

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE FÍSICA

Clyffe de Assis Ribeiro

*Valores fracos, variáveis modulares e o espaço de fase
quântico*

Belo Horizonte
2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE FÍSICA

Clyffe de Assis Ribeiro

*Valores fracos, variáveis modulares e o espaço de fase
quântico*

Dissertação apresentada ao Curso de Física da UFMG,
como requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Física.

Orientador: Maria Carolina Nemes
Doutora em Física - USP

Co-orientador: Augusto César Lobo
Doutor em Física - UFMG

Belo Horizonte
2011

Ribeiro, Clyffe Assis

Valores fracos, variáveis modulares e o espaço de fase quântico /

Clyffe Assis Ribeiro - 2011

30.p

Ciências Exatas. I.Título.

CDU teste

Clyffe de Assis Ribeiro

*Valores fracos, variáveis modulares e o espaço de fase
quântico*

Dissertação apresentada ao Curso de Física da UFMG,
como requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Física.

BANCA EXAMINADORA

Maria Carolina Nemes

Doutora em Física - USP

Augusto César Lobo

Doutor em Física - UFMG

Reinaldo Oliveira Vianna

Doutor em Física - UFMG

Felipe Fernandes Fanchini

Doutor em Física - USP

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal investigar os conceitos de Valor Fraco e Variáveis Modulares na mecânica quântica. Para compreender melhor o conceito de valor fraco, introduzimos o formalismo de dois estados da mecânica quântica e o modelo ideal de medida de von Neumann, dos quais é derivado o valor fraco. Apresentamos resultados previamente obtidos, onde aplicamos o método de estados coerentes para descrever o espaço de fase, com o intuito de analisar melhor os efeitos no sistema medidor quando há uma interação entre o mesmo e o sistema a ser medido. Apresentamos também uma análise crítica das idéias introduzidas por Tamate na investigação do valor fraco, onde são levados em conta aspectos geométricos do espaço de estados quânticos.

Com respeito às variáveis modulares, que foram introduzidas por Aharonov, Pendleton e Petersen, em 1969, com o intuito de descrever aspectos não-locais que surgem em alguns fenômenos quânticos, como por exemplo o efeito Aharonov-Bohm, propomos uma maneira natural de defini-las. Para tal, utilizamos a descrição dos espaços de estados quânticos de dimensão finita feita por Schwinger, bem como seu limite para o contínuo, e o resultado obtido por Lobo e Nemes, que diz que um sistema físico quântico representado pelo produto tensorial de dois espaços de estados quânticos de dimensões finitas e primas entre si, não pode ser considerado como um sistema que possui dois graus de liberdade, mas sim, efetivamente, somente um grau de liberdade.

Abstract

This work intends to investigate the concepts of weak value and modular variables in quantum mechanics. To better understand the concept of weak value, we introduce the two state formalism of quantum mechanics and the von Neumann model for an ideal measurement, both of which derive the weak value. We present previous results in which we applied the coherent state method to describe the phase space in order to better analyze the effects in the measurement system when there is an interaction between it and the system being measured. We also present a critical analysis of the ideas introduced by Tamate in the investigation of the weak value, in which the geometrical aspects of the quantum state space were considered.

We also propose a natural way to define the modular variables, that were introduced by Aharonov, Pendleton and Peterson in 1969, to describe non-local aspects that arise in some quantum phenomena, such as the Aharonov-Bohm effect. To do so, we use the description of the quantum state space of finite dimension constructed by Schwinger, as well as its limit to the continuous, and the results obtained by Lobo e Nemes, that says that a quantum physical system represented by a tensor product between two quantum spaces of states of finite and coprime dimensions, can not be considered as a system composed by two degrees of freedom, but in fact, only one degree of freedom.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer, primeiramente, os meus pais pelo apoio e incentivo.

Agradeço também toda minha família, em especial meus irmãos Aiam, Yamkee e Karlane.

À minha noiva, Alline, por tornar essa caminhada mais agradável e feliz.

À Carolina, pela liberdade que sempre me proporcionou.

Agradeço ao Augusto Lobo, pelos ensinamentos e especialmente pela paciência que sempre teve comigo.

A todos meus amigos, que sempre me apoiaram nessa empreitada.

A todos os colegas da pós-graduação, principalmente o Wanderson e o Jean, grandes companheiros de república.

A todos os funcionários do departamento de física da UFMG.

Agradeço os membros da banca pelo tempo despendido na leitura deste trabalho e pelas valiosas sugestões apresentadas.

Por fim, agradeço à Universidade Federal de Minas Gerais e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Sumário

Lista de Figuras	6
1 Introdução	7
2 Valores Fracos na Mecânica Quântica	10
2.1 O Formalismo de Dois Estados da Mecânica Quântica	10
2.2 A Medida Ideal de von Neumann	13
2.3 Medida Fraca e Valor Fraco	16
3 A Geometria de Valores Fracos	23
3.1 Sistema medidor com base bidimensional	23
3.1.1 Representação de sistemas de dois níveis (esfera de Bloch)	23
3.1.2 Interação entre o sistema medidor e o sistema a ser medido	25
3.1.3 Mudança de fase devido a pós-seleção	27
3.2 Sistema medidor com base contínua	30
3.2.1 Interação entre o sistema medidor e o sistema a ser medido	30
3.2.2 Interpretação geométrica da pré-medida	32
3.2.3 Pós-seleção e valor fraco	35
3.3 Críticas aos procedimentos adotados por <i>Tamate et al</i>	37
4 Variáveis Modulares na Mecânica Quântica	39
4.1 Introdução	39
4.2 Cinemática de Schwinger	45
4.3 O limite para o contínuo	49
4.3.1 O limite simétrico	49

4.3.2	O limite não simétrico	52
4.4	A questão dos graus de liberdade	53
4.5	Variáveis modulares e <i>pseudo-graus</i> de liberdade	59
5	Conclusões e perspectivas futuras	63
	Referências Bibliográficas	65

Lista de Figuras

3.1	Esfera de Bloch	25
3.2	Área do triângulo geodésico formado pelos vértices de \vec{r}_1 , \vec{r}_2 e \vec{r}_3	29
3.3	Representação pictórica do espaço de estados quânticos	33
3.4	Representação pictórica da diferença de fase entre $ A(y)\rangle$ e $ A(y + dy)\rangle$. . .	35
3.5	Representação da fase geométrica global.	36
4.1	Experimento de dupla-fenda com elétrons.	40
4.2	Funções de onda que representam o elétron logo após a dupla-fenda	42
4.3	Representação do estado $q_{\text{mod}} = \frac{2L}{3}$ e $p_{\text{mod}} = \frac{h}{2L}$ no espaço de fase.	45
4.4	Translação em um sistema de dois graus de liberdade	53
4.5	Espaço finito para 2 qubits	54
4.6	Ação do operador de translação sobre os estados da base do espaço $W^{(4)}$.	55
4.7	Ação do operador de translação sobre os estados da base do espaço $W^{(6)}$.	55
4.8	Experimento de difração com n fendas.	59
4.9	Estado $ 1, 2^{(6)}\rangle \in W^{(6)}$	61
4.10	Estado $ 1, 2^{(15)}\rangle \in W^{(15)}$	61

1 Introdução

O conceito de valor fraco de um sistema físico quântico foi introduzido em 1988 por Aharonov, Albert e Vaidman [1, 2]. Essa idéia, por sua vez, se baseou em um modelo temporalmente simétrico da Mecânica Quântica, previamente proposto em 1964 por Aharonov, Bergmann e Lebowitz [3]. Neste modelo, é necessário considerar condições de contorno temporais não locais, já que a descrição do estado físico de um sistema quântico entre duas medidas consecutivas é realizada através da *pré-seleção* e *pós-seleção* dos estados obtidos nas respectivas medidas. Os autores desenvolveram assim, a chamada *Regra ABL* para o cálculo de probabilidades de transições nesse modelo que, por isso mesmo, também é conhecido como o Formalismo de Dois Estados para a Mecânica Quântica [4]. O valor fraco de um observável qualquer \hat{O}

$$O_w = \frac{\langle \beta | \hat{O} | \alpha \rangle}{\langle \beta | \alpha \rangle}, \quad (1.1)$$

onde $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ são, respectivamente, os estados pré e pós-selecionados, pode ser considerado como uma generalização do conceito de valor esperado de um observável na Física Quântica usual, mas diferentemente deste, pode assumir valores arbitrários no plano complexo. A grande maioria dos trabalhos que tratam sobre o assunto, consideram casos onde o valor fraco é um número real, ou seja, sua parte imaginária é identicamente nula [1, 5, 6]. Nesses casos, o efeito observado no sistema medidor (aparato de medida) é uma “translação” da função de onda do aparato de medida, escrita na base das posições, de uma quantidade proporcional a O_w .

Mais recentemente, Jozsa procurou estabelecer uma melhor compreensão do significado físico das partes *real* e *imaginária* do valor fraco [7]. Em [8], apresentamos uma revisão crítica sobre as idéias de Jozsa e sugerimos caminhos para progressos adicionais no esclarecimento do significado físico do valor fraco através de uma análise mais geral dos efeitos da medida fraca no espaço de fase do sistema medidor. Toda medida, seja ela fraca ou não, pode ser compreendida como uma interação do sistema a ser medido com um sistema medidor através do modelo de von Neumann [9, 6]. No limite em que o acoplamento do sistema medidor for infinitesimalmente pequeno, haverá uma perturbação infinitesimal do sistema medidor, mas que poderá ser revelado através de uma média das

medidas obtidas em um ensemble de sistemas identicamente preparados com um mesmo par de estados pré e pós-selecionados. Através do método dos estados coerentes para descrever o espaço de fase quântico do sistema medidor, propomos uma análise mais geral do que a encontrada até o momento na literatura, sobre o significado físico do valor fraco. Os principais resultados obtidos em [8] são apresentados no capítulo 2 dessa dissertação.

Em um trabalho publicado em 2009, Tamate e colaboradores apresentam uma nova maneira de interpretar o valor fraco [10]. Eles demonstram, utilizando a descrição de apagadores quânticos, que há uma forte relação entre o processo de pós-seleção e a fase geométrica. Nós apresentamos uma análise crítica das idéias introduzidas por Tamate, bem como alguns esclarecimentos extras que não estão presentes no seu trabalho. Mostramos que o resultado obtido por Tamate não é geral e que só vale para os casos onde o valor fraco é real.

Além de todas as implicações teóricas que o conceito de valor fraco pode trazer, que é o que esse trabalho trata, esse novo conceito tem se tornado muito útil em questões experimentais. Analisando a equação 1.1, notamos que quando os estados pré e pós-selecionados, $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$, são aproximadamente ortogonais, O_w assume valores muito maiores que qualquer autovalor de \hat{O} . Essa observação torna o conceito de valor fraco uma poderosa ferramenta experimental em questões de amplificação e detecção de efeitos fracos. De fato, recentemente numerosos experimentos vem sendo feitos utilizando essa propriedade, como por exemplo o experimento feito por Dixon, Starling, Jordan e Howell, onde este método de amplificação foi usado com sucesso para medir ângulos de deflexão da ordem de algumas centenas de fentoradianos e deslocamentos da ordem de 20 fentometros [11]. Outro exemplo notável da aplicação desse resultado é o apresentado por Hosten e Kwiat, onde esta técnica foi usada para amplificar o deslocamento de um feixe de laser em quatro ordens de grandeza, o que lhes permitiu medir deslocamentos de 1 Å e, assim, confirmar a existência do efeito Hall para a luz [12].

No capítulo seguinte, apresentamos o formalismo de dois estados para a mecânica quântica, revemos o conceito de medida ideal de von-Neumann e introduzimos a idéia de valor fraco, bem como apresentamos alguns resultados obtidos em [8]. No capítulo 3, apresentamos uma análise crítica das idéias introduzidas por Tamate na investigação do valor fraco, onde são levados em conta aspectos geométricos do espaço de estados quânticos. No capítulo 4 apresentamos uma maneira natural de definir as variáveis modulares, que não são tratadas nessa introdução, pois, no próprio capítulo 4, faremos uma introdução sobre

o assunto. No capítulo 5 expomos nossas conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2 Valores Fracos na Mecânica Quântica

Neste capítulo introduzimos o conceito de valor fraco desenvolvido por Aharonov e colaboradores. Para tanto, começamos revendo dois assuntos que são de suma importância para o entendimento da idéia do valor fraco. Na seção abaixo introduzimos o formalismo de dois estados da mecânica quântica proposto por Aharonov e colaboradores. Logo depois apresentamos uma revisão sobre a medida ideal de von Neumann. Com essas duas idéias expostas passamos, finalmente, a apresentar o conceito do valor fraco.

2.1 O Formalismo de Dois Estados da Mecânica Quântica

O Formalismo de Dois Estados da Mecânica Quântica (TSVF - *Two-state vector formalism*), foi proposto por Aharonov, Bergmann e Lebowitz em 1964 [3], com o intuito de remover, de acordo com os autores, a aparente *assimetria temporal* existente no formalismo usual da mecânica quântica. Na física clássica, o estado de um sistema físico, (como por exemplo, uma partícula pontual em uma dimensão, em um dado instante) é caracterizado por um ponto no plano de fase, ou seja, por um par $(x(t), p(t))$, onde x é a posição da partícula e $p = mv$ seu momento linear. Se, em um dado momento, o estado da partícula for conhecido assim como as forças atuantes sobre ela, então, as leis de Newton equivalem a uma equação diferencial de segunda ordem em $x(t)$, onde as duas condições iniciais dadas pelo par $(x(t), p(t))$ garantem uma *solução única* que pode ser estendida tanto para o *futuro*, como para o *passado*. Assim, para se conhecer todo o movimento do sistema, basta que se faça uma medida de posição e momento em um dado instante, ou seja, é necessário estabelecer uma única condição inicial (“condição de contorno temporal”). Existe claramente uma *simetria temporal* na física clássica, o que não parece acontecer no formalismo usual da mecânica quântica. De fato, na física quântica o estado de um sistema em um dado instante t é descrito por um “vetor de estado” $|\psi\rangle$.

Tentativas de interpretações físicas do status ontológico do vetor de estado, também conhecido como função de onda, vem acontecendo desde os primórdios da mecânica

quântica e não temos como objetivo deste trabalho, nos debruçarmos sobre essa questão. Existem diferentes interpretações para o vetor de estado, mas a maioria concorda em um ponto: o vetor de estado fornece a máxima informação possível de um sistema puro em um determinado estado físico. O vetor de estado evolui no tempo através de um operador unitário \hat{U} de evolução temporal:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t_1, t)|\psi(t_1)\rangle, \quad t_1 < t, \quad (2.1)$$

onde o próprio operador $\hat{U}(t)$ obedece à equação: (equivalente à equação de Schrödinger)

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U} = \hat{H} \hat{U}. \quad (2.2)$$

A equação acima pode ser resolvida através de uma série de Dyson [13], mas se a família de Hamiltonianos parametrizados pelo tempo $\hat{H}(t)$ comutar entre si, a série pode ser somada facilmente da seguinte forma:

$$\hat{U}(t_1, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^t \hat{H}(t') dt'} \quad (2.3)$$

Dizemos que o operador \hat{U} implementa a evolução temporal entre os instantes t_1 e $t_2 = t$, governada pelo hamiltoniano $\hat{H}(t)$. A equação 2.1 mostra que a evolução unitária de um vetor de estado quântico é tão determinística quanto a evolução de um sistema clássico newtoniano. Somente a partir do momento que for observado um estado quântico através da *medição* de um *conjunto completo de observáveis* sua evolução é determinística, e obedece a equação de Schrödinger até o momento de ocorrer uma nova medida. Se o estado do sistema não for um autoestado do observável a ser medido, ocorrerá inevitavelmente o fenômeno do “*colapso da função de onda*”, onde o vetor de estado é projetado de maneira intrinsecamente aleatória (com uma distribuição de probabilidades que depende do vetor de estado no momento da medida) em um dos autoestados do observável em questão. Tanto na física clássica quanto na física quântica, a medição do estado de um sistema é realizada através da interação com um *sistema medidor*. No caso da física clássica, podemos, em princípio, fazer com que essa interação seja tão pequena quanto se queira, o que não é verdadeiro para processos de medida na mecânica quântica. Por esse motivo, um estado quântico definido por uma medida feita em um instante $t_2 > t$ é, em geral, diferente de um estado quântico definido por uma medida feita em $t_1 < t$, mesmo que não haja nenhuma evolução unitária entre esses dois instantes. Isto é, existe uma certa *assimetria temporal* na evolução de estados quânticos quando se leva em conta a questão da medida. De fato, ao medirmos o estado em t_1 , não temos como saber com certeza qual

será o resultado da medida em t_2 , diferentemente da física clássica. Em 1964, Aharonov, Bergmann e Lebowitz sugeriram que essa assimetria não refletia uma assimetria intrínseca da física quântica, mas uma assimetria na escolha de “*condições de contorno temporais*” [3]. Sendo assim, eles propuseram um formalismo temporalmente simétrico, batizado de *formalismo de dois estados da mecânica quântica*, por motivos que se tornarão claros a seguir. No TSVF, um sistema em um dado instante de tempo t é completamente descrito por um vetor de dois estados ¹

$$\langle\varphi| \otimes |\psi\rangle, \quad (2.4)$$

que é constituído de um estado quântico $|\psi\rangle$ que pertence a um certo espaço de estados W e é definido pelo resultado de uma medida feita em um instante $t_1 < t$, e do estado $\langle\varphi|$ que pertence ao espaço dual de W , denotado por \overline{W} , e é definido pelo resultado de uma medida feita em um instante $t_2 > t$. Por motivos óbvios, $|\psi\rangle$ e $\langle\varphi|$ também são chamados de estados *pré* e *pós-selecionados*, respectivamente. Matematicamente, $|\psi\rangle$ e $\langle\varphi|$ podem ser representados por:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t_1, t)|\psi(t_1)\rangle, \quad t_1 < t, \quad (2.5)$$

e

$$\langle\varphi(t)| = \langle\varphi(t_2)|\hat{U}^\dagger(t, t_2), \quad t_2 > t, \quad (2.6)$$

onde \hat{U} é dado pela 2.3. Utilizando o TSVF, os autores desenvolveram a *Regra ABL* para o cálculo de probabilidades de transição, dada por:

$$Prob(c_n) = \frac{|\langle\varphi|\hat{P}_{C=c_n}|\psi\rangle|^2}{\sum_j |\langle\varphi|\hat{P}_{C=c_j}|\psi\rangle|^2}, \quad (2.7)$$

onde \hat{P} é o operador projetor. A expressão acima nos dá a *probabilidade condicional* de obtermos c_n para uma medida do observável C quando o sistema é pré-selecionado no estado $|\psi\rangle$ e pós-selecionado no estado $\langle\varphi|$.² Na prática uma pré e pós-seleção são feitas de maneira sequencial no tempo. Por exemplo, suponhamos que queiramos medir a componente de spin de uma partícula de spin $\frac{1}{2}$ em uma dada direção, (experimento de Stern-Gerlach). Suponhamos ainda que a condição inicial (pré-seleção) seja o estado de spin $+1/2$ na direção \hat{x} e que a condição final (pós-seleção) seja o estado de spin $+1/2$ na direção \hat{y} . Então, medimos o spin de um ensemble de partículas na direção

¹A notação usual encontrada na literatura é $\langle\varphi||\psi\rangle$, onde é suprimido o símbolo de produto tensorial. Essa notação pode causar confusão com o produto interno entre $|\psi\rangle$ e $|\varphi\rangle$. Por esse motivo usaremos a notação completa, ou seja, $\langle\varphi| \otimes |\psi\rangle$.

²Exemplos de aplicação dessa regra podem ser encontrados em [4]

\hat{x} e selecionamos aqueles que resultam em $S_x = \frac{\hbar}{2}$, descartando os demais resultados. Após o experimento, realizamos outra medida de spin na direção \hat{y} e selecionamos um subensemble onde $S_y = \frac{\hbar}{2}$, descartando os demais.

O TSVF é equivalente à mecânica quântica, ou seja, ele descreve a mesma teoria, mas agora de maneira simétrica no tempo. Talvez, por isso mesmo, essa idéia passou despercebida na literatura até Aharonov e colaboradores introduzirem, em 1988, os conceitos de *Medida Fraca e valor fraco* [1, 2], inspirados no mesmo. Desde então, o formalismo de dois estados vem sendo usado para modelar a questão cada vez mais importante de medidas fracas e valores fracos na mecânica quântica, conforme veremos mais a frente.

2.2 A Medida Ideal de von Neumann

No modelo de medida de von Neumann, o processo de medida é tratado como sendo uma interação entre o sistema físico e o aparato medidor. Denotaremos por W_S o espaço de estados do sistema físico e por W_M o espaço de estados do sistema medidor. O espaço de estados produto $W = W_S \otimes W_M$, representa a combinação dos dois subsistemas. Antes de se iniciar a interação entre os dois subsistemas, o estado do sistema conjunto é *não-emaranhado*, isto é, pode ser expresso como um produto:

$$|\psi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\varphi\rangle, \quad (2.8)$$

onde $|\alpha\rangle$ é um elemento de W_S e $|\varphi\rangle$ é um elemento de W_M . Suponhamos que queiramos medir uma variável quântica discreta de W_S descrita por um observável $\hat{O} = |o_i\rangle o_i \langle o^i|$ (subentendemos aqui a convenção da soma³, onde o índice i varia sobre a dimensão de W_S). Suponhamos ainda, que o sistema medidor seja formado pelo movimento de uma partícula em uma dimensão (desprezamos qualquer estrutura interna da partícula como spin, por exemplo). Assim podemos tomar como duas escolhas de bases de estado de W_M , os usuais estados de posição e momento: $\{|q(x)\rangle\}$ e $\{|p(x)\rangle\}$. Adotamos aqui, uma notação um pouco diferente da usual, por motivos a serem esclarecidos mais a frente, no sentido que distinguimos o “tipo” de vetor (q ou p) do autovalor x associado, isto é:

$$\hat{Q}|q(x)\rangle = x|q(x)\rangle \quad e \quad \hat{P}|p(x)\rangle = x|p(x)\rangle \quad (2.9)$$

³Omitimos o símbolo de somatório, colocando índices repetidos para representar a soma.

onde \hat{Q} e \hat{P} são os operadores de posição e momento que obedecem à bem conhecida relação de comutação de Heisenberg: $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hat{I}$ (onde adotamos, a partir de agora, unidades tais que $\hbar = 1$). As relações de completeza e o produto interno dos elementos de uma base com elementos da outra podem, com essas notações, serem escritas como:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |q(x)\rangle\langle q(x)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |p(x)\rangle\langle p(x)|dx = \hat{I} \quad \text{e} \quad \langle q(x)|p(x')\rangle = \frac{e^{ixx'}}{\sqrt{2\pi}} \quad (2.10)$$

Modelamos a medida de von Neumann através de um hamiltoniano de interação *dependente do tempo* da seguinte forma

$$\hat{H}_{int} = \lambda g(t)\hat{O} \otimes \hat{P}, \quad (2.11)$$

onde λ está associado a intensidade da interação. A medida é considerada *ideal* quando $g(t)$ tem a forma de um pulso instantâneo, ou seja, $g(t) = \delta(t - t_0)$, onde $\delta(t - t_0)$ é a “função” (distribuição) *delta de Dirac*, que possui as seguintes propriedades:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)dt = 1 \quad (\text{normalização}) \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0), \quad (\text{filtragem}) \quad (2.12)$$

para uma dada função teste apropriada $f(t)$. Logo, uma medida ideal de von Neumann é modelada via o hamiltoniano de interação na forma de um *pulso instantâneo* em um instante t_0 :

$$\hat{H}_{int} = \lambda\delta(t - t_0)\hat{O} \otimes \hat{P}. \quad (2.13)$$

O hamiltoniano total do sistema é composto pelo hamiltoniano do subsistema físico, o hamiltoniano do aparato de medida e o hamiltoniano de interação 2.13. Como a interação entre o subsistema físico e o aparato de medida acontece em um intervalo de tempo muito pequeno (um pulso instantâneo para o nosso modelo), consideremos aqui, no instante da medida, somente o hamiltoniano de interação, desprezando os outros termos. Seja o estado inicial do sistema total dado pelo seguinte estado não-emaranhado:

$$|\psi_i\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\varphi\rangle. \quad (2.14)$$

Assim, utilizando a equação 2.1, podemos calcular o estado final do sistema, ou seja,

$$|\psi_f\rangle = \hat{U}(t_A, t_B)|\psi_i\rangle, \quad t_A < t_0 < t_B, \quad (2.15)$$

com

$$\hat{U}(t_A, t_B) = e^{-i \int_{t_A}^{t_B} \hat{H}_{int}(t')dt'}. \quad (2.16)$$

Utilizando o hamiltoniano de interação 2.13 e a primeira propriedade da “função” delta de Dirac na expressão acima, obtemos:

$$\hat{U}(t_A, t_B) = e^{-i\lambda\hat{O}\otimes\hat{P}}. \quad (2.17)$$

Assim, o estado final do sistema é dado por

$$|\psi_f\rangle = e^{-i\lambda\hat{O}\otimes\hat{P}}\alpha^j|o_j\rangle \otimes |\varphi\rangle, \quad (2.18)$$

onde $|\alpha\rangle = |o_j\rangle\langle o^j|\alpha\rangle = |o_j\rangle\alpha^j$. Para resolver o lado direito da expressão acima, usamos a seguinte propriedade:

Se um operador \hat{A} pode ser escrito de forma diagonal em alguma base ortonormal, ou seja, $\hat{A} = |a_j\rangle a_j \langle a^j|$, então, uma função analítica de \hat{A} pode ser expressa da seguinte forma [14]: $f(\hat{A}) = f(a_j)|a_j\rangle\langle a^j|$.

Logo, utilizando o fato de que $|o_j\rangle$ é autoestado de \hat{O} com autovalor o_j , o estado final do sistema será

$$|\psi_f\rangle = \alpha^j e^{-i\lambda o_j \hat{P}} |o_j\rangle \otimes |\varphi\rangle. \quad (2.19)$$

Multiplicando ambos os lados por $(\hat{I} \otimes \langle q(x)|)$, temos:

$$(\hat{I} \otimes \langle q(x)|)|\psi_f\rangle = |o_j\rangle \otimes \langle q(x)|\hat{V}_{\lambda o_j}^\dagger|\varphi\rangle\alpha^j, \quad (2.20)$$

onde identificamos $\hat{V}_\xi = e^{i\xi\hat{P}}$ como a família de operadores unitários que implementam a representação do grupo abeliano aditivo de translações em \mathfrak{R} :

$$\hat{V}_\xi|q(x)\rangle = |q(x - \xi)\rangle. \quad (2.21)$$

Dizemos que \hat{P} é o gerador de translações na base das posições.⁴

Dessa forma, o estado final do sistema produto é *emaranhado* ou *entrelaçado*, correlacionando a variável a ser medida o_j com a variável posição da partícula que representa o sistema medidor:

$$(\hat{I} \otimes \langle q(x)|)|\psi_f\rangle = |o_j\rangle\alpha^j\varphi(x - \lambda o_j), \quad (2.22)$$

onde $\varphi(x) = \langle q(x)|\varphi\rangle$ é a função de onda escrita na base das posições do sistema medidor. Este estado emaranhado é resultado da chamada *pré-medida*. Note que, neste estágio, o

⁴Maiores detalhes podem ser encontrados em [13], páginas 44-50.

estado final do subsistema físico é uma combinação linear de autoestados de \hat{O} . Somente depois de observarmos a posição do subsistema medidor é que ocorrerá o colapso da função de onda com uma probabilidade $P_k = |\alpha^k|^2$. Na chamada interpretação convencional de Copenhague, a observação do subsistema medidor pode ser realizado sem maiores problemas, por tratar-se de um sistema clássico. A moderna visão crítica dessa divisão arbitrária entre sistemas quânticos e clássicos e o papel da descoerência na compreensão destes importantes problemas fundamentais não serão abordados neste trabalho.

2.3 Medida Fraca e Valor Fraco

O conceito de *Medida Fraca* foi proposto originalmente por Aharonov, Albert e Vaidman em 1988 [1]. Entende-se por Medida Fraca, uma medida feita em um sistema físico onde o acoplamento entre o sistema físico e o aparato de medida é infinitesimalmente pequeno, permitindo assim, que o sistema a ser medido não altere de forma substancial o seu estado. O resultado de uma Medida Fraca foi batizado pelos autores de *valor fraco*, que pode ser entendido como uma generalização da idéia de valor esperado de um observável. O hamiltoniano de interação da medida fraca (*weak measurement*) é escrito como:

$$\hat{H}_{int}^{(w)}(t) = \epsilon \delta(t - t_0) \hat{O} \otimes \hat{P} \quad \text{com} \quad (\epsilon \rightarrow 0). \quad (2.23)$$

Seja o estado inicial do espaço produto $W = W_S \otimes W_M$ dado por $|\psi_{(i)}\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\varphi_{(i)}\rangle$. Utilizando as idéias desenvolvidas nas seções anteriores, o estado final do sistema medidor é descrito como segue:

$$|\varphi_{(f)}\rangle = (\langle\beta| \otimes \hat{I}) \hat{U}^{(w)}(t_i, t_f) (|\alpha\rangle \otimes |\varphi_{(i)}\rangle), \quad (2.24)$$

onde $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ são os estados pré e pós-selecionados do sistema a ser medido e $\hat{U}^{(w)}(t_i, t_f) = e^{-i\hat{O} \otimes \hat{P}}$ é o operador de evolução temporal para a interação fraca. Tomando ϵ suficientemente pequeno, podemos aproximar $\hat{U}^{(w)}(t_i, t_f)$, em primeira ordem em ϵ , por:

$$\hat{U}^{(w)}(t_i, t_f) \approx \hat{I} - i\epsilon \hat{O} \otimes \hat{P}. \quad (2.25)$$

Dessa forma, podemos escrever o estado final do sistema medidor como:

$$\begin{aligned} |\varphi_{(f)}\rangle &\approx (\langle\beta| \otimes \hat{I}) (\hat{I} - i\epsilon \hat{O} \otimes \hat{P}) (|\alpha\rangle \otimes |\varphi_{(i)}\rangle) \\ &= \langle\beta|\alpha\rangle ((1 - i\epsilon O_w \hat{P}) |\varphi_{(i)}\rangle) \\ &\approx \langle\beta|\alpha\rangle e^{-i\epsilon O_w \hat{P}} |\varphi_{(i)}\rangle \quad \text{com} \quad O_w = \frac{\langle\beta|\hat{O}|\alpha\rangle}{\langle\beta|\alpha\rangle}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Verifica-se pela expressão acima que, embora o estado inicial $|\varphi_{(i)}\rangle$ seja normalizado, o estado final $|\varphi_{(f)}\rangle$ não é, em geral, normalizado. O termo O_w é identificado como o valor fraco do observável \hat{O} e, como pode ser visto, pode assumir qualquer valor no plano complexo, diferentemente do valor esperado usual do observável \hat{O} que assume somente valores reais. Por esse motivo, o valor fraco também é entendido como sendo uma generalização do valor esperado usual da mecânica quântica. Para o caso especial em que $|\beta\rangle = |\alpha\rangle$ o valor fraco é o próprio valor esperado usual. A verificação experimental do valor fraco foi feita por meio de experimentos em ótica quântica [15].

O fato do valor fraco ser, em geral, um número complexo arbitrário torna a sua interpretação física bem mais sutil do que a interpretação usual de um valor esperado na MQ. Na literatura é mais comum encontrarmos interpretações somente para o caso em que O_w é um número real [1, 6]. Neste caso, podemos identificar $\hat{V}_{\epsilon O_w} = e^{-i\epsilon O_w \hat{P}}$ como o operador unitário de translações na base das posições que mencionamos anteriormente. Portanto, para os casos especiais onde o valor fraco é um número real, a diferença entre o valor esperado do observável posição da partícula do sistema medidor entre os estados final e inicial é dado por:

$$\Delta\hat{Q} = \langle\hat{Q}\rangle_{|\varphi_{(f)}\rangle} - \langle\hat{Q}\rangle_{|\varphi_{(i)}\rangle} = \epsilon O_w, \quad (2.27)$$

onde

$$\langle\hat{Q}\rangle_{|\varphi_{(i)}\rangle} = \langle\varphi_{(i)}|\hat{Q}|\varphi_{(i)}\rangle \quad \text{e} \quad \langle\hat{Q}\rangle_{|\varphi_{(f)}\rangle} = \frac{\langle\varphi_{(f)}|\hat{Q}|\varphi_{(f)}\rangle}{\langle\varphi_{(f)}|\varphi_{(f)}\rangle}. \quad (2.28)$$

Em um trabalho publicado recentemente, Jozsa faz uma análise para o caso mais geral, onde o valor fraco é um número complexo arbitrário [7]. Neste trabalho, Jozsa propõe que a variável a ser medida no sistema medidor seja um observável arbitrário \hat{M} no lugar de \hat{Q} . Sendo assim, utilizando o resultado 2.26, escrevemos a diferença entre o valor esperado de \hat{M} no estado final e o no estado inicial como:

$$\begin{aligned} \Delta\hat{M} = \epsilon[& (Im(O_w))(\langle\varphi_{(i)}|\{\hat{M}, \hat{P}\}|\varphi_{(i)}\rangle - 2\langle\varphi_{(i)}|\hat{P}|\varphi_{(i)}\rangle\langle\varphi_{(i)}|\hat{M}|\varphi_{(i)}\rangle) - \\ & - i(Re(O_w))\langle\varphi_{(i)}|[\hat{M}, \hat{P}]|\varphi_{(i)}\rangle]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Substituindo \hat{M} por \hat{Q} na equação acima, e usando a “representação de Heisenberg” para a evolução temporal no sistema medidor W_M , onde, diferentemente da “representação de Schrödinger”, as grandezas que evoluem no tempo são os observáveis e não os estados, obtemos:

$$\Delta\hat{Q} = \epsilon[(Re(O_w)) + m(Im(O_w))\frac{d}{dt}(\delta_{|\varphi_{(i)}\rangle}^2\hat{Q})], \quad (2.30)$$

onde $\delta_{|\varphi_{(i)}\rangle}^2 \hat{A} = \langle \varphi_{(i)} | \hat{A}^2 | \varphi_{(i)} \rangle - \langle \varphi_{(i)} | \hat{A} | \varphi_{(i)} \rangle^2$ é a usual *dispersão quadrática* (ou *incerteza quadrática*) de um observável arbitrário \hat{A} em um estado $|\varphi_{(i)}\rangle$. Para a escolha $\hat{M} = \hat{P}$ vemos, pela 2.29, que o termo que multiplica a parte real de O_w é nulo, e portanto:

$$\Delta \hat{P} = 2\epsilon(\text{Im}(O_w))\delta_{|\varphi_{(i)}\rangle}^2 \hat{P}. \quad (2.31)$$

Essa *assimetria* aparente mostrada nos dois últimos resultados, se dá pela escolha *assimétrica* do gerador de translações \hat{P} no hamiltoniano que modela o sistema de medida na equação 2.23. Segundo Jozsa, o resultado para $\Delta \hat{P}$ não é interessante devido ao fato de que o observável a ser medido comuta com o hamiltoniano de interação. O autor comenta ainda que o resultado de $\Delta \hat{P}$ reflete *apenas* a escolha dos estados pré e pós-selecionados e não um efeito quântico dinâmico da interação. Em nossa opinião, essa idéia não procede porque, pela equação 2.26, vemos que o valor fraco O_w depende, além é claro, do observável a ser medido \hat{O} , mas, também, refletindo o *formalismo de dois estados*, inerentemente dos estados pré e pós-selecionados $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$, da mesma maneira que o valor esperado usual $\langle \hat{O} \rangle_{|\psi\rangle} = \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle$ reflete as escolhas de \hat{O} e $|\psi\rangle$. Além do mais, notemos que, pelas equações 2.30 e 2.31, podemos inferir que não é possível extrair as partes real e imaginária de O_w com a medida de $\Delta \hat{Q}$ somente, pois estes estão absorvidos dentro de um mesmo número real. É preciso medir necessariamente $\Delta \hat{P}$, além de conhecermos $\frac{d}{dt}(\delta_{|\varphi_{(i)}\rangle}^2 \hat{Q})$ e $\delta_{|\varphi_{(i)}\rangle}^2 \hat{P}$, para podermos calcular ambos a parte real e imaginária de O_w .

Em um trabalho publicado recentemente [8], propomos uma abordagem mais geral do problema, onde utilizamos o método dos estados coerentes para descrever o espaço de fase do sistema medidor. Os estados coerentes do oscilador harmônico foram introduzidos por Schrödinger em 1926, mas foi Glauber quem melhor desenvolveu esse conceito, aplicando essa estrutura matemática ao estudo da quantização do campo eletromagnético e à teoria dos lasers, já que o primeiro pode ser descrito como uma soma de infinitos osciladores harmônicos [16], criando assim, todo um ferramental novo para a ótica quântica. Seja o seguinte operador unitário:

$$\hat{D}[p, q] = e^{i(p\hat{Q}-q\hat{P})}. \quad (2.32)$$

Então, o estado coerente $|p, q\rangle$, que representa um ponto no espaço de fase com coordenadas de posição e momento q e p , é definido como:

$$|p, q\rangle = \hat{D}[p, q]|0\rangle, \quad (2.33)$$

onde o estado fundamental $|0\rangle \equiv |0, 0\rangle$ é chamado de estado de referência. O operador $\hat{D}[p, q]$ é denominado de operador de deslocamento. Podemos implementar a seguinte

associação do plano de fase com o plano complexo:

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(p + iq). \quad (2.34)$$

Então, utilizando as equações $\hat{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$ e $\hat{P} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$, onde \hat{a} e \hat{a}^\dagger são os operadores de criação e aniquilação, podemos escrever o operador deslocamento da seguinte maneira:

$$\hat{D}[p, q] = \hat{D}[z] = e^{\hat{\tau}(z)} = e^{z\hat{a}^\dagger - \bar{z}\hat{a}}. \quad (2.35)$$

onde $\hat{\tau}(z) = z\hat{a}^\dagger - \bar{z}\hat{a}$ pode ser considerado como *gerador de translações* no plano de fase.

Pelo lema abaixo de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) [17]:

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \quad (2.36)$$

podemos mostrar que no caso especial em que $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]]$, segue que:

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}}e^{\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]}. \quad (2.37)$$

Fazendo $\hat{A} = z\hat{a}^\dagger$, $\hat{B} = -\bar{z}\hat{a}$ e utilizando a relação de comutação $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{I}$, que pode ser facilmente calculada utilizando as equações que relacionam \hat{a} e \hat{a}^\dagger com \hat{Q} e \hat{P} , vemos que, a partir de 2.37, o operador deslocamento pode ser escrito como:

$$\hat{D}[z] = e^{-\frac{z\bar{z}}{2}}e^{z\hat{a}^\dagger}e^{-\bar{z}\hat{a}}. \quad (2.38)$$

Dessa maneira, podemos definir o estado coerente $|p, q\rangle$ em termos dos operadores de criação e aniquilação:

$$|p, q\rangle \equiv |z\rangle = e^{-\frac{z\bar{z}}{2}}e^{z\hat{a}^\dagger}|0\rangle, \quad (2.39)$$

A definição acima para o estado coerente é equivalente a definir $|z\rangle$ como autoestado do operador de aniquilação com autovalor complexo z :

$$\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle \quad (2.40)$$

Tomemos o seguinte hamiltoniano de interação entre o sistema a ser medido e o sistema medidor:

$$\hat{H}_{int}^{(w)}(t) = \epsilon\delta(t - t_0)\hat{O} \otimes \hat{g}, \quad \text{com} \quad (\epsilon \rightarrow 0), \quad (2.41)$$

onde \hat{g} é um observável qualquer que representa o gerador infinitesimal de algum grupo de transformações do sistema medidor. Dessa maneira, podemos estabelecer um paralelo com os resultados de Josza. Obtemos explicitamente:

$$\begin{aligned} \Delta\hat{M} = & \epsilon[(Im(O_w))(\langle\varphi_{(i)}|\{\hat{M}, \hat{g}\}|\varphi_{(i)}\rangle - 2\langle\varphi_{(i)}|\hat{g}|\varphi_{(i)}\rangle\langle\varphi_{(i)}|\hat{M}|\varphi_{(i)}\rangle) - \\ & - i(Re(O_w))\langle\varphi_{(i)}|[\hat{M}, \hat{g}]|\varphi_{(i)}\rangle]. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Se adotarmos $\hat{M} = \hat{g}$, encontramos o análogo da equação 2.31:

$$\Delta\hat{g} = 2\epsilon(\text{Im}(O_w))\delta_{|\varphi_{(i)}}^2\hat{g}. \quad (2.43)$$

Para o segundo observável, devemos escolher um operador hermitiano que *não comute* com \hat{g} . A idéia é escolher um observável que seja “conjugado” a \hat{g} em algum sentido, da mesma forma que as variáveis canonicamente conjugadas \hat{Q} e \hat{P} . Reparem que cada um desse último par de observáveis é o gerador de translações dos autoestados do outro. De forma semelhante, sugerimos o uso do operador número $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ como \hat{g} que, como veremos, é o gerador de rotações euclidianas no plano de fase. Por rotação euclidiana no espaço de fase, queremos dizer uma transformação linear que preserva a métrica usual do \mathfrak{R}^2 , ou seja, uma transformação que preserva a circunferência $x^2 + y^2 = 1$. A transformação linear que presta esse serviço é conhecida como *Transformada Fracionária de Fourier*, que foi desenvolvida por Namias em 1980, e desde então, vem sendo largamente utilizada em processamento de sinais, ótica e mecânica quântica [18, 19]. O operador Transformada Fracionária de Fourier de Namias é definido da seguinte forma:

$$\hat{F}_\theta = e^{i\theta\hat{N}}, \quad (2.44)$$

onde \hat{N} é o operador número mencionado anteriormente.

Podemos então estudar como o operador \hat{F}_θ age sobre um estado coerente $|z\rangle$.

Para tal, consideremos a relação:

$$e^{i\theta\hat{N}}(\hat{a}^\dagger)^k e^{-i\theta\hat{N}} = (e^{i\theta}\hat{a}^\dagger)^k, \quad (2.45)$$

que pode ser verificada por meio da fórmula 2.36 e das relações de comutação $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$ e $[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$. De posse de 2.45 podemos calcular a seguinte relação:

$$\begin{aligned} e^{i\theta\hat{N}} e^{z\hat{a}^\dagger} e^{-i\theta\hat{N}} &= e^{i\theta\hat{N}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z\hat{a}^\dagger)^k}{k!} e^{-i\theta\hat{N}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} e^{i\theta\hat{N}} (\hat{a}^\dagger)^k e^{-i\theta\hat{N}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} (e^{i\theta}\hat{a}^\dagger)^k \\ &= e^{z\eta\hat{a}^\dagger}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

onde $\eta = e^{i\theta}$. Assim, dado um estado coerente $|z\rangle$, a forma como \hat{F}_θ age sobre o mesmo

é:

$$\begin{aligned}
\hat{F}_\theta|z\rangle &= e^{i\theta\hat{N}}|z\rangle = e^{i\theta\hat{N}}e^{-\frac{z\bar{z}}{2}}e^{z\hat{a}^\dagger}|0\rangle \\
&= e^{-\frac{z\bar{z}}{2}}e^{i\theta\hat{N}}e^{z\hat{a}^\dagger}e^{-i\theta\hat{N}}|0\rangle \\
&= e^{-\frac{\eta\bar{\eta}z\bar{z}}{2}}e^{z\eta\hat{a}^\dagger}|0\rangle \\
&= |\eta z\rangle = |e^{i\theta}z\rangle.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

O resultado acima nos mostra claramente que o operador Transformada Fracionária de Fourier de Namias implementa uma rotação no espaço de fase de um ângulo θ , que de fato, preserva a área.

Escolhemos o operador \hat{a} para fazer par com \hat{N} , embora ele não seja um observável por não ser hermitiano. Isso, porque podemos sempre decompor um operador \hat{B} arbitrário na forma

$$\hat{B} = \hat{C} + i\hat{D}, \tag{2.48}$$

com \hat{C} e \hat{D} hermitianos [6]. Assim, podemos definir o valor esperado de \hat{B} em um estado arbitrário $|\psi\rangle$ como:

$$\langle\hat{B}\rangle_{|\psi\rangle} = \langle\hat{C}\rangle_{|\psi\rangle} + i\langle\hat{D}\rangle_{|\psi\rangle}. \tag{2.49}$$

Note também que, pela linearidade de \hat{M} na equação 2.42, temos que:

$$\Delta\hat{B} = \Delta\hat{C} + i\Delta\hat{D}. \tag{2.50}$$

Dessa maneira, podemos adotar \hat{a} como o segundo operador “conjugado” a \hat{N} , já que $\hat{F}_\theta = e^{i\theta\hat{N}}$ promove rotações no plano de fase parametrizado por $|z\rangle$, enquanto que esse mesmo vetor é autoestado de \hat{a} consistindo em uma analogia com o que ocorre com \hat{Q} e \hat{P} . Com essa escolha de $\hat{M} = \hat{a}$, não é difícil chegar ao seguinte resultado para $\Delta\hat{a}$:

$$\Delta\hat{a} = \epsilon[-iO_w\langle\varphi_{(i)}|\hat{a}|\varphi_{(i)}\rangle + 2Im(O_w)(\langle\varphi_{(i)}|\hat{N}\hat{a}|\varphi_{(i)}\rangle - \langle\varphi_{(i)}|\hat{N}|\varphi_{(i)}\rangle\langle\varphi_{(i)}|\hat{a}|\varphi_{(i)}\rangle)]. \tag{2.51}$$

Infelizmente, na equação acima, o segundo termo do lado direito não pode ser identificado com a dispersão quadrática de \hat{a} da maneira que Josza faz com \hat{Q} na equação 2.30. Por outro lado, em um contexto de ótica quântica, a escolha de um estado coerente $|\varphi_{(i)}\rangle = |z\rangle$ como estado inicial parece-nos ser uma opção apropriada. Nesse caso, há uma grande simplificação da equação acima, onde obtemos:

$$\begin{aligned}
\Delta\hat{a} &= -i\epsilon z O_w \\
&= \epsilon|z||O_w|e^{i(\theta_z + \theta_w - \pi/2)},
\end{aligned} \tag{2.52}$$

onde $z = |z| e^{i\theta_z}$ e $O_w = |O_w| e^{i\theta_w}$. Ao fazermos a escolha conveniente de fase $\theta_z = \pi/2$ e lembrando das equações $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{Q} + i\hat{P})$ e 2.50, obtemos um par de equações bem simétricas e elegantes para $\Delta\hat{Q}$ e $\Delta\hat{P}$:

$$\Delta\hat{Q} = \epsilon\sqrt{2}|z| \operatorname{Re}(O_w) \quad (2.53)$$

e

$$\Delta\hat{P} = \epsilon\sqrt{2}|z| \operatorname{Im}(O_w). \quad (2.54)$$

Essas equações, diferentemente das encontradas por Jozsa, são independentes das dispersões quadráticas e suas derivadas temporais. Um atrativo adicional para esse resultado em comparação às equações de Jozsa é que, podemos, em princípio, ajustar arbitrariamente o “tamanho” de $\epsilon|z|$, independentemente de quão pequeno seja ϵ , ao prepararmos um estado coerente inicial $|\varphi_{(i)}\rangle = |z\rangle$ com um módulo suficientemente “grande”. Isso pode ser de importância prática para a implementação óptica do valor fraco, uma vez que $|z|$ para um modo quantizado do campo eletromagnético nada mais é do que o número médio de fótons neste modo [20]. Aumentando então o número médio de fótons (equivalente a aumentar $|z|$) poderíamos, em princípio, reduzir drasticamente o tamanho do ensemble, talvez até mesmo medir o valor fraco com um único experimento.

3 A Geometria de Valores Fracos

Neste capítulo, procuramos compreender melhor o conceito relativamente novo de valor fraco. Para tanto, examinamos criticamente as idéias de Tamate e colaboradores [10] na investigação de alguns aspectos geométricos no que diz respeito ao valor fraco. Neste artigo, Tamate *et al* introduzem uma relação entre determinadas estruturas geométricas do $\mathbb{C}\mathbb{P}(n)$ (espaço de raios), o processo de medida ideal de von Neumann e o processo de medida fraca via pós-seleção, proveniente do formalismo de dois estados da mecânica quântica.

3.1 Sistema medidor com base bidimensional

Começamos tratando o caso especial onde o sistema medidor, representado pelo espaço de estados $W_M^{(2)}$, possui dimensão dois (1 qubit). Mais a frente, trataremos o caso onde o sistema medidor possui base com potências do contínuo. No próximo tópico faremos uma revisão sobre representações de sistemas de dois níveis na mecânica quântica, em particular, a representação via esfera de Bloch.

3.1.1 Representação de sistemas de dois níveis (esfera de Bloch)

Seja W^{n+1} um espaço vetorial hermitiano complexo (espaço de Hilbert) de dimensão $n + 1$, e $\{|u_\sigma\rangle\}$ ($\sigma = 0, 1, \dots, n$) uma base ortonormal desse espaço. O produto interno hermitiano, denotado por (\cdot, \cdot) , entre dois estados $|\psi\rangle$ e $|\varphi\rangle$, pertencentes a esse espaço, é definido como sendo anti-linear no primeiro fator e linear no segundo, ou seja, $(|\psi\rangle, |\varphi\rangle) = |\psi\rangle^\dagger |\varphi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle$, onde a operação \dagger mapeia vetores do espaço W^{n+1} em vetores do espaço dual \overline{W}^{n+1} . Um importante subconjunto de W^{n+1} é o conjunto formado pelos vetores normalizados, os quais são usados para representar estados físicos.

Um estado normalizado de W^{n+1} é descrito, utilizando a base citada acima, por

$$|\psi\rangle = |u_\sigma\rangle\langle u^\sigma|\psi\rangle = |u_\sigma\rangle\psi^\sigma \equiv \begin{pmatrix} \psi^0 \\ \psi^1 \\ \vdots \\ \psi^n \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Logo, um estado qualquer W^{n+1} é descrito por $n+1$ amplitudes complexas ψ^σ e, portanto, o espaço de estados quânticos W^{n+1} é isomorfo ao espaço vetorial complexo \mathbb{C}^{n+1} . Um estado normalizado de W^{n+1} está sujeito a seguinte condição $\bar{\psi}_\sigma\psi^\sigma = 1$. Verifica-se por essa última expressão que o conjunto de estados normalizados de W^{n+1} pode ser mapeado em uma esfera de raio unitário $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$.

É sabido que dois estados normalizados (não nulos) ($|\psi\rangle$ e $|\varphi\rangle$) que diferem somente por uma fase, representam o mesmo estado físico. De fato, dizemos que $|\psi\rangle \sim |\varphi\rangle$ ¹ se $|\psi\rangle = e^{i\alpha}|\varphi\rangle$ para algum $\alpha \in \mathfrak{R}$. A existência dessa relação de equivalência naturalmente particiona o espaço de estados em subconjuntos denominados classes de equivalência. O conjunto dessas classes de equivalência é denominado espaço de raios ou ainda espaço projetivo de W^{n+1} e, portanto, é isomorfo ao espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}(n)$. Um ponto no espaço de raios ou no $\mathbb{CP}(n)$ é, então, um conjunto de estados equivalentes, ou seja, representa todos os estados $e^{i\alpha}|\psi\rangle$ tal que $0 \leq \alpha < 2\pi$, para algum $|\psi\rangle \in S^{2n+1}$. Designamos por Π a operação responsável por mapear estados pertencentes ao subespaço S^{2n+1} em pontos no subespaço $\mathbb{CP}(n)$, ou seja, $\Pi : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CP}(n)$. As coordenadas utilizadas em 3.1 ($\psi^0\psi^1\dots\psi^n$) não são boas coordenadas para $\mathbb{CP}(n)$, pois representam de forma ambígua a classe de equivalência, porque são $n+1$ coordenadas complexas para um espaço complexo n -dimensional. Convém definir então as coordenadas projetivas de $\mathbb{CP}(n)$ da seguinte forma $\xi^i = \frac{\psi^i}{\psi^0}$ ($i = 1, \dots, n$), com a condição $\psi^0 \neq 0$.

Feita essa breve introdução sobre a geometria do espaço de estados quânticos, analisemos o caso onde $n = 1$, ou seja, o espaço de estados é bi-dimensional. Nesse caso, o espaço projetivo é o $\mathbb{CP}(1)$, que é topologicamente equivalente a uma esfera² S^2 . De fato, se tomarmos a projeção estereográfica padrão $\xi = \tan(\theta/2)e^{i\varphi}$, mapeamos de forma contínua e diferenciável, pontos de $\mathbb{CP}(1)$ em S^2 . Logo, dado o estado normalizado

¹ $|\psi\rangle$ é equivalente a $|\varphi\rangle$

²Não confundir com o subespaço dos estados normalizados S^{2n+1}

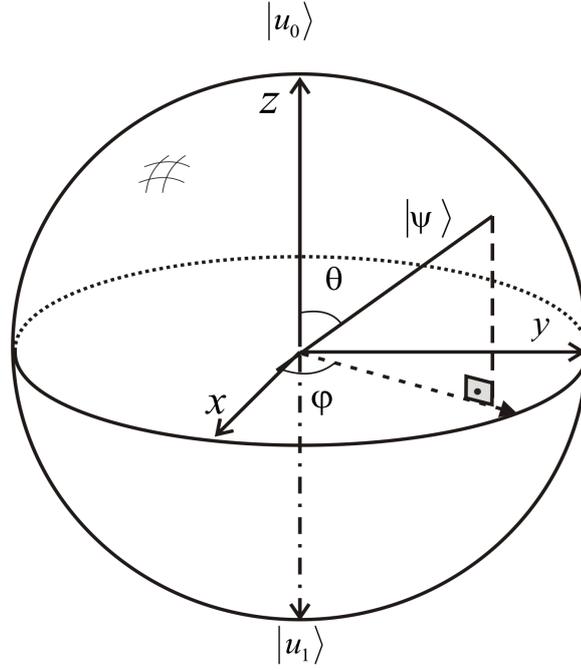


Figura 3.1: Esfera de Bloch

$|\psi\rangle = |u_0\rangle\psi^0 + |u_1\rangle\psi^1 \sim \frac{1}{\sqrt{1+|\xi|^2}}(|u_0\rangle + |u_1\rangle\xi)$, podemos representá-lo em uma esfera por:

$$|\psi\rangle = |\theta, \varphi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|u_0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}|u_1\rangle, \quad (3.2)$$

onde θ (colatitude) e φ (azimute) são as coordenadas esféricas usuais e, portanto $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Analisando a expressão 3.2, concluímos que o pólo norte representa a projeção do estado $|u_0\rangle$ e o pólo sul do estado $|u_1\rangle$. Pontos antípodas na esfera representam a projeção de estados ortogonais entre si.

3.1.2 Interação entre o sistema medidor e o sistema a ser medido

Seja um sistema físico composto por dois subsistemas e representado por $W = W_S \otimes W_M^{(2)}$. O espaço de estados W_S representa o sistema a ser medido e possui dimensão arbitrária. Já o espaço de estados $W_M^{(2)}$ representa o sistema medidor e, em primeira análise, iremos supor um sistema de dois níveis. Nota-se que utilizamos aqui o modelo de medida proposto por von Neumann [9, 6], onde o aparato de medida é tratado como sendo um sistema quântico.

Consideremos o estado inicial (não-emaranhado) do sistema composto como

sendo $|\psi_{(i)}\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\varphi_{(i)}\rangle$ e $\{|v_k\rangle\}$ ($k = 0, 1$) a base de momentos finitos que expande $W_M^{(2)}$. Assim, o observável momento \hat{P} do segundo subsistema pode ser escrito da forma $\hat{P} = |v_k\rangle p_k \langle v_k|$, onde usamos aqui a convenção da soma de Einstein para índices repetidos. Para modelarmos a interação entre os dois subsistemas, utilizaremos o hamiltoniano de interação instantânea $\hat{H} = \lambda \delta(t - t_0) \hat{O} \otimes \hat{P}$. Logo, o estado do sistema em um instante $t_f > t_0 > t_i$ é descrito por:

$$\begin{aligned} |\psi_{(f)}\rangle &= \hat{U}(t_i, t_f) |\psi_{(i)}\rangle = e^{-i\lambda \hat{O} \otimes \hat{P}} |\alpha\rangle \otimes |\varphi_{(i)}\rangle \\ &= e^{-i\lambda \hat{O} \otimes \hat{P}} |\alpha\rangle \otimes |v_k\rangle \varphi^k \\ &= \sum_k e^{-i\lambda p_k \hat{O}} |\alpha\rangle \otimes |v_k\rangle \varphi^k, \end{aligned}$$

onde nota-se que da primeira para a segunda linha foi feita uma expansão de $|\varphi_{(i)}\rangle \in W_M^{(2)}$ na base de momentos finitos $\{|v_k\rangle\}$. Fazendo a seguinte definição $|A_k\rangle = e^{-i\lambda p_k \hat{O}} |\alpha\rangle$, podemos reescrever o estado do sistema composto no instante t_f como:

$$|\psi_{(f)}\rangle = \sum_k |A_k\rangle \otimes |v_k\rangle \varphi^k \quad (3.3)$$

Esse estado é, em geral, um estado emaranhado ou entrelaçado, e os estados $|A_k\rangle \in W_S$ são estados indexados pelos vetores da base de $W_M^{(2)}$. Podemos associar ao estado $|\psi_{(f)}\rangle$ uma matriz densidade de W_S em $W_M^{(2)}$ por meio da operação conhecida como traço parcial, ou seja, o estado do sistema $W_M^{(2)}$ pode ser representado pela seguinte matriz densidade:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{|\psi_{(f)}\rangle}^{(2)} &= \text{tr}_1 \left\{ \sum_{k,j} (|A_k\rangle \otimes |v_k\rangle \varphi^k) (\langle A^j| \otimes \bar{\varphi}_j \langle v^j|) \right\} \\ &= \sum_{k,j} |v_k\rangle \varphi^k \langle A^j| A_k \rangle \bar{\varphi}_j \langle v^j|, \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde a notação utilizada aqui, apesar de parecer carregada, tem o intuito de deixar as expressões mais compreensíveis. O sobrescrito (2) em $\hat{\rho}$ significa que essa matriz densidade representa o estado do sistema $W_M^{(2)}$ e o subscrito $|\psi_{(f)}\rangle$ nos diz que $\hat{\rho}$ é a matriz densidade associada ao estado $|\psi_{(f)}\rangle$.

De posse da matriz densidade 3.4, podemos, seguindo Tamate, calcular a probabilidade p de encontrarmos o segundo subsistema no estado de referência $|\theta = \pi/2, \varphi = 0\rangle$:

$$\begin{aligned} p &= \text{tr} \left\{ \hat{\rho}_{|\psi_{(f)}\rangle}^{(2)} |\pi/2, 0\rangle \langle \pi/2, 0| \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \langle A^0| A_1 \rangle \varphi^1 \bar{\varphi}_0 + \langle A^1| A_0 \rangle \varphi^0 \bar{\varphi}_1 \right\} \end{aligned}$$

Escrevendo $|\varphi_{(i)}\rangle = \cos(\theta/2)|v_0\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\varphi}|v_1\rangle$ e $\langle A^0|A_1\rangle = |\langle A^0|A_1\rangle|e^{-i\beta}$, a expressão acima toma a forma

$$\begin{aligned} p(\beta) &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + |\langle A^0|A_1\rangle| \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \cos(\varphi - \beta) \right\} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} |\langle A^0|A_1\rangle| \sin \theta \cos(\varphi - \beta) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Para um dado θ fixo, essa probabilidade é maximizada quando $\varphi = \beta$. Isso indica uma maneira de medirmos a chamada fase geométrica $\beta = \arg(\langle A^1|A_0\rangle)$ entre os dois estados indexados $|A_0\rangle$ e $|A_1\rangle \in W_S$. Essa definição de fase geométrica entre esses dois estados foi proposta originalmente por Pancharatnam, em 1956 [21], em um contexto de óptica, e redescoberto por Berry em 1984 [22] ao estudar a evolução cíclica e adiabática de sistemas quânticos. Mais tarde, precisamente em 1987, a estrutura geométrica dessa fase foi plenamente esclarecida por Anandan e Aharonov [23].

3.1.3 Mudança de fase devido a pós-seleção

Dado o estado $|\psi_{(f)}\rangle$ calculado logo após a interação dos dois subsistemas, realizamos uma pós-seleção de um estado $|\beta\rangle$ no subsistema W_S . Esse procedimento induz uma mudança de fase conforme veremos mais a frente. O processo de pós-seleção é descrito da forma:

$$\begin{aligned} |\psi_{(f)}^p\rangle &= \sum_k C(|\beta\rangle\langle\beta| \otimes \hat{I})(|A_k\rangle \otimes |v_k\rangle \varphi^k) \\ &= C|\beta\rangle \otimes \sum_k \langle\beta|A_k\rangle \varphi^k |v_k\rangle, \end{aligned}$$

onde C é a constante de normalização, já que o estado final $|\psi_{(f)}^p\rangle$ devido a pós-seleção é, geralmente, não normalizado. Como podemos verificar pela expressão acima, o estado do sistema após a pós-seleção é um estado não-entrelaçado, de maneira que se tomarmos o traço parcial do operador $\hat{\rho}_{|\psi_{(f)}^p\rangle} = |\psi_{(f)}^p\rangle\langle\psi_{(f)}^p|$ sobre o primeiro subsistema, obtemos um estado puro que representa o segundo subsistema (aparado de medida). Efetuando esse procedimento, obtemos o seguinte estado puro:

$$|\varphi_{(f)}\rangle = C \sum_k \langle\beta|A_k\rangle \varphi^k |v_k\rangle, \quad \text{com} \quad |C|^2 = \sum_k \frac{1}{|\varphi^k \langle A^k|\beta\rangle|^2}. \quad (3.6)$$

Calculando novamente a probabilidade de encontrarmos o segundo subsistema no estado $|\pi/2, 0\rangle$, dado que o mesmo se encontra no estado descrito por 3.6, obtemos:

$$\begin{aligned} p &= |\langle\pi/2, 0|\varphi_{(f)}\rangle|^2 \\ &= \frac{C^2}{2} \left\{ |\langle\beta|A_0\rangle|^2 \cos^2(\theta/2) + |\langle\beta|A_1\rangle|^2 \sin^2(\theta/2) + \sin \theta |\langle\beta|A_0\rangle\langle\beta|A_1\rangle| \cos(\varphi_p - \beta_0 - \beta_1) \right\}, \end{aligned}$$

onde usamos as seguintes definições

$$\langle \beta | A_0 \rangle = |\langle \beta | A_0 \rangle| e^{i\beta_0} \quad \text{e} \quad \langle \beta | A_1 \rangle = |\langle \beta | A_1 \rangle| e^{-i\beta_1}.$$

Analisando a expressão acima para a probabilidade, verifica-se que a mesma é máxima, para um dado θ fixo, quando $\varphi_p = \beta_0 + \beta_1 = \arg(\langle \beta | A_0 \rangle \langle A^1 | \beta \rangle)$. Isso implica que devido a pós-seleção há uma mudança de fase dada pela diferença entre φ_p e φ (calculado na seção anterior).

$$\Theta = \varphi_p - \varphi = \arg(\langle A^1 | \beta \rangle \langle \beta | A_0 \rangle \langle A^0 | A_1 \rangle) \quad (3.7)$$

A quantidade dada por 3.7 é um invariante geométrico, no sentido que o mesmo independe do fator de fase de cada um dos estados $|A_0\rangle$, $|A_1\rangle$ e $|\beta\rangle$. De fato, essa quantidade representa a fase geométrica intrínseca adquirida por um estado que percorre uma curva geodésica fechada definida pela projeção desses três estados no espaço de raios.

Analisando o caso especial onde o sistema representado por W_S tem dimensão dois, concluímos que a quantidade dada por 3.7 é proporcional à área do triângulo geodésico formado pelos três kets ($|A_0\rangle$, $|A_1\rangle$ e $|\beta\rangle$) no espaço de raios ou espaço projetivo de W_S . Para W_S bidimensional, é sabido que o espaço de raios é uma esfera (S^2) denominada esfera de Bloch. De modo geral, em um sistema de dois níveis, o operador densidade pode ser parametrizado como

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(\vec{r}) &= \frac{1}{2}(\hat{I} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{x^1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \frac{x^3}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & 1 - x^3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde o vetor \vec{r} está contido na esfera de Bloch e, portanto, $|\vec{r}| \leq 1$ (já que a esfera de Bloch possui raio 1). Os estados puros são pontos sobre a superfície da esfera ($|\vec{r}| = 1$), já os estados mistos (impuros) são pontos internos ($|\vec{r}| < 1$). Um estado maximamente misto é representado pelo ponto no centro da esfera ($|\vec{r}| = 0$). Consideremos então três estados puros ($|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ e $|\psi_3\rangle$) pertencentes a um espaço de dimensão dois. O produto interno entre esses três estados como apresentado em 3.7, facilmente pode ser reescrito da seguinte forma:

$$(\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \langle \psi_2 | \psi_3 \rangle \langle \psi_3 | \psi_1 \rangle) = \text{tr}(\hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2 \hat{\rho}_3), \quad (3.9)$$

onde $\hat{\rho}_1$, $\hat{\rho}_2$ e $\hat{\rho}_3$ são os operadores densidade associados aos estados $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ e $|\psi_3\rangle$, respectivamente. Escrevendo esses operadores na forma parametrizada 3.8, a expressão 3.9 fica

$$\text{tr}(\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2\hat{\rho}_3) = \frac{1}{4}\{1 + \vec{r}_1\cdot\vec{r}_2 + \vec{r}_2\cdot\vec{r}_3 + \vec{r}_3\cdot\vec{r}_1 + i\vec{r}_1\cdot(\vec{r}_2 \times \vec{r}_3)\}. \quad (3.10)$$

Logo, o invariante geométrico $\Theta' = \arg(\langle\psi_1|\psi_2\rangle\langle\psi_2|\psi_3\rangle\langle\psi_3|\psi_1\rangle)$ pode ser descrito através dos parâmetros \vec{r}_1 , \vec{r}_2 e \vec{r}_3 , ou seja:

$$\Theta' = \arg(\langle\psi_1|\psi_2\rangle\langle\psi_2|\psi_3\rangle\langle\psi_3|\psi_1\rangle) = \arg\{\text{tr}(\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2\hat{\rho}_3)\} = \arctan \left\{ \frac{\vec{r}_1\cdot(\vec{r}_2 \times \vec{r}_3)}{1 + \vec{r}_1\cdot\vec{r}_2 + \vec{r}_2\cdot\vec{r}_3 + \vec{r}_3\cdot\vec{r}_1} \right\} \quad (3.11)$$

O termo à direita da expressão acima é bem conhecido e representa metade do ângulo sólido (Ω) do triângulo geodésico formado pelos vértices dos vetores \vec{r}_1 , \vec{r}_2 e \vec{r}_3 na esfera de Bloch. Como a esfera de Bloch tem raio unitário, identificamos o invariante Θ em 3.7, quando W_S tem dimensão dois, como sendo metade da área “orientada” do triângulo geodésico formado pela projeção dos estados $|A_0\rangle$, $|A_1\rangle$ e $|\beta\rangle$ no espaço de raios (esfera de Bloch).

$$\Theta = \arg(\langle A^0|\beta\rangle\langle\beta|A_1\rangle\langle A^1|A_0\rangle) = -\frac{\Omega}{2} \quad (3.12)$$

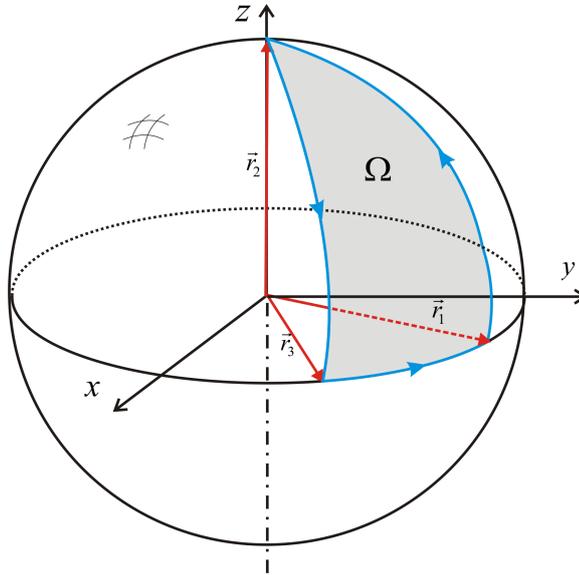


Figura 3.2: Área do triângulo geodésico formado pelos vértices de \vec{r}_1 , \vec{r}_2 e \vec{r}_3

3.2 Sistema medidor com base contínua

Depois da análise feita acima quando o sistema medidor possui base bidimensional, faremos agora o estudo do caso quando a base do sistema medidor possui potência do contínuo.

3.2.1 Interação entre o sistema medidor e o sistema a ser medido

Tomemos um sistema físico composto por dois subsistemas e representado por $W = W_S \otimes W_M^{(\infty)}$, onde, como anteriormente, W_S representa o sistema a ser medido e $W_M^{(\infty)}$ representa o sistema medidor. Porém, o sistema medidor possui, agora, dimensão infinita e é gerado pelas bases de posição $\{|q(x)\rangle\}$ e momentos $\{|p(y)\rangle\}$, com $-\infty < x, y, < +\infty$. Conforme mencionado no capítulo anterior, essas bases satisfazem as condições de completudeza e ortonormalização 2.10.

Consideremos o estado inicial do sistema composto como sendo $|\psi_{(i)}\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\varphi_{(i)}\rangle$ e o Hamiltoniano de interação instantânea modelado por $\hat{H} = \lambda\delta(t - t_0)\hat{O} \otimes \hat{P}$, com $\hat{P} = \int_{-\infty}^{+\infty} y|p(y)\rangle\langle p(y)|dy$. Logo, o estado do sistema em um instante $t_f > t_0 > t_i$ é descrito por:

$$\begin{aligned} |\psi_{(f)}\rangle &= \hat{U}(t_i, t_f)|\psi_{(i)}\rangle = e^{-i\lambda\hat{O}\otimes\hat{P}}|\alpha\rangle \otimes |\varphi_{(i)}\rangle \\ &= e^{-i\lambda\hat{O}\otimes\hat{P}}|\alpha\rangle \otimes \int_{-\infty}^{+\infty} dy|p(y)\rangle\langle p(y)|\varphi_{(i)}\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-i\lambda y\hat{O}}|\alpha\rangle \otimes |p(y)\rangle\varphi_p(y), \end{aligned}$$

onde $\varphi_p(y) = \langle p(y)|\varphi_{(i)}\rangle$ é a função de onda associada ao estado $|\varphi_{(i)}\rangle$ descrita na base dos momentos. Fazendo a seguinte definição $|A(y)\rangle = e^{-i\lambda y\hat{O}}|\alpha\rangle$, podemos reescrever $|\psi_{(f)}\rangle$ como:

$$|\psi_{(f)}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dy |A(y)\rangle \otimes |p(y)\rangle\varphi_p(y), \quad (3.13)$$

onde os estados $|A(y)\rangle$ são estados indexados pela variável contínua $y \in \mathfrak{R}$.

De forma similar ao procedimento adotado na seção anterior para estados discretos, podemos calcular a diferença de fase entre dois estados infinitamente próximos

$|A(y)\rangle$ e $|A(y + dy)\rangle$. Essa diferença de fase é dada por

$$\begin{aligned}
\arg(\langle A(y)|A(y + dy)\rangle) &= \arg(\langle \alpha|e^{i\lambda y\hat{O}}e^{-i\lambda(y+dy)\hat{O}}|\alpha\rangle) \\
&= \arg(\langle \alpha|e^{-i\lambda dy\hat{O}}|\alpha\rangle) \\
&\approx \arg(\langle \alpha|(\hat{I} - i\lambda dy\hat{O})|\alpha\rangle) \\
&\approx -\lambda dy\langle \hat{O}\rangle_{|\alpha\rangle},
\end{aligned} \tag{3.14}$$

onde $\langle \hat{O}\rangle_{|\alpha\rangle} = \langle \alpha|\hat{O}|\alpha\rangle$ é o valor esperado do observável a ser medido \hat{O} no estado $|\alpha\rangle$.

Por outro lado, podemos calcular a diferença entre o valor esperado do observável posição \hat{Q} da partícula do sistema medidor entre os estados final e inicial. Veremos que essa diferença também é proporcional ao valor esperado do observável \hat{O} e, portanto, podemos relacionar a diferença de fase entre dois estados infinitamente próximos com a diferença entre o valor esperado do observável posição \hat{Q} . Conforme já mencionado, o estado do sistema composto logo após a interação é $|\psi_{(f)}\rangle = e^{-i\lambda\hat{O}\otimes\hat{P}}|\alpha\rangle \otimes |\varphi_{(i)}\rangle$. Seja $\{|o_j\rangle\}$ ($j = 0..N - 1$) os auto estados do operador $\hat{O} \in W_S$, ou seja, $\hat{O}|o_j\rangle = o^j|o_j\rangle$. Sendo assim, $\{|o_j\rangle\}$ forma uma base completa de W_S . Logo, podemos descrever o estado do sistema composto no instante t_f pelo seguinte operador densidade

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{|\psi_{(f)}\rangle} &= |\psi_{(f)}\rangle\langle\psi_{(f)}| = \left\{ e^{-i\lambda\hat{O}\otimes\hat{P}}|o_j\rangle\langle o^j|\alpha\rangle \otimes |\varphi_{(i)}\rangle \right\} \left\{ \langle\alpha|o_k\rangle\langle o^k| \otimes \langle\varphi_{(i)}|e^{i\lambda\hat{O}\otimes\hat{P}} \right\} \\
&= \left\{ |o_j\rangle \otimes \alpha^j e^{-i\lambda o_j\hat{P}} |\varphi_{(i)}\rangle \right\} \left\{ \langle o^k| \otimes \langle\varphi_{(i)}|e^{i\lambda o_k\hat{P}} \bar{\alpha}_k \right\} \\
&= |o_j\rangle\langle o^k| \otimes \alpha^j e^{-i\lambda o_j\hat{P}} |\varphi_{(i)}\rangle\langle\varphi_{(i)}|e^{i\lambda o_k\hat{P}} \bar{\alpha}_k \\
&= |o_j\rangle\langle o^k| \otimes \alpha^j \hat{V}_{\lambda o_j}^\dagger |\varphi_{(i)}\rangle\langle\varphi_{(i)}| \hat{V}_{\lambda o_k} \bar{\alpha}_k,
\end{aligned}$$

onde $\hat{V}_{\lambda o_j}$ é o mesmo descrito no capítulo anterior. Tomando o traço parcial no sistema W_S do operador densidade descrito acima, temos o operador densidade que representa o estado do sistema medidor no instante t_f

$$\hat{\rho}_{|\psi_{(f)}\rangle}^{(2)} = \sum_j |\alpha^j|^2 \hat{V}_{\lambda o_j}^\dagger |\varphi_{(i)}\rangle\langle\varphi_{(i)}| \hat{V}_{\lambda o_j} \tag{3.15}$$

Logo, a média do observável posição \hat{Q} do sistema medidor no estado final é dado por:

$$\begin{aligned}
[\hat{Q}]_{\hat{\rho}_{|\psi_{(f)}\rangle}^{(2)}} &= tr(\hat{\rho}_{|\psi_{(f)}\rangle}^{(2)} \hat{Q}) = tr \left\{ \sum_j |\alpha^j|^2 \hat{V}_{\lambda o_j}^\dagger |\varphi_{(i)}\rangle\langle\varphi_{(i)}| \hat{V}_{\lambda o_j} \hat{Q} \right\} \\
&= \sum_j |\alpha^j|^2 \langle\varphi_{(i)}| \hat{V}_{\lambda o_j} \hat{Q} \hat{V}_{\lambda o_j}^\dagger |\varphi_{(i)}\rangle \\
&= \langle \hat{Q} \rangle_{|\varphi_{(i)}\rangle} + \lambda \langle \hat{O} \rangle_{|\alpha\rangle},
\end{aligned} \tag{3.16}$$

onde da segunda para a terceira linha usamos o lema de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) [17]. O resultado obtido acima, é similar ao encontrado por Tamate, no entanto o procedimento adotado pelo mesmo não é conceitualmente correto. No final desse capítulo faremos uma revisão crítica do procedimento tomado por Tamate. Como mencionado logo no início dessa seção, a diferença entre o valor esperado do observável posição do sistema medidor, entre os estados final e inicial, é proporcional ao valor esperado do observável \hat{O} do sistema a ser medido. Portanto, existe uma relação entre a diferença de fase 3.14 e a diferença entre os valores esperados 3.16. A questão que se coloca agora é se também existe uma relação parecida com esta para o caso do valor fraco, já que o mesmo pode ser interpretado como uma generalização do valor esperado. Mais adiante trataremos deste caso. Porém, antes faremos uma interpretação geométrica da pré-medida, ou seja, da interação entre o sistema físico W_S e o sistema medidor.

3.2.2 Interpretação geométrica da pré-medida

Seja W^{n+1} um espaço de estados quânticos expandido pela base $\{|u_\sigma\rangle\}$ ($\sigma = 0, 1, 2, \dots, n$). Um estado não normalizado desse espaço é descrito então por $|\psi\rangle = |u_\sigma\rangle\psi^\sigma$. Como dito anteriormente, podemos mapear este estado numa esfera S^{2n+1} utilizando a seguinte condição

$$|\psi^0|^2 + |\psi^1|^2 + |\psi^2|^2 + \dots + |\psi^n|^2 = r^2, \quad (3.17)$$

onde usamos $r = \langle\psi|\psi\rangle$ pois, diferentemente do tratamento feito nas seções anteriores, estamos tomando estados não normalizados de W^{n+1} . Utilizando as coordenadas projetivas no $\mathbb{CP}(n)$, $\xi^i = \frac{\psi^i}{\psi^0}$, a expressão 3.17 leva à seguinte fórmula para ψ^0

$$\psi^0 = \frac{r e^{i\varphi}}{(1 + \bar{\xi}_i \xi^i)^{1/2}}, \quad (3.18)$$

onde φ é um fator de fase arbitrário e $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Logo, em termos de r , φ , ξ^i e $\bar{\xi}_i$, a métrica euclidiana em W^{n+1} é descrita por [24]

$$\begin{aligned} ds^2(W^{n+1}) &= d\psi^\sigma d\bar{\psi}_\sigma = dr^2 + r^2 ds^2(S^{2n+1}) \\ &= dr^2 + r^2 \left\{ d\varphi^2 - id\varphi \frac{(\xi^i d\bar{\xi}_i - \bar{\xi}_i d\xi^i)}{1 + \bar{\xi}_i \xi^i} - \frac{(\xi^i d\bar{\xi}_i + \bar{\xi}_i d\xi^i)^2}{4(1 + \bar{\xi}_i \xi^i)^2} + \frac{d\xi^i d\bar{\xi}_i}{1 + \bar{\xi}_i \xi^i} \right\} \\ &= dr^2 + r^2 \left\{ (d\varphi - A)^2 + \frac{(1 + \bar{\xi}_i \xi^i) \delta_j^k - \bar{\xi}_k \xi^j}{(1 + \bar{\xi}_i \xi^i)^2} d\xi^k d\bar{\xi}_j \right\} \\ &= dr^2 + r^2 \left\{ (d\varphi - A)^2 + ds^2(\mathbb{CP}(n)) \right\}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde a 1-forma $A = \frac{i}{2} \left\{ \frac{\xi^i d\bar{\xi}_i - \bar{\xi}_i d\xi^i}{1 + \xi_i \bar{\xi}^i} \right\}$ é a conexão abeliana nas coordenadas projetivas para a fase geométrica, ou seja, é a diferença da fase geométrica entre dois pontos infinitesimalmente próximos projetados no $\mathbb{C}\mathbb{P}(n)$ [24, 25]. É fácil ver que o quadrado da “distância” entre dois estados normalizados infinitamente próximos é dada pelo termo entre chaves em 3.19.

Apresentamos agora uma maneira mais intuitiva e natural de definir a métrica em W^{n+1} . Para tanto, tomemos a representação pictórica do espaço de estados W^{n+1} dada pela figura 3.3. Os estados ao longo da linha vertical que contém $|\psi\rangle$ são projetados no mesmo ponto P_1 . Portanto, estes diferem somente por uma fase. O mesmo acontece com a linha vertical que contém $|\psi + d\psi\rangle$. Por simplicidade tomemos $|\psi\rangle$ normalizado. Os

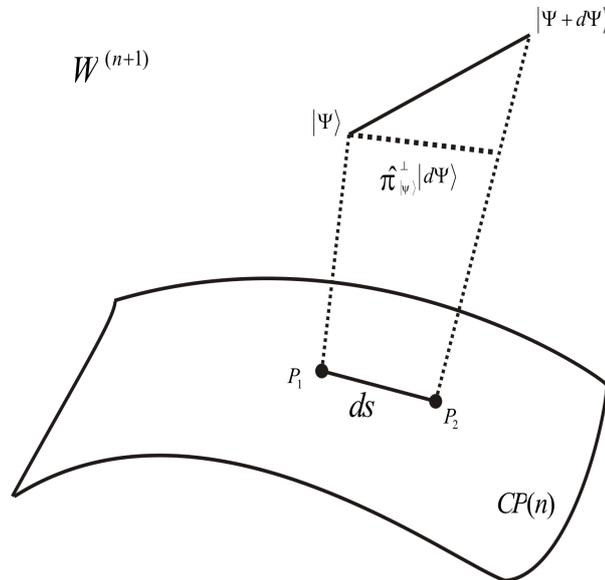


Figura 3.3: Representação pictórica do espaço de estados quânticos

pontos P_1 e $P_2 \in \mathbb{C}\mathbb{P}(n)$ são as projeções dos estados $|\psi\rangle$ e $|\psi + d\psi\rangle$, respectivamente. Ou seja, $P_1 = \Pi|\psi\rangle$ e $P_2 = \Pi|\psi + d\psi\rangle$, onde Π é o mesmo definido na seção 3.1.1. É natural então definir o quadrado da “distância” (infinitesimal) entre esses dois pontos (P_1 e P_2) como o módulo quadrado da projeção do ket $|d\psi\rangle$ na direção ortogonal a do ket $|\psi\rangle$, ou seja, a projeção dada pelo operador³ $\hat{\pi}_{|\psi\rangle}^\perp = \hat{I} - |\psi\rangle\langle\psi|$, conforme é mostrado na figura. Dessa forma, chegamos a seguinte relação para a métrica no $\mathbb{C}\mathbb{P}(n)$:

$$ds^2(\mathbb{C}\mathbb{P}(n)) = \langle d\psi|d\psi\rangle - \langle d\psi|\psi\rangle\langle\psi|d\psi\rangle \quad (3.20)$$

A expressão acima é uma forma elegante de escrever a métrica 3.19. Inspeccionando as

³Não confundir essa projeção com a projeção $\Pi : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}(n)$

duas fórmulas, vemos que $(d\varphi - A)^2 = \langle d\psi|\psi\rangle\langle\psi|d\psi\rangle$.

Seja $|\psi(t)\rangle$ uma curva no espaço de estados W^{n+1} , onde o parâmetro t é o tempo. Depois de um deslocamento infinitesimal dt , o estado normalizado $|\psi(t)\rangle$ evolui para o estado também normalizado (evolução unitária) $|\psi(t+dt)\rangle$, governado pela equação de Schrödinger $\hat{H}|\psi(t)\rangle = i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle$, onde usamos $\hbar = 1$. Utilizando a equação de Schrödinger, podemos escrever a seguinte expressão para $|d\psi\rangle$

$$|d\psi\rangle = |\psi(t+dt)\rangle - |\psi(t)\rangle = -i\hat{H}|\psi(t)\rangle dt. \quad (3.21)$$

Logo, levando a expressão acima em 3.20, obtemos a seguinte fórmula para o elemento de distância ds entre os dois pontos obtidos pela projeção (Π) dos estados $|\psi(t)\rangle$ e $|\psi(t+dt)\rangle$ no $\mathbb{CP}(n)$:

$$ds^2(\mathbb{CP}(n)) = \{\langle\psi(t)|\hat{H}^2|\psi(t)\rangle - (\langle\psi(t)|\hat{H}|\psi(t)\rangle)^2\} dt^2 = \delta_{|\psi(t)}^2 E \cdot dt^2. \quad (3.22)$$

Analisando novamente a figura 3.3, vemos que o termo $\langle\psi(t)|\hat{H}|\psi(t)\rangle dt$ na expressão acima é o “tamanho” do cateto vertical do triângulo retângulo formado em W^{n+1} . Na verdade, conforme veremos mais adiante, esse termo representa a diferença de fase entre os estados infinitamente próximos $|\psi(t)\rangle$ e $|\psi(t+dt)\rangle$.

Uma maneira de interpretar o resultado 3.22 é dizer que a velocidade escalar de um estado no $\mathbb{CP}(n)$ sobre a ação de uma evolução unitária, é dada pela incerteza instantânea da energia, isto é,

$$\frac{ds}{dt} = \delta E(t). \quad (3.23)$$

Para o caso em que o hamiltoniano é independente do tempo, a solução da equação de Schrödinger é da forma $|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t}|\psi(0)\rangle$. Levando esse resultado em 3.22, vemos que a velocidade do estado no $\mathbb{CP}(n)$ é constante para esse caso, pois $e^{-i\hat{H}t}$ comuta tanto com \hat{H} , quanto com \hat{H}^2 . Isso implica que a incerteza na energia é uma constante e, portanto, a velocidade $\frac{ds}{dt}$ é constante.

De posse dessas ferramentas geométricas, voltemos à discussão da interação entre dois sistemas W_S e $W_M^{(\infty)}$. Vimos que, após a interação, o estado final do sistema conjunto é dado por 3.13, onde definimos $|A(y)\rangle = e^{-i\lambda y \hat{O}}|\alpha\rangle$. Nota-se que essa última equação é formalmente idêntica a $|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t}|\psi(0)\rangle$, que é a solução da equação de Schrödinger quando o Hamiltoniano \hat{H} é independente do tempo. Assim, podemos fazer um paralelo entre $|\psi(t)\rangle$ e $|A(y)\rangle$. Com efeito, tomemos a seguinte associação:

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &\mapsto |A(y)\rangle \\
|\psi(0)\rangle &\mapsto |\alpha\rangle = |A(0)\rangle \\
t &\mapsto y \\
\hat{H} &\mapsto \lambda\hat{O}.
\end{aligned}$$

Olhando somente para o subsistema W_S e tratando y como um parâmetro externo, exatamente como é feito com o tempo no tratamento acima, escrevemos uma relação equivalente à 3.22 para a métrica em $\mathbb{CP}(n) \subset W_S$:

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \{\langle A(y)|\hat{O}^2|A(y)\rangle - (\langle A(y)|\hat{O}|A(y)\rangle)^2\}\lambda^2 dy^2 \\
&= \{\langle \alpha|\hat{O}^2|\alpha\rangle - (\langle \alpha|\hat{O}|\alpha\rangle)^2\}\lambda^2 dy^2
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Comparando o resultado acima com a diferença de fase entre os dois estados infinitamente próximos $|A(y)\rangle$ e $|A(y+dy)\rangle$ (eq. 3.14), concluímos que, de fato, o “tamanho” do cateto vertical do triângulo retângulo formado em W_S representa a diferença de fase entre esses estados, provendo uma interpretação geométrica para a diferença de fase 3.14, ilustrada de forma pictórica na figura 3.4.

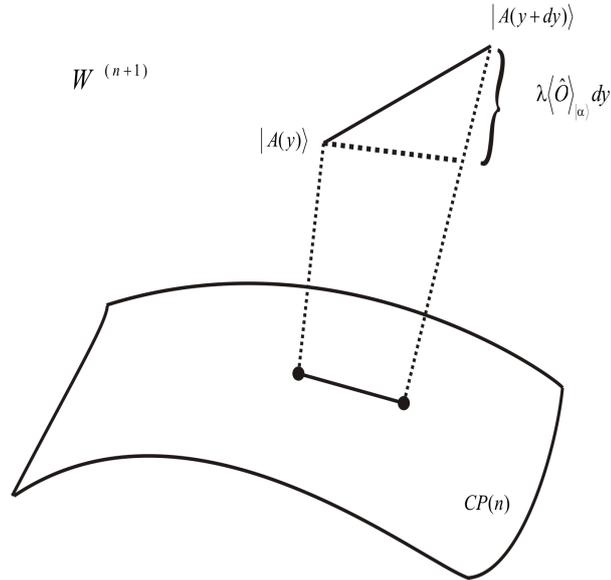


Figura 3.4: Representação pictórica da diferença de fase entre $|A(y)\rangle$ e $|A(y+dy)\rangle$.

3.2.3 Pós-seleção e valor fraco

Para o caso de uma medida fraca, o hamiltoniano de interação instantânea é modelado por $\hat{H}^{(w)} = \epsilon\delta(t-t_0)\hat{O} \otimes \hat{P}$, com $\epsilon \rightarrow 0$. Portanto, dado o estado inicial

$|\psi_{(i)}\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\varphi_{(i)}\rangle$, o estado do sistema no instante $t_f > t_0 > t_i$ é descrito por:

$$\begin{aligned} |\psi_{(f)}\rangle &= \hat{U}(t_i, t_f)|\psi_{(i)}\rangle = e^{-i\epsilon\hat{O}\otimes\hat{P}}|\alpha\rangle \otimes |\varphi_{(i)}\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy |A(y)\rangle \otimes |p(y)\rangle \varphi_p(y), \end{aligned} \quad (3.25)$$

com $|A(y)\rangle = e^{-i\epsilon y\hat{O}}|\alpha\rangle$. A fase geométrica global relacionada com o triângulo geodésico formado pelas projeções dos estados $|A(y)\rangle$, $|A(y+dy)\rangle$ e $|\beta\rangle$ no $\mathbb{C}\mathbb{P}(n)$ (figura 3.5), onde $|\beta\rangle$ é o estado pós-selecionado de W_S , conduz a:

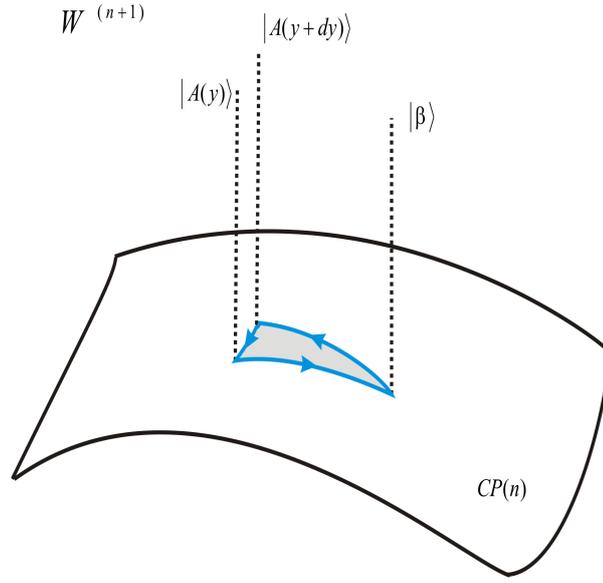


Figura 3.5: Representação da fase geométrica global.

$$\begin{aligned} \Theta^{(1)} &= \arg \{ \langle A(y)|\beta\rangle \langle \beta|A(y+dy)\rangle \langle A(y+dy)|A(y)\rangle \} \\ &\approx -\epsilon \{ \text{Re}(O_w) - \langle \hat{O} \rangle_{|\alpha\rangle} \} dy \end{aligned} \quad (3.26)$$

Tomando a seguinte expansão $|A(y)\rangle = e^{-i\epsilon y\hat{O}}|\alpha\rangle \approx (\hat{I} - i\epsilon y\hat{O})|\alpha\rangle$, finalmente obtemos

$$\Theta^{(1)} \approx -\epsilon \{ \text{Re}(O_w) - \langle \hat{O} \rangle_{|\alpha\rangle} \} dy, \quad (3.27)$$

onde $O_w = \frac{\langle \beta|\hat{O}|\alpha\rangle}{\langle \beta|\alpha\rangle}$ é o valor fraco do observável \hat{O} , e $\langle \hat{O} \rangle_{|\alpha\rangle}$ é o valor esperado do observável \hat{O} no estado $|\alpha\rangle$. Nota-se, portanto, que a fase $\Theta^{(1)}$, quando tomamos expansões até primeira ordem em ϵ , está relacionada com a parte real do valor fraco de \hat{O} .

Seguindo o mesmo raciocínio da seção 3.2.1, podemos calcular a diferença entre o valor esperado do observável posição \hat{Q} do sistema medidor W_M^∞ entre os estados final

e inicial. O estado final do sistema após a pós-seleção de um estado $|\beta\rangle$ do sistema W_S é dado por:

$$\begin{aligned} |\psi_{(f)}\rangle &= C(|\beta\rangle\langle\beta| \otimes \hat{I})(e^{-i\epsilon\hat{O}\otimes\hat{P}}|\alpha\rangle \otimes |\varphi_{(i)}\rangle) \\ &\approx C(|\beta\rangle\langle\beta| \otimes \hat{I})(\hat{I} - i\epsilon\hat{O} \otimes \hat{P})|\alpha\rangle \otimes |\varphi_{(i)}\rangle, \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde $C \approx \frac{1+i\epsilon\langle\hat{P}\rangle_{|\alpha\rangle}Im(O_w)}{|\langle\beta|\alpha\rangle|}$ é a constante de normalização, já que, em geral, o estado do sistema após a pós-seleção é não normalizado. Assim, o operador densidade que representa o estado do sistema medidor no instante t_f é dado pelo seguinte traço parcial:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{|\psi_{(f)}\rangle}^{(2)} &= tr_1(|\psi_{(f)}\rangle\langle\psi_{(f)}|) \\ &= \{1 - i\epsilon\langle\hat{P}\rangle_{|\varphi_{(i)}\rangle}(O_w - \bar{O}_w)\}|\varphi_{(i)}\rangle\langle\varphi_{(i)}| - i\epsilon(O_w\hat{P}|\varphi_{(i)}\rangle\langle\varphi_{(i)}| - \bar{O}_w|\varphi_{(i)}\rangle\langle\varphi_{(i)}|\hat{P}), \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde $\langle\hat{P}\rangle_{|\varphi_{(i)}\rangle}$ é o valor esperado do observável momento \hat{P} do sistema medidor no estado $|\varphi_{(i)}\rangle$, e \bar{O}_w é o complexo conjugado do valor fraco O_w . De posse desse operador, a média do observável posição \hat{Q} do sistema medidor no estado final é $[\hat{Q}]_{\hat{\rho}_{|\psi_{(f)}\rangle}^{(2)}} = tr(\hat{\rho}_{|\psi_{(f)}\rangle}^{(2)}\hat{Q})$, e a diferença $\Delta\hat{Q} = [\hat{Q}]_{\hat{\rho}_{|\psi_{(f)}\rangle}^{(2)}} - [\hat{Q}]_{\hat{\rho}_{|\psi_{(i)}\rangle}^{(2)}}$ é:

$$\Delta\hat{Q} = \epsilon[(Im(O_w))(\langle\varphi_{(i)}|\{\hat{Q}, \hat{P}\}|\varphi_{(i)}\rangle - 2\langle\hat{P}\rangle_{|\varphi_{(i)}\rangle}\langle\hat{Q}\rangle_{|\varphi_{(i)}\rangle}) + Re(O_w)]. \quad (3.30)$$

3.3 Críticas aos procedimentos adotados por *Tamate et al*

No artigo [10], os autores introduziram uma interessante interpretação geométrica para o conceito de medida ideal de von Neumann e valor fraco. No entanto, nessa seção gostaríamos de fazer alguns reparos a certos conceitos utilizados por eles. Comparando a equação que desenvolvemos

$$\arg(\langle A(y)|A(y+dy)\rangle) \approx -\lambda dy\langle\hat{O}\rangle_{|\alpha\rangle}, \quad (3.31)$$

com a equação similar desenvolvida no artigo original de Tamate (equação 16 de [10])

$$\Theta(y) = \arg(\langle A(0)|A(y)\rangle) \approx -\lambda y\langle\hat{O}\rangle_{|\alpha\rangle}, \quad (3.32)$$

observamos uma falha conceitual nessa última. Os autores expressam a variação infinitesimal da fase como se fosse uma função $\Theta(y)$, porém, como vimos nas seções anteriores, essa diferença de fase intrínseca é de natureza geométrica e é medida pela conexão

$A = \frac{i}{2} \left\{ \frac{\xi^i d\bar{\xi}_i - \bar{\xi}_i d\xi^i}{1 + \xi_i \bar{\xi}^i} \right\}$. A derivada exterior $F = dA$ mede a curvatura intrínseca da conexão, isto é, a não-holonomia local do processo de comparação de fases entre dois estados arbitrários normalizados. Isso significa que a 1-forma A não é derivada exterior de nenhuma função escalar (0-forma). Assim, não faz sentido a introdução da função $\Theta(y)$ pelos autores em [10]. Os autores contornaram esse problema calculando a diferença de fase intrínseca entre $|A(0)\rangle$ e $|A(y)\rangle$, e “derivaram” essa expressão em algum sentido, “obtendo” a seguinte equação para a diferença do valor esperado da variável posição do sistema medidor:

$$\Delta\hat{Q} = \lambda\langle\hat{O}\rangle. \quad (3.33)$$

O resultado acima é exatamente o mesmo que obtivemos na equação 3.16, entretanto fica evidente pela discussão acima que o procedimento adotado pelos autores não é matematicamente consistente. A maneira correta de se chegar a esse resultado é pela abordagem geométrica que descrevemos anteriormente. A mesma crítica se estende de forma análoga ao procedimento em relação a interpretação do valor fraco, onde os autores encontram a seguinte expressão para a diferença do valor esperado o observável posição de sistema medidor (equação 21 de [10]):

$$\Delta\hat{Q} = \epsilon Re(O_w), \quad (3.34)$$

que difere do resultado encontrado neste trabalho

$$\Delta\hat{Q} = \epsilon[(Im(O_w))(\langle\varphi_{(i)}|\{\hat{Q}, \hat{P}\}|\varphi_{(i)}\rangle - 2\langle\hat{P}\rangle_{|\varphi_{(i)}\rangle}\langle\hat{Q}\rangle_{|\varphi_{(i)}\rangle}) + Re(O_w)]. \quad (3.35)$$

Comparando as duas expressões, concluimos que o procedimento adotado por Tamate, ao contrário do realizado neste trabalho, não vislumbra a parte imaginária do valor fraco.

4 Variáveis Modulares na Mecânica Quântica

4.1 Introdução

O conceito de variáveis modulares foi proposto por Aharonov, Pendleton e Petersen em 1969, como uma nova ferramenta, ou novas variáveis dinâmicas, para investigar aspectos não-locais das interações entre sistemas quânticos [26]. Tais aspectos são de natureza puramente quântica, ou seja, não possuem análogos clássicos. Como exemplos de processos onde aspectos não-locais dessa natureza são observados, podemos citar o famoso experimento de dupla fenda, que discutiremos mais a frente, e processos onde são considerados certas interações entre partículas carregadas e potenciais eletromagnéticos, processos esses que levaram Aharonov e Bohm a descoberta de um novo efeito, que foi nomeado mais tarde de efeito Aharonov-Bohm (EAB) [27], onde a função de onda que descreve uma partícula carregada, como por exemplo um elétron, sofre uma mudança de fase, proporcional ao fluxo do campo, quando atravessa uma região próxima a uma região onde há um campo eletromagnético confinado, mesmo que não haja qualquer “contato” direto entre o campo e a partícula. Esse fato levou Aharonov e Bohm a proporem que o potencial vetor \vec{A} assume um novo status no contexto da mecânica quântica, que transcende o papel clássico de mero artifício matemático para o cálculo do campo, como aceito até então. Sabemos que o potencial vetor \vec{A} é definido a menos de uma transformação de calibre, o que o torna uma quantidade não física. Mais tarde, o próprio Aharonov propôs uma nova descrição do problema, onde levava-se em conta interações “não locais” entre o campo magnético e a partícula carregada. A variável sensível a essa interação foi nomeada por Aharonov como variável modular, por motivos que ficarão claros a seguir.

Com o intuito de introduzirmos as variáveis modulares, consideremos o experimento de dupla-fenda, onde uma “fonte” de partículas, como por exemplo elétrons, é colocada à frente de um anteparo que contém dois pequenos orifícios, que estão separados por uma distância L , por onde os elétrons passam. Logo após esse anteparo é colocado um segundo anteparo que contém detectores de elétrons. A figura 4.1 ilustra tal experi-

mento. Os elétrons são enviados, um a um, a uma taxa constante, em direção ao primeiro

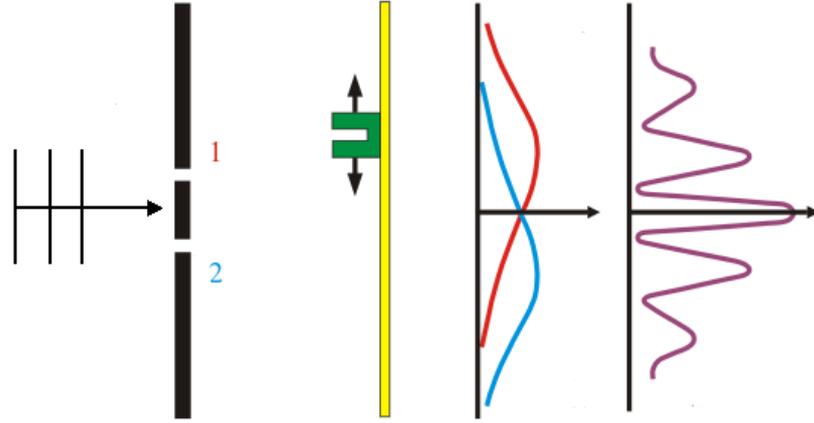


Figura 4.1: Experimento de dupla-fenda com elétrons. Fonte: <http://www.helmholtz-berlin.de/>

anteparo e são detectados no segundo anteparo. Em um primeiro experimento, mantemos somente uma das fendas abertas (digamos fenda 1) e fechamos a outra. Denotamos por $n_1(x)$ o número de elétrons detectados no segundo anteparo na posição x . Repetimos o experimento com a fenda 1 fechada e a outra (fenda 2) aberta. Chamaremos de $n_2(x)$ o número de elétrons detectados na posição x . Em um experimento com as duas fendas abertas, onde denotamos por $n_{12}(x)$ o número de elétrons detectados, espera-se, classicamente, que $n_{12}(x) = n_1(x) + n_2(x)$. Contrariando tal expectativa, o que se observa é que $n_{12}(x)$ tem a forma de uma figura de interferência, exibindo máximos e mínimos, como ilustrado na figura 4.1.

Para descrever esse experimento, associamos ao elétron uma função de onda que propaga da fonte até o segundo anteparo, passando pelas duas fendas, e quando atinge o segundo anteparo, que possui um detector de elétrons, “colapsa” para uma região localizada. A probabilidade do elétron ser encontrado na posição x é dada pelo módulo quadrado da função de onda que descreve o mesmo. Realizando o experimento com um número suficientemente grande de elétrons, obtemos o padrão de interferência ilustrado na figura 4.1. Seja a função de onda que descreve o elétron logo após as fendas dada pela superposição de dois termos, cada um representando a função de onda que propaga por uma das fendas:

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_1(\vec{r}, t) + \psi_2(\vec{r}, t) = \eta_1(\vec{r}, t)e^{i\varphi_1(\vec{r}, t)} + \eta_2(\vec{r}, t)e^{i\varphi_2(\vec{r}, t)}, \quad (4.1)$$

onde as funções $\eta_1(\vec{r}, t)$, $\eta_2(\vec{r}, t)$, $\varphi_1(\vec{r}, t)$ e $\varphi_2(\vec{r}, t)$ são funções reais de \vec{r} e t . Então, a densidade de probabilidade de encontrar o elétron no ponto x no instante de tempo t é dada por:

$$\begin{aligned}\rho(\vec{r}, t) &= |\psi(\vec{r}, t)|^2 = |\eta_1(\vec{r}, t)e^{i\varphi_1(\vec{r}, t)} + \eta_2(\vec{r}, t)e^{i\varphi_2(\vec{r}, t)}|^2 \\ &= \eta_1^2 + \eta_2^2 + 2\eta_1\eta_2\cos(\varphi_1(\vec{r}, t) - \varphi_2(\vec{r}, t)).\end{aligned}\quad (4.2)$$

O último termo da expressão acima é o termo de interferência que, como podemos verificar, é dado pela diferença de fase, ou fase relativa, entre as duas funções de onda ψ_1 e ψ_2 . Essa expressão é matematicamente idêntica a que obtemos quando estudamos problemas que envolvem ondas clássicas, como por exemplo interferência entre duas ondas na água. Porém, existe uma diferença sutil entre esses dois fenômenos físicos no que diz respeito as fases. As fases de ondas clássicas sempre podem ser medidas localmente, enquanto que na mecânica quântica a única informação que podemos obter sobre as fases é a sua diferença $\varphi_1(\vec{r}, t) - \varphi_2(\vec{r}, t)$, ou seja, $\varphi_1(\vec{r}, t)$ e $\varphi_2(\vec{r}, t)$ não podem ser observadas separadamente. Na verdade, isso decorre do fato que apresentamos na seção 3.1.1 de que dois estados, ou duas funções de onda, que diferem somente por uma fase global representam o mesmo estado físico, ou seja, a fase global não pode ser medida quanticamente. Mais precisamente, a função de onda dada por 4.1 é indistinguível de uma função de onda ψ' que difere de ψ por uma fase $\lambda(\vec{r}, t)$

$$\begin{aligned}\psi'(\vec{r}, t) &= e^{i\lambda(\vec{r}, t)}\psi(\vec{r}, t) \\ &= \eta_1(\vec{r}, t)e^{i(\lambda(\vec{r}, t)+\varphi_1(\vec{r}, t))} + \eta_2(\vec{r}, t)e^{i(\lambda(\vec{r}, t)+\varphi_2(\vec{r}, t))}.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Logo, a fase relativa é tudo que podemos medir quanticamente.

Com o intuito de compreender melhor esse fenômeno de interferência, podemos nos perguntar qual, ou quais observáveis são sensíveis a fase relativa entre ψ_1 e ψ_2 . Por simplicidade, consideremos o caso unidimensional. Suponhamos que logo após passar pelas fendas, que trataremos como o instante inicial, a função de onda normalizada que representa o elétron seja dada pela superposição de duas funções de onda idênticas deslocadas uma da outra de uma distância L e “concentradas” ao redor das fendas

$$\psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\psi_1(x, 0) + e^{i\varphi}\psi_2(x, 0)\},\quad (4.4)$$

onde φ é a fase relativa, que tomamos independente de x . Suponhamos ainda que as funções de onda ψ_1 e ψ_2 não possuam suporte comum em $t = 0$, ou seja, elas não se sobrepõem, como mostrado na figura 4.2. Então, o valor esperado do observável posição \hat{Q}

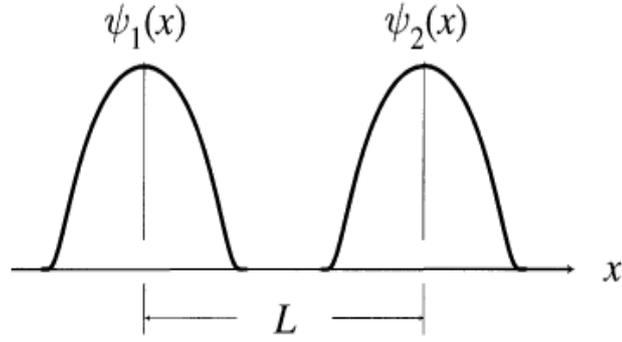


Figura 4.2: Funções de onda que representam o elétron logo após a dupla-fenda

neste estado é dado por:

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{Q} \rangle_\psi &= \langle \psi | \hat{Q} | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(x) x \psi(x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}_1(x) x \psi_1(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}_2(x) x \psi_2(x) dx \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}_1(x) x e^{i\varphi} \psi_2(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varphi} \bar{\psi}_2(x) x \psi_1(x) dx
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Conforme podemos ver acima, os únicos termos que dependem de φ são os dois últimos. Porém, como tomamos funções de onda sem suporte comum, os integrandos das duas últimas integrais são nulos, pois quando ψ_1 for não nulo, ψ_2 será e vice-versa. Logo, o observável posição \hat{Q} não é uma variável apropriada para descrever a interferência, pois independe da fase relativa φ .

Da mesma forma, podemos calcular o valor esperado do observável momento \hat{P} , que atua em uma função de onda como $-i \frac{d}{dx}$ ($\hbar = 1$).

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{P} \rangle_\psi &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(x) (-i) \frac{d}{dx} \psi(x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}_1(x) (-i) \frac{d}{dx} \psi_1(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}_2(x) (-i) \frac{d}{dx} \psi_2(x) dx \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}_1(x) (-i) \frac{d}{dx} e^{i\varphi} \psi_2(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varphi} \bar{\psi}_2(x) (-i) \frac{d}{dx} \psi_1(x) dx
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Novamente as integrais que dependem de φ possuem integrandos nulos pelo fato das funções de onda não terem suporte comum. Logo, o observável momento \hat{P} também não é uma variável apropriada para descrever a interferência.

Por último, podemos tentar o produto de potências dos observáveis posição e

momento

$$\langle \hat{Q}^j \hat{P}^k \rangle_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(x) \hat{Q}^j \hat{P}^k \psi(x) dx, \quad (4.7)$$

onde j e k são potências inteiras. Novamente os termos cruzados são os únicos que dependem de φ , como por exemplo $\langle \psi_1 | \hat{Q}^j \hat{P}^k | e^{i\varphi} \psi_2 \rangle$. Mas operadores do tipo $\hat{Q}^j \hat{P}^k$ não mudam o fato que ψ_1 e ψ_2 não se sobrepõem. Logo, $\hat{Q}^j \hat{P}^k$ também independe da fase relativa.

Em [28], Tollaksem, Aharonov e colaboradores sugerem que os operadores relevantes para a descrição do fenômeno da interferência são os operadores de translação $e^{\pm \frac{iL\hat{P}}{\hbar}}$, onde L é a distância entre as fendas mencionada anteriormente. De fato, a ação desse operador sobre uma função de onda descrita na base das posições, causa uma translação da mesma de uma quantidade L , ou seja:

$$e^{\frac{iL\hat{P}}{\hbar}} \psi(x) = \psi(x + L), \quad (4.8)$$

e, portanto, seu valor esperado no estado $\psi(x)$ é dado por:

$$\begin{aligned} \langle e^{\frac{iL\hat{P}}{\hbar}} \rangle_\psi &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle \psi | e^{\frac{iL\hat{P}}{\hbar}} | q(x) \rangle \langle q(x) | \psi \rangle dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle \psi | q(x - L) \rangle \langle q(x) | \psi \rangle dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(x - L) \psi(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varphi} \bar{\psi}_2(x - L) \psi_1(x) dx \\ &= \frac{1}{2} e^{-i\varphi}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

já que, observando a figura 4.2, vemos que $\psi_2(x - L) = \psi_1(x)$ e, portanto, a última integral da expressão acima é identicamente um. Claramente o operador de translação $e^{\frac{iL\hat{P}}{\hbar}}$ não é hermitiano, porém o operador gerado pela combinação $e^{\frac{iL\hat{P}}{\hbar}} + e^{-\frac{iL\hat{P}}{\hbar}}$ é hermitiano e seu valor esperado também depende de φ . Mais precisamente

$$\langle e^{\frac{iL\hat{P}}{\hbar}} + e^{-\frac{iL\hat{P}}{\hbar}} \rangle_\psi = \cos\varphi. \quad (4.10)$$

Se fizermos a transformação $\hat{P} \rightarrow \hat{P} + \frac{n\hbar}{L} \hat{I}$, com n inteiro, o operador $e^{\frac{iL\hat{P}}{\hbar}}$ fica invariante, pois $e^{\frac{iL\hat{P}}{\hbar}} e^{\frac{iL}{\hbar} \frac{n\hbar}{L} \hat{I}} = e^{\frac{iL\hat{P}}{\hbar}} e^{i2n\pi} = e^{\frac{iL\hat{P}}{\hbar}}$. Assim, $e^{\frac{iL\hat{P}}{\hbar}}$ não depende de todos valores de \hat{P} e sim de $\hat{P} \bmod \frac{\hbar}{L} \hat{I}$. É nesse sentido que Aharonov nomeou essa variável de momento modular $\hat{P}_{mod} \equiv \hat{P} \bmod \frac{\hbar}{L} \hat{I}$, que assume valores no intervalo $[0, \frac{\hbar}{L})$.

Além do operador $e^{\frac{iL\hat{P}}{\hbar}}$ depender da fase relativa entre ψ_1 e ψ_2 através do seu valor esperado, uma outra razão que o torna pertinente para a descrição do fenômeno de

interferência tratado aqui é o fato do mesmo obedecer a uma equação de movimento não local. De fato, se tomarmos o hamiltoniano $\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{Q})$ e utilizarmos a representação de Heisenberg da mecânica quântica, a equação de movimento do operador $e^{\frac{iL\hat{P}}{\hbar}}$ é descrita por:

$$\frac{d}{dt}e^{\frac{iL\hat{P}}{\hbar}} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, e^{\frac{iL\hat{P}}{\hbar}}] = \frac{i}{\hbar}[V(\hat{Q}), e^{\frac{iL\hat{P}}{\hbar}}] = \frac{i}{\hbar}\{V(\hat{Q}) - V(\hat{Q} + L\hat{I})\}e^{\frac{iL\hat{P}}{\hbar}}, \quad (4.11)$$

que é uma equação claramente não-local e mostra que pode haver alteração na variável modular, mesmo que a modificação do potencial seja instantânea e aconteça apenas nas imediações de uma das fendas, ou seja, a variável modular se altera de maneira não local quando uma das fendas é fechada/aberta. Esse fenômeno é de caráter puramente quântico, não tendo um análogo clássico, pois a evolução temporal da função clássica $e^{\frac{iLp}{\hbar}}$, onde p é uma variável real, diferentemente da mecânica quântica onde o mesmo é um operador, é dada por:

$$\frac{d}{dt}e^{\frac{iLp}{\hbar}} = \frac{d}{dp}e^{\frac{iLp}{\hbar}}\frac{dp}{dt} = -\frac{iL}{\hbar}e^{\frac{iLp}{\hbar}}\frac{d}{dx}V(x), \quad (4.12)$$

onde usamos o resultado $\frac{dp}{dt} = -\frac{d}{dx}V(x)$, que pode ser facilmente verificado utilizando os colchetes de Poisson. Os resultados apresentados nas duas últimas equações mostram que, apesar de utilizarmos toda nossa intuição clássica para tratarmos de fenômenos de interferência quântica, trata-se de fenômenos completamente diferentes. Como vimos, isso fica evidente quando utilizamos a representação de Heisenberg para a mecânica quântica.

Da mesma forma que definimos a variável momento modular \hat{P}_{mod} , podemos definir também a variável posição modular \hat{Q}_{mod} . Suponhamos que ao invés de termos somente duas fendas no primeiro aparato, o mesmo é composto de N fendas, com N muito grande (tendendo a infinito). O elétron passa por esse aparato por meio de uma das fendas, mas não sabemos exatamente por qual delas. O que conhecemos é a posição do elétron módulo L . Definimos então a posição modular $\hat{Q}_{mod} = \hat{Q} \text{ mod } L$, onde L é a separação entre as fendas. Os operadores de translação que são função de \hat{P}_{mod} e \hat{Q}_{mod} obedecem a seguinte relação de comutação [6, 28]

$$[e^{\frac{iL}{\hbar}\hat{P}_{mod}}, e^{\frac{i2\pi}{L}\hat{Q}_{mod}}] = 0. \quad (4.13)$$

A expressão acima mostra que ao contrário de \hat{Q} e \hat{P} , \hat{Q}_{mod} e \hat{P}_{mod} comutam, ou seja, podemos medi-los simultaneamente. Podemos representar nosso conhecimento sobre \hat{Q} e \hat{P} dividindo o espaço de fase em células de área h . Por exemplo, para o estado $q_{mod} = \frac{2L}{3}$

e $p_{\text{mod}} = \frac{h}{2L}$ temos o espaço de fase mostrado na figura 4.3, onde, apesar de conhecermos simultaneamente q_{mod} e p_{mod} , a célula em que os mesmos se encontram é completamente desconhecida.

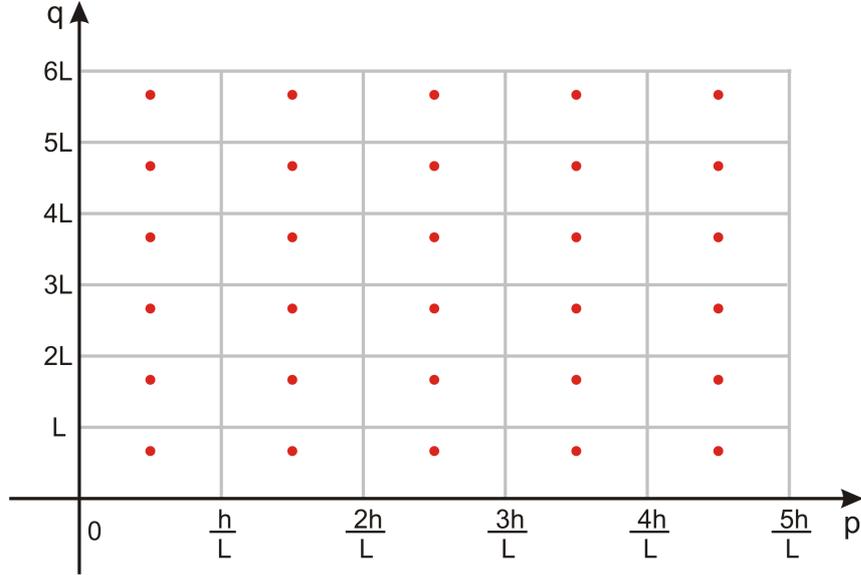


Figura 4.3: Representação do estado $q_{\text{mod}} = \frac{2L}{3}$ e $p_{\text{mod}} = \frac{h}{2L}$ no espaço de fase.

Feita essa breve introdução sobre variáveis modulares, nós propomos abaixo uma definição mais precisa das mesmas em termos da estrutura matemática da cinemática finita de Schwinger [29]. Para tanto, revemos na próxima seção a estrutura do espaço de fase finito de Schwinger, bem como seu limite para o contínuo.

4.2 Cinemática de Schwinger

Seja W^N um espaço de estados quânticos de dimensão N , e $\{|u_j\rangle\}$ ($j = 0, 1, \dots, N-1$) uma base ortonormal completa desse espaço, ou seja, esses estados obedecem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \langle u^j | u_k \rangle &= \delta_k^j & (\text{Ortogonalidade}) \\ |u_j\rangle \langle u^j| &= \hat{I} & (\text{Completeza}) \end{aligned} \tag{4.14}$$

Os estados $|u_j\rangle$ são os estados finitos de posição.

Definimos um operador unitário de translação \hat{V} que age nos estados dessa base da seguinte maneira:

$$\hat{V}|u_j\rangle = |u_{j-1}\rangle,$$

onde

$$|u_{j+N}\rangle = |u_j\rangle. \quad (4.15)$$

Aplicando \hat{V} N vezes em um estado dessa base obtemos o mesmo estado, pois o operador de translação age de forma cíclica, ou seja:

$$\hat{V}^N |u_j\rangle = |u_{j+N}\rangle = |u_j\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{V}^N = \hat{I} \quad (4.16)$$

Logo, utilizando a equação de autovalores para o operador \hat{V} , concluímos facilmente que seu espectro é formado pelas N -ésimas raízes da unidade.

$$v_j = e^{\frac{2\pi i}{N}j} \quad \text{com} \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.17)$$

Pelo teorema espectral para operadores unitários, se um operador unitário possui N autovalores distintos, como é o caso de \hat{V} , seus autoestados são necessariamente ortogonais entre si, formando uma base ortonormal de W^N . Designaremos por $\{|v_j\rangle\}$ os autoestados de \hat{V} , que são os estados finitos de momento. De forma similar, definimos um operador de translação unitário \hat{U} que atua nos estados $|v_j\rangle$ da seguinte maneira:

$$\hat{U}|v_j\rangle = |v_{j+1}\rangle, \quad (4.18)$$

onde

$$|v_{j+N}\rangle = |v_j\rangle. \quad (4.19)$$

Pelas mesmas razões apresentadas acima, não é difícil se convencer que o espectro de \hat{U} também é formado pelas N -ésimas raízes da unidade:

$$u_j = v_j = e^{\frac{2\pi i}{N}j} \quad \text{com} \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.20)$$

Podemos provar que, com uma escolha apropriada de fase, os estados $|u_j\rangle$ mencionados anteriormente são autoestados do operador \hat{U} . Para tanto, antes demonstraremos alguns lemas relevantes para tal fim.

Lema 4.2.1.

$$\frac{1}{N} v_{-j}^k v_l^j = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(l-k)j} = \delta_l^k, \quad (4.21)$$

onde N é a dimensão do espaço e δ_l^k é o delta de Kronecker.

Demonstração. Primeiramente, note que os índices da fase complexa $v_j = e^{\frac{2\pi i}{N}j}$ e suas potências $(v_j)^k = (e^{\frac{2\pi i}{N}j})^k = e^{\frac{2\pi i}{N}jk} = v_j^k$, podem ser interpretados tanto como índices de

uma matriz, como potências inteiras da fase v_j . Para o caso em que $l = k$, a somatória da expressão 4.21 é igual a N e, portanto, $\frac{1}{N}v_{-j}^k v_l^j = 1$. Tomando $l \neq k$ e definindo $Z = e^{\frac{2\pi i}{N}(l-k)}$, vem:

$$\frac{1}{N}v_{-j}^k v_l^j = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(l-k)j} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} Z^j = \frac{1}{N} \frac{(1 - Z^N)}{(1 - Z)} = 0,$$

pois $Z^N = e^{2\pi i(l-k)} = 1$, já que l e k são inteiros. \square

Lema 4.2.2. *Dado o operador $\hat{\pi}^{(k)} = \frac{1}{N}v_{-j}^k \hat{V}^j$, onde o índice j pode ser interpretado tanto como o índice da matriz v_{-j}^k , quanto como a potência de \hat{V} , então $\hat{\pi}^{(k)}$ é o projetor na direção de $|v_k\rangle$, ou seja:*

$$\hat{\pi}^{(k)}|v_l\rangle = \delta_l^k |v_l\rangle, \quad (4.22)$$

ou ainda

$$\hat{\pi}^{(k)} = |v^{(k)}\rangle\langle v^{(k)}|, \quad (4.23)$$

onde os parênteses colocados em k são para identificar que, neste caso, não há soma em k .

Demonstração. O resultado 4.22 pode ser facilmente comprovado com a ajuda de 4.21 e lembrando que $|v_l\rangle$ é autoestado de \hat{V} :

$$\hat{\pi}^{(k)}|v_l\rangle = \frac{1}{N}v_{-j}^k \hat{V}^j |v_l\rangle = \frac{1}{N}v_{-j}^k v_l^j |v_l\rangle = \delta_l^k |v_l\rangle.$$

\square

Lema 4.2.3. *O produto interno entre os estados de posição e momento finitos é dado por:*

$$\langle u^k | v_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} v_j^k \quad (4.24)$$

Demonstração. Calculamos o valor esperado $\langle u^0 | \hat{\pi}^{(j)} | u_0 \rangle$ de duas maneiras distintas. A primeira utilizando $\hat{\pi}^{(j)} = \frac{1}{N}v_{-k}^j \hat{V}^k$:

$$\langle u^0 | \hat{\pi}^{(j)} | u_0 \rangle = \frac{1}{N}v_{-k}^j \langle u^0 | \hat{V}^k | u_0 \rangle = \frac{1}{N}v_{-k}^j \langle u^k | u_0 \rangle = \frac{1}{N}v_{-k}^j \delta_0^k = \frac{1}{N},$$

e a segunda utilizando 4.23:

$$\langle u^0 | \hat{\pi}^{(j)} | u_0 \rangle = \langle u^0 | v_{(j)} \rangle \langle v^{(j)} | u_0 \rangle = |\langle u^0 | v_j \rangle|^2.$$

Comparando as duas expressões e fazendo uma escolha apropriada de fase, finalmente obtemos:

$$\langle u^0 | v_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} = \langle u^k | (\hat{V}^t)^k | v_j \rangle = v_{-j}^k \langle u^k | v_j \rangle.$$

\square

O termo $\frac{1}{\sqrt{N}}v_j^k$ na expressão 4.24 nada mais é que o elemento de matriz do operador Transformada Finita de Fourier (TFF). De fato, definimos a TFF da seguinte maneira

$$\hat{F} = |v_k\rangle\langle u^k|, \quad (4.25)$$

que age nas bases de posição e momento finitas como

$$\hat{F}|u_j\rangle = |v_j\rangle \quad \text{e} \quad \hat{F}|v_j\rangle = |u_{-j}\rangle. \quad (4.26)$$

Logo, não é difícil verificar que o seu elemento de matriz F_j^k é dado por $\frac{1}{\sqrt{N}}v_j^k$, tanto na base das posições finitas, quanto na base de momentos finitos:

$$F_j^k = \langle u^k|\hat{F}|u_j\rangle = \langle v^k|\hat{F}|v_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}v_j^k. \quad (4.27)$$

Utilizando o lema 4.2.3 repetidamente e o lema 4.2.1, podemos provar que os estados de posição finita $\{|u_j\rangle\}$ são autoestados do operador de translação \hat{U} .

$$\begin{aligned} \hat{U}|u_j\rangle &= \hat{U}|v_k\rangle\langle v^k|u_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\hat{U}|v_k\rangle v_{-j}^k = \frac{1}{\sqrt{N}}|u_l\rangle\langle u^l|v_{k+1}\rangle v_{-j}^k \\ &= \frac{1}{N}|u_l\rangle v_{k+1}^l v_{-j}^k = \frac{1}{N}v^l|u_l\rangle v_k^l v_j^{-k} = v^l|u_l\rangle \delta_j^l = v_j|u_j\rangle. \end{aligned}$$

Teorema 4.2.1.

$$\hat{V}^j \hat{U}^k = v^{jk} \hat{U}^k \hat{V}^j \quad (4.28)$$

Demonstração. Aplicando o estado $|u_l\rangle$ em ambos os lados da equação 4.28 obtemos:

$$\hat{V}^j \hat{U}^k |u_l\rangle = v_l^k |u_{l-j}\rangle$$

e

$$\hat{U}^k \hat{V}^j |u_l\rangle = v_l^k v_{-j}^k |u_{l-j}\rangle.$$

Comparando os dois resultados, obtemos a equação 4.28. \square

A equação 4.28 é o análogo finito da forma exponencial da relação de comutação canônica entre os observáveis posição e momento, conhecida como relação de Heisenberg-Weyl. Como veremos na próxima seção, uma equação semelhante vale para o caso contínuo.

4.3 O limite para o contínuo

Nesta seção, apresentamos o limite heurístico para o contínuo de duas maneiras distintas. Uma simétrica e outra não simétrica entre os estados de posição e momento.

4.3.1 O limite simétrico

Consideremos, sem perda de generalidade, que $\dim W^{(N)} = N$ seja um número inteiro ímpar. Dessa forma, a variação do índice dos estados de posição e momento é simétrica em relação à origem: $j = -\frac{N-1}{2}, \dots, 0, \dots, +\frac{N-1}{2}$. Introduzimos as seguintes variáveis escalonadas:

$$x_j = \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{1/2} j \quad \text{e} \quad y_k = \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{1/2} k, \quad (4.29)$$

cujas variações são dadas por:

$$\Delta x_j = \Delta y_k = \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{1/2}, \quad (4.30)$$

pois $\Delta j = \Delta k = 1$. Dadas essas variáveis, introduzimos os autoestados escalonados de posição e momento como:

$$|q(x_j)\rangle = \left(\frac{N}{2\pi}\right)^{1/4} |u_j\rangle \quad \text{e} \quad |p(y_k)\rangle = \left(\frac{N}{2\pi}\right)^{1/4} |v_k\rangle. \quad (4.31)$$

Logo, as relações de completeza podem ser descritas da seguinte maneira:

$$\hat{I} = |u_j\rangle\langle u^j| = |v_k\rangle\langle v^k| = \sum_{j=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} |q(x_j)\rangle\langle q(x_j)|\Delta x_j = \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} |p(y_k)\rangle\langle p(y_k)|\Delta y_k.$$

Podemos tomar um limite “heurístico”, onde queremos dizer com isso que para N suficientemente grande, temos que $\Delta x_j \rightarrow 0$ e $\Delta y_k \rightarrow 0$. Assim, interpretamos a resolução da identidade acima de uma forma heurística como:

$$\hat{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} |q(x)\rangle\langle q(x)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |p(y)\rangle\langle p(y)|dy. \quad (4.32)$$

O produto interno entre os estados $|q(x_j)\rangle$ e $|p(y_k)\rangle$ pode ser escrito como

$$\langle q(x_j)|p(y_k)\rangle = \left(\frac{N}{2\pi}\right)^{1/2} \langle u^j|v_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} v_k^j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ix_j y_k}. \quad (4.33)$$

No limite $N \rightarrow \infty$ a equação acima toma a forma:

$$\langle q(x)|p(y)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ixy}. \quad (4.34)$$

Se inserirmos explicitamente a constante de Planck \hbar na equação acima, obtemos a bem conhecida equação de onda plana para o produto interno entre os autoestados de posição e momento:

$$\langle q(x)|p(y)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ixy/\hbar}. \quad (4.35)$$

As normas dos estados $|q(x)\rangle$ e $|p(y)\rangle$ são claramente “infinitas”, de maneira que a ortonormalização deve ser tratada com cuidado, de forma não usual:

$$\begin{aligned} \langle q(x_j)|q(x_k)\rangle = \langle p(x_j)|p(x_k)\rangle &= \begin{cases} 0 & \text{for } j \neq k \\ (\frac{N}{2\pi})^{1/2} & \text{for } j = k \end{cases} \\ &\stackrel{(N \rightarrow \infty)}{=} \begin{cases} 0 & \text{for } x_j \neq x_k \\ \infty & \text{for } x_j = x_k, \end{cases} \end{aligned}$$

que é usualmente escrita de uma maneira mais simplificada

$$\langle q(x)|q(x')\rangle = \langle p(x)|p(x')\rangle = \delta(x - x'). \quad (4.36)$$

Podemos considerar então esse procedimento como uma definição heurística da “função” delta de Dirac. A operação que relaciona as duas bases é a Transformada de Fourier e pode ser escrita da seguinte forma:

$$\hat{F}|q(x)\rangle = |p(x)\rangle. \quad (4.37)$$

Percebe-se que, com essa notação, podemos escrever o operador Transformada de Fourier como

$$\hat{F} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx |p(x)\rangle \langle q(x)|. \quad (4.38)$$

A maneira com que \hat{F} age em um elemento da base dos momentos é a seguinte

$$\begin{aligned} \hat{F}|p(x)\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx' |p(x')\rangle \langle q(x')|p(x)\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx' |p(x')\rangle \langle p(x')|q(-x)\rangle \\ &= |q(-x)\rangle, \end{aligned} \quad (4.39)$$

onde usamos a relação 4.34, da qual podemos ver que $\langle q(x')|p(x)\rangle = \langle p(x')|q(-x)\rangle$.

As funções de onda nas bases de posição e momento para um estado arbitrário $|\psi\rangle \in W^{(\infty)}$ são dadas respectivamente pelas amplitudes

$$\begin{aligned}\psi_q(x) &= \langle q(x)|\psi\rangle \\ \psi_p(y) &= \langle p(y)|\psi\rangle.\end{aligned}\tag{4.40}$$

A ação de um operador arbitrário \hat{O} sobre uma função de onda é definida como:

$$\hat{O}\psi_q(x) = \langle q(x)|\hat{O}|\psi\rangle\tag{4.41}$$

e

$$\hat{O}\psi_p(y) = \langle p(y)|\hat{O}|\psi\rangle\tag{4.42}$$

Os operadores de translação \hat{V}_{ξ_j} e \hat{U}_{η_j} agem nas bases de posição e momento da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\hat{V}_{\xi_j}|p(y_k)\rangle &= e^{i\xi_j y_k}|p(y_k)\rangle \\ \hat{U}_{\eta_j}|q(x_k)\rangle &= e^{i\eta_j x_k}|q(x_k)\rangle.\end{aligned}\tag{4.43}$$

e

$$\begin{aligned}\hat{V}_{\xi_j}|q(x_k)\rangle &= |q(x_k - \xi_j)\rangle \\ \hat{U}_{\eta_j}|p(y_k)\rangle &= |p(y_k + \eta_j)\rangle.\end{aligned}\tag{4.44}$$

No limite do contínuo temos:

$$\begin{aligned}\hat{V}_{\xi} &= e^{i\xi\hat{P}} \\ \hat{U}_{\eta} &= e^{i\eta\hat{Q}},\end{aligned}\tag{4.45}$$

com

$$\begin{aligned}\hat{V}_{\xi}|p(y)\rangle &= e^{i\xi y}|p(y)\rangle \\ \hat{U}_{\eta}|q(x)\rangle &= e^{i\eta x}|q(x)\rangle\end{aligned}\tag{4.46}$$

e

$$\begin{aligned}\hat{V}_{\xi}|q(x)\rangle &= |q(x - \xi)\rangle \\ \hat{U}_{\eta}|p(y)\rangle &= |p(y + \eta)\rangle.\end{aligned}\tag{4.47}$$

Então, os geradores infinitesimais de translação são identificados como os observáveis posição e momento \hat{Q} e \hat{P} , tal que:

$$\begin{aligned}\hat{Q}|q(x)\rangle &= x|q(x)\rangle \\ \hat{P}|p(y)\rangle &= y|p(y)\rangle,\end{aligned}\tag{4.48}$$

obedecendo a usual relação canônica de comutação de Heisenberg

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hat{I} \quad \text{com} \quad \hbar = 1,\tag{4.49}$$

juntamente com sua forma exponencial:

$$\hat{V}_{\xi}\hat{U}_{\eta} = e^{i\xi\eta}\hat{U}_{\eta}\hat{V}_{\xi},\tag{4.50}$$

que é o análogo contínuo da relação (4.28).

4.3.2 O limite não simétrico

Definimos uma escala diferente para posição e momento como

$$\begin{aligned}x_j &= \frac{L}{N}j \\y_k &= \frac{2\pi}{L}k,\end{aligned}\tag{4.51}$$

cujas variações são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}\Delta x_j &= \frac{L}{N} \\ \Delta y_k &= \frac{2\pi}{L},\end{aligned}\tag{4.52}$$

pois $\Delta j = \Delta k = 1$. Vemos pela equação acima que, no limite $N \rightarrow \infty$, $\Delta x_j \rightarrow 0$, mas o mesmo não acontece com Δy_k . Introduzimos também os estados escalonados de posição e momento

$$\begin{aligned}|q(x_j)\rangle &= \left(\frac{N}{L}\right)^{1/2} |u_j\rangle \\ |p(y_k)\rangle &= \left(\frac{L}{2\pi}\right)^{1/2} |v_k\rangle,\end{aligned}\tag{4.53}$$

de maneira que a identidade é descrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\hat{I} &= |u_j\rangle\langle u^j| = \sum_{j=-\frac{L}{2}(1-\frac{1}{N})}^{\frac{L}{2}(1-\frac{1}{N})} |q(x_j)\rangle\langle q(x_j)|\Delta x_j \\ &= |v_k\rangle\langle v^k| = \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} |p(y_k)\rangle\langle p(y_k)|\Delta y_k.\end{aligned}$$

No limite heurístico do contínuo, a expressão acima toma a forma:

$$\hat{I}_L = \int_{-L/2}^{+L/2} |q(x)\rangle\langle q(x)|dx = \frac{2\pi}{L} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |p(y_k)\rangle\langle p(y_k)|,\tag{4.54}$$

e a relação de ortonormalização das bases de posição e momento são dadas por:

$$\begin{aligned}\langle q(x)|q(x')\rangle &= \delta(x - x') \\ \langle p(y_j)|p(y_k)\rangle &= \frac{L}{2\pi}\delta_k^j,\end{aligned}\tag{4.55}$$

onde \hat{I}_L é o operador identidade sobre o espaço de estados que representa as funções periódicas com período L e o produto interno entre autoestados de posição e momento é dado pela mesma expressão obtida no caso do limite simétrico (equação 4.34):

$$\langle q(x)|p(y_k)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ixy_k}\tag{4.56}$$

Neste caso, a base da posição é um conjunto com potência do contínuo e os estados têm norma infinita, embora com o espectro de autovalores delimitado entre $-\frac{L}{2}$ e $+\frac{L}{2}$, enquanto os estados de momento formam um conjunto infinito, porém enumerável, com

norma finita. Note que poderíamos ter feito esse procedimento de maneira que a base de posição formasse um conjunto infinito, porém enumerável, e a base de momento formasse um conjunto com potência do contínuo. É importante notar também que não há necessidade da periodicidade de tamanho L estar centrada na origem. Por exemplo, podemos transladar os valores de posição de um tamanho $\frac{L}{2}$, de modo a particionar o eixo das posições em $0, \pm L, \pm 2L, \dots$. De fato, essa é a escolha que faremos na seção 4.5.

4.4 A questão dos graus de liberdade

Um sistema quântico que possui dois graus de liberdade, como por exemplo uma partícula confinada em um plano, é representado pelo produto tensorial $W = W_1 \otimes W_2$, onde os espaços de estados W_1 e W_2 representam cada grau de liberdade separadamente. Os autoestados de posição e momento desse sistema são dados, respectivamente, por $|q(\vec{x})\rangle = |q(x^1)\rangle \otimes |q(x^2)\rangle$ e $|p(\vec{y})\rangle = |p(y^1)\rangle \otimes |p(y^2)\rangle$. Os operadores unitários de translação $\hat{V}_{\vec{\xi}} = \hat{V}_{\xi^1} \otimes \hat{V}_{\xi^2} \equiv e^{i\vec{\xi} \cdot \vec{P}}$ e $\hat{U}_{\vec{\eta}} = \hat{U}_{\eta^1} \otimes \hat{U}_{\eta^2} \equiv e^{i\vec{\eta} \cdot \vec{Q}}$ agem sobre esses estados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\hat{V}_{\vec{\xi}}|q(\vec{x})\rangle &= |q(\vec{x} - \vec{\xi})\rangle \\ \hat{U}_{\vec{\eta}}|p(\vec{y})\rangle &= |p(\vec{y} + \vec{\eta})\rangle.\end{aligned}\tag{4.57}$$

No plano $x^1 - x^2$, podemos facilmente visualizar a translação do ket $|q(\vec{x})\rangle$ quando atuamos repetidamente sobre ele o operador de translação $\hat{V}_{\vec{\xi}}$, conforme mostrado na figura 4.4. O conjunto de pontos obtidos são representados em uma linha reta que contém o ponto \vec{x} , mas com inclinação dada pela direção $\vec{\xi}$. Para atingirmos um ponto

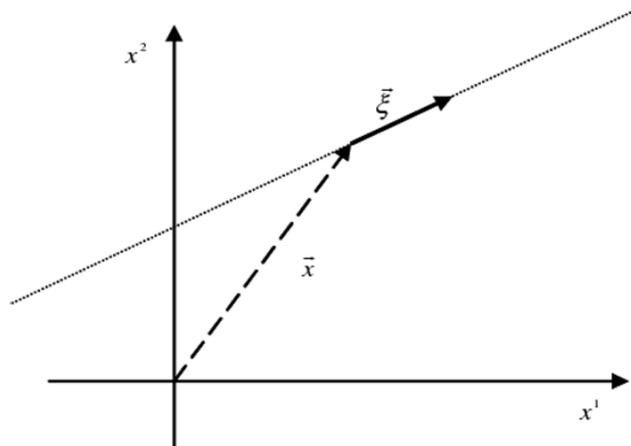


Figura 4.4: Translação em um sistema de dois graus de liberdade

arbitrário no plano, partindo de um dado ket $|q(\vec{x})\rangle$, obviamente, é preciso de no mínimo duas direções linearmente independentes, ou seja, é impossível, para o caso de espaços de dimensão infinita, encontrar um operador \hat{V}_{ξ} que aplicado repetidamente no ket $|q(\vec{x})\rangle$ atinja todos os pontos do plano $x^1 - x^2$. Porém, para o caso de espaços de estados de dimensão finita, as coisas são radicalmente diferentes. Tomemos, por exemplo, um sistema físico com dois graus de liberdade representado por dois espaços de estados de dimensão dois $W^{(4)} = W_1^{(2)} \otimes W_2^{(2)}$, como por exemplo dois qubits, onde os espaços de estados $W_1^{(2)}$ e $W_2^{(2)}$ podem ser gerados pelas respectivas bases de posição finita $\{|u_0\rangle, |u_1\rangle\}$. Assim, a base computacional do sistema produto é dada por $\{|u_0\rangle \otimes |u_0\rangle, |u_0\rangle \otimes |u_1\rangle, |u_1\rangle \otimes |u_0\rangle, |u_1\rangle \otimes |u_1\rangle\}$. Podemos representar esse espaço como o conjunto discreto formado por quatro pontos, como ilustrado na figura 4.5. A ação do operador unitário de translação $\hat{V} \otimes \hat{V}$ sobre os

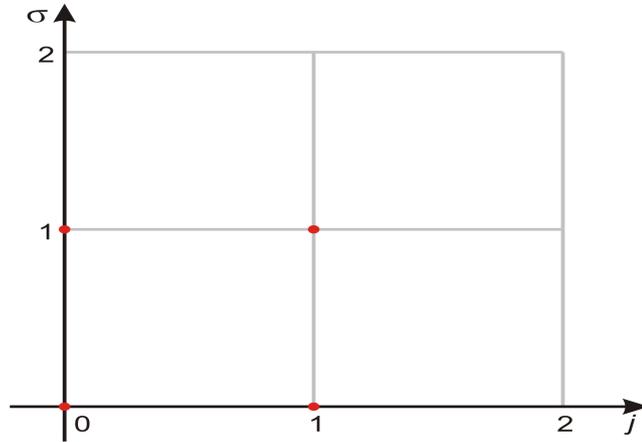


Figura 4.5: Espaço finito para 2 qubits

estados da base computacional $|u_j\rangle \otimes |u_\sigma\rangle$ ($j, \sigma = 0, 1$), gera duas linhas retas distintas no espaço discreto onde esses estados são representados, conforme mostra a figura 4.6. Como no caso de espaços de dimensão infinita, não é possível, partindo de um dos estados da base, “varrer” todo o espaço utilizando repetidamente o operador de translação $\hat{V} \otimes \hat{V}$. Consideremos agora um espaço de estados quânticos de dimensão seis $W^{(6)} = W_1^{(2)} \otimes W_2^{(3)}$, como por exemplo um sistema físico composto de um qubit e um qutrit, com as bases de posição finita dadas, respectivamente, por $\{|u_0\rangle, |u_1\rangle\}$ e $\{|u_0\rangle, |u_1\rangle, |u_2\rangle\}$. Neste caso, o fato das dimensões de W_1 e W_2 serem primas entre si, significa que a ação do operador $\hat{V} \otimes \hat{V}$ sobre os estados da base do sistema produto $\{|u_j\rangle \otimes |u_\sigma\rangle\}$ ($j = 0, 1$ e $\sigma = 0, 1, 2$), pode ser identificado com a ação do operador $\hat{V}^{(6)} = \hat{V} \otimes \hat{V}$ na mesma base reindexada da seguinte maneira $\{|u_0\rangle, |u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, |u_4\rangle, |u_5\rangle\}$, ou seja, partindo de um dado estado da base do sistema produto, podemos “varrer” todo o espaço com a atuação repetida do

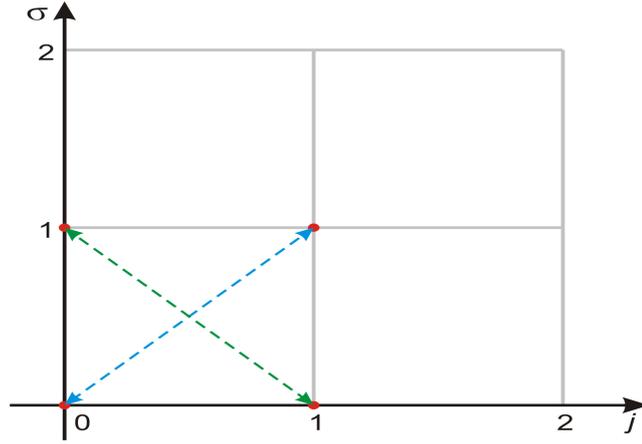


Figura 4.6: Ação do operador de translação sobre os estados da base do espaço $W^{(4)} = W_1^{(2)} \otimes W_2^{(2)}$.

operador de translação $\hat{V}^{(6)}$. Definindo, por exemplo, o estado $|u_0\rangle = |u_0\rangle \otimes |u_0\rangle$ e agindo repetidamente sobre ele o operador $\hat{V}^{(6)} = \hat{V} \otimes \hat{V}$, obtemos todos os estados da base

$$\begin{aligned}
 |u_1^{(6)}\rangle &= (\hat{V}^{(6)})^\dagger |u_0\rangle = \hat{V}^\dagger \otimes \hat{V}^\dagger |u_0\rangle \otimes |u_0\rangle = |u_1\rangle \otimes |u_1\rangle; \\
 |u_2^{(6)}\rangle &= (\hat{V}^{(6)})^\dagger |u_1\rangle = \hat{V}^\dagger \otimes \hat{V}^\dagger |u_1\rangle \otimes |u_1\rangle = |u_0\rangle \otimes |u_2\rangle; \\
 |u_3^{(6)}\rangle &= (\hat{V}^{(6)})^\dagger |u_2\rangle = \hat{V}^\dagger \otimes \hat{V}^\dagger |u_0\rangle \otimes |u_2\rangle = |u_1\rangle \otimes |u_0\rangle; \\
 |u_4^{(6)}\rangle &= (\hat{V}^{(6)})^\dagger |u_3\rangle = \hat{V}^\dagger \otimes \hat{V}^\dagger |u_1\rangle \otimes |u_0\rangle = |u_0\rangle \otimes |u_1\rangle; \\
 |u_5^{(6)}\rangle &= (\hat{V}^{(6)})^\dagger |u_4\rangle = \hat{V}^\dagger \otimes \hat{V}^\dagger |u_0\rangle \otimes |u_1\rangle = |u_1\rangle \otimes |u_2\rangle,
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

que podem ser representados no espaço discreto conforme mostrado na figura 4.7. Concluimos

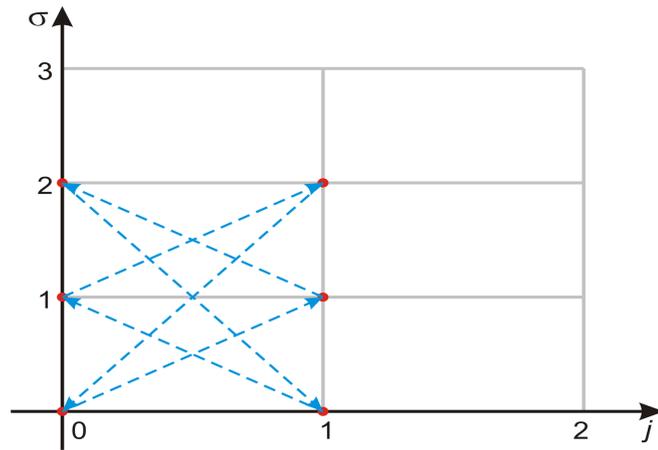


Figura 4.7: Ação do operador de translação sobre os estados da base do espaço $W^{(6)} = W_1^{(2)} \otimes W_2^{(3)}$.

então que para esse caso, onde a dimensão dos subsistemas são primas entre si, há uma

redução de dois graus de liberdade para somente um único grau de liberdade efetivo. Na verdade, isso vale para qualquer espaço de estados finito formado por dois subespaços com dimensões primas entre si. Esse resultado foi primeiramente proposto por Lobo e Nemes na forma do seguinte teorema [30]:

Teorema 4.4.1. *Seja $W^{(N)} = W^{(N_1)} \otimes W^{(N_2)}$ o produto tensorial de dois subespaços com $MDC(N_1, N_2) = 1$, onde cada subespaço contém seu próprio par de operadores de translação $(\hat{U}^{(N_\alpha)}, \hat{V}^{(N_\alpha)})$, juntamente com um par de bases de posição e momento $\{|u_{j_\alpha}^{(N_\alpha)}\rangle\}$, $\{|v_{k_\alpha}^{(N_\alpha)}\rangle\}$, $(j_\alpha, k_\alpha = 0, \dots, N_\alpha - 1)$ com $(\alpha = 1, 2)$, que obedecem as relações dadas por 4.24 e 4.28. Se definirmos os estados de posição finita $|u_j\rangle \in W^{(N)}$ por*

$$|u_j\rangle = (\hat{V}^t)^j |u_0\rangle, \quad (4.59)$$

com

$$\hat{V} = \hat{V}^{(N_1)} \otimes \hat{V}^{(N_2)}, \quad (4.60)$$

e

$$|u_0\rangle = |u_0^{(N_1)}\rangle \otimes |u_0^{(N_2)}\rangle. \quad (4.61)$$

Então, existe um único par $r_1 \in Z_{N_1}$ e $r_2 \in Z_{N_2}$ tal que o operador

$$\hat{U} = \hat{U}^{r_1(N_1)} \otimes \hat{U}^{r_2(N_2)} \quad (4.62)$$

define os estados de momento finito da maneira usual

$$|v_k\rangle = \hat{U}^k |v_0\rangle, \quad (4.63)$$

com

$$|v_0\rangle = |v_0^{(N_1)}\rangle \otimes |v_0^{(N_2)}\rangle, \quad (4.64)$$

tal que \hat{V} e \hat{U} obedecem a relação 4.28 e as bases de posição e momento finitos $\{|u_k\rangle\}\{|v_k\rangle\}$ obedecem a relação 4.24.

Demonstração. Seja

$$|v_k\rangle = \hat{U}^k |v_0\rangle = \hat{U}^{r_1 k(N_1)} \otimes \hat{U}^{r_2 k(N_2)} (|v_0^{(N_1)}\rangle \otimes |v_0^{(N_2)}\rangle) = (|v_{r_1 k}^{(N_1)}\rangle \otimes |v_{r_2 k}^{(N_2)}\rangle)$$

para algum, não especificado, par (r_1, r_2) . Então, devemos impor que

$$\begin{aligned} \langle u^j | v_k \rangle &= \frac{1}{\sqrt{N}} v_j^k = (\langle u^{j(N_1)} | \otimes \langle u^{j(N_2)} |) (|v_{r_1 k}^{(N_1)}\rangle \otimes |v_{r_2 k}^{(N_2)}\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N_1 N_2}} v_{r_1 k}^{j(N_1)} \cdot v_{r_2 k}^{j(N_2)} = \frac{1}{\sqrt{N}} v_{(r_1 N_2 + r_2 N_1)j}^{(N)k} \end{aligned}$$

que é válida somente se

$$r_1 N_2 + r_2 N_1 = 1 \pmod{N}.$$

É bem conhecido da teoria dos números que para N_1 e N_2 primos entre si, a equação diofantina acima assume somente um par de soluções $r_1 \in Z_{N_1}$ e $r_2 \in Z_{N_2}$, dado por

$$\begin{aligned} r_1 &= N_2^{\phi(N_1)-1} \pmod{N_1} \\ r_2 &= N_1^{\phi(N_2)-1} \pmod{N_2}, \end{aligned}$$

onde $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é a *função totiente de Euler* [31]. Para um dado inteiro n , $\phi(n)$ é definida como sendo o número de inteiros entre 1 e n que são relativamente primos a n . Por exemplo, $\phi(1) = 1$, $\phi(4) = 2$, $\phi(9) = 6$. Não é difícil se convencer que para um dado número primo p , $\phi(p) = p - 1$. \square

De posse desse teorema, podemos voltar ao exemplo onde $N_1 = 2$ e $N_2 = 3$ tratado acima, e construir a base dos momentos finitos. Definindo $|v_0\rangle = |v_0\rangle \otimes |v_0\rangle$ e calculando $r_1 = 3^{\phi(2)-1} \pmod{2} = 3^{1-1} \pmod{2} = 1$ e $r_2 = 2^{\phi(3)-1} \pmod{3} = 2^{2-1} \pmod{3} = 2$, a atuação repetida de $\hat{U} = \hat{U} \otimes \hat{U}^2$ gera toda a base de $W^{(N)}$

$$\begin{aligned} |v_1^{(6)}\rangle &= \hat{U}|v_0\rangle = \hat{U} \otimes \hat{U}^2|v_0\rangle \otimes |v_0\rangle = |v_1\rangle \otimes |v_2\rangle; \\ |v_2^{(6)}\rangle &= \hat{U}|v_1\rangle = \hat{U} \otimes \hat{U}^2|v_1\rangle \otimes |v_1\rangle = |v_0\rangle \otimes |v_1\rangle; \\ |v_3^{(6)}\rangle &= \hat{U}|v_2\rangle = \hat{U} \otimes \hat{U}^2|v_0\rangle \otimes |v_2\rangle = |v_1\rangle \otimes |v_0\rangle; \\ |v_4^{(6)}\rangle &= \hat{U}|v_3\rangle = \hat{U} \otimes \hat{U}^2|v_1\rangle \otimes |v_0\rangle = |v_0\rangle \otimes |v_2\rangle; \\ |v_5^{(6)}\rangle &= \hat{U}|v_4\rangle = \hat{U} \otimes \hat{U}^2|v_0\rangle \otimes |v_1\rangle = |v_1\rangle \otimes |v_1\rangle. \end{aligned} \tag{4.65}$$

Com a intenção de deixar essas idéias mais claras, apresentamos mais um exemplo que contém a estrutura do teorema acima. Consideremos $N = 15$ com $N_1 = 3$, $N_2 = 5$ e, portanto, $MDC(N_1, N_2) = 1$. Definindo $|u_0\rangle = |u_0\rangle \otimes |u_0\rangle$ e $|v_0\rangle = |v_0\rangle \otimes |v_0\rangle$, podemos gerar todos os vetores das bases de posição e momento finitos atuando repetidamente com

os operadores unitários de translação:

$$\begin{aligned}
|u_1^{(15)}\rangle &= (\hat{V}^{(15)})^\dagger |u_0\rangle = \hat{V}^\dagger \otimes \hat{V}^\dagger |u_0\rangle \otimes |u_0\rangle = |u_1\rangle \otimes |u_1\rangle; \\
|u_2^{(15)}\rangle &= (\hat{V}^{(15)})^\dagger |u_1\rangle = \hat{V}^\dagger \otimes \hat{V}^\dagger |u_1\rangle \otimes |u_1\rangle = |u_2\rangle \otimes |u_2\rangle; \\
|u_3^{(15)}\rangle &= (\hat{V}^{(15)})^\dagger |u_2\rangle = \hat{V}^\dagger \otimes \hat{V}^\dagger |u_2\rangle \otimes |u_2\rangle = |u_0\rangle \otimes |u_3\rangle; \\
|u_4^{(15)}\rangle &= (\hat{V}^{(15)})^\dagger |u_3\rangle = \hat{V}^\dagger \otimes \hat{V}^\dagger |u_0\rangle \otimes |u_3\rangle = |u_1\rangle \otimes |u_4\rangle; \\
|u_5^{(15)}\rangle &= (\hat{V}^{(15)})^\dagger |u_4\rangle = \hat{V}^\dagger \otimes \hat{V}^\dagger |u_1\rangle \otimes |u_4\rangle = |u_2\rangle \otimes |u_0\rangle; \\
|u_6^{(15)}\rangle &= (\hat{V}^{(15)})^\dagger |u_5\rangle = \hat{V}^\dagger \otimes \hat{V}^\dagger |u_2\rangle \otimes |u_0\rangle = |u_0\rangle \otimes |u_1\rangle; \\
|u_7^{(15)}\rangle &= (\hat{V}^{(15)})^\dagger |u_6\rangle = \hat{V}^\dagger \otimes \hat{V}^\dagger |u_0\rangle \otimes |u_1\rangle = |u_1\rangle \otimes |u_2\rangle; \\
|u_8^{(15)}\rangle &= (\hat{V}^{(15)})^\dagger |u_7\rangle = \hat{V}^\dagger \otimes \hat{V}^\dagger |u_1\rangle \otimes |u_2\rangle = |u_2\rangle \otimes |u_3\rangle; \\
|u_9^{(15)}\rangle &= (\hat{V}^{(15)})^\dagger |u_8\rangle = \hat{V}^\dagger \otimes \hat{V}^\dagger |u_2\rangle \otimes |u_3\rangle = |u_0\rangle \otimes |u_4\rangle; \\
|u_{10}^{(15)}\rangle &= (\hat{V}^{(15)})^\dagger |u_9\rangle = \hat{V}^\dagger \otimes \hat{V}^\dagger |u_0\rangle \otimes |u_4\rangle = |u_1\rangle \otimes |u_0\rangle; \\
|u_{11}^{(15)}\rangle &= (\hat{V}^{(15)})^\dagger |u_{10}\rangle = \hat{V}^\dagger \otimes \hat{V}^\dagger |u_1\rangle \otimes |u_0\rangle = |u_2\rangle \otimes |u_1\rangle; \\
|u_{12}^{(15)}\rangle &= (\hat{V}^{(15)})^\dagger |u_{11}\rangle = \hat{V}^\dagger \otimes \hat{V}^\dagger |u_2\rangle \otimes |u_1\rangle = |u_0\rangle \otimes |u_2\rangle; \\
|u_{13}^{(15)}\rangle &= (\hat{V}^{(15)})^\dagger |u_{12}\rangle = \hat{V}^\dagger \otimes \hat{V}^\dagger |u_0\rangle \otimes |u_2\rangle = |u_1\rangle \otimes |u_3\rangle; \\
|u_{14}^{(15)}\rangle &= (\hat{V}^{(15)})^\dagger |u_{13}\rangle = \hat{V}^\dagger \otimes \hat{V}^\dagger |u_1\rangle \otimes |u_3\rangle = |u_2\rangle \otimes |u_4\rangle
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|v_1^{(15)}\rangle &= \hat{U}|v_0\rangle = \hat{U}^2 \otimes \hat{U}^2 |v_0\rangle \otimes |v_0\rangle = |v_2\rangle \otimes |v_2\rangle; \\
|v_2^{(15)}\rangle &= \hat{U}|v_1\rangle = \hat{U}^2 \otimes \hat{U}^2 |v_2\rangle \otimes |v_2\rangle = |v_1\rangle \otimes |v_4\rangle; \\
|v_3^{(15)}\rangle &= \hat{U}|v_2\rangle = \hat{U}^2 \otimes \hat{U}^2 |v_1\rangle \otimes |v_4\rangle = |v_0\rangle \otimes |v_1\rangle; \\
|v_4^{(15)}\rangle &= \hat{U}|v_3\rangle = \hat{U}^2 \otimes \hat{U}^2 |v_0\rangle \otimes |v_1\rangle = |v_2\rangle \otimes |v_3\rangle; \\
|v_5^{(15)}\rangle &= \hat{U}|v_4\rangle = \hat{U}^2 \otimes \hat{U}^2 |v_2\rangle \otimes |v_3\rangle = |v_1\rangle \otimes |v_0\rangle; \\
|v_6^{(15)}\rangle &= \hat{U}|v_5\rangle = \hat{U}^2 \otimes \hat{U}^2 |v_1\rangle \otimes |v_0\rangle = |v_0\rangle \otimes |v_2\rangle; \\
|v_7^{(15)}\rangle &= \hat{U}|v_6\rangle = \hat{U}^2 \otimes \hat{U}^2 |v_0\rangle \otimes |v_2\rangle = |v_2\rangle \otimes |v_4\rangle; \\
|v_8^{(15)}\rangle &= \hat{U}|v_7\rangle = \hat{U}^2 \otimes \hat{U}^2 |v_2\rangle \otimes |v_4\rangle = |v_1\rangle \otimes |v_1\rangle; \\
|v_9^{(15)}\rangle &= \hat{U}|v_8\rangle = \hat{U}^2 \otimes \hat{U}^2 |v_1\rangle \otimes |v_1\rangle = |v_0\rangle \otimes |v_3\rangle; \\
|v_{10}^{(15)}\rangle &= \hat{U}|v_9\rangle = \hat{U}^2 \otimes \hat{U}^2 |v_0\rangle \otimes |v_3\rangle = |v_2\rangle \otimes |v_0\rangle; \\
|v_{11}^{(15)}\rangle &= \hat{U}|v_{10}\rangle = \hat{U}^2 \otimes \hat{U}^2 |v_2\rangle \otimes |v_0\rangle = |v_1\rangle \otimes |v_2\rangle; \\
|v_{12}^{(15)}\rangle &= \hat{U}|v_{11}\rangle = \hat{U}^2 \otimes \hat{U}^2 |v_1\rangle \otimes |v_2\rangle = |v_0\rangle \otimes |v_4\rangle; \\
|v_{13}^{(15)}\rangle &= \hat{U}|v_{12}\rangle = \hat{U}^2 \otimes \hat{U}^2 |v_0\rangle \otimes |v_4\rangle = |v_2\rangle \otimes |v_1\rangle; \\
|v_{14}^{(15)}\rangle &= \hat{U}|v_{13}\rangle = \hat{U}^2 \otimes \hat{U}^2 |v_2\rangle \otimes |v_1\rangle = |v_1\rangle \otimes |v_3\rangle,
\end{aligned}$$

pois $r_1 = 5^{\phi(3)-1} \pmod{3} = 2$ e $r_2 = 3^{\phi(5)-1} \pmod{5} = 2$.

Concluimos que quando o $MDC(N_1, N_2) = 1$, podemos interpretar os dois graus de liberdade como *pseudo-graus* de liberdade, pois podemos associar somente um

único grau de liberdade ao sistema. Apresentamos na próxima seção uma aplicação física para esse fato, definindo as variáveis modulares de maneira natural.

4.5 Variáveis modulares e *pseudo-graus* de liberdade

Voltemos ao problema da interferência descrito na introdução deste capítulo, onde um aparato contendo n fendas é colocado à frente de um feixe de partículas, como por exemplo elétrons, e são detectadas em um segundo aparato, conforme ilustra a figura 4.8. O estado inicial da partícula incidente é, utilizando a notação das seções anteriores,

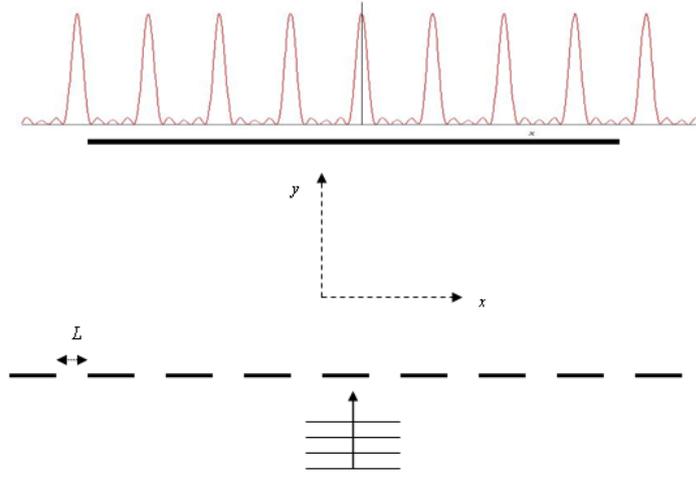


Figura 4.8: Experimento de difração com n fendas.

$|p(\vec{y})\rangle = |p(0)\rangle \otimes |p(y^2)\rangle$. Imediatamente após a interação com o aparato que contém as fendas, o estado da partícula é descrito por $|\psi\rangle \otimes |p(y^2)\rangle$, onde $|\psi\rangle$ é uma combinação linear de diferentes autoestados de momento na direção x . Isso acontece porque a partícula troca momento modular com o aparato que contém as fendas na direção x (difração), enquanto que o grau de liberdade $y^2 = y$ não sofre qualquer perturbação. Assim, o grau de liberdade pertinente para a descrição do problema é o ligado à direção x . Como dito na introdução desse capítulo, o estado $|\psi\rangle$ é autoestado simultâneo dos operadores unitários de translação $\hat{V}_L = e^{iL\hat{P}}$ e $\hat{U}_{2\pi/L} = e^{i\frac{2\pi}{L}\hat{Q}}$ ($\hbar = 1$), ou seja, esse estado é simultaneamente autoestado de posição e momento modulares, conforme mostramos no exemplo ilustrado na figura 4.3, onde o estado com $q_{\text{mod}} = \frac{2L}{3}$ e $p_{\text{mod}} = \frac{\hbar}{2L}$ é representado no espaço de fase. Dessa maneira, os operadores de translação \hat{V}_L e $\hat{U}_{2\pi/L}$ obedecem a seguinte relação de

comutação:

$$[\hat{V}_L, \hat{U}_{2\pi/L}] = 0. \quad (4.66)$$

Propomos uma descrição matemática desse fenômeno em termos dos pseudo-graus de liberdade descritos na seção anterior, onde nós decomposmos o espaço de estados que representa o grau de liberdade pertinente a descrição desse problema em dois subespaços que possuem dimensões primas entre si.

Seja $W^{(N)} = W^{(N_1)} \otimes W^{(N_2)}$ um espaço de estados para o sistema quântico com $\dim W^{(N)} = N = N_1 \cdot N_2$ e $MDC(N_1, N_2) = 1$, onde cada subespaço é gerado pelas suas respectivas bases de posição e momento $\{|u_{j_\alpha}^{(N_\alpha)}\rangle\}$, $\{|v_{k_\alpha}^{(N_\alpha)}\rangle\}$, $(j_\alpha, k_\alpha = 0, \dots, N_\alpha - 1)$ com $(\alpha = 1, 2)$. Seguindo as idéias da seção anterior, definimos os estados da base de $W^{(N)}$ como $|u_j^{(N)}\rangle = (\hat{V}^t)^j |u_0^{(N)}\rangle$ com $|u_0^{(N)}\rangle = |u_0\rangle \otimes |u_0\rangle$, $\hat{V}^{(N)} = \hat{V} \otimes \hat{V}$ e $|v_k^{(N)}\rangle = \hat{U}^k |v_0^{(N)}\rangle$, $|v_0^{(N)}\rangle = |v_0\rangle \otimes |v_0\rangle$, $\hat{U} = \hat{U}^{r_1} \otimes \hat{U}^{r_2}$, onde r_1 e r_2 são dados pelo teorema 4.4.1. Podemos então interpretar o grau de liberdade efetivo de $W^{(N)}$ como um grau de liberdade composto de “ N_2 períodos de tamanho N_1 ” (ou vice-versa). De fato, podemos definir o seguinte estado de $W^{(N)}$:

$$|j_1, k_2^{(N)}\rangle = |v_{j_1}\rangle \otimes |u_{k_2}\rangle. \quad (4.67)$$

Este estado é simultaneamente um autoestado de momento finito de $W^{(N_1)}$ e posição finita de $W^{(N_2)}$. Como podemos ver, este estado é um análogo finito do estado representado na figura 4.3. Definimos os seguintes operadores:

$$\begin{aligned} \hat{U}^{N_1} &= \hat{I} \otimes \hat{U}^{r_2 N_1} \\ \hat{V}^{N_2} &= \hat{V}^{N_2} \otimes \hat{I} \end{aligned} \quad (4.68)$$

que obviamente comutam

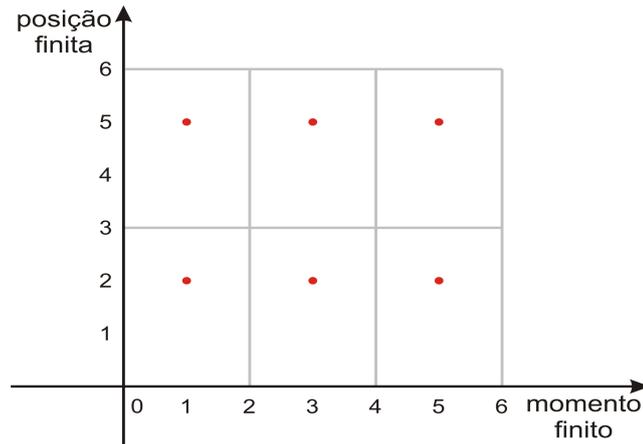
$$[\hat{U}^{N_1}, \hat{V}^{N_2}] = 0. \quad (4.69)$$

A relação acima é o análogo finito da equação 4.66. Podemos facilmente calcular os seus autovalores:

$$\begin{aligned} \hat{V}^{N_2} |j_1, k_2^{(N)}\rangle &= v_{j_1 N_2}^{(N)} |j_1, k_2^{(N)}\rangle \\ \hat{U}^{N_1} |j_1, k_2^{(N)}\rangle &= v_{k_2 r_2 N_1}^{(N)} |j_1, k_2^{(N)}\rangle \end{aligned} \quad (4.70)$$

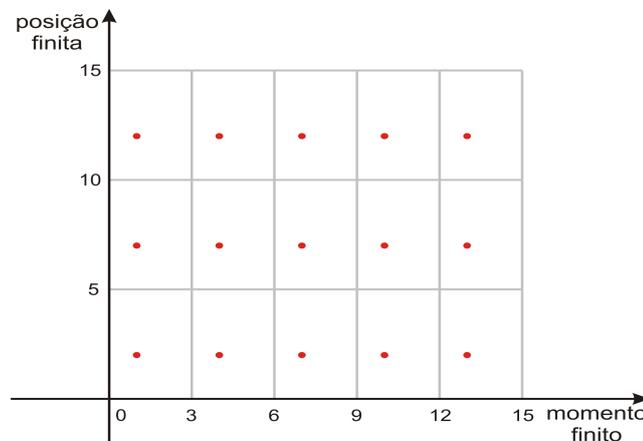
Ilustremos essas idéias através de alguns exemplos, começando com o caso onde $N = 6$:

Exemplo 4.5.1. $N = 6$, $N_1 = 2$ and $N_2 = 3$. Podemos representar o estado $|1, 2^{(6)}\rangle = |v_1\rangle \otimes |u_2\rangle$ no *espaço de fase finito* como mostrado na figura 4.9. Analisando a figura 4.9,

Figura 4.9: Estado $|1, 2^{(6)}\rangle \in W^{(6)}$

nota-se que o grau de liberdade de posição finita é composto de 2 períodos de tamanho 3, enquanto o grau de liberdade de momento finito é composto de 3 períodos de tamanho 2.

Exemplo 4.5.2. Consideremos agora o caso com $N = 15$, $N_1 = 3$, $N_2 = 5$ e o estado $|1, 2^{(15)}\rangle = |v_1\rangle \otimes |u_2\rangle$, representado no espaço de fase discreto como mostrado na figura 4.10. Neste caso, o grau de liberdade de momento finito é composto de 5 períodos de

Figura 4.10: Estado $|1, 2^{(15)}\rangle \in W^{(15)}$

tamanho 3 e o grau de liberdade de posição finita é composto de 3 períodos de tamanho 5.

Para obtermos o estado proposto por Aharonov e colaboradores representado na figura 4.3, basta fazermos o limite do contínuo não simétrico apropriado do estado $|j_1, k_2^{(N)}\rangle$, com a variável momento do primeiro subsistema assumindo valores dentro de um conjunto infinito com potência do contínuo e a variável posição assumindo valores

dentro de um conjunto infinito enumerável. Enquanto que no segundo subsistema, o procedimento é inverso: a variável momento assume valores em um conjunto infinito enumerável e a variável posição assume valores em um conjunto com potência do contínuo.

5 Conclusões e perspectivas futuras

Neste trabalho, nos debruçamos sobre duas questões de cunho fundamental na mecânica quântica desenvolvidas por Aharonov e colaboradores nos últimos quarenta anos: o conceito de valor fraco e de variáveis modulares. O primeiro deriva de uma abordagem temporalmente simétrica da dinâmica quântica e tem já apresentado uma série de desdobramentos importantes em física teórica e experimental, e até de matemática. No capítulo 2 procuramos estudar e compreender melhor este conceito de valor fraco, observando o efeito que o mesmo gera no espaço de fase do sistema medidor. Mostramos que quando escolhemos o operador número \hat{N} como gerador de transformações do sistema medidor, juntamente com a preparação do vetor de estado inicial do sistema medidor como um estado coerente, as equações que descrevem as diferenças dos valores esperados dos observáveis posição e momento do sistema medidor são escritas de uma forma simétrica e bem mais simplificada do que as encontradas na literatura até então, tornando, possivelmente, mais fácil a implementação experimental de medidas fracas via ótica quântica. Como uma perspectiva futura, pretendemos ampliar nossa compreensão do significado físico do valor fraco, analisando todas as transformações possíveis no espaço de fase do sistema medidor, como por exemplo a rotação hiperbólica e a transformação de escala, discutidas em [8]. Já no capítulo 3, exibimos uma análise crítica mais rigorosa da interpretação apresentada recentemente por *Tamate et al* para o valor fraco em termos da geometria simplética do espaço projetivo do sistema a ser medido quando de sua interação com o sistema medidor durante o procedimento de medida ideal de von Neumann e sua subsequente pós-seleção. Mostramos algumas falhas conceituais e deficiências da abordagem dos autores e apresentamos uma forma de contornar esses problemas.

O conceito de variável modular tem sido defendido desde a década de 60 por Aharonov como a única forma de representar corretamente certos fenômenos quânticos dinâmicos não-locais, como o célebre efeito Bohm-Aharonov entre outros. No capítulo 4, propomos que a maneira mais clara de definir a estrutura por trás desse fenômeno é através de uma descrição via a cinemática de Schwinger para o espaço de fase discreto e seu respectivo “limite do contínuo” apropriado. O conceito de variável modular tem começado a receber uma maior atenção recentemente [32]. Uma das razões para essa

recente atenção da comunidade de informação quântica, é que Aharonov tem proposto a possibilidade de confirmar várias dessas idéias sobre variáveis modulares justamente através de experimentos de medição de valores fracos [33, 28]. Acreditamos que nossa abordagem via cinemática finita de Schwinger poderá ser importante nessa empreitada.

Referências Bibliográficas

- [1] Aharonov, Y., Albert, D. Z., and Vaidman, L. How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-1/2 particle can turn out to be 100. *Phys. Rev. Lett.* **60**(14), 1351–1354, Apr (1988).
- [2] Aharonov, Y. and Vaidman, L. Properties of a quantum system during the time interval between two measurements. *Phys. Rev. A* **41**(1), 11–20, Jan (1990).
- [3] Aharonov, Y., Bergmann, P. G., and Lebowitz, J. L. Time symmetry in the quantum process of measurement. *Phys. Rev.* **134**(6B), B1410–B1416, Jun (1964).
- [4] Aharonov, Y. and Vaidman, L. The two-state vector formalism: An updated review. *Time in Quantum Mechanics, Lecture Notes in Physics* **734** (2007).
- [5] Mitchison, G., Jozsa, R., and Popescu, S. Sequential weak measurement. *Phys. Rev. A* **76**(6), 062105, Dec (2007).
- [6] Aharonov, Y. and Rohrlich, D. *Quantum Paradoxes: Quantum Theory for the Perplexed*. Wiley, , Sep (2003).
- [7] Jozsa, R. Complex weak values in quantum measurement. *Phys. Rev. A* **76**(4), 044103 (2007).
- [8] Lobo, A. C. and Ribeiro, C. A. Weak values and the quantum phase space. *Phys. Rev. A* **80**(1), 012112, Jul (2009).
- [9] von Neumann, J. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, , Oct (1996).
- [10] Tamate, S., Kobayashi, H., Nakanishi, T., Sugiyama, K., and Kitano, M. Geometrical aspects of weak measurements and quantum erasers. *New Journal of Physics* **11**, 093025 (2009).
- [11] Dixon, P. B., Starling, D. J., Jordan, A. N., and Howell, J. C. Ultrasensitive beam deflection measurement via interferometric weak value amplification. *Phys. Rev. Lett.* **102**(17), 173601, Apr (2009).

- [12] Hosten, O. and Kwiat, P. Observation of the spin Hall effect of light via weak measurements. *Science* **319**(5864), 787 (2008).
- [13] Sakurai, J. J. *Modern Quantum Mechanics*. Addison Wesley, second edition, , Jan (1994).
- [14] Griffiths, R. B. *Consistent Quantum Theory*. Cambridge University Press, first edition, , Dec (2003).
- [15] Ritchie, N., Story, J., and Hulet, R. Realization of a measurement of a weak value. *Physical Review Letters* **66**(9), 1107–1110 (1991).
- [16] Glauber, R. J. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Phys. Rev.* **131**(6), 2766–2788, Sep (1963).
- [17] Hall, B. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*. Springer, (2003).
- [18] Namias, V. The fractional order fourier transform and its application to quantum mechanics. *IMA Journal of Applied Mathematics* **25**(3), 241–265 (1980).
- [19] Ozaktas, H., Kutay, M., and Mendlovic, D. Introduction to the fractional fourier transform and its applications. *Advances in Imaging and Electron Physics* **106**, 239–292 (1999).
- [20] Vedral, V. *Modern Foundations of Quantum Optics*. Imperial College Press, (2005).
- [21] Pancharatnam, S. Generalized theory of interference, and its applications. *Proc. Indian Acad. Sci. A* **44**, 247 (1956).
- [22] Berry, M. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* **392**(1802), 45–57 (1984).
- [23] Aharonov, Y. and Anandan, J. Phase change during a cyclic quantum evolution. *Physical Review Letters* **58**(16), 1593–1596 (1987).
- [24] Page, D. Geometrical description of Berry’s phase. *Physical Review A* **36**(7), 3479–3481 (1987).

- [25] Chruściński, D. and Jamiołkowski, A. *Geometric phases in classical and quantum mechanics*. Birkhauser, (2004).
- [26] Aharonov, Y., Pendleton, H., and Petersen, A. Modular variables in quantum theory. *International Journal of Theoretical Physics* **2**(3), 213–230 (1969).
- [27] Aharonov, Y. and Bohm, D. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.* **115**(3), 485–491, Aug (1959).
- [28] Tollaksen, J., Aharonov, Y., Casher, A., Kaufherr, T., and Nussinov, S. Quantum interference experiments, modular variables and weak measurements. *New Journal of Physics* **12**, 013023 (2010).
- [29] Schwinger, J. and Greenberger, D. Quantum mechanics: symbolism of atomic measurements. *American Journal of Physics* **71**, 958 (2003).
- [30] Lobo, A. and Nemes, M. On the number of degrees of freedom in schwinger’s quantum kinematics. *Physica A* **216**(1-2), 185–194 (1995).
- [31] Ireland, K., Rosen, M., and Rosen, M. *A classical introduction to modern number theory*. Springer, (1990).
- [32] Popescu, S. Weak measurements just got stronger. *Physics* **2**, 32, Apr (2009).
- [33] Tollaksen, J. and Aharonov, Y. The deterministic set of operators, quantum interference phenomena, and quantum reality. *Journal of Physics: Conference Series* **196**(1), 012006 (2009).