

**Interação da Luz com Meios Contínuos:
Abordagens Clássica e Quântica**

Pablo Lima Saldanha

Abril de 2010

Interação da Luz com Meios Contínuos: Abordagens Clássica e Quântica

Pablo Lima Saldanha

Orientador: Prof. Dr. Carlos Henrique Monken

Tese apresentada à
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS,
como requisito parcial para a obtenção do grau de
DOUTOR EM FÍSICA.

Abril de 2010

“A loucura faz parte do talento.”

Para-choque de um caminhão

Agradecimentos

Agradeço a todos aqueles que contribuíram, de forma direta ou indireta, com a realização do trabalho contido nesta tese. Agradeço aos meus familiares e amigos. Ao meu orientador, professores, funcionários e estudantes do Departamento de Física da UFMG. Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Conteúdo

RESUMO	v
ABSTRACT	vi
1 Introdução	1
2 O debate Abraham-Minkowski	8
2.1 Energia e momento de ondas eletromagnéticas no vácuo	8
2.2 O debate Abraham-Minkowski	12
2.2.1 A aparente controvérsia Abraham-Minkowski	12
2.2.2 Experimentos	15
2.2.3 A solução eventual do debate	19
3 Energia de ondas eletromagnéticas em meios lineares	22
3.1 Densidade de energia material de ondas eletromagnéticas em meios lineares	23
3.2 Hamiltoniano de um sistema composto por cargas elétricas e o campo eletromagnético	26
3.3 Modelo clássico para a densidade de energia material em um meio linear dielétrico	29
3.4 Modelo quântico para a densidade de energia material em um meio linear dielétrico	31
3.5 Modelo quântico para a densidade de energia material em um meio linear magnético	34
3.6 Modelo clássico para o fluxo de energia material e “momento escondido”	37
3.7 Conclusões	40

4	Momento de ondas eletromagnéticas em meios lineares	41
4.1	Momento material de ondas eletromagnéticas em meios lineares . . .	42
4.2	Reflexão e transmissão de um pulso eletromagnético pela interface entre dois meios lineares	45
4.3	Pressão de radiação em espelhos submersos em meios lineares	48
4.4	Transferência de momento para uma película anti-refletora	50
4.5	Compatibilidade com a teoria da relatividade especial	52
4.6	Conclusões	54
5	A função de onda do fóton e sua interação com a matéria	55
5.1	Equação de onda para fótons no vácuo	56
5.2	Interação de fótons com meios materiais	62
5.3	Segunda quantização da função de onda do fóton em um meio linear não-dispersivo	66
5.4	Espalhamento de fótons	70
5.5	Exemplo de aplicação do formalismo: tratamento da conversão pa- ramétrica descendente	73
5.6	Conclusões	78
6	Conclusões	80

Lista de Figuras

2.1	Demonstração de que energia U movendo-se à velocidade da luz c deve transportar momento $P = U/c$	12
2.2	Montagem experimental de Jones e Richards, retirada da referência [13]	16
2.3	Montagem experimental de Ashkin e Dziedzic, retirada da referência [16].	16
2.4	Montagem experimental de Walker, Lahoz e Walker, retirada da referência [18].	17
2.5	Esboço do experimento de Campbell e colaboradores, retirado da referência [21].	19
3.1	Sistema de coordenadas cilíndricas (z, s, ϕ)	34
3.2	Objeto com momento magnético $Iab\hat{y}$ sob a ação de um campo elétrico \mathbf{E} possui momento e fluxo de energia associados.	37
3.3	Um circuito de corrente de formato arbitrário pode ser decomposto em circuitos retangulares no limite em que a área dos retângulos tende a zero.	38
4.1	(a) Um pulso eletromagnético com momento total \mathbf{P}_i se propaga no meio 1, com susceptibilidades elétrica e magnética χ_{e1} and χ_{m1} , em direção a um meio 2, com susceptibilidades χ_{e2} and χ_{m2} . (b) Os pulsos refletido e transmitido resultantes, com momentos totais \mathbf{P}_r e \mathbf{P}_t	45

- 4.2 (a) Um pulso eletromagnético com momento total \mathbf{P}_i se propaga no meio 1, com susceptibilidades elétrica e magnética χ_{e1} e χ_{m1} , em direção ao meio 2, com susceptibilidades elétrica e magnética χ_{e2} e χ_{m2} . Há uma película anti-refletora entre esses meios que consiste em um material com susceptibilidades elétrica e magnética χ'_e e χ'_m tais que $(1 + \chi'_e) = \sqrt{(1 + \chi_{e1})(1 + \chi_{e2})}$ e $(1 + \chi'_m) = \sqrt{(1 + \chi_{m1})(1 + \chi_{m2})}$. A espessura da película é $\lambda'/4$, λ' sendo o comprimento de onda da frequência central do pulso neste meio. Apesar da ilustração, é assumindo que o pulso é muito mais comprido que a espessura da película. (b) O pulso foi completamente transmitido para o meio 2 e tem momento total \mathbf{P}_2 51
- 4.3 (a) Um fóton se propaga em direção a um bloco de massa M , comprimento L , susceptibilidades elétrica e magnética χ_{e2} e χ_{m2} e películas anti-refletoras em ambos os lados. (b) Ao penetrar no bloco, o fóton diminui sua velocidade de propagação e o bloco passa a se movimentar. (c) Com a saída do fóton do bloco, este volta a ter velocidade nula, tendo se deslocado uma distância Δz 53

Resumo

Nesta tese estudamos alguns aspectos fundamentais relacionados à interação da radiação eletromagnética com meios contínuos. Na primeira parte da tese, propomos uma divisão da densidade de energia, da densidade de momento e do fluxo de energia de ondas eletromagnéticas clássicas em meios lineares não-absorvedores em partes material e eletromagnética. A parte eletromagnética que propomos para essas grandezas tem a mesma forma independentemente do meio quando escrita em termos dos campos elétrico e magnético médios da onda, sem uma dependência explícita com as propriedades do meio. A parte material é calculada diretamente em modelos adotados para os meios materiais e a consistência da divisão é verificada em uma série de exemplos. Acreditamos que as formas que propomos para essas grandezas, embora façam as mesmas previsões experimentais que outras propostas, são as mais naturais e intuitivas, se encaixando de maneira elegante nos conceitos fundamentais do eletromagnetismo clássico.

Na segunda parte da tese, apresentamos uma extensão do formalismo de Bialynicki-Birula e Sipe para funções de onda de fótons que inclui a interação com meios contínuos, o que resulta em uma maneira alternativa para se descrever quanticamente as interações entre a luz e a matéria. Como exemplo de aplicação do formalismo, o estado dos fótons gêmeos gerados pelo processo de conversão paramétrica descendente é obtido em concordância com trabalhos anteriores, mas com uma interpretação mais intuitiva.

Abstract

In this thesis we study some fundamental aspects related to the interaction of electromagnetic radiation with continuous media. In the first part of the thesis, we propose a division of the energy density, of the momentum density and of the energy flux of classical electromagnetic waves in linear non-absorptive media into electromagnetic and material parts. The electromagnetic part has the same form independently of the medium when written as a function of the averaged electric and magnetic fields, without an explicit dependence with the properties of the medium. The material part is calculated directly from models adopted for the material media and the consistency of the division is verified through a series of examples. We believe that the forms that we propose for these physical quantities, although make the same experimental predictions than other proposals, are the most natural and intuitive forms, elegantly inserted in the fundamental concepts of classical electromagnetism.

In the second part of the thesis, we present an extension of the photon wave function formalism introduced by Bialynicki-Birula and Sipe that includes the interaction with continuous media, which results in an alternative way for describing the quantum interaction between light and matter. As an example of application of the formalism, we calculate the quantum state of the twin photons generated by parametric down-conversion in agreement with previous treatments, but with a more intuitive interpretation.

Capítulo 1

Introdução

Esta tese tem como objetivo o estudo de algumas propriedades fundamentais da interação de ondas eletromagnéticas com meios materiais. A compreensão cada vez mais profunda deste tema permitiu o alcance de grandes evoluções tecnológicas ao longo do último século, como a transmissão de dados via atmosfera através de ondas de rádio, a construção de microscópios e telescópios cada vez mais eficientes, o advento do laser, do forno de microondas, da holografia, de radares, de aparelhos de raios X, de aparelhos de ressonância magnética, de fibras ópticas para transmissão de dados, do armazenamento de dados em CDs e DVDs, de lâmpadas fluorescentes, de LEDs, de telas fluorescentes, de telas de cristal líquido, de telas de plasma, de sensores ópticos diversos, de câmeras CCD, de protetores solares para a pele, de células que convertem energia solar em energia elétrica, dentre muitos outros.

Contudo, os trabalhos contidos nesta tese não visam nenhum tipo de avanço tecnológico em particular, apenas uma compreensão mais profunda de alguns aspectos fundamentais relacionados à interação de ondas eletromagnéticas com meios materiais. Na primeira parte da tese, que compreende os capítulos 2, 3 e 4, estudaremos o comportamento da energia e do momento de ondas eletromagnéticas clássicas em meios lineares, que são aqueles em que as respostas do meio aos campos aplicados são diretamente proporcionais aos valores dos campos. Na segunda parte, que compreende o capítulo 5, apresentaremos uma formulação alternativa para a interação quântica da luz com meios materiais baseada no conceito de função de onda de fótons.

Cargas elétricas em movimento alteram os campos elétrico e magnético ao

seu redor, o que faz com que surjam ondas eletromagnéticas no espaço. Quando as cargas se movimentam de maneira aproximadamente periódica, ondas de frequência e comprimento de onda aproximadamente bem definidos são emitidas na forma de radiação eletromagnética. Essa radiação, quando no espaço vazio, possui campos elétrico e magnético ortogonais entre si. Como a variação do campo elétrico gera um campo magnético e a variação do campo magnético gera um campo elétrico, os campos oscilantes se alimentam mutuamente, fazendo com que a onda possa se propagar por grandes distâncias transportando energia, momento linear e momento angular.

Quando uma onda eletromagnética penetra em um meio material transparente, como um pedaço de vidro, por exemplo, seus campos elétrico e magnético interagem com as cargas elétricas do meio, o que faz com que tanto a dinâmica da propagação da onda quanto o estado das cargas que compõem o meio se alterem. As cargas em um meio como esse se distribuem em átomos e, se estes átomos não se modificam muito com a presença da onda eletromagnética, cada átomo interage com a onda de maneira aproximadamente independente dos demais. Nesta tese trataremos a interação de ondas eletromagnéticas com meios materiais no limite em que as separações entre os átomos que compõem os meios sejam muito menores que o comprimento de onda da radiação. Dessa forma, podemos considerar a resposta do meio devido à presença da onda como uma resposta contínua, desprezando o caráter discreto dos componentes do material. Isso significa que, ao invés de considerarmos que o campo induz uma corrente elétrica em cada átomo separadamente, consideraremos uma densidade de corrente elétrica média \mathbf{J} em um volume que contém muitos átomos, mas que tem dimensões muito menores que o comprimento de onda da radiação incidente. Se essa condição for satisfeita, o caráter discreto das correntes induzidas leva ao mesmo comportamento para a onda eletromagnética que nossa consideração de uma corrente contínua. Como esse último caso é muito mais fácil de se tratar, essa consideração será feita ao longo da tese, que é suposição de *meios contínuos*. Da mesma maneira, os campos elétrico e magnético ao longo do material têm grandes variações em dimensões atômicas devido aos campos gerados pelas cargas do meio. Mais uma vez, consideraremos campos elétrico \mathbf{E} e magnético \mathbf{B} médios, que são os campos médios em volumes que contém um grande número de átomos, mas com dimensões muito menores que o comprimento de onda da ra-

dição. Vale dizer que, embora a motivação para os trabalhos compreendidos por esta tese seja o estudo do comportamento de ondas eletromagnéticas com comprimentos de onda próximos aos da luz visível, os tratamentos a serem apresentados também são válidos para quaisquer comprimentos de onda maiores que o da luz, já que a consideração de meios contínuos também poderá ser feita nesses casos.

A descrição de ondas eletromagnéticas dos parágrafos anteriores, embora possa reproduzir corretamente uma grande variedade de fenômenos, entra em contradição com diversos experimentos realizados desde o princípio do século passado. A descrição utilizada até aqui se baseia na teoria da *eletrodinâmica clássica* [1, 2], que não é a teoria mais fundamental da qual dispomos para tratar os fenômenos eletromagnéticos. Para se explicar uma grande variedade de fenômenos, especialmente aqueles que ocorrem com uma intensidade muito pequena de radiação, devemos nos valer da teoria denominada *eletrodinâmica quântica* [3, 4]. E essa teoria entra em conflito com várias das premissas adotadas nos parágrafos anteriores. Essa teoria simplesmente proíbe que exista um estado para o campo eletromagnético com campos elétrico e magnético bem definidos no espaço, de forma que não podemos atribuir uma realidade objetiva a estes campos. Outro comportamento inusitado da teoria é que, mesmo quando temos o conhecimento máximo do estado do campo eletromagnético, as previsões experimentais têm caráter probabilístico. Ela também nos diz que uma onda eletromagnética de frequência angular ω não pode conter qualquer quantidade de energia, apenas múltiplos de uma quantidade fundamental $\hbar\omega$, em que \hbar é a constante de Planck dividida por 2π . Além disso, a teoria prevê que para certos estados do campo eletromagnético, quando há a presença de uma propriedade denominada emaranhamento, o estado do campo eletromagnético em uma determinada região do espaço pode estar correlacionado com o estado do campo em outra região do espaço de uma maneira que não permite uma descrição baseada apenas em correlações clássicas, atribuindo uma realidade ao campo em uma região independente do estado do campo na outra região, mesmo quando as regiões em questão estão arbitrariamente longe uma da outra¹. Mas apesar de ser altamente não-intuitiva e estranha, quando confrontada com os experimentos a teoria quântica prevalece.

¹Mas é importante ressaltar que essas estranhas correlações não violam a teoria da relatividade especial, pois elas não permitem a transmissão de informação a uma velocidade maior que a da luz.

Isso significa que temos de abrir mão de nossa descrição clássica de ondas eletromagnéticas, que atribui uma realidade objetiva aos campos elétrico e magnético, se quisermos estar totalmente de acordo com os experimentos, passando para uma descrição bem mais abstrata que é a da eletrodinâmica quântica. Contudo, quando a energia total da onda eletromagnética que queremos estudar é muito grande quando comparada com a quantidade fundamental $\hbar\omega$, normalmente podemos desprezar o caráter discreto da energia, bem como as incertezas intrínsecas que os campos elétrico e magnético devem ter em suas propriedades, já que as incertezas experimentais normalmente se sobrepõem às incertezas fundamentais, e descrever o campo de maneira totalmente clássica². Os casos tratados nos capítulos 2, 3 e 4 desta tese estão neste limite, portanto utilizaremos a teoria clássica do eletromagnetismo para descrever as ondas eletromagnéticas nesses capítulos.

Ondas eletromagnéticas clássicas que se propagam no espaço livre possuem densidade de energia, densidade de momento e fluxo de energia associados [1, 2]. Essas grandezas são funções de seus campos elétrico e magnético e não há controvérsia quanto à forma dessas expressões. Mas, e quando a onda se propaga em um meio transparente, quais se tornam as expressões para essas grandezas? A interação com o meio material complica o problema e possibilita a utilização de diversas abordagens diferentes. Esse tema é objeto de um debate que já dura mais de um século [7] e que até hoje causa polêmica. Várias formas para essas expressões foram propostas no século passado, as mais conhecidas sendo as formulações de Minkowski [8, 9, 10] e Abraham [11, 12, 10]. As diversas formulações muitas vezes parecem prever comportamentos distintos para situações experimentais, e diversos experimentos no tema foram realizados nos últimos 60 anos [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22]. Contudo, embora vários desses experimentos tenham sido utilizados como argumentos para se favorecer uma ou outra formulação, no fim dos anos 1960 foi demonstrado que diversas formulações existentes, dentre elas as de Minkowski e Abraham, são na realidade equivalentes quando as propriedades do meio material são consideradas de forma cuidadosa, levando às mesmas previsões experimentais [23, 7]. As diferentes formulações são, na verdade, o resultado de diferentes divisões do tensor energia mo-

²Contudo, é válido ressaltar que é possível se construir estados que possuem correlações quânticas com feixes intensos de radiação eletromagnética, sendo necessária uma descrição quântica para experimentos realizados com esses campos [5, 6]. Mas esses casos não serão tratados nesta tese.

mento total do sistema, que é um objeto matemático que possui termos associados a densidades e fluxos de energia e momento, em partes material e eletromagnética. Uma discussão deste debate e de sua conclusão eventual será apresentada no capítulo 2 desta tese.

Embora haja várias maneiras equivalentes de se dividir a densidade de energia, a densidade de momento e o fluxo de energia de uma onda eletromagnética em um meio material em partes eletromagnética e material, acreditamos que uma delas é mais natural, se encaixando de forma mais elegante nos conceitos fundamentais do eletromagnetismo clássico. Nos capítulos 3 e 4 desta tese defendemos essa particular divisão, em que as partes eletromagnéticas dessas grandezas possuem a mesma forma independentemente do meio quando escritas como funções dos campos médios \mathbf{E} e \mathbf{B} . No capítulo 3, diferentes modelos para meios lineares dielétricos (com resposta ao campo elétrico) e magnéticos (com resposta ao campo magnético) serão apresentados, em que a densidade de energia material pode ser calculada como a soma das densidades de energia cinética e potencial das cargas do meio. Também apresentaremos um modelo que mostra que um dipolo magnético sob a ação de um campo elétrico possui fluxo de energia associado, justificando a existência de um fluxo de energia material. No capítulo 4, calcularemos o momento transferido para meios lineares diretamente através da força de Lorentz exercida pelos campos eletromagnéticos sobre as cargas dos meios em diversas circunstâncias. Em todos os exemplos tratados, obtemos conservação de energia e de momento utilizando as formas supostas para as partes eletromagnéticas da densidade de energia, da densidade de momento e do fluxo de energia. Portanto, os diversos modelos utilizados dão suporte à divisão da densidade de energia, da densidade de momento e do fluxo de energia totais de uma onda eletromagnética em um meio linear em partes material e eletromagnética conforme o proposto nesta tese.

No capítulo 5, passaremos a uma descrição da interação da radiação eletromagnética com meios contínuos no nível quântico, utilizando o conceito de função de onda de fótons [24, 25, 26, 27, 28, 29]. Esse é um conceito controverso, uma vez que Newton e Wigner mostraram que não é possível se construir um operador posição para um fóton [30]. Portanto uma função de onda de um fóton não pode ter todas as características que uma função de onda de Schrödinger de uma partícula massiva possui. Esse fato levou muitos autores à opinião extrema de negar a possibilidade

de se considerar funções de onda para fótons. Contudo, nos experimentos de óptica quântica realizados hoje em dia, é muito comum se utilizar um número pequeno de fótons, que são gerados e detectados em posições relativamente bem definidas do espaço. E, embora o operador posição não exista para um fóton, é possível se associar uma localização ao fóton em dimensões maiores que seu comprimento de onda [31]. Portanto um formalismo que permita tratar poucos fótons em experimentos desse tipo, com um conceito de localização menos rigoroso, certamente é muito útil. E a localização de partículas massivas relativísticas também perde uma interpretação simples e direta quando essas se propagam em velocidades próximas à da luz. Nesse sentido, fótons não são tão diferentes assim de partículas massivas, a questão é que eles são sempre relativísticos.

Bialynicki-Birula [24, 25] e, independentemente, Sipe [26], introduziram a forma para a função de onda de fótons que utilizaremos nesta tese. Essa formulação permite a descrição completa do estado quântico de um fóton como função das grandezas espaciais e temporal, podendo ser obtida de maneira análoga ao método utilizado por Dirac para encontrar a equação de onda de um elétron relativístico. A equação de onda para um fóton livre obtida por eles é equivalente às equações de Maxwell no vácuo. No capítulo 5, com argumentos baseados em conservação de energia, incluiremos um termo a mais na equação de onda proposta por Bialynicki-Birula e Sipe que é resultado da interação do fóton com meios contínuos, chegando a uma equação de onda equivalente às equações de Maxwell na matéria. Aplicando o processo de segunda quantização à equação de onda por nós proposta, obtemos uma forma alternativa de se tratar quanticamente a interação da luz com a matéria. Como exemplo de aplicação do formalismo, calculamos o estado dos fótons gêmeos gerados pelo processo de conversão paramétrica descendente, com resultados equivalentes a tratamentos anteriores, mas com uma interpretação mais intuitiva.

A divisão proposta nos capítulos 3 e 4 para a densidade de energia, fluxo de energia e densidade de momento de uma onda eletromagnética clássica em um meio material é utilizada para dar suporte à maneira como tratamos a interação da função de onda de um fóton com meios materiais. A densidade de energia, o fluxo de energia e a densidade de momento associados à função de onda do fóton em meios materiais proposta nesta tese podem ser decompostas em partes material e eletromagnética da mesma maneira. Contudo, a leitura desses capítulos não é

essencial para a compreensão do capítulo 5. Portanto o leitor interessado apenas na interação de fótons com meios contínuos pode saltar diretamente para o capítulo 5.

Capítulo 2

Energia e momento de ondas eletromagnéticas em meios materiais: O debate Abraham-Minkowski

2.1 Energia e momento de ondas eletromagnéticas no vácuo

O eletromagnetismo clássico é a teoria que descreve como cargas elétricas e os campos elétrico e magnético interagem entre si. As leis que governam o comportamento dessas entidades podem ser resumidas num conjunto de 5 equações [1, 2]:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} , \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} , \quad (2.4)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{E}\rho + \mathbf{J} \times \mathbf{B} . \quad (2.5)$$

Nas equações acima, \mathbf{E} e \mathbf{B} representam os campos elétrico e magnético, respectivamente, ε_0 e μ_0 a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do vácuo, respectivamente, ρ e \mathbf{J} as densidades de carga e corrente elétrica, respectivamente,

e \mathbf{f} a densidade de força que atua nessas cargas e correntes. As quatro primeiras equações são denominadas equações de Maxwell e descrevem como campos elétricos e magnéticos são gerados por cargas e correntes elétricas, bem como por variações temporais de campos elétricos e magnéticos. A quinta equação é a equação de força de Lorentz e descreve como campos elétricos e magnéticos realizam força sobre cargas e correntes elétricas.

As equações de Maxwell prevêm a existência de ondas eletromagnéticas que se propagam no vácuo. De acordo com as equações (2.3) e (2.4), um campo elétrico oscilante gera um campo magnético e um campo magnético oscilante gera um campo elétrico. Essa combinação faz com que a onda se propague, com um campo gerando o outro. Se tomarmos o rotacional das equações (2.3) e (2.4), utilizarmos a identidade vetorial

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (2.6)$$

e as equações (2.1) e (2.2) com $\rho = 0$ e $\mathbf{J} = 0$, chegamos às seguintes equações para os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} :

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (2.7)$$

As equações acima para os campos elétrico e magnético no vácuo são equações de ondas que se propagam com velocidade $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$. A igualdade desse valor para a velocidade de propagação de uma onda eletromagnética com o valor medido para a velocidade da luz fez Maxwell supor que a luz consistia em ondas eletromagnéticas, suposição que se mostrou verdadeira em todos os experimentos realizados desde então. Ondas eletromagnéticas no vácuo têm os campos elétrico e magnético perpendiculares entre si e à direção de propagação das frentes de onda em cada ponto do espaço. O módulo do campo magnético vale $|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|/c$ e a direção de propagação das frentes de onda é a mesma do vetor $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

A partir das equações (2.1-2.5) podemos deduzir uma equação que governe a conservação de energia em um sistema de cargas e campos eletromagnéticos respeitando o princípio de localidade [1, 32]. Consideraremos aqui que todas as cargas estão localizadas no interior de um volume \mathcal{V} . De acordo com a força de Lorentz (2.5), o trabalho realizado pelos campos eletromagnéticos sobre uma carga q que se movimenta com velocidade \mathbf{v} em um intervalo de tempo dt é

$$dW = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt. \quad (2.8)$$

Tomando o limite de meios contínuos, temos $q = \rho d^3r$ e $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$. Como o trabalho realizado representa a variação da energia mecânica U_{mec} das cargas, podemos escrever

$$\frac{\partial}{\partial t} U_{\text{mec}} = \int_{\mathcal{V}} d^3r \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}. \quad (2.9)$$

Tomando o produto escalar da equação (2.4) com \mathbf{E} temos

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.10)$$

Utilizando a identidade vetorial

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (2.11)$$

e a equação (2.3), podemos escrever

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.12)$$

Como

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (E^2) \quad \text{e} \quad \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (B^2), \quad (2.13)$$

podemos escrever a equação (2.9) como

$$\frac{\partial}{\partial t} U_{\text{mec}} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{\mathcal{V}} d^3r u_{\text{e.m.}} \right] = - \int_{\mathcal{V}} d^3r (\nabla \cdot \mathbf{S}_{\text{e.m.}}) = - \int_{\mathcal{S}} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{S}_{\text{e.m.}}, \quad (2.14)$$

em que \mathcal{S} representa a superfície do volume \mathcal{V} , a densidade de energia eletromagnética $u_{\text{e.m.}}$ foi definida como

$$u_{\text{e.m.}} \equiv \frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \quad (2.15)$$

e foi definido o vetor de Poynting

$$\mathbf{S}_{\text{e.m.}} \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad (2.16)$$

que representa o fluxo de energia eletromagnética no vácuo. Com essas definições, vemos que a conservação de energia ocorre de maneira local, uma vez que para haver mudança na energia interior ao volume \mathcal{V} , que possui uma parte material U_{mec} e uma parte eletromagnética que corresponde à integral de $u_{\text{e.m.}}$ no volume, deve necessariamente haver um fluxo de energia através de sua superfície.

Vale dizer que as definições utilizadas para a densidade de energia e para o fluxo de energia nas equações (2.15) e (2.16) não são as únicas possíveis [32]. Contudo, essas formas são certamente as mais simples, tendo sido utilizadas com sucesso pela comunidade científica como as expressões corretas para a densidade e para o fluxo de energia eletromagnética no vácuo. E há alguns argumentos a seu favor. Um ponto favorável é que a densidade de energia (2.15) concorda com a obtida em eletrostática e magnetostática. Outro ponto é que para uma onda plana que se propaga na direção $\hat{\mathbf{z}}$ no vácuo, o fluxo de energia em um plano z constante é o produto da densidade de energia $u_{\text{e.m.}}$ pela velocidade da luz c , o que concorda com a visão intuitiva de que a onda carrega uma densidade de energia com velocidade c . Ao longo desta tese, faremos como todos e também adotaremos as formas das equações (2.15) e (2.16) como as formas corretas para a densidade de energia e para o fluxo de energia eletromagnéticos no vácuo.

Uma vez definida a forma (2.16) para o fluxo de energia eletromagnética no vácuo, de acordo com a teoria da relatividade especial a forma para a densidade de momento fica automaticamente definida, sendo o fluxo de energia dividido por c^2 , em que $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ é a velocidade da luz no vácuo. O argumento a seguir que demonstra essa relação foi retirado da referência [32]. Considere o ilustrado na figura 2.1. Temos uma caixa de massa M e comprimento L inicialmente parada e que pode deslizar sem atrito por uma superfície. Inicialmente temos uma concentração de energia U na extremidade esquerda, como representado na figura 2.1-(a). Esta energia é liberada na forma de uma onda eletromagnética, que se propaga na direção da extremidade oposta, como representado na figura 2.1-(b). Assumamos que esta onda propagante tenha momento \mathbf{P} , e que portanto transfira um momento $-\mathbf{P}$ para a caixa, que se move para a esquerda com velocidade P/M , em que $P \equiv |\mathbf{P}|$. Por fim, a energia é absorvida na extremidade direita da caixa e um momento \mathbf{P} é transferido para ela, cessando seu movimento, como representado na figura 2.1-(c). Considerando que o deslocamento z da caixa seja muito pequeno, de forma que o tempo que a onda demora para atravessar a caixa possa ser considerado L/c , a caixa tem um deslocamento total $z = L/c \times P/M$. Para que o centro de massa-energia não se desloque no processo, uma vez que não há agentes externos, devemos ter $Mc^2z = UL$. Combinando essas duas equações, concluímos que $P = U/c$ e a razão entre a densidade de momento e a densidade de energia deve ser

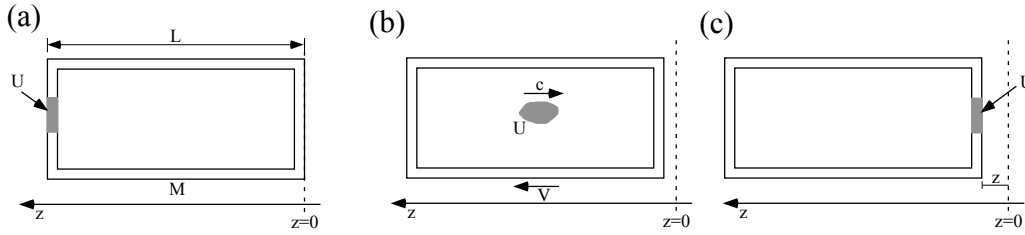


Figura 2.1: Demonstração de que energia U movendo-se à velocidade da luz c deve transportar momento $P = U/c$.

$1/c$. Como a razão entre o fluxo de energia e a densidade de energia de uma onda eletromagnética no vácuo também vale $1/c$, a razão entre a densidade de momento e o fluxo de energia deve valer $1/c^2$. Como é discutido na referência [32], essa relação deve ser válida para quaisquer fluxos de energia e densidades de momento, seja de ondas eletromagnéticas, partículas massivas ou qualquer outra entidade que transporte energia. Portanto, ao assumirmos a forma (2.16) para o fluxo de energia eletromagnética, a densidade de momento eletromagnético no vácuo fica estabelecida como

$$\mathbf{p}_{e.m.} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} . \tag{2.17}$$

2.2 O debate Abraham-Minkowski

2.2.1 A aparente controvérsia Abraham-Minkowski

Como foi discutido na seção anterior, ondas eletromagnéticas transportam energia e momento. As expressões para as densidades de energia $u_{e.m.}$ e de momento $\mathbf{p}_{e.m.}$ de uma onda eletromagnética no vácuo dadas pelas equações (2.15) e (2.17), embora possuam alguma ambiguidade em suas definições, são amplamente aceitas pela comunidade científica, não havendo controvérsia. Mas e quando uma onda eletromagnética entra em um meio transparente, como vidro ou água, quais se tornam as expressões para as densidades de energia e de momento da onda? Nessa situação, os campos elétrico e magnético da onda interagem com as cargas do meio, podendo transferir energia e momento para elas, ao mesmo tempo em que as cargas do meio

em movimento alteram os campos elétrico e magnético da onda. O problema se torna mais complexo, havendo diversos tipos de abordagens e conclusões.

Como foi dito anteriormente, uma aproximação que será utilizada ao longo da tese e que também está presente nos trabalhos citados a seguir é a consideração de meios contínuos. A matéria é composta de átomos e moléculas, que por sua vez são compostos de elétrons, nêutrons e prótons, esses dois últimos compostos de quarks. Mas os comprimentos de onda de ondas eletromagnéticas com frequências próximas às da luz visível são da ordem de centenas de nanômetros, muito maiores que a separação usual entre átomos ou moléculas, que é da ordem de décimos de nanômetros em líquidos ou sólidos e de nanômetros em gases à temperatura ambiente e pressão atmosférica. Portanto é uma aproximação razoável considerarmos o movimento global das cargas do meio associando grandezas contínuas ao material que representem as respostas médias do meio aos campos incidentes. Na seção 6.6 do livro de Jackson [2], é demonstrado como as equações macroscópicas do eletromagnetismo podem ser obtidas através de uma descrição microscópica para o problema tomando-se a média espacial das propriedades do meio e dos campos em dimensões muito maiores que a separação entre os átomos que compõem o meio¹. Numa formulação macroscópica para a propagação de ondas eletromagnéticas em meios materiais, os campos macroscópicos (ou médios) da onda correspondem a médias espaciais em volumes que contém um grande número de átomos, mas cujas dimensões são bem menores que o comprimento de onda da radiação. Esta abordagem será utilizada ao longo da tese.

Usualmente há quatro grandezas contínuas que são introduzidas para considerar tanto as respostas do meio aos campos elétrico e magnético quanto um comportamento global dos campos e das cargas do meio em um tratamento macroscópico. Essas grandezas são a polarização \mathbf{P} , a magnetização \mathbf{M} , o vetor deslocamento elétrico \mathbf{D} e o vetor \mathbf{H} , que são utilizadas conjuntamente com os campos elétrico \mathbf{E} e magnético \mathbf{B} médios [1, 2]. É possível se associar a polarização \mathbf{P} com a densidade de momentos de dipolo elétrico do meio e a magnetização \mathbf{M} com a densidade de momentos de dipolo magnético. Adotaremos esta interpretação ao longo da tese. Essas 4 grandezas são introduzidas para facilitar o tratamento de problemas que envolvem campos eletromagnéticos na matéria, pois elas permitem que consideremos apenas

¹O termo *macroscópico* empregado nesta tese não tem o mesmo sentido que o termo cotidiano. Nesta tese, um volume com dimensões da ordem de alguns nanômetros em um sólido pode ser considerado macroscópico, já que possuirá milhares de átomos em seu interior.

a influência de cargas e correntes elétricas livres no cálculo dos campos, já que o comportamento de cargas presas a átomos ou moléculas fica contido nessas grandezas. Em uma formulação do eletromagnetismo, normalmente são utilizadas apenas 4 das 6 grandezas contínuas citadas, pois temos $\mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ e $\mathbf{H} \equiv \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$.

Como foi dito anteriormente, há diversos tipos de abordagens possíveis para o tratamento do momento e da energia de ondas eletromagnéticas na matéria. Os tratamentos mais famosos para este problema são os de Minkowski [8, 9, 10] e Abraham [11, 12, 10], datados do início do século XX. Em meios não-dispersivos, ou seja, quando as dependências das respostas do meio com a frequência do campo eletromagnético incidente são desprezadas, ambos os tratamentos prevêm uma densidade de energia $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}/2 + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}/2$ para a onda e um fluxo de energia $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Porém, as previsões para as densidades de momento são distintas. A formulação de Abraham prevê $\mathbf{E} \times \mathbf{H}/c^2$ e a de Minkowski $\mathbf{D} \times \mathbf{B}$. Essas previsões são não apenas quantitativa mas também qualitativamente distintas. Em um meio dielétrico linear isotrópico não-magnético, temos uma polarização proporcional ao campo elétrico, $\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}$, uma magnetização nula, $\mathbf{M} = 0$, e um campo magnético com módulo $|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|n/c$, em que χ_e é a susceptibilidade elétrica do meio e $n = \sqrt{1 + \chi_e}$ é o índice de refração do meio. Note que a razão entre o módulo da densidade de momento e a densidade de energia vale $1/(nc)$ na formulação de Abraham e n/c na de Minkowski. Em termos do momento de um fóton num modo de onda plana, que no vácuo tem módulo $\hbar\omega/c$, em que ω é a frequência de oscilação dos campos multiplicada por 2π e \hbar é a constante de Planck dividida por 2π , a formulação de Abraham prevê que o momento diminui para $\hbar\omega/(nc)$ quando o fóton entra no meio, enquanto que a de Minkowski prevê que ele aumenta para $n\hbar\omega/c$ com a entrada do fóton no meio.

A diferença entre as previsões de Abraham e Minkowski para o momento de ondas eletromagnéticas na matéria gerou um debate de décadas de duração sobre qual seria a formulação correta. Ao longo desse tempo, resultados experimentais e considerações teóricas alimentaram o debate, ora aparentemente favorecendo uma formulação, ora a outra. Um argumento teórico a favor da formulação de Abraham é que nessa formulação a razão entre a densidade de momento e o fluxo de energia vale $1/c^2$, como o esperado pelos argumentos apresentados na seção anterior. A seguir descrevemos brevemente alguns dos experimentos relacionados ao tema realizados

ao longo dos últimos 60 anos.

2.2.2 Experimentos

A partir dos anos 1950, começaram a surgir experimentos envolvendo o momento de ondas eletromagnéticas em meios materiais. Muitos desses experimentos foram realizados com o intuito de se resolver a controvérsia Abraham-Minkowski. Os experimentos de Jones e colaboradores [13, 14, 15], realizados a partir de 1951, mediram diretamente a pressão de radiação de ondas eletromagnéticas em espelhos imersos em líquidos dielétricos. Os trabalhos posteriores ao primeiro correspondem a uma melhor precisão nos resultados. A montagem correspondente ao experimento da referência [13] está esquematizada na figura 2.2. Um líquido dielétrico preenche parcialmente um tubo até o nível indicado na figura. Uma fibra de torção sustenta um espelho fora do líquido e um espelho imerso no líquido que é iluminado de forma assimétrica, com feixes ao longo das linhas A e A' ou B e B' na figura. A fibra de torção gira até que o torque gerado pela fibra cancele o gerado pela pressão de radiação da luz. A leitura da posição angular da fibra é feita utilizando-se o espelho fora do líquido. Os experimentos mostram que a pressão de radiação é proporcional ao índice de refração do líquido, aparentemente favorecendo a formulação de Minkowski.

Um outro experimento interessante foi realizado por Ashkin e Dziedzic [16] em 1973 e está esquematizado na figura 2.3. Um laser é focalizado na interface entre ar e água. Um argumento utilizado por Burt e Peierls [33] é que se a formulação de Minkowski está correta e o momento da luz aumenta com a entrada no líquido, por conservação de momento uma força deve atuar em sua superfície levantando-a, como indicado em *A*. Se, por outro lado, a formulação de Abraham está correta e o momento da luz diminui ao entrar no líquido, uma força deve atuar na superfície abaixando-a, como indicado em *B*. As configurações *A* ou *B* para a superfície da água geram efeitos de lente diferentes no feixe, que podem ser analisados por um detector. Os experimentos confirmam que a superfície da água levanta, como indicado em *A*, aparentemente favorecendo a formulação de Minkowski. Na configuração *C* na figura, o feixe se propaga na direção contrária, saindo da água para o ar. Nesta situação, também mediu-se uma protuberância na superfície da água, aparentemente favorecendo a formulação de Minkowski.

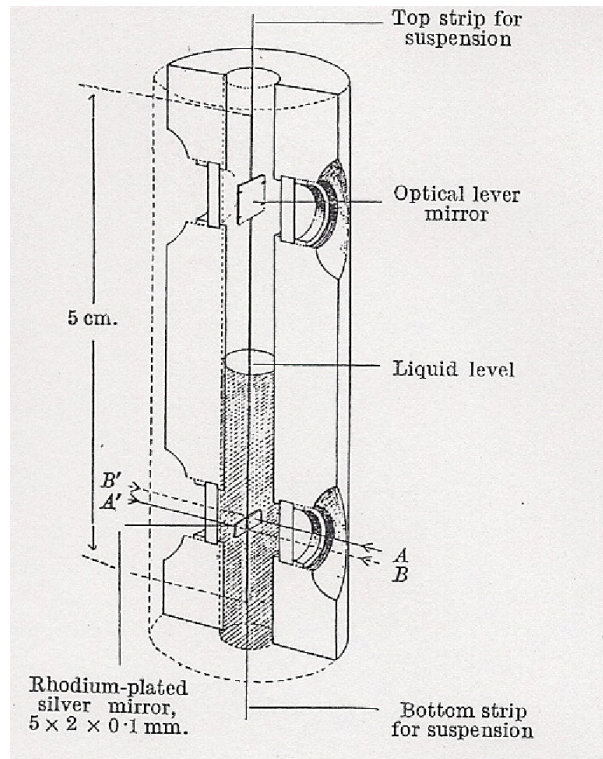


Figura 2.2: Montagem experimental de Jones, retirada da referência [13]

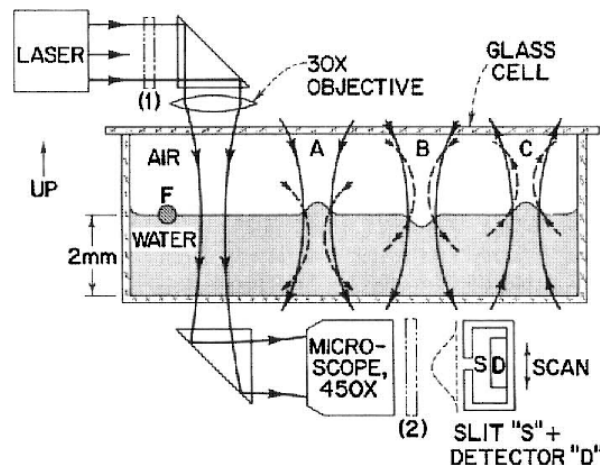


Figura 2.3: Montagem experimental de Ashkin e Dziedzic, retirada da referência [16].

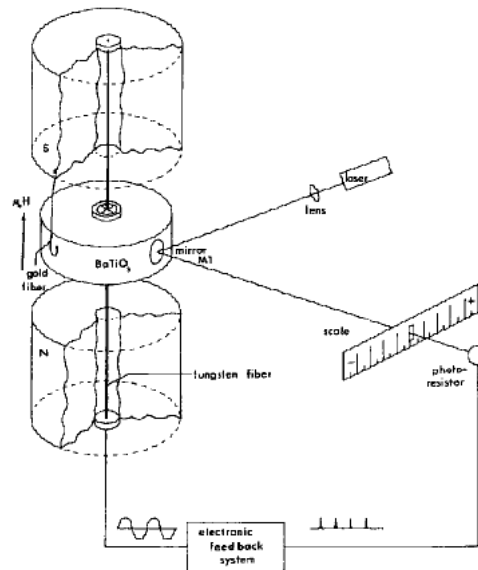


Figura 2.4: Montagem experimental de Walker, Lahoz e Walker, retirada da referência [18].

Uma diferença entre as formulações de Abraham e de Minkowski é que a formulação de Abraham prevê uma densidade de força $\chi_e \epsilon_0 \partial/\partial t (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$, denominada força de Abraham, em um meio dielétrico não-magnético, o que não ocorre com a formulação de Minkowski [10]. Em 1975, Walker, Lahoz e Walker [17, 18] fizeram a verificação experimental da existência dessa força. A montagem experimental está representada na figura 2.4. Um disco de titanato de bário, material que possui uma susceptibilidade elétrica elevada, é suspenso por uma fibra de torção, formando um pêndulo de torção. Um campo magnético vertical produzido por eletroímãs percorre o material. Um campo elétrico oscilante radial é produzido aplicando-se uma diferença de potencial entre a parte interior e a exterior do disco. Igualando a frequência de oscilação do campo elétrico com a frequência natural de oscilação do sistema, pode-se amplificar ou reduzir a amplitude de oscilação do sistema se a força de Abraham existir. Os experimentos confirmam isto, aparentemente favorecendo a formulação de Abraham. Experimentos posteriores realizados com um campo elétrico fixo e um campo magnético oscilante também confirmam a existência dessa força [19].

Em 1980, Gibson e colaboradores [20] realizaram experimentos em que o momento de fótons é transferido para portadores de cargas em semicondutores, no chamado “photon drag effect”, no limite em que a estrutura de bandas do semicondutor não interfere nos resultados. A transferência de momento dos fótons para os portadores de carga gera correntes ou campos elétricos no semicondutor, que podem ser medidos. Os resultados obtidos são compatíveis com uma transferência de momento $n\hbar\omega/c$ por fóton, aparentemente favorecendo a formulação de Minkowski.

Mais recentemente, em 2005, Campbell e colaboradores [21] mediram o momento transferido de fótons para átomos em um condensado de Bose-Einstein. O experimento está esquematizado na figura 2.5. Um condensado de Bose-Einstein viaja para a direita na figura. Um primeiro pulso de luz forma uma onda estacionária que interage com o condensado. Alguns dos átomos do condensado podem espalhar um fóton incidente de um dos modos contrapropagantes para o outro, recebendo 2 vezes o momento do fóton espalhado. O sistema evolui por um tempo variável τ até que outro pulso de luz, idêntico ao primeiro, é aplicado, podendo fazer com que os átomos espalhados pelo primeiro pulso voltem a um estado com momento nulo na direção vertical da figura. A amplitude de probabilidade de um determinado átomo absorver momento no primeiro pulso e o momento contrário no segundo interfere com a amplitude de probabilidade de ele não absorver momento em nenhum dos pulsos. Após se esperar um tempo suficiente para que as nuvens atômicas com diferentes momentos verticais se separem, pode-se observar que o número de átomos no estado de momento nulo na vertical varia com τ devido à interferência entre essas amplitudes de probabilidade. Medindo-se a frequência de oscilação da população nesse estado, pode-se inferir qual o momento transferido para os átomos pelos fótons, que é $n\hbar\omega/c$, aparentemente favorecendo a formulação de Minkowski.

Em 2008, She, Yu e Feng [22] realizaram um outro experimento nesse tema. Eles construíram um filamento de sílica em com 450nm de diâmetro e o colocaram em posição vertical, prendendo a parte superior e deixando a parte inferior livre. Passando um pulso laser pelo filamento, que sai pela parte inferior, eles filmaram o comportamento do filamento após a saída do pulso. A idéia é a mesma do experimento de Ashkin e Dziedzic [16]. Se o momento da luz for maior dentro do filamento, quando o pulso sai uma força com direção para baixo deve atuar neste. Se o momento da luz for menor dentro do filamento, uma força para cima deve

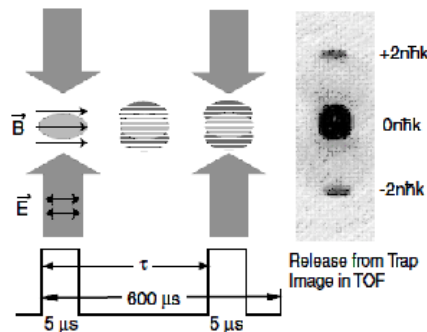


Figura 2.5: Esboço do experimento de Campbell e colaboradores, retirado da referência [21].

atuar neste. Analisando as imagens, os autores concluem que uma força para cima atua no filamento com a saída do pulso, aparentemente favorecendo a formulação de Abraham.

2.2.3 A solução eventual do debate

Apesar de ainda surgirem na literatura trabalhos defendendo a formulação de Abraham ou a de Minkowski como a correta para descrever o momento de ondas eletromagnéticas em meios materiais, Penfield e Haus mostraram no fim dos anos 60 que nenhuma das formulações é completamente correta, nem completamente errada [23]. O momento eletromagnético de ondas eletromagnéticas dentro de um meio é sempre acompanhado de um momento material. Quando a parte material, que tem formas diferentes para diferentes formulações, é levada em consideração, ambas as formulações, de Abraham e Minkowski, bem como outras, prevêem os mesmos resultados experimentais.

Essas formulações utilizam o formalismo de tensores energia-momento para tratar o tema. Esses tensores possuem termos que podem ser associados com densidades de energia e momento, bem como termos associados com fluxos de energia e momento. Eles facilitam muito a notação, permitindo que as leis de conservação sejam escritas de forma muito simples. O que Penfield e Haus mostraram é que essas diferentes formulações do eletromagnetismo em meios contínuos correspondem a diferentes divisões do tensor energia-momento total em partes material e

eletromagnética [23]. Embora esta conclusão pareça óbvia quando dita dessa forma, ela é difícil de se provar no formalismo de tensores energia-momento utilizado por Abraham e Minkowski, tanto pelas dificuldades que surgem ao se considerar a interação dos campos com a matéria quanto pela natureza não intuitiva dos termos correspondentes aos fluxos de momento. Por isso o debate durou tanto tempo, cerca de 60 anos, até ser resolvido. Uma revisão desse debate está na referência [7].

De fato, os resultados experimentais de Jones e colaboradores [13, 14, 15] foram reproduzidos por Gordon [34] e Loudon [35] utilizando a forma de Abraham para a densidade de momento da onda eletromagnética e calculando a parte material do momento no meio diretamente pela força de Lorentz. Os resultados de Ashkin e Dziedzic [16] também foram reproduzidos por Gordon utilizando a densidade de momento de Abraham, mas com uma explicação diferente e interessante [34]. O fato de o feixe estar muito focalizado no experimento faz com que surjam forças transversais consideráveis, que puxam as moléculas de água para a região de maior intensidade do feixe. Sendo assim, a pressão aumenta nessa região, fazendo com que uma protuberância surja na superfície. Israel [36] derivou os resultados experimentais de Walker e colaboradores [17, 18, 19] utilizando o tensor energia-momento de Minkowski e um tensor energia-momento material apropriado. Loudon, Barnett e Baxter [37] mostraram que os experimentos de Gibson e colaboradores [20] também podem ser explicados com ambas as formulações. Leonhardt [38] mostrou que os experimentos de Campbell e colaboradores [21] também podem ser explicados com a formulação de Abraham e uma redefinição do momento material. Já a interpretação dos resultados experimentais de She, Yu e Feng [22] tem sido questionada [39, 40, 41].

O que acontece é que em cada situação experimental uma formulação pode prever os resultados de forma mais simples e direta, mas as formulações de Abraham, Minkowski e outras são sempre equivalentes. Em um artigo recente, Pfeifer e colaboradores [42] discutem as condições em que a contraparte material do tensor energia-momento eletromagnético de Minkowski pode ser desprezada, justificando o porquê de ser possível tratar os experimentos de Jones e colaboradores [13, 14, 15] e o comportamento de pinças ópticas [43] apenas com o tensor energia-momento eletromagnético de Minkowski.

Resumindo: não há uma forma única para as densidades e fluxos de momento e energia eletromagnéticos de uma onda eletromagnética em um meio material.

Há sempre densidades e fluxos de energia e momento materiais complementares associados à onda. Como diversas divisões diferentes das densidade e fluxos de energia e momento totais em partes eletromagnética e material levam às mesmas previsões experimentais, estas divisões são, em princípio, arbitrárias.

Capítulo 3

Divisão da energia de ondas eletromagnéticas em meios lineares em partes material e eletromagnética

Como foi dito no capítulo anterior, há inúmeras maneiras distintas de se dividir a energia e o momento de ondas eletromagnéticas na matéria em partes material e eletromagnética. Essas divisões são equivalentes, no sentido em que levam às mesmas previsões experimentais. Contudo, podemos nos perguntar se há uma maneira mais natural de se realizar essa divisão. Nesta tese defendemos uma particular divisão como sendo mais natural e mais intuitiva, tendo uma aplicabilidade simples e direta no tratamento de problemas que envolvem a energia e o momento de ondas eletromagnéticas em meios materiais. Mas é importante dizer que ela não é mais correta que as demais, se considerarmos a visão moderna de que a física teórica tem como objetivo a correta previsão de resultados experimentais. Mas acreditamos que a divisão proposta se encaixa de maneira bem mais natural nos conceitos fundamentais do eletromagnetismo e que por isso pode ter uma vantagem em relação às demais na descrição de problemas fundamentais. Por exemplo, no capítulo 5 desta tese esta divisão será utilizada em nosso tratamento de funções de onda de fótons na matéria.

\mathbf{E} e \mathbf{B} são os campos que aparecem na expressão da força de Lorentz (2.5) e que efetivamente interagem com as cargas elétricas. Logo estes são os campos que podem transferir energia e momento para a matéria. Portanto, sob nosso ponto

de vista, numa formulação macroscópica para o eletromagnetismo é natural que os campos médios \mathbf{E} e \mathbf{B} sejam utilizados para se descrever os transportes médios de energia e momento eletromagnéticos em um meio material. \mathbf{D} e \mathbf{H} devem ser vistos como médias de propriedades materiais e eletromagnéticas, utilizadas para simplificar os cálculos. Sendo assim, as formas mais naturais para as partes eletromagnéticas da densidade de energia, do fluxo de energia e da densidade de momento de uma onda eletromagnética em qualquer meio são as das equações (2.15), (2.17) e (2.16), idênticas às expressões no vácuo quando escritas em termos dos campos médios \mathbf{E} e \mathbf{B} , não possuindo uma dependência explícita com as propriedades do meio. As partes materiais das densidades de energia e momento devem ser calculadas como o resultado da ação da força de Lorentz nas cargas do meio. Um tensor energia-momento eletromagnético com estas propriedades foi previamente proposto por Obukhov e Hehl [44]. Aqui mostraremos a validade desta divisão não no formalismo de tensores energia-momento, mas calculando diretamente a densidade de energia material e o fluxo de energia material utilizando modelos razoáveis para os meios e, no próximo capítulo, calculando o comportamento de pulsos de luz que penetram na matéria e verificando o momento transferido para os meios via força de Lorentz.

3.1 Densidade de energia material de ondas eletromagnéticas em meios lineares

Nesta seção será mostrada de forma geral a expressão para a densidade de energia material de um meio linear, dispersivo e não-absorvedor devido à presença de uma onda eletromagnética aproximadamente monocromática, calculada através do trabalho realizado pelos campos eletromagnéticos nas cargas do meio. A consideração de um meio não-absorvedor corresponde a uma aproximação, uma vez que dispersão implica em absorção de radiação pelo meio. Contudo, essa absorção pode ser muito pequena e consideramos aqui o limite em que pode ser desprezada. Os cálculos dessa seção são baseados na seção 6.8 do livro de Jackson [2].

A densidade de corrente elétrica em um meio dielétrico e magnético se deve

às cargas ligadas e pode ser escrita como [1, 2]

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M}, \quad (3.1)$$

em que \mathbf{P} e \mathbf{M} representam a polarização e a magnetização do meio, respectivamente. Sendo assim, utilizando as equações (2.11) e (2.3) a densidade de trabalho realizado sobre as cargas por unidade de tempo pode ser escrita como

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{M} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{M}) = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{M}). \quad (3.2)$$

Para meios lineares dispersivos, em que as susceptibilidades elétrica e magnética dependem da frequência de oscilação dos campos, é necessário fazer uma decomposição de Fourier dos campos. Trataremos primeiro a resposta do meio devido à susceptibilidade elétrica $\chi_e(\omega)$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \chi_e(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t}. \quad (3.4)$$

O fato de $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ser real implica que $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, -\omega) = \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}, \omega)$. O fato de estarmos considerando meios não-absorvedores implica que $\chi_e(\omega)$ é real. Dessa maneira, podemos escrever, omitindo a dependência espacial dos campos e os limites de integração para simplificar a notação,

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \int d\omega \int d\omega' \tilde{\mathbf{E}}^*(\omega') [-i\omega \chi_e(\omega)] \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i(\omega - \omega')t}. \quad (3.5)$$

Separando o integrando em duas partes iguais, realizando em uma delas as substituições $\omega \rightarrow -\omega'$, $\omega' \rightarrow -\omega$, e usando a relação $\tilde{\mathbf{E}}(-\omega) = \tilde{\mathbf{E}}^*(\omega)$, temos

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \int d\omega \int d\omega' \tilde{\mathbf{E}}^*(\omega') [-i\omega \chi_e(\omega) + i\omega' \chi_e(\omega')] \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i(\omega - \omega')t}. \quad (3.6)$$

Agora supomos que a onda eletromagnética incidente tem espectro de frequências estreito em torno de uma frequência central ω_c , de forma que a susceptibilidade elétrica tenha variação pequena nesse intervalo. Podemos então expandir o fator $i\omega' \chi_e(\omega')$ em torno de ω . Com a expansão até primeira ordem, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \int d\omega \int d\omega' i(\omega' - \omega) \frac{d}{d\omega} [\omega \chi_e(\omega)] \tilde{\mathbf{E}}^*(\omega') \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i(\omega - \omega')t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int d\omega \int d\omega' \frac{d}{d\omega} [\omega \chi_e(\omega)] \tilde{\mathbf{E}}^*(\omega') \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i(\omega - \omega')t}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Considerando, de maneira análoga, a resposta do meio devido à susceptibilidade magnética real $\chi_m(\omega)$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t}, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\alpha_m(\omega)}{\mu_0} \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t}, \quad (3.9)$$

definindo $\alpha_m(\omega) = \chi_m(\omega)/[1+\chi_m(\omega)]$, uma vez que $\mathbf{M}(\omega) = \chi_m(\omega)\mathbf{H}(\omega) = \chi_m(\omega)\mathbf{B}/\{\mu_0[1+\chi_m(\omega)]\}$, obtemos

$$\mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\mu_0} \int d\omega \int d\omega' \left[-\alpha_m + \frac{d\alpha_m}{d\omega} \right] \tilde{\mathbf{B}}^*(\omega') \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\omega) e^{-i(\omega-\omega')t}. \quad (3.10)$$

As expressões (3.7) e (3.10) podem ser escritas de maneira mais simples, consistentes com a aproximação de que a onda eletromagnética incidente tem espectro de frequências estreito centrado em ω_c . Podemos escrever os campos incidentes como $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t) \cos(\omega_c t + \delta_1)$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0(t) \cos(\omega_c t + \delta_2)$, em que $\mathbf{E}_0(t)$ e $\mathbf{B}_0(t)$ são funções que variam muito lentamente tanto num intervalo temporal $1/\omega_c$ quanto num intervalo temporal igual ao inverso de uma largura espectral em que $\chi_e(\omega)$ ou $\chi_m(\omega)$ variem apreciavelmente. Substituindo essas funções no lugar das transformadas de Fourier nas equações (3.7) e (3.10), após tomarmos uma média temporal em um período de oscilação, obtemos

$$\left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle u_{\text{mat}} \rangle, \quad (3.11)$$

em que definimos a densidade média de energia material

$$\langle u_{\text{mat}} \rangle = \left[\chi_e + \omega \frac{d\chi_e}{d\omega} \right]_{\omega=\omega_c} \frac{\varepsilon_0 \langle |\mathbf{E}|^2 \rangle}{2} + \left[-\alpha_m + \omega \frac{d\alpha_m}{d\omega} \right]_{\omega=\omega_c} \frac{\langle |\mathbf{B}|^2 \rangle}{2\mu_0}, \quad (3.12)$$

com $\alpha_m(\omega) = \chi_m(\omega)/[1+\chi_m(\omega)]$ e $\langle A \rangle$ representando a média temporal da grandeza A .

Dessa maneira, a equação (2.14), que descreve a conservação local da energia, em meios lineares dispersivos não-absorvedores pode ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle u_{\text{e.m.}} + u_{\text{mat}} \rangle = -\nabla \cdot \langle \mathbf{S}_{\text{e.m.}} + \mathbf{S}_{\text{mat}} \rangle, \quad (3.13)$$

em que $u_{e.m.}$ e $\mathbf{S}_{e.m.}$ são dados pelas equações (2.15) e (2.16), respectivamente, $\langle u_{mat} \rangle$ é dado pela equação (3.12) e foi definido o fluxo de energia material

$$\mathbf{S}_{mat} = \mathbf{M} \times \mathbf{E}. \quad (3.14)$$

Posteriormente no capítulo, apresentaremos modelos para a densidade de energia material e para o fluxo de energia material em meios lineares dispersivos não-absorvedores que concordam com as equações (3.12) e (3.14). Esses modelos justificam a divisão da densidade de energia e do fluxo de energia de ondas eletromagnéticas em meios lineares em partes material e eletromagnética conforme a equação (3.13).

3.2 Hamiltoniano de um sistema composto por cargas elétricas e o campo eletromagnético

Antes de introduzirmos os modelos para os meios lineares, vamos discutir nesta seção alguns aspectos das formulações lagrangeana e hamiltoniana para um sistema composto por cargas elétricas e o campo eletromagnético no regime não-relativístico. O lagrangeano de uma partícula não-relativística com massa m e carga q interagindo com um campo eletromagnético aplicado é [45]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - q\Phi + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}, \quad (3.15)$$

em que $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}$ é a velocidade da partícula, Φ o potencial escalar e \mathbf{A} o potencial vetor do campo eletromagnético. Os campos elétrico e magnético são obtidos a partir dos potenciais da seguinte forma [1, 2]

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (3.16)$$

Ao utilizarmos as equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q_i} = 0 \quad (3.17)$$

com $Q_i = \{x, y, z\}$, obtemos a equação de força de Lorentz [45]

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (3.18)$$

O fato de o lagrangeano (3.15) levar à equação de movimento correta justifica sua forma. A partir do lagrangeano, obtemos os momentos conjugados:

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA_x, \quad p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + qA_y, \quad p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + qA_z. \quad (3.19)$$

O hamiltoniano da partícula é

$$\begin{aligned} H &= \sum_i \dot{Q}_i p_i - \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + q\Phi, \quad \text{ou} \\ H &= \frac{1}{2m} [\mathbf{p} - q\mathbf{A}]^2 + q\Phi, \end{aligned} \quad (3.20)$$

correspondendo à energia total da partícula no campo, que é a soma de sua energia cinética $mv^2/2$ com sua energia potencial $q\Phi$. As equações de Hamilton $\dot{p}_i = -\partial H/\partial Q_i$ nos levam novamente à equação de movimento (3.18), enquanto que as equações $\dot{Q}_i = \partial H/\partial p_i$ resultam em (3.19).

Passemos agora ao hamiltoniano não de uma, mas de N partículas com massas m_i e cargas q_i interagindo com um campo eletromagnético que é dinâmico, ou seja, que é modificado com o movimento das cargas elétricas. O hamiltoniano deve conter agora não apenas a energia das partículas como em (3.20), mas também a energia do campo eletromagnético. Este hamiltoniano é [46]

$$H = \sum_i \frac{1}{2m_i} [\mathbf{p}_i - q_i \mathbf{A}]^2 + \int d^3r \left[\frac{\epsilon_0 |\mathbf{E}|^2}{2} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0} \right]. \quad (3.21)$$

Pode parecer que o termo de energia potencial de $q\Phi$ da equação (3.20) está faltando na equação (3.21). Contudo, como é discutido no capítulo 4 do livro de Milonni [46], este não é o caso, pois esta energia potencial está contida no termo correspondente à energia eletromagnética. Isto pode ser visto decompondo o vetor campo elétrico em suas componentes transversal e longitudinal: $\mathbf{E} = \mathbf{E}^\perp + \mathbf{E}^\parallel$, com $\nabla \cdot \mathbf{E}^\perp = 0$ e $\nabla \times \mathbf{E}^\parallel = 0$. Um teorema de Helmholtz, derivado no apêndice F do livro de Milonni [46], mostra que qualquer campo vetorial que tende a zero mais rápido que $1/r$ com $r \rightarrow \infty$ pode ser decomposto dessa maneira. Utilizando o calibre de Coulomb para os potenciais, podemos escrever $\mathbf{E}^\perp = -\partial \mathbf{A}/\partial t$ e $\mathbf{E}^\parallel = -\nabla \Phi$, pois $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ nesse calibre. Portanto temos

$$\int d^3r |\mathbf{E}|^2 = \int d^3r |\mathbf{E}^\perp|^2 + \int d^3r (\nabla \Phi)^2, \quad (3.22)$$

já que $\mathbf{E}^\perp \cdot \mathbf{E}^\parallel = 0$. Podemos escrever

$$\int d^3r (\nabla\Phi)^2 = \int d^3r \nabla \cdot (\Phi \nabla\Phi) - \int d^3r \Phi \nabla^2\Phi = \int d^3r \Phi \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (3.23)$$

em que foi utilizado o teorema da divergência e o fato de que $\nabla^2\Phi = -\rho/\varepsilon_0$ no calibre de Coulomb, em que ρ é a densidade de carga elétrica. Também temos

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (3.24)$$

de forma que podemos escrever

$$\frac{1}{2} \int d^3r \Phi(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}', t)}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.25)$$

$$= \sum_i \sum_{j>i} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \equiv V(\{\mathbf{r}_i\}). \quad (3.26)$$

Portanto o hamiltoniano da equação (3.21) pode ser escrito como

$$H = \sum_i \frac{1}{2m_i} [\mathbf{p}_i - q_i \mathbf{A}]^2 + V(\{\mathbf{r}_i\}) + \int d^3r \left[\frac{\varepsilon_0 |\mathbf{E}^\perp|^2}{2} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0} \right]. \quad (3.27)$$

Escrevendo $[\mathbf{p}_i - q_i \mathbf{A}] = m_i \mathbf{v}_i$, vemos que os dois primeiros termos do hamiltoniano acima correspondem às energias cinética e potencial do conjunto de cargas, respectivamente, enquanto que o último termo corresponde à energia do campo magnético e da parte transversal do campo elétrico. De acordo com nossa proposta para a divisão da energia de ondas eletromagnéticas em meios lineares em partes material e eletromagnética, os dois primeiros termos do hamiltoniano acima geram a parte material da energia, enquanto que o último termo gera a parte eletromagnética, já que uma onda eletromagnética é composta de campos transversais. Portanto a divisão proposta se encaixa naturalmente no formalismo hamiltoniano.

No modelo quântico para um meio linear dielétrico que será apresentado na seção 3.4, faremos uma aproximação para escrever o hamiltoniano (3.27) de outra maneira. Essa aproximação consiste em considerar que o potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ tem variação espacial desprezível em dimensões da ordem das dimensões de uma molécula que possui apenas cargas ligadas. Sendo assim, no hamiltoniano de interação das cargas da molécula com o campo consideraremos o potencial vetor no centro de massa da molécula $\mathbf{A}(t)$, desprezando suas variações espaciais. É fácil verificar que

podemos acrescentar um termo $d/dt(S(Q, t))$ ao lagrangeano sem alterar as equações de movimento que são geradas por ele. Consideremos $S = -\sum_i q_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{A}$. Para o lagrangeano do sistema de cargas com campos eletromagnéticos aplicados, que pode ser obtido com uma generalização da equação (3.15) para sistemas com mais de uma carga, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2 - V(\{\mathbf{r}_i\}) + \sum_i q_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A} + \frac{d}{dt} \left[-\sum_i q_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{A} \right] \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2 - V(\{\mathbf{r}_i\}) + \sum_i q_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{E}^\perp, \end{aligned} \quad (3.28)$$

pois $\mathbf{E}^\perp = -\partial \mathbf{A} / \partial t$. Para este novo lagrangeano, os momentos conjugados são iguais aos momentos cinéticos: $\mathbf{p}'_i = m \mathbf{v}_i$. Portanto quando levamos em conta a energia do campo eletromagnético, o hamiltoniano total se torna:

$$H' = \sum_i \frac{p_i'^2}{2m_i} + V(\{\mathbf{r}_i\}) - \sum_i q_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{E}^\perp + \int d^3r \left[\frac{\varepsilon_0 |\mathbf{E}^\perp|^2}{2} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0} \right], \quad (3.29)$$

com $\mathbf{p}'_i = m \mathbf{v}_i$ sendo o momento conjugado da grandeza \mathbf{r}_i .

3.3 Modelo clássico para a densidade de energia material em um meio linear dielétrico

Em nosso primeiro modelo para um meio linear dielétrico, um modelo clássico conhecido como modelo de Drude-Lorentz, consideremos um meio composto por moléculas com núcleos fixos e com nuvens eletrônicas ao seu redor¹. O potencial gerado pelos núcleos e pelo restante dos elétrons atuando na coordenada x do centro de massa da nuvem eletrônica de um dos elétrons será aproximado por um potencial harmônico $U_i(x_i) = \frac{1}{2} m \omega_i^2 x_i^2$, em que m representa a massa e x_i a posição do centro de massa na direção $\hat{\mathbf{x}}$ deste particular elétron. A posição de equilíbrio foi definida em $x_i = 0$. Se tivermos uma onda eletromagnética com campo elétrico $E_0 \cos(\omega t) \hat{\mathbf{x}}$ interagindo com este elétron, o centro de massa de sua nuvem eletrônica pode sofrer um deslocamento x_i nesta direção. Essa componente do centro de massa estará sujeita à

¹A consideração de núcleos fixos é uma aproximação razoável, uma vez que a massa dos núcleos atômicos é muito maior que a massa dos elétrons, o que faz com que a aceleração sofrida por eles devido à ação dos campos seja muito menor.

seguinte equação de movimento:

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = q E_0 \cos(\omega t) + \frac{dU_i}{dx} , \quad (3.30)$$

em que q representa a carga do elétron.

As soluções dessa equação diferencial podem ser escritas como

$$x_i(t) = \frac{q}{m(\omega_i^2 - \omega^2)} E_0 \cos(\omega t) . \quad (3.31)$$

Podemos ver que essa função explode quando $\omega = \omega_i$. Isso acontece porque não estamos considerando a absorção de radiação pelo meio. Quando $\omega \approx \omega_i$, a absorção é muito alta. Portanto nosso tratamento é válido apenas quando ω é muito distinto de ω_i e a aproximação de meio não-absorvedor pode ser utilizada.

Se chamarmos N_i a densidade de cada nuvem eletrônica com massa m e carga q cujo centro de massa está sujeito a um potencial $U_i(x_i)$ na direção $\hat{\mathbf{x}}$, a susceptibilidade elétrica do meio pode ser escrita como

$$\chi_e(\omega) = \frac{|\mathbf{P}|}{\varepsilon_0 |\mathbf{E}|} = \frac{\sum_i N_i q x_i}{\varepsilon_0 E_0 \cos(\omega t)} = \sum_i \frac{N_i q^2}{\varepsilon_0 m(\omega_i^2 - \omega^2)} . \quad (3.32)$$

A densidade de energia material do meio corresponde à soma das energias potencial e cinética dos elétrons multiplicada por suas densidades. Usando a equação (3.31), obtemos

$$u_{\text{mat}} = \sum_i N_i \left(\frac{1}{2} m \omega_i^2 x_i^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 \right) = \sum_i \frac{N_i q^2 (\omega_i^2 + \omega^2)}{m(\omega_i^2 - \omega^2)^2} \frac{|\mathbf{E}|^2}{2} \quad (3.33)$$

Usando a equação (3.32), é fácil mostrar que a densidade de energia material da equação (3.33) pode ser escrita como o primeiro termo da equação (3.12):

$$u_{\text{mat}} = \left[\chi_e + \omega \frac{d\chi_e}{d\omega} \right] \frac{\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2}{2} . \quad (3.34)$$

Logo este modelo dá suporte à divisão da densidade de energia de uma onda eletromagnética em um meio linear em partes material e eletromagnética proposta nesta tese.

3.4 Modelo quântico para a densidade de energia material em um meio linear dielétrico

Em nosso segundo modelo para um meio linear dielétrico, um modelo quântico, considere um meio composto por moléculas com núcleos fixos e Z elétrons com carga q e massa m ao redor. O hamiltoniano \hat{H}_0 que agrupa esses núcleos e elétrons pode ser muito complicado, mas os resultados desta seção não dependerão de sua forma específica. Os autoestados deste hamiltoniano serão denotados $|\Phi_n\rangle$, e os respectivos autovalores $\hbar\omega_n$. Um estado puro arbitrário do sistema molecular pode ser escrito como

$$|\Phi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |\Phi_n\rangle e^{-i\omega_n t}, \quad (3.35)$$

com $\sum_n |c_n(t)|^2 = 1$.

Um campo elétrico $E_0 \cos(\omega t) \hat{\mathbf{x}}$ incidente atuará como uma perturbação no sistema. Este tratamento é baseado no livro de Loudon [47]. Desprezaremos aqui a variação espacial do potencial vetor \mathbf{A} , e conseqüentemente do campo elétrico \mathbf{E} , ao longo da molécula. De acordo com a equação (3.29), o hamiltoniano total da molécula, desconsiderando-se a parte do campo eletromagnético livre, pode ser escrito como

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'(t), \text{ com } \hat{H}_0 |\Phi_n\rangle = \hbar\omega_n |\Phi_n\rangle, \quad (3.36)$$

$$\hat{H}'(t) = -E_0 \cos(\omega t) \sum_i q \hat{x}_i = -E_0 \cos(\omega t) Z q \hat{x}_{\text{cm}}, \quad (3.37)$$

em que \hat{x}_i é o operador posição de cada elétron na direção $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{x}_{\text{cm}} = \sum_i \hat{x}_i / Z$ o operador posição do centro de massa dos elétrons na direção $\hat{\mathbf{x}}$ e Zq a carga total dos elétrons.

Aplicando o operador hamiltoniano (3.36) no estado $|\Phi(t)\rangle$ da equação (3.35) e utilizando a equação de Schrödinger

$$\hat{H} |\Phi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Phi(t)\rangle, \quad (3.38)$$

temos

$$\begin{aligned} & \sum_n c_n \hat{H}_0 |\Phi_n\rangle e^{-i\omega_n t} + \sum_n c_n \hat{H}' |\Phi_n\rangle e^{-i\omega_n t} = \\ & = i\hbar \sum_n \dot{c}_n (-i\omega_n) |\Phi_n\rangle e^{-i\omega_n t} + i\hbar \sum_n \dot{c}_n |\Phi_n\rangle e^{-i\omega_n t}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

De acordo com a equação (3.36), o primeiro termo à direita cancela o primeiro à esquerda na equação acima. Tomando-se o produto escalar dos termos restantes com $e^{i\omega_m t} \langle \Phi_m |$, temos

$$\dot{c}_m(t) = -\frac{i}{\hbar} \sum_n c_n(t) \langle \Phi_m | \hat{H}' | \Phi_n \rangle e^{i(\omega_m - \omega_n)t} . \quad (3.40)$$

Consideremos que a molécula esteja em seu estado fundamental $|\Phi_0\rangle$ antes de se iniciar a interação com o campo elétrico incidente e que este cause uma pequena perturbação, de forma que $c_0 \approx 1$ sempre. Portanto apenas o termo $n = 0$ do somatório do lado direito da equação acima contribuirá significativamente com $\dot{c}_m(t)$. Como a susceptibilidade elétrica se refere à condição em que os átomos estão interagindo há muito tempo com o campo, tendo atingido uma condição de equilíbrio com a radiação, é apropriado se tomar uma integral indefinida como solução da equação (3.40):

$$c_m(t) \simeq \frac{E_0 Z q X_{m0}}{2\hbar} \left[\frac{e^{i(\omega_m + \omega)t}}{\omega_m + \omega} + \frac{e^{i(\omega_m - \omega)t}}{\omega_m - \omega} \right] , \quad (3.41)$$

com $X_{m0} \equiv \langle \Phi_m | \hat{x}_{\text{cm}} | \Phi_0 \rangle$, $\omega_0 \equiv 0$, $c_0 \approx 1$. Também utilizaremos a definição $X_{00} \equiv 0$ para definir a origem do sistema de coordenadas.

O momento de dipolo oscilante da molécula pode ser escrito como

$$d_x(t) = \langle \Phi(t) | Z q \hat{x}_{\text{cm}} | \Phi(t) \rangle \simeq \sum_m c_m(t) Z q X_{m0}^* e^{-i\omega_m t} + \text{c.c.} , \quad (3.42)$$

em que a equação (3.35) foi utilizada, termos com $c_m c_n$ com m e n ambos diferentes de zero foram desconsiderados, c_0 foi considerado 1 e c.c. representa o complexo conjugado.

Utilizando a equação para a polarização do meio $P_x = N d_x = \chi_e \varepsilon_0 E_x$, N sendo a densidade de moléculas do meio, e as equações (3.41) e (3.42), chegamos à seguinte forma para a susceptibilidade elétrica devido a essas moléculas:

$$\chi_e(\omega) = \frac{N Z^2 q^2}{\varepsilon_0 \hbar} \sum_m |X_{m0}|^2 \left[\frac{1}{\omega_m + \omega} + \frac{1}{\omega_m - \omega} \right] . \quad (3.43)$$

Devido ao fato de estarmos desprezando a absorção de radiação pelo meio, $\chi_e(\omega)$ é real. Mais uma vez, essa aproximação só é válida quando ω é muito diferente de todos os ω_m para os quais X_{m0} é não-nulo.

Em analogia com o modelo clássico, a densidade de energia material dessas moléculas é o valor esperado do hamiltoniano não-perturbado \hat{H}_0 multiplicado pela densidade dessas moléculas, já que, de acordo com a equação (3.29), \hat{H}_0 contém os termos relacionados à energia cinética dos elétrons e à energia potencial da interação entre os elétrons e os núcleos:

$$u_{\text{mat}} = N \langle \Phi | \hat{H}_0 | \Phi \rangle = N \sum_m |c_m|^2 \hbar \omega_m . \quad (3.44)$$

Usando a equação 3.41, temos

$$\begin{aligned} |c_m(t)|^2 &\simeq \frac{Z^2 q^2 E_0^2 |X_{m0}|^2}{4\hbar^2 (\omega_m^2 - \omega^2)^2} |(\omega_m - \omega)e^{i\omega t} + (\omega_m + \omega)e^{-i\omega t}|^2 \\ &\simeq \frac{Z^2 q^2 E_0^2 |X_{m0}|^2}{\hbar^2 (\omega_m^2 - \omega^2)^2} [\omega_m^2 \cos^2(\omega t) + \omega^2 \sin^2(\omega t)] . \end{aligned} \quad (3.45)$$

Tomando-se a média temporal em um período de oscilação da onda, temos

$$\langle |c_m(t)|^2 \rangle \simeq \frac{Z^2 q^2 E_0^2 |X_{m0}|^2 (\omega_m^2 + \omega^2)}{2\hbar^2 (\omega_m^2 - \omega^2)^2} . \quad (3.46)$$

Substituindo-se essa média temporal na equação (3.44) e usando o fato de que $\langle |\mathbf{E}|^2 \rangle = E_0^2/2$, chegamos em:

$$\langle u_{\text{mat}} \rangle \simeq \frac{N Z^2 q^2}{\hbar} \sum_m \frac{\omega_m |X_{m0}|^2 (\omega_m^2 + \omega^2)}{(\omega_m^2 - \omega^2)^2} \langle |\mathbf{E}|^2 \rangle . \quad (3.47)$$

Usando a equação (3.43), é simples mostrar que a densidade de energia acima também pode ser escrita como o primeiro termo à direita da equação (3.12):

$$\langle u_{\text{mat}} \rangle = \left[\chi_e + \omega \frac{d\chi_e}{d\omega} \right] \frac{\varepsilon_0 \langle |\mathbf{E}|^2 \rangle}{2} . \quad (3.48)$$

Se tivermos diferentes tipos de moléculas no meio, cada tipo identificado por um símbolo (j), as susceptibilidade elétrica e densidade de energia material resultantes serão

$$\chi_e^{\text{Tot}} = \sum \chi_e^{(j)} , \quad \langle u_{\text{mat}}^{\text{Tot}} \rangle = \sum \langle u_{\text{mat}}^{(j)} \rangle , \quad (3.49)$$

e a equação (3.48) continuará descrevendo bem a densidade de energia material deste meio devido à presença da onda eletromagnética. Portanto este modelo quântico também dá suporte à divisão da densidade de energia de uma onda eletromagnética em um meio linear em partes material e eletromagnética proposta nesta tese.

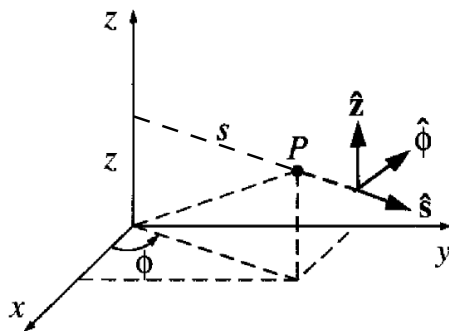


Figura 3.1: Sistema de coordenadas cilíndricas (z, s, ϕ) .

3.5 Modelo quântico para a densidade de energia material em um meio linear magnético

Passemos agora para a descrição de um modelo quântico para um meio linear magnético baseado no livro de Van Vleck [48]. Analisaremos a resposta dos átomos a um campo magnético aplicado na direção $\hat{\mathbf{z}}$ utilizando o sistema de coordenadas cilíndricas representado na figura 3.1, que faz uso das coordenadas z , s e ϕ . Para simplificar o problema, ao invés de considerar o campo magnético gerado por um potencial vetor próprio de uma onda eletromagnética, consideraremos um potencial vetor $\mathbf{A} = Bs\hat{\phi}/2$, de forma que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = B\hat{\mathbf{z}}$. Com essas considerações, de acordo com a equação (3.15) o lagrangeano de um elétron de carga q e massa m sujeito a um potencial central $\Phi(z, s)$ do núcleo atômico pode ser escrito como

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{m\dot{s}^2}{2} + \frac{ms^2\dot{\phi}^2}{2} + \frac{qs^2B\dot{\phi}}{2} - q\Phi(z, s). \quad (3.50)$$

Podemos verificar que o momento conjugado da variável ϕ é uma constante de movimento:

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = ms^2\dot{\phi} + \frac{qs^2B}{2} = \text{constante}, \quad (3.51)$$

pois a equação de Lagrange (3.17) nos diz que

$$\frac{dp_\phi}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (3.52)$$

Portanto o momento angular do elétron na direção $\hat{\mathbf{z}}$, $l_z = ms^2\dot{\phi}$, será uma função

do campo magnético aplicado:

$$l_z(B) = l_z(0) - \frac{qs^2B}{2}, \quad (3.53)$$

em que $l_z(0)$ representa o momento angular original do elétron, antes de interagir com o campo magnético.

A razão entre o momento de dipolo magnético e o momento angular orbital de um elétron vale $q/(2m)$ [2], portanto o momento de dipolo magnético na direção $\hat{\mathbf{z}}$ de um elétron no estado quântico $|\Psi\rangle$ vale

$$\mu_z(B) = \frac{q}{2m} \langle \Psi | \hat{l}_z(B) | \Psi \rangle. \quad (3.54)$$

Logo a variação $\Delta\mu_z = \mu_z(B) - \mu_z(0)$ vale

$$\Delta\mu_z = -\frac{q^2}{4m} \langle s^2 \rangle B, \quad (3.55)$$

com $\langle s^2 \rangle \equiv \langle \Psi | \hat{s}^2 | \Psi \rangle$. Considerando-se um gás em que temos átomos com orientações aleatórias, ao tomarmos a média para as diversas orientações podemos considerar para cada estado quântico de cada elétron $\sum_i \langle l_z(0) \rangle_i = 0$ e $\sum_i \langle s^2 \rangle_i = \sum_i 2/3 \langle r^2 \rangle_i$, já que $\sum_i \langle s^2 \rangle_i = \sum_i \langle x^2 + y^2 \rangle_i = 2 \sum_i \langle x^2 \rangle_i$ e $\sum_i \langle r^2 \rangle_i = \sum_i \langle x^2 + y^2 + z^2 \rangle_i = 3 \sum_i \langle x^2 \rangle_i$. Considerando-se densidades N_i para a ocupação de cada estado quântico, a magnetização do meio pode ser escrita como

$$\mathbf{M} = \sum_i -\frac{N_i q^2 \langle r^2 \rangle_i}{6m} \mathbf{B}, \quad (3.56)$$

de forma que o coeficiente $\alpha_m = \mu_0 M/B$ vale

$$\alpha_m = \sum_i -\frac{\mu_0 N_i q^2 \langle r^2 \rangle_i}{6m}. \quad (3.57)$$

Notando-se que o termo de energia cinética $ms^2\dot{\phi}^2/2$ na equação (3.50) pode ser escrito como $l_z^2/(2ms^2)$, a variação da densidade de energia material do meio pode ser calculada como:

$$\begin{aligned} u_{\text{mat}} &= \sum_i N_i \left\langle \frac{l_z(B)^2 - l_z(0)^2}{2ms^2} \right\rangle_i = \sum_i N_i \left\langle \frac{-qBs^2l_z(0) + q^2s^4B^2/4}{2ms^2} \right\rangle_i \\ &= \sum_i N_i \left\langle \frac{q^2s^2B^2}{8m} \right\rangle_i, \end{aligned} \quad (3.58)$$

já que $\sum_i \langle l_z(0) \rangle_i = 0$. Utilizando (3.56), podemos ver que essa densidade de energia material pode ser escrita como o segundo termo à direita da equação (3.12),

$$u_{\text{mat}} = -\alpha_m \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad (3.59)$$

uma vez que em nosso modelo α_m não depende da frequência de oscilação do campo ω . Portanto este modelo também dá suporte à divisão da densidade de energia de uma onda eletromagnética em um meio linear em partes material e eletromagnética proposta nesta tese.

O modelo apresentado para um meio magnético linear prevê apenas um comportamento diamagnético, em que a magnetização é induzida num sentido contrário ao campo magnético aplicado. O diamagnetismo é resultado da lei de Lenz [1, 2], que faz com que surja nas órbitas dos elétrons uma força eletromotriz que tende a gerar uma corrente elétrica que se oponha à variação do fluxo magnético em seu interior. Isso acelera os elétrons em estados com momento magnético oposto ao campo aplicado e freia os em estados com momento magnético paralelo ao campo aplicado. Já elétrons em estados sem momento magnético são acelerados para produzir um momento contrário ao campo. Na média, há um aumento da energia cinética dos elétrons como um todo, conforme o calculado.

Materiais paramagnéticos, por outro lado, são aqueles em que a magnetização induzida ocorre no mesmo sentido do campo magnético aplicado. O paramagnetismo ocorre quando há momentos de dipolo prévios nos átomos, que se alinham com o campo aplicado por isso ser energeticamente favorável [49]. Mas lembre-se que um dipolo magnético livre em um campo magnético sofre um torque que faz com que o dipolo precesse sem alterar sua componente na direção do campo aplicado [50]. Portanto, em um meio paramagnético esta orientação se deve a uma relaxação do sistema. Isso ocorre quando um átomo troca energia com outro modo do sistema, como em uma colisão com outro átomo, por exemplo. Mas note que nesse caso haverá conversão de energia em outros modos de maneira irreversível, o que não é considerado na seção 3.1. Além do mais, para campos eletromagnéticos que oscilam em frequências próximas às da luz visível, o tempo de relaxação é muito maior que o período de oscilação da onda, portanto apenas o comportamento diamagnético, presente em todas as substâncias, irá aparecer. A influência dos spins eletrônicos para a magnetização também ocorre por processos de relaxação, por isso

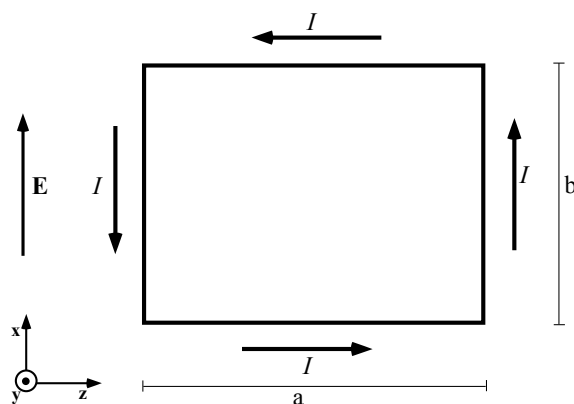


Figura 3.2: Objeto com momento magnético $Iab\hat{y}$ sob a ação de um campo elétrico \mathbf{E} possui momento e fluxo de energia associados.

foi desconsiderada em nosso modelo.

3.6 Modelo clássico para o fluxo de energia material e “momento escondido”

Um dipolo magnético parado em um campo elétrico uniforme possui momento e fluxo de energia associados [23, 51, 52]. Utilizaremos aqui uma combinação dos modelos presentes na seção 7.4 do livro de Penfield e Haus [23] e no exemplo 12.12 do livro de Griffiths [1] para ilustrar como isso ocorre. Considere um retângulo de lados a e b que conduz uma corrente elétrica I em uma região do espaço sob a ação de um campo elétrico uniforme \mathbf{E} , como ilustrado na figura 3.2. O momento de dipolo magnético desse objeto vale $\mathbf{m} = abI\hat{y}$. O campo elétrico realiza trabalho negativo sobre as cargas positivas que descem à esquerda na figura e trabalho positivo sobre as cargas positivas que sobem à direita². Portanto a energia de uma carga q que se movimenta para a esquerda é maior em qEb do que a de uma carga idêntica que se movimenta para a direita. Isso gera um fluxo de energia para a esquerda na figura. Se tivermos uma densidade N desses dipolos, o fluxo de energia total \mathbf{S}_{mat} pode ser encontrado multiplicando-se a energia por unidade de tempo IEb que flui

²Se considerarmos que as cargas que se movimentam são negativas, as conclusões finais ficarão inalteradas.

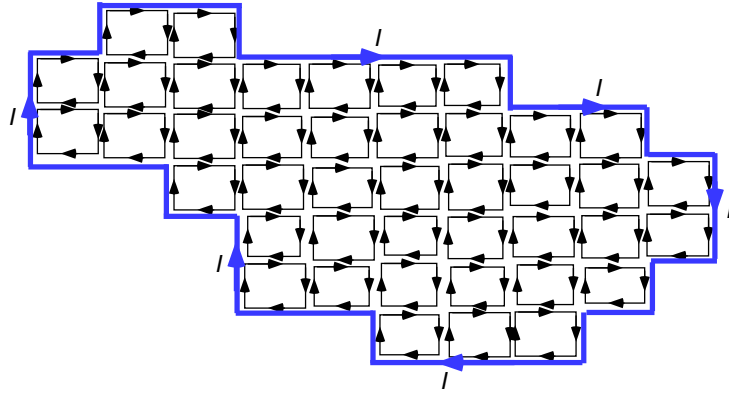


Figura 3.3: Um circuito de corrente de formato arbitrário pode ser decomposto em circuitos retangulares no limite em que a área dos retângulos tende a zero.

para a esquerda em cada dipolo pelo comprimento a em que essa energia flui e pela densidade de dipolos N . Portanto temos

$$\mathbf{S}_{\text{mat}} = -IEbaN\hat{\mathbf{z}} = N\mathbf{m} \times \mathbf{E} = \mathbf{M} \times \mathbf{E}, \quad (3.60)$$

em que \mathbf{M} é a magnetização do meio. Este valor está de acordo com a equação (3.14) para o fluxo de energia material. Pode-se perceber que se o campo elétrico tiver uma componente na direção de \mathbf{m} , esta componente não realizará trabalho sobre as cargas e não contribuirá para o fluxo de energia material. Por isso o produto vetorial foi incluído na equação acima. Como esse fluxo de energia é o resultado da energia cinética diferenciada das cargas que se movimentam para a esquerda em relação às que se movimentam para a direita no dipolo magnético da figura 3.2, é natural considerar este termo um termo de fluxo de energia material, como o suposto. Portanto este modelo dá suporte à divisão do fluxo de energia total de uma onda eletromagnética em um meio linear em partes eletromagnética e material proposta nesta tese. Vale observar que um circuito de corrente fechada arbitrário pode ser decomposto em dipolos magnéticos retangulares no limite em que a área dos circuitos dos dipolos vai a zero, como ilustrado na figura 3.3. As correntes de dipolos adjacentes que fluem em sentidos opostos se cancelam na figura.

Analisemos agora o que ocorre com o momento das cargas que se movimentam no circuito da figura 3.2. O momento das cargas que se movimentam para a esquerda é maior que o das cargas que se movimentam para a direita por elas terem maior

energia. A razão entre o momento e a energia de uma partícula relativística vale \mathbf{v}/c^2 , em que \mathbf{v} é a velocidade da partícula. Como a corrente I é considerada uniforme ao longo do circuito, se temos n_e partículas que se movimentam para a esquerda com velocidade com módulo v_e e n_d partículas que se movimentam para a direita com velocidade com módulo v_d , devemos ter

$$I = n_d q \frac{v_d}{a} = n_e q \frac{v_e}{a} \rightarrow n_d v_d = n_e v_e = \frac{Ia}{q}. \quad (3.61)$$

Denominando U a energia das cargas que se movimentam para a direita na figura 3.2, o momento total do circuito vale

$$\mathbf{P} = \left[n_d \frac{U v_d}{c^2} - n_e \frac{[U + qEb] v_e}{c^2} \right] \hat{\mathbf{z}} = \frac{IabE}{c^2} (-\hat{\mathbf{z}}) = \frac{1}{c^2} \mathbf{m} \times \mathbf{E}. \quad (3.62)$$

Portanto, se temos uma magnetização \mathbf{M} em um meio sob a ação de um campo elétrico \mathbf{E} , haverá uma densidade de “momento material escondido”

$$\mathbf{p}_{\text{esc.}} = \frac{1}{c^2} \mathbf{M} \times \mathbf{E}. \quad (3.63)$$

Vale ressaltar que o momento linear de um dipolo magnético em um campo elétrico é um efeito relativístico. Se tivéssemos utilizado a fórmula clássica $m\mathbf{v}$ para o momento de uma partícula, nosso cálculo resultaria em um momento total nulo para as cargas do dipolo magnético.

É bastante interessante e inesperado o fato de que um dipolo magnético parado em um campo elétrico uniforme estático possa ter momento linear e um fluxo de energia associados. O que ocorre é que esse momento e fluxo de energia são contrabalanceados pelo momento e fluxo de energia do campo eletromagnético. Se calcularmos o vetor de Poynting resultante do produto vetorial do campo elétrico aplicado com o campo magnético produzido pelo dipolo, veremos que, ao integrarmos em todo o espaço, tanto o momento total (eletromagnético mais material), como o fluxo de energia total são nulos. Esse é um fato essencial para a consistência da teoria, uma vez que uma distribuição estacionária de cargas e campos não pode ter fluxo de energia e momento totais associados. Portanto, apesar de termos utilizado um modelo bastante simples para um dipolo magnético nesta seção, que tem pouco a ver com a natureza dos momentos de dipolo gerados em átomos e moléculas, o fluxo de energia dado pela equação (3.60) e a densidade de momento material da equação

(3.63) devem existir independentemente do modelo de dipolo utilizado, como é discutido na referência [53]. Os efeitos aqui apresentados estão presentes inclusive em momentos magnéticos de spin [54].

3.7 Conclusões

Neste capítulo, propomos uma particular divisão da densidade de energia e do fluxo de energia de ondas eletromagnéticas em meios lineares em partes material e eletromagnética como sendo a mais natural. As partes eletromagnéticas dessas grandezas são iguais em forma às de ondas eletromagnéticas no vácuo quando escritas em termos dos campos médios \mathbf{E} e \mathbf{B} , dadas pelas equações (2.15) e (2.16). Já a parte material da densidade de energia, dada pela equação (3.12), é resultado do trabalho realizado pelo campo eletromagnético da onda incidente nas cargas do meio. Os modelos para meios dielétricos apresentados nas seções 3.3 e 3.4, bem como o modelo para um meio magnético da seção 3.5, são compatíveis com a densidade de energia material da equação (3.12), que corresponde à soma das densidades de energia potencial e cinética das partículas do meio, obtidas diretamente dos modelos utilizados. O cálculo das densidades de energia material nesses modelos e a verificação da concordância com a equação (3.12) é uma contribuição original do trabalho desta tese. Já o fluxo de energia material dado pela equação (3.14), bem como o momento material escondido dado pela equação (3.63), resultam de um efeito relativístico que ocorre quando temos um dipolo magnético sob a ação de um campo elétrico. Na seção 3.6 foi apresentado um modelo que confirma a existência desse fluxo de energia material. Um artigo científico com os resultados deste capítulo está em fase de preparação [55].

Capítulo 4

Divisão do momento de ondas eletromagnéticas em meios lineares em partes material e eletromagnética

Nesta tese, defendemos uma particular divisão das densidades de energia e momento de uma onda eletromagnética em um meio linear, bem como do fluxo de energia, em partes material e eletromagnética. No capítulo anterior apresentamos modelos que mostram que a parte eletromagnética da densidade de energia pode ser escrita como a densidade de energia eletromagnética no vácuo quando escrita em termos dos campos médios \mathbf{E} e \mathbf{B} , de acordo com a equação (2.15), e que a parte material da densidade de energia corresponde à variação da densidade de energia cinética e potencial das cargas do meio devido à presença da onda eletromagnética, de acordo com a equação (3.12). Também mostramos que a parte eletromagnética do fluxo de energia pode ser escrita como o fluxo no vácuo quando escrita em termos de \mathbf{E} e \mathbf{B} , de acordo com a equação (2.16), com a parte material dada pela equação (3.14). Neste capítulo pretendemos mostrar que a densidade de momento eletromagnético em meios lineares também pode ser considerada igual à densidade de momento eletromagnético no vácuo quando escrita em termos dos campos médios \mathbf{E} e \mathbf{B} , de acordo com a equação (2.17), e que o momento material pode ser calculado pela ação da força de Lorentz dos campos eletromagnéticos nas cargas do meio. Isto será feito calculando-se o comportamento de pulsos de ondas eletromagnéticas intera-

gindo com meios lineares não-dispersivos e não-absorvedores e o momento transferido para os meios via força de Lorentz, mostrando que a nossa divisão é compatível com conservação de momento em uma série de exemplos. Também mostraremos que a divisão é compatível com a teoria da relatividade especial através de um argumento baseado em um experimento imaginário. Vale dizer que a forma (2.17) para a densidade de momento eletromagnético é idêntica à forma de Abraham em meios não-magnéticos, onde $\mathbf{M} = 0$. Como em todos os experimentos previamente citados na subseção 2.2.2 as propriedades magnéticas dos meios em questão eram desprezíveis, não há diferença entre os tratamentos com a densidade de momento eletromagnético por nós proposta e com a proposta por Abraham. Apenas em meios magnéticos as diferenças irão aparecer.

Essa idéia de se utilizar diretamente a força de Lorentz para se calcular o momento transferido para a matéria não é de forma alguma nova. Gordon [34], Loudon [35, 56] e Mansuripur [57] calcularam a densidade de momento material de ondas eletromagnéticas em meios dielétricos lineares não-dispersivos desta maneira. Scalora e colaboradores [58] usaram simulações numéricas para calcular o momento transferido para meios dispersivos. Recentemente, Hinds e Barnett [59] usaram a força de Lorentz para calcular o momento transferido para um único átomo. O que realizamos de novo neste capítulo em relação a trabalhos anteriores presentes na literatura é a consideração da força de Lorentz atuando em meios com magnetização não-nula, a defesa da forma (2.17) como a densidade de momento eletromagnético em qualquer meio e a consideração de diversos exemplos em que ondas eletromagnéticas pulsadas interagem com meios lineares não-dispersivos e não-absorventes, testando a divisão proposta para o momento de ondas eletromagnéticas em meios materiais.

4.1 Momento material de ondas eletromagnéticas em meios lineares

O momento adquirido por um meio linear dielétrico não-dispersivo e não-absorvido devido à presença de uma onda eletromagnética pode ser calculado diretamente usando-se a força de Lorentz [34, 35, 56, 57, 58]. A força que age em um dipolo

elétrico pode ser escrita como [1, 2]

$$\mathbf{F}_{\text{dip.}} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{B}, \quad (4.1)$$

em que \mathbf{p} representa o momento de dipolo. Em um meio linear, isotrópico e não-dispersivo, a densidade de dipolos elétricos do meio pode ser escrita como $\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}$, em que χ_e é a susceptibilidade elétrica do meio. É importante ressaltar que a consideração de um meio não-dispersivo consiste em uma aproximação, uma vez que a susceptibilidade elétrica de todo meio material possui inevitavelmente uma dependência da frequência do campo incidente. Contudo, se a onda eletromagnética incidente tiver um espectro de frequências suficientemente estreito, de forma que a susceptibilidade tenha uma variação desprezível nessa região de frequências, a aproximação se torna bastante razoável. Utilizando a identidade vetorial

$$\nabla \left(\frac{1}{2} E^2 \right) = \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} \quad (4.2)$$

e a equação de Maxwell (2.3), podemos reescrever a densidade de força resultante do primeiro termo de (4.1) como [34]

$$\begin{aligned} \chi_e \varepsilon_0 (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} &= \chi_e \varepsilon_0 \left[\nabla \left(\frac{1}{2} E^2 \right) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \right] = \\ &= \chi_e \varepsilon_0 \left[\nabla \left(\frac{1}{2} E^2 \right) + \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Sendo assim, a densidade de força de Lorentz nesse meio pode ser escrita como

$$\mathbf{f}_{\text{diel.}} = \chi_e \varepsilon_0 \left[\nabla \left(\frac{1}{2} E^2 \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right]. \quad (4.4)$$

Em meios magnéticos, haverá também uma densidade de corrente $\nabla \times \mathbf{M}$ que será afetada pela força de Lorentz. Portanto a densidade de força em um meio linear, isotrópico, não-dispersivo, dielétrico e magnético pode ser escrita como

$$\mathbf{f} = \underbrace{\chi_e \varepsilon_0 \nabla \left(\frac{1}{2} E^2 \right)}_{\mathbf{f}_1} + \underbrace{\chi_e \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})}_{\mathbf{f}_2} + \underbrace{(\nabla \times \mathbf{M}) \times \mathbf{B}}_{\mathbf{f}_3}. \quad (4.5)$$

Vale ressaltar que a densidade de força acima só é válida em meios não-dispersivos. As parcelas do momento material devidas à ação das forças \mathbf{f}_1 , \mathbf{f}_2 e \mathbf{f}_3 serão calculadas

separadamente ao longo deste capítulo. No tipo de meio considerado, temos $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} = \chi_m / [(1 + \chi_m)\mu_0] \mathbf{B}$, em que χ_m representa a susceptibilidade magnética do meio.

Na verdade, Mansuripur tratou o problema do momento de ondas eletromagnéticas em meios magnéticos anteriormente [60]. Nesse trabalho, ele utiliza um modelo específico para o meio magnético, obtendo uma equação diferente de $\nabla \times \mathbf{M}$ para a corrente de magnetização no meio, além de tomar o produto vetorial da corrente de magnetização com $\mu_0 \mathbf{H}$ ao invés de \mathbf{B} para encontrar a densidade de força. Não acreditamos que essa seja a alternativa mais natural, por isso apresentamos aqui um tratamento alternativo.

Em nossos exemplos para o tratamento de ondas eletromagnéticas em meios lineares, usaremos pulsos de ondas planas que se propagam na direção $\hat{\mathbf{z}}$ descritos por campos elétricos do tipo

$$\mathbf{E}_i(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{E}(\omega) \exp \left[i \left(\frac{n\omega}{c} z - \omega t \right) \right] \hat{\mathbf{x}}, \quad (4.6)$$

com $\tilde{E}(-\omega) = \tilde{E}^*(\omega)$ e $\mathbf{B}_i = (n/c) |\mathbf{E}_i| \hat{\mathbf{y}}$, $n = \sqrt{(1 + \chi_e)(1 + \chi_m)}$ sendo o índice de refração do meio. A consideração de ondas planas também deve ser vista como uma aproximação. Podemos considerar pulsos com uma pequena divergência angular, de forma que os vetores de onda que os compõem sejam muito próximos do eixo $\hat{\mathbf{z}}$ e que ao considerarmos que as componentes $\hat{\mathbf{z}}$ desses vetores de onda sejam iguais à sua norma estejamos fazendo uma boa aproximação.

Para ondas do tipo da equação (4.6) em meios não-dispersivos, podemos realizar trocas de diferenciais temporais por espaciais e vice-versa em (4.6) ao fazer as substituições $\partial/\partial z \leftrightarrow -n/c \partial/\partial t$. Sendo assim, as densidades de força \mathbf{f}_1 e \mathbf{f}_3 da equação (4.5) podem ser escritas como

$$\mathbf{f}_1 = -\frac{\chi_e \varepsilon_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{f}_3 = \frac{\chi_m (1 + \chi_e) \varepsilon_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (4.7)$$

Substituindo essas expressões para \mathbf{f}_1 e \mathbf{f}_3 , a densidade de momento material para uma onda eletromagnética em um meio homogêneo, linear, não-dispersivo e não-absorvido pode ser escrita como

$$\mathbf{p}_{\text{mat}}(t) = \int_{-\infty}^t dt' \mathbf{f}(t') = \frac{(\chi_e + \chi_m + \chi_e \chi_m)}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}(t) \times \mathbf{B}(t). \quad (4.8)$$

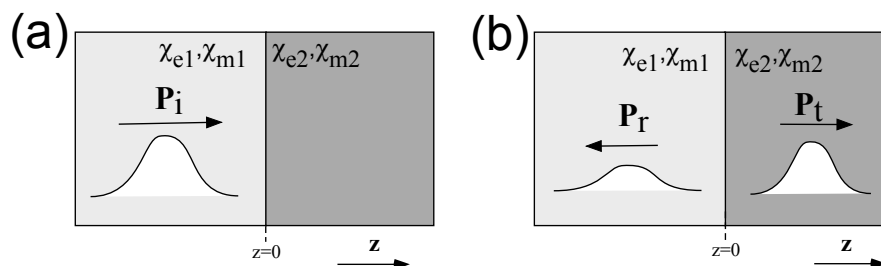


Figura 4.1: (a) Um pulso eletromagnético com momento total \mathbf{P}_i se propaga no meio 1, com susceptibilidades elétrica e magnética χ_{e1} and χ_{m1} , em direção a um meio 2, com susceptibilidades χ_{e2} and χ_{m2} . (b) Os pulsos refletido e transmitido resultantes, com momentos totais \mathbf{P}_r e \mathbf{P}_t .

É importante ressaltar que essa densidade de momento material se propaga junto com o pulso eletromagnético e desaparece após a passagem do pulso pelo meio. Em cada dipolo oscilante do meio, a força média exercida pelo campo eletromagnético da onda atua em um sentido enquanto a amplitude da onda cresce, mas no sentido oposto enquanto a amplitude decresce, de forma que a integral da força total com a passagem do pulso é nula. Portanto cada elemento de dipolo do meio possui momento material apenas enquanto a onda está presente na região.

No restante do capítulo, será considerado que a densidade de momento total de uma onda eletromagnética em um meio homogêneo linear será a soma da densidade de momento material (4.8) com a densidade de momento eletromagnético (2.17). Calculando também transferências permanentes de momento para os meios pela ação da força de Lorentz em algumas situações, a conservação do momento total nesses processos e a consistência da divisão proposta para a densidade de momento total em partes eletromagnética e material serão demonstradas.

4.2 Reflexão e transmissão de um pulso eletromagnético pela interface entre dois meios lineares

Como primeiro exemplo, considere a situação ilustrada na figura 4.1. Inicialmente, temos um pulso de radiação eletromagnética no meio 1, com susceptibilidade elétrica

χ_{e1} , susceptibilidade magnética χ_{m1} e índice de refração $n_1 = \sqrt{(1 + \chi_{e1})(1 + \chi_{m1})}$, se propagando na direção $\hat{\mathbf{z}}$ em direção à interface com o meio 2, com susceptibilidade elétrica χ_{e2} , susceptibilidade magnética χ_{m2} e índice de refração $n_2 = \sqrt{(1 + \chi_{e2})(1 + \chi_{m2})}$. A interface se localiza no plano $z = 0$ e a incidência é normal. Após algum tempo, teremos um pulso transmitido no meio 2 e um refletido no meio 1. Será mostrado que a divisão proposta para a densidade de momento de um pulso de radiação eletromagnética leva à conservação de momento no processo. Representando o campo elétrico do pulso incidente como na equação (4.6), a parte eletromagnética de seu momento pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_0 &= \int d^3r \varepsilon_0 \mathbf{E}_i \times \mathbf{B}_i = \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int d^3r \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \tilde{E}(\omega) \frac{n}{c} \tilde{E}(\omega') e^{i\frac{n}{c}(\omega+\omega')z - i(\omega+\omega')t} \hat{\mathbf{z}} \\
 &= \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int dx \int dy \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \tilde{E}(\omega) \frac{n}{c} \tilde{E}(\omega') e^{-i(\omega+\omega')t} 2\pi \delta(\omega + \omega') \frac{c}{n} \hat{\mathbf{z}} \\
 &= \varepsilon_0 \int dx \int dy \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |\tilde{E}(\omega)|^2 \hat{\mathbf{z}}, \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

em que da primeira para a segunda linha foi utilizado o fato de que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-iaz} = 2\pi \delta(a). \tag{4.10}$$

As integrais em x e y na equação (4.9) são, em princípio, infinitas. Mas uma onda plana é sempre uma aproximação, portanto a amplitude $\tilde{E}(\omega)$ deve decair para x e y grandes. Não nos preocuparemos com a forma deste decaimento aqui, apenas assumiremos que a integral acima é finita. Integrando também as densidades de momento material conforme a equação (4.8), encontramos que o momento total da onda incidente (\mathbf{P}_i), da refletida (\mathbf{P}_r) e da transmitida (\mathbf{P}_t) são

$$\mathbf{P}_i = \left(1 + \frac{\chi_{e1} + \chi_{m1} + \chi_{e1}\chi_{m1}}{2} \right) \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{P}_r = -|r|^2 \mathbf{P}_i, \tag{4.11}$$

$$\mathbf{P}_t = |t|^2 \left(1 + \frac{\chi_{e2} + \chi_{m2} + \chi_{e2}\chi_{m2}}{2} \right) \mathbf{P}_0, \tag{4.12}$$

em que r e t são os coeficientes de reflexão e transmissão, respectivamente.

Há também uma transferência permanente de momento para o meio 1 durante o processo de reflexão que não se propaga com os pulsos eletromagnéticos. Podemos observar na equação (4.5) que é o campo elétrico total (incidente mais refletido) que

gera o termo de densidade de força \mathbf{f}_1 . Como $E^2 = E_i^2 + E_r^2 + 2\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_r$ no meio 1, devemos considerar o termo $\mathbf{f}'_1 = \chi_{e1}\varepsilon_0 \nabla (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_r)$. O momento transferido devido a esse termo é

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int dx \int dy \int_{-\infty}^0 dz \chi_{e1}\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_r) \hat{\mathbf{z}} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int dx \int dy \chi_{e1}\varepsilon_0 \mathbf{E}_i(0, t) \cdot \mathbf{E}_r(0, t) \hat{\mathbf{z}} = r\chi_{e1}\mathbf{P}_0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

com \mathbf{P}_0 dado pela equação (4.9).

Como $\mathbf{E}_i \times \mathbf{B}_r + \mathbf{E}_r \times \mathbf{B}_i = 0$, a densidade de força \mathbf{f}_2 na equação (4.5) não contribui para uma transferência permanente de momento para o meio 1. A transferência permanente de momento da equação (4.13) não foi levada em consideração nos trabalhos anteriores que utilizam a força de Lorentz para tratar a reflexão de ondas eletromagnéticas por interfaces entre dois dielétricos [35, 56, 57], portanto esses trabalhos são compatíveis com conservação de momento apenas quando o meio de incidência é o vácuo e $\mathbf{P}'_1 = 0$. O cálculo dessa transferência permanente de momento nessa situação é uma contribuição do trabalho desta tese.

A densidade de força \mathbf{f}_3 na equação (4.5) também contribui para uma transferência permanente de momento para o meio 1. Podemos observar que para pulsos eletromagnéticos como os da equação (4.6), utilizando as substituições $\partial/\partial z \leftrightarrow -n/c \partial/\partial t$ e escrevendo $\mathbf{M} = \chi_m/[(1 + \chi_m)\mu_0]\mathbf{B}$, essa densidade de força pode ser escrita como

$$\mathbf{f}_3 = -\frac{\chi_m}{\mu_0(1 + \chi_m)} \nabla \left(\frac{B^2}{2} \right). \quad (4.14)$$

Com um cálculo análogo ao que nos levou à equação (4.13), notando que $\mathbf{B}_r = -r\mathbf{B}_i$, podemos ver que essa densidade de força transfere um momento \mathbf{P}'_3 para o meio 1 dado por

$$\mathbf{P}'_3 = r\chi_{m1}(1 + \chi_{e1})\mathbf{P}_0. \quad (4.15)$$

Há ainda uma outra contribuição para o momento transferido para a interface devido à descontinuidade de \mathbf{M} na interface. Considere uma extensão δz muito menor que o comprimento de onda da luz em torno de $z = 0$. Nessa região, o termo \mathbf{f}_3 da equação (4.5) pode ser escrito como

$$\mathbf{f}_3|_{z=0} = \frac{1}{\delta z} \left[\frac{\chi_{m2}}{1 + \chi_{m2}} B_2 - \frac{\chi_{m1}}{1 + \chi_{m1}} B_1 \right] \frac{(-\hat{\mathbf{x}})}{\mu_0} \times \mathbf{B}, \quad (4.16)$$

em que $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_i(1 - r)$ é o campo magnético logo antes da interface, no meio 1, $\mathbf{B}_2 = [(1 + \chi_{m2})/(1 + \chi_{m1})]\mathbf{B}_1$ é o campo magnético logo após a interface, no meio 2, de acordo com a exigência da continuidade de \mathbf{H} , e $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)/2$ é o campo médio na região. Integrando em z nessa extensão δz e em x , y e t , após alguma álgebra obtemos a seguinte transferência de momento para a interface:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'_4 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int dx \int dy \int_{-\delta z/2}^{+\delta z/2} dz \mathbf{f}_3 \\ &= \frac{(\chi_{m1} - \chi_{m2})(1 + \chi_{e1})(1 - r)^2}{2} \left[1 + \frac{1 + \chi_{m2}}{1 + \chi_{m1}} \right] \mathbf{P}_0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Usando as equações (4.11), (4.12), (4.13), (4.15) e (4.17) e substituindo os valores de r e t [1, 2],

$$r = \frac{\sqrt{(1 + \chi_{e1})(1 + \chi_{m2})} - \sqrt{(1 + \chi_{e2})(1 + \chi_{m1})}}{\sqrt{(1 + \chi_{e1})(1 + \chi_{m2})} + \sqrt{(1 + \chi_{e2})(1 + \chi_{m1})}}, \quad (4.18)$$

$$t = \frac{2\sqrt{(1 + \chi_{e1})(1 + \chi_{m2})}}{\sqrt{(1 + \chi_{e1})(1 + \chi_{m2})} + \sqrt{(1 + \chi_{e2})(1 + \chi_{m1})}}, \quad (4.19)$$

após bastante álgebra pode ser mostrado que

$$\mathbf{P}_r + \mathbf{P}_t + \mathbf{P}'_1 + \mathbf{P}'_3 + \mathbf{P}'_4 = \mathbf{P}_i. \quad (4.20)$$

A obtenção de um balanço de momento correto neste problema mostra a consistência da divisão proposta do momento de ondas eletromagnéticas em meios lineares em partes material e eletromagnética.

4.3 Pressão de radiação em espelhos submersos em meios lineares

Como segundo exemplo, considere que o meio 2 na figura 4.1 seja um bom condutor, que reflete completamente o pulso incidente descrito pela equação (4.6). A transferência de momento para o espelho pode ser calculada por meio da força de Lorentz que age na corrente induzida no espelho. O campo magnético dentro do espelho ($z > 0$) pode ser escrito como [2]

$$\mathbf{B}_{\text{esp}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{2n_1}{(1 + \chi_{m1})c} \tilde{E}(\omega) \exp [(-\kappa + ik)z - i\omega t] \hat{\mathbf{y}}, \quad (4.21)$$

em que k e κ são funções reais de ω , com $\kappa(-\omega) = \kappa(\omega)$ e $k(-\omega) = -k(\omega)$. Essa forma para o campo magnético garante a continuidade de \mathbf{H} na interface e decresce exponencialmente com z . Desprezando-se a presença de um pequeno campo elétrico dentro do espelho que leva à absorção de radiação pelo meio, a densidade de corrente no espelho pode ser escrita como $\mathbf{J}_{\text{esp}} = (1/\mu_0)\nabla \times \mathbf{B}_{\text{esp}}$. Portanto a transferência de momento para o espelho devido à reflexão do pulso eletromagnético é

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{esp}} &= \int dx \int dy \int_0^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} dt \mathbf{J}_{\text{esp}} \times \mathbf{B}_{\text{esp}} \\ &= \int dx \int dy \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{2\varepsilon_0(1 + \chi_{e1})}{(1 + \chi_{m1})} |\tilde{E}(\omega)|^2 \frac{(\kappa - ik)}{\kappa} \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Temos $|\tilde{E}(-\omega)| = |\tilde{E}(\omega)|$, $\kappa(-\omega) = \kappa(\omega)$ e $k(-\omega) = -k(\omega)$, de forma que quando integrarmos o termo que multiplica $(-ik/\kappa)$ em ω obteremos zero. Portanto o momento transferido para o espelho após a reflexão do pulso é

$$\mathbf{P}_{\text{esp}} = 2 \left(\frac{1 + \chi_{e1}}{1 + \chi_{m1}} \right) \mathbf{P}_0, \quad (4.23)$$

com \mathbf{P}_0 dado pela equação (4.9).

A mesma transferência de momento é obtida com a condição $\mathbf{P}_{\text{esp}} = \mathbf{P}_i - \mathbf{P}_r - \mathbf{P}'_1 - \mathbf{P}'_3 - \mathbf{P}'_4$ usando as equações (4.11), (4.12), (4.13), (4.15) e (4.17) com $r = -1$ e $\chi_{m2} = 0$. Dessa forma, chegamos à mesma expressão (4.23) para \mathbf{P}_{esp} , mostrando mais uma vez a consistência do tratamento.

De acordo com as equações (2.15) e (3.12) e com o fato de que $|\mathbf{B}| = n|\mathbf{E}|/c$, em meios não-dispersivos a densidade de energia total da onda pode ser escrita como $u_{\text{tot}} = (1 + \chi_{e1})\varepsilon_0|\mathbf{E}|^2$. Portanto a energia do pulso incidente (4.6) é

$$U_i = \int d^3r (1 + \chi_{e1})\varepsilon_0 E_i^2 = \frac{(1 + \chi_{e1})c}{n_1} |\mathbf{P}_0|. \quad (4.24)$$

A razão entre o módulo do momento transferido para o espelho (4.23) e a energia incidente (4.24) é $2n_1/[(1 + \chi_{m1})c]$, em acordo com os resultados experimentais de Jones e colaboradores [13, 14, 15]. Nesses experimentos, as susceptibilidades magnéticas dos meios utilizados eram muito pequenas para afetarem os resultados, logo essa razão usualmente é descrita como $2n_1/c$. Esses experimentos são frequentemente utilizados para dar suporte à formulação de Minkowski, mas vemos que o tratamento aqui proposto também prevê os resultados experimentais corretamente.

Como este tratamento vale para meios sem dispersão, ele não é capaz de dizer se razão entre o módulo do momento transferido para o espelho e a energia do pulso incidente depende da velocidade de grupo ou de fase da onda. Os experimentos mostram que a razão depende da velocidade de fase [15].

Em um trabalho recente [61], Mansuripur trata o problema da pressão de radiação em um espelho imerso em um meio linear dielétrico e não-magnético utilizando um modelo de um meio com índice de refração imaginário para descrever o espelho. Ele considera casos em que o coeficiente de reflexão complexo vale $e^{i\phi}$ e calcula a força de Lorentz que atua na corrente induzida no espelho. No tratamento aqui proposto para a reflexão de um pulso de radiação por um espelho não-magnético imerso em um meio linear dielétrico e magnético, o momento transferido para o espelho pode ser calculado utilizando-se as equações (4.11), (4.13), (4.15) e (4.17) como $\mathbf{P}_{\text{esp}} = \mathbf{P}_i - \mathbf{P}_r - \mathbf{P}'_1 - \mathbf{P}'_3 - \mathbf{P}'_4$ com $r = e^{i\phi}$ e $\chi_{m2} = 0$. Considerando termos até a primeira ordem em χ_{m1} , obtemos

$$\mathbf{P}_{\text{esp}} \simeq 2 \left[1 + (\chi_{e1} - \chi_{m1} - \chi_{e1}\chi_{m1})\text{sen}^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) \right] \mathbf{P}_0, \quad (4.25)$$

que é compatível com o resultado obtido por Mansuripur quando $\chi_{m1} = 0$ e pode ser experimentalmente testado. Como em nosso tratamento nenhum modelo específico para o espelho é adotado, sendo consideradas apenas as propriedades do meio linear, nosso tratamento é mais geral que o de Mansuripur. Além disso, incluímos propriedades magnéticas ao meio linear, que não são consideradas no trabalho de Mansuripur. Vemos que, para meios não-magnéticos, a pressão de radiação pode variar desde o esperado considerando-se que o momento dos fótons refletidos tenha o valor de Minkowski $n\hbar\omega/c$ para $\phi = \pi$, que é o caso de espelhos metálicos, utilizados por Jones e colaboradores [13, 14, 15], até o valor de Abraham $\hbar\omega/(nc)$ para $\phi = 0$. Este exemplo mostra bem a vantagem de se utilizar nosso formalismo no tratamento do problema.

4.4 Transferência de momento para uma película anti-refletora

Em nosso próximo exemplo, considere que tenhamos uma película anti-refletora entre os meios 1 e 2 que consiste em um material com susceptibilidade elétrica χ'_e

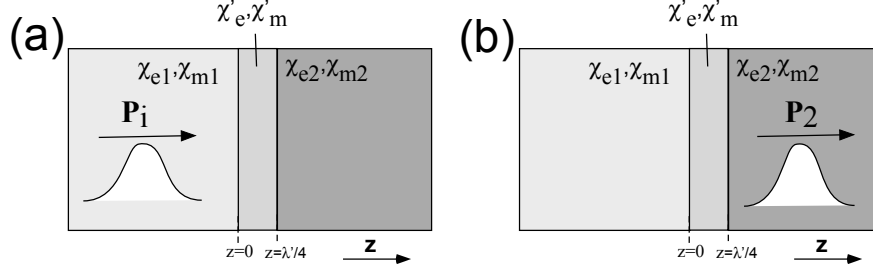


Figura 4.2: (a) Um pulso eletromagnético com momento total \mathbf{P}_i se propaga no meio 1, com susceptibilidades elétrica e magnética χ_{e1} e χ_{m1} , em direção ao meio 2, com susceptibilidades elétrica e magnética χ_{e2} e χ_{m2} . Há uma película anti-refletora entre esses meios que consiste em um material com susceptibilidades elétrica e magnética χ'_e e χ'_m tais que $(1 + \chi'_e) = \sqrt{(1 + \chi_{e1})(1 + \chi_{e2})}$ e $(1 + \chi'_m) = \sqrt{(1 + \chi_{m1})(1 + \chi_{m2})}$. A espessura da película é $\lambda'/4$, λ' sendo o comprimento de onda da frequência central do pulso neste meio. Apesar da ilustração, é assumindo que o pulso é muito mais comprido que a espessura da película. (b) O pulso foi completamente transmitido para o meio 2 e tem momento total \mathbf{P}_2 .

obedecendo $(1 + \chi'_e) = \sqrt{(1 + \chi_{e1})(1 + \chi_{e2})}$, com susceptibilidade magnética χ'_m obedecendo $(1 + \chi'_m) = \sqrt{(1 + \chi_{m1})(1 + \chi_{m2})}$ e espessura $\lambda'/4$, λ' sendo o comprimento de onda da frequência central do pulso eletromagnético nesse meio. Se tivermos um pulso incidente aproximadamente monocromático no meio 1 se propagando em direção à película ele será totalmente transmitido para o meio 2. As situações inicial e final estão ilustradas na figura 4.2. Se o campo elétrico do pulso incidente \mathbf{E}_i for descrito pela equação (4.6), o campo elétrico do pulso transmitido será [62]

$$\mathbf{E}_2(z, t) = \left[\frac{(1 + \chi_{e1})(1 + \chi_{m2})}{(1 + \chi_{e2})(1 + \chi_{m1})} \right]^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{E}(\omega) \exp \left[i \left(\frac{n_2 \omega}{c} z - \omega t \right) \right] \hat{\mathbf{x}}. \quad (4.26)$$

Os momentos totais dos pulsos incidente \mathbf{P}_i e transmitido \mathbf{P}_2 podem ser escritos como

$$\mathbf{P}_i = \left(1 + \frac{\chi_{e1} + \chi_{m1} + \chi_{e1}\chi_{m1}}{2} \right) \mathbf{P}_0, \quad (4.27)$$

$$\mathbf{P}_2 = \left[\frac{(1 + \chi_{e1})(1 + \chi_{m2})}{(1 + \chi_{e2})(1 + \chi_{m1})} \right]^{1/2} \left(1 + \frac{\chi_{e2} + \chi_{m2} + \chi_{e2}\chi_{m2}}{2} \right) \mathbf{P}_0, \quad (4.28)$$

com \mathbf{P}_0 dado pela equação (4.9). Como os momentos dos pulsos incidente e transmitido são diferentes, deve haver uma transferência de momento para a película

anti-refletora para que tenhamos conservação de momento no processo. Mostraremos que a utilização da densidade de força da equação (4.5) atuando na película anti-refletora garante a conservação de momento no processo. Chamemos \mathbf{E}' e \mathbf{B}' os campos elétrico e magnético na região da película. As condições de contorno impõem [1, 2]

$$\mathbf{E}'|_{z=0} = \mathbf{E}_1|_{z=0}, \quad \mathbf{E}'|_{z=\lambda'/4} = \mathbf{E}_2|_{z=\lambda'/4}, \quad \frac{\mathbf{B}'|_{z=0}}{1 + \chi'_m} = \frac{\mathbf{B}_1|_{z=0}}{1 + \chi_{m1}}, \quad \frac{\mathbf{B}'|_{z=\lambda'/4}}{1 + \chi'_m} = \frac{\mathbf{B}_2|_{z=\lambda'/4}}{1 + \chi_{m2}}. \quad (4.29)$$

Escrevendo \mathbf{f}_3 da equação (4.5) como na equação (4.14) e integrando a densidade de força \mathbf{f} no tempo e no volume da película, obtemos o momento transferido para ela:

$$\mathbf{P}''_a = \int dx \int dy \int_0^{\lambda'/4} dz \int_{-\infty}^{+\infty} dt \mathbf{f} = \frac{\chi'_e + \chi'_m + \chi'_e \chi'_m}{2} \left[\sqrt{\frac{(1 + \chi_{e1})(1 + \chi_{m2})}{(1 + \chi_{e2})(1 + \chi_{m1})}} - 1 \right] \mathbf{P}_0. \quad (4.30)$$

Também devemos considerar as transferências de momento para as interfaces da película com os meios 1 e 2 devido às descontinuidades da magnetização \mathbf{M} . Denominando \mathbf{P}''_b o momento transferido em $z = 0$ e \mathbf{P}''_c o momento transferido em $z = \lambda'/4$ e repetindo o tratamento da seção 4.2, obtemos

$$\mathbf{P}''_b = \frac{(\chi_{m1} - \chi'_m)(2 + \chi_{m1} + \chi'_m)(1 + \chi_{e1})}{2(1 + \chi_{m1})} \mathbf{P}_0, \quad (4.31)$$

$$\mathbf{P}''_c = \frac{(\chi'_m - \chi_{m2})(2 + \chi'_m + \chi_{m2})(1 + \chi_{e2})}{2(1 + \chi_{m2})} \sqrt{\frac{(1 + \chi_{e1})(1 + \chi_{m2})}{(1 + \chi_{e2})(1 + \chi_{m1})}} \mathbf{P}_0. \quad (4.32)$$

A transferência total de momento para a película anti-refletora devido à passagem do pulso é $\mathbf{P}'' = \mathbf{P}''_a + \mathbf{P}''_b + \mathbf{P}''_c$. Usando as equações (4.27), (4.28), (4.30), (4.31) e (4.32), pode-se mostrar que

$$\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}'' = \mathbf{P}_1 \quad (4.33)$$

e o momento linear total é conservado no processo. Mais uma vez, vemos a consistência da divisão proposta para o momento da onda.

4.5 Compatibilidade com a teoria da relatividade especial

Como último exemplo, podemos verificar se o nosso tratamento concorda com a teoria da relatividade especial em um exemplo similar ao que foi utilizado na seção

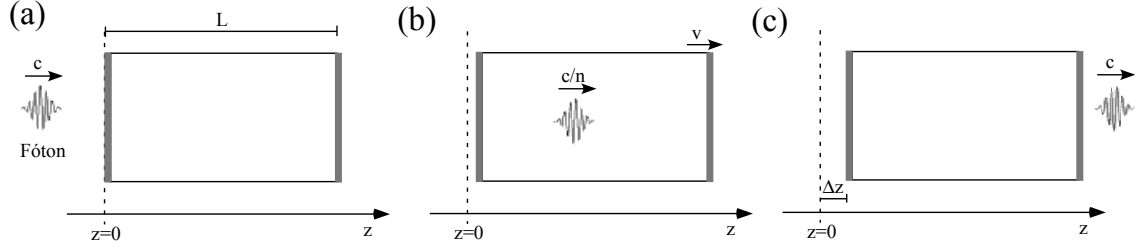


Figura 4.3: (a) Um fóton se propaga em direção a um bloco de massa M , comprimento L , susceptibilidades elétrica e magnética χ_{e2} e χ_{m2} e películas anti-refletoras em ambos os lados. (b) Ao penetrar no bloco, o fóton diminui sua velocidade de propagação e o bloco passa a se movimentar. (c) Com a saída do fóton do bloco, este volta a ter velocidade nula, tendo se deslocado uma distância Δz .

2.1 para mostrar que a razão entre a densidade de momento e o fluxo de energia de ondas eletromagnéticas no vácuo deve ser $1/c^2$. Imagine que tenhamos um fóton de energia $\hbar\omega$ e momento $\mathbf{P}_0 = (\hbar\omega/c)\hat{\mathbf{z}}$ inicialmente no vácuo que é transmitido por um bloco transparente com susceptibilidades elétrica e magnética χ_{e2} e χ_{m2} , índice de refração $n_2 = \sqrt{(1 + \chi_{e2})(1 + \chi_{m2})}$, comprimento L , massa M e películas anti-refletoras em ambas as interfaces, como ilustrado na figura 4.3. O fóton sofre um atraso espacial $(n_2 - 1)L$ em relação à propagação no vácuo. De acordo com a teoria da relatividade, a velocidade do centro de massa-energia do sistema não pode ser alterada pela passagem do fóton pelo bloco, já que não há agentes externos. Portanto o bloco deve sofrer um deslocamento Δz tal que [63, 64, 65]

$$Mc^2\Delta z = \hbar\omega(n_2 - 1)L. \quad (4.34)$$

Mostraremos que nosso formalismo prevê esse deslocamento de forma direta. O momento material do bloco \mathbf{P}_b durante a passagem do fóton tem basicamente duas contribuições. A primeira é o momento transferido para a película anti-refletora da entrada. A segunda é a parte material do momento do pulso eletromagnético dentro do bloco. Usando as equações (4.8), (4.28), (4.30), (4.31) e (4.32) com $\chi_{m1} = \chi_{e1} = 0$, encontramos que o momento total do bloco enquanto o fóton está em seu interior é

$$\mathbf{P}_b = \frac{n_2 - 1 - \chi_{m2}}{n_2} \frac{\hbar\omega}{c} \hat{\mathbf{z}}. \quad (4.35)$$

Depois da passagem do fóton, o momento do bloco se anula. Parte deste momento está na forma de “momento escondido” [23, 51, 52], como foi discutido na seção 3.6. O “momento escondido” é um efeito relativístico que não está associado ao movimento do bloco. De acordo com a equação (3.63), a densidade de “momento escondido” vale $\mathbf{M} \times \mathbf{E}$. Integrando esta densidade no volume do pulso, o momento total “escondido” no bloco vale $\mathbf{P}_{\text{esc.}} = -\chi_{m2}\hbar\omega/(n_2c)\hat{\mathbf{z}}$. Para encontrar a velocidade do bloco, devemos subtrair esse “momento escondido” do momento total do bloco e dividir por sua massa. Como o fóton demora um tempo n_2L/c para atravessar o bloco, o deslocamento deste vale

$$\Delta z = \frac{|\mathbf{P}_b - \mathbf{P}_{\text{esc.}}|}{M} \frac{n_2L}{c} = \frac{\hbar\omega(n_2 - 1)L}{Mc^2}, \quad (4.36)$$

em concordância com a equação (4.34). Mais uma vez vemos a consistência da divisão proposta para o momento de ondas eletromagnéticas em meios lineares em partes material e eletromagnética.

4.6 Conclusões

Neste capítulo, defendemos uma particular divisão do momento de ondas eletromagnéticas em meios lineares em partes material e eletromagnética como sendo a mais natural. Nessa divisão, a densidade de momento eletromagnético tem a forma $\varepsilon_0\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ em qualquer meio e a parte material do momento é calculada diretamente através da força de Lorentz que os campos eletromagnéticos exercem sobre as cargas do meio. Essa divisão se mostrou coerente em uma série de exemplos que consideram a propagação de pulsos eletromagnéticos em meios lineares dielétricos e magnéticos não-dispersivos, pois obtemos um balanço correto para o momento linear total em todos os problemas tratados. A divisão também se mostrou compatível com a teoria da relatividade especial, como discutido na seção 4.5.

Além disso, calculamos transferências permanente de momento para interfaces entre meios devido à passagem de um pulso eletromagnético que não haviam sido consideradas em tratamentos anteriores [35, 56, 57], mostramos a compatibilidade da divisão proposta com os experimentos de Jones e colaboradores [13, 14, 15] e generalizamos o tratamento de pressão de radiação em espelhos imersos em líquidos dielétricos [61], que pode ser submetido a testes experimentais. Os resultados deste capítulo foram publicados na referência [66].

Capítulo 5

A função de onda do fóton e sua interação com a matéria

Newton e Wigner mostraram que não existe um operador posição para uma partícula sem massa e com spin maior que $1/2$ [30]. Isso levou muitos autores à conclusão de que não é possível se definir uma função de onda para o fóton, que tem massa zero e spin (ou helicidade) 1. Contudo, é possível se construir uma função das coordenadas espaciais que represente completamente o estado de um fóton [24, 25, 26]. A nossa opinião, que coincide com a dos autores citados, é que uma função com esta característica pode ser chamada de função de onda do fóton. Acontece que o módulo ao quadrado dessa função de onda tem unidade de densidade de energia e sua integral em um volume tem a interpretação de ser a energia média do fóton naquele volume. Não há a associação direta com a probabilidade de se detectar o fóton naquele volume, a não ser que as dimensões do volume sejam muito maiores que o seu comprimento de onda [31]. Mas vale lembrar que em mecânica quântica relativística a localização de partículas massivas também não tem uma interpretação tão simples e direta. E a densidade de energia de um fóton pode ter um decaimento exponencial com a distância [67], assim como a localização de partículas massivas relativísticas.

Bialynicki-Birula [24, 25] e, independentemente, Sipe [26] construíram uma equação de onda para a fótons no vácuo que se mostra equivalente às equações de Maxwell no vácuo. Posteriormente, Smith e Raymer mostraram que ao aplicarmos o processo de segunda quantização à função de onda introduzida por Bialynicki-

Birula e Sipe obtemos a teoria quântica de campos para o eletromagnetismo [29]. A partir desses trabalhos, o nosso objetivo era construir uma equação de onda para fótons que incluisse a interação com a matéria. Nas seções que se seguem, após apresentarmos alguns aspectos desses trabalhos anteriores, mostraremos como é possível se incluir a interação de fótons com meios contínuos através de considerações sobre a conservação da energia, o que acaba por acrescentar um termo associado à densidade de corrente elétrica induzida no meio à equação de onda do fóton. Aplicando o processo de segunda quantização à função de onda do fóton, nosso formalismo permite a descrição de fenômenos puramente quânticos. Como exemplo de aplicação do formalismo, o estado dos fótons gêmeos gerados pela conversão paramétrica descendente será calculado.

5.1 Equação de onda para fótons no vácuo

Apresentamos aqui uma dedução da equação de onda de um fóton no vácuo baseada nas referências [27, 29]. Essa dedução segue os mesmos passos que a dedução de Dirac para a equação de onda relativística de um elétron [68, 69, 70]. Começemos com a equação de energia de Einstein para uma partícula livre relativística:

$$E = \pm \sqrt{c^2 |\mathbf{p}|^2 + m^2 c^4}, \quad (5.1)$$

em que m é a massa de repouso da partícula, E sua energia, \mathbf{p} seu momento e $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ a velocidade da luz no vácuo. Para partículas de massa nula, temos: $E = \pm c \sqrt{|\mathbf{p}|^2}$. O fóton é uma partícula sem massa e com spin (ou helicidade) 1. Os graus de liberdade internos de uma partícula de spin 1 podem ser escritos como um vetor Ψ no espaço tridimensional. Consideremos que esse vetor que representa seu spin seja ortogonal ao seu momento: $\mathbf{p} \cdot \Psi = 0$. Dessa forma, podemos encontrar um operador \hat{A} tal que $\hat{A}^2 \Psi = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) \Psi$ e possamos escrever $E \Psi = \pm c \hat{A} \Psi$. Podemos verificar o operador $\hat{A} = \pm i \mathbf{p} \times$ satisfaz essa condição. Utilizando uma identidade vetorial, temos

$$\hat{A} \hat{A} \Psi = -\mathbf{p} \times (\mathbf{p} \times \Psi) = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) \Psi - \mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot \Psi) = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) \Psi, \quad (5.2)$$

já que estamos considerando $\mathbf{p} \cdot \Psi = 0$.

Substituindo E e \mathbf{p} pelos operadores correspondentes $i\hbar\partial/\partial t$ e $-i\hbar\nabla$ e introduzindo o operador helicidade $\hat{\sigma}$ cujos autoestados têm autovalores ± 1 , correspondendo a helicidades positiva e negativa para o fóton, chegamos a :

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = hc\hat{\sigma}\nabla \times \Psi . \quad (5.3)$$

Já a condição $\mathbf{p} \cdot \Psi = 0$ impõe

$$\nabla \cdot \Psi = 0 . \quad (5.4)$$

A equação de onda (5.3) para o fóton pode ser escrita de outra maneira, mais semelhante com a forma de Dirac para a equação de onda relativística de um elétron, se fizermos uso das matrizes de spin 1 \hat{S}_x , \hat{S}_y e \hat{S}_z :

$$\hat{S}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \hat{S}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{S}_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (5.5)$$

É simples verificar que o produto vetorial de dois vetores pode ser escrito como

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -i(\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{S}})\mathbf{b} . \quad (5.6)$$

Dessa forma, a equação (5.3) pode ser escrita como

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = c\hat{\sigma} \left(\hat{\mathbf{S}} \cdot \frac{\hbar}{i}\nabla \right) \Psi . \quad (5.7)$$

A helicidade é uma propriedade intrínseca do fóton, como o spin de um elétron. Ela representa a projeção do momento angular intrínseco na direção do momento linear da partícula. O fóton é uma partícula de spin 1 sem massa. Partículas sem massa com spin S só podem ter projeções $\pm\hbar S$ de seu momento angular intrínseco na direção de seu momento linear, diferentemente de partículas massivas, que podem ter projeções $-S, -S + 1, -S + 2, \dots, S - 1, S$ vezes \hbar [71]. Por isso, apesar de o fóton ter spin 1, o que permitiria 3 estados ortogonais internos para uma partícula massiva (projeções de spin $\pm\hbar$ e 0 na direção $\hat{\mathbf{z}}$), apenas dois ocorrem, com projeções $\pm\hbar$ na direção de propagação do fóton. Devido a esse fato, o spin de uma partícula sem massa recebe outro nome: helicidade, que pode ser positiva ou negativa.

Uma outra diferença do spin de partículas sem massa para o de partículas massivas é que o valor dessa projeção na direção de propagação não se altera com

transformações de Lorentz. Se temos um elétron com momento $p\hat{\mathbf{z}}$ e projeção de spin $1/2\hbar$ nessa direção, podemos realizar uma transformação de Lorentz que mude o momento do elétron para $-p\hat{\mathbf{z}}$, de forma que a projeção de seu spin na direção de seu momento se inverta. Isso não é possível para um fóton, já que ele se propaga na velocidade da luz. Não existe transformação de Lorentz que faça com que um fóton com helicidade positiva em um referencial apareça com helicidade negativa em outro. Portanto um fóton com helicidade negativa pode ser considerado uma partícula distinta de um fóton com helicidade positiva [28]. Logo poderíamos ter considerado no início de nosso cálculo que quando colocamos um sinal positivo à direita da equação (5.2) obtemos a equação de onda de uma partícula e quando colocamos o sinal negativo obtemos a equação de onda de outra partícula. Contudo, é possível se construir estados de superposição de helicidade para fótons, por isso é conveniente considerarmos as diferentes helicidades como diferentes estados de uma mesma partícula.

A helicidade do fóton está associada à sua polarização. Fótons com helicidade positiva têm polarização circular esquerda e fótons com helicidade negativa têm polarização circular direita. Estados arbitrários de polarização podem ser obtidos com combinações das duas helicidades.

Decompondo a função de onda do fóton Ψ nos autoestados de helicidade Ψ^+ e Ψ^- , explicitando as componentes real e imaginária e incluindo constantes por conveniência, temos:

$$\Psi = \Psi^+ + \Psi^- , \text{ com } \Psi^\pm = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2}}\mathbf{E}_\pm \pm i\sqrt{\frac{1}{2\mu_0}}\mathbf{B}_\pm \text{ e } \hat{\sigma}\Psi^\pm = \pm\Psi^\pm . \quad (5.8)$$

Substituindo na equação (5.3), a parte imaginária nos fornece:

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} , \text{ com} \quad (5.9)$$

$$\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- \text{ e } \mathbf{B} \equiv \mathbf{B}_+ + \mathbf{B}_- . \quad (5.10)$$

Aplicando o operador $\hat{\sigma}$ na equação (5.3) e utilizando o fato de que $\hat{\sigma}^2 = 1$, a parte real nos fornece:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} . \quad (5.11)$$

Já a parte real da equação (5.4) e sua parte imaginária após a aplicação do operador $\hat{\sigma}$ nos fornecem

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 . \quad (5.12)$$

Logo, se associarmos \mathbf{E} com o campo elétrico e \mathbf{B} com o campo magnético do fóton, μ_0 com a permeabilidade magnética e ε_0 com a permissividade elétrica do vácuo, as equações (5.3) e (5.4) se tornam equivalentes às equações de Maxwell no vácuo. Portanto concluímos que a equação que rege a dinâmica de uma partícula sem massa, de helicidade 1 e sujeita à condição $\mathbf{p} \cdot \Psi = 0$ é equivalente às equações de Maxwell no vácuo. A essa partícula damos o nome *fóton*.

Vemos que a condição $\mathbf{p} \cdot \Psi = 0$ implica na transversalidade dos campos do fóton. Como foi discutido na seção 3.2, campos vetoriais podem ser decompostos em partes transversal e longitudinal. Ondas eletromagnéticas clássicas possuem apenas campos transversais, o que torna natural que a função de onda do fóton seja um campo transversal.

Utilizando a equação (5.8), podemos obter os campos elétrico e magnético do fóton a partir de sua função de onda Ψ da seguinte maneira:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_0}}(\Psi + \Psi^*) \quad , \quad \mathbf{B} = -i\sqrt{\frac{\mu_0}{2}}[(\hat{\sigma}\Psi) - (\hat{\sigma}\Psi)^*] \quad . \quad (5.13)$$

Mas há uma peculiaridade na forma da função de onda (5.8) para o fóton. Seu módulo ao quadrado vale

$$|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 = \frac{\varepsilon_0|\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2}{2} + \frac{|\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)|^2}{2\mu_0} \quad , \quad (5.14)$$

tendo unidade de densidade de energia e concordando com a densidade de energia eletromagnética clássica da equação (2.15). O módulo ao quadrado da função de onda de uma partícula massiva ψ tem unidade de densidade, e podemos interpretar $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r$ como a probabilidade de se encontrar a partícula no volume d^3r em torno de \mathbf{r} no tempo t . Mas, na realidade, faz sentido que o módulo ao quadrado da função de onda do fóton tenha unidade de densidade de energia, diferentemente de partículas massivas, como é discutido na referência [26]. Considere a frase dita anteriormente sobre o significado do módulo ao quadrado da função de onda de uma partícula massiva. O que significa “encontrar a partícula no volume d^3r em torno de \mathbf{r} ”? Quando detectamos um elétron em um determinado volume, o que na realidade medimos é a influência de sua carga q , de sua massa m , ou de alguma outra propriedade sua no aparato de medida. Portanto, na realidade o que podemos fazer é associar $q|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r$, que tem unidade de densidade de carga, com o valor

esperado da carga a ser detectada no volume, ou $m|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r$, que tem unidade de densidade de massa, com o valor esperado da massa a ser detectada. Passemos agora ao caso de um fóton, que não possui carga ou massa. Sua única propriedade escalar mensurável é sua energia, por isso é razoável que o módulo ao quadrado de sua função de onda tenha unidade de densidade de energia. Afinal de contas, quando medimos um fóton medimos a sua energia.

Há uma diferença fundamental entre a energia de um fóton e a massa ou a carga de um elétron. A carga e a massa de repouso de um elétron não dependem de seu estado quântico, enquanto que a energia de um fóton sim. Portanto, ao escrevermos a função de onda do fóton em termos de seus autoestados de energia, devemos incluir esta dependência na decomposição, como será mostrado a seguir, num argumento retirado da referência [29]. Seja

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{p}) = \sum_{\sigma} \tilde{\Psi}_{\sigma}(\mathbf{p}) \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{p}\sigma} \quad , \quad \text{com} \quad \sum_{\sigma} \int d^3p |\tilde{\Psi}_{\sigma}(\mathbf{p})|^2 = 1 \quad , \quad (5.15)$$

uma função de onda no espaço de momentos \mathbf{p} para um fóton, em que $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{p}\sigma}$ representa o vetor de polarização para um fóton com momento \mathbf{p} e helicidade σ . Para que o valor esperado da energia de um fóton seja local, ou seja, uma integral de uma densidade de energia no espaço, sua decomposição em termos dos autoestados de momento deve ser

$$\Psi_{\sigma}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-c|\mathbf{p}|t)/\hbar} \sqrt{c|\mathbf{p}|} \tilde{\Psi}_{\sigma}(\mathbf{p}) \quad , \quad (5.16)$$

como será mostrado a seguir. A diferença em relação a partículas massivas é a presença do fator $\sqrt{c|\mathbf{p}|}$ no integrando. Esta relação pode ser invertida para obtermos $\tilde{\Psi}_{\sigma}(\mathbf{p})$ em função de $\Psi_{\sigma}(\mathbf{r}, t)$:

$$\tilde{\Psi}_{\sigma}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{c|\mathbf{p}|}} \int \frac{d^3r}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-c|\mathbf{p}|t)/\hbar} \Psi_{\sigma}(\mathbf{r}, t) \quad . \quad (5.17)$$

O hamiltoniano $\hat{H} = c\hat{\sigma}\nabla\times$ atuando em um autoestado de momento e helicidade resulta em $\hbar\omega = c|\mathbf{p}|$. Portanto o valor esperado do hamiltoniano para um fóton neste estado vale

$$\begin{aligned} \langle \hat{H} \rangle &= \sum_{\sigma} \int d^3p \Psi_{\sigma}^*(\mathbf{p}) \hat{H} \Psi_{\sigma}(\mathbf{p}) = \sum_{\sigma} \int d^3p c|\mathbf{p}| |\tilde{\Psi}_{\sigma}(\mathbf{p})|^2 \\ &= \sum_{\sigma} \int d^3r \int d^3r' \Psi_{\sigma}^*(\mathbf{r}', t) \Psi_{\sigma}(\mathbf{r}, t) \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{c|\mathbf{p}|}{c|\mathbf{p}|} e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')/\hbar} \quad . \quad (5.18) \end{aligned}$$

Vemos que o fato de termos incluído o termo $\sqrt{c|\mathbf{p}|}$ no integrando da equação (5.16) faz com este termo surja ao quadrado no denominador do integrando à direita da equação (5.18), cancelando o termo que vem da aplicação do hamiltoniano no estado. Com isso, a integral em d^3p resulta em $\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, de forma que podemos escrever

$$\langle \hat{H} \rangle = \sum_{\sigma} \int d^3r |\Psi_{\sigma}(\mathbf{r}, t)|^2. \quad (5.19)$$

Caso não tivéssemos incluído o termo $\sqrt{c|\mathbf{p}|}$ no integrando da equação (5.16), não poderíamos associar uma densidade de energia para o fóton como na equação acima e o valor esperado da energia do fóton seria uma função não-local. No passado, alguns autores escreveram a função de onda do fóton no espaço de posição como sendo a transformada de Fourier da função de onda no espaço de momentos, assim como ocorre para partículas massivas [72, 73, 74, 75]. Contudo, devido a esse caráter não-local para a energia do fóton que surge com essa alternativa, acreditamos que o formalismo de Bialynicki-Birula e Sipe apresentado aqui seja mais adequado.

Como foi dito anteriormente, fótons com helicidade positiva têm polarização circular esquerda e fótons com helicidade negativa têm polarização circular direita. Ilustraremos agora como isso ocorre. Imagine uma função de onda no espaço de momentos em que todos os vetores de momento da distribuição estejam próximos do eixo $\hat{\mathbf{z}}$ de forma que possamos aproximar $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \simeq kz$, com $k = |\mathbf{p}|/\hbar$. No espaço de posições, essa função de onda será escrita como

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} [a \hat{\mathbf{e}}_+ + b \hat{\mathbf{e}}_-] e^{i(kz - \omega t)} \sqrt{\hbar\omega} \tilde{\Psi}(\mathbf{p}), \quad (5.20)$$

com $\omega = ck$ e $|a|^2 + |b|^2 = 1$, a e b definindo o estado de polarização do fóton. Podemos verificar que os vetores de polarização adequados são

$$\hat{\mathbf{e}}_+ = \frac{\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{\mathbf{e}}_- = \frac{\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}}, \quad (5.21)$$

de forma que

$$\hbar c \nabla \times \Psi = \hbar \omega \Psi \quad \text{quando } a = 1 \text{ e } b = 0, \quad (5.22)$$

$$\hbar c \nabla \times \Psi = -\hbar \omega \Psi \quad \text{quando } a = 0 \text{ e } b = 1. \quad (5.23)$$

Portanto vemos que estes vetores correspondem aos vetores de helicidade adequados. Quando temos $a = 1$ e $b = 0$, a polarização é circular direita. Com $a = 0$ e $b = 1$

temos polarização circular esquerda. Quando $|a| = |b|$ temos polarização linear. No caso geral, temos polarização elíptica.

A partir da equação de onda (5.3) e de sua conjugada, podemos deduzir uma equação de continuidade para a função de onda do fóton:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 = \Psi^* \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \cdot \Psi = \frac{c}{i} [\Psi^* \cdot (\hat{\sigma} \nabla \times \Psi) - (\hat{\sigma} \nabla \times \Psi)^* \cdot \Psi] . \quad (5.24)$$

Usando a relação $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ à direita e verificando que $(\hat{\sigma} \nabla \times \Psi)^* \cdot \Psi = (\nabla \times \Psi^*) \cdot (\hat{\sigma} \Psi)$, chegamos a:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 = -\nabla \cdot \mathbf{S} , \quad \text{com } \mathbf{S} \equiv \frac{c}{i} \Psi^* \times (\hat{\sigma} \Psi) . \quad (5.25)$$

Como $|\Psi|^2$ representa a densidade de energia do fóton, \mathbf{S} representa o seu fluxo de energia. Utilizando a equação (5.8), temos:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S} \rangle &= \left\langle \frac{c}{i} \left[\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2}} (\mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-) + i \sqrt{\frac{1}{2\mu_0}} (-\mathbf{B}_+ + \mathbf{B}_-) \right) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2}} (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) + i \sqrt{\frac{1}{2\mu_0}} (\mathbf{B}_+ + \mathbf{B}_-) \right) \right] \right\rangle \\ &= \frac{1}{\mu_0} \langle \mathbf{E}_+ \times \mathbf{B}_+ + \mathbf{E}_- \times \mathbf{B}_- \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle , \end{aligned} \quad (5.26)$$

em que $\langle \mathbf{S} \rangle$ representa a média temporal em um período de oscilação da grandeza \mathbf{S} . Vemos que o fluxo de energia da função de onda do fóton corresponde ao vetor de Poynting do eletromagnetismo clássico da equação (2.16).

É importante ressaltar que, para que este formalismo de função de onda de fótons seja válido, deve ser possível aplicar o processo de segunda quantização e chegar em uma teoria de campos correta para o campo eletromagnético. Isso foi demonstrado por Smith e Raymer [29].

5.2 Interação de fótons com meios materiais

Na seção anterior, encontramos uma equação de onda para o fóton equivalente às equações de Maxwell no vácuo. Isso significa que todo o tratamento da dinâmica de um fóton no vácuo será equivalente ao tratamento clássico da radiação eletromagnética, o que também é previsto no formalismo de segunda quantização e é

observado experimentalmente. Agora passaremos à proposta de uma equação de onda para o fóton em meios materiais. É observado experimentalmente que fótons se propagam em meios contínuos não-absorvedores da mesma maneira que campos eletromagnéticos clássicos [76]. Portanto seria interessante obter uma equação de onda para o fóton equivalente às equações de Maxwell na matéria.

Descrever a dinâmica de fótons em meios materiais utilizando o formalismo de segunda quantização é uma tarefa bastante árdua [77, 78]. Como será mostrado a seguir, o formalismo de função de onda de fótons é capaz de descrever esses fenômenos de maneira muito mais simples. Assim como a equação de Schrödinger é eficaz em descrever a dinâmica de partículas massivas sob a ação de um potencial clássico, acreditamos que o formalismo de função de onda de fótons seja a alternativa para se descrever a dinâmica de fótons em meios contínuos.

Para encontrarmos a equação de onda do fóton em meios contínuos, imporemos 2 coisas: conservação local de energia e interação entre fótons e cargas elétricas dada pela densidade de força de Lorentz da equação (2.5):

$$\mathbf{f} = \mathbf{E}\rho + \mathbf{J} \times \mathbf{B} , \quad (5.27)$$

em que ρ representa a densidade de cargas do meio, \mathbf{J} a densidade de corrente elétrica e \mathbf{E} e \mathbf{B} os campos elétrico e magnético do fóton, respectivamente. Como a força magnética é ortogonal à velocidade das cargas, ela não realiza trabalho. A densidade de trabalho realizado pelo campo eletromagnético nas cargas pode ser escrito como $w = \int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dt$. Logo a densidade de trabalho realizado por unidade de tempo vale $dw/dt = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$. De acordo com a equação (5.13), para o campo de 1 fóton podemos escrever:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_0}}(\Psi + \Psi^*) \cdot \mathbf{J} . \quad (5.28)$$

Como o campo elétrico do fóton exerce trabalho sobre as cargas elétricas, sua equação de continuidade deve ser modificada se impusermos conservação de energia. A nova equação de continuidade é:

$$\frac{\partial}{\partial t}|\Psi|^2 = -\nabla \cdot \mathbf{S} - \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_0}}(\Psi + \Psi^*) \cdot \mathbf{J} , \quad (5.29)$$

com \mathbf{S} dado pela equação (5.25). Observe que mantivemos aqui a forma (5.8) para a função de onda do fóton, com seus campos elétrico e magnético. Esta abordagem é diferente do tratamento utilizado por Bialynicki-Birula para a propagação de

fótons em meios materiais [25], que modifica a forma da função de onda do fóton incluindo coeficientes que dependem do meio. Nossa escolha é embasada na divisão da energia e do momento de ondas eletromagnéticas em meios materiais proposta nos capítulos anteriores desta tese. $|\Psi|^2$ continua sendo equivalente à densidade de energia eletromagnética clássica no vácuo, estando associada, portanto, à parte eletromagnética da densidade de energia no meio, de acordo com o discutido no capítulo 3. Da mesma maneira, o fluxo de energia \mathbf{S} e a densidade de momento \mathbf{S}/c^2 são equivalentes às partes eletromagnéticas do fluxo de energia e da densidade de momento de uma onda eletromagnética em um meio discutidas nos capítulos 3 e 4. Portanto mantemos nossa divisão para a densidade de energia, fluxo de energia e densidade de momento de ondas eletromagnéticas em meios materiais no nível de um fóton.

Seguindo os passos que nos levaram da equação (5.24) à (5.25) na ordem inversa, podemos ver que a equação (5.29) pode ser escrita como:

$$\left[\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{c}{i} \hat{\sigma} \nabla \times \Psi + \frac{\mathbf{J}}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \right] \cdot \Psi^* + \text{c.c.} = 0, \quad (5.30)$$

em que c.c. representa o complexo conjugado. Uma maneira de garantir que a energia se conserve para qualquer estado é exigir que a expressão entre colchetes se anule sempre. Com esta exigência, encontramos a seguinte equação de onda para o fóton em meios contínuos:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = c \hat{\sigma} \nabla \times \Psi - i \frac{\mathbf{J}}{\sqrt{2\varepsilon_0}}. \quad (5.31)$$

\mathbf{J} , por sua vez, usualmente é escrito como:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_b + \mathbf{J}_P, \quad \text{com } \mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M} \text{ e } \mathbf{J}_P = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (5.32)$$

\mathbf{J}_f representa a corrente devido às cargas livres. \mathbf{P} e \mathbf{M} representam a polarização e a magnetização do meio, respectivamente, e \mathbf{J}_P e \mathbf{J}_b são as correntes ligadas de polarização e magnetização.

Substituindo as equações (5.8) e (5.32) na equação (5.31), vemos que esta equação é equivalente às equações de Maxwell na matéria. A parte imaginária e a parte real após aplicarmos o operador $\hat{\sigma}$ nos fornecem:

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}, \quad \text{ou } \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (5.33)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5.34)$$

com $\mathbf{H} \equiv \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$ e $\mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$.

Tomando o divergente das equações acima, temos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D}) = -\nabla \cdot \mathbf{J}_f = \frac{\partial}{\partial t} \rho_f, \text{ ou } \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho_f) = 0, \quad (5.36)$$

em que ρ_f é a densidade de carga livre. Portanto, se $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$ em algum instante, o que é verdade antes de o fóton interagir com as cargas, estas relações devem ser válidas sempre. Logo, ao tomarmos o divergente da equação (5.31), encontramos as equações de Maxwell restantes:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f. \quad (5.37)$$

Vemos que nossa equação de onda para o fóton em meios materiais é equivalente às equações de Maxwell na matéria. Portanto este tratamento prevê que a propagação de um fóton por um meio que não cria ou destrói fótons é idêntica à propagação de um pulso eletromagnético clássico. Isso está de acordo com os experimentos de Steinberg, Kwiat e Chiao [76], bem como com todos os experimentos interferométricos realizados no regime fóton a fóton, que têm os mesmos resultados experimentais que quando realizados com feixes eletromagnéticos intensos, a não ser pela quantização da energia em cada evento. A reflexão e refração de fótons em superfícies, coeficiente de reflexão e transmissão em espelhos, velocidade de propagação em um meio, etc., sempre seguem o comportamento de feixes eletromagnéticos clássicos. Logo nosso tratamento prevê corretamente esses resultados.

É importante ressaltar que, enquanto estivermos tratando a equação (5.31) como a equação de onda de um fóton interagindo com a matéria, a corrente \mathbf{J} não deve ser vista como um termo de fonte e sim como uma corrente de resposta ao campo aplicado. Por exemplo, em meios lineares a polarização \mathbf{P} e a magnetização \mathbf{M} , responsáveis por \mathbf{J}_P e \mathbf{J}_M na equação (5.32), podem ser escritos como $\mathbf{P} = \chi_e \sqrt{2\varepsilon_0} \text{Re}[\Psi]$, em que χ_e é a susceptibilidade elétrica do meio, e $\mathbf{M} = \chi_m / (1 + \chi_m) \sqrt{2/\mu_0} \text{Im}[\hat{\sigma}\Psi]$, em que χ_m é a susceptibilidade magnética do meio. Em meios não-lineares, um formalismo de segunda quantização se faz necessário. Este caso será tratado mais tarde, quando calcularemos o estado dos fótons gêmeos gerados pela conversão paramétrica descendente.

5.3 Segunda quantização da função de onda do fóton em um meio linear não-dispersivo

Nosso tratamento até agora para a função de onda de fótons é completamente equivalente ao eletromagnetismo clássico. Antes de tratar fenômenos puramente quânticos, precisamos aplicar o processo de segunda quantização à função de onda do fóton para poder descrever a interação entre fótons e matéria de forma mais geral. Consideraremos que o espaço é todo permeado por um meio linear com susceptibilidades elétrica e magnética χ_e e χ_m independentes da frequência de oscilação dos campos. Como foi discutido no capítulo 3, quando uma onda eletromagnética se propaga em um meio como esse, além da densidade de energia eletromagnética há uma densidade de energia material. A densidade de energia eletromagnética do fóton é dada pela equação (5.14), em acordo com a densidade de energia eletromagnética clássica da equação (2.15). Assumiremos que a densidade de energia material é dada pela equação (3.12), assim como para ondas eletromagnéticas clássicas. Como consideramos aqui um meio não-dispersivo, a densidade de energia total do “fóton vestido”, que corresponde à densidade de energia eletromagnética mais material da excitação eletromagnética em um meio, pode ser escrita como $|\Psi'|^2$, com

$$\Psi' = \Psi^{+'} + \Psi^{-'} , \quad \Psi^{\pm'} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \mathbf{E}_{\pm} \pm i \sqrt{\frac{1}{2\mu}} \mathbf{B}_{\pm} \quad \text{e} \quad \hat{\sigma} \Psi^{\pm'} = \pm \Psi^{\pm'} , \quad (5.38)$$

em que temos $\varepsilon \equiv (1 + \chi_e)\varepsilon_0$ e $\mu \equiv (1 + \chi_m)\mu_0$. Invertendo as relações, temos

$$\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} (\Psi' + \Psi'^*) , \quad \mathbf{B} \equiv \mathbf{B}_+ + \mathbf{B}_- = -i \sqrt{\frac{\mu}{2}} [(\hat{\sigma} \Psi') - (\hat{\sigma} \Psi')^*] . \quad (5.39)$$

Dessa maneira, $|\Psi'|^2$ concorda com a soma da densidade de energia eletromagnética da equação (2.15) com a densidade de energia material da equação (3.12). Essa forma para Ψ' é equivalente à utilizada por Bialynicki-Birula para descrever a propagação de fótons em meios contínuos [25]. Portanto a energia total do “fóton vestido” pode ser escrita como

$$H = \int d^3r |\Psi'(\mathbf{r}, t)|^2 . \quad (5.40)$$

Podemos reescrever essa energia em termos dos autoestados de energia do “fóton vestido”, que são estados de onda plana. A decomposição pode ser feita em

completa analogia com a equação (5.16):

$$\Psi'(\mathbf{r}, t) = \sum_{\sigma} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \sqrt{\hbar\omega} a_{\mathbf{k}\sigma} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\sigma}, \quad (5.41)$$

mas agora estamos escrevendo a decomposição em termos dos vetores de onda \mathbf{k} ao invés dos momentos \mathbf{p} e temos $k \equiv |\mathbf{k}| = n\omega/c$, em que $n = \sqrt{(1 + \chi_e)(1 + \chi_m)}$ é o índice de refração do meio. A condição de normalização é

$$\sum_{\sigma} \int d^3k |a_{\mathbf{k}\sigma}|^2 = 1. \quad (5.42)$$

Dessa forma, a equação (5.40) pode ser escrita como

$$H = \sum_{\sigma} \int d^3k \hbar\omega |a_{\mathbf{k}\sigma}|^2. \quad (5.43)$$

Podemos definir as variáveis canonicamente conjugadas

$$q_{\mathbf{k}\sigma}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} [a_{\mathbf{k}\sigma}(t) + a_{\mathbf{k}\sigma}^*(t)] \text{ e } p_{\mathbf{k}\sigma}(t) = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} [a_{\mathbf{k}\sigma}(t) - a_{\mathbf{k}\sigma}^*(t)], \quad (5.44)$$

com $a_{\mathbf{k}\sigma}(t) \equiv a_{\mathbf{k}\sigma} e^{-i\omega t}$. Essas relações podem ser invertidas para escrevermos $a_{\mathbf{k}\sigma}(t)$ e $a_{\mathbf{k}\sigma}^*(t)$ em função de $q_{\mathbf{k}\sigma}(t)$ e $p_{\mathbf{k}\sigma}(t)$:

$$a_{\mathbf{k}\sigma}(t) \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} [\omega q_{\mathbf{k}\sigma}(t) + ip_{\mathbf{k}\sigma}(t)] \text{ , } a_{\mathbf{k}\sigma}^*(t) \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} [\omega q_{\mathbf{k}\sigma}(t) - ip_{\mathbf{k}\sigma}(t)]. \quad (5.45)$$

Portanto podemos escrever

$$H = \sum_{\sigma} \int d^3k H_{\mathbf{k}\sigma}(t) \text{ , com } H_{\mathbf{k}\sigma}(t) = \frac{1}{2} [p_{\mathbf{k}\sigma}(t)^2 + \omega^2 q_{\mathbf{k}\sigma}(t)^2]. \quad (5.46)$$

H é o hamiltoniano do sistema composto pelo fóton e pelo meio linear não-dispersivo e não-absorvedor, que é equivalente ao hamiltoniano de um conjunto de osciladores harmônicos independentes continuamente enumerados. Podemos verificar que $q_{\mathbf{k}\sigma}(t)$ e $p_{\mathbf{k}\sigma}(t)$ são de fato variáveis canonicamente conjugadas, pois temos

$$\frac{\partial q_{\mathbf{k}\sigma}}{\partial t} = \frac{\partial H_{\mathbf{k}\sigma}}{\partial p_{\mathbf{k}\sigma}} \text{ e } \frac{\partial p_{\mathbf{k}\sigma}}{\partial t} = -\frac{\partial H_{\mathbf{k}\sigma}}{\partial q_{\mathbf{k}\sigma}}. \quad (5.47)$$

O processo de segunda quantização consiste em transformar as variáveis canonicamente conjugadas $q_{\mathbf{k}\sigma}(t)$ e $p_{\mathbf{k}\sigma}(t)$ em operadores $\hat{q}_{\mathbf{k}\sigma}(t)$ e $\hat{p}_{\mathbf{k}\sigma}(t)$ que obedecem às relações de comutação [3]

$$[\hat{q}_{\mathbf{k}\sigma}(t), \hat{p}_{\mathbf{k}'\sigma'}(t)] = i\hbar\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\delta_{\sigma\sigma'} \text{ , } [\hat{q}_{\mathbf{k}\sigma}(t), \hat{q}_{\mathbf{k}'\sigma'}(t)] = 0 \text{ , } [\hat{p}_{\mathbf{k}\sigma}(t), \hat{p}_{\mathbf{k}'\sigma'}(t)] = 0. \quad (5.48)$$

De acordo com as equações (5.45) e as relações de comutação acima, com o processo de segunda quantização as variáveis $a_{\mathbf{k}\sigma}(t)$ e $a_{\mathbf{k}\sigma}^*(t)$ se tornam operadores $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t)$ e $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger(t)$ que obedecem às relações de comutação:

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t), \hat{a}_{\mathbf{k}'\sigma'}^\dagger(t)] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\delta_{\sigma\sigma'}, \quad [\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t), \hat{a}_{\mathbf{k}'\sigma'}(t)] = [\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger(t), \hat{a}_{\mathbf{k}'\sigma'}^\dagger(t)] = 0. \quad (5.49)$$

Já o operador hamiltoniano se torna

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{\sigma} \int d^3k \, \hbar\omega \frac{1}{2} \left[\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} + \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \right] \\ &= \sum_{\sigma} \int d^3k \, \hbar\omega \left[\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{2} \right], \end{aligned} \quad (5.50)$$

em que na última igualdade foram utilizadas as relações de comutação da equação (5.49).

Os operadores $\hat{\Psi}'$, campo elétrico $\hat{\mathbf{E}}$ e campo magnético $\hat{\mathbf{B}}$, de acordo com as equações (5.41) e (5.39), se tornam

$$\hat{\Psi}'(\mathbf{r}, t) = \sum_s \int d^3k \left[\frac{\hbar\omega}{(2\pi)^3} \right]^{1/2} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \hat{a}_{\mathbf{k}s} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s}, \quad (5.51)$$

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \sum_s \int d^3k \left[\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon(2\pi)^3} \right]^{1/2} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \hat{a}_{\mathbf{k}s} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s} + \text{h.c.}, \quad (5.52)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = -i \sum_{\sigma} \int d^3k \left[\frac{\hbar\omega\mu}{2(2\pi)^3} \right]^{1/2} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} \hat{\sigma} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\sigma} + \text{h.c.}, \quad (5.53)$$

em que h.c. denota o hermitiano conjugado. Note que nas equações (5.51) e (5.52) utilizamos um símbolo s para denotar a polarização do modo, o conjunto s representando qualquer base ortonormal, enquanto que na equação (5.53) mantivemos o símbolo σ para representar a base de polarização circular. Isso acontece porque em (5.53) temos o operador $\hat{\sigma}$ atuando no vetor de polarização, o que nos obriga a utilizar a base de polarização circular. Contudo, podemos notar que $\hat{\sigma} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\sigma} = i(\mathbf{k}/k) \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\sigma}$. Isto pode ser verificado diretamente escolhendo $\mathbf{k}/k = \hat{\mathbf{z}}$, $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}+} = (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}})/\sqrt{2}$ e $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}-} = (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}})/\sqrt{2}$. Dessa forma, podemos escrever

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \sum_s \int d^3k \left[\frac{\hbar\omega\mu}{2(2\pi)^3} \right]^{1/2} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \hat{a}_{\mathbf{k},s} \left[\frac{\mathbf{k}}{k} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s} \right] + \text{h.c.} \quad (5.54)$$

As equações para os operadores campo elétrico, campo magnético e hamiltoniano das equações (5.52), (5.54) e (5.50) são idênticas às obtidas pelo processo tradicional de segunda quantização no vácuo [3] se substituirmos ε por ε_0 e μ por μ_0 . Portanto os tratamentos são equivalentes. No tratamento de Smith e Raymer para a quantização da função de onda do fóton no vácuo [29], que seria equivalente ao nosso tratamento quando $\chi_e = \chi_m = 0$, o operador $\hat{\Psi}$ que eles encontram é a soma de nosso operador $\hat{\Psi}'$ da equação (5.51) com o conjugado hermitiano quando $\chi_e = \chi_m = 0$. Acreditamos que a nossa forma, em que $\hat{\Psi}'$ só possui operadores de aniquilação de fótons, é mais adequada, uma vez que ela concorda com a condição

$$\hat{\Psi}' = \sqrt{\varepsilon/2}\hat{\mathbf{E}} + i\hat{\sigma}\sqrt{1/(2\mu)}\hat{\mathbf{B}}, \quad (5.55)$$

que decorre da equação (5.38).

Como o hamiltoniano (5.50) é equivalente ao hamiltoniano de um conjunto contínuo de osciladores harmônicos, um para cada modo (\mathbf{k}, s) do campo, seus autoestados podem ser encontrados da mesma maneira que encontramos os autoestados de um oscilador harmônico quântico [70]. Esses autoestados correspondem a um número inteiro de excitações em cada modo do campo. Quando aplicados em um estado com um número exato m de excitações no seu particular modo, os operadores $\hat{a}_{\mathbf{k}s}$ e $\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger$ resultam em

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s}|m\rangle_{\mathbf{k},s} = \sqrt{m}|m-1\rangle_{\mathbf{k},s}, \quad \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger|m\rangle_{\mathbf{k},s} = \sqrt{m+1}|m+1\rangle_{\mathbf{k},s}. \quad (5.56)$$

Devido a este fato o operador $\hat{a}_{\mathbf{k}s}$ é chamado de operador de destruição de fótons e o operador $\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger$ é denominado operador de criação de fótons.

Utilizando este formalismo de segunda quantização, o estado de um fóton agora é descrito em termos dos modos do campo da seguinte maneira:

$$|\Psi^{(1)}\rangle = \sum_s \int d^3k \tilde{\Psi}'^{(1)}(\mathbf{k})|1\rangle_{\mathbf{k},s} = \sum_s \int d^3k \tilde{\Psi}'^{(1)}(\mathbf{k})\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger|\text{vac}\rangle, \quad (5.57)$$

$$\text{com } \sum_s \int d^3k |\tilde{\Psi}'^{(1)}(\mathbf{k})|^2 = 1, \quad (5.58)$$

$|\text{vac}\rangle$ representando o estado fundamental do hamiltoniano, o estado de vácuo para o campo eletromagnético, que corresponde à ausência de fótons.

Se quisermos voltar ao formalismo de função de onda para esse fóton, a receita é a seguinte: aplicar o operador $\hat{\Psi}'(\mathbf{r}, t)$ da equação (5.51) no estado e realizar o

produto escalar do vetor resultante com o estado de vácuo [29]:

$$\Psi'^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \langle \text{vac} | \hat{\Psi}'(\mathbf{r}, t) | \Psi'^{(1)} \rangle . \quad (5.59)$$

Utilizando as relações de comutação da equação (5.49), podemos ver que a função de onda do “fóton vestido” no estado quântico da equação (5.57) é

$$\Psi'^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \sum_s \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\hbar\omega} \tilde{\Psi}'_s(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s} , \quad (5.60)$$

em concordância com a equação (5.16).

Já um estado de dois fótons pode ser escrito como [79, 29]

$$|\Psi'^{(2)}\rangle = \sum_{s,s'} \int d^3k \int d^3k' \tilde{\Psi}'_{s,s'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger |\text{vac}\rangle , \quad (5.61)$$

$$\text{com } \sum_{s,s'} \int d^3k \int d^3k' |\tilde{\Psi}'_{s,s'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2 = 1 . \quad (5.62)$$

A função de onda dos “fótons vestidos” nesse estado será

$$\begin{aligned} \Psi'^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) &= \langle \text{vac} | \hat{\Psi}'(\mathbf{r}_1, t) \hat{\Psi}'(\mathbf{r}_2, t) | \Psi'^{(2)} \rangle \\ &= \sum_{s,s'} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^{3/2}} \left[\tilde{\Psi}'_{s,s'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + \tilde{\Psi}'_{s',s}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \right] \times \\ &\quad \times \sqrt{\hbar\omega} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1-\omega t)} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s} \otimes \sqrt{\hbar\omega'} e^{i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}_2-\omega't)} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}'s'} . \end{aligned} \quad (5.63)$$

Observe que a função de onda já fica automaticamente simetrizada neste formalismo. A generalização para estados com um número arbitrário de fótons é direta.

5.4 Espalhamento de fótons

Nesta seção, pretendemos encontrar o comportamento dos operadores $\hat{\mathbf{E}}$ e $\hat{\mathbf{B}}$ das equações (5.52) e (5.54) quando, além do meio com susceptibilidades elétrica e magnética χ_e e χ_m permeando todo o espaço, temos um outro meio em uma determinada região finita com propriedades diferentes. Ao aplicarmos o processo de segunda quantização à função de onda do fóton incluindo a interação com meios materiais, os operadores $\hat{\Psi}$ obedecerão à mesma equação de movimento (5.31) que as

funções de onda Ψ . Portanto os operadores $\hat{\mathbf{E}}$ e $\hat{\mathbf{B}}$ também obedecerão às equações (5.34) e (5.33). A equação (5.33) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\nabla \times \frac{\hat{\mathbf{B}}}{\mu} = \varepsilon \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}}{\partial t} + \hat{\mathbf{J}}', \quad (5.64)$$

em que $\hat{\mathbf{J}}'$ contém apenas os termos devidos à diferença de resposta do meio espalhador em relação ao meio em que foi feita a quantização do campo. Como a densidade de corrente \mathbf{J}' é uma função dos campos elétrico e magnético, quando os campos se tornam operadores $\hat{\mathbf{J}}'$ também se torna um operador.

Diferenciando a equação (5.64) em relação ao tempo, utilizando a equação (5.34) e a relação $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$, encontramos uma equação de onda para o operador $\hat{\mathbf{E}}$:

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{E}} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = -4\pi \hat{\mathbf{f}}^e, \quad \text{com } \hat{\mathbf{f}}^e = -\mu_0 \frac{\partial \hat{\mathbf{J}}'}{\partial t} - \nabla(\nabla \cdot \hat{\mathbf{E}}). \quad (5.65)$$

A equação acima é a equação de uma onda em que $\hat{\mathbf{f}}^e$ faz o papel de fonte. Uma equação análoga pode ser obtida para o operador $\hat{\mathbf{B}}$ ao diferenciarmos a equação (5.34) em relação ao tempo, utilizarmos a equação (5.64) e a mesma identidade vetorial:

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{B}} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{B}}}{\partial t^2} = -4\pi \hat{\mathbf{f}}^b, \quad \text{com } \hat{\mathbf{f}}^b = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \hat{\mathbf{J}}'. \quad (5.66)$$

Soluções da equação (5.65) podem ser obtidas por meio das funções de Green, como discutido na seção 6.4 do livro de Jackson [2]. Se a situação que queremos estudar for o espalhamento de um fóton em um estado conhecido no regime paraxial, em que a dependência dos vetores de polarização com \mathbf{k} podem ser desprezadas, de forma que uma teoria escalar possa ser utilizada, as soluções relevantes da equação (5.65) para os operadores $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ serão da forma

$$\hat{\mathbf{E}}_{\text{saida}}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}_{\text{ent.}}(\mathbf{r}, t) + \int d^3 r' \int dt' G^{(+)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \hat{\mathbf{f}}^e(\mathbf{r}', t'), \quad (5.67)$$

$$\text{com } G^{(\pm)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{c}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{e^{\pm ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} e^{-i\omega(t-t')}, \quad (5.68)$$

em que $k = n\omega/c$. A interpretação das equações acima é a seguinte: o campo incidente gera o termo $\hat{\mathbf{f}}^e(\mathbf{r}', t')$, que emite uma onda esférica a partir do ponto

\mathbf{r}' que se superpõe com o campo incidente e com os campos gerados em todas as posições \mathbf{r}' e tempos t' em que $\hat{\mathbf{f}}^e(\mathbf{r}', t')$ existe, resultando no campo total de saída¹.

As soluções com $G^{(-)}$ são de interesse quando queremos calcular qual o estado do campo de entrada em função do campo de saída:

$$\hat{\mathbf{E}}_{\text{ent.}}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}_{\text{saída}}(\mathbf{r}, t) + \int d^3r' \int dt' G^{(-)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \hat{\mathbf{f}}^e(\mathbf{r}', t'), \quad (5.69)$$

Ao realizarmos a integral em k nas funções de Green da equação (5.68), vemos que elas também podem ser escritas como

$$G^{(\pm)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{c}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \mp (t - t')c/n). \quad (5.70)$$

No livro de Jackson [2], os campos são decompostos em seus espectros de frequências para se encontrar a função de Green apropriada. Aqui, os campos são decompostos em seus vetores de onda (veja as equações (5.52) e (5.54)). Por esta razão nossa função de Green contém uma integral no número de onda k , enquanto que na referência [2] ela possui uma integral na frequência ω . Também podemos escrever as funções de Green de outra maneira. Por um processo de integração direta nas variáveis θ e ϕ em coordenadas esféricas, com $\mathbf{k} = k\text{sen}(\theta)\cos(\phi)\hat{\mathbf{x}} + k\text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi)\hat{\mathbf{y}} + k\cos(\theta)\hat{\mathbf{z}}$, é simples mostrar que [3]

$$\frac{2ic}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{k} e^{i[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-\omega(t-t')]} = G^{(+)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') - G^{(-)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'). \quad (5.71)$$

Mas se queremos analisar o espalhamento de um fóton, o tempo de observação t será sempre maior que o tempo t' em que o fóton interagiu com o meio. Portanto, de acordo com a equação (5.70), $G^{(-)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = 0$ e podemos escrever

$$G^{(+)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{2ic}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{k} e^{i[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-\omega(t-t')]} \quad (5.72)$$

A utilização desse método de funções de Green para predizer o comportamento do operador campo elétrico, de acordo com a equação (5.67), é muito útil para se

¹É válido ressaltar que este tratamento só é válido para espalhamentos a pequenos ângulos. Afinal de contas, se a corrente \mathbf{J}' for resultado de um dipolo oscilante, por exemplo, a onda emitida claramente não será esférica. O dipolo não emite radiação na direção de oscilação. Mas a ângulos aproximadamente ortogonais com a direção de oscilação do dipolo a onda emitida pode ser considerada esférica.

calcular o estado de saída de fótons espalhados por um meio material localizado no espaço. Para meios lineares, podemos utilizar a mesma equação substituindo o operador pelo próprio campo elétrico do fóton, tendo resultados equivalentes ao espalhamento de uma onda eletromagnética pelo meio, já que a equação (5.67) é obtida a partir das equações de Maxwell. Mas os resultados interessantes vêm com o tratamento de problemas que não podem ser calculados utilizando o eletromagnetismo clássico. Na próxima seção, para exemplificarmos a utilidade deste tratamento, calcularemos o espalhamento de um fóton por um meio não-linear, que pode gerar um par de fótons em um estado emaranhado. O estado quântico do par de fótons gerados no processo será calculado e demonstraremos que ele é equivalente ao obtido em tratamentos anteriores que não utilizam o conceito de função de onda de fótons, mas com uma interpretação mais intuitiva.

5.5 Exemplo de aplicação do formalismo: tratamento da conversão paramétrica descendente

O fenômeno da conversão paramétrica descendente consiste na conversão de um fóton em dois através da interação com um cristal não-linear. Os fótons gerados no processo são emaranhados em vários graus de liberdade, como energia [80], momento linear [81], momento angular [82] e, dependendo do tipo de conversão, polarização [83, 84]. Isso faz com que este método seja amplamente utilizado para a construção de estados emaranhados, tendo sido utilizado em diversos testes fundamentais da mecânica quântica [3, 4], bem como em aplicações nos campos de informação e computação quântica [85, 86]. Como aplicação do formalismo de espalhamento da seção anterior, pretendemos calcular o estado dos fótons gerados no processo de conversão paramétrica descendente do tipo I, em que os fótons gerados têm ambos polarização ortogonal à do fóton que os gerou.

Para simplificar nosso tratamento, vamos considerar que o meio que envolve o cristal não-linear tenha as mesmas respostas lineares que o cristal. Esta consideração facilitará muito o tratamento. Se o espaço contiver materiais com diferentes respostas lineares, os modos do campo serão complicados, já que estes modos terão que considerar, por exemplo, as reflexões e refrações nas interfaces entre os meios. Incluindo este meio que envolve o espaço em torno do cristal evitamos este problema,

já que os modos de onda plana continuarão sendo modos adequados para se descrever o problema.

Os cristais não-lineares utilizados para se realizar a conversão paramétrica também são birrefringentes, com um índice de refração que depende da polarização e da direção de propagação da onda incidente [87]. Mas desprezaremos aqui a variação do índice de refração do cristal com a direção de propagação. Isso é uma aproximação razoável, pois na conversão paramétrica do tipo I, o fóton incidente tem polarização extraordinária e os fótons gêmeos gerados têm polarização ordinária. Usualmente, o fóton incidente está no modo de um feixe com uma direção de propagação bem definida, portanto todos os vetores de onda que o compõem estão muito próximos a um vetor central. Já o índice de refração para polarização ordinária não depende da direção de propagação. A susceptibilidade magnética desses cristais é muito pequena e pode ser desprezada, de forma que o índice de refração vale $n = \sqrt{1 + \chi_e}$.

Também desprezaremos aqui os efeitos de dispersão no cristal. Essa aproximação é razoável se considerarmos que cada fóton possui um espectro relativamente estreito de frequências. Isso pode ser obtido se utilizarmos filtros de interferências nos detectores que analisarão o estado dos fótons gêmeos, pós selecionando o estado. Mas consideraremos que os fótons gerados no processo podem ter frequências centrais bem diferentes e, portanto, índices de refração distintos. Com todas essas considerações, poderemos utilizar o formalismo da seção 5.3.

Já a não-linearidade do meio será considerada pequena, de forma que possamos considerar o fenômeno de conversão paramétrica descendente como um espalhamento em primeira ordem de um fóton incidente no cristal. Se, em um meio não-linear, dividirmos o termo de densidade de corrente da equação de onda do fóton (5.31) em uma parte linear e uma não-linear, juntando a resposta linear à equação de movimento e tratando a parte não-linear como um termo espalhador, as funções de Green para o espalhamento serão como as da equação (5.68), se no termo $\hat{\mathbf{f}}^e$ da equação (5.67) considerarmos apenas os termos não-lineares. Consideraremos aqui espalhamentos a pequenos ângulos em relação à direção de propagação do fóton incidente.

Com essas considerações, as componentes não-lineares da polarização do cristal

podem ser escritas como

$$\hat{P}_i^{NL}(\mathbf{r}, t) = \sum_{j,k} \chi_{ijk}^{(2)} \hat{E}_j(\mathbf{r}, t) \hat{E}_k(\mathbf{r}, t), \quad (5.73)$$

em que os termos acima de segunda ordem foram desprezados. Como vamos estudar a conversão paramétrica do tipo I, os fótons gerados têm polarização ordinária e o fóton incidente tem polarização extraordinária. Lembrando que a densidade de corrente não-linear associada à polarização ordinária vale $\hat{J}_o'^{NL} = \partial \hat{P}_o'^{NL} / \partial t$ e que o termo espalhador, de acordo com a equação (5.65), vale $\hat{f}_o^e = -\mu_0 \partial \hat{J}_o'^{NL} / \partial t$, o termo de fonte relevante para o espalhamento na equação (5.67) é

$$\hat{f}_o^e(\mathbf{r}', t') = -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \left[\chi_{ooe}^{(2)'}(\mathbf{r}') \hat{E}_o(\mathbf{r}', t') \hat{E}_e(\mathbf{r}', t') \right], \quad (5.74)$$

em que o subscrito e (o) denota polarização extraordinária (ordinária) e temos $\chi_{ooe}^{(2)'} \equiv \chi_{ooe}^{(2)} + \chi_{oeo}^{(2)}$, já que $\hat{E}_o(\mathbf{r}', t')$ e $\hat{E}_e(\mathbf{r}', t')$ são operadores que atuam em estados de polarizações ortogonais e comutam entre si. De acordo com o discutido na seção 5.3, com o estado do fóton incidente denotado por $|\psi^{(i)}\rangle$, a componente de dois fótons com polarização ordinária do estado de saída será

$$\Psi_{oo}^{\prime(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \langle \text{vac} | \hat{\Psi}'_{\text{saída } o}(\mathbf{r}_1, t) \hat{\Psi}'_{\text{saída } o}(\mathbf{r}_2, t) | \psi^{(i)} \rangle. \quad (5.75)$$

Contudo, de acordo com as equações (5.55), (5.67) e (5.74), podemos escrever

$$\hat{\Psi}'_{\text{saída } o}(\mathbf{r}_2, t) = \sqrt{\varepsilon/2} \hat{E}_{\text{saída } o}(\mathbf{r}_2, t) + i\hat{\sigma} \sqrt{1/(2\mu_0)} \hat{B}_o(\mathbf{r}_2, t), \quad \text{com} \quad (5.76)$$

$$\hat{E}_{\text{saída } o}(\mathbf{r}_2, t) = \hat{E}_{\text{ent. } o}(\mathbf{r}_2, t) - \int d^3r' \int dt' G^{(+)}(\mathbf{r}_2, t; \mathbf{r}', t') \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \left[\chi_{ooe}^{(2)'}(\mathbf{r}') \hat{E}_o(\mathbf{r}', t') \hat{E}_e(\mathbf{r}', t') \right]. \quad (5.77)$$

Dessa forma, considerando espalhamentos apenas em primeira ordem, podemos escrever

$$\Psi_{oo}^{\prime(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \langle \text{vac} | \hat{\Psi}'_o(\mathbf{r}_1, t) n \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2}} \hat{E}_{\text{saída } o}(\mathbf{r}_2, t) | \psi^{(i)} \rangle \quad (5.78)$$

mais um termo com a permutação $\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2$, que simetriza corretamente a função de onda. Daqui por diante omitiremos este termo de permutação, lembrando que devemos considerá-lo para escrever corretamente o estado dos fótons gêmeos.

O estado $|\psi^{(i)}\rangle$ não possui fótons com polarização ordinária e na equação (5.78) são aplicados 2 operadores de campo que atuam sobre polarizações ordinárias sobre

este estado, para depois se tomar o produto escalar com o estado de vácuo. Podemos substituir esses dois operadores pelo comutador entre eles mais termos que resultam em zero quando substituídos na equação (5.78). Utilizando as equações (5.51), (5.52) e (5.49), o comutador relevante para o problema no limite em que desprezamos a dependência da direção da polarização com a direção de propagação do modo é [3]

$$\begin{aligned} \left[\hat{\Psi}'_o(\mathbf{r}_1, t_1), \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2}} \hat{E}_o(\mathbf{r}', t') \right] &= \int d^3k \frac{\hbar\omega}{2n(2\pi)^3} e^{i[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-\omega(t-t')]} \\ &= \frac{-i\hbar}{4c^2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} G^{(+)}(\mathbf{r}_1, t; \mathbf{r}', t'), \end{aligned} \quad (5.79)$$

em que na última igualdade foi utilizada a equação (5.72), que só é válida para $t > t'$, o que é o caso em nosso exemplo.

Ao inserirmos o valor para $\hat{E}_{\text{saída } o}(\mathbf{r}_2, t)$ da equação (5.77) na equação (5.78) e utilizarmos a equação (5.79) para substituírmos o produto dos operadores $\hat{\Psi}'_o(\mathbf{r}_1, t_1)$ e $\sqrt{\varepsilon_0/2}\hat{E}_o(\mathbf{r}', t')$ pelo comutador entre eles mais termos com resultado nulo quando aplicados em (5.78), obtemos

$$\begin{aligned} \Psi_{oo}^{(2)'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) &= \frac{i\hbar\mu_0}{4c^2} \int d^3r' \int dt' \chi_{ooe}^{(2)'}(\mathbf{r}') G^{(+)}(\mathbf{r}_2, t; \mathbf{r}', t') \times \\ &\quad \times \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} G^{(+)}(\mathbf{r}_1, t; \mathbf{r}', t') \right] E'_3(\mathbf{r}', t') \right\}, \end{aligned} \quad (5.80)$$

com $E'_3(\mathbf{r}', t') \equiv \langle \text{vac} | n \hat{E}_e(\mathbf{r}', t') | \psi^{(i)} \rangle$. Substituindo a equação (5.72) e definindo $E'_3(\mathbf{r}', t') \equiv \int d^3k_3 \tilde{E}_3(\mathbf{k}_3) \exp(i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}' - i\omega_3 t)$, temos

$$\begin{aligned} \Psi_{oo}^{(2)'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) &= \frac{i\hbar\mu_0}{(2\pi)^6} \int d^3r' \int dt' \int d^3k_1 \int d^3k_2 \int d^3k_3 \frac{\omega_1^2 (\omega_3 - \omega_1)^2}{k_1 k_2} \times \\ &\quad \times \chi_{ooe}^{(2)'}(\mathbf{r}') \tilde{E}_3(\mathbf{k}_3) e^{i(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}' - i(\omega_3 - \omega_1 - \omega_2)t'} e^{i[\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \omega_1 t]} e^{i[\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_1 - \omega_2 t]}. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Podemos ver que quando observamos os fótons gerados no processo a uma distância suficiente do cristal tal que o tempo que a luz demora para chegar aos pontos de observação é maior que o tempo de duração do pulso incidente, a integral em t' pode ser estendida até $t' = \infty$, resultando em um termo proporcional a $\delta(\omega_3 - \omega_1 - \omega_2)$. Portanto o termo $(\omega_3 - \omega_1)^2$ na equação acima pode ser substituído por ω_2^2 . A forma acima para a função de onda dos fótons gêmeos gerados pela conversão paramétrica descendente é equivalente à obtida em tratamentos anteriores que usam o formalismo tradicional da segunda quantização do campo eletromagnético com

teoria de perturbação para a evolução do estado em uma formulação hamiltoniana [88, 3].

Se utilizarmos a forma da equação (5.68) para a função de Green, chegamos em uma forma mais intuitiva para o estado dos fótons gêmeos:

$$\begin{aligned} \Psi_{oo}^{(2)'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = & -\frac{i\hbar\mu_0}{4(8\pi^2)^2} \int d^3r' \int dt' \int dk_1 \int dk_2 \chi_{ooe}^{(2)'}(\mathbf{r}') E_3'(\mathbf{r}', t') \times \\ & \times \omega_1^2 \frac{e^{i[k_1|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|-\omega_1(t-t')]} }{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|} \omega_2^2 \frac{e^{i[k_2|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}'|-\omega_2(t-t')]} }{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}'|} . \end{aligned} \quad (5.82)$$

Podemos interpretar a função de onda acima como sendo o resultado do espalhamento coerente de um fóton em dois por todos os espalhadores não-lineares presentes no cristal. Em cada um desses processos, o fóton incidente gera um par de fótons em modos de ondas esféricas emitidas a partir do ponto espalhador. As conservações de energia e de momento no processo podem ser vistas como o resultado da indistinguidade fundamental sobre a posição e o tempo em que o par de fótons foi gerado, o que nos força a somar coerentemente todas as amplitudes de probabilidade. Essas amplitudes de probabilidade interferem destrutivamente quando a energia não é conservada. Mas embora a soma das energias dos fótons gêmeos seja a energia do fóton incidente, a energia de cada fóton pode assumir uma vasta gama de valores. Portanto o par de fótons é emitido em um estado emaranhado em energia. Essas amplitudes de probabilidade também interferem de modo a fazer com que a soma dos momentos dos fótons gêmeos esteja associada ao momento do fóton incidente, em uma maneira que depende da geometria do cristal, já que este pode adquirir parte do momento do fóton incidente no processo. Mas o momento de cada fóton também pode assumir uma vasta gama de valores, o que faz com que os fótons gerados no processo também sejam emaranhados em momento linear.

Comparando as equações (5.81) e (5.63), a função de onda pós-selecionada dos fótons gêmeos no espaço de vetores de onda \mathbf{k} é proporcional a

$$\tilde{\Psi}_{oo}^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \propto \frac{\sqrt{\omega_1\omega_2}}{n_1n_2} \int dt' \int d^3r' \int d^3k_3 \chi_{ooe}^{(2)'}(\mathbf{r}') \tilde{E}_3(\mathbf{k}_3) e^{i(\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{r}'-i(\omega_3-\omega_1-\omega_2)t'} . \quad (5.83)$$

Consideremos que o fóton incidente esteja no modo de um feixe que se propaga na direção $\hat{\mathbf{z}}$ e que cristal não-linear seja um paralelepípedo com dimensões nas direções x e y muito maiores que o diâmetro desse feixe. Sendo assim, as integrais em x'

e y' podem se estender ao infinito. O comprimento na direção z será considerado muito pequeno, de forma que o termo $(k_{3z} - k_{1z} - k_{2z})z'$ na exponencial possa ser considerado zero na condição de casamento de fase ao longo do cristal e a integral em z' forneça uma constante. Para ilustrar o emaranhamento em energia e momento desse estado, é conveniente fazer uma mudança de representação. Representaremos vetores \mathbf{k} como $\mathbf{k} = \mathbf{q} + k_z \hat{\mathbf{z}}$ e $\tilde{E}_3(\mathbf{k}_3)$ como $\tilde{E}_3(\omega_3, \mathbf{q}_3)$, uma vez que ω_3 e \mathbf{q}_3 determinam \mathbf{k}_3 . A integral em k_{3z} será aproximada por uma integral em ω_3 , já que estamos considerando $|\mathbf{q}| \ll |\mathbf{k}|$. Com essas aproximações, a integral em t' nos fornece $\delta(\omega_3 - \omega_1 - \omega_2)$ e as integrais em x' e y' nos fornecem $\delta^2(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)$. Dessa forma, a função de onda no espaço de vetores de onda do estado pós-selecionado dos fótons gêmeos pode ser escrita como [81]

$$\tilde{\Psi}_{oo}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{q}_1, \omega_2, \mathbf{q}_2) \propto \chi_{ooo}^{(2)'} \sqrt{\omega_1 \omega_2} \tilde{E}_3(\omega_1 + \omega_2, \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2). \quad (5.84)$$

Vemos que não podemos escrever essa função de onda como o produto de uma função de onda para o fóton 1 com uma função de onda para o fóton 2, o que caracteriza o emaranhamento do sistema, tanto em energia quanto em momento.

5.6 Conclusões

Neste capítulo, apresentamos uma extensão do formalismo de Bialynicki-Birula e Sipe para funções de onda de fótons que inclui a interação de fótons com meios contínuos. A partir de considerações sobre conservação de energia, concluímos que a equação de onda do fóton deve ter o acréscimo de um termo relacionado às correntes elétricas induzidas no meio devido à presença desse fóton. Dessa maneira, a equação de onda que rege o comportamento de fótons em meios contínuos se torna equivalente às equações de Maxwell na matéria, o que está de acordo com os experimentos. Essas correntes induzidas são o resultado da interação dos campos elétrico e magnético do fóton com as cargas do meio. O fóton pode transferir energia e momento para o meio, e a divisão da energia total e do momento total da excitação em partes material e eletromagnética segue a divisão proposta nos capítulos anteriores desta tese.

Ao aplicarmos o processo de segunda quantização ao formalismo de função de onda de fótons, elevando as funções de onda ao status de operadores, nosso tratamento representa uma maneira alternativa de se tratar quanticamente a interação

do campo eletromagnético com meios materiais. Como exemplo de aplicação de nosso formalismo, o utilizamos para calcular o estado dos fótons gêmeos gerados pelo processo de conversão paramétrica descendente, com resultados equivalentes aos tratamentos que utilizam a segunda quantização do campo desde o princípio, mas com uma interpretação mais intuitiva. Um artigo científico com os resultados deste capítulo está em fase de preparação [89].

Capítulo 6

Conclusões

Nesta tese consideramos alguns aspectos fundamentais da interação de ondas eletromagnéticas com meios contínuos, tanto em um tratamento clássico quanto em um tratamento quântico baseado no conceito de funções de onda de fótons.

Na primeira parte da tese, mostramos que a energia e o momento de ondas eletromagnéticas clássicas em meios lineares não-absorvedores podem ser divididos em partes material e eletromagnética, em que as partes eletromagnéticas da densidade de energia $u_{e.m.}$, da densidade de momento $\mathbf{p}_{e.m.}$ e do fluxo de energia $\mathbf{S}_{e.m.}$ podem ser consideradas iguais às expressões no vácuo quando escritas em termos dos campos elétrico e magnético médios:

$$u_{e.m.} = \frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2, \quad \mathbf{p}_{e.m.} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{S}_{e.m.} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (6.1)$$

No capítulo 3, apresentamos diferentes modelos para meios lineares em que a parte material da densidade de energia pode ser obtida diretamente dos modelos, sendo a soma das densidades de energia potencial e cinética das cargas dos meios. Já o fluxo de energia material é o resultado de um efeito relativístico que ocorre quando um dipolo magnético está sob a ação de um campo elétrico. Essas formas adotadas para as densidades e fluxos de energia eletromagnética e material são compatíveis com a conservação local da energia.

No capítulo 4, calculamos o momento transferido para meios lineares não-absorvedores e não-dispersivos devido à presença de uma onda eletromagnética plana pulsada diretamente pelo uso da força de Lorentz em um série de exemplos, todos compatíveis com conservação de momento quando a parte eletromagnética da densi-

dade de momento é considerada igual à que propomos na tese. Também verificamos a validade da divisão proposta para o momento de ondas eletromagnéticas em meios lineares em um experimento imaginário, mostrando a concordância do tratamento com a teoria da relatividade especial.

Os resultados desta tese sobre a energia e o momento de ondas eletromagnéticas clássicas em meios lineares enriquecem um debate secular, conhecido como debate Abraham-Minkowski, sobre qual a forma correta para o tensor energia-momento eletromagnético em um meio linear [7]. Embora a conclusão eventual deste debate seja a de que existem inúmeras maneiras compatíveis de se dividir o tensor energia-momento total em partes material e eletromagnética, todas levando às mesmas previsões experimentais, acreditamos que a maneira que propomos seja a mais natural e intuitiva, como demonstrado nos diversos modelos apresentados, se encaixando de forma mais elegante nos conceitos fundamentais do eletromagnetismo clássico.

Na segunda parte da tese, que compreende o capítulo 5, propomos uma extensão do formalismo de Bialynicki-Birula e Sipe para funções de onda de fótons que inclui a interação com meios contínuos. Partindo de considerações sobre conservação de energia, acrescentamos um termo à equação de onda do fóton que é resultado da interação do fóton com o meio, fazendo com que ela se torne equivalente às equações de Maxwell na matéria. Em seguida aplicamos o processo de segunda quantização à função de onda do fóton em um meio linear não-dispersivo, elevando as funções de onda ao status de operadores, o que permite a descrição de fenômenos puramente quânticos. Como exemplo de aplicação do formalismo, o estado dos fótons gêmeos gerados pelo processo de conversão paramétrica descendente foi obtido em concordância com trabalhos anteriores. O trabalho desse capítulo resulta em uma maneira alternativa para se descrever quanticamente as interações entre a luz e a matéria.

Bibliografia

- [1] D. J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, New Jersey, 3rd edition, 1999.
- [2] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, New York, 3rd edition, 1999.
- [3] L. Mandel and E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge, New York, 1995.
- [4] M. O. Scully and M. S. Zubary. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [5] A. S. Villar, L. S. Cruz, K. N. Cassemiro, M. Martinelli, and P. Nussenzveig. Generation of bright two-color continuous variable entanglement. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 243603 (2005).
- [6] A. S. Coelho, F. A. S. Barbosa, K. N. Cassemiro, A. S. Villar, M. Martinelli, and P. Nussenzveig. Three-color entanglement. *Science* **326**, 823 (2009).
- [7] R. N. C. Pfeifer, T. A. Nieminen, N. R. Heckenberg, and H. Rubinsztein-Dunlop. Colloquium: Momentum of an electromagnetic wave in dielectric media. *Rev. Mod. Phys.* **79**, 1197 (2007).
- [8] H. Minkowski. Die grundgleichungen für die elektromagnetischen vorgänge in bewegten körpern. *Nachr.n Ges. Wiss. Goettingen*, page 53 (1908).
- [9] H. Minkowski. *Math. Ann.* **68**, 472 (1910). Reimpressão da referência [8].
- [10] I. Brevik. Experiments in phenomenological electrodynamics and the electromagnetic energy-momentum tensor. *Phys. Rep.* **52**, 133 (1979).

- [11] M. Abraham. Zur elektrodynamik bewegter körper. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **28**, 1 (1909).
- [12] M. Abraham. Sull'elettrodinamica di Minkowski. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **30**, 33 (1910).
- [13] R. V. Jones. Radiation pressure in a refracting medium. *Nature* **167**, 439 (1951).
- [14] R. V. Jones and J. C. S. Richards. The pressure of radiation in a refracting medium. *Proc. R. Soc. London A* **221**, 480 (1954).
- [15] R. V. Jones and B. Leslie. The measurement of optical radiation pressure in dispersive media. *Proc. R. Soc. London A* **360**, 347 (1978).
- [16] A. Ashkin and J. M. Dziedzic. Radiation pressure on a free liquid surface. *Phys. Rev. Lett.* **30**, 139 (1973).
- [17] G. B. Walker and D. G. Lahoz. Experimental observation of Abraham force in a dielectric. *Nature* **253**, 339 (1975).
- [18] G. B. Walker, D. G. Lahoz, and G. Walker. Measurement of the Abraham force in a barium titanate specimen. *Can. J. Phys.* **53**, 2577 (1975).
- [19] G. B. Walker and G. Walker. Mechanical forces in a dielectric due to electromagnetic fields. *Can. J. Phys.* **55**, 2121 (1977).
- [20] A. F. Gibson, M. F. Kimmitt, A. O. Koohian, D. E. Evans, and G. F. D. Levy. A study of radiation pressure in a refractive medium by the photon drag effect. *Proc. R. Soc. Lond. A* **370**, 303 (1980).
- [21] G. K. Campbell, A. E. Leanhardt, J. Mun, M. Boyd, E. W. Streed, W. Ketterle, and D. E. Pritchard. Photon recoil momentum in dispersive media. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 170403 (2005).
- [22] W. She, J. Yu, and R. Feng. Observation of a push force on the end face of a nanometer silica filament exerted by outgoing light. *Phys. Rev. Lett.* **101**, 243601 (2008).

- [23] P. Penfield Jr. and H. A. Haus. *Electrodynamics of Moving Media*. MIT, Cambridge, 1967.
- [24] I. Bialynicki-Birula. On the wave function of the photon. *Acta Phys. Pol. A* **86**, 97 (1994).
- [25] I. Bialynicki-Birula. Photon wave function. *Progress in Optics* **36**, 1996.
- [26] J. E. Sipe. Photon wave functions. *Phys. Rev. A* **52**, 1875 (1995).
- [27] M. G. Raymer and B. J. Smith. The Maxwell wave function of the photon. *Proc. SPIE* **5866**, 293 (2005).
- [28] I. Bialynicki-Birula. Photon as a quantum particle. *Acta Phys. Pol. B*, **37**, 935 (2006).
- [29] B. J. Smith and M. G. Raymer. Photon wave functions, wave-packet quantization of light and coherence theory. *New J. Phys.* **9**, 414 (2007).
- [30] T. D. Newton and E. P. Wigner. Localized states for elementary systems. *Rev. Mod. Phys.* **21**, 400 (1949).
- [31] L. Mandel. Configuration-space photon number operators in quantum optics. *Phys. Rev.* **144**, 1071 (1966).
- [32] R. P. Feynman. *Lectures on Physics*, volume 2. Addison Wesley, Reading, 6th edition, 1977. Chapter 27.
- [33] M. G. Burt and R. Peierls. The momentum of a light wave in a refracting medium. *Proc. R. Soc. London A* **333**, 149 (1973).
- [34] J. P. Gordon. Radiation forces and momenta in dielectric media. *Phys. Rev. A*, **8**, 14 (1973).
- [35] R. Loudon. Theory of the radiation pressure on dielectric surfaces. *J. Mod. Opt.* **49**, 821 (2002).
- [36] W. Israel. Relativistic effects in dielectrics: an experimental decision between Abraham and Minkowski? *Phys. Lett.* **67B**, 125 (1977).

- [37] R. Loudon, S. M. Barnett, and C. Baxter. Radiation pressure and momentum transfer in dielectrics: the photon drag effect. *Phys. Rev. A*, **71**, 063802 (2005).
- [38] U. Leonhardt. Energy-momentum balance in quantum dielectrics. *Phys. Rev. A*, **73**, 032108 (2006).
- [39] M. Mansuripur. Comment on “Observation of a push force on the end face of a nanometer silica filament exerted by outgoing light”. *Phys. Rev. Lett.* **103**, 019301 (2009).
- [40] M. Mansuripur and A. R. Zakharian. Theoretical analysis of the force on the end face of a nanofilament exerted by an outgoing light pulse. *Phys. Rev. A* **80**, 023823 (2009).
- [41] I. Brevik. Comment on “Observation of a push force on the end face of a nanometer silica filament exerted by outgoing light”. *Phys. Rev. Lett.* **103**, 219301 (2009).
- [42] R. N. C. Pfeifer, T. A. Nieminen, N. R. Heckenberg, and H. Rubinsztein-Dunlop. Constraining validity of the Minkowski energy-momentum tensor. *Phys. Rev. A* **79**, 023813 (2009).
- [43] A. Ashkin. Acceleration and trapping of particles by radiation pressure. *Phys. Rev. Lett.* **24**, 156 (1970).
- [44] Y. N. Obukhov and F. W. Hehl. Electromagnetic energy-momentum and forces in matter. *Phys. Lett. A* **311**, 277 (2003).
- [45] H. Goldstein , C. Poole and J. Safko. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, San Francisco, 3rd edition, 2002.
- [46] P. W. Milonni. *The Quantum Vacuum: An Introduction to Quantum Electrodynamics*. Academic Press, San Diego, 1994.
- [47] R. Loudon. *The Quantum Theory of Light*. Oxford University Press, New York, 3rd edition, 2003. Chapter 2.
- [48] J. H. Van Vleck. *The Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities*. Oxford University Press, London, 1966.

- [49] N. W. Ashcroft. *Solid State Physics*. Holt, Rinehart and Wilson, New York, 2nd edition, 1976. Chapter 31.
- [50] R. P. Feynman. *Lectures on Physics*, volume 2. Addison Wesley, Reading, 6th edition, 1977. Chapter 34.
- [51] W. Schockley and R. P. James. “Try simple cases” discovery of “hidden momentum” forces on “magnetic currents”. *Phys. Rev. Lett.* **18**, 876 (1967).
- [52] L. Vaidman. Torque and force on a magnetic dipole. *Am. J. Phys.* **58**, 978 (1990).
- [53] S. Coleman and J. H. Van Vleck. Origin of “hidden momentum forces” on magnets. *Phys. Rev.* **171**, 1370 (1968).
- [54] W. Schockley. “Hidden linear momentum” related to the $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E}$ term for a Dirac-electron wave packet in an electric field. *Phys. Rev. Lett.* **20**, 343 (1968).
- [55] P. L. Saldanha. Division of the energy of electromagnetic waves in linear media into electromagnetic and material parts. Em preparação.
- [56] R. Loudon. Theory of the forces exerted by Laguerre-Gaussian light beams on dielectrics. *Phys. Rev. A* **68**, 013806 (2003).
- [57] M. Mansuripur. Radiation pressure and the linear momentum of the electromagnetic field. *Opt. Express* **12**, 5375 (2004).
- [58] M. Scalora, G. D’Aguanno, N. Mattiucci, M. J. Bloemer, M. Centini, C. Sibilia, and J. W. Haus. Radiation pressure of light pulses and conservation of linear momentum in dispersive media. *Phys. Rev. E* **73**, 056604 (2006).
- [59] E. A. Hinds and S. M. Barnett. Momentum exchange between light and a single atom: Abraham or Minkowski? *Phys. Rev. Lett.* **102**, 050403 (2009).
- [60] M. Mansuripur. Radiation pressure and the linear momentum of the electromagnetic field in magnetic media. *Opt. Express* **15**, 13502 (2007).
- [61] M. Mansuripur. Radiation pressure on submerged mirrors: implications for the momentum of light in dielectric media. *Opt. Express* **15**, 2677 (2007).

- [62] M. Born and E. Wolf. *Principles of Optics*. Macmillan, New York, 2nd edition, 1964.
- [63] O. R. Frisch. Take a photon... *Contemp. Phys.* **7**, 45 (1965).
- [64] I. Brevik. Phenomenological photons and the uncertainty principle. *Eur. J. Phys.* **2**, 37 (1981).
- [65] R. Loudon. Radiation pressure and momentum in dielectrics. *Fortschr. Phys.* **52**, 1134 (2004).
- [66] P. L. Saldanha. Division of the momentum of electromagnetic waves in linear media into electromagnetic and material parts. *Opt. Express* **18**, 2258 (2010).
- [67] I. Bialynicki-Birula. Exponential localization of photons. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5247 (1998).
- [68] P. Dirac. The quantum theory of the electron. *Proc. R. Soc. London A* **117**, 610 (1928).
- [69] P. Dirac. The quantum theory of the electron. Part II. *Proc. R. Soc. London A* **118**, 351 (1928).
- [70] A. Messiah. *Quantum Mechanics*. Dover, New York, 1999.
- [71] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*, volume 1. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. Chapter 2.
- [72] L. D. Landau and R. Peierls. Quantenelektrodynamik im konfigurationsraum. *Z. Phys* **62**, 188 (1930).
- [73] R. J. Cook. Photon dynamics. *Phys. Rev. A* **25**, 2164 (1982).
- [74] R. J. Cook. Lorentz covariance of photon dynamics. *Phys. Rev. A* **26**, 2754 (1982).
- [75] T. Inagaki. Quantum-mechanical approach to a free photon. *Phys. Rev. A* **49**, 2839 (1994).

- [76] A. M. Steinberg, P. G. Kwiat and R. Y. Chiao. Dispersion cancelation in a measurement of the single-photon propagation velocity in glass. *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2421 (1992).
- [77] R. J. Glauber and M. Lewenstein. Quantum optics of dielectric media. *Phys. Rev. A* **43**, 467 (1991).
- [78] B. Huttner and S. Barnett. Quantization of the electromagnetic field in dielectrics. *Phys. Rev. A* **46**, 4306 (1992).
- [79] B. J. Smith and M. G. Raymer. Two-photon wave mechanics. *Phys. Rev. A* **74**, 062104 (2006).
- [80] J. G. Rarity, P. R. Tapster, E. Jakeman, T. Larchuk, R. A. Campos, M. C. Teich, and B. E. A. Saleh. Two-photon interference in a Mach-Zehnder interferometer. *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1348 (1990).
- [81] C. H. Monken , P. H. Souto Ribeiro and S. Pádua. Transfer of angular spectrum and image formation in spontaneous parametric down-conversion. *Phys. Rev. A* **57**, 3123 (1998).
- [82] A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs, and A. Zeilinger. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons. *Nature* **412**, 313 (2001).
- [83] P. G. Kwiat and K. Mattle and H. Weinfurter and A. Zeilinger. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4337 (1995).
- [84] P. G. Kwiat, E. Waks, A. G. White, I. Appelbaum, and P. H. Eberhard. Ultrabright source of polarization-entangled photons. *Phys. Rev. A* **60**, R773 (1999).
- [85] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [86] Vlatko Vedral. *Introduction to Quantum Information Science*. Oxford University Press, New York, 2006.

- [87] Grant R. Fowles. *Introduction to Modern Optics*. Dover, 1975.
- [88] C. K. Hong and L. Mandel. Theory of parametric frequency down conversion of light. *Phys. Rev. A* **31**, 2409 (1985).
- [89] P. L. Saldanha and C. H. Monken. Interaction between light and matter: A photon wave function approach. Em preparação.