

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ANÁLISE INELÁSTICA DE PÓRTICOS PLANOS CONSIDERANDO A  
PLASTICIDADE DISTRIBUÍDA E O EFEITO DAS TENSÕES RESIDUAIS  
NOS PERFIS ESTRUTURAIS DE AÇO**

AUTORA: ANDRÉIA CRISTINA BARROSO ALMEIDA  
ORIENTADOR: PROF. DR. ARMANDO CESAR CAMPOS LAVALL

Belo Horizonte, 27 de outubro de 2.006

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**ANÁLISE INELÁSTICA DE PÓRTICOS PLANOS CONSIDERANDO A  
PLASTICIDADE DISTRIBUÍDA E O EFEITO DAS TENSÕES RESIDUAIS  
NOS PERFIS ESTRUTURAIS DE AÇO**

Andréia Cristina Barroso Almeida

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de “Mestre em Engenharia de Estruturas”.

Comissão julgadora:

---

Prof. Dr. Armando Cesar Campos Lavall  
DEES - UFMG (Orientador)

---

Prof. Dr. Ricardo Hallal Fakury  
DEES - UFMG

---

Prof. Dr. Luiz Fernando Loureiro Ribeiro  
DECIV - UFOP

Belo Horizonte, 27 de outubro de 2.006

*“Depois que conhece uma nova idéia, a mente do homem nunca pode voltar a suas dimensões originais”.*

Oliver Wendell Holmes Jr.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, presente em todos os momentos.

Ao Prof. Dr. Armando Cesar Campos Lavall, pela amizade, paciência e orientação dedicadas a este projeto.

A minha família, pelo apoio contínuo.

Aos grandes amigos que fiz, essenciais para minha adaptação.

Aos professores e funcionários do DEES – UFMG, pela amizade, respeito e competência incontestáveis.

A USIMINAS, pelo investimento na educação.

A todos, que de certa maneira, contribuíram para este projeto fosse possível.

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	i
LISTA DE TABELAS.....	v
LISTA DE SÍMBOLOS.....	vii
LISTA DE SIGLAS.....	xv
RESUMO.....	xvi
ABSTRACT.....	xvii
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Considerações Iniciais.....	1
1.2 Objetivos.....	4
1.3 Organização do Texto.....	4
2 VISÃO GERAL SOBRE A ANÁLISE AVANÇADA.....	7
2.1 Introdução.....	7
2.2 Tipos de Análise.....	8
2.2.1 Análise Elástica de 1ª Ordem.....	9
2.2.2 Análise Elástica de 2ª Ordem.....	9
2.2.3 Análise Inelástica de 1ª Ordem.....	9
2.2.4 Análise Inelástica de 2ª Ordem.....	10
2.3 Métodos de Análise Avançada.....	13
2.4 Atributos para o Modelo de Análise Avançada.....	14
3 FORMULAÇÃO TEÓRICA PARA ANÁLISE INELÁSTICA DE PÓRTICOS PLANOS CONSIDERANDO A PLASTICIDADE DISTRIBUÍDA.....	17
3.1 Introdução.....	17
3.2 Deformações e Tensões.....	18

3.3	Relações Constitutivas .....	20
3.4	Sistema de Coordenadas – Graus de Liberdade.....	21
3.4.1	Condição de Extremidades: Rígido – Rotulada.....	21
3.4.2	Condição de Extremidades: Rígido – Rígido .....	27
3.5	Teoria Estrutural .....	30
3.6	Cinemática do Elemento .....	30
3.6.1	Campo de Deformação .....	30
3.6.2	Campo de Deslocamento .....	32
3.7	Equações de Equilíbrio .....	35
3.7.1	Equilíbrio do Elemento .....	35
3.7.2	Equilíbrio Estrutural .....	38
3.7.3	Equações Incrementais de Equilíbrio .....	40
3.8	Interpolação.....	41
3.9	Aproximações e Simplificações.....	42
3.9.1	Aproximações de Segunda Ordem .....	42
3.9.2	Valor Médio de Deformação .....	43
3.10	Expressões Analíticas para a Matriz de Rigidez Tangente.....	45
3.10.1	Condição de Extremidades: Rígido – Rotulado.....	45
3.10.2	Condição de Extremidades: Rotulado – Rígido.....	59
3.10.3	Condição de Extremidades: Rígido – Rígido .....	64
4	ASPECTOS DA IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL .....	74
4.1	Introdução .....	74
4.2	Método de Newton-Raphson .....	75
4.3	Critério de Convergência .....	77
4.4	Modelo Constitutivo .....	78
4.5	Modelo de Fatias.....	80
4.6	Pré-Processador.....	82

4.7	Descrição das Sub-Rotinas .....	87
5	CONSIDERAÇÕES SOBRE AS TENSÕES RESIDUAIS EM PERFIS DE AÇO.....	91
5.1	Introdução .....	91
5.2	Diagrama Tensão x Deformação .....	92
5.3	Mecanismo de Formação das Tensões Residuais .....	93
5.4	Distribuição e Magnitude.....	94
5.4.1	Perfis Laminados à Quente .....	94
5.4.2	Perfis Soldados .....	96
5.5	Formulação Teórica Considerando as Tensões Residuais.....	100
5.6	Implementação das Tensões Residuais.....	101
5.6.1	Pré-Processador .....	102
6	APLICAÇÕES NUMÉRICAS .....	104
6.1	Introdução .....	104
6.2	Treliça Plana .....	105
6.3	Vigas .....	111
6.4	Pilares.....	116
6.4.1	Influência das Tensões Residuais .....	116
6.4.2	Influência das Imperfeições Iniciais .....	121
6.4.3	Combinação dos efeitos das tensões residuais e das imperfeições iniciais.....	131
6.5	Vigas-Pilar .....	139
6.6	Pórticos Planos.....	152
7	CONCLUSÕES .....	158
	BIBLIOGRAFIA .....	162

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 – Comportamento carga x deslocamento dos vários tipos de análise.....	8
FIGURA 2.2 – Comprimentos de rótulas plásticas em vigas com diferentes condições de extremidade e carregamento (adaptado de CHEN et al., 1996).....	11
FIGURA 3.1 – Fibra de um material nas configurações de (a) referência e (b) corrigida .....	18
FIGURA 3.2 – Módulo de rigidez no comportamento elástico e elastoplástico de uma fibra.....	20
FIGURA 3.3 – Deslocamentos do elemento de pórtico plano em suas configurações de referência e deformada para a condição de extremidades rígido-rotulada. ....	22
FIGURA 3.4 – Deslocamentos do elemento de pórtico plano em suas configurações de referência e deformada para a condição de extremidades rígido-rígido .....	28
FIGURA 3.5 – Elemento diferencial de barra reta .....	30
FIGURA 3.6 – Campo de deslocamento na flexão normal composta.....	32
FIGURA 3.7 – Rotação $\alpha$ da seção transversal. ....	33
FIGURA 4.1 – Método de Newton-Raphson .....	76
FIGURA 4.2 – Comportamento elastoplástico do material para o caso uniaxial.....	78
FIGURA 4.3 – Modelo de fatias.....	81
FIGURA 4.4 – Processo de plastificação das fatias .....	81
FIGURA 4.5 – Telas iniciais .....	83
FIGURA 4.6 – Tela principal .....	83
FIGURA 4.7 – Dados nodais.....	84
FIGURA 4.8 – Dados referentes aos elementos.....	84
FIGURA 4.9 – Imperfeições geométricas .....	85
FIGURA 4.10 – Carregamento nodal .....	85
FIGURA 4.11 – Propriedades do material.....	86



FIGURA 4.12 – Seção transversal.....	86
FIGURA 4.13 – Dados do processo incremental – iterativo .....	87
FIGURA 4.14 – Fluxograma geral para análise não-linear incremental e iterativa .....	90
FIGURA 5.1 – Relação tensão x deformação em corpo de prova e em perfil metálico de aço.....	92
FIGURA 5.2 – Esquema de mecanismo de formação das tensões residuais.....	93
FIGURA 5.3 – Distribuição das tensões residuais em perfis laminados à quente (adaptado de GALAMBOS, T. V., 1988).....	95
FIGURA 5.4 – Curvas de carga crítica e de resistência máxima para os perfis laminados indicados na FIG 5.4 (adaptado de GALAMBOS, T. V., 1988) .....	95
FIGURA 5.5 – Comparação qualitativa de tensões residuais entre chapas com (a) bordas laminadas e (b) bordas cortadas a maçarico .....	96
FIGURA 5.6 – Comparação quantitativa de tensões residuais nos perfis (a) 12H79 e (b) 14H202 (adaptado de Mc FALLS. e TALL., 1969).....	97
FIGURA 5.7 – Diagrama de isotensões para um perfil soldado WW 23x681 (tensões medidas em kips/in <sup>2</sup> , sendo 1kips/in <sup>2</sup> = 6,895 MPa - adaptado de GALAMBOS, T. V., 1988) .....	98
FIGURA 5.8 – Comparação de cargas críticas e resistências últimas para perfis FC UM com e sem alívio de tensões (adaptado de GALAMBOS, T. V., 1988) .....	99
FIGURA 5.9 – Distribuição simplificada para as tensões residuais dos tipos (a) parabólico e (b) linear .....	102
FIGURA 5.10 – Tensões residuais .....	102
FIGURA 5.11 – Distribuição linear para as tensões residuais .....	103
FIGURA 5.12 – Distribuição parabólica para as tensões residuais.....	103
FIGURA 6.1 – Estruturas treliçadas: (a) isostática e (b) hiperestática.....	105
FIGURA 6.2 – Comportamento pós-flambagem da diagonal comprimida.....	109
FIGURA 6.3 – Gráfico parâmetro de carga x deslocamento horizontal no ponto de aplicação da carga, para os casos isostático e hiperestático .....	110
FIGURA 6.4 – Viga biengastada com carga concentrada no meio do vão .....	111

FIGURA 6.5 – Calibração do número de elementos .....	112
FIGURA 6.6 – Calibração do número de fatias.....	112
FIGURA 6.7 – Viga biapoiada com carga concentrada no meio do vão.....	113
FIGURA 6.8 – Propagação gradual da plastificação transversal na seção central .....	114
FIGURA 6.9 – Distribuição longitudinal da plastificação nos elementos centrais para 100% de carga.....	115
FIGURA 6.10 – Curvas de resistência última das diferentes distribuições de tensões residuais para o eixo de maior inércia .....	118
FIGURA 6.11 – Curvas de resistência última das diferentes distribuições de tensões residuais para o eixo de menor inércia.....	119
FIGURA 6.12 – Calibração do número mínimo de fatias nas mesas .....	120
FIGURA 6.13 – Calibração do número mínimo de fatias na alma.....	121
FIGURA 6.14 – Pilar elástico como imperfeição inicial.....	123
FIGURA 6.15 – Comportamento elástico considerando imperfeições geométricas iniciais.....	126
FIGURA 6.16 – Curva de resistência última considerando o efeito das imperfeições iniciais para o eixo de maior inércia .....	130
FIGURA 6.17 – Curva de resistência última considerando o efeito combinado de tensão residual e imperfeição geométrica inicial (caso 1) .....	132
FIGURA 6.18 – Curva de resistência última considerando o efeito combinado de tensão residual e imperfeição geométrica inicial (caso 2) .....	134
FIGURA 6.19 – Curvas de resistência última e de dimensionamento à compressão do projeto da NBR 8800 (2006) para o eixo de maior inércia.....	137
FIGURA 6.20 – Curvas de resistência última e de dimensionamento à compressão do projeto da NBR 8800 (2006) para o eixo de menor inércia.....	137
FIGURA 6.21 – Superfície de resistência plástica para perfis laminados fletidos segundo o eixo de maior inércia .....	141
FIGURA 6.22 – Superfície de resistência plástica para perfis laminados fletidos segundo o eixo de menor inércia .....	142
FIGURA 6.23 – Relações M-P-Ø para o perfil W200x46,1 (eixo de maior inércia)...	145
FIGURA 6.24 – Relações M-P-Ø para o perfil W200x46,1 (eixo de menor inércia)..	145
FIGURA 6.25 – Curvas de interação do perfil W200x46,1 .....	148

FIGURA 6.26 – Comparação de curvas de interação para a esbeltez 80 .....	151
FIGURA 6.27 – Modelagem explícita da imperfeição geométrica inicial para pórticos não-contraventados .....	153
FIGURA 6.28 – Gráfico comparativo de curvas de resistência (exemplo P1).....	154
FIGURA 6.29 – Gráfico comparativo de curvas de resistência (exemplo P2).....	155
FIGURA 6.30 – Pórtico com pilar “instável” .....	156
FIGURA 6.31 – Gráfico comparativo de curvas de resistência (exemplo P3).....	157

## LISTA DE TABELAS

TABELA 6. 1 – Dados das barras constituintes das estruturas treliçadas.....	106
TABELA 6.2 – Forças normais para a estrutura isostática em kN.....	107
TABELA 6.3 – Forças normais para a estrutura hiperestática em kN .....	107
TABELA 6.4 – Acréscimo das forças normais nas diagonais em kN.....	108
TABELA 6.5 – Deslocamento horizontal do ponto médio da diagonal comprimida a cada 10% de $P_{máx}$ .....	109
TABELA 6.6 – Deslocamento horizontal no nó de aplicação da carga, para os casos isostático e hiperestático, em centímetros.....	110
TABELA 6.7 – Distribuição longitudinal da plastificação.....	114
TABELA 6. 8 – Tipos de distribuição das tensões residuais.....	117
TABELA 6.9 – Deslocamentos no meio do vão em cm.....	127
TABELA 6.10 – Momentos fletores máximos no meio do vão em kN.cm .....	128
TABELA 6.11 – Relação $P/P_y$ x índice de esbeltez reduzido $\lambda_0$ .....	129
TABELA 6.12 – Dados comparativos entre o pilar reto e com imperfeição inicial...	130
TABELA 6.13 – Resistências máximas relativas considerando o efeito combinado das tensões residuais e imperfeições geométricas iniciais (caso 1) .....	133
TABELA 6.14 – Resistências máximas relativas considerando o efeito combinado das tensões residuais e imperfeições geométricas iniciais (caso 2) .....	135
TABELA 6.15 – Relação de carga $P_{máx}/P_y$ para o eixo de maior inércia.....	138
TABELA 6.16 – Relação de carga $P_{máx}/P_y$ para o eixo de menor inércia .....	139
TABELA 6.17 – Dados dos perfís.....	140
TABELA 6.18 – Relação entre a força normal e o momento fletor (maior inércia) ..	143
TABELA 6.19 – Relação entre a força normal e o momento fletor (menor inércia) .	143
TABELA 6.20 – Relação momento – curvatura (eixo de maior inércia).....	146
TABELA 6.21 – Relação momento – curvatura (eixo de menor inércia) .....	147
TABELA 6.22 – Relação entre a força normal e o momento fletor na região elástica $0 \leq \lambda \leq \lambda_{lim} \cong 90$ .....	149

TABELA 6.23 – Relação entre a força normal e o momento fletor na região inelástica $\lambda > \lambda_{lim} \cong 90$ .....	149
TABELA 6.24 – Resultados comparativos entre as curvas de interação para $\lambda = 80$	152
TABELA 6.25 – Resultados numéricos das curvas de resistência (exemplo P1) .....	154
TABELA 6.26 – Resultados numéricos das curvas de resistência (exemplo P2) .....	156
TABELA 6.27 – Resultados numéricos das curvas de resistência (exemplo P3) .....	157

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras Romanas Minúsculas

$a, b$	–	Nós do elemento nas extremidades da esquerda e direita, respectivamente
$b_f$	–	Largura da mesa do perfil “I”
$b_i$	–	Largura da fatia $i$
$d$	–	Altura total do perfil “I”
$d\varepsilon$	–	Acréscimo de deformação
$d\varepsilon^e$	–	Acréscimo de deformação elástica
$d\varepsilon^p$	–	Acréscimo de deformação plástica
$d\sigma$	–	Acréscimo de tensão
$dS_c, d\bar{S}_c$	–	Comprimento da fibra situada a uma distância $y_r$ do eixo da barra e de uma fibra situada neste eixo, respectivamente, na configuração corrigida
$dS_r, d\bar{S}_r$	–	Comprimento da fibra situada a uma distância $y_r$ do eixo da barra e de uma fibra situada neste eixo, respectivamente, na configuração de referência
$d\bar{u}_c, d\bar{v}_c$	–	Deslocamentos infinitesimais axial e transversal na configuração deformada
$d_w$	–	Altura da alma do perfil “I”
$dV_r$	–	Elemento de volume na configuração de referência
$dx_r$	–	Distância entre duas seções transversais ortogonais ao eixo longitudinal
$f$	–	Fator de forma da seção
$f_y$	–	Tensão de escoamento do aço
$h$	–	Altura da seção transversal
$k$	–	Coefficiente de flambagem para barras comprimidas
$\mathbf{k}$	–	Matriz de rigidez tangente global do sistema

$\bar{\mathbf{k}}_G$	–	Forma local da matriz de rigidez geométrica no regime elástico em coordenadas cartesianas
$\bar{\mathbf{k}}_G^{ep}$	–	Forma local da matriz de rigidez geométrica no regime elastoplástico em coordenadas cartesianas
$\bar{\mathbf{k}}_M$	–	Forma local da matriz de rigidez constitutiva no regime elástico em coordenadas cartesianas
$\bar{\mathbf{k}}_M^{ep}$	–	Forma local da matriz de rigidez constitutiva no regime elastoplástico em coordenadas cartesianas
$\mathbf{k}_t$	–	Matriz de rigidez tangente do elemento
$\bar{\mathbf{k}}_t$	–	Forma local da matriz de rigidez tangente no regime elástico
$\bar{\mathbf{k}}_t^{ep}$	–	Forma local da matriz de rigidez tangente no regime elastoplástico
$k_{ij}$	–	Coefficientes da matriz de rigidez tangente do elemento, onde $i, j = 1, \dots, 6$
$l/r$	–	Índice de esbeltez
$l_r, l_c$	–	Comprimento do elemento ou fibra na configuração de referência e corrigida, respectivamente
$\dot{\mathbf{p}}$	–	Varição temporal dos graus de liberdade $p_i$
$\mathbf{p}, \mathbf{p}_i$	–	Vetor de deslocamentos nodais do sistema ou do elemento
$\mathbf{p}_0$	–	Vetor de deslocamentos nodais iniciais
$\mathbf{p}_1$	–	Vetor resultante do somatório entre os deslocamentos nodais iniciais $\mathbf{p}_0$ e a correção $\Delta\mathbf{p}_0$
$p_i$	–	Graus de liberdade cartesianos, onde $i = 1, \dots, 6$
$\mathbf{q}_\alpha$	–	Vetor que contém os graus de liberdade naturais ou corrotacionais, onde $\alpha = 1, 2, 3$
$q_1$	–	Grau de liberdade natural que mede a mudança de comprimento da corda de um elemento (alongamento ou encurtamento)
$q_2, q_3$	–	Graus de liberdade naturais que medem o ângulo $\alpha_a$ da extremidade a do elemento e o ângulo $\alpha_b$ da extremidade b do elemento, respectivamente, na configuração corrigida, independentes da rotação de corpo rígido

$r$	–	Raio de giração da seção transversal
$\mathbf{r}$	–	Vetor dos deslocamentos nodais da estrutura
$\dot{\mathbf{r}}$	–	Derivada da matriz dos deslocamentos nodais da estrutura
$r_c$	–	Raio de curvatura local
$\mathbf{t}$	–	Parcela não-nula da matriz de rotação de eixos $\mathbf{T}$
$t_f$	–	Espessura da mesa do perfil “I”
$t_i$	–	Espessura da fatia $i$
$t_w$	–	Espessura da alma do perfil “I”
$u$	–	Deslocamento axial do nó
$\bar{u}$	–	Deslocamento axial dos pontos situados sobre o eixo da barra
$\bar{u}'$	–	Derivada do deslocamento axial $\bar{u}$
$u_a, u_b$	–	Deslocamento axial dos nós $a$ e $b$ , respectivamente
$v$	–	Deslocamento transversal do nó
$\bar{v}$	–	Deslocamento transversal dos pontos situados sobre o eixo da barra
$v_a, v_b$	–	Deslocamento transversal dos nós $a$ e $b$ , respectivamente
$x$	–	Coordenada genérica do ponto no eixo das abscissas
$x_a, x_b$	–	Coordenadas nodais, segundo o eixo das abscissas na configuração de referência
$x_c, x_r$	–	Eixo paralelo ao elemento no sistema local corrotacional centrado, respectivamente, nos elementos deformado e de referência
$y$	–	Coordenada genérica do ponto no eixo das ordenadas; linha elástica em relação à posição inicial curva do pilar
$y_a, y_b$	–	Coordenadas nodais, segundo o eixo das ordenadas na configuração de referência
$y_c, y_r$	–	Eixo perpendicular ao elemento no sistema local corrotacional centrado, respectivamente, nos elementos deformado e de referência
$y_r$	–	Distância entre o eixo de um elemento de barra curva e uma fibra paralela a este eixo
$y_t$	–	Linha elástica total



$y_0$	–	Linha elástica inicial
$z_i$	–	Coordenada no centro da fatia $i$ em relação ao centro de gravidade da seção transversal

### Letras Romanas Maiúsculas

$A$	–	Área da seção transversal
$\mathbf{A}$	–	Matriz de incidência cinemática
$A_f$	–	Fator de amplificação para a flecha ou momento fletor
$A_g$	–	Área bruta da seção transversal
$A_r, A_c$	–	Área da seção transversal do elemento ou fibra na configuração de referência (inicial) e na configuração corrigida (atual), respectivamente
$\mathbf{A}^T$	–	Transposta da matriz de incidência cinemática
$\mathbf{B}$	–	Matriz de mudança de coordenadas
$\bar{\mathbf{B}}$	–	Forma local da matriz $\mathbf{B}$
$\mathbf{B}^T$	–	Transposta da matriz de mudança de coordenadas
$B_1$	–	Fator de amplificação para o momento solicitante, devido ao efeito de segunda ordem
$C_\alpha$	–	Coefficiente de rigidez, onde $\alpha = 1, 2, 3$
$C_{\alpha m}$	–	Coefficientes de rigidez médios, onde $\alpha = 1, 2, 3$
$C_m$	–	Coefficiente de equivalência de momentos
$\mathbf{D}$	–	Matriz constituinte da parcela constitutiva da matriz de rigidez tangente
$D_{\alpha\beta}$	–	Elementos da matriz de rigidez constitutiva do elemento no sistema de coordenadas corrotacionais, onde $\alpha, \beta = 1, 2, 3$
$D_m$	–	Família de módulos de rigidez do material de uma fibra
$D_m^e$	–	Módulo de rigidez elástico do material
$D_m^{ep}$	–	Módulo de rigidez plástico do material
$E$	–	Módulo de elasticidade longitudinal
$E_t$	–	Módulo tangente

$\mathbf{G}_\alpha$	–	Matriz simétrica que representa uma parcela da matriz de rigidez geométrica e vem da derivada segunda $q_{\alpha,ij}$ , onde $\alpha = 1, 2, 3$ e $i = 1, \dots, 6$
$G_a, G_b$	–	Parâmetros para a determinação do fator $k$
$\overline{\mathbf{G}}_\alpha$	–	Forma local da matriz $\mathbf{G}_\alpha$
$H$	–	Carregamento horizontal aplicado
$\mathbf{H}$	–	Matriz constituinte da parcela geométrica da matriz de rigidez tangente
$H_{\alpha\beta}$	–	Elementos da matriz $\mathbf{H}$ , onde $\alpha = 1, 2, 3$
$H'$	–	Parâmetro de encruamento
$I$	–	Momento de inércia da seção transversal
$L$	–	Comprimento do elemento
$L_b$	–	Comprimento da viga pertencente ao pórtico
$L_c$	–	Comprimento do pilar pertencente ao pórtico
$M$	–	Momento fletor atuante
$M_a, M_b$	–	Momento fletor atuante no nós $a$ e $b$
$M_{int}$	–	Momento interno resistente da seção
$M_I, M_{II}$	–	Momento de primeira e segunda ordem, respectivamente
$M_P$	–	Momento plástico
$M_{Px}, M_{Py}$	–	Momento plástico segundo os eixos de maior e menor inércia
$M_r$	–	Resultante do momento fletor devido à tensão residual
$M_y$	–	Momento elástico máximo resistente
$N$	–	Força normal atuante
$N_a, N_b$	–	Força normal atuante nas extremidades $a$ e $b$
$N_m$	–	Força normal média
$N_r$	–	Resultante da força normal devido à tensão residual
$0_3$	–	Matriz nula (3x3)
$P$	–	Carregamento vertical aplicado
$\mathbf{P}$	–	Vetor das forças internas no sistema local cartesiano
$\dot{\mathbf{P}}$	–	Derivada do vetor de esforços nodais internos $\mathbf{P}$
$P_i$	–	Forças nodais internas de um elemento no sistema global de coordenadas cartesianas

$P_e$	–	Carga crítica de flambagem elástica de Euler
$P_p$	–	Carga de colapso plástico
$P_y$	–	Carga de escoamento
$Q$	–	Coefficiente de redução que leva em conta a flambagem local
$\mathbf{Q}$	–	Vetor dos esforços internos naturais no sistema de coordenadas corrotacionais, onde $\alpha = 1, 2, 3$
$Q_\alpha$	–	Esforços internos nas coordenadas naturais ou corrotacionais
$\mathbf{R}$	–	Vetor das forças externas concentradas aplicadas nos nós da estrutura
$\dot{\mathbf{R}}$	–	Derivada do vetor de carregamentos nodais externos $\mathbf{R}$
$\mathbf{R}^T$	–	Transposta do vetor dos carregamentos nodais externos
$S$	–	Momento estático da seção transversal
$\mathbf{S}$	–	Vetor dos esforços internos da estrutura
$\dot{\mathbf{S}}$	–	Derivada do vetor dos esforços internos $\mathbf{S}$
$\mathbf{S}^T$	–	Transposta do vetor dos esforços internos da estrutura
$\mathbf{T}$	–	Matriz de rotação de eixos
$\mathbf{T}^T$	–	Transposta da matriz de rotação de eixos
$V$	–	Força cortante
$V_r, V_c$	–	Volume do elemento ou fibra nas configurações de referência e corrigida

### Letras Gregas

$\alpha$	–	Ângulo de rotação do eixo de um elemento em relação à sua corda após a deformação; rotação da seção; coeficiente referente às curvas a, b, c e d do projeto da NBR 8800 – outubro 2006
$\alpha'$	–	Derivada do ângulo entre a corda e a tangente ao eixo da barra
$\alpha_a, \alpha_b$	–	Ângulo de rotação nas extremidades do elemento, $\alpha_a = q_2$ e $\alpha_b = q_3$
$\beta$	–	Fator de redução

$\gamma$	–	Diferença entre o módulo de elasticidade $E$ e o módulo tangente $E_t$
$\gamma_{a1}$	–	Coefficiente de ponderação da resistência
$\gamma_{xy}$	–	Distorção no plano $xy$
$\delta_0$	–	Flecha máxima devido ao efeito da imperfeição geométrica
$\delta\varepsilon$	–	Deformação virtual de uma fibra
$\delta\mathbf{p}_i$	–	Vetor de deslocamentos nodais virtuais do elemento
$\delta w_i$	–	Trabalho virtual interno de uma fibra
$\delta w_e$	–	Trabalho virtual externo de uma fibra
$\Delta$	–	Medida do alongamento ou encurtamento do elemento
$\Delta L$	–	Comprimento de rótulas plásticas
$\Delta\mathbf{p}$	–	Correção genérica entre $\psi$ e $\mathbf{k}$
$\Delta\mathbf{p}_0$	–	Correção genérica entre $\psi$ e $\mathbf{k}$ iniciais
$\Delta\mathbf{r}$	–	Incremento nos deslocamentos nodais
$\Delta\mathbf{R}$	–	Incremento no carregamento
$\varepsilon$	–	Deformação ou deformação de engenharia; campo de deformação
$\bar{\varepsilon}$	–	Deformação de uma fibra genérica situada no eixo longitudinal
$\varepsilon_{xx}$	–	Deformação longitudinal do elemento
$\varepsilon_m$	–	Representação da família de deformações
$\bar{\varepsilon}_m$	–	Valor médio para a deformação $\bar{\varepsilon}$
$\varepsilon_{yy}$	–	Deformação transversal do elemento
$\varepsilon_{zz}$	–	Deformação $z$ do elemento
$\varepsilon_{,\alpha}$	–	Derivada primeira do campo de deformação $\varepsilon$
$\varepsilon_{,\alpha\beta}$	–	Derivada segunda do campo de deformação $\varepsilon$
$\varepsilon_{1/2}$	–	Deformação de engenharia
$\theta$	–	Rotação do nó
$\theta_a, \theta_b$	–	Rotação dos nós $a$ e $b$ medidos a partir da configuração de referência até a corda
$\theta_c$	–	Rotação de corpo rígido

$\lambda$	–	Estiramento de uma fibra genérica; esbeltez
$\lambda_0$	–	Índice de esbeltez reduzido
$\lambda_{ef}$	–	Índice de esbeltez efetivo
$\lambda_{lim}$	–	Esbeltez limite
$\bar{\lambda}$	–	Estiramento de uma fibra genérica situada no eixo longitudinal
$\nu$	–	Coefficiente de Poisson
$\sigma_e$	–	Tensão inicial de escoamento do material
$\sigma$	–	Tensão normal ou de engenharia de uma fibra
$\sigma_m$	–	Representação da família de tensões conjugada com a deformação $\varepsilon_m$
$\sigma_N$	–	Tensão nominal ou de engenharia
$\sigma_P$	–	Tensão limite de proporcionalidade
$\sigma_r$	–	Tensão residual
$\sigma_{rc}$	–	Tensão residual de compressão
$\sigma_{rt}$	–	Tensão residual de tração
$\sigma_y$	–	Tensão de escoamento
$\sigma_{1/2}$	–	Tensão conjugada com a deformação $\varepsilon_{1/2}$ , igual à tensão de engenharia
$\tau_{xy}$	–	Tensão de cisalhamento no plano $xy$
$\phi$	–	Curvatura
$\phi_y$	–	Curvatura máxima associada à $M_y$
$\varphi_r, \varphi_c$	–	Ângulos que a corda do elemento faz com o eixo das abscissas nas configurações de referência e deformada
$\chi$	–	Fator de redução associado à resistência de compressão
$\psi$	–	Sistema de forças residuais; rotação inicial do pilar devido à imperfeição geométrica
$\psi_0$	–	Vetor de forças residuais iniciais
$\psi_1, \psi_2', \psi_3'$	–	Função de interpolação para os deslocamentos $\bar{u}_c(x_r)$ e $\alpha(x_r)$

## LISTA DE SIGLAS

ABNT	–	Associação Brasileira de Normas Técnicas
AISC	–	American Institute of Steel Construction
ASTM A36	–	Standard Specification for Carbon Structural Steel
ECCS	–	European Convention for Constructional Steelwork
FC	–	Flame Cut Plate
IMP	–	Imperfeição Geométrica
IMPTR	–	Imperfeição Geométrica e Tensões Residuais
LRFD	–	Load and Resistance Factor Design
NBR 8800 (1986)	–	Norma Brasileira para Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios
NBR 8800 (2006)	–	Projeto de Revisão da Norma Brasileira para Projeto de Estruturas de Aço e de Estruturas Mistas de Aço e Concreto de Edifícios
NLF	–	Não-Linearidade Física
NLG	–	Não-Linearidade Geométrica
PTV	–	Princípio dos Trabalhos Virtuais
TR	–	Tensões Residuais
UM	–	Universal Mill Plate
VP	–	Viga-pilar

## RESUMO

Neste trabalho desenvolve-se uma formulação geometricamente exata para a análise não-linear física e geométrica de pórticos planos de aço, via Método dos Elementos Finitos (MEF). Utilizam-se os conceitos da plasticidade distribuída para elementos com nós rígido-rotulados, incluindo o efeito das tensões residuais existentes nos perfis de aço decorrentes dos processos de fabricação. Uma visão geral sobre a Análise Avançada é feita com o objetivo de caracterizar os atributos necessários para o desenvolvimento de um modelo de Análise Inelástica Avançada. Apresenta-se o desenvolvimento da teoria geral fundamentada em uma rigorosa formulação Lagrangiana atualizada, utilizando a técnica corrotacional para a obtenção da matriz de rigidez tangente do elemento, levando-se em conta a presença das tensões residuais auto-equilibradas nas equações de equilíbrio do elemento. Para implementação desta formulação adiciona-se, à versão original apresentada por LAVALL (1996), a capacidade de analisar problemas com ligações articuladas entre as barras da estrutura, com tensões residuais aplicadas na alma do perfil e com diferentes carregamentos nodais com incrementos e fatores de ponderação diferenciados. O modelo de fatias permite o acompanhamento da plastificação ao longo da altura da seção e ao longo do elemento para qualquer modelo de distribuição das tensões residuais. Visando uma interface mais amigável com o usuário desenvolve-se um pré-processador que possibilita o cálculo automático de parâmetros exigidos pelo programa principal. Finalmente, os exemplos apresentados mostram a grande potencialidade da formulação desenvolvida. São analisados vários casos permitindo o estudo da plastificação gradual, da influência das tensões residuais e das imperfeições iniciais, estas introduzidas de forma explícita, na resistência última das estruturas de aço, cujos resultados são comparados com as curvas de dimensionamento à compressão e com as equações de interação apresentadas no projeto de revisão da NBR 8800 – setembro 2006, comprovando a aplicação da formulação como um Método de Análise Avançada.

**Palavras chave:** Não-linearidades física e geométrica, Plasticidade distribuída, Tensões residuais, Análise Inelástica Avançada, Estruturas de aço

## ABSTRACT

A geometrically exact finite element formulation to consider material and geometric nonlinearities of steel plane frames is presented. The distributed-plasticity analysis for members with rigid-pinned joints and residual stresses due manufacturing process are also included. An overview of Advanced Analysis in order to define the desirable attributes for the development of an Advanced Inelastic Analysis model is outlined. A general theory considering self equilibrated residual stresses is developed based on updated Lagrangian formulation. The Corrotacional technique is used to obtain the element's tangent stiffness matrix. The abilities for analyzing pin-ended joint members, residual stresses in webs, different nodal loads with different increments and factored combinations were added to the original computational program version presented by LAVALL (1996). The frame element, made up of layers, enable to identify the plastic region through the cross section and in the member length for any kind of residual stresses. A preprocessor is developed looking for friendly user's interface and automatic inputs dates. Finally, spreading of plasticity, residual stresses and explicit geometric imperfection effects were analyzed in the examples presented. The strengths predicted by the proposed formulation are compared with those predicted by the NBR 8800(2006) review project, proving the efficiency of this approach as Advanced Analysis method.

**Keywords:** Material and geometric nonlinearities, Distributed-plasticity, Residual stresses, Advanced Inelastic Analysis, Steel structures



# 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 Considerações Iniciais

O principal objetivo de uma análise estrutural é assegurar que as estruturas tenham uma segurança adequada em relação aos estados limites últimos e, ao mesmo tempo, garantir o desempenho da estrutura sob condições normais de utilização.

Atualmente, a prática usual de projeto utilizada pelos engenheiros segue um procedimento com duas etapas: primeiramente os esforços solicitantes nas barras e nós das estruturas são determinados por meio de uma análise elástica em primeira ordem, depois numa segunda etapa, são feitos os dimensionamentos desses elementos e das ligações, utilizando-se critérios de normas e especificações técnicas. Apesar de muito usado como base de projeto, no passado e no presente, esse procedimento com duas etapas tem suas limitações.

O procedimento não considera a interação entre o sistema estrutural e suas barras de uma maneira direta. No caso das estruturas metálicas, essa interação é considerada de forma aproximada pelo uso do conceito do fator do comprimento efetivo  $K$ . A determinação deste fator pela teoria elástica, usando ábacos usuais ou fórmulas disponíveis da literatura aberta, é difícil e complicada, principalmente para certos tipos

de pórticos não regulares, sendo necessário o uso de vários fatores de correção empíricos para ajustá-lo.

A mais séria limitação desse procedimento é que a análise elástica é usada para determinar os esforços solicitantes atuantes nas barras, enquanto no dimensionamento de cada barra tratada como um elemento isolado, os esforços solicitantes resistentes são obtidos considerando-se a possibilidade de plastificação da seção transversal. Não há verificação da compatibilidade entre a barra isolada e a barra como parte do sistema estrutural. Não há nenhuma garantia explícita de que a estrutura irá resistir aos carregamentos de projeto na nova configuração geométrica imposta ao modelo estrutural.

Dessa forma, tem ocorrido uma crescente necessidade de se considerar as análises em teoria de segunda ordem inelástica, através das quais pode-se modelar explicitamente o comportamento real de cada barra e então, considerar a compatibilidade entre o sistema estrutural e suas barras.

Atualmente, os engenheiros têm reconhecido a importância e a necessidade de se considerar, no projeto de estruturas de aço, os diversos efeitos não-lineares envolvidos no problema, destacando-se principalmente os efeitos devido à mudança na geometria da estrutura (análise em teoria de 2ª ordem), o comportamento inelástico do material e a flexibilidade das ligações.

A principal vantagem da análise inelástica em 2ª ordem é a consideração da redistribuição inelástica dos esforços internos depois que a resistência elástica de certas barras foi alcançada, levando a resultados mais confiáveis da rigidez, da resistência e da estabilidade da estrutura. Além disso, métodos modernos de análises inelásticas permitem uma consideração mais racional do efeito da flexibilidade das ligações e possibilitam prever com maior precisão os possíveis modos de colapso da estrutura.

A partir da década de 1990 vários pesquisadores têm desenvolvido e validado formulações para a análise inelástica em teoria de 2ª ordem, especialmente para os

pórticos em estruturas de aço. Essas formulações podem ser classificadas em dois grupos: da *plasticidade concentrada*, baseado no conceito de rótula plástica (LIEW et al. (1993); entre outros) e da *plasticidade distribuída*, também chamado Método da Zona Plástica, que considera a distribuição da plasticidade ao longo do comprimento dos elementos estruturais e na área de suas seções transversais. O modelo da plasticidade distribuída exige maior grau de refinamento na formulação do que o modelo da plasticidade concentrada.

Uma análise que considera a distribuição da plasticidade, as tensões residuais, a análise em teoria de 2ª ordem (efeitos P- $\Delta$  e P- $\delta$ ), as imperfeições geométricas iniciais, as ligações semi-rígidas, entre outros efeitos e que, calibrada com as recomendações práticas de Normas Técnicas, elimine a necessidade da verificação posterior de cada elemento estrutural isolado, é, por definição, um método “exato” de *Análise Inelástica Avançada*.

A *Análise Inelástica Avançada* refere-se a qualquer método de análise que, de forma adequada, avalie simultaneamente a resistência e a estabilidade de um sistema estrutural como um todo, de tal forma que as verificações posteriores de cada elemento separadamente, conforme as normas técnicas, possam ser dispensadas.

O crescente avanço tecnológico na área da informática, tanto em hardware, quanto em software, tem propiciado o desenvolvimento de eficientes ferramentas computacionais baseadas em formulações teóricas rigorosas e consistentes, segundo a filosofia da *Análise Inelástica Avançada*, permitindo ao engenheiro fazer o dimensionamento seguro dos sistemas estruturais em aço.

Finalmente, a *Análise Inelástica Avançada* é um tema de grande relevância para o dimensionamento das estruturas de aço e, como afirmam CHEN et al. (1996), os métodos de *Análise Inelástica Avançada* representam o estado da arte em projetos para os engenheiros estruturais no século vinte e um.

## 1.2 Objetivos

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo do comportamento inelástico de pórticos planos de aço considerando os conceitos da *Análise Inelástica Avançada*. Para isso, serão apresentados o estudo de uma formulação geometricamente exata para a análise não-linear física e geométrica de pórticos planos de aço, via Método dos Elementos Finitos, utilizando os conceitos da plasticidade distribuída e o desenvolvimento de um programa computacional baseado no existente em LAVALL (1996), visando à implementação da formulação citada.

Como objetivos específicos consideram-se: (i) obtenção e implementação da matriz de rigidez tangente (constitutiva e geométrica), para o caso de elementos com uma extremidade rotulada e outra rígida, através da formulação geometricamente exata; (ii) estudo da influência das tensões residuais existentes nos perfis de aço na resistência das barras; (iii) desenvolvimento de uma interface amigável com o usuário através do uso de telas explicativas para a entrada de dados (em ambiente *MS VISUAL BASIC 5.0*); (iv) validação da formulação através de exemplos práticos, considerando o efeito das tensões residuais na resistência última da estrutura.

## 1.3 Organização do Texto

O trabalho inicia-se com uma visão geral sobre a *Análise Avançada* no Capítulo 2, através da conceituação dos tipos de análise existentes, destacando-se a análise inelástica de 2ª ordem considerando a plasticidade distribuída. São descritos os princípios básicos e os atributos nos quais o modelo deve ser baseado para que uma análise seja consistente segundo os preceitos da *Análise Avançada*.

No Capítulo 3 apresenta-se a formulação teórica geometricamente exata baseada na análise inelástica de pórticos planos considerando a plasticidade distribuída para as condições de extremidades rígido-rotulado e rígido-rígido. O desenvolvimento teórico é feito dentro de uma rigorosa formulação Lagrangiana, que utiliza a técnica corrotacional

para a dedução consistente da matriz de rigidez tangente do elemento de pórtico plano. É feita uma apresentação itemizada dessa teoria, onde se definem as tensões e deformações conjugadas e objetivas; as relações constitutivas elásticas e elastoplásticas; os sistemas de coordenadas, global (Cartesiano) e local (corrotacional); os campos de deformação e deslocamento, segundo a hipótese cinemática de Bernoulli-Euler. São introduzidas as interpolações usuais do cálculo numérico e as aproximações de segunda ordem para a determinação analítica das matrizes de rigidez tangente elástica e elastoplástica.

Como o equilíbrio do elemento deve ser analisado de forma incremental e iterativa, os aspectos da implementação computacional são descritos no Capítulo 4. O procedimento numérico de Newton-Raphson é adotado para a análise não-linear do sistema de equações e, através do critério de convergência para os deslocamentos nodais, determina-se a solução do problema. O modelo constitutivo e o modelo de fatias são apresentados para a análise de problemas elastoplásticos, permitindo o estudo das tensões residuais e o acompanhamento da plastificação gradual na seção transversal e seu espalhamento ao longo dos elementos. Os cálculos automáticos para os dados de entrada, desenvolvidos no pré-processador (escrito em *VISUAL BASIC 5.0*) são apresentados, bem como uma breve descrição das subrotinas do programa, escrito em linguagem *FORTRAN 90*.

O Capítulo 5 trata da influência das tensões residuais no comportamento estrutural de pilares de aço. Após a verificação da perda de linearidade na relação tensão x deformação dessas estruturas, é apresentado o mecanismo de formação das tensões residuais, bem como sua magnitude e distribuição nos perfis laminados e soldados. A formulação desenvolvida no Capítulo 3 é, então, modificada para permitir que o efeito das tensões residuais seja considerado na análise do elemento. A metodologia adotada para o cálculo automático da tensão residual aplicada em cada fatia é também citada neste capítulo.

No Capítulo 6 são apresentados exemplos numéricos procurando ilustrar e validar a formulação desenvolvida neste trabalho, destacando principalmente os efeitos das tensões residuais na resistência última dos sistemas estruturais. Calibrações são feitas no

estudo da resistência desses elementos estruturais considerando também a influência das imperfeições geométricas iniciais, cujos resultados são comparados com as curvas de dimensionamento à compressão e com as equações de interação apresentadas no projeto de revisão da NBR 8800 – setembro 2006.

Finalmente, no Capítulo 7 são apresentadas as conclusões do trabalho, procurando-se validar a presente formulação como um método de Análise Avançada, considerando-se a análise da plasticidade distribuída ou zona plástica, bem como sugestões para trabalhos futuros.

# 2

## VISÃO GERAL SOBRE A ANÁLISE AVANÇADA

### 2.1 Introdução

A idéia de apresentar uma teoria que levasse em conta as propriedades do material, as tensões residuais, os efeitos de segunda ordem, as imperfeições geométricas, a flexibilidade das ligações e demais parâmetros relevantes no estudo do equilíbrio e da resistência das estruturas, tornou-se objetivo do estudo da *Análise Avançada*.

A *Análise Avançada* “exata” é uma técnica que procura introduzir nos modelos matemáticos que descrevem os comportamentos físico e geométrico dos elementos representativos da estrutura, hipóteses mais próximas da realidade e, unir a isto, procedimentos numéricos e iterativos para se estimar o comportamento não-linear dessas estruturas, de tal forma que o método, sozinho, seja suficiente para a verificação da estrutura com respeito aos seus estados limites. Dessa maneira, a análise avançada engloba os efeitos não-lineares, físicos e geométricos, nas análises dos sistemas estruturais e de seus elementos componentes.

Este capítulo apresenta uma visão geral sobre os tipos de análise utilizados para a determinação das resistências últimas de estruturas de aço, bem como as características

e atributos desejáveis para o desenvolvimento de um modelo de Análise Inelástica Avançada.

## 2.2 Tipos de Análise

Inicialmente, uma visão geral dos tipos de análise utilizados no cálculo de pórticos planos será apresentada para uma melhor compreensão do seu comportamento global. A FIG. 2.1 mostra esquematicamente as curvas carga x deslocamento lateral de um pórtico rígido submetido a carregamentos estáticos, para cada tipo de análise a ser considerada. As distinções básicas entre os tipos de análise representados em cada curva são: se o equilíbrio é estudado considerando a estrutura na sua posição indeslocada (teoria de 1ª ordem; linearidade geométrica) ou deslocada (teoria de 2ª ordem; não-linearidade geométrica) e se a plastificação das barras é considerada ou não na análise (não-linearidade ou linearidade física).

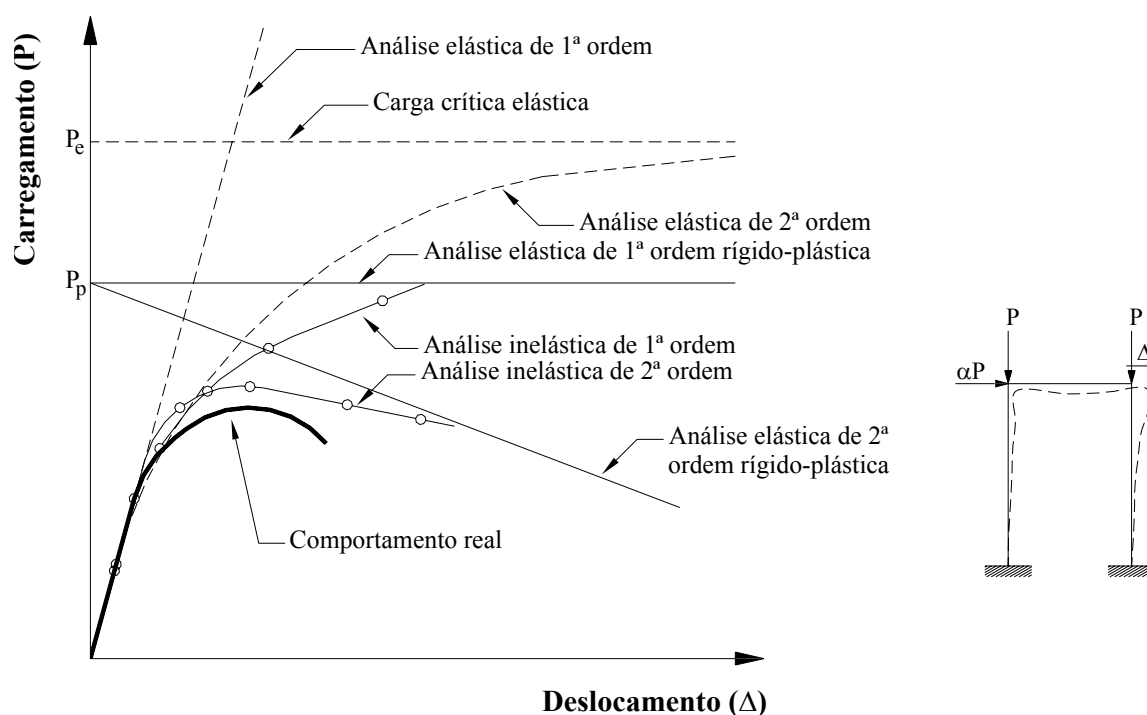


FIGURA 2. 1 – Comportamento carga x deslocamento dos vários tipos de análise



### 2.2.1 Análise Elástica de 1ª Ordem

Neste tipo de análise o equilíbrio da estrutura é formulado considerando-a na sua posição indeslocada, ou seja, segundo sua geometria original (linearidade geométrica) e o material é modelado como elástico linear (linearidade física). Dessa forma, esta análise considera a hipótese de pequenos deslocamentos e, sendo o material elástico linear, vale o princípio da superposição dos efeitos.

Embora a análise elástica de primeira ordem, ou simplesmente *análise elástica linear*, seja a mais usada nas rotinas de cálculo, ela não fornece informações sobre a influência da plasticidade e da estabilidade no comportamento da estrutura. Essas influências são normalmente consideradas indiretamente ao se verificar isoladamente cada barra através do uso do comprimento efetivo e dos fatores de amplificação dos momentos. A curva carga x deslocamento obtida é linear, conforme mostra a FIG. 2.1.

### 2.2.2 Análise Elástica de 2ª Ordem

Nesta análise o equilíbrio é formulado considerando-se a estrutura na sua posição deslocada (não-linearidade geométrica) e o material ainda é elástico linear (linearidade física). A resposta da curva carga x deslocamento tende assintoticamente para a carga crítica elástica ( $P_e$ ) da estrutura, conforme indica a FIG. 2.1. Quando obtida rigorosamente, esta análise inclui os efeitos da estabilidade elástica, P- $\delta$  e P- $\Delta$ , mas não fornece nenhuma informação direta da resistência inelástica real do pórtico. Trata-se de uma *análise não-linear geométrica*.

### 2.2.3 Análise Inelástica de 1ª Ordem

Na análise inelástica de primeira ordem o equilíbrio é verificado considerando-se a geometria indeslocada da estrutura (linearidade geométrica) e considera-se a não-linearidade física do material. Este tipo de análise inclui os efeitos de plastificação das barras, podendo ser representados desde os modelos simples de rótulas plásticas até

modelos mais detalhados que consideram a propagação da plastificação no interior das mesmas. Quando o material é elasto-plástico perfeito, a resposta da curva carga x deslocamento de uma análise inelástica de primeira ordem aproxima assintoticamente da carga limite plástica ( $P_P$ ), conforme ilustra a FIG. 2.1, calculada por análise de mecanismo plástico. Trata-se de uma *análise não-linear física*.

#### **2.2.4 Análise Inelástica de 2ª Ordem**

Nesta análise o equilíbrio é formulado considerando-se a estrutura na sua posição deslocada (não-linearidade geométrica) e leva-se em conta a não-linearidade física do material. A carga limite obtida pela análise inelástica de segunda ordem é a que mais se aproxima da resistência real, sendo esta a análise que melhor representa o verdadeiro comportamento de um pórtico. Trata-se de uma *análise não-linear física e geométrica*

A análise inelástica, tanto em 1ª quanto em 2ª ordem, se refere a qualquer método de análise que considere os efeitos do escoamento do material, podendo ser classificada em dois tipos principais: (1) formulação por zona plástica ou plasticidade distribuída e (2) formulação baseada na formação de rótulas plásticas. Esta generalização é baseada no grau de refinamento na representação dos efeitos do escoamento. O método da rótula plástica é a mais simples formulação, enquanto que o modelo de zona plástica exige um maior refinamento.

#### **Análise Inelástica por Zona Plástica**

A análise por zona plástica ou plasticidade distribuída que inclua a distribuição da plasticidade, as tensões residuais, as imperfeições geométricas iniciais e quaisquer outros efeitos de segunda ordem significativos, certamente eliminará a necessidade da verificação da resistência de cada barra isoladamente da estrutura. Portanto, este tipo de método é geralmente classificado como *Análise Inelástica Avançada*. De fato, as equações de interação das barras de pórtico, adotadas nas principais normas técnicas em todo o mundo, foram desenvolvidas, em parte, pelo ajuste de curvas de ensaios de laboratório aos resultados obtidos desse tipo de análise.

## Análise Inelástica por Rótula Plástica

O mais simples e direto tipo de análise inelástica é aquele que adota a formulação com formação de rótulas elastoplásticas. Essa análise geralmente envolve o uso de um elemento de viga-pilar para cada barra do pórtico, assumindo que os mesmos permaneçam elásticos exceto nas suas extremidades, onde as rótulas plásticas de comprimento zero se formam. Na realidade, o escoamento espalha-se sobre um certo comprimento do elemento, geralmente chamado de comprimento da rótula ( $\Delta L$ ), variando segundo o tipo de carregamento, condições de contorno e geometria da seção transversal.

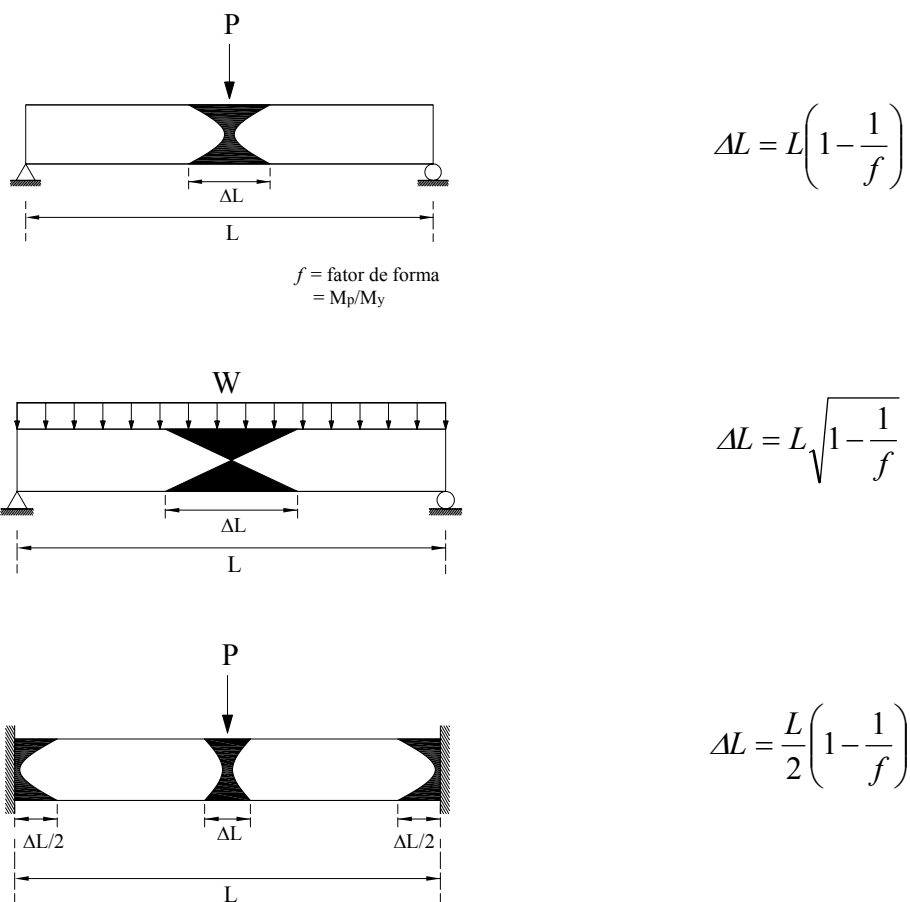


FIGURA 2. 2 – Comprimentos de rótulas plásticas em vigas com diferentes condições de extremidade e carregamento (adaptado de CHEN et al., 1996)

A Fig. 2.2 ilustra vários comprimentos de rótula plástica ( $\Delta L$ ) desenvolvidos em vigas com diferentes condições de extremidade e carregamento. As rótulas plásticas, em geral, formam-se primeiramente nas seções submetidas à curvatura máxima, como pontos de cargas concentradas, na interseção de barras envolvendo mudança de geometria e em pontos de força cortante nula para barras sujeitas a carregamento uniformemente distribuído.

Em termos práticos, a análise inelástica por rótula plástica utiliza dois métodos de análise: (1) método rígido-plástico e (2) método elastoplástico. O método rígido-plástico é estudado a partir da formação do mecanismo de colapso final da estrutura, ou seja, quando a mesma desenvolve um número suficiente de rótulas plásticas levando ao seu colapso, não permitindo mais a redistribuição do momento fletor.

O método elastoplástico é um método alternativo de análise plástica que, além de determinar a carga de colapso da estrutura, fornece informações adicionais sobre o processo de redistribuição de forças, antes que o mecanismo de colapso seja alcançado. Assim, o método determina a seqüência de formação das rótulas plásticas, o fator de carga associado a cada rótula e a variação do momento fletor nas barras entre cada rótula formada, além de permitir o cálculo aproximado dos deslocamentos durante a história do carregamento.

Apesar da análise inelástica por rótulas plásticas ser eficiente em alguns casos, principalmente para estruturas nas quais a força normal nas barras é pequena e predomina o efeito dos momentos fletores, tem sido mostrado que é somente um método aproximado. Quando usado para analisar um simples elemento de viga-pilar submetido aos esforços combinados de força normal e momento fletor, esse método freqüentemente superestima a resistência e a rigidez do elemento quando o mesmo é carregado até a região inelástica. Dessa forma, esse método não pode ser classificado como método de Análise Avançada para uso no projeto de estruturas, devendo ser modificado ou refinado para permitir a degeneração da rigidez devido aos efeitos da plasticidade distribuída, sendo denominada *Método da rótula plástica refinada*.

## 2.3 Métodos de Análise Avançada

Conforme KIM e CHEN (1996a), desde meados dos anos de 1970, pesquisas têm sido realizadas sobre o desenvolvimento e validação de vários métodos de Análise Avançada. Diferentes tipos de Análise Avançada podem ser classificados em duas categorias: (1) método da zona plástica e (2) método da rótula plástica refinada.

### Método da Zona Plástica

No Método da Zona Plástica, as barras dos pórticos são discretizadas em vários elementos finitos e a seção transversal é subdividida em fatias. O equilíbrio de cada elemento deve ser formulado considerando sua posição deslocada, ou seja, em teoria de 2ª ordem, e deve incluir os efeitos  $P-\Delta$  e  $P-\delta$ , garantindo a interação entre o sistema estrutural e suas barras no estudo da estabilidade da estrutura.

A tensão residual em cada fatia é admitida constante considerando-se sua pequena espessura. O estado de tensão em cada fatia pode ser calculado, permitindo que a distribuição gradual da plastificação devido ao escoamento possa ser captada. Dessa forma, a análise por zona plástica elimina a necessidade da verificação da resistência de cada barra isoladamente, uma vez que pode, explicitamente, levar em conta os efeitos de segunda ordem, a plasticidade distribuída e as tensões residuais, sendo, portanto sua solução conhecida como solução “*exata*”.

### Método da Rótula Elastoplástica Refinada

Uma alternativa simples e eficiente é utilizar a análise por rótula elastoplástica, que usa o conceito da plasticidade concentrada, conhecido como rótula plástica de comprimento zero, para avaliar o comportamento inelástico dos pórticos. Esse método considera o efeito da inelasticidade, mas não leva em conta o espalhamento do escoamento ou plasticidade nas seções, nem o efeito das tensões residuais entre duas rótulas plásticas. Sendo assim, consideráveis refinamentos devem ser feitos na formulação para que o método possa ser usado para análise prática de estruturas.

Nos trabalhos de LIEW<sup>1</sup>(1992) apud KIM e CHEN (1996a), entre outros, o método da rótula plástica refinada tem sido proposto para a análise de pórticos planos, o qual é baseado em modificações do método da rótula elasto-plástica. Duas modificações são feitas para levar em conta a degeneração gradual da rigidez da seção, nos locais de rótula plástica, bem como a degradação gradual da rigidez da barra entre duas rótulas plásticas. O conceito do módulo tangente é utilizado para capturar os efeitos das tensões residuais ao longo da barra. Conseqüentemente, o método da rótula plástica refinada preserva a eficiência e a simplicidade do método da rótula plástica, mas sem superestimar a resistência e a rigidez da barra.

## 2.4 Atributos para o Modelo de Análise Avançada

Os fenômenos comportamentais e atributos físicos que podem ser considerados na análise avançada das estruturas, tanto de forma explícita quanto implícita, segundo CHEN et al. (1996), são resumidos a seguir:

### A) Atributos físicos

- *Topologia de pórticos: comprimento das barras considerados como a distância entre os eixos das mesmas ou como os comprimentos livres das barras com nós finitos;*
- *Estruturas bi ou tridimensionais com elementos ortogonais ou inclinados;*
- *Imperfeições iniciais devido à curvatura inicial das barras, pórticos e pilares fora de prumo, desalinhamento das barras, distorção da seção transversal;*
- *Tensões residuais devido a processos de fabricação e montagem;*
- Restrições de extremidades devido a contraventamentos, apoios, fundações, etc.;
- *Tipos de ligações: flexível, rígida, semi-rígida;*
- Tipos de seções transversais: *simétrica*, não simétrica, perfil aberto ou fechado;
- *Barras de perfis prismáticos ou não-prismáticos;*
- Seqüência de construção/montagem;
- Interação com a fundação.

---

1 - LIEW, J. Y.R. (1992): *Advanced Analysis for Frame Design*. PhD Thesis, Purdue University, West Lafayette, Ind.

**B) Resposta a fenômenos não-lineares**

Não-Linearidade Geométrica:

- *Momento P- $\Delta$  : momentos de segunda ordem devido a forças axiais agindo nos deslocamentos associados com rotação de corda do eixo longitudinal;*
- *Momento P- $\delta$  : momentos de segunda ordem devido a forças axiais agindo nos deslocamentos associados com a curvatura de barras fletidas;*
- *Deformação axial devido ao “efeito bowing”;*
- Deformação por cisalhamento das barras;
- Flambagem local e distorções;
- Interação entre flambagem local e global;
- Deformações de painéis.

Não-linearidade física dos materiais:

- *Formação de rótulas plásticas;*
- *Distribuição da plastificação ao longo das barras e das seções transversais;*
- Strain hardening (encruamento do material);
- Descarregamento devido a deformações plásticas;
- *Interação inelástica da força normal, momentos fletores, momentos de torção e força cortante;*
- Efeitos de plasticidade cíclica.

**C) Efeitos de carregamentos:**

- *Carregamentos proporcionais e não proporcionais;*
- *Carregamentos conservativos e não conservativos;*
- Carregamentos fora do centro de cisalhamento;
- Carregamentos variáveis e repetitivos;
- Carregamentos dinâmicos;
- Carregamentos devido aos estágios de construção (escoramentos, equipamentos, etc.).

**D) Incertezas**

- Variabilidade dos carregamentos;

- Variabilidade das resistências das ligações, das barras e das estruturas;
- Variabilidade da resistência dos materiais.

Para que um método de análise seja classificado como avançado, nem todos os atributos mostrados anteriormente necessitam ser representados no modelo. Dessa forma, a literatura técnica tem considerado que, pelo menos, a distribuição da plasticidade, as tensões residuais, o estudo em teoria de segunda ordem (efeitos  $P-\Delta$  e  $P-\delta$ ) e as imperfeições geométricas iniciais devem ser levadas em conta na análise. A falta de alguns atributos caracteriza uma limitação da análise, e essa limitação deve ser levada em conta no projeto final, conforme os critérios estabelecidos pelas normas técnicas. Dentre os atributos descritos anteriormente, aqueles destacados em *itálico* foram considerados na presente formulação.



# 3

## **FORMULAÇÃO TEÓRICA PARA ANÁLISE INELÁSTICA DE PÓRTICOS PLANOS CONSIDERANDO A PLASTICIDADE DISTRIBUÍDA**

### **3.1 Introdução**

A formulação a seguir apresenta uma análise inelástica de segunda ordem geometricamente exata para estruturas de aço, utilizando uma teoria geral para análise não-linear de pórticos planos, pelo método dos elementos finitos, considerando ambos os comportamentos não-lineares, físico (NLF) e geométrico (NLG), das estruturas. A teoria prevê que os nós sofram grandes deslocamentos e rotações e os elementos da estrutura, grandes alongamentos e curvaturas.

Dentro de uma rigorosa formulação Lagrangiana atualizada, utilizando a técnica corrotacional para a obtenção da matriz de rigidez tangente do sistema, a teoria desenvolvida por PIMENTA (1986) e LAVALL (1996), adaptada por FERREIRA (1999), limita-se à condição de extremidades rígido-rígido. Adicionando-se ao desenvolvimento teórico, a formulação do presente trabalho prevê o estudo de elementos rotulado-engastado ou engastado-rotulado.

Segundo CHEN et al. (1996) a teoria fundamentada na análise inelástica de segunda ordem considerando a plasticidade distribuída, incluindo o espalhamento da plasticidade e qualquer efeito de segunda ordem, elimina a necessidade de verificação individual dos membros da estrutura e pode ser classificada como *Análise Avançada*.

### 3.2 Deformações e Tensões

Examinando-se uma fibra de material em sua configuração inicial, aqui tomada como referência, onde  $V_r$ ,  $A_r$ ,  $l_r$  são seu volume, área da seção transversal e comprimento, respectivamente, e examinando-se a mesma fibra em sua configuração deformada ou corrigida, na qual atua uma força normal  $N$ , onde  $V_c$ ,  $A_c$ ,  $l_c$  têm as mesmas definições anteriores na configuração corrigida, conforme a FIG. 3.1, são válidas as seguintes equações:

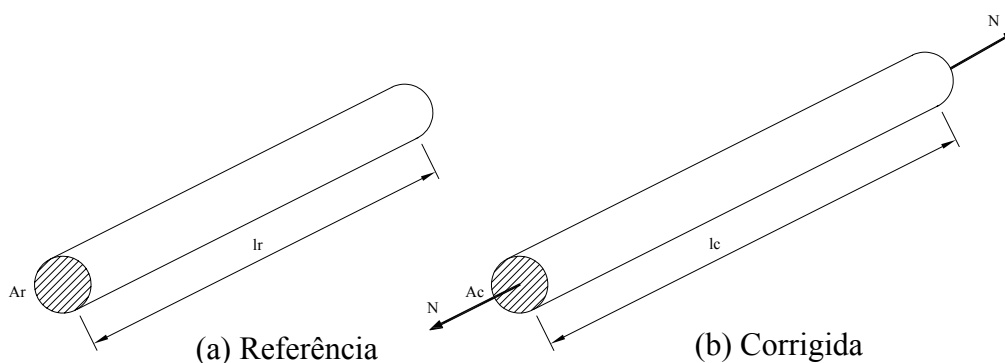


FIGURA 3. 1 – Fibra de um material nas configurações de (a) referência e (b) corrigida

$$\begin{cases} V_r = A_r l_r \\ V_c = A_c l_c \end{cases} \quad (3.1)$$

Qualquer grandeza que compare os comprimentos da fibra nas configurações de referência e corrigida pode ser definida como medida de deformação. Assim, o estiramento da fibra considerada é uma medida básica de deformação e é dado por:

$$\lambda = \frac{l_c}{l_r} \quad (3.2)$$

Uma família de deformações pode ser definida por meio de:

$$\varepsilon_m = \begin{cases} \frac{(\lambda^{2m} - 1)}{2m} & , m \neq 0 \\ \ln \lambda & , m = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Quando  $m$  varia, alguns membros desta família podem ser explicitados. Em particular, no presente trabalho adotar-se-á a deformação linear referente a  $m=1/2$ , comumente conhecida como deformação de engenharia.

$$\varepsilon_{1/2} = \varepsilon = \lambda - 1 \quad (3.4)$$

Uma família de tensões  $\sigma_m$ , conjugada com a família de deformações  $\varepsilon_m$ , pode ser expressa por:

$$\sigma_m = \lambda^{1-2m} \sigma_N \quad (3.5)$$

onde a tensão denotada por  $\sigma_N$ , chamada de tensão nominal ou de engenharia é definida por:

$$\sigma_N = \frac{N}{A_r} \quad (3.6)$$

Assim, a tensão conjugada à deformação  $\varepsilon$ , definida na Eq. (3.4) é:

$$\sigma_{1/2} = \sigma_N = \frac{N}{A_r} \quad (3.7)$$

A expressão acima indica que a tensão normal aplicada à fibra é conjugada à deformação linear sofrida pela mesma.

Em uma análise teórica consistente com a mecânica dos sólidos, as medidas de tensões e deformações devem ser conjugadas e objetivas (invariantes sob movimento de corpo

rígido). Ao se utilizar o sistema corrotacional de coordenadas pode-se garantir que a tensão nominal e a deformação linear, além de serem conjugadas, são também objetivas.

### 3.3 Relações Constitutivas

O módulo de rigidez do material de uma fibra é introduzido por meio de:

$$D_m = \frac{d\sigma_m}{d\varepsilon_m} \quad (3.8)$$

sendo  $D_m$ , por definição, o coeficiente angular da curva  $\sigma_m \times \varepsilon_m$ , descrito na FIG. 3.2.

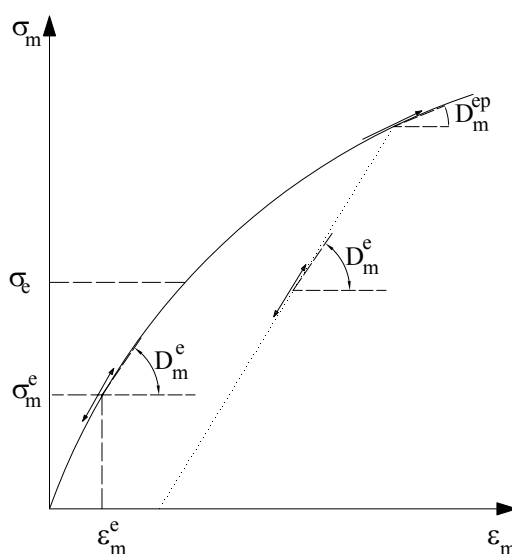


FIGURA 3. 2 – Módulo de rigidez no comportamento elástico e elastoplástico de uma fibra.

A fibra considerada estará em regime elástico se  $D_m$  for único, sendo denotado por  $D_m^e$ , tanto em carga quanto em descarga. Se a fibra estiver em regime elastoplástico,  $D_m$  poderá adotar dois valores distintos:  $D_m^e$  para o descarregamento elástico ou  $D_m^{ep}$  para o carregamento plástico.

No regime elastoplástico deve ser feita a verificação da situação na qual a fibra se encontra, comparando-se a tensão atuante  $\sigma_m$  com a tensão inicial de escoamento do material  $\sigma_e$ :

- Se  $(\sigma_m - \sigma_e) < 0$ , a fibra está em regime elástico e  $D_m = D_m^e = D = d\sigma_m/d\varepsilon_m$ , tanto em carga quanto em descarga.

- Se  $(\sigma_m - \sigma_e) > 0$ , a fibra está em regime plástico e  $D_m = D_m^e = D = d\sigma_m/d\varepsilon_m$ , para descarga ou  $D_m = D_m^{ep} = D^{ep}$  para carga.

### 3.4 Sistema de Coordenadas – Graus de Liberdade

#### 3.4.1 Condição de Extremidades: Rígido – Rotulada

Para o estudo de pórticos planos serão utilizados dois sistemas de referência: o sistema de coordenadas Lagrangiano ou Cartesiano, como referência global e o sistema corrotacional, ligado ao elemento, como referência local, no qual os deslocamentos são medidos em relação a uma configuração deformada. No sistema corrotacional são medidos os graus de liberdade naturais e uma transformação de coordenadas para o sistema Lagrangiano atualizado, levando em conta os deslocamentos de corpo rígido.

Seja um pórtico plano formado por barras retas em sua configuração inicial. Esta estrutura é aqui colocada no plano descrito pelas coordenadas  $x$  e  $y$ . Os nós do pórtico que podem estar localizados também ao longo das barras, possuem três graus de liberdade: os deslocamentos vertical e horizontal  $u$  e  $v$ , respectivamente, e a rotação  $\theta$ , medida no sentido anti-horário, conforme indicado na FIG. 3.3.

Examina-se agora um elemento qualquer  $ab$  pertencente ao pórtico, cujo comprimento inicial é  $l_r$ , a extremidade  $a$  é perfeitamente rígida e a extremidade  $b$  é perfeitamente

rotulada. O ângulo que este elemento faz com o eixo  $x$  é  $\varphi_r$ , conforme mostrado na FIG. 3.3. Nesta configuração será introduzido um sistema de coordenadas local corrotacional  $x_r$  e  $y_r$ , centrado no elemento.

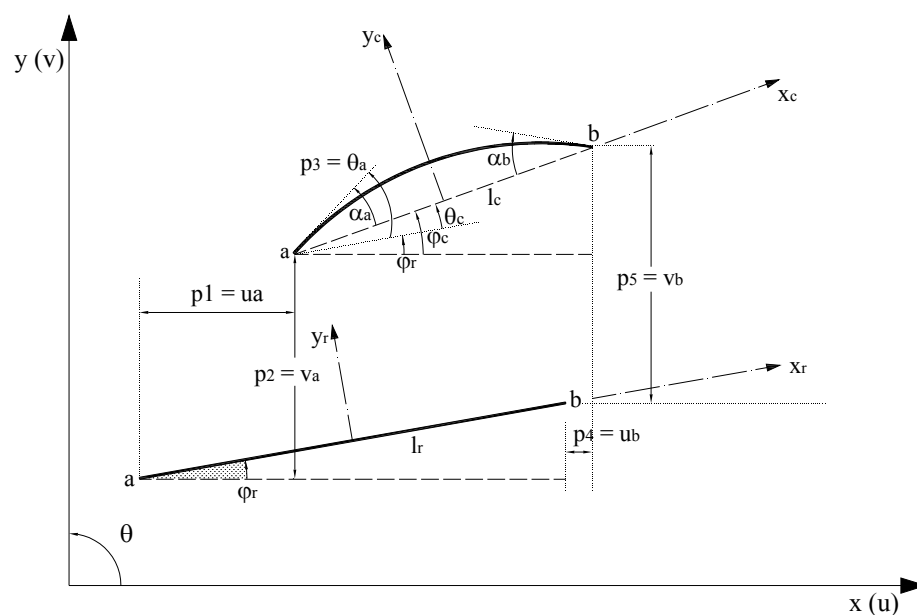


FIGURA 3. 3 – Deslocamentos do elemento de pórtico plano em suas configurações de referência e deformada para a condição de extremidades rígido-rotulada.

Após um determinado nível de carregamento, o elemento, já deformado, desloca-se para uma nova posição atualizada ou corrigida. Nesta configuração introduz-se o sistema local de coordenadas  $x_c$  e  $y_c$ , centrado na corda que une as extremidades  $a$  e  $b$  do elemento. Esta corda tem comprimento  $l_c$  e faz ângulo  $\varphi_c$  com o eixo  $x$ .

Na configuração deformada a barra encontra-se fletida. O ângulo entre a corda e a tangente ao eixo da barra é denotado por  $\alpha$  e tem nos extremos os valores  $\alpha_a$  e  $\alpha_b$ . O estiramento da corda assim como sua deformação são dados, respectivamente, por:

$$\begin{cases} \lambda = l_c / l_r \\ \varepsilon = \lambda - 1 \end{cases} \quad (3.9)$$

Neste trabalho serão adotados três graus de liberdade naturais ou corrotacionais, que são quantidades objetivas (independem do movimento de corpo rígido), os quais são suficientes para medir as deformações do elemento, e referem-se ao sistema local corrotacional. Eles serão agrupados em um vetor  $\mathbf{q}_\alpha$  (3x1), onde  $\alpha = 1,2,3$ , e são definidos por:

$$\begin{cases} q_1 = \Delta = l_c - l_r \\ q_2 = \alpha_a \\ q_3 = \alpha_b \end{cases} \quad (3.10)$$

onde  $q_1$  mede a mudança de comprimento da corda (alongamento ou encurtamento),  $q_2$  mede o ângulo  $\alpha_a$  na extremidade  $a$  do elemento e  $q_3$  mede o ângulo  $\alpha_b$  na extremidade  $b$  do elemento. Estes dois últimos, independentes da rotação de corpo rígido  $\theta_c$ , sendo:

$$\theta_c = \varphi_c - \varphi_r \quad (3.11)$$

Os graus de liberdade cartesianos  $p_i$  ( $i=1,\dots,6$ ) são definidos por  $p_1=u_a$ ;  $p_2=v_a$ ;  $p_3 = \theta_a$ ;  $p_4=u_b$ ;  $p_5=v_b$ ;  $p_6 = \theta_b$ , e podem ser reunidos no vetor  $\mathbf{p}_i$  (6x1), denominado vetor de deslocamentos nodais do elemento, da seguinte forma:

$$\mathbf{p}_i^T = (u_a \quad v_a \quad \theta_a \quad u_b \quad v_b \quad \theta_b) \quad (3.12)$$

Associando-se a relação  $q_3 = -q_2/2$ , oriunda da condição de extremidades  $a$  rígida e  $b$  rotulada, pode-se estabelecer uma relação entre os graus de liberdade cartesianos  $\mathbf{p}_i$ , referidos ao sistema global, e os graus de liberdade corrotacionais  $\mathbf{q}_\alpha$ , conforme as expressões a seguir.

$$\begin{cases} q_1 = l_c - l_r \\ q_2 = \alpha_a = \theta_a - \theta_c = p_3 - \varphi_c + \varphi_r \\ q_3 = \alpha_b = -\frac{1}{2}q_2 = -\frac{1}{2}(p_3 - \varphi_c + \varphi_r) \end{cases} \quad (3.13)$$

onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} l_c = \left[ (x_b - x_a + p_4 - p_1)^2 + (y_b - y_a + p_5 - p_2)^2 \right]^{1/2} \\ l_r = \left[ (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 \right]^{1/2} \\ \text{sen } \varphi_c = \frac{y_b - y_a + p_5 - p_2}{l_c} \\ \text{cos } \varphi_c = \frac{x_b - x_a + p_4 - p_1}{l_c} \\ \varphi_c = \text{arctg} \left( \frac{y_b - y_a + p_5 - p_2}{x_b - x_a + p_4 - p_1} \right) \\ \varphi_r = \text{arctg} \left( \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \right) \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Nas Eq. (3.14),  $x_a$ ,  $x_b$ ,  $y_a$  e  $y_b$  são as coordenadas nodais do elemento na configuração de referência. É evidente que as relações são fortemente não-lineares, pois dependem das grandezas  $l_c$  e  $\varphi_c$ , que variam a todo instante de acordo em função dos deslocamentos nodais da estrutura.

As relações diferenciais entre as coordenadas locais corrotacionais e as coordenadas globais cartesianas podem ser escritas numa matriz  $\mathbf{B}_{3 \times 6}$  ao se derivar  $\mathbf{q}_\alpha$  em relação a  $\mathbf{p}_i$ , isto é,  $\partial q_\alpha / \partial p_i$ , ou  $q_{\alpha,i}$ .

$$q_{\alpha,i} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi_c & -\text{sen} \varphi_c & 0 & \cos \varphi_c & \text{sen} \varphi_c & 0 \\ -\frac{\text{sen} \varphi_c}{l_c} & \frac{\cos \varphi_c}{l_c} & 1 & \frac{\text{sen} \varphi_c}{l_c} & -\frac{\cos \varphi_c}{l_c} & 0 \\ \frac{\text{sen} \varphi_c}{2l_c} & -\frac{\cos \varphi_c}{2l_c} & -\frac{1}{2} & -\frac{\text{sen} \varphi_c}{2l_c} & \frac{\cos \varphi_c}{2l_c} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

ou

$$\{dq_\alpha\} = [\mathbf{B}]\{dp_i\} \quad (3.16)$$

onde  $\mathbf{B}$  é uma matriz de mudança de coordenadas que relaciona as taxas de deslocamentos nas coordenadas locais corrotacionais com as taxas de deslocamentos



nas coordenadas globais cartesianas. Por também depender de  $l_c$  e  $\varphi_c$ , a matriz  $\mathbf{B}$  é altamente não linear.

A matriz  $\mathbf{B}$  pode ser escrita como um produto:

$$\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}}\mathbf{T} \quad (3.17)$$

onde:

$$\bar{\mathbf{B}}_{(3 \times 6)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_c} & 1 & 0 & -\frac{1}{l_c} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2l_c} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2l_c} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{T}_{(6 \times 6)} = \begin{pmatrix} t & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & t \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

$$t_{(3 \times 3)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_c & \sin\varphi_c & 0 \\ -\sin\varphi_c & \cos\varphi_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

- $\bar{\mathbf{B}}$  é a forma local de  $\mathbf{B}$  e relaciona os graus de liberdade naturais do sistema corrotacional, com os graus de liberdade do sistema cartesiano global (mudança de coordenadas).
- $\mathbf{T}$  é a matriz de rotação de eixos, que muda as coordenadas locais no sistema cartesiano para as coordenadas globais no referido sistema.
- $\mathbf{0}_3$  é a matriz nula (3x3).

A determinação das derivadas de segunda ordem,  $\mathbf{q}_\alpha$  em relação a  $\mathbf{p}_i$ , isto é  $\partial^2 q_\alpha / \partial p_i \partial p_j$ , serão também necessárias e podem ser colocadas em três matrizes simétricas  $\mathbf{G}_\alpha$  (6x6), com  $\alpha=1, 2, 3$  e  $i=j=1, \dots, 6$ , dadas por:

$$\mathbf{G}_1 = \frac{1}{l_c} \begin{pmatrix} \text{sen}^2 \varphi_c & -\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 & -\text{sen}^2 \varphi_c & \text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & \cos^2 \varphi_c & 0 & \text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & -\cos^2 \varphi_c & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \text{sen}^2 \varphi_c & -\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & & & & \cos^2 \varphi_c & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{G}_2 = \frac{1}{l_c^2} \begin{pmatrix} -2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & (\cos^2 \varphi_c - \text{sen}^2 \varphi_c) & 0 & 2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & -(\cos^2 \varphi_c - \text{sen}^2 \varphi_c) & 0 \\ & 2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 & -(\cos^2 \varphi_c - \text{sen}^2 \varphi_c) & -2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & (\cos^2 \varphi_c - \text{sen}^2 \varphi_c) & 0 \\ & & & & 2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{G}_3 = \frac{1}{l_c^2} \begin{pmatrix} \text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & -\frac{(\cos^2 \varphi_c - \text{sen}^2 \varphi_c)}{2} & 0 & -\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & \frac{(\cos^2 \varphi_c - \text{sen}^2 \varphi_c)}{2} & 0 \\ & -\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 & \frac{(\cos^2 \varphi_c - \text{sen}^2 \varphi_c)}{2} & \text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & -\frac{(\cos^2 \varphi_c - \text{sen}^2 \varphi_c)}{2} & 0 \\ & & & & -\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Nota-se que a derivada segunda  $q_{\alpha,ij}$  é uma relação que envolve somente geometria e representará uma parcela da matriz de rigidez geométrica da estrutura oriunda do equilíbrio da estrutura na posição deslocada (teoria de segunda ordem).

A matriz geométrica  $\mathbf{G}_\alpha$  pode ser escrita como um produto de três matrizes:

$$\mathbf{G}_\alpha = \mathbf{T}^T \overline{\mathbf{G}}_\alpha \mathbf{T} \quad (3.24)$$

onde  $\overline{\mathbf{G}}_\alpha$ ,  $\alpha = 1,2,3$ , é a forma local de  $\mathbf{G}_\alpha$  e  $\mathbf{T}$  é a matriz de rotação de eixos, dada pela Eq.(3.19). Logo,

$$\bar{\mathbf{G}}_1 = \frac{1}{l_c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

$$\bar{\mathbf{G}}_2 = \frac{1}{l_c^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

$$\bar{\mathbf{G}}_3 = \frac{1}{2l_c^2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & -1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

### 3.4.2 Condição de Extremidades: Rígido – Rígido

A formulação do elemento, descrita a seguir, foi retirada de LAVALL (1996) e FERREIRA (1999), considerando rígidos os nós da estrutura.

Analogamente ao caso anterior, com auxílio da FIG 3.4 e das Eqs. (3.10), (3.11), (3.12) e (3.14), pode-se estabelecer a relação entre os graus de liberdade cartesianos  $\mathbf{p}_i$ , e os graus de liberdade corrotacionais  $\mathbf{q}_\alpha$ , considerando-se as condições das extremidades  $a$  e  $b$  perfeitamente rígidas.

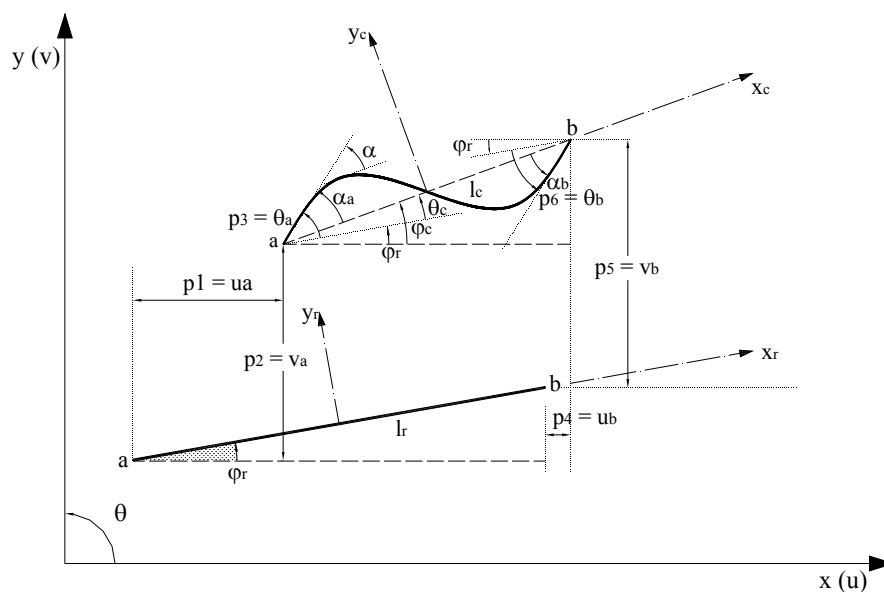


FIGURA 3. 4 – Deslocamentos do elemento de pórtico plano em suas configurações de referência e deformada para a condição de extremidades rígido-rígido

$$\begin{cases} q_1 = l_c - l_r \\ q_2 = \alpha_a = \theta_a - \theta_c = p_3 - \varphi_c + \varphi_r \\ q_3 = \alpha_b = \theta_b - \theta_c = p_6 - \varphi_c + \varphi_r \end{cases} \quad (3.28)$$

Assim, a matriz  $\mathbf{B}$ , obtida derivando-se  $\mathbf{q}_\alpha$  em relação a  $\mathbf{p}_i$ , é dada por:

$$q_{\alpha,i} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi_c & -\sin \varphi_c & 0 & \cos \varphi_c & \sin \varphi_c & 0 \\ -\frac{\sin \varphi_c}{l_c} & \frac{\cos \varphi_c}{l_c} & 1 & \frac{\sin \varphi_c}{l_c} & -\frac{\cos \varphi_c}{l_c} & 0 \\ -\frac{\sin \varphi_c}{l_c} & \frac{\cos \varphi_c}{l_c} & 0 & \frac{\sin \varphi_c}{l_c} & -\frac{\cos \varphi_c}{l_c} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Pensando na forma local de  $\mathbf{B}$ , originada pelo produto  $\mathbf{B} = \overline{\mathbf{B}}\mathbf{T}$ , tem-se:

$$\overline{\mathbf{B}}_{(3 \times 6)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_c} & 1 & 0 & -\frac{1}{l_c} & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_c} & 0 & 0 & -\frac{1}{l_c} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

onde a matriz de rotação de eixos  $\mathbf{T}$  é dada pela Eq. (3.19).

As derivadas de segunda ordem,  $q_\alpha$  em relação a  $p_i$ , podem ser colocadas nas três matrizes simétricas  $\mathbf{G}_\alpha$  (6x6), dadas por:

$$\mathbf{G}_1 = \frac{1}{l_c} \begin{pmatrix} \text{sen}^2 \varphi_c & -\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 & -\text{sen}^2 \varphi_c & \text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & \cos^2 \varphi_c & 0 & \text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & -\cos^2 \varphi_c & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \text{sen}^2 \varphi_c & -\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & & & & \cos^2 \varphi_c & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_3 = \frac{1}{l_c^2} \begin{pmatrix} -2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & (\cos^2 \varphi_c - \text{sen}^2 \varphi_c) & 0 & 2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & -(\cos^2 \varphi_c - \text{sen}^2 \varphi_c) & 0 \\ & 2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 & -(\cos^2 \varphi_c - \text{sen}^2 \varphi_c) & -2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & (\cos^2 \varphi_c - \text{sen}^2 \varphi_c) & 0 \\ & & & & 2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Pensando no produto de três matrizes  $\mathbf{G}_\alpha = \mathbf{T}^T \overline{\mathbf{G}}_\alpha \mathbf{T}$ , tem-se:

$$\overline{\mathbf{G}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

$$\overline{\mathbf{G}}_2 = \overline{\mathbf{G}}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

### 3.5 Teoria Estrutural

A teoria estrutural adotada é desenvolvida a partir da hipótese cinemática atribuída a Bernoulli-Euler:

*“As seções transversais planas e ortogonais ao eixo da barra permanecem planas, indeformáveis e ortogonais ao eixo, após deformação”.*

Por essa hipótese, despreza-se o empenamento das seções transversais ao se afirmar que as seções permanecem planas após a deformação. Desprezam-se também as deformações transversais ou de Poisson ( $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \nu = 0$ ) ao se admitir que as seções ficam indeformáveis. Como as seções permanecem ortogonais ao eixo da barra, as distorções no plano da barra,  $\gamma_{xy}$ , e os efeitos da tensão de cisalhamento,  $\tau_{xy}$ , são também nulos. Assim, a única deformação relevante é a deformação longitudinal  $\varepsilon_{xx}$ .

### 3.6 Cinemática do Elemento

#### 3.6.1 Campo de Deformação

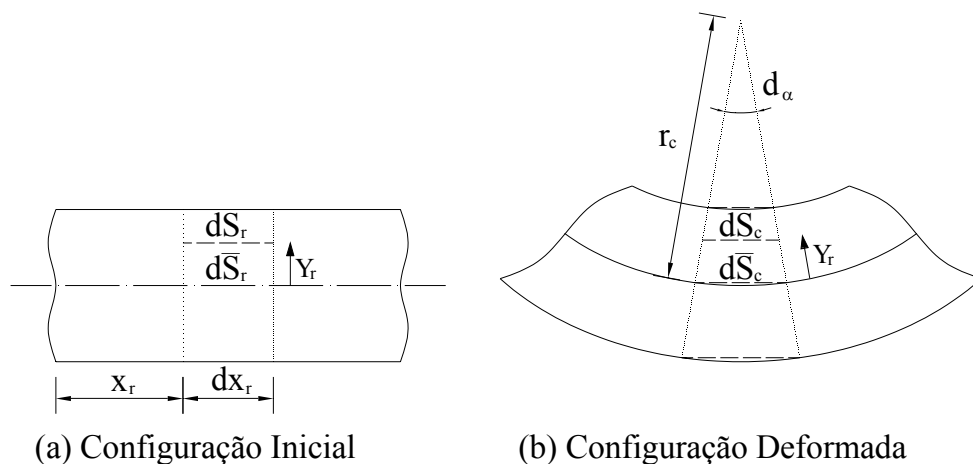


FIGURA 3. 5 – Elemento diferencial de barra reta

Para que possa ser definido um campo de deformação consistente com a teoria estrutural apresentada, considere-se um elemento diferencial de uma barra reta de pórtico plano na configuração inicial, como mostrado na FIG. 3.5a. Este elemento é limitado por duas seções transversais ortogonais a um eixo longitudinal, arbitrariamente definido, e distantes  $dx_r$ , uma da outra.

Designando-se fibra como um conjunto de pontos materiais sobre uma reta paralela ao eixo longitudinal, verifica-se que uma fibra a uma distância  $y_r$  do eixo e uma fibra pertencente a esse eixo tem os comprimentos  $dS_r$  e  $d\bar{S}_r$  respectivamente, dados por:

$$dS_r = d\bar{S}_r = dx_r \quad (3.35)$$

Seja o mesmo elemento na configuração deformada, conforme FIG. 3.5b e adotando-se a hipótese cinemática de Bernoulli-Euller, obtém-se que, para uma fibra a uma distância  $y_r$  do eixo da barra e outra pertencente ao eixo, seus comprimentos são, respectivamente, dados por:

$$\begin{cases} dS_c = (r_c - y_r) d\alpha \\ d\bar{S}_c = r_c \cdot d\alpha \end{cases} \quad (3.36)$$

onde  $r_c$  é o raio de curvatura local e  $d\alpha$  é o ângulo interno do setor definido pelas seções transversais, formado após a deformação. Da Eq. (3.36) tem-se que:

$$dS_c = d\bar{S}_c - y_r d\alpha \quad (3.37)$$

O estiramento de uma fibra a uma distância  $y_r$  do eixo da barra,  $\lambda$ , e o estiramento de uma fibra do eixo,  $\bar{\lambda}$ , são definidos por:

$$\begin{cases} \lambda = dS_c / dS_r \\ \bar{\lambda} = d\bar{S}_c / d\bar{S}_r \end{cases} \quad (3.38)$$

Na Eq. (3.38) valores maiores que a unidade indicam alongamento da barra e valores menores indicam encurtamento. Levando-se a Eq. (3.37) na Eq.(3.38), com o auxílio da Eq. (3.35), tem-se o estiramento dado por:

$$\lambda = \bar{\lambda} - y_r \alpha' \quad (3.39)$$

onde  $\alpha' = d\alpha/dx_r$ ,

Subtraindo-se a unidade em ambos os lados, tem-se a expressão analítica do campo de deformações consistente com a teoria estrutural adotada, dada por:

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} - y_r \alpha' \quad (3.40)$$

### 3.6.2 Campo de Deslocamento

De acordo com a hipótese de Bernoulli-Euler o campo de deslocamento dos pontos pertencentes à barra fica caracterizado se os deslocamentos axiais ( $\bar{u}$ ) e transversais ( $\bar{v}$ ) dos pontos situados sobre o eixo são conhecidos, bem como a rotação ( $\alpha$ ) das seções transversais, conforme FIG. 3.6.

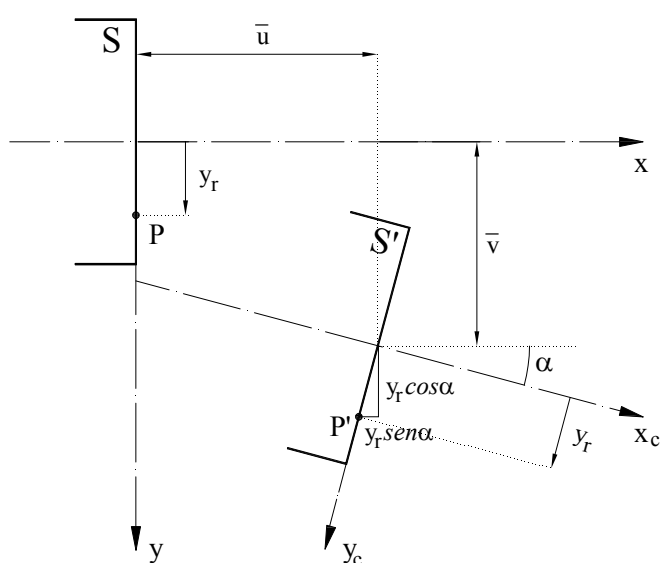


FIGURA 3. 6 – Campo de deslocamento na flexão normal composta



No sistema corrotacional  $(x_c, y_c)$  os deslocamentos  $u_c$  e  $v_c$  representam os campos de deslocamento do ponto  $P$  pertencente à seção  $S$ , caracterizado pela coordenada  $y_r$  relativa ao eixo da barra, dados por:

$$\begin{cases} u_c(x, y) = \bar{u}_c(x) - y_r \operatorname{sen} \alpha \\ v_c(x, y) = \bar{v}_c(x) - y_r (1 - \cos \alpha) \end{cases} \quad (3.41)$$

onde  $\bar{u}_c$  e  $\bar{v}_c$  são os deslocamentos do eixo da barra no sistema corrotacional.

Observa-se que o ângulo  $\alpha$  decorre dos deslocamentos  $\bar{u}_c$  e  $\bar{v}_c$  dos pontos situados sobre o eixo, como indicado na FIG. 3.7, ou seja:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left( \frac{d\bar{v}_c}{dx_r + d\bar{u}_c} \right) = \operatorname{arctg} \left( \frac{d\bar{v}_c/dx_r}{1 + d\bar{u}_c/dx_r} \right) = \operatorname{arctg} \left( \frac{\bar{v}_c'}{1 + \bar{u}_c'} \right) \quad (3.42)$$

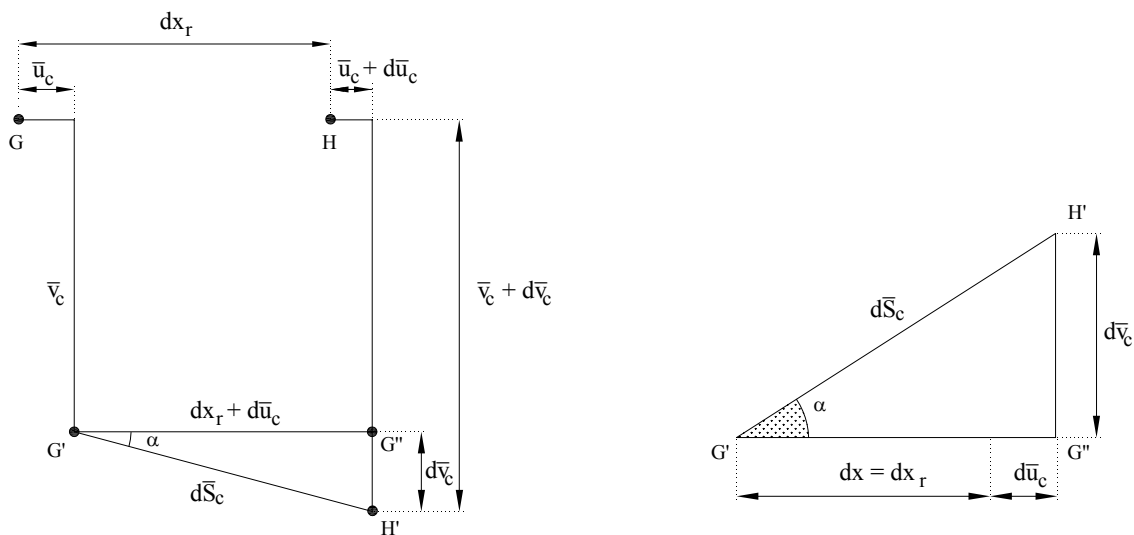


FIGURA 3. 7 – Rotação  $\alpha$  da seção transversal.

Do triângulo formado por  $G'G''H'$  da FIG 3.7 tem-se que após a deformação, a fibra do eixo da barra tem o comprimento infinitesimal  $d\bar{S}_c$ , dado por:

$$d\bar{S}_c = \left[ (dx + d\bar{u}_c)^2 + (d\bar{v}_c)^2 \right]^{1/2} \quad (3.43)$$

O estiramento de uma fibra do eixo é obtido dividindo-se a Eq. (3.43) por  $d\bar{S}_r = dx_r = dx$ :

$$\bar{\lambda} = \frac{d\bar{S}_c}{d\bar{S}_r} = \left[ (1 + \bar{u}_c')^2 + (\bar{v}_c')^2 \right]^{1/2} \quad (3.44)$$

O cosseno do ângulo  $\alpha$  é dado por:

$$\cos \alpha = \frac{dx + d\bar{u}_c}{d\bar{S}_c} \quad (3.45)$$

Dividindo-se também por  $dx$ , tem-se:

$$\cos \alpha = \frac{1 + \bar{u}_c'}{\bar{\lambda}} \quad (3.46)$$

Finalmente, o estiramento de uma fibra da barra é dado por:

$$\bar{\lambda} = (1 + \bar{u}_c') \sec \alpha \quad (3.47)$$

Sabendo-se que  $\bar{\varepsilon} = \bar{\lambda} - 1$ , tem-se que:

$$\bar{\varepsilon} = (1 + \bar{u}_c') \sec \alpha - 1 \quad (3.48)$$

Então a expressão analítica do campo de deformação, consistente com a teoria estrutural adotada, dada pela Eq. (3.40) torna-se:

$$\varepsilon = (1 + \bar{u}_c') \sec \alpha - 1 - y_r \alpha' \quad (3.49)$$

A determinação do campo de deformação descrito acima fica dependente da escolha de funções de interpolação aproximadoras para o deslocamento  $\overline{u_c}$  do eixo da barra e para o ângulo  $\alpha$  de rotação do eixo. Essas funções serão expressas em função dos graus de liberdade naturais (objetivos),  $q_\alpha$ , e o campo de deformação passará a ser função de:

$$\varepsilon = f[q_\alpha(p_i)] \quad (3.50)$$

### 3.7 Equações de Equilíbrio

#### 3.7.1 Equilíbrio do Elemento

Conhecido o campo de deformação, descrito pela Eq. (3.50), o equilíbrio do elemento pode ser obtido através do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Sabe-se que o trabalho virtual interno de um elemento é dado por:

$$\delta\omega_i = \int_{V_r} \sigma \cdot \delta\varepsilon \cdot dV_r \quad (3.51)$$

onde  $dV_r$  é o elemento de volume na configuração de referência,  $\sigma$  é a tensão normal de uma fibra e  $\delta\varepsilon$  é a deformação virtual de uma fibra.

A deformação virtual é dada pela variação da Eq. (3.50), e é obtida com o emprego da Regra da Cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dp_i} &= \frac{d\varepsilon}{dq_\alpha} \frac{dq_\alpha}{dp_i} = \varepsilon_{,\alpha} q_{\alpha,i} \\ \delta\varepsilon &= \varepsilon_{,\alpha} q_{\alpha,i} \delta p_i \end{aligned} \quad (3.52)$$

onde  $\delta p_i$  é o vetor dos deslocamentos nodais virtuais do elemento.

As forças nodais internas  $P_i$  são definidas de tal forma que:

$$\delta\omega_i = P_i \delta p_i \quad (3.53)$$

Igualando-se as Eq. (3.51) e (3.53) com o auxílio da Eq. (3.52), e sabendo-se que  $q_{\alpha,i}$  representa uma transformação de coordenadas que independe do volume de referência, chega-se à equação de equilíbrio, dada por:

$$P_i = \left( \int_{V_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha} dV_r \right) q_{\alpha,i} \quad (3.54)$$

Chamando de  $Q_\alpha$  os esforços internos nas coordenadas naturais ou corrotacionais:

$$Q_\alpha = \int_{V_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha} dV_r \quad (3.55)$$

tem-se que a equação de equilíbrio do elemento  $P_i$ , em notação indicial é dada por:

$$P_i = Q_\alpha q_{\alpha,i} \quad (3.56)$$

Reunindo  $P_i$  e  $Q_\alpha$  em dois vetores  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$ , respectivamente, e sabendo que  $q_{\alpha,i} = \mathbf{B}_{(3 \times 6)}$ , pode-se escrever a Eq. (3.56) na forma matricial:

$$\mathbf{P} = \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \quad (3.57)$$

### Matriz de Rigidez Tangente do Elemento

Sendo  $P = P(\sigma, p)$ , isto é, considerando a teoria de segunda ordem e pensando numa formulação incremental de equilíbrio, a derivada no tempo de  $P$  (ou a variação de cada incremento de  $P$ ) pode ser dada por:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial p} \frac{dp}{dt} \quad (3.58)$$

Definindo-se a matriz de rigidez tangente do elemento nas coordenadas cartesianas como  $\mathbf{k}_t$ , dada por:

$$\mathbf{k}_t = \frac{\partial P}{\partial p} \quad (3.59)$$

pode-se escrever a Eq. (3.58) da seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{k}_t \dot{\mathbf{p}} \quad (3.60)$$

As componentes  $k_{ij}$  da matriz de rigidez tangente são as derivadas de  $P_i$  em relação às coordenadas cartesianas  $p_j$ . Derivando-se a Eq. (3.56) com o auxílio da Regra da Cadeia, tem-se:

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_j} = k_{ij} = q_{\alpha,i} Q_{\alpha,\beta} q_{\beta,j} + Q_{\alpha} q_{\alpha,ij} \quad (3.61)$$

Resolvendo-se a derivada da Eq. (3.55) com ajuda da Eq. (3.8), conclui-se que:

$$Q_{\alpha,\beta} = \int_{V_r} (\varepsilon_{,\alpha} D\varepsilon_{,\beta} + \sigma\varepsilon_{,\alpha\beta}) dV_r \quad (3.62)$$

onde define-se:

$$D_{\alpha,\beta} = \int_{V_r} \varepsilon_{,\alpha} D\varepsilon_{,\beta} dV_r \quad (3.63)$$

$$H_{\alpha,\beta} = \int_{V_r} \sigma\varepsilon_{,\alpha\beta} dV_r \quad (3.64)$$

Levando-se a Eq. (3.62) na Eq. (3.61), com o auxílio das Eqs. (3.63) e (3.64), tem-se:

$$k_{ij} = \underbrace{q_{\alpha,i} (D_{\alpha,\beta} + H_{\alpha,\beta}) q_{\beta,j}}_{\text{parcela objetiva}} + \underbrace{Q_{\alpha} q_{\alpha,ij}}_{\text{parcela do movimento de corpo rígido}} \quad (3.65)$$

$$k_{ij} = \underbrace{q_{\alpha,i} D_{\alpha,\beta} q_{\beta,j}}_{\text{parcela constitutiva}} + \underbrace{q_{\alpha,i} H_{\alpha,\beta} q_{\beta,j} + Q_{\alpha} q_{\alpha,ij}}_{\text{parcela geométrica}} \quad (3.66)$$

A parcela geométrica de  $k_{ij}$ , oriunda da análise em teoria de segunda ordem, leva em conta os chamados efeitos  $P\delta$  ( $q_{\alpha,i} H_{\alpha,\beta} q_{\beta,j}$ ) e  $P\Delta$  ( $Q_{\alpha} q_{\alpha,ij}$ ).

Escrevendo em notação matricial, a matriz de rigidez constitutiva vem da parcela constitutiva da Eq.(4.66). Usando-se  $q_{\alpha,i} = q_{\beta,j} = \mathbf{B}_{(3 \times 6)}$  e  $D_{\alpha,\beta} = \mathbf{D}_{(3 \times 3)}$ , simétrica, resulta em:

$$\mathbf{k}_M = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \quad (3.69)$$

que também é simétrica e tem dimensão (6x6).

A matriz de rigidez geométrica é obtida da parcela geométrica da Eq. (3.66) com o auxílio de  $H_{\alpha,\beta} = \mathbf{H}_{(3 \times 3)}$  e  $q_{\alpha,ij} = \mathbf{G}_{\alpha(6 \times 6)}$ , ambas simétricas, com  $\alpha = 1, 2, 3$ :

$$\mathbf{k}_G = \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} + Q_{\alpha} \mathbf{G}_{\alpha} \quad (3.70)$$

Finalmente, pode-se escrever a matriz de rigidez tangente, simétrica (6x6), nas seguintes formas:

$$\mathbf{k}_t = \mathbf{k}_M + \mathbf{k}_G \quad (3.71)$$

ou

$$\mathbf{k}_t = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} + Q_{\alpha} \mathbf{G}_{\alpha} \quad (3.72)$$

### 3.7.2 Equilíbrio Estrutural

Demonstrou-se que o equilíbrio de um elemento é dado, em notação matricial, pela Eq. (3.57):  $\mathbf{P} = \mathbf{B}^T \mathbf{Q}$ , sendo  $P = P(\sigma, p)$ .

À procura do equilíbrio da estrutura, os graus de liberdade cartesianos  $\mathbf{p}$  de um elemento serão relacionados com os graus de liberdade  $\mathbf{r}$  da estrutura, através da expressão matricial:

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}\mathbf{r} \quad (3.73)$$

onde  $\mathbf{A}$  é a matriz de incidência cinemática e é responsável pela compatibilidade dos deslocamentos nodais  $\mathbf{p}$  dos elementos com os deslocamentos nodais da estrutura  $\mathbf{r}$ .

Variando-se a Eq. (3.73), vem que:

$$\delta\mathbf{p} = \mathbf{A}\delta\mathbf{r} \quad (3.74)$$

uma vez que a matriz  $\mathbf{A}$  é composta de 0 e 1.

O trabalho virtual interno da estrutura é dado pelo somatório dos trabalhos virtuais internos de seus elementos. Assim, pode-se escrever, com o auxílio da Eq. (3.74):

$$\delta\omega_i = \sum \delta\omega_i = \sum_1^{\omega_e} \mathbf{P}^T \delta\mathbf{p} = \sum \mathbf{P}^T \mathbf{A} \delta\mathbf{r} = \left( \sum \mathbf{P}^T \mathbf{A} \right) \delta\mathbf{r} \quad (3.75)$$

Chamando

$$\mathbf{S} = \sum \mathbf{A}^T \mathbf{P} \quad (3.76)$$

de vetor dos esforços internos da estrutura, obtido somando-se a contribuição de todos os elementos, vem que:

$$\delta\omega_i = \mathbf{S}^T \cdot \delta\mathbf{r} \quad (3.77)$$

como  $P = P(\sigma, p)$  e  $\mathbf{p} = \mathbf{A}\mathbf{r}$ , então  $S = S(\sigma, r)$ .

Supondo-se apenas carregamentos externos  $\mathbf{R}$  aplicados de forma concentrada nos nós da estrutura, o trabalho virtual externo é dado por:

$$\delta\omega_e = \mathbf{R}^T \delta\mathbf{r} \quad (3.78)$$

Igualando-se as Eq. (3.77) e Eq. (3.78) pelo PTV, obtém-se:

$$\mathbf{S}^T \delta \mathbf{r} = \mathbf{R}^T \delta \mathbf{r} \quad (3.79)$$

Finalmente:

$$\mathbf{R} = \mathbf{S} \quad (3.80)$$

que representa a equação do equilíbrio estrutural.

### 3.7.3 Equações Incrementais de Equilíbrio

Visando-se uma variação a cada incremento de carga  $P$ , isto é, procurando as equações incrementais de equilíbrio, deriva-se a igualdade  $\mathbf{R} = \mathbf{S}$ :

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{S}} \quad (3.81)$$

Da Eq. (3.76) vem que:

$$\dot{\mathbf{S}} = \sum \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{P}} \quad (3.82)$$

Levando-se a Eq. (3.60), onde  $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{k}_t \dot{\mathbf{p}}$ , em (3.82), obtém-se:

$$\dot{\mathbf{S}} = \sum \mathbf{A}^T \mathbf{k}_t \dot{\mathbf{p}} \quad (3.83)$$

Sabendo-se da Eq. (3.74) que  $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{A} \dot{\mathbf{r}}$  e aplicando em (3.83), tem-se:

$$\dot{\mathbf{S}} = \sum \mathbf{A}^T \mathbf{k}_t \mathbf{A} \dot{\mathbf{r}} \quad (3.84)$$

Finalmente, pode-se escrever:

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{K}_t \dot{\mathbf{r}} \quad (3.85)$$



onde

$$\mathbf{K}_t = \sum \mathbf{A}^T \mathbf{k}_t \mathbf{A} \quad (3.86)$$

é a matriz de rigidez tangente da estrutura obtida da contribuição das matrizes de rigidez de cada elemento, através da matriz de incidência cinemática  $\mathbf{A}$ . Assim, a Eq. (3.81),  $\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{S}}$ , do equilíbrio incremental da estrutura, pode ser expressa por:

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{K}_t \dot{\mathbf{r}} \quad (3.87)$$

ou de forma aproximada por:

$$\Delta \mathbf{R} = \mathbf{K}_t \Delta \mathbf{r} \quad (3.88)$$

onde  $\Delta \mathbf{R}$  representa os incrementos no carregamento e  $\Delta \mathbf{r}$  os incrementos nos deslocamentos nodais.

### 3.8 Interpolação

O campo de deformação adotado neste trabalho é dado pela Eq. (3.49), onde:  $\varepsilon = (1 + \overline{u_c}') \sec \alpha - 1 - y_r \alpha'$ . Para que o campo de deformações seja conhecido é necessário definir funções aproximadoras para o deslocamento  $\overline{u_c}$  e para o ângulo  $\alpha$  de rotação do eixo. Várias funções podem ser utilizadas para descrever  $\overline{u_c}$  e  $\alpha$  ao longo da barra, desde que fiquem explícitas em função de  $q_\alpha$ . Utilizando-se as funções de interpolação usuais da análise numérica, pode-se escrevê-las em função dos graus de liberdade corrotacionais, desconsiderando-se, assim, o movimento de corpo rígido:

$$\overline{u_c} = q_1 \psi_1 \quad (3.89)$$

$$\alpha = q_2 \psi_2' + q_3 \psi_3' \quad (3.90)$$

onde:

$$\begin{cases} \psi_1 = \frac{x_r}{l_r} + \frac{1}{2} \\ \psi_2' = \frac{3x_r^2}{l_r^2} - \frac{x_r}{l_r} - \frac{1}{4} \\ \psi_3' = \frac{3x_r^2}{l_r^2} + \frac{x_r}{l_r} - \frac{1}{4} \end{cases} \quad (3.91)$$

Para descrever o campo de deformação da Eq. (3.49) são necessárias as derivadas  $\overline{u_c}'$  e  $\alpha'$ . Logo,

$$\overline{u_c}' = q_1 \psi_1' \quad (3.92)$$

$$\alpha' = q_2 \psi_2'' + q_3 \psi_3'' \quad (3.93)$$

onde:

$$\psi_1' = \frac{1}{l_r} \quad \psi_2'' = \frac{6x_r}{l_r^2} - \frac{1}{l_r} \quad \psi_3'' = \frac{6x_r}{l_r^2} + \frac{1}{l_r} \quad (3.94)$$

Finalmente, substituindo-se as Eqs. (3.90) a (3.94) na Eq.(3.49) tem-se a expressão do campo de deformação  $\varepsilon$  em função das coordenadas corrotacionais  $q_\alpha$ :

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \sec(q_2 \psi_2' + q_3 \psi_3') - y_r (q_2 \psi_2'' + q_3 \psi_3'') - 1 \quad (3.95)$$

## 3.9 Aproximações e Simplificações

### 3.9.1 Aproximações de Segunda Ordem

Se o ângulo de rotação  $\alpha$  ao longo dos elementos é suficientemente pequeno, o que pode ser obtido com elementos curtos, sem perda da generalidade da formulação, as seguintes aproximações de segunda ordem de suas funções trigonométricas podem ser utilizadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots \approx \alpha \\ \operatorname{tg} \alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3!} + \dots \approx \alpha \\ \cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{4!} + \dots \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} \\ \sec \alpha = 1 + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{5\alpha^4}{24} + \dots \approx 1 + \frac{\alpha^2}{2} \end{array} \right. \quad (3.96)$$

Estas aproximações correspondem à hipótese de pequenas rotações do eixo dos elementos em relação às suas cordas. Devido à formulação corrotacional, esta hipótese não impede a ocorrência de grandes curvaturas, desde que os elementos sejam suficientemente curtos. Se as curvaturas forem pequenas, o que é normal em estruturas usuais de edifícios altos, o ângulo  $\alpha$  será pequeno independentemente do comprimento dos elementos e a hipótese também se justifica.

Assim, com as simplificações e aproximações adotadas, chega-se a uma nova expressão para o campo de deformações:

$$\varepsilon = \left( 1 + \frac{q_1}{l_r} \right) \left[ 1 + \frac{(q_2 \psi_2' + q_3 \psi_3')^2}{2} \right] - 1 - y_r (q_2 \psi_2'' + q_3 \psi_3'') \quad (3.97)$$

### 3.9.2 Valor Médio de Deformação

#### 3.9.2-1 Condição de Extremidades: Rígido-Rotulado

Como visto, a Eq. (3.97) pode ser escrita conforme a Eq. (3.40) da seguinte forma:

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} - y_r \alpha'$$

onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\varepsilon} = \left( 1 + \frac{q_1}{l_r} \right) \left[ 1 + \frac{(q_2 \psi_2' + q_3 \psi_3')^2}{2} \right] - 1 \\ \alpha' = (q_2 \psi_2'' + q_3 \psi_3'') \end{array} \right. \quad (3.98)$$

Substituindo-se a relação  $q_3 = -q_2/2$ , oriunda da condição de extremidades rígido-rotulada, na Eq. (3.98), tem-se:

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon} = \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \left[1 + \frac{\left(q_2 \psi_2' - \frac{q_2}{2} \psi_3'\right)^2}{2}\right] - 1 \\ \alpha' = q_2 \left(\psi_2'' - \frac{\psi_3''}{2}\right) \end{cases} \quad (3.99)$$

A deformação do eixo da barra é dada por  $\bar{\varepsilon}$ , que é variável ao longo de seu comprimento, uma vez que as funções  $\psi_2'$  e  $\psi_3'$  variam com  $x_r$ . Para facilitar o desenvolvimento analítico da formulação, adotar-se-á um valor constante para  $\bar{\varepsilon}$ , representado por seu valor médio:

$$\bar{\varepsilon}_m = \frac{1}{l_r} \int \bar{\varepsilon} dx_r \quad (3.100)$$

Resolvendo-se esta expressão, chega-se à equação do valor médio  $\bar{\varepsilon}_m$ , dada por:

$$\bar{\varepsilon}_m = \frac{q_1}{l_r} + \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \left(\frac{q_2^2}{10}\right) \quad (3.101)$$

Então o campo de deformações torna-se:

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon}_m - y_r \alpha' \quad (3.102)$$

e a expressão final que será adota nesta formulação, para a condição de extremidades rígido-rotulado do campo de deformação, é dada por:

$$\varepsilon = \frac{q_1}{l_r} + \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \left(\frac{q_2^2}{10}\right) - y_r q_2 \left(\psi_2'' - \frac{\psi_3''}{2}\right) \quad (3.103)$$

### 3.9.2-2 Condição de Extremidades: Rígido-Rígido

Conforme demonstrado por LAVALL (1996) e PEREIRA (1999), resolvendo-se a integral descrita pela Eq. (3.100), com o auxílio da Eq. (3.98), chega-se à expressão da deformação média  $\bar{\varepsilon}_m$ , dada por:

$$\bar{\varepsilon}_m = \frac{q_1}{l_r} + \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \left(\frac{q_2^2}{15} + \frac{q_3^2}{15} - \frac{q_2 q_3}{30}\right) \quad (3.104)$$

A expressão final do campo de deformação para a condição de extremidades rígido-rígido é dada por:

$$\varepsilon = \frac{q_1}{l_r} + \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \left(\frac{q_2^2}{15} + \frac{q_3^2}{15} - \frac{q_2 q_3}{30}\right) - y_r (q_2 \psi_2'' + q_3 \psi_3'') \quad (3.105)$$

## 3.10 Expressões Analíticas para a Matriz de Rigidez Tangente

### 3.10.1 Condição de Extremidades: Rígido – Rotulado

A matriz de rigidez tangente de um elemento é dada pela Eq. (3.72):

$$\mathbf{k}_t = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} + Q_\alpha \mathbf{G}_\alpha.$$

As matrizes  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{G}_\alpha$  são dadas pelas Eqs. (3.15), (3.21), (3.22) e (3.23). Os esforços internos naturais nas coordenadas corrotacionais são dados por:

$$Q_\alpha = \int_{V_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha} dV_r = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \int_{A_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha} dA_r dx_r \quad (3.106)$$

onde  $A_r$  é a área da seção transversal do elemento na sua configuração de referência.

Os elementos das matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{D}$  são dados, respectivamente, por:

$$H_{\alpha,\beta} = \int_{V_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha\beta} dV_r = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \int_{A_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha\beta} dA_r dx_r \quad (3.107)$$

$$D_{\alpha,\beta} = \int_{V_r} \varepsilon_{,\alpha} D \varepsilon_{,\beta} dV_r = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \int_{A_r} \varepsilon_{,\alpha} D \varepsilon_{,\beta} dA_r dx_r \quad (3.108)$$

Como o estiramento de uma fibra genérica é dado por  $\lambda = 1 + q_1/l_r$ , pode-se escrever as derivadas  $\varepsilon_{,\alpha}$  e  $\varepsilon_{,\alpha\beta}$  do campo de deformação dado pela Eq. (3.103) da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \varepsilon_{,1} = \frac{1}{l_r} \left( 1 + \frac{q_2^2}{10} \right) \\ \varepsilon_{,2} = \lambda \left( \frac{q_2}{5} \right) - y_r \left( \psi_2'' - \frac{\psi_3''}{2} \right) \\ \varepsilon_{,3} = 0 \end{cases} \quad (3.109)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{,11} = 0 \\ \varepsilon_{,12} = \varepsilon_{,21} = \frac{q_2}{5l_r} \\ \varepsilon_{,13} = \varepsilon_{,31} = 0 \\ \varepsilon_{,22} = \frac{\lambda}{5} \\ \varepsilon_{,23} = 0 \\ \varepsilon_{,33} = 0 \end{cases} \quad (3.110)$$

Sabendo-se que a força normal e o momento fletor atuantes na seção transversal do elemento são dados, respectivamente, por:

$$N = \int_{A_r} \sigma dA_r \quad (3.111)$$

$$M = - \int_{A_r} \sigma y_r dA_r \quad (3.112)$$

pode-se obter os esforços naturais internos nas coordenadas corrotacionais dadas pela Eq. (3.106), com o auxílio das Eqs. (3.109), (3.111) e (3.112):

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \frac{N}{l_r} \left( 1 + \frac{q_2^2}{10} \right) dx_r \\ Q_2 = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \left[ N\lambda \left( \frac{q_2}{5} \right) + M \left( \psi_2'' - \frac{\psi_3''}{2} \right) \right] dx_r \\ Q_3 = 0 \end{array} \right. \quad (3.113)$$

Os elementos da matriz  $\mathbf{H}$  são dados através da Eq. (3.107), com o auxílio das Eqs.(3.110) e (3.111):

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{11} = 0 \\ H_{12} = H_{21} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \frac{N}{l_r} \left( \frac{q_2}{5} \right) dx_r \\ H_{13} = H_{31} = 0 \\ H_{22} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \frac{N\lambda}{5} dx_r \\ H_{23} = H_{32} = 0 \\ H_{33} = 0 \end{array} \right. \quad (3.114)$$

Os elementos da matriz  $\mathbf{D}$  são dados pela Eq. (3.108), com o auxílio da Eq. (3.109):

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{11} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \frac{C_1}{l_r^2} \left( 1 + \frac{q_2^2}{10} \right)^2 dx_r \\ D_{12} = D_{21} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \left[ C_1\lambda \left( \frac{q_2}{5} \right) - C_2 \left( \psi_2'' - \frac{\psi_3''}{2} \right) \right] \frac{1}{l_r} \left( 1 + \frac{q_2^2}{10} \right) dx_r \\ D_{13} = D_{31} = 0 \\ D_{22} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \left[ C_1\lambda^2 \left( \frac{q_2}{5} \right)^2 - 2C_2\lambda \left( \frac{q_2}{5} \right) \left( \psi_2'' - \frac{\psi_3''}{2} \right) + C_3 \left( \psi_2'' - \frac{\psi_3''}{2} \right)^2 \right] dx_r \\ D_{23} = D_{32} = 0 \\ D_{33} = 0 \end{array} \right. \quad (3.115)$$

onde os coeficientes de rigidez  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são dados por:

$$\begin{cases} C_1 = \int_{A_r} D dA_r \\ C_2 = \int_{A_r} D y_r dA_r \\ C_3 = \int_{A_r} D y_r^2 dA_r \end{cases} \quad (3.116)$$

### 3.10.1-1 Elementos Prismáticos em Regime Elástico Linear

No regime elástico linear, o material segue a Lei de Hooke, dada por:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.117)$$

e o campo de deformação é dado por  $\varepsilon = \bar{\varepsilon}_m - y_r \alpha'$ , onde a deformação média  $\bar{\varepsilon}_m$  é dada pela Eq. (3.101) e o produto  $y_r \alpha'$ , que varia linearmente com  $x_r$ , é dado por:

$$y_r \alpha' = y_r q_2 \left( \psi_2'' - \frac{\psi_3''}{2} \right) = y_r q_2 \left[ \left( \frac{6x_r}{l_r^2} - \frac{1}{l_r} \right) - \left( \frac{3x_r}{l_r^2} + \frac{1}{2l_r} \right) \right] \quad (3.118)$$

As expressões analíticas para  $N$ ,  $M$ ,  $Q_\alpha$ ,  $H_{\alpha\beta}$ ,  $D_{\alpha\beta}$  e  $C_\alpha$ , ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ), em regime elástico linear, são obtidas com o auxílio das Eqs. (3.111) à (3.116), como se segue:

#### a) Determinação dos Coeficientes $C_\alpha$

Com o auxílio das Eqs. (3.116), tem-se que:

$$\begin{cases} C_1 = \int_{A_r} D dA_r = E \int_{A_r} dA_r = EA_r \\ C_2 = \int_{A_r} D y_r dA_r = E \int_{A_r} y_r dA_r = 0 \\ C_3 = \int_{A_r} D y_r^2 dA_r = E \int_{A_r} y_r^2 dA_r = EI \end{cases} \quad (3.119)$$

onde o momento estático da seção  $\int_{A_r} y_r dA_r = 0$ .



### b) Determinação da Força Normal $N$

Com o auxílio das Eqs. (3.102), (3.111) e (3.117), tem-se que:

$$\begin{aligned}
 N &= \int_{A_r} \sigma dA_r = \int_{A_r} E(\bar{\varepsilon}_m - y_r \alpha') dA_r \\
 N &= E\bar{\varepsilon}_m \int_{A_r} dA_r - E\alpha' \int_{A_r} y_r dA_r \\
 N &= EA_r \bar{\varepsilon}_m
 \end{aligned} \tag{3.120}$$

Como  $\bar{\varepsilon}_m$  é um valor médio constante ao longo do elemento,  $N$  também o será.

### c) Determinação do Momento Fletor $M$

Com o auxílio das Eqs. (3.102), (3.112) e (3.117), tem-se que:

$$\begin{aligned}
 M &= -\int_{A_r} \sigma y_r dA_r = -\int_{A_r} E(\bar{\varepsilon}_m - y_r \alpha') y_r dA_r \\
 M &= -E\bar{\varepsilon}_m \int_{A_r} y_r dA_r + E\alpha' \int_{A_r} y_r^2 dA_r \\
 M &= EI\alpha'
 \end{aligned} \tag{3.121}$$

Observa-se que  $M$  varia linearmente ao longo do elemento, pois  $\alpha'$  varia linearmente com  $x_r$ . Os momentos fletores, nas extremidades  $a$  e  $b$  do elemento, segundo a FIG 3.3, na convenção clássica, valem:

$$\begin{cases} x = -\frac{l_r}{2} & \therefore M_a = -\frac{3EI}{l_r} q_2 \\ x = +\frac{l_r}{2} & \therefore M_b = 0 \end{cases} \tag{3.122}$$

### d) Determinação das Forças Internas Naturais $Q_\alpha$

Sabendo-se que o estiramento é dado por  $\lambda = l_c/l_r$  e resolvendo algebricamente as Eqs. (3.113), tem-se que:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 = N \left( 1 + \frac{q_2^2}{30} \right) \\ Q_2 = \frac{q_2}{5} N l_c - \frac{3M_a}{2} \\ Q_3 = 0 \end{array} \right. \quad (3.123)$$

**e) Determinação dos Elementos da Matriz H**

Com o auxílio das Eqs. (3.114), tem-se que:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{11} = 0 \\ H_{12} = H_{21} = N \frac{q_2}{5} \\ H_{13} = H_{31} = 0 \\ H_{22} = \frac{N l_c}{5} \\ H_{23} = H_{32} = 0 \\ H_{33} = 0 \end{array} \right. \quad (3.124)$$

**f) Determinação dos Elementos da Matriz D**

Desenvolvendo as Eqs. (3.115) com o auxílio das Eqs. (3.116), tem-se que:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{11} = \left( 1 + \frac{q_2^2}{10} \right)^2 \frac{EA_r}{l_r} \\ D_{12} = D_{21} = \frac{q_2}{5} \left( 1 + \frac{q_2^2}{10} \right) EA_r \lambda \\ D_{13} = D_{31} = 0 \\ D_{22} = \left( \frac{\lambda q_2}{5} \right)^2 EA_r l_r + \frac{3EI}{l_r} \\ D_{23} = D_{32} = 0 \\ D_{33} = 0 \end{array} \right. \quad (3.125)$$

**g) Matriz de Rigidez Tangente do Elemento no Sistema Local Cartesiano em Regime Elástico Linear**

A matriz de rigidez tangente do elemento no sistema local cartesiano, pode ser explicitada na forma matricial através da Eq. (3.72):

$$\bar{\mathbf{k}}_t = \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{B}} + Q_\alpha \bar{\mathbf{G}}_\alpha \quad (3.126)$$

onde as matrizes de rigidez, constitutiva e geométrica, no sistema local cartesiano são dadas, respectivamente, por:

$$\bar{\mathbf{k}}_M = \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{B}} \quad (3.127)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_G = \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{B}} + Q_\alpha \bar{\mathbf{G}}_\alpha \quad (3.128)$$

**Matriz de Rigidez Tangente Constitutiva em Regime Elástico Linear**

Tendo em vista a Eq. (3.127), a matriz de rigidez constitutiva pode ser escrita com o auxílio da matriz  $\mathbf{B}$ , Eq. (3.15), escrita na sua forma local  $\bar{\mathbf{B}}_{(3 \times 6)}$ , Eq. (3.18), e com o auxílio da matriz de rigidez constitutiva em coordenadas corrotacionais, simétrica, de dimensão (3x3), cujos elementos  $D_{\alpha,\beta}$  são dados pela Eq. (3.125) e é mostrada esquematicamente como:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} \quad (3.129)$$

Desprezando-se os termos multiplicados por  $q_2$  por ser suficientemente pequeno e considerando-se a deformação média,  $\bar{\varepsilon}_m$ , constante, obtém-se a matriz de rigidez constitutiva  $\bar{\mathbf{k}}_M$  em regime elástico, no sistema local do elemento, em coordenadas cartesianas, com as seguintes aproximações de segunda ordem para o ângulo  $\alpha$ :

$$\text{sen } \alpha = \text{tg } \alpha = \alpha; \quad \cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}; \quad \sec \alpha = 1 + \frac{\alpha^2}{2} \quad (3.130)$$

Logo,

$$\bar{\mathbf{k}}_M = \begin{pmatrix} \frac{EA_r}{l_r} & 0 & 0 & -\frac{EA_r}{l_r} & 0 & 0 \\ & \frac{3EI}{l_r l_c^2} & \frac{3EI}{l_r l_c} & 0 & -\frac{3EI}{l_r l_c^2} & 0 \\ & & \frac{3EI}{l_r} & 0 & -\frac{3EI}{l_r l_c} & 0 \\ & & & \frac{EA_r}{l_r} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{3EI}{l_r l_c^2} & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.131)$$

### Matriz de Rigidez Tangente Geométrica em Regime Elástico Linear

Da Eq. (3.128) observa-se que a matriz de rigidez geométrica é composta de duas parcelas: uma devida à matriz  $\mathbf{H}$  e outra devida às matrizes  $\bar{\mathbf{G}}_\alpha$ .

A parcela da matriz de rigidez geométrica,  $\bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{H} \bar{\mathbf{B}}$ , referente ao efeito  $P-\delta$ , é escrita com o auxílio da forma local  $\bar{\mathbf{B}}_{(3 \times 6)}$  e com a matriz  $\mathbf{H}$ , em coordenadas corrotacionais, simétricas, de dimensão (3x3), cujos elementos  $H_{\alpha,\beta}$  são dados pela Eq. (3.124) e é mostrada esquematicamente como:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{pmatrix} \quad (3.132)$$

Desprezando-se os termos multiplicados por  $q_2$  por ser suficientemente pequeno, obtém-se a matriz  $\bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{H} \bar{\mathbf{B}}$  simplificada, no sistema local do elemento, em coordenadas cartesianas:

$$\bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{H} \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{N}{5l_c} & \frac{N}{5} & 0 & -\frac{N}{5l_c} & 0 \\ & & \frac{Nl_c}{5} & 0 & -\frac{N}{5} & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{N}{5l_c} & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.133)$$

A segunda parcela da matriz de rigidez geométrica, referente ao efeito  $P-\Delta$ , é dada por:

$$Q_\alpha \bar{\mathbf{G}}_\alpha = Q_1 \bar{\mathbf{G}}_1 + Q_2 \bar{\mathbf{G}}_2 + Q_3 \bar{\mathbf{G}}_3 \quad (3.134)$$

As matrizes  $\bar{\mathbf{G}}_\alpha$  ( $\alpha=1,2,3$ ) são dadas pelas Eqs. (3.25), (3.26) e (3.27) e as forças naturais  $Q_\alpha$  são dadas pelas Eqs.(4.123). Desprezando-se, novamente,  $q_2$ , tem-se:

$$\begin{cases} Q_1 = N \\ Q_2 = -\frac{3M_a}{2} \\ Q_3 = 0 \end{cases} \quad (3.135)$$

onde  $N$  e  $M_a$  são dados através das Eqs. (3.120) e (3.122). Tem-se então:

$$Q_\alpha \bar{\mathbf{G}}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \frac{Q_2}{l_c^2} & 0 & 0 & -\frac{Q_2}{l_c^2} & 0 \\ \frac{Q_1}{l_c} & 0 & -\frac{Q_2}{l_c^2} & -\frac{Q_1}{l_c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Q_2}{l_c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Q_1}{l_c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.136)$$

A matriz de rigidez geométrica total, dada por  $\bar{\mathbf{k}}_G = \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{H} \bar{\mathbf{B}} + Q_\alpha \bar{\mathbf{G}}_\alpha$ , fica então determinada a seguir:

$$\bar{\mathbf{k}}_G = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3M_a}{2l_c^2} & 0 & 0 & \frac{3M_a}{2l_c^2} & 0 \\ \frac{6N}{5l_c} & \frac{N}{5} & \frac{3M_a}{2l_c^2} & -\frac{6N}{5l_c} & 0 & 0 \\ \frac{Nl_c}{5} & 0 & 0 & -\frac{N}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3M_a}{2l_c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6N}{5l_c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.137)$$

A matriz de rigidez tangente do elemento, em regime elástico, no sistema local em coordenadas cartesianas, é dada pela soma da matriz  $\bar{\mathbf{k}}_M$ , dada pela Eq. (3.131), e a matriz  $\bar{\mathbf{k}}_G$ , dada pela Eq. (3.137):

$$\bar{\mathbf{k}}_t = \bar{\mathbf{k}}_M + \bar{\mathbf{k}}_G \quad (4.138)$$

### 3.10.1-2 Elementos Prismáticos em Regime Elastoplástico

No caso elastoplástico o campo de deformação  $\varepsilon = \bar{\varepsilon}_m - y_r \alpha'$  continua válido. Como nesta região, a Lei de Hooke não é mais válida, adota-se a seguinte lei constitutiva dada por:

$$\sigma = D \cdot \varepsilon \quad (3.139)$$

#### a) Determinação dos Coeficientes $C_\alpha$

Das Eqs. (3.116), tem-se que:  $C_1 = \int_{A_r} D dA_r$      $C_2 = \int_{A_r} D y_r dA_r$      $C_3 = \int_{A_r} D y_r^2 dA_r$

#### b) Determinação da Força Normal N

Com o auxílio das Eqs. (3.102), (3.111), (3.139) e dos coeficientes  $C_\alpha$ , tem-se que:

$$\begin{aligned} N &= \int_{A_r} \sigma dA_r = \int_{A_r} D \varepsilon dA_r \\ N &= \int_{A_r} D (\bar{\varepsilon}_m - y_r \alpha') dA_r = \bar{\varepsilon}_m \int_{A_r} D dA_r - \alpha' \int_{A_r} D y_r dA_r \\ N &= C_1 \bar{\varepsilon}_m - C_2 \alpha' \end{aligned} \quad (3.140)$$

que é constante na seção mas variável ao longo do elemento, uma vez que  $C_1$ ,  $C_2$  e  $\alpha'$  variam com  $x_r$ .

Se por simplificação admitirmos que, neste regime, os coeficientes  $C_1$  e  $C_2$  sejam constantes ao longo do elemento e iguais à média de seus valores nas extremidades  $a$  e

$b$  do elemento (essa aproximação será tanto melhor quanto mais curto for o elemento), ou seja:

$$\begin{cases} C_{1m} = \frac{C_{1a} + C_{1b}}{2} \\ C_{2m} = \frac{C_{2a} + C_{2b}}{2} \end{cases} \quad (3.141)$$

pode-se escrever que:

$$N = C_{1m} \bar{\varepsilon}_m - C_{2m} \alpha' \quad (3.142)$$

Com o auxílio das Eqs. (3.94) e (3.99), determinam-se as forças normais nas extremidades  $a$  e  $b$  do elemento, onde  $x_r = -l_r/2$  e  $x_r = l_r/2$ , respectivamente:

$$\begin{cases} N_a = C_{1m} \bar{\varepsilon}_m + C_{2m} \frac{3q_2}{l_r} \\ N_b = C_{1m} \bar{\varepsilon}_m \end{cases} \quad (3.143)$$

Define-se, então, uma força normal média, constante ao longo do elemento, igual a:

$$N_m = \frac{N_a + N_b}{2} = C_{1m} \bar{\varepsilon}_m + C_{2m} \frac{3q_2}{2l_r} \quad (3.144)$$

### c) Determinação do Momento Fletor $M$

Com o auxílio das Eqs. (3.102), (3.112), (3.139) e dos coeficientes  $C_a$  dados pelas Eqs. (3.116), tem-se que:

$$\begin{aligned} M &= -\int_{A_r} \sigma y_r dA_r = -\int_{A_r} D \varepsilon y_r dA_r = -\int_{A_r} D (\bar{\varepsilon}_m - y_r \alpha') y_r dA_r \\ M &= -\bar{\varepsilon}_m \int_{A_r} D y_r dA_r + \alpha' \int_{A_r} D y_r^2 dA_r \\ M &= -C_2 \bar{\varepsilon}_m + C_3 \alpha' \end{aligned} \quad (3.145)$$

Analogamente ao caso anterior, admitiremos que os coeficientes  $C_2$  e  $C_3$  sejam constantes ao longo do elemento e iguais a:

$$\begin{cases} C_{2m} = \frac{C_{2a} + C_{2b}}{2} \\ C_{3m} = \frac{C_{3a} + C_{3b}}{2} \end{cases} \quad (3.146)$$

Dessa forma, tem-se que:

$$M = -C_{2m} \bar{\varepsilon}_m + C_{3m} \alpha' \quad (3.147)$$

Variável com  $x_r$ . Com o auxílio das Eqs. (3.94) e (3.99), determinam-se os momentos fletores nas extremidades  $a$  e  $b$  do elemento, na convenção clássica, para  $x_r = -l_r/2$  e  $x_r = l_r/2$ , respectivamente:

$$\begin{cases} x = -\frac{l_r}{2} & \therefore M_a = -C_{2a} \bar{\varepsilon}_m - C_{3a} \frac{3q_2}{l_r} \\ x = +\frac{l_r}{2} & \therefore M_b = -C_{2b} \bar{\varepsilon}_m \end{cases} \quad (3.148)$$

#### d) Determinação das Forças Internas Naturais $Q_\alpha$

As forças  $Q_\alpha$  expressas através das Eqs. (3.113) são obtidas usando-se  $N$  e  $M$  das Eqs. (3.144) e (3.148), onde os coeficientes  $C_{am}$  são dados pelas Eqs. (3.141) e (3.146). Resolvendo-se algebricamente a Eq. (3.113), tem-se que:

$$\begin{cases} Q_1 = N_m \left( 1 + \frac{q_2^2}{30} \right) \\ Q_2 = N_m l_c \frac{q_2}{15} - \frac{3}{2} M_a \\ Q_3 = 0 \end{cases} \quad (3.149)$$



Finalmente, usando-se a hipótese de  $q_2$  ser muito pequeno, as forças  $Q_\alpha$  podem ser escritas por:

$$\begin{cases} Q_1 = N_m = \frac{N_a + N_b}{2} = C_{1m} \bar{\varepsilon}_m + C_{2m} \frac{3q_2}{2l_r} \\ Q_2 = -\frac{3M_a}{2} = \frac{3}{2} \left( C_{2m} \bar{\varepsilon}_m + C_{3m} \frac{3q_2}{l_r} \right) \\ Q_3 = 0 \end{cases} \quad (3.150)$$

e a parcela da matriz de rigidez geométrica  $Q_\alpha \bar{\mathbf{G}}_\alpha$  ficará formalmente idêntica à anterior para o caso elástico, dada pela Eq. (3.136), excetuando-se a força normal que agora é tomada como o valor médio  $N_m$  conforme Eq. (3.144).

#### e) Determinação dos Elementos da Matriz $\mathbf{H}$

Os elementos da matriz  $\mathbf{H}$  serão análogos aos obtidos para o caso elástico, dados pela Eq. (3.124), substituindo a força normal por  $N_m$ . Adotando-se, novamente, a hipótese simplificadora de  $q_2$  ser muito pequeno, tem-se:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{N_m l_c}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.151)$$

A parcela da matriz de rigidez geométrica,  $\bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{H} \bar{\mathbf{B}}$ , referente ao efeito  $P - \delta$ , também será idêntica ao caso elástico, expresso através da Eq. (3.133).

#### f) Determinação dos Elementos da Matriz $\mathbf{D}$

Os elementos da matriz  $\mathbf{D}$  vêm das Eqs. (3.115) que ao serem integradas com o auxílio das Eqs. (3.141) e (3.146), ficam:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{11} = \left(1 + \frac{q_2^2}{10}\right)^2 \frac{C_{1m}}{l_r} \\ D_{12} = D_{21} = \frac{q_2}{5} \left(1 + \frac{q_2^2}{10}\right) C_{1m} \lambda + \frac{3C_{2m}}{2l_r} \left(1 + \frac{q_2^2}{10l_r}\right) \\ D_{13} = D_{31} = 0 \\ D_{22} = \left(\frac{q_2}{5}\right)^2 C_{1m} \lambda_c + \left(\frac{q_2}{5}\right) 3C_{2m} \lambda + \frac{3C_{3m}}{l_r} \\ D_{23} = D_{32} = 0 \\ D_{33} = 0 \end{array} \right. \quad (3.152)$$

Utilizando-se a hipótese simplificadora para  $q_2$ , os elementos da matriz  $\mathbf{D}$  tornam-se:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{C_{1m}}{l_r} & \frac{3C_{2m}}{2l_r} & 0 \\ & \frac{3C_{3m}}{l_r} & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.153)$$

### g) Matriz de Rigidez Tangente do Elemento no Sistema Local Cartesiano em Regime Elastoplástico

Por total analogia com o caso elástico, a matriz de rigidez tangente do elemento, em regime elastoplástico, no sistema local cartesiano, será dada por:

$$\bar{\mathbf{k}}_t^{ep} = \bar{\mathbf{k}}_M^{ep} + \bar{\mathbf{k}}_G^{ep} \quad (3.154)$$

onde as matrizes de rigidez, constitutiva e geométrica, no sistema local cartesiano serão expressas à seguir:

### Matriz de Rigidez Tangente Constitutiva em Regime Elastoplástico

A matriz de rigidez constitutiva elastoplástica vem de  $\bar{\mathbf{k}}_M^{ep} = \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{B}}$ :

$$\bar{\mathbf{k}}_{\mathbf{M}}^{ep} = \begin{pmatrix} \frac{C_{1m}}{l_r} & -\frac{3C_{2m}}{2l_rl_c} & -\frac{3C_{2m}}{2l_r} & -\frac{C_{1m}}{l_r} & \frac{3C_{2m}}{2l_rl_c} & 0 \\ & \frac{3C_{3m}}{l_rl_c^2} & \frac{3C_{3m}}{l_rl_c} & \frac{3C_{2m}}{2l_rl_c} & -\frac{3C_{3m}}{l_rl_c^2} & 0 \\ & & \frac{3C_{3m}}{l_r} & \frac{3C_{2m}}{2l_r} & -\frac{3C_{3m}}{l_rl_c} & 0 \\ & & & \frac{C_{1m}}{l_r} & -\frac{3C_{2m}}{2l_rl_c} & 0 \\ & & & & \frac{3C_{3m}}{l_rl_c^2} & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.155)$$

onde  $C_{1m}$ ,  $C_{2m}$  e  $C_{3m}$  são dados pelas Eqs. (3.141) e (3.146).

### Matriz de Rigidez Tangente Geométrica em Regime Elastoplástico

$$\bar{\mathbf{k}}_{\mathbf{G}}^{ep} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3M_a}{2l_c^2} & 0 & 0 & \frac{3M_a}{2l_c^2} & 0 \\ \frac{6N_m}{5l_c} & \frac{N_m}{5} & \frac{3M_a}{2l_c^2} & -\frac{6N_m}{5l_c} & 0 & 0 \\ & \frac{N_ml_c}{5} & 0 & -\frac{N_m}{5} & 0 & 0 \\ & & 0 & -\frac{3M_a}{2l_c^2} & 0 & 0 \\ & & & \frac{6N_m}{5l_c} & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.156)$$

onde  $N_m$  e  $M_a$  são dados pelas Eqs.(3.144) e (3.148), respectivamente.

#### 3.10.2 Condição de Extremidades: Rotulado – Rígido

Analogamente ao caso de extremidades rígido-rotulado, as parcelas constitutiva e geométrica da matriz de rigidez tangente, nos regimes elástico e elastoplástico, podem ser obtidas considerando-se  $q_2 = -q_3/2$ .

Assim, a deformação dada pela Eq. (3.103) pode ser escrita como:

$$\varepsilon = \frac{q_1}{l_r} + \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \left(\frac{q_3^2}{10}\right) - y_r q_3 \left(-\frac{\psi_2''}{2} + \psi_3''\right) \quad (3.157)$$

### Matriz de Rigidez Tangente Constitutiva em Regime Elástico Linear

A parcela  $\bar{\mathbf{k}}_M = \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{B}}$  é idêntica à indicada pela Eq. (3.131), trocando-se as linhas e pilares nas posições 3 e 6 da matriz constitutiva, devido à mudança de posição dos coeficientes nas matrizes  $\bar{\mathbf{B}}$  e  $\bar{\mathbf{D}}$ .

Assim,

$$\bar{\mathbf{k}}_M = \begin{pmatrix} \frac{EA_r}{l_r} & 0 & 0 & -\frac{EA_r}{l_r} & 0 & 0 \\ & \frac{3EI}{l_r l_c^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l_r l_c^2} & \frac{3EI}{l_r l_c} \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{EA_r}{l_r} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{3EI}{l_r l_c^2} & -\frac{3EI}{l_r l_c} \\ & & & & & \frac{3EI}{l_r} \end{pmatrix} \quad (3.158)$$

### Matriz de Rigidez Geométrica em Regime Elástico Linear

Adotando os mesmos procedimentos de troca dos coeficientes, obtém-se a matriz  $\bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{B}}$ , descrita anteriormente pela Eq. (3.133), referente ao efeito  $P - \delta$ :

$$\bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{N}{5l_c} & 0 & 0 & -\frac{N}{5l_c} & \frac{N}{5} \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{N}{5l_c} & -\frac{N}{5} \\ & & & & & \frac{Nl_c}{5} \end{pmatrix} \quad (3.159)$$

E a segunda parcela da matriz de rigidez geométrica, referente ao efeito  $P-\Delta$ , é dada por:

$$Q_\alpha \bar{\mathbf{G}}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \frac{Q_3}{l_c^2} & 0 & 0 & -\frac{Q_3}{l_c^2} & 0 \\ & \frac{Q_1}{l_c} & 0 & -\frac{Q_3}{l_c^2} & -\frac{Q_1}{l_c} & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{Q_3}{l_c^2} & 0 \\ & & & & \frac{Q_1}{l_c} & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.160)$$

onde os esforços internos são dados como:

$$\begin{cases} Q_1 = N \\ Q_2 = 0 \\ Q_3 = \frac{3M_b}{2} = \frac{3}{2} \left( \frac{3EI}{l_r} q_3 \right) \end{cases} \quad (3.161)$$

A matriz de rigidez geométrica total, dada por  $\bar{\mathbf{k}}_G = \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{H} \bar{\mathbf{B}} + Q_\alpha \bar{\mathbf{G}}_\alpha$ , fica então determinada a seguir:

$$\bar{\mathbf{k}}_G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3M_b}{2l_c^2} & 0 & 0 & -\frac{3M_b}{2l_c^2} & 0 \\ & \frac{6N}{5l_c} & 0 & -\frac{3M_b}{2l_c^2} & -\frac{6N}{5l_c} & \frac{N}{5} \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{3M_b}{2l_c^2} & 0 \\ & & & & \frac{6N}{5l_c} & -\frac{N}{5} \\ & & & & & \frac{Nl_c}{5} \end{pmatrix} \quad (3.162)$$

Novamente, a matriz de rigidez tangente do elemento, em regime elástico, no sistema local em coordenadas cartesianas, é dada pela soma da matriz  $\bar{\mathbf{k}}_M$ , dada pela Eq. (3.158) com a matriz  $\bar{\mathbf{k}}_G$ , dada pela Eq. (3.162).

### Matriz de Rigidez Tangente Constitutiva em Regime Elastoplástico

A parcela  $\bar{\mathbf{k}}_M = \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}}$  é obtida alterando-se a matriz  $\mathbf{D}$ , dada pela Eq. (3.153), conforme a seguir:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{C_{1m}}{l_r} & 0 & -\frac{3C_{2m}}{2l_r} \\ & 0 & 0 \\ & & \frac{3C_{3m}}{l_r} \end{pmatrix} \quad (3.163)$$

Logo,

$$\bar{\mathbf{k}}_M^{ep} = \begin{pmatrix} \frac{C_{1m}}{l_r} & \frac{3C_{2m}}{2l_r l_c} & 0 & -\frac{C_{1m}}{l_r} & -\frac{3C_{2m}}{2l_r l_c} & \frac{3C_{2m}}{2l_r} \\ & \frac{3C_{3m}}{l_r l_c^2} & 0 & -\frac{3C_{2m}}{2l_r l_c} & -\frac{3C_{3m}}{l_r l_c^2} & \frac{3C_{3m}}{l_r l_c} \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{1m}}{l_r} & \frac{3C_{2m}}{2l_r l_c} & -\frac{3C_{2m}}{2l_r} \\ & & & & \frac{3C_{3m}}{l_r l_c^2} & -\frac{3C_{3m}}{l_r l_c} \\ & & & & & \frac{3C_{3m}}{l_r} \end{pmatrix} \quad (3.164)$$

### Matriz de Rigidez Geométrica em Regime Elastoplástico

Conforme mostrado anteriormente, a parcela da matriz geométrica  $Q_\alpha \bar{\mathbf{G}}_\alpha$  ficará formalmente idêntica ao caso elástico, dada pela Eq. (3.160), excetuando-se o esforço normal que agora é tomado como o valor médio  $N_m$  dado por:

$$Q_\alpha \bar{\mathbf{G}}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \frac{Q_3}{l_c^2} & 0 & 0 & -\frac{Q_3}{l_c^2} & 0 \\ & \frac{Q_1}{l_c} & 0 & -\frac{Q_3}{l_c^2} & -\frac{Q_1}{l_c} & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{Q_3}{l_c^2} & 0 \\ & & & & \frac{Q_1}{l_c} & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.165)$$

onde os esforços internos  $Q_\alpha$  são dados por:

$$\begin{cases} Q_1 = N_m = \frac{N_a + N_b}{2} = C_{1m} \bar{\varepsilon}_m + C_{2m} \frac{3q_3}{2l_r} \\ Q_2 = 0 \\ Q_3 = \frac{3M_b}{2} = \frac{3}{2} \left( C_{2m} \bar{\varepsilon}_m + C_{3m} \frac{3q_3}{l_r} \right) \end{cases} \quad (3.166)$$

A parcela  $\bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{H} \bar{\mathbf{B}}$  é dada usando-se a matriz  $\mathbf{H}$  à seguir:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{N_m l_c}{5} \end{pmatrix} \quad (3.167)$$

Assim,

$$\bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{H} \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{N_m}{5l_c} & 0 & 0 & -\frac{N_m}{5l_c} & \frac{N_m}{5} \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{N_m}{5l_c} & -\frac{N_m}{5} \\ & & & & & \frac{N_m l_c}{5} \end{pmatrix} \quad (3.168)$$

E a matriz de rigidez geométrica total, em regime elastoplástico, é dada por:

$$\bar{\mathbf{k}}_G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3M_b}{2l_c^2} & 0 & 0 & -\frac{3M_b}{2l_c^2} & 0 \\ \frac{6N_m}{5l_c} & 0 & -\frac{3M_b}{2l_c^2} & -\frac{6N_m}{5l_c} & \frac{N_m}{5} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & \frac{3M_b}{2l_c^2} & 0 \\ & & & \frac{6N_m}{5l_c} & -\frac{N_m}{5} \\ & & & & \frac{N_m l_c}{5} \end{pmatrix} \quad (3.169)$$

### 3.10.3 Condição de Extremidades: Rígido – Rígido

Para o campo de deformação descrito pela Eq. (3.105), pode-se determinar as derivadas

$\varepsilon_{,\alpha}$  e  $\varepsilon_{,\alpha\beta}$ :

$$\begin{cases} \varepsilon_{,1} = \frac{1}{l_r} \left( 1 + \frac{q_2^2}{15} + \frac{q_3^2}{15} - \frac{q_2 q_3}{30} \right) \\ \varepsilon_{,2} = \lambda \left( \frac{2q_2}{15} - \frac{q_3}{30} \right) - y_r \psi_2'' \\ \varepsilon_{,3} = \lambda \left( \frac{2q_3}{15} - \frac{q_2}{30} \right) - y_r \psi_3'' \end{cases} \quad (3.170)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{,11} = 0 \\ \varepsilon_{,12} = \varepsilon_{,21} = \frac{1}{l_r} \left( \frac{2q_2}{15} - \frac{q_3}{30} \right) \\ \varepsilon_{,13} = \varepsilon_{,31} = \frac{1}{l_r} \left( \frac{2q_3}{15} - \frac{q_2}{30} \right) \\ \varepsilon_{,22} = \frac{2\lambda}{15} \\ \varepsilon_{,23} = \varepsilon_{,32} = -\frac{\lambda}{30} \\ \varepsilon_{,33} = \frac{2\lambda}{15} \end{cases} \quad (3.171)$$

Os esforços naturais internos nas coordenadas corrotacionais são dados pela Eq. (3.106), com o auxílio das Eqs. (3.111), (3.112) e (3.170):

$$\begin{cases} Q_1 = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \frac{N}{l_r} \left( 1 + \frac{q_2^2}{15} + \frac{q_3^2}{15} - \frac{q_2 q_3}{30} \right) dx_r \\ Q_2 = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \left[ N \lambda \left( \frac{2q_2}{15} - \frac{q_3}{30} \right) + M \psi_2'' \right] dx_r \\ Q_3 = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \left[ N \lambda \left( \frac{2q_3}{15} - \frac{q_2}{30} \right) + M \psi_3'' \right] dx_r \end{cases} \quad (3.172)$$



Os elementos da matriz  $\mathbf{H}$  são dados através da Eq. (3.107), com o auxílio das Eqs. (3.111) e (3.171):

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{11} = 0 \\ H_{12} = H_{21} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \frac{N}{l_r} \left( \frac{2q_2}{15} - \frac{q_3}{30} \right) dx_r \\ H_{13} = H_{31} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \frac{N}{l_r} \left( \frac{2q_3}{15} - \frac{q_2}{30} \right) dx_r \\ H_{22} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \frac{2N\lambda}{15} dx_r \\ H_{23} = H_{32} = - \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \frac{N\lambda}{30} dx_r \\ H_{33} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \frac{2N\lambda}{15} dx_r \end{array} \right. \quad (3.173)$$

E a matriz  $\mathbf{D}$  será calculada a partir da Eq. (3.108), com o auxílio da Eq. (3.170):

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{11} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \frac{C_1}{l_r^2} \left( 1 + \frac{q_2^2}{15} + \frac{q_3^2}{15} - \frac{q_2 q_3}{30} \right)^2 dx_r \\ D_{12} = D_{21} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \left[ C_1 \lambda \left( \frac{2q_2}{15} - \frac{q_3}{30} \right) - C_2 \psi_2'' \right] \frac{1}{l_r} \left( 1 + \frac{q_2^2}{15} + \frac{q_3^2}{15} - \frac{q_2 q_3}{30} \right) dx_r \\ D_{13} = D_{31} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \left[ C_1 \lambda \left( \frac{2q_3}{15} - \frac{q_2}{30} \right) - C_2 \psi_3'' \right] \frac{1}{l_r} \left( 1 + \frac{q_2^2}{15} + \frac{q_3^2}{15} - \frac{q_2 q_3}{30} \right) dx_r \\ D_{22} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \left[ C_1 \lambda^2 \left( \frac{2q_2}{15} - \frac{q_3}{30} \right)^2 - 2C_2 \lambda \left( \frac{2q_2}{15} - \frac{q_3}{30} \right) \psi_2'' + C_3 \psi_2'' \psi_2'' \right] dx_r \\ D_{23} = D_{32} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \left\{ C_1 \lambda^2 \left( \frac{2q_2}{15} - \frac{q_3}{30} \right) \left( \frac{2q_3}{15} - \frac{q_2}{30} \right) - C_2 \lambda \left[ \left( \frac{2q_2}{15} - \frac{q_3}{30} \right) \psi_3'' + \left( \frac{2q_3}{15} - \frac{q_2}{30} \right) \psi_2'' + C_3 \psi_3'' \psi_3'' \right] \right\} dx_r \\ D_{33} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \left[ C_1 \lambda^2 \left( \frac{2q_3}{15} - \frac{q_2}{30} \right)^2 - 2C_2 \lambda \left( \frac{2q_3}{15} - \frac{q_2}{30} \right) \psi_3'' + C_3 \psi_3'' \psi_3'' \right] dx_r \end{array} \right. \quad (3.174)$$

onde os coeficientes  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são dados pela Eq. (3.116).

### 3.10.3-1 Elementos Prismáticos em Regime Elástico Linear

No regime elástico linear, o material segue a Lei de Hooke, dada pela Eq. (3.117) e o campo de deformação dado por  $\varepsilon = \bar{\varepsilon}_m - y_r \alpha'$ , tem a deformação média  $\bar{\varepsilon}_m$  dada pela Eq. (3.104) e o produto  $y_r \alpha'$ , que varia linearmente com  $x_r$ , dado por:

$$y_r \alpha' = y_r (q_2 \psi_2'' + q_3 \psi_3'') = y_r \left[ q_2 \left( \frac{6x_r}{l_r^2} - \frac{1}{l_r} \right) + q_3 \left( \frac{6x_r}{l_r^2} + \frac{1}{l_r} \right) \right] \quad (3.175)$$

Logo, tem-se:

$$\varepsilon = \frac{q_1}{l_r} + \left( 1 + \frac{q_1}{l_r} \right) \left( \frac{q_2^2}{15} + \frac{q_3^2}{15} - \frac{q_2 q_3}{30} \right) - y_r \left[ q_2 \left( \frac{6x_r}{l_r^2} - \frac{1}{l_r} \right) + q_3 \left( \frac{6x_r}{l_r^2} + \frac{1}{l_r} \right) \right] \quad (3.176)$$

Os coeficientes  $C_\alpha$  e o esforço normal  $N$  são idênticos aos descritos segundo as Eqs. (3.119) e (3.120), respectivamente.

#### a) Determinação do Momento Fletor M

Com o auxílio da Eq. (3.121), os momentos fletores, nas extremidades  $a$  e  $b$  do elemento, segundo a FIG 3.4, na convenção clássica, valem:

$$\begin{cases} x = -\frac{l_r}{2} & \therefore M_a = -\frac{EI}{l_r} (4q_2 + 2q_3) \\ x = +\frac{l_r}{2} & \therefore M_b = +\frac{EI}{l_r} (2q_2 + 4q_3) \end{cases} \quad (3.177)$$

#### b) Determinação das Forças Internas Naturais $Q_\alpha$

Resolvendo as integrais das Eqs. (3.172), tem-se que:

$$\begin{cases} Q_1 = N \left( 1 + \frac{q_2^2}{15} + \frac{q_3^2}{15} - \frac{q_2 q_3}{30} \right) \\ Q_2 = \lambda \left( \frac{2q_2}{15} - \frac{q_3}{30} \right) N l_r - M_a = \left( \frac{2q_2}{15} - \frac{q_3}{30} \right) N l_c - M_a \\ Q_3 = \lambda \left( \frac{2q_3}{15} - \frac{q_2}{30} \right) N l_r + M_b = \left( \frac{2q_3}{15} - \frac{q_2}{30} \right) N l_c + M_b \end{cases} \quad (3.178)$$

**c) Determinação dos Elementos da Matriz H**

Com o auxílio das Eqs. (3.173), tem-se que:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{11} = 0 \\ H_{12} = H_{21} = \left( \frac{2q_2}{15} - \frac{q_3}{30} \right) N \\ H_{13} = H_{31} = \left( \frac{2q_3}{15} - \frac{q_2}{30} \right) N \\ H_{22} = \frac{2}{15} Nl_c \\ H_{23} = H_{32} = -\frac{Nl_c}{30} \\ H_{33} = \frac{2}{15} Nl_c \end{array} \right. \quad (3.179)$$

**d) Determinação dos Elementos da Matriz D**

Com o auxílio das Eqs. (3.174) e dos coeficientes  $C_\alpha$  descritos pela Eq. (3.119), tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{11} = \left( 1 + \frac{q_2^2}{15} + \frac{q_3^2}{15} - \frac{q_2 q_3}{30} \right)^2 \frac{EA_r}{l_r} \\ D_{12} = D_{21} = \left( \frac{2q_2}{15} - \frac{q_3}{30} \right) \left( 1 + \frac{q_2^2}{15} + \frac{q_3^2}{15} - \frac{q_2 q_3}{30} \right) EA_r \lambda \\ D_{13} = D_{31} = \left( \frac{2q_3}{15} - \frac{q_2}{30} \right) \left( 1 + \frac{q_2^2}{15} + \frac{q_3^2}{15} - \frac{q_2 q_3}{30} \right) EA_r \lambda \\ D_{22} = \left( \frac{2q_2}{15} - \frac{q_3}{30} \right)^2 EA_r \lambda l_c + \frac{4EI}{l_r} \\ D_{23} = D_{32} = \left( \frac{2q_2}{15} - \frac{q_3}{30} \right) \left( \frac{2q_3}{15} - \frac{q_2}{30} \right) EA_r \lambda l_c + \frac{2EI}{l_r} \\ D_{33} = \left( \frac{2q_3}{15} - \frac{q_2}{30} \right)^2 EA_r \lambda l_c + \frac{4EI}{l_r} \end{array} \right. \quad (3.180)$$

e) **Matriz de Rigidez Tangente do Elemento no Sistema Local Cartesiano em Regime Elástico Linear**

**Matriz de Rigidez Tangente Constitutiva em Regime Elástico Linear**

$$\bar{\mathbf{k}}_{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \frac{EA_r}{l_r} & 0 & 0 & -\frac{EA_r}{l_r} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{l_r l_c^2} & \frac{6EI}{l_r l_c} & 0 & -\frac{12EI}{l_r l_c^2} & \frac{6EI}{l_r l_c} \\ & & \frac{4EI}{l_r} & 0 & -\frac{6EI}{l_r l_c} & \frac{2EI}{l_r} \\ & & & \frac{EA_r}{l_r} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12EI}{l_r l_c^2} & -\frac{6EI}{l_r l_c} \\ & & & & & \frac{4EI}{l_r} \end{pmatrix} \quad (3.181)$$

A Eq. (3.181), ou seja, a matriz de rigidez constitutiva  $\bar{\mathbf{k}}_{\mathbf{M}}$  no regime elástico, em coordenadas cartesianas, é obtida utilizando-se a matriz local  $\bar{\mathbf{B}}_{(3 \times 6)}$ , Eq. (3.30) e a matriz de rigidez constitutiva em coordenadas corrotacionais  $\mathbf{D}$ , cujos elementos são descritos pela Eq. (3.180), desprezando-se os termos multiplicados por  $q_2$  ou  $q_3$  por serem suficientemente pequenos.

**Matriz de Rigidez Geométrica em Regime Elástico Linear**

A parcela da matriz de rigidez geométrica no sistema local do elemento,  $\bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{H} \bar{\mathbf{B}}$ , que leva em conta o efeito  $P-\delta$ , é escrita desprezando-se os termos multiplicados por  $q_2$  ou  $q_3$  da Eq. (3.173) e com o auxílio da forma local  $\bar{\mathbf{B}}_{(3 \times 6)}$ , Eq. (3.30):

$$\bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{H} \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{N}{5l_c} & \frac{N}{10} & 0 & -\frac{N}{5l_c} & \frac{N}{10} \\ & & \frac{2Nl_c}{15} & 0 & -\frac{N}{10} & -\frac{Nl_c}{30} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{N}{5l_c} & -\frac{N}{10} \\ & & & & & \frac{2Nl_c}{15} \end{pmatrix} \quad (3.182)$$

Desprezando-se, novamente,  $q_2$  e  $q_3$ , as forças naturais  $Q_\alpha$ , dadas pela Eq. (3.178), tornam-se:

$$\begin{cases} Q_1 = N \\ Q_2 = -M_a \\ Q_3 = M_b \end{cases} \quad (3.183)$$

As matrizes  $\bar{\mathbf{G}}_\alpha$  ( $\alpha=1,2,3$ ) são dadas pelas Eqs. (3.33) e (3.34). Logo, o produto matricial  $Q_\alpha \bar{\mathbf{G}}_\alpha$ , que leva em conta o efeito  $P-\Delta$ , tem como resultado:

$$Q_\alpha \bar{\mathbf{G}}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{l_c^2}(Q_2 + Q_3) & 0 & 0 & -\frac{1}{l_c^2}(Q_2 + Q_3) & 0 \\ & \frac{1}{l_c}Q_1 & 0 & -\frac{1}{l_c^2}(Q_2 + Q_3) & -\frac{1}{l_c}Q_1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1}{l_c^2}(Q_2 + Q_3) & 0 \\ & & & & \frac{1}{l_c}Q_1 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.184)$$

Logo, a matriz de rigidez geométrica total, dada pelo somatório  $\bar{\mathbf{k}}_G = \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{B}} + Q_\alpha \bar{\mathbf{G}}_\alpha$ , fica então determinada:

$$\bar{\mathbf{k}}_G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{l_c^2}(M_b - M_a) & 0 & 0 & -\frac{1}{l_c^2}(M_b - M_a) & 0 \\ & \frac{6N}{5l_c} & \frac{N}{10} & -\frac{1}{l_c^2}(M_b - M_a) & \frac{6N}{5l_c} & \frac{N}{10} \\ & & \frac{2Nl_c}{15} & 0 & -\frac{N}{10} & -\frac{Nl_c}{30} \\ & & & 0 & \frac{1}{l_c^2}(M_b - M_a) & 0 \\ & & & & \frac{6N}{5l_c} & \frac{N}{10} \\ & & & & & \frac{2Nl_c}{15} \end{pmatrix} \quad (3.185)$$

onde  $N$ ,  $M_a$  e  $M_b$  são dados pelas Eqs. (3.120) e (3.177) e a força cortante vale:

$$V = \frac{Q_2 + Q_3}{l_c} = \frac{M_b - M_a}{l_c} \quad (3.186)$$

Analogamente à condição de extremidades rígido-rotulado, a matriz de rigidez tangente do elemento, em regime elástico, no sistema local em coordenadas cartesianas, é dada pela soma da matriz  $\bar{\mathbf{k}}_M$ , dada pela Eq. (3.181), e a matriz  $\bar{\mathbf{k}}_G$ , dada pela Eq. (3.185).

### 3.10.3-2 Elementos Prismáticos em Regime Elastoplástico

No caso elastoplástico, o campo de deformação  $\varepsilon = \bar{\varepsilon}_m - y_r \alpha'$  continua válido e a lei constitutiva é dada segundo a Eq. (3.139),  $\sigma = D\varepsilon$ .

#### a) Determinação dos Coeficientes $C_\alpha$

Os coeficientes  $C_\alpha$  são idênticos aos descritos segundo a Eq. (3.116).

#### b) Determinação da Força Normal $N$

Com o auxílio da Eq. (3.142), pode-se determinar o esforço normal nas extremidades  $a$  e  $b$  do elemento (pontos  $x_r = -l_r/2$  e  $x_r = l_r/2$ ):

$$\begin{cases} N_a = C_{1m} \bar{\varepsilon}_m + \frac{C_{2m}}{l_r} (4q_2 + 2q_3) \\ N_b = C_{1m} \bar{\varepsilon}_m + \frac{C_{2m}}{l_r} (2q_2 + 4q_3) \end{cases} \quad (3.187)$$

Então, a força normal média, constante ao longo do elemento é definida como:

$$N_m = \frac{N_a + N_b}{2} \quad (3.188)$$

#### c) Determinação do Momento Fletor $M$

Com o auxílio da Eq. (3.147), os momentos fletores, nas extremidades  $a$  e  $b$  do elemento, segundo a FIG.3.4, na convenção clássica, valem:

$$\begin{cases} x = -\frac{l_r}{2} & \therefore M_a = -C_{2am} \bar{\varepsilon}_m - \frac{C_{3m}}{l_r} (4q_2 + 2q_3) \\ x = +\frac{l_r}{2} & \therefore M_b = -C_{2m} \bar{\varepsilon}_m + \frac{C_{3m}}{l_r} (2q_2 + 4q_3) \end{cases} \quad (3.189)$$

#### d) Determinação das Forças Internas Naturais $Q_\alpha$

As forças  $Q_\alpha$  expressas através da Eq. (3.172) são obtidas usando-se  $N_m$ ,  $M_a$  e  $M_b$  das Eqs. (3.188) e (3.189), desprezando-se os termos multiplicados por  $q_2$  e  $q_3$ :

$$\begin{cases} Q_1 = N_m = \frac{N_a + N_b}{2} \\ Q_2 = -M_a = C_{2m} \bar{\varepsilon}_m + \frac{C_{3m}}{l_r} (4q_2 + 2q_3) \\ Q_3 = M_b = -C_{2m} \bar{\varepsilon}_m + \frac{C_{3m}}{l_r} (2q_2 + 4q_3) \end{cases} \quad (3.190)$$

Nota-se que a parcela da matriz geométrica  $Q_\alpha \bar{\mathbf{G}}_\alpha$  ficará formalmente idêntica à anterior para o caso elástico, dada pela Eq. (3.184).

#### e) Determinação dos Elementos da Matriz $\mathbf{H}$

Os elementos da matriz  $\mathbf{H}$  serão análogos aos obtidos para o caso elástico, dados pela Eq. (3.179), trocando-se o esforço normal constante ao longo do elemento  $N$  pelo esforço médio  $N_m$  e adotando a hipótese simplificadora de  $q_2$  e  $q_3$  serem muito pequenos.

Assim,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{15} N_m l_c & -\frac{1}{30} N_m l_c & \\ & \frac{2}{15} N_m l_c & \end{pmatrix} \quad (3.191)$$

A parcela da matriz geométrica,  $\bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{B}}$ , será a mesma matriz expressa pela Eq. (3.182) para o caso elástico, trocando-se  $N$  por  $N_m$ .

### f) Determinação dos Elementos da Matriz **D**

Os elementos da matriz **D** vêm das Eqs. (3.174) que ao serem integradas com o auxílio das Eqs. (3.141) e (3.146), ficam:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{11} = \left( 1 + \frac{q_2^2}{15} + \frac{q_3^2}{15} - \frac{q_2 q_3}{30} \right)^2 \frac{C_{1m}}{l_r} \\ D_{12} = D_{21} = \left( 1 + \frac{q_2^2}{15} + \frac{q_3^2}{15} - \frac{q_2 q_3}{30} \right) \left[ \left( \frac{2q_2}{15} - \frac{q_3}{30} \right) C_{1m} \lambda + \frac{C_{2m}}{l_r} \right] \\ D_{13} = D_{31} = \left( 1 + \frac{q_2^2}{15} + \frac{q_3^2}{15} - \frac{q_2 q_3}{30} \right) \left[ \left( \frac{2q_3}{15} - \frac{q_2}{30} \right) C_{1m} \lambda - \frac{C_{2m}}{l_r} \right] \\ D_{22} = \left( \frac{2q_2}{15} - \frac{q_3}{30} \right)^2 C_{1m} \lambda l_c + \left( \frac{2q_2}{15} - \frac{q_3}{30} \right) 2C_{2m} \lambda + \frac{4C_{3m}}{l_r} \\ D_{23} = D_{32} = \left( \frac{2q_2}{15} - \frac{q_3}{30} \right) \left( \frac{2q_3}{15} - \frac{q_2}{30} \right) C_{1m} \lambda l_c - \left( \frac{q_2 - q_3}{6} \right) C_{2m} \lambda + \frac{2C_{3m}}{l_r} \\ D_{33} = \left( \frac{2q_3}{15} - \frac{q_2}{30} \right)^2 C_{1m} \lambda l_c - \left( \frac{2q_3}{15} - \frac{q_2}{30} \right) 2C_{2m} \lambda + \frac{4C_{3m}}{l_r} \end{array} \right. \quad (3.192)$$

Utilizando-se a hipótese simplificadora para  $q_2$  e  $q_3$ , a matriz **D** torna-se:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{C_{1m}}{l_r} & \frac{C_{2m}}{l_r} & -\frac{C_{2m}}{l_r} \\ & \frac{4C_{3m}}{l_r} & \frac{2C_{3m}}{l_r} \\ & & \frac{4C_{3m}}{l_r} \end{pmatrix} \quad (3.193)$$

### g) Matriz de Rigidez Tangente do Elemento no Sistema Local Cartesiano em Regime Elastoplástico

#### Matriz de Rigidez Constitutiva em Regime Elastoplástico

$$\bar{\mathbf{k}}_M^{ep} = \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \frac{C_{1m}}{l_r} & 0 & -\frac{C_{1m}}{l_r} & -\frac{C_{1m}}{l_r} & 0 & \frac{C_{2m}}{l_r} \\ & \frac{12C_{3m}}{l_r l_c^2} & \frac{6C_{3m}}{l_r l_c} & 0 & -\frac{12C_{3m}}{l_r l_c^2} & \frac{6C_{3m}}{l_r l_c} \\ & & \frac{4C_{3m}}{l_r} & \frac{C_{2m}}{l_r} & -\frac{6C_{3m}}{l_r l_c} & \frac{2C_{3m}}{l_r} \\ & & & \frac{C_{1m}}{l_r} & 0 & -\frac{C_{2m}}{l_r} \\ & & & & \frac{12C_{3m}}{l_r l_c^2} & -\frac{6C_{3m}}{l_r l_c} \\ & & & & & \frac{4C_{3m}}{l_r} \end{pmatrix} \quad (3.194)$$



**Matriz de Rigidez Geométrica em Regime Elastoplástico**  $\bar{\mathbf{k}}_G^{ep} = \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{B}} + Q_\alpha \bar{\mathbf{G}}_\alpha$

$$\bar{\mathbf{k}}_G^{ep} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{l_c^2}(M_b - M_a) & 0 & 0 & -\frac{1}{l_c^2}(M_b - M_a) & 0 \\ & \frac{6N_m}{5l_c} & \frac{N_m}{10} & -\frac{1}{l_c^2}(M_b - M_a) & \frac{6N_m}{5l_c} & \frac{N_m}{10} \\ & & \frac{2N_m l_c}{15} & 0 & -\frac{N_m}{10} & -\frac{N_m l_c}{30} \\ & & & 0 & \frac{1}{l_c^2}(M_b - M_a) & 0 \\ & & & & \frac{6N_m}{5l_c} & -\frac{N_m}{10} \\ & & & & & \frac{2N_m l_c}{15} \end{pmatrix} \quad (3.195)$$

onde  $N_m$ ,  $M_a$  e  $M_b$  são dados pelas Eqs. (3.188) e (3.189).

# 4

## ASPECTOS DA IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

### 4.1 Introdução

O desenvolvimento de programas de computador adequados para a *análise avançada* tem seguido três direções principais. A primeira é baseada na análise inelástica de segunda ordem com formação de rótulas plásticas, sem nenhuma modificação em relação à teoria clássica do cálculo plástico. A segunda aproximação para a *análise avançada* é baseada na modificação ou no refinamento da teoria clássica de rótulas plásticas, ao permitir uma suave degeneração da rigidez devido aos efeitos da plasticidade distribuída. A terceira considera o efeito da plastificação na formulação. Neste caso, a barra é discretizada em vários elementos e a seção transversal de cada elemento é dividida em fatias, permitindo a distribuição da plasticidade ao longo do comprimento do elemento e a plastificação gradual da seção transversal ao longo da altura do elemento, respectivamente.

O programa a ser desenvolvido neste trabalho segue a terceira direção definida anteriormente, ou seja, considera a plasticidade distribuída e baseia-se na formulação aplicada à análise elastoplástica não-linear física e geométrica, via Método dos Elementos Finitos, para pórticos planos, descrita no Capítulo 3. Através do processo incremental-iterativo para o carregamento pode-se verificar o equilíbrio da estrutura

segundo um critério de convergência previamente adotado, utilizando-se o Método de Newton-Raphson para a solução das equações não-lineares que descrevem o problema.

Adicionando-se à versão original desenvolvida por LAVALL (1996), o programa, escrito em linguagem *FORTRAN 90*, é capaz de analisar problemas com ligações articuladas entre as barras da estrutura, tensões residuais aplicadas na alma do perfil, diferentes carregamentos nodais com incrementos e fatores de ponderação diferenciados. Visando uma interface mais amigável com o usuário foi desenvolvido um pré-processador que possibilita o cálculo automático de parâmetros exigidos pelo programa principal.

Sendo assim, neste capítulo procura-se comentar o método de Newton-Raphson utilizado para a solução das equações não-lineares que descrevem o problema, o critério de convergência adotado na verificação final do processo incremental-iterativo e os modelos constitutivos atribuídos ao material, bem como as aproximações adotadas. Considerações sobre a implementação do modelo de fatias da seção transversal do elemento, das sub-rotinas do programa desenvolvido e do pré-processador também são apresentadas.

## 4.2 Método de Newton-Raphson

Conforme se sabe da literatura técnica sobre o assunto, o uso do MEF, para análise não-linear de estruturas, leva ao sistema de equações simultâneas, que associam o vetor de cargas aplicadas  $\mathbf{P}$  com o vetor de deslocamentos  $\mathbf{p}$ , através da matriz de rigidez tangente global do sistema  $\mathbf{k}$ :

$$\mathbf{k}\mathbf{p} + \mathbf{P} = 0 \quad (4.1)$$

Se os coeficientes da matriz  $\mathbf{k}$  dependem das incógnitas de  $\mathbf{p}$  ou de suas derivadas, o problema torna-se não-linear e o uso de um processo iterativo faz-se necessário.

Como descrito por EL-ZANATY et al. (1980), o procedimento numérico mais recomendado para análises não-lineares é o Método de Newton-Raphson o qual, a cada incremento de carga, atualiza a matriz de rigidez e, por iteração, retorna os deslocamentos nodais sofridos, através da determinação do equilíbrio da estrutura.

No Método de Newton-Raphson supõe-se um sistema de forças residuais segundo a Eq. (4.2):

$$\psi = \mathbf{k}\mathbf{p} + \mathbf{P} \neq 0 \quad (4.2)$$

onde as forças residuais  $\psi$  podem ser interpretadas como uma medida de distância entre a solução apresentada e o equilíbrio da estrutura.

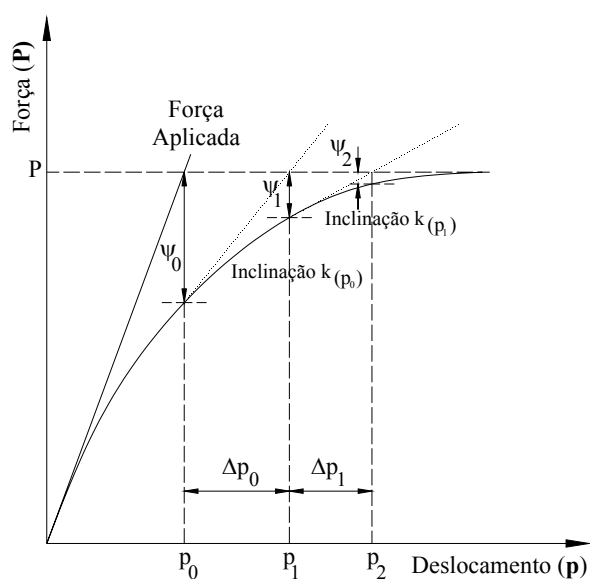


FIGURA 4. 1 – Método de Newton-Raphson

Em problemas estruturais, a solução, para qualquer nível de carga, é também função do histórico do carregamento. Assim, o processo incremental-iterativo é utilizado, como ilustra a FIG. 4.1, para o caso de uma única variável. A solução parte da definição do valor inicial para o vetor de deslocamentos  $\mathbf{p}_0$  (para problemas estruturais, é tomado como nulo). A matriz de rigidez tangente  $\mathbf{k}$  associada a este deslocamento é determinada e o vetor  $\psi_0$  é então calculado segundo a Eq. (4.2). A correção  $\Delta\mathbf{p}_0$  pode ser definida através da Eq. (4.3):

$$\Delta \mathbf{p}_0 = -\frac{\psi_{(p_0)}}{\mathbf{k}_{(p_0)}} \quad (4.3)$$

Então, uma melhor aproximação para o vetor dos deslocamentos é obtido por  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 + \Delta \mathbf{p}_0$  e o processo iterativo prossegue até a solução convergir para a resposta não-linear, ou seja, até que a norma do vetor  $\psi_r$  ou do vetor  $\Delta \mathbf{p}_r$  tenda a zero.

### 4.3 Critério de Convergência

Como descrito anteriormente, o processo iterativo é executado até a solução convergir para uma tolerância adequada, previamente definida. Esta verificação deverá ocorrer no final de cada iteração.

No presente trabalho verifica-se a convergência da solução comparando-se os valores dos deslocamentos nodais da iteração corrente com aqueles da iteração imediatamente anterior. No instante em que a diferença entre esses valores for inferior ou igual à tolerância, para cada um dos valores nodais, admite-se que a convergência foi atingida.

Assim:

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i^r)^2 - \sum_{i=1}^n (p_i^{r-1})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i^1)^2}} \times 100 \leq \text{Tolerância Adotada} \quad (4.4)$$

onde  $n$  é o número total de graus de liberdade da estrutura e  $r$  e  $r-1$  referem-se às iterações sucessivas. A tolerância deve ser indicada em porcentagem, já que a Eq. (4.4) é multiplicada por cem (100).

Observa-se que a convergência é atingida quando a diferença entre as normas de duas iterações sucessivas é menor ou igual ao valor da tolerância multiplicada pela norma da primeira iteração. O valor 0,5% de tolerância será adotado, pois é considerado adequado para a maioria das aplicações em Engenharia Estrutural.

#### 4.4 Modelo Constitutivo

A FIG. 4.2 idealiza o comportamento elastoplástico por meio de um diagrama bilinear, onde se distingue um comportamento elástico (região  $OA$ ), com módulo de elasticidade  $E$ , e um comportamento elastoplástico (região  $AB$ ), com encruamento linear e módulo tangente  $E_t$ .

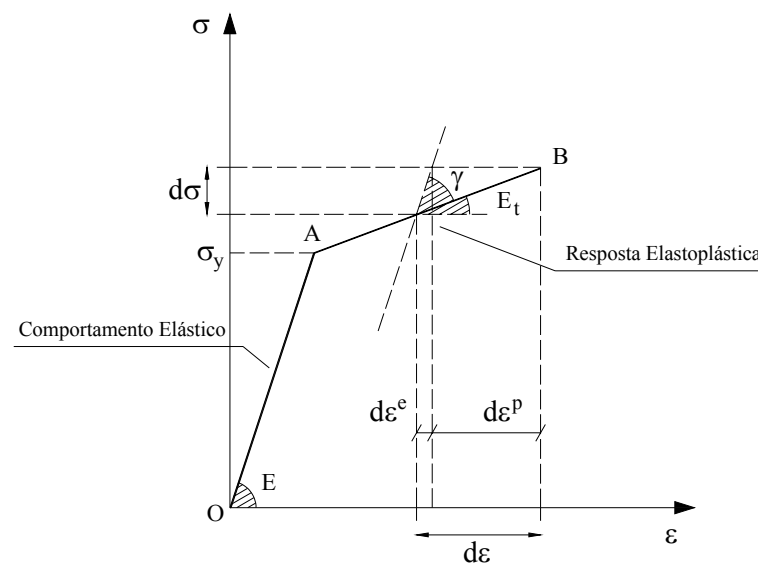


FIGURA 4. 2 – Comportamento elastoplástico do material para o caso uniaxial

O material deforma-se, inicialmente, com módulo de elasticidade  $E$  até que a tensão atuante atinja o valor da tensão de escoamento  $\sigma_y$ . Para níveis de tensões superiores à este limite, o material passa a se deformar segundo o módulo tangente  $E_t$ . Nota-se que num certo estágio após o escoamento inicial, o acréscimo de tensão  $d\sigma$  é associado a um acréscimo de deformação  $d\varepsilon$ . Separando desta parcela as deformações elástica e plástica, tem-se:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (4.5)$$

O parâmetro de endurecimento  $H'$  é definido por:

$$H' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} \quad (4.6)$$

Com o auxílio da Eq. (4.5), o parâmetro de encruamento pode ser escrito em função do módulo tangente  $E_t$ :

$$H' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon - d\varepsilon^e} = \frac{E_t}{1 - (E_t/E)} \quad (4.7)$$

Reescrevendo e desenvolvendo a Eq. (4.5), tem-se que:

$$d\varepsilon = \left( \frac{1}{E} + \frac{1}{H'} \right) d\sigma = \left( \frac{H'+E}{EH'} \right) d\sigma \quad (4.8)$$

Logo,

$$d\sigma = \left( \frac{EH'}{E+H'} \right) d\varepsilon \quad (4.9)$$

Sendo  $d\sigma = E_t d\varepsilon$ , conclui-se que:

$$E_t = \left( \frac{EH'}{E+H'} \right) \quad (4.10)$$

Segundo a FIG. 4.2, pode-se escrever  $d\sigma$  como:

$$d\sigma = E_t d\varepsilon = (E - \gamma) d\varepsilon \quad (4.11)$$

Sendo  $E_t = E - \gamma$  e com o auxílio da Eq. (4.10), determina-se:

$$\gamma = \frac{E^2}{E+H'} \quad (4.12)$$

Levando-se a Eq. (4.12) na Eq. (4.11), tem-se que:

$$d\sigma = E \left( 1 - \frac{E}{E+H'} \right) d\varepsilon \quad (4.13)$$

E, finalmente, define-se o módulo tangente adotado para níveis de tensões superiores à de escoamento:

$$E_t = E \left( 1 - \frac{E}{E + H'} \right) = \left( \frac{EH'}{E + H'} \right) \quad (4.14)$$

Assim, na implementação do programa, as tensões serão tratadas como:

$$d\sigma = \begin{cases} E d\varepsilon & \text{fase elástica} \\ E \left( 1 - \frac{E}{E + H'} \right) d\varepsilon & \text{fase plástica} \end{cases} \quad (4.15)$$

Quando  $H' = 0$  tem-se que  $E_t = 0$  e o comportamento elástico perfeitamente plástico é contemplado. Nos exemplos apresentados no Capítulo 6 esta hipótese será adotada.

## 4.5 Modelo de Fatias

Ao se considerar a não-linearidade física do material, permite-se que as fibras, constituintes da seção transversal, plastifiquem devido às tensões provenientes do carregamento aplicado serem superiores à tensão de escoamento do material. A formulação apresentada no Capítulo 3 ainda prevê o espalhamento da plastificação ao longo das barras da estrutura, ao dividi-la em elementos finitos.

Assim, para a determinação dos coeficientes da matriz de rigidez, que são função das propriedades  $EA$ ,  $EI$  e  $ES$ , das forças normais  $N$  e momentos fletores  $M$ , a seção transversal foi dividida em fatias. A FIG. 4.3 mostra um exemplo típico para o perfil metálico tipo “I”, dividido em fatias. Além da alma, as mesas foram fatiadas permitindo o estudo das tensões residuais, medidas na metade da espessura de cada fatia.



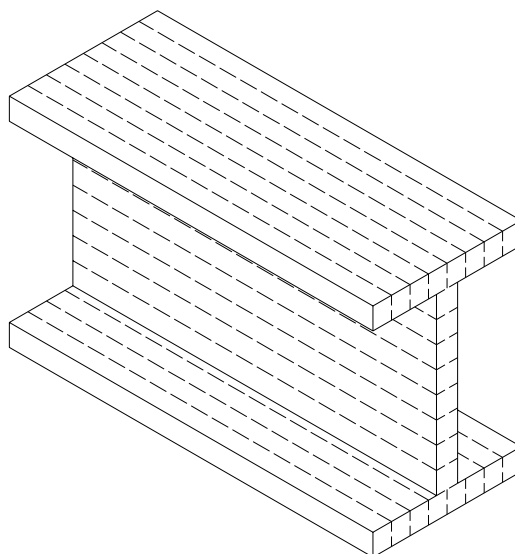


FIGURA 4. 3 – Modelo de fatias

Tomando-se cada fatia como uma fibra da seção transversal, pode-se analisar o problema elastoplástico, considerando somente a contribuição das fatias elásticas, ou seja, somente a parcela da seção que ainda está sujeita à tensões inferiores à de escoamento  $\sigma_y$ . A FIG. 4.4 apresenta a propagação da plastificação ao longo da altura da seção, bem como os níveis de tensões até a formação da rótula plástica no nó considerado.

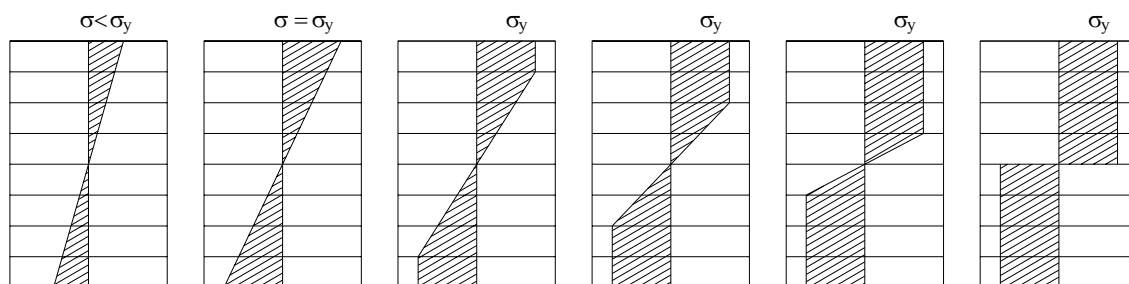


FIGURA 4. 4 – Processo de plastificação das fatias

Na implementação do modelo de fatias, considera-se que o estado de tensão em seu centro é representativo de toda a fatia. As contribuições para a força normal, o momento fletor e os coeficientes de rigidez  $EA$ ,  $EI$  e  $ES$  totais são determinadas pelo somatório das contribuições de cada fatia. Assim, pode-se dizer que:

$$\begin{aligned}
 EA &= \sum_i E_i b_i t_i \\
 ES &= \sum_i E_i b_i t_i z_i \\
 EI &= \sum_i E_i \left( b_i t_i z_i^2 + \frac{b_i t_i^3}{12} \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

onde:

$b_i$ ,  $t_i$  e  $z_i$  são, respectivamente, largura da fatia  $i$ , espessura da fatia  $i$  e coordenada  $z$  no centro da fatia  $i$ , em relação ao centro de gravidade da seção transversal.

$E_i$  é o módulo de elasticidade do material da fatia  $i$ .

Se a tensão no centro da fatia alcançar da tensão de escoamento, toda fatia passa a ser considerada elastoplástica e o módulo de elasticidade passa a ser o módulo tangente  $E_t$ , dado por:

$$E'_i = E_i \left( 1 - \frac{E_i}{E_i + H'} \right)
 \tag{4.17}$$

conforme definido na Eq. (4.14), onde  $H'$  é o parâmetro de encruamento.

## 4.6 Pré-Processador

O tratamento dos parâmetros a serem utilizados pelo programa principal, desenvolvido na linguagem de programação *FORTRAN 90*, é feito através da montagem de um arquivo tipo texto, “lido” pela sub-rotina DADOS. Para facilitar o preenchimento e automatizar alguns cálculos, foi desenvolvido um pré-processador, na linguagem *VISUAL BASIC 5.0*.

Apresenta-se, a seguir, a metodologia do programa, bem como os cálculos automáticos para a geração do arquivo tipo texto:

### Apresentação/ Parâmetros Iniciais

A FIG. 4.5 ilustra as telas iniciais que compõem o programa. A tela “Dados Iniciais” caracteriza o problema, informando o número total de nós e elementos.



FIGURA 4. 5 – Telas iniciais

### Tela Principal

Direciona o usuário para o preenchimento dos demais parâmetros condicionantes do problema.

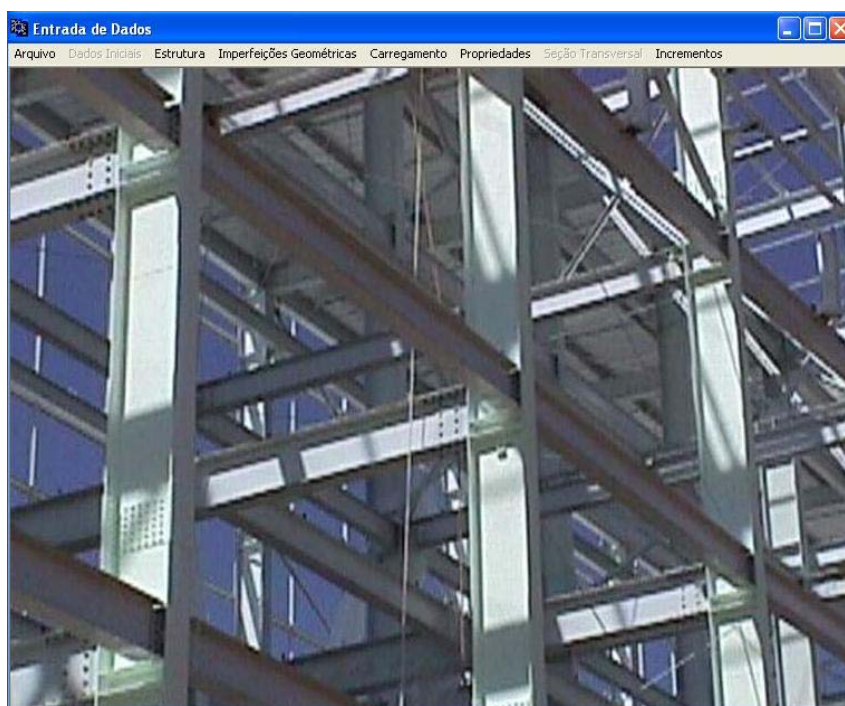


FIGURA 4. 6 – Tela principal

## Dados da Estrutura: Definição de Nós e Elementos

### - Dados Nodais

As coordenadas nodais podem ser geradas automaticamente, através do nó de partida, ou manualmente. Devem ser informados os nós de apoio e suas restrições.

N° do Nó	Coordenada "x"	Coordenada "y"	Restrição x	Restrição y	Restrição z	R
1	0	0	Dx: 1	Dy: 1		
2	0	60				
3	0	120				
4	0	180				
5	0	240				
6	0	300				
7	0	360				
8	0	420				
9	0	480				
10	0	540				
11	0	600	Dx: 1			

FIGURA 4. 7 – Dados nodais

### - Elementos

Devem ser indicadas as incidências de cada elemento e o tipo de vinculação nodal (nó rotulado ou nó rígido). A coluna "Propriedade n°" destina-se à caracterização do tipo de material e do tipo de seção transversal atribuídos a cada elemento.

Elemento n°	Nó inicial	Nó Final	Vinculação nó inicial	Vinculação nó final	Propriedade n°
1	1	2	1	1	1
2	2	3	1	1	1
3	3	4	1	1	1
4	4	5	1	1	1
5	5	6	1	1	1
6	6	7	1	1	1
7	7	8	1	1	1
8	8	9	1	1	1
9	9	10	1	1	1
10	10	11	1	1	1

FIGURA 4. 8 – Dados referentes aos elementos.

### Imperfeições Geométricas

Através das funções matemáticas que definem as configurações iniciais das barras sujeitas às imperfeições geométricas, do tipo linear, parabólico e senoidal, podem-se calcular automaticamente as novas coordenadas nodais, informando-se o valor da imperfeição máxima no meio do vão.

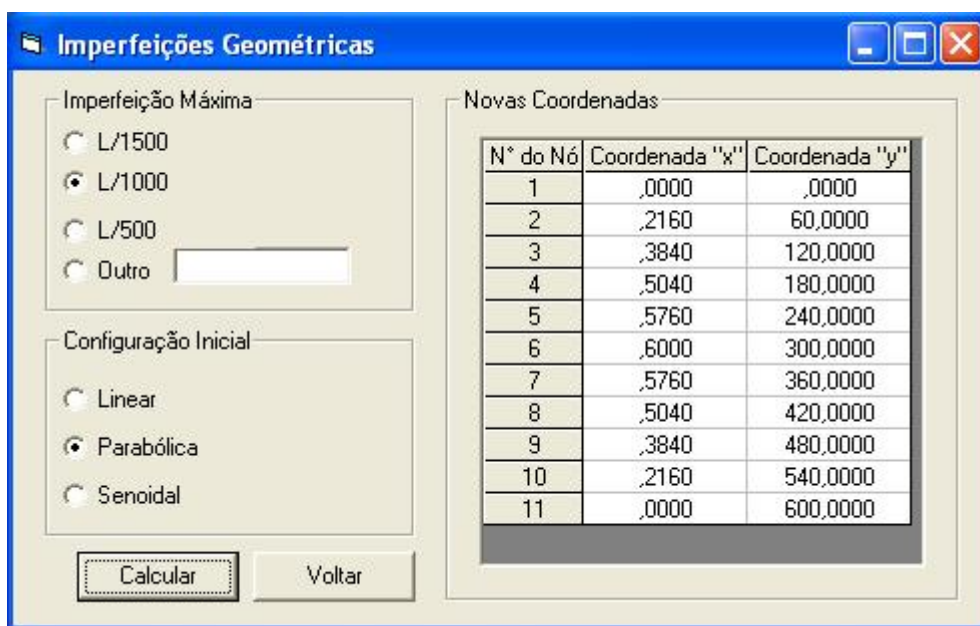


FIGURA 4. 9 – Imperfeições geométricas

### Carregamento Nodal

São possíveis três tipos de ações: permanente, variável e vento. Devem ser informados os fatores de ponderação correspondente a cada carregamento e os nós de aplicação das forças.

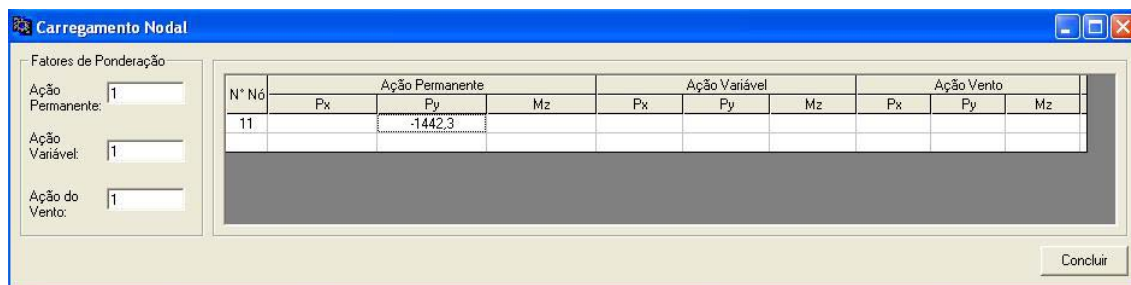


FIGURA 4. 10 – Carregamento nodal

## Propriedades do Material

Entrada dos parâmetros que definem o material e o fator de endurecimento  $H'$  da Lei Constitutiva bilinear adotada pelo programa principal.

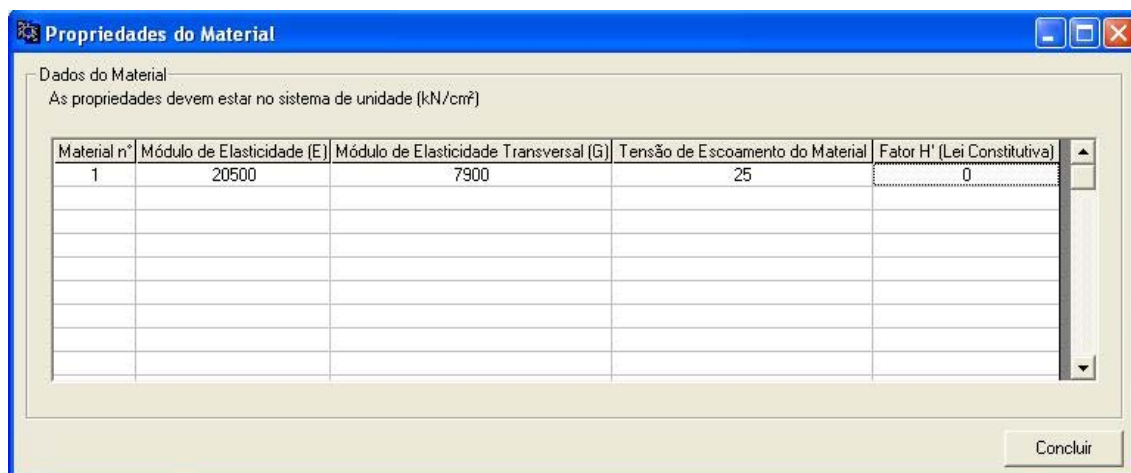


FIGURA 4. 11 – Propriedades do material

## Seção Transversal: Definição das Propriedades Geométricas e do Número de Fatas

Após a escolha do tipo de perfil (retangular, “I” trabalhando na maior ou menor inércia), a seção transversal deve ser caracterizada. O programa calculará automaticamente a largura ( $b$ ) e espessura ( $t$ ) para cada fatia, de acordo com o número total de fatias atribuído para as mesas e alma.

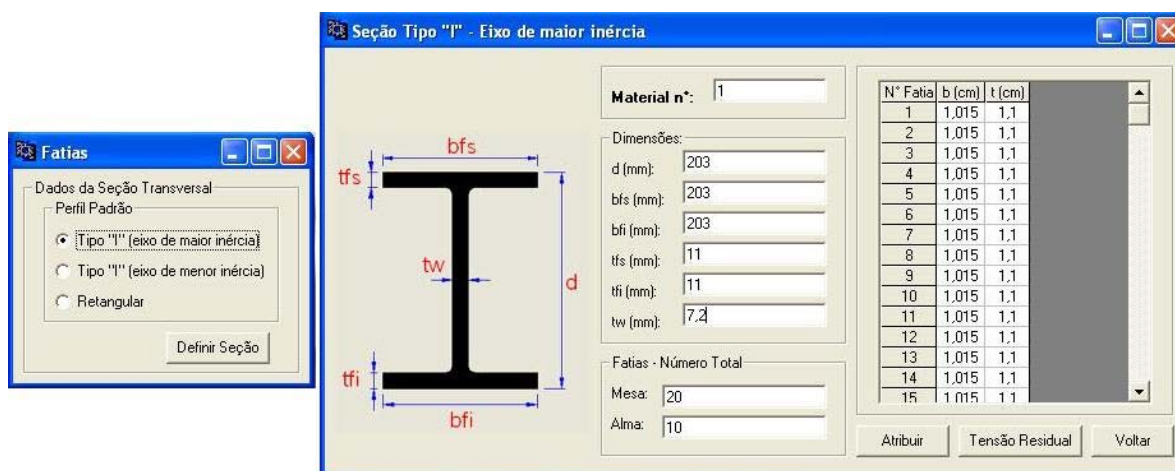


FIGURA 4. 12 – Seção transversal

### Processo Incremental – Iterativo

A análise do comportamento da estrutura é feita através de um procedimento incremental-iterativo. Os valores dos incrementos de carga, o número máximo de iterações permitido e a tolerância máxima para a verificação da convergência condicionam todo o processo. Nesta tela define-se também a frequência de saída dos resultados.

N° de Iterações	Tipo de Saída	Fatores de Carga			Tolerância	% Carga Total
		Permanente	Variável	Vento		
1000	1	0,01	0,01	0,01	0,5	1,00%
		0,01	0,01	0,01		2,00%
		0,01	0,01	0,01		3,00%
		0,01	0,01	0,01		4,00%
		0,01	0,01	0,01		5,00%
		0,01	0,01	0,01		6,00%
		0,01	0,01	0,01		7,00%
		0,01	0,01	0,01		8,00%
		0,01	0,01	0,01		9,00%
		0,01	0,01	0,01		10,00%
		0,01	0,01	0,01		11,00%
		0,01	0,01	0,01		12,00%
		0,01	0,01	0,01		13,00%
		0,01	0,01	0,01		14,00%
		0,01	0,01	0,01		15,00%
		0,01	0,01	0,01		16,00%
		0,01	0,01	0,01		17,00%
		0,01	0,01	0,01		18,00%
		0,01	0,01	0,01		19,00%
		0,01	0,01	0,01		20,00%

FIGURA 4. 13 – Dados do processo incremental – iterativo

## 4.7 Descrição das Sub-Rotinas

O programa, escrito na linguagem *FORTRAN 90* utilizando a plataforma *VISUAL FORTRAN 6.0*, divide-se em duas partes: o programa principal, que sequencia as sub-rotinas e controla o número de iterações a serem executadas e as sub-rotinas que executam os procedimentos para que seja feita a análise não-linear da estrutura em questão. A FIG. 4.14 apresenta o fluxograma indicando a seqüência dos procedimentos.

### - Sub-rotina DADOS

Através da leitura de um arquivo de texto, gerado pelo pré-processador, os parâmetros característicos do problema são coletados e atribuídos às variáveis. Além de informações básicas, tais como coordenadas e vinculações nodais, número e divisões

das fatias, são informados os valores das tensões residuais aplicadas, os carregamentos nodais e os fatores limitantes referentes às interações e à convergência da solução.

**- Sub-rotina INICIA**

Visando o correto preenchimento dos dados, são zerados vetores e matrizes.

**- Sub-rotina INCAR**

Controla o processo incremental do carregamento e atualiza o vetor correspondente a cada passo do processo.

**- Sub-rotina ALGOR**

Controla o tipo de algoritmo a ser empregado para a solução do problema. Como citado anteriormente, o algoritmo escolhido foi o Método de Newton-Raphson puro.

**- Sub-rotina MATRIG**

Determina a matriz de rigidez tangente do elemento atualizada em cada iteração do processo, em regime elástico ou elastoplástico. Com o auxílio da **sub-rotina FATIA** são avaliados o nível de plastificação da seção transversal, através da contribuição de cada fatia no cálculo de propriedades geométricas e nos coeficientes de rigidez. Quando a tensão no centro de uma fatia alcança o valor de escoamento  $\sigma_y$ , considera-se que esta fatia da seção transversal plastificou-se.

**- Sub-rotina MONRIG**

Executa a montagem da matriz de rigidez global do sistema e do vetor de cargas, através da superposição da matriz de rigidez de cada elemento, de acordo como a incidência nodal adotada.

**- Sub-rotina REDGAS**

Executa os procedimentos necessários ao desenvolvimento da fase de eliminação progressiva do Método de Redução de Gauss para solução do sistema carregamento/deslocamento a cada incremento de carga dado.



**- Sub-rotina SUBREG**

Executa a substituição regressiva do sistema de equações triangular superior originado pela sub-rotina REDGAS. São calculados os deslocamentos nodais e as reações de apoio, além de proceder a atualização das coordenadas nodais, os comprimentos e os cossenos diretores dos elementos.

**- Sub-rotina ESFOR**

Determina o vetor das forças nodais equivalentes internas, considerando se o elemento está em carga ou descarga, de acordo com a lei constitutiva. Seguindo a formulação adotada, são calculados os deslocamentos, correspondentes aos graus de liberdade nos sistemas cartesiano e no corrotacional, definindo as rotações de corpo rígido e seus valores acumulativos. As deformações são calculadas, e, através da lei constitutiva, são calculados os esforços nodais equivalentes e os esforços residuais que serão reaplicados à estrutura até que a mesma esteja em equilíbrio (princípio do processo iterativo).

**- Sub-rotina CONVER**

Verifica a convergência da solução do problema através do controle do erro entre os deslocamentos nodais da iteração corrente com a anterior.

**- Sub-rotina RESULT**

Fornece a saída dos resultados da análise do problema apresentado, tais como os deslocamentos nodais e as reações de apoio segundo o sistema global de referência, os esforços solicitantes nas extremidades de cada elemento (coordenadas locais) e as deformações plásticas calculadas em cada fatia nas extremidades do elemento.

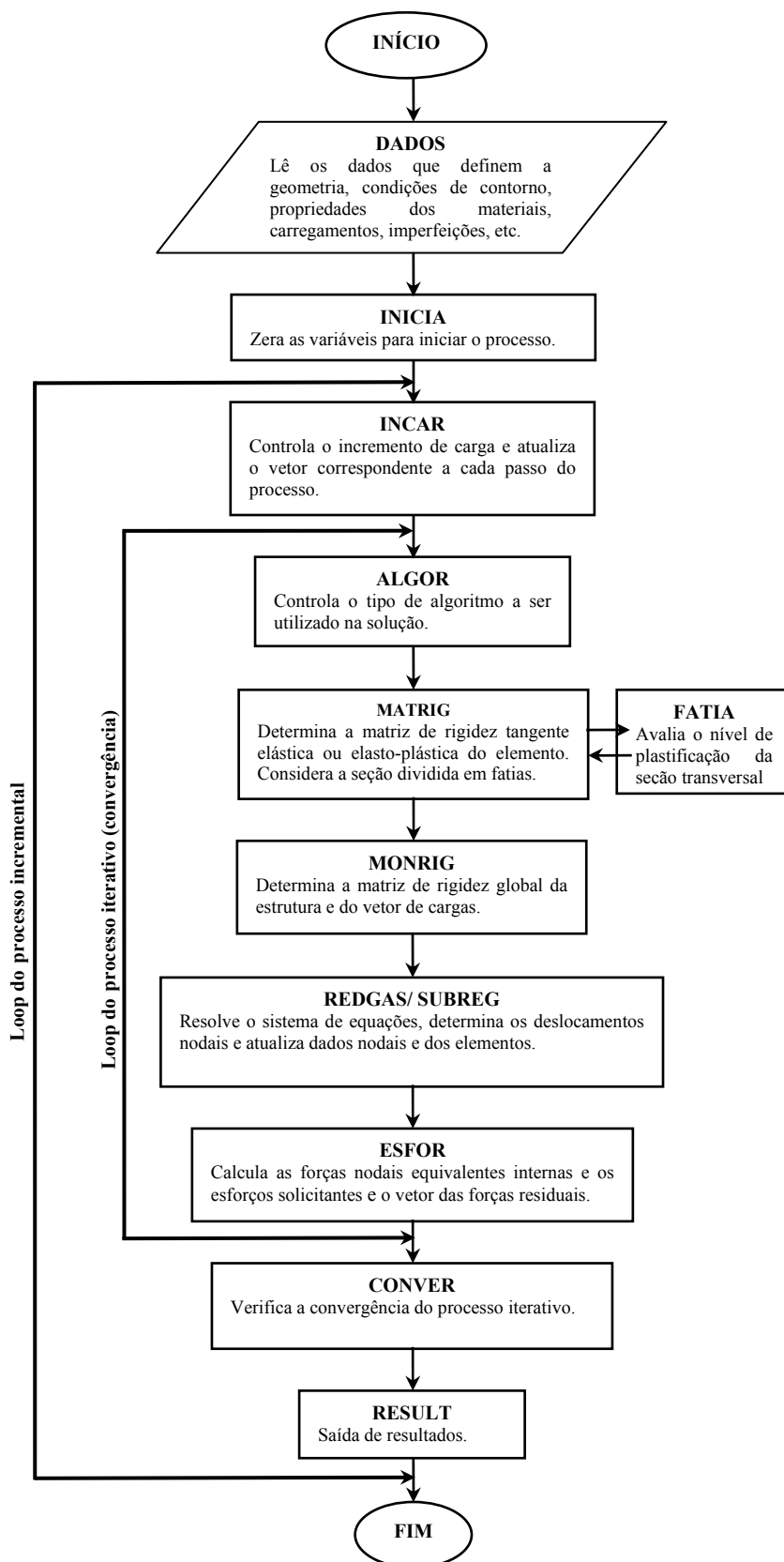


FIGURA 4. 14 – Fluxograma geral para análise não-linear incremental e iterativa

# 5

## **CONSIDERAÇÕES SOBRE AS TENSÕES RESIDUAIS EM PERFIS DE AÇO**

### **5.1 Introdução**

As tensões residuais aparecem nos perfis de aço estruturais e chapas durante o processo de fabricação e permanecem, inevitavelmente, se nenhuma técnica de alívio de tensões for utilizada. Devido ao resfriamento não-uniforme após a laminação ou soldagem da peça, surgem deformações plásticas e, conseqüentemente, tensões residuais que podem, em alguns casos, atingir o mesmo nível de grandeza da tensão de escoamento do material.

As tensões residuais têm um papel importante no dimensionamento dos pilares de aço, pois sendo a principal causa da não-linearidade do diagrama tensão x deformação na região inelástica, conforme afirmam ALPSTEN e TALL (1970), elas afetam significativamente a resistência dos elementos na compressão.

O objetivo neste capítulo é apresentar um estudo qualitativo sobre a influência das tensões residuais no comportamento estrutural dos pilares de aço. Para isto, serão feitas algumas considerações sobre a formação, magnitude e distribuição dessas tensões,

mostrando a sua presença inevitável nas estruturas de aço. A formulação teórica apresentada neste trabalho é, então, modificada para considerar os efeitos das tensões residuais nas análises e alguns aspectos de sua implementação computacional são comentados.

## 5.2 Diagrama Tensão x Deformação

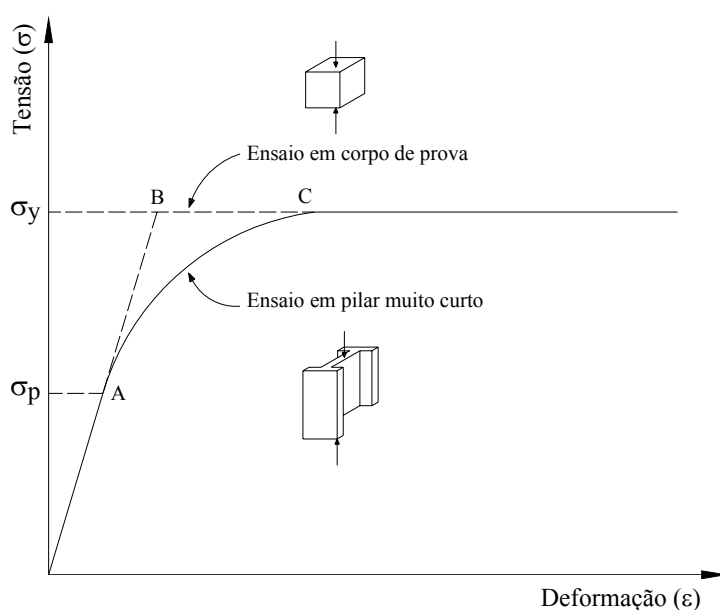


FIGURA 5. 1 – Relação tensão x deformação em corpo de prova e em perfil metálico de aço

Para os pilares de aço, as tensões residuais são a principal causa da não-linearidade do diagrama tensão x deformação. A FIG. 5.1 apresenta resultados qualitativos de um ensaio comparativo à compressão simples entre um corpo de prova livre de tensões residuais e um pilar muito curto em perfil do tipo “I”. Quando a força axial de compressão é aplicada no pilar, uma curva de transição surge entre o comportamento linear elástico e o perfeitamente plástico do material, por não mais apresentar linearidade entre tensão e deformação. As fibras que têm tensões residuais de compressão escoarão em primeiro lugar, seguidas pelas fibras que têm tensões residuais de tração. Como consequência, o escoamento na seção transversal ocorre de maneira

gradual, ou seja, a transição entre o limite de proporcionalidade  $\sigma_p$  (região elástica) e o limite elástico  $\sigma_y$  (região plástica) é feito progressivamente, de uma forma suave, caracterizando o regime inelástico. A FIG. 5.1 mostra também o comportamento tensão x deformação de um corpo de prova livre de tensões residuais através da linha tracejada, que exhibe comportamento elastoplástico perfeito.

### 5.3 Mecanismo de Formação das Tensões Residuais

As deformações plásticas, que levam ao aparecimento das tensões residuais nos perfis de aço, resultam da diferença entre o tempo de resfriamento de partes distintas da seção transversal, durante o processo de laminação e/ou soldagem.

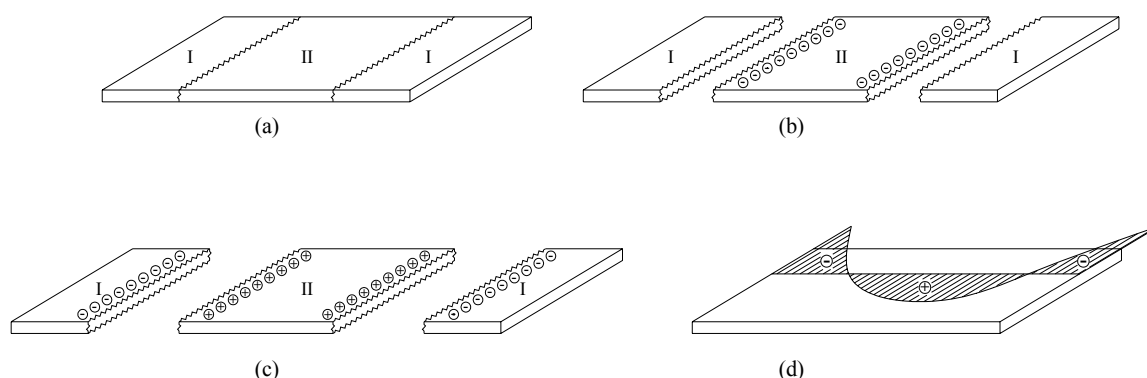


FIGURA 5. 2 – Esquema de mecanismo de formação das tensões residuais

Na fase final de fabricação de uma chapa, por exemplo, as extremidades mais expostas ao ar (regiões I da FIG. 5.2a), resfriam-se mais rapidamente do que seu interior (região II da FIG. 5.2a). As regiões mais frias tendem a se contrair, sofrendo resistência das regiões mais quentes nas quais aparecem tensões de compressão (-) (FIG. 5.2b). Devido às altas temperaturas, as regiões mais quentes têm tensão de escoamento mais baixa, e conseqüentemente, escoam por compressão. Quando o material resfria à temperatura ambiente, a região central (região II) tende a ficar encurtada em relação às extremidades (regiões I), pois havia escoado por compressão anteriormente. Dessa forma, o encurtamento da região central (região II) sofre restrição das extremidades, ficando

distendida e, conseqüentemente, tracionada (+). Para que haja equilíbrio das tensões longitudinais na seção, as regiões de extremidade (regiões I) ficam comprimidas (-) (FIG. 5.2c). Assim, pode-se concluir que tanto para perfis soldados quanto laminados, a parte que resfria em primeiro lugar fica comprimida (-) e a que resfria por último fica tracionada (+) (FIG. 5.2d).

## **5.4 Distribuição e Magnitude**

Segundo o EUROPEAN CONVENTION FOR CONSTRUCTIONAL STEELWORK (ECCS) em 1976, há mais de cinqüenta anos têm-se investigado sobre a magnitude e distribuição das tensões residuais nos diferentes tipos de perfis existentes no mercado. Esses resultados têm contribuído significativamente para o estudo do comportamento e da resistência última de vários tipos de estruturas e seus componentes, principalmente em pilares sujeitos à compressão.

De acordo com GALAMBOS (1988) o valor e a distribuição das tensões residuais dependem da forma da seção transversal, da temperatura de laminação ou soldagem, das condições de resfriamento, dos métodos de retificação das peças e das propriedades do material. A tensão de escoamento do aço não é um fator importante na formação das tensões residuais, sendo da mesma ordem de grandeza para perfis fabricados com aços de diferentes resistências.

### **5.4.1 Perfis Laminados à Quente**

Em perfis laminados à quente, a região das mesas, parte mais espessa da seção, esfria-se mais lentamente do que a região da alma. As extremidades das mesas e a região central da alma, mais expostas ao ar, resfriam-se primeiro. Assim, segundo o processo de formação das tensões residuais, as extremidades das mesas e a região central da alma ficarão comprimidas, enquanto as junções entre alma e mesas ficarão tracionadas, devido ao resfriamento lento. A FIG. 5.3 exemplifica a distribuição das tensões

residuais em cinco perfis laminados à quente. Deve-se observar o crescimento das tensões residuais de compressão nas mesas, à medida que se aumentam as dimensões do perfil.

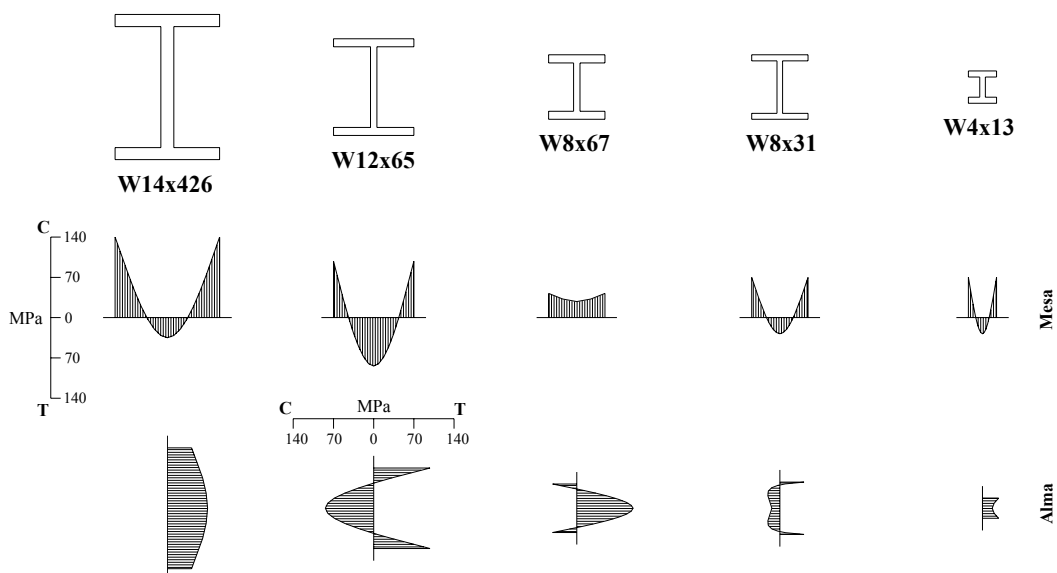
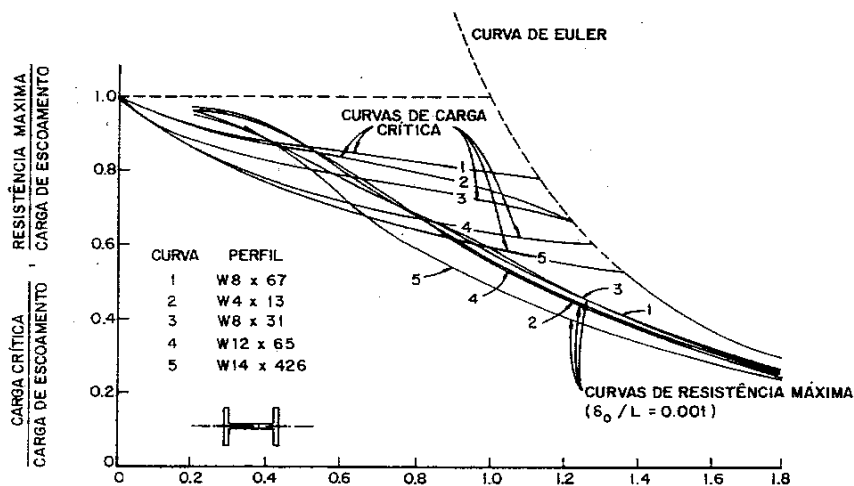


FIGURA 5. 3 – Distribuição e magnitude das tensões residuais em perfis laminados à quente (adaptado de GALAMBOS, T. V., 1988)



$$\lambda = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} \frac{KL}{r}$$

FIGURA 5. 4 – Curvas de carga crítica e de resistência máxima para os perfis laminados indicados na FIG 5.4 (adaptado de GALAMBOS, T. V., 1988)

A magnitude e a distribuição das tensões residuais afetam significativamente a resistência dos pilares, como indica a FIG. 5.4, onde são mostradas as cargas críticas obtidas de ensaios de laboratório para flambagem segundo o eixo de menor inércia, baseadas nas tensões residuais encontradas para os cinco perfis da FIG. 5.3.

#### 5.4.2 Perfis Soldados

Os perfis soldados devem ser estudados de acordo com o processo de fabricação e soldagem das peças:

##### Perfis Soldados com Chapas de Bordas Laminadas (UM – “Universal Mill Plate”)

Neste caso, as chapas isoladas já apresentam tensões residuais oriundas do resfriamento não-uniforme após a laminação, segundo a FIG. 5.5a. A solda de união entre mesas e alma introduz tensões de compressão nas extremidades das mesas, ampliando a região das tensões residuais de compressão, afetando de forma adversa à resistência dos pilares, se comparada com os pilares compostos por perfis laminados à quente.

##### Perfis Soldados com Chapas Cortadas a Maçarico (FC – “Flame Cut Plate”)

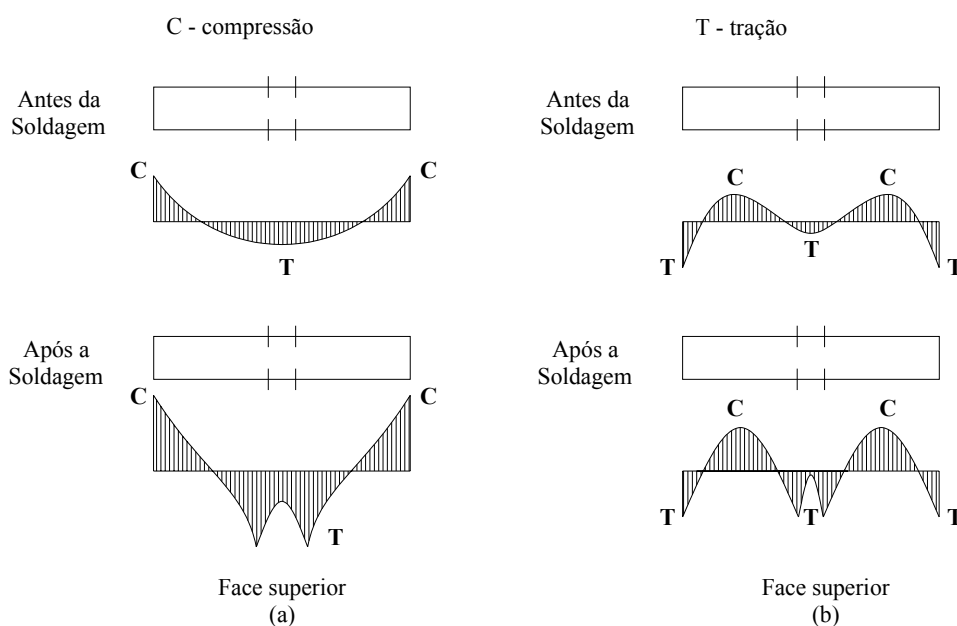
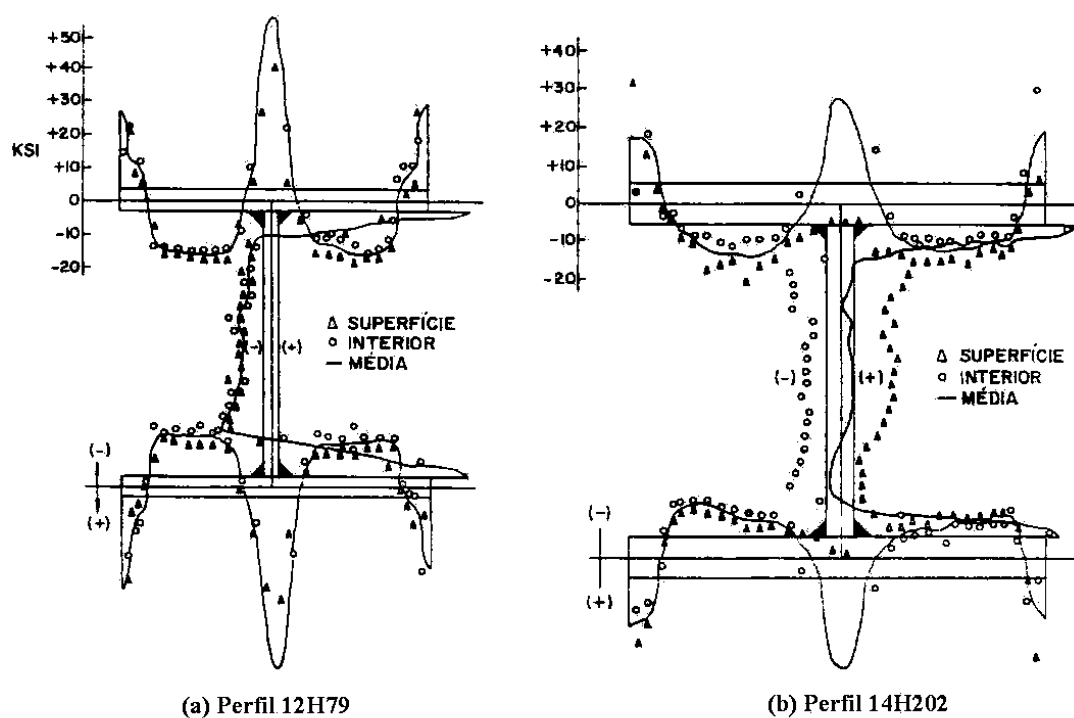


FIGURA 5. 5 – Comparação qualitativa de tensões residuais entre chapas com (a) bordas laminadas e (b) bordas cortadas a maçarico



O corte a maçarico introduz tensões de tração nas bordas das chapas devido ao calor, agindo favoravelmente na resistência à compressão. A FIG. 5.5 mostra e compara qualitativamente a distribuição das tensões residuais nos perfis soldados tipo UM (FIG. 5.5a) e nos perfis soldados tipo FC (FIG. 5.5b), antes e após a soldagem.



sendo 1Ksi = 6,895 MPa

FIGURA 5. 6 – Comparação quantitativa de tensões residuais nos perfis (a) 12H79 e (b) 14H202 (adaptado de Mc FALLS. e TALL., 1969)

Tem sido demonstrado por ALPSTEN e TALL (1970), BJORHVDE (1988), BJORHVDE et al. (1972), MC FALLS e TALL (1969), entre outros, que a soldagem tem maior influência sobre a distribuição e grandeza das tensões residuais em perfis pequenos e médios do que em perfis pesados. Na FIG. 5.6 são mostradas as distribuições das tensões residuais observadas nos perfis soldados FC 12H79 e 14H202 de massas 118,5 kg/m e 332,4 kg/m, respectivamente. Ambos os perfis apresentam a mesma distribuição geral de tensões, ou seja, mesma localização das regiões de compressão e tração. A principal diferença está na magnitude das tensões. Para o perfil mais leve (12H79), a tensão residual de tração, nas extremidades das mesas, fica entre

28 e 30 ksi (193,06 e 206,85 MPa), enquanto para o mais pesado (14H202), fica entre 18 e 21 ksi (124,11 e 144,80 MPa). A máxima tensão residual de compressão na mesa está na faixa próxima a 16 ksi (110,32 MPa) no perfil mais leve e 12 ksi (82,74 MPa) no mais pesado.

Observa-se que o efeito da solda executada na junção entre mesas e alma é mais preponderante no perfil 12H79, por apresentar maior tensão residual de tração nessa região. Assim, pode-se dizer, de uma maneira geral, que para perfis mais pesados, as soldas representam uma menor porcentagem da área total. O calor introduzido por unidade de volume é reduzido, e então, a magnitude das tensões residuais é menor.

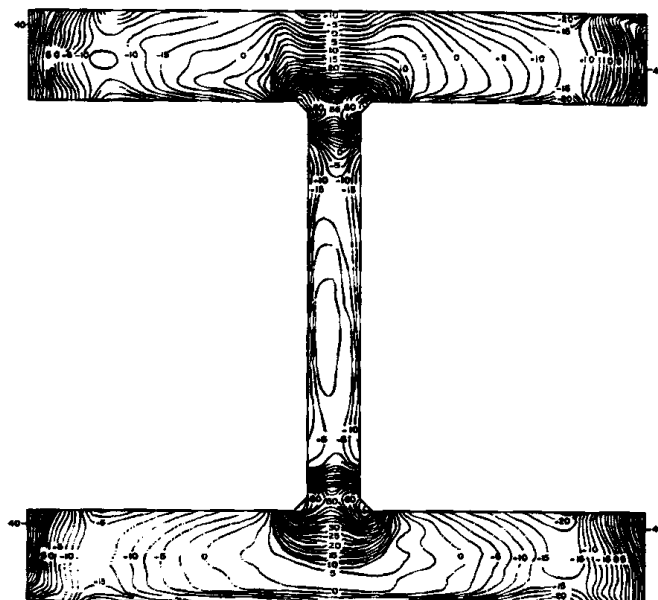


FIGURA 5. 7 – Diagrama de isotensões para um perfil soldado WW 23x681 (tensões medidas em kips/in<sup>2</sup>, sendo 1kips/in<sup>2</sup> = 6,895 MPa – adaptado de GALAMBOS, T. V., 1988)

A variação da tensão residual através da espessura de chapas maiores que 1” (2,54 cm) pode ser considerável, isto é, pode-se esperar uma diferença significativa entre a magnitude das tensões medidas na superfície e no interior das chapas componentes dos perfis pesados, conforme relatam ALPSTEN e TALL (1970), GALAMBOS (1988), MC FALLS e TALL (1969). Contudo, tem sido mostrado também, que o efeito desta

característica sobre a resistência dos pilares é geralmente pequeno. Se os cálculos forem executados baseados na distribuição real das tensões residuais, os resultados serão apenas pouco inferiores quando comparados com análises que admitem a tensão constante através da espessura e igual à tensão residual medida na superfície. Esta hipótese simplifica significativamente o trabalho de modelagem da seção transversal do pilar, na preparação para cálculos numéricos. A FIG. 5.7 mostra o diagrama de isotensões para um perfil soldado pesado, composto por chapas cortadas a maçarico (FC). Pode-se observar que a diferença entre as tensões residuais na superfície e no interior das chapas pode ultrapassar 10 ksi (68,95 MPa).

Estudos demonstram que a seqüência de soldagem e o número de passos de solda são fatores que influenciam a distribuição das tensões residuais, e que o tipo de solda utilizada (filete ou penetração) não é um fator significativo na formação de tensões residuais em perfis soldados, porque o calor introduzido na execução é da mesma ordem de grandeza.

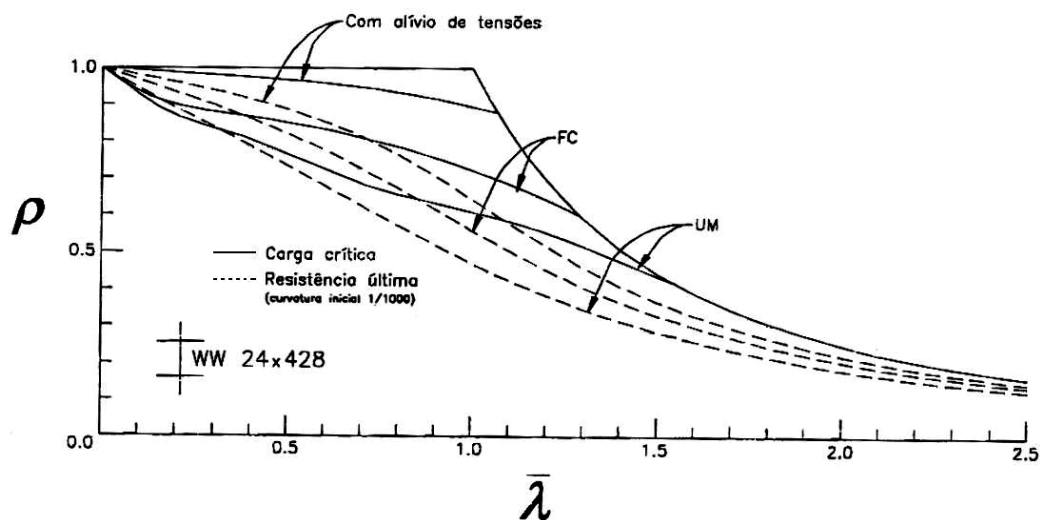


FIGURA 5. 8 – Comparação de cargas críticas e resistências últimas para perfis FC UM com e sem alívio de tensões (adaptado de GALAMBOS, T. V., 1988)

O alívio de tensões por recozimento das chapas componentes, antes da soldagem dos perfis, aumenta a resistência dos pilares significativamente, ao reduzir o valor das tensões

residuais, mesmo diminuindo a tensão de escoamento do aço. Na FIG. 5.8 comparam-se às curvas de resistência e de carga crítica de perfis soldados com chapas de bordas laminadas (UM) e perfis soldados com chapas cortadas a maçarico (FC) com as curvas do mesmo perfil com alívio de tensões.

Finalmente, pode-se concluir que as tensões residuais são um dos principais fatores que afetam a resistência dos pilares, principalmente em regiões de esbeltez intermediária ( $40 \leq l/r \leq 120$ ), conforme concluem BATTERMAN e JOHNSTON (1967, BEEDLE e TALL (1960). Assim, as curvas para cálculo de resistência de pilares devem ser baseadas em modelos de análise que incorporem a presença das tensões residuais ao longo da seção transversal.

## 5.5 Formulação Teórica Considerando as Tensões Residuais

Buscando estudar a influência das tensões residuais no comportamento estrutural de pilares de aço, a formulação teórica apresentada no Capítulo 3 será modificada para que a presença dessas tensões seja considerada.

Conforme apresentado no item “3.7 – Equações de Equilíbrio”, o equilíbrio do elemento pode ser formulado através do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PVT), cujo trabalho interno é definido como:

$$\delta w_i = \int_{V_r} \sigma \delta \varepsilon dV_r \quad (5.1)$$

onde  $\sigma$  é a tensão normal de uma fibra,  $\delta \varepsilon$  é a deformação virtual de uma fibra e  $dV_r$  é o elemento de volume da seção transversal na configuração de referência.

Na formulação deste trabalho, será admitido que a tensão normal  $\sigma$  já leva em conta a presença de tensões residuais  $\sigma_r$  na seção transversal. Assim, a tensão normal pode ser reescrita como a soma de duas parcelas:

$$\sigma = \sigma_r + D\varepsilon \quad (5.2)$$

Como as tensões residuais que aparecem nos perfis de aço devido ao processo de fabricação são auto-equilibradas, isto é, elas se distribuem na seção transversal de modo que as resultantes de forças normal ( $N_r$ ) e momentos fletores ( $M_r$ ), na seção considerada, sejam nulas:

$$\begin{aligned} N_r &= \int_{A_r} \sigma_r dA_r = 0 \\ M_r &= - \int_{A_r} \sigma_r y_r dA_r = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Assim, a força normal e o momento fletor resultantes na seção podem ser determinados como:

$$\begin{aligned} N &= \int_{A_r} \sigma dA_r = \int_{A_r} \sigma_r dA_r + \int_{A_r} D\varepsilon dA_r = \int_{A_r} D\varepsilon dA_r \\ M &= - \int_{A_r} \sigma y_r dA_r = - \int_{A_r} \sigma_r y_r dA_r - \int_{A_r} D\varepsilon y_r dA_r = - \int_{A_r} D\varepsilon y_r dA_r \end{aligned} \quad (5.4)$$

Portanto, as expressões de  $N$  e  $M$ , considerando-se o efeito das tensões residuais, são as mesmas obtidas pelas Eqs. (3.142) e (3.147), respectivamente. E toda a formulação subsequente é equivalente àquela apresentada no Capítulo 3.

## 5.6 Implementação das Tensões Residuais

Tendo em vista as distribuições das tensões residuais nas mesas e alma dos perfis laminados e soldados, conforme indicadas nas FIGs. 5.3, 5.5 e 5.6, a literatura técnica

tem adotado, de forma simplificada, as distribuições parabólica ou linear, de acordo com a FIG. 5.9. Para a implementação computacional, seguindo a Eq. (5.2),  $\sigma = \sigma_r + D.\varepsilon$ , as tensões residuais são previstas como dados de entrada e atribuídas a cada fatia da seção transversal dos elementos, sendo adicionadas automaticamente às tensões normais durante a análise.

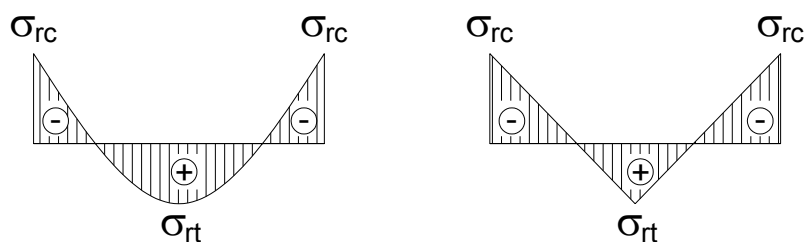


FIGURA 5. 9 – Distribuição simplificada para as tensões residuais dos tipos (a) parabólico e (b) linear

### 5.6.1 Pré-Processador

Caso o perfil em questão apresente tensões residuais, deve-se escolher entre o tipo de distribuição linear, parabólica ou qualquer, para os casos de perfis laminados ou soldados. As tensões residuais são calculadas na metade da largura de cada fatia da seção transversal.

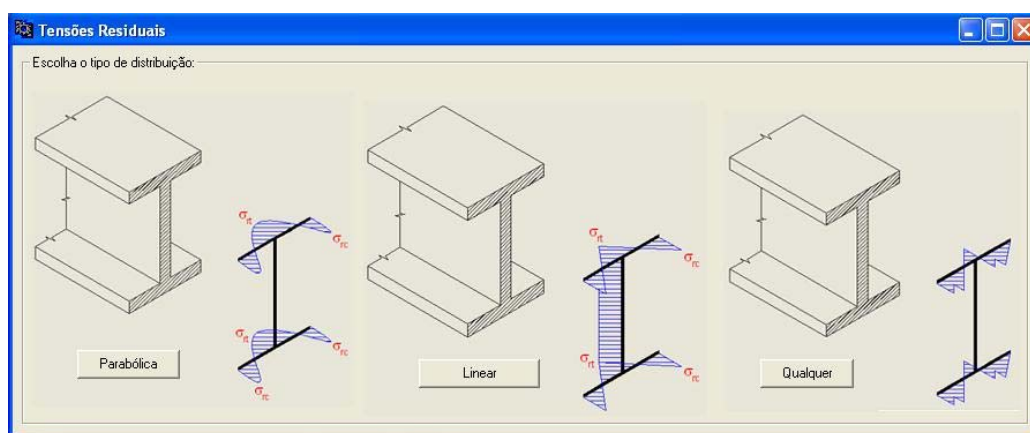


FIGURA 5. 10 – Tensões residuais

### Tensões Residuais Lineares nas Mesas

A tensão residual máxima de compressão nas extremidades das mesas ( $\sigma_{rc}$ ) e o tipo de distribuição adotado na alma que pode ser nula, constante ou linear, permitem o cálculo automático do valor da tensão residual a ser aplicada em cada fatia.

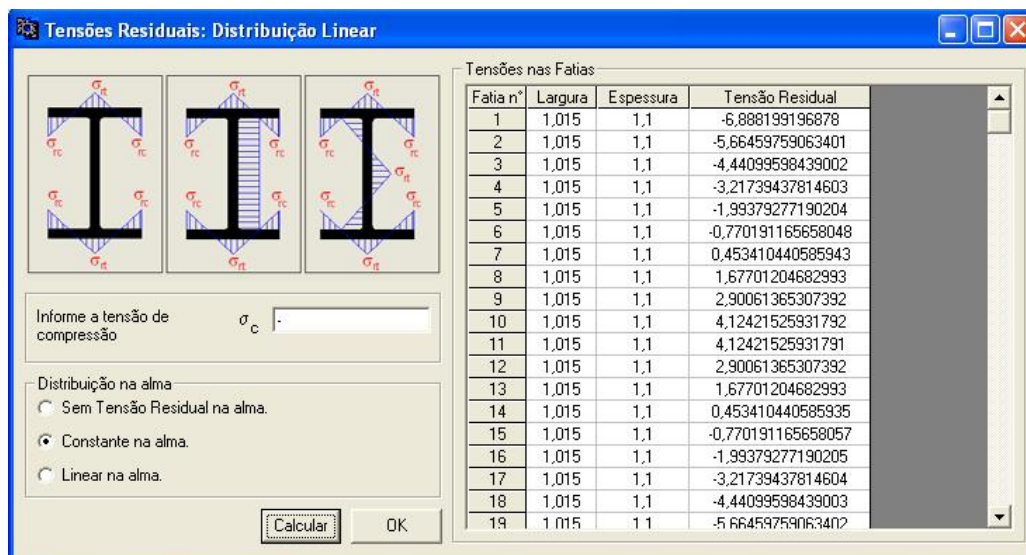


FIGURA 5. 11 – Distribuição linear para as tensões residuais

### Tensões Residuais Parabólicas nas Mesas

Analogamente ao caso linear, as tensões residuais a serem aplicadas em cada fatia são função da máxima tensão residual de compressão ( $\sigma_{rc}$ ) e do tipo de distribuição adotado na alma, que pode ser nula, constante ou parabólica.

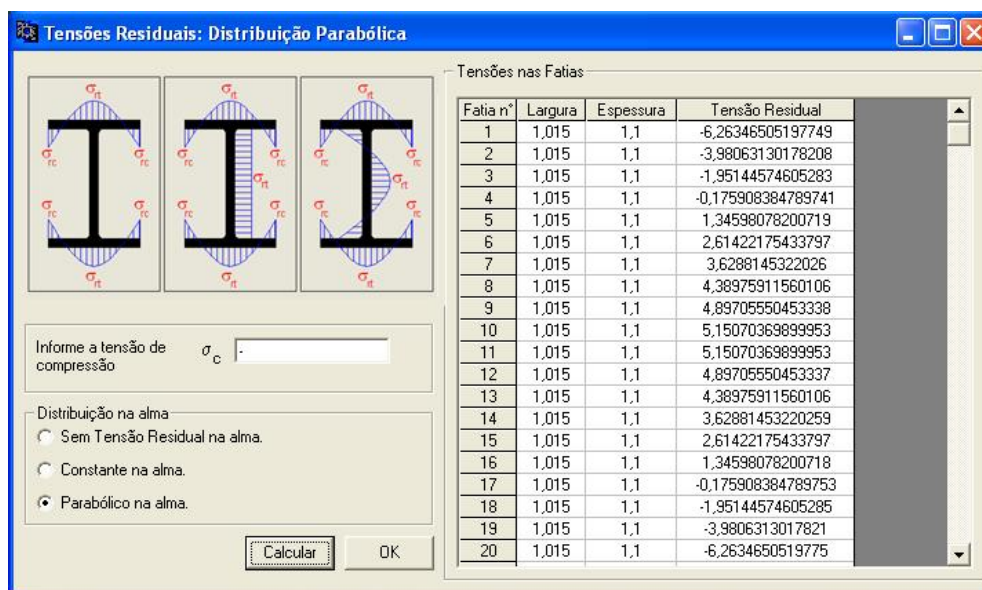


FIGURA 5. 12 – Distribuição parabólica para as tensões residuais

# 6

## APLICAÇÕES NUMÉRICAS

### 6.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados exemplos numéricos procurando ilustrar e validar a formulação desenvolvida neste trabalho, destacando principalmente os efeitos das tensões residuais na resistência última dos sistemas estruturais.

Inicialmente, serão apresentados exemplos procurando mostrar a potencialidade da formulação na solução de problemas elásticos geometricamente não-lineares, com grandes deslocamentos, bem como na solução de problemas não-lineares físicos e geométricos, considerando a distribuição da plasticidade na seção transversal e ao longo do comprimento das barras.

Visando os conceitos da Análise Inelástica Avançada, ênfase será dada ao estudo da influência das tensões residuais, inerentes aos perfis de aço, na resistência de pilares e vigas-pilar. Calibrações serão feitas no estudo da resistência desses elementos estruturais, considerando também a influência das imperfeições geométricas iniciais, cujos resultados serão comparados com as curvas de dimensionamento à compressão e as equações de interação apresentadas no projeto de revisão da NBR 8800 – setembro 2006.



Finalmente, a validação da formulação para sua utilização como um método de Análise Avançada, será verificada através da aplicação em solução de problemas de pórticos planos, cujos resultados serão confrontados com os obtidos da literatura técnica.

Nos exemplos a seguir, admite-se que os sistemas e elementos estruturais sejam contraventados fora do plano e que, nas análises inelásticas, a relação tensão x deformação do material seja elástica-perfeitamente plástica e as seções transversais sejam compactas.

## 6.2 Treliça Plana

Neste exemplo será estudado o comportamento elástico pós-flambagem em estruturas treliçadas planas hiperestáticas, com o objetivo de mostrar a potencialidade da formulação geral deste trabalho no estudo de problemas que apresentam grandes deslocamentos, bem como validar o desenvolvimento analítico proposto para as matrizes de rigidez tangente no caso de barras formadas por nós rígido-rotulados.

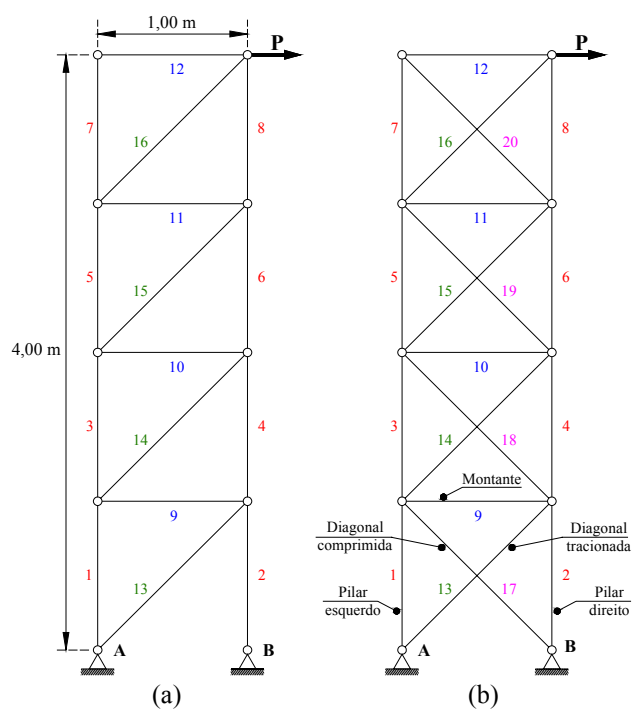


FIGURA 6.1 – Estruturas treliçadas: (a) isostática e (b) hiperestática

Para isso, serão estudadas duas estruturas treliçadas, ilustradas na FIG. 6.1, sendo uma isostática e outra hiperestática. As estruturas têm largura de 1,00m, altura total de 4,00m, dividida em 4 níveis e estão submetidas à força horizontal  $P$ , conforme indicado.

As barras indicadas de 1 a 8 representam os pilares da estrutura, as de 9 a 12, representam os montantes e as diagonais são definidas pelas barras de 13 a 20. A treliça isostática apresenta diagonal simples, enquanto a hiperestática, diagonais duplas. Todas as barras foram divididas em 8 elementos e a seção transversal em 10 fatias. O material adotado foi o aço cujo módulo de elasticidade é  $E = 20500 \text{ kN/cm}^2$ .

A TAB. 6.1 apresenta os dados referentes à seção transversal das barras, bem como seus índices de esbeltez, cargas teóricas de escoamento e de flambagem elástica. Com o propósito meramente didático, foram adotadas seções transversais quadradas para as barras da estrutura.

TABELA 6. 1 – Dados das barras constituintes das estruturas treliçadas

Tipo de elemento	Seção transversal (cm <sup>2</sup> )	Esbeltez	Carga de escoamento (kN)	Carga de flambagem elástica (kN)
Pilar	(5,0 x 5,0)	69,28	625,00	1.053,79
Montante	(4,0 x 4,0)	86,60	400,00	431,63
Diagonal	(3,0 x 3,0)	163,30	225,00	68,29

Considerando-se a análise elástica geometricamente não-linear a ser realizada, foi adotada carga  $P_{m\acute{a}x} = 156,25 \text{ kN}$ , incrementada gradativamente de 1,00%, admitindo-se que os elementos permaneçam elásticos durante todo o processo de análise e que a estrutura esteja contraventada fora do plano da figura.

Visando validar o desenvolvimento analítico deste trabalho, a estrutura isostática foi analisada em teoria de primeira ordem elástica (análise elástica linear), por meio do programa desenvolvido com a presente formulação e do programa FTOOL desenvolvido por MARTHA (2002). A TAB. 6.2 apresenta as forças normais de compressão (-) para a barra 2 (pilar direito) e de tração para a barra 13 (diagonal

tracionada), situadas no nível adjacente aos apoios, mostrando a excelente correlação entre os resultados.

TABELA 6.2 – Forças normais para a estrutura isostática em kN

$P/P_{máx}$	Presente formulação		$P/P_{máx}$	Programa FTOOL	
	Pilar direito (barra 2)	Diagonal tracionada (barra 13)		Pilar direito (barra 2)	Diagonal tracionada (barra 13)
10%	-62,50	22,10	10%	-62,50	22,10
20%	-124,98	44,19	20%	-125,00	44,19
30%	-187,46	66,29	30%	-187,50	66,29
40%	-249,92	88,38	40%	-250,00	88,39
50%	-312,38	110,47	50%	-312,50	110,49
55%	-343,61	121,52	55%	-343,75	121,53
60%	-374,83	132,56	60%	-375,00	132,58
61%	-381,07	134,77	61%	-381,25	134,79
62%	-387,32	136,98	62%	-387,50	137,00
65%	-406,05	143,61	65%	-406,25	143,63
70%	-437,26	154,66	70%	-437,50	154,68
80%	-499,69	176,75	80%	-500,00	176,78
90%	-562,11	198,83	90%	-562,50	198,87
100%	-625,00	221,00	100%	-625,00	220,97

TABELA 6.3 – Forças normais para a estrutura hiperestática em kN

$P/P_{máx}$	Força normal			Somatório das forças normais nas diagonais
	Pilar direito (barra 2)	Diagonal tracionada (barra 13)	Diagonal comprimida (barra 17)	
10%	-54,68	11,05	-11,05	22,10
20%	-109,35	22,09	-22,10	44,19
30%	-164,01	33,14	-33,16	66,29
40%	-218,66	44,18	-44,21	88,39
50%	-273,30	55,24	-55,25	110,49
55%	-300,65	60,80	-60,73	121,53
60%	-328,27	66,76	-65,82	132,58
61%	-333,99	68,22	-66,57	134,79
62%	-339,84	69,88	-67,11	137,00
65%	-358,02	75,73	-67,89	143,62
70%	-388,95	86,37	-68,28	154,65
80%	-451,19	108,19	-68,52	176,71
90%	-513,53	130,16	-68,61	198,77
100%	-582,12	152,34	-68,66	221,00

Considerando-se a análise elástica geometricamente não-linear com grandes deslocamentos, a TAB. 6.3 apresenta as forças normais da estrutura hiperestática para as barras comprimidas 2 (pilar direito) e 17 (diagonal comprimida) e para a barra tracionada 13 (diagonal tracionada), situadas no nível adjacente aos apoios.

Pode-se observar que a força normal é praticamente igual entre as diagonais até 55% de  $P_{máx}$ . A partir de 60%, a força normal na diagonal comprimida (barra 17) aproxima-se da sua carga teórica de flambagem ( $P_e = 68,29$  kN) e o acréscimo de carga passa a ser absorvido, em sua maioria, pela diagonal tracionada (barra 13). A coluna da TAB. 6.3 indicando o somatório, em módulo, das forças normais nas diagonais representa o valor total da força normal atuante na diagonal da estrutura isostática.

A TAB. 6.4 mostra o acréscimo das forças normais nas diagonais tracionada e comprimida para cada incremento de 10% em  $P/P_{máx}$ . Observa-se que, a partir de 60%, há uma tendência da diagonal comprimida não mais absorver tais acréscimos, que serão distribuídos para a diagonal tracionada, caracterizando o comportamento pós-flambagem. Em termos práticos, quando a diagonal comprimida flamba, considera-se o sistema como isostático e a diagonal tracionada passa a receber todo o esforço adicional.

TABELA 6.4 – Acréscimo das forças normais nas diagonais em kN

$P/P_{máx}$ (%)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
<b>Tração</b>	11,05	11,05	11,04	11,04	11,06	11,52	19,61	21,82	21,97	22,18
<b>Compressão</b>	11,05	11,05	11,05	11,05	11,04	10,57	2,46	0,24	0,09	0,05

O comportamento pós-flambagem da diagonal comprimida (barra 17) pode ser ilustrado pela FIG. 6.2 com base nos dados da TAB. 6.5, que relacionam os acréscimos de carga  $P/P_{máx}$  com os deslocamentos horizontais do ponto médio da diagonal. O comportamento é geometricamente não-linear, com pequenos deslocamentos, até aproximadamente 50% de carga. Na vizinhança da carga de flambagem até  $P_{máx}$ , o sistema tende a apresentar grandes deslocamentos indicando o comportamento teórico sempre estável da diagonal comprimida. No intervalo de 50% a 100% de carga, o deslocamento cresceu cerca de 19,4 vezes.

TABELA 6.5 – Deslocamento horizontal do ponto médio da diagonal comprimida a cada 10% de  $P_{máx}$

$P/P_{máx}$	10%	20%	30%	40%	50%
Deslocamento (cm)	0,0129	0,0266	0,0417	0,0600	0,0897
$P/P_{máx}$	60%	70%	80%	90%	100%
Deslocamento (cm)	0,2354	0,8133	1,1862	1,4736	1,7403

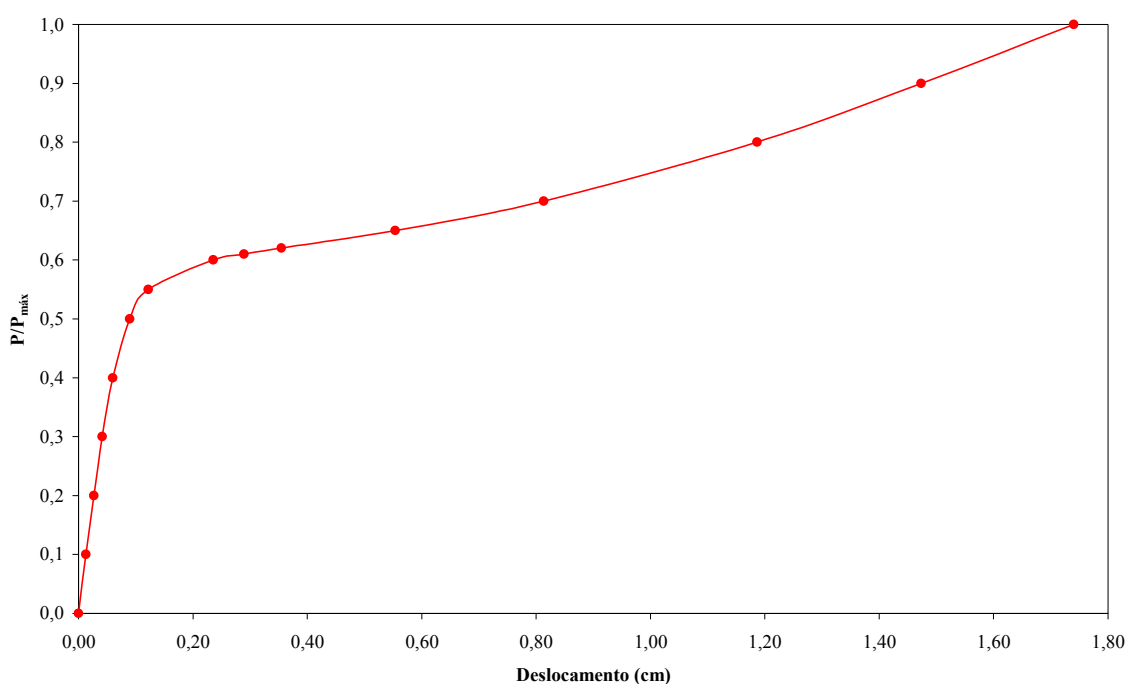


FIGURA 6.2 – Comportamento pós-flambagem da diagonal comprimida

O gráfico parâmetro de carga x deslocamento no topo da estrutura da FIG. 6.3, traçado com base nos dados da TAB. 6.6, que mostra o deslocamento horizontal do nó de aplicação da carga, em função da relação de carga  $P/P_{máx}$ , ilustra o comportamento de ambas as estruturas. A estrutura isostática tem comportamento elástico-linear dentro de toda a faixa de carregamento, apresentando maiores deslocamentos se comparada com a estrutura hiperestática.

A estrutura hiperestática, mais rígida, comporta-se linearmente até aproximadamente 50% do carregamento. A partir daí, observa-se claramente a mudança no comportamento causada pela diminuição da rigidez das diagonais comprimidas quando se aproximam de suas cargas teóricas de flambagem. Para grandes deslocamentos, ou

seja, a partir de 80% do carregamento, a contribuição das diagonais na rigidez da estrutura limita-se às diagonais tracionadas e a estrutura hiperestática passa a comportar-se similarmente ao caso isostático.

TABELA 6.6 – Deslocamento horizontal no nó de aplicação da carga, para os casos isostático e hiperestático, em centímetros

$P/P_{m\acute{a}x}$	Treliça isostática	Treliça hiperestática	$P/P_{m\acute{a}x}$	Treliça isostática	Treliça hiperestática
10%	0,2443	0,1770	61%	1,4902	1,0836
20%	0,4885	0,3541	62%	1,5147	1,1040
30%	0,7328	0,5310	65%	1,5880	1,1697
40%	0,9771	0,7080	70%	1,7102	1,2873
50%	1,2215	0,8850	80%	1,9545	1,5295
55%	1,3436	0,9737	90%	2,1989	1,7730
60%	1,4658	1,0642	100%	2,4430	2,0411

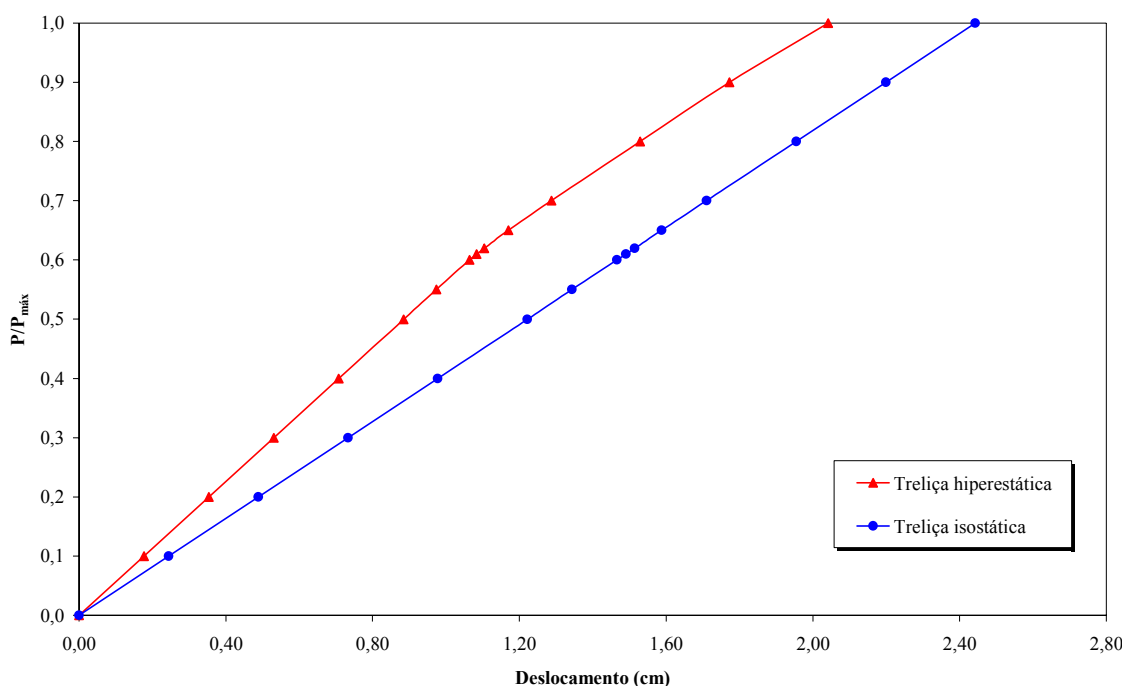


FIGURA 6.3 – Gráfico parâmetro de carga x deslocamento horizontal no ponto de aplicação da carga, para os casos isostático e hiperestático

### 6.3 Vigas

#### a) Exemplo V1 – Viga biengastada com carga concentrada no meio do vão.

No exemplo a seguir, adaptado de CHEN e TOMA (1994), estuda-se o comportamento elastoplástico de uma viga biengastada com carga concentrada no meio do vão, conforme mostra a FIG. 6.4, com o objetivo de calibrar o número de elementos e de fatias da seção transversal, visando uma melhor precisão dos resultados.

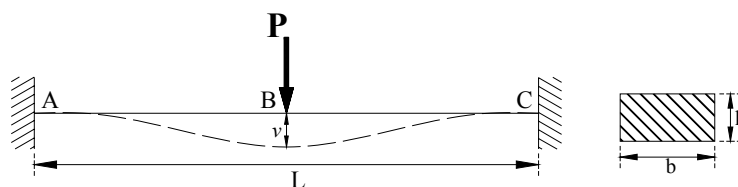


FIGURA 6.4 – Viga biengastada com carga concentrada no meio do vão

A seção transversal retangular tem dimensões  $(1,0 \times 0,527) \text{ in}^2 = (2,54 \times 1,34) \text{ cm}^2$ , respectivamente, largura e altura, e será dividida em 6, 8, 10 e 20 fatias. O comprimento total da viga  $L = 9,75 \text{ in} = 24,77 \text{ cm}$ , será dividido em 6, 8, 10, 16 e 20 elementos. O aço adotado tem módulo de elasticidade  $E = 3 \times 10^7 \text{ lb/in}^2 = 21.092,09 \text{ kN/cm}^2$  e tensão de escoamento  $\sigma_y = 33700 \text{ lb/in}^2 = 23,69 \text{ kN/cm}^2$ .

O colapso plástico clássico, do caso em questão, ocorrerá para o carregamento  $P_p = 8M_p / L = 8,71 \text{ kN}$ , com a formação simultânea de rótulas plásticas nas seções A, B e C. Este exemplo caracteriza-se pela mudança do estado de tensões nas rótulas plásticas, de flexão simples para um estado de tensões aproximando-se da tração pura, quando a viga sofre grandes deslocamentos, se enrijece, tornando-se, essencialmente, uma treliça de duas barras.

A FIG. 6.5 apresenta o gráfico dos parâmetros carregamento  $(P/P_p)$  x deslocamento medido no meio do vão  $(v/h)$ , para os cinco casos adotados na divisão da viga em elementos, considerando-se a seção transversal dividida em 10 fatias. Pode-se observar

que todas as divisões representaram praticamente o mesmo comportamento para a viga. Após atingir a carga teórica de colapso os deslocamentos crescem significativamente, caracterizando um comportamento típico de treliça.

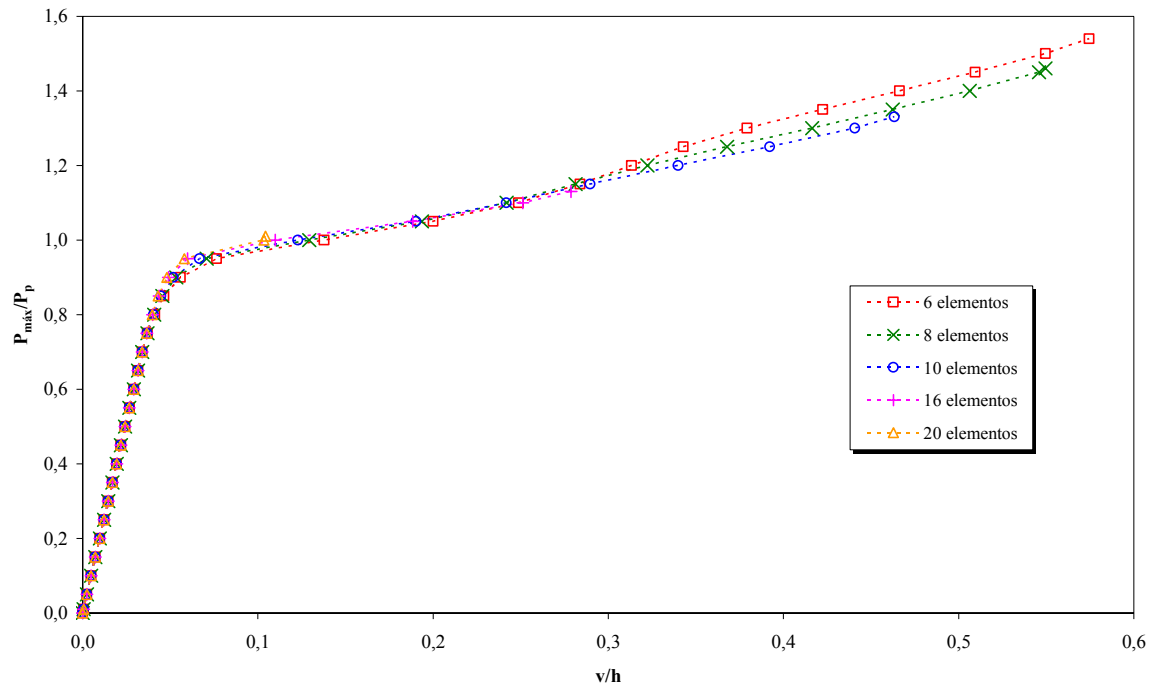


FIGURA 6.5 – Calibração do número de elementos

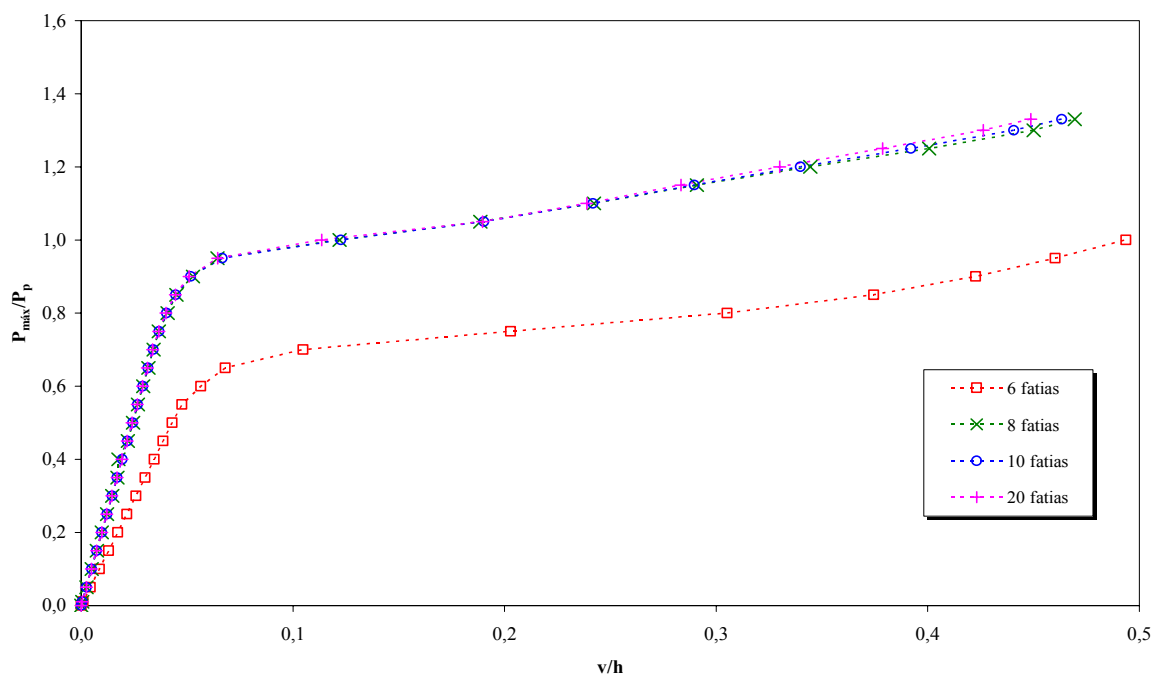


FIGURA 6.6 – Calibração do número de fatias



A FIG. 6.6 permite avaliar a influência do número de fatias da seção transversal no estudo do comportamento da viga. Observa-se que são necessárias no mínimo oito fatias para modelar com precisão a plastificação gradual que ocorre no modelo com dez elementos. A divisão em seis fatias não se mostrou satisfatória para descrever o comportamento da viga.

Assim, nos exemplos a seguir as barras serão divididas em pelo menos dez elementos e a seção transversal em oito fatias, desde que as tensões residuais não sejam consideradas.

#### b) Exemplo V2 – Viga biapoiada com carga concentrada no meio do vão.

Este exemplo tem como objetivos mostrar a plastificação gradual ao longo da altura da seção, bem como a distribuição da plastificação ao longo do comprimento da viga. Considera-se a viga biapoiada com seção retangular (10,0x40,0)cm e vão  $L = 10,0$  m, conforme indica a FIG 6.7, sujeita à carga concentrada  $P = 400$  kN, correspondente à carga teórica de colapso plástico  $P_p = 4M_p / L$ . O vão foi dividido em 20 elementos e a seção transversal em 8 fatias. O aço adotado tem módulo de elasticidade  $E = 20.500$  kN/cm<sup>2</sup> e tensão de escoamento  $\sigma_y = 25$  kN/cm<sup>2</sup>.

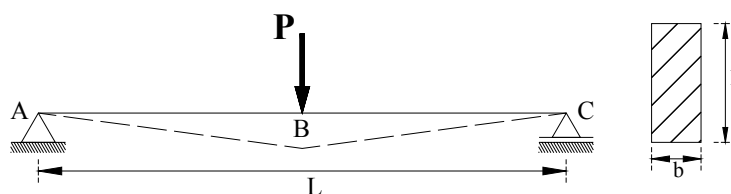


FIGURA 6.7 – Viga biapoiada com carga concentrada no meio do vão

A TAB. 6.7 mostra a distribuição longitudinal da plastificação em função do acréscimo de carga, onde devido à simetria do problema, são mostrados apenas os elementos situados à esquerda do carregamento que apresentam fatias plastificadas. Para cada

elemento, os nós 1 e 2 são respectivamente, o nó da esquerda e o nó da direita do elemento.

TABELA 6.7 – Distribuição longitudinal da plastificação

		Número de fatias elásticas nas extremidades do elemento:							
% Carga		75,0	75,1	83,4	87,6	93,8	95,9	97,3	100,0
elemento 8	nó 1	8	8	8	8	8	8	8	8
	nó 2	8	8	8	8	6	6	6	6
elemento 9	nó 1	8	8	8	8	6	6	6	6
	nó 2	8	8	6	6	6	6	4	4
elemento 10	nó 1	8	8	8	6	6	4	4	0
	nó 2	8	6	6	4	4	2	2	0

### Propagação gradual da plastificação na seção transversal

Pode-se observar na FIG. 6.8, com o auxílio da TAB. 6.7 (nó 2 do elemento 10), que até 75,0% do carregamento o comportamento da viga é elástico. Com acréscimo de 0,1%, as fatias mais externas escoam. Como se trata de um caso de flexão simples, as fatias tracionadas e comprimidas plastificam-se simultaneamente. Com o aumento do esforço solicitante, a plastificação propaga-se verticalmente em direção ao centro da seção transversal, até a plastificação total em 100,0% da carga de colapso  $P_P$ , desenvolvendo a rótula plástica na seção central (B).

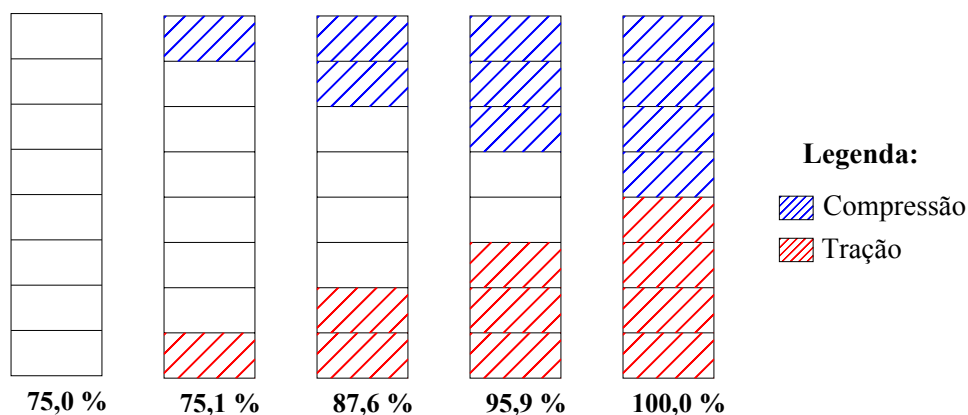


FIGURA 6.8 – Propagação gradual da plastificação transversal na seção central

### Distribuição longitudinal da plastificação

A distribuição da plastificação ao longo do comprimento da barra ocorre gradualmente à medida que o carregamento é incrementado. Seguindo o comportamento clássico de colapso plástico, a plastificação inicia-se na seção central, onde o momento fletor é máximo, e propaga-se para as seções adjacentes.

Com auxílio dos dados da TAB. 6.7, a FIG. 6.9 mostra graficamente a distribuição longitudinal da plastificação da viga biapoiada para 100,0% de carga, no instante da formação do mecanismo de colapso. Observa-se que os elementos 10 e 11 (seção central) encontram-se totalmente plastificados, os elementos 8, 9, 12 e 13 na fase elastoplástica, enquanto os demais continuam na fase elástica.

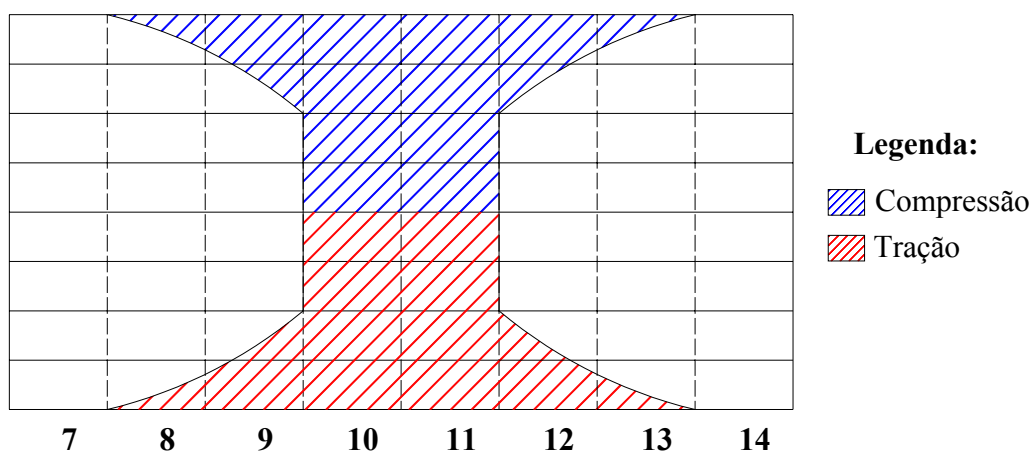


FIGURA 6.9 – Distribuição longitudinal da plastificação nos elementos centrais para 100% de carga

A FIG. 6.9 mostra a distribuição longitudinal da plastificação nos elementos centrais para 100% de carga. Conforme ilustrado na FIG. 2.2 (Capítulo 2), as fatias escoadas variam segundo curvas parabólicas a partir da região central da viga. Sabendo-se que o fator de forma para a seção retangular é 1,5, o comprimento teórico da zona de escoamento ( $\Delta L$ ) para o caso estudado é 3,33m. Neste exemplo, como a viga foi dividida em 20 elementos, o comprimento obtido da plastificação é igual a 3,00m.

## 6.4 Pilares

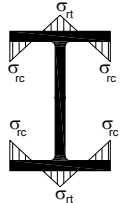
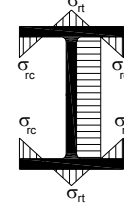
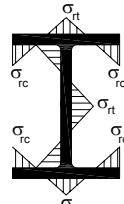
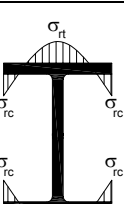
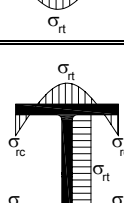
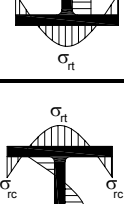
### 6.4.1 Influência das Tensões Residuais

Como já estudado no Capítulo 5, os perfis estruturais de aço, soldados e laminados, possuem tensões residuais provenientes do processo de fabricação devido ao resfriamento não uniforme da peça. Essas tensões residuais têm um papel importante no dimensionamento dos pilares de aço, pois sendo a principal causa da não-linearidade do diagrama tensão x deformação na região inelástica, afetam significativamente sua resistência na compressão. A magnitude e distribuição dessas tensões dependem do tipo de seção transversal e do processo de fabricação, não sendo possível definir uma distribuição única para todos os perfis.

Conforme ilustram as FIGs. 5.3, 5.5 e 5.6, a literatura técnica tem adotado, de forma simplificada, as distribuições parabólica ou linear, de acordo com a FIG. 5.9, para as distribuições das tensões residuais dos perfis laminados e soldados. Vários pesquisadores (CHEN e TOMA, 1994; CHEN et al., 1996; ECCS,1976; KIM e CHEN, 1996a, 1996b; KANCHANALAI, 1977, entre outros) têm adotado a distribuição linear nas mesas e comportamento constante na alma. Entretanto, para perfis altos, a variação das tensões ao longo da alma deve ser também considerada. Assim, uma boa aproximação seria considerar distribuições parabólicas ou lineares, tanto nas mesas, quanto na alma.

Como as tensões residuais que aparecem nos perfis de aço são auto-equilibradas, a TAB. 6.8 apresenta expressões da relação entre as tensões residuais de tração  $\sigma_{rt}$  (+) e de compressão  $\sigma_{rc}$  (-), segundo os tipos de distribuição que serão estudados no presente trabalho.

TABELA 6. 8 – Tipos de distribuição das tensões residuais

Configuração	Distribuição		Tensão residual de tração $\sigma_{rt}$
	Mesas	Alma	
	Linear	Sem TR	$\sigma_{rt} = -\sigma_{rc}$
	Linear	Constante	$\sigma_{rt} = -\frac{t_f b_f}{t_f b_f + t_w d_w} \sigma_{rc}$ onde: $d_w = d - 2t_f$
	Linear	Linear	$\sigma_{rt} = -\sigma_{rc}$
	Parabólica	Sem TR	$\sigma_{rt} = -\frac{\sigma_{rc}}{2}$
	Parabólica	Constante	$\sigma_{rt} = -\frac{2t_f b_f}{4t_f b_f + 3t_w d_w} \sigma_{rc}$
	Parabólica	Parabólica	$\sigma_{rt} = -\frac{t_f b_f + t_w d_w}{4t_f b_f + t_w d_w} 2\sigma_{rc}$

onde:  $b_f$  e  $t_f$  são a largura e a espessura das mesas;  $d_w$  e  $t_w$  são a altura e a espessura da alma;  $d$  é a altura total do perfil.

### a) Exemplo TR1 – Influência da distribuição das tensões residuais

O objetivo deste exemplo é analisar a influência das diversas distribuições das tensões residuais no comportamento e na resistência última de pilares de aço, considerando a flexão em torno dos eixos de maior e menor inércia.

Assim, tomando-se como referência o perfil laminado **W200x46,1**, padrão GERDAU-AÇOMINAS<sup>2</sup>, será analisado um pilar bi-rotulado com os seguintes índices de esbeltez 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180 e 200, cujo comprimento foi dividido em 10 elementos. A seção transversal foi dividida em 50 fatias, sendo 20 fatias para cada mesa e 10 para a alma e o aço escolhido tem módulo de elasticidade  $E = 20500 \text{ kN/cm}^2$  e tensão de escoamento  $\sigma_y = 25 \text{ kN/cm}^2$ . O valor da tensão residual de compressão máxima  $\sigma_{rc}$  foi adotado como sendo  $0,3\sigma_y$ , conforme estudam CHEN e TOMA (1994), CHEN et al. (1996), KIM e CHEN (1996a, 1996b), KANCHANALAI (1977), entre outros. O carregamento foi incrementado gradativamente de 0,5% até a carga de escoamento do perfil  $P_y = 1442,30\text{kN}$ .

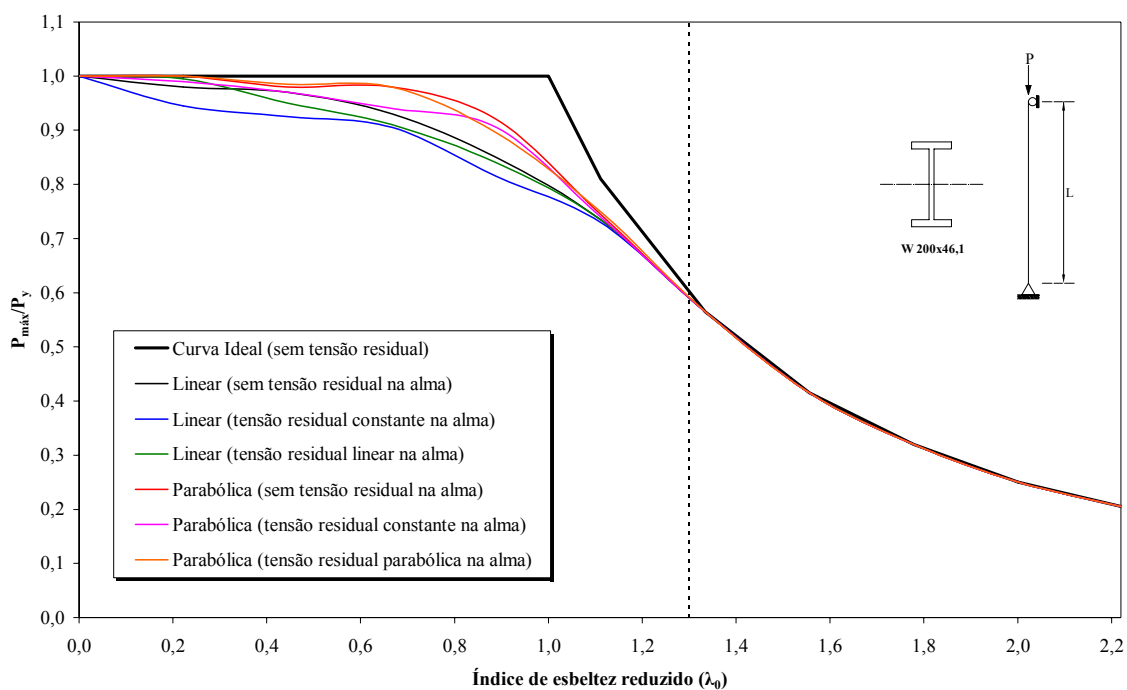


FIGURA 6.10 – Curvas de resistência última das diferentes distribuições de tensões residuais para o eixo de maior inércia

As FIGs. 6.10 e 6.11 mostram os gráficos das curvas de resistência última,  $P/P_y$  x índice de esbeltez reduzido ( $\lambda_0 = \lambda/\lambda_{lim}$ ), segundo os vários tipos de distribuição das tensões residuais da TAB. 6.8, para os eixos de maior e menor inércia, respectivamente. A curva ideal, representativa do pilar livre de tensões residuais, delimita, através do índice de esbeltez reduzido  $\lambda_0 = 1,0$  ( $\lambda_{lim} \cong 90$ ), as regiões de flambagem elástica ( $\lambda_0 \geq 1,0$ ) e inelástica ( $\lambda_0 \leq 1,0$ ). Observa-se que as tensões residuais reduzem significativamente a resistência dos pilares, principalmente na região não elástica, que fica ampliada para a faixa de  $0,0 \leq \lambda_0 \leq 1,3$ . Obviamente, o efeito das tensões residuais é nulo para índices de esbeltez reduzidos superiores a 1,3, quando ocorre a flambagem elástica.

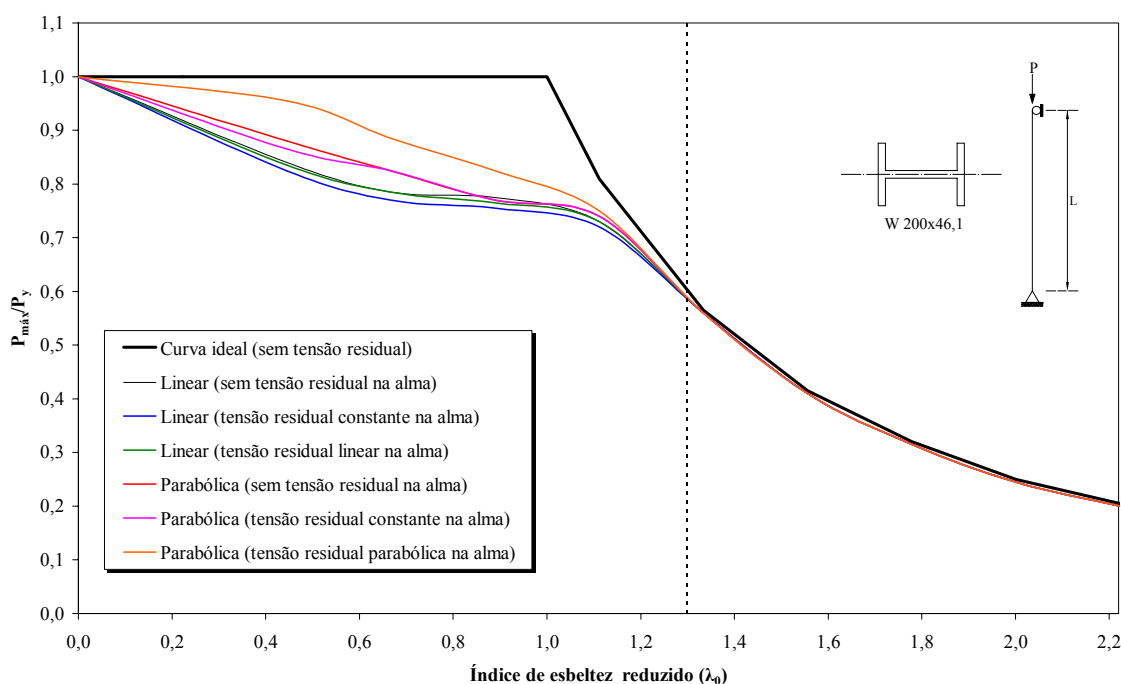


FIGURA 6.11 – Curvas de resistência última das diferentes distribuições de tensões residuais para o eixo de menor inércia

Comparando-se as FIGs. 6.10 e 6.11, conclui-se que as tensões residuais são mais desfavoráveis para a flexão em torno do eixo de menor inércia, onde a diminuição da rigidez é mais acentuada. Considerando a flexão em torno do eixo de maior inércia (FIG. 6.10), as tensões residuais têm uma maior influência na faixa de esbeltez  $0,4 \leq \lambda_0 \leq 1,2$ , enquanto para o eixo de menor inércia (FIG. 6.11), essa influência se

estende de  $0,2 \leq \lambda_0 \leq 1,2$ . Finalmente, pode-se observar que a distribuição linear das tensões residuais nas mesas é mais desfavorável do que a distribuição parabólica e que, dentre todas, a combinação linear nas mesas com o comportamento constante na alma mantém-se mais conservadora, conforme também concluem CHEN et al. (1996).

### b) Exemplo TR2 – Calibração do número de fatias nas mesas e na alma

Neste exemplo serão apresentados os resultados visando à calibração do número mínimo de fatias a ser utilizado nas mesas e na alma dos perfis, em função da presença das tensões residuais. Os dados do exemplo anterior, relativos ao perfil adotado, pilar bi-rotulado e material, são os mesmos. Somente o eixo de maior inércia foi estudado.

Para a calibração das mesas adotou-se a distribuição linear nas mesas sem tensão residual na alma. A seção transversal foi dividida em 26, 30, 50 e 70 fatias, sendo mantidas 10 fatias constantes para a alma e as restantes divididas igualmente entre as mesas superior e inferior (8, 10, 20 e 30, respectivamente). Para a calibração da alma adotou-se a distribuição linear tanto para as mesas quanto para a alma. Foram estabelecidas 20 fatias para cada mesa e 8, 10, 20 e 30 fatias para a alma.

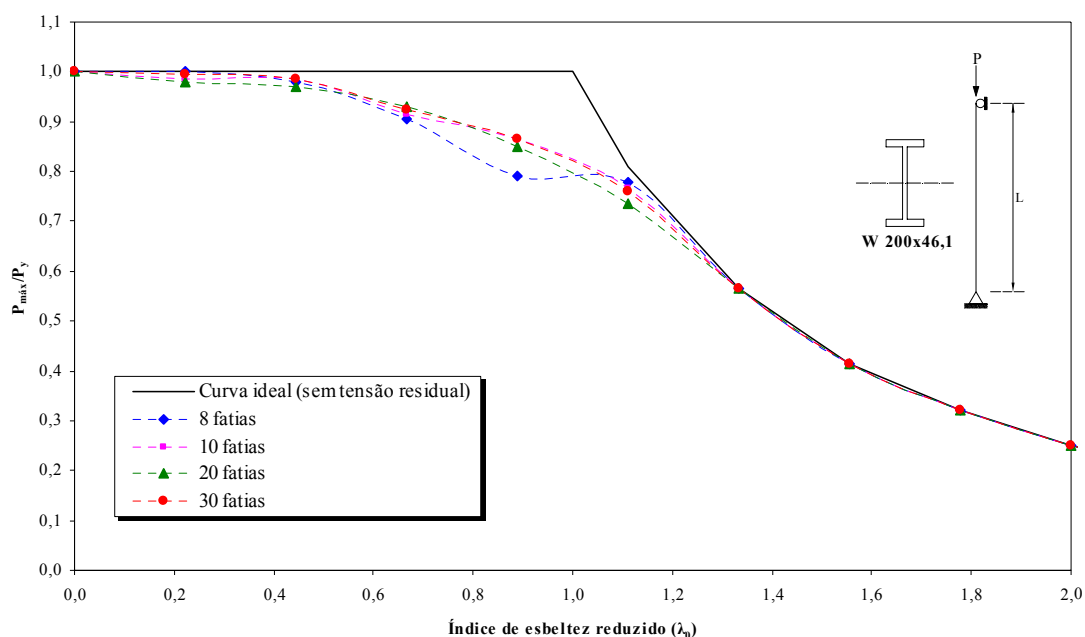


FIGURA 6.12 – Calibração do número mínimo de fatias nas mesas



A FIG. 6.12 mostra a curva de resistência última,  $P/P_y$  x índice de esbeltez reduzido ( $\lambda_0$ ), considerando as diversas divisões em fatias das mesas. Observa-se comportamento semelhante entre as curvas, exceto para o caso de oito fatias, que apresentou distorção para  $\lambda_0 = 0,9$ . Dessa forma, a divisão em 20 fatias, será, em geral, adotada neste trabalho.

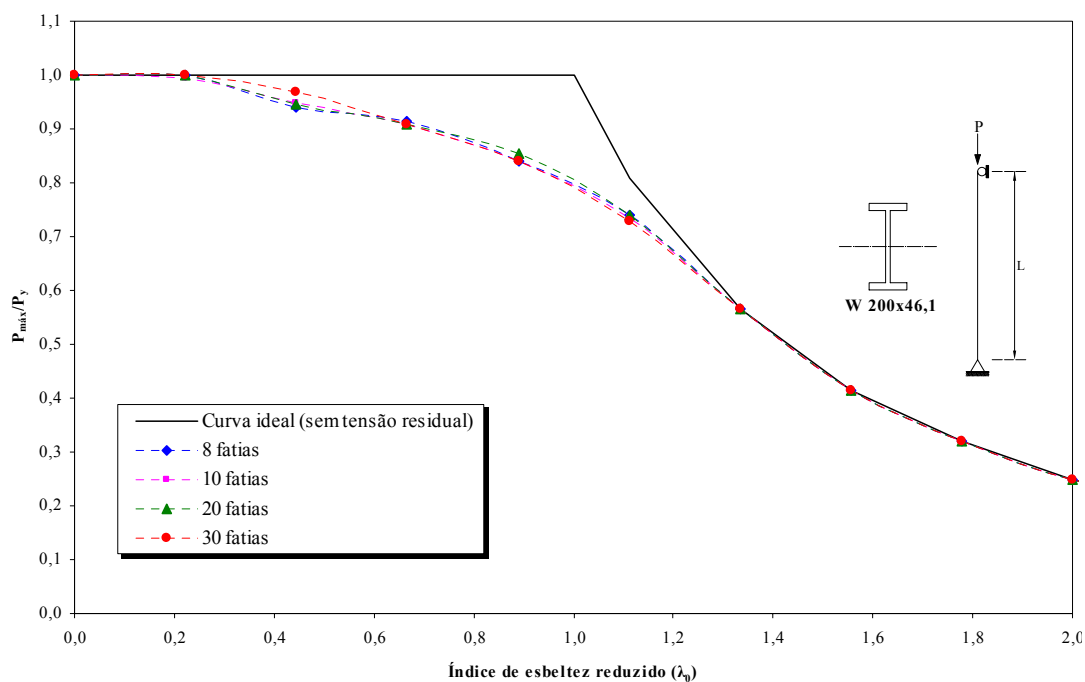


FIGURA 6.13 – Calibração do número mínimo de fatias na alma

Para a alma, de acordo com a FIG. 6.13, todas as divisões foram satisfatórias para o estudo da influência das tensões residuais. Assim, o número mínimo de 10 fatias para a alma será adotado nos diversos exemplos apresentados.

#### 6.4.2 Influência das Imperfeições Iniciais

Outro fator importante que tem influência significativa na resistência dos pilares é a sua imperfeição geométrica inicial. Essas imperfeições aparecem durante o processo de fabricação industrial dos pilares, quando ocorrem desvios significativos em seu eixo reto.

Conforme GALAMBOS (1988), a configuração real da curvatura inicial de um pilar pode ser bastante variável, podendo apresentar curvaturas simples, duplas, reversas e mesmo, curvaturas em ambas as direções principais da seção transversal do perfil (ECCS, 1976). Também a amplitude das imperfeições iniciais pode variar bastante ao longo do pilar.

Nas análises teóricas deste trabalho, a curvatura inicial será aproximada pelas formas linear, parabólica e senoidal, com a máxima amplitude da imperfeição inicial ocorrendo no meio do vão, tomada igual a  $L/1000$ , onde  $L$  é o comprimento do pilar. As curvas de resistência última dos pilares, calculadas dessa forma, têm apresentado resultados muito próximos daqueles encontrados nos ensaios realizados em laboratório.

A seguir, apresenta-se o estudo de um pilar elástico bi-rotulado com imperfeição geométrica inicial, através de uma formulação analítica clássica, cujos resultados serão utilizados para comparar a influência das imperfeições iniciais na resistência última, com o programa desenvolvido.

### **Teoria clássica de pilares com imperfeição inicial**

A FIG. 6.14a mostra um pilar elástico bi-rotulado, geometricamente imperfeito, com curvatura inicial apresentando uma flecha  $\delta_0$  no meio do vão. Admite-se, para simplificação de cálculo, que a curvatura inicial tenha a forma de meia curva de seno descrita por:

$$y_0 = \delta_0 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (6.1)$$

que satisfaz as condições de contorno do problema.

Considerando-se o equilíbrio de um segmento do pilar (FIG 6.14b), a equação de equilíbrio fica:

$$-M_{int} + P(y + y_0) = 0 \quad (6.2)$$

O momento interno resistente resulta somente da mudança da curvatura devido ao carregamento aplicado, já que o pilar é livre de tensões na sua posição inicialmente curva antes da aplicação da carga  $P$ , e é dado por:

$$M_{int} = -EIy'' \quad (6.3)$$

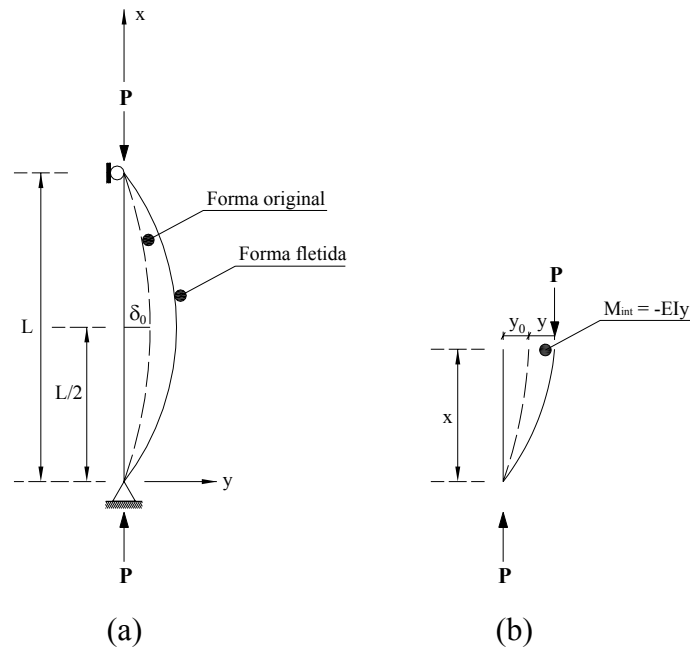


FIGURA 6.14 – Pilar elástico como imperfeição inicial

Levando-se a Eq. (6.3) na Eq. (6.2), obtém-se a equação diferencial que descreve o comportamento de um pilar bi-rotulado com curvatura inicial.

$$EIy'' + P(y + y_0) = 0 \quad (6.4)$$

Fazendo-se  $k^2 = P/EI$  e usando-se a Eq. (6.1), tem-se:

$$y'' + k^2 y = -k^2 \delta_0^2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \quad (6.5)$$

A solução geral desta equação é dada por:

$$y = A \operatorname{sen}(kx) + B \cos(kx) + \frac{P/P_e}{1 - P/P_e} \delta_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (6.6)$$

onde  $P_e$  é a carga de flambagem elástica de Euler.

Usando-se as condições de contorno  $y(0) = 0$  e  $y(L) = 0$ , determinam-se as constantes  $A$  e  $B$ :

$$\begin{cases} A \operatorname{sen}(kL) = 0 & (6.7a) \\ B = 0 & (6.7b) \end{cases}$$

Da Eq. (6.7a) tem-se duas possíveis situações: (a)  $\operatorname{sen}(kL) = 0$ , que leva à carga de flambagem de Euler  $P_e$  e (b)  $A = 0$ . Com  $A = B = 0$ , a Eq. (6.6) fica:

$$y = \frac{P/P_e}{1 - P/P_e} \delta_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (6.8)$$

A Eq. (6.8) expressa a linha elástica com relação à posição inicial curva do pilar. Para se obter a equação da linha elástica total, isto é, em relação ao eixo  $x$ , deve-se somar a Eq. (6.1) à Eq. (6.8).

$$y_t = y_0 + y \quad (6.9)$$

ou

$$y_t = \frac{1}{1 - P/P_e} \delta_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (6.10)$$

em termos de  $y_0$ :

$$y_t = \frac{1}{1 - P/P_e} y_0 \quad (6.11)$$

o que mostra que a flecha final é a flecha inicial majorada pelo fator  $1/(1 - P/P_e)$ , denominado fator de amplificação  $A_f$ .

$$A_f = \frac{1}{1 - P/P_e} \quad (6.12)$$

Segundo a Eq. (6.11), quando a carga  $P$  tende à carga de Euler  $P_e$ , o deslocamento total tende para o infinito.

O momento fletor numa seção genérica do pilar é dado por:

$$M = Py_t = P(y + y_0) \quad (6.13)$$

Com o auxílio da Eq. (6.10) ou (6.11) fica:

$$M = \left( \frac{1}{1 - P/P_e} \right) P \delta_0 \text{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) \quad \text{ou} \quad M = \left( \frac{1}{1 - P/P_e} \right) P y_0 \quad (6.14)$$

Chamando de momento de primeira-ordem, avaliado considerando a geometria inicial do pilar:

$$M_I = P y_0 \quad (6.15)$$

tem-se que:

$$M_{II} = A_f M_I \quad (6.16)$$

onde  $M_{II}$  é o momento de segunda-ordem, avaliado com base na geometria deformada.

#### a) Exemplo IMP1 – Influência das imperfeições geométricas iniciais

O objetivo deste exemplo é avaliar a influência das imperfeições geométricas iniciais na resistência e no comportamento elástico geometricamente não-linear de pilares de aço.

Novamente, será analisado o pilar bi-rotulado formado pelo perfil laminado **W200x46,1**, de comprimento  $L=15,86\text{m}$  ( $\lambda=180$ ), dividido em 10 elementos de comprimentos iguais. Serão consideradas, de forma explícita, as configurações linear, parabólica e senoidal para a elástica das imperfeições iniciais, adotando-se a flecha inicial no meio do vão  $\delta_0 = L/1000$ .

A seção transversal foi dividida em 30 fatias, sendo 10 fatias para cada mesa e 10 para a alma. O aço escolhido apresenta módulo de elasticidade  $E = 20500 \text{ kN/cm}^2$ . O carregamento foi incrementado gradativamente de 0,5% da carga de flambagem elástica de Euler,  $P_e = 360,27 \text{ kN}$ , para o eixo de maior inércia.

A FIG. 6.15 apresenta o gráfico  $P/P_e$  x deslocamento no meio do vão, mostrando o comportamento elástico geometricamente não-linear do pilar, considerando as configurações linear, parabólica e senoidal para as elásticas das imperfeições geométricas iniciais, além dos resultados da formulação analítica.

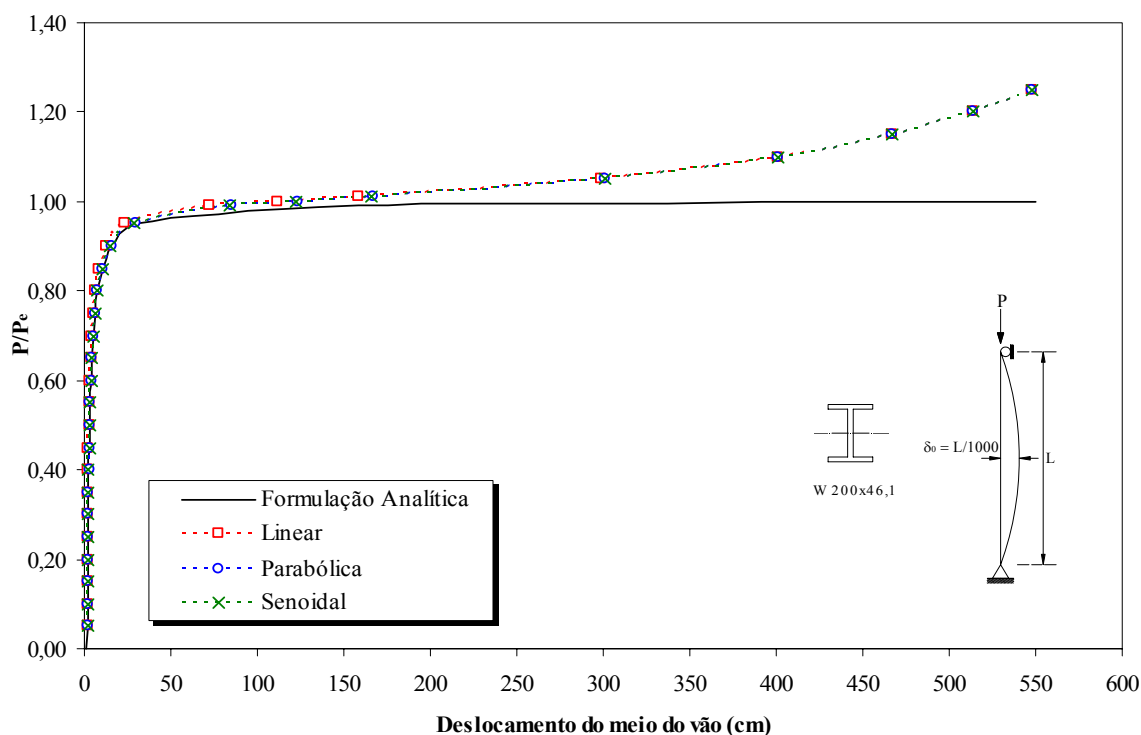


FIGURA 6.15 – Comportamento elástico considerando imperfeições geométricas iniciais

Enquanto a formulação analítica representa o comportamento até a carga crítica de flambagem, por ter sido desenvolvida em teoria de segunda ordem com pequenos deslocamentos, a presente formulação é capaz de descrever o comportamento pós-crítico da estrutura, reforçando sua potencialidade para o estudo da não-linearidade geométrica com grandes deslocamentos. Observa-se que os três tipos de configurações adotadas representam, de forma bastante satisfatória, o comportamento da estrutura durante todo o carregamento.

As TABs. 6.9 e 6.10 indicam, respectivamente, os deslocamentos e momentos fletores no meio vão, em função da relação de cargas  $P/P_e$ , considerando os resultados obtidos pela formulação analítica e pela presente formulação. Os deslocamentos da formulação analítica foram determinados segundo a Eq. (6.11) e os momentos fletores através da Eq. (6.14).

TABELA 6.9 – Deslocamentos no meio do vão em cm

$P/P_e$	Formulação Analítica (Eq. 6.11)	Presente Formulação		
		Linear	Parabólica	Senoidal
0,00	1,5860	1,5860	1,5860	1,5860
0,10	1,7622	1,7310	1,7661	1,761
0,20	1,9825	1,9116	1,9911	1,980
0,30	2,2657	2,1429	2,2800	2,260
0,40	2,6433	2,4499	2,6645	2,633
0,50	3,1720	2,8776	3,2014	3,154
0,60	3,9650	3,5151	4,0031	3,932
0,70	5,2867	4,5685	5,3298	5,218
0,80	7,9300	6,6440	7,9469	7,755
0,90	15,8600	12,6381	15,5060	15,081
0,99	158,6000	72,0758	85,4243	83,563
1,00	$\infty$	111,3470	123,7740	122,088
1,01	---	158,5850	167,3420	166,149
1,10	---	400,7560	401,4880	401,417
1,20	---	513,9100	513,8470	513,885
1,25	---	548,3390	548,1320	548,189

A formulação analítica representa satisfatoriamente o comportamento até 90% da carga crítica, quando então majora significativamente o valor da flecha e do momento fletor,

demonstrando sua limitação. A configuração senoidal é a que melhor aproxima os resultados em todo o processo de carregamento, enquanto as configurações linear e parabólica mantêm boa correlação com a mesma.

TABELA 6.10 – Momentos fletores máximos no meio do vão em kN.cm

$P/P_e$	Formulação Analítica (Eq. 6.14)	Presente Formulação		
		Linear	Parabólica	Senoidal
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,10	63,46	62,36	62,36	63,63
0,20	142,79	137,74	137,71	143,47
0,30	244,78	231,60	231,52	246,43
0,40	380,77	353,05	352,83	383,98
0,50	571,16	518,35	517,88	576,67
0,60	856,74	759,84	758,78	865,32
0,70	1.332,71	1.152,13	1.149,62	1.344,13
0,80	2.284,65	1.914,91	1.907,72	2.290,42
0,90	5.140,45	4.097,80	4.063,72	5.027,70
0,99	56.544,98	25.707,10	24.639,70	30.468,10
1,00	$\infty$	40.114,80	38.459,90	44.592,20
1,01	---	57.704,70	55.979,40	60.891,20
1,10	---	113.058,00	111.998,00	113.937,00
1,20	---	158.818,00	158.110,00	159.108,00
1,25	---	193.506,00	192.973,00	193.586,00

### b) Exemplo IMP2 – Influência das imperfeições geométricas iniciais na resistência última

Pretende-se, neste exemplo, analisar a influência das imperfeições geométricas iniciais na resistência última de pilares de aço, considerando a flexão segundo o eixo de maior inércia.

O pilar bi-rotulado, avaliado no intervalo  $0,0 \leq \lambda_0 \leq 2,2$ , foi dividido em 10 elementos de comprimentos iguais e a seção transversal do perfil **W200x46,1** em 30 fatias igualmente distribuídas entre mesas e alma. Adotou-se flecha inicial no meio do vão de  $\delta_0 = L/1000$ , para as imperfeições do tipo linear, parabólica e senoidal. O aço escolhido



tem módulo de elasticidade  $E = 20500 \text{ kN/cm}^2$  e tensão de escoamento  $\sigma_y = 25 \text{ kN/cm}^2$ . O carregamento foi incrementado gradativamente de 0,5% até atingir a carga de escoamento  $P_y = 1442,30 \text{ kN}$ .

TABELA 6.11 – Relação  $P/P_y$  x índice de esbeltez reduzido  $\lambda_0$

$\lambda$	$\lambda_0$	$P/P_y$			
		Indeformada	Linear	Parabólica	Senoidal
0	0,0	1,000	1,000	1,000	1,000
20	0,2	1,000	0,985	0,985	0,985
40	0,4	1,000	0,960	0,955	0,955
60	0,7	1,000	0,915	0,905	0,905
80	0,9	1,000	0,830	0,810	0,810
100	1,1	0,810	0,665	0,650	0,650
120	1,3	0,565	0,505	0,495	0,495
140	1,6	0,415	0,385	0,380	0,380
160	1,8	0,320	0,300	0,295	0,300
180	2,0	0,250	0,240	0,240	0,240
200	2,2	0,205	0,195	0,195	0,195

A TAB. 6.11 apresenta os resultados numéricos da relação parâmetro de carga  $P/P_y$  x índice de esbeltez reduzido ( $\lambda_0$ ), segundo os vários tipos de distribuição das imperfeições geométricas iniciais. A reprodução dos dados em forma de gráfico representando as curvas de resistência última é feita por meio da FIG. 6.16. A curva ideal, representativa do pilar reto (indeformado), delimita, através do índice de esbeltez reduzido  $\lambda_0 = 1,0$  ( $\lambda_{lim} \cong 90$ ), as regiões de flambagem elástica ( $\lambda_0 \geq 1,0$ ) e inelástica ( $\lambda_0 \leq 1,0$ ).

Nota-se que o efeito da imperfeição geométrica estende-se a toda a faixa de esbeltez, reduzindo a resistência dos pilares. Na região  $0,4 \leq \lambda_0 \leq 1,4$ , faixa de esbeltez intermediária, a influência das imperfeições iniciais é maior, sendo máxima nas proximidades de  $\lambda_0 = 1,0$ . A partir de  $\lambda_0 > 1,4$ , pilares muito esbeltos, essa influência decai, tendendo ao comportamento da curva ideal. Finalmente, pode-se observar o

comportamento semelhante de todas as configurações estudadas, sendo a configuração linear levemente mais favorável do que as demais.

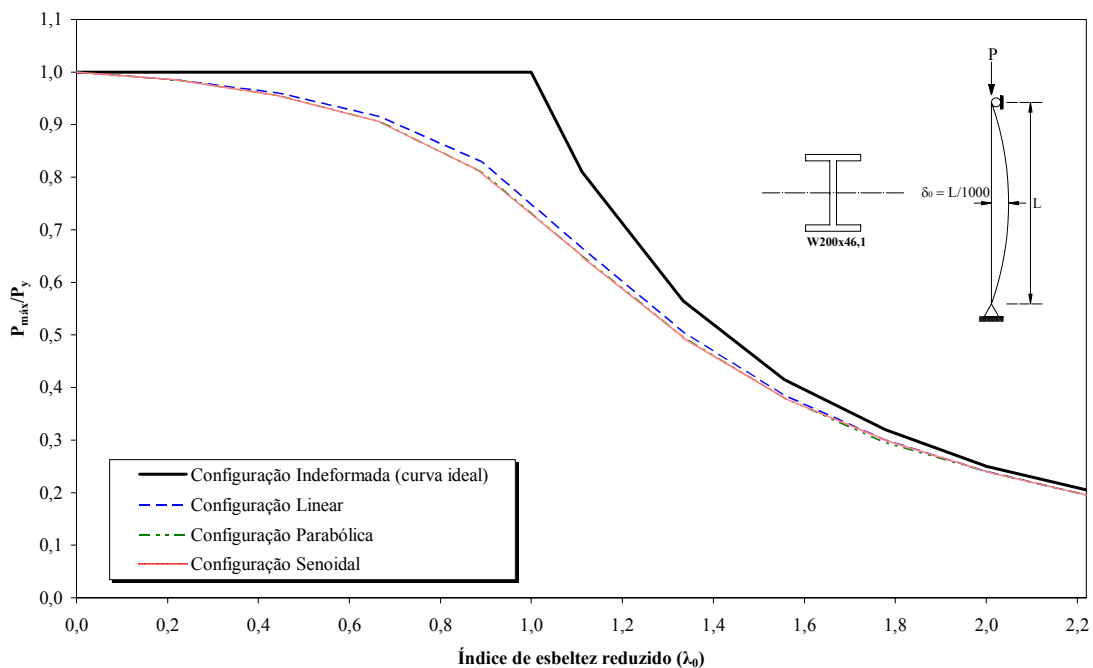


FIGURA 6.16 – Curva de resistência última considerando o efeito das imperfeições iniciais para o eixo de maior inércia

TABELA 6.12 – Dados comparativos entre o pilar reto e com imperfeição inicial

$\lambda$	$\lambda_0$	$P/P_y$		
		Linear	Parabólica	Senoidal
0	0,0	0,00%	0,00%	0,00%
20	0,2	1,50%	1,50%	1,50%
40	0,4	4,00%	4,50%	4,50%
60	0,7	8,50%	9,50%	9,50%
80	0,9	17,00%	19,00%	19,00%
100	1,1	17,90%	19,75%	19,75%
120	1,3	10,62%	12,39%	12,39%
140	1,6	7,23%	8,43%	8,43%
160	1,8	6,25%	7,81%	6,25%
180	2,0	4,00%	4,00%	4,00%
200	2,2	4,88%	4,88%	4,88%

Uma comparação numérica entre as resistências últimas para os vários tipos de configuração das elásticas iniciais com a elástica indeformada, em função do índice de esbeltez reduzido, é apresentada pela TAB. 6.12. Observa-se a excelente correlação entre os resultados obtidos pelas configurações senoidal e parabólica e confirma-se o comportamento levemente mais favorável da distribuição linear.

### **6.4.3 Combinação dos efeitos das tensões residuais e das imperfeições iniciais.**

Nas seções 6.4.1 e 6.4.2 tratou-se do efeito isolado das tensões residuais e imperfeições geométricas iniciais, respectivamente, com o objetivo de analisar a influência desses dois fatores na resistência dos pilares. Nesta seção, tem-se como objetivo observar o comportamento dos pilares devido ao efeito combinado das imperfeições geométricas iniciais e tensões residuais, procurando mostrar como a interação desses dois fatores influencia a resistência dos pilares, como fizeram BATTERMAN et al. (1967).

#### **a) Exemplo IMPTR1 – Influência da combinação das tensões residuais e imperfeições iniciais na resistência de pilares**

O pilar bi-rotulado de aço, com seção transversal em perfil **W200x46,1**, será analisado considerando-se a flexão segundo o eixo de maior inércia. O comprimento do pilar foi dividido em 10 elementos e a seção transversal em 50 fatias, sendo 20 para cada mesa e 10 para a alma. O aço escolhido tem módulo de elasticidade  $E = 20500 \text{ kN/cm}^2$  e tensão de escoamento  $\sigma_y = 25 \text{ kN/cm}^2$  e o carregamento foi incrementado gradativamente de 0,5% até atingir a carga de escoamento  $P_y = 1442,30\text{kN}$ .

Foram analisados dois casos de combinações entre as tensões residuais e imperfeições geométricas iniciais. O caso 1 considera a distribuição de tensões residuais linear nas mesas e constante na alma, em combinação com a elástica linear da imperfeição geométrica inicial e o caso 2 considera a distribuição de tensões residuais parabólica nas

mesas e constante na alma, em combinação com a elástica parabólica da imperfeição geométrica inicial.

A tensão residual de compressão foi tomada como  $\sigma_{rc} = -0,3\sigma_y$  e a de tração  $\sigma_{rt}$  foi determinada segundo a TAB. 6.8, variando conforme o tipo de distribuição adotado. Admite-se que as imperfeições geométricas iniciais têm flecha máxima no meio do vão  $\delta_0 = L/1000$ .

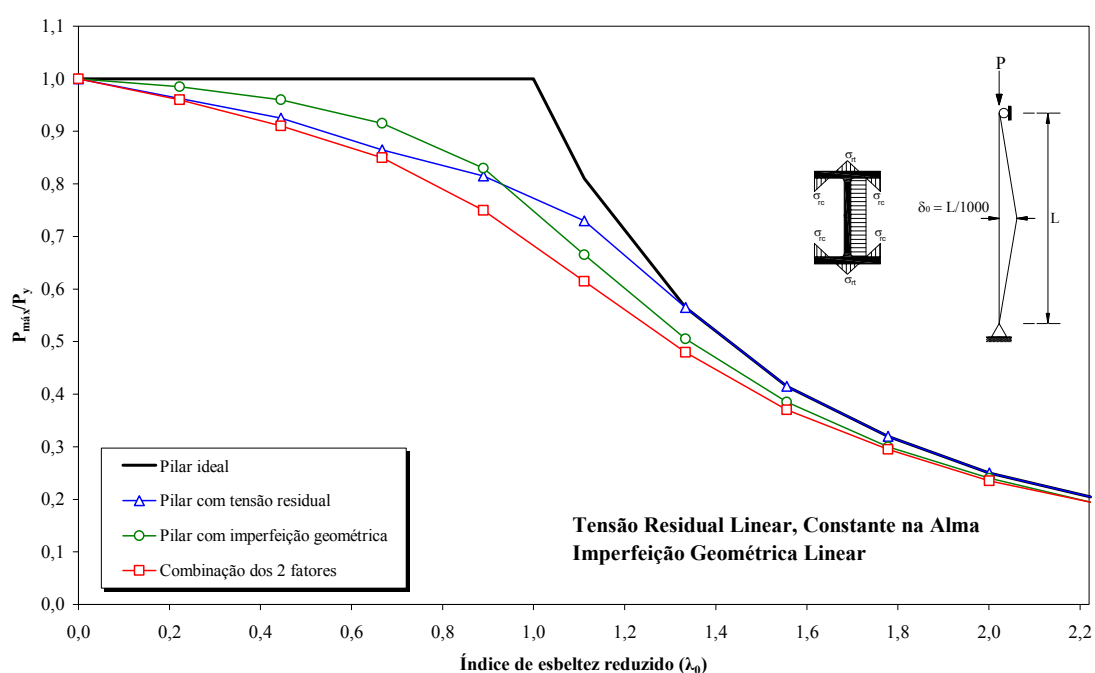


FIGURA 6.17 – Curva de resistência última considerando o efeito combinado de tensão residual e imperfeição geométrica inicial (caso 1)

Os resultados do caso 1 são apresentados na FIG. 6.17 e na TAB. 6.13. A FIG. 6.17 apresenta a curva de resistência última, considerando o pilar ideal (livre de imperfeições), os efeitos isolados de cada imperfeição e o efeito combinado dos dois fatores.

A TAB. 6.13 contém os resultados das resistências máximas relativas  $P_{m\acute{a}x}/P_y$ , em função do índice de esbeltez reduzido adimensional  $\lambda_0$ , para as situações de: pilar ideal ( $\delta_0 = 0$  e  $\sigma_{rc} = 0$ ), pilar com somente tensões residuais ( $\delta_0 = 0$  e  $\sigma_{rc} = -0,30\sigma_y$ ),

pilar com apenas imperfeição geométrica inicial ( $\delta_0 = L/1000$  e  $\sigma_{rc} = 0$ ) e o pilar considerando os efeitos combinados ( $\delta_0 = L/1000$  e  $\sigma_{rc} = -0,30\sigma_y$ ).

TABELA 6.13 – Resistências máximas relativas considerando o efeito combinado das tensões residuais e imperfeições geométricas iniciais (caso 1)

$\lambda$	$\lambda_0$	$P_{m\acute{a}x}/P_y$			
		$\delta_0 = 0$ $\sigma_{rc} = 0$	$\delta_0 = 0$ $\sigma_{rc} = -0,30\sigma_y$	$\delta_0 = L/1000$ $\sigma_{rc} = 0$	$\delta_0 = L/1000$ $\sigma_{rc} = -0,30\sigma_y$
0	0,0	1,000	1,000	1,000	1,000
20	0,2	1,000	0,970	0,985	0,960
40	0,4	1,000	0,925	0,960	0,910
60	0,7	1,000	0,865	0,915	0,850
80	0,9	1,000	0,815	0,830	0,750
100	1,1	0,810	0,730	0,665	0,615
120	1,3	0,565	0,565	0,505	0,480
140	1,6	0,415	0,415	0,385	0,370
160	1,8	0,320	0,320	0,300	0,295
180	2,0	0,250	0,250	0,240	0,235
200	2,2	0,205	0,205	0,195	0,195

Os efeitos de cada imperfeição isolados já foram analisados nas seções 6.4.1 e 6.4.2, ou seja, as tensões residuais aumentam a região inelástica de  $\lambda_0 = 1,0$  para  $\lambda_0 = 1,3$ , reduzindo significativamente a resistência do pilar na região inelástica,  $\lambda_0 \leq 1,3$ ; as imperfeições geométricas iniciais reduzem a resistência em toda a faixa de esbeltez, sendo esta redução mais significativa na região de esbeltez intermediária  $0,4 \leq \lambda_0 \leq 1,4$ .

A FIG. 6.17 e os dados da TAB. 6.13, mostram que os efeitos isolados de redução da resistência não podem ser somados para dar uma boa aproximação quando o efeito combinado dos dois fatores é considerado. Na região  $0,0 \leq \lambda_0 < 1,3$ , os efeitos combinados são mais favoráveis do que a soma dos efeitos isolados. Para  $\lambda_0 \geq 1,3$  o efeito combinado é mais desfavorável do que a soma dos efeitos isolados, mesmo a tensão residual tendo influência nula isoladamente.

As resistências dos pilares, reduzidas pelos efeitos das imperfeições geométricas iniciais e tensões residuais, em comparação com as resistências idealizadas, mostram que o máximo efeito, considerando os fatores isolados ou combinados, sempre ocorre quando o índice de esbeltez  $\lambda$  está na região próxima a  $\lambda_0 = 1,0$ .

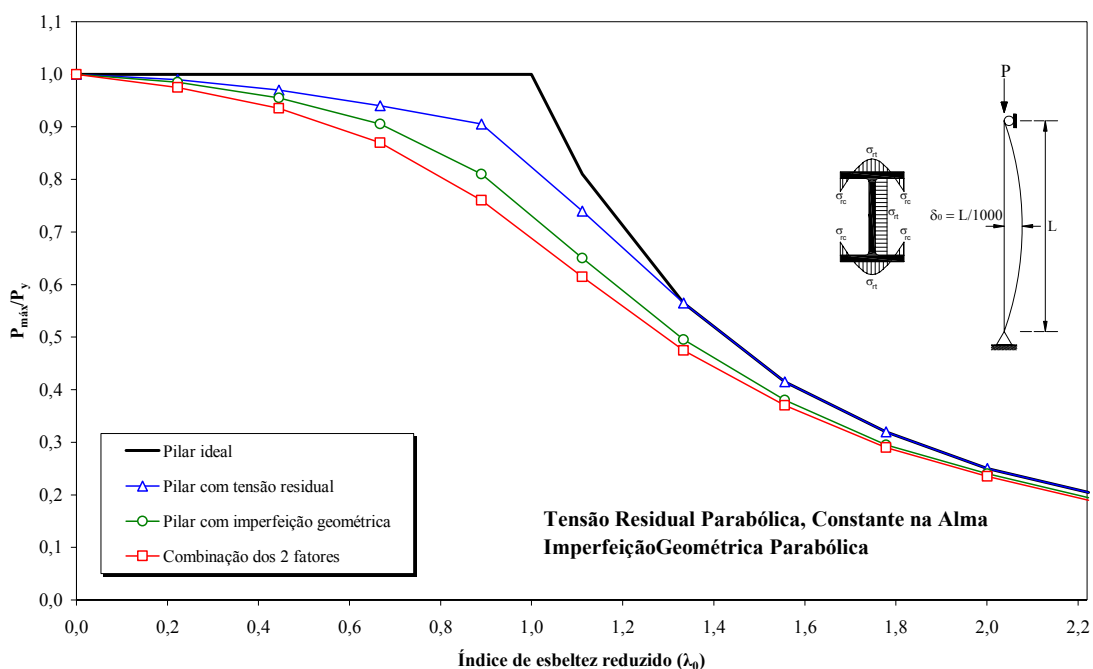


FIGURA 6.18 – Curva de resistência última considerando o efeito combinado de tensão residual e imperfeição geométrica inicial (caso 2)

Os resultados do caso 2 são apresentados na FIG. 6.18 e na TAB. 6.14. A FIG. 6.18 apresenta a curva de resistência última, considerando o pilar ideal (livre de imperfeições), os efeitos isolados de cada imperfeição e o efeito combinado dos dois fatores e a TAB. 6.14 contém os resultados das resistências máximas relativas  $P_{m\acute{a}x}/P_y$ , em função do índice de esbeltez reduzido adimensional  $\lambda_0$ .

Todas as conclusões anteriores continuam válidas para o caso 2, ou seja, somente a simples soma dos efeitos isolados das tensões residuais e imperfeições geométricas iniciais, não consiste em uma boa aproximação para a redução da resistência, quando os efeitos são combinados.

TABELA 6.14 – Resistências máximas relativas considerando o efeito combinado das tensões residuais e imperfeições geométricas iniciais (caso 2)

$\lambda$	$\lambda_0$	$P_{m\acute{a}x}/P_y$			
		$\delta_0 = 0$ $\sigma_{rc} = 0$	$\delta_0 = 0$ $\sigma_{rc} = -0,30\sigma_y$	$\delta_0 = L/1000$ $\sigma_{rc} = 0$	$\delta_0 = L/1000$ $\sigma_{rc} = -0,30\sigma_y$
0	0,0	1,000	1,000	1,000	1,000
20	0,2	1,000	0,990	0,985	0,975
40	0,4	1,000	0,970	0,955	0,935
60	0,7	1,000	0,940	0,905	0,870
80	0,9	1,000	0,905	0,810	0,760
100	1,1	0,810	0,740	0,650	0,615
120	1,3	0,565	0,565	0,495	0,475
140	1,6	0,415	0,415	0,380	0,370
160	1,8	0,320	0,320	0,295	0,290
180	2,0	0,250	0,250	0,240	0,235
200	2,2	0,205	0,205	0,195	0,190

**b) Exemplo IMPTR2 – Comparação da resistência última de pilares com as curvas de dimensionamento à compressão do projeto da NBR 8800 – setembro 2006**

Neste exemplo, pretende-se comparar as curvas de dimensionamento à compressão para instabilidade por flexão adotadas no projeto de revisão da NBR 8800 (2006) com as curvas de resistência obtidas pela presente formulação.

Assim, de acordo com o projeto da NBR 8800 (2006), a força normal de compressão resistente de cálculo  $N_{c,Rd}$ , considerando os estados limites últimos de instabilidade por flexão e local, é dada por:

$$N_{c,Rd} = \frac{\chi Q A_g f_y}{\gamma_{a1}} \quad (6.17)$$

onde:  $\gamma_{a1}$  é o coeficiente de ponderação da resistência, igual a 1,10;

$\chi$  e  $Q$  são os fatores de redução associados à resistência à compressão e à instabilidade global, respectivamente;

$A_g$  é a área bruta da seção transversal e  $f_y$  é a resistência ao escoamento do aço.

Fazendo-se  $Q = 1,0$  e  $\gamma_{at} = 1,0$ , a relação entre a carga atuante  $P$  e a carga de escoamento  $P_y$ , é dada por:

$$\frac{P}{P_y} = \frac{\chi A_g f_y}{A_g f_y} = \chi \quad (6.18)$$

O fator de redução  $\chi$  é dado por:

$$\chi = \frac{1}{\beta + \sqrt{(\beta^2 - \lambda_0^2)}} \leq 1,0 \quad (6.19)$$

Com

$$\beta = 0,5[1 + \alpha(\lambda_0 - 0,2) + \lambda_0^2] \quad (6.20)$$

onde  $\lambda_0$  é o índice de esbeltez reduzido dado por  $\lambda_0 = \lambda/\lambda_{lim}$ , considerando-se  $Q = 1,0$  e  $\alpha$  é um coeficiente relacionado à curva de dimensionamento à compressão, igual a 0,21, 0,34, 0,49 e 0,76, respectivamente para as curvas a, b, c e d.

A análise segundo a formulação do presente trabalho considera o pilar bi-rotulado de aço, com seção transversal em perfil **W200x46,1**, analisado considerando-se a flexão segundo os eixos de maior e menor inércia. O comprimento do pilar foi dividido em 10 elementos e a seção transversal em 50 fatias, sendo 20 para cada mesa e 10 para a alma. O aço escolhido foi o ASTM A36, com módulo de elasticidade  $E = 20500$  kN/cm<sup>2</sup> e tensão de escoamento  $f_y = 25$  kN/cm<sup>2</sup>. O carregamento foi incrementado gradativamente de 0,5% até atingir a carga de escoamento  $P_y = 1442,30$ kN.

Definiu-se a elástica da imperfeição geométrica inicial como meia curva de seno, sendo  $\delta_0 = L/1000$  no meio do vão. As tensões residuais foram distribuídas de forma linear e parabólica, tanto nas mesas, quanto na alma, considerando-se a tensão de compressão  $\sigma_{rc}$  cerca de 30% e 50% da tensão de escoamento do material.

As FIGs. 6.19 e 6.20 apresentam as curvas de resistência última para o pilar ideal (livre de imperfeições), as curvas de resistência última determinadas pela presente formulação



e as curvas de dimensionamento à compressão do projeto da NBR 8800 (2006), para os eixos de maior e menor inércia, respectivamente.

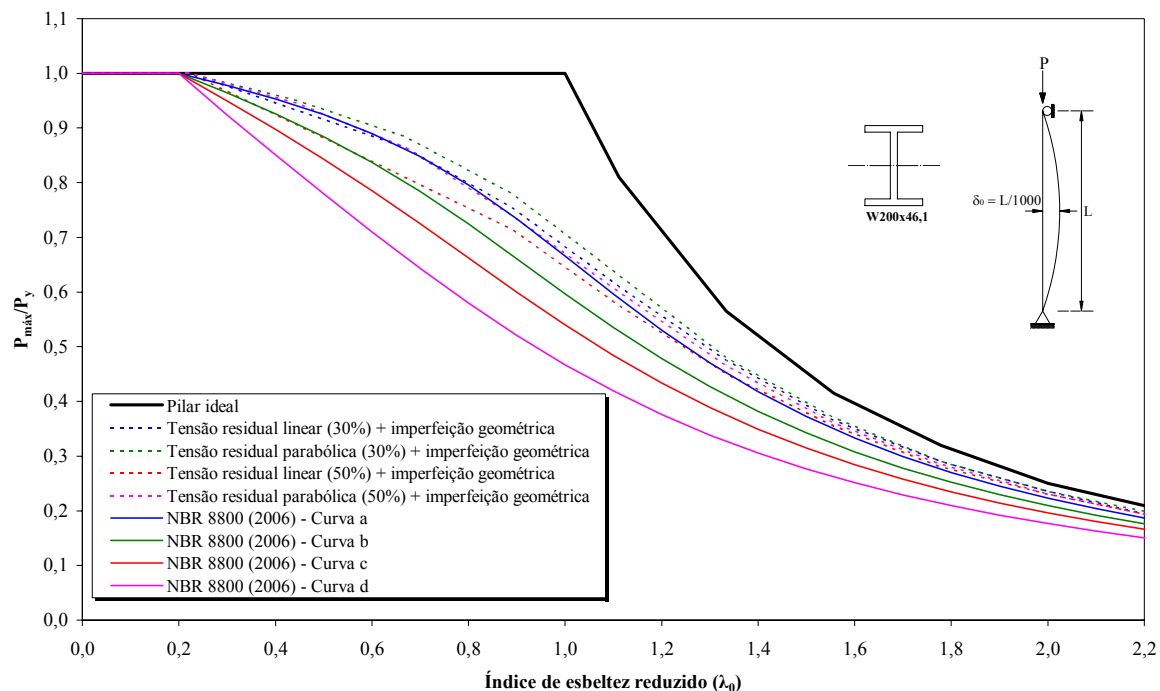


FIGURA 6.19 – Curvas de resistência última e de dimensionamento à compressão do projeto da NBR 8800 (2006) para o eixo de maior inércia

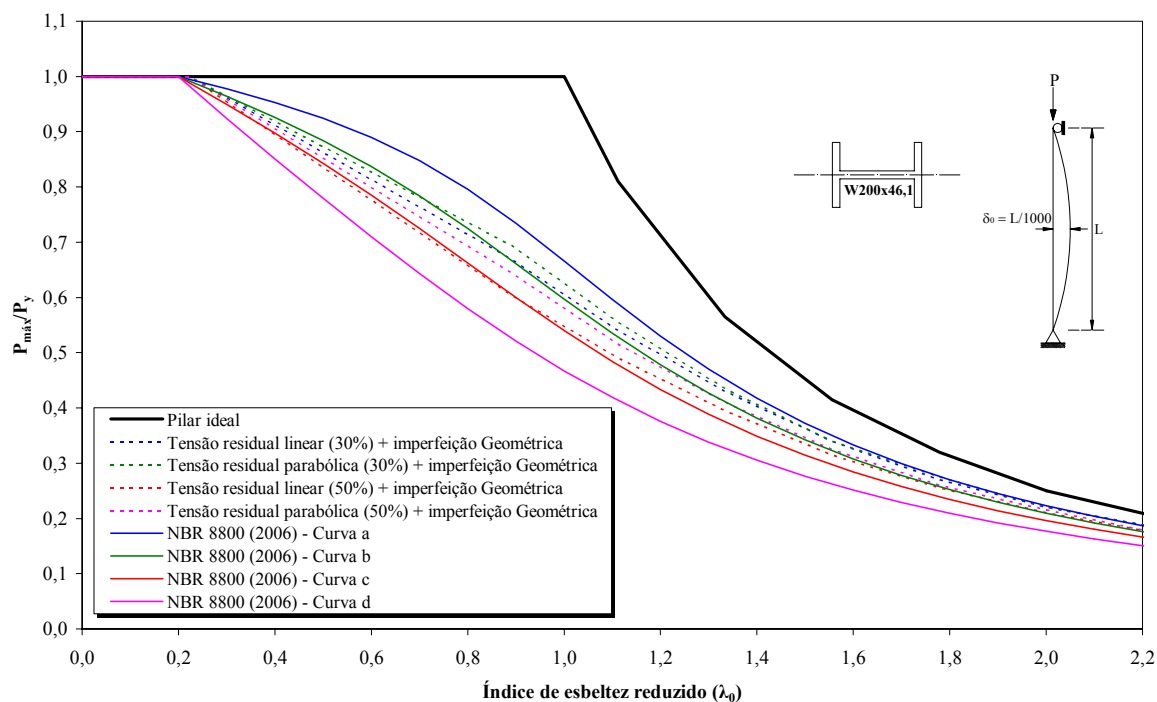


FIGURA 6.20 – Curvas de resistência última e de dimensionamento à compressão do projeto da NBR 8800 (2006) para o eixo de menor inércia

Na FIG. 6.19, observa-se que as curvas obtidas pela presente formulação descrevem comportamento semelhante em toda a faixa de esbeltez, aproximando-se da curva “a” do projeto da NBR 8800 (2006), exceto para o caso de tensão residual linear (50%) que tende para a curva “b” na região  $(0,0 \leq \lambda_0 \leq 1,2)$ .

Para o eixo de menor inércia, conforme a FIG. 6.20, o comportamento descrito pelas curvas da presente formulação foi similar em toda a faixa de esbeltez. As curvas obtidas com tensões residuais de 50% permanecem entre as curvas “b” e “c” em toda a faixa de esbeltez, enquanto as obtidas com 30% ficam entre as curvas “b” e “c” na faixa  $0,0 \leq \lambda_0 \leq 0,8$  e entre as curvas “a” e “b” na região onde  $\lambda_0 > 0,8$ .

Considerando-se as relações geométricas do perfil estudado entre a altura total ( $d$ ) e a largura da mesa ( $b$ ) igual a 1,0, inferior a 1,2 e a espessura da mesa,  $t_f = 11 \text{ mm} < 100 \text{ mm}$ , para seções “I” ou “H” laminadas, o projeto da NBR 8800 (2006) estabelece que deve ser usada a curva “b” para a instabilidade em torno do eixo maior inércia e a curva “c” para a instabilidade em torno do eixo de menor inércia.

TABELA 6.15 – Relação de carga  $P_{\max}/P_y$  para o eixo de maior inércia

$\lambda$	$\lambda_0$	Pilar ideal	$\sigma_{rc} = 0,3\sigma_y$		$\sigma_{rc} = 0,5\sigma_y$	
			Caso 1	Caso 2	Caso 1	Caso 2
0	0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
20	0,2	1,000	0,980	0,980	0,980	0,980
40	0,4	1,000	0,920	0,950	0,905	0,945
60	0,7	1,000	0,865	0,885	0,775	0,865
80	0,9	1,000	0,755	0,780	0,715	0,740
100	1,1	0,810	0,610	0,630	0,575	0,600
120	1,3	0,565	0,475	0,480	0,450	0,465
140	1,6	0,415	0,365	0,370	0,355	0,360
160	1,8	0,320	0,290	0,290	0,280	0,285
180	2,0	0,250	0,235	0,235	0,230	0,230
200	2,2	0,205	0,190	0,195	0,190	0,190

As TABs. 6.15 e 6.16 apresentam as relações de carga  $P_{\max}/P_y$  em função do índice de esbeltez reduzido  $\lambda_0$ , para os eixos de maior e menor inércia, respectivamente. O caso 1

refere-se à distribuição linear para as tensões residuais e o caso 2 para a distribuição parabólica.

TABELA 6.16 – Relação de carga  $P_{m\acute{a}x}/P_y$  para o eixo de menor inércia

$\lambda$	$\lambda_0$	Pilar ideal	$\sigma_{rc} = 0,3\sigma_y$		$\sigma_{rc} = 0,5\sigma_y$	
			Caso 1	Caso 2	Caso 1	Caso 2
0	0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
20	0,2	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
40	0,4	1,000	0,840	0,870	1,000	0,665
60	0,7	1,000	0,790	0,825	1,000	0,690
80	0,9	1,000	0,670	0,695	1,000	0,605
100	1,1	0,810	0,540	0,555	0,810	0,490
120	1,3	0,565	0,430	0,435	0,565	0,395
140	1,6	0,415	0,340	0,340	0,415	0,315
160	1,8	0,320	0,270	0,275	0,320	0,255
180	2,0	0,250	0,220	0,220	0,250	0,210
200	2,2	0,205	0,185	0,185	0,205	0,175

## 6.5 Vigas-Pilar

O termo vigas-pilar utilizado neste trabalho refere-se às barras submetidas à combinação de força normal e momentos fletores.

### a) Exemplo VP1 – Determinação da superfície de resistência plástica

Com este exemplo adaptado de CHEN et al. (1996), pretende-se determinar a superfície de resistência plástica de uma barra submetida à combinação de força normal e momento fletor, com o objetivo de mostrar a precisão e validade da presente formulação dentro do conceito de *Análise Avançada*. Para isso, os resultados serão comparados com os obtidos através das equações de interação apresentadas pelo projeto da NBR 8800 (2006).

As curvas de interação dos efeitos combinados da força normal e do momento fletor do projeto da NBR 8800 (2006) para o elemento de viga-pilar, considerando o perfil de seção transversal compacta e de *comprimento zero*, podem ser simplificadas como a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{P}{P_y} + \frac{8M}{9M_P} = 1,0 & \quad \text{para} \quad \frac{P}{P_y} \geq 0,2 \\ \frac{P}{2P_y} + \frac{M}{M_P} = 1,0 & \quad \text{para} \quad \frac{P}{P_y} < 0,2 \end{aligned} \quad (6.21)$$

onde  $P$  e  $M$  são a força normal e o momento fletor atuantes, respectivamente;  $P_y$  e  $M_P$  são a força de escoamento e momento plástico da seção transversal, respectivamente.

O pilar bi-rotulado, com esbeltez  $l/r = 1,0$ , foi dividido em 10 elementos e sua seção transversal em 50 fatias, sendo 20 para cada mesa e 10 para a alma. O aço escolhido foi o ASTM A36, cujo módulo de elasticidade  $E = 20500 \text{ kN/cm}^2$  e tensão de escoamento  $f_y = 25 \text{ kN/cm}^2$ . O carregamento foi incrementado gradativamente de 0,5% até atingir a carga de escoamento.

TABELA 6.17 – Dados dos perfis

Perfil	$d$	$b_f$	$t_w$	$t_f$	$d_w$	$d_f$	$bt_f/t_w d_w$	$P_y$	$M_{p_x}$	$M_{p_y}$
W360x79,0	354	205	9,4	16,8	320,4	337,2	1,1	2474,94	35063,97	9002,19
Caso 1	354	205	21,5	16,8	320,4	337,2	0,5	3444,00	42826,14	9750,74
Caso 2	354	205	10,7	16,8	320,4	337,2	1,0	2583,00	35929,53	9056,62
Caso 3	354	205	7,2	16,8	320,4	337,2	1,5	2296,00	33630,66	8928,08
Caso 4	354	205	5,4	16,8	320,4	337,2	2,0	2152,50	32481,23	8883,09

As seções transversais dos perfis laminados analisados por CHEN et al. (1996), apresentavam as seguintes relações geométricas:  $d_f/d_w = 1,05$ ,  $d/d_w = 1,10$  e  $(bt_f/t_w d_w)$  igual a 0,5, 1,0, 1,5 e 2,0. A partir do perfil **W360x79,0**, padrão GERDAU-AÇOMINAS, que apresenta  $d_f/d_w = 1,05$  e  $d/d_w = 1,10$ , foram criadas as seções transversais variando-se a espessura da alma, Casos 1 a 4 mostrados na TAB. 6.17. Essa

tabela apresenta as dimensões das seções transversais, as cargas de escoamento e os momentos plásticos para os perfis, considerando a flexão segundo os eixos de maior e menor inércia.

As FIGs. 6.21 e 6.22 apresentam as superfícies de resistência plástica para os Casos 1 a 4, analisados através da formulação do presente trabalho, submetidos à flexão segundo os eixos de maior e menor inércia, respectivamente. A curva pontilhada representa as curvas de interação do projeto da NBR 8800 (2006), conforme as Eqs. (6.21) e a curva tracejada representa as curvas propostas por DUAN e CHEN (1990) apud CHEN et al. (1996), conforme as Eqs. (6.22) e (6.23).

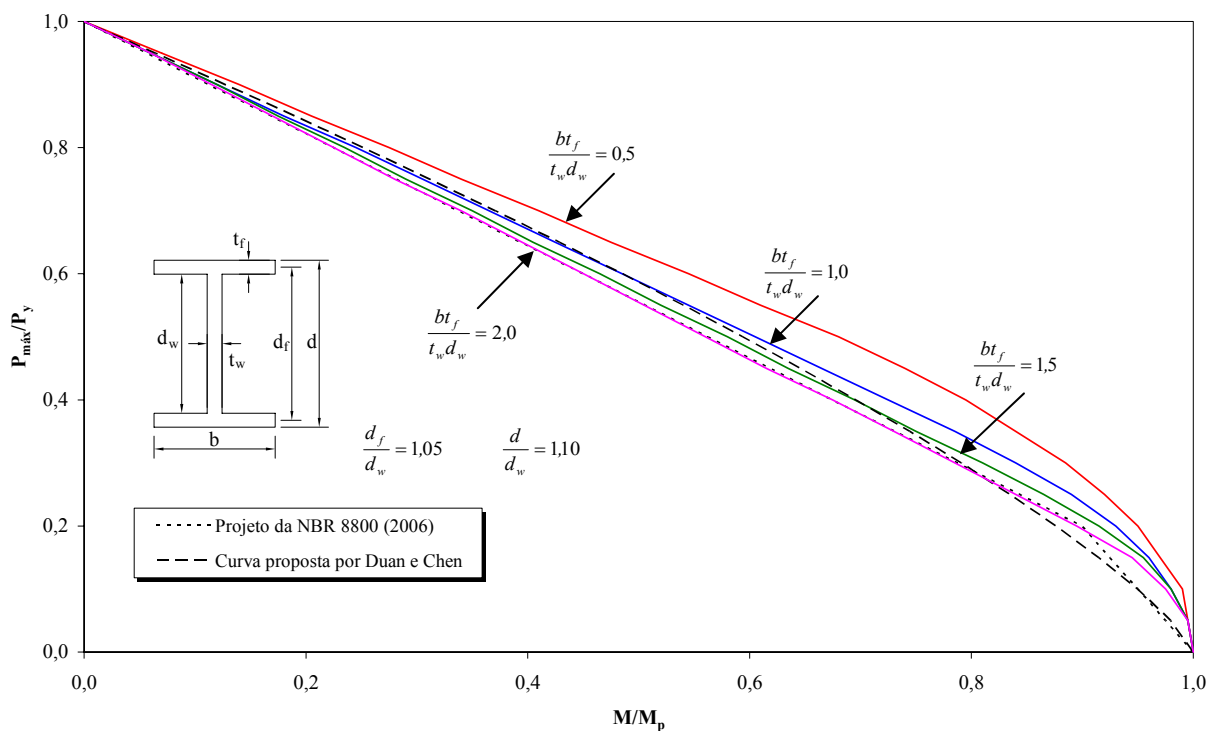


FIGURA 6.21 – Superfície de resistência plástica para perfis laminados flexíveis segundo o eixo de maior inércia

Pode-se observar que as curvas de interação do projeto da NBR 8800 (2006) dadas pelas Eqs. (6.21), as quais assumem a mesma relação tanto para a resistência em torno do eixo de maior inércia quanto para a menor inércia, fornecem um bom ajuste para o

limite inferior da resistência segundo o eixo de maior inércia. Entretanto, elas são bastante conservadoras para a resistência segundo o eixo de menor inércia.

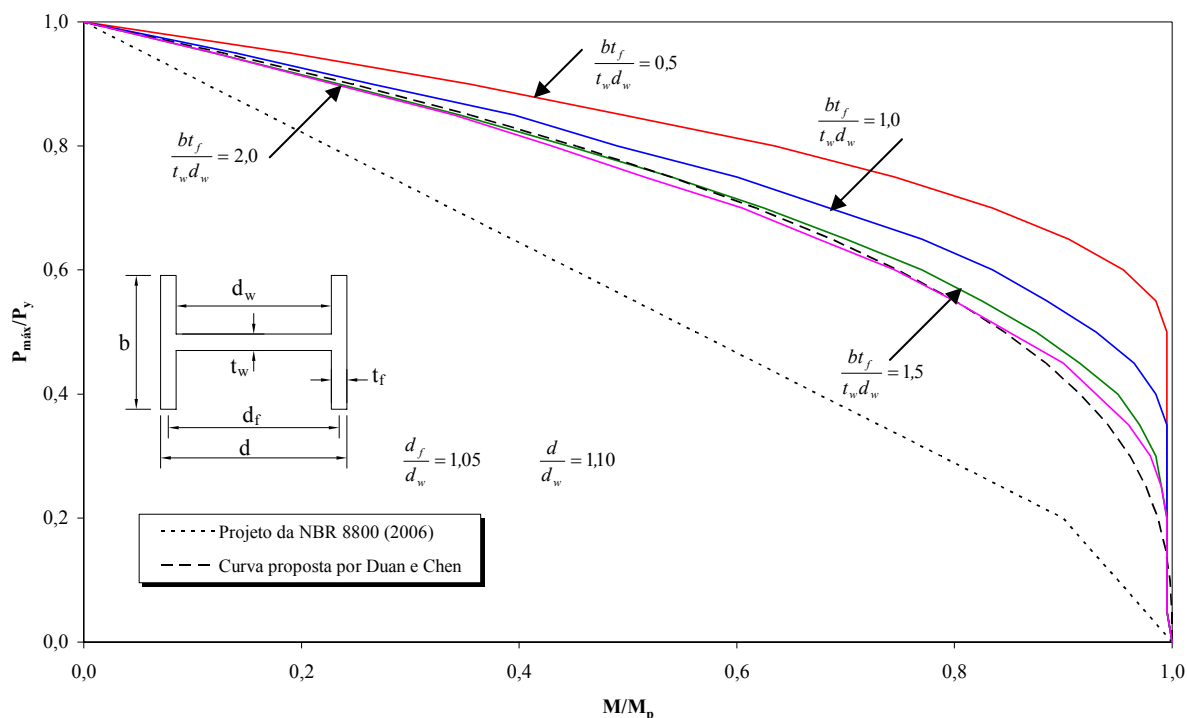


FIGURA 6.22 – Superfície de resistência plástica para perfis laminados fletidos segundo o eixo de menor inércia

DUAN e CHEN (1990) apud CHEN et al. (1996) propuseram equações mais precisas que relacionam os efeitos combinados entre o carregamento axial e o momento fletor aplicadas para vários tipos de seções duplamente simétricas:

Para perfis “I” e “H” fletindo segundo o eixo de maior inércia, tem-se:

$$\left(\frac{P}{P_y}\right)^{1,3} + \frac{M}{M_P} = 1,0 \quad (6.22)$$

E para perfis “I” e “H” fletindo segundo o eixo de menor inércia, tem-se:

$$\left(\frac{P}{P_y}\right)^{2,7} + \frac{M}{M_P} = 1,0 \quad (6.23)$$

Comparadas com as equações do projeto da NBR 8800 (2006) as curvas de DUAN e CHEN (1990) apud CHEN et al. (1996), descritas pelas Eqs. (6.22) e (6.23), representam uma curva única de fácil aplicação nos cálculos em geral e fornecem um bom ajuste para o limite inferior da resistência última segundo o eixo de menor inércia.

Os resultados numéricos utilizados no traçado das superfícies de resistência das FIGs. 6.21 e 6.22, podem ser visualizados nas TABs. 6.18 e 6.19.

TABELA 6.18 – Relação entre a força normal e o momento fletor (maior inércia)

$P/P_y$	$M/M_P$			
	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
0,00	1,000	1,000	1,000	1,000
0,10	0,990	0,980	0,980	0,975
0,20	0,950	0,930	0,915	0,895
0,30	0,885	0,840	0,810	0,785
0,40	0,795	0,725	0,695	0,675
0,50	0,680	0,605	0,580	0,560
0,60	0,545	0,485	0,465	0,450
0,70	0,410	0,365	0,350	0,340
0,80	0,275	0,245	0,235	0,225
0,90	0,140	0,120	0,120	0,115
1,00	0,000	0,000	0,000	0,000

TABELA 6.19 – Relação entre a força normal e o momento fletor (menor inércia)

$P/P_y$	$M/M_P$			
	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
0,00	1,000	1,000	1,000	1,000
0,10	0,995	0,995	0,995	0,995
0,20	0,995	0,995	0,995	0,995
0,30	0,995	0,995	0,985	0,980
0,40	0,995	0,985	0,950	0,930
0,50	0,995	0,930	0,875	0,850
0,60	0,955	0,835	0,770	0,745
0,70	0,835	0,685	0,625	0,605
0,80	0,635	0,490	0,445	0,430
0,90	0,355	0,265	0,235	0,230
1,00	0,000	0,000	0,000	0,000

**b) Exemplo VP2 – Relação momento – curvatura**

KANCHANALAI (1977) estudou o comportamento e a resistência de vigas-pilar com seção transversal em perfil **W8x31**, utilizando os conceitos da Teoria da Plasticidade Distribuída. Neste exemplo, pretende-se estudar a relação momento – curvatura para o perfil **W200x46,1**, similar àquele estudado por KANCHANALAI (1977), fletido segundo os eixos de maior e menor inércia, visando mostrar a potencialidade da formulação para análise não-linear física com grandes deslocamentos e grandes curvaturas.

O pilar bi-rotulado com esbeltez  $l/r = 1,0$  foi dividido em 10 elementos e sua seção transversal em 50 fatias, sendo 20 para cada mesa e 10 para a alma. O aço tem módulo de elasticidade  $E = 20500 \text{ kN/cm}^2$  e tensão de escoamento  $\sigma_y = 25 \text{ kN/cm}^2$ .

Para as tensões residuais, adotou-se a distribuição linear nas mesas e comportamento constante na alma, sendo  $\sigma_{rc} = -0,3\sigma_y$ , conforme estudou KANCHANALAI (1977). Foram aplicados ao pilar forças normais pré-definidas referentes a 0, 40, 60 e 80% da carga de escoamento  $P_y$  e momentos fletores nas suas extremidades, em sentidos contrários, de forma a permitir curvatura simples na barra.

As FIGs. 6.23 e 6.24, associadas com as TABs. 6.20 e 6.21, apresentam os resultados da relação momento-curvatura para os eixos de maior e menor inércia, respectivamente. O momento aplicado é medido em função do momento elástico máximo resistente  $M_y = 11.025,01 \text{ kN.cm}$  para a maior inércia e  $M_y = 3.779,05 \text{ kN.cm}$  para a menor inércia, enquanto a curvatura é avaliada em relação à curvatura máxima na fase elástica  $\phi_y = M_y/EI$ . Na região elástica, em todos os níveis de carregamento, a relação momento-curvatura varia linearmente.

Considerando-se a flexão pura ( $P/P_y = 0$ ), o momento fletor último tende para o momento plástico  $M_P$  em cada caso. Sendo o fator de forma  $f$  da seção transversal  $f = 1,11$  para o eixo de maior inércia e  $f = 1,51$  para o eixo de menor inércia, os



valores dos momentos de plastificação são  $M_{Px} = 12.192,65$  kN.cm e  $M_{Py} = 5.724,88$  kN.cm.

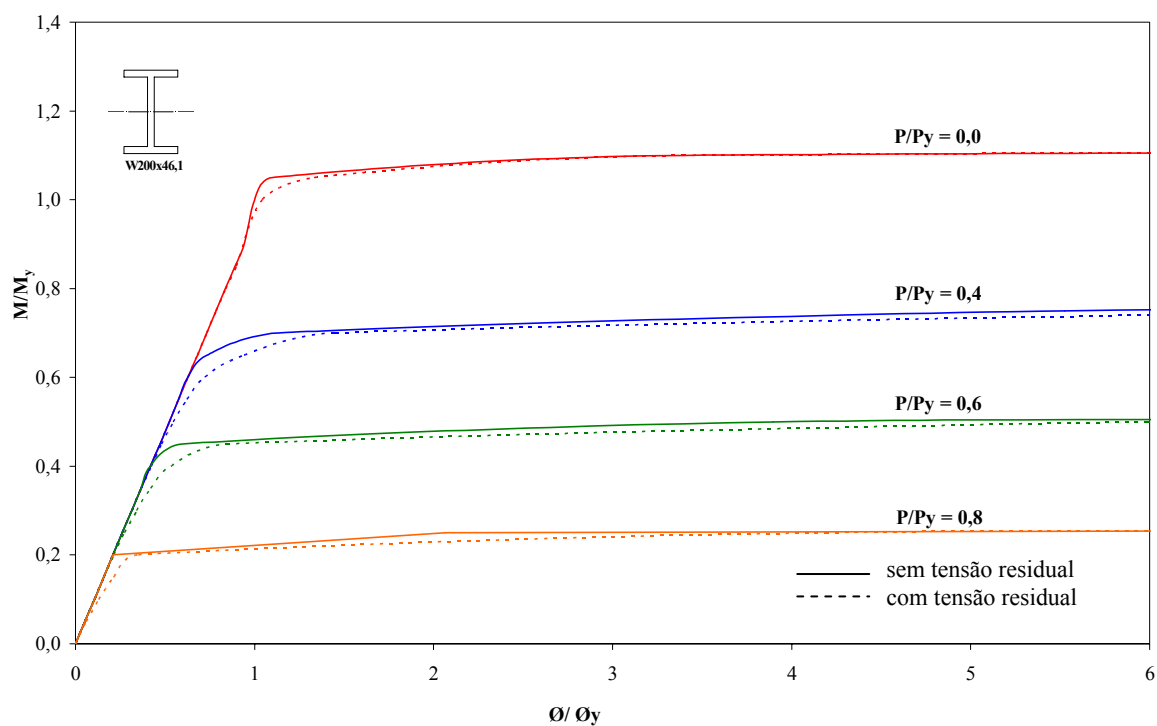


FIGURA 6.23 – Relações M-P-Ø para o perfil W200x46,1 (eixo de maior inércia)

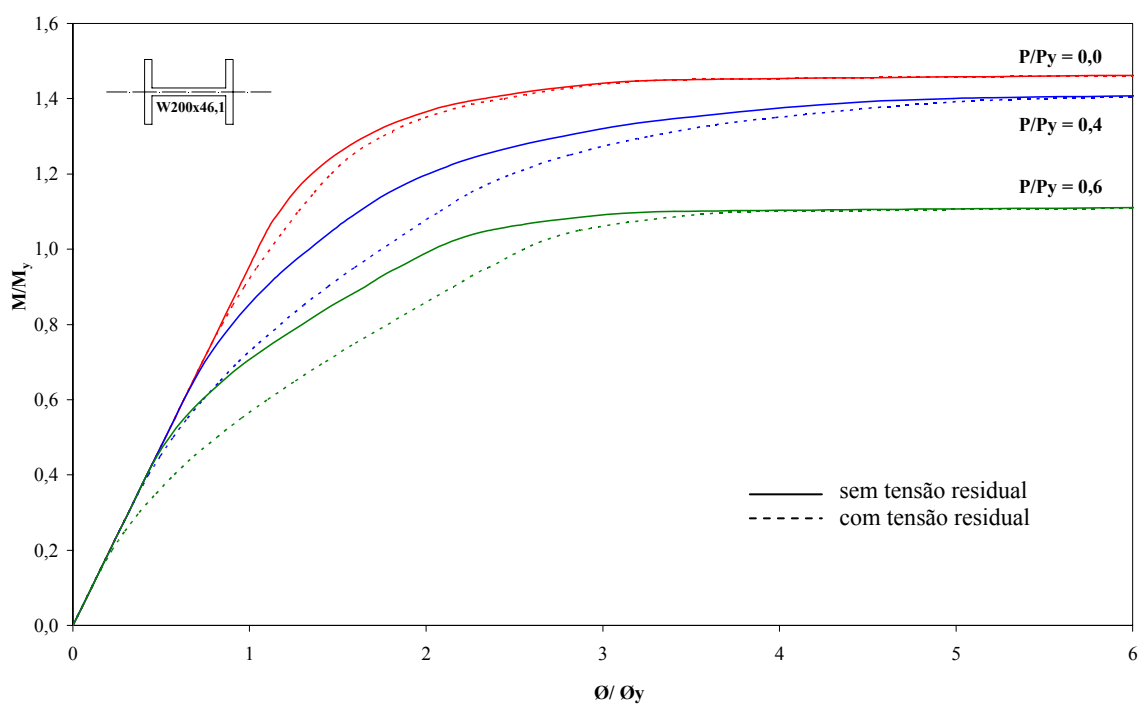


FIGURA 6.24 – Relações M-P-Ø para o perfil W200x46,1 (eixo de menor inércia)

Comparando-se o comportamento do pilar em função da presença ou não de tensões residuais, verifica-se que a redução da rigidez é mais acentuada para a flexão segundo o eixo de menor inércia, do que para o eixo de maior inércia e que as curvas tendem ao momento último  $M_p$ . Os resultados obtidos com a formulação deste trabalho têm uma boa correlação com aqueles apresentados por KANCHANALAI (1977).

TABELA 6.20 – Relação momento – curvatura (eixo de maior inércia)

$P/P_y = 0,0$			$P/P_y = 0,4$		
$M/M_y$	$\theta/\theta_y$		$M/M_y$	$\theta/\theta_y$	
	Sem TR	Com TR		Sem TR	Com TR
0,100	0,105	0,105	0,100	0,105	0,105
0,200	0,209	0,209	0,200	0,209	0,209
0,300	0,314	0,314	0,300	0,314	0,314
0,400	0,419	0,419	0,400	0,419	0,423
0,500	0,524	0,524	0,500	0,524	0,547
0,600	0,628	0,628	0,600	0,628	0,722
0,700	0,733	0,733	0,700	1,133	1,453
0,800	0,838	0,840	0,755	10,252	12,233
0,900	0,942	0,960	0,800	---	---
1,000	1,000	1,043	0,900	---	---
1,111	17,952	17,952	1,000	---	---

$P/P_y = 0,6$			$P/P_y = 0,8$		
$M/M_y$	$\theta/\theta_y$		$M/M_y$	$\theta/\theta_y$	
	Sem TR	Com TR		Sem TR	Com TR
0,100	0,105	0,105	0,100	0,105	0,131
0,200	0,210	0,214	0,200	0,209	0,352
0,300	0,314	0,342	0,255	7,057	9,752
0,400	0,419	0,534	0,300	---	---
0,500	3,897	5,992	0,400	---	---
0,505	8,751	10,845	0,500	---	---

TABELA 6.21 – Relação momento – curvatura (eixo de menor inércia)

$P/P_y = 0,0$			$P/P_y = 0,4$			$P/P_y = 0,6$		
$M/M_y$	$\theta/\theta_y$		$M/M_y$	$\theta/\theta_y$		$M/M_y$	$\theta/\theta_y$	
	Sem TR	Com TR		Sem TR	Com TR		Sem TR	Com TR
0,100	0,105	0,105	0,100	0,105	0,105	0,100	0,105	0,105
0,200	0,209	0,209	0,200	0,209	0,209	0,200	0,209	0,223
0,300	0,314	0,314	0,300	0,314	0,314	0,300	0,314	0,377
0,400	0,419	0,419	0,400	0,419	0,429	0,400	0,419	0,574
0,500	0,524	0,524	0,500	0,524	0,567	0,500	0,546	0,817
0,600	0,628	0,628	0,600	0,628	0,737	0,600	0,730	1,104
0,700	0,733	0,733	0,700	0,747	0,939	0,700	0,981	1,430
0,800	0,838	0,845	0,800	0,901	1,175	0,800	1,296	1,783
0,900	0,942	0,970	0,900	1,095	1,444	0,900	1,654	2,155
1,000	1,000	1,049	1,000	1,220	1,609	1,000	1,858	2,369
1,100	1,172	1,278	1,100	1,621	2,078	1,100	3,407	3,920
1,200	1,352	1,464	1,200	2,010	2,488	1,150	22,085	22,662
1,300	1,658	1,757	1,300	2,774	3,270	1,200	---	---
1,400	2,330	2,444	1,400	4,985	5,500	1,300	---	---
1,500	18,598	18,598	1,420	10,193	10,714	1,400	---	---

### c) Exemplo VP3 – Curvas de interação

GALAMBOS (1957) apud CHEN e TOMA(1994) analisou os resultados analíticos de curvas de interação da seção transversal **W8x31**, segundo o eixo de maior inércia, para casos de carregamento com momentos iguais nas extremidades do pilar. Nesse estudo, o efeito das tensões residuais é comparado para diferentes índices de esbeltez.

O mesmo exemplo será analisado utilizando a formulação desenvolvida para o perfil **W200x46,1**, similar ao anterior, considerando os mesmos casos de carregamento, tensões residuais e índices de esbeltez, com o objetivo de validar a formulação apresentada.

O pilar bi-rotulado foi dividido em 10 elementos e seu comprimento variou de acordo com a esbelteza adotada. A seção transversal foi avaliada com 50 fatias, sendo 20 para cada mesa e 10 para a alma. O aço adotado tem módulo de elasticidade  $E = 20500$  kN/cm<sup>2</sup> e tensão de escoamento  $\sigma_y = 25$  kN/cm<sup>2</sup>. Para as tensões residuais, adotou-se a distribuição linear nas mesas e comportamento constante na alma, sendo  $\sigma_{rc} = -0,3\sigma_y$ . O carregamento foi incrementado gradativamente de 0,5% até a carga de escoamento  $P_y = 1442,30$  kN.

As curvas de interação são mostradas na FIG. 6.25 associadas com os resultados numéricos das TABs. 6.22 e 6.23. A resistência última para o pilar livre de tensões residuais é igual à carga de escoamento  $P_y$  na região inelástica ( $0 \leq \lambda \leq \lambda_{lim} \cong 90$ ) e igual às cargas de flambagem elástica de Euler  $P_e$ , que variam de acordo com a esbelteza do elemento, para a região elástica ( $\lambda > \lambda_{lim} \cong 90$ ). As tensões residuais, representadas pelas curvas pontilhadas, reduzem a capacidade resistente para o mesmo nível de carregamento axial, estendendo-se a toda faixa de esbelteza.

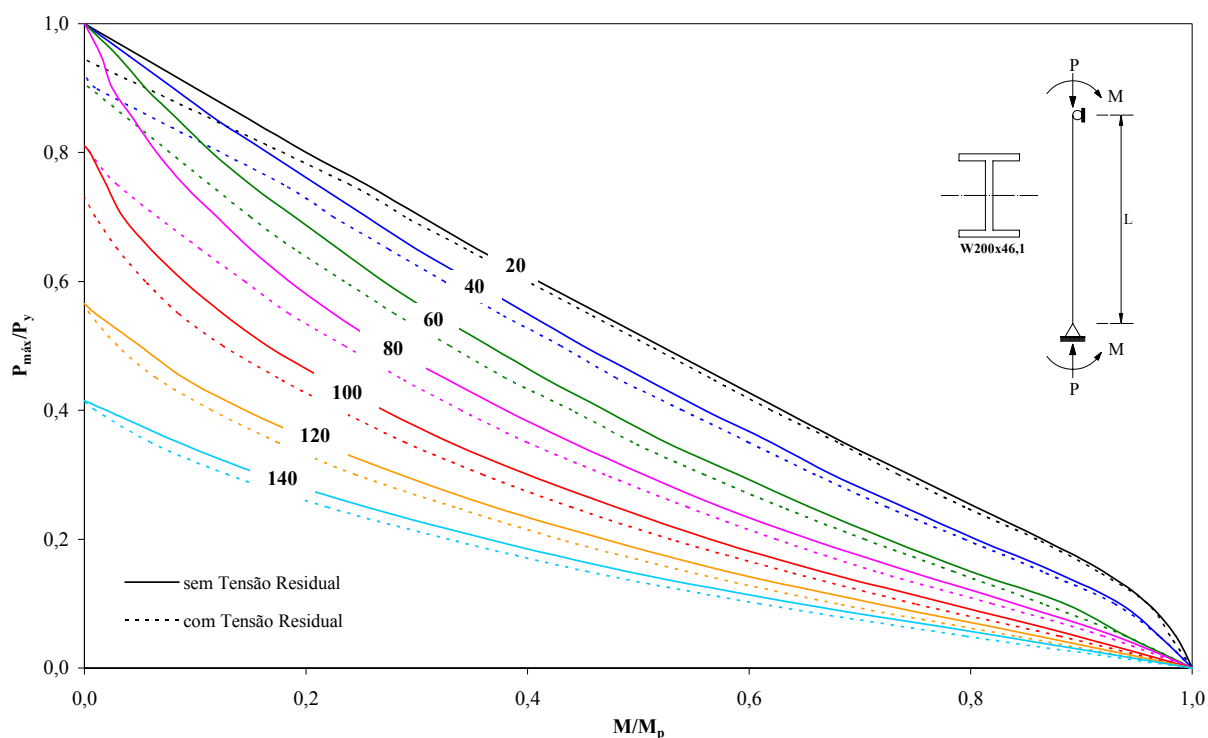


FIGURA 6.25 – Curvas de interação do perfil W200x46,1

TABELA 6.22 – Relação entre a força normal e o momento fletor na região elástica

$$0 \leq \lambda \leq \lambda_{lim} \cong 90$$

$P/P_y$	$M/M_p (l/r=20)$		$M/M_p (l/r=40)$		$M/M_p (l/r=60)$		$M/M_p (l/r=80)$	
	sem TR	com TR	sem TR	com TR	sem TR	com TR	sem TR	com TR
0,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,10	0,960	0,960	0,935	0,930	0,885	0,865	0,840	0,820
0,20	0,865	0,860	0,805	0,795	0,725	0,705	0,655	0,625
0,30	0,745	0,735	0,675	0,660	0,590	0,560	0,505	0,470
0,40	0,630	0,620	0,560	0,540	0,470	0,440	0,380	0,340
0,50	0,520	0,510	0,450	0,430	0,365	0,330	0,270	0,235
0,60	0,410	0,400	0,350	0,325	0,270	0,235	0,185	0,145
0,70	0,305	0,290	0,255	0,225	0,190	0,150	0,120	0,075
0,80	0,200	0,125	0,165	0,080	0,115	0,040	0,065	0,005
0,90	0,100	0,020	0,080	0,010	0,055	0,005	0,025	---
1,00	0,000	---	0,000	---	0,000	---	0,000	---

$P/P_y$ para $M/M_p = 0,0$							
<b>1,000</b>	<b>0,945</b>	<b>1,000</b>	<b>0,925</b>	<b>1,000</b>	<b>0,905</b>	<b>1,000</b>	<b>0,815</b>

TABELA 6.23 – Relação entre a força normal e o momento fletor na região inelástica

$$\lambda > \lambda_{lim} \cong 90$$

$P/P_y$	$M/M_p (l/r=100)$		$M/M_p (l/r=120)$		$M/M_p (l/r=140)$	
	sem TR	Com TR	sem TR	com TR	sem TR	com TR
0,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,10	0,780	0,750	0,715	0,680	0,645	0,610
0,20	0,565	0,530	0,470	0,430	0,365	0,330
0,30	0,400	0,360	0,285	0,245	0,160	0,130
0,40	0,270	0,230	0,145	0,115	0,020	0,010
0,50	0,165	0,125	0,050	0,030	---	---
0,60	0,090	0,055	---	---	---	---
0,70	0,035	0,010	---	---	---	---
0,80	0,005	---	---	---	---	---
0,81	0,000	---	---	---	---	---

$P/P_y$ para $M/M_p = 0,0$					
<b>0,810</b>	<b>0,730</b>	<b>0,565</b>	<b>0,565</b>	<b>0,415</b>	<b>0,415</b>

$P_e$ teórico	<b>1.167,26 (0,809 <math>P_y</math>)</b>	<b>810,60 (0,562 <math>P_y</math>)</b>	<b>595,54 (0,413 <math>P_y</math>)</b>
------------------	--	--	--

**d) Exemplo VP4 – Comparativo entre as curvas propostas com as curvas de interação do ANSI/ AISC 360-05 e do projeto da NBR 8800**

Neste exemplo, serão traçadas curvas de interação para um pilar bi-rotulado submetido à ação combinada de força normal e momento fletor, fletindo segundo o eixo de maior inércia, utilizando a Teoria de Zona Plástica apresentada no presente trabalho. Para a comparação, serão traçadas as curvas de interação do ANSI/ AISC 360-05 (2005) e do projeto da NBR 8800 (2006), desconsiderando os coeficientes de ponderação da resistência  $\phi_c$  e  $\phi_b$  para o ANSI/ AISC 360-05 (2005) e  $\gamma_{a1}$  para o projeto da NBR 8800 (2006).

As curvas de interação recomendadas tanto pelo ANSI/ AISC 360-05 (2005), quanto pelo projeto da NBR (2006), podem ser reescritas de forma simplificada como:

$$\begin{aligned} \frac{P}{P_n} + \frac{8M_u}{9M_p} &= 1,0 & \text{para } \frac{P}{P_n} \geq 0,2 \\ \frac{P}{2P_n} + \frac{M_u}{M_p} &= 1,0 & \text{para } \frac{P}{P_n} < 0,2 \end{aligned} \quad (6.24)$$

onde:  $P_n = \chi P_y$  é a força normal resistente nominal e  $M_u = MB_1$  é o momento fletor de segunda ordem.

Por se tratar de um pilar isolado, sujeito a momentos iguais que causam curvatura simples, o fator de amplificação  $B_1$ , de acordo com o anexo D do projeto da NBR 8800 (2006), é dado por:

$$B_1 = \frac{C_m}{1 - \frac{P}{P_e}} \geq 1,0 \quad (6.25)$$

onde  $C_m = 1,0$  é o coeficiente de equivalência de momentos,  $P$  é a força axial de compressão solicitante, em análise de primeira ordem e  $P_e$  é a carga de flambagem elástica de Euler.

O pilar de comprimento  $L = 7,05\text{ m}$  ( $\lambda = 80$ ) foi dividido em 10 elementos e a seção transversal do perfil **W200x46,1** em 50 fatias, sendo 20 para cada mesa e 10 para a alma. O aço escolhido foi o ASTM A36, com módulo de elasticidade  $E = 20500\text{ kN/cm}^2$  e tensão de escoamento  $f_y = 25\text{ kN/cm}^2$ . Foi adotada a elástica linear para a imperfeição geométrica inicial, sendo seu valor máximo no meio do vão  $\delta_0 = L/1000$ . Para as tensões residuais, adotou-se a distribuição linear nas mesas e comportamento constante na alma, em dois casos distintos:  $\sigma_{rc} = -0,3f_y$  e  $\sigma_{rc} = -0,5f_y$ . O carregamento foi incrementado gradativamente de 0,5% até a carga de escoamento  $P_y$ .

A FIG. 6.26 apresenta as curvas de interação para o pilar ideal (livre de imperfeições), para a combinação de tensões residuais e imperfeições geométricas iniciais, obtidas pelo programa desenvolvido, bem como as curvas do ANSI/ AISC 360-05 (2005) e do projeto da NBR 8800 (2006), obtidas conforme a Eq. (6.24).

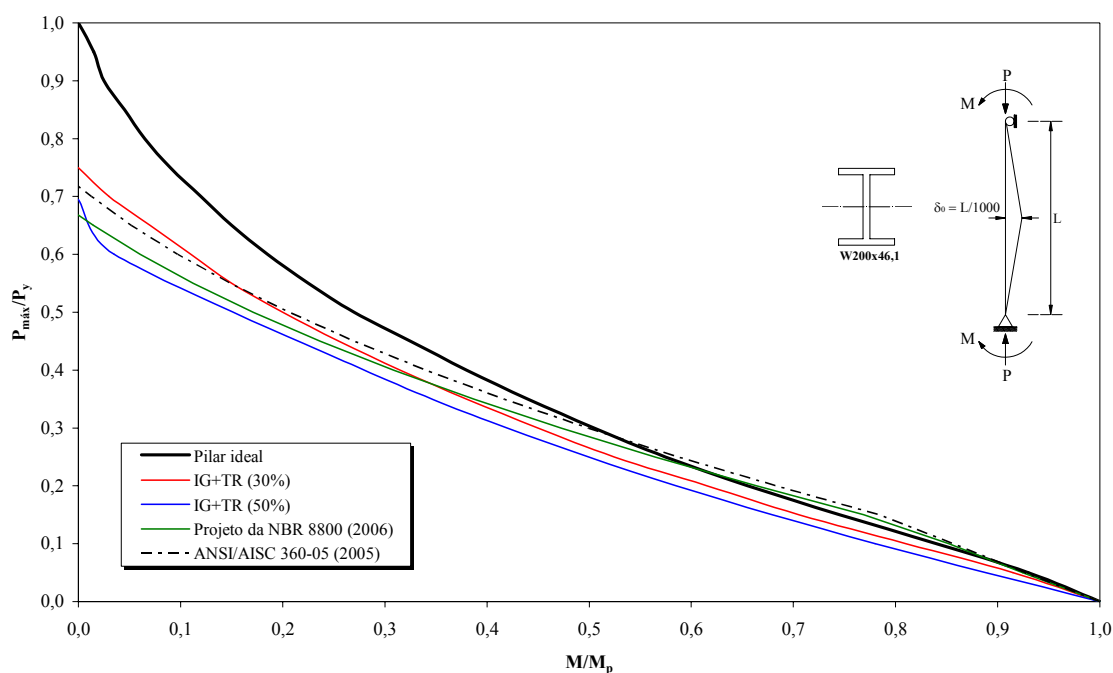


FIGURA 6.26 – Comparação de curvas de interação para a esbeltez 80

Observa-se, com auxílio da TAB. 6.24, que as curvas obtidas pelo programa desenvolvido apresentam um bom comportamento, quando comparadas com as demais

curvas de projeto. Para o caso com  $\sigma_{rc} = -0,3f_y$ , a curva mostrou-se conservadora para  $P/P_y < 0,4$ , em relação à curva do projeto da NBR 8800 (2006), apresentando erro máximo de 8,3%. No caso  $\sigma_{rc} = -0,5f_y$ , a curva representa um limite inferior para as todas as situações, com erro máximo de 11,8% em relação à curva do projeto da NBR 8800 (2006).

TABELA 6.24 – Resultados comparativos entre as curvas de interação para  $\lambda = 80$

$P/P_y$	$M/M_p$				
	Pilar ideal	TR+IMP (30%)	TR+IMP (50%)	ANSI/ AISC 360-05	NBR 8800
0,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,100	0,840	0,810	0,780	0,857	0,852
0,200	0,655	0,615	0,585	0,683	0,664
0,300	0,505	0,450	0,420	0,500	0,473
0,400	0,380	0,315	0,280	0,341	0,309
0,500	0,270	0,200	0,155	0,207	0,171
0,600	0,185	0,110	0,035	0,097	0,060
0,700	0,120	0,030	---	0,013	---
0,800	0,065	---	---	---	---
0,900	0,025	---	---	---	---
1,000	0,000	---	---	---	---
<b><math>P/P_y</math> para <math>M/M_p = 0,0</math></b>					
	<b>1,000</b>	<b>0,750</b>	<b>0,695</b>	<b>0,718</b>	<b>0,668</b>

## 6.6 Pórticos Planos

KANCHANALAI (1977) desenvolveu curvas de interação “exatas” baseadas na Teoria de Zona Plástica para pórticos deslocáveis. KIM e CHEN (1996b) verificaram a resistência e as relações carga x deslocamento para os mesmos pórticos, baseados em métodos da Análise Avançada, cujo procedimento incorpora o conceito de rótula plástica refinada para consideração da plasticidade distribuída, juntamente com a modelagem explícita das imperfeições geométricas.



Entre os vários casos estudados por KIM e CHEN (1996b), foram selecionados três pórticos não-contraventados de um andar e um vão para serem analisados através da formulação deste trabalho, cujas curvas de resistência serão comparadas com as dos dois autores citados.

Em todos os casos, os pilares e vigas foram divididos em 10 elementos e a seção transversal em 50 fatias, sendo 20 para cada mesa e 10 para a alma. O aço escolhido tem módulo de elasticidade  $E = 20500 \text{ kN/cm}^2$  e tensão de escoamento  $\sigma_y = 25 \text{ kN/cm}^2$ . Para as tensões residuais, adotou-se a distribuição linear nas mesas e comportamento constante na alma, sendo  $\sigma_{rc} = -0,3\sigma_y$ . A modelagem adotada para a imperfeição geométrica inicial é mostrada na FIG. 6.27, produzindo rotação  $\psi = 0,002$  no sentido horário.

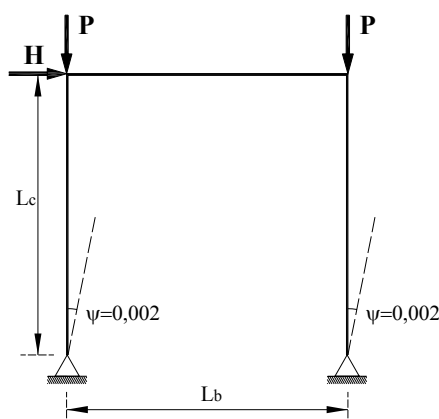


FIGURA 6.27 – Modelagem explícita da imperfeição geométrica inicial para pórticos não-contraventados

#### a) Exemplo P1 – Pórtico não-contraventado com viga alta

O pórtico não-contraventado, ilustrado na FIG. 6.27, sujeito ao carregamento horizontal  $H$  e vertical  $P$ , será analisado considerando-se os pilares com seção transversal em perfil **W200x46,1** de comprimento  $L_c = 175 \text{ cm}$  ( $L_c/r = 20$ ) e a viga com seção transversal em perfil **W610x113,0** de comprimento  $L_b = 2L_c = 350 \text{ cm}$ . Visando o colapso da estrutura foram aplicadas, de forma incremental, a carga de escoamento para o pilar

$P = P_y = 1442,30 \text{ kN}$  e a força horizontal  $H = 139,34 \text{ kN}$  determinada através da expressão  $H = 2M_p/L_c$ , considerando-se o momento plástico do pilar  $M_p = 12192,65 \text{ kN.cm}$ .

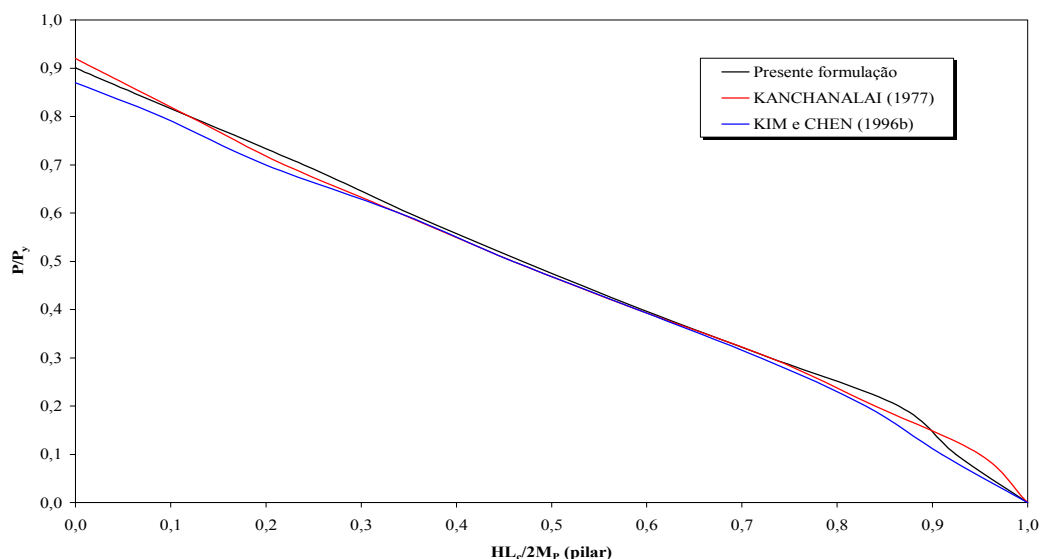


FIGURA 6.28 – Gráfico comparativo de curvas de resistência (exemplo P1)

TABELA 6.25 – Resultados numéricos das curvas de resistência (exemplo P1)

$P/P_y$	$HL_c/2M_p$		
	Presente formulação	KANCHANALAI (1977)	KIM e CHEN (1996b)
0,000	1,000	1,000	1,000
0,100	0,925	0,950	0,910
0,200	0,865	0,840	0,830
0,300	0,730	0,730	0,720
0,400	0,595	0,590	0,590
0,500	0,470	0,460	0,460
0,600	0,350	0,340	0,340
0,700	0,240	0,220	0,200
0,800	0,120	0,120	0,090
0,900	0,001	0,020	---
<b><math>P/P_y</math> para <math>HL_c/2M_p = 0,0</math></b>			
	<b>0,910</b>	<b>0,920</b>	<b>0,870</b>

A FIG. 6.28 apresenta o gráfico comparativo entre as curvas obtidas pela presente formulação e as curvas estimadas de KANCHANALAI (1977), KIM e CHEN (1996b). Observa-se a excelente correlação entre as curvas das diversas formulações, indicando a

validade da formulação desenvolvida. Observa-se, através da TAB. 6.25, que o erro máximo entre os resultados numéricos das curvas de resistência para a presente formulação e os valores estimados em KANCHANALAI (1977), KIM e CHEN (1996b), não ultrapassa 9,0% e 4,6%, respectivamente.

### b) Exemplo P2 – Pórtico não-contraventado com viga baixa

O pórtico não-contraventado, ilustrado na FIG. 6.27, sujeito ao carregamento horizontal  $H$  e vertical  $P$ , será novamente analisado considerando-se os pilares com seção transversal em perfil **W200x46,1** de comprimento  $L_c = 350$  cm ( $L_c/r = 40$ ) e a viga com seção transversal em perfil **W250x22,3** de comprimento  $L_b = 2L_c = 700$  cm. Visando o colapso da estrutura foram aplicadas, de forma incremental, a carga de escoamento para o pilar  $P = P_y = 1442,30$  kN e a força horizontal  $H = 36,80$  kN determinada através da expressão  $H = 2M_p/L_c$ , considerando-se o momento plástico da viga  $M_p = 6439,21$  kN.cm.

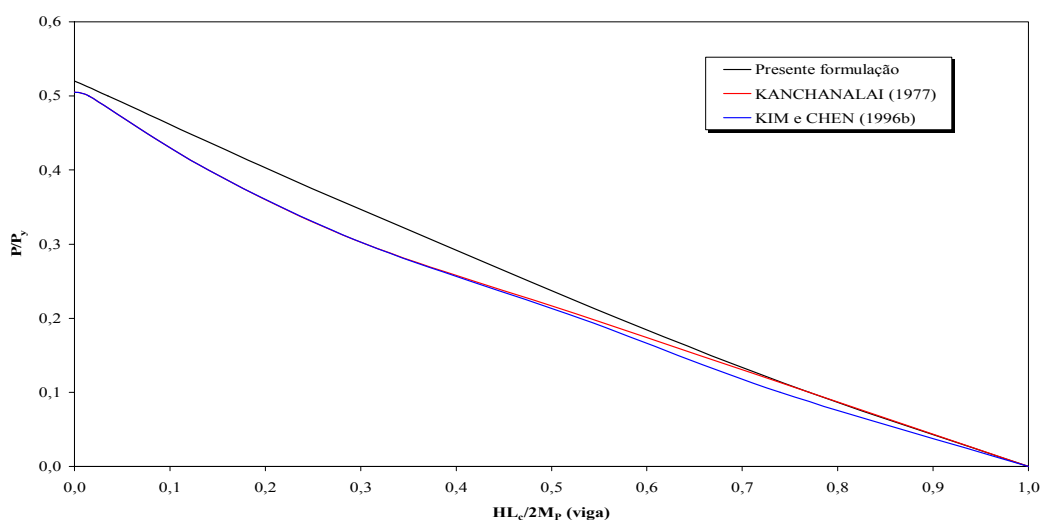


FIGURA 6.29 – Gráfico comparativo de curvas de resistência (exemplo P2)

A FIG. 6.29, obtida através dos dados numéricos da TAB. 6.26, apresenta o gráfico comparativo entre as curvas obtidas pela presente formulação e as curvas estimadas de KANCHANALAI (1977), KIM e CHEN (1996b). Observa-se a boa correlação entre as

curvas das diversas formulações, embora a obtida pela formulação desenvolvida seja menos conservadora que as demais.

TABELA 6.26 – Resultados numéricos das curvas de resistência (exemplo P2)

$P/P_y$	$HL_c/2M_p$		
	Presente formulação	KANCHANALAI (1977)	KIM e CHEN (1996b)
0,000	1,000	1,000	1,000
0,100	0,770	0,770	0,740
0,200	0,570	0,540	0,530
0,300	0,385	0,305	0,305
0,400	0,205	0,140	0,140
0,500	0,035	0,015	0,015
$P/P_y$ para $HL_c/M_p = 0,0$			
	<b>0,520</b>	<b>0,505</b>	<b>0,505</b>

c) Exemplo P3 – Pórtico com pilar instável

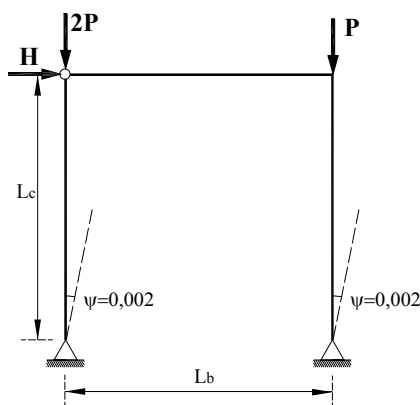


FIGURA 6.30 – Pórtico com pilar “instável”

O pórtico não-contraventado, ilustrado na FIG. 6.30, trata-se de um caso no qual o pilar da esquerda é instável (leaned-column) e toda a resistência da estrutura é conferida a ligação do pilar da direita com a viga. Os pilares têm seção transversal em perfil **W200x46,1** de comprimento  $L_c = 350$  cm ( $L_c/r = 40$ ) e a viga tem seção transversal em perfil **W610x113,0** de comprimento  $L_b = 2L_c = 700$  cm. O nó rotulado fica sujeito a carga vertical  $2P_y = 2884,60$  kN e horizontal  $H = 139,34$  kN (determinada através da

expressão  $H = M_p/L_c$ ), enquanto no nó A aplica-se somente a carga vertical  $P_y = 1442,3 \text{ kN}$ .

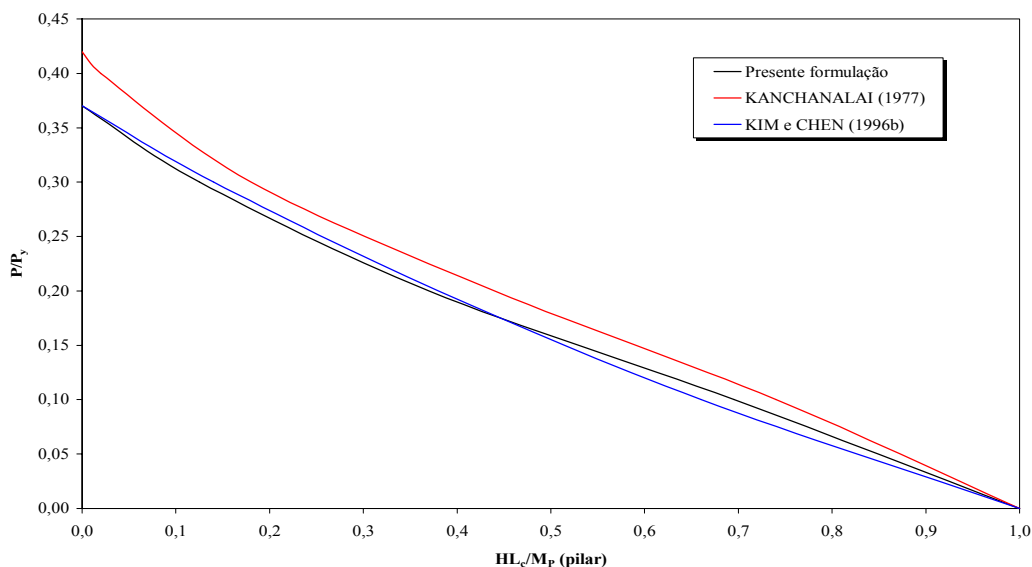


FIGURA 6.31 – Gráfico comparativo de curvas de resistência (exemplo P3)

TABELA 6.27 – Resultados numéricos das curvas de resistência (exemplo P3)

P/Py	HL <sub>c</sub> /M <sub>p</sub>		
	Presente formulação	KANCHANALAI (1977)	KIM e CHEN (1996b)
0,000	1,000	1,000	1,000
0,100	0,695	0,740	0,660
0,200	0,370	0,440	0,380
0,300	0,125	0,180	0,140
0,400	---	0,020	---
<b>P/Py para HL<sub>c</sub>/M<sub>p</sub> = 0,0</b>			
	<b>0,370</b>	<b>0,420</b>	<b>0,370</b>

A FIG. 6.31, obtida através dos dados numéricos da TAB. 6.27, apresenta o gráfico comparativo entre as curvas obtidas pela presente formulação e as curvas estimadas de KANCHANALAI (1977), KIM e CHEN (1996b). Observa-se a boa correlação entre a curva obtida pela presente formulação e a de KIM e CHEN (1996b), as quais se mostram conservadoras quando comparadas com KANCHANALAI (1977).

# 7

## CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi descrever uma formulação geometricamente exata para análise não-linear física e geométrica de pórticos planos de aço, via Método dos Elementos Finitos, utilizando os conceitos da plasticidade distribuída, para elementos com ligações rígido-rotuladas, incluindo os efeitos das tensões residuais, visando sua aplicação como um método de *Análise Avançada*.

Segundo CHEN et al. (1996), a teoria fundamentada na análise inelástica de segunda ordem, considerando a plasticidade distribuída e incluindo os efeitos das tensões residuais, pode ser classificada como *Análise Avançada*. Assim, visando à validação dentro desta filosofia, a formulação apresentada é bastante geral, permitindo-se que os nós sofram grandes deslocamentos e rotações e as barras sofram grandes alongamentos e curvaturas e, além disso, elas podem ser não-homogêneas, não-prismáticas e constituídas de material elastoplástico. O modelo desenvolvido é capaz de considerar os efeitos P- $\Delta$  e P- $\delta$  nos problemas de instabilidade; avaliar a estabilidade e a resistência das barras da estrutura individualmente e como parte dela; descrever os efeitos da distribuição da plastificação ao longo das barras e das seções transversais e avaliar os efeitos isolados ou combinados das tensões residuais e imperfeições geométricas

iniciais, apresentando resultados referentes à resistência coerentes com aqueles obtidos pelos modelos clássicos e pela literatura técnica disponível.

As contribuições principais deste trabalho foram:

- 1) A dedução consistente das matrizes de rigidez tangente, elástica e elastoplástica, para elementos com uma extremidade rotulada e outra rígida, explicitando-as analiticamente, de forma simples;
- 2) Adicionar à versão original do programa computacional apresentado por LAVALL (1996), a capacidade de analisar problemas com ligações articuladas entre as barras da estrutura, com tensões residuais aplicadas na alma do perfil e com diferentes carregamentos nodais com incrementos e fatores de ponderação diferenciados;
- 3) A implementação de um pré-processador possibilitando uma interface mais amigável com o usuário e permitindo o cálculo automático dos parâmetros de entrada exigidos pelo programa principal;
- 4) Mostrar a potencialidade da formulação na solução de problemas elásticos geometricamente não-lineares, com grandes deslocamentos, bem como na solução de problemas não-lineares físicos e geométricos, considerando a distribuição da plasticidade na seção transversal e ao longo do comprimento das barras;
- 5) Comparar a resistência última das barras de aço submetidas a esforços combinados, incluindo o efeito das tensões residuais auto-equilibradas e das imperfeições geométricas iniciais, com as curvas de dimensionamento à compressão e com as equações de interação apresentadas no projeto de revisão da NBR 8800 (2006), utilizando os conceitos da Análise Inelástica Avançada.

O programa desenvolvido neste trabalho mostrou-se bastante eficiente na análise dos vários exemplos apresentados, confirmando a expectativa da grande potencialidade da formulação adotada. Os efeitos das tensões residuais, que causam escoamento precoce das seções transversais das barras, podem ser avaliados e o modelo de fatias utilizado permite acompanhar com precisão o escoamento das seções e a formação de rótulas plásticas. O pré-processador agregou agilidade e automatização no preenchimento dos dados de entrada exigidos pelo programa principal

O exemplo do pilar treliçado mostrou a potencialidade da formulação teórica quando utilizada em problemas elásticos que apresentem grandes deslocamentos e validou o desenvolvimento analítico proposto para as matrizes de rigidez tangente no caso de barras formadas por nós rígido-rotulados; enquanto os exemplos de vigas mostraram plastificação gradual ao longo da altura da seção, bem como a distribuição da plastificação ao longo do comprimento da viga. O comportamento elastoplástico de uma viga fina biengastada caracterizou um comportamento típico de treliça, após a formação do mecanismo plástico.

Observou-se que o efeito das tensões residuais influencia a resistência última dos pilares de aço na região inelástica, ampliando sua faixa de  $0,0 \leq \lambda_0 \leq 1,3$ , nos eixos de maior e menor inércia. A distribuição linear das tensões residuais nas mesas com o comportamento constante na alma é a mais conservadora dentre as estudadas. A influência das imperfeições geométricas iniciais, tratadas de forma explícita, estende-se a toda faixa de esbeltez e é mais evidente para  $\lambda_0 = 1,0$ . A configuração senoidal é a que melhor descreve a elástica da imperfeição geométrica inicial. Em termos práticos, a configuração linear pode ser empregada visando à simplificação de sua utilização. O efeito combinado das tensões residuais e imperfeições geométricas iniciais foi analisado, comprovando a necessidade de se incorporarem esses dois fatores no modelo de análise para cálculo da resistência de pilares.

Verificou-se que curva de resistência à compressão da presente formulação, obtida com a tensão residual linear, sendo  $\sigma_{rc} = -0,5f_y$ , e com a configuração senoidal para a elástica da imperfeição geométrica inicial, tende para a curva “b” de dimensionamento à compressão para instabilidade por flexão, adotada no projeto de revisão da NBR 8800 (2006), para o eixo de maior inércia e permanece entre as curvas “b” e “c” para o eixo de menor inércia, comprovando as recomendações da norma citada.

A determinação da superfície de resistência plástica de um elemento de viga-pilar, submetido à combinação de força normal e momento fletor, mostrou que as curvas de interação do projeto da NBR 8800 (2006), utilizadas tanto para a determinação da resistência em torno do eixo de maior inércia quanto para a menor inércia, fornecem um



bom ajuste para o limite inferior da resistência segundo o eixo de maior inércia e são bastante conservadoras quando empregadas para o eixo de menor inércia.

A presente formulação, fundamentada na teoria de zona plástica, apresentou uma boa correlação com os resultados obtidos por KANCHANALAI (1977), KIM e CHEN (1996a) e permitiu o estudo de pórticos planos com pilares “instáveis” (leaned-columns).

Após todas as análises e calibrações feitas nos exemplos numéricos, que mostraram a validade e a potencialidade da formulação desenvolvida neste trabalho, a qual baseia-se no conceito da plasticidade distribuída, conclui-se que a presente formulação pode ser considerada como um método de análise segundo os conceitos da *Análise Inelástica Avançada*.

Ao final deste trabalho surgem algumas propostas para desenvolvimento em estudos posteriores, uma vez que algumas lacunas encontradas devem ser preenchidas. Assim, a formulação poderia ser estendida para se considerar os efeitos das deformações por cisalhamento, das ligações semi-rígidas, a possibilidade de análise dinâmica e se possível, o estudo da instabilidade lateral com torção ao se estender a formulação para o caso tridimensional. A implementação de outros algoritmos de solução numérica e métodos automáticos de incremento de cargas podem ser medidas eficazes para a melhoria da eficiência do programa.

Introduzindo estas modificações, acredita-se que a formulação e o programa desenvolvidos neste trabalho estarão, cada vez mais, inseridos no modelo de *Análise Inelástica Avançada*, que calibrados e validados corretamente, permitirão sua aplicação em estudos detalhados do comportamento estrutural, na verificação da precisão de métodos simplificados de análise, na comparação com resultados experimentais, na obtenção de curvas e ábacos de uso prático e nos estudos de projetos especiais. Conforme afirmam CHEN et al. (1996), os métodos de *Análise Inelástica Avançada* representam o estado da arte em projetos para os engenheiros estruturais no século vinte e um.

## BIBLIOGRAFIA

ABNT (1986): *Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios. Método dos Estados Limites - NBR 8800/86* - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Rio de Janeiro, 2.ed.

ABNT (2006): *Projeto de Revisão da Norma Brasileira para Projeto de Estruturas de Aço e de Estruturas Mistas de Aço e Concreto de Edifícios - NBR 8800/06* - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Versão setembro 2006, p. 253.

ALPSTEN, G. A. AND TALL, L. (1970): *Residual Stresses in Heavy Welded Shapes*. Welding Journal/ AWS, p.93-105.

ANSI/ AISC 360-05 (2005): *Specification for Structural Steel Buildings*. Chicago, Illinois: American Institute of Steel Construction, AISC, INC.

BATTERMAN, R. H. AND JOHNSTON, B. G. (1967): *Behavior and Maximum Strength of Metal Columns*. Journal of the Structural Division (ASCE), v. 93, n. St 2, p. 205-230.

BEEDLE, L. S. AND TALL, L. (1960): *Basic Column Strength*. Journal of the Structural Division (ASCE), v. 86, n. St 7, p. 139-173.

BEER, H. AND SCHULZ, G. (1970): *Bases théoriques des courbes européennes de flambement*. Construction Métallique, n. 3, p. 37-57.

BJORHOVDE, R. (1988): *Columns: from Theory to Practice*. Engineering Journal (AISC), v. 25, n. 1, 1<sup>st</sup> Quarter, p. 21-34.

BJORHOVDE, R., BROZZETTI, J., ALPSTEN, G. A. AND TALL, L. (1972): *Residual Stresses in Thick Welded Plates*. Welding Journal (AWS), v.51, n. 51, p. 329-405.

CHEN, W. F. AND LUI, E. M. (1987): *Structural Stability – Theory and Implementation*. New York: Elsevier Science Publishing Co., Inc., p. 490.

CHEN, W. F. AND TOMA, S. (1994): *Advanced Analysis of Steel Frames: Theory, Software, and Applications*. Boca Raton: CRC-Press, p. 384.

CHEN, W. F., GOTO, Y. AND LIEW, J. Y. R. (1996): *Stability Design of Semi-Rigid Frames*. New York: John Wiley e Sons, Inc., p. 468.

ECCS (1976): *Manual on the Stability of Steel Structures - EUROPEAN CONVENTION FOR CONSTRUCTIONAL STEELWORK (ECCS)*. 2° ed., Brussels.

EL-ZANATY, M. H., MURRAY, D. W. AND BJORHOVDE, R. (1980): *Inelastic Behavior of Multistory Steel Frames*. Department of Civil Engineering, University of Alberta.

FERREIRA, R. P. (1999): *Uma Formulação Consistente para Análise Elastoplástica de Estruturas de Aço*. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia da UFMG, p. 162.

GALAMBOS, T. V. (1988): *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*, 4<sup>th</sup> Edition, John Willey & Sons.

KANCHANALAI T. (1977): *The Design and Behavior of Beam-columns in Unbraced Steel Frames*. AISI Project N°. 189, Report N°. 2, Civil Engineering/Structures Research Laboratory, University of Texas, Austin (TX), p. 300.

KIM, S. E. AND CHEN, W. F. (1996a): *Practical Advanced Analysis for Braced Steel Frame Design*. Journal of Structural Engineering, ASCE, 122(11), p. 1266-1274.

KIM, S. E. AND CHEN, W. F. (1996b): *Practical Advanced Analysis for Unbraced Steel Frame Design*. Journal of Structural Engineering, ASCE, 122(11), p. 1259-1265.

LAVALL, A. C. C. (1996): *Uma Formulação Teórica Consistente para a Análise Não-Linear de Pórticos Planos pelo Método dos Elementos Finitos Considerando Barras com Imperfeições Iniciais e Tensões Residuais nas Seções Transversais*. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos (USP), p. 265.

LIEW, J. Y. R., WHITE, D. W. AND CHEN, W. F. (1993a): *Second-Order Refined Plastic Hinge Analysis of Frame Design: Part I*. Journal of Structural Engineering, ASCE, 119 (11), p.3196-3216.

MACHADO, F. C. S. E SILVEIRA, R. A. M. (2005): *Formulação Inelástica de Segunda Ordem para Sistema Estruturados em Aço*. REM – Revista da Escola de Minas. Vol. 58 n° 3. Ouro Preto.

MARTHA, L. F (2002): *Ftool: Um Programa Gráfico-Interativo para Ensino de Comportamento de Estruturas*. PUC-Rio - Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. Rio de Janeiro.

MC FALLS, R. K. AND TALL, L. (1969): *A study of Welded Columns Manufactured from Flame-Cut Plates*. Welding Journal/AWS, p.141-153.

OWEN, D. R. J. AND HINTON, E. (1980): *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*. Swansea, U. K. Pineridge Press Ltd.

PIMENTA, P. M. (1986): *Análise Não-Linear de Pórticos Planos*. Boletim Técnico do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, 8611. São Paulo, EPUSP.

PIMENTA, R. J. (1997): *Proposição de uma Curva de Flambagem para Perfis I Soldados formados por Chapas Cortadas a Maçarico*. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia da UFMG, p. 149.

REIS, A. E CAMOTIN, D. (2001): *Estabilidade Estrutural*. Editora Mc Graw Hill de Portugal, p. 470.

SALMON, C. G. AND JOHNSON, J. E. (1996): *Steel Structures – Design and Behavior*. 4<sup>th</sup> Edition, Harper Collins Publishers Inc.

SILVA, R. G. L. E LAVALL, A. C. C. (2005): *Formulação Geral para Análise Avançada de Pórticos de Aço considerando a Plasticidade Distribuída*. XXVI CILANCE – Iberian Latin American Congresso n Computacional Methods in Engineering, 2005, Guarapari – ES. Anais do XXVI CILANCE – v.1, p. 1-15.

WENG, C. C. AND PEKOZ, T. (1950): *Residual Stresses in Cold-Formed Steel Members*. Journal of Structural Engineering (ASCE), v. 116, n.6, p.1611-1625.