar esse hiper-plano orientado numa certa direção, marcando pontos sobre esse plano, como apresentado na figura 1.2 . Os pontos marcados sobre o hiper-plano constituirão uma nova série temporal que se presta a representar o sistema. Para cada orientação do hiper-plano teremos uma série temporal $(\vec{x}_{poincare})$ distinta.

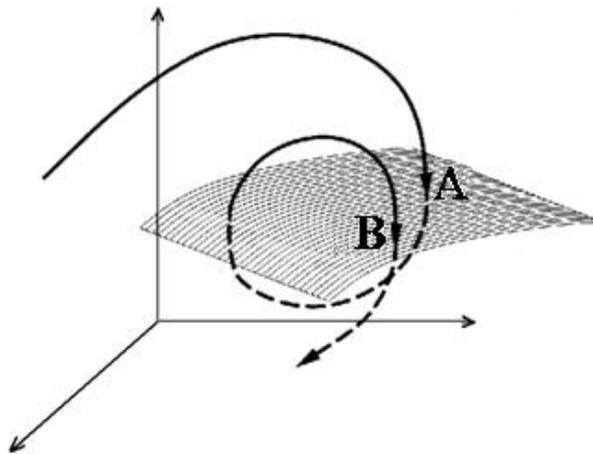


Figura 1.2: Trajetória no espaço de estados de dimensão m , irá cruzar o hiperplano de dimensão $(m-1)$ marcando pontos (A,B) sobre esse plano. Os pontos de interseção (A,B) definem a seção de Poincaré da série temporal que representa essa trajetória ⁽³⁾.

Para obtermos o *máximo de informação* da série temporal $\vec{x}_{poincare}$ devemos encontrar a direção do hiper-plano que maximize a quantidade de pontos do cruzamento desses com a órbita do atrator e que minimize o tempo entre dois pontos sucessivos na seção de Poincaré. Os pontos marcados sobre o hiper-plano serão então salvos em uma nova série temporal que irá representar o sistema Além disso, é importante escolhermos direções do hiper-plano que não sejam paralelas às direções da trajetória do sistema.

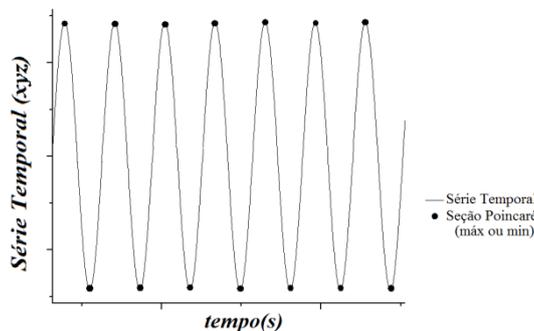


Figura 1.3: Seção de Poincaré de uma série temporal de tempo contínuo. Os pontos de máximo ou de mínimo da série temporal original são selecionados e depois salvos em uma nova série $(\vec{x}_{máx})$ ou $(\vec{x}_{mín})$ dependendo da escolha. A nova série temporal representa a seção de Poincaré feita sobre a série original.

Um método simples e que satisfaz as condições de *máximo de informação* é selecionarmos os pontos de máximo ou de mínimo da série temporal e os gravarmos então em uma nova série. As novas séries temporais $\vec{x}_{máx}$ ou $\vec{x}_{mín}$ são definidas a partir dessa escolha. Na figura 1.3 apresentamos a seção de Poincaré de uma série periódica, porém, esse método também pode ser aplicado para séries temporais caóticas.

1.4) Exemplos de Sistemas Caóticos

Nessa seção iremos apresentar resumidamente dois exemplos emblemáticos de sistemas caóticos: o mapa Logístico, representando os sistemas de tempo discreto, e o modelo de Lorenz, representando os sistemas de tempo contínuo.

1.4.1) Mapa Logístico

O mapa logístico é uma equação de segundo grau que apresenta comportamento caótico, mesmo para uma equação não-linear tão simples como eq.1.7

$$x_{n+1} = Ax_n \cdot (1 - x_n) \quad (\text{eq.1.7})$$

Esse mapa é parte de um modelo discreto de crescimento demográfico, onde x_n é um número entre 0 e 1 e representa a população em um ano n , x_0 é a população no ano zero, A é um número positivo e representa a taxa combinada de reprodução e mortalidade. O comportamento caótico advém da competição entre reprodução e mortalidade, já que a reprodução aumenta a uma taxa proporcional à população atual, para pequenos valores de população, e a taxa de mortalidade aumenta conforme a população aumenta.

A seguir, mostraremos na tabela 1.1 duas rotas distintas para o mapa logístico (equação 1.7). As duas rotas apresentam comportamento caótico, para as condições iniciais: $A_1 = 3,7$ e $x_0 = 0,1000$, $A_2 = 3,7$ e $y_0 = 0,1001$, para as séries x_n e y_n respectivamente. Para os valores de x_n e y_n apresentados a seguir utilizaremos apenas 4 algarismos significativos, porém as contas foram realizadas na precisão de 8 algarismos significativos.

Tabela 1.1: Valores de x_n e y_n para as condições iniciais $A=3,7$ e $x_0=0,1000$, e $y_0=0,1001$.

$A_1 = 3,7$	$x_0 = 0,1000$	$A_2 = 3,7$	$y_0 = 0,1001$
Iteração n	x_n	Iteração n	y_n
0	0,1000	0	0,1001
1	0,3330	1	0,3333
2	0,8221	2	0,8225
3	0,5411	3	0,5403
4	0,9189	4	0,9192
5	0,2755	5	0,2747
6	0,7388	6	0,7374
7	0,7141	7	0,7165
8	0,7555	8	0,7517
9	0,6835	9	0,6907
10	0,8005	10	0,7906
11	0,5909	11	0,6126

O destaque em **negrito e sublinhado** representa as diferenças nos algoritmos significativos entre as duas trajetórias de condições iniciais próximas. Mostrando que mesmo para uma diferença tão pequena nas condições iniciais temos diferenças visíveis nas trajetórias e aumentando com a interação n .

1.4.2) Modelo de Lorenz:

Edward Norton Lorenz do *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), em 1963 estudava sobre meteorologia e na tentativa de fazer previsões sobre o clima criou um modelo de equações diferenciais de primeira ordem, tridimensional e determinístico que se propunha a explicar a convecção de ar na atmosfera. Esse modelo é um modelo simplificado de convecção baseado nas equações de Navier-Stokes. Ele tem como variáveis do sistema $X(t)$, $Y(t)$ e $Z(t)$, e como parâmetros de controle, σ , ρ e β . As equações diferenciais de primeira ordem que regem a convecção do ar são:

$$\frac{dX}{dt} = \sigma(Y - X); \quad \frac{dY}{dt} = -XZ + \rho Z - Y; \quad \frac{dZ}{dt} = XY - \beta Z \quad (\text{eq.1.8})$$

Lorenz descobriu que para alguns valores dos parâmetros σ , ρ e β as soluções das equações diferenciais, eq.1.8, apresentavam um comportamento por ele chamado “estranho”.

Mais tarde foi demonstrado que esse comportamento “estranho” era na verdade comportamento caótico. Na figura 1.4 mostramos um atrator “estranho” de Lorenz que têm como parâmetros $\rho = 28$, $\sigma = 10$ e $\beta = 8/3$. Em 1983, Peter Grassberger e I. Procaccia⁽¹¹⁾ estimaram a dimensão de Hausdorff⁽¹²⁾, que determina a complexidade de objetos fractais, para alguns atratores de Lorenz obtendo para um deles um valor de $D_{\text{Hausdorff}} = (2.06 \pm 0.01)$. Um atrator no espaço de estados (σ, ρ, β) é determinado estranho se tem estrutura fractal e dimensão de Hausdorff entre 2 e 3. Dos resultados apresentados temos que o modelo de Lorenz gera atratores “estranhos” caóticos.

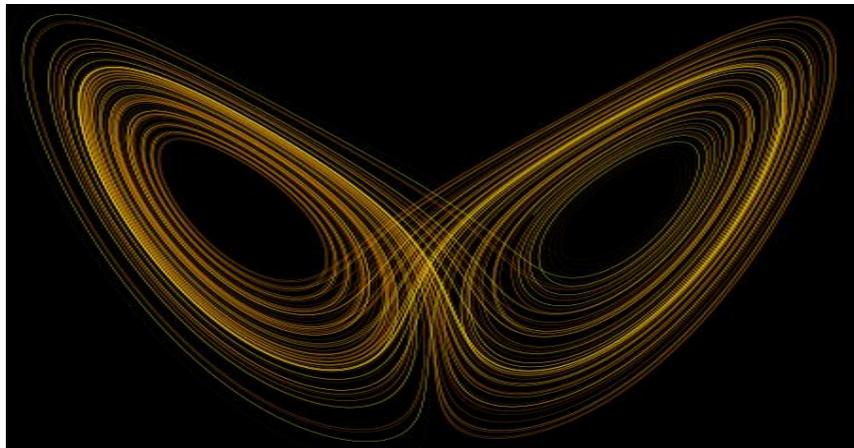


Figura 1.4: Atrator de Lorenz obtido para os parâmetros $\rho = 28$, $\sigma = 10$ e $\beta = 8/3$.

REFERÊNCIAS DO CAPÍTULO 1

1. **Chua, Leon O.** IECCE Trans. Fundamentals. *Chua's Circuit: Ten Years Later*. 11, 1994, Vols. E-77A, pp. 1811-1822.
2. **L.A.B. Torres, L.A. Aguirre.** Electronics Letters. *Inductorless Chua's Circuit*. 2000, Vol. 36, pp. 1915-1916.
3. **Hilborn, Robert C.** *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*. s.l. : Oxford University, 1994.
4. **Lorenz, Edward N.** Journal of the Atmospheric Sciences. *Deterministic Nonperiodic Flow*. 1963, Vol. 20, pp. 130-141.
5. *Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?* **Merilees, Philip.** 1972. 139th American Association for the Advancement of Science.
6. **Gaspard P, Briggs ME, Francis MK, Sengers JV, Gammons RW, Dorfman JR, Calabrese RV.** Nature. *"Experimental Evidence for microscopic chaos"*. 1998, Vol. 394, pp. 865-868.
7. **Minseok Kim, Matthias Bertram, Michael Pollmann, Alexander von Oertzen, Alexander S. Mikhailov, Harm Hinrich Rotermund, Gerhard Ertl.** Science. *Controlling Chemical Turbulence by Global Delayed Feedback: Pattern Formation in Catalytic CO Oxidation on Pt(110)*. 2001, Vol. 292, pp. 1357-1360.
8. **Strogatz, S. H. e Stewart, I.** Scientific American. *"Coupled oscillators and biological synchronization"*. 1993, Vol. 269, 6, pp. 102-109.
9. **J.A. Holyst, M. Zebrowska, K. Urbanowicz.** The European Physical Journal B. *Observations of deterministic chaos in financial time series by recurrence plots, can one control chaotic economy?* 2001, Vol. 20, pp. 531-535.
10. **S, Lepps.** Nature. *Astrophysics- Chaos in Interstellar Clouds*. 1993, Vol. 366, pp. 633-644.
11. **GRASSBERGER, P. e PROCACCIA, I.** Physica D. *Measuring the strangeness of attractors*. 1983, Vol. 9, pp. 189-208.
12. **Hausdorff, F.** Mathematische Annalen. *Dimension und äußeres Maß*. 1919, Vol. 79, pp. 157-159.

Capítulo 2) Circuitos Elétricos

Osciladores

2.1) Circuitos Osciladores - Circuito RLC

Um exemplo simples e ilustrativo de um circuito oscilatório é o clássico circuito RLC em série, que se encontra em qualquer livro-texto de eletromagnetismo básico. O circuito RLC é formado por uma fonte de tensão contínua DC, um resistor R, um indutor L e um capacitor C. Como na figura 2.1:

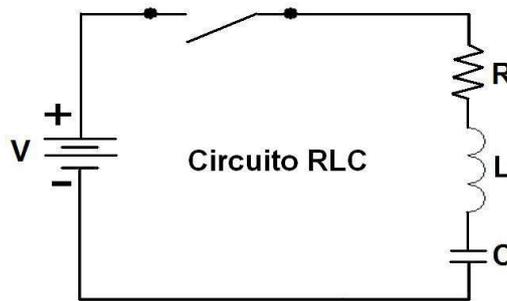


Figura 2.1: Circuito RLC em série. Circuito elétrico oscilatório composto por uma fonte de tensão contínua V, um resistor R, um capacitor C e um indutor L.

Pelas leis de Kirchhoff, podemos obter a equação do sistema, eq.2.1, em termos da conservação de energia e diferenciando-a uma vez em relação ao tempo, obtemos a equação diferencial de 2ª ordem, equação 2.2, que rege a dinâmica desse circuito:

$$V = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \quad (\text{eq.2.1})$$

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \quad (\text{eq.2.2})$$

Da solução da equação diferencial eq.2.2 obtemos corrente $i(t)$ que passa no circuito em função do tempo. O circuito RLC apresentará três possíveis comportamentos, dependendo da relação entre as constantes R, L e C: **Super-Amortecido, Amortecimento Crítico e Sub-Amortecido oscilatório.**

O comportamento que estamos interessados é o de sub-amortecido oscilatório, que é obtido quando o capacitor e o indutor ficam constantemente trocando energia de um para o outro, em forma de campo \vec{E} , no capacitor, e \vec{B} , no indutor. Esse é descrito pelas equações 2.3, 2.4.a e 2.4.b:

$$i(t) = e^{-\alpha t} (c_1 e^{i\beta t} + c_2 e^{-i\beta t}) \quad (\text{eq.2.3})$$

$$\text{Sendo } \alpha = R/2L \text{ e } \beta = \sqrt{(R/2L)^2 - 1/LC} \quad (\text{eq.2.4.a-b})$$

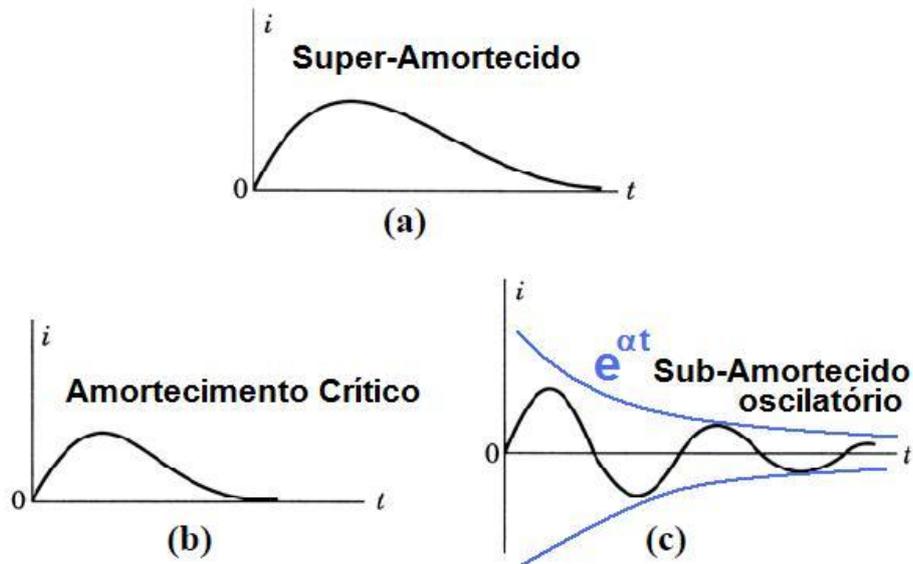


Figura 2.2: Padrão $i \times t$ para as três soluções do circuito RLC (a) superamortecimento, (b) amortecimento crítico e (c) oscilação sub-amortecida.

Ou seja, para termos de fato um circuito oscilatório é necessário então escolhermos os componentes de tal forma que $(R/2L)^2 < 1/(LC)$, senão teremos apenas a corrente do circuito decrescendo com o tempo e não oscilando, como nas figuras 2.2.a e 2.2.b .

Na ausência de uma fonte de tensão restauradora, um circuito RLC na condição de sub-amortecido (comportamento 3, fig 2.2.c) oscila no tempo, porém há um decaimento devido ao termo $e^{-\alpha t}$ (com $\alpha > 0$). Para termos então um circuito apenas oscilatório, sem decaimento, é necessário repor a energia perdida no amortecimento, para resolver isso, colocamos um elemento de resistência negativa.

Na natureza não existem resistores com resistência R negativa, porém podemos simular essa resistência negativa através de uma combinação de resistores, capacitores e amplificadores operacionais alimentados. A resistência negativa simulada tem como principal característica uma curva $I(V)$ com condutividade diferencial negativa ($d(\text{corrente})/d(\text{tensão}) < 0$), chamada curva do tipo (NDC).

Nesse trabalho estamos interessados no estudo de um circuito oscilatório similar ao circuito RLC, mas que apresente um elemento de condutividade diferencial negativa (NDC), fornecendo oscilações sem decaimento. Um circuito que apresenta essas características é o Circuito de Chua. Ele tem como elemento NDC não linear, o Diodo Chua. O circuito de Chua é formado por esse elemento não linear mais dois capacitores, um resistor e um indutor, e oscila para uma faixa de valores de resistência, capacitância e indutância. Esse circuito será apresentado a seguir na seção 2.2.

2.2) Circuito de Chua

2.2.1) História

O circuito de Chua recebeu esse nome por ter sido elaborado primeiramente por Leon O. Chua em 1984 ⁽¹⁾. Ele foi desenvolvido com o propósito de simular o comportamento caótico do sistema de Lorenz ⁽²⁾ e, dependendo dos valores dos parâmetros, outros tipos de comportamentos, caóticos ou até periódicos. Porém, resultados comprovaram que alguns dos atratores caóticos encontrados no circuito de Chua não apresentam nenhuma relação com os atratores do sistema de Lorenz.

As primeiras experiências realizadas nesse circuito, numa versão simplificada, foram feitas por Matsumoto ⁽³⁾. Nesse trabalho ele comprovou a existência de caos nesse circuito através de simulações computacionais, onde as equações diferenciais eram resolvidas utilizando-se integração numérica pelo método de quarta ordem de Runge-Kutta ⁽⁴⁾. Nesse trabalho, mostrou-se que o atrator caótico encontrado nas simulações do circuito de Chua era diferente dos que já haviam sido encontrados por Lorenz e Rössler, em outros sistemas. Uma das diferenças básicas era devido à simetria do atrator: no caso do atrator de Chua a simetria é em relação à origem, enquanto no atrator de Lorenz a simetria é em relação ao eixo z e no atrator de Rössler não há nenhuma simetria bem definida.

Seguindo as idéias de Chua, Matsumoto e seus colaboradores alteraram o circuito de Rosenthal, que já utilizava um resistor do tipo NDC como elemento não-linear ⁽⁵⁾. No início de 1985 foram obtidos os primeiros resultados experimentais do circuito de Chua, sendo essa a primeira confirmação de caos experimental em circuitos eletrônicos ⁽⁶⁾.

Em agosto de 1985, Takashi Matsumoto, Leon O. Chua, e Motomasa Komuro publicaram o artigo "The Double-Scroll" ⁽⁷⁾ que foi reconhecido como um dos mais importantes da época. Nesse trabalho foram feitas análises geométricas detalhadas dos atratores encontrados experimentalmente no circuito de Chua, confirmando a natureza caótica desses através da análise dos expoentes de Lyapunov.

Também estudaram a dimensão de Lyapunov ⁽⁸⁾ associada a esses atratores, mostrando que essa dimensão é fractal, entre 2 e 3, e um pouco maior que dimensão obtida para o atrator de Lorenz. A figura 2.3 reproduzida do artigo "Double-Scroll" ⁽⁷⁾, é uma foto tirada num osciloscópio e mostrava um dos primeiros atratores experimentais do tipo Duplo-Rolo (*Double-Scroll*) publicados.

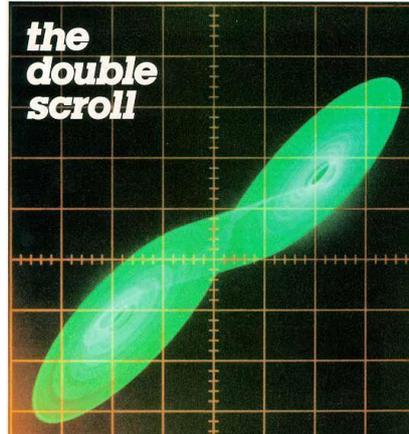


Figura 2.3: Primeiro atrator caótico em formato Duplo-Rolo obtido experimental para o circuito de Chua, em 1985, apresentado por Takashi Matsumoto, Leon O. Chua, e Motomasa Komuro no artigo "The Double Scroll"⁽⁷⁾.

O circuito de Chua é um dos circuitos osciladores mais estudados na literatura, sendo também um dos que apresentam melhores resultados devido a sua boa reprodutibilidade e facilidade de implementação, utilizando-se componentes comerciais. Além disso, o circuito de Chua é um dos poucos sistemas físicos não lineares que apresentam regimes caóticos por diferentes abordagens, tais como simulações computacionais, experimentos e análises matemáticas⁽⁹⁾.

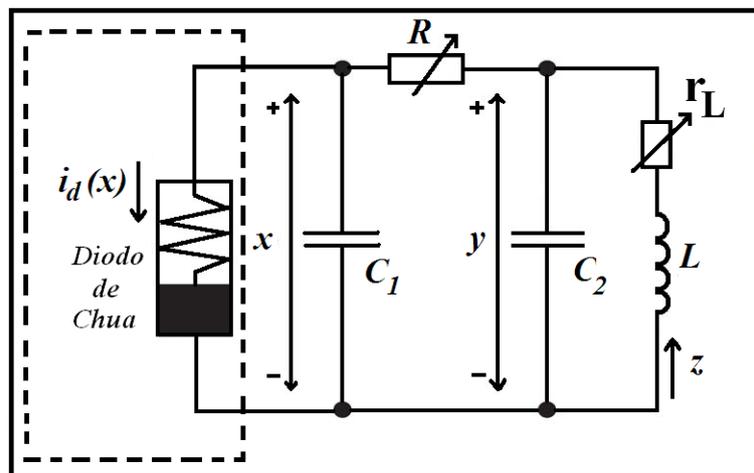


Figura 2.4: Diagrama esquemático do circuito de Chua. Composto por um Diodo Chua (destacado pela linha pontilhada), dois capacitores C_1 e C_2 , um indutor L , os resistores R e r_L . Temos como variáveis do sistema as tensões x , y sobre os capacitores C_1 e C_2 respectivamente, e a corrente z que passa sobre o indutor L .

O circuito de Chua está representado na figura 2.4 e pode ser dividido em duas partes. Uma parte, lado direito da figura, é constituída por um indutor L , os resistores R e r_L , e dois capacitores C_1 e C_2 , que formam um circuito oscilatório linear convencional, parecido com o circuito RLC tratado na seção 2.1.

A outra parte, o Diodo Chua, é um circuito constituído por seis resistores R_1 - R_6 associados a dois amplificadores operacionais A_1 e A_2 , como apresentado na figura 2.5. O diodo Chua apresenta o efeito de uma resistência negativa (curva $I(V)$ do tipo NDC), trabalhando assim como uma fonte restauradora de energia para o circuito constituído por R , L , C_1 e C_2 .

Com o diodo Chua desconectado do circuito têm-se oscilações amortecidas do tipo $e^{-\alpha t}$ ($\alpha > 0$). Esse decaimento é devido à dissipação de energia pela resistência R e pelas resistências dos componentes do circuito.

Utilizando a lei das malhas de Kirchoff podemos obter as três equações diferenciais, 2.5.a-c, que regem a dinâmica do circuito de Chua:

$$\dot{x} = [(y - x)/(RC_1)] - i_d(x)/C_1 \quad (\text{eq.2.5.a})$$

$$\dot{y} = [(x - y)/(RC_2)] + z/C_2 \quad (\text{eq.2.5.b})$$

$$\dot{z} = (-y/L) - z (r_L/L) \quad (\text{eq.2.5.c})$$

Sendo x , y e z as variáveis dinâmicas do sistema, tal que, x é a tensão no capacitor C_1 , y a tensão no capacitor C_2 e z a corrente que flui no indutor L . O parâmetro R é uma resistência variável adicionada entre os capacitores C_1 e C_2 . O parâmetro r_L é a resistência do enrolamento do indutor. Podemos também adicionar uma nova resistência, em série com o indutor. Assim temos que r_L passa a ser a soma das duas resistências, a interna do indutor e a adicionada ao circuito. O circuito de Chua têm como parâmetros de controle, as resistências R e r_L .

As equações eq.2.5.a-c, indicam que o circuito tem três graus de liberdade (x , y e z), portanto seu atrator estará contido num espaço de estados de três dimensões. A confirmação dessa dimensão de imersão dos atratores no valor de 3, pode ser encontrada no trabalho de R.M. Rubinger⁽¹⁰⁾ na página 9.

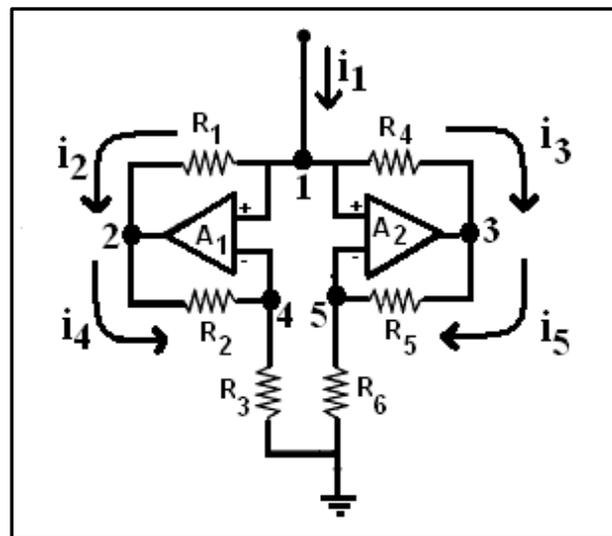


Figura 2.5: Circuito equivalente do Diodo Chua. O circuito do diodo Chua é constituído de dois amplificadores operacionais A_1 e A_2 e de seis resistências, R_1 até R_6 .

A seguir, discutiremos o funcionamento do circuito equivalente do diodo Chua, mostrado na fig. 2.5, definindo as relações entre as resistências e as tensões de entrada do circuito, para que esse apresente curva $I(V)$ do tipo NDC, que representaria a corrente $i_d(x)$ da equação 2.5.a .

2.2.2) Funcionamento do Diodo Chua

Podemos observar na figura 2.5 que o diodo Chua é composto por dois amplificadores operacionais (*OpAmp's*) A_1 e A_2 , seis resistências R_1 - R_6 . Para analisarmos o funcionamento desse circuito, que representa o diodo Chua, e também obtermos as equações que nos permite calcular os parâmetros do circuito, utilizaremos as leis básicas da eletricidade e um pouco sobre a teoria de amplificadores operacionais.

Nesse circuito os amplificadores operacionais operam tanto saturados como em região linear. Então iremos calcular as faixas de valores para as quais cada um deles opera saturados ou não. Podemos dividir a análise em três casos:

1. A_1 e A_2 estão na região linear;
2. Apenas A_1 está saturado, que é similar a apenas A_2 saturado;
3. A_1 e A_2 estão saturados.

A saturação dos *OpAmp's* se dá quando suas entradas inversoras não estão conectadas a pontos que podem assumir valores de tensão suficientemente elevados ou baixos, garantindo assim, um "terra virtual".

No caso do A_1 , sua entrada inversora (-) está conectada a um ponto (4) que tem sua tensão máxima e mínima determinada pela relação dos resistores R_2 e R_3 , equação 2.6:

$$-V_{cc} \frac{R_3}{R_3+R_2} < V_4 < V_{cc} \frac{R_3}{R_3+R_2} \quad (\text{eq.2.6})$$

V_{cc} representa a tensão positiva de alimentação dos operacionais, por isso definimos:

$$V_{B1} = V_{cc} \frac{R_3}{R_3+R_2} \quad (\text{eq.2.7})$$

Assim o *OpAmp* A_1 opera linearmente desde que V_1 , ponto de ligação ao terminal (+), esteja também entre $-V_{B1}$ e $+V_{B1}$. De maneira análoga no terminal (-) do A_2 a tensão fica limitada por:

$$-V_{cc} \frac{R_6}{R_5+R_6} < V_5 < V_{cc} \frac{R_6}{R_5+R_6} \quad (\text{eq.2.8})$$

Temos também que:

$$V_{B2} = V_{cc} \frac{R_6}{R_5+R_6} \quad (\text{eq.2.9})$$

Analogamente o *OpAmp* A_2 opera linearmente quando $-V_{B2} < V_1 < V_{B2}$.

Daqui por diante assumiremos, para facilitar as análises, porém sem perda de generalidade, que V_{B1} seja menor que V_{B2} . Isso significa que a operação do circuito da figura 2.5, pode ser dividida em três regimes distintos:

- **Regime I:** $|V_1| \leq V_{B1} < V_{B2}$: A_1 e A_2 estão na região linear;
- **Regime II:** $V_{B1} < |V_1| \leq V_{B2}$: Apenas A_1 está saturado;
- **Regime III:** $V_{B1} < V_{B2} \leq |V_1|$: A_1 e A_2 estão saturados.

Regime I: A_1 e A_2 estão na região linear

Nesse regime os dois *OpAmp*'s estão na região linear, sendo assim, existe o terra virtual, temos então $V_1=V_4=V_5$. Nesse regime as correntes seguem a seguintes relações:

$$R_1 i_2 = -R_2 i_4 \quad \text{e} \quad R_4 i_3 = -R_5 i_5 \quad (\text{eq.2.10.a}) \text{ e } (\text{eq.2.10.b})$$

Devido à alta impedância de entrada dos *OpAmp*'s, podemos desprezar as correntes em suas entradas fazendo com que:

$$V_4 = R_3 i_4 \quad \text{e} \quad V_5 = R_6 i_5 \quad (\text{eq.2.11.a}) \text{ e } (\text{eq.2.11.b})$$

Utilizando as equações 2.10.a-b e 2.11.a-b temos que:

$$R_1 i_2 = -\frac{R_2}{R_3} V_1 \quad \text{e} \quad R_4 i_3 = -\frac{R_5}{R_6} V_1 \quad (\text{eq.2.12.a}) \text{ e } (\text{eq.2.12.b})$$

E finalmente pela lei de Kirchhoff das correntes no nó 1 teremos que:

$$i_1 = i_2 + i_3 = -V_1 \left(\frac{R_2}{R_1 R_3} + \frac{R_5}{R_4 R_6} \right) \quad (\text{eq.2.13})$$

Portanto para valores de V_1 entre $-V_{B1}$ e $+V_{B1}$, a corrente pelo diodo Chua varia linearmente com a tensão em seus terminais com inclinação m_1 é dada por:

$$m_1 = - \left(\frac{R_2}{R_1 R_3} + \frac{R_5}{R_4 R_6} \right) \quad (\text{eq.2.14})$$

Regime II: A_1 está saturado e A_2 está na região linear

No regime **II**, onde $V_{B1} < |V_1| \leq V_{B2}$, A_1 permanece saturado e, portanto, sua saída fica no potencial $+V_{cc}$ ou $-V_{cc}$, respectivamente, quando a tensão na entrada do circuito V_1 é positiva ou negativa.

Sendo assim, quando a tensão na entrada do diodo Chua é positiva, a tensão $V_2 = V_{cc}$, e assim, temos:

$$i_2 = \frac{V_1 - V_{cc}}{R_1} \quad (\text{eq.2.15})$$

Embora A_1 esteja saturado na região $|V_1| \leq V_{B2}$, o A_2 está em regime linear fazendo com que a corrente i_3 possua o mesmo comportamento do regime **I**. Então a corrente i_1 no regime **II** será obtida da soma das correntes i_2 e i_3 , assim temos:

$$i_1 = i_2 + i_3 = \frac{V_1 - V_{cc}}{R_1} - V_1 \frac{R_5}{R_4 R_6} \quad (\text{eq.2.16})$$

Colocando-se V_1 em evidência, obtemos a corrente que flui no diodo, em função da tensão entre seus terminais por:

$$i_1 = V_1 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{R_5}{R_4 R_6} \right) - \frac{V_{cc}}{R_1} \quad \text{para} \quad V_{B1} < V_1 < V_{B2} \quad (\text{eq.2.17})$$

A equação 2.17 representa a função que passaria pelo ponto $(0, -V_{cc}/R_1)$ se o valor zero estivesse no domínio da função, com inclinação m_0 dada por:

$$m_0 = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{R_5}{R_4 R_6} \right) \quad (\text{eq.2.18})$$

Dependendo dos valores dos resistores R_1 , R_4 , R_5 e R_6 podemos ter a constante m_0 positiva ou negativa. Como queremos que o diodo Chua apresente uma curva $I(V)$ do tipo NDC teremos uma relação entre os resistores tal que a inclinação m_0 seja negativa. Os valores dos resistores utilizados no nosso circuito e que representam o diodo Chua experimental, que utilizaremos, estarão listados na tabela 3.1, seção 3.1.

Repetindo a análise anteriormente realizada, porém supondo agora que a tensão V_1 seja menor que zero, temos que a tensão no ponto 2 igual a $-V_{cc}$, assim obtivemos uma equação análoga a equação 2.17:

$$i_1 = V_1 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{R_5}{R_4 R_6} \right) + \frac{V_{cc}}{R_1} \quad \text{para } -V_{B2} < V_1 < -V_{B1} \quad (\text{eq.2.19})$$

Que corresponde a uma função com a mesma derivada, m_0 , porém que agora cruzaria o eixo das abcissas no ponto $(0, V_{cc}/R_1)$.

Regime III: A_1 e A_2 estão saturados

No regime III temos que os dois *OpAmp*'s estão saturados. Quando A_1 está saturado, a corrente i_2 se comporta de acordo com a equação 2.15. Analisando agora para o A_2 , quando está saturado, temos que a corrente i_3 obedece a relação:

$$i_3 = \frac{V_1 - V_{cc}}{R_4} \quad (\text{eq.2.20})$$

Sendo assim, a corrente que passa pelo diodo i_1 será dada pela expressão:

$$i_1 = i_2 + i_3 = (V_1 - V_{cc}) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} \right) \quad (\text{eq.2.21})$$

$$m_2 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} \right) \quad (\text{eq.2.22})$$

Na equação 2.21 podemos notar que a derivada da corrente i_1 com relação a tensão V_1 , que define a inclinação m_2 , é positiva e independente dos valores dos resistores. Isso ocorre porque, para as tensões V_1 iguais a V_{cc} ou $-V_{cc}$, a corrente que passa no diodo Chua se anula.

O regime III, de inclinação positiva m_2 , não aparecia nas formulações dos primeiros diodos de Chua, pois eram considerados *OpAmp*'s perfeitos, mas como estamos trabalhando com um circuito experimental composto por *OpAmp*'s não ideais, teremos a saturação desses a partir de uma tensão $|V| > |V_{B2}|$.⁽¹¹⁾

Resumindo temos que as três regiões **I**, **II** e **III**, representam as cinco curvas lineares por partes, da $I(V)$ do diodo Chua, apresentadas na figura 2.6. Sendo que a **região I** representa a curva de **inclinação negativa m_1** , a **região II** representa as **duas curvas de inclinação negativa m_0** e a **região III** representa as **curvas de inclinação positiva m_2** .

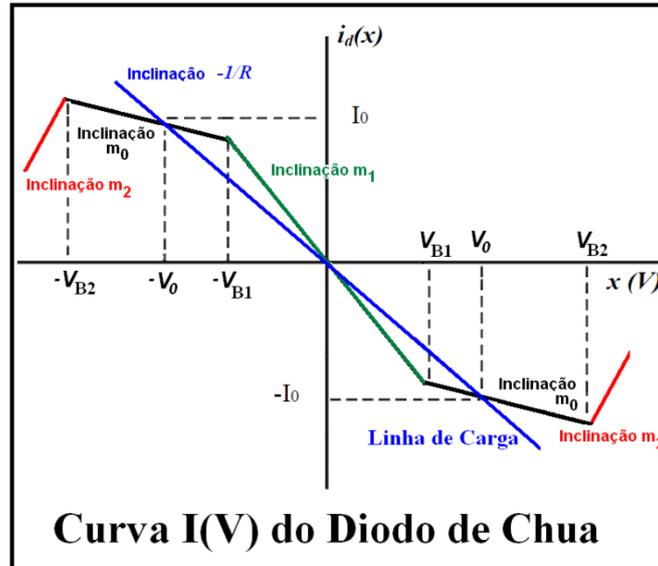


Figura 2.6: Curva $I(V)$ do Diodo de Chua composta por cinco segmentos de reta, sendo dois desses com inclinação negativa m_0 (em preto), um com inclinação negativa mais acentuada m_1 , e dois com inclinação ôhmica m_2 (em vermelho). A linha em azul é a chamada “linha de carga” que em interseção com a curva $I(V)$ define os pontos, $(-V_0, I_0)$ e $(V_0, -I_0)$, de operação do circuito de Chua. $\pm V_{B1}$ são os valores da tensão que definem a mudança de inclinação das curvas de m_1 para m_0 . $\pm V_{B2}$ são os valores de tensão de saturação dos amplificadores operacionais, conseqüentemente do diodo Chua.

A curva $I(V)$ do diodo Chua, figura 2.6, é composta por cinco segmentos lineares de inclinação negativas m_0 (preto), m_1 (verde) e m_2 (vermelho), de tal modo que podemos escrever a sua equação em termos dos parâmetros m_0 , m_1 , m_2 , V_{B1} e V_{B2} , pois sabemos os pontos de interseção entre as curvas e as inclinações dessas:

$$i_d(x) = \begin{cases} \text{verde: } m_1 \cdot x \\ \text{preto: } \pm (m_1 - m_0)V_{B1} + m_0 \cdot x \\ \text{vermelho: } \pm (m_1 - m_0)V_{B1} + \pm(m_0 - m_2)V_{B2} + m_2 \cdot x \end{cases}$$

*Os sinais de \pm dependem do valor da tensão x . (eq.2.23)

2.2.3) Funcionamento do Circuito de Chua

Para correntes contínuas os capacitores agem como circuitos abertos, o indutor como um curto-circuito e a tensão V se concentra na resistência R . A curva $I(V)$ nos dá dois pontos de operação $(-V_0, I_0)$ e $(V_0, -I_0)$, obtidos da interseção da linha de carga de inclinação $-1/R$ (reta azul, fig.2.6) com a região não-linear da curva $I(V)$ (reta em preto, verde e vermelho, fig.2.6).

Após um instante inicial ($t=0$) o indutor reage devido a uma súbita variação na corrente que passa por ele, gerando assim um campo magnético contrário ao campo que foi gerado por essa variação de corrente (Lei Indução de Faraday), logo uma força eletromotriz aparece no sistema.

A força eletromotriz é somada a tensão do diodo e essas serão então aplicadas nos capacitores C_1 e C_2 , carregando-os, nesse instante C_2 passa a trocar cargas elétricas com o indutor L e então aparece uma corrente passando pelo resistor R , dissipando assim parte da energia armazenada em L e C_2 .

O circuito começa a oscilar, essa oscilação altera os pontos de operação do sistema, alterando assim a dinâmica entre os componentes. Em conjunto L e C₂ oscilam numa frequência fixa, com oscilações amortecidas pelas perdas no resistor R, mas devido contribuição do diodo Chua de fornecer energia para o circuito, e como o diodo Chua é um elemento não-linear, podemos gerar um espectro largo de frequências de oscilação (para valores apropriados de C₁, C₂, R e L). Para alguns valores dos parâmetros de controle, os pontos de operação do circuito (-V₀, I₀) e (V₀, -I₀) podem ser tornar instáveis, sendo assim, temos a possibilidade de observar uma dinâmica caótica de oscilações no circuito de Chua.

Apesar do espectro do circuito ser largo, ou seja, podemos obter vários valores de frequência de oscilação, ele tem maior densidade de potência centrada numa frequência principal, dada pela frequência de ressonância, equação 2.29:

$$f_{res} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_2}} \quad (\text{eq.2.24})$$

Essa frequência é devido à condição de ressonância do circuito tanque formado pelo indutor L e o capacitor C₂. Existe outra região nos extremos da curva I(V) para a qual o diodo passa a ser um dispositivo dissipativo (reta em vermelho, fig. 2.6), consumindo energia do sistema e limitando o atrator à região com condutividade diferencial negativa (NDC). Quando isso ocorre forma-se um atrator de período-1 maior que os atratores formados pelas três retas de inclinação negativa da curva I(V) do diodo Chua (preta e verde, fig 2.6). Esse atrator maior é definido pelos pontos de interseção entre a linha de carga e as duas retas de saturação dos *OpAmp's*, de inclinação $m_2 > 0$.

2.3) Circuito de Chua com o Indutor Eletrônico

2.3.1) Introdução

Na subseção anterior 2.2, comentamos sobre a dinâmica do circuito de Chua, que é composto basicamente por um diodo Chua, dois capacitores C₁ e C₂, um indutor L e uma resistência R. Comentamos sobre o seu funcionamento, sobre a distribuição espectral das frequências na transformada FFT e mais algumas características gerais.

Nessa seção iremos comentar sobre a implementação de um circuito de Chua, sugerida no artigo de L.A.B Tôrres e L.A. Aguirre⁽¹²⁾ onde eles propuseram uma versão do circuito de Chua sem o indutor físico (bobina). No caso a indutância do indutor L, do circuito de Chua, será a indutância equivalente de um circuito eletrônico, composto de resistores, capacitores e amplificadores operacionais.

A implementação experimental do circuito de Chua pode tornar-se difícil se não forem utilizados componentes de boa precisão tamanha é a sensibilidade do circuito às condições iniciais. Indutores reais apresentam diversas limitações e problemas operacionais, tais como, aquecimento variando assim o valor da indutância, imprecisão quanto ao valor da indutância, acarretando em problemas de sincronismo, caso

quiséssemos circuitos caóticos idênticos, além de problemas dimensionais (indutores grandes e pesados) quando necessitamos de um com valores elevados de indutância.

Para o estudo de oscilações em circuitos eletrônicos é necessário que as frequências dessas oscilações não ultrapassem o limite máximo das taxas de aquisição de dados (medidas/segundo) no caso, as séries temporais x , y e z do circuito de Chua.

A quantidade de pontos necessários para determinarmos uma oscilação senoidal, utilizando essa onda como um exemplo prático, é de aproximadamente 100 pontos por ciclo, logo se essa onda tem uma frequência de oscilação na ordem de 1 kHz será necessário medirmos uma quantidade de 100.000 pontos numa taxa de 100.000 medidas/s para que se tenha uma série temporal de 1 segundo e com apenas uma oscilação. Porém para realizarmos análises das séries temporais é necessário termos a maior quantidade de pontos por ciclo e de ciclos possível, respeitando a capacidade de armazenamento em disco rígido, o tempo de aquisição e o tempo necessário para analisarmos essas séries temporais.

O circuito de Chua com o indutor eletrônico proposto por L.A.B. Tôrres⁽¹³⁾ nasceu da necessidade de diminuirmos a frequência das oscilações do circuito de Chua, para isso é necessário utilizarmos elementos de armazenamento de energia no sistema cada vez maiores, ou seja, devemos aumentar os valores das capacitâncias C_1 e C_2 , sobretudo a indutância de L , para diminuirmos as frequências das oscilações. Pois ao multiplicarmos os valores dos componentes armazenadores de energia por um fator, esse aumento leva a uma correspondente redução pelo mesmo fator, na frequência média em torno de onde se concentra a potência espectral do sinal do oscilador, eq.2.24. Diminuindo a frequência das oscilações das séries para uma taxa de aquisição de dados fixa (limitada pela placa de aquisição) obteremos mais ciclos e mais pontos por ciclo.

Na indústria eletrônica, podemos encontrar capacitores numa grande variedade de valores, porém o mesmo não pode ser dito para os indutores. Ao aumentarmos muito a relação entre o tamanho da espira e a sua indutância, temos que os indutores comerciais de valores altos têm uma resistência interna r_L muito alta (o que não é interessante para o caso do circuito de Chua), além desses serem de baixa precisão, ou seja, não teremos confiança no valor correto da indutância.

Para uma possível aplicação de circuitos caóticos em criptografia baseada em caos, por exemplo, em sinais de telecomunicações, é necessário que os circuitos caóticos sejam pequenos o suficiente para serem incorporados à placa de um celular, por exemplo. Para o circuito de Chua necessitamos de valores de indutância L na ordem de 50 mH. Foi feita uma rápida pesquisa em lojas eletrônicas pela internet e descobrimos que indutores dessa ordem de grandeza apresentam uma precisão muito ruim, da ordem de 15% e têm dimensões na ordem de 5x5x5 até 10x10x10 cm³.

Elementos desse tamanho tornam o circuito eletrônico inviável para aplicações tecnológicas, sendo esse um dos motivos de utilizarmos o indutor eletrônico. O indutor eletrônico além de ser pequeno, torna possível a implementação do circuito de Chua em uma única placa de circuito integrado (CI).

Para obtermos então esses indutores de valores altos e precisos, foi proposto por Tôres e Aguirre⁽¹²⁾, um circuito eletrônico composto por uma combinação de resistores, capacitores e amplificadores operacionais, mostrado na figura 2.7, que funcionará como o **indutor eletrônico**.

Os amplificadores operacionais são dispositivos analógicos, isto é, não fazem conversão do tipo analógico-digital, portanto eles têm resposta imediata e contínua no tempo, conferindo a esse circuito do indutor eletrônico, um caráter quase real de um indutor físico.

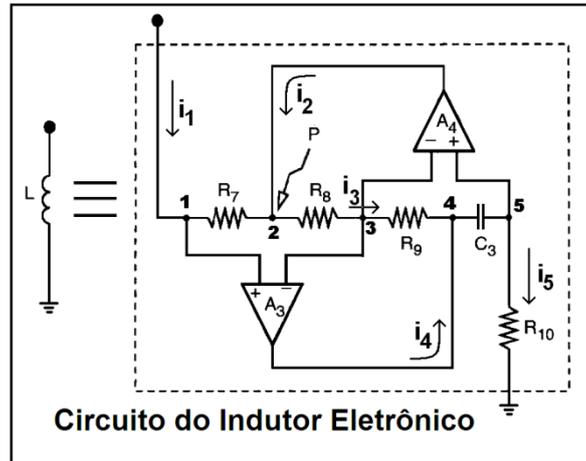


Figura 2.7: Circuito equivalente do indutor eletrônico. O circuito é constituído por dois amplificadores operacionais, A_3 e A_4 , quatro resistências, R_7 até R_{10} , e um capacitor C_3 .

2.3.2) Funcionamento do Circuito do Indutor Eletrônico

Nessa seção apresentaremos uma breve análise do funcionamento do circuito equivalente do indutor eletrônico, que será utilizado no nosso circuito de Chua.

O circuito mostrado na figura 2.7 é um circuito do tipo *gyrator* construído como um transformador de impedância⁽¹⁴⁾. Esse circuito é composto por uma combinação de quatro resistências R_7 até R_{10} , um capacitor C_3 e dois amplificadores operacionais (*OpAmp's*) A_3 e A_4 .

Inicialmente partiremos da hipótese de que os *OpAmp's* não estão saturados. Sob essa hipótese de não-saturação de A_3 e A_4 , e definido o terra virtual, teremos a seguinte relação:

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_5 \quad (\text{eq.2.25})$$

Da lei de Ohm aplicada ao resistor R_{10} teremos que:

$$i_5 = \frac{V_5}{R_{10}} = \frac{V_1}{R_{10}} \quad (\text{eq.2.26})$$

Como as impedâncias de entrada dos amplificadores operacionais são muito elevadas podemos novamente desprezar as correntes drenadas por elas e concluir que:

$$i_3 = i_5 \quad (\text{eq.2.27})$$

Que juntamente com a equação diferencial associada ao capacitor em série, nos leva a uma equação para a corrente i_5 :

$$i_5 = C_3 \frac{d}{dt} (V_4 - V_5) \quad (\text{eq.2.28})$$

Por outro lado, da lei de Ohm para o resistor R_9 , a tensão V_4 é tal que:

$$i_3 R_9 + V_4 = V_3 \quad (\text{eq.2.29})$$

**Uma vez que i_3 é a corrente que circula entre R_8 e R_9*

Da saturação de A_4 associado à equação 2.29 teremos:

$$V_3 - V_4 = V_5 - V_4 = R_9 i_3 \quad (\text{eq.2.30})$$

Que nos leva, quando associamos as equações 2.28 e 2.30:

$$i_5 = -C_3 R_9 \frac{d i_3}{dt} \quad (\text{eq.2.31})$$

Agora das equações 2.25 e 2.26 temos:

$$V_1 = -C_3 R_9 R_{10} \frac{d i_3}{dt} \quad (\text{eq.2.32})$$

Note que dá equação 2.25 temos também que $V_1 = V_3$ portanto:

$$R_8 i_3 = -R_7 i_1 \rightarrow i_3 = -\frac{R_7}{R_8} i_1 \quad (\text{eq.2.33})$$

Finalmente substituindo a equação 2.33 em 2.32, teremos uma relação entre a tensão V_1 e a corrente i_1 dada por:

$$V_1 = \frac{C_3 R_7 R_9 R_{10}}{R_8} \frac{d i_1}{dt} \rightarrow V_1 = L_{eq} \frac{d i_1}{dt} \quad (\text{eq.2.34})$$

Assim podemos ver que o circuito de fato se comporta como um indutor com valor de indutância igual a:

$$\boxed{L_{eq} = \frac{C_3 R_7 R_9 R_{10}}{R_8}} \quad (\text{eq.2.35})$$

Outra importante característica deste circuito é que a medida da corrente que passa no indutor, i_1 , é uma medida complicada do ponto de vista prático, porém essa fica reduzida a uma medida de tensão nesse circuito por:

$$i_1 = \frac{V_1 - V_2}{R_7} \quad (\text{eq.2.36})$$

**Sendo V_1 a tensão sobre o capacitor C_2 e V_2 a tensão no ponto P da figura 2.7*

Faremos agora uma mudança de notação para as tensões V_1 e V_2 , e a corrente i_1 , relacionando-as com a notação da figura 2.4, e de agora em diante, não será mais utilizada a notação das figuras 2.5 e 2.7. Temos que V_1 será a tensão y , V_2 será a tensão V_p e i_1 será a corrente z do circuito de Chua.

Quando utilizamos o indutor eletrônico temos que a variável z pode ser facilmente obtida através da medida de tensão V_p no ponto P, mostrado na figura 2.7, e pela equação 2.36, na nova notação, temos:

$$i_1 = \frac{V_1 - V_2}{R_7} \rightarrow \boxed{z = (V_p - y)/R_7} \quad (\text{eq.2.37})$$

**Sendo y a variável definida anteriormente*

O circuito de Chua com o indutor eletrônico demonstra diversas vantagens em relação ao circuito com o indutor físico, implementação de baixo custo, compacta, factível, robusta e de alta precisão nos valores de indutância.

O circuito do indutor eletrônico reduz a complexidade da aquisição das medidas experimentais, pois com ele há a possibilidade de obtermos as três variáveis do sistema (x , y e z) apenas fazendo as medidas de tensões (x , y e V_p) no circuito. Em termos práticos é mais fácil medirmos as três variáveis do mesmo tipo, por exemplo, utilizando uma placa de aquisição de dados configurada para adquirir medidas de tensão do que medirmos separadamente as tensões x , y e depois a corrente z utilizando-se um amperímetro.

A fim de tornar válida a utilização do indutor eletrônico como um componente ativo do circuito de Chua só falta mostrar que para a faixa de frequências em que opera esse circuito, o circuito do indutor eletrônico da figura 2.7 deve se comportar da mesma forma que um indutor real. Isto significa realizar um estudo mais detalhado sobre a modelagem do circuito equivalente do indutor eletrônico, incluindo os efeitos observados em amplificadores operacionais tais como: saturação, ganho finito, desequilíbrio entre as tensões e correntes nas entradas diferenciais (*DC-offset*), impedância de entrada finita e impedância de saída não nula, faixa limitada de frequência de operação. ⁽¹³⁾

Seria muito difícil um modelo analítico que incluísse todos esses fatores, porém em sua tese de doutorado, apêndice B ⁽¹³⁾, Tôres utilizou-se de um programa de modelagem e simulação de circuitos eletrônicos, o SPICE ⁽¹⁵⁾ e mostrou que de fato, o circuito do indutor eletrônico funciona como um indutor real, para os valores de frequências entre 10^2 e 10^5 Hz, além de mostrar que o ganho desse circuito em baixas frequências é muito pequeno, indicando a presença de um valor baixo para a resistência interna equivalente do circuito do indutor eletrônico, que é de vital importância em se tratando do circuito de Chua ⁽¹²⁾.

Esse mesmo circuito utilizado para simular o indutor (figura 2.7) pode ser utilizado para simular um capacitor, apenas invertendo as posições dos elementos R_9 e C_3 no circuito, onde obtemos uma capacitância equivalente pela equação:

$$C_{eq} = R_8 R_9 C_3 / R_7 R_{10} \quad (\text{eq.2.38})$$

**Esse circuito equivalente também poderá ser utilizado caso sejam necessários capacitores de valores bem elevados e de alta precisão.*

No trabalho desenvolvido nessa dissertação iremos utilizar o circuito de Chua na versão com o indutor eletrônico, na seção 3.1 iremos definir o circuito exatamente segundo a sua montagem experimental: valores dos componentes, tipos de cabos utilizados e a sua distribuição espacial.

2.4) Circuito de Chua Forçado por uma Fonte DC

2.4.1) Introdução

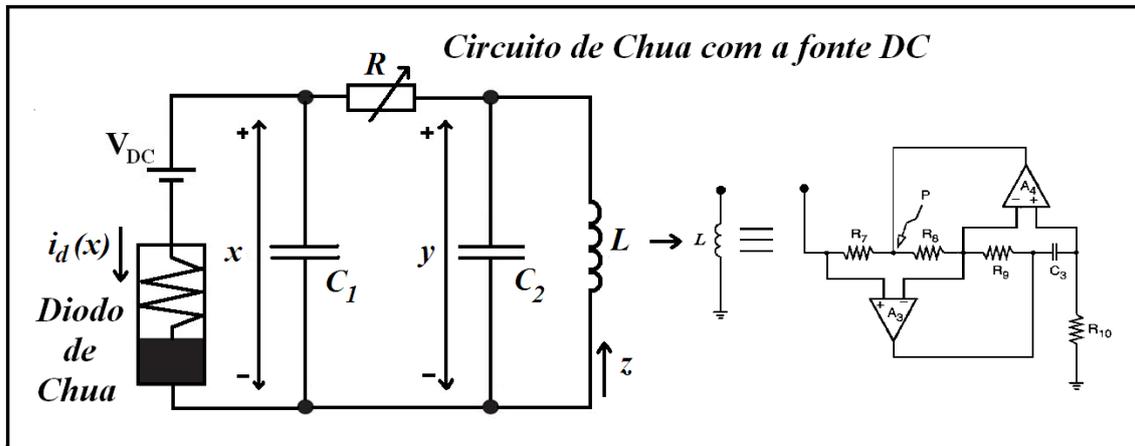


Figura 2.8: Diagrama esquemático do circuito de Chua com o indutor eletrônico e com uma fonte de tensão contínua DC em série com o diodo Chua. À esquerda, podemos ver a disposição dos componentes do circuito de Chua, e à direita, o circuito equivalente do indutor L .

Nessa subseção iremos discutir os efeitos no circuito de Chua ao adicionarmos fonte de tensão contínua (fonte DC) em série com o diodo Chua.

Como discutido anteriormente, temos pelas leis de Kirchhoff, as equações 2.39.a-c, que regem o circuito de Chua, na ausência da fonte DC:

$$\dot{x} = [(y - x)/(RC_1)] - i_d(x)/C_1 \quad (\text{eq.2.39.a})$$

$$\dot{y} = [(x - y)/(RC_2)] + z/C_2 \quad (\text{eq.2.39.b})$$

$$\dot{z} = (-y/L) - z (r_L/L) \quad (\text{eq.2.39.c})$$

Sendo x , y e z as variáveis dinâmicas do sistema e $i_d(x)$ é a corrente que passa pelo diodo Chua, equação 2.23, C_1 e C_2 são os capacitores, R a resistência variável e r_L a resistência equivalente do circuito que simula o indutor L .

Podemos também utilizar as equações 2.39.a-c na sua forma adimensional, equações 2.40.a-c. Uma vantagem, ao utilizarmos essas equações no formato adimensional, é a de reduzirmos a dificuldade na integração das equações diferenciais, já que na forma adimensional estaremos evitando valores assintóticos nos cálculos de integração.

$$\dot{X} = \delta(Y - X) - i_d(X) \quad (\text{eq.2.40.a})$$

$$\dot{Y} = \varepsilon(\delta(X - Y) + Z) \quad (\text{eq.2.40.b})$$

$$\dot{Z} = -\gamma Y - \theta Z \quad (\text{eq.2.40.c})$$

$$\text{Coeficientes: } \delta = \frac{1}{m_0 R}, \quad \varepsilon = \frac{C_1}{C_2}, \quad \gamma = \frac{C_1}{m_0^2 L}, \quad \theta = \frac{C_1}{m_0 L} r_L \quad (\text{eq.2.41.a-d})$$

$$\text{Variáveis normalizadas: } X = \frac{x}{V_2}, \quad Y = \frac{y}{V_2} \text{ e } Z = \frac{1}{m_0 R_7} (V_p - Y) \quad (\text{eq.2.42.a-c})$$

Temos que m_0, m_1 e V_2 são parâmetros obtidos da curva experimental da corrente que passa pelo diodo Chua, $i_d(x)$. R_7 é o resistor presente no circuito que simula o indutor, como já mostrado na figura 2.8 e V_p a medida de tensão no ponto P e através da equação 2.37 (seção 2.3) podemos obter a corrente que passar pelo indutor.

Temos também que as derivadas temporais são feitas num tempo modificado:

$$\dot{X} = \frac{dX}{dT} \text{ com } T = \frac{m_0}{C_1} t \quad (\text{eq.2.43})$$

Como já discutido na seção 2.2 a corrente $i_d(x)$ que passa no diodo Chua é composta por 5 segmentos lineares (figura 2.7). Ao aplicarmos uma tensão V_{DC} ao circuito, através da fonte de tensão contínua em série com o diodo Chua, teremos uma mudança de variáveis do tipo:

$$i_d(x) \rightarrow i_d(x + V_{DC}) \text{ com } w = x + V_{DC} \quad (\text{eq.2.44})$$

Sem mudanças na derivada temporal: $w = x + V_{DC} \rightarrow \dot{w} = \dot{x}$, pois V_{DC} é constante, porém ocorrerão outras rotas de bifurcações, diferentes das obtidas no circuito de Chua não-forçado, já que as equações 2.39.a-c são acopladas, $\dot{x} = \dot{x}(x, y, z)$.

A seguir, na seção 2.4.2, apresentaremos como o Circuito de Chua é forçado ao adicionarmos a fonte DC, que aplica uma tensão V_{DC} constante sobre o diodo Chua. Mostraremos que V_{DC} **atua como um novo parâmetro de controle** para o circuito de Chua.

2.4.2) O Novo Parâmetro de Controle, V_{DC}

As equações 2.39.a-d regem o circuito de Chua, na versão sem a fonte DC, e temos que o diodo Chua apresenta uma curva $I(V)$ do tipo NDC composta por cinco regiões lineares por partes, apresentada na figura 2.6.

Das equações do circuito de Chua sem a fonte DC podemos obter os pontos de equilíbrio do sistema, tal que $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$, e fazendo a seguinte simplificação $r_L \rightarrow 0$, temos:

$$0 = [(y - x)/(RC_1)] - i_d(x)/C_1 \quad (\text{eq.2.45.a})$$

$$0 = [(x - y)/(RC_2)] + z/C_2 \quad (\text{eq.2.45.b})$$

$$0 = (-y/L) \quad (\text{eq.2.45.c})$$

Da equação 2.45.c já temos que $y = 0$, e substituindo-se esse resultado nas equações 2.45.a e 2.45.b obtemos:

$$0 = -x/(RC_1) - i_d(x)/C_1 \rightarrow x = -Ri_d(x) \quad (\text{eq.2.46.a})$$

$$0 = x/(RC_2) + z/C_2 \rightarrow x = -Rz \quad (\text{eq.2.46.b})$$

Ou seja, das equações 2.46.a e 2.46.b, temos como pontos de equilíbrio para o Circuito de Chua: $x = -Rz$, $y = 0$ e $z = i_d(x)$. Sendo assim teremos que no equilíbrio o circuito de Chua será composto apenas pelo diodo Chua e pela resistência R , ligados em série, como mostrado na figura 2.9:

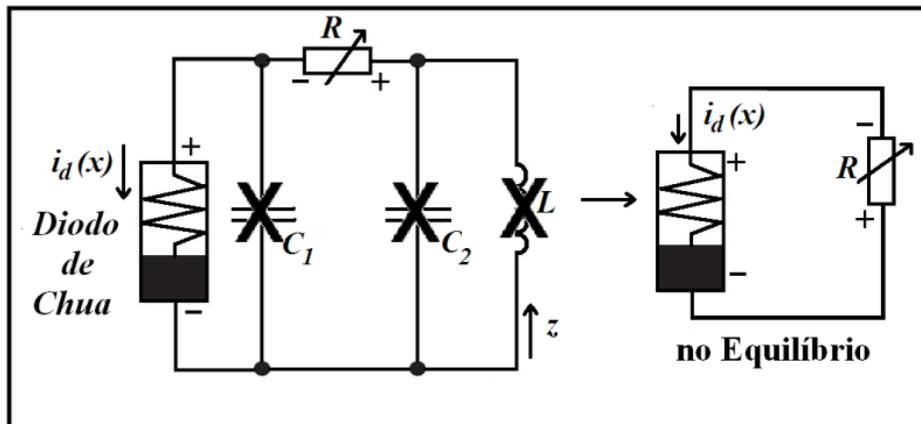


Figura 2.9: Diagrama esquemático do circuito de Chua no equilíbrio sem a fonte DC em série. Na condição de equilíbrio teremos apenas o diodo Chua ligado em série com o resistor R .

Um resistor apresenta uma curva $I(V)$ linear com inclinação $(1/R)$. Na condição de equilíbrio entre o diodo Chua e o resistor, teremos pela Lei de Kirchoff, respeitando-se a polaridade do diodo e do resistor, a equação 2.47:

$$-Ri - x = 0 \rightarrow i = -\left(\frac{1}{R}\right)x \quad (\text{eq.2.47})$$

Ou seja, a solução de equilíbrio é obtida nos pontos onde cruzam a curva $I(V)$ do diodo Chua (5 curvas lineares por parte) e a curva da eq. 2.52 de inclinação $(-1/R)$. Essa segunda curva é também chamada "Linha de Carga".

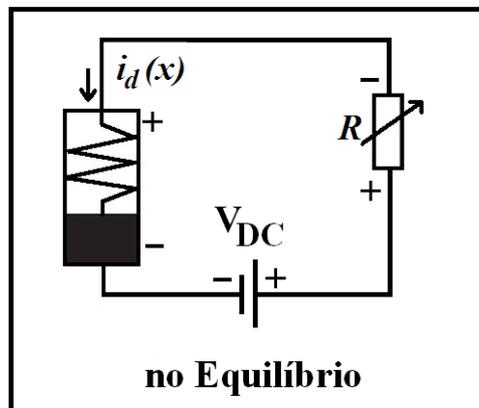


Figura 2.10: Diagrama esquemático do circuito de Chua com a fonte DC, no equilíbrio. Na condição de equilíbrio teremos apenas o diodo Chua ligado em série ao resistor R e a fonte DC.

No caso do circuito de Chua com a fonte DC podemos realizar o mesmo procedimento desenvolvido nessa subseção para determinar os pontos de equilíbrio desse novo circuito forçado. Como a tensão aplicada ao circuito pela fonte DC é contínua, não haverá mudanças na derivada temporal, apenas haverá uma mudança nas variáveis conforme equação 2.44.

No equilíbrio, figura 2.10, teremos então as mesmas equações da eq.2.45.a-c, porém na nova variável w , definida na equação 2.44. Sendo assim a equação de equilíbrio será obtida através na análise da "linha de carga", novamente respeitando a polaridade dos componentes, por:

$$V_{DC} - Ri - x = 0 \quad (\text{eq.2.48})$$

$$Ri = V_{DC} - x \quad (\text{eq.2.49})$$

$$i = \frac{V_{DC}}{R} + \left(-\frac{1}{R}\right)x \quad (\text{eq.2.50})$$

Da equação 2.50 temos então que as condições de equilíbrio definem os pontos de operação do circuito, que são função da tensão V_{DC} aplicada e do parâmetro R.

Ao variarmos a tensão V_{DC} estaremos deslocando a linha de carga da origem ($V_{DC} = 0$, eq.2.47) para cima ou para baixo dependendo do valor da tensão aplicada, porém mantendo a mesma inclinação $(-1/R)$, segue a figura 2.11.a.

Ao variarmos a resistência R estaremos modificando a inclinação $(-1/R)$ da linha de carga, ao diminuirmos a resistência teremos um aumento da inclinação e ao aumentarmos a resistência teremos uma diminuição da inclinação, segue a figura 2.11.b.

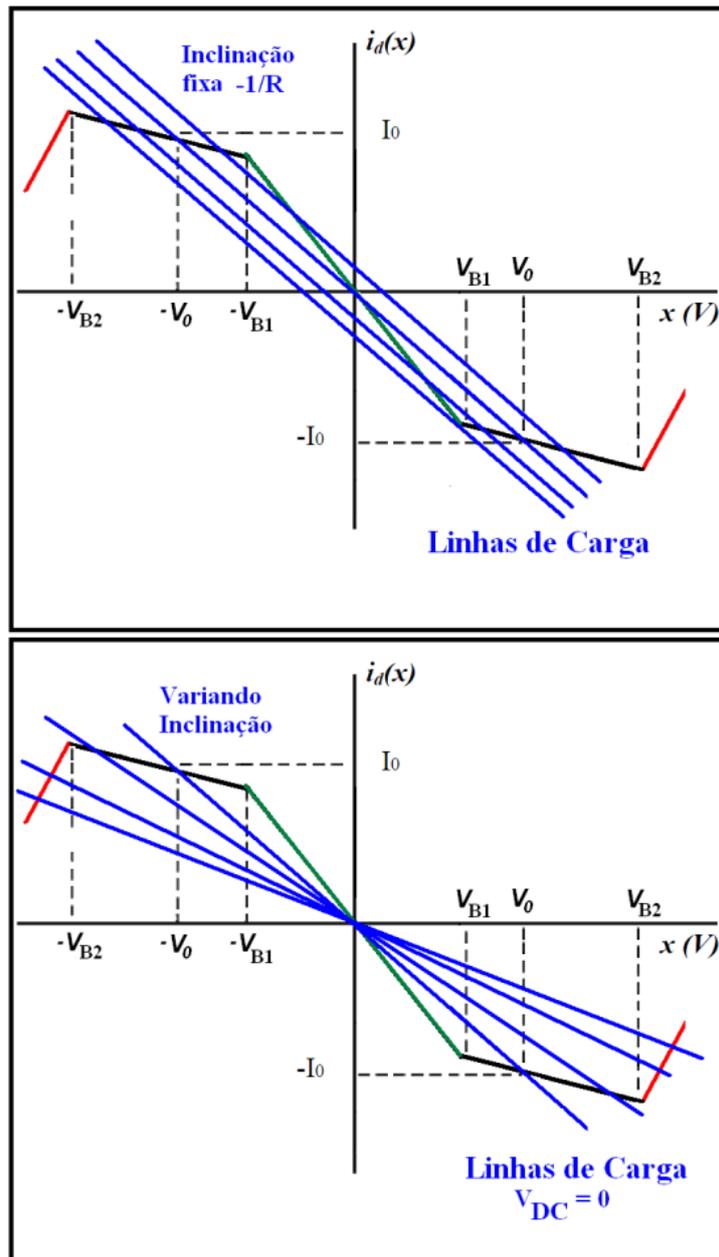


Figura 2.11: Soluções de Equilíbrio, que definem os pontos de operação do circuito $(V_0, -I_0)$ e $(-V_0, I_0)$ obtidos através da análise das "Linhas de Carga". (a) Variando-se a tensão V_{DC} , porém mantendo a inclinação $(-1/R)$ fixa. (b) Variando a inclinação $(-1/R)$, porém mantendo $V_{DC} = 0$.

Nesse trabalho teremos então a possibilidade de estudar as oscilações caóticas e periódicas do circuito de Chua, através do estudo das séries temporais x , y e z obtidas experimentalmente para cada resistência R e para cada tensão aplicada V_{DC} . As séries temporais são obtidas pelos programas de aquisição de dados por nós desenvolvidos. Além disso, utilizando-se a equação da curva $I(V)$ experimental do diodo Chua como a corrente $i_d(x)$ que passa pelo diodo Chua, podemos resolver as equações diferenciais no formato adimensional, eq. 2.40.a-c, que regem o circuito de Chua utilizando-se integração pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem⁽⁴⁾ e assim poderemos comparar os resultados obtidos experimentalmente e teoricamente.

REFERÊNCIAS DO CAPÍTULO 2

1. **T. Matsumoto, L.O. Chua, S. Tanaka.** Physical Review A. *Simplest chaotic nonautonomous circuit.* 1984, Vol. 30, pp. 1155-1157.
2. **Lorenz, Edward N.** Journal of the Atmospheric Sciences. *Deterministic Nonperiodic Flow.* 1963, Vol. 20, pp. 130-141.
3. **Matsumoto, T.** IEEE Transactions on Circuits and Systems. *A Chaotic Attractor from Chua's Circuit.* 1984, Vols. CAS-31, pp. 1055-1058.
4. **Kutta, M. W. Z.** für Math. u. Phys. 1901, Vol. 46, p. 435.
5. IEEE Transactions on Circuits and Systems. *Inductively Tuned Astable Multivibrator.* 1980, Vols. CAS-27, 10, pp. 963-964.
6. **G.Q. Zhong, F. Ayrom.** Circuit Theory and Applications. *Experimental Observation of Chaos from Chua's Circuit.* 1985, Vol. 13, pp. 93-98.
7. **T. Matsumoto, Leon O. Chua, Motomasa Komuro.** IEEE Transactions on Circuits and Systems. *The Double-Scroll.* 1985, Vols. CAS-32, pp. 797-818.
8. **Young, Lai-Sang.** IEEE Transaction on Circuits and Systems. *Entropy, Lyapunov Exponents and Hausdorff Dimension in Differentiable Dynamical Systems.* 1983, Vols. CAS-30, pp. 599-607.
9. **Prem Bhushan Mital, Umesh Kumar, Rai Sachindra Prasad.** J. of Active and Passive Electronic Devices. *Chua's Circuit - A Universal Paradigm for Generating and Studying Chaos.* 2008, Vol. 3, pp. 51-63.
10. **R.M. Rubinger, A.W.M. Nascimento, L.F. Mello, C.P.L. Rubinger.** Mathematical Problems in Engineering. *Inductorless Chua's Circuit: Experimental Time Series Analysis.* 2007, Vol. 2007, 83893, pp. 1-16.
11. **L. Fortuna, M. Frasca, M.G. Xibilia.** *Chua's Circuit Implementations. Yesterday, Today and Tomorrow.* s.l. : World Scientific Series on Nonlinear Science Series, 2009. Vol. 65.
12. **L.A.B. Torres, L.A. Aguirre.** Electronics Letters. *Inductorless Chua's Circuit.* 2000, Vol. 36, 23, pp. 1915-1916.
13. **Torres, L.A.B.** Tese de Doutorado Engenharia Elétrica- Universidade Federal de Minas Gerais. *Controle e Sincronismo de Osciladores Caóticos.* 10 de 10 de 2001. Tese nº 20.
14. IEE Proceedings. 1969. Vol. 116, 11, pp. 1838-1850.
15. <http://www.seas.upenn.edu/~jan/spice/spice.overview.html>. *PSpice Electrical Simulator.* [Online]

Capítulo 3) Circuito de Chua Experimental e Técnicas

3.1) Implementação Experimental do Circuito de Chua com a Fonte DC

3.1.1) Projeto do Circuito de Chua Experimental

Como discutido nas duas seções anteriores, o Circuito de Chua é um dos circuitos mais estudados da literatura e apresenta uma grande quantidade de resultados interessantes ⁽¹⁾ ⁽²⁾. Foi feita uma pesquisa no site *Web of Science* pelos termos "*Chaos*" e "*Experimental Chaos*", para o primeiro foram encontrados cerca de 37 mil artigos, enquanto para o segundo foram encontrados cerca de 3 mil artigos. Mostrando que a quantidade de artigos experimentais sobre Caos é bem inferior à quantidade total de artigos, 1 para cada 12. Feita uma pesquisa apenas selecionando os últimos cinco anos de publicações, foram encontrados cerca de 8.200 artigos para o primeiro termo e 700 artigos para o segundo, ou seja, quase um quarto de toda a pesquisa sobre caos foi feita nos últimos cinco anos. A área da teoria do Caos vem crescendo nos últimos anos, principalmente a de caos experimental, tamanha é a facilidade de equipamentos de alta precisão e de computadores cada vez mais potentes.

Existem poucos trabalhos sobre o estudo de circuitos caóticos experimentais, pois o desenvolvimento de circuitos robustos e funcionais demanda de uma boa experiência em eletrônica e perseverança. Para produzirmos esse tipo de circuito é necessário escolhermos cuidadosamente os componentes e com uma boa precisão. Além disso, é necessário desenvolvermos métodos que visam uma redução significativa do ruído nos circuitos, pois em Caos, quanto menor for a relação sinal-ruído piores os resultados e até mesmo inconclusivos, tamanha é a sensibilidade da resposta do sistema quando "adicionado" ruído.

O circuito de Chua utilizado nesse trabalho foi construído aqui no Departamento de Física da UFMG, na parceria entre o Prof. Rero M. Rubinger, da Universidade Federal de Itajubá, e o técnico em eletrônica do Departamento de Física da UFMG, Júlio César de Souza.

O circuito produzido é similar ao proposto por Tôrres e Aguire ⁽³⁾, da seção 2.3, porém com todos os capacitores diminuídos de um fator de mil, modificando-se assim a frequência principal das oscilações para um valor em torno de 1.600 Hz.

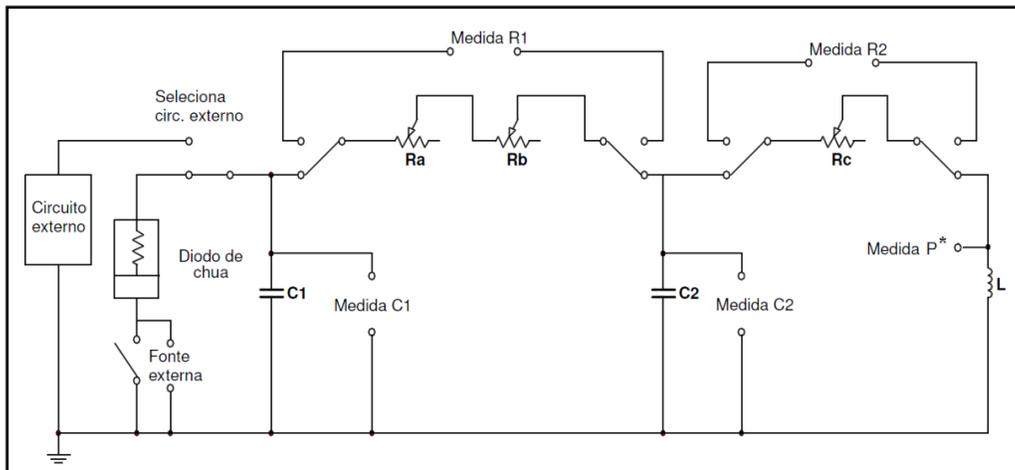


Figura 3.1: Diagrama Esquemático do projeto experimental do Circuito de Chua com a fonte DC. *A medida P apresentada no diagrama é apenas esquemática já que a medida de tensão é feita no circuito equivalente do indutor eletrônico.

Na figura 3.1 apresentamos um diagrama esquemático do projeto experimental do nosso Circuito de Chua e com a fonte DC. Podemos observar no projeto do circuito de Chua que há a possibilidade de adicionarmos um circuito externo (a esquerda da figura 3.1). Esse circuito externo pode ser um elemento não-linear em substituição ao Diodo de Chua, para futuramente estudarmos outros tipos de circuitos osciladores caóticos⁽⁴⁾.

O Circuito de Chua foi produzido sobre uma placa de circuito impresso (PCB) de fenolite com uma camada de cobre. O programa utilizado no desenvolvimento do projeto foi o Protel-99SE⁽⁵⁾. Primeiramente foi projetado em software o esquema elétrico da placa, em seguida o roteamento dessa, onde são definidas as trilhas do circuito bem como a disposição física dos componentes sobre a placa.

Finalizada a etapa de desenvolvimento do projeto em software, o circuito esquemático é impresso sobre uma folha especial. O circuito impresso é então transferido para a superfície da placa de PCB utilizando-se uma prensa térmica, que tem a temperatura e a pressão controladas. Após o circuito esquemático estar desenhado sobre a placa de PCB, essa placa é então colocada em contato com um ácido que irá corroer a superfície de cobre da placa, conservando apenas as trilhas impressas. Em seguida a placa é furada em locais predefinidos onde são colocados todos os componentes da placa respeitando-se o esquema anteriormente desenvolvido em software.

Nas figuras 3.2.a e 3.2.b podemos observar a placa do Circuito de Chua pronta. No canto superior esquerdo da figura 3.2.b podemos ver o circuito da fonte simétrica que irá alimentar o diodo Chua, a sua direita o transformador de tensão elétrica de ± 127 V para ± 15 V. Na parte inferior podemos ver o circuito de Chua e as suas ligações com o painel de controle, que está apresentado esquematicamente na figura 3.3.



Figura 3.2: (a) Projeto do nosso Circuito de Chua com a fonte DC.

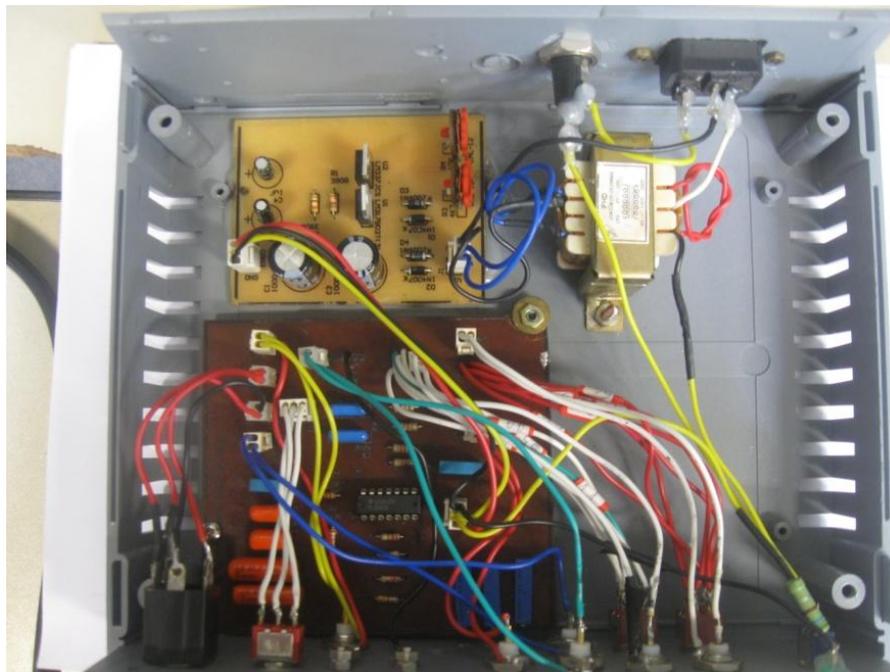


Figura 3.2: (b) Vista por cima da placa do nosso circuito de Chua.

O indutor eletrônico (figura 2.7, seção 2.3.1) é composto de dois amplificadores operacionais, A_3 e A_4 , OpAmp's (TL084CN), quatro resistências, R_7 , R_8 , R_9 e R_{10} , e um capacitor C_3 em um único circuito integrado (CI) como mostrado na figura 3.2. O diodo de Chua (figura 2.5 seção 2.2) utiliza também dois OpAmp, A_1 e A_2 , no mesmo circuito integrado do indutor, que são realimentados através dos terminais positivo e negativo de um conjunto de 6 resistências lineares passivas, R_1 , R_2 , R_3 , R_4 , R_5 e R_6 , como mostrado na figura 3.2.

Na figura 3.1 temos dois *trimpots* multivolta (potenciômetros), R_a e R_b , que em série representam a resistência variável R do circuito de Chua, temos também o *trimpot* R_c que representa uma resistência em série com o circuito que simula o indutor, ou seja, uma resistência r_L adicionada.

O potenciômetro do tipo *trimpot* tem a função de ajustar o comportamento oscilatório do circuito, atuando como um parâmetro ajustável (já que essa é uma resistência variável), de fácil implementação e de fundamental importância, já que sem ele não teríamos comportamentos oscilatórios diferentes para os diferentes valores de R , como mostrado na seção 2.4.2 figura 2.11. O resistor R , o indutor L e os capacitores C_1 e C_2 formam a parte linear e passiva do circuito em questão.

Segue a tabela 3.1 com os valores dos elementos bem como suas especificações:

Tabela 3.1: Valores dos Componentes utilizados do circuito de Chua

Componente	Valor (erro 3%)
R_1	220 Ω
R_2	220 Ω
R_3	2,2 k Ω
R_4	22 k Ω
R_5	22 k Ω
R_6	3,3 k Ω
R_7	1,0 k Ω
R_8	1,0 k Ω
R_9	1,0 k Ω
R_{10}	1,8 k Ω
R_A	0,000 a 2,000 k Ω (20 voltas)
R_B	0,000 a 50,000 Ω (20 voltas)
R_C	0,000 a 50,000 Ω (20 voltas)
C_1	23,5nF
C_2	235 nF
C_3	23,5nF

Utilizando-se os valores dos componentes contidos na tabela 3.1, teremos para o indutor eletrônico, uma indutância equivalente, utilizando-se a equação 2.35, de:

$$L_{eq} = R_7 R_9 R_{10} C_3 / R_8 = 42,3 \text{ mH} \quad (\text{eq.3.1})$$

Podemos ver no diagrama esquemático (figura 3.1) que no circuito desenvolvido iremos realizar as medidas: Medida C_1 = variável x do circuito de Chua, Medida C_2 = variável y do circuito de Chua e Medida P no circuito do indutor eletrônico = relacionado com a corrente z que passa no indutor do circuito de Chua, pela equação 2.37.

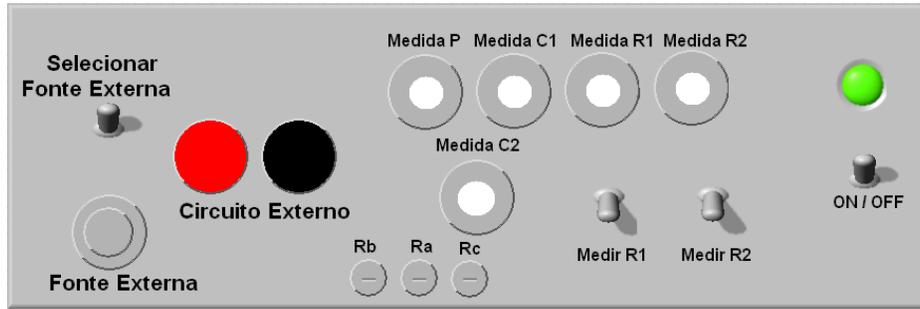


Figura 3.3: Diagrama esquemático do painel de controle do circuito de Chua experimental.

Ao projeto do circuito de Chua proposto por Tôrres⁽³⁾ adicionamos um conector do tipo J10 de 10 mm, para ligarmos a fonte DC, e dois conectores do tipo *borne* vermelho (+) / preto (-) para adicionarmos um circuito externo ao circuito de Chua em substituição ao diodo de Chua, como dito anteriormente.

Os conectores: (Medida P), (Medida C1), (Medida R1), (Medida R2) e (Medida C2) são conectores do tipo BNC. As chaves monopolares de duas posições (Medir R1) e (Medir R2) são chaves seletoras que quando colocadas na posição ON desacoplam o diodo de Chua e a fonte externa do circuito, excluimos assim da medida das resistências R e r_L , as resistências (R_1 - R_{10}) presentes nos circuitos do indutor e do diodo.

Temos também na figura 3.3, R_a , R_b e R_c que são os parafusos dos *trimpots* multivolta. Quando giramos o parafuso do *trimpot* estamos na verdade variando o valor da resistência do potenciômetro. Temos que R_a é o ajuste grosso do valor do resistor R , R_b é o ajuste fino do valor do resistor R e R_c é o ajuste do resistor r_L em série com o indutor.

A chave ON/OFF é a chave que coloca o circuito de Chua em operação, já que ela seleciona a entrada ou não da tensão alternada de 127 V no circuito que será transformada em uma tensão DC de ± 15 V que alimentará os amplificadores operacionais A_1 e A_2 do circuito do diodo de Chua (fig. 2.5 seção 2.2), A_3 e A_4 do circuito do indutor eletrônico (fig. 2.7 seção 2.3).

A placa do circuito está presa a uma caixa plástica, evitando assim curtos-circuitos. Nela foram fixados os conectores, como na figura 3.3, em seguida outra carcaça, agora metálica, é colocada em volta dessa caixa plástica na tentativa de reduzirmos interferências externas.

O custo total de um circuito de Chua como o descrito nessa seção fica em torno de R\$ 50,00 sendo que desses, aproximadamente R\$ 35,00, são apenas para a compra da caixa plástica e do transformador 120-15 V. Ou seja, é um circuito caótico de baixo custo e devido a esse baixo custo, podemos projetar vários circuitos idênticos. Futuramente pretendemos fazer estudos de redes de sincronismo entre esses circuitos caóticos, que podem então serem aplicadas ao estudo de comunicação baseada em Caos⁽⁶⁾⁽⁷⁾.

3.1.2) Montagem Experimental do Circuito de Chua

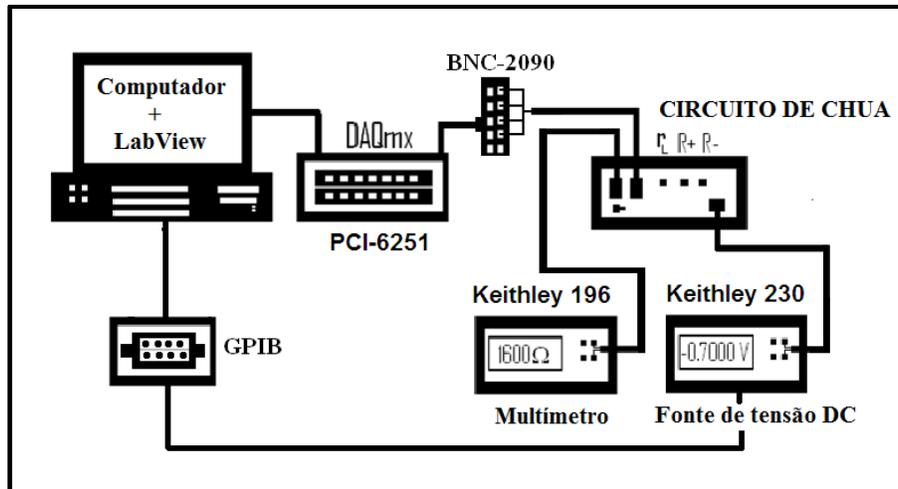


Figura 3.4: Diagrama esquemático da montagem experimental do circuito de Chua com a fonte DC. Na montagem experimental temos a esquerda o computador com LabView, placa GPIB e DAQmx, a direita temos os aparelhos Keithley 196 e Keithley 230, e o circuito de Chua.

Na figura 3.4 apresentamos um diagrama esquemático da montagem experimental do circuito de Chua com a fonte DC. À esquerda da figura temos um computador onde foram instaladas as placas GPIB e DAQmx, sendo a primeira de controle de equipamentos e segunda de aquisição de dados. À direita temos a caixa de isolamento que contém o circuito de Chua experimental e dois equipamentos, um que aplicará a tensão contínua V_{DC} no diodo de Chua, *Keithley 230*, e outro que medirá a resistência R do circuito, *Keithley 196*. É necessário o conector BNC-2090 para que possamos ligar os três cabos BNC referentes às medidas x , y e z do circuito, na entrada da placa de aquisição *DAQmx*.

A montagem experimental é composta pelos seguintes componentes:

- Circuito de Chua;
- Multímetro digital *Keithley 196*;
- Fonte de tensão *Keithley 230*;
- 5 Cabos BNC;
- 1 Cabo GPIB;
- Placa PCI-GPIB;
- Placa Aquisição de Dados PCI-6251 DAQmx da *National Instruments*;
- Computador com software Labview;
- Conector BNC-2090 da *National Instruments*.

A montagem experimental é tal que os 3 cabos BNC que estão ligados ao circuito através dos conectores (Medida C1), (Medida C2) e (Medida P) serão ligados a entrada do conector BNC-2090 e sua saída será então ligada a placa de aquisição de dados PCI-6151 *DAQmx* (placa multiplex com 8 saídas diferenciais de 16 bits de resolução cada e tendo como taxa máxima de aquisição 1.2 M medidas/s, as limitações dessa placa são baixa impedância de entrada e limite de leitura de tensão em ± 10 V).

Outros dois cabos BNC que estão ligados aos conectores (Medida R1) e (Medida R2) poderão ser ligados, um de cada vez, ao multímetro digital Keithley 196 (de 6 1/2 dígitos de precisão) para medirmos as resistência R e r_L quando necessário.

Através de programas desenvolvidos no software de programação *Labview* da *National Instruments* podemos controlar a fonte de tensão Keithley 230 (fonte de tensão com precisão máxima de $\pm 0,5$ mV, sendo esse o menor valor de tensão que pode ser variado entre duas medidas seguintes: 0,0000 V para $\pm 0,0005$ V, por exemplo). E a fonte de tensão é controlada pelo computador através de um cabo GPIB.

3.1.3) Montagem para a determinação da curva I(V) do Diodo Chua

As medidas I(V) foram realizadas utilizando-se a fonte de tensão e corrente contínua DC *Keithley* modelo 237. Nossas medidas foram realizadas para valores de tensão no diodo entre -10,000 V e +10,000 V, a corrente é medida utilizando-se a própria fonte 237. Uma resistência ôhmica no valor de 1003 Ω foi colocada em série com o diodo de Chua de forma a definir os pontos quiescentes ou de operação do circuito. A tensão no diodo V_d foi obtida, subtraindo-se a tensão sobre o resistor ($V_r = i_c R$), sendo i_c a corrente que passa no circuito, do valor tensão total aplicada ($V_t = V_r + V_d$). Utilizamos para essa medida o software de medidas de curvas I(V) do Laboratório de Transporte Elétrico Não linear e Caos, que utiliza a interface de comunicação GPIB, conectando-se o computador à fonte 237, o que torna viável a aquisição de dados e a automação. A curva I(V) experimental nos forneceu informações relevantes quanto ao comportamento do diodo e se o mesmo apresenta a região de NDC (*Negative Differential Conduction*), informações relevantes para as simulações que serão discutidas na seção 4.6.2.

Podemos observar na Figura 3.5, a curva I(V) obtida de acordo com o procedimento descrito nessa subseção. O gráfico consiste de três seguimentos de retas inclinados negativamente, sendo duas delas (regiões 2 e 4) de mesma inclinação $B \approx -4,00 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1}$ e outra (região 3) próxima à origem de inclinação $B \approx -7,66 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1}$. Entre os pontos de quebra, há uma inclinação ainda mais acentuada. Nas extremidades (regiões 1 e 5) para $|V|$ próximo a 8 V a curva apresenta regiões com comportamento ôhmico, caracterizado pela saturação dos OpAmp do circuito do diodo (região III, seção 2.2.2). A presença de uma região com condutividade diferencial negativa (NDC), que neste caso é propiciada pela realimentação dos amplificadores operacionais do diodo de Chua, é o ingrediente fundamental para as oscilações como apresentado anteriormente na seção 2.1 "circuitos osciladores/ circuito RLC".

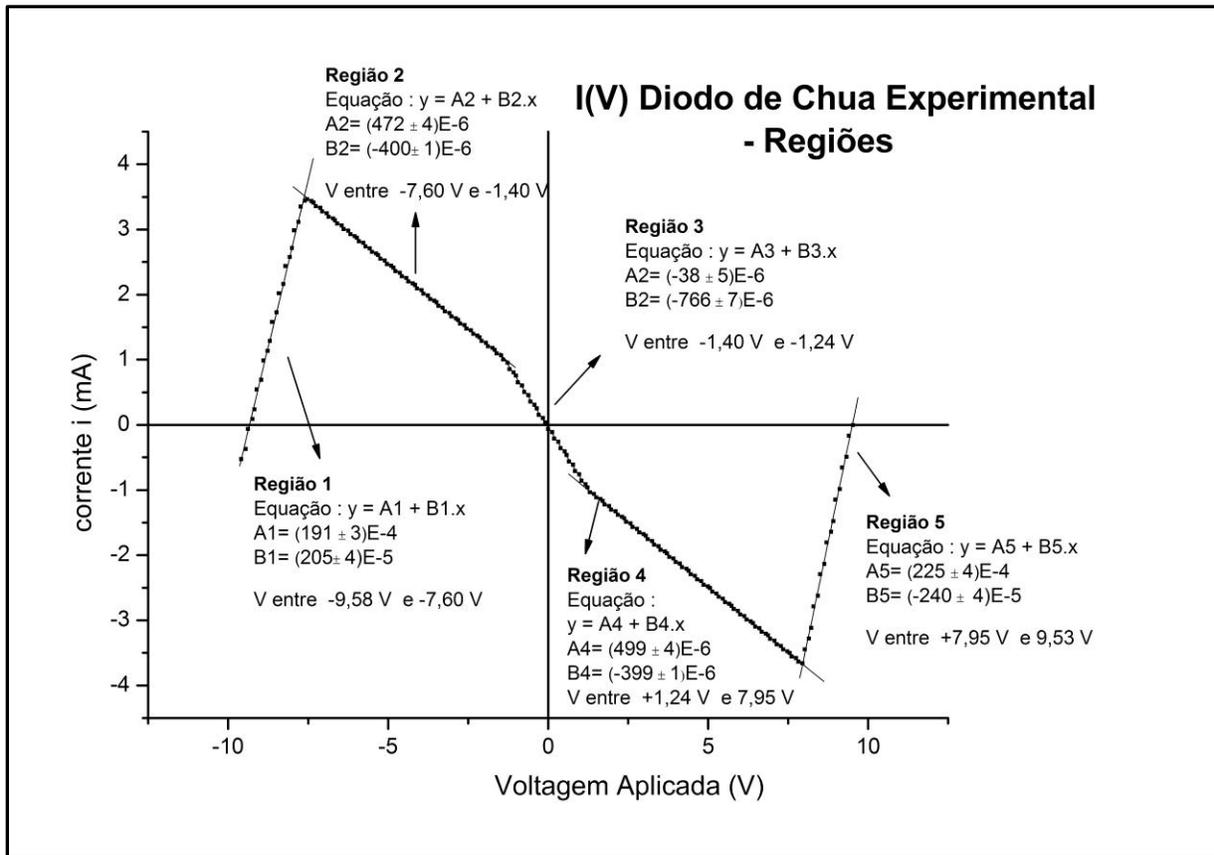


Figura 3.5: Curva I(V) experimental do diodo de Chua, composta por 5 regiões lineares, sendo três delas de condutividade diferencial negativa (regiões 2, 3 e 4) e sendo outras duas ôhmicas (regiões 1 e 5), devido a saturação dos amplificadores operacionais.

Regiões da curva I(V) do diodo de Chua

Tabela 3.2: Regiões da curva I(V) do diodo de Chua experimental

Regiões da curva I(V)	Regressão Linear $I = A + B \cdot V$
Região 1	$A_1 = (191 \pm 3) \times 10^{-4} \text{ V}$
entre -9,58 e -7,60 V	$B_1 = (205 \pm 4) \times 10^{-5} \Omega^{-1}$
Região 2	$A_2 = (472 \pm 4) \times 10^{-6} \text{ V}$
entre -7,60 e -1,40 V	$B_2 = (-400 \pm 1) \times 10^{-6} \Omega^{-1}$
Região 3	$A_3 = (-38 \pm 5) \times 10^{-6} \text{ V}$
entre -1,40 e +1,24 V	$B_3 = (-766 \pm 7) \times 10^{-6} \Omega^{-1}$
Região 4	$A_4 = (-499 \pm 4) \times 10^{-6} \text{ V}$
entre +1,24 e +7,95 V	$B_4 = (-399 \pm 1) \times 10^{-6} \Omega^{-1}$
Região 5	$A_5 = (-225 \pm 4) \times 10^{-6} \text{ V}$
entre +7,95 e +9,53 V	$B_5 = (240 \pm 4) \times 10^{-5} \Omega^{-1}$

3.2) Aquisição dos Dados Experimentais

Antes de apresentarmos os resultados experimentais é importante mostrar como são obtidas as medidas em nosso circuito, qual é a metodologia aplicada e como organizamos os resultados adquiridos. Na figura 3.6 apresentamos um fluxograma da metodologia aplicada as nossas medidas. Na parte superior do fluxograma temos as etapas da aquisição dos dados experimentais, na parte central temos as etapas de análises das séries temporais, em termos da periodicidade e dos expoentes de Lyapunov, e na parte inferior, temos as etapas de análises globais dos resultados obtidos, onde fomos capazes de construir os espaços de parâmetros.

Aquisição dos dados experimentais

Primeiramente um valor de resistência R do circuito de Chua é ajustado manualmente nos trim pots, R_a e R_b , até obtermos um valor fixo de R na precisão desejada $0,01 \Omega$, com a chave (medir R_1) ligada, (veja figura 3.3 seção 3.1). A fonte de tensão *Keithley 230* é então colocada manualmente em $0,0000 \text{ V}$. A chave (medir R_1) é então desligada e a chave (ON/OFF) é colocada na posição ON, assim o circuito de Chua é ligado. O programa de aquisição de dados desenvolvido por nós (“CHUA FONTE 230.vi”) é então colocado para funcionar, após ajustados os parâmetros de entrada, R e V_{DC} .

O programa varia automaticamente a tensão V_{DC} na fonte do valor $0,0000 \text{ V}$ até $+0,7500 \text{ V}$, com um passo de $+0,5 \text{ mV}$. Para cada passo gravamos no disco rígido as três séries temporais em um único arquivo contendo quatro colunas, sendo a primeira o tempo de cada medida e as outras três colunas as medidas das variáveis x , y e z . Chegando ao valor $+0,7500 \text{ V}$, a fonte de tensão é então desligada automaticamente e o circuito de Chua é manualmente desligado por alguns segundos. A tensão é novamente colocada no valor $0,0000 \text{ V}$ e agora a tensão aplicada vai decrescendo ao passo de $-0,5 \text{ mV}$ até atingirmos o valor de $-0,7500 \text{ V}$, quando a fonte de tensão e o circuito são novamente desligados finalizando-se o processo de um ciclo de medida. Uma nova resistência R é então ajustada começando-se assim um novo ciclo de medida.

É necessário fazermos essa reinicialização do circuito de Chua na metade de um ciclo completo de medida (que têm a resistência R fixa), pois quando atingimos valores elevados de tensão aplicada, o circuito fica em uma bacia de atração periódica em atratores de ciclo-1, sendo assim se fizermos uma medida começando em $-0,7500 \text{ V}$ e terminando em $+0,7500 \text{ V}$ diretamente sem a reinicialização na metade do ciclo, apenas teremos como resposta do sistema atratores de ciclo-1, ou seja, não teríamos nenhuma série temporal com comportamento caótico. Esse tipo de atração para ciclos periódicos está relacionada à multiestabilidades do circuito⁽⁸⁾ e a linha de carga de inclinação $(-1/R)$ cruzando as regiões 1 e 5 da curva $I(V)$ do diodo de Chua, figura 3.5.

O programa (“CHUA FONTE 230.vi”) é uma programa desenvolvido por nós na linguagem de programação *Labview*, que controla a fonte de tensão *Keithley 230*, automaticamente variando a tensão V_{DC} aplicada ao circuito, e além disso, o programa controla a placa de aquisição de dados *DAQmx*, que fará a aquisição das séries temporais x , y e V_p do circuito de Chua modificado.

Obtidas as três séries temporais de tensão, o programa mostra em tempo real o atrator do sistema, as três séries temporais num mesmo gráfico e a transformada de Fourier realizada sobre a medida do parâmetro x do circuito.

O programa então grava a série temporal com o nome, seguindo um padrão. Por exemplo: a série temporal [CHUA_R1676_-2.800E-2.dat], é definida pelos parâmetros: resistência $R = 1676,00 \Omega$ e a tensão aplicada $V_{DC} = -0,0280 \text{ V}$.

É necessário sempre utilizarmos o mesmo padrão de nomenclatura dos arquivos, para que os programas de análise das séries temporais sejam capazes de automaticamente ler todas as medidas apenas mudando o valor de R e da tensão na entrada do arquivo: “CHUA_R(valor do R)_(valor da tensão).dat”, para futuramente obtermos as figuras dos atratores das séries temporais e construirmos os diagramas de bifurcação e os espaços de parâmetros que serão apresentados no capítulo 4.

Especificações da Aquisição dos Dados Experimentais

- Séries temporais obtidas: x , y e V_p ;
- Programa utilizado: (“Chua Fonte 230.vi”);
- Taxa de Aquisição das séries temporais: (30.000 pontos/s)/ medida;
- Tempo de Aquisição das séries temporais: 1 segundo, totalizando 90.000 pontos;
- Intervalo de valores da resistência R : 1600,00 Ω até 1720,00 Ω , passos de 1,00 Ω ;
- Intervalo de valores de tensão V_{DC} aplicada: -0,7500 até +0,7500 V passos 0,5 mV;
- Número total de medidas: (120)x(3001): 360.120 medidas;
- Tamanho de cada pasta com as 3001 medidas, com R fixo: 4,23GB;
- Tamanho total de armazenamento no disco rígido: (120)x(4,23) GB = 507,3 GB.

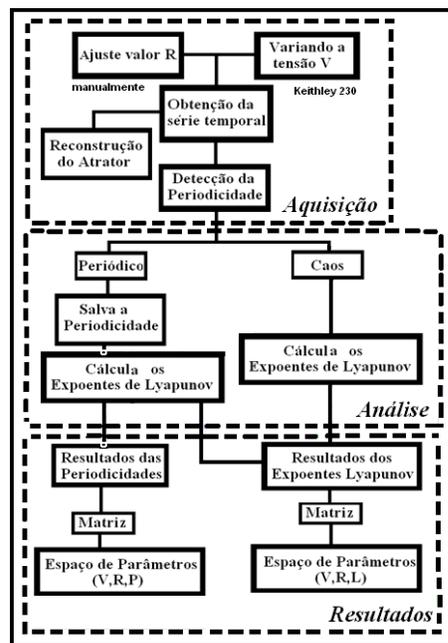


Figura 3.6: Fluxograma da metodologia aplicada às medidas experimentais do circuito de Chua.

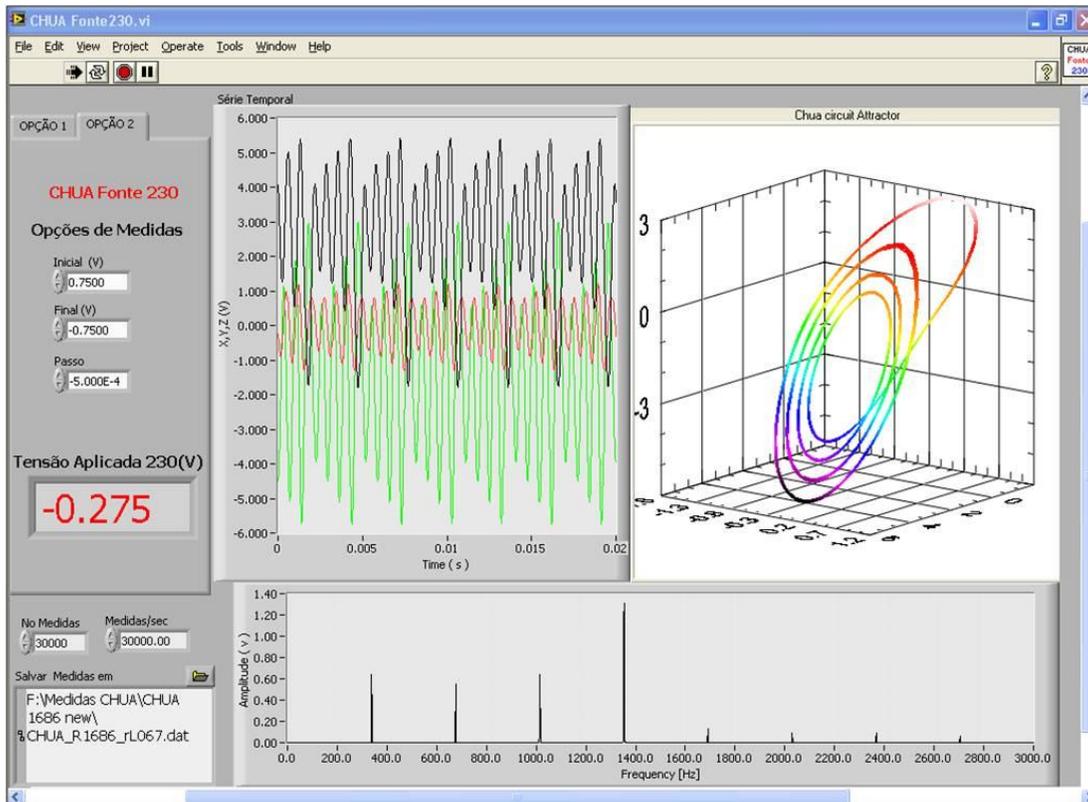


Figura 3.7: Painel Gráfico do programa de aquisição das séries temporais experimentais ("Chua Fonte 230.vi")

Parâmetros de entrada: (V inicial), (V final), (V passo), (nome da pasta aonde serão salvos os arquivos), (quantidade de medidas) e (taxa de aquisição de dados).

Parte Gráfica: Superior à esquerda (séries temporais), superior à direita (atrator sistema xyz) e inferior transformada Fourier FFT da série temporal x .

Séries temporais: $x(V)$ = verde, $y(V)$ = preta e $z(mA)$ = vermelha.

3.3) Detecção da Periodicidade

A evolução temporal de uma propriedade física de um sistema dinâmico, passível de realizar oscilações, pode ser medida e registrada digitalmente na forma de uma série temporal. Uma série temporal é então composta por uma quantidade de medidas realizadas em função do tempo que contém as informações sobre a dinâmica do sistema.

Para sistemas dinâmicos as séries temporais podem ser geradas numericamente, obtidas a partir da solução das equações diferenciais que regem o sistema, ou são obtidas a partir de medidas experimentais, em função do tempo das variáveis físicas do sistema. No nosso caso, as séries temporais experimentais adquiridas para o circuito de Chua com a fonte DC são as medidas das tensões x , y e V_p em função do tempo.

Um método para detectarmos a periodicidade de uma série temporal oscilatória, seria realizar a transformada de Fourier (FFT) dessa e contar a quantidade de picos presentes nessa série, porém ao realizarmos esse procedimento temos a presença de picos múltiplos dos picos principais, ou seja, se contássemos os picos presentes na transformada FFT obteríamos uma periodicidade maior do que é na realidade. Então foi necessário o desenvolvimento de um método para detectarmos a periodicidade do atrator utilizando uma transformada de Fourier, porém que excluísse os picos múltiplos.

Devido a grande quantidade de séries temporais experimentais medidas (aproximadamente 400.000 séries), devemos determinar a periodicidade das séries temporais automaticamente e em tempo real, senão gastaríamos uma quantidade imensa de tempo para contar manualmente os picos das séries temporais e a quantidade desses, determinando assim a periodicidade P.

Para determinarmos corretamente a periodicidade da série temporal, realizamos um procedimento por nós chamado de Transformada de Fourier Unitária, UFFT, sendo que essa é realizada seguindo os seguintes procedimentos: Da série temporal experimental padrão realizamos a seção de Poincaré selecionando os valores de máximos e mínimos, esses valores são gravados em outras duas séries temporais de tempo unitário, $S_{\text{máx}}(i)$ e $S_{\text{mín}}(j)$. Tomamos então essas duas séries e as intercalamos formando uma nova série tal que:

$$S_{\text{total}}(k) = [S_{\text{máx}}(i), S_{\text{mín}}(j), S_{\text{máx}}(i+1), S_{\text{mín}}(j+1)...] \quad (\text{eq.3.2})$$

Na série $S_{\text{total}}(k)$ realizamos a transformada de Fourier FFT, contamos a quantidade de picos presentes, essa contagem é feita através de uma ferramenta do *Labview* chamada *Peak-Detector*, que faz basicamente um corte horizontal no valor limiar (*threshold*) e conta a quantidade de máximos acima desse valor. Sendo determinada a quantidade de picos presentes na série da transformada FFT da $S_{\text{total}}(k)$, determinamos então a periodicidade da série temporal original.

O valor 12 foi estabelecido como um limite superior para a periodicidade dos atratores experimentais, pois quanto maior é o índice do pico menor é a sua amplitude levando a uma limitação na relação sinal/ruído. Sendo assim o valor de *threshold* deve ser escolhido cuidadosamente de tal modo que não seja desprezado nenhum pico e esse valor não deve ser muito baixo, detectando assim picos no limite do ruído da série temporal. Para evitar erros na detecção da periodicidade foram realizados testes para a escolha do valor de *threshold* mais adequado tal que a detecção dos picos tivesse uma precisão próxima a 99%. O valor de *threshold* que apresentou os melhores resultados foi o de 0,03 V, sendo esse o utilizado em todos os cálculos da detecção da periodicidade. O valor 0,03 V é relacionado com a amplitude dos picos da série FFT da variável x do circuito de Chua, não tendo nenhuma relação com o parâmetro de controle V_{DC} .

A série $S_{total}(k)$ obtida exclui os múltiplos dos picos principais, pois ao realizarmos uma seção de Poincaré apenas selecionamos os valores de extremos. Para obtermos a frequência correta dos picos temos de multiplicar o eixo das abscissas da transformada de Fourier pelo inverso do tempo de amostragem, como nos interessa apenas a periodicidade não fizemos essa multiplicação. Dessa forma, fica evidente o limite de Nyquist ⁽⁹⁾, que ocorre quando temos dois pontos em um período de amostragem e correspondendo ao valor de 0,5 na escala unitária de frequência da transformada UFFT. Este pico corresponde a uma volta completa no atrator.

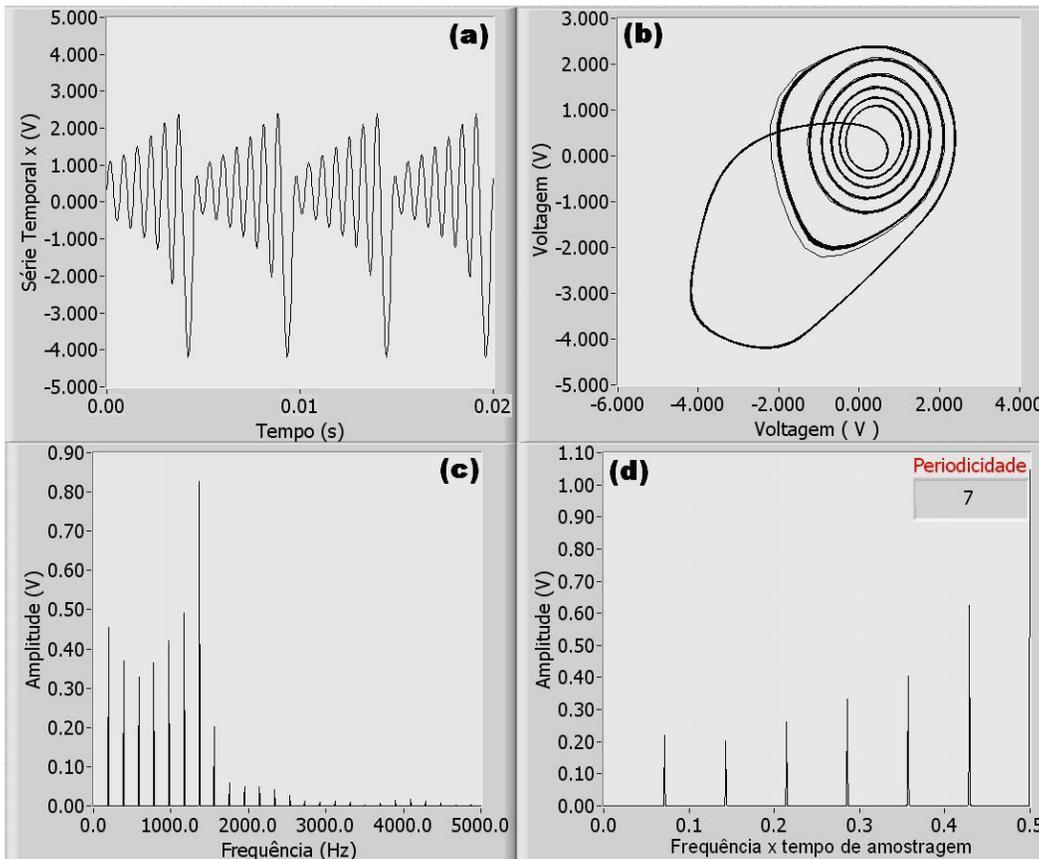


Figura 3.8: (a) Série temporal da variável x , periódica de período-7, medida $R = 1676,00 \Omega$ e $V_{DC} = -0,2095 V$, (b) Atrator, (c) a transformada FFT e (D) a transformada UFFT, da série temporal.

Na figura 3.8.a mostramos a série temporal da variável x do circuito de Chua para $R=1676,00 \Omega$ e $V_{DC} = -0,2095 V$, contando manualmente a quantidade de picos presentes no gráfico obtivemos 7 picos distintos, ou seja, a periodicidade dessa série é 7.

Na figura 3.8.c podemos ver que a transformada de Fourier FFT da série temporal padrão apresenta uma quantidade muito maior de picos, isso é devido à presença dos picos múltiplos dos picos principais.

Na figura 3.8.d podemos ver a transformada de Fourier Unitária e observamos a presença de apenas sete picos, correspondendo aos picos principais da FFT da série x do circuito de Chua, sendo então detectada uma periodicidade período-7 para essa série temporal, como era esperado.

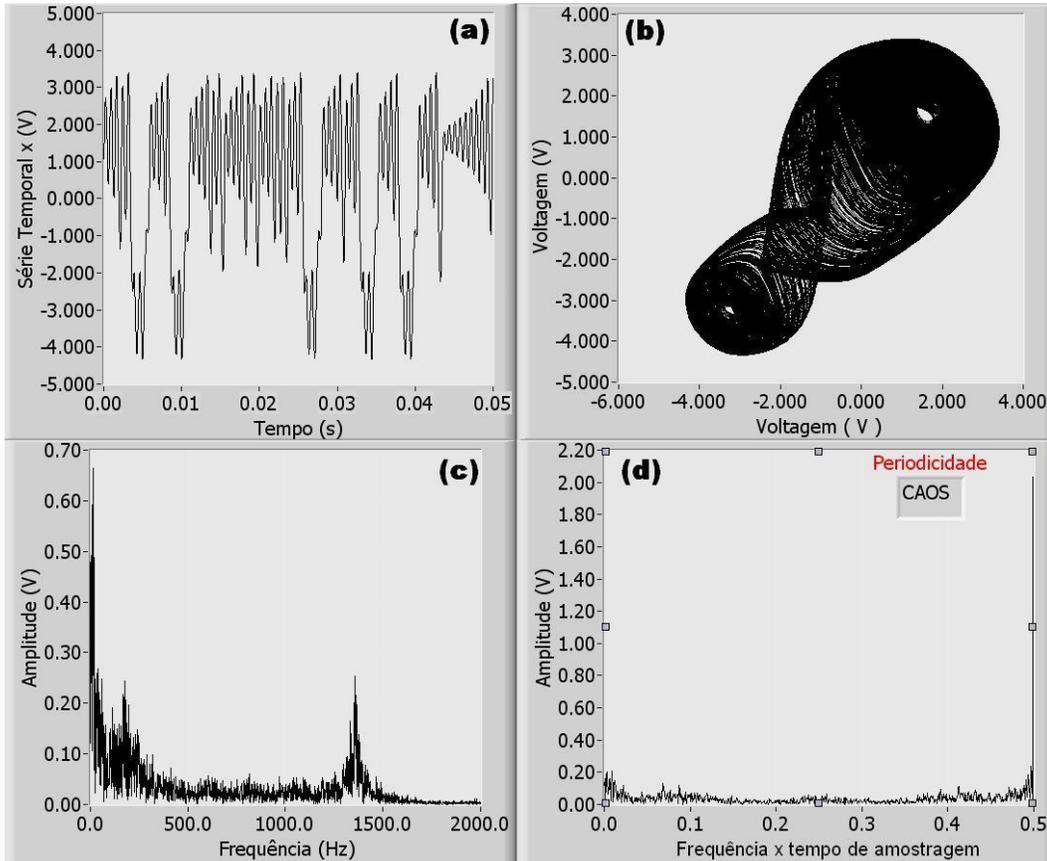


Figura 3.9: (a) Série temporal da variável x , caótica, medida $R= 1676,00 \Omega$ e $V_{DC} = -0,1385 V$, (b) Atrator, (c) a transformada FFT e (D) a transformada UFFT, da série temporal.

Na figura 3.9.a mostramos a série temporal da variável x do circuito de Chua para $R= 1676,00 \Omega$ e $V_{DC} = -0,1385 V$, podemos observar que nesse caso não é mais possível determinarmos a periodicidade da série contando-se os picos principais de oscilação, pois a série temporal não se repete, ou seja a cada volta do atrator observamos amplitudes diferentes, o que é típico de um atrator caótico. Na figura 3.9.b observando o atrator da série temporal podemos ver que esse se apresenta preenchido no espaço de estados e têm características topológicas de um atrator caótico do tipo Duplo-Rolo.

Nas figuras 3.9.c e 3.9.d observamos que as transformadas de Fourier FFT e UFFT da série temporal apresentam um espectro disperso de frequências, ou seja, não apresenta uma quantidade finita de picos. Ao ser realizada a contagem de picos presentes na transformada UFFT, foi obtido um valor muito elevado, logo o programa indica que a medida experimental seja caótica.

Uma série temporal somente pode ser classificada como caótica ou periódica após serem calculados os expoentes de Lyapunov dessa. Para a medida da figura 3.9 foram obtidos os seguintes expoentes de Lyapunov:

$$\lambda_{\text{maior}} = 4,41 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}, \lambda_{\text{médio}} = -0,88 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ e } \lambda_{\text{menor}} = -65,38 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$$

Ou seja, temos um expoente positivo, um próximo de zero e um negativo, confirmando que essa medida é caótica, como havia sugerido o programa de detecção da periodicidade, sendo observada a série temporal e o espectro das transformadas FFT e UFFT.

O programa de detecção da periodicidade sugere que a série temporal de uma medida experimental (R, V_{DC}) é caótica quando são contados mais de 12 picos na série da transformada UFFT, pois apenas observamos séries temporais com periodicidade até período-12, como dito anteriormente,. A confirmação de que essas séries são caóticas pode ser feita após calculados os três expoentes do espectro Lyapunov.

Não há perda significativa de informação ao considerarmos o limite de periodicidade 12 para os atratores das séries temporais. Na seção 4.4 mostraremos que o tamanho das regiões periódicas nos diagramas de bifurcação decresce exponencialmente com a periodicidade P , sendo assim, poucas são as séries temporais que apresentam periodicidade maior do que 12, para a precisão experimental de 0,5 mV, no passo da tensão V_{DC} , utilizada.

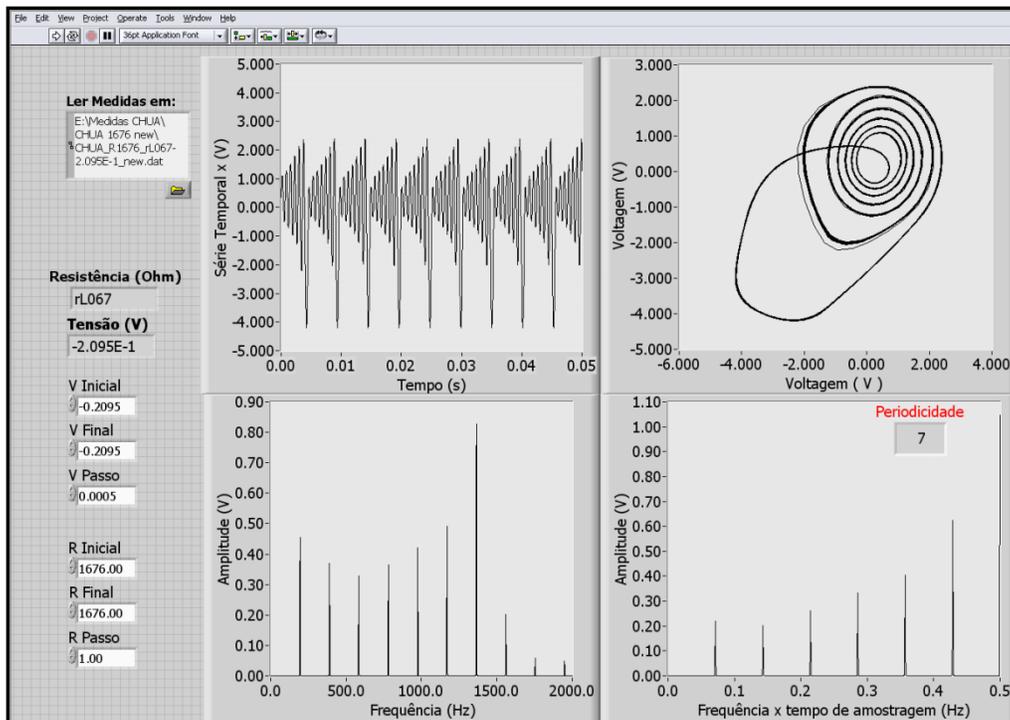


Figura 3.10: Painel gráfico do programa de detecção da periodicidade (“Atratores_CHUA_Periodicidade.vi”) que realiza os cálculos da transformada UFFT. Esse programa automaticamente lê todas as séries temporais, determina e grava em um arquivo a periodicidade correspondente.

3.4) Cálculo dos Expoentes de Lyapunov

Uma das possíveis definições para Caos é tal que a resposta do sistema não seja previsível no futuro mesmo para uma evolução temporal determinística. Ou seja, mesmo conhecidas às equações que regem a dinâmica temporal do sistema não saberemos qual será a sua resposta para tempos longos. A dispersão aumenta exponencialmente no tempo, ainda que o sistema seja de baixa dimensão.

Essa imprevisibilidade é conseqüência de uma inerente instabilidade das soluções das equações que regem o sistema, não devendo ser confundida com interferências de agentes externos.

O fato de trajetórias próximas divergirem não traz nenhuma nova característica, sistemas não caóticos podem apresentar divergências de trajetórias próximas, porém essas variam lentamente, não causando muitos problemas na resposta final. O fato é que em sistemas caóticos as trajetórias próximas divergem exponencialmente, ou seja, temos um comportamento crítico.

Para então quantificarmos essa divergência de trajetórias infinitesimalmente próximas temos o cálculo dos chamados expoentes de Lyapunov.

3.4.1) Maior Expoente de Lyapunov

Definindo S_{n1} e S_{n2} como dois pontos no espaço das posições generalizado, temos a "distância inicial" entre eles:

$$\delta_0 = \|S_{n1} - S_{n2}\| \quad (\text{eq.3.3})$$

Sendo $\delta_{\Delta n}$ a distância entre os pontos no tempo Δn tal que:

$$\delta_{\Delta n} = \|S_{n1+\Delta n} - S_{n2+\Delta n}\| \quad (\text{eq.3.4})$$

Se as trajetórias próximas divergem exponencialmente temos que:

$$\delta_{\Delta n} \sim \delta_0 e^{\lambda \Delta n}, \text{ para } \delta_{\Delta n} \ll 1 \text{ e } \Delta n \gg 1 \quad (\text{eq.3.5})$$

Onde λ é o maior expoente de Lyapunov. Dependendo do valor desse expoente podemos definir se o sistema está em caráter de um Ponto fixo, Ciclo limite estável (Periódico), Caos ou se é apenas Ruído.

Tabela 3.3: Tipos de Movimento do atrator em relação ao maior expoente de Lyapunov

Tipos de Movimento	Maior Expoente de Lyapunov
Ponto fixo estável	$\lambda < 0$
Periódico	$\lambda = 0$
Caos	$0 < \lambda < \infty$
Ruído	$\lambda \rightarrow \infty$

Para $\lambda > 0$ podemos definir caos, porém as trajetórias não podem separar mais que o tamanho máximo do atrator, ou seja, a validade da equação 3.5 é até Δn do tamanho do atrator.

Exponentes de Lyapunov tem unidade de inverso de tempo (1/t) e dão uma escala de tempo típico da divergência das trajetórias. Para sistemas de tempo discreto, tal como mapas iterativos ou sistemas na seção de Poincaré, temos uma equação que relaciona o maior expoente de Lyapunov calculado sobre essas séries (λ_{mapa}) com o calculado sobre as séries de sistemas de tempo contínuo ($\lambda_{contínuo}$), dada por:

$$\lambda_{mapa} = \lambda_{contínuo} \cdot \tau_p \quad (\text{eq.3.6})$$

Sendo τ_p o tempo médio entre dois pontos subsequentes na série de tempo discreto.

Uma característica importante do maior expoente de Lyapunov é que esse é invariável por transformações de reescala, reflexão ou outras transformações suaves. Como os expoentes de Lyapunov definem o comportamento em longo prazo, essas transformações não influenciam no valor desse. Qualquer re-parametrização suave e reversível no espaço de estados pode modificar as razões entre as distâncias, porém apenas por fatores finitos.

O algoritmo utilizado nesse trabalho para calcularmos os expoentes de Lyapunov das séries temporais do circuito de Chua é o método de Sano e Sawada ⁽¹⁰⁾, sendo esse método conhecido por sua eficiência computacional, quando a série temporal da medida define bem a dinâmica do sistema de interesse.

Para o cálculo dos expoentes, quanto menor é a quantidade de ruído presente e quanto maior é a série temporal, melhor será a resposta liberada pelo algoritmo, porém mesmo para uma série temporal não tão grande e com um baixo nível de ruído, ainda assim o algoritmo é capaz de liberar resultados coerentes e precisos.

3.4.2) Espectro dos Expoentes de Lyapunov/ Método de Sano e Sawada

Um sistema dinâmico pode ser definido como um objeto matemático em um espaço de estados por:

- $x_{n+1} = F(x_n)$ = sistema de tempo discreto: Ex. Mapas Iterativos;
- $\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t))$ = sistema de tempo contínuo: Ex. Circuito de Chua;

A dimensão do espaço de estados define a quantidade de expoentes do espectro dos expoente de Lyapunov. No caso do circuito de Chua temos que a dimensão do sistema é três, logo temos associado a esse sistema três expoentes no espectro de Lyapunov.

Tipicamente alguns desses expoentes são negativos, indicando que algumas direções no espaço das trajetórias podem convergir exponencialmente. A soma de todos os expoentes de Lyapunov é diretamente relacionada à taxa de expansão ou contração do espaço de estados. Esta soma é zero para sistemas conservativos, negativa para os demais, porém não pode ser positiva se temos um espaço de estados limitado.

Na subseção anterior 3.4.1 mostramos simplificadaamente como é calculado o maior expoente de Lyapunov de uma série temporal, porém temos mais de um expoente para sistemas de dimensão maior do que um, então mostraremos agora como são obtidos os demais expoentes a partir da série temporal.

Sendo \vec{x} e \vec{y} duas trajetórias próximas em um espaço de estados de dimensão m . Considerando o sistema dinâmico como um mapa, teremos:

$$\vec{y}_{n+1} - \vec{x}_{n+1} = \vec{F}(y_n) - \vec{F}(x_n) = J_n(y_n - x_n) + \theta(\|y_n - x_n\|^2) \quad (\text{eq.3.7})$$

Sendo J_n uma matriz Jacobiana de dimensão $m \times m$, definida por:

$$J(\vec{x}_i) = J_i = \left(\frac{\partial \vec{F}_i}{\partial \vec{x}_j} \right)_{x=x_i} = \left(\frac{\partial (F_1, F_2 \dots)}{\partial (x_1, x_2 \dots)} \right)_{x=x_i} \quad (\text{eq.3.8})$$

A função $\vec{F}(y_n)$ foi expandida ao redor de x_n , sabendo que $\delta_n = y_n - x_n$ podemos calcular δ_{n+1} utilizando a equação 3.7. Decompondo δ_n em vetores de coeficientes β_i e direção \hat{e}_i , teremos:

$$\delta_{n+1} = \sum_i (\beta_i \Lambda_i) \hat{e}_i \quad (\text{eq.3.9})$$

Em particular se δ_n é paralelo a um dos vetores \hat{e}_i , esse é alongado ou encolhido por um fator Λ_i . Ou seja, podemos separar o espaço de estados de dimensão m , em m subespaços lineares.

As análises definidas agora são locais em tempo e espaço, ou seja, para cada ponto no espaço de estados temos diferentes autovetores e autovalores da Jacobiana eq.3.8, já que a Jacobiana é dependente das coordenadas espaciais. É necessário então definirmos o sistema em quantidades e objetos globais.

Os expoentes de Lyapunov λ_i são definidos como a taxa assintótica na qual os vetores crescem em módulo em um determinado subespaço. Para obtermos o maior expoente em uma direção no espaço tangente temos que maximizar o módulo na iteração N de um vetor normalizado nesse espaço tangente:

$$\left(\prod_{n=1}^N \vec{J}_n \vec{u} \right)^\dagger \cdot \left(\prod_{n=1}^N \vec{J}_n \vec{u} \right) - \lambda(u^\dagger u - \mathbf{1}) = \text{Máximo} \quad (\text{eq.3.10})$$

A solução desse problema é dada por um sistema de equações lineares nos coeficientes de \vec{u} . Esse sistema é resolvido através dos autovetores normalizados definidos por:

$$\left(\prod_{n=1}^N \vec{J}_n \right)^\dagger \cdot \left(\prod_{n=1}^N \vec{J}_n \right) \quad (\text{eq.3.11})$$

Obtidos os autovalores dessa equação e dividindo-os pelo número de interações N teremos os diferentes valores dos expoentes de Lyapunov e não apenas o do maior expoente. O teorema Ergódico multiplicativo de Oseledec de 1968 ⁽¹¹⁾ ⁽¹²⁾, garante que esses autovalores normalizados pelo número de interações N convergem no limite $N \rightarrow \infty$.

As equações definidas anteriormente podem ser adaptadas para sistemas dinâmicos de tempo contínuo considerando-se o mapa formado pela integração das equações diferenciais da dinâmica em um tempo finito Δt .

$$\vec{x}(t + \Delta t) \approx \vec{x}(t) + \Delta t \cdot \vec{f}(\vec{x}(t)) \quad (\text{eq.3.12})$$

Em uma medida experimental no tempo contínuo o intervalo de tempo entre sucessivas medidas por ser interpretado como o tempo Δt . Em uma medida de tempo contínuo que se mantém finita numa região do espaço, sem convergir para um ponto fixo, um dos expoentes de Lyapunov necessariamente deve tender a zero, correspondendo a uma direção tangente ao fluxo, essa direção marginal ao expoente de Lyapunov nulo é chamada de estabilidade marginal.

A fim de evitar o cálculo de expoentes espúrios, afetando assim os cálculos do espectro dos expoentes de Lyapunov, é necessário obtermos a dimensão que corretamente representa o sistema dinâmico através do cálculo da dimensão de imersão. Não iremos nesse trabalho explicar mais detalhadamente esse cálculo. Sendo a dimensão de imersão três a utilizada para o circuito de Chua ⁽¹³⁾.

3.4.3) Software Lyap_Spec - TISEAN

Para analisar séries temporais não lineares foi desenvolvido por Rainer Hegger, Holger Kantz e Thomas Schreiber, um conjunto de softwares livre, com os códigos fonte abertos chamado *Tisean* (“*Time Series Analysis*”) em Fortran, disponível para download para os sistemas LINUX e Windows ⁽¹⁴⁾. Esse projeto de softwares de análises de séries temporais é baseado na teoria de sistemas dinâmicos não lineares determinísticos ou podemos também chamar, baseados na Teoria do Caos.

Nos programas podemos encontrar rotinas para o cálculo dos expoentes de Lyapunov, redução de ruídos, cálculos de dimensão de imersão, estimativas de entropia de informação, métodos para obtenção da seção de Poincaré, cálculos da informação mútua de uma série, métodos de detecção de falsos vizinhos, métodos de detecção de órbitas periódicas instáveis, cálculos da dimensão de correlação, entre outros. Ou seja, estão presentes diversos programas que são importantes para uma análise completa das séries temporais.

Para calcularmos os expoentes de Lyapunov das séries temporais experimentais do nosso circuito de Chua, utilizamos o programa *Lyap_Spec*, que é uma rotina baseada no trabalho de Sano e Sawada ⁽¹⁰⁾. Esse método é baseado em estimativas das Jacobianas locais das equações de dinâmica linearizadas, que governam o crescimento das perturbações infinitesimais, como anteriormente apresentado na seção 3.4.2.

As estimativas são obtidas através de modelos locais lineares do tipo:

$$s_{n+1} = a_n s_n + b_n \quad (\text{eq.3.13})$$

A primeira linha da Jacobiana é o vetor a_n com Jacobiana $(J)_{ij} = \delta_{(i-1),j}$ para $i = 2, 3 \dots m$, sendo m a dimensão de imersão. Os a_n são obtidos pelo método de quadrados mínimos, por:

$$\sigma^2 = \sum (s_{l+1} - a_n s_l - b_n)^2 \quad (\text{eq.3.14})$$

Onde $\{s_l\}$ é o conjunto de vizinhos de s_n . Ou podemos construir um modelo não linear global e podemos obter a Jacobiana tomando-se as respectivas derivadas parciais.

Em ambos os casos, multiplica-se a Jacobiana um a um, seguindo a trajetória, para os diferentes vetores \vec{u}_k no espaço tangente, onde queremos calcular os expoentes. Após alguns passos, é aplicada uma ortonormalização pelo método de Gram-Schmidt sobre o conjunto dos vetores \vec{u}_k e são acumulados os logaritmos dos fatores de reescala. Do valor médio desses logaritmos, na ordem do procedimento do método de Gram-Schmidt, obtemos os expoentes de Lyapunov em ordem decrescente.

1) Trajetória: $\dot{\vec{x}} = F(\vec{x}) \quad (\text{eq.3.15})$

2) Evolução do vetor tangente sobre o espaço do \vec{x} , sendo \vec{T} a matriz Jacobiana de F: $\dot{\vec{\xi}} = \vec{T}(\vec{x}(t)) \cdot \vec{\xi} \quad (\text{eq.3.16})$

3) Solução da equação linear não autônoma, sendo A^t o operador linear que mapeia o vetor tangente $\vec{\xi}(0)$ em $\vec{\xi}(t)$: $\vec{\xi}(t) = A^t \vec{\xi}(0) \quad (\text{eq.3.17})$

4) Assim os expoentes de Lyapunov são obtidos por:

$$\lambda(\vec{x}(0), \vec{\xi}(0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\vec{\xi}(t)\|}{\|\vec{\xi}(0)\|} \quad (\text{eq.3.18})$$

Os expoentes de Lyapunov são independentes da condição inicial $\vec{x}(0)$ sendo o sistema ergódico

Especificações do Programa: Lyap_Spec

Esse programa calcula todo o espectro dos expoentes de Lyapunov para uma série temporal, podendo essa ser também de múltiplos componentes. A quantidade de expoentes calculados é $(m.d)$, sendo d a quantidade de componentes e m a dimensão de imersão do sistema caótico. Segue a tabela 3.4 com as especificações do programa *Lyap_Spec*:

Tabela 3.4: *Especificações do programa Tisean: Lyap_Spec*

Opção	Descrição	Valores Utilizados no Cálculo
-l#	Número de Pontos a ser usado	30.000 (total de pontos)
-x#	Número de Linhas a ser ignorada	0
-c#	Coluna a ser lida no arquivo	2 (coluna x)
-m#,#	Nº de Componente, Dimensão de Imersão	1,3
-k#	Número de vizinhos a serem utilizados	40
-n#	Número de Interações	10.000
-o#	Nome do Arquivo de Saída	[nome do arquivo de entrada]_lyap_spec.dat

Para calcularmos os expoentes de Lyapunov devemos então criar uma linha de comando, seguindo a ordem da tabela 3.4, para cada uma das séries temporais (R , V_{DC}) contendo todas as informações contidas na tabela.

Segue o exemplo da linha de comando do cálculo dos expoentes de Lyapunov para a série $R = 1619,00 \Omega$ e $V_{DC} = 0,0995 V$:

```
./lyap_spec "CHUA_R1619_V+9.950E-2.dat" -l30000 -x0 -c2 -m1,3 -k40  
-n10000 -o "CHUA_R1619_V+9.950E-2_k40_n10000_lyap_spec.dat"
```

Por serem cerca de 360.00 medidas não é possível fazermos todas as linhas de comando manualmente, sendo então necessário o desenvolvimento de programas em *Labview* que automaticamente, criam as linhas de comando para cada uma das medidas, separando-as em 121 arquivos, cada um contendo todas as linhas de comando de um ciclo de medidas, que têm o parâmetro R fixo (3.001 medidas por ciclo).

Para definirmos o valor da vizinhança corretamente foram feitos testes variando-se a vizinhança de $k = 1$ até $k = 100$ num passo unitário, na linha de comando de uma medida caótica. Esses testes servem para garantirmos que os expoentes de Lyapunov encontrados para essa série caótica estejam corretos: a soma deles deve ser negativa, além disso, devemos ter um expoente positivo, um com um valor mais próximo possível de zero e um com valor negativo.

Os testes realizados mostram a vizinhança que melhor apresenta as características agora apresentadas para uma medida caótica é a vizinhança $k = 40$. Sendo assim para todas as medidas, caóticas e periódicas, utilizamos a vizinhança de $k = 40$, mesmo sabendo que para as medidas periódicas o valor de vizinhança $k = 25$ apresentaria melhores resultados para os expoentes de uma série periódica (um mais próximo de zero possível e dois negativos).

Não há problemas em utilizarmos o valor de vizinhança $k = 40$ para os dois tipos de medidas, pois estamos apenas interessados no maior expoente de Lyapunov das séries temporais, sendo assim os valores nulos das séries periódicas não afetam o contraste com os valores positivos das séries caóticas.

Escolhida a vizinhança correta ($k = 40$) e sendo criados todos os arquivos (total 121) contendo as 3.001 linhas de comando, podemos então realizar os cálculos do espectro dos Expoentes de Lyapunov.

No trabalho em questão realizamos os cálculos em dois microcomputadores Core2-Quad de 2,5MHz (Quad-1) e 2,66Mhz (Quad-2), com 4Gb e 8Gb de memória RAM, respectivamente. No Quad-1 fizemos os cálculos para as pastas pares de resistência R fixa, e no Quad-2 as pastas ímpares.

O tempo de processamento foi de cerca de 45 dias, sendo utilizados os quatro núcleos de cada processador, completamente. O sistema operacional utilizado foi o Linux na versão do "Ubuntu 9", essa versão além de ser livre mostrou-se muito eficiente, seguro e estável.

Os resultados dos expoentes são liberados em d.(m+1) colunas, sendo a primeira coluna o valor do número da interação atual ($i = 1, \dots, n$) e sendo as outras colunas os respectivos expoentes de Lyapunov $\lambda(i)$. Os valores dos expoentes em cada interação são liberados toda vez que há uma mudança significativa do valor desse e variando de acordo com a medida. Terminado o cálculo dos expoentes de Lyapunov até o valor de interação ($i = n$), são também liberados nessa ordem os valores dos erros relativos e absolutos da previsão dos expoentes, o tamanho da vizinhança utilizada, a quantidade de vizinhos utilizados (k) e a estimativa da dimensão de Kaplan-Yorke (*KY-Dimension*).

Exemplo do resultado do cálculo do espectro dos expoentes de Lyapunov para a série temporal do circuito de Chua com a fonte V_{DC} , $R = 1619,00 \Omega$ e $V_{DC} = 0,0995 V$.

```

...
9935 1.024506e-02 -7.781499e-03 -6.224444e-01
9998 1.054110e-02 -8.131366e-03 -6.225378e-01
#Average relative forecast errors:= 3.109399e-03
#Average absolute forecast errors:= 4.420770e-03
#Average Neighborhood Size= 5.437344e-02
#Average num. of neighbors= 4.000000e+01
#estimated KY-Dimension= 2.003871

```

A linha apresentada em destaque corresponde a que contém o valor da interação ($i = 9998$) e o valor dos três expoentes de Lyapunov:

$$\lambda_1 = +1.054110 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}, \lambda_2 = -8.131366 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1} \text{ e } \lambda_3 = -6.225378 \cdot 10^{-1} \text{ s}^{-1}.$$

Dos valores dos expoentes de Lyapunov: um positivo, um quase nulo e um negativo, podemos afirmar que essa medida é caótica.

Estudos desenvolvidos por Kaplan e Yorke mostraram que para a maioria dos sistemas físicos, o espectro dos expoentes de Lyapunov e a dimensão fractal do atrator estão relacionados, sendo assim, sabendo-se os valores desses expoentes podemos definir uma dimensão fractal.

Essa dimensão é a chamada dimensão de Kaplan-Yorke ⁽¹⁵⁾ também chamada dimensão de Lyapunov, e está apresentada na última linha dos resultados. Essa é obtida através dos valores dos expoentes de Lyapunov por:

$$D_{KY} = k + \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{|\lambda_{k+1}|} \quad (\text{eq.3.19})$$

Sendo λ_i os valores dos expoentes e k o valor inteiro máximo que determina a quantidade de expoentes positivos encontrados. A dimensão D_{KY} é considerada um limite superior da dimensão de informação D_1 .

A dimensão de informação D_1 pode ser obtida através da equação:

$$D_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\langle \ln p_\epsilon \rangle}{\ln \epsilon} \quad (\text{eq.3.20})$$

Sendo $\langle \ln p_\varepsilon \rangle$ o valor médio da informação (de Shannon) necessária para determinarmos uma variável \vec{x} com uma precisão ε . A dimensão de informação D_1 especifica como essa quantidade de informação se escala numa resolução ε .

O termo entropia de Shannon ou informação de Shannon quantifica, em termos de valores esperados, a quantidade de informação contida em uma mensagem. Sendo essa de vital importância, nos estudos de comunicação e sincronismo, entre dois sistemas, por exemplo.

REFERÊNCIAS DO CAPÍTULO 3

1. **Holokx A. Albuquerque, Rero M. Rubinger, Paulo C. Rech.** *Physica D. Theoretical and Experimental Time Series Analysis of an Inductorless Chua's Circuit.* 2007, Vol. 233, pp. 66-72.
2. **Holokx A. Albuquerque, Rero M. Rubinger, Paulo C. Rech.** *Physics Letters A. Self-Similar Structures in a 2D Parameter-Space of an Inductorless Chua's Circuit.* 2008, Vol. 372, pp. 4793-4798.
3. **L.A.B. Torres, L.A. Aguirre.** *Electronics Letters. Inductorless Chua's Circuit.* 2000, Vol. 36, pp. 1915-1916.
4. **H.A. Albuquerque, P.C. Rech.** *International Journal of Bifurcation and Chaos. A Parameter-Space of a Chua System with a smooth nonlinearity.* 2009, Vol. 19, 4, pp. 1351-1355.
5. Protel 99 SE. [Online] Microsoft.
6. **Kolumban, G., Kennedy, M.P. e Chua, L.O.** *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications. The Role of Synchronization in Digital Communications using Chaos. II. Chaotic Modulation and Chaotic Synchronization.* 1998, Vol. 45, 11, pp. 1129-1140.
7. **Louis M. Pecora, Thomas L. Carroll.** *Physical Review Letters. Synchronization in Chaotic Systems.* 1990, Vol. 64, 8, pp. 821-824.
8. **L. Fortuna, M. Frasca, and M. G. Xibilia.** *Chua's Circuit Implementations. Yesterday, Today and Tomorrow.* s.l. : World Scientific Series on Nonlinear Science A, 2009. Vol. 65.
9. **Paulo Sergio Ramirez Diniz, Eduardo A. B. Da Silva, Sergio L. Netto.** *Digital Signal Processing: System Analysis and Design.* s.l. : Cambridge University Press, 2002.
10. **M. Sano, Y. Sawada.** *Physical Review Letters. Measurement of the Lyapunov Spectrum form a Chaotic Time Series.* 1985, Vol. 55, 10, pp. 1082-1085.
11. **Oseledec, V.I.** *Trans. Moscow Math. Soc. Lyapunov Characteristic Numbers for Dynamical Systems.* 1968, Vol. 19, pp. 197-231.

12. **Alves, Luciana Aparecida.** Dissertação de Mestrado da Matemática. *Expoentes de Lyapunov e o teorema ergódico multiplicativo de Oseledec.* s.l. : UNICAMP, 2007.
13. **R.M. Rubinger, A.W.M. Nascimento, L.F. Mello, C.P.L. Rubinger.** Mathematical Problems in Engineering. *Inductorless Chua's Circuit: Experimental Time Series Analysis.* 2007, Vol. 2007, 83893, pp. 1-16.
14. **Rainer Hegger, Holger Kantz, Thomas Schreiber.** http://www.mpipks-dresden.mpg.de/~tisean/Tisean_3.0.1/index.html. *Tisean - Time Series Analysis.* [Online] 2007.
15. **J. Kaplan, J. Yorke.** Chaotic Behavior of Multidimensional Difference Equations. [A. do livro] H.O. Walther H.O. Peitgen. *Functional Differential Equations And Approximation Of Fixed Points.* s.l. : Springer, 1979.

Capítulo 4) Resultados Experimentais e Discussões

4.1) Introdução

Nas subseções anteriores comentamos sobre o circuito de Chua (seção 2.2), suas características principais e a sua construção experimental (seção 3.1). Discutimos também as modificações propostas por Tôrres ⁽¹⁾, além disso, na seção 2.4 propomos um novo circuito de Chua que é o "Circuito de Chua com a fonte DC", que é caracterizado basicamente pela adição de uma fonte de tensão DC em série com o diodo de Chua. Determinamos também na seção 2.4 quais devem ser as possíveis modificações na curva $i_d(x)$ do diodo ao adicionamos essa fonte, porém ainda não havíamos apresentado nenhum resultado experimental da nossa versão do Circuito de Chua.

A seguir apresentaremos os resultados experimentais divididos em subseções, discutindo as características principais de cada um desses. Segue a ordem dos tópicos e as suas respectivas subseções:

- 4.2) Séries e atratores experimentais;
- 4.3) Diagramas de bifurcação experimentais;
- 4.4) Bifurcações por adição de período (“*Period-adding bifurcation*”);
e Janelas complexas periódicas (“*Complex Periodic Windows*”);
- 4.5) Espaço de parâmetros da periodicidade;
- 4.6.a) Espaço de parâmetros do maior expoente de Lyapunov- Experimental;
- 4.6.b) Espaço de parâmetros do maior expoente de Lyapunov- Simulação;

4.2) Séries temporais e atratores experimentais

No circuito de Chua com fonte DC temos como variáveis de controle do sistema os parâmetros: a tensão V_{DC} aplicada e as resistências R e r_L , sendo que o parâmetro r_L foi mantido fixo. Teremos então para cada par de valores (V_{DC}, R) uma forma diferente da série temporal do circuito de Chua, sendo elas: pontos fixos, divergência (aqui na forma de saturação em $\pm 10,5$ V) ou oscilatórias periódicas ou caóticas.

Como mencionado anteriormente obtivemos as séries temporais x (tensão sobre o capacitor C_1), y (tensão sobre o capacitor C_2) e V_p (tensão sobre o ponto P do circuito do indutor eletrônico). Essa tensão no ponto P, se relacionada com a corrente que passa pelo indutor pela equação 2.37,

Nas figuras de 4.1 a 4.3 apresentaremos algumas das séries temporais experimentais adquiridas utilizando-se a nossa versão do circuito de Chua. Mostraremos algumas séries temporais periódicas, de periodicidades pares e ímpares, algumas caóticas, que têm como atratores os dos tipos *Rössler* e Duplo-Rolo (“*Double-Scroll*”), sendo esse último um tipo de atrator mais explorado na literatura sobre o circuito de Chua⁽²⁾.

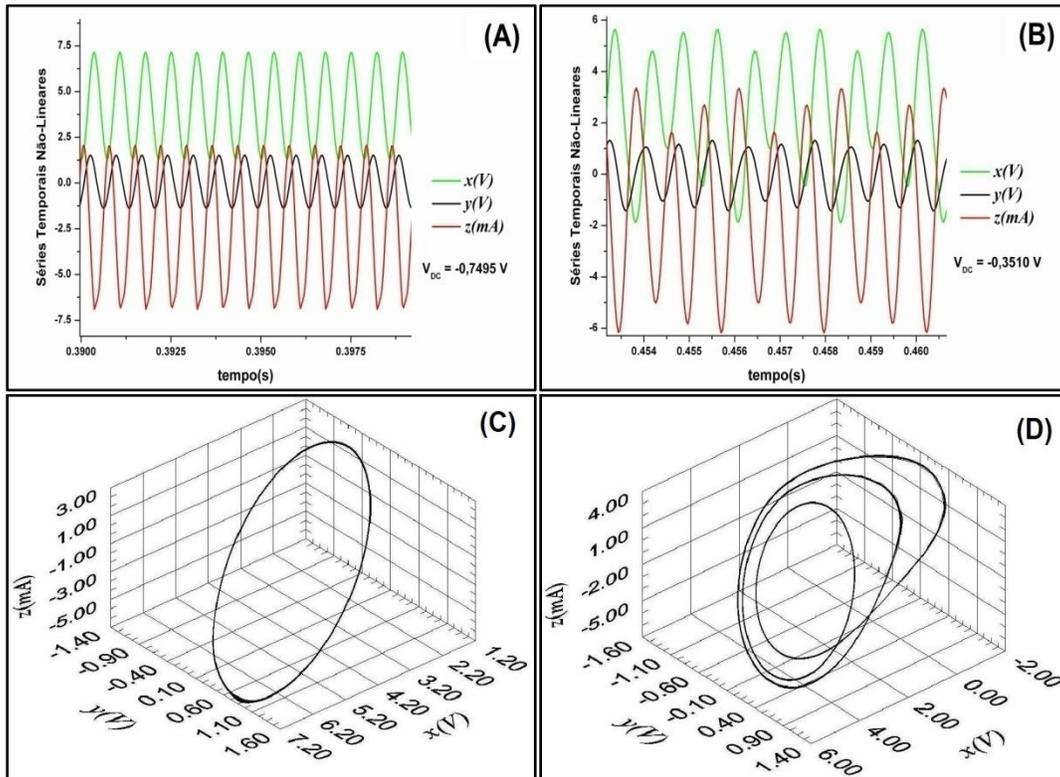


Figura 4.1: Série temporal x , y e z e seus respectivos atratores 3D para as medidas experimentais $R= 1676,00 \Omega$ e $V_{DC} = -0,7495 V$ (figuras 4.1.a e 4.1.c) e $-0,3510 V$ (figuras 4.1.b e 4.1.d).

- Período-1 = Resistência $R = 1676,00 \Omega$, tensão V_{DC} aplicada de $-0,7495 V$, (fig.4.1.a).
- Período-3 = Resistência $R = 1676,00 \Omega$, tensão V_{DC} aplicada de $-0,3510 V$, (fig.4.1.b).

Na série temporal do período-1 (figura 4.1.a) podemos observar que a onda tem apenas uma amplitude de oscilação, ou seja, o valor de tensão dos máximos da série fica praticamente constante num valor de $7,155V$ para a medida x , enquanto na série temporal do período-3 é possível visualizarmos três valores máximos de oscilação distintos, cada um representando uma volta de 2π , sendo então necessários 6π para voltarmos para o mesmo ponto no atrator. Os valores dos máximos são próximos a $4,809 V$, $5,503 V$ e $5,646 V$, respectivamente.

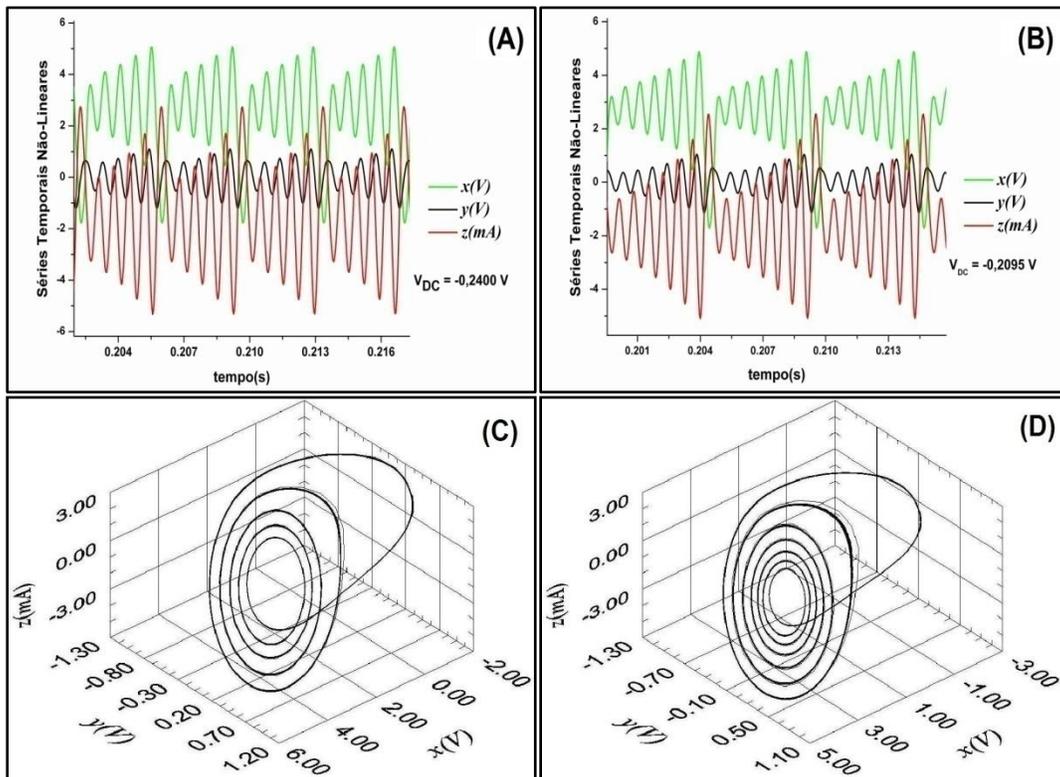


Figura 4.2: Série temporal x , y e z e seus respectivos atratores 3D para as medidas experimentais $R= 1676,00 \Omega$ e $V_{DC} = -0,2400 V$ (figuras 4.2.a e 4.2.c) e $-0,2095 V$ (figuras 4.2.b e 4.2.d).

- Período-5 = Resistência $R = 1676,00 \Omega$, tensão V_{DC} aplicada $-0,2400 V$, (fig.4.2.a).
- Período-7 = Resistência $R = 1676,00 \Omega$, tensão V_{DC} aplicada $-0,2095 V$, (fig.4.2.b).

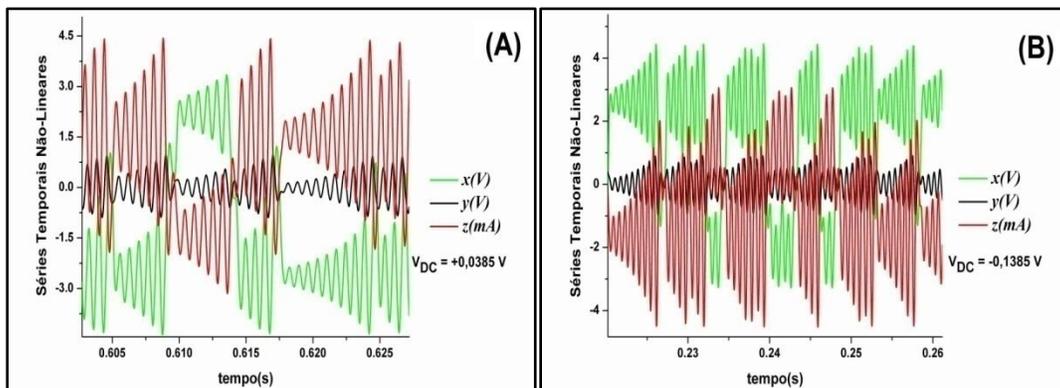


Figura 4.3.a e 4.3.b: Série temporal x , y e z para as medidas experimentais: $R= 1676,00 \Omega$ e $V_{DC} = -0,1385 V$ (fig.4.3.a) e $+0,0385 V$ (fig.4.3.b).

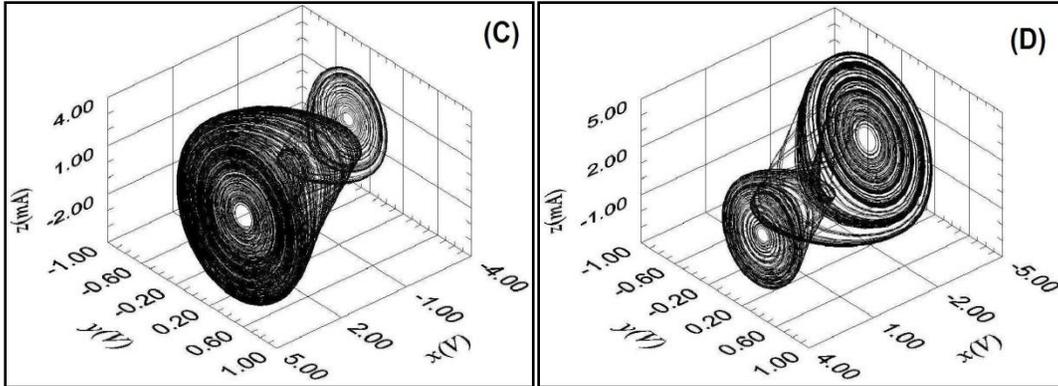


Figura 4.3.c e Figura 4.3.d: Atrator 3D (x y z) para as medidas experimentais:
 $R = 1676,00 \Omega$ e $V_{DC} = -0,1385$ V (fig.4.3.c) e $+0,0385$ V (fig.4.3.d).

- Caos = Resistência $R = 1676,00 \Omega$, tensão V_{DC} aplicada $-0,1385$ V, (fig.4.3.a).
- Caos = Resistência $R = 1676,00 \Omega$, tensão V_{DC} aplicada $+0,0385$ V, (fig.4.3.b).

O atrator para $V_{DC} = +0,0385$ V (figura 4.3.d) apresenta comportamento caótico do tipo Duplo-Rolo tendo o rolo da direita mais visitado que o rolo da esquerda. Já na figura 4.3.c para $V_{DC} = -0,1385$ V, temos também um atrator caótico Duplo-Rolo, porém agora com o rolos da esquerda mais visitado do que o da direita, isto ocorre devido ao deslocamento na corrente do circuito quando é adicionada uma fonte DC. Quando a tensão V_{DC} aplicada no sistema é suficientemente alta podemos até observar o desaparecimento de um dos rolos como nas figuras 4.9.a e 4.9.b.

Para as figuras 4.4 à 4.10 não apresentaremos mais as respectivas séries temporais. Apresentaremos a seguir para o parâmetro R constante em $1620,00 \Omega$, uma rota de bifurcação para o caos onde mostrarmos apenas os atratores de cada uma das medidas $(R, V_{DC}) = (1620,00, V_{DC})$.

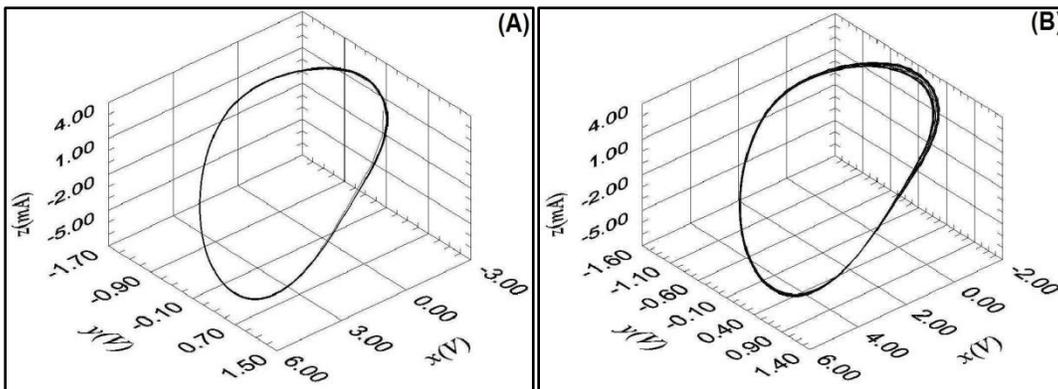


Figura 4.4: Atrator 3D (x y z) para as medidas experimentais:
 $R = 1620,00 \Omega$ e $V_{DC} = -0,4990$ V (fig.4.4.a) e $-0,4700$ V (fig.4.4.b).

Para as tensões V_{DC} entre $-0,7500$ V e $-0,4700$ V apenas observamos ciclos periódicos de período-1, na figura 4.4 apresentamos a medida $V_{DC} = -0,4990$ V que apresentou o menor nível de ruído nessa faixa de tensões. À medida que a tensão é aumentada ocorreu uma bifurcação de período-1 para período-2 em $V_{DC} = -0,4700$ V, fig. 4.4.b. Em seguida uma bifurcação de período-2 para período-3 para $V_{DC} = -0,4580$ V, fig. 4.5.a.

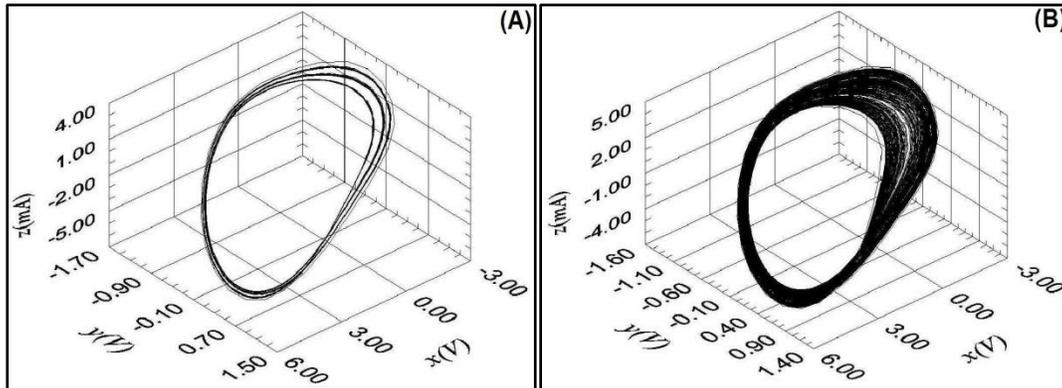


Figura 4.5: Atrator 3D (x y z) para as medidas experimentais:
 $R = 1620,00 \Omega$ e $V_{DC} = -0,4580$ V (fig.4.5.a) e $-0,4080$ V (fig.4.5.b).

Em seguida podemos observar que mesmo para tensões altas, existem atratores caóticos do tipo Rössler, como para $V_{DC} = -0,4080$ V, fig. 4.5.b, e conforme aumentamos a tensão aplicada podemos observar alguns atratores de ciclos ímpares imersos na região caótica como o atrator de período-3 para $V_{DC} = -0,3880$ V, fig. 4.6.a.

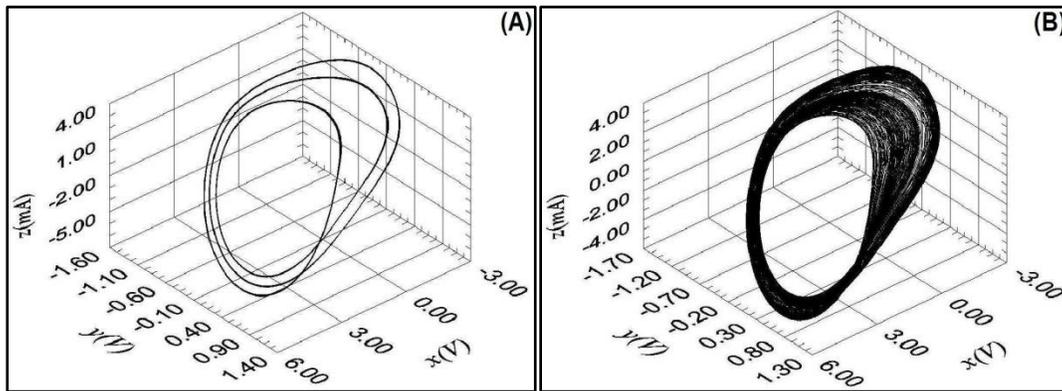


Figura 4.6: Atrator 3D (x y z) para as medidas experimentais:
 $R = 1620,00 \Omega$ e $V_{DC} = -0,3880$ V (fig.4.6.a) e $-0,3720$ V (fig.4.6.b).

Seguindo com a variação da tensão V_{DC} , observamos novamente um atrator caótico para $V_{DC} = -0,3720$ V, fig. 4.6.b. Em seguida ocorreu uma bifurcação por redução de periodicidade de período-4, para $V_{DC} = -0,3490$ V, fig.4.7.a, para período-2 para $V_{DC} = -0,3410$ V, fig. 4.7.b. Ou seja, houve nessa região uma inversão no padrão geral das bifurcações, passando de adição de período alternada por regiões caóticas para redução de período de dois, com o aumento do parâmetro de controle V_{DC} .

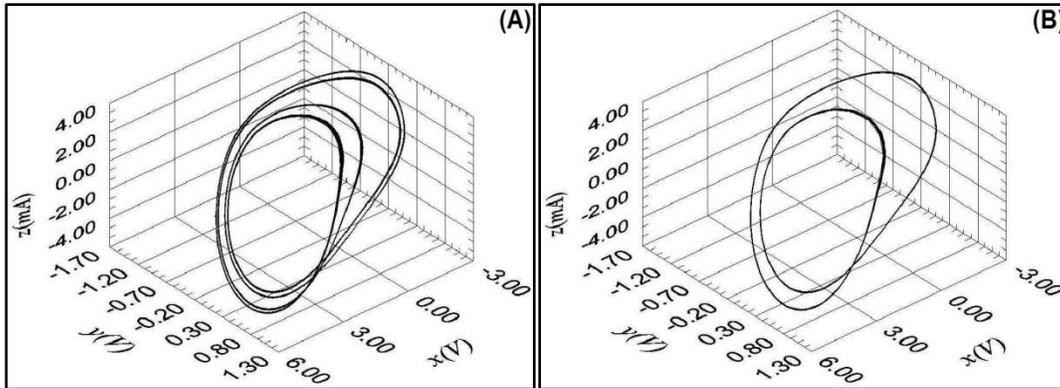


Figura 4.7: Atrator 3D (x y z) para as medidas experimentais:
 $R = 1620,00 \Omega$ e $V_{DC} = -0,3490 \text{ V}$ (fig.4.7.a) e $-0,3410 \text{ V}$ (fig.4.7.b).

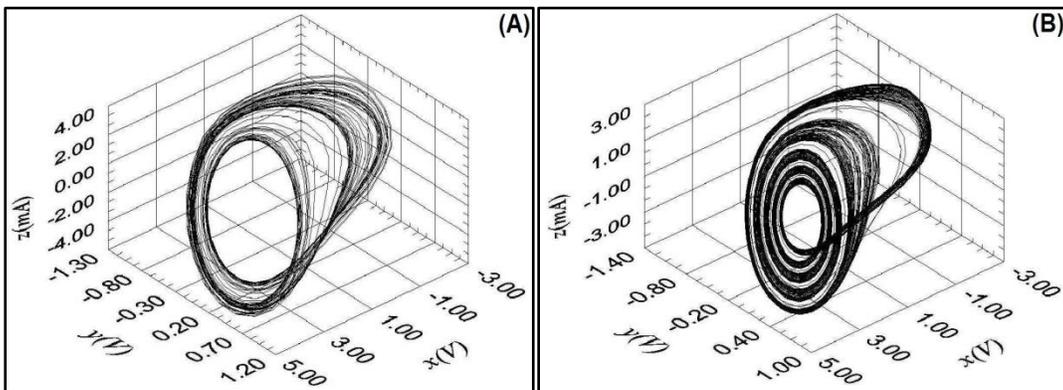


Figura 4.8: Atrator 3D (x y z) para as medidas experimentais:
 $R = 1620,00 \Omega$ e $V_{DC} = -0,3020 \text{ V}$ (fig.4.8.a) e $-0,2120 \text{ V}$ (fig.4.8.b).

Para $V_{DC} = -0,3020 \text{ V}$, fig. 4.8.a, podemos observar uma intermitência de um atrator periódico para um caótico, e aumentando-se V_{DC} o sistema apresenta-se no regime caótico. Novamente podemos observar outros atratores periódicos imersos na região caótica, de período-3 e período-4, porém esses atratores estão em janelas muito pequenas de tensão, pois conforme variamos a tensão V_{DC} em passos de 0,5 mV, os observamos entre duas medidas caóticas consecutivas, ou seja, essas bifurcações poderiam ter sido obtidas com mais detalhes caso tivéssemos um passo menor na fonte de tensão (menor do que o atual 0,5 mV). Períodos maiores foram observados, por exemplo, o atrator periódico de período-9 em $V_{DC} = -0,2120 \text{ V}$, fig. 4.8.b, imerso na região caótica.

Para $V_{DC} = -0,1880 \text{ V}$, fig. 4.9.a, obtivemos um atrator caótico em um formato diferente dos obtidos anteriormente e para $V_{DC} = -0,1670 \text{ V}$, fig. 4.9.b podemos observar um dobramento no ramo que sai do centro do atrator caótico. Aumentando-se a tensão observamos o aparecimento de um atrator caótico de Duplo-Rolo para $V_{DC} = -0,1660 \text{ V}$, fig. 4.10.a, que manterá o mesmo formato até tensões próximas de 0,0000 V, apenas alterando a proporção entre os rolos.

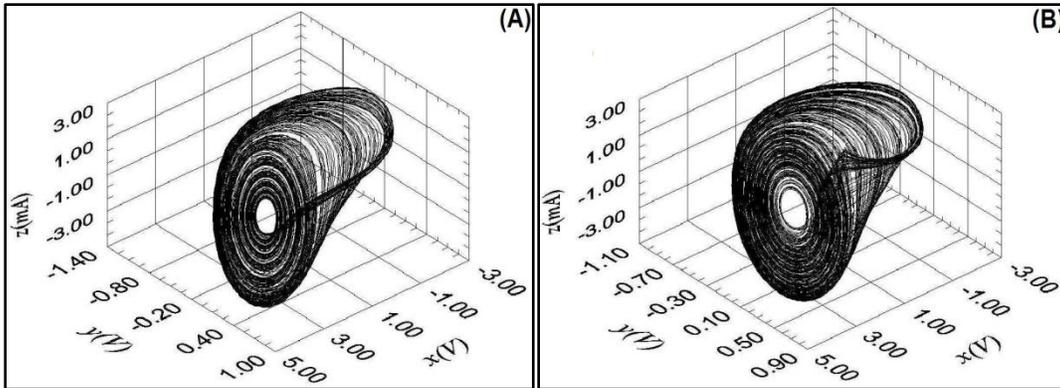


Figura 4.9: Atrator 3D (x y z) para as medidas experimentais:
 $R = 1620,00 \Omega$ e $V_{DC} = -0,1880$ V (fig.4.9.a) e $-0,1670$ V (fig.4.9.b).

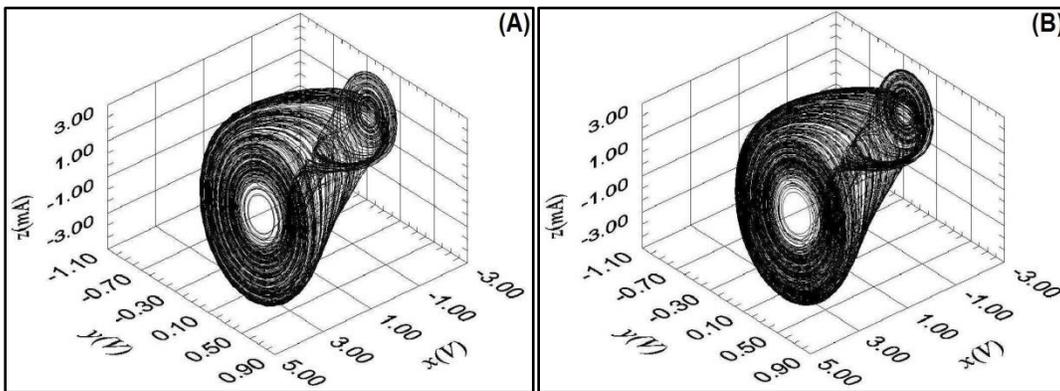


Figura 4.10: Atrator 3D (x y z) para as medidas experimentais:
 $R = 1620,00 \Omega$ e $V_{DC} = -0,1660$ V (fig.4.10.a) e $-0,1650$ V (fig.4.10.b).

O passo de 0,5 mV na fonte de tensão *Keithley* 230 foi suficiente para observarmos: diversos processos de bifurcações, o aparecimento de atratores periódicos dentro de regiões caóticas, atratores periódicos de ciclos elevados e até transição de um atrator Duplo-Rolo para um atrator do tipo *Rössler*. Entretanto outras janelas de bifurcações ainda mais estreitas não puderam ser observadas devido o tamanho do passo utilizado. O circuito de Chua apresentou-se muito estável e muito sensível à variação da tensão V_{DC} aplicada, pois o nível de ruído presente esteve sempre muito menor que o passo utilizado, por isso foi possível obtermos tantos resultados. Acreditamos que em nenhum outro trabalho em caos experimental até o momento foram apresentados tantos resultados e em tão ricos detalhes.

Dos atratores mostrados nessa seção e em todos os outros obtidos, é possível notarmos que as séries temporais apresentam uma ótima relação sinal/ruído, já que temos atratores muito bem definidos no espaço de estados, sobretudo porque foi possível observarmos até alguns de periodicidade elevada, fig. 4.8.b. É importante ressaltar que nas figuras mostradas nessa seção não foi necessário nenhum método de redução de ruídos⁽³⁾ para apresentarmos os resultados claramente.

4.3) Diagramas de Bifurcação Experimentais

Como discutido anteriormente foram obtidas séries temporais de oscilações do circuito de Chua com uma resolução de 0,5 mV no parâmetro V_{DC} e uma resolução de 1,00 Ω no resistor R, o ajuste de R foi realizado manualmente nos *trimpots* R_a e R_b até obtermos um valor de R com uma precisão de 0,01 Ω . No momento não pudemos obter uma resolução maior no parâmetro R devido a esse ajuste de R ser manual.

No estudo de sistemas dinâmicos utilizamos os diagramas de bifurcação, pois esses apresentam informações muito úteis para identificarmos qual a influência de um parâmetro de controle na resposta do sistema. No nosso sistema temos que o parâmetro V_{DC} apresenta uma resolução muito maior comparada com a resolução da resistência R, logo iremos mostrar os diagramas de bifurcação tendo a resistência R fixa e o parâmetro de controle passa a ser a tensão aplicada V_{DC} .

Existem diversas formas de traçarmos os diagramas de bifurcação, podemos utilizar as mesmas condições iniciais, para cada valor de V_{DC} de um mesmo R, e depois traçar a curva de uma variável do sistema em termos do parâmetro de controle, ou podemos utilizar o valor das variáveis de estado do último valor x_n obtido para um valor de V_{DC} e acrescentar um passo de 0,5 mV em V_{DC} de forma que x_n seja a condição inicial do próximo valor x_{n+1} do parâmetro V_{DC} no circuito.

No nosso sistema temos que as séries temporais são realizadas no tempo contínuo, logo para obtermos os respectivos diagramas de bifurcação é necessário fazermos a seção de Poincaré de cada uma das séries. Um método simples, porém eficiente, de obtermos a seção de Poincaré de uma série temporal é detectarmos os picos de máximos ou de mínimos dessa série e então salvar outra série contendo apenas esses valores de extremo, como discutido anteriormente na seção 1.3.

Podemos construir o diagrama de bifurcação para cada uma das seqüências de medida com R fixo ($R_{\text{constante}}, V_{DC}$). Em cada seqüência temos o valor do resistor R fixo entre 1600,00 Ω e 1720,00 Ω e temos uma série temporal para cada valor de V_{DC} entre -0,7500 V e +0,7500 V ao passo de 0,5 mV, obtendo assim um total de 3001 medidas por seqüência.

Para todas as medidas obtivemos a seção de Poincaré dos máximos da variável x e como as equações do circuito de Chua (2.10.a-c) são acopladas, $\dot{x} = \dot{x}(x, y, z)$, as informações contidas em x serão as mesmas contidas em y e z . Assim fomos capazes de obter num gráfico a seção de Poincaré de cada medida (R, V_{DC}) contra o parâmetro de controle V_{DC} , formando assim os diagramas de bifurcação.

Para valores de V_{DC} em que as séries temporais são periódicas teremos como seção de Poincaré apenas uma quantidade de pontos concentrados em uma pequena região, dependendo da periodicidade da série. Para uma seqüência de medidas de séries temporais com a mesma periodicidade P veremos P linhas nas direções horizontais do diagrama de bifurcação.

Para uma série de medidas de periodicidade período-1 apenas veremos uma única linha, por exemplo, no diagrama da figura 4.11, $R = 1620,00 \Omega$ e V_{DC} entre $-0,7500 \text{ V}$ e $-0,5500 \text{ V}$. Numa de período-2 teremos duas linhas e assim por diante, já que sendo baixa a quantidade de ruído presente o valor dos máximos correspondentes varia lentamente entre duas medidas próximas ao variarmos um dos parâmetros. No caso de uma medida caótica temos que a seção de Poincaré será composta por regiões de pontos verticalmente preenchidas e para várias medidas caóticas em seqüência teremos uma região preenchida no diagrama de bifurcação, por exemplo, no diagrama da figura 4.11, $R = 1620,00 \Omega$ e V_{DC} entre $-0,1500 \text{ V}$ e $+0,1000 \text{ V}$.

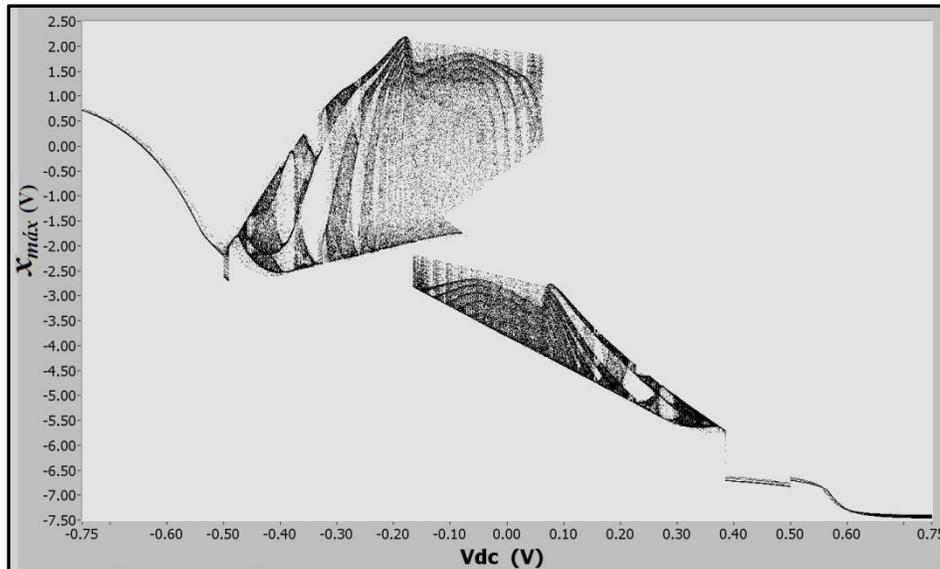


Figura 4.11: Diagrama de bifurcação $R = 1620,00 \Omega$, V_{DC} entre $-0,7500 \text{ V}$ e $+0,7500 \text{ V}$, passo $0,5 \text{ mV}$.

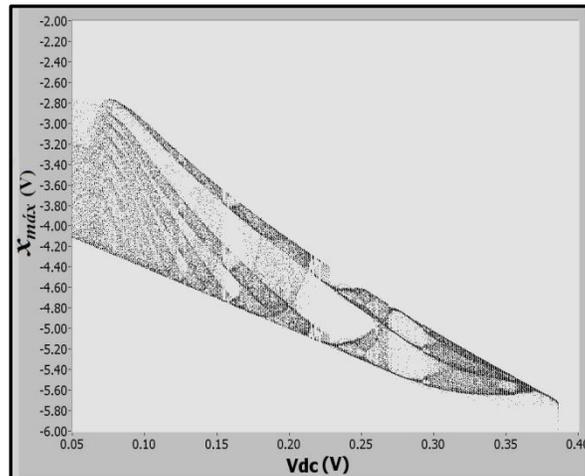


Figura 4.12: Diagrama de bifurcação $R = 1620,00 \Omega$, V_{DC} entre $+0,0500 \text{ V}$ e $+0,4000 \text{ V}$. Amplificação da região do diagrama de bifurcação para V_{DC} positivo.

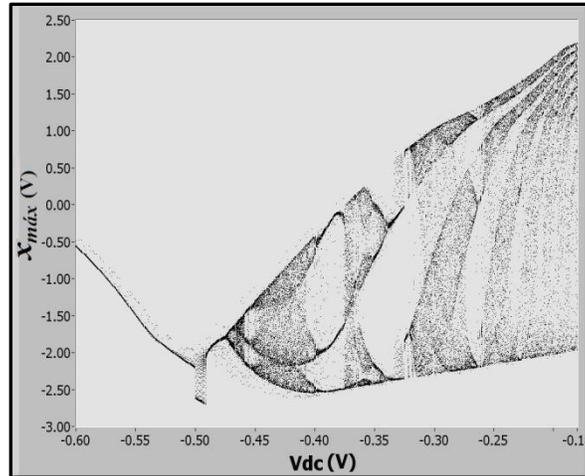


Figura 4.13: Diagrama de bifurcação $R = 1620,00 \Omega$, V_{DC} entre $-0,6000 \text{ V}$ e $-0,1800 \text{ V}$. Amplificação da região do diagrama de bifurcação para V_{DC} negativo.

Na seção 4.2, figuras 4.4 até 4.10, apresentamos uma seqüência de bifurcações dos atratores experimentais, ao variarmos a tensão V_{DC} aplicada, mantendo a resistência fixa em $R = 1620,00 \Omega$. As bifurcações dos atratores foram apresentadas apenas para alguns valores de V_{DC} . A seqüência de bifurcações obtidas anteriormente foi de: atratores de período-1, atratores de período-2, de período-3, caóticos, de período-3, caóticos, de período-4, de período-2, caóticos do tipo *Rössler* para caóticos do tipo Duplo-Rolo.

Na figura 4.11 apresentamos o diagrama de bifurcação completo, variando a tensão V_{DC} de $-0,7500 \text{ V}$ até $+0,7500 \text{ V}$ ao passo de $0,5 \text{ mV}$ para a resistência fixa $R = 1620,00 \Omega$. Podemos observar que esse apresenta mais tipos de bifurcações do que as apresentadas na seção 4.2. Na seção 4.2 foram utilizadas apenas 14 medidas experimentais para exemplificarmos as bifurcações dos atratores experimentais, enquanto no diagrama de bifurcação completo foram utilizadas as 3.001 medidas experimentais do ciclo de medidas ($1620,00 \Omega, V_{DC}$).

Nas figuras 4.12 e 4.13 apresentamos uma amplificação do diagrama de bifurcação da fig. 4.11, para tensões V_{DC} positiva e negativa, respectivamente. As amplificações foram feitas apenas para ressaltar os detalhes das regiões contidas no diagrama completo. Podemos observar que o sistema responde diferente para valores iguais de sinais contrários do parâmetro V_{DC} , mostrando que o circuito de Chua com a fonte DC não é simétrico em relação à origem $V_{DC} = 0,0000 \text{ V}$. Os dois lados apresentam uma seqüência de bifurcações similar ao variarmos V_{DC} nos dois sentidos.

Quando o parâmetro de controle V_{DC} tem valor em módulo próximo a $0,0000 \text{ V}$, o sistema apresenta-se no comportamento caótico, isso porque ajustamos os outros parâmetros de controle do circuito de Chua, R e r_L de forma que para essa região de interesse, R entre $1600,00 \Omega$ e $1720,00 \Omega$, temos caos no circuito de Chua para V_{DC} nulo.

Quando aumentamos em módulo o parâmetro de controle V_{DC} nos dois sentidos (com passo positivo ou negativo) temos que o sistema passa então de periodicidades altas para baixas, diminuindo a periodicidade da série temporal conforme aumentamos o parâmetro de controle, podemos ver também que para tensões em módulo acima de 0,5000 V o sistema apresenta apenas séries temporais com periodicidade período-1 para todos os valores de resistência R.

Para exemplificar as diferenças básicas existentes entre os diagramas de bifurcação para valores próximos a $R = 1600,00 \Omega$ e os outros valores, próximos a $1720,00 \Omega$, iremos apresentar seis diagramas de bifurcação, sendo eles: $1600,00 \Omega$, $1640,00 \Omega$, $1668,00 \Omega$, $1680,00 \Omega$, $1700,00 \Omega$ e $1720,00 \Omega$. Esses representam as características gerais de todos os outros diagramas de bifurcação dessa faixa de valores de resistência R.

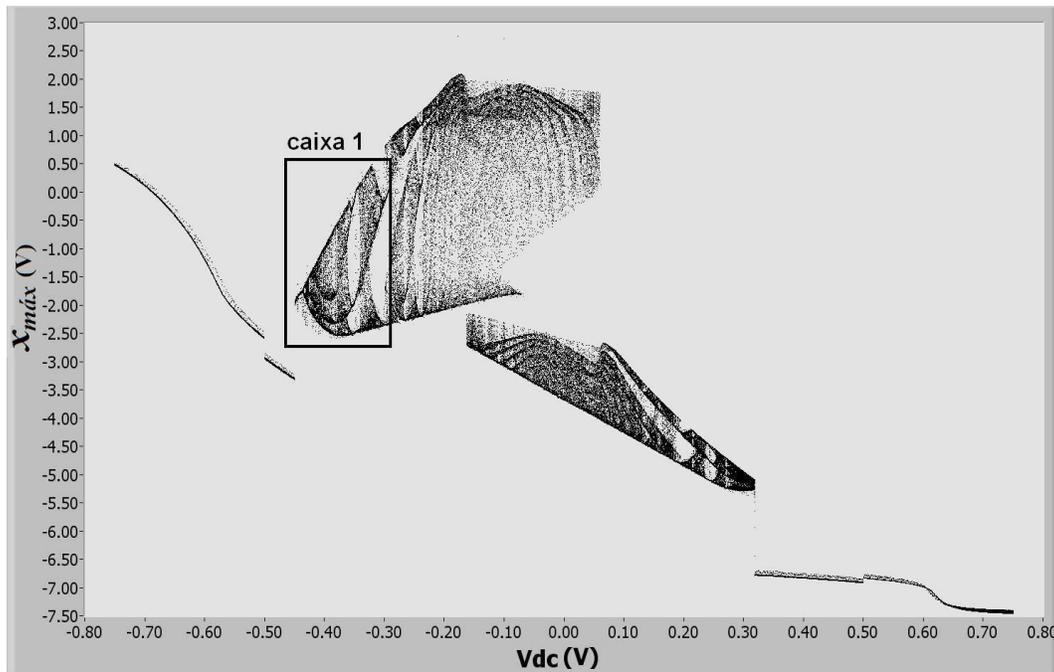


Figura 4.14: Diagrama de bifurcação $R = 1600,00 \Omega$, V_{DC} entre -0,7500 V e +0,7500 V.

Para o diagrama de bifurcação da figura 4.14, $R = 1600,00 \Omega$, podemos observar que para valores de tensão aplicada V_{DC} , maiores do que +0,3000 V e menores que -0,5000 V, temos apenas séries temporais de período-1. Para valores entre -0,4500 V e -0,3000 V (caixa 1) temos regiões que alternam entre caóticas e periódicas, e que apresentam-se limitadas em um intervalo dos valores dos máximos da variável x , ou seja, os atratores caóticos estão limitados no espaço de estados.

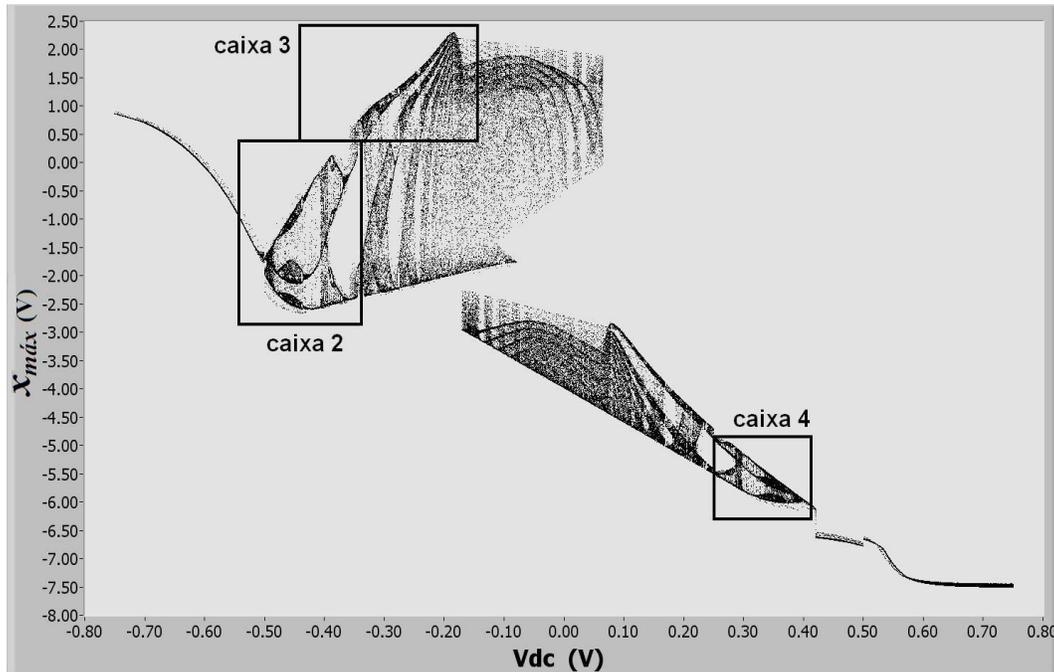


Figura 4.15: Diagrama de bifurcação $R = 1640,00 \Omega$, V_{DC} entre $-0,7500 \text{ V}$ e $+0,7500 \text{ V}$.

Ainda na figura 4.14, para a faixa de valores de tensão V_{DC} entre $-0,4500 \text{ V}$ e $-0,3000 \text{ V}$ (caixa1) é possível observarmos também as regiões caóticas no esqueleto do diagrama de bifurcação com uma boa resolução, porém aumentando-se o valor do parâmetro R observamos que essas regiões caóticas desaparecem formando outras duas separadas, como no diagrama $R = 1640,00 \Omega$ da figura 4.15 (caixa2). É possível observarmos na figura 4.15 que as medidas com os valores de V_{DC} negativo apresentam uma maior riqueza de detalhes do que as de valores positivos (caixa 2 em relação a caixa 4). Essa característica é comum a todos os outros diagramas de bifurcação.

Para o diagrama da figura 4.15, $R = 1640,00 \Omega$ podemos observar uma diferença significativa no formato da região de V_{DC} entre $-0,3000 \text{ V}$ e $-0,1500 \text{ V}$ (caixa 3). Enquanto na figura 4.14 tínhamos que as regiões caóticas estavam aglomeradas, agora temos uma melhor resolução nessas, além disso, podemos ver que essas regiões se unem para formar uma caótica mais extensa. Próximo a essa região extensa acreditamos existir atratores de ciclos muito altos devido às características apresentadas no esqueleto do diagrama de bifurcação. Os dois lados do diagrama de bifurcação da fig. 4.15 (caixas 2 e 4) apresentam características similares tais como regiões não agrupadas e boa resolução nas regiões caóticas, porém na região (caixa 2) essas regiões apresentam-se ainda mais detalhadas, como dito anteriormente.

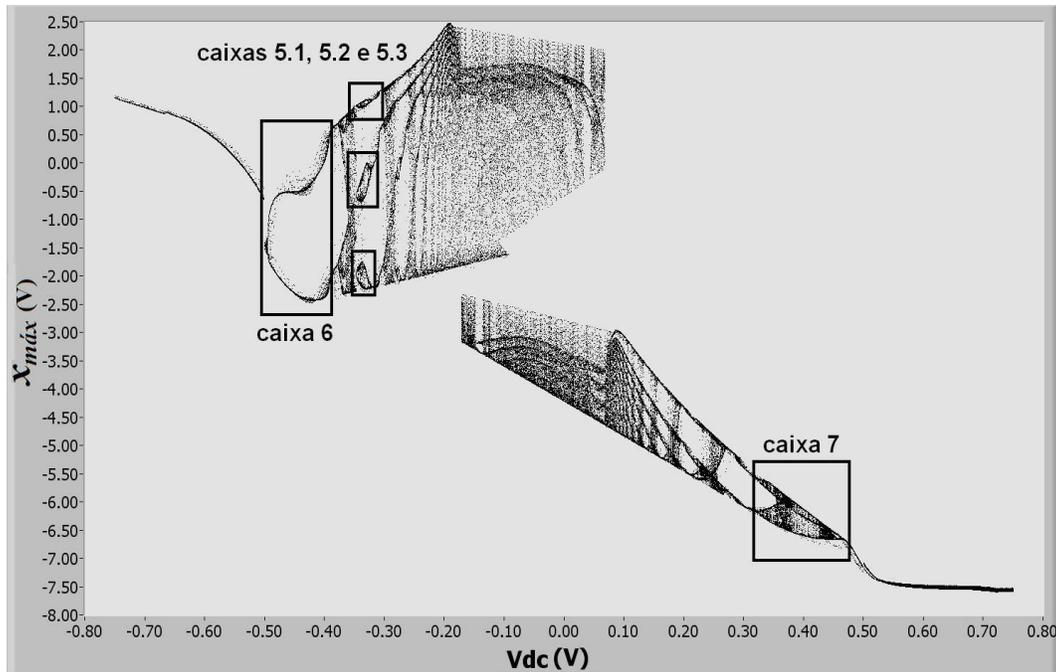


Figura 4.16: Diagrama de bifurcação $R = 1668,00 \Omega$, V_{DC} entre $-0,7500 \text{ V}$ e $+0,7500 \text{ V}$.

Agora para a resistência $R = 1668,00 \Omega$, figura 4.16, podemos ver que as regiões caóticas presentes nas caixas 1 e 2 das figuras 4.14 e 4.15 não aparecem mais, porém houve o alargamento de outras três regiões (caixas 5.1, 5.2 e 5.3 da figura 4.16) ao aumentarmos a resistência de $R = 1640,00 \Omega$ para $R = 1668,00 \Omega$. Além disso, podemos observar que as caixas 6 e 7 do diagrama de bifurcação agora não estão mais similares, podemos ver no lado direito uma sobreposição das regiões (caixa 7) enquanto no lado esquerdo apenas temos uma região bem definida de período-2 (caixa 6).

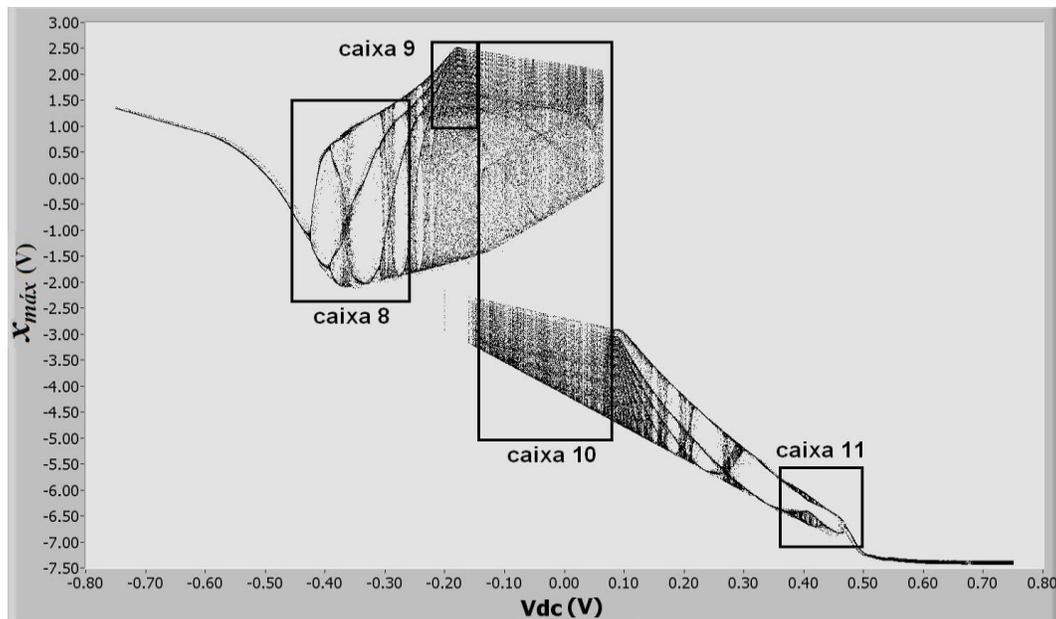


Figura 4.17: Diagrama de bifurcação $R = 1680,00 \Omega$, V_{DC} entre $-0,7500 \text{ V}$ e $+0,7500 \text{ V}$.

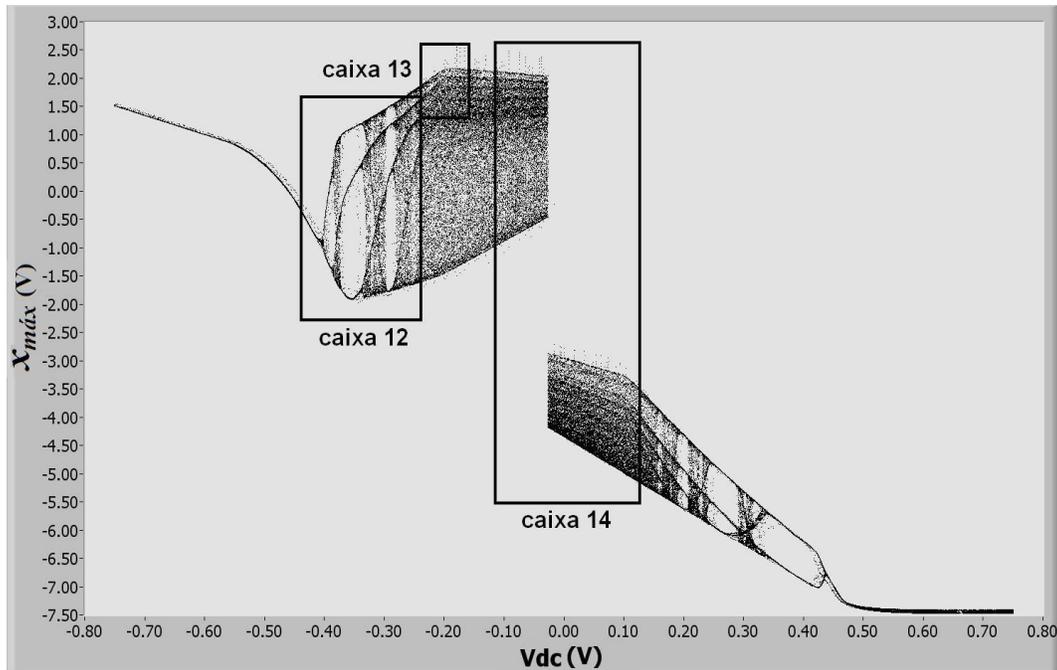


Figura 4.18: Diagrama de bifurcação $R = 1700,00 \Omega$, V_{DC} entre $-0,7500 \text{ V}$ e $+0,7500 \text{ V}$.

Aumentando-se o valor da resistência R de $1680,00 \Omega$ para $1700,00 \Omega$ temos agora uma mudança brusca na forma da região caótica próxima a $0,0000 \text{ V}$ (caixas 10 e 14), anteriormente podíamos observar que os diagramas de bifurcação apresentavam duas regiões preenchidas, caixa 10 (superior, para valores de S_n acima de $-2,00 \text{ V}$, e inferior para valores abaixo). As regiões, superior e inferior, aparecem devido à presença de atratores caóticos do tipo Duplo-Rolo, sendo que um dos rolos representaria a região superior e o outro rolo representaria a região inferior e essas estão coexistindo, para uma faixa de valores próxima a $V_{DC} = 0,0000 \text{ V}$, mas mudando para cada diagrama de bifurcação de valor de resistência R diferente.

A confirmação de que essa região (caixa 10) representaria atratores caóticos do tipo Duplo-Rolo somente pode ser feita através da análise dos expoentes de Lyapunov das séries temporais e do formato dos atratores correspondentes. Para o diagrama $R = 1700,00 \Omega$, figura 4.18, não temos mais essa superposição de regiões (caixa 14), quando uma região preenchida termina a outra começa exatamente abaixo e em seguida, mostrando que não existem mais atratores caóticos do tipo Duplo-Rolo a partir de $R = 1700,00 \Omega$.

Na figura 4.19 apresentamos o diagrama de bifurcação para $R = 1720,00 \Omega$. Uma característica que difere esse diagrama dos outros apresentados é que agora não conseguimos mais observar os ramos se unindo para formar a região caótica extensa (caixas 9 e 13 diferentes da 15), além disso, a região caótica apresenta-se alargada em relação à dos outros diagramas e conseqüentemente a região que apresenta os atratores caóticos fica mais alongada, isso ficará mais evidente na figura 4.19 (caixa 16).

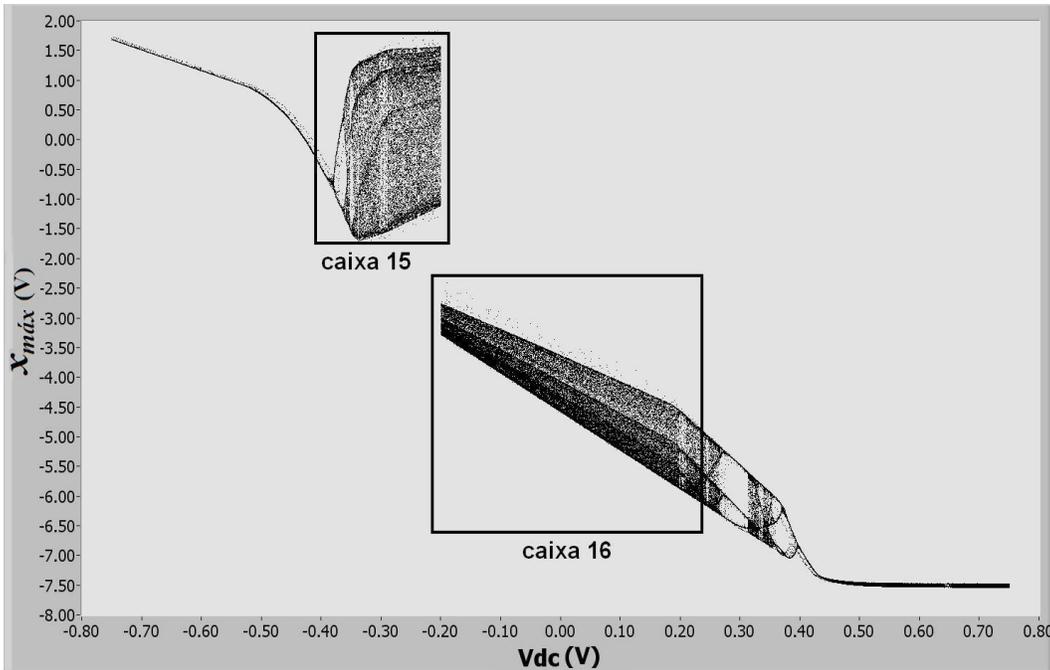


Figura 4.19: Diagrama de bifurcação $R = 1720,00 \Omega$, V_{DC} entre $-0,7500 \text{ V}$ e $+0,7500 \text{ V}$.

Em resumo as principais mudanças que ocorrem ao variarmos o parâmetro R são:

- **De $R = 1600,00 \Omega$ para $1640,00 \Omega$** = mudanças nos ramos da região caótica, caixa 1 da fig. 4.14, em relação a região caótica, caixa 2 da fig. 4.15. Na caixa 1 os ramos estão superpostos enquanto na 2 eles não estão mais separados.
- **De $R = 1640,00 \Omega$ para $1668,00 \Omega$** = Desaparecimento dos ramos da região caótica (caixa 2 da fig. 4.15) e aparecimento de uma região extensa periódica de período-2 (caixa 6 da fig. 4.16), para a mesma faixa de tensões V_{DC} . Alargamento de três regiões periódicas definindo uma região de atratores período-6, para V_{DC} próximo a $-0,3500 \text{ V}$ (caixas 5.1, 5.2 e 5.3, da fig. 4.16). Fim das similaridades entre as regiões de tensões V_{DC} de sinais contrários, para as caixas 6 e 7 da fig. 4.16, antes presentes nas caixas 2 e 4 da fig. 4.15.
- **De $R = 1668,00 \Omega$ para $1680,00 \Omega$** = Mudanças na região periódica, caixa 6 da fig. 4.16 em relação a caixa 8, da fig. 4.17. Mudanças nas regiões caóticas (caixas 7 da fig.4.16 e 11 da fig. 4.17).
- **De $R = 1680,00 \Omega$ para $1700,00 \Omega$** = Desaparecimento de atratores caóticos do tipo Duplo-Rolo (caixa 10 da fig. 4.17) no diagrama da figura 4.18 (caixa 14).
- **De $R = 1700,00 \Omega$ para $1720,00 \Omega$** = Compressão da região caótica, caixa 12 da fig. 4.18, formando a região caixa 15 da fig. 4.19. Alongamento da região caótica próxima a $V_{DC} 0,0000 \text{ V}$, formando a região caixa 16 da fig. 4.19.

Os diagramas de bifurcação experimentais foram obtidos utilizando-se um software desenvolvido por nós, em *Labview*, chamado (“CHUA_BIF_AUTO.vi”), que automaticamente lê todas as medidas presentes em cada uma das seqüências com R fixo, totalizando 120 seqüências com 3.001 medidas cada. Depois obtemos a seção de Poincaré dos máximos da série temporal da variável x , de cada uma dessas medidas e automaticamente ele constrói o diagrama de bifurcação.

O programa também grava os dados de cada um dos diagramas de bifurcação em um arquivo de dados (.dat), para posteriormente fazermos as figuras desses em qualquer outro programa gráfico. Para as figuras 4.11 a 4.21 utilizamos os dados gerados pelo programa "CHUA_BIF_AUTO" do diagrama de bifurcação e os utilizamos em um programa gráfico desenvolvido por nós “FOTOS_BIF_LEGENDA.vi” que grava a figura JPG do diagrama de bifurcação, após selecionada a região de interesse do diagrama $[R_{\text{máximo}}, R_{\text{mínimo}}]$ e $[V_{\text{máximo}}, V_{\text{mínimo}}]$.

O tempo de processamento gasto em média para a confecção de cada um dos diagramas de bifurcação anteriormente apresentados foi cerca de 30 minutos utilizando-se um computador com processador da Core2-Quad de 2,66MHz por núcleo e 8GB de memória RAM.

Observamos também que os diagramas de bifurcação apresentam uma excelente resolução e pouco ruído, já que fomos capazes de identificar estruturas periódicas de elevada periodicidade. Notamos também que as rotas de bifurcação para o caos são de formatos diferentes dos dois lados, V_{DC} positivo e negativo, isso sugere que o circuito de Chua experimental com os amplificadores operacionais não é simétrico em relação à tensão aplicada, ou seja, dependendo do sinal da tensão aplicada temos diferenças na resposta do sistema basicamente devido à polaridade e a assimetria do *offset* dos amplificadores operacionais. Mais resultados sobre os diagramas de bifurcação serão apresentados na próxima seção, 4.4, “Bifurcações por Adição de Período (*Period-Adding Bifurcation*)”.

4.4) Bifurcações por Adição de Período

A emergência de comportamentos regulares é um dos mais estudados tópicos em sistemas não lineares. Ao variarmos um parâmetro acessível ao sistema podemos observar a sua resposta a essa variação, obtendo comportamento caótico ou periódico. A possibilidade de observarmos uma região estável e periódica imersa em uma região caótica no espaço de parâmetros depende basicamente do seu tamanho, de seu formato e da sua resolução⁽⁴⁾.

Para alguns diagramas de bifurcação observamos janelas periódicas imersas em regiões caóticas, essas janelas complexas são conhecidas na literatura ⁽⁴⁾ e já foram observadas em simulações em uma diversa quantidade de sistemas dinâmicos ⁽⁵⁾. O aparecimento desse tipo de janelas-periódicas implica no aparecimento de um infinito número de outras janelas similares, porém que apareceriam lado a lado ao longo de uma direção preferencial.

O conhecimento sobre esse tipo de janelas periódicas complexas implicaria num melhor entendimento sobre os sistemas caóticos que as apresentam, conseqüentemente aumentando a possibilidade de aplicação desses sistemas caóticos, como por exemplo: osciladores caóticos robustos em comunicação baseada em Caos ⁽⁶⁾ ⁽⁷⁾.

No artigo “*Experimental observation of a complex periodic window*” ⁽⁴⁾, foram definidas algumas características principais dessas janelas periódicas. Sendo que a principal dela é que o tamanho característico ΔP das janelas de periodicidade P satisfaz uma lei de escala de decaimento exponencial com o expoente proporcional à periodicidade P da janela. Ou seja, para obtermos experimentalmente esse tipo de janela complexa com uma periodicidade P elevada, temos que aumentar exponencialmente a resolução dos parâmetros e controle, ou seja, diminuindo o passo do parâmetro variado no diagrama de bifurcação ou no espaço de parâmetros, para que possamos visualizá-las com um tamanho ΔP suficiente.

Nessa subseção iremos apresentar e estudar esse tipo de janela periódica (PWs) em termos dos diagramas de bifurcação experimental do Circuito de Chua com a fonte DC. Iremos apresentar essas janelas periódicas nos diagramas de bifurcação, definir o tamanho ΔP dessas para cada região de periodicidade P e mostrar que essas de fato apresentam um comportamento de decaimento exponencial.

Na figura 4.20 mostramos o diagrama de bifurcação para R fixo em $1677,00 \Omega$ e tensão V_{DC} aplicada entre $-0,7500 V$ e $+0,7500 V$ ao passo de $0,5 mV$. Para visualizarmos melhor as janelas complexas periódicas, no diagrama de bifurcação, ampliamos uma parte da região positiva, para os valores de tensão V_{DC} entre $0,0000V$ até $0,5000V$. Assim teremos uma melhor visualização das estruturas contidas no diagrama de bifurcação.

Na figura 4.21 podemos observar uma rota de bifurcação por adição de período da direita para a esquerda, ou seja, de valores positivos mais elevados de tensão, de $V_{DC} = +0,7500 V$, para valores positivos porém próximos a zero. Inicialmente temos atratores de periodicidade período-1 bifurcando para atratores de período-2 na tensão $V_{DC} = 0,4700 V$, em seguida temos mais uma bifurcação para atratores de periodicidade período-4 na tensão $V_{DC} = 0,4360V$, e dentro dessa região representativa podemos observar a presença de uma região preenchida no espaço que sugere a presença de atratores caóticos, em seguida há uma bifurcação inversa de período-4 para período-2 para a tensão $V_{DC} = 0,3750 V$.

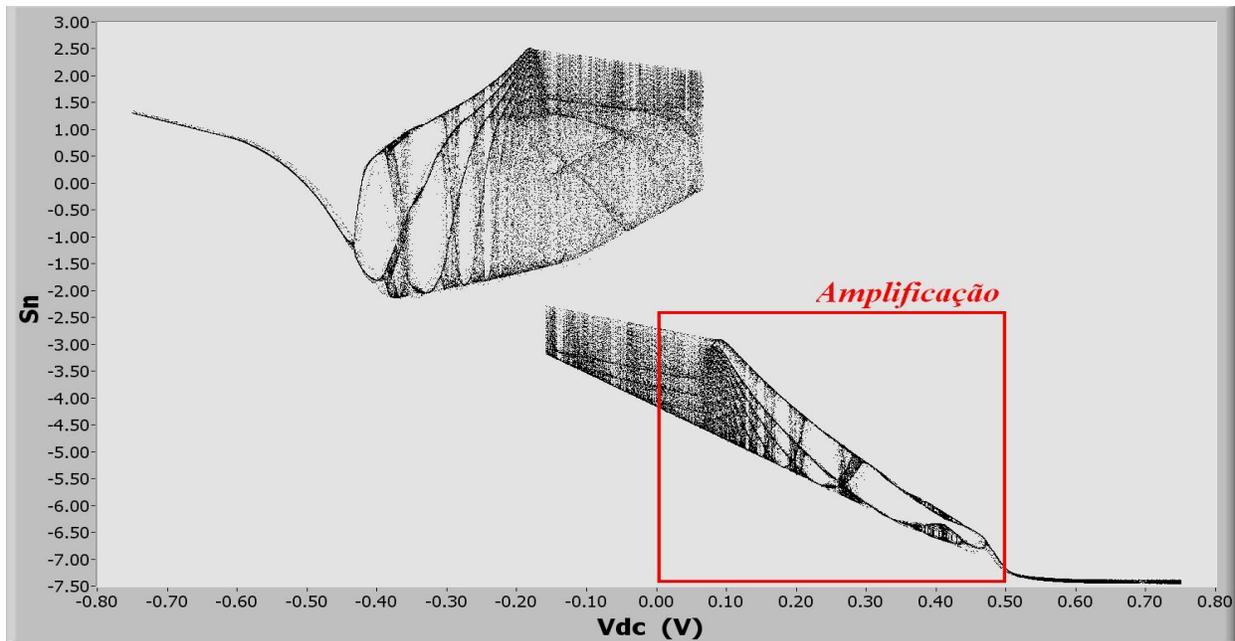


Figura 4.20: Diagrama de Bifurcação Experimental do Circuito de Chua com a fonte DC para $R = 1677,00 \Omega$ e V_{DC} entre $-0,7500 \text{ V}$ e $+0,7500 \text{ V}$, passo de $0,5 \text{ mV}$. Foi selecionada uma região em vermelho na parte de V_{DC} positiva do diagrama de bifurcação para mostrarmos com mais detalhes as regiões de alternância entre caóticas e periódicas.

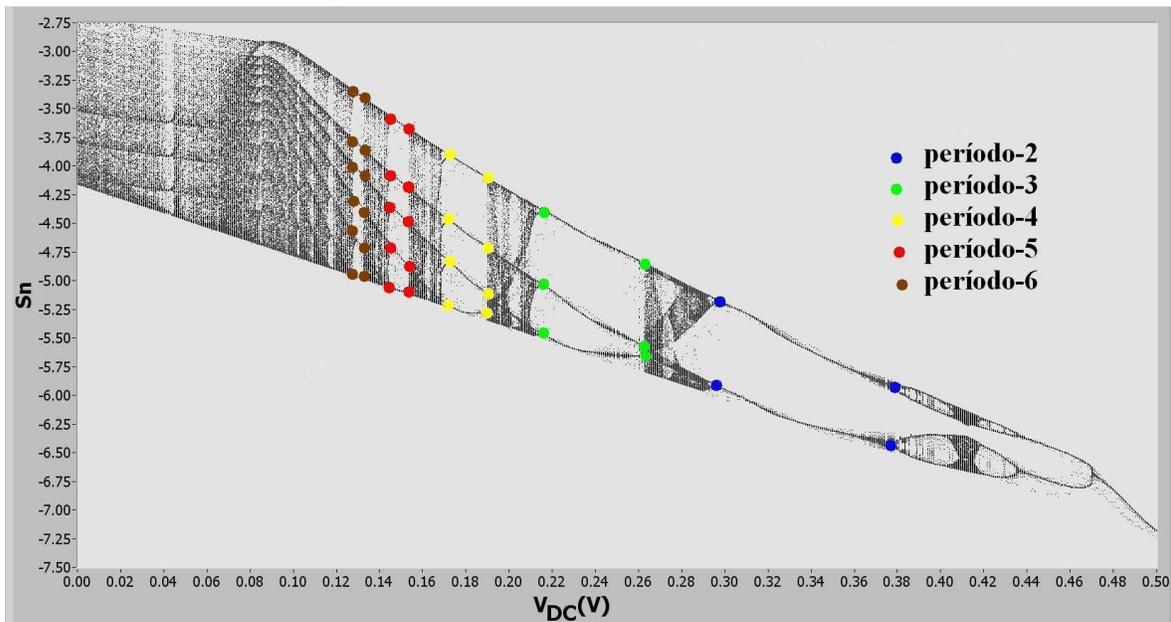


Figura 4.21: Amplificação na parte positiva do Diagrama de Bifurcação da figura 4.20, apresentando as janelas complexas periódicas de período-2 até período-6, cada cor representando uma janela de periodicidade diferente.

A região de periodicidade período-2 continua até o valor de $V_{DC} = 0,2960 \text{ V}$, quando novamente podemos observar uma região caótica entre $0,2965 \text{ V}$ e $0,2615 \text{ V}$, esse comportamento caótico passa então a ser periódico de período-3 na tensão $V_{DC} = 0,2620 \text{ V}$ e persiste até chegarmos a mais uma região caótica agora entre as tensões $0,2140 \text{ V}$ e $0,1900 \text{ V}$.

Em seguida podemos observar que essa região caótica novamente passa a ser periódica de período-4 em $V_{DC} = 0,1905$ V persistindo até o valor $0,1680$ V, passando em seguida por uma região caótica, depois uma periódica de período-5 e assim sucessivamente, período-6, caos, período-7, caos, período-8, caos e período-9, caos ...

A janela de maior periodicidade encontrada no diagrama de bifurcação das figuras 4.20 e 4.21 foi a de período-9, embora encontramos atratores isolados de periodicidade até período-12, para outros diagramas. Pelas características da região caótica dos diagramas de bifurcação, acreditamos que existem outras janelas com periodicidades ainda mais elevadas, para as tensões V_{DC} próximas a zero, porém a detecção dessas janelas não foi possível devido basicamente a dois fatores: o tamanho do passo utilizado na fonte ser grande comparado com o tamanho das janelas de períodos elevados e o nível de ruído ser alto comparado com as variações das amplitudes dos picos principais da série temporal.

Comentamos que os atratores das regiões preenchidas dos diagramas de bifurcação das figuras 4.20 e 4.21 poderiam ser caóticos devido a essa característica de preenchimento. Regiões preenchidas podem ser encontradas em diagramas de bifurcação de séries temporais muito ruidosas, por isso realizamos o cálculo dos expoentes de Lyapunov para as séries temporais dessa região preenchida em fig.4.20 e 4.21. Dos resultados obtidos podemos confirmar que essas são séries temporais caóticas e não ruído, já que obtivemos três expoentes de Lyapunov sendo um deles positivo, um próximo de zero e um negativo. Para séries ruidosas não teríamos essa relação entre os expoentes.

Resumindo obtivemos uma rota de bifurcação por redução de período ao aumentarmos o valor da tensão V_{DC} aplicada de $0,0000$ V para $0,7500$ V seguindo a sequência: (caos) - (valores altos de periodicidade) - (caos) - (período-9) - (caos) - (período-8) - (caos) - (período-7) - (caos) - (período-6) - (caos) - (período-5) - (caos) - (período-4) - (caos) - (período-3) - (caos) - (período-2) - (caos) - (período-1), ou seja, alternando entre caos e ciclos-limite periódicos sempre diminuindo a periodicidade de 1.

O tamanho das janelas periódicas foi obtido através dos dados do diagrama de bifurcação aumentado até sua escala máxima, que é a precisão do parâmetro V_{DC} , sendo assim foi possível determinarmos o tamanho dessas na precisão máxima possível. Segue a tabela 4.1 com os valores do tamanho das janelas ΔP de acordo com a periodicidade P, do diagrama da fig. 4.20:

Tabela 4.1: Tamanho das janelas periódicas ΔP em função da periodicidade P para o diagrama de bifurcação $R = 1677,00 \Omega$, da figura 4.20.

Periodicidade	ΔP	Periodicidade	ΔP
2	0,1100 V	6	0,0050 V
3	0,0475 V	7	0,0030 V
4	0,0215 V	8	0,0015 V
5	0,0105 V	9	0,0010 V

Para que possamos afirmar que essas janelas observadas na figura 4.21 são janelas complexas periódicas, o tamanho ΔP delas deve satisfazer uma lei de decaimento exponencial de acordo com a periodicidade do atrator por⁽⁴⁾:

$$\Delta P = \alpha e^{-\beta P} \quad (\text{eq.4.1})$$

Sendo assim construímos o gráfico que representa a tabela 4.1 e após feita a regressão não-linear, eq. 4.1, obtivemos que o tamanho das janelas de fato satisfaz a equação 4.1 com o expoente $\beta_{\text{experimental}}$ de (0.81 ± 0.01) , fig. 4.23.

Em paralelo a esse resultado experimental, novamente resolvemos as equações diferenciais, equações 2.39.a-c da seção 2.4, obtidas pelas leis de Kirchhoff e utilizando as funções ajustadas da curva I(V) experimental do diodo de Chua, equações da tabela 3.2 seção 3.1, como a corrente que passa pelo indutor, fomos capazes de construir os diagramas de bifurcação simulados, para assim realizarmos em paralelo a análise dos resultados da simulação e os experimentais dessas janelas periódicas complexas.

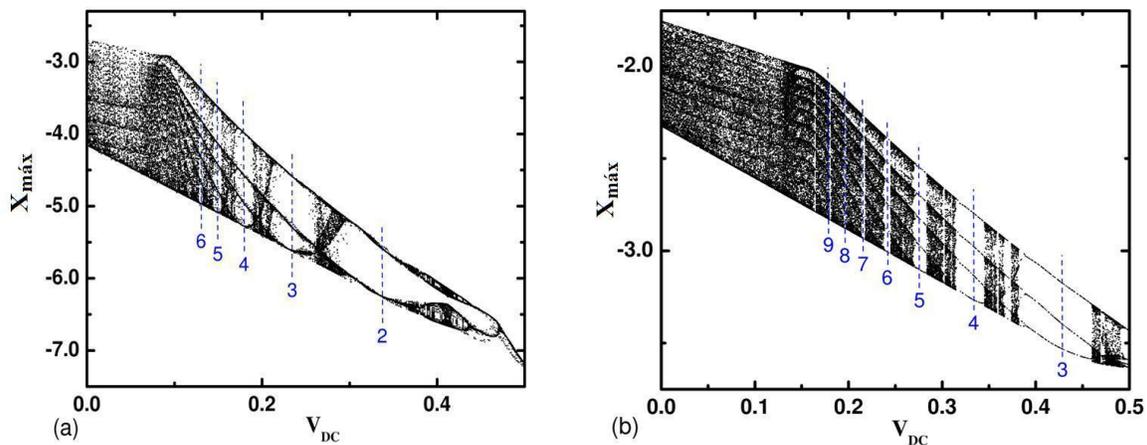


Fig.4.22: (a) Diagrama de Bifurcação obtido a partir das séries temporais experimentais para $R = 1677,00 \Omega$ e V_{DC} entre $0,0000 \text{ V}$ e $+0,5000 \text{ V}$, passo de $0,5 \text{ mV}$. (b) Diagrama de Bifurcação simulado obtido a partir da integração das equações diferenciais do circuito de Chua para $R = 1720,00 \Omega$ e V_{DC} entre $0,0000 \text{ V}$ e $+0,5000 \text{ V}$, passo de $0,5 \text{ mV}$.

Podemos ver nas figuras 4.22.a e 4.22.b que os diagramas de bifurcação experimental $R=1677,00 \Omega$ e o da simulação $R = 1720,00 \Omega$ apresentam uma boa relação entre eles, com características similares nas regiões das janelas complexas e além disso temos um mesmo padrão de acumulação dos ramos na região caótica, próximo a tensão de $0,1000 \text{ V}$.

Nas duas figuras 4.22.a e 4.22.b, é possível notarmos as janelas periódicas e suas respectivas periodicidades, destacadas por uma linha pontilhada vertical. Na figura 4.22.b do diagrama de bifurcação simulado mostramos apenas as janelas de periodicidade até período-9.

Janelas de periodicidades ainda mais elevadas poderiam ser obtidas através de simulações, caso desejássemos, utilizando-se um passo ainda menor no parâmetro V_{DC} , porém não houve a necessidade já que o que queremos é relacionar os diagramas de bifurcação simulado e experimental.

O tamanho das janelas periódicas complexas ΔP presentes no diagrama de bifurcação da simulação, figura 4.22.b também seguiu uma lei de decaimento exponencial, equação 4.1, segundo um expoente ($-\beta P$) como mostrado no gráfico da figura 4.23 a seguir. Sendo o expoente encontrado $\beta_{\text{simulação}} = (0.94 \pm 0.03)$.

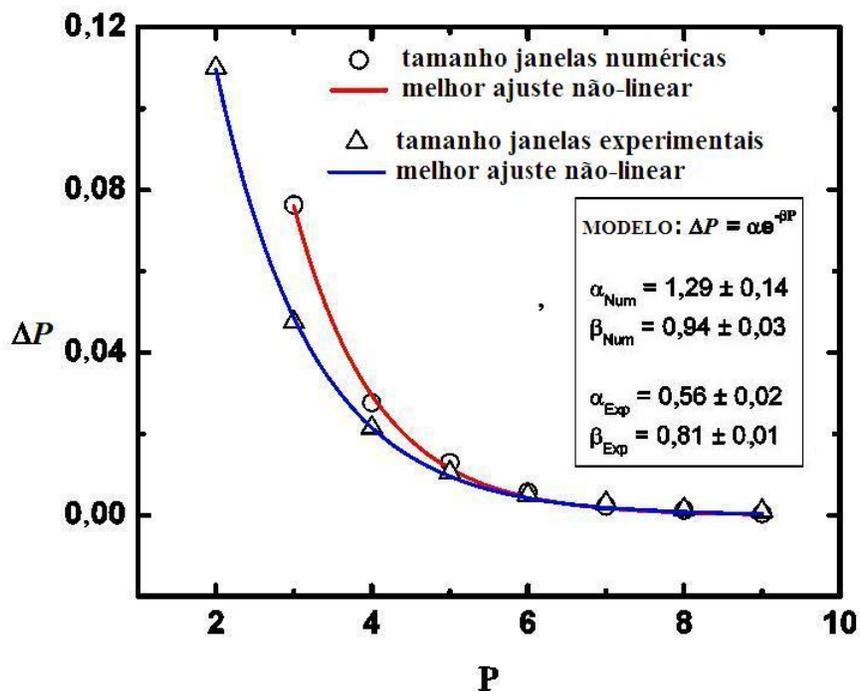


Fig.4.23: Regressão não linear de decaimento exponencial do tamanho das janelas periódicas ΔP em relação à periodicidade, para os diagramas de bifurcação da simulação e o experimental, representados em vermelho e azul, respectivamente.

Podemos observar no gráfico da figura 4.23 da regressão exponencial que os valores para o tamanho das janelas de periodicidade mais elevadas convergiu muito bem para ambos casos, simulado e experimental, então os dados simulados representam bem os dados experimentais. Porém para periodicidades mais baixas os valores divergiram um pouco, devido a presença de ruído nos dados experimentais, diminuindo assim o tamanho das janelas periódicas de baixo período, levando a um valor menor para o expoente $\beta_{\text{experimental}}$ se comparado com o β_{simulado} .

Para uma série temporal S sem ruído temos que o comportamento caótico começa a existir a partir de um certo valor x_0 . Na presença de ruído em S o comportamento caótico começa a existir para valores mais baixos do que o parâmetro x_0 , sendo assim a região caótica aumenta conforme adicionamos ruído a série temporal S .

Esse comportamento de aumento da região periódica ao “adicionarmos” ruído é geral para sistemas dinâmicos como apresentado na seção 5.8 de (8). Como no nosso sistema temos regiões de alternância entre caóticas e periódicas, quando a região caótica aumenta necessariamente a região periódica irá diminuir, isso explicaria o porquê do tamanho das janelas experimentais ser sempre menor do que o tamanho das janelas da simulação.

O modelo de decaimento exponencial para o tamanho das janelas complexas periódicas foi proposto primeiro para mapas iterativos quadráticos ⁽⁹⁾, porém os resultados mostrados na fig. 4.23 confirmam que esse modelo também representa bem o comportamento dessas janelas PWs em sistemas de tempo contínuo, como é o caso do circuito de Chua.

Essa lei de decaimento exponencial ⁽⁴⁾, equação 4.1, implica em sérias limitações experimentais no estudo das janelas periódicas de períodos elevados, já que quanto maior é a periodicidade P dessa janela, exponencialmente menor deve ser a variação do parâmetro e controle do sistema, necessário para detectarmos essas janelas PWs imersas em regiões caóticas, logo é necessário o desenvolvimento de espaços de parâmetros de alta resolução, para que essas estruturas possam ser detectadas e estudadas mais detalhadamente.

4.5) Espaço de Parâmetros Experimental da Periodicidade

Na seção 4.2 apresentamos os atratores experimentais periódicos e caóticos, na 4.3 apresentamos os diagramas de bifurcação para alguns valores do parâmetro R , e na 4.4 mostramos e confirmamos a existência de janelas complexas periódicas PWs imersas em regiões caóticas, apresentando rotas de bifurcação por adição de período. Porém ainda não mostramos como estão distribuídas as regiões periódicas no espaço de parâmetros.

O espaço de parâmetros da periodicidade é apresentado como um mapa bidimensional (R, V_{DC}) onde o valor da periodicidade P da série foi codificado em uma escala de 13 cores, uma cor para cada valor de periodicidade, variando-se de 0 até 12. Devido às restrições experimentais já comentadas não foi possível obtermos periodicidades de valores muito maiores do que 12, veja a lei de decaimento exponencial do tamanho das janelas complexas periódicas, equação 4.1, na seção 4.4 “bifurcações por adição de período”.

No espaço de parâmetros da periodicidade a cor preta foi utilizada para todas as medidas que o programa "detecção da periodicidade" detectou como caótica. Para as séries temporais caóticas não faz sentido analisarmos a sua periodicidade, assim como para as séries temporais periódicas o cálculo do expoente de Lyapunov não traz nenhuma informação relevante, já que independente da sua periodicidade, teremos para as séries periódicas o maior expoente do espectro Lyapunov nulo.

Portanto nessa seção e na próxima seção 4.6 "Espaço de parâmetros do maior expoente de Lyapunov", definimos a cor preta para os resultados que não são classificados pelo espaço de parâmetro em questão.

No caso do espaço de parâmetros da periodicidade, as séries caóticas estão apresentadas em preto, no caso do espaço de parâmetros dos expoentes de Lyapunov, as séries periódicas é que estarão em preto.

Para realizarmos um estudo sobre as regiões periódicas presentes no espaço de parâmetros R por V_{DC} , realizamos para todas as medidas experimentais adquiridas, a detecção da periodicidade do atrator utilizando o programa (Atratores_CHUA_Periodicidade.vi), como apresentado na seção 3.3 "Detecção da Periodicidade", sendo assim para cada medida (R, V_{DC}) associamos um valor da periodicidade P , $(R, V_{DC}) \rightarrow P$, e assim somos capazes de construir um espaço de parâmetros (V_{DC}, R, P) .

O espaço de parâmetros da periodicidade apresentado na figura 4.24 foi obtido para todo o intervalo de medidas, ou seja, a resistência R variando entre $1600,00 \Omega$ e $1720,00 \Omega$ ao passo de $1,00 \Omega$, e a tensão variando entre $-0,7500 V$ e $+0,7500 V$ ao passo de $0,5 mV$. A escala de cores utilizada nesse e nos próximos espaços de parâmetros da periodicidade está representada na tabela 4.2:

Tabela 4.2: Escala de codificação de cores do espaço de parâmetros da periodicidade. Uma cor para cada valor de periodicidade P do atrator.

Periodicidade (P)	Cor	P	Cor
0 = Caos	Preta		
1	Azul	7	Roxa
2	Vermelha	8	Cinza Escura
3	Verde	9	Cinza Clara
4	Amarela	10	Vinho
5	Laranja	11	Verde Oliveira
6	Ciano	12	Ciano Escura

No espaço de parâmetros da figura 4.24 podemos observar que a janela de periodicidade período-1 (azul) é muito extensa e é apenas encontrada para os valores mais altos de tensão V_{DC} aplicada. Na região central do diagrama observamos uma região extensa de atratores caóticos, sendo que dentro dessa região caótica central podemos observar também janelas muito pequenas

de periodicidade, que são apresentadas no gráfico como pequenos "filamentos" verticais coloridos. Esses "filamentos" representam atratores periódicos de periodicidades elevadas isolados no espaço de parâmetro.

Podemos observar também regiões caóticas centradas em $V_{DC} = -0,4170$ V e $R = 1617,00 \Omega$ no lado esquerdo da figura 4.24, e $V_{DC} = +0,3170$ V e $R = 1620,00 \Omega$ no lado direito, regiões quase simétricas em relação à região central. Essas regiões caóticas estão cercadas por uma região periódica extensa de período-3 (verde). Cercando essa região periódica em verde temos uma pequena região de período-5 (laranja) seguida de outra região extensa de período-2 (vermelho).

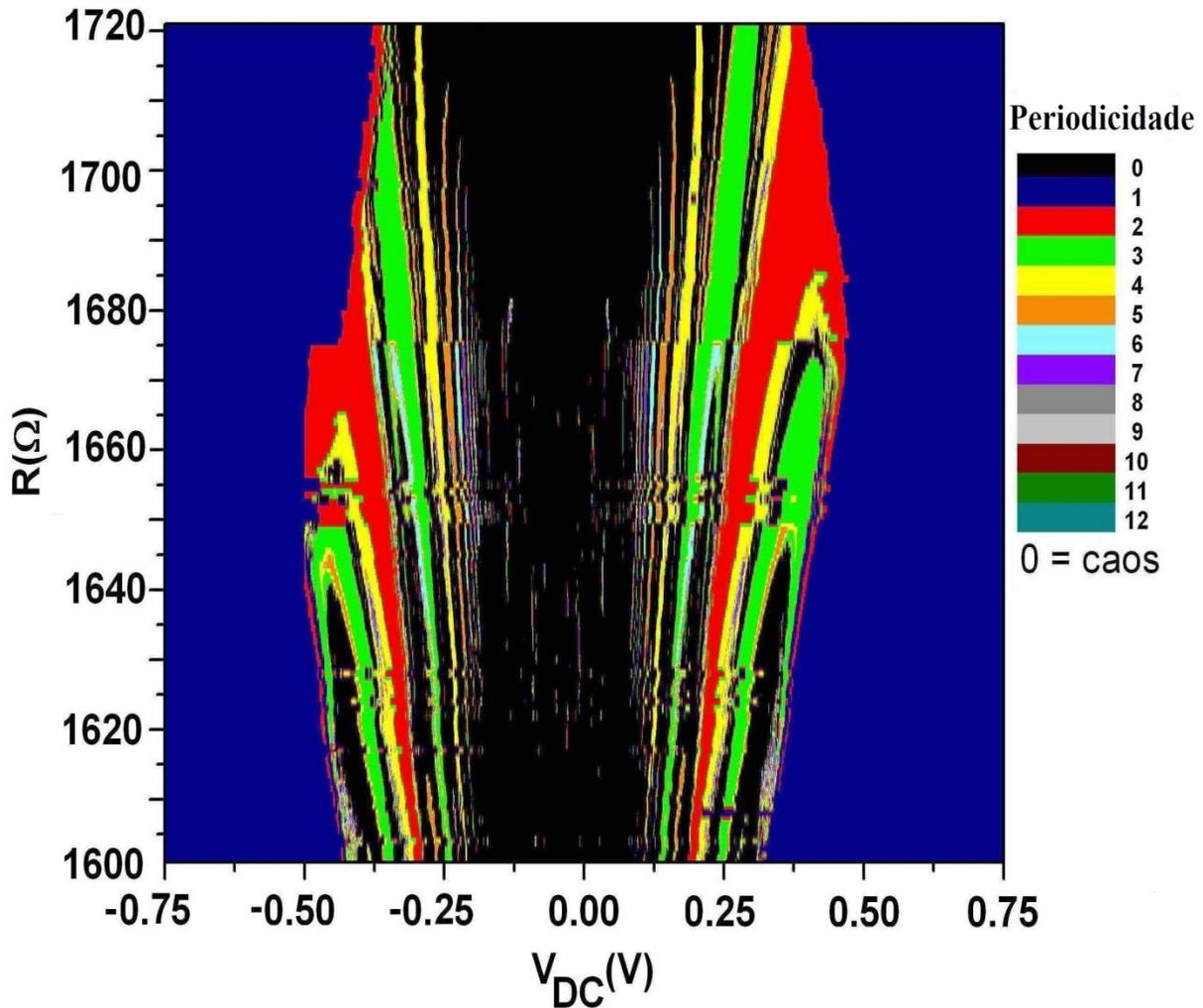


Figura 4.24: Espaço de Parâmetros da Periodicidade para R entre $160,00 \Omega$ e $1720,00 \Omega$ e V_{DC} entre $-0,7500$ V e $+0,7500$ V. Escala de 13 cores, uma cor para cada valor da periodicidade P da série temporal, sendo que para as séries caóticas ou de periodicidade acima de 12, foi definida a mesma cor, preta.

Podemos notar que o diagrama das periodicidades da figura 4.24 não é simétrico em relação à tensão V_{DC} nula, mas as suas características são semelhantes quando definido um novo eixo de simetria, para uma tensão fixa próxima a $-0,1000$ V. O lado direito do diagrama apresenta-se alongado na direção vertical em relação ao lado direito, tendo ainda a região de periodicidade período-2, mais extensa em relação a sua região correspondente no lado esquerdo do diagrama.

Para melhor visualizarmos as regiões periódicas, próximas as regiões caóticas, apresentaremos a seguir algumas ampliações do espaço de parâmetros da figura 4.24, mostrando assim as características das estruturas de similaridades. Devemos ressaltar que essas ampliações não significam um aumento na resolução das medidas experimentais.

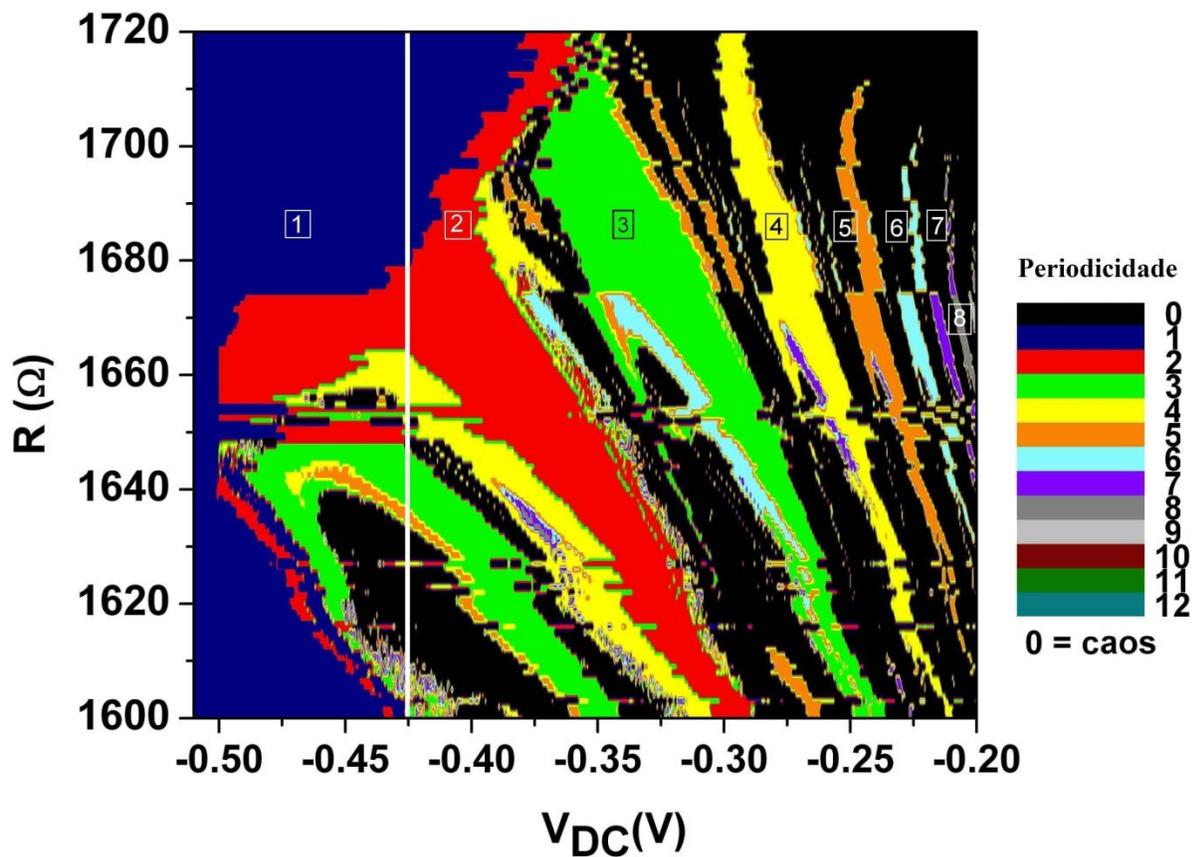


Figura 4.25: Amplificação no Espaço de Parâmetros da Periodicidade para R entre $1600,00 \Omega$ e $1720,00 \Omega$, e V_{DC} entre $-0,5100$ V e $+0,2000$ V. Amplificação realizada para melhor visualização das regiões periódicas das janelas complexas periódicas.

A figura 4.25 foi obtida através de uma ampliação na figura 4.24, selecionamos a região a esquerda da região central caótica do espaço de parâmetros, V_{DC} entre $-0,5100$ V e $-0,2000$ V mantendo o mesmo passo de $0,5$ mV e R na escala original, R entre $1600,00 \Omega$ e $1720,00 \Omega$.

Na figura 4.25, observarmos melhor a distribuição das regiões periódicas ao redor das regiões caóticas. Com dito anteriormente podemos observar a presença de uma grande região de período-3 (verde) seguida de uma região de período-5 (laranja), nas bordas dessa região temos atratores de período-4 (amarelo).

Traçamos no espaço de parâmetros da figura 4.25 uma reta vertical (branca) definida para uma tensão fixa de $-0,4400$ V e com o valor da resistência R variando entre $1600,00 \Omega$ e $1720,00 \Omega$. Essa reta representaria uma rota de bifurcação definida no sentido perpendicular a dos diagramas de bifurcação anteriormente apresentados na seção 4.3, nesse caso o nosso parâmetro de controle seria a resistência R variando ao passo de $1,00 \Omega$, mas com a tensão V_{DC} fixa.

A bifurcação definida pela reta em branco na figura 4.25 seguiria a rota de bifurcações: começando em $R = 1600,00 \Omega$ temos uma região de atratores de periodicidade elevada e conforme aumentamos o valor da resistência R , temos uma região caótica para $R = 1611,00 \Omega$, seguida por uma região de período-5 em $R = 1634,00 \Omega$, por sua vez, seguida por uma região de período-3 em $R = 1637,00 \Omega$, depois passa novamente por uma região caótica em $R = 1648,00 \Omega$, seguida de uma região de período-2 em $R = 1649,00 \Omega$, uma região de período-4 em $R = 1655,00 \Omega$, ao redor dessa região de período-5 temos uma região extensa de período-2 a partir de $R = 1664,00 \Omega$ até finalmente entrarmos na região de período-1 em $R = 1680,00 \Omega$ na qual permanece até $R = 1720,00 \Omega$.

Outras rotas de bifurcação podem ser definidas nas direções verticais (V_{DC} fixo) podendo apresentar a mesma riqueza de bifurcações, desde bifurcações aumentando-se a periodicidade do atrator até mesmo bifurcações diminuindo a periodicidade, como por exemplo, para $V_{DC} = -0,3110$ V, uma bifurcação por redução de periodicidade de período-4 para período-2, entre $R = 1604,00 \Omega$ e $1605,00 \Omega$.

Na figura 4.25 foram marcados no gráfico os números de $\boxed{1}$ a $\boxed{8}$, correspondendo à periodicidade de cada uma das regiões coloridas. Podemos observar a acumulação dessas regiões de periodicidades mais elevadas próximo à região de $V_{DC} = 0,0000$ V, semelhante ao mostrado nos diagramas de bifurcação da seção 4.3. Nessa mesma região podemos notar a alternância entre as regiões caóticas e as periódicas.

No lado direito ($V_{DC} > 0$) do espaço de parâmetros da figura 4.24, apresentado na figura 4.26, podemos notar as mesmas características presentes na figura 4.25, isto é, acumulação de regiões periódicas de períodos elevados, próximo a $V_{DC} = 0,1000$ V, presença de regiões periódicas ao redor da região caótica próxima a região de período-1. Porém a faixa de valores que apresenta as mesmas características não é simétrica em relação ao eixo $V_{DC} = 0,0000$ V, como já comentado anteriormente, o circuito de Chua não é simétrico em relação à $V_{DC} = 0,0000$ V. As figuras 4.25 e 4.26 são similares, mas não são “espelhadas”, essas seriam caso à resposta do sistema ao aplicarmos V_{DC} fosse igual para os valores positivo e negativo.

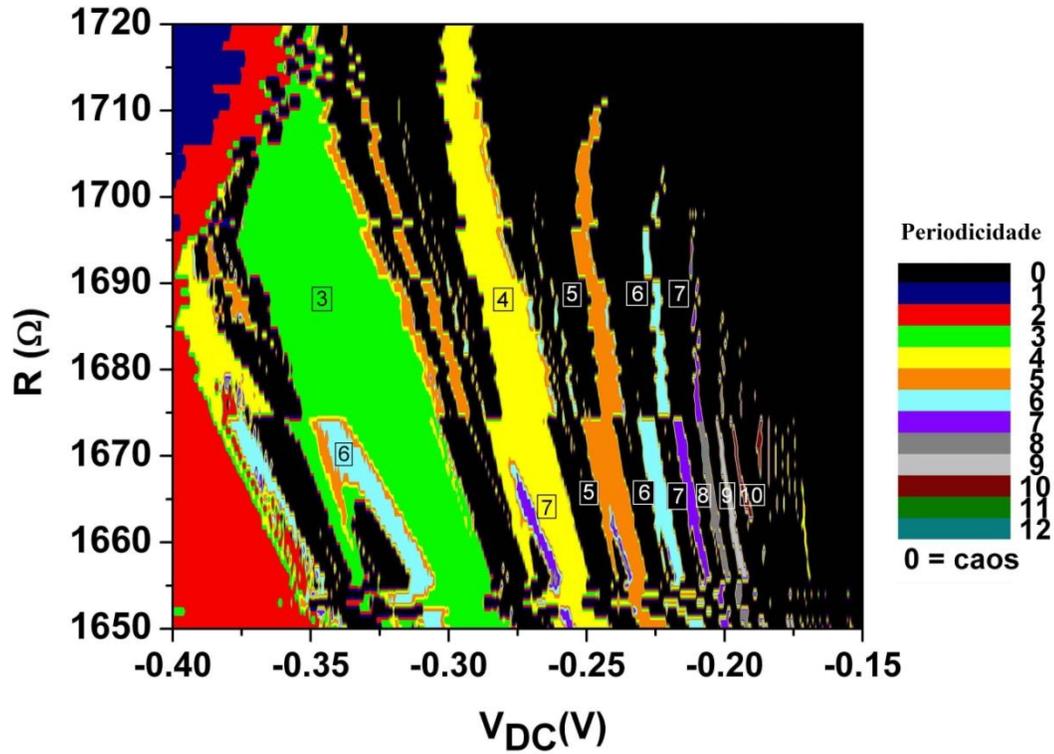


Figura 4.26: Amplificação no Espaço de Parâmetros da Periodicidade:
 R entre 1650,00 Ω e 1720,00 Ω , V_{DC} entre -0,4000 V e -0,1500 V.

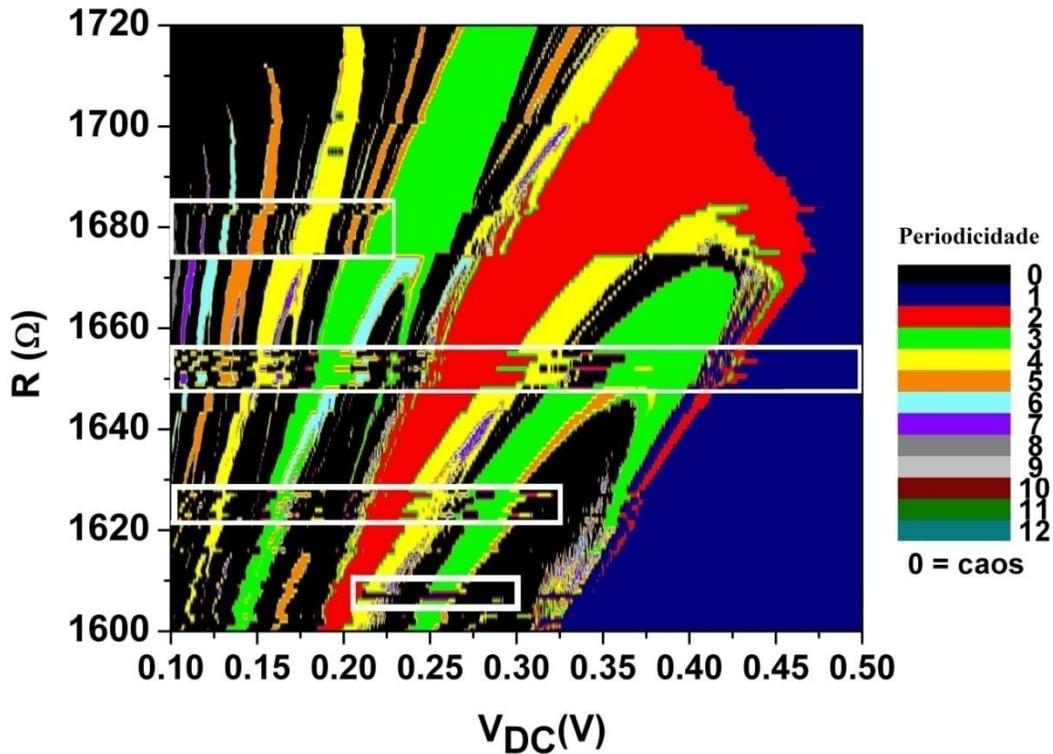


Figura 4.27: Amplificação do Espaço de Parâmetros da Periodicidade:
 R entre 1600,00 Ω e 1720,00, V_{DC} entre +0,1000 V e +0,5000 V.

Podemos observar com mais clareza nas figuras 4.26 e 4.27, que o espaço de parâmetros apresenta-se deslocado de forma descontínua para alguns valores de resistência R . Na figura 4.27 marcamos quatro dessas regiões de descontinuidades com retângulos brancos. Foram realizados diversos testes para descobrirmos o que havia ocorrido, foram refeitas as medidas experimentais e as análises, porém as descontinuidades permaneceram. Dessa forma acreditamos que essas descontinuidades são um resultado experimental, porém permanecendo a sua causa incógnita.

Para uma amplificação da região de acumulação apresentada na figura 4.25 ainda observamos ainda com mais detalhes na figura 4.26 essas regiões de periodicidades elevadas, para as tensões V_{DC} negativas. E através dos números [3] a [10] apresentamos em 4.26, as regiões periódicas imersas na região caótica, de periodicidade 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10. Da mesma forma apresentamos uma amplificação da figura 4.27, na figura 4.28, onde observamos novamente regiões de periodicidades elevadas, mas para V_{DC} positivo, e demarcamos novamente através dos números [3] a [10], as regiões de periodicidade 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10.

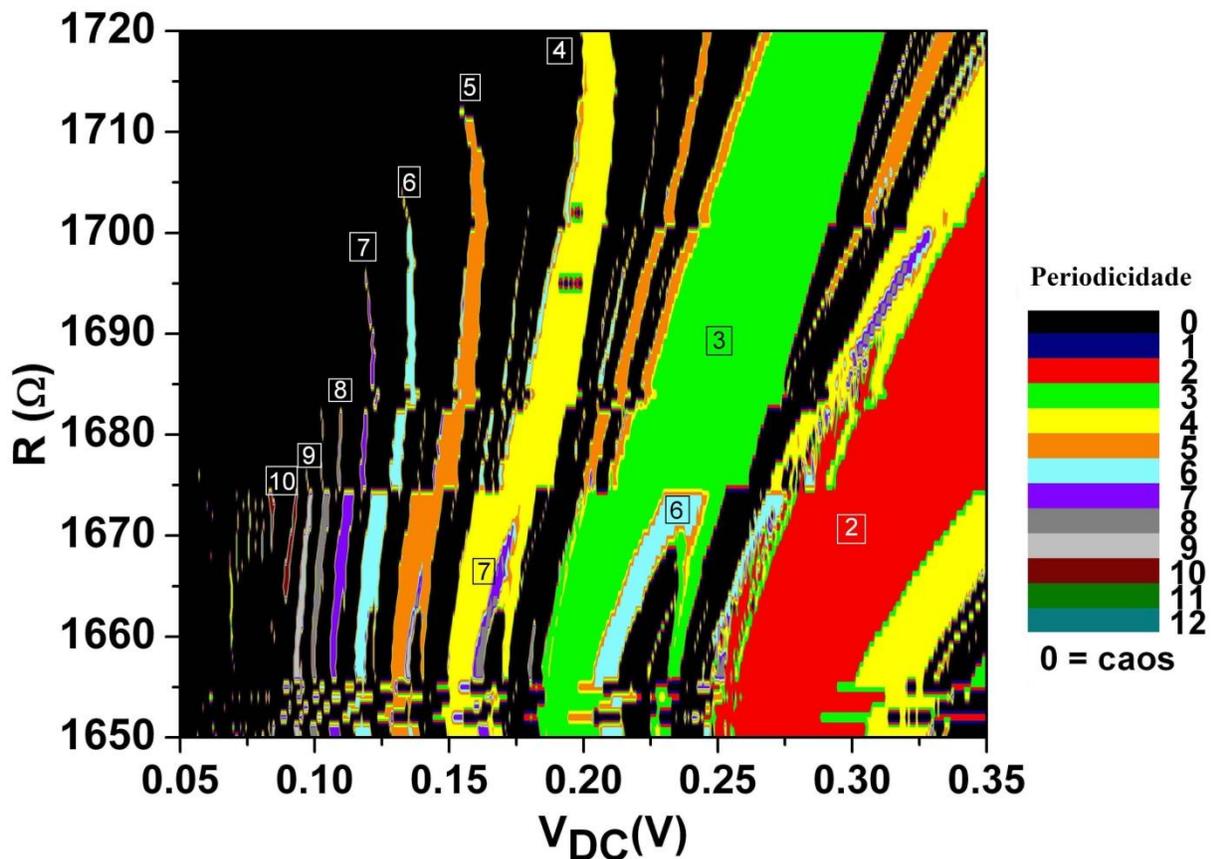


Figura 4.28: Amplificação no Espaço de Parâmetros da Periodicidade para R entre 1650,00 Ω e 1720,00 Ω , V_{DC} entre +0,0500 V e +0,3500 V. Evidenciando as mesmas características encontradas no lado esquerdo do espaço de parâmetros da periodicidade, figura 4.26.

4.6) Espaço de Parâmetros do Maior Expoente de Lyapunov

4.6.1) Espaço de Parâmetros Experimental do maior expoente de Lyapunov

No nosso circuito de Chua forçado por uma fonte DC realizamos um estudo sobre as séries temporais experimentais geradas para cada par de parâmetros de controle (R, V_{DC}), sendo R um potenciômetro que varia entre 1600,00 e 1720,00 Ω ao passo de 1,00 Ω e para cada valor de R fixo, foi variada uma tensão V_{DC} entre -0,7500 V e +0,7500 V na fonte de tensão DC Keithley 230 com passo de 0,5 mV.

Para cada série temporal obtida realizamos os cálculos do espectro dos expoentes de Lyapunov através do método de M. Sano e Y. Sawada⁽¹⁰⁾, método esse que está discutido na seção 3.4 "Expoentes de Lyapunov". Para cada par de condições iniciais (R, V_{DC}) teremos então três expoentes de Lyapunov: λ_{maior} , $\lambda_{\text{intermediário}}$ e λ_{menor} , pois a série temporal é de um sistema dinâmico que possui três dimensões (xyz).

Os três expoentes de Lyapunov têm como principais características as seguintes relações⁽¹¹⁾:

Tabela 4.3: Relações entre os expoentes de Lyapunov e os tipos de séries temporais*.

λ_{maior}	$\lambda_{\text{intermediário}}$	λ_{menor}	Tipo do Atrator
(-)	(-)	(-)	Ponto de Equilíbrio (ponto fixo)
(0)	(-)	(-)	Atrator Periódico (ciclo limite)
(+)	(0)	(-)	Atrator Caótico

* Sendo (-) valor negativo do expoente, (+) positivo e (0) nulo.

Sendo assim podemos construir o espaço de parâmetros apenas utilizando o maior expoente de Lyapunov (λ_{maior}). Pois de acordo com a tabela 4.3 apenas o sinal desse expoente já nos permite distinguir entre os três possíveis casos de atratores: caótico, periódico e ponto fixo.

A fim de garantir um valor correto para os expoentes de Lyapunov foram realizados "testes de vizinhança" onde variamos a vizinhança k nos cálculos dos expoentes (veja seção 3.4.3) de forma que uma fosse escolhida tal que o expoente $\lambda_{\text{intermed.}}$ tenha o valor mais próximo de zero e a soma dos três expoentes seja negativa, pois os atratores estão limitados no espaço.

A seguir na figura 4.29 apresentaremos o espaço de parâmetros experimental R por V_{DC} do maior expoente de Lyapunov das séries temporais do circuito de Chua modificado com a fonte DC em série com o diodo de Chua.

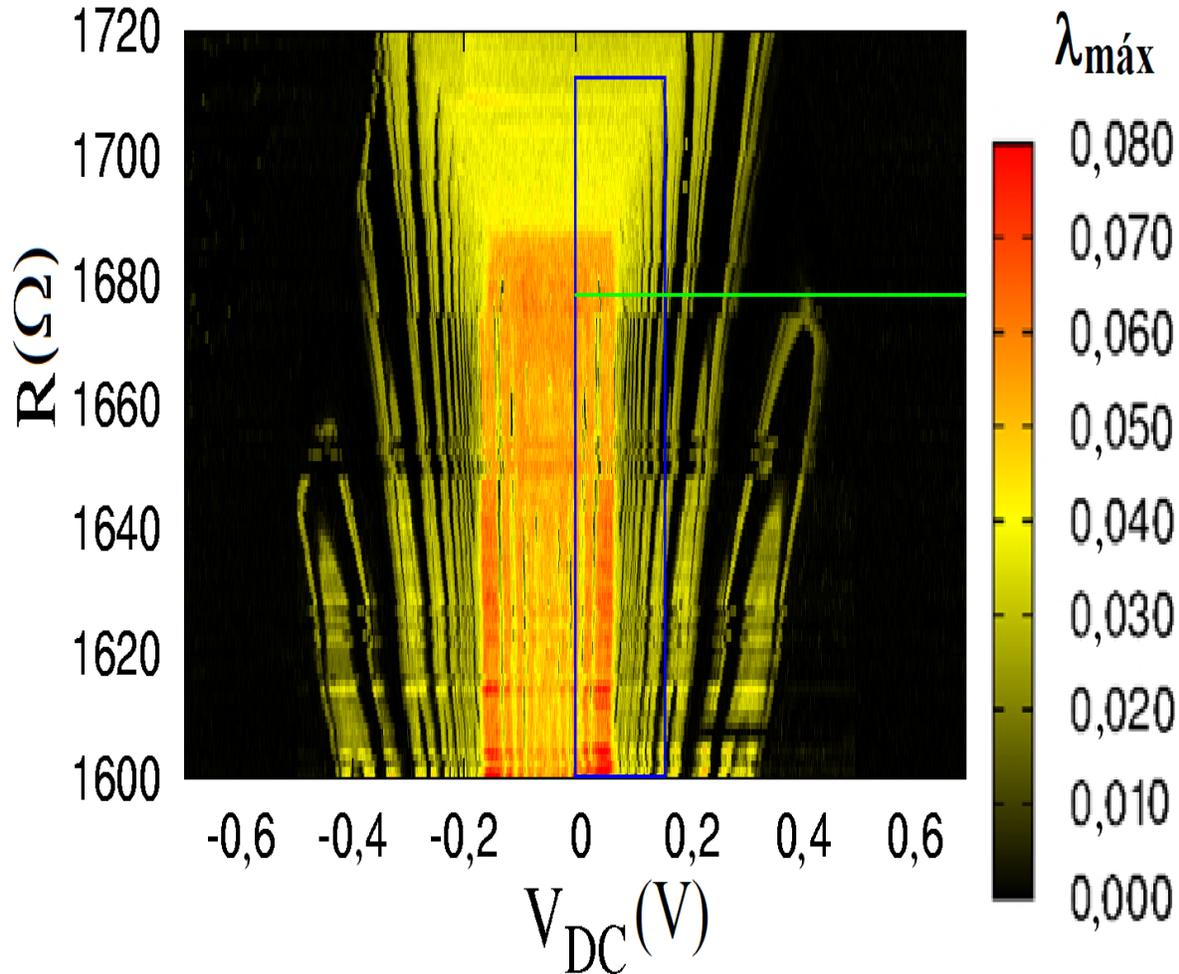


Figura 4.29: Espaço de Parâmetros Experimental do maior expoente de Lyapunov λ_{maior} V_{DC} entre $-0,7000 \text{ V}$ e $+0,7000 \text{ V}$ ao passo de $0,5 \text{ mV}$ e R variando entre $1600,00 \text{ } \Omega$ e $1720,00 \text{ } \Omega$.

Como dito anteriormente o espaço de parâmetros consiste num mapa bidimensional onde associamos a cada uma das séries temporais (R, V_{DC}) o valor da medida de uma grandeza física. Na seção 4.5 a grandeza física medida era a periodicidade P da série temporal. Nessa seção a grandeza física é o valor do expoente λ_{maior} resultante do cálculo do espectro dos expoentes de Lyapunov. Então para cada série temporal é associado o valor desse expoente, em seguida esse valor é codificado numa escala de cores. Definimos para todos os expoentes nulos (séries periódicas) a cor preta, já que nesse espaço de parâmetros expoentes nulos não trazem nenhuma informação relevante.

A escala de cores do espaço de parâmetro apresentado na figura 4.29 seguiu um padrão de cores do preto para amarelo e do amarelo para o vermelho, em um contínuo de cores com precisão de 16 bits (num total de 65.536 combinações possíveis de cores).

O preto representa os atratores periódicos que têm o maior expoente de Lyapunov tendendo a zero ($\lambda_{\text{maior}} \rightarrow 0$) e o vermelho corresponde aos valores mais altos do expoente λ_{maior} . O valor dos expoentes de Lyapunov λ_{maior} na escala de cores varia entre $0,000 \text{ s}^{-1}$ até $0,080 \text{ s}^{-1}$.

Foram encontrados, para algumas séries temporais, valores maiores do expoente λ_{maior} , porém fizemos um corte-limite (*threshold-filter*) tal que todos os expoentes com valores acima de $0,080 \text{ s}^{-1}$ foram definidos como vermelho com $\lambda_{\text{maior}} = 0,080 \text{ s}^{-1}$ para enfatizar os detalhes do espaço de parâmetro: o contraste e as características de transição entre as regiões caóticas e periódicas.

A fim de analisarmos as estruturas complexas presentes no espaço de parâmetros da figura 4.29, vamos mostrar a seguir na figura 4.30 uma ampliação do espaço de parâmetros (caixa azul) mostrando as similaridades e os padrões de organização das regiões periódicas imersas na região caótica do espaço de parâmetros.

Região selecionada (caixa em azul na figura 4.29)

- V_{DC} entre $0,0000 \text{ V}$ e $0,2000 \text{ V}$, passo $0,5 \text{ mV}$.
- R entre $1600,00 \Omega$ e $1720,00 \Omega$, passo $1,00 \Omega$.

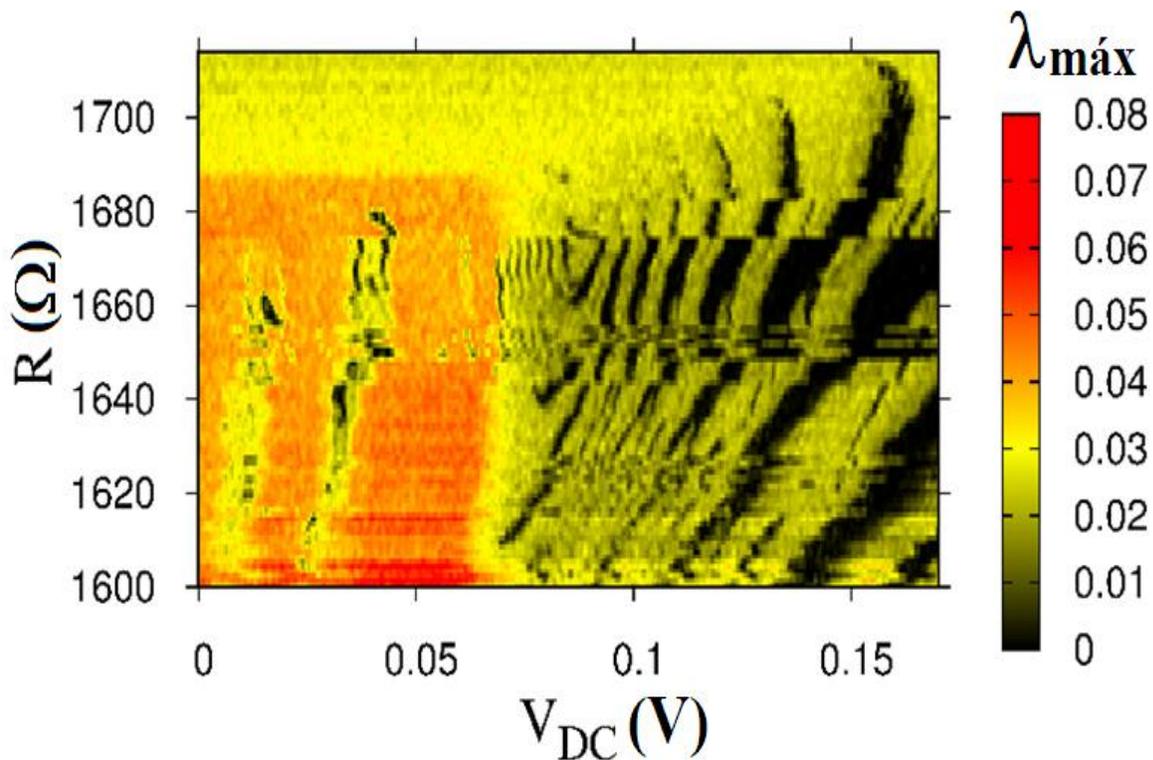


Figura 4.30: Amplificação da região caixa A do espaço de parâmetros da figura 4.29. V_{DC} entre $0,0000 \text{ V}$ e $0,2000 \text{ V}$, R entre $1600,00 \Omega$ e $1720,00 \Omega$. Apresentando estruturas em formato de "garras" alternando entre caóticas e periódicas.

Podemos observar na figura 4.30 padrões em formato de “garras”, apresentados na região à direita da figura, essas estruturas se organizaram numa direção preferencial diagonal em relação ao eixo das abscissas.

Além disso, foi possível observamos outras regiões periódicas (representadas em preto) imersas nas regiões mais sensíveis às condições iniciais, ou seja, as com os valores mais elevados de λ_{maior} (representadas por vermelho forte) na parte inferior a esquerda do espaço de parâmetros da figura 4.30. Para observarmos esse tipo de estrutura experimentalmente nos espaço de parâmetros temos que considerar um passo muito pequeno de parâmetro de controle, além disso devemos ter uma relação sinal/ruído o mais alto possível.

Utilizando novamente o espaço de parâmetro da figura 4.29 podemos separá-lo em regiões similares em relação ao eixo V_{DC} . Podemos observar as estruturas contidas na **região 1**, resistência R entre 1600,00 Ω e 1660,00 Ω e V_{DC} entre -0,6000 V e -0,3000 V, e as contidas na **região 2**, R entre 1600,00 Ω e 1680,00 Ω e V_{DC} entre +0,2000 V e +0,5000 V, que apresentam um mesmo formato de discos alongados que contém uma região caótica centrada, seguida de uma região periódica e de um anel invólucro de regiões caóticas.

Como comentado na seção 4.5, as regiões 1 e 2 (V_{DC} negativo e positivo) apresentadas são similares em estrutura, porém estão deslocadas para a esquerda em relação ao eixo $V_{\text{DC}} = 0,0000$ V por um valor de aproximadamente 0,1000 V. Esse fato ocorreu basicamente devido a uma assimetria do diodo de Chua, já que esse não é exatamente simétrico em relação à tensão nula ($I(V=0) \neq 0$) devido ao "DC-offset" inerente à amplificadores operacionais reais. Podemos observar também que a região 2 apresenta-se esticada no eixo das coordenadas em relação a região 1, ou seja a quantidade de atratores periódicos presentes na região 2 mostra-se superior a quantidade encontrada na região 1, é possível que isso explique o porquê da diferença na resolução dos diagramas de bifurcação para os lados direito ($V_{\text{DC}} > 0$) e esquerdo ($V_{\text{DC}} < 0$) nas figuras, 4.11 e 4.14 - 4.19.

Podemos observar na região central, V_{DC} entre -0,2000 V e +0,1000V para todos os valores de resistência R , do espaço de parâmetros da figura 4.29, que os maiores valores dos expoentes de Lyapunov encontram-se nessa região central, sendo que as medidas de resistências mais baixas (R entre 1600,00 e 1660,00 Ω) apresentaram expoentes de valores ainda mais elevados na região em torno de V_{DC} nulo. Podemos ainda observar estruturas muito estreitas (da ordem de 1 a 3 passos de 0,5 mV na tensão V_{DC}) de regiões periódicas imersas na região caótica. Isso sugere a presença de atratores de alta periodicidade que muitas vezes podem passar despercebidos no espaço de parâmetros da periodicidade, já que esses ocorrem para poucos valores de (R, V_{DC}) e selecionamos no programa de detecção da periodicidade atratores periódicos de periodicidade até período-12.

Qualquer que seja a periodicidade dos atratores teremos para uma série temporal periódica o λ_{maior} nulo. Se tivermos, uma série periódica de periodicidade maior que 12, não conseguiremos detectá-la no espaço de parâmetro da periodicidade, mas conseguiremos no espaço de parâmetros do expoente λ_{maior} .

No espaço de parâmetros da figura 4.29 podemos observar descontinuidades para resistências próximas a $R = 1650,00 \Omega$ e tensões entre $-0,5000 \text{ V}$ e $-0,3500 \text{ V}$, e $+0,3500 \text{ V}$ e $+0,5000 \text{ V}$. Essas descontinuidades ocorrem para a mesma faixa de valores das encontradas no espaço de parâmetro da periodicidade, figura 4.27.

Ou seja, as descontinuidades apresentadas no espaço de parâmetro da periodicidade não aconteceram devido a algum erro na detecção da periodicidade das séries temporais, ao utilizarmos o programa por nós desenvolvido. Reafirmamos que essas descontinuidades são realmente experimentais e não teriam nenhuma relação com os procedimentos experimentais ou com os cálculos realizados, já que é conhecida a eficiência do método de Sano e Sawada ⁽¹⁰⁾ para o cálculo do espectro dos expoentes de Lyapunov.

Especificações do Espaço de Parâmetros Experimental da figura 4.29

- Intervalo da tensão V_{DC} : entre $-0,7000 \text{ V}$ e $+0,7000 \text{ V}$, passo $0,5\text{mV}$.
- Intervalo da resistência R : entre $1600,00 \Omega$ e $1720,00 \Omega$, passo de $1,00 \Omega$.
- Resolução do espaço de parâmetros (abscissas x coordenadas): 2801×120 .
- Medidas utilizadas na construção do espaço de parâmetros: 336.120 .
- Valores dos Expoentes de Lyapunov: entre $0,000$ e $0,080 \text{ s}^{-1}$.
- Programa utilizado para construção da matriz do espaço de parâmetros: "Lendo_arquivos_Lyap_Spec_completa_MATRIZ.vi".
- Programa utilizado para construirmos a figura a partir da matriz do espaço de parâmetros: *GNU PLOT* (Linux).
- Escala de Cores: do amarelo para o vermelho com precisão de 16 bits.

Procedimento para montarmos a matriz e a figura do espaço de parâmetros

Para cada medida experimental gravada no disco rígido, medida (R, V_{DC}) , foi realizado o cálculo dos expoentes de Lyapunov utilizando o software "Lyap_Spec" de "Nonlinear Time Series Analysis", Tisean ⁽¹²⁾. Terminado os cálculos de todos os expoentes, três para cada medida experimental, os resultados foram gravados em um arquivo {[nome da medida]_lyap_spec.dat}. O tempo aproximado do cálculo dos expoentes de Lyapunov para todas as séries temporais foi de 45 dias, utilizando-se dois computadores Core2-Quad com 2.50 GHz e 2.40 GHz por núcleo e memória RAM de 8Gb e 4Gb , respectivamente.

Para construirmos a matriz que representa a figura do espaço de parâmetros foram desenvolvidos programas em Labview, que lêem todos os resultados dos cálculos de expoentes e montam a seguinte matriz: para cada medida (R, V_{DC}) é associado o valor do maior expoente de Lyapunov.

Tabela 4.4: Exemplos de algumas células da matriz que representa o espaço de parâmetros do λ_{maior}

MATRIZ	$V_{DC} = -0,0005 \text{ V}$	$V_{DC} = 0,0000 \text{ V}$	$V_{DC} = +0,0005 \text{ V}$
	(s^{-1})	(s^{-1})	(s^{-1})
R=1600,00 Ω	0,044	0,050	0,043
R=1601,00 Ω	0,051	0,047	0,056
R=1602,00 Ω	0,052	0,043	0,052

Para cada valor de resistência R (coluna 1) e de tensão V_{DC} (linha 1) na tabela 4.4, é associado o valor do expoente de Lyapunov. Nas regiões destacadas em cinza temos as coordenadas de cada elemento na matriz e na parte destacada em branco o valor real do maior expoente de Lyapunov de cada medida (R, V_{DC}).

Obtida a matriz da tabela 4.4 para todos os resultados experimentais é possível então construirmos o espaço de parâmetros, como nas figuras 4.29 e 4.30, associando a cada valor contido na tabela uma cor respeitando a escala de cores anteriormente definida.

4.6.1) Espaço de Parâmetro Simulado do maior expoente de Lyapunov

No artigo de Bonatto e Gallas, "*Accumulation Boundaries: codimension-two accumulation of accumulations in phase diagrams of semiconductor lasers, electric circuits, atmospheric and chemical oscillators*"⁽⁵⁾, os autores comentam a importância do estudo de espaços de parâmetros de codimensão-2 para discriminar exatamente onde estão presentes as estruturas complexas periódicas imersas na região caótica. Nesse artigo eles mostram através de simulações a existência desse tipo de estruturas complexas em diversos sistemas dinâmicos, tais como, lasers semicondutores e circuitos elétricos. Além disso, comentam a falta de trabalhos experimentais em espaços de parâmetros de alta resolução, sendo alta resolução uma condição necessária para o aparecimento desse tipo de estruturas, dando assim mais força para o trabalho aqui desenvolvido.

Para estudarmos melhor esse tipo de estruturas, apresentadas nas seções anteriores 4.3-4.5, foram realizadas em paralelo a esse trabalho experimental simulações desse mesmo circuito de Chua forçado pela fonte DC. Os parâmetros utilizados na simulação são os mesmos utilizados na montagem experimental (o valor dos resistores, dos capacitores e dos elementos do indutor simulado), além disso, as cinco equações lineares por parte da curva I(V) experimental do diodo de Chua (tabela 3.2 seção 3.1) foram utilizadas como a equação da corrente $i_d(x)$ que passa pelo indutor.

Já sabemos que ao adicionarmos uma fonte de tensão V_{DC} em série com o circuito temos modificações na equação diferencial da corrente 2.39.d por $i_a(x) \rightarrow i_a(x + V_{DC})$. E como as equações são acopladas teremos modificações também nas equações 2.44.a-d, como apresentado na seção 2.4.2.

Sendo conhecida a forma da curva $i_a(x)$ experimental (tabela 3.2), podemos resolver as equações diferenciais (eq.2.40.a-c) por integração numérica pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem e em seguida podemos realizar os cálculos dos expoentes de Lyapunov, num procedimento similar ao desenvolvido no artigo "*Self-similar structures in a 2D parameter-space of an inductorless Chua's circuit*"⁽¹³⁾. As simulações, os cálculos e os gráficos que apresentaremos a seguir foram realizados na Universidade do Estado de Santa Catarina, em colaboração com o Prof. Holokx Abreu Albuquerque⁽¹⁴⁾.

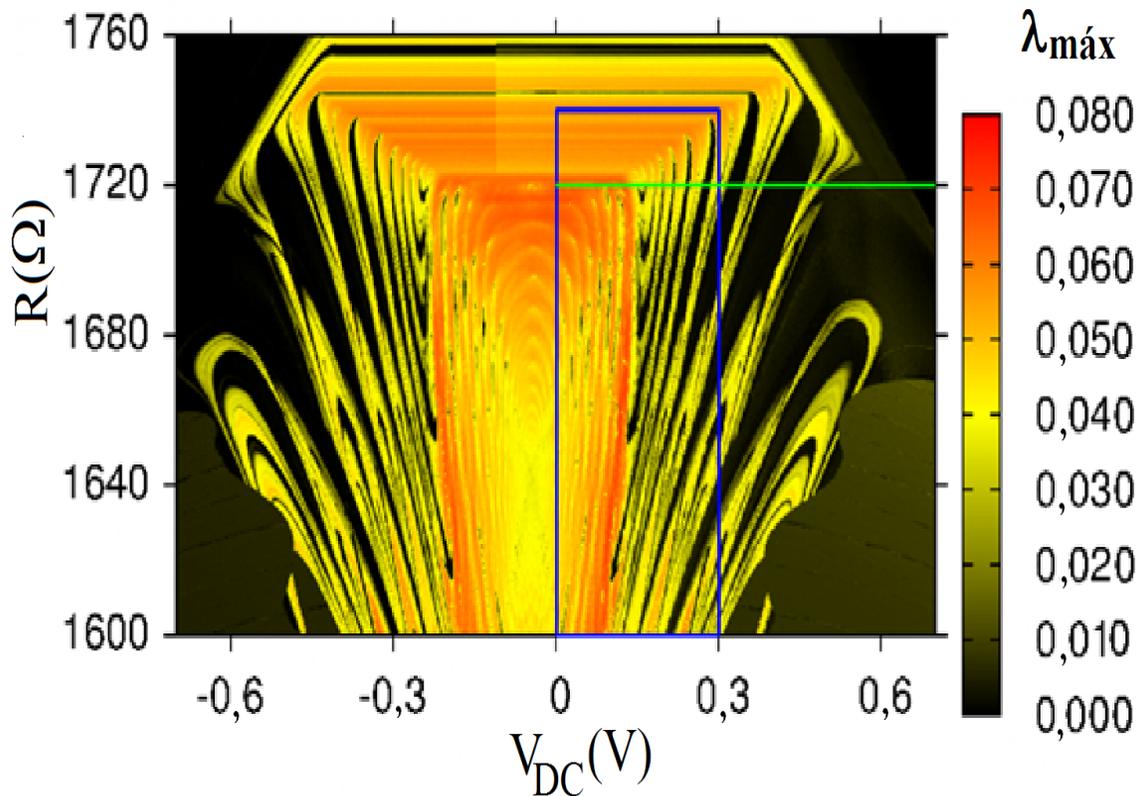


Figura 4.31: Espaço de Parâmetros Simulado do maior expoente de Lyapunov para o circuito de Chua com a fonte DC. V_{DC} entre $-0,7000\text{ V}$ e $+0,7000\text{ V}$ com 600 valores intermediários equidistantes, R entre $1600,00\ \Omega$ e $1760,00\ \Omega$ com 600 valores intermediários equidistantes.

O espaço de parâmetros simulado apresentado na figura 4.31 segue o mesmo padrão de cores utilizado no espaço de parâmetro experimental, escala amarelo-vermelho com 16 bits de precisão para atratores caóticos e preto para os atratores periódicos, além disso, novamente fizemos um corte-limite, *threshold-filter* de $8,00 \times 10^{-2}\text{ s}^{-1}$ no valor dos expoentes para aumentarmos o contraste e a riqueza de detalhes. O eixo das abscissas V_{DC} apresenta valores entre $-0,7000\text{ V}$ e $+0,7000\text{ V}$ com 600 valores intermediários equidistantes.

O eixo das coordenadas R apresenta valores entre 1600,00 Ω e 1760,00 Ω também com 600 valores intermediários. Ou seja, temos um espaço de parâmetros com resolução de 600 x 600. O eixo das coordenadas apresenta uma maior resolução no parâmetro R comparada com a resolução do espaço de parâmetros experimental, R entre 1600,00 Ω e 1720,00 Ω com 120 passos equidistantes, porém podemos observar que a resolução vertical de 1,00 Ω foi suficiente para que a maior parte das características do espaço de parâmetros do λ_{maior} simulado fossem observadas no experimental. O eixo das abscissas da simulação apresenta uma resolução menor do que o do espaço de parâmetros experimental, ainda assim obtivemos resultados coerentes.

Podemos observar que o espaço de parâmetros simulado da figura 4.31 apresenta uma grande riqueza de detalhes, com estruturas complexas que também apresentam alternância entre regimes de caóticos e periódicos.

A fim de observarmos melhor essas estruturas contidas no espaço de parâmetros da figura 4.31, selecionamos uma região em azul no gráfico, da mesma forma que foi selecionada uma região no espaço de parâmetros experimental apresentado anteriormente na figura 4.29, obtendo a figura 4.32.

No espaço de parâmetros experimental fizemos apenas uma ampliação, figura 4.30, da região selecionada na figura 4.29, sem aumentar a resolução nos eixos. No espaço de parâmetros simulado apresentado na figura 4.31 selecionamos uma região do espaço, porém aumentamos a resolução para visualizarmos com mais detalhes essas estruturas.

A figura 4.32 apresenta um formato semelhante ao obtido no espaço de parâmetros experimental: estruturas em formato de "garras" apresentados à direita da figura, para os valores mais altos de V_{DC} positivo, com alternância entre regiões periódicas e caóticas. Além disso, é possível também observarmos o aparecimento de estruturas periódicas muito pequenas imersas numa das regiões caóticas que apresentam os maiores valores de expoente de Lyapunov. Essas estruturas também são similares as encontradas no espaço de parâmetros experimental da figura 4.29.

Região selecionada (caixa azul da figura 4.31)

- V_{DC} entre 0,0000 V e 0,3000 V, com 600 valores intermediários.
- R entre 1600,00 Ω e 1740,00 Ω , com 600 valores intermediários.
- Resolução da figura da região ampliada: 600x600.

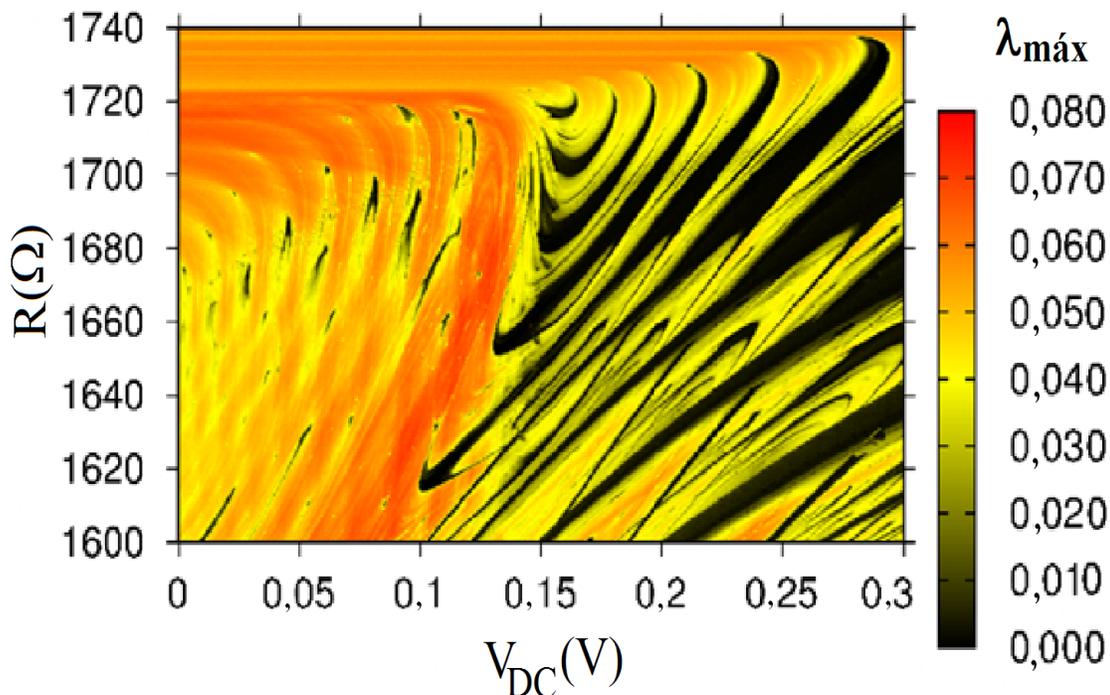


Figura 4.32: Amplificação na figura 4.31 do Espaço de Parâmetros Simulado do maior expoente de Lyapunov, para o circuito de Chua com a fonte DC. V_{DC} entre 0,0000 V e +0,30000 V com 600 valores intermediários eqüidistantes, R entre 1600,00 Ω e 1740,00 Ω , com 600 valores intermediários e eqüidistantes.

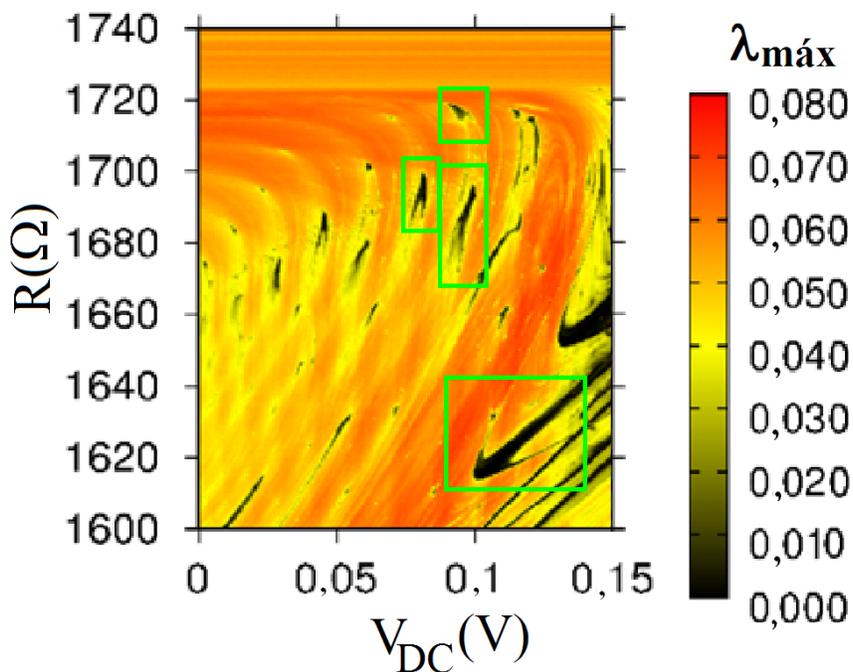


Figura 4.33: Seleção de uma região da figura 4.32 do Espaço de Parâmetros Simulado do maior expoente de Lyapunov para o circuito de Chua com a fonte DC. V_{DC} entre 0,0000 V e +0,15000 V com 300 valores intermediários eqüidistantes, R entre 1600,00 Ω e 1740,00 Ω , com 600 valores intermediários e eqüidistantes. Apresentando estruturas auto-similares no formato de camarões.

Fazendo a seleção de uma região da figura 4.32, a que apresenta os atratores com valores de expoentes mais elevados (vermelho forte), podemos observar nas regiões marcadas em verde na figura 4.33, o aparecimento de estruturas que podem ser do tipo auto-similares, os também chamados de "camarões" ⁽¹³⁾, porém essas ainda não foram analisadas mais profundamente, quanto a sua topologia, para de fato confirmarmos se essas são ou não estruturas auto-similares. Para serem analisadas mais profundamente devemos aumentar ainda mais a resolução nos eixos da figura 4.33, isso pode ser feito através da variação do parâmetro V_{DC} na escala de μV e a utilização de motores de passos controlados automaticamente, para variarmos a resistência dos *trimpots* com mais precisão.

Uma condição básica para definirmos se uma estrutura é auto-similar seria, que ao fazermos ampliações nessa região devemos obter figuras similares ou iguais as obtidas antes da amplificação. Como ampliações em uma direção preferencial de uma estrutura fractal.

REFERÊNCIAS DO CAPÍTULO 4

1. **L.A.B. Torres, L.A. Aguirre.** Electronics Letters. "*Inductorless Chua's Circuit*". 2000, Vol. 36, 23, pp. 1915-1916.
2. **T. Matsumoto, Leon O. Chua, M. Komuro.** IEEE Transactions on Circuits and Systems. *The Double Scroll*. 1985, Vol. 32, 8.
3. **Eric J. Kostelich, Thomas Schreiber.** Physical Review E. "*Noise Reduction in Chaotic Time-Series Data: A Survey of Common Methods*". 1993, Vol. 48, pp. 1752-1763.
4. **D. M. Maranhão, M. S. Baptista, J. C. Sartorelli, I. L. Caldas.** Physical Review E. "*Experimental Observation of a Complex Periodic Window*". 2008, Vol. 77, pp. 1-4.
5. **Cristian Bonatto, Jason Alfredo Carlson Gallas.** Philosophical Transactions of The Royal Society A. "*Accumulation boundaries: codimension-two accumulation of accumulations in phase diagrams of semiconductor lasers, electric circuits, atmospheric and chemical oscillators*". 2008, Vol. 366, pp. 505-517.
6. **Louis M. Pecora, Thomas L. Carroll.** Physical Review Letters. *Synchronization in Chaotic Systems*. 1990, Vol. 64, 8, pp. 821-824.
7. **Scott Hayes, Celso Grebogi, Edward Ott, Andrea Mark.** Physical Review Letters. *Experimental Control of Chaos for Communication*. 1994, Vol. 73, 13, pp. 1781-1784.
8. **Hilborn, Robert C.** *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*. s.l.: Oxford University, 1994.

9. **Brian R. Hunt, Edward Ott.** Journal Physics A: Mathematical and Theoretical. "*Structure in the parameter dependence of order and chaos*". 1997, Vol. 30, pp. 7067-7076.
10. **M. Sano, Y. Sawada.** Physical Review Letters. *Measurement of the Lyapunov Spectrum form a Chaotic Time Series*. 1985, Vol. 55, 10, pp. 1082-1085.
11. **T.S. Parker, L.O. Chua.** "*Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*". s.l.: Springer-Verlag, 1989.
12. **Rainer Hegger, Holger Kantz, Thomas Schreiber.** http://www.mpipks-dresden.mpg.de/~tisean/Tisean_3.0.1/index.html. *Tisean - Time Series Analysis*. [Online] 2007.
13. **Holokx A. Albuquerque, Rero M. Rubinger, Paulo C. Rech.** Physics Letters A. *Self-Similar Structures in a 2D Parameter-Space of an Inductorless Chua's Circuit*. 2008, Vol. 372, pp. 4793-4798.
14. **Albuquerque, Holokx Abreu.** <http://lattes.cnpq.br/3043621278852069> . *Curriculum Lattes*. [Online]

Capítulo 5) Conclusões e Perspectivas

Nesse trabalho, projetamos e construímos um circuito de Chua robusto, com uma ótima relação sinal/ruído e altamente sensível a variação dos parâmetros de controle. Como mostrado no trabalho, fomos capazes de obter espaços de parâmetros experimentais de resolução $(3.001) \times (120)$ para a periodicidade e para o maior expoente de Lyapunov.

Desenvolvemos diversos programas de análise e obtenção de dados experimentais, que, pela sua comprovada qualidade, serão muito utilizados nos próximos trabalhos. Com pequenas modificações, podemos utilizá-los no estudo experimental de outros sistemas não-lineares, em geral. Podemos, por exemplo, substituir o diodo Chua por outro elemento não-linear. No caso específico do circuito de Chua o potencial de utilização é alto por termos a possibilidade de adicionar outros elementos no circuito, mudando a dinâmica do sistema.

Da análise das variáveis do sistema, $(x, y$ e $z)$, do circuito de Chua forçado por uma fonte DC, obtivemos resultados de grande riqueza como, por exemplo:

- Diagramas de bifurcação com características distintas ao variarmos o parâmetro de controle associado à resistência R ;
- Atratores periódicos de periodicidade elevada, atratores caóticos dos tipos Rössler e Duplo-Rolo, apresentamos também (nas figuras 4.9 e 4.10), uma transição suave entre eles ao variarmos o parâmetro de controle associado à tensão, V_{DC} ;
- Rotas de Bifurcação por adição (redução) de período ao diminuirmos (aumentarmos) o parâmetro de controle associado à tensão, V_{DC} , para alguns valores de resistência R . Nesses diagramas de bifurcação, mostramos que existem janelas periódicas complexas PWs. As janelas PWs apresentam-se como janelas periódicas imersas na região caótica, numa região de alternância entre caos e regiões periódicas.
- As janelas PWs apresentam uma característica especial que é o decaimento exponencial do tamanho da janela ΔP de periodicidade P de acordo com o expoente $(-\beta P)$ (equação 4.1). Mostramos que esse expoente β tem valor próximo a 1 para os nossos resultados, tanto para os experimentais quanto para os dados obtidos da simulação do circuito de Chua com a fonte DC. O expoente β da simulação, $\beta_{\text{simulação}}$, é um pouco maior do que o expoente β do experimento, $\beta_{\text{experimental}}$. E o expoente $\beta_{\text{simulação}}$ tem valor mais próximo de 1.

O decaimento exponencial das janelas PWs implica em sérias restrições para a detecção experimental das janelas de periodicidade elevada, já que é necessária uma variação muito pequena nos parâmetros de controle, suficientes para detectá-las.

O valor do expoente β relaciona-se com a parte real, ρ , e imaginária, ω , dos auto-valores do ponto de foco, associado às órbitas homocílicas responsáveis pela criação das PWs, por $\beta = \pi(\rho/\omega)$.

O valor do expoente $\beta_{\text{simulação}}$ maior que $\beta_{\text{experimental}}$ foi explicado como sendo devido à presença de um pequeno ruído nas séries experimentais, fazendo com que a região caótica ficasse maior e, conseqüentemente, a região periódica (janela ΔP) menor, já que temos alternância entre caos e regiões periódicas. Essa contração da janela ΔP leva a um valor menor para o expoente β .

O decaimento exponencial com o tamanho da janela foi primeiramente obtido no estudo de mapas quadráticos ⁽²⁾. Porém a equação 4.1 mostrou-se válida também para sistemas de tempo contínuo, com o Circuito de Chua.

- Os espaços de parâmetros da Periodicidade e do Maior expoente de Lyapunov, apresentados nas seções 4.5 e 4.6, têm características muito interessantes de organização das estruturas periódicas e caóticas, no formato de "garras", figuras 4.25, 4.26 e 4.28, e no formato de "camarões" na figura 4.33, similares entre si.
- Essas estruturas organizadas são interessantes porque se apresentam imersas em regiões caóticas, ou seja, para pequenas variações dos parâmetros de controle podemos passar rapidamente de um comportamento caótico para periódico, sendo o periódico de períodos 1 a 12, para o nosso circuito. Isso mostra que mesmo numa região que pareça desorganizada podemos encontrar estruturas altamente organizadas, em diversos formatos e com características diferentes.

Devemos ressaltar que os espaços de Parâmetros da periodicidade P e do expoente de Lyapunov λ_{maior} devem, preferencialmente, ser apresentados juntos, para que as informações neles contida se completem. Eles se completam porque nas regiões em que um não apresenta resultados relevantes no outro espaço essas regiões estarão presentes.

Os espaços de parâmetros, simulado e experimental, do λ_{maior} apresentaram uma ótima relação entre as regiões complexas neles contidas. Como é de se esperar, os resultados apresentados no espaço de parâmetro da simulação são mais ilustrativos, podemos definir melhor as regiões de alternância caos-periódicas, já que temos resolução tão grande quanto quisermos. Porém esse trabalho mostrou a importância dos resultados experimentais, pois se não tivéssemos realizado antes da simulação a análise experimental do circuito forçado não teríamos algumas das características que são inerentes a sistemas reais, no caso do nosso circuito de Chua, desequilíbrio nos OpAmps (*DC-offset*), ruído alargando as regiões caóticas e contraindo as periódicas, resposta não-simétrica a variação do parâmetro de controle V_{DC} , nos dois sentidos, entre outras.

Assim, caso desejássemos utilizar um circuito de Chua com a fonte DC em uma aplicação tecnológica, como em comunicação baseada em caos, devemos ter em mente que somente as soluções das equações diferenciais (simulação) não são suficientes para apresentar todas as possíveis respostas do sistema caótico, algumas dessas só

apareceram nos experimentos, como se as "imperfeições" do projeto (ruído, *DC-offset*) fossem "geradoras" de novos resultados, entenda por resultado, todos aqueles que satisfazem as condições mínimas de confiabilidade da teoria geral dos experimentos.

Nos próximos trabalhos iremos realizar estudos ainda mais detalhados das regiões complexas apresentadas nos espaços de parâmetros das figuras 4.24 e 4.29. Para isso utilizaremos uma fonte de tensão DC ainda mais precisa. Uma fonte recentemente adquirida pelo Prof. Rero M. Rubinger da UNIFEI, é capaz de variar V_{DC} a passos de micro-volts (μV). E para melhorarmos a resolução do parâmetro associado ao resistor R, utilizaremos potenciômetros multi-volta mais precisos, através da combinação de vários resistores de baixa resistência, mas com maior quantidade de voltas, além disso o valor da resistência R poderá ser variado automaticamente utilizando-se pequenos motores-de-passo.

Segue em desenvolvimento em Itajubá, na colaboração UNIFEI/UFMG, o estudo do espaço de parâmetros da resistência R e r_L (em série com o circuito que simula o indutor) para a periodicidade e para o λ_{maior} , para um circuito de Chua similar ao construído para esse trabalho⁽³⁾. Para aumentar a quantidade de séries temporais obtidas iremos variar os parâmetros de controle R e r_L através de motores de passo, podendo assim obter espaços de parâmetros com uma boa resolução.

Os resultados apresentados nessa dissertação serão publicados no formato de artigos, já em fase de conclusão, em revistas da área de Teoria do Caos. Em um dos artigos, apresentaremos os espaços de parâmetro simulado e experimental, do maior expoente de Lyapunov, λ_{maior} . Nesse trabalho faremos a conexão entre as estruturas periódicas, contidas nos espaços de parâmetro, e as janelas complexas periódicas PWs, presentes nos diagramas de bifurcação, do circuito de Chua experimental. Em outro artigo iremos mostrar algumas características do espaço de parâmetro experimental da periodicidade e relacioná-las ao espaço de parâmetro experimental dos expoentes de Lyapunov.

Resumindo o nosso trabalho é inovador no sentido de introduzir uma nova forma de estudarmos o circuito de Chua, através da adição da fonte DC em série com o diodo Chua. Essa tensão aplicada, V_{DC} , atua como um novo parâmetro de controle, desse circuito. Quando variamos as linhas de carga, por rotação (ao variarmos R) ou por deslocamento (ao variarmos V_{DC}) teremos então respostas diferentes para o circuito, pois modificamos a evolução das equações diferenciais (veja seção 2.4.2).

Devido à possibilidade de variarmos V_{DC} em passos pequenos (0,5 mV) fomos capazes de obter pela primeira vez, diagramas de bifurcação e espaços de parâmetros da periodicidade e do maior expoente de Lyapunov, em uma boa resolução. Além disso, realizando uma análise, através de simulações, do nosso circuito de Chua mostrando que os resultados experimentais e os obtidos da simulação são coerentes. Porém devemos ressaltar que o foco desse trabalho foi nos resultados experimentais.

Dicionário de termos técnicos e abreviaturas

Para discutirmos sobre os sistemas não lineares é necessário definirmos formalmente algumas ferramentas quantitativas e qualitativas, para que seja mais fácil o entendimento de algumas propriedades. Para isso criamos um dicionário de termos técnicos e de abreviações para evitar repetições e para simplificada mente definirmos alguns termos técnicos que a todo o momento serão utilizados:

Atrator – é um conjunto de pontos no espaço de estados obtido, pela solução do sistema de equações diferenciais da evolução temporal do sistema ou pelas séries temporais experimentais. Um atrator tem este nome por consistir em um objeto no espaço de estados para o qual as trajetórias convergem no tempo. Um atrator pode ter uma dimensão característica inteira ou fracionária. No caso da dimensão ser fracionária o atrator é dito estranho. Simplificadamente podemos dividir os atratores em três tipos: periódicos, quase periódicos e caóticos, onde os períodos apresentam-se como ciclos limite no espaço de fase, os quase-periódicos como superfícies toroidais de N dimensões e os caóticos como regiões preenchidas no espaço de fase.

Atrator Duplo-Rolo (*Double-Scroll*) – Tipo especial de atrator caótico que apresenta no espaço de estados (x,y,z) um formato parecido com o de duas folhas que são enroladas juntas numa forma espiral em um número infinito de rotações. Originalmente esse tipo de atrator foi obtido no circuito de Chua.

Atrator Rössler – Tipo especial de atrator caótico que apresenta no espaço de estados um formato de espiral para fora no plano (x,y), ao redor de um ponto instável. Apresenta também um segundo ponto fixo, que causa um enrolamento do atrator na componente ortogonal a essa região espiral. Originalmente esse tipo de atrator foi obtido no sistema de Rössler, que é composto conjunto de equações diferenciais de primeira ordem. Os atratores de Rössler apresentam um comportamento similar aos atratores de Lorenz, porém são mais fáceis de serem analisados qualitativamente.

Amplificadores Operacionais (OpAmp) – É um componente eletrônico compacto construído da junção de resistores, capacitores e transistores. Um OpAmp apresenta duas entradas (V_+ e V_-) e uma saída (V_o), onde a função é apresentar na saída o múltiplo da diferença entre as duas entradas, por $V_o = A \cdot [(V_+) - (V_-)]$. Sendo A o ganho de tensão do OpAmp. Características que um OpAmp ideal deve apresentar são: resistência de entrada infinita, resistência de saída nula, ganho de tensão infinito, resposta a frequência infinita, insensibilidade à temperatura.

Bifurcação – É uma mudança no estado ou na topologia do atrator quando um parâmetro de controle é variado no sistema. Em geral, uma bifurcação é associada a mudanças na estabilidade da solução da equação da dinâmica não linear.

Curva I(V) – Medida que se faz da corrente I que passa por um dispositivo quando aplicamos uma tensão V no mesmo.

DAQmx – Placa de aquisição de dados de 1.2 MS/s (medidas/s) em um sistema de multiplexado de 8 canais diferenciais com 16 bits de resolução cada.

DC-offset – Em um OpAmp deveríamos ter na saída V_o um valor nulo quando temos exatamente os mesmo valores de entrada (V_+ e V_-), porém OpAmp's não ideais apresentam um valor de saída diferente de zero mesmo quando $(V_+)=(V_-)$. Esse valor de saída não nulo multiplicado pelo ganho A do OpAmp causa uma diferença de tensão *DC-offset* de saída.

Diagramas de Bifurcação – É uma representação gráfica do comportamento qualitativo das órbitas ao variarmos o valor de um dos parâmetros do sistema. Os diagramas de bifurcação são úteis para identificarmos qual é a influência desse parâmetro de controle na resposta do sistema. Os diagramas são construídos ao traçarmos a seção de Poincaré de uma das variáveis do sistema contra o parâmetro de controle.

Diagramas de Bifurcação por adição de Período – São casos especiais de rotas de bifurcação onde temos alternância entre regiões caóticas e periódicas, tal que as regiões periódicas próximas sempre se diferem de um número inteiro (passo inteiro). Exemplo: ... caos-(período-2)-caos-(período-3)-caos-(período-4)... nesse caso a adição de período foi ao passo de 1 em 1.

Dimensão de Hausdorff – É um número real não negativo associado a um espaço métrico, que define a dimensão de estruturas fractais. Definindo um espaço métrico X coberto por um número $N(r)$ de "bolas" de raio r que completamente cobre o espaço X. Quando diminuirmos r necessariamente aumentaremos a quantidade $N(r)$ para cobrir o espaço X, assim, quando $N(r)$ cresce como $1/r^d$, definimos d com a dimensão de Hausdorff.

Dimensão de Imersão – É a menor dimensão do espaço de fase necessária para representar um atrator de um sistema sem que ocorram cruzamentos de trajetórias. Esta dimensão é sempre definida por números inteiros positivos.

Dimensão de Informação – A dimensão de informação D_1 especifica como a quantidade de informação, necessária para determinarmos uma variável \vec{x} com uma precisão ϵ , se escala com a resolução ϵ . Muito utilizada nos estudos de comunicação e sincronismo entre sistemas.

Dimensão de Kaplan-Yorke (ou Dimensão de Lyapunov) – A dimensão de um atrator em um espaço de estados multidimensional pode ser definido em termos do valor médio dos expoentes de Lyapunov nesse espaço por : $D_{KY} = k + \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{|\lambda_{k+1}|}$, sendo λ_i os valores dos expoentes e k quantidade de expoentes positivos. A dimensão D_{KY} é considerada um limite superior da dimensão de informação D_1 .

Dimensão Fractal – é a dimensão de um objeto que não preenche completamente um volume no espaço em que é imerso.

Efeito Borboleta – O efeito borboleta refere-se à idéia de que o bater das asas da borboleta poderia criar pequenas modificações na atmosfera local, que no futuro poderiam alterar o caminho de um tornado, ou acelerando-o, ou freando-o ou até mesmo desviando-o de seu curso original. Reflete a idéia de hipersensibilidade às condições iniciais.

Espaço de Estados – Um sistema descrito por uma equação diferencial de ordem n pode também ser descrito por um conjunto de n equações todas de primeira ordem nas derivadas temporais das variáveis de estado. O espaço de estados é então definido pelos n valores das variáveis de estados desse sistema. Por exemplo, o circuito de Chua é descrito por três equações de primeira ordem com: $\dot{x} = \dot{x}(x, y, z)$, $\dot{y} = \dot{y}(x, y, z)$ e $\dot{z} = \dot{z}(x, y, z)$. Sendo assim o espaço de estados é definido pelos valores (x, y, z) .

Espaço de Fase – Sistemas podem ser descritos por vetores multidimensionais que evoluem em tempo contínuo ou discreto. O espaço no qual estes vetores são imersos é chamado espaço de fase. A dimensão deste espaço é inteira. Por exemplo: Espaço de fase $x(t)$ por $\dot{x}(t)$, de um oscilador harmônico unidimensional onde dado um ponto nesse espaço é possível definirmos toda a sua dinâmica.

Espaço de Parâmetros – São mapas bidimensionais descrito por dois parâmetros de controle do sistema a e b , tal que a resposta do sistema para essa condição inicial (a, b) será codificada numa escala de cores. Por exemplo, para o circuito de Chua, temos associada a condição inicial, o espaço de parâmetro $(V_{DC}, R) \rightarrow P$ (periodicidade da série) ou $(V_{DC}, R) \rightarrow \lambda_{\text{maior}}$ (maior expoente de Lyapunov). As respostas P e λ_{maior} são codificadas numa escala de cores coerente.

Expoentes de Lyapunov – São expoentes que descrevem a taxa de afastamento (no caso de serem positivos) ou de aproximação (no caso de negativos) de trajetórias regidas pela evolução temporal de um dado sistema dinâmico que tem condições iniciais próximas. Este expoente é uma medida da sensibilidade às condições iniciais e pode ser utilizado para definirmos se um sistema apresenta-se em comportamento caótico.

Maior expoente de Lyapunov: Uma série temporal caótica apresenta divergência exponencial de trajetórias próximas em uma certa direção do espaço de estados, logo nessa direção podemos definir o maior expoente de Lyapunov da série, já que nas outras direções necessariamente devemos ter contração do espaço de estados.

Espectro dos expoentes de Lyapunov: Para uma série temporal de dimensão m podemos obter m expoentes de Lyapunov diferentes, um para cada uma das m direções do espaço de estados. Todos esses expoentes definirão então o espectro dos expoentes de Lyapunov.

Falsos Vizinhos – São estados (posições) visitados em tempos distintos pela evolução temporal do sistema dinâmico espacialmente próximos, de forma a sugerir uma evolução temporal que viole as leis de Newton. Tal efeito pode ocorrer devido à presença de ruído ou à representação do atrator em uma dimensão inferior a dimensão definida pelo número de graus de liberdade do sistema dinâmico, dimensão de imersão.

Fluxos e Mapas – fluxos caracterizam a evolução temporal de um sistema num tempo contínuo. Mapas caracterizam a evolução temporal de um sistema num tempo discreto. Mapas podem ser obtidos à partir de fluxos através da seção de Poincaré.

Fonte DC – Fontes DC são fontes de tensão ou corrente contínua que alimentam o sistema, por exemplo, um circuito elétrico. Nesse trabalho utilizamos basicamente duas fontes de tensão *Keithley 237* e *Keithley 230*.

GPIB – Interface de comunicação de dados entre um computador e os instrumentos de medida. Esta interface permite o controle e envio de comandos remotos aos instrumentos.

Gyrator – Circuito elétrico que têm a função de um transformador de impedância. Podendo ser utilizado tanto para simular um indutor físico tanto como um capacitor dependendo da disposição dos componentes.

Iteração – Quantidade de vezes que se repete um algoritmo computacional ou equação matemática para se chegar a um resultado partindo dos resultados anteriores. Ex: quando estamos trabalhando com mapas iterativos temos que a função que mapeia é tal que $x_{n+1} = f(x_n)$, onde x_i é o valor da função no tempo discreto i .

Informação Mútua – Cálculos realizados considerando a entropia de Shannon que são utilizados para se obter o atraso (*delay*) de uma série temporal, que depois pode ser usado para reconstruir o atrator no espaço de estados, também chamado método de *delay*. O valor da informação mútua também quantifica quão sincronizado estão duas séries temporais distintas.

Labview – Linguagem de programação visual do tipo G, desenvolvida pela *National Instruments* onde a programação é feita de acordo com o modelo de fluxo de dados. Desenvolvida principalmente para automatização de experimentos científicos controlados por computador, porém apresenta todas as ferramentas operacionais necessárias para uma programação eficiente, bem como a possibilidade de programação paralela com outras linguagens de programação, tais como Fortran e C++.

Leis de Kirchhoff – Para sistemas não-dissipativos temos que o valor do potencial elétrico tem o mesmo valor depois de percorrido qualquer percurso em uma trajetória fechada, ou seja, a soma algébrica das diferenças de potencial elétrico ao longo de um percurso fechado é nula. As leis de Kirchhoff são baseadas na conservação de energia e no princípio de conservação de carga elétrica.

Lei de decaimento exponencial com a periodicidade – Para janelas periódicas complexas PWs temos que o tamanho de uma janela de periodicidade P decae exponencialmente de acordo com P , por um expoente $-\beta P$. Implicando em um limite experimental para a detecção de janelas de periodicidade elevada.

Linha de Carga – Linha de interseção entre a curva $I(V)$ da resistência R com a curva $I(V)$ do diodo de Chua que define os pontos de operação do circuito de Chua. As linhas de carga são obtidas quando analisamos as condições de equilíbrio do sistema.

Lyap_Spec – Software de análise de séries temporais de TISEAN que realiza o cálculo do espectro dos expoentes de Lyapunov através do método proposto em 1985 por Sano e Sawada.

Picos Múltiplos – São picos na série da transformada de Fourier que não apresentam restrições nas relações entre a amplitude e o índice n dos vetores de base da FFT, $\text{sen}(n\pi x/L)$ e $\text{cos}(n\pi x/L)$. Normalmente são associados a termos não lineares na decomposição FFT. Por exemplo: $f(x) = \text{sen}^2(2x) \cdot \text{cos}(x)$.

Picos Harmônicos – São picos na série da transformada de Fourier que apresentam restrições nas relações entre as amplitudes (a_n e b_n) e o índice n dos vetores de base da FFT, $\text{sen}(n\pi t/L)$ e $\text{cos}(n\pi t/L)$. Normalmente são associados a termos lineares na decomposição FFT. Segue forma trigonométrica da transformada de Fourier para uma função $f(t)$ tal que $f(t + 2L) = f(t)$.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \text{cos} \frac{n\pi t}{L} + b_n \text{sin} \frac{n\pi t}{L} \right]$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(t) \text{cos} \frac{n\pi t}{L} dt$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(t) \text{sin} \frac{n\pi t}{L} dt$$

Seção de Poincaré (mapa de Poincaré) – Na seção de Poincaré utilizaremos um hiperplano de dimensão $(m-1)$ para seccionar o atrator no espaço de estados, gerado a partir da série temporal do sistema. A órbita do atrator irá cruzar esse hiperplano orientado numa certa direção, marcando pontos sobre esse plano. Os pontos marcados sobre o hiperplano serão então salvos em uma nova série temporal que irá representar o sistema. Para cada orientação do hiperplano teremos uma série temporal ($\vec{x}_{\text{poincare}}$) distinta. Um método simples de obtermos a seção de Poincaré de uma série temporal é selecionarmos os pontos de máximo ou mínimo dessa série e os gravarmos então em uma nova série. Ao realizarmos sobre uma série temporal uma seção de Poincaré estaremos então reduzindo o estudo do sistema no fluxo (tempo contínuo) de dimensão m , para o estudo do sistema no tempo discreto, dimensão unitária.

Série Temporal – É uma sequência de medidas realizadas em função do tempo que contém informações sobre a dinâmica do sistema. As séries temporais podem ser obtidas através de medidas experimentais das variáveis do sistema, por exemplo, as variáveis xyz do circuito de Chua. Ou ainda podemos obter as séries temporais através da solução das equações diferenciais que regem o sistema.

TISEAN – “*Nonlinear Time Series Analysis*” softwares de código aberto distribuídos livremente na Internet que contém as principais ferramentas para análise e classificação de séries temporais caóticas.

Testes de Vizinhança – A fim de determinarmos o espectro dos expoentes de Lyapunov corretamente foram feitos testes de vizinhança, onde variamos o parâmetro “vizinhança k” do programa *Lyap_Spec* do TISEAN. A vizinhança foi variada de forma que uma fosse escolhida tal que o expoente $\lambda_{\text{médio}}$ tenha o valor mais próximo de zero e a soma dos três expoentes do espectro seja negativa.

Transformada de Fourier Unitária (UFFT) – De uma série temporal experimental $S(t)$ realizamos a seção de Poincaré selecionando os valores de máximos e mínimos, esse valores são gravados em outras duas séries temporais de tempo unitário, $S_{\text{máx}}(i)$ e $S_{\text{mín}}(j)$. Tomamos então essas duas séries e as intercalamos formando uma nova série tal que: $S_{\text{total}}(k) = [S_{\text{máx}}(i), S_{\text{mín}}(j), S_{\text{máx}}(i+1), S_{\text{mín}}(j+1)...]$. Na série $S_{\text{total}}(k)$ realizamos a transformada de Fourier FFT e contamos a quantidade de picos presentes para que seja determinada a periodicidade P da série temporal original $S(t)$.

Threshold filter – No caso da “detecção da periodicidade” temos que o *threshold filter* é um corte horizontal na série da transformada de Fourier Unitária UFFT que seleciona a quantidade de picos acima de um valor limite (*threshold*). No caso do espaço de parâmetros dos expoentes de Lyapunov, é um filtro que seleciona os valores acima de um valor limite ($\lambda_{\text{máximo}}$). Para todos os valores superiores a $\lambda_{\text{máximo}}$ ($\lambda > \lambda_{\text{máximo}}$) temos que λ passa a ser $\lambda_{\text{máximo}}$.

Abreviaturas

CI – Circuito integrado.

C₁ – Capacitor do circuito de Chua, sobre o qual se mede a variável x .

C₂ – Capacitor do circuito de Chua, sobre o qual se mede a variável y .

D_{KY} – Dimensão de Kaplan-Yorke.

D_I – Dimensão de Informação.

D_E – Dimensão de Imersão.

k (vizinhança) – Parâmetro do programa *Lyap_Spec* do TISEAN.

L – Indutor do circuito de Chua, sobre o qual se mede a variável z .

NDC – Curva de condutividade diferencial negativa, ($d(\text{corrente})/d(\text{tensão}) < 0$).

OpAmp – Amplificador Operacional.

P – Periodicidade de uma série temporal ou de uma janela PWs.

PWs – Janela complexa periódica.

ΔP – Largura da PWs.

R – Resistor variável do circuito de Chua.

r_L – Resistor variável do circuito de Chua.

S_n – Valores dos máximos da série temporal da variável x .

V_{DC} – Tensão aplicada em série com o diodo de Chua no circuito de Chua.

$\lambda_{\text{mínimo}}$ – Menor expoente do espectro dos Expoentes de Lyapunov para uma série temporal de dimensão 3.

$\lambda_{\text{médio}}$ – Expoente médio do espectro dos Expoentes de Lyapunov para uma série temporal de dimensão 3.

$\lambda_{\text{máximo}}$ – Maior expoente do espectro dos Expoentes de Lyapunov para uma série temporal.

λ – Expoente de Lyapunov.

β – Expoente da Lei de decaimento exponencial com a periodicidade para as janelas PWs.