

# Emaranhamento em Sistemas de Partículas Indistinguíveis

Fernando Iemini de Rezende Aguiar

Agosto de 2011

---

---

# Emaranhamento em Sistemas de Partículas Indistinguíveis

---

---

Fernando Iemini de Rezende Aguiar

Orientador:

Prof. Dr. Reinaldo Oliveira Vianna

Dissertação apresentada à UNIVERSIDADE FEDERAL  
DE MINAS GERAIS - UFMG, como requisito parcial  
para a obtenção do grau de MESTRE EM FÍSICA.

Belo Horizonte  
Brasil  
Agosto de 2011

# Dedicatória

A minha avó **Clotilde Iemini de Rezende Brasil**,  
a qual sempre foi e sempre será meu grande *exemplo*

# Agradecimentos

A tarefa de agradecer a todos que fizeram parte, direta ou indiretamente, deste trabalho não é de forma alguma uma tarefa simples, visto a grande quantidade de nomes a serem lembrados e o esquecimento de alguns é natural. Agradeço primeiramente, e principalmente, a minha família, minha avó Clotilde Iemini de Rezende Brasil, meus pais Rogers Tadeu Aguiar e Thaís Iemini de Rezende Aguiar, e a meus irmãos Thiago e Marcelo Iemini de Rezende Aguar, cujo apoio e confiança em mim depositados foram imprescindíveis nesta aventura. Aos meus companheiros de trabalho e discussões quânticas, Andre Tanus, Leonardo, Mateus Araújo, Marco Túlio, Thiago Debarba, Thiago Maciel, e claro ao meu orientador Reinaldo O. Vianna, cujas sugestões e conselhos foram de importância fundamental. Aos meus amigos de longa data Lucas Costa Fonseca, Henrique Guimarães, Iury Marques Paiva e todos os demais moradores e visitantes do Consulado dos Arantes, a meu primo André Iemini Godoy, aos companheiros de banda da Clockwork e ao pessoal do basquete, a todos estes pelos momentos e experiências inesquecíveis, pelas viagens memoráveis e conversas prazerosas. Por fim, agradeço a todos que tornaram meu caminho o mais agradável possível.

-Este trabalho teve o apoio financeiro direto e indireto da **CAPES**, da **FAPEMIG** e do **CNPq**.

# Resumo

Neste trabalho abordamos essencialmente o tema da quantificação de emaranhamento em sistemas quânticos realizando uma análise detalhada desde seus princípios fundamentais, ou seja, dos postulados da teoria de medidas de emaranhamento, justificando desta forma as propriedades esperadas de "bons quantificadores" de emaranhamento. Apresentamos alguns exemplos de medidas de emaranhamento para partículas distinguíveis, e abordamos por fim o caso em que as partículas são indistinguíveis uma das outras. Vimos que neste caso a quantificação do emaranhamento é um assunto de grandes controvérsias com diferentes propostas para sua abordagem, cada qual com sua interpretação singular. Após discorrermos sobre tais abordagens, analisando suas principais características e fundamentações, apresentamos nosso método proposto para quantificá-las com base na utilização das testemunhas de emaranhamento.

# Abstract

In this work we studied the issue of quantification of entanglement in quantum systems performing a detailed analysis since its fundamental principles, i.e, the postulates of the theory of entanglement measures, and thus justifying the expected properties of "good quantifiers" of entanglement. We presented some examples of entanglement measures for distinguishable particles, and we approach finally the case where the particles are indistinguishable from each other. We saw that, in this case, the quantification of entanglement is a subject of great controversies with different proposals to their approach, each with its own singular interpretation. After discussing these approaches, analysing their main characteristics and foundations, we present our proposed method to quantify them based on the use of entanglement witnesses.

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>iii</b>
<b>Resumo</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Conceitos Básicos</b>	<b>3</b>
1.1 Formalismo e Fundamentos da Mecânica Quântica . . . . .	3
1.2 Teorema da Mistura de Schrödinger . . . . .	5
1.3 Decomposição de Schmidt . . . . .	6
<b>2 Emaranhamento Quântico</b>	<b>8</b>
2.1 Introdução ao emaranhamento quântico . . . . .	8
2.2 Medidas de emaranhamento . . . . .	11
2.2.1 Emaranhamento de Formação ( $E_{0F}$ ) . . . . .	14
2.2.2 Robustezas do emaranhamento . . . . .	22
2.3 Testemunhas de Emaranhamento . . . . .	24
2.3.1 Robustezas (via testemunhas de emaranhamento) . . . . .	25
2.3.2 SDP (Semi-definite-program) . . . . .	27
<b>3 Emaranhamento em Sistemas de Partículas Indistinguíveis</b>	<b>29</b>
3.1 O Espaço de Fock . . . . .	29
3.2 Emaranhamento de modos . . . . .	32
3.3 Emaranhamento de partículas . . . . .	34
3.4 Correlações Quânticas . . . . .	37
3.4.1 Decomposição de Slater . . . . .	38
3.4.2 Entropia de Von Neumann . . . . .	40
3.4.3 Concorrência de Schliemann . . . . .	41
<b>4 Testemunhas de Emaranhamento em Sistemas de Partículas Indistinguíveis</b>	<b>43</b>
4.1 Emaranhamento de Modos, Emaranhamento de Partículas . . . . .	43
4.2 Correlações Quânticas . . . . .	44
4.3 Robusteza Generalizada em Sistemas Fermiônicos . . . . .	47
4.3.1 Modelo de Hubbard . . . . .	48

<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>51</b>
<b>A Matrizes Complexas Simétricas e Anti-simétricas</b>	<b>52</b>
<b>B Dualidade e Teoria de Optimização</b>	<b>55</b>
<b>Bibliography</b>	<b>57</b>

# Introdução

A noção de emaranhamento é considerada uma das principais características da mecânica quântica, sendo tema de estudos em diversas áreas recentemente. Podemos apontar alguns exemplos de sua utilização tais como no teleporte quântico, criptografia quântica, computação quântica, e outros, sendo visto como um "recurso" para se realizar tarefas antes inconcebíveis classicamente. Desta forma, é de suprema importância tanto seu melhor entendimento quanto sua quantificação em sistemas quânticos, sendo estes um dos principais desafios da teoria quântica moderna.

Este trabalho consiste então, essencialmente, no tema da quantização do emaranhamento, onde realizamos uma análise detalhada dos principais fundamentos, ou postulados, da teoria de medidas de emaranhamento, apontando quais propriedades deveríamos esperar que "bons quantificadores" de emaranhamento satisfaçam. Veremos que algumas destas seguem de maneira trivial, sendo bastante óbvias ao nosso senso físico, enquanto outras necessitam de uma análise mais minuciosa.

Outro tema importante que será abordado neste trabalho diz respeito ao emaranhamento de partículas "*indistinguíveis*", pois apesar do assunto emaranhamento ser amplamente estudado em sistemas cujas partículas encontram-se macroscopicamente separadas uma das outras, sendo desta forma distinguíveis, muito pouca atenção foi dada ao caso onde essa separação é muito pequena, tal que o *overlap* entre suas funções de onda não mais seja desprezível. Para estes casos temos de levar em conta a indistinguibilidade das partículas, e o estudo do emaranhamento vem sendo um assunto que gera bastante controvérsias, possuindo diversas abordagens a seu tratamento. Iremos discorrer sobre algumas destas abordagens, analisando suas principais características e fundamentações.

Por fim, apresentaremos nosso método proposto para quantificar o emaranhamento em sistemas de partículas indistinguíveis, o qual baseia-se nas denominadas "testemunhas de emaranhamento", que são operadores hermitianos capazes de indicar, ou "testemunhar", o emaranhamento dos estados quânticos, constituindo desta forma em uma ótima ferramenta para o estudo do emaranhamento em sistemas quânticos.

Este trabalho é organizado da seguinte maneira.

No Capítulo I nós brevemente introduzimos os conceitos básicos da teoria quântica, assim como o formalismo matemático baseado nas denominadas matrizes densidade para a descrição dos estados quânticos. Uma boa referência para uma leitura mais abrangente dos conceitos tratados neste capítulo pode

ser encontrada no capítulo II do livro "Quantum Computation and Quantum Computation", por Nielsen e Chuang[22].

No Capítulo II introduzimos o conceito de emaranhamento, e discorremos sobre os postulados da teoria de medidas de emaranhamento. Apresentamos então alguns exemplos de quantificadores bastante conhecidos na literatura, tais como o Emaranhamento de Formação, Concorrência de Wotter, Robustezas; os quais nos serão úteis mais adiante ao tratarmos com partículas indistinguíveis. No final do capítulo definimos as testemunhas de emaranhamento, mostrando como podem ser utilizadas a fim de quantificar o emaranhamento em sistemas quânticos e como os denominados programas semidefinidos (SDP) podem auxiliar na determinação destas testemunhas.

No Capítulo III analisamos as diferentes abordagens em relação ao tratamento do emaranhamento em sistemas de partículas indistinguíveis; e por fim, no Capítulo IV, apresentamos nossa proposta para se quantificar tais diferentes abordagens, utilizando as testemunhas de emaranhamento.

# Conceitos Básicos

Iremos neste capítulo introduzir o formalismo matemático utilizado neste trabalho para a descrição dos estados quânticos, o qual baseia-se nas denominadas matrizes densidade. Apresentaremos desta forma os postulados fundamentais da mecânica quântica sob tal formalismo, assim como algumas propriedades particulares das matrizes densidade que nos serão bastante úteis nos capítulos posteriores.

## 1.1 Formalismo e Fundamentos da Mecânica Quântica

Um estado puro, na notação de Dirac, é representado por um vetor  $|\psi\rangle$  pertencente ao espaço de Hilbert,  $\mathcal{H}$ . Se o espaço de Hilbert for de dimensão finita ele será simplesmente o espaço vetorial  $\mathcal{C}^N$  de vetores unitários dotados com um tipo particular de produto escalar. Pode-se associar, de forma canônica, uma correspondência entre o estado no espaço de Hilbert com seu "estado dual", definido sobre o espaço de Hilbert dual. Dado então um espaço de Hilbert de dimensão "n",  $\mathcal{H}^{(n)}$ , e uma base ortonormal  $\{|e_i\rangle\}$ , o estado quântico  $|\psi\rangle$  é representados na forma

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n c_{i\psi} |e_i\rangle \quad ; \quad \sum_{i=1}^n |c_{i\psi}|^2 = 1; \quad (1.1)$$

e seu dual  $\langle\psi|$  por,

$$\langle\psi| = \sum_{i=1}^n c_{i\psi}^* \langle e_i|; \quad (1.2)$$

onde  $\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$ .

O produto escalar de dois vetores  $|\psi\rangle, |\phi\rangle$  neste espaço é dado por,

$$\langle\psi|\phi\rangle = \sum_{i,j=1}^n c_{i\psi}^* c_{i\phi} \langle e_i|e_j\rangle \quad (1.3)$$

A normalização do estado advém da interpretação probabilística da mecânica quântica onde dado  $|\psi\rangle$ , a probabilidade de que o sistema se encontre no estado  $|e_i\rangle$  é dada por  $p(i) = |\langle e_i|\psi\rangle|^2 = |c_i|^2$ .

Podemos definir desta notação operadores da forma  $|\psi\rangle\langle\phi|$ , os quais podem ser representados por matrizes  $n \times n$ . Um estado puro pode desta forma ser representado por uma matriz  $\rho$ , denominada matriz densidade, da seguinte maneira,

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (1.4)$$

Tal formulação por matrizes densidade é de extrema utilidade, visto que nos permite representar misturas de vários estados puros da forma acima, ou seja, estados formados por um determinado ensemble  $\{p_i, |\psi\rangle_i\langle\psi|\}$ . Estados deste tipo são denominados estados mistos:

$$\rho = \sum p_i |\psi\rangle_i\langle\psi| \quad (1.5)$$

Temos então, de forma geral, que uma matriz densidade  $\rho$  representando um estado puro ou misto, deve sempre satisfazer as seguintes propriedades:

$$\cdot \text{normalizada} \quad \text{Tr}(\rho) = 1 \quad (1.6)$$

$$\cdot \text{positiva} \quad \rho \geq 0 \quad (1.7)$$

A primeira propriedade segue do fato dos estados puros serem normalizados, conforme já dito anteriormente, juntamente com a observação de que os estados mistos são dados por uma decomposição convexa de estados puros,

$$\text{Tr}(\rho) = \sum p_i \underbrace{\text{Tr}(|\psi\rangle_i\langle\psi|)}_1 = \sum p_i = 1 \quad (1.8)$$

A segunda propriedade segue da condição de que as probabilidades de medições dos observáveis, ou "probabilidades de transição" dos estados quânticos, devem ser números reais não negativos. Seja  $|\epsilon\rangle$  um estado qualquer do espaço de Hilbert,

$$\begin{aligned} \langle\epsilon|\rho|\epsilon\rangle &= \sum p_i \langle\epsilon|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\epsilon\rangle \\ &= \sum p_i |\langle\epsilon|\psi_i\rangle|^2 \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Podemos agora, definido as matrizes densidade, apresentar os postulados fundamentais da mecânica quântica no que diz respeito a representação de sistemas físicos, a maneira como evoluem temporalmente e a forma pela qual obtemos suas informações.

**Postulado 1. (Representação de um sistema físico).** Qualquer sistema físico pode ser completamente descrito por uma matriz densidade  $\rho$  atuando sobre o espaço de Hilbert. Se o sistema é dado pelo ensemble  $\{p_i, \rho_i\}$ , sua matriz densidade é dada por  $\rho = \sum p_i \rho_i$ .

**Postulado 2. (Representação de sistemas compostos).** O espaço de estados de um sistema composto  $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$ , é dado pelo produto tensorial do espaço de

suas componentes  $\mathcal{H}_i$ , ou seja,  $\mathcal{H}_{\mathcal{T}} = \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$ .

**Postulado 3. (Evolução temporal).** Um sistema quântico fechado evolui temporalmente por transformações unitárias. Para um estado puro sua evolução é dada pela equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H|\psi\rangle, \quad (1.10)$$

onde  $H$  é o Hamiltoniano do sistema e  $\hbar$  é a constante de Planck/ $2\pi$ . Para o caso geral, incluindo estados mistos, segue então que

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho = [H, \rho] \quad (1.11)$$

Se o sistema interage com o meio externo, sua evolução temporal poderá ser dada de outras maneiras, incluindo transformações não-unitárias.

**Postulado 4. (Medidas seletivas).** Considere o espaço de possíveis resultados de medida sobre um sistema físico como sendo constituído por  $k$  elementos, cada qual associado a operadores de medida  $M_k$ , tal que satisfaçam a relação de completeza,

$$\sum_k M_k^\dagger M_k = I \quad (1.12)$$

Dado o estado inicial  $\rho$ , a probabilidade de se medir o  $i$ -ésimo resultado é dada por

$$p(i) = \text{Tr}(M_i \rho M_i^\dagger), \quad (1.13)$$

e o sistema após a medição irá colapsar sobre o respectivo estado,

$$\rho' \rightarrow \rho_i = \frac{M_i \rho M_i^\dagger}{\text{Tr}(M_i \rho M_i^\dagger)} \quad (1.14)$$

## 1.2 Teorema da Mistura de Schrödinger

A representação de estados por matrizes densidades nos é de grande utilidade principalmente por nos capacitar a descrever estados mistos. Tais tipos de estados possuem no entanto propriedades bastante peculiares, tal como a não unicidade de sua representação, abordada por Schrödinger no seguinte teorema:

**Teorema 1.1 (Teorema da Mistura de Schrödinger).** *Uma matriz densidade  $\rho$  possuindo a forma diagonal*

$$\rho = \sum_{i=1}^N \lambda_i |e_i\rangle \langle e_i|, \quad (1.15)$$

*pode ser representada da forma*

$$\rho = \sum_{i=1}^M p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad ; \quad \sum p_i = 1 \quad ; \quad p_i \geq 0 \quad (1.16)$$

se e somente se existir uma matriz unitária  $U_{M \times M}$  tal que

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_i}} \sum_{j=1}^N U_{ij} \sqrt{\lambda_j} |e_j\rangle \quad (1.17)$$

Os estados  $|\psi_i\rangle$  são normalizados mas não necessariamente ortogonais.

*Proof.* A prova que as eq.1.16 e 1.17 implicam 1.15 segue diretamente. Cabe apenas a demonstração da situação inversa. A matriz unitária  $U_{M \times M}$  é tal que suas linhas correspondem ao tamanho do ensemble de estados puros e suas colunas a dependência destes com os autoestados da matriz densidade; definindo desta forma as  $N$  colunas da unitária por,

$$U_{ij} = \frac{\sqrt{p_i}}{\sqrt{\lambda_j}} \langle e_j | \psi_i \rangle \quad ; \quad j = 1, \dots, N \quad (1.18)$$

vê-se que

$$\sum_{j=1}^N U_{ij} \sqrt{\lambda_j} |e_j\rangle = \sqrt{p_i} \sum_j \langle e_j | \psi_i \rangle |e_j\rangle = \sqrt{p_i} |\psi_i\rangle \quad (1.19)$$

conforme eq.1.17. As  $N - M$  colunas restantes podem ser escolhidas de modo a manter a unitariedade da matriz. Para provar que tal matriz é unitária basta observar que

$$\begin{aligned} (U^\dagger U)_{ij} &= \sum_{k=1}^M U_{ik}^\dagger U_{kj} = \sum_k U_{ki}^* U_{kj} = \sum_k \frac{\sqrt{p_k}}{\lambda_i} \langle e_i | \psi_k \rangle^* \frac{\sqrt{p_k}}{\lambda_j} \langle e_j | \psi_k \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \sum p_k (\langle e_i | \psi_k \rangle \langle \psi_k | e_j \rangle)^* \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} (\langle e_i | \rho | e_j \rangle)^* = \delta_{ij} \end{aligned} \quad (1.20)$$

□

O teorema nos diz então que se o estado  $\rho$  for misto, podemos representá-lo por infinitos ensembles distintos  $\{p_i, \rho_i\}$  contanto que estes pertençam à sua extensão espacial, ou seja, que os vetores  $|\psi_i\rangle$  sejam linearmente dependentes dos autovetores  $|e\rangle$ .

### 1.3 Decomposição de Schmidt

Uma propriedade surpreendente quando analisamos o caso de estados puros bipartites segue do fato de ser sempre possível encontrar uma base "privilegiada" sobre o espaço de Hilbert para descrevê-lo (tal base no entanto não é única para todos os estados, dependendo do estado em questão). O motivo da denominação "privilegiada" pode ser vista através do teorema abaixo, obtido originalmente por Schmidt,

**Teorema 1.2 (Teorema de Schmidt).** *Seja  $|\psi\rangle$  um estado puro qualquer pertencente ao espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_{\mathcal{T}} = \mathcal{H}_1^{(L)} \otimes \mathcal{H}_2^{(K)}$ . Podemos sempre encontrar uma decomposição para tal estado da forma,*

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N \sqrt{\lambda_i} |e_i\rangle \otimes |f_i\rangle \quad ; \quad N \leq \min\{L, K\}, \quad (1.21)$$

onde  $\{|e_i\rangle\}, \{|f_i\rangle\}$  são bases ortonormais dos espaços  $\mathcal{H}_1^{(L)}, \mathcal{H}_2^{(K)}$  respectivamente. Tal decomposição é denominada "Decomposição de Schmidt".

*Proof.* A forma geral de se escrever um estado puro bipartite é dada por

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^K c_{ij} |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_j\rangle; \quad (1.22)$$

onde  $\{|\alpha_i\rangle\}, \{|\beta_j\rangle\}$  são vetores ortogonais pertencentes aos espaços  $\mathcal{H}_1^{(L)}, \mathcal{H}_2^{(K)}$  respectivamente.

Podemos utilizar o método de decomposição em valores singulares sobre a matriz complexa formada pelas constantes  $c_{ij}$ , obtendo desta forma  $C = UDV$ , onde  $U, V$  são matrizes unitárias e  $D$  é diagonal (tamanho  $m \leq \min\{L, K\}$  com elementos não negativos). O estado pode ser dado então por

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^L \sum_m \sum_{j=1}^K U_{im} D_{mm} V_{mj} |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_j\rangle \quad (1.23)$$

Definindo  $|e_m\rangle = \sum_{i=1}^L U_{im} |\alpha_i\rangle$ ,  $|f_m\rangle = \sum_{j=1}^K V_{mj} |\beta_j\rangle$  e  $\lambda_m = D_{mm}$ , temos desta forma que

$$|\psi\rangle = \sum_m \lambda_m |e_m\rangle \otimes |f_m\rangle, \quad (1.24)$$

e conforme a definição pelas unitárias, os vetores dados acima serão ortogonais sobre seus respectivos espaços.  $\square$

# Emaranhamento Quântico

A noção de emaranhamento é considerada uma das principais características da mecânica quântica, sendo tema de estudos em diversas áreas recentemente. Desta forma, é de suprema importância tanto o entendimento quanto a quantificação do emaranhamento em sistemas quânticos, sendo estes um dos principais desafios da teoria quântica moderna. Veremos então quais propriedades "bons quantificadores" deveriam satisfazer, e apresentaremos alguns dos métodos propostos para lidar com o problema da quantificação do emaranhamento.

## 2.1 Introdução ao emaranhamento quântico

Alguns dos fenômenos mais intrigantes e também mais espetaculares da mecânica quântica são aqueles relacionados ao denominado "emaranhamento" de um sistema quântico. Por gerar efeitos tão contrários à nossa intuição física revela-se um assunto de difícil interpretação e até mesmo uma definição formal concisa sobre o que é o emaranhamento ainda é um problema em aberto. Ao tratarmos do assunto somos levados a rever alguns de nossos conceitos básicos da natureza, tal como o sentido de localidade de um sistema quântico, analisando o quanto dois sistemas separados podem ser considerados independentes um do outro, ou até mesmo o significado do termo "existir", questionando sobre as condições necessárias para afirmarmos que tal objeto possui uma realidade física. Iremos primeiramente rever alguns dos trabalhos pioneiros sobre o emaranhamento e suas principais idéias.

O assunto foi primeiramente abordado no artigo seminal publicado em 1935, por Einstein, Podolsky and Rosen [15], o qual deu origem ao famoso "paradoxo EPR". A principal questão posta em prova neste artigo resume-se em: "a teoria quântica é uma teoria completa?" Ou seja, ela é capaz de descrever a realidade física? Como veremos, de acordo com as suposições impostas no argumento EPR, a teoria quântica mostra-se falha neste sentido. Analisemos então seus argumentos e suposições com mais detalhes.

O ponto central para a validade(ou completeza) de uma teoria física no argumento EPR é a condição de que ela represente o que seus autores denominam de "elementos de realidade". Tais elementos de realidade são as propriedades físicas do sistema quântico em questão as quais existem independentemente da observação, ou seja, se podemos prever com absoluta certeza(probabilidade igual a um) o valor de uma quantidade física de um sistema quântico sem perturbá-lo, então existe um elemento de realidade correspondente a esta quantidade . Por exemplo, o spin na direção  $\vec{v}$  de uma partícula que se encontra em um dos autoestados do operador  $\vec{v} \cdot \vec{\sigma}$ , ou o momento  $\vec{p}$  de uma partícula em um dos autoestados do operador  $\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$ , são quantidades que podem ser previstas com absoluta certeza possuindo desta forma um elemento de realidade física correspondente. Apesar de tais considerações serem bastante plausíveis, veremos que tais idéias parecem não estar presentes na teoria quântica ao analisarmos estados do tipo emaranhados.

Considere o caso de duas partículas que após interagirem mutuamente por um determinado tempo são separadas espacialmente. Pode ser que após a separação espacial o estado global do sistema seja dado por um estado produto, ou seja, um estado da forma  $|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$ , onde  $|\psi_A\rangle \in H_A$  e  $|\psi_B\rangle \in H_B$  são as representações de estado das partículas (iremos considerar, por simplicidade, apenas estados puros). Vemos que a representação de estado de uma partícula não é alterada ao realizarmos operações na outra partícula (operações do tipo  $I \otimes \phi_B$  ou  $\phi_A \otimes I$ ); estados deste tipo são chamados separáveis.

Poderíamos no entanto, após a interação e separação das partículas, gerar um estado global o qual não possui a forma de um estado produto como no caso anterior. Um exemplo simples pode ser dado pelo estado singleto, considerando partículas com spin 1/2:

$$|\psi\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.1)$$

onde  $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$  são autoestados do operador spin  $\sigma_z$ . Tal estado é também conhecido como estado EPR(ou estado de Bell) e representa um estado emaranhado pois, como veremos, possui propriedades bastante peculiares. O ponto central encontra-se no fato de que a representação de estado de uma das partículas é agora influenciada pelas operações realizadas na outra partícula; e este é um fato no mínimo intrigante. No argumento EPR é feito então uma forte suposição sobre o assunto, a de que apesar da representação de estado ser alterada por operações não-locais, o estado real da partícula deve manter-se inalterado,ou melhor dizendo, " the real factual situation of the system  $S_2$  is independent of what is done with the system  $S_1$ , which is spatially separated from the former" [14]. Tal suposição é denominada suposição de localidade. Vejamos então que consequências tais considerações geram sobre a teoria quântica.

Se medirmos, por exemplo, o observável  $\vec{v} \cdot \vec{\sigma}$  (onde  $\vec{v}$  é uma direção arbitrária) em uma das partículas e obtivermos o valor  $+1/2$ , o estado global

irá colapsar de forma que o mesmo observável para a outra partícula possui o valor, com absoluta certeza, de  $-1/2$ . Devido ao fato de podermos prever com certeza o resultado destas medidas para uma das partículas, tais quantidades devem corresponder a elementos de realidade, conforme definidas anteriormente (note que estamos considerando para tal afirmação a suposição de localidade).

Sabemos no entanto que utilizando a mecânica quântica estamos limitados a calcular apenas as probabilidades das medidas do observável  $I \otimes \vec{v} \cdot \vec{\sigma}$ , visto que o observável não comuta para direções arbitrárias de  $\vec{v}$ , contradizendo desta forma a afirmação de que tais quantidades correspondem a elementos de realidade. Chega-se então a conclusão de que a teoria quântica é uma teoria incompleta, não sendo capaz de representar os elementos de realidade física. Em suma, o argumento EPR baseia-se em duas suposições principais das quais uma teoria completa deve satisfazer: a suposição de localidade, e a suposição de realismo (elementos de realidade). Tais suposições são claramente plausíveis e esperadas considerando nossa intuição física sobre a natureza, mas segundo a teoria quântica parecem ser restritivas demais!

Logo após a publicação do EPR, o assunto parece ter gerado também interesse a outro grande nome da ciência; Schrödinger [28, 29] discute sobre a estranheza do fenômeno, sendo historicamente o autor da palavra "emaranhamento". Apesar de considerar desconfortante que a teoria permitisse fenômenos tão fora do comum, considerava-os como a característica principal da mecânica quântica: "I would not call that **one** but **the** characteristic trait of quantum mechanics; the one that enforces its entire departure from classical lines of thought" [28].

Consideremos novamente o estado singleto dado na eq.(2.1), de onde poderemos observar algumas propriedades singulares de estados emaranhados conforme apontadas por Schrödinger. Como sabemos, a representação de estado de uma das partículas é dada calculando-se o traço parcial,

$$\rho_A = Tr_B(\rho) \quad \rho_B = Tr_A(\rho) \quad (2.2)$$

Temos para o caso singleto que

$$\rho_{A(B)} = \frac{\mathbb{I}}{2} \quad (2.3)$$

Ve-se neste exemplo simples a situação peculiar de que apesar de conhecermos o estado global, nosso conhecimento a respeito de suas partes é nulo! Novamente parafraseando Schrödinger: "the best possible knowledge of a *whole* does not necessarily include the best possible knowledge of all its *parts*" [28]. Uma outra característica notável apontada em seus trabalhos diz respeito à possibilidade de, realizando-se medidas em apenas uma das partes do sistema, ser sempre possível levar a outra parte sobre qualquer estado puro que se queira com probabilidade não nula, contanto que este pertença ao suporte  $\rho_{A(B)}$  [29]. Considerando por exemplo o estado singleto acima, visto que o suporte  $\rho_{A(B)} = I$ , temos claramente o caso em que podemos levar o estado de uma das partículas sobre *qualquer* estado puro operando apenas sobre a outra partícula!

Apesar de suas propriedades extremamente perturbadoras, o assunto permaneceu sem maiores discussões durante vários anos. Mas no entanto uma questão ainda pairava no ar: seria a teoria quântica uma teoria incompleta segundo os argumentos EPR ou a natureza realmente possuiria comportamentos tão peculiares? Foi somente na década de 1960 que a questão novamente ganhou ênfase quando o físico John Bell propôs um teste experimental, conhecido como desigualdades de Bell [4], que seria capaz de invalidar os argumentos EPR. Testes experimentais foram então realizados anos mais tarde utilizando as desigualdades de Bell<sup>1</sup>, que mostravam afinal a impossibilidade de se atribuir realidade física local a sistemas quânticos, ou seja, a invalidade do EPR. Desde então o emaranhamento de sistemas quânticos vem sendo um assunto amplamente estudado em várias áreas da física possuindo aplicações dos tipos mais diversos.

Estamos agora, após os comentários realizados sobre algumas das características dos estados emaranhados e suas consequências, melhor preparados para apresentar uma definição formal sobre estados emaranhados.

**Definição 2.1.** *Considere o operador densidade  $\rho \in \mathcal{H}$ . Dada uma partição do espaço em  $N$  partes,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$ , diz-se que o estado é separável nesta partição, se for possível escrevê-lo por uma decomposição convexa de estados puros produto na forma*

$$\rho = \sum_i p_i \rho_1^i \otimes \rho_2^i \otimes \dots \otimes \rho_N^i \quad ; \quad \sum_i p_i = 1 \quad (2.4)$$

onde  $\rho_k \in \mathcal{H}_k$ . Um estado é considerado emaranhado em uma determinada partição se não for separável na mesma.

Temos que a determinação da separabilidade de um estado quântico arbitrário é um problema de difícil resolução na maioria dos casos, e sendo assim a simples constatação se um estado é emaranhado ou não já constitui um grande desafio. Diversos critérios para se determinar a separabilidade foram obtidos, tais como o famoso critério de Peres-Horodecki [24], dado como um caso particular do critério dos mapas positivos [19]. Não iremos no entanto nos ater, neste trabalho, ao problema de separabilidade de um estado quântico, mas sim a outra importante questão que surge naturalmente ao estudarmos estados emaranhados. Visto as diversas utilizações do emaranhamento para teleporte quântico, criptografia quântica e computação quântica, o emaranhamento pode ser visto como um “recurso” para se realizar tarefas antes inconcebíveis classicamente. Segue então que a quantificação deste “recurso” é um assunto de extrema importância e será o tema abordado nas próximas seções deste capítulo.

## 2.2 Medidas de emaranhamento

Certamente existem algumas propriedades que se esperam que um bom quantificador de emaranhamento deva satisfazer, algumas bastante óbvias tal como

<sup>1</sup>Uma boa referência atual pode ser dada por A. Aspect [2], onde realiza uma revisão sucinta dos principais testes experimentais e sua importância no que diz respeito ao argumento EPR e as desigualdades de Bell

se o estado for separável tal quantificador não deve acusar emaranhamento, até outras não tão simples relacionadas a não-localidade dos estados emaranhados ou ao limite assintótico de infinitas cópias. Iremos apresentá-las mais cuidadosamente, tentando discorrer da melhor forma sobre os motivos principais de sua fundamentação como postulados para medidas de emaranhamento. Separamo-as em três grupos: postulados óbvios **1,2**; postulados fundamentias **3,4**; e os postulados do regime assintótico **5,6**. Denotaremos  $E(\rho)$  uma medida qualquer de emaranhamento para o estado  $\rho$ .

$$(1) \text{ Discriminância: } E(\rho) = 0 \iff \rho \in S \quad (2.5)$$

Mesmo sendo tal condição bastante óbvia, existem algumas medidas que não a satisfazem. Um exemplo são as medidas baseadas na destilação do estado, pois visto a existência de estados emaranhados presos (estados que possuem emaranhamento mas que não podem ser destilados) o valor da medida sobre estes irá acusar emaranhamento nulo. Utiliza-se nestes casos uma relaxação do postulado, denominado discriminância fraca:

$$(1.a) \text{ Discriminância fraca: } E(\rho) = 0 \quad \text{se} \quad \rho \in S$$

$$(2) \text{ Normalização: } E(|\psi^-\rangle\langle\psi^-|) = 1 \quad (2.6)$$

Condição facilmente satisfeita sendo necessário apenas um reajuste na escala da medida em questão. O postulado de normalização é útil a fins de se comparar diferentes medidas de emaranhamento.

$$(3) \text{ Monotonicidade via LOCC: } E(\Lambda(\rho)) \leq E(\rho), \quad (2.7)$$

onde  $\Lambda$  representa operações locais combinadas com comunicação clássica entre os sistemas quânticos.

Tal postulado realça o caráter não-local dos sistemas emaranhados, enfatizando a necessidade de operações quânticas globais para se produzir o emaranhamento. Quaisquer correlações geradas por operações LOCC devem ser de natureza clássica apenas.

$$(4) \text{ Convexidade. } E\left(\sum_i p_i \rho_i\right) \leq \sum_i p_i E(\rho_i) \quad (2.8)$$

Muitas vezes justificado pela noção de perda de informação, sendo comum encontrá-lo por outros autores como postulado da "monotonicidade sob descarte de informação": parte-se de uma seleção de estados identificáveis  $\{\rho_i\}$  que aparecem com taxas  $\{p_i\}$  respectivamente, para uma mistura destes estados da forma  $\rho = \sum_i p_i \rho_i$ . Uma maneira de se analisar tal idéia de perda de

informação sob mistura segue observando que, no primeiro caso, de estados identificáveis  $\{\rho_i\}$ , podemos descrever o estado por

$$\rho = \sum_i |i_M\rangle\langle i_M| \otimes p_i \rho_i \quad (2.9)$$

onde  $\{|i_M\rangle\}$  corresponde a uma base ortonormal denominada de "marcador", visto que uma medida nesta base revela o estado  $\rho_i$  associado sem perturbá-lo. A perda de informação segue ao retirarmos nossos marcadores associados aos estados, ou seja, ao realizarmos o traço parcial sobre o marcador, obtendo a mistura

$$\rho' = Tr_M(\sum_i |i_M\rangle\langle i_M| \otimes p_i \rho_i) = \sum_i p_i \rho_i \quad (2.10)$$

Sendo a operação anterior uma operação local, temos a partir do postulado 3 que o estado final deve possuir um emaranhamento menor ou igual ao do estado inicial, concluindo desta maneira a monotonicidade sob a perda de informação. Mediante o raciocínio anterior poderíamos supor erroneamente que o postulado de convexidade é apenas um caso especial do postulado 3, mas note no entanto que o processo dado pela eq.(2.10) não é matematicamente igual a condição de convexidade (eq.2.8). De fato, existem medidas de emaranhamento que são monótonas via operações LOCC e não são convexas, tal como a negatividade logarítmica [25].

Sendo assim, a interpretação geralmente adotada do postulado deve ser feita com mais cuidado, visto que nem sempre o processo físico de perda de informação de um sistema quântico corresponde a condição matemática de convexidade da medida de emaranhamento.

De uma maneira geral, medidas que satisfazem os postulados anteriores ou suas relaxações são denominadas "monótonos de emaranhamento".

$$(5) \text{ Aditividade. } E(\rho \otimes \sigma) = E(\rho) + E(\sigma) \quad (2.11)$$

A propriedade de aditividade nos diz que se os sistemas quânticos não estão emaranhados, ou seja, o estado que os representa encontra-se na forma produto, então a medida de emaranhamento deve considerá-los como sistemas independentes. Tal propriedade no entanto é de difícil demonstração em geral, sendo possível na maioria das vezes apenas a demonstração de suas relaxações denominadas sub e super-aditividade:

$$(5.a) \text{ Sub-aditividade. } E(\rho \otimes \sigma) \leq E(\rho) + E(\sigma)$$

$$(5.b) \text{ Super-aditividade. } E(\rho \otimes \sigma) \geq E(\rho) + E(\sigma)$$

Muitos autores consideram também uma outra relaxação do postulado, denominada extensividade, onde apenas uma matriz densidade arbitrária é posta sob análise e a demonstração segue com mais facilidade:

$$(5.c) \text{ Extensividade. } E(\rho^{\otimes n}) = nE(\rho)$$

A utilização da extensividade como propriedade da medida de emaranhamento segue no contexto da analogia com a termodinâmica [26], onde

estuda-se o limite assintótico de infinitas cópias,  $n \rightarrow \infty$ . Veremos tal situação com mais detalhes ao analisarmos algumas medidas de emaranhamento particulares.

**(6) Continuidade.** Se  $\|\rho - \sigma\|_1 \rightarrow 0$ , então  $\|E(\rho) - E(\sigma)\| \rightarrow 0$  (2.12)

Tal postulado exige que estados vizinhos devem possuir emaranhamento similares. Assim como no postulado anterior, na maioria das vezes utiliza-se de uma relaxação do postulado, analisando seu comportamento apenas no limite assintótico de infinitas cópias:

**(6.a) Continuidade no regime assintótico.** Seja  $\mathcal{H}_A^n$  e  $\mathcal{H}_B^n$  sequências de espaços de Hilbert ( $\mathcal{H}_A^n = \mathcal{H}_A^{\otimes n}$ ,  $\mathcal{H}_B^n = \mathcal{H}_B^{\otimes n}$ ) e o espaço de Hilbert composto  $\mathcal{H}^n = \mathcal{H}_A^n \otimes \mathcal{H}_B^n$ . Para todas as sequências de estados  $\{\rho^n, \sigma^n\} \in \mathcal{H}^n$  ( $\rho^n = \rho^{\otimes n}$ ,  $\sigma^n = \sigma^{\otimes n}$ ) tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\rho^n - \sigma^n\|_1 \rightarrow 0, \quad \text{temos que} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|E(\rho^n) - E(\sigma^n)\|}{\ln(\dim \mathcal{H}^n)} \rightarrow 0 \quad (2.13)$$

Como pode-se notar, são vários os axiomas relacionados a uma medida de emaranhamento, e apesar das diversas medidas propostas na literatura cada uma delas satisfaz alguns dos axiomas apenas<sup>2</sup>. É comum encontrarmos também um axioma adicional aos demais, o qual baseia-se mais na utilidade prática da medida do que em suposições físicas:

**(7) Computabilidade.**

*Existe um método eficiente para calcular a medida de emaranhamento  $E$  para qualquer  $\rho$ .*

Iremos neste trabalho abordar algumas das medidas de emaranhamento existentes na literatura, analisando seu tratamento sob diversas maneiras, como veremos nos capítulos posteriores.

**2.2.1 Emaranhamento de Formação ( $E_{oF}$ )**

Fisicamente, o emaranhamento de formação  $E_{oF}$  é representado pela quantidade mínima de singletos necessária para, utilizando-se apenas de operações LOCC, construirmos o estado quântico em questão. Antes de discutirmos mais a fundo sobre o  $E_{oF}$ , vale a pena revermos algumas idéias relacionadas à "entropia de emaranhamento"  $E(\rho)$ , dada pela entropia de Von Neumann da matriz densidade reduzida  $S(\rho_A)$ ,

$$E(\rho) = S(\rho_A) = -\text{Tr}(\rho_A \ln \rho_A) \quad (2.14)$$

Sabe-se, de acordo com Bennet, Bernstein, Popescu and Schumacher [5], que é sempre possível obtermos um estado bipartite puro ou misto utilizando

<sup>2</sup>Um apanhado geral de diversas medidas de emaranhamento é realizado por Zyczkowski e Bengtsson [35], onde de uma forma sucinta aponta suas propriedades e constitui uma ótima fonte de referência para estudos mais aprofundados

apenas operações LOCC e um suprimento de estados maximamente emaranhados como única fonte de emaranhamento. Foi também demonstrado que no limite assintótico de infinitas cópias, a conversão via LOCC de  $n$  estados singletos em  $m$  estados  $\psi$ , caso  $\psi$  seja um estado bipartite puro, é uma conversão reversível com fidelidade igual a unidade, onde a razão  $n/m$  corresponde a entropia de emaranhamento  $E(\psi)$ ; ou seja,

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{n}{m} = E(\psi) \quad (2.15)$$

Devido a esta propriedade de interconvertibilidade no limite assintótico, define-se o emaranhamento de formação de estados puros como a entropia de emaranhamento,  $E_{oF}(\psi) = E(\psi)$ .

A extensão da medida para estados mistos é obtida pela construção da "convex roof", onde  $E_{oF}$  é dado como a quantidade mínima de emaranhamento de estados puros necessária para se construir o estado,

$$E_{oF} = \min_{\Omega_p} \sum_i p_i E(\rho_i) \quad (2.16)$$

, a minimização é realizada sobre todas as decomposições convexas possíveis do estado

$$\Omega_p = \{p_i, |\phi_i\rangle\langle\phi_i|\} \quad \begin{cases} \rho = \sum_i p_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| \\ p_i > 0 \\ \sum_i p_i = 1 \end{cases} \quad (2.17)$$

O emaranhamento de formação satisfaz por construção as propriedades de discriminância, e pode-se provar ser uma função convexa, monótona [6], contínua [21] e normalizável<sup>3</sup>; quanto à aditividade nenhuma prova ainda foi obtida e em relação a sua computabilidade constitui uma medida difícil de ser calculada para casos gerais, visto a necessidade de minimização sobre todas as decomposições possíveis do estado. Felizmente para alguns casos particulares foi possível encontrar sua forma analítica, sendo talvez o caso mais importante dado pela famosa equação de Concorrência de Wootters para sistemas de dois qubits. Iremos agora apresentar tal resultado obtido por Wootters [33], o qual é uma extensão de seu trabalho realizado em colaboração com S. Hill [17].

### Concorrência de Wootters

Primeiramente iremos definir o operador inversão temporal  $\mathcal{D}$ , também conhecido ao considerarmos os graus de liberdade de spin como "transformação spin flip",

$$D = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \mathcal{K}; \quad (2.18)$$

onde  $\sigma_y$  é a matriz de Pauli e  $\mathcal{K}$  é o operador de conjugação complexa, o qual age em um estado geral da forma  $\mathcal{K} \sum_{ij} c_{ij} |ij\rangle = \sum_{ij} c_{ij}^* |ij\rangle$ .

<sup>3</sup>Basta utilizar a quantidade re-escalada  $E'_{oF} = \frac{E_{oF}}{\ln 2}$ .

Utilizando tal operador de spin flip, podemos encontrar uma relação entre o emaranhamento de formação e uma quantidade denominada concorrência do estado. Analisemos primeiro o caso de estados de qubits puros, o qual segue de maneira bem simples.

**Theorem 2.1.** *Dado um estado bipartite puro  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  em um espaço de Hilbert de dimensão  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^2 \otimes \mathcal{H}^2$ , define-se uma quantidade denominada concorrência do estado quântico,*

$$C(|\psi\rangle\langle\psi|) = |\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle|; \quad (2.19)$$

onde  $|\tilde{\psi}\rangle = \mathcal{D}|\psi\rangle$  e  $\mathcal{D}$  é o operador inversão temporal. O emaranhamento de formação do estado pode ser representado como função de sua concorrência;

$$E_{oF}(|\psi\rangle\langle\psi|) = H\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}\right) \quad (2.20)$$

onde  $H(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$  é a entropia binária de Shannon.

*Proof.* Um estado bipartite puro pode ser dado na decomposição de Schmidt por  $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d c_i |e_i f_i\rangle$ . Sua matriz densidade reduzida possui a forma,

$$\rho_A = \sum_i c_i |e_i\rangle\langle e_i|$$

e o emaranhamento de formação é dado pela entropia de emaranhamento, onde no caso de qubits pode ser dado pela entropia binária de Shannon,

$$E_{oF}(\rho) = S(\rho_A) = H(c_1, 1 - c_1)$$

Da equação de concorrência do estado, eq.2.19, podemos facilmente obter a relação

$$C^2 = 4c_1 c_2 \quad \longrightarrow \quad c_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}$$

□

Vê-se que a entropia de formação  $E_{oF}$  é uma função monótona da concorrência para estados puros, e sendo assim podemos considerar a concorrência do estado propriamente como sua medida de emaranhamento.

Conforme veremos, para o caso geral de estados mistos ou puros de qubits a demonstração não segue de maneira trivial como a anterior.

**Theorem 2.2.** *Dado um estado  $\rho$  de dois qubits, puro ou misto, define-se sua concorrência por,*

$$C(\rho) = \max(0, \lambda_4 - \lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_1), \quad (2.21)$$

onde  $\lambda_i$  são as raízes quadradas, em ordem decrescente, dos valores singulares da matriz  $R = \rho \tilde{\rho}$ . Aqui,  $\tilde{\rho} = D\rho D^\dagger$ .

O emaranhamento de formação do estado pode ser representado como função de sua concorrência,

$$E_{oF}(\rho) = \mathcal{E}(C(\rho)) \quad (2.22)$$

onde  $\mathcal{E}(C) = H\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}\right)$ , sendo  $H$  é a entropia binária de Shannon.

*Proof.* A fim de deixarmos mais claro os procedimentos envolvidos na demonstração, iremos argumentar um pouco sobre suas motivações. Vê-se que a função  $\mathcal{E}$  é uma função convexa, e sendo assim podemos obter a seguinte relação para o emaranhamento de formação a partir de sua forma dada na eq.2.16, e o resultado do teorema 2.1:

$$\begin{aligned}
 E_{oF} &= \min_{\Omega_p} \sum_i p_i E(\rho_i) \\
 &= \min_{\Omega_p} \sum_i p_i \mathcal{E}(C(\rho_i)) \\
 &\geq \min_{\Omega_p} \mathcal{E}(\sum_i p_i C(\rho_i)) \\
 &= \min_{\Omega_p} \mathcal{E}(\langle C \rangle),
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

onde  $\langle C \rangle$  é denominada concorrência média.

Se o estado for emaranhado, iremos mostrar que sempre existe uma decomposição em estados puros tal que a concorrência de cada estado individual é igual a  $C(\rho)$ , conforme dado na eq.2.21, seguindo desta forma a igualdade na equação acima,  $E_{oF} = \mathcal{E}(C(\rho))$ . E veremos ainda que, para tal caso a decomposição é ótima, visto que nenhuma outra possui um valor menor para  $\langle C \rangle$ .

Se no entanto o estado for separável, mostraremos ser sempre possível obter uma decomposição em estados separáveis.

A fim de encontrarmos tais decomposições desejadas, utilizaremos do teorema da mistura de Schrödinger (Teorema.1.1).

$$\underbrace{\rho = \sum_i^r |v_i\rangle\langle v_i|}_{\text{dec. diagonal}} \xrightarrow{\text{Teor.mistura}} \underbrace{\rho = \sum_i^{m \geq r} |w_i\rangle\langle w_i|}_{\text{dec. estados puros}} \tag{2.24}$$

$$\text{,onde } \begin{cases} r = \text{rank do estado} \\ |w_i\rangle = \sum_j U_{ij}^* |v_j\rangle \\ |v_i\rangle = \sqrt{c_i} |e_i\rangle \end{cases}$$

Os vetores são ditos "sub-normalizados", no sentido que a norma  $\langle v_i | v_i \rangle$  corresponde ao  $i$ 'ésimo autovalor  $c_i$  do estado, e  $\langle w_i | w_i \rangle$  à probabilidade  $p_i$  de  $|w_i\rangle$  na decomposição.

*Decomposição 1.*

A primeira decomposição é obtida a partir da matriz unitária que diagonaliza uma determinada matriz  $W$ , definida por  $W_{ij} \equiv \langle w_i | \tilde{w}_j \rangle$ . Essa matriz possui algumas características principais:

·W é simétrica:

*Proof.*

$$\begin{aligned}
 W_{ji} &= \langle w_j | \tilde{w}_i \rangle \\
 &= \langle w_j | D | w_i \rangle \\
 &= (\langle w_i | D^\dagger | w_j \rangle)^* \\
 &= [\langle w_i | \mathcal{K}^\dagger(\sigma_y \otimes \sigma_y) | w_j \rangle]^* \\
 &= \langle {}^* w_i | \tilde{w}_j^* \rangle^* = \langle w_i | \tilde{w}_j \rangle = W_{ij}
 \end{aligned}$$

□

·W possui autovalores generalizados (valores singulares) reais não-negativos:

*Proof.* Esta é uma propriedade geral de matrizes complexas simétricas. Dado uma matriz complexa simétrica A, seus valores singulares correspondem a raiz quadrada dos autovalores da matriz hermitiana  $AA^\dagger$ . Seja então  $AA^\dagger|x\rangle = a|x\rangle$ , então

$$\langle x | a | x \rangle = a \langle x | x \rangle = \langle x | AA^\dagger | x \rangle = (A^* | x \rangle)^* (A^* | x \rangle), \quad (2.25)$$

e visto que  $\langle x | x \rangle \geq 0, \forall |x\rangle \in \mathcal{C}^n$ , conclue-se que

$$a = \frac{(A^* | x \rangle)^* (A^* | x \rangle)}{\langle x | x \rangle} \geq 0 \quad (2.26)$$

□

·O espectro de  $WW^*$  e  $\rho\tilde{\rho}$  coincidem:

*Proof.* Vejamos primeiro a relação entre os elementos das duas matrizes:

$$\begin{aligned}
 (\rho\tilde{\rho})_{ij} &= \frac{1}{\sqrt{c_i}\sqrt{c_j}} \langle w_i | \rho\tilde{\rho} | w_j \rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{c_i c_j}} \langle w_i | (\sum_k |w_k\rangle \langle w_k|) (\sum_l |\tilde{w}_l\rangle \langle \tilde{w}_l|) | w_j \rangle \\
 &= \frac{c_i}{\sqrt{c_i c_j}} \langle w_i | (\sum_l |\tilde{w}_l\rangle \langle \tilde{w}_l|) | w_j \rangle \\
 &= \sqrt{\frac{c_i}{c_j}} \sum_l \langle w_i | \tilde{w}_l \rangle \langle w_j | \tilde{w}_l \rangle^* \\
 &= \sqrt{\frac{c_i}{c_j}} \sum_l W_{il} W_{jl}^* = \sqrt{\frac{c_i}{c_j}} (WW^*)_{ij}
 \end{aligned}$$

Vemos que as duas matrizes são proporcionais a menos de um fator  $\sqrt{\frac{c_i}{c_j}}$  sobre seus elementos. Falta agora mostrar que as duas matrizes possuem os mesmo autovalores. Considere então  $\vec{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{id})^T, i = 1, 2, \dots, d$ ,  $d$ =dimensão do espaço de Hilbert, como sendo os autovetores de  $\rho\tilde{\rho}$ . Temos desta forma que

$$(\rho\tilde{\rho}) \vec{a}_i = \gamma_i \vec{a}_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, d \quad (2.27)$$

ou seja, para qualquer um de seus autovetores as seguintes igualdades são satisfeitas,

$$\sum_k (\rho\tilde{\rho})_{jk} a_{ik} = \gamma_i a_{ij} \quad ; j = 1, 2, \dots, d \quad (2.28)$$

Da equação acima e a relação entre as matrizes obtemos

$$\begin{aligned} \sum_k (\rho\tilde{\rho})_{jk} a_{ik} &= \sum_k (WW^*)_{jk} \sqrt{\frac{c_j}{c_k}} a_{ik} = \gamma_i a_{ij} \\ \sum_k (WW^*)_{jk} \frac{a_{ik}}{\sqrt{c_k}} &= \gamma_i \frac{a_{ij}}{\sqrt{c_j}} \end{aligned}$$

,seja  $a'_{mn} = \frac{a_{mn}}{\sqrt{c_n}}$ , então

$$\sum_k (WW^*)_{jk} a'_{ik} = \gamma_i a'_{ij}, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, d$$

A equação acima nos mostra que a matriz  $WW^*$  possui os mesmo autovalores que  $(\rho\tilde{\rho})$ , apenas com autovetores diferentes:

$$(WW^*) \vec{a}'_i = \gamma_i \vec{a}'_i; \quad \begin{cases} \text{para } i = 1, 2, \dots, d \\ a'_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{c_j}} \end{cases} \quad (2.29)$$

□

**Obs:** Vê-se aqui, diretamente da eq.2.29, que os autovalores generalizados (valores singulares)  $\lambda_i$  de  $W$  são iguais a raiz quadrada dos autovalores de  $\rho\tilde{\rho}$ .

Tendo em vista as propriedades da matriz  $W$  apontadas acima, utilizamos a unitária que a diagonaliza para construirmos o estados  $\{|x_i\rangle\}$  na decomposição de  $\rho$ .

$$\rho = \sum_{i=1}^4 |x_i\rangle\langle x_i|, \quad |x_i\rangle = \sum_{j=1}^r U_{ij}^* |w_j\rangle \quad (2.30)$$

Vê-se  $\langle x_i | \tilde{x}_j \rangle = (UWU^T)_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ , onde a matriz  $U$  pode ser ajustada de modo aos  $\lambda_i$ 's encontrarem-se em ordem decrescente.

Dividiremos nossa demonstração agora em dois casos:  $\lambda_4 - \lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_1 > 0$  e  $\lambda_4 - \lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_1 \leq 0$

**Caso 1.**  $\lambda_4 - \lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_1 > 0$

*Decomposição 2.*

Nossa segunda decomposição  $\{|y_i\rangle\}$  utiliza-se da primeira na forma

$$\rho = \sum_{i=1}^4 |y_i\rangle\langle y_i| \quad (2.31)$$

$$|y_1\rangle = |x_1\rangle, \quad |y_j\rangle = i|x_j\rangle \quad (2.32)$$

Considerando a matriz simétrica  $Y_{ij} \equiv \langle y_i | \tilde{y}_j \rangle$ , temos que

$$\text{Tr}(Y) = \lambda_4 - \lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_1 = C(\rho) \quad (2.33)$$

*Decomposição 3.*

Nossa terceira e última decomposição será aquela desejada, onde todos os estados possuem a mesma concorrência. Definimos então a decomposição  $\{|z_i\rangle\}$ ,

$$|z_i\rangle = \sum_j^r V_{ij}^* |y_j\rangle, \quad (2.34)$$

e a matriz simétrica  $Z_{ij} \equiv \langle z_i | \tilde{z}_j \rangle$ . Temos agora que

$$\begin{aligned} \text{Tr}(Z) &= \sum_i \langle z_i | \tilde{z}_i \rangle = \sum_i \langle z_i | z_i \rangle \frac{\langle z_i | \tilde{z}_i \rangle}{\langle z_i | z_i \rangle} = \sum_i p_{z_i} c(z_i) \\ &= \text{Tr}(VYV^T), \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde  $c(z_i)$  é definida como a pré-concorrência do estado. Vê-se da equação acima que se utilizarmos matrizes  $V$  ortogonais, nossa transformação para o novo ensemble preserva o traço da matriz  $Y$  (eq.2.33), e sendo assim a média sobre as pré-concorrências dos estados. Como tal média é preservada, podemos claramente obter um ensemble onde os estados possuam o mesmo valor de pré-concorrência. Vejamos como tal afirmação é sempre possível.

Do ensemble da decomposição 2, selecionamos os estados com maior e menor valor de pré-concorrência,  $|y_1\rangle$  e  $|y_4\rangle$  respectivamente. Utilizando agora transformações ortogonais que agem apenas nestes dois estados, construímos  $|z_a\rangle$  e  $|z_b\rangle$ , deixando os outros estados  $|y_i\rangle$  inalterados. Poderíamos supor, como exemplo, a transformação da forma

$$V = aI + bP; \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

onde  $I$  é a identidade e  $P$  é a matriz permutação entre os dois estados extremos.

Utilizando tais transformações estaremos tanto combinando os estados extremos assim como suas pré-concorrência. Por continuidade da transformação, podemos então construir  $|z_a\rangle$  de tal forma que sua pré-concorrência seja igual a  $C(\rho)$ . Repetindo o procedimento para os outros elementos restantes do ensemble vê-se claramente a possibilidade de construir um conjunto de estados  $\{|z_i\rangle\}$  com valores iguais de  $c(z_i) = C(\rho)$ .

Temos desta forma, lembrando que os estados são sub-normalizados  $|z_i\rangle = \langle z_i | z_i \rangle |\phi_i\rangle$ , a decomposição final em estados puros  $\{|\phi_i\rangle\}$  onde  $C(|\phi_i\rangle) = C(\rho)$ .<sup>4</sup>

<sup>4</sup>Veja que  $c(z_i) = \frac{\langle z_i | \tilde{z}_i \rangle}{\langle z_i | z_i \rangle} = \langle \phi_i | \tilde{\phi}_i \rangle = C(\rho) \rightarrow C(|\phi_i\rangle) = C(\rho)$ .

Para provarmos agora que tal decomposição é óptima, basta mostrarmos que nenhuma outra possui um valor menor para a concorrência média  $\langle C \rangle$ , conforme a discussão realizada no início da demonstração do teorema sobre a convexidade da função  $\mathcal{E}$  (eq.2.23).

A concorrência média de uma decomposição geral pode ser dada por uma equação similar a eq.2.35 , mas com o valor absoluto,

$$\langle C \rangle = \sum_i \left| (VYV^T)_{ii} \right| \quad (2.37)$$

onde V é uma matriz unitária  $m \times r$ , sendo m a quantidade de estados puros na decomposição e r o ranque do estado. Podemos reescrever a equação acima em termos das componente de V e Y,

$$\langle C \rangle = \sum_{i=1}^m \left| \sum_{k,l=1}^r V_{ik} Y_{kl} V_{li}^T \right| = \sum_{i=1}^m \left| \sum_{k,l=1}^r V_{ik} V_{il} Y_{kl} \right|. \quad (2.38)$$

Lembrando que a matriz Y é diagonal obtemos,

$$\langle C \rangle = \sum_i \left| \sum_j (V_{ij})^2 Y_{jj} \right| \quad (2.39)$$

O limite inferior é obtido observando que  $\sum_i |(V_{ij})^2| = 1$ , pois a matriz é unitária. Definindo então  $\alpha_{ij} = V_{ij}^2$ , temos que

$$\begin{aligned} \langle C \rangle &= \sum_i \left| \sum_j (\alpha_{ij}) Y_{jj} \right| \geq \left| \sum_{ij} \alpha_{ij} Y_{jj} \right| \\ &= \left| Y_{11} \sum_i \alpha_{i1} + \sum_{j=2}^r (\sum_i \alpha_{ij}) Y_{jj} \right| \\ &= \left| \lambda_1 - \sum_{j=2}^r (\sum_i \alpha_{ij}) \lambda_j \right| \\ &\geq \lambda_4 - \lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_1 = C(\rho) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Fica então demonstrado que para o caso  $\lambda_4 - \lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_1 > 0$ , é sempre possível encontrar uma decomposição de estados com valores iguais de concorrência  $C(\rho)$ , a qual corresponde à decomposição óptima para o emaranhamento de formação.

**Caso 2.**  $\lambda_4 - \lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_1 < 0$

Para tal caso é sempre possível encontrar quatro fases  $\eta_i$  tal que

$$\sum_{j=1}^4 e^{2i\eta_j} \lambda_j = 0 \quad (2.41)$$

*Proof.* Note que

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^4 e^{2i\eta_j} \lambda_j = 0 &\iff \lambda_1 e^{2i\eta_1} = - \sum_{j=2}^4 \lambda_j e^{2i\eta_j} \\
 &\iff \left| \lambda_1 e^{2i\eta_1} \right| = \left| - \sum_{j=2}^4 \lambda_j e^{2i\eta_j} \right| \\
 &\iff \lambda_1 = \left| \sum_{j=2}^4 \lambda_j e^{2i\eta_j} \right| \geq \sum_{j=2}^4 \left| \lambda_j e^{2i\eta_j} \right| = \sum_{j=2}^4 \lambda_j \\
 &\iff \lambda_1 - \sum_{j=2}^4 \lambda_j \geq 0
 \end{aligned}$$

Considerando  $\lambda_j$ 's como vetores, seria o mesmo que afirmar ser sempre possível, utilizando tais vetores, construirmos um polígono fechado.  $\square$

Construímos agora, a partir dos estados obtidos na Decomposição 1, a seguinte decomposição  $\{|k_i\rangle\}$ :

$$\begin{aligned}
 |k_1\rangle &= \frac{1}{2}(e^{i\eta_1}|x_1\rangle + e^{i\eta_2}|x_2\rangle + e^{i\eta_3}|x_3\rangle + e^{i\eta_4}|x_4\rangle) \\
 |k_2\rangle &= \frac{1}{2}(e^{i\eta_1}|x_1\rangle + e^{i\eta_2}|x_2\rangle - e^{i\eta_3}|x_3\rangle - e^{i\eta_4}|x_4\rangle) \\
 |k_3\rangle &= \frac{1}{2}(e^{i\eta_1}|x_1\rangle - e^{i\eta_2}|x_2\rangle + e^{i\eta_3}|x_3\rangle - e^{i\eta_4}|x_4\rangle) \\
 |k_4\rangle &= \frac{1}{2}(e^{i\eta_1}|x_1\rangle - e^{i\eta_2}|x_2\rangle - e^{i\eta_3}|x_3\rangle + e^{i\eta_4}|x_4\rangle)
 \end{aligned}$$

Temos para estes estados que

$$C(|k_i\rangle) = \frac{1}{4} \left| \sum_{j=1}^4 e^{-2i\eta_j} \lambda_j \right| = 0, \quad (2.42)$$

Vê-se então que tal decomposição consiste de estados puros com concorrência nula, sendo desta forma um estado separável.  $\square$

### 2.2.2 Robustezas do emaranhamento

Nesta seção iremos abordar uma medida de emaranhamento denominada robustezas, e que conforme veremos possui uma definição e interpretação física bem simples. A robustezas é baseada na idéia de resistência do emaranhamento sob misturas; mais precisamente, dado um estado emaranhado  $\rho$ , o quanto é necessário misturá-lo a outro estado  $\rho_M$  tal que o emaranhamento final seja nulo. Uma definição matemática mais formal pode ser dada na forma:

**Definition 2.2.** Dado um estado  $\rho \in \mathcal{H}_{\mathcal{T}}$  e  $\rho_M \in \mathcal{X}$ , define-se a robustezas  $\mathcal{R}(\rho)$  como a quantidade mínima "s" necessária para que a mistura  $\rho^+ = \frac{1}{1+s}(\rho + s\rho_M)$

seja separável.

$$\mathcal{R}(\rho) = \min_{\rho_M \in \mathcal{X}} \left( \min_{s \geq 0} s : \rho^+ = \frac{1}{1+s}(\rho + s\rho_M) \in \mathcal{S} \right) \quad (2.43)$$

Vê-se que a minimização é realizada tanto sobre a constante "s" quanto aos estados  $\rho_M$ , sendo desta forma difícil sua determinação para casos gerais.

Foram propostos então diferentes tipos de robustezas, cada qual associado a um tipo de mistura específica, ou seja, ao espaço de estados " $\mathcal{X}$ ". Do ponto de vista matemático poderíamos apresentá-las aqui meramente especificando seus respectivos espaços de mistura; mas apesar desta sutil diferença, suas interpretações e motivações devem ser melhor analisadas do ponto de vista físico. São três os tipos distintos encontrados na literatura, denominados : robusteza aleatória, generalizada e robusteza do emaranhamento [31, 30].

· **Robustezas do Emaranhamento**,  $\mathcal{R}(\rho) \longrightarrow \mathcal{X} \in \mathcal{S}$ .

Aqui as misturas são preparadas localmente, podendo-se interpretar a medida de robustezas como a quantificação de uma interferência "inteligente", segundo Vidal e Tarrach[31], que é realizada sobre o estado. O que denominamos "inteligente" é visto como, dado que as partes locais conheçam o estado emaranhado, elas podem da melhor maneira possível moldar uma interferência de forma que um mínimo desta seja suficiente para destruir o emaranhamento da mistura.

· **Robustezas Aleatórias**,  $\mathcal{R}_a(\rho) \longrightarrow \mathcal{X} \equiv I$ .

Este é um caso particular da Robustezas do Emaranhamento dada acima, onde agora nossa interferência é interpretada como o ruído branco.

· **Robustezas Generalizadas**,  $\mathcal{R}_g(\rho) \longrightarrow \mathcal{X} \in \mathcal{H}_{\mathcal{T}}$ .

Nos casos anteriores nossa mistura era restrita somente a estados separáveis. Mas nós poderíamos no entanto considerar a possibilidade onde o estado não somente pode interagir com um estado separável, mas também com estados emaranhados. Sabe-se em geral que existem casos em que misturas de estados emaranhados resultam em um estado separável. A Robustezas Generalizada engloba então tanto estes casos quanto os anteriores, onde permite que a mistura possa ser realizada sobre qualquer estado do espaço de Hilbert-Schmidt.

Algumas propriedades particulares entre as robustezas podem ser apontadas, tais como:

· claramente, vê-se que a robustezas generalizada deve ser sempre menor ou igual as outras robustezas;

$$\mathcal{R}_g(\rho) \leq \mathcal{R}(\rho), \mathcal{R}_a(\rho) \quad (2.44)$$

· foi demonstrado por Steiner [30] que para estados emaranhados puros as robustezas de emaranhamento e a generalizada possuem o mesmo valor.

$$\mathcal{R}_g(\rho) = \mathcal{R}_a(\rho) \quad , \text{ se } \rho \text{ for um estado puro} \quad (2.45)$$

Tal resultado é surpreendente, visto que o volume do espaço de estados para altas dimensões torna-se dominado por estados emaranhados, e a probabilidade de se encontrar um estado separável decai exponencialmente com o tamanho do espaço de Hilbert; sendo assim esperava-se que a robusteza generalizada  $\mathcal{R}_g(\rho)$  possuísse valores menores que a robusteza de emaranhamento  $\mathcal{R}(\rho)$ .

- a mistura óptima  $\rho_M$  para a robusteza generalizada de estados puros não é única; existem infinitas misturas óptimas dadas por estados emaranhados ou separáveis.

- As medidas de robusteza satisfazem as propriedades de discriminância, monotonicidade via LOCC e convexidade apenas.

### 2.3 Testemunhas de Emaranhamento

Testemunhas de emaranhamento são operadores hermitianos (observáveis) cujo valor esperado contém informações acerca do emaranhamento de estado quântico em questão, constituindo desta forma em uma ótima ferramenta para o estudo do emaranhamento de sistemas quânticos. Central a uma definição formal destes operadores encontra-se o importante teorema de Hahn-Banach, do qual iremos apresentar aqui apenas uma versão limitada a nossa situação, denominada teorema de separação de Hahn-Banach.

**Definição 2.3. Teorema de separação de Hahn-Banach.** *Seja  $S$  um conjunto convexo compacto em um espaço de Banach<sup>6</sup> de dimensão finita e  $\rho$  um ponto que não pertença a ele; então podemos sempre encontrar um hiperplano  $W$  que separe  $\rho$  de  $S$ .*

Uma ilustração esquemática do teorema pode ser dada pela figura 2.1.

Identificando agora o conjunto  $S$  com o espaço de estados separáveis, vemos que é sempre possível encontrar um hiperplano que separe um estado emaranhado dos estados separáveis, indicando desta forma o caráter emaranhado do estado; tais hiperplanos são o que denominamos testemunhas de emaranhamento. Podemos analisar tal fato sob o ponto de vista de distâncias (ou valores esperados), i.e,  $Tr(W\rho)$ , levando-nos a seguinte definição para os operadores testemunha:

**Definição 2.4.** *Um operador hermitiano  $W$  é chamado testemunha de emaranhamento para um dado estado emaranhado  $\rho$  se  $Tr(W\rho) < 0$  e  $Tr(W\sigma) \geq 0$  para todos os estados separáveis  $\sigma$ .*

Ao trabalharmos com testemunhas de emaranhamento muitas vezes estamos interessados em um grupo específico destes operadores, as chamadas testemunhas de emaranhamento óptimas, OEW. Existem no entanto duas definições de OEW; a primeira, introduzida por Lewenstein [20], baseia-se na quantidade de estados detectados, ou seja, uma testemunha  $W$  é ótima se o conjunto  $\rho$  de estados detectados é maximizado. A segunda definição, a qual

<sup>6</sup>espaço de Hilbert de operadores limitados.

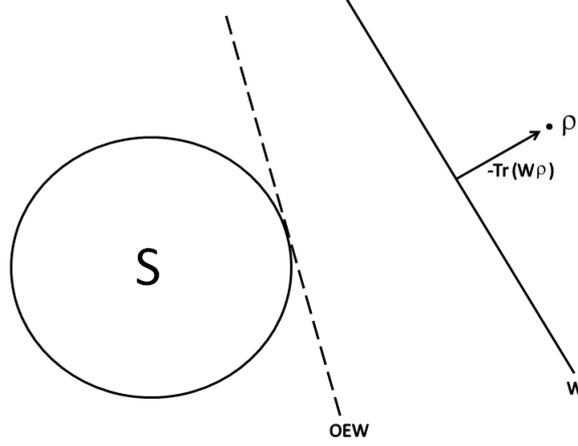


Figure 2.1: Ilustração esquemática do teorema de separação de Hahn-Banach, assim como a OEW segundo a definição dada pela eq.2.46.

utilizaremos no decorrer deste trabalho, refere-se a um estado quântico em particular:  $W_{opt}$  é testemunha ótima em relação ao estado  $\rho$  se

$$\text{Tr}(W_{opt}\rho) = \min_{W \in \mathcal{M}} \text{Tr}(W\rho) \quad (2.46)$$

,onde  $\mathcal{M}$  representa um subconjunto compacto do conjunto das testemunhas de emaranhamento  $\mathcal{W}$ .

A escolha do conjunto  $\mathcal{M}$  determina diferentes medidas de emaranhamento importantes [8], mostrando como as OEW podem ser utilizadas como ferramenta não só para detecção, mas também como quantificadores de emaranhamento. A definição destes quantificadores é dada por:

$$E(\rho) = \max(0, - \min_{W \in \mathcal{M}} \text{Tr}(W\rho)) \quad (2.47)$$

Analisaremos o caso específico da utilização destes quantificadores para a medida das robustezas de um estado quântico.

### 2.3.1 Robustezas (via testemunhas de emaranhamento)

Conforme definida anteriormente, a medida de robusteza generalizada do emaranhamento de um estado quântico,  $\mathcal{R}_g(\rho)$ , corresponde a mistura mínima necessária para tornar o estado separável; mais precisamente, o valor mínimo de  $s$  tal que

$$\frac{\rho + s\varphi}{1 + s} \quad (2.48)$$

seja um estado separável, onde  $\varphi$  é um estado qualquer. Sabe-se no entanto que é possível calculá-la utilizando testemunhas de emaranhamento a partir da equação 2.47, onde  $\mathcal{M} = \{W \in \mathcal{W} \mid W \leq I\}$ [8].

Para mostrar que tal abordagem é possível, iremos utilizar dos conceitos de dualidade Lagrangeana da teoria de otimização convexa <sup>7</sup>, analisando desta forma o problema sob duas abordagens distintas, denominadas problemas primal e dual. O problema primal consiste na abordagem sob testemunhas de emaranhamento, ou seja,

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \text{Tr}(W\rho) \\ & \text{sob os vínculos} && W \leq I \\ & && \text{Tr}(W\sigma) \geq 0, \forall \sigma \in \mathcal{S} \end{aligned} \quad (2.49)$$

O Lagrangeano deste problema é dado por

$$\mathcal{L}(W, X, h(\sigma)) = \text{Tr}(W\rho) + \text{Tr}[X(W - I)] - \int_{\sigma \in \mathcal{S}} h(\sigma) \text{Tr}(W\sigma) d\sigma \quad (2.50)$$

A partir do Lagrangeano podemos obter a função dual de Lagrange  $g(X, h(\sigma))$ , dada pelo ínfimo sob o domínio  $W \in \mathcal{M}$ . Vê-se que,

$$\begin{aligned} g(X, h(\sigma)) &= \inf_{W \in \mathcal{M}} \mathcal{L}(W, X, h(\sigma)) \\ &= \begin{cases} -\text{Tr}(X) & , \text{ se } \text{Tr} W(\rho + X - \int_{\sigma \in \mathcal{S}} h(\sigma) \sigma d\sigma) = 0 \\ -\infty & , \text{ caso contrário} \end{cases} \end{aligned}$$

A função dual é finita somente se a condição sobre o traço dada acima for satisfeita. Sendo assim o problema dual, o qual consiste em maximizar a função dual sob seus vínculos, é dado por

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \text{Tr}(X) \\ & \text{sob os vínculos} && h(\sigma) \geq 0 \\ & && X \geq 0 \\ & && \rho + X = \int_{\sigma \in \mathcal{S}} h(\sigma) \sigma d\sigma \end{aligned} \quad (2.51)$$

Denominando  $X = s\rho_M$ , onde  $\rho_M$  é um estado qualquer e  $s > 0$ , vemos que o problema dual é equivalente a robusteza generalizada do estado dada por 2.48.

O mesmo procedimento pode também ser realizado nos casos da robusteza do emaranhamento e robusteza aleatória. Iremos nos contentar desta forma apenas em apresentar os resultados.

A medida da robusteza aleatória de um estado quântico via testemunhas de emaranhamento é então dada por

$$\mathcal{R}_a(\rho) = \max(0, - \min_{\text{Tr}(W)=1} \text{Tr}(W\rho)), \quad (2.52)$$

e a robusteza do emaranhamento pode ser dada na forma

$$\mathcal{R}(\rho) = \max(0, - \min_{\text{Tr}(W\sigma) \leq 1, \forall \sigma \in \mathcal{S}} \text{Tr}(W\rho)), \quad (2.53)$$

<sup>7</sup>No apêndice B encontram-se as idéias principais sobre dualidade Lagrangeana e teoria de otimização convexa utilizadas neste capítulo. Um leitor mais interessado pode também consultar [7], sendo uma ótima referência do assunto.

### 2.3.2 SDP (Semi-definite-program)

Apesar das testemunhas de emaranhamento constituírem uma ótima ferramenta no estudo do emaranhamento quântico, existe no entanto uma grande dificuldade em determiná-las. Para isso utilizamos de métodos de otimização para classes de problemas conhecidos como programas semidefinidos SDP: problemas de otimização de um funcional linear sob vínculos convexos. Mais precisamente, dado  $c, x, F_i \in \mathcal{C}^m$ , a classe de problemas SDP consiste em:

minimização de  $c^\dagger x$  sujeita a

$$F_i^\dagger x \geq 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (2.54)$$

onde o vetor  $c$  determina a função a ser minimizada,  $x$  é o vetor de variáveis de otimização e os  $F_i$  representam os " $k$ " vínculos convexos associados às variáveis. Vale ressaltar aqui que a solução do SDP, por tratar-se de um problema de otimização convexa, é única, ou seja, representa o mínimo global sobre a função a ser minimizada.

Ve-se desde já como os métodos de solução de um SDP pode auxiliar na obtenção da OEW, visto a linearidade da função a ser minimizada na Eq.(2.47) juntamente com seus vínculos. A obtenção das OEW e das medidas de emaranhamento por testemunhas utilizando SDPs foram abordadas de diversas formas diferentes na literatura científica[10, 9, 12, 11, 16]; neste trabalho nos concentraremos no método proposto por Brandao e Vianna[10].

A idéia central a este método pode ser dada da seguinte forma:

**Teorema 2.5.** *Um estado  $\rho \in (\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n)$  é emaranhado se e somente se o valor óptimo do seguinte problema for negativo:*

minimize  $Tr(W\rho)$  sujeito a

$$\sum_{i_{n-1}=1}^{d_{n-1}} \dots \sum_{i_1=1}^{d_1} \sum_{j_1=1}^{d_1} \dots \sum_{j_{n-1}=1}^{d_{n-1}} (a_{i_{n-1}}^* \dots a_{i_1}^* a_{j_1} \dots a_{j_{n-1}}) W_{i_{n-1} \dots i_1 j_1 \dots j_{n-1}} \geq 0,$$

$$\forall a_{i_k} \in \mathcal{C}, \quad 1 \leq k \leq (n-1), \quad (2.55)$$

onde  $d_k$  é a dimensão de  $\mathcal{H}_k$ ,  $W_{i_{n-1} \dots i_1 j_1 \dots j_{n-1}} = {}_{n-1}\langle i | \otimes \dots \otimes {}_1\langle i | W | j \rangle_1 \otimes \dots \otimes | j \rangle_{n-1} \in \mathcal{HS}(\mathcal{H}_n)$  e  $|j\rangle_k$  é uma base ortonormal no espaço  $\mathcal{H}_k$ . Se  $\rho$  for emaranhado, a matriz  $W$  que minimiza o problema corresponde a OEW de  $\rho$ .

*Proof.* Sabe-se que um estado é emaranhado se e somente se existir um operador testemunha  $W$  tal que  $Tr(W\rho) < 0$  e  $Tr(W\sigma) > 0$  para todos os separáveis. Seja um estado separável geral  $\sigma_{1, \dots, n} \in (\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n)$  dado na forma

$$\sigma_{1, \dots, n} = \sum_i p_i |\phi_i\rangle_1 \langle \phi_i| \otimes \dots \otimes |\phi_i\rangle_n \langle \phi_i|, \quad (2.56)$$

então a condição de positividade da testemunha sobre os separáveis pode ser escrita da forma

$${}_n\langle\phi|\otimes\underbrace{{}_{n-1}\langle\phi|\otimes\cdots\otimes{}_1\langle\phi|W|j\rangle_1\otimes\cdots\otimes|\phi\rangle_{n-1}}_{\text{Funcional} \in \mathcal{HS}(\mathcal{H}_n)}\otimes|\phi\rangle_n \geq 0, \quad \forall |\phi\rangle_k \in \mathcal{H}_k \quad (2.57)$$

Note no entanto que a positividade do funcional assinalado acima é suficiente para satisfazer a desigualdade. Considerando  $|\phi\rangle_k = \sum_j a_{jk}|j\rangle_k$ , onde  $|j\rangle_k$  é uma base ortonormal do espaço  $\mathcal{H}_k$ , segue diretamente que a matriz  $W$  solução do problema corresponde a uma testemunha de emaranhamento, e sua otimização corresponde a OEW de  $\rho$ . □

O problema de otimização dado pelo teorema acima é de difícil resolução devido à imposição dos infinitos vínculos, sendo computacionalmente intratável. Problemas de otimização convexa deste tipo são conhecidos como programas semidefinidos robustos, RSDP. Sabe-se no entanto que é possível realizar uma relaxação deste aproximando-o em termos de um SDP, o qual pode ser solucionado de forma eficiente.

Uma possível relaxação é a denominada relaxação probabilística, onde os infinitos vínculos são trocados por um número finito deles (amostras), escolhidos de acordo com alguma distribuição de probabilidade  $\mathcal{P}$ . Desta forma, nosso operador testemunha obtido é tal que satisfaz a maioria dos vínculos dados pela eq.2.55, a menos de uma probabilidade  $\epsilon$  de violação, ou seja, de que  $Tr(W\sigma) < 0$ . Esta probabilidade de violação será tão menor quanto maior for o número de amostras fornecidas.

# Emaranhamento em Sistemas de Partículas Indistinguíveis

A quantificação e a busca por uma melhor compreensão acerca do emaranhamento em sistemas quânticos compostos apresenta-se como um dos grandes desafios da teoria quântica moderna. Apesar de ser um assunto amplamente estudado em sistemas cujas partículas estão macroscopicamente separadas uma das outras, sendo desta forma distinguíveis, muito pouca atenção foi dada ao caso onde essa separação é muito pequena, tal que o overlap entre suas funções de onda não mais seja desprezível. Para estes casos temos então de levar em conta a indistinguibilidade das partículas, sendo o espaço de estados quânticos restrito ao subspaços simétricos ou anti-simétricos do espaço de Hilbert, dependendo de sua natureza bosônica ou fermiônica. O estudo do emaranhamento em sistemas de partículas indistinguíveis vem sendo, no entanto, um assunto de grandes controvérsias, gerando diferentes abordagens em relação a seu tratamento. Dentre as mais mencionadas (e talvez as mais bem fundamentadas) temos: emaranhamento de modos [34], emaranhamento de partículas [32] e as correlações quânticas [13]. Iremos então, neste capítulo, analisar tais medidas tentando apresentar de forma clara suas principais características e fundamentações.

## 3.1 O Espaço de Fock

Quando lidamos com sistemas de partículas indistinguíveis é conveniente utilizarmos um formalismo matemático diferente do usual, denominado formalismo de "segunda quantização", no qual é introduzido uma nova álgebra de operadores (operadores de criação e aniquilação) e seu respectivo espaço de estados (espaço de Fock). Vejamos melhor como tais conceitos são definidos.

O espaço de estados de  $N$  partículas cada qual com dimensão da base igual a  $K$  é dado pelo espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_{\mathcal{T}} = \mathcal{H}_1^{(K)} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N^{(K)}$ . Para todo espaço de Hilbert da forma anterior, existem correspondentes subspaços simétricos ou anti-simétricos sob permutação de suas partículas; mais precisamente, definindo os operadores de simetrização "S" e anti-simetrização "A" por,

$$S = \frac{1}{N!}(I + P), \quad (3.1)$$

$$A = \frac{1}{N!}(I - P), \quad (3.2)$$

onde  $N$  corresponde ao número de partículas,  $I$  é o operador identidade e  $P$  o operador permutação; temos que os subspaços representam a projeção do espaço de Hilbert sob a aplicação de tais operadores. Desta forma, estados simétricos e anti-simétricos sob permutação de suas partículas são tais que  $S\rho S^\dagger = \rho$  e  $A\rho A^\dagger = \rho$ , respectivamente.

Sabemos no entanto que, ao lidarmos com partículas indistinguíveis, nosso espaço de estados são restritos ao subspaços conforme definidos acima, dependendo apenas da natureza bosônica ou fermiônica das partículas. Sendo assim, o formalismo de segunda quantização constitui essencialmente na representação destes subspaços, os quais são denominados espaços de Fock ( $\mathcal{F}_N^K$ ), introduzindo-se uma álgebra de operadores com as seguintes relações de (anti-)comutação:

$$\{f_i, f_j\} = \{f_i^\dagger, f_j^\dagger\} = 0, \quad \{f_i, f_j^\dagger\} = \delta_{ij}; \quad (3.3)$$

$$[b_i, b_j] = [b_i^\dagger, b_j^\dagger] = 0, \quad [b_i, b_j^\dagger] = \delta_{ij}; \quad (3.4)$$

onde  $f_i^\dagger(f_i)$  e  $b_i^\dagger(b_i)$  são os operadores de criação (aniquilação) fermiônicos e bosônicos, respectivamente, de forma que sua atuação sobre o estado vácuo,  $|0\rangle$ , cria (aniquila) uma partícula no estado "i". O estado vácuo é definido de forma que  $f_i|0\rangle = 0$  ou  $b_i|0\rangle = 0$ .

Veremos um exemplo simples de um sistema de partículas indistinguíveis fermiônicas a fim de ilustrar o formalismo de segunda quantização, mas que nos será também bastante útil nas próximas seções, ao analisarmos as consequências da indistinguibilidade sobre as medidas de emaranhamento.

Considere então o caso de dois elétrons localizados em dois poços de potencial, onde denominaremos por  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$  os autoestados do operador de spin  $\sigma_z$ , e  $|\chi\rangle$  e  $|\phi\rangle$  representam funções de onda espaciais localizadas nos poços de potencial da esquerda e direita, respectivamente. Seja o estado inicial em que cada poço contém apenas um elétron e os poços estão demasiadamente separados, ou a barreira de potencial encontra-se suficientemente alta, de forma que o overlap entre as funções de onda espaciais  $\langle\chi|\phi\rangle$  seja desprezível. Neste caso podemos claramente tratar os elétrons como duas partículas distinguíveis. Considere então que as partículas foram preparadas independentemente uma da outra, de forma que o estado inicial seja dado por um estado quântico puro separável,  $|\psi_{INICIAL}\rangle = |\chi\rangle|\uparrow\rangle_A \otimes |\phi\rangle|\downarrow\rangle_B$ , onde  $A$  e

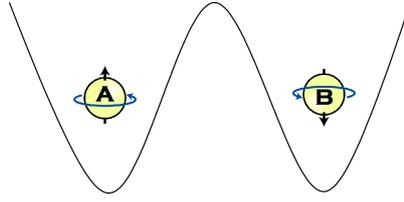


Figure 3.1: O estado inicial  $|\psi_{INICIAL}\rangle = |\chi\rangle|\uparrow\rangle_A \otimes |\phi\rangle|\downarrow\rangle_B$ , onde as partículas A e B são distinguíveis uma da outra, ou seja, o overlap  $\langle\chi|\phi\rangle$  entre suas funções de onda espaciais é desprezível.

B indicam as partículas da esquerda e da direita, respectivamente. A situação é ilustrada na fig.3.1

Se diminuirmos a barreira de potencial, ou aproximarmos os poços de potencial, as partículas indicadas por A e B poderão tunelar entre os poços e existe uma probabilidade de encontrar qualquer uma delas em qualquer um dos poços, ou seja, o overlap entre as funções de onda espaciais  $\langle\chi|\phi\rangle$  não mais é desprezível; neste caso, devemos levar em conta as estatísticas fermiônicas devido a indistinguibilidade das partículas, sendo seu estado antissimetrizado dado por

$$|\psi\rangle(t_1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\chi\rangle|\uparrow\rangle_1 \otimes |\phi\rangle|\downarrow\rangle_2 - |\phi\rangle|\downarrow\rangle_1 \otimes |\chi\rangle|\uparrow\rangle_2), \quad (3.5)$$

onde os índices A e B agora foram trocados pelos índices "1" e "2" para reforçar que a enumeração de partículas individuais não mais possui significado físico, desde que elas não são mais acessíveis independentemente. Utilizando o formalismo de segunda quantização, a representação do estado é dada por  $|\psi(t_1)\rangle = f_{\chi\uparrow}^\dagger f_{\phi\downarrow}^\dagger |0\rangle$ ; estados desta forma são denominados estados com único determinante de Slater. A situação é ilustrada na fig.3.2.

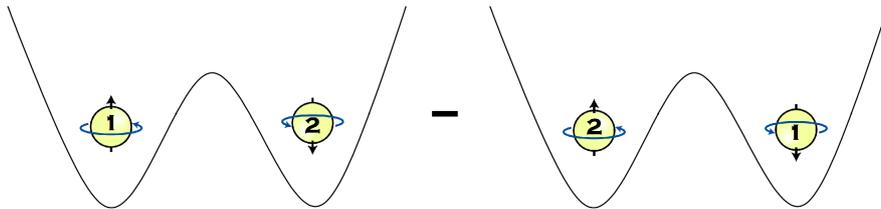


Figure 3.2: O estado  $|\psi(t_1)\rangle = f_{\chi\uparrow}^\dagger f_{\phi\downarrow}^\dagger |0\rangle$ , após a diminuição da barreira de potencial, onde devemos levar em conta agora o caráter indistinguível das partículas.

Poderíamos no entanto aplicar um pulso de tunelamento no sistema, aumentando e diminuindo exponencialmente a barreira de potencial, de forma a criar um acoplamento dependente do tempo  $J(t)$  entre os spins das partículas. Em [27] Schliemann et al. mostram que é possível realizar tal operação de forma que os spins sofram um  $\sqrt{SWAP}$  após o pulso, sendo seu

estado final dado por (a situação é ilustrada na fig.3.3),

$$|\psi(t_2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_{\chi\uparrow}^\dagger f_{\phi\downarrow}^\dagger + f_{\chi\downarrow}^\dagger f_{\phi\uparrow}^\dagger)|0\rangle \quad (3.6)$$

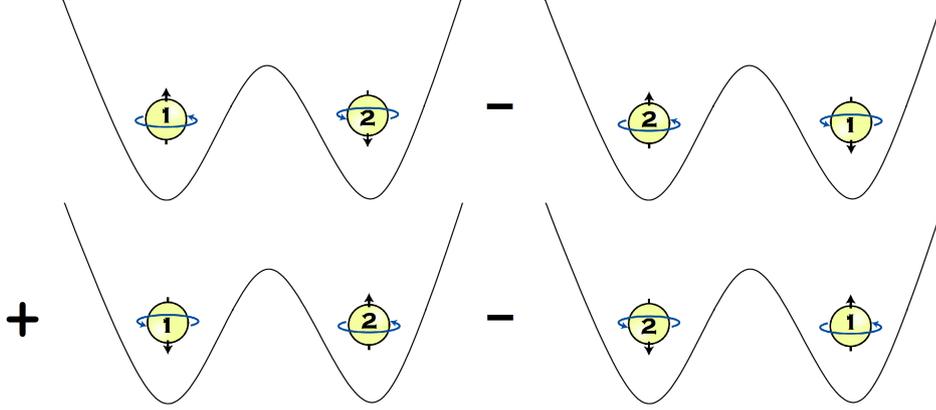


Figure 3.3: O estado  $|\psi(t_2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_{\chi\uparrow}^\dagger f_{\phi\downarrow}^\dagger + f_{\chi\downarrow}^\dagger f_{\phi\uparrow}^\dagger)|0\rangle$ , após a operação  $\sqrt{SWAP}$ .

O estado acima é um estado descrito por dois determinantes de Slater, visto que não existe uma base de operadores fermiônicos tal que o descreva utilizando apenas um único determinante de Slater; mais precisamente, não existe uma base  $\{a_i^\dagger\}$  de operadores fermiônicos tal que o estado possa ser descrito na forma  $|\psi\rangle = a_i^\dagger a_j^\dagger |0\rangle$ .

### 3.2 Emaranhamento de modos

Analisaremos primeiro a abordagem sobre emaranhamento em sistemas de partículas indistinguíveis realizada por Zanardi [34], a qual baseia-se essencialmente na representação dos estados quânticos sobre seus modos de ocupação, daí a denominação emaranhamento de modos.

Consideraremos novamente o caso anterior dos poços de potencial a fim de exemplificar tal abordagem, tornando assim mais clara sua definição para o caso geral. Vejamos o exemplo do estado após realizada a operação  $\sqrt{SWAP}$ , dado pela eq.3.6,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_{\chi\uparrow}^\dagger f_{\phi\downarrow}^\dagger + f_{\chi\downarrow}^\dagger f_{\phi\uparrow}^\dagger);$$

poderíamos, no entanto, representá-lo por uma base de número de ocupação de seus modos, definida da seguinte forma  $\{|n_{\chi\uparrow}, n_{\chi\downarrow}, n_{\phi\uparrow}, n_{\phi\downarrow}\rangle, \sum n_{i\sigma} = N\}$ , onde  $n_{i\sigma}$  representa o número de partículas nos modos. O estado então teria a forma

$$|\psi\rangle = \frac{|1,0,0,1\rangle + |0,1,1,0\rangle}{\sqrt{2}}.$$

O ponto central da análise segue agora da observação de que, os estados como dados por esta representação, claramente nos induz a uma associação com sistemas de q-bits, mas onde os q-bits representam na verdade os "modos" do sistema fermiônico. O estado associado seria então dado por,

$$|\psi\rangle = \frac{(|1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle) + (|0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle)}{\sqrt{2}},$$

e seu emaranhamento obtido por qualquer medida de emaranhamento para sistemas de q-bits, Vale lembrar que, devido a associação realizada entre os sistemas, o emaranhamento resultante dos q-bits correspondem na verdade ao emaranhamento entre os modos do sistema. Vê-se também que este emaranhamento é completamente correlacionado a forma pela qual representamos seus modos, onde poderíamos, por exemplo, representá-los desprezando o spin das partículas, sendo a base de número de ocupação dada por  $\left\{ |n_{\chi\uparrow/\chi\downarrow}, n_{\phi\uparrow/\phi\downarrow}\rangle, \sum n_{i\sigma} = N \right\}$ , e o estado possuiria a forma de q-bits separável  $|\psi\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle$ .

No caso geral, um estado fermiônico ou bosônico arbitrário pertencente ao espaço de Fock com  $N$  partículas e dimensão da base de partícula única igual a  $K$  ( $\mathcal{F}_N^K$ ) pode ser representado por uma base de números de ocupação da seguinte forma,

$$|\psi\rangle = \sum_{\vec{n}_i} c_{\vec{n}_i} |\vec{n}_i\rangle, \quad (3.7)$$

$$|n_1, \dots, n_K\rangle = \prod_{l=1}^K (c_l^\dagger)^{n_l} |0\rangle. \quad (3.8)$$

onde  $\vec{n} = (n_1, \dots, n_K)$  é o conjunto de números de ocupação para os  $K$  modos do sistema (no caso de férmions os números são restritos a 0,1 devido ao princípio de exclusão de Pauli) e  $c_l^\dagger$  são seus respectivos operadores de criação. O mapeamento do espaço de Fock sobre o espaço de  $K$  q-dits segue diretamente,

$$\Lambda : \mathcal{F}_N^K \mapsto (\mathcal{C}^{(d)})^{\otimes K} \quad (3.9)$$

$$\prod_{l=1}^K (c_l^\dagger)^{n_l} |0\rangle \mapsto \bigotimes_{l=1}^K |n_l\rangle \quad (3.10)$$

onde  $d = 2$  para partículas fermiônicas e  $d = N$  para o caso bosônico.

Vê-se, no entanto, que o mapa como dado acima não é bijetivo, visto que existem estados no espaço de  $K$  q-dits os quais não possuem correspondentes sobre o espaço de Fock, i.e, tais espaços não são isomorfos. O isomorfismo dos espaços pode ser realizado ao considerarmos espaços de Fock com número de partículas variáveis, ou seja, considerando o mapa fermiônico da forma,

$$\Lambda_f : \bigoplus_{n=0}^{(K)} \mathcal{F}_n^K \mapsto (\mathcal{C}^{(2)})^{\otimes K} \quad (3.11)$$

$$\prod_{l=1}^K (c_l^\dagger)^{n_l} |0\rangle \mapsto \bigotimes_{l=1}^K |n_l\rangle, \quad , \quad n_l = 0,1; \quad (3.12)$$

e bosônico

$$\Lambda_b : \bigoplus_{n=0}^{(N)^K} \mathcal{F}_n^K \mapsto (\mathcal{C}^{(N)})^{\otimes K} \quad (3.13)$$

$$\prod_{l=1}^K (c_l^\dagger)^{n_l} |0\rangle \mapsto \bigotimes_{l=1}^K |n_l\rangle, \quad , \quad n_l = 0, \dots, N; \quad (3.14)$$

Por meio então deste isomorfismo podemos estudar o emaranhamento de sistemas de partículas indistinguíveis estudando o emaranhamento de sistemas de q-dits, lembrando que o emaranhamento posto desta forma está completamente correlacionado à representação dos modos utilizada.

### 3.3 Emaranhamento de partículas

Uma outra abordagem ao problema é realizada por Wisemann e Vaccaro [32], onde quantificam o emaranhamento entre duas partes que compartilham um sistema de partículas indistinguíveis. Sua abordagem consiste essencialmente no conceito de emaranhamento dos modos, conforme definido na seção anterior, mas ressaltando que tal medida não consiste verdadeiramente no emaranhamento disponível do sistema quântico, visto que, a fim de utilizá-lo por inteiro, deveríamos ser capazes de realizar operações arbitrárias sobre os modos do sistema, e no entanto tais operações são proibidas devido às regras de superseleção (SSR) para o número de partículas do sistema. Vejamos então quais os efeitos da imposição de SSR ao emaranhamento de um sistema quântico, apresentando o teorema geral obtido por Bartlett e Wisemann [3], e obtendo desta forma, como um caso particular, a medida de emaranhamento proposta por Wisemann e Vaccaro, denominada "emaranhamento de partículas".

**Regras de Superseleção - SSR's.** O entendimento das SSR é geralmente expresso como a existência de determinadas "restrições sobre a natureza". Operacionalmente, uma regra de superseleção é dada pela restrição sobre as operações físicas permitidas sobre o sistema, sejam elas a preparação, evolução (fechada ou aberta), medida, etc. Formalmente, sua definição pode ser dada como segue.

Considere  $\{\mathcal{E}\}_{CP}$  como sendo o conjunto de operações físicas que atuam sobre o sistema quântico  $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$ , formado pelo grupo de mapas completamente positivos "trace-preserving". Representemos agora um determinado grupo  $G$  de transformações físicas agindo no sistema pelas unitárias  $T$ . Define-se desta forma as operações  $\mathcal{O} \in \{\mathcal{E}\}_{CP}$  como sendo  $G$ -covariant caso

$$\mathcal{O}[T(g)\rho T^\dagger(g)] = T(g)\mathcal{O}[\rho]T^\dagger(g), \quad \forall g \in G, \quad \forall \rho \in \mathcal{H}_{\mathcal{T}}. \quad (3.15)$$

A regra de superseleção associada com o grupo  $G$ , ou  $G$ -SSR, é então determinada pela restrição sobre as operações físicas permitidas sobre o sistema por aquelas que sejam  $G$ -covariant. Vejamos um exemplo simples de uma regra de superseleção.

Exemplo: SSR - Número de Partículas:<sup>1</sup> Seja  $G$  o grupo de Lie unidimensional  $U(1)$  gerado pelo operador hermitiano  $\hat{N}$ , i.e, o grupo cuja representação unitária possui a forma  $T(\phi) = e^{i\phi\hat{N}}$ . Se  $\hat{N}$  for o operador número de partículas então a  $U(1)$ -SSR é usualmente conhecida por SSR para o número de partículas. Vê-se desta forma, como uma das consequências da SSR, que a restrição sobre as operações físicas permitidas como sendo apenas aquelas  $G$ -covariant impossibilitam a geração, ou mesmo a medição da fase relativa, de superposições coerentes de estados com diferentes número de partículas (autoestados do operador  $\hat{N}$ ).

Não é difícil de perceber, assim como mostra o exemplo acima, que as restrições impostas pelas SSR nos incapacitará de distinguir determinados estados. De forma geral, dado  $G$ -SSR, o estado  $\rho$  será indistinguível do estado  $T(g)\rho T^\dagger(g)$ ,  $\forall g \in G$ . Sendo assim, definimos o estado invariante ao grupo  $G$ , ou  $G$ -invariant, por

$$\mathcal{G}[\rho] = \int_G T(g)\rho T^\dagger(g)dg, \quad (3.16)$$

onde  $dg$  é a medida de grupo invariante (medida de Haar).

Vejamos novamente o exemplo da SSR para o número de partículas. Considere um sistema quântico possuindo um único modo; seja então o estado  $|\psi\rangle$  dado por uma superposição coerente dos autoestados de  $\hat{N}$ , da seguinte forma,

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \quad ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = 1. \quad (3.17)$$

O correspondente estado  $G$ -invariant é dado por,

---

<sup>1</sup>Partículas são aqui definidas como entidades físicas discretas as quais são indistinguíveis de outras partículas do mesmo tipo.

$$\mathcal{G}[\rho] = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{i\phi\hat{N}} \rho e^{-i\phi\hat{N}} \quad (3.18)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \sum_{i,j} e^{i\phi n_i} P_{n_i} \rho P_{n_j}^\dagger e^{-i\phi n_j}; \quad (P_{n_i} = |n_i\rangle\langle n_i|); \quad (3.19)$$

$$= \sum_{i,j} P_{n_i} \rho P_{n_j}^\dagger \underbrace{\left( \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{i\phi(n_i - n_j)} \right)}_{\delta_{n_i, n_j}} \quad (3.20)$$

$$= \sum_i P_i \rho P_i^\dagger. \quad (3.21)$$

Vemos desta forma que, na presença de SSR, a superposição dos autoestados de  $\hat{N}$  é operacionalmente equivalente a uma mistura destes autoestados.

Voltemos agora a questão de como o emaranhamento deve ser reavaliado em vista da imposição de SSR ao sistema quântico. Apresentaremos a análise realizada para sistemas bipartites.

Considere a imposição de uma SSR a um sistema bipartite (A,B) : as operações físicas *locais* são desta forma restritas pela relação de covariância (eq.3.15). O estado *G-invariant* é agora dado por  $\mathcal{G}[\rho_{AB}] = (\mathcal{G}_A \otimes \mathcal{G}_B)[\rho]$ . Suponha que, em adição ao sistema quântico, as partes A e B cada uma possua um registrador quântico com espaço de Hilbert de dimensão maior ou igual a seus respectivos subsistemas (os registradores quânticos podem ser realizados, por exemplo, por q-dits sobre os quais as partes possuam um completo controle). Considere também que os registradores encontram-se inicialmente em um estado separável e as operações sobre eles não estão sujeitas as SSR. A quantificação do emaranhamento para o estado  $\rho_{AB}$  é então definida como a quantidade máxima de emaranhamento que as partes podem produzir entre seus registradores quânticos utilizando LOCC; e podendo esta última ser quantificada utilizando qualquer medida de emaranhamento padrão.

Definido o emaranhamento da forma acima, eis então o importante teorema obtido por Bartlett e Wisemann[3] para a sua quantificação.

**Teorema 3.1.** *O emaranhamento  $E_{G-SSR}(\rho_{AB})$  que as partes A e B podem produzir entre seus registradores quânticos a partir do estado  $\rho_{AB}$ , utilizando LOCC restritas por uma G-SSR, é dado pelo emaranhamento  $E(\mathcal{G}[\rho_{AB}])$  que eles podem produzir entre seus registradores quânticos a partir do estado  $\mathcal{G}[\rho_{AB}]$ , utilizando LOCC (sem restrições). A medida E é uma medida de emaranhamento padrão.*

A abordagem do emaranhamento em sistemas de partículas indistinguíveis realizada por Wiseman e Vacaro segue diretamente das idéias apresentadas acima. Em seu trabalho alertam que o emaranhamento de modos ( $E_M$ ) não leva em conta a SSR para o número de partículas pois, para que realmente possamos utilizá-lo, as partes A e B deveriam ser capazes de realizar operações

locais arbitrárias. Desta forma, o emaranhamento dos modos superestima o verdadeiro emaranhamento disponível do sistema, o qual denominam por "emaranhamento de partículas" ( $E_P$ ).

Utilizando do teorema 3.1, podemos facilmente obter  $E_P$  como um caso particular. De modo análogo ao caso exemplificado anteriormente (eq.3.21), teremos agora que o estado  $G$ -invariant correspondende a uma mistura de estados com número de partículas *locais* fixas. E sendo assim, a medida de emaranhamento será dada por,

$$E_P(\rho_{AB}) = \sum_{n_A=0}^N E_M \left( P_{n_A, n_B} \rho_{AB} P_{n_A, n_B}^\dagger \right) \quad (3.22)$$

onde  $P_{n_A, n_B}$  corresponde ao projetor sobre o subspaço com número de partículas locais  $n_A$  e  $n_B = (N - n_A)$ .

### 3.4 Correlações Quânticas

As abordagens anteriores foram realizadas basicamente sobre o espaço de modos do sistema. Ao tentarmos, no entanto, analisar o emaranhamento pela maneira convencional, utilizando a estrutura tensorial do espaço onde suas partições correspondem aos espaços das partículas individualmente, vemos desde já sua impossibilidade para sistemas de partículas indistinguíveis. Visto que o espaço de estados agora é restrito apenas aos subspaços anti-simétrico ou simétrico do espaço de Hilbert, ou seja, ao espaços de Fock, tais espaços não possuem uma partição em produtos tensorial associada a suas partículas (assim como era de se esperar, visto que lidamos com partículas "indistinguíveis"). Grosseiramente, temos a seguinte distinção,

$$\cdot \text{Partículas Distinguíveis:} \quad \mathcal{H}_{\mathcal{T}} = \mathcal{H}_1^d \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N^d \quad (3.23)$$

$$\cdot \text{Partículas Indistinguíveis:} \quad \mathcal{F}_N^d \neq \mathcal{F}_1^d \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_1^d \quad (3.24)$$

Para analisarmos então o emaranhamento das partículas nestes espaços de Fock, os quais como se vê possuem estruturas singulares, iremos utilizar o conceito de "correlações quânticas", introduzido por Schliemann et.al.[13]. Tal conceito baseia-se essencialmente no preceito de que a mera (anti-)simetrização do estado devido a indistinguibilidade de suas partículas não deve ser considerada uma operação geradora de emaranhamento, ou seja, as correlações geradas entre as partículas por tais operações não devem ser interpretadas verdadeiramente como o emaranhamento.

Considere, por exemplo, o caso simples de estados de dois férmions descritos por um único determinante de Slater,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi\rangle \otimes |\chi\rangle - |\chi\rangle \otimes |\phi\rangle), \quad (3.25)$$

onde  $|\phi\rangle$  e  $|\chi\rangle$  correspondem a funções de onda ortonormais. É fácil perceber neste caso que a anti-simetrização das coordenadas certamente irá gerar

correlações entre os férmions; tais correlações, segundo a teoria de Hartree-Fock são denominadas de "contribuições de troca". Ao considerarmos estados descritos por mais de um determinante de Slater, claramente outras correlações adicionais irão surgir no sistema. Serão então tais correlações adicionais as interpretadas como o análogo do emaranhamento quântico em sistemas de partículas distinguíveis, denominadas agora por "correlações quânticas".

Lembrando do exemplo dado no início do capítulo, dos poços de potencial, podemos ter uma idéia mais clara das possíveis motivações para a interpretação destas "correlações quânticas" como análogas ao emaranhamento quântico. Vimos que o estado após o processo de  $\sqrt{SWAP}$  (eq.3.6) passa a ser descrito por dois determinantes de Slater e, de acordo com a definição então, corresponde a um estado emaranhado. As correlações adicionais destes estados podem, no entanto, serem vistas como "correlações úteis" desde que, se localizarmos as partículas novamente, seja aumentando a barreira de potencial ou separando os poços, de modo que o overlap entre as funções espaciais  $\langle \chi | \phi \rangle$  seja desprezível, teremos duas partições X e Y do espaço de Hilbert correspondendo as partículas individualmente. As partições serão formadas por

$$X = \{|\chi\rangle|\uparrow\rangle, |\chi\rangle|\downarrow\rangle\} \quad , \quad Y = \{|\phi\rangle|\uparrow\rangle, |\phi\rangle|\downarrow\rangle\}.$$

E o estado final será dado por,

$$|\psi_{FINAL}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\chi\rangle|\uparrow\rangle_X \otimes |\phi\rangle|\downarrow\rangle_Y + |\chi\rangle|\downarrow\rangle_X \otimes |\phi\rangle|\uparrow\rangle_Y) \quad (3.26)$$

o qual corresponde a um estado de dois q-bits *maximamente emaranhado*, ou melhor, ao estado de Bell  $|\psi^+\rangle$ .

Apresentaremos agora alguns dos métodos propostos a fim de se caracterizar e quantificar as correlações quânticas.

### 3.4.1 Decomposição de Slater

Assim como no caso de partículas distinguíveis, onde apresentamos a Decomposição de Schmidt para estados puros bipartites arbitrários, é também possível realizar uma decomposição análoga para sistemas de partículas indistinguíveis. Tal decomposição é denominada Decomposição de Slater, e pode ser utilizada a fim de se caracterizar as correlações quânticas em tais sistemas. Vejamos os casos fermiônico e bosônico separadamente.

#### · Caso Fermiônico

Um estado arbitrário de um sistema de dois férmions indistinguíveis, pertencente ao espaço de Fock  $\mathcal{F}_2^d$ , pode ser dado na forma,

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j}^d w_{ij} f_i^\dagger f_j^\dagger |0\rangle; \quad (3.27)$$

onde  $W$  é uma matriz anti-simétrica e  $f_i^\dagger$  são os operadores de criação fermiônicos. A normalização do estado é dada por  $Tr(W^\dagger W) = \frac{1}{2}$ .

Utilizando as propriedades de matrizes anti-simétricas, conforme dadas no apêndice A (teorema.A.3), vê-se ser sempre possível encontrar uma base de operadores fermiônicos de forma que a matriz seja diagonal em blocos. Mais precisamente, existe uma base de operadores de criação  $\{a_i^\dagger\}$ ,

$$a_i^\dagger = \sum_{j=1}^d U_{ji} f_j^\dagger, \quad (3.28)$$

sendo  $U$  uma matriz unitária, de forma que  $W' = UWU^T$  possui a forma diagonal em blocos, ou seja,

$$W' = \text{diag}[Z_1, \dots, Z_r, Z_0] \quad , \quad Z_i = \begin{pmatrix} 0 & z_i \\ -z_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

onde  $z_i \in \mathbb{C}$ , " $r$ " é o rank da matriz e  $Z_0$  é a matriz nula de tamanho  $(d - 2r)$ . Sendo assim, nesta base o estado possui a forma,

$$|\psi\rangle = 2 \sum_i^r z_i a_{(2i-1)}^\dagger a_{2i}^\dagger |0\rangle, \quad (3.30)$$

onde a normalização do estado é dada por  $\sum_i |z_i|^2 = \frac{1}{4}$ .

Vê-se que nesta base cada bloco  $Z_i$  corresponde a um determinante de Slater elementar, sendo desta maneira os análogos de estados produto em sistemas de partículas distinguíveis. Temos ainda que tal decomposição do estado é tal que possui um número mínimo " $r$ " de termos. Um estado será então dito separável somente se o rank " $r = 1$ ".

A generalização da idéia para estados mistos segue definindo o "número de Slater" (análogo ao número de Schmidt).

**Definition 3.2.** Considere a matriz densidade  $\rho$  e todas sua possíveis decomposições convexas em estados puros,  $\rho = \sum_i p_i \rho_i^r$ , onde " $r$ " representa o rank do estado puro. O número de Slater " $k$ " é definido por  $k = \min\{r_{\max}\}$ , onde  $r_{\max}$  é o rank máximo da decomposição, e o mínimo é realizado sobre todas as possíveis decomposições.

Em suma, o número de Slater de um estado misto corresponde ao rank mínimo necessário a fim de construí-lo.

#### ·Caso Bosônico

O mesmo raciocínio pode ser aplicado ao caso bosônico. Um estado arbitrário de um sistema de dois bósons indistinguíveis, pertencente ao espaço de Fock  $\mathcal{F}_2^d$ , pode ser dado na forma,

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} v_{ij} b_i^\dagger b_j^\dagger |0\rangle; \quad (3.31)$$

onde  $V$  é uma matriz simétrica e  $b_i^\dagger$  são os operadores de criação bosônicos.

Utilizando agora as propriedades de matrizes simétricas, conforme dadas no apêndice A (teorema.A.3), vê-se ser sempre possível encontrar uma base de

operadores bosônicos de forma que a matriz seja diagonal. Mais precisamente, existe uma base de operadores de criação  $\{c_i^\dagger\}$ ,

$$c_i^\dagger = \sum_{j=1}^d U_{ji} b_j^\dagger, \quad (3.32)$$

sendo  $U$  uma matriz unitária, de forma que  $V' = UVU^T$  possui a forma diagonal, ou seja,

$$W' = \text{diag}[z_1, \dots, z_r, 0, \dots, 0] \quad (3.33)$$

onde  $z_i \in \mathcal{C}$  e " $r$ " é o rank da matriz. Sendo assim, nesta base o estado possui a forma,

$$|\psi\rangle = \sqrt{2} \sum_i^r z_i c_i^\dagger c_i^\dagger |0\rangle, \quad (3.34)$$

e a normalização do estado é dada por  $\sum_i |z_i|^2 = \frac{1}{2}$ .

Nesta base o estado é uma combinação de "permanentes de Slater" representando estados bosônicos duplamente ocupados. Temos também que tal decomposição do estado é tal que possui um número mínimo " $r$ " de termos. Um estado será então dito separável somente se o rank " $r = 1$ ".

A generalização para estados mistos dá-se da mesma forma que o caso fermiônico, ou seja, a partir da definição 3.2 para seu número de Slater.

### 3.4.2 Entropia de Von Neumann

A partir da Decomposição de Slater podemos mostrar que a entropia de Von Neumann da matriz densidade reduzida permanece uma boa medida de emaranhamento, mesmo ao tratarmos agora de sistemas de duas partículas indistinguíveis[23]. Analisemos novamente os casos fermiônico e bosônicos separadamente.

#### · Caso Fermiônico

A matriz densidade reduzida  $\rho_r$  (não normalizada) é dada por,

$$(\rho_r)_{\mu\nu} = \langle 0 | f_\nu \left( \sum_{i=1}^d f_i \rho f_i^\dagger \right) f_\nu^\dagger | 0 \rangle \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^d \langle 0 | f_\nu f_i | \psi \rangle \langle \psi | f_i^\dagger f_\nu^\dagger | 0 \rangle \\ &= \sum_i \langle 0 | \tau w_{\mu i} | 0 \rangle \langle 0 | w_{\nu i}^* \tau | 0 \rangle, \quad (\tau = \pm 1) \\ &= \tau^2 \sum_i w_{\mu i} w_{\nu i}^* = \sum_i w_{\mu i} w_{\nu i}^* \\ &= (WW^\dagger)_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Sua normalização é obtida simplesmente por  $\rho_r \mapsto 2\rho_r$ .<sup>#</sup> Utilizando agora a base diagonal da matriz  $W$ , segundo a Decomposição de Slater, temos que,

$$\begin{aligned}\rho_r &= \text{diag}[Z_1, \dots, Z_r, Z_0] \times \text{diag}[Z_1^\dagger, \dots, -Z_r^\dagger, Z_0] \\ &= \text{diag}(D_1, \dots, D_r, Z_0), \quad D_i = \begin{pmatrix} |z_i|^2 & 0 \\ 0 & |z_i|^2 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (3.37)$$

A entropia de Von Neumann da matriz densidade reduzida é dada desta forma por,

$$\begin{aligned}S(\rho_r) &= -\text{Tr}(\rho_r \ln \rho_r) \\ &= -\sum_{i=1}^r 4[|z_i|^2 (\ln 2 + \ln |z_i|^2)] \\ &= -4 \ln 2 \underbrace{\sum_i |z_i|^2}_{\frac{1}{4}} - 4 \sum_i |z_i|^2 \ln |z_i|^2 \\ &= -\ln 2 - 4 \sum_{i=1}^r |z_i|^2 \ln |z_i|^2\end{aligned}\quad (3.38)$$

Vê-se então a dependência direta da medida com os determinantes de Slater elementares do estado, variando de  $S = \ln 2$  para estados sem correlações quânticas a  $S = \ln d_E$  para estados maximamente correlacionados, onde  $d_E = d$  ou  $d - 1$  caso a dimensão das partículas seja par ou ímpar, respectivamente.

#### · Caso Bosônico

A mesma análise vale para sistemas de dois bósons indistinguíveis, onde partindo de sua Decomposição de Slater pode-se encontrar a seguinte relação,

$$S(\rho_r) = -\sum_{i=1}^r 2|z_i|^2 \ln(2|z_i|^2)\quad (3.39)$$

Vê-se agora que a medida de entropia varia de  $S = 0$  para estados não correlacionados a  $S = \ln d$  para estados maximamente correlacionados.

### 3.4.3 Concorrência de Schliemann

Medidas analíticas de correlação quântica foram também propostas em [13] como uma generalização da concorrência de Wotters [33] a qual, conforme apresentamos, é válida para sistemas de q-bits distinguíveis. Tal medida proposta, denominada concorrência de Schliemann, é válida nos espaços fermiônicos e bosônicos de duas partículas de menor dimensão onde existam

<sup>#</sup> Vê-se da eq.3.36 que  $\text{Tr}(\rho_r) = \text{Tr}(WW^\dagger) = \frac{1}{2}$ , e sendo assim o estado normalizado é dado simplesmente por  $(\rho_r') = \frac{\rho_r}{\text{Tr}(\rho_r)} = 2\rho_r$ .

estados emaranhados, ou seja, no espaço fermiônico  $\mathcal{F}_2^4 = \mathcal{A}(\mathcal{H}^{(4)} \otimes \mathcal{H}^{(4)})$  e no espaço bosônico  $\mathcal{F}_2^2 = \mathcal{S}(\mathcal{H}^{(2)} \otimes \mathcal{H}^{(2)})$ .

Sua obtenção segue de maneira similar ao raciocínio utilizado por Wootters, o qual já fora exaustivamente demonstrado no capítulo II deste trabalho. Sendo assim, nos absteremos das demonstrações matemáticas concentrando-nos apenas na apresentação das definições fundamentais relacionados à medida.

Vejamus primeiro o caso de sistemas fermiônicos. Define-se  $\mathcal{U}_{ph}$  como o operador de transformação partícula-buraco,

$$\mathcal{U}_{ph} f_i^\dagger \mathcal{U}_{ph}^\dagger = f_i \quad , \quad \mathcal{U}_{ph} |0\rangle = \prod_{i=1}^d f_i^\dagger |0\rangle, \quad (3.40)$$

onde  $d$  = dimensão de partícula única,  $|0\rangle$  é o estado vácuo e  $f_i, f_i^\dagger$  são os operadores de aniquilação e criação fermiônicos, respectivamente. Seja  $\mathcal{K}$  o operador anti-linear de conjugação complexa, o qual age da forma

$$\mathcal{K} f_i^\dagger \mathcal{K} = f_i \quad , \quad \mathcal{K} f_i \mathcal{K} = f_i^\dagger \quad , \quad \mathcal{K} |0\rangle = |0\rangle \quad (3.41)$$

Podemos então obter o operador  $\mathcal{D} = \mathcal{U}_{ph} \mathcal{K}$ , denominado operador de dualização, o qual age de forma similar ao operador inversão temporal (ou "spin-flip", conforme eq.2.18). Sendo o estados dual  $\tilde{\rho} = \mathcal{D} \rho \mathcal{D}^{-1}$ , temos que a concorrência de Schliemann para estados  $\rho \in \mathcal{A}(\mathcal{H}^{(4)} \otimes \mathcal{H}^{(4)})$  é dada por

$$C_{\mathcal{F}}(\rho) = \max(0, \lambda_6 - \lambda_5 - \lambda_4 - \lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_1) \quad (3.42)$$

onde  $\lambda_i$ 's são, em ordem decrescente, as raízes quadradas dos valores singulares da matriz  $R = \rho \tilde{\rho}$ .

Da mesma forma podemos obter a medida para o caso bosônico, onde o operador dualização é agora definido por  $\mathcal{D} = \mathcal{R} \mathcal{K}$ , e o operador  $\mathcal{R}$  age da forma,

$$\mathcal{R} b_i^\dagger \mathcal{R}^\dagger = \sum_{j=1}^2 \sigma_{ji}^\nu b_j^\dagger \quad (3.43)$$

Sendo então o estado dual  $\tilde{\rho} = \mathcal{D} \rho \mathcal{D}^{-1}$ , temos que a concorrência de Schliemann para estados  $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^{(2)} \otimes \mathcal{H}^{(2)})$  é dada por

$$C_{\mathcal{B}}(\rho) = \max(0, \lambda_4 - \lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_1) \quad (3.44)$$

onde  $\lambda_i$ 's são, em ordem decrescente, as raízes quadradas dos valores singulares da matriz  $R = \rho \tilde{\rho}$ .

# Testemunhas de Emaranhamento em Sistemas de Partículas Indistinguíveis

Apresentaremos nesta seção maneiras de se quantificar as diferentes abordagens de emaranhamento em sistemas de partículas indistinguíveis descritas no capítulo anterior utilizando testemunhas de emaranhamento. Veremos que no caso das medidas de Emaranhamento de Modos e Emaranhamento de Partículas a utilização dos operadores testemunha para quantificá-los segue de maneira trivial. Já no caso das Correlações Quânticas o problema é mais delicado, onde obtemos resultados viáveis apenas para sistemas fermiônicos, apresentando medidas com interpretações análogas as Robustezas. Analisando então o caso particular da Robusteza Generalizada, obtivemos resultados experimentais que nos mostraram a notável relação de equivalência entre tal medida e a Concorrência de Schliemann, as quais são iguais para estados puros, e no caso de estados mistos a Concorrência de Schliemann apresenta-se como um limite superior para a Robusteza Generalizada.

Vejamos como são realizadas tais análises.

## 4.1 Emaranhamento de Modos, Emaranhamento de Partículas

Conforme vimos, o Emaranhamento de Modos ( $E_M$ ) de um estado quântico é obtido através do mapa do espaço de Fock sobre o espaço de q-dits, dado pelas equações 3.12, 3.14. Sendo assim, sua determinação via operadores testemunha pode ser dada utilizando qualquer método baseado em testemunhas de emaranhamento para partículas distinguíveis, tais como as robustezas exemplificadas no capítulo II.

Visto que o Emaranhamento de Partículas ( $E_P$ ) está inteiramente relacionado ao  $E_M$ , conforme a eq.3.22, seu cálculo por testemunhas de emaranhamento segue da mesma forma.

## 4.2 Correlações Quânticas

Conforme dito no capítulo II, o espaço  $\mathcal{M}$  das testemunhas de emaranhamento são determinantes sobre a medida de emaranhamento (eq.2.47). Baseando-se nesta idéia iremos, nesta seção, obter uma estrutura particular a fim de quantificarmos as correlações quânticas em sistemas de partículas indistinguíveis fermiônicas.

Ao lidarmos com sistemas de partículas fermiônicas, sabemos que o espaço de estados corresponde ao espaço anti-simétrico  $\mathcal{A}(\mathcal{H}_{\mathcal{T}})$ . Nossa análise seguirá então da assimilação de que, assim como o espaço de estados possui tal forma singular, o espaço  $\mathcal{M}$  de testemunhas de emaranhamento deve também estar a par desta informação. Nosso vínculo será dado impondo que  $\mathcal{M}$  corresponda ao espaço de testemunhas anti-simétricas. Vejamos que consequências tal restrição tem sobre as medidas de emaranhamento, considerando o caso particular da robusteza generalizada (eq.2.48).

O espaço de testemunhas anti-simétricas é definido por,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = \{W \in \mathcal{W} \mid W \leq I, W = AWA^\dagger\} \quad (4.1)$$

A medida de emaranhamento calculada utilizando deste espaço de testemunhas possui uma interpretação análoga à robusteza generalizada, conforme veremos; sendo assim a denominaremos por  $\mathcal{R}_g^A$ .

$$\mathcal{R}_g^A = \max(0, - \min_{W \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}} \text{Tr}(W\rho)) \quad (4.2)$$

Em um raciocínio análogo ao realizado na seção 2.3.1, iremos aplicar os conceitos de Lagrange duality da teoria de otimização convexa, a fim de analisar o problema dado acima (eq.4.1 e 4.2) sob suas abordagens de problemas primal e dual. O problema primal consiste em

$$\text{minimize} \quad \text{Tr}(W\rho) \quad (4.3)$$

$$\text{sob os vínculos} \quad W \leq I \quad (4.4)$$

$$\text{Tr}(W\sigma) \geq 0, \forall \sigma \in \mathcal{S} \quad (4.5)$$

$$(4.6)$$

O Lagrangeano deste problema é dado por

$$\mathcal{L}(W, X, h(\sigma)) = \text{Tr}(W\rho) + \text{Tr}[X(W - I)] - \int_{\sigma \in \mathcal{S}} h(\sigma) \text{Tr}(W\sigma) d\sigma \quad (4.7)$$

A partir do Lagrangeano podemos obter a função dual de Lagrange  $g(X, h(\sigma))$ , dada pelo ínfimo sob o domínio  $W \in \mathcal{M}_A$ . Vê-se que,

$$\begin{aligned} g(X, h(\sigma)) &= \inf_{W \in \mathcal{M}_A} \mathcal{L}(W, X, h(\sigma)) \\ &= \begin{cases} -\text{Tr}(X) & , \text{ se } \text{Tr} W(\rho + X - \int_{\sigma \in \mathcal{S}} h(\sigma) \sigma d\sigma) = 0 \\ -\infty & , \text{ caso contrário} \end{cases} \end{aligned}$$

A função dual é desta forma finita somente se a condição sobre o traço dada acima for satisfeita. Sendo assim o problema dual, o qual consiste em maximizar a função dual sob seus vínculos, é dado por

$$\text{minimize} \quad \text{Tr}(X) \quad (4.8)$$

$$\text{sob os vínculos} \quad h(\sigma) \geq 0 \quad (4.9)$$

$$X \geq 0 \quad (4.10)$$

$$\rho_A + X_A = \int_{\sigma \in \mathcal{S}} h(\sigma) \sigma_A d\sigma \quad (4.11)$$

onde  $\rho_A$  é o estado antisimetrizado (condição já satisfeita visto que estamos tratando de partículas fermiônicas),  $X_A$  é um estado qualquer pertencente ao espaço anti-simétrico e  $\sigma_A$  corresponde a estados dados por um único determinante de Slater. Desde que  $h(\sigma) \geq 0$ , a integral no lado direito da eq.4.11 corresponde a um estado misto cujos estados puros possuem único determinante de Slater. A analogia com a robusteza generalizada é clara, onde temos agora que a mistura mínima é realizada sobre estados fermiônicos tal que resulte em um estado com número de Slater  $k = 1$ , o qual possui correlação quântica nula.

Outras medidas também podem ser diretamente obtidas pelo mesmo procedimento, levando a interpretações similares, tais como a robusteza aleatória ou robustez do emaranhamento.

### Correlações Quânticas ("formalismo de segunda quantização")

Podemos também tratar o problema sob uma outra abordagem muito mais elegante e computacionalmente mais barata. Utilizando o formalismo de segunda quantização iremos nos focar diretamente sobre o espaço de Fock  $\mathcal{F}_n^d$  e seu correspondente espaço de testemunhas de emaranhamento, dado por  $\mathcal{W}(\mathcal{F}_n^d)$ . Utilizaremos então uma definição geral de estados separáveis (estados sem correlações quânticas) a qual irá se mostrar bastante útil em dois aspectos principais: permite-nos obter um a generalização do método proposto em [10], assim como nos capacitará definir "partições de partículas" no formalismo de segunda quantização.

Considere o espaço de Fock  $\mathcal{F}_n^d$  como o espaço de  $n$  férmions indistinguíveis compartilhando um espaço de partícula única  $d$ -dimensional, temos então a seguinte definição:

**Definição 4.1.** Um estado  $\sigma \in \mathcal{F}_N^d$  é separável com respeito a uma dada partição de suas partículas  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v]$ ,  $\sum_i \alpha_i = N$ , se ele puder ser decomposto como

$$\sigma = \sum_i p_i a_{\alpha_1}^{i\dagger} \cdots a_{\alpha_v}^{i\dagger} |0\rangle \langle 0| a_{\alpha_v}^i \cdots a_{\alpha_1}^i, \quad (4.12)$$

onde  $a_{\alpha_k}^\dagger = \sum_{l=1}^{d_{\alpha_k}} c_l^{\alpha_k} f_{l_{\alpha_k}}^\dagger$ , e  $\{f_{l_{\alpha_k}}^\dagger\}$  é uma base ortonormal de operadores fermiônicos de criação para o espaço  $\mathcal{F}_{\alpha_k}^d$ .

Vê-se que para o caso particular das partições conterem apenas uma partícula ( $\alpha_i = 1, i = 1, \dots, N$ ), o estado é dito separável somente se este possuir número de Slater  $k = 1$ , conforme a definição 3.2.

A generalização do Teorema 2.5 segue então da forma,

**Teorema 4.2.** Um estado  $\rho \in \mathcal{F}_N^d$  é emaranhado em relação a partição  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v]$ ,  $\sum_i \alpha_i = N$ , se e somente se o valor óptimo do seguinte problema for negativo:

minimize  $\text{Tr}(W\rho)$  sujeito a

$$\sum_{i_{\alpha_{v-1}}=1}^{d_{\alpha_{v-1}}} \cdots \sum_{i_{\alpha_1}=1}^{d_{\alpha_1}} \sum_{j_{\alpha_1}=1}^{d_{\alpha_1}} \cdots \sum_{j_{\alpha_{v-1}}=1}^{d_{\alpha_{v-1}}} (c_{i_{\alpha_{v-1}}}^* \cdots c_{i_{\alpha_1}}^* c_{j_{\alpha_1}} \cdots c_{j_{\alpha_{v-1}}}) W_{i_{\alpha_{v-1}} \cdots i_{\alpha_1} j_{\alpha_1} \cdots j_{\alpha_{v-1}}} \geq 0,$$

$$\forall c_{i_{\alpha_k}} \in \mathcal{C}, \quad 1 \leq k \leq (v-1), \quad (4.13)$$

onde  $d$  é dimensão da base de partícula única,  $W_{i_{\alpha_{v-1}} \cdots i_{\alpha_1} j_{\alpha_1} \cdots j_{\alpha_{v-1}}} = f_{i_{\alpha_{v-1}}} \cdots f_{i_{\alpha_1}} \cdots W_{j_{\alpha_1}}^\dagger \cdots f_{j_{\alpha_{v-1}}}^\dagger \in \mathcal{W}(\mathcal{F}_{\alpha_v}^d)$  e  $\{f_{l_{\alpha_k}}^\dagger\}$  é uma base ortonormal de operadores de criação fermiônicos para o espaço  $\mathcal{F}_{\alpha_k}^d$ . Se  $\rho$  for emaranhado, a matriz  $W$  que minimiza o problema corresponde a OEW de  $\rho$ .

*Proof.* Sabe-se que um estado é emaranhado se e somente se existir um operador testemunha  $W$  tal que  $\text{Tr}(W\rho) < 0$  e  $\text{Tr}(W\sigma) > 0$  para todos os separáveis. Seja um estado separável geral na partição  $\alpha$  como dado pela eq.4.12. A condição de positividade da testemunha sobre os separáveis pode então ser escrita na forma,

$$\langle 0| \underbrace{a_{\alpha_v} a_{\alpha_{v-1}} \cdots a_{\alpha_1} W a_{\alpha_1}^\dagger \cdots a_{\alpha_{v-1}}^\dagger a_{\alpha_v}^\dagger}_{\text{Funcional} \in \mathcal{W}(\mathcal{F}_{\alpha_v}^d)} |0\rangle \geq 0, \quad \forall a_{\alpha_k}^\dagger \in \mathcal{F}_{\alpha_k}^d \quad (4.14)$$

Note no entanto que a positividade do funcional assinalado acima é suficiente para satisfazer a desigualdade. Segue diretamente que a matriz  $W$  que satisfaz a desigualdade dada no problema (eq.4.13) corresponde a uma testemunha de emaranhamento, e sua otimização corresponde a OEW de  $\rho$ .  $\square$

O problema de otimização dado pelo teorema acima pode ser resolvido assim como feito em [10], sendo possível uma relaxação probabilística aproximando-o em termos de um SDP.

A medida de robustez generalizada  $\mathcal{R}_g^A$  obtida deste formalismo será dada utilizando o método de relaxação descrito acima juntamente com o vínculo adicional  $\mathcal{M} = \{W \in \mathcal{W}(\mathcal{F}_n^d) \mid W \leq I\}$ .

*Obs:* Note que os resultados obtidos acima são válidos apenas para sistemas de partículas indistinguíveis *fermiônicas*. Poderíamos ser tentados a supor que o mesmo raciocínio possa ser utilizado ao caso bosônico, mas é fácil de se perceber que tal analogia é falsa. Ao considerarmos as testemunhas como sendo simétricas, vê-se que o estado  $\sigma_S = S\sigma S^\dagger$  pode representar também estados com correlações quânticas, tal como o estado  $\sigma_S = |\psi^+\rangle\langle\psi^+|$ , e a interpretação da medida como robustez é desta forma inconcebível.

### 4.3 Robustez Generalizada em Sistemas Fermiônicos

Nesta seção iremos analisar a medida de emaranhamento  $\mathcal{R}_g^A$  apresentada na seção anterior. Para o caso mais simples onde existe emaranhamento em sistemas fermiônicos,  $\mathcal{A}(\mathcal{H}^{(4)} \otimes \mathcal{H}^{(4)})$ , podemos comparar nossa medida com a concorrência de Schliemann "C<sub>S</sub>" apresentada anteriormente. Analisando a relação entre as duas medidas vemos um resultado notável, onde as medidas se igualam para estados puros (fig. 4.1a), e no caso de estados mistos a concorrência de Schliemann se apresenta como um limite superior para a Robustez Generalizada (fig. 4.1b). A notabilidade de tal fato é dada pela semelhança com os resultados conhecidos para sistemas de partículas distinguíveis, onde a mesma relação é encontrada entre a Concorrência de Wootters e a Robustez de Emaranhamento.

Vejamos agora alguns exemplos simples da medida  $\mathcal{R}_g^A$  para sistemas bipartites de dimensões variadas. Construímos famílias de estados fermiônicos que ao variarmos seu parâmetro caminhamos sobre estados puros separáveis, maximamente emaranhados e o estado maximamente misto:

$$\rho = f(0)\sigma + f(1/2)\rho_{max} + f(1)I \quad , \quad f(x) = Ae^{-\frac{(p-x)^2}{\Delta^2}} \quad , \quad (4.15)$$

onde  $\sigma = f_i^\dagger f_j^\dagger |0\rangle$ ,  $i \neq j$ , é um estado puro com apenas um determinante de Slater;  $\rho_{max}$  é estado puro maximamente emaranhado do tipo singleto, i.e, se considerarmos os graus de liberdade pelo spin das partículas, corresponde ao estado com números quânticos  $S = S_z = 0$ ; e  $I$  é a identidade do espaço de estados anti-simétrico (dada uma base  $\{|w_i\rangle\}$  neste espaço,  $I = \frac{1}{dim} \sum_k |w_i\rangle\langle w_j|$ ).

Vê-se da fig.4.2 o comportamento da medida sobre a família de estados, com valor máximo sobre os estados singleto e nula sobre os estados extremos, os quais sabe-se possuem correlação quântica nula.

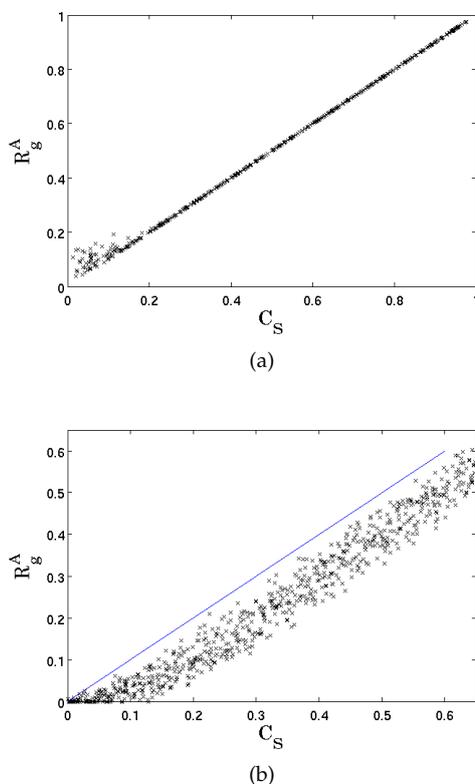


Figure 4.1: Medidas da robustez generalizada  $\mathcal{R}_g^A$  em função da concorência de Schliemann  $C_S$ , para estados fermiônicos gerados aleatoriamente utilizando o programa MatLab. Foram analisados estados puros (a) e mistos (b) separadamente.

#### 4.3.1 Modelo de Hubbard

O Hamiltoniano de Hubbard é um modelo bastante utilizado na descrição de sólidos, descrevendo desde elétrons interagentes em bandas de energia até problemas diversos relacionados a supercondutividade em altas temperaturas, transições de fase isolante-condutor, e outros. Consideraremos aqui seu caso unidimensional, utilizado para modelar diversos materiais "quasi-unidimensionais". O Hamiltoniano conta um termo  $t_h$  de acoplamento, caracterizando o tunelamento (hopping) dos elétrons entre os sites, e um termo  $U$  da interação em um mesmo site (on-site interaction). Sua forma é dada por

$$H = -t_h \sum_{j=1, \sigma=\uparrow, \downarrow}^L (f_{j, \sigma}^\dagger f_{j+1, \sigma} + f_{j+1, \sigma}^\dagger f_{j, \sigma}) + U \sum_{j=1}^L n_{j\uparrow} n_{j\downarrow}, \quad (4.16)$$

onde  $n_{j\sigma}$  corresponde ao operador número de partículas no site  $j$  com spin  $\sigma$ . Na ausência do termo  $U$  retornamos ao modelo de elétrons livres.

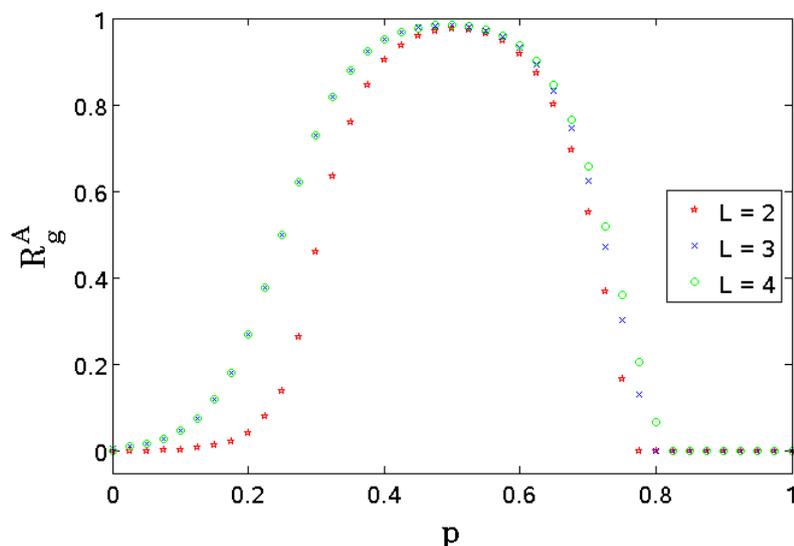


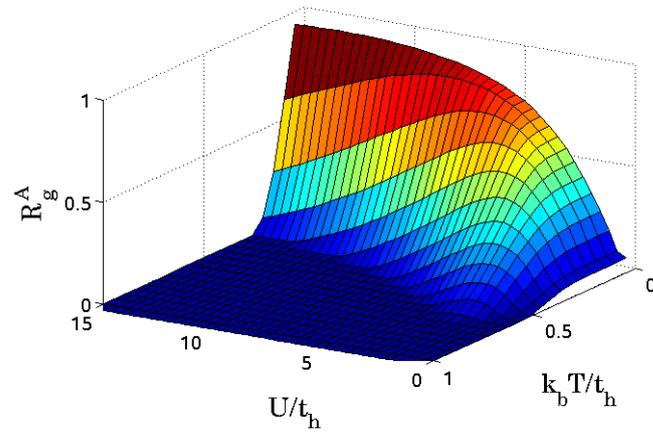
Figure 4.2: Medida da Robusteza Generalizada  $\mathcal{R}_g^A$  para famílias de estados bipartites, eq.(4.15), em espaços de Hilbert anti-simétricos  $\mathcal{A}(\mathcal{H}^{(2L)} \otimes \mathcal{H}^{(2L)})$ . O desvio médio da função gaussiana  $f(x)$  é dado por  $\Delta \approx 0,16$ , e a constante A ajustada de modo a normalizar o estado.

Analisaremos o caso  $N=2$  elétrons e  $L=2$  sites, no qual para determinados valores de seus parâmetros pode ser utilizado como modelo de uma molécula de  $H_2$ [1]. Vejamos dois casos limites de seus parâmetros:  $U/t_h \rightarrow 0$ , o modelo corresponde a um sistema de elétrons livres não interagentes, claramente não condizente como modelo de uma molécula de  $H_2$ , assim como o caso  $U/t_h \rightarrow \infty$ , correspondendo a um sistema onde ou os sites encontram-se demasiadamente separados ( $t_h \rightarrow 0$ ) ou os sites encontram-se unicamente ocupados ( $U \rightarrow \infty$ ). Se analisarmos a probabilidade de dupla ocupação de um mesmo site (fig.4.3b) vemos para qual faixa de valores  $U/t_h$  (aproximadamente entre 1 e 4) o sistema está fora dos casos limites descritos acima, representando desta forma dois sites vizinhos com elétrons interagentes. Para tal região o sistema pode ser interpretado como modelo para uma molécula de  $H_2$ .

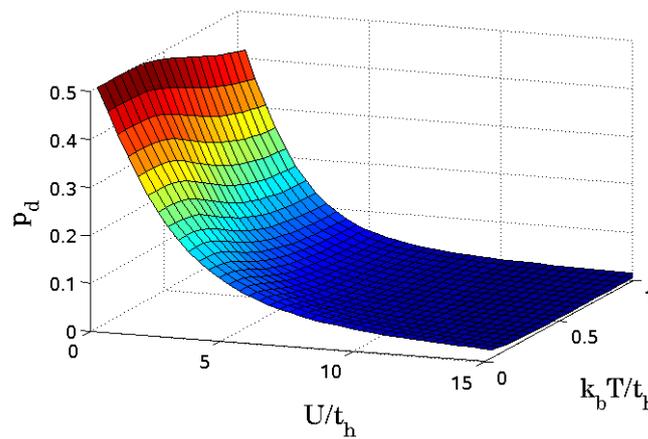
Calculamos então  $\mathcal{R}_g^A$  para o estado térmico do ensemble-canônico (fig.4.3a) dado por:

$$\rho = \frac{e^{-\frac{H}{k_b T}}}{\mathcal{Z}}, \quad (4.17)$$

onde  $\mathcal{Z}$  é a função partição. Vemos que a temperatura é um fator crucial para a existência de emaranhamento no sistema, como era de se esperar, visto que é um fator de decoerência dos estados quânticos. Interessante notar na figura que, ao aumentarmos o parâmetro  $U/t_h$ , observa-se até certo ponto ( $\approx 4$ ) um aumento correspondente do emaranhamento do sistema. Tendo em mente a molécula de  $H_2$  vemos que essa região corresponde ao limite do modelo, ou



(a)



(b)

Figure 4.3: (a) Medida de Robustez Generalizada  $\mathcal{R}_g^A$  no estado térmico do ensemble-canônico do modelo de Hubbard, para  $N_s=2$  e  $L=2$ , em função dos parâmetros  $k_b T/t_h$  e  $U/t_h$ . (b) Probabilidade " $p_d$ " de encontrar sites duplamente ocupados.

seja, o ponto de quebra da ligação (bond-breaking) entre os átomos.

# Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho abordamos essencialmente o tema da quantificação de emaranhamento em sistemas quânticos, realizando uma análise detalhada desde seus princípios fundamentais, ou seja, dos postulados da teoria de medidas de emaranhamento e justificando desta forma as propriedades esperadas de "bons quantificadores" de emaranhamento. Apresentamos alguns exemplos de medidas de emaranhamento para partículas distinguíveis, e abordamos por fim o caso em que as partículas são indistinguíveis uma das outras. Vimos então que neste caso a quantificação do emaranhamento é um assunto de grandes controvérsias com diferentes propostas para sua abordagem, cada qual com sua interpretação singular. Após discorrermos sobre tais abordagens, analisando suas principais características e fundamentações, apresentamos nosso método proposto para quantificá-las com base na utilização das testemunhas de emaranhamento.

Vimos que para o caso das medidas de Emaranhamento de Modos ( $E_M$ ) e Emaranhamento de Partículas ( $E_P$ ) a utilização das testemunhas para quantificá-las segue de maneira trivial. Já no caso das Correlações Quânticas a situação é mais delicada, onde obtivemos resultados viáveis apenas para sistemas fermiônicos, apresentando medidas de Correlações Quânticas com interpretações análogas as Robustezas. Analisando então o caso particular da Robusteza Generalizada, obtivemos resultados experimentais que nos mostraram a notável relação de equivalência entre tal medida e a Concorrência de Schliemann, as quais são iguais para estados puros, e no caso de estados mistos a Concorrência de Schliemann apresentou-se como um limite superior para a Robusteza Generalizada. A notabilidade de tal fato é dada pela semelhança com os resultados conhecidos para sistemas de partículas distinguíveis, onde a mesma relação é encontrada entre a Concorrência de Wootters e a Robusteza de Emaranhamento.

Vemos por fim que são várias as possíveis direções para trabalhos futuros, tais como a obtenção de uma demonstração analítica da relação de equivalência entre as medidas apontadas acima; a análise das diferentes medidas de emaranhamento em sistemas de várias partículas indistinguíveis e seus modelos de Hamiltoniano utilizados para descrição de sólidos, estudando por exemplo as correlações quânticas entre férmions em fenômenos singulares tais como supercondutividade, transições de fase quântica, e outros; ou até mesmo um estudo mais aprofundado das correlações quânticas entre diferentes partições de partículas conforme definidas no último capítulo (definição 4.12).

# Matrizes Complexas Simétricas e Anti-simétricas

Definimos o espaço de matrizes  $n \times n$  complexas ou reais por  $\mathcal{M}_n(\mathcal{C})$  e  $\mathcal{M}_n(\mathcal{R})$ , respectivamente. Iremos apresentar aqui algumas propriedades particulares sobre as matrizes simétricas ( $A = A^T$ ) e anti-simétricas ( $A = -A^T$ ), que nos serão úteis neste trabalho.

**Theorem A.1.** *Seja  $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{R})$ . Então  $A$  é normal ( $[A, A^\dagger] = 0$ ) se e somente existe uma matriz real ortogonal  $Q \in \mathcal{M}_n(\mathcal{R})$  tal que*

$$A = Q\Lambda Q^T, \text{ onde } \Lambda = \begin{bmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_k \end{bmatrix}$$

Cada  $A_i$  são números reais ou matrizes reais  $2 \times 2$  da forma

$$A_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

A demonstração deste teorema, apesar de simples, é demasiadamente extensa. Um leitor mais interessado pode encontrá-la de uma forma bastante clara em [18] ou em outros livros de análise matricial de sua preferência.

Segue diretamente do teorema acima os casos:

**Corolary A.1.** *Seja  $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{R})$ , então*

· Se  $A$  for simétrica  $\rightarrow A_i \in \mathcal{R}$ , sendo  $\Lambda$  uma matriz diagonal.

· Se  $A$  for anti-simétrica  $\rightarrow A_i \in \mathcal{M}_2(\mathcal{R})$  da forma  $\begin{pmatrix} 0 & \beta_i \\ -\beta_i & 0 \end{pmatrix}$ , sendo  $\Lambda$  uma matriz diagonal em blocos.

Podemos obter resultados análogos considerando também matrizes complexas. A extensão se dá na forma:

---

**Theorem A.2.** *Seja  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Então  $A$  é (anti)simétrica e normal se e somente se existe uma matriz ortogonal real  $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  tal que  $A = Q\Lambda Q^T$ , onde  $\Lambda$  é uma matriz diagonal da forma  $\Lambda = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, 0)$ :*

·  $A_i \in \mathbb{C}$ , se a matriz for simétrica.

·  $A_i = \begin{pmatrix} 0 & \beta_i \\ -\beta_i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\beta_i \in \mathbb{C}$ , se a matriz for anti-simétrica.

*Proof.* Iremos demonstrar somente para matrizes simétricas, visto que o caso anti-simétrico segue o mesmo raciocínio.

Se existe tal matriz ortogonal  $Q$ , temos que  $A = Q\Lambda Q^T$ , e ainda

·  $A$  é simétrica :  $A^T = (Q\Lambda Q^T)^T = Q^T \Lambda^T Q^T = Q\Lambda Q^T = A$

·  $A$  é normal:  $\begin{cases} AA^\dagger = (Q\Lambda Q^T)(Q^T \Lambda^\dagger Q) = Q\Lambda Q^T Q\Lambda Q^T = Q\Lambda Q^T \\ A^\dagger A = (Q^T \Lambda^\dagger Q)(Q\Lambda Q^T) = Q\Lambda Q^T Q\Lambda Q^T = Q\Lambda Q^T \end{cases}$

Para se provar o inverso utiliza-se o seguinte raciocínio: dado  $A$  simétrica e normal, podemos representá-la da forma  $A = B + iC$ , onde  $B$  e  $C$  são simétricas e reais. Vê-se no entanto que elas comutam,  $[B, C] = 0$ , e sendo assim existe uma matriz ortogonal  $Q$  que as diagonaliza simultaneamente na forma dada pelo corolário A.1. Por fim, temos que

$$\begin{aligned} QAQ^T &= Q(B + iC)Q^T = QBQ^T + iQCQ^T \\ &= D_B + iD_C \\ &= \text{diag}(A_1, A_2, \dots, 0); \quad A_i \in \mathbb{C} \end{aligned} \quad \square$$

O último teorema aqui apresentado constitui um caso ainda mais geral que os anteriores, considerando o conjunto de matrizes (anti)simétricas complexas sem quaisquer outras restrições.

**Theorem A.3.** *Seja  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Então  $A$  é (anti)simétrica se e somente se existe uma matriz unitária  $U \in \mathcal{M}_n$  tal que  $A = U\Lambda U^T$ , onde  $\Lambda$  é uma matriz diagonal da forma  $\Lambda = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, 0)$ :*

·  $A_i \in \mathbb{C}$ , se a matriz for simétrica.

·  $A_i = \begin{pmatrix} 0 & \beta_i \\ -\beta_i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\beta_i \in \mathbb{C}$ , se a matriz for anti-simétrica.

*Proof.* Novamente, demonstraremos somente para matrizes simétricas, visto que o raciocínio é análogo no caso anti-simétrico.

Se existe tal unitária, temos que  $A = U\Lambda U^T$ , e ainda

·  $A$  é simétrica :  $A^T = (U\Lambda U^T)^T = U^T \Lambda^T U^T = U\Lambda U^T = A$

O inverso é dado partindo de que, dado  $A$  simétrica, constrói-se primeiramente a matriz  $B = AA^\dagger$  hermitiana, a qual pode ser diagonalizada,  $B = VD_B C^\dagger$ . A partir desta unitária pode-se construir a matriz  $C = V^\dagger A V^*$ , a qual é simétrica e normal. Utilizando agora do teorema A.2, sabe-se que  $C$  pode ser diagonalizada por uma matriz ortogonal  $Q$  da forma  $C = Q\Lambda Q^T$ . Por fim,

---

temos que

$$\begin{aligned} C = V^+AV^* &= Q\Lambda Q^T \\ A &= (VQ)\Lambda(VQ)^T \\ &= U\Lambda U^T, \quad U = VQ \end{aligned} \quad \square$$

## Dualidade e Teoria de Otimização

Em teoria de otimização frequentemente podemos converter nosso problema original, denominado problema primal, em uma formulação alternativa, denominado problema dual. Para isso utiliza-se do chamado Lagrangeano associado ao problema.

Considere o problema de otimização (primal) dado na seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f_0(x) \\ & \text{sob os vínculos} && f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & && h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

com  $x \in \mathcal{D}$ . Denote o valor óptimo do problema por  $p^*$ , ou seja,  $f(x_{opt}) = p^*$ .

Podemos no entanto criar uma única função que englobe todas as informações do problema; tal função é denominada Lagrangeana "L", sendo dada pela função objetiva a ser minimizada juntamente com a soma pesada de seus vínculos.

$$L(x, \lambda, \mu) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^n \mu_i h_i(x), \quad (\text{B.2})$$

onde  $\lambda_i, \mu_i$  são os multiplicadores de Lagrange. A minimização deste Lagrangeano sobre o domínio das variáveis primais  $x$  irá nos fornecer o que chamamos de função dual de Lagrange,  $g(\lambda, \mu)$ ,

$$g(\lambda, \mu) = \inf_{x \in \mathcal{D}} (f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^n \mu_i h_i(x)) \quad (\text{B.3})$$

Uma propriedade central da função dual encontra-se no fato de que, para qualquer  $\lambda \succeq 0$  e  $\mu$ , ela fornece um limite inferior sobre o valor óptimo  $p^*$ :

$$g(\lambda, \mu) \leq p^* \quad (\text{B.4})$$

---

*Proof.* Suponha  $\tilde{x}$  um ponto possível do problema, i.e.,  $f_i(\tilde{x}) \leq 0$  e  $h_i(\tilde{x}) = 0$ , e seja  $\lambda \succeq 0$ . Temos desta forma que o Lagrangeano  $L(\tilde{x}, \lambda, \mu)$  será limitado pela função objetiva  $f_0$  sobre tal ponto,

$$L(\tilde{x}, \lambda, \mu) = f_0(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^n \mu_i h_i(\tilde{x}) \leq f_0(\tilde{x}) \quad (\text{B.5})$$

Vê-se então que

$$g(\lambda, \mu) = \inf_{x \in \mathcal{D}} L(x, \lambda, \mu) \leq L(\tilde{x}, \lambda, \mu) \leq f_0(\tilde{x}) \quad (\text{B.6})$$

Desde que tal desigualdade vale para todos os pontos possíveis do problema, a prova da eq.B.4 segue direto.  $\square$

Convém agora nos perguntar para quais casos poderíamos obter uma igualdade sobre este limite inferior? Pois sendo assim, teríamos duas formulações equivalentes do mesmo problema: problema primal dado pela eq.B.2, ou,

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && g(\lambda, \mu) \\ & \text{sob o vínculo} && \lambda \succeq 0 \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Essa formulação alternativa é a denominada problema dual.

Em geral a igualdade na eq.B.4 não é válida. Pode-se no entanto mostrar sua validade para um caso específico que nos será bastante útil neste trabalho; casos em que os problemas sejam convexos, i.e.,

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f_0(x) \\ & \text{sob os vínculos} && f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & && Ax = B, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

onde  $f_0, \dots, f_m$  são convexos, juntamente com a condição adicional da existência de um ponto "strictly feasible" (condição de Slater, conforme a literatura), ou seja, existência de um ponto  $x \in \text{relint } \mathcal{D}$  que satisfaça os vínculos do problema convexo. Para tais casos temos que

$$\text{solução problema dual; } \boxed{d^* = p^*} \text{ ; solução problema primal} \quad (\text{B.9})$$

# Bibliography

- [1] Neil W. Ashcroft and N. David Mermin. *Solid State Physics*. Saunders College, Philadelphia, 1976.
- [2] A. Aspect. “Bell’s inequality test: more ideal than ever”. In: *Nature*, Vol. 398, 189 (1999).
- [3] Stephen D. Bartlett and H. M. Wiseman. “Entanglement Constrained by Superselection Rules”. In: *Physical Review Letters* 91.097903 (2003). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.91.097903>.
- [4] J. S. Bell. “On the Einstein-Poldolsky-Rosen paradox”. In: *Physics* (1964).
- [5] C. H. Bennett et al. “Concentrating partial entanglement by local operations”. In: *Phys. Rev. A* 53, 2046 (1996).
- [6] Charles H. Bennett et al. “Mixed-state entanglement and quantum error correction”. In: *Physical Review A* 54.3824 (1996).
- [7] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [8] F. G. S. L. Brandão. “Quantifying entanglement with witness operators”. In: *Phys. Rev. A* 72.2 (Aug. 2005). DOI: [10.1103/PhysRevA.72.022310](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.72.022310). arXiv:[quant-ph/0503152](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0503152).
- [9] Fernando G. S. L. Brandão and Reinaldo O. Vianna. “Robust semidefinite programming approach to the separability problem”. In: *Physical Review A* 70, 062309 (2004).
- [10] Fernando G. S. L. Brandão and Reinaldo O. Vianna. “Separable Multipartite Mixed States: Operational Asymptotically Necessary and Sufficient Conditions”. In: *Phys. Rev. Lett.* 93, 220503 (2004).
- [11] A. C. Doherty, Pablo A. Parrilo, and Federico M. Spedalieri. “Distinguishing Separable and Entangled States”. In: *Phys. Rev. Lett.* 88, 187904 (2002).
- [12] Andrew C. Doherty, Pablo A. Parrilo, and Federico M. Spedalieri. “Detecting multipartite entanglement”. In: *Phys. Rev. A*, Vol. 71, 032333 (2005).
- [13] K. Eckert et al. “Quantum Correlations in Systems of Indistinguishable Particles”. In: *Annals of Physics* 299, 88-127 (2002).
- [14] A. Einstein. *Albert Einstein : Philosopher-Scientist*. Cambridge University Press, 1949.

- 
- [15] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?" In: *Physical Review*, 47 : 77 (1935).
- [16] Jens Eisert et al. "Complete hierarchies of efficient approximations to problems in entanglement theory". In: *Phys. Rev. A* 70, 062317 (2004).
- [17] S. Hill and W. K. Wootters. "Entanglement of a Pair of Quantum Bits". In: *Phys. Rev. Lett.* 78, 5022 (1997).
- [18] Roger A. Horn. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1985.
- [19] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki. "Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions". In: *Phys. Lett. A* 223 (Feb. 1996), pp. 1–8. DOI: [10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2). arXiv:[quant-ph/9605038](https://arxiv.org/abs/quant-ph/9605038).
- [20] M. Lewenstein. *Quantum Information Theory Wintersemester 2000/2001*. URL: [www.quantware.ups-tlse.fr/IHP2006/lectures/lewenstein2.pdf](http://www.quantware.ups-tlse.fr/IHP2006/lectures/lewenstein2.pdf).
- [21] M. A. Nielsen. "Continuity bounds for entanglement". In: *Physical Review A* 61,064301 (2000).
- [22] Michael Nielsen and Isaac Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000.
- [23] R. Paskauskas and L. You. "Quantum correlations in two-boson wave functions". In: *Phys. Rev. A* 64,042310 (2001).
- [24] A. Peres. "Separability Criterion for Density Matrices". In: *Phys. Rev. Lett.* 77 (Aug. 1996), pp. 1413–1415. DOI: [10.1103/PhysRevLett.77.1413](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413). arXiv:[quant-ph/9604005](https://arxiv.org/abs/quant-ph/9604005).
- [25] M. B. Plenio. "Logarithmic Negativity: A Full Entanglement Monotone That is not Convex". In: *Phys. Rev. Lett.*, 95 , 090503 (2005).
- [26] Sandu Popescu and Daniel Rohrlich. "Thermodynamics and the measure of entanglement". In: *Phys. Rev. A*, 56, R3319 (1997).
- [27] John Schliemann et al. "Double-occupancy errors, adiabaticity, and entanglement of spin qubits in quantum dots". In: *Physical Review B* 63, 085311 (2001).
- [28] E. Schrodinger. "Discussion of probability relations between separated systems". In: *Proc. Camb. Phil. Soc.* 31: 555. (1935).
- [29] E. Schrodinger. "Probability relations between separated systems". In: *Proc. Camb. Phil. Soc.* 32: 446 (1936).
- [30] Michael Steiner. "Generalized robustness of entanglement". In: *Physical Review A* 67,054305 (2003). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.67.054305>.
- [31] Guifré Vidal and Rolf Tarrach. "Robustness of entanglement". In: *Physical Review A* 59,1 (1999).
- [32] H. M. Wiseman and John A. Vaccaro. "Entanglement of Indistinguishable Particles Shared between Two Parties". In: *Physical Review Letters* 91,097902 (2003).

- [33] William K. Wootters. "Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits". In: *Phys. Rev. Lett.* 80, 2245 (1998).
- [34] Paolo Zanardi. "Quantum entanglement in fermionic lattices". In: *Physical Review A* 65.042101 (2002).
- [35] Karol Życzkowski and Ingmar Bengtsson. *Geometry of Quantum States*. Cambridge University Press, 2006.