

**ANÁLISE NUMÉRICA NÃO-LINEAR DA FLAMBAGEM LOCAL
DE PERFIS DE AÇO ESTRUTURAL SUBMETIDOS À
COMPRESSÃO UNIAXIAL**

Ana Lydia Reis de Castro e Silva

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**"ANÁLISE NUMÉRICA NÃO-LINEAR DA FLAMBAGEM LOCAL
DE PERFIS DE AÇO ESTRUTURAL SUBMETIDOS À
COMPRESSÃO UNIAXIAL"**

Ana Lydia Reis de Castro e Silva

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Doutor em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Ricardo Hallal Fakury
DEES - UFMG - (Orientador)

Prof. Dr. Estevam Barbosa de Las Casas
DEES - UFMG (Co-orientador)

Prof. Dr. Armando Cesar Campos Lavall
DEES - UFMG

Prof. Dr. Francisco Carlos Rodrigues
DEES - UFMG

Prof. Dr. Eduardo de Miranda Batista
COPPE - UFRJ

Prof. Dr. Walnório Graça Ferreira
UFES

Belo Horizonte, 21 de dezembro de 2006

Ao Alcides e à Clara

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Ricardo Hallal Fakury pela orientação sempre competente e também pela confiança, apoio, incentivo e amizade que foram uma constante ao longo dessa jornada de trabalho conjunto.

Ao professor Estevam Barbosa de Las Casas, pela valorosa contribuição técnica e pela inestimável amizade, incentivo e confiança.

Ao professor Dinar Camotim pela acolhida e orientação de grande valor e competência.

Ao Alcides e a Clara, minhas grandes razões de procurar sempre crescer e melhorar. Sem cujo amor, suporte, sacrifício e incentivo nada teria sido realizado.

Aos meus pais por todo o carinho e apoio recebidos durante toda a minha vida e aos meus familiares que sempre acreditaram em mim.

Aos colegas, funcionários e amigos do DEES pela convivência agradável nesses anos. Em especial, aos professores Eduardo Chahud, Ramon Pereira da Silva e Ana Maria Gontijo Figueiredo, pelo apoio e incentivo, às queridas Iracema, Inês e Fatima, pelo carinho, incentivo e confiança e ao Eliezer, por todos os “galhos quebrados” e “pepinos resolvidos”. Também a todo o pessoal do LAMEC pelo auxílio computacional.

Aos meus amigos, imprescindíveis pelas horas de descontração que amenizaram os períodos difíceis. Em especial à família Vilaça, Pedro, Dulce, Vera e Vasco, que adotou esses “brasileiros malucos” e tornou o período em Portugal muito especial, e à Diná que cuidou de todos nós com tanto zelo e carinho durante todo o processo. Também ao Antônio Beneti por me ajudar a conhecer e respeitar meus limites.

Ao pessoal do IST pela acolhida e pelo suporte na utilização do programa ABAQUS.

Ao CNPq, à CAPES e à FAPEMIG, que tornaram possível a execução deste trabalho.

RESUMO

Os perfis estruturais, laminados e soldados, das barras de aço axialmente comprimidas, compostos por placas esbeltas, podem apresentar a flambagem local de seus elementos constituintes. Trata-se de um fenômeno típico dos elementos de placa, no qual têm-se o aparecimento de grandes deslocamentos transversais normais ao plano médio da peça, com o eixo da barra permanecendo reto, devido a pequenas variações no carregamento. Após o início da ocorrência da flambagem local, ocorre uma mudança na distribuição original das tensões no plano médio das placas, conferindo uma resistência pós-flambagem. A determinação do comportamento generalizado de pós-flambagem deve incorporar os fatores de influência inerentes a esse tipo de problema, como a esbeltez da placa, as imperfeições geométricas iniciais, as tensões residuais e não-linearidade do material. Neste trabalho foi realizado um estudo amplo, conceitual e numérico, através do programa ABAQUS versão 6.5-1, da flambagem local de peças estruturais de aço submetidas à compressão uniaxial centrada, para os perfis estruturais I duplamente simétricos e cantoneiras de abas iguais, com a consideração das não-linearidades, objetivando contribuir na compreensão do fenômeno. O desenvolvimento do trabalho contemplou um estudo dos conceitos fundamentais envolvidos na flambagem local, o estudo do Projeto de Revisão da Norma Brasileira de Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios, PR NBR 8800 (2006) e os estudos da estabilidade de placas isoladas e dos perfis estruturais. Foi aplicada uma metodologia de implementação e verificação, partindo-se de casos simples encontrados na literatura e fazendo-se o acoplamento gradual dos fatores de influência do fenômeno. Essa metodologia mostrou-se adequada, apresentando resultados coerentes em todas as etapas e possibilitando o entendimento e a validação dos resultados. Foram obtidas as curvas de resistência dos perfis estudados em função da esbeltez de seus elementos componentes, as quais foram comparadas às da norma brasileira. A concordância numérica dos modelos de referência e a coerência comportamental observada indicam uma abordagem correta que conduziu a resultados representativos. Com base nesses resultados, puderam ser avaliados os procedimentos do PR NBR 8800 (2006) e algumas considerações relevantes observadas neste trabalho foram: (i) a influência das tensões residuais, principalmente nas placas esbeltas; (ii) a observação das imprecisões encontradas na aproximação do estudo de seções pelo desacoplamento de suas placas constituintes, devido às diferenças

comportamentais; (iii) as simplificações e imprecisões da norma brasileira quanto à resistência pós-flambagem, ao parâmetro limite de esbeltez e às tensões residuais consideradas para as cantoneiras; (iv) as imprecisões da norma brasileira quanto à curva de resistência de perfis I laminados de alma muito esbelta e (v) as imprecisões da norma brasileira pela desconsideração dos perfis I soldados formados por placas cortadas à maçarico.

ABSTRACT

Local buckling of plates normally presents large displacements in the normal direction of the medium plane of the plate due to small loading changes, with the axis of the bar remaining straight. This is a typical phenomenon of axially compressed steel columns, composed either with welded or hot-rolled structural shapes. When the plate buckles locally, there is a change in the original stress distribution in the medium plane of the buckled plate and an increase in the strength, called post-buckling strength. The post-buckling strength behaviour is affected by many nonlinear influence parameters, such as plate slenderness, initial geometric imperfections, residual stresses and nonlinear material behaviour. In this work, it was developed a theoretical and numerical study, using the nonlinear analysis software ABAQUS, in order to comprehend the local buckling nonlinear behaviour of structural I shapes and structural angles of axially compressed steel columns. First the fundamentals of the local buckling and the basis of the formulation of the Revision of the Brazilian Standard for the Design of Steel Structures PR NBR 8800 (2006) was described. Subsequently, several analysis of plate stability and local buckling of sections were performed. It was adopted a methodology for the implementation and analysis starting from simple cases found in the literature and gradually adding the nonlinear influence parameters. This approach allowed the understanding and validation of the results, showing good numerical agreement in the comparisons and also the expected behaviour in the analysis. The strength curves of the studied profiles were obtained as a function of the slenderness of their component elements and were compared to the Brazilian Standard curves. The results showed a valid approach for the problem, contributing to the characterization of the behaviour of these structural steel profiles under the local buckling phenomenon, and allowed to question the procedures of the PR NBR 8800 (2006). Some relevant issues pointed in this study are: (i) the influence of the residual stresses, especially for thin plates; (ii) the differences introduced by the approximation of the section behaviour by the observation of the isolated plates behaviour; (iii) the simplifications and errors in the Brazilian Standard formulation of post-buckling resistance of structural angles; (iv) the confusions in the Brazilian Standard strength curves of structural I shapes with slender webs; and (v) the lack of accuracy in the Brazilian Standard by the disregarding of the structural welded I shapes composed by cut-flame plates.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	01
1.1. Considerações Gerais	01
1.2. Flambagem Local.....	02
1.2.1. <i>Fatores de Influência</i>	03
1.3. Revisão Bibliográfica.....	08
1.3.1. <i>Introdução</i>	08
1.3.2. <i>Estabilidade de Placa</i>	09
1.3.3. <i>Estabilidade de Seções</i>	12
1.3.4. <i>Tensões Residuais</i>	18
1.3.5. <i>Método dos Elementos Finitos</i>	20
1.4. Proposta de Trabalho	24
2. FUNDAMENTOS DA ANÁLISE	28
2.1. Estabilidade Estrutural.....	28
2.2. Estabilidade de Placa Comprimida	32
2.2.1. <i>Flambagem Elástica de Placa</i>	34
2.2.2. <i>Flambagem Elasto-Plástica de Placa</i>	37
2.2.3. <i>Resistência Pós-Flambagem</i>	39
2.3. Estabilidade de Seções.....	43
2.4. Tensões Residuais	44
2.4.1. <i>Placas</i>	46
2.4.2. <i>Perfis I Laminados</i>	50
2.4.3. <i>Perfis I Soldados</i>	54
2.4.4. <i>Cantoneiras</i>	57
2.5. Tratamento Normativo	59
2.6. Método dos Elementos Finitos.....	66
2.6.1. <i>Generalidades</i>	66
2.6.2. <i>Princípios Básicos do MEF</i>	67
2.6.3. <i>Abordagem do Programa ABAQUS</i>	68
2.6.3.1. <i>Considerações gerais</i>	68
2.6.3.2. <i>Plasticidade</i>	70

2.6.3.3. Elementos.....	71
2.6.3.4. Análise linearizada de estabilidade	74
2.6.3.5. Análise da pós-flambagem.....	75
2.6.3.6. Critérios de convergência	77
3. ESTUDO DE PLACAS ISOLADAS	80
3.1. Introdução	80
3.2. Análise Linearizada de Estabilidade	81
3.2.1. <i>Placa com as Bordas Longitudinais Simplesmente Apoiadas</i>	82
3.2.2. <i>Placa com as Bordas Longitudinais Engastadas</i>	85
3.2.3. <i>Placa com uma Borda Longitudinal Engastada e a outra Simplesmente Apoiada</i>	88
3.2.4. <i>Placa com uma Borda Longitudinal Engastada e a outra Livre</i>	90
3.2.5. <i>Placa com uma Borda Simplesmente Apoiada e a outra Livre</i>	92
3.3. Análise da Pós-Flambagem de Placa Quadrada.....	95
3.4. Estudo de Placa Longa	97
3.5. Controle e Convergência.....	108
4. ESTUDO DE PERFIS ESTRUTURAIS	110
4.1. Introdução	110
4.2. Análise Linearizada de Estabilidade	112
4.2.1. <i>Perfis U</i>	112
4.2.2. <i>Perfis U Enrijecidos</i>	113
4.2.3. <i>Perfis I</i>	115
4.2.4. <i>Estudo dos Parâmetros de Flambagem Elástica de Perfis I, U e Cantoneiras de Abas Iguais</i>	118
4.2.4.1. <i>Perfis I e U</i>	118
4.2.4.2. <i>Cantoneiras de abas iguais</i>	123
4.3. Análise da Pós-Flambagem.....	126
4.3.1. <i>Perfil U Enrijecido</i>	126
4.3.2. <i>Perfis Tipo Rack</i>	129
4.3.3. <i>Abordagem por Aproximações na Análise</i>	132
4.3.3.1. <i>Comparação da alma com placa simplesmente apoiada nas quatro bordas</i>	134

4.3.3.2. Comparação da mesa com placa simplesmente apoiada em uma borda longitudinal e livre na outra.....	136
4.3.4. <i>Cantoneiras de Abas Iguais</i>	140
4.3.5. <i>Perfis I</i>	150
4.4. Controle e Convergência.....	173
5. CONCLUSÕES	177
5.1. Considerações Gerais	177
5.2. Placas	178
5.3. Perfis	181
5.4. Análise Global e Sugestões.....	187
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	190

LISTA DE FIGURAS

1.1 - Configurações de flambagem local de (a) placa plana e de (b) perfil estrutural obtidas em análise numérica com o programa ABAQUS.	02
1.2 - Comportamento de pós-flambagem de placas esbeltas (Trahair e Bradford, 1988).	04
1.3 - Efeito das imperfeições iniciais no comportamento de placas (Maquoi, 1992).	05
1.4 - Diagrama tensão x deformação elasto-plástico tri-linear (adaptado de Earls, 1999).	07
1.5 - Elementos constituintes dos perfis estruturais.	26
2.1 - Configurações de equilíbrio	28
2.2 - Trajetória de equilíbrio – instabilidade bifurcacional (Reis e Camotim, 2000).	30
2.3 - Curva de pós-flambagem (a) estável simétrica e (b) instável simétrica (adaptado de Galambos, 1998).	31
2.4 - Placa comprimida uniaxialmente.	32
2.5 - Semi-ondas de flambagem local de placa comprimida uniaxialmente.	35
2.6 - Valores de K_q para os tipos usuais de condições de contorno de placas (Salmon e Johnson, 1990).	36
2.7 - Configurações de flambagem de placas comprimidas (Trahair e Bradford, 1988).	37
2.8 - Influência das tensões residuais no diagrama tensão média x deformação (Salmon e Johnson, 1990).	38
2.9 - Comportamento de pós-flambagem de placas elásticas esbeltas (Trahair e Bradford, 1988).	40
2.10 - Distribuição de tensões antes e após o colapso de placa apoiada em ambas as bordas longitudinais (Fakury, 1989).	41
2.11 - Largura efetiva de placas apoiadas em ambas as bordas longitudinais (Fakury, 1989).	42
2.12 - Largura efetiva de placas apoiadas em apenas uma borda longitudinal (Fakury, 1989).	42

2.13 - Coeficientes de flambagem local de perfis I de barras de aço comprimidas (Trahair e Bradford, 1988).....	44
2.14 - Distribuições de tensões residuais idealizadas e medidas (Trahair, 1983).	46
2.15 - Distribuição parabólica das tensões residuais em placas laminadas.	47
2.16 - Distribuição das tensões residuais em placas cortadas à maçarico (a) apenas em uma borda e (b) nas duas bordas.	48
2.17 - Distribuição das tensões residuais em placas soldadas longitudinalmente na seção central.	50
2.18 - Variações das distribuições de tensões residuais em perfis I laminados de acordo com a geometria (Galambos, 1988).	51
2.19 - Distribuição padrão das tensões residuais em seções I laminadas.	51
2.20 - Variações nas distribuições das tensões residuais para placa com (a) bordas laminadas e (b) bordas cortadas a maçarico.....	55
2.21 - Variação das distribuições das tensões residuais para perfis formados por chapas cortadas a maçarico em função de sua massa (Mc Falls e Tall, 1969 <i>apud</i> Pimenta, 1997).	57
2.22 - Distribuições padrão de tensões residuais de cantoneiras laminadas.	58
2.23 - Distribuições de tensões residuais de cantoneiras laminadas medidas por Adluri e Madugula (1996).....	58
2.24 - Valores da tensão residual em uma aba da cantoneira (Al-Sayed e Bjorhovde ,1989 <i>apud</i> Adluri e Madugula, 1996).	59
2.25 - Relação entre a tensão crítica de flambagem e a esbeltez de elemento tipo AL.	60
2.26 - Curva da tensão crítica de flambagem x esbeltez de cantoneiras de abas iguais.	63
2.27 - Representação do elemento de casca S4.....	74
2.28 - Método Riks modificado (ABAQUS, 1998).	77
2.29 - Primeira iteração em um incremento (ABAQUS, 1998).....	78
3.1 - Graus de liberdade para consideração das condições de vinculação das placas.	82
3.2 - Curvas de K_q x a para placas com todas as bordas simplesmente apoiadas (Allen e Bulson, 1980).....	82

3.3 - Bordas carregadas com diferentes condições de contorno (Allen e Bulson, 1980).	83
3.4 - Formas do primeiro modo de flambagem obtidas na análise numérica para placas com as bordas longitudinais simplesmente apoiadas e razão (a/b) igual a 5.	85
3.5 - Coeficiente de flambagem de placas com bordas longitudinais engastadas (Allen e Bulson, 1980).	86
3.6 - Formas do primeiro modo de flambagem obtidas na análise numérica para placas com as bordas longitudinais engastadas e razão (a/b) igual a 5.	88
3.7 - Formas do primeiro modo de flambagem obtidas na análise numérica para placas com uma borda longitudinal engastada e a outra simplesmente apoiada e razão (a/b) igual a 5.	90
3.8 - Formas do primeiro modo de flambagem obtidas na análise numérica para placas com uma borda longitudinal engastada e a outra livre e razão (a/b) igual a 5.	92
3.9 - Coeficiente de flambagem para placas com uma borda longitudinal simplesmente apoiada e a outra livre (Allen e Bulson, 1980).	92
3.10 - Formas do primeiro modo de flambagem obtidas na análise numérica para placas com uma borda longitudinal simplesmente apoiada e a outra livre e razão (a/b) igual a 5.	94
3.11 - Parâmetros e resultados da análise linearizada de estabilidade de placa.	95
3.12 - Primeiro modo de flambagem da placa.	95
3.13 - Curvas de pós-flambagem da placa quadrada.	96
3.14 - Placa com razão (a/b) igual a 8.	97
3.15 - Comportamento elasto-plástico bi-linear do aço adotado.	98
3.16 - Distribuição das tensões residuais em placas laminadas.	98
3.17 - Estudo da malha para material elástico e placa com tensões residuais.	100
3.18 - Estudo da malha para material elasto-plástico e placa sem tensões residuais.	100
3.19 - Configuração da placa estudada.	101
3.20 - Efeito das tensões residuais no valor da tensão crítica de flambagem.	103
3.21 - Efeito das tensões residuais no valor da tensão última de colapso.	104
3.22 - Primeiro modo de flambagem com a formação de oito semi-ondas longitudinais.	104

3.23 - Curvas de pós-flambagem para as diversas espessuras consideradas para as placas, com e sem tensões residuais.	105
3.24 - Distribuição das tensões na seção transversal da placa, sem tensões residuais.	107
3.25 - Distribuição das tensões na seção transversal da placa, com tensões residuais.	107
4.1 - Barra em perfil U utilizada na análise linearizada de estabilidade.	112
4.2 - Forma do primeiro modo de flambagem do perfil U analisado.	113
4.3 - Configuração da barra em perfil U enrijecido analisada.	113
4.4 - Forma do primeiro modo de flambagem do perfil U enrijecido analisado.	114
4.5 - Barra em perfil U enrijecido considerada por Kwon (1992).	114
4.6 - Forma do primeiro modo de flambagem para a igual a 65 mm.	115
4.7 - Barra em perfil I considerada para análise.	115
4.8 - Gráfico de carga crítica em função da esbeltez da seção I analisada.	117
4.9 - Forma dos modos de flambagem do perfil I analisado.	118
4.10 - Dimensões dos perfis I e U.	119
4.11 - Flambagem local das mesas (a) perfil I e (b) perfil U.	120
4.12 - Flambagem local da alma (a) perfil I e (b) perfil U.	120
4.13 - Valores parametrizados de K_p para instabilidade local da alma e das mesas.	121
4.14 - Valores parametrizados de $(b/t)_{máx}$ para instabilidade local da alma e das mesas.	121
4.15 - Malha de elementos finitos e flambagem local das abas de uma cantoneira.	123
4.16 - Valores de K_p para instabilidade local das abas das cantoneiras.	124
4.17 - Valores de $(b/t)_{máx}$ para instabilidade local das abas das cantoneiras.	125
4.18 - Configurações do perfil U enrijecido e do controle de deformação.	126
4.19 - Curvas de pós-flambagem - compressão centrada de perfil U enrijecido - Caso 1.	127
4.20 - Curvas de pós-flambagem - compressão centrada de perfil U enrijecido - Caso 2.	128
4.21 - Curvas de pós-flambagem para flexão pura de perfil U enrijecido.	129
4.22 - Configurações do perfil tipo rack e do controle de deformação.	130

4.23 - Curvas de pós-flambagem para compressão centrada de perfil tipo rack – comparação com valores de Prola (2001).	131
4.24 - Curvas de pós-flambagem para compressão centrada de perfil tipo rack – comparação com valores de Nagahama (2002).	132
4.25 - Configurações do perfil I e do controle de deformação.	133
4.26 - Curvas de pós-flambagem para compressão centrada de perfil I.	134
4.27 - Dimensões dos perfis I e U enrijecido para comparação com a placa simplesmente apoiada nas quatro bordas.	135
4.28 - Primeiro modo de flambagem dos perfis U enrijecido e I, similar ao de placa simplesmente apoiada nas quatro bordas.	135
4.29 - Curvas de pós-flambagem comparativas da placa simplesmente apoiada nas quatro bordas e dos perfis I e U enrijecido.	136
4.30 - Parâmetros da análise de placa simplesmente apoiada em uma borda longitudinal e livre na outra.	137
4.31 - Dimensões do perfil I para comparação com placa simplesmente apoiada em uma borda longitudinal e livre na outra.	137
4.32 - Primeiro modo de flambagem do perfil I, similar ao de placa simplesmente apoiada em uma borda longitudinal e livre na outra.	138
4.33 - Curvas de pós-flambagem comparativas da placa simplesmente apoiada em uma borda longitudinal e livre na outra e do perfil I.	139
4.34- Configuração das cantoneiras estudadas e da malha de elementos finitos utilizada.	140
4.35- Verificação da malha de elementos finitos das cantoneiras.	141
4.36- Configuração deformada correspondente ao primeiro modo de flambagem da cantoneira.	141
4.37 - Comportamento elasto-plástico tri-linear dos aços adotados (adaptado de Earls, 1999).	142
4.38 - Distribuições das tensões residuais implementadas nas cantoneiras.	143
4.39 - Tensão média x esbeltez das cantoneiras para o aço com $f_y = 250$ MPa.	145
4.40 - Tensão média x esbeltez das cantoneiras para o aço com $f_y = 345$ MPa.	146
4.41 - Tensão última média x esbeltez das cantoneiras para o aço com $f_y=250$ MPa.	148
4.42 - Tensão última média x esbeltez das cantoneiras para o aço com $f_y=345$ MPa.	149

4.43 - Configuração dos perfis I estudados e da malha de elementos finitos utilizada.	151
4.44 - Configuração deformada correspondente ao modo de flambagem local da mesa do perfil I.	152
4.45 - Configuração deformada correspondente ao modo de flambagem local da alma do perfil I.	152
4.46 - Configuração deformada correspondente ao modo de flambagem local simultâneo da alma e das mesas do perfil I.	152
4.47 - Distribuições das tensões residuais: (a) perfis I laminados e (b) perfis I soldados.	154
4.48 - Distribuições das tensões residuais de perfis I laminados implementadas.	154
4.49 - Distribuições das tensões residuais de perfis I soldados implementadas.	155
4.50 - Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 100$ e $f_y = 250$ MPa.	156
4.51 - Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 100$ e $f_y = 345$ MPa.	157
4.52 - Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 80$ e $f_y = 250$ MPa.	157
4.53 - Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 80$ e $f_y = 345$ MPa.	158
4.54 - Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 50$ e $f_y = 250$ MPa.	162
4.55 - Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 50$ e $f_y = 345$ MPa.	163
4.56 - Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 37,5$ e $f_y = 250$ MPa.	165
4.57 - Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 37,5$ e $f_y = 345$ MPa.	166
4.58 - Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 25$ e $f_y = 250$ MPa.	167
4.59 - Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 25$ e $f_y = 345$ MPa.	168
4.60 - Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 18,75$ e $f_y = 250$ MPa.	168
4.61 - Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 18,75$ e $f_y = 345$ MPa.	169
4.62 - Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 15$ e $f_y = 250$ MPa.	169
4.63 - Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 15$ e $f_y = 345$ MPa.	170
4.64 - Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 12,5$ e $f_y = 250$ MPa.	170
4.65 - Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 12,5$ e $f_y = 345$ MPa.	171
4.66 - Curva de pós-flambagem da cantoneira com esbeltez da alma igual a 40.	175
4.67 - Curva de pós-flambagem da cantoneira com esbeltez da alma igual a 20.	176
4.68 - Curva de pós-flambagem da cantoneira com esbeltez da alma igual a 10.	176

LISTA DE TABELAS

2.1 - Distribuições de tensões residuais para perfis I, variáveis de acordo com a relação h/b - adaptada do ECCS (1976).	54
2.2 - Valores dos parâmetros K_q , $(b/t)_{máx}$ e $(b/t)_r$ para perfis I e cantoneiras de abas iguais.....	64
2.3 - Coeficientes de flambagem para perfis I e cantoneiras de abas iguais.....	65
3.1 - Condições de vinculação das placas com bordas longitudinais simplesmente apoiadas.	84
3.2 - Valores de K_q para placas com as bordas longitudinais simplesmente apoiadas.	84
3.3 - Condições de vinculação das placas com bordas longitudinais engastadas.....	86
3.4 - Valores de K_q para placas com as bordas longitudinais engastadas.....	87
3.5 - Condições de vinculação das placas com uma borda longitudinal engastada e a outra simplesmente apoiada.....	88
3.6 - Valores de K_q para placas com uma borda longitudinal engastada e outra simplesmente apoiada.....	89
3.7 - Condições de vinculação das placas com uma borda longitudinal engastada e a outra livre.....	90
3.8 - Valores de K_q para placas com uma borda longitudinal engastada e a outra livre.....	91
3.9 - Condições de vinculação das placas com uma borda longitudinal simplesmente apoiada e a outra livre.....	93
3.10 -Valores de K_q para placas com uma borda longitudinal simplesmente apoiada e a outra livre.....	94
3.11 - Estudo da malha de elementos finitos.	99
3.12 - Tensões críticas em função da variação da esbeltez da placa.....	101
4.1 - Valores de carga crítica em função da esbeltez da seção.	116
4.2 - Tensões críticas em função da variação da esbeltez da aba da cantoneira para aço com $f_y = 250$ MPa.....	144

4.3 - Tensões críticas em função da variação da esbeltez da aba da cantoneira para aço com $f_y = 345$ MPa.....	145
--	-----

LISTA DE SÍMBOLOS

a	comprimento da borda longitudinal descarregada da placa
A	área da seção transversal; área deformada do elemento
A_o	área inicial do elemento
a_1	coeficiente das equações de distribuição das tensões residuais
a_2	coeficiente das equações de distribuição das tensões residuais
a_3	coeficiente das equações de distribuição das tensões residuais
a_4	coeficiente das equações de distribuição das tensões residuais
a_5	coeficiente das equações de distribuição das tensões residuais
a_6	coeficiente das equações de distribuição das tensões residuais
a_f	coeficiente das equações de distribuição das tensões residuais
A_g	área bruta da seção transversal
a_w	coeficiente das equações de distribuição das tensões residuais
A_w	área da seção transversal do metal de solda
b	comprimento da borda transversal carregada da placa; largura genérica da placa; largura do elemento da seção condicionante da flambagem local
b_1	dimensão a partir da borda da aba da cantoneira com tensões residuais de compressão; altura da alma das seções I, U e U enrijecido na linha do esqueleto
b_2	dimensão na região central da aba da cantoneira com tensões residuais de tração; largura da mesa das seções I, U e U enrijecido na linha do esqueleto
b_3	dimensão na região central da aba da cantoneira com tensões residuais de tração; altura do enrijecedor da seção U enrijecido na linha do esqueleto
b_4	dimensão na região próxima ao encontro das abas da cantoneira com tensões residuais de compressão; largura da lamela do perfil tipo rack na linha do esqueleto
b_{ef}	largura efetiva da placa
b_f	largura da mesa de perfil I e U
(b/t)	esbeltez do elemento de placa; esbeltez da aba das cantoneiras de abas iguais
$(b/t)_f$	esbeltez das mesas dos perfis I e U
$(b/t)_{máx}$	limite de esbeltez máxima
$(b/t)_r$	limite de esbeltez entre as regiões elástica e inelástica

$(b/t)_w$	esbeltez da alma dos perfis I e U
c	largura do retângulo de tração de placa cortada a maçarico
c_a	correção do deslocamento
c_f	coeficiente das equações de distribuição das tensões residuais
c_w	coeficiente das equações de distribuição das tensões residuais
D	rigidez da placa; vetor de deslocamentos globais da estrutura
E	módulo de elasticidade longitudinal do aço
E_t	módulo de elasticidade longitudinal reduzido
F	força no elemento
f_y	tensão de escoamento do aço
f_u	tensão normal última, ou, tensão limite de resistência
h	altura livre da alma de perfil I e U
i	i-ésimo modo de flambagem
I	forças internas (nodais)
I_a	forças internas da estrutura na configuração atualizada
K	matriz de rigidez da estrutura, quadrada, simétrica e positiva definida
K_0	rigidez tangente da estrutura
K^{MN}	matriz de rigidez tangente
K_o^{NM}	matriz de rigidez correspondente ao estado inicial
K_D^{NM}	matriz de rigidez devida ao carregamento incremental
k_c	coeficiente relacionado ao grau de vinculação da mesa em função da rigidez proporcionada pela alma
$K_{q,el,str}$	coeficiente de flambagem elástica obtido com o valor de $s_{cr,el,str}$
$K_{q,el,ctr}$	coeficiente de flambagem elástica obtido com o valor de $s_{cr,el,ctr}$
K_p	coeficiente de flambagem elástica da placa componente do perfil
K_q	coeficiente de flambagem elástica da placa isolada
K_{q-min}	coeficiente de flambagem elástica da placa isolada de placas com (a/b) maior que 5
l	comprimento do elemento após a deformação; comprimento do arco
l_o	comprimento inicial do elemento
m	número de semi-ondas que aparecem durante a flambagem na direção de aplicação da carga
M	grau de liberdade M do modelo completo

n	número de semi-ondas que aparecem durante a flambagem na direção transversal à aplicação da carga
N	grau de liberdade N do modelo completo
n_e	número de estações usadas no MFF corresponde ao número de divisões no comprimento longitudinal
n_f	número de faixas usadas no MFF corresponde ao número de divisões no comprimento transversal
p	fator de eficiência do processo de soldagem
P	carga concentrada de compressão centrada; forças externas
P_o	carga “morta”
P^N	cargas iniciais
P_{cr}	carga crítica de flambagem
P_f	carga de colapso
P_{ref}	vetor das cargas de referência
P_{total}	valor da carga de uma etapa de incrementação
P_y	carga de início do escoamento
Q	coeficiente de flambagem local do perfil
Q^N	carregamento incremental
Q_a	coeficiente de flambagem local dos elementos com duas bordas longitudinais vinculada (elementos AA)
Q_s	coeficiente de flambagem local dos elementos com apenas uma borda longitudinal vinculada (elementos AL)
q_x	carga uniformemente distribuída de compressão centrada
$q_{xcolapso}$	carga uniformemente distribuída de compressão centrada no colapso
R	vetor de forças atuantes na direção dos deslocamentos globais da estrutura
R_a	força residual para a iteração
t	espessura da placa
t_1	espessura da alma de perfil I
t_2	espessura da mesa de perfil I
t_f	espessura da mesa de perfil I e U
t_w	espessura da alma de perfil I e U
u	deslocamento longitudinal no plano médio da placa xy , na direção x
u_0	configuração inicial

u_a	configuração atualizada da estrutura
v	deslocamento transversal no plano médio da placa xy , na direção y
\mathbf{n}^M	deslocamentos da solução
w	deslocamento transversal perpendicular ao plano médio da placa xy , na direção z
w_a	deslocamento de flexão da alma
w_{ao}	deformação inicial da geometria
x	eixo axial da placa, na direção de aplicação da carga; eixo da seção transversal dos perfis
y	eixo transversal da placa, em seu plano médio; eixo da seção transversal dos perfis
z	eixo transversal da placa, perpendicular ao seu plano médio
\mathbf{a}	relação entre os lados da placa; razão do perímetro pela área da seção transversal de placa laminada
\mathbf{d}	deslocamento de flexão central na flambagem
\mathbf{d}_z	deformação normal na direção z
\mathbf{Dl}_{in}	incremento inicial do comprimento do arco
\mathbf{DP}	incremento de carga
\mathbf{DI}_{in}	fator de proporcionalidade da carga inicial
\mathbf{e}	deformação normal específica, deformação normal específica real
\mathbf{e}_b	deformação normal específica correspondente à tensão limite da região de plastificação II do diagrama de comportamento elasto-plástico tri-linear do aço
\mathbf{e}_{nom}	deformação normal específica nominal
\mathbf{e}_{pl}	componente plástica da deformação
\mathbf{e}_{st}	deformação normal específica correspondente à tensão limite da região de plastificação I do diagrama de comportamento elasto-plástico tri-linear do aço
\mathbf{e}_u	deformação de ruptura; deformação normal específica correspondente à tensão limite da região de plastificação III do diagrama de comportamento elasto-plástico tri-linear do aço
\mathbf{e}_y	deformação normal específica correspondente à tensão limite da região elástica do diagrama de comportamento elasto-plástico tri-linear do aço

I	fator de proporcionalidade da carga; esbeltez da placa
I_{end}	valor máximo para o fator de proporcionalidade da carga
I_i	fator de multiplicação do carregamento; autovalores
h	fator de plastificação para determinação do módulo de elasticidade reduzido
g_{xz}	deformação angular (distorção) da placa no plano xz
g_{yz}	deformação angular (distorção) da placa no plano yz
n	coeficiente de Poisson
n_i^M	autovetores
s	tensão normal de compressão uniforme
s_c	tensão normal de compressão
s_{c1}	tensão normal de compressão nas bordas livres das mesas
s_{c2}	tensão normal de compressão no centro da alma
s_{cr}	tensão normal crítica de flambagem elástica
$s_{cr,el,cpf}$	tensão crítica elástica com pós-flambagem
$s_{cr,el,ctr}$	tensão crítica de material elástico com tensões residuais
$s_{cr,el,spf}$	tensão crítica elástica sem pós-flambagem
$s_{cr,el,str}$	tensão crítica de material elástico sem tensões residuais
$s_{cr,ep,ctr}$	tensão crítica do material elasto-plástico com tensões residuais
$s_{cr,ep,str}$	tensão crítica do material elasto-plástico sem tensões residuais
$s_{cr,inel}$	tensão crítica inelástica
s_m	tensão normal média
$s_{máx}$	tensão normal máxima atuante
s_p	tensão normal de proporcionalidade
s_r	tensão residual
s_{rf}	equação de distribuição da tensão residual nas mesas de perfil I e U
s_{rw}	equação de distribuição da tensão residual na alma de perfil I e U
s_t	tensão normal de tração
s_x	tensão normal na direção x
s_z	tensão normal na direção z

1. INTRODUÇÃO

1.1. Considerações Gerais

Ao se observar o comportamento de barras axialmente comprimidas, onde as seções transversais são sólidas ou compostas de placas relativamente espessas, o colapso acontece devido à instabilidade global ou ao escoamento. Nos casos em que as seções transversais são compostas por placas esbeltas, pode também ocorrer a flambagem local dessas placas, tratadas usualmente também como uma forma de colapso.

Essa última situação corresponde à parte significativa das barras comprimidas de aço, pois, de modo geral, elas possuem seções transversais compostas por placas planas, delgadas, ligadas entre si ao longo de uma ou duas de suas bordas longitudinais. Dessa maneira, quando submetidas à compressão, tem-se o colapso devido a um estado de equilíbrio instável, seja por um modo de instabilidade global da barra, seja por um modo de flambagem local dos elementos planos de sua seção transversal, ou ainda, pela ocorrência conjunta desses dois modos de colapso. O modo global é caracterizado pela deformação do eixo da barra e apenas deslocamentos de corpo rígido da seção transversal e os modos locais pela flambagem local ou pela distorção da seção transversal enquanto o eixo da barra permanece indeformado.

Considerando-se os perfis estruturais, laminados e soldados, sabe-se que: (i) não irão acontecer distorções da seção transversal, portanto, o colapso só se dará por flambagem local, instabilidade global ou ambas em simultâneo (Trahair e Bradford, 1988) e (ii) na

flambagem local a linha de junção na interseção das placas permanecerá reta (Bradford e Azhari, 1997). Este trabalho se limitará ao estudo da flambagem local.

1.2. Flambagem Local

A flambagem pode ser definida pela mudança repentina na forma da estrutura, com o aparecimento de grandes deslocamentos transversais decorrentes de pequenas variações no carregamento. A flambagem local é um fenômeno típico dos elementos de placa, no qual o eixo da barra permanece reto e as translações são normais aos planos médios dos elementos da peça, como pode ser visto na figura 1.1, tanto para placas planas quanto para perfis estruturais compostos por placas.

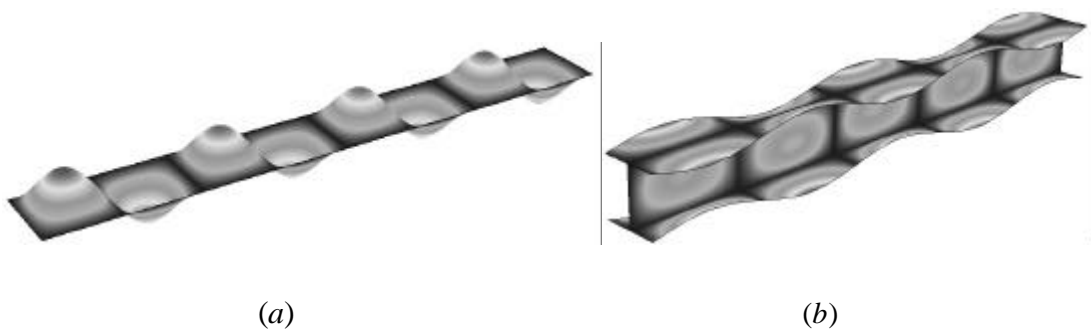


Figura 1.1 - Configurações de flambagem local de (a) placa plana e de (b) perfil estrutural obtidas em análise numérica com o programa ABAQUS.

Entretanto, observa-se também que, após o início da ocorrência da flambagem local, esses elementos de placa esbeltos apresentam uma resistência de pós-flambagem significativa, devido à mudança na distribuição original das tensões no plano médio das placas que flambaram. Por essa razão, a carga última de colapso de flambagem local é normalmente maior que a sua carga crítica. Porém, a ocorrência da flambagem local tem efeito imediato de redução da rigidez global da barra à flexão (Rhodes e Harvey, 1977) e, portanto, inicia-se um processo de degeneração da resistência total. A determinação analítica da resistência última real de placas planas esbeltas não é trivial, pois depende do conhecimento da forma de distribuição da tensão não-uniforme atuante (Maquoi, 1992). Normalmente, o colapso dessas estruturas ocorre devido a grandes deslocamentos fora do plano e escoamento.

Considerando-se o procedimento das normas e especificações de cálculo e projeto atuais, observa-se que a flambagem local de seções submetidas à compressão uniaxial é considerada pela análise indireta da instabilidade das placas. Nesse caso, a redução da capacidade de resistência é considerada simplesmente como uma combinação das perdas isoladas de cada placa constituinte da seção, e não se considera com maior rigor a influência das condições de contorno das placas. Assim, para se chegar à formulação final, são adotados coeficientes de flambagem elástica aproximados, situados entre as situações limites de vinculação das bordas das placas (livres, perfeitamente rotuladas ou perfeitamente engastadas) e sem levar em conta com maior rigor parâmetros importantes, entre os quais a esbeltez relativa das placas componentes da seção transversal. Para a consideração do comportamento de pós-flambagem, normalmente é utilizado o método da largura efetiva e as não-linearidades que afetam esse comportamento são consideradas por aproximações.

Para a determinação rigorosa do comportamento generalizado de pós-flambagem de um pilar deve ser feita uma análise detalhada com a utilização de técnicas numéricas computacionais sofisticadas, que permitam incorporar os efeitos geometricamente não-lineares inerentes a esse tipo de problema.

No passado, o método das diferenças finitas era amplamente utilizado na análise de flambagem (Galambos, 1968 e Bushnell, 1974), porém foi substituído pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), pois esse se mostrou muito mais versátil. Atualmente, o MEF pode ser usado em análises bastante complexas, como por exemplo, na análise de problemas de flambagem elasto-plástica local, global e de interação local-global de barras de aço com seção transversal e condições de contorno quaisquer, e com a consideração de todas as imperfeições iniciais, incluindo deformações iniciais, excentricidades iniciais e tensões residuais, e o acompanhamento do comportamento de pós-flambagem de estruturas de placas finas até o colapso.

1.2.1. Fatores de Influência

A flambagem local é afetada por diversos fatores. Além da esbeltez, a resistência ao colapso local também depende das imperfeições geométricas iniciais, das tensões

residuais e dos efeitos da plasticidade (não-linearidades) do material. A seguir são apresentadas algumas particularidades desses fatores de influência:

(a) *Imperfeições geométricas iniciais*

Similarmente às barras reais, as placas reais não são perfeitamente planas, possuindo pequena curvatura inicial. Essa curvatura inicial causa um deslocamento transversal assim que as placas são carregadas, o qual aumenta rapidamente ao se chegar próximo à tensão crítica de flambagem elástica, e em seguida diminui aproximando-se do comportamento de placas inicialmente planas, hipotéticas, próximo do primeiro escoamento e da tensão de colapso. Esse comportamento pode ser visto na figura 1.2, onde s é a tensão atuante na placa, s_{cr} é a tensão crítica de flambagem elástica, w é o deslocamento transversal perpendicular ao plano médio da placa e t é a espessura da placa.

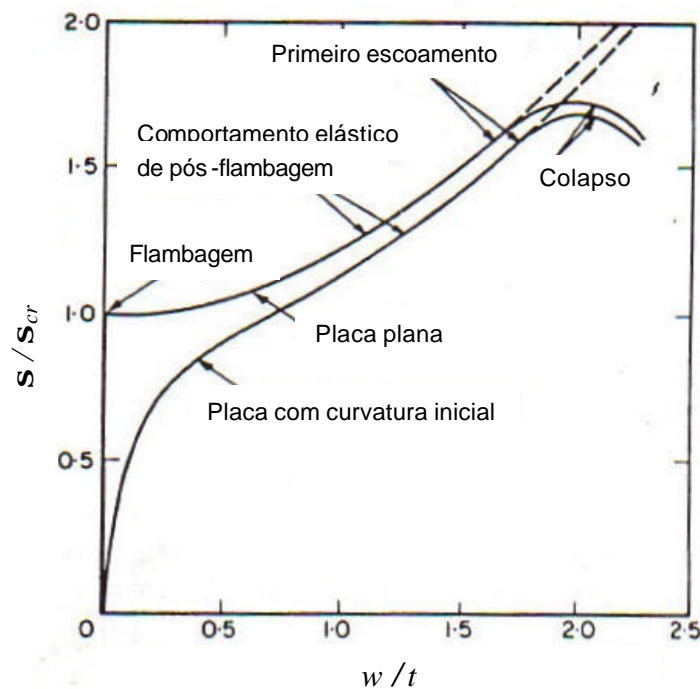


Figura 1.2 – Comportamento de pós-flambagem de placas esbeltas (Trahair e Bradford, 1988).

As imperfeições iniciais causam a perda de rigidez das placas, entretanto, para grandes valores de deslocamentos, o comportamento praticamente não é afetado pelo nível de imperfeições encontrados na prática, ver figura 1.3 (Maquoi, 1992).

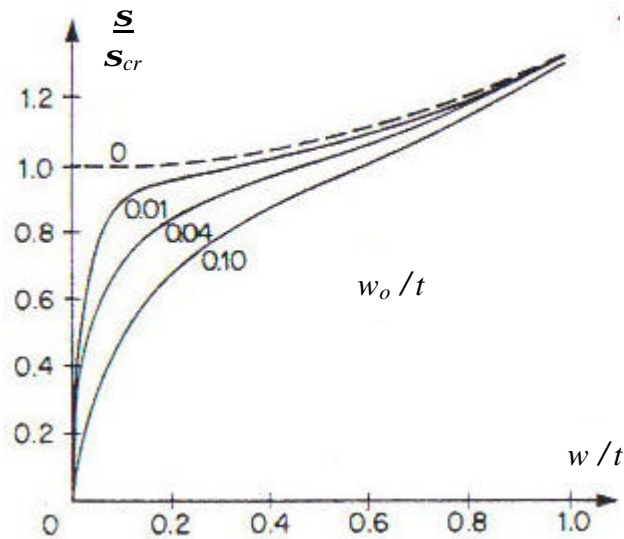


Figura 1.3 – Efeito das imperfeições iniciais no comportamento de placas (Maquoi, 1992).

Além disso, é bem conhecido que a principal sensibilidade às imperfeições na flambagem elástica estrutural é encontrada quando a imperfeição geométrica tem a forma do modo crítico de flambagem. Tomando, por exemplo, a análise da coluna bi-rotulada de Euler, sabe-se que a maior redução na resistência é esperada quando a imperfeição inicial é senoidal. Por essa razão, programas comerciais de análise numérica, via MEF, normalmente fornecem métodos de superposição de imperfeições geométricas com a forma do modo de flambagem sobre a geometria perfeita. O procedimento requer inicialmente a análise da flambagem da barra geometricamente perfeita para produzir os deslocamentos dos modos de flambagem e determinar sua magnitude, em seguida eles são adicionados à geometria perfeita para produzir a nova geometria da barra imperfeita.

(b) *Tensões residuais*

A presença de tensões residuais térmicas produzidas em perfis estruturais pelos processos de fabricação tem um efeito considerável em fratura, fadiga, corrosão e na resistência à flambagem de seções estruturais de aço. Normalmente elas são induzidas pelo resfriamento desigual após a laminação a quente, a soldagem, os cortes a maçarico e/ou qualquer processo mecânico de conformação (Lay e Ward, 1969), e são tensões que permanecem na barra após a composição final de sua seção transversal.

As tensões residuais dependem das dimensões da seção transversal e de sua configuração, uma vez que esses fatores afetam as taxas de resfriamento, o módulo de elasticidade, o coeficiente de dilatação linear do material e o gradiente de temperatura (Galambos, 1998 e Tall, 1966). Além disso, elas também são essencialmente independentes das tensões de escoamento, de modo que sua importância relativa diminui com o aumento da tensão de escoamento (Yang *et al.*, 1952 e Tall, 1964 e 1966).

Devido à presença das tensões residuais, as fibras da seção transversal não podem ser consideradas com o mesmo nível de tensão sob ação de uma compressão uniforme (Salmon e Johnson, 1990). Sabe-se que em peças estruturais de material elasto-plástico como o aço, as tensões residuais podem causar o escoamento prematuro ou flambagem prematura, dependendo de sua esbeltez, e reduzem sua resistência última.

Considerando os perfis estruturais, as distribuições dessas tensões variam em função do tipo de conformação.

(c) *Não-linearidades do material*

As não-linearidades do material (plasticidade) são influenciadas não apenas pelas tensões no plano das cargas, mas também pelos componentes de tensão devidos à flexão da placa. Quanto maior a imperfeição inicial, mais cedo ocorre o início do escoamento e, portanto, mais significativo é o efeito da plasticidade no modo de colapso. Conseqüentemente, a plasticidade prematura também causa uma redução na rigidez da

placa e uma redução na carga de colapso se comparados com uma placa similar perfeitamente elástica.

Dos ensaios tradicionais de tração ou compressão é possível se obter as características mecânicas dos aços normalmente utilizados nas estruturas. Para esses aços, o diagrama tensão/deformação ($\sigma \times \epsilon$) padrão apresenta duas regiões distintas de comportamento, elástico e elasto-plástico, de difícil modelagem. Por simplicidade, as normas e especificações de projeto geralmente consideram apenas a primeira parte do diagrama (região de comportamento elástico), de modo que a tensão limite é a tensão de escoamento do material (f_y).

Uma alternativa razoável para evitar essa simplificação é a consideração de um material com comportamento elasto-plástico tri-linear, como adotado por Earls (1999), cujo diagrama é mostrado na figura 1.4. A região elástica é definida pelo módulo de elasticidade do aço (E), com tensão limite igual à tensão de escoamento (f_y) e a deformação correspondente (ϵ_y). O comportamento plástico é determinado por três regiões distintas, com as tensões limites de cada trecho obtidas com base nos valores da tensão de escoamento (f_y) e da tensão limite de resistência (f_u), e as deformações correspondentes ao final de cada trecho definidas com base na curva real $\sigma \times \epsilon$ do aço considerado na análise.

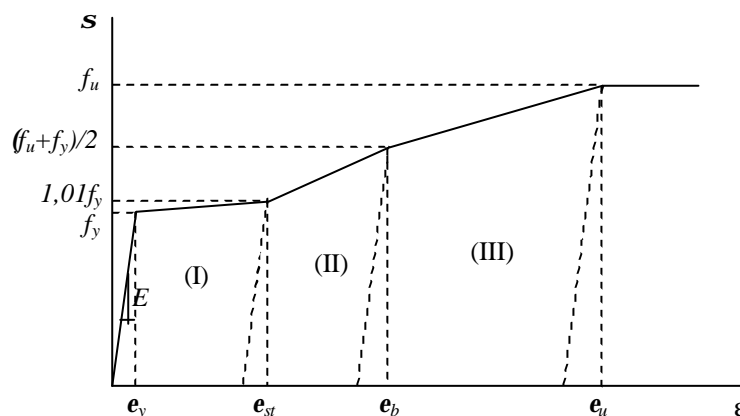


Figura 1.4 – Diagrama tensão x deformação elasto-plástico tri-linear (adaptado de Earls, 1999).

1.3. Revisão Bibliográfica

1.3.1. Introdução

No âmbito do comportamento global quanto à estabilidade estrutural de barras submetidas à compressão uniaxial, os estudos tiveram início no trabalho do matemático suíço Leonard Euler (1744), o qual publicou a teoria de pilares com sua famosa equação para carga crítica elástica de barras perfeitamente retas e axialmente comprimidas.

Entretanto, logo ficou clara a distância entre os valores das cargas teóricas e das cargas experimentais. O desenvolvimento dos conceitos visando aproximar esses resultados se tornou então um dos tópicos importantes da mecânica dos sólidos. Em 1889, Considère e Engesser, independentemente, concluíram que na verdade os pilares normalmente aplicados em projeto apresentam flambagem em regime elasto-plástico ao invés do elástico de Euler. Considère apresentou a Teoria do Módulo Efetivo, Engesser a Teoria do Módulo Tangente e, posteriormente, juntamente com Jasinsky, a Teoria dos Módulos Reduzidos. Essas teorias foram testadas levando os engenheiros a um dilema para o cálculo plástico, pois, a teoria do módulo reduzido era mais correta conceitualmente, porém, os resultados de ensaios levavam a cargas mais próximas das cargas do módulo tangente. Shanley (1947) esclareceu o problema mostrando que a carga de flambagem dependia de como o ensaio é realizado. Constatou-se que o valor do módulo reduzido é superior ao seu correspondente módulo tangente, devendo-se adotar o segundo quando não se conhece as condições reais da peça (Rachid, M. e Mori, D.D., 1989).

Diversos autores apresentam essas teorias de forma detalhada, desde a determinação da carga crítica de Euler até os casos de obtenção das cargas críticas de flambagem de pilares com diferentes condições de contorno, diversos tipos de carregamento e em diferentes regimes de flambagem (elástico e elasto-plástico). Entretanto, como neste trabalho o objeto central de estudo é a estabilidade estrutural de barras de aço submetidas à compressão uniaxial quanto ao comportamento local, o estudo do comportamento global não será contemplado.

1.3.2. Estabilidade de Placa

A investigação da flambagem de placas tem origem na observação do comportamento de placas planas de navios. Foi Bryan (1891) quem apresentou a primeira solução da equação diferencial de placa de Saint-Venant (1883), com a análise da tensão crítica elástica de uma placa retangular apoiada nas quatro bordas e submetida a uma tensão de compressão uniforme longitudinal. Por volta de 1910, ainda para análise elástica, Reissner (1909) e Timoshenko (1910) apresentaram soluções para vários outros casos de condições de contorno. Em seguida, Bleich (1924) estendeu essa análise para o regime inelástico. Desde então, o fenômeno da estabilidade linearizada de placas tem sido exaustivamente estudado e sintetizado por diversos autores, podendo ser citados como referências Timoshenko e Gere (1961), Ugural (1981), Trahair e Bradford (1988) e Reddy (1999), onde são mostrados resultados para a tensão de placas com diversas condições de contorno e várias combinações de carregamento.

No caso da flambagem elasto-plástica de placas, o método de consideração prático consiste na utilização da equação da tensão crítica elástica, com a substituição do módulo elástico por um módulo reduzido através do uso de um fator de plastificação (Bleich, 1952 e Chajes, 1974). Diversas expressões desse fator foram obtidas através de teorias rigorosas e levando a cargas críticas que concordam bem com os resultados de testes. Entretanto, o uso dessas expressões é trabalhoso e corriqueiramente é utilizada uma expressão mais simples, derivada por Bleich (1952), porém com resultados conservadores e independentes das condições de contorno.

Até 1930 acreditava-se que o início de flambagem de placa implicava em seu colapso, similarmente ao que se observava no comportamento de barras comprimidas (Roorda, 1980 e Trahair e Bradford, 1988). Entretanto, com o avanço da indústria aeronáutica, diversos pesquisadores voltaram seus estudos para a instabilidade de estruturas esbeltas e concluíram que placas têm comportamento de pós-flambagem estável. Foi observado que a carga de colapso de uma placa plana era realmente maior que sua carga de flambagem, mostrando que na verdade as placas possuem grande resistência pós-flambagem (Cox, 1934; Marguerre e Trefftz, 1937 e Schuman e Back, 1959). Em 1945, Koiter apresentou sua famosa tese de doutorado com os fundamentos da Teoria Não

Linear da Estabilidade Elástica, com a formulação de uma teoria geral do comportamento inicial de pós-flambagem em problemas com instabilidade bifurcacional (Bazant e Cedolin, 1991 e Reis e Camotim, 2000).

De modo a superar as dificuldades existentes na determinação analítica da resistência última real de placas planas esbeltas, von Kármán (1932) introduziu o conceito de largura efetiva, o qual pode fornecer aproximações satisfatórias. De acordo com esse conceito, a distribuição real de tensões últimas em uma placa simplesmente apoiada é substituída por uma distribuição simplificada na qual a porção central da placa é ignorada e a largura efetiva remanescente fica submetida à tensão de escoamento (Trahair e Bradford, 1988). Posteriormente, esse método foi modificado por Winter (1947) para que pudessem ser considerados os efeitos das não-linearidades geométricas e de material inerentes às placas reais. Maquoi (1995) também apresenta um estudo bastante interessante sobre placas reais (imperfeitas) com a descrição de seu comportamento e uma análise dos parâmetros (imperfeições geométricas iniciais e de material, e os efeitos da inelasticidade e da estabilidade de pré-flambagem e pós-flambagem) que influenciam esse comportamento.

Os estudos desse tipo de instabilidade sempre recorreram a métodos numéricos e experimentais de análise, entretanto, apenas com o avanço tecnológico e computacional, a análise desse tipo de problema ganhou uma abordagem diferente. Nesse aspecto, observou-se uma grande aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF) (Zienkiewicz e Taylor, 1989), do Método das Faixas Finitas (MFF) e suas variantes (Cheung, 1976) e do Método dos Elementos de Contorno (MEC) (Brebbia, 1978).

Atualmente, os resultados obtidos dos estudos teóricos das placas tem sido comprovados através de estudos numéricos e normalmente são escolhidos como tópico de calibragem e aplicação de métodos de análise computacional para placas. Como exemplos, podem ser citados os trabalhos de Bradford e Azhari, com o estudo da flambagem elástica de placas pelo método das faixas finitas semi-analítico com o uso de funções bolha, ou seja, funções de deslocamento que representam modos extras da faixa finita correspondentes a graus de liberdade internos (1995a) e outro usando dois tipos de funções diferentes (1997), para diferentes condições de contorno.

Também para a flambagem elasto-plástica de placas o uso de recursos numéricos computacionais tem possibilitado um estudo mais aprofundado. Como exemplo pode ser citado outro trabalho de Bradford e Azhari (1995b), com a utilização do método das faixas finitas que inclui inelasticidades e onde as funções de deslocamento das faixas finitas são determinadas por funções bolha. Essas funções se mostraram mais adequadas para o caso elasto-plástico que as funções normalmente utilizadas nas faixas finitas por reduzirem os graus de liberdade da estrutura e, portanto, reduzirem o gasto computacional.

Para a consideração da resistência pós-flambagem, podem ser citados alguns trabalhos atuais, como o de Hoon e Khong (1996), onde é feito o estudo do comportamento de pós-flambagem de placas retangulares uniformemente comprimidas. A análise da flambagem elástica emprega uma técnica aproximada usando uma combinação do método de Rayleigh-Ritz e do método das faixas finitas. Na análise do início da pós-flambagem, são empregados dois métodos, o método da semi-energia e o método do limite inferior. As soluções obtidas por eles são comparadas com resultados analíticos da literatura. Observa-se que a principal vantagem do uso dos dois métodos é que ambos podem ser facilmente programáveis.

Têm-se os trabalhos de Elgaaly (2000) e de Mateus e Witz (2001). O primeiro desenvolveu um trabalho de modelagem e análise do comportamento de pós-flambagem de estruturas de chapas finas até o colapso. Foi feito o cálculo da resistência pós-flambagem de placas enrijecidas e não-enrijecidas, submetidas à compressão uniaxial. Os resultados dos modelos computacionais foram comparados com resultados experimentais e mostraram razoável concordância. Os segundos realizaram um estudo paramétrico do colapso estrutural de placas de aço não-enrijecidas quanto à variação da esbeltez, das condições de contorno, das imperfeições geométricas iniciais e ao encruamento do material com a utilização do programa ABAQUS, versão 5.7. As resistências últimas obtidas ficaram próximas aos resultados experimentais, com apenas algumas discrepâncias devidas à variação paramétrica que criou casos extremos, fora dos limites ensaiados.

Mais recentemente, também para chapas finas, Silvestre e Camotim (2005) desenvolveram e aplicaram a formulação de um método numérico assintótico (semi-analítico) para a análise do comportamento não-linear de pórticos planos. O método envolve, primeiramente, uma análise assintótica, a qual emprega uma técnica de perturbação para se estabelecer a sequência do sistema de equações diferenciais de equilíbrio e as condições de contorno, e também a solução numérica sucessiva desse sistema com o uso do método dos elementos finitos. Foram analisados diversos pórticos e os resultados obtidos incluem o comportamento de pós-flambagem inicial dos pórticos “perfeitos” e os caminhos de equilíbrio geometricamente não-lineares dos pórticos com pequenas imperfeições ou momentos fletores primários. Para o último caso, os resultados foram comparados com valores numéricos obtidos pelo ABAQUS. Também desses autores (Silvestre e Camotim, 2006) tem-se o estudo do comportamento de pós-flambagem elástica, local e distorcional, de perfis U enrijecidos de chapa fina formados a frio com enrijecedores intermediários de alma e mesa. Foi utilizada a formulação da Teoria Generalizada de Vigas (GBT) no desenvolvimento e implementação numérica para análises geometricamente não-lineares. Os resultados numéricos obtidos foram comparados com valores fornecidos pelo ABAQUS. Todos os resultados foram analisados detalhadamente permitindo a compreensão de aspectos comportamentais anteriormente obscuros, como por exemplo, a explicação das diferenças qualitativas apresentadas pelos comportamentos de pós-flambagem local e distorcional dessas seções.

1.3.3. Estabilidade de Seções

A primeira análise consistente da estabilidade de seções foi apresentada por Lundquist *et al.* (1943), com a aplicação dos princípios do método de distribuição de momentos na estabilidade de seções formadas por placas longas submetidas a cargas de compressão axial. Os resultados obtidos por eles foram validados posteriormente por Chilver (1951). Em seguida, Bleich (1952) desenvolveu um estudo com a determinação das expressões para a tensão de bifurcação no modo local de placa a partir da resolução das equações diferenciais de cada placa, com a satisfação das condições de contorno relativas à continuidade de deformação nas bordas longitudinais.

A opção pela simplificação na análise, com o desacoplamento das placas da seção transversal, deve-se ao fato de que o estudo preciso de estabilidade da seção como um todo é dificultada pela necessidade de compatibilização das rotações das bordas longitudinais. Uma análise desse tipo não é simples, devendo-se recorrer a métodos elaborados e muitas vezes com uso computacional. Por essa razão, até hoje as normas de projeto (NBR 8800, 1986 e seu Projeto de Revisão - PR NBR 8800, 2006; Eurocode 3, 2004 e ANSI/AISC 360-05, 2005) ainda possuem procedimentos de cálculo que consideram a flambagem local da seção pela análise isolada da flambagem das placas, mais precisamente o método da largura efetiva. Segundo Prola (2001), a adoção da simplificação do estudo dos perfis pelo estudo das chapas isoladas deve-se ao fato de que, em termos estruturais, a estabilidade linearizada de seções, para a flambagem local, e a de placas isoladas são fenômenos análogos.

Entretanto, a aplicação desse método pelas normas de projeto tem sido contestada por alguns pesquisadores. Baseando-se nos estudos de Priebe (1994), onde foram desenvolvidos cálculos numéricos com a ajuda de programa de análise com não-linearidades física e geométrica, Brune (2000) apresenta novas larguras efetivas para placas com três bordas apoiadas, aplicáveis para condições de contorno realistas nas bordas longitudinais e que garantem condições de serviço. O procedimento do Eurocode 3 (2004) é questionado e conclui-se que o método da largura efetiva conduz a resultados satisfatórios desde que seja feito um processo iterativo de redução da área efetiva. Foram comparados resultados de testes experimentais e numéricos em seções U de chapa fina com valores obtidos pela aplicação das larguras efetivas do Eurocode 3 (2004), os quais apresentaram menor capacidade de resistência, e com valores das novas larguras efetivas propostas por Brune, os quais mostraram ótima concordância com os valores experimentais e numéricos.

Esse estudo foi validado por Rusch e Lindner (2004), com a análise da resistência última de seções I onde as propriedades efetivas da seção transversal foram calculadas usando o conceito da largura efetiva. Para placas apoiadas nas quatro bordas, como almas de seção I, foi usada a fórmula de Winter tal como apresentada no Eurocode 3 (2004) e para placas apoiadas em três bordas, como mesas de seção I, foi usada a fórmula de Brune. Os resultados obtidos pelo cálculo da capacidade de carga última e

por resultados experimentais mostraram novamente que a formulação proposta conduz a resultados suficientemente econômicos e seguros.

Mais uma vez, o desenvolvimento de técnicas computacionais tem permitido um estudo mais preciso da estabilidade de seções. Um estudo interessante de Degée (2000) apresenta a análise de uma barra de seção transversal em perfil I, submetida a uma distribuição inicial de tensões de compressão uniaxial uniforme unitária. Os resultados foram obtidos pela utilização de um método modificado de elementos finitos de barra, com o comportamento clássico de barra definido pela formulação de Bernoulli e o comportamento local definido pela formulação de Kirchhoff, e foram comparados com resultados obtidos pelo método das faixas finitas, mostrando boa concordância.

Em outro trabalho (Degée, 2001), é apresentada uma abordagem que permite o estudo do comportamento de seções C com o uso de elementos finitos de barras, considerada como uma alternativa interessante ao uso de elementos finitos de placas na modelagem de estruturas compostas por barras de chapas finas. É estudado o comportamento das paredes constituintes do perfil, consideradas como placas simples (paredes internas, tais como alma, e paredes com uma borda livre, tais como mesas), e em seguida, esses modelos de paredes isoladas são compostos de modo a formar seções C. Para a análise de placas isoladas, são comparados valores teóricos com valores obtidos por elementos de placa e de barra (Degée, 2000), e para o estudo da seção como um todo, os resultados são comparados com valores obtidos pelo método das faixas finitas. O estudo é aplicado ao cálculo da carga de flambagem para compressão e observa-se que o modelo proposto apresentou bons resultados.

Rhodes (2001) apresenta em seu trabalho, uma análise do comportamento de placas e seções, submetidas a cargas excêntricas ou à compressão excêntrica, e uma discussão da aplicação da análise de placas ao projeto de vigas e pilares. Para outras seções tem-se o trabalho de Nagahama *et al.* (2002), que realizou um estudo da pós flambagem de perfis rack através do ABAQUS.

Se a menor carga crítica corresponder a um modo local, a determinação da carga última não é direta. Nesses casos, a causa do colapso é normalmente a interação entre os dois

modos (local/global). Além disso, em barras com seções delgadas de aço, é comum situações em que as cargas críticas dos dois modos ficam quase coincidentes, sendo que nesses casos, ocorre também a interação entre os modos de flambagem. Algumas análises de casos em que essa flambagem simultânea de perfis acontece pode ser vista em Allen e Bulson (1980).

Na determinação do comportamento generalizado de pós-flambagem de um pilar, têm-se procurado alternativas que contornem a análise numérica rigorosa devido a seu custo computacional elevado e têm sido propostos métodos de análise menos complexos, porém razoavelmente precisos, onde a influência dos efeitos da pós-flambagem local (perda de rigidez da seção transversal) é considerada indiretamente na análise do comportamento global da barra. Rhodes e Harvey (1977), e Estrella Jr. (1993) estudaram e implementaram procedimentos para interação dos modos local de placa e global, e esse último, com uma abordagem que incorpora o conceito de largura efetiva em um elemento finito não-linear de barra, pela atualização contínua da geometria da seção transversal através da história de carregamento.

Também Rasmussen (1997) apresenta um trabalho de grande importância, que permite a análise de bifurcação de barras de chapa fina flambadas localmente. A aplicação da formulação de pós-flambagem é feita apenas pela troca das relações tensão-deformação, onde a redução da rigidez global é considerada enquanto é mantida a geometria original. Isso é possível pelo uso do conceito de módulo elástico efetivo, onde os efeitos da flambagem local são considerados pela troca das propriedades do material da seção transversal. Esse método foi aplicado por Rasmussen e Hasham (1997) ao estudo de seções I para a combinação de compressão e flexão em relação ao maior eixo de inércia. Mais recentemente, Rasmussen e Young (2000) apresentaram trabalho similar, com a determinação das equações que governam a flambagem global de colunas comprimidas engastadas nas extremidades e flambadas localmente. Também desses autores (Young e Rasmussen, 2000), tem-se um método de análise elasto-plástica da flambagem local por faixas finitas, com consideração de não-linearidades geométricas, usado na determinação da rigidez tangente de flexão ou de flexo-torção de colunas de seção C formada a frio e flambadas localmente.

Porém, esse estudo até a bifurcação não permite um acompanhamento gradual da degeneração da rigidez axial da barra com o aumento da carga. Nesse sentido, têm-se os trabalhos de Davids e Hancock (1987) e de Camotim e Prola (2001). O primeiro apresenta a análise da pós-flambagem local feita pela discretização da coluna em elementos de barra, com os segmentos tendo comprimento próximo ao semi-comprimento de onda de flambagem da seção. Os efeitos da pós-flambagem local são considerados pela redução da rigidez da seção transversal, a qual é quantitativamente calculada através do conceito de módulo elástico efetivo. É possível então a obtenção da distribuição do módulo elástico efetivo ao longo da linha média da seção transversal em cada segmento. No segundo é proposta uma metodologia que incorpora os efeitos da pós-flambagem de placa e distorcional, na análise global de colunas de aço de chapas finas formadas a frio. A evolução dos diagramas do módulo elástico efetivo na seção transversal, ao longo do diagrama de equilíbrio global da coluna, são incorporados na formulação de elementos finitos com o intuito de modelar a influência da pós-flambagem local. Esses diagramas são obtidos pelos resultados de análise de pós-flambagem local independentes, correspondentes a diversas distribuições de tensões, utilizando o método das faixas finitas com funções spline (Prola e Camotim, 2000). Esse método combina basicamente dois tipos de procedimento: uma análise numérica precisa para determinação do comportamento de pós-flambagem global da coluna (por exemplo, o MEF com elementos de barra não-lineares) e a incorporação indireta e aproximada dos efeitos da pós-flambagem local.

Além desses, diversos outros pesquisadores desenvolveram métodos de obtenção da rigidez com flambagem local, podendo-se citar (Rasmussen e Hasham, 1997):

- Bijlaard & Fischer (1953) – com a aproximação analítica da rigidez baseada na rigidez que a seção apresenta quando deforma em um modo local. Esse modo local é escolhido como o modo que descreve a deformação adicional de flambagem local que resulta da interação local/global;
- Graves Smith (1967) – também usa aproximação analítica com a deformação adicional de flambagem local resultante da interação local/global. Seu estudo se aplica a colunas caixão e incluem um modelo plástico simplificado;
- De Wolf *et al.* (1974) e posteriormente Kalyanaraman *et al.* (1977) – cálculo da rigidez à flexão usando larguras efetivas;

- Wang *et al.* (1977) – usou o método das larguras efetivas, combinado com o MEF, na determinação da carga de flambagem de vigas com flambagem local;
- Hancock (1981) – usou um método das faixas finitas não-linear para o cálculo da rigidez à flexão de seções I com flambagem local. O autor mostrou que o método da largura efetiva pode ser inadequado para certas geometrias de seção transversal;
- Bradford e Hancock (1984) – propuseram um método alternativo que incorporasse as deformações de flambagem local no cálculo da carga de flambagem de flexo-torção de vigas com seção I. Foi usado o MFF não-linear na determinação da rigidez à flexão da seção em relação ao eixo de menor inércia. Com essa rigidez foi determinada a rigidez ao empenamento da seção com flambagem local. O método foi aplicado a seções I duplamente simétricas submetidas à flexão uniforme.

Também a modelagem precisa das imperfeições geométricas de barras estruturais tem sido objeto de diversos estudos. Hasham e Rasmussen (2002) fizeram uma análise que considera as não-linearidades geométricas e de material, e que incorpora valores medidos de imperfeições geométricas e tensões residuais, para investigar a sensibilidade da análise de elementos finitos às mudanças nas imperfeições geométricas locais. Foram comparados resultados da análise não-linear incorporando a superposição de imperfeições geométricas, com resultados usando a medição das imperfeições locais e globais na seção central e a utilização desses valores, ou médias, como amplitudes de superposição nos modos de flambagem local e global na geometria perfeita. Observou-se que o modelo de elementos finitos foi bastante preciso no cálculo da carga última, e que essa carga é sensível a imperfeições geométricas locais muito pequenas, mas virtualmente não muda para valores de imperfeições acima de 2,5% da espessura da placa.

Para análise da influência da forma das imperfeições geométricas locais iniciais nos modos de flambagem local e distorcional de colunas curtas e seus efeitos na interação da flambagem de barras de aço formadas a frio, têm-se os estudos de Dubina *et al.* (2000 e 2001), onde se conclui que tanto a forma quanto o tamanho das imperfeições iniciais locais são muito importantes, e que formas diferentes de imperfeições levam a diferentes efeitos na resistência à flambagem das barras.

1.3.4. *Tensões Residuais*

As tensões residuais afetam diretamente o comportamento de peças estruturais comprimidas. As causas do aparecimento dessas tensões, suas distribuições e efeitos na resistência última tem sido estudados por diversos pesquisadores e sintetizados por vários autores (Trahair, 1983; Galambos, 1998, Salmon e Johnson, 1990 e Pimenta, 1997). Uma relação de grande parte das medições das tensões residuais, em seções laminadas, pode ser encontrada em Tebedge e Tall (1973) e em Young (1972).

Também o ECCS (1976) apresenta um estudo interessante e de aplicação prática, fornecendo as distribuições padrão para placas com as bordas laminadas, com a formulação das tensões de Alpsten (1972a), obtida através de estudos experimentais e teóricos, placas com as bordas cortadas a maçarico, placas e perfis soldados e perfis laminados.

Citando alguns trabalhos de pesquisa relevantes, tem-se Huber e Beedle (1954), que verificaram que as tensões residuais são a principal causa da porção não-linear da curva tensão média/deformação e que os outros fatores, como a curvatura inicial e as excentricidades acidentais, têm um efeito relativamente pequeno.

Johnston (1964) e Batterman e Johnston (1967) trataram da aplicação do módulo tangente em colunas com flambagem inelástica na obtenção da resistência à compressão. Yu e Tall (1971) discutiram duas abordagens nessa obtenção da resistência, a primeira usando a distribuição das tensões residuais, seja pela medida real seja por modelo matemático, em conjunto com a relação tensão/deformação do material e a segunda usando o módulo tangente da curva experimental tensão média/deformação de barras curtas de seções laminadas com tensão residual combinada com a razão apropriada da esbeltez, não sendo necessário o conhecimento da distribuição real das tensões residuais.

Uma discussão sobre o comportamento de soldas foi baseada no estudo de placas relativamente finas, nas quais considerou-se que as tensões residuais não variassem ao longo da espessura. Entretanto, Alpsten e Tall (1970) mostraram que tensões residuais

devidas à soldagem tendem a diminuir com o aumento do tamanho da barra. Observou-se também serem consideráveis as variações de tensão ao longo da espessura de placas com espessura acima de 25 mm. Estudos comparativos (Alpsten e Tall, 1970 e Nagarajo *et al.*, 1964) demonstram que o tipo de solda utilizada não é um fator significativo na formação de tensões residuais em perfis soldados. A comparação das tensões residuais para soldas de filete e para soldas de entalhe indicou diferenças insignificantes, uma vez que o calor introduzido na execução, é da mesma ordem de grandeza para ambos os tipos de solda. Dwight e White (1977) sugeriram que a máxima tensão de tração nas seções soldadas pode ser considerada igual à tensão de escoamento do aço, e apresentam uma equação para as tensões de compressão, consideradas uniformes nos elementos da seção.

Entretanto, Bjorhovde e Tall (1971) e Bjorhovde (1972) constataram que as cargas críticas e as resistências últimas de colunas, calculadas baseando-se na distribuição completa das tensões residuais na espessura, são apenas levemente inferiores àquelas calculadas assumindo-se tensões residuais constantes através da espessura e tomadas iguais à média das tensões medidas nas faces superior e inferior das chapas.

Beer e Schulz (1970) apresentam a análise dos efeitos da variação na distribuição das tensões residuais, na resistência de diversos perfis estruturais, dependendo da geometria da seção transversal. Estudos teóricos também foram feitos por Alpsten (1972b), e mostraram que as tensões residuais devidas à laminação variam consideravelmente com a forma e o tamanho da seção, de forma que, quanto mais pesada a seção, maior o valor da tensão residual. De medições previamente publicadas, Young (1972) encontrou uma distribuição parabólica para a tensão residual média em seções laminadas de tamanho médio. Do estudo de tensões residuais em seções estruturais laminadas grandes, Alpsten (1972a) encontrou valores de tensão de compressão iguais à tensão de escoamento e variações de tensão consideráveis ao longo da espessura das mesas. Para perfis I laminados, têm-se estudos da análise de medições das tensões residuais (Schulz, 1968; Tebedge e Tall, 1973 e Mas e Massonnet, 1966), que indicam claramente a dependência do valor e da distribuição das tensões residuais em função da geometria da seção.

Fukumoto *et al.* (1980) e Fukumoto e Itoh (1981) apresentaram distribuições residuais reais e mostraram que essas distribuições podem diferir significativamente do modelo idealizado.

1.3.5. Método dos Elementos Finitos

Em 1943, Courant (1943) publicou um trabalho com o uso do princípio da energia potencial estacionária e interpolação polinomial por partes em sub-regiões triangulares para estudar o problema da torção de Saint-Venant e com isso, parece ter sido ele o primeiro a propor o MEF como é conhecido hoje. Entretanto, seu trabalho foi ignorado até que engenheiros começaram a desenvolvê-lo independentemente. Porém, nenhum desses trabalhos foi de muito valor prático na época, pois não existiam computadores disponíveis para gerar e resolver um grande número de equações algébricas simultâneas. Em 1953, engenheiros da indústria aeroespacial (Levy, 1953) escreveram as equações de rigidez em forma matricial e resolveram essas equações com computadores digitais. Nessa época, Turner *et al.* (1956) sugeriram que fossem usados elementos planos triangulares para modelar a “pele” de uma asa delta. Esse trabalho foi publicado quase em simultâneo com um trabalho similar na Inglaterra (Argyris e Kelsey, 1960) e marca o início do uso dos elementos finitos para problemas distintos de estruturas de vigas.

O nome Método dos Elementos Finitos (MEF) foi criado em 1960 por Clough (1980) e logo ficou óbvio o valor prático do método. Em 1963, ele ganhou respeitabilidade quando foi reconhecido como tendo uma base matemática sólida, na solução do problema variacional pela minimização de um funcional (Cook *et al.*, 1989). Com o avanço computacional, o MEF se tornou o método mais difundido e utilizado, tendo sido desenvolvidos inúmeros programas de análise, tanto no âmbito acadêmico, com objetivos didáticos ou de pesquisa, quanto comercial. Sua aplicação hoje se estende a diversas áreas do conhecimento, com grande aplicação nas engenharias, na matemática, e também em modelos biomecânicos.

Podem ser citados alguns trabalhos como o de Shen e Zhang (1992), que utilizam o método dos elementos finitos com elementos curvos e algumas técnicas especiais, para a análise de estabilidade não-linear de barras de aço. A comparação com os resultados

de outros métodos numéricos e experimentais mostrou uma eficácia e precisão bastante satisfatória.

Também Huang e Atluri (1995) apresentam um método simples de traçar o caminho de pós-flambagem na análise por elementos finitos. Em um traçado padrão, como pelo método do comprimento do arco, os sinais dos elementos da diagonal da matriz triangular da rigidez tangente são monitorados de modo a determinar a existência de pontos de singularidade entre dois pontos adjacentes da solução. Nesse método é usada uma abordagem simples para identificar os pontos limites ou de bifurcação pela definição de pontos limites e a idéia das deformações gerais, e ao invés dos pontos de bifurcação exatos, são calculados os pontos de bifurcação aproximados da secante da solução. A base do método é a teoria de pós-flambagem assintótica, criada por Koiter.

Hasham e Rasmussen (2002) com uma análise por elementos finitos, com não-linearidades geométricas e físicas, usada para produzir as curvas de interação de seções I de chapa fina para a combinação de compressão e flexão, com enfoque em como as curvas de interação são afetadas pela flambagem local. O modelo de elementos finitos foi desenvolvido pelos autores em trabalho anterior (Hasham e Rasmussen, 2001) e inclui quatro elementos em cada mesa e oito elementos na alma. Foi usado o elemento de quatro nós de integração reduzida, conhecido como SR4. Observou-se boa concordância dos resultados obtidos com resultados experimentais.

Outros pesquisadores voltaram seus estudos para o desenvolvimento de novos elementos específicos para a análise de estabilidade de cascas. Com esse enfoque têm-se os trabalhos de Sivakumaran e Abdel-Rahman (1998) com um modelo de análise por elementos finitos para o comportamento de pós-flambagem local de barras de aço formadas a frio submetidas à compressão axial com elemento de casca isoparamétrico não-linear de 9 nós Lagrangeano, o qual inclui tanto grandes deslocamentos quanto formulação elasto-plástica, e modelos de propriedades de material baseados em experimentos para representar o corpo da seção de aço formada a frio. Foram incorporadas variações de tensões residuais obtidas experimentalmente, e também imperfeições geométricas iniciais. A comparação com resultados experimentais indicou que o modelo de análise por elementos finitos construído fornece resultados precisos e

consistentes para o comportamento de barras de aço formadas a frio e submetidas à compressão axial.

Novamente pode-se citar Degée (2000 e 2001), que tem procurado modelar o comportamento de barras de chapa fina considerando a flambagem lateral global e a flambagem local das paredes dos perfis. Para tanto, foi desenvolvido um elemento especial de barra, no qual o campo de deslocamentos permite que se modele qualquer comportamento global no plano (tração, compressão, flexão no plano, flambagem da coluna no plano) bem como a flambagem local das paredes dos perfis. O campo de deslocamento local complementar é definido pela superposição de funções harmônicas e é adicionado ao elemento de barra clássico. É chamada a atenção para a dualidade existente na aplicação dos elementos disponíveis para o estudo de estabilidade de seções, quais sejam, os elementos finitos de placa e os elementos especiais de barra. A modelagem por elementos de placa é conveniente para a maior parte das geometrias, cargas e condições de apoio, porém pode ser bastante pesado considerando o tempo computacional e o espaço de armazenamento. Ao contrário, modelar por barra é muito rápido e econômico, porém a aplicabilidade é mais limitada. Em seus estudos, a formulação proposta é aplicada à modelagem do comportamento crítico de perfis com seção I e seção caixão, e ao comportamento não-linear de seções I.

Um outro trabalho de interesse prático é o de Bakker e Pëkoz (2001), com a determinação das possíveis fontes de erro que podem acontecer nas análises por elementos finitos tanto lineares quanto não-lineares, a apresentação de sugestões de como checar e prevenir esses erros, e uma avaliação sobre os tipos de análise não-lineares e suas aplicações. Outro trabalho é o de Sarawit *et al.* (2001), onde são discutidos os tipos de análises, os modelos de material, os elementos e as condições iniciais em análises por elementos finitos de estruturas de chapa fina. São apresentados uma lista de programas desenvolvidos em estudos recentes e exemplos de problemas com aplicação do MEF em estruturas de chapa fina.

Além disso, outros métodos de análise foram baseados no MEF, como por exemplo, o Método das Faixas Finitas (MFF). Uma formulação “exata” do MFF foi primeiro apresentada por Wittrick e seus colegas (Wittrick, 1968; Willians e Wittrick, 1968;

Wittrick e Curzon, 1968a e 1968b) nos anos 60, porém, mais recentemente, pesquisadores desenvolveram um tratamento semi-analítico do método, o qual pode ser encontrado no bem conhecido texto de Cheung (1976). Na análise das faixas finitas, cada placa componente da estrutura é tratada como uma combinação de faixas longitudinais submetidas à tensão de membrana. As funções dos deslocamentos são assumidas como polinomiais na direção transversal e na direção longitudinal são usadas funções básicas características que atendam as condições de contorno pré-determinadas. No método semi-analítico normalmente essas funções são trigonométricas, entretanto, diversos autores tem buscado funções alternativas e existem inúmeros trabalhos nesse sentido.

Apesar de neste trabalho ser utilizado o MEF, são citados alguns trabalhos com o uso do MFF, apenas para referência, tais como o de Przemieniecki (1973) com o estudo das tensões iniciais de flambagem local de placas e o comportamento de placas submetidas à compressão biaxial, sendo esse o primeiro uso do MFF semi-analítico para flambagem local. Ele utilizou a aproximação da formulação de Cheung e Cheung (1971), na qual os deslocamentos laterais da faixa durante a flambagem foram considerados com variação senoidal na direção longitudinal e variação polinomial cúbica na direção da largura. Também Bradford e Azhari (1995) fizeram estudo similar, porém, com a utilização de duas funções básicas diferentes para a direção longitudinal, a primeira sendo derivada da solução das equações diferenciais de vibração em viga, e a segunda, funções trigonométricas. Outro trabalho desses autores (1997) considera a utilização de funções bolha.

A teoria básica envolvida no MEF é bastante conhecida e pode ser encontrada facilmente na literatura. Como sugestões têm-se Zienkiewicz (1971), Gallagher (1975), Zienkiewicz e Taylor (1989), Kleiber e Hien (1992) e Bathe (1996).

Existe um grande número de programas comerciais para a análise de flambagem e para análises não-lineares. Em Galambos (1998), pode ser visto um resumo descritivo e aplicativo de alguns dos programas mais populares de aplicação geral, com capacidade de realizar essas análises com diferentes graus de sofisticação. Dentre esses, os mais difundidos no meio acadêmico, no Brasil, são o ABAQUS e o ANSYS.

1.4. Proposta de Trabalho

A flambagem local de placas sempre foi assunto de interesse nas estruturas de aço, devido ao uso constante de placas esbeltas compondo as seções transversais das peças estruturais. Do levantamento bibliográfico realizado observou-se uma grande preocupação no entendimento desse fenômeno e sua caracterização, principalmente, nas barras com seções de chapas finas formadas a frio. Entretanto, nos perfis estruturais convencionais, soldados e laminados, a flambagem local também é um fenômeno estrutural importante, tanto sob o ponto de vista comportamental, alterando a geometria da peça, quanto sob o ponto de vista de resistência, pois altera a capacidade resistente última.

De modo geral, observa-se que os estudos e pesquisas desenvolvidos até o presente caminharam no sentido de buscar formas alternativas, aproximadas, para resolver e entender o problema da flambagem local de perfis estruturais. Normalmente, nesses trabalhos, a abordagem é feita pela busca de um método aproximado de se considerar as não-linearidades existentes, ou na elaboração de técnicas numéricas que incorporem alguma particularidade do problema. Alguns sugeriram novas formas de aproximação para as considerações normativas, como novos coeficientes para consideração das tensões residuais ou novas equações para a largura efetiva.

Na maior parte dos estudos teóricos, a consideração dos fatores de influência é feita desassociada, ou seja, são analisados separadamente os efeitos de cada um dos fatores sem considerar a influência conjunta, como por exemplo, das imperfeições geométricas iniciais em placas com tensões residuais, a pós-flambagem de perfis estruturais de aço com comportamento elasto-plástico, etc.

No âmbito experimental, não se encontrou na literatura estudos que permitissem uma compreensão geral do fenômeno, com a medição de todos os parâmetros de influência, e o acompanhamento e a descrição total do comportamento até o colapso. Os estudos experimentais encontrados procuravam sempre inferir apenas um desses fatores de influência.

Por questões econômicas, muitas vezes não é possível efetuar o estudo e a compreensão de um comportamento estrutural. Além disso, em muitos casos, observa-se que a determinação de todos os fatores é difícil nos ensaios experimentais e existem limitações econômicas, principalmente em ensaios até o colapso, e físicas, de medição e acompanhamento. O fato de se fazer uma simulação numérica já pressupõe uma aproximação ao modelo real, porém, com os recursos computacionais disponíveis hoje em dia, é possível que essa modelagem considere praticamente todos os aspectos físicos importantes ao problema, permitindo a avaliação de estruturas com praticamente todos os fatores de não-linearidades desejados e com grande precisão.

Neste trabalho, pretende-se realizar uma análise numérica da flambagem local de barras estruturais de aço axialmente comprimidas, através do uso do programa ABAQUS, versão 6.5-1, considerando as tensões residuais, as imperfeições geométricas iniciais e as não-linearidades de material, objetivando contribuir na compreensão do fenômeno da flambagem local, principalmente quanto aos perfis estruturais. Para o estudo pretende-se desenvolver uma metodologia de abordagem, implementação e verificação dos diversos fatores, que possibilitem validar os resultados pelo acompanhamento e controle dos parâmetros por outros que sejam conhecidos da literatura, ou por inferência de resultados através de aproximações comportamentais.

Essa metodologia poderá então ser adaptada e estendida a praticamente todos os fatores de colapso estrutural das barras de aço, permitindo a análise do comportamento generalizado e a obtenção de resultados satisfatórios. Dessa maneira será possível fazer uma avaliação da validade e confiabilidade das aproximações dos métodos de estudo alternativos da literatura e a verificação e melhoria na formulação dos procedimentos das normas de projeto vigentes.

Os perfis estruturais adotados pelas normas para barras submetidas à compressão uniaxial uniforme, são os perfis I duplamente simétricos, os perfis U, os perfis caixão, os perfis T e as cantoneiras de abas iguais. Os perfis I e U são compostos por dois tipos de placas distintas quanto à vinculação de suas bordas longitudinais, sendo o primeiro tipo a placa vinculada nas duas bordas longitudinais e o segundo a placa vinculada em uma borda longitudinal e livre na outra. O perfil caixão é composto apenas por placas

vinculadas nas duas bordas longitudinais. O perfil T e as cantoneiras de abas iguais são formados apenas por placas vinculadas em uma borda longitudinal e livre na outra.

Considerando que os perfis I e U são mais representativos para a análise do que o perfil caixão, pois possuem os dois tipos de placa e permitem a verificação da interação entre elas, e que o perfil I é normalmente mais utilizado nos projetos estruturais que o perfil U, e fazendo-se essa mesma consideração para as cantoneiras em relação ao perfil T, optou-se neste trabalho por considerar o estudo dos seguintes perfis estruturais:

- perfis I duplamente simétricos, constituídos por uma placa vinculada nas duas bordas longitudinais (alma) e por quatro placas vinculadas apenas em uma borda longitudinal (meias-mesas), figura 1.5-a;
- cantoneiras de abas iguais, formadas por duas placas idênticas vinculadas apenas em uma borda longitudinal, figura 1.5-b.

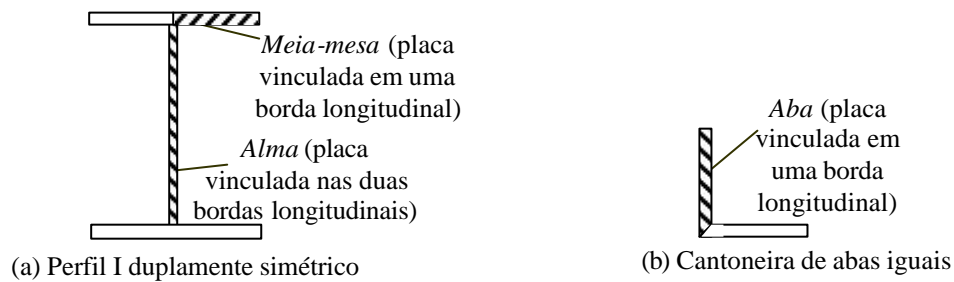


Figura 1.5 – Elementos constituintes dos perfis estruturais.

Inicialmente, foi realizado um estudo aprofundado dos conceitos fundamentais envolvidos no problema da instabilidade de barras de aço, que permitisse uma compreensão do fenômeno e das formas como o mesmo deve ser abordado. No capítulo 2 tem-se a descrição desses conceitos, podendo-se ressaltar os seguintes tópicos principais de estudo:

- *análise de estabilidade;*
- *estabilidade de placas;*
- *estabilidade de seções;*
- *tensões residuais;*
- *normas e especificações de projeto;*
- *método dos elementos finitos para estudo da flambagem de placas e seções;*

- *estudo dos procedimentos e formas de análise pelo ABAQUS.*

Este último item é de extrema importância pois estabelece uma familiaridade com os procedimentos de entrada e saída de dados pelo ABAQUS, permite uma compreensão dos métodos de análise empregados, com suas potencialidades, limitações e particularidades, e principalmente quanto ao controle dos parâmetros envolvidos, e garante uma confiabilidade nos resultados obtidos.

No capítulo 3 é feito um estudo da estabilidade de placas isoladas com o objetivo de se verificar a adequabilidade da metodologia de implementação dos modelos, dos parâmetros de controle e da acuidade dos resultados, uma vez que o comportamento das placas tem sido exaustivamente estudado e existem diversos resultados teóricos, numéricos e experimentais na literatura.

No capítulo 4 tem-se a aplicação da sistemática de análise desenvolvida para as placas aos perfis estruturais. O procedimento inicia-se com estudo de casos simples encontrados na literatura, algumas vezes para seções diferentes das apresentadas na figura 1.5, mas que permitem verificar e calibrar a forma de implementação e análise dos modelos e servem em alguns casos como parâmetros de inferência para os perfis objetos deste estudo. O acoplamento das não-linearidades aos modelos é gradual, de modo a permitir um acompanhamento dos problemas específicos, inerentes a cada perfil, e suas soluções, de modo a permitir um controle sobre todo o processo.

Por fim, no capítulo 5 é feita uma análise qualitativa e quantitativa dos resultados obtidos e comparação destes com resultados análogos disponíveis na literatura e também com a aplicação das normas em vigor. São apresentadas as conclusões do estudo e as sugestões para futuras contribuições.

2. FUNDAMENTOS DA ANÁLISE

2.1. Estabilidade Estrutural

Estabilidade é um conceito que está intimamente relacionado com a capacidade de uma dada estrutura conseguir estabelecer uma posição de equilíbrio após a introdução de qualquer perturbação externa, como, por exemplo, a aplicação de uma força ou a imposição de um deslocamento. Se ao cessar a perturbação externa, a estrutura retornar à posição inicial, ou seja, aquela existente no início da análise, diz-se que ela apresenta equilíbrio estável. Caso ela não consiga mais restaurar sua posição inicial ou encontrar uma nova posição equilibrada, ela apresenta equilíbrio instável. Entretanto, se atingir uma nova posição deformada, e conseguir manter-se equilibrada e resistente, apresenta equilíbrio neutro. A figura 2.1 ilustra de forma simples essas configurações.

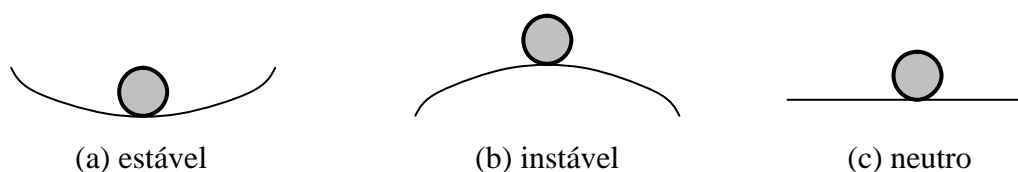


Figura 2.1 – Configurações de equilíbrio.

Porém, estruturalmente, essa posição de equilíbrio neutro normalmente corresponde a uma posição de transição entre o equilíbrio estável e o instável, pois a posição inicial passa a corresponder àquela deformada e a aplicação de alguma nova perturbação adicional implica em aceleração na passagem para o equilíbrio instável.

Em uma análise estrutural, o estudo da estabilidade se aplica às situações em que aparecem tensões de compressão, e os fenômenos que envolvem conceitos de estabilidade são conhecidos por fenômenos de instabilidade estrutural e chamados também de flambagem estrutural (Reis e Camotim, 2000), uma vez que ocorre a perda da forma original como resultado da deformação.

Segundo Galambos (1998), entende-se por instabilidade a condição na qual a estrutura comprimida perde a capacidade de resistir a um aumento de carga e ao invés, apresenta um decréscimo na capacidade resistente, portanto, a instabilidade ocorre no ponto máximo da curva carga/deslocamento. Os problemas de instabilidade podem ser subdivididos em duas categorias: aqueles associados com o fenômeno da bifurcação de equilíbrio, e aqueles nos quais a instabilidade ocorre quando o sistema atinge uma carga máxima, ou limite, sem que tenha acontecido a bifurcação.

No primeiro caso, quando uma peça “perfeita” é submetida a uma carga de compressão crescente, ela apresenta uma configuração inicial de deformação, o modo de deformação de pré-flambagem. Quando a carga atinge a carga crítica, a deformação subitamente muda para um padrão diferente, o modo de flambagem, ocorrendo uma bifurcação na curva de seu diagrama carga/deslocamento. Esse fenômeno da bifurcação do equilíbrio resulta em um ponto de ramificação no diagrama, correspondente à transição entre as configurações de equilíbrio estável e instável, após o qual duas curvas alternativas carga/deslocamento são válidas. A bifurcação pode ocorrer em regime inelástico somente se as propriedades após o escoamento e as tensões residuais apresentam um padrão de distribuição simétrico, de modo que não é desenvolvido momento fletor para cargas subcríticas (Galambos, 1998).

A instabilidade bifurcacional pode ser melhor visualizada através do diagrama genérico $P \times d$ da figura 2.2, onde podem ser observados:

- uma trajetória de equilíbrio fundamental (linear ou não-linear) com início na origem do diagrama. Até a ocorrência do primeiro ponto de bifurcação, o equilíbrio é estável e é representado pela linha cheia, após esse ponto o equilíbrio se torna instável e está representado pela linha tracejada;

- uma trajetória de equilíbrio de pós-flambagem, que não passa pela origem do diagrama e representa a nova forma de comportamento da estrutura;
- o primeiro ponto de bifurcação, correspondente à interseção das duas trajetórias, o qual também é chamado de carga crítica de flambagem. Esse ponto representa a mudança de configuração de equilíbrio da estrutura (estado de equilíbrio neutro), quando ela passa de um estado de equilíbrio estável para um estado de equilíbrio instável.

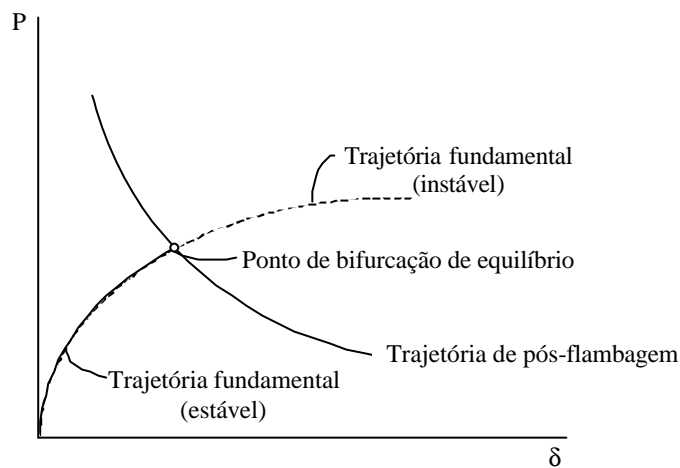


Figura 2.2 – Trajetória de equilíbrio – instabilidade bifurcacional (Reis e Camotim, 2000).

Desse tipo de análise linearizada de instabilidade bifurcacional o que se obtém são: a carga crítica de flambagem (correspondente às coordenadas do primeiro ponto de bifurcação), o modo de flambagem predominante (pela observação da configuração deformada na bifurcação) e as propriedades da trajetória de pós-flambagem.

No segundo caso, das chapas reais com imperfeições iniciais, não há mudança repentina do modo de deformação, mas uma significativa ampliação dos deslocamentos para pequenos incrementos do valor da carga. O aparecimento dos grandes deslocamentos caracteriza a fase pós-crítica, ou de pós-flambagem, do comportamento mecânico da peça. Basicamente, se a carga que ela pode suportar após o início da fase de pós-flambagem cresce com os deslocamentos, têm-se comportamento pós-crítico estável, senão o comportamento pós-crítico é instável.

A carga crítica de uma barra comprimida, obtida de uma análise linearizada de uma peça perfeita idealizada, não coincide necessariamente com a carga de colapso da peça real imperfeita. Para se determinar a carga de colapso da peça real é necessário se considerar as imperfeições iniciais e o comportamento não-linear do material.

A figura 2.3 apresenta o comportamento das curvas carga/deslocamento para os dois modelos de flambagem bifurcacional (linhas cheias) e as respectivas curvas de pós-flambagem de peças com imperfeições (linhas tracejadas).

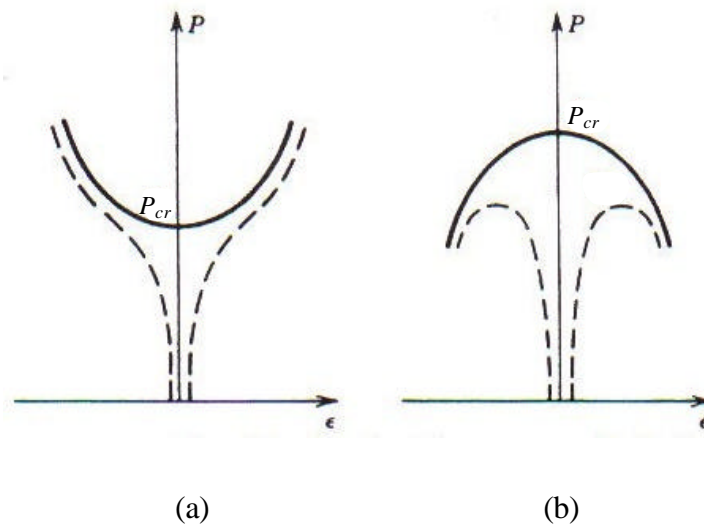


Figura 2.3 – Curva de pós-flambagem (a) estável simétrica e (b) instável simétrica (adaptado de Galambos, 1998).

Como exemplo de flambagem bifurcacional têm-se as placas axialmente comprimidas que perdem estabilidade pela troca repentina do modo de deformação. Inicialmente sofrem um encurtamento devido à compressão axial, o modo de pré-flambagem, e então, na carga crítica, subitamente sofrem uma translação normal ao seu plano médio, o modo de flambagem. Esse novo modo de deformação não parece, em princípio, compatível com as solicitações.

Além disso, elas são um exemplo de estrutura com curva pós-flambagem estável. À medida que a placa flamba, as deformações da flambagem fazem surgir tensões de tração de membrana que aumentam a rigidez da placa, fornecendo capacidade resistiva para o aumento de carga. Essas peças podem continuar a resistir ao aumento de carga

acima da carga crítica, e o colapso ocorre somente após o início do escoamento do material. A resistência pós-flambagem que um sistema com curva de pós-flambagem estável possui depende de dois fatores: (i) a inclinação da curva de pós-flambagem e (ii) a magnitude relativa entre a carga crítica e a carga de início do escoamento. As placas comprimidas axialmente possuem uma curva de pós-flambagem relativamente inclinada e como consequência apresentam grande resistência pós-flambagem já tendo sido obtidas cargas de colapso três ou quatro vezes maiores que a carga crítica (Gerard, 1957).

Entretanto, o sistema deve ter uma carga de escoamento consideravelmente maior que a carga crítica do sistema para que apresente resistência pós-flambagem significativa. Conforme Galambos (1998), uma estimativa grosseira da resistência pós-flambagem de uma placa axialmente comprimida é dada pela expressão $P_{cr}/P_f = (P_{cr}/P_y)^{1/2}$, onde P_{cr} é a carga crítica, P_f é a carga de colapso e P_y é a carga de início do escoamento. De acordo com essa expressão, uma placa possui resistência pós-flambagem significativa quando P_{cr}/P_y é muito menor que 1. Portanto, somente em placas finas é esperada uma grande resistência pós-flambagem.

2.2. Estabilidade de Placa Comprimida

Para uma exemplificação qualitativa da flambagem de placas (Maquoi, 1992), considere-se uma placa retangular simplesmente apoiada, com dimensões $a \times b$ e razão de entre os lados da placa $a=b$ próxima da unidade, submetida à compressão uniaxial uniforme (ver figura 2.4).

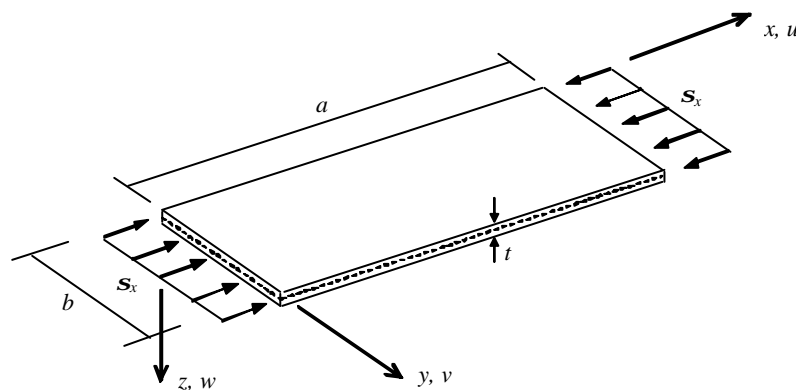


Figura 2.4 - Placa comprimida uniaxialmente.

Assume-se que essa placa possui espessura constante (t), é perfeitamente plana, de material isotrópico, elástico, sem tensões residuais e carregada exatamente em seu plano médio (\mathbf{s}_x). Além disso, são válidas as hipóteses de Kirchhoff para placas delgadas, quais sejam (Ugural, 1981 e Oñate, 1992):

- a) a deformação da superfície média é pequena se comparada com a espessura da placa e os pontos do plano médio só se movem verticalmente, ou seja, $u=v=0$;
- b) todos os pontos pertencentes à uma normal ao plano médio sofrem o mesmo deslocamento vertical (w);
- c) seções planas inicialmente normais ao plano médio permanecem planas e normais à essa superfície após a deformação. Isso significa que a deformação da placa está associada apenas ao deslocamento perpendicular ao seu plano médio, portanto, assume-se que $\mathbf{g}_{xz} = \mathbf{g}_{yz} = \mathbf{d}_z = 0$;
- d) a tensão normal ao plano médio, \mathbf{s}_z , é pequena se comparada às outras tensões e portanto é desprezada ($\mathbf{s}_z = 0$).

Com a aplicação da carga, observa-se que para valores pequenos de tensão de compressão \mathbf{s}_x (abaixo de \mathbf{s}_{cr}), a placa permanece plana, com deslocamentos longitudinais u , os quais desaparecem quando a carga é retirada. Quando a tensão de compressão atinge um valor $\mathbf{s}_x = \mathbf{s}_{cr}$, a placa mantém a forma deformada, com grandes deslocamentos transversais perpendiculares ao seu plano médio (w). Esse valor da tensão de compressão é chamado tensão crítica de flambagem da placa e caracteriza um estado de equilíbrio neutro, ou seja, representa o ponto a partir do qual cessa o comportamento estável da estrutura e começa uma nova configuração de equilíbrio.

Com o aumento da tensão de compressão (acima de \mathbf{s}_{cr}), observa-se um encurtamento das fibras paralelas à direção da tensão devido à deformação elástica e um alongamento das fibras na direção perpendicular à dessa tensão. Isso causa um efeito de membrana que tende a estabilizar a placa e pode resultar em um possível aumento na sua capacidade resistente. Como essa contribuição favorável se desenvolve após o início da flambagem da placa, é chamada de resistência pós-flambagem.

2.2.1. Flambagem Elástica de Placa

Matematicamente, tem-se que a equação diferencial da superfície elástica de flambagem de uma placa comprimida uniaxialmente (Saint-Venant, 1883) é dada por:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] = \frac{t}{D} \mathbf{s}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

onde

$$D = \text{rigidez da placa} = \frac{E t^3}{12(1-\mathbf{n}^2)} \quad (2.2)$$

E = módulo de elasticidade longitudinal do aço, adotado igual a 205 GPa

t = espessura da placa

\mathbf{n} = coeficiente de Poisson do aço, igual a 0,3

$w(x,y)$ = deslocamento perpendicular ao plano da placa (xy)

Existem diversos métodos de resolução da equação acima. Para o caso de uma placa com as 4 bordas rotuladas como a da figura 2.5, um método bastante simples de obtenção da tensão crítica é o de Lévy, encontrado corriqueiramente na literatura (Ugural, 1981), onde, estabelecendo-se condições de contorno apropriadas, chega-se ao valor da tensão crítica de flambagem elástica:

$$\mathbf{s}_{cr} = K_q \frac{\mathbf{p}^2 D}{t b^2} = K_q \frac{\mathbf{p}^2 E}{12(1-\mathbf{n}^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \quad (2.3)$$

com K_q = coeficiente de flambagem da placa, dado por

$$K_q = \left(\frac{m b}{n a} + \frac{n a}{m b} \right)^2 \quad (2.4)$$

a = comprimento da borda longitudinal descarregada

b = comprimento da borda transversal carregada

m = número de semi-ondas que aparecem durante a flambagem na direção de \mathbf{s}_x

n = idem, na direção transversal a \mathbf{s}_x e considerado igual a 1 (formação de apenas uma semi-onda transversal).

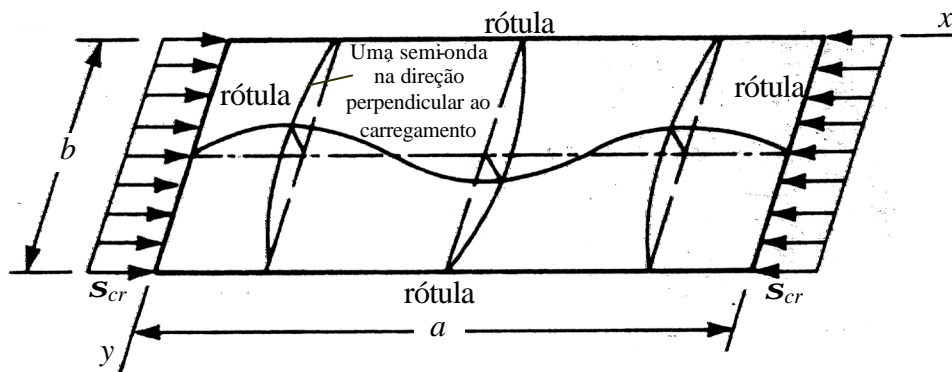


Figura 2.5- Semi-ondas de flambagem local de placa comprimida uniaxialmente.

Para $m = 1, 2, 3, 4$, etc, obtêm-se valores de K_q em função da relação entre os lados da placa (a/b), mostrados na figura 2.6, caso C, onde as duas bordas longitudinais são rotuladas (Trahair e Bradford, 1988 e Salmon e Johnson, 1990). Observa-se que para qualquer valor de m , K_q tende para um valor mínimo (nesse caso igual a 4) independentemente do tipo de vinculação na borda transversal (borda carregada). Portanto, para efeito de dimensionamento, sempre que as condições de contorno da placa forem rotulada-rotulada, adota-se esse valor para K_q .

Para outras condições de contorno ao longo das bordas longitudinais, partindo-se da equação (2.1) são obtidos outros valores de K_q , também mostrados na figura 2.6, sempre em função da relação (a/b). Também nesses casos observa-se que o tipo de vinculação (rótula ou engaste) da borda transversal carregada (largura b) só tem efeito significativo no valor da tensão crítica para valores muito pequenos de (a/b), inferiores a aproximadamente 5. Na prática, essas situações de (a/b) pequenos são pouco usuais nas placas pertencentes aos perfis, sendo realmente importante apenas o tipo de apoio ao longo das bordas longitudinais da placa.

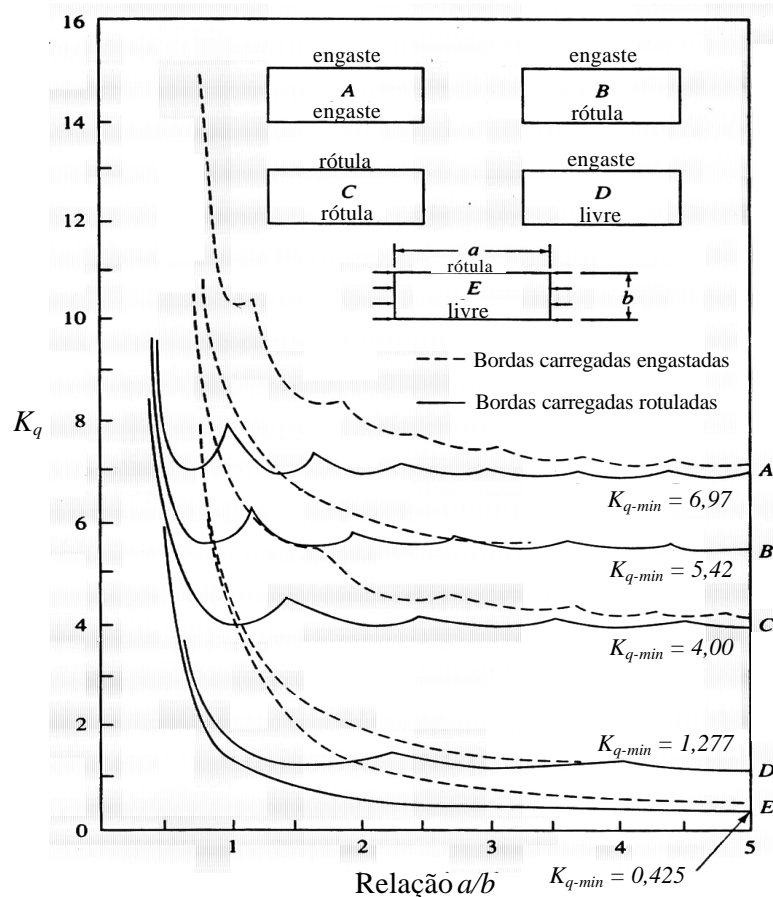
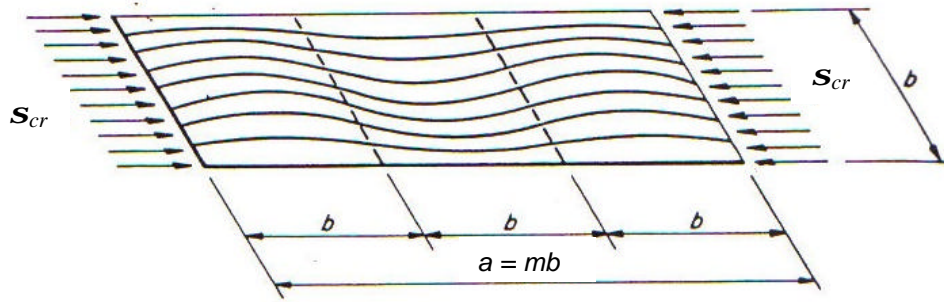
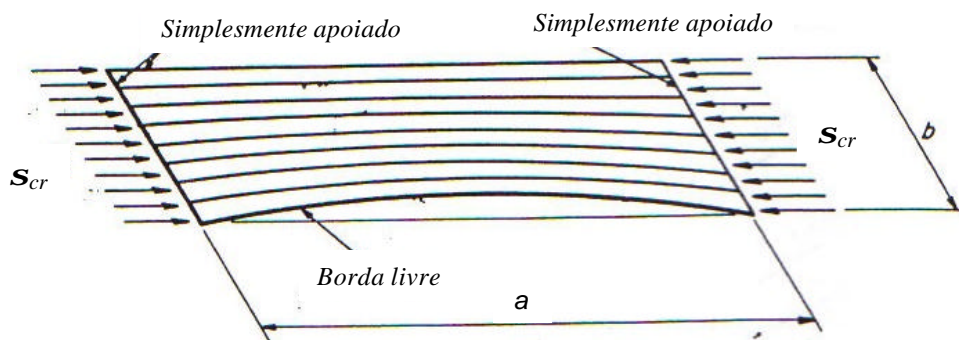


Figura 2.6 - Valores de K_q para os tipos usuais de condições de contorno de placas (Salmon e Johnson, 1990).

Lembrando que m é o número de semi-ondas na direção longitudinal, é interessante observar a diferença comportamental entre o caso C, no qual ambas as bordas longitudinais estão rotuladas (caso similar à alma de um perfil I) e o caso E onde uma das bordas está rotulada e a outra livre (como as mesas de um perfil I ou as abas das cantoneiras). No primeiro caso, no desenvolvimento da tensão mínima de flambagem da placa, observa-se que o número de semi-ondas aumenta com a razão (a/b) e que para placas muito longas (a/b) é aproximadamente igual a m , ou seja, ela flamba em semi-ondas de comprimento próximo à largura da placa, de modo que após a flambagem a placa fica subdividida em quadrados, ver figura 2.7-a. No segundo, observa-se que a menor carga crítica ocorre para m igual a 1, ou seja, com a formação de apenas uma semi-onda longitudinal, ver figura 2.7-b (Trahair e Bradford, 1988).



(a) – placa com ambas as bordas longitudinais rotuladas



(b) – placa uma borda longitudinal rotulada e a outra livre

Figura 2.7 – Configurações de flambagem de placas comprimidas (Trahair e Bradford, 1988).

2.2.2. Flambagem Elasto-Plástica de Placa

Na determinação do estado de tensões que provoca a flambagem no regime elástico, pode-se verificar se a superposição desse estado com as tensões residuais causa o escoamento em alguma região da placa. Se isso ocorrer, o limite de proporcionalidade do material é ultrapassado e a combinação das tensões aplicadas e as residuais levam ao comportamento elasto-plástico das placas componentes da seção transversal quando submetidas a tensões menores que a de escoamento. A influência das tensões residuais na curva tensão/deformação é mostrada na figura 2.8, considerando nas ordenadas a tensão média calculada pela área bruta. A curva tensão média \times deformação é não-linear quando a resistência máxima da coluna é atingida.

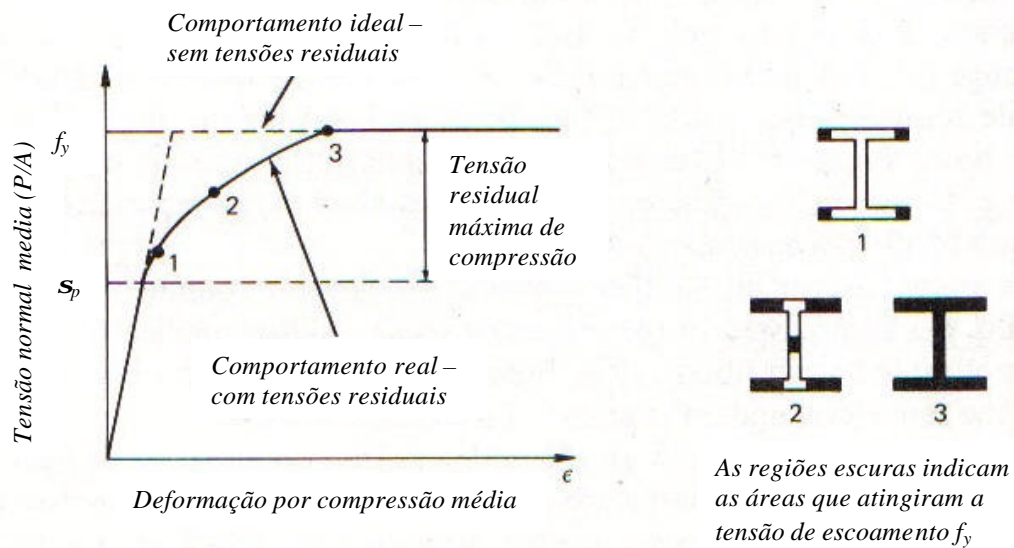


Figura 2.8 – Influência das tensões residuais no diagrama tensão média x deformação (Salmon e Johnson, 1990).

Para a determinação aproximada desses valores, nos estudos da flambagem elasto-plástica de placas (Bleich, 1952, Gerard, 1962 e Chajes, 1974), observou-se que a tensão crítica elástica, dada pela equação (2.3), permanece válida nessa região, desde que o módulo elástico E seja substituído por um módulo reduzido (hE), onde h é um fator de plastificação. Desse modo, a tensão crítica elasto-plástica é dada por

$$s_{cr} = K_q \frac{p^2 h E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2. \quad (2.5)$$

Como o comportamento elasto-plástico sempre reduz a rigidez da placa, tem-se sempre $h < 1$, e portanto, a tensão crítica elasto-plástica apresentará valores inferiores aos valores críticos que seriam obtidos pela formulação do regime elástico.

Os resultados obtidos no estudo de placas elasto-plásticas indicam que o fator h é uma função da forma da curva tensão-deformação, do tipo do carregamento, da razão comprimento/largura da placa e das condições de contorno.

Diversas expressões de h foram obtidas através de teorias rigorosas e levando a cargas críticas que concordam bem com os resultados de testes, algumas podem ser vistas em Allen e Bulson (1980). Porém, devido à dificuldade de aplicação dessas expressões, corriqueiramente é utilizada uma expressão mais simples, derivada por Bleich (1952), dada por

$$h = \sqrt{\frac{E_t}{E}}. \quad (2.6)$$

Entretanto, para uma determinação mais precisa do comportamento de flambagem elasto-plástica, deve ser feita a consideração das tensões residuais e sua influência na resistência última das peças estruturais pelo seu diagrama de distribuição e magnitude adequados na análise.

2.2.3. Resistência Pós-Flambagem

Uma placa elástica esbelta não entra em colapso logo após a flambagem, mas pode suportar cargas significativamente maiores que sua carga crítica sem se deformar excessivamente. Esse comportamento é oposto ao esperado quando se considera o comportamento de barras elásticas comprimidas que suportam apenas um pequeno aumento de carga antes que sua deformação seja excessiva, como mostrado na figura 2.9.

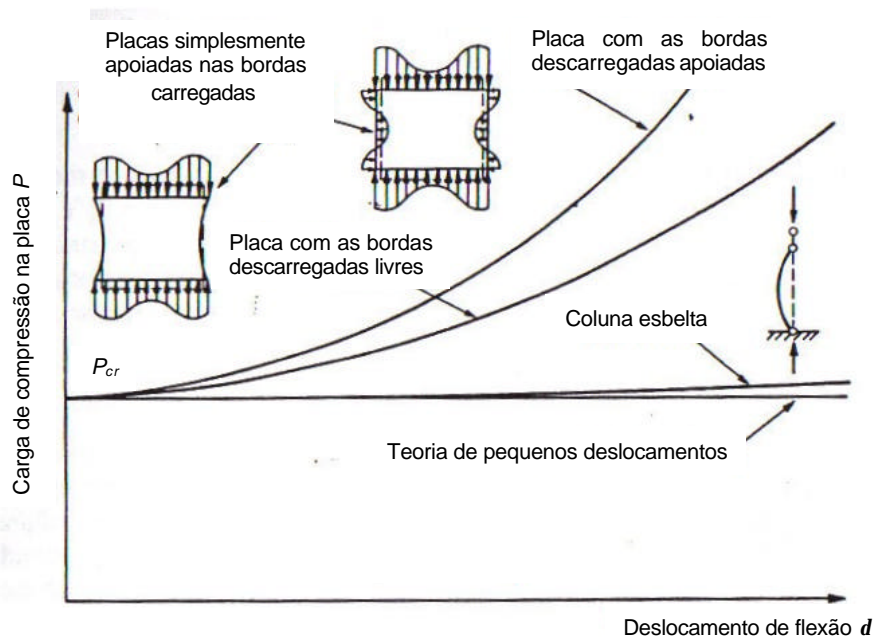


Figura 2.9 – Comportamento de pós-flambagem de placas elásticas esbeltas (Trahair e Bradford, 1988).

A resistência adicional de pós-flambagem de placas finas deve-se a diversos fatores, porém, o principal é que a forma deformada da placa flambada não pode ser desenvolvida a partir da configuração de pré-flambagem sem que haja uma redistribuição das tensões no plano médio ao longo da placa. Essa redistribuição, que é ignorada na teoria de pequenos deslocamentos em flambagem elástica, normalmente favorece as regiões menos rígidas da placa, e causam um aumento de eficiência da placa. Uma das causas mais comuns dessa redistribuição está associada com as condições de contorno no plano nas bordas carregadas da placa.

Para uma melhor compreensão do fenômeno, considere uma placa alongada, apoiada nas quatro bordas e comprimida longitudinalmente, como a da figura 2.4, item 2.2. Enquanto a tensão provocada pela carga externa (s_x) for inferior à tensão de flambagem (s_{cr}), tem-se s_x constante na placa (ver figura 2.10). Quando se aumenta a carga externa de forma a provocar a flambagem da placa, o que ocorre é uma distribuição não uniforme da tensão s_x provocada pela carga externa. Isso provoca um aumento de resistência, o qual deve-se ao fato das fibras transversais serem tracionadas após a flambagem, tendendo a estabilizar as fibras longitudinais.

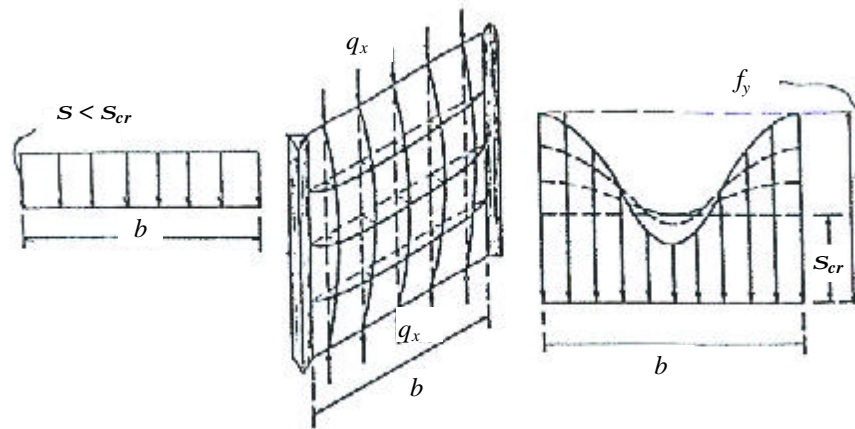


Figura 2.10 - Distribuição de tensões antes e após o colapso de placa apoiada em ambas as bordas longitudinais (Fakury, 1989).

A eficiência desse efeito estabilizante cresce do centro da placa para as bordas longitudinais apoiadas e é habitual admitir, conservadoramente, que o colapso da placa ocorrerá quando a tensão máxima atuante ($s_{m\acute{a}x}$) for igual à tensão de escoamento do material (f_y). Porém, a obtenção do valor da carga última real da placa depende do conhecimento, em nada trivial, da forma de distribuição dessa tensão atuante (Maquoi, 1992). De modo a superar essa dificuldade, von Kármán (1932) introduziu o método da largura efetiva (b_{ef}), sendo essa largura definida como a largura de uma placa fictícia simplesmente apoiada, com mesma espessura e razão de entre os lados que a placa real e que flamba para uma tensão crítica igual a f_y .

Devido à simplicidade do método, o mesmo é bastante utilizado na prática, tendo sido adotado pela maior parte das especificações de projeto. Nesse caso, o uso do conceito de largura efetiva para uma placa apoiada em ambas as bordas longitudinais é feito substituindo-se o valor médio da tensão s_m atuante na largura b , pelo valor f_y aplicado na largura b_{ef} (ver figura 2.11), de modo que a carga última é calculada então com base nessa área efetiva igual a $(b_{ef} \cdot t)$.

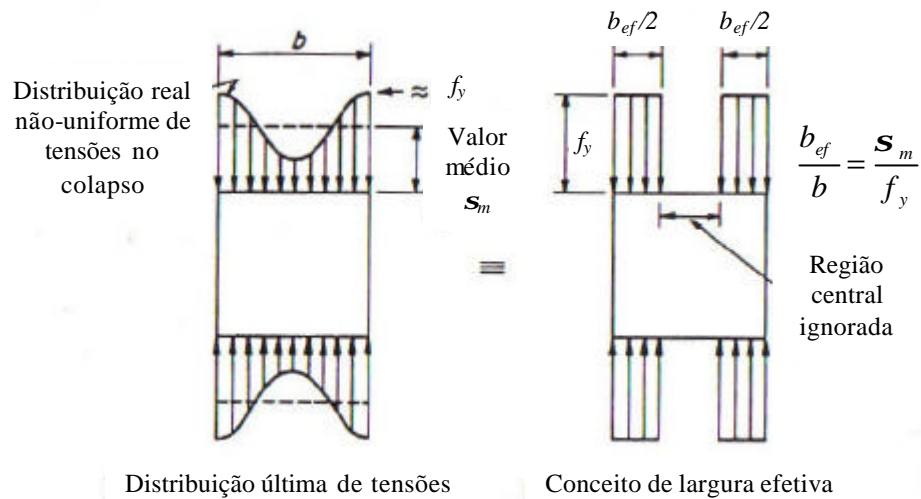


Figura 2.11 – Largura efetiva de placas apoiadas em ambas as bordas longitudinais (Fakury, 1989).

O efeito de pós-flambagem é maior em placas apoiadas nas duas bordas longitudinais do que em placas com uma borda longitudinal livre. Isso deve-se ao fato de que a forma fletida da última é menos curva que a primeira, e a redistribuição das tensões no plano não é tão marcante. Além disso, não é possível o desenvolvimento de nenhuma tensão no plano ao longo das bordas longitudinais.

As placas apoiadas apenas em uma borda longitudinal também apresentam esse fenômeno de resistência pós-flambagem, porém, em menor intensidade. O tratamento é similar ao das placas com ambas as bordas apoiadas, sendo que o colapso se dá quando atua uma carga de compressão igual a $q_{xcolapso} = b \cdot t \cdot s_m$ correspondente à tensão f_y na borda apoiada (ver figura 2.12).

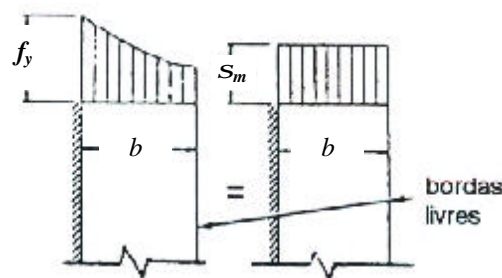


Figura 2.12 – Largura efetiva de placas apoiadas em apenas uma borda longitudinal (Fakury, 1989).

2.3. Estabilidade de Seções

Por serem as seções transversais dos perfis estruturais de aço compostas por um conjunto de placas longas ligadas entre si por meio das bordas longitudinais comuns, normalmente a análise de sua estabilidade é feita com base na observação do comportamento das placas isoladas. A flambagem local de tal composição pode ser analisada aproximadamente pela consideração de que cada placa age como se fosse simplesmente apoiada ao longo dessa borda comum (ou bordas) e permanece livre ao longo da borda longitudinal desconectada. Dessa forma, as bordas longitudinais internas da seção permanecem indeformadas e considera-se que a deformação da seção se deve à flexão das placas.

A tensão crítica de cada elemento de placa pode então ser determinado da equação (2.3), com K_q igual a 4, ou 0,425, conforme a situação, e essa tensão pode ser usada como uma aproximação na determinação da carga crítica da barra (Trahair e Bradford, 1988). Essa aproximação é conservadora, primeiramente porque considera que as placas adjacentes sempre proporcionam um grau de vinculação correspondente a simplesmente apoiado, desprezando o efeito da rigidez relativa das placas. Além disso, desconsidera que a rigidez da ligação entre os elementos de placa causa a flambagem simultânea de todas as placas a uma tensão intermediária, entre a menor e a maior tensão crítica dos elementos de placa individuais, como pode ser visto em Allen e Bulson (1980), onde um grande número de análises foi realizado para casos em que essa flambagem simultânea acontece.

Como exemplo têm-se valores do coeficiente de flambagem elástica K_p de uma seção I submetida à compressão uniforme, mostrados na figura 2.13. A tensão de flambagem pode ser obtida dessa figura usando-se a equação (2.3) substituindo-se a espessura da placa t pela espessura da mesa t_f .

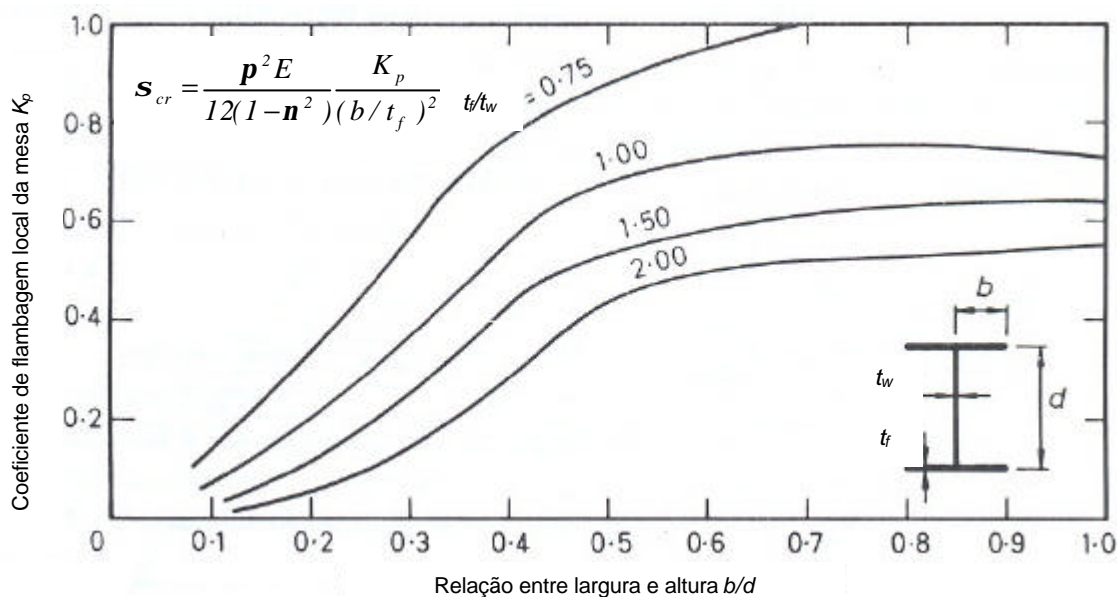


Figura 2.13 – Coeficientes de flambagem local de perfis I de barras de aço comprimidas (Trahair e Bradford, 1988).

A adoção da simplificação apresentada acima se deve ao fato de que, em termos estruturais, para alguns casos a estabilidade linear de seções e a de placas isoladas, quanto à flambagem local, são fenômenos análogos (Prola, 2001). Conforme foi mostrado no item 2.2.1, o modo de flambagem das placas longas é caracterizado pela formação de m semi-ondas na direção longitudinal, com comprimento próximo à largura da placa considerada. Por essa razão, considera-se que a estabilidade linear desses elementos estruturais, associada à flambagem local, pode ser estudada através da análise de um segmento de barra que tenha esse mesmo comprimento. Ou seja, a análise pode ser feita em uma barra curta, de comprimento semelhante às dimensões de sua seção transversal.

Uma análise sem o desacoplamento das placas não pode ser feita de forma trivial, devendo-se recorrer a métodos elaborados e com uso computacional.

2.4. Tensões Residuais

As tensões residuais resultam de deformações plásticas e influenciam a resistência à flambagem das peças de aço estrutural, podendo ser resultado de diversas fontes:

- resfriamento desigual que ocorre após a laminação a quente, a soldagem ou cortes à maçarico;
- flexão ou encurvamento a frio durante a fabricação;
- punção de furos e operações de corte durante a fabricação.

Elas podem ser eliminadas por tratamentos térmicos adequados, porém, na maioria dos casos isso é impraticável e extremamente caro. Entretanto, processos mecânicos, como por exemplo, o desempenamento a frio, podem ser usados para aliviar os efeitos das tensões residuais na resistência das colunas.

Essas tensões surgem da distribuição não-uniforme de temperatura durante a fabricação. Durante as etapas finais de formação de perfis e placas, as partes mais expostas da seção resfriam a uma taxa mais rápida. A contração do material mais frio é resistida pelas regiões quentes, induzindo deformações plásticas nas regiões ainda sob alta temperatura, que possuem menores tensões de escoamento. O subsequente encurtamento das regiões que resfriaram por último é resistido pelas regiões já resfriadas, induzindo assim o aparecimento de tensões residuais de compressão nas regiões primeiramente resfriadas e tensões residuais de tração equilibrantes nas regiões que resfriaram por último. As tensões residuais longitudinais formam então um sistema de forças na seção transversal que é auto-equilibrado.

A medição das tensões residuais reais é complicada e difícil, entretanto, existem alguns métodos que fornecem valores razoáveis para o uso da engenharia estrutural, como o método da difração por raio-X, o método do seccionamento da seção e o método do furo central (Szalai e Papp, 2005).

Com base nessas observações e nas medições experimentais, foram desenvolvidos diversos modelos teóricos para as distribuições. Entretanto, os resultados dos modelos teóricos, para um mesmo tipo de processo de conformação ou um mesmo tipo de perfil, pode apresentar variações consideráveis devido às incertezas nos métodos de medição.

A figura 2.14 apresenta distribuições de tensões residuais idealizadas e medidas em barras laminadas e soldadas, onde pode ser visto que, as diferenças entre os modelos teóricos idealizados e os valores medidos experimentalmente podem ser significativas.

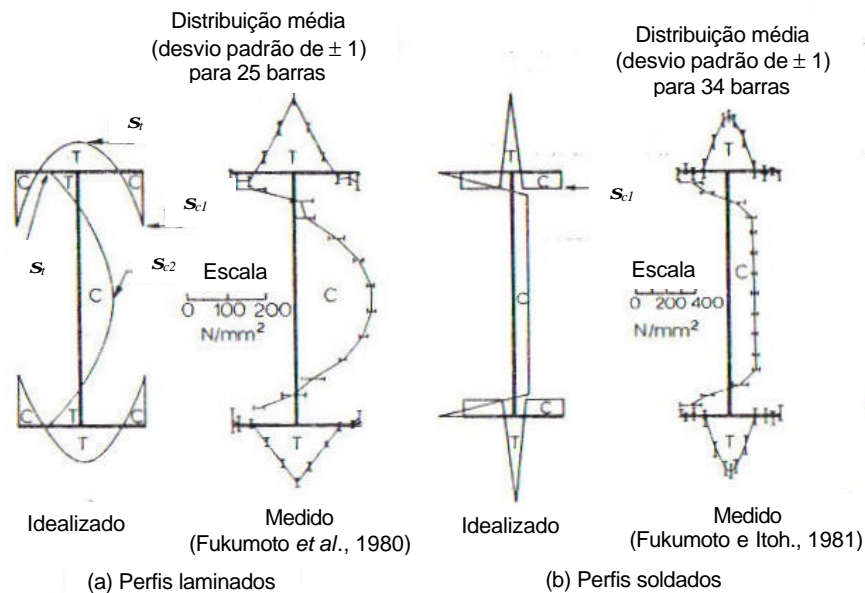


Figura 2.14 - Distribuições de tensões residuais idealizadas e medidas (Trahair, 1983).

2.4.1. Placas

Em placas laminadas, a distribuição das tensões residuais médias longitudinais, tomadas na linha do esqueleto da seção transversal tende a ser parabólica com compressão nas bordas e tração no centro (ver figura 2.15). Como deve ser garantido o equilíbrio de forças longitudinais, a consideração parabólica requer que as tensões de compressão (s_c) nas bordas da placa sejam o dobro (em valor absoluto) da tensão de tração (s_t) do meio da placa. Além disso, dois parâmetros que afetam o valor das tensões residuais nas placas são a esbelteza, correspondente à relação entre a largura e a espessura (b/t), e a razão do perímetro pela área da seção transversal (a). Esse último parâmetro é claramente importante uma vez que ele controla a taxa de resfriamento da placa (ECCS, 1976).

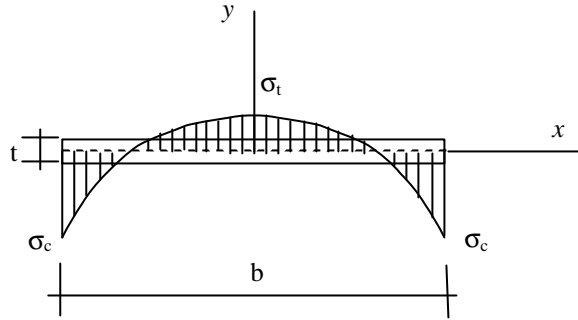


Figura 2.15 – Distribuição parabólica das tensões residuais em placas laminadas.

Através de estudos experimentais e teóricos, Alpsten (1972) sugeriu valores de s_c dependentes de a e b/t (ECCS 1976). Não é fácil de se obter uma equação de projeto simples e precisa para s_c , porém, é sugerida a seguinte equação:

$$s_c = \frac{0,18 \left(\frac{b}{t} \right)}{a^{3/2}} \frac{MN}{m^2} \leq f_y \quad (2.7)$$

onde

$$a = \frac{2(b+t)}{bt} \quad (2.8)$$

e b e t são a largura e a espessura da placa, respectivamente, em mm e f_y é a tensão de escoamento da placa em MN/mm^2 .

A relação acima é geralmente conservadora exceto para placas com a maiores que $0,3mm^{-1}$. Uma equação menos precisa que aparenta ser conservadora para qualquer valor de a , porém válida para $0 < b < 28t$, é:

$$s_c = 220 \left(1 - \frac{b}{37t} \right) \frac{MN}{m^2} \quad (2.9)$$

A tensão de tração é calculada então por:

$$s_t = \frac{s_c}{2} \frac{MN}{m^2} \quad (2.10)$$

Para placas cortadas a maçarico, observa-se que a ação do maçarico induz uma tensão de tração igual à tensão de escoamento em uma faixa estreita da placa próxima ao corte. As tensões longitudinais que aparecem no resto da placa devem ser tais que preservem o equilíbrio das forças paralelas ao corte. A figura 2.16 mostra as distribuições de tensão em uma placa com uma borda cortada (figura 2.16-a) e com duas bordas cortadas (figura 2.16-b).

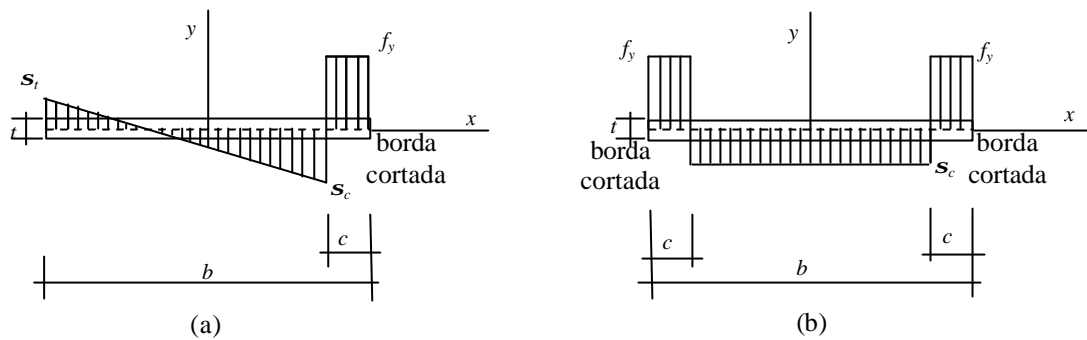


Figura 2.16 - Distribuição das tensões residuais em placas cortadas à maçarico (a) apenas em uma borda e (b) nas duas bordas.

A forma retangular da tensão de tração na borda cortada é idealizada, mas a força de tração armazenada é independente da forma da distribuição. É essa força que dá início às tensões residuais na placa como um todo. Se a largura c do retângulo de tração é conhecida, uma aplicação simples da estática permite o cálculo das tensões residuais (ECCS, 1976).

Para uma placa com uma borda cortada (figura 2.16-a), as tensões residuais longitudinais s_c e s_t são dadas por

$$s_t = f_y \cdot \frac{c(2b+c)}{(b-c)^2} \quad (2.11)$$

e

$$s_c = f_y \cdot \frac{c(4b-c)}{(b-c)^2}. \quad (2.12)$$

Para uma placa cortada nas duas bordas (figura 2.16-b), a tensão residual longitudinal uniforme, s_c , é dada por

$$s_c = f_y \cdot \frac{2c}{(b - 2c)}. \quad (2.13)$$

De um estudo experimental de tensões residuais em placas de aço cortadas à maçarico em uma borda, com espessuras variando entre 6,3 mm e 12,7 mm, Young e Dwight (1971) obtiveram a largura do retângulo de tração c dado por

$$c = \frac{1100\sqrt{t}}{f_y} \text{ mm} \quad (2.14)$$

onde t é a espessura da placa em mm e f_y é a tensão de escoamento da placa em MN/mm².

Apesar da relação acima ser experimental, para placas relativamente finas, ela também fornece valores de c que aproximam bem as tensões residuais de compressão médias encontradas em placas espessas ($t = 51,89$ e 152 mm) testadas por Alpsten (1972).

De modo a introduzir a discussão de tensões residuais oriundas da soldagem, deve-se examinar os efeitos das soldas em placas planas, pois, as seções estruturais soldadas podem ser consideradas como uma composição de placas planas.

Durante a soldagem, o bloco de tensões de tração é produzido exatamente da mesma forma que pelo corte a maçarico, de forma que, a distribuição de tensões que surge em uma placa soldada ao longo de uma borda ou ao longo de ambas as bordas longitudinais são as mesmas representadas para as placas cortadas à maçarico, mostradas na figura 2.15. Para placas com solda longitudinal na seção central, a distribuição de tensões residuais está apresentada na figura 2.17.

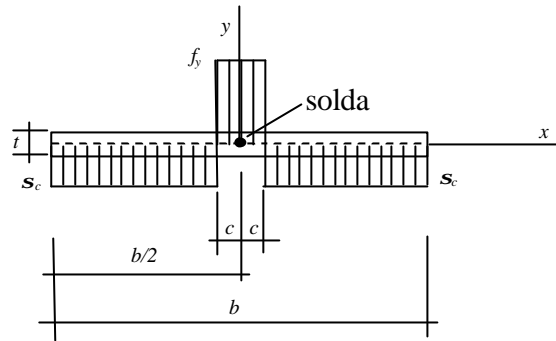


Figura 2.17 - Distribuição das tensões residuais em placas soldadas longitudinalmente na seção central.

As tensões residuais s_t e s_c para placas soldadas em uma borda ou em duas bordas longitudinais são calculadas pelas equações equivalentes de placas cortadas a maçarico em uma borda ou em duas bordas longitudinais. O valor de c para uma solda contínua de passagem simples é dado por

$$c = \frac{12000 p A_w}{f_y \sum t} \text{ mm} \quad (2.15)$$

onde p é o fator de eficiência do processo (Young, 1974), o qual depende do processo de soldagem adotado, A_w é a área da seção transversal do metal de solda adicionado em mm^2 , $\sum t$ é a soma das espessuras das placas no encontro da solda em mm e f_y é a tensão de escoamento da placa em MN/mm^2 . Os valores sugeridos para os cinco processos de soldagem mais comuns são apresentados no ECCS (1976).

2.4.2. Perfis I Laminados

O parâmetro de influência de maior importância na distribuição e magnitude das tensões residuais, para um mesmo processo de fabricação, é a geometria e o tamanho do perfil. Isso pode ser observado na figura 2.18, onde são apresentados perfis I laminados com diferentes dimensões e suas respectivas distribuições de tensões residuais (Galambos, 1998).

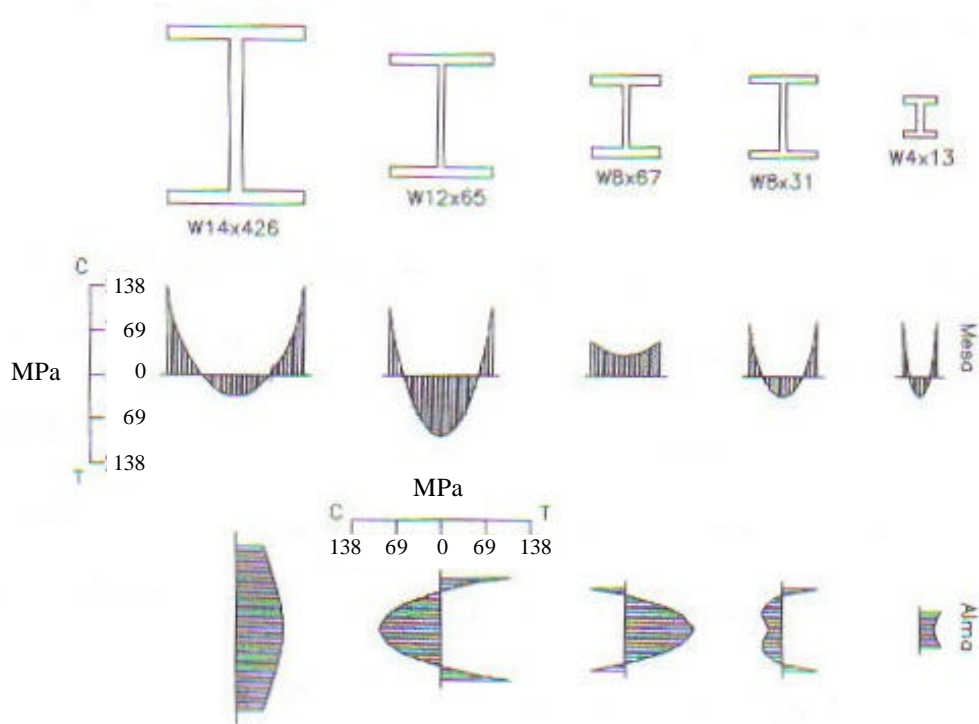


Figura 2.18 – Variações das distribuições de tensões residuais em perfis I laminados de acordo com a geometria (Galambos, 1988).

Apesar das variações, para efeito de análise e projeto, normalmente considera-se uma distribuição padrão para os perfis I ou H laminados com compressão nas bordas livres da mesa e tração na junção alma/mesa, com a forma mostrada na figura 2.19.

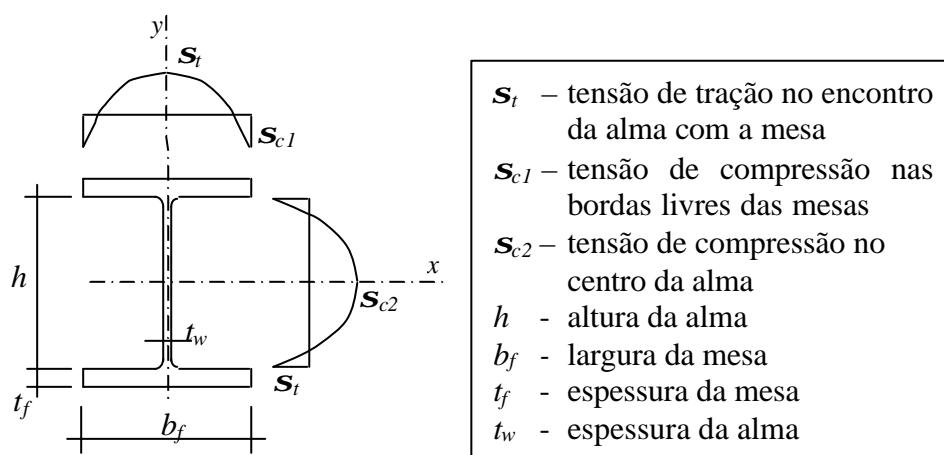


Figura 2.19 – Distribuição padrão das tensões residuais em seções I laminadas.

Lee *et al.* (1967) sugeriram distribuições das tensões residuais nas mesas (\mathbf{s}_{rf}) e na alma (\mathbf{s}_{rw}) aproximadamente parabólicas, com o uso de polinômios de quarta ordem da forma

$$\mathbf{s}_{rf} = a_1 + a_2x^2 + a_3x^4 \quad (2.16)$$

e

$$\mathbf{s}_{rw} = a_4 + a_5y^2 + a_6y^4 \quad (2.17)$$

impondo que fosse satisfeita a condição de resultante das forças axiais igual a zero, pois resultantes de momento em relação aos eixos x e y nulas são automaticamente garantidas pela simetria (Trahair, 1983).

Mais recentemente, seguindo essa mesma linha, tem-se o trabalho de Szalai e Papp (2005), porém, com a forma de distribuição das tensões residuais nas mesas (\mathbf{s}_{rf}) e na alma (\mathbf{s}_{rw}), representada por polinômios de segunda ordem contínuos dados por

$$\mathbf{s}_{rf} = c_f + a_f y^2 \quad (2.18)$$

e

$$\mathbf{s}_{rw} = c_w + a_w z^2, \quad (2.19)$$

cujos parâmetros c_f , a_f , c_w e a_w são determinados de modo a garantir o equilíbrio e dependem apenas das dimensões da seção e da tensão de escoamento do material.

De uma busca detalhada em medições previamente publicadas, Young (1972) encontrou uma distribuição parabólica para a tensão residual média em seções laminadas de tamanho médio, com a forma padrão mostrada na figura 2.19. Os valores dos picos de tensão variam em função da geometria da seção segundo as equações:

$$\mathbf{s}_{c1} = 165 \left[1 - \frac{ht_w}{2,4b_f t} \right] MN/m^2, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{s}_{c2} = 100 \left[1,5 - \frac{ht_w}{2,4b_f t} \right] MN/m^2 \quad (2.21)$$

e

$$s_t = 100 \left[0,7 - \frac{ht_w}{2b_f t} \right] MN/m^2 \quad (2.22)$$

onde s_{c1} , s_{c2} e s_t são as tensões descritas na figura 2.19 e h , t_w , b_f e t_f são as dimensões da seção, também descritas na figura 2.19, em mm. As equações das tensões mostradas acima satisfazem o equilíbrio longitudinal desde que a tensão de escoamento não seja excedida.

Posteriormente, Young (1975) sugere que as tensões residuais máximas em barras laminadas sejam aproximadas por

$$s_{c1} = 137,5 \left[2,2 - \frac{A}{2b_f t_f} \right] N/mm^2 \quad (2.23)$$

$$s_t = 100 \left[-0,3 + \frac{A}{2b_f t_f} \right] N/mm^2 \quad (2.24)$$

e

$$s_{c2} = 83,3 \left[0,8 + \frac{A}{2b_f t_f} \right] N/mm^2 \quad (2.25)$$

onde s_{c1} , s_{c2} e s_t são as tensões descritas na figura 2.19, A é a área da seção transversal, b_f e t_f são as dimensões da seção, também descritas na figura 2.19, em mm.

Para fins práticos, numéricos e de projeto, tem-se as distribuições mostradas na Tabela 2.1, as quais foram obtidas da análise de medições das tensões residuais, realizadas por Schulz (1968), Tebedge e Tall (1973) e Mas e Massonnet (1966), e apresentadas no ECCS (1976). Mais uma vez as medições indicaram a dependência da magnitude e da distribuição das tensões residuais em função da geometria da seção. As seções normalmente utilizadas como colunas foram arranjadas em dois grupos, dependendo da relação entre a altura da alma e a largura da mesa (h/b) ser maior ou menor que 1,2. A tabela é válida para seções I laminadas européias com espessura de mesa de até 40 mm. A razão $h/b=1,2$ é aquela em que as seções européias mudam sua geometria significativamente.

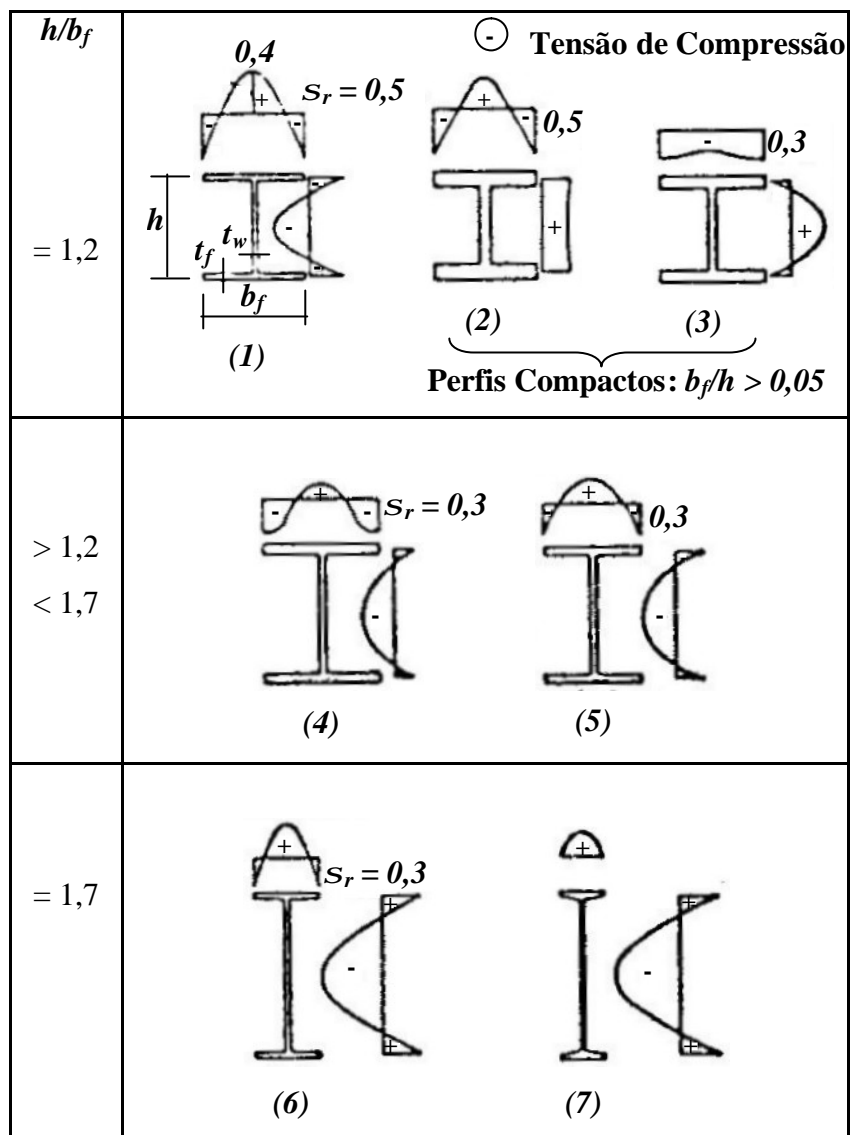


Tabela 2.1 – Distribuições de tensões residuais para perfis I, variáveis de acordo com a relação h/b - adaptada do ECCS (1976).

2.4.3. Perfis I Soldados

Normalmente as placas já possuem uma pequena tensão residual inicial devida ao resfriamento não-uniforme na sua formação. Entretanto, após a aplicação do calor da solda de composição dos perfis, o resfriamento subsequente e a restrição à distorção aumentam as tensões residuais (Nagarajo Rao *et al.*, 1964).

Segundo Tall (1966) e Galambos (1998), a ocorrência de tensões de tração tão elevadas na região das soldas se deve a (i) um aumento da resistência devido à mistura do eletrodo com o metal base, pois, de modo geral, as propriedades mecânicas dos eletrodos são melhores que a do metal base; (ii) um aumento da resistência devido ao resfriamento rápido após o corte, o qual altera as propriedades mecânicas do material próximo às bordas cortadas, elevando o valor da tensão de tração nas bordas acima do valor da tensão de escoamento do material virgem e (iii) ao aparecimento de um estado tripla de tensões, uma vez que, na região afetada termicamente são geradas tensões locais de tração nas três direções principais, e o material consegue então suportar uma tensão maior que a tensão de escoamento de um estado uniaxial (Pimenta, 1997).

Considerando os perfis I soldados, tem-se uma distinção entre seções compostas por placas laminadas e cortadas a maçarico, como pode ser observado pelas variações nas distribuições das tensões residuais em função do tipo de fabricação das chapas a serem soldadas, mostradas na figura 2.20.

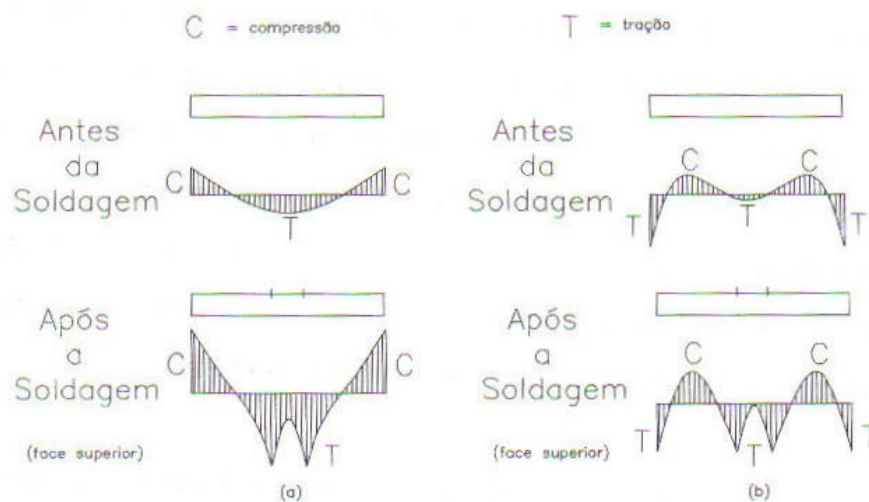


Figura 2.20 – Variações nas distribuições das tensões residuais para placa com (a) bordas laminadas e (b) bordas cortadas a maçarico.

Para os perfis formados com chapas de bordas laminadas observa-se que, após a execução da solda de união das mesas com a alma, são introduzidas tensões que aumentam a intensidade e a largura da região das tensões residuais de compressão nas mesas (figura 2.20-a). Segundo o ECCS (1976), a distribuição de tensões residuais

considerada como representativa para perfis I com mesas formadas por placas laminadas é a do tipo (1) da Tabela 2.1, com tensões de compressão nas bordas livres das mesas de $0,5 f_y$, mas com tensões de tração na região da solda atingindo a tensão de escoamento f_y .

Nos perfis formados com chapas cortadas a maçarico, o corte leva a tensões de tração nas bordas das chapas (figura 2.20-b), aumentando a resistência à compressão (Tall, 1966). Por essa razão, a Norma Canadense CSA, exige que os perfis soldados sejam executados somente por chapas cortadas a maçarico (Galambos, 1998).

Segundo Pimenta (1997), diversos autores têm demonstrado que a soldagem tem maior influência na distribuição e intensidade das tensões residuais de perfis pequenos e médios do que em perfis pesados. Comparando-se dois perfis soldados formados de chapas cortadas a maçarico, 12H79 (massa de 118,5kg/m) e 14H202 (massa de 322,4kg/m), observa-se que ambos apresentam o mesmo padrão de distribuição das tensões residuais (ver figura 221), porém, o perfil mais leve apresenta valores mais elevados de tensão residual, tanto nas regiões comprimidas quanto nas tracionadas. Fica evidente que nos perfis mais pesados os efeitos da soldagem são mais amenos, pois a solda representa uma menor porcentagem da área total, e o calor imposto pela solda por unidade de volume é reduzido.

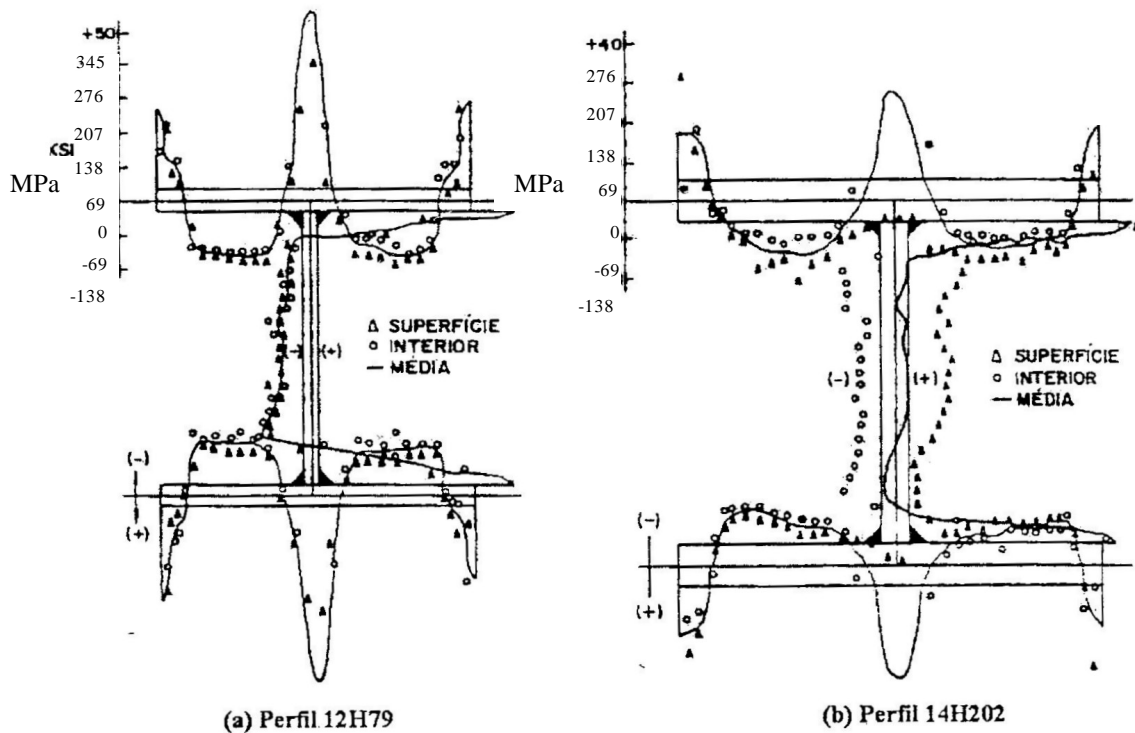


Figura 2.21 –Variação das distribuições das tensões residuais para perfis formados por chapas cortadas a maçarico em função de sua massa (Mc Falls e Tall, 1969 *apud* Pimenta, 1997).

É importante ressaltar que, apesar das tensões residuais variarem ao longo da espessura de perfis pesados, foi constatado que as cargas críticas e as resistências últimas de colunas praticamente não são afetadas se for considerada uma distribuição uniforme na linha média do perfil (Bjorhovde e Tall, 1971 e Bjorhovde, 1972).

2.4.4. Cantoneiras

As cantoneiras laminadas normalmente utilizadas também possuem tensões residuais originadas no processo de fabricação. A distribuição padrão adotada pelo ECCS (1976), também adotada por Earls (1999), entre outros, está apresentada na figura 2.22. As dimensões b_1 , b_2 , b_3 e b_4 são determinadas de modo a garantir resultante nula de forças e momentos na seção.

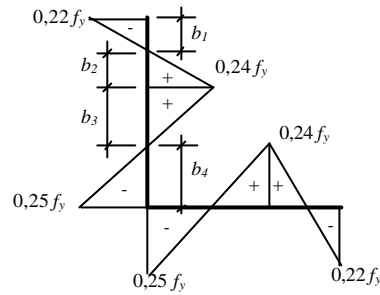


Figura 2.22 - Distribuições padrão de tensões residuais de cantoneiras laminadas.

Adluri e Madugula (1996) realizaram um trabalho experimental de medição das tensões residuais em cantoneiras de abas iguais, utilizando o método do seccionamento da seção e aço com tensão de escoamento (f_y) de 330MPa, e obtiveram os padrões de distribuição mostrados na figura 2.23.

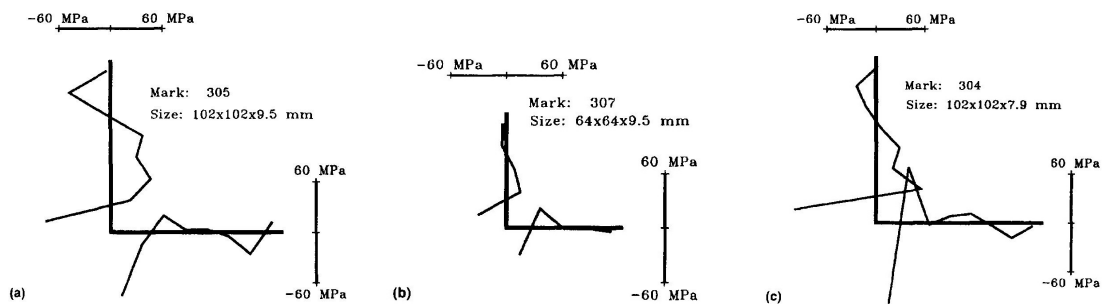


Figura 2.23 - Tensões residuais de cantoneiras laminadas medidas por Adluri e Madugula (1996).

Na maioria das cantoneiras ensaiadas, a maior tensão residual de compressão ocorreu na região de encontro das abas e a maior tensão residual de tração se situou a uma distância igual a aproximadamente 40% da largura da aba da cantoneira, a partir do encontro das abas.

Os padrões e valores obtidos foram comparados com os de outros pesquisadores (Nuttall e Adams, 1970; Al-Sayed e Bjorhovde, 1989 e Adluri, 1994), como por exemplo, a distribuição medida por Al-Sayed e Bjorhovde (1989) mostrada na figura 2.24. Pode-se observar que a maioria dos valores ficaram abaixo de $0,25 f_y$ (75 MPa), e que a distribuição linear é uma aproximação razoável da curva média obtida.

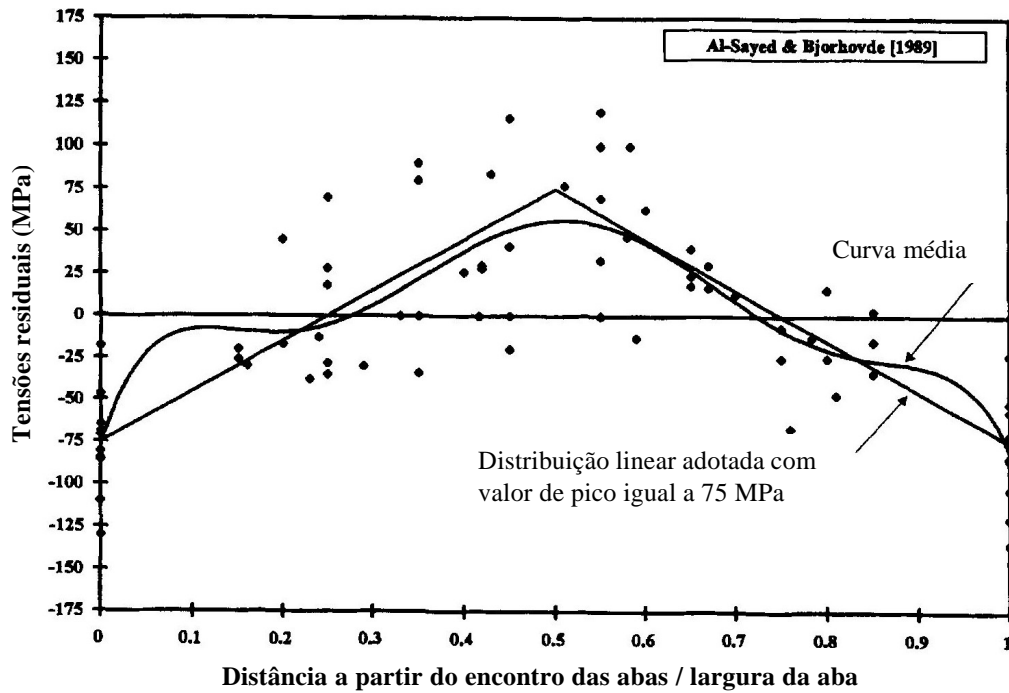


Figura 2.24 – Valores da tensão residual em uma aba da cantoneira (Al-Sayed e Bjorhovde, 1989 *apud* Adluri e Madugula, 1996).

2.5. Tratamento Normativo

A seguir é descrito o procedimento do Projeto de Revisão da Norma Brasileira de Projeto Execução de Estruturas de Aço de Edifícios, PR NBR 8800 (2006), o qual está em fase de conclusão e irá substituir a Norma Brasileira de Projeto Execução de Estruturas de Aço de Edifícios, NBR 8800 (1986), atualmente em vigor. Esse procedimento é similar à especificação americana do ANSI/AISC 360-05 (2005), para a consideração da flambagem local.

Procedimento Proposto pelo PR NBR 8800 (2006)

A resistência dos perfis estruturais, quanto à flambagem local, é determinada no PR NBR 8800 (2006) através de um coeficiente de flambagem local (Q) dado por

$$Q = Q_s Q_a \quad (2.26)$$

onde Q_s e Q_a são coeficientes que levam em conta a flambagem local dos elementos constituintes da seção transversal. O coeficiente Q_s é determinado para os elementos

com apenas uma borda longitudinal vinculada (elementos AL) e o coeficiente Q_a para os elementos com duas bordas longitudinais vinculadas (elementos AA). Caso a seção transversal somente possua elementos do tipo AL, como as cantoneiras, o coeficiente Q é considerado como o menor valor de Q_s .

Para os elementos AL, o coeficiente Q_s é calculado com base na tensão crítica (última), ver item 2.2.3, determinada em um gráfico que relaciona essa tensão com a esbeltez (b/t) do elemento. Para valores de esbeltez (b/t) que não superem $(b/t)_{máx}$, a flambagem da placa não se manifesta, uma vez que o escoamento completo ocorre antes e, obviamente, a tensão crítica é a própria tensão de escoamento do aço (figura 2.25). Para valores de (b/t) entre os limites $(b/t)_{máx}$ e $(b/t)_r$, a flambagem ocorre em regime inelástico, sendo afetada pelas tensões residuais (s_r), e a tensão crítica é obtida através de uma reta de transição empírica. Para valores de (b/t) superiores a $(b/t)_r$, a flambagem ocorre em regime elástico e o valor da tensão crítica é dado pela equação (2.3).

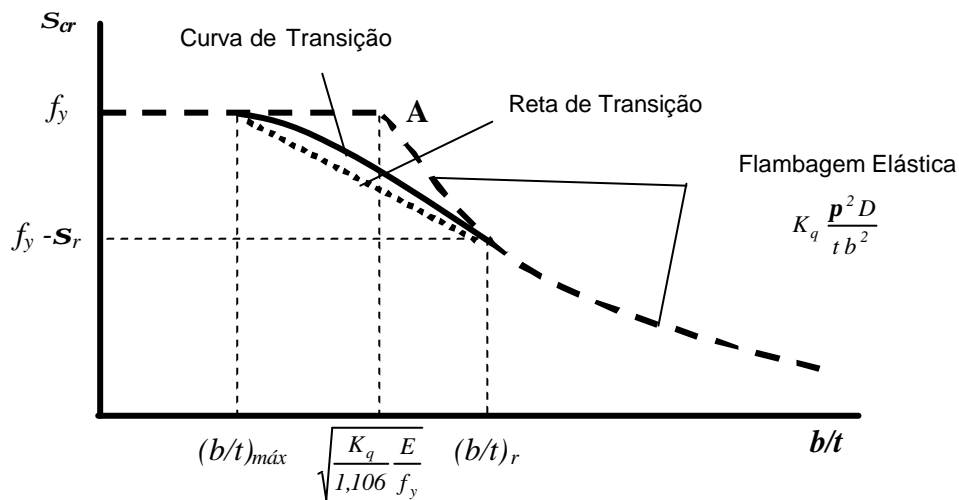


Figura 2.25 - Relação entre a tensão crítica de flambagem e a esbeltez de elemento tipo AL.

Para os elementos do tipo AA, o coeficiente Q_a é determinado pelo método da largura efetiva, ver item 2.2.3, e corresponde à relação entre a área efetiva e a área total da seção transversal. Se a esbeltez do elemento (b/t) não superar $(b/t)_{máx}$, não ocorre a flambagem local e portanto, não há redução de área efetiva resistente. Para valores de (b/t) superiores a $(b/t)_{máx}$ deve-se determinar as novas larguras dos elementos que flambaram e a resistência é calculada com base na área efetiva remanescente.

A determinação do limite de esbeltez abaixo do qual a placa não sofre flambagem local, $(b/t)_{máx}$, é feita desprezando inicialmente a influência das tensões residuais (\mathbf{s}_r) e supondo um diagrama ideal elasto-plástico, de modo que não haveria flambagem local desde que:

$$\mathbf{s}_{cr} = K_q \frac{\mathbf{p}^2 D}{t b^2} \geq f_y. \quad (2.27)$$

Substituindo-se a rigidez da placa D por seu valor, dado na equação (2.2), com o valor de \mathbf{n} indicado, obtém-se como condição de não ocorrência da flambagem:

$$\frac{b}{t} \leq \sqrt{\frac{K_q E}{1,106 f_y}} \quad (2.28)$$

Essa condição está representada pelo ponto A na figura 2.25, situado acima da curva de transição. Para levar em conta as tensões residuais, o PR NBR 8800 (2006) reduz o valor obtido na equação (2.28), multiplicando-o por um coeficiente empírico 0,7 (Fakury, 1989). Assim, o valor da relação (b/t) , abaixo do qual a placa não sofre flambagem local, $(b/t)_{máx}$, fica dada por:

$$\left(\frac{b}{t}\right)_{máx} = 0,7 \sqrt{\frac{K_q E}{1,106 f_y}} = 0,6656 \sqrt{K_q \frac{E}{f_y}} \quad (2.29)$$

Para os elementos AL é necessário definir também o valor da esbeltez que delimita os regimes elástico e inelástico, $(b/t)_r$. Ele é determinado por uma aproximação do comportamento global de barras, considerando que, no limite entre esses regimes, o parâmetro de esbeltez da placa é aproximadamente igual ao parâmetro de esbeltez das barras, o qual é calculado considerando uma redução da tensão de escoamento do aço devido às tensões residuais, adotadas como $0,5 f_y$.

Para os elementos AL dos perfis I, a norma faz ainda uma distinção entre os processos de fabricação. Para os perfis laminados, onde as seções são tabeladas e se tem um

controle maior entre as relações de rigidez dos elementos da seção, o procedimento utilizado na determinação dos parâmetros limites $(b/t)_{m\acute{a}x}$ e $(b/t)_r$ é o explicado acima. Para os perfis soldados, é adotado também um coeficiente (k_c), dado por

$$k_c = \frac{4}{\sqrt{h/t_w}}, \quad \text{com } 0,35 \leq k_c \leq 0,76, \quad (2.30)$$

onde (h/t_w) é a relação entre a largura e a espessura da alma. Nos casos em que a alma é muito esbelta, ou seja, para valores grandes de (h/t_w) , não é possível assegurar que ela realmente proporcione a vinculação imaginada para as mesas. Esse coeficiente proporciona um ajuste nos valores $(b/t)_{m\acute{a}x}$ e $(b/t)_r$, de modo que, para almas muito esbeltas, esses parâmetros são menores se comparados aos perfis laminados, levando a uma redução da resistência, ocasionada pela alteração do grau de vinculação entre os elementos da seção. Para almas pouco esbeltas, os parâmetros coincidem com os de perfis laminados, e não há alteração na curva de resistência dos perfis I.

O valor do coeficiente K_q adotado para cada elemento varia em função do tipo de seção e do grau de vinculação considerado entre os elementos da seção. Para as abas das cantoneiras, a norma emprega um valor de K_q bem próximo ao das placas com uma borda longitudinal perfeitamente rotulada e outra livre (caso *E* da figura 2.6), igual a 0,46. Para os perfis I laminados, procurando estar do lado da segurança, é adotado um valor de K_q mais próximo de uma borda longitudinal perfeitamente rotulada, igual a 0,71 no caso das mesas, ou das duas bordas longitudinais perfeitamente rotuladas, igual a 5,0 no caso da alma. Para os perfis I soldados, o valor de K_q adotado para as mesas também depende do coeficiente k_c , igual a $0,92 k_c$, e para a alma é adotado o mesmo coeficiente do perfil I laminado ($K_q = 5,0$).

A consideração da resistência pós-flambagem dos elementos AL é feita pela multiplicação da curva de tensão crítica elástica por um valor empírico, determinado para as cantoneiras igual a 1,27 e para os perfis I igual a 1,08, independentemente do tipo de fabricação, de modo que, para as duas seções a tensão correspondente à redução da tensão de escoamento pelas tensões residuais passa para $0,65 f_y$. Dessa forma, na região inelástica é adotada, simplificadamente, uma reta que une os pontos definidos por $[(b/t)_{m\acute{a}x}, f_y]$ e $[(b/t)_r, 0,65 f_y]$.

A título de exemplificação do processo, tem-se na figura 2.26 a curva de resistência à flambagem local das abas das cantoneiras em função de sua esbeltez.

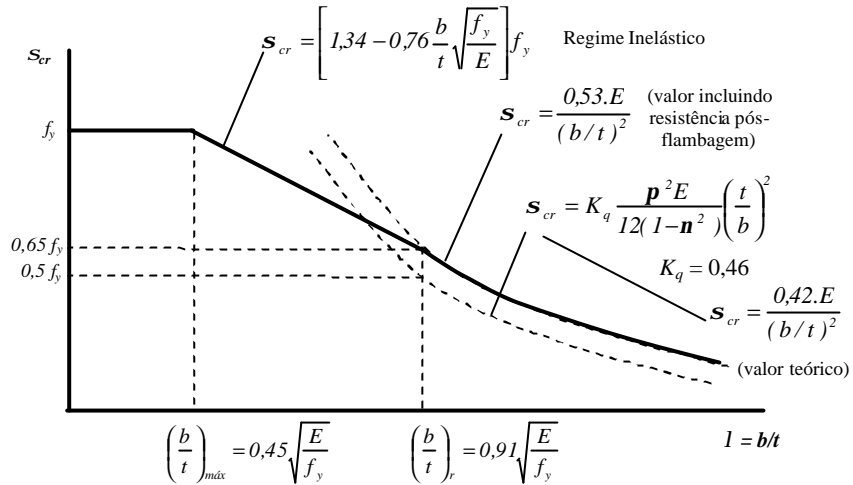


Figura 2.26 - Curva da tensão crítica de flambagem x esbeltez de cantoneiras de abas iguais.

Na Tabela 2.2 são mostrados os valores de K_q empregados pelo PR NBR 8800 (2006) para alma e mesas dos perfis I, soldados e laminados, e abas de cantoneiras iguais e os respectivos valores de $(b/t)_{máx}$ e $(b/t)_r$.

Na Tabela 2.3 são mostrados os coeficientes de flambagem (Q_a e Q_s) empregados pelo PR NBR 8800 (2006) para alma e mesas dos perfis I, soldados e laminados, respectivamente, e coeficiente Q_s das abas de cantoneiras iguais.

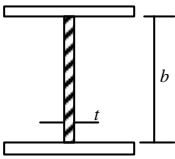
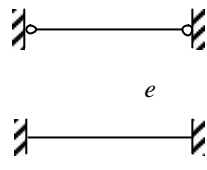
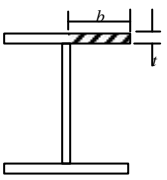
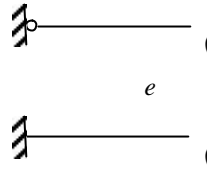
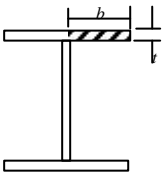
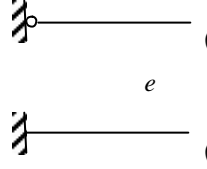
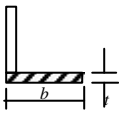
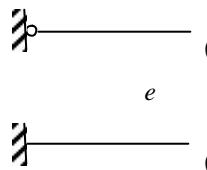
<i>Descrição dos elementos</i>	<i>Tipo de vinculação das bordas longitudinais</i>	K_q	$(b/t)_{máx}$	$(b/t)_r$
Alma de perfis I (elemento AA) 	Entre  (4,00) e (6,97)	5,0	$1,49 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$	-
Meias-mesas de perfis I laminados (elemento AL) 	Entre  (0,425) e (1,277)	0,71	$0,56 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$	$1,03 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$
Meias-mesas de perfis I soldados (elemento AL) 	Entre  (0,425) e (1,277)	$0,92 k_c$	$0,64 \sqrt{\frac{E}{f_y/k_c}}$	$1,17 \sqrt{\frac{E}{f_y/k_c}}$
Abas de cantoneiras (elemento AL) 	Entre  (0,425) e (1,277)	0,46	$0,45 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$	$0,91 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$

Tabela 2.2 - Valores dos parâmetros K_q , $(b/t)_{máx}$ e $(b/t)_r$ para perfis I e cantoneiras de abas iguais.

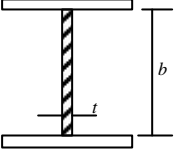
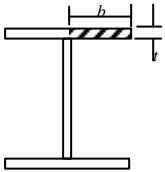
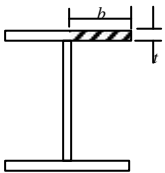
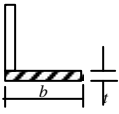
Descrição dos elementos	Coeficiente de flambagem		
Alma de perfis I (elemento AA) 	$Q_a = 1,0$ $Q_a = \frac{A_{ef}}{A_g}$, onde $A_{ef} = A_g - \sum (b - b_{ef}) t$ $b_{ef} = 1,92t \sqrt{\frac{E}{f_y}} \left[1 - \frac{0,34}{b/t} \sqrt{\frac{E}{f_y}} \right] \leq b$	<i>para</i> $\frac{b}{t} < 1,49 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$	
Meias-mesas de perfis I laminados (elemento AL) 	$Q_s = 1,0$ $Q_s = 1,415 - 0,74 \frac{b}{t} \sqrt{\frac{f_y}{E}}$ $Q_s = \frac{0,69E}{f_y \left(\frac{b}{t} \right)^2}$	<i>para</i> $\frac{b}{t} < 0,56 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$ <i>para</i> $0,56 \sqrt{\frac{E}{f_y}} < \frac{b}{t} \leq 1,03 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$ <i>para</i> $\frac{b}{t} > 1,03 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$	
Meias-mesas de perfis I soldados (elemento AL) 	$Q_s = 1,0$ $Q_s = 1,415 - 0,65 \frac{b}{t} \sqrt{\frac{f_y}{k_c E}}$ $Q_s = \frac{0,90 E k_c}{f_y \left(\frac{b}{t} \right)^2}$	<i>para</i> $\frac{b}{t} < 0,64 \sqrt{\frac{E}{(f_y/k_c)}}$ <i>para</i> $0,64 \sqrt{\frac{E}{(f_y/k_c)}} < \frac{b}{t} \leq 1,17 \sqrt{\frac{E}{(f_y/k_c)}}$ <i>para</i> $\frac{b}{t} > 1,17 \sqrt{\frac{E}{(f_y/k_c)}}$	
Abas de cantoneiras (elemento AL) 	$Q_s = 1,0$ $Q_s = 1,34 - 0,76 \frac{b}{t} \sqrt{\frac{f_y}{E}}$ $Q_s = \frac{0,53E}{f_y \left(\frac{b}{t} \right)^2}$	<i>para</i> $\frac{b}{t} < 0,45 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$ <i>para</i> $0,45 \sqrt{\frac{E}{f_y}} < \frac{b}{t} \leq 0,91 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$ <i>para</i> $\frac{b}{t} > 0,91 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$	

Tabela 2.3 – Coeficientes de flambagem para perfis I e cantoneiras de abas iguais.

2.6. Método dos Elementos Finitos

2.6.1. Generalidades

Muitos dos problemas de engenharia estrutural envolvem a busca de uma solução para os deslocamentos, deformações, tensões, forças, momentos e inúmeras outras variáveis. A solução exata para esses problemas requer que o equilíbrio, tanto das forças quanto dos momentos, seja mantido durante todo o tempo de solicitação em qualquer ponto da estrutura. Isso nem sempre é trivial, pois normalmente são considerados diversos parâmetros e a solução se torna muito complicada para ser obtida analiticamente. É necessário então recorrer a métodos aproximados, porém, capazes de fornecer respostas com qualquer nível de precisão desejada, uma vez que essa precisão depende fundamentalmente do número de simplificações adotadas e das ferramentas computacionais disponíveis.

Existe um extenso grupo de métodos aproximados que envolvem a substituição da estrutura original (a qual é normalmente contínua e, portanto, com um número infinito de graus de liberdade) por uma estrutura mais simples que tenha apenas um número finito de graus de liberdade. Segundo Allen e Bulson (1980), duas possíveis abordagens são:

- 1) a análise é feita pela consideração de que a deformação da estrutura real pode ser aproximada pela superposição de um conjunto de curvas de forma definida, mas de amplitude não especificada. Essas amplitudes das curvas é que irão representar as coordenadas generalizadas do sistema simples. Dois métodos importantes podem ser citados, ambos descritos em Zienkiewicz e Morgan (1983), nos quais as aproximações usam funções contínuas de deslocamento:
 - Método de Rayleigh-Ritz: a escolha da função para o deslocamento é feita de forma a compatibilizar as condições de contorno e em seguida, é feita a sua substituição na equação da energia potencial do sistema e a aplicação do princípio da estacionariedade;

- Método de Galerkin: a escolha da função para o deslocamento também é feita de forma a compatibilizar as condições de contorno, porém sua substituição é feita na equação diferencial do sistema;
- 2) a análise é feita pela simplificação da estrutura real através da sua subdivisão em pequenos pedaços ou elementos. O método mais importante de aproximações pela subdivisão da estrutura é o Método dos Elementos Finitos (MEF), no qual a estrutura é subdividida em elementos, ligados entre si por nós. O comportamento da estrutura pode ser descrito em termos dos deslocamentos dos nós, os quais são considerados como as coordenadas generalizadas do sistema. Esse é o modelo mais simples e mais utilizado de elementos finitos, conhecido como Modelo de Deslocamentos, podendo ser formulado a partir do princípio da estacionariedade da energia potencial (Kleiber e Hien, 1992).

2.6.2. Princípios Básicos do MEF

Como a teoria básica envolvida no MEF com a aplicação do Modelo de Deslocamentos é bastante conhecida e pode ser encontrada facilmente na literatura (Zienkiewicz e Taylor, 1989), será descrita aqui de forma sucinta.

A equação algébrica fundamental que descreve o problema estático linear pelo modelo de compatibilização dos deslocamentos é:

$$[K] \{D\} = \{R\} \quad (2.31)$$

onde $[K]$ é a matriz de rigidez da estrutura, quadrada, simétrica e positiva definida;

$\{D\}$ é o vetor de deslocamentos globais da estrutura;

$\{R\}$ é o vetor de forças atuantes na direção dos deslocamentos globais da estrutura.

Após a imposição das condições de contorno, o sistema formado é resolvido para as equações correspondentes aos deslocamentos desconhecidos. Para a resolução têm-se, de forma geral, dois tipos de métodos numéricos, diretos ou iterativos.

Os métodos diretos dão a solução exata (a menos de erros de arredondamento) em um número finito de operações aritméticas. Em sua grande maioria são variações da eliminação Gaussiana, ver Ugural (1981) e Conte e Boor (1980), sendo as versões conhecidas como métodos de Cholesky as mais utilizadas em análise estrutural. Na maior parte das aplicações em problemas lineares são utilizadas as técnicas diretas.

Os métodos iterativos dão a seqüência de soluções aproximadas que geralmente convergem para a solução exata quando o número de iterações tende para infinito. Essas técnicas são utilizadas em problemas de grande porte, lineares ou não-lineares.

Para o tratamento numérico de problemas não-lineares, é necessário que se use formulação incremental. Nesse tipo de processo, são obtidas as soluções do sistema ao longo do tempo, com a atualização dos parâmetros e variáveis a cada etapa. A última configuração conhecida é adotada como referência e assumindo que o processo em cada intervalo de tempo é infinitesimal, o problema pode ser pensado como um problema linear de domínio submetido a condições iniciais existentes no início de um dado intervalo. Normalmente são utilizados o método de Newton e suas variações, ver Conte e Boor (1980).

2.6.3. Abordagem do Programa ABAQUS

O ABAQUS (Hibbitt, Karlsson e Sorensen, 1998) é um programa comercial desenvolvido com a utilização do MEF e de grande potencialidade e aplicação nos problemas de análise estrutural. Sua utilização nos problemas de instabilidade estrutural requer um conhecimento dos métodos de resolução adotados, de modo que seja possível garantir um controle de todos os parâmetros envolvidos e, portanto, uma confiabilidade nos resultados obtidos.

2.6.3.1. Considerações gerais

Pode-se afirmar que todas as estruturas reais apresentam comportamento não-linear (Hinton *et al.*, 1992). Nas análises de mecânica estrutural, são consideradas três fontes de não-linearidades: (i) de material, quando as leis constitutivas do material são não-

lineares, (ii) de contorno, nas situações em que as condições de contorno mudam durante a análise e (iii) geométricas, quando se leva em conta mudanças na geometria do modelo durante a análise.

O ABAQUS utiliza o método dos elementos finitos do deslocamento, baseado na aproximação das condições de equilíbrio de um corpo sob o ponto de vista Lagrangiano, ou seja, cada ponto material do corpo é analisado, sendo uma função do tempo e de suas coordenadas, e as equações de equilíbrio são obtidas a partir do princípio dos trabalhos virtuais.

Em uma análise não-linear a solução não pode ser calculada pela resolução de um único sistema de equações lineares, como pode ser feito num problema linear. No ABAQUS é utilizado um processo incremental e iterativo, o método de Newton-Raphson, ver Chen e Han (1987), para se obter a solução dos problemas não-lineares. A solução é obtida por um processo gradual de aplicação de carga, com a quebra da simulação em um certo número de incrementos de carga e a busca da configuração de equilíbrio através de sucessivas iterações em cada um deles. Uma iteração é uma tentativa de se encontrar uma solução de equilíbrio em um incremento. Em cada iteração é formada a matriz de rigidez do modelo, é resolvido o sistema de equações e é observado se a solução obtida está mais próxima do equilíbrio, numa faixa que atenda a certos critérios de convergência. Algumas vezes o processo iterativo pode divergir e nesses casos ele é encerrado e tenta-se encontrar a solução com um tamanho de incremento menor. São necessárias diversas iterações até se determinar uma solução aceitável para um dado incremento e o conjunto de todas as respostas dos incrementos é a solução aproximada da análise não-linear.

Nos problemas de instabilidade, quando se deseja apenas conhecer a carga crítica que causa a perda de estabilidade estrutural, a análise linearizada de estabilidade é suficiente, apresentando uma estimativa precisa e econômica. Esta estimativa é normalmente útil para estruturas onde a resposta na fase da pré-flambagem é quase linear. No ABAQUS a análise linearizada de estabilidade é considerada como um procedimento de perturbação linear, que permite a obtenção dos autovalores e os respectivos modos de flambagem, ver Lourenço (1999). Entretanto, quando se pretende

considerar uma análise não-linear completa com a obtenção da curva carga-deslocamento total da estrutura, é necessária a utilização de um processo incremental/iterativo. O ABAQUS utiliza o método Riks modificado, que permite obter estados de equilíbrio estático durante a fase instável de resposta da estrutura, e é usado para casos em que o carregamento é proporcional, ou seja, onde os valores das cargas são governados por um parâmetro escalar único.

A consideração das não-linearidades do material é feita pela adoção de um diagrama tensão/deformação que represente adequadamente o comportamento do aço na região plástica. Caso estejam sendo consideradas também as não-linearidades físicas, com a utilização de deformações finitas, devem ser usadas tensões reais e deformações reais para que os resultados obtidos representem exatamente esse comportamento.

As tensões residuais podem ser implementadas como condições iniciais da análise, pois o ABAQUS permite a definição nos elementos de um estado de tensões iniciais equilibrado.

2.6.3.2. Plasticidade

O ABAQUS oferece diversos modelos constitutivos que consideram respostas elásticas e inelásticas, sendo a resposta inelástica modelada pela teoria da plasticidade. Para metais, o modelo de plasticidade mais utilizado é o modelo com encruamento isotrópico e superfície de escoamento de von Mises, ver Chen e Han (1987).

Quando se considera que a estrutura sofrerá deformações finitas, a curva tensão x deformação fornecida normalmente para os aços estruturais, calculada com base na geometria inicial (área e comprimento), ou seja, com valores nominais da tensão e da deformação, não representa adequadamente o seu comportamento, e deve-se considerar as tensões e deformações calculadas com base na geometria real da estrutura deformada. Como a deformação (\mathbf{e}) não é mais tão pequena, tem-se que $d\mathbf{e}=dl/l$ não é nulo, e a deformação é dada por

$$\mathbf{e} = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) \quad (2.32)$$

onde l é o comprimento deformado, l_0 é o comprimento original e \mathbf{e} é a “deformação verdadeira” ou deformação logarítmica. A tensão correspondente a essa deformação verdadeira é chamada “tensão real” definida por $\mathbf{s}=F/A$, onde F é a força no material e A é a área deformada.

A relação entre a deformação real (\mathbf{e}) e a nominal (\mathbf{e}_{nom}) pode ser determinada considerando que a deformação nominal é dada por

$$\mathbf{e}_{nom} = \frac{l-l_0}{l_0} = \frac{l}{l_0} - 1 \quad (2.33)$$

onde, rearranjando os termos e tomando o logaritmo natural de ambos os lados da equação tem-se a deformação verdadeira dada por

$$\mathbf{e} = \ln(\mathbf{e}_{nom} + 1). \quad (2.34)$$

A relação entre a tensão nominal ($\mathbf{s}_{nom}=F/A_0$) e a verdadeira ($\mathbf{s}=F/A$) é determinada considerando que a área deformada está relacionada à área original por $A=A_0(l_0/l)$ e lembrando que $(l/l_0)=(1+\mathbf{e}_{nom})$, portanto, tem-se

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_{nom}(1+\mathbf{e}_{nom}). \quad (2.35)$$

O ABAQUS considera o comportamento plástico do material definido por essas medidas, com a tensão verdadeira relacionada à parcela plástica da deformação verdadeira.

2.6.3.3. Elementos

Nas estruturas em que uma dimensão (a espessura) é significativamente menor que as outras duas, e quando as tensões na direção da espessura são desprezíveis, considera-se que os elementos de casca são os mais adequados para a análise. Para a maioria dos elementos oferecidos no ABAQUS a formulação é baseada na descrição de

comportamento material (Lagrangiana), e o material associado ao elemento permanece associado a esse elemento durante toda a análise. Para os elementos de casca tridimensionais disponíveis têm-se três tipos de formulação diferentes: de elementos de casca fina, de elementos de casca espessa e de elementos de casca de aplicação geral, ou seja, que podem ser usados tanto para casca espessa como para casca fina.

Os elementos de casca do ABAQUS são formulados como elementos de casca verdadeiramente curvos e a superfície de referência normalmente é adotada como a superfície do seu plano médio. Além disso, a maioria possui 6 graus de liberdade (3 translações e 3 rotações), os quais são associados à superfície de referência. Para os elementos com 6 graus de liberdade, é considerada uma rigidez associada ao grau de liberdade de rotação em relação à normal (*drill*), determinada como uma média das componentes de rigidez ao cisalhamento transversal multiplicada por um fator de escala. O valor unitário para esse coeficiente, *default* do programa, não altera a rigidez encontrada para a casca pelo comportamento de membrana dos elementos em sua vizinhança. São consideradas coordenadas locais na superfície média do elemento e em análises de grandes deslocamentos esse sistema local gira acompanhando a rotação da superfície naquele ponto.

Os elementos de casca espessa e os de casca fina consideram grandes rotações, pequenas deformações e nenhuma variação na espessura do elemento mesmo quando os nós do elemento sofrem rotações finitas. Além disso, para os elementos de casca espessa os efeitos da deformação transversal de cisalhamento são importantes na solução. Para os elementos de casca fina esses valores são pequenos o suficiente para serem desprezados e considera-se que, após a deformação, a normal à casca permanece ortogonal à superfície de referência.

Os elementos de aplicação geral permitem deformações finitas de membrana, ver Ugural (1981), grandes rotações, variação na espessura do elemento quando esse se deforma e consideram os efeitos da deformação transversal de cisalhamento. Em todos os elementos o cálculo das deformações de flexão é baseado na teoria de cascas de Koiter-Sanders (Budiansky e Sanders, 1963).

Para todos os elementos deve-se associar uma espessura e um material, cujas propriedades podem ser tanto lineares quanto não lineares. Para materiais apenas com comportamento elástico-linear, é mais eficiente e econômico calcular a rigidez do material apenas uma vez no início da análise. Para a consideração do comportamento não-linear do material, a rigidez da seção transversal do elemento deve ser calculada durante a análise, de modo que, é feita uma integração numérica em alguns pontos determinados ao longo da espessura do elemento, com a obtenção das tensões e deformações independentemente em cada um desses pontos da seção. Utilizando-se a regra de Simpson são adotados cinco pontos de integração na seção (*default*) e utilizando-se a quadratura de Gauss, ver Zienkiewicz e Morgan (1983), são adotados três pontos (*default*). Para alguns dos elementos disponíveis, é possível optar entre considerar a integração completa ou a integração reduzida.

Apesar da integração reduzida ser mais precisa e econômica em algumas análises, ela é mais suscetível ao problema de *hourglass*. Em elementos de quatro nós de integração reduzida, quando um deslocamento nodal resulta em uma deformação nula do elemento (com uma forma que se assemelha a uma ampulheta), tem-se um modo de deformação singular espúrio. Quando as contribuições dos elementos são acumuladas globalmente a matriz se torna singular, ou quase singular, e as soluções são oscilatórias, exibindo modos espúrios (Dias, 2001). Nessas situações deve-se utilizar na análise recursos que controlem esse problema.

Dentre os elementos disponíveis, verificou-se que o elemento S4 é bastante adequado para a análise não-linear, material e geometricamente, de placas e seções de aço, uma vez que ele permite obter soluções com grande precisão para problemas onde são esperadas flexões no plano. É um elemento de casca de curvatura dupla, de quatro nós com interpolação linear, de integração completa e de aplicação geral, com deformação finita de membrana e que pode ser usado tanto para cascas espessas como para cascas finas. Na figura 2.27 tem-se uma representação esquemática do elemento onde pode ser observada sua geometria, com a convenção de numeração dos nós para a definição da normal positiva do elemento (figura 2.27-a), os locais de integração no elemento (figura 2.27-b) e os pontos da seção ao longo de sua espessura em cada um dos locais de integração (figura 2.27-c).

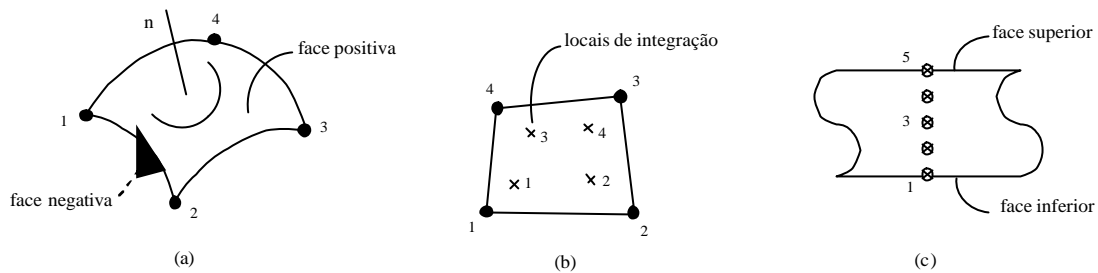


Figura 2.27 – Representação do elemento de casca S4.

O comportamento de membrana é descrito com a formulação apropriada das deformações, com a consideração do cisalhamento transversal constante no elemento. Não é sensível à distorção do elemento e consegue evitar o problema da retenção (situação em que o elemento se torna muito rígido quando sua espessura fica muito fina). Também não necessita de nenhum controle de *hourglass*, uma vez que não apresenta nenhum modo de energia zero ou espúrio, nem na resposta de membrana nem de flexão do elemento. Por ser um elemento com 6 graus de liberdade é feito o controle do grau de liberdade de rotação em relação à normal (*drill*), da forma explicada acima.

2.6.3.4. Análise linearizada de estabilidade

É possível se estimar a carga crítica de flambagem elástica de dada estrutura pela extração dos seus autovalores. A carga de flambagem é obtida como um multiplicador da carga de perturbação, a qual é adicionada ao conjunto das cargas externas aplicadas à estrutura no estado inicial da análise. Para assegurar que os autovalores obtidos serão razoáveis, a resposta da carga de perturbação deve ser elástica para valores acima da carga de flambagem estimada.

Nesse tipo de análise são desconsideradas as não-linearidades físicas e são procurados os valores das cargas que tornam a matriz de rigidez do modelo da estrutura singular, de modo que o problema $K^{MN} \mathbf{n}^M = 0$ tenha soluções não triviais, onde K^{MN} é a matriz de rigidez tangente e \mathbf{n}^M são os deslocamentos da solução não trivial. Essas cargas são chamadas de cargas críticas de flambagem e correspondem aos autovalores clássicos de flambagem, ver Bathe (1996).

O processo consiste na aplicação de um carregamento incremental, Q^N , cujo valor de aplicação não é importante, pois ele será escalado pelo fator de multiplicação do carregamento, I_i , determinado em:

$$(K_o^{NM} + I_i K_D^{NM}) \mathbf{n}_i^M = 0 \quad (2.36)$$

onde K_o^{NM} é a matriz de rigidez correspondente ao estado inicial, com a consideração de quaisquer cargas iniciais P^N ;

K_D^{NM} é a matriz de rigidez devida ao carregamento incremental, Q^N ;

I_i são os autovalores;

\mathbf{n}_i^M são os autovetores, ou seja, as formas dos modos de flambagem;

M e N referem-se aos graus de liberdade M e N do modelo completo; e

i refere-se ao i -ésimo modo de flambagem.

As cargas críticas de flambagem são determinadas por $(P^N + I_i Q^N)$ e, normalmente, apenas o menor valor de I_i é de interesse. As formas dos modos de flambagem, \mathbf{n}_i^M , são vetores normalizados, com o valor da componente máxima de deslocamento igual a 1,0, e não representam valores reais da deformação devida à carga crítica. Essas formas dos modos de flambagem predizem o aspecto do modo de colapso da estrutura.

2.6.3.5. Análise da Pós-Flambagem

O método Riks pode ser usado para resolver problemas de pós-flambagem, tanto para comportamento de pós-flambagem estável quanto instável. Entretanto, o problema de pós-flambagem exato não pode ser analisado diretamente devido às descontinuidades da resposta no ponto de bifurcação, portanto, ele deve ser transformado em um problema com resposta contínua pela introdução de uma imperfeição inicial na geometria “perfeita” da estrutura. Essas imperfeições são introduzidas por perturbações na geometria, com o aspecto dos modos de flambagem obtidos na análise linearizada de estabilidade, de modo que, normalmente, esse tipo de análise é feito na sequência de uma análise dos autovalores de flambagem, fornecendo todas as informações sobre o colapso da estrutura.

A essência do método é que a solução corresponde à descoberta de uma trajetória de equilíbrio única, no espaço definido pelas variáveis nodais e os parâmetros de carga. Por ser um processo incremental/iterativo, o desenvolvimento da solução permite que se percorra essa trajetória tão longe quanto se deseje.

Ao se utilizar o método Riks, quaisquer cargas que existam no início do processo são tratadas como cargas “mortas” com valor constante, as cargas cujos valores forem definidos posteriormente são chamadas de cargas de “referência”, e o carregamento é sempre proporcional. O valor da carga de uma etapa de incrementação, P_{total} é calculado por

$$P_{total} = P_o + I (P_{ref} - P_o), \quad (2.37)$$

onde P_o é a carga “morta”, P_{ref} é o vetor das cargas de referência, e I é o fator de proporcionalidade da carga, obtido como parte da solução.

O ABAQUS utiliza o método de Newton para resolver as equações de equilíbrio não-lineares e usa o método do “comprimento do arco”, ver Lourenço (1999), l , nas iterações de equilíbrio para melhorar a convergência da solução ao longo do caminho de equilíbrio estático no espaço carga-deslocamento. Deve ser fornecido um incremento inicial do comprimento do arco, DI_{in} , e o tamanho dos incrementos subsequentes é limitado movendo-se uma dada distância ao longo da linha tangente ao ponto de solução (A^o), e então procurando pelo equilíbrio no plano que passa pelo ponto obtido (A^l) e que seja ortogonal à mesma linha tangente, conforme mostrado na figura 2.28.

O fator de proporcionalidade da carga inicial, DI_{in} , será igual ao incremento inicial do comprimento do arco se for usada a incrementação automática, e será ajustado se o incremento falhar na convergência. A partir de então, o valor de I é calculado automaticamente.

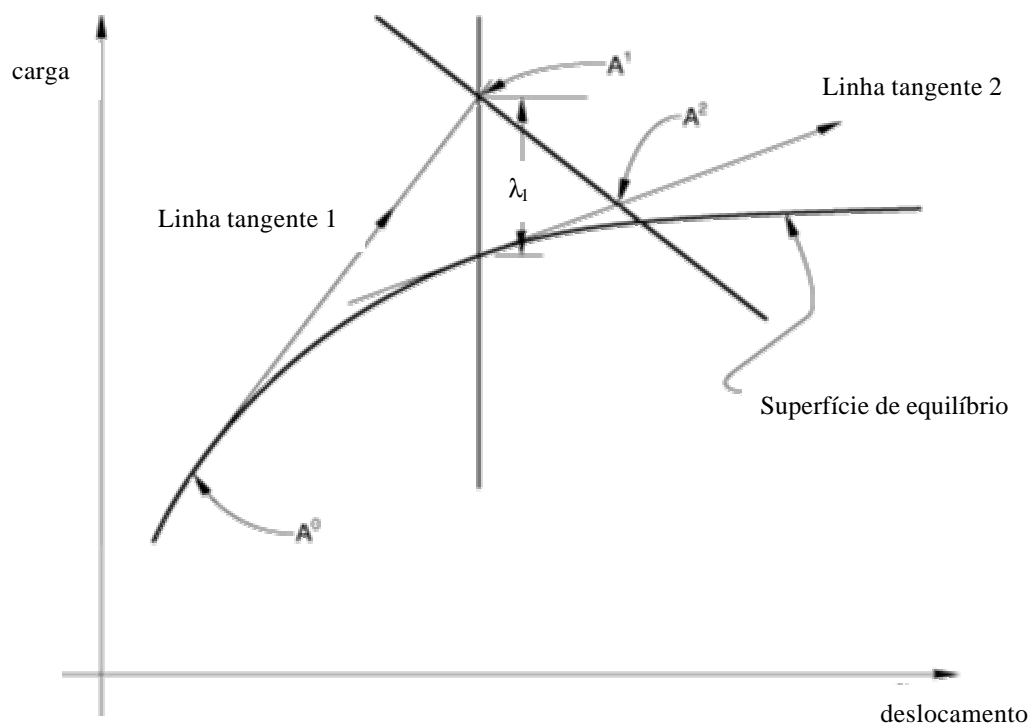


Figura 2.28 – Método Riks modificado (ABAQUS, 1998).

O algoritmo Riks não pode obter uma solução para um determinado valor de carga ou deslocamento uma vez que eles são incógnitas do problema. Os critérios de término são determinados ou por um valor máximo para o fator de proporcionalidade da carga, \mathbf{l}_{end} , ou por um valor máximo para o deslocamento de um grau de liberdade específico. A análise termina quando a primeira solução que satisfaz alguma dessas condições é atingida ou até o número de incrementos desejado se nenhuma dessas condições for especificada.

2.6.3.6. Critérios de convergência

Para o corpo estar em equilíbrio, a força resultante agindo em cada nó deve ser nula. Portanto, a consideração básica de equilíbrio é que as forças internas (nodais), I , e as forças externas, P , devem se equilibrar:

$$P - I = 0. \tag{2.38}$$

A resposta não-linear de uma estrutura a um pequeno incremento de carga, DP , é mostrado na figura 2.29. É usada a rigidez tangente da estrutura, K_0 , a qual é baseada em sua configuração em u_0 , e DP para se calcular a correção do deslocamento, c_a , para a estrutura. Usando c_a , a configuração da estrutura é atualizada para u_a .

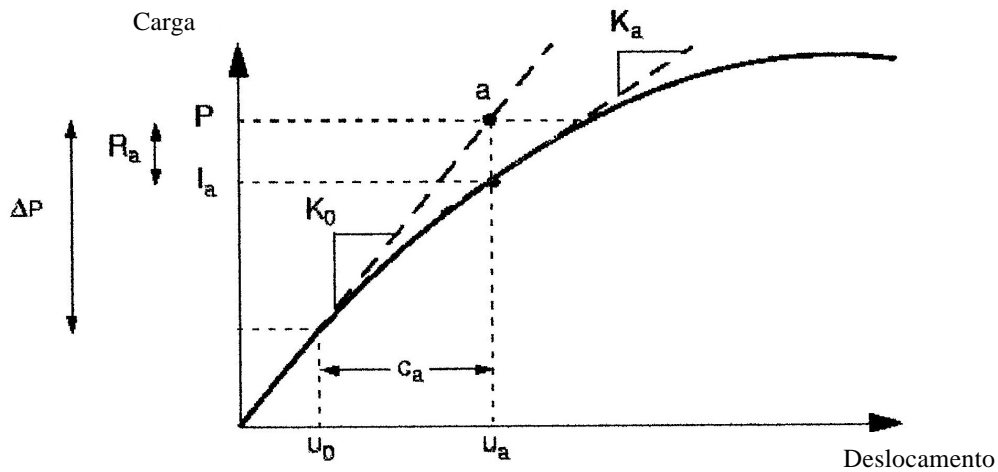


Figura 2.29 – Primeira iteração em um incremento (ABAQUS, 1998).

São calculadas as forças internas da estrutura, I_a , na configuração atualizada. A diferença entre a carga total aplicada, P , e I_a pode agora ser calculada por

$$R_a = P - I_a, \quad (2.39)$$

onde R_a é a força residual para a iteração.

Se R_a é zero para cada grau de liberdade do modelo, o ponto a da figura 2.29 deve estar na curva carga-deslocamento e a estrutura deve estar em equilíbrio. Em um problema não-linear, R_a nunca será exatamente zero, portanto ele é comparado com um valor de tolerância, de modo que, se R_a é menor que essa força residual de tolerância em todos os nós, a solução é aceita como estando em equilíbrio e u_a é uma configuração de equilíbrio válida da estrutura. O valor dessa tolerância adotado pelo ABAQUS é de 0,005 (*default*).

Entretanto, antes de se aceitar essa solução, também é verificada se a última correção do deslocamento (c_a) é pequena relativamente ao deslocamento total incremental ($Du_a = u_a - u_0$). Se c_a é maior que uma fração (1% por *default*) do deslocamento incremental, é

realizada nova iteração. Ambos os critérios de convergência devem ser satisfeitos antes que a solução seja considerada convergida para aquele incremento. Se a solução em uma iteração não convergir, outra iteração é realizada para se tentar fazer o equilíbrio das forças internas e externas.

O número de iterações necessárias para se encontrar a convergência varia em função do grau de não-linearidade do sistema. O valor *default* do ABAQUS são dezesseis iterações, caso não haja convergência o incremento é abandonado e recomeça um novo incremento com $\frac{1}{4}$ do tamanho do incremento anterior. Esse procedimento pode ser repetido até cinco vezes seguidas antes do programa interromper a análise. Porém, caso a convergência seja atingida em menos de cinco iterações, o tamanho do incremento é aumentado em 50%. É importante então utilizar um tamanho de incremento razoável que permita um ajuste rápido para o tamanho ideal. O ABAQUS possui a opção de controle automático do tamanho do incremento para o qual deve-se fornecer o tamanho do primeiro incremento e os demais seguem os critérios de ajuste citados acima, entretanto, caso se deseje maior controle da solução, o programa permite que os valores desses parâmetros sejam alterados.

Quando o grau das não linearidades é elevado, o método de Newton pode divergir logo nas primeiras iterações e, para esses casos, o ABAQUS oferece a opção de se utilizar o procedimento de *line search*, ver Conte e Boor (1980). Durante as primeiras iterações, quando ainda se está longe da solução e as forças residuais são grandes, essa opção aumenta a robustez do método de Newton escalando a correção da solução por um fator de escala *line search*. Normalmente essa opção está desabilitada, e para ativá-la deve-se considerar um valor não-nulo para a variável, sugerido como quatro.

3. ESTUDO DE PLACAS ISOLADAS

3.1. Introdução

Foram estudados os procedimentos para a análise de casos simples de flambagem de placas de aço isoladas, para familiarização com a forma de implementação e processamento.

Primeiramente realizou-se a análise linearizada de estabilidade para placas com diversas condições de contorno, obtendo-se os valores da carga crítica de flambagem e os modos de flambagem predominantes. Em seguida foi realizada a análise de pós-flambagem de uma placa quadrada, com a obtenção da curva carga-deslocamento. Os valores obtidos nessas análises foram comparados com valores teóricos e da literatura, permitindo um ajuste de modelagem e aplicação.

O estudo foi direcionado para a verificação de aspectos importantes na análise numérica como a sensibilidade da malha, a introdução de tensões residuais, a consideração de material elasto-plástico e a acuidade numérica e coerência comportamental da placa estudada para todos esses fatores. Foi escolhida uma placa longa, com grande razão entre os lados, de modo a evitar a interferência da vinculação na região próxima à borda carregada e para averiguar o comportamento de placas com dimensões normalmente usadas na composição de perfis estruturais.

Em todos os estudos realizados para placas, considerou-se a utilização do elemento de casca S4, descrito no item 2.6.3.3.

3.2. Análise Linearizada de Estabilidade

Para a análise linearizada de estabilidade de placas isoladas, considerou-se o estudo de uma placa com razão entre os lados $a=b$ submetida à compressão uniaxial uniforme, conforme figura 2.4. Assumiu-se que a placa possui espessura constante, é perfeitamente plana, de material isotrópico, elástico, sem tensões residuais e carregada exatamente em seu plano médio, de modo que a tensão crítica de flambagem elástica (σ_{cr}) é determinada pela equação (2.3), e os valores dos coeficientes de flambagem elástica (K_q) são aqueles apresentados na figura 2.6.

Foram estudadas placas com diversas condições de contorno nas bordas longitudinais descarregadas, e para cada uma dessas condições considerou-se dois casos de bordas transversais carregadas, simplesmente apoiadas e engastadas. Em todos os casos o material da placa é o aço estrutural com módulo de elasticidade longitudinal $E=205\text{GPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu=0,3$. A largura b e a espessura t foram mantidas constantes e iguais a 200mm e a 1mm, respectivamente. O comprimento longitudinal a variou de 100mm a 2200mm. Foram adotados elementos quadrados de (10x10) mm, de modo que a malha de elementos finitos gerada variou em função do comprimento a , sendo 200 elementos para $a=100$ mm e 4400 elementos para $a=2200\text{mm}$. Foram aplicadas cargas concentradas nos nós das extremidades inicial e final (largura b) que produzissem uma distribuição de tensão de compressão uniforme (σ) igual a 1 N/mm².

Para as condições de vinculação adotadas para as bordas considerou-se a restrição ou liberação dos graus de liberdade mostrados na figura 3.1, no plano médio da placa. No ABAQUS, o deslocamento e a rotação são independentes, ou seja, a restrição da translação numa dada direção não implica na restrição ao giro naquela mesma direção.

Os resultados obtidos estão apresentados a seguir e foram comparados, sempre que possível, com valores encontrados na literatura.

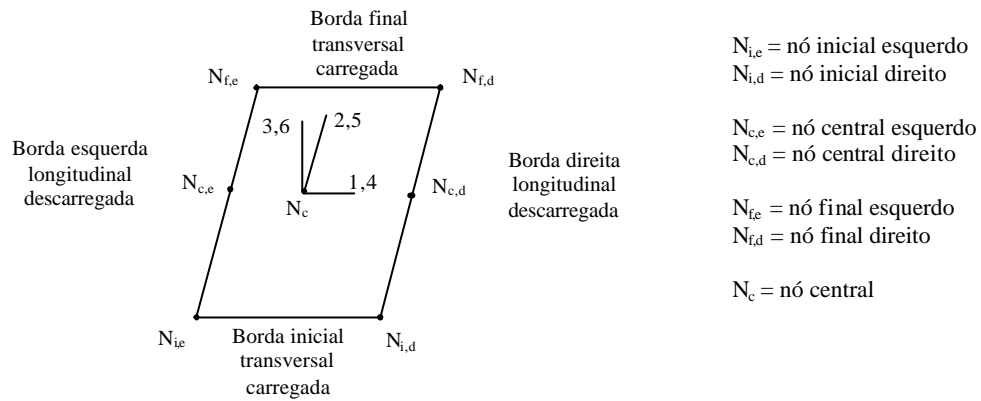


Figura 3.1 – Graus de liberdade para consideração das condições de vinculação das placas.

3.2.1. Placa com as Bordas Longitudinais Simplesmente Apoiadas

Para o caso de placa com as quatro bordas simplesmente apoiadas, o valor de $K_{q,Teórico}$ tende para um valor mínimo igual a 4, como pode ser visto na figura 3.2, com curvas de K_q em função da razão entre os lados (a/b) para diversos valores de m obtidas através da equação (2.4) e corriqueiramente encontradas na literatura (Trahair e Bradford, 1988 e Allen e Bulson, 1980).

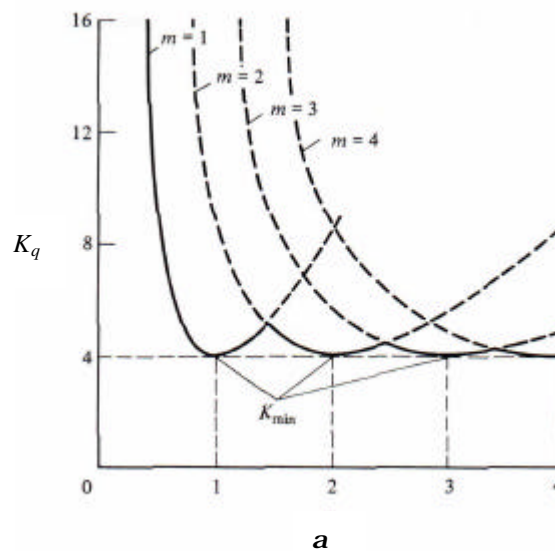


Figura 3.2 - Curvas de $K_q \times a$ para placas com todas as bordas simplesmente apoiadas (Allen e Bulson, 1980).

Pode ser observado que as condições de contorno da borda carregada afetam os valores da tensão crítica para placas com pequena razão entre os lados, ver figura 3.3, enrijecendo a região adjacente a essa borda e interferindo na formação das semi-ondas de flambagem. Para bordas carregadas engastadas, o valor de K_q nessa região é maior que o valor para bordas simplesmente apoiadas, porém, com o aumento da razão entre os lados da placa ele também tende ao valor 4, uma vez que o efeito das condições de vinculação da borda carregada deixa de ser significativo.

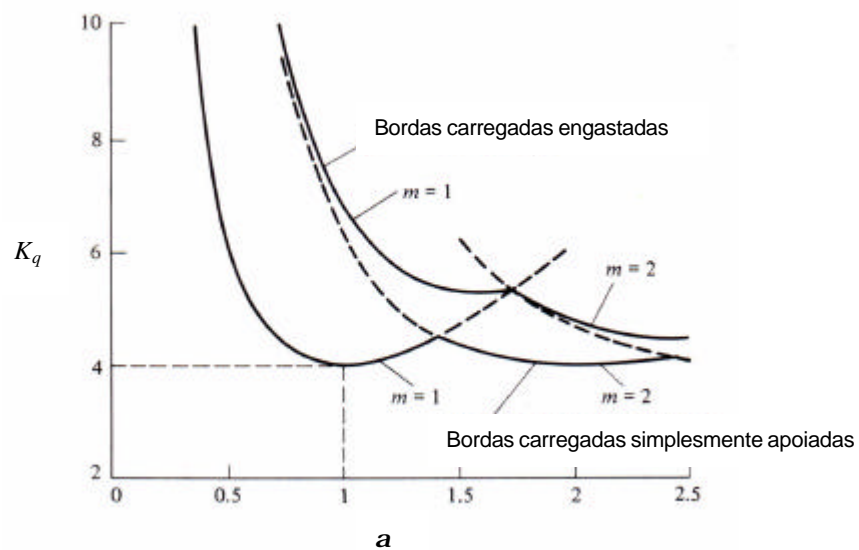


Figura 3.3 - Bordas carregadas com diferentes condições de contorno (Allen e Bulson, 1980).

Da análise numérica com o ABAQUS foram obtidos valores de K_q determinados com base na tensão crítica correspondente ao primeiro autovalor de flambagem e as condições de vinculação consideradas estão descritas na Tabela 3.1, baseadas na configuração da placa apresentada na figura 3.1, para os dois casos de vinculação na borda transversal carregada.

Os valores de K_q estão mostrados na Tabela 3.2, bem como valores apresentados por Bradford e Azhari (1997) e por Reddy (1999).

<i>Bordas transversais engastadas</i>		<i>Bordas transversais apoiadas</i>	
Nós	Restrições	Nós	Restrições
Borda longitudinal esquerda	3, 4	Borda longitudinal esquerda	3, 4
Borda longitudinal direita	3, 4	Borda longitudinal direita	3, 4
Borda transversal inicial	2, 3, 4, 5	Borda transversal inicial	3, 5
Borda transversal final	3, 4, 5	Borda transversal final	3, 5
$N_{i,d}$	1	$N_{c,e}$	2
		$N_{c,d}$	2
		$N_{i,d}$	1

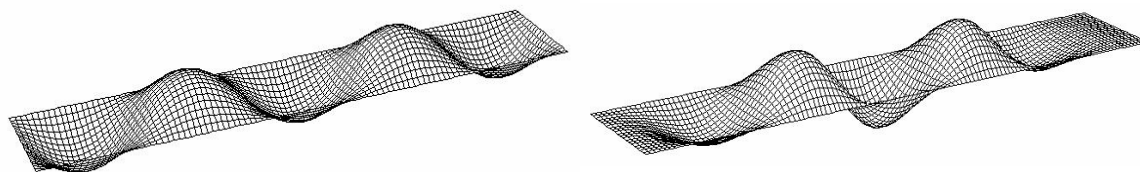
Tabela 3.1 – Condições de vinculação das placas com bordas longitudinais simplesmente apoiadas.

a/b				
	$K_{q,ABAQUS}$	$K_{q,Bradford e Azhari}$	$K_{q,ABAQUS}$	$K_{q,Reddy}$
0,5	-	-	6,27	6,25
1,0	6,82	6,74	4,01	4,00
1,5	-	-	4,36	4,34
2,0	4,88	4,85	4,01	4,00
2,5	-	-	4,15	4,13
3,0	4,43	4,42	4,01	4,00
3,5	-	-	4,87	-
4,0	4,25	-	4,01	-
4,5	-	-	4,06	-
5,0	4,17	-	4,01	-
5,5	-	-	4,05	-
6,0	4,13	-	4,01	-
7,0	4,10	-	4,01	-
8,0	4,08	-	4,01	-
9,0	4,06	-	4,01	-
10,0	4,05	-	4,05	-
11,0	4,05	-	4,01	-

Tabela 3.2 – Valores de K_q para placas com as bordas longitudinais simplesmente apoiadas.

Observa-se que os valores obtidos nos casos em que se tem valor de (a/b) pequenos concordam com a expectativa de coeficientes maiores. Para valores intermediários de m , os valores de K_q também se mostraram coerentes com as curvas das figuras 3.2 e 3.3, pois esses pontos não correspondem aos mínimos das equações de K_q nessa região. Além disso, os resultados obtidos podem ser considerados bastante precisos para o valor de K_q se comparados ao valor de $K_{q,Teórico}$.

Além das tensões críticas de flambagem (autovalores), a análise também fornece os autovetores, os quais definem as formas dos diversos modos de flambagem. A figura 3.4 mostra as formas do primeiro modo de flambagem (modo crítico) para a placa com razão entre os lados (a/b) igual a 5, considerando o caso de bordas transversais apoiadas (figura 3.4-a), com a formação de 5 semi-ondas longitudinais de comprimento praticamente igual à largura da placa, e o caso de bordas transversais engastadas (figura 3.4-b), onde pode ser notada a região enrijecida próxima aos apoios, levando à formação de semi-ondas de menor amplitude próximo às bordas carregadas.



(a) – bordas transversais apoiadas

(b) – bordas transversais engastadas

Figura 3.4 – Formas do primeiro modo de flambagem obtidas na análise numérica para placas com as bordas longitudinais simplesmente apoiadas e razão (a/b) igual a 5.

3.2.2. Placa com as Bordas Longitudinais Engastadas

Nas placas com as bordas longitudinais engastadas, o valor de $K_{q,Teórico}$ tende para um valor mínimo igual a 6,97, como pode ser visto na figura 3.5, onde tem-se as curvas de K_q em função da razão entre os lados (a/b) para as duas condições de contorno da borda carregada.

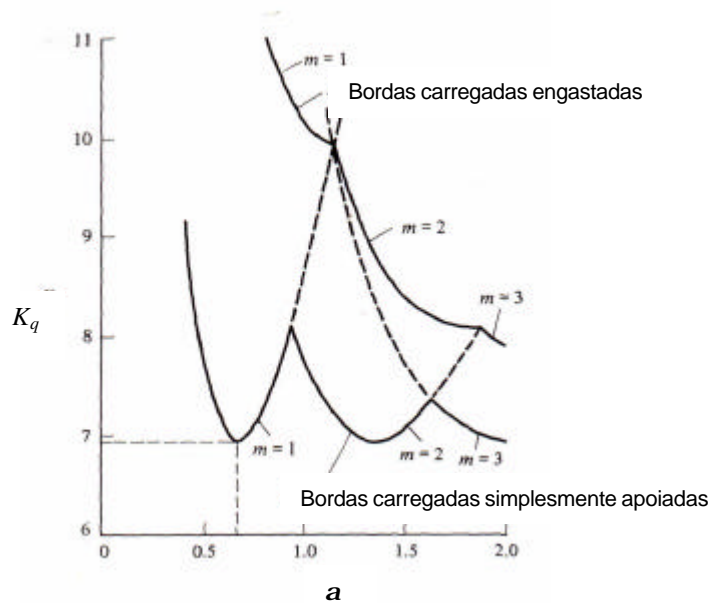


Figura 3.5 - Coeficiente de flambagem de placas com bordas longitudinais engastadas (Allen e Bulson, 1980).

Novamente observa-se a influência da vinculação dessas bordas nos valores da tensão crítica de placas com pequena razão entre os lados.

Na Tabela 3.3 têm-se as condições de vinculação, baseadas na configuração da placa da figura 3.1, para os dois casos de vinculação da borda transversal carregada.

<i>Bordas transversais engastadas</i>		<i>Bordas transversais apoiadas</i>	
Nós	Restrições	Nós	Restrições
Borda longitudinal esquerda	3, 4, 5	Borda longitudinal esquerda	3, 4, 5
Borda longitudinal direita	1, 3, 4, 5	Borda longitudinal direita	1, 3, 4, 5
Borda transversal inicial	2, 3, 4, 5	Borda transversal inicial	3, 5
Borda transversal final	3, 4, 5	Borda transversal final	3, 5
		$N_{c,e}$	2
		$N_{c,d}$	2

Tabela 3.3 – Condições de vinculação das placas com bordas longitudinais engastadas.

Na Tabela 3.4 são apresentados os valores obtidos na análise numérica, considerando-se o primeiro modo de flambagem, assim como valores obtidos por Bradford e Azhari

(1997) e por Reddy (1999). Observa-se que os valores de K_q determinados na análise numérica concordam com os valores das curvas da figura 3.5 para os dois tipos de condições de vinculação nas bordas carregadas e estão muito próximos do valor teórico esperado, com uma diferença máxima de 1% nas placas longas, com (a/b) maior que 5.

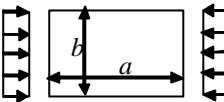
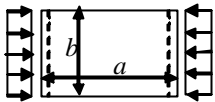
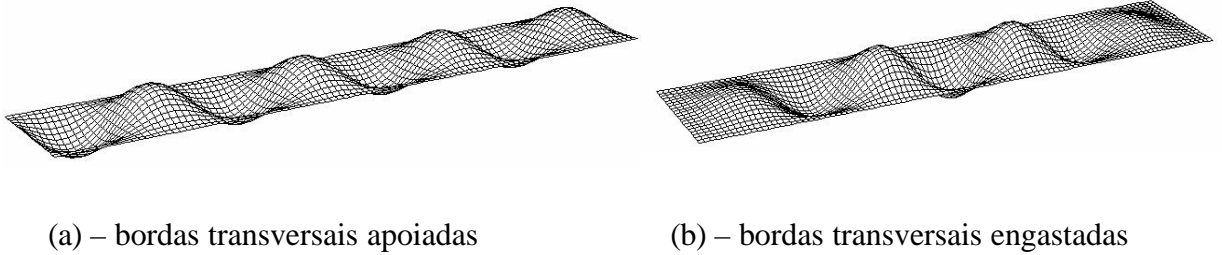
a/b					
	$K_{q,ABAQUS}$	$K_{q, exato}$ (Bradford e Azhari, 1997)	$K_{q,ABAQUS}$	$K_{q, Reddy}$	$K_{q, exato}$ (Bradford e Azhari, 1997)
0,4	30,77	-	9,62	9,45	9,45
0,6	15,46	-	7,11	7,06	7,06
0,8	11,31	-	7,36	7,30	7,30
1,0	10,23	10,08	7,69	7,77	7,69
1,2	9,75	-	7,11	7,06	7,06
1,4	8,72	-	7,05	7,00	-
1,6	8,29	-	7,46	7,30	-
1,8	8,19	-	7,11	7,06	-
2,0	7,95	7,88	7,02	6,97	6,99
2,2	7,73	-	7,12	7,07	-
3,0	7,42	-	7,11	-	7,42
4,0	7,27	-	7,02	-	-
5,0	7,17	-	7,05	-	-
6,0	7,13	-	7,02	-	-
7,0	7,10	-	7,04	-	-
8,0	7,09	-	7,03	-	-
9,0	7,07	-	7,03	-	-
10,0	7,06	-	7,02	-	-
11,0	7,06	6,99	7,03	-	-

Tabela 3.4 – Valores de K_q para placas com as bordas longitudinais engastadas.

As formas do primeiro modo de flambagem para a placa com razão entre os lados (a/b) igual a 5 estão mostradas na figura 3.6, considerando o caso de bordas transversais apoiadas (figura 3.6-a) e o caso de bordas transversais engastadas (figura 3.6-b). É

interessante observar que, no caso de bordas transversais apoiadas (figura 3.6-a), o enrijecimento das bordas longitudinais diminui o comprimento de flambagem da largura b , fazendo com que a relação (a/b) aumente e, portanto, a placa flambe com a formação de mais semi-ondas longitudinais, de modo a manter seus comprimentos iguais à sua largura.



(a) – bordas transversais apoiadas (b) – bordas transversais engastadas
 Figura 3.6 - Formas do primeiro modo de flambagem obtidas na análise numérica para placas com as bordas longitudinais engastadas e razão (a/b) igual a 5.

3.2.3. Placa com uma Borda Longitudinal Engastada e a outra Simplesmente Apoiada

Para placas com uma borda longitudinal engastada e outra simplesmente apoiada, o valor de $K_{q,Teórico}$ tende para um valor mínimo igual a 5,42, ver figura 2.6. As condições de vinculação estão mostradas na Tabela 3.5, baseadas na configuração da placa da figura 3.1, para os dois casos de vinculação da borda transversal carregada.

<i>Bordas transversais engastadas</i>		<i>Bordas transversais apoiadas</i>	
Nós	Restrições	Nós	Restrições
Borda longitudinal esquerda	3, 4	Borda longitudinal esquerda	3, 4
Borda longitudinal direita	1, 3, 4, 5	Borda longitudinal direita	1, 3, 4, 5
Borda transversal inicial	2, 3, 4, 5	Borda transversal inicial	3, 5
Borda transversal final	3, 4, 5	Borda transversal final	3, 5
		$N_{c,e}$	2
		$N_{c,d}$	2

Tabela 3.5 – Condições de vinculação das placas com uma borda longitudinal engastada e a outra simplesmente apoiada.

Os valores obtidos na análise numérica, considerando-se o primeiro modo de flambagem, estão apresentados na Tabela 3.6. Para essas condições de vinculação não foram encontrados na literatura resultados que permitissem uma comparação, entretanto, observa-se que os valores obtidos concordam muito bem com o valor teórico.

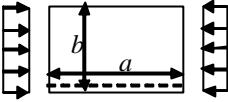
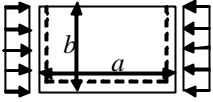
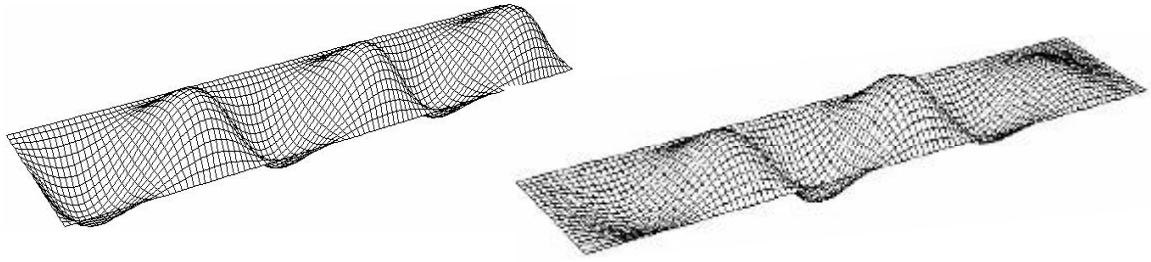
a/b		
	$K_{q,ABAQUS}$	$K_{q,ABAQUS}$
1,0	8,17	5,77
2,0	6,27	5,64
3,0	5,86	5,46
4,0	5,68	5,44
5,0	5,59	5,45
6,0	5,54	5,47
7,0	5,52	5,44
8,0	5,50	5,44
9,0	5,49	5,44
10,0	5,48	5,45
11,0	5,47	5,44

Tabela 3.6 – Valores de K_q para placas com uma borda longitudinal engastada e outra simplesmente apoiada.

Na figura 3.7, tem-se as formas do primeiro modo de flambagem para a placa com razão entre os lados (a/b) igual a 5, considerando o caso de bordas transversais apoiadas (figura 3.7-a) e o caso de bordas transversais engastadas (figura 3.7-b). Novamente pode-se perceber a influência da borda transversal engastada, alterando o comprimento de flambagem da largura b e o número de semi-ondas formadas na flambagem.



(a) – bordas transversais apoiadas (b) – bordas transversais engastadas

Figura 3.7 – Formas do primeiro modo de flambagem obtidas na análise numérica para placas com uma borda longitudinal engastada e a outra simplesmente apoiada e razão (a/b) igual a 5.

3.2.4. Placa com uma Borda Longitudinal Engastada e a outra Livre

No caso de placa com uma borda longitudinal engastada e outra livre, o valor de $K_{q,Teórico}$ tende para um valor mínimo igual a 1,277, ver figura 2.5. Na Tabela 3.7 têm-se as condições de vinculação, baseadas na configuração da placa da figura 3.1, para os dois casos de vinculação da borda transversal carregada.

<i>Bordas transversais engastadas</i>		<i>Bordas transversais apoiadas</i>	
Nós	Restrições	Nós	Restrições
Borda longitudinal direita	1, 3, 4, 5	Borda longitudinal direita	1, 3, 4, 5
Borda transversal inicial	2, 3, 4, 5	Borda transversal inicial	3, 5
Borda transversal final	3, 4, 5	Borda transversal final	3, 5
		$N_{c,d}$	2

Tabela 3.7 – Condições de vinculação das placas com uma borda longitudinal engastada e a outra livre.

Na Tabela 3.8 são apresentados os valores de Reddy (1999) juntamente com os valores obtidos na análise numérica, considerando-se o primeiro modo de flambagem e observa-se que os valores deste trabalho estão mais próximos do valor teórico, com um desvio de até 1%.

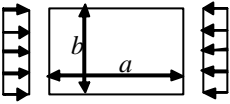
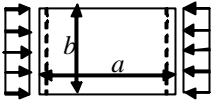
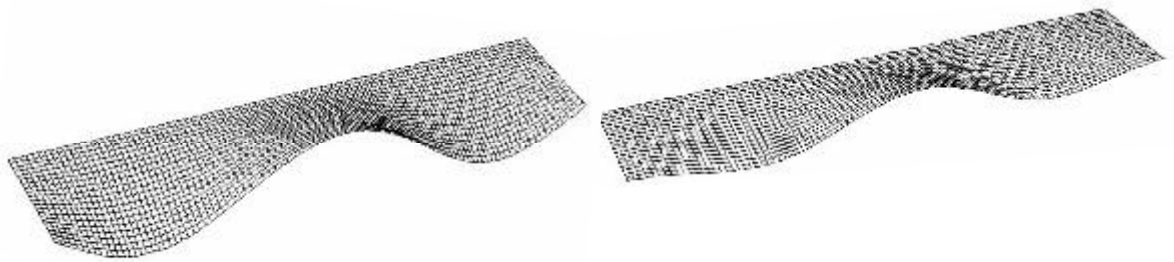
a/b			
	$K_{q,ABAQUS}$	$K_{q,ABAQUS}$	$K_{q,Reddy}$
0,5	-	4,46	4,52
1,0	4,60	1,65	1,70
1,5	-	1,29	1,34
2,0	1,93	1,33	1,39
2,5	-	1,39	1,43
3,0	1,68	1,29	1,34
3,5	-	1,29	1,34
4,0	1,47	1,34	1,39
4,5	-	1,29	1,34
5,0	1,42	1,28	1,33
5,5	-	1,30	1,35
6,0	1,38	1,29	1,34
7,0	1,35	1,29	-
8,0	1,34	1,28	-
9,0	1,32	1,29	-
10,0	1,32	1,28	-
11,0	1,31	1,28	-

Tabela 3.8 – Valores de K_q para placas com uma borda longitudinal engastada e a outra livre.

A figura 3.8 mostra as formas do primeiro modo de flambagem para a placa com razão entre os lados (a/b) igual a 5, considerando o caso de bordas transversais apoiadas (figura 3.8-a) e o caso de bordas transversais engastadas (figura 3.8-b). Para esse caso, a liberação de uma borda longitudinal tem o efeito de aumentar o comprimento de flambagem da largura b reduzindo, portanto, o número de semi-ondas formadas na flambagem.



(a) – bordas transversais apoiadas (b) – bordas transversais engastadas

Figura 3.8 – Formas do primeiro modo de flambagem obtidas na análise numérica para placas com uma borda longitudinal engastada e a outra livre e razão (a/b) igual a 5.

3.2.5. Placa com uma Borda Longitudinal Simplesmente Apoiada e a outra Livre

Para a placa com uma borda longitudinal engastada e outra livre, o valor de $K_{q,Teórico}$ tende para um valor mínimo igual a 0,425, ver figura 3.9.

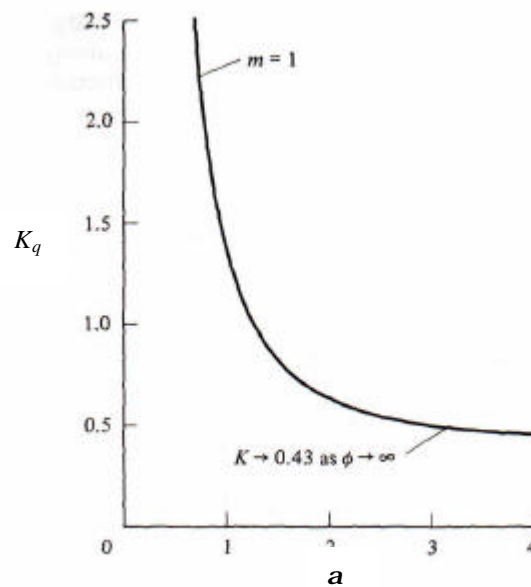


Figura 3.9 - Coeficiente de flambagem para placas com uma borda longitudinal simplesmente apoiada e a outra livre (Allen e Bulson, 1980).

A equação diferencial de equilíbrio dessa placa na posição flambada é a mesma da placa com as quatro bordas simplesmente apoiadas, entretanto, as condições de contorno diferentes ao longo da borda livre causam a flambagem da placa com a formação de apenas uma semi-onda ao longo do comprimento.

As condições de vinculação, para os dois casos de vinculação da borda transversal carregada, estão apresentados na Tabela 3.9, baseadas na configuração da placa da figura 3.1.

<i>Bordas transversais engastadas</i>		<i>Bordas transversais apoiadas</i>	
Nós	Restrições	Nós	Restrições
Borda longitudinal esquerda	1, 3, 4	Borda longitudinal esquerda	1, 3, 4
Borda transversal inicial	2, 3, 4, 5	Borda transversal inicial	3, 5
Borda transversal final	3, 4, 5	Borda transversal final	3, 5
		$N_{c,e}$	2

Tabela 3.9 – Condições de vinculação das placas com uma borda longitudinal simplesmente apoiada e a outra livre.

Os valores obtidos na análise numérica, considerando-se o primeiro modo de flambagem, estão mostrados na Tabela 3.10, assim como os valores obtidos por Reddy (1999) e os valores calculados pela equação apresentada por Trahair e Bradford (1988):

$$K_q = 0,425 + \left(\frac{b}{a}\right)^2. \quad (3.1)$$

As formas do primeiro modo de flambagem para a placa com razão entre os lados (a/b) igual a 5 estão mostradas na figura 3.10, considerando o caso de bordas transversais apoiadas (figura 3.10-a) e o caso de bordas transversais engastadas (figura 3.10-b).

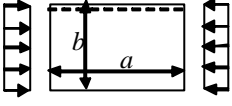
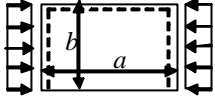
a/b				
	$K_{q,ABAQUS}$	$K_{q,ABAQUS}$	$K_{q,Reddy}$	$K_{q,Trahair e Bradford}$
0,4	-	6,58	6,64	6,68
0,6	-	3,15	3,19	3,20
0,8	-	1,96	1,99	1,99
1,0	4,40	1,40	1,43	1,43
1,5	-	0,86	0,89	0,87
2,0	1,41	0,67	0,70	0,68
2,5	-	0,58	0,61	0,59
3,0	0,86	0,53	0,56	0,54
3,5	-	0,50	0,54	0,51
4,0	0,67	0,49	0,52	0,49
4,5	-	0,47	0,50	0,47
5,0	0,58	0,46	0,49	0,47
5,5	-	0,46	0,49	0,46
6,0	0,53	0,45	0,48	0,45
7,0	0,51	0,45	-	0,45
8,0	0,49	0,44	-	0,44
9,0	0,47	0,44	-	0,44
10,0	0,46	0,43	-	0,44
11,0	0,46	0,43	-	0,43

Tabela 3.10 - Valores de K_q para placas com uma borda longitudinal simplesmente apoiada e a outra livre.

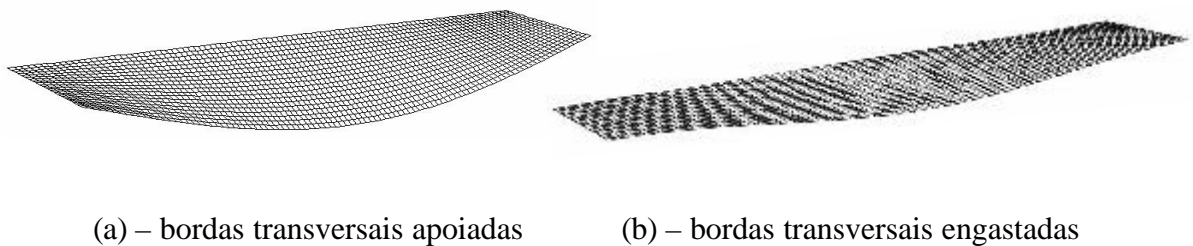


Figura 3.10 - Formas do primeiro modo de flambagem obtidas na análise numérica para placas com uma borda longitudinal simplesmente apoiada e a outra livre e razão (a/b) igual a 5.

3.3. Análise da Pós-Flambagem de Placa Quadrada

De uma análise linearizada de estabilidade de placa quadrada ($a/b = 1$) com as quatro bordas simplesmente apoiadas, similar à realizada no item 3.2.1, porém com novos parâmetros para o aço, foram determinados os valores da primeira carga de flambagem e do coeficiente de flambagem elástica da placa, mostrados na figura 3.11. As cargas concentradas (P) foram aplicadas nos nós das extremidades inicial e final (largura b) correspondentes a uma distribuição de tensão de compressão uniforme (s) unitária.

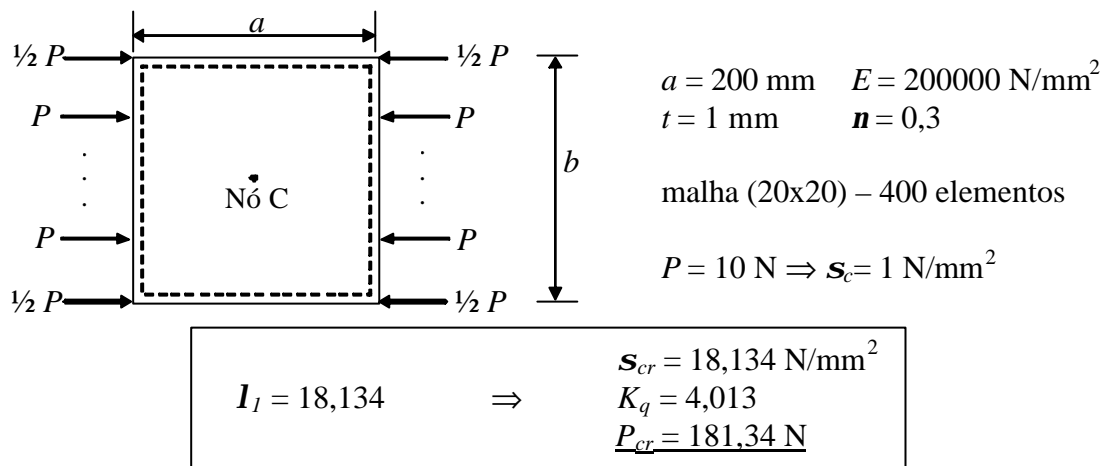


Figura 3.11 – Parâmetros e resultados da análise linearizada de estabilidade de placa.

Na análise de pós-flambagem foram impostas imperfeições iniciais, através da superposição do primeiro modo de flambagem obtido na análise linearizada de estabilidade, mostrado na figura 3.12, por três valores de amplitude dos deslocamentos, iguais a 10%, 1% e 0,1% da espessura t , e com controle do deslocamento vertical do nó C para o acompanhamento do percurso de pós-flambagem.

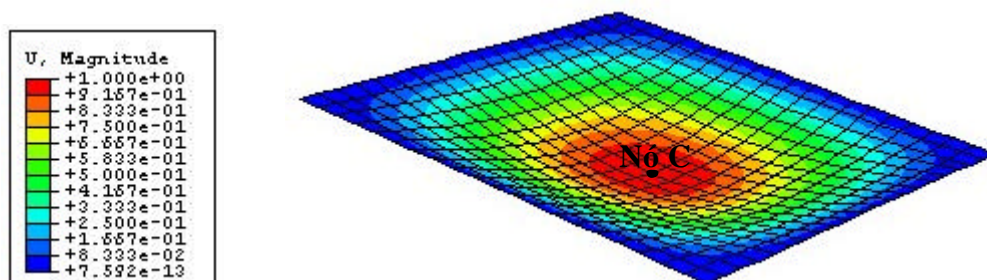


Figura 3.12 – Primeiro modo de flambagem da placa.

As curvas parametrizadas tensão/deslocamento, que descrevem o comportamento de pós-flambagem, estão mostradas na figura 3.13.

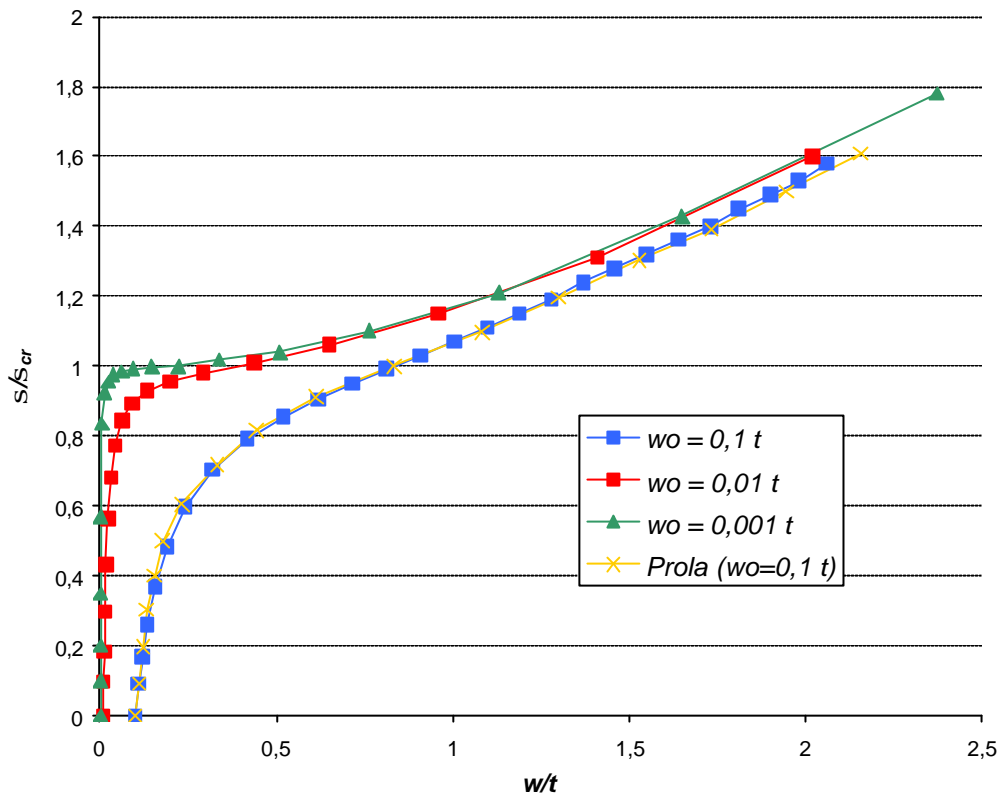


Figura 3.13 – Curvas de pós-flambagem da placa quadrada.

Diversos autores apresentam estudos com análises semelhantes a essa, dentre eles tem-se o trabalho de Prola (2001), que desenvolveu um programa de análise utilizando o Método das Faixas Finitas. A curva apresentada por Prola, para imperfeições iguais a 10% da espessura t , também foi reproduzida no gráfico da figura 3.12 e mostra-se praticamente coincidente com a curva obtida na análise numérica. Para se ter uma sensibilidade dessa concordância dos resultados foi feita a comparação dos valores da razão w/t quando s/s_{cr} igual a 1,5 para o caso de w_0/t igual a 0,1. Prola obteve um valor de w/t igual a 1,93 e o valor obtido neste estudo foi igual a 1,92, portanto, com diferença de apenas 0,5%.

3.4. Estudo de Placa Longa

As placas constituintes dos perfis de aço estrutural normalmente são longas, com grande razão entre os lados (a/b). Para se observar o comportamento dessas placas foi feito o estudo de uma placa simplesmente apoiada nas quatro bordas com relação (a/b) igual a 8. Adotou-se uma largura de placa (borda transversal carregada) $b=200\text{mm}$, comprimento longitudinal (borda descarregada) $a=1600\text{mm}$, e variou-se a espessura da placa t de 1mm a 10mm. Nas bordas transversais aplicou-se um carregamento equivalente a uma tensão uniforme de compressão (s) igual a 1kN/mm^2 , ver figura 3.14.

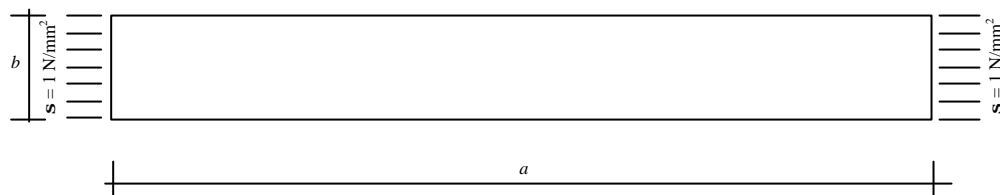


Figura 3.14 – Placa com razão (a/b) igual a 8.

De modo a introduzir o comportamento não-linear do material foi adotado um aço estrutural com comportamento elasto-plástico bi-linear, ver figura 3.15, com tensão de escoamento $f_y=300\text{ N/mm}^2$ e tensão de ruptura $f_u=450\text{ N/mm}^2$. Considerando que o módulo de elasticidade longitudinal do aço (E) é igual a 205 GPa, obteve-se a deformação correspondente do limite elástico (e_y) e adotou-se um valor médio das deformações de ruptura (e_u) igual a 17%, a partir do qual considera-se plastificação total. Esses valores, adotados e determinados, correspondem aos valores nominais da curva tensão/deformação do aço, portanto, foram convertidos nas tensões verdadeiras e deformações logarítmicas plásticas, ver item 2.6.3.2., para serem implementados no comportamento plástico, com encruamento isotrópico e superfície de escoamento de von Mises, do ABAQUS.

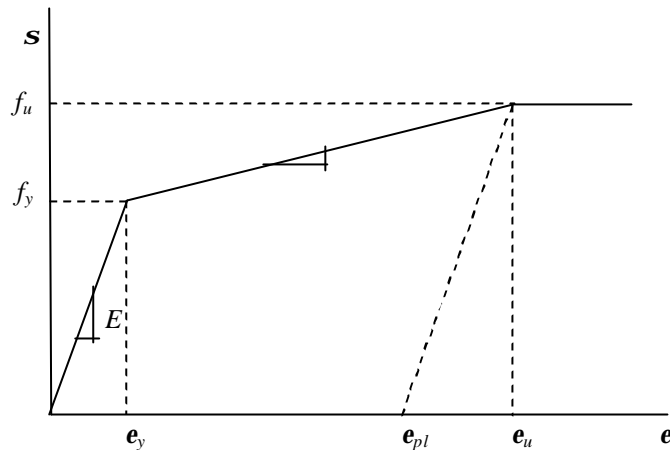


Figura 3.15 – Comportamento elasto-plástico bi-linear do aço adotado.

Para as tensões residuais, considerou-se a distribuição apresentada pelo ECCS (1976) para placas laminadas com distribuição parabólica, mostrada na figura 2.15, item 2.4.1. Foram determinados os valores para a razão entre os lados (a/b), as tensões de compressão (s_c) e de tração (s_t), para todas as espessuras consideradas. A distribuição das tensões residuais (s_r) foi determinada pela consideração da expressão da parábola em função das tensões e da largura da placa, e , impondo as condições de equilíbrio das forças e dos momentos. A equação varia em função da posição x ao longo da largura b e com origem no centro da placa, e é dada por

$$s_r = \frac{4(s_c - s_t)}{b^2} x^2 + s_t. \quad (3.2)$$

As tensões foram calculadas para os nós da seção transversal e aplicadas em cada elemento pela consideração de uma tensão média uniforme. Na figura 3.16, pode-se observar essa distribuição das tensões nas faixas de elementos ao longo da placa, com as tensões de compressão nas bordas longitudinais e de tração no centro da placa.

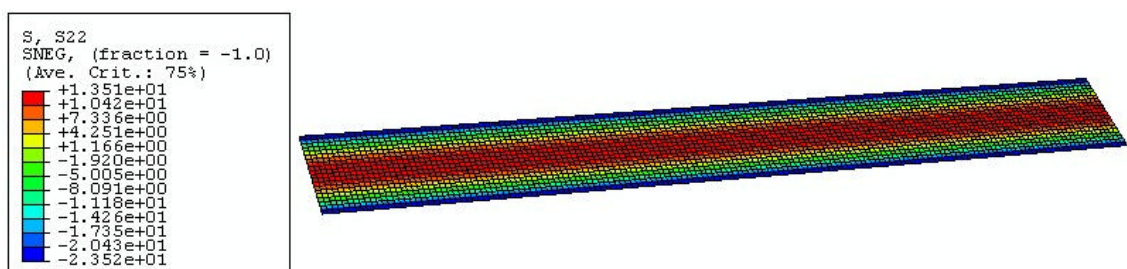


Figura 3.16 – Distribuição das tensões residuais em placas laminadas.

Foi feito um estudo da sensibilidade dos resultados e refinamento da malha, de modo a garantir uma confiabilidade nos valores obtidos. Primeiramente foi realizada uma análise linearizada de estabilidade com a obtenção dos valores das tensões críticas de flambagem, apresentados na Tabela 3.11, onde $s_{cr,el,str}$ é a tensão crítica de material elástico sem tensões residuais, $s_{cr,el,ctr}$ é a tensão crítica de material elástico com tensões residuais, $K_{q,el,str}$ é o coeficiente de flambagem elástica obtido com o valor de $s_{cr,el,str}$ na equação (2.3) e $K_{q,el,ctr}$ é o coeficiente de flambagem elástica obtido com o valor de $s_{cr,el,ctr}$ na equação (2.3). Também foram determinados os valores das tensões críticas do material elasto-plástico sem tensões residuais ($s_{cr,ep,str}$) e das tensões críticas do material elasto-plástico com tensões residuais ($s_{cr,ep,ctr}$) para a análise subsequente da pós-flambagem, e os valores obtidos são iguais aos valores do material elástico.

<i>Malha</i>	<i>Número de elem.</i>	$s_{cr,el,str}$ (MPa)	$K_{q,el,str}$	$s_{cr,el,ctr}$ (MPa)	$K_{q,el,ctr}$
4x32	128	20,248	4,37	22,443	4,85
10x80	800	18,784	4,06	22,355	4,83
16x128	2048	18,625	4,02	22,349	4,82
20x160	3200	18,588	4,01	22,347	4,82
24x192	4608	18,570	4,01	22,348	4,82
32x256	8192	18,549	4,00	22,345	4,82

Tabela 3.11 – Estudo da malha de elementos finitos.

Foi observado também o comportamento de pós-flambagem das placas para as diversas malhas consideradas, com a imposição de imperfeições iniciais correspondentes ao primeiro modo de flambagem, e iguais a 0,1% da espessura, de forma similar ao que foi feito para a placa quadrada, com o nó de controle para o acompanhamento dos deslocamentos de flexão correspondente ao nó de maior deslocamento vertical de cada placa. As figuras 3.17 e 3.18 mostram as curvas obtidas para os casos de material elástico e placa com tensões residuais, e de material elasto-plástico e placa sem tensões residuais, respectivamente.

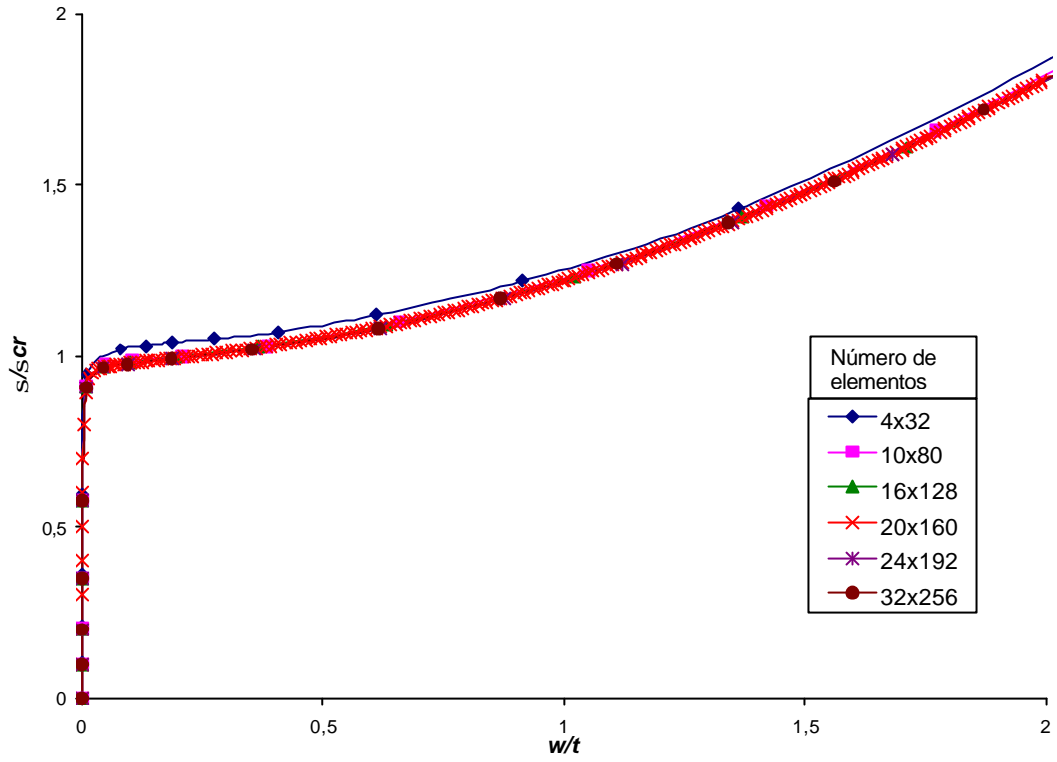


Figura 3.17 – Estudo da malha para material elástico e placa com tensões residuais.

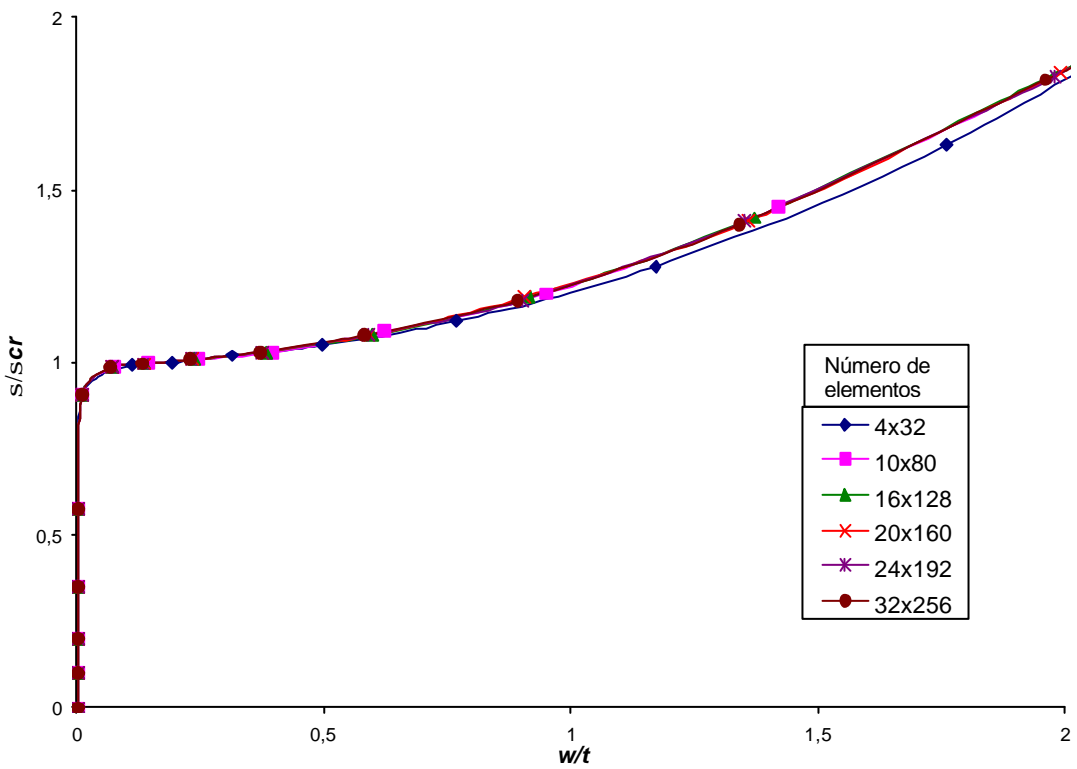


Figura 3.18 – Estudo da malha para material elasto-plástico e placa sem tensões residuais.

Sabendo-se que o coeficiente de flambagem elástica (K_q) de placas com todas as bordas simplesmente apoiadas é 4,0 e considerando a concordância das curvas para malhas a partir de (10x80) elementos, optou-se por adotar nas análises a de (20x160) elementos.

A placa ficou discretizada então com 3200 elementos, da forma apresentada na figura 3.19, onde pode ser observada a configuração esperada de flambagem, com a numeração dos nós que definem as seções de inflexão das semi-ondas (linhas cheias), e as seções correspondentes aos picos das semi-ondas (linhas tracejadas).

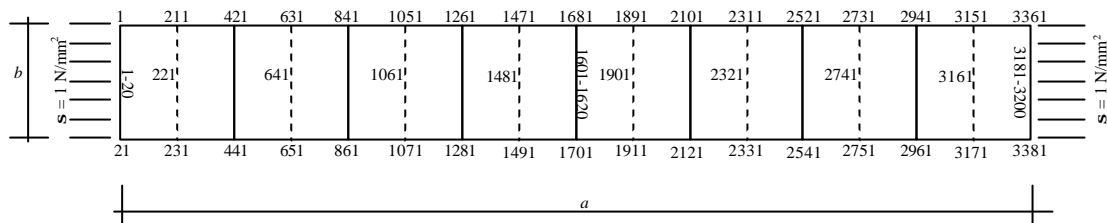


Figura 3.19 – Configuração da placa estudada.

Variando-se a espessura da placa, foram obtidos os valores das tensões críticas de flambagem para material elástico e elasto-plástico, com e sem a consideração das tensões residuais, apresentados na Tabela 3.12. Convém lembrar que os valores obtidos na análise linearizada de estabilidade para material elasto-plástico são iguais ao elástico, portanto, não foram repetidos na tabela.

t (mm)	$I = b/t$	$s_{cr,el,str}$ (MPa)	$K_{q,el,str}$	$s_{cr,el,ctr}$ (MPa)	$K_{q,el,ctr}$
1	200	18,588	4,01	22,348	4,82
2	100	74,322	4,01	79,600	4,30
3	66,667	167,10	4,01	173,47	4,16
4	50	296,75	4,00	303,94	4,10
5	40	463,06	4,00	470,82	4,07
6	33,333	665,74	3,99	673,83	4,04
7	28,571	904,46	3,98	912,61	4,02
8	25	1178,8	3,98	1197,9	4,04
9	22,222	1488,3	3,97	1511,3	4,03
10	20	1832,5	3,96	1858,0	4,01

Tabela 3.12 – Tensões críticas em função da variação da esbeltez da placa.

Observando-se esses resultados, pode-se ressaltar algumas considerações:

- os valores dos coeficientes de flambagem elástica de placa sem tensões residuais correspondem ao valor teórico igual a 4, com diferença máxima de 1%;
- para as placas com tensões residuais observa-se que, para placas finas a tensão crítica de flambagem é significativamente maior que a das placas sem tensões residuais, sendo 20% maior para a menor espessura ($t = 1$ mm). Para placas espessas, essa diferença entre as tensões praticamente desaparece, sendo igual a 1% para a maior espessura ($t = 10$ mm). Isso acontece porque as tensões residuais desenvolvidas nas placas finas são relativamente altas se comparadas à tensão crítica de flambagem elástica da placa sem tensões residuais, e vão se tornando menos significativas à medida que a espessura da placa aumenta. Na placa de espessura $t = 1$ mm, a maior tensão residual de compressão nos elementos das bordas longitudinais corresponde a 58% do valor da tensão crítica de flambagem da placa sem tensões residuais, enquanto que para $t = 10$ mm ela corresponde a 5%;
- inicialmente esperava-se que as tensões residuais influenciassem o comportamento da placa causando uma redução na tensão crítica de flambagem, observou-se porém que elas contribuíram no sentido de aumentar o valor da tensão crítica de flambagem. Na verdade, essa distribuição de placas laminadas considera tensões de tração na região central que flamba, de modo que, ao se sobreporem às tensões de compressão do carregamento, reduzem a tensão final de compressão atuante e permitem que a placa resista mais antes de flambar.

Fazendo-se uma análise com uma distribuição de tensões residuais invertida, ou seja, tensões de compressão na região central e tensões de tração nas bordas, mas que obedecessem a mesma distribuição parabólica e mesmos parâmetros de equilíbrio, obteve-se valores de tensão crítica menores que os valores obtidos na análise da placa sem tensões residuais. Estendendo a análise para o acompanhamento do comportamento de pós-flambagem (imperfeições iniciais iguais a 0,1% da espessura), pôde-se comprovar esses efeitos das tensões residuais para valores de tensão atuante abaixo da tensão crítica de flambagem ($S/S_{cr} = 1$), como pode ser visto na figura 3.20,

onde está apresentada apenas a região da curva correspondente ao comportamento de pré-flambagem para melhor visualização.

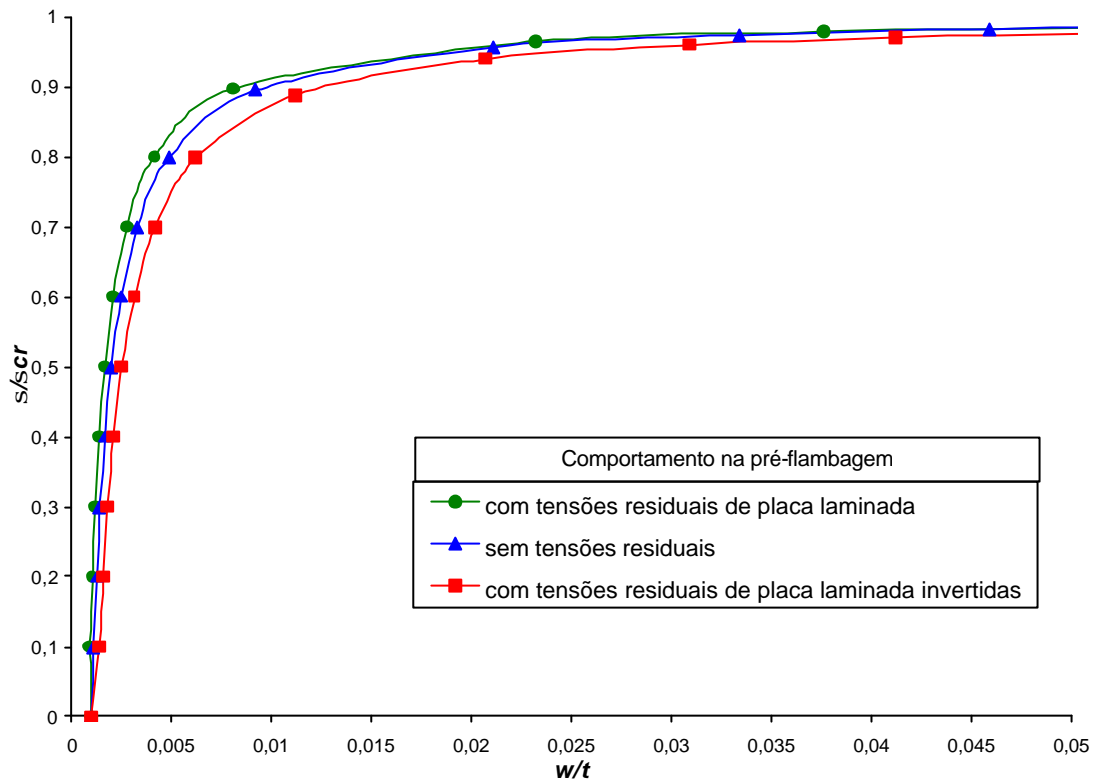


Figura 3.20 – Efeito das tensões residuais no valor da tensão crítica de flambagem.

Entretanto, após o início da flambagem ocorre uma redistribuição das tensões, como mostrado na figura 2.10, item 2.2.3, de modo que na região próxima às bordas longitudinais, as tensões de compressão continuam a crescer e na região central da placa as tensões tendem a diminuir. A distribuição padrão de tensões residuais da placa laminada passa, portanto, a causar uma redução na tensão última de colapso, pois aumenta as tensões de compressão atuantes na região ainda resistente. As tensões residuais invertidas têm o efeito contrário, pois apresentam tensões de tração próximo às bordas longitudinais, as quais reduzem o valor da tensão final de compressão atuante. A figura 3.21 corresponde ao mesmo gráfico da figura 3.20, porém apresentando o comportamento total de pós-flambagem, onde se observa a inversão das curvas com tensão residual.

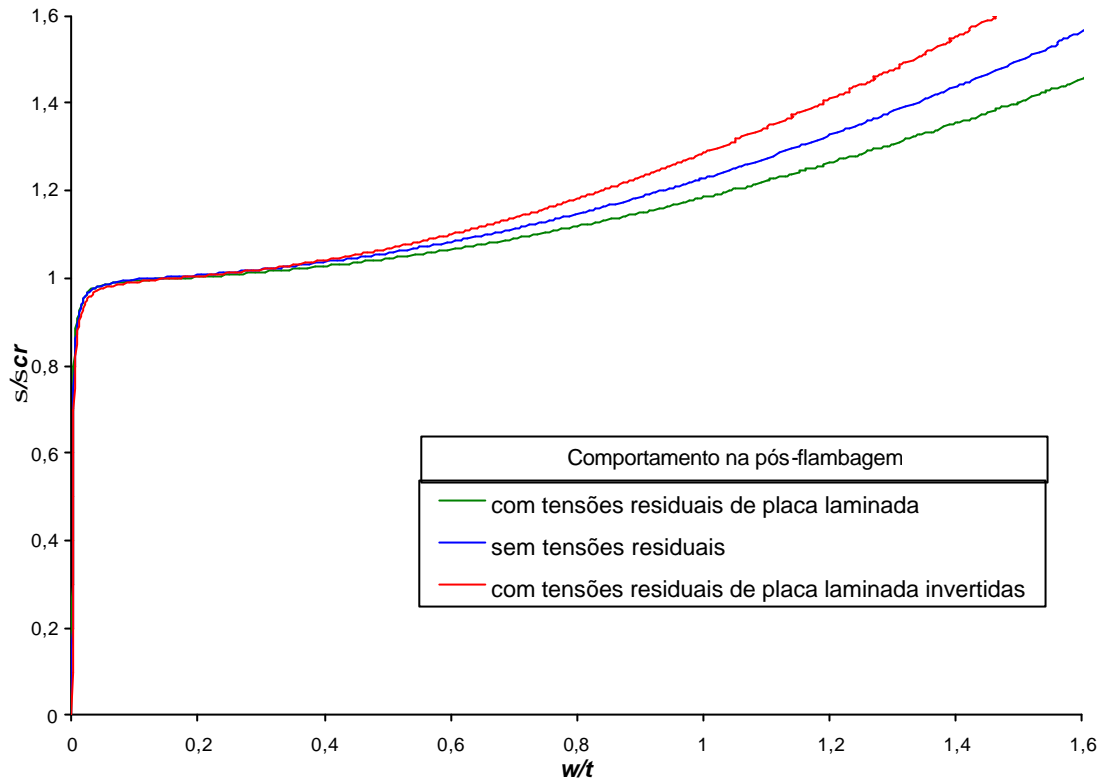


Figura 3.21 – Efeito das tensões residuais no valor da tensão última de colapso.

Além das tensões críticas de flambagem, obtidas pelos autovalores fornecidos na análise, foram obtidos também os modos de flambagem local das placas. Para essa relação de (a/b) , obteve-se sempre a formação de 8 semi-ondas longitudinais, ver figura 3.22, apresentando a configuração deformada esperada.

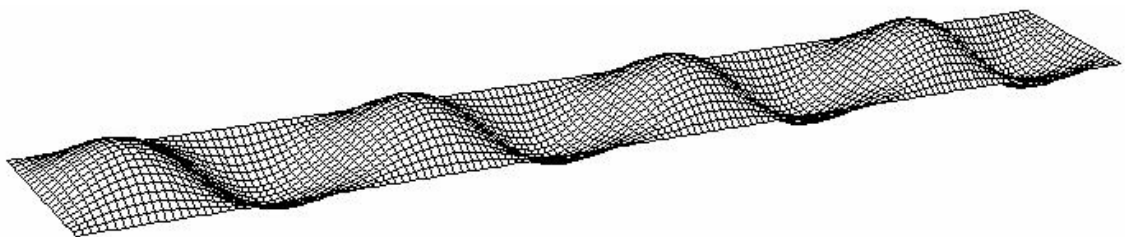


Figura 3.22 – Primeiro modo de flambagem com a formação de oito semi-ondas longitudinais.

Após a obtenção das tensões críticas, foi feita a análise de pós-flambagem das placas para a obtenção das curvas carga/deslocamento para cada espessura considerada. Em todos os processamentos considerou-se imperfeições iniciais iguais a 0,1% da

espessura, da forma explicada no item 3.3, para a placa quadrada. A figura 3.23 apresenta as curvas obtidas para placa com material de comportamento elástico, com e sem tensões residuais.

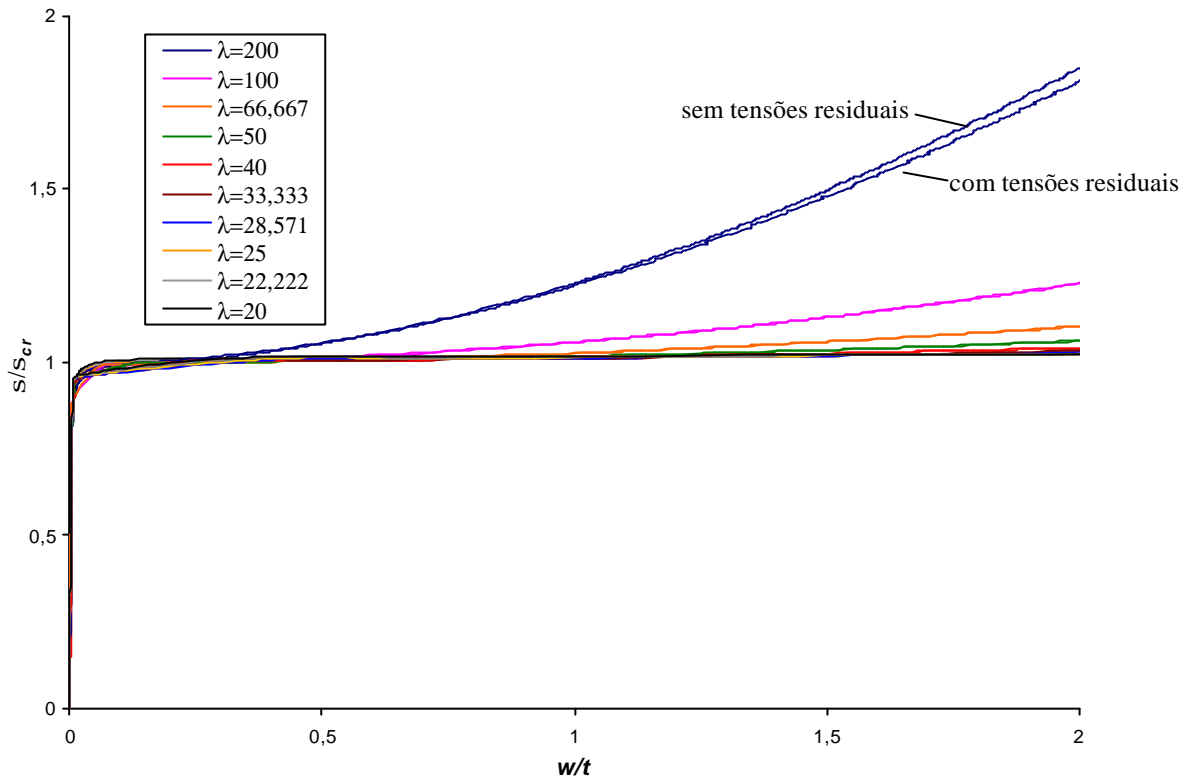


Figura 3.23 – Curvas de pós-flambagem para as diversas espessuras consideradas para as placas, com e sem tensões residuais.

Novamente observa-se que as tensões residuais influenciam apenas as placas mais esbeltas, reduzindo sua resistência última, e seu efeito pouco significativo nas placas pouco esbeltas, com curvas praticamente coincidentes à medida que a esbeltez diminui.

Da comparação entre as curvas pode-se confirmar a expectativa quanto ao aumento de resistência na pós-flambagem apresentada por Galambos (1998), item 2.1, de que ela é realmente significativa quando a tensão de escoamento é consideravelmente maior que a carga crítica ($s_{cr}/f_y \ll 1$) e, portanto, somente em placas finas é esperada grande resistência pós-flambagem. Considerando que a tensão de escoamento do aço é $f_y=300\text{MPa}$, e observando-se os valores das tensões críticas de flambagem apresentados na Tabela 3.12, tem-se que para a placa de menor espessura ($I=200$) a relação s_{cr}/f_y é

igual a 0,06 sem a consideração das tensões residuais e 0,07 com as tensões residuais. Até a espessura $t=4\text{mm}$ ($I=50$), essa relação apresenta valores menores ou iguais a 1, e as curvas dessas placas são exatamente as que apresentam algum aumento na tensão última de colapso. Para as esbeltezes das placas abaixo de 50 a resistência pós-flambagem é praticamente inexistente.

Esse comportamento diferenciado está relacionado ao efeito de membrana desenvolvido quando a placa flamba. Placas mais finas possuem menor rigidez, deformando-se mais na flambagem e desenvolvendo componentes de tensão normal devidas à flexão. Quando os valores das tensões se aproximam da tensão de escoamento, o comportamento de membrana é alterado, sendo afetado pelo escoamento do material.

Por fim, foi feita a verificação da distribuição das tensões ao longo da largura da placa b , considerando-se as tensões no plano médio dos elementos da seção transversal, à medida que o carregamento era aumentado. A distribuição obtida para placa com material de comportamento elástico, sem tensões residuais está apresentada na figura 3.24 e para placa com material de comportamento elástico, com tensões residuais na figura 3.25.

Observa-se que até a ocorrência da flambagem ($P/P_{cr} \leq 1$), as tensões são praticamente constantes ao longo da largura da placa, e após o início da flambagem ocorre uma redução das tensões na região central e um aumento na região próxima às bordas longitudinais, como esperado. Percebe-se também que as tensões residuais têm uma influência mínima nessa distribuição.

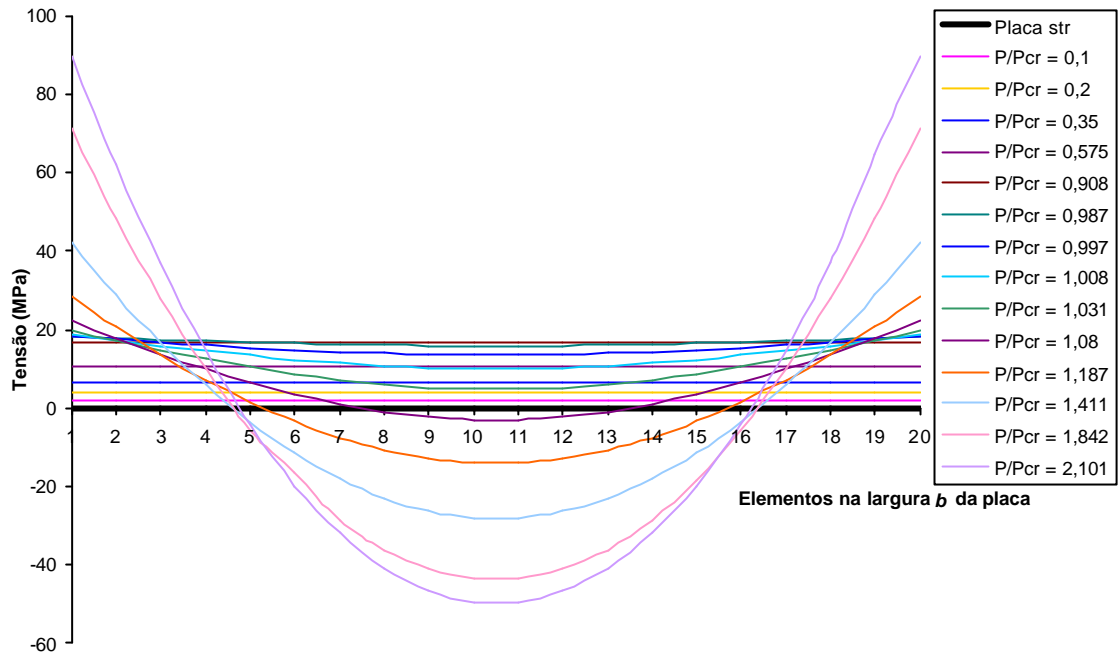


Figura 3.24 – Distribuição das tensões na seção transversal da placa, sem tensões residuais.

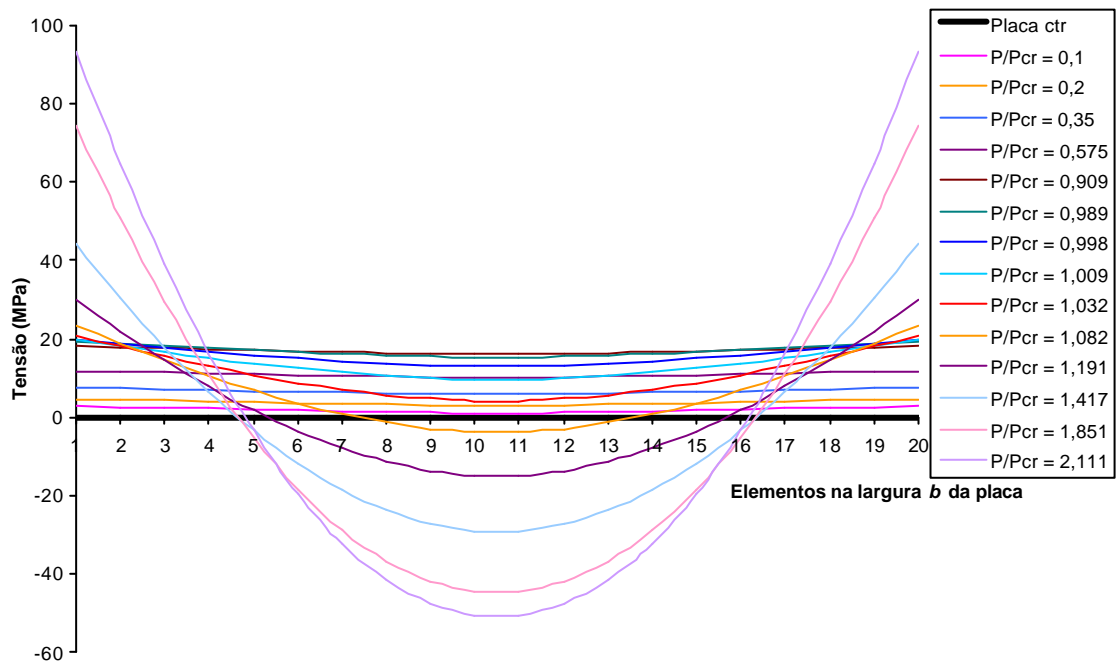


Figura 3.25 – Distribuição das tensões na seção transversal da placa, com tensões residuais.

3.5. Controle e Convergência

Nas análises linearizadas de estabilidade, os parâmetros que devem ser definidos são o número de modos de flambagem requeridos, indicando também um número máximo de autovalores e um número máximo de iterações até a solução, e os dados de saída, indicando os nós em que se quer conhecer os deslocamentos e suas direções, e indicando os elementos onde se deseja conhecer as tensões e deformações, determinando a posição no elemento e a frequência com que eles serão fornecidos.

Em cada grupo de modelos foi feito sempre um estudo preliminar estático linear da placa que permitisse observar se as cargas aplicadas correspondiam realmente a um carregamento uniforme, provocando tensões uniaxiais de compressão uniforme e de valor unitário, e se as deformações e os deslocamentos eram compatíveis com o carregamento. Nas análises linearizadas de estabilidade, para a grande maioria dos casos, foram solicitados os três primeiros modos de flambagem, com um número máximo de duzentas iterações, e não foram observados problemas na obtenção dos autovalores e autovetores.

Nas análises de pós-flambagem, é utilizado o método Riks modificado, para as quais deve-se fornecer um incremento inicial do comprimento do arco, um fator de escala do comprimento do arco total do passo de carga com valor *default* igual a 1, os valores dos incrementos mínimos e máximos do comprimento do arco, o máximo valor do fator de proporcionalidade da carga, o número do nó cujo deslocamento está sendo monitorado, o grau de liberdade associado a este deslocamento e seu valor máximo. Devem ser definidos também o número máximo de incrementos da análise e os parâmetros de saída dos resultados.

Existem também parâmetros de controle da convergência, podendo ser alterados para o campo de deslocamentos o critério de convergência da força residual e o critério de convergência da correção do deslocamento, e para o procedimento de *line search* pode-se definir o valor de ativação do algoritmo.

Nas placas estudadas, para material elástico e sem a consideração das tensões residuais, não foi necessário nenhum controle adicional ou alteração dos parâmetros *default* do ABAQUS, apenas a definição e o ajuste do incremento inicial do comprimento do arco. Porém, à medida em que foram sendo acrescentadas as não-linearidades do problema, foram observados casos em que o caminho de pós-flambagem não correspondesse ao esperado, ou em que não houvesse convergência.

A primeira medida de controle adotada foi a alteração do esquema de incrementação, o qual é normalmente feito de forma automática, impondo que os incrementos máximos fossem iguais ao incremento inicial fornecido. Grande parte das análises de placas de material elasto-plástico obteve convergência apenas com essa alteração. Entretanto, quando eram consideradas também as tensões residuais e as placas eram pouco esbeltas, foi necessário o controle adicional do critério de convergência do resíduo, reduzindo seu valor. Em nenhum dos estudos de placas isoladas foi necessária a ativação do *line search*.

Como o objetivo principal é a observação do percurso de pós-flambagem com a obtenção das cargas e deslocamentos que definem esse comportamento, foram especificados grandes valores para o máximo fator de proporcionalidade da carga, o máximo deslocamento do nó de controle e o número máximo de incrementos. A interrupção do processamento ocorreu quando o programa não obteve mais convergência e foi constatado um fator de colapso, como, por exemplo, deslocamentos excessivos ou formação de rótulas plásticas. Definiu-se como carga última aquela correspondente ao final do trecho de inclinação positiva da curva obtida, ou aquela correspondente ao ponto de ocorrência do colapso.

4. ESTUDO DE PERFIS ESTRUTURAIS

4.1. Introdução

Na sequência do estudo das placas isoladas, foram adequados os procedimentos para aplicação na análise não-linear da flambagem local de barras de aço com seção transversal correspondente aos perfis estruturais tratados neste trabalho, perfis I duplamente simétricos e cantoneiras de abas iguais.

Com o objetivo de se familiarizar com a forma de composição e implementação de barras com seções transversais variadas, quanto à geometria, aplicação de carga e condições de contorno e para se verificar a adequação dos modelos no ABAQUS, inicialmente foram estudados casos simples de estabilidade linear de diversos perfis, inclusive perfis de chapa fina formados a frio, com seções U e U enrijecido, com a obtenção das cargas e dos modos críticos de flambagem, que foram analisados e comparados com resultados encontrados na literatura.

Nas análises linearizadas de estabilidade, considerou-se que a equação da tensão crítica de flambagem elástica de placas, equação (2.3), pode ser aplicada para seções pela substituição do coeficiente de flambagem da placa K_q por um coeficiente de flambagem da seção K_p , de forma que a tensão crítica de flambagem elástica de seções é dada por

$$s_{cr} = K_p \frac{p^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2. \quad (4.1)$$

onde b é a largura do elemento da seção condicionante da flambagem local.

Para seções em perfil I e U, e cantoneiras de abas iguais, foram realizadas então as análises linearizadas de estabilidade (Castro e Silva *et al.*, 2004 e 2005) com o objetivo de se avaliar os parâmetros de flambagem elástica dessas seções, coeficiente de flambagem (K_p) e limite de esbeltez máxima $(b/t)_{máx}$, utilizados pelo PR NBR 8800 (2006), uma vez que os coeficientes de flambagem elástica adotados são aproximados, situados entre as situações limites de vinculação das bordas das placas (livres, perfeitamente rotuladas ou perfeitamente engastadas), ver item 2.5. Esse estudo também contemplou o perfil U para que pudesse ser avaliada a concordância comportamental com o perfil I, considerada como hipótese preliminar deste trabalho.

Para o estudo do comportamento de pós-flambagem, procurou-se verificar inicialmente se a aplicação do método de análise estava sendo feita de forma correta, além da adequação dos outros parâmetros de implementação dos modelos, como geometria, carregamento e condições de contorno. Optou-se, portanto, por verificar casos encontrados na literatura de seções transversais diversas, inclusive perfis de chapa fina formados a frio. Nessas análises não foram consideradas as tensões residuais nem o comportamento elasto-plástico do material.

O estudo da pós-flambagem foi estendido às cantoneiras de abas iguais (Castro e Silva *et al.*, 2006), com a adoção da metodologia de implementação gradual das não-linearidades da análise, de modo a permitir um acompanhamento mais rigoroso dos procedimentos e uma confiabilidade numérica e comportamental dos resultados de cada etapa. Desse estudo foram obtidas as curvas de resistência à flambagem local das abas das cantoneiras.

Seguindo a mesma metodologia de implementação das não-linearidades adotadas para as cantoneiras, foi realizada a análise da pós-flambagem dos perfis I duplamente simétricos, e também foram obtidas as curvas de resistência à flambagem local desses perfis. Em ambos os casos, os valores obtidos foram comparados com os do PR NBR 8800 (2006), com o intuito de avaliar a adequação dos procedimentos da norma quanto à flambagem local de perfis.

Novamente, em todas as análises, foi utilizado o elemento de casca S4, descrito no item 2.6.3.3.

4.2. Análise Linearizada de Estabilidade

4.2.1. Perfis U

Inicialmente, foi feita uma modelagem bem simples de uma barra curta de seção transversal em perfil U, porém, que permitisse a comparação com resultado obtido pelo programa de análise desenvolvido no estudo de Prola (2001), que utiliza o método das faixas finitas (MFF). A barra considerada, com sua geometria e material, está mostrada na figura 4.1.

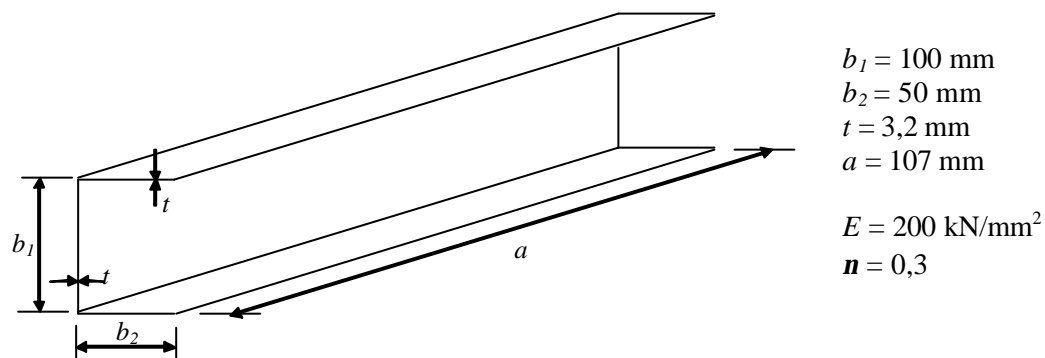


Figura 4.1 – Barra em perfil U utilizada na análise linearizada de estabilidade.

Foram feitas 12 divisões em a , 10 divisões em b_1 e 5 divisões em b_2 . A barra possui extremidades simplesmente apoiadas com empenamento livre, e uma distribuição inicial de tensões de compressão uniforme uniaxial unitária.

Da análise numérica linearizada de estabilidade obteve-se o valor para K_p determinado pelo primeiro autovalor, valor crítico de flambagem, igual a $K_p = 2,96$. O resultado obtido por Prola (2001) foi $K_p = 3,01$, mostrando uma boa concordância entre os resultados, com desvio de menos de 2%. Na figura 4.2, é mostrada a forma do primeiro modo de flambagem.

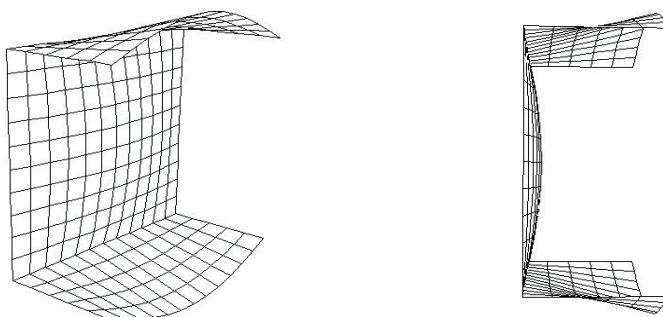


Figura 4.2 – Forma do primeiro modo de flambagem do perfil U analisado.

4.2.2. Perfis U enrijecidos

Foi realizada também a análise linearizada de estabilidade para uma barra curta de seção transversal em perfil U enrijecido, para comparação com resultado obtido por Prola (2001). A barra estudada, com suas propriedades e material, está mostrada na figura 4.3.

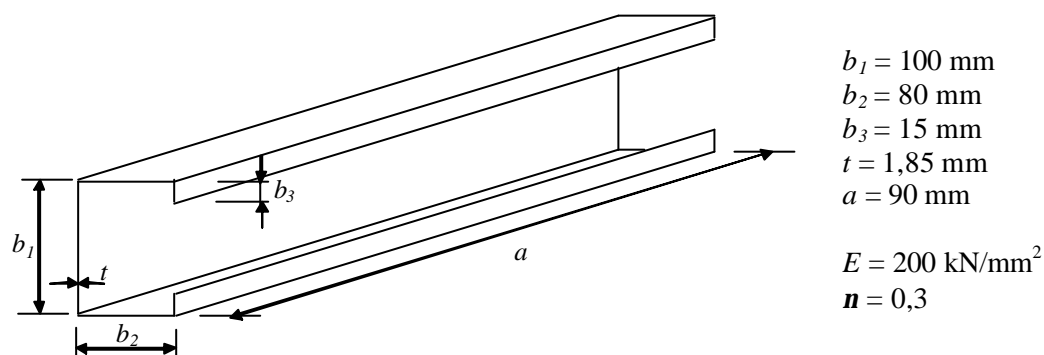


Figura 4.3 – Configuração da barra em perfil U enrijecido analisada.

Foram feitas 30 divisões em a , 10 divisões em b_1 , 8 divisões em b_2 e 3 divisões em b_3 . A barra possui extremidades simplesmente apoiadas com empenamento livre, e uma distribuição inicial de tensões de compressão uniaxial uniforme unitária. Para esse caso Prola (2001) apresenta um valor de $K_p = 5,00$, e da análise numérica obteve-se $K_p = 4,95$, com diferença da ordem de 1%. A figura 4.4 mostra a forma do primeiro modo de flambagem.

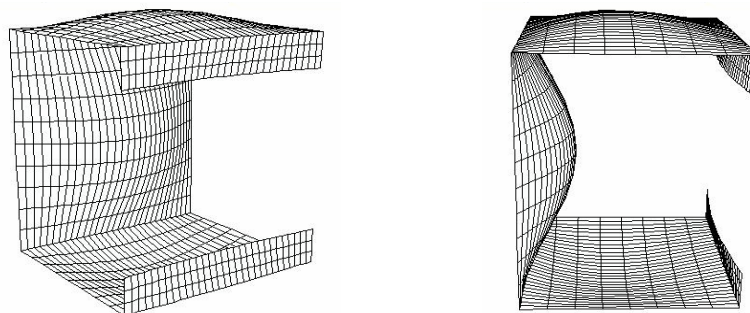


Figura 4.4 – Forma do primeiro modo de flambagem do perfil U enrijecido analisado.

Em seguida, foi feita a análise de barra, também com seção transversal em perfil U enrijecido, porém com os enrijecedores inclinados, mostrada na figura 4.5, para comparação com valores obtidos em um estudo feito por Kwon (1992) com a utilização do método das faixas finitas. Foram considerados dois comprimentos diferentes para a barra, correspondentes aos valores de tensão crítica de flambagem do modo local de placa ($a=65\text{ mm}$) e distorcional ($a=280\text{ mm}$). No primeiro caso foram feitas 20 divisões em a , e no segundo caso 10 divisões. Em ambas as análises foram feitas 12 divisões em b_1 , 4 divisões em b_2 e 2 divisões em b_3 . As barras possuem extremidades simplesmente apoiadas com empenamento livre, e uma distribuição inicial de tensões de compressão uniforme uniaxial unitária.

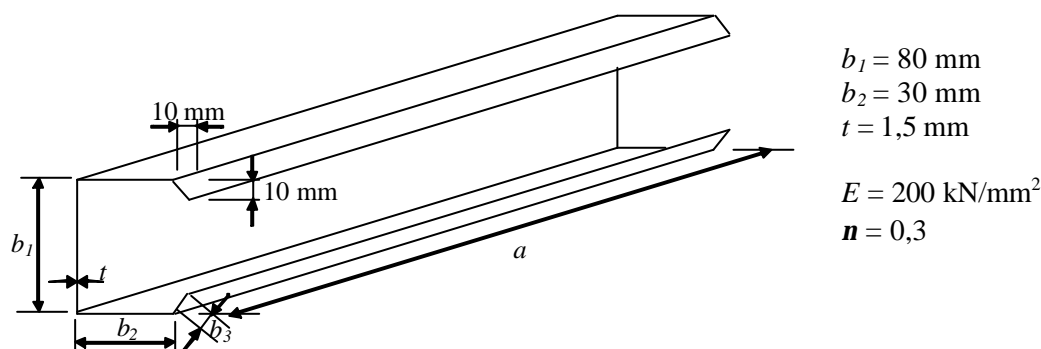


Figura 4.5 – Barra em perfil U enrijecido considerada por Kwon (1992).

Para a barra de comprimento $a = 65\text{ mm}$, a tensão crítica (s_{cr}) obtida por Kwon (1992) foi de 340 MPa e neste trabalho obteve-se $s_{cr} = 351,66\text{ MPa}$, com diferença da ordem de 3%. Para a barra de comprimento $a = 280\text{ mm}$, os resultados foram praticamente

coincidentes, onde Kwon obteve $s_{cr} = 375$ MPa e deste trabalho tem-se $s_{cr} = 376,25$ MPa. A figura 4.6 mostra a forma do primeiro modo de flambagem para $a = 65$ mm.

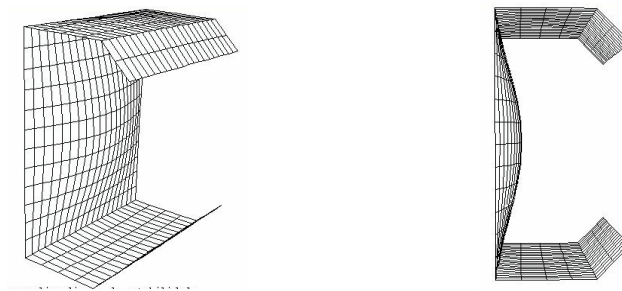


Figura 4.6 – Forma do primeiro modo de flambagem para $a=65$ mm.

4.2.3. Perfis I

O estudo foi feito baseando-se em trabalho apresentado por Degée (2000), no qual é feita a análise de uma barra de seção transversal em perfil I, ver figura 4.7, submetida a uma distribuição inicial de tensões de compressão uniforme uniaxial unitária. As dimensões apresentadas na figura 4.7 correspondem às medidas na linha do esqueleto.

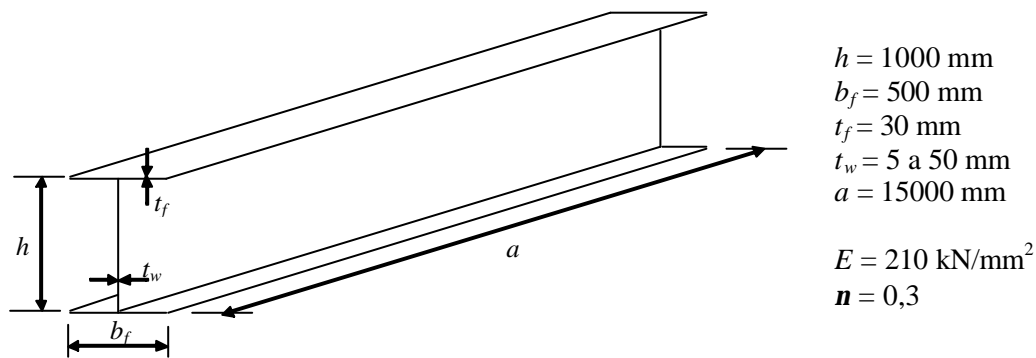


Figura 4.7 – Barra em perfil I considerada para análise.

Em seu trabalho, Degée (2000) obteve os resultados pela utilização de um método modificado de elementos finitos de barra, considerando 3 e 6 modos elementares transversais, os quais foram comparados por ele com resultados obtidos pelo método das faixas finitas (MFF). Um vez que esses resultados foram apresentados em gráfico, foi feito um levantamento dos valores de modo a tornar possível uma comparação.

Considera-se que o erro na determinação desses valores não seja significativo, uma vez que para a região de flambagem global, $P_{cr} = 5847,5$ kN os valores concordam bem com o valor teórico da carga crítica de Euler. Os resultados de Degée estão apresentados na Tabela 4.1, assim como os valores obtidos pela análise numérica.

t_w (mm)	h/t_w	P_{cr} (10^3 kN)					
		MFF	MEF – Degée		MEF - ABAQUS		
			3 modos	6 modos	Caso 1	Caso 2	Caso 3
50	20	5,875	5,875	5,875	5,660	5,660	5,642
33,33	30	5,8125	5,8125	5,8125	5,626	5,626	5,609
25	40	5,8125	5,8125	5,8125	5,632	5,632	5,615
20	50	5,8125	5,8125	5,8125	5,642	5,641	5,623
16,67	60	5,8125	5,8125	5,8125	5,651	5,649	5,631
14,29	70	5,75	5,75	5,75	5,658	5,656	5,638
12,5	80	5,75	5,75	5,75	5,663	5,661	5,643
11,11	90	5,75	5,75	5,75	5,668	5,665	5,647
10	100	5,1825	5,75	5,625	5,672	5,669	5,652
9,09	110	4,1875	5,0625	4,5625	5,676	5,146	4,472
8,33	120	3,4375	4,1875	3,75	4,941	4,255	3,696
7,69	130	2,875	3,5625	2,3125	4,157	3,577	3,107
7,14	140	2,4375	3,0	2,6875	3,543	3,046	2,645
6,67	150	2,125	2,5625	2,3125	3,060	2,629	2,283
6,25	160	1,875	2,25	2,0	2,661	2,286	1,985
5,88	170	1,625	2,0	1,75	2,335	2,005	1,741
5,56	180	1,4375	1,75	1,5625	2,072	1,779	1,544
5,26	190	1,25	1,5625	1,375	1,841	1,577	1,372
5	200	1,125	1,375	1,25	1,653	1,418	1,225
Caso 1 – b_f (4 divisões) / h (4 divisões) / a (30 divisões)							
Caso 2 – b_f (4 divisões) / h (8 divisões) / a (30 divisões)							
Caso 3 – b_f (4 divisões) / h (4 divisões para $20 \leq h/t_w \leq 40$, 8 divisões para $50 \leq h/t_w \leq 110$, 20 divisões para $120 \leq h/t_w \leq 190$ e 40 divisões para $h/t_w = 200$) / a (50 divisões)							

Tabela 4.1 – Valores de carga crítica em função da esbeltez da seção.

O estudo foi feito considerando as divisões apresentadas nos casos 1 a 3 da Tabela 4.1, de forma a avaliar a sensibilidade e a precisão quanto ao número de elementos.

Observou-se que a discretização do caso 3 levou a resultados que concordaram muito bem com todos os valores da literatura, portanto apenas esses foram plotados para comparação com os demais, conforme pode ser visto no gráfico da figura 4.8.

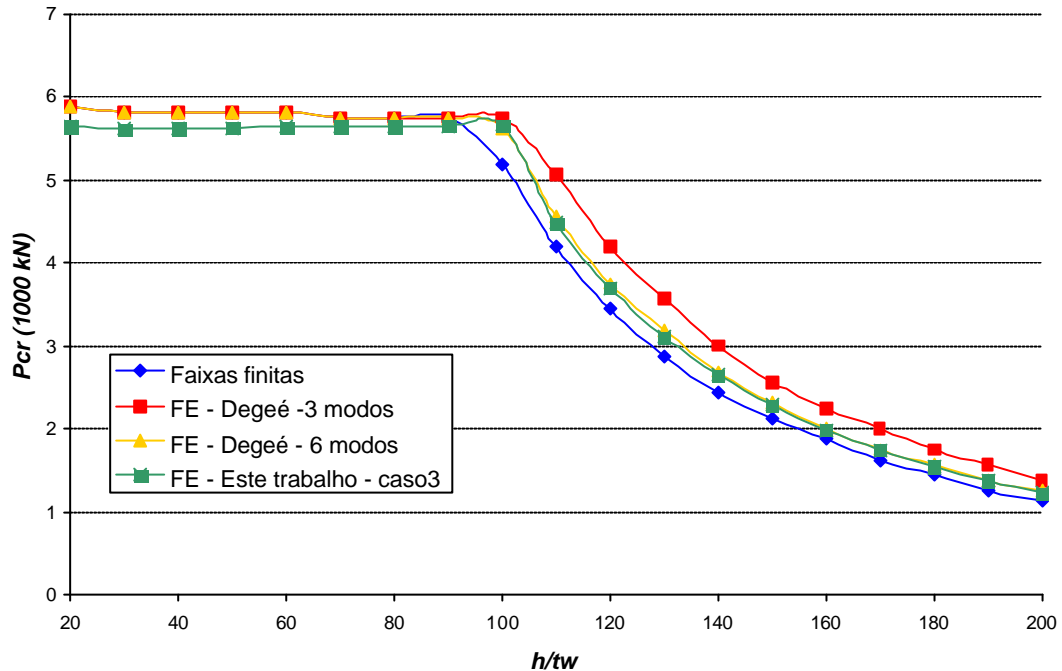


Figura 4.8 – Gráfico de carga crítica em função da esbeltez da seção I analisada.

Além disso, as configurações deformadas de todos os casos apresentaram os modos de flambagem esperados. A figura 4.9 mostra a configuração para as três regiões distintas do gráfico. A primeira (figura 4.9-a) corresponde à situação da barra com alma de pequena esbeltez ($h/t_w = 20$), de modo que o comportamento é condicionado pela flambagem global da barra. A segunda representa a região intermediária ($h/t_w = 100$), correspondente à transição nas curvas do gráfico, e onde pode ser observado o acoplamento dos modos de flambagem (figura 4.9-b). A terceira configuração corresponde à barra com grande esbeltez da alma ($h/t_w = 200$), e pode ser visto claramente que o comportamento é determinado apenas pela flambagem local (figura 4.9-c).

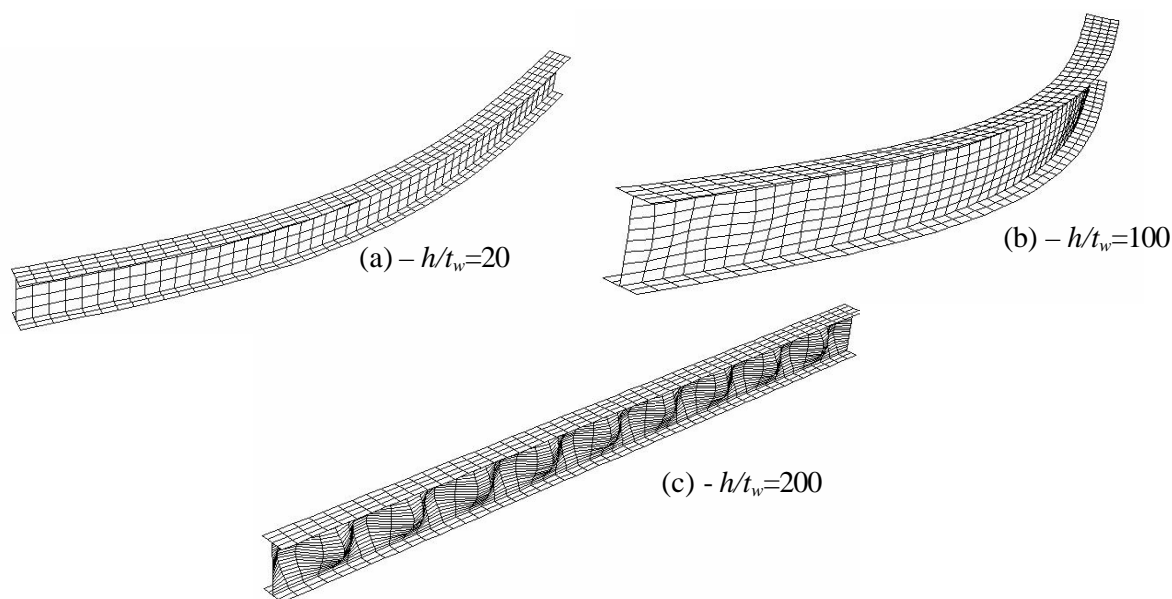


Figura 4.9 – Forma dos modos de flambagem do perfil I analisado.

4.2.4. *Estudo dos Parâmetros de Flambagem Elástica de Perfis I, U e Cantoneiras de Abas Iguais*

4.2.4.1. Perfis I e U

Para esses perfis foram consideradas separadamente duas situações distintas de ocorrência da flambagem local. Na primeira, considerou-se a flambagem local condicionada pelas mesas e, na segunda, condicionada pela alma.

Nas duas situações, foram tomadas seções de extremidade, inicial e final, simplesmente apoiadas, ver figura 4.10, com deslocamentos de translação na direção 3 e rotação na direção 4 impedidos, imposição do deslocamento vertical das mesas (direção 2) igual ao deslocamento vertical dos nós de encontro entre mesa e alma, e nó central restringido ao deslocamento de translação na direção 1. Além disso, foi adotada uma relação (a/b) da placa condicionante da instabilidade igual a 8, para evitar problemas de interferência da vinculação de extremidade no comportamento da barra.

Para o estudo da flambagem local condicionada pelas mesas, foram adotados perfis I e U com as dimensões de alma, mesas e comprimento longitudinal mostrados na figura 4.10, medidas na linha do esqueleto. Foram adotados perfis com diversas esbeltezes de alma, $(b/t)_w = h/t_w$, mantidas fixas, e para cada uma dessas esbeltezes variou-se a esbelteza das mesas, $(b/t)_f = b_f/2t_f$. As esbeltezes dos elementos foram estabelecidas variando-se a sua espessura, de modo que ficasse claramente caracterizado o desencadeamento da flambagem pelas mesas. Na geração da malha de elementos finitos, foram usados 600 elementos de (24 x 25) mm na alma e 600 elementos em cada mesa nos perfis I e 300 nos perfis U.

Para a flambagem local condicionada pela alma, as dimensões adotadas para os perfis I e U também são mostradas na figura 4.10. Procedendo de forma similar, adotou-se perfis com várias esbeltezes de mesa, $(b/t)_f = b_f/2t_f$, mantidas fixas e, para cada uma dessas esbeltezes, variou-se a esbelteza da alma, $(b/t)_w = h/t_w$. As esbeltezes das mesas foram escolhidas de modo que ficasse claramente caracterizado o desencadeamento da flambagem pela alma. Na geração da malha de elementos finitos, foram usados 576 elementos de (50 x 25) mm na alma e 576 elementos em cada mesa nos perfis I e 288 nos perfis U.

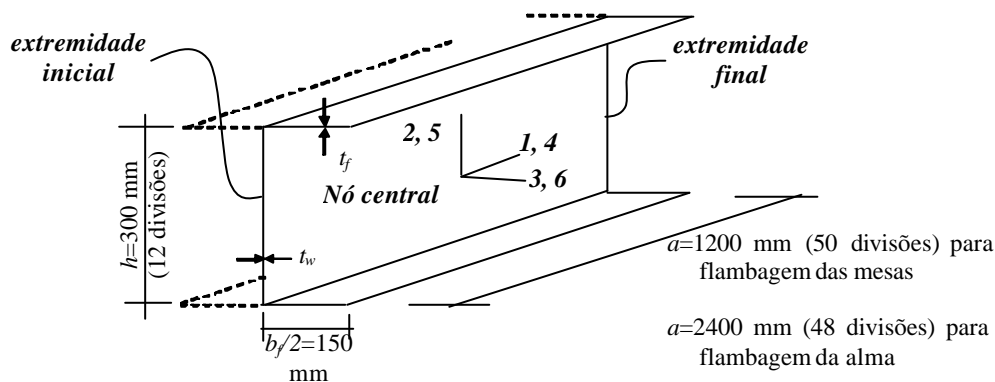


Figura 4.10 – Dimensões dos Perfis I e U.

Os valores do coeficiente de flambagem elástica K_p foram determinados por meio da equação (4.1), na qual a relação (b/t) foi adotada como a esbelteza do elemento condicionante da flambagem (mesas ou alma) e o valor da tensão crítica foi obtido por meio da análise numérica. Esses valores foram parametrizados em função da relação

entre as esbeltezes da alma e das mesas dos perfis, $(b/t)_w/(b/t)_f$, ajustados e utilizados no cálculo dos valores de $(b/t)_{máx}$, determinados pela equação (2.29).

Na figura 4.11 pode ser vista a flambagem local típica das mesas de um perfil I (figura 4.11-a) e de um perfil U (figura 4.11-b), e na figura 4.12 a flambagem local típica da alma desses perfis, todas obtidas numericamente e correspondentes ao primeiro modo de flambagem.

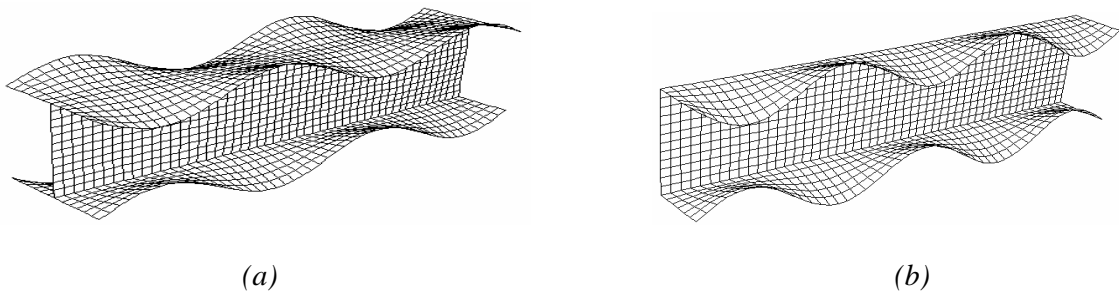


Figura 4.11 – Flambagem local das mesas (a) perfil I e (b) perfil U.

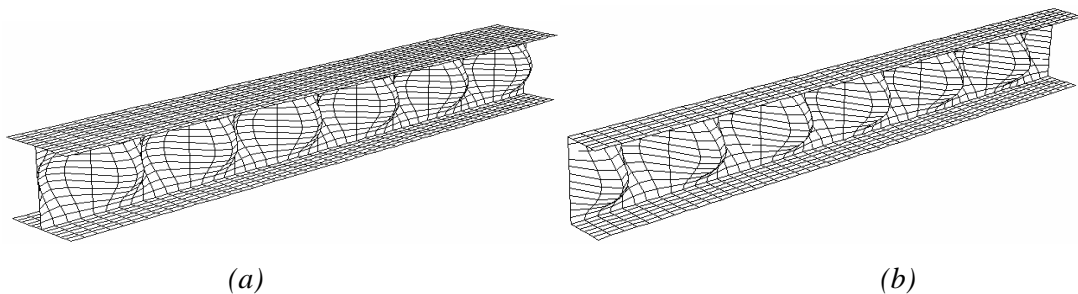


Figura 4.12 – Flambagem local da alma (a) perfil I e (b) perfil U.

Nas figuras 4.13 e 4.14 têm-se as curvas dos valores parametrizados e ajustados de K_p e de $(b/t)_{máx}$, respectivamente, em função da relação entre as esbeltezes da alma e das mesas, $(b/t)_w/(b/t)_f$, considerando as situações da flambagem local condicionada pela alma e pelas mesas dos perfis I e U. Como referência, são mostrados também os valores adotados pelo PR NBR 8800 (2006) e os valores para placas isoladas para as situações limites de vinculação das bordas longitudinais descarregadas, apresentados na figura 2.6 e estudados no item 3.2.

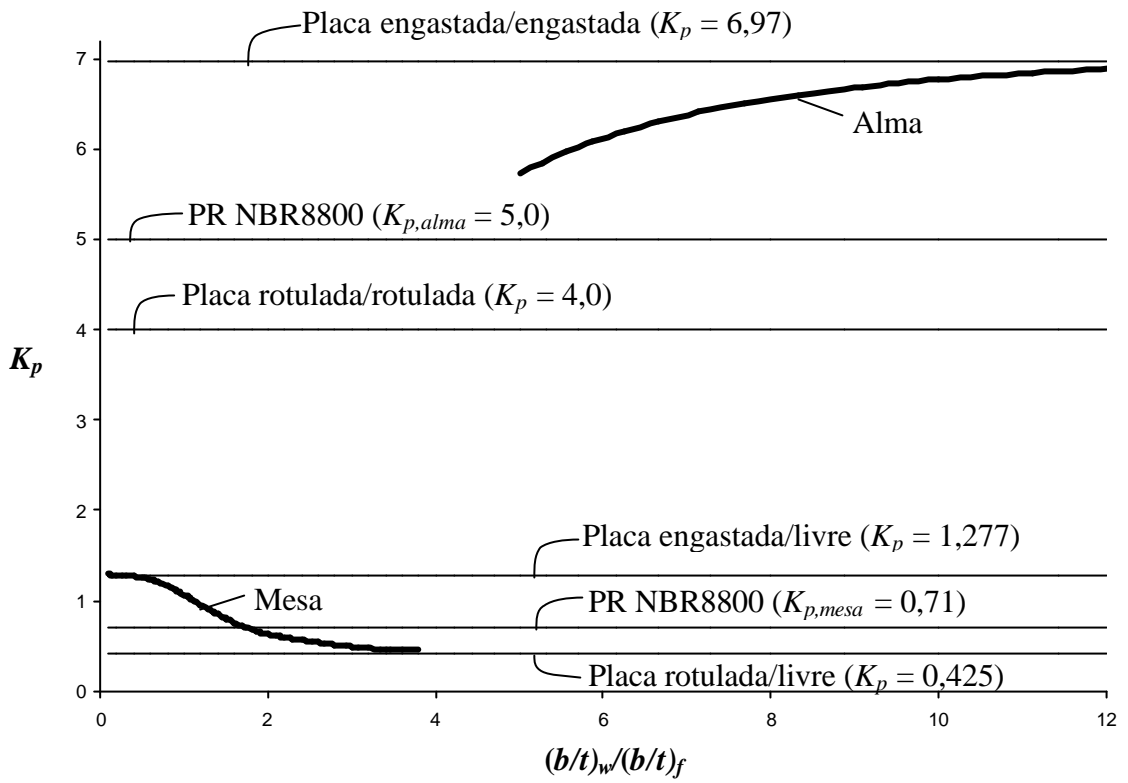


Figura 4.13 – Valores parametrizados de K_p para flambagem local da alma e das mesas.

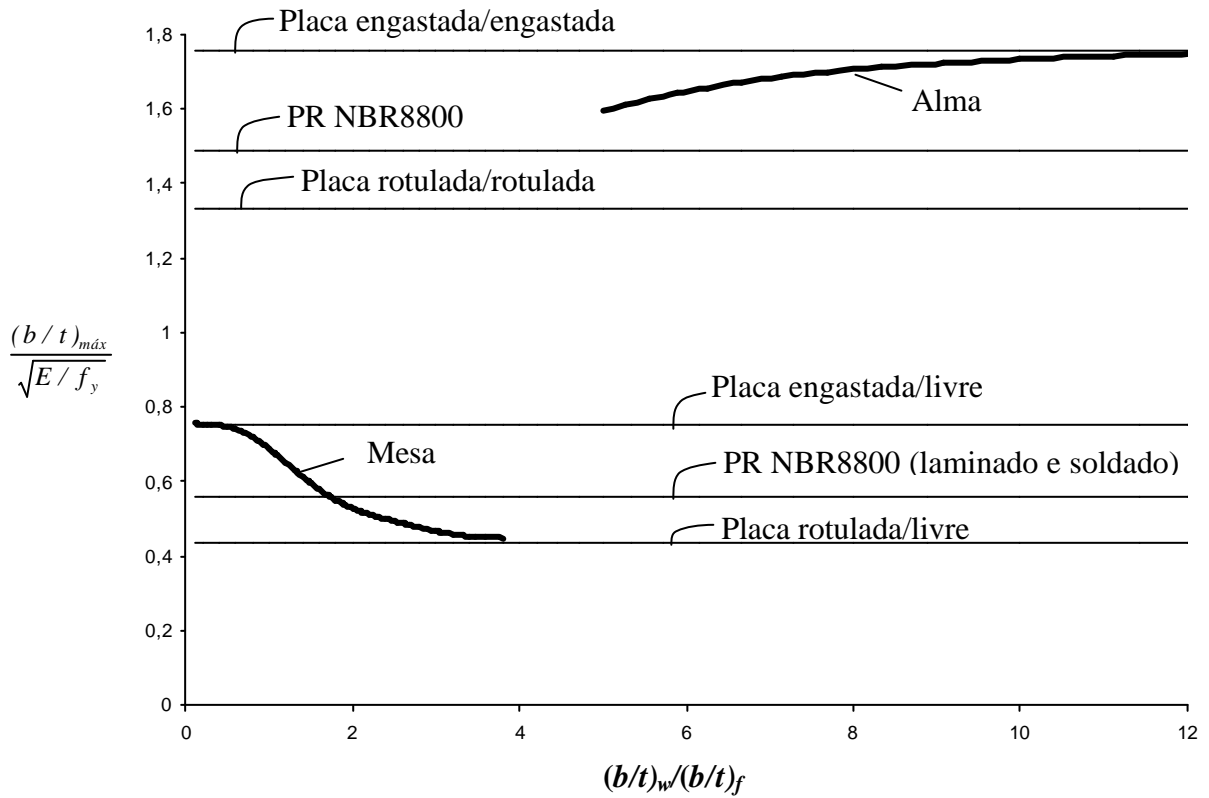


Figura 4.14 – Valores parametrizados de $(b/t)_{m\acute{a}x}$ para flambagem local da alma e das mesas.

Observando-se as figuras, verifica-se que, quando a relação entre as esbeltezes da alma e das mesas situa-se entre cerca de 3,8 e 5,0, não foram obtidos os valores de K_p e, conseqüentemente, de $(b/t)_{máx}$. Ao se pesquisar a flambagem local da alma nessa faixa, foi constatado que mesas e alma flambavam simultaneamente, com deslocamentos de, aproximadamente, a mesma magnitude, não permitindo a identificação, na análise numérica, do elemento condicionante da flambagem local.

Para a flambagem local condicionada pelas mesas, os resultados obtidos mostraram que os valores parametrizados de K_p variaram rigorosamente dentro dos limites de placas isoladas com uma borda longitudinal perfeitamente engastada e outra livre e com uma borda longitudinal perfeitamente rotulada e outra livre, dependendo da relação entre as esbeltezes da alma e das mesas, $(b/t)_w / (b/t)_f$, de acordo com a figura 4.13. Entretanto, observando-se os autovetores de flambagem da análise linearizada de estabilidade, verificou-se a ocorrência de modos de flambagem com várias semi-ondas longitudinais, diferentes do comportamento das placas isoladas, onde há formação de apenas uma semi-onda longitudinal (ver caso *E* da figura 2.6), indicando uma alteração comportamental devida à variação no grau de vinculação entre a mesa e a alma.

Conseqüentemente, os valores de $(b/t)_{máx}$ também ficaram dentro desses limites, porém, o valor adotado pelo PR NBR 8800 (2006) para $(b/t)_{máx}$, igual a $0,56(E/f_y)^{1/2}$ para perfis laminados e $0,64(k_c.E/f_y)^{1/2}$ para perfis soldados, ver Tabela 2.2, foi atingido apenas para $(b/t)_w / (b/t)_f$ igual a 1,8, conforme mostrado na figura 4.14. Observa-se então que, para valores de $(b/t)_w / (b/t)_f$ pequenos em relação ao limite 1,8, o comportamento das mesas se aproxima da placa com uma borda longitudinal perfeitamente engastada e outra livre, indicando que para essa situação o uso da Norma Brasileira conduz a resultados favoráveis à segurança. Por outro lado, quanto maiores são os valores de $(b/t)_w / (b/t)_f$ em relação a 1,8, mais o comportamento das mesas se aproxima da placa com uma borda longitudinal perfeitamente rotulada e outra livre, indicando que nessa faixa o uso da Norma Brasileira conduz a resultados contrários à segurança. Na faixa de variação da relação $(b/t)_w / (b/t)_f$ da figura 4.13 e para as esbeltezes de mesa e alma adotadas na análise, os valores de $(b/t)_{máx}$ foram iguais para os dois tipos de fabricação.

Para a flambagem local condicionada pela alma, os valores de K_p obtidos ficaram próximos do valor de placas com as bordas longitudinais perfeitamente engastadas, muito superiores ao valor de placas com as bordas longitudinais perfeitamente rotuladas e ainda bastante acima do valor adotado pelo PR NBR 8800 (2006), segundo a figura 4.13. Da análise linearizada de estabilidade observou-se que os modos de flambagem foram semelhantes aos das placas vinculadas nas duas bordas longitudinais, variando entre os casos A e C da figura 2.6, com formação de m semi-ondas longitudinais. Os valores de $(b/t)_{máx}$ foram sempre superiores ao valor adotado pela norma brasileira, igual a $1,49(E/f_y)^{1/2}$, ver Tabela 2.2, indicando que o uso da Norma Brasileira conduz a resultados favoráveis à segurança, como pode ser visto na figura 4.14.

É importante salientar que essa análise só é válida para o comportamento elástico linear e nos limites da relação entre as esbeltezes da alma e das mesas que permitem que a flambagem local seja condicionada por um ou outro componente do perfil.

4.2.4.2. Cantoneiras de abas iguais

De forma similar aos perfis I e U, foi estudada a estabilidade linear de cantoneiras de abas iguais. Na geração da malha de elementos finitos foram usados 800 elementos em cada aba, ver figura 4.15. Foram processadas diversas cantoneiras, variando-se a largura b e a espessura t das abas, medidas na linha do esqueleto, englobando relações de esbeltez (b/t) entre 4 e 20. O comprimento das cantoneiras, a , foi adotado sempre igual a 8 vezes a largura das abas.

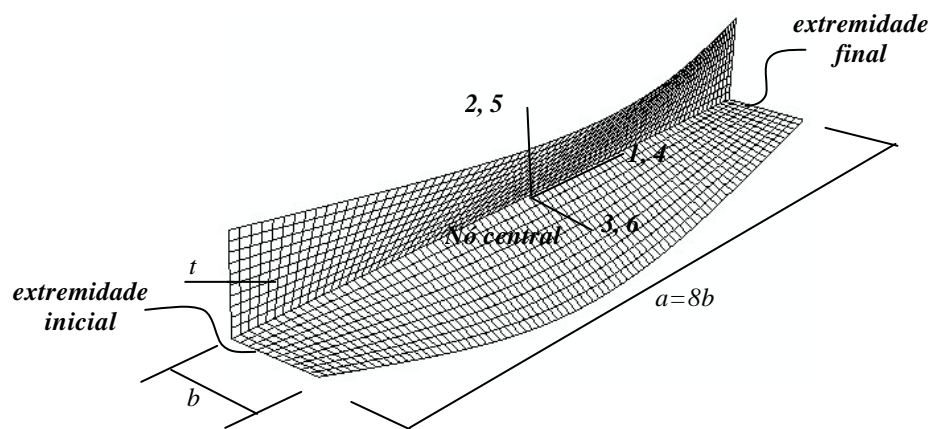


Figura 4.15 – Malha de elementos finitos e flambagem local das abas de uma cantoneira.

As seções de extremidade, inicial e final, foram consideradas como rotuladas, com os deslocamentos de translação nas direções 2 e 3 e rotação na direção 4 impedidos e os demais deslocamentos livres. O nó central foi restringido ao deslocamento de translação na direção 1. Além disso, para impedir qualquer interferência do modo de flambagem global, inclusive de flexo-torção, impediu-se os deslocamentos transversais (direções 2 e 3) dos nós de encontro das abas. O carregamento foi aplicado no centro de gravidade da barra. A figura 4.15 apresenta a configuração de flambagem local típica das abas.

Foram obtidos os valores do coeficiente de flambagem elástica K_p em função das esbeltezes das abas das cantoneiras, mostrados na figura 4.16. Ainda nessa figura, como referência, vê-se também o valor adotado pelo PR NBR 8800 (2006) e apresentado na Tabela 2.2 ($K_p = 0,46$), o qual é próximo ao das placas com uma borda longitudinal perfeitamente rotulada e a outra livre, igual a 0,425 (caso *E* da figura 2.6).

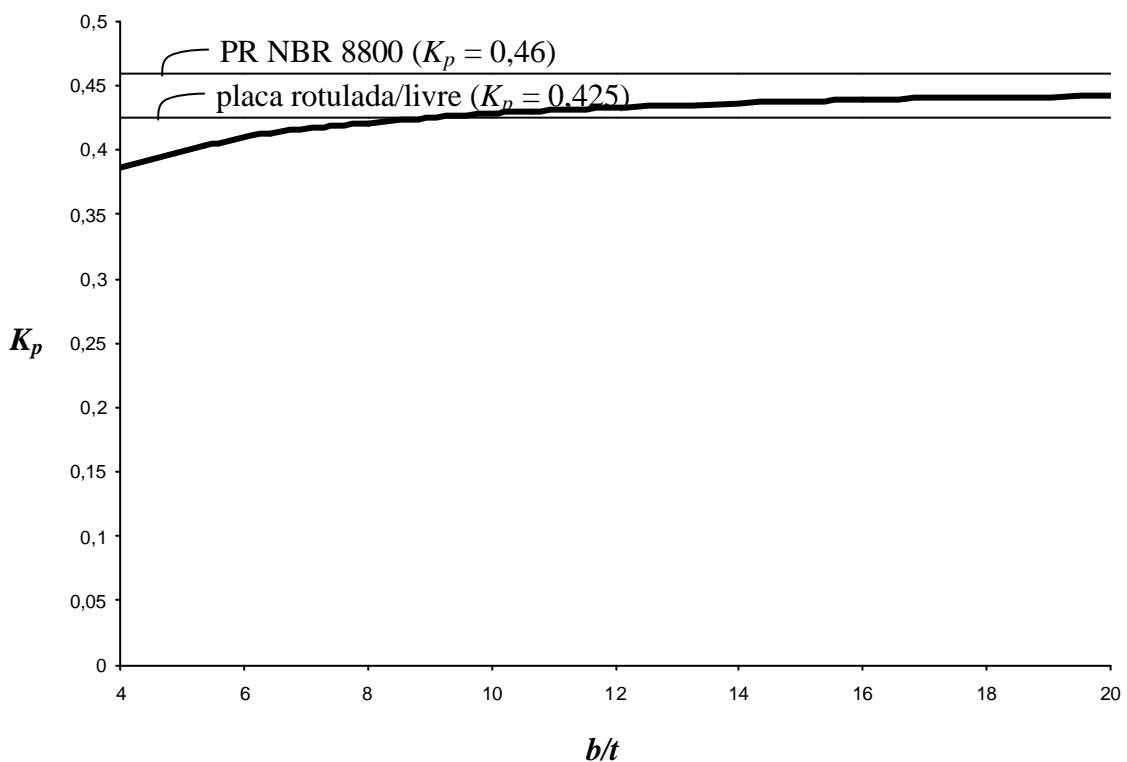


Figura 4.16 – Valores de K_p para instabilidade local das abas das cantoneiras.

Pode-se observar que os valores de K_p variam em torno do valor de placas com uma borda longitudinal perfeitamente rotulada e outra livre, tendendo assintoticamente para o valor adotado pela norma, os quais são sempre superiores.

Na figura 4.17 são mostrados os valores de $(b/t)_{m\acute{a}x}$ das abas, obtidos pela equação (2.29) e utilizando-se os valores do coeficiente K_p mostrados na figura 4.16.

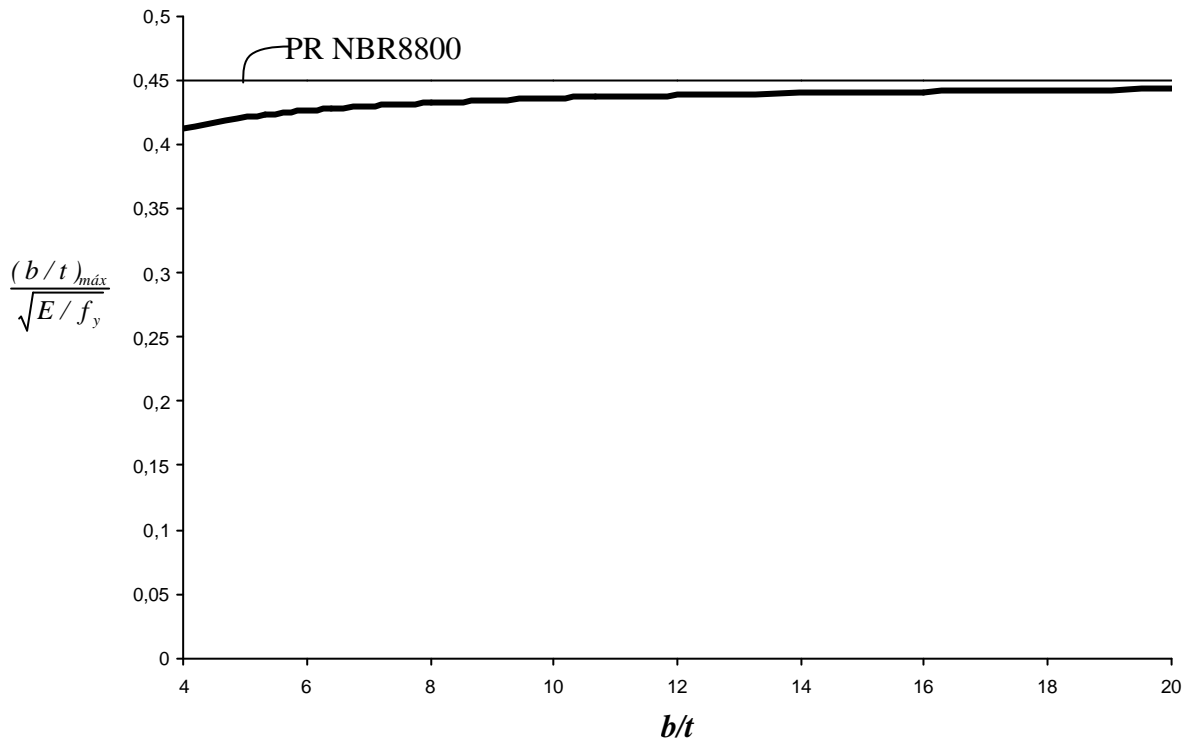


Figura 4.17– Valores de $(b/t)_{m\acute{a}x}$ para instabilidade local das abas das cantoneiras.

Os valores de $(b/t)_{m\acute{a}x}$ foram sempre inferiores ao valor adotado pelo PR NBR 8800 (2006), igual a $0,45(E/f_y)^{1/2}$, ver Tabela 2.2, como mostrado na figura 4.17. Deve-se notar que, pela Norma Brasileira, não há instabilidade local enquanto a relação (b/t) não superar o valor constante igual a $0,45(E/f_y)^{1/2}$. Pelos resultados obtidos na análise numérica, esse limite varia entre $0,413(E/f_y)^{1/2}$, quando (b/t) é igual a 4, e $0,443(E/f_y)^{1/2}$, quando (b/t) é igual a 20.

4.3. Análise da Pós-Flambagem

4.3.1. Perfil U enrijecido

Para barras de perfil U enrijecido foram analisados primeiramente dois casos estudados por Prola (2001) com a forma mostrada na figura 4.18 e dimensões da seção transversal e propriedades do aço diferentes para cada caso. Em ambos, da análise linearizada de estabilidade, obteve-se o deslocamento máximo na alma, tendo sido considerada uma imperfeição inicial igual a 10% da espessura da alma, com o controle da deformação feito pelo deslocamento de flexão da alma (w_a).

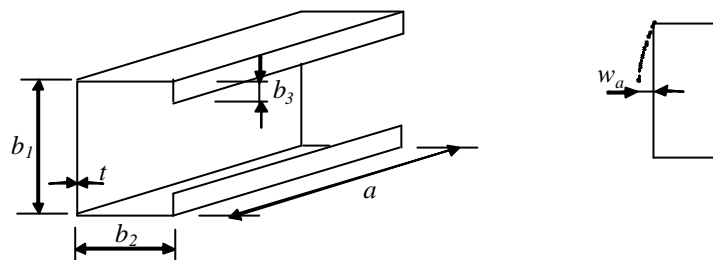


Figura 4.18 – Configurações do perfil U enrijecido e do controle de deformação.

Caso 1:

Foram consideradas as seguintes relações entre as dimensões da seção transversal: $b_2/b_1=1$; $b_3/b_1=0,05$; $b_1/t=100$ e $a/b_1=0,8$. Adotou-se $t=1$ mm, $E=200$ GPa e $n=0,3$. O deslocamento máximo na alma obtido na análise numérica foi igual a $w_a=-0,9452$ mm, portanto a deformação inicial da geometria foi $w_{a0}=-0,1058$ mm.

Em seu estudo Prola (2001) utilizou o MFF com número de faixas (n_f) igual a 28, correspondente ao número de estações (n_e) igual a 11, número de divisões no comprimento longitudinal, portanto, para calibração da melhor forma de modelagem discretizou-se a seção com número equivalente de elementos (b_1 , b_2 e b_3 em 10, 8, e 1 elementos, respectivamente) e o comprimento longitudinal a em 10 divisões.

Na figura 4.19 pode ser visto o gráfico parametrizado ($s/s_{cr} \times w_a/t$), com as curvas de pós-flambagem obtidas por Prola e da análise numérica realizada. Foi apresentado um

ponto de referência para comparação de resultados, de modo que, para $s/s_{cr}=1,5$ Prola obteve $w_a/t=1,57$ e deste estudo obteve-se $w_a/t=1,56$. Portanto, pode ser observado, tanto pelo gráfico quanto pelo valor de referência fornecido, que os resultados da análise numérica são praticamente coincidentes com os resultados do MFF de Prola.

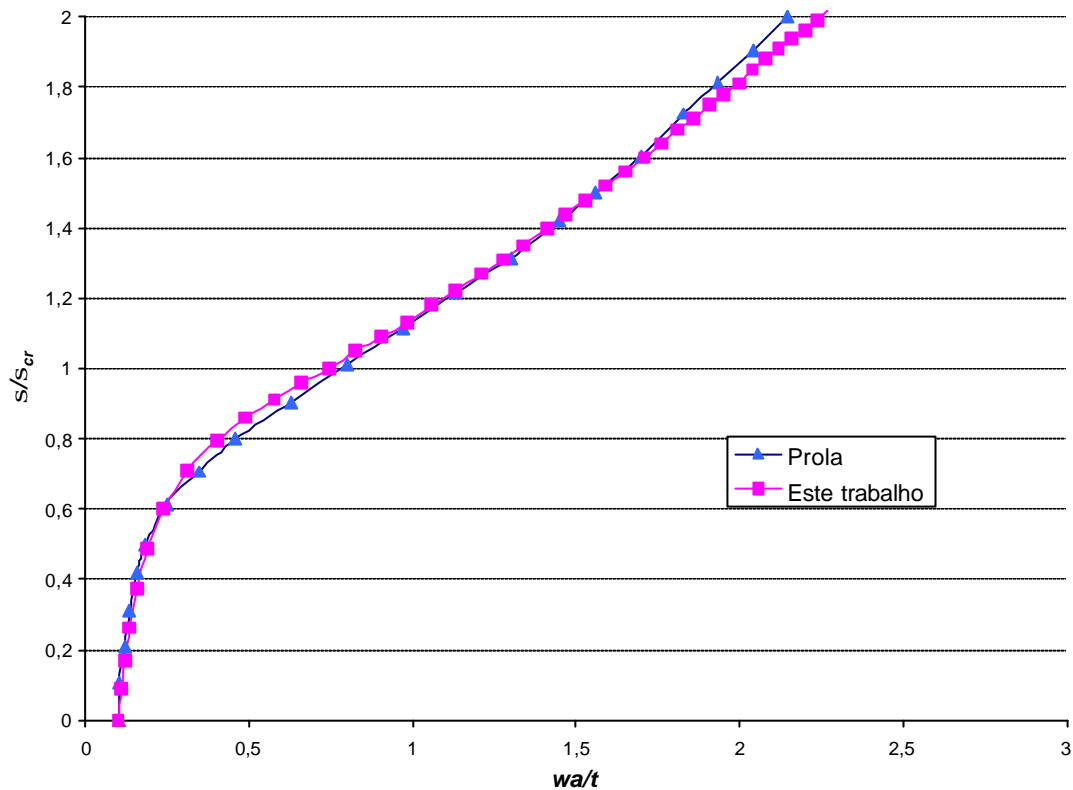


Figura 4.19 – Curvas de pós-flambagem - compressão centrada de perfil U enrijecido - Caso 1.

Caso 2:

As dimensões da seção transversal adotadas foram: $b_1=118,7\text{mm}$; $b_2=88,7\text{mm}$; $b_3=15\text{mm}$; $t=1,08\text{mm}$ e comprimento longitudinal $a=109\text{mm}$. Considerou-se $E=205\text{GPa}$ e $\nu=0,3$. O deslocamento máximo na alma obtido na análise numérica foi igual a $w_a=1\text{mm}$, sendo que a deformação inicial da geometria foi $w_{a0}=0,108\text{mm}$. Nesse caso Prola utilizou o MFF com número de faixas (n_f) igual a 26 e número de estações (n_e) de 11 a 13, portanto, adotou-se na discretização da barra b_1 , b_2 e b_3 com 12, 6, e 1 elementos, respectivamente, e o comprimento longitudinal a com 12 divisões.

Os resultados de Prola foram plotados no gráfico parametrizado ($s/s_{cr} \times w_a/t$) da figura 4.20, juntamente com os valores obtidos da análise de pós-flambagem realizada. Mais uma vez pode ser observado uma excelente concordância dos resultados.

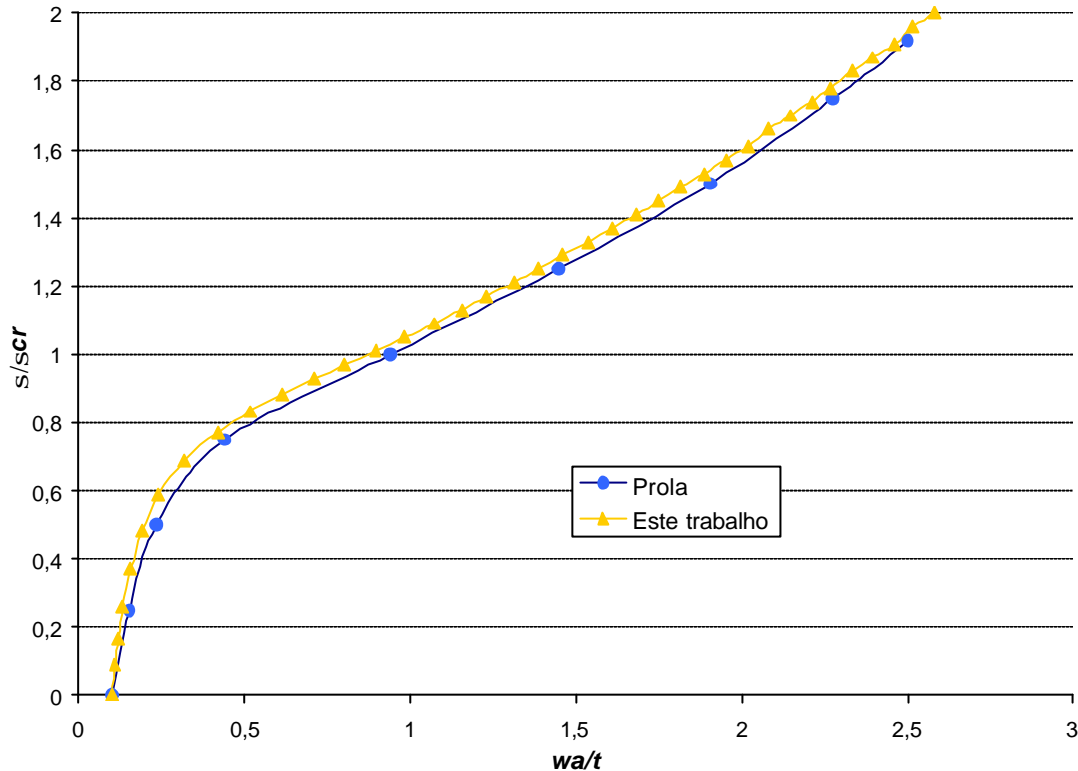


Figura 4.20 – Curvas de pós-flambagem - compressão centrada de perfil U enrijecido – Caso 2.

Além dessas análises, foi feita uma análise adicional com o perfil U enrijecido, para verificação do comportamento de pós-flambagem quando a barra está submetida a um carregamento uniaxial de compressão não uniforme, portanto, com variação de tensão ao longo da seção transversal. Analisou-se o caso em que o perfil está submetido à flexão pura.

A seção transversal considerada possui as dimensões iguais às apresentadas no caso 2, porém, com o comprimento longitudinal a igual a 83 mm. Considerou-se $E=205$ GPa, $n=0,3$. Da análise linearizada de estabilidade obteve-se o deslocamento máximo na mesa superior, mesa comprimida, igual a $w_b=1$ mm, portanto, adotou-se uma imperfeição inicial igual a 10% da espessura da mesa superior e o controle da

deformação foi feito pelo deslocamento de flexão da mesa superior, sendo a deformação inicial da geometria $w_{bo}=0,108\text{mm}$. A discretização da seção foi feita com b_1 , b_2 e b_3 em 12, 8, e 2 elementos, respectivamente, e o comprimento longitudinal a em 10 divisões.

A figura 4.21 mostra as curvas de pós-flambagem no gráfico parametrizado (s/s_{cr} x w_b/t), com os valores obtidos por Prola e os valores obtidos da análise numérica realizada. Observou-se novamente boa concordância dos resultados.

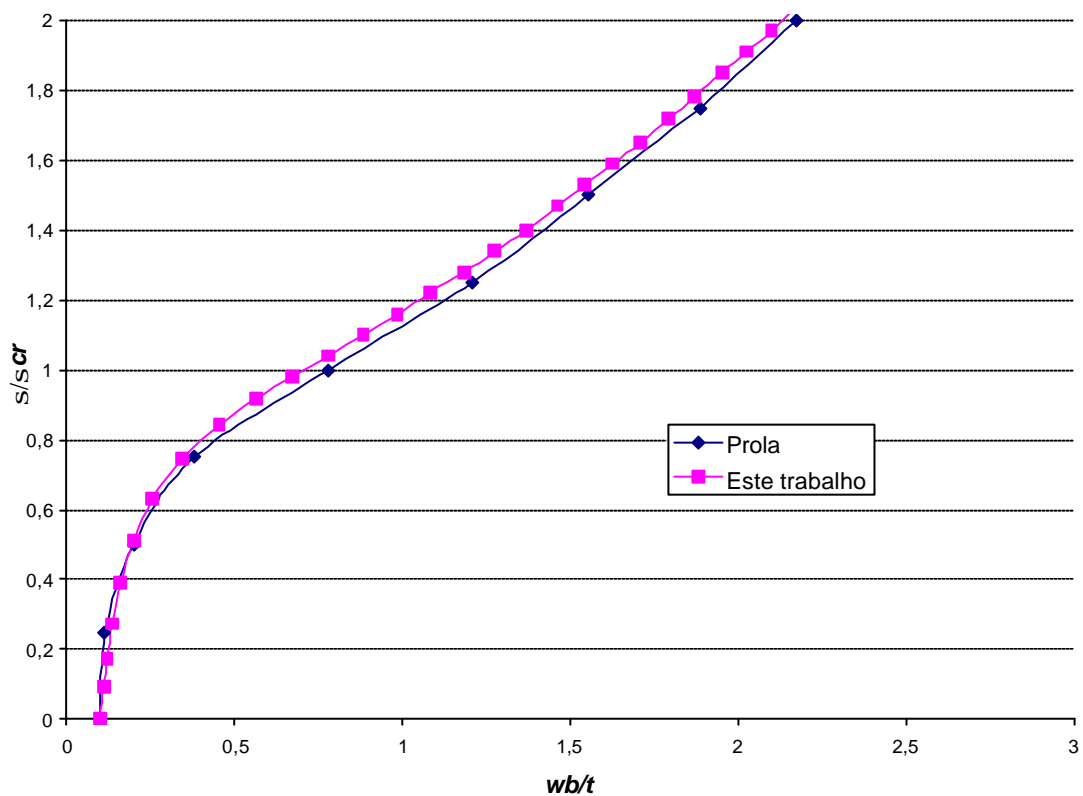


Figura 4.21 – Curvas de pós-flambagem para flexão pura de perfil U enrijecido.

4.3.2. Perfis Tipo Rack

Para continuação do estudo da pós-flambagem e confirmação da sistemática de modelagem e definição da análise, foi analisado o perfil tipo rack e comparado com dados da literatura. A geometria do perfil e a configuração para controle da deformação são mostradas na figura 4.22.

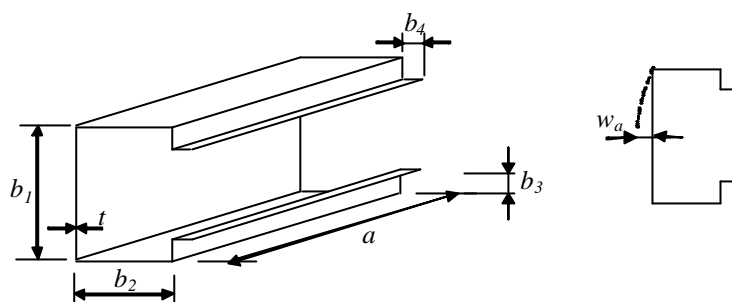


Figura 4.22 – Configurações do perfil tipo rack e do controle de deformação.

Primeiramente foi estudado um perfil com dimensões da seção transversal $b_1=134,7\text{mm}$; $b_2=79,7\text{mm}$; $b_3=24,7\text{mm}$; $b_4=46,8\text{mm}$; $t=2,3\text{mm}$ e comprimento longitudinal $a=109\text{mm}$. Considerou-se $E=205\text{ GPa}$, $\nu=0,3$. Da análise linearizada de estabilidade obteve-se o deslocamento máximo na alma igual a $w_a=1\text{mm}$, portanto, foi adotada uma imperfeição inicial igual a 10% da espessura da alma e o controle da deformação foi feito pelo deslocamento de flexão da alma, sendo a deformação inicial da geometria $w_{a0}=0,23\text{mm}$.

A seção foi discretizada em 8, 4, 1 e 2 elementos para as dimensões b_1 , b_2 , b_3 e b_4 , respectivamente. Para o comprimento longitudinal a foram consideradas 6 divisões.

Os resultados obtidos da análise numérica de pós-flambagem foram plotados, juntamente com os valores obtidos na análise com o MFF de Prola (2001), no gráfico parametrizado $(S/S_{cr} \times w_a/t)$ da figura 4.23. Pode ser observado que, para essa seção, também foi verificada ótima concordância entre os resultados.

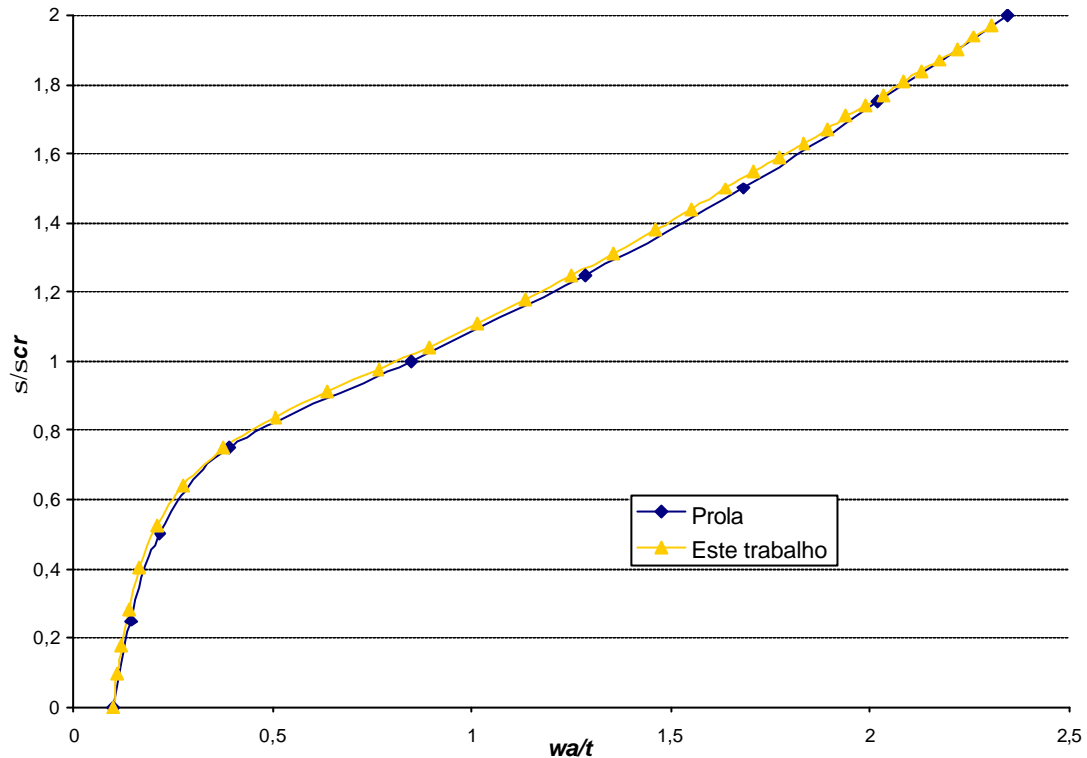


Figura 4.23 – Curvas de pós-flambagem para compressão centrada de perfil tipo rack – comparação com valores de Prola (2001).

Para comparação com resultados que também tivessem sido obtidos pelo MEF, foram verificados os valores obtidos por Nagahama (2002) em seu estudo da pós-flambagem de perfis rack com a utilização do ABAQUS. Portanto, essa análise de pós-flambagem deveria reproduzir os resultados encontrados por ele.

Considerou-se um perfil com dimensões da seção transversal: $b_1=134,7$ mm; $b_2=79,7$ mm; $b_3=24,7$ mm; $b_4=46,85$ mm; $t=2,3$ mm e comprimento longitudinal $a=107,57$ mm. Adotou-se $E=210$ GPa e $\nu=0,3$. Da análise linearizada de estabilidade obteve-se o deslocamento máximo na alma igual a $w_a=1$ mm, portanto, adotou-se uma imperfeição inicial igual a 10% da espessura da alma e o controle da deformação foi feito pelo deslocamento de flexão da alma, sendo a deformação inicial da geometria $w_{a0}=0,1$ mm (figura 4.22).

A seção foi discretizada em 16, 10, 3 e 5 elementos para as dimensões b_1 , b_2 , b_3 e b_4 , respectivamente. Para o comprimento longitudinal a foram consideradas 12 divisões.

Da análise linearizada de estabilidade obteve-se $s_{cr}=275,36$ MPa, com o modo local de placa correspondente a esse autovalor apresentando a formação de uma semi-onda longitudinal. Esses resultados coincidem exatamente com os de Nagahama.

Da análise da pós-flambagem foram obtidos os resultados plotados no gráfico parametrizado ($s/s_{cr} \times w_a/t$) da figura 4.24, bem como os resultados de Nagahama e pode-se observar que são praticamente coincidentes. Considera-se que a pequena diferença dos valores é devido ao fato de que os valores de Nagahama apresentados na figura foram determinados diretamente do gráfico apresentado em seu trabalho, e existem pequenos erros de precisão.

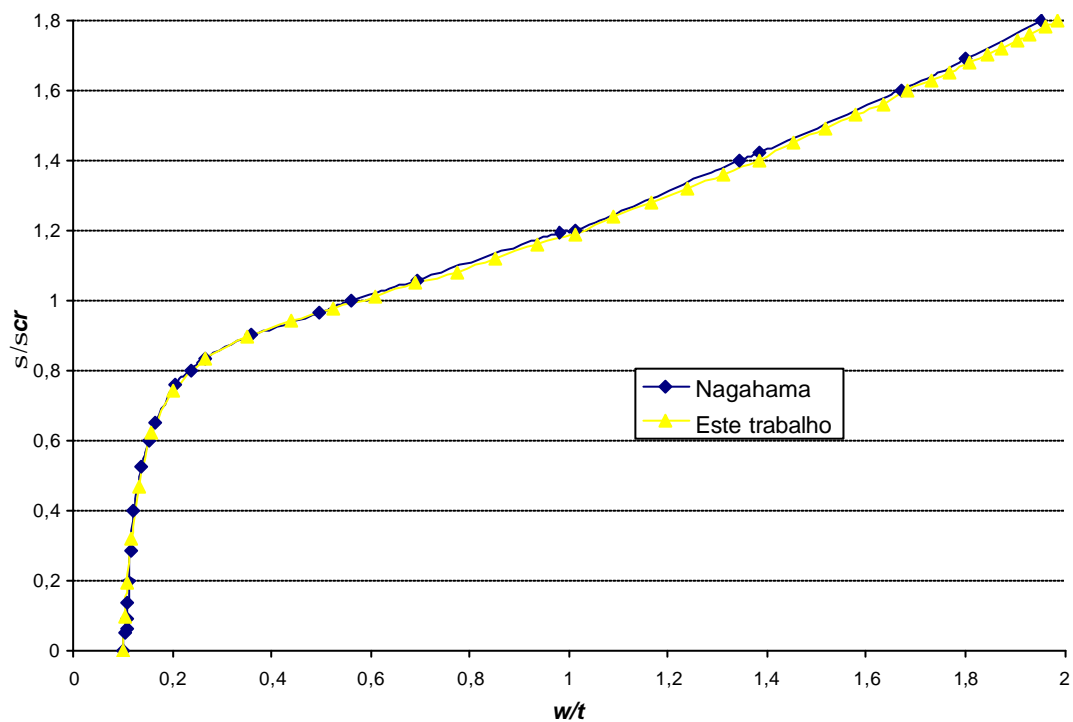


Figura 4.24 – Curvas de pós-flambagem para compressão centrada de perfil tipo rack – comparação com valores de Nagahama (2002).

4.3.3. Abordagem por Aproximações na Análise

Para a implementação e análise dos perfis I duplamente simétricos e das cantoneiras de abas iguais, foram pesquisados na literatura estudos de caso e medições experimentais, que possibilitassem uma comparação de resultados, porém, pouca coisa foi encontrada.

Para o perfil I tem-se um estudo de Shen e Zhang (1992) de uma seção com a geometria mostrada na figura 4.25. Entretanto, esse trabalho não fornece informações suficientes para que seja possível uma comparação de resultados, portanto, foi realizada um estudo baseado nos dados informados, com o objetivo de se aplicar a sistemática de modelagem e análise utilizada para os outros perfis e se avaliar qualitativamente os resultados encontrados.

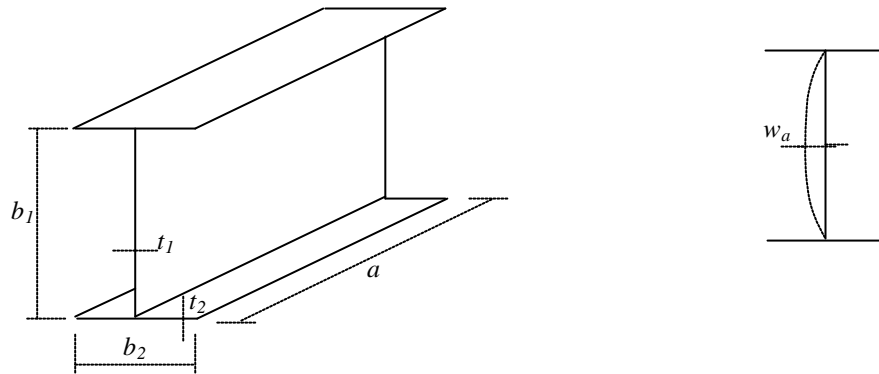


Figura 4.25 – Configurações do perfil I e do controle de deformação.

As dimensões consideradas para a seção transversal foram: $b_1=468,1\text{ mm}$; $b_2=288,3\text{ mm}$; $t_1=8,5\text{ mm}$; $t_2=11,4\text{ mm}$ e comprimento longitudinal $a=500\text{ mm}$. Considerou-se $E=205,8\text{ GPa}$, $\nu=0,3$. Da análise linearizada de estabilidade obteve-se o deslocamento máximo na alma igual a $w_a=1\text{ mm}$, portanto, foram consideradas imperfeições iniciais iguais a 10% e 1% da espessura da alma e o controle da deformação foi feito pelo deslocamento de flexão da alma (w_a), sendo analisadas deformações iniciais da geometria $w_{a0}=0,1\text{ mm}$ e $0,01\text{ mm}$, respectivamente.

A seção foi discretizada em 10 elementos para a dimensão b_1 e 6 elementos para a dimensão b_2 . Para o comprimento longitudinal a foram consideradas 10 divisões. Os resultados obtidos da análise numérica foram plotados no gráfico carga x deslocamento ($P \times w_a$) da figura 4.26.

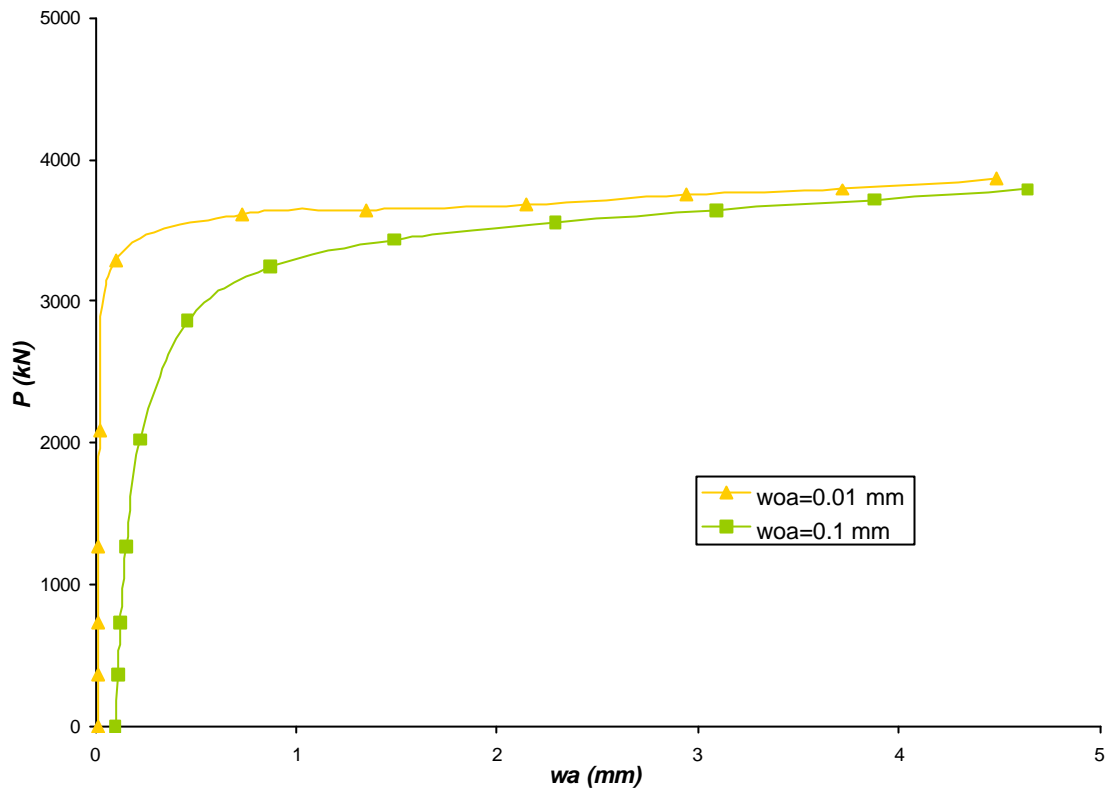


Figura 4.26 – Curvas de pós-flambagem para compressão centrada de perfil I.

Observa-se que as curvas apresentam o comportamento esperado, com a barra de menor imperfeição inicial com comportamento mais próximo ao de uma barra ideal (bifurcação de equilíbrio).

Optou-se pela validação dos resultados através da comparação do comportamento dos elementos constituintes da seção transversal com o de placas isoladas.

4.3.3.1. Comparação da alma com placa simplesmente apoiada nas quatro bordas

Primeiramente foram estudadas barras com seções transversais em perfis I e U enrijecido, com as dimensões e as propriedades do aço apresentadas na figura 4.27, simplesmente apoiadas nas extremidades transversais. Adotou-se para as almas dimensões equivalentes à de uma placa quadrada, e mesas com pequena rigidez de modo a simular rótulas na região de encontro das mesas com a alma. Foram usados enrijecedores de borda nas mesas para se evitar que a flambagem local fosse

condicionada por elas. Dessa forma, pode-se observar o comportamento dessas barras quanto à flambagem local da alma e compará-las ao estudo da placa quadrada simplesmente apoiada nas quatro bordas, ver item 3.3.

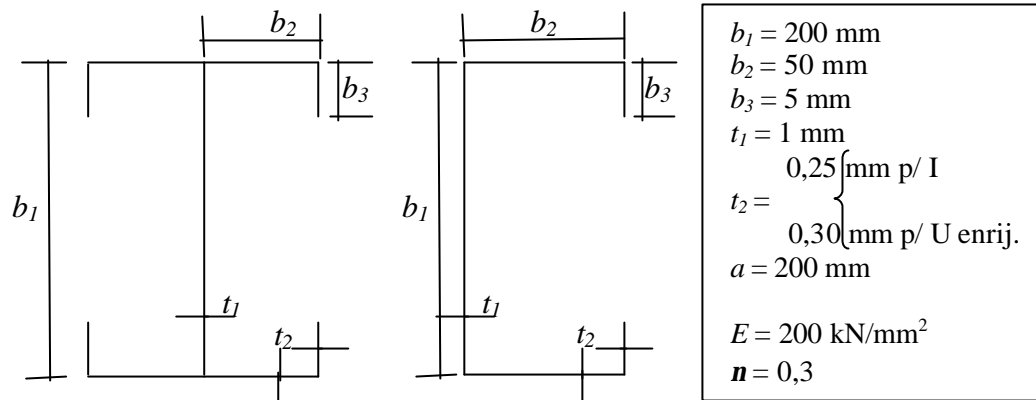


Figura 4.27 – Dimensões dos perfis I e U enrijecido para comparação com a placa simplesmente apoiada nas quatro bordas.

O número de elementos utilizado foi o mesmo da placa quadrada, ou seja, 20 elementos em b_1 e em a , e na dimensão b_2 foram utilizados 10 elementos. Da análise linearizada de estabilidade foram obtidos os valores da tensão crítica de flambagem elástica (s_{cr}) igual a $18,547 \text{ N/mm}^2$ para o perfil U enrijecido e $18,622 \text{ N/mm}^2$ para o perfil I, com diferenças de aproximadamente 2% em relação ao valor obtido para a placa quadrada, ver item 3.3. Para os dois perfis, o primeiro modo de flambagem correspondeu à flambagem local condicionada pela alma, ver figura 4.28, com a configuração deformada correspondente à de placa simplesmente apoiada nas quatro bordas.

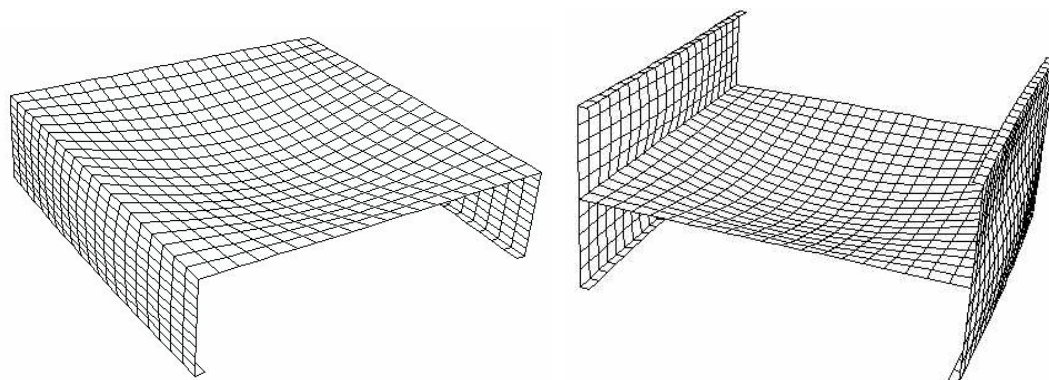


Figura 4.28 – Primeiro modo de flambagem dos perfis U enrijecido e I, similar ao de placa simplesmente apoiada nas quatro bordas.

Na análise da pós-flambagem foi considerada, em ambos os casos, uma imperfeição inicial igual a 10% da espessura do elemento b_1 (alma dos perfis), com controle do deslocamento do nó central da placa. Na figura 4.29 podem ser vistas as curvas parametrizadas carga x deslocamento que descrevem o comportamento de pós-flambagem de todos os casos analisados e também o obtido por Prola (2001) com o MFF.

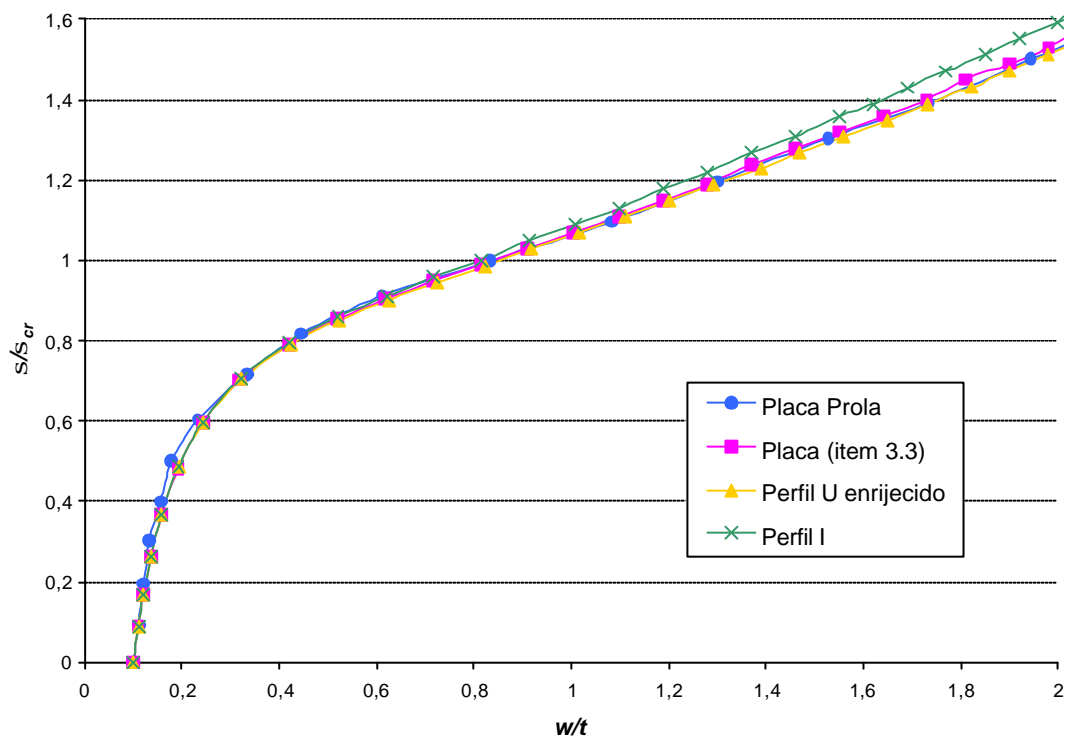


Figura 4.29 – Curvas de pós-flambagem comparativas da placa simplesmente apoiada nas quatro bordas e dos perfis I e U enrijecido.

Da figura observa-se que o perfil U enrijecido apresentou resultados coincidentes com os da análise da placa do item 3.3 e os de Prola (2001), porém, para o perfil I, após o início da flambagem ($s/s_{cr} > 1$), nota-se um aumento de resistência devido à existência de mesas contínuas em cada borda longitudinal, alterando ligeiramente o grau de vinculação e conferindo um pequeno enrijecimento adicional, diferentemente do perfil U enrijecido que possui apenas uma mesa em cada borda. Entretanto, essas diferenças são pequenas e considera-se que, de modo geral, os perfis apresentaram comportamento bastante aproximado ao da placa quadrada.

4.3.3.2. Comparação da mesa com placa simplesmente apoiada em uma borda longitudinal e livre na outra

Primeiramente analisou-se uma placa quadrada ($a/b = 1$) com as bordas transversais carregadas simplesmente apoiadas, similar à realizada no item 3.2.5, com parâmetros mostrados na figura 4.30, considerando imperfeição inicial igual a 10% da espessura t , e com controle do deslocamento vertical do nó C da extremidade livre.

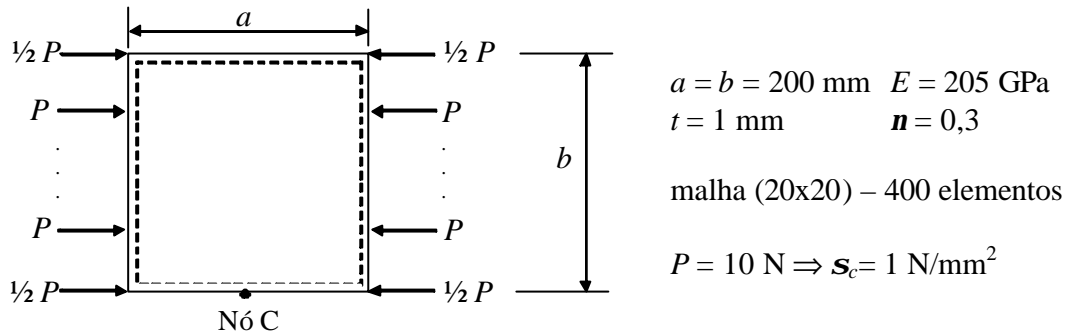


Figura 4.30 – Parâmetros da análise de placa simplesmente apoiada em uma borda longitudinal e livre na outra.

Em seguida foram estudadas barras com seções transversais em perfil I, com as dimensões, medidas na linha do esqueleto, e as propriedades do aço apresentadas na figura 4.31, e simplesmente apoiadas nas extremidades transversais. Adotou-se alma de pequena rigidez de modo a simular rótulas na região de encontro com as mesas, e mesas com dimensões equivalentes à da placa quadrada.

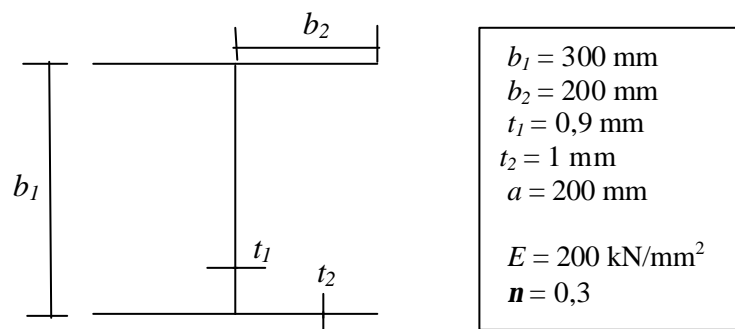


Figura 4.31 – Dimensões do perfil I para comparação com placa simplesmente apoiada em uma borda longitudinal e livre na outra.

Foram geradas malhas nas mesas iguais à da placa quadrada, ou seja, 20 elementos em b_2 e 20 elementos em a , e na dimensão b_1 foram utilizados 30 elementos. Da análise inicial linearizada de estabilidade foram obtidos os valores da tensão crítica de flambagem elástica (S_{cr}) iguais a $6,50 \text{ N/mm}^2$ para a placa, e $7,50 \text{ N/mm}^2$ para o perfil I, com diferença de aproximadamente 15%. O primeiro modo de flambagem do perfil correspondeu à flambagem local condicionada pela mesa, ver figura 4.32, com a configuração deformada correspondente à da placa simplesmente apoiada em uma borda longitudinal e livre na outra. Entretanto, deve-se salientar que já foi observado anteriormente, item 4.2.4.1, que em placas longas esses modos locais são diferentes, com as mesas do perfil apresentando a formação de diversas semi-ondas longitudinais e a placa isolada apenas uma.

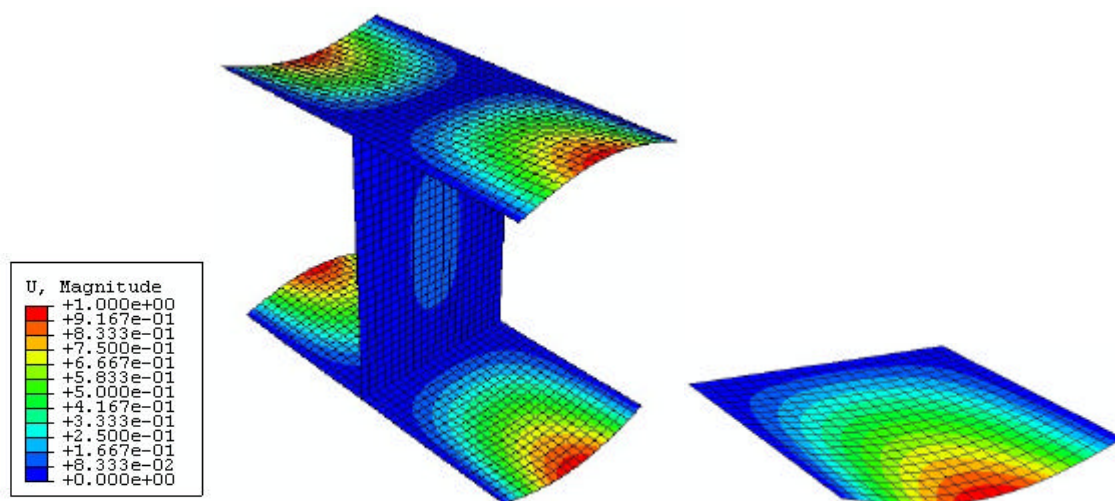


Figura 4.32 – Primeiro modo de flambagem do perfil I, similar ao de placa simplesmente apoiada em uma borda longitudinal e livre na outra.

Considera-se que essas diferenças, numérica e comportamental, devem-se, principalmente, à rigidez da borda longitudinal da mesa do perfil no encontro com a alma. Essa rigidez é proporcionada não apenas pela alma, mas também pela continuação da mesa do outro lado da alma. Foram analisadas diversas alturas e espessuras de alma procurando reduzir essa rigidez, de modo que ela fornecesse suporte às mesas correspondendo a um apoio rotulado, porém, que não condicionasse a flambagem local, e a melhor relação de esbeltez de alma encontrada foi essa utilizada nas análises, mostrada na figura 4.31.

Para a análise da pós-flambagem foi considerada, em ambos os casos, uma imperfeição inicial igual a 10% das espessuras da placa e do elemento b_2 (mesa do perfil), com controle do deslocamento do nó C , na borda livre da placa, e do nó central da borda livre da mesa superior. Na figura 4.33 podem ser vistas as curvas parametrizadas carga/deslocamento que descrevem o comportamento de pós-flambagem dos casos analisados.

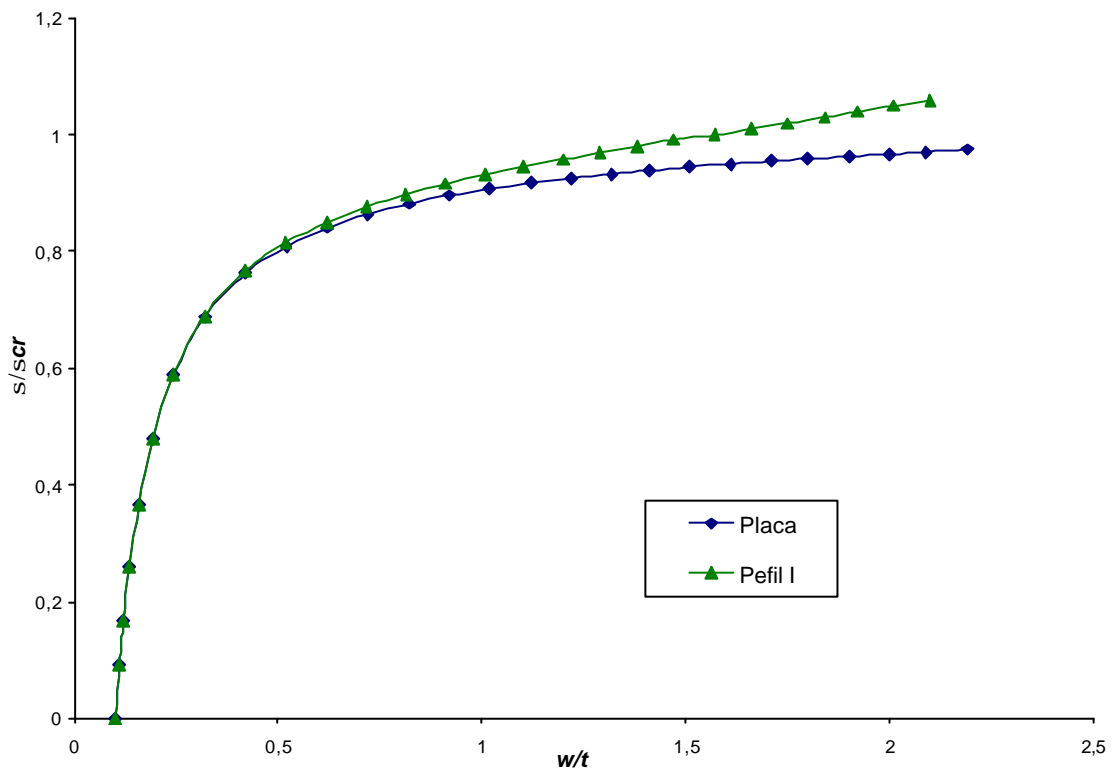


Figura 4.33 – Curvas de pós-flambagem comparativas da placa simplesmente apoiada em uma borda longitudinal e livre na outra e do perfil I.

Novamente observam-se as diferenças numérica e comportamental supracitadas, com a mesa do perfil mais rígida que a placa. Dessa análise conclui-se que o comportamento das mesas de um perfil I não pode ser aproximado pelo comportamento de uma placa isolada com mesma condição “teórica” de vinculação, diferentemente da aproximação da alma do perfil I pela placa isolada correspondente.

4.3.4. Cantoneiras de Abas Iguais

Foram estudadas cantoneiras de abas iguais, formadas por duas placas idênticas vinculadas apenas em uma borda longitudinal. A largura de cada aba (b) foi mantida fixa e variou-se a espessura (t), englobando relações de esbeltez b/t entre 5 e 50. O comprimento das cantoneiras, a , foi adotado sempre igual a 8 vezes a largura das abas, ver figura 4.34. As condições de vinculação são iguais às adotadas e descritas no estudo das cantoneiras de abas iguais do item 4.2.4.2.

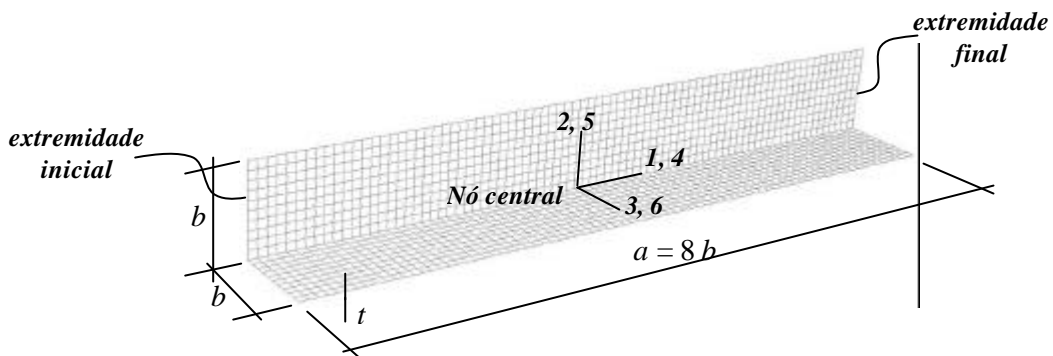


Figura 4.34- Configuração das cantoneiras estudadas e da malha de elementos finitos utilizada.

Para a verificação da malha utilizada, foram traçadas as curvas do comportamento de pós-flambagem da cantoneira com esbeltez da aba igual a 50, considerando 800 e 3200 elementos em cada aba, mostradas na figura 4.35. Observa-se que os resultados de ambas as curvas foram coincidentes, portanto, adotou-se a malha de 1600 elementos na cantoneira.

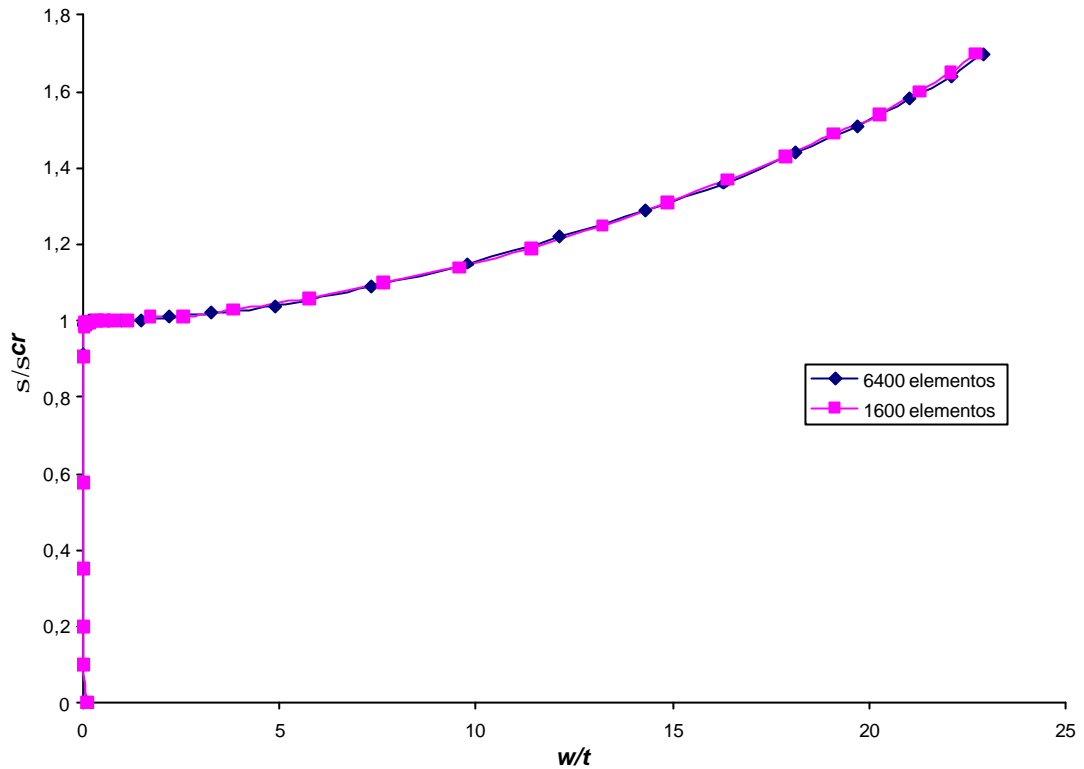


Figura 4.35- Verificação da malha de elementos finitos das cantoneiras.

Inicialmente, foi realizada a análise linearizada de estabilidade, com a obtenção das cargas críticas de flambagem e dos modos de flambagem associados. A figura 4.36 mostra a configuração deformada da cantoneira correspondente ao primeiro modo de flambagem (modo local), com a formação de apenas uma semi-onda longitudinal, semelhante ao modo local da placa simplesmente apoiada em um borda longitudinal e livre na outra, de modo que a rigidez proporcionada por cada flange na vinculação assemelha-se à de um apoio rotulado.

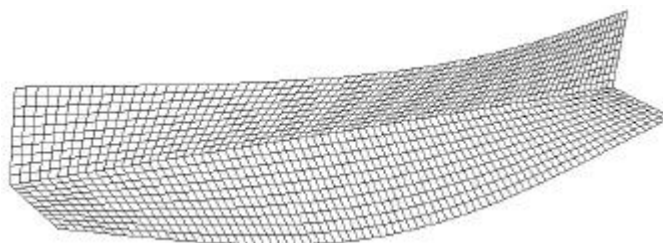


Figura 4.36- Configuração deformada correspondente ao primeiro modo de flambagem da cantoneira.

Na análise da pós-flambagem considerou-se a imposição das imperfeições iniciais pela superposição do primeiro modo de flambagem com amplitude igual a 0,1% da espessura da aba, e para o acompanhamento dos deslocamentos foi considerado como nó de controle o nó central superior da aba vertical.

Procurando representar de modo mais preciso o comportamento dos aços estruturais, foi adotado e implementado um comportamento elasto-plástico tri-linear, com módulo de elasticidade longitudinal (E) igual a 205 GPa, cujo diagrama é mostrado na figura 4.37. Considerou-se dois aços estruturais, um com tensão de escoamento (f_y) igual a 250 MPa e tensão limite de resistência (f_u) igual a 400 MPa, e outro com (f_y) igual a 345 MPa e (f_u) igual a 490 MPa. As deformações correspondentes ao final de cada região foram definidas com base nas curvas reais $\sigma \times \epsilon$ de cada um desses aços (Salmon e Johnson, 1990). As tensões foram determinadas de modo a acompanhar o formato das curvas. Como foi utilizada formulação de grandes deformações, determinaram-se as tensões verdadeiras e as deformações logarítmicas plásticas, ver item 2.6.3.2., para a consideração do comportamento plástico, com encruamento isotrópico e superfície de escoamento de von Mises, do ABAQUS.

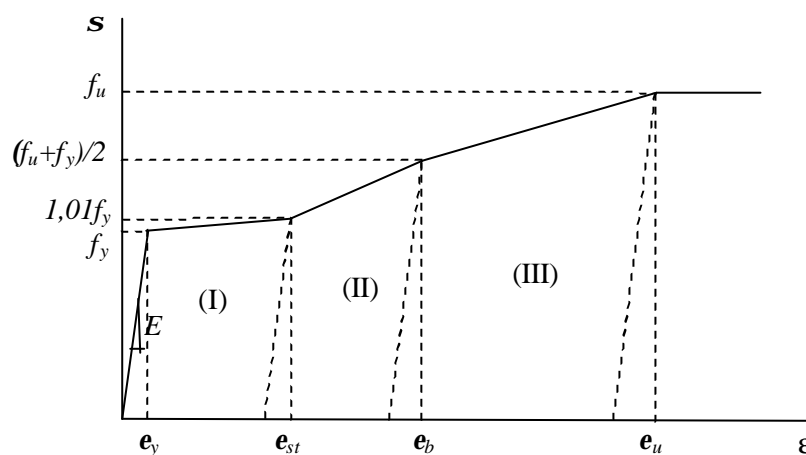
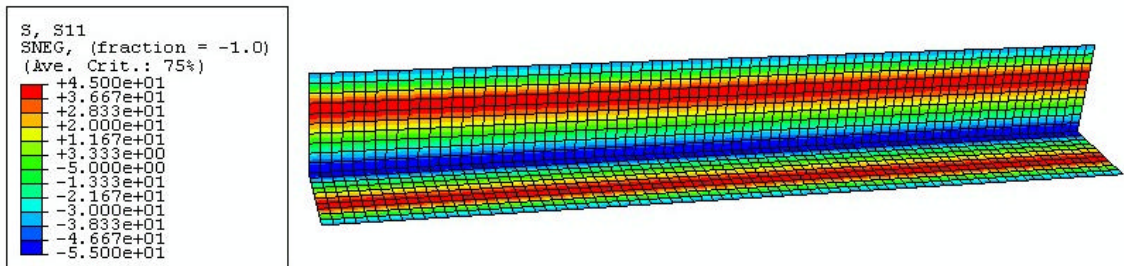


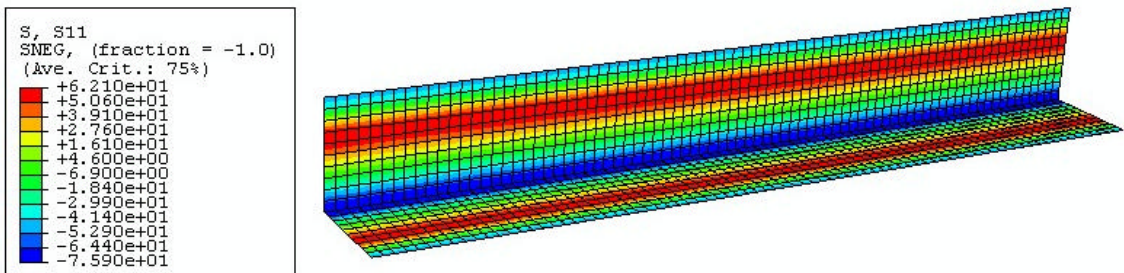
Figura 4.37 – Comportamento elasto-plástico tri-linear dos aços adotados (adaptado de Earls, 1999).

As tensões residuais foram introduzidas na análise como tensões iniciais, com a distribuição padrão adotada pelo ECCS (1976) apresentada na figura 2.22, item 2.4.4. Os valores de b_1 , b_2 , b_3 e b_4 foram determinados para todas as cantoneiras analisadas,

com base no equilíbrio das forças e momentos na seção. Como os valores das tensões residuais dependem do aço adotado, foram determinadas duas distribuições para cada cantoneira, de modo que na figura 4.38-a tem-se a distribuição correspondente ao aço estrutural com tensão de escoamento f_y igual a 250 MPa e na figura 4.38-b a distribuição correspondente ao aço estrutural com tensão de escoamento f_y igual a 345 MPa.



(a) Aço com tensão de escoamento f_y igual a 250 MPa.



(b) Aço com tensão de escoamento f_y igual a 345 MPa.

Figura 4.38 – Distribuições das tensões residuais implementadas nas cantoneiras.

Primeiramente, foram obtidos das análises linearizada de estabilidade os valores das tensões críticas elásticas de cantoneiras, com e sem tensões residuais, determinados em função da esbeltez da aba da cantoneira. Os valores obtidos estão apresentados nas Tabelas 4.2 e 4.3, para os dois aços estudados, com f_y igual a 250 MPa e com f_y igual a 345 MPa, respectivamente, onde $s_{cr,el,str}$ é a tensão crítica de flambagem do material elástico sem tensões residuais e $s_{cr,el,ctr}$ é a tensão crítica de flambagem do material elástico com tensões residuais. As curvas correspondentes são mostradas nas figuras 4.39 e 4.40, para os dois aços estudados, com f_y igual a 250 MPa e com f_y igual a 345 MPa, respectivamente.

Em seguida, foram determinados os valores do PR NBR 8800 (2006), ver figura 2.26, item 2.5, para a resistência elástica, com e sem a consideração da pós-flambagem e da resistência inelástica, obtidos da reta de transição, os quais também estão apresentados nas Tabelas 4.2 e 4.3, sendo $S_{cr,el,spf}$ a tensão crítica elástica sem pós-flambagem, $S_{cr,el,cpf}$ a tensão crítica elástica com pós-flambagem e $S_{cr,inel}$ a tensão crítica inelástica. Esses valores foram plotados nos gráficos das figuras 4.39 e 4.40, e como referência têm-se os valores dos parâmetros limite de esbeltez e das tensões de transição dos regimes elástico e inelástico da norma.

Por fim também foram obtidos os valores de resistência do comportamento de pós-flambagem das abas das cantoneiras, com material de comportamento elasto-plástico, com e sem a consideração das tensões residuais, sendo apresentados nas Tabelas 4.2 e 4.3, onde $S_{cr,ep,str}$ é a tensão crítica do material elasto-plástico sem tensões residuais e $S_{cr,ep,ctr}$ é a tensão crítica do material elasto-plástico com tensões residuais, e as curvas traçadas nas figuras 4.39 e 4.40.

$I = b/t$	ABAQUS				PR NBR 8800 (2006)		
	$S_{cr,el,str}$ (MPa)	$S_{cr,el,ctr}$ (MPa)	$S_{cr,ep,str}$ (MPa)	$S_{cr,ep,ctr}$ (MPa)	$S_{cr,el,spf}$ (MPa)	$S_{cr,el,cpf}$ (MPa)	$S_{cr,inel}$ (MPa)
50	33,306	38,8	67,278	65,184	34,44	43,46	3,246
40	51,929	57,434	86,721	84,428	53,8125	67,91	69,596
30	91,942	97,456	118,605	117,922	95,6667	120,72	135,947
25	131,92	137,44	149,07	149,81	137,76	173,84	169,123
20	204,94	210,46	211,088	207,093	215,25	271,625	202,298
18	252,17	257,69	239,562	238,363	265,74	335,34	215,568
15	360,64	366,15	249,563	248,982	382,667	482,89	235,474
12,5	514,92	520,44	248,706	246,168	551,04	695,36	252,061
10	794,12	799,64	248,56	248,688	861	1086,5	268,649
5	2964,7	2970,3	250,99	249,208	3444	4346	301,825

Tabela 4.2 – Tensões críticas em função da variação da esbeltez da aba da cantoneira para aço com $f_y = 250$ MPa.

$I = b/t$	ABAQUS				PR NBR 8800 (2006)		
	$S_{cr,el,str}$	$S_{cr,el,ctr}$	$S_{cr,ep,str}$	$S_{cr,ep,ctr}$	$S_{cr,el,spf}$	$S_{cr,el,cpf}$	$S_{cr,inel}$
	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
50	33,306	40,871	75,605	73,568	34,44	43,46	-75,518
40	51,929	59,516	99,704	97,011	53,8125	67,91	32,046
30	91,942	99,545	136,994	134,386	95,6667	120,72	139,609
25	131,92	139,53	167,538	167,436	137,76	173,84	193,391
20	204,94	212,6	225,434	225,356	215,25	271,625	247,173
18	252,17	259,78	264,779	262,378	265,74	335,34	268,686
15	360,64	368,25	343,329	338,054	382,667	482,89	300,955
12,5	514,92	522,54	343,452	345,921	551,04	695,36	327,846
10	794,12	801,73	343,854	344,744	861	1086,5	354,736
5	2964,7	2972,4	343,905	344,798	3444	4346	408,518

Tabela 4.3 – Tensões críticas em função da variação da esbeltez da aba da cantoneira para aço com $f_y = 345$ MPa.

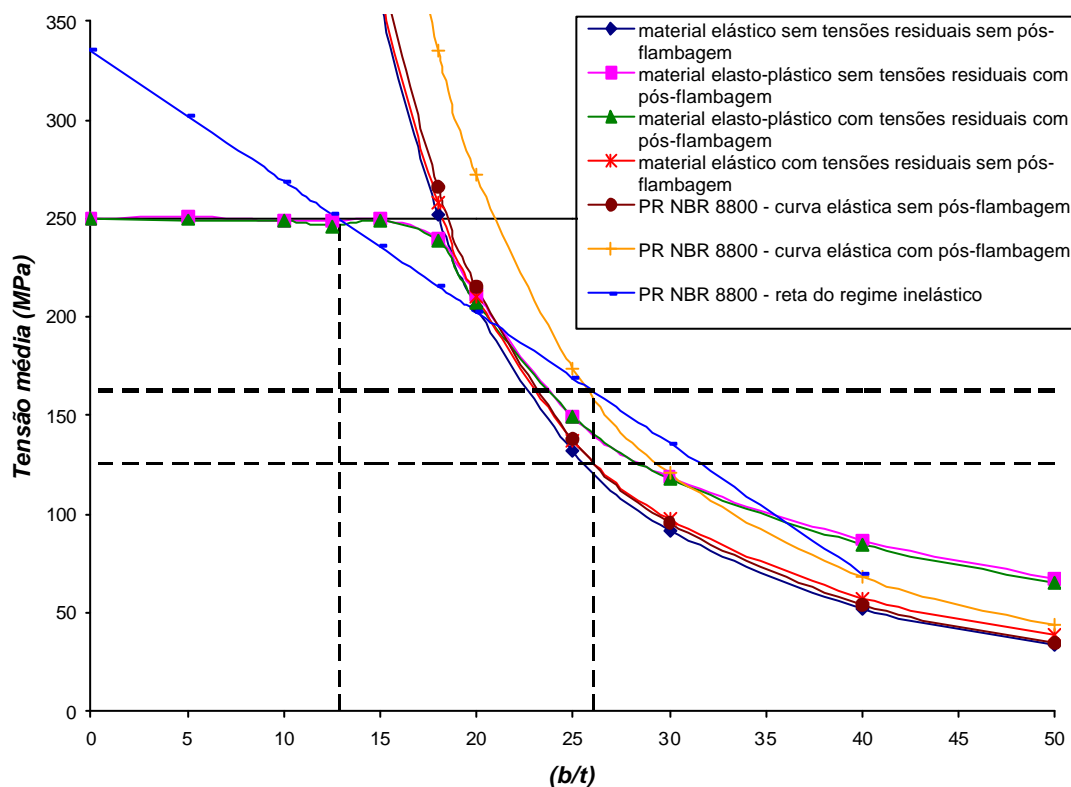


Figura 4.39 – Tensão média x esbeltez das cantoneiras para o aço com $f_y = 250$ MPa.

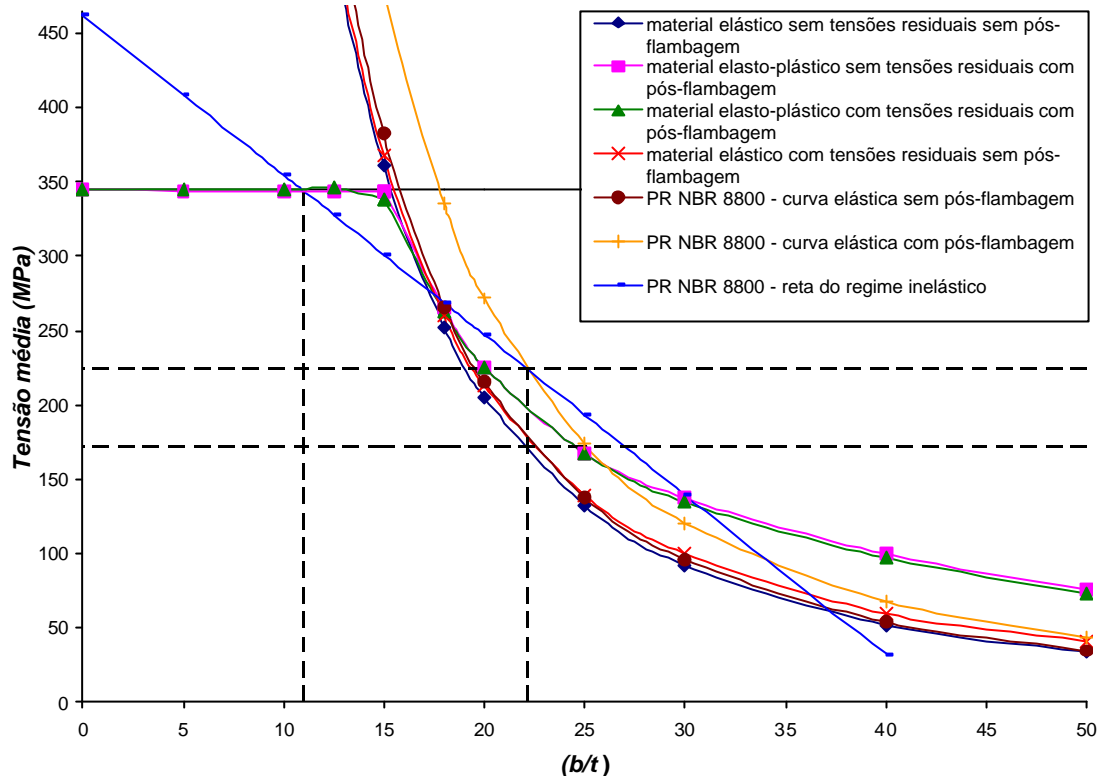


Figura 4.40 –Tensão média \times esbeltez das cantoneiras para o aço com $f_y = 345$ MPa.

Observando-se as tabelas e as curvas, podem ser feitas as seguintes considerações:

- os valores obtidos na análise numérica para a tensão crítica de flambagem elástica com tensões residuais são ligeiramente superiores aos valores sem tensões residuais, indicando um pequeno enrijecimento e conseqüentemente, aumento da resistência à flambagem local, devido à existência das tensões residuais de tração na região central da aba. Entretanto, comparando-se os valores das tensões, percebe-se novamente que esse aumento de resistência é significativo apenas nas placas finas, sendo 16% maior para o aço com f_y igual a 250 MPa e 23% maior para o aço com f_y igual a 345 MPa na cantoneira com esbeltez da aba (b/t) igual a 50. Para as placas espessas, essa diferença desaparece, sendo igual a 0,2% para o aço com f_y igual a 250 MPa e 0,3% para o aço com f_y igual a 345 MPa quando $b/t = 5$;
- comparando-se a tensão crítica de flambagem elástica sem tensões residuais com os valores correspondentes determinados pela curva elástica da norma sem pós-

flambagem, observa-se que os valores da norma são sempre superiores ao da curva elástica sem tensões residuais, com a resistência obtida pela norma 3% maior para $b/t=50$, 15% maior para $b/t = 5$ e da ordem de 7% para as esbeltezes intermediárias. Essas diferenças estão relacionadas ao valor do coeficiente de flambagem elástica (K_p), uma vez que esses valores independem da tensão de escoamento do aço e dependem unicamente desse coeficiente. Das tensões obtidas na análise numérica foram determinados valores de K_p pela equação (4.1), os quais variaram entre 0,40 e 0,45 para $b/t = 5$ e $b/t = 50$, respectivamente, e para valores de esbelteza intermediária da ordem de 0,425, igual ao coeficiente de placa isolada simplesmente apoiada em uma borda longitudinal e livre na outra, similar ao estudo realizado no item 4.2.4.2 e ao gráfico da figura 4.16. O valor do coeficiente adotado pela norma é 0,46;

- os valores determinados pelo PR NBR 8800 (2006) para as tensões críticas elásticas considerando a resistência pós-flambagem são obtidos pela multiplicação da curva elástica sem pós-flambagem (b/t) por um fator empírico constante igual a 1,262, ou seja, aumentando a resistência à flambagem elástica em 26,2%. Entretanto, já foi observado que a resistência adicional de pós-flambagem só é realmente significativa em placas finas, cuja tensão crítica de flambagem (s_{cr}) é muito menor que a tensão de escoamento do aço (f_y), e esse efeito deixa de se pronunciar na medida em que as tensões críticas aumentam em relação à tensão de escoamento.

Considerando-se a variação da resistência pós-flambagem em função da relação (b/t) das abas tem-se que, para $b/t = 50$, e cantoneira sem tensões residuais, a consideração da resistência pós-flambagem provocou um aumento de 100% na resistência à flambagem local, ou seja, dobrou o valor da resistência sem a pós-flambagem para o aço com $f_y=250\text{MPa}$, e um aumento de 68% na resistência para o aço com $f_y=345\text{MPa}$, sendo a relação s_{cr}/f_y igual a 0,13 e 0,15, respectivamente. Para cantoneira com tensões residuais o aumento foi de 127% para aço com $f_y=250\text{MPa}$ e 80% para o aço com $f_y=345\text{MPa}$, com relação s_{cr}/f_y igual a 0,10 e 0,12, respectivamente, comprovando o aumento acentuado de resistência em placas finas.

Para os valores da tensão crítica de flambagem próximos à tensão de escoamento dos aços adotados ($s_{cr}/f_y \sim 1,0$), considerando as cantoneiras com e sem tensões residuais,

o aumento devido à resistência pós-flambagem cai para um valor médio de 5%. Para valores da tensão crítica de flambagem acima da tensão de escoamento esse efeito desaparece.

Esse comportamento pode ser visto nos gráficos das figuras 4.39 e 4.40, onde a curva de flambagem elástica com pós-flambagem da norma apresenta-se bem abaixo das curvas com pós-flambagem obtidas na análise numérica, na região onde essa resistência adicional é mais significativa;

- comparando-se as curvas de tensão crítica com material elasto-plástico e consideração da pós-flambagem, observa-se uma influência mínima das tensões residuais.

Nas figuras 4.41 e 4.42 têm-se, portanto, as curvas finais relacionando a tensão última média e a esbeltez das cantoneiras, para os dois aços considerados, com f_y igual a 250MPa e 345MPa, respectivamente, e considerando todos os fatores de não-linearidade na análise. Como referência, são mostradas também as curvas adotadas pelo PR NBR 8800 (2006).

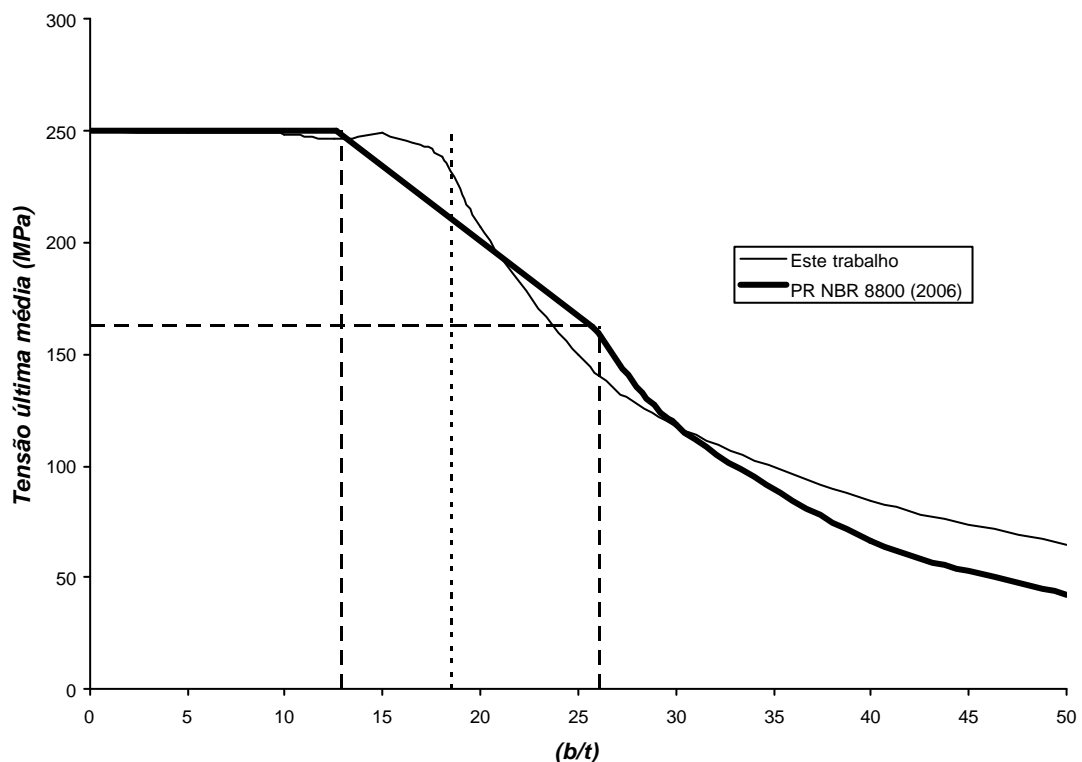


Figura 4.41 – Tensão última média \times esbeltez das cantoneiras para o aço com $f_y = 250$ MPa.

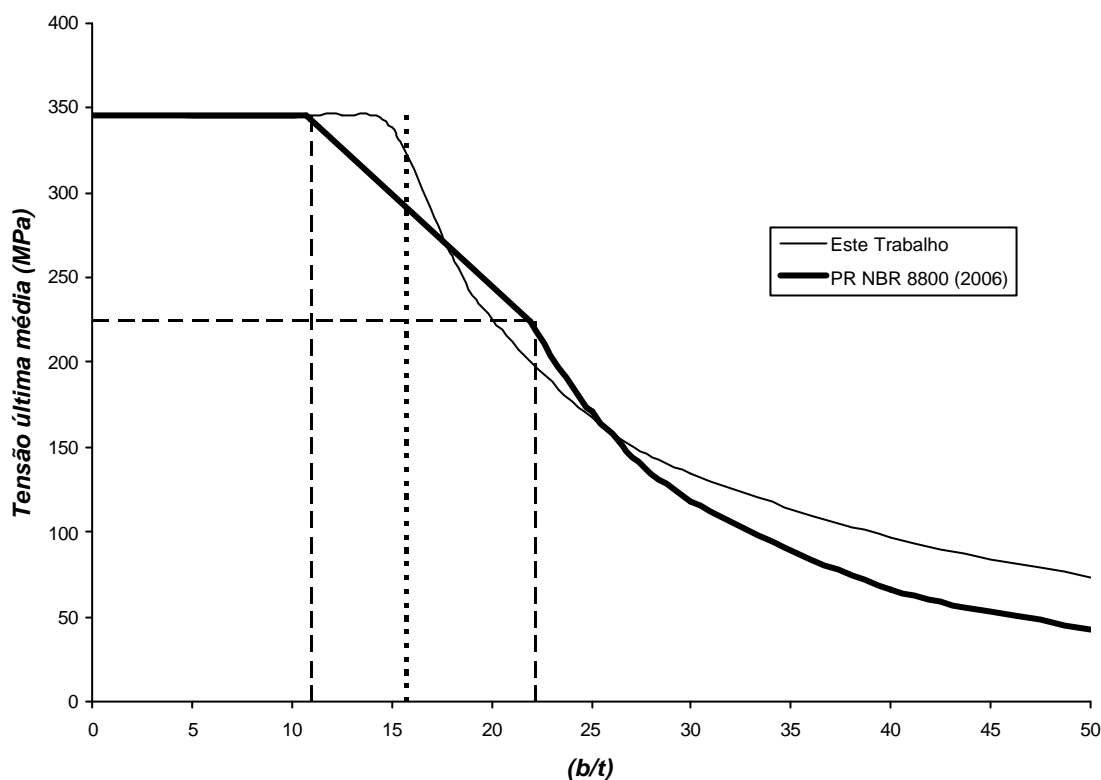


Figura 4.42 –Tensão última média \times esbeltez das cantoneiras para o aço com $f_y = 345$ MPa.

Observando-se as curvas obtidas na análise numérica, percebe-se que os resultados não concordam exatamente com os valores adotados pelo PR NBR 8800 (2006). Uma vez que o processo de análise seguiu uma metodologia de implementação das não linearidades, apresentando comportamento esperado em todas as etapas, considera-se que essas curvas apresentam resultados mais precisos que os da norma. Além disso, observa-se uma coerência comportamental para os dois aços estudados. As diferenças vêm da consideração mais acurada na análise dos diversos fatores citados anteriormente, os quais são considerados na norma por aproximações e simplificações, ver item 2.5.

Apesar de terem sido analisadas cantoneiras com esbeltez (b/t) variando de 5 a 50, de modo a se conseguir traçar uma curva completa, observa-se que as cantoneiras comerciais apresentam valores de (b/t) entre 4 e 16. Esses valores se situam na região de comportamento inelástico e totalmente plástico, portanto, o principal questionamento é quanto ao parâmetro limite de esbeltez máxima, o qual separa esses dois regimes, que se encontra exatamente nessa região de aplicação prática. Apesar dos valores adotados pela

norma serem favoráveis à segurança, eles conduzem a valores de resistência última até 15% menores que os valores determinados, levando a dimensionamentos pouco otimizados.

Esses valores foram estudados anteriormente e estão apresentados no gráfico da figura 4.17, item 4.2.4.2, mostrando que os valores da análise numérica ficam sempre abaixo do valor da norma. Porém, a determinação daqueles valores de $(b/t)_{máx}$ foi feita com base na equação (2.29), utilizando-se o valor do coeficiente K_p obtido na análise numérica sem tensões residuais, as quais foram consideradas de forma similar à norma, com a utilização do coeficiente de redução empírico 0,7. Entretanto, foi observado que as tensões residuais só apresentam influência significativa em placas finas, de grande esbelteza, e nessa região de (b/t) entre 4 e 16, seu efeito é pequeno, portanto, poderia ser adotado um coeficiente maior para a consideração das tensões residuais, de modo que o limite de esbelteza máxima se aproximasse mais do valor determinado com o coeficiente igual a 1, correspondente à reta pontilhada nas figuras 4.41 e 4.42.

4.3.5. Perfis I

Para os perfis I duplamente simétricos procedeu-se de forma similar ao estudo das cantoneiras de abas iguais, seguindo-se a mesma metodologia de análise e implementação das não-linearidades.

Foram estudados perfis I duplamente simétricos formados por duas placas idênticas correspondentes às mesas, conectadas em seus eixos longitudinais a uma terceira placa correspondente à alma, de modo que cada meia-mesa é vinculada em uma borda longitudinal e livre na outra, e a alma é vinculada em ambas as bordas longitudinais. A altura da alma (h) e as larguras de cada mesa (b_f), ambas consideradas na linha do esqueleto, foram mantidas fixas e variaram-se as espessuras de alma (t_w) e de mesa (t_f), englobando relações de esbelteza (b/t) entre 12,5 e 100 para a alma e 3,75 e 50 para as mesas. O comprimento longitudinal da barra, a , foi adotado igual a 8 vezes a altura da alma (h), de modo que nas mesas a relação foi de 16 vezes.

As condições de contorno correspondem às de barras rotuladas, iguais às condições adotadas e apresentadas no estudo de perfis I e U do item 4.2.4.1.

Para a geração da malha de elementos finitos considerou-se 12 divisões na altura da alma e em cada largura de mesa e 48 divisões no comprimento longitudinal, com a utilização de 1728 elementos na barra. A discretização do perfil e sua geometria estão apresentados na figura 4.43.

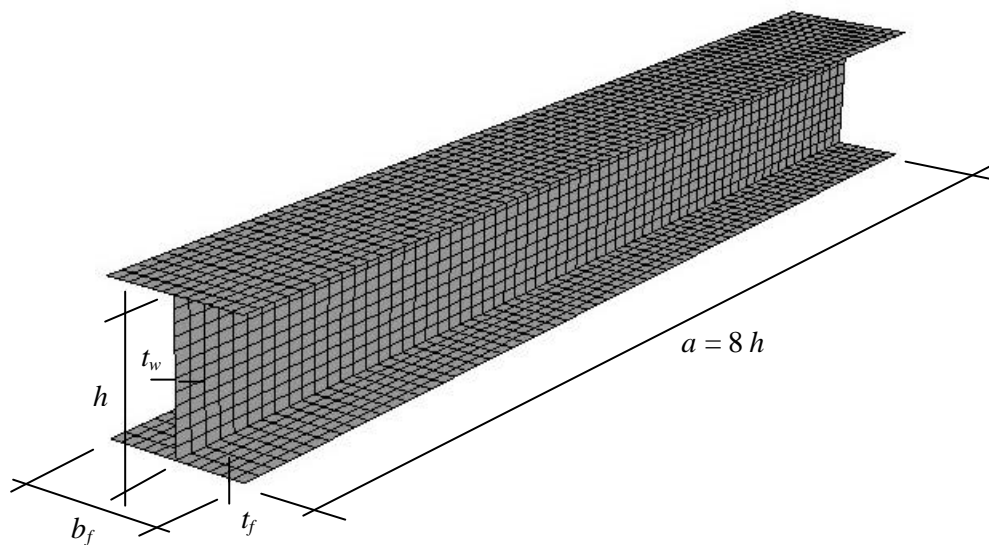


Figura 4.43 - Configuração dos perfis I estudados e da malha de elementos finitos utilizada.

Inicialmente, foi realizada a análise linearizada de estabilidade, com a obtenção das cargas críticas de flambagem e dos modos de flambagem associados. As figuras 4.44 a 4.46 mostram as configurações deformadas do perfil I correspondentes ao primeiro modo de flambagem (modo local), para as três situações de flambagem local observadas. Na figura 4.44 tem-se a flambagem local das mesas do perfil, na figura 4.45 a flambagem local da alma e na figura 4.46 a flambagem local simultânea dos dois elementos da seção.

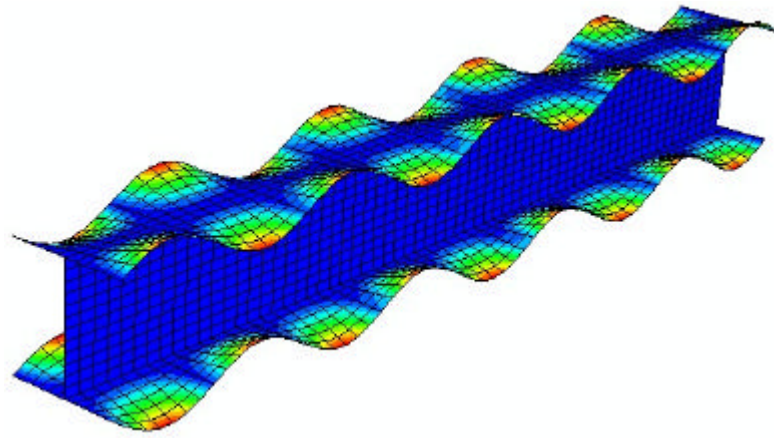


Figura 4.44 - Configuração deformada correspondente ao modo de flambagem local das mesas do perfil I.

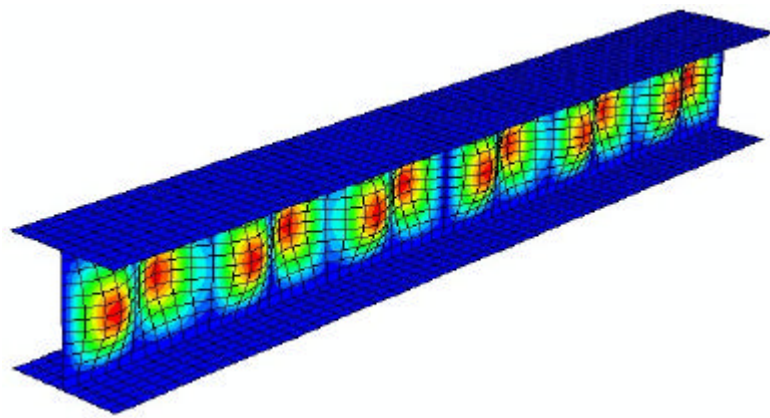


Figura 4.45 - Configuração deformada correspondente ao modo de flambagem local da alma do perfil I.

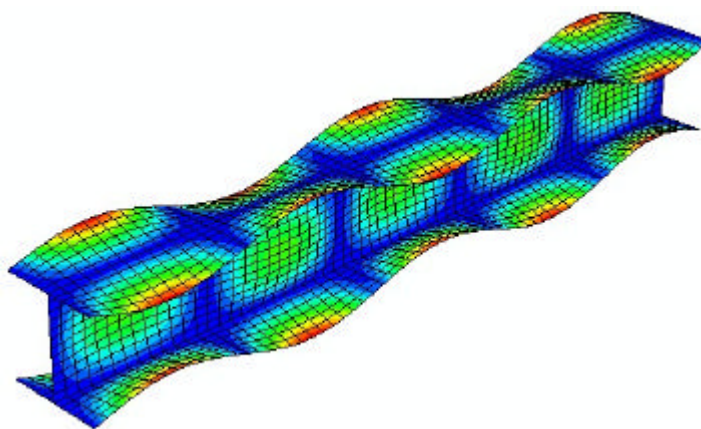


Figura 4.46 - Configuração deformada correspondente ao modo de flambagem local simultâneo da alma e das mesas do perfil I.

Na análise da pós-flambagem considerou-se imperfeições iniciais de 0,1% da espessura do elemento condicionante da flambagem local, e para o acompanhamento dos deslocamentos foi considerado como nó de controle, em cada seção estudada, o nó de maior deslocamento observado na configuração deformada.

O comportamento dos aços estruturais adotado e implementado foi o elasto-plástico tri-linear, apresentado no item 4.3.4, com a curva tensão/deformação mostrada na figura 4.37. Foram considerados os mesmos aços estruturais, com tensão de escoamento f_y igual a 250 MPa e tensão limite de resistência f_u igual a 400 MPa, e com f_y igual a 345 MPa e f_u igual a 490 MPa. O módulo de elasticidade longitudinal (E) foi tomado igual a 205 GPa.

Para a consideração das tensões residuais foram adotadas duas distribuições distintas, uma correspondente aos perfis I laminados e outra correspondente aos perfis soldados fabricados com chapas cortadas a maçarico. Para os perfis laminados optou-se pela distribuição padrão adotada pelo ECCS (1976), apresentada na Tabela 2.1, item 2.4.2, para valores da relação $h/b < 1,2$, correspondente aos perfis estudados. Essa forma de distribuição se mostrou apropriada à implementação nesta análise, pois só depende da tensão de escoamento do aço, portanto, com apenas duas distribuições diferentes, e o maior valor de tensão residual de compressão adotado é da magnitude considerada normalmente nos estudos da literatura pesquisada. Nessa distribuição, as bordas livres das mesas estão submetidas a tensões de compressão e na junção alma/mesa a tensões de tração, com valores dados na tabela, e os valores das tensões de compressão na alma foram determinados com base no equilíbrio das forças e momentos na seção, com a configuração final de distribuição apresentada na figura 4.47-a.

Para os perfis soldados escolheu-se uma distribuição que permitisse avaliar os efeitos da inversão das tensões nas bordas livres das mesas. Adotou-se, portanto, uma distribuição média para os perfis, baseada na configuração apresentada na figura 2.21, item 2.4.3, cujas tensões só dependessem da tensão de escoamento do aço, ver figura 4.47-b.

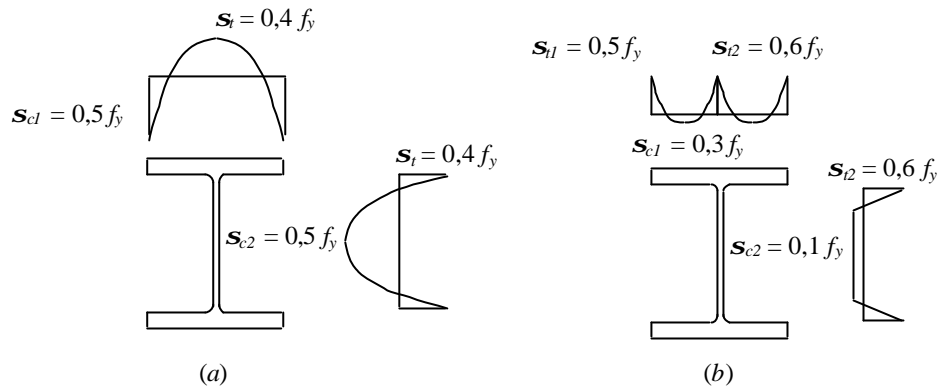


Figura 4.47 – Distribuições das tensões residuais: (a) perfis I laminados e (b) perfis I soldados.

Na figura 4.48 podem ser vistas as distribuições correspondentes aos perfis laminados, sendo na figura 4.48-a a distribuição correspondente ao aço estrutural com tensão de escoamento f_y igual a 250 MPa e na figura 4.48-b a distribuição correspondente ao aço estrutural com tensão de escoamento f_y igual a 345 MPa.

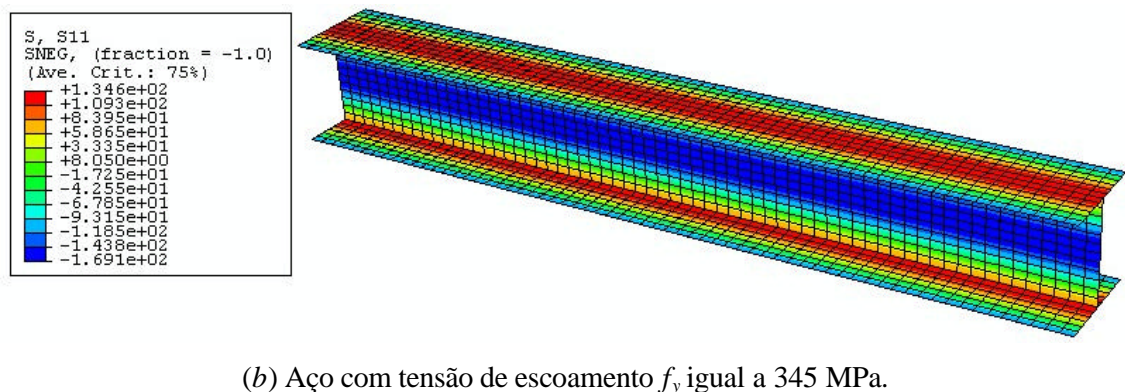
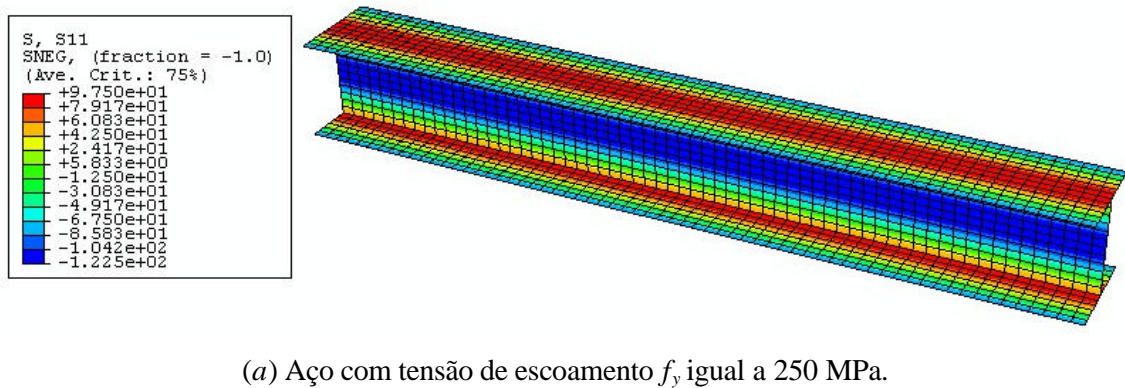
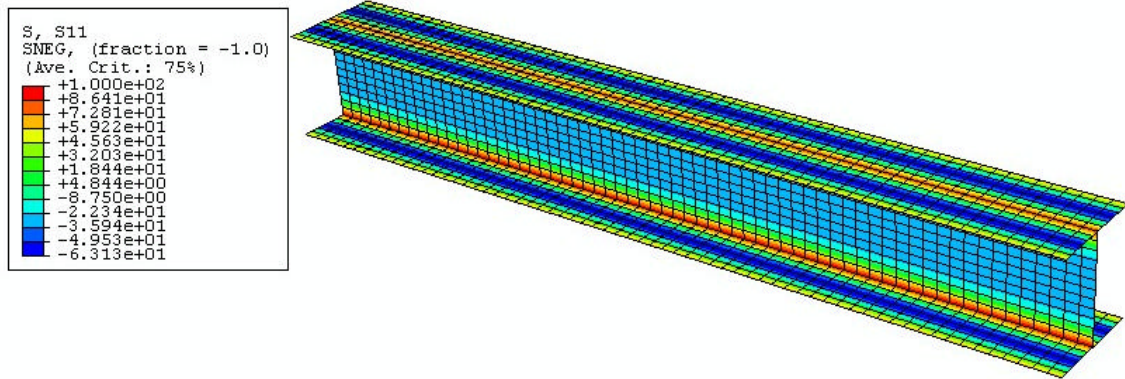
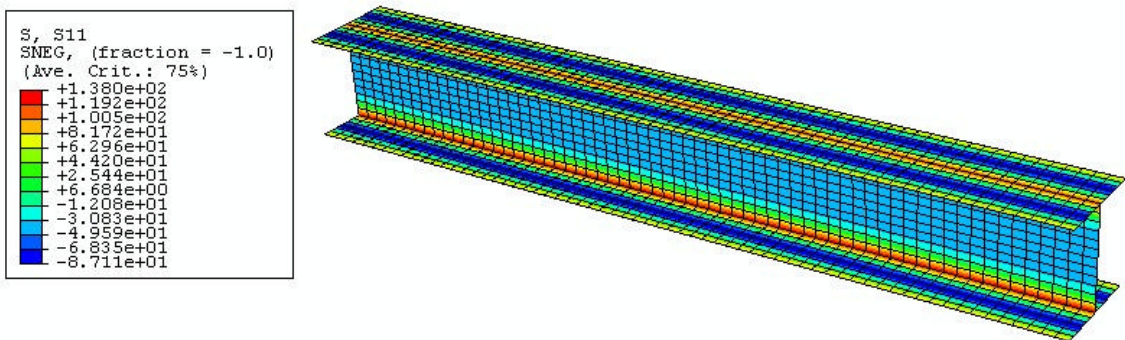


Figura 4.48 – Distribuições das tensões residuais de perfis I laminados implementadas.

Na figura 4.49 tem-se as distribuições dos perfis soldados, sendo na figura 4.49-a a distribuição correspondente ao aço com f_y igual a 250 MPa e na figura 4.49-b a distribuição correspondente ao aço com f_y igual a 345 MPa.



(a) Aço com tensão de escoamento f_y igual a 250 MPa.



(b) Aço com tensão de escoamento f_y igual a 345 MPa.

Figura 4.49 – Distribuições das tensões residuais implementadas para perfis I soldados.

Seguindo, portanto, a sequência de implementação e análise do estudo das cantoneiras, realizou-se primeiramente as análises linearizadas de estabilidade, com a obtenção dos valores das tensões críticas elásticas dos perfis I, com e sem tensões residuais, em função das esbeltezes de seus elementos constituintes, sendo que para cada esbeltez de alma $(b/t)_w$ variou-se a esbeltez das mesas $(b/t)_f$ para todos os valores escolhidos. Em seguida, foram obtidos os valores de resistência última considerando-se o comportamento de pós-flambagem desses perfis, com material de comportamento elasto-plástico, com e sem a consideração das tensões residuais. Em todas as análises

em que foram consideradas as tensões residuais no perfil, foram obtidos os valores para as duas distribuições, de perfil soldado e de perfil laminado.

Por fim foram determinados os valores do PR NBR 8800 (2006) para a resistência a flambagem local dos perfis I, considerando as diferenças entre perfis soldados e laminados, ver item 2.5.

Com os valores obtidos, considerando-se os dois aços estudados, com f_y igual a 250 MPa e com f_y igual a 345 MPa, foram traçadas, para cada esbelteza de alma $(b/t)_w$, as curvas de resistência à flambagem local em função da esbelteza das mesas $(b/t)_f$, mostradas nas figuras 4.50 a 4.65. É importante salientar que os valores de esbelteza de alma e mesa referenciados nessas figuras correspondem às dimensões medidas na linha do esqueleto, figura 4.43, sendo $(b/t)_w = h/t_w$ e $(b/t)_f = b_f / (2t_f)$. Esses valores são apenas representativos das esbeltezes reais consideradas nos cálculos da norma, os quais são determinadas com base na largura livre do elemento pela sua espessura.

Esbeltezes de alma $(b/t)_w$ iguais a 100 e a 80:

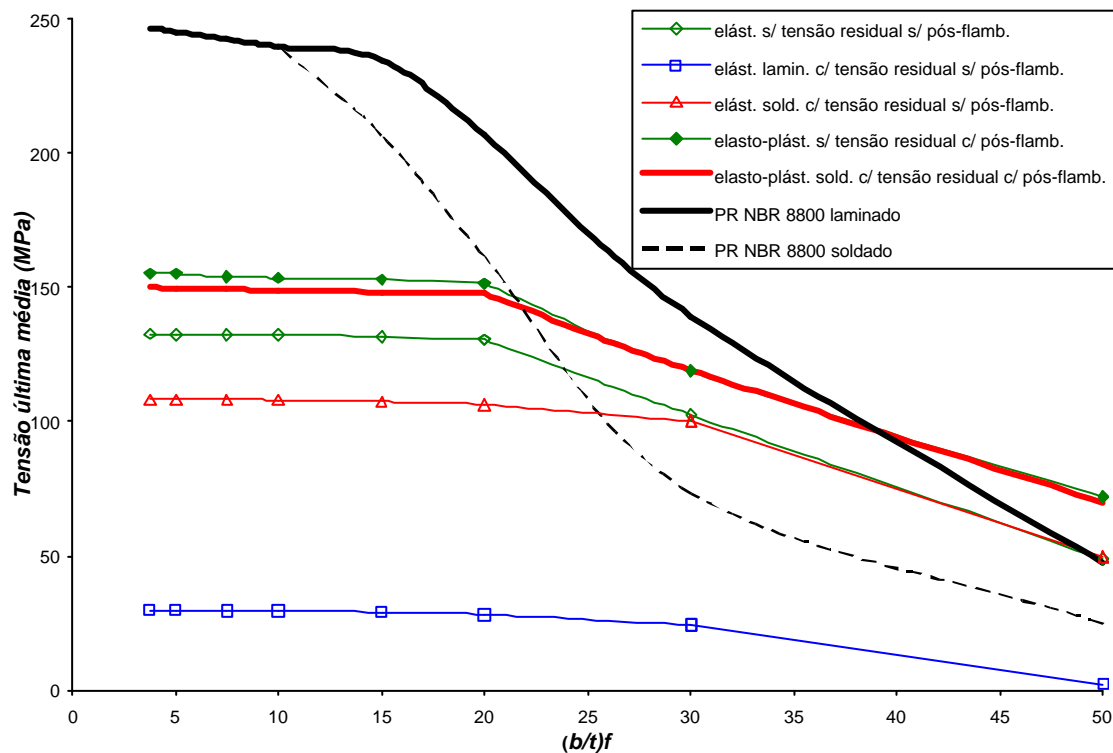


Figura 4.50 – Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 100$ e $f_y = 250$ MPa.

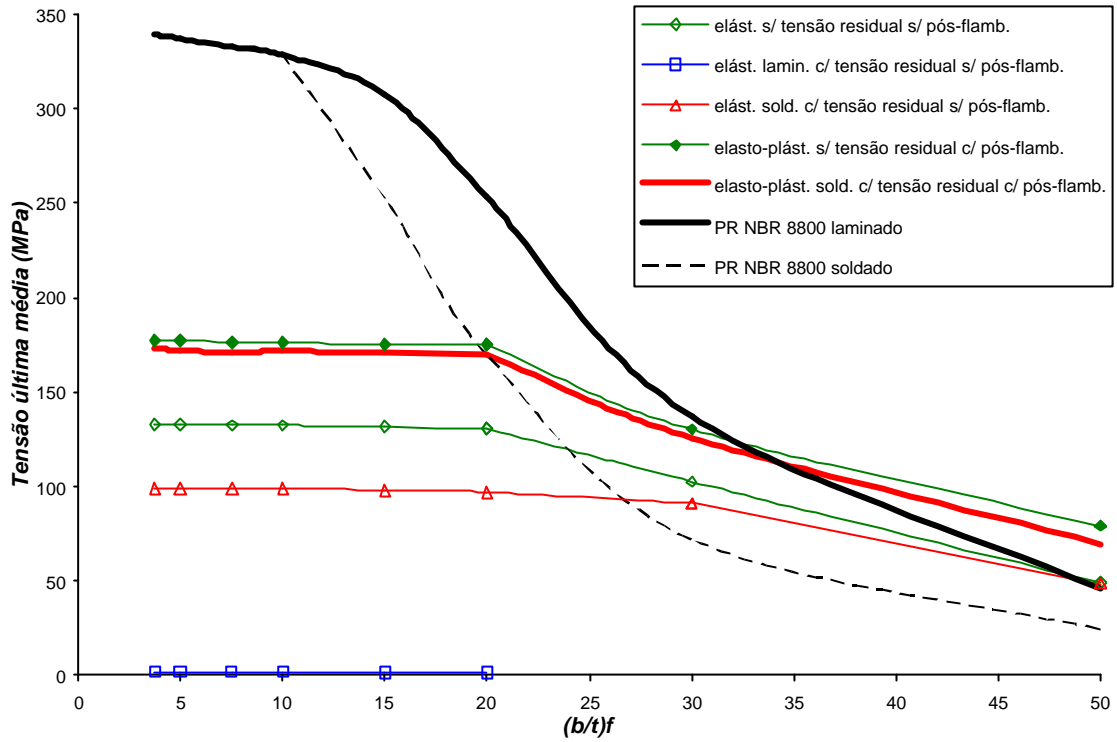


Figura 4.51 – Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 100$ e $f_y = 345$ MPa.

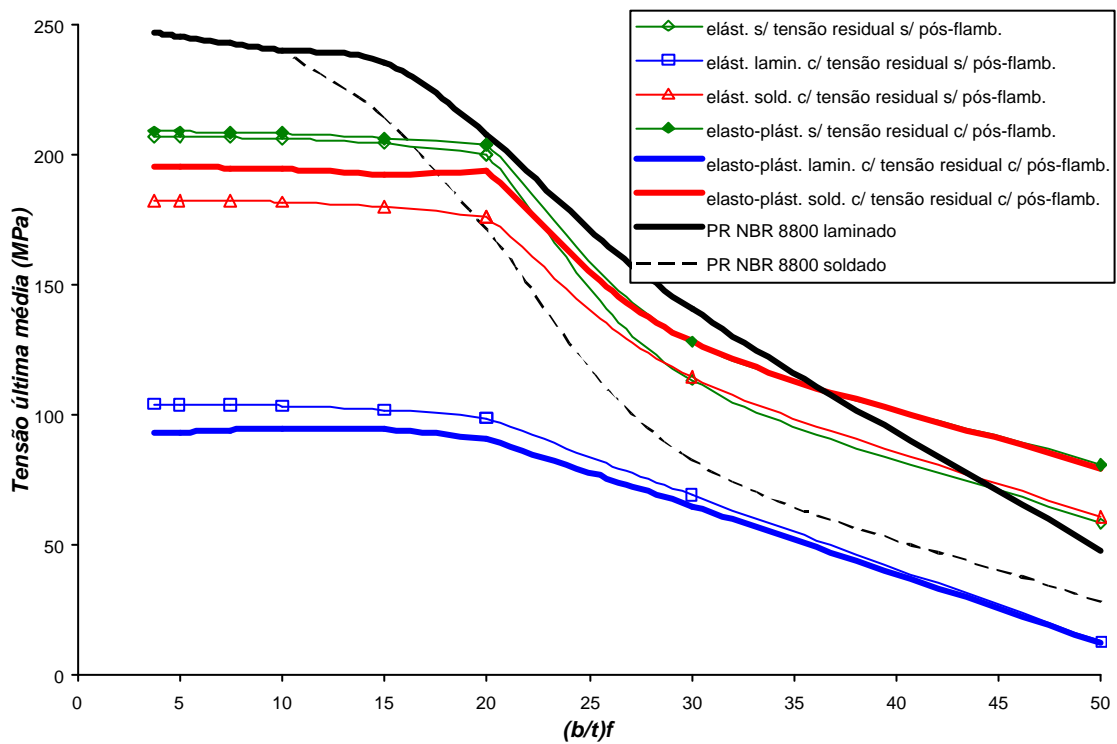


Figura 4.52 – Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 80$ e $f_y = 250$ MPa.

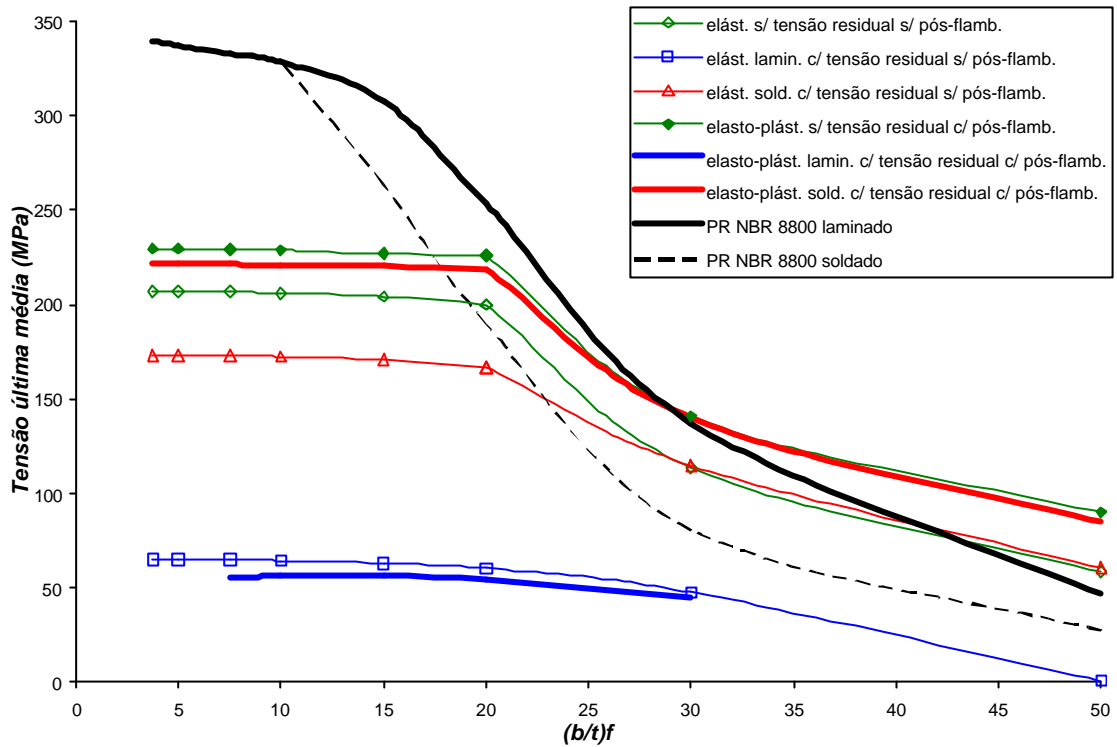


Figura 4.53 – Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 80$ e $f_y = 345$ MPa.

Das figuras 4.50 e 4.52, aço com $f_y = 250$ MPa, e 4.51 e 4.53, aço com $f_y = 345$ MPa, observa-se que as curvas das análises numéricas e as curvas do PR NBR 8800 (2006) apresentaram diferenças numérica e comportamental muito grandes.

Percebe-se que o PR NBR 8800 (2006) determina a resistência à flambagem local do perfil pela verificação do fenômeno em cada placa constituinte da seção de forma desacoplada, exceto nos perfis soldados, onde é utilizado o coeficiente k_c , relacionado ao grau de vinculação da mesa em função da rigidez proporcionada pela alma. Para a esbeltez de alma $(b/t)_w = 100$, k_c varia de 0,402, para a menor espessura da mesa, a 0,430, para a maior espessura, de modo que o valor de K_p das mesas varia de 0,370 a 0,396, respectivamente, ver Tabela 2.2, item 2.5. Para $(b/t)_w = 80$, o valor do coeficiente k_c varia de 0,449 a 0,480, levando a valores de K_p entre 0,413 e 0,442, em ambos os coeficientes para a menor e maior espessura de mesa, respectivamente. No primeiro caso considera-se que a alma proporciona para a borda longitudinal das mesas uma condição de vinculação inferior à de borda simplesmente apoiada, e no segundo caso os

valores se aproximam dessa condição de vinculação, sendo superiores para as maiores espessuras de mesa, pois a altura livre da alma diminui reduzindo a esbeltez da alma.

Dos valores determinados pela norma, tem-se a ocorrência da flambagem local da alma tanto para $(b/t)_w = 100$ quanto para $(b/t)_w = 80$, para os dois aços considerados, porém, apesar do valor da largura efetiva calculado ser bastante reduzido, como as espessuras da alma são pequenas, o coeficiente de flambagem da alma (Q_a) varia de 0,835 a 0,986 para aço com $f_y = 250$ MPa, e de 0,812 a 0,984 para aço com $f_y = 345$ MPa, para $(b/t)_w=100$ e Q_a varia de 0,850 a 0,988 para aço com $f_y = 250$ MPa, e de 0,820 a 0,984 para aço com $f_y = 345$ MPa, para $(b/t)_w = 80$.

Para as esbeltezes de mesa menores ou iguais a 10, a flambagem é condicionada pela alma, pois nessa região o valor de k_c não altera significativamente o limite $(b/t)_{máx}$ das mesas de modo que elas não apresentam flambagem local. Como a redução da resistência do perfil pela alma é pequena, as tensões últimas se aproximam da tensão de escoamento (f_y). Para as esbeltezes de mesa maiores que 10, a flambagem passa a ser condicionada pelas mesas, e observa-se que a resistência apresentada pelo perfil soldado é bem inferior à do perfil laminado, chegando a uma redução de até 48% para $(b/t)_w=100$, e até 41% para $(b/t)_w=80$, pois o coeficiente k_c altera os limites $(b/t)_{máx}$ e $(b/t)_{sup}$, e também o coeficiente de redução da resistência das mesas (Q_s).

Das análises numéricas observou-se que, no caso de esbeltez de alma $(b/t)_w = 100$, sem a consideração das tensões residuais, a mesa só condiciona a flambagem quando sua esbeltez é superior a 30, e com tensões residuais apenas para a esbeltez de mesa igual a 50, em todos os outros casos a alma é o elemento condicionante da flambagem. Para a esbeltez de alma $(b/t)_w = 80$, a flambagem é condicionada pela alma quando as esbeltezes de mesa são menores ou iguais a 30, e é condicionada pelas mesas quando são maiores que 30, com e sem a consideração das tensões residuais.

Para $(b/t)_w = 100$, os valores de tensão crítica de flambagem elástica de barras sem tensões residuais obtidos foram da ordem de metade das tensões de escoamento dos aços. Considerando-se as tensões residuais de perfis laminados, verificou-se que a superposição com as tensões de compressão ($0,5 f_y$), ver figura 4.47-a, ocasionou uma

redução significativa das tensões críticas de flambagem, a qual foi mais acentuada para o aço com $f_y = 345$ MPa, sendo de 77,5% para aço com $f_y = 250$ MPa e de 99,5% para o aço com $f_y = 345$ MPa. Para os perfis soldados, houve também a redução das tensões críticas de flambagem, sendo de 18% para aço com $f_y = 250$ MPa e de 25% para o aço com $f_y = 345$ MPa. Essa redução menos acentuada é devida ao valor das tensões de compressão na alma (elemento condicionante da flambagem), da ordem de $0,1 f_y$, ver figura 4.47-b.

Com a redução da esbeltez da alma, $(b/t)_w = 80$, os valores das tensões críticas de flambagem elástica aumentaram, correspondendo a 80% da tensão de escoamento para o aço com $f_y=250$ MPa, e igual a 60% para o aço com $f_y=345$ MPa. Com a superposição das tensões residuais de perfis laminados, a redução das tensões críticas de flambagem foi da ordem de 50% para aço com $f_y = 250$ MPa e de 70% para o aço com $f_y = 345$ MPa. Para os perfis soldados, a redução é menor, sendo de 12% para aço com $f_y = 250$ MPa e de 16,5% para o aço com $f_y = 345$ MPa.

Considerando-se as tensões últimas médias das barras sem tensões residuais, observou-se o aumento da resistência esperado na pós-flambagem para placas finas em que a tensão crítica de flambagem elástica é significativamente menor que a tensão de escoamento do aço ($s_{cr}f_y \ll I$), como é o caso da alma com esbeltez igual a 100. O aumento foi da ordem de 47% para a mesa mais esbelta e de 17% para a de menor esbeltez, para o aço com $f_y = 250$ MPa, e da ordem de 61% para a mesa de maior esbeltez e 34 % para a de menor esbeltez, para o aço com $f_y = 345$ MPa. Essa variação da porcentagem de resistência pós-flambagem parece inconsistente, pois, a esbeltez da alma (elemento que condiciona a flambagem) é constante. Porém, observa-se que a redução da esbeltez das mesas proporciona um enrijecimento nas bordas longitudinais da alma, reduzindo sua largura efetiva de flambagem e, portanto, sua esbeltez à flambagem local, e a alma apresenta uma resistência pós-flambagem menor.

Para as tensões residuais de perfil laminado não foi possível a obtenção de resultados, pois, a tensão crítica de flambagem elástica é muito pequena de modo que a placa flamba muito rápido, antes de ser capaz de desenvolver a resistência pós-flambagem.

Nesses casos a alma apresenta grandes deslocamentos de flexão para valores de carga muito pequenos e não se consegue uma convergência de resultados.

Para $(b/t)_w = 80$, devido ao aumento na espessura da placa, o aumento de resistência na pós-flambagem foi menor, sendo de 39% para a mesa mais esbelta e de 1% para a menos esbelta, sem a consideração das tensões residuais, e de 30% para a maior esbelteza de mesa e de 7% para a menor, com tensões residuais de perfis soldados, e observa-se que as curvas da pós-flambagem ficaram mais próximas das curvas da tensão crítica de flambagem elástica para o aço com $f_y = 250$ MPa. Considerando as tensões residuais de perfis laminados, a redução acentuada da tensão crítica de flambagem pela superposição das tensões residuais novamente impediu o desenvolvimento da resistência pós-flambagem, e os valores das tensões últimas ficaram menores que os das tensões críticas de flambagem elástica.

Entretanto, para as barras com tensões residuais de perfil soldado, a resistência pós-flambagem foi mais significativa que nas barras sem tensões residuais em todos os casos. Primeiramente devido ao efeito esperado nas placas finas onde as tensões críticas de flambagem elástica são menores que a tensão de escoamento, mas também, devido à redistribuição das tensões que ocorre após o início da flambagem. Devido à forma da distribuição de tensões residuais na alma, ver figura 4.47-b, observa-se que as tensões de compressão atuantes tendem a diminuir na região central da alma (com tensões residuais de compressão) e aumentam na região próxima à junção alma/mesa (com tensões residuais de tração), de forma que, na superposição dessas tensões, a tensão de compressão final atuante fica menor na região ainda resistente (próxima à junção alma/mesa), contribuindo no aumento de resistência.

Observando-se as tabelas comerciais de perfis I laminados, verifica-se que não são consideradas esbeltezas de alma dessas magnitudes, muito possivelmente devido à pouquíssima (ou nenhuma) resistência observada, e, portanto, considera-se que a curva da norma não é adequada nem representativa do comportamento de perfis com $(b/t)_w=80$ e $(b/t)_w=100$.

Para os soldados, verifica-se a existência de perfis tabelados com essas relações de esbeltez de alma e também a possibilidade de composição da seção por placas com essas esbeltezes, e considera-se que os parâmetros utilizados na norma para a obtenção da curva de resistência não são consistentes, pois a alma é considerada de pequena rigidez, proporcionando um suporte mínimo às mesas. Apesar disso, pela formulação da norma, a redução da resistência do perfil é de no máximo 19% para a maior esbeltez de mesa, e é de apenas 2% para a menor esbeltez de mesa.

Esbeltez de alma $(b/t)_w$ igual a 50:

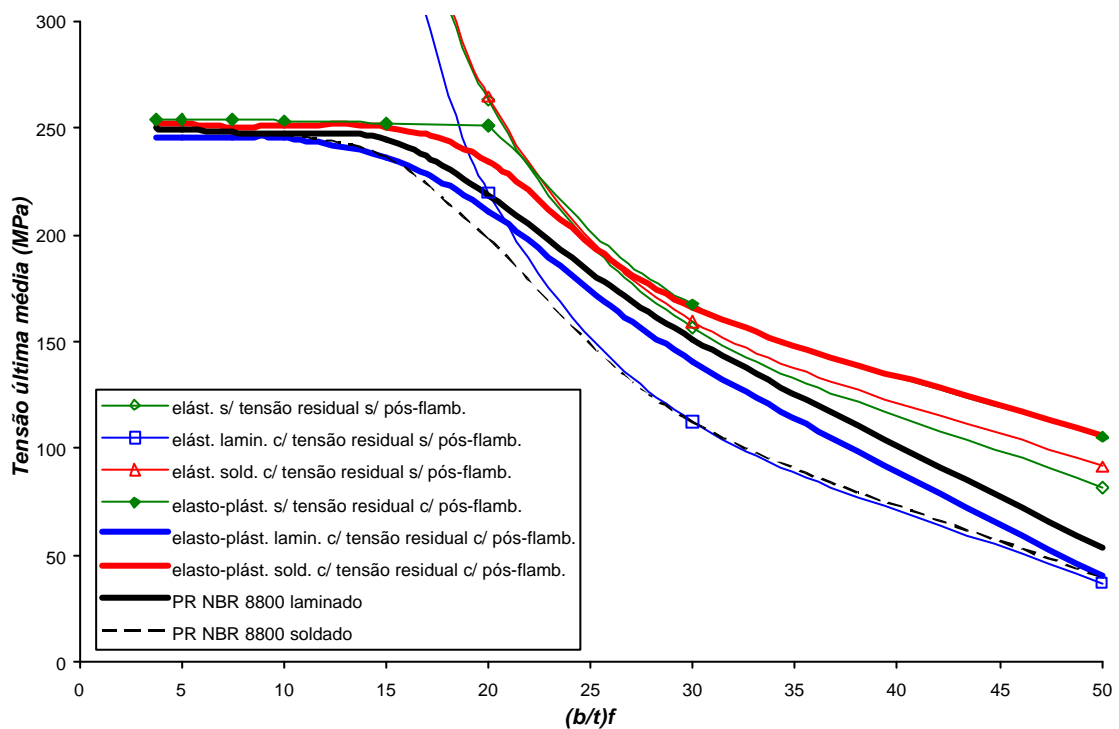


Figura 4.54 – Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 50$ e $f_y = 250$ MPa.

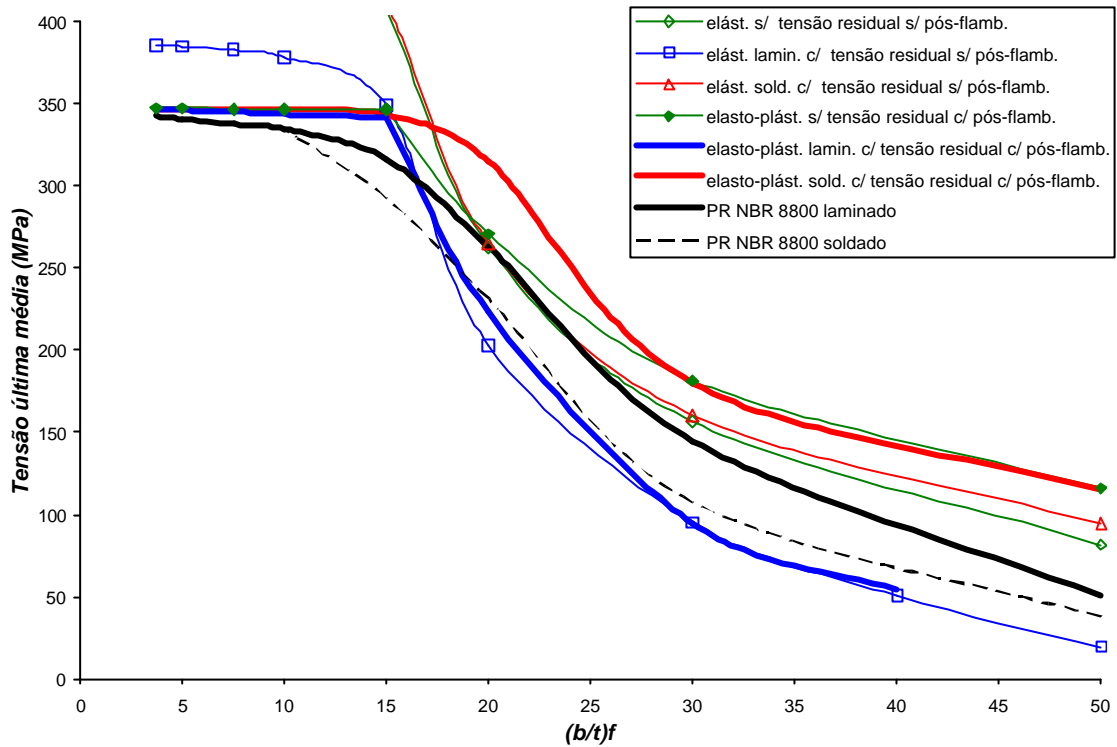


Figura 4.55 – Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 50$ e $f_y = 345$ MPa.

Observando-se as figuras 4.54, aço com $f_y = 250$ MPa, e 4.55, aço com $f_y = 345$ MPa, percebe-se uma aproximação entre as curvas das análises numéricas e as curvas do PR NBR 8800 (2006), porém ainda aparecem algumas diferenças comportamentais.

Pelo PR NBR 8800 (2006), ainda tem-se a flambagem da alma para essa relação de esbeltez, com o coeficiente de redução da resistência (Q_a) variando de 0,946 a 0,999 para aço com $f_y = 250$ MPa, e de 0,894 a 0,992 para aço com $f_y = 345$ MPa, porém, ela só é condicionante da flambagem para esbeltezes de mesa menores ou iguais a 10, nos outros casos a mesa condiciona a flambagem. Das análises numéricas observa-se essa mesma relação condicionante da flambagem local.

Segundo a norma, para essa esbeltez de alma, o coeficiente k_c varia de 0,569, para a menor espessura da mesa, a 0,608, para a maior espessura, de modo que o valor de K_p das mesas varia de 0,523 a 0,599, respectivamente, indicando que a alma proporciona um grau de vinculação para a borda longitudinal das mesas, entre simplesmente apoiada ($K_p=0,425$) e totalmente engastada ($K_p=1,277$). Nos casos em que a flambagem local é

condicionada pelas mesas, observa-se ainda a influência do coeficiente k_c reduzindo a resistência dos perfis soldados em relação à dos perfis laminados, com redução da ordem de 26%.

Das análises numéricas tem-se um aumento das tensões críticas de flambagem elástica, sem tensões residuais, com valores acima da tensão de escoamento do aço para esbeltez de mesa menor ou igual a 30 e aço com $f_y = 250$ MPa, e para esbeltez de mesa menor ou igual a 20 e aço com $f_y = 345$ MPa. Com a consideração das tensões residuais de perfis laminados, observou-se a redução das tensões críticas de flambagem elástica, porém, ainda mantendo os valores acima da tensão de escoamento para as relações de esbeltezes de mesa das análises sem tensões residuais. Para as tensões residuais de perfis soldados, a redução das tensões críticas de flambagem elástica só ocorreu na região onde a alma condicionava a flambagem, tendo sido observado um aumento das tensões na região condicionada pelas mesas, devido à superposição das tensões residuais de tração nesses elementos, ver figura 4.47-b. Na análise da pós-flambagem, em todas as situações em que a tensão crítica elástica era superior à tensão de escoamento do aço, os valores das tensões últimas tenderam à tensão de escoamento, sem a ocorrência da flambagem local. A resistência pós-flambagem só foi observada para mesas muito esbeltas, onde a relação ($s_{cr}/f_y \ll 1$) ainda é verdadeira.

No aço com f_y igual 250 MPa, as curvas de resistência dos perfis laminados ficaram próximas, apresentando o mesmo aspecto comportamental, porém, no aço com f_y igual 345 MPa, é observado um ponto de descontinuidade da curva, o qual está na região de mudança do elemento condicionante de flambagem. Na região da flambagem condicionada pelas mesas, $(b/t)_f$ maior que 10, a queda da resistência é mais acentuada devido à superposição das tensões, pois, as tensões críticas de flambagem elástica dos dois aços são praticamente iguais e as tensões residuais de compressão para o aço com f_y igual 345 MPa são maiores.

Entretanto, a principal diferença entre os resultados permanece sendo a inversão das curvas de maior resistência, pois a norma considera que as seções soldadas são menos resistentes devido à possibilidade de se utilizar almas pouco rígidas, porém, não considera o fato de que as seções soldadas compostas por placas cortadas a maçarico

podem apresentar uma distribuição de tensões residuais que proporcione um aumento na resistência.

Esbeltez de alma $(b/t)_w$ igual a 37,5:

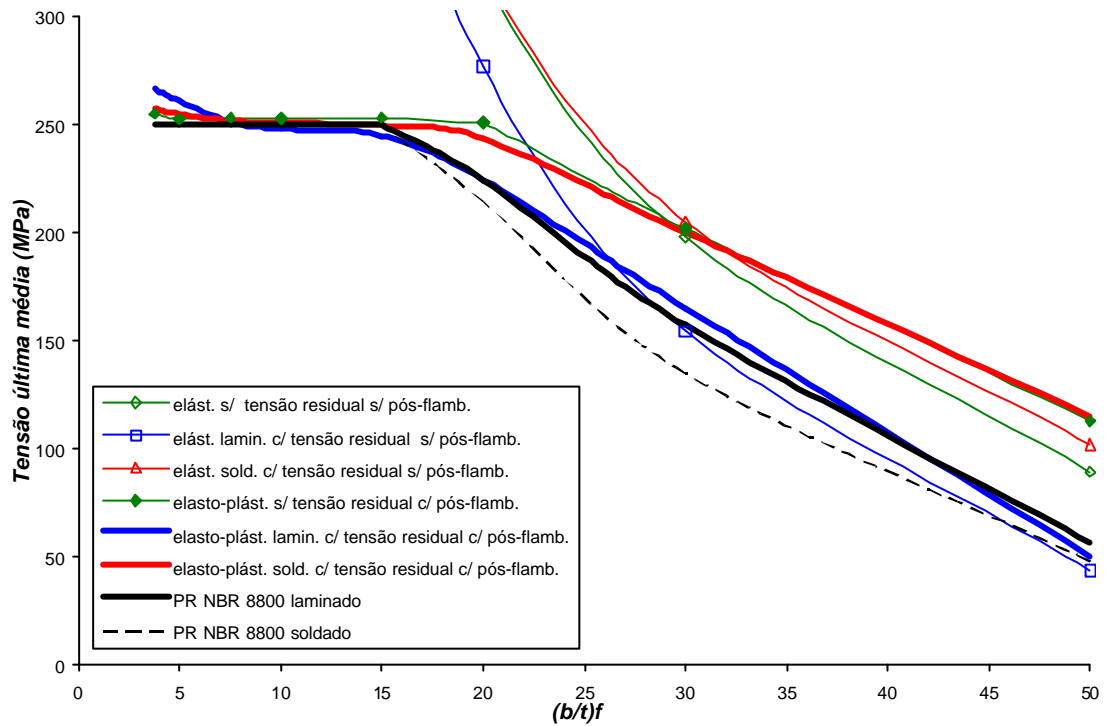


Figura 4.56 – Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 37,5$ e $f_y = 250$ MPa.

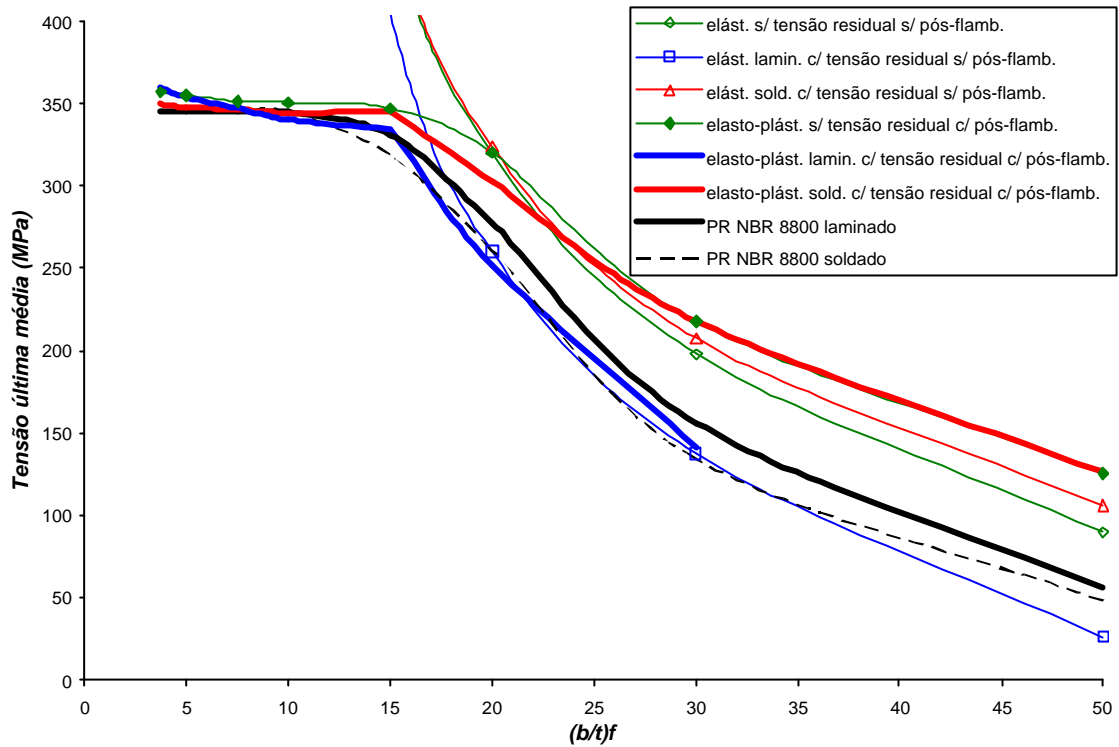


Figura 4.57 – Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 37,5$ e $f_y = 345$ MPa.

Para os perfis laminados observa-se na figura 4.56, aço com $f_y = 250$ MPa, uma ótima concordância das curvas da análise numéricas e do PR NBR 8800 (2006). Também para o aço com $f_y = 345$ MPa, figura 4.57, percebe-se uma aproximação entre as curvas, porém, ainda com a existência do ponto de descontinuidade, pelas razões citadas para $(b/t)_w = 50$.

Pelo PR NBR 8800 (2006), para essa relação de esbeltez não acontece a flambagem da alma e o coeficiente de redução da resistência (Q_a) é praticamente igual a 1,0 para todas as espessuras de mesa. A flambagem da mesa só ocorre para valores de esbeltez da mesa maiores ou iguais a 10, e nos outros casos não se tem a ocorrência de flambagem local no perfil, de modo que a resistência é igual à tensão de escoamento do aço.

Entretanto, na região de flambagem da mesa, tem-se ainda a influência do coeficiente k_c reduzindo a resistência dos perfis soldados em relação à dos perfis laminados, com redução da ordem de 14%. O coeficiente k_c para essa esbeltez de alma varia de 0,656, para a maior esbeltez de mesa, a 0,702, para a menor esbeltez de mesa, e o coeficiente

K_p varia de 0,603 a 0,646 para a maior e a menor esbeltez de mesa, respectivamente, com a alma proporcionando um grau de vinculação intermediário para a borda longitudinal das mesas.

Das análises numéricas observa-se que a alma é condicionante da flambagem local para esbeltezes de mesa maiores ou iguais a 10, nos outros casos a mesa condiciona a flambagem.

As considerações, no que diz respeito às tensões críticas elásticas e às tensões últimas obtidas na pós-flambagem, com e sem tensões residuais e à inversão das curvas, para a esbeltez de alma igual a 50, permanecem válidas.

Esbeltezes de alma $(b/t)_w$ iguais a 25, a 18,75, a 15 e a 12,5:

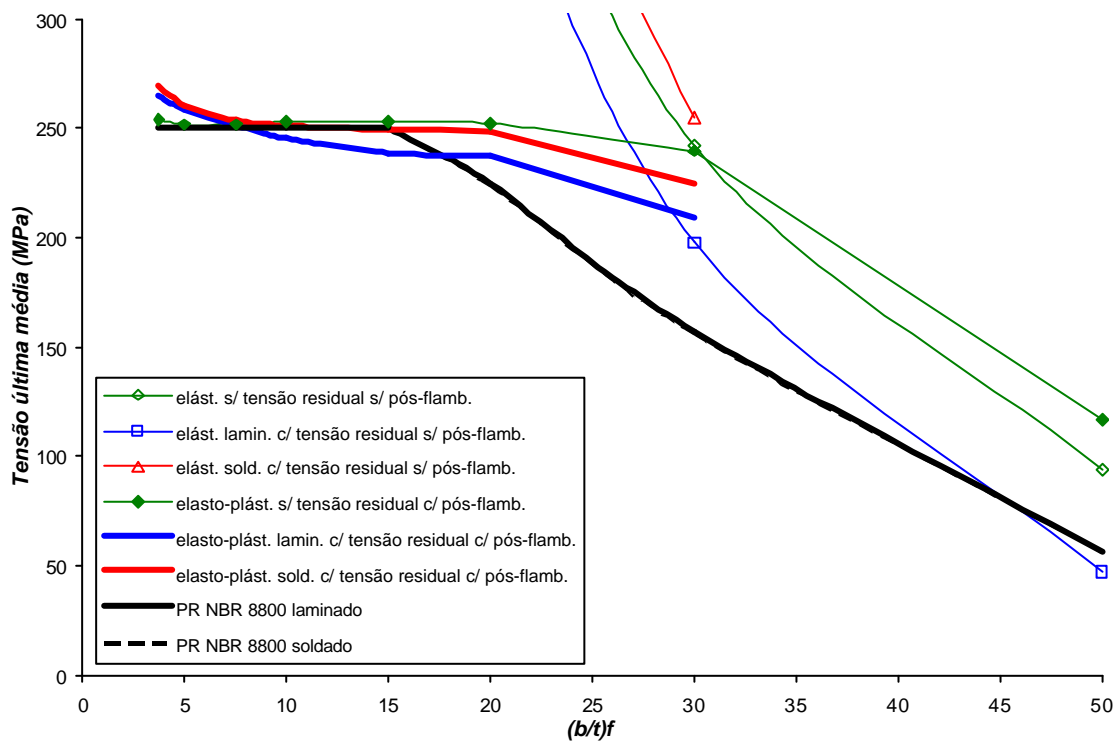


Figura 4.58 – Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 25$ e $f_y = 250$ MPa.

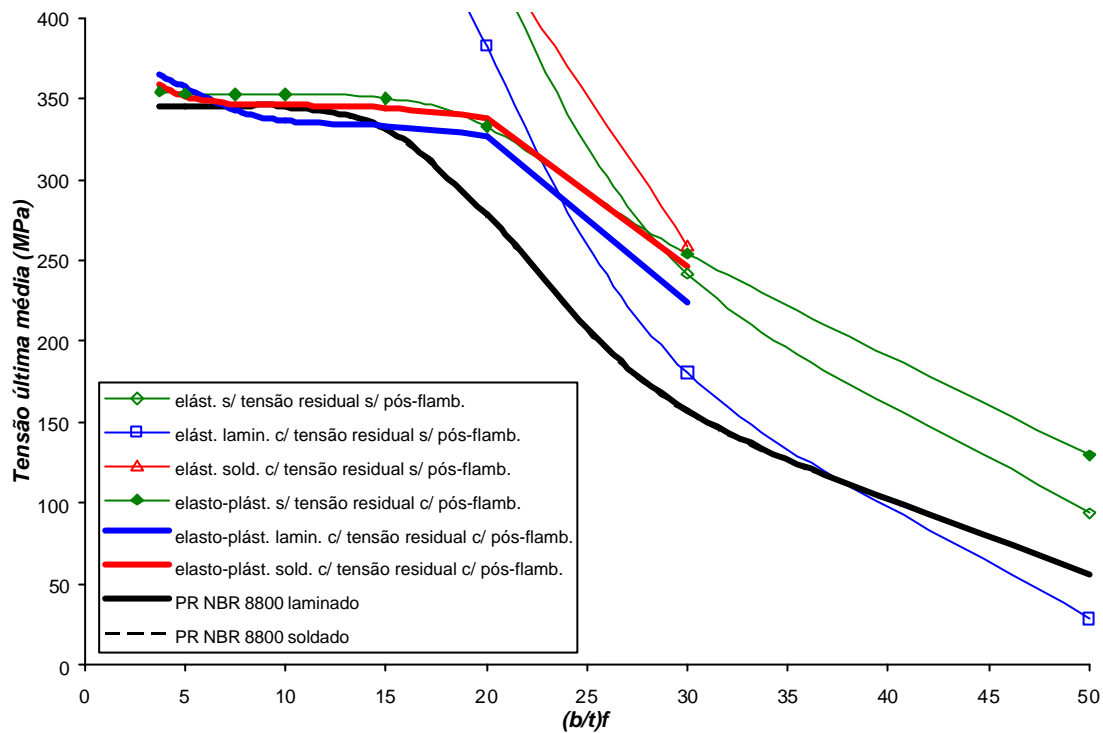


Figura 4.59 – Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 25$ e $f_y = 345$ MPa.

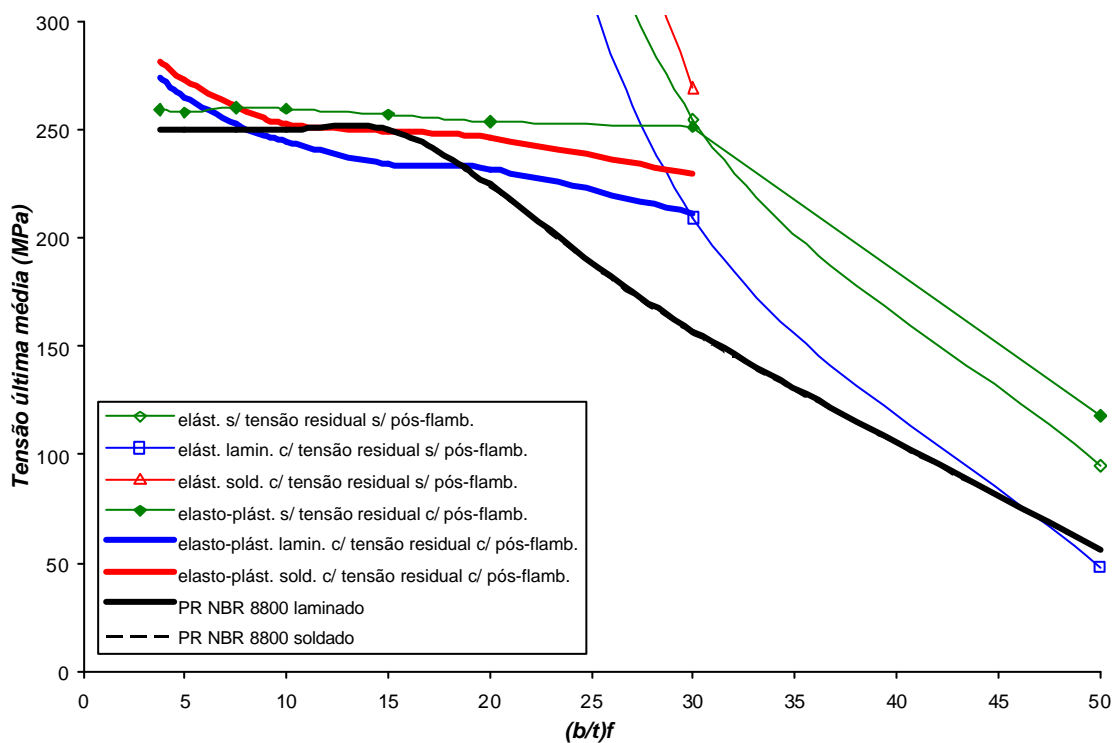


Figura 4.60 – Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 18,75$ e $f_y = 250$ MPa.

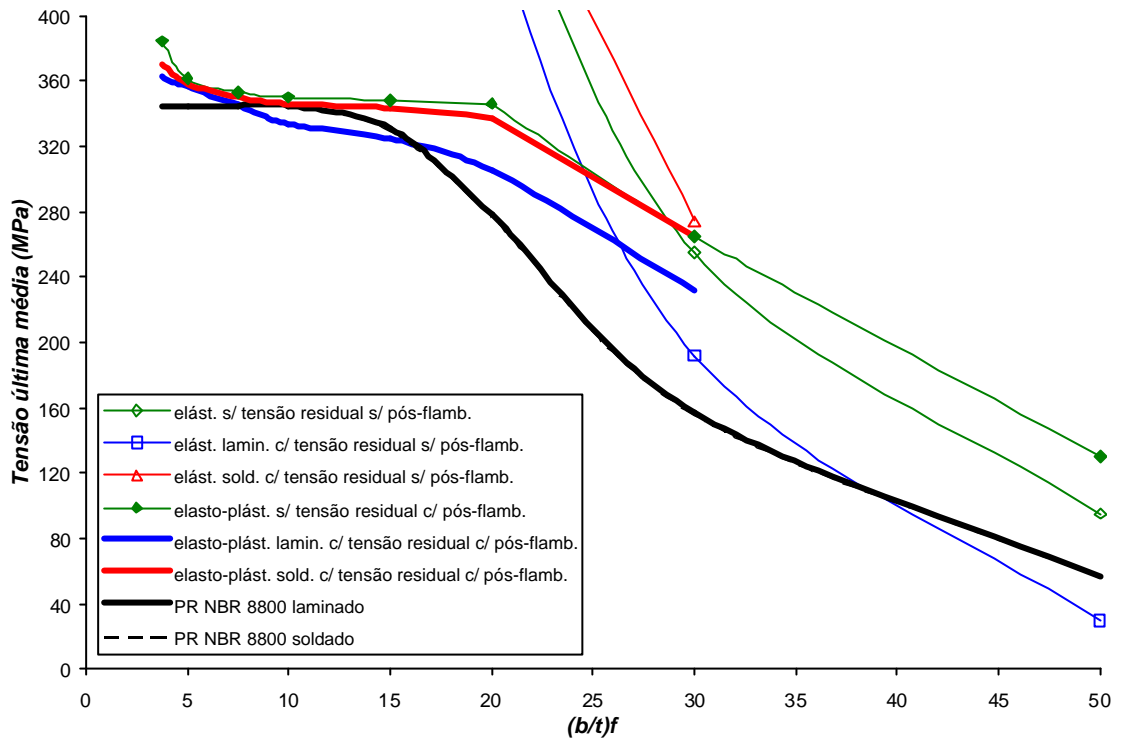


Figura 4.61 – Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 18,75$ e $f_y = 345$ MPa.

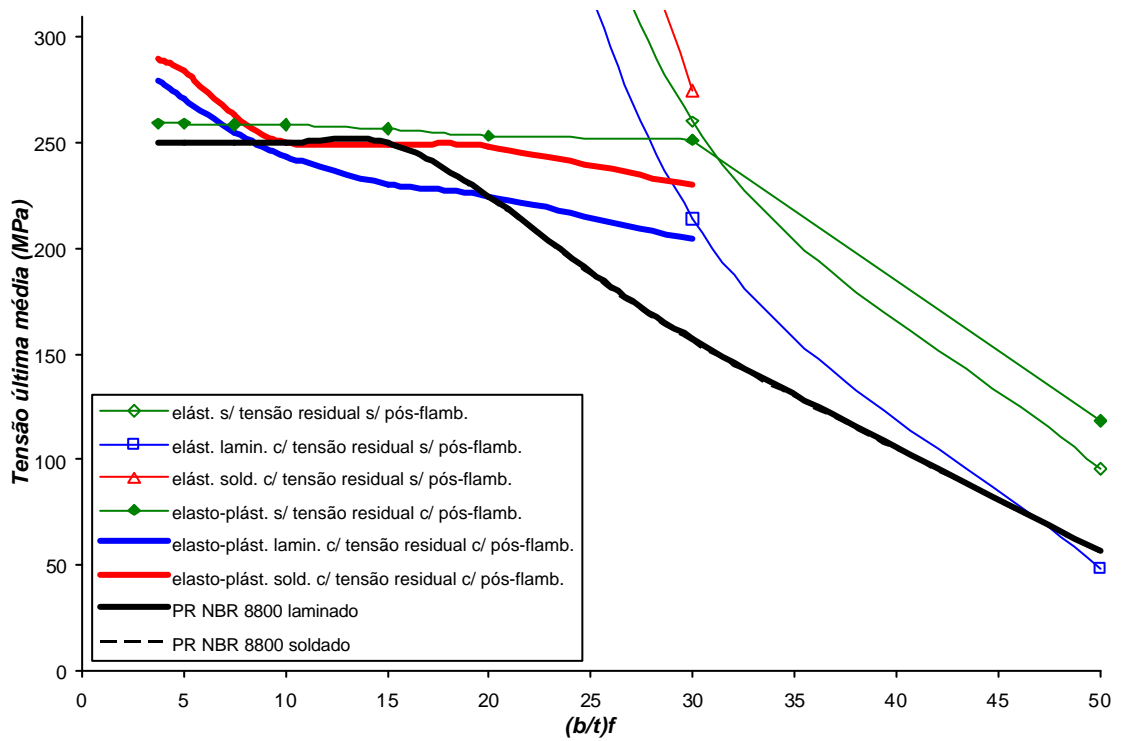


Figura 4.62 – Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 15$ e $f_y = 250$ MPa.

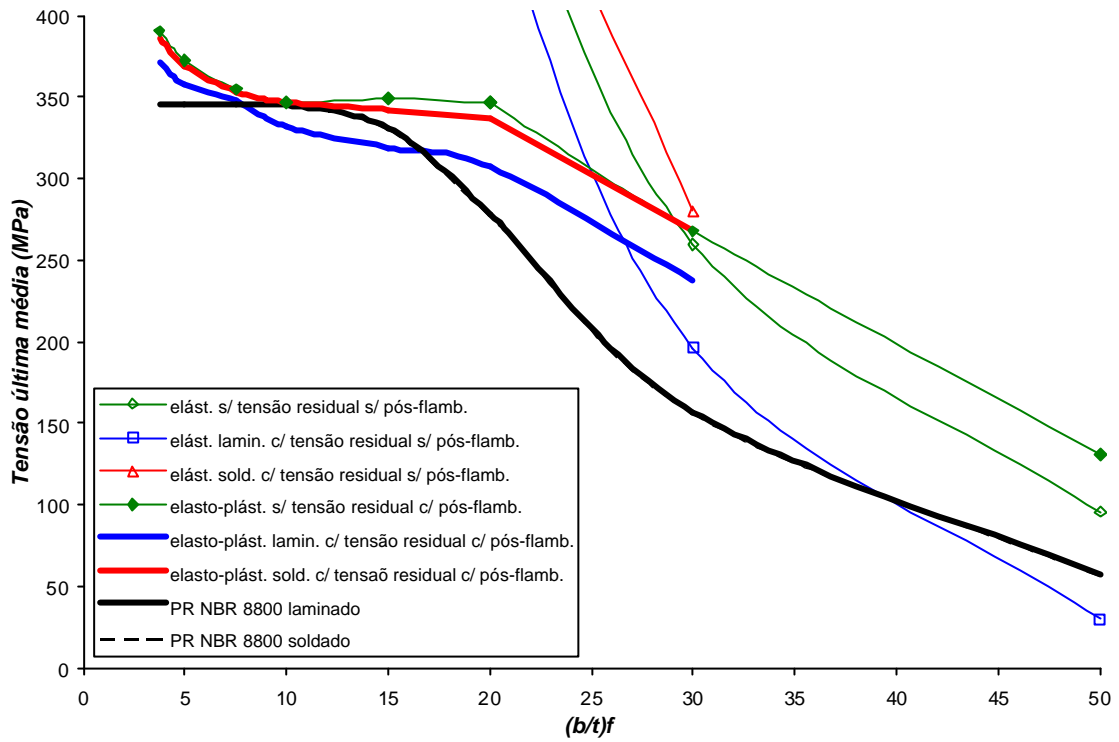


Figura 4.63 – Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 15$ e $f_y = 345$ MPa.

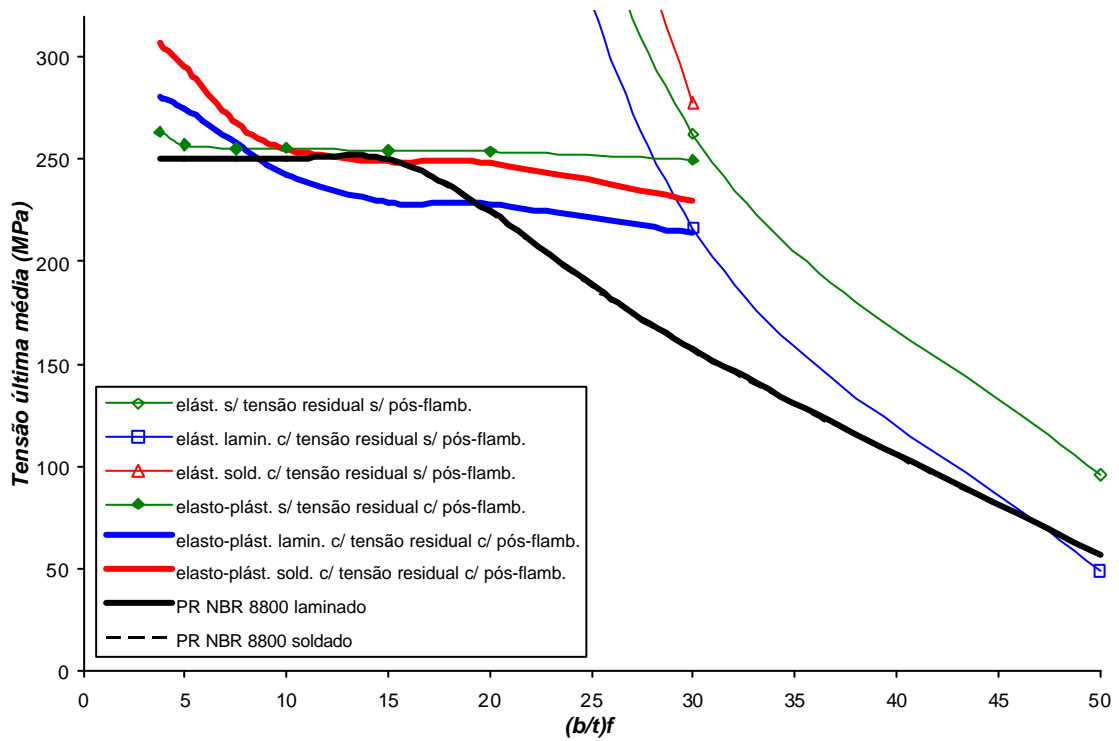


Figura 4.64 – Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 12,5$ e $f_y = 250$ MPa.

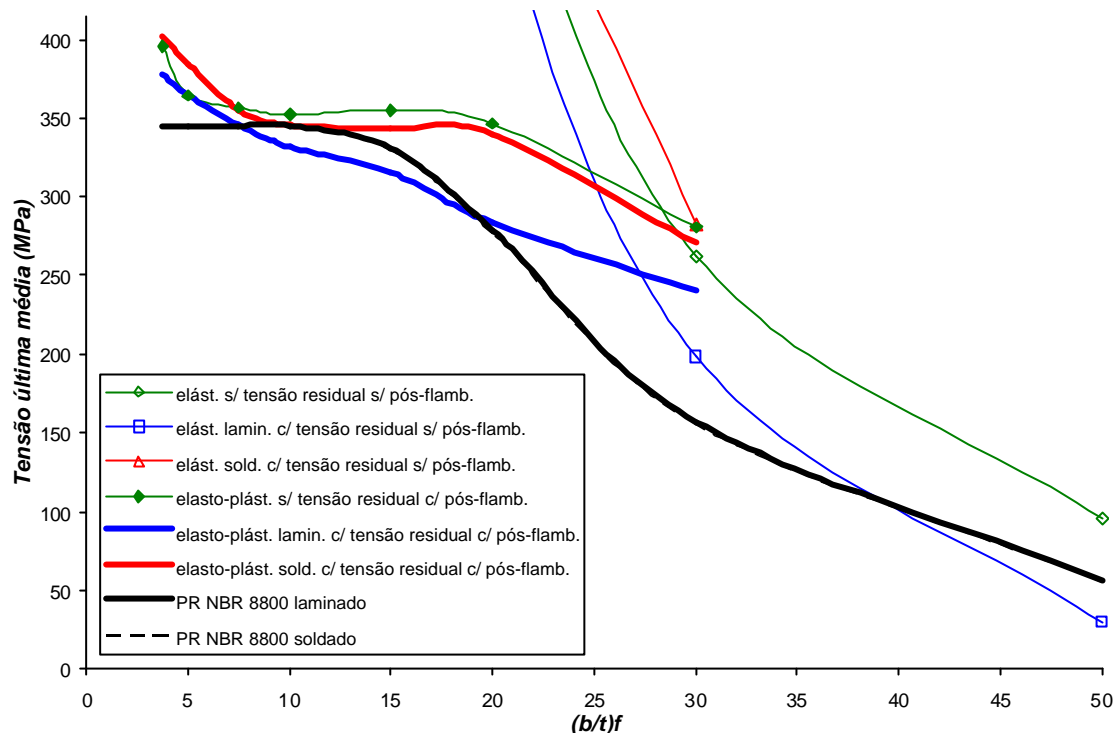


Figura 4.65 – Curvas de resistência em função de $(b/t)_f$ para $(b/t)_w = 12,5$ e $f_y = 345$ MPa.

Nas figuras 4.58 a 4.65, podem ser vistas as curvas da análise numérica e do PR NBR 8800 (2006) para aços com f_y igual a 250 MPa e a 345 MPa. Observa-se que todas apresentam características muito parecidas e por essa razão são analisadas conjuntamente.

Pelo PR NBR 8800 (2006), para essas relações de esbeltez não acontece a flambagem da alma e a flambagem da mesa só ocorre para valores de esbeltez da mesa maiores ou iguais a 15, e nos outros casos não se tem a ocorrência de flambagem local no perfil, com a resistência última à flambagem local igual à tensão de escoamento do aço.

Para essas esbeltezes de alma o coeficiente k_c tem seu valor máximo igual a 0,76 para todas as esbeltezes de mesa, e o valor do coeficiente K_p é igual ao da mesa do perfil laminado 0,71. Também todos os outros parâmetros do perfil soldado ficam iguais ao do perfil laminado de modo que não há diferença entre as resistências desses perfis, como pode ser visto pelas curvas superpostas do PR NBR 8800 (2006) das figuras.

Das análises numéricas tem-se que para $(b/t)_w = 25$ a alma é condicionante da flambagem local para esbeltezes de mesa maiores ou iguais a 5, para $(b/t)_w = 18,75$ e $(b/t)_w = 15$ para a esbeltez de mesa igual a 3,75, e a mesa condiciona a flambagem nos outros casos. Para $(b/t)_w = 12,5$ a mesa é sempre condicionante da flambagem local

As considerações, no que diz respeito às tensões críticas elásticas e às tensões últimas obtidas na pós-flambagem, com e sem tensões residuais e à inversão das curvas, para a esbeltez de alma igual a 50, também permanecem válidas. Porém, é importante ressaltar que os valores das tensões críticas de flambagem elástica aumentaram muito com a redução das esbeltezes, tanto da alma quanto das mesas. Dessa forma, na obtenção da curva de pós-flambagem, na região de mesas pouco esbeltas, não foi possível obter valores de tensão próximas às críticas, pois, devido ao comportamento adotado para o material, as tensões atingiram o escoamento, chegando ao encruamento em alguns pontos da barra, sem a ocorrência da flambagem local. Por essa razão foi observado um aumento no valor da resistência, provocando as elevações das curvas nessa região.

Além disso, nas mesas pouco esbeltas, o primeiro modo de flambagem correspondeu ao de flambagem global em relação ao eixo de menor inércia. Por essa razão, forçou-se a ocorrência da flambagem local como primeiro modo de flambagem, pela restrição dos deslocamentos laterais dos nós de encontro da mesa com a alma. Porém, para a menor esbeltez de alma ainda foi constatada a flambagem global em relação ao eixo de maior inércia, portanto, restringiu-se também o deslocamento vertical do nó central da alma, porém, assegurando que a alma ainda poderia apresentar deslocamento de flexão transversal.

A redução das curvas de perfil laminado na região de esbeltez de mesa intermediária é devida à mudança do elemento condicionante da flambagem, que até então era alma e passou a ser a mesa. Dessa forma, observou-se uma influência maior na resistência do elemento que flamba (mesas), devido à superposição das tensões de compressão que são grandes nessa região.

4.5. Controle e Convergência

Nas análises linearizadas de estabilidade, também foi feito o estudo preliminar estático linear do perfil para a avaliação da aplicação de carga e das condições de contorno. Em todos os casos foram solicitados os três primeiros modos de flambagem e um número máximo de duzentas iterações, e apenas em algumas análises dos perfis I com tensões residuais e mesas com a maior esbeltez não foi possível a solução. Em todos os outros casos não foram observados problemas na obtenção dos autovalores e autovetores. Para as situações em que o problema ocorreu, verificou-se que a superposição das tensões residuais com as tensões atuantes corresponde a um valor de tensão final superior à tensão crítica de flambagem, que era muito pequena devido à grande esbeltez da mesa.

Nas análises de pós-flambagem, para os perfis estudados de material elástico e sem a consideração das tensões residuais, não foi necessário nenhum controle adicional ou alteração dos parâmetros *default* do ABAQUS, apenas a definição e o ajuste do incremento inicial do comprimento do arco.

Com a implementação do material elasto-plástico e das tensões residuais nos modelos, foram observados problemas de convergência e a primeira medida de controle adotada foi a alteração do esquema de incrementação, impondo que os incrementos máximos fossem iguais ao incremento inicial fornecido. Apenas nas análises em que a placa condicionante da flambagem local era esbelta essa medida foi suficiente, portanto, foi reduzido também o valor do critério de convergência do resíduo, resolvendo o problema em alguns casos. A próxima medida de controle foi a redução do parâmetro de correção do deslocamento. Porém, para as seções compostas de placas de pequena esbeltez houve também a necessidade de ativação do algoritmo de *line search*.

Assim como para as placas, foram especificados grandes valores para o máximo fator de proporcionalidade da carga, o máximo deslocamento do nó de controle e o número máximo de incrementos, de modo que a interrupção do processamento ocorreu quando o programa não obteve mais convergência e foi constatado um fator de colapso. Definiu-se como carga última aquela correspondente ao final do trecho de inclinação positiva da curva obtida, ou aquela correspondente ao ponto de ocorrência do colapso.

Para exemplificação da forma de determinação da carga última têm-se as curvas de pós-flambagem de cantoneiras com esbeltezes da aba iguais a 40, 20 e 10, material tanto elástico quanto elasto-plástico, para os dois aços adotados, e sem tensões residuais, mostradas nas figuras 4.66, 4.67 e 4.68, respectivamente.

Em todos os casos estudados, a consideração do material com comportamento elástico linear (curva azul) permitiu as tensões e o deslocamento do nó de controle crescessem livremente, e a análise foi feita até que o programa apresentasse alguma inconsistência numérica, como, por exemplo, a distorção excessiva do elemento. Nesses casos, a carga última de colapso foi adotada como aquela correspondente ao final do trecho de inclinação positiva da curva.

Para o material de comportamento elasto-plástico, observou-se que o final da análise correspondeu sempre ao surgimento de uma região plastificada na peça. Na cantoneira de aba com esbeltez igual a 40, ver figura 4.66, o valor da tensão crítica de flambagem elástica é pequeno, permitindo que se desenvolvam grandes tensões na cantoneira antes do início da plastificação do material. Portanto, a plastificação ocorre quando já existem grandes deslocamentos nas abas e a distribuição não-linear das tensões, típica da pós-flambagem, causando a finalização da análise devido ao alto grau de não linearidades existentes. A carga última de colapso, nesse caso, foi considerada como sendo a carga no ponto de interrupção da análise.

Para a cantoneira com esbeltez de aba igual a 20, figura 4.67, o valor da tensão crítica de flambagem elástica é próximo ao valor da tensão de escoamento do material, de modo que, o início da plastificação ocorre com a peça pouco deformada e com a distribuição das tensões quase linear. Por essa razão, o programa consegue acompanhar o desenvolvimento da curva de pós-flambagem até que os deslocamentos cresçam o suficiente causar problemas numéricos de convergência. Porém, observa-se que a alteração na rigidez dos elementos plastificados causa uma redução na resistência da cantoneira à medida que os deslocamentos crescem. A carga última de colapso considerada é a correspondente à maior carga existente, ou seja, o ponto antes do início da queda da curva.

A cantoneira com esbeltez de aba igual a 10, figura 4.68, possui uma tensão crítica de flambagem elástica próxima à tensão de escoamento do aço com $f_y = 345$ MPa, com o início da plastificação na cantoneira pouco deformada e com distribuição das tensões quase linear, porém, como os valores das tensões são bastante elevados, ocorre a plastificação total da região mais solicitada da cantoneira, e a análise é interrompida, sendo essa a carga última de colapso. Para o aço com $f_y = 250$ MPa, a tensão crítica de flambagem elástica é inferior à tensão de escoamento e a plastificação total ocorre sem que haja a flambagem da aba da cantoneira. A carga última de colapso é adotada como a carga correspondente à plastificação total.

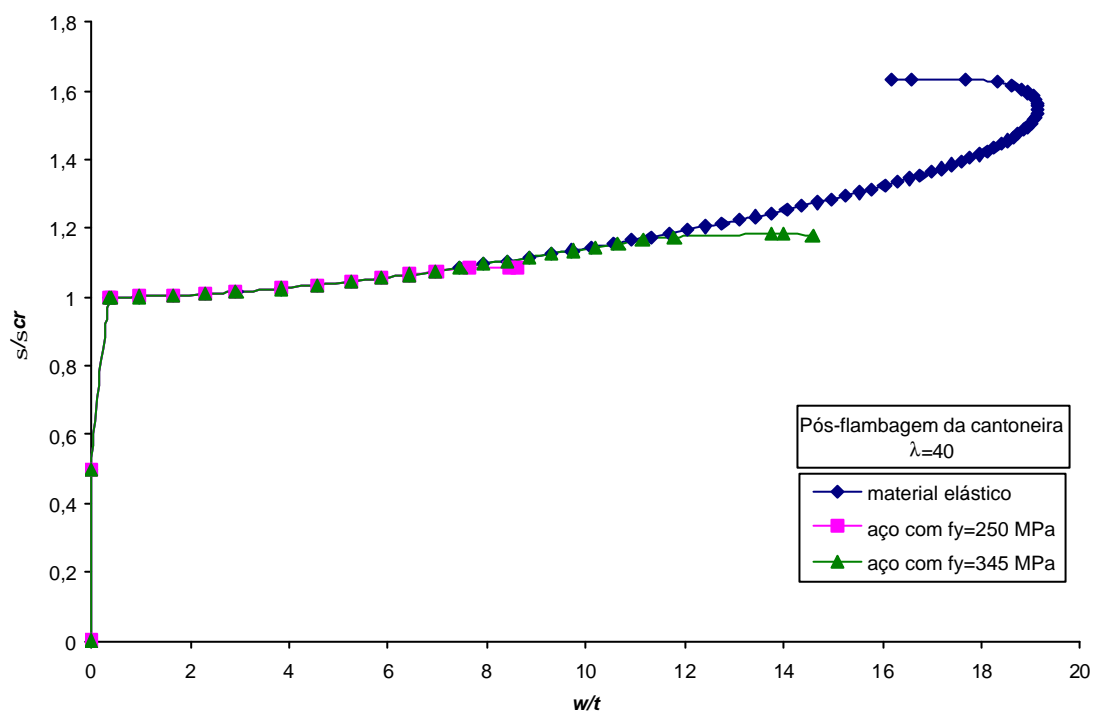


Figura 4.66 – Curva de pós-flambagem da cantoneira com esbeltez da alma igual a 40.

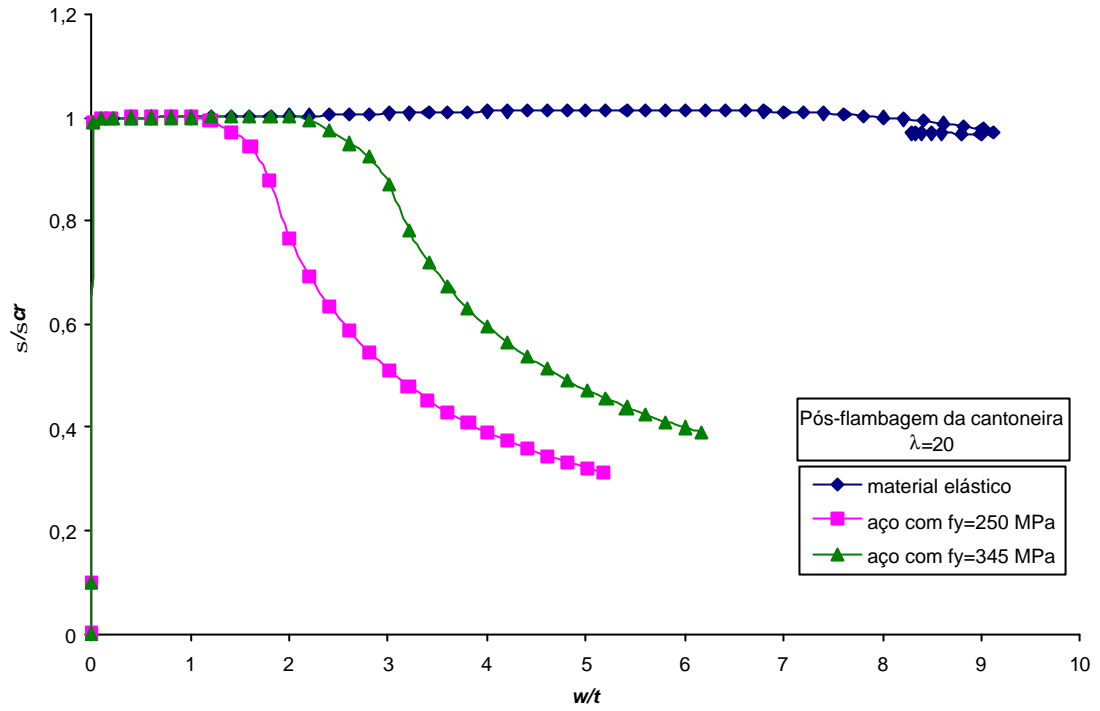


Figura 4.67 – Curva de pós-flambagem da cantoneira com esbeltez da alma igual a 20.

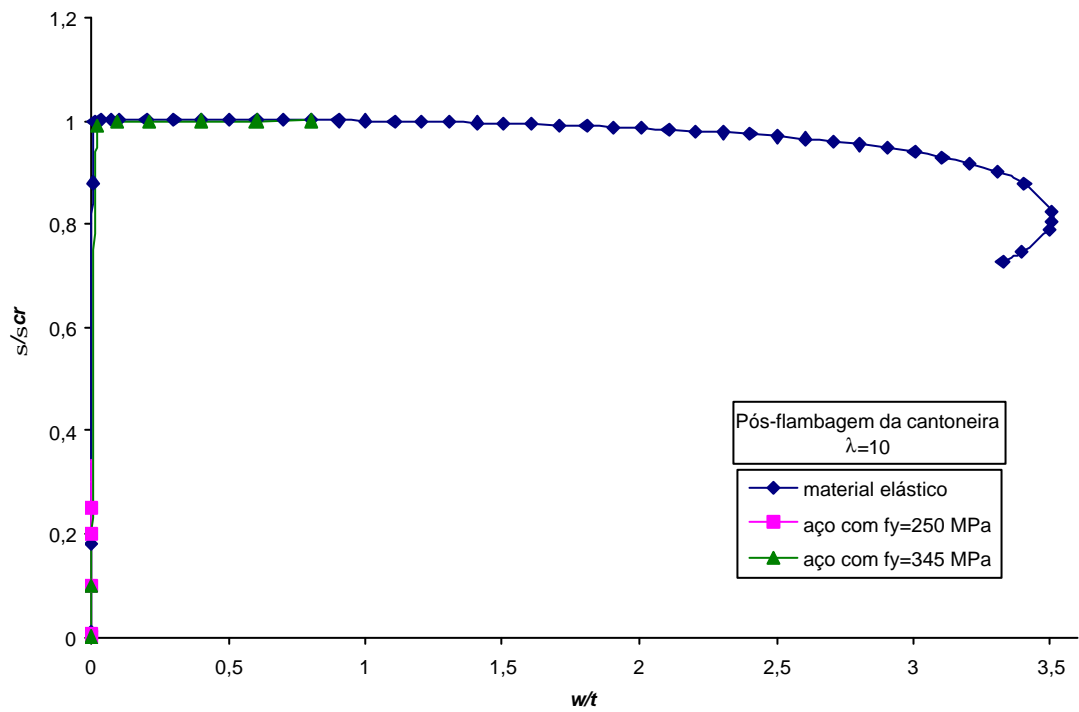


Figura 4.68 – Curva de pós-flambagem da cantoneira com esbeltez da alma igual a 10.

5. CONCLUSÕES

5.1. Considerações Gerais

Neste trabalho foi realizado um estudo amplo, conceitual e numérico, da flambagem local de peças estruturais de aço submetidas à compressão uniaxial centrada com a consideração das não-linearidades associadas a esse fenômeno. Foi adotada uma metodologia de abordagem gradual do problema, seguindo uma sequência de estudo e análise, que possibilitasse a compreensão dos conceitos descritos na literatura e permitisse a observação dos diversos aspectos comportamentais nas placas e nos perfis estruturais analisados.

O desenvolvimento do trabalho contemplou primeiramente um estudo dos conceitos fundamentais envolvidos na flambagem local, criando uma base de conhecimento que permitisse a análise crítica dos resultados obtidos. Para o estudo do Projeto de Revisão da Norma Brasileira de Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios, PR NBR 8800 (2006), foram pesquisados os coeficientes e equações, visando compreender as origens das aproximações e simplificações adotadas e seu grau de precisão.

Nos estudos da estabilidade de placas isoladas e dos perfis estruturais, aplicou-se a metodologia de implementação das não-linearidades aos modelos, partindo-se de casos simples encontrados na literatura e fazendo-se o acoplamento gradual dos fatores de influência do fenômeno. À medida que os processos foram realizados percebeu-se a necessidade de se fazer a análise dos resultados obtidos antes de se passar para a etapa seguinte. Dessa forma, conseguiu-se verificar e calibrar a forma de implementação,

ajustando os parâmetros de controle e melhorando a convergência e a precisão dos resultados.

A análise geral dos resultados obtidos é apresentada a seguir, procurando-se ressaltar os aspectos relevantes observados.

5.2. Placas

Primeiramente foram realizadas diversas análises linearizadas de estabilidade de placas isoladas, de material elástico e sem tensões residuais, com condições de vinculação variadas em suas bordas, obtendo-se os valores da carga crítica de flambagem elástica e os modos de flambagem predominantes. Foram determinados os valores dos coeficientes de flambagem elástica e os valores obtidos foram comparados com valores teóricos da literatura, apresentando excelente concordância numérica e comportamental.

Dessas análises pôde-se observar a interferência das condições de contorno das bordas transversais carregadas nos valores da tensão crítica para placas com pequena razão entre os lados, enrijecendo a região adjacente a essa borda e interferindo na formação das semi-ondas de flambagem. Para bordas carregadas engastadas, o valor do coeficiente de flambagem nessa região é maior que o valor para bordas simplesmente apoiadas, porém, com o aumento da relação entre os lados da placa, o efeito das condições de vinculação da borda carregada deixa de ser significativo e o valor do coeficiente tende ao valor correspondente ao das placas com bordas simplesmente apoiadas. Observou-se também a interferência do tipo de vinculação das bordas longitudinais descarregadas, alterando as formas dos modos de flambagem, como por exemplo, a liberação de uma borda longitudinal implicando no aumento do comprimento de flambagem da largura transversal e na redução do número de semi-ondas formadas na flambagem.

A existência de diversos estudos e resultados para comparação, nessa etapa, permitiu um ajuste da modelagem e aplicação, além de estabelecer uma sistemática de formação dos arquivos de entrada e uma compreensão dos resultados fornecidos nos arquivos de

saída de dados, tanto numéricos quanto gráficos, sendo os últimos visualizados no módulo ABAQUS CAE.

Na sequência foi realizada a análise de pós-flambagem de uma placa quadrada simplesmente apoiada em suas bordas, também de material elástico e sem tensões residuais, com a obtenção da curva carga-deslocamento. Para essa etapa foi necessário o estudo e o entendimento da forma de se implementar as imperfeições geométricas iniciais e de se acompanhar o processo de análise não-linear, formalizando também a sistemática de formação dos arquivos de entrada e a compreensão dos resultados fornecidos nos arquivos de saída de dados e no módulo ABAQUS CAE para esse tipo de análise. Os resultados obtidos foram comparados com resultados da literatura, permitindo o ajuste dos parâmetros e foi verificada uma boa concordância.

Uma vez estabelecidas as bases da análise numérica, foi realizado o estudo de uma placa longa, de modo a evitar a interferência da vinculação das bordas carregadas e aproximar a análise às dimensões normalmente usadas nos perfis estruturais. Foram verificados diversos aspectos como a sensibilidade da malha, a introdução de tensões residuais, a consideração de material elasto-plástico e a acuidade numérica e a coerência comportamental para esses fatores.

Para essa análise foram estudados os procedimentos de implementação das tensões residuais e do material de comportamento elasto-plástico. Inicialmente foram obtidos os valores das tensões críticas de flambagem, de material elástico e elasto-plástico, com e sem tensões residuais e foram determinados os valores dos coeficientes de flambagem elástica de placa sem tensões residuais. Os resultados obtidos dessas análises iniciais apresentaram valores correspondentes aos teóricos e os modos de flambagem esperados.

Para as placas com tensões residuais observou-se um aumento significativo da tensão crítica de flambagem em relação à tensão crítica de flambagem das placas sem tensões residuais. Observou-se esse comportamento, apenas nas placas finas, pois as tensões residuais desenvolvidas nessas placas são relativamente altas se comparadas à tensão crítica de flambagem elástica da placa sem tensões residuais, e vão se tornando menos

significativas à medida que a espessura da placa aumenta, conforme os resultados da figura 3.23.

Para um melhor entendimento da influência das tensões residuais no comportamento da placa foram analisadas duas distribuições inversas, a primeira correspondente à distribuição padrão de placas laminadas e a segunda com a inversão do sinal das tensões. Observou-se que a distribuição padrão aumentou o valor da tensão crítica de flambagem em relação à placa sem tensões residuais, pois a superposição das tensões residuais de tração na região central que flamba com as tensões de compressão do carregamento reduziu a tensão final de compressão atuante, contribuindo na resistência pré-flambagem. Para a distribuição de tensões residuais invertida, os valores foram menores que os valores da placa sem tensões residuais, pois as tensões residuais na região central que flamba também são de compressão e na superposição aumentaram a tensão final de compressão atuante, reduzindo a resistência pré-flambagem.

Na análise de pós-flambagem pôde-se comprovar esses resultados na região de pré-flambagem ($s/s_{cr} = 1$), conforme mostrado na figura 3.20. Entretanto, devido à redistribuição das tensões após o início da flambagem, a distribuição padrão de tensões residuais da placa laminada causou a redução da tensão última de colapso pelo aumento das tensões de compressão atuantes na região ainda resistente. As tensões residuais invertidas provocaram o efeito contrário devido às tensões residuais de tração próximo às bordas longitudinais, figura 3.21.

Da análise de pós-flambagem das placas foram obtidas as curvas carga x deslocamento (figura 3.23), e da comparação entre elas pôde-se confirmar a expectativa de que a resistência pós-flambagem só é realmente significativa quando a tensão de escoamento é consideravelmente maior que a carga crítica, como no caso das placas finas. Concluiu-se que esse comportamento diferenciado está relacionado ao efeito de membrana desenvolvido quando a placa flamba, pois, placas mais finas possuem menor rigidez, deformando-se mais na flambagem e desenvolvendo componentes de tensão normal devidas à flexão.

Foi feita também a verificação da distribuição das tensões ao longo da largura da placa à medida que o carregamento cresce. Pôde-se observar o comportamento esperado, ou seja, até a ocorrência da flambagem as tensões são praticamente constantes, e após o início da flambagem ocorre uma redistribuição com a redução das tensões na região central e um aumento na região próxima às bordas longitudinais. Para o caso estudado verificou-se que as tensões residuais não afetaram os resultados.

A maioria dos estudos das placas não apresentou problemas numéricos de análise e convergência. Apenas com o aumento do grau de não-linearidade foram necessários controles adicionais, impondo-se o tamanho máximo do incremento pelo incremento inicial e reduzindo-se o valor do parâmetro do critério de convergência do resíduo.

5.3. Perfis

O estudo dos perfis também iniciou por casos simples de determinação das cargas críticas de flambagem e dos modos de deformação. Foram estudados perfis de chapa fina formados a frio, com seções U e C, e perfis I, encontrados na literatura, que permitissem a adequação da sistemática de implementação e análise empregada para as placas, principalmente quanto à geração da geometria e da malha das diversas seções. Foi considerado material elástico e sem tensões residuais. O processo de modelagem foi ajustado até que o modelo se comportasse adequadamente, conduzindo a resultados bem próximos aos de referência.

Com o domínio desse procedimento foi realizado o estudo de perfis I e U e de cantoneiras de abas iguais, com o objetivo de se avaliar os parâmetros de flambagem elástica dessas seções utilizados pelo PR NBR 8800 (2006). Foram obtidos os valores dos coeficientes de flambagem elástica das placas condicionantes da flambagem, e com esses valores foram determinados os limites de esbeltez máxima, abaixo dos quais não ocorre a flambagem local.

Nos perfis I e U, para a flambagem condicionada pelas mesas, os valores obtidos para os dois parâmetros variaram dentro dos limites de placas isoladas. Verificou-se, porém, a ocorrência de modos de flambagem com várias semi-ondas longitudinais, diferente do

comportamento de uma placa isolada, onde há formação de apenas uma semi-onda longitudinal, indicando uma alteração comportamental devido à variação no grau de vinculação entre a mesa e a alma. Os valores adotados pela norma para esses parâmetros são constantes, próximos ao valor médio dos limites de placas isoladas, pois a norma desconsidera a variação do grau de vinculação relativo entre os elementos da seção. Portanto, em alguns casos, o uso da norma brasileira conduz a resultados contrários e em outros conduz a resultados favoráveis à segurança.

Para a flambagem local condicionada pela alma, os valores obtidos para os parâmetros ficaram próximos aos valores determinados para placas com as bordas longitudinais perfeitamente engastadas, inferiores aos valores adotados pela norma, e nessa situação o uso da norma brasileira conduz a resultados favoráveis à segurança.

Para as abas das cantoneiras também foram obtidos os valores dos parâmetros de flambagem elástica em função das esbeltezes, que variaram em torno do valor para placas com uma borda longitudinal perfeitamente rotulada e outra livre, tendendo assintoticamente para o valor adotado pela norma, o qual foi sempre superior. Considerou-se que, para as cantoneiras de abas iguais, o procedimento da norma brasileira apresentou bom nível de precisão. É importante ressaltar que estas conclusões são válidas apenas para o comportamento elástico linear e com a consideração de tensões residuais adotada pela norma.

Na análise da pós-flambagem, seguindo a metodologia de análise, iniciou-se o estudo por casos simples, encontrados na literatura, de perfis de chapa fina formados a frio, com seções transversais C e tipo rack, sem a consideração das tensões residuais nem do comportamento elasto-plástico do material. Aplicou-se a sistemática de análise da pós-flambagem usada para as placas isoladas, e ajustou-se os parâmetros de análise e convergência pela comparação com os resultados da literatura.

Foi realizado um estudo do perfil I com o objetivo de validar a implementação e análise pela abordagem indireta de comparação dos comportamentos das placas constituintes do perfil por placas isoladas com condições de vinculação análogas, pois não se encontrou na literatura estudos de caso e medições experimentais que possibilitassem uma

comparação de resultados. Considerou-se as almas dos perfis I similares a placas com as quatro bordas apoiadas, e observou-se boa concordância entre os resultados. As mesas dos perfis foram comparadas a placas com uma borda longitudinal livre e a outra simplesmente apoiada e, nesse caso, foram observadas diferenças nos resultados devido à rigidez da borda longitudinal da mesa do perfil no encontro com a alma.

Dessa análise conclui-se que o comportamento das mesas de um perfil I não pode ser aproximado pelo comportamento de uma placa isolada com mesma condição “teórica” de vinculação, diferentemente da aproximação da alma do perfil I pela placa isolada correspondente.

O estudo da pós-flambagem foi estendido às cantoneiras de abas iguais, com a adoção da metodologia de implementação gradual das não-linearidades da análise, para a obtenção das curvas de resistência à flambagem local das abas das cantoneiras. Foram introduzidas na análise as tensões residuais e foi considerado o comportamento elasto-plástico para aços, com tensões de escoamento iguais a 250 MPa e 345 MPa.

Primeiramente, foram obtidos das análises linearizadas de estabilidade os valores das tensões críticas de flambagem elástica, com e sem tensões residuais, em função da esbeltez da aba da cantoneira. Em seguida, foram determinados os valores da curva de resistência à flambagem local das cantoneiras adotada pelo PR NBR 8800 (2006). Por fim foram obtidos também os valores de resistência última das abas das cantoneiras, considerando o comportamento de pós-flambagem, material elasto-plástico, com e sem tensões residuais.

Observou-se que os resultados obtidos para as tensões críticas de flambagem com tensões residuais são ligeiramente superiores aos valores sem tensões residuais, devido à existência das tensões residuais de tração na região central da aba, reduzindo a tensão de compressão final atuante e aumentando a resistência à flambagem local.

Comparando-se a tensão crítica de flambagem elástica sem tensões residuais com os valores correspondentes determinados pela curva elástica da norma sem pós-flambagem, observa-se que os valores da norma são sempre superiores ao da curva

elástica sem tensões residuais, devido à adoção de um coeficiente de flambagem elástica maior que os coeficientes obtidos nas análises numéricas.

Para as tensões críticas elásticas com resistência pós-flambagem, os valores do PR NBR 8800 (2006) são obtidos pela multiplicação da curva elástica sem pós-flambagem por um fator constante igual a 1,262, ou seja aumentando a resistência à flambagem elástica em 26,2%. Das análises numéricas, verificou-se novamente que a resistência adicional de pós-flambagem só é realmente significativa em placas finas, e que esse efeito deixa de ser relevante na medida em que as tensões críticas aumentam em relação à tensão de escoamento. Observou-se que, na cantoneira mais esbelta sem tensões residuais, a consideração da resistência pós-flambagem provocou um aumento da resistência de até quatro vezes o valor da norma. Para valores da tensão crítica de flambagem próximos à tensão de escoamento dos aços adotados, para cantoneiras com e sem tensões residuais, o aumento de resistência, devido à resistência pós-flambagem, caiu para um valor médio de um quinto do valor da norma, desaparecendo para valores da tensão crítica de flambagem acima da tensão de escoamento. Dessa forma, observa-se que as curvas de resistência última das cantoneiras obtidas na análise numérica não concordam com os valores adotados pelo PR NBR 8800 (2006), pois a consideração do aumento constante de resistência pós-flambagem adotado pela norma não é representativo do comportamento real esperado e observado.

As cantoneiras comerciais apresentam valores de esbeltez (b/t) da aba entre 4 e 16, os quais se situam na região de comportamento inelástico e totalmente plástico, levando ao questionamento quanto ao parâmetro limite de esbeltez máxima adotado na norma, que se encontra exatamente nessa região. Apesar dos valores adotados pela norma serem favoráveis à segurança, eles conduzem a valores de resistência última até 15% menores que os valores determinados, levando a dimensionamentos pouco otimizados.

Do estudo da análise linearizada de estabilidade das cantoneiras considerou-se pela comparação dos resultados que a norma apresentou bom nível de precisão na determinação desses valores, ficando acima dos valores da análise numérica. Porém, a determinação daqueles valores de esbeltez foi feita utilizando-se o valor do coeficiente de flambagem elástica obtido na análise numérica sem tensões residuais, que foram

consideradas de forma similar à norma, com a utilização do coeficiente de redução empírico adotado por ela. Entretanto, foi observado que as tensões residuais só apresentam influência significativa em placas finas, de grande esbeltez, e nessa região de esbeltez entre 4 e 16, seu efeito é pequeno, portanto, poderia ser adotado um coeficiente maior para a sua consideração.

Seguindo a mesma metodologia de implementação das não-linearidades adotada para as cantoneiras, foi realizada a análise da pós-flambagem dos perfis I duplamente simétricos, e também foram obtidas as curvas de resistência à flambagem local desses perfis. Considerou-se na análise as tensões residuais de perfis laminados e soldados cortados a maçarico e foi considerado o comportamento elasto-plástico para aços com tensão de escoamento igual a 250 MPa e a 345 MPa.

Inicialmente, foi realizada a análise linearizada de estabilidade, com a obtenção dos valores das tensões críticas elásticas dos perfis I, com e sem tensões residuais, em função das esbeltezes de seus elementos constituintes. Em seguida, foram obtidos os valores de resistência última considerando-se o comportamento de pós-flambagem desses perfis, com material de comportamento elasto-plástico, com e sem a consideração das tensões residuais. Em todas as análises em que foram consideradas as tensões residuais no perfil, foram obtidos os valores para as duas distribuições, de perfil soldado e de perfil laminado. Foram calculados também os valores das resistências últimas para a flambagem local dos perfis I apresentadas no PR NBR 8800 (2006), considerando as diferenças entre perfis soldados e laminados.

As curvas das análises numéricas e as curvas do PR NBR 8800 (2006) apresentaram diferenças muito grandes, numérica e comportamental, para almas muito esbeltas. O principal fator dessas diferenças é o coeficiente relacionado ao grau de vinculação da mesa em função da rigidez proporcionada pela alma, adotado para as mesas dos perfis soldados. Para essas esbeltezes de alma, considera-se que os parâmetros utilizados na norma para a obtenção da curva de resistência dos perfis soldados não são consistentes, pois a alma é considerada de pequena rigidez, proporcionando um suporte mínimo às mesas, porém, causando uma redução muito pequena na resistência final do perfil. Para os perfis I laminados, praticamente não é desenvolvida a resistência para a flambagem

local, e, portanto, considera-se que a curva da norma não é adequada nem representativa do comportamento desses perfis para essas esbeltezes de alma.

Para esbeltezes de alma intermediária, existe uma aproximação das curvas de resistência da norma e das análises numéricas, mas ainda podem ser verificadas algumas discrepâncias comportamentais. Para esbeltezes de alma pequenas, os parâmetros das mesas dos perfis soldados e laminados se igualam, de modo que a norma não considera nenhuma diferença entre as resistências desses perfis.

Entretanto, a principal diferença entre os resultados é a inversão das curvas de maior resistência, pois a norma considera que as seções soldadas são menos resistentes devido à possibilidade de se utilizar almas pouco rígidas, porém, não considera o fato de que as seções soldadas compostas por placas cortadas a maçarico podem apresentar uma distribuição de tensões residuais que proporcione um aumento na resistência.

Em todas as análises foram observadas as considerações feitas anteriormente quanto à influência das tensões residuais nas tensões críticas de flambagem elástica e nas tensões últimas, podendo ser observadas as diferenças geradas pelas duas distribuições adotadas, algumas vezes com comportamentos antagônicos. Também puderam ser comprovadas as considerações do aumento de resistência pós-flambagem nas placas finas.

Alguns casos de análise linearizada de estabilidade dos perfis I com tensões residuais e mesas com a maior esbeltez apresentaram problemas numéricos de análise devido à superposição das tensões residuais com as tensões atuantes, levando a um valor final de tensão de compressão superior à tensão crítica de flambagem da placa.

Nas análises de pós-flambagem com a implementação do material elasto-plástico e das tensões residuais nos modelos, foram observados problemas de convergência. Foram necessários controles adicionais, como a imposição do tamanho máximo do incremento pelo incremento inicial, a redução dos valores do critério de convergência do resíduo e do parâmetro de correção do deslocamento, e, em alguns casos foi ativado também o algoritmo de *line search*.

5.4. Análise Global e Sugestões

De modo geral, do que foi observado dos estudos e pesquisas desenvolvidos até o presente e das análises realizadas neste trabalho, considera-se que este estudo contribuiu para a compreensão e a caracterização do comportamento da flambagem local dos perfis estruturais.

Procurou-se, em todas as etapas de desenvolvimento do estudo, considerar da forma mais precisa possível todos os fatores envolvidos no problema, buscando assegurar uma confiabilidade na análise. A metodologia de abordagem, implementação e verificação adotada se mostrou adequada, apresentando comportamento esperado em todas as etapas e possibilitou o entendimento e a validação dos resultados.

Foram obtidas as curvas de resistência dos perfis estudados em função da esbeltez de seus elementos componentes, as quais foram comparadas às da norma, e apesar de não se ter dados experimentais que atestem o grau de precisão desta análise, considera-se que a concordância numérica dos modelos de referência e a coerência comportamental observada indicam uma abordagem correta que conduz a resultados representativos.

Contudo, verificou-se que alguns itens merecem um estudo mais aprofundado, os quais serão apresentados como sugestão para futuras pesquisas. Além disso, existem assuntos correlatos para os quais seria interessante um desenvolvimento semelhante ao que foi apresentado aqui. Portanto, sugere-se:

- análise experimental das tensões residuais;
- análise experimental de perfis estruturais com a medição dos fatores de influência e o acompanhamento até o colapso;
- análise não-linear da flambagem local dos perfis estruturais submetidos à compressão centrada em situação de incêndio;

- análise não-linear da flambagem local das mesas de perfis I de almas não convencionais (almas corrugadas, viga celular e alveolar) submetidos à compressão centrada, com a obtenção da curva de resistência última e a determinação do tipo de vinculação proporcionado pela alma;
- análise não-linear da interação da flambagem local com a global dos perfis estruturais submetidos à compressão centrada;
- análise não-linear de barras fletidas;
- análise da sensibilidade dos resultados à forma de distribuição das tensões residuais;
- análise da flambagem local de pilares mistos.

Entende-se que as normas e especificações de projeto são o resultado de diversos estudos teóricos e experimentais, e que devem atender de modo generalizado a uma grande variedade de casos específicos. Entretanto, percebe-se que em sua formulação existem parâmetros que são adotados sem grande embasamento, ou permite-se a aplicação da formulação em casos onde ela não é adequada. Deste estudo foram observadas algumas inconsistências no procedimento para a consideração da flambagem local dos perfis I duplamente simétricos e das cantoneiras de abas iguais pelo PR NBR 8800 (2006). Portanto sugere-se a consideração de uma revisão dos seguintes tópicos da norma:

- verificação da adequação do uso de valores constantes dos limites de esbeltez máximo das mesas e da alma dos perfis I e U;
- avaliação dos critérios de consideração da resistência pós-flambagem, permitindo a variação do aumento de resistência em função da esbeltez do elemento;
- avaliação do valor das tensões residuais de compressão adotado para a definição do limite de esbeltez dos regimes elástico e inelástico das cantoneiras, muito superior aos valores das distribuições observadas;

- avaliação do valor do coeficiente de redução do limite de esbeltez máximo pelas tensões residuais adotado para as cantoneiras;
- avaliação do coeficiente k_c adotado para as mesas dos perfis soldados, verificando também a consistência entre a rigidez e a resistência da alma;
- verificação dos limites de aplicação da formulação para os perfis com grande esbeltez da alma;
- consideração de perfis I soldados compostos por chapas cortadas a maçarico;
- verificação e calibração das fórmulas de dimensionamento com a realização de ensaios experimentais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adluri, S. M. R., 1994 – “*Studies on steel angle columns*”- PhD dissertation, Dept. of Civil and Envir. Engrg., University of Windsor, Canada.

Adluri, S. M. R. e Madugula, M. K. S., 1996 – “*Flexural buckling of steel angles: Experimental investigation*”- Journal of Structural Engineering, Vol. 122, No. 3, pp. 309-317.

Al-Sayed, S. H. e Bjorhovde, R., 1989 – “*Experimental study of single angle columns*” – Journal of Constructional Steel Research, Vol. 12, No. 2, pp. 83-102.

Allen, H.G. e Bulson, P.S., 1980 – “*Background to buckling*”- McGraw-Hill.

Alpsten, G.A. 1972a-“*Variations in mechanical and cross-sectional properties of steel*”- Proc. Int. Conf. on Planning and Design of Tall Buildings, Vol. Ib, pp. 775-805, Lehigh University, EUA.

Alpsten, G. 1972b-“*Prediction of thermal residual stresses in hot-rolled plates and shapes of structural steel*”- Swedish Inst. Of Steel Const. Rep. 16.4.

Alpsten, G.A. e Tall, L., 1970- “*Residual stresses in heavy welded shapes*”- Welding Journal, Vol. 49, No. 3, pp. 93-105.

American Institute of Steel Construction, 2005. Specification for Structural Steel Buildings, ANSI/AISC 360-05, Chicago, EUA.

Argyris, J. H. e Kelsey, S., 1960 –“*Energy theorems and structural analysis*”- Butterworth, Reino Unido. (trabalhos publicados na Aircraft Engineering em 1954 e 1955)

Associação Brasileira de Normas Técnicas, 1986 -“*Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios - NBR 8800*”.

Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2006. Texto-Base de Revisão da NBR 8800: Projeto e Execução de Estruturas de Aço e de Estruturas Mistas Aço-Concreto de Edifícios.

Bakker, M.C.M. e Peköz, T., 2001 –“*The finite element method for thin-walled members – Basic principles*”- Third International Conference on Thin-Walled Structures, Advances and Developments, Cracóvia, Polônia, pp. 417-425.

Batterman, R. H. e Johnston, B. G., 1964 -“*Behavior and maximum strength of metal columns*”- Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 93, ST2, pp. 205-230.

Bathe, K.J., 1996 -“*Finite element procedures*”- Revision of: Finite element procedures in engineering analysis, Prentice-Hall.

Bazant, Z. P. e Cedolin, L., 1991 –“*Stability of structures - Elastic, inelastic, fracture and damage theories*”- Oxford University Press.

Beer, H. e Schulz, G., 1970- “*The theoretical bases of the new column curves of the European Convention of Constructional Steelwork*”- Constructional Metallique, No. 3, pp. 37-57.

Bijlaard, P. P. e Fisher, G. P., 1953 –“*Column strength of H-sections and square tubes in post-buckling range of component plates*”- National Advisory Committee for Aeronautics, TN 2994, EUA.

Bjorhovde, R., 1972–“*Deterministic and probabilistic approaches to the strength of steel columns*”- Thesys (Ph. D.) – Department of Civil Engineering, Lehigh University, EUA.

Bjorhovde, R. e Tall, L., 1971 –“*Maximum column strength and the multiple column curve concept*”- Fritz Engineering Laboratory Report, No. 337.29, Lehigh University, EUA.

Bleich, F., 1924 –“*Theorie und berechnung der eisernen brücken*”- Julius Springer.

Bleich, F., 1952 - “*Buckling strength of metal structures*”- McGraw-Hill.

Bradford, M.A. e Azhari, M., 1995a –“*Buckling of plates with different end conditions using the finite strip method*”- Computers and Structures, Vol. 56, No. 1, pp. 75-83.

Bradford, M.A. e Azhari, M., 1995b –“*Inelastic local buckling of plates and plate assemblies using bubble functions*”- Engineering Structures, Vol. 17, No. 2, pp. 95-103.

Bradford, M. A. e Azhari, M., 1997- “*The use of bubble functions for the stability of plates with different end conditions*”- Engineering Structures, Vol. 19, No. 2, pp. 151-161.

Bradford, M. A. e Hancock, G. J., 1984 –“*Elastic interaction of local and lateral buckling in beams*”- Thin-Walled Structures, Vol. 2, pp 1-25.

Brebbia, C. A., 1978 –“*The boundary element method for engineers*”- Pentech Press/Halstead Press.

Brune, B., 2000 –“*New effective widths of three-sided supported steel plates and the influence on coupled instabilities of members in bending and compression*”- Proceedings of the Third International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures, pp. 705-712, Lisboa, Portugal.

Bryan, G. H., 1891 -“*On the stability of a plane plate under thrusts in its own plane with applications to the buckling of the sides of a ship*”- Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. 22, p. 54.

Budiansky, B. e Sanders, J., L., 1963 -“*On the best first-order linear shell theory,*” Progress in Applied Mechanics, The Prager Anniversary Volume, Macmillan, pp. 129–140.

Bushnell, D., 1974 –“*Stress, stability and vibration of complex, branched shell of revolution*”- Comput. Struct., Vol. 4, 399-435.

Camotim, D. e Prola, L.C., 2001 –“*On the accounting of local post-buckling effects in the global behaviour of cold-formed steel columns*”- Structural Stability Research Council, pp. 383-402, Flórida, EUA.

Castro e Silva, A. L. R., Fakury, R. H. e Camotim, D. R. Z., 2004. –“*Estudo numérico da instabilidade local de perfis estruturais I de aço de seção aberta submetidos à compressão centrada*”- XXV CILAMCE - Congresso Ibero-Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, Recife, Brasil.

Castro e Silva, A. L. R., Fakury, R. H., Las Casas, E. B. e Camotim, D. R. Z., 2005. –“*Estudo numérico da instabilidade local de perfis estruturais de aço de seção aberta submetidos à compressão centrada*”- Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural, Vol. 2, No. 2, pp. 71-84.

Castro e Silva, A. L. R., Fakury, R. H. e Las Casas, E. B., 2006. –“*Análise numérica não-linear da flambagem local de cantoneiras de aço*”- IX EMC – Encontro de Modelagem Computacional, Belo Horizonte, Brasil.

Chajes, A., 1974- "*Principles of structural stability theory*"- Prentice Hall.

Chen, W. F. e Han, D. J., 1987 –“*Plasticity for Structural Engineers*”, Springer-Verlag.

Cheung, Y. K., 1976 –“*Finite strip method in structural analysis*”- Pergamon Press.

Cheung, M. S. e Cheung, Y. K., 1971 –“*Natural vibration of thin flat walled structures with different boundary conditions*”- J. Sound Vibr., Vol. 18, No. 3, pp. 325-337.

Chilver, A. H., 1951 –“*Behaviour of thin-walled structural members in compression*”, Engineering, Vol. 172, pp. 281-282.

Clough, R. W., 1980 –“*The finite element method after twenty-five years: A personal view*”- Computers & Structures, Vol. 12, No. 4, pp. 361-370.

Considère, A., 1891 -“*Resistance des pièces comprimées*”- Congrès International des Procédés de Construction, Paris, Vo. 3, p. 371, França.

Conte, S. D. e Boor, C., 1980 –“*Elementary numerical analysis – An algorithmic approach*”, 3^a ed., McGraw-Hill.

Cook, R.D., Malkus, D.S. e Plesha, M.E., 1989 -“*Concepts and applications of finite element analysis*”- John Wiley & Sons, 3^a ed.

Courant, R., 1943 –“*Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*”- Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 49, pp. 1-23.

Cox, H. L., 1934 –“*Buckling of thin plates in compression*”- Aeronautical Research Communications, Report and Memory No. 1554, EUA.

Davids, A. e Hancock, G., 1987 –“*Nonlinear elastic response of locally buckled thin-walled columns*”- Thin-Walled Structures, Vol. 5, No. 3, pp. 211-226.

De Wolf, J. T., Pekoz, T. e Winter, G., 1974 –“*Local and overall buckling of cold-formed members*”- Journal of the Structural Division, ASCE, 100ST10, pp. 2017-2036.

Degée, H., 2000 – “*Coupling between local and overall buckling using beam elements*”- Proceedings of the Third International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures, Imperial College Press, Lisboa, Portugal, pp. 97-104.

Degée, H., 2001 –“*Modeling of the behaviour of a thin-walled channel section using beam finite elements*”- Third International Conference on Thin-Walled Structures, Advances and Developments, Cracóvia, Polônia, pp. 171-178.

Dias, C. M., 2001 –“*Técnicas de integração reduzida para simulação de problemas não lineares de transporte pelo método dos elementos finitos*”- Tese de doutorado. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil.

Dubina, D., Ungureanu, V. e Szabo, I., 2000 –“*Influence of local and sectional Geometrical imperfections on the distortional and interactive-overall buckling modes of cold-formed members*”-International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures, pp. 179-188, Lisboa, Portugal.

Dubina, D., Ungureanu, V. e Szabo, I., 2001 –“*Codification of imperfections for advanced finite analysis of cold-formed steel members*”- Third International Conference on Thin-Walled Structures, Advances and Developments, Cracóvia, Polônia, pp. 179-186.

Dwight, J. B. e White, J. D., 1977 –“*Prediction of weld shrinkage stresses in plate structures*”- Preliminary Report, 2^d International Colloquium on Stability of Steel Structures, ECCS – IABSE, Liège, Bélgica, pp. 31-37.

Earls, C. J., 1999 – “*Effects of material property stratification and residual stresses on single angle flexural ductility*”- Journal of Constructional Steel Research, Vol. 51, pp. 147-175.

ECCS – European Convention for Constructional Steelwork – Committee 8, 1976– “*Manual on the stability of steel structures*”- 2a. ed.

Elgaaly, M., 2000 –“*Post-buckling behaviour of thin steel plates using computational models*”- Advances in Engineering Software, Vol. 31, pp. 511-517.

Engesser, F., 1895 - “*Über knickfragen*”- Schweizerische Bauzeitung, Vol. 26, pp. 24-26.

Estrella Jr., L., 1993 –“*Simulation of the interaction between cold-formed steel members local and global buckling modes by a combination of the effective width method and a 3D non-linear beam finite element*”- Ph. D. Thèse, University of Liège. (em francês), Bélgica.

Euler, L., 1744 - “*De curvis elasticis - Additamentum I - Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes.*”- Bousquet, Lausanne e Geneva, pp. 267-268.

Eurocode 3, 2004 - “*Design of steel structures - General rules*”- European Committee for Standardization, Bruxelas, Bélgica.

Fakury, R. H., 1989- “*Estudos avançados em estruturas de aço*”- Texto didático do Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da UFMG, Brasil.

Fukumoto, Y. e Itoh, Y., 1981 –“*Statistical study of experiments on welded beams*”- Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 107 (ST1), Proc. Paper 15965, pp. 89-103.

Fukumoto, Y., Itoh, Y. e Kubo, M., 1980 –“*Strength variation of laterally unsupported beams*”- Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 106 (ST1), Proc. Paper 15142, pp. 165-181.

Galambos, T. V., 1968 –“*Structural members and frames*”- Prentice-Hall, EUA.

Galambos, T. V., 1998 –“*Guide to stability design criteria for metal structures*”- John Willey & Sons, 5a. ed.

Gallagher, R.H., 1975 - "*Finite Element Analysis: Fundamentals*"- John Wiley & Sons.

Gerard, G., 1957 –“*Handbook of structural stability: part IV. Failure of plates and composite elements*”, NACA Tech. Note No. 3748, EUA.

Gerard, G., 1962 –“*Introduction to structural stability theory*”, McGraw-Hill.

Graves Smith, T. R., 1967 –“*The ultimate strength of locally buckled columns of arbitrary length*”- In Proceedings, Symposium on Thin-Walled Structures, Swansea. In Thin-Walled Structures, ed. K. C. Rockey e H. V. Hill Crosby – Lockwood, pp. 35-60.

Hancock, G. J., 1981 - “*Interaction buckling in I-section columns*”- Journal of the Structural Division, ASCE, 107ST1, pp. 165-179.

Hasham, A.S. e Rasmussen, K.J.R., 2001 –“*Nonlinear analysis of locally buckled I section steel beam-columns*”- Third International Conference on Thin-Walled Structures, pp. 427-436, Cracóvia, Polónia.

- Hasham, A.S. e Rasmussen, K.J.R., 2002 –“*Interaction curves for locally buckled I section beam-columns*”- Journal of Constructional Steel Research, Vol. 58, pp. 231-241.
- Hibbitt, Karlsson e Sorensen, 1998. –“*ABAQUS/Standard – User’s manual*”- Volumes I, II e III, Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc, EUA.
- Hinton, E., Wood, R., Bicanic, N., White, P. e Hellen, T., 1992 –“*Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*” – NAFEMS Nonlinear Working Group, Swansea, Reino Unido.
- Hoon, K.H. e Khong, P.W., 1996 –“*The semi-energy and the lower bound methods to the post-buckling of plate*”- Computers and Structures, Vol. 58, No. 1, pp. 107-113.
- Huang, B.-Z. e Atluri, S.N., 1995 –“*A simple method to follow post-buckling paths in finite element analysis*”- Computers and Structures, Vol. 57, No. 3, pp. 477-489.
- Huber, A. W. e Beedle, L. S., 1954-“*Residual stress and the compressive strength of steel*”- Welding Journal, Vol. 33, pp. 589s-614s.
- Johnston, B. G., 1964-“*Inelastic buckling gradient*”- Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 90, EM6, pp. 31-47.
- Kalyanaraman, V., Pekoz, T. e Winter, G., 1977 –“*Unstiffened compression elements*”- Journal of the Structural Division, ASCE, 103ST9, pp. 1833-1848.
- Kleiber, M. e Hien, T.D., 1992 -“*The stochastic finite element method*”- John Wiley & Sons.
- Koiter, W. T., 1945 –“*Over der stabiliteit van het elastische evenwicht*”- Tese de Doutorado, Universidade de Delft, Holanda. (tradução inglesa: *On the stability of elastic equilibrium*, NASA Report TT-F-10833, 1967).

Kwon, Y. B., 1992 –“*Post-buckling behaviour of thin-walled channel sections*”- Tese de Doutorado, Universidade de Sydney, Austrália.

Lay, M. G. e Ward, R., 1969- “*Residual stresses in steel structures*”- Steel Construction, Vol. 3, No. 3, pp. 2-21.

Lee, G. C., Fine, D. S. e Hastreiter, W. R., 1967 –“*Inelastic torsional buckling of H columns*”- Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 48, No. 5, pp. 160-170.

Levy, S., 1953 –“*Structural analysis and influence coefficients for delta wings*”- J. Aero. Sci., Vol. 20, No. 7, pp. 449-454.

Lourenço, P. B., 1999 –“*Métodos computacionais na mecânica dos sólidos não linear*”- Relatório 99-DEC/E-1. Universidade do Minho, Portugal.

Lundquist, E. E., Stowel, E. Z. e Schuette, E. H., 1943 –“*Principles of moment distribution applied to stability of structures composed of bars or plates*”- NACA Wartime Report L326, EUA.

Mc Falls, R. K. e Tall, L., 1969 –“*A study of welded columns manufactured from flama-cut plates*”- Welding Journal / AWS, Abril, pp. 141-153.

Maquoi, R., 1992- “*Behaviour of plate components – Chapter 1*”- Stability Problems of Steel Structures, ed. by M. Ivanyi e M. Skaloud, International Centre for Mechanical Sciences - CIMS – Courses and Lectures IV – No. 323.

Maquoi, R., 1995 -“*Ultimate limit state of plate and box-girders*”- Steel Plated Structures, ed. by M. Ivanyi e M. Skaloud, International Centre for Mechanical Sciences - CIMS – Courses and Lectures IV – No. 358.

Marguerre, K. e Trefftz, E., 1937 –“*Über die tãgfhigkeit eines lãngsbelasteten plattenstreifens nach überschreiten der beullast*”- Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Vol. 17, pp. 85-100. (em alemão)

Mas, E. e Massonnet, Ch., 1966- "*The Belgian contribution to the experimental work of ECCS*"- Acien-Stahl-Stell, No. 9.

Mateus, A. F. e Witz, J. A., 2001 – "*A parametric study of the post-buckling behaviour of steel plates*"- Engineering Structures, Vol. 23, pp. 172-185.

Nagahama K., Camotim D. e Batista E., 2002 - "*Local buckling, post-buckling and mode interaction FEM analyses in cold-formed steel members*", Proceedings of The Sixth International Conference on Computational Structures Technology, B. Topping, Z. Bittnar (Eds.), Civil-Comp Press, Praga, República Tcheca, pp. 235-236, 4-6 de Setembro. (artigo completo em CD-ROM - paper 99).

Nagarajo Rao, N. R., Estuar, F. R. e Tall, L., 1964-"*Residual stresses in welded shapes*"- Welding Journal, pp. 295-306.

Nuttall, N. J. e Adams, P. F., 1970 – "*Flexural and lateral-torsional buckling strengths of double angle struts*"- Structural Engineering Report No. 30, Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Alberta, Canadá.

Oñate, E., 1992- "*Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos – Análise estático lineal*" - Ed. Cemne, Barcelona, Espanha.

Pimenta, R. J., 1997- "*Proposição de uma curva de flambagem para perfis I soldados formados por chapas cortadas a maçarico*"- Dissertação de mestrado, Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas – UFMG, Brasil.

Priebe, J., 1994 – "*Die methode der wirksamen breiten und ihre anwendung bei der berechnung der querschnittstragfähigkeit druckbeanspruchter querschnitte aus stahl*" - Universität Dortmund, Alemanha.

Prola, L. C., 2001 -"*Estabilidade local e global de elementos estruturais de aço enformados a frio*", Tese de Doutorado, Universidade Técnica de Lisboa, Portugal.

Prola, L. C. e Camotim, D., 2000- "*Consideração dos efeitos de pós-flambagem local no comportamento global de colunas de aço enformadas a frio*"- XXIX Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural e publicado em CD-ROM, Montevideo, Uruguai.

Przemieniecki, J. S., 1973 –"*Finite element analysis of local instability*"- Am. Inst. Aeronaut. Astronaut. J., Vol. 11, No. 1, pp. 33-39.

Rachid, M. e Mori, D. D., 1989 –"*Instabilidade: Conceitos – Aplicação na flambagem for flexão*"- Escola de Engenharia de São Carlos – USP, publicação 049/89, Brasil.

Rasmussen, K.J.R., 1997 –"*Bifurcation of locally buckled members*"- Thin-Walled Structures, Vol. 28, No. 2, pp. 117-154.

Rasmussen, K.J.R. e Hasham, A.S., 1997 –"*Flexural and flexural-torsional bifurcation of locally buckled beam-columns*"- Thin-Walled Structures, Vol. 29, No. 1-4, pp. 203-233.

Rasmussen, K.J.R. e Young, B., 2000 –"*Coupling in the bifurcation of locally buckled fixed-ended columns*"- Proceedings of the Third International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures, Lisboa, pp. 153-161, Portugal.

Reddy, J.N., 1999 –"*Theory and analysis of elastic plates*"– Taylor & Francis.

Reis, A. e Camotim, D., 2000 - "*Estabilidade estrutural*" - McGraw-Hill.

Reissner, H., 1909 –"*Über die Knicksicherheit ebener bleche*"- Zentraltblatt der Blauverwaltung, p. 93. (em alemão)

Rhodes, J., 2001 –"*Some observations on the post-buckling behaviour of thin plates and thin-walled members*"- Third International Conference on Thin-Walled Structures, Advances and Developments, Cracóvia, Polônia, pp. 69-84.

Rhodes, J. e Harvey, J., 1977 –“*Interaction behaviour of plain channel columns under concentric and eccentric loading*”- Proc. 2nd. Int. Coll. on the Stability of Steel Structures, ECCS, Liège, Bélgica, pp. 439-444.

Roorda, J., 1980 –“*Buckling of elastic structures*”- Solid Mechanics Division, University of Waterloo Press, Canadá.

Rusch, A. e Lindner, J., 2004 –“*Application of level 1 interaction formulae to class 4 sections*”- Thin-Walled Structures, Vol. 42, pp. 279-293.

Saint-Venant, B., 1883 -“*Théorie de l'élasticité des corps solides*”- Clebsch, Paris, França.

Salmon, C. G. e Johnson, J. E., 1990- “*Steel structures: Design and behaviour: Emphasizing load and resistance factor design*”- Harper Collins Publishers Inc., 3^a ed.

Sarawit, A.T., Kim, Y., Bakker, M.C.M. e Peköz, T., 2001 –“*The finite element method for thin-walled members – Applications*”- Third International Conference on Thin-Walled Structures, pp. 437-448, Cracóvia, Polónia.

Schulz, G., 1968- “*The maximum strength of axially loaded columns considering geometrical imperfections and material inhomogeneities*”- Ph. D. Thesis, Technical University Graz, Áustria.

Schuman, L. e Back, G., 1959 –“*Strength of rectangular plates under edge compression*”- NASA Technical Report, TR, R-40, EUA.

Shanley, F. R., 1947 -“*Inelastic column theory*”- Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 14, No. 5, pp. 261-264.

Shen, Z. e Zhang, Q., 1992 –“*Nonlinear stability analysis of steel members by finite element method*”- Journal of Engineering Mechanics, Vol. 118, No. 3, pp. 445-461.

Silvestre, N. e Camotim, D., 2005 –“*Asymptotic – Numerical method to analyze the post buckling behavior, imperfection sensitivity, and mode interaction in frames*”- Journal of Engineering Mechanics, Vol. 131, No. 6, pp. 617-632.

Silvestre, N. e Camotim, D., 2006 –“*Local-plate and distortional post buckling behavior of cold-formed steel lipped channel columns with intermediated stiffeners*”- Journal of Structural Engineering, Vol. 132, No. 4, pp. 529-540.

Sivakumaran, K.S. e Abdel-Rahman, N., 1998 –“*A finite element analysis model for the behaviour of cold-formed steel members*”- Thin-Walled Structures, Vol. 31, pp. 305-324.

Szalai, J. e Papp, F., 2005 –“*A new residual stress distribution for hot-rolled I-shaped sections*”- Journal of Constructional Steel Research, Vol. 61, pp. 845-861.

Tall, L., 1964 –“*Recent development in the study of column behaviour*”- Journal of the Institute of Engineers, Vol. 36, No. 12.

Tall, L., 1966 –“*Welded built-up columns*”- Fritz Engineering Laboratory Report, No. 321.2, Lehigh University, EUA.

Tebedge, N. e Tall, L., 1973- “*Residual stresses in structural steel shapes – a summary of measured values*”- Fritz Eng. Lab. Rep. No. 337.34, Lehigh University, EUA.

Timoshenko, S. P., 1910 –“*Einige stabilitätsprobleme der elastizitätstheorie*”- Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP), Vol. 58, No. 4, pp. 337-385. (em alemão)

Timoshenko, S. P. e Gere, J. M., 1961 –“*Theory of elastic stability*”- McGraw-Hill.

Trahair, N.S., 1983 - "*Inelastic lateral buckling of beams*"- Cap.2 do livro "Beams and beam columns – Stability and strength", editado por R Narayanan, Applied Science Publishers.

Trahair, N.S. e Bradford, M.A., 1988- "*The behavior and design of steel structures*"- 2^a ed., Chapman & Hall.

Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C. e Topp, L. J., 1956 – "*Stiffness and deflection analysis of complex structures*"- J. Aero. Sci., Vol. 23, No. 9, pp. 805-823.

Ugural, A.C., 1981- "*Stresses in plates and shells*"- McGraw-Hill.

von Kármán, T., 1910 - "*Untersuchungen über knickfestigkeit*"- Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf den Gebiete des Ingenieurwesens, Berlim, No. 81.

von Kármán, T., Sechler, E. E. e Donnell, L. H., 1932 - "*The strength of thin plates in compression*"- Transactions, ASME, Vol. 54, p. 53.

Wang, S. T., Yost, M. I. e Tien, Y. L., 1977 – "*Lateral buckling of locally buckled beams using finite element techniques*"- Computers and Structures, Vol. 7, pp. 469-475.

Willians, F. W. e Wittrick, W. H., 1968 – "*Computational procedures for a matrix analysis of the stability and vibration of thin-walled structures in compression*"- Int. J. Mech. Sci., Vol. 11, pp. 979-998.

Winter G., 1947- "*Strength of thin compression flanges*"- Transactions, ASCE, 112, 527-576.

Wittrick, W. H., 1968 – "*General sinusoidal stiffness matrices for buckling and vibration analysis of thin-walled structures*"- Int. J. Mech. Sci., Vol. 10, pp. 949-966.

Wittrick, W. H. e Curzon, P. L. V., 1968a – "*Stability functions for the local buckling of thin-walled structures in bending and compression*"- Aero. Q., Vol. 19, pp. 327-351.

Wittrick, W. H. e Curzon, P. L. V., 1968b –“*Local buckling of long polygonal tubes in combined bending and torsion*”- Int. J. Mech. Sci., Vol. 10, pp. 849-857.

Yang, C. H., Beedle, L. S. e Johnston, B. G., 1952- “*Residual stress and the yield strength of steel beams*”- Welding Journal, Vol. 31, No. 4, pp. 205-229.

Young, B.W., 1972- “*Residual stresses in hot-rolled members*”- IABSE Int. Coll. on Column Strength, Paris, França.

Young, B.W., 1974- “*The effect of process efficiency on the calculation of weld shrinkage forces*”- Proc. Inst. Civ. Engrs., Part 2, Vol. 57, pp. 685-692.

Young, B.W., 1975- “*Residual stresses in hot-rolled sections*”- Proceedings, International Colloquium on Column Strength, IABSE, Vol. 23, pp. 25-38.

Young, B.W. e Dwight, J.B., 1971-“*Residual stresses and their effect on the moment-curvature properties of structural steel sections*”- CIRIA Tech. Note 32.

Young, B. e Rasmussen, K.J.R., 2000 –“*Inelastic bifurcation of cold-formed singly symmetric columns*”- Thin-Walled Structures, Vol. 36, pp. 213-230.

Yu, C. K. e Tall, L., 1971–“*Significance and application of stub column test results*”- Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 97, ST7, pp. 1841-1861.

Zienkiewicz, O.C., 1971 -“*The finite element method in engineering science*”- McGraw-Hill, 2^a ed.

Zienkiewicz, O. C. e Morgan, K., 1983 –“*Finite elements and approximation*”- John Wiley & Sons.

Zienkiewicz, O. C. e Taylor, R. L., 1989 –“*The finite element method*”- 4^a ed. - 2 Volumes, McGraw-Hill.