

**Ambientalismo Quântico: Proteção
Global através de Operações Locais e
Transição Quântico-Clássico**

Eduardo Mascarenhas

17 de Setembro de 2010

Ambientalismo Quântico: Proteção Global através de Operações Locais e Transição Quântico-Clássico

Eduardo Mascarenhas

Orientador: Prof. Marcelo França

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Ciências – Física**.

Belo Horizonte
Agosto de 2010

...para Mã e Vô, que deram suas vidas por mim...

"I believe whatever doesn't kill you simply makes you stranger."

The Joker

Agradecimentos

Agradeço ao Padrinho (ou Chefão) por ter zelado por minha vida tanto em aspectos acadêmicos quanto pessoais e por ter feito várias propostas irrecusáveis. Agradeço à Camilla que de fato divide uma vida comigo, tanto em risadas infundáveis quanto em situações difíceis. Todo mundo vai nos agradecer ver se seu nome aparece e eu acho isso desnecessário. Não citarei mais ninguém aqui, mas saibam que sou muito grato a todos e valorizo muito a participação de cada um na minha vida. E cada um sabe o que fez por mim.

Agradeço ao CNPq pela pouca e boa grana durante o mestrado.

Resumo

Nós estudamos como proteger informação quântica em sistemas quânticos sujeitos a dissipação local. Nós mostramos que, combinando o uso de sistemas de três níveis, monitoramento do ambiente e realimentação local baseada na informação adquirida no monitoramento, podemos, deterministicamente e completamente, proteger qualquer informação quântica disponível, incluindo emaranhamento inicialmente dividido por diferentes partes. Estes resultados podem representar um ganho em recursos e ou distância em protocolos de comunicação como repetidores quânticos e teleportação assim como tempo em memórias quânticas. Mostramos, também, que o monitoramento local de ambientes fornece uma implementação física do protocolo ótimo de conversão de estados emaranhados.

Utilizando o mesmo formalismo, mostramos, também, a transição de uma interação inteiramente quantizada para uma semiclássica em sistemas quânticos com número baixo de excitações. Em particular, simulamos as zonas de Ramsey de microondas utilizadas em interferometria de átomos de Rydberg, preenchendo a lacuna entre a evolução Jaynes-Cummings fortemente emaranhadora e a rotação semiclássica dos estados internos do átomo. Nós também relacionamos a informação que flui com os fótons que escapam da cavidade à geração de emaranhamento entre campo da cavidade e átomo, e detalhamos os papéis ocupados pela forte dissipação e pelo bombeamento externo na preservação da coerência atômica ao longo da interação. Mostramos que, no limite clássico, a informação contida nos fótons tende a zero e que a vasta gama de possibilidades quânticas desaparece de tal forma que o sistema segue sempre uma única trajetória, a trajetória clássica, e além disso múltiplos observadores registram o mesmo movimento clássico.

Conteúdo

Agradecimentos	4
Resumo	5
Introdução	8
1 Conhecimento, Operações e Correlações	11
I Conhecimento do Observador	11
II Evolução de Sistemas Isolados	13
III Medições de Sistemas Quânticos	14
A Invariância do Estado não Condicionado	16
IV Conhecimento e Correlações	17
A Emaranhamento e Operações Quânticas	18
B Emaranhamento de Estado Puro	19
C Emaranhamento de Estado Misto	21
2 Ambientalismo Quântico	24
I Sistemas Abertos	24
II Medindo o Ambiente	26
A Detecção Imperfeita	29
III Retroalimentação Quântica (<i>Feedback</i>)	30
A Feedback no Limite Markoviano	32
3 Proteção Global por Operações Locais	35
I Adquirindo e Preservando Informação	37
II Codificação Dinâmica Local em Q-trits	40
A Um Exemplo com Saltos Quânticos em Eletrodinâmica Quântica de Cavidades	41
III Reciclagem Local via Feedback	44
A Código para Saltos Quânticos	44
B Código para Difusão de Estado	46
C Imperfeições	48
4 Transição Quântico-Clássico	53
I A Transição em Eletrodinâmica Quântica	55
A O Sistema	55
B Assinaturas do Quântico e do Clássico	55
II A Transição e a Ressonância Estocástica	57
A Ressonância Estocástica na Informação dos Fótons	60

<i>CONTEÚDO</i>	7
B Trajetórias Clássicas e Quânticas	66
5 Conclusão	68
I Ruído Clássico	70

Introdução

Os experimentos e teoria de mecânica quântica causaram e causam desconforto filosófico e prático a muitos que os avaliam. Isto se deve basicamente aos rumos que esta teoria tomou abandonando fortes pilares da física clássica que por séculos guiaram (e ainda guiam) a intuição e entendimento humano do mundo à nossa volta. Esta teoria fundamentalmente nos impede de conhecer e descrever um sistema físico com a certeza que temos na perspectiva clássica. Surpreendentemente, é exatamente essa incerteza intrínseca que nos possibilita dar uma descrição para correlações muito fortes que não podem ser descritas por nenhuma teoria clássica. Como a falta de informação (na perspectiva clássica) pode levar a sistemas tão fortemente correlacionados compondo redes de comunicação muito mais poderosas que as redes clássicas? Parte desta discrepância entre o clássico e quântico se deve às correlações do tipo emaranhamento. Entretanto, este mesmo fator que coloca a mecânica quântica como uma possibilidade de realizar comunicação e processamento de informação de forma muito superior à clássica usual também gera os empecilhos para tal. Um sistema que armazena ou processa informação quântica está sujeito a interagir com o ambiente à sua volta, o que pode correlacionar (e até emaranhar) este sistema com o seu ambiente. Assim os dados quânticos podem ser perdidos para o ambiente sendo corrompidos além de qualquer possível reparação.

O processamento de informação quântica depende da capacidade de manter coerência assim como emaranhamento entre diferentes integrantes de um sistema. Entretanto muitos sistemas propostos para implementação de protocolos quânticos são naturalmente sujeitos à inevitável dissipação local, como armadilhas de íons [1], sistemas de eletrodinâmica quântica de cavidades [2] e ensembles atômicos [3]. Obviamente, isso acaba agindo contra a eficiência destes sistemas através do mecanismo de descoerência. Diferentes estratégias foram criadas para proteger parcialmente ou restaurar a coerência, tais como destilação de emaranhamento [4], repetidores quânticos [5] e retroalimentação quântica [75], entretanto, todas estas propostas apresentam combinações de diferentes custos como o aumento de recursos para criar a redundância necessária ou a necessidade de realizar operações multi-qbit, isto é operações não-locais.

Uma grande motivação deste trabalho é a manipulação e a proteção de emaranhamento, um recurso global, utilizando apenas operações locais. Mostraremos uma estratégia completamente local e determinística capaz de vencer a ação inevitável da dissipação. Nossa proposta depende de três elementos básicos: a capacidade de monitorar o ambiente detectando as excitações que chegam ao reservatório; a possibilidade de rapidamente realimentar o sistema com uma excitação; e o uso de sistemas de três níveis para codificar a informação quântica.

Apesar de envolver algum tipo de redundância, esse tipo de codificação é muito mais “barato” que os códigos de correção usuais para dissipação, porque acrescenta apenas um nível extra a cada constituinte e não tem como requisito algum emaranhamento extra ou operações globais. Também mostraremos que o monitoramento ambiental pode representar uma implementação dinâmica do protocolo local ótimo capaz de transformar estados com algum emaranhamento em estados maximamente emaranhados.

A interação com o ambiente que prejudica protocolos quânticos pode, de fato, chegar a um estágio capaz de suprimir as características quânticas de um dado sistema induzindo uma transição de comportamento até que o sistema se torne efetivamente clássico. A transição quântico-clássico seria então induzida pelo ruído quântico no ambiente que perturba o sistema. Neste regime de comportamento clássico, suprime-se o efeito da incerteza quântica intrínseca que, normalmente, dá origem a infinitas trajetórias possíveis para a evolução do conhecimento do observador sobre o sistema. Todas as trajetórias ficam muito semelhantes de tal forma que o sistema efetivamente sempre siga uma trajetória, assim recuperando a noção determinista clássica. Estudamos este efeito em um sistema comum em eletrodinâmica quântica de cavidades, em que um sistema de dois níveis (dois níveis eletrônicos de um átomo formando um qbit) interage com um oscilador harmônico (um modo de campo eletromagnético confinado na cavidade ressonante), sendo que o oscilador é bombeado por uma força externa clássica (um gerador de microondas) e sofre dissipação causada pela interação com o ruído ambiental. Um fator intrigante deste sistema é que a transição para o comportamento clássico acontece a temperaturas extremamente baixas e com um número de excitações também muito baixo, uma excitação em média, regimes em que esperaríamos efeitos quânticos.

É possível mostrar que, ao medir quantidades associadas ao ambiente, podemos adquirir (ou recuperar) informação sobre o sistema. Em particular, mostramos que as excitações que o oscilador perde para o ambiente carregam informação sobre o comportamento do sistema e sobre as correlações internas entre as partes (átomo e campo da cavidade). Cada excitação que deixa o oscilador, quando aniquilada, causa uma mudança abrupta no emaranhamento átomo-cavidade, salto esse que nos permite quantificar a informação carregada por cada fóton detectado no reservatório. À medida que a presença do ambiente se torna mais significativa, o emaranhamento (uma assinatura quântica) entre átomo e cavidade, advindo da interação fortemente emaranhadora entre os mesmos, vai desaparecendo até que se torne efetivamente nulo no limite clássico. Entretanto a informação contida nos fótons que escapam da cavidade apresenta um efeito de ressonância estocástica quântica, em que a informação é nula para ruído nulo, cresce rapidamente até um valor máximo para uma dada intensidade de ruído e decresce gradualmente para altas intensidades. A região de máximo de informação corresponde à situação em que o qbit, o oscilador e o ambiente estão maximamente emaranhados, assim marcando a região em que a transição começa a acontecer.

O fenômeno de ressonância estocástica já foi estudado em uma enorme variedade de contextos, de eras glaciais a sistemas sensoriais biológicos. O próprio conceito de evolução tem sido atribuído, em conjectura, a flutuações ambientais inevitáveis. O fenômeno foi primeiramente proposto para explicar a ocorrência de eras glaciais, ou como pequenas perturbações na órbita do planeta podem afetar o clima global induzindo transições entre estados de baixa e alta tempera-

tura. Se as flutuações são muito pequenas as transições são muito infrequentes, se são muito grandes, as transições são muito frequentes e ambas situações não correspondem ao que é observado. Portanto, deve haver um nível ótimo de flutuações. As grandes eras glaciais supostamente acontecem a cada 100.000 anos. Entretanto, não tão drásticas mudanças acontecem a cada 5 anos, o que continua realimentando a discussão de que ações humanas são ou não responsáveis por rápidas mudanças do clima global [6].

Fato é que os efeitos induzidos por flutuações ambientais são extremamente importantes tanto dentro quanto fora da escala quântica. Esta é uma dissertação voltada para o estudo de informação em ambientes quânticos. No primeiro capítulo, vamos apresentar alguns conceitos básicos de mecânica quântica incluindo informação, operações e correlações. No segundo capítulo, nos voltamos para sistemas abertos, ou seja, sistemas que se comunicam com seus ambientes. Descrevemos como o monitoramento do ambiente pode afetar a informação sobre o sistema e apresentamos um tipo de retroalimentação que pode vir a ser usada para obter ou controlar certos tipos de comportamento do sistema em questão. No terceiro capítulo buscamos estratégias locais de monitoramento do ambiente e retroalimentação do sistema para preservar informação e emaranhamento [7]. No quarto capítulo mostramos uma transição de comportamento de quântico a clássico e fornecemos uma perspectiva sobre a informação que pode ser obtida com o monitoramento [8]. Finalmente, concluímos a dissertação no capítulo cinco com perspectivas futuras.

Capítulo 1

Conhecimento, Operações e Correlações

I Conhecimento do Observador

Em Mecânica Quântica, abandonamos a descrição clássica de sistemas físicos baseada em posição ou estado bem definido (sem incerteza) e adotamos uma descrição em que o conhecimento do observador se baseia em uma distribuição de amplitudes de probabilidades (cujo módulo quadrado é uma probabilidade) para os possíveis resultados de medidas ou observações. A descrição probabilística na física apareceu com a Mecânica Estatística muito antes da MQ. Entretanto existem grandes diferenças entre o caso clássico e o quântico [9]. A incerteza sobre resultados de medidas no conhecimento de um observador é intrínseca à MQ, enquanto que no caso clássico é inteiramente atribuída à ignorância do observador. Com a estrutura linear da MQ, qualquer estado com a menor incerteza possível pode ser compreendido como sendo uma superposição de outros estados também de menor incerteza, assim não havendo estado de incerteza nula (numa perspectiva clássica). Esta mesma estrutura de incerteza, em sistemas compostos, se traduz em uma característica unicamente quântica, o emaranhamento. As distribuições de probabilidade quânticas (matrizes densidade) de sistemas compostos podem, assim como no caso clássico, apresentar correlações entre os resultados de medidas individuais (locais) dos subsistemas. Entretanto essas correlações podem não possuir análogas em ME clássica, sendo assim nomeadas emaranhamento. Antes de examinar sistemas sob uma determinada partição, vamos primeiro focar no caso de sistemas isolados não particionados e rever algumas características de estados quânticos.

O estado de conhecimento do observador é representado por uma matriz densidade ou estado quântico ρ , cujos autovalores ρ_i são reais e não negativos, ρ é hermitiana, positiva semi-definida e possui traço um, $\text{tr}\{\rho\} = \sum_i \rho_i = 1$, o que garante sua interpretação probabilística. A matriz está associada a um ensemble de sistemas identicamente preparados, sobre o qual todos os resultados de medida obedecerão à distribuição estatística contida em ρ . Toda a informação contida em ρ é referente à probabilidades com que aparatos capazes de medir o sistema forneceriam seus possíveis resultados. A quantidade de informação

contida em ρ (uma matriz $d \times d$) pode ser quantificada por sua pureza

$$\delta = \text{tr}\{\rho^2\} = \sum_i \rho_i^2, \quad \frac{1}{d} \leq \delta \leq 1 \quad (1.1)$$

e equivalentemente pela entropia de von Neumann

$$S = -\text{tr}\{\rho \log \rho\} = -\sum_i \rho_i \log \rho_i, \quad \log d \geq S \geq 0. \quad (1.2)$$

Um estado que apresenta máxima informação quântica¹ é dito puro e nesse caso $\delta = 1$, $S = 0$. Estados com menor teor de informação sobre resultados de medida são ditos mistos. No caso maximamente misto $\delta = 1/d$, $S = \log d$.

A matriz ou ensemble ρ sempre pode ser expressa como uma soma convexa não única de projetores

$$\rho = \sum_i p_i P_i = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad \text{tr}\{\rho\} = 1, \quad (1.3)$$

tal que é possível preparar ρ com um aparato que prepara P_i com probabilidade p_i . Quando os projetores $\{P_i\}$ são ortogonais temos que as probabilidades p_i são os autovalores de ρ . Os projetores por sua vez correspondem a estados puros $\text{tr}\{P^2\} = \text{tr}\{P\} = 1$, que podem ser representados de maneira computacionalmente mais simples por vetores de estado $|\psi\rangle$ com norma um $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Assim os vetores de estado contém sempre a maior quantidade de informação que um estado quântico pode oferecer. Apesar disso, esses vetores ainda apresentam incertezas estatísticas intrínsecas na MQ no sentido de que os resultados de medidas ainda são probabilísticos e não determinísticos. Eles sempre podem ser expressos de maneira também não única como uma superposição coerente de outros estados puros

$$|\psi\rangle = \sum_i \lambda_i |\phi_i\rangle. \quad (1.4)$$

A não unicidade na representação de um mesmo estado misto pode ser fisicamente interpretada como a não unicidade de maneiras de se preparar um mesmo objeto físico, que levam a mesma distribuição ρ . A não unicidade no caso puro representa a incerteza mínima para qualquer observador e sempre haverá infinitas perguntas (ou medições) para as quais as respostas serão probabilísticas.

Agora suponha um observador A e um outro observador B, cujos conhecimentos sobre um dado sistema são dados por ρ_A e ρ_B respectivamente. Podemos nos perguntar o quão diferentes são os estados de A e B definindo uma espécie de distância (embora não seja uma quantidade simétrica) estatística entre ρ_A e ρ_B , a fidelidade [11]

$$F = \left(\text{tr} \left\{ \sqrt{\sqrt{\rho_B} \rho_A \sqrt{\rho_B}} \right\} \right)^2. \quad (1.5)$$

Considere um caso especial em que um dos estados é puro $\rho_B = |\psi\rangle\langle\psi|$. Nesse caso temos $\sqrt{\rho_B} = \rho_B$ e a fidelidade se reduz ao produto interno dos operadores

$$F = \text{tr}\{\rho_A \rho_B\} = \langle\psi|\rho_A|\psi\rangle, \quad (1.6)$$

¹Alertamos ao leitor que nosso tratamento para informação é diferente do tratamento original de Shannon [10]

tal que $0 \leq F \leq 1$ sendo $F = 1$ sse $\rho_A = \rho_B$ e $F = 0$ sse ρ_A e ρ_B “moram” em subespaços ortogonais. Um observável do sistema também pode ser representado por uma matriz e também possui uma decomposição em autovalores e autovetores. Segue o valor médio de um observável X dado que o estado é ρ : $\langle X \rangle = \text{tr}\{\rho X\}$.

II Evolução de Sistemas Isolados

Um sistema isolado é em geral apenas uma abstração que no entanto serve de base para toda a descrição de sistemas realistas não isolados, chamados sistemas abertos. Antes de abordarmos sistemas abertos vamos primeiro examinar o caso mais simples e apresentar a equação que governa a evolução temporal do sistema e sua respectiva solução. A evolução de um sistema isolado depende apenas do seu hamiltoniano \mathcal{H} e é dada pela equação de von Neumann que no caso restrito a estados puros se reduz à equação de Schrödinger (ES). Apesar de se tratar de uma descrição restrita vamos começar pela ES e apresentar uma motivação para a mesma.

Até onde entendo ² a maneira e estratégia empregadas por Erwin Schrödinger ao derivar sua famosa equação parecem um tanto quanto obscuras [12]. Trabalhos anteriores de Einstein, Planck e de Broglie sugeriam um comportamento ondulatório de partículas pequenas e discretização de espectros de energia. Hoje interpretamos a união do comportamento ondulatório e de partícula como sendo devido à limitação da descrição de sistemas físicos à distribuições de amplitudes de probabilidades, que se traduz na linearidade da MQ. Esse processo de quantização levou à associação de grandezas observáveis do sistema (por exemplo o hamiltoniano) a operadores lineares e hermitianos.

Antes desta e outras interpretações da MQ, acredito que a ideia central era associar uma onda, *por exemplo* uma onda plana $\psi(r, t) = e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$, a uma partícula de tal forma a respeitar a conservação de energia. A energia da partícula é dada por seu hamiltoniano \mathcal{H} e a energia do quantum de onda por $E = \hbar\omega$. Impondo a igualdade de energia chegamos à ES

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\psi &= E\psi = \hbar\omega\psi \\ \mathcal{H}\psi &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi. \end{aligned} \quad (1.7)$$

O espaço de ondas planas é isomorfo a um espaço vetorial linear tal que $\psi \mapsto |\psi\rangle$ e $\mathcal{H} \mapsto H$. Podemos então reescrever a ES na forma que nos é mais adequada

$$d|\psi\rangle = -\frac{i}{\hbar}H|\psi\rangle dt. \quad (1.8)$$

Essa motivação para a ES é equivalente a um processo de quantização da descrição física. Fato é que a ES, em seu alcance restrito a todos os estados puros, é uma lei de dinâmica determinística geral sendo adequada também para outros sistemas quânticos como o grau de liberdade de momento angular intrínseco, partículas em potenciais não triviais [13] e sistemas de muitos corpos. Podemos

²A título de curiosidade discuto brevemente, do meu ponto de vista, a origem da ES. Obviamente o leitor interessado pode procurar os trabalhos originais que formulam uma mecânica ondulatória para partículas.

resolver a ES e portanto obter a evolução de um estado puro arbitrário de um sistema fechado (assumindo um hamiltoniano independente do tempo e $\hbar = 1$)

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle = e^{-iHt}|\psi(0)\rangle. \quad (1.9)$$

No caso geral de estados mistos arbitrários a equação de evolução é a de von Neumann

$$d\rho = -i[H, \rho]dt, \quad (1.10)$$

sendo o comutador $[H, \rho] = [H, \bullet]\rho = H\rho - \rho H$ com a solução

$$\rho(t) = e^{-i[H, \bullet]t}\rho(0). \quad (1.11)$$

Podemos ainda explicitar essa solução em termos do operador evolução $U(t)$, que corresponde a uma operação unitária. Fazendo uso da série (generalização da série de Taylor) da exponencial do comutador, temos

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \sum_n \frac{(-i)^n [H, \bullet]^n t^n}{n!} \rho(0) \\ &= \rho(0) - it[H, \rho(0)] - \frac{t^2}{2}[H, [H, \rho(0)]] + \dots \\ &= \left(I - iHt - \frac{t^2}{2}H^2 + \dots \right) \rho(0) \left(I + iHt - \frac{t^2}{2}H^2 + \dots \right) \\ &= \left[\sum_n \frac{(-iHt)^n}{n!} \right] \rho(0) \left[\sum_n \frac{(iHt)^n}{n!} \right] = e^{-iHt} \rho(0) e^{iHt} \\ \rho(t) &= U(t)\rho(0)U(t)^\dagger. \end{aligned} \quad (1.12)$$

É fácil mostrar que no caso de estados puros a equação de von Neumann se reduz à ES. Se $\rho(0) = P = |\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|$ então $\rho(t) = U|\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|U^\dagger = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$, assim recuperamos a solução (1.9) e portanto a ES.

III Medições de Sistemas Quânticos

Aqui serei muito objetivo de forma similar a [9, 15, 16], indicando [14] para uma discussão extensa. Medir ou observar um sistema físico é uma forma de tentar adquirir informação sobre o mesmo. A MQ como um todo pode ser formulada a partir de preparações e medidas de sistemas quânticos [14]. Medidas projetivas são bem conhecidas entre físicos e são apresentadas em cursos introdutórios como sendo a única forma de medida, entretanto são um caso particular de todas as medidas quânticas. Existem também medidas não projetivas que possuem um papel importante nas seções que se seguem.

Um conjunto $\{\Pi_n\}$ de operadores de medida ([9, 14, 17]), constitui um processo de medição quando particiona a identidade do espaço vetorial do sistema quântico obedecendo

$$\sum_n \Pi_n^\dagger \Pi_n = I, \quad \langle \Pi_n^\dagger \Pi_n \rangle \geq 0 \quad \forall n. \quad (1.13)$$

Se a medida é projetiva todos os operadores do conjunto são projetores ortogonais. A equação (1.13) vale para qualquer medida incluindo não projetivas,

sendo o único vínculo que garante a conservação da probabilidade. Cada operador de medida Π_n pode ser interpretado como a n -ésima saída (resultado) possível em um aparato de medida caracterizado pelo conjunto $\{\Pi_n\}$. O aparato também pode ser pensado como sendo um conjunto de detectores $\{\Pi_n\}$. Aqui se torna explícita a incerteza estatística intrínseca da MQ. Suponha que o conhecimento do observador seja dado inicialmente por $\rho(0)$. Na realização de uma medida cada saída ou resultado acontece com probabilidade

$$p_n = \text{tr}\{\Pi_n \rho(0) \Pi_n^\dagger\}, \quad (1.14)$$

e de acordo com o postulado de medida (von Neumann e Lüders) o estado quântico evolui condicionado ao disparo do n -ésimo detector

$$\rho_n(\Delta t) = \frac{1}{p_n} \Pi_n \rho(0) \Pi_n^\dagger, \quad (1.15)$$

em que Δt é o tempo decorrido durante o processo de medida. No caso de estados puros temos $|\psi_n(\Delta t)\rangle = \Pi_n |\psi(0)\rangle$ a menos de normalização. Isso quer dizer que a informação do resultado de uma medida muda o conhecimento do observador levando a uma nova distribuição de probabilidade $\rho_n(\Delta t)$ condicionada ao resultado n . A relação (1.13) é necessária para manter a conservação da probabilidade, tal que $\sum_n p_n = 1$. Usando a propriedade cíclica e linearidade do traço temos

$$\sum_n p_n = \text{tr} \left\{ \sum_n \Pi_n^\dagger \Pi_n \rho \right\} = \text{tr}\{\rho\} = 1. \quad (1.16)$$

Se, por alguma razão, o observador perder ou ignorar o resultado da medida o seu conhecimento será dado pela mistura estatística dos possíveis resultados, ou seja, o estado não condicionado ao resultado

$$\rho(\Delta t) = \sum_n \Pi_n \rho(0) \Pi_n^\dagger. \quad (1.17)$$

A medida não seletiva que gera o estado não condicionado, em geral, diminui o nível de informação aumentando a entropia do estado. Assim um estado inicial puro, em geral, evolui para um estado misto de pureza menor que um. A medida se torna seletiva quando o observador registra o resultado de medida.

Medidas quânticas são operações completamente positivas, pois obedecem a equação (1.13). Operações completamente positivas mapeam estados quânticos em estados quânticos, ou seja, estas operações preservam as propriedades de estados quânticos (todas as possíveis medidas sobre o novo estado também resultam em outros estados quânticos com probabilidades não negativas). Assim um mapa positivo Λ leva um estado σ a um outro estado $\rho = \Lambda\sigma$, tal que para qualquer conjunto de operadores de medida $\text{tr}\{\Pi_n \rho \Pi_n^\dagger\} \geq 0, \forall n$. Um mapa é completamente positivo se o mesmo vale para todas suas extensões triviais $\text{tr}\{\Pi_n (\Lambda \otimes I_d) \sigma \Pi_n^\dagger\} \geq 0, \forall n, d$ sendo que agora o estado σ e os operadores Π_n atuam em um sistema cuja dimensão é a do sistema original vezes d , sendo d a dimensão da identidade I_d . As operações completamente positivas obedecem os postulados de medida e podem ser expressas na forma de Kraus como na equação (1.17).

A operação quântica mais geral em um sistema A pode ser obtida com uma interação hamiltoniana com um sistema B seguida de uma medida não seletiva

no sistema B ou o traço parcial neste segundo sistema

$$\rho_A(\Delta t) = \text{tr}_B\{U\rho_{AB}U^\dagger\}. \quad (1.18)$$

Uma consideração importante é o grau de correlação inicial entre os sistemas A e B. Foi mostrado recentemente que para obtermos um mapa completamente positivo, i. e., um mapeamento de estados quânticos a estados quânticos, é necessário que os sistemas sejam apenas classicamente correlacionados, ou seja, com discórdia nula [18]. Aqui, trataremos apenas o caso em que inicialmente o sistema A e seu entorno B são descorrelacionados. Portanto temos um estado inicial $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \sum_i p_i |i\rangle\langle i|$, que ao ser substituído na equação (1.18) nos fornece

$$\begin{aligned} \rho_A(\Delta t) &= \sum_{ji} \langle j|U|i\rangle\sqrt{p_i}\rho_A(0)\langle i|U^\dagger|j\rangle\sqrt{p_i} \\ &= \sum_{ij} \Pi_{ij}\rho_A(0)\Pi_{ij}^\dagger, \quad \Pi_{ij} = \langle j|U|i\rangle\sqrt{p_i}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Este exemplo genérico representa uma medida não projetiva (ignorando o resultado de medida) em A, em que o sistema (A) interage com o ambiente (B) através da unitária U e em seguida o observador realiza uma medida projetiva (e não seletiva) no ambiente na base $\{|j\rangle\}$ (na qual efetuamos o traço).

A Invariância do Estado não Condicionado

O aparato de medida pode ser rearranjado produzindo saídas diferentes daquelas produzidas pelo arranjo inicial, mas ainda assim mantendo o mesmo estado não condicionado. Vamos definir primeiro o vetor que representa a medida não seletiva (que gera o estado não condicionado)

$$\mathbf{\Pi} = [\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n, \dots], \quad (1.20)$$

tal que a equação (1.17) pode ser escrita como

$$\rho(\Delta t) = \mathbf{\Pi}\rho\mathbf{\Pi}^\dagger, \quad (1.21)$$

tal que ³

$$\mathbf{\Pi}^*\mathbf{\Pi}^\dagger = \sum_n \Pi_n^\dagger\Pi_n = I. \quad (1.22)$$

Agora podemos definir outros conjuntos $\{\Xi_m\}$ de operadores de medida que são equivalentes ao conjunto $\{\Pi_n\}$, no sentido de fornecerem o mesmo estado não condicionado. O rearranjo do aparato corresponde a uma transformação unitária sobre o vetor transposto $\mathbf{\Pi}^\dagger$ e nos conduz a um novo vetor

$$\mathbf{\Xi}^\dagger = \mathcal{U}\mathbf{\Pi}^\dagger = [\Xi_0, \Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n, \dots]^\dagger, \quad (1.23)$$

com $\mathbf{\Xi} = \mathbf{\Pi}\mathcal{U}^\dagger$. A unitária \mathcal{U} ($\mathcal{U}^\dagger\mathcal{U} = I$), não atua em ρ e sim apenas superpõe os operadores de medida.

³Para eliminar alguns somatórios introduzimos o vetor de operadores $\mathbf{\Pi}$ e as operações $\mathbf{\Pi}^\dagger = [\Pi_0^\dagger, \Pi_1^\dagger, \Pi_2^\dagger, \dots, \Pi_n^\dagger, \dots]^\dagger$ e $\mathbf{\Pi}^* = [\Pi_0^\dagger, \Pi_1^\dagger, \Pi_2^\dagger, \dots, \Pi_n^\dagger, \dots]$.

Temos, então o estado não condicionado

$$\begin{aligned}
\Xi\rho(0)\Xi^\dagger &= \Pi\mathcal{U}^\dagger\rho(0)[\Pi\mathcal{U}^\dagger]^\dagger \\
&= \Pi\mathcal{U}^\dagger\rho(0)\mathcal{U}^*\Pi^\dagger = \Pi\rho(0)\mathcal{U}^\dagger\mathcal{U}^*\Pi^\dagger \\
&= \Pi\rho(0)(\mathcal{U}^\dagger\mathcal{U}^*)\Pi^\dagger = \Pi\rho(0)I^*\Pi^\dagger \\
\Rightarrow \rho(\Delta t) &= \Xi\rho(0)\Xi^\dagger = \Pi\rho(0)\Pi^\dagger
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Essa invariância do estado não condicionado indica que, quando não acessamos o resultado da medida, a evolução do estado é a mesma independentemente da estratégia de medida.

IV Conhecimento e Correlações

Todo sistema físico está imerso em uma vizinhança de outros sistemas ou partes. O espaço de estados do sistema global é o produto tensorial do espaço das partes. As partes do sistema global podem trocar energia e informação através de uma grande classe de interações. Este processo de interação ou troca pode gerar correlações entre resultados de medidas realizadas nos subsistemas. Desta forma quando há correlações entre um sistema A e um sistema B é possível inferir informações sobre B dado que possuímos um resultado de medida realizada em A. Por outro lado quando ignoramos uma das partes correlacionadas podemos perder informação sobre os subsistemas restantes.

Superposições de estados e a estrutura tensorial da Mecânica Quântica dão origem a um tipo de correlação unicamente quântica, o emaranhamento. Esse tipo de correlação e suas implicações foram notados inicialmente por Einstein, Podolsky e Rosen (EPR), que acreditavam que a MQ não era uma teoria completa e que o emaranhamento era uma evidência desta incompletude [19], e Schrödinger [20]. Em mecânica estatística clássica a descrição probabilística surge de uma média sobre estados que podemos interpretar como sendo *reais*, ou seja, pode ser dito que o sistema *está* em um estado e ao medirmos descobrimos qual, assim as probabilidades atribuídas aos possíveis resultados são reflexo da ignorância do observador. Também no caso clássico (correlações clássicas), quando medimos um de dois subsistemas (AB) correlacionados temos instantaneamente informação sobre o outro, entretanto isto não viola a relatividade especial (RS) [21] (informação não viaja acima da velocidade da luz). Dado que os subsistemas realmente estavam em um dado estado, com a medida em A apenas descobrimos também qual era o estado de B. Resumindo, em mecânica estatística clássica qualquer propriedade do sistema pode ser interpretada como sendo real e local. O mesmo não pode ser dito sobre MQ.

Em MQ mesmo os estados mais puros e com maior teor de informação ainda são distribuições de amplitudes de probabilidade (como visto em seções anteriores). Por este motivo, aqui optamos por não atribuir realidade ao estado do sistema. O trabalho EPR mostrou uma incompatibilidade entre realismo, localidade e MQ. Trabalhos seguintes forneceram um critério (desigualdades de Bell) capaz de discernir certas classes teorias clássicas de outras teorias [22]. Diversos testes experimentais das desigualdades de Bell sugerem que a natureza pode, de fato, ser modelada pela MQ [23]. Estes trabalhos analisam o grau de correlação dos subsistemas e assim as correlações quânticas se mostraram não locais tal que alguns estados emaranhados violam as desigualdades. Entretanto existem

estados emaranhados que admitem um análogo clássico. Portanto, parte da MQ (alguns estados) pode ser simulada por distribuições de probabilidade clássicas. A fronteira, ou a existência da mesma, em que começa o mundo clássico e termina o mundo quântico permanece oculta. Aqui não continuaremos a abordar temas como realidade, localidade, contextualidade e continuaremos a adotar a interpretação probabilística da MQ.

Desde os debates sobre o EPR houve muito trabalho filosófico, matemático e físico sobre o emaranhamento [25] impulsionado nas últimas décadas pelo prospecto de informação e computação quântica. Se o sistema A-B está emaranhado (correlacionado quanticamente) os subsistemas podem se comunicar e enviar bits (e q-bits) de informação um ao outro de maneira superior a comunicação estritamente clássica. Emaranhamento possui várias aplicações interessantes como distribuição quântica de chave criptográfica [26], teleportação de um estado quântico desconhecido [27] e outros protocolos de computação quântica [17].

Vamos inicialmente mostrar a forma geral de estados bipartidos e classifica-los de acordo com o tipo de correlação [29, 30, 31]. Um estado não correlacionado do sistema AB é dito *fatorável* e pode ser expresso por

$$\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B, \quad (1.25)$$

ou seja, é um produto de um estado de A com um estado de B. Um estado não emaranhado é dito *separável* e pode ser expresso por

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_{Ai} \otimes \rho_{Bi}, \quad (1.26)$$

também é uma mistura estatística de estados não correlacionados. Um estado que apresenta correlações quânticas (talvez clássicas também) é dito *emaranhado* e tem que ser expresso na forma mais geral de um estado do sistema (não pode ser separado nem fatorado). Aqui optamos pela representação

$$\rho_{AB} = \sum_{i,\nu,j,\mu} \rho_{(i\nu)(j\mu)} |i\nu\rangle\langle j\mu|, \quad (1.27)$$

que é uma matriz de quatro índices, tal que i e j designam estados do sistema A e ν , μ fazem referência a B.

A Emaranhamento e Operações Quânticas

O sistema composto AB, em geral, possui um hamiltoniano interno da forma

$$H = H_A \otimes I_B + I_A \otimes H_B + H_{\text{int}}. \quad (1.28)$$

Quando não há interação entre os subsistemas, $H_{\text{int}} = 0$ e o nível de correlação permanece invariante. Por exemplo, um estado inicial fatorável permanece fatorável, dado que sua evolução é dada pela solução da equação de von Neumann

$$\begin{aligned} \rho_{AB}(t) &= e^{-i(H_A+H_B)t} \rho_A \otimes \rho_B e^{i(H_A+H_B)t} \\ &= e^{-iH_A t} \rho_A e^{iH_A t} \otimes e^{-iH_B t} \rho_B e^{iH_B t} \\ &= \rho_A(t) \otimes \rho_B(t). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Um estado separável também permanece separável sob operações unitárias locais. De fato, definimos emaranhamento como uma quantidade que não é alterada por operações unitárias locais $U_A \otimes U_B$ [32]

$$E \left[U_A \otimes U_B \rho_{AB} U_A^\dagger \otimes U_B^\dagger \right] = E [\rho_{AB}], \quad (1.30)$$

em que E é uma medida de emaranhamento. Quando o hamiltoniano é não local e possui um termo de interação não nulo o emaranhamento pode tanto aumentar quanto diminuir.

Foi descoberto [33] que medidas seletivas locais (e comunicação clássica) $\Pi_{A_i} \otimes \Pi_{B_i}$ podem levar um estado emaranhado com análogo clássico a outro com mais emaranhamento e sem análogo clássico. Este processo de aumento de emaranhamento com operações locais foi denominado *destilação*. Entretanto o emaranhamento não aumenta com medidas não seletivas. Uma medida não seletiva em geral diminui a informação contida no estado diminuindo sua pureza. E perda de pureza, em geral, significa perda de emaranhamento [34]. Assim o emaranhamento de um estado condicionado a resultados de medidas locais pode aumentar, porém o emaranhamento do estado não condicionado diminui se o processo de medida é local. Isto vale tanto para o emaranhamento do estado não condicionado quanto para a média de emaranhamento dos possíveis estados condicionados e a hierarquia é dada por

$$E[\bar{\rho}] \leq \sum_i p_i E[\rho_i] \leq E[\rho_{AB}], \quad (1.31)$$

tal que o i -ésimo estado condicionado é dado por

$$\rho_i = \frac{1}{p_i} \Pi_{A_i} \otimes \Pi_{B_i} \rho_{AB} \Pi_{A_i}^\dagger \otimes \Pi_{B_i}^\dagger \quad (1.32)$$

e o estado não condicionado por $\bar{\rho} = \sum_i p_i \rho_i$. Em seguida mostrou-se que há diferentes tipos de emaranhamento (além de local e não local): emaranhamento livre *destilável* e emaranhamento preso não destilável. Também foi mostrado que todo estado destilável possui transposta parcial negativa (não necessariamente a recíproca) [35]. Uma matriz transposta parcial de um estado ρ_{AB} pode ser encontrada ao trocarmos os índices (trasposição convencional) de apenas um dos subsistemas

$$\rho_{AB}^{\text{T}_B} = \sum_{i,\nu,j,\mu} \rho_{(i\nu)(j\mu)} |i\mu\rangle \langle j\nu|, \quad (1.33)$$

tal que a transposta parcial de um estado separável é um outro estado quântico, pois esta é uma operação positiva. Entretanto existem estados emaranhados que possuem transposta parcial com autovalores negativos. Portanto a transposição é uma operação não completamente positiva e pode ser utilizada como um critério de destilabilidade de emaranhamento.

B Emaranhamento de Estado Puro

É possível quantificar o emaranhamento de estados puros bipartidos através de vários quantificadores de emaranhamento. Neste caso critérios de não localidade e separabilidade coincidem. Um estado puro não correlacionado é expresso por $|a\rangle \otimes |b\rangle = |ab\rangle$. Qualquer estado puro que não pode ser expresso por $|ab\rangle$ é dito

emaranhado. Podemos expressar um estado puro arbitrário com a decomposição de Schmidt

$$|\Psi_{AB}\rangle = \sum_n^d \lambda_n |a_n b_n\rangle, \quad (1.34)$$

em que $\{|a_n\rangle\}$ e $\{|b_n\rangle\}$ são bases ortonormais (que diagonalizam os estados reduzidos das partes) em A e B, respectivamente e $d = \min\{d_A, d_B\}$, sendo d a menor das dimensões dos subsistemas. Um estado puro fatorável possui apenas um coeficiente λ_e não nulo ($\lambda_n = 0, \forall n \neq e; \exists! e \mid \lambda_e = 1$). Um estado maximamente emaranhado possui todos os coeficientes iguais ($\lambda_n = \frac{1}{\sqrt{d}} \forall n$).

Vamos considerar um breve exemplo para ilustrar diferenças entre correlações clássicas e quânticas. Considere o estado classicamente correlacionado

$$\rho_c = \frac{1}{2} [|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|]. \quad (1.35)$$

Assumindo que os observadores podem se comunicar classicamente temos a seguinte situação. Se o observador Agata em posse do sistema (A) realiza uma medida projetiva na base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ ele obtém com probabilidade $1/2$ o estado global $|00\rangle$ ou $|11\rangle$, assim obtendo informação sobre o outro sistema (B) em posse do observador Borat.

O conhecimento de Agata ao ignorar o sistema B e toda informação vinda de Borat é dado pelo traço parcial em B sobre o estado global

$$\begin{aligned} \rho_A &= \text{tr}_B \{\rho_{AB}\} = \sum_b \left[I_A \otimes \langle b| \right] \rho_{AB} \left[I_A \otimes |b\rangle \right] \\ &= \sum_b \langle b| \left(\sum_{i,\nu,j,\mu} \rho_{(i\nu)(j\mu)} |i\nu\rangle\langle j\mu| \right) |b\rangle \\ &= \sum_{ij} \left(\sum_{b,\nu,\mu} \rho_{(i\nu)(j\mu)} \langle b|\nu\rangle\langle\mu|b\rangle \right) |i\rangle\langle j| \\ &= \sum_{ij} \rho_{A(ij)} |i\rangle\langle j|. \end{aligned} \quad (1.36)$$

No exemplo em consideração $\rho_{Ac} = \text{tr}_B \{\rho_c\} = \frac{1}{2} [|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|] = \rho_{Bc}$, que é um estado maximamente misto e possui o menor grau de informação quântica. Se o observador Agata opta por medir na base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, com $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0\rangle \pm |1\rangle]$, ele obtém um dos estados $\rho_{\pm} = |\pm\rangle\langle\pm| \otimes \rho_{Bc}$ e não adquire nova informação sobre o estado do sistema B, na verdade perde toda informação quântica de B. Agora considere o estado emaranhado

$$|\Psi_e\rangle = \frac{1}{2} [|00\rangle + |11\rangle] = \frac{1}{2} [|++\rangle + |--\rangle]. \quad (1.37)$$

Neste caso não importa em que base o observador Agata realiza a medida, ele sempre obtém nova informação sobre o sistema B. Este é um estado maximamente emaranhado de dois q-bits.

i Quantificação pela entropia das partes

Dois sistemas que interagem podem compartilhar informação e se tornarem emaranhados. Quando o estado global é puro podemos quantificar o grau de informação quântica compartilhada entre as partes com a entropia de von Neumann dos estados reduzidos das partes. Esta quantificação se baseia na perda de informação quântica que uma das partes sofreria ao ignorar a outra parte. Essa informação perdida é exatamente a informação compartilhada, ou a correlação. Assim o emaranhamento de $|\Psi_{AB}\rangle = \sum_n^d \lambda_n |a_n b_n\rangle$ é

$$E(\Psi_{AB}) = S(\rho_A) = S(\rho_B) = -\text{tr}\{\rho_A \log \rho_A\} = -\sum_n^d |\lambda_n|^2 \log |\lambda_n|^2. \quad (1.38)$$

ii Conversão ótima de estados puros

Uma pergunta muito importante foi feita e respondida em [36]. Suponha que Agata e Borat dividam um estado puro emaranhado Ψ e que eles gostariam de convertê-lo em outro estado puro emaranhado Φ . Qual é a probabilidade máxima de sucesso em tal conversão se as duas partes, que podem se comunicar classicamente, podem realizar apenas operações locais nos subsistemas? A resposta é dada por

$$P(\Psi \rightarrow \Phi) = \min_{l \in [1, d]} \frac{\sum_{n=l}^d |\alpha_n|^2}{\sum_{n=l}^d |\beta_n|^2}, \quad (1.39)$$

tal que α_n e β_n são os coeficientes de Schmidt de Ψ e Φ respectivamente em ordem decrescente. Aqui mostramos apenas a motivação da demonstração. Introduzimos a família de funções que não aumentam sob estratégias locais $E_l(\Psi) = \sum_{n=l}^d |\alpha_n|^2$. Suponha que a otimização de (1.39) é dada por $l = k$. Antes da conversão E_k é dada por $E_k(\Psi)$, após a conversão ela é dada pela média $P'(\Psi \rightarrow \Phi)E_k(\Phi)$. Portanto $P'(\Psi \rightarrow \Phi)E_k(\Phi) \leq E_k(\Psi)$ devido ao fato de que E_k não aumenta no processo e assim a igualdade vale quando a probabilidade é máxima.

C Emaranhamento de Estado Misto

Caracterizar o emaranhamento de um estado bipartido arbitrário, de pureza arbitrária, é uma tarefa computacionalmente e matematicamente mais complexa quando comparada ao caso de estados puros. Entretanto, o volume de estados mistos é maior que o volume de estados puros e em muitas situações realísticas a interação com o meio ambiente faz com que estados mistos sejam uma descrição mais adequada do conhecimento do observador. Existem vários quantificadores de emaranhamento e cada um tem suas vantagens e aplicações. Vamos apresentar apenas alguns destes quantificadores, aqueles que de fato iremos computar em seções seguintes (não abordaremos robustez e testemunhas de emaranhamento, por exemplo).

Um quantificador que estende a entropia de emaranhamento de estados puros para o caso misto é o *emaranhamento de formação* [37]. O emaranhamento de formação quantifica os recursos necessários para criar um dado estado quântico. Lembrando que um estado misto pode ser preparado de diferentes maneiras

a partir de estados puros podemos definir o emaranhamento médio de uma preparação. O emaranhamento de formação é o menor valor do emaranhamento médio minimizado sobre todas as possíveis preparações a partir de estados puros

$$E(\bar{\rho}) = \min_{\{\Psi_i\}} \sum_i p_i E(\psi_i). \quad (1.40)$$

Para estados de dois qbits há uma expressão fechada para o emaranhamento de formação dada pela concorrência[38]. Entretanto, calcular o emaranhamento de formação de sistemas mais gerais permanece uma tarefa de força bruta [39] salvo situações de alta simetria [40].

Um outro quantificador de emaranhamento é a *negatividade* da transposta parcial da matriz densidade do sistema[41]. Esse quantificador é simples de ser computado e fornece uma boa cota para o emaranhamento destilável do sistema. Portanto antes de mostrar como fazê-lo vamos tentar motivar o uso do mesmo.

Esse quantificador se baseia no uso de uma operação que não é física no sentido que leva um estado quântico a uma distribuição que pode possuir “probabilidades” negativas. Essa operação é a transposição parcial. A transposição é uma operação positiva, ou seja, leva estados quânticos a outros obedecendo os postulados da teoria, em especial, autovalores não negativos. Entretanto é uma operação que não é completamente positiva, pois quando realizada em somente uma das partes do sistema pode levar a autovalores negativos. A transposição parcial leva a uma matriz não positiva quando há emaranhamento entre as partes. Ao transpor parcialmente um estado fatorável encontramos outro estado também não negativo e o mesmo para estado separáveis. Por que a transposta parcial de um estado emaranhado pode levar a uma matriz negativa? Uma interpretação heurística é a de inversão temporal. Suponha um estado que evolui com uma unitária $\rho(t) = U\rho(0)U^\dagger$. Agora, considere a evolução em um referencial transposto da matriz transposta dada por $\sigma(t) = R\sigma(0)R^\dagger$ com $R = U^T$ e $\sigma(0) = \rho^T(0)$. Por fim note que a transposição (no referencial original) é equivalente a uma inversão temporal no referencial transposto $\rho^T(t) = \sigma(-t)$ com a reversão temporal $\sigma(-t) = R^\dagger\sigma(0)R$, ou a recíproca $\sigma^T(t) = \rho(-t)$. A equivalência é completa se a transposta do estado inicial é o próprio estado e se $U^\dagger = U^*$, e assim $\rho^T(t) = U^\dagger\rho(0)U = \rho(-t)$. Agora, se o sistema for composto de duas partes e se as partes forem correlacionadas o que acontece ao realizarmos a inversão temporal em apenas um dos sistemas? A resposta para boa parte dos estados emaranhados é que não podemos fazer essa inversão sem chegarmos a um absurdo. A ideia é que as correlações quânticas, a partir de um certo grau, impedem que os sistemas correlacionados sejam tratados como sistemas independentes, pois para sistemas abaixo desse grau a inversão é matematicamente possível. Seria essa uma proibição para algum tipo de viagem no tempo? Fato é que podemos então usar a negatividade da transposta parcial como um quantificador de emaranhamento, e definimos a negatividade como duas vezes a soma do módulo dos autovalores negativos da transposta parcial.

Foi mostrado que a transposição parcial é um critério capaz de discernir todos estado emaranhados de não emaranhados para sistemas de dimensões até $2 \otimes 3$ [42]. Acima disso acreditamos que negatividade é a melhor aproximação para um quantificador de emaranhamento livre [43, 44], pelo menos no caso bipartido. É fácil mostrar que positividade sobe transposição parcial (ptp) significa que o estado não pode ser destilado. Suponha um ρ ptp e uma operação local $A \otimes B$ que leva ρ em um estado maximamente emaranhado. Temos que

$0 \leq (A \otimes B \rho A^\dagger \otimes B^\dagger)^{T_B} = A \otimes B^* \rho^{T_B} A^\dagger \otimes B^T$, ou seja, uma operação local assistida de comunicação clássica leva um estado ptp a outro ptp e portanto não há um par $A \otimes B$ que leve um estado positivo sob transposição parcial a um estado ntp emaranhado. Assim se um estado pode ser destilado então ele é negativo sob transposição parcial. A pergunta recíproca permanece mais de dez anos sem resposta. Um estado ntp sempre pode ser destilado? Recentemente há uma tentativa de resposta (afirmativa) ainda sendo avaliada pela comunidade científica [44]. Entretanto há estados emaranhados que são ptp, esses são chamados estados com emaranhamento preso. O exemplo mais simples pode ser encontrado em [45], em que um estado de emaranhamento preso é construído a partir de bases inextensíveis de estados produto (BIP). Uma BIP para um sistema multipartido é um conjunto de estados ortonormais, cujo subespaço complementar não contém estados produto. Portanto um estado da forma $I - \sum_i |i\rangle\langle i|$ é um estado emaranhado, entretanto é ptp, pois os estados $\{|i\rangle\}$ formam uma BIP, assim é um estado de emaranhamento preso.

Capítulo 2

Ambientalismo Quântico

I Sistemas Abertos

Vamos agora considerar sistemas que interagem com outros sistemas em seu entorno, sistemas que interagem com o seu ambiente. Esses sistemas são chamados sistemas abertos, pois em geral este tipo de interação faz com que alguns quantidades não se conservem. A interação com o ambiente leva ao que chamamos de descoerência do sistema, que podemos definir como perda de informação quântica. Assumimos então que o sistema é preparado em um dado estado, usualmente um estado puro, e que não está correlacionado com o ambiente inicialmente. Podemos expressar o estado inicial sistema-ambiente por $|\Psi(0)\rangle = |S\rangle|E\rangle$, em que S e E designam estados do sistema e ambiente, respectivamente. Correlações aparecem como um resultado da interação e o estado passa a ser expresso por um estado emaranhado $|\Psi(t)\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |S_i(t)\rangle |E_i(t)\rangle$. Entretanto assumimos que o ambiente quase não é afetado pela interação com o sistema, como um reservatório e que o estado global pode ser aproximado por um estado produto em que o estado reduzido do sistema sofre alterações em primeira ordem no acoplamento da interação. Esta é a chamada aproximação de Born. Também consideramos que o ambiente rapidamente perde sua memória sobre sua história passada quando comparado ao tempo que o sistema leva para evoluir apreciavelmente. Esta é a aproximação de Markov. Discussões sobre estas aproximações podem ser encontradas em [46, 47]. Inicialmente consideramos um hamiltoniano que pode descrever um sistema que interage com um número grande de sistemas bosônicos, por exemplo, o campo eletromagnético em torno do sistema (uma versão fermiônica pode ser encontrada em [48]). O hamiltoniano contém termos livres do sistema e do ambiente e um termo de acoplamento de dipolo elétrico e é da forma

$$\begin{aligned} H &= H_s + H_E + H_{int} \\ &= \omega_s S^\dagger S + \int_0^\infty d\omega \omega b^\dagger(\omega) b(\omega) \\ &\quad + \int_0^\infty d\omega i k(\omega) [S - S^\dagger] [b(\omega) + b^\dagger(\omega)], \end{aligned} \quad (2.1)$$

em que S são operadores do sistema e b são operadores do reservatório, ω_s é a frequência característica do sistema e ω são frequências do reservatório de-

signando o contínuo de graus de liberdade do ambiente e $k(\omega)$ é o fator de acoplamento do sistema com cada modo do ambiente. O sistema será dominantemente acoplado a modos centrados em sua frequência característica ω_s . Além disso assumimos um acoplamento suave a estes modos, o que nos permite fazer uma aproximação por uma constante nesta região do espectro $k(\omega) = \sqrt{\gamma}$ e estender o limite de integração a todas as frequências. Na representação de interação o hamiltoniano apresenta termos do tipo $Sb e^{-i(\omega_s+\omega)t}$, $Sb^\dagger e^{-i(\omega_s-\omega)t}$ e seus conjugados hermitianos. Na região próxima à ressonância os termos do primeiro tipo geram uma dinâmica que se dá em uma escala de tempo muito menor que a da dinâmica gerada pelos termos do segundo tipo. Ao calcular o operador de evolução temos algo do tipo (omitindo a integral em ω)

$$\begin{aligned} U(t) &= \exp \left\{ \sqrt{\gamma} \left[Sb(\omega) \int_0^t e^{-i(\omega_s+\omega)t} dt + Sb^\dagger(\omega) \int_0^t e^{-i(\omega_s-\omega)t} dt \right] + h.c. \right\} \\ &\approx \exp \left\{ \sqrt{\gamma} Sb^\dagger(\omega)t + h.c. \right\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Diante desta aproximação temos o hamiltoniano de interação na representação de interação

$$H_{int} = i [\Pi b^\dagger(t) - \Pi^\dagger b(t)], \quad (2.3)$$

com o banho representado pelo operador $b(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega b(\omega) e^{-i(\omega-\omega_s)t}$, e o sistema pelo operador $\Pi = \sqrt{\gamma}S$. A evolução do estado global é dada pela equação estocástica de Schrödinger [49]

$$(S) \quad d|\Psi(t)\rangle = \{ \Pi dB^\dagger(t) - \Pi^\dagger dB(t) \} |\Psi(t)\rangle, \quad (2.4)$$

com o ruído branco (ou processo de Wiener) quântico $B(t) = \int_0^t b(s)ds$. A estatística deste processo é dada pelo estado do banho que consideramos ser um estado de equilíbrio termodinâmico

$$\rho_E = \frac{e^{-\beta H_E}}{\text{tr}\{e^{-\beta H_E}\}}, \quad (2.5)$$

em que $\beta = \hbar/kT$ sendo \hbar, k, T a constante de Plank, a de Boltzmann e a temperatura do reservatório. Portanto temos os valores medios e correlações do banho térmico markoviano

$$\begin{aligned} \langle dB(t)dB^\dagger(t') \rangle &= (\bar{N} + 1)\delta(t - t')dt \\ \langle dB^\dagger(t)dB(t') \rangle &= \bar{N}\delta(t - t')dt \\ \langle dB^\dagger(t) \rangle &= \langle dB(t) \rangle = 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

sendo $\bar{N} = 1/(e^{\beta\hbar\omega} - 1)$ o número médio de excitações no ambiente. A equação de dinâmica poder ser interpretada no cálculo de Stratonovich, em que as regras usuais de cálculo são válidas. Entretanto a equação não pode ser recursivamente iterada e o cálculo de médias se torna inviável, pois na integração o operador ou função a ser integrado é avaliado no meio do intervalo de integração sendo assim dependente do ruído (para mais informações sobre cálculo estocástico ver o apêndice ou a bibliografia citada). É conveniente transformar a equação para a representação de Ito, em que não existem as dificuldades acima citadas, entretanto abrimos mão das regras usuais de cálculo. Vamos nos concentrar no caso de temperatura nula e para realizarmos a conversão basta integrar a

equação e diferenciar a expressão fazendo uso das regras de Ito $dB(t)dB^\dagger(t') = \delta(t-t')dt$ e $dB^\dagger(t)dB(t') = [dB^\dagger(t)]^2 = [dB(t)]^2 = 0$, resultando em

$$(I) \quad d|\Psi\rangle = \left\{ -\frac{1}{2}\Pi^\dagger\Pi dt + \Pi dB^\dagger - \Pi^\dagger dB \right\} |\Psi\rangle. \quad (2.7)$$

A extensão para estados mistos pode ser encontrada a partir da regra de Ito $d\rho_{SE} = d|\Psi\rangle\langle\Psi| + |\Psi\rangle d\langle\Psi| + d|\Psi\rangle d\langle\Psi|$.

Agora, se formos ignorantes em relação ao ambiente e nos focarmos apenas nas propriedades do sistema, nosso conhecimento sobre o sistema será dado pelo estado reduzido do sistema $\bar{\rho}(t) = \text{tr}_E\{|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|\}$, cuja dinâmica é descrita por uma equação mestra. Fazendo a média no ambiente $d\bar{\rho} = \text{tr}_E\{d\rho_{SE}\}$, temos a equação mestra

$$d\bar{\rho} = \mathcal{L}[\Pi]\bar{\rho}dt = \left\{ -\frac{1}{2}\{\Pi^\dagger\Pi, \bar{\rho}\} + \Pi\bar{\rho}\Pi^\dagger \right\} dt, \quad (2.8)$$

em que a barra indica uma média no ambiente, uma média do processo estocástico. Ao ignorar o ambiente, intencionalmente ou não, nós também perdemos informação sobre o sistema e essa evolução leva, em geral, a perda de pureza e emaranhamento do estado preparado inicialmente.

II Medindo o Ambiente

Podemos optar por continuamente realizar medidas seletivas sobre o ambiente e não tomar uma média sobre o mesmo. Ao coletar seletivamente os resultados de medida podemos adquirir informação útil sobre o sistema. Considere o estado inicial $|\Psi(0)\rangle = |S\rangle|\mathbf{0}\rangle$, com o reservatório no estado de vácuo e assuma que há excitações no sistema. Se o hamiltoniano de interação permite a troca de excitações, depois de um tempo curto o estado global evolui para $|\Psi(dt)\rangle = \sqrt{p_0}|S_0\rangle|\mathbf{0}\rangle + \sqrt{p_1}|S_1\rangle|\mathbf{1}\rangle$, com $p_{1(0)}$ a probabilidade de uma (nenhuma) excitação atingir o ambiente. Isto pode ser diretamente verificado iterando a equação (2.7), com $|S_0\rangle = [I - \frac{1}{2}\Pi^\dagger\Pi dt]|S\rangle/\sqrt{p_0}$, e $|S_1\rangle = \Pi\sqrt{dt}|S\rangle/\sqrt{p_1}$, com $p_1 = dt\langle S|\Pi^\dagger\Pi|S\rangle$. A interpretação em termos de medições quânticas é óbvia, com os operadores $\Gamma_1 = \Pi\sqrt{dt}$ e $\Gamma_0 = I - \frac{1}{2}\Pi^\dagger\Pi dt$, tal que $\sum_n \Gamma_n^\dagger \Gamma_n = I$. A equação (2.8) nos fornece o estado reduzido do sistema $\bar{\rho}(dt) = p_0|S_0\rangle\langle S_0| + p_1|S_1\rangle\langle S_1|$, uma mistura estatística de todas as possibilidades, enquanto ao medir o ambiente temos $|S_{0(1)}\rangle$ com probabilidade $p_{0(1)}$. Isso corresponde a medir o operador número no reservatório $d\Lambda(t)$, sendo $\Lambda(t) = \int_0^t b^\dagger(s)b(s)ds$, cujos autovalores são os números de excitação contados no intervalo de tempo dt , um ou zero sendo as únicas possibilidades [49, 50]. Tal processo de medida é chamado de processo de saltos quânticos [51].

Em princípio, há infinitas maneiras de se medir o ambiente. Outro jeito diferente de se medir o ambiente é através de uma medida homodina. Em uma medida homodina, o sinal emitido pelo sistema é combinado em um divisor de feixes com um campo clássico e o sinal resultante é medido. O operador medido é uma quadratura do campo de saída. Os operadores do campo de saída podem ser encontrados a partir da reversão temporal do campo de entrada $dB_{sai}(t) = U^\dagger dB(t)U = \Pi dt + dB(t)$, sendo $U = \exp\left[-i \int_0^t H_{int}(s)ds\right]$. O sinal

medido é dado pelo operador

$$\begin{aligned} d\Lambda_{sai}(t) &= U^\dagger d\Lambda(t)U \\ &= d\Lambda(t) + \Pi^\dagger \Pi dt + \Pi dB^\dagger(t) + \Pi^\dagger dB(t). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ao combinarmos o sinal com um campo clássico de amplitude complexa $\Omega e^{i\phi}$ o operador do sistema, ou o operador que representa o detector, sofre uma alteração dada por $\Pi \mapsto \Omega e^{i\phi} + \Pi$. No limite de detecção homodina o campo clássico é muito intenso o que corresponde ao limite de amplitude infinita. Neste limite, o operador medido é a quadratura

$$\begin{aligned} d\Theta &= \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{d\Lambda_{sai}(t) - \Omega^2 dt}{\Omega} \\ &= (\Pi^\dagger e^{i\phi} + \Pi e^{-i\phi})dt + dB^\dagger(t)e^{i\phi} + dB(t)e^{-i\phi}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Este tipo de medida leva a um tipo de evolução difusiva muito diferente do processo descontínuo de saltos quânticos, e é chamada de difusão de estado quântico [52].

Os resultados de medida são, em última instância, registros clássicos e, portanto, podem ser expressos por processos estocásticos clássicos (e não quânticos). Os autovalores dos operadores que representam o sinal medido são, de fato, processos estocásticos clássicos. No caso dos saltos quânticos, os autovalores são dados pelo processo de Poisson $dN(t)$, que corresponde a um jogo de cara ou coroa, entretanto, a probabilidade não é necessariamente balanceada. O processo de Poisson segue uma distribuição dicotômica ($dN(t) = 0, 1$). Assim $N(t)$ assume valores naturais com probabilidade poissoniana

$$p(N) = \frac{\bar{N}^N e^{-\bar{N}}}{N!}, \quad (2.11)$$

onde \bar{N} é o valor médio de N e o incremento $dN(t)$ assume zero ou um com probabilidade

$$p(dN) = \bar{dN}^{dN} e^{-\bar{dN}}, \quad (2.12)$$

tal que $\bar{dN} = \lambda(t)dt$ e $\bar{N}(t) = \int_0^t \lambda(t)dt$, sendo $\lambda(t)$ uma função determinada pelo processo físico em questão, por exemplo, a taxa de transição entre dois estados de um sistema. No caso dos saltos quânticos $\lambda dt = p_1 = \langle \Pi^\dagger \Pi \rangle dt$. Expandindo a probabilidade do incremento em primeira ordem em dt temos

$$p(dN) = \bar{dN}^{dN} (1 - \bar{dN}), \quad (2.13)$$

com $p(dN = 1) = \lambda dt(1 - \lambda dt) = \lambda dt$ e $p(dN = 0) = 1 - \lambda dt$.

Na difusão de estado, o processo clássico que reproduz as médias do processo quântico é a corrente de detecção

$$dQ(t) = \langle \Pi^\dagger e^{i\phi} + \Pi e^{-i\phi} \rangle dt + dW(t), \quad (2.14)$$

tal que $\langle d\Theta \rangle = \bar{dQ}$ e $\langle (d\Theta)^2 \rangle = \overline{(dQ)^2}$. O processo $W(t)$ é equivalente a um movimento browniano ou passeio aleatório na reta (ruído branco), tal que $W(t)$ assume qualquer valor real com uma distribuição de probabilidade gaussiana

$$p[W(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \exp \left[-\frac{(W(t) - W(t_0))^2}{2(t-t_0)} \right], \quad (2.15)$$

com a distribuição equivalente para o incremento

$$p[dW] = \frac{1}{\sqrt{2\pi dt}} \exp \left[-\frac{dW^2}{2dt} \right]. \quad (2.16)$$

A ciência de processos estocásticos começou nos trabalhos de movimento browniano com Brown, Einstein e Langevin. O processo de Wiener, antes mesmo de receber este nome, foi o primeiro a ser considerado pela comunidade científica e passou a ser empregado na descrição de medidas homodinas em Óptica Quântica e medidas de corrente elétrica em Estado Sólido. O processo de Poisson também foi empregado em modelagem de dispositivos de estado sólido com correntes geradas por elétrons individuais, que depositam sua carga de forma quantizada em um anodo. Hoje o processo de Poisson é empregado na descrição de foto-deteção de sistemas emissores de luz em baixa intensidade. Tais processos obedecem as usuais regras de Ito $dN_k(t)dN_l(t') = \delta_{kl}\delta(t-t')dN_k(t)$, $dW_k(t)dW_l(t') = \delta_{kl}\delta(t-t')dt$ (ver [53] ou o apêndice).

Assim, consideraremos apenas estes processos Markovianos, ou seja, processos cuja estatística futura não depende de resultados passados. Isto se traduz em funções de correlação temporal semelhantes a

$$\overline{\Delta\xi(t)\Delta\xi(t')} \propto \delta(t-t'). \quad (2.17)$$

Em geral, a função $\xi(t)$ não é diferenciável devido à independência dos valores de $\Delta\xi(t)$ em tempos diferentes. Temos, então, as equações de dinâmica estocástica da forma¹ (o til indica que a equação não preserva traço)

$$d\tilde{\rho}(t) = \mathcal{A}_\xi[\Pi]\tilde{\rho}(t)dt + \mathcal{B}_\xi[\Pi]\tilde{\rho}(t)d\xi(t), \quad (2.18)$$

que fornecem a evolução do estado condicionado a realizações do processo $\xi(t)$, em que o superoperador \mathcal{A} está associado a uma evolução determinística e \mathcal{B} associado ao ruído atuando no sistema. O ruído (ou uma função do mesmo) $d\xi$ registra os resultados de medida e representa a informação que adquirimos ao medir o ambiente, e assim nosso conhecimento sobre o sistema evolui de acordo com essa informação através da equação estocástica.

Os operadores do sistema Π podem, agora, ser interpretados como detectores que cercam o sistema no ambiente. Para os saltos quânticos, é óbvio que $\mathcal{A}_N[\Pi] = -\frac{1}{2}\{\Pi^\dagger\Pi, \bullet\}$, e $\mathcal{B}_N[\Pi] = [\Pi \bullet \Pi^\dagger - 1 \bullet]$, e $\xi = N$ com o processo de Poisson assumindo o valor 1 se o detector é disparado e o valor zero caso contrário. Para chegarmos a uma equação que descreva uma evolução condicionada em um processo de difusão de estado podemos retornar à equação com ruído quântico e notar que o termo em dB se anula pois este operador aniquila o vácuo do reservatório $dB|0\rangle = 0$. Além disso podemos somar à equação um termo nulo $\Pi dB|\Psi\rangle$, tal que a parte estocástica da equação passa a ser o termo de quadratura $dB + dB^\dagger$, cuja medida resulta no autovalor dW . A partir deste ponto basta renormalizar a equação (se for conveniente) e derivar a extensão mais geral para estados mistos usando cálculo de Ito. Há uma infinidade de equações de difusão e gostaríamos de obter uma que se relacionasse com a visão canônica de medições quânticas. Para isso basta avaliar o limite em que a amplitude do campo clássico é muito grande na equação de saltos. Assim chegamos

¹Adotaremos a interpretação de Ito para as equações estocásticas, a menos que explicitamente indicada a interpretação de Stratonovich. Mais informações sobre cálculo estocástico ver o apêndice ou a bibliografia citada.

a $\mathcal{A}_Q[\Pi] = \mathcal{L}[\Pi]$, e $\mathcal{B}_Q[\Pi] = \bullet\Pi^\dagger + \Pi\bullet$ (desprezando a fase $e^{-i\phi}$), com o detector gravando a intensidade $d\xi = dQ$. Os operadores de medida são portanto da forma

$$\Gamma_J = I - \frac{1}{2}\Pi^\dagger\Pi dt + \Pi J dt, \quad J dt = dQ, \quad (2.19)$$

e também obedecem a uma relação que particiona a identidade

$$\int d\mu(J)\Gamma_J^\dagger\Gamma_J = I, \quad (2.20)$$

em que $d\mu(J) = \sqrt{\frac{dt}{2\pi}}e^{-\frac{J^2 dt}{2}}dJ$ é uma medida de integração normalizada sobre os resultados de medida. A probabilidade de cada resultado de medida é dada por $dp(J) = d\mu\langle\Gamma_J^\dagger\Gamma_J\rangle$.

Portanto temos a solução formal

$$\rho(t) = \rho(0) + \int_0^t \mathcal{A}_\xi[\Pi]\rho(t)dt + \int_0^t \mathcal{B}_\xi[\Pi]\rho(t)d\xi(t). \quad (2.21)$$

Assim as possíveis soluções ou trajetórias da equação estocástica são dadas por realizações do processo estocástico e podem ser denotadas por $\rho_u(t)$ (para a u -ésima trajetória). Entretanto, a integração destas equações pode ser muito difícil devido à não linearidade e não comutatividade, por exemplo. Assim muitas vezes recorreremos a técnicas numéricas de iteração usando geradores de números aleatórios e algoritmos tipo Monte Carlo.

Fazendo a média sobre todas as realizações, a equação estocástica nos leva à equação mestra

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{\rho(t)}}{dt} &= \mathcal{A}_\xi[\Pi]\overline{\rho(t)} + \mathcal{B}_\xi[\Pi]\overline{\rho(t)}\left(\frac{d\overline{\xi(t)}}{dt}\right) \\ &= \mathcal{L}[\Pi]\overline{\rho(t)}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

que descreve a dinâmica determinística do sistema sobre o efeito médio do ruído, ou seja, o estado não condicionado. O super operador \mathcal{L} é chamado operador de Lindblad. Nesta última relação utilizamos a hipótese de Langevin

$$\overline{\rho(t)d\xi(t)} = \left(\overline{\rho(t)}\right)\left(\frac{d\overline{\xi(t)}}{dt}\right), \quad (2.23)$$

que é bem justificada por considerações físicas de causalidade, tal que $\rho(t)$ depende de $d\xi(t-dt) = \xi(t) - \xi(t-dt)$, mas não depende de $d\xi(t) = \xi(t+dt) - \xi(t)$. Ou seja, o estado no tempo t depende apenas de como o ruído o afetou no intervalo $(t-dt, t]$ e não em $(t, t+dt]$. O passado não depende do futuro.

Independentemente da estratégia de monitoramento a equação mestra será a mesma, ou seja, fazendo a média sobre todas as trajetórias (ou sobre o ruído), sendo elas geradas por qualquer processo de detecção, obtemos o estado não condicionado aos resultados de medida. Essa é a invariância do estado não condicionado.

A Detecção Imperfeita

Todo aparato de detecção está sujeito a imperfeições, o que leva a uma eficiência η total do processo de medida menor que um. Para descrever condições experimentais realísticas precisamos incorporar a eficiência dos detectores nas equações

de dinâmica condicional. Podemos fazer isso de uma forma simples. A equação condicional representa uma evolução que distingue entre os possíveis resultados de medida. A ineficiência dos detectores faz com que os resultados de medida se confundam e alguns não mais possam ser distinguidos. No nosso caso, quando nenhum dos detectores é disparado não sabemos se houve a emissão de um sinal por parte do sistema e os detectores falharam ou se de fato o sistema não emitiu um sinal que possa ser detectado. Entretanto quando um dos detectores é disparado admitimos que podemos dizer qual deles detectou o sinal. A equação que descreve esse tipo de ineficiência é dada pela soma da equação mestra estocástica pesada pela eficiência η com a equação mestra não condicional que não distingue os resultados pesada por $1 - \eta$

$$\begin{aligned} d\rho &= (1 - \eta)\mathcal{L}\rho dt + \eta[\mathcal{A}_N\rho dt + \mathcal{B}_N\rho dN] \\ &= \mathcal{L}\rho dt + \eta[\langle\Pi^\dagger\Pi\rangle\rho - \Pi\rho\Pi^\dagger] dt + \mathcal{B}_N\rho dN_n, \end{aligned} \quad (2.24)$$

tal que cada processo de Poisson é renormalizado diminuindo a probabilidade de cada detector ser disparado

$$\overline{dN} = \eta\langle\Pi^\dagger\Pi\rangle dt. \quad (2.25)$$

No caso de difusão para um sistema em que os detectores tem uma eficiência finita temos que somar a equação não condicionada com os operadores renormalizados $\sqrt{1 - \eta}\Pi$ e a equação condicionada com os operadores renormalizados $\sqrt{\eta}\Pi$

$$d\rho = \mathcal{L}\rho dt + \sqrt{\eta}(\rho\Pi^\dagger + \Pi\rho - \langle\Pi^\dagger + \Pi\rangle\rho) dW. \quad (2.26)$$

A corrente de detecção também fica menos sensível ao sinal do sistema e fica mais sensível ao ruído branco $dQ = \eta\langle\Pi^\dagger + \Pi\rangle dt + \sqrt{\eta}dW$.

Os processos de difusão de estado quântico mais gerais são tratados em [54], em que os ruídos podem assumir valores complexos e podem ser mutuamente correlacionados. Apesar disso, o formalismo aqui desenvolvido é geral para a maioria dos propósitos e apresenta os principais fundamentos da difusão de estado.

Essa é a forma mais simples de considerar imperfeições. Situações mais realísticas podem ser encontradas em [55] tanto no contexto de Óptica quanto no contexto de Sólidos.

III Retroalimentação Quântica (*Feedback*)

Nas seções passadas mostramos como o conhecimento quântico de um observador evolui condicionalmente aos resultados clássicos de medida em diferentes esquemas de medição. Mostramos também que os resultados de medida podem ser expressos por um processo ou ruído estocástico clássico $\xi(t)$, cujo valor médio está associado a algum observável do sistema. Assim, adquirimos informação clássica sobre o aparato de medição o que nos fornece informação quântica sobre o sistema mudando nosso estado de conhecimento sobre o mesmo.

Agora, suponha que numa situação prática desejamos um certo comportamento do sistema, por exemplo que uma dada grandeza física se conserve. Uma forma de tentar obter esse controle sobre o sistema é a chamada retroalimentação quântica, onde o observador atua sobre o sistema de acordo com os

resultados de medida [56]. Dado o resultado de medida $d\xi(t - \tau)$ no tempo $t - \tau$ o aparato que realiza a realimentação atua com um hamiltoniano proporcional a um observável F no tempo t . O aparato leva o tempo τ para processar o resultado de medida e ativar o hamiltoniano de *feedback*. Podemos supor uma retro-alimentação hamiltoniana, em que o hamiltoniano é linear nos resultados de medida

$$H_{\text{fb}} = F \frac{d\xi(t - \tau)}{dt}, \quad (2.27)$$

originando uma dinâmica na representação de Stratonovich dada por

$$(S) \quad d\rho(t) = \mathcal{F}\rho(t)d\xi(t - \tau) \quad ; \quad \mathcal{F}\rho = -i[F, \rho], \quad (2.28)$$

com a correspondente representação de Ito

$$(I) \quad d\rho(t) = \left[e^{\mathcal{F}d\xi(t - \tau)} - I \right] \rho(t) = \sum_{n=1} \frac{[\mathcal{F}d\xi(t - \tau)]^n}{n!} \rho(t). \quad (2.29)$$

O estado condicionado é dado pela soma do processo de medida com o processo

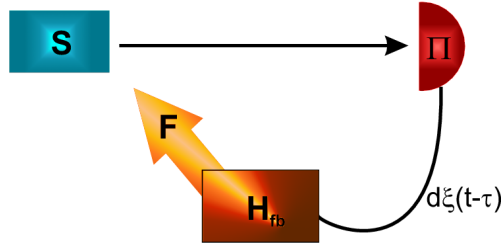


Figura 2.1: Representação do loop de feedback. O sistema emite um sinal que é gravado na fotocorrente $I(t) = \frac{d\xi(t)}{dt}$ pelo detector Π . Os resultados de medida ditam a ação do feedback pelo operador F .

de feedback, entretanto, como há um atraso τ na realimentação, a equação resultante é não markoviana

$$d\rho(t) = \left\{ \left[e^{\mathcal{F}d\xi(t - \tau)} - I \right] + \mathcal{A}_\xi[\Pi]dt + \mathcal{B}_\xi[\Pi]d\xi(t) \right\} \rho(t), \quad (2.30)$$

assim dificultando (ou impossibilitando) o cálculo da média no ensemble para encontrar o estado não condicionado. A dificuldade surge com a dependência do estado em relação ao passado dos resultados de medida, tal que $\rho(t)$ depende de $d\xi(t - \tau)$. Após estudarmos o caso markoviano, poderemos obter uma aproximação para o estado não condicionado em primeira ordem em τ . Para o feedback baseado em saltos quânticos, em que os resultados de medida são dados pelo processo de Poisson, temos a equação (de Ito não markoviana)

$$d\rho(t) = \left\{ \left[e^{\mathcal{F}} - I \right] dN(t - \tau) + \mathcal{L}dt + \eta \left[\langle \Pi^\dagger \Pi \rangle - \Pi \bullet \Pi^\dagger \right] dt + \mathcal{B}_N dN(t) \right\} \rho(t), \quad (2.31)$$

em que o mecanismo de feedback age de forma unitária e pontual no tempo, ou seja, age num tempo infinitesimal e causa alterações apreciáveis no estado sem

alterar sua pureza. Para feedback baseado em medições que causam a difusão de estado, em que os resultado de medida são dados pelo processo $\frac{dQ(t)}{\eta} = \langle X \rangle_{(t)} dt + \frac{dW(t)}{\sqrt{\eta}}$ (com dW o processo de Wiener e η a eficiência de detecção), temos

$$d\rho(t) = \left\{ \frac{\mathcal{F}}{\eta} dQ(t - \tau) + \frac{\mathcal{F}^2}{2\eta} dt + \mathcal{L} dt \right\} \rho(t) + \sqrt{\eta} (\rho \Pi^\dagger + \Pi \rho - \langle X \rangle \rho) dW(t). \quad (2.32)$$

A renormalização do feedback com o coeficiente de eficiência é justificada fisicamente, pois, caso contrário, obteríamos uma contradição, no limite em que $\eta = 0$ a dinâmica apresentaria feedback nulo. Isto não estaria correto, pois nesse limite o aparato de feedback ainda funciona atuando no sistema. O que definimos como ineficiência é a inabilidade de distinguir os resultados e não a ausência dos mesmos.

Note que, no caso de feedback difusivo, a ineficiência de detecção faz com que haja uma espécie de difusão ou decoerência na variável conjugada a F devido ao termo em $\mathcal{F}^2 = -[F, [F, \bullet]] = -\{F^2, \bullet\} + 2F \bullet F = 2\mathcal{L}[F]$. De acordo com o que desenvolvemos anteriormente, este termo descreve um processo em que (mesmo que teoricamente) há um detector representado pelo operador hermitiano F . De fato, pode ser demonstrado que o monitoramento fraco, ou impreciso, do observável F origina uma dinâmica não condicionada (que pode alterar e diminuir a pureza do estado) dada por $-k[F[F, \bullet]]$, onde k é a “força” do monitoramento [9, 16]. Assim, o feedback difusivo induz uma dinâmica equivalente ao monitoramento de um observável, o que gera ganho de informação sobre F e perda de informação sobre o observável conjugado.² No nosso caso, $k = 1/2\eta$, indicando que quanto mais ineficiente a detecção maior o efeito de perda. O outro termo é, de fato, linear no hamiltoniano de feedback e age continuamente de acordo com a corrente de detecção $dQ(t - \tau)$.

A Feedback no Limite Markoviano

Agora, podemos investigar o caso especial em que o tempo de atraso da realimentação τ tende a zero, assim a resposta do feedback se torna imediata ao resultado de medida. Ao tomar este limite, temos que lembrar que o feedback age após a medida, o que sugere

$$d\rho(t) = \left\{ e^{\mathcal{F}d\xi(t-\tau)} \left[I + \mathcal{A}_\xi[\Pi]dt + \mathcal{B}_\xi[\Pi]d\xi(t) \right] - I \right\} \rho(t). \quad (2.33)$$

Esta equação se reduz a (2.30) para tempo de resposta finito, tal que $d\xi(t - \tau)d\xi(t) = d\xi(t - \tau)dt = 0$, entretanto, no limite $\tau \rightarrow 0$ temos que considerar termos da forma $e^{\mathcal{F}d\xi(t)}\mathcal{B}_\xi d\xi(t)$ e utilizar as regras diferenciais de Ito para potências $d\xi^n$. Assim, podemos encontrar as equações condicionadas no limite markoviano em que o tempo de atraso é nulo. Em seguida, podemos obter o estado não condicionado

$$d\overline{\rho(t)} = \mathcal{M}_\xi[\Pi, F]\overline{\rho(t)}dt, \quad (2.34)$$

²O monitoramento do operador número ou energia de um sistema ($a^\dagger a$, σ_z ...) nos leva a equações mestras de defasagem. Um exemplo de fase e número conjugados.

fazendo a média estocástica da equação condicionada.

Portanto, para feedback via saltos quânticos, temos a equação markoviana condicionada (incluindo ineficiência na detecção)³

$$d\rho = \left\{ \mathcal{B}_N[e^{-iF}\Pi]dN + \mathcal{L}[e^{-iF}\Pi]dt + \eta \left[\langle \Pi^\dagger \Pi \rangle - e^{-iF}\Pi \bullet \Pi^\dagger e^{iF} \right] dt \right\} \rho, \quad (2.35)$$

que pode ser facilmente interpretada, pois o a retro-alimentação sem atraso nos permite definir um novo aparato de medida com os detectores dados pela ação do antigo detector seguida da ação unitária de feedback $\Xi = e^{-iF}\Pi$. Agora tomando a média sobre o ensemble temos a equação mestra de feedback via saltos

$$d\bar{\rho} = \mathcal{M}_N[\Pi, F]\bar{\rho}dt = \mathcal{L}[e^{-iF}\Pi]\bar{\rho}dt, \quad (2.36)$$

que nos fornece a evolução do sistema com retro-alimentação (via saltos) quando não temos acesso aos resultados de média.

No caso de feedback via difusão temos a equação condicionada

$$d\rho = \left[\mathcal{L}[\Pi]dt + \frac{\mathcal{L}[F]}{\eta}dt - i[F, \bullet\Pi^\dagger + \Pi\bullet]dt + \frac{\mathcal{F}}{\sqrt{\eta}}dW + \sqrt{\eta}\mathcal{B}_WdW \right] \rho, \quad (2.37)$$

e a equação não condicionada

$$d\bar{\rho} = \mathcal{M}_W[\Pi, F]\bar{\rho}dt = \left[\mathcal{L}[\Pi]dt + \frac{\mathcal{L}[F]}{\eta}dt - i[F, \bullet\Pi^\dagger + \Pi\bullet]dt \right] \bar{\rho}. \quad (2.38)$$

i Tempo de Re-Alimentação Curto

Numa situação prática, o tempo de resposta do mecanismo de feedback deve ser pequeno para que o objetivo da estratégia de feedback seja alcançado, entretanto não pode ser nulo, pois a eletrônica do aparato necessita de um intervalo de tempo τ para processar o sinal de medida e ativar o feedback. Devido a este tempo de atraso não conseguimos derivar equações não condicionadas exatas, pois encontramos médias que não se fatoram do tipo $d\xi(t-\tau)\rho(t)$. Apesar disto, se τ for suficientemente pequeno, podemos perturbar a equação mestra markoviana e obter uma aproximação (em primeira ordem) para o estado não condicionado. Vamos então obter uma perturbação de primeira ordem do limite markoviano realizando uma aproximação sobre a média da equação (2.30).

Considere o efeito do ruído sobre o estado condicionado no tempo $t-\tau$ dado por $\rho(t-\tau+dt) = [I + \mathcal{B}_\xi d\xi(t-\tau)]\rho(t-\tau)$. Após o tempo de atraso, quando o feedback for responder a este efeito do ruído, o estado evolui. A aproximação, de ordem zero, que fazemos é considerar que esta evolução é dada pela equação mestra markoviana de feedback

$$\rho(t) = e^{\mathcal{M}_\xi \tau} [I + \mathcal{B}_\xi d\xi(t-\tau)]\rho(t-\tau). \quad (2.39)$$

O feedback acontece no próximo passo infinitesimal, de forma que o estado no tempo $t+dt$ é dado pela iteração da equação (2.30). Agora tomando a média

³Aqui é necessário encontrar as equações com detecção perfeita, ambas condicionada e não condicionada, para depois derivar a equação (2.35) utilizando o método para derivar a evolução que inclui ineficiência mostrado em seções anteriores.

da equação (2.30) temos

$$d\bar{\rho} = \mathcal{L}[\Pi]\bar{\rho}dt + \overline{[e^{\mathcal{F}d\xi(t-\tau)} - I] \rho(t)} \quad (2.40)$$

Substituindo (2.39) no termo de feedback fazemos com que a média se fature $\overline{(d\xi(t-\tau))(\rho(t-\tau))}$, e temos

$$d\bar{\rho} = \mathcal{L}[\Pi]\bar{\rho}dt + \overline{[e^{\mathcal{F}d\xi(t-\tau)} - I] e^{\mathcal{M}_\xi\tau} [I + \mathcal{B}_\xi d\xi(t-\tau)] e^{-\mathcal{M}_\xi\tau} \bar{\rho}}, \quad (2.41)$$

onde usamos $\overline{\rho(t-\tau)} = e^{-\mathcal{M}_\xi\tau} \overline{\rho(t)}$. Para obtermos a correção linear em τ quando τ é pequeno temos que expandir $e^{\pm\tau\mathcal{M}_\xi} \simeq I \pm \tau\mathcal{M}_\xi$, nos levando a

$$d\bar{\rho} = \mathcal{L}[\Pi]\bar{\rho}dt + \overline{[e^{\mathcal{F}d\xi} - I] \{I + \mathcal{B}_\xi d\xi + \tau[\mathcal{M}_\xi, \mathcal{B}_\xi]d\xi\} \bar{\rho}}, \quad (2.42)$$

onde abandonamos a dependência temporal do ruído, pois todos os termos são avaliados em $t - \tau$ e essa dependência desaparece com a média no ensemble.

Para feedback via saltos quânticos temos

$$d\bar{\rho} = \mathcal{M}_N \bar{\rho}dt + \tau [e^{\mathcal{F}} - I] [\mathcal{M}_N, \Pi \bullet \Pi^\dagger] \bar{\rho}. \quad (2.43)$$

Capítulo 3

Proteção Global por Operações Locais

“Think globally, act locally.”

Todo sistema físico está imerso em uma vizinhança de outros sistemas físicos, o seu ambiente. Geralmente, o sistema troca energia e informação com o seu ambiente através de processos de interação quânticos que acabam por correlacionar o sistema e seu ambiente. Se não temos controle dos graus de liberdade do ambiente, eventualmente perdemos informação sobre o sistema em um processo de descoerência [57]. Este é um grande obstáculo para a computação quântica e para o processamento de informação quântica, pois esta interação ambiental danifica os dados quânticos, no sentido em que ela perturba estados de qubits causando erros e degradando recursos como o emaranhamento, necessário para alguns algoritmos quânticos. Na escala quântica, o ambiente, por muito tempo, foi visto como uma entidade vilã, cuja ação deveria ser eliminada para que informação quântica pudesse ser perpetuada. Com uma perspectiva diferente, podemos explorar os recursos disponíveis no ambiente, ou seja, a informação relacionada a correlações sistema-ambiente. Se pudermos observar o ambiente também poderemos inferir sobre propriedades do sistema, o que previne perdas e possibilita a correção de erros ao realimentarmos o sistema com a informação que adquirimos do ambiente. Esse feedback de informação permite a reciclagem do sistema após ter sofrido danos parciais e a restauração dos estados inicialmente preparados ou recursos. Abordaremos a proteção de recursos quânticos globais, como o emaranhamento, através de ações locais nos subsistemas que compõem o sistema maior. A possibilidade de proteger informação quântica globalmente com apenas operações locais pode reduzir os recursos necessários para a computação quântica, simplificar o próprio processo de proteção e permitir comunicação quântica baseada em emaranhamento.

Códigos de correção de erro foram desenvolvidos para suprimir a degradação induzida pelo ambiente [58, 59, 60, 61, 62]. Tais códigos se baseiam em redundância e operações globais, ou seja, eles usam muitos qubits físicos para codificar os qubits lógicos e usam operações globais nestes vários qubits para corrigir os erros e/ou detectar a ocorrência de síndromes de erro. Códigos passivos, chamados de códigos que evitam erros, também foram desenvolvidos e estes se baseiam em subespaços livres de descoerência, em que um subespaço do sistema

não evolui com o acoplamento ao reservatório [63]. Os primeiros códigos de correção de erro concebidos usavam medidas projetivas sobre o sistema para detectar os erros e operações unitárias para corrigí-los. Não muito tempo depois, e ainda recentemente, medidas sobre o ambiente e feedback foram implementados em protocolos de correção de erros [64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71]. No contexto de erros causados por emissão espontânea, códigos híbridos combinando partes passivas e ativas foram considerados [64, 65, 66, 67], em que há claramente dois tipos diferente de erros, aqueles que são corrigidos pela codificação dos dados quânticos em subespaços livres de descoerência e aqueles que precisam de uma ação direta dado que o erro ocorreu. Tais códigos de correção de emissão espontânea se baseam na habilidade de continuamente monitorar o ambiente (medidas globais em ambientes independentes em [64] e uma medida sobre um ambiente global em [66]), de codificar os qbits lógicos em estados emaranhados dos qbits físicos e de realizar operações globais complicadas em vários subsistemas para a correção ativa de erros. Posteriormente, percebeu-se que uma redução significativa na redundância seria possível quando a distância entre os sistemas físicos for muito maior que o comprimento de onda das excitações emitidas [67], o que também torna o processo de detecção de erro um processo local. Uma redução adicional no número de recursos necessários foi fornecida com o auxílio de um hamiltoniano capaz de bombear globalmente o sistema [69]. Portanto, ambientes estatisticamente independentes provavelmente fornecem um cenário mais adequado para computação quântica a baixo custo. Entretanto, estas propostas não são eficientes no sentido em que com um número crescente de qbits lógicos é necessário controlar coletivamente o comportamento de muitos sistemas através de intrincadas operações globais para proteger a informação quântica, pois esta está codificada em estados emaranhados de vários qbits.

Vamos explicar o que queremos dizer com operações locais e globais. Considere uma rede, cujos sítios são sistemas quânticos e que cada sistema quântico pode ser composto de subsistemas menores: no nosso caso, sistemas de três níveis (qtrits). Operações globais são operações que não são um produto de operações individuais nos subsistemas e as operações locais são. Operações locais em qdits em conjunto podem ser facilmente implementadas, entretanto operações como medidas em mais de 2 qdits próximos podem ser de difícil implementação. Além disso, se os subsistemas estão em sítios distantes operações globais podem ser impossíveis de se implementar. Portanto, códigos de correção de erros baseados apenas em operações locais são muito mais desejáveis.

Nós propomos um código de correção de decaimento estritamente local que também combina protocolos ativos e passivos, em que um qbit lógico é localmente codificado em um qtrit. Isso significa que o número de sistemas físicos necessários para codificar um qbit lógico é o mínimo. Este tipo de código seria adequado para sistemas que naturalmente apresentam mais de dois níveis de excitação como spins-1, átomos, íons, osciladores harmônicos e outros. Em nosso código os erros são detectados por medidas locais em ambientes independentes e o sistema é deterministicamente reciclado por um feedback local. Portanto o código local não necessita nem de estados emaranhados e nem de operações globais e a informação não está necessariamente espalhada em muitos sistemas, em vez disso é acessível localmente o que facilita o processo de decodificação. Técnicas similares de codificação em qdits foram empregadas para a correção de erro em variáveis contínuas e perda de fase em qdits [72, 73]. Para o código de emissão espontânea a dimensão mínima do qdit é $d = 3$, que é

muito mais simples que os códigos mostrados em [72, 73]. Como o protocolo é estritamente local, pode ser usado para proteger estados emaranhados divididos por partes diferentes separadas espacialmente, e assim permitindo comunicação quântica baseada em emaranhamento entre elas. Feedback contínuo tem sido aplicado na supressão de descoerência devida à emissão espontânea [74], e estratégias baseadas em feedback também foram criadas para gerar e proteger estados emaranhados [75]. Novamente, todas as propostas eficientes para manter o emaranhamento necessitam de operações globais e portanto não permitem comunicação distante baseada em emaranhamento diferentemente de nossa proposta.

I Adquirindo e Preservando Informação

Vamos considerar um sistema global composto de subsistemas internos que estão acoplados fracamente a seus respectivos reservatórios locais. A dinâmica deste sistema pode então ser descrita por uma equação mestra que leva os sistemas ao equilíbrio termodinâmico com seus respectivos reservatórios. Consideramos que a temperatura ambiente é nula, o que de fato é uma boa aproximação para situações alcançadas em experimentos atuais principalmente quando as frequências características dos sistemas são muito maiores que a frequência de radiação térmica. Os sistemas então sofrem dissipação completa até se equilibrarem com o ambiente. A equação mestra de dissipação local para dois qbits pode ser expressa por

$$d\bar{\rho} = \{\mathcal{L}[\Pi_A] + \mathcal{L}[\Pi_B]\} \bar{\rho} dt, \quad (3.1)$$

tal que o operador $\Pi_A = \Pi \otimes I_B$ aniquila excitações no qbit A e Π_B similarmente em B.

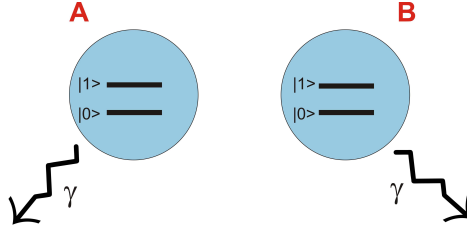


Figura 3.1: Dois qbits lógicos sofrendo dissipação independentemente. Um dos qbits pode estar em um laboratório em posse de um observador Agata e o outro pode estar distante em outro laboratório em posse de Borat.

O observador deve poder ler informação do ambiente com relação à emissão de excitações vindas de cada subsistema numa escala de tempo muito mais curta que a taxa de decaimento dos subsistemas e ainda mais longa que os tempos de correlação dos reservatórios. Podemos mostrar que o monitoramento local dos ambientes de cada subsistema assistido de comunicação clássica dos resultados obtidos já é suficiente para aumentar a eficiência da comunicação quântica. No caso comum de qbits codificados em sistemas de dois níveis, com um monitoramento que conta as excitações do tipo saltos quânticos, apenas a trajetória em

que não há emissão é útil. De fato, a estratégia começa a falhar assim que um único qbit decai, pois seu estado é projetado no nível de menor energia e assim fatorado do estado global do sistema, o que elimina o emaranhamento entre este qbit em particular com o resto do sistema. Com um monitoramento difusivo não há um efeito tão drástico e existem trajetórias que apresentam muito emaranhamento em algumas faixas de tempo. Entretanto, na média, o monitoramento por saltos é superior ao difusivo apresentando mais emaranhamento. Os detectores podem ser representados por operadores, que optamos por chamá-los de operadores de salto, que levam qualquer estado do qbit ao estado fundamental. Estes operadores são da forma $\Pi = \sqrt{\gamma}|0\rangle\langle 1|$, em que γ é o fator de acoplamento com o reservatório e $|0(1)\rangle$ é o estado fundamental (excitado) do qbit.

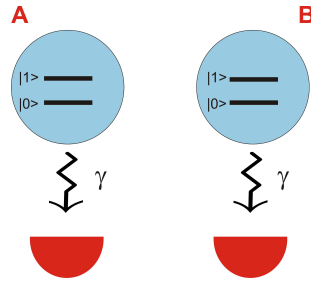


Figura 3.2: Dois qbits lógicos com seus respectivos ambientes sendo monitorados. A estratégia de monitoramento pode variar, sendo que os detectores representam qualquer tipo de detecção, tanto via saltos quanto via difusão.

Primeiramente, vamos avaliar como o monitoramento ambiental pode melhorar um simples esquema de teleportação para o qual Agata e Borat precisam dividir um par de qbits maximamente emaranhados. Considere o estado inicial de Bell dado por $|\psi(0)\rangle = |10\rangle + |01\rangle$. Sem qualquer monitoramento o estado conjunto se tornará uma mistura estatística e o emaranhamento pré-existente eventualmente desaparecerá. Essa perda de emaranhamento pode ser evidenciada pelo emaranhamento de formação (calculado a partir da concorrência de Wootters [38]) do estado solução da equação mestra $E(t) = -\frac{1+f(t)}{2} \log_2 \frac{1+f(t)}{2} - \frac{1-f(t)}{2} \log_2 \frac{1-f(t)}{2}$, com $f(t) = \sqrt{1 - e^{-2\gamma t}}$. Como o emaranhamento de formação é sempre maior ou igual ao emaranhamento que pode ser extraído, quanto mais tempo Agata e Borat demorarem para realizar a teleportação mais recursos serão necessários já que eles precisariam de mais e mais cópias para que possam destilar um estado maximamente emaranhado.

Ao medirem continuamente seus respectivos ambientes, contando as excitações, e comunicarem os resultados de medida, o conhecimento de Agata e Borat passa a ser dado pela equação de saltos quânticos

$$d|\tilde{\psi}\rangle = \left\{ -\frac{1}{2} \left[\Pi_A^\dagger \Pi_A + \Pi_B^\dagger \Pi_B \right] dt + [\Pi_A - I] dN_A + [\Pi_B - I] dN_B \right\} |\tilde{\psi}\rangle. \quad (3.2)$$

Quando há uma detecção o emaranhamento é destruído, portanto o emaranhamento obtido pelos observadores pode ser calculado a partir da realização sem saltos $dN_i = 0 \quad \forall i$ e sua respectiva probabilidade. Com a condição de simetria $\gamma_A = \gamma_B$ o estado inicial é preservado na trajetória em que os detectores não são disparados, ou seja $|\tilde{\psi}_{N=0}(t)\rangle = e^{-\frac{\gamma t}{2}} |\psi(0)\rangle$, assim mantendo

o emaranhamento original. O efeito do reservatório é tornar a trajetória sem saltos cada vez menos provável com o tempo, com sua probabilidade dada por $P_0(t) = \langle \tilde{\psi}_{N=0}(t) | \tilde{\psi}_{N=0}(t) \rangle = e^{-\gamma t}$. Este método é uma alternativa ao protocolo usual de destilação já que em qualquer tempo as duas partes dividem um estado maximamente emaranhado. Portanto com este monitoramento ou temos emaranhamento máximo (com probabilidade $P_0(t)$) ou não temos emaranhamento.

Quando o monitoramento é difusivo, o estado passa a ser descrito pela equação

$$d|\tilde{\psi}\rangle = \left\{ -\frac{1}{2} \left[\Pi_A^\dagger \Pi_A + \Pi_B^\dagger \Pi_B \right] dt + \Pi_A dQ_A + \Pi_B dQ_B \right\} |\tilde{\psi}\rangle. \quad (3.3)$$

Aqui não há um efeito abrupto no emaranhamento, entretanto ele é muito irregular diferentemente do caso anterior. Na figura temos duas possíveis realizações mostrando os efeitos do monitoramento no emaranhamento, que apesar de gerar muito emaranhamento em alguns intervalos de tempo também faz com que o mesmo siga um movimento difusivo até a dissipação.

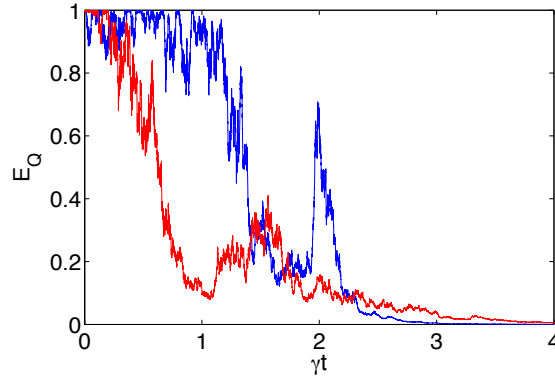


Figura 3.3: Duas possíveis realizações do emaranhamento com monitoramento difusivo.

Em média, o emaranhamento via monitoramento é sempre maior (ou igual) que o emaranhamento de formação. Isso pode ser facilmente entendido ao lembrarmos que estamos decompondo o estado da equação mestra em um ensemble que em geral é diferente do ensemble que minimiza a média de emaranhamento. Fato é que o monitoramento via saltos preserva mais emaranhamento do que o monitoramento via difusão (figura 3.5).

O monitoramento por saltos apresenta uma outra possibilidade que a difusão de estado não apresenta. Podemos usar o monitoramento para converter um estado parcialmente emaranhado $|\psi(0)\rangle = \sqrt{\alpha}|00\rangle + \sqrt{1-\alpha}|11\rangle$ em um maximamente emaranhado. Na evolução sem o disparo dos detetores o estado evolui para $|\psi(t)\rangle = \sqrt{\alpha}|00\rangle + \sqrt{1-\alpha}e^{-\gamma t}|11\rangle$ com probabilidade $\alpha + (1-\alpha)e^{-2\gamma t}$. Quando $e^{-\gamma t} = \sqrt{\alpha/(1-\alpha)}$, $|\psi(t)\rangle$ é um estado maximamente emaranhado. Isto acontece com probabilidade 2α , que é exatamente a probabilidade ótima de conversão. Isso mostra que o monitoramento via saltos fornece uma implementação do protocolo local ótimo de conversão em estados emaranhados.

II Codificação Dinâmica Local em Q-trits

Muitos dos sistemas físicos utilizados como portadores de qbits apresentam uma estrutura de níveis muito mais rica do que apenas os dois simples níveis ocupados pelo estado do qbit. Dentro das possibilidades de uma dada situação podemos então escolher os níveis do sistema físico a serem ocupados pelo qbit. Aqui há de fato uma liberdade infinita de escolhas, pois os estados escolhidos podem ser auto estados de qualquer observável do sistema, que inclusive pode mudar dinamicamente. Vamos então explorar esta multidimensionalidade natural em alguns sistemas e codificar o qbit lógico localmente em um único ente quântico, diferentemente da maioria dos processos de codificação que utilizam vários entes para abrigar um único qbit. Vamos mostrar que usando qtrits $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ para guardar informação quântica podemos melhorar as estratégias de preservação de emaranhamento baseadas em monitoramento ambiental mostradas acima. Agata e Borat possuem agora qtrits que sofrem dissipação em forma de cascata, tal que a ocupação dos estados do qtrit é deslocada um nível em direção ao nível fundamental cada vez que há uma emissão de excitação, com as transições $|2\rangle \mapsto |1\rangle$ e $|1\rangle \mapsto |0\rangle$ de taxas γ_{21} e γ_{10} . Consideramos também que estas transições são indistinguíveis, o que acrescenta novas possibilidades como por exemplo o fato de que agora um salto quântico não necessariamente corrompe a informação do qbit mas a desloca dentro do qtrit.

Vamos começar pelo monitoramento via saltos e pela situação mais favorável: a completa degenerescência de decaimento $\gamma_{21} = \gamma_{10}$, ou seja a taxa de ambas transições é a mesma. Agata e Borat dividem um estado inicial no espaço $\{|1\rangle, |2\rangle\}_A \otimes \{|1\rangle, |2\rangle\}_B$, o que representa a codificação inicial. Primeiramente note que a trajetória sem saltos não afeta o subespaço que escolhemos para inserir a informação. O estado inicial pode ser por exemplo $|\psi(0)\rangle = |12\rangle + |21\rangle$. Agora quando Agata detecta um excitação ela não pode identificar de qual das duas transições de seu qtrit a excitação foi emitida e isso pode ser descrito por um operador de detecção da forma $\Pi = \sqrt{\gamma}[|1\rangle\langle 2| + |0\rangle\langle 1|]$. Portanto ao detetarmos uma excitação vinda do qtrit de Agata o estado evolui para $|\psi(t + dt)\rangle = |02\rangle + |11\rangle$. Este estado ainda é maximamente emaranhado quando interpretado como um estado de dois qbits lógicos, entretanto os estados em que o qbit lógico de Agata está codificado não são os mesmos da codificação inicial e estão deslocados um nível a baixo. A partir deste ponto uma emissão no qtrit de Agata destruiria o emaranhamento e sem a emissão o estado também seria degradado em direção a dissipação, pois os estados fundamental e primeiro excitado correspondem a autovalores diferentes do operador de evolução, sendo que o fundamental, de fato, não evolui. O emaranhamento médio com esta estratégia de monitoramento, em que o espaço de codificação é condicionado aos resultado de medida, é superior ao emaranhamento médio da estratégia com qbits físicos, em que o espaço de codificação é fixo.

Com o monitoramento difusivo, primeiramente temos que verificar que o estado dos qtrits permanece em um subespaço de dois qbits, o que não é óbvio a primeira vista. O estado dos qtrits pode ser expresso por sua decomposição de Schimidt

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{i=0}^2 \lambda_i(t) |\lambda_i(t)\rangle_A |\lambda_i(t)\rangle_B, \quad (3.4)$$

e mostramos numericamente que um dos coeficientes é sempre nulo tanto para

realizações quanto na média $\lambda_0 = \overline{\lambda_0} = 0$. Isso garante que a informação em cada um dos qtrits permanece dentro de um qbit lógico, entretanto este subespaço que contém a informação tem uma evolução muito irregular apresentando tanto movimentos difusivos quanto saltos abruptos. O qbit lógico de Agata está no subespaço definido pelos vetores correspondentes a λ_1 e λ_2 . Podemos escolher como base lógica a base da decomposição de Schmidt tal que $|\lambda_1(t)\rangle$ é o estado excitado e $|\lambda_2(t)\rangle$ o estado fundamental, tal que, para tempos longos, $|\psi(t)\rangle = |\lambda_2(t)\rangle = |0\rangle$. Podemos então verificar como evolui a base lógica do qtrit de Agata em relação aos estados correspondentes a número de excitação do qtrit expandindo um dos vetores da base $|\lambda_2(t)\rangle = \sum_{i=0}^2 \langle i|\lambda_2(t)\rangle |i\rangle$. Além da difusão refletida na magnitude das componentes $\langle i|\lambda_2(t)\rangle$ também temos abruptas mudanças de fase, no caso o sinal da componente.

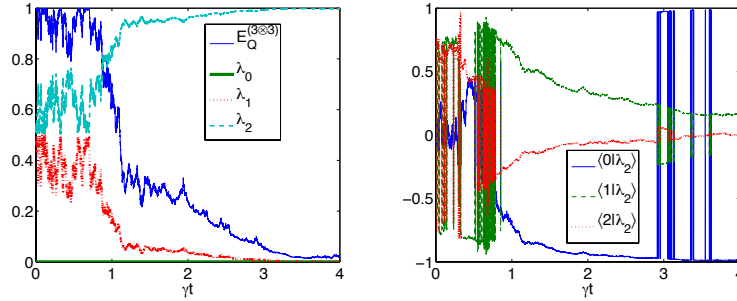


Figura 3.4: À esquerda, uma realização do emaranhamento com monitoramento difusivo com a codificação em qtrits e os correspondentes coeficientes de Schmidt. À direita, a realização correspondente de um dos vetores da base lógica escolhida mostrando a evolução das componentes em relação a base de número de excitação.

O monitoramento com a codificação dinâmica em qtrits nos permite preservar mais emaranhamento quando comparado ao monitoramento com a codificação simples em qbits. O monitoramento via saltos ainda se mostra superior ao difusivo sendo a melhor estratégia, entretanto, em um dado sistema, o monitoramento pode ser limitado a observações difusivas e mesmo assim é possível obter mais emaranhamento com a codificação dinâmica.

A Um Exemplo com Saltos Quânticos em Eletrodinâmica Quântica de Cavidades

Uma outra configuração possível apresenta excitações emitidas que ainda não permitem identificar os possíveis canais de decaimento mas que são mais prováveis quanto mais alto for o número de excitações no estado ($\omega_{21} = \omega_{10}$ e $\gamma_{21} > \gamma_{10}$). Por exemplo, no caso específico de osciladores harmônicos, o operador de detecção via saltos no subespaço estudado ($|n = 0, 1, 2\rangle$) é dado por $\Pi = \sqrt{\gamma}(|0\rangle\langle 1| + \sqrt{2}|1\rangle\langle 2|)$. Neste caso, tanto a emissão quanto a não emissão afetam o emaranhamento, fazendo uma conversão entre estados puros, pois os operadores de medida redistribuem população entre os níveis de energia de cada subsistema. Vamos descrever uma situação em eletrodinâmica quântica de cavidades em que estas ideias podem ser aplicadas. Suponha que Agata e Borat

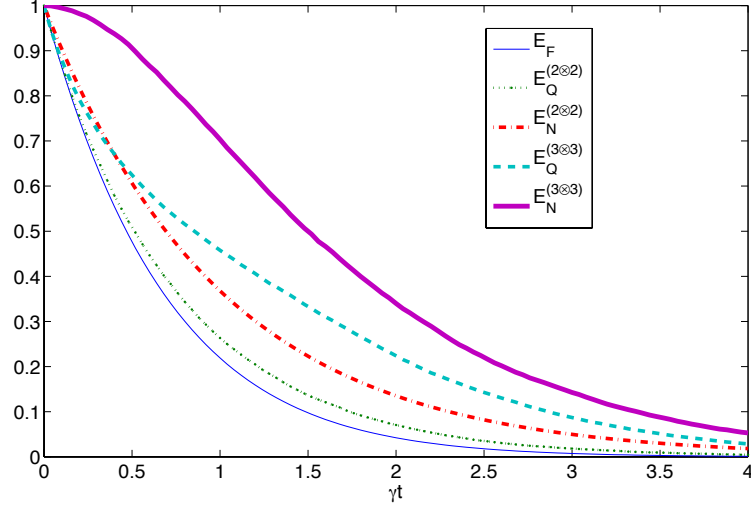


Figura 3.5: Medias de emaranhamento alterando o tipo de codificação de qbits para qtrits e o tipo de monitoramento (Q para difusivo N para via saltos).

querem estabelecer um canal quântico de comunicação e possuem átomos com dois níveis eletrônicos de excitação efetivos e cavidades ressonantes capazes de confinar com resolução um modo de campo eletromagnético, sendo que tudo que podem fazer é monitorar a perda de fótons das cavidades e interagir os átomos com as cavidades. Na proposta da referência [28], Agata primeiramente prepara uma cavidade vazia (no estado $|0\rangle$) em seguida faz com que um átomo muito estável de dois níveis ($\{|g\rangle, |e\rangle\}$) no estado excitado $|e\rangle$ interaja com a cavidade, de tal forma a obter um estado emaranhado $\sqrt{\alpha}|0e\rangle + \sqrt{1-\alpha}|1g\rangle$. E então ela envia o átomo a Borat. Assumindo que a taxa de decaimento atômico é muito menor que a da cavidade, isto é $\gamma_{at} \ll \gamma$, o tempo de coerência do segundo limita a distância atingível pelo primeiro. De fato, a distância entre Agata e Borat teria que ser muito menor que v/γ , sendo v a velocidade atômica.

Como discutido anteriormente esta estratégia pode ser melhorada se Agata utilizar os três primeiros níveis do campo em sua cavidade. A ideia é que, ao invés de estar vazia, a cavidade inicialmente contém um fóton (estado $|1\rangle$). Então, depois da interação átomo-campo, o estado final será $\sqrt{\alpha}|1e\rangle + \sqrt{1-\alpha}|2g\rangle$. Se nenhum salto acontecer no intervalo $[0, t)$ então o estado evolui para $|\tilde{\chi}_0(t)\rangle = e^{-\gamma t/2}(\sqrt{\alpha}|e1\rangle + \sqrt{1-\alpha}e^{-\gamma t/2}|g2\rangle)$, com probabilidade $P_{\chi_0}(t) = \alpha e^{-\gamma t} + (1-\alpha)e^{-2\gamma t}$. Entretanto se um salto ocorrer no campo da cavidade em um tempo $t_J < t$, então o novo estado do sistema no tempo t é dado por $|\tilde{\chi}_1(t)\rangle = e^{-\gamma t_J/2}(\sqrt{\alpha}|e0\rangle + \sqrt{1-\alpha}\sqrt{2}e^{-\gamma t/2}|g1\rangle)$. Note que, pelo fato de que $\gamma_{21} = 2\gamma_{10}$, o estado final é sempre o mesmo independentemente do particular momento em que acontece o salto. Podemos, então, tratar todas trajetórias com um salto quântico como sendo somente uma e computar a probabilidade de acontecer apenas um salto por $P_{\chi_1}(t) = \int_0^t P_{\chi_1}(t, t_J) dt_J = p \left[\frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma} \right]$, em que $P_{\chi_1}(t, t_J) = p e^{-\gamma t_J}$ fornece a densidade de probabilidade para a trajetória em que acontece um salto em $t = t_J$, com $p = \alpha + 2(1-\alpha)e^{-\gamma t}$. O emaranhamento

médio das trajetórias é dado por

$$E(\alpha, t) = \sum_i \int E_{\psi_i}(\alpha, t, \vec{t}_{J_i}) P_{\psi_i}(\alpha, t, \vec{t}_{J_i}) d\vec{t}_{J_i}. \quad (3.5)$$

No caso desta estratégia com o qtrit na cavidade esta expressão se reduz a $E_{2\otimes 3}(\alpha, t) = E_{\chi_0} P_{\chi_0} + E_{\chi_1} P_{\chi_1}$, pois o emaranhamento não depende do tempo de salto podendo ser tratado como constante na integral sobre os tempos de salto, e o somatório é truncado no segundo termo pois trajetórias com mais de 2 saltos possuem zero de emaranhamento e não contribuem para a média. Similarmente podemos encontrar a média para a estratégia com qbits $E_{2\otimes 2}$.

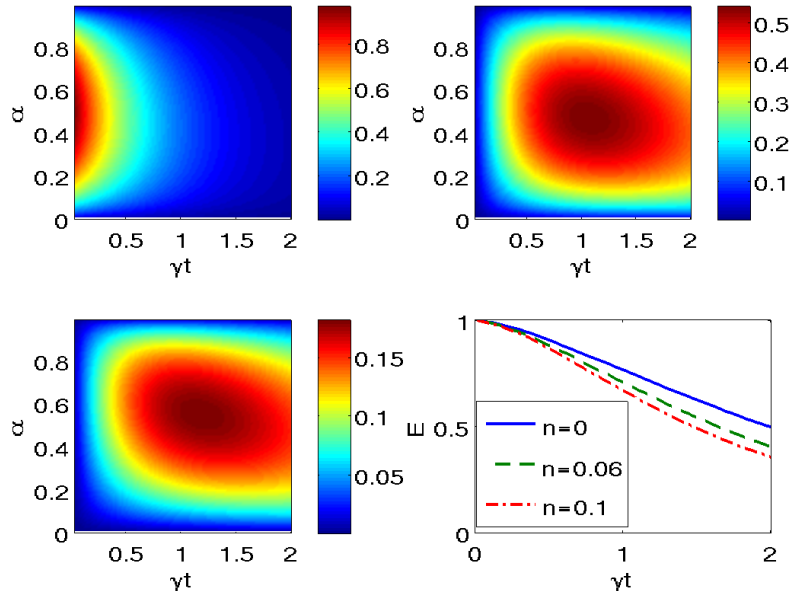


Figura 3.6: a) Contribuição da trajetória sem saltos $E_{\chi_0} P_{\chi_0}$ para $E_{2\otimes 3}$; b) (direita superior) Contribuição da trajetória com um salto $E_{\chi_1} P_{\chi_1}$ para $E_{2\otimes 3}$; c) $E_{2\otimes 3} - E_{2\otimes 2}$; d) $E_{2\otimes 3}$ com $\alpha = 0.5$ para diferentes temperaturas com o número médio de excitações no reservatório dado por n . Tempo de decaimento $1/\gamma = 0.129$ s como na montagem experimental em [76].

Além disso, podemos escolher t de tal forma a maximizar a trajetória de um salto e α para maximizar o emaranhamento do estado quando o átomo atinge Borat, assim criando um emaranhamento duradouro. Na amostragem em cores comparamos os protocolos (qbit e qtrit) como funções de t e α mostrando as regiões ótimas em que cada estratégia é melhor e também evidenciando que para todos os tempos e estados iniciais a codificação em qtrits é mais eficiente na presença de decaimento e monitoramento ambiental. Também mostramos a média de emaranhamento para diferentes temperaturas do reservatório. Experimentos típicos de EDQ de cavidade na região de microondas são realizados a temperaturas baixas o suficiente para não afetarem o esquema de forma muito significativa.

Os esquemas propostos podem ser imediatamente incorporados a alguns protocolos de comunicação previamente conhecidos. Uma das ideias principais para transmitir informação quântica em redes de comunicação unidimensionais se baseia em repetidores quânticos [5]. Neste caso, o propósito é transmitir emaranhamento a longas distâncias usando estações intermediárias para recuperar o emaranhamento de tempos em tempos através de destilação. Uma vez que se recupera emaranhamento em uma estação intermediária teleporta-se este emaranhamento para próxima estação. Naturalmente, como a codificação dinâmica permite manter emaranhamento por tempos mais longos entre as estações, há uma redução no número total de recursos necessários.

III Reciclagem Local via Feedback

Agora vamos permitir que os observadores atuem sobre o sistema de acordo com os resultados que obtêm das medidas do ambiente para que possam corrigir os erros induzidos pelo ambiente e reciclar o qbit lógico. Vamos começar revendo alguns conceitos básicos de correção quântica de erros [60]. Primeiramente escolhamos um subespaço, o espaço código, do sistema para codificar o qbit lógico. O sistema está sujeito a um erro induzido pelo ambiente \mathcal{E} que pode ser representado em uma expansão em tempo curto por $\mathcal{E}\rho = [1 + \mathcal{L}dt]\rho$. O sistema pode ser reciclado depois da ocorrência de erros se há uma operação de restauração \mathcal{R} tal que $\mathcal{R}\mathcal{E}\rho = \rho$ para todos estados no espaço código $\rho = P_C\rho P_C$, sendo P_C o projetor no espaço código. Estamos interessados em erros induzidos por reservatórios markovianos, sendo que tais erros podem ser decompostos em outros erros mais específicos através de um processo de medida com operadores de medida $\Gamma_{d\xi}$, tal que $\int d\mu(d\xi)\Gamma_{d\xi}\rho\Gamma_{d\xi}^\dagger = \mathcal{E}\rho$. Correção de erros canônica deve então ser aplicada como ações discretas em intervalos de tempo a serem tomados como muito pequenos e tem que corrigir simultaneamente diferentes erros $\Gamma_{d\xi}$. Ao medirmos e contarmos as excitações no ambiente nós podemos criar operações de reciclagem específicas para cada um dos erros, além disso podemos escolher um espaço código que é livre de descoerência em relação a pelo menos um dos erros para que não precisemos corrigir todos eles. Então encontramos um espaço código que é auto-espaço do operador Γ_0 e temos que reciclar o sistema apenas quando um outro erro acontece. Precisamos encontrar uma operação \mathcal{R} que reverta a medida quântica e optamos por fazê-lo deterministicamente e não probabilisticamente [77]. Por fim a dinâmica do sistema dentro do espaço código deve ser dada por

$$P_C\rho(t + dt)P_C = P_C \int d\mu(d\xi)R_{d\xi}\Gamma_{d\xi}\rho(t)\Gamma_{d\xi}^\dagger R_{d\xi}^\dagger P_C = P_C\rho(t)P_C, \quad (3.6)$$

ou seja, qualquer estado é preservado dentro do espaço código.

A Código para Saltos Quânticos

Voltando ao estado condicionado de Agata e Borat com o monitoramento via saltos e codificação em qtrits podemos perceber que a informação sobre o decaimento do sistema não somente permite que os observadores mantenham um estado emaranhado, mas também fornece a oportunidade de localmente e deterministicamente restaurar o estado inicial através de uma retro alimentação

hamiltoniana bombeando uma excitação de volta ao qtrit emissor revertendo as transições de decaimento ($|1\rangle \mapsto |2\rangle$, $|0\rangle \mapsto |1\rangle$). Vamos então recordar as condições para reversibilidade determinística de um salto quântico [64, 78] e assim desenvolver um código local de correção de erros via saltos quânticos. A operação de reciclagem é então uma unitária R tal que $R\Pi = \sqrt{\gamma}P_C$ (sem perda de generalidade negligenciamos os efeitos de ambas operações fora do espaço código), portanto $\Pi = \sqrt{\gamma}R^\dagger P_C$. Note que isto implica que o espaço código deve ser um auto-espaço do operador Γ_0 , pois $\Pi^\dagger\Pi = \gamma P_C R R^\dagger P_C = \gamma P_C$. Portanto, em um monitoramento via saltos, podemos deterministicamente restaurar dados quânticos no espaço código com um mecanismo direto de feedback com hamiltoniano $H_{fb} = F \frac{dN}{dt}$ e operação de reciclagem $R = e^{-iF}$ se o operador de detecção obedecer as condições acima. O super-operador na equação de feedback pode ser identificado com a operação de reversão $e^{\mathcal{F}} = \mathcal{R} = R \bullet R^\dagger$.

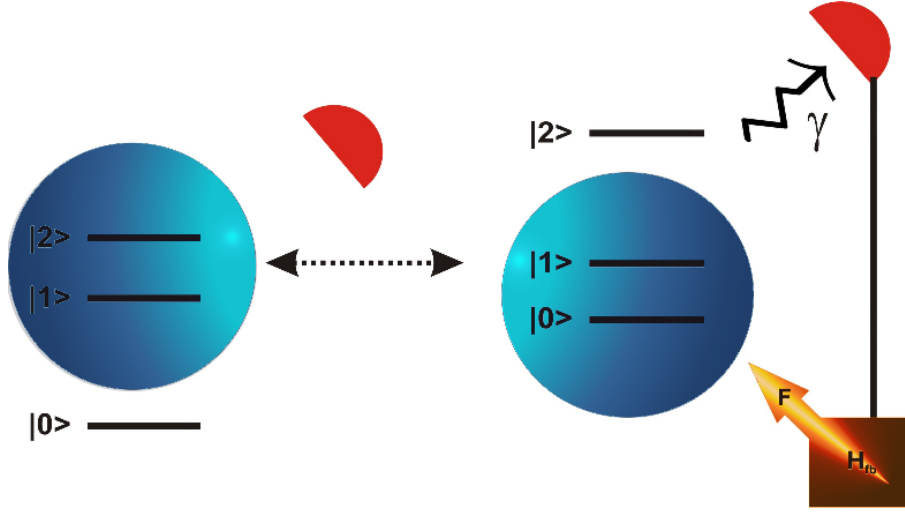


Figura 3.7: Representação do processo de reciclagem local. O qbit lógico é representado pelo círculo azul nos estados do qtrit. O estado é preservado enquanto o sistema não emite uma excitação. Quando ele emite, o estado codificado desce nos estados do qtrit e é reciclado de volta ao seu subespaço original pela ação do feedback.

Agora vamos nos voltar para o exemplo específico de localmente proteger informação quântica de emissão espontânea. Suponha que dispomos de qtrits físicos, cada um com níveis de energia $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ e novamente com o operador de salto $\Pi = \sqrt{\gamma}(|1\rangle\langle 2| + |0\rangle\langle 1|)$ que não distingue as transições do qtrit. No caso de transições distinguíveis o protocolo que vamos desenvolver não funciona, pois neste caso os erros se reduzem a erros de qbits que não podem ser revertidos localmente. Outra condição importante é que as taxas de decaimento das transições sejam iguais o que garante a existência do espaço livre de descoerência para o operador de não detecção. Todos os estados são levados ao estado fundamental. Para encontrar o espaço código basta calcular $\Pi^\dagger\Pi = \gamma P_C$ com $P_C = |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|$. A operação de reciclagem é então dada por $R = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\Pi^\dagger + |0\rangle\langle 2|$ e o operador de feedback $F = \lambda \left[\frac{1}{\sqrt{\gamma}}(\Pi^\dagger - \Pi) + |0\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 0| \right]$,

com $\lambda \approx 1,2092i$. Essa operação de reversão claramente realimenta o sistema com uma excitação após um decaimento ser detectado. Informação é, então, preservada no espaço código enquanto o detector não é disparado. À medida que o sistema evolui, eventualmente há um decaimento e o estado do qtrit pode parcialmente ou completamente sair do espaço código. Então, o detector é disparado e o mecanismo de feedback é ativado e o sistema é reciclado de volta a seu estado original. Se o monitoramento é completamente perfeito e o tempo de atraso no feedback é nulo, então o qbit lógico é localmente e perfeitamente protegido do seu acoplamento com o ambiente. O processo de reciclagem é ilustrado na figura 3.7. Agora suponha que temos n qtrits, cada um com seu próprio processo de reciclagem, então poderíamos proteger qualquer estado global no espaço código $\{|1\rangle, |2\rangle\}^{\otimes n}$, assim protegendo, de forma ativa, n qbits lógicos codificados localmente em n qtrits.

B Código para Difusão de Estado

Podemos começar a analisar imperfeições no protocolo com um tipo de imperfeição importante que se manifesta como ruído adicional nos resultados de medida, que pode ser adicionado intencionalmente ou não pelo observador, com o processo de medida então correspondendo a difusão de estado. Nos referimos ao limite difusivo como um limite de ineficiência, pois o ruído clássico adicional apaga parte da informação sobre o processo de interação por trás da dinâmica, que é um processo de troca de excitação. No limite de saltos o observador é claramente informado se houve ou não uma troca de excitação, o que não é verdade no limite difusivo. Entretanto, podemos dizer que ao entrarmos neste limite estamos mudando a maneira de detectar os erros, mudando a maneira com que medimos e adquirimos informação, e então mostramos que para atingir a correção de erros, a codificação e o hamiltoniano de feedback tem que ser rederivados. Desta forma, a reciclagem baseada em difusão é diferente da baseada em saltos e representa um outro código de correção de erros.

Alguns objetivos podem ser alcançados com a difusão de estado, como a estabilização de um estado arbitrário (mas conhecido) puro de um qbit [79] e até mesmo correção de erros global [69] (baseada em codificação e operações globais). Nós mostramos que, assim como no caso de saltos, é impossível proteger um estado desconhecido arbitrário de um qbit e, portanto, um estado arbitrário de muitos qbits da interação com o ambiente através de feedback local baseado em difusão. Entretanto, introduzindo a codificação em qtrits podemos alcançar este objetivo.

No limite difusivo a equação mestra não condicional de feedback é da forma (para apenas um operador de salto Π e sem imperfeições)

$$d\rho = -\frac{i}{2} [\Pi^\dagger F + F\Pi, \rho] dt + \mathcal{L}[\Pi - iF]\rho dt. \quad (3.7)$$

Para proteger um estado arbitrário precisamos adicionar um hamiltoniano constante da forma $H = -\frac{1}{2}(\Pi^\dagger F + F\Pi)$ que cancela o primeiro termo e precisamos encontrar um hamiltoniano de feedback apropriado F que cancele a fonte de descoerência no segundo termo. O operador de salto pode ser escrito como $\Pi = M + X + iY$, sendo M um múltiplo da identidade e X e Y operadores hermitianos. No caso específico de emissão espontânea temos $M = 0$ e X e Y são os operadores de momento angular apropriadamente renormalizados para o

qutrit físico $X = \frac{\sqrt{7}}{2} (|1\rangle\langle 2| + |0\rangle\langle 1| + h.c.)$ e $Y = \frac{\sqrt{7}}{2} (-i|1\rangle\langle 2| - i|0\rangle\langle 1| + h.c.)$. Agora, suponha que o espaço código seja estabilizado por um operador, que nomeamos estabilizador, S , o que quer dizer que o espaço código é um auto-espaço de S com autovalor $+1$. Então, o hamiltoniano adequado de feedback seria dado por $F = Y - iXS$, tal que $\mathcal{L}[\Pi - iF] = \mathcal{L}[M + X(I - S)]$, assim o espaço código é aniquilado pelo termo $(I - S)$ e portanto é preservado ao longo da evolução. Entretanto o hamiltoniano de feedback deve ser hermitiano, logo S deve anti-comutar com X , $SX + XS = 0$ [69]. No caso de qbits, o único estabilizador local seria dado pela identidade, que não anti-comuta com nenhum outro operador e assim seria impossível encontrar um hamiltoniano de feedback e proteger um qbit com feedback baseado em difusão.

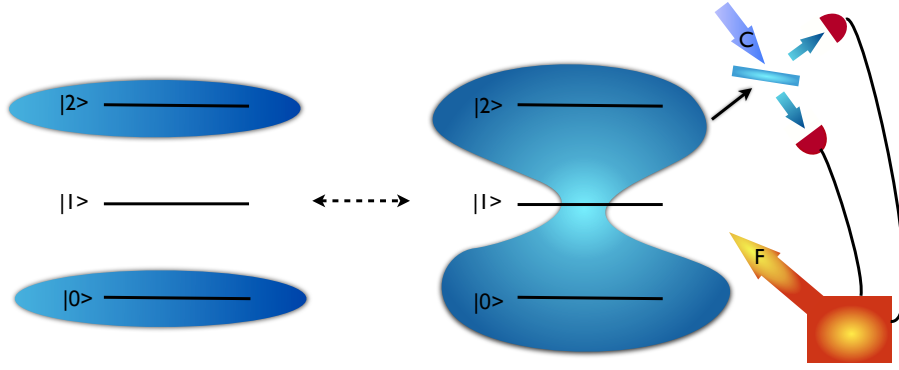


Figura 3.8: Representação do processo local de reciclagem. Os qubits lógicos são codificados na região azul entorno dos estados do qutrit. O sistema sofre erros infinitesimais continuamente e o estado é danificado de maneira irregular, de tal forma que, parte da informação deixa o espaço código e a parte restante também é danificada. Então, o erro é detectado e o mecanismo de feedback é ativado e o estado é reciclado pela ação de feedback retornando ao subespaço original.

No caso de qutrits podemos encontrar um estabilizador local que anti-comuta com o operador de momento angular X . O estabilizador é então definido por $S|0\rangle = |0\rangle$, $S|2\rangle = |2\rangle$ e $S|1\rangle = -|1\rangle$, o que define o espaço código como sendo $\{|0\rangle, |2\rangle\}^{\otimes n}$. O processo de reciclagem pode ser descrito por uma sequência de operações (ver também a figura 3.8). Em um intervalo de tempo muito curto os detectores registram o resultado de medida $dQ(t)$ e o sistema evolui de acordo $|S_Q(t + dt)\rangle = [I - \frac{1}{2}\Pi^\dagger\Pi dt + \Pi dQ(t)] |S_Q(t)\rangle$, o que danifica o estado inicial. Entretanto, imediatamente após a detecção o mecanismo de feedback é ativado e o estado acima é multiplicado pela operação $R = e^{-iF dQ(t)}$, portanto a evolução do sistema passa a ser

$$\begin{aligned}
 |S_Q(t + dt)\rangle &= \left[I - \left(\frac{1}{2}\Pi^\dagger\Pi - i\frac{1}{2}(\Pi^\dagger F + F\Pi) + iF\Pi \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{F^2}{2} \right) dt + (\Pi - iF) dQ(t) \right] |S_Q(t)\rangle \\
 &= \left[I - \left(\frac{\gamma dt}{2} + X dQ \right) (I - S) \right] |S_Q(t)\rangle. \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

Como definimos o hamiltoniano de feedback e o estabilizador adequados, é fácil ver que, se o estado inicial está dentro do espaço código ($P_C|S_Q(t)\rangle = |S_Q(t)\rangle$), ele permanece no espaço código ($(I - S)|S_Q\rangle = 2(I - P_C)|S_Q\rangle = 0$).

Entretanto a reciclagem baseada em difusão pode ser mais sensível a imperfeições quando comparada com o limite de saltos, ao menos em realizações individuais. A falta de informação em um monitoramento difusivo se manifesta (quando consideramos ineficiências, por exemplo atraso no tempo de feedback) na forma de trajetórias altamente irregulares e induz um minimização (parcial, senão global) do emaranhamento quando feita a média sobre trajetórias [80].

C Imperfeições

Agora, analisamos a performance do protocolo sujeito a ineficiências. Como a detecção de erros depende de medidas no ambiente, o protocolo depende fortemente da eficiência de medida. O tempo de atraso de feedback tem que ser significativamente menor que o tempo de decaimento, caso contrário, o sistema dissipa antes da ação de feedback. A resolução temporal dt da medida tem que ser muito menor que o tempo de decaimento, entretanto, tem que ser maior que o tempo de correlação característico do reservatório. Focamos a análise no código baseado em saltos pois apresenta efeitos interessantes em realizações individuais.

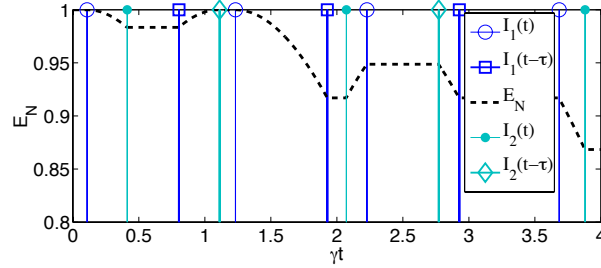


Figura 3.9: Emaranhamento E_N de uma única realização com estado inicial $|12\rangle + |21\rangle$ e tempo de atraso de feedback $\tau \approx 0.7/\gamma$. Também mostramos os registros dos resultados de medida nos dois qutrits e suas versões atrasadas indicando a ação de feedback.

É claro que recursos globais, como emaranhamento, também podem ser preservados pelo protocolo de reciclagem. Portanto, partes distantes em uma rede de comunicação quântica podem manter estados emaranhados na presença de erros induzidos pelo ambiente e podem realizar protocolos de comunicação quântica como teleportação e codificação densa. Para tal propósito, utilizar estados mais robustos pode aumentar a eficiência de comunicação. Por exemplo, estados que não sofrem de morte súbita de emaranhamento. Estados tipo W são conhecidos por sua robustez e em nosso protocolo de reciclagem tomam a forma $|12\rangle + |21\rangle$ e $|112\rangle + |121\rangle + |211\rangle$ para dois e três qutrits respectivamente. Há um mecanismo a mais que torna tais estados mais robustos ao tempo de atraso de feedback. Vamos examinar o caso mais simples com um estado inicial $|12\rangle + |21\rangle$ e um tempo de atraso τ . Suponha que uma excitação é emitida e

detectada do primeiro qtrit e o estado salta para $|02\rangle + |11\rangle$ saindo parcialmente do espaço código. Agora, este estado evolui para $|02\rangle + e^{-\gamma\tau/2}|11\rangle$ enquanto a ação do feedback é atrasada, e quando o feedback finalmente acontece o estado é devolvido ao espaço código na forma $|12\rangle + e^{-\gamma\tau/2}|21\rangle$, entretanto não é completamente restaurado. Se uma excitação é detectada do segundo qtrit o estado evolui e ao fim do tempo de atraso temos novamente um estado maximamente emaranhado $e^{-\gamma\tau/2}[|11\rangle + |20\rangle]$, e então o estado é finalmente restaurado pelo feedback. Assim, a indesejável evolução que acontece durante o atraso de feedback em um dos qtrits pode ser revertida pelo atraso em outro qtrit. Esta é a sequência de eventos mais favorável dado um tempo de atraso. O emaranhamento seria completamente degradado se um único qtrit emitisse duas excitações consecutivas dentro de um mesmo tempo de atraso e essa seria a pior situação. Na figura (3.9) nós mostramos uma particular realização apresentando efeitos do tempo finito de atraso de feedback no emaranhamento. Na figura (3.10) mostramos o emaranhamento médio como sendo função do tempo e do tempo de atraso. Como mostrado nas figuras quanto maior o tempo de atraso menos efetivo se torna o processo de reciclagem, embora uma quantidade considerável de emaranhamento ainda pode ser preservada após longos tempos e com um tempo de atraso apreciável. É fácil ver que estados como $|11\rangle + |22\rangle$ seriam apenas degradados na presença de atraso do feedback.

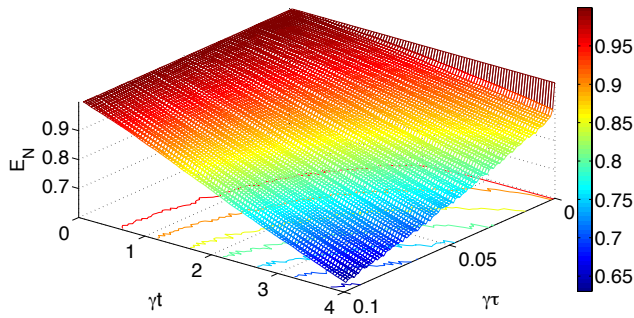


Figura 3.10: Emaranhamento médio (negatividade) do feedback baseado em saltos em função do tempo e do tempo de atraso de feedback.

O protocolo é muito mais afetado por ineficiências de medida como podemos ver na figura (3.11). A evolução sem saltos começa a se assemelhar a evolução da equação mestra não condicional à medida que a eficiência de medida diminui. Esta evolução popula a componente do estado fundamental e diminui a coerência e emaranhamento no espaço código. Como consequência o processo de reciclagem se torna cada vez menos efetivo, à medida que a eficiência diminui. Ainda assim, um efeito interessante que ajuda a manter o protocolo efetivo para pequenas ineficiências é que quando um salto acontece, seguido de feedback, a componente do estado fundamental é eliminada, o que aumenta tanto a população quanto a coerência no espaço código acarretando um salto de emaranhamento (este efeito também terá um papel importante no próximo capítulo). Assim, neste processo, um salto quântico sempre aumenta o emaranhamento e isto é mostrado na figura (3.12).

Quando os detectores possuem uma eficiência menor que um, a evolução leva

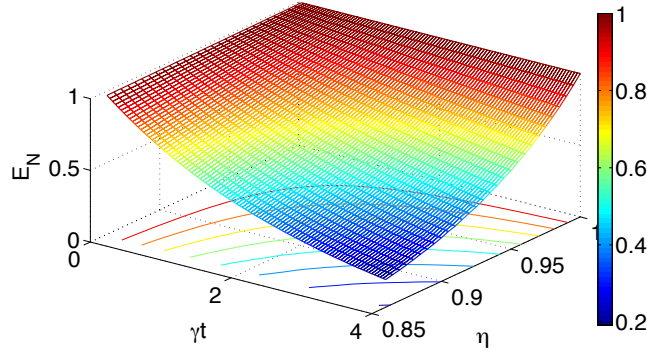


Figura 3.11: Negatividade média do feedback baseado em saltos como uma função do tempo e da eficiência de medida.

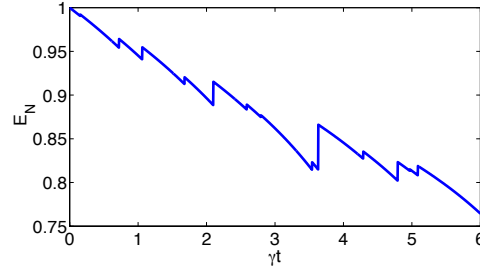


Figura 3.12: Emaranhamento de uma única realização com o estado inicial $|12\rangle + |21\rangle$ e eficiência de medida $\eta \approx 0.98$.

à perda de pureza e temos, em geral, um estado misto de qtrits. Não há uma expressão fechada para o emaranhamento de formação de tais estados. Aqui, escolhemos a negatividade da transposta parcial da matriz densidade como uma cota superior ao emaranhamento destilável. Para manter a consistência na comparação usamos a negatividade em ambas as figuras (3.10, 3.11), mesmo que no caso de tempo de atraso seja possível determinar o valor do emaranhamento.

Em sessões anteriores dissemos que a indistinguibilidade dos canais de decaimento do qtrit é de extrema importância para o protocolo de correção funcionar. Agora, relaxamos essa condição e analisamos a eficiência do protocolo quando as transições se tornam cada vez mais distinguíveis. O operador de detecção é separado em outros dois, $\Pi_2 = \sqrt{\gamma} [\sqrt{\alpha}|1\rangle\langle 2| + \sqrt{1-\alpha}|0\rangle\langle 1|]$ e $\Pi_1 = \sqrt{\gamma} [\sqrt{1-\alpha}|1\rangle\langle 2| + \sqrt{\alpha}|0\rangle\langle 1|]$, cada um correspondendo a uma transição. Se $\alpha = 1/2$ as transições são indistinguíveis e se $\alpha = 1$ (ou zero) as transições são completamente distinguíveis. Note que, ao mudar a distinguibilidade também se muda a dinâmica global (não somente o processo de detecção), tal que, para $\alpha \neq 1/2$, temos $\mathcal{L}[\Pi] \neq \mathcal{L}[\Pi_1] + \mathcal{L}[\Pi_2]$. Entretanto, para $\alpha = 1/2$ temos $\mathcal{L}[\Pi] = \mathcal{L}[\Pi_1] + \mathcal{L}[\Pi_2]$. Depois que os detectores são disparados a mesma ação de feedback é aplicada. Como mostramos na figura (3.13) o protocolo ainda é eficaz mesmo que as transições sejam um pouco distinguíveis. Entretanto, à medida

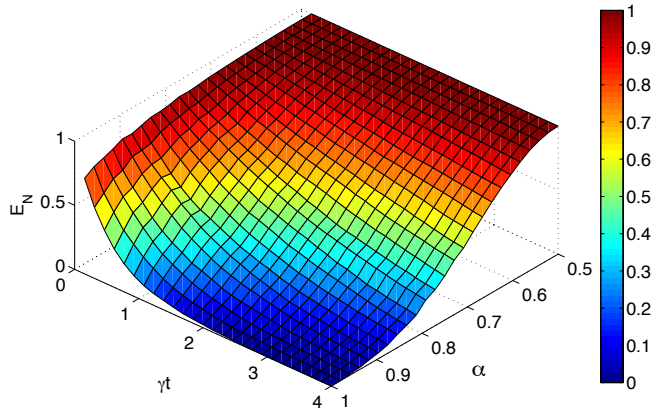


Figura 3.13: Average entanglement (negativity) of the jump feedback as a function of time and distinguishability α .

que as transições se tornam mais distinguíveis, os erros se tornam dominantes e o sistema perde emaranhamento rapidamente.

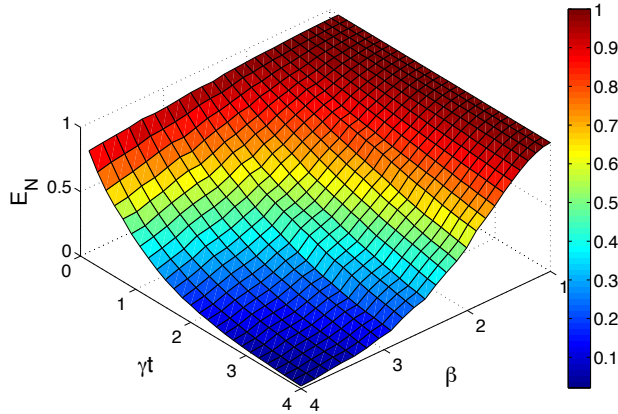


Figura 3.14: Emaranhamento médio (negatividade) do feedback via saltos em função do tempo e taxa de transição β .

Mesmo que as transições sejam indistinguíveis, as taxas de transição podem ser diferentes, o que faz uma transição mais provável que a outra. Este é o caso de osciladores harmônicos, por exemplo. O operador de salto pode ser expresso por $\Pi = \sqrt{\gamma}[\sqrt{\beta}|1\rangle\langle 2| + |0\rangle\langle 1|]$, gerando uma probabilidade para a transição $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$ proporcional a β . Quando as taxas são desbalanceadas a evolução sem saltos perturba o espaço código, o que significa que nossa estratégia poderia ser combinada com um protocolo de correção do tipo “bang-bang”. Além disso, os saltos também perturbam a informação codificada e a deslocam para fora do espaço código. À medida que a transição superior se torna mais provável, o

protocolo se torna menos efetivo. Entretanto, para transições desbalanceadas que correspondem a um oscilador harmônico ($\beta = 2$), o protocolo ainda pode proteger uma quantidade considerável, como mostramos na figura (3.14).

Outro tipo possível de imperfeição no mecanismo feedback seria uma imprecisão na implementação da operação de reciclagem, como uma flutuação na constante do hamiltoniano de maneira similar a um efeito de desordem. Por exemplo, o hamiltoniano poderia ser dado pelo hamiltoniano ideal com um peso que assume valores distribuídos de forma gaussiana centrados no valor ideal λ cada vez que o feedback é disparado. O hamiltoniano de feedback com desordem seria dado por $(1 + \frac{\delta}{\lambda})F$, com δ uma variável aleatória gaussiana com média zero. Este efeito de desordem corresponde a uma operação de reciclagem imperfeita que está sujeita a flutuações aleatórias e é dada por uma família a um parâmetro de matrizes unitárias aleatórias: a operação ideal vezes uma aleatória $Re^{-iF\frac{\delta}{\lambda}}$. Este processo desordenado de reciclagem geralmente não restaura o estado inicial, pois as operações de feedback podem diferir consideravelmente da ideal (para valores apreciáveis da variância da distribuição de desordem $var(\delta)$), assim levando a uma degradação de recursos globais durante períodos em que o sistema cessa a emissão. Mostramos a negatividade média na figura (3.15). Pode ser visto que o protocolo tolera pequenas flutuações no hamiltoniano e acreditamos que este efeito de desordem seja menos impactante do que ineficiência de medida e tempo de atraso. Entretanto, para valores altos de desordem, o efeito seria bem mais danoso do que o tempo de atraso do feedback, pois o emaranhamento decresce aproximadamente linearmente com o tempo de atraso e apresenta uma curvatura decrescente com a desordem.

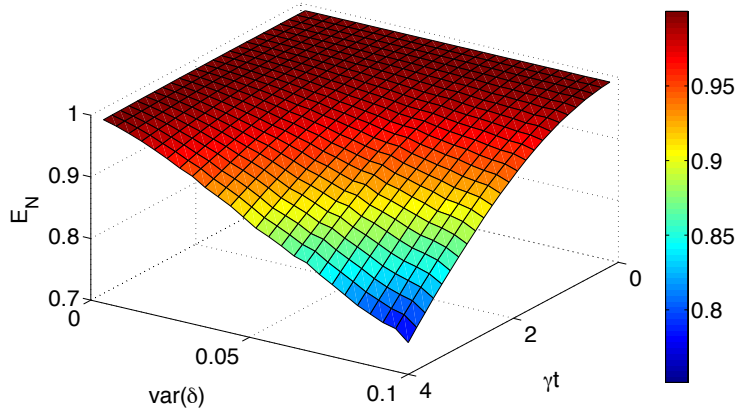


Figura 3.15: Negatividade média como função do tempo e flutuações no hamiltoniano. As flutuações são quantificadas pela variância $var(\delta)$ da gaussiana centrada no valor ideal da força do hamiltoniano λ .

Capítulo 4

Transição Quântico-Clássico

O problema do limite quântico clássico tem estado no núcleo da teoria quântica desde o início com argumentos que vão desde complementaridade [81] até descoerência [82]. O limite pode ser associado a propriedades intrínsecas de um dado sistema físico assim como também a propriedades dinâmicas de sistemas interagentes. Debates mais antigos focaram no tamanho relativo dos sistemas interagentes, como por exemplo, um espelho era tomado como clássico pois a transferência de momento causada pelo impacto de um fóton é insignificante quando comparada à inércia do espelho. Argumentos mais recentes tem se focado na geração de emaranhamento, isto é, a tal chamada aproximação semi-clássica é válida quando um sistema quântico altera o estado físico de outro sistema sem que ambos os sistemas se emaranhem. Casos extremos, como lasers de 10^6 ftons gerando rotações nos estados internos de um átomo são bem compreendidos. Entretanto, se o campo de bombeio tem em média apenas um fóton ele ainda pode se comportar classicamente? Intuição diria não. Experimentos e cálculos anteriores dizem sim e agora teoria de informação quântica pode dizer como.

Alguns tipos de transição quântico clássico estão associados ao acoplamento a ambientes externos. De fato, ao trocar informação com graus de liberdade externos, um sistema quântico pode perder alguns de seus aspectos quânticos, tais como a possibilidade de fenômenos de interferência ou a sua não localidade. Por exemplo, funções de Wigner de estados quânticos de osciladores harmônicos sujeitos a forte decoerência rapidamente convergem para distribuições no espaço de fase com descrição clássica [83]. Da mesma forma, matrizes densidade de dois qbits emaranhados sujeitos a reservatórios independentes rapidamente convergem para estados separáveis [84], que apresentam apenas correlações clássicas e podem se descritos por teorias de variáveis ocultas reais e locais [22].

Uma abordagem comum para se estudar o limite clássico que surge da ação de um reservatório externo é considerar o sistema e graus de liberdade externos como sendo um grande conjunto isolado e, assim, ao assumir algumas propriedades gerais sobre o ambiente, tomar uma média de seus efeitos sobre o sistema tomando o traço parcial sobre o ambiente. Essa estratégia é encontrada tanto no método de equação mestra quanto no de equações de Heisenberg-Langevin [49], e de fato, descreve a dinâmica do sistema. Entretanto, ao ignorar a informação contida no reservatório, limitamos nosso entendimento do papel do ambiente na transição quântico clássico que o sistema eventualmente apresenta. Uma alter-

nativa é considerar o reservatório como um outro sistema quântico, resolvendo a dinâmica hamiltoniana para todos os graus de liberdade (sistema e ambiente). Entretanto, devido à natureza de um reservatório (infinitos graus de liberdade), este método requer fortes aproximações e permite soluções apenas em regimes de dinâmica particulares.

Ambas estratégias descritas acima foram usadas para analisar um sistema óptico quântico que apresenta uma transição quântico-clássico e pode ser encontrado, por exemplo, em interferometria de átomos de Rydberg [85]. O sistema é um átomo de dois níveis interagindo linearmente com um campo de cavidade quantizado que é bombeado por uma fonte clássica externa e perde fótons para um reservatório externo. A transição ocorre no comportamento do campo da cavidade e acontece mesmo para números muito baixos de fótons. Vamos assumir que o campo é preparado em um estado coerente $|\alpha\rangle$ com número de fótons muito baixo, por exemplo $|\alpha|^2 = 1$. Em um limite, válido quando a cavidade é fracamente acoplada ao reservatório (cavidades de alto fator de qualidade) é possível resolver analiticamente a equação mestra e descrever adequadamente, por exemplo, colapsos e ressurgimentos na população atômica [86] que servem como uma assinatura da natureza quantizada do campo da cavidade. No outro limite, os autores em [87] usaram dinâmica hamiltoniana completa do sistema e reservatório para mostrar que esse mesmo campo fraco coerente da cavidade pode se comportar classicamente, isto é, preparando superposições dos estados internos do átomo (modificando o estado quântico do átomo sem se emaranhar com o mesmo). Este regime descreve apropriadamente as zonas de Ramsey de microondas (cavidades de baixo fator de qualidade).

Claramente, o ambiente tem um papel importante no comportamento do campo da cavidade. Entretanto, as abordagens adotadas até agora fazem uso de aproximações que permitem soluções apenas nos casos extremos de acoplamento muito fraco ou muito forte com o ambiente. Portanto ainda não há nenhuma indicação de quando nem como a transição quântico-clássico de fato acontece ou qualquer detalhe sobre o papel desempenhado pelo ambiente na transição.

No presente trabalho, adotamos um método menos restritivo, a teoria de trajetórias quânticas ou monitoramento contínuo do reservatório. Esta abordagem apresenta algumas vantagens: 1) o método permite uma solução numérica da equação mestra sem mais aproximações e para qualquer regime dinâmico em que a mesma é válida; 2) na maioria dos casos, há um significado físico claro descrevendo um aparato que monitora continuamente o reservatório, assim recuperando parte da informação diluída no reservatório; 3) o método fornece detalhes mais profundos sobre a troca de informação entre o sistema e o reservatório, assim revelando como a interação com um reservatório externo pode levar ao comportamento clássico de um dado sistema físico.

De fato, ao revelar a evolução do sistema átomo-cavidade em trajetórias, podemos identificar a transição quântico clássico do campo da cavidade em função do fator de acoplamento ao reservatório e, ao mesmo tempo, proporcionando uma descrição fóton a fóton da aproximação semiclássica. Também podemos detalhar os papéis específicos desempenhados pela dissipação e pelo campo de bombeio na inibição da inerente criação de emaranhamento pela interação de dipolo átomo-campo. Assim, não somente recuperamos os resultados encontrados em [87] para a dinâmica atômica, mas também os estendemos, evitando as fortes aproximações tomadas nestes trabalhos anteriores e analisando a dinâmica e o emaranhamento entre os diferentes subsistemas físicos em todos os regimes

de dissipação. Finalmente, podemos anti-correlacionar o emaranhamento assistido pelo ambiente [88] e a evolução semi-clássica, isto é, mostramos que a segunda é válida quando a ação ambiental não é capaz de criar emaranhamento significativo entre o campo e o átomo.

I A Transição em Eletrodinâmica Quântica

A O Sistema

O sistema que analisamos consiste de um modo ressonante de uma cavidade, cujo operador de criação é a^\dagger , ressonantemente acoplado a dois níveis internos de um átomo, cujo operador de criação é σ^\dagger , em uma interação Jaynes-Cummings (JC) [89]. De fato, já utilizamos o modelo JC sem dizer que o fizemos quando tratamos da interação de um sistema com seu ambiente quântico. O modelo JC descreve a interação de dipolo elétrico de dois níveis atômicos com um modo do campo eletromagnético ao desconsiderarmos os termos contragirantes na chamada aproximação de onda girante (assim como feito no segundo capítulo). O hamiltoniano é então dado por

$$H_{JC} = \omega_a a^\dagger a + \omega_\sigma \sigma^\dagger \sigma + g(\sigma a^\dagger + \sigma^\dagger a), \quad (4.1)$$

cujos auto-estados são os chamados polaritons

$$|n+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\text{sen}(\theta_n)|g, n\rangle + \text{cos}(\theta_n)|e, n-1\rangle] \quad (4.2)$$

e

$$|n-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\text{cos}(\theta_n)|g, n\rangle - \text{sen}(\theta_n)|e, n-1\rangle], \quad (4.3)$$

com auto-energias $E_n^\pm = n\omega_a \pm g\sqrt{n + \Delta^2/g^2}$, $\tan(2\theta) = -g\sqrt{n}/\Delta$, sendo $\Delta = \omega_\sigma - \omega_a$ a dessintonia entre o átomo e a cavidade. Aqui, trataremos apenas o caso ressonante.

O oscilador é bombeado por um campo clássico ressonante de amplitude Ω e acoplado a um reservatório com taxa de decaimento γ e à temperatura zero. Assumimos que o tempo de relaxamento atômico é muito mais longo que as outras escalas de tempo. Isso é verdade, por exemplo, para átomos circulares de Rydberg dentro de uma zona de Ramsey de microondas. A evolução do do estado do sistema átomo-cavidade na representação de interação é então governada pela equação mestra

$$d\rho = -i[H, \rho] dt + \mathcal{L}[\sqrt{\gamma}a]\rho dt, \quad (4.4)$$

sendo $H = g(\sigma a^\dagger + \sigma^\dagger a) + \Omega(a^\dagger + a)$ e g o fator de acoplamento entre o campo e o átomo.

B Assinaturas do Quântico e do Clássico

Vamos agora considerar algumas simples situações que mostram os casos extremos de comportamento (quântico e clássico). Primeiro, vamos considerar o caso quântico mais simples em que não há acoplamento ao reservatório $\gamma = 0$ nem bombeamento $\Omega = 0$ e o estado inicial é $|\psi(0)\rangle = |g\rangle|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1+\rangle + |1-\rangle]$, átomo

não excitado e um foton na cavidade. Neste caso fica claro a criação de emaranhamento entre campo e átomo, pois o estado evolui para $|\psi(t)\rangle = \cos(gt)|g1\rangle - i\sin(gt)|e0\rangle$. O estado reduzido do átomo é $\rho_s = \cos^2(gt)|g\rangle\langle g| + \sin^2(gt)|e\rangle\langle e|$, que, à medida que evolui, traça uma linha reta que liga os pólos da Bola de Bloch. Para isso basta olharmos para o vetor de Bloch

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \text{tr}\{\rho_s X\}\hat{x} + \text{tr}\{\rho_s Y\}\hat{y} + \text{tr}\{\rho_s Z\}\hat{z}, \quad (4.5)$$

que neste caso se reduz a $\mathbf{B}(0, 0, z(t)) = [\cos^2(gt) - \sin^2(gt)]\hat{z}$ que passa pelo centro da Bola. De fato, tomaremos como uma assinatura quântica vetores de Bloch que penetram em direção ao centro da Bola, este sendo um caso extremo, pois esta característica indica que o qbit está maximamente emaranhado com o resto do sistema, isto é, quando $B = 1$, o qbit não está emaranhado e quando $B = 0$, o qbit está maximamente emaranhado com o resto do sistema.

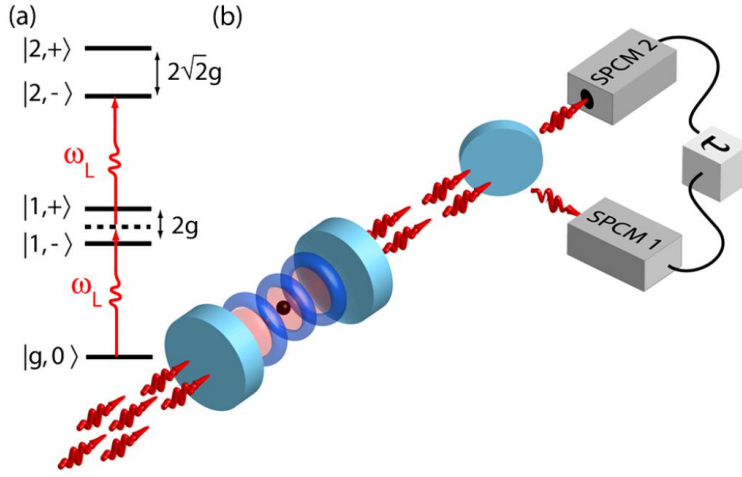


Figura 4.1: A estrutura de níveis do sistema átomo-cavidade e um esquema de medida em que a luz que sai da cavidade é homodinada.

Em uma outra situação o átomo pode interagir com um campo clássico (e não um quântico como no caso anterior). Neste caso a evolução do átomo passa a ser dada por um hamiltoniano da forma $H_C = \Omega(\sigma^\dagger + \sigma)$ e o estado fundamental do qbit evolui para $|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[e^{-i\Omega t}|+\rangle - e^{i\Omega t}|-\rangle] = \cos(\Omega t)|g\rangle - i\sin(\Omega t)|e\rangle$, que corresponde a uma evolução unitária, ou seja, o vetor de Bloch fica confinado a superfície da Bola, pois o estado é puro durante todo tempo de evolução. Além disso, o vetor traça um círculo de raio máximo na superfície da Bola. Este círculo é o que chamamos de ciclo de Rabi.

Essas foram apenas situações mais ilustrativas. Agora assumamos que o sistema é inicialmente preparado no estado $|\psi(0)\rangle = |g\rangle|\frac{2\Omega}{i\gamma}\rangle$, sendo $|g\rangle$ o estado fundamental atômico e $|\frac{2\Omega}{i\gamma}\rangle$ é um estado coerente do campo com número médio de ftons $\frac{4\Omega^2}{\gamma^2}$. Este é um estado estacionário do sistema quando não há acoplamento entre cavidade e átomo, ou seja, é um estado estacionário da cavidade bombeada em dissipação. Para mostrar isso, podemos analisar a equação de difusão de estado que descreve uma situação em que a luz que sai da cavidade

é homodinada (figura 4.1)

$$d|\alpha\rangle = \left[-i\Omega(a^\dagger + a)dt - \frac{\gamma}{2}a^\dagger a dt + \sqrt{\gamma}adQ(t) \right] |\alpha\rangle. \quad (4.6)$$

Um estado coerente é auto-estado do operador de destruição $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, assim temos

$$d|\alpha\rangle = \left[a^\dagger(-i\Omega - \frac{\gamma}{2}\alpha)dt + \alpha(-i\Omega dt + \sqrt{\gamma}dQ) \right] |\alpha\rangle, \quad (4.7)$$

tal que apenas o termo proporcional a a^\dagger pode perturbar o estado coerente, entretanto se $\alpha = \frac{2\Omega}{i\gamma}$ o termo em a^\dagger se anula e o estado ganha apenas uma fase global. Isto acontece para todas as trajetórias independentemente do valor da corrente de homodinagem dQ , assim todas as trajetórias convergem para o estado coerente estacionário. De fato, o mesmo se repete para qualquer escolha de monitoramento do reservatório, por exemplo detecção direta dos fons. Isto demonstra uma das propriedades clássicas de estados coerentes. Evidentemente, quando existe a interação entre átomo e cavidade a dinâmica não é tão simples e ambos (átomo e cavidade) são afetados. Entretanto, nesta simples situação envolvendo apenas a cavidade, já podemos definir condições que indicam o comportamento clássico. Um sistema se comporta de maneira efetivamente clássica quando todos os possíveis observadores (que observam o ambiente) concordam entre si sobre o que é observado, mesmo que repitam o experimento um número grande de vezes. Assim o sistema passa a ser descrito efetivamente por uma única trajetória, a trajetória clássica.

No caso em que átomo e cavidade são um sistema isolado esperamos criação de emaranhamento mesmo que o estado da cavidade seja um estado coerente (assim como mostraremos em seguida). E quando o átomo interage com um campo clássico, o átomo executa oscilações de Rabi (o círculo na esfera de Bloch). Podemos agora derivar um resultado [87, 90] que mostra que quando a dissipação e o bombeio da cavidade são muito maiores que o acoplamento átomo-campo, o átomo percebe um campo efetivamente clássico. Esse resultado demonstra que a ausência de emaranhamento entre átomo e cavidade de fato implica no comportamento clássico do sistema. Considere que neste limite (o limite clássico) o campo permanece sendo bem descrito por um estado coerente, assim não se emaranha com o átomo e o estado pode ser escrito como $\rho_C = \rho \otimes |\alpha\rangle\langle\alpha|$. Substituindo ρ_C na equação que descreve a dinâmica do sistema (4.4) e fazendo o traço parcial no campo, temos para o átomo a equação $\dot{\rho} = -[g(\alpha\sigma^\dagger + \alpha^*\sigma), \rho]$, que descreve os ciclos de Rabi, ou seja, o átomo interage com um campo que é efetivamente clássico, cuja amplitude é a amplitude do estado coerente. Portanto, se por alguma razão, não houver emaranhamento o sistema se comporta classicamente independentemente do número médio de fótons no campo.

II A Transição e a Ressonância Estocástica

Aqui, sempre consideraremos uma força de bombeio que é equivalente à dissipação, isto é, $\gamma \approx 2\Omega$, pois estamos interessados em campos de baixos números quânticos se comportando de forma clássica. Analisamos o comportamento do sistema em função do tempo e em função de γ . Primeiramente, avaliamos a pureza global $\delta(t) = \text{tr}\{\rho^2(t)\}$, a pureza do átomo δ_s e do campo δ_f .

Analisamos também a fidelidade do campo com o seu estado coerente inicial $F_c = \langle \alpha | \rho_f(t) | \alpha \rangle$.

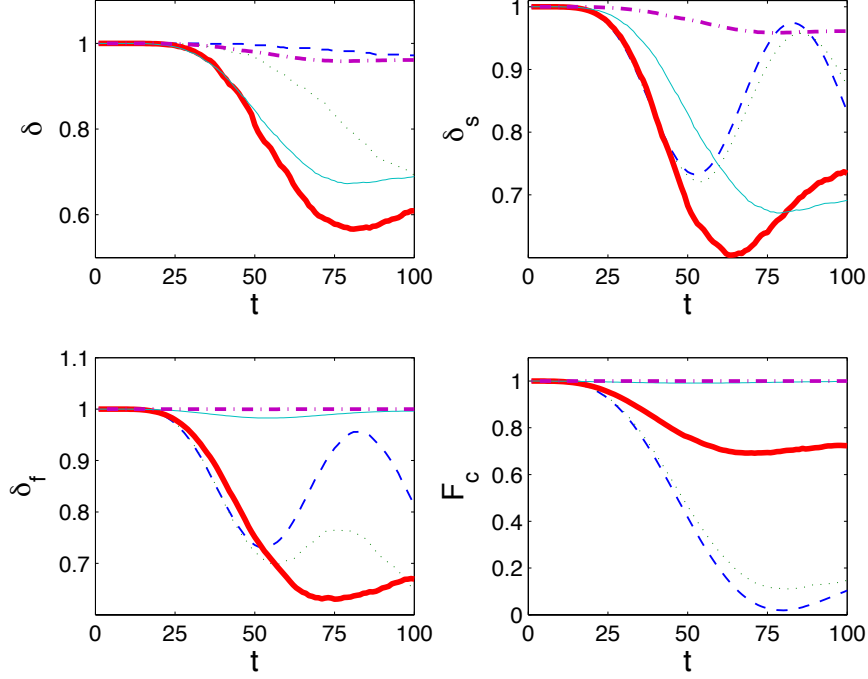


Figura 4.2: Pureza global δ , pureza atômica δ_s , pureza do campo δ_f e fidelidade F_c como funções do tempo t em unidades de $\pi/100g$ para $g = 10$ kHz. Azul (tracejado) $\gamma = 0.02g$, verde (pontilhado) $\gamma = 0.2g$, vermelho (linha solida) $\gamma = 2g$, azul claro (linha fina) $\gamma = 20g$, roxo (pontilhado-tracejado) $\gamma = 200g$.

No limite $\gamma = \Omega \rightarrow 0$ (evolução Jaynes-Cummings) o estado global permanece quase puro [$\delta(t) \approx 1$] e δ_s é idêntica a δ_f como esperado já que o sistema átomo-campo é isolado e $\delta_{s(f)}$ quantifica o emaranhamento átomo-campo (figura 4.2). Neste regime, o campo da cavidade deve ser tratado quanticamente. Note que a evolução cria muito emaranhamento entre o átomo e o campo da cavidade, mas praticamente nenhum emaranhamento entre o sistema (átomo-campo) e o reservatório. No outro limite, em que $\gamma, \Omega \gg g$ [$\gamma = 200g$ nas figuras] as purezas global e atômica são muito similares, $\delta(t) \approx \delta_s(t)$ e $\delta_f(t), F_c(t) \approx 1$, o que indica que o átomo se emaranha com o reservatório enquanto o campo permanece num estado quase-puro a uma distância estatística negligível do estado coerente $|2\Omega/i\gamma\rangle$. Neste limite, o campo da cavidade se comporta classicamente. Estas são as condições experimentais encontradas em [85], em que $g \approx 10$ kHz, $\gamma \approx 2$ MHz e $|\alpha|^2 \approx 1$. Entre estes limites, descobrimos que $\delta, \delta_s, \delta_f$ diminuem com a dissipação, passam por um mínimo em $\gamma \approx 2g$ e depois aumentam novamente, portanto apresentando comportamentos típicos de ressonância estocástica (figura 4.3) [6, 88]. Note que o comportamento do sistema átomo-cavidade-reservatório apresenta curvas típicas do que costuma-se chamar na

literatura de ressonância estocástica [6, 88], tanto para o emaranhamento com o reservatório (quantificado pela pureza global δ) quanto para a informação dos fótons (figura 4.10). A ressonância acontece quando duas frequências de troca de excitação são similares ($g \approx \gamma$) sendo que uma delas corresponde a um processo estocástico. O fato de que todas as purezas passam por um mínimo na

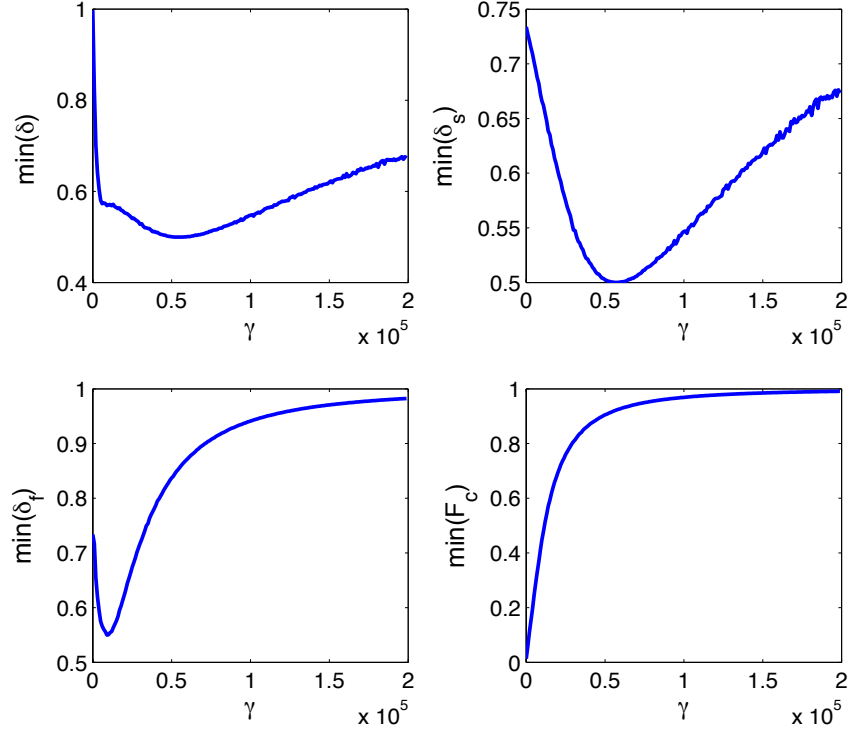


Figura 4.3: Valores mínimos das purezas e fidelidade em função da dissipação em um intervalo de tempo $[0, \pi/g]$ para $g = 10$ kHz.

mesma região $\gamma \approx g$ sugere que, para esta dissipação, existe um máximo de emaranhamento tripartido entre átomo, campo da cavidade e ambiente. Esta interpretação é consistente com as taxas de dinâmica: átomo e cavidade, e cavidade e ambiente trocam excitações em taxas similares que em escalas de tempo $1/g \approx 1/\gamma$ geram emaranhamento genuíno tripartido entre os três subsistemas. Este fato também representa o início da transição. Para valores mais altos de γ , o emaranhamento com o reservatório apenas decresce e o campo da cavidade rapidamente converge para o estado coerente estacionário, como mostrado na figura 4.5.

De acordo com esta análise, para pequenas taxas de decaimento, o átomo segue uma trajetória de Bloch consistente com a evolução Jaynes-Cummings com um campo coerente fraco. Por outro lado, para alta dissipação ($\gamma = 20g$) o átomo pode girar de $|g\rangle$ para $[|g\rangle - |e\rangle]/\sqrt{2}$ quase unitariamente, enquanto que para taxas ainda maiores ($\gamma = 200g$) a evolução atômica é quase unitária para um ciclo de Rabi inteiro (figura 4.6).

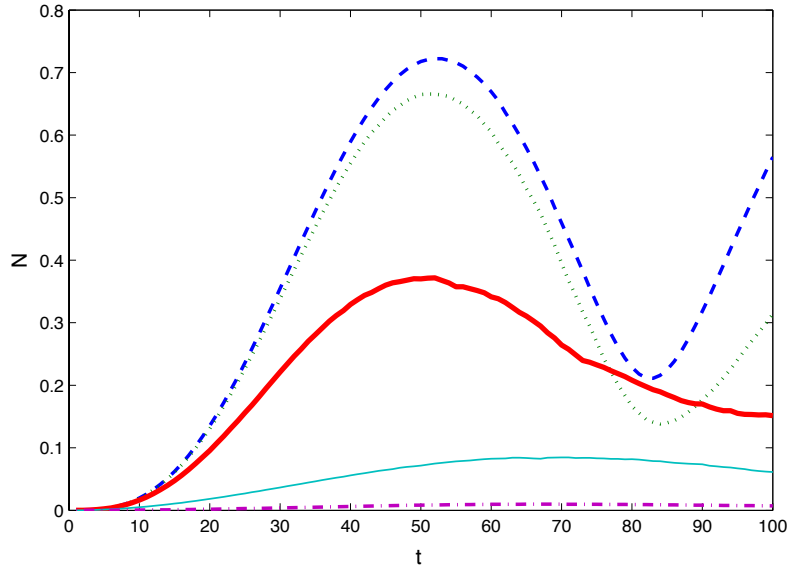


Figura 4.4: Negatividade átomo-campo em função do tempo em unidades de $\pi/100g$ kHz para diferentes valores de γ . Azul tracejado $\gamma = 0.02g$, verde pontilhado $\gamma = 0.2g$, vermelho linha solida $\gamma = 2g$, azul claro linha fina $\gamma = 20g$, roxo pontilhado-tracejado $\gamma = 200g$.

Encerramos esta seção notando que as trajetórias quânticas nos permitiram preencher o gap entre a evolução quantizada e a semiclássica do sistema átomo-campo, identificando os valores de γ em que a transição acontece. Entretanto, também notamos que ao realizar a média sobre as trajetórias (obtendo a solução da equação mestra) ignoramos a informação contida no reservatório. Na próxima seção mostramos que esta informação pode ser recuperada nos permitindo interpretar a transição em termos da informação disponível no reservatório em experimentos de foto-deteção. Esta interpretação fornece uma visão mais detalhada do papel do ambiente na transição.

A Ressonância Estocástica na Informação dos Fótons

Primeiramente, vamos analisar a trajetória sem saltos de um monitoramento via saltos obtida quando o observador não detecta nenhum fóton no reservatório. Para dissipação muito pequena esta trajetória é a mais provável e corresponde à típica evolução Jaynes-Cummings entre um átomo e um campo coerente fraco (nas figuras este regime corresponde à $\gamma = 0.02g$). Nesse limite, um fóton que é bombeado para dentro da cavidade pelo campo externo permanece na cavidade por tempo suficiente para ser absorvido e reemitido pelo átomo mais de uma vez. Esta evolução coerente gera emaranhamento entre átomo e cavidade como podemos ver na figura 4.5. Isto também é indicado nos caminhos seguidos pelo vetor de Bloch da trajetória sem saltos com $\gamma = 0.02g$ e $0.2g$ como mostrado na figura 4.7. De fato, estes caminhos são muito similares aos obtidos a partir da evolução não condicionada (figura 4.6), o que é razoável, pois, neste regime,

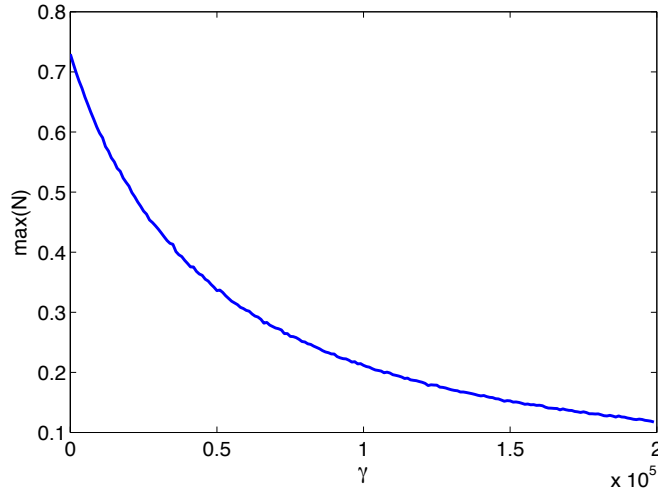


Figura 4.5: Negatividade máxima alcançada pela matriz densidade do sistema átomo-campo durante um ciclo de Rabi em função de γ (Hz).

há de fato uma probabilidade muito pequena de um fóton escapar da cavidade durante um ciclo de Rabi, isto é, a trajetória sem saltos e a evolução não condicionada são quase o mesmo processo físico. Note também, que quando $g \gg \gamma$, a evolução átomo-campo é quase hamiltoniana durante um ciclo de Rabi em acordo com o que observamos nas figuras para $\gamma = 0.02g$, o que é consistente com o regime inteiramente quantizado.

No outro limite, para γ muito grande, o movimento atômico na Bola de Bloch é quase confinado à superfície mostrando supressão de emaranhamento. Em outras palavras, quando $\gamma \gg g$, a trajetória sem saltos cria muito pouco emaranhamento entre átomo e cavidade, apesar da interação direta de dipolo. Note que, neste regime, a trajetória sem saltos é dominada pelo bombeamento clássico e pelo termo de dissipação proporcional ao operador número do campo $-\frac{\gamma}{2}a^\dagger a$ e a interação entre átomo e cavidade pode ser considerada como uma perturbação que rotaciona o estado atômico. Note também que a fonte de bombeio tem um papel importante, pois sem ela não há evolução coerente do estado atômico, apenas dissipação. Entretanto, neste limite de alta dissipação, a trajetória sem saltos é muito rara, o que nos obriga a investigar efeitos de saltos quânticos no sistema, pois trajetórias típicas apresentam muitos saltos neste regime.

Para analisar os efeitos dos saltos quânticos vamos primeiro tratar simples exemplos que ilustram a física do sistema. Na figura 4.8 temos o emaranhamento e os resultados de medida de uma trajetória com $\gamma = 2g$. A figura deixa claro que, nesta trajetória, saltos quânticos (fótons espalhados) causam descontinuidades no emaranhamento entre o átomo e o campo da cavidade. Naturalmente uma trajetória não é suficiente para um entendimento mais amplo, mas as mudanças dinâmicas induzidas pelos saltos nesta particular trajetória indicam como os fótons que escapam da cavidade podem influenciar o sistema em realizações do experimento de detecção. Note que $\gamma = 2g$ corresponde à região da transição, ou da ressonância estocástica, como mostrado anterior-

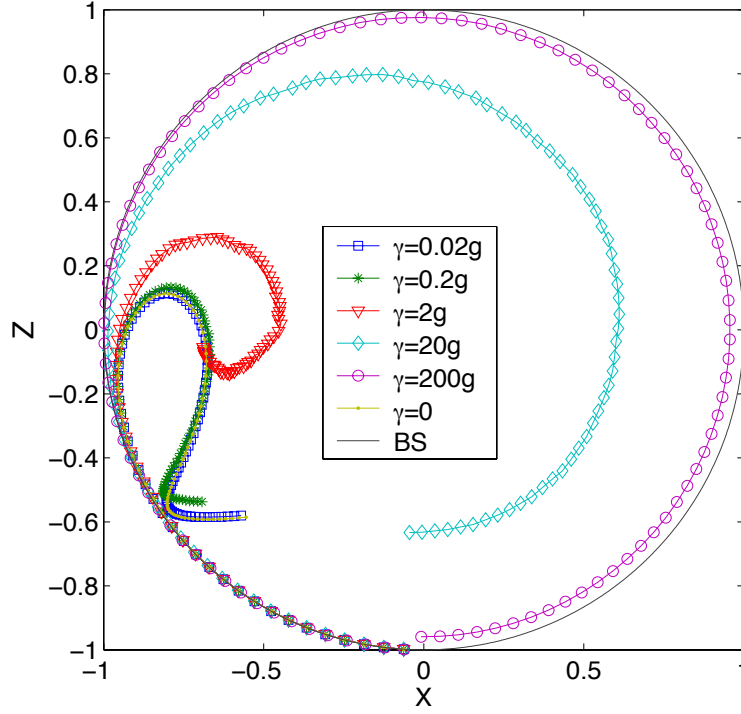


Figura 4.6: Um corte da Bola de Bloch em $y = 0$ com o movimento do vetor de Bloch atômico $B(x, 0, z)$. BS é a esfera de Bloch.

mente. Em seguida mostramos que este é, de fato, o regime em que estes saltos de emaranhamento são mais significativos.

Antes de tratar o efeito global resultante dos saltos de emaranhamento vamos mostrar um breve cálculo que ilustra este mecanismo de criação de emaranhamento assistido pelo ambiente. Primeiramente note que o operador de salto é proporcional à $I_s \otimes a$ (identidade no átomo e operador aniquilação no campo). Este operador é local no espaço vetorial conjunto átomo-campo, portanto não pode criar emaranhamento a partir de um estado desemaranhado. Entretanto, se há algum emaranhamento preexistente entre átomo e cavidade, então o operador de salto pode aumentar o grau de emaranhamento dependendo da trajetória em questão. Por exemplo, vamos imaginar que, para uma dada trajetória, e um dado tempo t_0 , o estado global átomo-cavidade é

$$|\phi(t_0)\rangle = \sqrt{\frac{2}{7}} \left[|g\rangle(|0\rangle + |1\rangle) + |e\rangle \left(|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle \right) \right], \quad (4.8)$$

com emaranhamento, calculado a partir da entropia de von Neumann $E(t_0) \approx 0.733$. Se depois de um tempo dt registrarmos um salto no reservatório, então o sistema em $t_0 + dt$ evolui para o estado de Bell $|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle|0\rangle + |e\rangle|1\rangle)$ para o qual o emaranhamento é máximo $E_1 = 1$. O operador de salto pode ser visto como parte de uma medida indireta com um sistema auxiliar (neste caso o reservatório como vimos no primeiro capítulo) seguida de uma medida projetiva neste mesmo sistema auxiliar. De fato, se incluirmos o reservatório, então depois

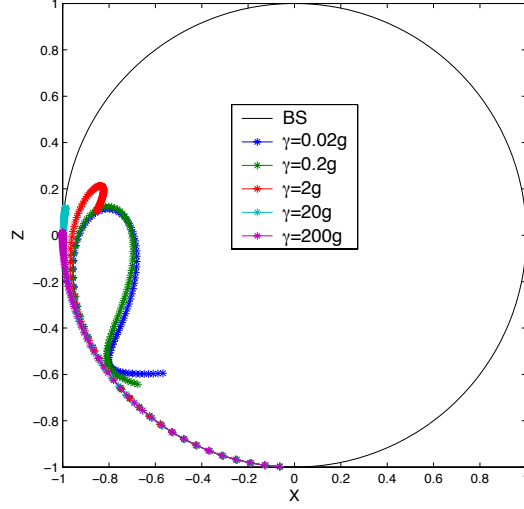


Figura 4.7: Um corte da Bola de Bloch em $y = 0$ com o movimento do vetor de Bloch atômico para a trajetória sem saltos $B(x, 0, z)$.

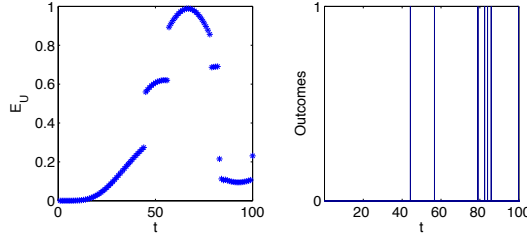


Figura 4.8: À esquerda: o emaranhamento de uma trajetória com $\gamma = 2g$ e $F = \gamma/2$; à direita: os respectivos registros de medida indicando tempos em que acontecem saltos com o tempo em unidades de $\pi/100g$ com $g = 10$ kHz.

de um tempo dt podemos escrever o estado global átomo-cavidade-reservatório como

$$|\Phi(t_0 + dt)\rangle = \sqrt{p_1}|\phi_1\rangle|\mathbf{1}\rangle + \sqrt{p_0}|\phi_0\rangle|\mathbf{0}\rangle, \quad (4.9)$$

em que p_1 é a probabilidade de ocorrer um salto. Portanto, ao monitorar o ambiente podemos aumentar o emaranhamento entre os subsistemas. De fato, isto sugere uma maneira probabilística de preparar estados de Bell.

Vamos agora definir $\Delta E(t) = E(t+dt) - E(t)$ como sendo a variação do emaranhamento para uma dada trajetória em função do tempo. Esta quantidade nos mostra como uma única detecção no reservatório pode afetar o emaranhamento no sistema em um dado momento da trajetória. Por exemplo, na figura 4.9 mostramos

$$\Delta E_{\text{NJ},1}(T) = E \left[\frac{\text{II}|\phi_{\text{NJ}}(T)\rangle}{|\text{II}|\phi_{\text{NJ}}(T)\rangle|} \right] - E \left[\frac{|\phi_{\text{NJ}}(T)\rangle}{||\phi_{\text{NJ}}(T)\rangle|} \right], \quad (4.10)$$

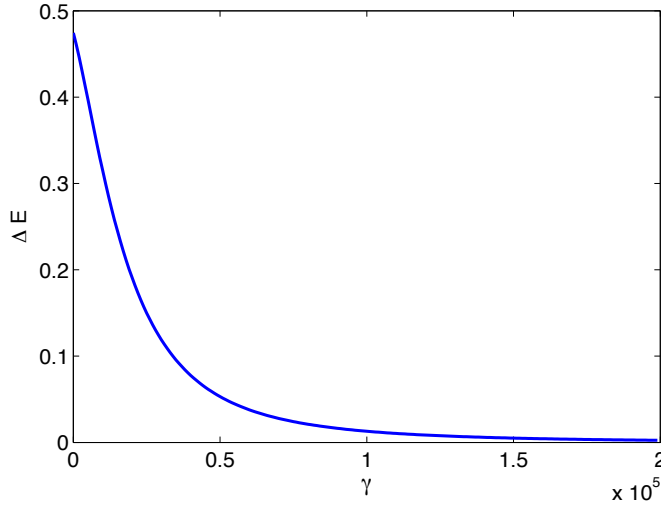


Figura 4.9: A magnitude dos saltos de emaranhamento em função de γ (Hz) para trajetórias com apenas um salto no tempo $T = \frac{3\pi}{8g}$, com $g = 10$ kHz.

(sendo $\Pi = \sqrt{\gamma a}$) em função de γ , o que nos diz a quantidade de emaranhamento criada por um único salto (no tempo T) em função da taxa de dissipação em um trajetória sem saltos em tempos anteriores $|\phi_{\text{NJ}}(T)\rangle$. Note que escolhemos $T = \frac{3\pi}{8g}$, pois nossas simulações mostraram que em torno deste ponto as detecções geram saltos de emaranhamento significativos para a grande maioria das trajetórias. A figura mostra que, quanto maior a dissipação γ , menor o salto de emaranhamento, o que nos ajuda a entender a evolução semiclássica do estado atômico quando $\gamma \gg g$: o campo da cavidade interage com o átomo sem se emaranhar com o mesmo. Ainda podemos argumentar que, neste regime, o número de saltos é muito grande o que poderia resultar em emaranhamento significativo entre átomo e cavidade, entretanto este não é o caso. Por exemplo, se $g = 10$ kHz, $\gamma = 200g$, e $T = \frac{3\pi}{8g}$, as trajetórias mais prováveis apresentam centenas de saltos. Entretanto, a magnitude dos saltos e a quantidade de emaranhamento criado pela evolução sem saltos decrescem mais rápido com γ do que o aumento do número de fótons detectados, que cresce linearmente com a taxa de dissipação. Isto se torna claro quando analisamos o efeito combinado do número de saltos e o emaranhamento criado por eles.

Para realizar tal análise, vamos relembrar a função que registra os resultados de medida $O(t) = \frac{dN(t)}{dt}$ (com uma realização mostrada em 4.8), em que N é o processo de Poisson. $dN(t)$ é zero se não há uma detecção e é um se há uma detecção no reservatório no intervalo de tempo $(t, t + dt]$. Então temos a função que nos fornece o total de emaranhamento criado (ou destruído em princípio) por detecções de fótons no ambiente em uma dada trajetória

$$E_L(T) = \int_0^T \Delta E(t) dN(t). \quad (4.11)$$

Podemos agora tomar a média sobre o emaranhamento criado por saltos \bar{E}_L como mostrado (com simulações) na figura 4.10. Note que \bar{E}_L é pequeno para

$g \gg \gamma$, atinge um máximo quando o acoplamento entre cavidade e reservatório é da mesma ordem do acoplamento entre átomo e cavidade ($\gamma \approx g$), e depois decresce até zero quando a dissipação aumenta. Esta curva claramente apresenta a mesma ressonância estocástica que já havíamos encontrado para o emaranhamento tripartido do sistema e outras propriedades. O emaranhamento assistido pelo reservatório, de fato, costuma apresentar este tipo de ressonância [88]. Para tornar nosso entendimento sobre esta ressonância um pouco natural basta lembrarmos que o número de detecções $N(t)$ cresce linearmente com a dissipação e a magnitude dos saltos tem um decaimento tipo exponencial com a dissipação. Assim, fazendo uma aproximação um pouco grosseira $E_L(T) \approx \Delta E(t)N(t)$ fica claro que E_L deve apresentar um máximo. Obviamente, para obtermos o valor exato de E_L temos que efetuar toda a integral e aqui simulamos a mesma.

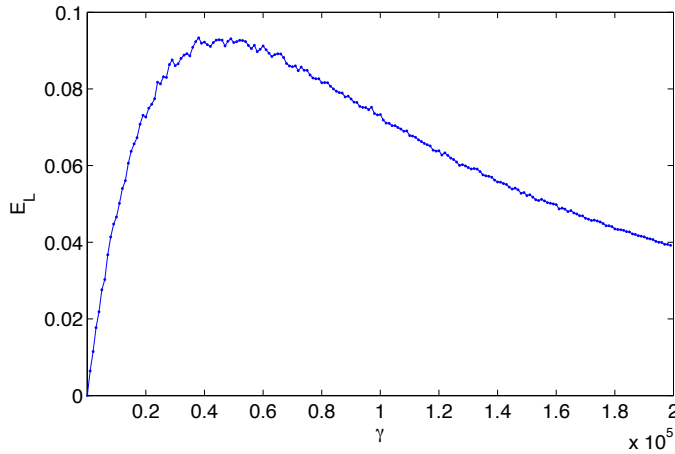


Figura 4.10: O efeito resultante dos fótons detectados na interação entre campo e átomo: $E_L(T = \frac{3\pi}{8g})$ em função de γ (Hz).

Agora podemos interpretar a transição quântico-clássico em uma perspectiva fóton-a-fóton. Para dissipação pequena, quando nenhum fóton é detectado no reservatório, a evolução é aproximadamente determinada pelo hamiltoniano Jaynes-Cummings, isto é, quase independente do reservatório. Cada fóton permanece tempo suficiente dentro da cavidade para que haja interação coerente com o átomo. Quando estes fótons escapam da cavidade e são detectados podem induzir grandes saltos de emaranhamento no sistema, entretanto estes eventos são tão raros que o efeito resultante dos saltos é negligível. No outro regime, quando $\gamma \gg g$, cada fóton interage durante um tempo muito curto com o átomo, o que é evidenciado pelo alto número de saltos em trajetórias típicas. Neste caso, vimos que a evolução sem saltos cria muito pouco emaranhamento entre átomo e cavidade, mas induz uma rotação do estado atômico. Também vimos que, devido ao seu caráter local, saltos não podem emaranhar um estado desemaranhado (apenas aumentar emaranhamento pre-existente). Portanto, já que a evolução sem saltos cria pouco emaranhamento logo os saltos não aumentam este emaranhamento significativamente. Entretanto, saltos podem colaborar com a rotação do estado do átomo produzindo pequenas mudanças na razão entre as populações dos estados fundamental e excitado do átomo. Portanto, apesar dos

saltos serem muito frequentes, o sistema se comporta semiclassicamente, isto é, de acordo com um hamiltoniano efetivo em que o campo quantizado da cavidade bombeia classicamente o átomo. A transição de um regime para o outro acontece para taxas de dissipação que correspondem a saltos quânticos que são tanto frequentes quanto emaranhadores.

B Trajetórias Clássicas e Quânticas

Finalmente, vamos mostrar que no limite clássico todo observador registra aproximadamente a mesma trajetória para o sistema. Vamos, então, propor um experimento fictício em que metade da luz que é emitida pela cavidade é detectada diretamente por um observador (S) e a outra metade é homodinada por outro observador (D). O estado de conhecimento de ambos observadores não é um estado puro em geral, pois um observador não tem acesso aos resultados de medida do outro observador. Note que, quando diferentes jogadores observam a mesma bola em jogo também não têm acesso aos resultados de medida alheios, entretanto, concordam quanto à trajetória da bola. Obviamente, quando a dissipação é muito pequena todas as trajetórias mais prováveis são parecidas, pois a presença do reservatório é muito fraca e o sistema é pouco perturbado. A medida que a dissipação aumenta as trajetórias mais prováveis começam a apresentar diferentes comportamentos e voltam a ser semelhantes quando a dissipação é muito grande.

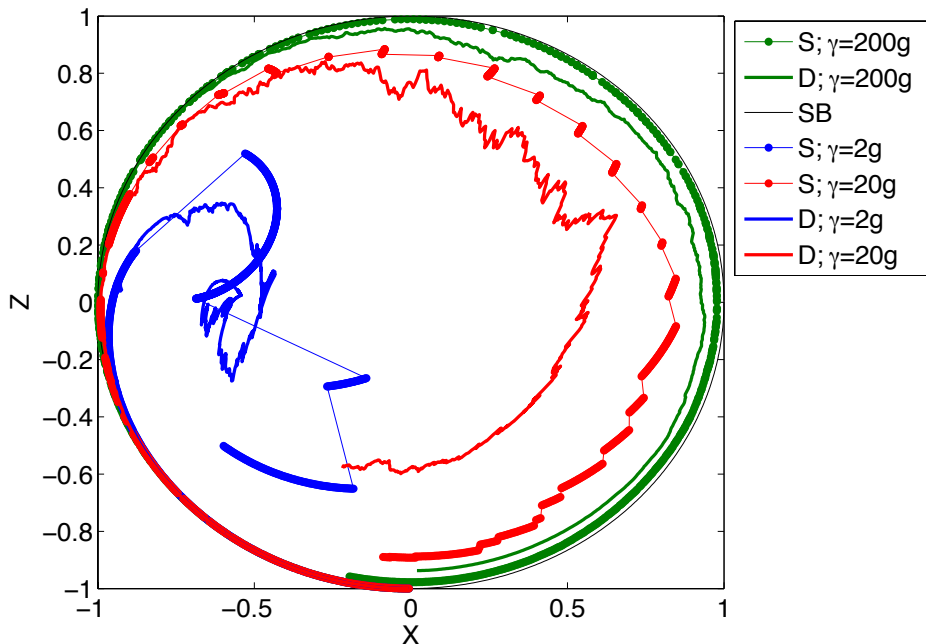


Figura 4.11: As trajetórias (em especial o vetor de Bloch atômico) registradas por diferentes observadores sendo que um deles monitora o reservatório por homodinagem (D) e o outro por detecção direta (S) da luz emitida pela cavidade.

No nosso experimento fictício, a luz que sai da cavidade é dividida igualmente em um separador de feixes. Em um dos braços do separador de feixes temos um dos observadores monitorando o reservatório com detecção direta da luz, este é o observador S, cujo conhecimento segue uma evolução com saltos quânticos. No outro braço temos o observador D, cujo conhecimento sofre difusão de estado. As equações de movimento para o estado de conhecimento dos observadores são dadas pelas equações estocásticas de salto e difusão respectivamente, ambas com 50% de eficiência, o que descreve as observações simultâneas. Como mostrado na figura 4.11 no regime da ressonância estocástica a trajetória com saltos apresenta grandes discontinuidades induzidas pelas detecções e é muito diferente da trajetória com difusão, que é muito irregular. À medida que aumentamos o acoplamento com o reservatório o número de saltos aumenta, entretanto o tamanho das discontinuidades começa diminuir. Contudo, a trajetória difusiva é ainda muito irregular e difere consideravelmente da trajetória com saltos para tempos maiores que meio ciclo de Rabi ($\frac{\pi}{2g}$). Finalmente, no limite em que o acoplamento com o ambiente é muito forte, as trajetórias registradas pelos dois observadores ficam muito parecidas e começam a convergir para a trajetória clássica, em que o átomo faz um círculo na superfície de Bloch.

Capítulo 5

Conclusão

A compreensão de um observador sobre a natureza depende da informação contida no estado de conhecimento deste observador. Para obter informação sobre qualquer sistema o que um observador faz, em geral, é medir ou observar o ambiente em torno do sistema de interesse, pois parte da informação sobre o sistema pode ser encontrada no ambiente. Na escala clássica basta medir pequenas frações do ambiente para que o observador obtenha informação clássica e tenha uma boa descrição da trajetória de um sistema (por exemplo) e para que outros observadores que medirem outras frações do ambiente também registrem aproximadamente a mesma trajetória¹ [91]. Na escala quântica isto é muito diferente. No regime quântico o ambiente perturba o sistema de tal forma que diferentes observadores podem registrar trajetórias muito diferentes para um mesmo sistema. Isto se deve ao fato de que, para se obter uma quantidade razoável de informação quântica sobre um sistema, não basta medir uma pequena fração do ambiente, é necessário medir o ambiente como um todo. Assim um ambiente que, de certa forma, absorve informação do sistema é capaz de inutilizar (induzindo dissipação, por exemplo) componentes de um aparato de processamento de informação quântica e induzir classicalidade em sistemas quânticos.

Nós mostramos que para sistemas que sofrem dissipação, codificar qbits em qtrits preserva coerência e emaranhamento por tempos muito mais longos se as excitações perdidas para os reservatórios locais podem ser detectadas por observadores externos. Portanto, sistemas que têm seus reservatórios em monitoramento contínuo são não somente adequados, mas também vantajosos para alguns protocolos de informação quântica. Além disso, o esquema de monitoramento é ainda melhorado se as partes são capazes de retro-alimentar localmente o sistema com a informação recuperada pela observação do ambiente. Isto leva, naturalmente, a uma redução em recursos para protocolos como repetidores quânticos, teleportação e correção de erros, assim como também aumenta o tempo de coerência de memórias quânticas. Também mostramos uma maneira ótima de utilizar a informação que escapa para o reservatório para converter estados puros em estados maximamente emaranhados.

¹Uma pequena parte da luz refletida por um objeto clássico é suficiente para identificar sua posição sem ambiguidades.

Também mostramos que, monitorar o ambiente pode nos ajudar a compreender melhor o limite clássico fornecendo uma explicação para o comportamento clássico das zona de Ramsey de microondas com perspectivas tanto globais quanto fóton-a-fóton. Mostramos que o emaranhamento com o reservatório apresenta uma ressonância estocástica com o acoplamento entre sistema e reservatório e que este ponto de ressonância é caracterizado por um valor máximo do emaranhamento tripartido (átomo-campo-ambiente). Mostramos que em um monitoramento via saltos quânticos os fótons que escapam da cavidade carregam informação que pode identificar completamente o regime de comportamento do sistema. De fato, em um trabalho futuro mostramos que o monitoramento via saltos fornece mais informação que o monitoramento difusivo e que a adição de ruído clássico aos resultados de medida apaga esta informação sobre o sistema.

Apêndice: Cálculo Estocástico

I Ruído Clássico

A hipótese de Langevin (a função em questão é independente do ruído) torna o cálculo estocástico relativamente fácil, entretanto ela literalmente muda as regras usuais de cálculo. Vamos então definir a integração estocástica para que possamos proceder com os cálculos de forma consistente e dar uma breve justificativa matemática para a hipótese de causalidade de Langevin. Considere a integral

$$\zeta(t, t_0) = \int_{t_0}^t g(t) d\xi(t), \quad (5.1)$$

em que $\xi(t)$ é um ruído clássico arbitrário e $g(t)$ é uma função estocástica arbitrária. Existem duas maneiras usuais de se definir e interpretar a integral, uma é o cálculo de Ito e a outra o de Stratonovich. Vamos primeiro aproximar a integral por uma soma discreta, em que o tempo é dividido em pequenos intervalos $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ e $\Delta\xi(t_i) = \xi(t_{i+1}) - \xi(t_i)$. Na versão de Ito a função $g(t)$ é avaliada no início de cada intervalo na forma

$$\text{(I)} \quad \zeta(t, t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{\infty} g(t_i) [\xi(t_{i+1}) - \xi(t_i)], \quad (5.2)$$

e na versão de Stratonovich o integrando é avaliado na média dos valores que assume nos extremos do intervalo na forma

$$\text{(S)} \quad \zeta(t, t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{g(t_{i+1}) + g(t_i)}{2} [\xi(t_{i+1}) - \xi(t_i)]. \quad (5.3)$$

Para ilustrar a diferença entre os dois métodos vamos considerar o exemplo em que $g(t) = \xi(t)$. Para um ruído arbitrário essa integral no cálculo de Ito é dada

por

$$\begin{aligned}
(\mathbf{I}) \quad \zeta(t, t_0) &= \int_{t_0}^t \xi(t) d\xi(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{\infty} \xi(t_i) \Delta \xi(t_i) \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ [\xi(t_i) + \Delta \xi(t_i)]^2 - \xi^2(t_i) - [\Delta \xi(t_i)]^2 \right\} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \xi^2(t_{i+1}) - \xi^2(t_i) - [\Delta \xi(t_i)]^2 \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left[\xi^2(t) - \xi^2(t_0) - \int_0^t [d\xi(t)]^2 \right], \tag{5.4}
\end{aligned}$$

e no cálculo de Stratonovich dada por

$$\begin{aligned}
(\mathbf{S}) \quad \zeta(t, t_0) &= \int_{t_0}^t \xi(t) d\xi(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\xi(t_{i+1}) + \xi(t_i)}{2} [\xi(t_{i+1}) - \xi(t_i)] \\
&= \frac{1}{2} [\xi^2(t) - \xi^2(t_0)]. \tag{5.5}
\end{aligned}$$

Note que o resultado da integral **(S)** poderia ter sido obtido pelas regras usuais de cálculo, tal que teríamos o diferencial da primitiva $d\zeta(t) = \xi(t)d\xi(t)$. O mesmo não seria possível para a integral **(I)** e teríamos uma correção na diferencial da primitiva $d\zeta(t) = \frac{1}{2}d[\xi^2(t)] - \frac{1}{2}[d\xi(t)]^2$ (aqui não fizemos uma conversão de **(S)** para **(I)** e sim avaliamos o diferencial de cada integral). O resultado da integral também depende de qual o ruído envolvido. No cálculo de Ito avaliamos o integrando no início dos pequenos intervalos de soma o que facilita avaliar médias como $\overline{g(\xi(t), t)d\xi(t)} = \left\{ \overline{g(\xi(t), t)} \right\} \left\{ \overline{d\xi(t)} \right\}$ e permite a iteração em pequenos intervalos (dt) das equações diferenciais de Ito, pois $g(\xi(t), t)$ é estatisticamente independente de $d\xi(t)$ por condições de causalidade. Entretanto essa vantagem tem um custo de forma que as regras de cálculo são alteradas. Nesta seção mostramos quais são as alterações necessárias. Por outro lado o cálculo de Stratonovich também tem suas vantagens, além de preservar as regras de cálculo pode ser a escolha mais óbvia e intuitiva na modelagem de alguns processos físicos, como no caso da retro-alimentação quântica (assim como veremos adiante).

Vamos tratar os processos de Poisson e de Wiener $N(t)$ e $W(t)$ respectivamente e mostrar como converter equações diferenciais do cálculo de Stratonovich para o cálculo de Ito. Suponha $\zeta(\xi(t), t)$ uma função arbitrária de um ruído $\xi(t)$, podemos encontrar a diferencial de Ito para ζ com uma série da forma

$$d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial t} dt + \sum_{n=1} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \zeta}{\partial \xi^n} [d\xi]^n. \tag{5.6}$$

Aqui temos que considerar termos em várias ordens em $d\xi$, pois a distribuição de probabilidade de $d\xi$ pode apresentar momentos não nulos em várias ordens o que altera o valor médio $\overline{d\zeta}$. Além das contribuições para a média as potências $d\xi^n$ também contribuem para as realizações do processo ζ . Os momentos da

distribuição $p(\xi)$ podem ser obtidos por uma função geradora de momentos

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}) \quad M_\xi(x) &= \overline{e^{x\xi}} = \int e^{x\xi} p(\xi) d\xi \\ &= \sum_{r=0} \frac{m_{\xi,r} x^r}{r!} \quad m_{\xi,r} = \overline{\xi^r} = \int \xi^r p(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (5.7)$$

em que $m_{\xi,r}$ é o momento de ordem r , que pode ser obtido por $m_{\xi,r} = [d^r M_\xi(x)/dx^r]_{x=0}$. Outra função geradora que também nos fornece informação útil é a função geradora de cumulantes

$$K_\xi(x) = \ln [M_\xi(x)] = \sum_{r=1} \frac{k_{\xi,r} x^r}{r!}, \quad (5.8)$$

sendo $k_{\xi,r}$ o r -ésimo cumulante. Equivalentemente para o incremento da função ξ temos

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}) \quad M_{\Delta\xi}(x) &= \overline{e^{x\Delta\xi}} = \int e^{x\Delta\xi} p(\Delta\xi) d(\Delta\xi) \\ &= \sum_{r=0} \frac{m_{\Delta\xi,r} x^r}{r!}; \quad m_{\Delta\xi,r} = \overline{\Delta\xi^r} = \int \Delta\xi^r p(\Delta\xi) d(\Delta\xi) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Portanto para o caso de Poisson temos

$$M_N(x) = \sum_{N=0} e^{xN} \frac{\overline{N}^N e^{-\overline{N}}}{N!} = \exp [\overline{N}(e^x - 1)] \quad (5.10)$$

e

$$K_N(x) = \overline{N}(e^x - 1) = \overline{N} \sum_{r=1} \frac{x^r}{r!}, \quad (5.11)$$

com todos os cumulantes iguais

$$k_{N,r} = \overline{N}, \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (5.12)$$

Isso faz com que todos os momentos e cumulantes de $p(dN)$ sejam iguais, pois temos

$$M_{dN}(x) = \exp [\overline{dN}(e^x - 1)] = 1 + \overline{dN}(e^x - 1), \quad (5.13)$$

com

$$m_{dN,r} = k_{dN,r} = \overline{dN}^r = \overline{dN} \quad \forall r. \quad (5.14)$$

Então ao tratarmos de diferenciais envolvendo o processo de Poisson temos que considerar todas as derivadas parciais da função de interesse ζ em relação a N , com a regra diferencial de Ito $dN^r = dN$, pois todos os momentos de $p(dN)$ contribuem para o valor médio da diferencial $\overline{d\zeta}$. O mesmo não acontece para a distribuição gaussiana. No caso gaussiano temos a função M -geradora

$$M_W(x) = e^{x\overline{W}} e^{(t-t_0)x^2/2}, \quad (5.15)$$

e K -geradora que termina no segundo termo

$$K_W(x) = \overline{W}x + \frac{1}{2}(t - t_0)x^2, \quad (5.16)$$

o que faz com que os momentos e cumulantes de $p(dW)$ de ordem superior a dois sejam nulos com

$$m_{dW,1} = k_{dW,1} = 0, \quad m_{dW,2} = k_{dW,2} = dt. \quad (5.17)$$

Assim não precisamos considerar termos em ordem superior a $(dW)^2 = dt$, pois essa diferencial está associada ao segundo momento de uma gaussiana e todos os momentos superiores de $p(dW)$ são nulos (de ordem superior a dt) e não contribuem para a diferencial de uma função que dependa de $W(t)$. Podemos resumir as características dos processos com as regras diferenciais de Ito. Os processos obedecem as regras diferenciais

$$\begin{aligned} dNdN &= dN, & dNdt &= 0, & dt dt &= 0 \\ dWdW &= dt, & dWdt &= 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Assim podemos explicitar a diferencial de uma função ζ arbitrária do ruído $N(t)$

$$d\zeta(N(t), t) = \frac{\partial \zeta}{\partial t} dt + \left[\exp \left\{ \frac{\partial}{\partial N} \right\} - 1 \right] \zeta(t) dN(t), \quad (5.19)$$

e

$$d\zeta(W(t), t) = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial W^2} \right) dt + \frac{\partial \zeta}{\partial W} dW(t), \quad (5.20)$$

para o ruído $W(t)$ com os exemplos $\zeta = e^N$ e $\zeta = e^W$, cujas diferenciais são $d\zeta = [e - 1]e^N dN$ e $d\zeta = e^W [dW + \frac{1}{2} dt]$.

Por fim vamos considerar o caso em que ζ obedece uma equação diferencial de Stratonovich e encontrar a equivalente equação de Ito. Suponha que um fenômeno físico pode ser modelado por uma equação de movimento da forma

$$\text{(S)} \quad \dot{\zeta} = \frac{d\zeta(t)}{dt} = \alpha(\zeta, \xi, t) + \beta(\zeta, \xi, t) \frac{d\xi}{dt}, \quad (5.21)$$

cuja solução em primeira ordem é

$$\zeta(t + dt) = e^{\dot{\zeta} dt \frac{\partial}{\partial \zeta}} \zeta(t) = \sum_{n=0} \frac{\left(\dot{\zeta} dt \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^n}{n!} \zeta(t). \quad (5.22)$$

Agora aplicando as regras diferenciais de Ito podemos obter a correspondente equação diferencial de Ito

$$\zeta(t + dt) = \zeta(t) + \alpha dt + \sum_{n=1} \frac{\left(\beta d\xi \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^n}{n!} \zeta(t), \quad (5.23)$$

assim temos a conversão $(\text{S}) \mapsto (\text{I})$ para um ruído arbitrário

$$\begin{aligned} \text{(S)} \quad d\zeta &= \alpha dt + \beta d\xi \\ \text{(I)} \quad d\zeta &= \alpha dt + \sum_{n=1} \frac{\left(\beta d\xi \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^n}{n!} \zeta(t). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Para os processos de Poisson e de Wiener temos as converções

$$\begin{aligned}(\mathbf{S}) \quad d\zeta(N) &= \alpha dt + \beta dN \\(\mathbf{I}) \quad d\zeta(N) &= \alpha dt + \left[e^{\beta \frac{\partial}{\partial \zeta}} - 1 \right] \zeta(t) dN\end{aligned}\tag{5.25}$$

e

$$\begin{aligned}(\mathbf{S}) \quad d\zeta(W) &= \alpha dt + \beta dW \\(\mathbf{I}) \quad d\zeta(W) &= \left[\alpha + \frac{1}{2} \beta \frac{\partial \beta}{\partial \zeta} \right] dt + \beta dW\end{aligned}\tag{5.26}$$

respectivamente.

Bibliografia

- [1] D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe, and D. Wineland, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 281 (2003).
- [2] J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 565 (2001).
- [3] K. Hammerer, A. S. Sorensen, and E. S. Polzik, arXiv:0807.3358 (2008).
- [4] D. Mundarain and M. Orszag, *Phys. Rev. A* **79**, 052333 (2009); idem, 022306 (2009).
- [5] H.-J. Briegel, et al., *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5932 (1998).
- [6] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, e F. Marchesoni, *Stochastic Resonance: A remarkable idea that changed our perception of noise*, *Eur. Phys. J. B* **69**, 1 (2009).
- [7] E. Mascarenhas, B. Marques, D. Cavalcanti, M. Terra Cunha, and M. França Santos *Phys. Rev. A* **81**, 032310 (2010); E. Mascarenhas, B. Marques, M. Terra Cunha, and M. França Santos, *Phys. Rev. A*.
- [8] Eduardo Mascarenhas and Marcelo França Santos *Phys. Rev. A* **79**, 023836 (2009).
- [9] L. Diósi, *A Short Course in Quantum Information Theory*, *Lect. Notes Phys.*, **713** (Springer, 2007).
- [10] C.E. Shannon, *A Mathematical Theory of Communication*, *Bell System Technical Journal*, **27**, pp. 379 423 and 623 656, July and October, 1948.
- [11] I. Bengtsson e K. Życzkowski, *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*, (Cambridge, 2006).
- [12] E. Schrödinger, *An Ondulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules*, *Phys. Rev.* **28**, 1049 (1926).
- [13] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloë, *Quantum Mechanics*, Vol. 1 (Hermann).
- [14] A. Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods*, (Kluwer Academic Publishers, 2002).
- [15] H. M. Wiseman, *Quantum trajectories and quantum measurement theory*, *Quantum Semiclass. Opt.* **8**, 205 (1996).

- [16] K. Jacobs e D. A. Steck, *A Straightforward Introduction to Continuous Quantum Measurement*, quant-ph/0611067v1 (2006).
- [17] M. Nielsen and I. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, (Cambridge, 2000); G. G. Carlo, G. Benenti, G. Casati and C. Mejía-Monasterio, Phys. Rev. A, **69**, 062317 (2004).
- [18] Alireza Shabani and Daniel A. Lidar, *Vanishing Quantum Discord is Necessary and Sufficient for Completely Positive Maps*, Phys. Rev. Lett. **102**, 100402 (2009).
- [19] A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*, Phys. Rev., **47**, 777 (1935).
- [20] E. Schrödinger, *Discussion of Probability Relations between Separated Systems*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **31**, 555 (1935).
- [21] A. Einstein, *Relativity: The Special and General Theory*, (1920)
- [22] J. S. Bell, *Speakable and Unsayable in Quantum Mechanics*, (Cambridge, 2008); John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony, Richard A. Holt, *Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories*, Phys. Rev. Lett. **23**, 880 (1969).
- [23] A. Aspect, *Proposed experiment to test the nonseparability of quantum mechanics*, Phys. Rev. D **14**, 1944 (1976); Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gérard Roger, *Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem*, Phys. Rev. Lett. **47**, 460 (1981); Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gérard Roger, *Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities*, Phys. Rev. Lett. **49**, 91 (1982); Alain Aspect, Jean Dalibard, and Gérard Roger, *Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers*, Phys. Rev. Lett. **49**, 1804 (1982).
- [24] Harold Ollivier and Wojciech H. Zurek, *Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations*, Phys. Rev. Lett. **88**, 017901 (2002).
- [25] Marcelo de O. Terra Cunha, *Emaranhamento: caracterização, manipulação e consequências*, Tese de Doutorado, Departamento de Física UFMG (2005); Ryszard Horodecki, Pawel Horodecki, Michal Horodecki, and Karol Horodecki, *Quantum entanglement*, Rev. Mod. Phys. **81**, 865 (2009).
- [26] A. K. Ekert, *Quantum Cryptography Based on Bell's Theorem*, Phys. Rev. Lett. **67**, 661 (1991).
- [27] Charles H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters, *Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels*, Phys. Rev. Lett., **70**, 1895 (1993); J.I. Cirac e A.S. Parkins, *Schemes for atomic-state teleportation*, Phys. Rev. A **50**, R4441 (1994); D. Boschi et al., *Experimental realization of Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolski-Rosen Channels*, Phys. Rev. Lett. **80**, 1121 (1998); D. Bouwmeester et

- al., *Experimental quantum teleportation*, Nature 390, 575 (1997); M.A. Nielsen, E. Knill e R. Laflamme, *Complete quantum teleportation using nuclear magnetic resonance*, Nature 396, 52 (1998); M.D. Barrett et al., *Deterministic quantum teleportation with atomic qubits*, Nature 429, 737 (2004).
- [28] L. Davidovich et al., *Teleporting of atomic state between two cavities using nonlocal microwave fields*, Phys. Rev. A **50**, (R)895 (1994).
- [29] R. F. Werner, *Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model*, Phys. Rev. A, **40**, 4277 (1989).
- [30] Vlatko Vedral, *The Elusive Source of Quantum Effectiveness*, Quantum Physics arXiv:0906.3656.
- [31] Kavan Modi, Tomasz Paterek, Wonmin Son, Vlatko Vedral, and Mark Williamson, *Unified View of Quantum and Classical Correlations*, Phys. Rev. Lett. **104**, 080501 (2010).
- [32] V. Vedral, *Quantifying Entanglement*, Phys. Rev. Lett., **78**, 2275 (1997).
- [33] S. Popescu, Phys. Rev. Lett., *Bell's Inequalities and Density Matrices: Revealing "Hidden" Nonlocality*, **74**, 2619 (1995).
- [34] D. Cavalcanti, F. G. S. L. Brandão and M. O. Terra Cunha, *Are all maximally entangled states pure?*, Phys. Rev. A **72**, 040303(R) (2005).
- [35] M. Horodecki, P. Horodecki and R. Horodecki, *Mixed-State Entanglement and Distillatio: Is There a "Bound" Entanglement in Nature?*, Phys. Rev. Lett., **80**, 5239 (1998).
- [36] Guifré Vidal, *Entanglement of Pure States for a Single Copy*, Phys. Rev. Lett. **83**, 1046 (1999).
- [37] Charles H. Bennett, David P. DiVincenzo, John A. Smolin, and William K. Wootters, *Mixed-state entanglement and quantum error correction*, Phys. Rev. A **54**, 3824 (1996).
- [38] William K. Wootters, *Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits*, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).
- [39] Seunghwa Ryu, Wei Cai, and Alfredo Caro, *Quantum entanglement of formation between qudits*, Phys. Rev. A **77**, 052312 (2008).
- [40] Barbara M. Terhal and Karl Gerd Vollbrecht, *Entanglement of Formation for Isotropic States*, Phys. Rev. Lett. **85**, 2625 (2000).
- [41] Asher Peres, *Separability Criterion for Density Matrices*, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996); G. Vidal and R. F. Werner, *Computable measure of entanglement*, Phys. Rev. A **65**, 032314 (2002).
- [42] M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, *Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions*, Phys. Lett. A **229** (1996).

- [43] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, *Mixed -State Entanglement and Distillation: Is there a Bound Entanglement in Nature?*, Phys. Rev. Lett. **80**, 5239 (1998).
- [44] J. Sperling, W. Vogel, *Non-existence of bipartite bound entanglement with negative partial transposition*, arXiv:0910.0744v2 [quant-ph].
- [45] Charles H. Bennett, David P. DiVincenzo, Tal Mor, Peter W. Shor, John A. Smolin, and Barbara M. Terhal, *Unextendible Product Bases and Bound Entanglement*, Phys. Rev. Lett. **82**, 5385 (1999).
- [46] Heinz-Peter Breuer, Francesco Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems*, (Oxford University Press, 2002).
- [47] Howard J. Carmichael, *Statistical Methods in Quantum Optics 2 Vols* (Springer, 1999).
- [48] C. W. Gardiner, *Input and output in damped quantum systems III: Formulation of damped systems driven by Fermion fields*, arXiv:cond-mat/0310542v1.
- [49] C. W. Gardiner and M. J. Collett, Phys. Rev. A **31**, 3761 (1985); C. W. Gardiner, A. S. Parkins, and P. Zoller, Phys. Rev. A **46**, 4363 (1992); C.W. Gardiner and P. Zoller, *Quantum Noise* (Springer, Berlin, 2004).
- [50] Alberto Barchielli, Phys. Rev. A **34**, 1642 (1986); A. Barchielli and V. P. Belavkin, J. Phys. A: Math. Gen. **24**, 1495 (1991); V. P. Belavkin and P. Staszewski, Phys. Rev. A **45**, 1347 (1992).
- [51] R. Dum, P. Zoller and H. Ritsch, Phys. Rev. A **45**, 4879 (1992); R. Dum, A. S. Parkins, P. Zoller and Q. W. Gardiner, Phys. Rev. A **46**, 4382 (1992); J. Dalibard, Y. Castin, and K. Mølmer, Phys. Rev. Lett. **68**, 580 (1992); K. Mølmer, Y. Castin and J. Dalibard, J. Opt. Soc. Am. B **10**, 524 (1993), K. Mølmer, Y. Castin, Quantum Semiclass. Opt. **8** (1996) 49; M. B. Plenio and P. L. Knight, Rev. Mod. Phys. **70**, 101 (1998).
- [52] N. Gisin, Phys. Rev. Lett. **52**, 1657 (1984); N. Gisin and I. C. Percival, Phys. Lett. A **167**, 315 (1992); J. Phys. A **26** 2233 (1993); H. M. Wiseman and G. J. Milburn, Phys. Rev. A **47**, 642 (1993) ; H. M. Wiseman and G. J. Milburn, Phys. Rev. A **47**, 1652 (1993); Lajos Diósi, Nicolas Gisin, Jonathan Halliwell, and Ian C. Percival, Phys. Rev. Lett. **74**, 203 (1995); H. M. Wiseman e L. Diósi, Chem. Phys. **268**, 91 (2001).
- [53] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods* (Springer, 1997); Bernt Øksendal, *Stochastic Differential Equations* (Springer, 2007); Fima C. Klebaner, *Introduction to Stochastic Calculus With Applications* (Imperial College Press, 2005).
- [54] H. M. Wiseman e L. Diósi, *Complete parametrization, and invariance, of diffusive quantum trajectories for Markovian open systems*, Chem. Phys., **268**, 91 (2001).
- [55] P. Warszawski, H. M. Wiseman, and H. Mabuchi, Phys. Rev. A **65**, 023802 (2002); N. P. Oxtoby, P. Warszawski, H. M. Wiseman, He-Bi Sun, and R. E. S Polkinghorne, Phys. Rev. B **71**, 165317 (2005).

- [56] H.M. Wiseman, *Quantum Theory of Continuous Feedback*, Phys. Rev. A **49**, 2133 (1994); **49**, 5159 E (1994); **50**, 4428 (1994); H. M. Wiseman and G. J. Milburn, *Quantum Theory of Optical Feedback via Homodyne Detection*, Phys. Rev. Lett. **70**, 548 (1993); *Squeezing via Feedback*, Phys. Rev. A **49**, 1350 (1994).
- [57] Wojciech Hubert Zurek, *Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical*, Rev. Mod. Phys. **75**, 715 (2003).
- [58] Peter W. Shor, Phys. Rev. A **52**, (R)2493 (1995); A. R. Calderbank and Peter W. Shor, Phys. Rev. A **54**, 1098 (1996).
- [59] A. M. Steane, Phys. Rev. Lett. **77**, 793 (1996); Phys. Rev. A **54**, 4741 (1996).
- [60] Raymond Laflamme, Cesar Miquel, Juan Pablo Paz, and Wojciech Hubert Zurek, Phys. Rev. Lett. **77**, 198 (1996); Emanuel Knill and Raymond Laflamme, Phys. Rev. A **55**, 900 (1997); Emanuel Knill, Raymond Laflamme, and Lorenza Viola, Phys. Rev. Lett. **84**, 2525 (2000); David Kribs, Raymond Laflamme, and David Poulin, Phys. Rev. Lett. **94**, 180501 (2005).
- [61] Charles H. Bennett, David P. DiVincenzo, John A. Smolin, and William K. Wootters, Phys. Rev. A **54**, 3824 (1996).
- [62] Daniel Gottesman, Phys. Rev. A **54**, 1862 (1996).
- [63] Lu-Ming Duan and Guang-Can Guo, Phys. Rev. A **58**, 3491 (1998); P. Zanardi and M. Rasetti, Phys. Rev. Lett. **79**, 3306 (1997); Paolo Zanardi and Fausto Rossi, Phys. Rev. B **59**, 8170 (1999); Paolo Zanardi, Phys. Rev. A **60**, R729 (1999); D. A. Lidar, I. L. Chuang, and K. B. Whaley, Phys. Rev. Lett. **81**, 2594 (1998); D. A. Lidar, D. Bacon, and K. B. Whaley, Phys. Rev. Lett. **82**, 4556 (1999); D. Bacon, D. A. Lidar, and K. B. Whaley, Phys. Rev. A **60**, 1944 (1999); Daniel A. Lidar, David Bacon, Julia Kempe, and K. Birgitta Whaley, Phys. Rev. A **61**, 052307 (2000); Daniel A. Lidar, Dave Bacon, Julia Kempe, and K. B. Whaley, Phys. Rev. A **63**, 022306 (2001); Phys. Rev. A **63**, 022307 (2001); David Poulin, Phys. Rev. Lett. **95**, 230504 (2005).
- [64] H. Mabuchi and P. Zoller, Phys. Rev. Lett. **76**, 3108 (1996).
- [65] C. D'Helon and G. J. Milburn, Phys. Rev. A **56**, 640 (1997).
- [66] M. B. Plenio, V. Vedral, and P. L. Knight, Phys. Rev. A **55**, 67 (1997).
- [67] G. Alber, Th. Beth, Ch. Charnes, A. Delgado, M. Grassl, and M. Mussinger, Phys. Rev. Lett. **86**, 4402 (2001); Phys. Rev. A **68**, 012316 (2003); K. Khodjasteh and D. A. Lidar, Phys. Rev. Lett. **89**, 197904 (2002).
- [68] Charlene Ahn, Andrew C. Doherty, and Andrew J. Landahl, Phys. Rev. A **65**, 042301 (2002).
- [69] Charlene Ahn, H. M. Wiseman, and G. J. Milburn, Phys. Rev. A **67**, 052310 (2003); Charlene Ahn, Howard Wiseman, and Kurt Jacobs, Phys. Rev. A **70**, 024302 (2004).

- [70] Mohan Sarovar, Charlene Ahn, Kurt Jacobs, and Gerard J. Milburn, Phys. Rev. A **69**, 052324 (2004).
- [71] Bradley A. Chase, Andrew J. Landahl, and JM Geremia, Phys. Rev. A **77**, 032304 (2008).
- [72] Daniel Gottesman, Alexei Kitaev, and John Preskill, Phys. Rev. A **64**, 012310 (2001).
- [73] Stefano Pirandola, Stefano Mancini, Samuel L. Braunstein, and David Vitali, Phys. Rev. A **77**, 032309 (2008).
- [74] Peter Goetsch, Paolo Tombesi, and David Vitali, Phys. Rev. A **54**, 4519 (1996); D. Vitali, P. Tombesi, and G. J. Milburn, Phys. Rev. A **57**, 4930 (1998), V. Giovannetti, P. Tombesi, and D. Vitali, Phys. Rev. A **60**, 1549 (1999).
- [75] Stefano Mancini, Phys. Rev. A **73**, 010304 (2006); Stefano Mancini and Howard M. Wiseman, Phys. Rev. A **75**, 012330 (2007); A. R. Carvalho and J. J. Hope, Phys. Rev. A **76**, 010301 (2007); A. R. Carvalho, A. J. Reid, and J. J. Hope, Phys. Rev. A **78**, 012334 (2008) ; Naoki Yamamoto, Hendra I. Nurdin, Matthew R. James, and Ian R. Petersen, Phys. Rev. A **78**, 042339 (2008).
- [76] Sebastien Gleyzes, et al., Nature **446**, 297 (2007).
- [77] M. Ueda and M. Kitagawa, Phys. Rev. Lett. **68**, 3424 (1992); A. Imamoglu, Phys. Rev. A **47**, R4577 (1993); A. Royer, Phys. Rev. Lett. **73**, 913 (1994); M. Koashi and M. Ueda, Phys. Rev. Lett. **82**, 2598 (1999); M. Ueda, N. Imoto, and H. Nagaoka, Phys. Rev. A **53**, 3808 (1996); M. Ban, J. Phys. A **34**, 9669 (2001); A. N. Korotkov and A. N. Jordan, Phys. Rev. Lett. **97**, 166805 (2006); N. Katz, M. Neeley, M. Ansmann, R. C. Bialczak, M. Hofheinz, E. Lucero, A. O'Connell, H. Wang, A. N. Cleland, J. M. Martinis, and A. N. Korotkov, Phys. Rev. Lett. **101**, 200401 (2008).
- [78] M. A. Nielsen and C. M. Caves, Phys. Rev. A **55**, 2547 (1997).
- [79] H. Hoffmann, O Hess, and G. Mahler, Optics Express **2**, 334 (1998); H. Hoffmann, G. Mahler, and O. Hess, Phys. Rev. A, **57**, 4877(1998); Jin Wang, H. M. Wiseman, Phys. Rev. A **64**, 063810 (2001); H. M. Wiseman, Stefano Mancini, and Jin Wang, Phys. Rev. A **66**, 013807 (2001).
- [80] Andre R. Carvalho, marc Busse, Olivier Brodier, Carlos Viviescas, and Andreas Buchleitner, phys. Rev. Lett. **98**, 190501 (2007).
- [81] A. Whitaker, *Einstein, Bohr and the Quantum Dilemma: From Quantum Theory to Quantum Information* (Cambridge University Press, New York, 2006).
- [82] E. Joos et al., *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory* (Springer, New York, 2003).

- [83] J. P. Paz, S. Habib, and W. H. Zurek, *Phys. Rev. D* **47**, 488 (1993); S. Habib, K. Shizume, and W. H. Zurek, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4361 (1998); A. R. R. Carvalho, R. L. de Matos Filho, and L. Davidovich, *Phys. Rev. E* **70**, 026211 (2004).
- [84] T. Yu and J. H. Eberly, *Phys. Rev. B* **66**, 193306 (2002); **68**, 165322 (2003); *Phys. Rev. Lett.* **93**, 140404 (2004); M. F. Santos, P. Milman, L. Davidovich and N. Zagury, *Phys. Rev. A* **73**, 040305(R) (2006); T. Yu and J. H. Eberly, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 140403 (2006); para casos multipartidos ver A. R. R. Carvalho, F. Mintert, and A. Buchleitner, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 230501 (2004); L. Aolita, R. Chaves, D. Cavalcanti, A. Acin, e L. Davidovich, *ibid.* **100**, 080501 (2008).
- [85] N. F. Ramsey, *Molecular Beams* (Oxford University Press, New York, 1985); S. Haroche and J. M. Raimond, in *Cavity Quantum Electrodynamics* (Academic, New York, 1994).
- [86] T. Quang, P. L. Knight, and V. Bužek, *Phys. Rev. A* **44**, 6092 (1991); R. R. Puri and G. S. Agarwal, *ibid.* **33**, 3610(R) (1986); Julio Gea-Banacloche, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3385 (1990).
- [87] J. I. Kim, K. M. Fonseca Romero, A. M. Horiguti, L. Davidovich, M. C. Nemes, and A. F. R. de Toledo Piza, *Phys. Rev. Lett.* **82** 4737 (1999).
- [88] M. B. Plenio and S. F. Huelga, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 197901 (2002); H. Nha and H. J. Carmichael, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 120408 (2004).
- [89] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, *Proc. IEEE* **51**, 89 (1963).
- [90] Hyunchul Nha and H. J. Carmichael, *Phys. Rev. A* **71**, 013805 (2005).
- [91] Robin Blume-Kohout and W. H. Zurek, *Quantum Darwinism: Entanglement, branches, and the emergent classicality of redundantly stored quantum information*, *Phys. Rev. A* **73**, 062310 (2006); *Quantum Darwinism in quantum Brownian motion: the vacuum as a witness* *Phys. Rev. Lett.* **101**, 240405, (2008); Michael Zwolak, H. T. Quan, W. H. Zurek, *Quantum Darwinism in a hazy environment*, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 110402 (2009); *Quantum Darwinism in non-ideal environments*, *Phys. Rev. A* **81**, 062110 (2010); C. Jess Riedel, Wojciech H. Zurek, *Quantum Darwinism in an Everyday Environment: Huge Redundancy in Scattered Photons*, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 020404 (2010).