

Dinâmica de Emaranhamento

e

Geometria de Estados Quânticos

Tese de Doutorado

Doutorando:

Raphael Campos Drumond

Orientador:

Marcelo de Oliveira Terra Cunha

*Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do
Departamento de Física da Universidade Federal de Minas
Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de
Doutor em Ciências*

Programa de Pós-Graduação em Física, UFMG

Belo Horizonte, Fevereiro de 2011

RESUMO

Nesta tese investigamos a dinâmica de emaranhamento de sistemas bipartites à luz da geometria de estados quânticos. Estudamos tanto sistemas de dimensão finita quanto infinita (restrita ao subconjunto dos estados gaussianos), com especial atenção aos efeitos de “morte súbita” e “nascimento súbito” de emaranhamento. Exploramos o fato de estes efeitos estarem relacionados a propriedades geométricas do conjunto dos estados separáveis (a saber, ser convexo e ter interior não-vazio) para estabelecer, em sistemas de dimensão finita: i) que estes efeitos são genéricos sob dinâmicas fechadas (mas permitindo a atuação de campos externos arbitrários), no sentido de que sempre existem *alguns* estados iniciais onde eles ocorrerão, dado que exista *qualquer* interação entre as partes; ii) uma classificação, para dinâmicas relaxantes, dos possíveis comportamentos assintóticos do emaranhamento em termos da geometria do conjunto de estados assintóticos da dinâmica, exibindo exemplos para cada uma das classes, e explorando, fixada cada dinâmica, o quão típico cada efeito é, considerando estados iniciais aleatórios. Para sistemas de dimensão infinita exploramos uma particular dinâmica de dois modos de campo eletromagnético sujeitos simultaneamente a dois tipos de reservatório, com forte apelo experimental, identificando a existência de “fases dinâmicas” para o comportamento assintótico do emaranhamento, dependendo dos parâmetros destes reservatórios.

ABSTRACT

In this thesis we investigate the entanglement dynamics of bipartite systems from the point of view of quantum states geometry. We study both finite and infinite dimensional systems (restricted to Gaussian states), with special attention to effects like “entanglement sudden death” and its counterpart “entanglement sudden birth”. We explore the fact that these effects are related to geometrical properties of the set of separable states (namely, that it is convex and has non empty interior) to establish, for finite dimensional systems: i) that these effects are generic for closed dynamics (but allowing for arbitrary time dependent external fields), in the sense that there always exists *some* initial states to which these effects occur, as long as there is *any* interaction between the parts; ii) a classification, for relaxing dynamics, of possible entanglement asymptotic behaviors, exhibiting examples for each of them, and exploring, for each given dynamics, how typical these behaviors are, for random initial states. For infinite dimensional systems we study a particular dynamics for two modes of electromagnetic field subjected simultaneously to two types of reservoir, with strong experimental appeal, identifying the existence of “dynamical phases” for the asymptotic behavior of entanglement, depending on the reservoirs’ parameters.

LISTA DE ACRÔNIMOS

Acrônimo	Significado
LOCC	<i>Local operations and classical communication</i>
POVM	<i>Positive operator valued measure</i>
MSE	Morte súbita de emaranhamento
MAE	Morte assintótica de emaranhamento
NSE	Nascimento súbito de emaranhamento
EP	Emaranhamento persistente
VC	Variáveis contínuas
EG	Estados gaussianos
MC	Matriz de covariância
EPR	Einstein-Podolsky-Rosen
DGCZ	Duan-Giedke-Cirac-Zoller

Agradecimentos

Ao Marcelo Terra, pela orientação e atenção cuidadosas durante todo este período.

Ao Nilo e à Imara, por tudo que representam para mim.

Ao meu pai, pela orientação de vida.

A Mota, Izabel e JP, mães ou pais em vários sentidos.

Ao meu avô, irmãos, tios e primos, pela família incrível que são.

À “Chefa”, Maria Carolina, minha eterna orientadora.

Aos membros do *EnLight*, pelas boas reuniões e discussões.

Ao Āaslav Brukner, pela recepção e supervisão durante meu estágio em Viena, e aos seus alunos Ognyan Oreshkov, Fabio Costa, Igor Pikovsky e Borivoje Dakic, indomável equipe de físicos-filósofos.

Ao Juan Pablo Paz e seus alunos, Ariel Bendersky, Cecilia Cormic, Augusto Roncaglia e Cristian Schmiegelow, pela recepção e discussões em Buenos Aires.

Aos funcionários do DF, por tornar a vida acadêmica possível.

Aos amigos, Camarada, Daniel, Matthias, Xubaca, Planeta, Julia, Pablo, Julio, Desonesto, Marcio, Nathalia, Custela, e muitos outros, pelas cervejas e farras indispensáveis para a sobrevivência durante um doutorado.

Dedico este trabalho a minha mãe, minha avó Maria Elisa e ao Renato Zanforlin, três pessoas inestimáveis que se foram durante este período, e ao Dimitri, uma que acaba de chegar.

CONTEÚDO

1. <i>Introdução</i>	1
2. <i>Dinâmica, Geometria e Emaranhamento</i>	4
2.1 Dinâmica de sistemas quânticos	5
2.2 Geometria de estados quânticos	7
2.3 Emaranhamento	22
2.3.1 Geometria de Emaranhamento	28
2.4 Emaranhamento em estados gaussianos	30
2.5 Estados Quânticos Aleatórios	35
3. <i>Dinâmica de Emaranhamento em Dimensão Finita</i>	37
3.1 Geometria da morte súbita de emaranhamento: visão geral	37
3.2 Morte súbita em dinâmicas unitárias	39
3.3 Morte súbita em dinâmicas não-unitárias	42
4. <i>Dinâmica de emaranhamento em Variáveis Contínuas</i>	59
4.1 Emaranhamento de dois modos devido a um reservatório arquitetado	60
4.2 Dinâmica em um reservatório arquitetado e sujeito a ruído térmico	62
4.2.1 Reservatório simétrico: regime assintótico	63
4.2.2 Reservatório simétrico: dinâmica não assintótica	66
4.2.3 Reservatório assimétrico	70
4.3 Proposta experimental	72
4.4 Robustez do esquema para se produzir estados emaranhados	74
5. <i>Conclusão</i>	76

<i>Apêndice</i>	78
<i>A. Unitárias que preservam produtos.</i>	79
<i>B. Decomposição do determinante da transposta parcial</i>	81
<i>C. Equações de movimento da MC; tempo da morte súbita</i>	86

1. INTRODUÇÃO

O emaranhamento é um conceito central na mecânica quântica de sistemas compostos, e é particularmente importante na teoria de informação quântica. De todas suas consequências conceituais, quando comparado à interpretação intuitiva da mecânica clássica, uma das primeiras a ser reconhecida, por Erwin Schrödinger, em 1935 [1], foi a de que o completo conhecimento do todo de um sistema não implica no completo conhecimento de suas partes. Especificamente, um estado quântico puro de um sistema composto pode, quando emaranhado, levar a estados reduzidos mistos para seus subsistemas. No entanto, possivelmente a de maior repercussão e controvérsia foi a discussão iniciada por Einstein, Podolsky e Rosen [2], relativa a interpretação de um estado emaranhado em conexão com princípios relativísticos. Tal discussão tomou um corpo mais formal e preciso a partir de trabalhos de Bell [3, 4], estabelecendo condições fortes (não-localidade) sobre certas teorias de variáveis ocultas.

Trabalhos mais recentes no contexto de informação quântica deram um novo *status* à ideia de emaranhamento: de uma fonte de calorosas discussões conceituais, para uma fonte de tarefas “não-locais”. Um exemplo concreto é encontrado no protocolo de teletransporte [5]. Para se transportar, de um laboratório a outro, *um* representante de um ensemble relativo a um estado quântico puro desconhecido, pode-se simplesmente transportar o sistema físico portador do estado, ou o protocolo de teletransporte pode ser efetuado, exigindo uma cópia de um par de sistemas em um estado emaranhado. Obviamente, neste e em diversos outros protocolos de informação quântica, a eficiência completa do processo ocorre apenas para um subconjunto específico de estados emaranhados, não sendo suficiente que haja apenas *algum* emaranhamento. A noção de *quantidade* de emaranhamento em um sistema composto se faz então necessária, dando origem à definição e ao estudo de diversos quantificadores de emaranhamento sendo que, dentre vários, alguns têm significados operacionais em termos de protocolos “LOCC” (*Local Operations and*

Classical Communication) [6, 7]. Uma vez estabelecidos esses quantificadores operacionais, então, o emaranhamento pode ser considerado de forma bastante precisa como uma *fonte* ou *recurso*, ressaltando, no entanto, que a quantidade de emaranhamento de um mesmo estado, definida por tarefas distintas, geralmente pode levar a valores distintos (podendo ser uma quantidade positiva em algumas e nula em outras [8]).

Como as diversas fontes usadas em processos físicos, na prática, o emaranhamento de um sistema é sujeito a perdas devido a interações não controladas com seu ambiente circundante. De fato, é um desafio experimental, atualmente, a implementação de aparatos onde um sistema quântico possa ser preparado com alto grau de emaranhamento, de modo que tal emaranhamento seja preservado durante uma janela de tempo desejada. A modelagem e o entendimento da dinâmica de sistemas compostos abertos e seu emaranhamento se faz então necessária neste contexto.

De maneira geral, o ambiente “natural” ao qual o sistema quântico composto está submetido leva à dissipação do emaranhamento deste (valendo ressaltar, no entanto, a possibilidade de um ambiente “arquitetado” como estratégia para se obter o efeito inverso [9, 10]). Foi considerado uma surpresa, recentemente, especialmente no caso de ambientes markovianos, que a quantidade de emaranhamento de um sistema pode acabar em um intervalo de tempo finito [11, 12, 13], e não apenas assintoticamente, como ocorre com as coerências do estado. Tal comportamento, denominado *morte súbita de emaranhamento* [12], foi explorado em diversos casos e sistemas, mas uma explicação intuitiva foi dada anos depois, considerando-se a geometria do conjunto dos estados quânticos [14]. Grosso modo, a ideia é que o conjunto de estados separáveis (quer dizer, os estados não-emaranhados) é “gordo” no espaço de todos estados, de forma que a trajetória do estado quântico determinada pela dinâmica e sua condição inicial, pode entrar neste conjunto em tempo finito e permanecer por lá no tempo restante da dinâmica.

Outros comportamentos para a dinâmica de emaranhamento foram notados, também associados a este aspecto geométrico, como o “nascimento súbito” e o “renascimento” de emaranhamento. Em particular, em uma série de artigos, Paz e Roncaglia [15, 16] observaram, em um modelo para dois osciladores harmônicos sujeitos a um reservatório comum, que o sistema pode exibir “transições de fase” entre os vários comportamentos, dependendo do estado inicial ou algum parâmetro relevante do reservatório, como a

temperatura.

É objetivo principal desta tese analisar diversas dinâmicas de sistemas compostos à luz da geometria do conjunto de estados quânticos, tanto em sistemas com espaços de Hilbert de dimensão finita, como em dimensão infinita, restrita ao conjunto dos estados Gaussianos. Mais ainda, analisar o comportamento assintótico do emaranhamento de uma maneira mais global, através da seguinte pergunta. Fixada a dinâmica, e sorteado um estado inicial, qual a probabilidade de observar os diversos comportamentos possíveis (morte súbita, morte assintótica, etc.)?

Esta tese está estruturada da seguinte forma:

No próximo capítulo revisamos três temas chaves do trabalho: a geometria, a dinâmica e o emaranhamento de estados quânticos.

No terceiro capítulo mostramos que a morte súbita é um fenômeno genérico em dinâmicas descritas por hamiltonianos dependentes do tempo. Para sistemas abertos em geral, propusemos uma classificação das dinâmicas de emaranhamento de acordo com a geometria do conjunto dos seus estados assintóticos (quando a dinâmica o admite). Exibimos exemplos para todas as possíveis classes, considerando sistemas de dois qubits com dinâmicas descritas por equações mestras na forma de Lindblad. Para todos os exemplos estudamos a pergunta acima descrita, considerando uma classe bem geral de distribuições de probabilidade sobre o conjunto de estados iniciais.

No quarto capítulo estendemos os trabalhos de Paz e Roncaglia, construindo novos diagramas de fase para um sistema constituído de dois modos de campo eletromagnético, em um modelo cuja realização experimental é acessível à tecnologia atual.

Finalmente, encerramos o texto com a conclusão/considerações finais.

2. DINÂMICA, GEOMETRIA E EMARANHAMENTO

Neste capítulo iremos expor os tópicos fundamentais ao trabalho. Temas e conceitos básicos em mecânica quântica como a noção de estados, mapas, valores esperados, dinâmica, etc. serão expostos com brevidade, apenas para fins de consistência do texto, e para fixar a notação¹. Já os aspectos da teoria de emaranhamento e da geometria de estados quânticos serão descritos em mais detalhes.

Consideramos nesta tese, como de praxe no âmbito da informação quântica, o espaço de estados² de um sistema quântico como o conjunto dos operadores densidade, e não como o conjunto de feixes em seu espaço de Hilbert. Quer dizer, dado um sistema com espaço de Hilbert associado \mathcal{H} , o espaço de estados é definido por $\mathcal{D}(\mathcal{H}) = \{\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) | \rho \geq 0, \text{Tr}\rho = 1\}$ onde $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ denota o conjunto dos operadores lineares sobre \mathcal{H} , $\text{Tr}\rho$ o traço do operador, e $\rho \geq 0$ indica que operador é hermitiano com todos os autovalores não negativos. Dizemos que um estado é *puro* se seu posto é 1 (*i.e.*, se é um projetor unidimensional, sendo estes os elementos que podem ser identificados com os feixes no espaço de Hilbert) e *misto* caso contrário.

Dado um sistema composto por duas partes (ou *bipartite*) A e B com espaços de Hilbert \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , denotamos por $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ o produto tensorial entre ambos, que define o espaço de Hilbert do sistema global \mathcal{H}_{AB} . Os elementos de $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{AB})$ da forma $\sigma_A \otimes \sigma_B$, onde $\sigma_{A(B)} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_{A(B)})$, são denominados estados *produto*, e se destacam por se tratarem daqueles em que os subsistemas são descorrelacionados. Dado um estado $\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_{AB})$, denotamos ainda por $\text{Tr}_B \rho = \rho_A$ a operação *traço parcial* sobre o sistema B , levando ao estado reduzido $\rho_A \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_A)$ sobre A . Dadas bases ortonormais $\{|i\rangle\}$ e $\{|k\rangle\}$ para \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , respectivamente, os elementos de matriz do estado reduzido são, por definição, $\langle i | \rho_A | j \rangle = \sum_k \langle i, k | \rho | j, k \rangle$, onde $|i, k\rangle \equiv |i\rangle \otimes |k\rangle$.

¹ Sugerimos as Refs. [17, 18] ao leitor não familiarizado com esses assuntos.

² Aqui, “espaço” é no sentido de espaço topológico.

Também nos será necessário considerar as operações físicas mais gerais que podem ser efetuadas sobre um sistema quântico, *e.g.*, realizar uma medição ou deixá-lo evoluir até um instante de tempo t em contato com um reservatório, quer dizer, aquelas descritas por mapas completamente positivos que preservam traço. Ou seja, mapas lineares $\Lambda : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$, que preservam o conjunto $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ (*i.e.*, são positivos e preservam traço) e de forma que todos mapas lineares $\Lambda \otimes I_N : \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_N) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_N)$, onde $I_N : \mathcal{L}(\mathcal{H}_N) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_N)$ é o operador identidade neste conjunto, também sejam positivos, sendo esta a condição de completa positividade. Esta última condição é importante, pois impõe que se a operação for efetuada sobre um sistema, estando este correlacionado com um sistema adicional (com espaço de Hilbert \mathcal{H}_N), no qual nada é feito (operação I_N), o resultado tem que ser um estado quântico válido para o sistema composto. Em particular, um mapa é completamente positivo se, e somente se, admite uma representação da forma, denominada *dilatação de Stinespring* [19]: $\Lambda(\rho) = \text{Tr}_B(U\rho \otimes |\psi\rangle\langle\psi|U^\dagger)$, onde $|\psi\rangle\langle\psi|$ é um estado puro de algum sistema auxiliar, e U uma operação unitária no sistema composto [20]. Quer dizer, qualquer operação sobre um sistema pode ser vista como o resultado de uma evolução do mesmo em interação com um sistema auxiliar, de forma que o sistema composto seja fechado. Usaremos a sigla em inglês, CPTP (de *Completely Positive Trace Preserving*), para denotar os mapas completamente positivos que preservam traço.

2.1 Dinâmica de sistemas quânticos

Sabemos, por postulado da mecânica quântica, que a dinâmica de um sistema fechado é descrita pela equação de Schrödinger $i\hbar d\rho/dt = [H, \rho]$, escrita aqui já para operadores densidade, onde o hamiltoniano H deve ser um operador autoadjunto e $[\bullet, \bullet]$ representa o comutador entre uma par de operadores. Equivalentemente, a dinâmica pode ser descrita pela seguinte família de mapas completamente positivos $t \mapsto U(t) \bullet U(t)^\dagger$, onde $U(t) = \exp(-\frac{iHt}{\hbar})$, e t é a coordenada temporal.

Agora, de maneira mais geral, o sistema pode estar sujeito a campos externos variando no tempo, de maneira que este hamiltoniano também poderá variar no tempo; ou pode estar interagindo com outros sistemas quânticos cujos observáveis não nos são acessíveis. Por exemplo, um átomo no vácuo corresponde a um sistema átomo+“modos

do campo eletromagnético”, mas frequentemente nos preocupamos apenas com evolução das excitações no átomo. Denotando por S o sistema que nos é acessível, por R o restante, e considerando um estado inicial onde ambos estão descorrelacionados, *i.e.*, um estado da forma, $\rho_S \otimes \rho_R$, onde ρ_R é fixo, vemos que a dinâmica de S será descrita por uma família de mapas completamente positivos $t \mapsto \Lambda(t)$, onde $\Lambda(t)\rho_S = \text{Tr}_R(U(t)\rho_S \otimes \rho_R U(t)^\dagger)$, e $U(t)$ é a família de unitárias que descreve a dinâmica do sistema global. Quer dizer, de maneira mais geral, a dinâmica de um sistema quântico é descrita por uma família contínua de mapas completamente positivos, parametrizada pelo tempo, tal que o mapa no instante inicial deve ser a identidade.

Quando a dinâmica do sistema de interesse é fechada, logo, descrita por unitárias, a família pode ser definida para todo $t \in \mathbb{R}$, satisfazendo as propriedades $\Lambda(t) \circ \Lambda(-t) = I$, $\Lambda(t + \Delta t) = \Lambda(t) \circ \Lambda(\Delta t)$, que implicam que a família forma um grupo (quer dizer, há uma operação de multiplicação definida, um elemento identidade, e todo elemento possui um inverso). Este tipo de dinâmica pertence a um caso mais geral onde a família forma apenas um semigrupo, mais especificamente, ela precisa estar definida apenas para $t \geq 0$ e satisfazer $\Lambda(t + \Delta t) \geq \Lambda(t) \circ \Lambda(\Delta t)$. Isto implica que saber o estado sistema em um instante de tempo t já é suficiente para prever qual será sua evolução subsequente. Uma dinâmica satisfazendo esta propriedade é dita markoviana, podendo ser vista como uma generalização para o caso quântico de um processo markoviano clássico.

Um resultado importante, demonstrado por G. Lindblad [21] é o de que toda dinâmica markoviana pode ser equivalentemente representada por uma equação diferencial para a matriz densidade, denominada *equação mestra*. Especificamente, o teorema diz que uma dinâmica é markoviana se, e somente se, existem operadores lineares A_j e operador hermitiano H (não sendo únicos porém) tais que o operador densidade no instante t é dado pela solução da equação diferencial:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \sum_j [A_j \rho A_j^\dagger - \frac{1}{2} A_j^\dagger A_j \rho - \frac{1}{2} \rho A_j^\dagger A_j]. \quad (2.1)$$

O primeiro termo descreve uma dinâmica unitária mas H não precisa necessariamente coincidir como hamiltoniano interno de S . O segundo termo, por outro lado, está relacionado ao fato do sistema ser aberto. Para um átomo em decaimento espontâneo, por

exemplo, é exatamente este termo que irá implicar em um decaimento exponencial para a probabilidade de se observá-lo em algum estado excitado.

Dinâmicas markovianas descrevem uma vasta gama de fenômenos físicos, como o decaimento espontâneo de átomos, a dissipação de modos de campo eletromagnético em cavidades, as diversas fontes de ruído em íons armadilhados, etc. Tipicamente uma evolução markoviana ocorre quando o sistema S interage fracamente com um sistema quântico “grande” R , *i.e.*, constituído por muitos subsistemas, cujo estado não é significativamente perturbado pela presença de S , sendo por isso denominado *reservatório*. Os operadores H e A_j da equação mestra seriam então determinados pela particular forma do estado quântico do reservatório (em muitas situações, um estado térmico de Gibbs), seu hamiltoniano, bem como sua interação com S [22]. Alternativamente, a equação mestra pode emergir da interação de S com um campo externo estocástico, como uma partícula de spin 1/2 sujeita a um campo magnético que varia aleatoriamente no tempo [23].

Nos próximos capítulos veremos inúmeros exemplos de sistemas ditados por dinâmicas markovianas, bem como por equações diferenciais na forma 2.1, porém com coeficientes variando no tempo.

2.2 Geometria de estados quânticos

Esta seção tem o intuito de ilustrar a teoria da geometria de estados quânticos como um todo, enquanto as ferramentas que usaremos se encontram nas seções seguintes. O leitor pode então pular para a próxima seção sem riscos de perda de compreensão do restante da tese. Ademais, boa parte do material aqui apresentado se encontra detalhado na ref. [24].

Com a expressão “geometria dos estados quânticos” queremos dizer que pensaremos o conjunto $\mathcal{D}(\mathcal{H}_N)$, e agora nos restringiremos a espaços de Hilbert de dimensão finita N , sob três formas distintas, mas interligadas: como espaço topológico (noções de vizinhanças, continuidade, etc.), espaço métrico (noções de distância entre pontos, geodésicas, etc.), e espaço mensurável (noções de volume e, em particular, de distribuições de probabilidade).

Um primeiro passo para abordar o problema da geometria de $\mathcal{D}(\mathcal{H}_N)$ é considerá-lo como subconjunto de determinados espaços dotados de geometrias “naturais”, de forma que $\mathcal{D}(\mathcal{H}_N)$ herde as propriedades geométricas destes espaços. A saber, o conjunto de

operadores hermitianos em \mathcal{H}_N e seu subconjunto de operadores de traço 1. O primeiro é um espaço vetorial real e o segundo é um espaço afim (pode ser identificado com um subespaço vetorial transladado).

Uma primeira aproximação ao problema é a determinação do número de parâmetros reais necessários para se definir $\mathcal{D}(\mathcal{H}_N)$. Claramente, temos que $2N^2$ números reais são necessários para a descrição de uma matriz complexa arbitrária, a exigência de que seja hermitiana reduz este número pela metade, e finalmente o vínculo sobre o traço reduz um parâmetro, de forma que exatamente $N^2 - 1$ parâmetros reais são precisos para definir $\mathcal{D}(\mathcal{H}_N)$. Comparado ao conjunto dos estados puros, definidos apenas por $2N - 2$ parâmetros ($2N$ números reais de um vetor complexo com N entradas, menos os parâmetros da norma e da fase global), vemos que a dimensão real do conjunto de estados em geral cresce de forma não muito amigável. Já para um sistema composto por duas partes, ambas com espaço de Hilbert de dimensão dois (conjunto mínimo sobre o qual se pode falar de emaranhamento), a dimensão real é 15. Coincidência ou não, muito se sabe sobre a geometria dos estados puros, por se tratarem dos espaços projetivos complexos, enquanto ainda pouco se sabe sobre a geometria dos estados mistos, especialmente sobre o subconjunto dos separáveis. Note ademais que, geometricamente, os estados puros também se destacam por serem os *pontos extremais*, *i.e.*, são exatamente aqueles que não podem ser escritos como combinações convexas de outros elementos do conjunto.

Uma segunda aproximação à compreensão da geometria do conjunto é a escolha de uma boa parametrização para o mesmo. Para se “gerar” uma matriz hermitiana, basta escolher arbitrariamente N^2 números reais, alocar N deles na diagonal, e o restante como as partes real e complexa dos elementos, digamos, acima da diagonal, enquanto abaixo da diagonal apenas tomamos os complexos conjugados correspondentes. Essa prescrição, no entanto, não necessariamente levará a um estado quântico, pois mesmo que escolhamos números reais positivos (somando um) para a diagonal, isso não implicará que a matriz seja positiva. Mas note que, pelo teorema espectral, podemos gerar todas as matrizes hermitianas partindo de uma matriz diagonal, com entradas reais, e aplicando uma transformação de similaridade. Portanto, para se gerar estados, podemos tomar N números não negativos λ_i tais que $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$, quer dizer, pertencentes a um simplexo Δ_N , e aplicar uma transformação de similaridade por uma unitária U . Naturalmente, os números

λ_i coincidem com o espectro da matriz obtida. Mais explicitamente, o que definimos é um mapa $M : \Delta_N \times \mathcal{U}(N) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{H}_N)$, $M(\{\lambda_i\}, U) = U\Lambda U^\dagger$, onde Λ denota a matriz diagonal com elementos λ_i . Tal mapa *cobre* inteiramente o conjunto de estados, mas com redundância, pois diversos elementos serão associados a um mesmo estado quântico. Note inclusive que a dimensão real do domínio é maior do que a da imagem, já que a dimensão de Δ_N é obviamente $N - 1$, e a de $\mathcal{U}(N)$ já é N^2 . Não obstante, como veremos mais a frente, essa “parametrização” é consideravelmente útil para a definição de métricas e volumes em $\mathcal{D}(\mathcal{H}_N)$.

Estados puros. Muito embora o enfoque desta tese seja sobre o conjunto de estados quânticos como um todo, é impossível não se deter com mais atenção ao conjunto de estados puros. Os estados puros assumem um lugar de destaque do ponto de vista físico, visto que já são suficientes para um sem número de aplicações da mecânica quântica, como teoria de espalhamento, física atômica, física nuclear, física da matéria condensada, e que grande parte das aplicações da informação quântica exigem a preparação de tais estados (ou o mais próximo possível deles). Ademais, como mencionado acima, geometricamente eles constituem uma importante classe de variedades complexas, os espaços projetivos complexos $\mathbb{C}P^{N-1}$ (dado que a dimensão complexa do espaço de Hilbert é N e identificando-o com \mathbb{C}^N).

Isso ocorre pelo fato de que, estritamente falando, o espaço de Hilbert não forma o conjunto de estados puros, visto que os representa com redundância, além do fato do vetor nulo não representar nenhum estado. Para se obter tal conjunto é preciso identificar como um único ponto todos aqueles elementos de $\mathcal{H}_N - \{0\}$ (espaço menos o vetor nulo) que são múltiplos complexos uns dos outros. Esse procedimento pode ser feito em dois passos, e para simplificar a exposição identificaremos \mathcal{H}_N com \mathbb{C}^N . Enxergando \mathbb{C}^N como \mathbb{R}^{2N} , primeiramente nos restringimos aos elementos de norma 1, o que é equivalente a se restringir à esfera unitária S^{2N-1} de \mathbb{R}^{2N} . Em seguida, é feita a identificação dos elementos da esfera que são os mesmos a menos de uma fase, *i.e.*, estes elementos formam círculos dentro da esfera, e todos estes círculos serão considerados como pontos.

A construção acima mencionada pode ser “visualizada” diretamente para o caso \mathbb{C}^2 , pela famosa fibração de Hopf [25]. Uma forma de construí-la é através do mapa $p : S^3 \subset \mathbb{C}^2 \rightarrow S^2$, $(z_1, z_2) = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) \mapsto (2x_1x_2 + 2y_1y_2, 2x_1y_2 - 2x_2y_1, x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2)$,

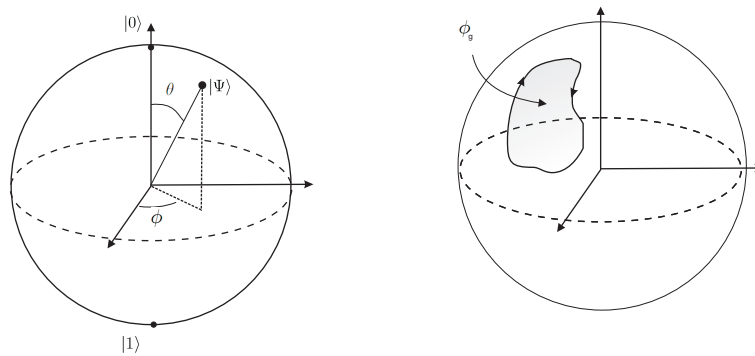


Fig. 2.1: Esquerda: representação geométrica do estado de um sistema de dois níveis na esfera de Bloch. Direita: uma curva fechada na esfera, ditada por um hamiltoniano, é tal que sua fase geométrica é proporcional à área da região contida na curva.

onde $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$. Pode-se ver que a imagem deste mapa é CP^1 pois dois elementos da esfera S^3 corresponderão a um mesmo elemento na imagem \Leftrightarrow eles forem múltiplos uns dos outros por uma fase (é imediato ver a implicação \Leftarrow e, com um pouco de álgebra, também a implicação \Rightarrow). Ademais, é fácil verificar que a norma do elemento obtido em \mathbb{R}^3 é sempre 1 e que, de fato, a imagem é a esfera S^2 , de forma que CP^1 pode ser com ela identificada. A pré-imagem de qualquer ponto da esfera S^2 é um círculo na esfera S^3 , denominado *fibra*, e carrega a informação sobre a fase global do estado.

Esta construção nos fornece então uma maneira de “visualizar” a esfera S^3 como uma coleção de círculos disjuntos, indexados pelos pontos de uma esfera S^2 . Fisicamente, nos oferece uma maneira simples de visualizar o conjunto dos estados puros de um qubit, ou sistema de dois níveis (ver Fig. 2.1), e dá-se o nome de *esfera de Bloch*.

Podemos ver isto explicitamente tomando uma base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, escrevendo um estado arbitrário na forma $|\Psi\rangle = \cos\theta |0\rangle + e^{i\phi}\sin\theta |1\rangle$, e considerando que os ângulos $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi < 2\pi$ representam pontos de uma esfera. Vetores ortogonais em \mathbb{C}^2 são levados a pontos antipodais da esfera, e a noção de área usual tem um significado especial. Suponha que o sistema está sujeito a uma dinâmica ditada pela equação de Schrödinger, e após um certo intervalo de tempo retorna ao estado inicial, quer dizer, na esfera de Bloch o estado descreve uma curva fechada. No espaço de Hilbert (ou na esfera S^3), no entanto, essa trajetória não é necessariamente fechada, mas os pontos inicial e final devem estar na mesma fibra (o círculo de S^3 que é mapeado no estado) o que nos informa sobre a fase global acumulada (pode-se combinar a parametrização de S^3 pelos ângulos de Euler de

forma que um dos parâmetros corresponda exatamente a essa fase [26]). Ocorre então que essa fase, subtraída da fase dinâmica, é proporcional a área descrita pela curva fechada em S^2 , sendo esta última por isso denominada *fase geométrica* [27] (ver Fig. 2.1).

Topologia. Mas retornemos aos estados mistos em geral. Lembramos que espaços topológicos são espaços onde se pode falar de “vizinhanças” de um ponto sem necessariamente se ter uma noção de distância, e constituem a estrutura mínima na qual a noção de continuidade de funções e limite de sequências podem ser definidas.

Sendo o conjunto dos estados mistos um subconjunto dos operadores hermitianos, e sendo este um espaço vetorial real de dimensão finita, com uma topologia “canônica” (definida por uma norma qualquer), temos automaticamente uma topologia para $\mathcal{D}(\mathcal{H}_N)$, que é, em particular, um subconjunto fechado e convexo do primeiro. Com esta topologia, o conjunto é relativamente simples. Sendo convexo, podemos definir o mapa $H : \mathcal{D}(\mathcal{H}_N) \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{H}_N)$, tal que $H(\rho, \lambda) = (1 - \lambda)\rho + \lambda\rho_0$, onde ρ_0 é um estado qualquer. Desta forma, para $\lambda = 0$, H mapeia o conjunto nele mesmo, e para $\lambda = 1$, em um ponto. Um conjunto admitindo tal mapa é dito *contrátil a um ponto*, sendo esta a categoria trivial de espaços topológicos da topologia algébrica [25].

Mais ainda, $\mathcal{D}(\mathcal{H}_N)$ é homeomorfo a uma bola em \mathbb{R}^{N^2-1} , por se tratar de um conjunto convexo fechado, limitado e com interior não-vazio. De fato, tomando-o como subconjunto de \mathbb{R}^{N^2-1} , vê-se que esta última propriedade é verdadeira: uma ligeira perturbação (que preserve o traço e a hermiticidade) de uma matriz hermitiana com todos os autovalores positivos (*e.g.*, o estado maximamente misto) preservará também a positividade dos autovalores. Tomando então um ponto no interior do conjunto, e uma bola centrada neste, vê-se que uma reta ligando este ponto a um ponto da fronteira de $\mathcal{D}(\mathcal{H}_N)$ pode ser continuamente mapeada a um único raio da esfera [28]. De uma forma pictórica, pode-se imaginar que “soprando” o interior do conjunto, o mesmo se expande e adquire a forma de uma esfera.

A fronteira $\partial\mathcal{D}(\mathcal{H}_N)$ dos estados mistos consiste dos operadores de posto estritamente menor do que N , visto que pequenas perturbações de tais operadores podem levar a operadores com autovalores negativos. Agora note que, fixando um subespaço de dimensão 1, o conjunto de todos os operadores cujo núcleo contém este subespaço pode ser identificado com $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{N-1})$, e constituem uma face de $\mathcal{D}(\mathcal{H}_N)$, visto que segmentos de reta passando

por dois elementos deste subconjunto permanecem neste subconjunto. Portanto, podemos ver $\partial\mathcal{D}(\mathcal{H}_N)$ como uma coleção contínua de faces da forma $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{N-1})$, parametrizada pelos subespaços de dimensão 1, *i.e.*, $\mathbb{C}P^{N-1}$. Note que as dimensões (número de parâmetros reais) de fato batem: $\text{Dim}(\mathbb{C}P^{N-1}) + \text{Dim}(\mathcal{D}(\mathcal{H}_{N-1})) = (2N-2) + (N-1)^2 - 1 = N^2 - 2 = \text{Dim}(\partial\mathcal{D}(\mathcal{H}_N))$.

A redundância da descrição do conjunto em termos de um produto de um simplexo pelo grupo das unitárias pode ser removida mediante a construção denominada *estratificação*³. A ideia é subdividir o simplexo Δ_N (*i.e.*, o espectro dos operadores) em partes e identificar, em cada uma delas, exatamente qual é grau de redundância das unitárias. Assim, primeiramente consideram-se apenas os pontos de Δ_N , satisfazendo $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ e fixa-se uma base em \mathcal{H}_N . Considere o caso em que todos os autovalores são positivos e distintos entre si. Neste caso, duas unitárias levando ao mesmo estado só podem estar relacionadas entre si por uma unitária diagonal. Agora, a família das unitárias diagonais pode ser identificada com $U(1)^N$, pois a descrevemos por N fases independentes. Portanto, a órbita associada a este ponto do simplexo é dada por $U(N)/U(1)^N$, representando o quociente dado pela relação de equivalência em $U(N)$: $U \sim U' \Leftrightarrow U = U'U_{\text{Diag}}$, onde U_{Diag} é uma unitária diagonal.

Agora suponha que apenas dois dos autovalores são degenerados, digamos $\lambda_1 = \lambda_2$. Agora a redundância é maior, pois além da multiplicação por fases, pode-se atuar com qualquer unitária no subespaço definido por λ_1, λ_2 . Quer dizer, unitárias da forma:

$$\begin{bmatrix} U_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U_{\text{Diag}} \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

onde U_2 é uma unitária 2×2 e U_{Diag} uma diagonal $(N-2) \times (N-2)$, formando uma representação do grupo $U(2) \times U(1)^{N-2}$, e a órbita subsequente será $U(N)/[U(2) \times U(1)^{N-2}]$.

Generalizando esta ideia para qualquer grau de degenerescência, temos o seguinte. Denote por K_{k_1, \dots, k_n} a parte do simplexo ordenado onde os autovalores tem graus de degenerescência k_1, \dots, k_n , com $\sum_{i=1}^n k_i = N$. Por exemplo, se $k_1 = \dots = k_N = 1$, significa que todos os autovalores são não degenerados; se $k_1 = 2, k_2 = 3$ e todos os outros iguais

³ Ver Ref. [29] para maiores detalhes sobre esta construção.

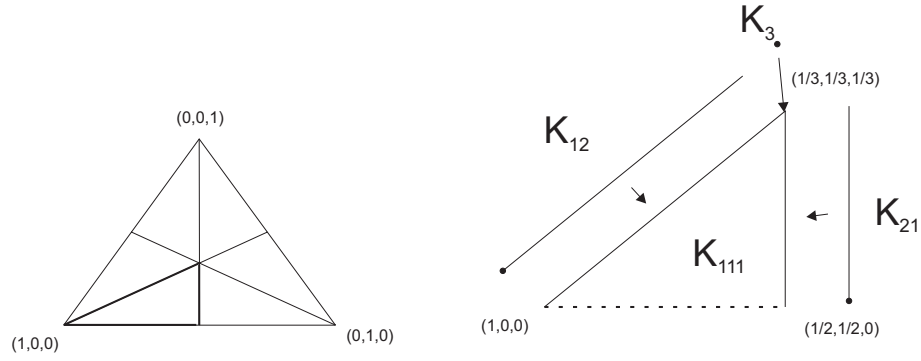


Fig. 2.2: Subdivisão da parte ordenada do simplexo, de acordo com o grau de degenerescência de cada região. Note que a parte tracejada do segmento inferior pertence a K_{111} .

a 1, significa que o primeiro (o maior) autovalor têm degenerescência dupla, o segundo, tripla, e os restantes são não degenerados (ver Fig. 2.2 para um exemplo no caso $N = 3$). Como os pontos de K_{k_1, \dots, k_n} terão órbitas $U(N)/(U(k_1) \times \dots \times U(k_n))$, o conjunto dos estados mistos assume a decomposição:

$$\mathcal{D}(\mathcal{H}_N) = \bigcup_{k_1, \dots, k_n} K_{k_1, \dots, k_n} \times \frac{U(N)}{(U(k_1) \times \dots \times U(k_n))}, \quad (2.3)$$

onde a soma é sobre todos os inteiros positivos k_i satisfazendo $\sum_i k_i = N$. Os espaços $\frac{U(N)}{(U(k_1) \times \dots \times U(k_n))}$ são variedades complexas que podem ser identificadas com as variedades “bandeira” (*flag manifolds*) que constituem generalizações dos espaços projetivos [30]. Enquanto os espaços projetivos são coleções de subespaços unidimensionais do espaço vetorial, as bandeiras podem ser a coleção de subespaços de qualquer dimensão, ou mesmo concatenações de tais subespaços.

Métricas. Entendemos aqui por distância, como de praxe, uma qualquer função $D : X \times X \rightarrow [0, \infty)$, onde X é um conjunto qualquer, que satisfaça as propriedades: $D(x, y) > 0$ se $x \neq y$, $D(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$ (pontos distintos devem necessariamente ter uma distância positiva); $D(x, y) = D(y, x)$ para todo $x, y \in X$ (simetria); e $D(x, y) \leq D(x, z) + D(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$ (desigualdade triangular). Dado um conjunto X munido de uma determinada distância D , o par (X, D) é então denominado um *espaço métrico*.

As noções de distância entre estados quânticos têm um papel importante na área de informação quântica, mais notadamente, como quantificadores de distinguibilidade

operacional entre estados (ou como cotas para os mesmos) [31] e para a construção de quantificadores de emaranhamento, como veremos adiante.

A distinguibilidade entre estados pode variar dependendo de como o problema é colocado. Por exemplo, suponha que um sistema possa estar preparado em um de dois estados ρ e σ , com igual probabilidade, e deve-se efetuar uma medida binária, *i.e.*, um POVM com dois elementos A_σ e A_ρ , de forma que o primeiro indica que o estado σ foi preparado, e o segundo, ρ . De maneira geral, não é possível encontrar um POVM que efetue essa tarefa sem erros (*e.g.*, quando os dois estados são puros e não-ortogonais): por vezes o estado será ρ enquanto o resultado da medição será A_σ , e vice-versa. No entanto pode-se otimizar sobre todos os POVM's de forma a minimizar esses erros e tomar a chance de acerto ótima como um quantificador de distinguibilidade [32].

Outro exemplo relevante é o seguinte. Dado que um observador tenha consigo um certo número de cópias de um estado σ , qual é a chance de confundir-lo, otimizando sobre todas as possíveis medições, com um segundo estado ρ ? É claro que a probabilidade disto ocorrer decairá (exponencialmente) com o número de cópias disponíveis do sistema, e a taxa com que se dá este decaimento coincide com (e dá significado a) *entropia relativa* $S(\rho|\sigma)$ entre os estados [33]:

$$S(\rho|\sigma) = \text{Tr}(\rho \ln \rho - \rho \ln \sigma). \quad (2.4)$$

Note que a fórmula acima é assimétrica em seus argumentos e seu significado operacional permite entender o porquê, em um exemplo de seu análogo clássico. Considere que um dos estados corresponda ao lançamento de uma moeda honesta (igual probabilidade de sair cara ou coroa) e o outro ao de uma moeda viciada (probabilidade 1 de sair, digamos, cara). Caso tenhamos em mão a moeda viciada, sempre teremos uma probabilidade finita, independente do número n de lançamentos, de confundir-la com a moeda honesta, pois sempre há uma certa chance de uma moeda honesta dar o mesmo resultado n vezes em sequência. Caso tenhamos a moeda honesta, no entanto, e caso vejamos em um certo lançamento o resultado coroa, saberemos com certeza que ela não é a moeda viciada. Essa assimetria da entropia relativa impede que seja pensada como uma distância no sentido geométrico, muito embora cotas importantes existam por certas distâncias.

Retornemos, então, feita a motivação, ao tema principal desta seção. Uma classe importante de espaços métricos são aqueles embutidos de uma métrica riemanniana. Ou seja, são variedades diferenciáveis conexas por caminhos, com um elemento de arco definido (mais especificamente, um produto interno definido no espaço tangente de cada ponto, que varia suavemente sobre a variedade), o que permite computar o comprimento de curvas suaves conectando dois pontos. A distância entre dois pontos é então definida como o ínfimo do comprimento de todas as curvas suaves ligando-os, enquanto as curvas que realizam este comprimento são denominadas *geodésicas*.

O espaço Euclidiano tridimensional, com a noção de distância usual, é o exemplo típico de um espaço métrico (riemanniano), e note que neste caso um certo conjunto de transformações se destacam, por exemplo, as rotações, as translações e as reflexões, por preservarem as distâncias entre todos os pontos do espaço. Transformações com tal propriedade são denominadas *isometrias*.

Como mencionado antes, por estar embutido em espaços maiores, com estruturas métricas já definidas, o espaço de estados herda naturalmente estas estruturas. Por exemplo, pode-se definir toda uma família de distâncias via as normas L_p de uma matriz hermitiana A :

$$\|A\|_p = (\text{Tr}|A|^p)^{1/p}, \quad (2.5)$$

onde $p \geq 1$. A distância entre dois estados σ, ρ seria então proporcional a $\|\rho - \sigma\|_p$, enquanto o caso $p = 2$ corresponde a uma métrica riemanniana, denominada *métrica de Hilbert-Schmidt*. Note que, para qualquer p , essa distância é invariante por unitárias, quer dizer, mapas da forma $U : \mathcal{D}(\mathcal{H}_N) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{H}_N)$, tais que $\rho \mapsto U\rho U^\dagger$, onde U é um operador unitário, são isometrias. Essa é uma propriedade importante, e a grande maioria das distâncias utilizadas na literatura a satisfaz (a denominada *métrica do Monge* é uma exceção [34]).

Mais do que isso, é interessante notar que, restringindo-se ao conjunto dos estados puros, a exigência de que operações unitárias sejam isometrias determinam uma única métrica riemanniana (a menos de normalização), a denominada *métrica de Fubini-Study* [35, 36]. Não por coincidência, visto que o conjunto das unitárias é definido pelo

produto interno do espaço de Hilbert, a métrica de Fubini-Study é exatamente aquela induzida pela métrica natural de \mathcal{H}_N , definida por este produto. De fato, identificando \mathcal{H}_N com \mathbb{R}^{2N} , o produto interno definirá a métrica Euclidiana usual neste espaço, que por sua vez define a métrica (riemanniana) usual da esfera S^{2N-1} . Como vimos na seção anterior, os estados puros são obtidos identificando os pontos de S^{2N-1} relacionados por uma fase, e é possível transferir a métrica desta esfera para o quociente de forma consistente, levando também a métrica de Fubini-Study [37].

Dados dois estados puros, $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$, a distância entre eles (comprimento de uma geodésica determinada pela métrica de Fubini-Study) é dada por:

$$D_{FS}(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = \arccos(|\langle\psi, \phi\rangle|). \quad (2.6)$$

Considerando apenas o subespaço gerado por dois vetores, temos em mãos um espaço equivalente ao de um qubit, $\mathbb{C}P^1$ onde vale a descrição via esfera de Bloch discutida anteriormente, e aqui, essa fórmula tem um significado simples: é o comprimento do arco de círculo máximo ligando os dois pontos da esfera.

Para o conjunto de estados como um todo, no entanto, é evidente que a exigência de invariância por unitárias não distingue uma única distância, visto que todas as normas L_p satisfazem essa propriedade. Mas, no contexto de distinguibilidade de estados uma segunda imposição pode ser feita, a *monotonicidade* por mapas completamente positivos. Quer dizer, é exigido que a distância entre dois estados ρ, σ nunca *auente* quando um mapa completamente positivo Λ é aplicado em ambos:

$$D(\rho, \sigma) \geq D(\Lambda\rho, \Lambda\sigma). \quad (2.7)$$

De fato, a entropia relativa discutida acima, com claro significado de quantificador de distinguibilidade, satisfaz esta propriedade, e para que distâncias também assumam o mesmo significado, é importante exigir monotonicidade.

Mesmo a monotonicidade ainda não determina uma única distância, mas é possível classificar todas as possíveis métricas riemannianas que a satisfazem, teorema demonstrado por Morozova, Čencov [38] e complementado por Petz [39, 37]. O teorema afirma

que, tomando uma base onde o estado seja diagonal, com entradas λ_i , o comprimento de um vetor tangente T neste ponto deve ter a forma:

$$\|T\|^2 = A \sum_i \frac{T_{ii}^2}{\lambda_i} + \sum_{i \neq j} B(\lambda_i, \lambda_j) |T_{ij}|^2, \quad (2.8)$$

onde A é uma constante, e a função $B(x, y)$ deve ser simétrica, satisfazer $B(cx, cy) = c^{-1}B(x, y)$ e $1/B(x, 1)$ é monótona para operadores (uma função f é monótona para operadores se para pares de operadores X, Y satisfazendo, $X \leq Y$ tem-se $f(X) \leq f(Y)$).

O primeiro termo na equação acima coincide com a *métrica de Fisher-Rao*, às vezes denominada informação de Fisher, para distribuições de probabilidades clássicas. Para este tipo de distribuições, essa métrica se destaca por ser a única monótona por mapas estocásticos (mapas lineares que levam distribuições clássicas de probabilidades nelas mesmas), e tem um papel importante na teoria de estimativa [40].

O caso quântico já traz uma pletera de opções, dependendo da escolha da função $B(x, y)$. Na literatura, duas se destacam [37], a escolha $B(x, y) \propto (\ln x - \ln y)/(x - y)$, dando origem a métrica de Bogoliubov-Kubo-Mori, que se torna única exigindo certas propriedades geométricas adicionais [41]; e a escolha $B(x, y) \propto 1/(x + y)$, levando a métrica de Bures, diretamente relacionada a *fidelidade quântica* $F(\rho, \sigma) = \text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho}\sigma\sqrt{\rho}}$, importante quantificador de distinguibilidade de estados. A distância definida por esta métrica é então $D_B(\rho, \sigma) = \arccos \sqrt{F(\rho, \sigma)}$, e vê-se que coincide com a métrica de Fubini-Study quando restrita a estados puros, pois a fidelidade entre dois de tais estados é o módulo do produto interno entre eles.

Medidas (Volumes). Finalmente chegamos ao último tópico deste seção, a definição de medidas (no sentido matemático) sobre o conjunto de estados. Usamos a palavra no plural pois, como veremos, assim como ocorre para as métricas, não há um princípio físico que determina uma única e particular medida, muito embora isto ocorra para os estados puros.

Medidas sobre o conjunto de estados (principalmente aquela sobre os estados puros) têm sido usadas em diversas frentes da mecânica quântica, em geral no sentido de dizer o quão “típica” é determinada propriedade física em estudo. A título de exemplo, em traba-

lho recente, Bremner *et al.* [42] mostraram que, no contexto da computação “baseada em medições”, onde um estado emaranhado de vários qubits é preparado e todo o trabalho posterior é de medições, tem-se que a “grande maioria” dos estados com muito emaranhamento resultam em uma computação tão eficiente quanto a de um computador clássico, revelando que muito emaranhamento, por si só, e na maioria das vezes, não é suficiente para se obter um “speed up” por algoritmos quânticos. Essa ideia de typicalidade também foi usada por Popescu *et al.* [43] para nada mais nada menos do que oferecer uma nova interpretação da mecânica estatística. De fato, sempre foi objeto de discussão o significado das probabilidades na mecânica estatística, se são de caráter objetivo, determinadas pelo sistema físico, ou subjetivo, determinadas pelo observador (pelo fato de ter apenas informações parciais sobre o sistema, como os valores de grandezas macroscópicas). Os autores deram mais suporte a uma visão objetivista mostrando que as propriedades do sistema se revelam na grande maioria dos estados *puros* do sistema composto com reservatório, restrito a um subespaço determinado pelas condições macroscópicas. Assim, as probabilidades surgiriam de forma objetiva, devido ao emaranhamento do sistema com seu ambiente.

Para a construção de medidas μ sobre $\mathcal{D}(\mathcal{H}_N)$ é também imposto que elas sejam invariantes por unitárias, quer dizer, para todo subconjunto $\mathcal{A} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_N)$ (mensurável) deve se ter que $\mu(\mathcal{A}) = \mu(U\mathcal{A}U^\dagger)$, onde U é uma unitária qualquer em \mathcal{H} e $U\mathcal{A}U^\dagger = \{\rho = U\sigma U^\dagger | \sigma \in \mathcal{A}\}$.

Na literatura se encontram basicamente duas maneiras distintas de se construir medidas de forma a satisfazer essa propriedade [44], aquelas derivadas de métricas, e as induzidas. De métricas riemannianas é imediato construir um elemento de volume, dado pela raiz quadrada do determinante do tensor métrico em um ponto p da variedade. Geometricamente, este valor corresponde ao volume do paralelogramo definido pela base do espaço tangente a este ponto, gerada pelas derivadas parciais de uma parametrização ao seu redor. O volume da variedade é então a integral deste elemento (mais precisamente, uma D -forma alternada, onde D é a dimensão da variedade) sobre toda a variedade.

Como já dito anteriormente, uma boa forma de escrever os elementos de volume e computar as integrais resultantes [45, 46] é através da “parametrização” $\rho = U\Lambda U^\dagger$, onde

Λ é a matriz ρ diagonalizada. Tomando a diferencial de ρ , via regra de Leibniz,

$$d\rho = (dU)\Lambda U^\dagger + U(d\Lambda)U^\dagger + U\Lambda(dU^\dagger), \quad (2.9)$$

de forma que $d\rho_{ij} = \delta_{ij}d\lambda_i + (\lambda_i + \lambda_j)(U^\dagger dU)_{ij}$ em uma base onde ρ é diagonal, e substituindo na Eq. (2.8), obtém-se:

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left[\sum_{j=1}^N \frac{(d\lambda_j)^2}{\lambda_j} + \frac{1}{2} \sum_{i<j} B(\lambda_i, \lambda_j) |(U^\dagger dU)_{ij}|^2 \right] \quad (2.10)$$

(já fixando $A = 1/4$). Mas dado que $\sum_{j=1}^N \lambda_j = 1$, uma das diferenciais $d\lambda_j$ é dependente das outras, digamos $d\lambda_N$, de forma que a parte $(1/4) \sum_{i=1}^N \frac{d\lambda_j}{\lambda_j}$ se torna $(1/4) \sum_{i=1}^{N-1} \frac{d\lambda_i^2}{\lambda_i} + (1/4) \sum_{i,j=1}^{N-1} \frac{d\lambda_i d\lambda_j}{\lambda_N}$, de maneira que o tensor métrico associado a estas coordenadas forma a matriz $N-1$ dimensional $g_{ij} = (1/4)[\delta_{ij}/\lambda_i + 1/\lambda_N]$, cujo determinante é $(1/4)^{N-1}(\lambda_1 + \dots + \lambda_N)/\lambda_1 \dots \lambda_N = 1/4^{N-1} \text{Det}\rho$. Finalmente, o elemento de volume será:

$$dV_B = \frac{1}{2^{N-1}} \frac{1}{\sqrt{\text{Det}\rho}} \prod_{i=1}^{N-1} d\lambda_i \prod_{i<j}^N B(\lambda_i, \lambda_j) (\lambda_i - \lambda_j)^2 |\text{Re}(U^\dagger dU)_{ij} \text{Im}(U^\dagger dU)_{ij}|. \quad (2.11)$$

Diz-se então que a medida tem a forma produto, pois pode-se distinguir uma parte relativa ao simplexo de auto-valores (toda a parte envolvendo os λ_i 's) e uma segunda parte correspondente ao elemento de volume da variedade bandeira $\mathbf{F}^N = U^N/U(1)^N$ [44], discutida anteriormente, que denotaremos por dV_{FN} . Isto tem razão de ser pois a estratificação de $\mathcal{D}(\mathcal{H}_N)$ é tal que o estrato de maior dimensão real é da forma $\Delta_{N-1} \times \mathbf{F}^N$, e medidas provindas de métricas riemannianas são não singulares (subvariedades de dimensão real estritamente inferior têm medida nula). Portanto, deve-se ter que o volume do conjunto seja igual ao volume deste estrato, dado que a métrica respeita o produto cartesiano entre os espaços que o compõem, devido a sua invariância por unitárias.

Um procedimento similar permite computar o elemento de volume gerado pela métrica de Hilbert-Schmidt, única riemanniana das métricas L_p , porém não-monótona, de maneira que a expressão acima usada para o elemento de arco não a inclui. Usando que $ds_{HS}^2 =$

$(1/2)\text{Tr}(d\rho)^2$, a Eq. (2.9), e eliminando uma das diferenciais $d\lambda_j$, obtém-se [46]:

$$dV_{HS} = \frac{\sqrt{N}}{2^{N-1}/2} \prod_{i=1}^{N-1} d\lambda_i \prod_{i<j}^N (\lambda_i - \lambda_j)^2 dV_{FN}. \quad (2.12)$$

Note que o elemento de volume tem a mesma estrutura produto do anterior, porém com uma distribuição distinta para o simplexo.

É possível computar explicitamente o volume total do conjunto para as métricas de Hilbert-Schmidt e Bures [45, 47]:

$$\text{Volume}_{HS} = \sqrt{N} \frac{\Gamma(1)\dots\Gamma(N)\pi^{N(N-1)/2}}{\Gamma(N^2)2^{N-1}/2}, \quad (2.13)$$

$$\text{Volume}_{\text{Bures}} = \frac{1}{2^{N-1}} \frac{\pi^{\frac{N^2-1}{2}}}{\Gamma[(N^2-1)/2]}. \quad (2.14)$$

É claro que tais volumes dependem do fator de normalização atribuído a métrica. Para a métrica de Hilbert Schmidt este fator é tal que a distância entre estados ortogonais (distância máxima, ou diâmetro do conjunto) seja 1 para todo N , e π para a métrica de Bures.

O volume de Hilbert-Schmidt, apesar de corresponder ao da métrica Euclidiana em \mathbb{R}^{N^2-1} , coincide com o de uma bola $N^2 - 1$ dimensional de raio $1/2$ apenas para $N = 2$, pois de fato o conjunto pode ser identificado com uma bola 3-dimensional de raio $1/2$, mas para qualquer $N > 2$ isso já não é mais válido, evidenciando que $\mathcal{D}(\mathcal{H}_N)$, do ponto de vista métrico, já não é uma bola $N^2 - 1$ -dimensional (muito embora seja homeomorfa a uma). Já o volume de Bures calha de coincidir, para todo N , com o volume de um hemisfério $(N^2 - 1)$ -dimensional de raio $1/2$.

Como adiantado, para estados puros a exigência de invariância por unitárias já é suficiente para definir uma única medida, exatamente aquela derivada pela métrica da Fubini-Study, e por isso denominada *medida de Fubini-Study*. Aqui há uma parametrização de $\mathbb{C}P^N$ particularmente interessante para o cômputo do volume [48]: $(v_0, \dots, v_N, \nu_1, \dots, \nu_N) \mapsto [\sqrt{v_0}, \sqrt{v_1}e^{i\nu_1}, \dots, \sqrt{v_N}e^{i\nu_N}]$, onde $v_i \geq 0$ e $v_0 + \dots + v_N = 1$, *i.e.*, são coordenadas de um N -simplexo, e $0 \leq \nu_i < 2\pi$, e o domínio pode ser pensado como um produto cartesiano de um

N -simplexo com um N -toro. Nestas coordenadas o elemento de volume é simplesmente:

$$dV_{FS} = \frac{1}{2^N} dv_1 \dots dv_N d\nu_1 \dots d\nu_N, \quad (2.15)$$

onde v_0 foi eliminado e o fator de normalização da métrica é tal que a distância entre estados ortogonais (comprimento de um semi-círculo) seja $\pi/2$. Resulta que o volume total é:

$$\text{Vol}(\mathbb{C}P^N) = \frac{\pi^N}{N!}, \quad (2.16)$$

de fato, o produto dos volumes de um simplexo e de um N -toro.

Exemplo: Bola de Bloch. Nesta seção ilustraremos os conceitos geométricos discutidos anteriormente para o caso mais simples, o de um qubit, único conjunto com dimensão real baixa o suficiente para ser visualizado. Como vimos anteriormente, os estados puros podem ser representados por uma esfera S^2 , onde pontos antipodais representam estados ortogonais. Como qualquer estado de um qubit pode ser escrito na forma $\rho = p |\psi\rangle \langle\psi| + (1-p) |\psi^\perp\rangle \langle\psi^\perp|$, vemos então que $\mathcal{D}(\mathbb{C}^2)$ será então a esfera “preenchida”, *i.e.*, uma bola, que recebe o nome de *bola de Bloch*. Vale a pena aqui introduzir a parametrização “canônica” para esta bola. Tomando uma base ortogonal $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, qualquer, o estado terá a matriz associada

$$\rho = \begin{bmatrix} a & c \\ c^* & 1-a \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

onde $0 \leq a \leq 1$ e $|c|^2 \leq a(1-a)$ para garantir a positividade do operador. Tomando as matrizes de Pauli:

$$\sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

podemos reescrever o estado da seguinte forma:

$$\rho = \frac{1}{2}I_2 + r_x\sigma_x + r_y\sigma_y + r_z\sigma_z = \frac{1}{2}I_2 + \vec{r} \cdot \vec{\sigma} = \begin{bmatrix} 1/2 + r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1/2 - r_z \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

onde r_x, r_y, r_z são números reais, enquanto o vetor $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$ é conhecido como *vetor de Bloch*. A condição de positividade é satisfeita quando $|\vec{r}| \leq 1/2$, de forma que os próprios parâmetros formam uma bola de raio $1/2$, onde os estados puros são a fronteira $|\vec{r}| = 1/2$.

Topologicamente, como adiantado, o conjunto é homeomorfo a uma bola, e a estratificação aqui é simples. O espectro ordenado é descrito por um segmento de reta, com uma das extremidades representando o único caso de degenerescência (o estado maximamente misto), e a outra representando um estado puro. A órbita da primeira extremidade do segmento será simplesmente um ponto, enquanto a de todos os outros pontos será uma esfera. De fato, na bola de Bloch, os estados de mesmo espectro formam uma esfera ao redor da origem. Em poucas palavras, a estratificação “é a mesma de uma cebola”.

É fácil aqui calcular explicitamente a distância L_p entre quaisquer estados, e a parametrização canônica da bola de Bloch se mostra particularmente conveniente. Dados dois estados ρ, ρ' com vetores de Bloch \vec{r}, \vec{r}' , o espectro do operador $\rho - \rho'$ será $\pm|\vec{r} - \vec{r}'|$, de maneira que $\|\rho - \rho'\|_p = 2^p|\vec{r} - \vec{r}'|$. É comum então definir a distância L_p em geral como $D_p(\rho, \rho') = \frac{1}{2^{1/p}}\|\rho - \rho'\|_p$, *i.e.*, incluindo um fator de normalização de forma que todas elas coincidam para qubits.

2.3 Emaranhamento

O emaranhamento para estados mistos de sistemas bipartites foi definido primeiramente por Werner [49] na década de 80, de forma contra-positiva: um estado é emaranhado se não pertence ao conjunto dos separáveis, sendo este último constituído pelos estados que podem ser escritos como combinações convexas de estados não-correlacionados. Mais especificamente, dado um sistema quântico composto por duas partes A e B , um estado $\rho_{AB} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_{AB})$ é dito separável se, e somente se, existem números $p_i \geq 0$, $i = 1, \dots, N$,

$\sum_{i=1}^N p_i = 1$ e estados $\rho_{i,A} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_A)$, $\rho_{i,B} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_B)$ tal que ⁴:

$$\rho_{AB} = \sum_{i=1}^N p_i \rho_{i,A} \otimes \rho_{i,B}, \quad (2.20)$$

e denotaremos por $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{AB})$ o conjunto dos estados separáveis.

A motivação operacional para tal definição é a de que tais estados são exatamente aqueles que podem ser preparados, partindo de um estado produto arbitrário, apenas através (do que veio a ser chamado) de *operações locais e comunicação clássica* (LOCC na sigla em inglês). A definição abriu um novo campo de pesquisa dentro da mecânica quântica, e inúmeros trabalhos se seguiram explorando diversas frentes, das quais destacamos algumas no que se segue.

Estados separáveis admitem trivialmente modelos locais de variáveis ocultas, mas foi logo identificado que alguns estados emaranhados também podem admitir tais modelos [49] (para um certo conjunto de medições). De fato, este é um problema delicado, pois a existência de um modelo de variáveis ocultas para determinado estado vai depender fortemente da “liberdade” que se dá as diversas partes, no sentido de qual é o número de observáveis que irão medir e quantos resultados cada um pode obter, bem como a possibilidade de realizar medições seqüenciais. Ainda é um problema em aberto dizer que todo estado emaranhado admite um certo conjunto de medições cujos resultados não podem ser descritos via variáveis ocultas. Para estados puros sabe-se que isto é verdade, mas para estados mistos em geral a resposta positiva é conjecturada. Vários trabalhos foram e são feitos, então, no sentido de relacionar a definição matemática de emaranhamento com a violação das diversas noções de desigualdades de Bell [50, 51, 52, 53].

O emaranhamento se encontra presente em importantes ramos da informação quântica, como a computação [20] e a criptografia [54] quânticas. É ainda tema de intenso debate o exato papel do emaranhamento no âmbito da computação, muitos afirmando a necessidade da presença do emaranhamento para um *speed up* com relação ao desempenho de computadores clássicos [55], enquanto alguns sugerem, porém, o contrário [56]. Já dentro da criptografia, o emaranhamento pode emergir explicitamente, como no protocolo

⁴ Quando \mathcal{H}_{AB} tem dimensão infinita, pede-se apenas que o estado possa ser *aproximado* por estados desta forma.

elaborado por Ekert [57], mas nem sempre é o caso, como nos protocolos BB84 [58] e B92 [59]. Não obstante, mesmo neste últimos, o emaranhamento tem papel importante na demonstração de sua segurança [60]. Tais temas não serão foco do nosso trabalho, mas colocam em perspectiva a relevância do conceito de emaranhamento.

Testes de emaranhamento. Dado um estado quântico específico, como podemos dizer se é emaranhado ou não? Se o estado global ρ é puro a resposta é simples, pois será separável se, e somente se, $\rho = |\phi\rangle\langle\phi| \otimes |\psi\rangle\langle\psi|$, quer dizer, se, e somente se ambos os estados locais são também puros, o que pode ser verificado facilmente. Mas para estados mistos em geral esta é um pergunta de difícil resposta, literalmente, visto que constitui um problema computacional do tipo *NP difícil* [61]⁵. No entanto, diversos critérios (não-operacionais do ponto de vista computacional) necessários e suficientes foram estabelecidos, como a conexão com a completa positividade de mapas [62] (denominado critério de Peres-Horodecki) ou a existência de uma testemunha de emaranhamento [62]. O primeiro estabelece que um estado ρ_{AB} de um sistema composto de duas partes, A e B , é emaranhado se, e somente se, existe um mapa $\Lambda_A : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ positivo, mas não completamente positivo, definido no espaço de estados de A , tal que a composição $\Lambda_A \otimes I_B$, atuando em ρ_{AB} , leva a um operador com autovalor negativo (e que, portanto, não pode ser um estado físico). Note que qualquer mapa da forma acima mencionada, atuando em estados separáveis, levará a estados físicos.

Já o segundo critério tem um teor geométrico, e constitui aplicação de uma versão geométrica do teorema de Hahn-Banach: em um espaço vetorial normado, um conjunto convexo fechado sempre pode ser separado de um ponto (no complementar do conjunto) por um hiperplano (núcleo de um funcional linear). Ora, no espaço das matrizes hermitianas, um funcional linear tem a forma $\text{Tr}(A\bullet)$, onde A é uma matriz hermitiana fixa. Notando então que o conjunto dos estados separáveis é fechado e convexo, e dado um ponto σ em seu complementar (*i.e.*, um estado emaranhado), pode-se separá-los por um plano, quer dizer, existe um operador hermitiano A (logo, um observável) tal que

⁵ Problemas *NP* são aqueles cujas soluções podem ser *checadas* eficientemente (*i.e.*, em tempo polinomial), mas não necessariamente *encontradas* eficientemente. Um problema pertencente a classe *NP*-difícil tem as propriedades de que sua solução não necessariamente é eficientemente checada, e de que *todos* os problemas da classe *NP* podem ser a ele reduzidos em tempo polinomial (em outras palavras, se *um* problema *NP*-difícil for encapsulado em um oráculo que o resolve em uma unidade de tempo, esse oráculo poderia ser usado para resolver *qualquer* problema *NP* eficientemente).

$\text{Tr}(A\rho) \geq 0$ para todo ρ separável e $\text{Tr}(A\sigma) < 0$. De maneira geral, diz-se que um observável A , tal que seu valor esperado seja não negativo para todo estado separável, é uma *testemunha* de emaranhamento, pois se seu valor esperado sobre um determinado estado for negativo, isto implicará que o mesmo é emaranhado. Tal conceito tem apelo também experimental pois, em princípio, a determinação do valor esperado de um único observável, quando bem escolhido, pode ser usada para verificar que um estado quântico produzido em laboratório é de fato emaranhado [63].

Crítérios apenas necessários ou apenas suficientes também foram estabelecidos, como testemunhas de emaranhamento (fixada uma testemunha, obtém-se um critério suficiente [64]), o critério de imagem [65], o critério de majoração de Nilsen e Kempe [66], o critério de redução [67], a família de critérios determinados pelas α -entropias [68], e, o que será mais relevante para nosso propósito, o critério de Peres [62, 69].

O critério de Peres é um caso especial do critério de Peres-Horodecki. Enquanto este último garante, fixado um estado emaranhado, a existência de um operador positivo, mas não completamente positivo, que revela seu emaranhamento, o segundo consiste em fixar um certo operador deste tipo, a transposição (sendo portanto o operador que age sobre o sistema composto denominado transposta parcial). Isso permite, em geral, detectar o emaranhamento apenas de uma subclasse de estados. De fato, para sistemas de dimensão total superior a seis, existem estados emaranhados cuja transposta parcial é positiva [65]. Apenas para sistemas 2×2 e 2×3 o critério é necessário e suficiente, o que segue do critério de Peres-Horodecki e de um teorema de Stormer-Woronowicz que estabelece, nestes casos, que os mapas positivos são da forma $\Lambda_1 + \Lambda_2 \circ T$, onde Λ_i são completamente positivos e T é a transposta parcial [70]. Ademais, será importante para nós o fato de que, no caso 2×2 , não é preciso toda a informação sobre o espectro da transposta parcial, apenas o valor do seu determinante [71, 72].

Quantificadores de emaranhamento. Dado que uma característica crucial do emaranhamento de estados puros é a de que seus estados reduzidos são mistos, quantificar o grau de mistura destes se torna uma boa maneira de quantificar o emaranhamento do estado como um todo. Há várias maneiras de se quantificar o grau de mistura de um estado quântico, como por exemplo $1 - \text{Tr}\rho^2$, mas na teoria de emaranhamento a entropia

de von Neumann⁶ $S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln \rho)$ é, sob vários aspectos, única. Com ela se define o *emaranhamento de formação* de um estado puro $|\rho_{AB}\rangle$ de um sistema bipartite:

$$E_F(\rho_{AB}) = S(\text{Tr}_B \rho_{AB}). \quad (2.21)$$

Uma propriedade importante emerge do teorema da decomposição de Schmidt: dado um vetor $|\Psi\rangle$ de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, existem bases ortogonais $\{|i\rangle_A\}, \{|i\rangle_B\}$ nos espaços locais, e números positivos r_i somando 1, tais que $|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^n \sqrt{r_i} |i\rangle_A \otimes |i\rangle_B$, onde $n \leq N_{\min} = \min\{\text{Dim}\mathcal{H}_A, \text{Dim}\mathcal{H}_B\}$. Vê-se então que o espectro dos estados reduzidos em A e B serão os mesmos e iguais a $\{r_i\}$.

Qualquer que seja a maneira de quantificar o grau de mistura do estado reduzido, ela deve ser máxima quando $r_i = 1/N_{\min}$ para todo i , de maneira que os estados puros maximamente emaranhados, qualquer que seja o quantificador, devem ter a forma

$$\frac{1}{\sqrt{N_{\min}}} \sum_i |i\rangle_A \otimes |i\rangle_B.$$

O emaranhamento de formação emerge naturalmente em dois quantificadores operacionais importantes: o custo e a destilação de emaranhamento. Suponha que se queira preparar m cópias de um estado $|\psi\rangle_{AB}$, fazendo uso de n cópias de um estado maximamente emaranhado, e operações locais e comunicação clássica de maneira a minimizar n . No limite $m \rightarrow \infty$, tem-se que $n/m \rightarrow E_F(|\Psi\rangle_{AB})$ [73]. Este é o custo de emaranhamento pois mede, neste limite assintótico, o número de cópias que se deve ter de um estado maximamente emaranhado para se produzir um determinado estado. A destilação de emaranhamento consiste do processo inverso. Dado que se tem m cópias de um estado $|\psi\rangle_{AB}$ consegue-se “destilar” um máximo de n cópias de estados maximamente emaranhados fazendo uso apenas de operações locais e comunicação clássica. Novamente se tem $n/m \rightarrow E_F(|\Psi\rangle_{AB})$ [6].

Para estados mistos em geral, como de praxe, não há um quantificador único. Não há nem um consenso sobre quais as propriedades básicas a serem satisfeitas [74, 75]. Certamente, elas devem incluir a monotonicidade por operações LOCC, visto que não faria sentido conseguir aumentar emaranhamento apenas com tais operações. Exige-se também convexidade e claro, que a quantidade seja nula nos separáveis (preferencialmente, apenas

⁶ Para a quantificação de emaranhamento o logaritmo na expressão é tomado na base 2, de modo que um estado maximamente emaranhado de dois qubits tenha uma unidade de emaranhamento, ou um *ebit*.

nos separáveis).

É claro que as definições dos quantificadores custo e a destilação de emaranhamento também são válidas para estados mistos, muito embora seja impraticável, em geral, computar o valor exato para um estado específico. Não obstante, um fato importante é o de que eles não precisam necessariamente coincidir. Enquanto o custo de emaranhamento é estritamente positivo para todos os estados emaranhados, a destilação pode ser nula para alguns, sendo tais estados denominados estados com emaranhamento preso [8].

O emaranhamento de formação pode ser naturalmente estendido para estados mistos tomando o mínimo da média do emaranhamento para todas as decomposições convexas por estados puros do estado. Quer dizer, define-se $E_F(\rho) = \inf\{\sum_i p_i E_F(|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|) | \rho = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|\}$. Apenas para dois qubits têm-se à disposição uma fórmula para computar esta quantidade, como função da chamada concorrência de Wotters [76], enquanto que para dimensões maiores é um trabalho difícil mesmo computacionalmente.

Um quantificador que se destacou recentemente é o emaranhamento *squashed*, por ser o único que se sabe ao certo, até o presente momento, satisfazer uma série de propriedades interessantes como quantificador de emaranhamento. Além das já discutidas acima, ele também satisfaz as propriedades de monogamia, subaditividade, superaditividade forte, continuidade assintótica e, a que foi demonstrada mais recentemente, fidelidade (no sentido de só se anular nos separáveis) [77].

Esta é só uma pequena amostra de quantificadores. Tem-se quantificadores inspirados em noções geométricas do conjunto de estados, como a robustez, a robustez randômica [78] e a robustez generalizada [79], onde a ideia é basicamente medir o quanto é preciso misturar (no sentido de combinações convexas) um certo estado emaranhado com outros estados de forma que o resultado seja um estado separável. Mais geométricos ainda são os quantificadores derivados de métricas, onde toma-se basicamente a distância do estado emaranhado ao conjunto dos separáveis, *i.e.*, $\inf\{D(\rho, \sigma) | \sigma \in \mathcal{S}\}$ [80]. Um quantificador relacionado importante é a entropia relativa de emaranhamento, onde ao invés de se tomar a distância mínima do estado aos separáveis, toma-se a entropia relativa: $E_R(\rho) = \{S(\rho|\sigma) | \sigma \in \mathcal{S}\}$ [81, 82]. Ademais, muitos destes quantificadores fazem parte da família construída via testemunhas de emaranhamento [83].

2.3.1 Geometria de Emaranhamento

O que pode ser dito a respeito da geometria de emaranhamento, ou da geometria do conjunto dos separáveis, para sistemas multipartites em geral? Em primeiro lugar, que o conjunto dos separáveis é fechado, convexo (trivial), com interior não vazio (não trivial, e válido somente quando o espaço de Hilbert global tem dimensão finita [84, 85]). Seu complemento relativo ao conjunto de estados quânticos (*i.e.*, os estados emaranhados) também tem interior não vazio e é não convexo. Na verdade, em geral, o complemento é muito maior, no sentido de ter mais volume (considerando a métrica de Hilbert-Schmidt). Uma ilustração simplificada do conjunto é exibida na Fig. 2.3. Chamamos aqui de \mathcal{D} (subentendendo o espaço de Hilbert associado \mathcal{H}_{AB}) o conjunto de todos os estados quânticos e o consideramos imerso no conjunto \mathcal{A} das matrizes hermitianas de traço unitário; \mathcal{S} o subconjunto dos separáveis, $\partial\mathcal{S}$ e $\partial\mathcal{D}$ suas fronteiras relativas a \mathcal{D} e \mathcal{A} , respectivamente; e $\mathcal{E} = \mathcal{D} - \mathcal{S}$ o conjunto dos estados emaranhados. A fronteira de \mathcal{D} , $\partial\mathcal{D}$, é composta por todos os estados que possuem pelo menos um autovalor nulo, portanto contém, em particular, todos os estados puros. Note que há tanto estados emaranhados como separáveis nesta fronteira. Na verdade, mais do que isto, a área dos estados separáveis em $\partial\mathcal{D}$ é não nula [86, 87].

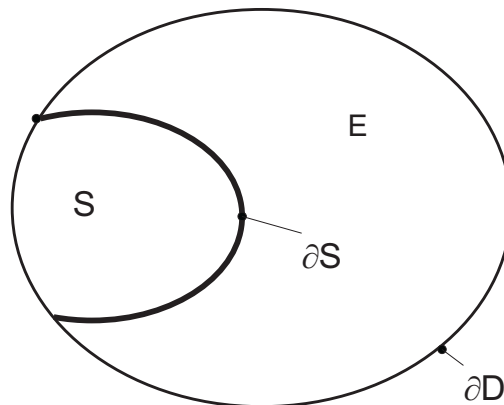


Fig. 2.3: Diagrama do conjunto dos estados de um sistema bipartite.

Localizando um estado de dois qubits no espaço de estados. Como vimos então, o conjunto de todos estados quânticos pode ser dividido de acordo com a dicotomia $\{\text{Int}\mathcal{D}, \partial\mathcal{D}\}$ e a tricotomia $\{\text{Int}\mathcal{S}, \partial\mathcal{S}, \mathcal{E}\}$. O caso de dois qubits tem a vantagem de que é fácil inferir a localização de um dado estado de acordo com esta subdivisão,

com a ajuda dos determinantes do estado e de sua transposta parcial. Ambas as funções são contínuas em todas as métricas naturais, *i.e.*, perturbações pequenas de um estado de acordo com essas métricas implicam em uma perturbação pequena nos valores destas funções. Portanto se, *e.g.*, ambas são positivas para um determinado estado, podemos achar uma vizinhança do mesmo onde elas continuarão positivas. Portanto, o determinante do operador nos indica se ele está no interior ou na fronteira de \mathcal{D} (caso seja maior que, ou igual a zero, respectivamente). Já o determinante da transposta parcial nos dá informação completa a respeito do emaranhamento, já que um estado é emaranhado se, e somente se, este determinante é estritamente negativo [72]. Este determinante nos fala se o estado pertence ao interior dos separáveis (caso seja estritamente positivo), à fronteira (se é igual a zero), ou aos emaranhados (se for negativo). Finalmente, se ρ é um dado estado com $d = \text{Det}\rho$ e $d^\Gamma = \text{Det}\rho^\Gamma$, onde $\rho^\Gamma \equiv I \otimes T\rho$ denota o operador ρ transposto parcialmente, teremos (ver Fig. 2.4):

- i) $d > 0$ e $d^\Gamma > 0$: o estado está no interior de \mathcal{D} e no interior de \mathcal{S} relativo a \mathcal{D} , *i.e.*, pertence a $\mathcal{S} - \partial\mathcal{S}$ (*e.g.*, o estado maximamente misto, $\rho_{mix} = I/4$);
- ii) $d > 0$ e $d^\Gamma = 0$: o estado está no interior de \mathcal{D} e em $\partial\mathcal{S}$ (*e.g.*, o estado $\frac{1}{2}\rho_{mix} + \frac{1}{2}\rho_{singlet}$, onde $\rho_{singlet}$ se refere ao estado na Eq. (2.22) com $a = 0$, $b = -c = 1/2$);
- iii) $d > 0$ e $d^\Gamma < 0$: o estado está no interior de \mathcal{D} e pertence a \mathcal{E} (*e.g.*, os estados de Werner [49], $p\rho_{mix} + (1-p)\rho_{singlet}$, para $0 < p < 1/3$);
- iv) $d = 0$ e $d^\Gamma > 0$: o estado está na fronteira de \mathcal{D} e em $\mathcal{S} - \partial\mathcal{S}$ (lembrando que definimos $\partial\mathcal{S}$ como a fronteira relativa a \mathcal{D} , enquanto $\partial\mathcal{D}$ é relativa a \mathcal{A}). Por exemplo, se $a > b > 0$, $2a + 2b = 1$, e $|c| = b$:

$$\rho = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}; \quad (2.22)$$

- v) $d = 0$ e $d^\Gamma = 0$ o estado está em $\partial\mathcal{D} \cap \partial\mathcal{S}$ (*e.g.*, um estado puro separável);

vi) $d = 0$ e $d^\Gamma < 0$ o estado está na fronteira de \mathcal{D} e pertence a \mathcal{E} (e.g., ρ_{singlet}).

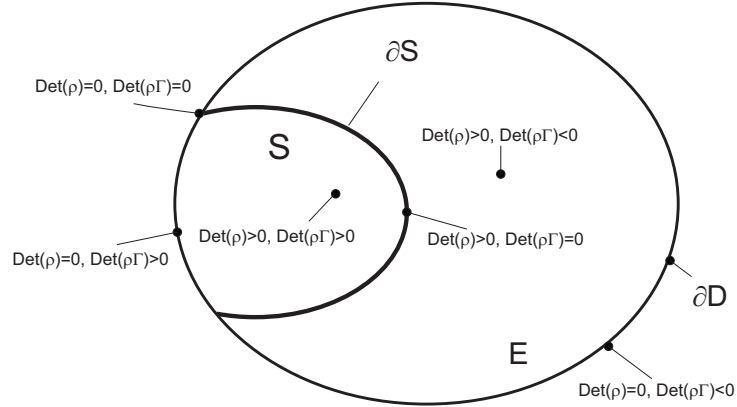


Fig. 2.4: Localização de um estado de dois qubits no conjunto, de acordo com seu determinante e de sua transposta parcial.

2.4 Emaranhamento em estados gaussianos

Muitos dos protocolos e técnicas da teoria de emaranhamento de sistemas de dimensão finita podem ser adaptadas para sistemas de variáveis contínuas (VC), *i.e.*, com espaços de Hilbert de dimensão infinita, usualmente restritos ao conjunto dos chamados *estados gaussianos* (EG). Por exemplo, os protocolos de teleportação [88] e distribuição quântica de chaves [89] têm seus análogos para sistemas de VC (e podem ser mais robustos experimentalmente [90]); o critério de Peres-Horodecki pode ser aplicado, e é necessário e suficiente para um EG de dois modos [91]; e quantificadores de emaranhamento como a negatividade e emaranhamento de formação podem ser computados para EG dentro do formalismo de geometria simplética [92, 93, 94].

A estrutura dos estados emaranhados de sistemas bipartites muda radicalmente quando o espaço de Hilbert do sistema composto $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ tem dimensão infinita. Mesmo que um dos sistemas tenha dimensão finita, ocorrerá que agora os estados separáveis terão *interior vazio* (na topologia definida pela norma traço) [95]. Quer dizer, genericamente, os estados são emaranhados, e poderíamos representá-lo como na Fig. 2.5.

Uma indicação de que isso ocorre é o fato de que, em tais espaços, não há um operador maximamente misto como em espaços de dimensão finita, que é um ótimo candidato a pertencer ao interior dos separáveis. A demonstração de que isso verdade, apresentada

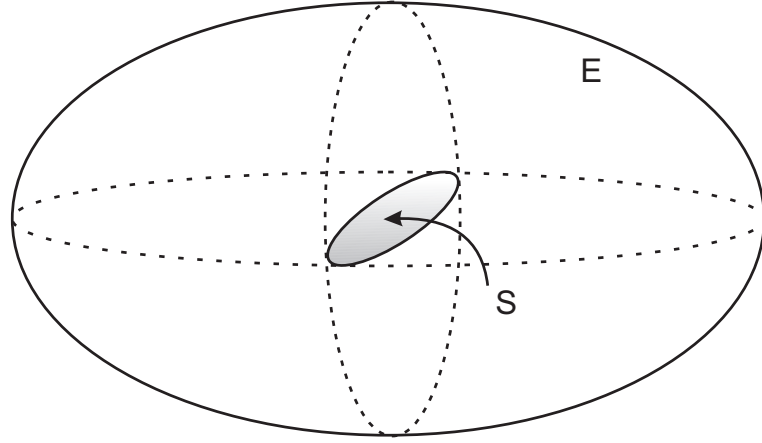


Fig. 2.5: Quando a dimensão do espaço de Hilbert total é infinita, S tem interior vazio.

em [95], é interessante, envolvendo o conceito de *steering* em sistemas compostos. A ideia é tomar o produto tensorial com um terceiro espaço \mathcal{H}_C , de dimensão infinita, e descrever os estados do sistema $A + B$ como estados reduzidos de estados puros em $A + B + C$. Existem vetores $|\Psi\rangle_{ABC}$ em $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C$, denominados 1-cíclicos, com a propriedade interessante de que o fecho do conjunto $\{A \otimes I_B \otimes I_C |\Psi\rangle | A \text{ é operador limitado em } \mathcal{H}_A\}$ é todo o espaço de Hilbert \mathcal{H}_{ABC} , e portanto qualquer estado a ele pertencente pode ser arbitrariamente aproximado por um estado da forma $A \otimes I_B \otimes I_C |\Psi\rangle$. Se pensarmos que A é um elemento de um POVM $\{A, I_A - A\}$, que atua apenas no sistema A , tem-se que é possível alterar arbitrariamente o estado reduzido em $B + C$ se o condicionarmos a medição ao primeiro resultado, não importa quão longe A esteja de $B + C$. Aparentemente então pode-se conduzir (*steer*) o estado de um sistema muito distante atuando apenas localmente (mas é claro que o estado em $B + C$, ponderado sobre todos os resultados de mediação, não será alterado).

Ocorre então que os estados reduzidos de tais vetores não podem ser separáveis, o que é razoável de ver. Suponha que o estado seja separável, *i.e.*, $\text{Tr}_C |\Psi\rangle = \sum_k p_k \rho_{k,A} \otimes \rho_{k,B}$ e $A \otimes I_{BC} |\Psi\rangle \neq 0$, em particular podemos supor que a norma desta vetor é 1 (bastando redefinir A por um fator multiplicativo). Então $\text{Tr}_C A \otimes I_{BC} |\Psi\rangle = \sum_k p_k A \rho_{k,A} A^\dagger \otimes \rho_{k,B}$, quer dizer, o estado reduzido sempre será separável⁷. Mas se o vetor é 1-cíclico deveria ser possível gerar todos os estados reduzidos em AB , o que é uma contradição.

⁷ Note que $A \rho_{k,A} A^\dagger$ não necessariamente pertence a $\mathcal{D}(\mathcal{H}_A)$, pois embora positivo, pode ter traço distinto de 1. No entanto, $\sum_k p_k \text{Tr} A \rho_{k,A} A^\dagger = 1$, devido ao fato de $\|A \otimes I_{BC} |\Psi\rangle\| = 1$.

A demonstração é concluída mostrando-se que os vetores 1-cíclicos são densos (na esfera unitária) caso a dimensão de \mathcal{H}_A seja infinita, quer dizer, a propriedade de *steering* não só existe como é genérica neste caso. Para ver isso, considere a partição $A+BC$, onde as duas partes têm dimensão infinita. Tome então um vetor qualquer $|\psi\rangle = \sum_{ij} b_{ij} |i\rangle_A \otimes |j\rangle_{BC} = \sum_j (\sum_i b_{ij} |i\rangle_A) \otimes |j\rangle_{BC}$. Agora, um vetor da forma $|\Psi\rangle = \sum_j a_j |j\rangle_A \otimes |j\rangle_{BC}$, onde todos os a_j 's são não-nulos, poderá aproximar arbitrariamente o vetor anterior, atuando apenas com operadores contínuos em \mathcal{H}_A , se tomarmos os operadores definidos por $A_n |j\rangle_A = \frac{1}{a_j} \sum_i b_{ij} |i\rangle_A$, para $j = 1, \dots, n$ e $A_n |j\rangle = 0$ para $j > n$. Em outras palavras, $|\Psi\rangle$ é 1-cíclico. Mas vetores da forma de $|\Psi\rangle$, pelo teorema da decomposição de Schmidt, são densos na bola unitária de ABC .

Nosso interesse aqui é trabalhar com espaços da forma $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, onde \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 são *ambos* de dimensão infinita e correspondem ao espaço de Hilbert de um oscilador harmônico unidimensional (ou equivalentemente, um modo de campo eletromagnético). Temos então definidos nestes espaços os operadores canônicos x_i, p_i , satisfazendo as relações de comutação $[x_i, p_i] = i\hbar$, e uma base de Fock associada $\{|n\rangle_1\}_{n=0}^\infty, \{|n\rangle_2\}_{n=0}^\infty$. Dados os operadores de destruição $a_j = (x_j + ip_j)/\sqrt{2}$, $i = 1, 2$, pode-se representar um estado qualquer via a função característica de Wigner [96]:

$$\chi(z_1, z_2) = \text{Tr}[\rho \exp(z_1 a_1 - z_1^* a_1^\dagger + z_2 a_2 - z_2^* a_2^\dagger)]. \quad (2.23)$$

onde z_i são números complexos.

O nosso foco será sobre os estados gaussianos, definidos como aqueles estados cujas funções características de Wigner são gaussianas em z_1 e z_2 :

$$\chi(z_1, z_2) = e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}^\dagger V_\rho \mathbf{z} + \mathbf{z} \cdot \mathbf{c}}, \quad (2.24)$$

onde $\mathbf{z}^t = (z_1, z_1^*, z_2, z_2^*)$, $\mathbf{c} = (\langle a_1 \rangle, \langle a_1^\dagger \rangle, \langle a_2 \rangle, \langle a_2^\dagger \rangle)$, V_ρ é a denominada *matriz de covariância* e $\langle \xi \rangle$ denota o valor esperado $\text{Tr}(\xi \rho)$ do observável ξ .

Os valores esperados das posições e momentos (ou combinações lineares destes) podem ser localmente alterados redefinindo os operadores de cada modo (ou equivalentemente, aplicando operadores de deslocamento em cada um deles) de forma que toda a informação

sobre o emaranhamento está contida nos segundos momentos. Quer dizer, efetivamente podemos considerar, no que concerne o emaranhamento, $\mathbf{c} = 0$. Neste caso, a matriz de covariância assume a forma:

$$V_\rho = \begin{pmatrix} n_1 + \frac{1}{2} & m_1 & m_s & m_c \\ m_1^* & n_1 + \frac{1}{2} & m_c^* & m_s^* \\ m_s^* & m_c & n_2 + \frac{1}{2} & m_2 \\ m_c^* & m_s & m_2^* & n_2 + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

onde $n_j = \langle a_j^\dagger a_j \rangle$, $m_j = -\langle a_j^2 \rangle$, $m_s = -\langle a_1 a_2^\dagger \rangle$, $m_c = \langle a_1 a_2 \rangle$. Quer dizer, os estados gaussianos são determinados apenas pelos primeiros e segundos momentos do operador densidade.

A matriz de covariância pode ser colocada na forma de blocos:

$$V_\rho = \begin{pmatrix} V_1 & C \\ C^\dagger & V_2 \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

onde V_i é uma matriz 2×2 relacionada ao modo i , e C é uma matriz 2×2 que nos dá as correlações (quânticas e clássicas) entre os modos. Afim de representar um estado quântico, é necessário e suficiente que uma matriz de covariância obedeça às relações generalizadas de incerteza de Robertson-Schrödinger [94], que levam à seguinte condição sobre a mesma:

$$V_\rho + \frac{1}{2}Z \geq 0, \quad (2.27)$$

onde $Z = \text{Diag}(1, -1, 1, -1)$. Uma matriz de covariância que não respeita tal desigualdade será denominada *não-física*.

Simon [91] mostrou que, assim como para dois qubits, o critério de Peres-Horodecki é decisivo para se determinar o emaranhamento, e pode ser dado em termos da quantidade:

$$S(V_\rho) = I_1 I_2 + (1/4 - |I_3|)^2 - I_4 - 1/4(I_1 + I_2), \quad (2.28a)$$

onde $I_{1,2} = \det V_{1,2}$, $I_3 = \det C$, e $I_4 = \text{tr} [V_1 Z C Z V_2 Z C^\dagger Z]$ são invariantes por operações

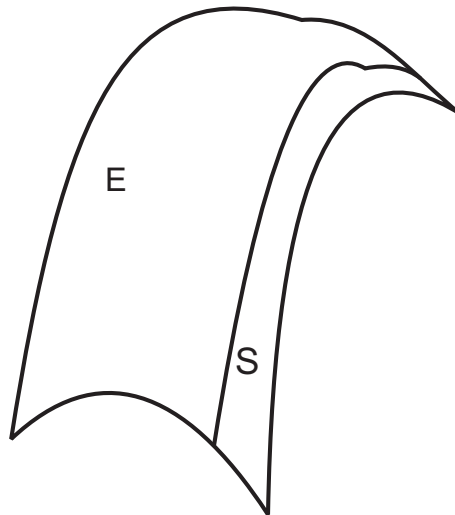


Fig. 2.6: Os estados Gaussianos não formam um conjunto convexo, mas o subconjunto dos separáveis agora tem interior.

unitárias locais em $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{AB})$ que preservam a gaussianidade, com $Z = \text{diag}\{1, -1\}$. Uma MC é separável se, e somente se,

$$S(V_\rho) \geq 0, \quad (2.28b)$$

sendo este denominado critério de Peres-Simon.

A suficiência e necessidade deste critério nos mostra que o conjunto dos estados separáveis, *restrito ao subconjunto dos estados gaussianos*, terá agora interior não-vazio. De fato, assim como pode-se argumentar para dois qubits que o interior é não-vazio usando-se o determinante da transposta parcial, aqui podemos usar a quantidade S . Como existem estados para os quais S é estritamente positiva (*e.g.*, quando V_ρ é diagonal e com $n_1, n_2 \neq 0$) deve haver uma “vizinhança gaussiana” deste estado na qual todos os estados têm S estritamente positivo, sendo portanto separáveis. Uma ilustração pictórica dos gaussianos seria então como na Fig. 2.6, enfatizando tanto o fato de que o interior dos separáveis é não-vazio, como também o fato de que o conjunto como um todo não é convexo.

No trabalho de Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) [2] os autores exploram as propriedades dos observáveis $x_1 + x_2$ e $p_1 - p_2$ onde x_i, p_i são os momentos e as posições de duas partículas unidimensionais, considerando um estado onde ambos tem dispersão

nula, e sendo o “estado”, emaranhado⁸. É interessante que as variâncias destes observáveis podem evidenciar emaranhamento em estados de uma maneira geral. Para isso, dado operadores locais Q_i, P_i satisfazendo as relações de comutação $[Q_i, P_i] = i\hbar$, e número real arbitrário $a \neq 0$, define-se os *operadores do tipo EPR* $u = |a|Q_1 + \frac{1}{a}Q_2$, $v = |a|P_1 - \frac{1}{a}P_2$. Duan, Giedke, Cirac e Zoller (DGCZ) [97] mostraram que se um estado é separável, então $\langle \Delta u^2 \rangle + \langle \Delta v^2 \rangle \geq a^2 + 1/a^2$. Portanto, se tal par de operadores é comprimido o suficiente, *i.e.*, se a soma de suas variâncias viola a desigualdade, o estado é emaranhado.

Para EG este critério é necessário e suficiente para se decidir separabilidade, o qual chamamos critério de DGCZ. Isto é feito representando a MC em uma forma padrão, através de operações locais, de forma que a validade da desigualdade acima aplicada à matriz nesta forma, e com a determinado pelos seus coeficientes, implica que o estado é separável. Restringindo-se ainda aos EG simétricos (*i.e.*, $I_1 = I_2$), é suficiente considerar $|a| = 1$, e o procedimento equivale a achar, através de operações locais de rotação e compressão das quadraturas, o par de operadores cuja soma das variâncias é mínima.

Nós iremos trabalhar principalmente com EG simétricos, e para estes iremos usar o emaranhamento de formação como quantificador, o qual admite uma fórmula explícita [98]

$$E_F(\rho) = f(2\sqrt{I_1 + |I_3|} - \sqrt{I_4 + 2I_1|I_3|}), \quad (2.29)$$

onde $f(x) = c_+(x) \log_2 c_+(x) - c_-(x) \log_2 c_-(x)$, com $c_{\pm}(x) = \frac{1}{4}(x^{-1/2} \pm x^{1/2})^2$.

2.5 Estados Quânticos Aleatórios

Iremos utilizar no próximo capítulo a noção de estado quântico aleatório. Formalmente, falar de estados quânticos aleatórios é o mesmo que definir um volume normalizado, onde esta última noção já foi abordada acima. Há uma diferença conceitual maior, no entanto, pois agora queremos, por exemplo, que a medida normalizada represente um sorteio “honesto” de um estado quântico. A noção de “honestidade” ou de “máxima

⁸ A função de onda considerada pelos autores não é normalizável, não sendo propriamente um estado físico, mas pode ser entendida como um caso limite de certos estados Gaussianos com emaranhamento tendendo ao infinito.

ignorância” aqui é de difícil precisão, mas pode ser aprofundada [99]. Uma exigência imediata é de que essa distribuição de probabilidade deve ser o mais simétrica possível, de acordo com nossa ignorância máxima sobre o estado do sistema; em particular, deve ser invariante por unitárias, conforme medidas já discutidas acima. Valores esperados de interesse, como entropias ou momentos de um estado⁹, já foram computados de acordo com várias medidas [100]. Implementações computacionais para a geração de estados aleatórios foram discutidas [101] e aplicadas [102] em diversos contextos. O estudo destas distribuições e seus respectivos momentos são centrais na investigação da distribuição de emaranhamento de estados puros de um sistema [103]. No próximo capítulo iremos usar, principalmente, que todas as distribuições de probabilidade relevantes são não singulares, *i.e.*, eventos (subconjuntos) contidos em variedades de dimensão estritamente inferior à variedade dos estados quânticos tem probabilidade nula (volume nulo).

⁹ Valor esperado das variáveis aleatórias $S(\rho)$ e $\text{Tr}\rho^n$, onde ρ denota o estado, S alguma entropia e n é algum natural.

3. DINÂMICA DE EMARANHAMENTO EM DIMENSÃO FINITA

O termo morte súbita de emaranhamento denota, como mencionado na introdução, o “desemaranhamento” do sistema em tempo finito. Tal “fenômeno” foi investigado, por abordagens teóricas, em diversas dinâmicas para dois qubits [104], em sistemas bipartite de dimensão finita [105, 106], em dinâmicas de muitos qubits [107], em sistemas bipartite de dimensão infinita [15, 16], etc. Trabalhos experimentais foram realizados, demonstrando o efeito em montagens de óptica quântica [108], e propostas para observação em outras montagens foram sugeridas [109].

Revisaremos aqui a classificação geométrica das dinâmicas de emaranhamento e exibiremos exemplos explícitos para cada uma delas. Todos os exemplos são dados para dois qubits, sujeitos a uma dinâmica dada por uma equação na forma de Lindblad, em alguns casos, não autônoma. Nós também analisamos, dentro de cada exemplo, a probabilidade de se observar um comportamento específico, dado que um estado inicial aleatório é sorteado.

3.1 Geometria da morte súbita de emaranhamento: visão geral

Como mencionado na introdução, uma conexão entre morte súbita de emaranhamento e geometria de estados quânticos foi estabelecida na Ref. [14], elucidando significativamente a natureza da primeira. A existência de algum emaranhamento no estado de um sistema composto exige, em particular, alguma coerência quando o mesmo é expresso em uma base produto, *i.e.*, deve haver termos fora-da-diagonal não nulos nesta base. Ora, decoerência em um sistema aberto é justamente o amortecimento destes termos; e que podem se anular, pelo menos para dinâmicas analíticas (como as markovianas), apenas assintoticamente. Aparentemente, o pensamento corrente até o final dos anos 90 era de que algo análogo deveria ocorrer com o emaranhamento, *i.e.*, também deveria se anular assintoticamente,

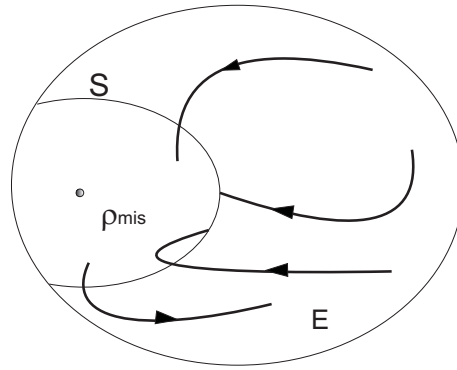


Fig. 3.1: Trajetórias no espaço de estados e seu subsequente efeito sobre a dinâmica de emaranhamento.

apenas em escala de tempo distinta da decoerência. Uma diferença crucial ocorre, no entanto, do ponto de vista geométrico: o conjunto de estados “decoeridos”, ou seja, com um ou mais elementos específicos fora-da-diagonal iguais a zero, é um conjunto de dimensão real inferior à dimensão do conjunto de estados. Em outras palavras, é um subconjunto “magro” do conjunto total. Dificilmente uma trajetória regular definida por uma dinâmica de sistema aberto irá partir de um estado inicial, fora do conjunto, e, em um tempo finito, entrar neste conjunto, e por lá permanecer. Lembrando agora que o conjunto dos separáveis tem interior não-vazio (quando o espaço de Hilbert do sistema composto tem dimensão finita), essa situação agora é mais natural: tomando uma dinâmica que leva um estado inicial emaranhado em um estado separável *no interior* dos separáveis, a morte súbita necessariamente ocorre, visto que a trajetória descrita deve primeiramente entrar em uma bola contendo este estado separável, e inteiramente contida no conjunto dos separáveis (ver Fig. 3.1).

Esse simples fato nos permite determinar rapidamente, em muitas situações, o comportamento assintótico do emaranhamento em uma dinâmica “relaxante” (onde cada estado inicial converge para algum estado assintótico, podendo haver mais de um destes últimos). Fixado um estado emaranhado inicial, temos que: se o seu assintótico estiver no interior dos separáveis, teremos, como discutido, morte súbita de emaranhamento; se o estado estiver na fronteira entre separáveis e emaranhados, pode haver morte assintótica ou súbita (exemplos disso são discutidos em [14], e também, em detalhes, neste capítulo); se o estado assintótico for emaranhado, obviamente, nenhum dos dois ocorre. Pode-se fazer mais perguntas caso o estado inicial seja separável: se o correspondente assintótico for emara-

nhado, ter-se-á então, necessariamente, um “nascimento súbito de emaranhamento”.

3.2 Morte súbita em dinâmicas unitárias

Por vezes se denomina por morte súbita quando um estado inicialmente emaranhado permanece um intervalo de tempo sem emaranhamento, *i.e.*, o emaranhamento pode ressurgir (ou ressuscitar) posteriormente. Quando entendida desta forma, e quando a dinâmica do sistema é descrita pela ação de um hamiltoniano (possivelmente dependente do tempo), mostraremos aqui que a morte súbita é quase universal. Mais especificamente, mostramos que para a grande maioria das dinâmicas desta forma existirá *algum* estado inicial emaranhado que irá apresentar morte súbita em *algum* instante de tempo.

Para tanto precisaremos de dois resultados.

1) Se uma unitária U , atuando em um sistema bipartite $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, preserva estados produto, então ela é ou uma unitária local ou a composição de uma com o operador swap $S(|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$, sendo que a segunda opção é possível apenas, como a própria definição do operador sugere, quando $\text{Dim}\mathcal{H}_A = \text{Dim}\mathcal{H}_B$.

Vamos considerar aqui apenas o caso de dois qubits, e deixamos o resultado geral para o apêndice. Considere então a atuação da unitária U nos elementos da base computacional, que deve ser levada em uma base ortogonal constituída por estados produto:

$$|0\rangle \otimes |0\rangle \mapsto |\psi_{00}\rangle \otimes |\phi_{00}\rangle, \quad (3.1a)$$

$$|0\rangle \otimes |1\rangle \mapsto |\psi_{01}\rangle \otimes |\phi_{01}\rangle, \quad (3.1b)$$

$$|1\rangle \otimes |0\rangle \mapsto |\psi_{10}\rangle \otimes |\phi_{10}\rangle, \quad (3.1c)$$

$$|1\rangle \otimes |1\rangle \mapsto |\psi_{11}\rangle \otimes |\phi_{11}\rangle. \quad (3.1d)$$

A ideia é ver que vetores locais $|\psi_{ij}\rangle$ e $|\phi_{ij}\rangle$, devido a unitariedade da transformação, bem como do fato de preservar produtos, não podem ser arbitrariamente escolhidos.

Por exemplo, para que a imagem do vetor $(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle$, igual a $|\psi_{00}\rangle \otimes |\phi_{00}\rangle + |\psi_{10}\rangle \otimes |\phi_{10}\rangle$, seja também produto, e considerando que as duas componentes desta soma

são ortogonais entre si, deve-se ter somente uma de duas opções:

$$\langle \psi_{00} | \psi_{10} \rangle = 0 \text{ e } |\phi_{00}\rangle \propto |\phi_{10}\rangle \quad (3.2a)$$

ou

$$\langle \phi_{00} | \phi_{10} \rangle = 0 \text{ e } |\psi_{00}\rangle \propto |\psi_{10}\rangle. \quad (3.2b)$$

Suponha que (3.2a) é verdadeira. Então $|10\rangle \mapsto e^{i\theta_{10}} |\psi_{10}\rangle \otimes |\phi_{00}\rangle$; da mesma forma, para que a imagem de $|0\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle)$ também seja produto, deve-se ter

$$\langle \phi_{00} | \phi_{01} \rangle = 0 \text{ e } |\psi_{00}\rangle \propto |\psi_{01}\rangle \quad (3.3a)$$

ou

$$\langle \psi_{00} | \psi_{01} \rangle = 0 \text{ e } |\phi_{00}\rangle \propto |\phi_{01}\rangle. \quad (3.3b)$$

Mas agora, dado que (3.2a) é verdadeira, esta segunda opção, (3.3b), não o pode ser, pois caso contrário a imagem do subespaço tridimensional gerado pelos vetores $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle\}$ seria $\mathbb{C}^2 \otimes |\phi_{00}\rangle$, um subespaço de dimensão dois, contradizendo o fato de U ser unitária. Então, deve-se ter $|01\rangle \mapsto e^{i\theta_{01}} |\psi_{00}\rangle \otimes |\phi_{01}\rangle$. Como para a imagem de $|11\rangle$ só resta um vetor da forma $e^{i\theta_{11}} |\psi_{10}\rangle \otimes |\phi_{01}\rangle$, temos que $U |jk\rangle = e^{i\theta_{jk}} |\psi_{j0}\rangle \otimes |\phi_{0k}\rangle$; mais ainda, temos que as fases θ_{jk} não são arbitrárias. De fato, para a imagem do vetor $(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle)$ ser um produto, é preciso que $e^{i(\theta_{00} + \theta_{11})} = e^{i(\theta_{01} + \theta_{10})}$. Como, por construção, $\theta_{00} = 0$, temos $\theta_{11} = \theta_{01} + \theta_{10} \pmod{2\pi}$. E com isto se estabelece $U = U_A \otimes U_B$, onde $U_A |j\rangle = e^{i\theta_{j0}} |\psi_{j0}\rangle$ e $U_B |k\rangle = e^{i\theta_{0k}} |\phi_{0k}\rangle$.

Caso a (3.2b) fosse verdadeira, uma linha de raciocínio análoga valeria, mas invertendo os papéis de A e B na imagem. Dessa própria equação vem que $U |10\rangle = e^{i\tilde{\theta}_{10}} |\psi_{00}\rangle \otimes |\phi_{10}\rangle$, para que a unitária leve $(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle$ em um produto. E a única forma para o vetor $U |01\rangle$, tal que $|0\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle)$ seja mapeado em um produto, e que seja consistente com $U |10\rangle$, é $U |01\rangle = e^{i\tilde{\theta}_{01}} |\psi_{01}\rangle \otimes |\phi_{00}\rangle$. Disto vem que $U |11\rangle = e^{i\tilde{\theta}_{11}} |\psi_{01}\rangle \otimes |\phi_{10}\rangle$ necessariamente, e tem-se $U |jk\rangle = e^{i\tilde{\theta}_{ij}} |\psi_{0k}\rangle \otimes |\phi_{j0}\rangle$, onde, por um argumento análogo ao do parágrafo anterior, deve-se ter $\tilde{\theta}_{11} = \tilde{\theta}_{01} + \tilde{\theta}_{10}$. Resulta que $U = (U_A \otimes U_B) \circ S$, onde $U_A |j\rangle = e^{i\tilde{\theta}_{0j}} |\psi_{0j}\rangle$, $U_B |k\rangle = e^{i\tilde{\theta}_{k0}} |\phi_{k0}\rangle$ e S o operador swap.

2) Estados da forma $p \frac{I_{AB}}{d_A d_B} + (1-p) \rho_{sep}$ pertencem ao interior dos separáveis se ρ_{sep} é

um estado separável e $0 < p \leq 1$. Isto decorre imediatamente do teorema 1 da Ref. [110]: a matriz $I_{AB} + A$, onde A é hermitiana, é separável se $\|A\|_2 = \sqrt{\text{Tr}A^2} \leq 1$. De fato, dado qualquer ρ em AB , considere o estado $(1 - \epsilon)[p \frac{I_{AB}}{d_A d_B} + (1 - p)\rho_{sep}] + \epsilon\rho = [(1 - \epsilon)p \frac{I_{AB}}{d_A d_B} + \epsilon\rho] + [(1 - \epsilon)(1 - p)\rho_{sep}]$. A segunda componente é claramente separável, e a primeira, se ϵ é pequeno o suficiente, também o será, de forma que o estado como um todo será separável¹.

Podemos agora formular o resultado: se uma dinâmica é dada por uma família contínua de unitárias $U(t)$, onde $U(0) = I_{AB}$, *i.e.*, $\rho(t) = U(t)\rho U^\dagger(t)$, então a morte súbita só não ocorrerá na eventualidade de que $U(t) = U_A(t) \otimes U_B(t)$ para todo instante t .

Para ver que isso é verdade, suponha que exista algum momento t_0 tal que $U(t_0)$ não é uma unitária local. Então deve existir algum estado puro produto $|\psi_{\text{prod}}\rangle$ que é mapeado por $U^{-1}(t_0)$ em um estado emaranhado $|\psi_{\text{emanh}}\rangle$. Se isto não fosse verdade, $U^{-1}(t_0)$ e, logo, $U(t_0)$ seriam unitárias locais². Então o estado inicial emaranhado $|\psi_{\text{emanh}}\rangle$, no instante t_0 será $U(t_0)|\psi_{\text{emanh}}\rangle = U(t_0)U^{-1}(t_0)|\psi_{\text{prod}}\rangle = |\psi_{\text{prod}}\rangle$. Quer dizer, existe algum estado inicial emaranhado que certamente terá emaranhamento nulo em t_0 .

Para ver que teremos também a morte súbita, no sentido apresentado nesta seção, considere alternativamente o seguinte estado inicial $\rho_p = p \frac{I_{AB}}{d_A d_B} + (1 - p)|\psi_{\text{emanh}}\rangle \langle \psi_{\text{emanh}}|$, com $p > 0$ pequeno o suficiente para que o mesmo seja emaranhado, teremos $\rho_p(t_0) = p \frac{I_{AB}}{d_A d_B} + (1 - p)|\psi_{\text{prod}}\rangle \langle \psi_{\text{prod}}|$, que pelo resultado acima, pertencerá ao interior dos separáveis, o que implica $\rho_p(\tau)$ separável para $\tau \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ para algum $\epsilon > 0$.

Alternativamente, como a própria $U(t_0)$ deve levar algum estado puro produto em um emaranhado, um estado inicial dado por uma ligeira mistura do estado produto com a identidade, começará no interior dos separáveis e depois se tornará emaranhado. Em outras palavras, o nascimento súbito irá ocorrer.

Resumindo, estes fenômenos só *não* ocorrem quando não há qualquer tipo de interação, por mais fraca que seja, entre os sistemas. Claramente, se a interação entre eles for muito fraca (na prática todos os sistemas físicos interagem entre si em algum grau), a variação do emaranhamento pode ser muito sutil para ser discernida experimentalmente. Ademais,

¹ Na verdade, vê-se que vale uma propriedade mais geral: combinações convexas de um ponto interior de um conjunto convexo, com um ponto arbitrário do mesmo, levam ao seu interior.

² Poderia acontecer de $U(t_0)$ ser a composição de uma unitária com a SWAP, mas como o conjunto das unitárias locais, do qual a identidade faz parte, e o conjunto das unitárias locais+SWAP são disjuntos, existiria um instante de tempo anterior t'_0 no qual $U(t'_0)$ não pertenceria a nenhum deles.

a preparação dos estados iniciais e/ou a caracterização fiel do emaranhamento ao longo do tempo podem ser inviáveis (sendo estas provavelmente as maiores dificuldades atualmente para se observar este tipo de efeito em laboratório).

Finalmente, observamos que, quando a família de unitárias varia analiticamente (que é o caso, *e.g.*, de um hamiltoniano independente do tempo) a morte e o nascimento súbito só irão ocorrer para estados mistos. O ponto é que para estados puros o emaranhamento pode ser indicado pelo grau de mistura dos estados reduzidos, digamos, por $1 - (\text{Tr}_B |\Psi\rangle \langle \Psi|)^2$. Se a família $U(t)$ varia analiticamente, a quantidade acima também, de forma que ela só poderá se anular em instantes de tempo discretos. Quer dizer, o emaranhamento de estados puros, para essa classe de dinâmicas, não pode morrer ou nascer subitamente.

3.3 Morte súbita em dinâmicas não-unitárias

Considere uma dinâmica com conjunto estacionário não-trivial, St . Por conjunto estacionário entendemos que para todo estado inicial ρ e conjunto aberto $V \supseteq St$, vale que $\rho(t)$ (estado no instante de tempo t) pertence a V para todo t suficientemente grande. Claramente, se uma dinâmica aceita um conjunto de estados assintóticos, este será o menor conjunto estacionário da dinâmica. De qualquer forma, da simples ilustração da fig. 2.3, e nela considerando a localização de St , podemos distinguir três possibilidades, com consequências para a dinâmica assintótica de emaranhamento: i) $St \subset \text{Int}(\mathcal{S})$ implica que cada estado inicial emaranhado perderá seu emaranhamento a tempo finito (morte súbita de emaranhamento); ii) se $St \cap \partial\mathcal{S} \neq \emptyset$, somente com esta informação, muitas situações podem ocorrer: morte assintótica ou súbita de emaranhamento, bem como emaranhamento não-nulo assintoticamente; iii) se $St \subset \mathcal{E}$, cada estado inicial irá exibir emaranhamento assintoticamente.

Em uma classificação mais completa podemos distinguir ainda se o conjunto estacionário, St , consiste de um único estado (*e.g.*, estado de Gibbs devido a um reservatório térmico) ou mais (*e.g.*, estados diagonais, devido a um reservatório de fase). Neste sentido, cada caso acima dá origem a dois sub-casos, em um total de seis classes (ver Fig. 3.2).

Note que, nos casos ii) e iii), é possível no primeiro, e certo no segundo, que emaranhamento seja criado pela dinâmica, uma situação que pode ser denominada nascimento

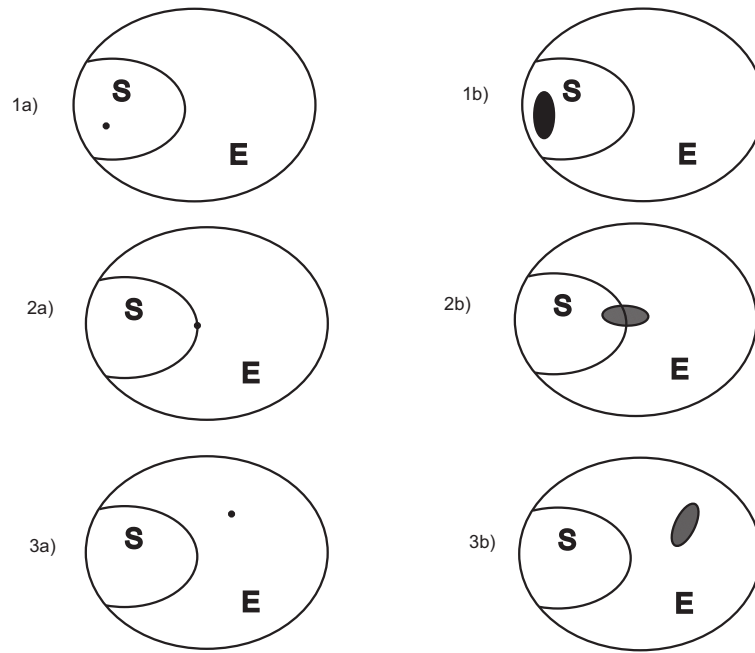


Fig. 3.2: Possíveis situações para o conjunto de estados.

súbito de emaranhamento [14]. É importante destacar que, consideradas apenas estas informações parciais sobre a dinâmica, tudo pode ocorrer com emaranhamento para tempos curtos: ele pode morrer, ressuscitar, oscilar, etc. Ademais, esta análise não depende do quantificador específico considerado, desde que o mesmo seja contínuo e estritamente positivo nos estados emaranhados.

Dada uma dinâmica que se encaixa no caso ii) pode-se encontrar estados iniciais cujo emaranhamento morre assintoticamente, e outros em que morre subitamente. Uma maneira interessante de se ter uma visão mais geral do que ocorre, é através da pergunta: sorteado um estado inicial aleatório, qual é o comportamento mais provável, morte assintótica ou súbita? Dado que a dinâmica pode exibir ambos os comportamentos, qual é o mais típico? Para responder a tal pergunta, é preciso formulá-la mais precisamente. Fixada uma dinâmica para um sistema composto, uma medida de probabilidade P no espaço de estados D , e um quantificador de emaranhamento contínuo $e : D \rightarrow \mathbb{R}_+$, com $e(\mathcal{E}) \subset (0, \infty)$, definimos eventos (subconjuntos de \mathcal{D} , na linguagem da teoria da probabilidade) cujas probabilidades são de nosso interesse.

- Estados que exibem morte súbita de emaranhamento:

$$MSE = \{\rho \in \mathcal{D} \mid \exists t_0, t_1 \text{ tais que } E(\rho(t_0)) > 0 \text{ e } E(\rho(t)) = 0 \text{ para } t > t_1\};$$

- Estados que exibem morte assintótica de emaranhamento:

$$MAE = \{\rho \in \mathcal{D} | \exists (t_n)_{n=1}^{\infty}, t_n \rightarrow \infty, \text{ tal que } E(\rho(t_n)) > 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} E(\rho(t)) = 0\}.$$

Note que estas definições não coincidem estritamente com os conceitos usuais, pois em geral se consideram apenas estados iniciais que já sejam emaranhados, enquanto aqui consideramos também a possibilidade de um estado inicial separável que adquire emaranhamento em tempos intermediários, para perdê-lo posteriormente, súbita ou assintoticamente. Ademais, consideramos, ao contrário da seção anterior, a morte súbita no sentido assintótico. A noção estrita seria dada pelos eventos:

- $MSE' = MSE \cap E$;
- $MAE' = MAE \cap E$.

Se a dinâmica exhibe estados assintóticos emaranhados, podemos nos perguntar também sobre os eventos:

- Estados que exibem emaranhamento assintoticamente (emaranhamento persistente):
 $EP = \{\rho \in \mathcal{D}_N | \exists t_0, c > 0 \text{ onde } E(\rho(t)) > c \text{ para } t > t_0\}$;
- Estado inicialmente separável adquire emaranhamento assintoticamente (nascimento súbito de emaranhamento): $NSE = EP \cap S$.

Ao invés de lidar com uma distribuição de probabilidade específica, nós iremos apenas exigir que a mesma seja não singular, *i.e.*, conjuntos contidos em subvariedades de \mathcal{D} com dimensão estritamente menor do que a de \mathcal{D} em si, têm probabilidade nula. O problema de computar a probabilidade (volume) do evento (conjunto) S exatamente é ainda um problema em aberto para a maioria de medidas de probabilidade.

Dada a visão geral, podemos agora olhar exemplos concretos onde, muitos deles, como veremos, são bem naturais e experimentalmente factíveis. Será suficiente considerar em todos os casos apenas sistemas de dois qubits com dinâmicas descritas por equações diferenciais na forma de Lindblad (ver seção 2.1):

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathcal{L}[\rho] = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \mathcal{D}[\rho], \quad (3.4a)$$

onde, novamente,

$$\mathcal{D}[\rho] = \sum_j \gamma_j (2A_j \rho A_j^\dagger - A_j^\dagger A_j \rho - \rho A_j^\dagger A_j), \quad (3.4b)$$

A_j são operadores lineares, H um operador hermitiano, e explicitamos números reais positivos γ_j na equação.

Para a maioria dos casos que iremos tratar, os números γ_j serão constantes no tempo, de maneira que, pelo teorema de Lindblad, a equação descreve uma dinâmica markoviana. Em duas situações, no entanto, permitimos a variação temporal destes coeficientes, implicando em uma dinâmica não markoviana.

As dinâmicas markovianas tem a vantagem de que, para o caso de dois qubits em uma dinâmica relaxante, torna-se simples identificar seus estados assintóticos: basta olhar para o núcleo do “superoperador” \mathcal{L} , que é um operador linear sobre o espaço das matrizes complexas 4×4 , ou sobre o subconjunto das matrizes hermitianas, um espaço vetorial real.

Uma vez que o conjunto dos assintóticos será dado pelo núcleo de um mapa linear, aquele será dado pela interseção de um subespaço de matrizes hermitianas com o conjunto dos estados mistos. A seguir, listamos cada caso, discutimos suas propriedades e exemplificamos com uma dinâmica específica³.

Caso 1a): Um estado assintótico em $\text{Int}(S)$

Talvez o exemplo mais natural desta situação seja o caso em que ambos os qubits, denotados aqui por A e B , sejam dois átomos bem separados espacialmente, interagindo com o vácuo do campo eletromagnético a uma temperatura finita. A separação entre eles implica que os reservatórios térmicos são independentes, e equação de Lindblad que descreve a dinâmica é dada por:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H_A + H_B, \rho] + \mathcal{D}_A \otimes I[\rho] + I \otimes \mathcal{D}_B[\rho], \quad (3.5a)$$

³ O trabalho aqui apresentado está publicado em [111].

onde

$$\mathcal{D}_i[\bullet] = \gamma'_i(2\sigma_{-,i} \bullet \sigma_{+,i} - \sigma_{+,i}\sigma_{-,i} \bullet - \bullet \sigma_{+,i}\sigma_{-,i}) + \quad (3.5b)$$

$$\gamma_i(2\sigma_{+,i} \bullet \sigma_{-,i} - \sigma_{-,i}\sigma_{+,i} \bullet - \bullet \sigma_{-,i}\sigma_{+,i}), \quad (3.5c)$$

com $\sigma_{\pm,i}$ sendo os operadores de Pauli para o qubit i , $H_i = \frac{\hbar\omega_i}{2}\sigma_{z,i}$ o hamiltoniano para o qubit i e γ_i, γ'_i são constantes não negativas (relacionadas ao número de fótons térmicos no campo, a polarizabilidade dos átomos, seu acoplamento com o ambiente, etc.).

É fácil mostrar que o sistema irá evoluir para o estado produto com ambos qubits em seus respectivos estados de Gibbs, $e^{-\beta H_i}$. Se a temperatura é positiva o estado resultante, descrito na base definida pelos hamiltonianos atômicos, será diagonal, com todos os elementos da mesma sendo não nulos, de forma que $\rho_{st} = \rho_{st}^\Gamma$ e $\text{Det}\rho^\Gamma = \text{Det}\rho > 0$. Como mencionado anteriormente, se um estado inicial tem algum emaranhamento, irá perde-lo certamente a tempo finito. Portanto, novamente (tal exemplo já havia sido discutido em [14]), podemos obter a mesma conclusão da Ref. [112], onde os autores demonstram a existência de morte súbita neste modelo, para uma certa classe de estados iniciais, mas agora para *todos* eles, e praticamente sem nenhum cálculo.

Os eventos definidos na seção 3.1 são triviais neste caso: $MAE = MAE' = NSE = EP = \emptyset$, e $MSE = MSE' = E$, então $P(MSE) = P(\mathcal{E})$ ou, $P(MSE|\mathcal{E}) = 1$, *i.e.*, a única condição para se ter morte súbita de emaranhamento é a de que o estado inicial seja emaranhado. Calcular o valor exato para esta probabilidade é portanto tão difícil quanto calcular o volume dos separáveis.

Caso 1b): Vários estados assintóticos em IntS

Para obter uma equação de movimento para o sistema satisfazendo esta propriedade, a saber, ser uma dinâmica relaxante com mais de um estado assintótico, sendo todos contidos no interior de \mathcal{S} , fizemos uso de uma equação de Lindblad não autônoma. Isso implica, em particular, que o sistema é *não* markoviano. Um exemplo que atingiria o resultado almejado pode ser dado fazendo uso da equação do caso anterior, de dois qubits em reservatórios térmicos independentes, mas agora, com as “constantes” de acoplamento decaindo exponencialmente. Ou seja, efetuando a correspondência $\gamma \mapsto \gamma_0 \exp(-\kappa t)$. A

situação física correspondente, embora um tanto artificial, certamente não é proibida. Pode-se imaginar que em um experimento tem-se suficiente controle da interação do sistema com seu reservatório, e esta é desligada exponencialmente. De qualquer forma, o exemplo mostra que uma dinâmica simples como esta já é suficiente para se obter o comportamento desejado.

Para ver isso, escrevemos a dinâmica na seguinte forma (na representação de interação):

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = e^{-\kappa t}\mathcal{D}[\rho(t)], \quad (3.6)$$

onde \mathcal{D} é o dissipador do Lindbladiano do exemplo anterior. Sendo $\rho(t)$ a solução desta equação, podemos definir $\bar{\rho}(t) = (\rho \circ g)(t)$, onde $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, \kappa)$,

$$g(t) = \int_0^t e^{-\kappa t'} dt',$$

é uma função invertível. Substituindo $\bar{\rho}$ na Eq. (3.6) obtemos sua equação de movimento:

$$\frac{d}{dt}\bar{\rho}(t) = \mathcal{D}[\bar{\rho}(t)]. \quad (3.7)$$

Quer dizer, $\bar{\rho}$ obedece a mesma dinâmica dos dois qubits em reservatórios térmicos independentes e acoplamento constante no tempo, com solução conhecida. Para achar o conjunto assintótico para esta dinâmica é suficiente notar que, dado que $\rho(t) = (\bar{\rho} \circ g^{-1})(t)$, então $\rho(t \rightarrow \infty) = \bar{\rho}(g^{-1}(t \rightarrow \infty)) = \bar{\rho}(1/\kappa)$.

Geometricamente, a dinâmica autônoma dada pela Eq. (3.7) deforma continuamente o conjunto de estados D ao ponto ρ_{Gibbs} (estabelece uma homotopia entre ambos), enquanto a versão não-autônoma reparametriza esta deformação. O conjunto de estados assintóticos é então dado por essa deformação em um instante intermediário κ^{-1} . Fazendo κ pequeno o suficiente, podemos assegurar que o conjunto assintótico se torne inteiramente contido em $\text{Int}S$, dado que ρ_{Gibbs} pertence a $\text{Int}S$, um conjunto aberto.

Obviamente, os eventos MSE , MAE , etc. e suas respectivas probabilidades, são exatamente os mesmos do caso anterior.

Notamos finalmente que, embora a discussão sobre o emaranhamento não dependa se

a representação utilizada seja a Schrödinger ou a de interação (pois a correspondência entre elas é dada por unitárias locais), a dinâmica não é relaxante no último caso. Dado que o estado será dado por $\rho_S(t) = \exp(iHt)\rho(t)\exp(-iHt)$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t)$ em geral, não irá comutar com as exponenciais, a evolução de $\rho_S(t)$ não irá convergir. De qualquer forma, a dinâmica terá um conjunto estacionário, no sentido geral discutido no início desta seção, a saber, apesar dos estados iniciais não convergirem, pode-se encontrar conjuntos abertos tais que as trajetórias descritas pelos estados estarão inteiramente contidas neles para t grande o suficiente, e em particular, pode-se encontrar um tal conjunto inteiramente contido em S .

Caso 2a): Um estado assintótico em ∂S

As equações (3.5) também fornecem um exemplo onde apenas um estado estacionário se encontra na fronteira entre separáveis e emaranhados, *i.e.*, o caso onde os qubits estão sujeitos a reservatórios térmicos independentes a temperatura nula. Neste caso o estado estacionário é o estado puro $\rho_{st} = |00\rangle\langle 00|$. Este é diagonal na base computacional e $\text{Det}\rho_{st}^\Gamma = \text{Det}\rho_{st} = 0$. Portanto, uma vizinhança deste estado sempre contém tanto estados separáveis quanto emaranhados. De fato, dado um estado inicial com elementos ρ_{ij} , pode-se mostrar que o determinante da transposta parcial do estado no instante t será dado por (ver Apêndice B):

$$\text{Det}\rho^\Gamma(t) = e^{-4\kappa t} \text{Det}[\rho' + \rho''(t)], \quad (3.8a)$$

onde

$$\rho' = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12}^* & \rho_{13} & \rho_{23} \\ \rho_{12} & \rho_{11} + \rho_{22} & \rho_{14} & \rho_{24} + 2\rho_{13} \\ \rho_{13}^* & \rho_{14}^* & \rho_{11} + \rho_{33} & \rho_{34}^* + 2\rho_{12}^* \\ \rho_{23}^* & \rho_{24}^* + 2\rho_{13}^* & \rho_{34} + 2\rho_{12} & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.8b)$$

e $\rho''(t)$ é uma matriz dependente de ρ mas cujos elementos decaem (exponencialmente) para zero. Portanto, desde que $\text{Det}\rho' \neq 0$, o sinal assintótico de $\text{Det}\rho^\Gamma(t)$ será dado pelo determinante de ρ' . Dada a não singularidade das medidas de probabilidade, podemos

excluir o evento $\text{Det}\rho' = 0$, pois terá probabilidade nula, do cômputo das probabilidades de $MAE(= MAE')$ ou $MSE(= MSE')$. Da forma de ρ' é fácil achar estados iniciais tais que $\text{Det}\rho'$ é estritamente negativo ou positivo, de modo que pequenas perturbações ao redor destes estados também levarão ao mesmo sinal para este determinante. Consequentemente, teremos que $P(MSE) > 0, P(MAE) > 0$, sendo que os valores específicos dependerão da particular medida usada. O ponto é que, sem restrições adicionais sobre a medida de probabilidade, ambos os eventos ocorrem.

Dada que essa dinâmica não possui estados assintóticos emaranhados, $NSE = EP = \emptyset$.

Caso 2b): Mais do que um estado estacionário com pontos na fronteira entre \mathcal{S} e \mathcal{E}

Para mais do que um estado estacionário nesta situação geométrica podemos distinguir três sub-classes, onde os pontos do conjunto assintótico, fora aqueles da fronteira, se encontram: i) todos no interior de \mathcal{S} ; ii) todos em \mathcal{E} ; iii) alguns em \mathcal{S} e outros em \mathcal{E} e iv) na fronteira $\partial\mathcal{S}$. Demos exemplos para cada uma destas situações.

Subcaso i) Dois qubits não-interagentes, sujeitos a reservatórios de fase independentes servem de exemplo. A dinâmica (na representação de interação) é dada por:

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathcal{D}_A \otimes I[\rho] + I \otimes \mathcal{D}_B[\rho] \quad (3.9)$$

onde

$$\mathcal{D}_i[\bullet] = \gamma(\sigma_{z,i} \bullet \sigma_{z,i} - \bullet), \quad (3.10)$$

com γ uma constante positiva. Esta dinâmica pode ser implementada experimentalmente para íons em um armadilha [109] (sendo os qubits correspondentes aos spins de cada íon). É fácil mostrar que, se escritos na base computacional, a evolução será dada por decaimentos exponenciais dos elementos de fora da diagonal, enquanto os da diagonal permanecem constantes. O conjunto de estados assintóticos será dado então por um

conjunto a três parâmetros:

$$\rho_{st} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

com $p_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, 4$ e $\sum_{i=1}^4 p_i = 1$.

Novamente, os estados assintóticos são diagonais na base computacional e $\text{Det}\rho = \text{Det}\rho^\Gamma$. Duas alternativas são possíveis: estes determinantes são zero ou positivos. Novamente, o emaranhamento pode decair assintótica ou subitamente, como os seguintes estados ilustram:

$$\rho(t=0) = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & c & 0 \\ 0 & c & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

com $|c| > 0$ (consequentemente, $p_2 > 0$ e $p_3 > 0$). A evolução será dada por estados da mesma forma mas com $|c(t)|$ decaindo exponencialmente, tal que $d^\Gamma(t) = p_2 p_3 (p_1 p_4 - |c(t)|^2)$. É evidente então que, se p_1 ou p_4 são inicialmente nulos, o emaranhamento decai assintoticamente para um estado na fronteira de S . Mas se ambos são positivos e $p_1 p_4 < |c(0)|^2$, então irá morrer subitamente enquanto converge para um estado no interior de S .

Muito embora exemplos específicos possam ser encontrados em ambas as situações, o caso típico é definitivamente a morte súbita. De fato, a condição $\text{Det}\rho=0$, implica $P(\partial\mathcal{D}) = 0$. Neste caso temos ainda $MAE = MAE'$ e $MSE = MSE'$. Dado que o estado sorteado é emaranhado, ele certamente exibirá morte súbita se $\text{Det}\rho > 0$ já que convergirá para um estado no interior de \mathcal{S} . Então, já que $P(\text{Int}\mathcal{D}) = 1$, temos: $P(MSE) = P(MSE \cap \text{Int}\mathcal{D}) = P(\mathcal{E} \cap \text{Int}\mathcal{D}) = P(\mathcal{E})$, *i.e.*, $P(MSE|\mathcal{E}) = 1$. Da mesma forma, um estado exibirá MAE somente se $\text{Det}\rho = 0$ e convergirá para um ponto em ∂S , portanto $P(MAE) \leq P(\partial\mathcal{D}) = 0$.

Como essa dinâmica não tem estados assintóticos emaranhados, $NSE = EP = \emptyset$.

Subcaso ii) Para este caso, consideramos dois qubits idênticos e interagentes com um reservatório comum, como ocorre dois átomos de dois níveis espacialmente próximos (comparado com o comprimento de onda definido pelas suas energias de transição) em um campo térmico. A dinâmica neste caso pode ser descrita pela seguinte equação mestra (também na representação de interação) [113]:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} = & \gamma(2J_- \rho J_+ - J_+ J_- \rho - \rho J_+ J_-) \\ & + \gamma'(2J_+ \rho J_- - J_- J_+ \rho - \rho J_- J_+), \end{aligned} \quad (3.13)$$

com $J_{\pm} = \sigma_{\pm,A} + \sigma_{\pm,B}$. Um modo conveniente de analisar esta dinâmica é através da escolha de base⁴ para matriz densidade $\{|11\rangle, |\Psi_+\rangle, |00\rangle, |\Psi_-\rangle\}$, resultando no conjunto de equações:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{11} &= -2\gamma\rho_{11} + 2\gamma'\rho_{22}, \\ \dot{\rho}_{22} &= 2\gamma(\rho_{11} - \rho_{22}) + 2\gamma'(\rho_{33} - \rho_{22}), \\ \dot{\rho}_{33} &= 2\gamma\rho_{22} - 2\gamma'\rho_{33}, \\ \dot{\rho}_{44} &= 0, \\ \dot{\rho}_{12} &= -2\gamma\rho_{12} + 2\gamma'\rho_{23} - \gamma'\rho_{12}, \\ \dot{\rho}_{13} &= -\gamma\rho_{13} - \gamma'\rho_{13}, \\ \dot{\rho}_{14} &= -\gamma\rho_{14}, \\ \dot{\rho}_{23} &= -\gamma\rho_{23} + 2\gamma\rho_{12} - 2\gamma'\rho_{23}, \\ \dot{\rho}_{24} &= -\gamma\rho_{24} - \gamma'\rho_{24}, \\ \dot{\rho}_{34} &= -\gamma'\rho_{34}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

O reservatório a temperatura nula corresponde ao caso $\gamma' = 0$. É fácil ver destas equações de movimento que os estados $|00\rangle$ e $|\Psi_-\rangle$ são estados estacionários (e, portanto, também misturas estatísticas entre eles) assim como toda suas combinações lineares. O

⁴ Sendo $|\Psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)$.

conjunto de estados assintóticos é dado, nesta base, por estados da forma:

$$\rho_{st} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \rho_{44} & \rho_{34} \\ 0 & 0 & \rho_{34}^* & \rho_{44} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

correspondendo aos estados com suporte no subespaço gerado por $|00\rangle$ e $|\Psi^-\rangle$, podendo ser identificado com uma bola de Bloch contida em D . Todos os estados têm pelo menos um auto-valor nulo, de forma que estão contidos em ∂D . É fácil ver que $\text{Det}\rho^\Gamma = 0$ se $\rho_{44} = 0$ e $\text{Det}\rho^\Gamma = -(\rho_{44}/2)^4 < 0$ caso contrário, de forma que este conjunto não tem nenhum ponto em $\text{Int}S$: a bola de Bloch toca o conjunto dos separáveis em apenas um ponto. Algumas propriedades podem ser imediatamente inferidas sobre a dinâmica de emaranhamento nesta geometria: a) o emaranhamento de um estado inicial pode persistir (*e.g.*, o estado de singlete é estacionário); b) pode ser criado (tome qualquer estado inicial separável com população não nula no estado de singlete); c) em princípio, o emaranhamento pode morrer súbita ou assintoticamente. De fato, pode se identificar estados onde isto ocorre, mas apenas a) e b) são comportamentos típicos.

O fato da população no singlete ser uma constante de movimento simplifica consideravelmente a análise aqui pois, caso um estado inicial tenha uma população não nula no singlete, convergirá para um estado emaranhado. O evento formado por todos os estados com população não-nula no singlete tem probabilidade um, conclui-se: $P(EP) = 1, P(NSE) = P(\mathcal{S})$, ou $P(NSE|\mathcal{S}) = 1$. Disto extraímos imediatamente também que $P(MAE) = P(MSE) = P(MAE') = P(MSE') = 0$, *i.e.*, a probabilidade do emaranhamento se anular assintoticamente é nula.

Mesmo assim, é possível identificar exemplos atípicos que exibem MSE ou MAE. Considere, por exemplo, a família de estados iniciais onde os únicos elementos não-nulos são $\rho_{11}, \rho_{22}, \rho_{33}$. Das eqs. (3.14) segue que estes continuarão sendo os únicos elementos não nulos. Se valer ainda que $\rho_{11} = 0$ o comportamento será bastante simples: $\rho_{11}(t) = 0, \rho_{22}(t) = \rho_{22}e^{-2\gamma t}, \rho_{33}(t) = 1 - \rho_{22}(t)$. Então, se $\rho_{22} \neq 0$, o estado permanecerá emaranhado para todo t (mistura de um estado de Bell com um estado ortogonal

separável) e decairá assintoticamente, *i.e.*, exibirá MAE. Por outro lado, se $\rho_{11} \neq 0$, o comportamento ainda será simples e o determinante da transposta parcial assumirá a forma (ver Apêndice A):

$$4 \frac{\text{Det} \rho^\Gamma(t)}{\rho_{22}(t)} = \rho_{11} e^{-2\gamma t} + P(t) e^{-4\gamma t}, \quad (3.16)$$

onde $\rho_{22}(t) > 0$ e $P(t)$ é um polinômio de segunda ordem com coeficientes determinados pela matriz densidade inicial. Já que $\rho_{11} \neq 0$, este determinante será positivo após certo instante, *i.e.*, o estado se tornará separável. Se, *e.g.*, $\rho_{33} = 0, \rho_{11} \neq 0, \rho_{22} \neq 0$ o estado é emaranhado e portanto exibirá MSE.

Subcaso iii) O reservatório do subcaso anterior, se tomado à temperatura positiva, fornece o exemplo e, para simplificar a análise, tomamos o limite de temperatura infinita ($\gamma = \gamma'$ na eq. (3.13), pois $\gamma/\gamma' = \frac{n+1}{n}$, onde n é o número de fótons térmicos associados à temperatura do reservatório). É interessante que, independentemente da temperatura, o singlete é estacionário assim como a população de singlete de qualquer estado inicial. Das equações de movimento segue imediatamente que os estados estacionários são:

$$\rho_{st} = \begin{pmatrix} \frac{1-p}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-p}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-p}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

onde p é a população de singlete do estado inicial. Quer dizer, são os estados de Werner.

O determinante da transposta parcial é simplesmente $(3 - 12p^2)/36$ sendo negativo para $p > 1/2$ e positivo para $p < 1/2$. O conjunto de estados assintóticos formam então um segmento de reta em D com ambas as extremidades, aquelas em que $p = 0$ ou $p = 1$, na borda de D , uma no interior de S e a outra em E , respectivamente, e a linha que intersecta a fronteira entre S e E corresponde a $p = 1/2$ (veja fig. 3.3). Já que a população no singlete permanece fixa, ela nos permite identificar o estado assintótico de qualquer estado inicial. Um estado então terá emaranhamento assintoticamente se, e somente se, $\rho_{44} > 1/2$ de forma que $P(EP) = P(\mathcal{D}_{>1/2} = \{\rho \in \mathcal{D} | \rho_{44} > 1/2\}) > 0$. Claramente

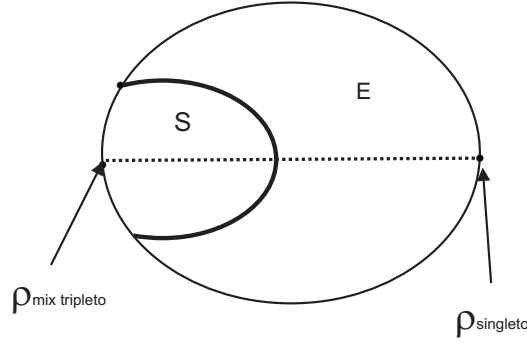


Fig. 3.3: Conjunto dos estados assintóticos para dois qubits interagindo com um reservatório comum a temperatura infinita. Aqui, $\rho_{mix\ triplet} = \frac{1}{3}(|11\rangle\langle 11| + |\Psi_+\rangle\langle \Psi_+| + |00\rangle\langle 00|)$.

$P(NSE) = P(\mathcal{D}_{>1/2} \cap \mathcal{S})$. Já que um estado pode exibir morte assintótica se, e somente se, relaxa para a fronteira entre \mathcal{S} e \mathcal{E} , temos que $P(MAE') \leq P(MAE) \leq P(MAE \cap \{\rho \in \mathcal{D} | \rho_{44} = 1/2\}) = 0$, sendo este comportamento portanto atípico. A MSE, por outro lado, tem probabilidade positiva. De fato, um estado inicial emaranhado apresentará o fenômeno se, e somente se, $\rho_{44} < 1/2$, então $P(MSE') = P(\mathcal{E} \cap \{\rho \in \mathcal{D} | \rho_{44} < 1/2\}) > 0$.

Subcaso iv) A combinação dos reservatórios dos dois casos anteriores é um exemplo desta situação. Se temos o qubit A sujeito a um reservatório de decaimento, e o qubit B a um de fase, o sistema exibirá o comportamento desejado, uma situação que pode ocorrer experimentalmente caso se emaranhe um átomo no vácuo com um spin sob a ação de um campo magnético estocástico. Ou seja, a dinâmica do sistema será descrita pela equação mestra na forma (3.9), mas com \mathcal{D}_A dado pela eq. (3.5b) (com $i = A$ e $\gamma'_A = 0$) e \mathcal{D}_B pela eq. (3.10) (com $i = B$). É fácil ver que o conjunto de estados assintóticos será constituído pelos estados produto onde A se encontra no estado $|0\rangle$ e B será descrito por uma matriz diagonal (na base computacional), de forma que os estados globais assumem a forma:

$$\rho_{st} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

para $0 < p < 1$. Qualquer que seja o valor de p teremos $\text{Det}\rho_{st} = \text{Det}\rho_{st}^\Gamma = 0$ portanto eles de fato pertencem a $\partial\mathcal{S}$. É claro que aqui $P(NSE) = P(EP) = 0$, já que não há nenhum

estado assintótico emaranhado, mas para analisar as probabilidades dos outros eventos, usamos a solução exata da dinâmica e escrevemos o determinante da transposta parcial a forma:

$$\text{Det}\rho(t)^\Gamma = f_1(\rho)e^{-\lambda_1 t} + \dots + f_n(\rho)e^{-\lambda_n t}, \quad (3.19)$$

onde as funções f_i dependem apenas do estado inicial, e $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$. Desta forma, enquanto $f_1 \neq 0$, o sinal assintótico de $\text{Det}\rho(t)^\Gamma$ será dado pelo sinal de f_1 . Denotando por γ_A e γ_B a taxa de atuação de cada reservatório, ocorre que $\lambda_1 = 2\lambda_A$ e $f_1 = \text{Det}\rho'$, onde:

$$\rho' = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12}^* & 0 & 0 \\ \rho_{12} & \rho_{11} + \rho_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{33} & \rho_{34}^* \\ 0 & 0 & \rho_{34} & \rho_{33} + \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Já que essa é definida positiva (assumindo que ρ o seja), o sistema irá atingir o estado assintótico pelo interior dos separáveis se $f_1(\rho) > 0$. Mas o evento $f_1(\rho) = 0$ tem probabilidade nula, então concluímos que $P(NSE') = 1$ enquanto $P(MAE) = P(MAE') = 0$, quer dizer, um estado inicial emaranhado irá exibir morte súbita com probabilidade 1, em contraste com o caso dos reservatórios independentes à temperatura nula, onde morte súbita e assintótica têm probabilidades positivas. Mesmo assim, é possível encontrar estados específicos onde a morte assintótica toma lugar. Por exemplo, considere o estado inicial:

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{23}^* & \rho_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

o determinante da transposta parcial será então $\text{Det}\rho(t)^\Gamma = -|\rho_{23}(t)|^2 \rho_{22}(t) \rho_{33}(t)$ sendo negativo para todo t se ρ_{23}, ρ_{22} e ρ_{33} inicialmente não-nulos.

Caso 3a): Um estado assintótico em E

Dinâmicas com tais estados assintóticos podem ser obtidas na forma de equações de Lindblad autônomas, no mínimo, formalmente. De fato, fixado um estado arbitrário do sistema, existem infinitos Lindbladianos que este estado com único estado assintótico, em particular aqueles com um único operador de Lindblad e com a parte hamiltoniana nula [114].

Um modo natural de realizar uma dinâmica com esta propriedade é através de um reservatório térmico a baixa temperatura. Neste caso, no entanto, qubits interagentes em um reservatório comum são necessários, quer dizer, um reservatório que leva o estado inicial ao estado de Gibbs, $\exp(-\beta H)/\text{Tr} \exp(-\beta H)$, onde H denota o hamiltoniano que descreve a dinâmica fechada dos qubits. Tipicamente, o estado fundamental é não-degenerado e emaranhado, de forma que, se β é grande o suficiente, obtemos a dinâmica desejada.

Para dar uma imagem mais concreta, considere, por exemplo, dois qubits interagentes, descritos pelo hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2}\omega\sigma_{z,A} + \frac{1}{2}\omega\sigma_{z,B} + g(\sigma_{+,A}\sigma_{-,B} + \sigma_{-,A}\sigma_{+,B}) \quad (3.22)$$

com ω, g constantes positivas satisfazendo $g > \omega$. Os autovalores para este hamiltoniano são, em ordem crescente, $-g, -\omega, \omega, g$, com autovetores $|\Psi_-\rangle, |00\rangle, |11\rangle, |\Psi_+\rangle$, respectivamente, levando a um estado fundamental emaranhado. Denote por $|i\rangle, i = 1, \dots, 4$, estes autovetores de acordo com a ordem dos seus autovalores. Podemos considerar um reservatório térmico a temperatura nula que induzirá decaimentos entre estes estados de forma markoviana, tal que o dissipador seja:

$$\mathcal{D}[\rho] = \sum_{i < j} \gamma_{ij} (2\sigma_{ij}\rho\sigma_{ji} - \sigma_{jj}\rho - \rho\sigma_{jj}), \quad (3.23)$$

onde $\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|$ e γ_{ij} são constantes não negativas. Um dissipador deste tipo pode ser derivado de um modelo microscópico, por exemplo, adaptando-se os resultados da Ref. [115] ao hamiltoniano considerado aqui.

Assim como no caso 1a), os eventos e probabilidades que estamos interessados são

triviais: $SBE = S, AE = D$, *i.e.*, cada estado inicial irá adquirir emaranhamento para tempos suficientemente grandes, em particular os separáveis, portanto $P(NSE) = P(S)$ e $P(EP) = 1$. Já que o emaranhamento nunca se anula, $MAE = MAE' = MSE = MSE' = \emptyset$.

Caso 3b): Vários estados assintóticos em E

Exemplos para este caso podem ser encontrados pelo mesmo “truque” usado no caso 1b): tomamos um lindbladiano com apenas um estado assintótico e inserimos um acoplamento dependente do tempo multiplicando o dissipador. O mesmo argumento pode ser aplicado sobre o conjunto de estados assintóticos da dinâmica subsequente (na representação de interação), portanto, se a taxa de decaimento do acoplamento é pequena o suficiente, o conjunto de estados assintóticos será um pequeno “borrão” ao redor do estado assintótico da dinâmica com acoplamento constante.

Ao contrário do caso 1b), no entanto, no que diz respeito ao emaranhamento, é importante agora se a dinâmica é dada na representação de Schrödinger ou na de interação, pois sua correspondência é dada por unitárias globais. Pela mesma razão que antes, a dinâmica não será relaxante na representação de Schrödinger, mas ainda podemos achar um conjunto assintótico não trivial, desta vez, inteiramente contido em \mathcal{E} . De fato, diminuindo a taxa de decaimento do acoplamento com reservatório, podemos diminuir a vontade o diâmetro do conjunto dos estados estacionários na representação de interação, que por sua vez, sempre contém o estado fundamental do sistema. Agora, transformações unitárias são isometrias, de forma que o conjunto de estados assintóticos é mapeado em conjuntos de mesmo diâmetro na representação de Schrödinger. Mas essas transformações unitárias têm o estado fundamental como ponto fixo, de forma que estes conjuntos sempre o contêm. Já que \mathcal{E} é aberto, e dado que o diâmetro seja pequeno o suficiente, podemos nos assegurar que eles estarão dentro de \mathcal{E} (ver fig.3.4).

Como consequência do parágrafo anterior, as probabilidades dos eventos em consideração neste caso são triviais e idênticas as do caso anterior.

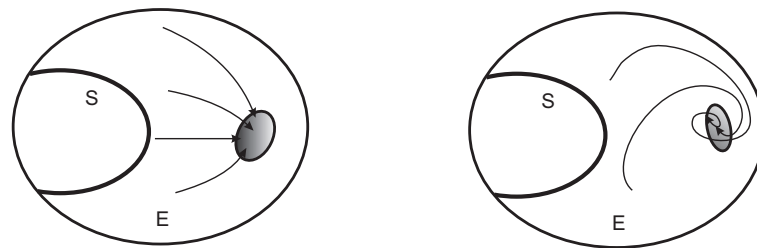


Fig. 3.4: Representação das trajetórias da dinâmica do caso 3b), nas representações de Interação (esquerda) e Schrödinger (direita). Muito embora na representação de Schrödinger a dinâmica não seja mais relaxante, assintoticamente todos os estados permanecem dentro de um conjunto de mesmo diâmetro (e volume) do conjunto de estados assintóticos na representação de interação, tendo ambos um ponto em comum.

4. DINÂMICA DE EMARANHAMENTO EM VARIÁVEIS CONTÍNUAS

Em uma série de trabalhos, Paz e Roncaglia estudaram certos diagramas de fase para o comportamento assintótico do emaranhamento de dois osciladores harmônicos interagentes, restritos a estados gaussianos e expostos a um reservatório térmico comum [15, 16]. Os diagramas são em termos do parâmetro de compressão de dois modos e a temperatura do reservatório e, para o caso ressonante (ambos osciladores com mesma energia), três fases distintas são observadas: o emaranhamento pode morrer subitamente, efetuar ciclos de morte e nascimento perpetuamente, ou pode persistir. Em um trabalho posterior, Cornich e Paz obtiveram resultados semelhantes para um sistema de dois íons armadilhados, objetivando a observação experimental destes efeitos [116]. Sob uma perspectiva distinta, Pielawa *et al.* propuseram uma maneira de usar um reservatório arquitetado para se gerar estados gaussianos emaranhados de dois modos [10].

Neste trabalho¹ nós fizemos um estudo triplo: generalizamos os estudos de Paz e Roncaglia, ao construir diagramas de fase para variáveis distintas, e em sistemas não somente sujeitos a reservatórios naturais, mas também ao reservatório arquitetado proposto por Pielawa *et al.* [10] (a ser descrito adiante); mostramos como tais diagramas podem ser obtidos experimentalmente; e, como consequência, obtivemos a robustez do reservatório arquitetado contra ruído térmico, para fins de geração de estados emaranhados.

Na próxima seção descrevemos como opera o reservatório arquitetado, com fins de criar emaranhamento entre dois modos de campo eletromagnético, bem como a equação que rege o sistema como um todo. A seção 4.2 é a parte central do trabalho, onde a dinâmica de emaranhamento dos dois modos é discutida. Uma proposta experimental é descrita na seção 4.3, para se observar as “fases dinâmicas” do emaranhamento, seguida de um estudo da robustez do método proposto em Ref. [10] para se gerar emaranhamento.

¹ Publicado em [117].

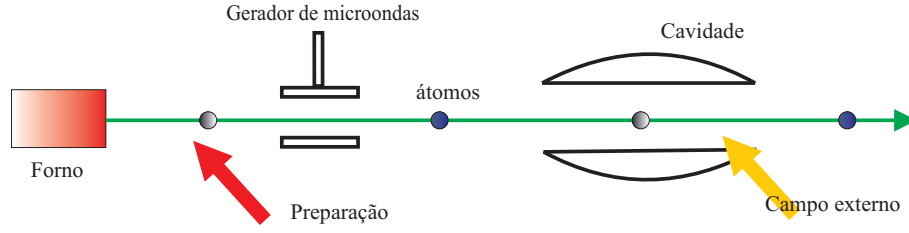


Fig. 4.1: Esquema do aparato para se implementar o reservatório arquitetado.

4.1 Emaranhamento de dois modos devido a um reservatório arquitetado

Considere dois modos do campo eletromagnético de uma cavidade com alto fator de qualidade, com frequências ω_1 e ω_2 . O reservatório arquitetado será dado por um feixe rarefeito de átomos passando através da cavidade (somente um átomo permanece dentro da cavidade de cada vez). Os átomos são primeiramente preparados em uma superposição específica de dois estados de Rydberg, denotados por $|g\rangle$ e $|e\rangle$, que então passam pela cavidade, onde interagem com os dois modos não-degenerados, enquanto um campo clássico (que pode ser injetado externamente, em uma configuração de cavidade aberta) satura a transição de dipolo, bombeando os dois modos (ver Fig. 4.1). O hamiltoniano que descreve tal situação é:

$$\begin{aligned}
 H = & \hbar\omega_0\sigma^+\sigma^- + \hbar\Omega(e^{-i\omega_L t}\sigma^+ + e^{i\omega_L t}\sigma^-) \\
 & + \sum_i [\hbar\omega_i a_i^\dagger a_i + \hbar g_i (a_i \sigma^+ + a_i^\dagger \sigma^-)],
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde ω_0 é a frequência de transição entre os níveis atômicos, g_i são as constantes de acoplamento entre átomo e modos de campo, σ^+ and σ^- são os operadores “escada” do átomo. A interação do átomo com o campo externo clássico, com constante de acoplamento Ω , é descrito pela parte dependente do tempo. Para referências futuras, definimos $\Delta = \omega_L - \omega_0$, a dessintonia entre o átomo e o campo externo.

Os autores exploram diferentes aproximações e redefinições dos modos. Aqui nós focaremos no regime em que (i) o acoplamento do átomo com o campo clássico é muito maior do que aqueles com os modos da cavidade, $|\Omega| \gg |g_i|$; (ii) definindo $d = \sqrt{\Delta^2 + 4\Omega^2}$, e escolhendo ω_L de forma que $\omega_L - \omega_1 = \omega_2 - \omega_L = d$, com a condição $g = g_1 = g_2$. Dentro

deste regime o hamiltoniano de interação pode ser aproximado por:

$$H_{int} \simeq -\hbar\Omega_b(b_1\pi^- + b_1^\dagger\pi^+), \quad \text{se } \Delta > 0, \quad (4.2a)$$

$$H_{int} \simeq \hbar\Omega_b(b_2^\dagger\pi^- + b_2\pi^+), \quad \text{se } \Delta < 0, \quad (4.2b)$$

onde π^+ e π^- são os operadores escada para os estados vestidos semiclássicos $|+\rangle = \sin\theta|g\rangle + \cos\theta|e\rangle$ e $|-\rangle = \cos\theta|g\rangle - \sin\theta|e\rangle$, com $\tan\theta = 2\Omega/(d - \Delta)$, Ω_b é definido pelo acoplamento entre o átomo e os modos da cavidade, $\Omega_b = g\sqrt{(1-\mu)/(1+\mu)}$, onde $\mu = \tan^2\theta$ [$\mu = (\tan\theta)^{-2}$] se $|\tan\theta| < 1$ [$|\tan\theta| > 1$], *i.e.*, μ é determinado pelos parâmetros clássicos do campo. Os novos modos são $b_{1(2)} = S^\dagger(r_\mu)a_{1(2)}S(r_\mu) = \cosh|r_\mu|a_{1(2)} - \frac{r_\mu}{|r_\mu|}\sinh|r_\mu|a_{2(1)}^\dagger$ definidos pelo operador de compressão de dois modos: $S(r_\mu) = \exp(r_\mu^*a_1a_2 - r_\mu a_1^\dagger a_2^\dagger)$, e r_μ é o parâmetro de compressão $r_\mu = \text{arctanh}\mu$.

Se, após a interação, os átomos são ignorados, o hamiltoniano da eq. (4.1) implica em uma dinâmica de sistema aberto efetiva para os modos do campo. As eqs. (4.2) nos mostram que para $\Delta < 0$, a interação se reduz a um hamiltoniano de Jaynes-Cummings [118] entre os estados vestidos semiclássicos e o modo b_2 . Neste caso, é possível simular um reservatório de dissipação à temperatura nula para este modo, se os átomos são inicialmente preparados no estado $|+\rangle$, e seus tempos de interação com a cavidade, τ , satisfazem $\Omega_b\tau \ll 1$ [119]. Já para $\Delta > 0$, temos um hamiltoniano de anti-Jaynes-Cummings para o modo b_1 . De forma análoga, se os átomos agora entrarem no estado $|-\rangle$, simula-se um reservatório a temperatura nula para este modo.

Nós chamaremos estes átomos de tipo 1 (2). Se um feixe de átomos do tipo j passa pela cavidade, um de cada vez, a dinâmica do campo será markoviana, dada por uma equação diferencial na forma Lindblad [21]:

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathcal{D}_{j,Arq}(\rho), \quad (4.3a)$$

onde o dissipador arquitetado é dado por [119]

$$\mathcal{D}_{j,Arq}(\rho) = 2\kappa_j(2b_j\rho b_j^\dagger - b_j^\dagger b_j\rho - \rho b_j^\dagger b_j), \quad (4.3b)$$

enquanto $\kappa_j = (r_{at,j}\Omega_b^2\tau^2)/4$ com $r_{at,j}$ sendo a taxa com que os átomos do tipo j entram

na cavidade.

4.2 Dinâmica em um reservatório arquitetado e sujeito a ruído térmico

Se uma fonte randômica define simultaneamente o tipo de átomo, bem como um campo elétrico apropriado no interior da cavidade, o dissipador para o reservatório arquitetado adquire a forma

$$\mathcal{D}_{Arq}(\rho) = \mathcal{D}_{1,Arq}(\rho) + \mathcal{D}_{2,Arq}(\rho), \quad (4.4)$$

com $\kappa_j = (r_{at,j}\Omega_b^2\tau^2)/4$, $r_{at,j}$ sendo o fluxo de átomos do tipo j .

A dinâmica de emaranhamento se tornará mais rica quando considerada conjuntamente com a dissipação natural e o ruído térmico de cada modo, efeitos que, em experimentos usuais em cavidades de microondas, podem ser bem descritos por uma equação mestra na forma de Lindblad, com dissipador \mathcal{D}_{Nat} :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{Nat}(\rho) = & \sum_i \lambda_i (n_{T_i} + 1) (2a_i \rho a_i^\dagger - a_i^\dagger a_i \rho - \rho a_i^\dagger a_i) \\ & + \lambda_i n_{T_i} (2a_i^\dagger \rho a_i - a_i a_i^\dagger \rho - \rho a_i a_i^\dagger), \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde n_{T_i} denota o número de fótons térmicos e λ_i a taxa de decaimento do modo i . O número de fótons térmicos será aproximadamente o mesmo se $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_i$, de forma que a partir de agora assumiremos $n_{T_i} = n_T$.

Finalmente, a equação mestra completa que irá reger o sistema será

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathcal{D}_{Nat}(\rho) + \mathcal{D}_{Arq}(\rho), \quad (4.6)$$

com o dissipador dado pelas eqs. (4.4) and (4.5).

Em um procedimento experimental, deve-se na verdade considerar a evolução no referencial do laser. Neste caso, oscilações rápidas (com frequências da ordem de d) entre os modos tomarão lugar. Como consequência, na escala de tempo granulada assumida para a validade das aproximações, algumas coerências da matriz densidade irão se anular, tornando a análise teórica mais complicada. No entanto, a equação acima ainda será válida

para alguns estados iniciais, que não serão afetados por essas oscilações. Desta forma, no resto desta seção iremos explorar as propriedades teóricas da Eq. (4.6), considerando vários estados iniciais, mas posteriormente, na parte concernente a proposta experimental, iremos garantir que os estados iniciais sejam robustos com relação a esses efeitos da granulação na escala de tempo.

Notamos ainda que, à primeira vista, essa grande separação entre os modos da cavidade iria proibir, no regime aqui considerado, a presença de termos combinados do tipo $a_1 a_2^\dagger$ na equação mestra (3.9), dado que eles oscilariam rapidamente em comparação com escala de tempo total do experimento e até com o tempo de interação de cada átomo [o que é essencial, para que se possa adotar o hamiltoniano aproximado (4.2)]. E, de fato, os únicos termos presente na equação são da forma $a_1^{(\dagger)} a_2^{(\dagger)}$, e estes não oscilam no referencial do laser.

4.2.1 Reservatório simétrico: regime assintótico

Passamos agora ao estudo da dinâmica de emaranhamento determinada pela eq. (4.6). Dada a forma específica dos dissipadores, em que todos os termos são no máximo quadráticos em a_1 e a_2 , vemos que um estado inicial gaussiano permanecerá gaussiano, portanto podemos nos restringir aos mesmos. Suponha primeiramente que ambos os tipos de átomos entram na cavidade com igual probabilidade, assim como, por simplicidade, que $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$. As equações de movimento para os segundos momentos serão então:

$$\dot{n}_j = -2(\kappa + \lambda)n_j + 2\kappa|B|^2 + 2\lambda n_T, \quad (4.7a)$$

$$\dot{m}_j = -2(\kappa + \lambda)m_j, \quad (4.7b)$$

$$\dot{m}_c = -2(\kappa + \lambda)m_c + 2\kappa AB^*, \quad (4.7c)$$

$$\dot{m}_s = -2(\kappa + \lambda)m_s, \quad (4.7d)$$

com $A = \cosh(r)$, $B = e^{i\phi} \sinh(r)$, onde r é o parâmetro de compressão e ϕ o ângulo de compressão entre os modos b_j ($r_\mu = r e^{i\phi}$). Isto nos dá uma dinâmica relaxante, com a

matriz de covariância assintótica:

$$V_{\rho_f} = \begin{pmatrix} n_{1,f} + \frac{1}{2} & 0 & 0 & m_{c,f} \\ 0 & n_{1,f} + \frac{1}{2} & m_{c,f}^* & 0 \\ 0 & m_{c,f} & n_{2,f} + \frac{1}{2} & 0 \\ m_{c,f}^* & 0 & 0 & n_{2,f} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

onde $n_{1,f} = n_{2,f} = \frac{|B|^2 + n_T R}{1+R}$, $m_{c,f} = \frac{AB^*}{1+R}$, e a razão $R = \lambda/\kappa$ foi introduzida.

O critério de Simon pode agora ser aplicado para determinar se tais MC representam um estado emaranhado ou separável. Aplicando a mesma forma de pensar do capítulo anterior, vemos que $S(V_{\rho_f}) > 0$ (onde S é a quantidade definida na eq. (2.28a)) implica um estado assintótico no interior dos estados separáveis (gaussianos). Isto pode ser visto notando que a função S é contínua, de forma que deve existir uma “bola” de EG ao redor do estado assintótico em que S é estritamente positiva, *i.e.*, uma bola de EG separáveis. Portanto, isto se traduz dinamicamente como morte súbita de emaranhamento, porque podemos dizer com certeza que, para cada EG inicial, existirá um instante T tal que o emaranhamento será nulo para $t > T$. Em princípio, no entanto, um estado inicial pode efetuar oscilações antes de se anular em definitivo, ou um estado inicialmente separável pode primeiramente adquirir algum emaranhamento e (necessariamente) perdê-lo posteriormente. Estes comportamentos não-assintóticos serão discutidos em mais detalhes adiante (seção 4.2.2).

Por outro lado, estados satisfazendo $S(V_{\rho_f}) < 0$ representam uma situação de emaranhamento persistente (assintoticamente falando). Note então que tal reservatório pode de fato criar emaranhamento, dado que essa era justamente a ideia da proposta da ref. [10]. Mas, novamente, a dinâmica intermediária pode exibir comportamentos diversos; por exemplo, um estado inicialmente emaranhado pode perder todo o seu emaranhamento para (necessariamente) recuperá-lo posteriormente, como será exemplificado adiante.

A situação excepcional é dada por $S(V_{\rho_f}) = 0$, quando cada estado inicialmente emaranhado pode ter dois destinos, morte súbita ou assintótica de emaranhamento, dependendo das particularidades do estado inicial. Contrariamente às duas situações anteriores, este caso requer conhecimento completo da dinâmica para que se possa determinar seu comportamento assintótico.

A situação aqui estudada admite um único estado assintótico para cada conjunto fixo de parâmetros, sendo esta a razão de não podermos ver infinitos ciclos de nascimento e morte (ver início da seção 4.2.2), como na ref. [15, 16], que emergiriam em uma dinâmica com órbitas assintóticas, ao invés de estados assintóticos.

Na fig. 4.2, exibimos as regiões no espaço de parâmetros $R \times n_T$ onde o estado assintótico é separável ou emaranhado, definindo o destino do emaranhamento. A curva que delimita a fronteira entre as regiões assume a forma simples:

$$n_T = \frac{e^{2r} - 1}{2R}. \quad (4.9)$$

A interpretação física é simples mas significativa. Fixado o reservatório, para qualquer constante de acoplamento positiva, R , haverá uma temperatura, definida por n_T , que por sua vez obedece (4.9), tal que, abaixo desta temperatura o estado assintótico será emaranhado, devido a ação do reservatório arquitetado, enquanto que para temperaturas acima desta, o estado será separável, devido ao ruído térmico (local).

Para qualquer conjunto de parâmetros dos reservatórios, aplicamos o critério DGCZ e encontramos o par de quadraturas do tipo EPR cuja soma das variâncias é mínima, obtendo $X_{1,\phi} - X_{2,\phi}$ e $P_{1,\phi} + P_{2,\phi}$, onde $(X_{i,\phi}, P_{i,\phi})^T = \mathcal{R}_{2\phi}(x_i, p_i)^T$, $\mathcal{R}_{2\phi}$ é a matriz representando uma rotação no plano, por um ângulo 2ϕ , ϕ sendo o ângulo de compressão definido pelo reservatório. Isto é esperado, já que o reservatório arquitetado tenta levar o estado inicial a um estado de dois modos comprimido, sabidamente comprimido nestas quadraturas. Já o reservatório natural, por outro lado, alarga suas dispersões. De forma que a decisão final sobre o emaranhamento ou separabilidade do estado assintótico dependerá desta competição entre os reservatórios: um alargando todas as quadraturas, enquanto o outro tenta comprimir um par específico.

Dado que os estados assintóticos aqui exibidos são simétricos, podemos aplicar a eq. (2.29) para calcular seu emaranhamento de formação. Na fig. 4.3, exibimos estes valores como função de R para alguns valores fixos de n_T . Para um número nulo de fótons térmicos, o emaranhamento é positivo para quaisquer valores de R . No entanto, para cada valor positivo de n_T , existe uma taxa máxima de dissipação a partir da qual o estado se encontra no interior dos separáveis (à medida que o acoplamento com o reser-

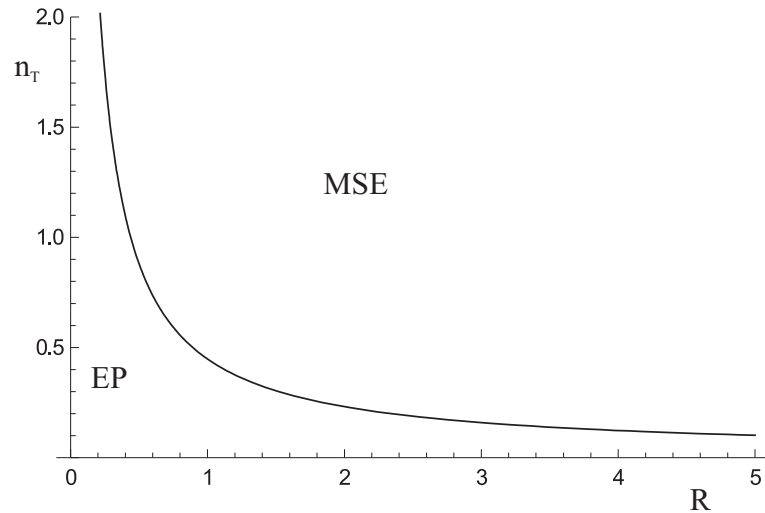


Fig. 4.2: Representação dos estados assintóticos, no que diz respeito ao seu emaranhamento, determinados pelos parâmetros n_T e R do reservatório, para $r = 1$ e ϕ arbitrário. Abaixo da curva eles são emaranhados, e acima, separáveis.

vatório natural cresce, efeitos térmicos se tornam mais significativos), correspondendo ao regime onde há a morte súbita.

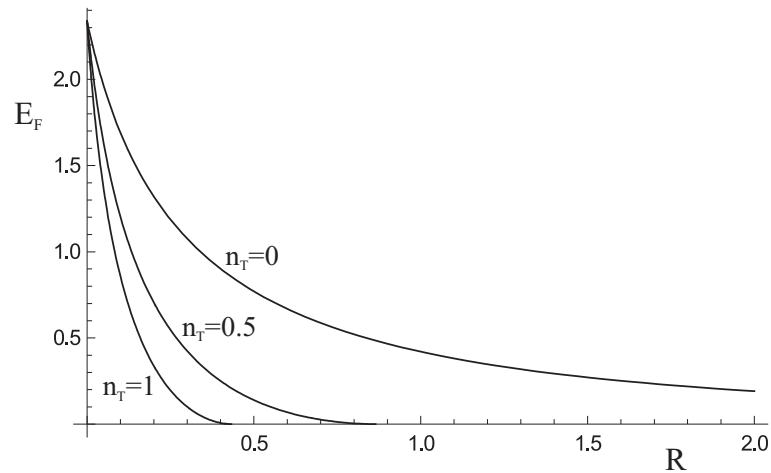


Fig. 4.3: Emaranhamento do estado assintótico como função de $R = \lambda/\kappa$ para alguns valores de, n_T , com $r = 1$ e ϕ arbitrária. Enquanto o emaranhamento é sempre positivo para $n_T = 0$, se $n_T > 0$ sempre há algum valor de R a partir do qual o emaranhamento é nulo.

4.2.2 Reservatório simétrico: dinâmica não assintótica

Aqui discutiremos em mais detalhes a dinâmica intermediária do sistema. Esta tarefa é facilitada reconhecendo que, pelas eqs. (4.7), a dinâmica sempre irá descrever uma reta no espaço de parâmetros da MC (n_1, n_2) , muito embora a trajetória no espaço de

estados em si não seja necessariamente uma reta, para qualquer estado inicial; e que o conjunto de estados separáveis é também convexo neste espaço de parâmetros. Em outras palavras, as trajetórias das MC serão linhas retas se aproximando exponencialmente da MC assintótica, V_{ρ_f} . De agora em diante, fixaremos $\phi = 0$, para a simplicidade da análise.

Começemos com a situação em que os parâmetros do reservatório satisfazem a eq. (4.9), de forma que o estado assintótico correspondente se situa na fronteira entre separáveis e emaranhados. Restringindo nossa atenção aos estados iniciais com MC tais que $n_1 = n_2 = n$, m_c é real e todos os outros parâmetros são nulos, as eqs. (4.7) manterão a dinâmica neste subconjunto. Na fig. 4.4 apresentamos um diagrama representando os valores de n, m_c tais que a MC correspondente é física ou não, emaranhada ou não. A fronteira entre separáveis

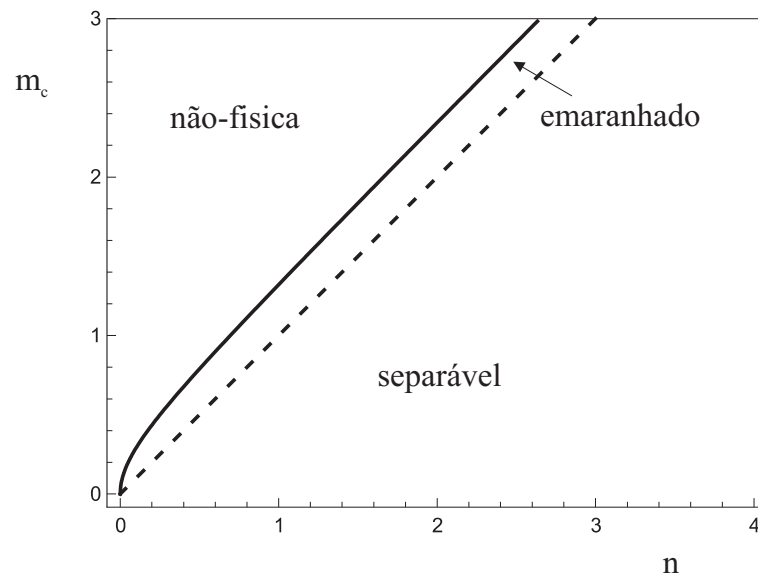


Fig. 4.4: Representação das matrizes de covariância com $n_1 = n_2 = n$, $m_c \geq 0$ e todos os outros elementos iguais a zero. A região onde os parâmetros representam estados quânticos esta dividida por uma linha reta, acima da qual todos os estados são emaranhados, enquanto abaixo, separáveis. Ambas as regiões são convexas nos parâmetros.

e emaranhados é dada pela linha reta $n = m_c$, de forma que a região emaranhada é convexa neste parâmetros. É fácil visualizar a dinâmica nesta situação, usando o fato de que a dinâmica será descrita por uma linha reta no espaço $n \times m_c$, dos valores $(n_0, m_{c,0})$ aos valores $(n_f, m_{c,f})$ do estado assintótico, definidos pelos parâmetros do reservatório r e R [juntamente com n_T dado pela Eq. (4.9)]. Se estes parâmetros são tais que $(n_0, m_{c,0})$ representa um estado emaranhado, e dado que $(n_f, m_{c,f})$ pertence à linha $n = m_c$, toda a trajetória estará contida na região emaranhada, por convexidade, *i.e.*, o emaranhamento se

anulará assintoticamente. Para ilustrar este ponto, plotamos na Fig. 4.5 (linha tracejada) a evolução da função S de Simon, parametrizada por $p(t) = 1 - \exp[-2(\kappa + \lambda)t]$, de um estado inicial com $n_0 = 1$ e $m_{c,0} = 1.0125$ a um estado assintótico com $n_f = m_{c,f} = 1$. Seu valor é inicialmente negativo, dado que o estado é emaranhado, e se mantém negativo para todo t .

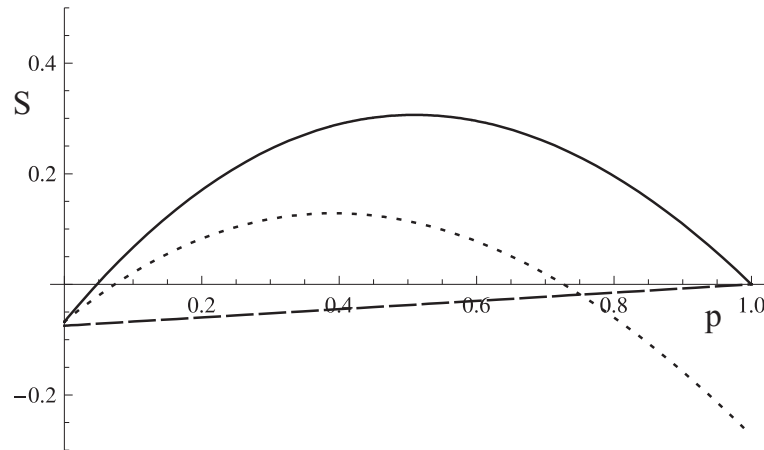


Fig. 4.5: Evolução da função de Simon S , parametrizada por $p(t)$, para três situações distintas. A linha contínua corresponde a um estado inicialmente emaranhado, que entra na região separável em tempo finito e converge para um ponto na fronteira. A linha pontilhada é para o mesmo estado inicial, mas o reservatório é tal que o estado assintótico correspondente é emaranhado, com sistema perdendo todo emaranhamento para recuperá-lo posteriormente. Finalmente, a linha tracejada corresponde à situação de morte assintótica de emaranhamento.

Para exemplos de morte súbita, considere o conjunto de estados com $n_1 = n_2 = n$, $m_c = 1$ e $m_1 = m_2 = m$ um número real. Na fig. 4.6, exibimos um diagrama análogo aquele da fig. 4.4, e vemos que o conjunto de estados emaranhados não é mais convexo. Se o estado assintótico é tal que $m_c = 1$, a trajetória também pode ser descrita neste diagrama, novamente como uma reta. Sendo o conjunto dos emaranhados não convexo neste caso, é possível ter um estado inicial que perde todo o seu emaranhamento a tempo finito, mesmo que o estado assintótico esteja na fronteira entre as regiões. Por exemplo, podemos tomar parâmetros para o reservatório tais que $n_f = m_{c,f} = 1$ e uma MC inicial com elementos $n_0 = 1.2$, $m_0 = 0.5$, e $m_{c,0} = 1$. Na fig. 4.5 (linha contínua) plotamos, como antes, a função S do estado evoluído. Vemos que a mesma é inicialmente negativa, representando um estado inicialmente emaranhado, se torna positiva em tempo finito, de forma que estado perde seu emaranhamento, e permanece estritamente positiva até $p = 1$

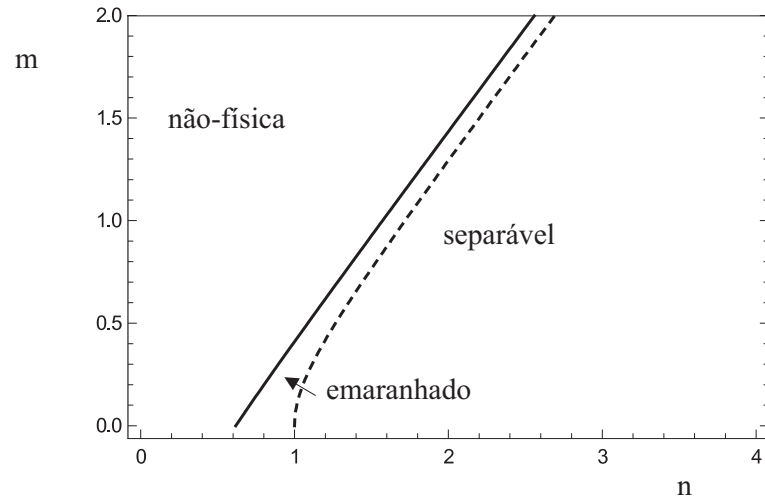


Fig. 4.6: Representação da matrizes de covariância para $n_1 = n_2 = n$, $m_1 = m_2 = m \geq 0$, $m_c = 1$ e todos os outros elementos iguais a zero. A região destes parâmetros correspondendo a estados físicos está dividida pela curva tracejada, acima da qual todos os estados são emaranhados, enquanto abaixo, são separáveis. Agora a região dos emaranhados não é mais convexa nos parâmetros.

(ou $t \rightarrow \infty$), pois o estado converge para um ponto da fronteira.

Se perturbamos ligeiramente os parâmetros do reservatório de forma a tornar este estado inicial emaranhado, mas tomando o mesmo estado inicial, a curva na figura será ligeiramente distorcida mas agora irá cruzar o eixo p duas vezes, o que significa que o estado perde seu emaranhamento a tempo finito, mas o recupera posteriormente, mantendo-o pelo restante da dinâmica (veja linha pontilhada da fig. 4.5, com os parâmetros $n_f = 0.95$ e $m_{c,f} = 1$ para o estado assintótico), uma possibilidade mencionada anteriormente. Isto é uma consequência do fato de os estados emaranhados não serem convexos para este conjunto de parâmetros. Ciclos de morte e ressurgimento não são permitidos, visto que uma linha poderá cruzar o conjunto convexo dos separáveis uma única vez somente.

Este comportamento pode ser entendido, de um ponto de vista mais físico, considerando o emaranhamento do ponto de vista dos pares de quadraturas do tipo EPR. Novamente, o par de operadores com o menor valor para a soma de suas quadraturas pode ser encontrado e são $X_{1,r'} - X_{2,r'}$ e $P_{1,r'} + P_{2,r'}$ com $X_{i,r'} = r'x_i$, $P_{i,r'} = p_i/r'$ e $r' = \sqrt{(n - m - 1/2)/(n + m - 1/2)}$. Mas estas não são as quadraturas “escolhidas” pelo reservatório arquitetado para comprimir (sendo aquelas em que $r' = 1$, dado que fixamos $\phi = 0$). Portanto, no caminho para comprimir suas favoritas, o reservatório alarga

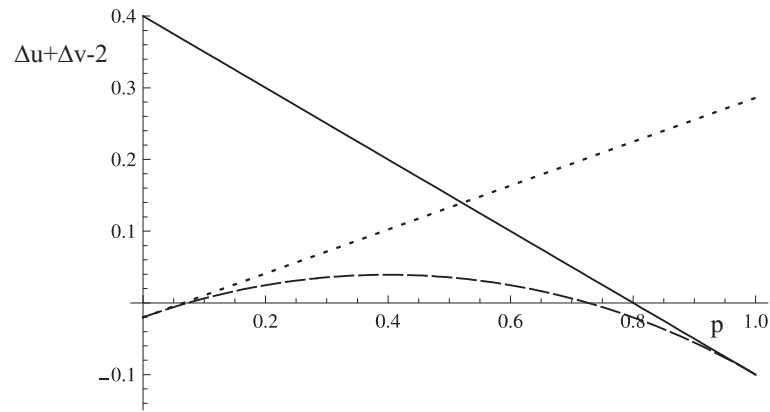


Fig. 4.7: Evolução, parametrizada por p , para a soma das variâncias de pares de quadraturas do tipo EPR, subtraída por 2, de maneira que valores negativos indicam estados emaranhados. As curvas contínua, pontilhada, e tracejada são, respectivamente, para os pares ótimos dos estados final, inicial e instantâneo.

aquelas do estado inicial, de forma que há um período de tempo em que nenhum par de quadraturas do tipo EPR são comprimidas o suficiente para emaranhar os modos (veja fig. 4.7).

Resta então explorar a dinâmica intermediária na situação em que o estado assintótico se encontra no interior dos separáveis, mas isto é facilmente inferido das trajetórias lineares exibidas pela MC: cada estado inicial separável permanecerá separável para todo instante de tempo, e cada estado emaranhado perderá seu emaranhamento em tempo finito, uma única vez.

4.2.3 Reservatório assimétrico

Nós consideramos também o caso extremo onde apenas um tipo de átomo entra na cavidade, digamos, átomos do tipo 1, de forma que $\kappa_1 > 0$ e $\kappa_2 = 0$ (mas ainda $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$).

Agora, as equações de movimento serão:

$$\begin{aligned} \dot{n}_1 = & -2(A^2\kappa + \lambda)n_1 + (AB\kappa)m_c + \\ & +(AB^*\kappa)m_c^* + 2\lambda n_T, \end{aligned} \quad (4.10a)$$

$$\begin{aligned} \dot{n}_2 = & -2(\lambda - |B|^2\kappa)n_1 - m_c(AB\kappa) - \\ & -(AB^*\kappa)m_c^* + 2\lambda n_T + 2\kappa|B|^2, \end{aligned} \quad (4.10b)$$

$$\dot{m}_1 = -2(A^2\kappa + \lambda)m_1 - (2AB^*\kappa)m_s, \quad (4.10c)$$

$$\dot{m}_2 = -2(\lambda - |B|^2\kappa)m_2 + (2AB^*\kappa)m_s^*, \quad (4.10d)$$

$$\begin{aligned} \dot{m}_c = & -(\kappa + 2\lambda)m_c - (AB^*\kappa)n_1 + \\ & +(AB^*\kappa)n_2 + AB^*\kappa, \end{aligned} \quad (4.10e)$$

$$\dot{m}_s = -(\kappa + 2\lambda)m_s + (AB\kappa)m_1 - (AB^*\kappa)m_2. \quad (4.10f)$$

Apesar da assimetria da equação mestra neste caso, os estados assintóticos têm o mesmo comportamento qualitativo do caso anterior: para temperatura nula serão emaranhados para qualquer valor de $R = \kappa_1/\lambda$, mas para temperatura finita serão separáveis para R suficientemente grande. Na fig. 4.8 dispomos um diagrama análogo ao da fig. 4.2, determinando as fases da dinâmica de emaranhamento, também separadas por uma curva de forma similar.

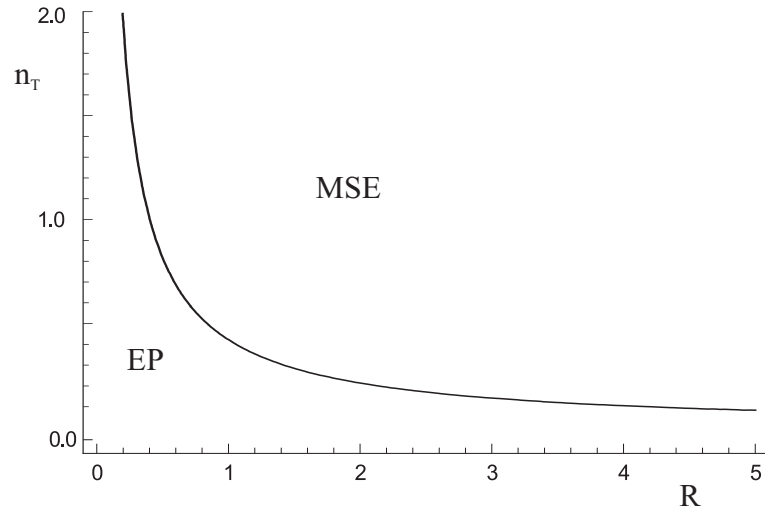


Fig. 4.8: Diagrama de fase para o reservatório assimétrico, exibindo o mesmo comportamento qualitativo do caso simétrico.

O emaranhamento dos estados assintóticos, usando agora a negatividade logarítmica

para EGs assimétricos, está exibido na fig. 4.9 para valores distintos de n_T , como função de R , e a mesma interpretação do caso simétrico se aplica aqui.

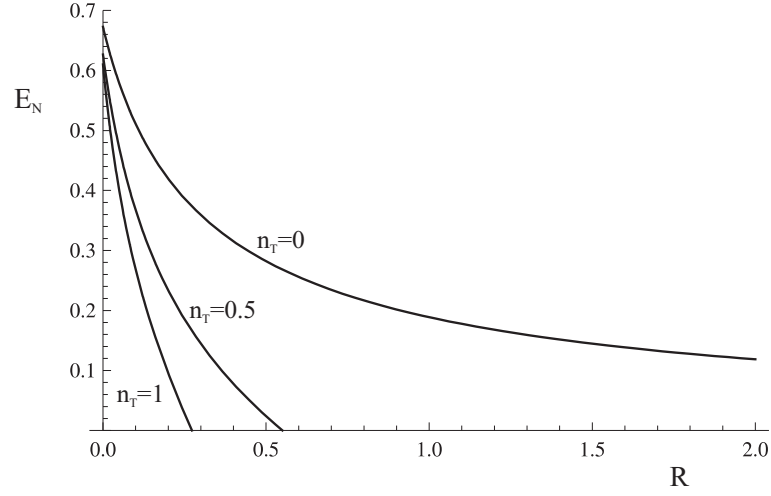


Fig. 4.9: Negatividade logarítmica do estado assintótico, para $r = 1$, e alguns valores de n_T .

Resultados análogos são válidos para $\kappa_2 > 0$ mas $\kappa_1 \neq \kappa_2$. Portanto, no que diz respeito ao aspecto assintótico, o sistema exibe o mesmo comportamento qualitativo tanto para o reservatório simétrico quanto o assimétrico.

4.3 Proposta experimental

A dinâmica aqui estudada é mais simples do que aquela tratada na ref. [15] (*e.g.*, sendo markoviana), não obstante é mais controlável e com clara motivação experimental. Nesta seção, discutiremos em mais detalhe como testar essas previsões no laboratório.

Considerando a evolução do estado no referencial do laser, as eqs. (4.7) serão substituídas por

$$\dot{n}_j = -2(\kappa + \lambda)n_j + 2\kappa|B|^2 + 2\lambda n_T, \quad (4.11a)$$

$$\dot{m}_j = -2(\kappa + \lambda)m_j + (-1)^{j+1}2idm_j, \quad (4.11b)$$

$$\dot{m}_c = -2(\kappa + \lambda)m_c + 2\kappa AB^*, \quad (4.11c)$$

$$\dot{m}_s = -2(\kappa + \lambda)m_s + 2idm_s, \quad (4.11d)$$

onde apenas as equações para m_j e m_s são modificadas. Considerando um EG inicial onde $m_j = m_s = 0$, assim como as amplitudes, a evolução será a mesma daquela na

representação de interação, *i.e.*, dada pela eq.(4.6), de forma que os efeitos devidos a escala de tempo granulada em $1/d$ (assumida para a validade da equação mestra) não afetarão estes estados. Para outros estados iniciais, a granulação temporal será uma fonte de decoerência, e o estado pode inclusive perder seu caráter gaussiano (assim como quando tomamos a média de um estado coerente sobre sua fase).

Nossa proposta começa com a preparação de um estado emaranhado fazendo uso do reservatório arquitetado, em um tempo muito menor do que $1/\lambda$, e exigindo $R \ll 1$ de forma que efeitos térmicos sejam negligíveis. Após o intervalo de preparação, o parâmetro R é modificado, variando o fluxo de átomos². Deixa-se então o sistema evoluir até um instante t (da ordem de $1/\lambda$) e o emaranhamento pode ser estudado, por exemplo, fazendo uso do método em [120], a fim de se reconstruir o estado.

Para esta configuração, *i.e.*, assumindo um estado inicial comprimido de dois modos, os instantes de tempo onde ocorre a morte súbita podem ser obtidos explicitamente, sendo:

$$\lambda t_{MSE} = \frac{R}{2(1+R)} \ln(1 - p_{MSE})^{-1}, \quad (4.12)$$

onde

$$p_{MSE} = \frac{(1+R)(B^2 - AB)}{(1+R)(B^2 - AB) - B^2 - n_T R + AB}, \quad (4.13)$$

onde o parâmetro R corresponde ao segundo estágio do procedimento, após a preparação do estado. Estes instantes, em unidades de $1/\lambda$, são mostrados na fig. 4.10, para alguns valores de temperatura. Naturalmente, estes tempos são infinitos para valores pequenos de R , pois correspondem a região de emaranhamento persistente. Após o valor crítico de R os tempos caem abruptamente e estabilizam em valores próximos da unidade, de forma que, tipicamente, o emaranhamento sobreviverá tempo o suficiente para que a sua morte súbita possa ser observada.

² Note que alterar a amplitude do campo externo também modifica o parâmetro de compressão, e que interromper o fluxo corresponde a $R \rightarrow \infty$.

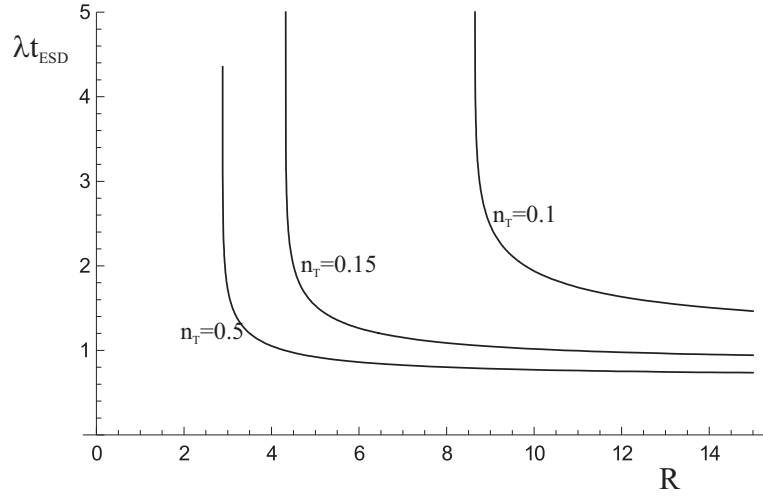


Fig. 4.10: Tempo de morte súbita em função de R , para alguns valores de n_T . É infinito para R pequeno, correspondendo a região de emaranhamento persistente, mas acima de certo patamar, cai rapidamente para um valor próximo da unidade.

4.4 Robustez do esquema para se produzir estados emaranhados

Dado que emaranhamento em EG está relacionado à compressão em determinado par de quadraturas do tipo EPR, enquanto o reservatório térmico tende a alargar as mesmas, é natural nos perguntarmos sobre a sensibilidade do esquema de preparação com o ruído térmico, considerando o regime $R \ll 1$ e $n_T \ll 1$. Analisamos uma estratégia ligeiramente distinta daquela proposta por Pielawa et al., pois lá é proposto esvaziar os modos b_j em turnos, primeiramente passando átomos do tipo 1, até que o modo correspondente se esvazie, e em seguida passando átomos do tipo 2. Supomos aqui que os dois tipos de átomo passem através da cavidade, não simultaneamente, mas como mesma probabilidade, o que nos permite usar as equações para o reservatório simétrico para computar a evolução do sistema.

Supondo que os modos originais, a_i , estão inicialmente vazios (e lembrando que o número de fótons pode ser menor do que aquele definido pela temperatura da cavidade se um feixe de átomos apropriado é passado inicialmente pela cavidade), a evolução da matriz de covariância do sistema será dada pelas seguintes entradas não nulas: $n_1 = n_2 = \frac{|B|^2 + n_T R}{1+R} p(t)$ e $m_c = \frac{AB}{1+R} p(t)$, onde novamente $p(t) = (1 - \exp[-2(\kappa + \lambda)t])$. Assumindo ainda que a duração do experimento, t , é grande o suficiente de modo que $p \approx 1$ (o que pode ser atingido se $t \gg \kappa^{-1}$ mas ainda $t \ll \lambda^{-1}$) ou, em outras palavras, que o sistema

se encontra essencialmente em seu estado assintótico, plotamos na Fig. 4.11 o emaranhamento de formação em função de R , para $n_T = 0.05$ (valor atingido recentemente em um experimento da Ref. [121]) para valores distintos de r . Os gráficos estão normalizados pelo

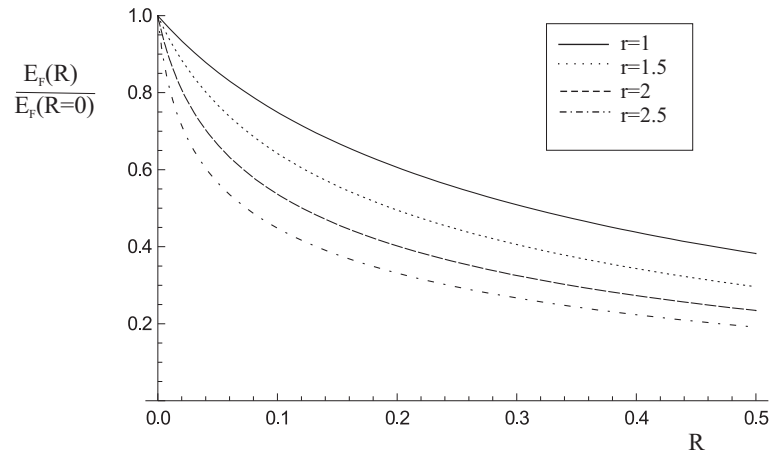


Fig. 4.11: Emaranhamento dos estados assintóticos em função de $R = \lambda/\kappa$, para alguns valores do parâmetro de compressão r , com $n_T = 0.05$, normalizada por seu valor em $R = 0$. A linha contínua é para $r = 1$, pontilhada para $r = 1.5$, tracejada para $r = 2$ e pontilhada-tracejada para $r = 2.5$. O emaranhamento é sensível à dissipação, e tão mais sensível quanto maior o parâmetro de compressão.

valor do emaranhamento de formação para $R = 0$, que seria obtido caso não houvesse dissipação. Vemos que o mesmo é consideravelmente sensível ao ruído, mesmo em uma temperatura tão baixa, sendo reduzido pela metade para $R = 0.1$, *i.e.*, mesmo quando a taxa de dissipação é dez vezes menor do que a taxa do reservatório do arquetado. Ademais, quanto maior o parâmetro de compressão, mais sensível o emaranhamento se torna com a dissipação, como esperado. No entanto, se κ é duas ordens de magnitude acima que λ , os efeitos térmicos sobre a quantidade de emaranhamento mostram-se bastante reduzidos. Para um parâmetro de compressão $r = 1$, um valor de $R \approx 10^{-2}$ e um tempo de espera de aproximadamente $3\kappa^{-1}$ seriam suficientes para se obter um emaranhamento de 90% do estado puro ideal (com $R = 0$ e um tempo de espera infinito).

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho exploramos a dinâmica de vários sistemas quânticos abertos, sob a perspectiva da geometria do conjunto de estados, e como sua estrutura pode nos dar informações qualitativas sobre a dinâmica.

Na seção 3.2, estabelecemos que eventos de morte e nascimento súbitos de emaranhamento são fenômenos genéricos para sistemas bipartites descritos por hamiltonianos dependentes do tempo. Basta que haja *alguma* interação entre as partes para tais eventos serem observados. Muito embora o grau com que esses eventos tomarão lugar (o quanto de emaranhamento um certo estado irá perder, por exemplo, assim como o volume de tais estados) dependerá dos detalhes do hamiltoniano, será verdade que, se ele modificar de alguma forma o emaranhamento de algum estado, existirão estados exibindo morte súbita e outros nascimento súbito.

Na seção 3.3, revisamos a classificação das possíveis dinâmicas de acordo com a geometria do conjunto dos estados separáveis. Exibimos exemplos de todas as possíveis classes, incluindo aquelas para quais não havia exemplo previamente conhecido, com mais de um estado assintótico, porém evitando a fronteira entre separáveis e emaranhados. Foi suficiente considerar apenas sistemas de dois qubits, com dinâmicas descritas por equações na forma de Lindblad, sendo algumas não-autônomas (exatamente os exemplos inéditos). Em cada caso, exploramos as probabilidades de observar diversos eventos, como morte súbita, nascimento súbito e morte assintótica, dado que uma distribuição de probabilidades seja definida sobre o conjunto de estados iniciais.

No cap. 4, mostramos que reservatórios arquitetados, em conjunto com ruído térmico podem levar a fases distintas para a dinâmica de emaranhamento. Usando que a particular dinâmica estudada preserva estados gaussianos, pudemos analisar em detalhes o emaranhamento do sistema em termos de sua matriz de covariância. Mostramos que, genericamente, tem-se ou morte súbita ou emaranhamento persistente, enquanto na fron-

teira entre essas fases, morte assintótica pode ocorrer, juntamente com a morte súbita. Fomos além do comportamento assintótico e exploramos, para o reservatório simétrico, todos os possíveis comportamentos para o emaranhamento. Este estudo contém também um proposta experimental, visando observar essas fases, bem a como a transição entre elas. Como subproduto, determinamos quantitativamente a robustez do esquema para se produzir estados emaranhados, em face de ruído térmico.

Uma dúvida que ainda paira é o quanto podemos generalizar o resultado obtido na seção 3.2. Quer dizer, se permitirmos que a dinâmica seja da forma $t \mapsto \Lambda(t)$, *i.e.*, uma família contínua de mapas completamente positivos, com $\Lambda(0) = I$, pode-se contornar a morte súbita via mapas que não sejam unitárias locais? Nosso palpite é que não, considerando que a possibilidade da decoerência tenderá a facilitar a ocorrência do fenômeno. Por exemplo, vimos no cap. 4 que mesmo uma dinâmica arquitetada para se preparar assintoticamente um estado fortemente emaranhado é tal que ainda existem certos estados que perderão seu emaranhamento em tempo finito (para o recuperar posteriormente).

O ponto é que, se em certo momento t o mapa não é uma unitária, então ele não é sobrejetivo, quer dizer, a imagem dele é um subconjunto próprio de $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{AB})$. Imagens deste tipo não precisam conter necessariamente estados no interior dos separáveis (vimos exemplos de tais mapas onde a imagem é constituída de somente um estado emaranhado), mas como em $t = 0$ o mapa é a identidade, deve existir um instante $0 < t' < t$ tal que a imagem de $\Lambda(t')$ ainda contém estados no interior dos separáveis. A nossa intuição é que mapas com essas propriedades, devido a sua linearidade e a estrutura do conjunto dos separáveis, devem necessariamente levar algum estado emaranhado ao interior dos separáveis, o que estabeleceria a morte súbita.

Outra direção interessante a se seguir é estender os estudos para sistemas multipartite, em especial, para sistemas de muitos qubits, onde, possivelmente, a computação quântica irá operar. O problema se tornaria ainda mais rico, assim como mais complexo, pois aqui não há nem sequer uma única definição de emaranhamento (ou separabilidade) e também pouco se sabe da estrutura geométrica dos conjuntos obtidos de acordo com as possíveis definições.

APÊNDICE

A. UNITÁRIAS QUE PRESERVAM PRODUTOS.

Demonstramos aqui, na íntegra, o resultado apresentado na seção 3.2:

Se uma unitária U , atuando em um sistema bipartite $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, preserva estados produto, então ela é uma unitária local ou a composição de uma com o operador swap $S(|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$, sendo que a segunda opção é possível apenas, como a própria definição do operador sugere, quando $\text{Dim}\mathcal{H}_A = \text{Dim}\mathcal{H}_B$.

Considere bases ortonormais em cada espaço $\{|j\rangle_A\}_{j=0}^{\text{Dim}\mathcal{H}_A-1}$, $\{|k\rangle_B\}_{k=0}^{\text{Dim}\mathcal{H}_B-1}$. A atuação da unitária nos vetores $|j\rangle_A \otimes |k\rangle_B$ deve levar a elementos $|\psi_{jk}\rangle_A \otimes |\phi_{jk}\rangle_B$, mutuamente ortogonais. Para que a imagem dos vetores produto $(|j\rangle_A + |j'\rangle_A) \otimes |k\rangle_B$, igual a $|\psi_{jk}\rangle_A \otimes |\phi_{jk}\rangle_B + |\psi_{j'k}\rangle_A \otimes |\phi_{j'k}\rangle_B$ seja também um vetor produto, deve-se ter uma das duas opções

$$|\psi_{jk}\rangle_A \perp |\psi_{j'k}\rangle_A \text{ e } |\phi_{jk}\rangle_B \propto |\phi_{j'k}\rangle_B, \quad (\text{A.1a})$$

ou

$$|\phi_{jk}\rangle_B \perp |\phi_{j'k}\rangle_B \text{ e } |\psi_{jk}\rangle_A \propto |\psi_{j'k}\rangle_A. \quad (\text{A.1b})$$

Fixado um k , se uma das opções é válida para um par de j e j' , deve ser válida para todos eles¹.

i) Supondo que a (A.1a) seja verdadeira, isso significa que todos os vetores $|\phi_{jk}\rangle_B$ são proporcionais entre si para k fixo, enquanto os $|\psi_{jk}\rangle_A$, também para k fixo, formam uma base ortogonal. Podemos escrever então $U|j\rangle_A \otimes |k\rangle_B = e^{i\theta_{jk}} |\phi_{jk}\rangle_A \otimes |\phi_{0k}\rangle_B$.

Agora se consideramos as imagens dos vetores $|j\rangle_A \otimes (|k\rangle_B + |k'\rangle_B)$, nos deparamos

¹ Suponha, sem perda de generalidade, que a primeira opção é válida para $j = 0$ e $j' = 1$ e a segunda, para $j = 0$ e $j' = 2$. A imagem do vetor produto $(|1\rangle_A + |2\rangle_A) \otimes |k\rangle_B$, dada por $|\psi_{1k}\rangle_A \otimes |\phi_{1k}\rangle_B + |\psi_{2k}\rangle_A \otimes |\phi_{2k}\rangle_B$ seria um vetor emaranhado, pois teria-se $|\psi_{1k}\rangle_A \perp |\psi_{0k}\rangle_A$, $|\psi_{2k}\rangle_A \propto |\psi_{0k}\rangle_A$, $|\phi_{1k}\rangle_B \propto |\phi_{0k}\rangle_B$ e $|\phi_{2k}\rangle_B \perp |\phi_{0k}\rangle_B$. Logo, $|\psi_{1k}\rangle_A \perp |\psi_{2k}\rangle_A$ e $|\phi_{1k}\rangle_B \perp |\phi_{2k}\rangle_B$.

com as opções

$$|\phi_{jk}\rangle_B \perp |\phi_{jk'}\rangle_B \text{ e } |\psi_{jk}\rangle_A \propto |\psi_{jk'}\rangle_A, \quad (\text{A.2a})$$

ou

$$|\psi_{jk}\rangle_A \perp |\psi_{jk'}\rangle_A \text{ e } |\phi_{jk}\rangle_B \propto |\phi_{jk'}\rangle_B. \quad (\text{A.2b})$$

Novamente, se uma das opções for válida para um par de k 's, com j fixo, deve ser válida para todos os pares. Mas dado que a (A.1a) é verdadeira, agora somente a (A.2a) o pode ser. De fato, se (A.2b) fosse verdadeira, teria-se, por exemplo, a imagem dos subespaço gerado pelos vetores $\{|j\rangle_A \otimes |0\rangle_B, |0\rangle_A \otimes |k\rangle_B\}$, de dimensão $\text{Dim}\mathcal{H}_A + \text{Dim}\mathcal{H}_B - 1$, levada no subespaço $\mathcal{H}_A \otimes |\phi_{00}\rangle$, de dimensão $\text{Dim}\mathcal{H}_A$, contradizendo o fato de ser unitária.

Estabelecido então que (A.2a) é verdadeira, podemos escrever $U |j\rangle_A \otimes |k\rangle_B = e^{i\theta_{jk}} |\psi_{j0}\rangle_A \otimes |\phi_{0k}\rangle_B$. Usando esta expressão, e exigindo que a imagem dos estados $(|j\rangle_A + |j'\rangle_A) \otimes (|k\rangle_B + |k'\rangle_B)$ sejam produtos para todos os pares j, j' e k, k' , obtém-se $e^{i(\theta_{jk} + \theta_{j'k'})} = e^{i(\theta_{jk'} + \theta_{j'k})}$. Em particular, se $k' = j' = 0$, obtemos $\theta_{jk} = \theta_{j0} + \theta_{0k} \pmod{2\pi}$, visto que $\theta_{00} = 0$ por construção. Finalmente, temos $U = U_A \otimes U_B$ com $U_A |j\rangle_A = e^{i\theta_{j0}} |\psi_{j0}\rangle_A$ e $U_B |k\rangle_B = e^{i\theta_{0k}} |\phi_{0k}\rangle_B$.

ii) Agora suponha que (A.1b) seja verdadeira. Note primeiramente que é necessário ter $\text{Dim}\mathcal{H}_A \geq \text{Dim}\mathcal{H}_B$ pois, para k fixo, estamos variando sobre $\text{Dim}\mathcal{H}_A$ vetores ortogonais em A , que devem dar origem ao mesmo número de vetores ortogonais $|\phi_{jk}\rangle_B$ em B . Então $U |j\rangle_A \otimes |k\rangle_B = e^{i\tilde{\theta}_{jk}} |\psi_{0k}\rangle_A \otimes |\phi_{jk}\rangle_B$. Agora somente a opção (A.2b) pode ser verdadeira, desde que $\text{Dim}\mathcal{H}_B \geq \text{Dim}\mathcal{H}_A$, o que estabelece $\text{Dim}\mathcal{H}_A = \text{Dim}\mathcal{H}_B$, e também nos permite escrever $U |j\rangle_A \otimes |k\rangle_B = e^{i\tilde{\theta}_{jk}} |\psi_{0k}\rangle_A \otimes |\phi_{j0}\rangle_B$. Considerando novamente a imagem dos estados $(|j\rangle_A + |j'\rangle_A) \otimes (|k\rangle_B + |k'\rangle_B)$ como estados produto, devemos ter $\tilde{\theta}_{jk} = \tilde{\theta}_{j0} + \tilde{\theta}_{0k} \pmod{2\pi}$. Com isso, estabelece-se que $U = (U_A \otimes U_B) \circ S$, onde $U_A |j\rangle_A = e^{i\tilde{\theta}_{0j}} |\psi_{0j}\rangle$, $U_B = e^{i\tilde{\theta}_{k0}} |\phi_{k0}\rangle_B$.

B. DECOMPOSIÇÃO DO DETERMINANTE DA TRANSPOSTA PARCIAL

Neste Apêndice deduzimos as Eqs. (3.8), (3.16) e (3.19), que dão a evolução do determinante da transposta parcial para vários modelos.

Equação (3.8). No modelo considerado, dois reservatórios de amplitude, independentes e à temperatura nula, as equações de movimento para os elementos de matriz têm a forma:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{11}(t) &= -2\gamma\rho_{11}(t), \\ \dot{\rho}_{22}(t) &= -\gamma(\rho_{22}(t) - \rho_{11}(t)), \\ \dot{\rho}_{33}(t) &= -\gamma(\rho_{33}(t) - \rho_{11}(t)), \\ \dot{\rho}_{44}(t) &= \gamma(\rho_{22}(t) + \rho_{33}(t)), \\ \dot{\rho}_{12}(t) &= -\frac{3}{2}\gamma\rho_{12}(t), \\ \dot{\rho}_{13}(t) &= -\frac{3}{2}\gamma\rho_{13}(t), \\ \dot{\rho}_{14}(t) &= -\gamma\rho_{14}(t), \\ \dot{\rho}_{23}(t) &= -\gamma\rho_{23}(t), \\ \dot{\rho}_{24}(t) &= -\frac{\gamma}{2}\rho_{24}(t) + \gamma\rho_{13}(t), \\ \dot{\rho}_{34}(t) &= -\frac{\gamma}{2}\rho_{34}(t) + \gamma\rho_{12}(t).\end{aligned}$$

(B.1)

e podem ser resolvidas por integração direta, levando à seguinte solução:

$$\begin{aligned}
\rho_{11}(t) &= \rho_{11}e^{-2\gamma t}, \\
\rho_{22}(t) &= (\rho_{11} + \rho_{22})e^{-\gamma t} - \rho_{11}e^{-2\gamma t}, \\
\rho_{33}(t) &= (\rho_{11} + \rho_{33})e^{-\gamma t} - \rho_{11}e^{-\gamma t}, \\
\rho_{44}(t) &= 1 - (\rho_{22} + \rho_{33} + 2\rho_{11})e^{-\gamma t} + \rho_{11}e^{-2\gamma t}, \\
\rho_{12}(t) &= \rho_{12}e^{-\frac{3}{2}\gamma t}, \\
\rho_{13}(t) &= \rho_{13}e^{-\frac{3}{2}\gamma t}, \\
\rho_{14}(t) &= \rho_{14}e^{-\gamma t}, \\
\rho_{23}(t) &= \rho_{23}e^{-\gamma t}, \\
\rho_{24}(t) &= (\rho_{24} + 2\rho_{13})e^{-\frac{7}{2}\gamma t} - 2\rho_{13}e^{-\frac{3}{2}\gamma t}, \\
\rho_{34}(t) &= (\rho_{34} + 2\rho_{12})e^{-\frac{7}{2}\gamma t} - 2\rho_{12}e^{-\frac{3}{2}\gamma t}.
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Para se obter a Eq. (3.8), a ideia é colocar em evidência, em cada entrada da matriz transposta parcial, a exponencial de menor taxa de decaimento (podendo ser nula, no caso do termo $\rho_{44}(t)$), ou seja, a exponencial do primeiro termo de cada uma das equações acima. A matriz transposta parcial terá então a forma:

$$\rho^\Gamma(t) = \begin{pmatrix} e^{-2\gamma t}(\dots) & e^{-\frac{3}{2}\gamma t}(\dots) & e^{-\frac{3}{2}\gamma t}(\dots) & e^{-\gamma t}(\dots) \\ e^{-\frac{3}{2}\gamma t}(\dots) & e^{-\gamma t}(\dots) & e^{-\gamma t}(\dots) & e^{-\frac{1}{2}\gamma t}(\dots) \\ e^{-\frac{3}{2}\gamma t}(\dots) & e^{-\gamma t}(\dots) & e^{-\gamma t}(\dots) & e^{-\frac{1}{2}\gamma t}(\dots) \\ e^{-\gamma t}(\dots) & e^{-\frac{1}{2}\gamma t}(\dots) & e^{-\frac{1}{2}\gamma t}(\dots) & 1(\dots) \end{pmatrix},$$

onde representamos apenas estas exponenciais que multiplicam cada entrada. Agora é fácil verificar que todos os subdeterminantes desta matriz serão proporcionais a $e^{-4\gamma t}$, quer dizer, o determinante como um todo terá a forma $e^{-4\gamma t}\text{Det}A_1 - e^{-4\gamma t}\text{Det}A_2 + e^{-4\gamma t}\text{Det}A_3 - e^{-4\gamma t}\text{Det}A_4$, onde A_i seria a matriz 3×3 obtida removendo-se a primeira linha e a i -ésima coluna da matriz A , obtida de $\rho^\Gamma(t)$ removendo-se estes fatores exponenciais.

Outra forma de enxergar isto é usando-se a multilinearidade do determinante em

termos de suas linhas e suas colunas. Podemos retirar então fatores de $e^{-\gamma t}$, $e^{-\frac{1}{2}\gamma t}$ e $e^{-\frac{1}{2}\gamma t}$ da primeira, segunda e terceira colunas, respectivamente, de forma que o determinante como um todo é multiplicado por um fator de $e^{-2\gamma t}$. A matriz fica então com a primeira linha multiplicada por um fator de $e^{-\gamma t}$, e a segunda e terceira linhas, por um fator de $e^{-\frac{1}{2}\gamma t}$. Retirando também estes fatores, obtém-se o resultado.

Finalmente, $A = \rho' + \rho''(t)$, onde ρ' é como na Eq. (3.8) e todos os termos de $\rho''(t)$ têm um fator exponencial com taxa de decaimento não nula.

Equação (3.16). Aqui supomos que apenas os elementos de matriz $\rho_{11}, \rho_{22}, \rho_{33}$ das Eqs.(3.14) são não nulos inicialmente, e $\gamma' = 0$, de maneira que obedecem às equações (lembrando que a base na qual a matriz é escrita é $\{|11\rangle, |\Psi_+\rangle, |00\rangle, |\Psi_-\rangle\}$):

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{11}(t) &= -2\gamma\rho_{11}(t), \\ \dot{\rho}_{22}(t) &= 2\gamma(\rho_{11}(t) - \rho_{22}(t)), \\ \dot{\rho}_{33}(t) &= 2\gamma\rho_{22}(t).\end{aligned}$$

Essas equações podem ser resolvidas integrando-se, sucessivamente, da primeira a última, resultando em :

$$\begin{aligned}\rho_{11}(t) &= \rho_{11}e^{-2\gamma t}, \\ \rho_{22}(t) &= \rho_{22}e^{-2\gamma t} + 2\gamma\rho_{11}te^{-2\gamma t}, \\ \rho_{33}(t) &= \rho_{33} - \rho_{22}(e^{-2\gamma t} - 1) - \rho_{11}(e^{-2\gamma t} - 1) - 2\gamma\rho_{11}te^{-2\gamma t}.\end{aligned}$$

Claramente, $\rho_{22}(t) > 0$ para todo t , caso $\rho_{22} > 0$. Para computar o determinante da transposta parcial, primeiramente colocamos a matriz na base computacional $\{|11\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |00\rangle\}$:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho_{22}(t)}{2} & \frac{\rho_{22}(t)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\rho_{22}(t)}{2} & \frac{\rho_{22}(t)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{33}(t) \end{pmatrix},$$

de maneira que o determinante da transposta parcial será:

$$\begin{aligned} \text{Det}\rho^\Gamma(t) &= [\rho_{11}(t)\rho_{33}(t) - \frac{\rho_{22}^2(t)}{4}] \frac{\rho_{22}^2(t)}{4} = \\ &= \{\rho_{11}e^{-2\gamma t} + e^{-4\gamma t}[-\rho_{11}(\rho_{22} + \rho_{11}) + 2\gamma\rho_{11}^2 t + \rho_{22}^2 + 4\gamma\rho_{11}\rho_{22}t + 4\gamma^2\rho_{11}^2 t^2]\} \frac{\rho_{22}^2(t)}{4}. \end{aligned}$$

Equação (3.19). Para o modelo com o primeiro qubit sujeito a um reservatório de amplitude e o segundo sujeito a um reservatório de fase, as equações de movimento dos elementos de matriz na base computacional serão:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{11} &= \gamma\rho_{11}, \\ \dot{\rho}_{22} &= \gamma\rho_{11}, \\ \dot{\rho}_{33} &= -\gamma\rho_{33}, \\ \dot{\rho}_{44} &= \gamma\rho_{33}, \\ \dot{\rho}_{12} &= -\frac{1}{2}\gamma\rho_{12}, \\ \dot{\rho}_{13} &= -(\gamma + 2\gamma')\rho_{13}, \\ \dot{\rho}_{14} &= -\left(\frac{\gamma}{2} + 2\gamma'\right)\rho_{14}, \\ \dot{\rho}_{23} &= -\left(\frac{\gamma}{2} + 2\gamma'\right)\rho_{23}, \\ \dot{\rho}_{24} &= -2\gamma'\rho_{24} + \gamma\rho_{13}, \\ \dot{\rho}_{34} &= -\frac{\gamma}{2}\rho_{34}. \end{aligned}$$

(B.3)

com as soluções:

$$\begin{aligned}
\rho_{11}(t) &= \rho_{11}e^{-\gamma t}, \\
\rho_{22}(t) &= \rho_{22} - \rho_{11}(e^{-\gamma t} - 1), \\
\rho_{33}(t) &= \rho_{33}e^{-\gamma t}, \\
\rho_{44}(t) &= \rho_{44} - \rho_{33}(e^{-\gamma t} - 1), \\
\rho_{12}(t) &= \rho_{12}e^{-\frac{\gamma}{2}t}, \\
\rho_{13}(t) &= \rho_{13}e^{-(\gamma+2\gamma')t}, \\
\rho_{14}(t) &= \rho_{14}e^{-(\frac{\gamma}{2}+2\gamma')t}, \\
\rho_{23}(t) &= \rho_{23}e^{-\frac{\gamma}{2}+2\gamma't}, \\
\rho_{24}(t) &= \rho_{24}e^{-2\gamma't} + \rho_{13}e^{-2\gamma't}(1 - e^{-\gamma t}), \\
\rho_{34}(t) &= \rho_{34}e^{-\frac{\gamma}{2}t}.
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Com esta solução, a transposta parcial adquire a forma:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}e^{-\gamma t} & \rho_{12}^*e^{-\frac{\gamma}{2}t} & \rho_{13}e^{-(\gamma+2\gamma')t} & \rho_{23}e^{(\frac{\gamma}{2}+2\gamma')t} \\ \bullet & \rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{22}e^{-\gamma t} & \rho_{14}e^{-(\frac{\gamma}{2}+2\gamma')t} & \rho_{24}e^{-2\gamma't} + \rho_{13}e^{-2\gamma't}(1 - e^{-\gamma t}) \\ \bullet & \bullet & \rho_{33}e^{-\gamma t} & \rho_{34}^*e^{-\gamma t} \\ \bullet & \bullet & \bullet & (\rho_{44} + \rho_{33}) - \rho_{33}e^{-\gamma t} \end{pmatrix},$$

onde \bullet indica o complexo conjugado do elemento correspondente de forma que a matriz seja hermitiana. A ideia é computar o determinante (um programa de manipulação simbólica é a maneira mais segura), agrupar os termos de mesmo expoente, para obter que o menor é $e^{-3\gamma t}[\rho_{11}(\rho_{11} + \rho_{22}) - |\rho_{12}|^2][\rho_{33}(\rho_{33} + \rho_{44}) - |\rho_{34}|^2]$, exatamente o determinante da matriz da Eq. (3.20).

C. EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DA MC; TEMPO DA MORTE SÚBITA

Indicamos aqui os cálculos para se obter as equações de movimento dos segundos momentos devido à equação mestra, dada pela Eq. (4.6). A ideia é basicamente multiplicar ambos os lados da equação pelo termo que se queira computar (*i.e.*, um operador do tipo $a_i^{(\dagger)} a_j^{(\dagger)}$), tomar o traço de ambos os lados, de maneira que do lado esquerdo se tenha $d \langle a_i^{(\dagger)} a_j^{(\dagger)} \rangle / dt$, e do lado direito usar as relações de comutação $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$ e a ciclicidade do traço para eliminar os termos de ordem maior que dois. Por exemplo, o cálculo de $d \langle a_1 a_2^\dagger \rangle / dt$, considerando apenas a contribuição dos termos proporcionais a κ_1 da Eq. (4.6), se dá da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \frac{d \langle a_1 a_2^\dagger \rangle}{dt} &= \text{Tr}(a_1 a_2^\dagger \frac{d\rho}{dt}) = \text{Tr}\{a_1 a_2 [2\kappa_1(2b_1 \rho b_1^\dagger - b_1^\dagger b_1 \rho - \rho b_1^\dagger b_1)]\} \\
 &= 2\kappa_1 \text{Tr}[(Aa_1^\dagger + Ba_2) a_1 a_2^\dagger (Aa_1 - B^* a_2^\dagger) \rho] - \kappa_1 \text{Tr}[A^2 a_1 a_2^\dagger (Aa_1^\dagger + Ba_2) (Aa_1 - B^* a_2^\dagger) \rho] \\
 &\quad - \kappa_1 \text{Tr}[(Aa_1^\dagger + Ba_2) (Aa_1 - B^* a_2^\dagger) a_1 a_2^\dagger \rho] + (\dots),
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

pois $b_1 = Aa_1 - Ba_2^\dagger$, onde $A = \cosh |r_\mu|$ e $B = \frac{r_\mu}{|r_\mu|} \sinh |r_\mu|$. Então:

$$\begin{aligned}
 \frac{d \langle a_1 a_2^\dagger \rangle}{dt} &= \\
 &= 2\kappa_1 \text{Tr}[A^2 a_1^\dagger a_1 a_2^\dagger a_1 - AB^* a_1^\dagger a_1 a_2^\dagger a_2^\dagger + BA a_2 a_1 a_2^\dagger a_1 - |B|^2 a_2 a_1 a_2^\dagger a_2^\dagger] \rho \\
 &\quad - \kappa_1 \text{Tr}[A^2 a_1 a_2^\dagger a_1^\dagger a_1 - AB^* a_1 a_2^\dagger a_1^\dagger a_2^\dagger + BA a_1 a_2^\dagger a_2 a_1 - |B|^2 a_1 a_2^\dagger a_2 a_2^\dagger] \rho \\
 &\quad - \kappa_1 \text{Tr}[A^2 a_1^\dagger a_1 a_1 a_2^\dagger - AB^* a_1^\dagger a_2^\dagger a_1 a_2^\dagger + BA a_2 a_1 a_1 a_2^\dagger - |B|^2 a_2 a_2^\dagger a_1 a_2^\dagger] \rho + (\dots).
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

Agora usando as relações de comutação,

$$\begin{aligned}
\frac{d\langle a_1 a_2^\dagger \rangle}{dt} &= \\
&= 2\kappa_1 \text{Tr}[A^2 a_1^\dagger a_1 a_2^\dagger a_1 - AB^* a_1^\dagger a_1 a_2^\dagger a_2^\dagger + BA a_1 a_1 (1 + a_2^\dagger a_2) - |B|^2 a_1 a_2^\dagger (2 + a_2^\dagger a_2)]\rho \\
&- \kappa_1 \text{Tr}[A^2 a_1 a_2^\dagger (1 + a_1 a_1^\dagger) - AB^* a_2^\dagger (1 + a_1^\dagger a_1) a_2^\dagger + BA a_1 a_2^\dagger a_2 a_1 - |B|^2 a_1 a_2^\dagger (1 + a_2^\dagger)]\rho \\
&- \kappa_1 \text{Tr}[A^2 a_1^\dagger a_1 a_1 a_2^\dagger - AB^* a_1^\dagger a_2^\dagger a_1 a_2^\dagger + BA a_1 a_1 (1 + a_2^\dagger a_2) - |B|^2 (2 + a_2^\dagger a_2) a_1 a_2^\dagger]\rho + (\dots),
\end{aligned} \tag{C.3}$$

vê-se que todos os termos de ordem maior que dois se cancelam e ficamos apenas com:

$$\frac{d\langle a_1 a_2^\dagger \rangle}{dt} = \kappa_1 [-(A|B|^2) \langle a_1 a_2^\dagger \rangle + AB^* \langle (a_2^\dagger)^2 \rangle + AB \langle a_1^2 \rangle] + (\dots).$$

Curva limítrofe e tempo de morte súbita (Equações (4.9), (4.12), (4.13)). Para se obter estas equações, é necessário identificar, dados estados com matriz de covariância da forma

$$\begin{pmatrix} n + \frac{1}{2} & 0 & 0 & m \\ 0 & n + \frac{1}{2} & m^* & 0 \\ 0 & m & n + \frac{1}{2} & n \\ m^* & 0 & 0 & n + \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

para quais valores de n e m a quantidade de Simon S , eq. (2.28a), se anula. Têm-se então

$$I_2 = I_2 = (n + \frac{1}{2})^2, \quad I_3 = -|m|^2, \quad I_4 = \frac{1}{2}(|m| + 2n|m|)^2, \tag{C.4}$$

de forma que:

$$S = 2n^3 + n^4 - \frac{1}{2}|m|^2 - 2n|m|^2 + n^2(1 - 2|m|^2) - \frac{1}{2}|m|^2 + |m|^4, \tag{C.5}$$

cuja solução é simplesmente $n = |m|$.

Para obtenção da Eq. (4.9), toma-se $n = \frac{B^2 + n_T R}{1+R}$ e $m = \frac{AB}{1+R}$, enquanto para as equações (4.12) e (4.13), $n = n(t) = \frac{R(1+n_T)}{1+R}(1 - e^{-2(\lambda+\kappa)t}) + \frac{B^2 + n_T R}{1+R}$ e $m = -\frac{RAB}{1+R}e^{-2(\lambda+\kappa)t} +$

AB , correspondente à solução das equações (4.7) para o estado inicial $n_1 = n_2 = B^2, m_c = AB$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. Schrödinger e M. Born. «Discussion of Probability Relations between Separated Systems». Em: *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. Vol. 31. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1935, pp. 555–+. DOI: 10.1017/S0305004100013554.
- [2] A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen. «Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?». Em: *Physical Review* 47.10 (1935), pp. 777–780. DOI: 10.1103/PhysRev.47.777.
- [3] J. S. Bell. «On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics». Em: *Review of Modern Physics* 38.3 (1966), pp. 447–452. DOI: 10.1103/RevModPhys.38.447.
- [4] J. S. Bell. «On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox». Em: *Physics* 1 (1964), p. 195.
- [5] C. H. Bennett et al. «Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels». Em: *Physical Review Letters* 70.13 (1993), pp. 1895–1899. DOI: 10.1103/PhysRevLett.70.1895.
- [6] C. H. Bennett et al. «Concentrating partial entanglement by local operations». Em: *Physical Review A* 53.4 (1996), pp. 2046–2052. DOI: 10.1103/PhysRevA.53.2046.
- [7] C. H. Bennett et al. «Purification of Noisy Entanglement and Faithful Teleportation via Noisy Channels». Em: *Physical Review Letters* 76.5 (1996), pp. 722–725. DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.722.
- [8] M. Horodecki, P. Horodecki e R. Horodecki. «Mixed-State Entanglement and Distillation: Is there a “Bound” Entanglement in Nature?». Em: *Physical Review Letters* 80.24 (1998), pp. 5239–5242. DOI: 10.1103/PhysRevLett.80.5239.

-
- [9] J. F. Poyatos, J. I. Cirac e P. Zoller. «Quantum Reservoir Engineering with Laser Cooled Trapped Ions». Em: *Physical Review Letters* 77.23 (1996), pp. 4728–4731. DOI: 10.1103/PhysRevLett.77.4728.
- [10] S. Pielawa et al. «Generation of Einstein-Podolsky-Rosen-Entangled Radiation through an Atomic Reservoir». Em: *Physical Review Letters* 24 (), pp. 1–4. ISSN: 0031-9007. DOI: 10.1103/PhysRevLett.98.240401.
- [11] K. Życzkowski et al. «Dynamics of quantum entanglement». Em: *Physical Review A* 65.1 (2001), p. 012101. DOI: 10.1103/PhysRevA.65.012101.
- [12] T. Yu e J. H. Eberly. «Phonon decoherence of quantum entanglement: Robust and fragile states». Em: *Physical Review B* 66.19 (2002), p. 193306. DOI: 10.1103/PhysRevB.66.193306.
- [13] P. J. Dodd e J. J. Halliwell. «Disentanglement and decoherence by open system dynamics». Em: *Physical Review A* 69.5 (2004), p. 052105. DOI: 10.1103/PhysRevA.69.052105.
- [14] M. O. Terra Cunha. «The geometry of entanglement sudden death». Em: *New Journal of Physics* 9.7 (2007), p. 237.
- [15] J. P. Paz e A. J. Roncaglia. «Dynamics of the Entanglement between Two Oscillators in the Same Environment». Em: *Physical Review Letters* 100.22 (2008), p. 220401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.220401.
- [16] J. P. Paz e A. J. Roncaglia. «Dynamical phases for the evolution of the entanglement between two oscillators coupled to the same environment». Em: *Physical Review A* 79.3 (2009), p. 032102. DOI: 10.1103/PhysRevA.79.032102.
- [17] M. Terra Cunha. «Emaranhamento: caracterização, manipulação e consequências». Tese de doutorado. Universidade Federal de Minas Gerais, 2005.
- [18] A. Peres. *Quantum theory: concepts and methods*. Kluwer Academic Publishers, 1993. ISBN: 0792325494.
- [19] W.F. Stinespring. «Positive functions on C*-algebras». Em: *Proc. Amer. Math. Soc.* Vol. 6. 211-216. 1955, p. 3.

-
- [20] M. A. Nielsen e I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. 1^a ed. Cambridge University Press, 2000. ISBN: 0521635039.
- [21] G. Lindblad. «On the generators of quantum dynamical semigroups». Em: *Communications in Mathematical Physics* 48.2 (1976), pp. 119–130. ISSN: 0010-3616.
- [22] Davies E. B. «Markovian master equations». Em: *Communications in mathematical Physics* 39.2 (1974), pp. 91–110. ISSN: 0010-3616.
- [23] T. Yu e J. H. Eberly. «Qubit disentanglement and decoherence via dephasing». Em: *Physical Review B* 68.16 (2003), p. 165322.
- [24] I. Bengtsson e K. Życzkowski. *Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement*. Cambridge University Press, 2006. ISBN: 0521814510.
- [25] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002. ISBN: 0521795400.
- [26] I. Bengtsson e K. Życzkowski. *Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement*. Cambridge University Press, 2006, pp. 87–92. ISBN: 0521814510.
- [27] M. V. Berry. «Quantal phase factors accompanying adiabatic changes». Em: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 392.1802 (1984), pp. 45–57. ISSN: 0080-4630.
- [28] G. E. Bredon. *Topology and geometry*. Springer, 1997. ISBN: 0387979263.
- [29] M. Adelman, J. V. Corbett e C. A. Hurst. «The geometry of state space». Em: *Foundations of Physics* 23.2 (1993), pp. 211–223. ISSN: 0015-9018.
- [30] R. F. Picken. «The Duistermaat-Heckman integration formula on flag manifolds». Em: *Journal of mathematical physics* 31.3 (1990), pp. 616–638. ISSN: 0022-2488.
- [31] C. A. Fuchs. «Distinguishability and accessible information in quantum theory». Em: *Arxiv preprint quant-ph/9601020* (1996).
- [32] A. Chefles. «Quantum state discrimination». Em: *Contemporary Physics* 41.6 (2000), pp. 401–424. ISSN: 0010-7514.

-
- [33] F. Hiai e D. Petz. «The proper formula for relative entropy and its asymptotics in quantum probability». Em: *Communications in Mathematical Physics* 143.1 (1991), pp. 99–114. ISSN: 0010-3616.
- [34] K. Życzkowski e W. Słomczynski. «The Monge distance between quantum states». Em: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 31 (1998), p. 9095.
- [35] G. Fubini. «Sulle metriche definite da una forma Hermitiana». Em: *Atti Istituto Veneto* 6 (1903), p. 501.
- [36] G. Fubini. «Kürzeste Wege in komplexen Gebiet». Em: *Math. Annalen* 60 (1905), p. 321.
- [37] I. Bengtsson e K. Życzkowski. *Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement*. Cambridge University Press, 2006, pp. 114–120. ISBN: 0521814510.
- [38] E. A. Morozova e N. N. Chentsov. «Markov invariant geometry on manifolds of states». Em: *Journal of Mathematical Sciences* 56.5 (1991), pp. 2648–2669. ISSN: 1072-3374.
- [39] D. Petz e C. Sudár. «Geometries of quantum states». Em: *Journal of Mathematical Physics* 37.6 (1996), pp. 2662–2673. ISSN: 0022-2488.
- [40] C. R. Rao. «Information and the accuracy attainable in the estimation of statistical parameters». Em: *Breakthroughs in Statistics: Foundations and basic theory* (1992), p. 235.
- [41] M. R. Grasselli e R. F. Streater. «The uniqueness of the Chentsov metric». Em: *AIP Conference Proceedings*. IOP Institute of Physics Publishing LTD. 2001, pp. 165–172.
- [42] M. J. Bremner, C. Mora e A. Winter. «Are random pure states useful for quantum computation?». Em: *Physical review letters* 102.19 (2009), p. 190502. ISSN: 1079-7114.
- [43] S. Popescu, A. J. Short e A. Winter. «Entanglement and the foundations of statistical mechanics». Em: *Nature Physics* 2.11 (2006), pp. 754–758. ISSN: 1745-2473.

-
- [44] I. Bengtsson e K. Życzkowski. *Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement*. Cambridge University Press, 2006, pp. 344–358. ISBN: 0521814510.
- [45] H. J. Sommers e K. Życzkowski. «Bures volume of the set of mixed quantum states». Em: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 36 (2003), p. 10083.
- [46] K. Życzkowski e H. J. Sommers. «Hilbert–Schmidt volume of the set of mixed quantum states». Em: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 36 (2003), p. 10115.
- [47] K. Życzkowski e H.-J. R. Sommers. «Hilbert-Schmidt volume of the set of mixed quantum states». Em: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 39 (), pp. 10115–10130. ISSN: 0305-4470. DOI: 10.1088/0305-4470/36/39/310.
- [48] I. Bengtsson e K. Życzkowski. *Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement*. Cambridge University Press, 2006, pp. 120–126. ISBN: 0521814510.
- [49] R. F. Werner. «Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model». Em: *Physical Review A* 40.8 (1989), pp. 4277–4281. ISSN: 1094-1622.
- [50] N. Gisin. «Bell’s inequality holds for all non-product states». Em: *Physics Letters A* 154.5-6 (1991), pp. 201–202. ISSN: 0375-9601.
- [51] J. Oppenheim e S. Wehner. «If quantum mechanics were more non-local it would violate the uncertainty principle». Em: *Arxiv preprint arXiv:1004.2507* (2010).
- [52] M. Żukowski e Č. Brukner. «Bells theorem for general N-qubit states». Em: *Physical review letters* 88.21 (2002), p. 210401. ISSN: 1079-7114.
- [53] L. Masanes. «Asymptotic violation of bell inequalities and distillability». Em: *Physical review letters* 97.5 (2006), p. 50503. ISSN: 1079-7114.
- [54] N. Gisin et al. «Quantum cryptography». Em: *Reviews of Modern Physics* 74.1 (2002), pp. 145–195. ISSN: 1539-0756.
- [55] R. Jozsa. «Entanglement and quantum computation». Em: *The Geometric Universe: Science, Geometry, and the Work of Roger Penrose* (1998), pp. 369–79.

-
- [56] B. P. Lanyon et al. «Experimental quantum computing without entanglement». Em: *Physical review letters* 101.20 (2008), p. 200501. ISSN: 1079-7114.
- [57] A. K. Ekert. «Quantum cryptography based on Bell's theorem». Em: *Physical Review Letters* 67.6 (1991), pp. 661–663. DOI: 10.1103/PhysRevLett.67.661.
- [58] C. H. Bennett, G. Brassard et al. «Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing». Em: *Proceedings of IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing*. Vol. 175. Bangalore, India. 1984.
- [59] C. H. Bennett. «Quantum cryptography using any two nonorthogonal states». Em: *Physical Review Letters* 68.21 (1992), pp. 3121–3124. ISSN: 1079-7114.
- [60] R. Renner. «Security of Quantum Key Distribution». Em: *Arxiv preprint quant-ph/0512258* (2005).
- [61] L. Gurvits. «Classical complexity and quantum entanglement». Em: *Journal of Computer and System Sciences* 69.3 (2004), pp. 448–484. ISSN: 0022-0000.
- [62] M. Horodecki, P. Horodecki e R. Horodecki. «Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions». Em: *Physics Letters A* 223.1-2 (1996), pp. 1–8. ISSN: 0375-9601.
- [63] D. Cavalcanti e M. O. Terra Cunha. «Estimating entanglement of unknown states». Em: *Applied Physics Letters* 89.8 (2009), p. 084102. ISSN: 0003-6951.
- [64] R. Horodecki, M. Horodecki e P. Horodecki. «Entanglement processing and statistical inference: The Jaynes principle can produce fake entanglement». Em: *Physical Review A* 59.3 (1999), pp. 1799–1803. ISSN: 1094-1622.
- [65] P. Horodecki. «Separability criterion and inseparable mixed states with positive partial transposition». Em: *Physics Letters A* 232.5 (1997), pp. 333–339. ISSN: 0375-9601.
- [66] M. A. Nielsen e J. Kempe. «Separable states are more disordered globally than locally». Em: *Physical Review Letters* 86.22 (2001), pp. 5184–5187. ISSN: 1079-7114.
- [67] N. J. Cerf, C. Adami e R. M. Gingrich. «Reduction criterion for separability». Em: *Physical Review A* 60.2 (1999), pp. 898–909. ISSN: 1094-1622.

-
- [68] K. G. H. Vollbrecht e M. M. Wolf. «Conditional entropies and their relation to entanglement criteria». Em: *Journal of Mathematical Physics* 43 (2002), p. 4299.
- [69] A. Peres. «Separability criterion for density matrices». Em: *Physical Review Letters* 77.8 (1996), pp. 1413–1415. ISSN: 1079-7114.
- [70] M. A. Santos. *Fundamentos Matemáticos da Separabilidade*. Monografia apresentada na Jornada de Iniciação Científica do IMPA. 2010.
- [71] B. L. Amaral. «Emaranhamento em Sistemas de dois Qubits». Diss. de mestrado. Universidade Federal de Minas Gerais, 2010.
- [72] F. Verstraete et al. «A comparison of the entanglement measures negativity and concurrence». Em: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 34 (2001), p. 10327.
- [73] P. M. Hayden, M. Horodecki e B. M. Terhal. «The asymptotic entanglement cost of preparing a quantum state». Em: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 34 (2001), p. 6891.
- [74] V. Vedral e M. B. Plenio. «Entanglement measures and purification procedures». Em: *Physical Review A* 57.3 (1998), pp. 1619–1633. ISSN: 1094-1622.
- [75] M. J. Donald, M. Horodecki e O. Rudolph. «The uniqueness theorem for entanglement measures». Em: *Journal of Mathematical Physics* 43 (2002), p. 4252.
- [76] W. K. Wootters. «Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits». Em: *Physical Review Letters* 80.10 (1998), pp. 2245–2248. ISSN: 1079-7114.
- [77] F. G. S. L. Brandao, M. Christandl e J. Yard. «Faithful Squashed Entanglement». Em: *Arxiv preprint arXiv:1010.1750* (2010).
- [78] G. Vidal e R. Tarrach. «Robustness of entanglement». Em: *Physical Review A* 59.1 (1999), pp. 141–155. ISSN: 1094-1622.
- [79] M. Steiner. «Generalized robustness of entanglement». Em: *Physical Review A* 67.5 (2003), p. 54305. ISSN: 1094-1622.
- [80] T. C. Wei e P. M. Goldbart. «Geometric measure of entanglement and applications to bipartite and multipartite quantum states». Em: *Physical Review A* 68.4 (2003), p. 42307. ISSN: 1094-1622.

-
- [81] V. Vedral. «The role of relative entropy in quantum information theory». Em: *Reviews of Modern Physics* 74.1 (2002), pp. 197–234. ISSN: 1539-0756.
- [82] F. G. S. L. Brandão e M. B. Plenio. «A Generalization of Quantum Steins lemma». Em: *Communications in Mathematical Physics* 295.3 (2010), pp. 791–828. ISSN: 0010-3616.
- [83] F. G. S. L. Brandão. «Quantifying entanglement with witness operators». Em: *Physical Review A* 72.2 (2005), p. 22310. ISSN: 1094-1622.
- [84] S. L. Braunstein et al. «Separability of very noisy mixed states and implications for NMR quantum computing». Em: *Physical Review Letters* 83.5 (1999), pp. 1054–1057. ISSN: 1079-7114.
- [85] K. Życzkowski et al. «Volume of the set of separable states». Em: *Physical Review A* 58.2 (1998), pp. 883–892. ISSN: 1094-1622.
- [86] P. B. Slater. «Silver mean conjectures for 15-dimensional volumes and 14-dimensional hyperareas of the separable two-qubit systems». Em: *Journal of Geometry and Physics* 53.1 (2005), pp. 74–97. ISSN: 0393-0440.
- [87] S. J. Szarek, I. Bengtsson e K. Życzkowski. «On the structure of the body of states with positive partial transpose». Em: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 39 (2006), p. L119.
- [88] S. L. Braunstein e H. J. Kimble. «Teleportation of continuous quantum variables». Em: *Physical Review Letters* 80.4 (1998), pp. 869–872. ISSN: 1079-7114.
- [89] M. D. Reid. «Quantum cryptography with a predetermined key, using continuous-variable Einstein-Podolsky-Rosen correlations». Em: *Physical Review A* 62.6 (2000), p. 62308. ISSN: 1094-1622.
- [90] C. Silberhorn et al. «Continuous variable quantum cryptography: beating the 3 dB loss limit». Em: *Physical review letters* 89.16 (2002), p. 167901. ISSN: 1079-7114.
- [91] R. Simon. «Peres-Horodecki separability criterion for continuous variable systems». Em: *Physical Review Letters* 84.12 (2000), pp. 2726–2729. ISSN: 1079-7114.

-
- [92] G. Adesso, A. Serafini e F. Illuminati. «Quantification and scaling of multipartite entanglement in continuous variable systems». Em: *Physical Review Letters* 93.22 (2004), p. 220504. ISSN: 1079-7114.
- [93] G. Giedke et al. «Entanglement of formation for symmetric Gaussian states». Em: *Physical Review Letters* 91.10 (2003), p. 107901. ISSN: 1079-7114.
- [94] G. Adesso. «Entanglement of Gaussian states». Em: *PhD in Physics, Dipartimento Di Fisica ER Caianiello, Università Degli Studi di Salerno* (2006).
- [95] R. Clifton e H. Halvorson. «Bipartite-mixed-states of infinite-dimensional systems are generically nonseparable». Em: *Physical Review A* 61.1 (1999), p. 12108. ISSN: 1094-1622.
- [96] M. O. Scully e M. S. Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1997, pp. 81–82. ISBN: 0 521 43595 1.
- [97] L. M. Duan et al. «Inseparability criterion for continuous variable systems». Em: *Physical Review Letters* 84.12 (2000), pp. 2722–2725. ISSN: 1079-7114.
- [98] G. Rigolin e C. O. Escobar. «Lower bounds on the entanglement of formation for general Gaussian states». Em: *Physical Review A* 69.1 (2004), p. 12307. ISSN: 1094-1622.
- [99] C. M. Caves, C. A. Fuchs e R. Schack. «Unknown quantum states: the quantum de Finetti representation». Em: *Journal of Mathematical Physics* 43 (2002), p. 4537.
- [100] H. J. Sommers e K. Życzkowski. «Statistical properties of random density matrices». Em: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 37 (2004), p. 8457.
- [101] C. Dankert. «Efficient simulation of random quantum states and operators». Em: *Arxiv preprint quant-ph/0512217* (2005).
- [102] K. Życzkowski e H. J. Sommers. «Induced measures in the space of mixed quantum states». Em: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 34 (2001), p. 7111.
- [103] V. Cappellini, H. J. Sommers e K. Życzkowski. «Distribution of G concurrence of random pure states». Em: *Physical Review A* 74.6 (2006), p. 62322. ISSN: 1094-1622.

-
- [104] M. Hernandez e M. Orszag. «Decoherence and disentanglement for two qubits in a common squeezed reservoir». Em: *Physical Review A* 78.4 (2008), p. 42114. ISSN: 1094-1622.
- [105] F. Lastra et al. «Abrupt changes in the dynamics of quantum disentanglement». Em: *Physical Review A* 75.6 (2007), p. 62324. ISSN: 1094-1622.
- [106] K. Ann e G. Jaeger. «Local-dephasing-induced entanglement sudden death in two-component finite-dimensional systems». Em: *Physical Review A* 76.4 (2007), p. 44101. ISSN: 1094-1622.
- [107] L. Aolita et al. «Scaling Laws for the Decay of Multiqubit Entanglement». Em: *Physical Review Letters* 8 (), pp. 1–4. ISSN: 0031-9007. DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.080501.
- [108] A. Salles et al. «Experimental investigation of the dynamics of entanglement: Sudden death, complementarity, and continuous monitoring of the environment». Em: *Physical Review A* 78.2 (2008), p. 22322. ISSN: 1094-1622.
- [109] M. F. Santos et al. «Direct measurement of finite-time disentanglement induced by a reservoir». Em: *Physical Review A* 73.4 (2006), p. 40305. ISSN: 1094-1622.
- [110] L. Gurvits e H. Barnum. «Largest separable balls around the maximally mixed bipartite quantum state». Em: *Physical Review A* 66.6 (2002), p. 62311. ISSN: 1094-1622.
- [111] R. C. Drumond e M. O. Cunha. «Asymptotic entanglement dynamics and geometry of quantum states». Em: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 42 (2009), p. 285308.
- [112] A. Al-Qasimi e D. F. V. James. «Sudden death of entanglement at finite temperature». Em: *Physical Review A* 77.1 (2008), p. 12117. ISSN: 1094-1622.
- [113] S. Schneider e G. J. Milburn. «Entanglement in the steady state of a collective-angular-momentum (Dicke) model». Em: *Physical Review A* 65.4 (2002), p. 42107. ISSN: 1094-1622.
- [114] K. Dietz. «Asymptotic solutions of Lindblad equations». Em: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 35 (2002), p. 10573.

-
- [115] M. Scala, R. Migliore e A. Messina. «Dissipation and entanglement dynamics for two interacting qubits coupled to independent reservoirs». Em: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 41 (2008), p. 435304.
- [116] C. Cormick e J.P. Paz. «Observing different phases for the dynamics of entanglement in an ion trap». Em: *Physical Review A* 81.2 (2010), p. 22306. ISSN: 1094-1622.
- [117] R. C. Drumond, L. A. M. Souza e M. Terra Cunha. «Asymptotic entanglement dynamics phase diagrams for two electromagnetic field modes in a cavity». Em: *Physical Review A* 82.4 (2010), p. 042302. DOI: 10.1103/PhysRevA.82.042302.
- [118] E. T. Jaynes e F. W. Cummings. «Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser». Em: *Proceedings of the IEEE* 51.1 (2005), pp. 89–109. ISSN: 0018-9219.
- [119] B. G. Englert e G. Morigi. «of Book: Coherent Evolution in Noisy Environments». Em: (2002).
- [120] M. F. Santos, L. G. Lutterbach e L. Davidovich. «Probing entanglement in phase space: signature of GHZ states in the Wigner function». Em: *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* 3 (2001), S55.
- [121] M. Brune et al. «Process tomography of field damping and measurement of fock state lifetimes by quantum nondemolition photon counting in a cavity». Em: *Physical review letters* 101.24 (2008), p. 240402. ISSN: 1079-7114.