

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE FÍSICA

Wanderson Maia Pimenta

Tomografia Experimental de Estados Quânticos
Implementação de Tomografia Mínima

Belo Horizonte
2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE FÍSICA

Wanderson Maia Pimenta

Tomografia Experimental de Estados Quânticos
Implementação de Tomografia Mínima

Dissertação apresentada ao Curso de Física da UFMG,
como requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Física.

Orientador: Sebastião José Nascimento de Pádua
Doutor em Física - UFMG

Belo Horizonte
2010

Pimenta, Wanderson Maia

Tomografia Experimental de Estados Quânticos / Wanderson Maia

Pimenta - 2010

30.p

Ciências Exatas. I.Título.

CDU teste

Wanderson Maia Pimenta

Tomografia Experimental de Estados Quânticos
Implementação de Tomografia Mínima

Dissertação apresentada ao Curso de Física da UFMG,
como requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Física.

BANCA EXAMINADORA

Sebastião José Nascimento de Pádua

Doutor em Física - UFMG

Carlos Henrique Monken

Doutor em Física - UFMG

Reinaldo Oliveira Vianna

Doutor em Física - UFMG

Resumo

Este trabalho tem como principal objetivo a implementação experimental da tomografia mínima em variáveis espaciais utilizando um modulador espacial de luz. Para tal fim, utilizamos as propriedades dos fótons produzidos pela conversão paramétrica descendente bem como a geração de estados discretos utilizando fendas duplas. Uma descrição teórica foi necessária para o entendimento do método de tomografia mínima. Foram escolhidos quatro estados que descrevem um tetraedro na esfera de Bloch e associados a estes estados, foram construídos quatro operadores, constituindo assim um conjunto POVM para a tomografia. Para a implementação experimental destes operadores, foram necessárias duas calibrações do modulador espacial. Valores de escalas de cinza e polarizações de entrada e saída foram determinados com o objetivo de aplicar diferenças de fase e/ou amplitudes específicas entre os feixes que passam pelas fendas duplas. Assim, através do estudo da tomografia mínima e do conhecimento do funcionamento do modulador e suas respectivas calibrações, foi possível realizar experimentalmente as tomografias mínimas para um e dois qubits.

Abstract

This work has as a main goal the implementation of the experimental minimal quantum tomography in spatial variables using a spatial light modulator. To produce the two photons states entangled in spatial variables we use the properties of the photons produced by Spontaneous Parametric Down Conversion (SPDC) and double slits. A theoretical description was necessary for the understanding of the minimal tomography method. Four states which describe a tetrahedron in the Bloch sphere were chosen and associated to these states, were built four operators, making it a POVM set for tomography. For the experimental implementation of these operators, it took two calibrations of the spatial light modulator. Values of grayscales and polarization angles of input and output polarizers were determined in order to apply different phases and/or specific amplitude differences between the beams that pass through each slit path. Thus, through the study of minimal tomography and the knowledge of the operation of the modulator and their calibration, it was possible to experimentally perform the minimal quantum tomography for one and two qubits in spatial variables.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Sebastião de Pádua, pela paciência e pelos ensinamentos. Sem dúvida nenhuma ele é um profissional a ser espelhado e também uma excelente pessoa.

Aos amigos do laboratório José, Breno, Marcos, Mariana, Pierre e Olavo pelas discussões e contribuições a este trabalho. Em especial, gostaria de agradecer o José pelos ensinamentos da parte experimental.

Aos meus pais e minha namorada pelo apoio.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Lista de Figuras

- 2.1 Conversão Paramétrica Descendente Espontânea (*CPD*). A imagem (a) mostra a interação através de níveis de energia. Por outro lado, a imagem (b) mostra uma representação da CPD, o feixe de laser Pump incidindo em um cristal não-linear (*CNL*) e gerando os fótons gêmeos. 13
- 2.2 Casamentos de fase. As imagens (a) e (b) representam os cones de luz produzidos pelos casamentos de fase tipo I e tipo II respectivamente. . . . 17
- 2.3 Representação dos estados gerados pela conversão paramétrica e após os fótons passarem pelas fendas. A_i e A_s representam funções retângulo que descrevem matematicamente as fendas múltiplas. 18
- 2.4 Ilustração de fenda (a) e função retângulo (b) para fenda quádrupla. . . . 19
- 2.5 Correlação entre os fótons convertidos devido a focalização do feixe do Pump no plano das fendas múltiplas. As setas servem para indicar os possíveis caminhos dos fótons gêmeos. 22
- 3.1 Escalas de cinza. A Fig.(a) mostra uma determinada escala de cinza preenchendo totalmente o display do LCD. Por outro lado, a Fig.(b) mostra duas escalas de cinza dividindo igualmente a tela do display. Imagens como a apresentada na Fig.(b) são utilizadas quando queremos modificar a amplitude ou a fase de um feixe em relação ao outro, quando cada um deles é transmitido por uma das fendas de uma mesma fenda dupla. 24
- 3.2 Montagens utilizadas para a primeira calibração. A Fig.(a) corresponde ao interferômetro de Michelson e a Fig.(b) corresponde a uma variação do Michelson utilizando fenda dupla. BS é um divisor de feixes 50/50. 25

3.3	Potência ótica em função da EC utilizando o laser de <i>HeNe</i> e utilizando a montagem do interferômetro de Michelson (a). Dependência entre o $\cos(\Delta\phi)$ também em função da EC para os interferômetros de Michelson, fenda dupla com <i>HeNe</i> e fenda dupla com os fótons gerados pela CPD (b). As medidas foram realizadas com o tempo de aquisição de 10s.	29
3.4	Padrões de interferência de Young utilizando as escalas de cinza da Tabela 3.1 e utilizando o laser de <i>HeNe</i> . Nos padrões de interferência cujos os pontos são esferas e quadrados, a mesma EC foi utilizada para os feixes transmitidos por ambas as fendas. Para os gráficos com pontos que são triângulos, diferentes EC foram utilizadas em cada fenda produzindo um deslocamento do padrão.	30
3.5	Motagem experimental utilizada para a realização da segunda calibração. .	31
3.6	Medidas de contagens (a.1, b.1, c.1) e coincidências (a.2, b.2, c.2) para as polarizações de 90° (a.1 e a.2), 75° (b.1 e b.2) e 60° (c.1 e c.2) a título de ilustração.	33
3.7	Imagens das fendas utilizando as escalas de cinza e polarizações de saída presentes na Tabela 3.2. A imagem (a) corresponde a fase zero, a imagem (b) corresponde a fase π , a imagem (c) corresponde a fase $\pi/2$ e a imagem (d) corresponde a fase $-\pi/2$	34
3.8	Medidas dos padrões de interferência utilizando os dados da Tabela 3.2. As curvas sólidas representam o ajuste feito utilizando a Equação 3.5. Os valores obtidos para o parâmetro c , que corresponde a uma fase extra introduzida no padrão de interferência, correspondem a -1,49 para a curva (b), 0,92 para a curva (c) e 3,95 para a curva (d). Como π vale 3,14, observamos que as curvas (b) e (d) possuem deslocamentos de fase análogos ao que era previsto, enquanto a curva (c) infelizmente não possui um deslocamento de $-\pi/2$	35
4.1	Esfera de Bloch.	39
4.2	Representação dos vetores que definem um tetraedro na esfera de Bloch. .	41

5.1	Montagem experimental utilizada para a realização da tomografia de um qubit.	47
5.2	Medida do padrão de interferência com os fótons gêmeos (a) e medida das contagens dos fótons transmitidos pela fenda dupla em função da posição vertical do bloqueador (b). Em (a), a medida do padrão de interferência é realizada em coincidência entre o fóton transmitido pela fenda dupla, após ser refletido pelo SLM, e o outro fóton do par, usado como trigger. A diferença de fase produzida pelo SLM entre as fendas é nula. Em (b), o bloqueador foi posicionado entre o SLM e a fenda dupla. A curva contínua presente na figura (a) corresponde ao fit utilizando a Equação 3.5.	50
5.3	Histogramas com as probabilidades das partes real e imaginária da matriz densidade obtida.	51
5.4	Montagem experimental utilizada para a realização da tomografia de dois qubits. Note que a fenda dupla está perpendicular ao plano formado pelos feixes de fótons.	52
5.5	Medidas das imagens, (a) e (b), e do padrão de interferência condicional (c) quando o feixe do Pump esta focalizando no plano da fenda dupla. As medidas foram realizadas com o modulador espacial de luz desligado para garantir que não haja nenhum tipo de interação entre o mesmo e os feixes incidentes sobre ele. As curvas contínuas presentes na figura (c) correspondem aos fits utilizando a Equação 3.5. Para o fit de cor vermelha, obtivemos o valor de parâmetro c de 3,3. Assim, houve uma variação de fase bem próxima a π com o deslocamento de um dos detectores.	54
5.6	Histogramas com as probabilidades das partes real e imaginária da matriz densidade obtida.	55

Lista de Tabelas

3.1	Conjunto de pontos encontrados para tomografia de 1 qubit.	30
3.2	Pontos encontrados para a tomografia de 2 qubits	32

Sumário

Lista de Figuras	4
Lista de Tabelas	7
1 Introdução	10
2 Conversão Paramétrica Descendente	12
2.1 Introdução	12
2.2 Teoria Quântica da CPD	12
2.2.1 Cálculo do Hamiltoniano de interação	13
2.2.2 Condições de conservação	15
2.2.3 O estado quântico da CPD	17
2.3 Geração de Estados de Qudits Espaciais	18
3 O Modulador Espacial de Luz	23
3.1 Introdução	23
3.1.1 LC-R 2500	23
3.2 Primeira calibração do SLM	25
3.2.1 Experimento	25
3.2.2 Modelo teórico	26
3.2.3 Resultados experimentais	28
3.3 Segunda calibração do SLM - Mapeamento	30
3.3.1 Experimento	31
3.3.2 Resultados Experimentais	32

4 Tomografia	36
4.1 Representação de estado	36
4.1.1 Estados puros e estados mistos	36
4.1.2 Matriz densidade	37
4.1.3 Tomografia para um qubit	39
4.2 Tomografia mínima	40
4.2.1 Estudo da tomografia mínima para um qubit	42
4.2.2 Estudo da tomografia mínima para dois qubits	43
4.3 Método Máxima verossimilhança	44
5 Experimentos	47
5.1 Para um qubit	47
5.1.1 Procedimento utilizado	48
5.1.2 Resultados	49
5.2 Para dois qubits	51
5.2.1 Procedimento utilizado	53
5.2.2 Resultados	53
6 Conclusões	56
Apêndices	58
A Cálculo das relações necessárias para a tomografia de dois qubits	58
B Programas utilizados	64
Referências Bibliográficas	70

1 Introdução

Nos últimos anos, com o aumento da tecnologia, a implementação experimental de fundamentos de computação e informação quântica tornaram-se cada vez mais comuns. Através de uma série de medidas em um enorme conjunto de cópias indenticamente preparadas de um sistema físico é possível determinar com razoável precisão o estado quântico de um sistema [1]. Sistemas quânticos de dois níveis, os chamados qubits, são comumente utilizados para a realização destes tipos de experimentos. Estados de Spin de um elétron [2] bem como estados de polarização de um fóton [3] podem ser citados como exemplos. Particularmente, outro tipo de estado que é bastante utilizado, são os estados gerados através do processo de conversão paramétrica descendente [4]. Este processo é caracterizado pela geração de dois fótons, denominados fótons gêmeos, quando um feixe de laser incide em um cristal não-linear. Também podemos criar estados d -dimensionais utilizando fendas múltiplas, como será explicado no capítulo seguinte. Estes tipos de estados são muito úteis, pois sua implementação experimental é razoavelmente simples e permitem o teste de propostas teóricas na área de informação quântica.

Em muitas aplicações em óptica, há a necessidade de se controlar a fase espacial e/ou a amplitude de um feixe. Para este fim, uma ferramenta que está se tornando cada vez mais comum é o chamado Modulador Espacial de Luz (*spatial light modulator* - *SLM*). Basicamente, o modulador é constituído por um display de cristal líquido que através do ordenamento das moléculas constituintes conseguem produzir variações de fase e amplitude em um feixe de luz refletido ou transmitido.

Uma importante técnica para a determinação do estado quântico de um sistema é a tomografia. Através de uma série de medidas em diferentes bases, é possível com este método determinar o estado quântico do sistema. Usualmente, a tomografia é realizada medindo-se os auto-estados das matrizes de Pauli, para um sistema de duas dimensões. Para um qubit por exemplo, utilizando este método é possível determinar a matriz densidade através de seis medidas experimentais. Por outro lado, *Řeháček* [5] mostrou que, através de estados especialmente escolhidos, que para um qubit delimitam um tetraedro na esfera de Bloch, é possível com apenas quatro medidas, determinar a matriz densidade do sistema. Este método foi denominado por eles de tomografia mínima.

Neste sentido, este trabalho tem como objetivo a realização experimental da tomografia mínima para um e dois qubits utilizando um SLM. No segundo capítulo, apresentamos uma revisão do processo da Conversão Paramétrica Descendente bem como suas características e implicações. No capítulo seguinte, apresentamos uma revisão sobre o Modulador Espacial de Luz utilizado, suas propriedades e as calibrações realizadas para a implementação experimental das tomografias de um e dois qubits e apresentaremos alguns resultados obtidos. No capítulo três faremos uma breve revisão de alguns conceitos importantes a cerca da mecânica quântica e em especial sobre a técnica de Tomografia Mínima. Também discutiremos a aproximação numérica Máxima verossimilhança (*Maximum-Likelihood*) que foi utilizada neste trabalho. No capítulo seguinte apresentamos os experimentos de um e dois qubits bem como seus respectivos resultados experimentais e discussões. Por fim, no sexto capítulo apresentamos as conclusões deste trabalho e as perspectivas para trabalhos futuros.

2 Conversão Paramétrica Descendente

Neste capítulo será feita uma pequena revisão do processo de Conversão Paramétrica Descendente (CPD). Descreveremos a teoria quântica que descreve este processo bem como um importante resultado obtido por Monken, Souto Ribeiro e S. Pádua [6]. Logo em seguida, deduziremos o estado resultante após o par de fótons passar por fendas múltiplas. Também apresentaremos os efeitos que ocorrem sobre este estado quando o feixe de bombeamento do laser é focalizado no plano das fendas.

2.1 Introdução

A Conversão Paramétrica descendente é um processo óptico não-linear que é caracterizado pelo feixe de bombeamento do laser (chamado *Pump*), com vetor de onda \mathbf{k}_p e frequência ω_p , que quando incidido em um cristal não-linear, excita elétrons para um nível de energia virtual, como mostra a Figura 2.1(a). Decaimentos espontâneos deste nível contribuem para a emissão de pares de fótons com frequências ω_s e ω_i e vetores de onda \mathbf{k}_s e \mathbf{k}_i , como é ilustrado na Figura 2.1(b). Estes fótons são chamados *Signal* e *Idler*, e são mais conhecidos como fótons gêmeos [4].

Este processo é caracterizado por haver conservação tanto de energia como de momento, resultados que serão demonstrados ao longo deste capítulo.

2.2 Teoria Quântica da CPD

Apresentaremos a descrição quântica da conversão paramétrica descendente espontânea devido a Lijun Wang [7]. Para a realização dos cálculos ele considerou que o volume de interação do meio não-linear é espacialmente uniforme e também assumiu que o cristal é birrefringente. Finalmente, como não há atenuações significantes do Pump, podemos tratá-lo como uma onda clássica.

2.2.1 Cálculo do Hamiltoniano de interação

Como a interação entre o Pump e o cristal não-linear é suficientemente fraca, podemos tratá-la como uma perturbação. O Hamiltoniano do sistema será composto por duas partes, a primeira correspondendo a interação linear e a segunda sendo compreendida pela parte perturbativa. Logo

$$H = H_0 + H_I, \quad (2.1)$$

onde H_0 e H_I correspondem as partes linear e não-linear do Hamiltoniano, respectivamente.

As componentes linear e não-linear são dadas por

$$H_0 = \frac{1}{2} \int (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dr \quad (2.2)$$

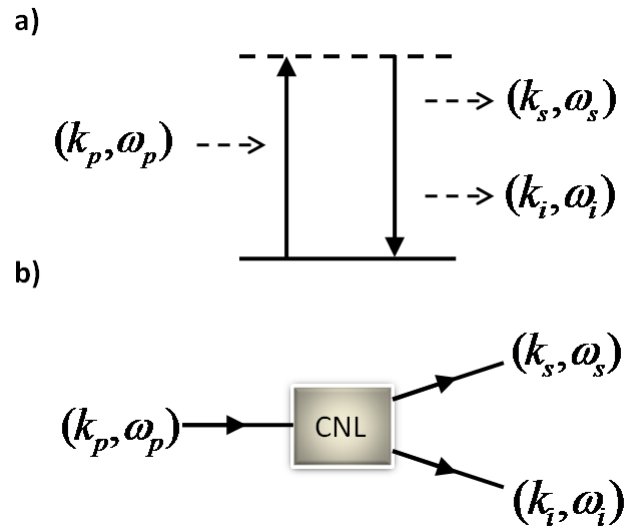


Figura 2.1: Conversão Paramétrica Descendente Espontânea (*CPD*). A imagem (a) mostra a interação através de níveis de energia. Por outro lado, a imagem (b) mostra uma representação da *CPD*, o feixe de laser Pump incidindo em um cristal não-linear (*CNL*) e gerando os fótons gêmeos.

e

$$\begin{aligned} H_I &= \frac{1}{2} \int_V d\mathbf{r} \mathbf{E} \cdot \mathbf{P}^{(NL)} \\ &= \frac{1}{2} \int_V d\mathbf{r} E_i(\mathbf{r}, t) \int_0^\infty \int_0^\infty dt' dt'' \chi_{ijk}^{(2)} E_j(\mathbf{r}, t-t') E_k(\mathbf{r}, t-t''), \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde \mathbf{D} é o vetor deslocamento elétrico, V é o volume onde ocorre a interação e $\chi_{ijk}^{(2)}$ é a susceptibilidade elétrica correspondente a parte não-linear da interação. Na Equação 2.3, $\mathbf{P}^{(NL)}$ representa a polarização correspondente a parte não-linear da interação. Esta componente é dada por

$$\mathbf{P}^{(NL)}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \chi^{(2)}(t', t'') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t-t'') dt' dt''. \quad (2.4)$$

Para tratar o processo do ponto de vista da Ótica Quântica, substituiremos os campos macroscópicos por operadores campo. O operador campo é dado por [4]

$$\begin{aligned} \hat{E}(\mathbf{r}, t) &= \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) + \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}, s} \mathbf{e}_{\mathbf{k}, s} [l(\omega) \hat{a}_{\mathbf{k}, s} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + l^*(\omega) \hat{a}_{\mathbf{k}, s}^\dagger e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}], \end{aligned} \quad (2.5)$$

sendo $\mathbf{e}_{\mathbf{k}, s}$ é um vetor unitário denotando a polarização do modo, $\hat{a}_{\mathbf{k}, s}^\dagger$ e $\hat{a}_{\mathbf{k}, s}$ são os operadores criação e aniquilação, respectivamente. Por último, $l(\omega)$ é dado por

$$l(\omega) = i \left[\frac{\hbar \omega(\mathbf{k}, s)}{2\epsilon_0 n^2(\mathbf{k}, s)} \right]^{1/2}, \quad (2.6)$$

onde ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo e $n(\mathbf{k}, s)$ é o índice de refração do meio.

Substituindo as equações 2.5 e 2.6 na Equação 2.4 e também desprezando os termos que não conservam energia, obtemos o Hamiltoniano da CPD

$$\begin{aligned} \hat{H}_I(t) &= \frac{1}{V^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}_s, s_s} \sum_{\mathbf{k}_i, s_i} \sum_{\mathbf{k}_p, s_p} l^*(\omega_s) l^*(\omega_i) l^*(\omega_p) \hat{a}_{\mathbf{k}_s, s_s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_i, s_i}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_p, s_p} e^{i(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t} \\ &\quad \times [\tilde{\chi}_{ijk}^{(2)}(\mathbf{e}_{k_p, s_p})_i (\mathbf{e}_{k_s, s_s})_j^* (\mathbf{e}_{k_i, s_i})_k^*] \int_V d\mathbf{r} e^{-i(k_s + k_i - k_p) \cdot \mathbf{r}} + c.h., \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde *c.h.* representa o conjugado hermitiano do primeiro termo e os índices s, i, p representam os fótons Signal, Idler e Pump, respectivamente. $\tilde{\chi}_{ijk}^{(2)}$ é dado por

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{ijk}^{(2)} &= \tilde{\chi}_{ijk}^{(2)*}(\omega_p = \omega_s + \omega_i) + \tilde{\chi}_{jik}^{(2)}(\omega_s = \omega_p - \omega_i) \\ &+ \tilde{\chi}_{kij}^{(2)}(\omega_i = \omega_p - \omega_s), \end{aligned} \quad (2.8)$$

com

$$\tilde{\chi}_{ijk}^{(2)}(\omega = \omega' + \omega'') \equiv \int_0^\infty \int_0^\infty dt' dt'' \tilde{\chi}^{(2)}(t', t'') e^{-i(\omega' t' + \omega'' t'')}. \quad (2.9)$$

Da Equação 2.7 fica evidente que no processo da conversão paramétrica descendente há a destruição do fóton Pump ($\hat{a}_{\mathbf{k}_p, s_p}$) e a criação dos fótons Signal ($\hat{a}_{\mathbf{k}_s, s_s}^\dagger$) e Idler ($\hat{a}_{\mathbf{k}_I, s_I}^\dagger$).

2.2.2 Condições de conservação

Na representação de Schrödinger, a evolução de um estado quântico é definida como [8]:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, 0)|\psi(0)\rangle = \hat{U}(t, 0)|vac\rangle, \quad (2.10)$$

onde $\hat{U}(t, 0)$ é o operador evolução temporal do sistema e o estado inicial é representado pelo estado de vácuo ($|vac\rangle$). Este operador é dado por

$$\hat{U}(t, 0) = \exp\left[\frac{1}{i\hbar} \int_0^t d\tau \hat{H}_I(\tau)\right] = \hat{I} + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t d\tau \hat{H}_I(\tau) + \dots \quad (2.11)$$

A segunda parte da expressão acima representa a expansão do operador evolução temporal. Foram considerados termos somente até primeira ordem pois termos de ordens superior correspondem a mais de dois fótons. Para a determinação do estado resultante dos fótons gerados pela CPD basta conhecer o valor do segundo termo da expansão acima. Através deste resultado é possível obter o operador evolução temporal do sistema e consequentemente deduzir o estado dos fótons gerados.

Portanto, para determinarmos a evolução temporal integramos a Equação 2.7.

Dai:

$$\begin{aligned}
\int_0^t d\tau \hat{H}_I(\tau) &= \frac{1}{V^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}_s, s_s} \sum_{\mathbf{k}_i, s_i} \sum_{\mathbf{k}_p, s_p} l^*(\omega_s) l^*(\omega_i) l(\omega_p) \hat{a}_{\mathbf{k}_s, s_s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_i, s_i}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_p, s_p} e^{i(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)t/2} \\
&\times [\tilde{\chi}_{ijk}^{(2)}(\mathbf{e}_{\mathbf{k}_p, s_p})_i (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_s, s_s})_j^* (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_i, s_i})_k^*] \frac{\sin(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t/2}{(\omega_s + \omega_i - \omega_p)/2} \\
&\times \prod_{m=1}^3 \left[\frac{\sin(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p)_m l_m/2}{(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p)_m/2} \right] e^{-i(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p) \cdot \mathbf{r}_0} + c.h.,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

onde l_m são as dimensões do volume de interação e \mathbf{r}_0 corresponde a origem do sistema de coordenadas. Das funções $\sin(x)/x$ presentes na equação acima, obtemos as condições para a conservação de energia bem como para a conservação de momento:

$$\hbar\omega_p = \hbar\omega_s + \hbar\omega_i \tag{2.13}$$

e

$$\hbar\mathbf{k}_p = \hbar\mathbf{k}_s + \hbar\mathbf{k}_i. \tag{2.14}$$

Estas condições somente serão satisfeitas quando as condições de casamento de fase também forem satisfeitas. Para ficar mais claro, podemos substituir a equação $|\mathbf{k}| = n\omega/c$ na equação da conservação do momento, onde n representa o índice de refração do meio e c a velocidade da luz. É de se salientar que o índice de refração em um cristal birrefringente depende da direção de propagação do feixe bem como de sua polarização e da frequência da luz incidente [9]. Logo, a expressão para a conservação do momento pode ser reescrita como:

$$n(\theta_p, \omega_p)\omega_p \hat{\mathbf{k}}_p = n(\theta_s, \omega_s)\omega_s \hat{\mathbf{k}}_s + n(\theta_i, \omega_i)\omega_i \hat{\mathbf{k}}_i. \tag{2.15}$$

θ_j com $j = p, s, i$ representa o ângulo entre a direção de propagação dos feixes Pump, Signal e Idler e o eixo óptico do cristal. Há duas maneiras de se satisfazer a equação acima, o casamento de fase tipo I e o tipo II. A Figura 2.2 ilustra os dois tipos de casamento de fase. No casamento de fase tipo I, os feixes dos fótons gêmeos possuem polarizações ortogonais a do Pump e são emitidos em um contínuo de cores constituídos de cones concêntricos em torno da direção do feixe do laser. Por outro lado, no casamento de fase do tipo II, os gêmeos possuem polarizações ortogonais porém com uma delas coincidindo com a polarização do Pump e são emitidos em cones deslocados e não coaxiais com a direção de propagação com o feixe do Pump.

2.2.3 O estado quântico da CPD

Como neste trabalho consideraremos as correlações transversais espaciais dos fótons, utilizaremos o tratamento proposto por Monken, Souto Ribeiro e S Pádua [6]. Eles mostraram que a Equação 2.12 nas variáveis de momento transversal dos fótons gerados pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\int_0^t d\tau \hat{H}_I(\tau) = \eta \int_v dq_s \int_\Omega dq_i v(q_s + q_i) \hat{a}^\dagger(q_s) \hat{a}^\dagger(q_i) + c.h., \quad (2.16)$$

onde η é uma constante que absorve todas as outras constantes do cálculo e $v(q)$ é o espectro angular do feixe do Pump em $z = 0$ (plano do cristal). Nesta aproximação, os efeitos de birrefringência dos cristais geradores de fótons gêmeos foram desprezados. Este estado vale na aproximação de cristal fino e feixes monocromáticos.

Utilizando a equação acima e a Equação 2.11, a Equação 2.10 pode ser reescrita e chegamos ao estado da CPD. Logo

$$|\psi\rangle = |vac\rangle + \int_\Omega dq_s \int_\Omega dq_i v(q_s + q_i) |1q_s\rangle |1q_i\rangle, \quad (2.17)$$

sendo que $|1q_j\rangle$ é o estado de Fock de um fóton no modo $j = s, i$ com vetor de onda transversal q_j . Desta equação vemos claramente que o espectro angular do feixe de laser é transferido para o estado dos fótons gêmeos através da expressão $v(q_s + q_i)$, onde o espectro angular é a transformada de Fourier do perfil transversal do campo do feixe do

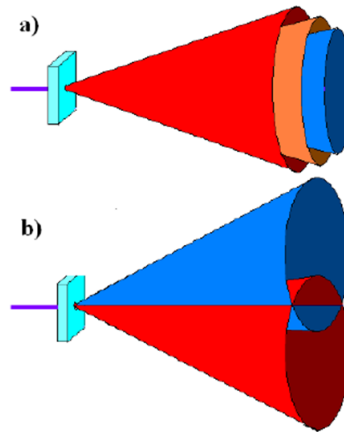


Figura 2.2: Casamentos de fase. As imagens (a) e (b) representam os cones de luz produzidos pelos casamentos de fase tipo I e tipo II respectivamente.

laser. Também, como $v(q_s + q_i)$ é uma função não-fatorável de q_s e q_i , observa-se que os fótons estão emaranhados nas variáveis de momento transversal.

2.3 Geração de Estados de Qudits Espaciais

Chamamos de Qudits estados quânticos de dimensão d . Estados de duas dimensões ($d = 2$) são denominados Qubits e de três dimensões ($d = 3$) são chamados de Qutrits [10]. Utilizando as correlações transversais dos fótons gêmeos gerados pela CPD, podemos gerar estados de d dimensões utilizando fendas múltiplas [10], como é mostrado na Figura 2.3.

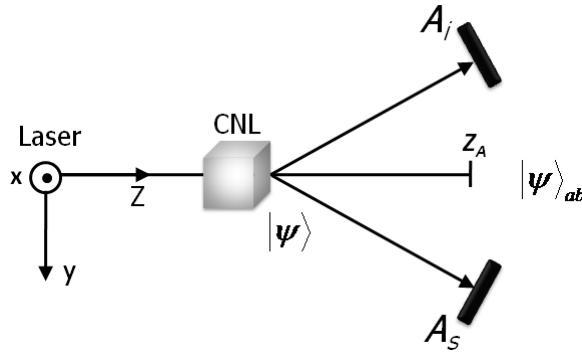


Figura 2.3: Representação dos estados gerados pela conversão paramétrica e após os fótons passarem pelas fendas. A_i e A_s representam funções retângulo que descrevem matematicamente as fendas múltiplas.

O estado dos fótons convertidos logo após passarem pelas fendas múltiplas é dado por [11]:

$$|\psi_{ab}\rangle \propto \int dq_i \int dq_s F(q_i, q_s) |1q_i\rangle |1q_s\rangle, \quad (2.18)$$

com

$$F(q_i, q_s) = \int dx_i \int dx_s A_i(x_i) A_s(x_s) W\left(\frac{x_i + x_s}{2}; z_A\right) \times \exp\left[\frac{ik}{8z_A}(x_s - x_i)^2\right] e^{(q_i x_i - q_s x_s)}. \quad (2.19)$$

Aqui, x_i e x_s são as componentes transversais da posição enquanto q_i e q_s são as componentes transversais dos vetores de onda \mathbf{k}_i e \mathbf{k}_s , respectivamente. As funções A_i e A_s

são funções transmissão das fendas múltiplas enquanto W descreve o perfil transversal do campo elétrico do feixe do laser na posição z_A .

As fendas podem ser representadas por funções retângulo, que apresentam os valores zero ou um, dependendo da posição. A função retângulo é dada por [10, 9]

$$A(x) = \sum_{l=-l_D}^{l_D} \Pi\left(\frac{x - ld}{2a}\right), \quad (2.20)$$

onde d e $2a$ representam a separação entre as fendas e a abertura, como é ilustrado na Figura 2.4 para uma fenda quádrupla.

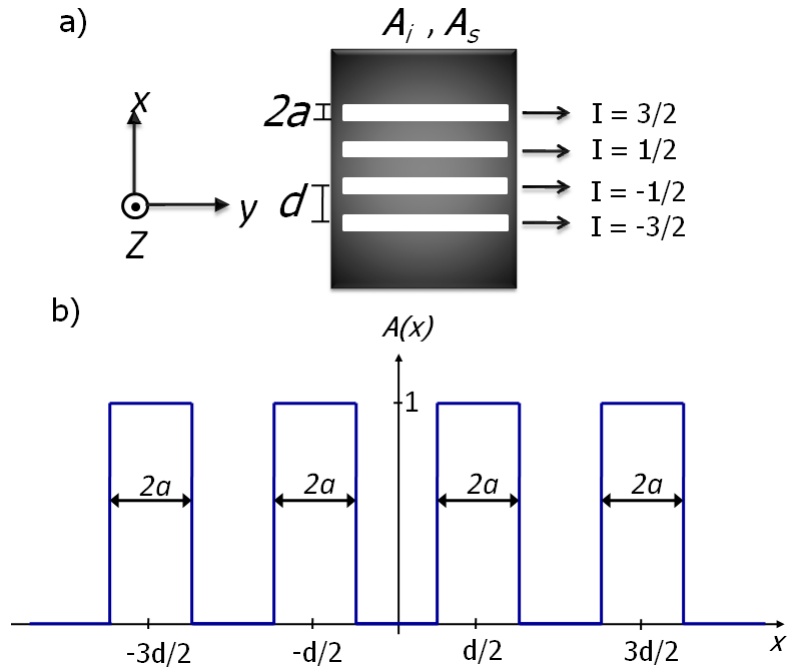


Figura 2.4: Ilustração de fenda (a) e função retângulo (b) para fenda quádrupla.

O termo l_D contido na Equação 2.20 é dado por

$$l_D = \frac{d-1}{2}, \quad (2.21)$$

onde D representa o número de aberturas de uma dada fenda múltipla.

Substituindo a Equação 2.20 na Equação 2.19 obtemos

$$\begin{aligned}
F(q_i, q_s) &= \sum_{l=-l_D}^{l_D} \sum_{m=-l_D}^{l_D} \int_{ld-a}^{ld+a} dx_i \int_{md-a}^{md+a} dx_s W\left(\frac{x_i + x_s}{2}; z_A\right) \\
&\times \exp\left[\frac{ik}{8z_A}(x_s - x_i)^2\right] e^{-i(q_i x_i - q_s x_s)}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Para facilitar os cálculos podemos fazer as seguintes mudanças de variáveis:

$$x'_i = x_i - ld \tag{2.23}$$

e

$$x'_s = x_s - md. \tag{2.24}$$

Através da mudança de variáveis proposta e assumindo que o perfil transversal do laser é constante sobre o intervalo $[-a, a]$, a Equação 2.22 pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
F(q_i, q_s) &= \sum_{l=-l_D}^{l_D} \sum_{m=-l_D}^{l_D} \exp\left[i\frac{kd^2}{8z_A}(m-l)^2\right] e^{-id(q_i l + q_s m)} \\
&\times W\left(\frac{(l+m)d}{2}; z_A\right) \int_{-a}^a dx'_i e^{-iq_i x'_i} \int_{-a}^a dx'_s e^{-iq_s x'_s}.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Substituindo a Equação 2.25 na Equação 2.18 obtemos o estado do par de fótons logo após passar por fendas:

$$\begin{aligned}
|\psi_{ab}\rangle &\propto \sum_{l=-l_D}^{l_D} \sum_{m=-l_D}^{l_D} W\left(\frac{(l+m)d}{2}; z_A\right) \exp\left[i\frac{kd^2}{8z_A}(m-l)^2\right] \\
&\times \int dq_i e^{-iq_i ld} \text{sinc}(q_i a) |1q_i\rangle \int dq_s e^{-iq_s md} \text{sinc}(q_s a) |1q_s\rangle.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Podemos simplificar ainda mais a equação acima. Para isso definiremos os seguintes estados:

$$|l\rangle = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int dq_i e^{-iq_i ld} \text{sinc}(q_i a) |1q_i\rangle \tag{2.27}$$

e

$$|m\rangle = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int dq_s e^{-iq_s m d} \text{sinc}(q_s a) |1q_s\rangle. \quad (2.28)$$

Qualquer um dos estados definidos acima, na representação de posição [12], pode ser mostrado como sendo o estado de um fóton que foi transmitido através de uma fenda simples e que está a uma distância ld do centro da fenda múltipla ($x = 0$) [9, 10]. Isto pode ser feito sem perda alguma de informação, pois através das aproximações utilizadas neste tratamento, os feixes da conversão paramétrica são aproximados por ondas planas, de modo que podemos considerar uma representação de posição para o estado de um fóton, $|1x\rangle$, que é relacionado com o estado de Fock $|1q\rangle$ por uma transformada de Fourier:

$$|1x\rangle = \frac{1}{2\pi} \int dq e^{iqx} |1q\rangle \longrightarrow |1q\rangle = \int dx e^{-iqx} |1x\rangle. \quad (2.29)$$

Assim, a Equação 2.27 pode ser reescrita como:

$$|l\rangle = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \int dx \prod [(x - ld)/2a] |1x\rangle, \quad (2.30)$$

ou seja, o estado $|l\rangle$ representa o fóton transmitido pela abertura l . Como [9, 10]

$$\langle l|l'\rangle = \delta_{ll'}, \quad (2.31)$$

podemos utilizar estes estados para definir o espaço de Hilbert de cada um dos fótons gêmeos transmitidos pelas fendas múltiplas. A dimensão do espaço de um fóton será então definida pela quantidade de fendas simples presentes na fenda múltipla D pela qual este fóton foi enviado. Portanto, a Equação 2.27 pode ser reescrita como

$$|\psi_{ab}\rangle \propto \sum_{l=-l_D}^{l_D} \sum_{m=-l_D}^{l_D} W\left(\frac{(l+m)d}{2}; z_A\right) \exp\left[i\frac{kd^2}{8z_A}(m-l)^2\right] |l\rangle_i \otimes |m\rangle_s. \quad (2.32)$$

Se considerarmos o caso em que o perfil transversal do feixe do laser é menor que a separação entre as fendas, como discutiremos na tomografia de dois qubits, ou seja, $W(x; z_A) = \text{constante}$ para $-a < x < a$ e $W(x; z_A) = 0$ para $|x| > a$, teremos que após a normalização, o estado resultante será

$$|\psi_{ab}\rangle \propto \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{l=-l_D}^{l_D} \exp\left[ik\frac{d^2 l^2}{2z_A}\right] |l\rangle_i \otimes |-l\rangle_s, \quad (2.33)$$

que é um estado emaranhado, como discutido na Ref. [13]. Para fazer o perfil transversal menor que a separação entre as fendas, basta focalizar o feixe do Pump no plano das

fendas múltiplas. Fazendo este procedimento, o estado do fóton $|m\rangle$ passará a ser $| -l\rangle$. Sempre que um fóton passar por uma determinada fenda, o gêmeo dele passará pela fenda simetricamente oposta a ela, como é ilustrado na Figura 2.5.

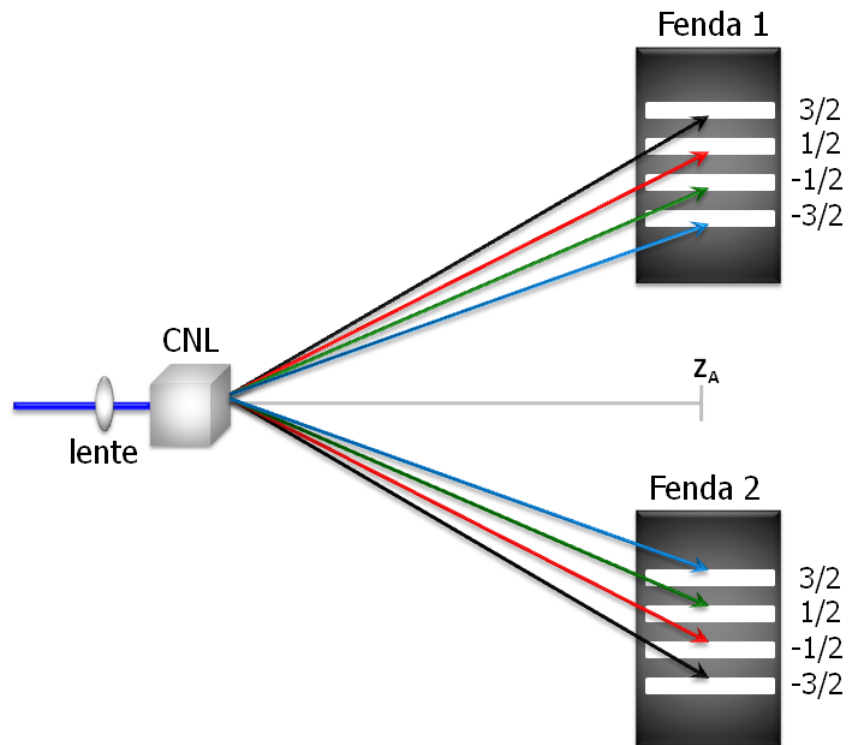


Figura 2.5: Correlação entre os fótons convertidos devido a focalização do feixe do Pump no plano das fendas múltiplas. As setas servem para indicar os possíveis caminhos dos fótons gêmeos.

3 O Modulador Espacial de Luz

Neste capítulo faremos uma breve descrição sobre o modulador espacial de luz (*SLM*). Em seguida, discutiremos duas calibrações do modulador que foram necessárias para a realização das tomografias de um e dois qubits. Resultados experimentais serão apresentados, bem como algumas discussões pertinentes.

3.1 Introdução

Cada vez mais em experimentos de óptica, tanto clássica quanto quântica, se faz o uso de dispositivos a base de cristais líquidos (*liquid crystal display* - LCD) [14, 15, 16]. Através destes dispositivos, temos a liberdade de modular tanto a amplitude como também a fase do feixe que incide sobre sua superfície. Aparelhos que utilizam displays de LCD para este tipo de finalidade são conhecidos como moduladores espaciais de luz [15]. Basicamente há dois tipos de moduladores, os moduladores de reflexão e os moduladores de transmissão. Os moduladores de transmissão modificam a fase ou amplitude do feixe transmitido pelo LCD. Por outro lado, os moduladores de reflexão modificam o feixe refletido pelo LCD. No mercado há diversos tipos de moduladores, os que possuem a propriedade de modular a amplitude ou a fase do feixe separadamente e os que as modulam simultaneamente. Neste trabalho foi utilizado um modulador de reflexão, que além de variar simultaneamente amplitude e fase, também modifica a polarização do feixe incidente.

3.1.1 LC-R 2500

O modulador utilizado é o modelo *LC-R 2500*, da empresa Holoeye Photonics [17]. O display deste modulador possui uma resolução de 1024 X 768 pixels, onde cada pixel possui 19 X 19 μm^2 de área. A comunicação entre o SLM e o computador é feita através de uma saída DVI (*Digital Visual Interface*), que é conectada na saída de vídeo do computador. O mesmo reconhece o SLM como sendo um segundo monitor. A variação de amplitude e fase é feita através de um programa que utiliza escalas de cinza (EC) como

parâmetros de entrada. São 256 escalas de cinza possíveis (de 0 a 255), e para cada EC escolhida, é transmitida ao SLM um respectiva tensão. Esta tensão provoca um reordenamento das moléculas do display, proporcionando assim as alterações desejadas tanto de fase como de amplitude. A Figura 3.1 mostra duas escalas de cinza arbitrariamente escolhidas a título de ilustração.

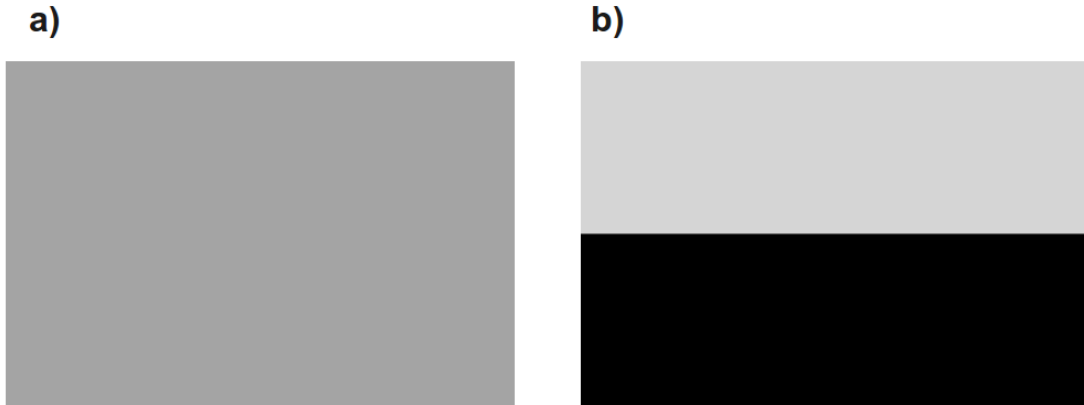


Figura 3.1: Escalas de cinza. A Fig.(a) mostra uma determinada escala de cinza preenchendo totalmente o display do LCD. Por outro lado, a Fig.(b) mostra duas escalas de cinza dividindo igualmente a tela do display. Imagens como a apresentada na Fig.(b) são utilizadas quando queremos modificar a amplitude ou a fase de um feixe em relação ao outro, quando cada um deles é transmitido por uma das fendas de uma mesma fenda dupla.

Para o completo funcionamento do SLM, são necessários polarizadores que devem estar situados antes e depois do modulador. Para um melhor funcionamento do SLM, o polarizador de entrada deve estar em um ângulo de 45° . Neste trabalho denominaremos estes polarizadores de polarizadores de entrada e saída, respectivamente.

Para a realização experimental das tomografias de um e dois qubits foram necessárias a realização de duas calibrações do SLM. Primeiramente fizemos uma calibração para determinar valores de polarizações de saída e escalas de cinza que nos desse diferenças de fases específicas sem alterar as amplitudes dos feixes incidentes. Para a segunda calibração, foi necessário procurar valores de polarizações de saída e EC que, além de darem as mesmas diferenças de fases, deveriam atenuar de uma determinada quantidade um feixe, mantendo o outro inalterado. As relações entre estas calibrações com as tomografias ficarão claras quando discutirmos a implementação experimental da tomografia no quinto capítulo.

3.2 Primeira calibração do SLM

Esta calibração tem como objetivo encontrar valores de escalas de cinza e polarizações de saída que nos forneçam as diferenças de fase $\pi/2$, $-\pi/2$ e π sem haver variação de amplitude dos feixes. Abaixo descreveremos os experimentos utilizados para esta calibração.

3.2.1 Experimento

As montagens experimentais utilizadas para a realização da calibração estão ilustradas na Figura 3.2.

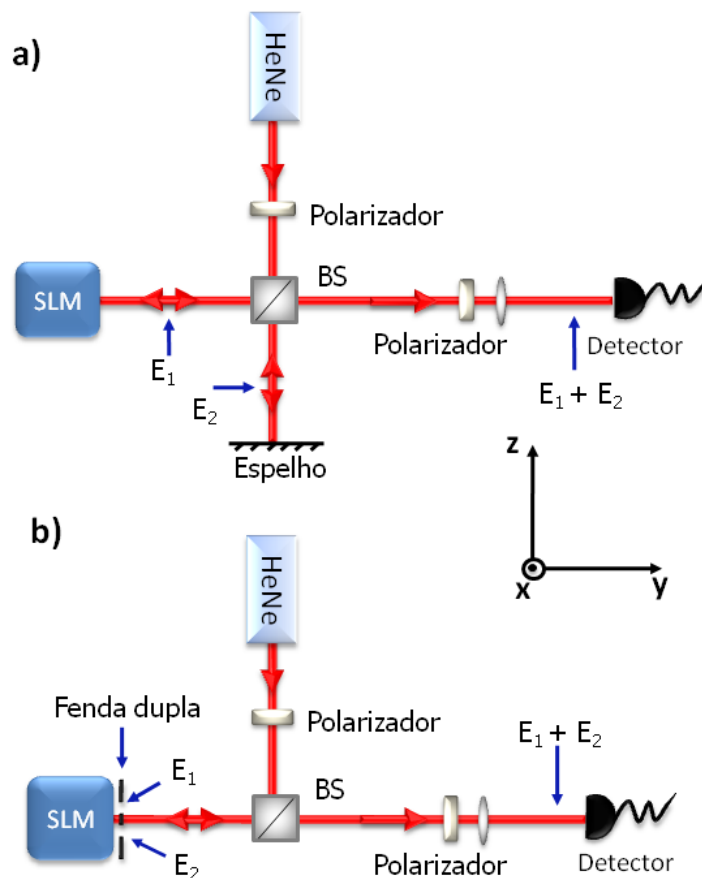


Figura 3.2: Montagens utilizadas para a primeira calibração. A Fig.(a) corresponde ao interferômetro de Michelson e a Fig.(b) corresponde a uma variação do Michelson utilizando fenda dupla. BS é um divisor de feixes 50/50.

Um laser de *HeNe* com comprimento de onda (λ) de 632 nm passa por um polarizador de entrada a 45° . Logo em seguida, o laser incide sobre um divisor de feixes

(*Beam splitter - BS*), onde é dividido em dois feixes com 50% da intensidade do valor inicial em cada feixe. Um dos feixes, denominado E_1 , segue em direção ao SLM. Depois de ser refletido pelo display, além de sofrer variações de fase, o feixe pode aumentar ou diminuir de intensidade por um fator devido a escala de cinza aplicada, a este fator chamaremos de f_1 . Este fator f_1 fica evidente quando introduzimos escalas de cinza globalmente, como representado na Fig.3.1(a). Por outro lado, um aumento de intensidade é observado quando realizamos o experimento de fenda dupla com figuras análogas a Fig.3.1(b). Como será mostrado a seguir, para a determinação da curva experimental da diferença de fase em função das escalas de cinza empregadas no modulador, fixamos a escala de cinza correspondente a uma abertura da fenda dupla e variamos a escala de cinza correspondente a outra. Dependendo da escala de cinza escolhida como referência, um aumento de intensidade pode ser observado, onde este aumento é devido a outra abertura. Assim, justificasse o aumento ou diminuição de intensidade de f_1 mencionado anteriormente. O outro feixe, E_2 , não sofrerá alteração alguma de intensidade, pois será refletido somente por um espelho metálico. Após se reencontrarem no BS, os feixes passam por uma lente situada a uma distância f em relação ao detector e por um polarizador de saída a 45° . Quando os feixes são detectados, um padrão de interferência é observado. Esta montagem é conhecida como interferômetro de Michelson [18], Fig. 3.2(a). Uma variação deste experimento foi realizada com a finalidade de corroborar os resultados obtidos pelo interferômetro de Michelson. Bloqueamos o feixe que ia para o espelho metálico e logo em frente ao SLM colocamos uma fenda dupla. Neste caso, E_1 e E_2 correspondem aos feixes que passam pelas aberturas superior e inferior da fenda dupla, Fig. 3.2(b). Para a realização das medidas, paramos o detector na posição do máximo central do padrão de interferência.

3.2.2 Modelo teórico

Na situação mostrada na Figura 3.2, consideraremos que o campo elétrico do feixe resultante, depois de E_1 e E_2 se reencontrarem e passarem pelo polarizador de saída,

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 \\ &= \sqrt{A_1} \sqrt{f_1} e^{i(kz_1 + \phi_1)} + \sqrt{A_2} e^{i(kz_2 + \phi_2)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde $\sqrt{A_1}$ e $\sqrt{A_2}$ são as amplitudes dos campos divididos pelo divisor de feixes, $\sqrt{f_1}$ corresponde a atenuação proporcionada pelo modulador e ϕ_1 e ϕ_2 correspondem a uma fase de caminho mais a proporcionada pelo modulador espacial para o campo 1 e uma fase de caminho para o campo 2, respectivamente. Consideraremos também que todos os elementos ópticos foram posicionados de forma que o caminho do campo 1 seja o mesmo do campo 2. Assim, como as fases de caminho serão as mesmas, a diferença de fase resultante será devido somente a interação do feixe com o modulador. Como depois de se reencontrarem os feixes se propagam na mesma direção, trataremos o problema como unidimensional. Além do mais, a razão pelas amplitudes $\sqrt{A_1}$ e $\sqrt{A_2}$ serem diferentes se deve ao fato do divisor não ser totalmente 50%-50%, visto que estas amplitudes são devidas ao feixe incidente ser dividido em dois pelo divisor de feixes. Para o experimento de fenda dupla consideramos de metade da intensidade total esta passando por cada abertura. Esta consideração não altera a expressão resultante deste modelo.

Agora, calcularemos a intensidade total (I) medida pelo detector. Ela é dada por

$$\begin{aligned} I &= E^*E \\ &= A_1f_1 + A_2 + \sqrt{A_1f_1A_2} \cdot 2\cos[k_3(z_1 - z_2) + (\phi_1 - \phi_2)]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

No máximo central do padrão de interferência, temos que $z_1 = z_2$. Logo a expressão acima se simplifica,

$$I = A_1f_1 + A_2 + \sqrt{A_1}\sqrt{A_2}\sqrt{f_1} \cdot 2\cos(\phi_1 - \phi_2). \quad (3.3)$$

Assim, isolando o termo correspondente a diferença de fase obtemos

$$\begin{aligned} \Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 &= \cos^{-1}\left[\frac{I - A_1f_1 - A_2}{2\sqrt{A_1f_1A_2}}\right] \\ &= \cos^{-1}\left[\frac{I - I_1 - I_2}{2\sqrt{I_1I_2}}\right], \end{aligned} \quad (3.4)$$

que é a expressão que relaciona a diferença de fase entre os feixes em função das escalas de cinza para o interferômetro de Michelson bem como o interferômetro de fenda dupla. Esta relação está implícita pois a intensidade medida está diretamente relacionada com as

escalas de cinza empregadas pelo programa que faz a comunicação entre o computador e o modulador, como será demonstrado experimentalmente em seguida. Na expressão acima, I_1 e I_2 representam as intensidades de cada feixe separadamente para o caso do experimento da Figura 3.2(a) ou para os feixes que passam pelas aberturas das fendas como no experimento da Figura 3.2(b).

3.2.3 Resultados experimentais

Para determinarmos experimentalmente a dependência entre $\Delta\phi$ e EC , precisamos conhecer as intensidades I , I_1 e I_2 . Para o interferômetro de Michelson, basta bloquear o feixe E_2 , que conseguimos obter para qualquer nível de cinza os valores de I_1 . Analogamente, bloqueando o feixe E_1 obtemos I_2 e, por fim, a intensidade total (I) é obtida quando os dois feixes estão desbloqueados. A medida da intensidade total é obtida com o detector na posição do máximo central do padrão de interferência.

Para o experimento com fenda dupla, os valores de I_1 e I_2 são obtidos exatamente como no experimento de Michelson, a única diferença se dá na obtenção de I . Para determinar os valores de I , utilizamos escalas de cinza análogas a da Figura 3.1(b). Mantivemos a EC de uma fenda em zero, que utilizamos como referência, e variamos a EC da outra de zero a 255. Assim, também foi possível determinar a curva da diferença de fase em função da EC utilizando o experimento de fenda dupla. Por último, repetimos este mesmo experimento utilizando os fótons gêmeos, que possuem comprimento de onda de $650nm$.

A Figura 3.3 mostra as curvas da intensidade medida para o experimento de Michelson (a) e a dependência do $\cos(\Delta\phi)$ em função das escalas de cinza (b) para os experimentos de Michelson, fenda dupla com o $HeNe$ e fenda dupla com os fótons gerados pela conversão paramétrica. Da Fig.3.3(a), observa-se que há uma grande variação de intensidade quando a escala de cinza é variada de zero a 255. Por outro lado, a Fig. 3.3(b) mostra que não há variação significativa das curvas do $\cos(\Delta\phi)$ em função da EC utilizando o interferômetro de Michelson e os interferômetros de fenda dupla com o laser de $HeNe$ e com os fótons da conversão paramétrica. Para os três experimentos, o comportamento das curvas foi semelhante. Note que para o caso da calibração com os fótons gêmeos, $\cos(\Delta\phi) > 1$ para $EC < 50$ e $EC > 220$. Acreditamos que este resultado é reflexo do modelo usado para o cálculo de $\cos(\Delta\phi)$ que supõe a luz monocromática. Além

do mais, em todas as medidas utilizando o modulador espacial, observamos que para EC entre 100 e 110, um degrau em todas as curvas foi observado. Este degrau pode ser devido a algum defeito do próprio modulador ou até mesmo uma falha do programa utilizado para introduzir escalas de cinza. Também é interessante observar que comparando as duas curvas da Fig.3.3, vemos que claramente o $\cos(\Delta\phi)$ varia linearmente com a intensidade e consequentemente com as escalas de cinza.

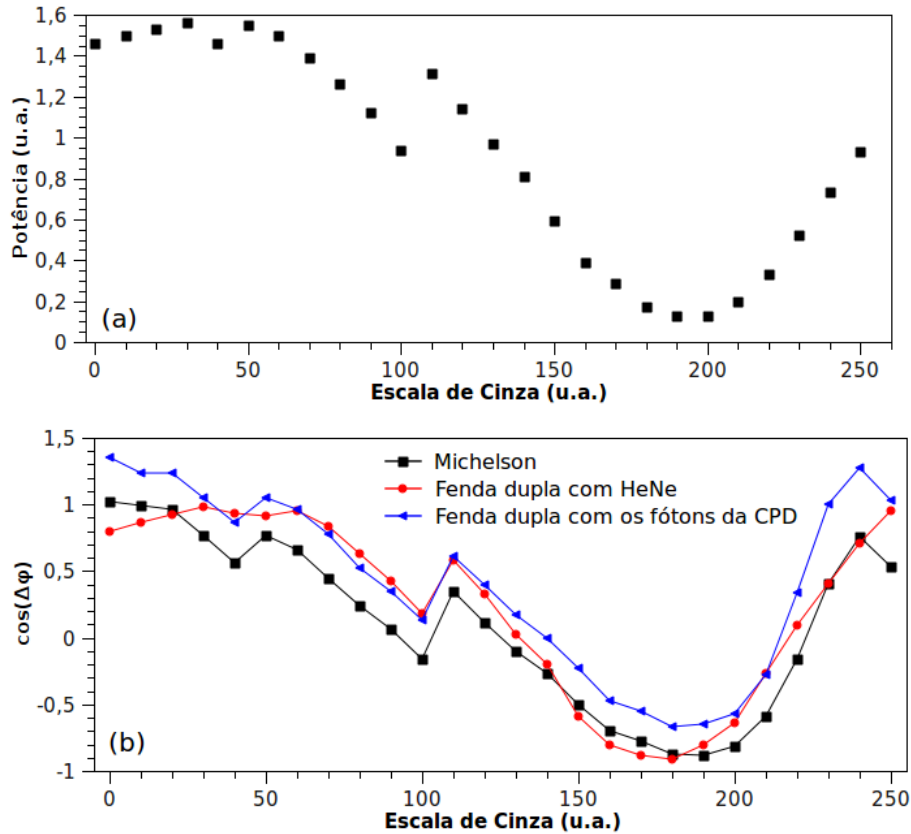


Figura 3.3: Potência ótica em função da EC utilizando o laser de *HeNe* e utilizando a montagem do interferômetro de Michelson (a). Dependência entre o $\cos(\Delta\phi)$ também em função da EC para os interferômetros de Michelson, fenda dupla com *HeNe* e fenda dupla com os fótons gerados pela CPD (b). As medidas foram realizadas com o tempo de aquisição de 10s.

A partir do gráfico da Figura 3.3(b) foi possível determinar os valores de escalas de cinza que produzem as variações de fase mencionadas, como mostrado na Tabela 3.1. Infelizmente não conseguimos valores de escalas de cinza que produzam um deslocamento de fase de π , pois como ficará claro no próximo capítulo, valores de EC de cinza que proporcione esta diferença de fase são fundamentais para a implementação experimental da tomografia mínima. A Figura 3.4 mostra os padrões de interferência com os dados da Tabela 3.1 utilizando o laser de *HeNe* e a fenda dupla. Estas medidas foram feitas fixando

Fase	EC da 1 ^a fenda	EC da 2 ^a fenda
$\pi/2$	25	130
$-\pi/2$	130	25

Tabela 3.1: Conjunto de pontos encontrados para tomografia de 1 qubit.

as escalas de cinza mostradas nesta tabela para cada uma das fendas e variando a posição vertical do detector. Utilizando as escalas de cinza 25 ou 130 em ambas aberturas da fenda dupla, como mostrado na Figura 3.1(a), observa-se que não há diferença de fase entre os feixes, resultando em dois padrões de interferência idênticos superpostos. Por outro lado, para os pontos contidos na tabela acima vemos claramente que há um deslocamento do padrão de interferência para a esquerda ou direita, em relação aos padrões produzidos com $\Delta\phi = 0$.

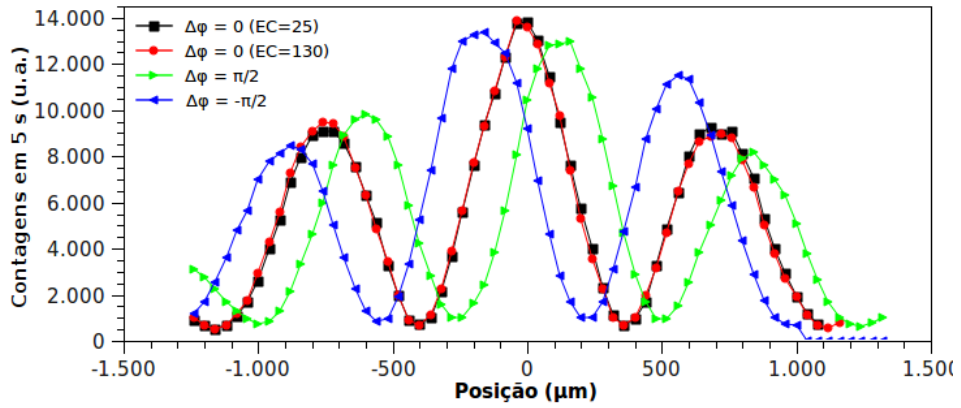


Figura 3.4: Padrões de interferência de Young utilizando as escalas de cinza da Tabela 3.1 e utilizando o laser de *HeNe*. Nos padrões de interferência cujos pontos são esferas e quadrados, a mesma EC foi utilizada para os feixes transmitidos por ambas as fendas. Para os gráficos com pontos que são triângulos, diferentes EC foram utilizadas em cada fenda produzindo um deslocamento do padrão.

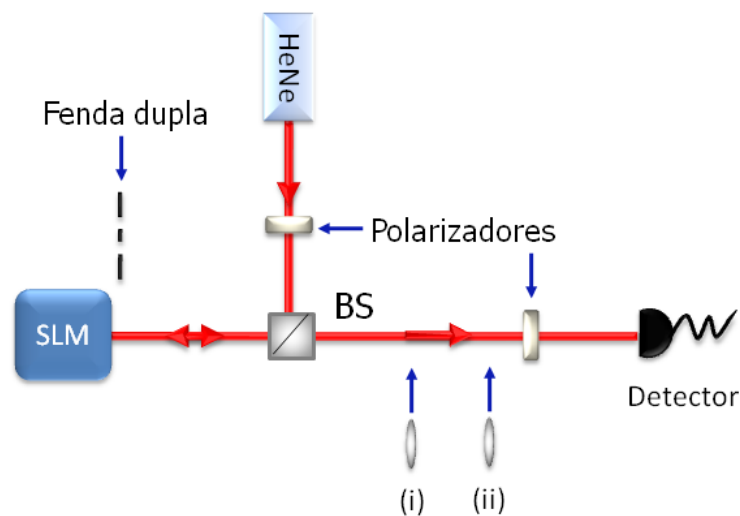
3.3 Segunda calibração do SLM - Mapeamento

Como mencionado anteriormente, nesta calibração procuramos conjuntos de escalas de cinza e polarizações de saída que além de proporcionar as diferenças de fase de

$\pi/2$, $-\pi/2$ e π , também atenuem um dos feixes de 50% mantendo a intensidade do feixe que passa pela outra fenda inalterada. Também foi necessário procurar um conjunto de parâmetros no qual há o mesmo tipo de atenuação relativa de 50%, mas sem produzir alguma diferença de fase entre os feixes.

3.3.1 Experimento

A montagem utilizada para a realização desta calibração está representada na Figura 3.5.



(i) Lente do plano das imagens

(ii) Lente do plano focal

Figura 3.5: Montagem experimental utilizada para a realização da segunda calibração.

Basicamente esta montagem consiste da mesma montagem utilizada na primeira calibração com fenda dupla (ver Fig.3.2(b)). As únicas diferenças se devem a medidas que serão realizadas sem a utilização da fenda dupla e também a introdução de uma lente convergente situada a uma distância $2f$ do SLM e do detector. Esta lente forma a imagem do SLM no detector e possui a finalidade de determinar se realmente está havendo atenuação quando utilizamos determinadas escalas de cinza e ângulos no polarizador de saída.

Fase	EC da 1ª fenda	EC da 2ª fenda	Polarização
0	230	180	45°
π	110	220	90°
$\pi/2$	140	220	90°
$-\pi/2$	240	170	90°

Tabela 3.2: Pontos encontrados para a tomografia de 2 qubits

3.3.2 Resultados Experimentais

O procedimento utilizado foi o seguinte: Sem o uso da fenda dupla, variamos o ângulo do polarizador de saída de -90° a 90° com passo de 15° e para cada ângulo obtemos as curvas de intensidade e coincidências em função da EC, como mostra a Figura 3.6 para algumas polarizações.

A partir destas curvas, procuramos por conjuntos de pontos em que a intensidade de um feixe caía pela metade e o outro se mantinha inalterado. Logo, um enorme conjunto de pontos em que há a atenuação desejada foram obtidos, para diferentes polarizações de saída. Para testar estes pontos, utilizando a fenda dupla logo a frente do SLM, fizemos medidas das imagens das fendas bem como dos padrões de interferência para comprovarmos se determinadas escalas de cinza produziam as diferenças de fase desejadas. Após um exaustivo trabalho, chegamos aos pontos para as diferenças de fase e atenuações desejadas. A Tabela 3.2 mostra as diferenças de fase obtidas para determinadas escalas de cinza nas fendas superior e inferior, com certas polarizações do feixe de saída. As figuras 3.7 e 3.8 mostram as medidas das imagens e dos padrões de interferência utilizando os pares de fótons gêmeos. Vemos que para estas escalas de cinza realmente há atenuação bem como a diferença de fase desejada entre os dois feixes que passam pela fenda dupla. Para determinarmos se realmente houve a variação de fase desejada, os padrões de interferência foram fitados utilizando a seguinte expressão [19]:

$$I(x) = I_0 \left(\frac{\sin(ax)}{ax} \right)^2 (1 + v \cos(bx + c)), \quad (3.5)$$

onde os parâmetros I_0 , a , b , c e v são utilizados para a realização do fit.

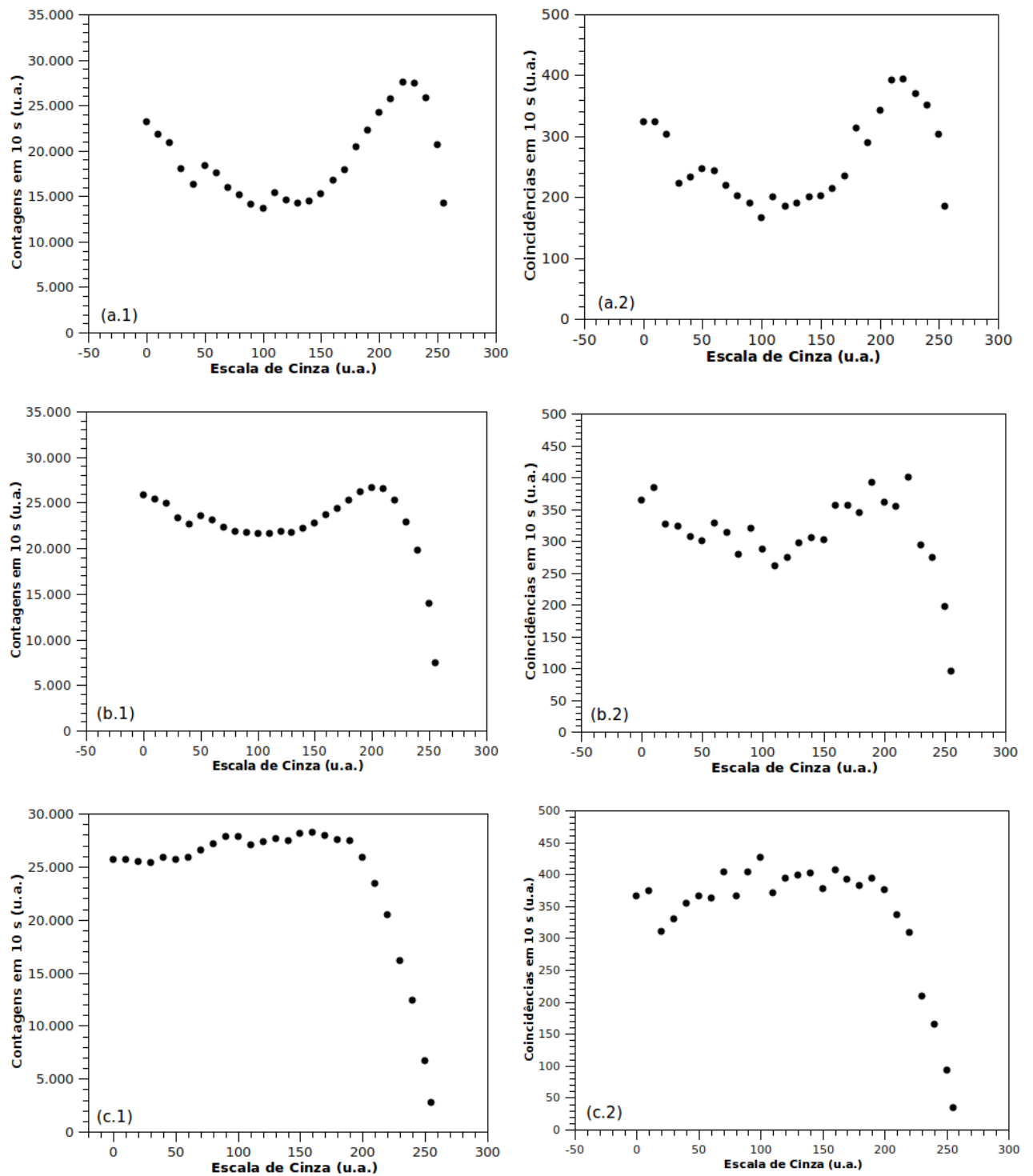


Figura 3.6: Medidas de contagens (a.1, b.1, c.1) e coincidências (a.2, b.2, c.2) para as polarizações de 90° (a.1 e a.2), 75° (b.1 e b.2) e 60° (c.1 e c.2) a título de ilustração.

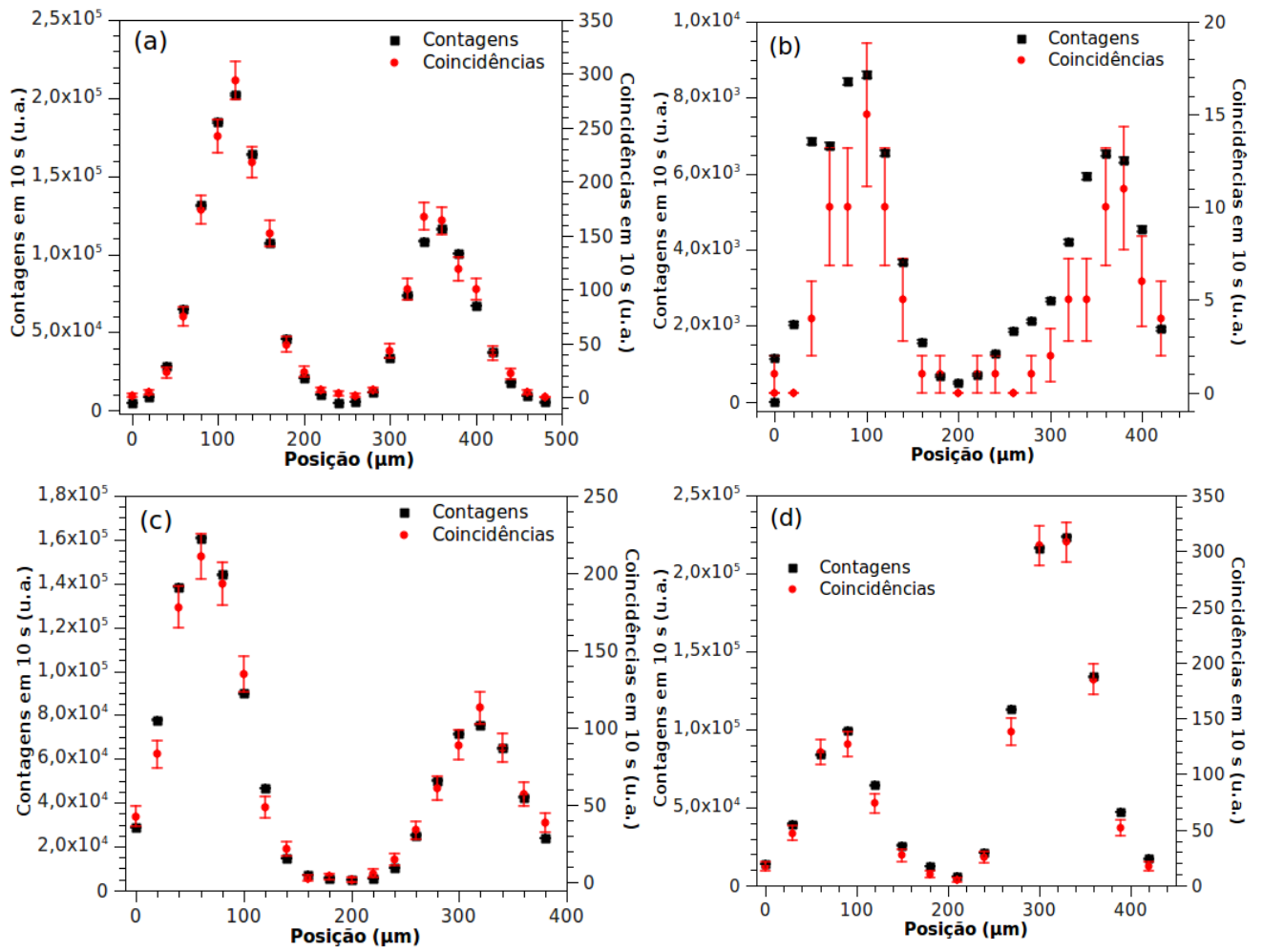


Figura 3.7: Imagens das fendas utilizando as escalas de cinza e polarizações de saída presentes na Tabela 3.2. A imagem (a) corresponde a fase zero, a imagem (b) corresponde a fase π , a imagem (c) corresponde a fase $\pi/2$ e a imagem (d) corresponde a fase $-\pi/2$.

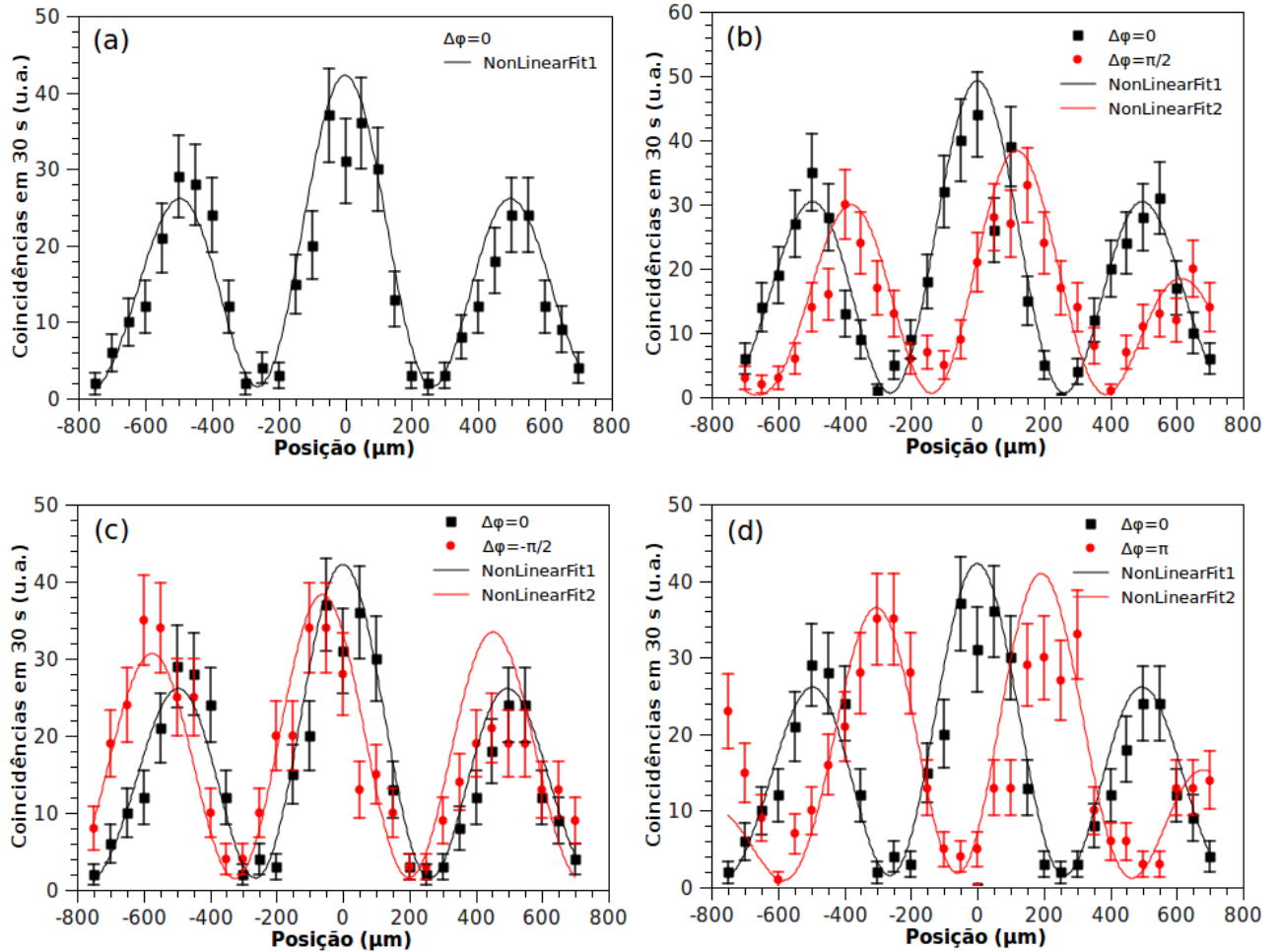


Figura 3.8: Medidas dos padrões de interferência utilizando os dados da Tabela 3.2. As curvas sólidas representam o ajuste feito utilizando a Equação 3.5. Os valores obtidos para o parâmetro c , que corresponde a uma fase extra introduzida no padrão de interferência, correspondem a $-1,49$ para a curva (b), $0,92$ para a curva (c) e $3,95$ para a curva (d). Como π vale $3,14$, observamos que as curvas (b) e (d) possuem deslocamentos de fase análogos ao que era previsto, enquanto a curva (c) infelizmente não possui um deslocamento de $-\pi/2$.

4 Tomografia

Neste capítulo apresentamos o estudo teórico necessário para a implementação experimental da tomografia mínima. Inicialmente faremos uma breve revisão da representação de estados bem como de alguns conceitos pertinentes. Em seguida, é feita uma pequena descrição do processo de tomografia usual e, por fim, apresentaremos o procedimento da tomografia mínima, onde aplicaremos o mesmo para um e dois qubits.

4.1 Representação de estado

A tomografia quântica consiste na completa caracterização de um estado desconhecido através de uma série de medidas em diferentes bases. Este conceito é o mesmo empregado no processo de tomografia clássica, pois a reconstrução de imagens tridimensionais é feita através de uma série de projeções bidimensionais em várias direções físicas [20]. Antes de começarmos a discussão a respeito da tomografia, uma pequena revisão de estados quânticos é necessária.

4.1.1 Estados puros e estados mistos

O estado puro de um qubit é escrito como

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (4.1)$$

onde α e β correspondem a constantes complexas, que satisfazem a condição de normalização, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ [8]. $|0\rangle$ e $|1\rangle$ representam os estados da base de sistemas de dois níveis. Estes estados podem ser estados de polarização horizontal e vertical de um fóton, $|0\rangle = |H\rangle$ e $|1\rangle = |V\rangle$, ou até mesmo estados de spin up e down do elétron, $|0\rangle = |S \uparrow\rangle$ e $|1\rangle = |S \downarrow\rangle$, por exemplo [21].

Usualmente, podemos utilizar coordenadas esféricas para reescrever o estado da equação acima. Fazendo uso desta mudança de coordenadas, obtemos

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\phi}|1\rangle, \quad (4.2)$$

onde θ e ϕ representam as coordenadas angulares do sistema de coordenadas esférico.

Para sistemas com mais de dois qubits, o estado quântico do sistema pode ser facilmente construído através do produto tensorial dos estados dos qubits individuais [21]. Assim, o estado geral para um sistema de n qubits é dado por

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} \alpha_{i_1, i_2, \dots, i_n} |i_1\rangle \otimes |i_2\rangle \otimes \dots \otimes |i_n\rangle, \quad (4.3)$$

onde os coeficientes α_i são constantes complexas que satisfazem a condição de normalização $\sum_i |\alpha_i|^2 = 1$.

4.1.2 Matriz densidade

Para a realização da tomografia, o uso de um ensemble de estados igualmente preparados é necessário, mas podem ocorrer estados que não são necessariamente cópias do estado original, ou até mesmo estados que estão emaranhados em graus de liberdade desconhecidos. Neste caso, temos os chamados estados mistos. Para descrever sistemas como este, uma outra formulação é utilizada, a matriz densidade [8].

Seja um sistema quântico onde um, entre muitos estados $|\psi_i\rangle$, possui probabilidade p_i do sistema estar. Assim, a matriz densidade deste sistema será dada por

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (4.4)$$

onde $\sum_i p_i = 1$.

A matriz densidade possui as seguintes propriedades:

1. Hermiticidade: $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$;
2. Positividade: $\langle \hat{\rho} \rangle = \langle \psi | \hat{\rho} | \psi \rangle \geq 0$;
3. Unitariedade do traço: $tr\{\hat{\rho}\} = \sum_i p_i = 1$.

O sistema quântico, no qual a respectiva matriz que representa o seu estado não satisfaz as três condições acima, não é considerado um sistema físico.

Para um qubit, a matriz densidade consiste de uma matriz 2×2 composta por três parâmetros. Esta matriz é definida como [20]

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 r_i \sigma_i, \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S_0 & S_1 - iS_2 \\ S_1 + iS_2 & S_3 \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{4.5}$$

onde $\hat{\sigma}_0 = \hat{I}$ é a matriz identidade, o vetor \mathbf{r} é definido como $\mathbf{r} = (S_0, S_1, S_2, S_3)$, e por fim, $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ e $\hat{\sigma}_3$ correspondem às matrizes de Pauli

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\tag{4.6}$$

Os parâmetros r_i da matriz densidade são dados por

$$\langle r_i \rangle = \langle \sigma_i \rangle = \text{Tr}\{\hat{\sigma}_i \hat{\rho}\}.\tag{4.7}$$

onde $r_0 = S_0, r_1 = S_1, r_2 = S_2$ e $r_3 = S_3$, respectivamente.

Utilizando a propriedade da unitariedade do traço, a matriz densidade pode ser reescrita como:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + a & b - ic \\ b + ic & 1 - a \end{pmatrix},\tag{4.8}$$

sendo dependentes agora de apenas três parâmetros que denominarei como a, b, c .

Em um sistema de coordenadas tridimensional e esférico (Eq. 4.2), temos que todos os estados fisicamente possíveis podem ser representados em uma esfera de raio unitário, $r = |\mathbf{r}| = 1$. Para estados de polarização, esta esfera é chamada esfera de Poincaré e as componentes do vetor \mathbf{r} são denominados parâmetros de Stokes. Para qualquer outro sistema de dois níveis, esta esfera é denominada esfera de Bloch e o vetor \mathbf{r} é referido como vetor de Bloch [8, 20, 21]. Esta esfera possui a característica de que todos os estados puros estão situados sobre sua superfície, enquanto estados mistos estão em seu interior. A Figura 4.1 mostra uma ilustração da esfera de Bloch. Observa-se que através dos ângulos θ e ϕ (Eq. 4.2) podemos mapear qualquer estado puro sobre a superfície da esfera.

Para um sistema de N qubits, o espaço de Hilbert é dado pelo produto tensorial do espaço de suas componentes, ou seja, $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \dots \otimes H_n$. A matriz densidade, agora, é uma matriz de $2^n \times 2^n$ termos, onde n corresponde à dimensão total do sistema. Para $n=1$, um qubit, recuperamos a matriz 2×2 que foi amplamente discutida ao longo desta seção e para dois qubits ($n=2$), a matriz densidade será uma matriz 4×4 .

4.1.3 Tomografia para um qubit

A tomografia consiste na determinação dos coeficientes da matriz densidade (ver Eq. 4.5). Conhecendo-se os parâmetros do vetor de Bloch, o estado do sistema é completamente determinado. Os valores de S_i são dados por:

$$S_i = \text{Tr}\{\hat{\sigma}_i \hat{\rho}\}. \quad (4.9)$$

Explicitamente, estes coeficientes estão relacionados com as probabilidades de medidas de $\hat{\sigma}_1$, $\hat{\sigma}_2$ e $\hat{\sigma}_3$, através das seguintes relações [20]:

$$\begin{aligned} S_0 &= p_{\sigma_z^+} + p_{\sigma_z^-} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|; \\ S_1 &= p_{\sigma_x^+} - p_{\sigma_x^-} = |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|; \\ S_2 &= p_{\sigma_y^+} - p_{\sigma_y^-} = i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0|; \\ S_3 &= p_{\sigma_z^+} - p_{\sigma_z^-} = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|, \end{aligned} \quad (4.10)$$

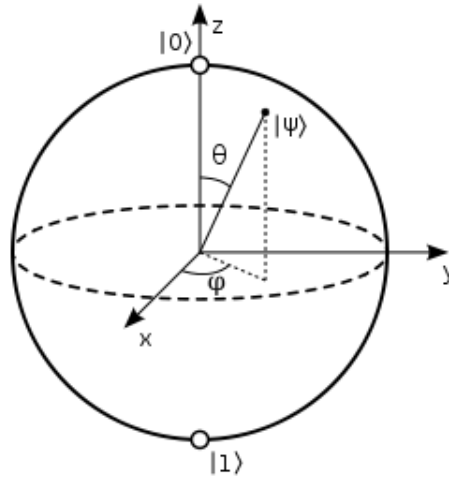


Figura 4.1: Esfera de Bloch.

onde $\sigma_x^\pm, \sigma_y^\pm, \sigma_z^\pm$, são os autoestados de σ_x, σ_y e σ_z , respectivamente. Logo, são necessárias seis medidas para se determinar a matriz densidade para um qubit. As probabilidades presentes na equação acima são dadas pela seguinte equação:

$$p_{\xi_\pm} \equiv \langle P_{\xi_\pm} \rangle. \quad (4.11)$$

Cada operador P_{ξ_\pm} , com $\xi = \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, pode ser escrito como um projetor, de modo que quando somados resultam em um múltiplo da identidade, $\sum_{\xi=\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z} (P_{\xi^+} + P_{\xi^-}) = n\hat{I}$, onde n representa este múltiplo. Operadores construídos desta maneira formam um grupo completo de operadores positivos (*positive operator-valued measure* - POVM) [8]. Assim, seis operadores positivos constituem o POVM para a tomografia padrão.

Para dois qubits, por outro lado, o processo de medida é equivalente, sendo que para determinar a matriz densidade resultante do sistema é necessário conhecer os coeficientes do vetor de Bloch dos dois subsistemas constituintes.

4.2 Tomografia mínima

Como convivemos constantemente com erros experimentais e os mesmos se somam, quanto maior o número de medidas necessárias para a tomografia, maior será o erro experimental associado. Assim, neste trabalho utilizamos uma descrição alternativa, a tomografia mínima, proposta por *Řeháček* e colaboradores [5]. Esta tomografia consiste na substituição dos operadores que definem as matrizes de Pauli da tomografia usual por vetores não coplanares que definem um tetraedro na esfera de Bloch. Através destes vetores, podemos definir respectivamente quatro operadores que formam um POVM. Logo, para a tomografia mínima são necessárias apenas quatro medidas. A geometria tetraédrica é interessante pois o tetraedro é a figura geométrica com quatro vetores que define o maior volume dentro da esfera de Bloch [3]. Também devido a simetria e facilidades dos estados escolhidos. Como ficará claro no decorrer desta dissertação, cada um dos quatro operadores do POVM tem uma fenda parcialmente bloqueada e a outra totalmente aberta, facilitando assim a implementação experimental.

Nomeando $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ e \mathbf{b}_4 como sendo os vetores que definem o tetraedro inscrito na esfera de Bloch, como mostra a Figura 4.2, podemos contruir os operadores ($\hat{\Pi}_i$) do POVM através da relação

$$\hat{\Pi}_i = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \mathbf{b}_i \cdot \hat{\sigma}). \quad (4.12)$$

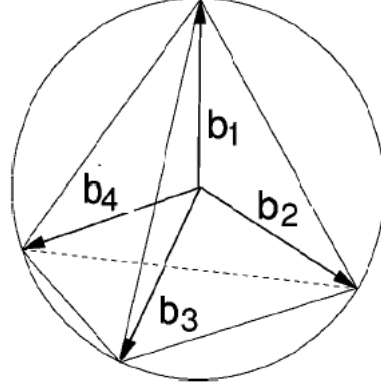


Figura 4.2: Representação dos vetores que definem um tetraedro na esfera de Bloch.

Como há infinitas maneiras de se posicionar um tetraedro dentro da esfera de Bloch, temos a liberdade de poder escolher os quatro vetores que definem este sólido. Logo, os vetores de estado escolhidos para a implementação da tomografia mínima são:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle, \\ |\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + e^{i\pi}\sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle, \\ |\psi_3\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle + i\frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle + e^{i\pi/2}\frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle, \\ |\psi_4\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle - i\frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle + e^{-i\pi/2}\frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Observa-se que não há diferença de fase entre os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ em $|\psi_1\rangle$. Por outro lado, existem diferenças de fase de π , $\pi/2$ e $-\pi/2$ em $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ e $|\psi_3\rangle$, respectivamente. Logo, se justifica a procura de escalas de cinza que produzam estas diferenças de fase, como foi feito na calibração do modulador espacial de Luz. Note também que os coeficientes são diferentes: $\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Observe que a razão entre os quadrados dos mesmos é meio. Devido a isso, procuramos duas escalas de cinza diferentes que produzissem essa razão para as amplitudes dos feixes transmitidos por cada uma das fendas.

4.2.1 Estudo da tomografia mínima para um qubit

Através dos estados da Equação 4.13, podemos montar os operadores que constituem o POVM. Estes operadores devem satisfazer a relação

$$\sum_i \hat{\Pi}_i = \hat{I}. \quad (4.14)$$

Se os operadores construídos não satisfizerem a relação acima, podemos forçá-los a satisfazer. Isso pode ser feito da seguinte maneira: construiremos os operadores Π_i e os somaremos. Se o resultado não for a identidade, podemos redefinir os operadores de forma que a igualdade da Equação 4.14 seja satisfeita.

Os operadores associados aos estados definidos na Equação 4.13 são construídos como $\hat{\Pi}_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, portanto:

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_1 &= |\psi_1\rangle\langle\psi_1| = \frac{1}{3}|0\rangle\langle 0| + \frac{\sqrt{2}}{3}|0\rangle\langle 1| + \frac{\sqrt{2}}{3}|1\rangle\langle 0| + \frac{2}{3}|1\rangle\langle 1|, \\ \hat{\Pi}_2 &= |\psi_2\rangle\langle\psi_2| = \frac{1}{3}|0\rangle\langle 0| - \frac{\sqrt{2}}{3}|0\rangle\langle 1| - \frac{\sqrt{2}}{3}|1\rangle\langle 0| + \frac{2}{3}|1\rangle\langle 1|, \\ \hat{\Pi}_3 &= |\psi_3\rangle\langle\psi_3| = \frac{2}{3}|0\rangle\langle 0| - i\frac{\sqrt{2}}{3}|0\rangle\langle 1| + i\frac{\sqrt{2}}{3}|1\rangle\langle 0| + \frac{1}{3}|1\rangle\langle 1|, \\ \hat{\Pi}_4 &= |\psi_4\rangle\langle\psi_4| = \frac{2}{3}|0\rangle\langle 0| + i\frac{\sqrt{2}}{3}|0\rangle\langle 1| - i\frac{\sqrt{2}}{3}|1\rangle\langle 0| + \frac{1}{3}|1\rangle\langle 1|. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Somando-se os mesmos, obtemos que $\sum_i \hat{\Pi}_i = 2\hat{I}$. Redefinimos os operadores como $\hat{\Pi}_i = \frac{1}{2}|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ para que a Equação 4.14 seja satisfeita. Portanto, as matrizes associadas a cada operador são dadas por:

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, & \hat{\Pi}_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \\ \hat{\Pi}_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -i\frac{\sqrt{2}}{3} \\ i\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, & \hat{\Pi}_4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & i\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -i\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Podemos reescrever a probabilidade de obtermos cada um dos estados (Eq. 4.11) como:

$$p_i = \text{Tr}\{\hat{\Pi}_i\hat{\rho}\}. \quad (4.17)$$

Utilizando a equação acima juntamente com a matriz densidade da Equação 4.8 e os operadores da Equação 4.16, obtemos um sistema de equações em função dos

parâmetros a , b e c , como também em função das probabilidades obtidas experimentalmente, p_1 , p_2 , p_3 e p_4 . Logo, este sistema de equações é dado por:

$$\begin{aligned}
4p_1 &= 1 - \frac{1}{3}a + \frac{2\sqrt{2}}{3}b \\
4p_2 &= 1 - \frac{1}{3}a - \frac{2\sqrt{2}}{3}b \\
4p_3 &= 1 + \frac{1}{3}a + \frac{2\sqrt{2}}{3}c \\
4p_4 &= 1 + \frac{1}{3}a - \frac{2\sqrt{2}}{3}c
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Assim, para se determinar completamente o estado do sistema através da tomografia mínima de um qubit, são necessárias apenas quatro medidas experimentais e a resolução do sistema de equações acima.

4.2.2 Estudo da tomografia mínima para dois qubits

Para dois qubits, são utilizados os mesmos operadores definidos acima, quatro para cada qubit. Serão assim 16 estados a serem medidos. Estes estados são dados pelos produtos tensoriais dos estados da Eq. 4.3. Logo:

$$\begin{aligned}
|\psi_{11}\rangle &= |\psi_1\rangle|\psi_1\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle\right) \\
|\psi_{12}\rangle &= |\psi_1\rangle|\psi_2\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle\right) \\
|\psi_{13}\rangle &= |\psi_1\rangle|\psi_3\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle\right) \otimes \left(\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle + i\frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle\right) \\
|\psi_{14}\rangle &= |\psi_1\rangle|\psi_4\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle\right) \otimes \left(\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle - i\frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle\right) \\
|\psi_{21}\rangle &= |\psi_2\rangle|\psi_1\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle\right) \\
|\psi_{22}\rangle &= |\psi_2\rangle|\psi_2\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle\right) \\
|\psi_{23}\rangle &= |\psi_2\rangle|\psi_3\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle\right) \otimes \left(\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle + i\frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle\right) \\
|\psi_{24}\rangle &= |\psi_2\rangle|\psi_4\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle\right) \otimes \left(\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle - i\frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle\right) \\
|\psi_{31}\rangle &= |\psi_3\rangle|\psi_1\rangle = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle + i\frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle\right) \\
|\psi_{32}\rangle &= |\psi_3\rangle|\psi_2\rangle = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle + i\frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle\right) \\
|\psi_{33}\rangle &= |\psi_3\rangle|\psi_3\rangle = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle + i\frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle\right) \otimes \left(\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle + i\frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle\right) \\
|\psi_{34}\rangle &= |\psi_3\rangle|\psi_4\rangle = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle + i\frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle\right) \otimes \left(\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle - i\frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle\right)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
|\psi_{41}\rangle &= |\psi_4\rangle|\psi_1\rangle = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle - i\frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle\right) \\
|\psi_{42}\rangle &= |\psi_4\rangle|\psi_2\rangle = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle - i\frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle\right) \\
|\psi_{43}\rangle &= |\psi_4\rangle|\psi_3\rangle = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle - i\frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle\right) \otimes \left(\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle + i\frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle\right) \\
|\psi_{44}\rangle &= |\psi_4\rangle|\psi_4\rangle = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle - i\frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle\right) \otimes \left(\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle - i\frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle\right)
\end{aligned}$$

Os operadores para estes estados são construídos da mesma forma que para um qubit. No primeiro apêndice mostramos detalhadamente como construir este POVM. Também mostramos como obter as dezesseis equações do sistema que deverá ser solucionado para obter a matriz densidade do sistema.

4.3 Método Máxima verossimilhança

Pode acontecer da matriz densidade obtida experimentalmente não satisfazer algumas das três propriedades citadas anteriormente, assim não correspondendo a um estado físico. Isto pode acontecer por exemplo devido a algum tipo de desalinhamento de algum elemento óptico durante o experimento [22]. Por causa deste problema, muitos autores fazem uso do método Máxima verossimilhança (*Maximum-Likelihood*) [1, 5]. Este método consiste em encontrar uma matriz densidade que mais se aproxima de uma matriz que descreve um sistema físico utilizando os dados obtidos experimentalmente e um processo de maximização numérico [20]. Abaixo, descreveremos sucintamente este método e suas principais características. Basicamente são necessários três critérios para a aplicação deste método:

1. Parametrização da matriz densidade;
2. Uma função Likelihood para ser maximizada;
3. Uma técnica numérica para efetuar a maximização.

A parametrização da matriz densidade consiste na construção de uma matriz que satisfaça as propriedades de uma matriz densidade: hermiticidade, positividade e unitariedade do traço. Esta parametrização é feita da seguinte maneira: Escrevendo

a matriz densidade da forma $\hat{\rho} = \hat{T}^\dagger \hat{T}$, observamos que a condição de positividade é automaticamente satisfeita, pois

$$\langle \psi | \hat{\rho} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{T}^\dagger \hat{T} | \psi \rangle = \langle \psi' | \psi' \rangle \geq 0, \quad (4.20)$$

onde definimos $\psi' = \hat{T}|\psi\rangle$ e $|\psi\rangle$ representa um estado quântico qualquer. Como $(\hat{T}^\dagger \hat{T})^\dagger = \hat{T}^\dagger (\hat{T}^\dagger)^\dagger = \hat{T}^\dagger \hat{T}$, também garantimos que a condição de hermiticidade seja satisfeita. Por fim, a unitariedade do traço é garantida apenas dividindo a matriz densidade pelo traço de $\hat{T}^\dagger \hat{T}$. Logo

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{T}^\dagger \hat{T}}{\text{Tr}\{\hat{T}^\dagger \hat{T}\}}. \quad (4.21)$$

Como para a determinação da matriz densidade precisamos inverter a matriz \hat{T} , é interessante escrevê-la na forma triangular inferior. Assim, para um sistema de n qubits ela é dada por:

$$\hat{T}(\vec{t}) = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ t_{2^{n+1}} + it_{2^{n+2}} & t_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ t_{4^{n-1}} + it_{4^n} & t_{4^{n-3}} + it_{4^{n-2}} & t_{4^{n-5}} + it_{4^{n-4}} & t_{2^n} \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

onde \vec{t} é um vetor que contém cada componente t_i . Para dois qubits, o vetor \vec{t} é composto por dezesseis componentes enquanto que para um qubit o vetor é composto por apenas quatro. Assim, a matriz \hat{T} para um qubit se reduz a

$$\hat{T}(\vec{t}) = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ t_3 + it_4 & t_2 \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Portanto, a matriz densidade que satisfaz o primeiro critério é dada por:

$$\hat{\rho}(\vec{t}) = \frac{\hat{T}^\dagger(\vec{t}) \hat{T}(\vec{t})}{\text{Tr}\{\hat{T}^\dagger(\vec{t}) \hat{T}(\vec{t})\}}. \quad (4.24)$$

Para a determinação da função likelihood (segundo critério), assumiremos que o processo de contagens dos detectores é dado por uma distribuição gaussiana. Logo

$$P(n_i) = A \prod_i \exp\left[-\frac{(n_i - \bar{n}_i)^2}{2\hat{\sigma}_i^2}\right], \quad (4.25)$$

onde A é uma constante de normalização e σ_i representa o desvio padrão da distribuição gaussiana.

Na expressão acima, n_i representa o i -ésimo valor de contagem em coincidência e $\bar{n}_i = N\langle\psi_i|\rho|\psi_i\rangle$ representa seu respectivo valor esperado. N é dado como $N = \sum_i n_i$.

Para encontrar os valores ideais dos coeficientes do matriz $\hat{T}(\vec{t})$ e assim determinar a matriz densidade, precisamos maximizar a função probabilidade definida acima. Maximizar esta função é análogo a maximizar seu logaritmo e equivalentemente minimizar seu argumento negativo. Assim, a função likelihood é dada por:

$$L(\vec{t}) = \max\{P(n_{i,j})\} = \sum_{i,j} \frac{(\bar{n}_{i,j} - n_{i,j})^2}{2\hat{\sigma}_{i,j}^2}, \quad (4.26)$$

onde a constante de normalização foi desconsiderada, pois a mesma não altera o processo de maximização. Como $\bar{n}_i = N\langle\psi_i|\rho|\psi_i\rangle$ depende dos parâmetros t_i , pois a matriz densidade foi parametrizada desta maneira, a equação acima também depende implicitamente destes parâmetros. Maximizando esta função, conseguimos obter os valores dos parâmetros t_i , possibilitando a reconstrução da matriz densidade. $n_{i,j}$ representam os valores de contagens obtidos experimentalmente.

Por último, o terceiro critério consiste na utilização de simulação computacional para a realização da maximização. Neste trabalho foi utilizado o programa *MATLAB* para realizar a maximização da função likelihood. No Apêndice B apresentamos a rotina utilizada para efetuar este cálculo e sua aplicação para a determinação da matriz densidade de 2 qubits. Esta rotina foi desenvolvida por Breno Marques, aluno de doutorado deste departamento.

5 Experimentos

Neste capítulo faremos uma descrição detalhada dos experimentos realizados para as tomografias de um e dois qubits. Apresentaremos os resultados experimentais obtidos e respectivas discussões.

5.1 Para um qubit

O aparato experimental utilizado para a realização da tomografia de um qubit esta representado na Figura 5.1.

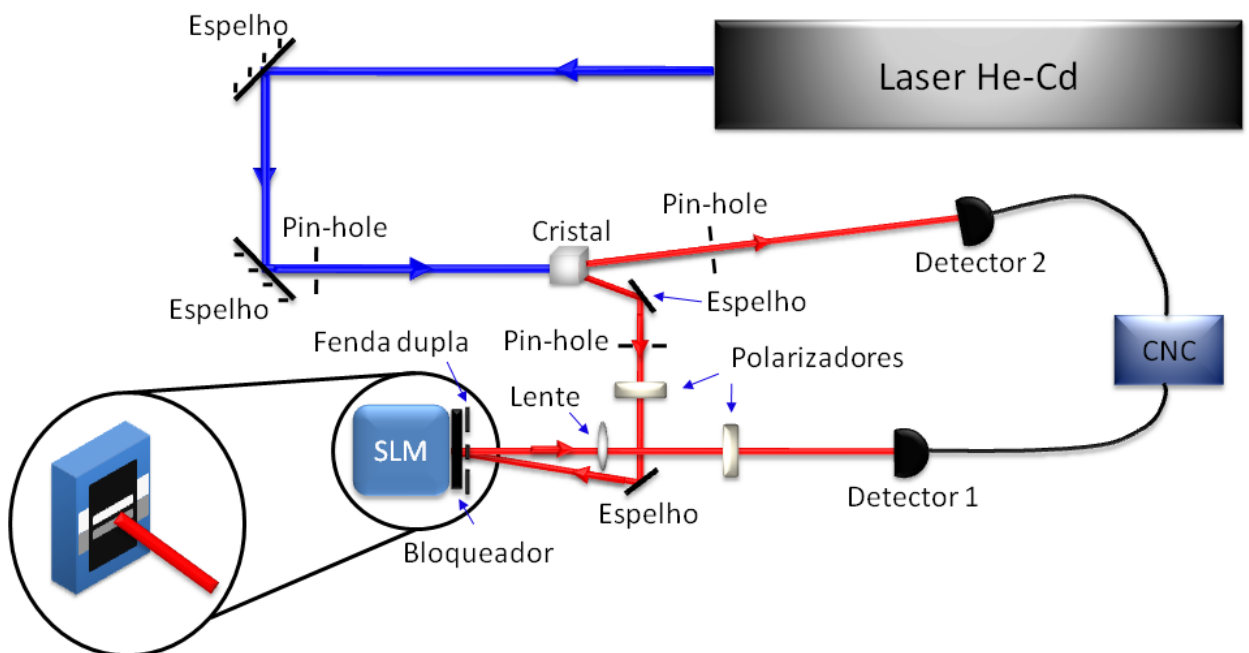


Figura 5.1: Montagem experimental utilizada para a realização da tomografia de um qubit.

Um laser de *HeCd* ($\lambda = 325nm$) incide em um cristal não linear de *LiIO₃* tipo I e pelo processo de conversão paramétrica descendente são gerados feixes de fótons gêmeos. Um dos feixes é enviado diretamente em direção ao detector 2 e será considerado como Trigger. Por outro lado, o outro feixe incide em um espelho metálico e passa por um polarizador de entrada a 45° . Logo em seguida, o feixe incide em outro espelho metálico e segue em direção do SLM. Na frente do mesmo, é colocado uma fenda dupla

com separação de $200\mu m$ e largura das fendas de $100\mu m$. Assim, o estado criado será da forma dada pela Equação 2.32. Ao passar pela fenda dupla, o fóton incide sobre o SLM e é refletido, passando novamente pela fenda. Durante o trajeto até o detector 1, o fóton ainda passa por uma lente convergente e um polarizador de saída a 45° . A lente possui foco (f) de $10cm$ e é posicionada a uma distância f do detector. Desta forma, o detector é posicionado no plano de Fourier da lente. O ângulo de incidência entre feixe e a normal do SLM é de aproximadamente dois graus para evitar difração [14]. Pin-holes foram utilizados para delimitar o caminho dos fótons e para ajudar o alinhamento, juntamente com um laser de $HeNe$. Fizemos este laser passar pelo mesmo caminho dos fótons gêmeos com a ajuda dos pin-holes que estavam fixos pelo caminho. A utilização deste laser é bastante útil durante o alinhamento pois através dele o alinhamento de lentes, polarizadores e placas torna-se mais simples. Na entrada do detector 1 foi acoplada uma fenda simples de $100\mu m$ de espessura e filtros de interferência de $650 \pm 10nm$ foram colocados em ambos os detectores. Um padrão de interferência nas contagens em coincidências é observado.

5.1.1 Procedimento utilizado

Experimentalmente não conseguimos medir probabilidades mas sim número de fótons ou intensidade. A expressão utilizada para a determinação das probabilidades de se medir cada estado em função das contagens é dada por:

$$p_i = \frac{n_i}{\sum_i n_i} \quad (5.1)$$

onde n_i corresponde às contagens de fótons normalizadas. A normalização das contagens é feita utilizando a Equação 5.2. Como a eficiência da medida de projeção pode ser necessariamente diferente, um fator de correção é introduzido para não haver privilégio de um operador em relação a outro, para torná-los assim igualmente prováveis. Isso se deve à variação de refletividade do SLM acoplado ao polarizador de saída, para cada uma das medidas do operador. Logo,

$$n_i = N_i \cdot \frac{Det1_{max} Det2_{max}}{Det1_i Det2_i}, \quad (5.2)$$

onde N_i representa as contagens de fótons em coincidência sem a normalização, $Det1_{max}$ e $Det2_{max}$ representam os máximos de contagens simples entre os operadores e $Det1_i$ e

$Det2_i$ representam as contagens simples para cada valor de i , respectivamente.

Para implementar os operadores experimentalmente, são necessários dois requisitos. O primeiro requisito consiste na implementação das diferenças de fases de π , $\pi/2$ e $-\pi/2$. Assim, basta utilizar a primeira calibração do SLM (ver seção 3.2). O segundo requisito consiste na atenuação dos feixes que passam pelas aberturas da fenda dupla.

Dos operadores utilizados pelo POVM, observamos que é necessário atenuarmos um terço e dois terços das intensidades para cada estado. Como experimentalmente atenuar as intensidades nestes respectivos valores é uma tarefa difícil, decidimos reescrever os estados do POVM da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{3}{2}}|\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + |1\rangle \\ \sqrt{\frac{3}{2}}|\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - |1\rangle \\ \sqrt{\frac{3}{2}}|\psi_3\rangle &= |0\rangle + i\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \\ \sqrt{\frac{3}{2}}|\psi_4\rangle &= |0\rangle - i\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Assim, precisamos apenas atenuar a metade de um dos feixes transmitido por uma das fendas e deixar a outra desbloqueada. Para efetuar a atenuação, utilizamos montagens que consistem de bloqueadores mecânicos acoplados a deslocadores que possuem a liberdade de transladar tanto na horizontal como na vertical. Estes bloqueadores obstruem a passagem parcial dos fótons. Estas montagens ficaram posicionadas entre o *SLM* e a fenda dupla (Fig. 5.1).

5.1.2 Resultados

A Figura 5.2(a) mostra o padrão de interferência realizado antes da medida de tomografia utilizando os fótons gêmeos e a Figura 5.2(b) mostra a dependência entre as contagens em função da posição vertical do bloqueador. Na Figura 5.2(a), o padrão é medido em coincidência, com ambas as fases no SLM iguais à zero, sendo o segundo fóton do par usado como trigger. Para determinarmos o valor da atenuação que deverá ser empregada, procedemos da seguinte maneira: Considerando que primeiramente a fenda superior será bloqueada, o primeiro platô representado no gráfico corresponde a intensidade total que está sendo transmitida pela fenda dupla. Na medida em que a montagem começa a bloquear a primeira fenda, as contagens começam a cair, representando a pri-

meira inclinação do gráfico. Quando a primeira fenda é totalmente bloqueada, o segundo platô é observado. Continuando a deslocar a posição do bloqueador, outra inclinação é observada, correspondendo à atenuação da abertura inferior. Obviamente, quando ambas fendas estão bloqueadas, observamos que não há valores de detecções. Através desta medida, conseguimos determinar os valores de contagens de fótons transmitidos por cada abertura da fenda dupla, após a reflexão no SLM e com diferença de fase nula. Isto é feito subtraindo o valor correspondente ao platô superior e inferior, dependendo da abertura em questão. Para a fenda superior por exemplo, basta subtrair o primeiro platô pelo platô central. Portanto, conseguimos inferir qual a posição que o bloqueador deve ter para que somente a metade das contagens passem em uma determinada fenda.

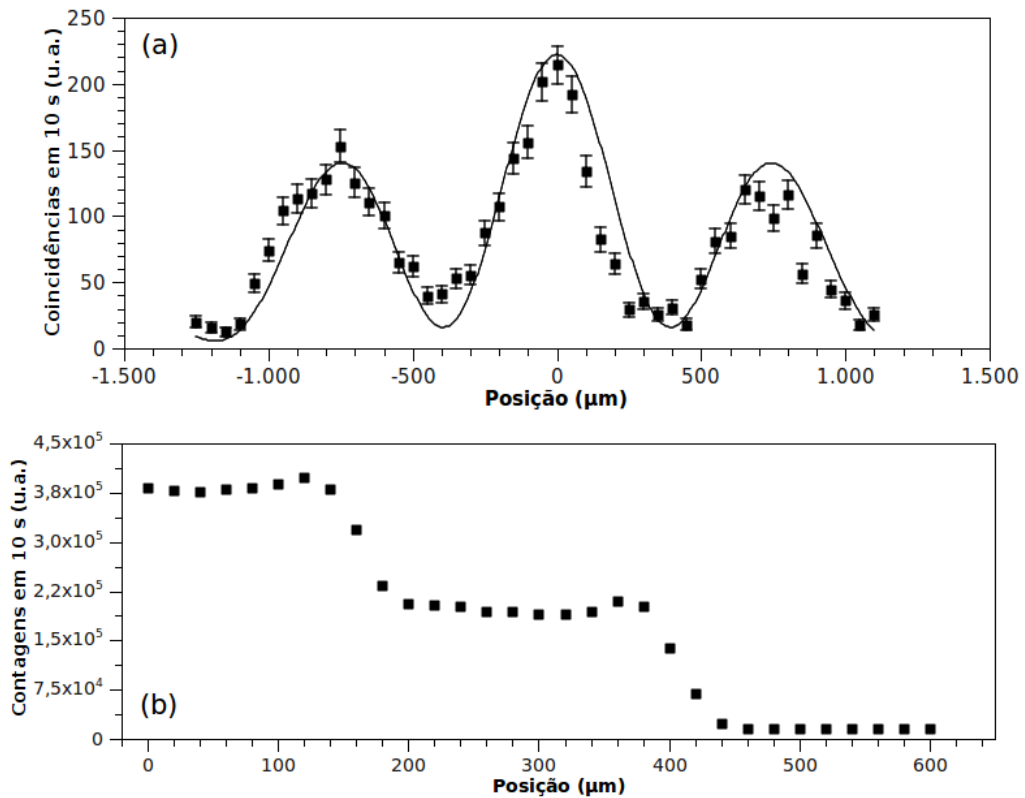


Figura 5.2: Medida do padrão de interferência com os fótons gêmeos (a) e medida das contagens dos fótons transmitidos pela fenda dupla em função da posição vertical do bloqueador (b). Em (a), a medida do padrão de interferência é realizada em coincidência entre o fóton transmitido pela fenda dupla, após ser refletido pelo SLM, e o outro fóton do par, usado como trigger. A diferença de fase produzida pelo SLM entre as fendas é nula. Em (b), o bloqueador foi posicionado entre o SLM e a fenda dupla. A curva contínua presente na figura (a) corresponde ao fit utilizando a Equação 3.5.

Através das medidas, foi possível determinar as probabilidades associadas a

cada estado do tetraedro. Resolvendo o sistema de equações (ver Eq. 4.18) obtemos a matriz densidade para um qubit. Abaixo mostramos a matriz densidade obtida bem como os histogramas com as probabilidades para a parte real e imaginária separadamente.

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 0,6760 & 0,2468 - i0,2158 \\ 0,2468 + i0,2158 & 0,3240 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

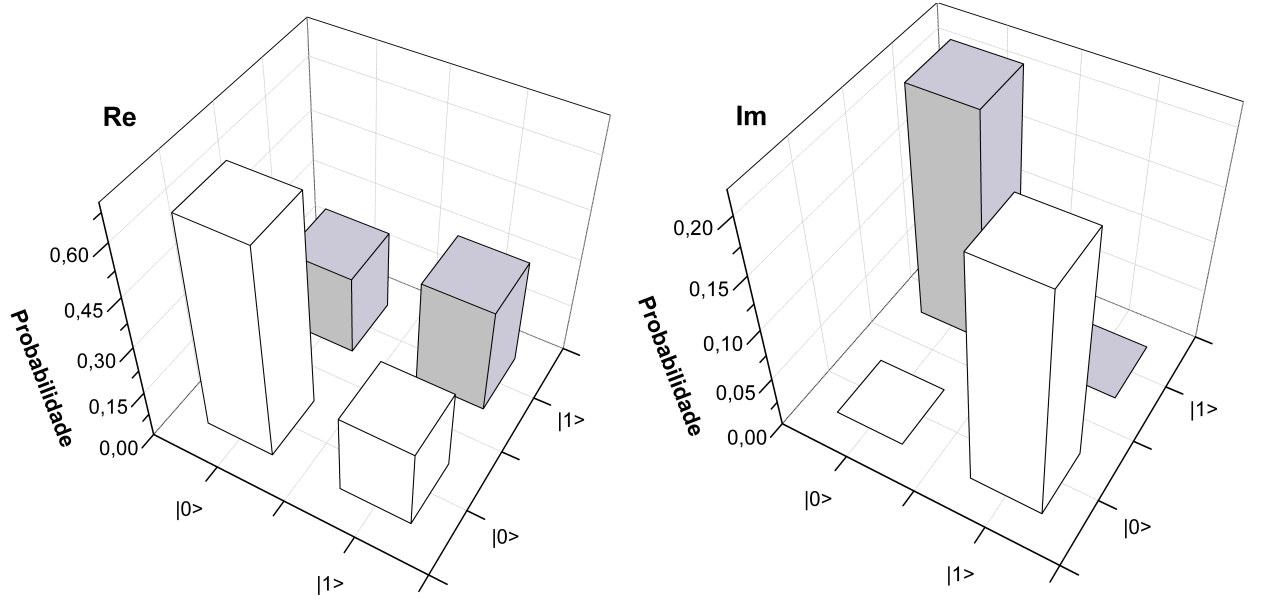


Figura 5.3: Histogramas com as probabilidades das partes real e imaginária da matriz densidade obtida.

O padrão de interferência da Figura 5.2(a) possui visibilidade de 78% e a pureza do estado obtido foi de

$$Pureza = Tr\{\hat{\rho}^2\} = 0,78. \quad (5.5)$$

5.2 Para dois qubits

O aparato experimental utilizado para a realização da tomografia de dois qubits está representado na Figura 5.4.

A montagem é basicamente a mesma que a anterior. Porém, agora ambos os feixes dos fótons gêmeos passarão pela fenda dupla. Após serem gerados pelo cristal não linear, os fótons passam por uma placa de onda $\lambda/2$, que deixa os fótons linearmente polarizados a 45° em relação ao eixo x, e seguem em direção ao SLM. Esta placa de onda

foi alinhada com um polarizador com ângulo de 45° em relação ao eixo x . O seu uso se deve a menor atenuação do feixe quando comparado ao polarizador. Após incidirem no SLM, os feixes incidem em espelhos metálicos e seguem em direção aos detectores. Para cada feixe, colocamos duas lentes entre os espelhos e os detectores. A primeira lente possui $f=12,5$ cm e está localizada a uma distância de $2f$ em relação ao SLM e ao detector, respectivamente. Esta lente é utilizada para fazer medidas das imagens das fendas. Por outro lado, a segunda lente ($f=10$ cm) está localizada a uma distância f do detector e a mesma possui a finalidade de focalizar o feixe no plano do detector. Para cada feixe de fótons convertidos, há polarizadores de saída com ângulos correspondentes às escalas de cinza colocadas no SLM (ver seção 3.3). Para implementarmos estados emaranhados, usamos uma lente convergente de 50 cm de foco para focalizar o feixe do Pump no plano da fenda dupla. Através deste método conseguimos gerar estados emaranhados de fendas (Eq. 2.33), já que devido a conservação do momento transversal dos fótons no plano da fenda dupla, saem da fenda dupla em um estado emaranhado de caminhos [6, 9].

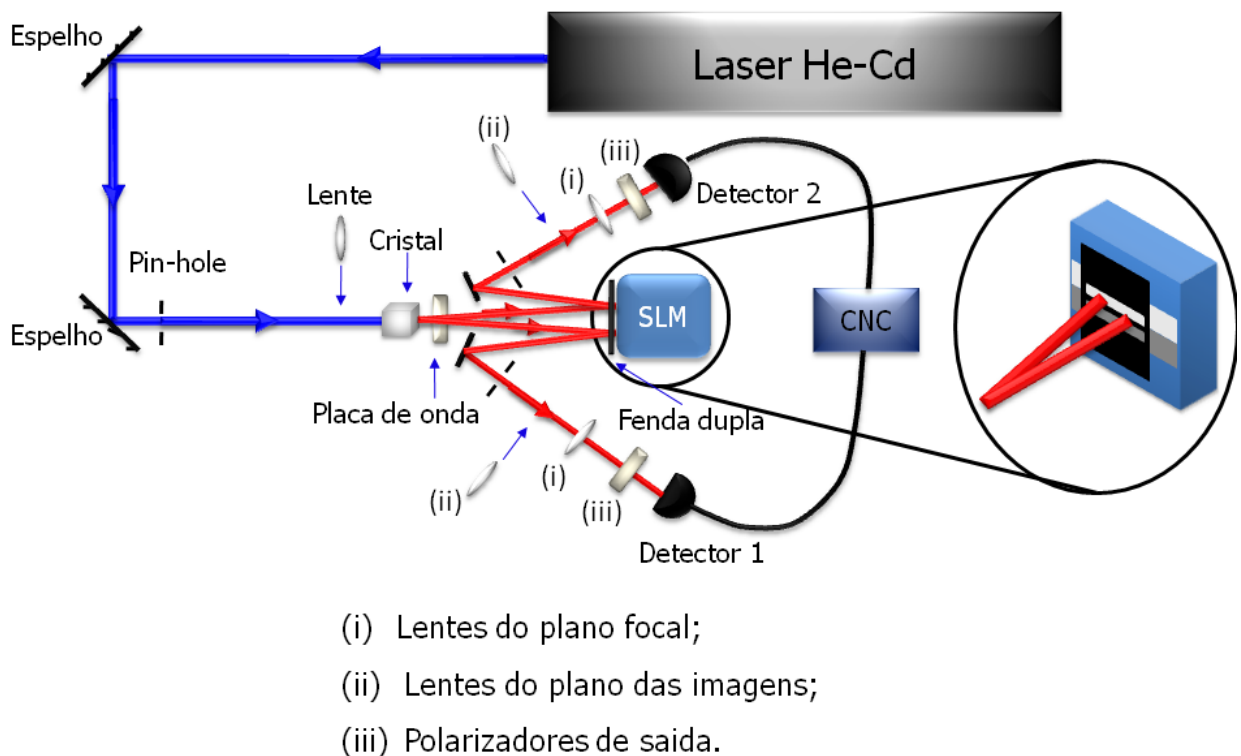


Figura 5.4: Montagem experimental utilizada para a realização da tomografia de dois qubits. Note que a fenda dupla está perpendicular ao plano formado pelos feixes de fótons.

5.2.1 Procedimento utilizado

Diferentemente do método de atenuação externo empregado no experimento de um qubit, para este experimento foi necessário a realização de uma segunda calibração do SLM. Como não havia espaço físico para acoplar os bloqueadores, aproveitamos da capacidade do nosso SLM de variar tanto fase como amplitude e procuramos conjuntos de escalas de cinza e ângulos de polarização de saída que dessem as diferenças de fase bem como as atenuações de 50% desejadas para a implementação do POVM. Esta calibração também será útil quando implementarmos as tomografias de um e dois qubits, visto que o procedimento de atenuação externo torna-se muito difícil para a atenuação da abertura central de uma fenda tripla.

A equação para o cálculo das probabilidades de cada estado é semelhante a Equação 5.1:

$$p_{ij} = \frac{n_{ij}}{\sum_{i,j} n_{ij}}, \quad (5.6)$$

onde a normalização utilizada é a mesma dada pela Equação 5.2.

5.2.2 Resultados

Como foi demonstrado na Ref. [13], através de medidas das imagens correlacionadas e dos padrões de interferência garantimos que o estado gerado está emaranhado. Assim, a Figura 5.5 mostra as medidas das imagens e dos padrões condicionais realizadas para a comprovação da natureza emaranhada do estado gerado. Nestas medidas, a diferença de fase produzida pelo SLM entre os dois caminhos é nula. O SLM foi desligado. Para a realização das medidas das imagens condicionais (Fig. (a) e (b)), o detector 2 foi colocado na posição correspondente a fenda superior utilizando a lente que faz as imagens e varremos verticalmente a posição do detector 1. Em seguida o detector 2 foi colocado na posição correspondente a abertura inferior e o mesmo procedimento foi realizado com o detector 1. Para a realização do padrão de interferência condicional (Fig. (b)) o procedimento foi análogo ao anterior. Utilizando as lentes posicionadas à uma distância f do plano dos detectores, posicionamos o detector 2 no máximo central do padrão e variamos o detector 1 verticalmente entre os três máximos do padrão de interferência. Em seguida, o detector 2 foi colocado na posição correspondente ao primeiro mínimo de seu padrão e

uma outra medida foi realizada utilizando o detector 1.

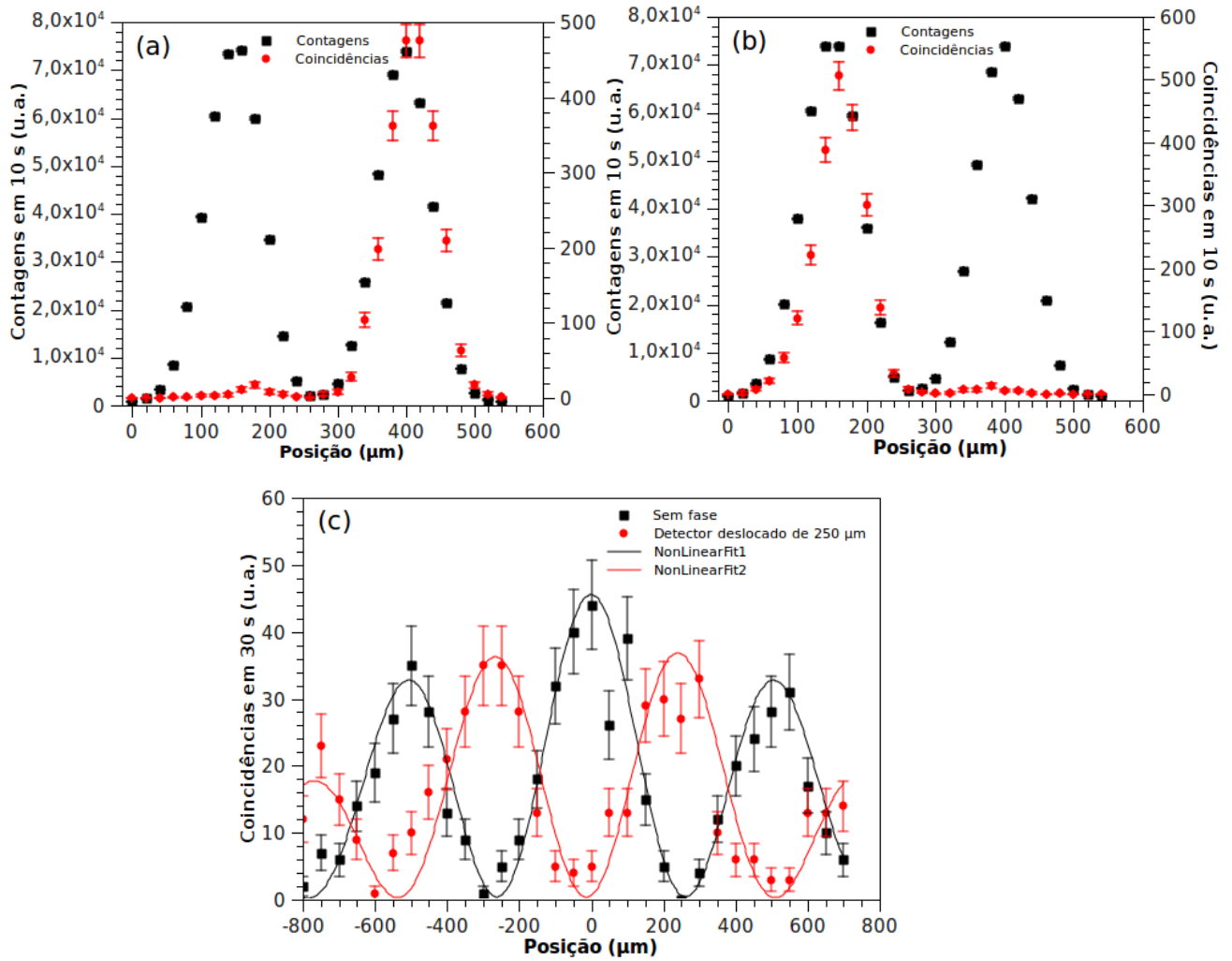


Figura 5.5: Medidas das imagens, (a) e (b), e do padrão de interferência condicional (c) quando o feixe do Pump esta focalizando no plano da fenda dupla. As medidas foram realizadas com o modulador espacial de luz desligado para garantir que não haja nenhum tipo de interação entre o mesmo e os feixes incidentes sobre ele. As curvas contínuas presentes na figura (c) correspondem aos fits utilizando a Equação 3.5. Para o fit de cor vermelha, obtivemos o valor de parâmetro c de 3,3. Assim, houve uma variação de fase bem próxima a π com o deslocamento de um dos detectores.

Portanto, através das medidas dos operadores e da resolução do sistema de equações foi possível obter a matriz densidade do sistema de dois qubits. Abaixo mostramos a matriz densidade obtida bem como os histogramas com as probabilidades para a parte real e imaginária separadamente. O padrão de interferência da Fig. 5.5(c) possui vizibilidade de 89%. Na matriz densidade obtida acima, o método Maximum-likelihood

foi aplicado. Dessa matriz temos que a pureza é dada por:

$$Pureza = Tr\{\hat{\rho}^2\} = 0,87. \quad (5.7)$$

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1808 & 0.1852 + 0.1464i & 0.1400 + 0.1400i \\ 0 & 0.1852 - 0.1464i & 0.4330 & 0.3694 + 0.1218i \\ 0 & 0.1400 - 0.1400i & 0.3694 - 0.1218i & 0.3862 \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

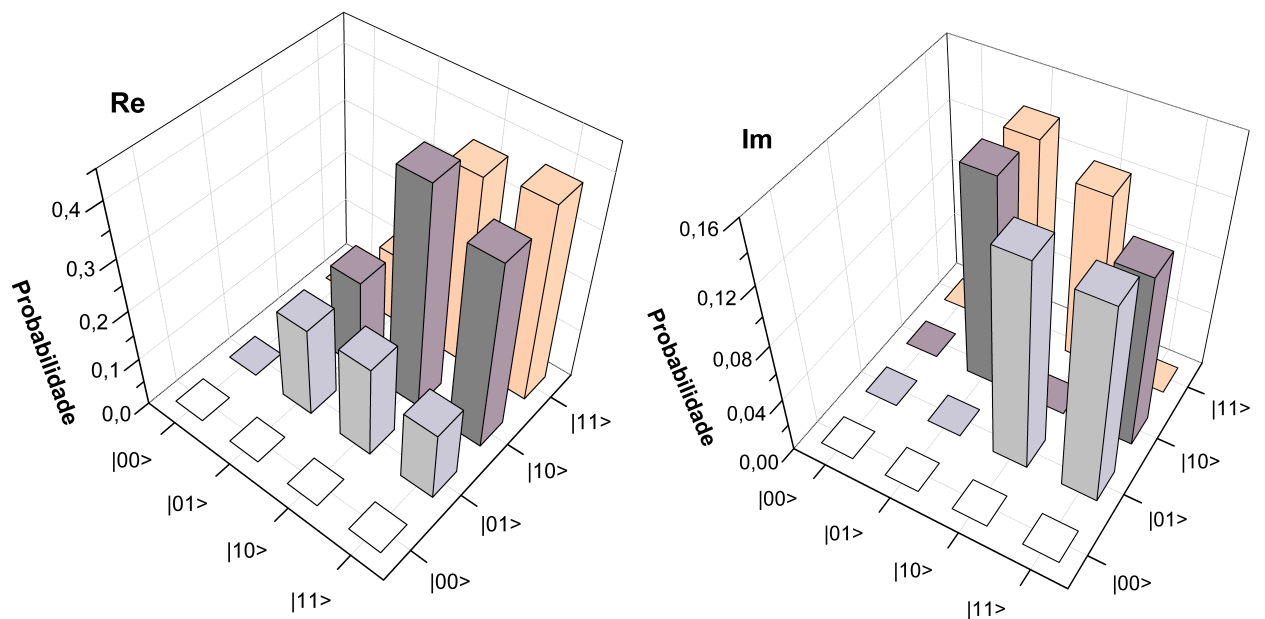


Figura 5.6: Histogramas com as probabilidades das partes real e imaginária da matriz densidade obtida.

6 Conclusões

Para a implementação experimental do método de tomografia mínima foi necessário caracterizar o modulador espacial de luz utilizado na realização dos experimentos. Primeiramente descobrimos que o SLM somente consegue modular fase e amplitude quando estão posicionados polarizadores no caminho do feixe de incidência e do feixe refletido. Para a realização da tomografia de um qubit foi necessário realizar uma calibração que consistia em obtermos valores específicos de escalas de cinza que nos fornecessem diferenças de fase pré-estabelecidas. Não nos preocupamos com métodos de atenuação utilizando o próprio SLM, pois como tínhamos espaço físico suficiente, realizamos as atenuações utilizando bloqueadores posicionados entre a fenda dupla e o modulador. Para a tomografia utilizamos uma proposta devido a *Řeháček* [5], que basicamente utiliza quatro estados específicos que delimitam um tetraedro na esfera de Bloch para definir um conjunto com quatro operadores. Este método, denominado pelos autores de tomografia mínima, possui como característica a necessidade de um menor número de medidas experimentais para a construção da matriz densidade. Para um qubit, por exemplo, são necessárias quatro medidas em comparação com o método usual de se medir as matrizes de Pauli, pois neste procedimento há a necessidade de se realizar seis medidas. Assim, foi possível a realização experimental da tomografia mínima para um qubit. Por outro lado, para dois qubits, a primeira calibração não pôde ser utilizada pois não havia espaço físico suficiente para se posicionar os bloqueadores. Por este motivo e também porque temos interesse em futuramente realizar as tomografias de um e dois qutris, o método de atenuação externa se torna pouco prático. Neste sentido, realizamos uma segunda calibração que consistiu basicamente em um mapeamento de todas as escalas de cinza do SLM em função dos ângulos dos polarizadores de saída. Foi possível obter conjuntos de escalas de cinza que além de fornecer as mesmas diferenças de fase necessárias para um qubit, simultaneamente proporcionaram as atenuações desejadas, como foi discutido no capítulo 3. Padrões de interferência e medidas das imagens das fendas foram realizadas com estes valores encontrados para haver a comprovação de que os parâmetros experimentais escolhidos realmente proporcionavam as mudanças necessárias para a implementação do POVM. Assim, através da segunda calibração, foi possível a realização experimental

da tomografia de dois qubits. As matrizes densidades medidas para um qubit e dois qubits permitem o cálculo da pureza do estado gerado que são 0,78 e 0,87, respectivamente. Futuramente pretendemos implementar experimentalmente as tomografias de um e dois qubits, bem como a geração de estados híbridos e testes de desigualdade de Bell utilizando o modulador espacial de Luz.

A Cálculo das relações necessárias para a tomografia de dois qubits

A matriz densidade resultante para dois qubits é dada por

$$\rho = \frac{1}{4} \sum_{ij} b_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j, \quad (\text{A.1})$$

onde b_{ij} correspondem às constantes a serem determinadas e as matrizes σ_i correspondem à identidade ($i = I$) e às matrizes de Pauli ($i = x, y, z$). Os produtos tensoriais das matrizes de Pauli e da identidade, necessárias para a construção da matriz densidade, são dados por:

$$\begin{aligned} \sigma_I \otimes \sigma_I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma_I \otimes \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_I \otimes \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_I \otimes \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \sigma_x \otimes \sigma_I &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_x \otimes \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_x \otimes \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_x \otimes \sigma_z &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\sigma_y \otimes \sigma_I &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_y \otimes \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\sigma_y \otimes \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_y \otimes \sigma_z &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\sigma_z \otimes \sigma_I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \sigma_z \otimes \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\sigma_z \otimes \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_z \otimes \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Assim, utilizando as matrizes acima juntamente com a Equação A.1 podemos reescrever explicitamente a matriz densidade como:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4}(\hat{\rho}_{Re} + i\hat{\rho}_{Im}). \quad (\text{A.2})$$

Aqui, $\hat{\rho}_{Re}$ e $\hat{\rho}_{Im}$ representam as componentes real e imaginária da matriz densidade e são dadas por:

$$\hat{\rho}_{Re} = \begin{pmatrix} b_{11} + b_{14} + b_{41} + b_{44} & b_{12} + b_{42} & b_{21} + b_{24} & b_{22} - b_{33} \\ b_{12} + b_{42} & b_{11} - b_{14} + b_{41} - b_{44} & b_{22} + b_{33} & b_{21} - b_{24} \\ b_{21} + b_{24} & b_{22} - b_{33} & b_{11} + b_{14} - b_{41} - b_{44} & b_{12} - b_{42} \\ b_{22} + b_{33} & b_{21} - b_{24} & b_{12} - b_{42} & b_{11} - b_{14} - b_{41} + b_{44} \end{pmatrix}$$

e

$$\hat{\rho}_{Im} = \begin{pmatrix} 0 & -b_{13} - b_{43} & -b_{31} - b_{34} & -b_{23} - b_{32} \\ b_{13} + b_{43} & 0 & b_{23} - b_{32} & -b_{31} + b_{34} \\ b_{31} + b_{34} & -b_{23} + b_{32} & 0 & -b_{13} + b_{43} \\ b_{23} - b_{32} & b_{31} - b_{34} & b_{13} - b_{43} & 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente ao que foi feito na seção 4.2.1, devemos construir os operadores associados aos estados da Equação 4.2.2. Para dois qubits os operadores são dados por:

$$\Pi_{ij} = \sum_{ij} |\psi_{ij}\rangle\langle\psi_{ij}|. \quad (\text{A.3})$$

Substituindo os estados de dois qubits na equação acima obtemos os seguintes operadores:

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_{11} &= \frac{1}{9}|00\rangle\langle 00| + \frac{\sqrt{2}}{9}|00\rangle\langle 01| + \frac{\sqrt{2}}{9}|00\rangle\langle 10| + \frac{2}{9}|00\rangle\langle 11| + \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{9}|01\rangle\langle 00| + \frac{2}{9}|01\rangle\langle 01| + \frac{2}{9}|01\rangle\langle 10| + \frac{2\sqrt{2}}{9}|01\rangle\langle 11| + \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{9}|10\rangle\langle 00| + \frac{2}{9}|10\rangle\langle 01| + \frac{2}{9}|10\rangle\langle 10| + \frac{2\sqrt{2}}{9}|10\rangle\langle 11| + \\ &+ \frac{2}{9}|11\rangle\langle 00| + \frac{2\sqrt{2}}{9}|11\rangle\langle 01| + \frac{2\sqrt{2}}{9}|11\rangle\langle 10| + \frac{4}{9}|11\rangle\langle 11|, \\ \hat{\Pi}_{12} &= \frac{1}{9}|00\rangle\langle 00| - \frac{\sqrt{2}}{9}|00\rangle\langle 01| + \frac{\sqrt{2}}{9}|00\rangle\langle 10| - \frac{2}{9}|00\rangle\langle 11| - \\ &- \frac{\sqrt{2}}{9}|01\rangle\langle 00| + \frac{2}{9}|01\rangle\langle 01| - \frac{2}{9}|01\rangle\langle 10| + \frac{2\sqrt{2}}{9}|01\rangle\langle 11| + \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{9}|10\rangle\langle 00| - \frac{2}{9}|10\rangle\langle 01| + \frac{2}{9}|10\rangle\langle 10| - \frac{2\sqrt{2}}{9}|10\rangle\langle 11| - \\ &- \frac{2}{9}|11\rangle\langle 00| + \frac{2\sqrt{2}}{9}|11\rangle\langle 01| - \frac{2\sqrt{2}}{9}|11\rangle\langle 10| + \frac{4}{9}|11\rangle\langle 11|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\Pi}_{13} = & \frac{2}{9}|00\rangle\langle 00| - i\frac{\sqrt{2}}{9}|00\rangle\langle 01| + \frac{2\sqrt{2}}{9}|00\rangle\langle 10| - i\frac{2}{9}|00\rangle\langle 11| + \\
& + i\frac{\sqrt{2}}{9}|01\rangle\langle 00| + \frac{1}{9}|01\rangle\langle 01| + i\frac{2}{9}|01\rangle\langle 10| + \frac{\sqrt{2}}{9}|01\rangle\langle 11| + \\
& + \frac{2\sqrt{2}}{9}|10\rangle\langle 00| - i\frac{2}{9}|10\rangle\langle 01| + \frac{4}{9}|10\rangle\langle 10| - i\frac{2\sqrt{2}}{9}|10\rangle\langle 11| + \\
& + i\frac{2}{9}|11\rangle\langle 00| + \frac{\sqrt{2}}{9}|11\rangle\langle 01| + i\frac{2\sqrt{2}}{9}|11\rangle\langle 10| + \frac{2}{9}|11\rangle\langle 11|
\end{aligned}$$

e assim sucessivamente.

Somando os operadores construídos, observa-se que $\sum_{ij} \Pi_{ij} = 4\hat{I}$. Logo, os operadores para a tomografia de dois qubits serão redefinidos como:

$$\hat{\Pi}_{ij} = \frac{1}{4}|\psi_{ij}\rangle\langle\psi_{ij}|. \quad (\text{A.4})$$

Na representação matricial, os dezesseis operadores são dados por:

$$\begin{aligned}
\hat{\Pi}_{11} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & 2 & 2 & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 & 2 & 2\sqrt{2} \\ 2 & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}, & \quad \hat{\Pi}_{12} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & -2 \\ -\sqrt{2} & 2 & -2 & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 & 2 & -2\sqrt{2} \\ -2 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}, \\
\hat{\Pi}_{13} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 2 & -i\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & -i2 \\ i\sqrt{2} & 1 & i2 & \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -i2 & 4 & -i2\sqrt{2} \\ i2 & \sqrt{2} & i2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}, & \quad \hat{\Pi}_{14} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 2 & i\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & i2 \\ -i\sqrt{2} & 1 & -i2 & \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & i2 & 4 & i2\sqrt{2} \\ -i2 & \sqrt{2} & -i2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}, \\
\hat{\Pi}_{21} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2 \\ \sqrt{2} & 2 & -2 & -2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -2 & 2 & 2\sqrt{2} \\ -2 & -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}, & \quad \hat{\Pi}_{22} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \\ -\sqrt{2} & 2 & 2 & -2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 & 2 & -2\sqrt{2} \\ 2 & -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\hat{\Pi}_{23} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 2 & -i\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & i2 \\ i\sqrt{2} & 1 & -i2 & -\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & i2 & 4 & -i2\sqrt{2} \\ -i2 & -\sqrt{2} & i2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Pi}_{24} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 2 & i\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -i2 \\ -i\sqrt{2} & 1 & i2 & -\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -i2 & 4 & i2\sqrt{2} \\ i2 & -\sqrt{2} & -i2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\Pi}_{31} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} & -i\sqrt{2} & -i2 \\ 2\sqrt{2} & 4 & -i2 & -i2\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & i2 & 1 & \sqrt{2} \\ i2 & i2\sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Pi}_{32} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 2 & -2\sqrt{2} & -i\sqrt{2} & i2 \\ -2\sqrt{2} & 4 & i2 & -i2\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & -i2 & 1 & -\sqrt{2} \\ -i2 & i2\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\Pi}_{33} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 4 & -i2\sqrt{2} & -i2\sqrt{2} & -2 \\ i2\sqrt{2} & 2 & 2 & -i\sqrt{2} \\ i2\sqrt{2} & 2 & 2 & -i\sqrt{2} \\ -2 & i\sqrt{2} & i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Pi}_{34} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 4 & i2\sqrt{2} & -i2\sqrt{2} & 2 \\ -i2\sqrt{2} & 2 & -2 & -i\sqrt{2} \\ i2\sqrt{2} & -2 & 2 & i\sqrt{2} \\ 2 & i\sqrt{2} & -i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\Pi}_{41} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} & i\sqrt{2} & i2 \\ 2\sqrt{2} & 4 & i2 & i2\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & -i2 & 1 & \sqrt{2} \\ -i2 & -i2\sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Pi}_{42} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 2 & -2\sqrt{2} & i\sqrt{2} & -i2 \\ -2\sqrt{2} & 4 & -i2 & i2\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & i2 & 1 & -\sqrt{2} \\ i2 & -i2\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\Pi}_{43} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 4 & -i2\sqrt{2} & i2\sqrt{2} & 2 \\ i2\sqrt{2} & 2 & -2 & i\sqrt{2} \\ -i2\sqrt{2} & -2 & 2 & -i\sqrt{2} \\ 2 & -i\sqrt{2} & i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Pi}_{44} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 4 & i2\sqrt{2} & i2\sqrt{2} & -2 \\ -i2\sqrt{2} & 2 & 2 & i\sqrt{2} \\ -i2\sqrt{2} & 2 & 2 & i\sqrt{2} \\ -2 & -i\sqrt{2} & -i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Para dois qubits, a Equação 4.17 pode ser reescrita como:

$$p_{ij} = Tr\{\hat{\Pi}_{ij}\hat{\rho}\} \quad (\text{A.5})$$

Portanto, chegamos nas dezesseis equações que determinam a matriz densidade para dois qubits:

$$\begin{aligned}
144p_{11} &= -4ib_{32} + 9b_{11} - 3b_{14} - 3b_{41} + b_{44} + 8b_{22} - 2\sqrt{2}b_{24} + 6\sqrt{2}b_{12} - 2\sqrt{2}b_{42} + 6\sqrt{2}b_{21}, \\
144p_{12} &= 4ib_{32} + 9b_{11} - 3b_{14} - 3b_{41} + b_{44} - 8b_{22} - 2\sqrt{2}b_{24} - 6\sqrt{2}b_{12} + 2\sqrt{2}b_{42} + 6\sqrt{2}b_{21}, \\
144p_{13} &= 9b_{11} + 3b_{14} - 3b_{41} - b_{44} + 8b_{23} - 4b_{32} + 2\sqrt{2}b_{24} + 6\sqrt{2}b_{21} - 8ib_{33} + 4\sqrt{2}b_{13} - 4\sqrt{2}b_{43} + \\
&\quad + 4\sqrt{2}b_{13} + 4\sqrt{2}b_{43}, \\
144p_{14} &= -2\sqrt{2}b_{13} - 2\sqrt{2}b_{43} + 6\sqrt{2}b_{21} + 9b_{11} + 3b_{14} - 3b_{41} - b_{44} - 8b_{23} - 4\sqrt{2}b_{13} + 4b_{32} + \\
&\quad + 2\sqrt{2}b_{24} + 8ib_{33} + 4\sqrt{2}b_{43}, \\
144p_{21} &= 4ib_{32} - 6\sqrt{2}b_{21} + 9b_{11} - 3b_{14} - 3b_{41} + b_{44} - 8b_{22} + 2\sqrt{2}b_{24} + 6\sqrt{2}b_{12} - 2\sqrt{2}b_{42}, \\
144p_{22} &= -4ib_{32} - 6\sqrt{2}b_{21} + 9b_{11} - 3b_{14} - 3b_{41} + b_{44} + 8b_{22} + 2\sqrt{2}b_{24} - 6\sqrt{2}b_{12} + 2\sqrt{2}b_{42}, \\
144p_{23} &= 9b_{11} + 3b_{14} - 3b_{41} - b_{44} - 8b_{23} + 4b_{32} + 4\sqrt{2}b_{13} - 4\sqrt{2}b_{43} + 8ib_{33} - 6\sqrt{2}b_{21} - 2\sqrt{2}b_{24} + \\
&\quad + 2\sqrt{2}b_{43} + 2\sqrt{2}b_{13}, \\
144p_{24} &= 9b_{11} + 3b_{14} - 3b_{41} - b_{44} + 8b_{23} - 4b_{32} - 4\sqrt{2}b_{13} + 4\sqrt{2}b_{43} - 8ib_{33} - 6\sqrt{2}b_{21} - 2\sqrt{2}b_{24} - \\
&\quad - 2\sqrt{2}b_{43} - 2\sqrt{2}b_{13}, \\
144p_{31} &= 9b_{11} - 3b_{14} + 3b_{41} - b_{44} + 4b_{32} - 4\sqrt{2}b_{34} + 4\sqrt{2}b_{31} + 2\sqrt{2}b_{31} + 2\sqrt{2}b_{34} + 6\sqrt{2}b_{12} + \\
&\quad + 2\sqrt{2}b_{42}, \\
144p_{32} &= 9b_{11} - 3b_{14} + 3b_{41} - b_{44} - 6\sqrt{2}b_{12} + 4\sqrt{2}b_{31} - 4\sqrt{2}b_{34} - 2\sqrt{2}b_{42} - 4b_{32} + 2\sqrt{2}b_{34} + \\
&\quad + 2\sqrt{2}b_{31}, \\
144p_{33} &= 4ib_{32} + 9b_{11} + 3b_{14} + 3b_{41} + b_{44} + 4\sqrt{2}b_{31} + 4\sqrt{2}b_{34} + 4\sqrt{2}b_{13} + 4\sqrt{2}b_{43} - 2\sqrt{2}b_{34} + \\
&\quad + 2\sqrt{2}b_{31} + 2\sqrt{2}b_{13} - 2\sqrt{2}b_{43}, \\
144p_{34} &= -4ib_{32} + 9b_{11} + 3b_{14} + 3b_{41} + b_{44} + 2\sqrt{2}b_{31} - 2\sqrt{2}b_{34} - 2\sqrt{2}b_{13} + 2\sqrt{2}b_{43} - 4\sqrt{2}b_{43} + \\
&\quad + 4\sqrt{2}b_{31} + 4\sqrt{2}b_{34} + 4\sqrt{2}b_{13}, \\
144p_{41} &= 9b_{11} - 3b_{14} + 3b_{41} - b_{44} - 2\sqrt{2}b_{31} - 2\sqrt{2}b_{34} + 4\sqrt{2}b_{34} - 4\sqrt{2}b_{31} + 6\sqrt{2}b_{12} + 2\sqrt{2}b_{42} - \\
&\quad - 4b_{32}, \\
144p_{42} &= 9b_{11} - 3b_{14} + 3b_{41} - b_{44} - 2\sqrt{2}b_{31} - 2\sqrt{2}b_{34} - 6\sqrt{2}b_{12} - 2\sqrt{2}b_{42} - 4\sqrt{2}b_{31} + 4\sqrt{2}b_{34} + \\
&\quad + 4b_{32}, \\
144p_{43} &= -4ib_{32} + 9b_{11} + 3b_{14} + 3b_{41} + b_{44} + 4\sqrt{2}b_{13} + 4\sqrt{2}b_{43} - 4\sqrt{2}b_{31} - 4\sqrt{2}b_{34} + 2\sqrt{2}b_{34} - \\
&\quad - 2\sqrt{2}b_{31} - 2\sqrt{2}b_{43} + 2\sqrt{2}b_{13}, \\
144p_{44} &= 4ib_{32} + 9b_{11} + 3b_{14} + 3b_{41} + b_{44} - 2\sqrt{2}b_{31} + 2\sqrt{2}b_{34} = 2\sqrt{2}b_{43} - 2\sqrt{2}b_{13} - 4\sqrt{2}b_{34} - \\
&\quad - 4\sqrt{2}b_{31} - 4\sqrt{2}b_{43} - 4\sqrt{2}b_{13}.
\end{aligned}$$

B Programas utilizados

Abaixo apresentamos os programas utilizados para a obtenção da matriz densidade de 2 qubits. O programa tomografytriang cria as dezesseis equações deduzidas anteriormente e o programa MLH2qubits resolve este sistema utilizando o método Maximum-Likelihood. Os programas para a obtenção da matriz de um qubit consistem de um caso especial destes programas. Estes programas foram desenvolvidos pelo aluno Breno Teixeira, estudante de doutorado em física deste departamento.

tomografytriang

```
function f = tomografytriang(t) (Função que será usada para calcular o Maximum-Likelihood)
Cont=[n11 n12 n13 n14 n21 n22 n23 n24 n31 n32 n33 n34 n41 n42 n43 n44]; (Escreve aqui as contagens)
Acc=[ac11 ac12 ac13 ac14 ac21 ac22 ac23 ac24 ac31 ac32 ac33 ac34 ac41 ac42 ac43 ac44]; (Escreve aqui as acidentais)
T=zeros(4,4);
for x=1:4
    T(x,x)=t(x);
end
T(1,2)=t(5)+1i*t(6);
T(1,3)=t(11)+1i*t(12);
T(1,4)=t(15)+1i*t(16);
T(2,3)=t(7)+1i*t(8);
T(2,4)=t(13)+1i*t(14);
T(3,4)=t(9)+1i*t(10);
T=T';
v=[0 1 1 0];
R=kron(v',v)/trace(kron(v',v));
S(:,,1)=[1 0;0 -1];
S(:,,2)=[0 1;1 0];
S(:,,3)=[0 -1i;1i 0];
S(:,,4)=[1 0;0 1];
```

```

G=zeros(4,4,16);
B=zeros(16,16);
r=zeros(1,16);
psi=zeros(4,16); (Estados do POVM)
psi(:,1)=[1 sqrt(2) sqrt(2) 2];
psi(:,2)=[1 -sqrt(2) sqrt(2) -2];
psi(:,3)=[sqrt(2) 1i 2 1i*sqrt(2)];
psi(:,4)=[sqrt(2) -1i 2 -1i*sqrt(2)];
psi(:,5)=[1 sqrt(2) -sqrt(2) -2];
psi(:,6)=[1 -sqrt(2) -sqrt(2) 2];
psi(:,7)=[sqrt(2) 1i -2 -1i*sqrt(2)];
psi(:,8)=[sqrt(2) -1i -2 1i*sqrt(2)];
psi(:,9)=[sqrt(2) 2 1i 1i*sqrt(2)];
psi(:,10)=[sqrt(2) -2 1i -1i*sqrt(2)];
psi(:,11)=[2 1i*sqrt(2) 1i*sqrt(2) -1];
psi(:,12)=[2 -1i*sqrt(2) 1i*sqrt(2) 1];
psi(:,13)=[sqrt(2) 2 -1i -1i*sqrt(2)];
psi(:,14)=[sqrt(2) -2 -1i 1i*sqrt(2)];
psi(:,15)=[2 1i*sqrt(2) -1i*sqrt(2) 1];
psi(:,16)=[2 -1i*sqrt(2) -1i*sqrt(2) -1];
psi=1/3*psi;

```

Base formada por produtos tensoriais das matrizes de pauli e indentidade:

```

g=1;
for x=1:4
    for y=1:4
        G(:,:,g)=kron(S(:,:,x),S(:,:,y));
        r(1,g)=trace(G(:,:,g)*R);
        g=g+1;
    end
end

```

Matriz da transformação:

```

for x=1:16
    for y=1:16

```

```

        B(x,y)=psi(:,x)'*G(:,y)*psi(:,x);
    end
end
Matriz que define as operações usadas na tomografia:
M=zeros(4,4,16);
Bi=inv(B);
for x=1:16
    for y=1:16
        M(:,x)=4*Bi(y,x)*G(:,y)+M(:,x);
    end
end
N=0; (N representa a normalização do estado)
for x=1:16
    N=trace(M(:,x))*Cont(x)+N;
end
F=0;
Tr=zeros(16,1);
for x=1:16
    Tr(x)=trace(M(:,x)*T'*T);
    F=[N * Tr(x) + Acc(x) - Cont(x)]2/(2*N*Tr(x)+Acc(x))+F;
end
f=F;

```

MLH2qubits

```

clc
clear all
NOME=input ( 'QUAL O NOME DO ARQUIVO DE OUTPUT? entre aspas e com .mat no final ' )
v=[0 1 1 0]; ( 'QUAL O ESTADO ESPERADO PELA MEDIDA? coloque um estado puro ' )
R=kron(v',v)/trace(kron(v',v)); (matriz densidade do estado esperado)
T(1)=0;
T(2)=sqrt(8)/4;
T(3)=1/4;

```

```

T(4)=0;
T(5)=0;
T(6)=0;
T(7)=1/4;
T(8)=1/4;
T(9)=1/4;
T(10)=0;
T(11)=0;
T(12)=0;
T(13)=1/4;
T(14)=1/4;
T(14)=1/4;
T(14)=1/4;
MLH=fminsearch(@(t) tomografytriang(t),T);
t=MLH;
CondInt=T;
T=zeros(4,4);
for x=1:4
    T(x,x)=t(x);
end
T(1,2)=t(5)+1i*t(6);
T(1,3)=t(11)+1i*t(12);
T(1,4)=t(15)+1i*t(16);
T(2,3)=t(7)+1i*t(8);
T(2,4)=t(13)+1i*t(14);
T(3,4)=t(9)+1i*t(10);
RHO=T'*T/(trace(T'*T))
PUREZA=trace(RHO*RHO) (Cálculo da pureza do estado)
Calcula o emaranhamento de formacao do estado
S=[0 0 0 -1; 0 0 1 0; 0 1 0 0;-1 0 0 0];
rho=S*RHO.'*S;
RRR=RHO*rho;
V=eig(RRR);

```

```

V=sqrt(V);
C=2*max(V)-sum(V); (Concorrenca do sistema)
Concorrecia=C
x=(1 + sqrt(1 - C^2))/2;
Ef=-x*log2(x)-(1-x)*log2(1-x);
EMARANHAMENTODEFORMACAO=Ef
Calcula as porcentagens que deveriam ser encontradas caso tivessemos medindo exatamente o estado v
psi=zeros(4,16); (vectores do POVM)
psi(:,1)=[1 sqrt(2) sqrt(2) 2];
psi(:,2)=[1 -sqrt(2) sqrt(2) -2];
psi(:,3)=[sqrt(2) 1i 2 1i*sqrt(2)];
psi(:,4)=[sqrt(2) 1i 2 1i*sqrt(2)];
psi(:,5)=[sqrt(2) -1i 2 -1i*sqrt(2)];
psi(:,6)=[1 sqrt(2) -sqrt(2) -2];
psi(:,7)=[1 -sqrt(2) -sqrt(2) 2];
psi(:,8)=[sqrt(2) 1i -2 -1i*sqrt(2)];
psi(:,9)=[sqrt(2) -1i -2 1i*sqrt(2)];
psi(:,10)=[sqrt(2) 2 1i 1i*sqrt(2)];
psi(:,11)=[sqrt(2) -2 1i -1i*sqrt(2)];
psi(:,12)=[2 1i*sqrt(2) 1i*sqrt(2) -1];
psi(:,13)=[2 -1i*sqrt(2) 1i*sqrt(2) 1];
psi(:,14)=[sqrt(2) 2 -1i -1i*sqrt(2)];
psi(:,15)=[sqrt(2) -2 -1i 1i*sqrt(2)];
psi(:,16)=[2 1i*sqrt(2) -1i*sqrt(2) 1];
psi(:,17)=[2 -1i*sqrt(2) -1i*sqrt(2) -1];
psi=1/3*psi;
r=zeros(16,1);
rho=r;
for x=1:16
    r(x)=psi(:,x)'R*psi(:,x);
    rho(x)=psi(:,x)'RHO*psi(:,x);
end
save(NOME);

```


Referências Bibliográficas

- [1] D. F. V. James, P. G. Kwiat, W. J. Munro, and A. G. White. Measurement of qubits. *Phys. Rev. A*, 64(5):052312, (2001).
- [2] A. Imamoglu, D. D. Awschalom, G. Burkard, D. P. DiVincenzo, D. Loss, M. Sherwin, and A. Small. Quantum information processing using quantum dot spins and cavity qed. *Phys. Rev. Lett.*, 83(20):4204, (1999).
- [3] A. Ling, K. P. Soh, A. Lamas-Linares, and C. Kurtsiefer. Experimental polarization state tomography using optimal polarimeters. *Phys. Rev. A*, 74(2):022309, (2006).
- [4] L. Mandel and E. Wolf. *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge Univ Pr, Cambridge, (1995).
- [5] J. Řeháček, B.-G. Englert, and D. Kaszlikowski. Minimal qubit tomography. *Phys. Rev. A*, 70(5):052321, (2004).
- [6] C. H. Monken, P. H. S. Ribeiro, and S. Pádua. Transfer of angular spectrum and image formation in spontaneous parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 57(4):3123, (1998).
- [7] L. Wang. *Induced Coherence With and Without Induced Emission*. PhD thesis, University of Rochester, New York, (1992).
- [8] M. Nielsen and I. Chuang. *Computação quântica e informação quântica*. tradução Ivan S. Oliveira, Porto Alegre, Bookman, (2005).
- [9] L. T. Neves. *Estados Emaranhados de Qubits e Qudits Criados com Pares de Fótons Produzidos na Conversão Paramétrica Descendente*. Tese de doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, (2006).
- [10] G. de Aquino Moreira Lima. *Geração de estados emaranhados de qudits espaciais e análises experimentais visando a utilização prática*. Tese de doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, (2006).

- [11] L. Neves, S. Pádua, and C. Saavedra. Controlled generation of maximally entangled qudits using twin photons. *Phys. Rev. A*, 69(4):042305, (2004).
- [12] A. F. Abouraddy, B. E. A. Saleh, A. V. Sergienko, and M. C. Teich. Role of entanglement in two-photon imaging. *Phys. Rev. Lett.*, 87(12):123602, Aug 2001.
- [13] L. Neves, G. Lima, J. G. Aguirre Gómez, C. H. Monken, C. Saavedra, and S. Pádua. Generation of entangled states of qudits using twin photons. *Phys. Rev. Lett.*, 94(10):100501, (2005).
- [14] J. W. Tay, M. A. Taylor, and W. P. Bowen. Sagnac-interferometer-based characterization of spatial light modulators. *Appl. Opt.*, 48(12):2236, (2009).
- [15] I. Moreno, P. Velásquez, C. R. Fernández-Pousa, M. M. Sánchez-López, and F. Mateos. Jones matrix method for predicting and optimizing the optical modulation properties of a liquid-crystal display. *Journal of Applied Physics*, 94(6):3697, (2003).
- [16] A. Márquez, I. Moreno, C. Iemmi, A. Lizana, J. Campos, and M. J. Yzuel. Mueller-stokes characterization and optimization of a liquid crystal on silicon display showing depolarization. *Opt. Express*, 16(3):1669, 2008.
- [17] Holoeye Photonics. *LC-R 2500 Spacial Light Modulator. Operation Instruction. Application Software*, 2006 edition, october (2004).
- [18] G. Fowles. *Introduction to modern optics*. Dover Pubns, (1989).
- [19] E. Hecht. *Optics*. Addison Wesley, 4 edition, (2001).
- [20] J. Altepeter, E. Jeffrey, and P. Kwiat. Photonic state tomography. *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 52, (2005).
- [21] J. Preskill. *Quantum information and quantum computation*. Lecture Notes of the Course Taught at Caltec, [Htp://www. thoery. ealtech. edu/people/preskill](http://www.thoery.ealtech.edu/people/preskill), (1997).
- [22] G. Lima, F. A. Torres-Ruiz, L. Neves, A. Delgado, C. Saavedra, and S. Pádua. Measurement of spatial qubits. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 41(18):185501, (2008).