

Alessandro José Queiroz Sarnaglia

*Estimação de Processos Periódicos
Autorregressivos: Uma Abordagem no Domínio
da Frequência*

Belo Horizonte – MG

Janeiro, 2010

Alessandro José Queiroz Sarnaglia

*Estimação de Processos Periódicos
Autorregressivos: Uma Abordagem no Domínio
da Frequência*

Dissertação apresentada para obtenção do
grau de Mestre em Estatística pela Universi-
dade Federal de Minas Gerais.

Orientador:

Prof. Dr. Valdério Anselmo Reisen

MESTRADO EM ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Belo Horizonte – MG

Janeiro, 2010

Dissertação de mestrado sob o título "Estimação de Processos Periódicos Autorregressivos: Uma Abordagem no Domínio da Frequência", defendida por Alessandro José Queiroz Sarnaglia e aprovada em 06 de janeiro de 2010, em Belo Horizonte, Estado de Minas Gerais, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Valdério Anselmo Reisen
Departamento de Estatística - CCE - UFES
Orientador

Prof. Dr. Klaus Leite Pinto Vasconcellos
Departamento de Estatística - CCEN - UFPE

Prof^a. Dr^a. Denise Duarte
Departamento de Estatística - ICEX - UFMG

Prof^a. Dr^a. Glaura da Conceição Franco
Departamento de Estatística - ICEX - UFMG

Dedico este trabalho a meus pais.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me dado forças para alcançar mais esta conquista. Aos meus pais e à família pelo apoio incondicional. Ao professor Valdério Anselmo Reisen pela paciência e insistência em mim. Aos amigos de universidade - graduação e mestrado - e do NuMEs pelas eternas discussões não somente relacionadas aos estudos. Aos professores da UFMG e da UFES pelos ensinamentos transmitidos. Aos amigos de infância pelo apoio enquanto estava em outro estado. À CAPES pela bolsa de mestrado, à FAPEMIG por diversos apoios financeiros prestados para participação em eventos e ao PIBIC-CNPq pela bolsa de iniciação científica importante para o surgimento do interesse em pesquisas.

Resumo

Esta pesquisa apresenta uma metodologia de estimação, baseada no domínio da frequência, para processos periódicos autorregressivos. O estimador sugerido é o ponto do espaço paramétrico que maximiza a expressão assintótica da função de log-verossimilhança de processos estocásticos vetoriais. A expressão assintótica é avaliada através de algumas propriedades de matrizes *block toeplitz*. Ensaio de Monte Carlo foram realizados para comparar os vícios e os erros quadráticos médios do estimador proposto com os do método de estimação de Yule-Walker. O estudo empírico evidenciou que o método de estimação sugerido apresenta bom desempenho em termos de vício e erro quadrático médio. Como ilustração da metodologia proposta, a série da vazão média trimestral do rio Castelo-ES foi analisada.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1	Introdução	p. 10
1.1	Objetivo	p. 13
1.2	Organização do Trabalho	p. 14
2	Processos Estocásticos	p. 15
2.1	Processos Estacionários	p. 17
2.1.1	Função de Densidade Espectral	p. 19
2.1.2	Processos SARMA	p. 20
2.2	Processos Periodicamente Correlacionados	p. 21
2.2.1	Estacionariedade Periódica	p. 21
2.2.2	Matriz Espectral	p. 23
2.2.3	Processo PAR	p. 24
2.3	Processo Vetorial	p. 25
2.3.1	Causalidade	p. 25
2.3.2	Matriz de Densidade Espectral	p. 26
2.3.3	Processo VAR	p. 27

3	Estimação de Processos PAR	p. 30
3.1	Método de Yule-Walker	p. 30
3.2	Metodologia Proposta	p. 31
3.2.1	Propriedades assintóticas	p. 31
3.2.2	Algoritmo	p. 36
4	Resultados	p. 37
4.1	Simulações	p. 37
4.2	Aplicação	p. 41
5	Considerações Finais	p. 44
5.1	Conclusões	p. 44
5.2	Estudos Futuros	p. 45
	Referências	p. 46
	Anexos	p. 48
	Prova do Lema 1	p. 48
	Prova da Proposição 1	p. 50

Lista de Figuras

1	Funções de densidade de probabilidade do processo $Y_t, t = t_1, t_2, t_3$. . .	p. 16
2	Distribuições empíricas das estimativas do Modelo 1, com $N = 30$	p. 40
3	Distribuições empíricas das estimativas do Modelo 2, com $N = 30$	p. 40
4	Evolução e histograma da série e do logaritmo da mesma.	p. 41
5	<i>Qqplot</i> dos resíduos da modelagem.	p. 43

Lista de Tabelas

1	Parâmetros dos Modelos 1 e 2.	p.38
2	Vícios e EQMs das estimativas dos coeficientes do Modelo 1.	p.38
3	Vícios e EQMs das estimativas dos coeficientes do Modelo 2.	p.38
4	Teste de Jarque-Bera para a série e o logaritmo da mesma.	p.42
5	Estimativas de Yule-Walker (YW) e de Whittle (AL).	p.42
6	Resultado do teste de Ljung-Box para os resíduos.	p.42

1 Introdução

Frequentemente, dados coletados de maneira sistemática ficam sujeitos à correlação, inerente a essa técnica de amostragem. Nesse sentido, metodologias estatísticas que assumem a independência das observações podem não ser adequadas. A análise de séries temporais é composta pelo conjunto de ferramentas apropriadas para trabalhar no contexto de observações correlacionadas no tempo. Uma série temporal é um conjunto de observações y_t , onde cada uma é coletada em um específico tempo t . A série temporal é discreta se o conjunto dos tempos em que as observações são feitas, T_0 , é discreto. Por exemplo, quando as observações são medidas em intervalos fixos de tempo. A série temporal é contínua quando as essas são coletadas continuamente em algum intervalo de tempo. Nesse caso, escreve-se $y(t)$ em vez de y_t . Neste trabalho são consideradas séries temporais discretas com $T_0 = \mathbb{Z}$.

Para realizar inferências em uma série temporal é necessário supor modelos matemáticos para representar a mesma. Com o intuito de permitir a natureza geralmente imprevisível de observações futuras é natural supor que cada valor da série temporal y_t é uma realização de uma variável aleatória Y_t . Isto é, a série temporal $y_t, t \in \mathbb{Z}$, é uma realização da família de variáveis aleatórias ou do processo estocástico $Y_t, t \in \mathbb{Z}$. Geralmente, as metodologias utilizadas para modelar séries temporais necessitam de algumas suposições com respeito à estrutura de correlação do processo estocástico suposto. A principal delas é a *estacionariedade fraca*, nesta pesquisa, por simplicidade, denominada *estacionariedade*. Essa propriedade estabelece que os momentos de primeira e segunda ordens do processo não variam sob translações do tempo. Mais precisamente, seja $Y_t, t \in \mathbb{Z}$, um processo estocástico com esperança $\mu_t = \mathbb{E}(Y_t)$ e autocovariância $\gamma^{(t)}(\tau) = \text{Cov}(Y_t, Y_{t-\tau})$,

para o lag τ . O processo Y_t é dito ser estacionário se $\mu_t = \mu$ e $\gamma^{(t)}(\tau) = \gamma(\tau)$ são constantes com respeito a t , $\forall \tau \in \mathbb{Z}$. BROCKWELL; DAVIS (1991) e PRIESTLEY (1981) são referências teóricas importantes sobre processos estacionários.

Em algumas situações práticas, devido a alguns fenômenos, a série temporal não apresenta a propriedade de estacionariedade. Como exemplos de causas de não-estacionariedade, pode-se citar a ocorrência de raízes unitárias, de tendências determinísticas, de quebras estruturais, de observações atípicas entre outros. Para analisar os dados, em cada uma dessas situações, se faz necessária a utilização de metodologia especial. Nesse sentido, vários autores têm proposto metodologias específicas para diversos contextos de ocorrência de não-estacionariedade em séries temporais. Por exemplo, pode-se citar SAID; DICKEY (1984), VOGELSANG; FRANSES (2001), LEE; NA (2005) e SARNAGLIA; REISEN; LÉVY-LEDUC (2009).

Dentre os fatores que causam a propriedade de não-estacionariedade em uma série temporal, a correlação periódica tem merecido destaque na literatura. A importância desse fenômeno se justifica pela frequente ocorrência do mesmo em séries temporais das áreas de economia, de hidrologia, de climatologia, de poluição atmosférica entre outras. Um processo estocástico possui correlação periódica, sendo denominado *Periodicamente Correlacionado* (PC), quando a estrutura de correlação do mesmo varia com alguma regularidade específica sob translações do tempo. A definição formal de processos PC é apresentada no próximo capítulo.

O fenômeno de correlação periódica em séries temporais pode não ser identificado com as ferramentas usuais de análise de dados correlacionados no tempo. Segundo TIAO; GRUPE (1980), séries temporais geradas por processos periodicamente correlacionados podem ser especificadas erroneamente através de modelos não-periódicos clássicos, tais como os processos *Sazonais Autorregressivos de Médias-Móveis* (SARMA). Nesse sentido, diversos autores têm realizado estudos direcionados para a identificação de correlação periódica em séries temporais. Por exemplo, HURD; GERR (1991) apresentam métodos gráficos e VECCHIA; BALLERINI (1991) sugerem teste de hipótese. Diversos pesquisado-

res têm identificado correlação periódica e utilizado processos PC em dados reais. Por exemplo, a correlação periódica é investigada em dados climatológicos por LUND et al. (1995), em dados de qualidade do ar é avaliada por BLOOMFIELD; HURD; LUND (1994) e em sinais de sistemas de controle e de comunicação é analisada por GARDNER; FRANKS (1975). Para maiores informações teóricas sobre processos periodicamente correlacionados pode-se citar HURD; MIAMEE (2007).

Modelos capazes de ajustar séries temporais com correlação periódica têm sido amplamente investigados na literatura. Como extensão do processo *Autorregressivo* (AR) (BOX; JENKINS (1976)), o processo *Periódico Autorregressivo* (PAR), caracterizado pela variação dos coeficientes ao longo dos períodos, é um dos mais utilizados. A importância que o processo PAR tem merecido em estudos recentes deve-se à grande aplicabilidade do mesmo em dados reais. Como exemplo, FRANSES; PAAP (1999) aplicam o modelo PAR em várias séries de consumo do Reino Unido. Vários autores têm estudado as características dos processos PAR, por exemplo: metodologias para a estimação são discutidas por LUND; BASAWA (2000) e SARNAGLIA; REISEN; LÉVY-LEDUC (2009); MCLEOD (1993) aborda a identificação da ordem adequada; MCLEOD (1994) apresenta técnicas de análise dos resíduos para verificar a qualidade do ajuste.

A investigação de séries temporais consiste, essencialmente, das etapas de identificação, de estimação e de diagnóstico do ajuste. Para a identificação e a estimação, no contexto de processos estacionários, destacam-se como principais ferramentas: no *domínio do tempo*, as funções de *Autocorrelação* (ACF) e de *Autocorrelação Parcial* (PACF); no *domínio da frequência*, a *função de densidade espectral*. BROCKWELL; DAVIS (1991) e PRIESTLEY (1981) são referências clássicas relativas à teoria e estimação das funções ACF e PACF e da função de densidade espectral.

As metodologias de estimação de processos estacionários podem ser estendidas, sob algumas suposições, para processos periodicamente correlacionados. No domínio do tempo, utiliza-se, geralmente, as funções de *Autocorrelação Periódica* (PeACF) e de *Autocorrelação Parcial Periódica* (PePACF), extensões naturais das funções ACF e PACF. Métodos

para estimar as funções PeACF e PePACF são apresentados por SHAO; LUND (2004). No domínio da frequência, a *matriz espectral* passa a ser a principal ferramenta empregada. Características teóricas sobre a matriz espectral podem ser encontradas em HURD; MIAMEE (2007) e WYLOMANSKA (2007) e a estimação é abordada por NEMATOLLAHI; RAO (2005). Diversos autores investigam métodos de estimação para processos PAR baseados no domínio do tempo. Por exemplo, pode-se citar MCLEOD (1994), LUND; BASAWA (2000) e SARNAGLIA; REISEN; LéVY-LEDUC (2009). Entretanto, metodologias de estimação para processos PAR baseadas no domínio da frequência são ainda pouco exploradas.

O Estimador de Máxima Verossimilhança (EMV) é um dos mais utilizados na literatura por possuir algumas propriedades de interesse. Em diversas situações, a obtenção analítica do mesmo é impraticável, sendo necessária a utilização de métodos numéricos de otimização. No entanto, muitas vezes o custo computacional necessário para a obtenção do EMV é alto. Isto motiva o estudo de metodologias de estimação de alto desempenho e baixo custo computacional. Diante desse contexto, a estimação de processos PAR baseada no domínio da frequência emerge como uma linha de pesquisa de grande interesse que motivou o presente estudo. A estimação de processos periódicos através da abordagem no domínio da frequência é ainda pouco explorada na literatura, especialmente no que tange à utilização do método de WHITTLE (1953) como procedimento alternativo ao EMV. Assim, este trabalho propõe o estimador de Whittle no contexto de processos periódicos. Como é de conhecimento, através da vasta literatura sobre o estimador de Whittle em outros tipos de processos, esse método apresenta, assintoticamente, apresenta propriedades equivalentes ao EMV. Além da proposta do estimador de Whittle, esta pesquisa deriva as propriedades assintóticas desse método e avalia o comportamento do mesmo através de ensaios de Monte Carlo para séries temporais de tamanhos amostrais finitos.

1.1 **Objetivo**

Sob a suposição do processo estocástico ter distribuição normal, este estudo tem como objetivo apresentar um método de estimação dos parâmetros do modelo PAR, baseado

no domínio da frequência.

1.2 Organização do Trabalho

Este trabalho está organizado da seguinte maneira:

- *Capítulo 2*: descreve uma breve introdução de processos estocásticos necessária para o entendimento dos demais capítulos. Nesse contexto, alguns tipos especiais de processos estocásticos são definidos e algumas propriedades dos mesmos analisadas;
- *Capítulo 3*: apresenta a principal contribuição deste trabalho que é a proposta de estimação de processos periódicos (em particular do processo PAR) através da generalização do método de Whittle, assim como as propriedades assintóticas do mesmo. Também é apresentado o método de Yule-Walker que é o mais utilizado para estimar essa classe de processos;
- *Capítulo 4*: investiga o desempenho do estimador de Whittle para tamanhos amostrais finitos e o compara com o do estimador de Yule-Walker. Também é ilustrada a utilização do método de estimação proposto em um conjunto de dados reais;
- *Capítulo 5*: resenha as conclusões finais deste trabalho e especifica potenciais linhas de pesquisa futuras.

2 *Processos Estocásticos*

Neste capítulo são sumarizados conceitos básicos de processos estocásticos. Em especial, a propriedade de estacionariedade fraca e as funções de autocovariância e de autocovariância amostral. Nesse contexto, alguns fenômenos que causam não-estacionariedade são mencionados com o intuito de destacar processos periodicamente estacionários e suas características mais relevantes. Por fim, algumas propriedades de processos vetoriais são discutidas.

Geralmente, em vários fenômenos da natureza, a variável de interesse, Y , não é determinística, isto é, não há uma regra específica que permita calcular precisamente o valor de Y . Variáveis desse tipo são denominadas aleatórias. Em muitas situações práticas, com o intuito de analisar o comportamento de uma variável aleatória, é comum observá-la em tempos distintos. Considere que T_0 seja o conjunto dos tempos nos quais a variável Y é observada. Nesse caso a sequência de variáveis aleatórias $Y_t, t \in T_0$, é dita ser um processo estocástico. A definição de um processo estocástico é formalmente apresentada a seguir.

DEFINIÇÃO 2.1 *Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias $Y_t, t \in T_0$, que toma valores no conjunto S e é definida no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. O conjunto S é denominado espaço de estados do processo.*

O espaço de estados S é o conjunto o qual pertencem todos os possíveis valores de cada variável aleatória Y_t . Especificamente, se $S = \mathbb{R}$, o processo é dito ser real e, se $S = \mathbb{R}^s$, o processo é dito ser vetorial de dimensão s . Uma série temporal $y_t, t \in T \subset T_0$, é uma realização do processo estocástico $Y_t, t \in T_0$. É importante ressaltar que, geralmente, o conjunto T é finito.

Se Y_t é um processo estocástico finito com n observações independentes e de mesma distribuição, diz-se que Y_1, \dots, Y_n formam uma amostra aleatória da variável aleatória Y . Grande parte das técnicas estatísticas necessitam da suposição de que as observações formam uma amostra aleatória. Entretanto, frequentemente, tais técnicas podem não ser apropriadas devido aos dados serem dependentes. Como ilustração, a Figura 1 apresenta o gráfico das funções de densidade de probabilidade de um processo estocástico Y_t para os distintos tempos $t_1, t_2, t_3 \in T_0$.

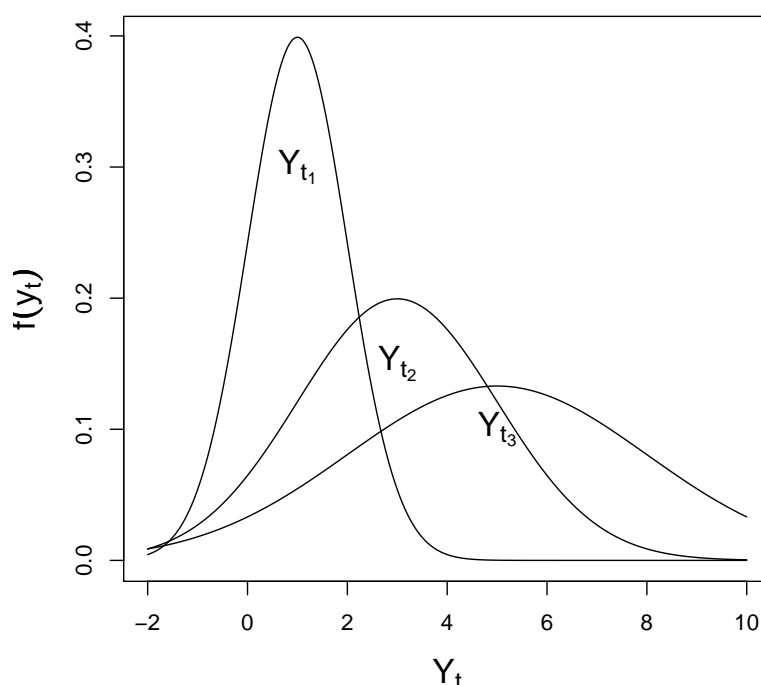


Figura 1: Funções de densidade de probabilidade do processo Y_t , $t = t_1, t_2, t_3$.

Nota-se, através da Figura 1, que, apesar do espaço de estados $S = \mathbb{R}$ do processo Y_t não ser modificado para os tempos t_1, t_2 e t_3 , as funções densidade de probabilidade de Y_t dependem desses índices. Em outras palavras, essa figura mostra uma das possíveis formas que as propriedades estatísticas de um processo estocástico Y_t podem ser modificadas de acordo com o índice t . Por simplicidade, nesta pesquisa, é assumido que o conjunto para o qual o processo estocástico é observado $T_0 = \mathbb{Z}$.

Para analisar (estimar e realizar inferências) uma série temporal y_t geralmente se fazem suposições sobre a estrutura de correlação do processo estocástico Y_t que a gera.

Uma das principais suposições feitas é a estacionariedade e processos estocásticos com essa propriedade são denominados estacionários. Na próxima seção são definidos os processos estacionários e apresentadas algumas de suas características.

2.1 Processos Estacionários

Em muitos problemas práticos, é possível verificar processos estocásticos que se encontram em uma situação de “equilíbrio estatístico”. Esse comportamento pode ser expressado através da suposição de que as propriedades estatísticas do processo não se alteram com o tempo. Geralmente, dados desse tipo são observados nas áreas de física e engenharia. Uma forma de formalizar o equilíbrio descrito acima em um processo estocástico é através da condição de *estacionariedade forte*. Para o processo estocástico $Y_t, t \in \mathbb{Z}$, essa propriedade estabelece que as distribuições conjuntas dos vetores $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k})$ e $(Y_{t_1-h}, \dots, Y_{t_k-h})$ são as mesmas para todo $k \in \mathbb{N}$ e para todos $t_1, \dots, t_k, h \in \mathbb{Z}$. Essa suposição não é muito utilizada devido a grande dificuldade em verificá-la na prática.

Seja $Y_t, t \in \mathbb{Z}$, um processo estocástico com esperança $\mathbb{E}(Y_t) = \mu_t$ e variância $\text{Var}(Y_t) < \infty, \forall t \in \mathbb{Z}$. A função de autocovariância $\gamma(\cdot, \cdot)$ do processo Y_t é definida por

$$\gamma(r, s) = \text{Cov}(Y_r, Y_s) = \mathbb{E}[(Y_r - \mu_r)(Y_s - \mu_s)], \quad r, s \in \mathbb{Z}.$$

Devido à dificuldade de comprovar a condição de estacionariedade forte em uma série temporal, supõe-se a propriedade de *estacionariedade fraca* (ou de momentos) definida a seguir.

DEFINIÇÃO 2.2 *Seja $Y_t, t \in \mathbb{Z}$, um processo estocástico com média $\mu_t = \mathbb{E}(Y_t)$ e autocovariância $\gamma(k, l) = \text{Cov}(Y_k, Y_l)$. O processo Y_t é dito ser estacionário fraco (ou simplesmente estacionário), se*

(i) $\mathbb{E}[Y_t^2] < \infty, \forall t \in \mathbb{Z};$

(ii) $\mu = \mu_t, \forall t \in \mathbb{Z};$ e

$$(iii) \gamma(k, l) = \gamma(k + t, l + t), \forall k, l, t \in \mathbb{Z},$$

isto é, μ e γ não dependem de t .

Note que, pela Definição 2.2, se Y_t é estacionário, a autocovariância $\gamma(k, l) = \gamma(k - l, 0)$. Portanto, é conveniente redefinir a função de *Autocovariância* (ACV) de Y_t como a função de apenas uma variável $\gamma(\tau) = \gamma(\tau, 0) = \text{Cov}(Y_t, Y_{t-\tau})$. No mesmo sentido, define-se a função de *Autocorrelação* (ACF) como sendo

$$\rho(\tau) = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)}.$$

Geralmente, ao observar uma série temporal y_t , $t = 1, \dots, n$, de um processo estacionário Y_t , deseja-se estimar as funções ACV $\gamma(\tau)$ e ACF $\rho(\tau)$ para obter informação sobre a estrutura de correlação de Y_t . Os estimadores mais utilizados para esse fim são as funções de autocovariância e autocorrelação amostrais dadas, respectivamente, por

$$\hat{\gamma}(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{j=\tau+1}^n [(y_j - \bar{y})(y_{j-\tau} - \bar{y})]$$

e

$$\hat{\rho}(\tau) = \frac{\hat{\gamma}(\tau)}{\hat{\gamma}(0)},$$

onde $\bar{y} = \sum_{j=1}^n y_j/n$. Referências clássicas sobre processos estacionários são BROCKWELL; DAVIS (1991) e BOX; JENKINS (1976).

Considerações mais fortes com respeito a processos estocásticos geralmente se fazem necessárias. A propriedade de causalidade, formalizada a seguir, implica na de estacionariedade. O processo estocástico Y_t é dito ser causal se existe uma sequência de variáveis aleatórias ε_t , $t \in \mathbb{Z}$, onde $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$, $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_r) = \sigma^2$, $t = r$, e $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_r) = 0$, $t \neq r$, para a qual pode-se escrever

$$Y_t = \sum_{h=0}^{\infty} \psi_h \varepsilon_{t-h} = \psi(B)\varepsilon_t, \quad (2.1)$$

onde $\psi(z) = \sum_{h=0}^{\infty} \psi_h z^h$, B é o operador retardo tal que $B^h Y_t = Y_{t-h}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ e $\sum_{h=0}^{\infty} |\psi_h| < \infty$.

Uma maneira alternativa à função ACV para analisar processos estacionários, é uti-

lizar a função de densidade espectral. Uma revisão breve sobre esse tema é apresentada na próxima subseção e detalhes mais específicos podem ser encontrados em PRIESTLEY (1981).

2.1.1 Função de Densidade Espectral

A representação espectral de um processo estacionário Y_t , $t \in \mathbb{Z}$, essencialmente, decompõe Y_t em uma soma de componentes senoidais com coeficientes aleatórios não-correlacionados. Associada a essa decomposição, a função de autocovariância de Y_t , $\gamma(\tau)$, também é decomposta em senóides. A função de densidade espectral de Y_t é a transformada de Fourier da função ACV, definida por

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-i\tau\omega} \gamma(\tau),$$

onde $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Note que $f(\omega) = f(\omega + 2\pi)$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, ou seja, é necessário considerar f apenas em um intervalo de amplitude 2π . Neste trabalho considera-se $\omega \in [0, 2\pi)$. A função ACV pode ser completamente recuperada da função de densidade espectral através da seguinte relação:

$$\gamma(\tau) = \int_0^{2\pi} e^{i\tau\omega} f(\omega) d\omega.$$

A investigação de processos estacionários por meio da função de densidade espectral $f(\omega)$ é frequentemente denominada por análise de séries temporais baseada no *domínio da frequência*. Devido à relação entre $f(\omega)$ e $\gamma(\tau)$, a análise baseada no domínio da frequência é equivalente à análise baseada no *domínio do tempo*, a qual fornece uma maneira alternativa de visualizar o processo que, em algumas aplicações, pode ser mais esclarecedora.

Seja Y_t um processo causal. A função de densidade espectral de Y_t pode ser encontrada de maneira rápida através da expressão

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |\psi(e^{-i\omega})|,$$

onde $\forall z \in \mathbb{C}$, \bar{z} é o conjugado de z , $|z| = z\bar{z}$ e $\psi(z)$ é o polinômio apresentado na Equação 2.1.

Para realizar a análise baseada no domínio da frequência de uma série temporal y_t , $t = 1, \dots, n$, gerada por um processo estacionário Y_t , $t \in \mathbb{Z}$, é necessário estimar a função de densidade espectral de Y_t . Geralmente, isto é feito através do periodograma de y_t dado por

$$I(\omega_j) = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{t=1}^n y_t e^{-i\omega_j t} \right|^2,$$

onde $\omega_j = \frac{2\pi j}{n}$, $j = 1, \dots, n$, são as frequências de Fourier. Algumas propriedades do periodograma e outras formas de estimar f podem ser encontradas em PRIESTLEY (1981) e BROCKWELL; DAVIS (1991).

Na literatura, processos estacionários capazes de modelar dados com características sazonais têm sido bastante estudados. Um dos mais abordados é o modelo sazonal autor-regressivo de médias-móveis, brevemente sumarizado na próxima subseção.

2.1.2 Processos SARMA

A classe de modelos *Sazonais Autorregressivos de Médias-Móveis* (SARMA), definida a seguir, é frequentemente utilizada no ajuste de séries temporais geradas por processos estacionários com características sazonais.

DEFINIÇÃO 2.3 *Seja Y_t , $t \in \mathbb{Z}$, um processo estacionário. Y_t é dito ser um processo SARMA de ordens p , q , P e Q , ou SARMA(p, q) \times (P, Q), de tamanho sazonal s , se é qualquer solução da seguinte equação de diferenças*

$$\phi(B)\Phi(B^s)(Y_t - \mu) = \Theta(B^s)\theta(B)\varepsilon_t,$$

onde $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$, $\Phi(z) = 1 - \Phi_1 z - \dots - \Phi_P z^P$, $\theta(z) = 1 - \theta_1 z - \dots - \theta_q z^q$, $\Theta(z) = 1 - \Theta_1 z - \dots - \Theta_Q z^Q$, $z \in \mathbb{C}$, $\mu = \mathbb{E}(Y_t)$ e $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$.

Um caso especial do modelo SARMA aplicado em várias áreas da ciência onde características sazonais não estão presentes é o processo *Autorregressivo* (AR). Y_t é dito ser um

processo AR de ordem p , ou $\text{AR}(p)$ se segue um modelo $\text{SARMA}(p, 0) \times (0, 0)$.

Apesar da grande aplicabilidade de processos estacionários, tais como os da classe SARMA, existem diversas situações práticas em que a propriedade de estacionariedade não é observada. Como referências que estudam causas de não-estacionariedade e metodologias especiais para analisar processos estocásticos acometidos por esses fenômenos veja SAID; DICKEY (1984), VOGELSANG; FRANCES (2001), LEE; NA (2005) e SARNAGLIA; REISEN; LÉVY-LEDUC (2009).

Das situações que provocam não-estacionariedade em uma série temporal, uma das mais investigadas na literatura é a correlação periódica, abordada na próxima seção.

2.2 Processos Periodicamente Correlacionados

Nesta seção são apresentados os processos periodicamente estacionários, que são extensões dos processos estacionários discutidos na seção anterior. Também é abordada a matriz espectral desses processos. Por fim, o modelo periódico autorregressivo é resumido.

2.2.1 Estacionariedade Periódica

Seja Y_t , $t \in \mathbb{Z}$, um processo estocástico com características sazonais de tamanho sazonal $s \in \mathbb{Z}^+ - \{0\}$. O índice temporal t pode ser escrito, por meio de divisão inteira, como $t = t(r, m) = (r - 1)s + m$ onde $m \in \{1, 2, \dots, s\}$ e $r \in \mathbb{Z}$. Por exemplo, no caso de dados mensais ($s = 12$), m seria o mês e r o ano.

Considere que $\mu_{r,m} = \mathbb{E}[Y_{t(r,m)}]$ seja a esperança do processo $Y_{t(r,m)}$ e $\gamma^{(r,m)}(\tau) = \text{Cov}[Y_{t(r,m)}, Y_{t(r,m)-\tau}]$, $\tau \in \mathbb{Z}$, seja a covariância entre as observações $t(r, m)$ e $t(r, m) - \tau$, isto é, a função de *autocovariância* (ACV) do processo $Y_{t(r,m)}$ para o *lag* τ .

Como mencionado anteriormente, existem diversos fatores que podem provocar a propriedade de não-estacionariedade em uma série temporal, por exemplo, quando a esperança $\mu_{r,m}$ e a função $\gamma^{(r,m)}(\tau)$ dependem de m , ou r , ou ambos. A propriedade de

estacionariedade não é observada em processos PC definidos a seguir

DEFINIÇÃO 2.4 *Seja $Y_{t(r,m)}$, $r \in \mathbb{Z}$, $m \in \{1, 2, \dots, s\}$, $s \in \mathbb{Z}^+ - \{0\}$, um processo estocástico com esperança $\mu_{r,m}$ e função ACV $\gamma^{(r,m)}(\tau)$ para o lag τ . $Y_{t(r,m)}$ é dito ser periodicamente estacionário, ou periodicamente correlacionado, de tamanho sazonal s , se*

$$(i) \mathbb{E}[Y_{t(r,m)}^2] < \infty;$$

$$(ii) \mu_{r,m} = \mu_m; e$$

$$(iii) \gamma^{(r,m)}(\tau) = \gamma^{(m)}(\tau), \forall \tau \in \mathbb{Z},$$

isto é, se $Y_{t(r,m)}$ tem variância finita, e $\mu_{r,m}$ e $\gamma^{(r,m)}(\tau)$ existirem e não dependerem do valor de r .

Com base na Definição 2.4 tem-se que, se o processo $Y_{t(r,m)}$ é periodicamente correlacionado,

$$\rho^{(r,m)}(\tau) = \frac{\gamma^{(r,m)}(\tau)}{\sqrt{\gamma^{(r,m)}(0)\gamma^{(r,m-\tau)}(0)}} = \rho^{(m)}(\tau), \tau \in \mathbb{Z},$$

isto é, a função de autocorrelação também não depende de r . Ainda à luz da Definição 2.4, nota-se que μ_m , $\gamma^{(m)}(\tau)$ e $\rho^{(m)}(\tau)$ são funções periódicas de período s , ou seja, $\mu_m = \mu_{m+ks}$, $\gamma^{(m)}(\tau) = \gamma^{(m+ks)}(\tau)$ e $\rho^{(m)}(\tau) = \rho^{(m+ks)}(\tau)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Para evidenciar a periodicidade intrínseca na estrutura de correlação do processo $Y_{t(r,m)}$, diz-se que $\gamma^{(m)}(\tau)$ e $\rho^{(m)}(\tau)$ são, respectivamente, as funções de *Autocovariância Periódica* (PeACV) e de *Autocorrelação Periódica* (PeACF). Se $s = 1$, a condição de estacionariedade periódica equivale à propriedade de estacionariedade usual de processos homogêneos (TIAO; GRUPE (1980)). A correlação periódica é um fenômeno que está, frequentemente, presente em vários tipos de dados. Como exemplo, veja LUND et al. (1995) e BLOOMFIELD; HURD; LUND (1994). O comportamento de processos PC pode ser facilmente confundido com modelos estacionários. TIAO; GRUPE (1980) estudam as especificações erradas que podem ser feitas caso não haja a identificação adequada de que o processo possui correlação periódica. No restante deste trabalho serão considerados apenas os processos periodicamente estacionários, caso não se mencione o contrário.

Para analisar séries temporais com correlação periódica no domínio do tempo, geralmente, se faz necessário estimar a função $\gamma^{(m)}(\tau)$. Geralmente, para essa finalidade, utiliza-se a função de autocovariância amostral periódica dada por

$$\hat{\gamma}^{(m)}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{r=r_0}^N (y_{t(r,m)} - \hat{\mu}_m)(y_{t(r,m)-\tau} - \hat{\mu}_{m-\tau}), \quad (2.2)$$

onde r_0 é o menor inteiro tal que $t(r_0, m) > 0$ e $\hat{\mu}_m = \sum_{r=1}^N y_r/N$. A função $\rho^{(m)}(\tau)$, por sua vez, é estimada através de $\hat{\rho}^{(m)}(\tau) = \hat{\gamma}^{(m)}(\tau) / \sqrt{\hat{\gamma}^{(m)}(0)\hat{\gamma}^{(m-\tau)}(0)}$.

A análise no domínio da frequência pode ser estendida para processos periodicamente estacionários de uma maneira natural. Este é o assunto abordado na próxima subseção.

2.2.2 Matriz Espectral

Pelo fato de processos PC não apresentarem a propriedade de estacionariedade, os mesmos não possuem função de densidade espectral no sentido convencional de processos univariados apresentada na Subseção 2.1.1. No entanto, supondo que $\gamma^{(m)}(\tau)$ é a PeACV do processo periodicamente estacionário $Y_{t(r,m)}$, GLADYSHEV (1961) mostra que é possível associar a esse processo uma matriz $\mathbf{h}(\omega)$ de dimensão $s \times s$, hermitiana e não-negativa definida, com entradas

$$[\mathbf{h}(\omega)]_{jk} = \frac{1}{s} h_{k-j} \left(\frac{\omega - 2\pi j}{s} \right), \quad j, k = 1, \dots, s, \quad 0 \leq \omega \leq 2\pi,$$

onde

$$h_k(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} B_k(\tau) e^{-i\omega\tau}. \quad (2.3)$$

Os termos $B_k(\tau)$ na Equação 2.3 são os coeficientes da representação da função (periódica de período s) $\gamma^{(m)}(\tau)$ através da série de Fourier finita

$$\gamma^{(m)}(\tau) = \sum_{k=1}^s B_k(\tau) e^{i2\pi km/s} \quad (2.4)$$

e são obtidos por meio da expressão

$$B_k(\tau) = \frac{1}{s} \sum_{m=1}^s \gamma^{(m)}(\tau) e^{-i2\pi km/s}.$$

Pela Equação 2.3 pode-se mostrar que as identidades $h_m(\omega) = h_{m+s}(\omega)$, $h_m(\omega) = h_m(\omega + 2\pi)$ e $h_m(0) = 0$ são válidas e, nesse sentido, frequentemente, diz-se que $h_m(\omega)$, $m = 1, \dots, s$, são os espectros do processo $Y_{t(r,m)}$. Portanto, $\mathbf{h}(\omega)$ é denominada de *matriz espectral* do processo periodicamente estacionário $Y_{t(r,m)}$.

Quando uma série temporal $y_{t(r,m)}$, $r = 1, \dots, N$, $m \in \{1, 2, \dots, s\}$, $s \in \mathbb{Z}^+ - \{0\}$ é gerada por um processo periodicamente estacionário $Y_{t(r,m)}$, a matriz espectral $\mathbf{h}(\omega)$ precisa ser estimada. A forma mais utilizada para esse fim é apresentada na Subseção 2.3.2. A próxima subseção apresenta o processo periódico autorregressivo que é amplamente utilizado para modelar dados gerados por processos periodicamente estacionários.

2.2.3 Processo PAR

O modelo PAR tem sido muito utilizado para ajustar séries temporais geradas por processos periodicamente estacionários. Esse modelo é uma generalização do processo AR onde os parâmetros podem variar sob diferentes valores do período m . A seguir é apresentada a definição formal do processo periódico autorregressivo.

DEFINIÇÃO 2.5 *O processo periodicamente estacionário $Y_{t(r,m)}$, $r \in \mathbb{Z}$, $m \in \{1, 2, \dots, s\}$, $s \in \mathbb{Z} - \{0\}$, é dito ser periódico autorregressivo se, e somente se, $Y_{t(r,m)}$ é qualquer solução da equação de diferenças*

$$\Phi_m(B)(Y_{t(r,m)} - \mu_m) = \epsilon_{t(r,m)}$$

onde $\Phi_m(z) = 1 - \phi_1(m)z - \dots - \phi_{p_m}(m)z^{p_m}$, $z \in \mathbb{C}$, é o polinômio autorregressivo no período m , p_m é a ordem de $\Phi_m(B)$, $\epsilon_{t(r,m)} \sim iid(0, \sigma_m^2)$ e $\phi_j(m)$ são os parâmetros autorregressivos do processo.

Os parâmetros $\phi_j(m)$ na Definição 2.5 são funções periódicas de período s , isto é, $\phi_j(m) = \phi_j(m + ks)$, $k \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, p_m$, $m \in \{1, 2, \dots, s\}$, equivalentemente à periodicidade apresentada pelas funções μ_m , $\gamma^{(m)}(\tau)$ e $\rho^{(m)}(\tau)$ sob a Definição 2.4.

Em geral, processos periodicamente correlacionados, em especial os modelos PAR, podem ser analisados através de processos vetoriais devido à forte relação existente entre

os mesmos. Por esse motivo, processos vetoriais são sumarizados na próxima seção.

2.3 Processo Vetorial

Em muitas situações práticas, é necessária a análise de diversas variáveis em conjunto. Nesse contexto, é importante o estudo de processos vetoriais, brevemente abordados nesta seção.

2.3.1 Causalidade

Suponha que $Y_{t(r,m)}$, $r \in \mathbb{Z}$, $m \in \{1, 2, \dots, s\}$, $s \in \mathbb{Z} - \{0\}$, seja um processo PC de período s , com média μ_m e função PeACV dada por $\gamma^{(m)}(\tau)$. Defina o vetor de dimensão s , $\mathbf{Y}_r = \langle Y_{t(r,1)}, \dots, Y_{t(r,s)} \rangle^T$, onde \mathbf{M}^T denota a transposta da matriz \mathbf{M} . Tem-se que \mathbf{Y}_r , $r \in \mathbb{Z}$, é um processo vetorial com esperança dada por

$$\mathbb{E}(\mathbf{Y}_r) = \boldsymbol{\mu} = \langle \mu_1, \dots, \mu_s \rangle^T$$

e, para o lag τ , com matriz de autocovariâncias dada por

$$\Gamma(\tau) = \text{Cov}(\mathbf{Y}_r, \mathbf{Y}_{r-\tau}) = \mathbb{E}[(\mathbf{Y}_r - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{Y}_{r-\tau} - \boldsymbol{\mu})^T] = \mathbb{E}[\mathbf{Z}_r \mathbf{Z}_{r-\tau}^T],$$

onde $\mathbf{Z}_r = \mathbf{Y}_r - \boldsymbol{\mu}$. Nesse caso, \mathbf{Y}_r é dito ser o processo vetorial gerado por $Y_{t(r,m)}$. Pode-se mostrar que as entradas da matriz $\Gamma(\tau)$ são dadas por $[\Gamma(\tau)]_{kj} = \gamma^{(k)}(s\tau + k - j)$, $k, j = 1, \dots, s$. Existem muitas outras relações entre o processo periodicamente correlacionado $Y_{t(r,m)}$ e o processo vetorial \mathbf{Y}_r . Algumas particularidades que relacionam esses dois processos podem ser encontradas em HURD; MIAMEE (2007). De maneira semelhante ao caso univariado, algumas suposições são feitas no caso vetorial, a principal dessas suposições é a causalidade, definida a seguir.

DEFINIÇÃO 2.6 *Sejam \mathbf{Y}_r , $r \in \mathbb{Z}$, um processo vetorial de dimensão s e ξ_r , $r \in \mathbb{Z}$, um processo ortogonal, isto é, $\mathbb{E}(\xi_r) = \mathbf{0}$, e $\Gamma_\xi(\tau) = \Lambda$, $\tau = 0$, $\Gamma_\xi(\tau) = \mathbf{0}$, $\tau \neq 0$. O*

processo \mathbf{Y}_r é dito ser causal se, e somente se, puder ser escrito na forma

$$\mathbf{Y}_r = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \xi_{r-j},$$

onde as matrizes Ψ_j têm entradas $[\Psi_j]_{kl}$, que satisfazem $\sum_{j=0}^{\infty} |[\Psi_j]_{kl}| < \infty$, $k, l = 1, \dots, s$.

Note que a Definição 2.6 exige claramente que o processo \mathbf{Y}_r não dependa de observações futuras da sequência ξ_r . O processo periodicamente estacionário $Y_{t(r,m)}$ é dito ser causal se, com base na Definição 2.6, \mathbf{Y}_r também o é.

A análise espectral de processos estacionários pode ser naturalmente estendida para o contexto de processos vetoriais causais. Este é o tópico da próxima subseção.

2.3.2 Matriz de Densidade Espectral

Seja \mathbf{Y}_r um processo vetorial de dimensão s , com esperança $\mu = \mathbb{E}(\mathbf{Y}_r)$ e com matriz de autocovariâncias $\Gamma(\tau) = \text{Cov}(\mathbf{Y}_r, \mathbf{Y}_{r-\tau})$, para o lag τ . Se o processo \mathbf{Y}_r é causal, a transformada matricial de Fourier existe e é dada por

$$\mathbf{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \mathbb{E} \left[\left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} (\mathbf{Y}_r - \mu) e^{-i\omega r} \right] \right] = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \Gamma(\tau) e^{-i\omega\tau}, \quad (2.5)$$

onde, $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^s$, \mathbf{z}^* é a conjugada transposta de \mathbf{z} e $|\mathbf{z}| = \mathbf{z}\mathbf{z}^*$. Frequentemente, quando existe, a função $\mathbf{f}(\omega)$ é denominada de *matriz de densidade espectral* do processo \mathbf{Y}_r . Note que $\mathbf{f}(\omega) = \mathbf{f}(\omega + 2\pi)$, portanto é suficiente conhecer o comportamento de $\mathbf{f}(\omega)$ apenas para $\omega \in [0, 2\pi)$. Os coeficientes da matriz de densidade espectral (Equação 2.5) são as matrizes de autocovariância de \mathbf{Y}_r e podem ser obtidos por meio da igualdade

$$\Gamma(\tau) = \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Suponha que o processo vetorial causal \mathbf{Y}_r seja gerado pelo processo PC $Y_{t(r,m)}$, e seja $\mathbf{f}(\omega)$ a matriz de densidade espectral de \mathbf{Y}_r . Se $\mathbf{h}(\omega)$ for a matriz espectral de $Y_{t(r,m)}$, a seguinte relação é válida:

$$\mathbf{h}(\omega) = \mathbf{U}(\omega) \mathbf{f}(\omega) \mathbf{U}^{-1}(\omega), \quad (2.6)$$

onde a matriz $\mathbf{U}(\omega)$ tem entradas dadas por $[\mathbf{U}(\omega)]_{kj} = \frac{1}{\sqrt{s}} \exp\{(i2\pi kj - i j \omega)/s\}$. Além disso, $\forall \omega \in [0, 2\pi)$, $\mathbf{U}(\omega)\mathbf{U}^*(\omega) = \mathbf{I}$, isto é, $\mathbf{U}^*(\omega) = \mathbf{U}^{-1}(\omega)$, onde \mathbf{M}^* denota a conjugada transposta da matriz \mathbf{M} , para qualquer \mathbf{M} . A Equação 2.6 pode ser utilizada para obter, por meio de $\mathbf{f}(\omega)$, a matriz $\mathbf{h}(\omega)$ e vice-versa.

No domínio da frequência, para realizar a análise de uma série temporal vetorial \mathbf{y}_r , $r = 1, \dots, N$, de dimensão s observada de um processo vetorial causal \mathbf{Y}_r , $r \in \mathbb{Z}$, é necessário estimar a matriz de densidade espectral. Isto, geralmente, é feito através do periodograma multivariado definido por

$$\mathbf{P}(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=1}^N \mathbf{y}_k e^{-i\omega k} \right|^2 = \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \hat{\Gamma}(\tau) e^{-i\omega \tau}. \quad (2.7)$$

NEMATOLLAHI; RAO (2005) propõem utilizar a relação apresentada na Equação 2.6 para estimar $\mathbf{h}(\omega)$ através da substituição de $\mathbf{f}(\omega)$ por alguma de suas estimativas (em particular pode-se utilizar $\mathbf{P}(\omega)$, apresentada na Equação 2.7). Para mais informações sobre análise de processos periodicamente correlacionados baseada no domínio da frequência veja HURD; MIAMEE (2007). Existem vários processos vetoriais apresentados na literatura, um dos mais abordados é o processo vetorial autorregressivo apresentado na próxima subseção.

2.3.3 Processo VAR

Dentre os processos vetoriais, um dos mais utilizados e investigados é o modelo *Vetorial Autorregressivo* (VAR) definido formalmente a seguir.

DEFINIÇÃO 2.7 *O processo vetorial de dimensão s , \mathbf{Y}_r , $r \in \mathbb{Z}$, é dito ser um processo VAR de ordem P , ou VAR(P), se é qualquer solução da equação de diferenças dada por*

$$\underline{\Phi}(B)(\mathbf{Y}_r - \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\xi}_r,$$

onde $\underline{\Phi}(z) = \Phi_0 - \Phi_1 z - \dots - \Phi_P z^P$, $z \in \mathbb{C}$, é o polinômio autorregressivo de \mathbf{Y}_r , P é a ordem de $\underline{\Phi}(z)$ e $\boldsymbol{\xi}_r$, $r \in \mathbb{Z}$, é um processo ortogonal, isto é, $\mathbb{E}(\boldsymbol{\xi}_r) = \mathbf{0}$, e $\Gamma_{\boldsymbol{\xi}}(\tau) = \boldsymbol{\Lambda}$,

$\tau = 0$, $\Gamma_\xi(\tau) = \mathbf{0}$, $\tau \neq 0$.

LUND; BASAWA (2000) mostram que, de acordo com a Definição 2.5, se o processo PAR $Y_{t(r,m)}$ gera o processo vetorial \mathbf{Y}_r , então \mathbf{Y}_r segue o modelo VAR apresentado na Definição 2.7 com matrizes coeficientes que têm entradas dadas por

$$[\Phi_0]_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j; \\ 0, & \text{se } i < j; \\ \phi_{i-j}(i), & \text{se } i > j. \end{cases} \quad \text{e} \quad [\Phi_k]_{ij} = \phi_{ks+i-j}(i), \text{ se } 1 \leq k \leq P,$$

onde $P = \lceil p/s \rceil$, $p = \max_{1 \leq m \leq s} (p_m)$, $\lceil x \rceil$ denota o menor inteiro maior ou igual a x e $\xi_r^T = \langle \epsilon_{t(r,1)}, \dots, \epsilon_{t(r,s)} \rangle$ é o vetor de erros. Nesse caso, a condição para que \mathbf{Y}_r e, consequentemente, $Y_{t(r,m)}$ sejam causais é que

$$0 \neq \det[\Phi_0^{-1}\Phi(z)] = \det[\mathbf{I} - \Phi_0^{-1}\Phi_1z - \dots - \Phi_0^{-1}\Phi_Pz^P], \forall z \in \mathcal{Z},$$

onde $\mathcal{Z} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ (BROCKWELL; DAVIS (1991)). Sejam $z_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, q$, $q \leq sP$, as q raízes distintas de $\det[\Phi_0^{-1}\Phi(z)]$. Suponha que κ_j seja a multiplicidade da raiz z_j , $j = 1, \dots, q$. Dessa forma, é possível reescrever

$$\det[\Phi_0^{-1}\Phi(z)] = (z_1 - z)^{\kappa_1} \dots (z_q - z)^{\kappa_q} = \left(\frac{1}{\lambda_1} - z\right)^{\kappa_1} \dots \left(\frac{1}{\lambda_q} - z\right)^{\kappa_q}, \quad (2.8)$$

onde $\lambda_j = 1/z_j$, $j = 1, \dots, q$. Nesse sentido, a condição de causalidade é equivalente à $|z_j| > 1$ ou $|\lambda_j| < 1$, para todo $j = 1, \dots, q$. No modelo PAR(1) a condição de causalidade apresentada na Equação 2.8 se reduz a

$$\lambda = \left| \prod_{m=1}^s \phi_j(m) \right| < 1.$$

Sob a suposição de causalidade, que implica em estacionariedade periódica, o processo PAR pode ser escrito na forma *média-móvel* infinita

$$Y_{t(r,m)} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(m) \epsilon_{t(r,m)-j}, \quad (2.9)$$

onde

$$\max_{1 \leq m \leq s} \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j(m)| \right) < \infty$$

e

$$\psi_k(m) = \sum_{j=0}^{p_m} \phi_j(m) \psi_{k-j}(m-j), k \geq 1,$$

com $\psi_0(m) = 1$ e $\psi_k(m) = 0$, $k < 0$. Os coeficientes $\psi_k(m)$ (Equação 2.9) podem ser utilizados para avaliar a variância de $Y_{t(r,m)}$ e para prever observações futuras.

O próximo capítulo apresenta a metodologia de estimação de Yule-Walker, muito utilizada devido à fácil implementação e ao baixo custo computacionais, e o método proposto nesse trabalho.

3 *Estimação de Processos PAR*

A estimação dos parâmetros do modelo é uma das principais etapas no ajuste de séries temporais. Existem muitos procedimentos sugeridos na literatura com essa finalidade. Neste capítulo é proposta a extensão do estimador de Whittle no contexto de processos periodicamente estacionários. Também é apresentado o estimador de Yule-Walker que é um dos mais utilizados devido a fácil implementação computacional.

3.1 Método de Yule-Walker

Se $Y_{t(r,m)}$, $r \in \mathbb{Z}$, $m \in \{1, 2, \dots, s\}$, $s \in \mathbb{Z}^+ - \{0\}$, é um processo periódico autorregressivo de ordens p_m , $m \in \{1, \dots, s\}$, então

$$Y_{t(r,m)} - \mu_m = \sum_{j=1}^{p_m} \phi_j(m)(Y_{t(r,m)-j} - \mu_{m-j}) + \epsilon_{t(r,m)},$$

multiplicando ambos lados dessa equação por $Y_{t(r,m)-\tau} - \mu_{m-\tau}$ e tomando a esperança dos mesmos vem que

$$\begin{aligned} \gamma^{(m)}(\tau) &= \mathbb{E}[(Y_{t(r,m)} - \mu_m)(Y_{t(r,m)-\tau} - \mu_{m-\tau})] \\ &= \sum_{j=1}^{p_m} \phi_j(m) \mathbb{E}[(Y_{t(r,m)-j} - \mu_{m-j})(Y_{t(r,m)-\tau} - \mu_{m-\tau})] + \mathbb{E}[\epsilon_{t(r,m)}(Y_{t(r,m)-\tau} - \mu_{m-\tau})] \\ &= \sum_{j=1}^{p_m} \phi_j(m) \mathbb{E}[(Y_{t(r,m)-j} - \mu_{m-j})(Y_{t(r,m)-j+\tau} - \mu_{m-\tau})] + 0 \\ &= \sum_{j=1}^{p_m} \phi_j(m) \gamma^{(m-j)}(j - \tau), \quad \tau = 1, \dots, p_m. \end{aligned} \tag{3.1}$$

As equações acima são denominadas de equações de Yule-Walker periódicas e podem

ser utilizadas para estimar os parâmetros do modelo PAR. A metodologia de estimação de Yule-Walker se baseia basicamente no método dos momentos. O procedimento consiste em substituir as funções $\gamma^{(m)}(k)$ por estimativas. Neste caso, utiliza-se $\hat{\gamma}^{(m)}(k)$ (Equação 2.2) nas Equações 3.1 obtendo o seguinte sistema de equações

$$\sum_{j=1}^p \phi_j(m) \hat{\gamma}^{(m-j)}(k-j) = \hat{\gamma}^{(m)}(k), \quad k = 1, \dots, p_m. \quad (3.2)$$

As estimativas $\tilde{\phi}_j(m)$ são obtidas solucionando o sistema de Equações 3.2 com respeito aos parâmetros $\phi_j(m)$. Detalhes relacionados ao método de estimação de Yule-Walker podem se encontrados em SARNAGLIA; REISEN; LÉVY-LEDUC (2009).

Apesar de ser largamente utilizado para a estimação de processos PAR, o procedimento de Yule-Walker não é robusto para estimar modelos com uma quantidade significativa de parâmetros e em séries temporais com pequenos tamanhos amostrais. Nesse sentido, o estimador de Whittle, conhecido por ter propriedades assintóticas, assintoticamente, equivalentes ao EMV, é generalizado para o contexto de processos peridodicamente estacionários na próxima seção.

3.2 Metodologia Proposta

Nesta seção o estimador proposto é apresentado. Na próxima subseção as propriedades assintóticas da função de verossimilhança são abordadas e a generalização do estimador de Whittle é proposta. Por fim, é descrito um algoritmo para a implementação desse método.

3.2.1 Propriedades assintóticas

Devido ao comportamento da estrutura de correlação entre observações de uma amostra, frequentemente, a matriz de covariância pode pertencer a classes especiais. Em análise de séries temporais, as matrizes *block toeplitz*, definidas a seguir, são muito importantes nesse contexto.

DEFINIÇÃO 3.1 A matriz Σ de dimensão $Ns \times Ns$ é dita ser *block toeplitz* se suas entradas são $[\Sigma]_{kj} = \Gamma(k - j)$, $k, j = 1, \dots, N$, onde $\Gamma(\tau)$, $\tau \in \mathbb{Z}$, é uma sequência de matrizes de dimensão $s \times s$.

Os resultados neste artigo são obtidos através de duas suposições básicas, a primeira suposição feita é em relação a sequência de matrizes $\Gamma(\tau)$ apresentada na Definição 3.1.

SUPOSIÇÃO 1 Seja $\Gamma(\tau)$, $\tau \in \mathbb{Z}$, a sequência de matrizes de dimensão $s \times s$ apresentadas na Definição 3.1. Considere que $[\Gamma(\tau)]_{kj}$, $k, j = 1, \dots, s$, são as entradas da τ -ésima matriz da sequência. Suponha que $\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |[\Gamma(\tau)]_{kj}| < \infty$, $\forall k, j = 1, \dots, s$, ou seja, a sequência $\Gamma(\tau)$ possui entradas absolutamente convergentes.

Note que, se $\Gamma(\tau)$ são as matrizes de autocovariância do processo vetorial \mathbf{Y}_r , $r \in \mathbb{Z}$, a Suposição 1 é equivalente a condição de causalidade de \mathbf{Y}_r . Dessa forma, sob a Suposição 1, a transformada matricial de Fourier

$$\mathbf{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \Gamma(\tau) e^{-i\omega\tau}$$

existe $\forall \omega \in [0, 2\pi)$ e se diz que a matriz *block toeplitz* $\Sigma = \Sigma(\mathbf{f})$ é gerada por $\mathbf{f}(\omega)$, pois tem-se que suas entradas podem ser recuperadas através de

$$[\Sigma]_{kj} = \Gamma(k - j) = \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\omega) e^{i\omega(k-j)} d\omega.$$

A segunda suposição, apresentada a seguir, está relacionada com a transformada matricial de Fourier \mathbf{f} .

SUPOSIÇÃO 2 Suponha que a transformada matricial $\mathbf{f}(\omega)$ que gera a matriz *block toeplitz* $\Sigma = \Sigma(\mathbf{f})$ (Definição 3.1) seja não-singular e contínua em $[0, 2\pi)$. Dessa forma, garante-se a existência e continuidade de $\mathbf{f}^{-1}(\omega)$.

O seguinte lema indica a inversa assintótica da matriz *block toeplitz* Σ apresentada na Definição 3.1.

LEMA 1 *Suponha que as entradas da matriz block toeplitz Σ seguem a suposição 1, e que a matriz $\mathbf{f}(\omega)$ que gera $\Sigma = \Sigma(\mathbf{f})$ atende a Suposição 2. Defina as matrizes*

$$a(\tau) = \int_0^{2\pi} \mathbf{f}^{-1}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \tau \in \mathbb{Z}.$$

Então, assintoticamente, a matriz block toeplitz \mathbf{A} com entradas $[\mathbf{A}]_{kj} = a(k-j)/4\pi^2$ corresponde a inversa de Σ , isto é, quando $N \rightarrow \infty$, $\mathbf{A}\Sigma = \Sigma\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Prova: Encontra-se no anexo.

Na análise estatística o método de máxima verossimilhança é um dos mais utilizados para estimar parâmetros populacionais desconhecidos. Esse método de estimação consiste em maximizar a função de verossimilhança, e os valores que a maximizam são chamados de *Estimadores de Máxima Verossimilhança* (EMV). CASELLA; BERGER (2001) apresentam várias propriedades assintóticas dos EMV.

Sejam $\mathbf{Y}^T = \langle \mathbf{Y}_1^T, \dots, \mathbf{Y}_N^T \rangle$ uma amostra de tamanho N do processo vetorial \mathbf{Y}_r de dimensão s e $\Sigma = \text{Cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})$ a matriz de variância-covariância do vetor \mathbf{Y} . De acordo com a Definição 3.1, Σ é uma matriz *block toeplitz* com entradas dadas pelas matrizes $[\Sigma]_{kj} = \Gamma(k-j) = \text{Cov}(\mathbf{Y}_k, \mathbf{Y}_j)$ de dimensão $s \times s$. Suponha que a densidade conjunta de \mathbf{Y} é normal multivariada indexada por algum vetor paramétrico θ . Considere que $\mathbf{y}^T = \langle \mathbf{y}_1^T, \dots, \mathbf{y}_N^T \rangle$ seja uma observação de \mathbf{Y}^T e que $\underline{\mu} = \langle \mu, \dots, \mu \rangle^T$ é conhecido. Então, a função verossimilhança de θ é dada por

$$\mathcal{L}(\theta) = \mathcal{L}(\theta | \mathbf{Y} = \mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{Ns} \det(\Sigma_\theta)}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \underline{\mu})^T \Sigma_\theta^{-1} (\mathbf{y} - \underline{\mu})}, \quad (3.3)$$

onde Σ_θ é utilizado em vez de Σ para enfatizar a dependência com respeito ao vetor paramétrico θ . Nesse contexto, o EMV de θ é o vetor $\hat{\theta}_{EMV} = \hat{\theta}_{EMV}(\mathbf{Y})$ tal que $\mathcal{L}(\theta) \leq \mathcal{L}(\hat{\theta}_{EMV}), \forall \theta \in \Theta$, onde Θ é o espaço paramétrico. A estimativa, quando o ponto amostral $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$ é observado, é $\hat{\theta}_{EMV} = \hat{\theta}_{EMV}(\mathbf{y})$. Pelo fato do logaritmo ser uma função monótona, tem-se que o ponto de máximo, $\hat{\theta}_{EMV}$, da função de verossimilhança (Equação 3.3) é o

mesmo da função

$$l(\theta) = - \left\{ \frac{1}{2N} \ln(\det(\Sigma_\theta)) + \frac{1}{2N} (\mathbf{y} - \underline{\mu})^T \Sigma_\theta^{-1} (\mathbf{y} - \underline{\mu}) \right\}. \quad (3.4)$$

Sem perda de generalidade, assume-se que $\underline{\mu} = \mathbf{0}$. Caso $\underline{\mu} \neq \mathbf{0}$, basta considerar $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \underline{\mu}$ que todos resultados são válidos. A próxima proposição apresenta a expressão assintótica do segundo termo da Equação 3.4.

PROPOSIÇÃO 1 *Suponha que as matrizes Σ_θ e \mathbf{f} satisfazem as suposições 1 e 2, respectivamente. Então,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2N} \mathbf{y}^T \Sigma_\theta^{-1} \mathbf{y} \right\} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \text{tr} \{ \mathbf{f}_\theta^{-1}(\omega) \mathbf{P}(\omega) \} d\omega$$

onde $\mathbf{P}(\omega)$ é o periodograma multivariado (Equação 2.7) da amostra observada $\mathbf{y}^T = \langle \mathbf{y}_1^T, \dots, \mathbf{y}_N^T \rangle$.

Prova: Encontra-se no anexo.

Note que a Proposição 1 fornece uma expressão que pode ser utilizada como aproximação para o segundo termo de $l(\theta)$. Sob as condições de regularidade apresentadas nas Suposições 1 e 2, WIDOM (1974) mostra que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2N} \ln(\det(\Sigma_\theta)) \right\} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln(\det(\mathbf{f}_\theta(\omega))) d\omega. \quad (3.5)$$

A Equação 3.5 revela a expressão assintótica do primeiro termo de $l(\theta)$. Essa expressão pode ser utilizada como uma aproximação para $\frac{1}{2N} \ln(\det(\Sigma_\theta))$. Devido aos resultados apresentados na Proposição 1 e na Equação 3.5 tem-se o seguinte corolário.

COROLÁRIO 1 *Sob as condições das Suposições 1 e 2 tem-se que*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \{ l(\theta) \} = - \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \ln\{\det[\mathbf{f}_\theta(\omega)]\} d\omega + \int_0^{2\pi} \text{tr} \{ \mathbf{f}_\theta^{-1}(\omega) \mathbf{P}(\omega) \} d\omega \right\}.$$

Note que o Corolário 1 fornece uma expressão que pode ser utilizada como aproximação para a verossimilhança $l(\theta)$. Porém, em várias situações as integrais apresentadas

nesse corolário são analiticamente impraticáveis o que sugere utilizar aproximações para as mesmas. Se $\omega_j = \frac{2\pi j}{N}$, $j = 1, \dots, N$, são as frequências de Fourier e $g(\cdot)$ é uma função integrável em $[0, 2\pi)$, então a soma de Riemann satisfaz

$$\sum_{j=1}^N g(\omega_j) \frac{2\pi}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} g(\omega) d\omega.$$

Esse resultado é utilizado para a obtenção do seguinte corolário.

COROLÁRIO 2 *Sob as Suposições 1 e 2, tem-se que a função $\ell(\theta)$ obedece a seguinte relação:*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \{\ell(\theta)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{2N} \left[\sum_{j=1}^N \ln\{\det[\mathbf{f}_\theta(\omega_j)]\} + \sum_{j=1}^N \text{tr} \{ \mathbf{f}_\theta^{-1}(\omega_j) \mathbf{P}(\omega_j) \} \right] \right\}.$$

O Corolário 2 mostra a expressão assintótica da log-verossimilhança $\ell(\theta)$ em termos da matriz de densidade espectral \mathbf{f}_θ do processo vetorial \mathbf{Y}_r . Caso \mathbf{Y}_r seja gerado pelo processo periodicamente estacionário $Y_{t(r,m)}$, $r \in \mathbb{Z}$, $m \in \{1, 2, \dots, s\}$, $s \in \mathbb{Z}^+ - \{0\}$, pode ser conveniente utilizar a relação entre \mathbf{f}_θ e \mathbf{h}_θ (ver Equação 2.6) para exprimir $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\ell(\theta)\}$ em termos de \mathbf{h}_θ , como apresentado no seguinte corolário.

COROLÁRIO 3 *Sob as condições apresentadas nas Suposições 1 e 2, tem-se que a função $\ell(\theta)$, assintoticamente, é dada por*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \{\ell(\theta)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \left[\ln\{s^s \det[\mathbf{h}_\theta(\omega_j)]\} + \frac{1}{s} \text{tr} \{ \mathbf{h}_\theta^{-1}(\omega_j) \mathbf{P}_{pc}(\omega_j) \} \right] \right\},$$

onde $\mathbf{P}_{pc}(\omega) = \mathbf{U}(\omega) \mathbf{P}(\omega) \mathbf{U}^{-1}(\omega)$ é um estimador de $\mathbf{h}_\theta(\omega)$. Veja mais detalhes sobre a estimação de $\mathbf{h}_\theta(\omega)$ em NEMATOLLAHI; RAO (2005).

O resultado dado no Corolário 3 permite utilizar, como uma aproximação para $\ell(\theta)$, a função

$$\hat{\ell}_1(\theta) = -\frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \left[\ln\{s^s \det[\mathbf{h}_\theta(\omega_j)]\} + \frac{1}{s} \text{tr} \{ \mathbf{h}_\theta^{-1}(\omega_j) \mathbf{P}_{pc}(\omega_j) \} \right], \quad (3.6)$$

que garante, para todo ponto $\theta \in \Theta$, $\lim_{N \rightarrow \infty} \ell(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\ell}_1(\theta)$. Dessa forma, assintoticamente, o ponto de máximo, $\hat{\theta}_{AL}$, de $\hat{\ell}_1(\theta)$ é o mesmo de $\ell(\theta)$. Isto é, para N

suficientemente grande, o estimador $\hat{\theta}_{AL}$ é equivalente a $\hat{\theta}_{EMV}$.

3.2.2 Algoritmo

O algoritmo para o desenvolvimento da metodologia proposta para a estimação dos parâmetros do modelo PAR pode ser esquematizado da seguinte maneira:

- (i) Estabeleça um ponto de partida $\hat{\theta}_{AL}^{(0)}$ para o vetor paramétrico θ ;
- (ii) Na k -ésima iteração, através de algum algoritmo de otimização, atualize $\hat{\theta}_{AL}^{(k-1)}$ para a estimativa $\hat{\theta}_{AL}^{(k)}$, de forma que $\ell_1(\hat{\theta}_{AL}^{(k-1)}) \leq \ell_1(\hat{\theta}_{AL}^{(k)})$; e
- (iii) Interrompa o procedimento segundo algum critério de convergência.

O próximo capítulo apresenta um estudo de Monte Carlo com o intuito de comparar os vícios e os EQMs do estimador proposto com o do método de Yule-Walker. Uma aplicação em um conjunto de dados reais também é realizada para ilustrar a metodologia proposta.

4 *Resultados*

Neste capítulo o desempenho do estimador sugerido é comparado com o do método de Yule-Walker e a aplicação do mesmo é ilustrada através de um conjunto de dados reais.

4.1 Simulações

Para avaliar o desempenho da metodologia proposta, foram simulados dois processos PAR(1), de acordo com a Definição 2.5, com $s = 4$ e $\epsilon_{t(r,m)} \sim N(0, 1)$. Os parâmetros desses modelos são apresentados na Tabela 1. Os dois processos são abordados com o intuito de verificar se o valor de λ , apresentado na Equação 2.8, próximo de 1 interfere na qualidade do estimador, isto é, se a possibilidade do processo estar próximo da região de não-causalidade influencia negativamente nas estimativas dos parâmetros.

Foram feitas 1000 replicações com tamanhos amostrais $N = 30, 65$ e 100 . A linguagem de programação utilizada nas simulações foi FORTRAN90, enquanto a confecção dos gráficos foi realizada no software R 2.8.1.

O algoritmo utilizado para maximizar a função de log-verossimilhança aproximada $\ell_1(\theta)$ (Equação 3.6) e encontrar $\hat{\theta}_{AL}$ necessita de uma estimativa inicial do vetor paramétrico θ . Para tal, neste artigo, utilizou-se o estimador de Yule-Walker, $\hat{\theta}_{YW}$, apresentado em MCLEOD (1994). Vale ressaltar que qualquer estimador de baixo custo computacional pode ser utilizado como ponto de partida. Como exemplo, é possível utilizar o estimador robusto proposto por SARNAGLIA; REISEN; LeVY-LEDUC (2009).

Os valores absolutos dos vícios e os EQMs das estimativas dos parâmetros para os

Tabela 1: Parâmetros dos Modelos 1 e 2.

Parametro	Modelo 1	Modelo 2
$\phi_1^{(1)}$	0.9	1.5
$\phi_1^{(2)}$	0.8	0.8
$\phi_1^{(3)}$	0.7	1.2
$\phi_1^{(4)}$	0.6	0.5
λ	0.3024	0.72

dois modelos são apresentados nas Tabelas 2 e 3. Para efeito de comparação, também são apresentados os resultados da estimativa inicial nessas tabelas.

Tabela 2: Vícios e EQMs das estimativas dos coeficientes do Modelo 1.

Periodo	N	$\hat{\theta}_{YW}$		$\hat{\theta}_{AL}$	
		Vício	EQM	Vício	EQM
$\phi_1^{(1)} = 0.9$	$N = 30$	0.0395	0.0228	0.0300	0.0234
	$N = 65$	0.0172	0.0100	0.0126	0.0098
	$N = 100$	0.0091	0.0061	0.0075	0.0060
$\phi_1^{(2)} = 0.8$	$N = 30$	0.0081	0.0158	0.0007	0.0147
	$N = 65$	0.0001	0.0068	0.0033	0.0066
	$N = 100$	0.0006	0.0045	0.0019	0.0044
$\phi_1^{(3)} = 0.7$	$N = 30$	0.0154	0.0156	0.0078	0.0148
	$N = 65$	0.0072	0.0065	0.0034	0.0063
	$N = 100$	0.0044	0.0038	0.0018	0.0037
$\phi_1^{(4)} = 0.6$	$N = 30$	0.0162	0.0167	0.0056	0.0157
	$N = 65$	0.0084	0.0076	0.0033	0.0073
	$N = 100$	0.0072	0.0047	0.0035	0.0045

Tabela 3: Vícios e EQMs das estimativas dos coeficientes do Modelo 2.

Periodo	N	$\hat{\theta}_{YW}$		$\hat{\theta}_{AL}$	
		Vício	EQM	Vício	EQM
$\phi_1^{(1)} = 1.5$	$N = 30$	0.0942	0.0274	0.0696	0.0225
	$N = 65$	0.0414	0.0080	0.0333	0.0076
	$N = 100$	0.0233	0.0038	0.0172	0.0037
$\phi_1^{(2)} = 0.8$	$N = 30$	0.0203	0.0056	0.0083	0.0046
	$N = 65$	0.0101	0.0023	0.0049	0.0020
	$N = 100$	0.0048	0.0012	0.0016	0.0011
$\phi_1^{(3)} = 1.2$	$N = 30$	0.0191	0.0075	0.0065	0.0058
	$N = 65$	0.0085	0.0025	0.0038	0.0022
	$N = 100$	0.0031	0.0016	0.0003	0.0015
$\phi_1^{(4)} = 0.5$	$N = 30$	0.0310	0.0054	0.0135	0.0038
	$N = 65$	0.0128	0.0018	0.0062	0.0016
	$N = 100$	0.0095	0.0011	0.0050	0.0010

Os resultados apresentados na Tabela 2 indicam que, principalmente para valores de N pequenos o estimador proposto possui vício menor que o estimador de Yule-Walker. Porém, para maiores tamanhos amostrais, o vício de ambos tende a zero. Essa proximidade entre os vícios para valores de N suficientemente grandes pode indicar que ambos são assintoticamente não viesados. O EQM do estimador proposto é, em geral, menor que o de Yule-Walker. No entanto, ao aumentar o tamanho da amostra reduzem-se e aproximam-se os valores dos EQMs. Portanto, os resultados empíricos indicam que o estimador proposto, bem como o de Yule-Walker, são assintoticamente consistentes. Essa evidência empírica não é surpresa, pois, de acordo com SARNAGLIA; REISEN; LÉVY-LEDUC (2009), o estimador de Yule-Walker também é assintoticamente equivalente ao estimador de máxima verossimilhança.

A Tabela 3 apresenta estimativas do Modelo 2, onde os parâmetros têm valores próximos a não-causalidade. Nota-se que os resultados dos vícios e dos EQMs são maiores e menores, respectivamente, comparados com os valores descritos na Tabela 2 (Modelo 1). Entretanto, a interpretação do desempenho empírico dos estimadores é equivalente à do Modelo 1. Isto é, o vício de $\hat{\theta}_{AL}$ é menor que o de $\hat{\theta}_{YW}$, e ambos possuem valores de EQMs próximos para valores grandes de N .

As Figuras 2 e 3 ilustram as situações mais extremas dos casos aqui estudados. Na Figura 2 tem-se o gráfico da distribuição empírica das estimativas dos parâmetros do Modelo 1 com $N = 30$, enquanto a Figura 3 mostra a distribuição empírica das estimativas do Modelo 2 para $N = 30$.

Através das Figuras 2 e 3 vê-se que as estimativas são ligeiramente viesadas, sendo que o menor vício é obtido quando utilizado o estimador proposto. Além disso, nota-se que, quando o processo encontra-se perto da região de não-causalidade, as distribuições dos estimadores tendem a ser menos simétricas, sendo que quando utiliza-se as equações de Yule-Walker para obter as estimativas, o grau de assimetria é maior. Na Figura 3 fica mais evidente a menor variabilidade do estimador proposto.

É importante lembrar que, com base em estudos de melhores estimativas iniciais

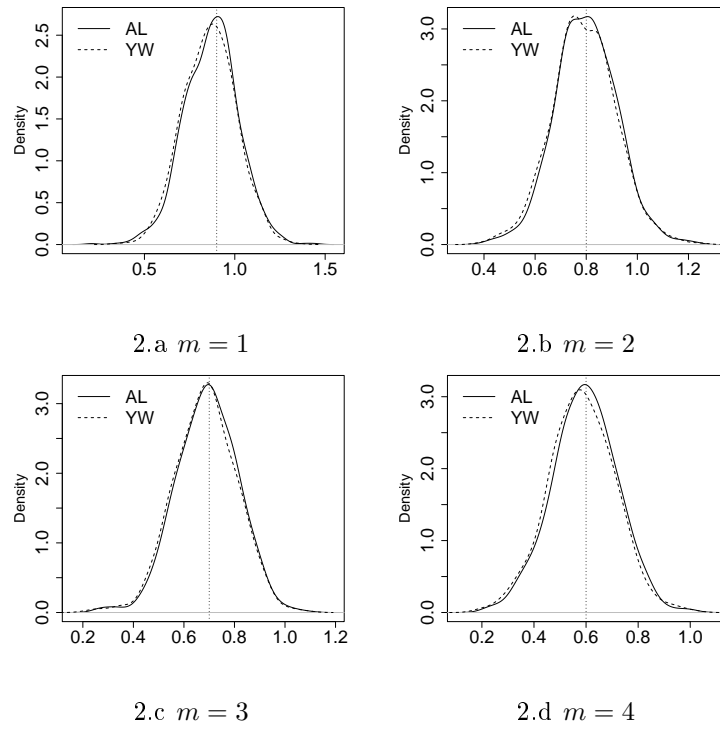


Figura 2: Distribuições empíricas das estimativas do Modelo 1, com $N = 30$.

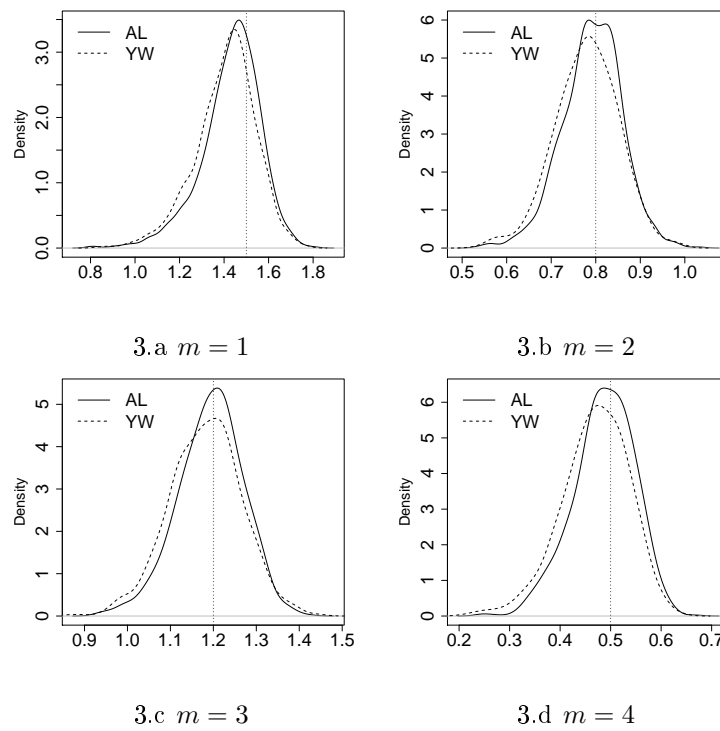


Figura 3: Distribuições empíricas das estimativas do Modelo 2, com $N = 30$.

para o vetor θ e utilizando-as no algoritmo de estimação, os resultados obtidos para a metodologia proposta podem ser melhorados e o tempo de execução do algoritmo pode ser diminuído. A próxima seção apresenta a ilustração da metodologia proposta aplicando-a em um conjunto de dados reais.

4.2 Aplicação

Como ilustração da metodologia de Whittle, os dados da vazão média trimestral do rio Castelo, Castelo-ES, referentes aos anos de 1938 até 2006 são analisados. Essa série temporal pode ser obtida através do Sistema de Informações Hidrológicas (HIDROWEB), disponíveis no endereço eletrônico <http://hidroweb.ana.gov.br/>. Frequentemente, dados de hidrologia apresentam variância não-constante e, por esse motivo, diversos autores consideram transformações não-lineares dos dados com o intuito de estabilizar a variância da série. A Figura 4 mostra o gráfico de evolução e o histograma da vazão média trimestral e do logaritmo dessa série.

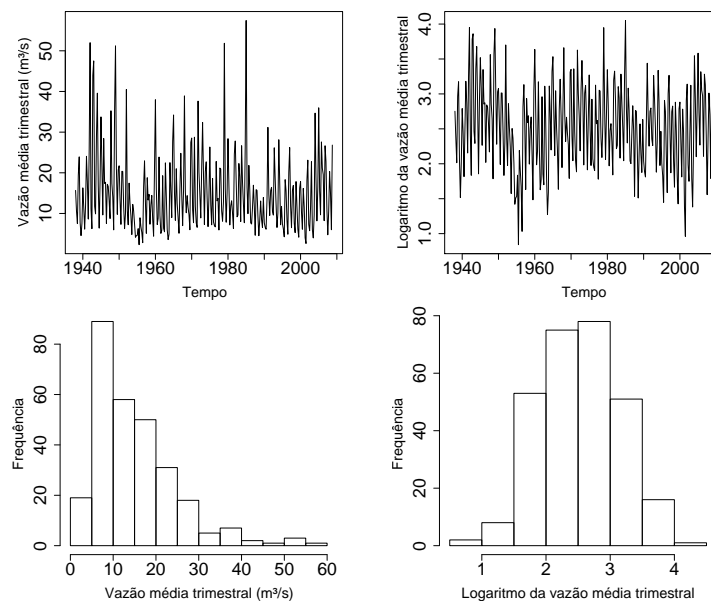


Figura 4: Evolução e histograma da série e do logaritmo da mesma.

Pela Figura 4 pode-se notar que a distribuição dos dados originais é assimétrica o que, a princípio, não permitiria a utilização da metodologia proposta por este estudo. Porém,

para o logaritmo da série percebe-se, empiricamente, um comportamento simétrico. A Tabela 4 apresenta o resultado do teste de Jarque-Bera aplicado aos dados originais e ao logaritmo da série para verificar a normalidade de ambos conjuntos de dados.

Tabela 4: Teste de Jarque-Bera para a série e o logaritmo da mesma.

Dados	Est. Test.	g.l.	<i>p</i> -valor
Originais	218.65	2	$< 2.2 \times 10^{-16}$
Logaritmo	2.23	2	0.33

Através da Tabela 4, percebe-se que não se pode rejeitar a hipótese de normalidade para o logaritmo da série. Dessa forma, é possível aplicar a metodologia proposta a esse conjunto de dados. Foi ajustado o modelo PAR(1) ao logaritmo da vazão média trimestral, e as estimativas obtidas são apresentadas na Tabela 5. A Tabela 6 e a Figura 5 mostram, respectivamente, o resultado do teste de Ljung-Box e os *qqplots* para os resíduos do modelo PAR ajustado aos dados utilizando o método proposto para verificar, respectivamente, a independência e a normalidade dos mesmos.

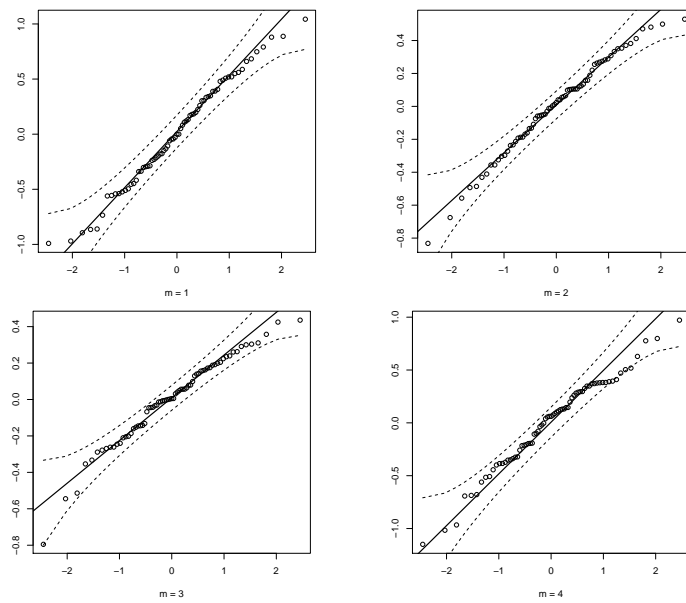
Tabela 5: Estimativas de Yule-Walker (YW) e de Whittle (AL).

Método	Estimativas			
	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_1^{(2)}$	$\phi_1^{(3)}$	$\phi_1^{(4)}$
YW	0.348	0.503	0.646	0.607
AL	0.365	0.512	0.660	0.529

Tabela 6: Resultado do teste de Ljung-Box para os resíduos.

<i>lag</i> = 20	$\phi_1(1)$	$\phi_1(2)$	$\phi_1(3)$	$\phi_1(4)$
<i>p</i> -valor	0.83	0.46	0.11	0.40
Est. Test	14.06	20.01	27.92	20.89

Através da Tabela 5 nota-se que ambos procedimentos forneceram estimativas próximas. Por meio da Tabela 6 e da Figura 5 percebe-se que o estudo do ajuste do modelo (análise residual), estimado pela metodologia proposta, não evidenciou nenhuma anomalia, isto é, os resíduos não violaram os pressupostos da modelagem.

Figura 5: *Qqplot* dos resíduos da modelagem.

5 *Considerações Finais*

Neste capítulo são apresentadas as principais conclusões obtidas neste estudo. Também são apresentadas sugestões de trabalhos futuros e de linhas de pesquisa já iniciadas por este trabalho.

5.1 Conclusões

Esta pesquisa aborda a estimação de modelos periódicos autorregressivos, baseada no domínio da frequência, motivado principalmente pela falta de estudos nessa área e pela importância que processos periódicos têm ganhado recentemente em análise de séries temporais.

A proposta se baseia em maximizar uma função objetivo baseada na matriz espectral $\mathbf{h}(\omega)$ e no estimador de $\mathbf{h}(\omega)$, $\mathbf{P}_{pc}(\omega)$. Assintoticamente, essa função converge para a função de log-verossimilhança dos processos periodicamente correlacionados. O estimador sugerido é o ponto do espaço paramétrico que maximiza a função objetivo. Para tamanhos amostrais suficientemente grandes, o estimador proposto se aproxima do estimador de máxima verossimilhança.

Os resultados de simulação indicam que, empiricamente, em geral, o estimador proposto tem vício e EQM significativamente pequenos comparados com o estimador de Yule-Walker, características essas que podem ser melhoradas através da utilização de outros estimadores de baixo custo computacional como estimativas iniciais do vetor paramétrico θ como ponto de partida do algoritmo de maximização.

5.2 Estudos Futuros

Este trabalho motiva as seguintes linhas de pesquisa: estudos de processo periódicos com *outliers*, com diferentes estruturas de dependência, com observações faltantes, com diferentes estruturas de erros entre outras.

Referências

- BLOOMFIELD, P.; HURD, H. L.; LUND, R. B. Periodic correlation in stratospheric ozone data. *Journal of Time Series Analysis*, v. 15, p. 127–50, 1994.
- BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. [S.l.]: Holden day, 1976.
- BROCKWELL, P. J.; DAVIS, R. A. *Time Series: Theory and Methods*. [S.l.]: Springer-Verlag, New York, 1991.
- CASELLA, G.; BERGER, R. L. *Statistical Inference*. [S.l.]: Duxbury Press; second edition, 2001.
- FRANSES, P. H.; PAAP, R. Forecasting with periodic autoregressive time series models. *Econometric Institute Report 9927/A*, 1999.
- GARDNER, W. A.; FRANKS, L. E. Characterization of cyclostationary random signal processes. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 21, p. 4–14, 1975.
- GLADYSHEV, E. G. Periodically correlated random sequences. *Soviet Math. Dokl.*, v. 2, p. 385–88, 1961.
- HURD, H. L.; GERR, N. L. Graphical methods for determining the presence of periodic correlation. *Journal of Time Series Analysis*, v. 12, p. 337–50, 1991.
- HURD, H. L.; MIAMEE, A. *Periodically Correlated Random Sequences: Spectral Theory and Practice*. [S.l.]: Wiley Inter-Science, 2007.
- LEE, S.; NA, O. Test for parameter change in stochastic processes based on conditional least-squares estimator. *Journal of Multivariate Analysis*, v. 93, p. 375–93, 2005.
- LUND, R. B.; BASAWA, I. V. Recursive prediction and likelihood evaluation for periodic arma models. *Journal of Time Series Analysis*, v. 20, p. 75–93, 2000.
- LUND, R. B. et al. Climatological time series with periodic correlation. *Journal of Climate*, v. 8, p. 2787–2809, 1995.
- MCLEOD, A. I. Parsimony, model adequacy and periodic correlation in time series forecasting. *The International Statistical Review*, v. 61, 1993.
- MCLEOD, A. I. Diagnostic checking periodic autoregression models with application. *Journal of Time Series Analysis*, v. 15, p. 221–33, 1994.
- NEMATOLLAHI, A. R.; RAO, T. S. On the spectral density estimation of periodically correlated (cyclostationary) time series. *The Indian Journal of Statistics*, v. 67, p. 568–89, 2005.

- PRIESTLEY, M. B. *Spectral Analysis and Time Series*. [S.l.]: Academic press, 1981.
- SAID, S. E.; DICKEY, D. A. Testing for unit roots in autoregressive moving average models of unknown order. *Biometrika*, v. 71, p. 599–607, 1984.
- SARNAGLIA, A. J. Q.; REISEN, V. A.; LÉVY-LEDUC, C. Robust estimation of periodic autoregressive processes in the presence of additive outliers. *To appear*, 2009.
- SHAO, Q.; LUND, R. B. Computation and characterization of autocorrelations and partial autocorrelations in periodic arma models. *Journal of Time Series Analysis*, v. 25, p. 259–72, 2004.
- TIAO, G. C.; GRUPE, M. R. Hidden periodic autoregressive-moving average models in time series data. *Biometrika*, v. 67, p. 365–73, 1980.
- VECCHIA, A. V.; BALLERINI, R. Testing for periodic autocorrelations in seasonal time series. *Biometrika*, v. 78, p. 53–63, 1991.
- VOGELSANG, T. J.; FRANSES, P. H. Testing for common deterministic trend slopes. *To appear*, 2001.
- WEI, W. W. S. *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods*. [S.l.]: Addison Wesley, 1994.
- WHITTLE, P. The analysis of multiple stationary time series. *Journal of Royal Statistical Society*, v. 15, p. 125–39, 1953.
- WIDOM, H. Asymptotic behavior of block toeplitz matrices and determinants. *Advances in Mathematics*, v. 13, p. 284–322, 1974.
- WYLOMANSKA, A. Spectral measures of parma sequences. *Journal of Time Series Analysis*, v. 29, p. 1–13, 2007.

Anexos

Prova do Lema 1

Suponha que Σ seja uma matriz *block toeplitz* de dimensão $(2N - 1)s \times (2N - 1)s$ com entradas dadas por $[\Sigma]_{kj} = \Gamma(k - j)$. Suponha que a Suposição 1 seja válida. Então $\Gamma(\tau) = \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$, onde $\mathbf{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \Gamma(\tau) e^{-i\omega\tau}$. Tem-se que Γ e \mathbf{f} são matrizes $s \times s$.

Suponha que a matriz $\mathbf{f}(\omega)$ satisfaz a Suposição 2. Então, para cada ω , a matriz inversa de $\mathbf{f}(\omega)$ existe e é dada por $\mathbf{f}^{-1}(\omega)$. Sejam $a(\tau) = \int_0^{2\pi} \mathbf{f}^{-1}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$ os coeficientes da série de Fourier $\mathbf{f}^{-1}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} a(\tau) e^{-i\omega\tau}$. Considere a matriz *block toeplitz* \mathbf{A} com entradas dadas por $[\mathbf{A}]_{kj} = a(k - j)/4\pi^2$ e o produto $\mathbf{C} = \Sigma\mathbf{A}$, então as entradas de \mathbf{C} são dadas por

$$\begin{aligned} \{\mathbf{C}\}_{kj} &= \sum_{m=1}^N \Gamma(k - m) \frac{a(m - j)}{4\pi^2} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^N \left\{ \left[\int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\omega) e^{i\omega(k-m)} d\omega \right] \left[\int_0^{2\pi} \mathbf{f}^{-1}(\lambda) e^{i\lambda(m-j)} d\lambda \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^N \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\omega) \mathbf{f}^{-1}(\lambda) e^{i(k\omega - j\lambda)} e^{im(\lambda - \omega)} d\omega d\lambda \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \mathbf{f}(\omega) \mathbf{f}^{-1}(\lambda) e^{i(k\omega - j\lambda)} \sum_{m=1}^N [e^{im(\lambda - \omega)}] \right\} d\omega d\lambda \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\approx \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_1=1}^N \sum_{l_2=1}^N \left\{ \mathbf{f}(\omega_{l_1}) \mathbf{f}^{-1}(\lambda_{l_2}) e^{i(k\omega_{l_1} - j\lambda_{l_2})} \sum_{m=1}^N [e^{im(\lambda_{l_2} - \omega_{l_1})}] \left(\frac{2\pi}{N} \right)^2 \right\} \quad (5.3)$$

onde $\omega_l = \lambda_l = \frac{2\pi l}{N}$, $l = 1, \dots, N$, são as frequências de Fourier.

A igualdade 5.2 é válida desde que as duas integrais em 5.1 existam, isso ocorre pois $\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |\{\Gamma(\tau)\}_{kj}| < \infty$ (Suposição 1) e $\det\{\mathbf{f}(\omega)\} \neq 0$, $\omega \in [0, 2\pi)$ (Suposição 2). Isso

possibilita a passagem da soma pra dentro da integral. A aproximação em 5.3 é feita através da soma de Reimann que, quando $N \rightarrow \infty$, converge para a integral em 5.2.

É bem conhecido e pode ser encontrado em WEI (1994), pag. 210, o fato de que

$$\sum_{m=1}^N e^{i2\pi l_2 m/N} e^{-i2\pi l_1 m/N} = \sum_{m=1}^N e^{i\lambda_{l_2}} e^{-i\omega_{l_1}} = \sum_{m=1}^N e^{im(\lambda_{l_2} - \omega_{l_1})} = \begin{cases} N, & l_1 = l_2 \\ 0, & l_1 \neq l_2 \end{cases}.$$

Portanto vem que

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}]_{kj} &\approx \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_1=1}^N \sum_{l_2=1}^N \left\{ \mathbf{f}(\omega_{l_1}) \mathbf{f}^{-1}(\lambda_{l_2}) e^{i(k\omega_{l_1} - j\lambda_{l_2})} \sum_{m=1}^N [e^{im(\lambda_{l_2} - \omega_{l_1})}] \left(\frac{2\pi}{N}\right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l=1}^N \left\{ \mathbf{f}(\omega_l) \mathbf{f}^{-1}(\lambda_l) e^{i(k\omega_l - j\lambda_l)} N \frac{4\pi^2}{N^2} \right\} \\ &\approx \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l=1}^N \left\{ \mathbf{f}(2\pi l/N) \mathbf{f}^{-1}(2\pi l/N) e^{i2\pi l(k-j)/N} \frac{4\pi^2}{N} \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l=1}^N \left\{ \mathbf{I}_{s \times s} e^{i2\pi l(k-j)/N} \frac{4\pi^2}{N} \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{4\pi^2}{N} \mathbf{I}_{s \times s} \sum_{l=1}^N \{ e^{i2\pi l(k-j)/N} \} = \frac{1}{N} \mathbf{I}_{s \times s} \sum_{l=1}^N \{ e^{i2\pi l(k-j)/N} \} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{N} \mathbf{I}_{s \times s} N = \mathbf{I}_{s \times s}, & k = j \\ \frac{1}{N} \mathbf{I}_{s \times s} 0 = \mathbf{0}_{s \times s}, & k \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, tem-se que \mathbf{A} é a inversa assintótica de Σ , pois é possível tornar $\mathbf{C} = \Sigma \mathbf{A}$ mais próximo de $\mathbf{I}_{N_s \times N_s}$ bastando tomar N suficientemente grande. De modo análogo vê-se que $\mathbf{C} = \mathbf{A} \Sigma \approx \mathbf{I}_{N_s \times N_s}$.

□

Prova da Proposição 1

Para qualquer vetor \mathbf{y} , tem-se que o termo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2N} \mathbf{y}^T \Sigma^{-1} \mathbf{y} &= \frac{1}{2N} \text{tr} (\mathbf{y}^T \Sigma^{-1} \mathbf{y}) = \frac{1}{2N} \text{tr} (\Sigma^{-1} \mathbf{y} \mathbf{y}^T) \\ &= \frac{1}{2N} \text{tr} \left\{ \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N [\Sigma^{-1}]_{km} [\mathbf{y} \mathbf{y}^T]_{mk} \right\} \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\approx \frac{1}{2N} \text{tr} \left\{ \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \left[\frac{a(k-m)}{4\pi^2} \mathbf{y}_m \mathbf{y}_k^T \right] \right\} \quad (5.5)$$

$$= \frac{1}{8\pi^2 N} \text{tr} \left\{ \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \left[\left(\int_0^{2\pi} \mathbf{f}^{-1}(\omega) e^{i\omega(k-m)} d\omega \right) \mathbf{y}_m \mathbf{y}_k^T \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{8\pi^2 N} \text{tr} \left\{ \int_0^{2\pi} \mathbf{f}^{-1}(\omega) \left[\sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \mathbf{y}_m \mathbf{y}_k^T e^{i\omega(k-m)} \right] d\omega \right\}$$

$$= \frac{1}{8\pi^2 N} \text{tr} \left\{ \int_0^{2\pi} \mathbf{f}^{-1}(\omega) \left| \sum_{k=1}^N \mathbf{y}_k e^{i\omega k} \right| d\omega \right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \text{tr} \left\{ \int_0^{2\pi} \mathbf{f}^{-1}(\omega) \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{k=1}^N \mathbf{y}_k e^{i\omega k} \right| d\omega \right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \text{tr} \left\{ \int_0^{2\pi} \mathbf{f}^{-1}(\omega) \mathbf{P}(\omega) d\omega \right\}$$

onde $\mathbf{P}(\omega) = \left| \sum_{k=1}^N \mathbf{y}_k e^{i\omega k} \right|^2 = \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \hat{\Gamma}(\tau) e^{-i\omega\tau}$ é o periodograma. Têm-se que, pelo Lema 1, quando $N \rightarrow \infty$, a Equação 5.5 é exatamente a Equação 5.4, o que prova a Proposição 1.

□