

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICEX
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Jean Carlos Coelho Felipe

*Contribuições gravitacionais efetivas para o tensor de
polarização da eletrodinâmica escalar*

Belo Horizonte
2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICEX
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Jean Carlos Coelho Felipe

*Contribuições gravitacionais efetivas para o tensor de
polarização da eletrodinâmica escalar*

Dissertação apresentada ao Curso de Física da UFMG,
como requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Física.

Orientador: Maria Carolina Nemes
Doutora em Física - USP

Belo Horizonte
2010

Coelho Felipe, Jean Carlos

Contribuições gravitacionais efetivas para o tensor de polarização
da eletrodinâmica escalar / Jean Carlos Coelho Felipe - 2010

30.p

Ciências Exatas. I.Título.

CDU teste

Jean Carlos Coelho Felipe

Contribuições gravitacionais efetivas para o tensor de polarização da eletrodinâmica escalar

Dissertação apresentada ao Curso de Física da UFMG, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

BANCA EXAMINADORA

Maria Carolina Nemes

Doutora em Física - USP

Marcos Sampaio

Doutor em Física - Universidade de Durham - Inglaterra

Luis Cléber Tavares de Brito

Doutor em Física - USP

Resumo

Neste trabalho, descrevemos a interação da eletrodinâmica escalar com a gravitação via teoria de campos efetiva. Particularmente, vamos verificar se há alguma contribuição gravitacional para o tensor de polarização da eletrodinâmica escalar a ordem de 1 *loop*, bem como se esta contribuição é dependente de um *gauge*. Para implementar os cálculos usaremos o método da Regularização Implícita (RI), método este que independe de como as integrais divergentes são regularizadas. A principal motivação para realizarmos este cálculo decorre do fato de que recentemente alguns trabalhos mostraram que as contribuições gravitacionais para o acoplamento da teoria da gravitação com a teoria de Yang-Mills são dependentes do *gauge* [1, 2, 3, 4]. Mostraremos a existência de uma contribuição gravitacional para a eletrodinâmica escalar acoplada a gravitação que é dependente do *gauge*. Particularmente essa dependência aparece em uma contribuição efetiva do modelo.

abstract

This work, describe the interaction of scalar electrodynamics with gravitation by way of effective field theory. Particularly, we check if there is any gravitational contribution for polarization's tensor for scalar electrodynamics the order of 1 loop, and if this contribution is gauge dependent. To implement the calculations we use the Implicit Regularization method (RI). This method is independent of how the divergent integrals are regularized. The main motivation to realize this calculation stems from the fact that recently some studies have shown that gravitational contributions for coupling of theory of gravitation with Yang-Mills theory are gauge dependent [1, 2, 3, 4]. We show the existence of a gravitational contribution for scalar electrodynamics coupling the gravitation wich is gauge dependent. Particularly this dependence appears in a effective contribution of the model.

Agradecimentos

Se fosse falar de todos que me ajudaram para que essa dissertação se concretizasse, com certeza não caberia aqui. Logo, vou citar apenas alguns nomes, mas tenham plena ciência que a ajuda de vocês foi fundamental para a realização deste trabalho.

Agradeço a Deus, por ter me dado forças pra que pudesse chegar até aqui e por tudo que ele representa em minha vida.

Agradeço a toda minha família, em especial aos meus pais Gerci e Maria Auxiliadora, pelo apoio e pela compreensão durante este trabalho. Vocês são meu exemplo.

Aos meus irmãos Kênia, Gleisson, Alisson e Juninho pela torcida e pelas horas de alegria e descontração.

À minha namorada Estefânia, pela paciência, companherismo, cumplicidade e pelos momentos ausentes durante este trabalho.

Aos meus tios, em especial Sebastião e Laura pela acolhida em minha chegada a BH.

À Carolina, por ter acolhido mais este *filho* em sua grande família, pelo aprendizado, orientação e pelos ensinamentos que foram muito além da Física. Muito obrigado!

Ao Cléber, pela orientação, paciência e principalmente, pela sugestão do trabalho que deu origem a esta dissertação.

Ao Marcos, por se mostrar sempre pronto a ajudar-me no que fosse preciso.

Aos amigos do grupo de TQC da UFMG (Helvécio, Luellerson, Júnior e Adriano) pela ajuda, pelas conversas e pelos momentos de descontração.

Ao Wanderson pela amizade, companherismo e por ter me aturado durante todo este tempo.

Ao Clyffe, pela amizade e pela paciência ao me ensinar a trabalhar com o *Latex*.

Aos amigos do mestrado, pelos momentos de alegria durante a realização deste trabalho.

Aos amigos de Ouro Preto pelo apoio e pelos ensinamentos que levarei por toda a minha vida, em especial aos amigos do GOU UFOP e do departamento de Física da UFOP.

Aos amigos do GOU UFMG, pelo incondicional companherismo em todos os momentos, acadêmicos ou não.

Aos amigos de Rio Casca, pela presença e pela torcida, mesmo que distante.

Aos membros da banca por aceitarem avaliar-me neste trabalho.

Ao departamento de Física da UFMG pela oportunidade de realizar o mestrado e pelos ensinamentos.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Lista de Figuras

2.1	Forma diagramática da interação de 1 fóton com 2 campos escalares. Neste diagrama, consideramos que as linhas externas estão amputadas.	10
2.2	Forma diagramática da interação de 2 fótons com 2 campos escalares. Neste diagrama, consideramos que as linhas externas estão amputadas.	11
2.3	Propagador de uma partícula escalar com massa m e momento q	11
2.4	Contribuição da ordem de 1 <i>loop</i> para o tensor de polarização.	12
2.5	Contribuição da ordem de 1 <i>loop</i> para o tensor de polarização.	12
3.1	Propagador do gráviton.	27
3.2	Propagador do campo de <i>gauge</i>	27
4.1	Regras de Feynman para a teoria. As equações 1, 2, 3, 4, e 5 correspondem as figuras a), b), c), d) e e) respectivamente.	29
4.2	Forma diagramática da interação de 1 fóton com 2 campos escalares. . . .	33
4.3	Forma diagramática da interação de 2 fótons com 2 campos escalares. . . .	35
4.4	Forma diagramática da interação de 2 campos escalares, 1 fóton e 1 gráviton. . . .	38
4.5	Forma diagramática da interação de 1 gráviton com 2 fótons.	42
4.6	Forma diagramática da interação de 1 gráviton com 2 campos escalares. . . .	44
4.7	Correção quântica a ordem de 1 <i>loop</i> para o tensor de polarização da eletrodinâmica escalar.	45

Sumário

Lista de Figuras	5
1 Introdução	7
2 Apresentação do modelo	9
2.1 Eletrodinâmica Escalar	9
2.2 Cálculo dos diagramas	12
2.3 Eletrodinâmica escalar e Relatividade Geral tratadas como um teoria efetiva	19
3 Propagador do gráviton	22
4 Cálculo dos Vértices	28
4.1 Eletrodinâmica escalar acoplada com a gravitação	28
4.2 Cálculo dos vértices	30
5 Contribuição gravitacional para o tensor de polarização	46
6 Conclusões	57
A Apêndice	59
A.1 Regularização Implícita	59
A.2 Algumas integrais utilizadas no trabalho	61
Referências Bibliográficas	62

1 Introdução

A busca por uma teoria que incorpore a Mecânica Quântica (MQ) e a Teoria da Relatividade Geral (TRG) vem sendo objeto de grande estudo nos últimos anos. Porém, trabalhos como [5, 6] mostram que a Relatividade Geral é uma teoria não-renormalizável, impedindo que a teoria quântica da gravitação seja construída utilizando a mesma filosofia empregada no desenvolvimento do modelo padrão (MP). Outro empecilho ao tratamento da teoria, consiste na escala de energia na qual ela se manifesta. Ainda não existe aparato capaz de detectar energias da ordem de 10^{19} GeV, nem mesmo o *Large Hadrons Colider* (LHC) cuja energia é da ordem de 7 TeV.

Dessa maneira, outras formas para o tratamento da teoria tem sido buscadas [7, 8]. Particularmente, uma destas técnicas consiste num tratamento via Teoria de Campos Efetiva [9, 10], onde consegue-se prever características de baixas energias das teorias de gravitação quântica. E esta é justamente uma das características da teoria efetiva: não é necessário se conhecer o regime de altas energias da teoria quântica da gravitação, seja ela qual for. O método baseado em teorias efetivas consiste em definir a lagrangeana da teoria com todos os termos possíveis compatíveis com a simetria do modelo, inclusive aqueles que são não-renormalizáveis por contagem de potências.

O estudo de teorias efetivas tem sido abordados em diversos trabalhos [11, 12, 13], sendo o trabalho [11] um dos primeiros a abordar o uso de teorias efetivas como modelos físicos. Na prática, essa análise é feita ordem a ordem em *loops*, ou seja, à medida que se aumenta o número de *loops*, mais termos devem ser incluídos na lagrangeana efetiva. Assim, mesmo não conhecendo o comportamento para regiões de energia muito altas, através do ajuste das constantes de acoplamento podemos obter resultados na região de baixas energias da teoria.

Um exemplo bastante impressionante da utilização de teorias efetivas e sua aplicação no que se refere à reprodução de alguns fenômenos é a lagrangeana efetiva para baixas energias da cromodinâmica quântica (QCD). t Hooft percebeu que na escala de energia até 1 GeV, a simetria quiral é essencial. A partir da (QCD) então, construiu uma teoria efetiva envolvendo apenas quarks auto-interagentes. A partir dessa teoria,

que possui poucos parâmetros livres, a teoria para *hadrons* livres pode ser compreendida tanto qualitativamente quanto quantitativamente [14]

Neste trabalho, vamos calcular contribuições gravitacionais para a eletrodinâmica escalar no contexto de uma teoria efetiva, verificando se tal contribuição é dependente de um *gauge* arbitrário. A motivação para este estudo advém de resultados recentes que mostram que a contribuição gravitacional para função β da teoria de Yang-Mills é dependente do *gauge* [1, 2, 3, 4]. Nestes trabalhos foram utilizados diferentes esquemas de regularização como Regularização Dimensional [15] e Cutoff. Logo, para garantir que o cálculo será feito em um esquema independente de regularização, vamos utilizar neste trabalho as prescrições da Regularização Implícita (RI) [16, 17], esquema este que independe de como as integrais divergentes são regularizadas.

A estrutura desta dissertação seguirá a seguinte sequência: no Capítulo 2 será apresentado o modelo da eletrodinâmica escalar sem contribuições gravitacionais e também como se dá seu tratamento via teoria de campos efetiva. No Capítulo 3 será apresentado o cálculo detalhado do propagador do gráviton e do propagador para o campo de *gauge*. No Capítulo 4 serão feitos os cálculos dos vértices da teoria, incluindo possíveis contribuições gravitacionais. No Capítulo 5 calcularemos as contribuições gravitacionais para a eletrodinâmica escalar. No Capítulo 6 apresentaremos as conclusões e perspectivas para o trabalho e no Apêndice serão descritas algumas relações importantes da (RI), bem como algumas integrais utilizadas no trabalho. Utilizamos ainda neste trabalho $c = \hbar = 1$ e $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$.

2 Apresentação do modelo

Neste capítulo apresentaremos o modelo estudado neste trabalho. Primeiramente será feita a descrição da eletrodinâmica escalar na ausência de um campo gravitacional. Posteriormente, mostraremos como se dá o acoplamento com a gravidade através da ação de Einstein e como o modelo pode ser interpretado como uma teoria efetiva.

2.1 Eletrodinâmica Escalar

A lagrangeana da eletrodinâmica escalar pode ser escrita sem levar em conta correções gravitacionais, da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}_{ee} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi, \quad (2.1)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.2)$$

é o termo de Maxwell, com termo A_μ representando o campo de *gauge*, ϕ representando o campo escalar e o termo

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \quad (2.3)$$

representando a derivada covariante com relação ao campo de *gauge*. Assim, substituindo-se as expressões (2.2) e (2.3), a expressão (2.1), pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ee} = & -\frac{1}{2}\left[(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu)\right] + (\partial_\mu\phi^*)(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi \\ & - \left(ieA_\mu\phi^*(\partial^\mu\phi) - ieA^\mu\phi(\partial_\mu\phi^*)\right) + e^2A_\mu A^\mu\phi^*\phi. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dessa forma, a partir de (2.4), podemos obter as expressões para os vértices da eletrodinâmica escalar. Ainda nesta expressão, podemos perceber que existem dois tipos de interação possíveis: interação de um fóton com dois campos escalares e interação de dois fótons com dois campos escalares. Aqui, serão apresentadas as formas analítica e diagramática para esses vértices. Serão apresentadas também as formas analítica e diagramática para o propagador do campo escalar e um cálculo mais detalhado será posteriormente apresentado.

Interação de 1 fóton com 2 campos escalares

Da lagrangeana dada em (2.4), vemos que o termo correspondente a tal interação é dado por:

$$-\left(ieA_\mu\phi^*(\partial^\mu\phi) - ieA^\mu\phi(\partial_\mu\phi^*)\right). \quad (2.5)$$

Logo, partindo de (2.5), podemos construir a expressão analítica para a função de vértice correspondente. Ela é descrita da seguinte maneira:

$$\Theta^\gamma(p', p) = (2\pi)^4\delta(q + p - p') \left[-ie(p^\gamma + p'^\gamma) \right]. \quad (2.6)$$

Graficamente, a expressão (2.6) pode ser vista como:

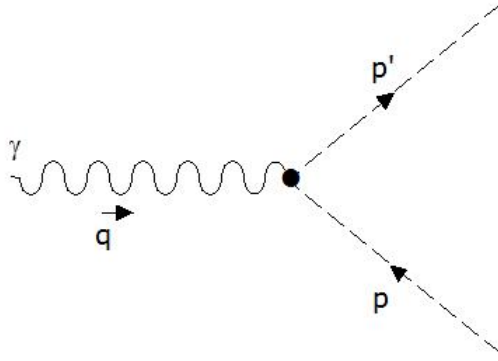


Figura 2.1: Forma diagramática da interação de 1 fóton com 2 campos escalares. Neste diagrama, consideramos que as linhas externas estão amputadas.

Interação de 2 fótons com 2 campos escalares

Novamente, de (2.4) vê-se que o termo que descreve esta interação é dado por:

$$e^2 A_\mu A^\mu |\phi|^2. \quad (2.7)$$

Assim, de (2.7), pode-se construir a expressão analítica para este vértice. Essa expressão é dada por:

$$\Theta^{\gamma\delta}(p', p) = (2\pi)^4\delta(q - q' + p - p') \left\{ 2ie^2\eta^{\gamma\delta} \right\}. \quad (2.8)$$

A representação gráfica da expressão (2.8) pode ser vista na figura (2.2).

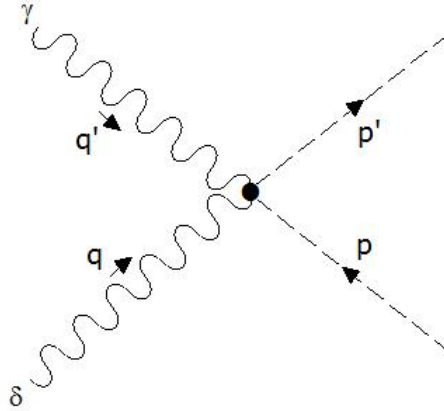


Figura 2.2: Forma diagramática da interação de 2 fótons com 2 campos escalares. Neste diagrama, consideramos que as linhas externas estão amputadas.

Propagador do campo escalar

O propagador do campo escalar é um resultado já bem estabelecido na literatura e pode ser descrito pela seguinte expressão[18]:

$$\Delta(q) = \frac{i}{q^2 - m^2}. \quad (2.9)$$

e graficamente pode ser visto através da figura (2.3).

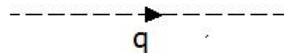


Figura 2.3: Propagador de uma partícula escalar com massa m e momento q .

Logo, a partir das expressões para os vértices (2.6) e (2.8) e também da expressão (2.9), podemos construir todos os gráficos de Feynman necessários para a teoria. Como estamos interessados neste trabalho em interações da ordem de 1 *loop*, temos que os gráficos de interesse para o tensor de polarização até primeira ordem em *loops* estão representados pelas figuras (2.4) e (2.5) respectivamente.

Agora, obtidos todos gráficos até ordem de 1 *loop*, temos que traduzir os diagramas representados pelas figuras (2.4) e (2.5) em expressões matemáticas, respeitando-se claro, as Regras de Feynman. Esse cálculo será feito de maneira detalhada na próxima seção.

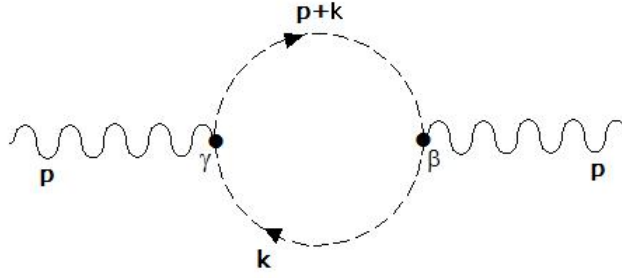


Figura 2.4: Contribuição da ordem de 1 *loop* para o tensor de polarização.

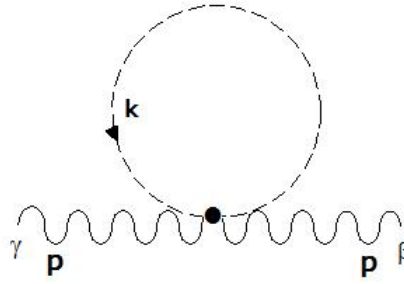


Figura 2.5: Contribuição da ordem de 1 *loop* para o tensor de polarização.

2.2 Cálculo dos diagramas

Como mencionado ao final da seção anterior, vamos calcular de maneira detalhada os diagramas mostrados nas figuras (2.4) e (2.5). Vamos começar pelo diagrama (2.4). Utilizando as Regras de Feynman mostradas através das expressões (2.6) e (2.9), o gráfico (2.3) pode ser traduzido matematicamente através da expressão:

$$I^{\gamma\beta}(m^2) = e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p+2k)^\gamma (p+2k)^\beta}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]}. \quad (2.10)$$

Mas temos que:

$$(p+2k)^\gamma (p+2k)^\beta = p^\gamma p^\beta + 2p^\gamma k^\beta + 2p^\beta k^\gamma + 4k^\gamma k^\beta. \quad (2.11)$$

Logo, substituindo a expressão (2.11) em (2.10), obtemos:

$$I^{\gamma\beta}(m^2) = I_1^{\gamma\beta}(m^2) + I_2^{\gamma\beta}(m^2) + I_3^{\gamma\beta}(m^2) + I_4^{\gamma\beta}(m^2), \quad (2.12)$$

onde cada um dos termos de (2.12) são dados por:

$$I_1^{\gamma\beta}(m^2) = e^2 p^\gamma p^\beta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]}, \quad (2.13)$$

$$I_2^{\gamma\beta}(m^2) = 2e^2 p^\gamma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]}, \quad (2.14)$$

$$I_3^{\gamma\beta}(m^2) = 2e^2 p^\beta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\gamma}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]}, \quad (2.15)$$

e

$$I_4^{\gamma\beta}(m^2) = 4e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\gamma k^\beta}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]}, \quad (2.16)$$

respectivamente.

Analisando as expressões de (2.13) a (2.16), podemos observar através de uma simples contagem de potência na variável de integração k , que todas as integrais apresentam divergências ultravioletas. Dessa forma, a teoria precisa ser renormalizada [19].

Assim, o primeiro passo consiste na regularização das integrais. Neste trabalho, serão utilizadas as prescrições da Regularização Implícita(RI) [16, 17].¹ O método da (RI) será explicado com mais detalhes no apêndice (B) deste trabalho. Sendo assim, vamos agora calcular as integrais que aparecem nas expressões de (2.13) a (2.16). A primeira delas é dada por:

$$I_1^{\gamma\beta}(m^2) = e^2 p^\gamma p^\beta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]}. \quad (2.17)$$

Utilizando a identidade (A.1) com $N = 0$ na expressão (2.17), temos:

$$\begin{aligned} I_1^{\gamma\beta}(m^2) &= e^2 p^\gamma p^\beta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \left\{ \frac{1}{(k^2 - m^2)} - \frac{(2p \cdot k + p^2)}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]} \right\} \\ &= e^2 p^\gamma p^\beta I_{log}(m^2) + F_1, \end{aligned} \quad (2.18)$$

com o termo $I_{log}(m^2)$ definido como

$$I_{log}(m^2) = \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2}. \quad (2.19)$$

Ainda na expressão (2.18), o termo F_1 definido por

$$F_1 = -e^2 p^\gamma p^\beta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(2p \cdot k + p^2)}{(k^2 - m^2)^2[(k+p)^2 - m^2]} \quad (2.20)$$

é finito com relação ao momento de integração k , o que pode ser visto realizando uma contagem de potências. Como estamos interessados somente nas partes divergentes, as partes finitas serão tratadas pela nomenclatura F (parte finita). Assim, a expressão (2.18) pode ser reescrita como:

$$I_1^{\gamma\beta}(m^2) = e^2 p^\gamma p^\beta I_{log}(m^2) + F_1. \quad (2.21)$$

¹Obviamente, existem outros esquemas de regularização como por exemplo dimensional, por cut-off, Diferencial, etc.

A próxima integral a ser calculada será:

$$I_2^{\gamma\beta}(m^2) = 2e^2 p^\gamma \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]}. \quad (2.22)$$

Novamente, aplicando a identidade (A.1) em (2.22) com $N = 0$ temos:

$$\begin{aligned} I_2^{\gamma\beta}(m^2) &= 2e^2 p^\gamma \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta}{(k^2 - m^2)} \left\{ \frac{1}{(k^2 - m^2)} - \frac{(2p \cdot k + p^2)}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]} \right\} \\ &= 2e^2 p^\gamma \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta}{(k^2 - m^2)^2} - 2e^2 p^\gamma \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta (2p \cdot k + p^2)}{(k^2 - m^2)^2 [(k+p)^2 - m^2]} \\ &= 2e^2 p^\gamma \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta}{(k^2 - m^2)^2} \\ &\quad - 4e^2 p^\gamma p_\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta k^\mu}{(k^2 - m^2)^2 [(k+p)^2 - m^2]} \\ &\quad - 2e^2 p^\gamma (p_\nu p^\nu) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta}{(k^2 - m^2)^2 [(k+p)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Agora, analisando as três integrais de (2.23), vemos que a primeira delas se anula, pois a integração é feita sob um intervalo simétrico para um integrando ímpar. Já a terceira integral é finita com relação à variável de integração k . Dessa maneira, podemos reescrever (2.23) como:

$$I_2^{\gamma\beta}(m^2) = -4e^2 p^\gamma p_\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta k^\mu}{(k^2 - m^2)^2 [(k+p)^2 - m^2]} + F_2. \quad (2.24)$$

Aplicando (A.1) novamente em (2.24) temos:

$$\begin{aligned} I_2^{\gamma\beta}(m^2) &= -4e^2 p^\gamma p_\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta k^\mu}{(k^2 - m^2)^2} \left\{ \frac{1}{(k^2 - m^2)} - \frac{(2p \cdot k + p^2)}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]} \right\} + F_2 \\ &= -4e^2 p^\gamma p_\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta k^\mu}{(k^2 - m^2)^3} \\ &\quad + 8e^2 p^\gamma p_\mu p_\theta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta k^\mu k^\theta}{(k^2 - m^2)^3 [(k+p)^2 - m^2]} \\ &\quad + 4e^2 p^\gamma p_\mu (p_\theta p^\theta) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta k^\mu}{(k^2 - m^2)^3 [(k+p)^2 - m^2]} + F_2. \\ &= -4e^2 p^\gamma p_\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta k^\mu}{(k^2 - m^2)^3} + F_2'. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Usando o resultado de (A.7) em (2.25) obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} I_2^{\gamma\beta}(m^2) &= -4e^2 p^\gamma p_\mu \left\{ \frac{1}{4} g^{\mu\beta} I_{\log}(m^2) - \alpha^{\mu\beta} \right\} + F_2'. \\ &= -e^2 p^\gamma p_\mu g^{\mu\beta} I_{\log}(m^2) + 4e^2 p^\gamma p_\mu \alpha^{\mu\beta} + F_2'. \\ &= -e^2 p^\gamma p^\beta I_{\log}(m^2) + 4e^2 p^\gamma p_\mu \alpha^{\mu\beta} + F_2'. \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde F'_2 é dada por:

$$\begin{aligned}
F'_2 &= -2e^2 p^\gamma (p_\nu p^\nu) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta}{(k^2 - m^2)^2 [(k+p)^2 - m^2]} \\
&+ 8e^2 p^\gamma p_\mu p_\theta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta k^\mu k^\theta}{(k^2 - m^2)^3 [(k+p)^2 - m^2]} \\
&+ 4e^2 p^\gamma p_\mu (p_\theta p^\theta) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta k^\mu}{(k^2 - m^2)^3 [(k+p)^2 - m^2]}. \tag{2.27}
\end{aligned}$$

A próxima integral é dada por:

$$I_3^{\gamma\beta}(m^2) = 2e^2 p^\beta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\gamma}{(k^2 - m^2) [(k+p)^2 - m^2]}. \tag{2.28}$$

Vemos que a integral (2.28) é análoga à integral (2.22) mudando apenas por uma troca de índices do tipo $\beta \leftrightarrow \gamma$. Dessa forma, o resultado da expressão (2.28) também será o mesmo de (2.22) que é dado por:

$$\begin{aligned}
I_3^{\gamma\beta}(m^2) &= -4e^2 p^\beta p_\mu \left\{ \frac{1}{4} g^{\mu\gamma} I_{\log}(m^2) - \alpha^{\mu\gamma} \right\} + F_3 \\
&= -e^2 p^\beta p_\mu g^{\mu\gamma} I_{\log}(m^2) + 4e^2 p^\beta p_\mu \alpha^{\mu\gamma} + F_3 \\
&= -e^2 p^\beta p^\gamma I_{\log}(m^2) + 4e^2 p^\beta p_\mu \alpha^{\mu\gamma} + F_3, \tag{2.29}
\end{aligned}$$

onde F_3 é dada por:

$$\begin{aligned}
F_3 &= -2e^2 p^\beta (p_\nu p^\nu) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\gamma}{(k^2 - m^2)^2 [(k+p)^2 - m^2]} \\
&+ 8e^2 p^\beta p_\mu p_\theta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\gamma k^\mu k^\theta}{(k^2 - m^2)^3 [(k+p)^2 - m^2]} \\
&+ 4e^2 p^\beta p_\mu (p_\theta p^\theta) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\gamma k^\mu}{(k^2 - m^2)^3 [(k+p)^2 - m^2]}. \tag{2.30}
\end{aligned}$$

A última integral a ser calculada será:

$$I_4^{\gamma\beta}(m^2) = 4e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\gamma k^\beta}{(k^2 - m^2) [(k+p)^2 - m^2]}. \tag{2.31}$$

Aplicando (A.1) em (2.31) temos:

$$\begin{aligned}
I_4^{\gamma\beta}(m^2) &= 4e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\gamma k^\beta}{(k^2 - m^2)} \left\{ \frac{1}{(k^2 - m^2)} - \frac{(2p \cdot k + p^2)}{(k^2 - m^2) [(k+p)^2 - m^2]} \right\} \\
&= 4e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\gamma k^\beta}{(k^2 - m^2)^2} - 8e^2 p_\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\gamma k^\beta k^\mu}{(k^2 - m^2)^2 [(k+p)^2 - m^2]} \\
&- 4e^2 (p_\nu p^\nu) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta k^\gamma}{(k^2 - m^2)^2 [(k+p)^2 - m^2]}. \tag{2.32}
\end{aligned}$$

Nota-se que as integrais em (2.32) ainda apresentam divergências. Dessa forma, temos que aplicar (A.1) novamente em (2.32) e também o resultado dado em (A.8). Fazendo

essas substituições, a expressão (2.32) fica escrita como:

$$\begin{aligned}
I_4^{\gamma\beta}(m^2) &= 4e^2 \left\{ \frac{1}{2} g^{\gamma\beta} I_{quad}(m^2) - \gamma^{\gamma\beta} \right\} - 8e^2 p_\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\gamma k^\beta k^\mu}{(k^2 - m^2)^3} \\
&+ 16e^2 p_\mu p_\theta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\gamma k^\beta k^\mu k^\theta}{(k^2 - m^2)^3 [(k+p)^2 - m^2]} \\
&+ 8e^2 p_\mu (p_\delta p^\delta) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\gamma k^\beta k^\mu}{(k^2 - m^2)^3 [(k+p)^2 - m^2]} \\
&- 4e^2 (p_\nu p^\nu) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta k^\gamma}{(k^2 - m^2)^3} \\
&+ 8e^2 (p_\nu p^\nu) p_\theta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\gamma k^\beta k^\theta}{(k^2 - m^2)^3 [(k+p)^2 - m^2]} \\
&+ 4e^2 (p_\nu p^\nu) (p_\theta p^\theta) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta k^\gamma}{(k^2 - m^2)^3 [(k+p)^2 - m^2]}, \tag{2.33}
\end{aligned}$$

onde o termo $\alpha^{\gamma\beta}$ que aparece na expressão (2.33) é chamado termo de superfície (ver apêndice). Definimos também o termo $I_{quad}(m^2)$ que aparece na expressão (2.33) como

$$I_{quad}(m^2) = \int^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)}. \tag{2.34}$$

Dessa forma, considerando as partes finitas e utilizando o resultado (A.7), a expressão (2.33) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
I_4^{\gamma\beta}(m^2) &= 4e^2 \left\{ \frac{1}{2} g^{\gamma\beta} I_{quad}(m^2) - \gamma^{\gamma\beta} \right\} - 8e^2 p_\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\gamma k^\beta k^\mu}{(k^2 - m^2)^3} \\
&+ 16e^2 p_\mu p_\theta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\gamma k^\beta k^\mu k^\theta}{(k^2 - m^2)^3 [(k+p)^2 - m^2]} \\
&- 4e^2 (p_\nu p^\nu) \left\{ \frac{1}{4} g^{\beta\gamma} I_{log}(m^2) - \alpha^{\beta\gamma} \right\} \\
&+ F_4. \tag{2.35}
\end{aligned}$$

Analisando o resultado (2.35), vemos que segundo termo se anula, pois é realizada uma integração em um intervalo simétrico com uma função ímpar no integrando e o terceiro termo ainda apresenta uma divergência de ordem logarítmica, implicando na necessidade

de se aplicar a identidade (A.1) mais uma vez. Feita essa análise, (2.35) torna-se:

$$\begin{aligned}
I_4^{\gamma\beta}(m^2) &= -e^2(p_\nu p^\nu)g^{\beta\gamma}I_{\log}(m^2) + 16e^2p_\mu p_\theta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\gamma k^\beta k^\mu k^\theta}{(k^2 - m^2)^3} \left\{ \frac{1}{(k^2 - m^2)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(2p \cdot k + p^2)}{(k^2 - m^2)[(k + p)^2 - m^2]} \right\} - 4e^2\gamma^{\gamma\beta} + 4e^2(p_\nu p^\nu)\alpha^{\gamma\beta} \\
&\quad + 2e^2g^{\beta\gamma}I_{quad}(m^2) + F_4. \\
&= -e^2(p_\nu p^\nu)g^{\beta\gamma}I_{\log}(m^2) + 16e^2p_\mu p_\theta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\gamma k^\beta k^\mu k^\theta}{(k^2 - m^2)^4} \\
&\quad - 32e^2p_\mu p_\theta p_\nu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\gamma k^\beta k^\mu k^\theta k^\nu}{(k^2 - m^2)^4[(k + p)^2 - m^2]} - 4e^2\gamma^{\gamma\beta} + 4e^2(p_\nu p^\nu)\alpha^{\gamma\beta} \\
&\quad - 16e^2p_\mu p_\theta (p_\nu p^\nu) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\gamma k^\beta k^\mu k^\theta}{(k^2 - m^2)^4[(k + p)^2 - m^2]} \\
&\quad + 2e^2g^{\beta\gamma}I_{quad}(m^2) + F_4. \\
&= -e^2(p_\nu p^\nu)g^{\beta\gamma}I_{\log}(m^2) + 16e^2p_\mu p_\theta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\gamma k^\beta k^\mu k^\theta}{(k^2 - m^2)^4} \\
&\quad - 4e^2\gamma^{\gamma\beta} + 4e^2(p_\nu p^\nu)\alpha^{\gamma\beta} + 2e^2g^{\beta\gamma}I_{quad}(m^2) + F'_4. \tag{2.36}
\end{aligned}$$

Agora, utilizando o resultado (A.8) em (2.36) chegamos ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
I_4^{\gamma\beta}(m^2) &= -e^2(p_\nu p^\nu)g^{\beta\gamma}I_{\log}(m^2) + \frac{2}{3}e^2g^{\gamma\beta}(p_\theta p^\theta)I_{\log}(m^2) + \frac{2}{3}e^2p^\gamma p^\beta I_{\log}(m^2) + \\
&\quad \frac{2}{3}e^2p^\gamma p^\beta I_{\log}(m^2) - 4e^2\gamma^{\gamma\beta} + 4e^2(p_\nu p^\nu)\alpha^{\gamma\beta} - \frac{2}{3}e^2p_\mu p_\theta \alpha^{\gamma\theta\mu\beta} \\
&\quad + 2e^2g^{\beta\gamma}I_{quad}(m^2) + F'_4, \tag{2.37}
\end{aligned}$$

onde F'_4 é definida como:

$$\begin{aligned}
F'_4 &= 8e^2p_\mu (p_\delta p^\delta) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\gamma k^\beta k^\mu}{(k^2 - m^2)^3[(k + p)^2 - m^2]} \\
&\quad + 8e^2(p_\nu p^\nu)p_\theta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\gamma k^\beta k^\theta}{(k^2 - m^2)^3[(k + p)^2 - m^2]} \\
&\quad + 4e^2(p_\nu p^\nu)(p_\theta p^\theta) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta k^\gamma}{(k^2 - m^2)^3[(k + p)^2 - m^2]} \\
&\quad - 32e^2p_\mu p_\theta p_\nu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\gamma k^\beta k^\mu k^\theta k^\nu}{(k^2 - m^2)^4[(k + p)^2 - m^2]} \\
&\quad - 16e^2p_\mu p_\theta (p_\nu p^\nu) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\gamma k^\beta k^\mu k^\theta}{(k^2 - m^2)^4[(k + p)^2 - m^2]}. \tag{2.38}
\end{aligned}$$

De posse do resultado das integrais (2.13), (2.14), (2.15) e (2.16), basta agora somá-los

para obter o resultado final. Ele será dado por:

$$\begin{aligned}
I^{\gamma\beta}(m^2) &= e^2 p^\gamma p^\beta I_{\log}(m^2) - e^2 p^\gamma p^\beta I_{\log}(m^2) - e^2 p^\gamma p^\beta I_{\log}(m^2) \\
&\quad - e^2 (p_\nu p^\nu) g^{\beta\gamma} I_{\log}(m^2) + \frac{2}{3} e^2 g^{\gamma\beta} (p_\theta p^\theta) I_{\log}(m^2) + \frac{2}{3} e^2 p^\gamma p^\beta I_{\log}(m^2) \\
&\quad + \frac{2}{3} e^2 p^\gamma p^\beta I_{\log}(m^2) - 4e^2 \gamma^{\gamma\beta} + 4e^2 (p_\nu p^\nu) \alpha^{\gamma\beta} - \frac{2}{3} e^2 p_\mu p_\theta \alpha^{\gamma\theta\mu\beta} \\
&\quad + 4e^2 p^\gamma p_\mu \alpha^{\mu\beta} + 4e^2 p^\beta p_\mu \alpha^{\mu\gamma} + 2e^2 g^{\gamma\beta} I_{quad}(m^2) + F_1 + F'_2 + F_3 + F'_4. \\
&= -\frac{1}{3} e^2 (p_\nu p^\nu) g^{\beta\gamma} I_{\log}(m^2) + \frac{1}{3} e^2 p^\gamma p^\beta I_{\log}(m^2) - 4e^2 \gamma^{\gamma\beta} + 4e^2 (p_\nu p^\nu) \alpha^{\gamma\beta} \\
&\quad - \frac{2}{3} e^2 p_\mu p_\theta \alpha^{\gamma\theta\mu\beta} + 4e^2 p^\gamma p_\mu \alpha^{\mu\beta} + 4e^2 p^\beta p_\mu \alpha^{\mu\gamma} + 2e^2 I_{quad}(m^2) \\
&\quad + F_1 + F'_2 + F_3 + F'_4. \tag{2.39}
\end{aligned}$$

Agrupando os termos, a expressão (2.39) é reescrita como:

$$\begin{aligned}
I^{\gamma\beta}(m^2) &= -\frac{1}{3} e^2 I_{\log}(m^2) \left\{ g^{\gamma\beta} p^2 - p^\gamma p^\beta \right\} - 4e^2 \gamma^{\gamma\beta} + 4e^2 (p_\nu p^\nu) \alpha^{\gamma\beta} - \frac{2}{3} e^2 p_\mu p_\theta \alpha^{\gamma\theta\mu\beta} \\
&\quad + 4e^2 p^\gamma p_\mu \alpha^{\mu\beta} + 4e^2 p^\beta p_\mu \alpha^{\mu\gamma} + 2e^2 g^{\gamma\beta} I_{quad}(m^2) \\
&\quad + F_1 + F'_2 + F_3 + F'_4. \tag{2.40}
\end{aligned}$$

Do resultado de (2.40), nota-se que os termos de superfície são os possíveis termos violadores de simetria com relação à transversalidade. Assim, para eliminarmos esse problema, vamos desprezar tais termos da expressão (2.40). Portanto, chegamos ao seguinte resultado para esta expressão:

$$I^{\gamma\beta}(m^2) = -\frac{1}{3} e^2 I_{\log}(m^2) \left\{ g^{\gamma\beta} p^2 - p^\gamma p^\beta \right\} + 2e^2 g^{\gamma\beta} I_{quad}(m^2) + F_1 + F'_2 + F_3 + F'_4. \tag{2.41}$$

onde, (2.41) expressa o resultado analítico para gráfico dado em (2.4). Os termos F_1 , F'_2 , F_3 e F'_4 são dados pelas expressões (2.20), (2.27), (2.30) e (2.38) respectivamente.

Agora, temos que calcular o gráfico (2.5). Utilizando as Regras de Feynman (2.7) e (2.9), O gráfico (2.5) pode ser traduzido matematicamente na seguinte expressão:

$$I^{\gamma\beta}(m^2) = -2e^2 \eta^{\gamma\beta} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)}. \tag{2.42}$$

Agora, substituindo o resultado de (A.3) na expressão (2.42), chegar-se-á ao seguinte resultado analítico para o gráfico (2.5):

$$I^{\gamma\beta}(m^2) = -2e^2 \eta^{\gamma\beta} I_{quad}(m^2). \tag{2.43}$$

Sendo assim, basta agora somarmos as contribuições dos gráficos (2.4) e (2.5), traduzidos nas expressões (2.41) e (2.43) respectivamente. Portanto, obtemos o seguinte

resultado:

$$\begin{aligned}
 I^{\gamma\beta}(m^2) &= -\frac{1}{3}e^2 I_{log}(m^2) \left\{ \eta^{\gamma\beta} p^2 - p^\gamma p^\beta \right\} + 2e^2 \eta^{\gamma\beta} I_{quad}(m^2) - 2e^2 \eta^{\gamma\beta} I_{quad}(m^2) \\
 &\quad + F_1 + F_2' + F_3 + F_4' \\
 &= -\frac{1}{3}e^2 I_{log}(m^2) \left\{ \eta^{\gamma\beta} p^2 - p^\gamma p^\beta \right\} + F_1 + F_2' + F_3 + F_4'. \tag{2.44}
 \end{aligned}$$

que representa a contribuição a ordem de 1 *loop* para a função de Green de dois pontos da eletrodinâmica escalar. Os termos F_1 , F_2' , F_3 e F_4' representam as partes finitas da expressão (2.10). Ainda na expressão (2.44), fizemos a seguinte troca de termos: $g^{\gamma\beta} \rightarrow \eta^{\gamma\beta}$, troca esta que será explicada posteriormente. Na próxima seção, será apresentado o modelo para o tratamento da eletrodinâmica escalar, agora acoplada a gravitação, via uma teoria efetiva.

2.3 Eletrodinâmica escalar e Relatividade Geral tratadas como um teoria efetiva

Como mencionado no fim da seção anterior, vamos apresentar a eletrodinâmica escalar acoplada à gravitação. A razão para o modelo ser tratado como uma teoria efetiva vem do fato de quando calculamos correções quânticas para a eletrodinâmica escalar, aparecem termos nessas correções que, a princípio, não estão contidos na lagrangeana original. Dessa maneira, para que se possa construir a lagrangeana da forma correta, condizente com o caráter de teoria efetiva, deve-se incluir na lagrangeana todos os termos possíveis compatíveis com a simetria da teoria.

Para isso, vamos escrever como se dá o acoplamento da eletrodinâmica escalar com a gravitação. Ele é dado através da seguinte expressão:

$$S = S_g + S_e, \tag{2.45}$$

com S_g representando a ação de Einstein descrita da seguinte maneira:

$$S_g = \frac{2}{\kappa^2} \int dx^4 \sqrt{-g} R, \tag{2.46}$$

onde R é o tensor de curvatura escalar definido por:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \tag{2.47}$$

com o tensor $R_{\mu\nu}$, conhecido como tensor de Ricci dado por:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\lambda\sigma}^\lambda \quad (2.48)$$

e os coeficientes $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ conhecidos como símbolos de Christoffel, definidos por:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\alpha g_{\beta\sigma} + \partial_\beta g_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta}). \quad (2.49)$$

Ainda na expressão (2.46), o termo κ^2 é definido por

$$\kappa^2 = 32\pi G, \quad (2.50)$$

onde G representa a constante da gravitação de Newton. Definimos também na expressão (2.46), o termo

$$g = \det(g_{\mu\nu}) \quad (2.51)$$

como sendo o determinante da métrica $g_{\mu\nu}$.

Na expressão (2.45), o termo S_e representa a ação advinda da lagrangeana da eletrodinâmica escalar. Na sua formulação covariante, ela pode ser escrita como:

$$S_e = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} (g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\alpha\nu} F_{\mu\beta}) + (D_\mu \phi + ieA_\mu)^* (g^{\mu\nu}) (D_\nu \phi + ieA_\nu) - m^2 \phi \phi^* \right]. \quad (2.52)$$

Mais adiante, a expressão (2.52) será usada para o cálculo dos vértices da eletrodinâmica escalar acoplada à gravitação.

Olhando do ponto de vista de uma teoria efetiva, a expressão (2.52) apresenta um acoplamento derivativo mínimo do campo gravitacional com os campos de *gauge* e com os campos escalares [20].

Para a interação entre o campo gravitacional e o campo de fóton, termos de acoplamento mínimo que são induzidos da teoria, a ordem de 1 *loop*, são do tipo:

$$\sqrt{-g} T_{\mu\nu}^2, \sqrt{-g} R_{\mu\nu} T^{\mu\nu}, \quad (2.53)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor de Maxwell definido como:

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \quad (2.54)$$

Da mesma maneira, a ordem de 1 *loop*, termos de acoplamento mínimo induzidos da lagrangeana para os campos escalares podem ser dados pelos seguintes termos:

$$\sqrt{-g}R^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi^*)(\partial_\nu\phi), \sqrt{-g}R|\partial_\mu\phi|^2, \sqrt{-g}Rm^2|\phi|^2. \quad (2.55)$$

Vale lembrar que esse processo deve se feito *loop a loop*, ou seja, necessitando-se de uma teoria por exemplo a 2 *loops*, novos termos devem ser incluídos na lagrangeana efetiva.

Assim, tratando a eletrodinâmica escalar como uma teoria de campos efetiva, temos que a princípio, a lagrangeana pode conter termos do tipo:

$$\mathcal{L}_{f\acute{o}ton} = \sqrt{-g} \left[c_1 T_{\mu\nu}^2 + c_2 R_{\mu\nu} T^{\mu\nu} + \dots \right] \quad (2.56)$$

e

$$\mathcal{L}_\phi = \sqrt{-g} \left[d_1 R^{\mu\nu} (\partial_\mu\phi^*)(\partial_\nu\phi) + d_2 R |\partial_\mu\phi|^2 + d_3 R m^2 |\phi|^2 + \dots \right], \quad (2.57)$$

onde nas expressões (2.56) e (2.57) escrevemos separadamente as lagrangeanas onde há interação de fótons com o campo gravitacional e onde há interação dos campos escalares com o campo gravitacional.

Neste trabalho, mostraremos que outro termo que poderia ser acrescentado na lagrangeana efetiva (2.56) seria um termo do tipo

$$c_3 \{ (\partial_\gamma F_{\mu\nu})(\partial^\gamma F^{\mu\nu}) \} \quad (2.58)$$

mas veremos mais adiante no capítulo 5 que seu acréscimo não é necessário, uma vez que este termo dependerá da escolha de um *gauge* arbitrário.

Os coeficientes $(c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3, \dots)$ que aparecem nas expressões (2.56), (2.57) e (2.58) são, do ponto de vista de uma teoria efetiva, constantes que podem, em princípio, ser determinadas através de experimentos. Desta maneira, a teoria efetiva da eletrodinâmica escalar acoplada com a gravidade, se torna renormalizável, pelo menos até ordem de 1 *loop*. Nessa aproximação, esta teoria é bem determinada através dos acoplamentos mínimos de derivadas na lagrangeana, mas a medida em que se necessita de uma análise da teoria em uma escala maior de energia, mais termos de derivadas devem ser incluídos [21].

Visando calcular possíveis contribuições gravitacionais para o tensor de polarização da eletrodinâmica escalar, precisaremos calcular o propagador do gráviton. O cálculo detalhado será apresentado no próximo capítulo.

3 Propagador do gráviton

Como mencionado no fim do capítulo 2, neste capítulo será apresentado o cálculo do propagador do gráviton. O propósito deste capítulo consiste também em expor de maneira bem didática este cálculo, o que não é encontrado na literatura com tanta frequência. Este resultado é importante e necessário para obtermos os vértices para a eletrodinâmica escalar acoplada à gravidade.

Para o cálculo do propagador, vamos partir da expressão (2.46), que mostra a ação de Einstein da Relatividade Geral. Vamos escrever a métrica $g_{\mu\nu}$ como uma soma da contribuição da métrica de Minkowski usual $\eta_{\mu\nu}$ mais um termo do tipo $\kappa h_{\mu\nu}$, da seguinte maneira:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}. \quad (3.1)$$

Da mesma forma, faremos também a expansão da matriz inversa da métrica $g^{\mu\nu}$. Ela é dada por:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu} + \kappa^2 h_{\alpha}^{\mu} h^{\nu\alpha} + O(h^3). \quad (3.2)$$

Logo, vamos expandir a ação dada em (2.46) em termos das expressões (3.1) e (3.2), de maneira que ela possa ser reescrita de uma forma quadrática no campo h , para que possamos calcular o propagador do gráviton na teoria quântica.

Primeiramente, note que o termo $\sqrt{-g}$ que aparece na expressão (2.46) pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} &= \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} \\ &= \sqrt{-1} \exp\left(\frac{1}{2} \text{Tr} \ln g_{\mu\nu}\right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde foi usada em (3.3) a seguinte identidade:

$$\det A_{\mu\nu} = \exp(\text{Tr} \ln A_{\mu\nu}). \quad (3.4)$$

Substituindo a expressão (3.1) em (3.3), temos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g} &= \sqrt{-1} \exp\left(\frac{1}{2} \text{Tr} \ln[\eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}]\right) \\
&= \sqrt{-1} \exp\left(\frac{1}{2} \text{Tr} \ln[\eta_{\mu\alpha}(\delta_\nu^\alpha + \kappa h_\nu^\alpha)]\right) \\
&= \sqrt{-1} \exp\left(\frac{1}{2} \text{Tr} \ln(\eta_{\mu\alpha}) + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln(\delta_\nu^\alpha + \kappa h_\nu^\alpha)\right) \\
&= \sqrt{-1} \exp\left(\frac{1}{2} \text{Tr} \ln(\eta_{\mu\alpha})\right) \exp\left(\frac{1}{2} \text{Tr} \ln(\delta_\nu^\alpha + \kappa h_\nu^\alpha)\right) \\
&= \sqrt{-\eta} \exp\left(\frac{1}{2} \text{Tr} \ln(\delta_\nu^\alpha + \kappa h_\nu^\alpha)\right).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Agora, expandindo a expressão (3.5) como uma série de Taylor em torno do campo h , obtemos que a expressão (3.3) pode ser escrita como¹:

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-\eta} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \kappa h_\alpha^\alpha + \frac{1}{8} \kappa^2 \left[(h_\alpha^\alpha)^2 - 2h_\alpha^\beta h_\beta^\alpha \right] \right\}. \tag{3.6}$$

onde a equação (3.6) foi expandida até segunda ordem nos campos h . O próximo passo, consiste em expandirmos também a expressão (2.47) em termos das expressões (3.1) e (3.2). Novamente, para o cálculo do propagador, queremos uma expressão até segunda ordem no campo h . Primeiramente, serão expandidos os coeficientes de Christoffel. Assim, substituindo (3.1) e (3.2) em (2.49), temos (com os respectivos índices):

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda &= \frac{1}{2} (\eta^{\lambda\alpha} - \kappa h^{\lambda\alpha} + \kappa^2 h_\mu^\lambda h^{\mu\alpha}) (\partial_\mu (\eta_{\lambda\alpha} + \kappa h_{\lambda\alpha}) + \partial_\lambda (\eta_{\mu\alpha} + \kappa h_{\mu\alpha}) - \partial_\alpha (\eta_{\mu\lambda} + \kappa h_{\mu\lambda})) \\
&= \frac{1}{2} \kappa \{ \eta^{\lambda\alpha} \partial_\mu h_{\lambda\alpha} + \eta^{\lambda\alpha} \partial_\lambda h_{\mu\alpha} + \eta^{\lambda\alpha} \partial_\alpha h_{\mu\lambda} \} \\
&\quad - \frac{1}{2} \kappa^2 \{ h^{\lambda\alpha} \partial_\mu h_{\lambda\alpha} + h^{\lambda\alpha} \partial_\lambda h_{\mu\alpha} - h^{\lambda\alpha} \partial_\alpha h_{\mu\lambda} \}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Assim, basta proceder de maneira análoga para os outros termos da expressão (2.49).

Dessa forma, tem-se para os outros termos:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \frac{1}{2} \kappa \{ \eta^{\lambda\beta} \partial_\mu h_{\nu\beta} + \eta^{\lambda\beta} \partial_\nu h_{\mu\beta} + \eta^{\lambda\beta} \partial_\beta h_{\mu\nu} \} \\
&\quad - \frac{1}{2} \kappa^2 \{ h^{\lambda\beta} \partial_\mu h_{\nu\beta} + h^{\lambda\beta} \partial_\nu h_{\mu\beta} - h^{\lambda\beta} \partial_\beta h_{\mu\nu} \},
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu\lambda}^\sigma &= \frac{1}{2} \kappa \{ \eta^{\sigma\beta} \partial_\mu h_{\lambda\beta} + \eta^{\sigma\beta} \partial_\lambda h_{\mu\beta} + \eta^{\sigma\beta} \partial_\beta h_{\mu\lambda} \} \\
&\quad - \frac{1}{2} \kappa^2 \{ h^{\sigma\beta} \partial_\mu h_{\lambda\beta} + h^{\sigma\beta} \partial_\lambda h_{\mu\beta} - h^{\sigma\beta} \partial_\beta h_{\mu\lambda} \},
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda &= \frac{1}{2} \kappa \{ \eta^{\lambda\alpha} \partial_\nu h_{\sigma\alpha} + \eta^{\lambda\alpha} \partial_\sigma h_{\nu\alpha} + \eta^{\lambda\alpha} \partial_\alpha h_{\nu\sigma} \} \\
&\quad - \frac{1}{2} \kappa^2 \{ h^{\lambda\alpha} \partial_\nu h_{\sigma\alpha} + h^{\lambda\alpha} \partial_\sigma h_{\nu\alpha} - h^{\lambda\alpha} \partial_\alpha h_{\nu\sigma} \},
\end{aligned} \tag{3.10}$$

¹Na expressão (3.6) temos que $\eta = \det \eta_{\mu\nu}$.

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} &= \frac{1}{2}\kappa\{\eta^{\sigma\beta}\partial_{\mu}h_{\nu\beta} + \eta^{\sigma\beta}\partial_{\nu}h_{\mu\beta} + \eta^{\sigma\beta}\partial_{\beta}h_{\mu\nu}\} \\ &\quad - \frac{1}{2}\kappa^2\{h^{\sigma\beta}\partial_{\mu}h_{\nu\beta} + h^{\sigma\beta}\partial_{\nu}h_{\mu\beta} - h^{\sigma\beta}\partial_{\beta}h_{\mu\nu}\},\end{aligned}\quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\sigma\lambda}^{\lambda} &= \frac{1}{2}\kappa\{\eta^{\lambda\alpha}\partial_{\sigma}h_{\lambda\alpha} + \eta^{\lambda\alpha}\partial_{\lambda}h_{\sigma\alpha} + \eta^{\lambda\alpha}\partial_{\alpha}h_{\sigma\lambda}\} \\ &\quad - \frac{1}{2}\kappa^2\{h^{\lambda\alpha}\partial_{\sigma}h_{\lambda\alpha} + h^{\lambda\alpha}\partial_{\lambda}h_{\sigma\alpha} - h^{\lambda\alpha}\partial_{\alpha}h_{\sigma\lambda}\}.\end{aligned}\quad (3.12)$$

Substituindo as expressões de (3.7) a (3.12) e também a expressão (3.6) em (2.47), e após uma série de simplificações algébricas, chegar-se-á a expressão, até segunda ordem em h , do tensor de curvatura escalar mostrado em (2.47). Com esse resultado, a expressão (2.46) pode ser reescrita como²:

$$\begin{aligned}S_g &= \frac{2}{\kappa^2} \int dx^4 \sqrt{-g} R \\ &= \int dx^4 \sqrt{-\eta} \left\{ -\frac{1}{2}(\partial_{\mu}h)(\partial^{\mu}h) + \frac{1}{2}(\partial_{\beta}h_{\mu\lambda})(\partial^{\beta}h^{\mu\lambda}) + (\partial_{\nu}h)(\partial_{\alpha}h^{\nu\alpha}) - \right. \\ &\quad \left. (\partial_{\beta}h_{\mu\nu})(\partial^{\mu}h^{\nu\beta}) \right\}.\end{aligned}\quad (3.13)$$

Neste ponto, vamos adicionar a expressão (3.13) um termo de fixação de *gauge*. Neste caso, usar-se-á o *gauge* harmônico [6], que em termos da ação, é descrito por³:

$$S_{fg} = \int d^4x \sqrt{-\eta} \left\{ h_{\mu\nu}^{;\nu} h^{\mu\lambda}_{;\lambda} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu}^{;\nu} h^{;\mu} - \frac{1}{2} h_{;\mu} h^{\mu\lambda}_{;\lambda} + \frac{1}{4} h_{;\mu} h^{;\mu} \right\}.\quad (3.14)$$

Agora, tomando os dois termos intermediários da equação (3.14), e fazendo uma manipulação de índices, podemos escrevê-los como:

$$-\frac{1}{2} h_{\mu\nu}^{;\nu} h^{;\mu} - \frac{1}{2} h_{;\mu} h^{\mu\lambda}_{;\lambda} = -h_{\mu\nu}^{;\nu} h^{;\mu}.\quad (3.15)$$

Assim, substituíndo (3.15) em (3.14) obtemos:

$$S_{fg} = \int d^4x \sqrt{-\eta} \left\{ h_{\mu\nu}^{;\nu} h^{\mu\lambda}_{;\lambda} - h_{\mu\nu}^{;\nu} h^{;\mu} + \frac{1}{4} h_{;\mu} h^{;\mu} \right\}\quad (3.16)$$

onde, a expressão (3.16) está escrita em termos de derivadas covariantes, já apresentada em (3.14). Explicitamente, os três termos da expressão (3.16) podem ser escritos da seguinte maneira:

$$h_{;\lambda}^{\mu\lambda} = D_{\lambda}h^{\mu\lambda} = \partial_{\lambda}h^{\mu\lambda} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu}h^{\nu\lambda},\quad (3.17)$$

$$h^{;\mu} = \partial^{\mu}h,\quad (3.18)$$

²Esse cálculo é bastante extenso e muito trabalhoso, por isso neste ponto, nos limitaremos apenas ao seu resultado, levando em conta todas as simplificações necessárias.

³A notação utilizada na expressão (3.14) será explicada posteriormente.

$$h_{;\mu} = \partial_\mu h, \quad (3.19)$$

$$h_{\mu\nu}^{;\nu} = D^\nu h_{\mu\nu} = \partial^\nu h_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu}^{\nu\sigma} h_{\sigma\nu}. \quad (3.20)$$

Agora, substituindo as expressões de (3.17) a (3.20) em (3.16), obtém-se, preservando apenas os termos de ordem quadrática em h , lembrando que para o cálculo do propagador esta estrutura quadrática se faz necessária, a seguinte expressão:

$$S_{fg} = \int d^4x \sqrt{-\eta} \left\{ (\partial^\nu h_{\mu\nu})(\partial_\lambda h^{\mu\lambda}) - (\partial^\nu h_{\mu\nu})(\partial^\mu h) + \frac{1}{4}(\partial_\mu h)(\partial^\mu h) \right\}. \quad (3.21)$$

Dessa forma, somando a expressão (3.13) à expressão (3.21), obtemos a ação quadrática em h dada por⁴:

$$\begin{aligned} S_q &= S_g + S_{fg} \\ &= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}(\partial_\mu h)(\partial^\mu h) + \frac{1}{2}(\partial_\beta h_{\mu\lambda})(\partial^\beta h^{\mu\lambda}) - (\partial_\beta h_{\mu\nu})(\partial^\mu h^{\nu\beta}) + \right. \\ &\quad \left. (\partial^\nu h_{\mu\nu})(\partial_\lambda h^{\mu\lambda}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Reescrevendo os termos da expressão (3.22) como:

$$(\partial_\mu h)(\partial^\mu h) = \partial_\mu (h \partial^\mu h) - h \partial_\mu \partial^\mu h, \quad (3.23)$$

$$(\partial_\beta h_{\mu\lambda})(\partial^\beta h^{\mu\lambda}) = \partial_\beta (h_{\mu\lambda} \partial^\beta h^{\mu\lambda}) - h_{\mu\lambda} \partial_\beta \partial^\beta h^{\mu\lambda}, \quad (3.24)$$

$$(\partial_\beta h_{\mu\nu})(\partial^\mu h^{\nu\beta}) = \partial_\beta (h_{\mu\nu} \partial^\mu h^{\nu\beta}) - h_{\mu\nu} \partial_\beta \partial^\mu h^{\nu\beta}, \quad (3.25)$$

$$(\partial^\nu h_{\mu\nu})(\partial_\lambda h^{\mu\lambda}) = \partial^\nu (h_{\mu\nu} \partial_\lambda h^{\mu\lambda}) - h_{\mu\nu} \partial^\nu \partial_\lambda h^{\mu\lambda}, \quad (3.26)$$

e substituindo-se as expressões de (3.23) a (3.26) em (3.22), levando em conta que os termos de superfície desaparecem quando integramos sobre todo o espaço, chega-se ao seguinte resultado:

$$S_q = -\frac{1}{2} \int d^4x \left(h_{\mu\lambda} \partial_\mu \partial^\mu h^{\mu\lambda} - \frac{1}{2} h \partial_\mu \partial^\mu h \right). \quad (3.27)$$

Agora, vamos escrever os campos h do segundo termo de (3.27) como $h = \eta^{\alpha\lambda} h_{\alpha\lambda}$ e $h = \eta^{\beta\sigma} h_{\beta\sigma}$. Ainda na expressão (3.27), vamos reescrever o termo $h^{\mu\lambda}$ como

$$h^{\mu\lambda} = \eta^{\beta\lambda} \eta^{\sigma\mu} h_{\beta\sigma}. \quad (3.28)$$

Dessa forma, o termo entre parênteses da expressão (3.28) pode ser reescrito como:

$$h_{\mu\lambda} \partial_\mu \partial^\mu h^{\mu\lambda} - \frac{1}{2} h \partial_\mu \partial^\mu h = h_{\mu\lambda} \eta^{\beta\lambda} \eta^{\sigma\mu} \partial_\mu \partial^\mu h_{\beta\sigma} - \frac{1}{2} h_{\lambda\alpha} \eta^{\lambda\alpha} \eta^{\sigma\beta} \partial_\mu \partial^\mu h_{\sigma\beta}. \quad (3.29)$$

⁴Aqui, fez-se $\sqrt{-\eta} = 1$.

Agora, no primeiro termo da expressão (3.29), será feita a seguinte troca de índices: ($\mu \rightarrow \alpha$). Portanto, (3.29) pode ser reescrita novamente como:

$$h_{\mu\lambda}\partial_\mu\partial^\mu h^{\mu\lambda} - \frac{1}{2}h\partial_\mu\partial^\mu h = h_{\alpha\lambda}\eta^{\beta\lambda}\eta^{\sigma\alpha}\partial_\mu\partial^\mu h_{\beta\sigma} - \frac{1}{2}h_{\alpha\lambda}\eta^{\lambda\alpha}\eta^{\sigma\beta}\partial_\mu\partial^\mu h_{\sigma\beta}. \quad (3.30)$$

Assim, substituindo (3.30) em (3.27), temos que a ação será dada por:

$$S_q = -\frac{1}{2}\int d^4x \left(h_{\alpha\lambda}\eta^{\beta\lambda}\eta^{\sigma\alpha}\partial_\mu\partial^\mu h_{\beta\sigma} - \frac{1}{2}h_{\alpha\lambda}\eta^{\lambda\alpha}\eta^{\sigma\beta}\partial_\mu\partial^\mu h_{\sigma\beta} \right), \quad (3.31)$$

ou de uma maneira mais compacta

$$S_q = -\frac{1}{2}\int d^4x h_{\alpha\lambda} \left(D^{\alpha\lambda\beta\sigma}\partial_\mu\partial^\mu \right) h_{\beta\sigma}, \quad (3.32)$$

onde

$$D^{\alpha\lambda\beta\sigma} = \frac{1}{2} \left(\eta^{\beta\lambda}\eta^{\sigma\alpha} + \eta^{\beta\alpha}\eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\alpha\lambda}\eta^{\sigma\beta} \right). \quad (3.33)$$

Agora, para obtermos o propagador do gráviton, temos que encontrar um operador inverso e simétrico para $D^{\alpha\lambda\beta\sigma}$ dado em (3.33). Este operador é simétrico na troca ($\alpha \rightarrow \lambda$), ($\beta \rightarrow \sigma$) e também na troca ($\alpha\lambda \rightarrow \beta\sigma$). Isto equivale a encontrarmos uma solução do tipo $P_{\alpha\lambda\gamma\delta}$ para a equação

$$D^{\alpha\lambda\beta\sigma}P_{\alpha\lambda\gamma\delta} = I_{\gamma\delta}^{\beta\sigma} \quad (3.34)$$

e para

$$\partial_\mu\partial^\mu \quad (3.35)$$

onde, em (3.35), definimos

$$I_{\gamma\delta}^{\beta\sigma} = \eta^{\beta\mu}\eta^{\sigma\nu}I_{\mu\nu\gamma\delta} \quad (3.36)$$

com a identidade no espaço dos tensores simétricos definida por:

$$I_{\mu\nu\gamma\delta} = \frac{1}{2} \left(\eta_{\mu\gamma}\eta_{\nu\delta} + \eta_{\mu\delta}\eta_{\nu\gamma} \right). \quad (3.37)$$

Logo, pode-se observar que o operador inverso de $D^{\alpha\lambda\beta\sigma}$ é dado por

$$P_{\alpha\lambda\gamma\delta} = \frac{1}{2} \left(\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\lambda\delta} + \eta_{\alpha\delta}\eta_{\gamma\delta} - \eta_{\alpha\lambda}\eta_{\gamma\delta} \right) \quad (3.38)$$

uma vez que

$$D^{\alpha\lambda\beta\sigma}P_{\alpha\lambda\gamma\delta} = \left\{ \frac{1}{2} \left(\eta^{\beta\lambda}\eta^{\sigma\alpha} + \eta^{\beta\alpha}\eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\alpha\lambda}\eta^{\sigma\beta} \right) \right\} \times \left\{ \frac{1}{2} \left(\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\lambda\delta} + \eta_{\alpha\delta}\eta_{\gamma\delta} - \eta_{\alpha\lambda}\eta_{\gamma\delta} \right) \right\} \quad (3.39)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\delta_\gamma^\sigma \delta_\delta^\beta + \delta_\gamma^\beta \delta_\delta^\sigma \right] \quad (3.40)$$

onde, a expressão (3.39) obedece à expressão (3.34).

No espaço dos momentos, o inverso do operador diferencial dado em (3.35) é o propagador de uma partícula bosônica com massa m , onde sua forma analítica e gráfica pode ser vista através da expressão (2.9) e da figura (2.3) respectivamente.

Sendo assim, podemos escrever a expressão para o propagador do gráviton no *gauge* harmônico da maneira como se segue:

$$\Delta^{\alpha\lambda\sigma\beta}(q) = \frac{iP^{\alpha\lambda\sigma\beta}}{(q^2 - \mu^2)}, \quad (3.41)$$

onde

$$P^{\alpha\lambda\sigma\beta} = \frac{1}{2} \left(\eta^{\beta\lambda}\eta^{\sigma\alpha} + \eta^{\beta\alpha}\eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\alpha\lambda}\eta^{\sigma\beta} \right). \quad (3.42)$$

Graficamente, temos:

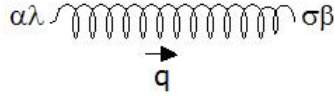


Figura 3.1: Propagador do gráviton.

Outra estrutura importante que será usada neste trabalho é o propagador do campo de *gauge*. Seu resultado também já está bem estabelecido e é dado por [18]:

$$\Delta_{\alpha\delta}(k) = -i \frac{g_{\delta\alpha}}{(k^2 - \mu^2)} - \frac{(1 - \lambda)}{\lambda} i \frac{k_\alpha k_\delta}{(k^2 - \mu^2)^2}. \quad (3.43)$$

Graficamente, a expressão (3.43) é representada pela figura seguinte:

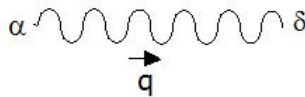


Figura 3.2: Propagador do campo de *gauge*.

O resultado obtido em (3.41) é importante no sentido de que sua estrutura aparece também no cálculo dos vértices, facilitando sua escrita. Esse cálculo será apresentado no próximo capítulo, onde obteremos as funções de vértice para a eletrodinâmica escalar, agora acoplada à gravitação, de maneira bem detalhada.

4 Cálculo dos Vértices

Neste capítulo será apresentada a lagrangeana da eletrodinâmica escalar já apresentada no capítulo 1, mas levando em conta agora contribuições gravitacionais. Serão apresentados também os cálculos dos vértices originados de tal contribuição.

4.1 Eletrodinâmica escalar acoplada com a gravitação

Primeiramente, para que se possa calcular os vértices para a eletrodinâmica escalar acoplada a gravitação, temos que construir uma lagrangeana que tenha tal estrutura. Para isso, procede-se da seguinte maneira: deve-se substituir as expressões (3.1), (3.2) e (3.6) na lagrangeana utilizada pra escrever a expressão (2.52). Feitas essas substituições, obtemos o seguinte resultado¹:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{sg} = & -\frac{1}{4}\kappa h \left[(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu) \right] + \frac{1}{2}\kappa h^{\beta\nu} \left[(\partial^\mu A_\nu)(\partial_\mu A_\beta) \right. \\
& \left. + (\partial_\beta A_\mu)(\partial^\nu A^\mu) - (\partial_\mu A_\beta)(\partial_\nu A^\mu) - (\partial_\beta A_\mu)(\partial^\mu A^\nu) \right] \\
& + \frac{1}{2}\kappa h (|\partial_\mu \phi|^2 - m^2|\phi|^2) - \kappa h^{\mu\nu} (\partial_\nu \phi)(\partial_\mu \phi^*) + \left(ieA^\mu \phi^*(\partial_\mu \phi) \right. \\
& \left. - ieA^\mu \phi(\partial_\mu \phi^*) \right) + e^2 A_\mu A^\mu |\phi|^2 - \frac{1}{2}\kappa h (\partial_\mu \phi^*)(ieA^\mu) \phi \\
& + \frac{1}{2}\kappa h (ieA_\mu) \phi^*(\partial^\mu \phi) + \kappa h^{\mu\nu} \phi (ieA_\nu) \partial_\mu \phi^* - \kappa h^{\mu\nu} \phi^* (ieA_\mu) \partial_\nu \phi, \quad (4.1)
\end{aligned}$$

onde \mathcal{L}_{sg} representa a lagrangeana da eletrodinâmica escalar, agora com correções quânticas para a gravitação, representada em (4.1) pelos campos h . Dessa forma, a partir da equação (4.1), podemos obter as expressões para os vértices da teoria. Tais vértices são:

1. Interação de 1 fóton com 2 campos escalares:

$$\tau^\gamma(p, p', e) = -ie(p + p')^\gamma;$$

2. Interação de 2 campos escalares com 1 fóton e 1 gráviton:

$$\tau^{\rho\alpha\gamma}(p, p', e) = i\kappa e \left(P^{\mu\rho\gamma\alpha}(p + p')_\mu \right);$$

3. Interação de 2 fótons com 2 campos escalares:

$$\tau^{\gamma\delta}(p, p', e) = 2ie\eta^{\gamma\delta};$$

¹Novamente, fez-se $\sqrt{-\eta} = 1$ neste resultado.

4. Interação de 1 gráviton com 2 campos de *gauge*:

$$\tau^{\lambda\theta\gamma\delta}(p, p') = i\kappa \left\{ P^{\lambda\theta\gamma\delta}(p \cdot p') + \frac{1}{2} \left[\eta^{\lambda\theta}(p^\delta \cdot p'^\gamma) + \eta^{\gamma\delta}(p^\theta \cdot p'^\lambda + p^\lambda \cdot p'^\theta) - \left[\eta^{\lambda\delta}(p^\theta \cdot p'^\gamma) + \eta^{\lambda\gamma}(p^\delta \cdot p'^\theta) + \eta^{\theta\gamma}(p^\delta \cdot p'^\lambda) + \eta^{\theta\delta}(p^\lambda \cdot p'^\gamma) \right] \right] \right\};$$

5. Interação e 1 gráviton com 2 campos escalares:

$$\tau^{\mu\nu}(p, p', e) = -\frac{1}{2}i\kappa \left[p^\nu \cdot p'^\mu + p^\mu \cdot p'^\nu - \eta^{\mu\nu} \{ (p \cdot p') - m^2 \} \right].$$

As expressões enumeradas acima, podem ser traduzidas através dos gráficos mostrados na figura (4.1).

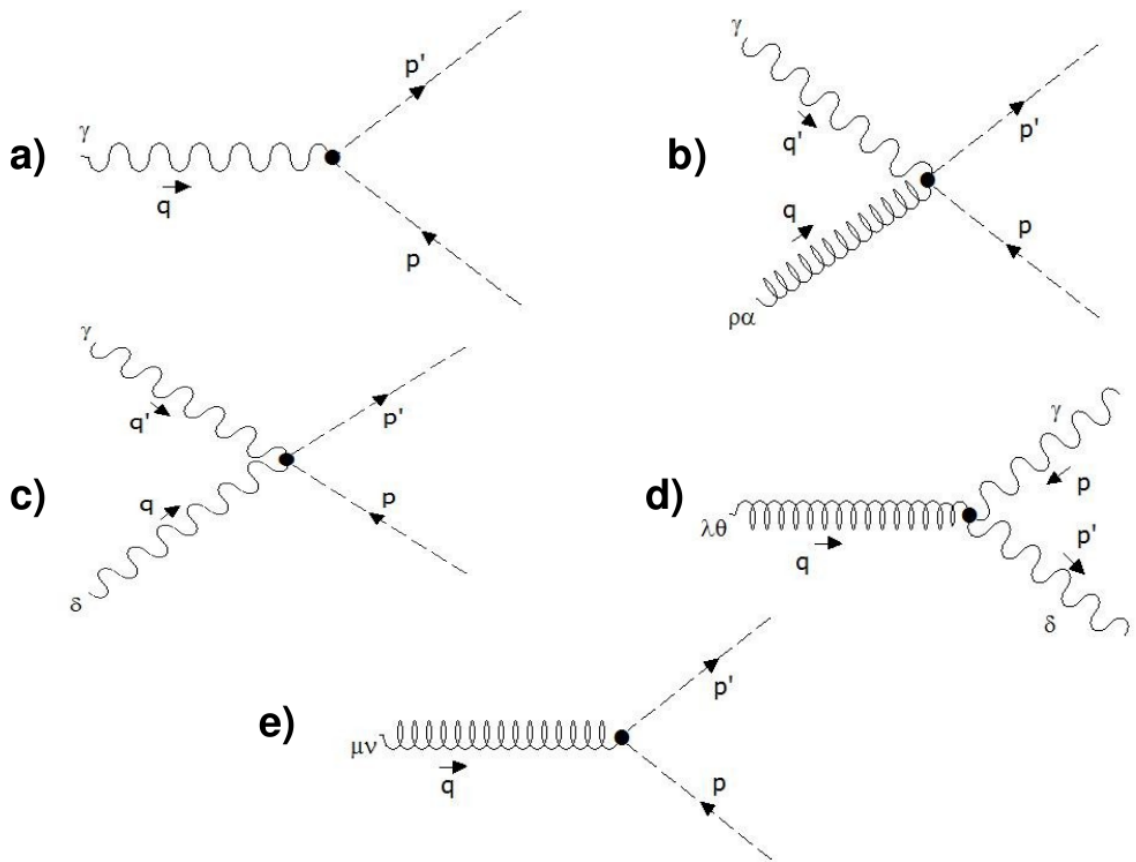


Figura 4.1: Regras de Feynman para a teoria. As equações 1, 2, 3, 4, e 5 correspondem as figuras a), b), c), d) e e) respectivamente.

Portanto, a partir dos vértices mostrados na figura (4.1), podemos construir todos os gráficos de Feynman necessários a cada ordem em *loops*, ou seja, 1 *loop*, 2 *loops*, 3 *loops*, etc. Como neste trabalho, estamos interessados em correções até ordem de 1 *loop*, alguns vértices não se farão necessários. Na próxima seção faremos um cálculo detalhado para os vértices mostrados na figura (4.1).

4.2 Cálculo dos vértices

A expressão para os fatores de vértice no espaço dos momentos de maneira mais geral é dada por [22]:

$$\begin{aligned}
\Theta_{\mu_1\nu_1\dots\mu_m\nu_m} &= i \int d^4x d^4x_1 \cdots d^4x_n d^4y_1 \cdots d^4y_m e^{i[p_1x_1 + \dots + p_nx_n + q_1y_1 + \dots + q_my_m]} \\
&\times \frac{\delta}{\delta\phi_1(x_1)} \times \dots \times \frac{\delta}{\delta\phi_n(x_n)} \times \frac{\delta}{\delta H_1^{\mu_1\nu_1}(y_1)} \times \dots \times \frac{\delta}{\delta H_m^{\mu_m\nu_m}(y_m)} \\
&\times \frac{\delta}{\delta A_1^{\mu_1}(y_1)} \times \dots \times \frac{\delta}{\delta A_m^{\mu_m}(y_m)} \\
&\times L_{int}(\phi_1, \dots, \phi_n, H_1, \dots, H_m, A_1, \dots, A_m)(x), \tag{4.2}
\end{aligned}$$

onde L_{int} representa a lagrangeana de interação, $\phi_1 \dots \phi_n$ representam o campo escalar, $H_1^{\mu_1\nu_1}(y_1) \dots H_m^{\mu_m\nu_m}(y_m)$ representam o campo gravitacional, $A_1^{\mu_1}(y_1) \dots A_m^{\mu_m}(y_m)$ representam o campo de *gauge* e as grandezas p_1, \dots, p_n e q_1, \dots, q_m representam os momentos externos dos campos escalar e dos campos de *gauge* e gravitacional, respectivamente. Para tais cálculos, será usada a expressão (3.34) que mostra a lagrangeana com todas as possíveis interações entre os campos.

Vértice com interação de 1 fóton com 2 campos escalares

Da expressão (4.1), temos que o termo na lagrangeana que descreve tal interação é dado por:

$$\mathcal{L}_{int} = -(-ieA_\mu\phi^*(\partial^\mu\phi) + ieA_\mu\phi(\partial^\mu\phi^*)). \tag{4.3}$$

Agora, substituindo a expressão (4.3) na expressão (4.2) temos:

$$\begin{aligned}
\Theta^\gamma(p', p) &= -i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 e^{i[px_1 - p'x_2 + qx_3]} \\
&\times \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)} \frac{\delta}{\delta\phi^*(x_2)} \frac{\delta}{\delta A_\gamma(x_3)} (-ieA_\mu\phi^*(\partial^\mu\phi) + ieA_\mu\phi(\partial^\mu\phi^*)). \tag{4.4}
\end{aligned}$$

Agora, vamos aplicar cada função à sua respectiva derivada. Aplicando primeiramente ao campo de fóton A_γ , vemos que ela implicará numa seguinte troca de índices: $\mu \rightarrow \gamma$. Dessa maneira, temos para o campo de fóton:

$$\begin{aligned}
\Theta^\gamma(p', p) &= -i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 e^{i[px_1 - p'x_2 + qx_3]} \\
&\times \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)} \frac{\delta}{\delta\phi^*(x_2)} (-ie\delta(x - x_3)\phi^*(\partial^\gamma\phi) + ie\delta(x - x_3)\phi(\partial^\gamma\phi^*)). \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Aplicando as derivadas aos campos escalares teremos:

$$\begin{aligned}\Theta^\gamma(p', p) &= -i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 e^{i[p x_1 - p' x_2 + q x_3]} \\ &\quad \times \left(-ie \delta(x - x_3) \delta(x - x_2) (\partial^\gamma \delta(x - x_1)) \right. \\ &\quad \left. + ie \delta(x - x_3) \delta(x - x_1) (\partial^\gamma \delta(x - x_2)) \right).\end{aligned}\quad (4.6)$$

Agora, temos que escrever as funções $\delta(x - x_1)$ e $\delta(x - x_2)$ no espaço dos momentos. Elas são definidas da seguinte maneira:

$$\delta(x - x_1) = \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)} \quad (4.7)$$

e

$$\delta(x - x_2) = \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2(x-x_2)}. \quad (4.8)$$

Substituindo (4.7) e (4.8) em (4.6) temos:

$$\begin{aligned}\Theta^\gamma(p', p) &= -i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 e^{i[p x_1 - p' x_2 + q x_3]} \\ &\quad \times \left\{ -ie \delta(x - x_3) \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2(x-x_2)} \partial^\gamma \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)} \right. \\ &\quad \left. + ie \delta(x - x_3) \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)} \partial^\gamma \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2(x-x_2)} \right\}.\end{aligned}\quad (4.9)$$

Aplicando as derivadas em (4.9) obtemos:

$$\begin{aligned}\Theta^\gamma(p', p) &= -i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 e^{i[p x_1 - p' x_2 + q x_3]} \\ &\quad \times \left\{ -ie \delta(x - x_3) \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2(x-x_2)} (ip_{1\gamma}) \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)} \right. \\ &\quad \left. + ie \delta(x - x_3) \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)} (ip_{2\gamma}) \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2(x-x_2)} \right\}.\end{aligned}\quad (4.10)$$

Agora, agrupando os termos em (4.10) temos:

$$\begin{aligned}\Theta^\gamma(p', p) &= -i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{i[(p-p_1)x_1 - (p'+p_2)x_2 + (p_1+p_2)x]} \\ &\quad \times \int d^4x_3 e^{iqx_3} \delta(x - x_3) \times \left\{ ie(ip_{2\gamma}) - ie(ip_{1\gamma}) \right\}.\end{aligned}\quad (4.11)$$

Agora, temos o seguinte resultado:

$$\int d^4x_3 e^{iqx_3} \delta(x - x_3) = e^{iqx}. \quad (4.12)$$

Substituindo (4.12) em (4.11) temos:

$$\begin{aligned}\Theta^\gamma(p', p) &= -i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{i[(p-p_1)x_1 - (p'+p_2)x_2 + (p_1+p_2+q)x]} \\ &\quad \times \left\{ ie(ip_{2\gamma}) - ie(ip_{1\gamma}) \right\}.\end{aligned}\quad (4.13)$$

O próximo passo consiste em tratar as integrais em x_1 , x_2 e x_3 separadamente. Para isso vamos reorganizar a expressão (4.13) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Theta^\gamma(p', p) &= -i \int d^4x e^{i(p_1+p_2+q)x} \int d^4x_1 e^{i(p-p_1)x_1} \int d^4x_2 e^{-i(p'+p_2)x_2} \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \\ &\quad \times \left\{ ie(ip_{2\gamma}) - ie(ip_{1\gamma}) \right\}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Temos também os seguintes resultados para integrais em (4.14):

$$\int d^4x_1 e^{i(p-p_1)x_1} = (2\pi)^4 \delta(p_1 - p) \quad (4.15)$$

e

$$\int d^4x_2 e^{-i(p'+p_2)x_2} = (2\pi)^4 \delta(p' + p_2). \quad (4.16)$$

Substituindo (4.15) e (4.16) em (4.14) temos:

$$\begin{aligned} \Theta^\gamma(p', p) &= -i \int d^4x e^{i(p_1+p_2+q)x} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(p_1 - p) \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(p' + p_2) \\ &\quad \times \left\{ ie(ip_{2\gamma}) - ie(ip_{1\gamma}) \right\} \\ &= -ie \int d^4x e^{i(p_1+p_2+q)x} \\ &\quad \times \left\{ \int d^4p_1 \delta(p_1 - p) (ip_{1\gamma}) \int d^4p_2 \delta(p' + p_2) (ip_{2\gamma}) \right\}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Da expressão (4.17) temos os seguintes resultados para as integrais:

$$\int d^4p_1 \delta(p_1 - p) (ip_{1\gamma}) = ip_\gamma \quad (4.18)$$

e

$$\int d^4p_2 \delta(p' + p_2) (ip_{2\gamma}) = -ip'_\gamma. \quad (4.19)$$

Agora, substituindo (4.18) e (4.19) em (4.17) obtemos o seguinte resultado:

$$\Theta^\gamma(p', p) = -ie \int d^4x e^{i(p_1+p_2+q)x} \left(p_\gamma + p'_\gamma \right) \quad (4.20)$$

Mas sabemos que:

$$\int d^4x e^{i(p_1+p_2+q)x} = (2\pi)^4 \delta(p - p' + q) \quad (4.21)$$

Logo, substituindo (4.21) em (4.20) obtemos a expressão para o vértice. Ela é dada por:

$$\Theta^\gamma(p', p) = (2\pi)^4 \delta(p - p' + q) \left[-ie \left(p_\gamma + p'_\gamma \right) \right]. \quad (4.22)$$

onde podemos notar explicitamente a conservação dos momentos no vértice através da função delta de Dirac. Diagramaticamente ele pode ser representado da seguinte maneira:

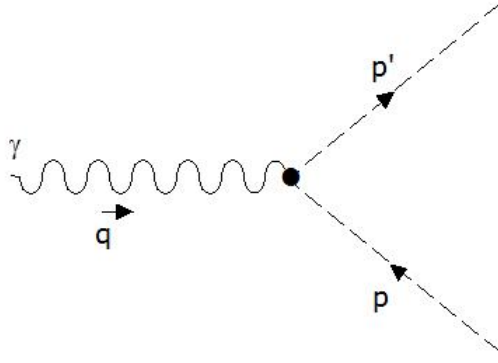


Figura 4.2: Forma diagramática da interação de 1 fóton com 2 campos escalares.

Vértice com interação de 2 fótons com 2 campos escalares

Da expressão (4.1), o termo que descreve tal interação é dado por:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{int} &= e^2 A_\mu A^\mu |\phi|^2 \\ &= e^2 \eta^{\mu\nu} A_\mu A_\nu \phi^* \phi.\end{aligned}\quad (4.23)$$

Substituindo a expressão (4.23) na expressão (4.2), novamente, tomando o cuidado em substituir os campos e os momentos da maneira adequada, temos a seguinte expressão para o vértice:

$$\begin{aligned}\Theta^{\gamma\beta}(p', p) &= i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i[p x_1 - p' x_2 + q x_3 - q' x_4]} \\ &\quad \times \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)} \frac{\delta}{\delta\phi^*(x_2)} \frac{\delta}{\delta A_\gamma(x_3)} \frac{\delta}{\delta A_\beta(x_4)} \left(e^2 \eta^{\mu\nu} A_\mu A_\nu \phi^* \phi \right).\end{aligned}\quad (4.24)$$

Agora, procedendo como na seção anterior, vamos aplicar cada derivada a seu respectivo campo, lembrando que no caso dos fótons, faremos a troca do campo H pelo campo A . Aplicando a primeira derivada temos:

$$\begin{aligned}\Theta^{\gamma\beta}(p', p) &= i e^2 \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i[p x_1 - p' x_2 + q x_3 - q' x_4]} \\ &\quad \times \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)} \frac{\delta}{\delta\phi^*(x_2)} \frac{\delta}{\delta A_\gamma(x_3)} \left(\eta^{\mu\beta} A_\mu \delta(x - x_4) \phi^* \phi \right. \\ &\quad \left. + \eta^{\beta\nu} A_\nu \delta(x - x_4) \phi^* \phi \right),\end{aligned}\quad (4.25)$$

onde no primeiro e no segundo termo entre parênteses da expressão (4.25) houve uma troca de índices do tipo $(\nu \rightarrow \beta)$ e $(\mu \rightarrow \beta)$ respectivamente. Pode-se perceber que ao aplicar a outra derivada com relação ao campo do fóton, também haverá uma troca de índices do tipo $(\mu \rightarrow \gamma)$ e $(\nu \rightarrow \gamma)$ respectivamente na expressão (4.25). Dessa maneira, aplicando

esta derivada e também as respectivas derivadas dos campos escalares na expressão (4.25), obtém-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \Theta^{\gamma\beta}(p', p) &= 2ie^2\eta^{\gamma\beta} \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i[p x_1 - p' x_2 + q x_3 - q' x_4]} \\ &\quad \times \left(\delta(x - x_1) \delta(x - x_2) \delta(x - x_3) \delta(x - x_4) \right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Agora, reorganizando as integrais em (4.26) de modo a tratá-las separadamente temos:

$$\begin{aligned} \Theta^{\gamma\beta}(p', p) &= 2ie^2\eta^{\gamma\beta} \int d^4x \int d^4x_1 e^{ipx_1} \delta(x - x_1) \int d^4x_2 e^{-ip'x_2} \delta(x - x_2) \times \\ &\quad \times \int d^4x_3 e^{iqx_3} \delta(x - x_3) \int d^4x_4 e^{-iq'x_4} \delta(x - x_4). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Tomando os seguintes resultados para as integrais em (4.27):

$$\begin{aligned} \int d^4x_1 e^{ipx_1} \delta(x - x_1) &= e^{ipx}, \\ \int d^4x_2 e^{-ip'x_2} \delta(x - x_2) &= e^{-ip'x}, \\ \int d^4x_3 e^{iqx_3} \delta(x - x_3) &= e^{iqx}, \\ \int d^4x_4 e^{-iq'x_4} \delta(x - x_4) &= e^{-iq'x}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

e substituindo os resultados de (4.28) na expressão (4.27) temos o seguinte resultado:

$$\Theta^{\gamma\beta}(p', p) = 2ie^2\eta^{\gamma\beta} \int d^4x e^{i[p - p' + q - q']x}. \quad (4.29)$$

Tomando o seguinte resultado para a integral em (4.29):

$$\int d^4x e^{i(p - p' + q - q')x} = (2\pi)^4 \delta(p - p' + q - q'), \quad (4.30)$$

e substituindo o resultado de (4.30) em (4.29) chegamos ao resultado final para a expressão do vértice que é dada por:

$$\Theta^{\gamma\beta}(p', p) = (2\pi)^4 \delta(p - p' + q - q') \left\{ 2ie^2\eta^{\gamma\beta} \right\}. \quad (4.31)$$

onde a função delta representa a conservação dos momentos no vértice, o que pode ser visto através da figura (4.3).

Vértice com interação de 2 campos escalares, 1 fóton e 1 gráviton

Da expressão (4.1), o termo que descreve tal interação é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= -\frac{1}{2}\kappa h(\partial_\mu \phi^*)(ieA^\mu)\phi + \frac{1}{2}\kappa h(ieA^\mu)\phi^*(\partial_\mu \phi) + \kappa h^{\mu\nu}\phi(ieA_\nu)\partial_\mu \phi^* \\ &\quad - \kappa h^{\mu\nu}\phi^*(ieA_\nu)\partial_\mu \phi. \end{aligned} \quad (4.32)$$

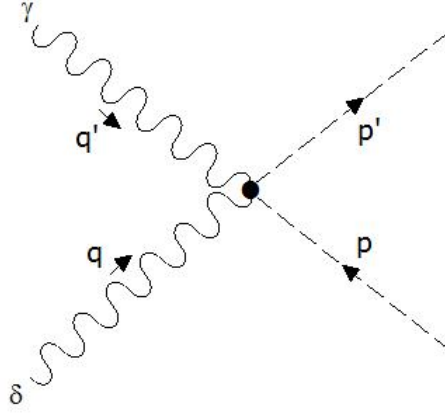


Figura 4.3: Forma diagramática da interação de 2 fótons com 2 campos escalares.

Agora, escrevendo os campos da expressão (4.32) como:

$$\begin{aligned}
 h &= \eta^{\tilde{\rho}\tilde{\gamma}} h_{\tilde{\rho}\tilde{\gamma}}, \\
 A^\mu &= \eta^{\mu\tilde{\alpha}} A_{\tilde{\alpha}}, \\
 A^\nu &= \eta^{\nu\tilde{\alpha}} A_{\tilde{\alpha}},
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

e substituindo (4.33) em (4.32) temos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{int} &= -\frac{1}{2}\kappa\eta^{\tilde{\rho}\tilde{\gamma}}\eta^{\mu\tilde{\alpha}}h_{\tilde{\rho}\tilde{\gamma}}(\partial_\mu\phi^*)(ieA_{\tilde{\alpha}})\phi + \frac{1}{2}\kappa\eta^{\tilde{\rho}\tilde{\gamma}}\eta^{\mu\tilde{\alpha}}h_{\tilde{\rho}\tilde{\gamma}}(ieA_{\tilde{\alpha}})\phi^*(\partial_\mu\phi) \\
 &\quad + \kappa\eta^{\mu\tilde{\rho}}\eta^{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}h_{\tilde{\rho}\tilde{\gamma}}\phi(ieA_{\tilde{\alpha}})\partial_\mu\phi^* - \kappa\eta^{\mu\tilde{\rho}}\eta^{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}h_{\tilde{\rho}\tilde{\gamma}}\phi^*(ieA_{\tilde{\alpha}})\partial_\mu\phi,
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

onde, nos dois últimos termos de (4.34) foi feita a seguinte troca de índices: $(\nu \rightarrow \tilde{\alpha})$.

Logo, a função de vértice dada em (4.2) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 \Theta^{\rho\gamma\alpha}(p, p') &= i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i[p x_1 - p' x_2 + q x_3 - q' x_4]} \\
 &\quad \times \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)} \frac{\delta}{\delta\phi^*(x_2)} \frac{\delta}{\delta H_{\rho\gamma}(x_3)} \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x_4)} \left\{ -\frac{1}{2}\kappa\eta^{\tilde{\rho}\tilde{\gamma}}\eta^{\mu\tilde{\alpha}}h_{\tilde{\rho}\tilde{\gamma}}(\partial_\mu\phi^*)(ieA_{\tilde{\alpha}})\phi \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2}\kappa\eta^{\tilde{\rho}\tilde{\gamma}}\eta^{\mu\tilde{\alpha}}h_{\tilde{\rho}\tilde{\gamma}}(ieA_{\tilde{\alpha}})\phi^*(\partial_\mu\phi) + \kappa\eta^{\mu\tilde{\rho}}\eta^{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}h_{\tilde{\rho}\tilde{\gamma}}\phi(ieA_{\tilde{\alpha}})\partial_\mu\phi^* \\
 &\quad \left. - \kappa\eta^{\mu\tilde{\rho}}\eta^{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}h_{\tilde{\rho}\tilde{\gamma}}\phi^*(ieA_{\tilde{\alpha}})\partial_\mu\phi \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Agora, vamos aplicar as derivadas nos respectivos campos na seguinte ordem: campos de fóton, gráviton e nos campos escalares. Temos então que:

$$\begin{aligned}
\Theta^{\rho\gamma\alpha}(p, p') &= i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i[p x_1 - p' x_2 + q x_3 - q' x_4]} \\
&\times \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)} \frac{\delta}{\delta\phi^*(x_2)} \frac{\delta}{\delta H_{\rho\gamma}(x_3)} \left\{ -\frac{1}{2} \kappa \eta^{\bar{\rho}\bar{\gamma}} \eta^{\mu\alpha} h_{\bar{\rho}\bar{\gamma}} (\partial_\mu \phi^*) (ie\delta(x-x_4)) \phi \right. \\
&+ \frac{1}{2} \kappa \eta^{\bar{\rho}\bar{\gamma}} \eta^{\mu\alpha} h_{\bar{\rho}\bar{\gamma}} (ie\delta(x-x_4)) \phi^* (\partial_\mu \phi) + \kappa \eta^{\mu\bar{\rho}} \eta^{\alpha\bar{\gamma}} h_{\bar{\rho}\bar{\gamma}} \phi (ie\delta(x-x_4)) \partial_\mu \phi^* \\
&\left. - \kappa \eta^{\mu\bar{\rho}} \eta^{\alpha\bar{\gamma}} h_{\bar{\rho}\bar{\gamma}} \phi^* (ie\delta(x-x_4)) \partial_\mu \phi \right\}. \\
&= i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i[p x_1 - p' x_2 + q x_3 - q' x_4]} \\
&\times \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)} \frac{\delta}{\delta\phi^*(x_2)} \left\{ -\frac{1}{2} \kappa \eta^{\rho\gamma} \eta^{\mu\alpha} \delta(x-x_3) (\partial_\mu \phi^*) (ie\delta(x-x_4)) \phi \right. \\
&+ \frac{1}{2} \kappa \eta^{\rho\gamma} \eta^{\mu\alpha} \delta(x-x_3) (ie\delta(x-x_4)) \phi^* (\partial_\mu \phi) \\
&+ \kappa \eta^{\mu\rho} \eta^{\alpha\gamma} \delta(x-x_3) \phi (ie\delta(x-x_4)) \partial_\mu \phi^* \\
&\left. - \kappa \eta^{\mu\rho} \eta^{\alpha\gamma} \delta(x-x_3) \phi^* (ie\delta(x-x_4)) \partial_\mu \phi \right\}. \\
&= i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i[p x_1 - p' x_2 + q x_3 - q' x_4]} \\
&\times \left\{ -\frac{1}{2} \kappa \eta^{\rho\gamma} \eta^{\mu\alpha} \delta(x-x_3) (\partial_\mu \delta(x-x_2)) (ie\delta(x-x_4)) \delta(x-x_1) \right. \\
&+ \frac{1}{2} \kappa \eta^{\rho\gamma} \eta^{\mu\alpha} \delta(x-x_3) (ie\delta(x-x_4)) \delta(x-x_2) (\partial_\mu \delta(x-x_1)) \\
&+ \kappa \eta^{\mu\rho} \eta^{\alpha\gamma} \delta(x-x_3) \delta(x-x_1) (ie\delta(x-x_4)) \partial_\mu \delta(x-x_2) \\
&\left. - \kappa \eta^{\mu\rho} \eta^{\alpha\gamma} \delta(x-x_3) \delta(x-x_2) (ie\delta(x-x_4)) \partial_\mu \delta(x-x_1) \right\}. \tag{4.36}
\end{aligned}$$

Substituindo as expressões (4.7) e (4.8) e o resultado das duas últimas integrais de (4.28) em (4.36) temos:

$$\begin{aligned}
\Theta^{\rho\gamma\alpha}(p, p') &= i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 e^{i[p x_1 - p' x_2 + (q-q')x]} \\
&\times \left\{ -\frac{1}{2} ie\kappa \eta^{\rho\gamma} \eta^{\mu\alpha} \partial_\mu \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2(x-x_2)} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)} \right. \\
&+ \frac{1}{2} ie\kappa \eta^{\rho\gamma} \eta^{\mu\alpha} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2(x-x_2)} \partial_\mu \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)} \\
&+ \kappa ie \eta^{\mu\rho} \eta^{\alpha\gamma} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)} \partial_\mu \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2(x-x_2)} \\
&\left. - \kappa ie \eta^{\mu\rho} \eta^{\alpha\gamma} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2(x-x_2)} \partial_\mu \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)} \right\}. \tag{4.37}
\end{aligned}$$

Aplicando as derivadas em (4.37) e agrupando os termos temos:

$$\begin{aligned}
\Theta^{\rho\gamma\alpha}(p, p') &= i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 e^{i[p x_1 - p' x_2 + (q - q') x]} \\
&\times \left\{ -\frac{1}{2} i e \kappa \eta^{\rho\gamma} \eta^{\mu\alpha} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} e^{i p_2 (x - x_2)} (i p_{2\mu}) \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} e^{i p_1 (x - x_1)} \right. \\
&+ \frac{1}{2} i e \kappa \eta^{\rho\gamma} \eta^{\mu\alpha} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} e^{i p_2 (x - x_2)} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} e^{i p_1 (x - x_1)} (i p_{1\mu}) \\
&+ \kappa i e \eta^{\mu\rho} \eta^{\alpha\gamma} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} e^{i p_1 (x - x_1)} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} e^{i p_2 (x - x_2)} (i p_{2\mu}) \\
&\left. - \kappa i e \eta^{\mu\rho} \eta^{\alpha\gamma} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} e^{i p_2 (x - x_2)} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} e^{i p_1 (x - x_1)} (i p_{1\mu}) \right\}. \\
&= i \int d^4x e^{i(p_1 + p_2 + q - q') x} \\
&\times \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int d^4x_2 e^{-i(p' - p_2)x_2} \int d^4x_1 e^{i(p - p_1)x_1} \\
&\times \left\{ -\frac{1}{2} i e \kappa \eta^{\rho\gamma} \eta^{\mu\alpha} [i p_{2\mu} - i p_{1\mu}] + \kappa i e \eta^{\mu\rho} \eta^{\alpha\gamma} [i p_{2\mu} - i p_{1\mu}] \right\}. \quad (4.38)
\end{aligned}$$

Agora, substituindo as expressões (4.15) e (4.16) em (4.38) e realizando as integrações nos momentos obtemos o seguinte resultado:

$$\Theta^{\rho\gamma\alpha}(p, p') = i \int d^4x e^{i(p_1 + p_2 + q - q') x} \left\{ -\frac{1}{2} i e \kappa \eta^{\rho\gamma} \eta^{\mu\alpha} [p' + p]_{\mu} + \kappa i e \eta^{\mu\rho} \eta^{\alpha\gamma} [p' + p]_{\mu} \right\}. \quad (4.39)$$

Tomando o seguinte resultado para integral:

$$\int d^4x e^{i(p_1 + p_2 + q - q') x} = (2\pi)^4 \delta(p - p' + q - q'), \quad (4.40)$$

e substituindo o resultado de (4.40) em (4.39) obtém-se o resultado:

$$\Theta^{\rho\gamma\alpha}(p, p') = (2\pi)^4 \delta(p - p' + q - q') i e \kappa e [p' + p]_{\mu} \left\{ -\frac{1}{2} \eta^{\rho\gamma} \eta^{\mu\alpha} + \eta^{\mu\rho} \eta^{\alpha\gamma} \right\}. \quad (4.41)$$

Reescrevendo o termo entre chaves da expressão (4.41) de maneira análoga à expressão (3.42) obtemos a expressão para o vértice

$$\Theta^{\rho\gamma\alpha}(p, p') = (2\pi)^4 \delta(p - p' + q - q') i e \kappa e [P^{\rho\gamma\alpha\mu}(p' + p)_{\mu}], \quad (4.42)$$

onde a função delta expressa a conservação dos momentos no vértice, o que pode também ser visto através da figura (4.4).

Vértice com interação de 1 gráviton com 2 fótons

Da expressão (4.1) obtemos o termo que descreve tal interação. Ele é do tipo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{int} &= -\frac{1}{4} \kappa \eta^{\alpha\beta} \eta^{\nu\sigma} h_{\alpha\beta} \left[(\partial_{\mu} A_{\nu}) (\partial^{\mu} A_{\sigma}) - (\partial_{\nu} A_{\mu}) (\partial^{\mu} A_{\sigma}) \right] + \frac{1}{2} \kappa h_{\alpha\beta} \left[\eta^{\beta\sigma} \eta^{\alpha\rho} (\partial^{\mu} A_{\sigma}) (\partial_{\mu} A_{\rho}) \right. \\
&\left. + (\partial^{\alpha} A_{\mu}) (\partial_{\beta} \eta^{\mu\sigma} A_{\sigma}) - (\partial^{\mu} \eta^{\alpha\rho} A_{\rho}) (\partial^{\beta} A_{\mu}) - (\partial^{\alpha} A_{\mu}) (\partial^{\mu} \eta^{\beta\sigma} A_{\sigma}) \right]. \quad (4.43)
\end{aligned}$$

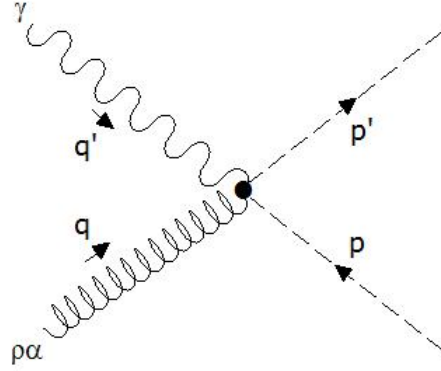


Figura 4.4: Forma diagramática da interação de 2 campos escalares, 1 fóton e 1 gráviton.

Substituindo a expressão (4.43) em (4.2) chega-se a seguinte expressão para o vértice:

$$\begin{aligned}
\Theta^{\lambda\theta(\gamma\delta)}(p, p') &= i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 e^{i[p x_1 - p' x_2 + q x_3]} \times \frac{\delta}{\delta A_\gamma(x_1)} \frac{\delta}{\delta A_\delta(x_2)} \frac{\delta}{\delta H_{\lambda\theta}(x_3)} \\
&\times \left\{ -\frac{1}{4} \kappa \eta^{\alpha\beta} \eta^{\nu\sigma} h_{\alpha\beta} \left[(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A_\sigma) - (\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A_\sigma) \right] \right. \\
&+ \frac{1}{2} \kappa h_{\alpha\beta} \left[\eta^{\beta\sigma} \eta^{\alpha\rho} (\partial^\mu A_\sigma)(\partial_\mu A_\rho) + (\partial^\alpha A_\mu)(\partial_\beta \eta^{\mu\sigma} A_\sigma) \right. \\
&\left. \left. - (\partial^\mu \eta^{\alpha\rho} A_\rho)(\partial^\beta A_\mu) - (\partial^\alpha A_\mu)(\partial^\mu \eta^{\beta\sigma} A_\sigma) \right] \right\}. \tag{4.44}
\end{aligned}$$

Na expressão (4.44) vamos aplicar as derivadas aos campos. Aplicando primeiramente ao gráviton temos:

$$\begin{aligned}
\Theta^{\lambda\theta(\gamma\delta)}(p, p') &= i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 e^{i[p x_1 - p' x_2 + q x_3]} \times \frac{\delta}{\delta A_\gamma(x_1)} \frac{\delta}{\delta A_\delta(x_2)} \\
&\times \left\{ -\frac{1}{4} \kappa \eta^{\lambda\theta} \eta^{\nu\sigma} \delta(x - x_3) \left[(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A_\sigma) - (\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A_\sigma) \right] \right. \\
&+ \frac{1}{2} \kappa \delta(x - x_3) \left[\eta^{\theta\sigma} \eta^{\lambda\rho} (\partial^\mu A_\sigma)(\partial_\mu A_\rho) + (\partial^\lambda A_\mu)(\partial_\theta \eta^{\mu\sigma} A_\sigma) \right. \\
&\left. \left. - (\partial^\mu \eta^{\lambda\rho} A_\rho)(\partial^\theta A_\mu) - (\partial^\lambda A_\mu)(\partial^\mu \eta^{\theta\sigma} A_\sigma) \right] \right\}. \tag{4.45}
\end{aligned}$$

Agora, aplicando as derivadas aos campos de *gauge* temos:

$$\begin{aligned}
\Theta^{\lambda\theta(\gamma\delta)}(p, p') &= i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 e^{i[p x_1 - p' x_2 + q x_3]} \times \frac{\delta}{\delta A_\gamma(x_1)} \\
&\times \left\{ -\frac{1}{4} \kappa \eta^{\lambda\theta} \eta^{\delta\sigma} \delta(x-x_3) \partial_\mu \delta(x-x_2) (\partial^\mu A_\sigma) \right. \\
&- \frac{1}{4} \kappa \eta^{\lambda\theta} \eta^{\nu\delta} \delta(x-x_3) (\partial_\nu A_\mu) \partial^\mu \delta(x-x_2) \\
&+ \frac{1}{4} \kappa \eta^{\lambda\theta} \eta^{\nu\sigma} \delta(x-x_3) \partial_\nu \delta(x-x_2) (\partial^\delta A_\sigma) \\
&+ \frac{1}{4} \kappa \eta^{\lambda\theta} \eta^{\nu\delta} \delta(x-x_3) (\partial_\nu A_\mu) \partial^\mu \delta(x-x_2) \\
&+ \frac{1}{2} \kappa \delta(x-x_3) \eta^{\theta\delta} \eta^{\lambda\rho} \partial^\mu \delta(x-x_2) (\partial_\mu A_\rho) \\
&+ \frac{1}{2} \kappa \delta(x-x_3) \eta^{\theta\sigma} \eta^{\lambda\delta} (\partial^\mu A_\sigma) \partial_\mu \delta(x-x_2) \\
&+ \frac{1}{2} \kappa \delta(x-x_3) \eta^{\sigma\delta} \partial^\lambda \delta(x-x_2) (\partial_\theta A_\sigma) \\
&+ \frac{1}{2} \kappa \delta(x-x_3) \eta^{\mu\delta} (\partial^\lambda A_\mu) \partial_\theta \delta(x-x_2) \\
&- \frac{1}{2} \kappa \delta(x-x_3) \eta^{\lambda\delta} \partial^\mu \delta(x-x_2) (\partial^\theta A_\mu) \\
&- \frac{1}{2} \kappa \delta(x-x_3) \eta^{\lambda\rho} (\partial^\delta A_\rho) \partial^\theta \delta(x-x_2) \\
&- \frac{1}{2} \kappa \delta(x-x_3) \eta^{\theta\sigma} \partial^\lambda \delta(x-x_2) (\partial^\delta A_\sigma) \\
&- \left. \frac{1}{2} \kappa \delta(x-x_3) \eta^{\theta\delta} \partial^\mu \delta(x-x_2) (\partial^\lambda A_\mu) \right\}. \\
&= i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 e^{i[p x_1 - p' x_2 + q x_3]} \\
&\times \left\{ -\frac{1}{4} \kappa \eta^{\lambda\theta} \eta^{\delta\gamma} \delta(x-x_3) \partial_\mu \delta(x-x_2) \partial^\mu \delta(x-x_1) \right. \\
&- \frac{1}{4} \kappa \eta^{\lambda\theta} \eta^{\gamma\delta} \delta(x-x_3) \partial_\nu \delta(x-x_1) \partial^\mu \delta(x-x_2) \\
&+ \frac{1}{4} \kappa \eta^{\lambda\theta} \eta^{\nu\gamma} \delta(x-x_3) \partial_\nu \delta(x-x_2) \partial^\delta \delta(x-x_1) \\
&+ \frac{1}{4} \kappa \eta^{\lambda\theta} \eta^{\nu\delta} \delta(x-x_3) \partial_\nu \delta(x-x_1) \partial^\mu \delta(x-x_2) \\
&+ \frac{1}{2} \kappa \delta(x-x_3) \eta^{\theta\delta} \eta^{\lambda\gamma} \partial^\mu \delta(x-x_2) \partial_\mu \delta(x-x_1) \\
&+ \frac{1}{2} \kappa \delta(x-x_3) \eta^{\theta\gamma} \eta^{\lambda\delta} \partial^\mu \delta(x-x_1) \partial_\mu \delta(x-x_2) \\
&+ \frac{1}{2} \kappa \delta(x-x_3) \eta^{\gamma\delta} \partial^\lambda \delta(x-x_2) \partial_\theta \delta(x-x_1) \\
&+ \frac{1}{2} \kappa \delta(x-x_3) \eta^{\gamma\delta} \partial^\lambda \delta(x-x_1) \partial_\theta \delta(x-x_2) \\
&- \frac{1}{2} \kappa \delta(x-x_3) \eta^{\lambda\delta} \partial_\gamma \delta(x-x_2) \partial^\theta \delta(x-x_1) \\
&- \frac{1}{2} \kappa \delta(x-x_3) \eta^{\lambda\gamma} \partial^\delta \delta(x-x_1) \partial^\theta \delta(x-x_2) \\
&- \frac{1}{2} \kappa \delta(x-x_3) \eta^{\theta\gamma} \partial^\lambda \delta(x-x_2) \partial^\delta \delta(x-x_1) \\
&- \left. \frac{1}{2} \kappa \delta(x-x_3) \eta^{\theta\delta} \partial^\lambda \delta(x-x_2) \partial^\gamma \delta(x-x_1) \right\}. \tag{4.46}
\end{aligned}$$

Os passos seguintes são os mesmos adotados para o cálculo dos vértices anteriores. Primeiramente, substituímos os resultados das expressões (4.7) e (4.8) na expressão (4.46), agrupamos os termos de maneira a separar as integrais em suas variáveis correspondentes, depois utilizamos o resultado da expressão (4.12) para a integral no momento q . Obtemos então o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
\Theta^{\lambda\theta(\gamma\delta)}(p, p') &= i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 e^{i[p x_1 - p' x_2 + q x]} \\
&\times \left\{ -\frac{1}{4} \kappa \eta^{\lambda\theta} \eta^{\delta\gamma} \partial_\mu \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} e^{i p_2(x-x_2)} \partial^\mu \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} e^{i p_1(x-x_1)} \right. \\
&- \frac{1}{4} \kappa \eta^{\lambda\theta} \eta^{\gamma\delta} \partial_\nu \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} e^{i p_1(x-x_1)} \partial^\mu \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} e^{i p_2(x-x_2)} \\
&+ \frac{1}{4} \kappa \eta^{\lambda\theta} \eta^{\nu\gamma} \partial_\nu \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} e^{i p_2(x-x_2)} \partial^\delta \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} e^{i p_1(x-x_1)} \\
&+ \frac{1}{4} \kappa \eta^{\lambda\theta} \eta^{\nu\delta} \partial_\nu \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} e^{i p_1(x-x_1)} \partial^\mu \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} e^{i p_2(x-x_2)} \\
&+ \frac{1}{2} \kappa \eta^{\theta\delta} \eta^{\lambda\gamma} \partial^\mu \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} e^{i p_2(x-x_2)} \partial_\mu \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} e^{i p_1(x-x_1)} \\
&+ \frac{1}{2} \kappa \eta^{\theta\gamma} \eta^{\lambda\delta} \partial^\mu \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} e^{i p_1(x-x_1)} \partial_\mu \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} e^{i p_2(x-x_2)} \\
&+ \frac{1}{2} \kappa \eta^{\gamma\delta} \partial^\lambda \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} e^{i p_2(x-x_2)} \partial_\theta \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} e^{i p_1(x-x_1)} \\
&+ \frac{1}{2} \kappa \eta^{\gamma\delta} \partial^\lambda \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} e^{i p_1(x-x_1)} \partial_\theta \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} e^{i p_2(x-x_2)} \\
&- \frac{1}{2} \kappa \eta^{\lambda\delta} \partial_\gamma \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} e^{i p_2(x-x_2)} \partial^\theta \delta \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} e^{i p_1(x-x_1)} \\
&- \frac{1}{2} \kappa \eta^{\lambda\gamma} \partial^\delta \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} e^{i p_1(x-x_1)} \partial^\theta \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} e^{i p_2(x-x_2)} \\
&- \frac{1}{2} \kappa \eta^{\theta\gamma} \partial^\lambda \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} e^{i p_2(x-x_2)} \partial^\delta \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} e^{i p_1(x-x_1)} \\
&\left. - \frac{1}{2} \kappa \eta^{\theta\delta} \partial^\lambda \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} e^{i p_2(x-x_2)} \partial^\gamma \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} e^{i p_1(x-x_1)} \right\}. \tag{4.47}
\end{aligned}$$

Aplicando as derivadas, utilizando o resultado de (4.12) para a integral no momento q e agrupando os termos, a expressão (4.47) torna-se:

$$\begin{aligned}
\Theta^{\lambda\theta(\gamma\delta)}(p, p') &= i \int d^4x e^{i(p_1-p_2+q)x} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int d^4x_1 e^{i(p-p_1)x_1} \int d^4x_2 e^{-i(p_2+p')x_2} \\
&\times \left\{ -\frac{1}{2}\kappa\eta^{\lambda\theta}\eta^{\delta\gamma}(ip_{1\mu})(ip^{2\mu}) + \frac{1}{4}\kappa\eta^{\lambda\theta}\eta^{\nu\gamma}(ip_{2\nu})(ip^{1\delta}) \right. \\
&+ \frac{1}{4}\kappa\eta^{\lambda\theta}\eta^{\nu\delta}(ip_{1\nu})(ip^{2\gamma}) + \frac{1}{2}\kappa\eta^{\theta\delta}\eta^{\lambda\gamma}(ip^{2\mu})(ip_{1\mu}) \\
&+ \frac{1}{2}\kappa\eta^{\theta\gamma}\eta^{\lambda\delta}(ip^{1\mu})(ip_{2\mu}) + \frac{1}{2}\kappa\eta^{\gamma\delta}(ip^{2\lambda})(ip_{1\theta}) + \frac{1}{2}\kappa\eta^{\gamma\delta}(ip^{1\lambda})(ip_{2\theta}) \\
&- \frac{1}{2}\kappa\eta^{\lambda\delta}(ip_{2\gamma})(ip^{1\theta}) - \frac{1}{2}\kappa\eta^{\lambda\gamma}(ip^{1\delta})(ip^{2\theta}) - \frac{1}{2}\kappa\eta^{\theta\gamma}(ip^{2\lambda})(ip^{1\delta}) \\
&\left. - \frac{1}{2}\kappa\eta^{\theta\delta}(ip^{1\lambda})(ip^{2\gamma}) \right\}. \tag{4.48}
\end{aligned}$$

Utilizando o resultado das expressões (4.15) e (4.16) em (4.48) para realizar as integrações em x_1 e x_2 , e em seguida, reorganizando os termos e resolvendo as integrais nos momentos, a expressão (4.48) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
\Theta^{\lambda\theta(\gamma\delta)}(p, p') &= i\kappa \int d^4x e^{i(p-p'+q)x} \left\{ -\frac{1}{2}\eta^{\lambda\theta}\eta^{\delta\gamma}(p \cdot p') + \frac{1}{4}\eta^{\lambda\theta}\eta^{\nu\gamma}(p^\delta p'_\nu) + \frac{1}{4}\eta^{\lambda\theta}\eta^{\nu\delta}(p_\nu p'^\gamma) \right. \\
&+ \frac{1}{2}\eta^{\theta\delta}\eta^{\lambda\gamma}(p \cdot p') + \frac{1}{2}\eta^{\theta\gamma}\eta^{\lambda\delta}(p \cdot p') + \frac{1}{2}\eta^{\gamma\delta}(p'^\lambda p^\theta) + \frac{1}{2}\eta^{\gamma\delta}(p^\lambda p'^\theta) \\
&\left. - \frac{1}{2}\eta^{\lambda\delta}(p'^\gamma p^\theta) - \frac{1}{2}\eta^{\lambda\gamma}(p^\delta p'^\theta) - \frac{1}{2}\eta^{\theta\gamma}(p'^\lambda p^\delta) - \frac{1}{2}\eta^{\theta\delta}(p^\lambda p'^\gamma) \right\}. \tag{4.49}
\end{aligned}$$

Agora, contratando alguns termos em (4.49) e utilizando o resultado da expressão (4.40), obtemos o resultado:

$$\begin{aligned}
\Theta^{\lambda\theta(\gamma\delta)}(p, p') &= i\kappa(2\pi)^4\delta(p-p'+q) \left\{ \left(-\frac{1}{2}\eta^{\lambda\theta}\eta^{\delta\gamma} + \frac{1}{2}\eta^{\theta\delta}\eta^{\lambda\gamma} + \frac{1}{2}\eta^{\theta\gamma}\eta^{\lambda\delta} \right) (p \cdot p') \right. \\
&+ \frac{1}{4}\eta^{\lambda\theta}(p^\delta p'^\gamma) + \frac{1}{4}\eta^{\lambda\theta}(p^\delta p'^\gamma) + \frac{1}{2}\eta^{\gamma\delta}(p'^\lambda p^\theta) + \frac{1}{2}\eta^{\gamma\delta}(p^\lambda p'^\theta) \\
&\left. - \frac{1}{2}\eta^{\lambda\delta}(p'^\gamma p^\theta) - \frac{1}{2}\eta^{\lambda\gamma}(p^\delta p'^\theta) - \frac{1}{2}\eta^{\theta\gamma}(p'^\lambda p^\delta) - \frac{1}{2}\eta^{\theta\delta}(p^\lambda p'^\gamma) \right\}. \tag{4.50}
\end{aligned}$$

Agora escrevendo

$$P^{\lambda\theta(\gamma\delta)} = \frac{1}{2} \left(\eta^{\theta\gamma}\eta^{\lambda\delta} + \eta^{\theta\delta}\eta^{\lambda\gamma} - \eta^{\lambda\theta}\eta^{\gamma\delta} \right), \tag{4.51}$$

obtém-se o seguinte resultado para o vértice:

$$\begin{aligned}
\Theta^{\lambda\theta(\gamma\delta)}(p, p') &= i\kappa(2\pi)^4\delta(p-p'+q) \left\{ P^{\lambda\theta(\gamma\delta)}(p \cdot p') + \frac{1}{2} \left[\eta^{\lambda\theta}(p^\delta p'^\gamma) \right. \right. \\
&+ \eta^{\gamma\delta} \left(p^\theta p'^\lambda + p^\lambda p'^\theta \right) - \left[\eta^{\lambda\delta}(p'^\gamma p^\theta) + \eta^{\lambda\gamma}(p^\delta p'^\theta) + \eta^{\theta\gamma}(p^\delta p'^\lambda) \right. \\
&\left. \left. + \eta^{\theta\delta}(p^\lambda p'^\gamma) \right] \right\}, \tag{4.52}
\end{aligned}$$

onde a função delta em (4.52) mostra a conservação dos momentos no vértice e o termo entre parênteses de $\Theta^{\lambda\theta(\gamma\delta)}$ indica os índices referentes aos fótons. Diagramaticamente temos:

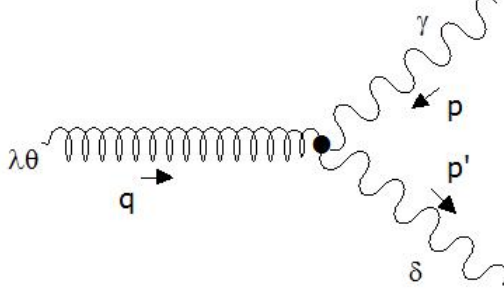


Figura 4.5: Forma diagramática da interação de 1 gráviton com 2 fótons.

Vértice com interação de 1 gráviton com 2 campos escalares

Da expressão (4.1), o termo que descreve tal interação é dado por:

$$\mathcal{L}_{int} = +\frac{1}{2}\kappa h(|\partial_\alpha\phi|^2 - m^2|\phi|^2) - \frac{1}{2}\kappa h^{\mu\nu} \left\{ (\partial_\nu\phi)(\partial_\mu\phi^*) + (\partial_\nu\phi)^*(\partial_\mu\phi) \right\}, \quad (4.53)$$

onde, o segundo termo da expressão (4.53) foi escrito como uma soma de duas partes simétricas. Assim, fazendo a seguinte troca de índices na expressão (4.53): $(\mu \rightarrow \alpha)$, $(\nu \rightarrow \beta)$ e $(\alpha \rightarrow \sigma)$, e substituindo o resultado em (4.2), temos que o vértice pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \Theta^{\mu\nu}(p, p') &= i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 e^{i[p x_1 - p' x_2 + q x_3]} \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)} \frac{\delta}{\delta\phi^*(x_2)} \frac{\delta}{\delta H_{\mu\nu}(x_3)} \\ &\times \left\{ +\frac{1}{2}\kappa\eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \left((\partial_\sigma\phi)(\partial^\sigma\phi^*) - m^2\phi\phi^* \right) \right. \\ &\left. -\frac{1}{2}\kappa h_{\alpha\beta} \left\{ (\partial^\alpha\phi^*)(\partial^\beta\phi) + (\partial^\alpha\phi)(\partial^\beta\phi^*) \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Agora, aplicando as derivadas em (4.54) tem-se:

$$\begin{aligned}
\Theta^{\mu\nu}(p, p') &= i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 e^{i[p x_1 - p' x_2 + q x_3]} \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)} \frac{\delta}{\delta\phi^*(x_2)} \\
&\quad \times \left\{ + \frac{1}{2} \kappa \eta^{\mu\nu} \delta(x - x_3) \left((\partial_\sigma \phi) (\partial^\sigma \phi^*) - m^2 \phi \phi^* \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \kappa \delta(x - x_3) \left\{ (\partial^\mu \phi^*) (\partial^\nu \phi) + (\partial^\mu \phi) (\partial^\nu \phi^*) \right\} \right\}. \\
&= i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 e^{i[p x_1 - p' x_2 + q x_3]} \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)} \\
&\quad \times \left\{ + \frac{1}{2} \kappa \eta^{\mu\nu} \delta(x - x_3) \left((\partial_\sigma \phi) (\partial^\sigma \delta(x - x_2)) - m^2 \phi \delta(x - x_2) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \kappa \delta(x - x_3) \left\{ (\partial^\nu \phi) (\partial^\mu \delta(x - x_2)) + (\partial^\nu \delta(x - x_2)) (\partial^\mu \phi) \right\} \right\}. \\
&= i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 e^{i[p x_1 - p' x_2 + q x_3]} \\
&\quad \times \left\{ \frac{1}{2} \kappa \eta^{\mu\nu} \delta(x - x_3) \left((\partial_\sigma \delta(x - x_1)) (\partial^\sigma \delta(x - x_2)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - m^2 \delta(x - x_1) \delta(x - x_2) \right) - \frac{1}{2} \kappa \delta(x - x_3) \left((\partial^\mu \delta(x - x_1)) (\partial^\nu \delta(x - x_2)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (\partial^\nu \delta(x - x_1)) (\partial^\mu \delta(x - x_2)) \right) \right\}. \tag{4.55}
\end{aligned}$$

Substituindo as expressões (4.7) e (4.8), bem como o resultado de (4.12) para realizar a integração no momento q , a expressão (4.55) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\Theta^{\mu\nu}(p, p') &= -\frac{i\kappa}{2} \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 e^{i[p x_1 - p' x_2 + q x]} \\
&\quad \times \left\{ -\eta^{\mu\nu} \left(\partial_\sigma \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)} \partial^\sigma \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2(x-x_2)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - m^2 \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2(x-x_2)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\partial^\mu \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)} \partial^\nu \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2(x-x_2)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \partial^\nu \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)} \partial^\mu \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2(x-x_2)} \right) \right\}. \tag{4.56}
\end{aligned}$$

Aplicando as derivadas e agrupando os termos em (4.56), obtemos:

$$\begin{aligned}
\Theta^{\mu\nu}(p, p') &= -\frac{i\kappa}{2} \int d^4x e^{i(p-p'+q)x} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int d^4x_1 e^{ip_1(x-x_1)} \int d^4x_2 e^{ip_2(x-x_2)} \\
&\quad \times \left\{ -\eta^{\mu\nu} \left((ip_{1\sigma})(ip^{2\sigma}) - m^2 \right) + \left((ip^{1\mu})(ip^{2\nu}) + (ip^{1\nu})(ip^{2\mu}) \right) \right\} \\
&= -\frac{i\kappa}{2} \int d^4x e^{i(p-p'+q)x} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int d^4x_1 e^{ip_1(x-x_1)} \int d^4x_2 e^{ip_2(x-x_2)} \\
&\quad \times \left\{ -\eta^{\mu\nu} \left(- (p_{1\sigma} p^{2\sigma}) - m^2 \right) - \left((p^{1\mu})(p^{2\nu}) + (p^{1\nu})(p^{2\mu}) \right) \right\}. \tag{4.57}
\end{aligned}$$

Agora, utilizando os resultados de (4.15) e (4.16) para resolver as integrais em x_1 e x_2 e também os resultados de (4.18) e (4.19) para resolver as integrais nos momentos, obtemos o seguinte resultado:

$$\Theta^{\mu\nu}(p, p') = -\frac{i\kappa}{2} \int d^4x e^{i(p-p'+q)x} \left\{ -\eta^{\mu\nu} \left((p \cdot p') - m^2 \right) + p'^{\mu} p^{\nu} + p'^{\nu} p^{\mu} \right\}. \quad (4.58)$$

Dessa forma, lembrando que

$$\int d^4x e^{i(p-p'+q)x} = (2\pi)^4 \delta(p - p' + q), \quad (4.59)$$

obtem-se, substituindo (4.59) em (4.58), o seguinte resultado:

$$\Theta^{\mu\nu}(p, p') = -\frac{i\kappa}{2} (2\pi)^4 \delta(p - p' + q) \left\{ -\eta^{\mu\nu} \left((p \cdot p') - m^2 \right) + p'^{\mu} p^{\nu} + p'^{\nu} p^{\mu} \right\}, \quad (4.60)$$

com a função delta em (4.60) mostrando a conservação do momento no vértice, o que também pode ser visto através da figura:

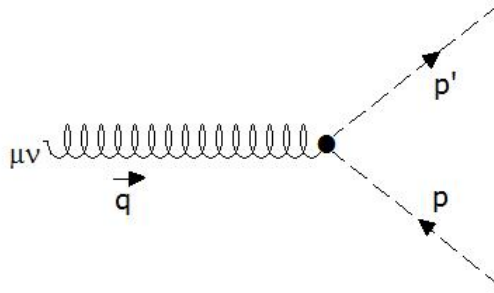


Figura 4.6: Forma diagramática da interação de 1 gráviton com 2 campos escalares.

Após o cálculo de todos os vértices, podemos notar que até ordem de 1 *loop*, há uma contribuição quântica para o tensor de polarização, advindo do vértice que descreve a interação de 1 gráviton com 2 fótons. Esta contribuição é mostrada através da figura (4.7).

No próximo capítulo, vamos mostrar o cálculo do gráfico (4.7) e verificar se existe ou não esta contribuição gravitacional para o tensor de polarização e em caso positivo, se tal contribuição depende de um *gauge* arbitrário.

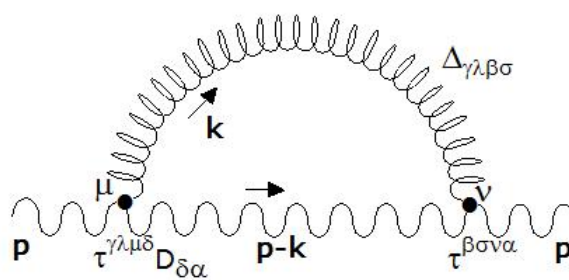


Figura 4.7: Correção quântica a ordem de 1 *loop* para o tensor de polarização da eletrodinâmica escalar.

5 Contribuição gravitacional para o tensor de polarização

Como mencionado no fim do capítulo anterior, vamos calcular neste capítulo a contribuição oriunda das correções quânticas para o tensor de polarização da eletrodinâmica escalar. Tal contribuição pode ser vista da figura (4.7). Utilizando as expressões (3.43) e (4.52), obtemos a seguinte expressão para o gráfico de Feynman mostrado em (4.7):

$$I^{\mu\nu}(\mu^2) = -\kappa^2 \eta_{\delta\alpha} P_{\gamma\lambda\beta\sigma} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\tau^{\gamma\lambda\mu\delta} \tau^{\beta\sigma\nu\alpha}}{(k^2 - \mu^2)[(k-p)^2 - \mu^2]} - \kappa^2 \frac{(1-\lambda)}{\lambda} P_{\gamma\lambda\beta\sigma} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\tau^{\gamma\lambda\mu\delta} \tau^{\beta\sigma\nu\alpha} k_\delta k_\alpha}{(k^2 - \mu^2)[(k-p)^2 - \mu^2]^2}, \quad (5.1)$$

com $P_{\gamma\lambda\beta\sigma}$ definido em (3.42). Deve-se notar também que estamos usando um *gauge* λ arbitrário na expressão (5.1). O próximo passo consiste em aplicar a identidade (A.1) na expressão (5.1), mas para isso vamos fazer a seguinte mudança de variáveis na segunda integral da expressão (5.1): $k \rightarrow k + p$.

Em analogia ao cálculo do diagrama (2.4), a expressão (5.1) será dividida em duas partes: $I_1^{\mu\nu}(\mu^2)$ e $I_2^{\mu\nu}(\mu^2)$ respectivamente. A primeira a ser calculada será:

$$I_1^{\mu\nu}(\mu^2) = -\kappa^2 \eta_{\delta\alpha} P_{\gamma\lambda\beta\sigma} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\tau^{\gamma\lambda\mu\delta} \tau^{\beta\sigma\nu\alpha}}{(k^2 - \mu^2)[(k-p)^2 - \mu^2]}. \quad (5.2)$$

Primeiramente, vamos escrever os vértices $\tau^{\gamma\lambda\mu\delta}$ e $\tau^{\beta\sigma\nu\alpha}$, levando em conta os momentos que circulam no *loop* do gráfico que aparece na figura (4.7). Usando a expressão descrita

em (4.52), o vértice $\tau^{\gamma\lambda\mu\delta}$ fica escrito como:

$$\begin{aligned}
\tau^{\gamma\lambda\mu\delta}(p, p') &= \left\{ P^{\gamma\lambda(\mu\delta)} p_\theta \cdot (p - k)^\theta + \frac{1}{2} \left[\eta^{\gamma\lambda} p^\delta (p - k)^\mu \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \eta^{\mu\delta} \left(p^\gamma (p - k)^\lambda + p^\lambda (p - k)^\gamma \right) - \left[\eta^{\gamma\delta} (p^\lambda (p - k)^\mu) + \eta^{\lambda\delta} (p^\gamma (p - k)^\mu) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \eta^{\lambda\mu} (p^\delta (p - k)^\gamma) + \eta^{\gamma\mu} (p^\delta (p - k)^\lambda) \right] \right] \right\} \\
&= \left\{ P^{\gamma\lambda(\mu\delta)} (p_\theta p^\theta) - P^{\gamma\lambda(\mu\delta)} (p_\theta k^\theta) + \frac{1}{2} \eta^{\gamma\lambda} (p^\delta p^\mu) - \frac{1}{2} \eta^{\gamma\lambda} (p^\delta k^\mu) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \eta^{\mu\delta} (p^\gamma p^\lambda) - \frac{1}{2} \eta^{\mu\delta} (p^\gamma k^\lambda) + \frac{1}{2} \eta^{\mu\delta} (p^\lambda p^\gamma) - \frac{1}{2} \eta^{\mu\delta} (p^\lambda k^\gamma) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \eta^{\gamma\delta} (p^\lambda p^\mu) + \frac{1}{2} \eta^{\gamma\delta} (p^\lambda k^\mu) - \frac{1}{2} \eta^{\lambda\delta} (p^\gamma p^\mu) + \frac{1}{2} \eta^{\lambda\delta} (p^\gamma k^\mu) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \eta^{\lambda\mu} (p^\delta p^\gamma) + \frac{1}{2} \eta^{\lambda\mu} (p^\delta k^\gamma) - \frac{1}{2} \eta^{\gamma\mu} (p^\delta p^\lambda) + \frac{1}{2} \eta^{\gamma\mu} (p^\delta k^\lambda) \right\}. \quad (5.3)
\end{aligned}$$

De maneira análoga, o vértice $\tau^{\beta\sigma\nu\alpha}$ pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
\tau^{\beta\sigma\nu\alpha}(p, p') &= \left\{ P^{\beta\sigma(\nu\alpha)} (p - k)_\theta \cdot p^\theta + \frac{1}{2} \left[\eta^{\beta\sigma} p^\nu (p - k)^\alpha \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \eta^{\alpha\nu} \left(p^\sigma (p - k)^\beta + p^\beta (p - k)^\sigma \right) - \left[\eta^{\beta\alpha} (p^\nu (p - k)^\sigma) + \eta^{\sigma\alpha} (p^\nu (p - k)^\beta) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \eta^{\sigma\nu} (p^\beta (p - k)^\alpha) + \eta^{\beta\nu} (p^\sigma (p - k)^\alpha) \right] \right] \right\} \\
&= \left\{ P^{\beta\sigma(\alpha\nu)} (p_\theta p^\theta) - P^{\beta\sigma(\alpha\nu)} (p_\theta k^\theta) + \frac{1}{2} \eta^{\beta\sigma} (p^\alpha p^\nu) - \frac{1}{2} \eta^{\beta\sigma} (p^\nu k^\alpha) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\nu} (p^\sigma p^\beta) - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\nu} (p^\sigma k^\beta) + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\nu} (p^\sigma p^\beta) - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\nu} (p^\beta k^\sigma) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \eta^{\beta\alpha} (p^\nu p^\sigma) + \frac{1}{2} \eta^{\beta\alpha} (p^\nu k^\sigma) - \frac{1}{2} \eta^{\sigma\alpha} (p^\nu p^\beta) + \frac{1}{2} \eta^{\sigma\alpha} (p^\nu k^\beta) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \eta^{\sigma\nu} (p^\beta p^\alpha) + \frac{1}{2} \eta^{\sigma\nu} (p^\beta k^\alpha) - \frac{1}{2} \eta^{\beta\nu} (p^\sigma p^\alpha) + \frac{1}{2} \eta^{\beta\nu} (p^\sigma k^\alpha) \right\}. \quad (5.4)
\end{aligned}$$

O próximo passo consiste em realizar o produto $\tau^{\gamma\lambda\mu\delta} P_{\gamma\lambda\beta\sigma} \tau^{\beta\sigma\nu\alpha} \eta_{\delta\alpha}$ utilizando para isso os resultados de (5.3) e (5.4). O resultado deste produto é então substituído em (5.2). Feito

todos os produtos e simplificações, obtemos o seguinte resultado¹:

$$\begin{aligned}
\tau^{\gamma\lambda\mu\delta} P_{\gamma\lambda\beta\sigma} \tau^{\beta\sigma\nu\alpha} \eta_{\delta\alpha} &= 2\eta^{\mu\nu}(p_\theta p^\theta)(p_\beta p^\beta) - 2p^\mu p^\nu(p_\theta p^\theta) + 2p^\nu k^\mu(p_\beta p^\beta) \\
&\quad - 4\eta^{\mu\nu}(p_\theta p^\theta)(p_\beta k^\beta) + \frac{3}{2}\eta^{\mu\nu}(p_\theta k^\theta)(p_\beta k^\beta) + 2p^\mu p^\nu(p_\beta k^\beta) \\
&\quad + \frac{1}{2}p^\mu k^\nu(p_\theta k^\theta) - \frac{3}{2}p^\nu k^\mu(p_\theta k^\theta) - \frac{1}{2}p^\mu p^\nu(k_\theta k^\theta) \\
&\quad + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(p_\theta p^\theta)(k_\beta k^\beta) - \frac{1}{2}k^\mu k^\nu(p_\theta p^\theta). \tag{5.5}
\end{aligned}$$

Agora, substituindo o resultado da expressão (5.5) na expressão (5.2) obtemos:

$$\begin{aligned}
I_1^{\mu\nu}(\mu^2) &= -\kappa^2 \left\{ 2\eta^{\mu\nu}(p_\theta p^\theta)(p_\beta p^\beta) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)[(k-p)^2 - \mu^2]} \right. \\
&\quad - 2p^\mu p^\nu(p_\theta p^\theta) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)[(k-p)^2 - \mu^2]} \\
&\quad + 2p^\nu(p_\beta p^\beta) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{(k^2 - \mu^2)[(k-p)^2 - \mu^2]} \\
&\quad - 4\eta^{\mu\nu}(p_\theta p^\theta)p_\beta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta}{(k^2 - \mu^2)[(k-p)^2 - \mu^2]} \\
&\quad + \frac{3}{2}\eta^{\mu\nu}p_\theta p_\beta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\theta k^\beta}{(k^2 - \mu^2)[(k-p)^2 - \mu^2]} \\
&\quad + 2p^\mu p^\nu p_\beta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta}{(k^2 - \mu^2)[(k-p)^2 - \mu^2]} \\
&\quad + \frac{1}{2}p^\mu p_\beta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\nu k^\beta}{(k^2 - \mu^2)[(k-p)^2 - \mu^2]} \\
&\quad - \frac{3}{2}p^\nu p_\beta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\beta}{(k^2 - \mu^2)[(k-p)^2 - \mu^2]} \\
&\quad - \frac{1}{2}p^\mu p^\nu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\theta k^\theta}{(k^2 - \mu^2)[(k-p)^2 - \mu^2]} \\
&\quad + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(p_\theta p^\theta) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\beta k^\beta}{(k^2 - \mu^2)[(k-p)^2 - \mu^2]} \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}(p_\theta p^\theta) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - \mu^2)[(k-p)^2 - \mu^2]} \right\}. \tag{5.6}
\end{aligned}$$

O próximo passo é aplicar (A.1) em todos os termos de (5.6), o que torna a conta bastante extensa. Como o cálculo destas integrais é análogo ao cálculo das integrais feitas no capítulo 1(seção 2.1), usaremos aqui apenas os resultados destas integrais que serão

¹Como este cálculo foi bastante extenso, foi utilizada neste ponto uma rotina computacional implementada através do software MAPLE 11.

apresentados no apêndice (A) deste trabalho. Assim, a expressão (5.6) fica escrita como:

$$\begin{aligned}
I_1^{\mu\nu}(\mu^2) = & -\kappa^2 \left\{ 2\eta^{\mu\nu}(p_\theta p^\theta)(p_\beta p^\beta) \left[I_{\log}(\mu^2) \right] - 2p^\mu p^\nu (p_\theta p^\theta) \left[I_{\log}(\mu^2) \right] \right. \\
& + 2p^\nu (p_\beta p^\beta) \left[\frac{1}{2} p^\mu I_{\log}(\mu^2) \right] - 4\eta^{\mu\nu}(p_\theta p^\theta) p_\beta \left[\frac{1}{2} p^\beta I_{\log}(\mu^2) \right] \\
& + \frac{3}{2} \eta^{\mu\nu} p_\theta p_\beta \left[\frac{1}{2} \eta^{\theta\beta} I_{quad}(\mu^2) - \frac{1}{12} \eta^{\theta\beta} p^2 I_{\log}(\mu^2) + \frac{1}{3} p^\theta p^\beta I_{\log}(\mu^2) \right] \\
& + 2p^\mu p^\nu p_\beta \left[\frac{1}{2} p^\beta I_{\log}(\mu^2) \right] \\
& + \frac{1}{2} p^\mu p_\theta \left[\frac{1}{2} \eta^{\nu\theta} I_{quad}(\mu^2) - \frac{1}{12} \eta^{\nu\theta} p^2 I_{\log}(\mu^2) + \frac{1}{3} p^\nu p^\theta I_{\log}(\mu^2) \right] \\
& - \frac{3}{2} p^\nu p_\beta \left[\frac{1}{2} \eta^{\mu\beta} I_{quad}(\mu^2) - \frac{1}{12} \eta^{\mu\beta} p^2 I_{\log}(\mu^2) + \frac{1}{3} p^\mu p^\beta I_{\log}(\mu^2) \right] \\
& - \frac{1}{2} p^\mu p^\nu \left[I_{quad}(\mu^2) + m^2 I_{\log}(\mu^2) \right] + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu}(p_\theta p^\theta) \left[I_{quad}(\mu^2) + m^2 I_{\log}(\mu^2) \right] \\
& \left. - \frac{1}{2} (p_\theta p^\theta) \left[\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} I_{quad}(\mu^2) - \frac{1}{12} \eta^{\mu\nu} p^2 I_{\log}(\mu^2) + \frac{1}{3} p^\mu p^\nu I_{\log}(\mu^2) \right] \right\} \\
& + F'' + S''.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Agrupando os termos de (5.7) obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
I_1^{\mu\nu}(\mu^2) = & \frac{5}{12} \kappa^2 I_{\log}(\mu^2) \left\{ \eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu \right\} p^2 + I_{quad}(\mu^2) \kappa^2 \left\{ \eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu \right\} \\
& + \frac{1}{2} \mu^2 \kappa^2 I_{\log}(\mu^2) \left\{ \eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu \right\} + F'' + S'',
\end{aligned} \tag{5.8}$$

onde F'' representa a soma das partes finitas da expressão (5.8). Elas são dadas por:

$$F_1'' = -\kappa^2 \left\{ 2\eta^{\mu\nu}(p_\theta p^\theta)(p_\beta p^\beta) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2p \cdot k - p^2)}{(k^2 - \mu^2)^2 [(k-p)^2 - \mu^2]} \right\}, \tag{5.9}$$

$$F_2'' = -\kappa^2 \left\{ -2p^\mu p^\nu (p_\theta p^\theta) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2p \cdot k - p^2)}{(k^2 - \mu^2)^2 [(k-p)^2 - \mu^2]} \right\}, \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}
F_3'' = & -\kappa^2 \left\{ 4p^\nu (p_\beta p^\beta) p_\alpha p_\lambda \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\alpha k^\lambda}{(k^2 - \mu^2)^3 [(k-p)^2 - \mu^2]} \right. \\
& - 4p^\nu (p_\beta p^\beta) (p_\alpha p^\alpha) p_\beta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\beta}{(k^2 - \mu^2)^3 [(k-p)^2 - \mu^2]} \\
& \left. - 2p^\nu (p_\beta p^\beta) (p_\alpha p^\alpha) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{(k^2 - \mu^2)^2 [(k-p)^2 - \mu^2]} \right\},
\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}
F_4'' &= -\kappa^2 \left\{ -8\eta^{\mu\nu}(p_\theta p^\theta) p_\alpha p_\lambda p_\beta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta k^\lambda k^\alpha}{(k^2 - \mu^2)^3 [(k-p)^2 - \mu^2]} \right. \\
&\quad + 8\eta^{\mu\nu}(p_\theta p^\theta) (p_\alpha p^\alpha) p_\beta p_\lambda \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta k^\lambda}{(k^2 - \mu^2)^3 [(k-p)^2 - \mu^2]} \\
&\quad \left. + 4\eta^{\mu\nu}(p_\theta p^\theta) (p_\alpha p^\alpha) p_\beta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta}{(k^2 - \mu^2)^2 [(k-p)^2 - \mu^2]} \right\}, \quad (5.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_5'' &= -\kappa^2 \left\{ +12\eta^{\mu\nu} p_\theta p_\beta p_\gamma p_\alpha p_\sigma \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\theta k^\beta k^\gamma k^\alpha k^\sigma}{(k^2 - \mu^2)^4 [(k-p)^2 - \mu^2]} \right. \\
&\quad - 6\eta^{\mu\nu} (p_\gamma p^\gamma) p_\theta p_\beta p_\alpha p_\sigma \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\theta k^\beta k^\alpha k^\sigma}{(k^2 - \mu^2)^4 [(k-p)^2 - \mu^2]} \\
&\quad - 3\eta^{\mu\nu} (p_\alpha p^\alpha) p_\theta p_\beta p_\sigma \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\theta k^\beta k^\sigma}{(k^2 - \mu^2)^3 [(k-p)^2 - \mu^2]} \\
&\quad - 3\eta^{\mu\nu} (p_\alpha p^\alpha) p_\theta p_\beta p_\sigma \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\theta k^\beta k^\sigma}{(k^2 - \mu^2)^3 [(k-p)^2 - \mu^2]} \\
&\quad \left. + \frac{3}{2}\eta^{\mu\nu} (p_\alpha p^\alpha) (p_\gamma p^\gamma) p_\theta p_\beta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\theta k^\beta}{(k^2 - \mu^2)^3 [(k-p)^2 - \mu^2]} \right\}, \quad (5.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_6'' &= -\kappa^2 \left\{ 4p^\mu p^\nu p_\beta p_\alpha p_\lambda \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta k^\alpha k^\lambda}{(k^2 - \mu^2)^3 [(k-p)^2 - \mu^2]} \right. \\
&\quad - 4p^\mu p^\nu (p_\alpha p^\alpha) p_\beta p_\lambda \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta k^\lambda}{(k^2 - \mu^2)^3 [(k-p)^2 - \mu^2]} \\
&\quad \left. - 2p^\mu p^\nu (p_\alpha p^\alpha) p_\beta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta}{(k^2 - \mu^2)^2 [(k-p)^2 - \mu^2]} \right\}, \quad (5.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_7'' &= -\kappa^2 \left\{ 4p^\mu p_\theta p_\gamma p_\alpha p_\sigma \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\nu k^\theta k^\gamma k^\alpha k^\sigma}{(k^2 - \mu^2)^4 [(k-p)^2 - \mu^2]} \right. \\
&\quad - 2p^\mu (p_\gamma p^\gamma) p_\theta p_\alpha p_\sigma \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\nu k^\theta k^\alpha k^\sigma}{(k^2 - \mu^2)^4 [(k-p)^2 - \mu^2]} \\
&\quad - p^\mu (p_\alpha p^\alpha) p_\theta p_\sigma \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\nu k^\theta k^\sigma}{(k^2 - \mu^2)^3 [(k-p)^2 - \mu^2]} \\
&\quad - p^\mu (p_\alpha p^\alpha) p_\theta p_\sigma \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\nu k^\theta k^\sigma}{(k^2 - \mu^2)^3 [(k-p)^2 - \mu^2]} \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}p^\mu (p_\alpha p^\alpha) (p_\gamma p^\gamma) p_\theta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\nu k^\theta}{(k^2 - \mu^2)^3 [(k-p)^2 - \mu^2]} \right\}, \quad (5.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_8'' &= -\kappa^2 \left\{ -12p^\nu p_\theta p_\gamma p_\alpha p_\sigma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\theta k^\gamma k^\alpha k^\sigma}{(k^2 - \mu^2)^4 [(k-p)^2 - \mu^2]} \right. \\
&+ 6p^\nu (p_\gamma p^\gamma) p_\beta p_\alpha p_\sigma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\beta k^\alpha k^\sigma}{(k^2 - \mu^2)^4 [(k-p)^2 - \mu^2]} \\
&+ 3p^\nu (p_\alpha p^\alpha) p_\beta p_\sigma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\beta k^\sigma}{(k^2 - \mu^2)^3 [(k-p)^2 - \mu^2]} \\
&+ 3p^\nu (p_\alpha p^\alpha) p_\beta p_\sigma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\beta k^\sigma}{(k^2 - \mu^2)^3 [(k-p)^2 - \mu^2]} \\
&\left. - \frac{3}{2} p^\nu (p_\alpha p^\alpha) (p_\gamma p^\gamma) p_\beta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\beta}{(k^2 - \mu^2)^3 [(k-p)^2 - \mu^2]} \right\}, \quad (5.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_9'' &= -\kappa^2 \left\{ -4p^\mu p^\nu p_\theta p_\beta p_\alpha \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\theta k^\beta k^\alpha}{(k^2 - \mu^2)^3 [(k-p)^2 - \mu^2]} \right. \\
&+ 2p^\mu p^\nu (p_\gamma p^\gamma) p_\alpha p_\beta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha k^\beta}{(k^2 - \mu^2)^3 [(k-p)^2 - \mu^2]} \\
&+ p^\mu p^\nu (p_\theta p^\theta) p_\alpha \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha}{(k^2 - \mu^2)^2 [(k-p)^2 - \mu^2]} \\
&+ \frac{1}{2} p^\mu p^\nu (p_\alpha p^\alpha) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(2p \cdot k - p^2)}{(k^2 - \mu^2)^2 [(k-p)^2 - \mu^2]} \\
&- m^2 p^\mu p^\nu p_\alpha \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha}{(k^2 - \mu^2)^2 [(k-p)^2 - \mu^2]} \\
&\left. + \frac{1}{2} m^2 p^\mu p^\nu (p_\theta p^\theta) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2 [(k-p)^2 - \mu^2]} \right\}, \quad (5.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{10}'' &= -\kappa^2 \left\{ 4\eta^{\mu\nu} (p_\gamma p^\gamma) p_\theta p_\beta p_\alpha \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\theta k^\beta k^\alpha}{(k^2 - \mu^2)^3 [(k-p)^2 - \mu^2]} \right. \\
&- 2\eta^{\mu\nu} (p_\gamma p^\gamma) (p_\alpha p^\alpha) p_\alpha p_\beta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha k^\beta}{(k^2 - \mu^2)^3 [(k-p)^2 - \mu^2]} \\
&- \eta^{\mu\nu} (p_\gamma p^\gamma) (p_\theta p^\theta) p_\alpha \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha}{(k^2 - \mu^2)^2 [(k-p)^2 - \mu^2]} \\
&- \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (p_\alpha p^\alpha) (p_\gamma p^\gamma) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(2p \cdot k - p^2)}{(k^2 - \mu^2)^2 [(k-p)^2 - \mu^2]} \\
&+ \eta^{\mu\nu} m^2 (p_\theta p^\theta) p_\alpha \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha}{(k^2 - \mu^2)^2 [(k-p)^2 - \mu^2]} \\
&\left. - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} m^2 (p_\beta p^\beta) (p_\theta p^\theta) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2 [(k-p)^2 - \mu^2]} \right\}, \quad (5.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F''_{11} = & -\kappa^2 \left\{ -4p_\alpha p_\beta p_\sigma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu k^\alpha k^\beta k^\sigma}{(k^2 - \mu^2)^4 [(k-p)^2 - \mu^2]} \right. \\
& + 2(p_\gamma p^\gamma)(p_\alpha p^\alpha) p_\alpha p_\sigma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu k^\alpha k^\sigma}{(k^2 - \mu^2)^4 [(k-p)^2 - \mu^2]} \\
& + (p_\alpha p^\alpha)(p_\beta p^\beta) p_\sigma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu k^\sigma}{(k^2 - \mu^2)^3 [(k-p)^2 - \mu^2]} \\
& + (p_\alpha p^\alpha)(p_\gamma p^\gamma) p_\sigma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu k^\sigma}{(k^2 - \mu^2)^3 [(k-p)^2 - \mu^2]} \\
& \left. - \frac{1}{2}(p_\alpha p^\alpha)(p_\gamma p^\gamma) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - \mu^2)^3 [(k-p)^2 - \mu^2]} \right\}, \quad (5.19)
\end{aligned}$$

e o termo S'' representa a soma de todos os termos de superfície da expressão (5.8). Eles são dados por:

$$S''_3 = -\kappa^2 \left\{ -p^\nu (p_\beta p^\beta) p_\gamma \gamma^{\mu\gamma} \right\}, \quad (5.20)$$

$$S''_4 = -\kappa^2 \left\{ 2\eta^{\mu\nu} (p_\lambda p^\lambda) p_\gamma p_\beta \gamma^{\beta\gamma} \right\}, \quad (5.21)$$

$$S''_5 = -\kappa^2 \left\{ -\frac{3}{4}\eta^{\mu\nu} p_\beta p_\theta \alpha^{\theta\beta} - \frac{3}{8}\eta^{\mu\nu} (p_\theta p^\theta) p_\sigma p_\gamma \gamma^{\sigma\gamma} - \eta^{\mu\nu} p_\theta p_\beta p_\alpha p_\sigma \gamma^{\theta\beta\sigma\gamma} \right\}, \quad (5.22)$$

$$S''_6 = -\kappa^2 \left\{ -p^\mu p^\nu p_\beta p_\gamma \gamma^{\beta\gamma} \right\}, \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned}
S''_7 = & -\kappa^2 \left\{ -\frac{1}{4}p^\mu p_\theta \alpha^{\nu\theta} - \frac{1}{4}p^\mu p^\nu p_\sigma p_\gamma \gamma^{\sigma\gamma} - \frac{1}{8}p^\mu p_\theta (p_\gamma p^\gamma) \gamma^{\nu\theta} \right. \\
& \left. - \frac{1}{3}p^\mu p_\theta p_\sigma p_\gamma \gamma^{\nu\theta\sigma\gamma} \right\}, \quad (5.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S''_8 = & -\kappa^2 \left\{ \frac{3}{4}p^\nu p_\beta \alpha^{\mu\beta} + \frac{3}{4}p^\mu p^\nu p_\sigma p_\gamma \gamma^{\sigma\gamma} - \frac{3}{8}p^\nu p_\theta (p_\gamma p^\gamma) \gamma^{\mu\theta} \right. \\
& \left. + p^\nu p_\beta p_\sigma p_\gamma \gamma^{\mu\beta\sigma\gamma} \right\}, \quad (5.25)
\end{aligned}$$

$$S''_9 = -\kappa^2 \left\{ \frac{1}{2}p^\mu p^\nu p_\alpha p_\beta \gamma^{\alpha\beta} \right\}, \quad (5.26)$$

$$S''_{10} = -\kappa^2 \left\{ -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} (p_\theta p^\theta) p_\alpha p_\beta \gamma^{\alpha\beta} \right\}, \quad (5.27)$$

$$S''_{11} = -\kappa^2 \left\{ \frac{1}{4}(p_\beta p^\beta) \alpha^{\mu\nu} + \frac{1}{12} \eta^{\mu\nu} (p_\theta p^\theta) p_\sigma p_\gamma \gamma^{\sigma\gamma} - \frac{1}{6} p^\mu p_\theta (p_\gamma p^\gamma) \gamma^{\nu\theta} - \frac{1}{8} (p_\beta p^\beta) (p_\gamma p^\gamma) \gamma^{\mu\nu} + \frac{1}{3} (p_\beta p_\beta) p_\sigma p_\gamma \gamma^{\mu\nu\sigma\gamma} \right\}. \quad (5.28)$$

A próxima integral a ser calculada é:

$$I_2^{\mu\nu}(\mu^2) = -\kappa^2 \frac{(1-\lambda)}{\lambda} P_{\gamma\lambda\beta\sigma} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\tau^{\gamma\lambda\mu\delta} \tau^{\beta\sigma\nu\alpha} k_\delta k_\alpha}{(k^2 - \mu^2)[(k-p)^2 - \mu^2]^2}. \quad (5.29)$$

Para isso, vamos proceder como fizemos no cálculo de $I_1^{\mu\nu}(m^2)$. Faremos o produto do termo $\tau^{\gamma\lambda\mu\delta} P_{\gamma\lambda\beta\sigma} \tau^{\beta\sigma\nu\alpha} k_\alpha k_\delta$, lembrando que neste termo deve ser feita a seguinte substituição: $k \rightarrow k + p$. Realizando este produto e fazendo as simplificações necessárias, obtemos o seguinte resultado ²:

$$\begin{aligned} \tau^{\gamma\lambda\mu\delta} P_{\gamma\lambda\beta\sigma} \tau^{\beta\sigma\nu\alpha} k_\alpha k_\delta &= -\frac{1}{2} p^\nu k^\mu (p_\theta k^\theta) (p_\beta k^\beta) - \frac{1}{2} k^\mu k^\nu (p_\beta p^\beta) (p_\theta k^\theta) \\ &\quad + \frac{1}{2} p^\mu k^\nu (p_\alpha k^\alpha) (p_\lambda k^\lambda) - \frac{1}{2} p^\mu p^\nu (p_\theta k^\theta) (k_\beta k^\beta). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Agora, substituindo o resultado de (5.30) em (5.29) temos:

$$\begin{aligned} I_2^{\mu\nu}(\mu^2) &= -\kappa^2 \frac{(1-\lambda)}{\lambda} \left\{ -\frac{1}{2} p^\nu p_\theta p_\beta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\theta k^\beta}{(k^2 - \mu^2)^2 [(k+p)^2 - \mu^2]} \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} (p_\beta p^\beta) p_\theta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu k^\theta}{(k^2 - \mu^2)^2 [(k+p)^2 - \mu^2]} \\ &\quad + \frac{1}{2} p^\mu p_\alpha p_\lambda \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\nu k^\alpha k^\lambda}{(k^2 - \mu^2)^2 [(k+p)^2 - \mu^2]} \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \eta_{\beta\delta} p^\mu p^\nu p_\theta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\theta k^\delta k^\beta}{(k^2 - \mu^2)^2 [(k+p)^2 - \mu^2]} \right\}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Prosseguindo com os cálculos, temos que aplicar (A.1) em (5.31) duas vezes, uma vez que as integrais de (5.31) são linearmente divergentes. Vamos nos limitar a usar somente os resultados das integrais que se encontram no apêndice deste trabalho. Assim, substituindo

²Como neste ponto o cálculo foi bastante extenso e trabalhoso, utilizamos como auxílio uma rotina computacional implementada pelo programa MAPLE 11.

o resultados das integrais, a expressão (5.31) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
I_2^{\mu\nu}(\mu^2) = & -\kappa^2 \frac{(1-\lambda)}{\lambda} \left\{ -\frac{1}{2} p^\nu p_\theta p_\beta \left[-\frac{1}{12} \eta^{\mu\theta} p^\beta I_{\log}(\mu^2) - \frac{1}{12} \eta^{\mu\beta} p^\theta I_{\log}(\mu^2) \right. \right. \\
& -\frac{1}{12} \eta^{\theta\beta} p^\mu I_{\log}(\mu^2) \left. \right] - \frac{1}{2} (p_\beta p^\beta) p_\theta \left[-\frac{1}{12} \eta^{\mu\nu} p^\theta I_{\log}(\mu^2) - \frac{1}{12} \eta^{\mu\theta} p^\nu I_{\log}(\mu^2) \right. \\
& -\frac{1}{12} \eta^{\nu\theta} p^\mu I_{\log}(\mu^2) \left. \right] + \frac{1}{2} p^\mu p_\alpha p_\lambda \left[-\frac{1}{12} \eta^{\nu\alpha} p^\lambda I_{\log}(\mu^2) - \frac{1}{12} \eta^{\nu\lambda} p^\alpha I_{\log}(\mu^2) \right. \\
& -\frac{1}{12} \eta^{\alpha\lambda} p^\nu I_{\log}(\mu^2) \left. \right] - \frac{1}{2} \eta_{\beta\delta} p^\mu p^\nu p_\theta \left[-\frac{1}{12} \eta^{\theta\delta} p^\beta I_{\log}(\mu^2) - \frac{1}{12} \eta^{\theta\beta} p^\delta I_{\log}(\mu^2) \right. \\
& \left. \left. -\frac{1}{12} \eta^{\delta\beta} p^\theta I_{\log}(\mu^2) \right] \right\} + F''' + S'''. \tag{5.32}
\end{aligned}$$

Por fim, agrupando os termos de (5.32) chegamos ao seguinte resultado:

$$I_2^{\mu\nu}(\mu^2) = -\frac{\kappa^2 (1-\lambda)}{24 \lambda} I_{\log}(\mu^2) \left\{ \eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu \right\} p^2 + F''' + S''', \tag{5.33}$$

onde F''' representa a parte finita da expressão (5.33), que pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
F_1''' = & -\kappa^2 \frac{(1-\lambda)}{\lambda} \left\{ -p^\nu p_\alpha p_\gamma p_\theta p_\beta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\theta k^\beta k^\alpha k^\gamma}{(k^2 - \mu^2)^4 [(k-p)^2 - \mu^2]} \right. \\
& -p^\nu p_\theta p_\beta p_\alpha (p_\gamma p^\gamma) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\theta k^\beta k^\alpha}{(k^2 - \mu^2)^4 [(k-p)^2 - \mu^2]} \\
& \left. + \frac{1}{2} p^\nu p_\theta p_\beta (p_\alpha p^\alpha) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\theta k^\beta}{(k^2 - \mu^2)^3 [(k-p)^2 - \mu^2]} \right\}, \tag{5.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2''' = & -\kappa^2 \frac{(1-\lambda)}{\lambda} \left\{ -(p_\theta p^\theta) p_\alpha p_\gamma p_\beta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu k^\beta k^\alpha k^\gamma}{(k^2 - \mu^2)^4 [(k-p)^2 - \mu^2]} \right. \\
& -p_\theta p_\alpha (p_\gamma p^\gamma) (p_\sigma p^\sigma) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu k^\theta k^\alpha}{(k^2 - \mu^2)^4 [(k-p)^2 - \mu^2]} \\
& \left. + \frac{1}{2} p_\theta (p_\beta p^\beta) (p_\alpha p^\alpha) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu k^\theta}{(k^2 - \mu^2)^3 [(k-p)^2 - \mu^2]} \right\}, \tag{5.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_3''' = & -\kappa^2 \frac{(1-\lambda)}{\lambda} \left\{ p^\mu p_\theta p_\alpha p_\gamma p_\lambda \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\nu k^\alpha k^\lambda k^\theta k^\gamma}{(k^2 - \mu^2)^4 [(k-p)^2 - \mu^2]} \right. \\
& + p^\mu p_\lambda p_\alpha p_\beta (p_\gamma p^\gamma) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\nu k^\alpha k^\lambda k^\beta}{(k^2 - \mu^2)^4 [(k-p)^2 - \mu^2]} \\
& \left. + \frac{1}{2} p^\mu p_\alpha p_\lambda (p_\beta p^\beta) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\nu k^\alpha k^\lambda}{(k^2 - \mu^2)^3 [(k-p)^2 - \mu^2]} \right\}, \tag{5.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_4''' &= -\kappa^2 \frac{(1-\lambda)}{\lambda} \left\{ -\eta_{\delta\beta} p^\mu p^\nu p_\theta p_\alpha p_\gamma \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\delta k^\theta k^\beta k^\alpha k^\gamma}{(k^2 - \mu^2)^4 [(k-p)^2 - \mu^2]} \right. \\
&\quad - \eta_{\delta\beta} p^\mu p^\nu p_\theta p_\alpha (p_\gamma p^\gamma) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\theta k^\delta k^\beta k^\alpha}{(k^2 - \mu^2)^4 [(k-p)^2 - \mu^2]} \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \eta_{\delta\beta} p^\mu p^\nu p_\theta (p_\beta p^\beta) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\delta k^\theta k^\beta}{(k^2 - \mu^2)^3 [(k-p)^2 - \mu^2]} \right\}. \quad (5.37)
\end{aligned}$$

Ainda na expressão (5.33), o termo S''' representa os termos de superfície que podem ser escritos da seguinte maneira:

$$S_1''' = -\kappa^2 \frac{(1-\lambda)}{\lambda} \left\{ -\frac{1}{8} p^\mu p^\nu p_\gamma p_\beta \gamma^{\gamma\beta} - \frac{1}{6} p^\nu p_\theta p_\beta p_\gamma \gamma^{\mu\theta\beta\gamma} \right\}, \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned}
S_2''' &= -\kappa^2 \frac{(1-\lambda)}{\lambda} \left\{ -\frac{1}{24} \eta^{\mu\nu} (p_\alpha p^\alpha) p_\gamma p_\beta \gamma^{\gamma\beta} - \frac{1}{12} (p_\alpha p^\alpha) p^\mu p_\theta \gamma^{\nu\theta} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{6} p_\theta p_\gamma \alpha^{\mu\nu\theta\gamma} \right\}, \quad (5.39)
\end{aligned}$$

$$S_3''' = -\kappa^2 \frac{(1-\lambda)}{\lambda} \left\{ \frac{1}{8} p^\mu p^\nu p_\gamma p_\beta \gamma^{\gamma\beta} + \frac{1}{6} p^\mu p_\alpha p_\lambda p_\gamma \gamma^{\nu\alpha\lambda\gamma} \right\}, \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned}
S_4''' &= -\kappa^2 \frac{(1-\lambda)}{\lambda} \left\{ -\frac{1}{12} p^\mu p^\nu p_\gamma p_\beta \gamma^{\gamma\beta} - \frac{1}{24} \eta_{\delta\beta} p^\mu p^\nu (p_\theta p^\theta) \gamma^{\beta\delta} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{6} p^\mu p^\nu \eta_{\delta\beta} p_\lambda p_\gamma \gamma^{\delta\beta\lambda\gamma} \right\}. \quad (5.41)
\end{aligned}$$

Agora, somando os resultados de (5.8) e (5.33) obtemos:

$$\begin{aligned}
I^{\mu\nu}(\mu^2) &= I_1^{\mu\nu}(\mu^2) + I_2^{\mu\nu}(\mu^2) \\
&= \frac{5}{12} \kappa^2 I_{\log}(\mu^2) \left\{ \eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu \right\} p^2 + I_{quad}(\mu^2) \kappa^2 \left\{ \eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \mu^2 \kappa^2 I_{\log}(\mu^2) \left\{ \eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu \right\} - \frac{\kappa^2 (1-\lambda)}{24 \lambda} p^2 I_{\log}(\mu^2) \left\{ \eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu \right\} \\
&\quad + F'' + S'' + F''' + S''', \quad (5.42)
\end{aligned}$$

onde a expressão (5.42) representa a forma analítica para o gráfico (4.7).

O resultado final é obtido somando-se todas as contribuições possíveis para a teoria até ordem de 1 *loop*, que neste caso são os gráficos mostrados em (2.4), (2.5) e (4.7)

respectivamente. Dessa forma, somando-se as contribuições analíticas dadas pelas expressões (2.44) e (5.42) que expressam matematicamente as contribuições desses gráficos, chegamos ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
I^{\mu\nu}(m^2, \mu^2) = & -\frac{1}{3}e^2 I_{log}(m^2) \left\{ \eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu \right\} + I_{quad}(\mu^2) \kappa^2 \left\{ \eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu \right\} \\
& + \frac{1}{2} \mu^2 \kappa^2 I_{log}(\mu^2) \left\{ \eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu \right\} \\
& + \frac{\kappa^2}{12} I_{log}(\mu^2) \left\{ \eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu \right\} p^2 \left(5 - \frac{1(1-\lambda)}{2\lambda} \right).
\end{aligned} \tag{5.43}$$

onde, em (5.43) suprimimos os termos finitos, uma vez que para este resultado eles não são relevantes e desprezamos também os termos de superfície, uma vez que tais termos violam a simetria com relação a transversalidade. Fizemos uma troca de índices do tipo $\gamma \rightarrow \mu$ e $\beta \rightarrow \nu$ e também $g^{\mu\nu} \rightarrow \eta^{\mu\nu}$ neste mesmo termo.

A partir do resultado obtido na expressão (5.43) podemos notar que no limite $\mu \rightarrow 0$, o campo gravitacional não gera contribuições divergentes para o termo de Maxwell. Outro ponto importante da expressão (5.43) decorre do fato da contribuição de um termo do tipo $F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu}$ presente na lagrangeana efetiva do modelo depender de um *gauge* arbitrário, o que faz com que uma contribuição deste tipo não tenha um significado físico relevante. Outra característica deste resultado decorre do fato de que os cálculos foram feitos num esquema independente de regularização.

6 Conclusões

Neste trabalho estudamos o acoplamento da eletrodinâmica escalar com a ação de Einstein-Hilbert. Neste cálculo, a contribuição da constante cosmológica foi omitida. Particularmente calculamos contribuições gravitacionais para o tensor de polarização do campo eletromagnético até ordem de 1 *loop*. A seguir, resumimos algumas conclusões extraídas do resultado obtido no capítulo 5 deste trabalho.

Primeiramente, o cálculo direto do tensor de polarização mostra que o campo gravitacional não introduz uma contribuição divergente ao termo de Maxwell, e portanto, não altera o comportamento assintótico da eletrodinâmica escalar¹. Esse resultado foi obtido através do cálculo explícito da ação efetiva pelo método de Vilkovisky-De Witt em [6]. Em nosso cálculo, utilizamos os métodos gráficos convencionais da teoria de campos, e o resultado segue diretamente do limite $\mu \rightarrow 0$.

Um segundo aspecto interessante obtido em nosso trabalho consiste na dependência da contribuição efetiva $F_{\mu\nu}\square F^{\mu\nu}$ com a escolha de um *gauge* arbitrário. Uma contribuição deste tipo poderia introduzir uma modificação na parte quadrática da ação do campo eletromagnético, alterando assim as equações de movimento. Realmente, o termo é invariante de *gauge* e portanto deve constar na lagrangeana efetiva que descreve a teoria. Contudo, a dependência de um *gauge* arbitrário garante que tal contribuição não possui significado físico, sendo nula quando atribuímos a este *gauge* o valor de

$$\lambda = \frac{1}{11} \tag{6.1}$$

na expressão (5.43).

Um outro ponto que distingue o cálculo apresentado nesta dissertação daqueles desenvolvidos nos trabalhos [1, 2, 3, 4] é que as conclusões acima foram obtidas sem o uso de um esquema de regularização específico. De fato, as prescrições da Regularização Implícita foram utilizadas para separar a parte divergente e isolar os termos de superfícies

¹De fato as identidades de Ward entre as constantes de renormalização garantem que tais contribuições divergentes são suficientes para calcular a função beta da constante de acoplamento entre a matéria e a constante de acoplamento [18].

[16, 17]. Como pode ser observado no capítulo 5, os termos de superfície também são os violadores da simetria de *gauge* da teoria efetiva que envolve o acoplamento do campo eletromagnético com o campo gravitacional.

Finalizando, é interessante notar que o resultado encontrado no limite $\mu \rightarrow 0$ sugere uma continuação interessante do trabalho. De fato, através do mecanismo de Higgs é possível substituir o parâmetro μ pela massa do campo de *gauge*. Assim, utilizando o propagador correspondente, pode-se avaliar a ocorrência de contribuições gravitacionais para o tensor de polarização da eletrodinâmica escalar quando a simetria de *gauge* é espontaneamente quebrada.

A Apêndice

Aqui será apresentado uma breve discussão sobre a Regularização Implícita (RI), esquema de regularização utilizado neste trabalho.

A.1 Regularização Implícita

A principal característica da (RI) consiste em isolar termos divergentes que não dependem do momento externo e que não precisam, a princípio, ser calculados explicitamente. Outra característica relevante da (RI) frente aos outros esquemas conhecidos, é a não modificação da dimensão do espaço-tempo e também o fato de nenhum parâmetro regulador explícito ser introduzido nas várias etapas de cálculos.

A (RI) é realizada fazendo uso da seguinte identidade:

$$\frac{1}{[(p_i \pm k)^2 - m^2]} = \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^j (p_i^2 \pm 2p_i \cdot k)^j}{(k^2 - m^2)^{j+1}} + \frac{(-1)^{N+1} (p_i^2 \pm 2p_i \cdot k)^{N+1}}{(k^2 - m^2)^{N+1} [(p_i \pm k)^2 - m^2]}, \quad (\text{A.1})$$

com a finalidade de descartar os momentos externos p_i e permanecer somente com as integrais divergentes além dos termos finitos. Em (A.1), o parâmetro N é tal que o último termo é finito sob integração em k . As integrais básicas divergentes até ordem de 1 *loop* são dadas pelas seguintes expressões:

$$I_{log}(m^2) = \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \quad (\text{A.2})$$

e

$$I_{quad}(m^2) = \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)}. \quad (\text{A.3})$$

Outro ponto importante consiste da relação de escala. Em (RI) temos:

$$I_{log}(m^2) = I_{log}(\mu^2) - b \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right), \quad (\text{A.4})$$

onde $b = \frac{i}{(4\pi)^2}$ sendo uma constante e μ o parâmetro que representa a escala do grupo de renormalização. O uso desta escala torna-se importante por exemplo, para uma teoria sem massa, uma vez que a implementação do limite $m \rightarrow 0$ só pode ser tomado após seu uso.

Outro ingrediente útil para identificar os termos que violam simetrias são as relações de consistência descritas como diferenças entre integrais divergentes. Será feito a demonstração de uma destas relações e as outras serão apenas listadas. Tomemos por exemplo, a derivada da expressão $\frac{k_\mu}{(k^2-m^2)^2}$ com relação à variável k_ν . Temos:

$$\frac{\partial}{\partial k_\nu} \frac{k_\mu}{(k^2-m^2)^2} = \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2-m^2)^2} - \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)^3}. \quad (\text{A.5})$$

Agora, realizando a integração em ambos os lados de (A.5) temos:

$$\int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\partial}{\partial k_\nu} \frac{k_\mu}{(k^2-m^2)^2} \right\} = g_{\mu\nu} \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2-m^2)^2} - 4 \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)^3}. \quad (\text{A.6})$$

O termo do lado esquerdo da igualdade de (A.6) é chamado termo de superfície e podemos denominá-lo de $\alpha_{\mu\nu}$. Agora, passando o segundo termo do lado direito da igualdade em (A.6) para o lado esquerdo, teremos a seguinte expressão:

$$\int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)^3} = \frac{1}{4} g_{\mu\nu} I_{\log}(m^2) - \alpha_{\mu\nu}, \quad (\text{A.7})$$

onde absorvemos a constante $\frac{1}{4}$ que aparece no termo de superfície $\alpha_{\mu\nu}$ nele mesmo, uma vez que trata-se apenas de uma constante. Além da relação mostrada em (A.7), outras identidades foram utilizadas neste trabalho. São elas:

$$\begin{aligned} \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)^2} &= \frac{1}{2} g_{\mu\nu} I_{quad}(m^2) - \gamma_{\mu\nu}, \\ \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2-m^2)^3} &= \frac{1}{8} \left[g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} \right] I_{quad}(m^2) - \gamma_{\mu\nu\alpha\beta}, \\ \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2-m^2)^4} &= \frac{1}{24} \left[g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} \right] I_{\log}(m^2) - \alpha_{\mu\nu\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Geralmente, os termos de superfícies que aparecem nos cálculos são desprezados, uma vez que eles são os possíveis violadores de simetria com relação à transversalidade. Outros resultados importantes serão listados na próxima seção.

A.2 Algumas integrais utilizadas no trabalho

Abaixo, serão listados os resultados das integrais que aparecem no trabalho. Lembrando que todas foram calculadas com base na expressão (A.1).

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - m^2]} &= I_{log}(m^2) + F, \\
\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - m^2]} &= \frac{1}{2} p^\mu I_{log}(m^2) + F + S, \\
\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - m^2]} &= \frac{\eta^{\mu\nu}}{2} I_{quad}(m^2) - \frac{\eta^{\mu\nu}}{24} (p_\beta p^\beta) I_{log}(m^2) + \frac{p^\mu p^\nu}{3} I_{log}(m^2) \\
&\quad + F + S, \\
\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\theta k^\theta}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - m^2]} &= I_{quad}(m^2) + m^2 I_{log}(m^2) + F + S, \\
\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k^\nu k^\lambda}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - m^2]} &= -\frac{\eta^{\mu\nu}}{12} p^\lambda I_{log}(m^2) - \frac{\eta^{\mu\lambda}}{12} p^\nu I_{log}(m^2) - \frac{\eta^{\nu\lambda}}{12} p^\mu I_{log}(m^2) \\
&\quad + F + S,
\end{aligned} \tag{A.9}$$

onde os termos F e S representam as partes finitas e os termos de superfície das expressões em (A.9). Tais termos estão escritos de maneira explícita ao longo do trabalho.

Referências Bibliográficas

- [1] Robinson, S. and Wilczek, F. Gravitational correction to running of gauge couplings. *Physical review letters* **96**(23), 231601 (2006).
- [2] Pietrykowski, A. Gauge dependence of gravitational correction to running of gauge couplings. *Physical review letters* **98**(6), 61801 (2007).
- [3] Toms, D. J. Quantum gravity and charge renormalization. *Phys. Rev. D* **76**(4), 045015, Aug (2007).
- [4] Ebert, D., Plefka, J., and Rodigast, A. Absence of gravitational contributions to the running yang-mills coupling. *Physics Letters B* **660**(5), 579 – 582 (2008).
- [5] Deser, S. and Van Nieuwenhuizen, P. One-loop divergences of quantized Einstein-Maxwell fields. *Physical Review D* **10**(2), 401–410 (1974).
- [6] t Hooft, G. and Veltman, M. One-loop divergencies in the theory of gravitation. In *Annales de L’Institut Henri Poincare Section Physique Theorique*, volume 20, 69–94, (1974).
- [7] Polchinski, J. *String Theory. Vol.1: An introduction to the bosonic string*. Cambridge, UK: Univ. Pr., (1998).
- [8] C.Rovelli. *Quantum Gravity*. Cambridge, UK: Univ. Pr., (2004).
- [9] Donoghue, J. F. Introduction to the Effective Field Theory: Description of Gravity. *arXiv:gr-qc/9512024v1* (1995).
- [10] Akhundov, A. and Shiekh, A. A Review of Leading Quantum Gravitational Corrections to Newtonian Gravity. *arXiv:gr-qc/0611091v2* (2008).
- [11] Weinberg, S. Effective Field Theory, Past and Future. *Phys. Rev* **128**, 862 (1962).
- [12] Hartmann, S. Effective field theories, reductionism and scientific explanation. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **32**(2), 267–304 (2001).

- [13] Donoghue, J. General relativity as an effective field theory: The leading quantum corrections. *Physical Review D* **50**(6), 3874–3888 (1994).
- [14] Klevansky, S. P. The nambu—jona-lasinio model of quantum chromodynamics. *Rev. Mod. Phys.* **64**(3), 649–708, Jul (1992).
- [15] 't Hooft, G. and Veltman, M. J. G. Regularization and Renormalization of Gauge Fields. *Nucl. Phys.* **B44**, 189–213 (1972).
- [16] Sampaio, M., Scarpelli, A., Ottoni, J., and Nemes, M. Implicit regularization and renormalization of QCD. *International Journal of Theoretical Physics* **45**(2), 436–457 (2006).
- [17] Pontes, C., Baêta Scarpelli, A., Sampaio, M., and Nemes, M. Implicit regularization beyond one-loop order: scalar field theories. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **34**, 2215–2234 (2007).
- [18] Ryder, L. H. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, (2006).
- [19] Delamotte, B. A hint of renormalization. *American Journal of Physics* **72**, 170 (2004).
- [20] Bjerrum-Bohr, N. E. J. Leading quantum gravitational corrections to scalar qed. *Phys. Rev. D* **66**(8), 084023, Oct (2002).
- [21] Bjerrum-Bohr, N. *Quantum gravity, effective fields and string theory*. PhD thesis, University of Copenhagen - The Niels Bohr Institute, Copenhagen, (2004).
- [22] Bjerrum-Bohr, N. Quantum gravity as an Effective Field Theory. Master's thesis, University of Copenhagen - The Niels Bohr Institute, Copenhagen, (2001).