

Manipulação e mapeamento de
correlações quânticas em estados de
quatro qudits espaciais

Pierre-Louis de Assis

Junho de 2011

Manipulação e mapeamento de correlações quânticas em estados de quatro qudits espaciais

Pierre-Louis de Assis

Orientador:

Prof. Dr. Sebastião J. N. de Pádua

Tese apresentada à UNIVERSIDADE FEDERAL
DE MINAS GERAIS, como requisito parcial para a
obtenção do grau de DOUTOR EM FÍSICA.

Belo Horizonte
Brasil
Junho de 2011

*À minha esposa Viviane, minha mãe Ludovica,
minha irmã Eleonora e a Joëlle, pelo amor,
apoio e, sobretudo, paciência.*

Agradecimentos

A tarefa de agradecer é sempre necessária e sempre fadada ao fracasso, já que só palavras não condensam todo o sentimento de gratidão.

Em primeiro lugar agradeço à minha família, aquela na qual nasci e aquela que construí ao longo dos anos. Agradeço aos meus pais, Luiz Fernando e Ludovica, por todo o amor e pelos sacrifícios e esforços que fizeram para que eu tivesse a oportunidade de chegar até aqui. À minha irmã pela amizade, carinho e paciência. A Joëlle agradeço pelo carinho e pelas caronas. Agradeço também aos meus tios e tias, em Curvelo, Marignier e Roma.

Luciano e Gilda, obrigado por me acolherem como parte da família e acima de tudo, por serem pais excepcionais para a Vivi. Amor, todos os agradecimentos a você não caberiam na tese. Seu amor e seu apoio incondicionais foram a fundação para que eu pudesse trabalhar.

Aos meus amigos de hoje e sempre, em ordem completamente aleatória para minimizar qualquer ciúme, Jerônimo, Fred (e^-), Ed, Guga, Fimu, Analú, Dudu, Marcella, Elton, Catão, Danilo, Li, Gustavo, Kobold, Bernardo, Rafa, Aguirre, Chico, Fred, Ju, Sílvia e Luana. Se cheguei são (literalmente) e salvo ao final, foi com a ajuda de vocês. Obrigado também à Cláudia, Herbert, Vera e Fernando.

Quando comecei o doutorado, em 2007, vindo de um Mestrado na Física de Materiais, não imaginava a sorte que tive de ser acolhido em um grupo tão solícito, ativo e solidário quanto o EnLight. Sem o apoio dos membros do grupo, atuais e passados, a jornada teria sido muito mais difícil. Agradeço ao Wallon, Leo, Pablo, Raphael, Zé Geraldo, Bárbara, Rafael, Eliza, Dudu, Mateus e Marco Túlio pela amizade e discussões sempre muito proveitosas. Ao Mateus e Bárbara agradeço também pela ajuda com o \LaTeX para que a tese não saísse muito feia. Agradeço também ao Álvaro pelo trabalho na eletrônica de detecção e ao Prof. Nivaldo Speziali pelas fendas que utilizei no trabalho.

Aos professores Carlos Monken, Marcelo França Santos e Marcelo Terra Cunha, muito obrigado não só pela disposição com que sempre me receberam quando tive dúvidas, que não foram poucas, mas por trabalharem duro para

criar um ambiente de crescimento acadêmico. Além disso, agradeço aos Marcelos pela primeira Escola e Workshop de Informação Quântica de Paraty, que foi meu primeiro evento da área. Não poderia ter tido um começo melhor.

Muito obrigado aos meus amigos e colegas de laboratório, com quem convivi durante pelo menos parte dos quatro anos de trabalho. Agradeço ao Olavo, que me recebeu no laboratório e me ajudou a perder o medo de ir pra mesa e enfrentar o experimento, ao Ivan, Juliana, Mariana, Alejandra, Breno e Wanderson, que junto com o Olavo sempre estiveram lá para ouvir resmungos, emprestar parafusos, compartilhar cafés e idéias. Guardo um obrigado especial ao Marcos Aurélio, Zé Ferraz e Lucas. Ninguém faz ciência sozinho e a ajuda de vocês foi indispensável!

Do outro lado do Atlântico, *ringrazio ai Professori Paolo Mataloni e Fabio Sciarrino, la Dottoressa Eleonora Nagali, Simone Felicetti e a tutti gli studenti e studentesse del G21, che mi hanno accolto e aiutato tantissimo a Roma. Grazie amici!*

Agradeço ao Sebastião, meu orientador, que me aceitou mesmo vindo de uma área distante e me ajudou durante os quatro anos, ensinando o valor da independência e do trabalho em grupo, a importância de seguir a intuição física e também de sentar e fazer as contas, aguentou as chuvas de emails e teve paciência com a minha ansiedade. Agora a orientação termina, mas se transforma em colaboração.

Por fim, agradeço aos membros da banca, Professores Aldo Delgado, Paulo Nussenzveig, Carlos Monken, Reinaldo Viana e Marcelo França Santos, pelas observações que contribuíram para a melhoria na clareza da redação e especialmente da forma de expor as análises dos dados.

Esta tese teve apoio financeiro direto e indireto do CNPq, CAPES e FAPEMIG.

Resumo

Nos seus trinta anos de existência a Informação Quântica teve grande êxito em propor protocolos e algoritmos envolvendo sistemas quânticos de dois níveis, chamados de *qubits*. Mostrou-se a possibilidade de distribuição segura de chaves criptográficas e algoritmos quânticos capazes de resolver tarefas como a fatoração de grandes números com um ganho exponencial de velocidade em relação aos algoritmos clássicos. A maior parte das implementações, contudo, restringe-se a provas de princípio envolvendo poucos qubits, devido à dificuldade de escalabilidade dos sistemas utilizados.

Sistemas quânticos com mais de dois níveis, chamados de *qudits*, se apresentam como uma possibilidade de obter espaços de maior dimensão sem recorrer a um número muito elevado de qubits, reduzindo o número de partículas necessário para a implementação de protocolos em escalas relevantes. Além disso, pares emaranhados de qudits são mais resistentes a ruído que aqueles compostos por qubits e também se mostram mais adequados para a realização de experimentos que testem o caráter não-local e contextual da natureza, conforme previsto pela Mecânica Quântica.

Nesta tese relatamos a construção e caracterização de uma fonte de estados de quatro qudits. Utilizamos um laser de bombeamento pulsado e um cristal de KTiOPO_4 com inversão periódica de domínios (PPKTP) como fonte de pares de fótons, também chamados *bifótons*, por Conversão Paramétrica Descendente Espontânea (CPDE) tipo II, caso em que o par contém um fóton de polarização horizontal e um fóton de polarização vertical. Devido ao uso do laser pulsado e à alta eficiência de conversão do PPKTP, há grande probabilidade de um mesmo pulso de bombeamento produzir dois bifótons. Codificamos os qudits no modo de momento transversal dos fótons por meio de fendas múltiplas, gerando sistemas com 2, 3 e 4 níveis. Através de elementos ópticos lineares, colocados entre o PPKTP e as fendas, manipulamos a amplitude dos estados transversais dos bifótons incidentes sobre as fendas e, assim, as correlações quânticas entre os qudits após as fendas.

Fazendo uso de duas configurações de lentes, projetamos ora o campo próximo e ora o campo distante do PPKTP sobre as fendas, obtendo após

estas estados de qudits com propriedades muito distintas. No caso do campo próximo, observamos alto grau de emaranhamento entre os qudits, enquanto o campo distante produziu estados com baixo emaranhamento, próximo a um estado produto. Caracterizamos o estado dos pares de qudits gerados utilizando mapas de correlação de quarta ordem no campo elétrico dos fótons, obtidos através de medições em coincidência de fotocontagens no campo distante das fendas, projetado sobre o plano dos detectores por uma lente na configuração f - f .

Para correlações entre fótons com polarizações diferentes isolamos o sinal devido a fótons pertencentes a um mesmo bifóton via subtração da contribuição de fótons de bifótons distintos, obtida através de medições em coincidência de fótons com a mesma polarização. Estas últimas forneceram ao mesmo tempo comprovação da presença de dois pares de qudits gerados por um mesmo pulso e informação sobre o estado reduzido de um dos fótons do par de qudits, que pode ser utilizada para estimar o emaranhamento no par quando se supõe que o estado global é puro.

Concluimos que a manipulação da amplitude do campo dos bifótons antes da fenda é um método muito promissor para a geração controlada de estados de qudits. Acreditamos que amplitudes não-triviais, como a dos modos Hermite-Gaussianos ou ainda mais arbitrárias, geradas por moduladores espaciais de luz, podem ser explorados para obter estados ainda mais gerais do que os obtidos com perfis descritos por funções pares. Combinado ao uso de cristais com alta eficiência de CPDE, pode-se construir uma fonte útil para diversos protocolos de Informação Quântica, como comunicação segura entre muitas partes ou geração de estados de qudits que podem ser utilizados para simular a dinâmica quântica de cavidades, além de servir para testes do caráter não-local e contextual da natureza.

Abstract

During the past thirty years the field of Quantum Information has been very successful in proposing protocols and algorithms that involve two-level quantum systems known as *qubits*. It has been shown that cryptographic keys can be distributed securely using quantum resources and that quantum algorithms can solve tasks such as the factoring of large numbers with an exponential speedup over classical algorithms. Most implementations, however, are restricted to proof-of-concept experiments using few qubits, due to the difficulty of scaling the physical systems utilized.

Quantum systems with more than two levels, called *qudits*, present themselves as an alternative way of obtaining a space with large dimensionality without recurring to a large number of qubits. This reduces the number of particles necessary for implementing protocols in a scale that is relevant for practical applications. Additionally, pairs of entangled qudits are more robust against noise than their qubit counterparts and are also more adequate for experiments that test the non-local and contextual behavior of nature, as predicted by its description using Quantum Mechanics.

In this thesis we present the construction and characterization of a source of states of four qudits. We used a pulsed laser as pump for type-II Spontaneous Parametric Down Conversion (SPDC) to occur on a PPKTP, a KTiOPO_4 (KTP) crystal with a periodic ferroelectric domain inversion, a technique called *periodic poling*. In type-II SPDC a pair of photons, also called *biphoton*, is generated in which one has horizontal polarization while the other has vertical polarization. Due to the use of a pulsed pump beam and the high down-conversion efficiency of our PPKTP, the probability that a single pump pulse will originate two pairs of photons is high.

In order to generate qudits we used the multiple-slit implementation, meaning that a multiple slit was placed between the PPKTP and the detectors, encoding discrete qudit states onto the continuous transverse mode of the biphoton. Using double, triple and quadruple slits we produced, respectively, qubit, qutrit and ququart states. A system of lenses placed between the PPKTP and the slits manipulated the amplitude of the transverse biphoton state impinging on the slits and, thus, the quantum correlations between

qudits after the slits. By projecting either the near or far field of the crystal onto the slits, the lenses changed the characteristics of the biphoton amplitude function and allowed us to obtain either states with very high entanglement, in the case of the near field, or very low entanglement, in the case of the far field.

A lens in the f - f configuration between the plane of the slits and the plane of the detectors projected the far field of the slits, so we could observe conditional interference patterns. We detected the photons in coincidence as a function of the position of two detectors. These were used to generate maps of coincidences between two photons with different polarization and for two photons with the same polarization. The first case contains contributions from photons of a single pair and from photons from two different pairs, while the second case contains contributions from different pairs only. In order to isolate the single pair contribution on different-polarization coincidences, we removed the background component from photons of different pairs, given by the same-polarization coincidences. Besides serving to isolate the single-pair signal, same-polarization coincidences confirm the existence of two-pair events and give us information about the purity of the reduced state of a single photon, which is related to the degree of entanglement in a biphoton.

We conclude that manipulating the biphoton transverse amplitude is a promising technique for generating qudit states while controlling their entanglement and correlation properties, especially if more exotic transverse amplitudes are explored, such as Hermite-Gaussian pump beams or amplitudes engineered with a spatial light modulator. The use of high-efficiency SPDC sources allows for states of more than one biphoton, engineered using transverse amplitude manipulation, to be employed in many different protocols in Quantum Information, serving as sources of heralded pure or mixed states, or playing an important role in tests of the non-local and contextual nature of physical systems, as predicted by Quantum Mechanics.

Sumário

Resumo	i
Abstract	iii
Sumário	v
Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	ix
1 Introdução	1
1.1 Objetivos	3
1.2 A organização desta tese	3
2 Ferramentas teóricas	5
2.1 Conversão paramétrica descendente espontânea	5
2.1.1 Cristais com inversão periódica de domínios	12
2.1.2 Geração de quatro fótons	13
2.2 O perfil transversal de bifótons	14
2.2.1 Propagação de perfis transversais através de sistemas ópticos lineares	15
2.2.2 Os estados de fenda	18
2.3 Espaços discretos: qubits e qudits	20
2.3.1 Estados puros e estados mistos	21
2.4 Emaranhamento	23
2.4.1 Quantificando o emaranhamento bipartite em qubits .	24
2.4.2 A pureza de subsistemas emaranhados	27
2.4.3 Estados de Bell	30
3 Controle de correlações quânticas em qubits de fenda com quatro fótons	31
3.1 Motivação	31
3.2 Construindo um sub-espaço: a esfera de Bloch generalizada .	33

3.2.1	Manipulando α e φ	36
3.2.2	Mapeando as correlações	38
3.3	Implementação experimental	42
3.3.1	Fonte de estados	42
3.3.2	Aparato de detecção	47
3.4	Procedimento de aquisição de dados	50
3.4.1	Alinhamento	50
3.4.2	Mapeamento	52
3.5	Lidando com dois bifótons	54
3.6	Simulações	58
3.7	Resultados experimentais	64
3.7.1	Observando o envelope de difração	67
3.8	Análise e discussão	70
4	Extensão do controle de correlações quânticas para qudits de dimensões $d = 3$ e 4	75
4.1	Motivação	75
4.2	Indo além dos qubits: novas simetrias	76
4.3	Um quantificador de emaranhamento para qudits	84
4.4	Simulações	86
4.5	Resultados experimentais	90
4.6	Análise e discussão	96
5	Considerações finais e perspectivas	100
	Bibliografia	105
A	Cálculos detalhados de equações do Cap. 3	115
A.1	Concorrência	115
A.2	Pureza do estado parcial	117
A.3	Cálculo das probabilidades $P_{\mathcal{B}^+}(x_1, x_2)$ e $P_{\pi\pi}(x_1, x_2)$ de detecção no campo distante das fendas	118
B	Cálculo da propagação de uma onda eletromagnética através de um telescópio não-confocal	122

Lista de Figuras

2.1	Representação esquemática do processo de conversão paramétrica descendente espontânea.	6
3.1	Representação da esfera de Bloch generalizada que constitui o subespaço \mathcal{B}^+	35
3.2	Comportamento de $\mathcal{P}_{\pi,\pi}$ em função de $C_{\mathcal{B}^+}$	41
3.3	Esquema de implementação e caracterização de um estado de dois qubits no subespaço \mathcal{B}^+	43
3.4	Montagens ópticas para manipulação de estados de bifótons no subespaço \mathcal{B}^+	45
3.5	Comparação entre as funções $E(x_+)$ e $\zeta(x_-)$ no intervalo $ x_{\pm} \leq 120 \mu\text{m}$	47
3.6	Esquema do aparato de detecção.	48
3.7	Montagem de acoplamento do detector à lente	49
3.8	Descrição esquemática do processo de varredura para geração dos mapas de detecção em coincidência.	53
3.9	Mapa simulado para $\alpha = 0^\circ$ e $\varphi = 0^\circ$	60
3.10	Mapa simulado para $\alpha = 90^\circ$ e $\varphi = 0^\circ$	61
3.11	Mapa simulado para $\alpha = 180^\circ$ e $\varphi = 0^\circ$	62
3.12	Mapa simulado para $\alpha = 90^\circ$ e $\varphi = 90^\circ$	63
3.13	Mapas na configuração de imagem entre cristal e fenda dupla. Passo de $100 \mu\text{m}$ e tempo de aquisição de dados de 25 s.	66
3.14	Mapas na configuração de Fourier entre cristal e fenda dupla. Passo de $100 \mu\text{m}$ e tempo de aquisição de dados de 25 s.	67
3.15	Mapas na configuração de imagem entre cristal e fenda dupla. Passo de $500 \mu\text{m}$ e tempo de aquisição de dados de 25 s.	68
3.16	Mapas na configuração de Fourier entre cristal e fenda dupla. Passo de $500 \mu\text{m}$ e tempo de aquisição de dados de 25 s.	69
3.17	Ilustração do efeito do ruído sobre a estrutura de coincidências $\pi\pi$ de um mapa simulado.	72

4.1	Simulação de mapas de coincidência HV e $\pi\pi$ para estados do tipo $ \Psi_+\rangle_3$, nos pólos $\alpha = 0, \alpha = \pi/2$ e $\alpha = \beta = \pi/2$	87
4.2	Simulação de mapas de coincidência HV para estados nos pólos $\epsilon = 0, \epsilon = \pi/2, \theta = 0, \epsilon = \theta = \pi/2, \nu = 0$ e $\epsilon = \theta = \nu = \pi/2$ para estados do tipo $ \Psi_-\rangle_4$	88
4.3	Simulação de mapas de coincidência $\pi\pi$ para estados nos pólos nos pólos $\epsilon = 0, \epsilon = \pi/2, \theta = 0, \epsilon = \theta = \pi/2, \nu = 0$ e $\epsilon = \theta = \nu = \pi/2$ para estados do tipo $ \Psi_-\rangle_4$	89
4.4	Mapas na configuração de imagem entre cristal e fenda tripla. Passo de $100 \mu\text{m}$ e tempo de aquisição de dados de 30 s.	92
4.5	Mapas na configuração de Fourier entre cristal e fenda tripla. Passo de $100 \mu\text{m}$ e tempo de aquisição de dados de 30 s.	93
4.6	Mapas na configuração de imagem entre cristal e fenda quádrupla. Passo de $200 \mu\text{m}$ e tempo de aquisição de dados de 60 s.	94
4.7	Mapas na configuração de Fourier entre cristal e fenda quádrupla. Passo de $200 \mu\text{m}$ e tempo de aquisição de dados de 25 s.	95
4.8	Figura comparativa da largura e espaçamento das fendas dupla, tripla e quádrupla, em escala.	96
4.9	Comparação dos mapas simulados para coincidências HV usando fenda tripla para os casos $\zeta = 1$ e $\zeta = 0.45$	98
4.10	Comparação dos mapas simulados para coincidências HV usando fenda quádrupla para os casos $\zeta = 1$ e $\zeta = 0.45$	99
B.1	Configuração esquemática de telescópio não-confocal.	123

Lista de Tabelas

4.1	Coeficientes de parametrização para estados de qutrits e suas respectivas normalizações.	78
4.2	Coeficientes de parametrização para estados de ququarts e suas respectivas normalizações.	80
4.3	Emaranhamento do estado de dois qutrits para ângulos especiais.	85
4.4	Emaranhamento do estado de dois ququarts para ângulos especiais.	85

Introdução

Ao longo da segunda metade do século XX e da primeira década do século XXI, os campos da Óptica Quântica e da Informação Quântica nasceram e floresceram, levando ao estudo da formação de imagens quânticas [1–6], à demonstração de protocolos de teleportação [7] e clonagem de estados quânticos [8–17], troca de emaranhamento [18–20], distribuição segura de chaves criptográficas [21–24], codificação densa [25] e a implementações de modelos de computação quântica [26–29], chegando à integração em circuitos ópticos microfabricados [30–32].

Recentemente, estados com D níveis, chamados de *qudits*, têm ganhado relevância em aplicações como protocolos de Informação Quântica [33–35] e também em testes de propriedades fundamentais da natureza, como a não-localidade [36–38] e a contextualidade [39, 40], previstas pela Mecânica Quântica, sendo um estímulo à sua implementação. Como o espaço de polarização, o mais facilmente acessível e manipulável, está limitado a um sistema de dois níveis, implementações de qudits fotônicos devem recorrer à codificação de um qudit usando muitas partículas ou ao uso de outros graus de liberdade dos fótons.

O uso de graus de liberdade alternativos tem como vantagens permitir

que um único fóton corresponda a um qudit e também a facilidade de se obter estados com dimensão maior, deixando a polarização, grau de liberdade mais comumente utilizado para codificar sistemas de dois níveis, ou *qubits*, livre para ser utilizada como grau de liberdade auxiliar ou para codificar mais sistemas quânticos usando o mesmo número de fótons. Em particular, destacamos a codificação de qudits usando fótons de pares gerados por Conversão Paramétrica Descendente Espontânea (CPDE), chamados de *bifótons*, usando graus de liberdade como o momento transversal, por meio de fendas que codifiquem o perfil transversal do par em um espaço discreto [41–44], ou o momento angular orbital, via hologramas ou cristais líquidos [35, 45, 46] colocados nos caminhos dos fótons.

Paralelamente, houve grande progresso na geração de estados de muitas partículas, especialmente visando a implementação de modelos de computação quântica e também protocolos envolvendo muitas partes [47–58]. Uma das frentes de avanço na área foi o desenvolvimento das técnicas de crescimento de cristais com inversão periódica de domínio, que permitiu obter fontes de CPDE com alta eficiência, capazes de gerar dois pares de fótons a partir de um mesmo pulso de bombeamento.

Os trabalhos que apresentaremos nesta tese representam a confluência dos campos da Informação Quântica, pois lidam com estados de muitos qubits e qudits e buscam caracterizá-los a partir de medidas de emaranhamento, e da Óptica Quântica e de Fourier, pois a manipulação das correlações nos estados é feita utilizando-se métodos de Óptica de Fourier para controlar a amplitude do campo elétrico dos fótons emitidos por uma fonte não-linear. Em termos conceituais, isto significa que lidamos, antes das fendas, com o processo de CPDE e com a propagação de ondas eletromagnéticas no espaço livre e através de lentes, fazendo uso dos métodos da Óptica de Fourier para calcular os coeficientes do estado dos fótons após as fendas. Estes coeficientes dependem da evolução do campo elétrico e da função de casamento de fases

do par, do cristal até o plano das fendas passando pelo sistema óptico. Após as fendas, uma vez medidas as correlações condicionais à posição dos detectores, lidamos com estados bipartidos de qudits e a dualidade entre a pureza do estado de uma das partes e o emaranhamento existente entre elas [2, 3].

1.1 Objetivos

Considerando o panorama apresentado para o estado arte nos campos da Informação Quântica e da Óptica Quântica, vemos que há demanda por meios simples, robustos e eficientes de produzir estados quânticos específicos e, também, a tendência de propostas de protocolos e experimentos realizados com número cada vez maior de fótons. Os trabalhos aqui apresentados tiveram por objetivo ir ao encontro deste movimento, tomando como base os trabalhos desenvolvidos no laboratório de Óptica Quântica da UFMG pelo Prof. Leonardo Neves [59] em seu doutorado e por Peeters *et al.*[60], para gerar e caracterizar qubits e qudits codificados no perfil transversal dos fótons via fendas duplas e múltiplas em estados cujas correlações quânticas possam ser manipuladas por meio de elementos ópticos lineares entre a fonte e as fendas.

1.2 A organização desta tese

Este trabalho encontra-se dividido em quatro capítulos, além desta Introdução. O Capítulo 2 procura apresentar ao leitor as ferramentas teóricas necessárias à compreensão dos trabalhos experimentais que serão discutidos nos Capítulos 3 e 4. Buscamos abordar os assuntos em um grau de profundidade adequado para um bom entendimento sem, ao mesmo tempo, tornar a leitura desnecessariamente cansativa. Caso o leitor deseje aprofundar-se em um dado tema, destacamos ao longo do texto referências canônicas nas

áreas da Informação e Óptica Quântica, nas quais este trabalho se insere. Alguns elementos teóricos mais específicos a um único trabalho, contudo, foram colocados no Capítulo ao qual pertencem.

No Capítulo 3, apresentamos um experimento de controle das correlações quânticas em estados de fenda com dimensão 2, ou seja, qubits. Este controle é realizado a partir da manipulação do perfil transversal da amplitude do campo elétrico e da função de casamento de fases do bifóton, do cristal ao plano das fendas, como proposto por Peeters *et al.* [60], tomando por base os trabalhos de Monken *et al.* [61] e Neves *et al.* [42]. Utilizamos dois pares de fótons e um processo de caracterização que faz uso da polarização como um grau de liberdade auxiliar, para que possamos mapear as correlações entre fótons de um mesmo par e de pares distintos. As características destes mapas dependem dos parâmetros que definem o estado dos pares de qubits, de forma que a comparação a mapas simulados pode ser utilizada para encontrar os parâmetros e, assim, caracterizar o estado gerado.

O Capítulo 4 apresenta uma extensão do trabalho apresentado no Cap. 3, estabelecendo uma descrição para os estados de qudits semelhante àquela utilizada para qubits. Utilizamos o mesmo método de detecção apresentado no Capítulo anterior para mapear as correlações, separando a contribuição de fótons vindos de pares independentes por meio da polarização. Conhecendo as características das fendas utilizadas na fonte de estados, somos capazes de gerar simulações para os mapas e, ao ajustar os parâmetros da simulação aos parâmetros observados experimentalmente, caracterizar o emaranhamento entre os fótons.

Por fim, apresentamos no Capítulo 5 as considerações finais a respeito dos experimentos, discutindo seus possíveis desdobramentos em trabalhos que construam protocolos ou testes de propriedades da Mecânica Quântica sobre a base de uma fonte de dois pares de qudits cujas correlações podem ser manipuladas deliberadamente.

Ferramentas teóricas

O propósito principal deste capítulo é equipar o leitor, especialmente aquele que esteja se familiarizando com a área, com as ferramentas teóricas necessárias para entender os trabalhos experimentais que serão detalhados nos capítulos seguintes. Cada um dos tópicos que discutiremos abaixo é em si uma área extensa e, por este motivo, nos limitaremos a apresentar apenas os argumentos e resultados essenciais para cumprir tal propósito, deixando aprofundamentos como referências e sugestões de leitura.

O texto está dividido em seções, agrupando informações sobre temas pertinentes a todos os experimentos. Os temas abordados são distintos o suficiente para que cada uma possa ser lida e re-lida com o mínimo de dependência das outras, de forma a facilitar consultas e a referência a partes específicas deste capítulo nos subsequentes.

2.1 Conversão paramétrica descendente espontânea

A conversão paramétrica descendente espontânea, ou CPDE, é um fenômeno quântico que tem origem na interação não-linear entre um campo eletromagnético, chamado campo de bombeamento, e o meio material, geralmente um

cristal birrefringente, no qual ele se propaga. Quando o campo é intenso o suficienteⁱ e o material apresenta coeficientes adequados no seu tensor de susceptibilidade dielétrica não-linear $\chi_{ijk}^{(2)}$, é possível que o acoplamento entre campo e material resulte na aniquilação de um fóton de bombeamento e criação de dois novos fótons, chamados *signal* (s) e *idler* (i), obedecendo a conservação de energia, tal que $\hbar\omega_s + \hbar\omega_i = \hbar\omega_p$, com p designando o bombeamento, *pump* em inglês. Nesta tese tratamos de fótons gêmeos, nome comumente dado aos dois fótons resultantes da CPDE, degenerados em frequência, ou seja, $\hbar\omega_{CPDE} = \hbar\omega_p/2$. Apresentaremos a seguir um tratamento adaptado de [62]ⁱⁱ.

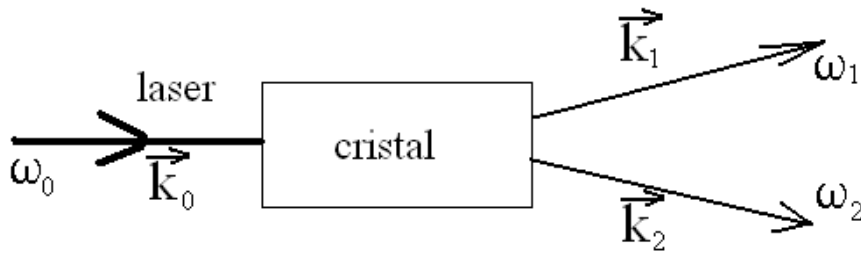


Figura 2.1: Representação esquemática do processo de conversão paramétrica descendente espontânea, no qual um fóton com vetor de onda \vec{k}_0 e frequência ω_0 dá origem a dois fótons, um com vetor de onda \vec{k}_1 e frequência ω_1 e outro com vetor de onda \vec{k}_2 e frequência ω_2 . Os fótons gerados estão sujeitos à condição de casamento de fases $\zeta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_0)$ e à condição de conservação de energia, $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$. Imagem retirada de [68]

O Hamiltoniano que representa o processo de interação não linear entre um campo de bombeamento $E_p(\mathbf{r}, t)$ e um meio material, para o caso da

ⁱEmbora a CPDE seja geralmente obtida utilizando-se um laser intenso, recentemente foi reportada a realização de conversão paramétrica descendente espontânea com um campo de bombeamento composto de fótons produzidos por outro processo de CPDE, em vez de um feixe intenso [58].

ⁱⁱUma discussão detalhada sobre a CPDE pode ser encontrada em [63, 64]. Para o tratamento do caso de feixes de bombeamento pulsados aconselhamos [65-67].

CPDE, é escrito como

$$\mathcal{H}_I = \frac{1}{2} \int_V d\mathbf{r} \mathbf{E}_p(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{P}_{nl}^{(2)}(\mathbf{r}, t), \quad (2.1)$$

sendo $\mathbf{P}_{nl}^{(2)}(\mathbf{r}, t)$ o termo da polarização não-linear do material relacionado com a susceptibilidade elétrica não-linear de segunda ordem $\chi_{ijk}^{(2)}$:

$$\mathbf{P}_{nl}^{(2)} = \sum_{i,j,k} \int_0^{+\infty} dt' \int_0^{+\infty} dt'' \chi_{ijk}^{(2)}(t', t'') E_j(\mathbf{r}, t - t') E_k(\mathbf{r}, t - t''). \quad (2.2)$$

Este tensor está associado às características do material, como sua composição e estrutura cristalina e é um fator importante para a escolha de que cristais são adequados para CPDE e como estes devem ser cortados, em relação aos seus eixos cristalográficos. Os campos que surgem na Eq. (2.2) são internos ao material e darão origem aos campos convencionalmente chamados de *signal* e *idler*. Sobre o campo, é importante conhecer duas relações: a primeira é a expressão

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^+(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^-(\mathbf{r}, t), \quad (2.3)$$

em que o campo é decomposto em duas componentes de onda plana, de forma que

$$\mathbf{E}^+(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}} \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \sigma} \varepsilon_{\mathbf{k}, \sigma} \alpha_{\mathbf{k}, \sigma} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] = [\mathbf{E}^-(\mathbf{r}, t)]^*, \quad (2.4)$$

para um campo clássico. A Eq. (2.4), na verdade, não representa apenas uma onda plana, mas toda uma coleção de ondas planas, cada uma com seu vetor de onda \mathbf{k} e polarização dada pelo vetor resultante da combinação dos vetores unitários de direção $\mathbf{e}_{\mathbf{k}, \sigma}$ com $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ formando uma base ortogonal ao vetor \mathbf{k} específico. Estas ondas planas são distribuídas de acordo com a função de amplitude $\alpha_{\mathbf{k}, \sigma}$. Para a quantização do campo, faz-se a substituição $\alpha_{\mathbf{k}, \sigma} \rightarrow \mathbf{a}_{\mathbf{k}, \sigma}$, onde $\mathbf{a}_{\mathbf{k}, \sigma}$ é o operador de aniquilação de um fóton no modo definido pelo vetor de onda \mathbf{k} e pelo índice de polarização σ . A quantização é feita em um volume \mathcal{V} . Por fim, $\varepsilon_{\mathbf{k}, \sigma}$ é dado por

$$\varepsilon_{\mathbf{k}, \sigma} = \sqrt{\hbar \omega(\mathbf{k}, \sigma) / 2 \varepsilon_0 n^2(\mathbf{k}, \sigma)}, \quad (2.5)$$

sendo $n(\mathbf{k}, \sigma)$ o índice de refração do meio material para polarização σ e propagação com vetor de onda \mathbf{k} .

Após desenvolver o produto $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{P}_{nl}^{(2)}(\mathbf{r}, t)$, chega-se a

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_I &= \frac{1}{2\mathcal{V}^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}_s, \sigma_s} \sum_{\mathbf{k}_i, \sigma_i} \sum_{\mathbf{k}_p, \sigma_p} \mathbf{a}_{\mathbf{k}_s, \sigma_s}^\dagger \mathbf{a}_{\mathbf{k}_i, \sigma_i}^\dagger \mathbf{a}_{\mathbf{k}_p, \sigma_p} \exp[i(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t] \chi_{ijk}^{(2)} \\ &\times (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_s, \sigma_s}^*)_i (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_i, \sigma_i}^*)_j (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_p, \sigma_p})_k \int_V \exp[-i(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p) \cdot \mathbf{r}] + H.c. \quad (2.6) \end{aligned}$$

Agora que conhecemos como se dá o processo de interação, podemos encontrar o estado quântico resultante. Este será escrito, para um tempo t após o início da interação, como

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= U(t)|\psi(0)\rangle \\ &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau \hat{\mathcal{H}}_I(\tau)\right) |\alpha\rangle_p |vac\rangle_{s,i}, \quad (2.7) \end{aligned}$$

onde fizemos $|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle_p |vac\rangle_{s,i}$ por não haver fótons nos modos s e i antes da interação, existindo apenas o campo de bombeamento, que é considerado como estando em um estado coerente $|\alpha\rangle_p$. O passo seguinte é expandir a exponencial do operador de evolução temporal $U(t)$. Consideraremos uma interação muito fraca, de forma que apenas o termo constante e o termo linear em $\hat{\mathcal{H}}_I(t)$ serão considerados:

$$|\psi(t)\rangle \approx \left[\mathbb{I} - \frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau \hat{\mathcal{H}}_I(\tau) \right] |\alpha\rangle_p |vac\rangle_{s,i}, \quad (2.8)$$

de forma a chegarmos ao estado final (não-normalizado)

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &\approx |vac\rangle + \frac{Vt}{2i\hbar\mathcal{V}^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}_s, \sigma_s} \sum_{\mathbf{k}_i, \sigma_i} \sum_{\mathbf{k}_p, \sigma_p} \tilde{\alpha}(\mathbf{k}_p, \sigma_p) \chi_{ijk}^{(2)} (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_s, \sigma_s}^*)_i (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_i, \sigma_i}^*)_j (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_p, \sigma_p})_k \\ &\times \text{sinc}[(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t/2] \exp[i(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t/2] \\ &\times \prod_m \text{sinc}[(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p)_m l_m / 2] \exp[-i(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p)_z l_z / 2] |\mathbf{k}_s, \sigma_s\rangle |\mathbf{k}_i, \sigma_i\rangle, \quad (2.9) \end{aligned}$$

do qual omitiremos o estado do feixe de bombeamento, que, por ser aproximado por um estado coerente, é um auto-estado do operador aniquilação

e permanece inalterado. A amplitude $\tilde{\alpha}(\mathbf{k}_p, \sigma_p)$ é o auto-valor do estado do campo de bombeamento e corresponde à expansão do perfil transversal do feixe de bombeamento, $\alpha(x)$, em ondas planas [63]. Indicamos por l_m a dimensão do cristal nas direções $m = x, y, z$ e a função $\text{sinc}(x)$ é definida como

$$\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}. \quad (2.10)$$

O estado final, como apresentado na Eq. (2.9) ainda pode ser melhorado, para facilitar sua manipulação nas situações mais comuns em experimentos envolvendo fontes de CPDE. Utilizaremos as mesmas aproximações listadas por Walborn, Monken, Pádua e Souto Ribeiro em [62]:

1. Assim como em [69], supomos que a largura espectral dos filtros de interferência é muito menor do que o inverso do tempo t da Eq. (2.7). Assim, a função $\text{sinc}[(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t/2] \exp[i(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t/2]$ pode ser aproximada por $\delta(\omega_s + \omega_i - \omega_p)$;
2. Os fótons resultantes da CPDE apresentam dispersão espectral, com frequências centrais $\bar{\omega}_{\{s;i\}}$, estreita o suficiente para que os efeitos de dispersão no meio não-linear possam ser desprezados. Esta aproximação se justifica pelo uso de filtros de frequência estreitos na frente dos detectores, efetivamente removendo do experimento a parcela de fótons que não satisfaça essa condição;
3. O tensor $\chi_{ijk}^{(2)}$ varia lentamente para \mathbf{k}_j , de forma que pode ser considerado constante nos intervalos relevantes para os vetores de onda;
4. Define-se a direção de propagação do feixe de bombeamento como z e assume-se que o cristal é um paralelepípedo cujas dimensões nas direções transversais são grandes o suficiente para que $\prod_m \text{sinc}[(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p)_m l_m / 2]$ possa ser aproximado por $\delta(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_p) \text{sinc}[(k_{s;z} + k_{i;z} -$

$k_{p;z})L/2]$, sendo L o comprimento do cristal na direção de propagação do feixe de bombeamento. Define-se \mathbf{q} como sendo a componente transversal de \mathbf{k} e k_z como a componente longitudinal. Assim, podemos decompor \mathbf{q} em q_x e q_y .

5. O volume de quantização \mathcal{V} é grande o suficiente para que se possa substituir os somatórios sobre os vetores de onda por integrais, ou seja, o volume é grande o suficiente para que haja um contínuo de possíveis vetores de onda. Isto faz com que $\tilde{\alpha}(\mathbf{k}_p, \sigma_p)$ seja o espectro angular do feixe de bombeamento;
6. O feixe de bombeamento está polarizado na direção extraordinária do cristal e assume-se que os cristais utilizados são birrefringentes negativos, ou seja, há apenas um eixo óptico e o feixe ordinário se propaga mais lentamente que o feixe extraordinário [70].

A condição imposta pelo item 4 é conhecida como casamento de fases, pois é imposta sobre os vetores de onda $\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_p$, que devem se propagar em um meio birrefringente mantendo uma relação de fases entre os campos que sustente o efeito da CPDE. Esta relação dá origem à função de casamento de fases [60]:

$$\tilde{\xi}(\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_i) = \text{sinc}\left(\phi + \frac{L(\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_i)^2}{(8n_{eff}\bar{\omega}/c)}\right), \quad (2.11)$$

para um cristal de comprimento L , índice de refração efetivo n_{eff} para fótons gêmeos com frequência $\bar{\omega}$. O índice de refração efetivo é utilizado porque tratamos, nesta tese, de conversão paramétrica descendente espontânea em que os dois fótons são gerados com polarizações ortogonais, o que se convencionou chamar de CPDE tipo II.

Introduzimos na Eq. (2.11) duas importantes notações que seguirão ao longo do texto. A primeira é o uso do til como marca para indicar que uma função pertence ao espaço de momento. A outra é o uso da letra q para indicar vetores de onda transversais, ou seja, restritos ao plano x-y. Neste

caso, \mathbf{q}_s e \mathbf{q}_i são as componentes transversais do vetor de onda para os fótons *signal* e *idler* gerados no processo de CPDE.

Finalmente, pode-se chegar a um estado no espaço de momento transversal para os dois fótons gerados na CPDE:

$$|\psi\rangle = \sqrt{1 - \eta^2}|vac\rangle + \eta \sum_{\sigma_s, \sigma_i} \iint \tilde{\Phi}_{\sigma_s, \sigma_i}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) |\mathbf{q}_s, \sigma_s\rangle |\mathbf{q}_i, \sigma_i\rangle d\mathbf{q}_s d\mathbf{q}_i, \quad (2.12)$$

onde

$$\tilde{\Phi}_{\sigma_s, \sigma_i}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i, \omega_s, \omega_i) = \tilde{\alpha}(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) \tilde{\zeta}(\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_i). \quad (2.13)$$

O segundo termo do estado será resumido como $\eta|\Psi_{2ph}\rangle$. O primeiro termo de $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\alpha}(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i)$, é o espectro angular do feixe de bombeamento, como resultado da aproximação 5, enquanto o segundo termo é a função de casamento de fases, apresentada na Eq. (2.11). A constante de normalização η incorpora termos relacionados à eficiência do acoplamento entre o bombeamento e o meio não-linear, ou seja, $\chi_{ijk}^{(2)}$, além da raiz quadrada da potência de bombeamento. As polarizações σ_s e σ_i são tais que $\sigma_s \neq \sigma_i$ cada termo da soma, já que trabalharemos aqui com CPDE do tipo II. Como, a rigor, não é certo que as funções $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\zeta}$ possam ser fatoradas em termos de funções que dependam exclusivamente do fóton *s* e do fóton *i*, os estados não são, necessariamente, fatoráveis. Por isso, é comum se referir ao conjunto dos dois como um bifóton. Este bifóton será a base dos trabalhos que apresentaremos nesta tese.

Usando a transformação $|q_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iq_i x_j} |x_j\rangle dx_j$, para $j = \{s, i\}$ [4] na Eq. (2.12), o estado de dois fótons pode ser escrito nas variáveis espaciais da seguinte forma:

$$|\Psi\rangle_{2ph} = \sum_{\sigma_s, \sigma_i} \iint \Phi(\boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}_i) |1\rho_s, \sigma_s\rangle |1\rho_i, \sigma_i\rangle d\boldsymbol{\rho}_s d\boldsymbol{\rho}_i. \quad (2.14)$$

A passagem de $\tilde{\Phi}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)$ para $\Phi(\boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}_i)$ é feita por

$$\Phi(\boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}_i) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Phi}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) \exp[i(\mathbf{q}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_s + \mathbf{q}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i)] d\mathbf{q}_s d\mathbf{q}_i. \quad (2.15)$$

Sem perda de generalidade, trataremos o caso unidimensional considerando que $\tilde{\Phi}(q_s, q_i) = \tilde{E}(q_s + q_i)\tilde{\zeta}(q_s - q_i)$ e aplicando uma mudança de variáveis $q_{\pm} = q_1 \pm q_2$, de forma a poder reescrever a Eq. (2.15) como

$$\begin{aligned}\Phi(x_s, x_i) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(q_+) \tilde{\zeta}(q_-) \exp[i(q_+ x_+ + q_- x_-)] dq_+ dq_- \\ &= E(x_+) \zeta(x_-),\end{aligned}\quad (2.16)$$

onde definimos $x_{\pm} = (x_s \pm x_i)/2$.

Logo, o estado de dois fótons ao sair do cristal nos modos espaciais transversais x_s e x_i em uma dimensão é

$$|\Psi\rangle_{2ph} = \sum_{\sigma_i, \sigma_s} \iint \Phi(x_s, x_i) |1x_s, \sigma_s\rangle |1x_i, \sigma_i\rangle dx_s dx_i, \quad (2.17)$$

com $\Phi(x_s, x_i)$ definido na Eq. (2.16).

2.1.1 Cristais com inversão periódica de domínios

Proposta em 1962 por Armstrong *et al.* [71] como estratégia para compensar a degradação do casamento de fases devido à propagação prolongada das ondas em um meio birrefringente, a inversão periódica de domínios (IPD) começou a tornar-se realidade no fim da década de 1990 [72, 73] e consiste em crescer um cristal ferroelétrico sobre o qual se aplicam diferenças de potenciais muito altas e com uma inversão periódica, de forma a forçar a formação de domínios ferroelétricos com eixo óptico periodicamente invertido. Atualmente, o método de casamento de fases via modulação do acoplamento não-linear é chamado de *quase-casamento de fases*ⁱⁱⁱ [68, 74, 75]. Dentre os cristais mais utilizados para inversão periódica de domínio está o KTiOPO_4 , também conhecido como KTP [76]. Este é o cristal que utilizamos em nossos trabalhos.

A introdução de uma inversão periódica no sinal da susceptibilidade não-linear $\chi^{(2)}$ pode ser entendida como um vetor de onda adicional introduzido

ⁱⁱⁱDo inglês *quasi-phase matching*.

na condição de casamento de fases, que compensa a defasagem devido à propagação em um cristal longo e cujo eixo óptico não está alinhado de forma a promover o casamento de fases convencional. Assim, podem-se acessar susceptibilidades não-lineares maiores ao mesmo tempo que se aumenta a interação entre o meio e o bombeamento, já que o cristal pode ser mais longo.

2.1.2 Geração de quatro fótons

Unindo a alta eficiência de acoplamento apresentada por cristais do tipo IPD e um feixe de bombeamento pulsado, o termo quadrático no Hamiltoniano na expansão do operador evolução temporal passa a ser relevante, de forma que

$$U(t) = 1 + \int \frac{1}{i\hbar} \mathcal{H}(t) dt + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{i\hbar} \right)^2 \iint \mathcal{H}(t') \mathcal{H}(t'') dt' dt''. \quad (2.18)$$

Este termo corresponde à geração de dois pares de fótons em uma janela muito curta de tempo, da ordem do tempo necessário para o pulso atravessar o cristal, ou seja, da ordem de picosegundos. Como a janela de detecção de coincidências nos experimentos que apresentaremos tem 1 nanosegundo de duração, estes eventos podem ser registrados como coincidências entre quatro detectores diferentes.

O estado resultante da aplicação deste novo operador $U(t)$ será

$$|\Psi\rangle = \sqrt{1 - \eta^2 - \frac{\eta^4}{4}} |vac\rangle + \eta |\Psi_{2ph}\rangle + \frac{\eta^2}{2} |\Psi_{2ph}\rangle^A |\Psi_{2ph}\rangle^B, \quad (2.19)$$

ou seja, há a possibilidade de geração de um único bifóton ou de um estado produto de dois bifótons. Na Eq. (2.19) os modos de polarização horizontal e vertical se encontram no estado de vácuo no primeiro termo, populados com um fóton em cada modo no segundo termo e com dois fótons cada no segundo termo. Utilizamos os índices A e B para lembrar que os dois pares não estão correlacionados e representam duas cópias de um mesmo estado de dois fótons.

2.2 O perfil transversal de bifótons

É comum utilizar a aproximação paraxial quando se descreve tanto o bifóton gerado por CPDE quanto o seu feixe de bombeamento. Nesta aproximação, é possível desacoplar a direção de propagação, definida como z das direções transversais, x e y . O perfil transversal do bifóton é, essencialmente, um grau de liberdade de variáveis contínuas, ao contrário da polarização e do momento angular orbital, embora exista, como veremos adiante, a possibilidade de codificar um espaço discreto no perfil transversal, com o auxílio de fendas.

A maior parte dos estudos em Óptica Quântica que têm como objeto o perfil transversal se encaixa na área do Imageamento Quântico^{iv}. É o caso dos experimentos de formação de imagens utilizando correlações entre fótons gerados por CPDE. Há experimentos para o caso de um objeto no caminho do feixe de bombeamento, um objeto no caminho de um dos fótons emaranhados e também experimentos envolvendo ganhos de visibilidade em relação a fontes de iluminação tradicionais, com a possível aplicação em técnicas de imagem com fontes de baixa intensidade e alta resolução [1, 5, 6, 61, 77].

Outro ramo, mais recente, busca transformar o espaço de variáveis contínuas em um espaço de variáveis discretas, introduzindo uma barreira opaca no caminho dos fótons gêmeos. Assim, o perfil transversal destes fica restrito e pode-se chegar a um sistema com comportamento muito semelhante a um com grau de liberdade genuinamente discreto. Como a barreira é, geralmente, um conjunto de fendas retangulares, chamaremos este tipo de estado de *estado de fenda* [41–44, 59], que serão discutidos detalhadamente na seção 2.2.2.

^{iv}*Quantum Imaging* em inglês, trata da formação de imagens utilizando campos com correlações quânticas.

2.2.1 Propagação de perfis transversais através de sistemas ópticos lineares

Antes de iniciarmos o tratamento da propagação, devemos esclarecer as definições que utilizamos nesta tese para algumas funções e operações. A transformada de Fourier $G(q) = \mathcal{F}[g(x)]$ e a transformada inversa $g(x) = \mathcal{F}^{-1}[G(q)]$ são definidas respectivamente como

$$G(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-ixq]g(x)dx, \quad (2.20)$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[ixq]G(q)dq. \quad (2.21)$$

Começemos por apresentar a forma como a amplitude de um campo, representada aqui como $U(x, y; z)$ se propaga no espaço livre. Para tanto, recorreremos ao seu *Espectro Angular*^v $\tilde{U}(q_x, q_y; z)$,

$$\tilde{U}(q_x, q_y; z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_{-\infty}^{+\infty} U(x, y; z) \exp[-i(q_x x + q_y y)] dx dy, \quad (2.22)$$

ou seja, da transformada de Fourier de $U(x, y; z)$. Separamos a direção de propagação z das direções transversais para no argumento da função para lembrar que trabalhamos com funções transversais propagadas até de um ponto z_i a um ponto z_f . Utilizando a definição de $\mathcal{F}^{-1}[\tilde{U}]$, Eq. (2.21), vemos que o espectro angular pode ser considerado como a função que gera os coeficientes de uma decomposição de $U(x, y)$ em termos de ondas planas [78], dando significado físico à função $\tilde{U}(q_x, q_y; z)$.

Desejamos agora, utilizando o espectro angular, propagar um campo de um ponto $z = 0$ até um ponto z . A partir da definição (2.22) e utilizando a equação de Helmholtz para a propagação do espectro angular no espaço

^vAdotaremos aqui uma notação mista entre a apresentada por Goodman em [78] e a convenção de representar funções do espaço de momento que sejam a transformada de Fourier de funções do espaço de posição utilizando um til sobre a mesma letra.

livre, chegamos a

$$\begin{aligned}\tilde{U}(q_x, q_y; z) &= \tilde{U}(q_x, q_y; 0) \exp\left(ikz\sqrt{1 - \left(\frac{q_x}{k}\right)^2 + \left(\frac{q_y}{k}\right)^2}\right) \\ &= \tilde{U}(q_x, q_y; 0)e^{ikz} \exp\left(-i\frac{z}{2k}(q_x^2 + q_y^2)\right),\end{aligned}\quad (2.23)$$

onde assumimos que q_x/k e q_y/k são muito pequenos, o que é consistente com a hipótese de propagação paraxial que utilizamos para descrever o feixe de bombeamento da CPDE. Esta expressão mostra o poder do tratamento via espectro angular, pois a amplitude do campo no espaço de posições em um dado ponto z pode ser obtida fazendo

$$U(x, y; z) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{U}(q_x, q_y; z)].\quad (2.24)$$

Além da propagação no vácuo, vejamos como o perfil transversal de um campo eletromagnético se comporta ao atravessar meios materiais que introduzam um perfil de fase que, a rigor, pode ser diferente para cada ponto do plano xy . Esta é uma forma conveniente de descrever elementos ópticos lineares, mais especificamente lentes finas^{vi}, no contexto da propagação do perfil transversal. Assim, uma lente com simetria esférica pode ser caracterizada pela sua função de perfil de fase $t(x, y)$, que terá simetria radial $t(\rho^2)$, sendo $\rho^2 = x^2 + y^2$. No caso de uma lente cilíndrica, temos simetria apenas ao longo de uma direção. Portanto, no caso de uma lente cilíndrica cujo perfil é constante em y , temos $t(x)$.

O campo que se propaga através de uma lente será dado, em função do campo antes da lente, por

$$U(x, y, z_f) = t(x, y)U(x, y, z_i)\quad (2.25)$$

sendo z_i a posição do plano extremo anterior e z_f a posição do plano extremo posterior, tomando a posição da lente como $z_l = 0$. A derivação de $t(x, y)$

^{vi}Chamaremos de lentes finas aquelas em que não há deslocamento transversal significativo de um feixe entre a entrada e a saída da lente, como apresentado em [78].

para lentes finas é apresentada de forma muito didática em [78]. Abaixo apresentamos o resultado final para uma lente esférica:

$$t_l(x, y) = \exp \left[-i \frac{k}{2f} (x^2 + y^2) \right], \quad (2.26)$$

sendo f o comprimento focal da lente, definido como [78]

$$\frac{1}{f} \equiv (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.27)$$

para uma lente de vidro com índice de refração n e raios de curvatura R_1 e R_2 para as superfícies esféricas. Estes são definidos como positivos para superfícies convexas e negativos para superfícies côncavas. O sinal de f será, então, determinado pela forma da lente.

Utilizamos duas configurações particulares de lentes nos trabalhos que compõem a tese. O primeiro é o caso de uma lente na posição chamada de f - f , ou seja, o objeto e o plano de interesse se encontram nos planos focais traseiro e dianteiro da lente. Esta é a configuração que utilizamos para projetar o campo distante do cristal sobre as fendas e também o campo distante das fendas sobre o plano de detecção. Nessa configuração, usamos a Eq. (2.23) para a propagação de $z = -f$ até $z = 0$, onde está a lente, a Eq. (2.25) para aplicar a transformação de fase adequada e novamente (2.23) de $z = 0$ até $z = f$. Chegamos, por fim, ao perfil no plano focal posterior da lente, [78]

$$U_f(x, y) \propto \iint_{-\infty}^{+\infty} U_i(x', y') \exp \left[-i \frac{k}{f} (x'x + y'y) \right] dx' dy' \quad (2.28)$$

de forma que o campo no plano de interesse corresponderá à transformada de Fourier do campo no plano focal traseiro. Note que embora seja uma transformada de Fourier, o campo continua sendo uma função das coordenadas espaciais transversais, conectando x' e y' no plano do objeto a x e y no plano dito de Fourier. Assim, o espectro angular do campo na posição $z = -f$ é mapeado no perfil espacial do campo no plano $z = f$. É comum

referir-se a esta operação como uma transformada de Fourier óptica. É importante lembrar que a transformada de Fourier óptica introduz um fator de conversão k/f à coordenada espacial, sendo k o número de onda e f o comprimento focal da lente utilizada.

2.2.2 Os estados de fenda

Um caso especial de perfil transversal, de grande interesse para aplicações em estados de qudits é o dos estados de fenda. Estes são assim chamados por causa da forma como são gerados, a partir de um perfil transversal controlado que incide sobre fendas múltiplas, que podem ser representadas por funções transmissão do tipo [59]

$$T(x) = \sum_0^{l_D} \Pi\left(\frac{x - 2d(l - l_D/2)}{2a}\right), \quad (2.29)$$

com

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \leq 1/2 \\ 0, & \text{se } |x| > 1/2 \end{cases}, \quad (2.30)$$

sendo que l é um índice para identificar uma fenda particular em um conjunto de D fendas e cujo limite é $l_D = (D - 1)$, $2d$ é a separação entre os centros de duas fendas consecutivas e $2a$ é a largura de cada fenda.

Podemos agora escrever o perfil transversal de um campo imediatamente após as fendas,

$$U_f(x, y) = T(x)U_i(x, y), \quad (2.31)$$

que pode, em seguida, ser utilizado para encontrar o estado de um fóton após a fenda [59]

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x)U_i(x)|x\rangle dx. \quad (2.32)$$

No caso mais simples, onde podemos considerar $U_i(x, y)$ constante sobre toda a região onde $T(x)$ pode assumir valores não-nulos^{vii}, definimos um

^{vii}Esta aproximação é razoável para o caso de fendas muito estreitas, de forma que o padrão transversal seja ao menos localmente constante sobre cada fenda.

estado de fenda $|l\rangle$ como sendo [59]

$$|l\rangle \equiv \sqrt{\frac{1}{2a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{x - 2d(l - l_D/2)}{2a}\right) |x\rangle dx, \quad (2.33)$$

com $|l| \leq l_D$ e $|x\rangle$ sendo o estado de Fock de um fóton no modo espacial x [4]. A Eq. (2.33) representa o estado de um fóton transmitido pela fenda de largura $2a$ cujo centro está na posição transversal $x = 2d(l - l_D/2)$. Este é, também, um dos estados de uma base ortonormal para um sistema quântico discreto de dimensão D , $\{|l\rangle\}$, para $l \in \{0, l_D\}$, onde l_D já foi definido acima, no contexto da indexação de fendas múltiplas. O termo que multiplica a integral foi inserido por questões de normalização para $|l\rangle$ na representação de momento. Esta pode ser obtida usando a relação de Fourier entre $|x\rangle$ e $|q_x\rangle$ [4], de forma que

$$|l\rangle \equiv \sqrt{\frac{1}{2a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{x - 2d(l - l_D/2)}{2a}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iq_x x) |q_x\rangle dq_x dx, \quad (2.34)$$

cujo lado direito pode ser reorganizado como

$$\sqrt{\frac{1}{2a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{x - 2d(l - l_D/2)}{2a}\right) \exp(iq_x x) dx \right] |q_x\rangle dq_x. \quad (2.35)$$

Realizando a integração na variável x em 2.35, podemos reescrever a Eq. (2.33) como

$$|l\rangle \equiv \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-iq_x d_l) \text{sinc}(aq_x) |q_x\rangle dq_x \quad (2.36)$$

na representação de momento. A mudança de uma representação para a outra não altera a normalização, que se mantém naturalmente devido a manipulações algébricas para se obter $\text{sinc}(aq_x)$. A fase $\exp(-iq_x d_l)$ aparece devido ao fator presente no argumento da função $\Pi(x)$ como usada na Eq. (2.33) e $d_l = 2d(l - l_D/2)$. Além da normalização e da representação de $|l\rangle$ em x e q , a propriedade de ortogonalidade dos estados $|l\rangle$ e $|l'\rangle$ para $l \neq l'$ foi demonstrada em [59].

Este processo, entretanto, resulta em uma discretização “imperfeita” do espaço contínuo de posição-momento, já que as fendas sempre possuem uma largura finita, de forma que $\Pi(x) \neq \delta(x)$. Isso faz com que faixas de valores para x e q sejam associadas ao mesmo estado do espaço discreto. Um reflexo mensurável dessa “imperfeição” é o aparecimento de um envelope de difração sobre medidas de interferência, algo que não é observado em experimentos envolvendo, por exemplo, a polarização como grau de liberdade no qual se observa interferência. Como lidamos com amplitudes de bifótons que podem não ser separáveis, é possível que correlações nas amplitudes afetem o comportamento da difração, para o caso em que o comprimento característico da correlação é menor que a largura das fendas. Este assunto será discutido em mais detalhes no Cap. 3.

2.3 Espaços discretos: qubits e qudits

Ao se propor como extensão da Teoria da Informação clássica, o campo da Informação Quântica [79] adotou muitas convenções já estabelecidas anteriormente, facilitando a comparação entre o desempenho de protocolos que utilizam recursos puramente clássicos e aqueles que utilizam recursos quânticos. Dessa forma, a maioria dos trabalhos da área é desenvolvida em um espaço discreto. Outra herança da Teoria da Informação clássica é a preferência por sistemas de dois níveis que, em analogia aos *bits* clássicos, são chamados *qubits*.

Pode-se representar um qubit em um estado genérico por

$$|\varphi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (2.37)$$

sendo $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ a chamada *base computacional*, por sua analogia com os valores utilizados na lógica Booleana da Teoria da Computação clássica. Como de costume para um espaço de Hilbert, os coeficientes α e β são complexos, podendo ser escritos na forma $ae^{i\phi_0}$ e $be^{i\phi_1}$ respectivamente, com a, b, ϕ_0 e ϕ_1

reais. Assim, tanto a amplitude quanto a fase são relevantes para descrever o estado de um qubit.

Para satisfazer a condição de normalização, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, o que permite a representação gráfica de um dado estado de um qubit sobre uma superfície esférica, a chamada Esfera de Bloch [79]. É comum parametrizar a e b como $\sin(\theta/2)$ e $\cos(\theta/2)$ e reduzir a fase ϕ_i a uma única fase relativa, de forma que o estado sobre a esfera pode ser descrito por dois ângulos. No caso específico em que a base computacional corresponde aos estados de polarização de um fóton, a superfície correspondente aos estados puros é chamada Esfera de Poincaré.

Embora um conjunto de qubits e um número finito, e relativamente pequeno, de portas lógicas quânticas^{viii} sejam suficientes para implementar qualquer algoritmo quântico, em várias situações é interessante trabalhar com sistemas de mais de dois níveis. Exemplos de aplicações para sistemas deste tipo, chamados de *qudits*, são protocolos de proteção contra descoerência e testes de contextualidade e não-localidade da Mecânica Quântica com violações maiores e mais robustas a imperfeições experimentais.

2.3.1 Estados puros e estados mistos

A partir da definição de uma base ortonormal para o espaço de Hilbert, os estados quânticos podem ser classificados em dois grandes tipos:

- Aqueles que podem ser escritos como uma superposição de estados da base, ou seja, uma combinação linear de vetores da base, com amplitudes de probabilidade complexas que respeitam uma condição de normalização, tal que a soma dos módulos ao quadrado seja igual à unidade. Estes, chamados de estados puros, correspondem a vetores

^{viii}Em analogia à Teoria da Computação clássica, chamam-se portas lógicas os operadores unitários que atuam sobre um ou mais estados quânticos discretos de forma que se possa estabelecer uma tabela verdade para sua ação na base computacional. Portas lógicas quânticas podem atuar tanto no valor lógico do qubit quanto na sua fase [79].

no espaço de Hilbert. Um estado puro genérico de um qubit pode ser escrito na forma da Eq. (2.37).

- Estados que são representados por combinações convexas^{ix} de projetores em estados puros, ou seja, $\rho = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$. Estas combinações são chamadas estados mistos e representam *ensembles* estatísticos. Uma forma de entendê-los é como uma descrição de fontes de estados puros (cada um dos projetores da combinação convexa) que emitem um dado estado $|\varphi_i\rangle$ com probabilidade p_i .

É interessante notar que os dois tipos de estado podem ser representados no formalismo das matrizes densidade. Neste caso, o estado puro é escrito como

$$|\varphi\rangle\langle\varphi| = |\alpha|^2|0\rangle\langle 0| + \alpha\beta^*|0\rangle\langle 1| + \alpha^*\beta|1\rangle\langle 0| + |\beta|^2|1\rangle\langle 1|. \quad (2.38)$$

Uma questão interessante é explorar casos mais gerais de matriz densidade, nos quais tenhamos coeficientes fora da diagonal que não sejam nulos e, ao mesmo tempo, não correspondam a $\alpha\beta^*$ ou ao seu conjugado complexo. Como a matriz densidade deve ser positiva-definida, vemos que três parâmetros reais definem completamente o estado mais geral possível de dois níveis:

$$\varrho(\alpha, \gamma) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \gamma^* \\ \gamma & 1 - |\alpha|^2 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Conhecendo os estados da forma apresentada na Eq. (2.39), podemos agora nos ocupar de quantificar o grau de pureza de um estado quântico, o que é feito utilizando

$$\mathcal{P} = \text{Tr}[\varrho^2]. \quad (2.40)$$

^{ix}Soma de elementos, cada um com coeficiente p_i , tal que $\sum_i p_i = 1$.

Para os casos apresentados nas Eq. (2.38) e (2.39), podemos calcular a pureza da matriz densidade:

$$\mathcal{P}_\varphi = |\alpha|^4 + 2|\alpha\beta^*|^2 + |\beta|^4 = 1 \quad (2.41)$$

$$\mathcal{P}_\rho = 1 - 2|\alpha|^2 + 2|\alpha|^4 + 2|\gamma|^2 \quad (2.42)$$

2.4 Emaranhamento

Uma das primeiras propriedades dos estados quânticos a ser percebida durante os anos de desenvolvimento dos fundamentos da teoria, na década de 1930 [80], o emaranhamento ganhou destaque a partir da década de 1960, quando John Bell [81] mostrou que medições em estados emaranhados bipartidos poderiam apresentar correlações que não podem ser descritas por teorias realistas locais.

A ideia de que certas desigualdades entre resultados de medições são violadas por estados emaranhados serviu, na década de 1990, para dar mais relevância ao emaranhamento, com seu uso no protocolo de Ekert [22] para distribuição de chaves criptográficas utilizando estados quânticos. Embora outros protocolos envolvendo propriedades quânticas de sistemas físicos já existissem, este foi o primeiro a utilizar o emaranhamento como recurso.

Ao mesmo tempo, o emaranhamento é parte importante de alguns modelos de computação quântica, embora agora se saiba que ele não é um recurso estritamente necessário para algumas implementações de protocolos de computação quântica [82].

Sabendo que o emaranhamento é um recurso útil e desejável no ramo da Informação Quântica, a primeira pergunta a se fazer é: Como definir o emaranhamento?

A definição é feita por meio de uma negação. Um estado puro $|\psi\rangle_{AB}$

composto por subsistemas A e B apresenta emaranhamento entre eles se

$$|\psi\rangle_{AB} \neq \left[\sum_i |a_i\rangle_A \right] \otimes \left[\sum_j |b_j\rangle_B \right], \quad (2.43)$$

sendo $\{|a_i\rangle\}$ e $\{|b_j\rangle\}$ bases adequadas para descrever os subsistemas A e B. Caso contrário, o sistema é dito separável. No caso de um estado global misto, a definição de emaranhamento é dada por [83]

$$\rho^{AB} \neq \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B, \quad (2.44)$$

ou seja, há emaranhamento em um estado misto se o estado total não pode ser escrito como uma combinação convexa de produtos tensoriais de matrizes densidade pertencentes aos sub-espacos A e B. Analogamente ao que acontece para estados puros, estados mistos para os quais é possível encontrar uma descrição da forma apresentada no lado direito da Eq. (2.44) são chamados de separáveis.

O emaranhamento é, portanto, uma propriedade de sistemas quânticos compostos, que podem ser separados em ao menos duas partições, ou seja, dois ou mais subsistemas distintos. Esta separação é independente do número de entes físicos que compõem o sistema; uma única partícula pode apresentar emaranhamento entre graus de liberdade distintos, por exemplo.

É importante notar que, no caso de um estado global puro, se o estado de cada sub-sistema é puro, o estado global será separável. De fato, a relação entre a pureza do estado reduzido de uma das partes de um estado global puro e o emaranhamento entre as partes, cuja quantificação discutiremos na sub-seção 2.4.1, é particularmente importante nos trabalhos que discutiremos nesta tese.

2.4.1 Quantificando o emaranhamento bipartite em qubits

Passada a tarefa de definir quando um sistema bipartido está emaranhado, o passo seguinte é buscar uma forma de quantificar o emaranhamento

presente em um dado sistema com uma partição específica. Como dissemos anteriormente, o emaranhamento entre as partes de um sistema composto está intimamente ligado à forma como o sistema é particionado e não à quantidade de entes físicos distintos.

No Cap. 3 utilizaremos a *concurrence*^x como medida para o grau de emaranhamento. Esta medida foi proposta em 1998 por Wootters [84] e, a seguir, pretendemos apresentar este quantificador seguindo a forma como foi definido naquele artigo. Optamos por utilizar a *concurrence* por ser um quantificador amplamente utilizado na literatura para lidar com estados de qubits.

O primeiro passo da definição da *concurrence* é o operador σ_y , um dos operadores de Pauli, definido como

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

e cuja ação nos estados da base computacional é dada por

$$\sigma_y|0\rangle = i|1\rangle, \quad (2.46)$$

$$\sigma_y|1\rangle = -i|0\rangle, \quad (2.47)$$

de forma que a operação de inversão de spin (ou de inversão de bit, no caso da base computacional) equivale a

$$|\tilde{\psi}\rangle = \sigma_y|\psi^*\rangle, \quad (2.48)$$

sendo $|\tilde{\psi}\rangle$ o estado com o bit invertido e $|\psi^*\rangle$ o conjugado complexo do estado inicial. Quando lidamos com um estado composto bipartido, o operador deve ser aplicado em cada parte independentemente.

^xO termo *concurrence* pode ser traduzido tanto como *concorrência* quanto como *concordância*. Embora *concorrência* seja a tradução mais utilizada, é comum associar a palavra *concorrência* a disputa e, devido à existência de uma outra propriedade de sistemas quânticos chamada *discórdia*, optamos por utilizar o termo em inglês e evitar ambiguidades.

Para um estado puro, a *concurrence* é definida por Wootters como sendo o módulo da projeção do estado inicial sobre o estado após uma inversão de bit (spin, no trabalho original), ou seja,

$$C = |\langle \psi | \tilde{\psi} \rangle|. \quad (2.49)$$

Sendo assim, estados que são invariantes a inversões de bits são maximamente emaranhados, enquanto aqueles que são levados a estados ortogonais pela transformação são separáveis. Apresentamos um exemplo do cálculo da *concurrence* para um estado maximamente emaranhado, o singleto

$$\begin{aligned} |\psi_e\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle), \\ \sigma_y \otimes \sigma_y |\psi_e\rangle &= \frac{-1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle), \\ C &= |\langle \psi_e | \tilde{\psi}_e \rangle| = 1 \end{aligned} \quad (2.50)$$

e um estado separável,

$$\begin{aligned} |\psi_s\rangle &= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle), \\ \sigma_y \otimes \sigma_y |\psi_s\rangle &= -\frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle), \\ C &= |\langle \psi_s | \tilde{\psi}_s \rangle| = 0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Vemos que a inversão de sinais nas Eqs. (2.50) e (2.51) se devem à diferença no sinal do lado direito das Eqs. (2.46) e (2.47), pois

$$\begin{aligned} \sigma_y \otimes \sigma_y |00\rangle &= -|11\rangle, \\ \sigma_y \otimes \sigma_y |01\rangle &= |10\rangle, \\ \sigma_y \otimes \sigma_y |10\rangle &= |01\rangle, \\ \sigma_y \otimes \sigma_y |11\rangle &= -|00\rangle. \end{aligned}$$

Wootters define a *concurrence* para estados mistos de dois qubits partindo da ação do operador $\sigma_y \otimes \sigma_y$ em matrizes densidade:

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y), \quad (2.52)$$

com ρ^* correspondendo ao conjugado complexo da matriz densidade ρ . Os produtos tensoriais estão explicitados para lembrar que o operador deve ser aplicado separadamente a cada um dos sub-espacos. Pode-se agora definir a *concurrence* $C(\rho)$ como

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (2.53)$$

para λ_i correspondendo às raízes quadradas dos autovalores da matriz não hermitiana $\rho\tilde{\rho}$, indexados em ordem decrescente.

É possível encontrar uma discussão mais detalhada para a dedução da Eq. 2.53 em [84], durante a qual Wootters afirma que o emaranhamento do sistema de dois qubits, $E(C(\rho))$, cresce monotonamente^{xi} quando $C(\rho)$ varia de 0 a 1, de forma que a *concurrence* pode ser utilizada como um quantificador de emaranhamento. Como supomos que os estados globais de dois qubits com os quais lidamos são puros, acreditamos ser mais proveitoso apresentar apenas a dedução detalhada da *concurrence* para o caso puro.

De posse da definição da *concurrence* para estados puros e estados mistos, temos agora uma ferramenta para quantificar o emaranhamento dos estados de qubits utilizados em nossos experimentos.

2.4.2 A pureza de subsistemas emaranhados

Quando consideramos um sistema emaranhado composto por dois subsistemas, chamado de bipartido ou bipartite, é interessante observar o comportamento da pureza, tanto do sistema geral quanto das suas partes, em função do grau de emaranhamento presente.

Primeiramente, definiremos uma representação adequada para sistemas bipartidos de qubits. Embora a matriz densidade de tais sistemas necessite, a rigor, de apenas dois índices, é útil adotar uma notação com quatro índices,

^{xi}Diz-se uma função $f(x)$ cresce monotonamente com x quando para todo $x' \leq x''$ tem-se $f(x') \leq f(x'')$.

escrevendo os elementos de matriz da seguinte forma:

$$\rho^{AB} = \sum_{(i,j;k,l)} p(i,j;k,l) |ij\rangle \langle kl| \quad (2.54)$$

sendo

$$p(i,j;k,l) = \langle i,j | \rho_{AB} | k,l \rangle, \quad (2.55)$$

com $i, j, k, l \in \{0, 1\}$. Nesta notação, i e k se referem à parte A enquanto j e l se referem à parte B do sistema global. Pode-se então, escrever a matriz densidade do sistema composto usando $(i, j; k, l)$ para indicar os elementos de matriz correspondentes

$$\rho^{AB} = \begin{pmatrix} (0,0;0,0) & (0,0;0,1) & (0,0;1,0) & (0,0;1,1) \\ (0,1;0,0) & (0,1;0,1) & (0,1;1,0) & (0,1;1,1) \\ (1,0;0,0) & (1,0;0,1) & (1,0;1,0) & (1,0;1,1) \\ (1,1;0,0) & (1,1;0,1) & (1,1;1,0) & (1,1;1,1) \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

Em seguida, precisamos definir uma operação matemática que nos permita tratar apenas de um subsistema, ou seja, obter um estado reduzido obtido a partir do estado global. Esta operação é chamada traço parcial e é definida, na notação apresentada acima, como

$$\text{Tr}_B[\rho^{AB}] = \sum_{j=l} \rho^{AB}(i, j; k, l), \quad (2.57)$$

$$\text{Tr}_B[\rho^{AB}] = \rho^A, \quad (2.58)$$

onde exemplificamos o traço parcial sobre o subsistema B . O equivalente para o subsistema A é obtido trocando j por i e l por k na Eq. (2.57). O sinal de igualdade indica que os dois índices são iguais sobre a somatória.

De posse dessa ferramenta, podemos avaliar o comportamento da pureza do estado reduzido quando o estado global é puro e associá-lo à quantidade de emaranhamento entre os subsistemas, quantificada pela *concurrence*. Ilustraremos os dois casos extremos, ou seja, o caso em que os subsistemas estão maximamente emaranhados e o caso em que são separáveis.

Utilizaremos dois estados globais puros. Como estado maximamente emaranhado escolhemos o singleto, escrito na base computacional como $|\psi^-\rangle = 1/\sqrt{2}(|01\rangle - |10\rangle)$, e como estado separável $|\varphi\rangle = 1/2[(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle)]$. A estes dois estados correspondem as matrizes densidade das Eq. (2.59) e (2.60), respectivamente:

$$\rho_e = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

$$\rho_s = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

Aplicando a operação de traço parcial, como definida na Eq. (2.57), obtemos as matrizes reduzidas:

$$\rho'_e = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.61)$$

$$\rho'_s = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.62)$$

Podemos calcular a pureza do estado reduzido nos dois casos, obtendo $\text{Tr}[\rho'^2] = 1/2$ para a matriz ρ'_e e $\text{Tr}[\rho'^2] = 1$ para a matriz ρ'_s . Isso significa que, para um estado global puro, o estado reduzido é misto quando há emaranhamento entre as partes e, de fato, será maximamente misto quando o emaranhamento for máximo. Para o caso de um estado global puro, o estado reduzido também é puro apenas quando as partes são separáveis. De forma geral, para um estado global puro a pureza do estado reduzido será tão menor quanto maior for o emaranhamento entre as partes, progredindo até o limite mínimo de $1/2$ para o caso maximamente emaranhado.

2.4.3 Estados de Bell

Um grupo especial de estados maximamente emaranhados é utilizado como base para o espaço de quatro-dimensões no qual são representados os estados de dois qubits. Estes são os chamados Estados de Bell já que estes violam maximamente a desigualdade proposta por Clauser, Horne, Shimony e Holt [85], baseada no trabalho de John Bell para resultados de medições em teorias realistas locais.

Os quatro estados se dividem em duas famílias, da forma apresentada abaixo, na base computacional:

$$\begin{array}{l|l} |\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) & |\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\ |\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) & |\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \end{array} \quad (2.63)$$

sendo a família de estados $|\psi^\pm\rangle$ aqueles onde medições feitas na mesma base sempre encontrarão os sub-sistemas anti-correlacionados e a família $|\phi^\pm\rangle$ é a que apresenta sub-sistemas para os quais medições feitas em uma base comum encontram sempre resultados iguais. Como formam uma base completa para o espaço de dois qubits, estados com qualquer grau de emaranhamento podem ser escritos em termos de estados de Bell, inclusive estados separáveis.

Controle de correlações quânticas em qubits de fenda com quatro fótons

3.1 Motivação

Observa-se, nos últimos anos, um movimento na direção da expansão do espaço de Hilbert explorado pelos experimentos em Informação Quântica, inclusive nas implementações fotônicas. Exemplos disto são os experimentos de geração de estados de *cluster* com cada vez mais componentes [28, 49, 86–90], comunicação quântica entre muitas partes [53] e testes de não-localidade [91–95] utilizando mais de um par de partículas.

Ao mesmo tempo, no campo do Imageamento Quânticoⁱ, vê-se interesse por estados de muitos fótons, dentre outros os chamados estados N00N [96–99], que prometem aumento na resolução espacial de padrões de interferência [100]. Este ganho pode ter aplicações práticas na área de metrologia, além da própria área de Imageamento.

ⁱVer nota iv, no Capítulo 2.

É possível pensar o trabalho que discutiremos neste Capítulo nos dois contextos. Enquanto experimento em Óptica Quântica, trata-se da manipulação das amplitudes de dois bifótons gerados por CPDE de forma a obter diferentes correlações quânticas em seus padrões de interferência após a passagem dos bifótons por fendas duplas. Estes são observados no campo distante das mesmas, que é projetado no plano de detecção por meio de uma lente no arranjo f - f . A segunda forma consiste em entender o experimento como a geração controlada de diferentes tipos de estados de dois qubits dentro de um subespaço específico, definido pelas condições de contorno impostas pela implementação. Além do controle sobre o estado produzido, há o desafio de lidar com duas cópias deste estado e proceder uma caracterização que, embora utilize argumentos *a priori* sobre a forma do estado a ser caracterizado, não é trivial e requer o uso de graus de liberdade auxiliares do sistema. Dessa forma, trata-se de um experimento de Informação Quântica implementado com fótons.

No contexto da Óptica Quântica acreditamos que seja de interesse obter fontes de muitos bifótons que possam ter suas correlações transversais controladas experimentalmente, abrindo caminho para trabalhos em formação de imagens com campos quânticos cada vez mais elaborados. Já como experimento de Informação Quântica, cremos que uma fonte de mais de uma cópia de um estado de dois qubits é de grande interesse para experimentos de troca de emaranhamento e o teletransporte em um grau de liberdade que não é o usual, liberando a polarização, o grau de liberdade fotônico mais comumente utilizado em experimentos de Óptica Quântica, para, por exemplo, codificar mais qubits.

Vemos, portanto, que este trabalho tem por objetivo final abrir caminho para que toda uma gama de experimentos possa ser realizada tanto na Óptica Quântica quanto na Informação Quântica, tirando proveito, principalmente, da capacidade de obter mais de um par de fótons com alta eficiência e de

controlar as características do estado destes pares.

3.2 Construindo um sub-espço: a esfera de Bloch generalizada

Antes de discutirmos os mecanismos experimentais utilizados para controlar as correlações quânticas, devemos primeiramente apresentar os estados dos quais trataremos. O primeiro passo é escrever o estado puro mais geral de dois qubits,

$$|\Psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle. \quad (3.1)$$

Como lidamos com estados de fenda, convém retomar o cálculo apresentado na Seção 2.2.2 considerando agora uma amplitude não trivial que incide sobre as fendas, dada pela função $\Phi(x_s, x_i; z_F)$, que corresponde à função apresentada na Eq. (2.16) propagada até o plano das fendas, na posição z_F . Como a dimensão relevante das fendas é na direção x , reduzimos o problema de duas dimensões a uma dimensão ($\rho_s \rightarrow x_s$ e $\rho_i \rightarrow x_i$). Para calcular o estado do bifóton após a fenda basta propagar a função $\Phi(x_s, x_i)$ do plano do cristal ao plano das fendas. Tomando como exemplo o caso em que essa propagação é feita através de um telescópio, como aquele implementado inicialmente em [60], $\Phi(x_s, x_i; z_F)$ é

$$\Phi(x_s, x_i; z_F) = E \left(\frac{x_s + x_i}{M} \right) \zeta \left(\frac{x_s - x_i}{M} \right) \exp \left[i \frac{k(x_s^2 + x_i^2)}{2fM} \right], \quad (3.2)$$

sendo f o comprimento focal da segunda lente do telescópio e M a ampliação desteⁱⁱ. Assim, usando (2.29) e (2.32), poderemos escrever estados de dois

ⁱⁱPara uma dedução detalhada desta propagação, ver o Apêndice B.

fótons após as fendas como

$$\begin{aligned}
 |\Psi\rangle &= \sum_{l,m} \iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x_s, x_i; z_F) \Pi\left(\frac{x_s - d_l}{2a}\right) \Pi\left(\frac{x_i - d_m}{2a}\right) |x_s\rangle |x_i\rangle dx_s dx_i \\
 &= \sum_{l,m} \Phi(d_l, d_m; z_F) \iint_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{x_s - d_l}{2a}\right) \Pi\left(\frac{x_i - d_m}{2a}\right) |x_s\rangle |x_i\rangle dx_s dx_i \\
 &\propto \sum_{l,m} \Phi(d_l, d_m; z_F) |l\rangle |m\rangle,
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

sendo $d_i = 2d(i - 1/2)$, para $i = \{l, m\}$. Na fenda dupla temos $l, m \in \{0, 1\}$. A única aproximação que mantivemos é a de que as fendas são estreitas o suficiente para que a função Φ seja localmente constante sobre uma dada fenda, podendo ser redefinida como $\Phi(d_l, d_m; z_F)$.

Os coeficientes, que relacionamos à amplitude do bifóton na saída do cristal através das Eqs. (2.23) e (3.3), estarão sujeitos a condições de contorno impostas pelo nosso experimento. Como dito no Cap. 2, a amplitude $\Phi(x_s, x_i)$ é composta por $E(x_s + x_i)$ e $\xi(x_s - x_i)$, que são funções pares de x_s e x_i . Os sistemas ópticos que utilizamos para propagar a amplitude são lentes esféricas e cilíndricas alinhadas ao eixo de propagação dos fótons e, portanto, preservam a paridade da função Φ . Sobre o plano das fendas, podemos então considerar $c_{00} = c_{11}$ e que $c_{01} = c_{10}$. Com esta suposição o estado pode ser reescrito como [60]

$$|\Psi\rangle = \cos(\alpha/2) |\psi^+\rangle + e^{i\phi} \sin(\alpha/2) |\phi^+\rangle, \tag{3.4}$$

para os estados de Bell $|\psi^+\rangle$ e $|\phi^+\rangle$ definidos na Eq. (2.63).

O espaço de estados dos dois qubits foi reduzido a um espaço de dimensão 2, pois os estados são caracterizados completamente por dois ângulos, α e ϕ . Poderemos, assim, representar o conjunto dos estados $|\Psi\rangle$ por uma superfície esférica, uma espécie de esfera de Bloch generalizada, representada na Fig. 3.1, a qual chamaremos de subespaço \mathcal{B}^+ . É importante ressaltar que as considerações feitas são para estados puros.

Desejamos, agora, poder relacionar os parâmetros da esfera de Bloch generalizada com parâmetros físicos, mais especificamente com a amplitude

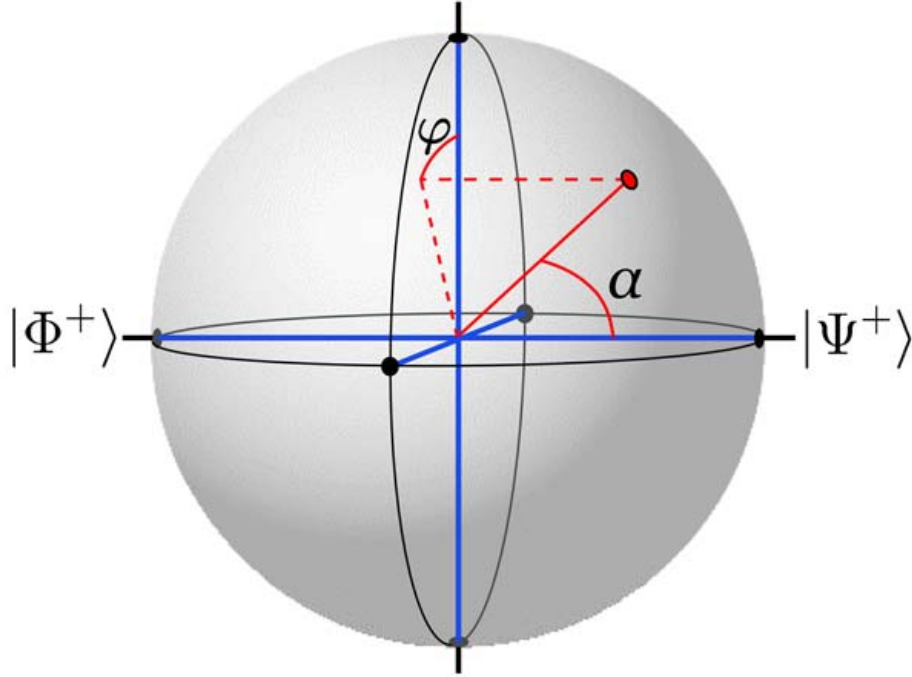


Figura 3.1: Representação da esfera de Bloch generalizada que constitui o subespaço \mathcal{B}^+ , retirada de [60]. Os estados de qubits que geramos são parametrizados pelos ângulos α e φ indicados na figura.

do bifóton sobre as fendas. O processo é simples, bastando recordar que (3.3)

$$c_{00} = c_{11} \propto \Phi(-d, -d; z_F) = \Phi(d, d; z_F), \quad (3.5)$$

$$c_{01} = c_{10} \propto \Phi(-d, d; z_F) = \Phi(d, -d; z_F), \quad (3.6)$$

e que

$$c_{01} = \cos(\alpha/2), \quad (3.7)$$

$$c_{00} = e^{i\varphi} \sin(\alpha/2), \quad (3.8)$$

de forma que chega-se a

$$\frac{\Phi(d, d; z_F)}{\Phi(-d, d; z_F)} = e^{i\varphi} \tan(\alpha/2), \quad (3.9)$$

sendo esta razão entre as amplitudes chamada de *parâmetro de engenharia* em [60]. Como as amplitudes são complexas, podemos associar a parte real do

3.2. Construindo um sub-espço: a esfera de Bloch generalizada

lado esquerdo da Eq. (3.9) a $\cos(\varphi) \tan(\alpha/2)$, enquanto a parte imaginária se relaciona a $\sin(\varphi) \tan(\alpha/2)$. Se chamarmos o lado esquerdo da Eq. (3.9) de $\bar{\Phi}$, então temos que

$$\frac{Im(\bar{\Phi})}{Re(\bar{\Phi})} = \tan \varphi. \quad (3.10)$$

Temos, portanto, uma forma de determinar os dois ângulos que caracterizam o estado, desde que conheçamos os parâmetros das fendas utilizadas e a amplitude do bifóton sobre o plano das fendas.

3.2.1 Manipulando α e φ

Observando a Eq. (3.10) e relembrando a estrutura interna da amplitude do bifóton, Eqs. (2.12), (2.14), (2.16), $\Phi(x_s, x_i) = E(x_s, x_i) \zeta(x_s, x_i)$, podemos nos aprofundar no entendimento da relação entre os parâmetros do estado na esfera de Bloch generalizada e a natureza física da sua implementação. Mais especificamente, sabemos que $\tilde{\zeta}(q_s, q_i)$ é uma função real e par, de forma que $\zeta(x_s, x_i) = \mathcal{F}[\tilde{\zeta}(q_s, q_i)]$ é também uma função real e par, deixando a parte imaginária de $\bar{\Phi}$ para $E(x_s, x_i)$, o perfil transversal do feixe de bombeamento. Como tratamos de perfis gaussianos neste trabalho, temos que [101]

$$E(x_s, x_i; z) = A_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp\left[-\left(\frac{x_+^2}{W(z)}\right)\right] \exp\left[i\left(k_p z + k_p \frac{x_+^2}{2R(z)} - \zeta(z)\right)\right], \quad (3.11)$$

para $x_+ = (x_s + x_i)/2$, sendo

$$W(z) = W_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]^{1/2}, \quad (3.12)$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right], \quad (3.13)$$

$$\zeta(z) = \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (3.14)$$

e

$$W_0 = \left(\frac{\lambda z_0}{\pi}\right)^{1/2} \quad (3.15)$$

3.2. Construindo um sub-espço: a esfera de Bloch generalizada

os chamados parâmetros do feixe. $W(z)$ é a função que determina a largura do perfil gaussiano em um dado plano z , z_0 é o chamado Comprimento de Rayleigh, $R(z)$ é o raio de curvatura da frente de onda para um dado plano z e $\zeta(z)$ é a chamada fase de Gouy, que representa o atraso na propagação do feixe gaussiano em relação a uma onda plana ou esférica.

Uma vez definido o valor da menor largura do perfil gaussiano, W_0 , no ponto chamado de *cintura do feixe*, todas as outras funções ficam determinadas, para um dado comprimento de onda λ . O campo do feixe gaussiano pode, assim, ser calculado para qualquer ponto x sobre um dado plano a uma distância z da origem, que é escolhida para coincidir com o plano sobre o qual está a cintura do feixe.

A partir da descrição do feixe gaussiano, podemos ver que na posição $z = 0$ o campo é real. Isto significa que no caso em que projetamos a imagem deste sobre as fendas, temos $\varphi = 0$. O mesmo vale para a sua transformada de Fourier. De forma geral, φ pode ser controlado alterando o plano do feixe de bombeamento que é projetado sobre as fendas e um olhar atento sobre a Eq. (3.11) nos permite perceber que apenas o termo que depende da curvatura da frente de onda é relevante para a determinação de φ , uma vez que os outros são constantes em relação a x_+ .

De fato, podemos concluir que, para o caso de um feixe de bombeamento gaussiano, a relação entre $R(z)$ e φ se reduz a

$$\varphi = k_p \frac{d^2}{2R(z)}, \quad (3.16)$$

já que em $x_+ = 0$ o termo de curvatura é nulo. Por este motivo a fase φ é chamada de fase de curvatura em [60].

Passemos agora para α . Para entendermos como este parâmetro é influenciado pela amplitude incidente no plano das fendas, consideremos o caso simples em que $\varphi = 0$, ou seja, a amplitude é real. Como já vimos na Eq. (3.9), para o caso em que $\varphi = 0$, basta conhecermos $\Phi(d, d; z_F)$ e $\Phi(-d, d; z_F)$ para determinarmos α . Se $\Phi(d, d) < \Phi(-d, d)$, então $\alpha < \pi/2$.

3.2. Construindo um sub-espço: a esfera de Bloch generalizada

Caso $\Phi(d, d) > \Phi(-d, d)$, temos $\alpha > \pi/2$. As funções que compõem Φ são pares, sendo que aquela que depende do campo de bombeamento é uma função de x_+ , enquanto a que depende do casamento de fases é uma função de x_- . Esta dependência permanece desacoplada, independentemente de efeitos de propagação entre o cristal e as fendas. Como ambas possuem seu máximo em $x_{\pm} = 0$, temos situações de grande interesse caso uma das duas funções seja constante ao longo do intervalo de interesse, $|x_{\pm}| \leq 2d$. Caso a dependência em x_+ seja dominante, temos que $\tan(\alpha/2) \leq 1$, favorecendo estados onde há anti-correlação, ou correlação negativa, entre os qubits. O inverso será verdade se o termo em x_- domina, favorecendo estados onde os qubits estão positivamente correlacionadosⁱⁱⁱ.

3.2.2 Mapeando as correlações

Sabendo como manipular o perfil transversal de um bifóton de forma a controlar as correlações entre os qubits de fenda, nos preocuparemos agora em encontrar um meio de caracterizar o estado após as fendas. Observando a Eq. (3.9), vemos que não é possível determinar α e φ apenas com medições da imagem das fendas, pois medindo apenas as intensidades $I_{\pm}(x_1, x_2) = |\Phi(\pm d, d)|^2$, não obtemos informação sobre a fase φ . Pensando em termos de qubits, podemos dizer que medições projetivas na base computacional não são suficientes para determinar a fase entre os estados $|\psi^+\rangle$ e $|\phi^+\rangle$.

A solução mais natural, então, é explorar a base diagonal,

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle \pm |1\rangle], \quad (3.17)$$

para a qual podemos escrever

$$\langle \Psi_{B^+} | U_{\pm} | \Psi_{B^+} \rangle = \frac{1}{2}[1 \pm \cos(\varphi) \text{sen}(\alpha)], \quad (3.18)$$

ⁱⁱⁱQuando nos referimos a correlações positivas e negativas entre os qubits, queremos dizer que as correlações são próximas das apresentadas por $|\Phi^+\rangle$ e $|\Psi^+\rangle$, respectivamente. Em ambos os casos há correlações quânticas entre os qubits, variando apenas o valor de um em relação ao outro, quando medidos.

3.2. Construindo um sub-esp ao: a esfera de Bloch generalizada

para um projetor $U_{\pm} = |\pm\rangle\langle\pm| \otimes |\pm\rangle\langle\pm|$ no espaço de dois qubits. Em um experimento com qubits de polariza o, acessar a base diagonal   simples, bastando, por exemplo, utilizar um polarizador alinhado a $\pm 45^\circ$. No caso de qubits de fenda, a base diagonal pode ser acessada no plano de Fourier de uma lente na configura o f - f entre as fendas e a posi o $z_{\mathcal{F}}$ onde colocaremos os detectores.

Neste plano há apenas pontos que correspondem de fato a medi es na base $|\pm\rangle$ sendo que, de forma geral, cada ponto no plano $z_{\mathcal{F}}$ corresponde a uma superposi o de $|+\rangle$ e $|-\rangle$, de forma semelhante aos ângulos numa polarizador que correspondem às polariza es diagonal e anti-diagonal. Há uma diferença entre os dois casos, contudo, pois os fótons se distribuem probabilisticamente sobre o plano de detec o, de forma que nem todos os fótons no estado $|+\rangle$ serão detectados em apenas uma das posi es, algo que não ocorre quando utilizamos um polarizador orientado a 45° .

A determina o dos pontos sobre os quais se pode realizar medi es projetivas na base diagonal assume que o sistema   perfeitamente alinhado, sendo bastante suscetível a problemas de posicionamento dos elementos ópticos ao longo do caminho dos fótons. Além disso,   necessário levar em conta o fato de que as medi es projetivas no estado $|-\rangle$ são sempre afetadas pelo envelope de difrac o e as contagens de fótons obtidas durante a medi o devem ser normalizadas, para que possamos calcular os parâmetros α e φ .

Devido aos argumentos apresentados, optamos por uma forma alternativa de caracterizar o estado gerado nas fendas [59, 60]. Ainda no plano de Fourier, a probabilidade de se detectar em coincidência dois fótons que estejam em um estado $|\Psi_{\mathcal{B}}^+(\alpha, \varphi)\rangle$ será dada por

$$\begin{aligned}
 P(x_1, x_2)_{\mathcal{B}^+} \propto & 1 + \cos^2(\alpha/2) \cos(\beta(x_1 - x_2)) + \\
 & \sin(\alpha) \cos(\varphi) [\cos(\beta(x_1)) + \cos(\beta(x_2))] + \\
 & \sin^2(\alpha/2) \cos(\beta(x_1 + x_2)), \tag{3.19}
 \end{aligned}$$

3.2. Construindo um sub-espço: a esfera de Bloch generalizada

onde $\beta = 2kd/f$. O cálculo completo da Eq. (3.19) pode ser encontrado no Apêndice A. A esta probabilidade pode-se associar um mapa bi-dimensional, que dependerá tanto de α quanto de φ e pode ser medido mantendo a posição de um dos detectores fixa enquanto a outra é variada, correspondendo a uma linha em uma grade de pontos que é completada à medida que a posição do detector fixo é incrementada, a cada linha.

Acreditamos que a medição de mapas de contagens de fótons e sua comparação com mapas de probabilidades permite uma caracterização mais robusta e informativa dos estados, já que indica mais facilmente falhas de alinhamento no sistema, além de permitir que, apenas observando os mapas, se extraia informação útil sobre o estado gerado.

Conhecendo o método de medição que utilizaremos, vejamos agora como a concorrência C de cada par e a pureza $\mathcal{P}_{\pi,\pi}$, sendo $\pi \in \{H, V\}$, do estado reduzido de fótons de mesma polarização, no caso de geração de dois pares por CPDE, são escritas em termos de α e φ :

$$C = \sqrt{1 - \cos^2(\varphi) \sin^2(\alpha)}, \quad (3.20)$$

$$\mathcal{P}_{\pi,\pi} = \frac{1}{4} [1 + \cos^2(\varphi) \sin^2(\alpha)]^2, \quad (3.21)$$

onde o cálculo de C e $\mathcal{P}_{\pi,\pi}$ é apresentado em detalhes no Apêndice A. É interessante notar que podemos relacionar as duas quantidades, chegando a

$$\mathcal{P}_{\pi,\pi} = \frac{1}{4} [2 - C^2]^2. \quad (3.22)$$

A pureza para o estado de dois fótons de mesma polarização é, na verdade, o quadrado da pureza para o estado reduzido de um único fóton de um par HV, pois o processo de geração de dois bifótons no estado de caminhos transversais produz duas cópias do mesmo estado e não há emaranhamento entre fótons de pares distintos. O comportamento da pureza do estado reduzido em função do emaranhamento em cada par é mostrado na Fig. 3.2. Vemos que no caso em que cada par se encontra num estado separável, os

3.2. Construindo um sub-espço: a esfera de Bloch generalizada

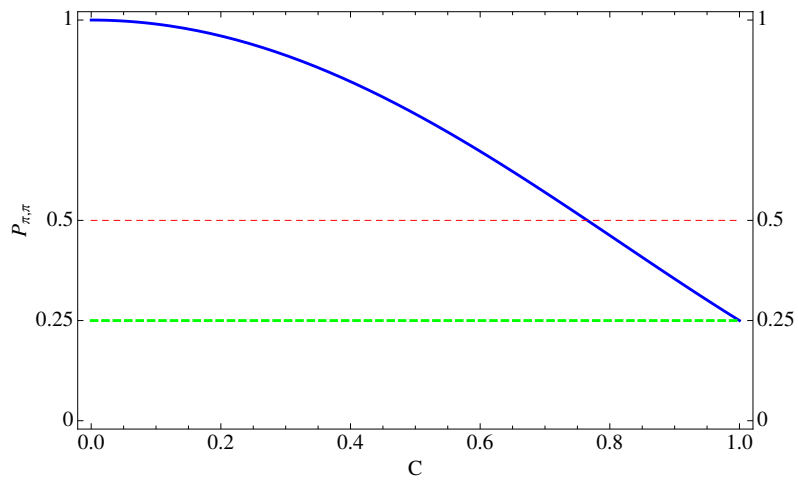


Figura 3.2: Variação da pureza do estado reduzido de dois fótons de mesma polarização em função do emaranhamento de cada par de fótons com polarização H-V, para o estado de dois bifótons. A linha tracejada fina representa o limite mínimo de pureza para o estado de um qubit, $1/2$, enquanto a linha tracejada grossa representa o mínimo de pureza para um estado de dois qubits, $1/4$.

estados parciais são puros e, quando o emaranhamento é máximo em cada bifóton, o estado reduzido é maximamente misto, como esperado.

3.3 Implementação experimental

Tendo apresentado uma forma de relacionar os parâmetros do estado de dois qubits à amplitude que incide sobre as fendas em uma implementação experimental, podemos agora passar à etapa de apresentar esta implementação e discutir o controle do estado após as fendas em termos de elementos ópticos lineares a serem inseridos no caminho do bifóton, entre o cristal e as fendas. A Fig. 3.3 apresenta a montagem completa de nosso experimento. Nas sub-seções que seguem descreveremos, em detalhe, tanto a fonte de estados quanto o aparato de detecção nela indicados.

3.3.1 Fonte de estados

O laser utilizado em nossos experimentos é um Ti:Safira pulsado, com pulsos de aproximadamente 200 fs. Logo após sair da cavidade o pulso passa por um gerador de segundo harmônico, que consiste de um cristal de BBO (β -borato de bário) com 2 mm de espessura. A eficiência do processo é de aproximadamente 20%, sendo que os 1,5 W de potência média em 826 nm fornecidos pelo Ti:Safira são convertidos em 300 mW em 413 nm.

Em seguida, o laser passa por um prisma (**P₁**), cujo objetivo é filtrar por dispersão a grande quantidade de infra-vermelho que ainda segue colinear ao violeta, que será posteriormente utilizado para bombear o PPKTP.

Além do prisma e um conjunto de duas iris para filtrar espacialmente o infra-vermelho, utilizamos também dois espelhos dicróicos (**DM₁** e **DM₂**), otimizados para refletir apenas comprimentos de onda próximos dos 413 nm de nosso interesse.

Assim, temos um sistema suficientemente livre de ruído para que possamos confiar que as contagens que vemos são realmente devidas a CPDE, pois tanto o laser que sai do Ti:Safira quanto os fótons da CPDE têm o mesmo comprimento de onda. O laser de bombeamento segue, então, através de uma placa de onda (**WP₁**), que corrige a sua polarização para maximizar a

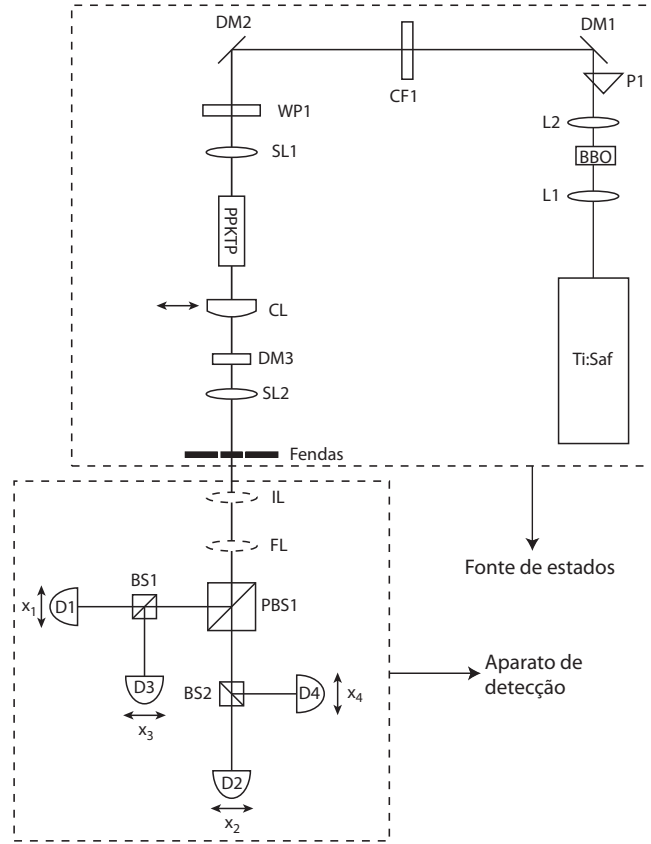


Figura 3.3: Esquema de implementação e caracterização de um estado de dois qubits no subespaço B^+ . Utilizamos como bombeamento um laser pulsado com comprimento de onda central $\bar{\lambda} = 413$ nm, obtido através da geração de segundo harmônico de um laser pulsado com $\bar{\lambda} = 826$ nm e largura temporal $\Delta t \approx 200$ fs, indicado na figura como Ti:Saf. A luz violeta é obtida por geração de segundo harmônico, no conjunto composto pelas lentes L_1 e L_2 , de foco $f_1 = f_2 = 5$ cm, e pelo cristal BBO. A lente SL antes do cristal não-linear, um PPKTP crescido para CPDE tipo II, garante que a cintura do feixe de bombeamento esteja no centro do cristal. Já as lentes CL e SL2 são utilizadas para escolher que tipo de amplitude será projetada sobre o plano das fendas. Em nosso experimento as lentes têm distâncias focais $f_1 = 31$ cm, $f_{CL} = 5$ cm e $f_2 = 20$ cm. A cintura do feixe está na posição confocal de todas as lentes. As fendas têm largura $2a = 80$ μm e espaçamento entre os centros de $2d = 240$ μm . O cristal utilizado é um PPKTP com 1 cm de comprimento. No aparato de detecção a lente FL está a $f_{FL} = 30$ cm de distância tanto do plano de detecção quanto do plano das fendas.

eficiência da CPDE no cristal. Ao longo de todo o caminho mais irris^{iv} servem tanto para o alinhamento do feixe quanto para manter um perfil gaussiano.

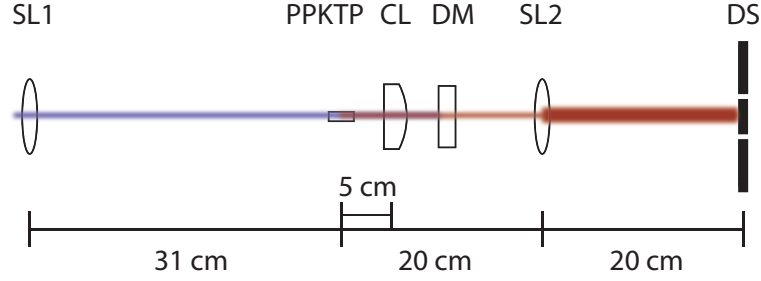
Finalmente chega-se à região da montagem que constitui a fonte de estados. Seu primeiro componente é uma lente esférica plano-convexa de 30 cm de foco (**SL1**). O comprimento de Rayleigh calculado a partir da medição da cintura do feixe é 7,6 cm, de forma que todo o PPKTP se encontra dentro da região de baixa divergência, uma das condições necessárias à eficiência de conversão.

Após a lente, o feixe de bombeamento entra no cristal PPKTP, de 10 mm de comprimento e 2 mm² de área no plano x-y. Como o raio da cintura do feixe foi calculado, a partir de uma varredura do feixe com um medidor de potência acoplado a uma fenda de 200 μm, como sendo aproximadamente 100 μm, a área da face do PPKTP é, portanto, 63,7 vezes maior que a área do feixe. Isso mostra que é aceitável aproximarmos o cristal como infinito no plano x-y, já que não esperamos observar efeitos de borda se o feixe passar pelo centro da face, ou próximo dele.

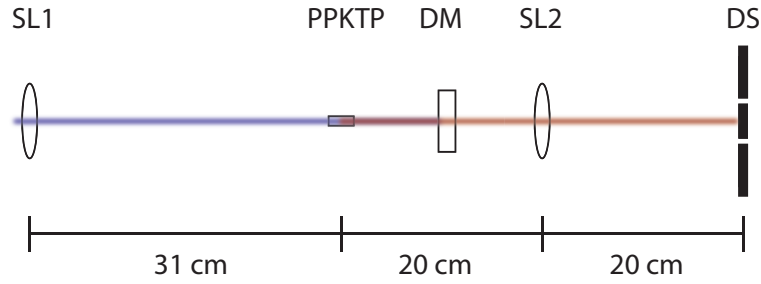
Imediatamente posterior ao cristal se encontra o conjunto de lentes que manipula o perfil transversal dos fótons convertidos antes que estes cheguem à fenda dupla, realizando a engenharia de estado propriamente dita. As duas configurações utilizadas são apresentadas em mais detalhe na Fig. 3.4.

Na Fig. 3.4 podemos ver que há dois casos de propagação da amplitude do bifóton entre o cristal e o plano das fendas. O primeiro, ilustrado na Fig. 3.4a é o caso em que há uma lente cilíndrica CL e uma lente esférica SL2 no caminho do bifóton, sendo $f_{CL} = 5$ cm e $f_{SL2} = 20$ cm. A lente cilíndrica é confocal com a lente SL1, de forma que o plano da cintura do feixe de bombeamento coincide com seu plano focal anterior. Já a lente SL2 está posicionada de modo que o plano das fendas coincide com seu plano focal posterior. Esta configuração, geralmente chamada de telescópio, projeta uma

^{iv}As irris foram omitidas da figura 3.3 por questões de espaço.



(a) Configuração de imagem do cristal



(b) Configuração de campo distante (Fourier)

Figura 3.4: Montagens ópticas para manipulação de estados de bifótons no subespaço \mathcal{B}^+ . Na primeira, um par de lentes em um arranjo de telescópio projeta a imagem ampliada, por um fator $f_2/f_1 = 4$, do plano $z = 0$, que corresponde à cintura do feixe de bombeamento. A segunda montagem contém apenas uma lente, posicionada na configuração f - f entre os planos $z = 0$ e $z = z_F$, de modo a mapear a transformada de Fourier da amplitude do campo em $z = 0$ sobre o plano das fendas.

imagem ampliada do plano focal anterior da primeira lente sobre o plano focal posterior da segunda. O fator de ampliação M será a razão entre as distâncias focais de SL2 e CL, ou seja, $M = 4$.

A amplitude do bifóton no plano das fendas, cuja propagação mostramos no Apêndice B, será dada por

$$\Phi(x_s, x_i, z_F) = E \left[\frac{(x_s + x_i)}{2M}; z = 0 \right] \zeta \left[\frac{(x_s - x_i)}{2M} \right], \quad (3.23)$$

tendo o termo E sido definido na Eq. (3.11) e

$$\tilde{\zeta}(x_-) = \mathcal{F} \left[\text{sinc} \left(\frac{L(q_s - q_i)^2}{(8n_{eff}\bar{\omega}/c)} \right) \right], \quad (3.24)$$

que é a transformada de Fourier da função de casamento de fases apresentada na Eq. (2.11) na forma escrita em [60] quando consideramos $\phi \approx 0$, corresponde a uma combinação de funções hipergeométricas que pode ser obtida via programas de cálculo simbólico. Lembramos que $x_- = (x_s - x_i)/2$. Omitimos a fase encontrada para o telescópio não-confocal porque esta depende de $x_s^2 + x_i^2$ e esta soma é constante no caso de uma fenda dupla, pois $x_0 = -x_1$. Utilizando os parâmetros da nossa implementação experimental, chegamos à situação mostrada na Fig. 3.5, para a qual podemos constatar que o termo que depende da amplitude do campo de bombeamento é praticamente constante. Dessa forma, a amplitude do bifóton será uma função de x_- . Como vimos na Seção 3.2.1, esta dependência significa que geramos estados com $\alpha \approx \pi$, ou seja, próximos de $|\Phi^+\rangle$.

No segundo caso, a montagem da Fig. 3.4b, há apenas a lente SL2 entre o cristal e as fendas. Vemos que o plano focal anterior desta coincidirá com o plano da cintura do feixe e o posterior, novamente, com o plano das fendas. O efeito desta configuração foi detalhado no Cap. 2, onde mostramos que o resultado é a projeção da transformada de Fourier óptica da amplitude no plano focal anterior sobre o plano focal posterior. Assim, sobre o plano das fendas teremos

$$\Phi(\beta x_s, \beta x_i; z_F) = \mathcal{F}_O [\Phi(x'_s, x'_i; z_0)], \quad (3.25)$$

onde x'_s e x'_i são coordenadas transversais ao longo do eixo x no plano do cristal, que corresponde a z_0 e as coordenadas x_s e x_i pertencem ao plano das fendas, no qual $z = z_F$, sendo o coeficiente $\beta = k/f$ da transformada de Fourier óptica [78, 101].

Para este caso não apresentaremos um gráfico comparativo como o da Fig. 3.5, pois tanto $\tilde{E}(x_+)$ quanto $\tilde{\zeta}(x_-)$, para os parâmetros deste experi-

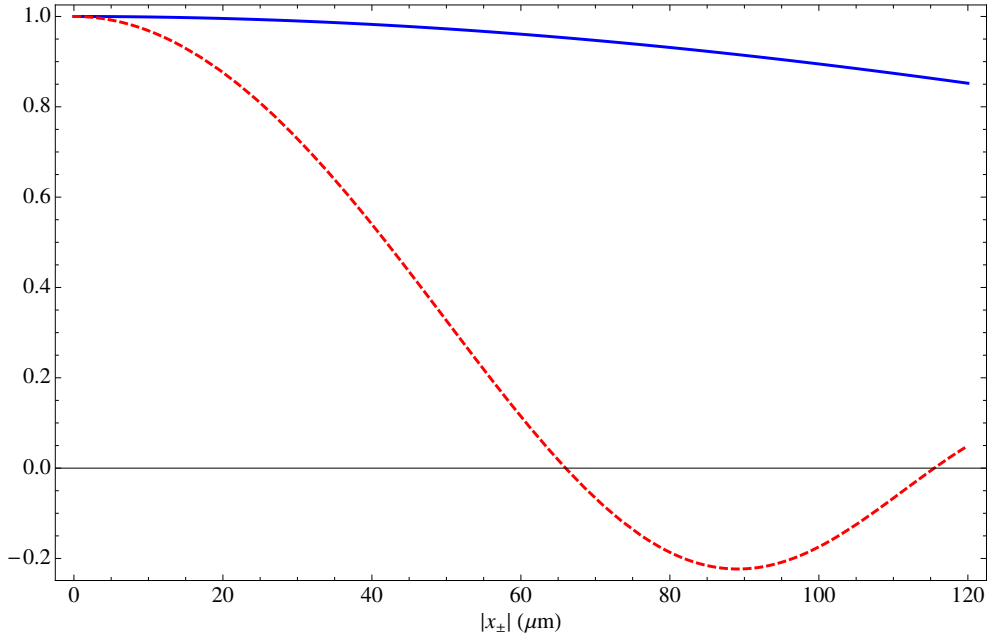


Figura 3.5: Comparação entre as funções $E(x_+)$ e $\zeta(x_-)$ no intervalo $|x_-| \leq 120 \mu\text{m}$. A linha sólida azul é a função $E(x_+)$ e a linha tracejada vermelha a função $\zeta(x_-)$. O parâmetro utilizado para $E(x_+)$ foi $w_0 = 100 \mu\text{m}$. Para $\zeta(x_-)$ utilizamos $n_{eff} = 1,79838$, $\tilde{\omega} = 2\pi c / (826 \times 10^{-9})$ e $L = 9,6 \text{ mm}$, sendo c a velocidade da luz no vácuo. Para ambos os casos, $M = 4$.

mento, são praticamente constantes ao longo do intervalo $|x_{\pm}| < d$. Assim, teremos que $\tan(\alpha/2) \approx 1$ o que significa que o estado da Eq. (3.4) pode ser escrito aproximadamente como

$$|\Psi\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}} [|\psi^+\rangle + |\phi^+\rangle], \quad (3.26)$$

lembrando que $\varphi \approx 0$. Para estes parâmetros temos, pelas Eqs. 3.20 e 3.21, que $C \approx 0$ enquanto $P_{\pi,\pi} \approx 1$.

3.3.2 Aparato de detecção

O primeiro estágio do aparato de detecção, indicado na Fig. 3.3 e esquematizado na Fig. 3.6 é a lente esférica que define se a medição será feita no plano da imagem da fenda (**IL**) ou no plano de Fourier (**FL**). Utilizamos IL

para alinhamento das fendas e FL para as medições no campo distante das mesmas.

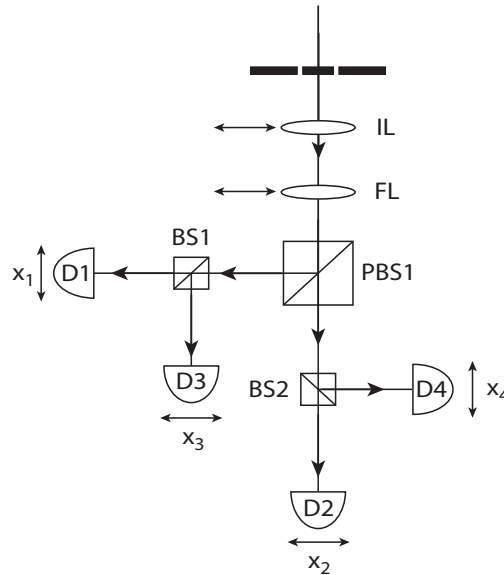


Figura 3.6: Esquema do aparato de detecção. Destacamos a lente IL, utilizada para a etapa de alinhamento das fendas e a lente FL, utilizada para projetar a transformada de Fourier óptica do plano das fendas sobre o plano dos detectores. Cada detector possui um eixo x associado, como indicado na figura. As lentes IL e FL podem ser colocadas no caminho dos fótons ou removidas por meio de deslocadores, indicados pelas setas duplas. Um divisor de feixe polarizado (PBS₁) transmite os fótons de polarização horizontal e reflete os de polarização vertical. Os fótons de polarização horizontal são divididos probabilisticamente, utilizando o divisor de feixe BS₁, entre os detectores D₂ e D₄. O mesmo ocorre para os fótons de polarização vertical, que irão para os detectores D₁ e D₃. As setas ao longo do caminho óptico indicam o sentido da propagação, das fendas até os detectores.

Em seguida, os fótons chegam a um divisor de feixe por polarização (PBS₁). Ele define dois braços, um pelo qual seguem os fótons verticais, refletidos, e outro pelo qual são transmitidos os fótons horizontais. Cada braço contém um divisor de feixe comum (BS₁ e BS₂), que separa os fótons em direção aos dois detectores de cada braço. Neste processo temos uma perda de 50% em cada ramo, quando consideramos coincidências entre dois

detectores quaisquer, significando uma atenuação de 75% sobre o sinal.

Quatro foto-diodos de avalanche (APDs) Perkin-Elmer são utilizados (**D1-D4**). O acoplamento entre os fótons incidentes e os diodos é feito por meio de lentes de foco curto (3 mm) montadas sobre um *gimbal*^V. Antes de chegar à lente a luz incidente passa por filtros de interferência com largura de banda $\Delta\lambda$ de 40 nm.

A resolução espacial do sistema é obtida por meio de orifício circular, com 100 μm de raio, colocado antes do filtro em cada *gimbal* e um diagrama da montagem utilizada para acoplar a luz incidente no plano de detecção ao foto-diodo pode ser visto na figura 3.7.

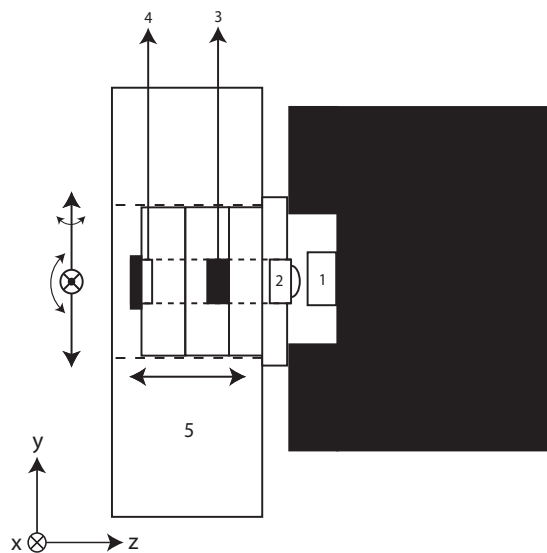


Figura 3.7: Montagem de acoplamento do foto-diodo (1) à lente (2). O *gimbal* (5) apresenta um canal sobre o qual são rosqueados os suportes para a lente, o filtro de interferência (3), com $\Delta\lambda = 40$ nm e o orifício (4), com 100 μm de raio. Os graus de liberdade são mostrados na figura por meio das setas duplas. O tempo da mesa óptica se encontra no plano x-z, o feixe de bombeamento se propaga ao longo de z e a detecção será feita deslocando todo o conjunto ilustrado ao longo da direção x.

^VAparato mecânico de posicionamento com graus de liberdade no plano X-Y e nos ângulos θ e ϕ em torno de \hat{x} e \hat{y} , como ilustrado na figura 3.7.

Cada conjunto de acoplador e detector foi montado em um suporte com liberdade para se mover no plano x - y . O movimento do detector em y é independente do resto do acoplador, de forma que o alinhamento entre o diodo e a lente indicada por (2) na Fig. 3.7 é um processo delicado. Contudo, o movimento em x é acoplado, de forma a facilitar o deslocamento do conjunto durante as medições.

3.4 Procedimento de aquisição de dados

Após montada a implementação óptica para a geração dos estados, passamos aos procedimentos de detecção. Estes serão apresentados em duas etapas: alinhamento dos sistemas ópticos e varreduras para medições em coincidência.

Na primeira etapa detalhamos o processo de alinhamento de todo o sistema, necessária para que as considerações a respeito da simetria da amplitude Φ sejam válidas. Uma vez garantida a simetria da amplitude, as posições dos parafusos dos deslocadores na direção x , definida como paralela à superfície da mesa óptica e ortogonal à direção de propagação do feixe, são associadas a eixos de coordenadas nos quais $x = 0$ coincide com o ponto no qual a intensidade $I = |\Phi|^2$ é máxima.

Já a segunda etapa, que chamamos de mapeamento, consiste em sequências de varreduras de dois dos quatro detectores enquanto os outros dois são mantidos fixos em posições que variam em incrementos iguais a cada nova varredura. Desta forma, pode-se utilizar o conjunto de varreduras para construir um mapa de detecções em coincidência.

3.4.1 Alinhamento

Para obtermos os mapas de detecções em coincidência mencionados anteriormente, com os quais pretendemos caracterizar o estado de um bifóton e

confirmar a ocorrência de eventos de geração de dois bifótons emaranhados em estados de caminho transversal, começamos por alinhar todo o sistema óptico ao longo de uma direção estabelecida por diversas íris de abertura variável. O alinhamento começa pela lente SL₁, que é introduzida e alinhada de forma a não perturbar o caminho previamente estabelecido. A partir desta, prosseguimos para a lente SL₂. Em ambos os casos o alinhamento é feito de forma que a introdução da lente não desvie o feixe de bombeamento do caminho pré-alinhado e demarcado pelas íris.

Após o alinhamento destas duas lentes, que permanecerão imóveis pelo resto do experimento, podemos determinar uma posição zero para cada detector por meio de varreduras de calibração, que consistem em varrer cada detector e encontrar a posição para o parafuso do seu respectivo deslocador que corresponda ao máximo de intensidade para as detecções simples de fótons vindos do cristal. Nesta etapa utilizamos íris após a lente SL₂, de forma a definir um perfil mais estreito para a varredura. Em seguida, mantendo os detectores fixos nas posições de zero encontradas no passo anterior, alinhamos a lente CL para encontrar a sua posição zero, que corresponderá ao ponto de máxima detecção numa varredura da posição do deslocador sobre o qual a lente CL se encontra.

Tendo alinhado as lentes antes do plano das fendas, passamos para as lentes IL e FL, realizando um processo de varredura similar ao feito para a lente CL. Após o alinhamento dos elementos ópticos, seguimos com o posicionamento da fenda dupla. Esta deve estar centrada sobre o eixo de propagação com o máximo de precisão possível, pois o estado após a fenda dependerá da amplitude do bifóton sobre cada fenda e, em nosso modelo, assumimos simetria desta amplitude em relação ao centro do feixe e das fendas.

Este processo começa com uma varredura das fendas tendo a lente IL entre as fendas e os detectores. Esta lente projetará uma imagem ampliada

em 4x do plano das fendas sobre o plano de detecção, permitindo que tenhamos maior resolução para identificar cada fenda. A varredura da fenda dupla fornece um perfil de intensidade em função da posição do parafuso do deslocador sobre o qual as fendas estão montadas. Desta forma é possível calcular a posição deste parafuso que corresponde ao alinhamento do centro do conjunto de fendas ao zero do sistema óptico. Em seguida, procedemos, ainda com a lente IL, uma varredura dos detectores, em um intervalo simétrico em torno dos respectivos zeros, grande o suficiente para abranger completamente a imagem das fendas. Esta segunda varredura tem por objetivo confirmar que o centro das fendas coincide com o centro dos eixos de x de cada detector e observar se a iluminação é de fato simétrica, comparando as contagens integradas ao longo da imagem de cada fenda.

3.4.2 Mapeamento

Após confirmar que a iluminação é simétrica e o sistema se encontra devidamente centrado, deslocamos a lente IL para fora do caminho óptico e introduzimos a lente FL, que efetuará a transformada de Fourier óptica do plano das fendas sobre o plano dos detectores. Podemos, então, iniciar o processo de varredura dos mapas. Como os detectores D1 e D4 enxergam imagens espelhadas em relação aos detectores D2 e D3, isolamos estes pares de detectores, escolhendo D1 e D2 como detectores estacionários e varrendo D3 e D4 ao longo de um intervalo simétrico, de -1 mm a 1 mm nos eixos definidos durante a etapa de alinhamento. Este intervalo foi escolhido por abranger as principais características do padrão que desejamos observar sem, contudo, utilizar muitos pontos ou passos muito largos entre cada ponto, evitando assim medições com tempos totais exageradamente longos ou mapas com baixa resolução. Para nosso caso, em que utilizamos orifícios de $100\ \mu\text{m}$ de raio para dar resolução espacial aos detectores, decidimos adotar um passo também de $100\ \mu\text{m}$, de forma que 21 pontos são medidos em cada

linha.

Como desejamos formar um mapa e não apenas uma curva, após termos varrido um intervalo, os detectores fixos são movidos para uma nova posição e o processo é repetido, seguindo sempre a mesma direção de varredura, para evitar imprecisões devido a imperfeições no movimento dos deslocadores, como indicado na Fig. 3.8. Este processo é repetido até que os detectores fixos, inicialmente em -1 mm, cheguem a 1 mm.

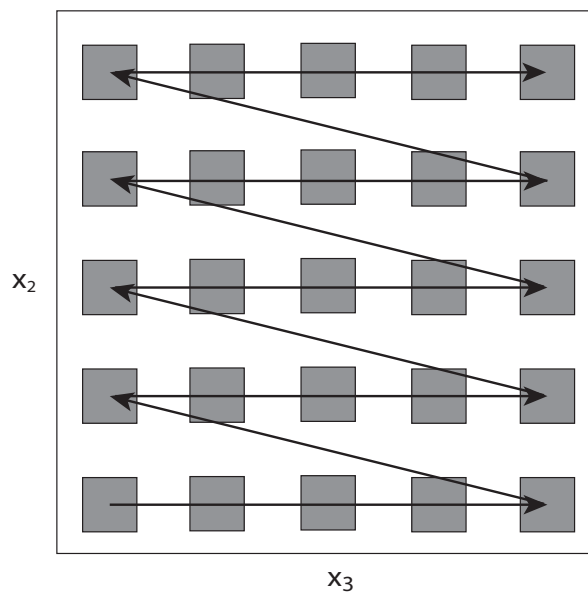


Figura 3.8: Descrição esquemática do processo de varredura para geração dos mapas de detecção em coincidência. Para exemplificar o processo consideramos as posições x_2 e x_3 dos detectores D_2 e D_3 . Vemos que D_2 é mantido fixo ao longo de cada linha enquanto D_3 se move. Ao fim de uma linha D_2 avança e D_3 retorna à posição inicial. Os quadrados indicam que a detecção em coincidência não é feita em um único ponto, mas ao longo de um intervalo determinado pelo diâmetro dos orifícios colocados na frente de cada detector.

A contagem de fótons e subsequente processamento para detecção de coincidências entre detectores é feita utilizando um sistema eletrônico desenvolvido na UFMG por Álvaro Nunes Oliveira, baseado em um diagrama disponibilizado pelo laboratório do Prof. Aephraim Steinberg, da Universi-

dade de Toronto, Canadá. A janela de detecção de coincidências foi ajustada para 1 ns e todos os eventos de coincidência entre 2, 3 ou 4 detectores, bem como as contagens simples, são registrados em um arquivo, que registra também a posição dos detectores às quais correspondem as detecções. Dessa forma, a cada linha do mapa corresponde um arquivo separado.

O tempo de integração para cada ponto foi definido em 25 s, para que obtivéssemos coincidências suficientes para uma boa estatística, com baixo ruído. Como medimos ao todo 441 pontos, o tempo mínimo de duração da medição de um mapa é de aproximadamente 3 horas. Contudo, o deslocamento entre cada ponto é feito manualmente, de forma que o tempo efetivo de medição foi de aproximadamente 7 horas por mapa.

O laser de bombeamento é mantido estável ao longo de toda a medição devido ao controle da temperatura ambiente da sala e ao uso de um dispositivo de fluxo laminar de ar filtrado, que impede a deposição de grãos de poeira sobre os elementos ópticos, fator que observamos ser extremamente deletério para o modelo de laser utilizado, um MIRA 9000, produzido pela Coherent.

3.5 Lidando com dois bifótons

Até este ponto, nos preocupamos em descrever o comportamento de apenas um bifóton, embora saibamos que nossa fonte pode gerar um ou dois pares de fótons quando um pulso de bombeamento interage com o PPKTP. Devido à natureza do processo de geração de dois bifótons, descrito no Cap. 2, duas cópias do mesmo estado são produzidas no cristal. Como ambas passam pelo mesmo sistema óptico, entre o cristal e as fendas, e não há interações entre bifótons, a discussão apresentada anteriormente é suficiente para descrever o estado de cada par de fótons após as fendas.

É importante recordar que o processo de CPDE não nos garante que todos os eventos de conversão produzirão dois bifótons, de forma que ainda

há a possibilidade de apenas um ser gerado. Embora seja possível filtrar apenas o sinal de quatro fótons por meio de contagens em coincidência envolvendo quatro detectores, às quais nos referiremos como coincidências quádruplas, este é muito menos intenso do que o sinal proveniente de contagens em coincidência entre apenas dois dos detectores, que chamaremos de coincidências duplas, especialmente no caso onde o sinal total já é de baixa intensidade, devido às fendas.

Para ilustrar o quão significativo é o problema da diferença de contagens em coincidências duplas e quádruplas, consideremos duas situações, ambas envolvendo a montagem apresentada na Fig. 3.3. A primeira envolve, por simplicidade, uma fonte com baixa eficiência, para que possamos considerar apenas o caso em que um par de fótons é gerado e deve ser detectado. O segundo caso é o do experimento que realizamos, com uma fonte eficiente, onde consideraremos as coincidências quádruplas.

Consideremos a questão da perda de fótons ao longo da montagem, assumindo que cada elemento óptico no caminho entre o cristal e um detector tem transmissividade τ_i , de forma que a transmissividade total possa ser escrita como $\tau = \prod_i \tau_i$. Se todos os elementos têm a mesma transmissividade τ' , a transmissividade para N elementos ópticos será $\tau = (\tau')^N$. Além disso, definamos a eficiência de detecção $\varepsilon < 1$ para o conjunto do detector, filtro de interferência e lente de acoplamento da luz ao detector. Combinando a eficiência de detecção e a transmissividade total do sistema, chegamos a $\mathcal{T} = \varepsilon(\tau')^N$ para o coeficiente de transmissividade efetiva de nosso sistema. Além do fator ω , devemos nos lembrar que a presença de um divisor de feixe em cada ramo de polarização introduz uma atenuação tal que apenas 25% eventos serão detectados com sucesso.

No caso da geração e detecção de apenas um bifóton, a detecção efetiva de coincidências duplas será dada por $D = 0.25\omega^2\eta$. Supondo sete elementos

ópticos de $\tau' = 0.95$ e detectores $\varepsilon = 0.15^{\text{vi}}$, chegamos a $D = 0.002\eta$. Já no caso de dois bifótons e coincidências quádruplas, temos $D = 0.25\omega^4\eta^2$ o que, considerando os mesmos parâmetros da montagem e detectores, corresponde a $D = 3 \times 10^{-5}\eta^2$. Para efeito de comparação, se utilizarmos um laser pulsado com taxa de repetição de 75 MHz e um meio não-linear com $\eta = 0.5$, esperamos observar taxas de 103 kHz para coincidências duplas e 564 Hz para coincidências quádruplas, respectivamente em cada uma das situações.

Este simples exemplo, que ignora a atenuação introduzida pelas fendas, que bloqueiam a maior parte do feixe, e que assume que todos os fótons transmitidos ao longo do sistema chegam aos detectores, algo que não é verdade para padrões de interferência que ocupam uma área muito maior que aquela sobre a qual o detector é capaz de coletar fótons, já mostra que há ao menos uma diferença de três ordens de grandeza entre as coincidências duplas e quádruplas. Esta diferença, quando aplicada a tempos de detecção, torna inviáveis experimentos de detecção de quatro fótons ao longo de padrões de interferência, pois até tempos de detecção de poucos segundos por ponto para uma estatística significativa de coincidências duplas implicariam em horas de detecção para coincidências quádruplas.

Chegamos, então, ao primeiro percalço em nosso objetivo de estender a capacidade de controlar e caracterizar as correlações no perfil transversal a dois pares de fótons ou, em termos de Informação Quântica, manipular e caracterizar duas cópias do mesmo estado de dois qubits em variáveis transversais. Já que experimentos utilizando coincidências quádruplas são muito pouco eficientes para o caso de qubits de fenda, a solução que nos resta é utilizar coincidências duplas. Como, porém, podemos mostrar a existência de dois bifótons utilizando este tipo de coincidência?

Coincidências duplas entre fótons de polarizações distintas detectados

^{vi}Em nossos experimentos utilizamos fotodiodos de avalanche *Perkin-Elmer*, com uma eficiência de até 65% em 650 nm. Acreditamos que o valor de 15% é adequado se considerarmos que os fótons detectados têm comprimento de onda central de 830 nm e que os filtros de interferência introduzem uma atenuação adicional.

no campo distante das fendas contém a informação necessária para determinar o estado de um par. Entretanto, a janela de tempo para que duas detecções sejam consideradas em coincidência é de 1 ns, enquanto o pulso de bombeamento tem aproximadamente 200 fs de duração e demora pouco mais de 0.03 ns para atravessar o cristal. Isto significa que dois pares de fótons criados pelo mesmo pulso, em momentos distintos, não são distinguíveis para a nossa eletrônica de detecção^{vii}. Esta restrição do experimento gera um “ruído” sobre o padrão de correlações observado nas coincidências duplas entre fótons de polarização horizontal e vertical, as quais chamaremos de coincidências HV, uma vez que fótons de pares distintos não estão correlacionados.

A solução para esta questão é utilizar a polarização dos fótons como um grau de liberdade auxiliar. Como o PPKTP utilizado foi crescido para CPDE do tipo II, sabemos que cada bifóton contém um fóton com polarização horizontal e outro com polarização vertical^{viii}. Observando novamente a Fig. 3.3, vemos que nossa montagem permite detectar tanto coincidências HV quanto $\pi\pi$, ou seja, entre fótons com a mesma polarização $\pi \in \{H, V\}$. Estas últimas se devem exclusivamente a eventos de geração de dois pares de fótons e servem como indicador de que o experimento de fato lida com dois bifótons. Como não há correlação entre pares, também não somos capazes caracterizar o estado de cada bifóton utilizando apenas detecções $\pi\pi$. Isto, contudo, não significa que o padrão de correlações $\pi\pi$ seja irrelevante. Como supomos um estado global puro e os mapas de detecções em coincidências entre fótons de mesma polarização fornecem informação sobre a pureza do estado reduzido de um fóton de cada par, podemos obter informação

^{vii}Bifótons originados de pulsos distintos, contudo, não geram coincidências, pois a separação entre dois pulsos é de 13 ns.

^{viii}Em um experimento com apenas um par de fótons este fato serviria apenas para separá-los, por meio de um divisor de feixe polarizado, e facilitar a detecção, da mesma forma como o a direção de propagação é utilizada em experimentos envolvendo qubits de polarização gerados em CPDE não-colinear.

sobre o grau de emaranhamento em um bifóton observando apenas o estado reduzido de um dos fótons em duas cópias do mesmo estado. De fato, a possibilidade de se medir o emaranhamento de um estado utilizando duas cópias deste foi mostrada em [102, 103], fato que é um caso específico do resultado geral para funções polinomiais de ordem m de um estado ρ do qual se possui m cópias [104].

Seguindo a mesma proposta apresentada para caracterizar um par de fótons, podemos calcular mapas para a probabilidade de detectar fótons de mesma polarização no caso de um estado global $|\Psi_B^+(\alpha, \varphi)\rangle^{\otimes 2}$:

$$P(x_1, x_2)_{\pi, \pi} \propto 1 + (\sin(\alpha) \cos(\varphi))^2 \cos(\beta x_1) \cos(\beta x_2) + \sin(\alpha) \cos(\varphi) (\cos(\beta x_1) + \cos(\beta x_2)). \quad (3.27)$$

A dedução deste resultado se encontra no Apêndice A. Estes podem ser comparados aos resultados experimentais, da mesma forma que os mapas para coincidências entre fótons de polarizações diferentes que, devido ao “ruído” já mencionado, devem ser corrigidos. A correção é feita subtraindo do sinal medido para coincidências HV o que foi medido para coincidências $\pi\pi$.

Concluimos, assim, que uma caracterização é possível utilizando tanto coincidências HV quanto $\pi\pi$, além de um passo adicional, para corrigir o mapa medido para HV.

3.6 Simulações

Tendo associado o estado gerado nas fendas a mapas de coincidências entre dois detectores no plano de Fourier, podemos simular mapas para diferentes tipos de estado, de forma a observar o comportamento dos padrões de coincidências em função de α e φ . Estes padrões demonstram como as correlações transversais dependem do tipo de correlação entre os fótons e

ilustram o princípio de dualidade entre a visibilidade de interferência de um e dois fótons, como função do emaranhamento entre eles.

Para simular os mapas utilizamos uma rotina de MATLAB, escrita para calcular o valor de P_{B^+} ou $P_{\pi,\pi}$ em pontos (x_1, x_2) escolhidos para coincidir com as posições nas quais colocamos os detectores durante as medições experimentais. Dessa forma, minimizamos o efeito de discrepâncias entre simulação e experimento introduzidas por artefatos do processo de interpolação utilizado para gerar as imagens, facilitando a interpretação dos resultados experimentais via comparação com as simulações. Além disso, incluímos na simulação um termo adicional, que simula o uso de orifícios com $200\ \mu\text{m}$ de diâmetro para dar resolução espacial aos detectores. Esta é a mesma dimensão dos orifícios utilizados no experimento, de forma a aproximar ainda mais os mapas simulados dos observados em laboratório.

Mostraremos a seguir padrões para valores especialmente interessantes de α e φ , quais sejam, 0 , $\pi/2$ e π . Para cada mapa indicaremos os valores de $C(\alpha, \varphi)$ e $\mathcal{P}_{\pi,\pi}(\alpha, \varphi)$ correspondentes e discutiremos características que permitem identificar em que região da esfera de Bloch generalizada está o estado apenas observando o mapa. Antes de começarmos, porém, é necessário esclarecer a nomenclatura que utilizaremos nas legendas. Como os mapas são feitos para simular detecções em coincidência, nos referiremos a detectores e coincidências quando falando das características de um dado mapa simulado, pois estas mesmas características podem ser observadas em um mapa real gerado pelo estado correspondente. As linhas ao longo das quais a posição de um dos detectores é mantida fixa serão chamadas de padrões de linha, que diferenciaremos de padrões observados ao longo das diagonais dos mapas, caso em que a posição dos dois detectores varia para cada ponto. Chamaremos de padrão condicional apenas aqueles padrões de linha em que o caráter da interferência muda dependendo da posição do detector que é mantido fixo. Um exemplo é a mudança de um padrão

com um máximo central para um com um mínimo central e dois máximos laterais.

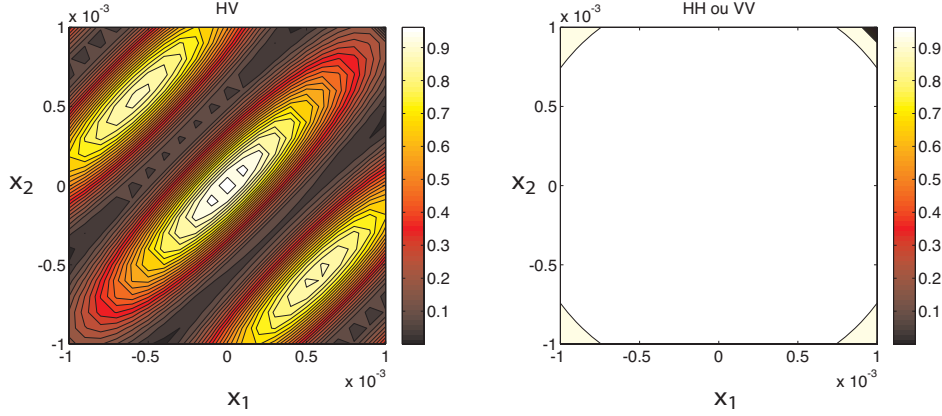


Figura 3.9: Mapa simulado para $\alpha = 0^\circ$ e $\varphi = 0^\circ$, correspondendo ao estado $|\psi^+\rangle$. Para este estado temos $C = 1$ e $\mathcal{P}_{\pi,\pi} = 0,25$. No mapa HV observa-se interferência condicional e também interferência ao longo da direção $x_1 = -x_2$, ou $x_+ = 0$. Na direção $x_1 = x_2$, ou $x_- = 0$, vemos apenas o envelope de difração. O caráter condicional da interferência é evidente quando se observa a linha definida por $x_2 = 0$ e as linhas definidas por $x_2 = \pm 0,5$ no mapa HV. O mesmo pode ser visto considerando x_1 constante e varrendo x_2 . Vemos a mudança de um padrão com um pico central para um padrão com um mínimo central e dois máximos laterais. A condicionalidade do padrão de interferência, quando há alta visibilidade, indica que o estado possui emaranhamento. O padrão de interferência observado ao longo de $x_+ = 0$, mas não de $x_- = 0$ é uma característica dos estados com $\alpha < \pi/2$, ou seja, com contribuição dominante do estado anti-correlacionado $|\psi^+\rangle$, especialmente no caso em que $\varphi = 0$. Deve-se observar que o período do padrão de interferência na diagonal é metade do período do padrão de interferência variando x_1 com $x_2 = 0$. O mapa $\pi\pi$ mostra probabilidade quase constante de detecção em coincidência, já que o estado é misto e separável, havendo apenas uma modulação por difração.

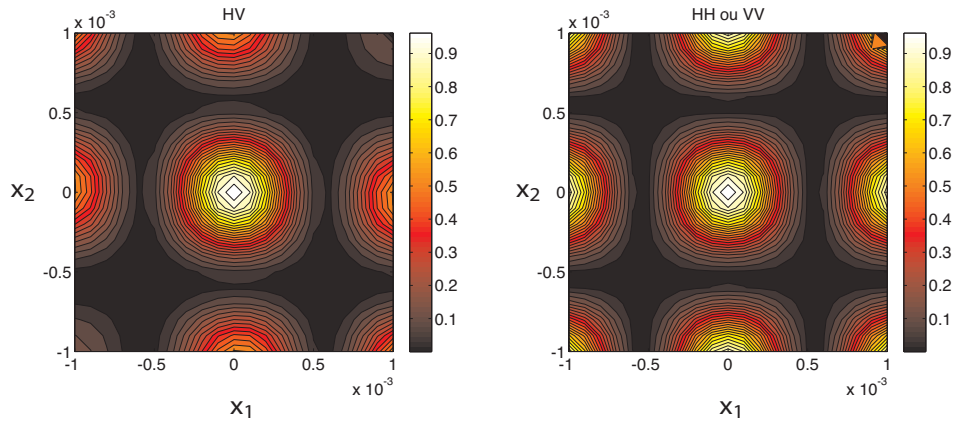


Figura 3.10: Mapa simulado para $\alpha = 90^\circ$ e $\varphi = 0^\circ$, correspondente ao estado $\frac{1}{\sqrt{2}}[|\psi^+\rangle + |\phi^+\rangle]$. Para este estado temos $C = 0$ e $\mathcal{P}_{\pi,\pi} = 1$. No mapa HV observa-se o mesmo padrão de interferência ao longo das direções $x_1 = -x_2$, ou $x_+ = 0$, e $x_1 = x_2$, ou $x_- = 0$, bem como quando $x_2 = 0$ ou $x_2 = 1$. Vemos assim que não há interferência condicional e que o período da interferência nos padrões diagonais é o mesmo daquele para os padrões de linha. Este comportamento é característico de estados separáveis, pois observamos apenas o padrão de interferência chamado de *single photon*, ou seja, aquele relacionado apenas às contagens simples, que exibirão o mesmo comportamento das coincidências. O mapa $\pi\pi$ mostra o mesmo padrão de interferência de HV, significando que a interferência tem origem na coerência transversal do campo de um fóton, ou seja, o estado reduzido de cada fóton é puro, indicando que o estado global é um estado produto. O envelope de difração não é visível na figura, embora esteja presente.

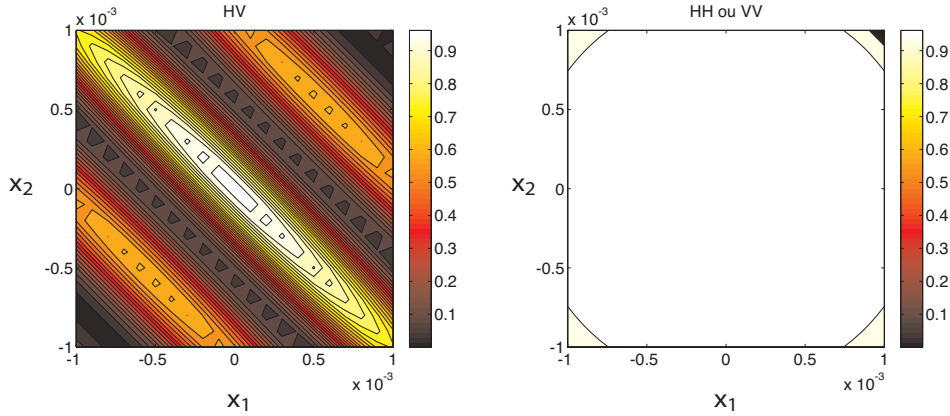


Figura 3.11: Mapa simulado para $\alpha = 180^\circ$ e $\varphi = 0^\circ$, correspondente ao estado $|\phi^+\rangle$. Para este estado temos $C = 1$ e $\mathcal{P}_{\pi,\pi} = 0,25$. No mapa HV observa-se tanto um padrão de interferência condicional, com um máximo central na linha $x_2 = 0$ e um mínimo central e dois máximos laterais nas linhas $x_2 = \pm 0,5$, da mesma forma que observado na Fig. 3.9. A interferência ao longo das diagonais, porém, é observada na direção $x_1 = x_2$, ou $x_- = 0$, enquanto a direção $x_1 = -x_2$, ou $x_+ = 0$, mostra apenas o envelope de difração, o inverso do caso anterior. Um padrão de interferência dependente de x_+ cujo período é a metade daquele para o padrão condicional é uma característica comum aos estados com contribuição dominante do estado positivamente correlacionado $|\phi^+\rangle$, ou seja, aqueles na região $\alpha > \pi/2$ da esfera \mathcal{B}^+ . Quanto maior for a visibilidade deste padrão e, em contrapartida, menor for a visibilidade daquele dependente de x_- , maior será a contribuição de $|\phi^+\rangle$. O mapa de coincidências entre fótons de mesma polarização, $\pi\pi \in \{H, V\}$, mostra probabilidade quase constante de detecção em coincidência, já que o estado reduzido de um dos fótons de cada par é maximamente misto e separável, havendo apenas uma modulação por difração.

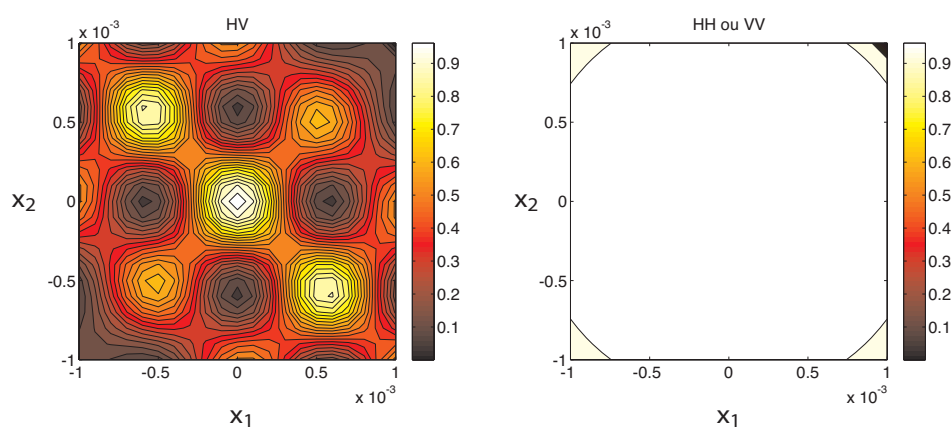


Figura 3.12: Mapa simulado para $\alpha = 90^\circ$ e $\varphi = 90^\circ$, correspondente ao estado $\frac{1}{\sqrt{2}}[|\psi^+\rangle + i|\phi^+\rangle]$. Para este estado temos $C = 1$ e $\mathcal{P}_{\pi,\pi} = 0,25$. O mapa constitui, efetivamente, uma superposição dos padrões de interferência das Figs. 3.9 e 3.11. Vemos que o caráter condicional da interferência continua presente, bem como a interferência ao longo das diagonais, que apresenta o período igual a metade daquele da interferência condicional. Neste caso vemos que em ambas as diagonais observamos interferência, embora com visibilidade reduzida. Como esperado para um estado maximamente emaranhado, o mapa $\pi\pi$ apresenta apenas um padrão de difração largo, compatível com o estado reduzido maximamente misto.

3.7 Resultados experimentais

Seguindo a implementação experimental apresentada, realizamos medições de coincidências entre detecções em ramos de polarização diferentes e no mesmo ramo de polarização. Inicialmente, os mapas foram medidos para as duas configurações apresentadas na Fig. 3.4, com 25 s de tempo de integração para cada ponto em uma grade de 21x21 pontos, com espaçamento de 100 μm entre cada ponto. Os mapas são compostos de sequências de varreduras em linha, durante as quais os detectores D₃ e D₄ foram mantidos fixos enquanto D₁ e D₂ foram movidos. Ao fim de cada linha D₃ e D₄ eram então reposicionados e outra linha varrida.

Na configuração de imagem o conjunto de lentes utilizado era composto de uma lente cilíndrica de comprimento focal $f_{CL} = 5$ cm e uma lente esférica de comprimento focal $f_{SL} = 20$ cm. Na configuração de Fourier foi utilizada uma lente esférica de comprimento focal $f_{SL} = 20$ cm, na configuração f - f , para projetar o campo distante do centro do cristal sobre o plano das fendas. Em todos os casos utilizamos uma lente esférica de comprimento focal $f_{FL} = 30$ cm para projetar o campo distante das fendas sobre o plano dos detectores. Foram utilizadas fendas com 80 μm de largura e 240 μm de espaçamento entre os centros.

Utilizamos uma rotina de MATLAB para consolidar os arquivos de dados correspondentes a cada varredura, extrair os mapas correspondentes e transformá-los em gráficos de curva de nível, via algoritmos de interpolação do próprio MATLAB. Como todas as possíveis detecções em coincidência são armazenadas no mesmo arquivo, os mapas HV, são medidos simultaneamente e gerados pela mesma rotina. Os mapas simulados são identificados como **DBC** (*Different-branch Coincidence*) para o caso HV e **SBC** (*Same-branch Coincidence*) para o caso $\pi\pi$. Acima de cada mapa identificamos os detectores que originaram as contagens, numerados de acordo com a Fig. 3.3. Identificamos o produto das contagens simples entre dois detectores por

$DX*DY$, para $X,Y \in \{1,2,3,4\}$.

Nas Figs. 3.13 a 3.16 incluímos os mapas para medições no mesmo ramo de polarização e para as coincidências “acidentais”, obtidas a partir do produto das contagens simples, na linha superior, acompanhadas de um mapa simulado. A linha de baixo mostra os mapas para medições em ramos diferentes de polarização, antes e depois da correção para o ruído de dois pares e também um mapa simulado. Todas as figuras apresentadas nesta seção fazem parte dos resultados publicados em [105].

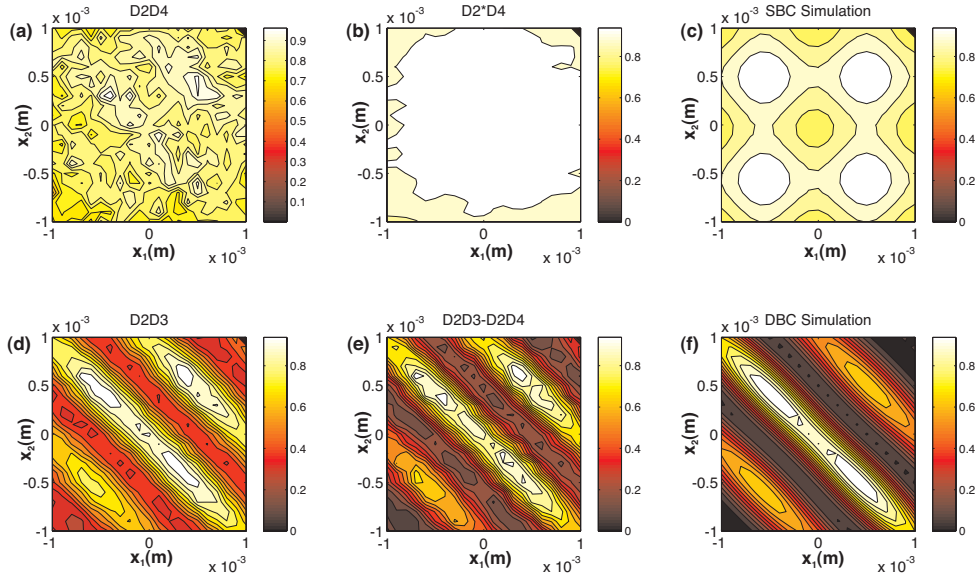


Figura 3.13: Mapa na configuração de imagem entre cristal e fenda dupla. A simulação foi feita estimando $\alpha = 176^\circ$ e $\varphi = 170^\circ$. Para estes parâmetros temos $C \approx 0,997 \pm 0,003$ e $\mathcal{P}_{\pi,\pi} \approx 0,254 \pm 0,003$. As contagens foram normalizadas pelo valor da maior contagem sobre todo o mapa. No mapa (a) este valor corresponde a 549 coincidências $\pi\pi$ e, no mapa (d), a 1630 coincidências HV. Nota-se o comportamento condicional da interferência nos mapas (d) e (e), sendo o aumento na visibilidade de (d) para (e) é devido à subtração da contribuição de coincidências entre fótons de polarizações ortogonais porém pertencentes a pares distintos. Como a contribuição devido a pares distintos é distribuída igualmente entre todos os pares de detectores, podemos realizar a subtração utilizando as detecções em coincidência de fótons de mesma polarização, ou seja, subtraindo o mapa (a) do mapa (d). Vemos também a presença de um padrão de interferência ao longo de $x_1 = x_2$ com alta visibilidade e período igual à metade do período condicional, uma característica de estados próximos de $|\phi^+\rangle$ na esfera \mathcal{B}^+ .

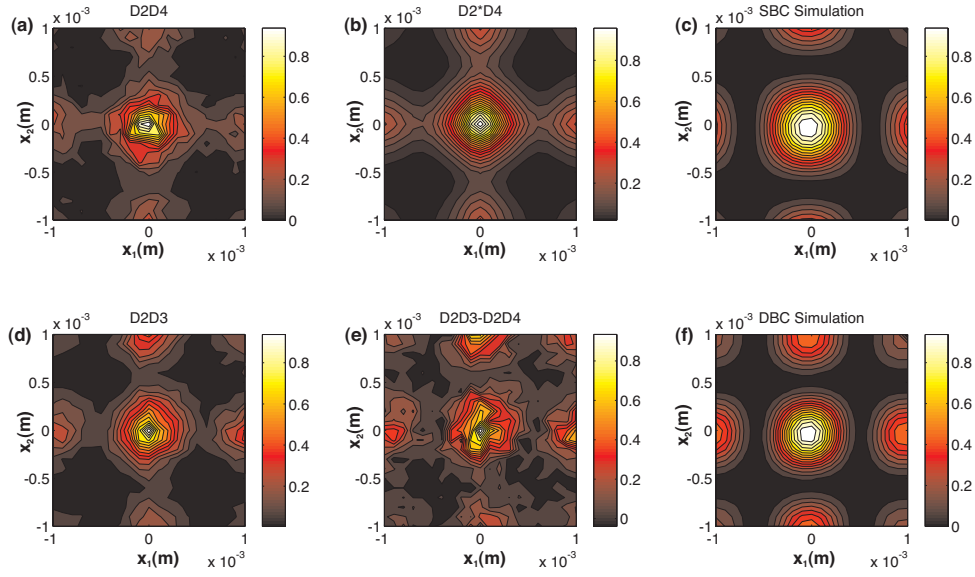


Figura 3.14: Mapa na configuração de Fourier entre cristal e fenda dupla. A simulação foi feita estimando $\alpha = 86^\circ$ e $\varphi = 5^\circ$. Para estes parâmetros temos $C \approx 0,11 \pm 0,03$ e $\mathcal{P}_{\pi,\pi} \approx 0,988 \pm 0,004$. As contagens foram normalizadas pelo valor da maior contagem sobre todo o mapa. No mapa (a) este valor corresponde a 122 coincidências $\pi\pi$ e, no mapa (d), a 247 coincidências HV. Percebe-se a ausência de condicionalidade nos padrões de linha, bem como a ausência de um padrão de difração nas diagonais com período menor que o dos padrões de linha, sinais de que não há emaranhamento nos bifótons.

3.7.1 Observando o envelope de difração

Após as medições para observar em detalhe os mapas de interferência, decidimos realizar também medições com maior espaçamento entre os pontos, passando de 100 para 500 μm , para obter mais informação sobre o envelope de difração. Para as simulações, utilizamos um modelo fenomenológico simples para ajustar os envelopes aos observados e obter dados semi-quantitativos para o grau de assimetria ao longo das direções $x_1 = x_2$ e $x_1 = -x_2$. Em vez de utilizar um envelope de difração dado por

$$\Xi(x_1, x_2) = \text{sinc}^2(ax_1) \text{sinc}^2(ax_2), \quad (3.28)$$

adotamos um descrito por

$$\Xi(x_+, x_-) = \text{sinc}^2(\zeta_+ x_+) \text{sinc}^2(\zeta_- x_-), \quad (3.29)$$

sendo ζ_{\pm} larguras para as fendas efetivas através das quais ocorre a difração, que expressaremos em função da largura $a = 80 \mu\text{m}$ das fendas utilizadas no experimento.

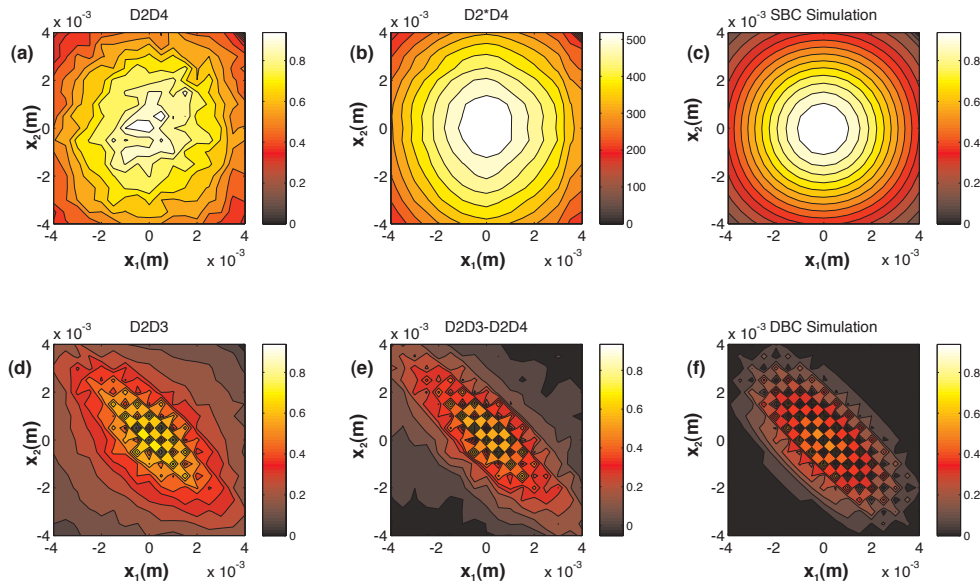


Figura 3.15: Mapas na configuração de imagem entre cristal e fenda dupla. A simulação foi feita estimando $\alpha = 176^\circ$ e $\varphi = 170^\circ$. Para estes parâmetros temos $C \approx 0,997 \pm 0,003$ e $\mathcal{P}_{\pi,\pi} \approx 0,254 \pm 0,003$. As contagens foram normalizadas pelo valor da maior contagem sobre todo o mapa. No mapa (a) este valor corresponde a 483 coincidências $\pi\pi$ e, no mapa (d), a 1598 coincidências HV. Vemos que a difração nos mapas (a) e (b) é muito mais larga do que o esperado, embora simétrico, resultando em uma largura efetiva $\zeta'_{\pm} = 0,29a$. Nos mapas (d) e (e) observa-se que o envelope de difração é mais largo apenas na diagonal ao longo da qual não se observa interferência, resultando em larguras das fendas efetivas $\zeta_+ = 1,23a$ e $\zeta_- = 0,52a$.

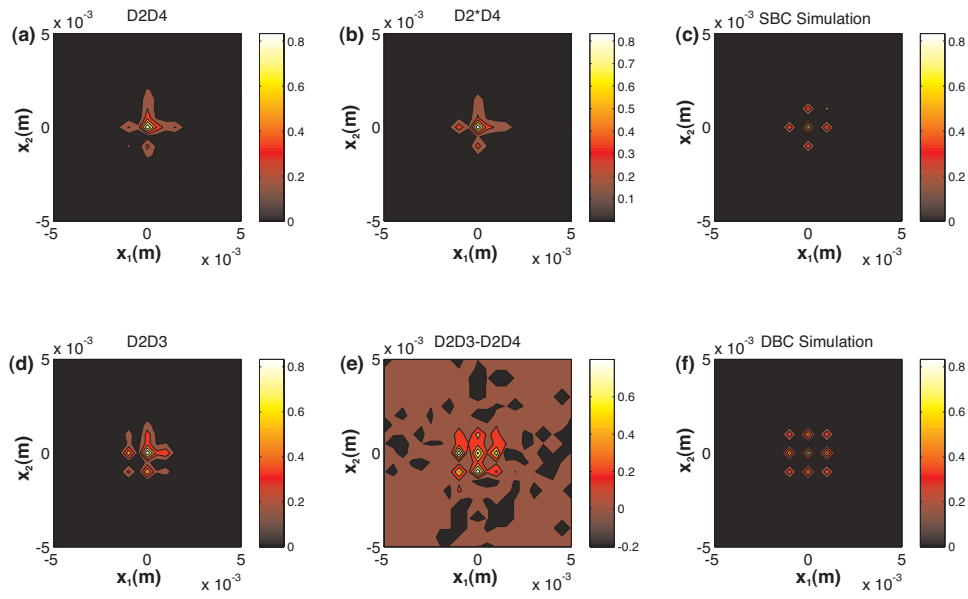


Figura 3.16: Mapas na configuração de Fourier entre cristal e fenda dupla. A simulação foi feita estimando $\alpha = 86^\circ$ e $\varphi = 5^\circ$. Para estes parâmetros temos $C \approx 0,11 \pm 0,03$ e $\mathcal{P}_{\pi,\pi} \approx 0,988 \pm 0,004$. As contagens foram normalizadas pelo valor da maior contagem sobre todo o mapa. No mapa (a) este valor corresponde a 75 coincidências $\pi\pi$ e, no mapa (d), a 117 coincidências HV. Observamos que não há indício de deformação do envelope de difração ao longo das diagonais, pois obtivemos um bom ajuste entre os mapas simulados e os mapas medidos utilizando $\zeta'_\pm = \zeta_\pm = 0,99a$ para a largura das fendas efetivas tanto no caso de fótons de mesma polarização quanto no caso de fótons com polarizações ortogonais.

3.8 Análise e discussão

A partir do modelo proposto para estados de fenda, que nos fornece conhecimento *a priori* do sub-espaço ocupado pelos possíveis estados, mostramos ser possível determinar, apenas por inspeção, a região de \mathcal{B}^+ na qual o estado se encontra e, a partir de uma comparação mais detalhada com mapas simulados, pode-se determinar melhor os parâmetros α e φ do estado, mesmo que não se conheça o arranjo óptico entre o cristal e o plano das fendas. Para tanto é preciso recorrer a ferramentas de ajuste de funções de duas variáveis.

As Figs. 3.13 a 3.16 revelam excelente concordância entre dois modelos distintos utilizados para descrever o experimento. O primeiro faz previsões a respeito da geração de um e dois bifótons e das propriedades do perfil transversal destes. O segundo modelo diz respeito aos estados após a fenda dupla, partindo de alguns pressupostos simples, como a simetria de iluminação das fendas e a incapacidade destas para discriminar polarizações distintas. O ponto de ligação entre os dois é a Eq. (3.9), que associa as previsões para o perfil transversal dos bifótons aos parâmetros α e φ .

Abordaremos primeiramente os resultados para a configuração da Fig. 3.4a, correspondente aos mapas das Figs. 3.13 e 3.15. Podemos ver, na Fig. 3.13, que há uma depressão na região em torno do ponto $(0,0)$ dos mapas HV. Esta é um indicador de que há uma fase próxima de π sobre o termo $|\phi^+\rangle$ do estado $|\Psi_B^+\rangle$ e de que esta fase não é global, pois se fosse não seria detectável.

Neste caso, devemos também observar a Fig. 3.5, que nos indica a relação entre os termos de campo elétrico e casamento de fases que compõem a amplitude do bifóton sobre o plano das fendas na configuração mencionada. É importante perceber que o termo de casamento de fases pode se tornar negativo em determinados pontos. Dessa forma, podemos ter tanto valores negativos quanto positivos para α . Como $\tan(\alpha/2) > 1$ em qualquer caso, pois o máximo da amplitude se dá em $x_- = 0$, temos ângulos próximos de $\pm\pi$.

Observando a Eq. (3.19), vemos que o único termo sensível ao sinal de α é

$$\sin(\alpha) \cos(\varphi) [\cos(\beta x_1) + \cos(\beta x_2)].$$

Isso significa que, efetivamente, os pares de parâmetros $(-\alpha, \varphi)$ e $(\alpha, \bar{\varphi})$, para $\bar{\varphi} = \varphi + \pi$, geram o mesmo mapa. Esta degenerescência, contudo, é refletida na composição do estado, pois $e^{i\varphi} \sin(-\alpha) = e^{i(\varphi+\pi)} \sin(\alpha)$. Vemos, portanto, que o mesmo estado pode ser gerado por dois motivos diferentes: a alteração da posição da lente CL, de forma a se ter $\varphi \neq 0$ ou a escolha das fendas de forma que $\alpha < 0$ devido ao termo de casamento de fases. Frisemos, contudo, que os dois estados são absolutamente idênticos para todos os efeitos.

Retornando à Fig. 3.13, vemos que a depressão em (e) é de fato pouco pronunciada, já que $|\alpha|$ é próximo de π . Quanto mais próximo de um dos valores extremos de α , mais difícil se torna distinguir a presença de uma fase φ , pois esta tende a se tornar uma fase global. Há também dificuldade em identificar a estrutura prevista para as coincidências $\pi\pi$, pois esta depende de baixo ruído na região acima de 70% do máximo de contagens em coincidência, o que não é possível com a quantidade de contagens que temos. Para efeito de comparação, apresentamos a Fig. 3.17, na qual adicionamos ou subtraímos, aleatoriamente, $\sqrt{D(x_1, x_2)}$ ao mapa gerado utilizando $D(x_1, x_2) = D_{max} P_{\pi\pi}(x_1, x_2)$, onde D_{max} é o valor do máximo de coincidências detectadas.

Considerando agora a configuração da Fig. 3.4b, cujos resultados correspondentes estão nas Figs. 3.14 e 3.16, vemos padrões de interferência muito diferentes dos observados na outra configuração. As diferenças imediatamente observáveis são a ausência de alinhamento ao longo de direções diagonais e o fato de que os mapas para coincidências HV e $\pi\pi$ são praticamente idênticos. Isto indica que o estado se encontra próximo de $(\alpha = \pi/2, \varphi = 0)$, caso em que as Eqs. 3.19 e 3.27 são iguais.

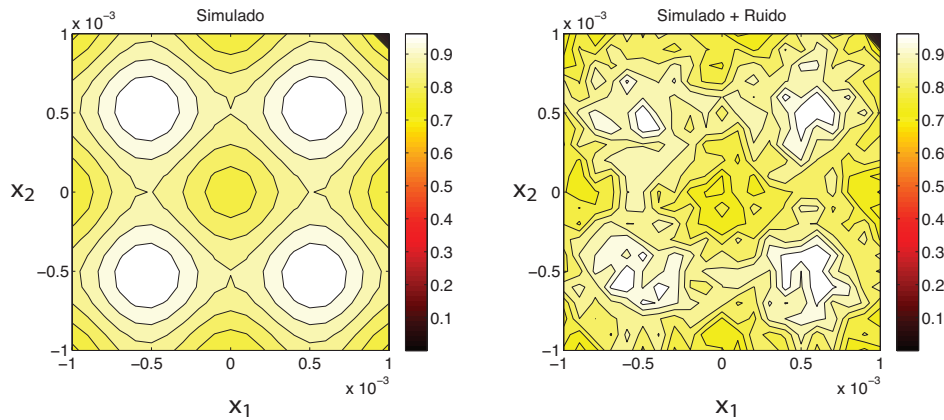


Figura 3.17: Ilustração do efeito do ruído sobre a estrutura de coincidências $\pi\pi$ de um mapa simulado. Primeiramente simulamos o mapa multiplicando $P_{\pi\pi}(x_1, x_2)$ pelo máximo de coincidências detectadas experimentalmente, $D_{max} = 549$, obtendo $D(x_1, x_2)$. A cada ponto do mapa foi adicionado o fator $(-1)^r \sqrt{D(x_1, x_2)}$, onde r é 0 ou 1, aleatoriamente. Os parâmetros α e φ são os mesmos utilizados na Fig. 3.13.

Vemos, novamente, que os mapas de coincidências são de grande valia para a identificação do estado gerado nas fendas, pois apenas por inspeção e conhecimento das funções P_{B^+} e $P_{\pi\pi}$ podemos delimitar a região de B^+ onde se encontra o estado com grande confiança. Um método simples para determinar com mais precisão o valor dos parâmetros é, tomando como ponto de partida os valores estimados para os ângulos α e φ a partir da amplitude $\Phi(x_1, x_2)$ no plano das fendas, cuja expressão conhecemos, variar os parâmetros esperados e buscar o mapa que minimize o quadrado do resíduo relativo total da imagem, calculado como a soma das diferenças ponto-a-ponto entre o mapa simulado e o mapa experimental, utilizando como peso para a soma o valor das contagens em cada ponto. Assim, atribuiu-se menos relevância às pequenas flutuações estatísticas nas regiões de baixa contagem e se prioriza a concordância nas grandes estruturas de interferência. Foi utilizando este método que chegamos aos parâmetros α e φ estimados.

Para observar os mesmos mapas em um campo mais amplo, passamos

às Figs. 3.15 e 3.16. Nelas aumentamos o passo entre os pontos detectados, casando com o intervalo entre máximos e mínimos na Fig. 3.13, para poder ver mais claramente o envelope de difração sobre o padrão de interferência. Como pode-se observar, na Fig. 3.15 há um alongamento do envelope na direção $x_+ = 0$, enquanto o envelope aparece simétrico na Fig. 3.16. Embora haja um estreitamento na direção oposta, este não é facilmente visível.

O modelo utilizado para gerar os mapas, discutido anteriormente, não prevê assimetrias no envelope de difração. Esta deficiência se deve ao fato da amplitude ser considerada constante sobre a largura de uma fenda, de forma que dependências em x_{\pm} não são transmitidas da amplitude incidente para o envelope de difração do estado após as fendas. Embora a suposição seja razoável para diversas situações, acreditamos que existe mérito em explorar a situação em que a aproximação é inválida.

Propusemos um modelo fenomenológico, baseado na observação de que a deformação do envelope de difração ocorre nas direções $x_{\pm} = 0$ e também na hipótese de que correlações no perfil transversal, dependentes de x_{\pm} , possam ser transmitidas ao padrão de difração devido à largura das fendas ser maior que o comprimento característico no qual a amplitude pode ser considerada constante. Assim, o envelope de difração proposto será dado por

$$\Xi(x_1, x_2) = \text{sinc}^2(\zeta_+ x_+) \text{sinc}^2(\zeta_- x_-), \quad (3.30)$$

sendo ζ_{\pm} coeficientes que dependem da amplitude do bifóton incidente sobre as fendas e também da largura das mesmas.

Para quantificar ζ_{\pm} , calculamos numericamente o valor das integrais de propagação

$$I(x_1, x_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} \Phi(\xi_1, \xi_2) \Pi(\xi_1) \Pi(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.31)$$

ao longo de $x_{\pm} = 0$. A partir de $I^2(x_{\pm})$, obtivemos curvas que foram, então, ajustadas para uma função $\text{sinc}^2(\zeta_{\pm} x_{\pm})$. Na configuração apresentada pela

Fig. 3.15 obtivemos, em termos do coeficiente a em $\text{sinc}^2(ax)$ para o caso em que consideramos a amplitude constante sobre uma fenda, $\zeta_+ = 1,13a$ e $\zeta_- = 0,52a$ para o mapa HV. No mapa $\pi\pi$, temos $\zeta_{\pm} = 0,29a$. Já no caso da Fig. 3.16, temos $\zeta_{\pm} = 0,99a$ para ambos os mapas.

Os resultados obtidos para os mapas da Fig. 3.15 são consistentes com a transmissão de correlações transversais para o padrão de difração. Vemos que há um alongamento do envelope de difração ao longo da direção $x_+ = 0$, indicado por $\zeta_- < a$, enquanto a direção $x_- = 0$ temos $\zeta_+ \approx a$. Esse resultado é consistente com uma amplitude constante em x_+ mas não-trivial em x_- , que é o que de fato observamos. Acreditamos que a largura $\zeta_{\pm} = 0,29a$ para a fenda efetiva que melhor ajusta a difração nos mapas de coincidências de mesma polarização no caso em que há emaranhamento nos bifótons esteja relacionada à perda de coerência transversal de cada fóton devido ao emaranhamento.

Extensão do controle de correlações quânticas para qudits de dimensões $d = 3$ e 4

4.1 Motivação

Qudits, como já dito no Cap. 2, são sistemas quânticos de mais de dois níveis. Recentemente mostrou-se que estados de qudits são mais robustos frente a descoerência, e proporcionam violações maiores de desigualdades utilizadas em testes do caráter não-local de sistemas quânticos. Ressaltamos que estes experimentos, quando realizados com qudits, garantem que o chamado *loopholes* de detecção, nome dado à possibilidade de se construir modelos de variáveis ocultas locais que justifiquem a violação de uma desigualdade quando os detectores não são perfeitos, esteja resolvido. Um conjunto de poucos qudits gera um espaço de Hilbert de dimensão muito maior que a mesma quantidade de qubits, fato que pode ser aproveitado por protocolos de Informação Quântica.

Tendo demonstrado no trabalho anterior a capacidade de controlar o tipo de correlação em um estado de qubits de fenda por meio da manipulação do perfil transversal incidente sobre as fendas, decidimos expandir o estudo para o caso de fendas múltiplas, especialmente fendas triplas e quádruplas, gerando qudits com dimensões $d = 3$ e $d = 4$, respectivamente. Lidaremos novamente com duas cópias do mesmo estado, de forma que as técnicas de caracterização desenvolvidas e apresentadas no Cap. 3 serão novamente utilizadas.

Outras implementações para qudits fotônicos existem, mas fazem uso de mais de um grau de liberdade ou mesmo de mais de uma partícula [33, 35, 45]. Acreditamos que esta abordagem seja particularmente desvantajosa, pois diferentes graus de liberdade podem ser utilizados para codificar sistemas distintos, aumentando a densidade de qubits ou qudits por partícula. Além disso, estas técnicas são mais limitadas que os estados de fenda em termos da maior dimensão atingível para cada sistema.

Neste capítulo voltaremos nossa atenção para a implementação de fendas. Apresentamos uma extensão da metodologia adotada no caso de quatro qubits para quatro qudits. Da mesma forma que no trabalho apresentado no Cap. 3, utilizaremos a polarização como grau de liberdade auxiliar para demonstrar a presença de dois pares de fótons e, através dos mapas $\pi\pi$ ($\pi = H, V$), caracterizar a pureza do estado parcial, indicativo de que o comportamento é condizente com a situação de dois pares distintos de fótons. Parametrizando o emaranhamento de cada par de forma semelhante ao que foi apresentado no Cap. 3, poderemos quantificá-lo através do casamento entre mapas de coincidências HV simulados e medidos.

4.2 Indo além dos qubits: novas simetrias

Ao dar o passo em direção a espaços de Hilbert de dimensões maiores, não é surpreendente que as formas dos estados não sejam tão simples

quanto no caso de qubits. A seguir mostraremos os estados mais gerais que podem ser obtidos utilizando as montagens apresentadas nas Figs. 3.4a e 3.4b. Primeiramente, apresentaremos o estado para fendas triplas, no caso de apenas um par de fótons. Como anteriormente, o estado de dois pares será composto por duas cópias do mesmo estado.

Começemos pelo estado puro mais geral possível de dois qutrits, como são chamados os qudits de dimensão 3:

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j} c_{i,j} |ij\rangle \quad (4.1)$$

para $i, j \in [0, 2]$. Assumindo que a amplitude incidente sobre as fendas é simétrica, podemos tomar $c_{i,j} = c_{j,i}$ como verdadeiro e reescrever o estado como

$$|\Psi\rangle = c_{0,0}|00\rangle + c_{1,1}|11\rangle + c_{2,2}|22\rangle + c_{0,1}(|01\rangle + |10\rangle) + c_{0,2}(|02\rangle + |20\rangle) + c_{1,2}(|12\rangle + |21\rangle). \quad (4.2)$$

Lembremos que o estado dos dois fótons após as fendas depende da amplitude do estado do bifóton sobre cada uma das fendas e que esta amplitude é composta por uma função de $x_+ = \frac{x_1+x_2}{2}$, que depende da amplitude do campo elétrico de bombeamento, e uma função de $x_- = \frac{x_1-x_2}{2}$, que depende da função de casamento de fases da CPDE. Se a separação entre o centro de duas fendas adjacentes é $2d$, as posições das fendas são $-2d, 0$ e $2d$, de forma que $|x_{\pm}| = 0, d, 2d$ e simplificaremos nossa notação utilizando $|x_{\pm}|/d$ para indexar os coeficientes. Dessa forma, é oportuno passar de coeficientes $c_{i,j}$ para $c_k c'_l$, onde $k = |x_+|/d$ e $l = |x_-|/d$, posto que ambas as funções são pares. Como vimos anteriormente, as configurações das Figs. 3.4b e 3.4a geram situações onde um dos termos da amplitude do bifóton sobre a fenda múltipla é “dominante”, enquanto o outro termo, “não-dominante”, é praticamente constante. Assim, podemos reescrever o estado de duas formas, uma considerando o termo em x_+ (c_k) como dominante e, portanto,

agrupando termos em função do valor de $|x_+|$ e outra fazendo o mesmo para o termo em x_- (c'_i), chegando a

$$\begin{aligned} |\Psi_+\rangle_3 = & c_0 [c'_0(|11\rangle + c'_2(|02\rangle + |20\rangle))] + \\ & c_1 [c'_1(|01\rangle + |10\rangle + |12\rangle + |21\rangle)] + \\ & c_2 [c'_0(|00\rangle + |22\rangle)], \end{aligned} \quad (4.3)$$

e

$$\begin{aligned} |\Psi_-\rangle_3 = & c'_0 [c_0(|11\rangle + c_2(|00\rangle + |22\rangle))] + \\ & c'_1 [c_1(|01\rangle + |10\rangle + |12\rangle + |21\rangle)] + \\ & c'_2 [c_0(|02\rangle + |20\rangle)]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

As formas apresentadas nas Eqs. (4.3) e (4.4) são particularmente úteis quando uma das funções componentes da amplitude é constante sobre toda a região das fendas, embora até aqui ambas representem o mesmo estado, com os coeficientes agrupados de formas diferentes. Nestes casos poderemos parametrizar o estado em função de apenas quatro coeficientes complexos, c_i no caso de $|\Psi_+\rangle_3$ e c'_i para $|\Psi_-\rangle_3$.

Aproveitando a condição de normalização e o fato de que apenas fases relativas são detectáveis, podemos reescrever os coeficientes na forma apresentada na Tab. 4.1, fazendo uso de coordenadas hiperesféricas. Ficamos com o conjunto de ângulos $(\alpha, \beta, \gamma; \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ para o caso em que o termo em x_+ é dominante a $(\epsilon, \theta, \nu; \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ no caso em que a componente dominante depende de x_- .

Tabela 4.1: Coeficientes de parametrização para estados de qutrits e suas respectivas normalizações.

x_{\pm}/d	$ \Psi_+\rangle$	$ \Psi_-\rangle$	Norm.
0	$\cos(\alpha)$	$\cos(\epsilon)$	$1/\sqrt{3}$
1	$\text{sen}(\alpha) \cos(\beta) e^{i\varphi_1}$	$\text{sen}(\epsilon) \cos(\theta) e^{i\zeta_1}$	$1/2$
2	$\text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta) \cos(\gamma) e^{i\varphi_2}$	$\text{sen}(\epsilon) \text{sen}(\theta) \cos(\nu) e^{i\zeta_2}$	$1/\sqrt{2}$

Utilizando a parametrização sugerida, podemos reescrever os estados, em função dos novos ângulos, como

$$\begin{aligned}
 |\Psi_+\rangle_3 &= \cos(\alpha) \left[\frac{|02\rangle + |11\rangle + |20\rangle}{\sqrt{3}} \right] + \\
 &\text{sen}(\alpha) \cos(\beta) e^{i\varphi_1} \left[\frac{|01\rangle + |10\rangle + |12\rangle + |21\rangle}{2} \right] + \\
 &\text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta) e^{i\varphi_2} \left[\frac{|00\rangle + |22\rangle}{\sqrt{2}} \right], \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 |\Psi_-\rangle_3 &= \cos(\epsilon) \left[\frac{|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle}{\sqrt{3}} \right] + \\
 &\text{sen}(\epsilon) \cos(\theta) e^{i\zeta_1} \left[\frac{|01\rangle + |10\rangle + |12\rangle + |21\rangle}{2} \right] + \\
 &\text{sen}(\epsilon) \text{sen}(\theta) e^{i\zeta_2} \left[\frac{|02\rangle + |20\rangle}{\sqrt{2}} \right]. \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

Aplicando as mesmas condições ao estado de ququarts, com fendas nas posições $-3d$, $-d$, d e $3d$, chegamos aos estados

$$\begin{aligned}
 |\Psi_+\rangle_4 &= c_0 [c'_1(|12\rangle + |21\rangle) + c'_3(|03\rangle + |30\rangle)] + \\
 &c_1 [c'_0(|11\rangle + |22\rangle) + c'_2(|02\rangle + |13\rangle + |20\rangle + |31\rangle)] + \\
 &c_2 [c'_1(|01\rangle + |10\rangle + |23\rangle + |32\rangle)] + c_3 [c'_0(|00\rangle + |33\rangle)], \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 |\Psi_-\rangle_4 &= c'_0 [c_1(|11\rangle + |22\rangle) + c_3(|00\rangle + |33\rangle)] + \\
 &c'_1 [c_0(|12\rangle + |21\rangle) + c_2(|01\rangle + |10\rangle + |23\rangle + |32\rangle)] + \\
 &c'_2 [c_1(|02\rangle + |13\rangle + |20\rangle + |31\rangle)] + c'_3 [c_0(|03\rangle + |30\rangle)]. \tag{4.8}
 \end{aligned}$$

Para os ququarts, propomos uma parametrização semelhante à utilizada no caso dos qutrits, envolvendo seis parâmetros livres, como indicado na Tab. 4.2

Tabela 4.2: Coeficientes de parametrização para estados de ququarts e suas respectivas normalizações.

x_{\pm}/d	$ \Psi_{+}\rangle$	$ \Psi_{-}\rangle$	Norm.
0	$\cos(\alpha)$	$\cos(\epsilon)$	$1/2$
1	$\text{sen}(\alpha) \cos(\beta) e^{i\varphi_1}$	$\text{sen}(\epsilon) \cos(\theta) e^{i\zeta_1}$	$1/\sqrt{6}$
2	$\text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta) \cos(\gamma) e^{i\varphi_2}$	$\text{sen}(\epsilon) \text{sen}(\theta) \cos(\nu) e^{i\zeta_2}$	$1/2$
3	$\text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta) \text{sen}(\gamma) e^{i\varphi_3}$	$\text{sen}(\epsilon) \text{sen}(\theta) \text{sen}(\nu) e^{i\zeta_3}$	$1/\sqrt{2}$

Dessa forma, chegamos aos estados

$$\begin{aligned}
 |\Psi_{+}\rangle_4 = & \cos(\alpha) \left[\frac{|12\rangle + |21\rangle + |03\rangle + |30\rangle}{2} \right] + \\
 & \text{sen}(\alpha) \cos(\beta) e^{i\varphi_1} \left[\frac{|11\rangle + |22\rangle + |02\rangle + |13\rangle + |20\rangle + |31\rangle}{\sqrt{6}} \right] + \\
 & \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta) \cos(\gamma) e^{i\varphi_2} \left[\frac{|01\rangle + |10\rangle + |23\rangle + |32\rangle}{2} \right] + \\
 & \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta) \text{sen}(\gamma) e^{i\varphi_3} \left[\frac{|00\rangle + |33\rangle}{\sqrt{2}} \right], \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 |\Psi_{-}\rangle_4 = & \cos(\epsilon) \left[\frac{|11\rangle + |22\rangle + |00\rangle + |33\rangle}{2} \right] + \\
 & \text{sen}(\epsilon) \cos(\theta) e^{i\zeta_1} \left[\frac{|12\rangle + |21\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |23\rangle + |32\rangle}{\sqrt{6}} \right] + \\
 & \text{sen}(\epsilon) \text{sen}(\theta) \cos(\nu) e^{i\zeta_2} \left[\frac{|02\rangle + |13\rangle + |20\rangle + |31\rangle}{2} \right] + \\
 & \text{sen}(\epsilon) \text{sen}(\theta) \text{sen}(\nu) e^{i\zeta_3} \left[\frac{|03\rangle + |30\rangle}{\sqrt{2}} \right]. \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

Uma vez que conhecemos os parâmetros que caracterizam os estados, podemos agora relacioná-los à amplitude $\Phi(x_1, x_2)$ sobre o plano das fendas e também às probabilidades de detecção em coincidência no campo distante das fendas, como feito no experimento para qubits. Em ambos os casos, as fases φ estão relacionadas à presença de curvatura na frente de onda do campo de bombeamento no centro do cristal e, da mesma forma que no caso de qubits, estas são determinadas pela Eq. (3.16).

Para as fases ζ , é necessário compreender mais a respeito do arranjo experimental que utilizamos, um telescópio no qual as lentes compartilham

o plano focal anterior. Uma descrição detalhada da propagação dos campos através deste telescópio se encontra no Apêndice B e dele encontramos uma fase que depende de x_s e x_i :

$$\zeta = \frac{k(x_s^2 + x_i^2)}{2f_2M}, \quad (4.11)$$

que deve ser calculada sobre as posições $x_s = d_l$ e $x_i = d_m$ das fendas. Podemos atribuir a cada estado $|lm\rangle$ uma fase $\zeta(n)$, ao substituirmos x_s por $(l - l_D/2)d$ e x_i por $(m - l_D/2)d$ em (4.11) de forma a ter

$$\zeta(n) = \frac{knd^2}{f_2M}, \quad (4.12)$$

com $n = [(l - l_D/2)^2 + (m - l_D/2)^2]/2$ e $2d$ a distância entre duas fendas adjacentes.

Assim, para o telescópio utilizado em nossos experimentos, os estados $|\Psi_{-}\rangle_3$ e $|\Psi_{-}\rangle_4$ devem ser reescritos como

$$\begin{aligned} |\Psi_{-}\rangle_3 = & \cos(\epsilon) \left[\frac{e^{i\zeta(4)}(|00\rangle + |22\rangle) + |11\rangle}{\sqrt{3}} \right] + \\ & \text{sen}(\epsilon) \cos(\theta) e^{i\zeta(2)} \left[\frac{|01\rangle + |10\rangle + |12\rangle + |21\rangle}{2} \right] + \\ & \text{sen}(\epsilon) \text{sen}(\theta) e^{i\zeta(4)} \left[\frac{|02\rangle + |20\rangle}{\sqrt{2}} \right], \end{aligned} \quad (4.13)$$

e

$$\begin{aligned} |\Psi_{-}\rangle_4 = & \cos(\epsilon) \left[\frac{e^{i\zeta(1)}(|11\rangle + |22\rangle) + e^{i\zeta(9)}(|00\rangle + |33\rangle)}{2} \right] + \\ & \text{sen}(\epsilon) \cos(\theta) \left[\frac{e^{i\zeta(1)}(|12\rangle + |21\rangle) + e^{i\zeta(5)}(|01\rangle + |10\rangle + |23\rangle + |32\rangle)}{\sqrt{6}} \right] + \\ & \text{sen}(\epsilon) \text{sen}(\theta) \cos(\nu) e^{i\zeta(5)} \left[\frac{|02\rangle + |13\rangle + |20\rangle + |31\rangle}{2} \right] + \\ & \text{sen}(\epsilon) \text{sen}(\theta) \text{sen}(\nu) e^{i\zeta(9)} \left[\frac{|03\rangle + |30\rangle}{\sqrt{2}} \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Pode-se ver que o uso do telescópio não-confocal permite que se obtenha estados com uma estrutura mais rica que os das Eqs. (4.6) e (4.10).

A relação entre os outros parâmetros dos estados de qutrits e os parâmetros experimentais é feita a partir dos coeficientes dos estados apresentados nas Eqs. (4.5) e (4.6). Os parâmetros β e α de $|\Psi_+\rangle_3$ são calculados usando, respectivamente

$$\begin{aligned}\frac{\Phi(2d, 2d)}{\Phi(0, 2d)} &= \frac{2 \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)}{\sqrt{2} \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta)} \\ &= \sqrt{2} \tan(\beta)\end{aligned}\quad (4.15)$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\Phi(0, 2d)}{\Phi(-2d, 2d)} &= \frac{\sqrt{3} \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta)}{2 \cos(\alpha)} \\ &= \frac{\sqrt{3} \tan(\alpha) \cos(\beta)}{2},\end{aligned}\quad (4.16)$$

sendo β determinado pela Eq. 4.15. Para determinar θ e ϵ , temos

$$\begin{aligned}\frac{\Phi(-2d, 2d)}{\Phi(0, 2d)} &= \frac{2 \operatorname{sen}(\epsilon) \operatorname{sen}(\theta)}{\sqrt{2} \operatorname{sen}(\epsilon) \cos(\theta)} \\ &= \sqrt{2} \tan(\theta)\end{aligned}\quad (4.17)$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\Phi(0, 2d)}{\Phi(2d, 2d)} &= \frac{\sqrt{3} \operatorname{sen}(\epsilon) \cos(\theta)}{2 \cos(\epsilon)} \\ &= \frac{\sqrt{3} \tan(\epsilon) \cos(\theta)}{2},\end{aligned}\quad (4.18)$$

onde para encontrar ϵ aplicamos o mesmo método recursivo aplicado para determinar α via β . Deve-se notar que as amplitudes nas Eqs. (4.15) e (4.16) não são as mesmas das Eqs. (4.17) e (4.18). No caso do estado $|\Psi_+\rangle_3$, as amplitudes dependem de $\mathcal{F}_o[E_p(x_+)] = \tilde{E}(\beta x_+)$, sendo $\beta = k/f$, que é a transformada de Fourier óptica da amplitude do campo de bombeamento, projetada sobre as fendas. Já os coeficientes de $|\Psi_-\rangle_3$ dependem de $\zeta(x_-/M)$,

a transformada de Fourier da função de casamento de fases $\tilde{\xi}(\Delta q^2)$, sendo M a ampliação do telescópio, pois nesse caso é a imagem do centro do cristal que é projetada sobre as fendas.

No caso de ququarts, usando os coeficientes e estados mostrados nas Eqs. (4.9) e (4.10), aplicando o mesmo método recursivo para encontrar os parâmetros em função dos valores da amplitude, temos:

$$\frac{\Phi(3d, 3d)}{\Phi(d, 3d)} = \sqrt{2} \tan(\gamma), \quad (4.19)$$

$$\frac{\Phi(d, 3d)}{\Phi(-d, 3d)} = \frac{\sqrt{6} \tan(\beta) \cos(\gamma)}{2}, \quad (4.20)$$

$$\frac{\Phi(-d, 3d)}{\Phi(-3d, 3d)} = \frac{2 \tan(\alpha) \cos(\beta)}{\sqrt{6}} \quad (4.21)$$

para $|\Psi_+\rangle_4$ e

$$\frac{\Phi(-3d, 3d)}{\Phi(-d, 3d)} = \sqrt{2} \tan(\nu), \quad (4.22)$$

$$\frac{\Phi(-d, 3d)}{\Phi(d, 3d)} = \frac{\sqrt{6} \tan(\theta) \cos(\nu)}{2} \quad (4.23)$$

e

$$\frac{\Phi(d, 3d)}{\Phi(3d, 3d)} = \frac{2 \tan(\epsilon) \cos(\theta)}{\sqrt{6}} \quad (4.24)$$

para $|\Psi_-\rangle_4$, lembrando que estes parâmetros são calculados supondo que $\varphi = 0$ ou $\zeta = 0$.

Observando os estados de qutrits, um primeiro fato que chama a atenção é que o termo dependente de c_1 é o mesmo que depende de c'_1 . Isto se deve à presença de uma fenda no centro do sistema de coordenadas, introduzindo um elemento neutro à soma e subtração de coordenadas dos dois fótons, ou seja, quando a coordenada de um dos fótons corresponde à da fenda central, esta não contribui para a soma ou para a subtração. Como dissemos

anteriormente, isto não significa que os dois parâmetros são iguais, pois um depende de $\tilde{E}(\beta x_+)$ e o outro de $\tilde{\zeta}(x_-)$.

Vemos que tanto os estados de qutrits quanto de ququarts apresentam um termo que pode ser reduzido a um estado maximamente emaranhado de dois qubits. Novamente esta é uma característica comum a todos os estados com mais níveis e se deve ao fato de que os termos extremos, ou seja, aqueles que dependem apenas das fendas mais extremas, apresentarão sempre apenas duas componentes, $|0\Delta\rangle$ e $|\Delta 0\rangle$, sendo $\Delta = D - 1$ para o caso de D fendas.

4.3 Um quantificador de emaranhamento para qudits

A concorrência, utilizada no Cap. 3 para quantificar o emaranhamento entre dois qubits, não é adequada para uso em sistemas de qudits. Portanto, apresentaremos outro quantificador, a entropia de von Neumann do estado parcial. Definida como

$$S_d(\rho) = - \sum_i \lambda_i \log_d(\lambda_i) \quad (4.25)$$

para um estado descrito pela matriz densidade ρ de dimensão $d \times d$ que possui auto-valores $\{\lambda_i\}$, a entropia de Von Neumann é também um quantificador de pureza. Estados puros têm $S = 0$ e estados maximamente mistos $S = 1$. Como vimos primeiro no Cap. 2 e posteriormente de forma experimental no Cap. 3, quando temos um estado global puro e bipartido, o estado parcial será maximamente misto quando o estado global for emaranhado e será puro quando o estado global for separável. Nessas condições vemos que os dois extremos da escala são adequadamente contemplados por $S_d(\rho)$.

Consideremos apenas alguns casos de interesse, em especial estados em que as fases são nulas, ou seja, os coeficientes dos estados $|\Psi_{\pm}\rangle_{3,4}$ são reais. Esta situação ocorre quando se trabalha com um telescópio confocal e a cintura do feixe gaussiano coincidente com os planos focais anteriores das lentes que formam o sistema óptico entre o cristal e a fenda múltipla. As

4.3. Um quantificador de emaranhamento para qutrits

Tabs. 4.3 e 4.4 apresentam, respectivamente, o emaranhamento dos estados de qutrits e ququarts correspondentes a pólos, situações onde um dos ângulos é nulo e os anteriores valem $\pi/2$, ou quando todos os ângulos valem $\pi/2$. Escolhemos estes parâmetros por corresponderem a situações em que apenas um dos coeficientes é diferente de zero.

Tabela 4.3: Emaranhamento do estado de dois qutrits para ângulos especiais.

Pólo	$S(\rho'_+)$	Pólo	$S(\rho'_-)$
$\alpha = 0$	1	$\epsilon = 0$	1
$\alpha = \pi/2, \beta = 0$	0,63	$\epsilon = \pi/2, \theta = 0$	0,63
$\alpha = \beta = \pi/2$	0,63	$\epsilon = \theta = \pi/2$	0,63

Tabela 4.4: Emaranhamento do estado de dois ququarts para ângulos especiais.

Pólo	$S(\rho'_+)$	Pólo	$S(\rho'_-)$
$\alpha = 0$	1	$\epsilon = 0$	1
$\alpha = \pi/2, \beta = 0$	0,78	$\epsilon = \pi/2, \theta = 0$	0,78
$\alpha = \beta = \pi/2, \gamma = 0$	1	$\epsilon = \theta = \pi/2, \nu = 0$	1
$\alpha = \beta = \gamma = \pi/2$	0,5	$\epsilon = \theta = \nu = \pi/2$	0,5

É interessante observar que os estados

$$|\Psi_+\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |22\rangle),$$

$$|\Psi_-\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|02\rangle + |20\rangle),$$

$$|\Psi_+\rangle_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |33\rangle)$$

e

$$|\Psi_-\rangle_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|03\rangle + |30\rangle),$$

podem ser considerados maximamente emaranhados se tomados no contexto de estados de dois qubits, já que há apenas dois níveis envolvidos.

4.4 Simulações

Utilizando o método já apresentado na Seção A.3, aplicado ao caso dos estados de qutrits e ququarts, podemos determinar as equações que geram os mapas de coincidências para o caso de fendas triplas e quádruplas e, a partir delas, simular mapas para casos particulares de interesse, bem como utilizar os mapas simulados para auxiliar a caracterização dos estados. Ao contrário do caso de qubits, as equações para qutrits e ququarts são muito grandes e não há ganho em escrevê-las explicitamente.

Mostraremos a seguir os mapas simulados para os casos apresentados nas Tabs. 4.3 e 4.4. Mais especificamente, utilizamos como exemplo para o caso de qutrits os estados do tipo $|\Psi_+\rangle_3$ e para ququarts os estados do tipo $|\Psi_-\rangle_4$. Novamente observaremos a relação entre a presença de interferência condicional, como definida na seção 3.6, e o emaranhamento nos bifótons, que também pode ser relacionado ao comportamento dos padrões de detecção em coincidência de fótons de mesma polarização. Quando há emaranhamento máximo, novamente observamos apenas difração nos padrões $\pi\pi$.

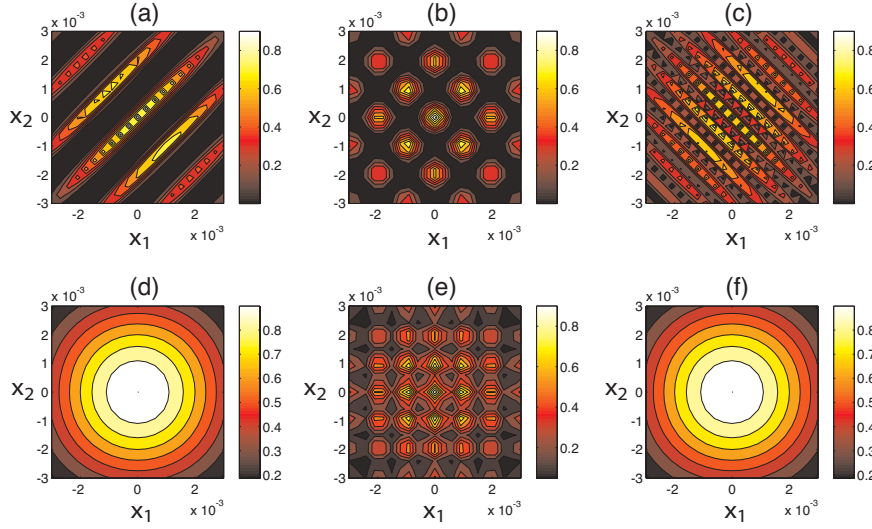


Figura 4.1: Simulação de mapas de coincidência HV e $\pi\pi$ para estados do tipo $|\Psi_+\rangle_3$, nos pólos $\alpha = 0$, mapas (a) e (d), $\alpha = \pi/2$, (b) e (e), e $\alpha = \beta = \pi/2$, (c) e (f). Como indicado na Tab. 4.3, o emaranhamento é $S_3 = 1$ para os mapas (a) e (d), $S_3 = 0,63$ para (b) e (e) e $S_3 = 0,63$ para (c) e (f). Observa-se interferência condicional nos mapas (a), (b) e (c), como esperado para o caso de estados emaranhados. Vemos que os três mapas apresentam um padrão de interferência com período reduzido ao longo de ao menos uma diagonal é interessante observar que no mapa (a) este padrão se encontra ao longo da diagonal $x_1 = -x_2$, no mapa (c) ao longo da diagonal $x_1 = x_2$ e no mapa (b) ambas as diagonais apresentam o mesmo padrão. O comportamento para (c) condiz com a observação feita anteriormente de que trata-se de um estado maximamente emaranhado, o estado de Bell $|\phi^+\rangle_2$, de dois qubits num espaço de dois qutrits e os períodos observado para a interferência condicional e para a interferência ao longo da diagonal são os esperados para uma fenda dupla com separação $4d$ entre os centros das fendas, a mesma separação entre os centros das fendas 0 e 2, às quais os qubits estão associados. Passando aos mapas de mesma polarização, observamos que (d) e (f) exibem o comportamento esperado, ou seja, o de um estado maximamente misto devido ao emaranhamento máximo existente em cada par. Já no mapa (e) vemos que embora haja interferência, ela não é condicional e o período ao longo das diagonais é o mesmo daquele ao longo de linhas para x_2 ou x_1 constante, como esperado para um par de fótons em um estado separável. É interessante perceber que embora os estados que geram os mapas (e) e (f) tenham o mesmo emaranhamento, $S_4 = 0,63$, os mapas são muito diferentes. Trata-se de uma coincidência gerada pela forma como normalizamos a função $S_d(\rho')$ e comparando os dois mapas vemos que a análise de duas cópias do estado reduzido de um par de fótons fornece informação sobre o emaranhamento do estado independentemente da forma que se use para expressá-lo.

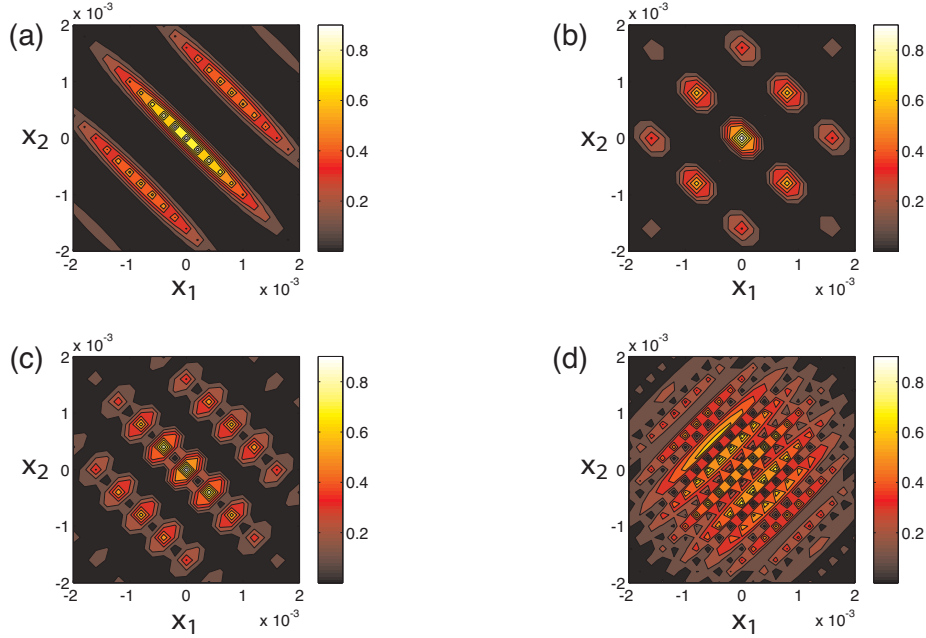


Figura 4.2: Simulação de mapas de coincidência HV para estados nos pólos $\epsilon = 0$, $\epsilon = \pi/2$, $\theta = 0$, $\epsilon = \theta = \pi/2$, $\nu = 0$ e $\epsilon = \theta = \nu = \pi/2$ para estados do tipo $|\Psi_{-}\rangle_4$. Como indicado na Tab. 4.4 o emaranhamento para os casos é $S_4 = 1$ para os estados que geram os mapas (a) e (c), $S_4 = 0,78$ para o mapa (b) e $S_4 = 0,5$ para o mapa (d). Pode-se ver interferência condicional em todos os mapas, embora seja de difícil visualização no mapa (d), devido aos artefatos causados pelo espaçamento da grade de pontos que gerou o mapa. Há um padrão de interferência com período reduzido ao longo da diagonal $x_1 = x_2$ para os mapas (a)-(c) e ao longo da diagonal $x_1 = -x_2$ para o mapa (d), como esperado para estados emaranhados. Vemos que a visibilidade de interferência ao longo da diagonal $x_1 = -x_2$ é nula no mapa (a), embora seja tão alta quando a da diagonal $x_1 = x_2$ no mapa (b), embora este seja um estado emaranhado. Para o caso do mapa (c) vemos que há interferência ao longo da diagonal $x_1 = -x_2$, embora com baixa visibilidade. Deve-se notar que o padrão de interferência observado em (d) corresponde ao esperado para um estado maximamente emaranhado de dois qubits, o estado de Bell $|\psi^+\rangle_2$, quando a distância entre o centro das duas fendas é $6d$.

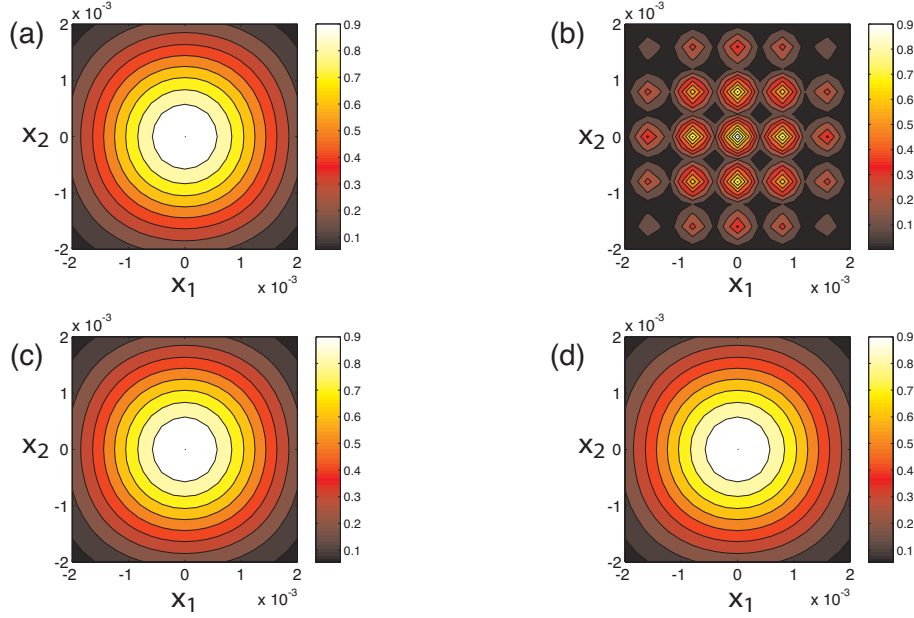


Figura 4.3: Simulação de mapas de coincidência entre fótons de mesma polarização ($\pi\pi$) para estados do tipo $|\Psi_{-}\rangle_4$ nos pólos $\epsilon = 0, \epsilon = \pi/2, \theta = 0, \epsilon = \theta = \pi/2, \nu = 0$ e $\epsilon = \theta = \nu = \pi/2$. Como indicado na Tab. 4.4 o emaranhamento para os casos é $S_4 = 1$ para os estados que geram os mapas (a) e (c), $S_4 = 0,78$ para o mapa (b) e $S_4 = 0,5$ para o mapa (d). Há dois mapas de especial interesse. Primeiramente deve-se notar na figura (d) que, embora $S_4 = 0,5$, o padrão é característico de um estado parcialmente maximamente misto, como o das figuras (a) e (c). Isso ocorre porque o estado corresponde a um estado de dois qubits maximamente emaranhado, o estado de Bell $|\psi^{+}\rangle_2$, com uma fenda dupla de separação $6d$ entre as duas fendas. Este mapa evidencia que, é possível obter informação a respeito do emaranhamento de um par, independentemente da forma como expressamos o seu estado, observando as características das medições em coincidência de fótons de pares distintos, mas só podemos utilizar os mapas $\pi\pi$ para caracterizar o estado de um bifóton no caso em que os pares estão em um estado separável. Observando agora o mapa (b), vemos que há um padrão de interferência que não apresenta condicionalidade, como esperado. Da mesma forma, o período do padrão de interferência ao longo das diagonais é o mesmo daquele ao longo de linhas com x_1 ou x_2 constante. Como há um padrão de interferência, podemos concluir que o estado de um par não é maximamente emaranhado nem mesmo se encontrarmos uma maneira de expressar os dois ququarts como qutrits ou qubits.

4.5 Resultados experimentais

Apresentamos abaixo os resultados para medidas utilizando uma fenda tripla para a geração de qutrits e uma fenda quádrupla para a geração de ququarts. Em cada caso utilizamos as duas montagens apresentadas na Fig. 3.4. Na fenda tripla, cada fenda tinha largura de $2a = 40 \mu\text{m}$ e a separação entre o centro das fendas era $2d = 125 \mu\text{m}$. Para a fenda quádrupla, cada fenda tinha largura de $2a = 80 \mu\text{m}$ e a separação entre o centro das fendas era $2d = 160 \mu\text{m}$.

Novamente utilizamos as configurações de lentes das Figs. 3.4a e 3.4b, que projetam sobre as fendas respectivamente a imagem da amplitude do bifóton no centro do cristal e a transformada de Fourier óptica desta amplitude. O conjunto de lentes utilizado para projetar a imagem ampliada do centro do cristal sobre o plano das fendas era composto de uma lente cilíndrica de comprimento focal $f_{CL} = 5 \text{ cm}$ e uma lente esférica de comprimento focal $f_{SL} = 20 \text{ cm}$. A segunda configuração utiliza uma lente esférica de comprimento focal $f_{SL} = 20 \text{ cm}$, na configuração f - f , para projetar o campo distante do centro do cristal sobre o plano das fendas. Para projetar o campo distante das fendas sobre o plano dos detectores utilizamos uma lente esférica de comprimento focal $f_{FL} = 30 \text{ cm}$.

Devido às diferenças nos parâmetros das fendas, varremos regiões espaciais com tamanhos diferentes para montar os mapas. No caso da fenda tripla, os detectores varreram um intervalo de 6 mm em torno dos seus respectivos zeros. Já para a fenda quádrupla, o intervalo foi de 4 mm, pois fendas mais espaçadas implicam um padrão de interferência com período mais curto. Lembramos que no caso da fenda dupla o intervalo varrido foi de 2 mm.

Assim como no trabalho apresentado no Cap. 3, os mapas simulados que acompanham as medidas experimentais nas Figs. 4.4 a 4.7 foram gerados utilizando os parâmetros calculados a partir das Eqs. (4.16) a (4.22) e da expressão teórica para a amplitude incidente sobre as fendas tripla e quádrupla

4.5. Resultados experimentais

nos casos de uma lente na posição f - f , (2.13), e de um telescópio não-confocal, (2.16).

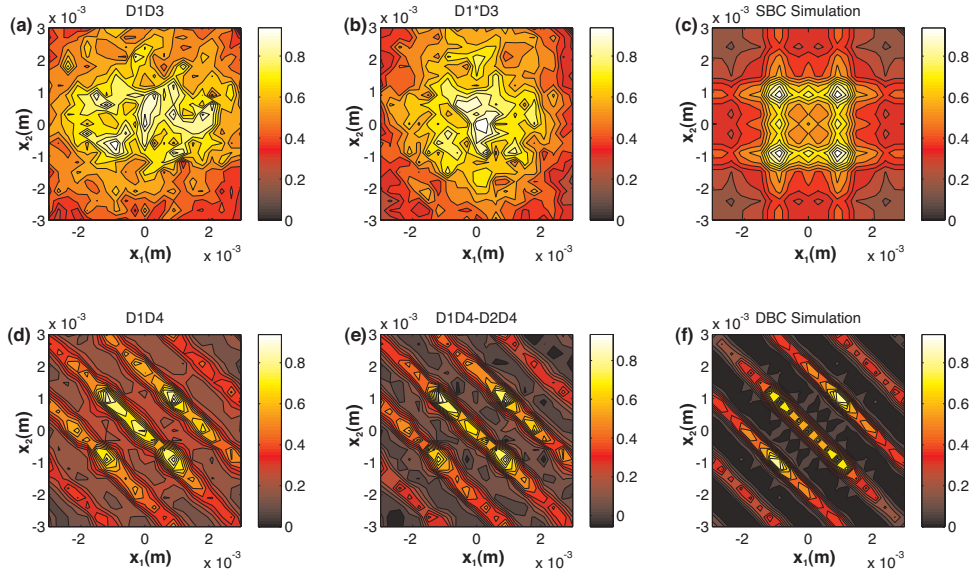


Figura 4.4: Mapa na configuração de imagem entre cristal e fenda tripla. Passo de $100\ \mu\text{m}$ e tempo de aquisição de dados de 30 s. Foram utilizadas fendas com $40\ \mu\text{m}$ de largura e $125\ \mu\text{m}$ de espaçamento entre os centros. O tempo de aquisição para cada ponto sobre a grade foi de 30 s e foram medidas 21 linhas de 21 pontos. A simulação dos mapas (c) e (f) foi feita estimando $\epsilon = -6,2^\circ$, $\theta = -46,6^\circ$ e utilizando as fases introduzidas pelo telescópio. Para estes parâmetros temos $S_3 \approx 0,98$. As contagens foram normalizadas pelo valor da maior contagem sobre todo o mapa. No mapa (a) este valor corresponde a 129 coincidências $\pi\pi$ e, no mapa (d), a 448 coincidências HV. Pode-se observar na figura (a) a ausência de um padrão de interferência visível em qualquer direção, tanto com x_1 ou x_2 constante quanto ao longo das diagonais, indicando algo grau de emaranhamento em cada bifóton e baixa pureza do estado reduzido de um fóton de cada par. Percebe-se a semelhança do mapa (a) com o mapa (b), obtido pela estimativa de coincidências para fontes completamente descorrelacionadas, ou seja, multiplicando-se as contagens simples dos dois detectores envolvidos na geração do mapa (a) e dividindo-se o resultado pelo número de pulsos de bombeamento durante o tempo de aquisição de dados. Observando as figuras (d) e (e), notamos um aumento na visibilidade do padrão de interferência após a subtração da contribuição de fótons de pares distintos. Vemos que há um padrão de interferência condicional em (e) e também um padrão de interferência ao longo da direção $x_1 = x_2$, com período igual à metade do período da interferência condicional, como esperado para um estado com alto grau de emaranhamento.

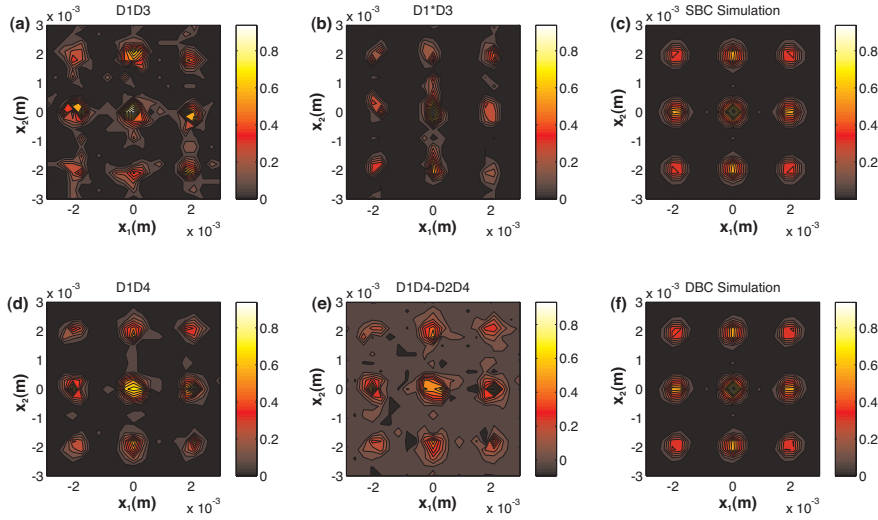


Figura 4.5: Mapa na configuração de Fourier entre cristal e fenda tripla. Passo de $100 \mu\text{m}$ e tempo de aquisição de dados de 30 s. Foram utilizadas fendas com $40 \mu\text{m}$ de largura e $125 \mu\text{m}$ de espaçamento entre os centros. O tempo de aquisição para cada ponto sobre a grade foi de 30 s e foram medidas 21 linhas de 21 pontos. A simulação foi feita estimando $\alpha = 51,8^\circ$, $\beta = 30,8^\circ$ e $\varphi_1 = \varphi_2 = 0^\circ$. Para estes parâmetros temos $S_3 \approx 0,03$. As contagens foram normalizadas pelo valor da maior contagem sobre todo o mapa. No mapa (a) este valor corresponde a 11 coincidências $\pi\pi$ e, no mapa (d), a 33 coincidências HV. Observamos a grande semelhança entre os mapas (a), que corresponde às contagens em coincidência entre fótons de pares distintos, (b), de contagens em coincidência para fótons completamente descorrelacionados estimadas a partir do produto das contagens simples de dois detectores dividido pelo número de pulsos de bombeamento durante o tempo de aquisição de dados, (d), o mapa de contagens em coincidência de fótons com polarizações ortogonais e (e), que corresponde apenas à contribuição de fótons com polarizações ortogonais originados de um mesmo par obtida subtraindo-se (a) de (d). Esta semelhança é um forte indicativo de que não há correlações entre os fótons de um mesmo par, interpretação que é corroborada pela presença de um padrão de interferência em todos os mapas, indicativo de pureza do estado reduzido de um fóton de cada par, e pela ausência tanto de interferência condicional quanto de um padrão de interferência ao longo de alguma diagonal cujo período seja menor que o da interferência condicional. Como dito anteriormente, todos estes sinais apontam que o estado global é puro e separável, embora os parâmetros utilizados nas simulações ainda correspondam a um estado com pouco emaranhamento.

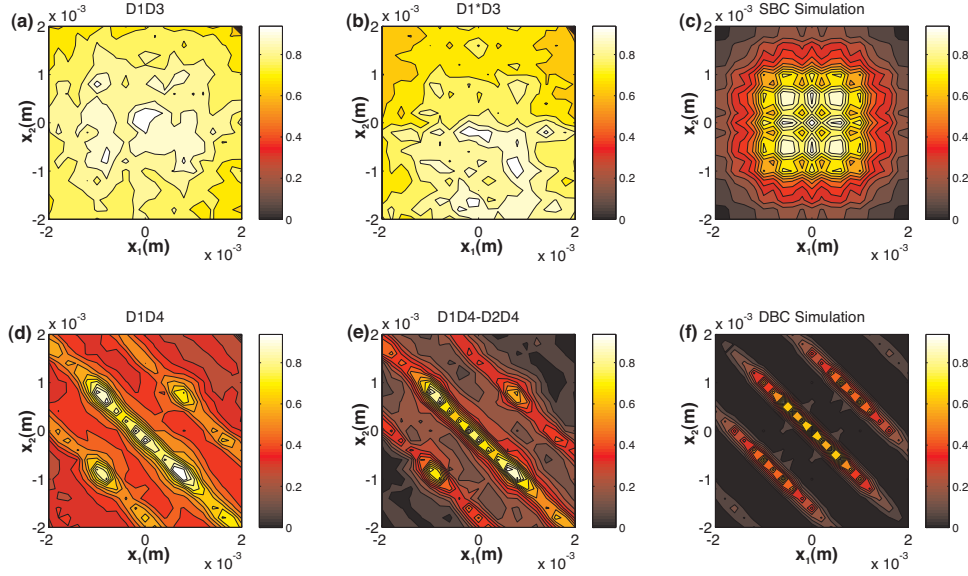


Figura 4.6: Mapa na configuração de imagem entre cristal e fenda quádrupla. Passo de $200 \mu\text{m}$ e tempo de aquisição de dados de 60 s . Foram utilizadas fendas com $80 \mu\text{m}$ de largura e $160 \mu\text{m}$ de espaçamento entre os centros. O tempo de aquisição para cada ponto sobre a grade foi de 60 s e foram medidas 21 linhas de 21 pontos. A simulação foi feita estimando $\epsilon = -5,6^\circ$, $\theta = 68,9^\circ$, $\nu = -88,8^\circ$ e utilizando as fases introduzidas pelo telescópio. Para estes parâmetros temos $S_4 \approx 0,98$. As contagens foram normalizadas pelo valor da maior contagem sobre todo o mapa. No mapa (a) este valor corresponde a 1204 coincidências $\pi\pi$ e, no mapa (d), a 2932 coincidências HV. Observa-se nos mapas (a) e (b) a ausência de padrões de difração, indicando baixa pureza do estado reduzido. Comparando estes mapas ao mapa (c), notamos que a largura do padrão de difração simulado utilizando apenas a largura a das fendas, é menor do que o medido, indicando que, assim como no caso de qubits, há uma discrepância que supomos ser devida à presença de emaranhamento nos bifótons antes das fendas. Os mapas (d) e (e) apresentam os traços característicos de um estado emaranhado, ou seja, interferência condicional e um padrão de difração ao longo de uma das diagonais com metade do período do padrão ao longo de uma linha com x_1 ou x_2 constante. O fato do padrão com período menor se apresentar ao longo da diagonal $x_1 = x_2$ indica que o estado é próximo de $|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle$, como de fato é o caso de um estado com ϵ próximo de zero. Comparando os mapas (e) e (f) e observando os extremos dos padrões simulado e experimental ao longo da diagonal $x_1 = -x_2$ vemos a mesma discrepância em relação ao padrão de difração que observamos entre (a) e (c), com o mesmo caráter direcional observado nos mapas de qubits.

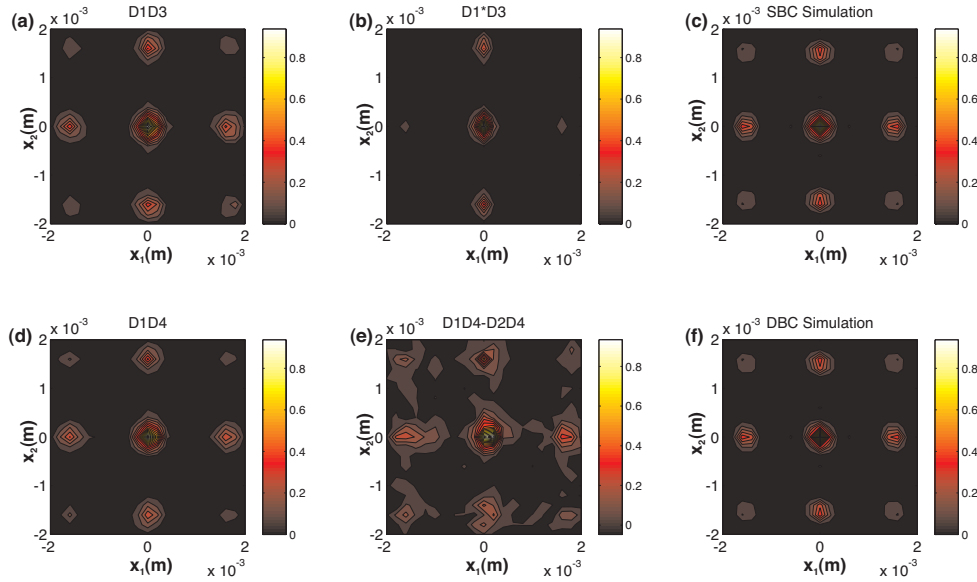


Figura 4.7: Mapa na configuração de Fourier entre cristal e fenda quádrupla. Passo de $200 \mu\text{m}$ e tempo de aquisição de dados de 25 s . Foram utilizadas fendas com $80 \mu\text{m}$ de largura e $160 \mu\text{m}$ de espaçamento entre os centros. O tempo de aquisição para cada ponto sobre a grade foi de 25 s e foram medidas 21 linhas de 21 pontos. A simulação foi feita estimando $\alpha = 63,7^\circ$, $\beta = 49,6^\circ$, $\gamma = 37,8^\circ$ e $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0^\circ$. Para estes parâmetros temos $S_4 \approx 0,04$. As contagens foram normalizadas pelo valor da maior contagem sobre todo o mapa. No mapa (a) este valor corresponde a 299 coincidências $\pi\pi$ e, no mapa (d), a 459 coincidências HV. Comparando os mapas (a) e (d), percebemos primeiramente a grande semelhança entre eles, primeiro indicativo de que trata-se de um estado com baixo emaranhamento. Vemos que o mapa (a) apresenta interferência com alta visibilidade e que o mapa (d) não apresenta interferência condicional, características compatíveis com um estado global cujo estado reduzido de cada uma das partes é praticamente puro, gerando um padrão de interferência que não depende da posição da outra partícula do par. Observando os quatro cantos dos mapas simulados e dos mapas experimentais podemos ver que o envelope de difração é bem comportado, ou seja, corresponde àquele simulado utilizando apenas a largura real das fendas. Novamente supomos que este comportamento esteja relacionado à ausência de emaranhamento nos bifótons antes da fenda quádrupla.

4.6 Análise e discussão

Iniciaremos a análise pelos resultados obtidos sem o uso da lente cilíndrica no arranjo óptico de controle da amplitude incidente sobre as fendas, correspondentes às Figs. 4.5 e 4.7. Podemos ver que tanto para a fenda quádrupla quanto para a fenda tripla a amplitude se manteve suficientemente constante para produzir um estado com baixo emaranhamento. De fato, como mostra a Fig. 4.8, as fendas tripla e quádrupla são suficientemente semelhantes à fenda dupla em termos de espaçamento para que não haja ganho significativo no emaranhamento. Para tanto seria necessário utilizar fendas com espaçamento muito maior.

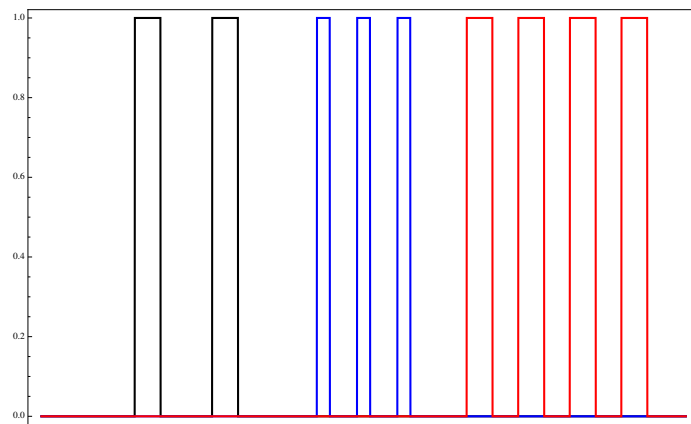


Figura 4.8: Figura comparativa da largura e espaçamento das fendas dupla, tripla e quádrupla, em escala. A fenda dupla possui largura $2a = 80 \mu\text{m}$ e espaçamento entre as fendas $2d = 240 \mu\text{m}$. A fenda tripla possui largura $2a = 40 \mu\text{m}$ e espaçamento entre as fendas $2d = 125 \mu\text{m}$. Para a fenda quádrupla, a largura é $2a = 80 \mu\text{m}$ e o espaçamento entre as fendas é $2d = 160 \mu\text{m}$.

Nas Figs. 4.5 e 4.7 observamos um excelente acordo entre as previsões, baseadas no conhecimento da forma da amplitude incidente sobre as fendas e dos parâmetros destas, e os resultados experimentais, mesmo no caso de baixo número de contagens, como ocorreu no caso da fenda tripla. Esta apresentou o desafio adicional de propiciar uma menor intensidade para

detecção pois além de ser mais estreita que as fendas dupla e quádrupla, a maior proximidade entre as fendas fez com que o padrão de interferência fosse mais largo.

Os experimentos com fendas dupla, tripla e quádrupla, na configuração de lente esférica na posição f - f entre o centro do cristal e o plano da fenda, mostraram ser possível gerar qudits com $D = 2, 3$ e 4 em um estado quase separável. Este tipo de estado pode ser útil, por exemplo, como fonte anunciada de qudits com alto grau de pureza para aplicação em protocolos de informação quântica e testes de não-localidade ou testes de contextualidade, para os quais mostrou-se que qudits são melhores que qubits.

Passando aos resultados utilizando a lente cilíndrica, observamos que os mapas experimentais das Figs. 4.4 e 4.6 apresentam o comportamento esperado para um estado muito emaranhado de qudits. Nota-se que os mapas de coincidência π - π não apresentam interferência visível, indicando baixa pureza do estado parcial em cada par e, portanto, alto emaranhamento. Ao mesmo tempo, o caráter condicional da interferência nos mapas HV indica que o estado é próximo daquele em que $\epsilon = 0$, exemplificado pela Fig. 4.2a, ou seja, um estado maximamente emaranhado de qudits similar ao estado $|\phi^+\rangle$ para qubits.

Os mapas simulados foram gerados a partir da amplitude sobre as fendas, calculada usando a Eq. (2.16) e da propagação ao longo do telescópio, como indicado no Apêndice B para, utilizando as Eqs. (4.18), (4.17), (4.24), (4.23) e (4.22), obter os parâmetros dos estados $|\Psi_-\rangle_3$ e $|\Psi_-\rangle_4$. Nestas condições encontramos padrões diferentes dos previstos, principalmente no caso da fenda tripla. Como a distância entre as fendas é menor naquele caso, o estado torna-se mais sensível ao comportamento de $\Phi(x_s, x_i)$ próximo de $x_- = 0$. Contudo, obtivemos acordo entre mapas simulados a partir destas amplitudes e os resultados experimentais ao introduzir um fator $\zeta < 1$ no argumento da função de casamento de fases (2.11).

No caso de cristais como o PPKTP, defeitos de fabricação, como por exemplo a nucleação irregular de domínios ferroelétricos, causa variações locais no coeficiente de não linearidade efetivo [106]. Portanto, a presença deste fator pode ser entendida como uma diminuição do comprimento efetivo do cristal, aquele ao longo do qual o processo de CPDE ocorre de fato.

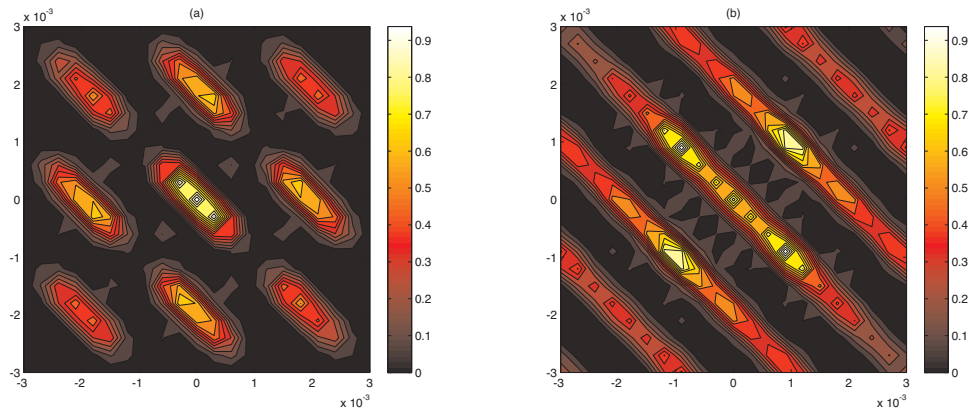


Figura 4.9: Comparação dos mapas simulados para coincidências HV usando fenda tripla para os casos (a) $\zeta = 1$ e (b) $\zeta = 0.45$. Todos os outros parâmetros foram mantidos constantes de uma simulação para a outra.

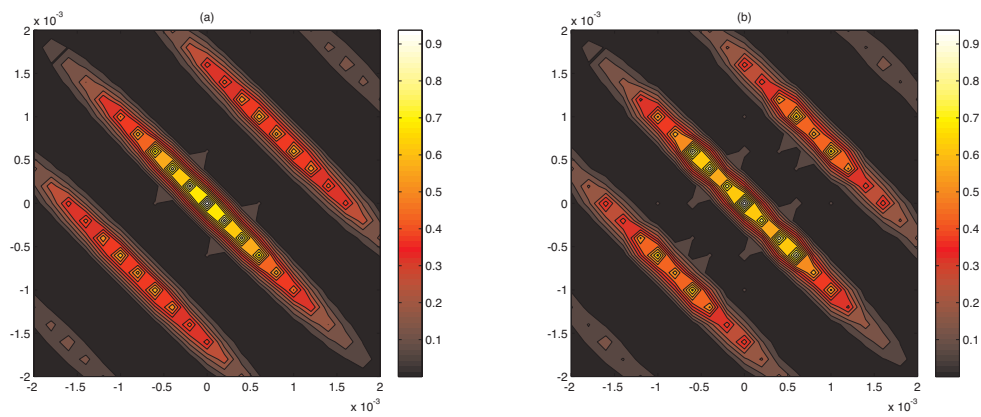


Figura 4.10: Comparação dos mapas simulados para coincidências HV usando fenda quádrupla para os casos (a) $\zeta = 1$ e (b) $\zeta = 0.45$. Todos os outros parâmetros foram mantidos constantes de uma simulação para a outra.

Considerações finais e perspectivas

Os trabalhos apresentados nesta tese tiveram por objetivo estudar a manipulação das correlações quânticas transversais em sistemas de qudits espaciais e realizar um mapeamento destas correlações, buscando associar características dos mapas de detecções em coincidências à presença de emaranhamento no sistema. Buscamos também mostrar a ocorrência de geração de dois pares de fótons, devido à alta eficiência do cristal não-linear utilizado como fonte, levando à geração de duas cópias de um mesmo sistema de dois qudits espaciais.

No experimento de qubits, conseguimos com sucesso gerar estados com alto grau de emaranhamento, no caso em que o telescópio projeta a imagem do cristal sobre a fenda dupla, e com baixo grau de emaranhamento, quando uma lente projeta a transformada de Fourier óptica do cristal sobre a fenda dupla. Observando coincidências entre fótons de mesma polarização, pudemos comprovar a ocorrência de eventos de geração de dois pares, além de comprovar a geração de quatro qubits espaciais em duas cópias de um estado bipartido.

O método proposto para caracterização dos estados, fazendo uso do mapeamento das coincidências tanto de fótons de um mesmo par quanto entre fótons de pares distintos, foi capaz de distinguir entre os dois níveis de emaranhamento com grande sucesso. Mostramos que perde-se a visibilidade no padrão de interferência de fótons de mesma polarização quando os pares HV são muito emaranhados, devido à perda de pureza no estado parcial de cada fóton do par. Este resultado é análogo ao apresentado por Abouraddy *et al.* em [3], porém analisado utilizando uma linguagem mais próxima da Informação Quântica, em termos de interferência de qubits. O resultado apresentado na Fig. 3.14 corrobora também o modelo de que os eventos de geração de dois pares produzem, de fato, duas cópias do mesmo estado, já que os mapas medidos para HV e π - π são essencialmente iguais.

Ainda analisando os mapas de qubits, vimos que há um comportamento anômalo do envelope de difração no caso em que há alto grau de emaranhamento nos pares HV, sugerindo que pode-se tentar caracterizar o grau de emaranhamento nos modos de momento e posição antes da fenda dupla a partir da deformação do envelope de difração, algo que desejamos estudar em detalhe em um trabalho futuro. Este comportamento anômalo é similar ao que foi observado por Ostermeyer *et al.* [107] em grades de difração. No caso em que há emaranhamento, não há coerência transversal para os fótons quando considerados individualmente, justificando tanto a ausência de um padrão de interferência em contagens simples quanto o alargamento do padrão de difração. Desta forma o alargamento do envelope de difração ao longo de uma das diagonais estaria relacionado ao quão estreita é a amplitude não-separável do bifóton e, para o caso de uma função $\delta(x_s \pm x_i)$, esperaríamos observar um envelope de difração constante ao longo de uma das diagonais. Já para o caso de um estado separável, cada fóton possui coerência transversal e o envelope de difração observado é igual àquele esperado quando consideramos a amplitude dos fótons localmente constante sobre

cada fenda. Desejamos aprofundar o estudo do comportamento da difração para amplitudes que geram estados emaranhados, já que acreditamos que este problema pode ser pensado como um experimento de difração de pares EPR [80] e que poderemos estabelecer um critério de separabilidade para o bifóton baseado no grau de assimetria dos envelopes de difração ao longo das diagonais dos mapas de detecções em coincidência.

Ao desenvolver uma extensão do modelo de manipulação de qubits para qudits, constatamos que a existência de mais fendas torna visíveis fases que, no caso de uma fenda dupla, são globais. Esta mudança significa que o telescópio utilizado no arranjo 3.4a não é mais equivalente a um telescópio confocal, necessitando de um modelo mais detalhado da propagação da amplitude dos bifótons, como apresentamos no Apêndice B. Vemos que há uma fase

$$\phi = \frac{k(x_1^2 + x_2^2)}{2f_2M}, \quad (5.1)$$

devido à configuração do telescópio e que, embora pequena para as dimensões das fendas utilizadas, pode tornar-se relevante caso fendas mais espaçadas sejam usadas.

No caso em que inserimos a lente cilíndrica no caminho dos fótons, observamos uma discrepância nos mapas HV entre o resultado experimental e a previsão quando os parâmetros do estado são calculados utilizando-se um modelo da amplitude propagada através do telescópio. Vimos que a introdução de um fator ζ no argumento da função de casamento de fases, (2.11), foi capaz de reproduzir o mapa observado para $\zeta = 0,45$. Interpretamos este fator como um indício de que o comprimento efetivo do cristal, indicado pelo fabricante como sendo 96% do comprimento físico, pode ser menor. Tal fato indica que uma caracterização mais completa do cristal, por exemplo utilizando o método proposto em [106], é recomendada para que passemos a aplicações que necessitem da geração de um estado bem conhecido.

Esta diferença entre os mapas simulados e medidos, contudo, não invalida os resultados obtidos após as fendas e sua interpretação no contexto das características dos estados de qudits gerados. Como vimos, tanto os qubits quanto qudits apresentam a dualidade esperada na visibilidade da interferência nos mapas π - π e em todos os casos a introdução da lente cilíndrica provocou a mudança do comportamento do estado após as fendas de quase-separável para altamente emaranhado, com características de condicionalidade da interferência entre fótons de polarizações diferentes próximas daquela de um estado de qudits semelhante ao $|\phi^+\rangle$ para qubits.

Por fim, constatamos que o método proposto para caracterização de qubits e qudits espaciais é eficiente, especialmente no que se refere à observação qualitativa da presença de emaranhamento e de eventos de geração de duas cópias de um estado de dois qudits espaciais, pois ambas as características são muito evidentes quando se observa em conjunto os mapas de coincidências HV e π - π . Podemos também inferir o tipo de estado emaranhado que foi gerado, observando as características da interferência condicional nos mapas HV.

Como no caso de qudits o número de parâmetros livres a se ajustar nos mapas se torna cada vez maior, os mapas simulados que comparamos aos resultados experimentais foram baseados em modelos teóricos sobre o agrupamento dos estados, na forma da amplitude $\Phi(x_s, x_i; z_F)$ e em parâmetros conhecidos a respeito das condições experimentais, como por exemplo a cintura do feixe de bombeamento, as características do cristal e as dimensões das fendas. Este método, por não se tratar de uma tomografia, não nos permite caracterizar os estados ou quantificar o emaranhamento com a precisão necessária para experimentos que necessitem de estados muito específicos ou com baixa tolerância a desvios, como é o caso de testes de não-localidade e contextualidade, embora nos permita conhecer de forma aproximada os parâmetros dos estados e, portanto, a concorrência e a entropia de von Neumann

do estado parcial.

Desejamos, portanto, encontrar um meio de determinar com maior precisão os estados sem ter que recorrer a um processo de tomografia completa, que seria inviável para um estado de quatro ququarts. Acreditamos ser possível encontrar uma forma mais eficiente de caracterização dos estados de qudits produzidos, a partir de métodos numéricos variacionais aplicados aos resultados experimentais [108].

Uma vez definido um procedimento rigoroso de caracterização dos estados e quantificação do emaranhamento, podemos explorar mais a fundo o potencial do método de manipulação da amplitude dos bifótons antes da fenda utilizando, por exemplo, feixes de bombeamento com perfis Hermite-Gaussianos e substituindo o sistema óptico entre cristal e fendas por moduladores espaciais de luz. Acreditamos que a introdução de um método eletrônico para o controle da amplitude sobre as fendas e até mesmo a possibilidade de ter fendas cujas dimensões podem ser ajustadas em tempo real são o caminho para chegar a uma fonte completamente controlável de estados de qudits, dentro do subespaço definido pelas condições de simetria das fendas.

Em termos aplicados, uma fonte controlada de estados de dois pares de qudits pode ser utilizada em protocolos de Informação Quântica, aproveitando o fato de podermos, manipulando o emaranhamento, ter fontes anunciadas de estados mistos ou estados puros. Exemplos de protocolos que pretendemos implementar são a troca de emaranhamento [18, 20, 109] e a clonagem [35] via interferência Hong-Ou-Mandel [12, 110].

Bibliografia

- [1] D Strelakov, A Sergienko, D Klyshko e Y Shih. “Observation of Two-Photon “Ghost” Interference and Diffraction”. *Phys. Rev. Lett.* **74.18** (1995), pp. 3600–3603.
- [2] Bahaa Saleh, Ayman Abouraddy, Alexander Sergienko e Malvin Teich. “Duality between partial coherence and partial entanglement”. *Phys. Rev. A* **62.4** (2000), p. 043816.
- [3] A Abouraddy, M Nasr, B Saleh, A Sergienko e M Teich. “Demonstration of the complementarity of one- and two-photon interference”. *Physical Review A* **63.6** (2001), p. 063803.
- [4] Ayman Abouraddy, Bahaa Saleh, Alexander Sergienko e Malvin Teich. “Role of Entanglement in Two-Photon Imaging”. *Phys. Rev. Lett.* **87.12** (2001), p. 123602.
- [5] PH Souto Ribeiro, DP Caetano, MP Almeida, JA Huguenin, B Coutinho Dos Santos e AZ Khoury. “Observation of Image Transfer and Phase Conjugation in Stimulated Down-Conversion”. *Phys. Rev. Lett.* **87.13** (2001), p. 133602.
- [6] Ivan Santos, M Sagioro, C Monken e S Pádua. “Resolution and apodization in images generated by twin photons”. *Phys. Rev. A* **67.3** (2003), p. 033812.
- [7] Dik Bouwmeester, Jian-Wei Pan, Klaus Mattle, Manfred Eibl, Harald Weinfurter e Anton Zeilinger. “Experimental quantum teleportation”. *Nature* **390.6660** (1997). 10.1038/37539, pp. 575–579. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/37539>.
- [8] W K Wootters e W H Zurek. “A single quantum cannot be cloned”. *Nature* **299.5886** (1982). 10.1038/299802a0, pp. 802–803. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/299802a0>.
- [9] Antia Lamas-Linares, C Simon, J C Howell e Dirk Bouwmeester. “Experimental Quantum Cloning of Single Photons”. *Science* **296** (2002), p. 712.

-
- [10] F de Martini, L Masullo, M Ricci, F Sciarrino e V Secondi. "Manipulating quantum information via quantum cloning". *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* **7** (2005), S664–S67.
- [11] N Gisin e S Massar. "Optimal Quantum Cloning Machines". *Phys. Rev. Lett.* **79.11** (1997). URL: <http://link.aps.org/abstract/PRL/v79/p2153>.
- [12] W T M Irvine, Antia Lamas-Linares, M J A deDood e Dirk Bouwmeester. "Optimal Quantum Cloning on a Beam Splitter". *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004), pp. 047902–1.
- [13] Valerio Scarani, Sofyan Iblisdir, Nicolas Gisin e Antonio Acin. "Quantum cloning". *Reviews of Modern Physics* **77.4** (2005), pp. 1225–32. URL: <http://link.aps.org/abstract/RMP/v77/p1225>.
- [14] V Bužek e M Hillery. "Quantum copying: Beyond the no-cloning theorem". *Phys. Rev. A* **54.3** (1996). URL: <http://link.aps.org/abstract/PRA/v54/p1844>.
- [15] M Ricci, F Sciarrino, C Sias e F de Martini. "Teleportation scheme implementing the Universal Optimal Quantum Cloning Machine and the Universal NOT gate". *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004), p. 047901.
- [16] V Bužek e M Hillery. "Universal optimal cloning of arbitrary quantum states: From qubits to quantum registers". *Phys. Rev. Lett.* **81.22** (1998), pp. 5003–5006.
- [17] F de Martini e V Mussi. "Universal Quantum Cloning and Macroscopic Superposition in Parametric Amplification". *Fortschr. Phys.* **48.5–7** (2000), pp. 413–422.
- [18] Jian-Wei Pan, Dik Bouwmeester, Harald Weinfurter e Anton Zeilinger. "Experimental Entanglement Swapping: Entangling Photons That Never Interacted". *Phys. Rev. Lett.* **80.18** (1998), pp. 3891–3894. URL: <http://link.aps.org/abstract/PRL/v80/p3891>.
- [19] Thomas Jennewein, Gregor Weihs, Jian-Wei Pan e Anton Zeilinger. "Experimental Nonlocality Proof of Quantum Teleportation and Entanglement Swapping". *Phys. Rev. Lett.* **88.1** (2002), pp. 017903–4. URL: <http://link.aps.org/abstract/PRL/v88/e017903>.
- [20] Bao-Sen Shi, Yun-Kun Jiang e Guang-Can Guo. "Optimal entanglement purification via entanglement swapping". *Phys. Rev. A* **62.5** (2000), pp. 054301–3. URL: <http://link.aps.org/abstract/PRA/v62/e054301>.

- [21] Charles H. Bennett, François Bessette, Gilles Brassard, Louis Salvail e John Smolin. "Experimental quantum cryptography". *Journal of Cryptology* **5** (1 1992). 10.1007/BF00191318, pp. 3–28. ISSN: 0933-2790. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF00191318>.
- [22] Artur K. Ekert. "Quantum cryptography based on Bell's theorem". *Phys. Rev. Lett.* **67.6** (1991), pp. 661–663.
- [23] Thomas Jennewein, Christoph Simon, Gregor Weihs, Harald Weinfurter e Anton Zeilinger. "Quantum Cryptography with Entangled Photons". *Phys. Rev. Lett.* **84.20** (2000), pp. 4729–4732.
- [24] Almut Beige, Berthold-Georg Englert, Christian Kurtsiefer e Harald Weinfurter. "Secure communication with single-photon two-qubit states". *Journal of Physics A: Mathematical and General* **35.28** (2002), p. L407. URL: <http://stacks.iop.org/0305-4470/35/i=28/a=103>.
- [25] Klaus Mattle, Harald Weinfurter, Paul G. Kwiat e Anton Zeilinger. "Dense Coding in Experimental Quantum Communication". *Phys. Rev. Lett.* **76.25** (1996), pp. 4656–4659.
- [26] D Gottesman e I L Chuang. "Demonstrating the viability of universal quantum computation using teleportation and single-qubit operations". *Nature* **402** (1999), pp. 390–393.
- [27] E. Knill, R. Laflamme e G. J. Milburn. "A scheme for efficient quantum computation with linear optics". *Nature* **409.6816** (2001), pp. 46–52. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/35051009>.
- [28] Robert Raussendorf e Hans J Briegel. "A One-Way Quantum Computer". *Phys. Rev. Lett.* **86.22** (2001), pp. 5188–91. URL: <http://link.aps.org/abstract/PRL/v86/p5188>.
- [29] P Walther, K J Resch, T Rudolph, E Schenck, H Weinfurter, V Vedral, M Aspelmeyer e A Zeilinger. "Experimental one-way quantum computing". *Nature* **434** (2005), pp. 169–176.
- [30] Graham D Marshall, Alberto Politi, Jonathan C F Matthews, Peter Dekker, Martin Ams, Michael J Withford e Jeremy L O'Brien. "Laser written waveguide photonic quantum circuits". EN. *Optics Express* **17.15** (2009), pp. 12546–12554.
- [31] Jeremy L O'Brien, Akira Furusawa e J Vučković. "Photonic quantum technologies". en. *Nature Photonics* **3.12** (2009), p. 687.
- [32] Jonathan C F Matthews, Alberto Politi, André Stefanov e Jeremy L O'Brien. "Manipulation of multiphoton entanglement in waveguide quantum circuits". en. *Nature Photonics* **3.6** (2009), p. 346.

- [33] Jaewoo Joo, Peter L Knight, Jeremy L O'Brien e Terry Rudolph. "One-way quantum computation with four-dimensional photonic qudits". *Phys. Rev. A* **76.5** (2007), pp. 052326–10. URL: <http://link.aps.org/abstract/PRA/v76/e052326>.
- [34] Benjamin P. Lanyon, Marco Barbieri, Marcelo P. Almeida, Thomas Jennewein, Timothy C. Ralph, Kevin J. Resch, Geoff J. Pryde, Jeremy L. O'Brien, Alexei Gilchrist e Andrew G. White. "Simplifying quantum logic using higher-dimensional Hilbert spaces". *Nat Phys* **5.2** (2009), pp. 134–140. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nphys1150>.
- [35] E Nagali, D Giovannini, L Marrucci, S Slussarenko, E Santamato e F Sciarrino. "Experimental Optimal Cloning of Four-Dimensional Quantum States of Photons". *Phys. Rev. Lett.* **105.7** (2010), p. 073602.
- [36] S P Walborn, W Nogueira, S Pádua e C Monken. "Optical Bell-state analysis in the coincidence basis". *Europhysics Letters* **62.2** (2003), p. 161.
- [37] A. Acín, T. Durt, N. Gisin e J. I. Latorre. "Quantum nonlocality in two three-level systems". *Phys. Rev. A* **65.5** (2002), p. 052325.
- [38] Se-Wan Ji, Jinhyoung Lee, James Lim, Koji Nagata e Hai-Woong Lee. "Multisetting Bell inequality for qudits". *Phys. Rev. A* **78.5** (2008), p. 052103.
- [39] Alexander A Klyachko, M. Ali Can, Sinem Binicioğlu e Alexander S Shumovsky. "A simple test for hidden variables in spin-1 system". *arXiv quant-ph* (2007). eprint: 0706.0126v4.
- [40] Adán Cabello e Marcelo Terra Cunha. "Proposal of a Two-Qudit Contextuality Test Free of the Finite Precision and Compatibility Loopholes". *Phys. Rev. Lett.* **106.19** (2011), p. 190401.
- [41] Leonardo Neves, S Pádua e Carlos Saavedra. "Controlled generation of maximally entangled qudits using twin photons". *Phys. Rev. A* **69.4** (2004), p. 042305.
- [42] Leonardo Neves, G Lima, J Aguirre Gómez, C Monken, C Saavedra e S Pádua. "Generation of Entangled States of Qudits using Twin Photons". *Phys. Rev. Lett.* **94.10** (2005), p. 100501.
- [43] G Lima, Leonardo Neves, Ivan Santos, J Aguirre Gómez, C Saavedra e S Pádua. "Propagation of spatially entangled qudits through free space". *Phys. Rev. A* **73.3** (2006), p. 032340.
- [44] L Neves, G Lima, E Fonseca, L Davidovich e S Pádua. "Characterizing entanglement in qubits created with spatially correlated twin photons". *Physical Review A* **76** (2007), p. 032314. URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.76.032314>.

-
- [45] Eleonora Nagali, Linda Sansoni, Lorenzo Marrucci, Enrico Santamato e Fabio Sciarrino. "Experimental generation and characterization of single-photon hybrid ququarts based on polarization and orbital angular momentum encoding". *Physical Review A* **81.5** (2010), p. 052317.
- [46] E Nagali e F Sciarrino. "Generation of hybrid polarization-orbital angular momentum entangled states". *Optics Express* **18.17** (2010), p. 18243. URL: http://quantumoptics.phys.uniroma1.it/publications/OptExp_18_18243.pdf.
- [47] Dik Bouwmeester, Jian-Wei Pan, Matthew Daniell, Harald Weinfurter e Anton Zeilinger. "Observation of Three-Photon Greenberger-Horne-Zeilinger Entanglement". *Phys. Rev. Lett.* **82.7** (1999), pp. 1345–1349.
- [48] Anton Zeilinger, Michael A. Horne, Harald Weinfurter e Marek Żukowski. "Three-Particle Entanglements from Two Entangled Pairs". *Phys. Rev. Lett.* **78.16** (1997), pp. 3031–3034.
- [49] Nikolai Kiesel, Christian Schmid, Ulrich Weber, Géza Tóth, Otfried Gühne, Rupert Ursin e Harald Weinfurter. "Experimental Analysis of a Four-Qubit Photon Cluster State". *Phys. Rev. Lett.* **95.21** (2005), p. 210502.
- [50] Manfred Eibl, Nikolai Kiesel, Mohamed Bourennane, Christian Kurtsiefer e Harald Weinfurter. "Experimental Realization of a Three-Qubit Entangled W State". *Phys. Rev. Lett.* **92.7** (2004), p. 077901.
- [51] Manfred Eibl, Sascha Gaertner, Mohamed Bourennane, Christian Kurtsiefer, Marek Żukowski e Harald Weinfurter. "Experimental Observation of Four-Photon Entanglement from Parametric Down-Conversion". *Phys. Rev. Lett.* **90.20** (2003), p. 200403.
- [52] Witłef Wieczorek, Christian Schmid, Nikolai Kiesel, Reinhold Pohlner, Otfried Gühne e Harald Weinfurter. "Experimental observation of an entire family of four-photon entangled states". *arXiv quant-ph* (2008). eprint: 0806.1882v1.
- [53] S. Gaertner, C. Kurtsiefer, M. Bourennane e H. Weinfurter. "Experimental Demonstration of Four-Party Quantum Secret Sharing". *Phys. Rev. Lett.* **98.2** (2007), p. 020503.
- [54] N. Kiesel, C. Schmid, G. Tóth, E. Solano e H. Weinfurter. "Experimental Observation of Four-Photon Entangled Dicke State with High Fidelity". *Phys. Rev. Lett.* **98.6** (2007), p. 063604.
- [55] Witłef Wieczorek, Roland Krischek, Nikolai Kiesel, Patrick Michelberger, Géza Tóth e Harald Weinfurter. "Experimental Entanglement of a Six-Photon Symmetric Dicke State". *Phys. Rev. Lett.* **103.2** (2009), p. 020504.

- [56] Jian-Wei Pan, Zeng-Bing Chen, Marek Zukowski, Harald Weinfurter e Anton Zeilinger. "Multi-photon entanglement and interferometry". *arXiv:0805.2853v1* (2008). eprint: 0805.2853v1. URL: <http://arxiv.org/abs/0805.2853v1>.
- [57] Jonathan Lavoie, Rainer Kaltenbaek, Marco Piani e Kevin J. Resch. "Experimental Bound Entanglement in a Four-Photon State". *Phys. Rev. Lett.* **105.13** (2010), p. 130501.
- [58] Hannes Hubel, Deny R. Hamel, Alessandro Fedrizzi, Sven Ramelow, Kevin J. Resch e Thomas Jennewein. "Direct generation of photon triplets using cascaded photon-pair sources". *Nature* **466**.7306 (2010), pp. 601–603. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nature09175>.
- [59] Leonardo Neves. "Estados Emaranhados de Qubits e Qudits Criados com Pares de Fótons Produzidos na Conversão Paramétrica Descendente". Tese de doutorado. Belo Horizonte, MG, Brasil: Universidade Federal de Minas Gerais, 2006.
- [60] W Peeters, J Renema e M Van Exter. "Engineering of two-photon spatial quantum correlations behind a double slit". *Phys. Rev. A* **79.4** (2009), p. 043817.
- [61] C Monken, P Ribeiro e S Pádua. "Transfer of angular spectrum and image formation in spontaneous parametric down-conversion". *Phys. Rev. A* **57.4** (1998), pp. 3123–3126.
- [62] S.P. Walborn, C.H. Monken, S. Pádua e P.H. Souto Ribeiro. "Spatial correlations in parametric down-conversion". *Physics Reports* **495.4-5** (2010), pp. 87–139. ISSN: 0370-1573.
- [63] Leonard Mandel e Emil Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 2008.
- [64] L. Wang. Tese de doutorado. University of Rochester, 1992.
- [65] W P Grice e I A Walmsley. "Spectral information and distinguishability in type-II down-conversion with a broadband pump". *Phys. Rev. A* **56.2** (1997), pp. 1627–1634.
- [66] Zhe-Yu Jeff Ou. *Multi-Photon Quantum Interference*. Springer, 2007.
- [67] O. Cosme, A. Delgado, G. Lima, C. H. Monken e S. Pádua. "Controlling the transverse correlation in QPM parametric down-conversion". *ArXiv e-prints* (2009). eprint: 0906.4734.
- [68] Olavo Cosme da Silva. "Correlações espaciais de estados multifotônicos via cristal de PPKTP". Tese de doutorado. Belo Horizonte, Brasil: Universidade Federal de Minas Gerais, 2008.

- [69] C. K. Hong e L. Mandel. "Theory of parametric frequency down conversion of light". *Phys. Rev. A* **31.4** (1985), pp. 2409–2418.
- [70] Max Born e Emil Wolf. *Principles of Optics*. Second Edition. The Macmillan Company, 1964.
- [71] J Armstrong, N Bloembergen, J Ducuing e P Pershan. "Interactions between light waves in a nonlinear dielectric". *Physical Review* (1962).
- [72] L. E. Myers, R. C. Eckardt, M. M. Fejer, R. L. Byer, W. R. Bosenberg e J. W. Pierce. "Quasi-phase-matched optical parametric oscillators in bulk periodically poled LiNbO₃". *J. Opt. Soc. Am. B* **12.11** (1995), pp. 2102–2116.
- [73] Shi-ning Zhu, Yong-yuan Zhu, Zhi-yong Zhang, Hong Shu, Hai-feng Wang, Jing-fen Hong, Chuan-zhen Ge e Nai-ben Ming. "LiTaO₃ crystal periodically poled by applying an external pulsed field". *Journal of Applied Physics* **77.10** (1995), pp. 5481–5483. ISSN: 0021-8979.
- [74] M.M. Fejer, G.A. Magel, D.H. Jundt e R.L. Byer. "Quasi-phase-matched second harmonic generation: tuning and tolerances". *Quantum Electronics, IEEE Journal of* **28.11** (1992), pp. 2631–2654. ISSN: 0018-9197.
- [75] Shunhua Wang. "Fabrication and characterization of periodically-poled KTP and Rb-doped KTP for applications in the visible and UV". Tese de doutorado. Stockholm, Sweden: Royal Institute of Technology, 2005.
- [76] W. H. Peeters e M. P. van Exter. "Optical characterization of periodically-poled KTiOPO₄". *Opt. Express* **16.10** (2008), pp. 7344–7360.
- [77] T Pittman, D Strekalov, D Klyshko, M Rubin, A Sergienko e Y Shih. "Two-photon geometric optics". *Phys. Rev. A* **53.4** (1996), pp. 2804–2815.
- [78] Joseph W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. Third Edition. Roberts & Company Publishers, 2005.
- [79] Michael A Nielsen e Isaac L Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2004.
- [80] A Einstein, B Podolsky e N Rosen. "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?" *Phys. Rev.* **47.10** (1935), pp. 777–780.
- [81] John S Bell. *Speakable and unspeakable in Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 1988.

-
- [82] B. P. Lanyon, M. Barbieri, M. P. Almeida e A. G. White. “Experimental Quantum Computing without Entanglement”. *Phys. Rev. Lett.* **101.20** (2008), p. 200501.
- [83] Ryszard Horodecki, Paweł Horodecki, Michał Horodecki e Karol Horodecki. “Quantum entanglement”. *Rev. Mod. Phys.* **81.2** (2009), pp. 865–942. eprint: [quant-ph/0702225](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0702225).
- [84] WK Wootters. “Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits”. *Phys. Rev. Lett.* **80.10** (1998), pp. 2245–2248.
- [85] John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony e Richard A. Holt. “Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories”. *Phys. Rev. Lett.* **23.15** (1969), pp. 880–884.
- [86] Richard Jozsa. “An introduction to measurement based quantum computation”. *arXiv quant-ph* (2005). eprint: [quant-ph/0508124v2](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0508124v2). URL: <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0508124v2>.
- [87] Christian Schmid, Adrian P Flitney, Witlef Wieczorek, Nikolai Kiesel, Harald Weinfurter e Lloyd C. L Hollenberg. “Experimental implementation of a four-player quantum game”. *arXiv quant-ph* (2008). 9 pages, 5 figures. eprint: [0901.0063v1](https://arxiv.org/abs/0901.0063v1). URL: <http://arxiv.org/abs/0901.0063v1>.
- [88] Kai Chen, Che-Ming Li, Qiang Zhang, Yu-Ao Chen, Alexander Goebel, Shuai Chen, Alois Mair e Jian-Wei Pan. “Experimental Realization of One-Way Quantum Computing with Two-Photon Four-Qubit Cluster States”. *Phys. Rev. Lett.* **99.12** (2007), p. 120503.
- [89] Giuseppe Vallone, Gaia Donati, Natalia Bruno, Andrea Chiuri e Paolo Mataloni. “Experimental realization of the Deutsch-Jozsa algorithm with a six-qubit cluster state”. *Physical Review A* **81.5** (2010), p. 050302.
- [90] Giuseppe Vallone, Gaia Donati, Raino Ceccarelli e Paolo Mataloni. “Six-qubit two-photon hyperentangled cluster states: Characterization and application to quantum computation”. *Physical Review A* **81.5** (2010), p. 052301.
- [91] N. David Mermin. “Extreme quantum entanglement in a superposition of macroscopically distinct states”. *Phys. Rev. Lett.* **65.15** (1990), pp. 1838–1840.
- [92] R. F. Werner e M. M. Wolf. “All-multipartite Bell-correlation inequalities for two dichotomic observables per site”. *Phys. Rev. A* **64.3** (2001), p. 032112.
- [93] Lluís Masanes. “Asymptotic Violation of Bell Inequalities and Distillability”. *Phys. Rev. Lett.* **97.5** (2006), p. 050503.

-
- [94] Marek Żukowski e Časlav Brukner. “Bell’s Theorem for General N-Qubit States”. *Phys. Rev. Lett.* **88.21** (2002), p. 210401.
- [95] Daniel Cavalcanti, Mafalda L. Almeida, Valerio Scarani e Antonio Acín. “Quantum networks reveal quantum nonlocality”. *Nat Commun* **2** (2011).
- [96] Sean D. Huver, Christoph F. Wildfeuer e Jonathan P. Dowling. “Entangled Fock states for robust quantum optical metrology, imaging, and sensing”. *Phys. Rev. A* **78.6** (2008), p. 063828.
- [97] Gerald Gilbert, Michael Hamrick e Yaakov S. Weinstein. “Use of maximally entangled N-photon states for practical quantum interferometry”. *J. Opt. Soc. Am. B* **25.8** (2008), pp. 1336–1340.
- [98] Christoph F. Wildfeuer, Austin P. Lund e Jonathan P. Dowling. “Strong violations of Bell-type inequalities for path-entangled number states”. *Phys. Rev. A* **76.5** (2007), p. 052101.
- [99] U. Dorner, R. Demkowicz-Dobrzanski, B. J. Smith, J. S. Lundeen, W. Wasilewski, K. Banaszek e I. A. Walmsley. “Optimal Quantum Phase Estimation”. *Phys. Rev. Lett.* **102.4** (2009), p. 040403.
- [100] E. J. S. Fonseca, C. H. Monken e S. Pádua. “Measurement of the de Broglie Wavelength of a Multiphoton Wave Packet”. *Phys. Rev. Lett.* **82.14** (1999), pp. 2868–2871.
- [101] Bahaa Saleh e Malvin Teich. *Fundamentals of Photonics*. Wiley-Interscience, 1991.
- [102] S Walborn, P Ribeiro, L Davidovich e F Mintert. “Experimental determination of entanglement with a single measurement”. *Nature* (2006). URL: <http://omnis.if.ufrj.br/~ldavid/arquivos/nature04627.pdf>.
- [103] S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro, L. Davidovich, F. Mintert e A. Buchleitner. “Experimental determination of entanglement by a projective measurement”. *Phys. Rev. A* **75.3** (2007), p. 032338.
- [104] Todd A. Brun. “Measuring polynomial functions of states” (2004). eprint: [quant-ph/0401067v2](http://arxiv.org/abs/quant-ph/0401067v2). URL: <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0401067v2>.
- [105] P.-L. de Assis, M. A. D. Carvalho, L. P. Berruezo, J. Ferraz, I. F. Santos, F. Sciarrino e S. Pádua. “Control of quantum transverse correlations on a four-photon system”. *Opt. Express* **19.4** (2011), pp. 3715–3729.

- [106] Stefan J. Holmgren, Valdas Pasiskevicius, Shunhua Wang e Fredrik Laurell. "Three-dimensional characterization of the effective second-order nonlinearity in periodically poled crystals". *Opt. Lett.* **28.17** (2003), pp. 1555–1557.
- [107] M Ostermeyer, D Puhlmann e D Korn. "Quantum diffraction of biphotons at a blazed grating". *Journal of the Optical Society of America B* **26.12** (2009), pp. 2347–2356.
- [108] Thiago O. Maciel, André T. Cesário e Reinaldo O. Vianna. "Variational quantum tomography with incomplete information by means of semidefinite programs" (2010). eprint: 1001.1793v5. URL: <http://arxiv.org/abs/1001.1793v5>.
- [109] S Bose, V Vedral e P Knight. "Multiparticle generalization of entanglement swapping". *Physical Review A* **57.2** (1998), pp. 822–829.
- [110] C. K. Hong, Z. Y. Ou e L. Mandel. "Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference". *Phys. Rev. Lett.* **59.18** (1987), pp. 2044–2046.

Cálculos detalhados de equações do Cap. 3

A.1 Concorrência

Iniciemos o cálculo explicitando o efeito do operador $\sigma_y^{\otimes 2}$ sobre os estados $|\psi^+\rangle$ e $|\phi^+\rangle$:

$$\sigma_y^{\otimes 2}|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|10\rangle + |01\rangle] = |\psi^+\rangle, \quad (\text{A.1})$$

$$\sigma_y^{\otimes 2}|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[-|11\rangle - |00\rangle] = -|\phi^+\rangle, \quad (\text{A.2})$$

onde indicamos o produto tensorial do mesmo operador U em dois espaços diferentes, $U \otimes U$, por $U^{\otimes 2}$.

Conhecendo a forma do estado geral $|\Psi\rangle_{B^+}$, definido na Eq. (3.4), podemos escrever

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}\rangle_{B^+} &= \sigma^{\otimes 2}|\Psi^*\rangle_{B^+} \\ &= \cos(\alpha/2)|\psi^+\rangle - e^{-i\varphi} \sin(\alpha/2)|\phi^+\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

de forma que a concorrência, como definida na Eq. (2.49), será dada por

$$\begin{aligned}
 C &= \left| \cos^2(\alpha/2) - e^{-2i\varphi} \operatorname{sen}(\alpha/2) \right| \\
 &= \left[\left(\cos^2(\alpha/2) - e^{-2i\varphi} \operatorname{sen}(\alpha/2) \right) \times \left(\cos^2(\alpha/2) - e^{2i\varphi} \operatorname{sen}(\alpha/2) \right) \right]^{1/2} \\
 &= \left[\cos^4(\alpha/2) - (e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}) \operatorname{sen}^2(\alpha/2) \cos^2(\alpha/2) + \operatorname{sen}^4(\alpha/2) \right]^{1/2},
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

onde, fazendo

$$e^{\pm i\theta} = \cos(\theta) \pm i \operatorname{sen}(\theta),$$

chegamos a

$$C = \left[\cos^4(\alpha/2) + \operatorname{sen}^4(\alpha/2) - 2 \cos(2\varphi) \operatorname{sen}^2(\alpha/2) \cos^2(\alpha/2) \right]^{1/2}, \tag{A.5}$$

que pode ser simplificado utilizando as identidades trigonométricas

$$[\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)]^2 = \cos^4(\theta) + \operatorname{sen}^4(\theta) + 2 \operatorname{sen}^2(\theta) \cos^2(\theta) = 1$$

e

$$2 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) = \operatorname{sen}(2\theta),$$

chegando a

$$C = \sqrt{1 - (1 - \cos(2\varphi)) \frac{\operatorname{sen}^2(\alpha)}{2}}. \tag{A.6}$$

Como último passo, lembremos que

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta),$$

$$1 - \operatorname{sen}^2(\theta) = \cos^2(\theta)$$

e obteremos

$$C = \sqrt{1 - \cos^2(\varphi) \operatorname{sen}^2(\alpha)}. \tag{A.7}$$

A.2 Pureza do estado parcial

Como desejamos calcular a pureza do estado parcial de dois fótons de mesma polarização no caso de um estado do tipo $|\Psi\rangle_{\mathcal{B}^+}^{\otimes 2}$, começaremos escrevendo a matriz densidade correspondente ao estado inicial $|\Psi\rangle_{\mathcal{B}^+}$,

$$\rho_{\mathcal{B}^+} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sin^2(\alpha/2) & e^{-i\varphi} \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2) & e^{-i\varphi} \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2) & \sin^2(\alpha/2) \\ e^{i\varphi} \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2) & \cos^2(\alpha/2) & \cos^2(\alpha/2) & e^{i\varphi} \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2) \\ e^{i\varphi} \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2) & \cos^2(\alpha/2) & \cos^2(\alpha/2) & e^{i\varphi} \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2) \\ \sin^2(\alpha/2) & e^{-i\varphi} \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2) & e^{-i\varphi} \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2) & \sin^2(\alpha/2) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

A partir de $\rho_{\mathcal{B}^+}$ podemos construir a matriz do estado parcial aplicando, por exemplo, $\text{Tr}_H(\rho_{\mathcal{B}^+})$,

$$\rho' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos(\varphi) \sin(\alpha) \\ \cos(\varphi) \sin(\alpha) & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

que para o nosso caso é idêntica se o traço parcial for tomado sobre o fóton i ou s .

A pureza do estado parcial de um fóton, $\mathcal{P}_1 = \text{Tr}[(\rho')^2]$, será, portanto,

$$\mathcal{P}_1 = \frac{1}{2} [1 + \cos^2(\varphi) \sin^2(\alpha)]. \quad (\text{A.10})$$

Como sabemos que o estado de quatro fótons pode ser escrito como $\rho_{\mathcal{B}^+}^{\otimes 2}$, temos que o estado parcial de fótons de mesma polarização é $\rho'_{\pi,\pi} = (\rho')^{\otimes 2}$. A pureza será, portanto, $\mathcal{P}_{\pi,\pi} = (\mathcal{P}_1)^2$. Podemos, utilizando a Eq. (A.7), escrever $\cos^2(\varphi) \sin^2(\alpha) = 1 - C^2$, de forma a podermos expressar a pureza do estado de dois fótons de mesma polarização como

$$\mathcal{P}_{\pi,\pi} = \frac{1}{4} [2 - C^2]^2. \quad (\text{A.11})$$

A.3. Cálculo das probabilidades $P_{B^+}(x_1, x_2)$ e $P_{\pi\pi}(x_1, x_2)$ de detecção no campo distante das fendas

A.3 Cálculo das probabilidades $P_{B^+}(x_1, x_2)$ e

$P_{\pi\pi}(x_1, x_2)$ de detecção no campo distante das fendas

Desejamos calcular a probabilidade de detectar em coincidência dois fótons de um mesmo par, respectivamente em pontos x_1 e x_2 no plano de Fourier das fendas, para o caso em que, no plano das fendas, o par se encontra num estado $\cos(\alpha/2)|\psi^+\rangle + e^{i\varphi}\sin(\alpha/2)|\phi^+\rangle$ com α e φ determinados pelas propriedades da amplitude do bifóton naquele plano.

Para tanto, primeiro propagaremos o estado através da lente, que, por se encontrar em na configuração f - f entre o plano das fendas e o plano de detecção, atuará como uma transformada de Fourier óptica, definida na Eq. (2.28).

No caso específico dos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, para os quais conhecemos a expressão no espaço de posição e momento no plano das fendas, dadas pelas Eqs. (2.33) e (2.36), a propagação se dará de forma que os estados da base, no plano de Fourier, correspondem ao estado da Eq. (2.36) em variáveis de posição, ou seja,

$$|l(z_F)\rangle = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i\bar{x}(l-1/2)2d] \text{sinc}(\bar{x}a) |\bar{x}\rangle d\bar{x}, \quad (\text{A.12})$$

para $\bar{x} = kx/f$, sendo k o número de onda e f o comprimento focal da lente utilizada para projetar a transformada de Fourier óptica, via a relação entre o estado de fenda na sua descrição no espaço de posição e no espaço de momento transversal.

A probabilidade de detectar um fóton no estado $|\psi(x')\rangle$ em uma dada posição x é dada por

$$P(x) \equiv \langle \psi(x') | \hat{a}^\dagger(x) \hat{a}(x) | \psi(x') \rangle, \quad (\text{A.13})$$

sendo que o operador $\hat{a}(x)$ representa a aniquilação de um fóton no modo

A.3. Cálculo das probabilidades $P_{B^+}(x_1, x_2)$ e $P_{\pi\pi}(x_1, x_2)$ de detecção no campo distante das fendas

espacial x , tal que

$$\begin{aligned} \hat{a}(x)|l(z_{\mathcal{F}})\rangle &= \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i\bar{x}'(l-1/2)2d] \text{sinc}(\bar{x}'a) \hat{a}(x)|\bar{x}'\rangle d\bar{x}' \\ &\propto \exp[-i\bar{x}(l-1/2)2d] \text{sinc}(\bar{x}a)|vac\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Utilizando as Eqs. (3.4) e (A.12) temos, para $\bar{x} = kx/f$:

$$|00(z_{\mathcal{F}})\rangle = \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp[-id(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)] \text{sinc}(\bar{x}_1a) \text{sinc}(\bar{x}_2a) |\bar{x}_1\rangle |\bar{x}_2\rangle dx_1 dx_2, \quad (\text{A.15})$$

$$|01(z_{\mathcal{F}})\rangle = \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp[-id(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)] \text{sinc}(\bar{x}_1a) \text{sinc}(\bar{x}_2a) |\bar{x}_1\rangle |\bar{x}_2\rangle dx_1 dx_2, \quad (\text{A.16})$$

$$|10(z_{\mathcal{F}})\rangle = \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp[id(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)] \text{sinc}(\bar{x}_1a) \text{sinc}(\bar{x}_2a) |\bar{x}_1\rangle |\bar{x}_2\rangle dx_1 dx_2, \quad (\text{A.17})$$

$$|11(z_{\mathcal{F}})\rangle = \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp[id(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)] \text{sinc}(\bar{x}_1a) \text{sinc}(\bar{x}_2a) |\bar{x}_1\rangle |\bar{x}_2\rangle dx_1 dx_2, \quad (\text{A.18})$$

de forma que podemos escrever

$$|\psi^+(z_{\mathcal{F}})\rangle \propto \iint_{-\infty}^{\infty} \cos[d(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)] \text{sinc}(\bar{x}_1a) \text{sinc}(\bar{x}_2a) |\bar{x}_1\rangle |\bar{x}_2\rangle dx_1 dx_2, \quad (\text{A.19})$$

$$|\phi^+(z_{\mathcal{F}})\rangle \propto \iint_{-\infty}^{\infty} \cos[d(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)] \text{sinc}(\bar{x}_1a) \text{sinc}(\bar{x}_2a) |\bar{x}_1\rangle |\bar{x}_2\rangle dx_1 dx_2. \quad (\text{A.20})$$

A probabilidade de detecção em coincidência será dada por

$$P_{B^+}(x_1, x_2) = \langle \Psi_{B^+} | \hat{a}^\dagger(x_1) \hat{a}^\dagger(x_2) \hat{a}(x_1) \hat{a}(x_2) | \Psi_{B^+} \rangle. \quad (\text{A.21})$$

Como já apresentamos o efeito do operador \hat{a} sobre os estados de fenda na Eq. (A.14), teremos

$$\begin{aligned} P_{B^+}(x_1, x_2) &\propto \text{sinc}^2(\bar{x}_1a) \text{sinc}^2(\bar{x}_2a) \{ \cos^2(\alpha/2) \cos^2[d(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)] + \\ &+ \text{sen}(\alpha) \cos(\varphi) \{ \cos[d(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)] \cos[d(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)] \} + \sin^2(\alpha/2) \cos^2[d(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)] \}, \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

A.3. Cálculo das probabilidades $P_{B^+}(x_1, x_2)$ e $P_{\pi\pi}(x_1, x_2)$ de detecção no campo distante das fendas

que podemos simplificar utilizando as seguintes relações trigonométricas em $\theta_{\pm} = \theta_1 \pm \theta_2$,

$$\cos^2(\theta_{\pm}) = \frac{1 + \cos(2\theta_{\pm})}{2}, \quad (\text{A.23})$$

$$\cos(\theta_+) \cos(\theta_-) = \frac{\cos(2\theta_1) + \cos(2\theta_2)}{2}, \quad (\text{A.24})$$

obtendo

$$\begin{aligned} P_{B^+}(x_1, x_2) \propto & 1 + \cos^2(\alpha/2) \cos(\beta x_-) + \\ & \text{sen}(\alpha) \cos(\varphi) [\cos(\beta x_1) + \cos(\beta x_2)] + \\ & \text{sen}^2(\alpha/2) \cos(\beta x_+), \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

para $x_{\pm} = x_1 \pm x_2$ e $\beta = 2kd/f$. Omitimos desta relação final o termo de difração que, neste modelo, independe das correlações entre os fótons.

Para calcular $P_{\pi\pi}(x_1, x_2)$, lembremos que se trata de um estado produto, de forma que $P_{\pi\pi}(x_1, x_2) = P_{\pi}(x_1)P_{\pi}(x_2)$. Assim, podemos calcular apenas $P_{\pi}(x)$, usando o equivalente da Eq. (A.21) para matrizes densidade[63]:

$$P_{\pi}(x) = \text{Tr} \left[\rho_{\pi; z_{\mathcal{F}}} \hat{a}^{\dagger}(x) \hat{a}(x) \right]. \quad (\text{A.26})$$

No caso de interesse, a matriz densidade foi explicitada na Eq. (A.9) para $z = z_{\mathcal{A}}$, ou seja, o plano das fendas. Para conhecermos a matriz densidade no plano de Fourier, basta aplicarmos a mesma propagação já usada anteriormente, de forma que

$$\rho(z_{\mathcal{F}}) = \frac{1}{2} [|\bar{0}\rangle \langle \bar{0}| + \cos(\varphi) \text{sen}(\alpha) (|\bar{0}\rangle \langle \bar{1}| + |\bar{1}\rangle \langle \bar{0}|) + |\bar{1}\rangle \langle \bar{1}|]. \quad (\text{A.27})$$

Escrevendo a Eq. (A.26) como

$$P_{\pi}(x) = \sum_{\bar{l}=0}^1 \langle \bar{l} | \rho(z_{\mathcal{F}}) \hat{a}^{\dagger}(x) \hat{a}(x) | \bar{l} \rangle, \quad (\text{A.28})$$

devemos agora lembrar que $\langle \bar{l} | \bar{l}' \rangle = \delta(\bar{l} - \bar{l}')$, de forma que obteremos

$$\begin{aligned} P_{\pi}(x) = & \frac{1}{2} \left\{ \langle \bar{0} | \hat{a}^{\dagger}(x) \hat{a}(x) | \bar{0} \rangle + \langle \bar{1} | \hat{a}^{\dagger}(x) \hat{a}(x) | \bar{1} \rangle + \right. \\ & \left. \cos(\varphi) \text{sen}(\alpha) \left[\langle \bar{1} | \hat{a}^{\dagger}(x) \hat{a}(x) | \bar{0} \rangle + \langle \bar{0} | \hat{a}^{\dagger}(x) \hat{a}(x) | \bar{1} \rangle \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

A.3. Cálculo das probabilidades $P_{B^+}(x_1, x_2)$ e $P_{\pi\pi}(x_1, x_2)$ de detecção no campo distante das fendas

onde assinalamos a propagação até o plano de Fourier pela barra sobre o índice do estado de fenda. Utilizando a Eq. (A.12), chegamos a

$$\begin{aligned} P_{\pi}(x) &= \frac{1}{2} \text{sinc}^2(\bar{x}a) \left\{ 2 + \cos(\varphi) \text{sen}(\alpha) \left[e^{-i(2\bar{x}d)} + e^{i(2\bar{x}d)} \right] \right\} \\ &= \text{sinc}^2(\bar{x}a) [1 + \cos(\varphi) \text{sen}(\alpha) \cos(2\bar{x}d)]. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Por fim, utilizando a Eq. (A.30) podemos escrever, sendo novamente $\beta = 2kd/f$,

$$\begin{aligned} P_{\pi\pi}(x_1, x_2) &= \text{sinc}^2(\bar{x}_1a) \text{sinc}^2(\bar{x}_2a) \left\{ 1 + \cos^2(\varphi) \text{sen}^2(\alpha) \cos(\beta x_1) \cos(\beta x_2) + \right. \\ &\quad \left. \cos(\varphi) \text{sen}(\alpha) [\cos(\beta x_1) + \cos(\beta x_2)] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Cálculo da propagação de uma onda eletromagnética através de um telescópio não-confocal

Um telescópio é, em termos gerais, um conjunto de lentes que projeta sobre um plano localizado após as lentes uma imagem ampliada de um plano localizado antes das lentes. Em nossos experimentos, utilizamos um telescópio no qual as lentes estão posicionadas de forma a terem o plano focal anterior em comum, como indicado pela Fig. 3.4a. Veremos que este telescópio introduz um termo de fase quadrático no plano da imagem, ao contrário do tipo mais simples de telescópio, no qual o plano focal posterior da primeira lente coincide com o plano focal anterior da segunda.

A dedução que segue utiliza a frequência espacial $f_x = \frac{q}{2\pi}$ e as definições para a transformada de Fourier e a propagação no espaço livre utilizadas em [78]. Como a expressão final conecta amplitudes transversais no espaço de posição em dois planos diferentes, não há problema em utilizar métodos distintos para se chegar ao mesmo resultado.

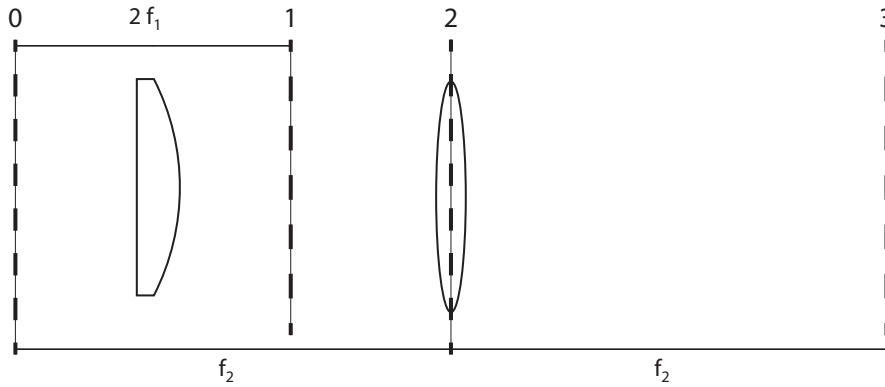


Figura B.1: Configuração esquemática de telescópio não-confocal, ilustrando os planos $z_0 = 0$, $z_1 = 2f_1$, $z_2 = f_2$ e $z_3 = 2f_2$. A coordenada transversal em z_1 é representada por x , em z_2 por ξ e em z_3 por u . A distância entre z_2 e z_1 é $f_2 - 2f_1$.

Nos restringiremos ao caso unidimensional e começaremos supondo duas lentes, L_1 e L_2 , respectivamente de foco f_1 e f_2 , situadas de forma que a distância do plano do objeto à lente L_1 é f_1 e à lente L_2 é f_2 . A distância da lente L_2 ao plano da imagem será f_2 . Dessa forma, a propagação do plano do objeto, $z = 0$ até o plano focal posterior da lente L_1 é um resultado conhecido e corresponde à transformada de Fourier óptica da amplitude no plano do objeto, de forma que, aplicando a propriedade de similaridade da transformada de Fourier [78], temos, para um campo cujo espectro angular seja função de Ax no plano do objeto,

$$\begin{aligned} U_1 &= \tilde{U}_0\left(\frac{Ax}{\lambda f_1}\right), \\ \tilde{U}_1(q) &= \frac{\lambda f_1}{A} U_0\left(-\frac{\lambda f_1}{A} f_x\right), \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

sobre o plano 1.

A propagação até o plano 2, sobre o qual está a lente L_2 , se dá utilizando a Eq. (2.23), resultando em

$$\tilde{U}_2 = \frac{\lambda f_1}{A} U_0\left(-\frac{\lambda f_1}{A} f_x\right) \exp[-i\pi\lambda(f_2 - 2f_1)f_x^2]. \quad (\text{B.2})$$

Para encontrar a amplitude sobre o plano 3, da imagem, utilizamos a Eq. 5-14 de [78],

$$U_3 = \frac{\exp\left[i\frac{k}{2f_2}u^2\right]}{i\lambda f_2} \int_{-\infty}^{+\infty} U_2(\xi) \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f_2}\xi u\right] d\xi, \quad (\text{B.3})$$

lembrando que

$$U_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}_2 e^{2\pi i f_x \xi} df_x, \quad (\text{B.4})$$

de forma a podermos usar (B.4) e (B.2) para reescrever (B.3) como

$$U_3 = \frac{\exp\left[i\frac{k}{2f_2}u^2\right] f_1}{iA f_2} \iint_{-\infty}^{+\infty} U_0\left(-\frac{\lambda f_1 f_x}{A}\right) \exp[-i\pi\lambda(f_2 - 2f_1)f_x^2] \times \\ \exp\left[2\pi i \xi \left(f_x - \frac{u}{\lambda f_2}\right)\right] d\xi df_x. \quad (\text{B.5})$$

Realizando a integração primeiro em ξ , vemos que, por não haver funções que dependam de ξ dentro da integral a não ser um núcleo de transformação de Fourier, esta integral resulta em $\delta(f_x - u/\lambda f_2)$ que, por sua vez, pode ser utilizada para eliminar a segunda integral, em f_x . Desta maneira, escrevendo o fator de ampliação M como $M = f_2/f_1$,

$$U_3 = \frac{1}{iAM} U_0\left(-\frac{u}{AM}\right) \exp\left[i\frac{2\pi\lambda f_1}{\lambda^2 f_2^2}u^2\right] \exp\left[-i\frac{\pi\lambda f_2}{\lambda^2 f_2^2}u^2\right] \exp\left[i\frac{k}{2f_2}u^2\right], \quad (\text{B.6})$$

que pode ser simplificado para

$$U_3\left(\frac{u}{AM}\right) = \frac{i}{AM} U_0\left(-\frac{u}{AM}\right) \exp\left[i\frac{k}{f_2 M}u^2\right]. \quad (\text{B.7})$$

Vemos, pois, que o telescópio projeta sobre o plano da imagem a amplitude do plano do objeto, invertida e ampliada de um fator M e introduz um termo de fase quadrática devido à configuração do telescópio proposto. No caso dos campos que propagamos através do telescópio, temos uma dependência em x_+ e outra em x_- , que se traduz em um termo de fase

$$\phi(x_1, x_2) = \exp\left[i\frac{k}{f_2 M}x_+^2\right] \exp\left[i\frac{k}{f_2 M}x_-^2\right] \\ = \exp\left[i\frac{k(x_1^2 + x_2^2)}{2f_2 M}\right]. \quad (\text{B.8})$$
