



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM**  
**ENGENHARIA MECÂNICA**

**ANÁLISE DINÂMICA DE ROTORES EM BALANÇO**  
**UTILIZANDO PROCEDIMENTOS COMPUTACIONAIS E**  
**EXPERIMENTAIS**

**RAIMUNDO EDUARDO COTA**

**Belo Horizonte, 25 de abril de 2008**

Raimundo Eduardo Cota

**ANÁLISE DINÂMICA DE ROTORES EM BALANÇO  
UTILIZANDO PROCEDIMENTOS COMPUTACIONAIS E  
EXPERIMENTAIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Projeto Mecânico

Orientador: Prof. Marco Túlio Corrêa de Faria, Dr.

Belo Horizonte  
Escola de Engenharia da UFMG

2008



**Universidade Federal de Minas Gerais**  
**Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica**  
Av. Antônio Carlos, 6627, – Pampulha – 31.270-901 – Belo Horizonte – MG  
Tel.: +55 31 3499-5145 – Fax.: +55 31 3443-3783  
www.demec.ufmg.br – E-mail: cpgmec@demec.ufmg.br

## **ANÁLISE DINÂMICA DE ROTORES EM BALANÇO UTILIZANDO PROCEDIMENTOS COMPUTACIONAIS E EXPERIMENTAIS**

**RAIMUNDO EDUARDO COTA**

Dissertação defendida e aprovada em 25 de abril de 2008, pela Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do Título de “**Mestre em Engenharia Mecânica**”, na área de concentração de “**Projeto Mecânico**”.

---

**Prof. Marco Túlio Corrêa de Faria, Dr. – Universidade Federal de Minas Gerais**  
**Orientador**

---

**Prof. Maria Lúcia Machado Duarte, Dra. – Universidade Federal de Minas Gerais**  
**Examinador**

---

**Prof. Eduardo Bauzer Medeiros, Dr. – Universidade Federal de Minas Gerais**  
**Examinador**

Aos meus filhos, Rosiane  
e Raione e minha namorada  
Fabiana

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Marco Túlio Corrêa de Faria, por sua orientação e conselhos profissionais, apoio constante e paciência durante mais de três anos de trabalhos durante a pós-graduação, além de sua inestimável ajuda durante todas as etapas deste trabalho.

Aos professores que participaram da comissão examinadora pelo apoio necessário.

Ao colega de trabalho Eng. Luiz Felipe Adão Torre e Silva, que tanto ajudou na medição e obtenção dos dados, os quais são de extrema importância para a realização deste trabalho.

Ao colega de trabalho Eng. Geraldo Leão Lana, que tanto ajudou a sanar as dificuldades que tinha para executar operações de matrizes com números complexos, de fundamental importância para a realização dos cálculos analíticos.

A todos os professores e funcionários do Departamento pelos ensinamentos e pela ajuda.

A todos os amigos, familiares e colegas de trabalho que de uma forma ou de outra me estimularam ou me ajudaram.

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS .....	VII
LISTA DE TABELAS .....	X
NOMENCLATURA .....	XII
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS .....	XV
RESUMO .....	XVI
1 INTRODUÇÃO .....	1
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E ESCOPO DO TRABALHO .....	3
2.1 Breve histórico .....	3
2.1.1 Modelo de Rankine (ou modelo massa-mola) – 1869 .....	3
2.1.2 O modelo de Dunkerley – 1894 .....	4
2.1.3 O rotor de De Laval – 1895 .....	6
2.1.4 O modelo de Jeffcott – 1919 .....	7
2.2 Conceitos fundamentais .....	7
2.2.1 Movimento orbital síncrono e não-síncrono .....	8
2.2.2 Equações do movimento para o rotor de Jeffcott .....	9
2.2.3 Sistemas de suportes flexíveis .....	12
2.2.4 Efeito giroscópico sobre eixos rotativos de rotor balanço .....	13
2.2.5 Efeitos giroscópicos sobre as velocidades críticas .....	14
2.2.6 Elemento finitos na modelagem de rotores .....	18
2.3 Escopo do trabalho .....	19
3 METODOLOGIA .....	21
3.1 Dados técnicos do soprador .....	21
3.2 Procedimentos de análise de rotores em balanço .....	25
3.2.1 Método de elementos finitos .....	26
3.2.1.1 Estimativa experimental da flexibilidade do sistema de suporte .....	26
3.2.1.2 Predição da rigidez do sistema de suporte pelo método de elementos finitos .....	26
3.2.1.3 Modelagem dos componentes mecânicos do sistema rotativo .....	28
3.2.1.4 Estimativa das propriedades do material .....	30
3.2.1.5 Definição da malha .....	26
3.2.1.6 Condição de carregamento .....	26

3.2.1.7 Definição das condições de contorno .....	26
3.2.1.8 Definição do tipo de análise .....	31
3.2.2 Método analítico .....	32
3.2.2.1 Distância do centro de massa do impelidor ao mancal próximo .....	32
3.2.2.2 Massa do conjunto em balanço .....	33
3.2.2.3 Rigidez equivalente à rigidez do eixo e dos mancais .....	33
3.2.2.4 Distância equivalente do centro de massa do impelidor ao mancal próximo .....	35
3.2.2.5 Dimensões do disco rígido equivalente ao conjunto em balanço .....	35
3.2.2.6 Parâmetros a serem utilizados na equação do procedimento analítico .....	35
3.2.3 Estimativa das frequências naturais pelo teste de batida .....	36
3.2.4 Teste de vibração em velocidade variável .....	37
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES .....	39
4.1 Análise da sensibilidade de malha .....	39
4.2 Validação do procedimento de elementos finitos .....	41
4.2.1 Validação do cálculo de frequência natural para o primeiro exemplo .....	43
4.2.2 Validação do cálculo de frequência natural para o segundo exemplo .....	46
4.2.3 Validação do cálculo de frequência natural para o terceiro exemplo .....	51
4.3 Teste de batida .....	56
4.3.1 Teste de batida convencional .....	56
4.3.2 Teste de batida em velocidade constante .....	56
4.4 Teste de vibração em velocidade variável .....	58
4.5 Análise do rotor do soprador .....	60
4.6 Projeto proposto de melhoria do rotor .....	64
5 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....	69
ABSTRACT .....	71
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	72
ANEXO A .....	75

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1	Modelo de Rankine para Rotores .....	3
FIGURA 2.2	Modelo de viga bi apoiada para eixos rotativos de Dunkerley .....	5
FIGURA 2.3	Dinâmica de um rotor em um eixo flexível .....	6
FIGURA 2.4	Modelo de Jeffcott para rotor .....	7
FIGURA 2.5	a) Movimento Orbital Síncrono.	
	b) Movimento Orbital Não-Síncrono .....	8
FIGURA 2.6	Movimento orbital síncrono de um rotor .....	9
FIGURA 2.7	Parâmetros do Modelo do Rotor de Jeffcott .....	9
FIGURA 2.8	Resposta ao desbalanceamento do rotor de Jeffcot .....	11
FIGURA 2.9	Influência da Rigidez do suporte nos modos de vibração .....	12
FIGURA 2.10	Curva da frequência natural do eixo pela rigidez dos suportes .....	13
FIGURA 2.11	Efeito Giroscópico de um rotor em balanço em balanço .....	14
FIGURA 2.12	Ângulos de Euler .....	15
FIGURA 2.13	Coordenadas para movimento do rotor .....	16
FIGURA 2.14	Efeitos giroscópicos de um rotor em balanço .....	17
FIGURA 2.15	Diagrama de Campbell e velocidades críticas .....	18
FIGURA 3.1	a) Rotor com Acionamento Direto, b) Rotor com Acionamento por Correias .....	21
FIGURA 3.2	Configuração do Rotor (Acionamento Direto e por Correias) .....	22
FIGURA 3.3	Modelagem Sólida do Eixo do Rotor .....	22
FIGURA 3.4	Modelagem Sólida do Flange de Acoplagem .....	22
FIGURA 3.5	Modelagem Sólida do Disco Impelidor .....	23
FIGURA 3.6	Modelagem Sólida da Base Metálica .....	23
FIGURA 3.7	Modelagem Sólida do Conjunto Montado .....	24
FIGURA 3.8	Tendência dos Níveis de Vibração .....	24
FIGURA 3.9	Espectro de Frequência do Mancal próximo do Rotor .....	25
FIGURA 3.10	Modelagem do Conjunto .....	26
FIGURA 3.11	Definição da Malha e Condições de Contorno .....	27
FIGURA 3.12	Deslocamento Linear nos Apoios do Conjunto na direção y .....	28
FIGURA 3.13	Modelagem do Sistema indicando as Cunhas representativas dos Mancais no Eixo .....	28
FIGURA 3.14	Deformação Linear dos Apoios do Sistema Rotativo.....	29



FIGURA 3.15	Posição de Cálculo da Deformação .....	30
FIGURA 3.16	Centro de Massa do Rotor na Região em Balanço .....	32
FIGURA 3.17	Posicionamento de Montagem do Rotor nos Mancais .....	33
FIGURA 3.18	Representação da Montagem do Eixo .....	34
FIGURA 3.19	Representação da Montagem do Eixo no Modelo Analítico .....	35
FIGURA 3.20	Analisador CSI 2130 e Martelo utilizado no Teste de Batida .....	37
FIGURA 3.21	Montagem do Instrumento de Medida e Foto-tacômetro .....	38
FIGURA 4.1	Rotor flexível bi-apoiado em mancais rígidos .....	39
FIGURA 4.2	(a) Primeiro e (b) Segundo Modos de Vibração do Rotor Flexível Bi-apoiado "Malha Padrão" .....	40
FIGURA 4.3	Rotor de Jeffcott .....	42
FIGURA 4.4	Modelo de Rotor Bi-apoiado .....	42
FIGURA 4.5	Modelo de Rotor Rígido Bi-apoiado .....	42
FIGURA 4.6	Modelo de Rotor em Balanço .....	43
FIGURA 4.7	Rotor Flexível Bi-apoiado .....	44
FIGURA 4.8	Primeiro Modo de Vibração do Rotor Flexível Bi-apoiado com Velocidades iguais a (a) 0 rad/s, (b) 250 rad/s e (c) 500 rad/s .....	45
FIGURA 4.9	Curvas da Primeira Frequência Natural do Eixo Flexível Bi-apoiado (Analítico e MEF) .....	46
FIGURA 4.10	(a) Primeiro e (b) Segundo Modos de Vibração do Rotor Rígido Bi-apoiado em Repouso .....	48
FIGURA 4.11	(a) Primeiro e (b) Segundo Modos de Vibração do Rotor Rígido Bi-apoiado em 1000 rad/s .....	49
FIGURA 4.12	(a) Primeiro e (b) segundo Modos de Vibração do Rotor Rígido Bi-apoiado em 2000 rad/s .....	49
FIGURA 4.13	Curvas das 1 <sup>a</sup> e 2 <sup>a</sup> Frequências Naturais do Rotor Rígido Bi-apoiado (Analítico e MEF) .....	50
FIGURA 4.14	(a) Primeiro e (b) segundo Modos de Vibração do Rotor em Balanço em Repouso .....	53
FIGURA 4.15	(a) Primeiro e (b) Segundo Modos de Vibração do Rotor em Balanço em 100 rad/s .....	53
FIGURA 4.16	(a) Primeiro e (b) Segundo Modos de Vibração do Rotor em Balanço em 200 rad/s .....	54
FIGURA 4.17	(a) Primeiro e (b) Segundo Modos de Vibração do Rotor em Balanço em 300 rad/s .....	54

FIGURA 4.18	Curvas da 1 <sup>a</sup> e 2 <sup>a</sup> Frequências Naturais do Rotor em Balanço (Analítico e MEF) .....	55
FIGURA 4.19	Espectro de Frequência do Teste de Batida com o Rotor em Repouso .....	56
FIGURA 4.20	Espectro de Frequência do Teste de Batida com Velocidade Constante .....	57
FIGURA 4.21	Espectro Frequência do Teste de Batida com Velocidade Constante sem as Frequências dos Múltiplos da Rotação .....	57
FIGURA 4.22	Resposta ao Desbalanceamento e Ângulo de Fase na Aceleração .....	58
FIGURA 4.23	Resposta ao Desbalanceamento e Ângulo de Fase na Aceleração com Filtro .....	59
FIGURA 4.24	(a) Primeiro e (b) Segundo Modos de Vibração do Rotor do Soprador em Repouso .....	60
FIGURA 4.25	(a) Primeira, (b) Terceira e (c) Quarta Frequências e Modos Desconsideradas na Análise .....	60
FIGURA 4.26	(a) Primeiro e (b) Segundo Modos de Vibração do Rotor do Soprador com Vel. de 100 rad/s .....	61
FIGURA 4.27	(a) Primeiro e (b) Segundo Modos de Vibração do Rotor do Soprador c/ Vel. de 1800 RPM .....	61
FIGURA 4.28	(a) Primeiro e (b) Segundo Modos de Vibração do Rotor do Soprador com Vel. de 200 rad/s .....	62
FIGURA 4.29	(a) Primeiro e (b) Segundo Modos de Vibração do Rotor do Soprador com Vel. de 300 rad/s .....	62
FIGURA 4.30	Diagrama de Campbell e Velocidades Críticas do Rotor para os dois Procedimentos .....	63
FIGURA 4.31	Eixo Proposto no Terceiro Procedimento para Melhoria .....	64
FIGURA 4.32	Flange Proposto no Terceiro Procedimento para Melhoria .....	65
FIGURA 4.33	1 <sup>a</sup> Frequência Natural dos Procedimentos de Melhoria do Rotor (a) Primeiro Estudo, (b) Segundo Estudo e (c) Terceiro Estudo .....	66
FIGURA 4.34	Diagrama de Campbell do Rotor Proposto para Melhoria .....	68
FIGURA A.1	Primeiro Modo de Vibração do Flange Original Acoplado ao Impelidor (a) em Repouso (b) Velocidade de 1800 RPM .....	76
FIGURA A.2	Primeiro Modo de Vibração do Flange Modificado Acoplado ao Impelidor .....	77

## LISTA DE TABELAS

TABELA 3.1	Parâmetros do Sistema para Análise de Deformação nos Apoios ....	27
TABELA 3.2	Parâmetros do Rotor para Análise de Deformação nos Apoios .....	29
TABELA 3.3	Parâmetros do Material do Rotor para Obtenção das Frequências Naturais .....	30
TABELA 3.4	Parâmetros da Malha do MEF do Rotor para Obtenção das Frequências Naturais .....	31
TABELA 3.5	Parâmetros para determinação da Rigidez do Eixo .....	34
TABELA 3.6	Parâmetros utilizados no Procedimento analítico .....	36
TABELA 4.1	Parâmetros do Rotor para Análise de Sensibilidade de Malha .....	40
TABELA 4.2	Frequências Naturais do Rotor utilizado na Análise de Sensibilidade de Malha .....	41
TABELA 4.3	Parâmetros do Rotor do Primeiro Exemplo .....	44
TABELA 4.4	Frequências Naturais do modelo Analítico e MEF do Rotor Flexível Bi-apoiado .....	45
TABELA 4.5	Parâmetros do Rotor Rígido Bi-apoiado .....	47
TABELA 4.6	Frequências Naturais obtidas do Procedimento Analítico do Rotor Rígido Bi-apoiado .....	47
TABELA 4.7	Parâmetros do Rotor do Segundo Exemplo .....	48
TABELA 4.8	Frequências Naturais do Procedimento Analítico e MEF do Rotor Rígido Bi-apoiado .....	50
TABELA 4.9	Parâmetros do Rotor Flexível em Balanço .....	51
TABELA 4.10	Frequências Naturais obtidas Analiticamente para o Rotor em Balanço .....	52
TABELA 4.11	Parâmetros do Rotor do Terceiro Exemplo .....	52
TABELA 4.12	Frequências Naturais do Procedimento Analítico e MEF do Rotor em Balanço .....	55
TABELA 4.13	Frequências Naturais do Procedimento Analítico e MEF do Rotor do Soprador .....	63
TABELA 4.14	Parâmetros da Malha do MEF para Análise da Melhoria .....	65
TABELA 4.15	Frequências Naturais Fundamentais obtidas pelo MEF dos três Estudos a 1800 RPM .....	67
TABELA 4.16	Frequências Naturais obtidas pelo MEF do Rotor Proposto para Melhoria .....	67

TABELA A.1	Parâmetros da Malha do MEF do Flange Original acoplado ao Impelidor .....	75
TABELA A.2	Parâmetros da Malha do MEF do Flange Modificado acoplado ao Impelidor .....	76

## NOMENCLATURA

### Letras Latinas

$A$	Área da seção transversal da viga [ $m^2$ ]
$c$	Amortecimento [ $N.s/m$ ]
$C$	Centro geométrico do rotor de Jeffcott [adimensional]
$d$	Diâmetro do eixo [ $m$ ]
$e$	Distância entre o centro geométrico e o centro de massa [ $m$ ]
$EI$	Rigidez a flexão [ $N.m^2$ ]
$F$	Força de reação de um mancal hidrodinâmico radial [ $N$ ]
$F_r$	Componente radial da força de reação de um mancal hidrodinâmico radial [ $N$ ]
$F_t$	Componente tangencial da força de reação de um mancal hidrodinâmico radial [ $N$ ]
$G$	Centro de gravidade [adimensional]
$H$	Momento angular [ $N.m.rad$ ]
$I$	Momento de inércia [ $m^4$ ]
$J$	Momento transversal de inércia [ $kg.m^2$ ]
$J_P$	Momento polar de inércia [ $kg.m^2$ ]
$k$	Rigidez [ $N/m$ ]
$K_E$	Rigidez equivalente à rigidez do eixo [ $N/m$ ]
$K_{EQ}$	Rigidez equivalente à rigidez do eixo associado à rigidez dos mancais [ $N/m$ ]
$K_M$	Rigidez equivalente à rigidez dos mancais [ $N/m$ ]
$k_{M,P}$	Rigidez do mancal do lado da polia [ $N/m$ ]
$k_{M,R}$	Rigidez do mancal do lado do rotor [ $N/m$ ]
$K_{xy}, K_{yx}$	Coefficientes de rigidez cruzada [ $N/m$ ]
$l$	Comprimento do eixo [ $m$ ]
$L$	Comprimento do eixo em balanço do rotor ao mancal próximo [ $m$ ]
$L'$	Comprimento do eixo em balanço associado ao modelo de cálculo [ $m$ ]
$L_l$	Comprimento do eixo entre mancais do rotor em balanço [ $m$ ]
$L_d$	Espessura do disco compacto [ $m$ ]
$m$	massa do disco [ $kg$ ]
$M$	Centro de massa do rotor de Jeffcott [adimensional]
$M_{c,b}$	Massa do conjunto em balanço [ $kg$ ]

$O$	Centro geométrico [adimensional]
$p$	Raízes ou frequências da solução das equações de movimento do rotor [rad/s]
$P$	Força atuante referente à massa do disco [N]
$r$	Deflexão do eixo devido a cargas dinâmicas [m]
$r_s$	Amplitude de órbita [m]
$t$	tempo [s]
$T, V$	Energia cinética e potencial [N.m]
$u$	Distância entre a massa desbalanceada e o centro do disco [m]
$x, y, z$	Sistema de coordenadas [m]
$X, Y, Z$	Coordenadas cartesianas do rotor de Jeffcott [m]

### Letras Gregas

$\beta$	Ângulo entre linha do centro geométrico e o centro de massa e o vetor
$\beta_s$	Ângulo de fase [rad]
$\rho$	Massa específica [kg/m <sup>3</sup> ]
$\mu, \nu$	Parâmetros da solução das equações de movimento do rotor [adimensional]
$\omega$	Frequência de rotação [rad/s]
$\omega_c$	Frequência crítica [rad/s]
$\omega_n$	Frequência natural [rad/s]
$\Omega$	Velocidade de rotação do rotor [rad/s]
$\lambda$	Parâmetro de modificação das equações de movimento do rotor [m(rad/s) <sup>2</sup> ]
$\xi$	Fator de amortecimento [adimensional]
$\delta$	Deflexão unitária [m]
$\phi$	Ângulo entre a coordenada $X$ e a linha que liga o centro geométrico e o centro de massa do rotor de Jeffcott [rad]
$\phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}$	Coordenada angular de deslocamento, velocidade e aceleração [rad, rad/s, rad/s <sup>2</sup> ]
	desbalanceamento do rotor de Jeffcott [rad]
$\Phi, \chi, \psi$	Ângulos de Euler [rad]

### Subscritos

$c$	Crítica
$n$	Natural

$r$	Radial
$s$	Órbita
$t$	Tangencial
$x,y,z$	Direções

**LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

FN	Frequência Natural
MEF	Métodos de Elementos Finitos



## RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo do comportamento dinâmico de rotores em balanço, operando abaixo da primeira velocidade crítica, suportados em mancais de rolamento. Um caso particular de rotor em balanço, que consiste em um soprador industrial de forno de reaquecimento, é selecionado para esse estudo. O rotor analisado encontra-se apoiado em mancais de rolamento, que estão montados em base metálica instalada em fundação de concreto. Alguns aspectos relevantes do comportamento dinâmico desse tipo de rotor são estudados utilizando-se procedimentos analítico-experimentais e procedimentos computacionais.

O estudo experimental é desenvolvido sobre um rotor de soprador utilizado para alimentação de ar de combustão em forno industrial, que possui rotação nominal de 1.800 rpm, sendo acionado por motor de potência de 150 cv, com capacidade de 11.300 Nm<sup>3</sup>/h, em condições de pressão manométrica de 850 mmH<sub>2</sub>O e temperatura de 250° C. Testes de batida (“bump tests”) e testes de vibração em velocidade constante são realizados sobre esse rotor em diferentes condições de operação, permitindo a obtenção dos espectros de frequência e os diagramas de Bode para a resposta vibratória do sistema rotativo.

Um procedimento computacional baseado no método de elementos finitos também é desenvolvido para a determinação das frequências naturais do rotor suportado em mancais elásticos. O diagrama de Campbell é utilizado para a determinação das velocidades críticas do rotor. A modelagem de elementos finitos inclui a flexibilidade do impelidor do soprador, que possui grande influência na resposta dinâmica do conjunto rotativo. Os resultados obtidos mostram que os efeitos giroscópicos e a flexibilidade do impelidor dominam a resposta do rotor do soprador na região de velocidades próxima à primeira velocidade crítica.

*Palavras-chave: Rotores em balanço, Momentos giroscópicos, Diagrama de Campbell, Dinâmica de impelidores.*

# 1 INTRODUÇÃO

O rápido desenvolvimento industrial das últimas décadas pode ser apontado como o principal fator para o crescimento expressivo do número de máquinas rotativas industriais nos setores metal-mecânico, petrolífero, petroquímico e de processos em geral. As máquinas de alta velocidade possuem altas cargas devido às forças de inércia de seus componentes gerando com isso potenciais problemas de vibração e instabilidade dos rotores. A previsão do comportamento de rotores através de modelos matemáticos é relativamente bem sucedida quando comparado com medições experimentais.

Para a análise adequada do comportamento dinâmico de rotores, diversas etapas são frequentemente empregadas. Algumas das etapas de análise de dinâmica de rotores mais comuns estão listadas a seguir:

- Determinação das velocidades críticas dos rotores;
- Estudo de modificações de projeto do rotor visando afastar sua velocidade de operação de suas velocidades críticas;
- Determinação da resposta desbalanceada de rotores e cálculo das massas de correção do desbalanceamento;
- Seleção adequada do sistema de suporte de rotores e análise da influência dos coeficientes dinâmicos dos mancais sobre a resposta dinâmica de máquinas rotativas.

Esses estudos se tornam de extrema importância em rotores de alta velocidade, como turbinas a gás e a vapor, compressores, ventiladores industriais, bombas, exaustores, e outros. Diversos estudos baseados em procedimentos experimentais, analíticos e computacionais são utilizados com o objetivo de se analisar diversos aspectos dinâmicos relacionados a rotores de máquinas de alta velocidade.

Esses procedimentos são altamente utilizados nas fases iniciais do projeto e no comissionamento de máquinas rotativas industriais empregadas na indústria petrolífera e em plantas petroquímicas. O modelo experimental é importante na validação dos procedimentos numericamente desenvolvidos, aprimorando com isso, a capacidade de prever os diversos fenômenos dinâmicos das máquinas, bem como o desenvolvimento de procedimento de monitoramento.

Há poucos trabalhos sobre a análise dinâmica de rotores em balanço, tais como exaustores e ventiladores, na literatura técnica. A grande maioria dos estudos efetuados sobre rotores em balanço está baseada na utilização de modelos simplificados do sistema rotativo. A inclusão dos efeitos giroscópicos do conjunto rotativo, da flexibilidade do impelidor e da influência do sistema de suporte do eixo na análise dinâmica de máquinas rotativas é raramente encontrada nesses estudos. Com o intuito de trazer uma contribuição ao estudo de máquinas rotativas com rotores em balanço, esse trabalho apresenta um estudo sobre o comportamento dinâmico de rotores em balanço utilizando procedimentos computacionais e experimentais na análise. O caso de rotores de sopradores industriais, cujos eixos encontram-se apoiados em mancais de rolamento, é selecionado para a realização desse estudo. O método de elementos finitos é empregado para a construção de um modelo para rotores em balanço incluindo os efeitos dos momentos giroscópicos do conjunto eixo-impelidor, da elasticidade do impelidor e da rigidez do sistema de suporte do eixo rotativo. As frequências naturais e as velocidades críticas de rotores em balanço são determinadas em diversas condições de operação. Esse trabalho também apresenta uma avaliação da capacidade de predição de modelos simplificados de rotores, que estão baseados na hipótese de discos rígidos, dos valores de frequências naturais. Os resultados obtidos nesse trabalho mostram claramente a importância do desenvolvimento de modelos mais criteriosos para rotores em balanço, nos quais estejam contemplados os efeitos inerciais dos momentos giroscópicos do conjunto rotativo, os efeitos da elasticidade do disco rotativo e a contribuição da flexibilidade do sistema de suporte. Em cima dos resultados da análise efetuadas nesse trabalho, podem ser propostas alterações de projeto de rotores de sopradores industriais visando garantir condições de operação segura da máquina.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E ESCOPO DO TRABALHO

Inicialmente é apresentado um breve histórico das primeiras etapas de desenvolvimento da Dinâmica de Rotores. Em seguida, são apresentados alguns conceitos fundamentais dos aspectos dinâmicos de eixos rotativos em geral e dos eixos rotativos em balanço, que consiste no escopo desse trabalho. Finalmente, apresentam-se alguns conceitos básicos pertinentes à modelagem de rotores utilizando-se o método de elementos finitos.

### 2.1 Breve histórico

No breve histórico são apresentados os primeiros conceitos das etapas de desenvolvimento da Dinâmica de Rotores como área madura do conhecimento científico e tecnológico na engenharia.

#### 2.1.1 Modelo de Rankine (ou modelo massa-mola) – 1869

Conforme apresentado por (GUNTER, 1966), Rankine foi um dos precursores dos primeiros estudos de dinâmica de rotores, que teve papel fundamental no desenvolvimento dessa área da engenharia. Sendo o autor do primeiro artigo publicado sobre o assunto em 1869, Rankine desenvolveu um modelo massa mola para a predição do comportamento de eixos submetidos à rotação com massa concentrada no seu centro, considerando os suportes rígidos e o eixo flexível.

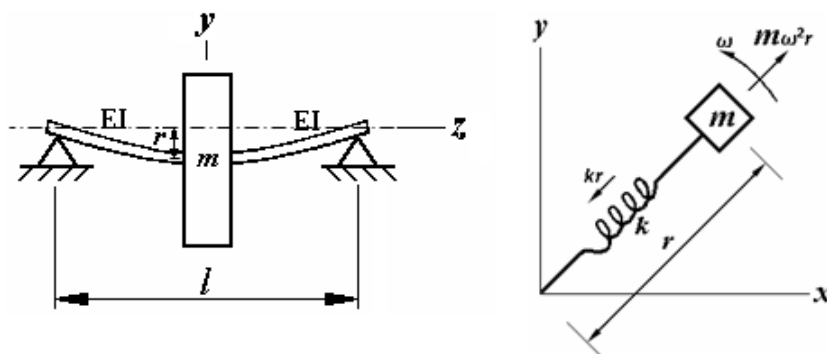


FIGURA 2.1 - Modelo de Rankine para Rotores (VANACE, 1988)

A FIG. 2.1 mostra as variáveis do modelo de Rankine, sendo que  $r$  representa a deflexão do eixo devido ao desbalanceamento,  $k$  a rigidez do eixo,  $m$  a massa do disco fixado ao eixo e  $\omega$  a velocidade de rotação do eixo.

O modelo de Rankine considera a força elástica devido à rigidez do eixo como a força restauradora, que mantém a posição do disco maciço ao redor de sua órbita descrita em torno da linha de centro dos mancais. Rankine concluiu que a velocidade máxima no qual o eixo pode descrever um movimento orbital estável, desconsiderando as forças de amortecimento e as forças de Coriolis, é definida por:

$$Kr = M\omega^2 r \quad (2.1)$$

$$\omega^2 = \frac{K}{m} \quad (2.2)$$

Rankine definiu a grandeza  $\omega$  como sendo a velocidade crítica do eixo rotativo. Segundo Rankine, nenhuma máquina desbalanceada poderia ultrapassar esta velocidade durante seu funcionamento, pois a amplitude do movimento de precessão do eixo se tornaria grande o suficiente para o sistema entrar em colapso. Essas conclusões foram contestadas experimentalmente em 1885 por De Laval, que demonstrou ser possível ultrapassar a velocidade crítica estimada por Rankine e que as amplitudes de vibrações eram elevadas apenas na velocidade crítica. A importância do trabalho de Rankine não foi exatamente pela sua descoberta, que na verdade foi contraditória, mas sim por ter sido a base teórica para alavancar todo o desenvolvimento da época.

### 2.1.2 O modelo de Dunkerley – 1894

Conforme apresentado por (GUNTER, 1966), Dunkerley, em 1894, analisou um rotor com apoios simples rígidos e como um corpo elástico e mostrou que o problema de precessão poderia ser substituído por um problema de vibração lateral de vigas, como mostrado na FIG. 2.2.

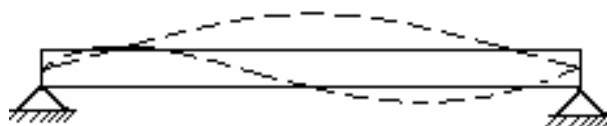


FIGURA 2.2 - Modelo de Viga bi apoiada para Eixos Rotativos de Dunkerley

Além disso, usando o modelo de viga com carregamento central, obteve a equação diferencial parcial associada ao movimento lateral de vigas elásticas:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

onde  $EI$  é a rigidez à flexão,  $\rho$  é massa específica e  $A$  é a área da seção transversal da viga (RAO, 1990). A solução da equação diferencial parcial com coeficientes constantes, dada pela EQ. (2.3), permite obter as frequências naturais de vibração de flexão da viga elástica do modelo de Dunkerley. Essas frequências naturais foram definidas como sendo as velocidades críticas do eixo rotativo.

Dunkerley contribuiu para o entendimento da resposta dinâmica de rotores analisando o porquê que algumas unidades prosperaram operacionalmente enquanto outras de projeto semelhante falhariam. Chegou à conclusão que ocorriam vibrações com grandes amplitudes transmitindo grandes forças aos suportes e deflexões excessivas no rotor, causando falhas por fadiga e falhas nos selos de contenção dos lubrificantes nos mancais, causando o vazamento e posteriormente falhas nos mancais por falta de lubrificação.

Com essas descobertas, ele postulou que o rotor que tivesse qualquer desbalanceamento, as frequências naturais seriam excitadas, causando altas amplitudes vibracionais. Com o resultado da investigação, os fabricantes de rotores tentaram construir rotores suficientemente rígidos para atender a necessidade operacional, evitando-se assim que a velocidade de operação pudesse atingir a primeira frequência natural da vibração lateral da viga elástica.

A consequência prática do trabalho de Dunkerley foi a proposta de construção de rotores mais pesados e diâmetros de eixos maiores, além da necessidade do aumento da precisão de balanceamento.

Os resultados do trabalho de Dunkerley também foram contrários às evidências experimentais de De Laval em 1895, que mostrou ser possível a operação de máquinas rotativas acima da primeira velocidade crítica.

### 2.1.3 O rotor de De Laval - 1895

O modelo apresentado por De Laval, considerado um dos mais simples, é o chamado rotor de De Laval. O rotor de De Laval consiste de um eixo longo e flexível, com apoios rígidos, girando a uma velocidade angular  $\omega$ , tendo na metade de seu comprimento um disco de massa  $m$  e momento polar de inércia  $J$  com relação ao eixo de rotação. Devido ao desbalanceamento, o centro de massa não coincide com o seu centro geométrico  $O$ , estando no ponto  $G$  a uma distância  $e$  do ponto  $O$  do disco. Se  $x$  e  $y$  são as coordenadas do centro do disco  $O$ , as coordenadas do centro de massa serão  $(x + e \cos\omega t)$  e  $(y + e \sin\omega t)$ , respectivamente, se o tempo for medido quando  $OG$  estiver na posição horizontal e tendo  $\omega$  como a velocidade angular de rotação do disco, conforme FIG 2.3a.

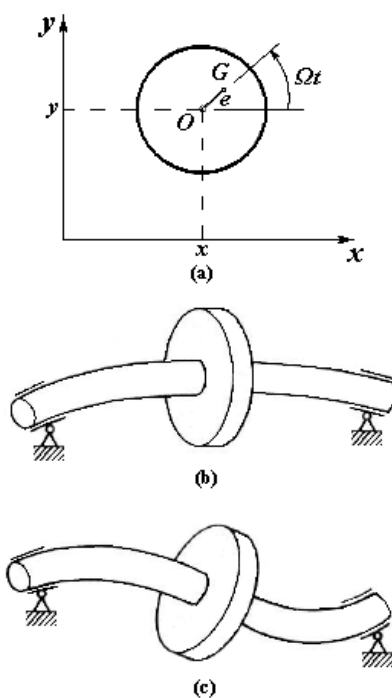


FIGURA 2.3 - Dinâmica de um rotor em um eixo flexível (VINAUD, 2005)

Com o eixo flexível (com uma constante de mola lateral  $k$ ), o disco é capaz de movimento perpendicular ao seu eixo nas direções horizontal e vertical  $x$  e  $y$ , FIG (2.3b), mas também de rotações nos três eixos, como mostrado na FIG. (2.1c). A rotação ao redor de  $z$  é o movimento em regime permanente.

Considerando que o disco se move apenas ao redor de  $z$  e em  $x$  e  $y$ , o disco se mantém paralelo a si mesmo e perpendicular ao eixo  $z$ .

#### 2.1.4 O modelo de Jeffcott – 1919

Conforme apresentado por (GUNTER, 1966), o pesquisador em dinâmica de rotores Jeffcott deu uma importante contribuição para o desenvolvimento da dinâmica de rotores, em 1919. Ele propôs um modelo de sistema rotativo composto por um eixo elástico e um disco rígido desbalanceado, suportado em dois apoios rígidos. O amortecimento foi introduzido no modelo considerando-se o arrasto aerodinâmico sobre o disco. Pelo modelo de Jeffcott, tornou-se possível explicar a precessão do eixo em torno da linha de centro dos mancais. A FIG 2.4 mostra uma vista lateral esquemática do modelo de Jeffcott, onde  $C$  é o centro geométrico do disco e  $M$  é o centro de massa.

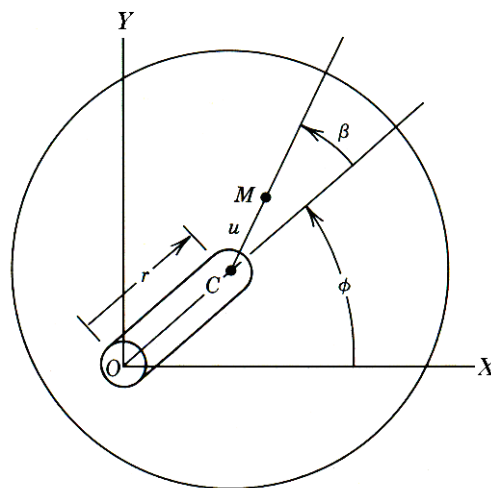


FIGURA 2.4 - Modelo de Jeffcott para rotor (VANCE, 1988)

O modelo apresentado por Jeffcott em 1919 foi um dos primeiros estudos analíticos de vibrações em rotores, demonstrando ser possível a operação estável de máquinas acima da primeira velocidade crítica.

## 2.2 Conceitos fundamentais

A introdução de alguns conceitos básicos é realizada visando uma melhor compreensão de alguns aspectos da dinâmica de eixos rotativos.



### 2.2.1 Movimento orbital síncrono e não-síncrono

O movimento orbital síncrono ou giro síncrono é o movimento realizado normalmente por um rotor desbalanceado e sincronizado com o movimento de rotação do eixo. No entanto, nem todos os giros são síncronos. Os problemas mais destrutivos encontrados em dinâmica de rotores são os movimentos orbitais não síncronos.

Na FIG. 2.5 é mostrado o giro do rotor a partir da vista de uma de suas extremidades. O elemento hachurado representa uma massa desbalanceadora.

Na FIG. 2.5a, a taxa de variação do ângulo  $\phi$  ( $\dot{\phi}$ ) é a velocidade de giro. O ângulo  $\beta$  permanece constante, portanto, a velocidade do giro e a velocidade de rotação do eixo ( $\omega$ ) são as mesmas (giro síncrono).

Na FIG. 2.5b, a taxa de variação do ângulo  $\beta$  ( $\dot{\beta}$ ) é a velocidade de rotação do rotor, relativa ao vetor velocidade de giro  $V$ . Então a velocidade do eixo é a soma de  $\dot{\beta}$  e  $\dot{\phi}$ . Neste caso, a velocidade de giro  $\dot{\phi}$  e a velocidade do rotor  $\omega$  não são as mesmas (giro não síncrono).

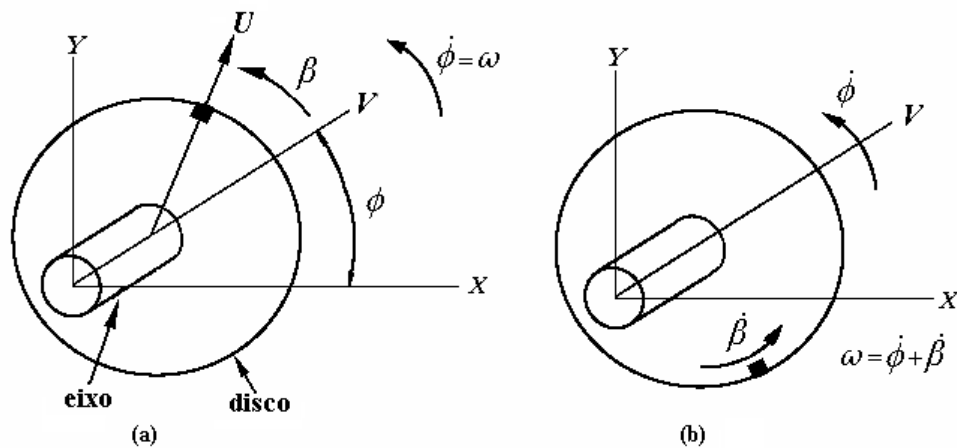


FIGURA 2.5 – a) Movimento Orbital Síncrono. b) Movimento Orbital Não-Síncrono (VANCE, 1988).

Na FIG 2.6, é apresentado um exemplo tri-dimensional (3D) de giro síncrono com uma volta completa do movimento orbital de um rotor bi-apoiado com uma massa desbalanceadora.

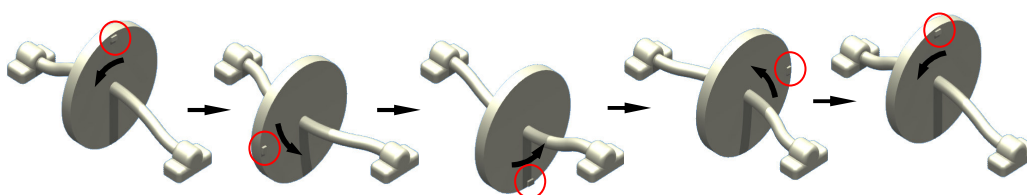


FIGURA 2.6 – Movimento orbital síncrono de um rotor

Uma das fontes mais úteis para diagnóstico de problemas na dinâmica de rotores é o espectro de frequências. O desbalanceamento é uma das causas mais comuns para o aparecimento de vibrações orbitais síncronas de grande amplitude em rotores. De maneira menos comum, têm-se também as velocidades orbitais não-síncronas, que podem representar problemas graves na operação de máquinas rotativas. Grandes amplitudes de vibração subsíncrona podem representar fontes de instabilidade dinâmica em rotores de alta velocidade.

### 2.2.2 Equações do movimento para o rotor de Jeffcott

A FIG. 2.7 mostra as variáveis do modelo de Jeffcott, tanto em um sistema de coordenadas polares, quanto em coordenadas cartesianas. É importante observar que o rotor modelado por Jeffcott pode ter três movimentos independentes, sendo dois de translação e um de rotação. Porém, ao considerar-se a rotação constante, chega-se a um sistema com apenas dois graus de liberdade.

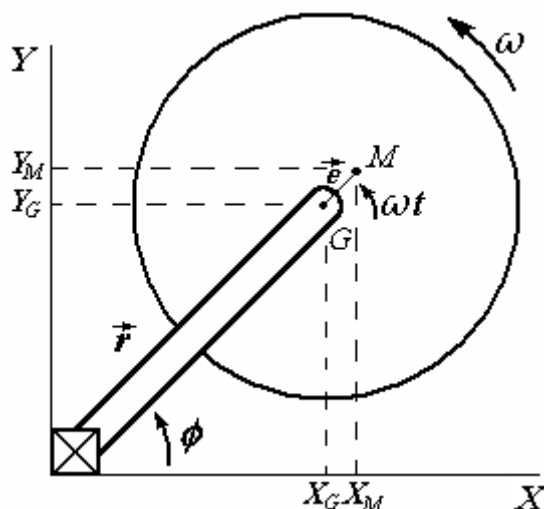


FIGURA 2.7 – Parâmetros do Modelo do Rotor de Jeffcott (VANCE, 1988)

O centro de massa do disco desbalanceado é indicado pelo ponto  $M$ . O ponto  $G$  está localizado no centro geométrico do disco. A distância entre o centro geométrico e o centro de massa é definida como  $e$ . A deflexão do eixo devido a cargas dinâmicas é  $r$ . O eixo possui rigidez  $k$ , a massa do disco é  $M$  e o amortecimento  $C$  considerado é gerado pelo arrasto do disco sobre o meio no qual ele está imerso, no caso o ar. Jeffcott não considerou o amortecimento devido ao suporte, mas, sabendo que o sistema continha alguma forma de amortecimento, incluiu no seu modelo o amortecimento viscoso do meio externo.

A solução permanente das EQ. (2.4) e (2.5) pode ser dada por:

$$r_s = \frac{\omega^2 u}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{m}\right)^2}} \quad (2.4)$$

$$\omega_s t - \phi_s = \beta_s = \tan^{-1} \left[ \frac{c\omega}{m \left( \frac{k}{m - \omega^2} \right)} \right] \quad (2.5)$$

As variáveis  $r_s$  (amplitude de órbita) e  $\beta_s$  (ângulo de fase) são soluções das equações diferenciais e as suas variações com a rotação e com o amortecimento.

A FIG 2.8 mostra que a amplitude do movimento orbital aumenta à medida que se aproxima de uma velocidade crítica e diminui depois da passagem por essa. Após essa passagem, a amplitude se aproxima do valor da amplitude da excentricidade de massa  $u$ . É importante observar que na velocidade crítica, o parâmetro fundamental de influência na amplitude do movimento é o amortecimento (a amplitude diminui com o aumento do amortecimento). É apresentada também uma importante definição para velocidade orbital crítica, como sendo aquela velocidade na qual a amplitude do movimento devido à resposta ao desbalanceamento é máxima.

Um importante fenômeno pode ser observado, denominado “inversão da velocidade crítica”, na curva do ângulo de fase. Para velocidades inferiores à velocidade crítica, o vetor desbalanceamento está do lado de fora da órbita descrita pelo centro geométrico do disco. No momento em que o eixo passa pela velocidade crítica, o vetor que liga o centro geométrico e o centro de massa é tangente à órbita, fazendo dessa forma com

que a amplitude de vibração orbital aumente. Elevando-se a velocidade, o vetor desbalanceamento fica a 180 graus de sua posição original, fazendo com que o movimento tenha sua amplitude reduzida. A massa domina a resposta em velocidades acima da velocidade crítica.

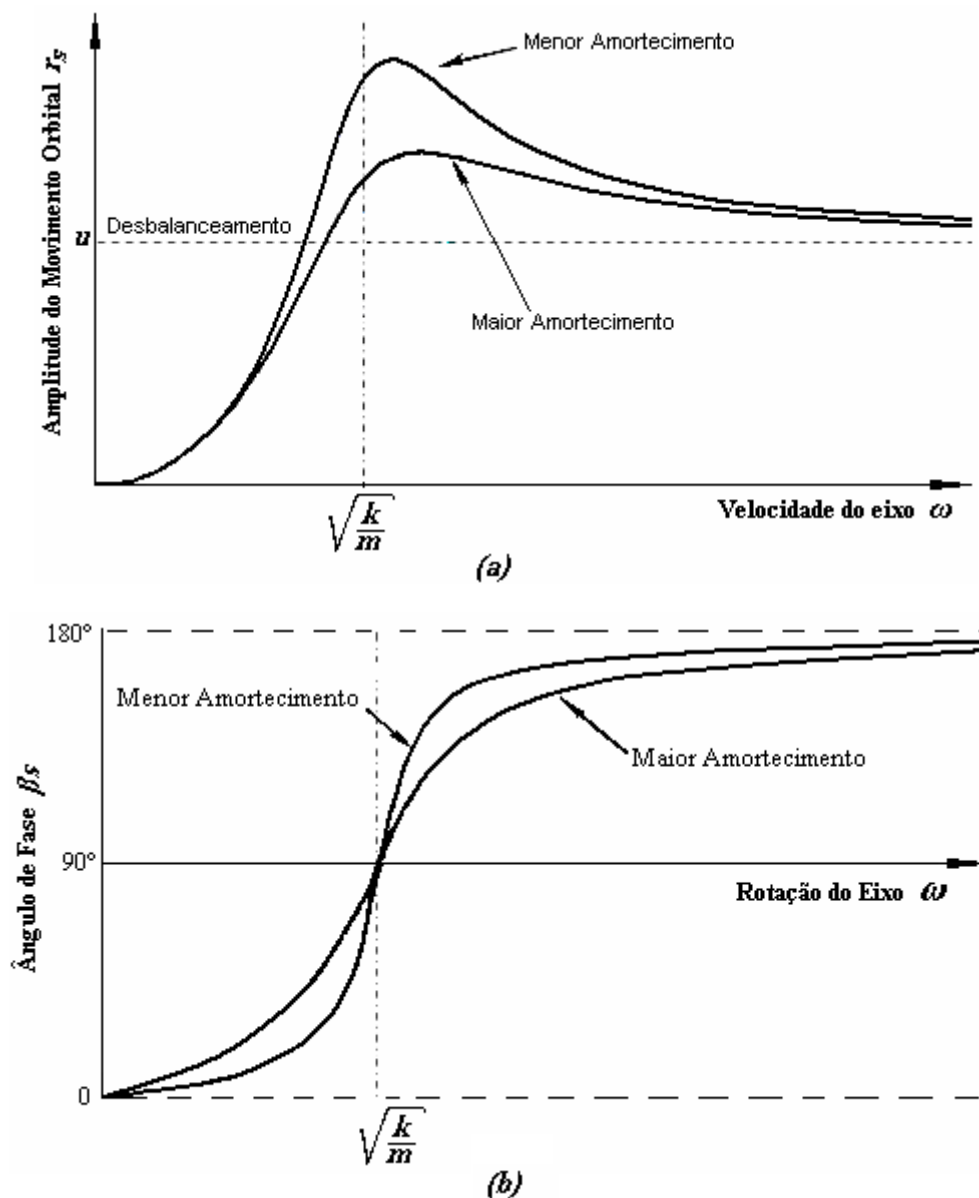


Figura 2.8 - Resposta ao desbalanceamento do rotor de Jeffcot (VANCE, 1988)

O aumento exagerado da amplitude do movimento orbital é extremamente indesejável. Três procedimentos podem minimizar esse problema (VANCE, 1988). São eles:

- 1) Balancear o rotor;

- 2) Mudar a velocidade da máquina de maneira a fazê-la operar longe da velocidade crítica;
- 3) Adicionar amortecimento ao sistema rotor-mancal.

### 2.2.3 Sistemas de suportes flexíveis

O sistema de suporte de qualquer turbomáquina real é necessariamente flexível, pois todo material tem elasticidade. Além disso, é desejável para máquinas rotativas que o suporte seja mais flexível que o rotor pelos dois motivos:

- Baixa rigidez reduz as cargas dinâmicas transmitidas dos mancais para partes não rotativas da estrutura, prolongando a vida do equipamento e minimizando a vibração da estrutura.
- A baixa rigidez dos suportes permite que o amortecimento em mancais hidrodinâmicos ou amortecedores operem mais efetivamente, atenuando a amplitude do movimento orbital do rotor ao passar pela velocidade crítica.

O efeito da flexibilidade do sistema de suporte em relação à rigidez do eixo pode ser observado da FIG. 2.9, que mostra os modos de vibração do eixo para diferentes valores de rigidez do sistema de suporte.

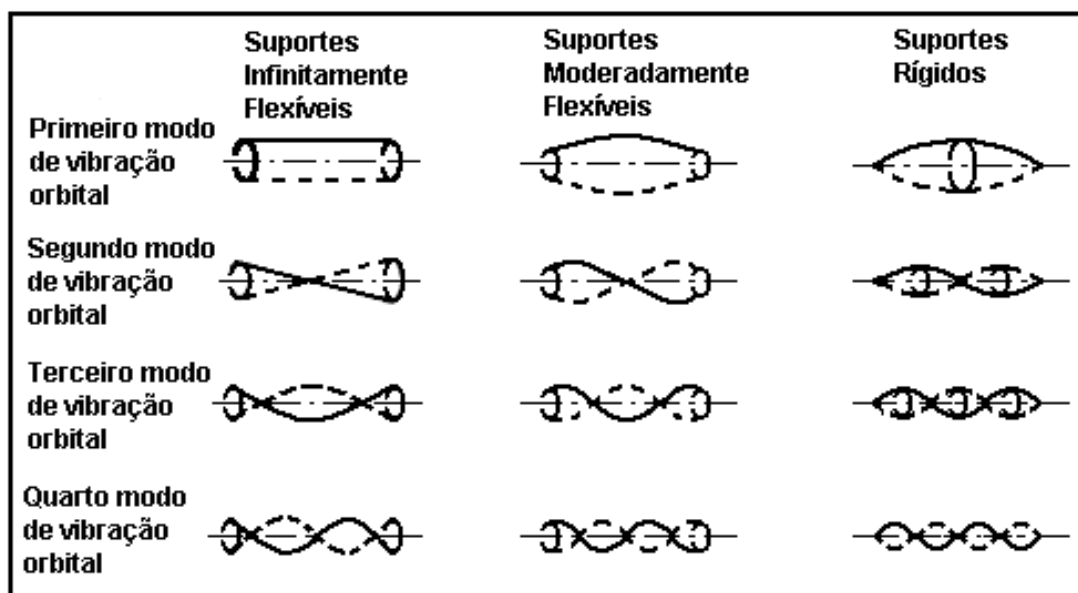


FIGURA 2.9 - Influência da Rigidez do suporte nos modos de vibração (STERNLICHT & LEWIS, 1968)

Na primeira coluna dessa tabela, pode-se observar que os dois primeiros modos de vibração para suportes infinitamente flexíveis apresentam deformação apenas nos

mancais, sendo que o eixo mantém sua forma indeformada. Na segunda coluna, pode-se observar que os modos de vibração para suportes moderadamente flexíveis apresentam deformação no eixo e também nos mancais. Na terceira coluna, para suportes rígidos, pode-se observar que os modos de vibração apresentam deformação apenas no eixo.

A frequência natural de um sistema está diretamente ligada à rigidez. A FIG. 2.10 mostra como essas frequências variam com o coeficiente de rigidez dos suportes, ou seja, apresenta as curvas das frequências naturais de um eixo rotativo bi-apoiado em função do valor da rigidez dos suportes.

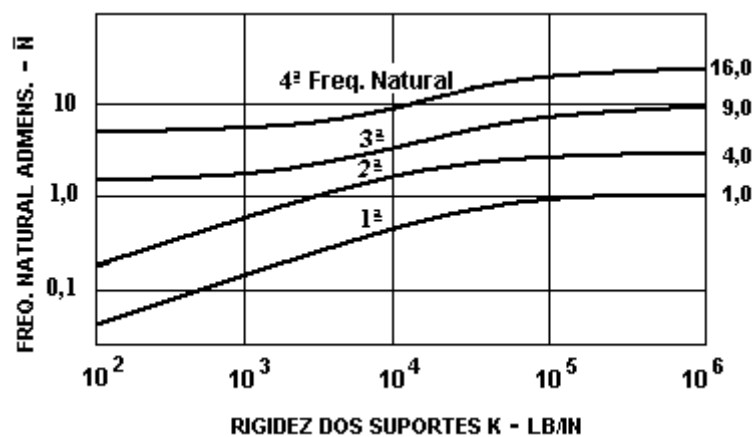


FIGURA 2.10 – Curvas de frequência natural pela rigidez dos suportes (STERNLICHT e LEWIS,1968)

#### 2.2.4 Efeito giroscópico sobre eixos rotativos de rotor em balanço

Um rotor com movimento rotativo pode possuir um momento giroscópico, especialmente quando o disco é localizado num eixo em balanço ele não vibrará em seu próprio plano, acoplado desta forma deflexão e inclinação para criar um problema de dois graus de liberdade. Isso ocorre do fato de que as forças centrífugas de várias partículas do disco não estarem num mesmo plano. Devido à mudança de orientação, exige a aplicação de momentos consideráveis em altas velocidades quando se trata de um rotor que possui um momento de inércia substancial sobre seu diâmetro e um movimento de corpo rígido. Ilustrando este efeito com um rotor em balanço, conforme FIG. 2.11.

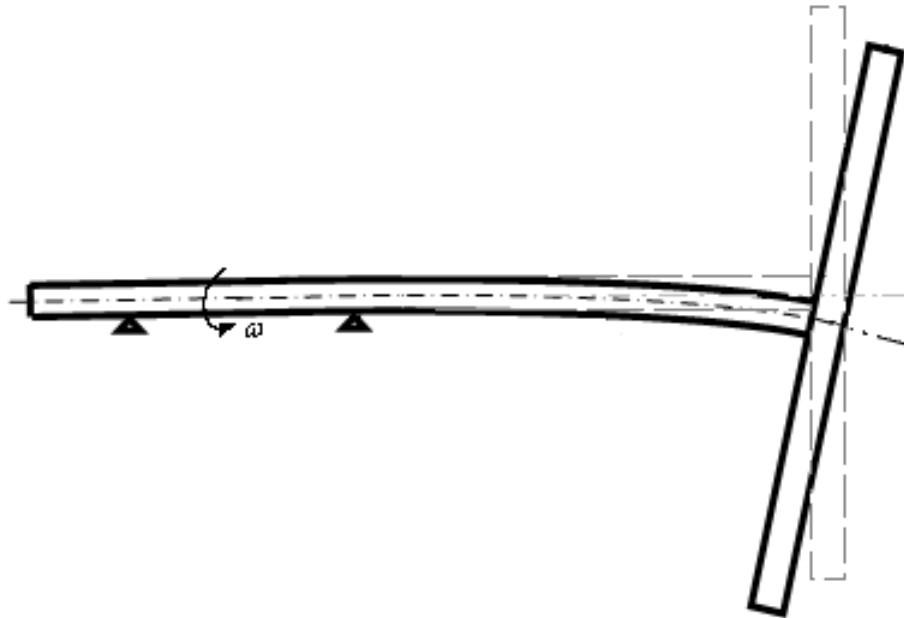


FIGURA 2.11 – Efeito Giroscópico de um Rotor em Balanço (THOMSON, 1972)

### 2.2.5 Efeitos giroscópicos sobre as velocidades críticas

A mudança de orientação de um eixo exige a aplicação de momentos consideráveis em altas velocidades quando se trata de um rotor que possui um momento de inércia substancial sobre seu diâmetro e um movimento de corpo rígido. Tal momento provoca a mudança das velocidades críticas de rotores de alta velocidade adicionando-lhes funções da velocidade de rotação e gerando novas funções. É conhecido da dinâmica que a posição do disco pode ser definida pelas coordenadas do seu centro de massa e três ângulos  $\phi$ ,  $\chi$  e  $\psi$ , chamados de ângulos de Euler conforme FIG. 2.12.

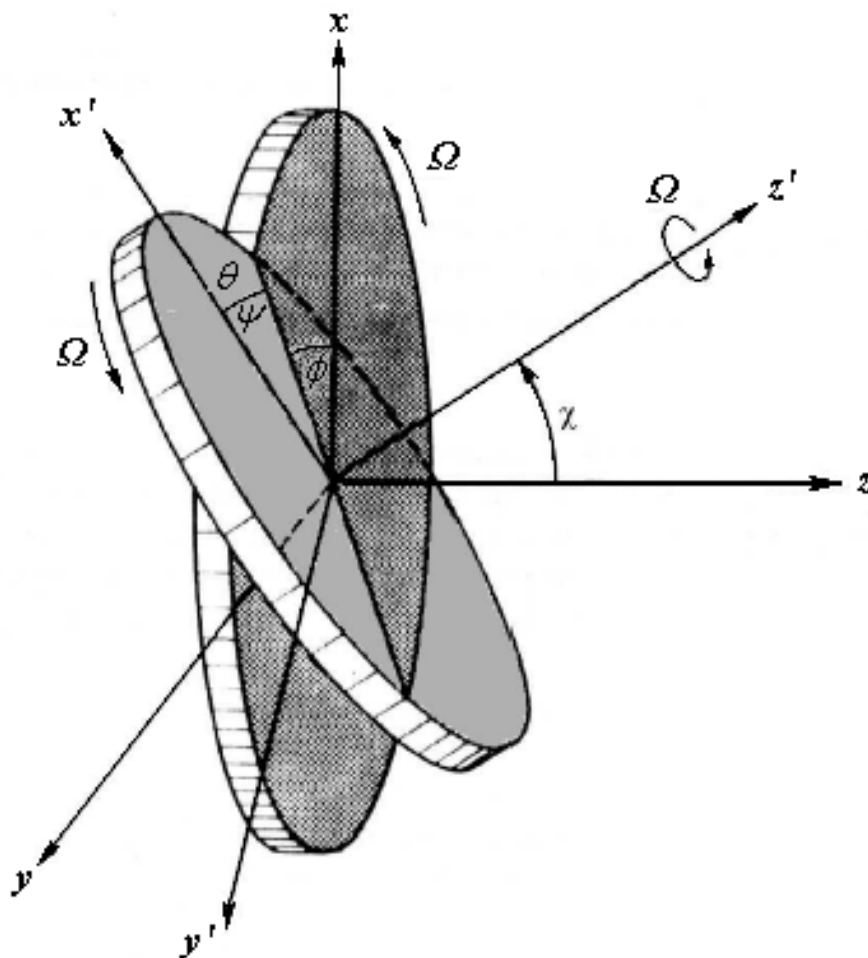


FIGURA 2.12 – Ângulos de Euler (VINAUD, 2005)

Pode-se descrever a orientação do disco em função das inclinações vertical e horizontal do seu eixo de rotação,  $\theta$  e  $\phi$ , ou seja, os ângulos  $\theta$  e  $\phi$  nos planos  $(y; z)$  e  $(x; z)$  respectivamente, conforme FIG. 2.13. É conhecido da cinemática que rotações finitas não podem ser somadas, ou seja, não são comutativas, assim, elas não obedecem à lei vetorial da adição. Entretanto, rotações infinitesimais são comutativas e podem ser adicionadas como vetores. Considerando apenas pequenos deslocamentos, os ângulos  $\theta$  e  $\phi$  podem ser considerados como infinitesimais. Uma consequência disto é que a ordem de aplicação das rotações  $\theta$  e  $\phi$  não tem efeito na posição final. Assim, considera-se o sistema de coordenadas  $(x''; y''; z'')$  fixado ao disco, mas não girando com este, e orientado de acordo com o eixo principal de inércia do disco.



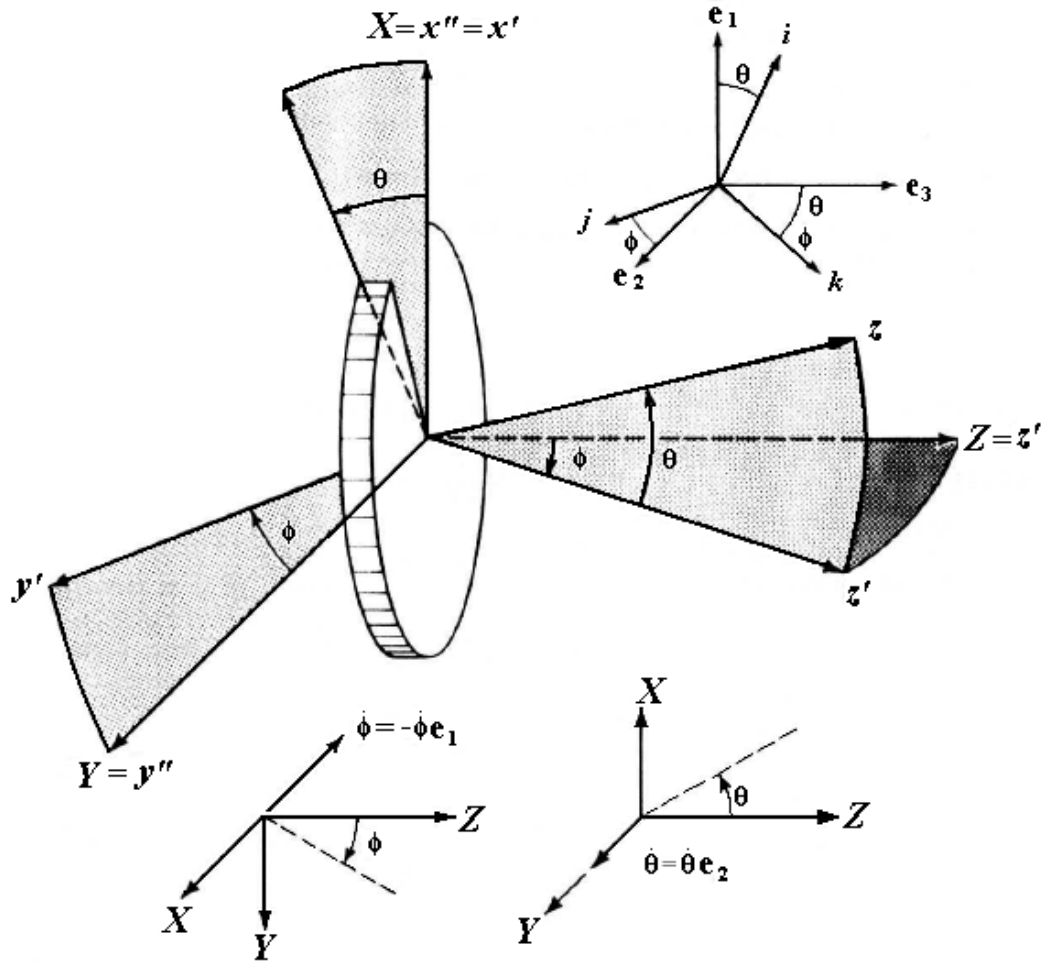


FIGURA 2.13 – Coordenadas para Movimento do Rotor (VINAUD, 2005)

É considerado também um sistema de coordenadas inerciais  $(X; Y; Z)$ . Fazendo com que os dois sistemas de coordenadas coincidam inicialmente e depois girando o sistema  $(x'', y'', z'')$  sobre o eixo  $z''$  de um ângulo  $\phi$  para uma nova posição  $(x'; y'; z')$ . Então girando-o de um ângulo  $\theta$  sobre o eixo  $y'$  para a posição final  $(x; y; z)$ . Se os ângulos  $\theta$  e  $\phi$  mudam com o tempo, o disco terá além da sua velocidade angular de rotação  $\Omega$  sobre o eixo  $z$ , velocidades angulares  $\theta'$  e  $\phi'$  sobre os eixos  $Y$  e  $Z$ , respectivamente.

O sistema de coordenadas  $(x, y, z)$  é feito coincidir com os eixos principais de inércia do disco, mas não gira sobre o eixo  $z$ . Assim, o disco gira referente ao seu sistema de coordenadas com velocidade angular  $\omega$  sobre o eixo  $z$ , chamado spin. Então, pela equação de equilíbrio derivada da quantidade de movimento angular, tem-se:

$$M_G = (\dot{H}_G)_{x,y,z} + \omega \times H_G \tag{2.6}$$

onde  $M_G$  é a soma dos vetores de momento sobre o centro de massa  $G$ ,  $H_G$  é o vetor momento referente ao sistema de coordenadas  $(X'; Y'; Z')$  sobre  $G$  de orientação fixa e sempre paralelo a  $(X; Y; Z)$ , e  $(\dot{H}_G)_{x,y,z}$  é taxa de mudança do vetor momento angular referente ao sistema de coordenadas móvel  $(x; y; z)$ . Se  $J_x, J_y$  e  $J_z$  são os momentos de inércia principais do disco,  $J$  é o tensor diagonal de inércia =  $\text{diag}[J_x J_y J_z]$ ,  $H_G = J\Omega$ ,  $(\dot{H}_G)_{x,y,z} = J\dot{\omega}$ ,  $\omega$  é a velocidade angular instantânea do disco e  $\Omega$  é o vetor constante da velocidade angular do disco. O desenvolvimento das equações de equilíbrio pode ser encontrado em (VINAUD, 2005).

Para a obtenção da equação do sistema, considera-se um eixo em balanço conforme FIG. 2.14, que possui em sua extremidade um disco delgado de massa  $m$  e raio  $r$ .

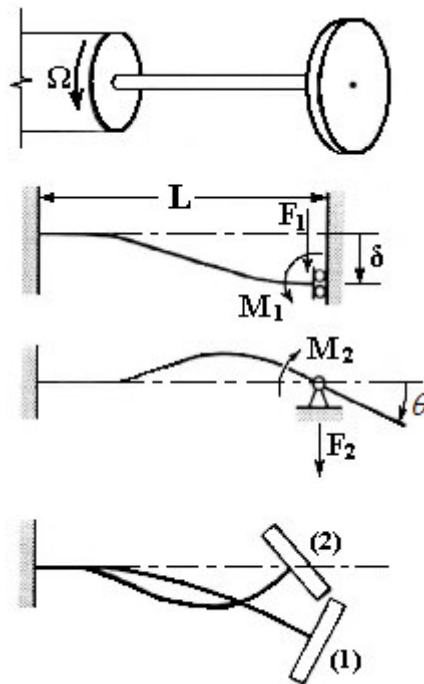


FIGURA 2.14 – Efeitos Giroscópicos de um Rotor em Balanço (VINAUD, 2005)

A equação da frequência, para  $x = x_0 e^{ipt}$  é:

$$\begin{bmatrix} -mp^2 + 6\lambda & 0 & -3\lambda L & 0 \\ 0 & -mp^2 + 6\lambda & 0 & 3\lambda L \\ -3\lambda L & 0 & -Jp^2 + 2\lambda L^2 & J_p \Omega ip \\ 0 & 3\lambda L & -J_p \Omega ip & -Jp^2 + 2\lambda L^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.7)$$

onde  $\lambda = 2EI/L^3 = 2k/3$ ;  $k = 3EI/L^3$  é a constante de mola na extremidade em balanço.

As soluções para esta equação são as frequências naturais para a velocidade de rotação. Quando a velocidade de rotação é aumentada, esta pode coincidir em algum ponto com uma das frequências naturais do sistema. Esta velocidade é chamada de velocidade crítica. Se um gráfico for construído com as frequências obtidas com a EQ. (2.7) contra a velocidade de rotação  $\Omega$  e também com a linha reta  $p = \Omega$ , os pontos nos quais as linhas coincidem fornecem as velocidades críticas mostradas no gráfico de Campbell, FIG. 2.8. Para calculá-las, deve-se introduzir na EQ. (2.8),  $p = \Omega = \omega_c$  e assim, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} -m\omega_c^2 + 6\lambda & 0 & -3\lambda L & 0 \\ 0 & -m\omega_c^2 + 6\lambda & 0 & 3\lambda L \\ -3\lambda L & 0 & -J\omega_c^2 + 2\lambda L^2 & iJ_p\omega_c^2 \\ 0 & 3\lambda L & -iJ_p\omega_c^2 & -J\omega_c^2 + 2\lambda L^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.8)$$

As raízes  $\omega_c$  para esta equação são as velocidades críticas.

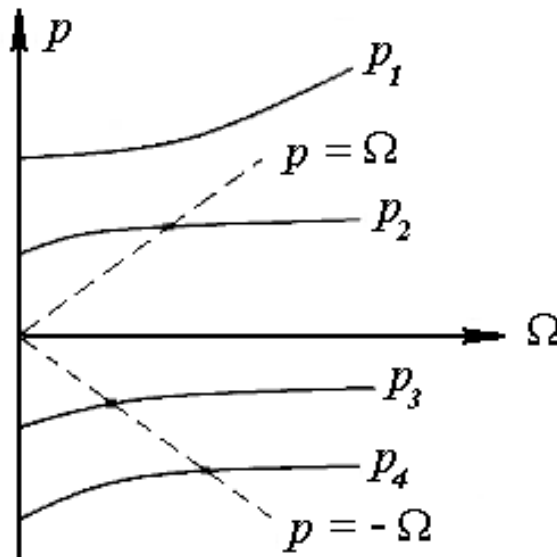


FIGURA 2.15 - Diagrama de Campbell e velocidades críticas

### 2.2.6 Elementos finitos na modelagem de rotores

O método de elementos finitos é atualmente bastante difundido na modelagem de rotores flexíveis. Um dos primeiros trabalhos desenvolvidos utilizando o método de

elementos finitos para rotores flexíveis foi apresentado por (RAHL e BOOKER, 1972), com elemento baseado na teoria de vigas de Euler-Bernoulli.

Apresentado por (ZORZI e NELSON, 1977), simulações por elementos finitos para sistemas rotativos utilizando elemento de viga de Rayleigh, considerando os efeitos de amortecimento interno e histerético do eixo. Destacam-se as vantagens no modelamento de sistemas com geometrias complexas.

Apresentado por (GMÜR e RODRIGUES, 1991), modelagem de rotores pelo método de elementos finitos considerando efeitos de inércia translacional e giratória, momentos giroscópicos e excentricidade de massa. A rigidez, o amortecimento interno e histerético e a força cortante são limitados apenas ao eixo.

A grande maioria dos trabalhos desenvolvidos na análise dinâmica de rotores, utilizando-se o método de elementos finitos (NELSON, 1980; NELSON e McVAUGH, 1976; ÖZGÜVEN e ÖZKAN, 1984; CHILDS e GRAVISS, 1982; ROUCH e KAO, 1980), considera os efeitos elásticos e inerciais do eixo rotativo, desconsiderando as propriedades elásticas dos discos rotativos acoplados ao eixo.

### **2.3 Escopo do trabalho**

Com o intuito de trazer subsídios à compreensão dos fenômenos dinâmicos associados a rotores em balanço, tais como ventiladores e exaustores industriais, esse trabalho apresenta um estudo do comportamento dinâmico do sistema rotativo de um ventilador industrial utilizando o método de elementos finitos. O modelo de rotor inclui o eixo rotativo com disco acoplado, que representa o impelidor da turbomáquina, os mancais de rolamentos e a base metálica de todo o conjunto. Procedimentos analíticos, computacionais e procedimentos experimentais são empregados para avaliar a resposta de rotores em balanço por meio da determinação de suas frequências naturais em diversas condições de operação. A predição dos modos de vibração e das frequências naturais do rotor considera as propriedades elásticas e inerciais do impelidor e a elasticidade do sistema de suporte, composto pelos mancais e pela base. Todas as formas de amortecimento não são consideradas nesse estudo

O rotor em balanço encontra-se apoiado em sistema de suporte composto por dois mancais de rolamento sobre uma base metálica. As propriedades elásticas desse sistema são estimadas computacionalmente utilizando-se um pacote comercial de

elementos finitos. A velocidade de rotação do sistema está um pouco abaixo da primeira velocidade crítica do rotor.

Na análise da resposta dinâmica do rotor em balanço por meio de procedimentos analíticos, o eixo do sistema é modelado como viga, que possui propriedades elásticas e inerciais uniformemente distribuídas, e o impelidor é considerado um disco rígido. O sistema de suporte do conjunto rotativo é considerado rígido. Os momentos giroscópicos do impelidor estão incluídos nessa etapa do estudo.

O procedimento de elementos finitos para obtenção das frequências naturais é desenvolvido de acordo com o modelo tridimensional do conjunto, com as características construtivas nas condições operacionais. A flexibilidade estimada do sistema de suporte, composto pelos mancais e pela base, é incluída na modelagem de elementos finitos. O modelo de elementos finitos leva em consideração as propriedades elásticas do impelidor e as interações existentes entre os componentes acoplados do conjunto. Os efeitos giroscópicos do conjunto rotativo estão contemplados nessa análise computacional. Diagramas de Campbell são obtidos a partir das previsões de elementos finitos permitindo estimar as velocidades críticas do sistema.

A determinação experimental das frequências naturais do rotor em balanço é efetuada por meio de testes de batida (*bump tests*) e testes de vibração em velocidade constante. A realização dos testes de vibração na faixa de velocidade de operação é de fundamental importância para a avaliação da influência dos efeitos giroscópicos sobre as frequências naturais do conjunto. Os diagramas de Bode são obtidos a partir dos resultados experimentais da resposta vibratória do rotor em diversas condições de velocidade.

A descrição de todos os procedimentos utilizados no desenvolvimento desse estudo está apresentada no capítulo 3 da dissertação. O Capítulo 4 apresenta os resultados obtidos nesse trabalho e análise desses resultados. As conclusões e recomendações estão contidas no capítulo 5.

### 3 METODOLOGIA

Esse capítulo descreve os procedimentos computacionais e experimentais utilizados no desenvolvimento do estudo sobre o comportamento dinâmico de rotores em balanço. O procedimento computacional pode ser dividido em duas etapas – 1. modelagem geométrica do sistema rotativo e dos mancais; 2. análise de frequências naturais utilizando pacote computacional de elementos finitos. Um exemplo de rotor de soprador industrial é selecionado para a análise dinâmica de rotores em balanço.

#### 3.1 Dados técnicos do soprador

O soprador selecionado para esse estudo é acionado por um motor de 150 HP de potência com rotação de 1780 RPM, com capacidade de sopro de 13000 Nm<sup>3</sup>/h, pressão de 850 mmH<sub>2</sub>O e temperatura de 250°C. O sistema de transmissão de potência motor/rotor pode ser direto, por acoplamento elástico flexível, FIG. 3.1-a, ou por correias, FIG. 3.1-b.



(a)

(b)

FIGURA 3.1 – a) Rotor com Acionamento Direto, b) Rotor com Acionamento por Correias

O rotor possui a configuração em balanço conforme FIG. 3.2, apoiado por dois mancais de rolamento autocompensadores de rolos, montados com bucha cônica e lubrificados à graxa. O rolamento do lado do acionamento é fixo axialmente por dois anéis de bloqueio.

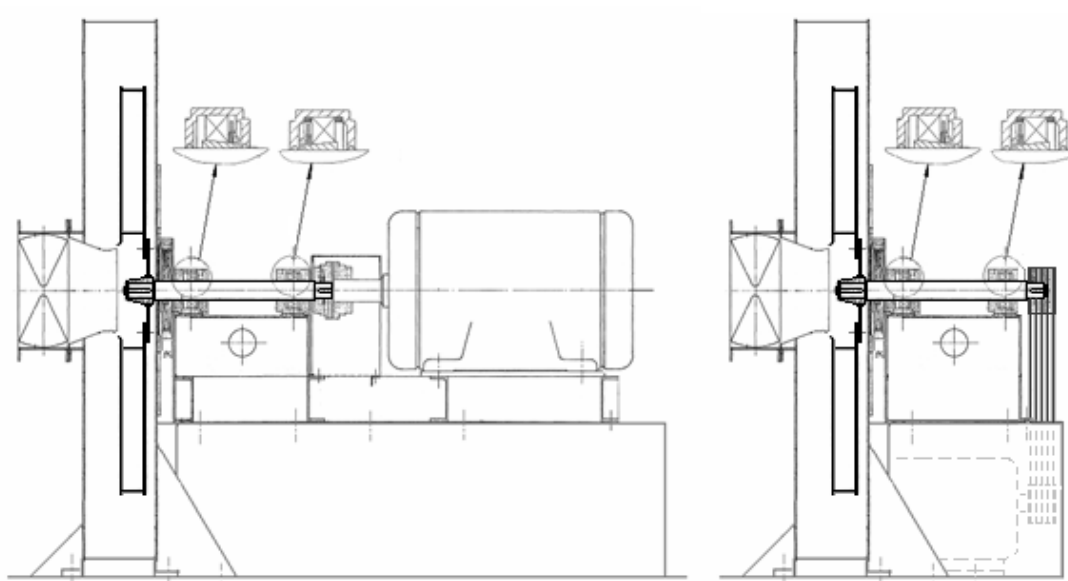


FIGURA 3.2 – Configuração do Rotor (Acionamento Direto e por Correias)

O eixo é fabricado de aço SAE 1045, possui massa de 33 kg e as dimensões de 80 mm de diâmetro e 895 mm de comprimento, conforme FIG. 3.3.



FIGURA 3.3 – Modelagem Sólida do Eixo do Rotor<sup>1</sup>

O flange com massa de 22,1 kg, diâmetro externo de 410 mm e comprimento de 115 mm ao centro, conforme FIG. 3.4. É fabricado com aço ASTM A-515.

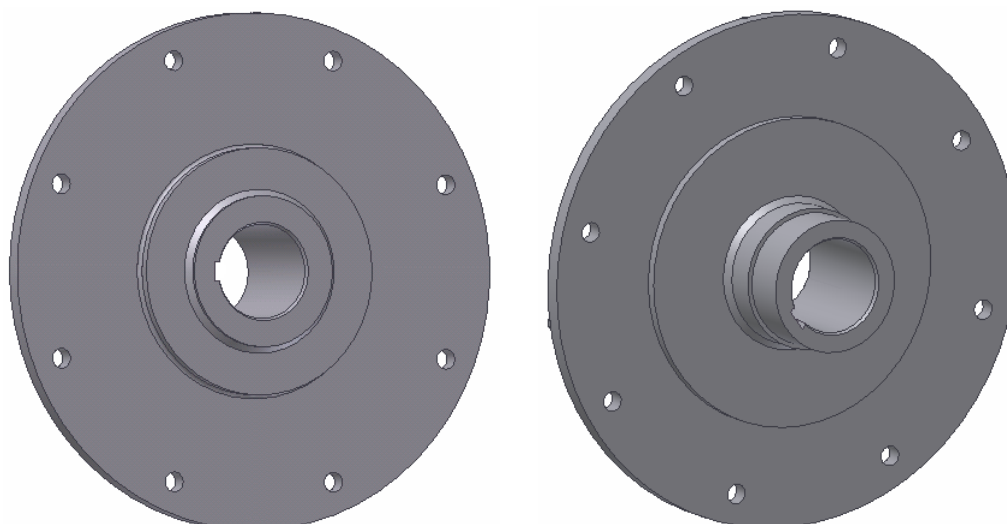


FIGURA 3.4 – Modelagem Sólida do Flange de Acoplamento

<sup>1</sup> O programa Inventor© é utilizado para a modelagem geométrica dos componentes do rotor nesse trabalho.

O disco impelidor possui massa de 394,5 kg, diâmetro de 1798 mm e comprimento de 114 mm, fabricado em aço ASTM A-515 conforme FIG. 3.5.

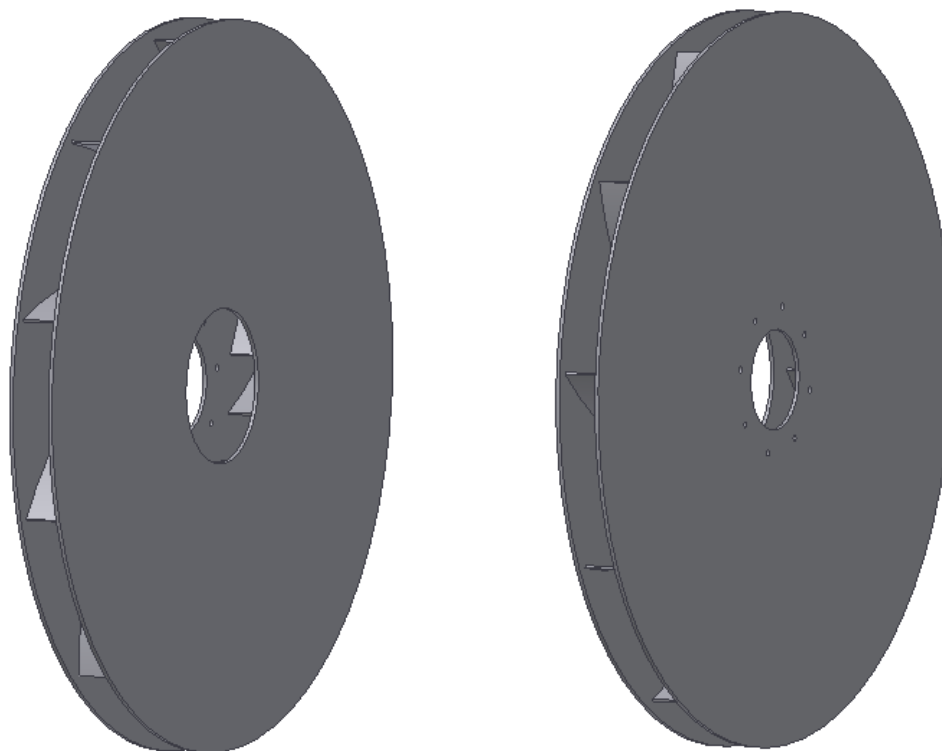


FIGURA 3.5 – Modelagem Sólida do Disco Impelidor

A base metálica com altura de 475 mm, construída em aço ASTM A-36, com espaçamento de 450 mm entre os dois mancais, conforme FIG. 3.6. A base metálica é montada numa base de concreto.

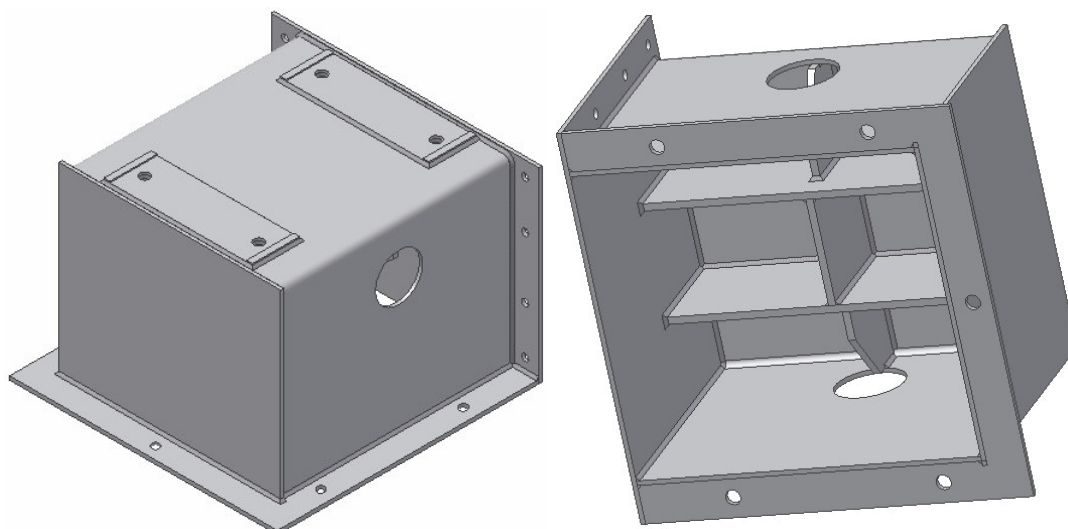


FIGURA 3.6 – Modelagem Sólida da Base Metálica



A FIG. 3.7 mostra a montagem do conjunto do conjunto girante nos mancais.

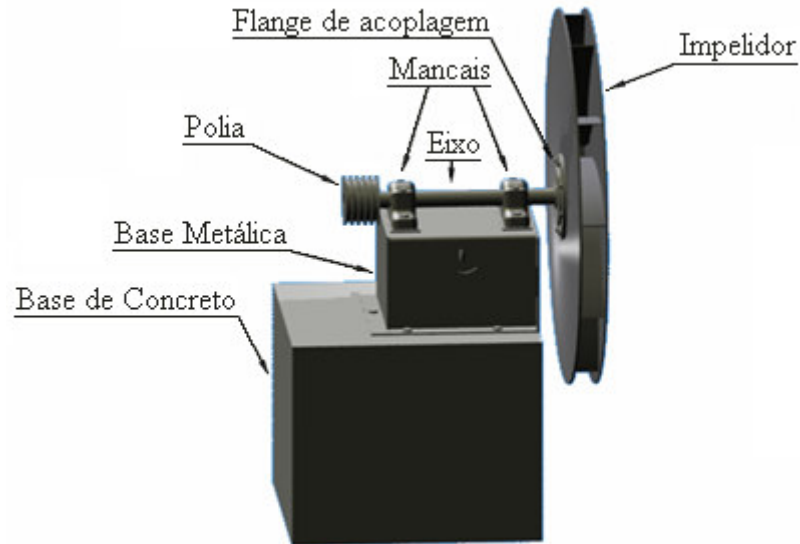


FIGURA 3.7 – Modelagem Sólida do Conjunto Montado

O rotor selecionado possui histórico operacional de problemas de vibração excessiva. A FIG. 3.8 mostra a curva da resposta vibratória dos dois mancais ao longo do tempo. No eixo das ordenadas mostra-se o valor medido de amplitude de velocidade do sinal de vibração e, no eixo das abscissas, indica-se o número de dias de operação.

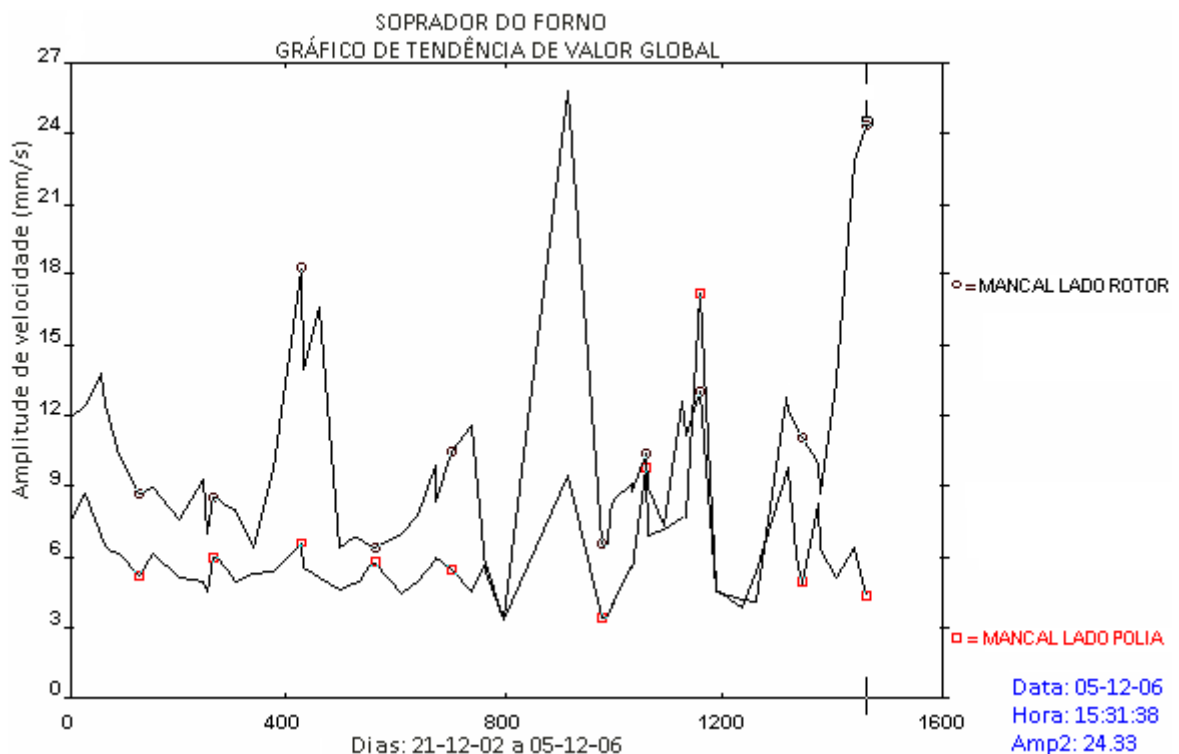


FIGURA 3.8 – Tendência dos Níveis de Vibração

No gráfico de tendência é recomendável que os valores do nível de vibração dos mancais seja inferior a 6 mm/s.

O espectro de frequência do soprador em estudo apresenta alto valor de amplitude na frequência de operação e amplitudes consideráveis nos múltiplos da frequência de rotação, o que indica problemas associados ao desbalanceamento de massa. A FIG. 3.9 mostra o resultado de uma medição do espectro de frequência do soprador em estudo, tendo na abscissa a frequência em RPM e na ordenada a amplitude da vibração em mm/s. No resultado global de 14,06 mm/s do valor da vibração, aparece o valor de 11,15 mm/s que ocorre na frequência de 1793,5 RPM, igual à velocidade de operação do rotor.

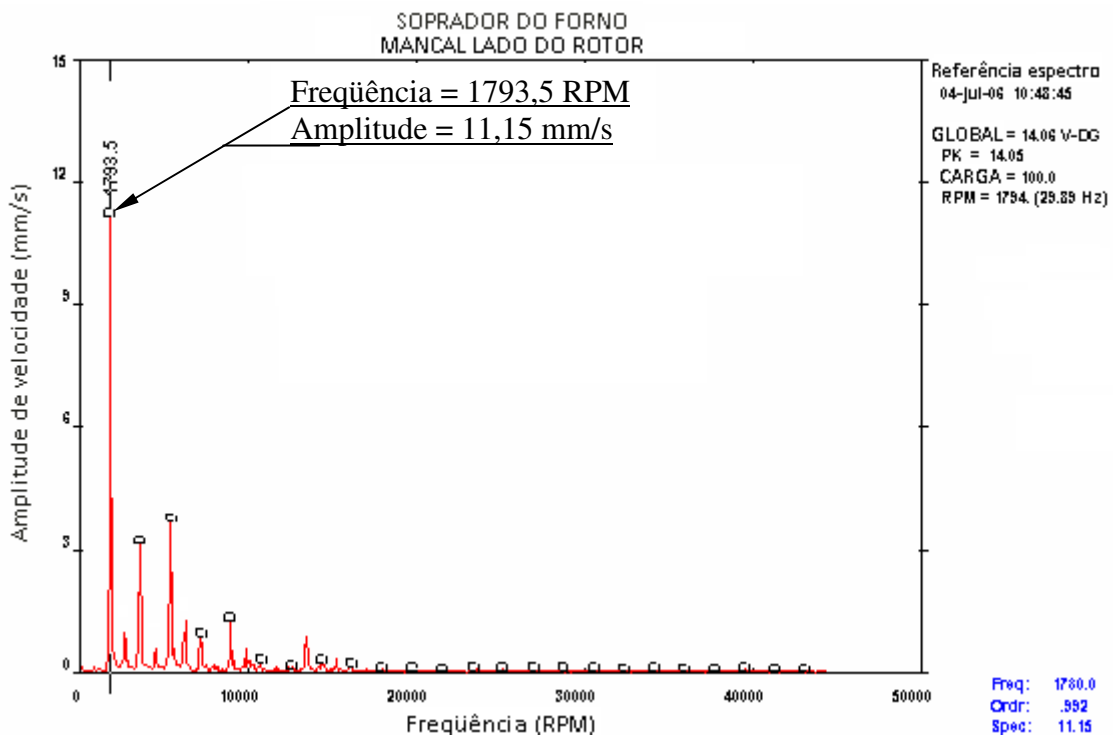


FIGURA 3.9 – Espectro de Frequência do Mancal próximo do Rotor

### 3.2 Procedimentos de análise de rotores em balanço

Para esse estudo, as frequências naturais do rotor são obtidas pelo método computacional de elementos finitos<sup>2</sup>, pelo procedimento analítico e pelos procedimentos experimentais.

<sup>2</sup> As predições de frequências naturais por elementos finitos são realizadas utilizando-se o pacote computacional ANSYS Workbench 9©.

Para obtenção das frequências naturais pelo método de elementos finitos é necessária a modelagem sólida e a montagem dos componentes mecânicos do sistema, composto pelo eixo, flange, impelidor e mancais. Na sequência, realiza-se a seleção das propriedades dos materiais, a definição da malha, aplicação do carregamento, definição das condições de contorno e definição do tipo de análise.

### 3.2.1 Método de elementos finitos

Para modelagem dos componentes mecânicos do sistema utilizando-se o método de elementos finitos, necessita-se estimar a rigidez do sistema de suporte e estimar as propriedades dos materiais de cada componente.

#### 3.2.1.1 Estimativa experimental da flexibilidade do sistema de suporte

Uma tentativa mal sucedida de estimação da rigidez do sistema de suporte é efetuada com relógios comparadores para a medição dos deslocamentos verticais dos mancais, com e sem carga. Os relógios comparadores não permitem grande precisão de medição e esse procedimento experimental é descartado na análise. O fundo de escala desses instrumentos é de 0,01 mm.

#### 3.2.1.2 Predição da rigidez do sistema de suporte pelo método de elementos finitos

Para predição da rigidez do sistema de suporte pelo método de elementos finitos, é necessária a modelagem sólida de todo o conjunto em sólido tridimensional conforme FIG. 3.10.

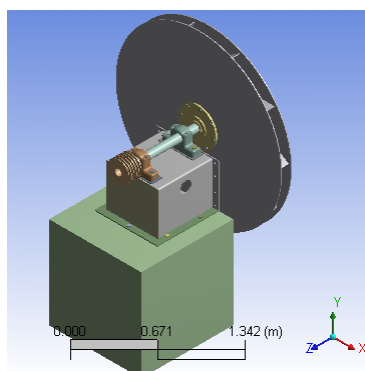


FIGURA 3.10 – Modelagem do Conjunto

Estimam-se os parâmetros do sistema para análise de deslocamento linear pelo método computacional de elementos finitos conforme TAB. 3.1.

TABELA 3.1

Parâmetros do Sistema para Análise de Deformação nos Apoios

Denominação	Parâmetros
Coeficiente de Poisson	0,3
Massa específica	7850 kg/m <sup>3</sup>
Módulo de elasticidade	2,00 x 10 <sup>11</sup> Pa
Tipo de malha	Padrão
Número de nós	132261
Número de elementos	70574

Para obter-se a deformação linear pelo o procedimento computacional de elementos finitos, fixa-se a base metálica, aplica-se a força gravitacional na direção y e calcula-se a deformação na direção vertical y, conforme FIG. 3.11.

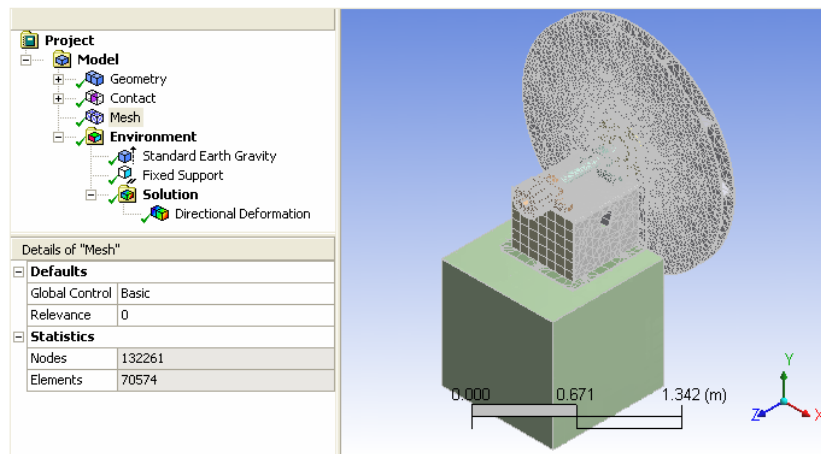


FIGURA 3.11 – Definição da Malha e Condições de Contorno

A FIG. 3.11 mostra uma etapa da análise de deformação linear nos apoios pelo método computacional de elementos finitos. Os valores obtidos para os deslocamentos nos apoios, na direção y, são  $5,07 \times 10^{-7}$  m no mancal do lado da polia e  $-3,70 \times 10^{-6}$  m no mancal do lado do impelidor.

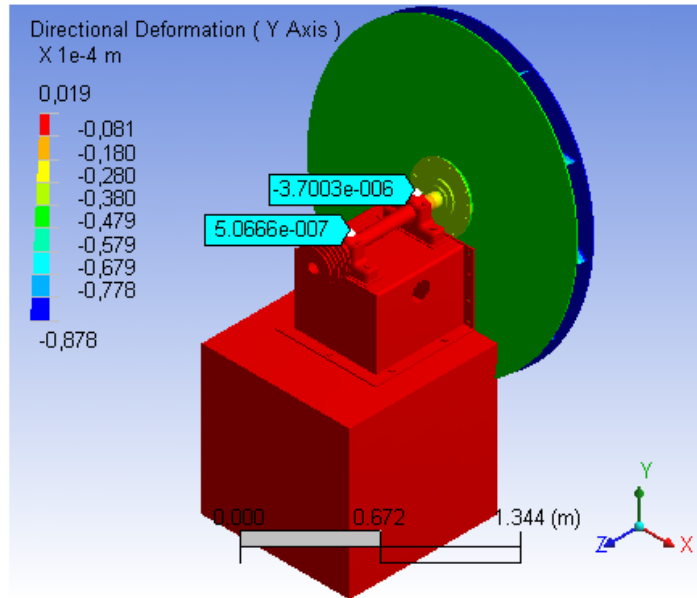


FIGURA 3.12 – Deslocamento Linear nos Apoios do Conjunto na direção y

### 3.2.1.3 Modelagem dos componentes mecânicos do sistema rotativo

Para modelagem do sistema rotativo, necessita-se modelar os apoios em forma de cunha tridimensional de acordo com a deformação obtida na análise, como mostrado na FIG. 3.13. Essas cunhas, que possuem forma tridimensional, equivalem aos apoios simples utilizados nos textos básicos de Resistência dos Materiais. Entretanto, as cunhas são posicionadas nas direções vertical e horizontal para impedir o deslocamento do eixo nessas direções.

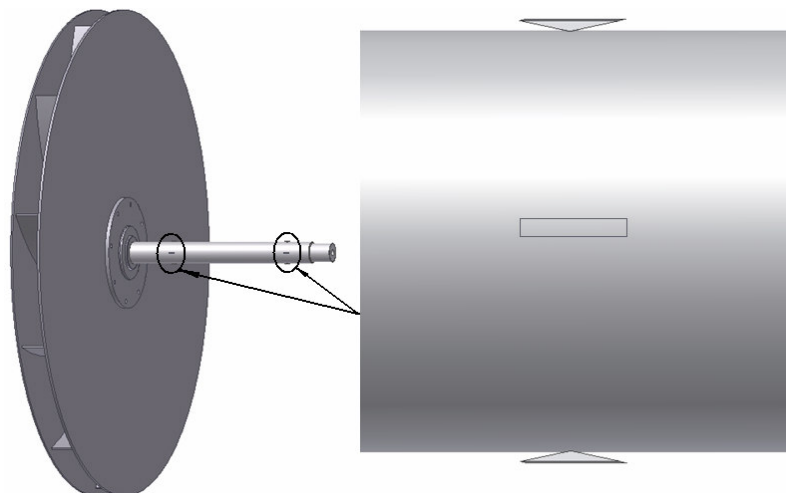


FIGURA 3.13 – Modelagem do Sistema indicando as Cunhas representativas dos Mancais no Eixo

Para obter-se a deformação equivalente à deformação obtida na análise computacional da base/mancais, os apoios são modelados como cunhas. A interface de contato da cunha com a superfície do eixo é construída na forma de arco circular, com ângulo definido por processo de tentativa e erro.

Estimam-se os parâmetros do rotor para análise de deformação vertical nos apoios pelo método computacional de elementos finitos conforme TAB. 3.2.

TABELA 3.2

Parâmetros do Rotor para Análise de Deformação nos Apoios

Denominação	Parâmetros
Coefficiente de Poisson	0,3
Massa específica	7850 kg/m <sup>3</sup>
Módulo de elasticidade	2,00 x 10 <sup>11</sup> Pa
Tipo de malha	Padrão
Número de nós	80187
Número de elementos	43162

A modelagem considerada ideal, conforme FIG. 3.14, é obtida com a largura da base do triangulo igual a 20 mm, altura igual a 3 mm e ângulo de arco de 4,55°.

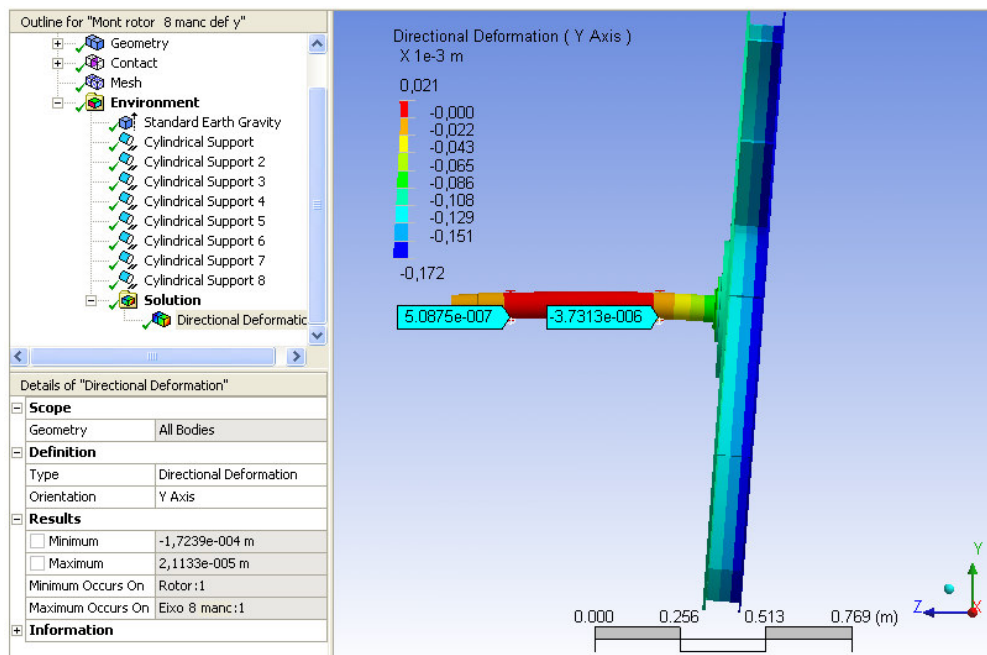


FIGURA 3.14 – Deformação Linear dos Apoios do Sistema Rotativo

Define-se a deformação na fronteira entre o apoio e o eixo conforme FIG. 3.15.

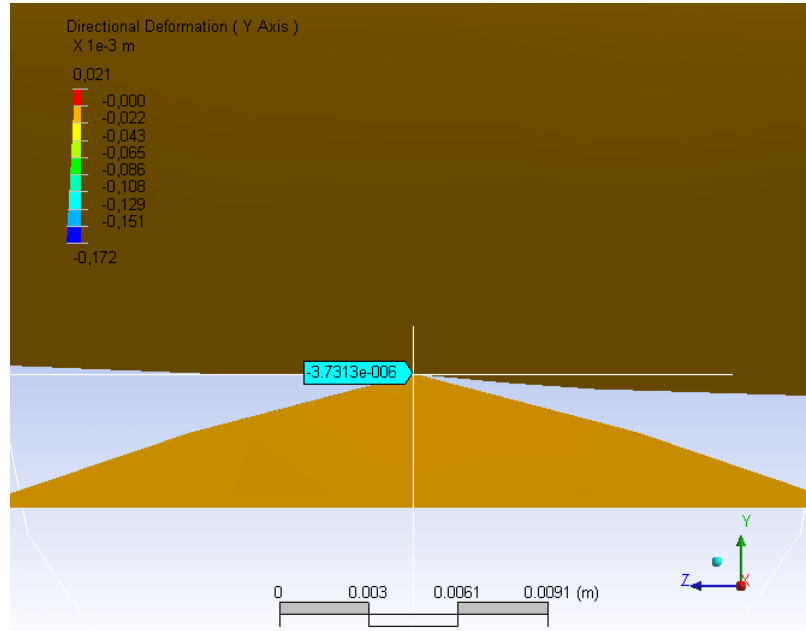


FIGURA 3.15 – Posição de Cálculo da Deformação

### 3.2.1.4 Estimativa das propriedades do material

Estimam-se as propriedades do material para cada componente do rotor, de acordo com as condições operacionais, cujos valores estão na TAB 3.3. Estima-se o módulo de elasticidade para o flange e o impelidor de acordo com os efeitos da temperatura de trabalho<sup>3</sup>, sendo que o ar do soprador está à temperatura média de 250°C.

TABELA 3.3

Parâmetros do Material do Rotor para Obtenção das Freqüências Naturais

Denominação	Parâmetros		
	Eixo e Apoios	Flange	Impelidor
Coefficiente de Poisson	0,3	0,3	0,3
Massa específica	7850 kg/m <sup>3</sup>	7850 kg/m <sup>3</sup>	7850 kg/m <sup>3</sup>
Módulo de elasticidade	2,00 x 10 <sup>11</sup> Pa	1,80 x 10 <sup>11</sup> Pa	1,80 x 10 <sup>11</sup> Pa

<sup>3</sup> Fonte de informação da curva do módulo de elasticidade em função da temperatura [http://www.lmc.ep.usp.br/people/valdir/fire\\_safety/def\\_termicas\\_aveiro.pdf](http://www.lmc.ep.usp.br/people/valdir/fire_safety/def_termicas_aveiro.pdf) - pág. 2

### 3.2.1.5 Definição da malha

Estima-se a malha padrão gerada automaticamente pelo método de elementos finitos sem refinamento. A malha padrão formada para o rotor possui elementos tetraédricos de quatro nós. O número de nós e elementos são apresentados na TAB. 3.4.

TABELA 3.4

Parâmetros da Malha do MEF do Rotor para Obtenção das Freqüências Naturais

Denominação	Parâmetros
Tipo de malha	Padrão
Número de nós	80187
Número de elementos	43162

### 3.2.1.6 Condição de carregamento

Define-se o carregamento apenas como o peso próprio da massa do rotor, devido à ação da força da gravidade na direção  $y$ , sendo desprezado a pressão do ar no impelidor.

### 3.2.1.7 Definição das condições de contorno

Os mancais são basicamente mancais de rolamento radiais. O mancal do lado do impelidor não restringe rotação, mas permite movimento no sentido radial e oferece liberdade de movimento na direção axial para permitir dilatações térmicas. O mancal do lado do acionamento difere do mancal do lado do impelidor apenas por restringir movimento na direção axial.

### 3.2.1.8 Definição do tipo de análise

Definem-se as freqüências encontradas para o tipo de análise. É limitado em seis o número de freqüências na análise, das quais são de interesse no trabalho os modos da primeira e segunda freqüência natural da vibração lateral.



### 3.2.2 Método analítico

O método analítico selecionado para o estudo é representado pela equação (2.7). Para utilização do método analítico torna-se necessário a definição de alguns parâmetros, como, distância entre o centro de massa do impelidor ao mancal próximo, massa do conjunto em balanço do rotor, rigidez equivalente à rigidez do eixo mais a rigidez dos mancais, distância equivalente entre o centro de massa do impelidor ao mancal próximo para o método analítico e dimensional do disco rígido equivalente ao conjunto em balanço. Finalmente, definem-se os valores dos demais parâmetros a serem utilizados na equação do método analítico.

#### 3.2.2.1 Distância do centro de massa do impelidor ao mancal próximo

Devido à forma complexa do conjunto, utiliza-se o programa Auto Cad para determinação da distância do centro de massa do conjunto até o mancal próximo do impelidor. Para a utilização do programa, modela-se o conjunto em balanço na forma tridimensional com o centro do mancal na origem, ou seja, nas coordenadas (0,0,0) e definem-se as propriedades de massa do sólido, obtendo a posição do centro de massa em 248,6 mm, conforme FIG. 3.16.

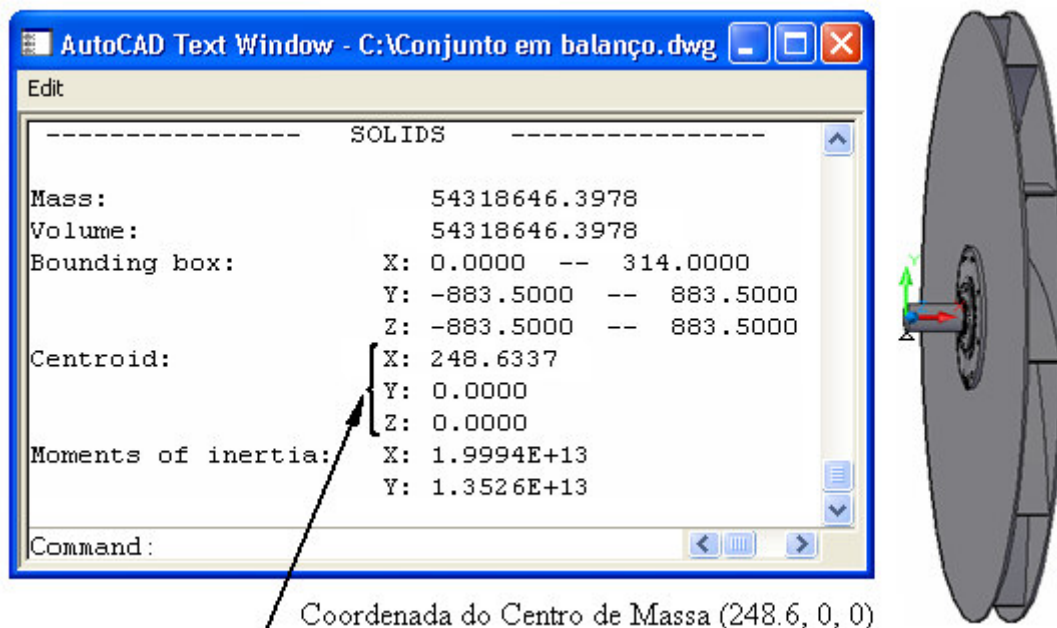


FIGURA 3.16 – Centro de Massa do Rotor na Região em Balanço

3.2.2.2 Massa do conjunto em balanço

Estima-se a massa do conjunto em balanço ( $M_{C.B.}$ ) pela soma da massa do impelidor, do flange e parte do eixo do eixo em balanço, conforme EQ. 3.1.

$$M_{C.B.} = M_I + M_F + M_{EB} = 426,4Kg \tag{3.1}$$

3.2.2.3 Rigidez equivalente à rigidez do eixo e dos mancais

Estima-se a rigidez no mancal do lado do impelidor ( $k_{M.I.}$ ) e no mancal do lado da polia ( $k_{M.P.}$ ) de acordo com a montagem, FIG. 3.17, pelas EQ. (3.2) e (3.3), respectivamente.

$$k_{M.I.} = \frac{(450 + 248,6) \times 426,4 \times 9,81}{450 \times 3,576 \times 10^{-6}} = 1,8 \times 10^9 N / m \tag{3.2}$$

$$k_{M.P.} = \frac{248,6 \times 426,4 \times 9,81}{450 \times 5,094 \times 10^{-7}} = 4,5 \times 10^9 N / m \tag{3.3}$$

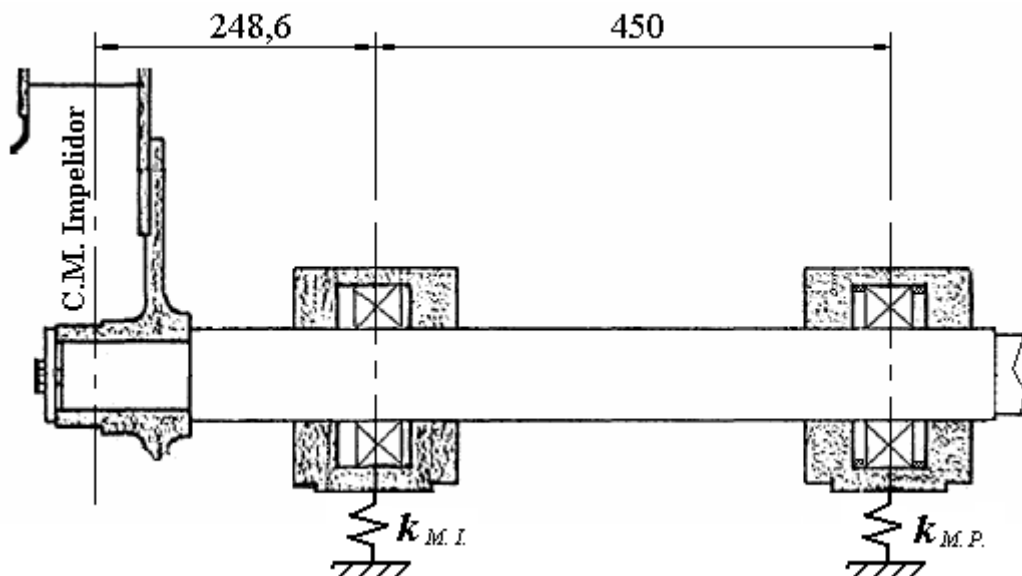


FIGURA 3.17 – Posicionamento de Montagem do Rotor nos Mancais

Estima-se a rigidez do eixo ( $k_E$ ) conforme montagem, FIG. 3.18, considerando-se que o eixo pode ser representado pela teoria de vigas de engenharia, conforme EQ. 3.4.

Estimam-se os parâmetros para determinação da rigidez do eixo conforme TAB. 3.5.

TABELA 3.5  
Parâmetros para determinação da Rigidez do Eixo

Denominação	Parâmetros
$P$ (Força unitária)	1 N
$L$ (Dimensão do eixo em balanço)	0,2486 m
$L_1$ (Dimensão do eixo entre mancais)	0,45 m
$E$ (Módulo de elasticidade)	$2,00 \times 10^{11}$ Pa
$I$ (Momento de inércia)	$2,01 \times 10^{-6} \text{ m}^4$

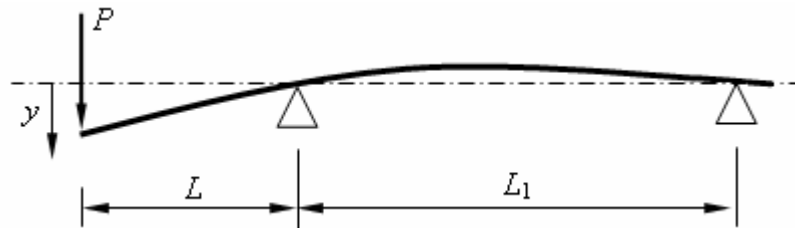


FIGURA 3.18 – Representação da Montagem do Eixo

$$k_E = \frac{3EI}{PL^2} \frac{1}{(L + L_1)} = 2,79 \times 10^7 \text{ N/m} \quad (3.4)$$

Estima-se a rigidez equivalente ( $k_{EQ}$ ) associando a rigidez do eixo ( $k_E$ ) com a rigidez dos mancais ( $k_{M.L}$  e  $k_{M.R}$ ), conforme EQ. (3.5).

$$k_{EQ} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{-P \times L}{L_1} + \frac{2 \times P \times L}{L_1} \times \frac{L_1 + L}{L_1}} + \frac{1}{5,91 \times 10^8}} = 2,66 \times 10^7 \text{ N/m} \quad (3.5)$$

Observa-se que a rigidez dos mancais é muito maior que a rigidez do eixo, resultando com isso a rigidez equivalente com valor próximo da rigidez do eixo.

### 3.2.2.4 Distância equivalente do centro de massa do impelidor ao mancal próximo

Para utilização do procedimento analítico, que representa um modelo flexível apenas na região em balanço conforme FIG. 3.19, torna-se necessário determinar a dimensão  $L'$  conforme EQ (3.6) de acordo com a rigidez do modelo real de montagem.

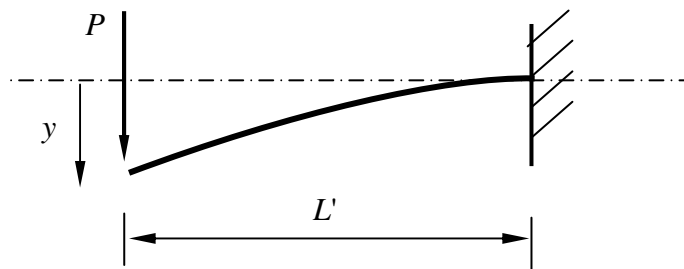


FIGURA 3.19 – Representação da Montagem do Eixo no Modelo Analítico

$$L' = \sqrt[3]{\frac{3EI}{Pk_{EQ}}} = 0,357m \quad (3.6)$$

### 3.2.2.5 Dimensões do disco rígido equivalente ao conjunto em balanço

Estima-se a espessura ( $L_D$ ) do disco maciço a partir da massa do flange ( $M_F$ ) e do impelidor ( $M_I$ ) e mantem-se o diâmetro externo do disco ( $D_D$ ) e o diâmetro do eixo ( $d_E$ ), conforme EQ (3.7).

$$L_D = \frac{4 \times (M_D + M_F)}{\pi \times (D_D^2 - d_E^2) \times \rho} = 0,0209m \quad (3.7)$$

### 3.2.2.6 Parâmetros a serem utilizados na equação do procedimento analítico

Determinam-se os parâmetros necessários na utilização no procedimento analítico conforme apresentados na TAB. 3.6.

TABELA 3.6  
Parâmetros utilizados no Procedimento analítico

Denominação	Parâmetros
$d_E$ (Diâmetro do eixo)	0,08 m
$D_I$ (Diâmetro externo do Disco)	1,798 m
$E$ (Módulo de elasticidade)	$2,00 \times 10^{11}$ Pa
$I$ (Momento de inércia do eixo)	$2,01 \times 10^{-6}$ m <sup>4</sup>
$J$ (Momento transversal de inércia do disco)	84,18 Kg x m <sup>2</sup>
$J_P$ (Momento polar de inércia do disco)	168,33 Kg x m <sup>2</sup>
$k_{EQ}$ (Rigidez equivalente)	$2,66 \times 10^7$ N/m
$L'$ (Distância do centro de massa ao mancal)	0,357 m
$L_D$ (Espessura do disco)	0,0209 m
$m_D$ (Massa do disco)	416,6 Kg
$\lambda$ (Parâmetro de modificação das equações de movimento do rotor)	$1,77 \times 10^7$ N/m
$\Omega$ (Velocidade de rotação do rotor)	0 a 300 (rad/s)

### 3.2.3 Estimativa das frequências naturais pelo teste de batida

Estimam-se as frequências naturais pelo teste de batida com o rotor parado e com o rotor na velocidade constante de operação. Nas duas condições, realiza-se o teste com o rotor nas condições térmicas de operação.

Realiza-se o teste de batida com o rotor parado imediatamente após a sua parada, mantendo com o isso o teste com o rotor na temperatura de operação.

Realiza-se o teste de batida com o rotor em operação com batidas suaves, inicialmente, com aumento gradativo das marteladas com o intuito preventivo de segurança. Finalmente, realizam-se as medições com batidas de maior intensidade para obtenção das frequências naturais bem definidas no espectro de frequência.

Utiliza-se nos testes um analisador de vibração CSI 2130 e um martelo de aço com embutimento de nylon para excitação do rotor, conforme FIG. 3.20. Realizam-se os testes conforme opção fornecida no analisador de vibração com a média de 12 batidas seqüenciadas. As batidas são do tipo de golpe seco e localizadas diretamente no eixo entre os mancais.



FIGURA 3.20 – Analisador CSI 2130 e Martelo utilizado no Teste de Batida

#### 3.2.4 Teste de vibração em velocidade variável

Para facilitar a análise dinâmica do rotor realiza-se a obtenção gráfica da progressão da amplitude durante a aceleração de partida e durante a desaceleração de parada do rotor.

Realiza-se a medição com o soprador nas condições normais de operação. Inicialmente, o motor é desligado para colar a fita reflexiva no eixo. Depois, realiza-se a primeira medição durante a partida do motor (aceleração) e a segunda medição durante o desligamento do motor (desaceleração).

Para a obtenção dos dados experimentais, utiliza-se um instrumento portátil de medição CSI 2130 e um foto-tacômetro, conforme FIG. 3.21.



FIGURA 3.21 – Montagem do Instrumento de Medida e Foto-tacômetro

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A discussão dos resultados inicia-se pela análise de sensibilidade de malha e validação do método de elementos finitos. Em seguida, realiza-se uma discussão dos resultados de medição pelo teste de batida convencional, teste de batida em velocidade constante e teste de vibração em velocidade variável. Finalmente realiza-se a discussão dos resultados do cálculo analítico e dos resultados dos procedimentos computacionais, incluindo uma proposta de melhoria de projeto do rotor.

### 4.1 Análise da sensibilidade de malha

Na análise de sensibilidade de malha do método de elementos finitos utiliza-se um rotor flexível bi-apoiado de mancais rígidos com as dimensões já conhecidas conforme FIG. 4.1, (ALMEIDA, 1987).

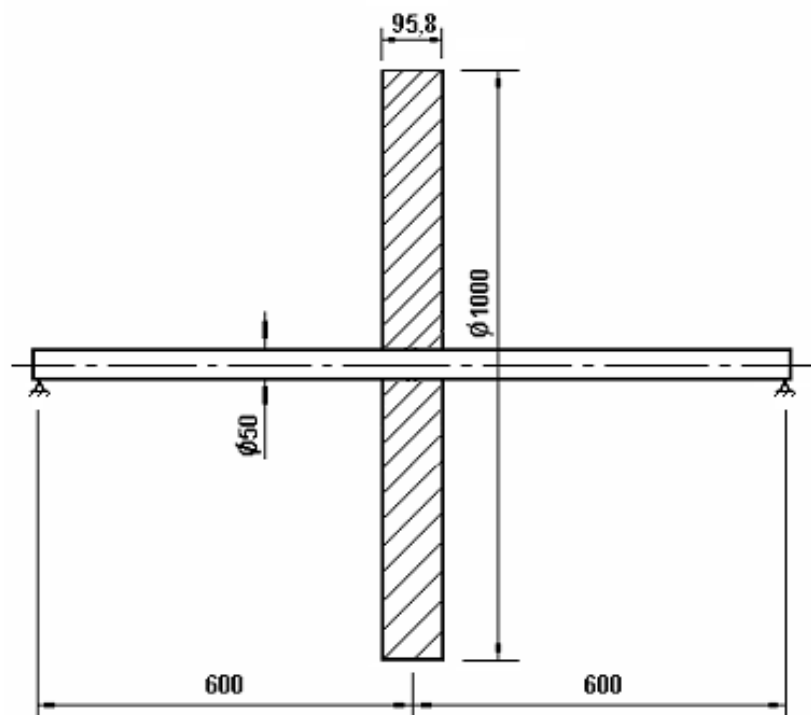


FIGURA 4.1 – Rotor Flexível Bi-apoiado em Mancais Rígidos



Estimam-se os parâmetros do sistema para análise de sensibilidade de malha pelo método computacional de elementos finitos conforme TAB. 4.1.

TABELA 4.1

Parâmetros do Rotor para Análise de Sensibilidade de Malha

Denominação	Parâmetros
Coefficiente de Poisson	0,3
Massa específica	7850 kg/m <sup>3</sup>
Módulo de elasticidade	2,00 x 10 <sup>11</sup> Pa
Tipo de malha	Padrão
Número de nós	5909
Número de elementos	3243

Obtém-se a primeira frequência natural igual a 8,473 Hz, referente ao primeiro modo de vibração, conforme FIG. 4.2-a, e a segunda frequência natural igual a 19,499 Hz referente ao segundo modo de vibração, conforme FIG. 4.2-b.

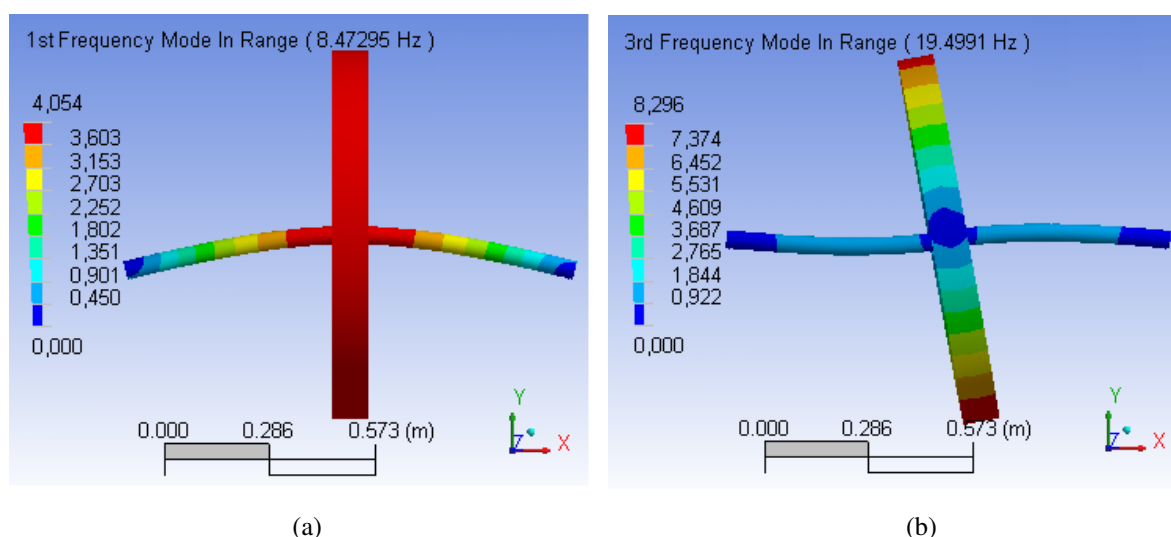


FIGURA 4.2 – (a) Primeiro e (b) Segundo Modos de Vibração do Rotor Flexível Bi-apoiado "Malha Padrão"

Em seguida, efetua-se o refinamento da malha com 11105 nós e 6433 elementos. Obtém-se a primeira frequência natural igual a 8,431 Hz, referente ao primeiro modo de vibração, e a segunda frequência natural igual a 19,470 Hz, referente ao segundo modo de vibração.

Finalmente, efetua-se um melhor refinamento da malha com 15664 nós e 9323 elementos. Obtém-se a primeira frequência natural igual a 8,417 Hz, referente ao primeiro modo de vibração, e a segunda frequência natural igual a 19,463 Hz, referente ao segundo modo de vibração. Os resultados comparativos das duas primeiras frequências naturais para as três malhas, obtidas pelo método de elementos finitos são apresentados na TAB. 4.2.

TABELA 4.2  
Frequências Naturais do Rotor utilizado na Análise de Sensibilidade de Malha

Frequências Naturais	Malha Padrão com 5909 nós e 3243 elementos	1ª Malha com 11105 nós e 6433 elementos	2ª Malha com 15664 nós e 9323 elementos	Comparação dos resultados com a malha padrão (%)	
				1ª Malha	2ª Malha
1ª FN (Hz)	8,473	8,431	8,417	0,50	0,66
2 FN (Hz)	19,499	19,470	19,463	0,15	0,18

Pela análise de sensibilidade de malha, verifica-se que a malha mais refinada não representa uma diferença tão significativa comparada com a malha básica. Para o estudo em questão foi utilizada a malha padrão (básica) para se evitar o alto tempo computacional na utilização da malha mais refinada.

O computador utilizado é um processador Intel 3,06 GHz com 2 GB de RAM e placa de vídeo com 256 MB.

A análise de sensibilidade é feita apenas para esse exemplo. Por dedução, considera-se que a malha automática gerada pelo ANSYS é capaz de gerar resultados confiáveis para todos os exemplos analisados.

#### 4.2 Validação do procedimento de elementos finitos

Para validação do procedimento de elementos finitos no cálculo das frequências naturais, três exemplos de rotores são selecionados. Primeiramente, analisa-se um rotor bi-apoiado considerando-se os mancais rígidos e amortecimento desprezível com construção idêntica ao rotor flexível de Jeffcott, conforme FIG. 4.3 e com as dimensões já conhecidas conforme FIG. 4.4 (ALMEIDA, 1987).

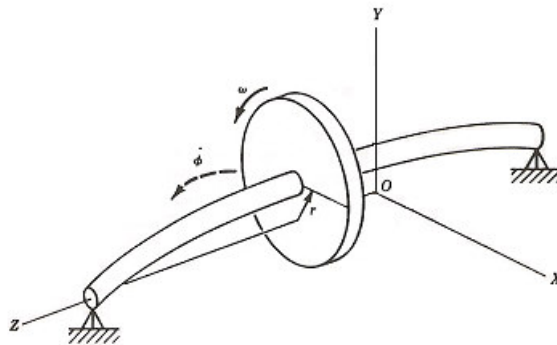


FIGURA 4.3 – Rotor de Jeffcott

FONTE: VANCE, 1988

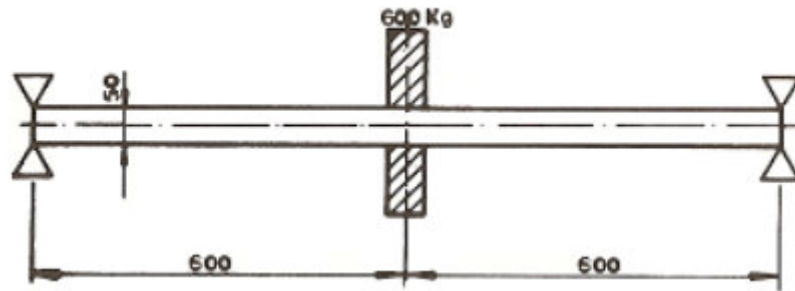


FIGURA 4.4 – Modelo de Rotor Bi-apoiado

FONTE: ALMEIDA, 1987

O segundo exemplo é um rotor rígido com geometria simples, bi-apoiado, com mancais flexíveis e amortecimento desprezível, idêntico ao rotor rígido de Jeffcott, no qual os efeitos giroscópicos são desprezíveis para a primeira frequência natural lateral, conforme FIG. 4.5.

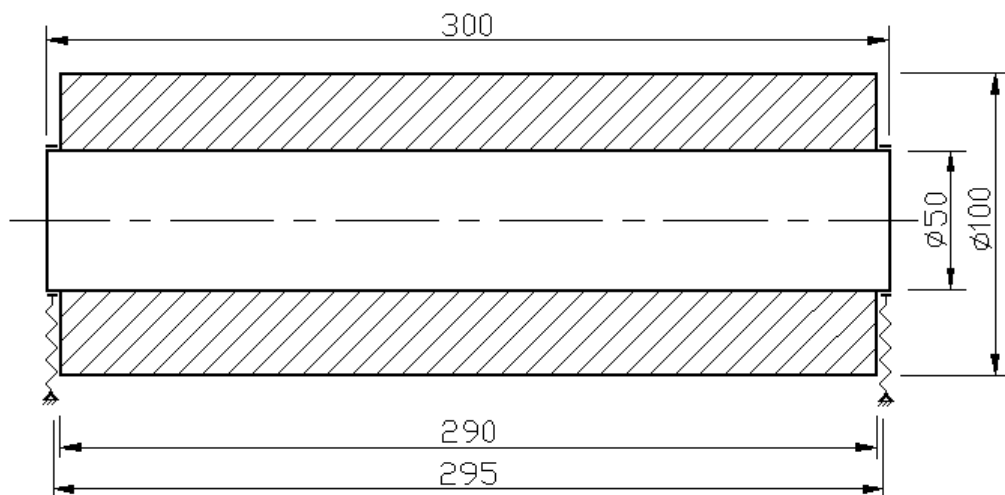


FIGURA 4.5 – Modelo de Rotor Rígido Bi-apoiado

O terceiro exemplo é um rotor em balanço com as características da figura 2.14. Os mancais, o eixo entre os mancais e o disco são considerados rígidos e apenas o eixo em balanço é considerado flexível, conforme FIG. 4.6.

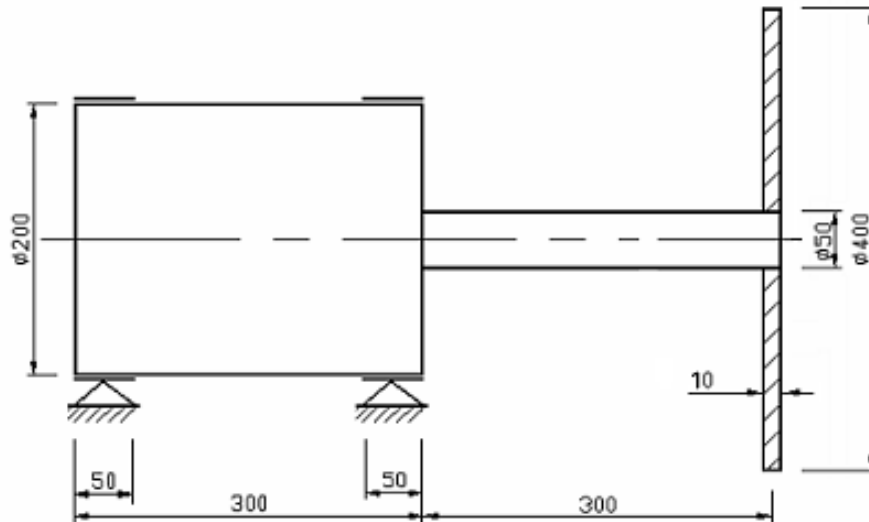


FIGURA 4.6 – Modelo de Rotor em Balanço

#### 4.2.1 Validação do cálculo de frequência natural para o primeiro exemplo

Para validação do cálculo de frequência natural para o primeiro exemplo, utiliza-se a expressão analítica conforme apresentado nas EQ. (4.1) e (4.2) (ALMEIDA, 1987).

$$K = \frac{48EI}{L^3} = \frac{48 \times 2 \times 10^{11} \times \frac{\pi \times 0,05^4}{64}}{1,2^3} = 1,7 \times 10^6 \text{ N/m} \quad (4.1)$$

Para a frequência natural:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{1,7 \times 10^6}{600}} = 53,23 \text{ rad/s} = 8,472 \text{ Hz} \quad (4.2)$$

Para a obtenção das frequências naturais fundamentais pelo método de elementos finitos, torna-se necessário modelar o rotor na forma tridimensional com a

geometria conforme FIG. 4.7. A massa concentrada resultante no centro do rotor com as propriedades do aço é 600 kg.

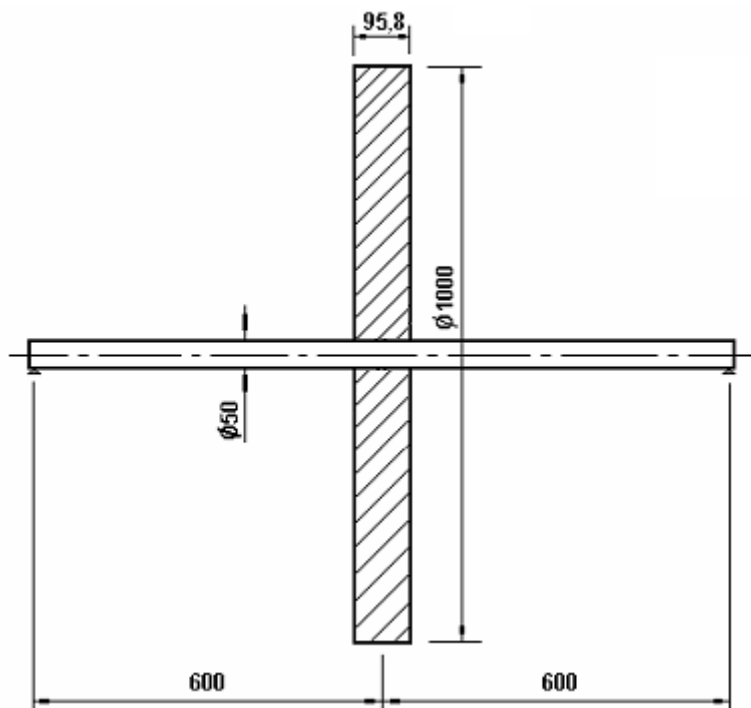


FIGURA 4.7 – Rotor Flexível Bi-apoiado

Estimam-se os parâmetros do sistema para obtenção das frequências naturais pelo método computacional de elementos finitos conforme TAB. 4.3.

TABELA 4.3

Parâmetros do Rotor do Primeiro Exemplo

Denominação	Parâmetros
Coefficiente de Poisson	0,3
Massa específica	7850 kg/m <sup>3</sup>
Módulo de elasticidade	2,00 x 10 <sup>11</sup> Pa
Tipo de malha	Padrão
Número de nós	5909
Número de elementos	3243

Para as condições de contorno no método de elementos finitos, utilizam-se suportes cilíndricos fixos na radial nos dois mancais. Consideram-se a força da gravidade na direção y e velocidade rotacional no eixo z.

Obtém-se a primeira frequência natural com o rotor parado igual a 8,473 Hz, referente ao primeiro modo de vibração, conforme FIG. 4.8-a. Para velocidade de 250 rad/s, essa frequência é igual a 8,475 Hz, conforme FIG. 4.8-b. Com velocidade de 500 rad/s, a frequência é igual a 8,479 Hz, conforme FIG. 4.8-c.

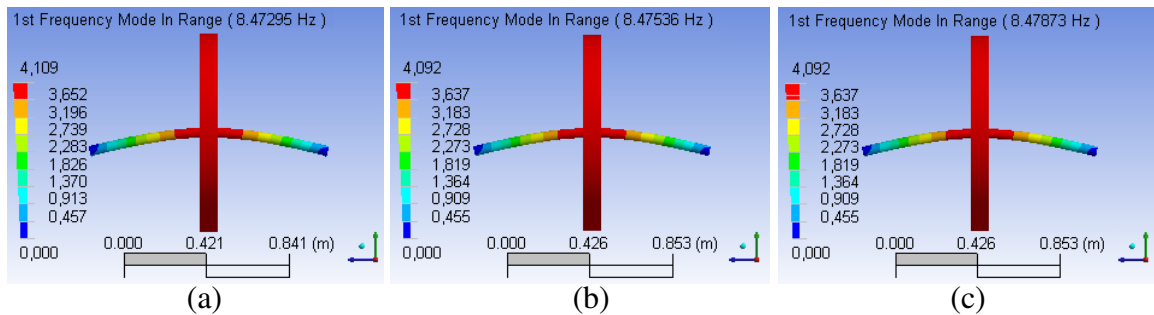


FIGURA 4.8 – Primeiro Modo de Vibração do Rotor Flexível Bi-apoiado com Velocidades iguais a (a) 0 rad/s, (b) 250 rad/s e (c) 500 rad/s

Na TAB. 4.4, são apresentados os resultados comparativos das frequências naturais fundamentais obtidos pela expressão analítica do modelo de rotor de Jeffcott e pelo método de elementos finitos (MEF), para o exemplo de rotor flexível bi-apoiado nas velocidades de 0 rad/s, 250 rad/s e 500 rad/s.

TABELA 4.4

Frequências Naturais do modelo Analítico e MEF do Rotor Flexível Bi-apoiado

Velocidade do rotor (rad/s)	Analítico	MEF	Diferença %
	1ª FN (Hz)	1ª FN (Hz)	
0	8,472	8,473	0,01
250	8,472	8,475	0,03
500	8,472	8,479	0,08

Na FIG. 4.9, são apresentadas as curvas das frequências naturais versus a velocidade de rotação de um rotor bi-apoiado, estimadas pelo modelo de Jeffcott e pelo

método de elementos finitos.

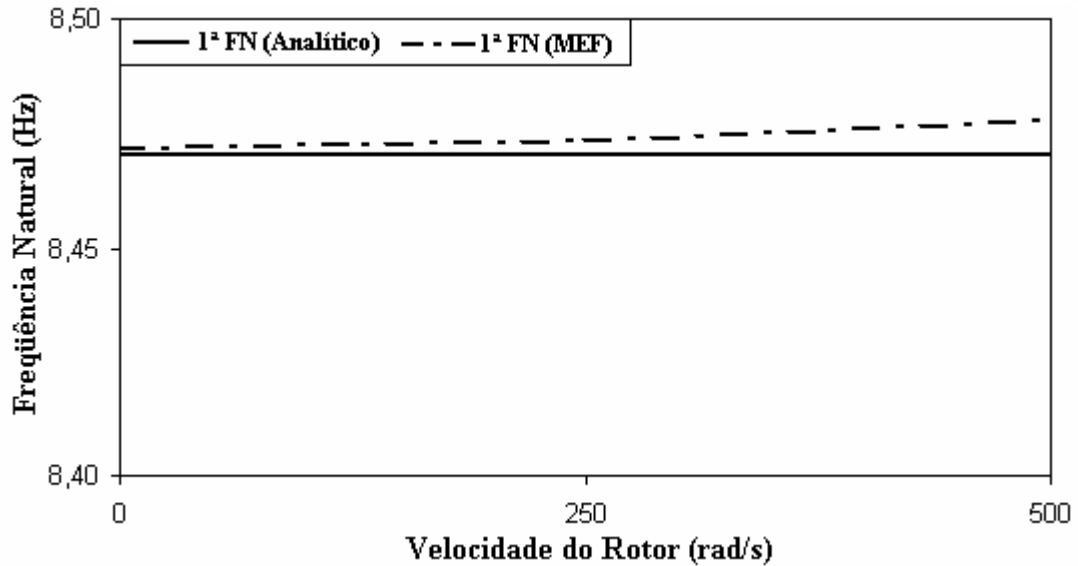


FIGURA 4.9 – Curvas da Primeira Frequência Natural do Eixo Flexível Bi-apoiado (Analítico e MEF)

Os resultados obtidos da primeira frequência natural para esse primeiro exemplo de rotor, mostram que as previsões de método de elementos finitos apresentam boa correlação com os resultados analíticos de eixo flexível simétrico circular bi-apoiados em mancais rígidos.

#### 4.2.2 Validação do cálculo de frequência natural para o segundo exemplo

Para validação do cálculo de frequência natural para um exemplo de rotor rígido bi-apoiado em mancais flexíveis com rigidez  $k = 3,6 \times 10^7$  N/m, utiliza-se a expressão analítica conforme EQ. (4.3) e (4.4) para o modo cilíndrico e cônico respectivamente, (VANCE, 1988).

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2K}{m}} \tag{4.3}$$

$$\omega_2 = \left[ \frac{I_p}{2I_T} \Omega + \sqrt{\frac{KL^2}{2I_T} + \left( \frac{I_p}{2I_T} \Omega \right)^2} \right] \tag{4.4}$$

onde,  $I_P$  e  $I_T$  são os momento de inércia polar e transversal respectivamente e  $\Omega$  é a velocidade de rotação do eixo.

Estimam-se os parâmetros do sistema para o cálculo das frequências naturais para o procedimento analítico conforme TAB. 4.5.

TABELA 4.5  
Parâmetros do Rotor Rígido Bi-apoiado

Denominação	Parâmetros
$k$ (Rigidez dos mancais)	$3,6 \times 10^7$ N/m
$m$ (Massa do rotor)	18 kg
$I_P$ (Momento polar de inércia)	$0,0225$ kg $\times$ m <sup>2</sup>
$I_T$ (Momento transversal de inércia)	$0,1463$ kg $\times$ m <sup>2</sup>
$L$ (Comprimento do eixo)	0,295 m

Aplicando os dados nas equações (4.3) e (4.4), para o cálculo das frequências naturais nas velocidades de rotação do eixo de 0, 1000 e 2000 rad/s, obtêm-se os seguintes resultados conforme TAB. 4.6.

TABELA 4.6  
Frequências Naturais obtidas do Procedimento Analítico do Rotor Rígido Bi-apoiado

Velocidade do Rotor (rad/s)	1ª FN (Hz)	2ª FN (Hz)
0	318,3	520,9
1000	318,3	533,3
2000	318,3	545,9

Para obtenção das frequências naturais pelo método de elementos finitos, modela-se o rotor na forma tridimensional. Modelam-se os mancais na forma de anéis circulares com 3 mm de largura, 60 mm de diâmetro externo e 50 mm de diâmetro interno. Modelam-se as molas na forma de barra quadrada de 3 mm de seção transversal e comprimento de 50 mm, com uma das extremidades ligada aos anéis. Define-se a geometria da mola conforme EQ. 4.5 para obter a rigidez estimada no método analítico.



$$k = \frac{EA}{L} = 3,6 \times 10^7 \text{ N/m} \tag{4.5}$$

Apresentam-se os parâmetros do rotor rígido bi-apoiado juntamente com os mancais e mola para obtenção das frequências naturais pelo método computacional de elementos finitos, conforme TAB. 4.7.

TABELA 4.7  
Parâmetros do Rotor do Segundo Exemplo

Denominação	Parâmetros
Coeficiente de Poisson	0,3
Massa específica	7850 kg/m <sup>3</sup>
Módulo de elasticidade	2,00 x 10 <sup>11</sup> Pa
Tipo de malha	Padrão
Número de nós	14814
Número de elementos	9511

Para as condições de contorno no método de elementos finitos, utilizam-se suportes fixos nas extremidades das molas e contato deslizante dos mancais com o eixo. Consideram-se a força da gravidade na direção y e velocidade rotacional no eixo z.

Obtém-se a primeira frequência natural com o rotor parado igual a 313,6 Hz, referente ao primeiro modo, conforme FIG. 4.10-a, e a segunda frequência natural igual a 529,0 Hz, referente ao segundo modo, conforme FIG. 4.10-b.

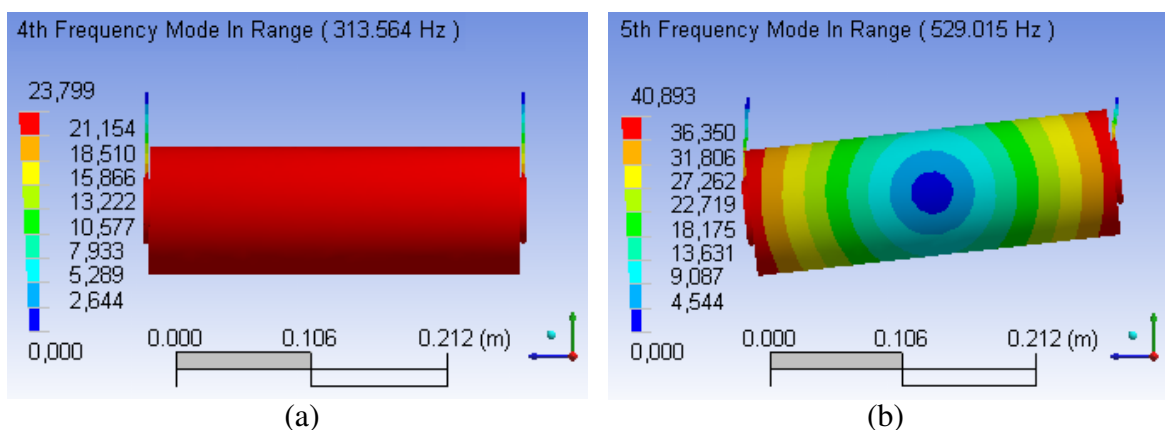


FIGURA 4.10 – (a) Primeiro e (b) Segundo Modos de Vibração do Rotor Rígido Bi-apoiado em Repouso

Obtém-se a primeira frequência natural com velocidade de rotação de 1000 rad/s igual a 313,6 Hz referente ao primeiro modo de vibração, conforme FIG. 4.11-a, e a segunda frequência natural igual a 530,9 Hz, referente ao segundo modo de vibração, conforme FIG. 4.11-b.

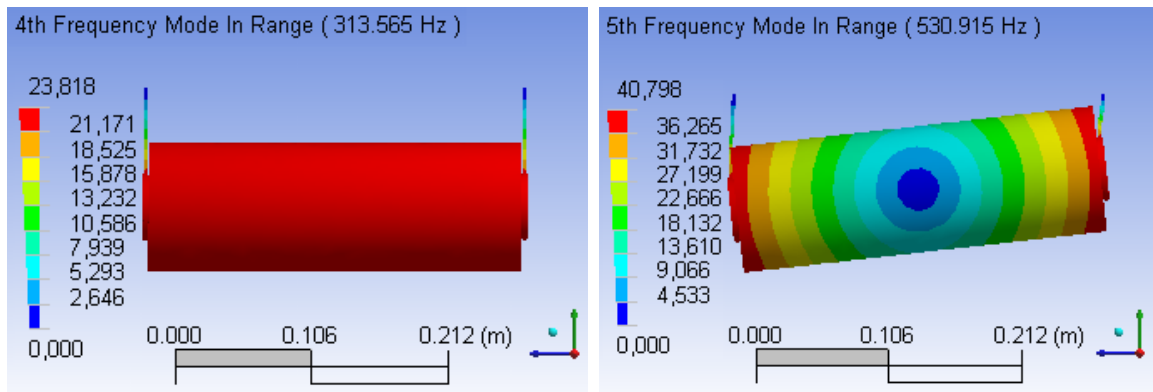


FIGURA 4.11 – (a) Primeiro e (b) Segundo Modos de Vibração do Rotor Rígido Bi-apoiado em 1000 rad/s

Obtém-se a primeira frequência natural com velocidade de rotação de 2000 rad/s igual a 313,6 Hz, referente ao primeiro modo de vibração, conforme FIG. 4.12-a, e a segunda frequência natural igual a 536,6 Hz, referente ao segundo modo de vibração, conforme FIG. 4.12-b.

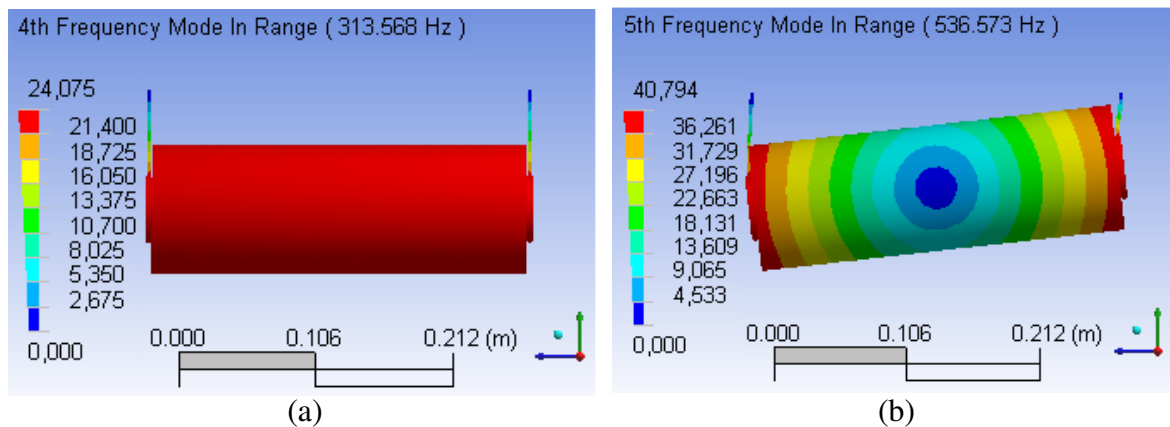


FIGURA 4.12 – (a) Primeiro e (b) segundo Modos de Vibração do Rotor Rígido Bi-apoiado em 2000 rad/s

Na TAB. 4.8 são apresentados os resultados comparativos das frequências naturais fundamentais obtidos pela expressão analítica do modelo de rotor de Stodola

Green e pelo método de elementos finitos (MEF), para o exemplo de rotor rígido bi-apoiado com as velocidades 0, 1000 e 2000 rad/s.

TABELA 4.8

Freqüências Naturais do Procedimento Analítico e MEF do Rotor Rígido Bi-apoiado

Velocidade do rotor (rad/s)	Analítico		MEF		Diferença	
	1ª FN (Hz)	2ª FN (Hz)	1ª FN (Hz)	2ª FN (Hz)	1ª FN (%)	2ª FN (%)
0	318,3	520,9	313,6	529,0	1,5	1,6
1000	318,3	533,3	313,6	530,9	1,5	0,5
2000	318,3	545,9	313,6	536,6	1,5	1,7

Na FIG. 4.13, são apresentadas as curvas das 1ª e 2ª freqüências naturais versus a rotação de um rotor rígido bi-apoiado, estimadas pelo modelo de Stodola Green e pelo método de elementos finitos.

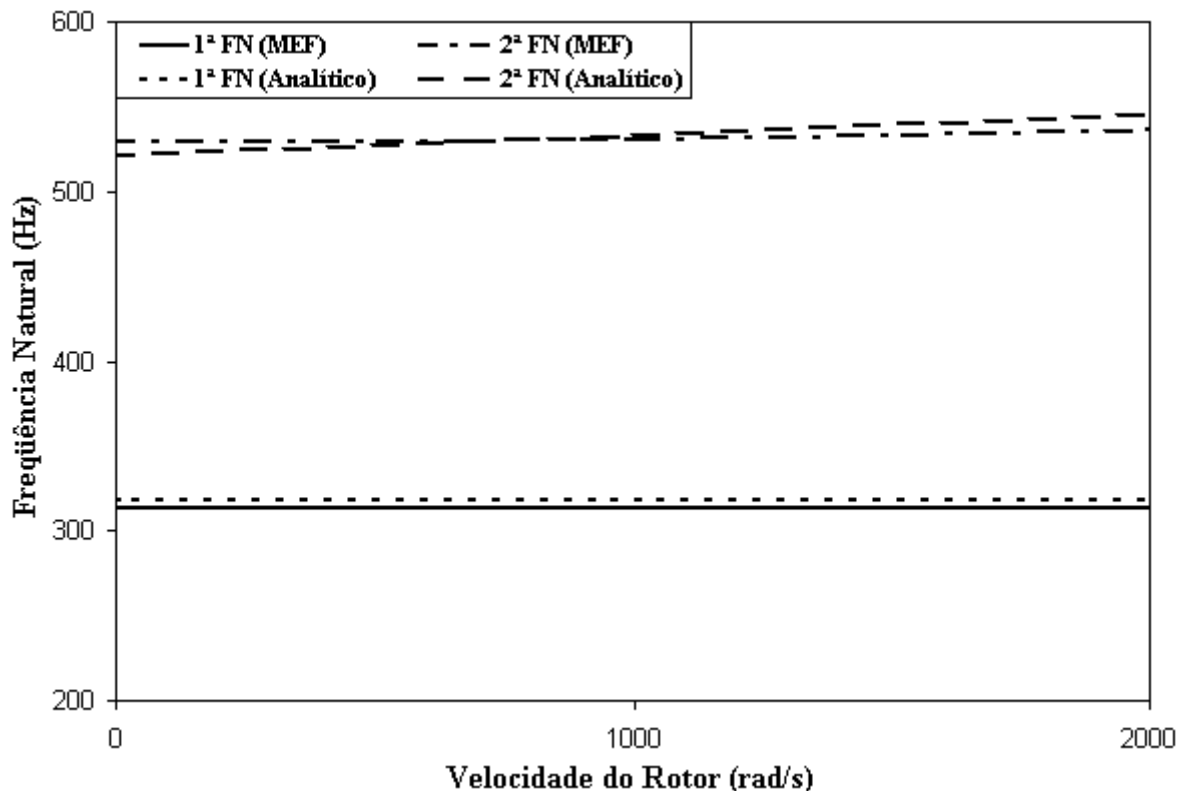


FIGURA 4.13 – Curvas das 1ª e 2ª Freqüências Naturais do Rotor Rígido Bi-apoiado (Analítico e MEF)

Os resultados obtidos da primeira e segunda frequência natural para esse segundo exemplo de rotor mostram que as predições de método de elementos finitos apresentam boas correlações com os resultados analíticos de eixos rígidos simétricos circulares bi-apoiados em mancais flexíveis.

#### 4.2.3 Validação do cálculo de frequência natural para o terceiro exemplo

Para validação do cálculo de frequência natural para o rotor flexível em balanço, utiliza-se a expressão analítica da equação (2.7).

Estimam-se os parâmetros do sistema para o cálculo das frequências naturais para o modelo analítico conforme TAB. 4.9. Considera-se o disco rígido.

TABELA 4.9  
Parâmetros do Rotor Flexível em Balanço

Denominação	Parâmetros
$d_E$ (Diâmetro do eixo)	0,05 m
$d_D$ (Diâmetro do disco)	0,4 m
$E_E$ (Módulo de elasticidade do eixo)	$2,00 \times 10^{11}$ N/m <sup>2</sup>
$I_E$ (Momento de inércia do eixo)	$3,07 \times 10^{-7}$ m <sup>4</sup>
$I_P$ (Momento polar de inércia)	0,194 kg x m <sup>2</sup>
$I_T$ (Momento transversal de inércia)	0,0972 kg x m <sup>2</sup>
$k$ (Rigidez do eixo)	$6,82 \times 10^6$ N/m
$L_D$ (Espessura do disco)	0,01 m
$L$ (Comprimento do eixo)	0,3 m
$m$ (Massa do disco)	9,7 kg
$m_{EQ}$ (Massa equivalente no centro de massa do disco)	12 kg
$\lambda$ (Parâmetro de modificação das equações de movimento do rotor)	$4,55 \times 10^6$ N/m
$\Omega$ (Velocidade de rotação do rotor)	0 a 300 rad/s

Aplicando os parâmetros do rotor na equação (2.7), obtêm-se os seguintes resultados conforme TAB. 4.10.

TABELA 4.10

Frequências Naturais obtidas Analiticamente para o Rotor em Balanço

Velocidade do rotor (rad/s)	1ª FN (Hz)	2ª FN (Hz)
0	108,7	508,8
100	111,7	522,0
200	114,6	535,9
300	117,6	550,6

Para o cálculo das frequências naturais pelo método de elementos finitos, modela-se o rotor na forma tridimensional. A massa resultante do disco de aço vale aproximadamente 12 kg.

Estimam-se os parâmetros do rotor flexível em balanço para obtenção das frequências naturais pelo método computacional de elementos finitos, conforme TAB. 4.11. Estima-se o módulo de elasticidade do disco 10000 vezes maior que o módulo de elasticidade do eixo, mantendo-o rígido em relação ao eixo.

TABELA 4.11

Parâmetros do Rotor do Terceiro Exemplo

Denominação	Parâmetros
Coefficiente de Poisson	0,3
Massa específica	7850 kg/m <sup>3</sup>
Módulo de elasticidade do eixo	2,00 x 10 <sup>11</sup> Pa
Módulo de elasticidade do disco	2,00 x 10 <sup>15</sup> Pa
Tipo de malha	Padrão
Número de nós	18742
Número de elementos	10780

Para as condições de contorno no método de elementos finitos, utilizam-se suportes cilíndricos livres tangencialmente. A força da gravidade está aplicada na direção y e a velocidade rotacional está no eixo z.

Obtém-se a primeira frequência natural com o rotor parado igual a 110,5 Hz, referente ao primeiro modo de vibração, conforme FIG. 4.14-a, e a segunda frequência natural igual a 520,7 Hz, referente ao segundo modo de vibração, conforme FIG. 4.14-b. A segunda frequência estimada pelo MEF refere-se ao primeiro modo no plano horizontal.

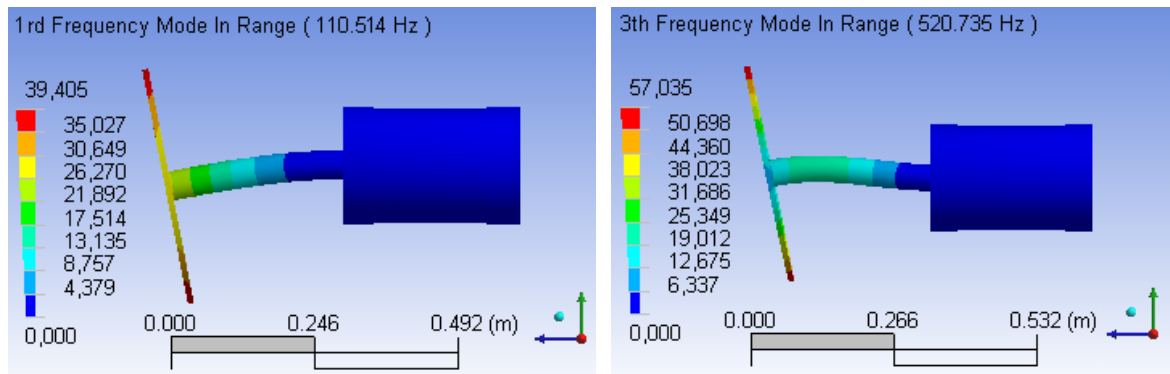


FIGURA 4.14 – (a) Primeiro e (b) Segundo Modos de Vibração do Rotor em Balanço em Repouso

Obtém-se a primeira frequência natural igual a 110,7 Hz referente ao primeiro modo de vibração com velocidade de rotação de 100 rad/s conforme FIG. 4.15-a e a segunda frequência natural igual a 520,9 Hz referente ao segundo modo de vibração conforme FIG. 4.15-b.

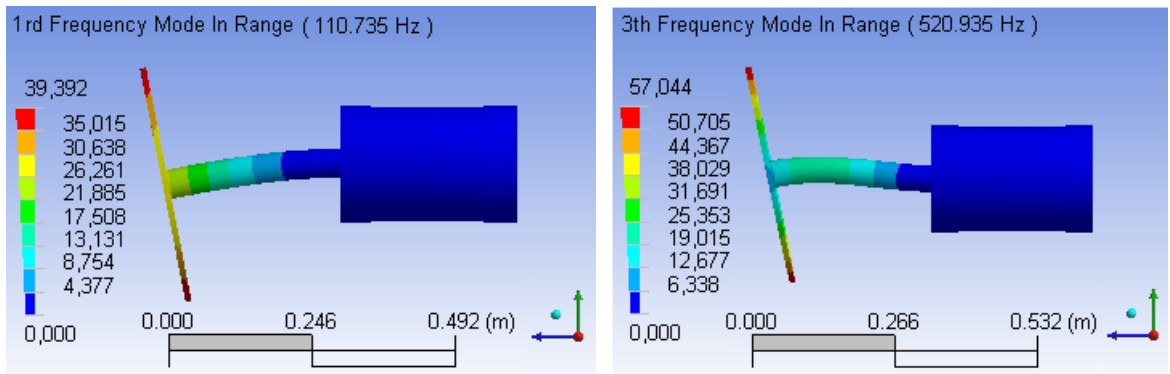


FIGURA 4.15 – (a) Primeiro e (b) Segundo Modos de Vibração do Rotor em Balanço em 100 rad/s

Obtém-se a primeira frequência natural igual a 111,4 Hz, referente ao primeiro modo de vibração com velocidade de rotação de 200 rad/s, conforme FIG. 4.16-a, e a segunda frequência natural igual a 521,5 Hz, referente ao segundo modo de vibração, conforme FIG. 4.16-b.

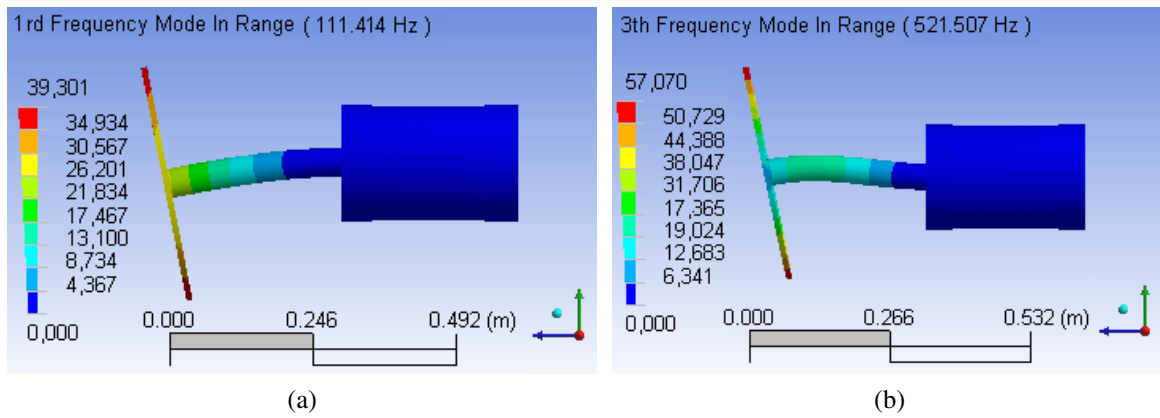


FIGURA 4.16 – (a) Primeiro e (b) Segundo Modos de Vibração do Rotor em Balanço em 200 rad/s

Obtém-se a primeira frequência natural igual a 112,5 Hz, referente ao primeiro modo de vibração, com velocidade de rotação de 300 rad/s, conforme FIG. 4.17-a, e a segunda frequência natural igual a 522,5 Hz, referente ao segundo modo de vibração, conforme FIG. 4.17-b.

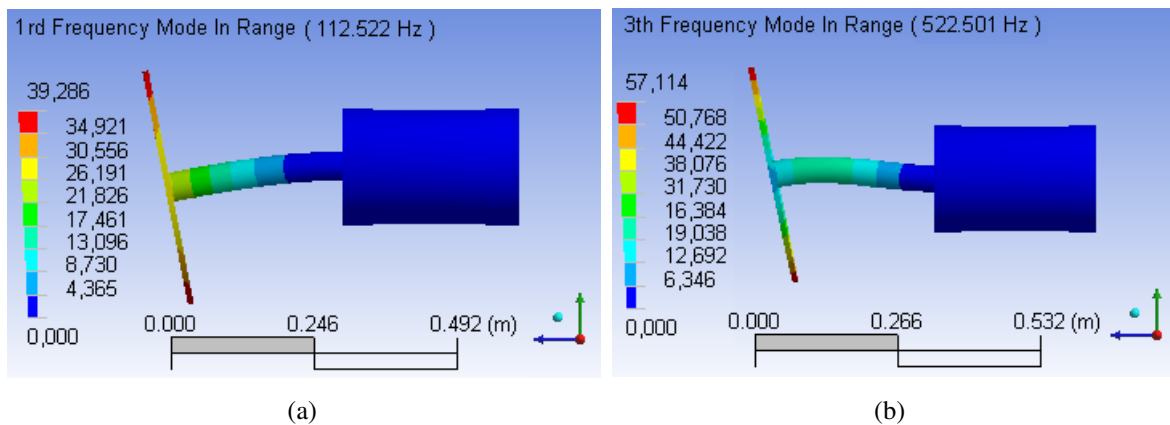


FIGURA 4.17 – (a) Primeiro e (b) Segundo Modos de Vibração do Rotor em Balanço em 300 rad/s

Na TAB. 4.12, são apresentados os resultados comparativos das frequências naturais obtidos pelo procedimento analítico e pelo método de elementos finitos para o exemplo de rotor em balanço com as velocidades 0, 100, 200 e 300 rad/s.

TABELA 4.12

Frequências Naturais do Procedimento Analítico e MEF do Rotor em Balanço

Velocidade do rotor (rad/s)	Calculado		MEF		Diferença	
	1ª FN (Hz)	2ª FN (Hz)	1ª FN (Hz)	2ª FN (Hz)	1ª FN (%)	2ª FN (%)
0	108,7	508,8	110,5	520,7	1,7	2,3
100	111,7	522,0	110,7	520,9	0,9	0,2
200	114,6	535,9	111,4	521,5	2,8	2,7
300	117,6	550,6	112,5	522,5	4,3	5,1

Na FIG. 4.18 são apresentadas as curvas da 1ª e 2ª frequências naturais versus a velocidade de rotação do rotor em balanço, estimadas pela equação (2.7) e pelo método de elementos finitos.

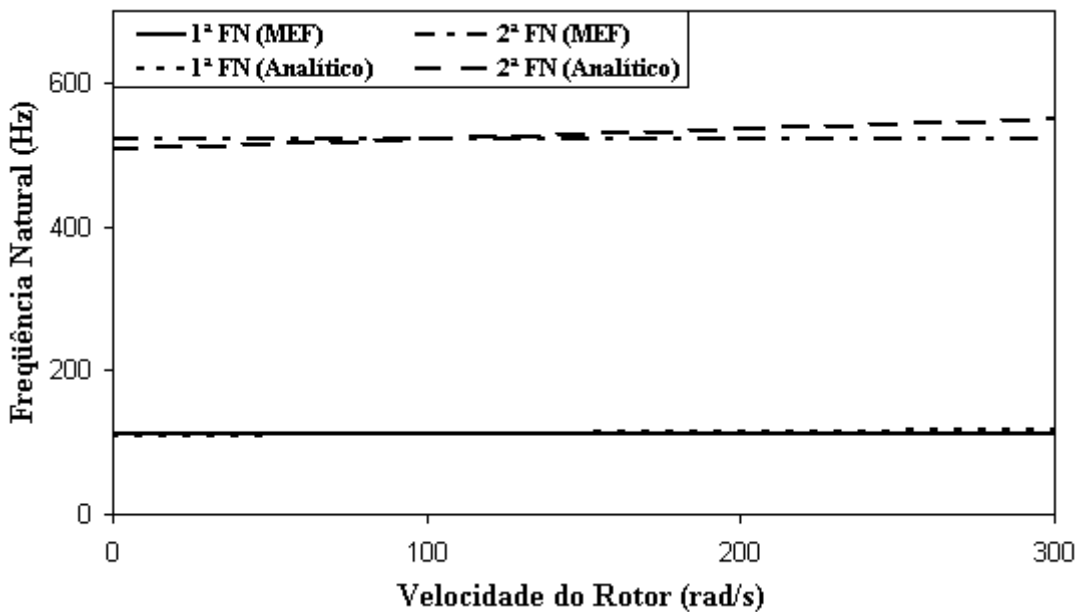


FIGURA 4.18 – Curvas da 1ª e 2ª Frequências Naturais do Rotor em Balanço (Analítico e MEF)

Os resultados obtidos da primeira e segunda frequência natural, para esse terceiro exemplo de rotor, mostram que as predições de método de elementos finitos apresentam boas correlações com os resultados analíticos de eixos flexíveis simétricos circulares em balanço. Observa-se que, pelo procedimento analítico, os efeitos giroscópicos têm maior influência do que apresentada pelo método de elementos finitos.



### 4.3 Teste de batida

Apresentam-se os resultados do teste de batida obtidos pelo analisador de vibração, sendo esses transferidos para software<sup>4</sup> de análise do equipamento para a geração de resultados na forma gráfica.

#### 4.3.1 Teste de batida convencional

O espectro de frequência obtido no teste de batida, com o rotor em repouso, é apresentado na FIG. 4.19, a qual representa a amplitude de vibração em mm/s versus a frequência de excitação. O valor (Freq: 15,70) representa o valor da frequência de 15,7 Hz. O valor (Ordr: 0.525) representa a razão entre a frequência de 15,7 Hz com a frequência da velocidade de operação pré-ajustada em 29,90 Hz no analisador. O valor (Spec: 0,484) representa a amplitude de vibração no espectro de 0,484 mm/s na frequência de 15,70 Hz.

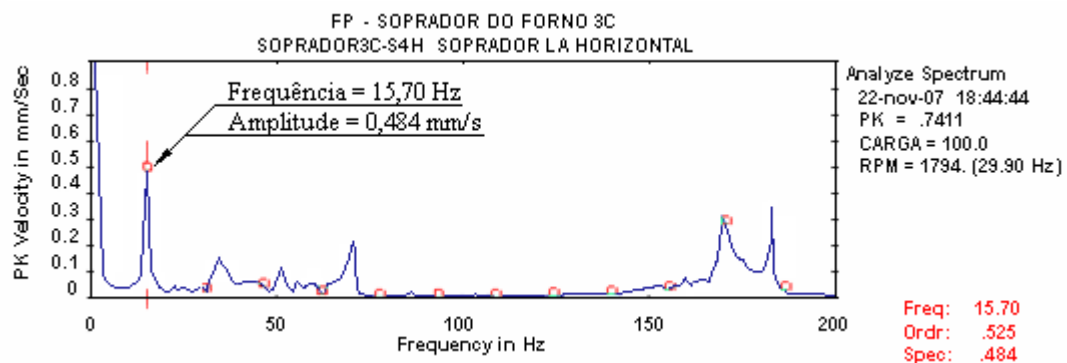


FIGURA 4.19 – Espectro de Frequência do Teste de Batida com o Rotor em Repouso

O primeiro pico apresentado no espectro, com amplitude de 0,484 mm/s na frequência de 15,7 Hz, é um indicativo da primeira frequência natural de vibração.

#### 4.3.2 Teste de batida em velocidade constante

O espectro de frequência obtido no teste de batida em velocidade constante é apresentado na FIG. 4.20. O pico indicativo da frequência natural ocorre no valor de frequência de 33,69 Hz, com amplitude de 0,18 mm/s e representa 1,127 vezes a frequência de operação.

<sup>4</sup> O software de análise integra o analisador de vibrações CSI utilizado nesse trabalho.

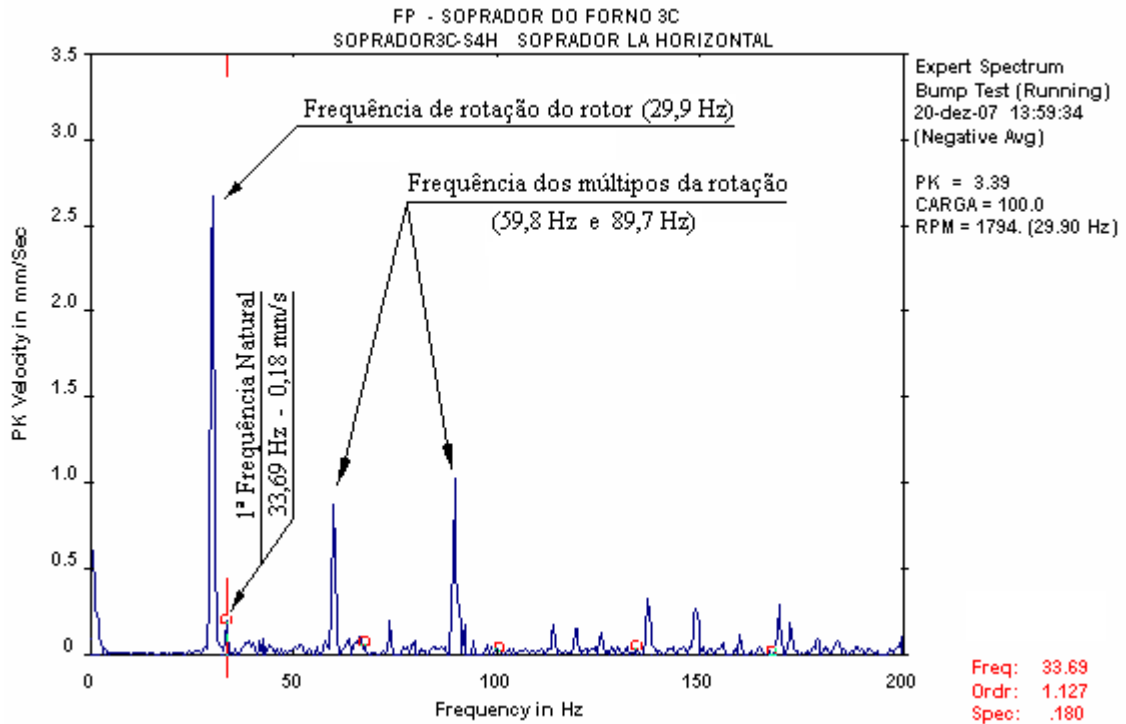


FIGURA 4.20 – Espectro de Frequência do Teste de Batida com Velocidade Constante

Os maiores picos no espectro representam a frequência de rotação do rotor e seus múltiplos. Para melhor visualização, foram removidas as frequências referentes aos múltiplos da rotação, tendo com isso o espectro conforme FIG. 4.21.

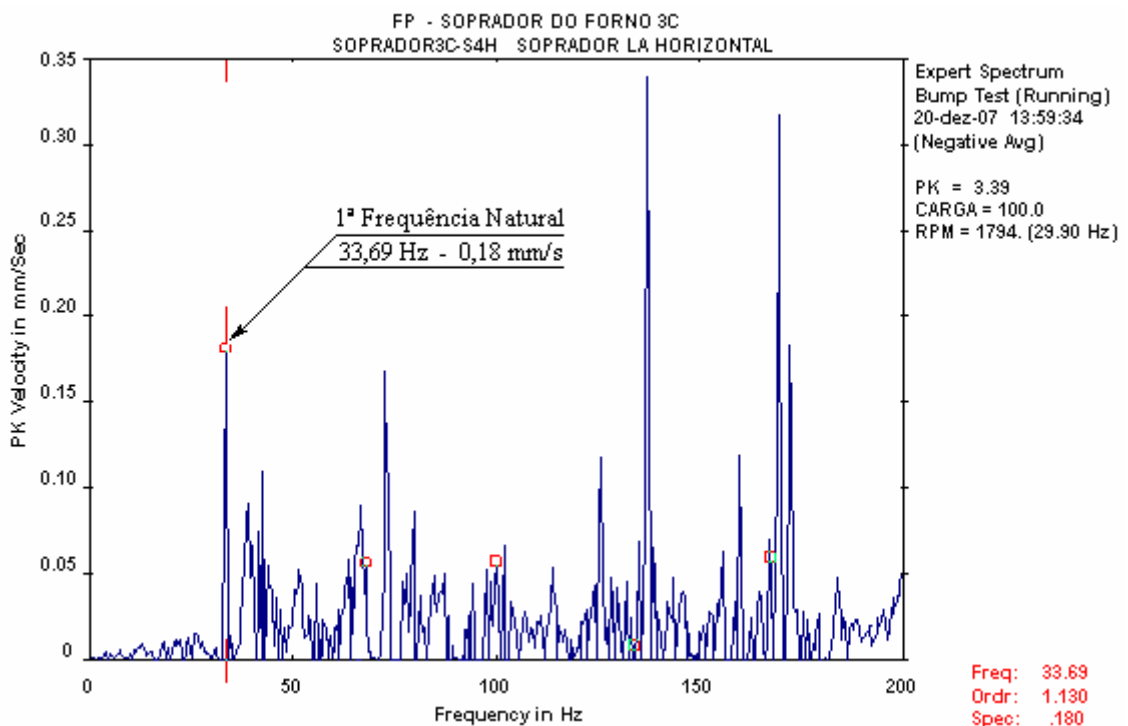


FIGURA 4.21 – Espectro Frequência do Teste de Batida com Velocidade Constante sem as Frequências dos Múltiplos da Rotação

Para avaliação do projeto do rotor pelo resultado de medição pelo teste de batida na frequência de operação, observa-se que a velocidade de operação de 29,9 Hz se apresenta muito próxima frequência de 33,69 Hz, estimada como primeira frequência natural. A avaliação é condizente com o histórico operacional da máquina.

#### 4.4 Teste de vibração em velocidade variável

Durante a partida do motor, obtém-se o resultado da medição da amplitude de vibração e do ângulo de fase conforme FIG. 4.22. Na parte superior da figura é mostrada a amplitude de vibração em mm/s versus a velocidade em RPM e na parte inferior o ângulo de fase da vibração em graus versus a velocidade do rotor em RPM.

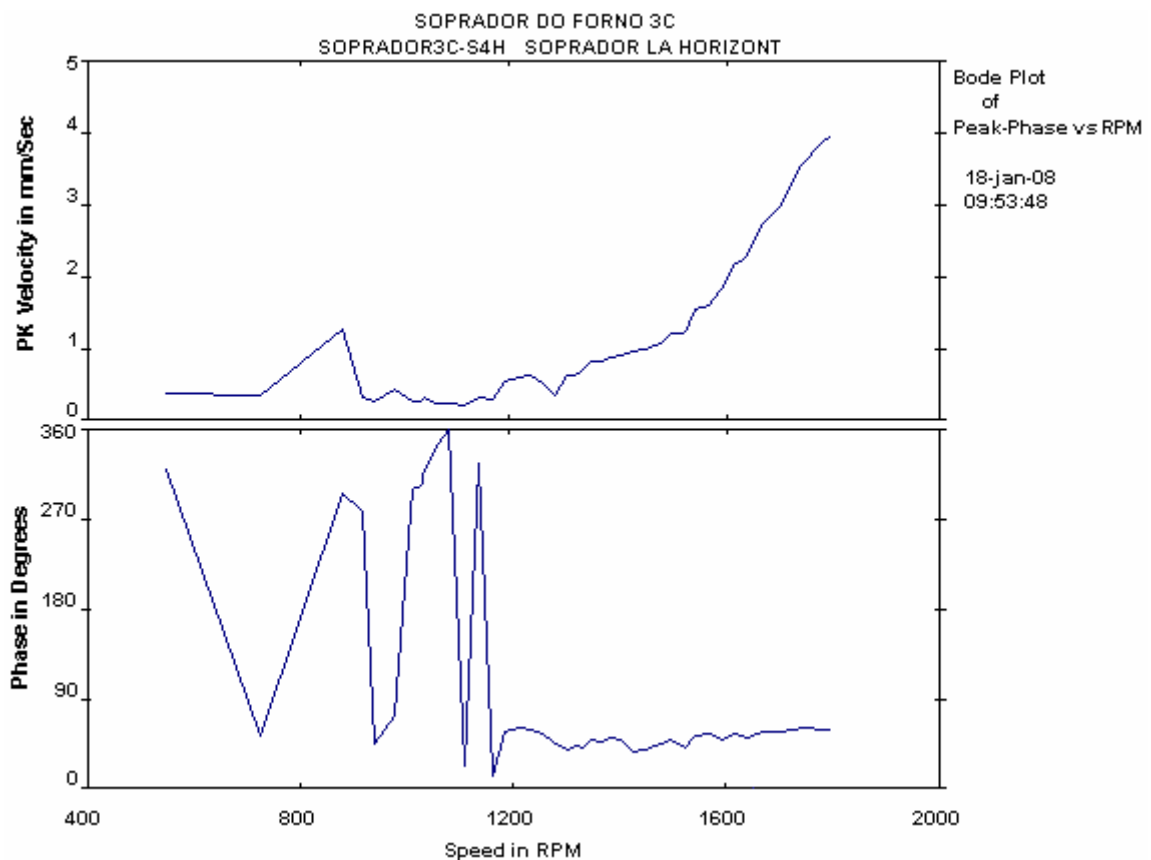


FIGURA 4.22 – Resposta ao Desbalanceamento e Ângulo de Fase na Aceleração

Para melhor visualização, efetua-se a filtragem da leitura após 1200 RPM, eliminando com isso, os ruídos de sinal de leitura do ângulo de fase conforme FIG. 4.23.

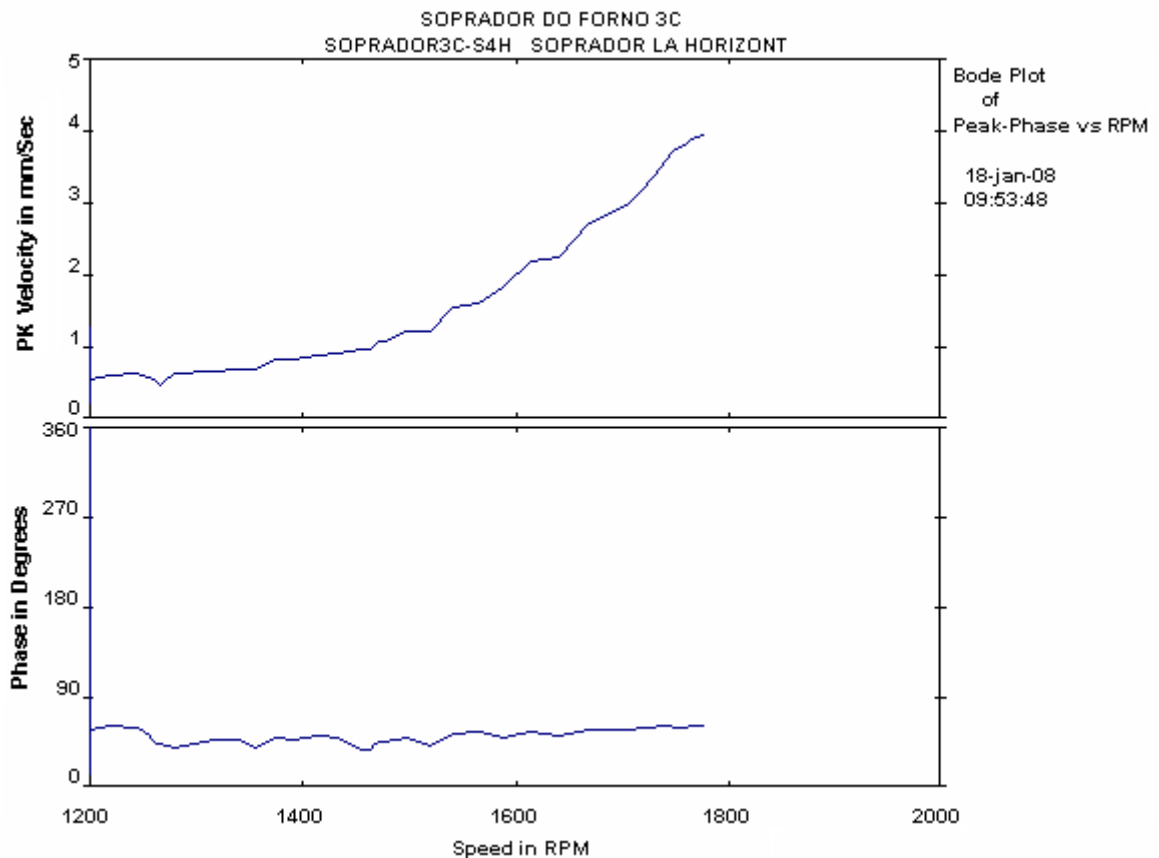


FIGURA 4.23 – Resposta ao Desbalanceamento e Ângulo de Fase na Aceleração com Filtro

Pela medição do ângulo de fase e amplitude durante a partida do motor, não é possível determinar a faixa da primeira frequência natural, apontada pelo pico de amplitude e pela inversão do ângulo de fase, o que evidencia que o rotor opera abaixo da primeira velocidade crítica. Observa-se, na curva de amplitude, uma tendência de formação de pico próximo da rotação de 1800 RPM, apesar de que na figura do ângulo de fase o ângulo permanece constante.

Durante o desligamento do motor, obtém-se o resultado da medição da amplitude de vibração e do ângulo de fase parecidos com os resultados obtidos durante a partida do motor, apesar de apresentarem variações excessivas. Durante a medição, observa-se o tempo de desaceleração em torno de 4 minutos até atingir 450 RPM, enquanto que, na partida, o tempo é de 5 segundos para atingir 900 RPM e mais 42 segundos para atingir 1800 RPM.

### 4.5 Análise do rotor do soprador

Com o rotor em repouso, obtém-se a primeira frequência natural igual a 16,4 Hz, referente ao primeiro modo de vibração, conforme FIG. 4.24-a, e a segunda frequência natural igual a 82,5 Hz, referente ao segundo modo de vibração, conforme FIG. 4.24-b.

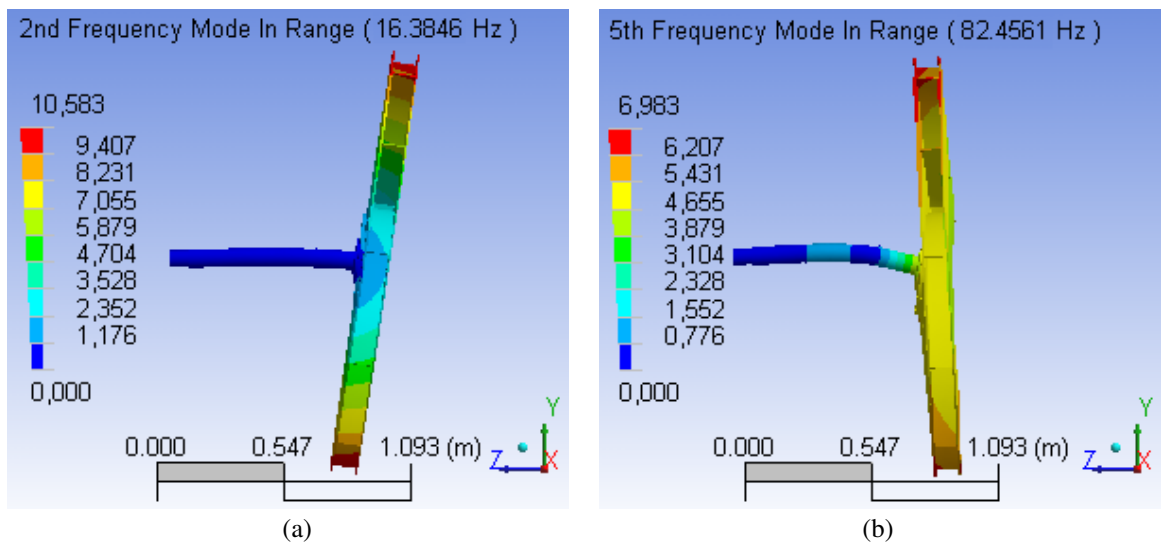


FIGURA 4.24 – (a) Primeiro e (b) Segundo Modos de Vibração do Rotor do Soprador em Repouso

A primeira frequência encontrada pelo procedimento de elementos finitos refere-se ao modo rígido de rotação, pois, os suportes não oferecem resistência à rotação do eixo, conforme FIG. 4.25-a. A terceira frequência encontrada refere-se ao primeiro modo lateral no plano horizontal, conforme FIG. 4.25-b. A quarta frequência refere-se ao modo de vibração de membrana (placa circular), conforme FIG. 4.25-c. São frequências desconsideradas na análise.

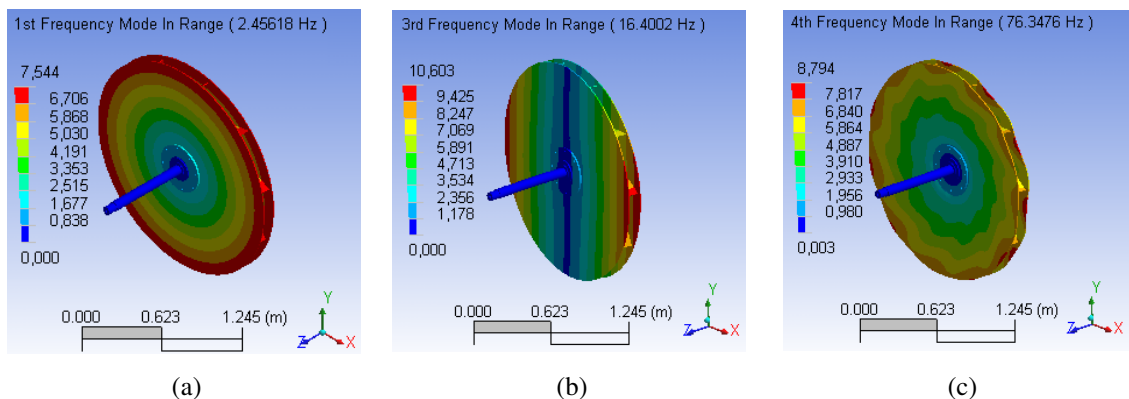


FIGURA 4.25 – (a) Primeira, (b) Terceira e (c) Quarta Frequências e Modos Desconsideradas na Análise

Com o rotor operando a 100 rad/s, obtém-se a primeira frequência natural igual a 22,3 Hz, referente ao primeiro modo de vibração, conforme FIG. 4.26-a, e a segunda frequência natural igual a 83,1 Hz, referente ao segundo modo de vibração, conforme FIG. 4.26-b.

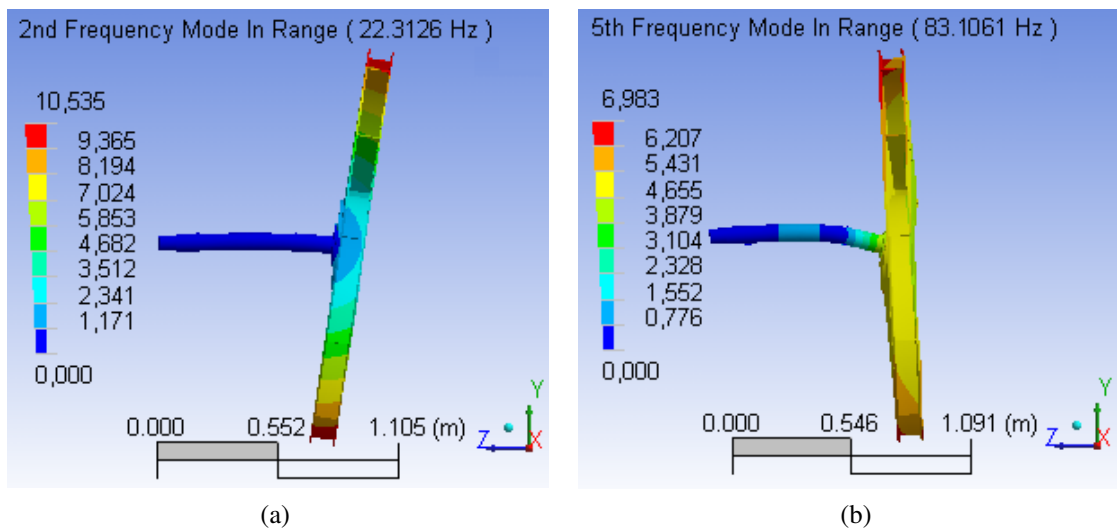


FIGURA 4.26 – (a) Primeiro e (b) Segundo Modos de Vibração do Rotor do Soprador com Vel. de 100 rad/s

Com o rotor operando a 188,5 rad/s ou 1800 RPM (velocidade de operação), obtém-se a primeira frequência natural igual a 32,4 Hz, referente ao primeiro modo de vibração, conforme FIG. 4.27-a, e a segunda frequência natural igual a 85,7 Hz, referente ao segundo modo de vibração, conforme FIG. 4.27-b.

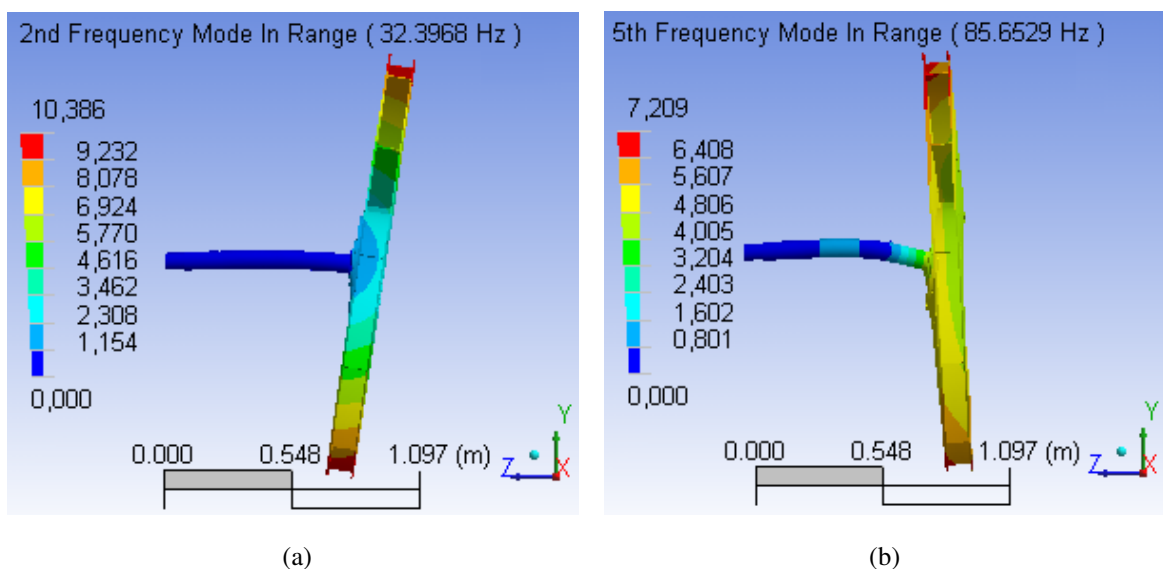


FIGURA 4.27 – (a) Primeiro e (b) Segundo Modos de Vibração do Rotor do Soprador c/ Vel. de 1800 RPM

Com o rotor operando a 200 rad/s, obtém-se a primeira frequência natural igual a 33,8 Hz, referente ao primeiro modo de vibração, conforme FIG. 4.28-a, e a segunda frequência natural igual a 85,9 Hz, referente ao segundo modo de vibração, conforme FIG. 4.28-b.

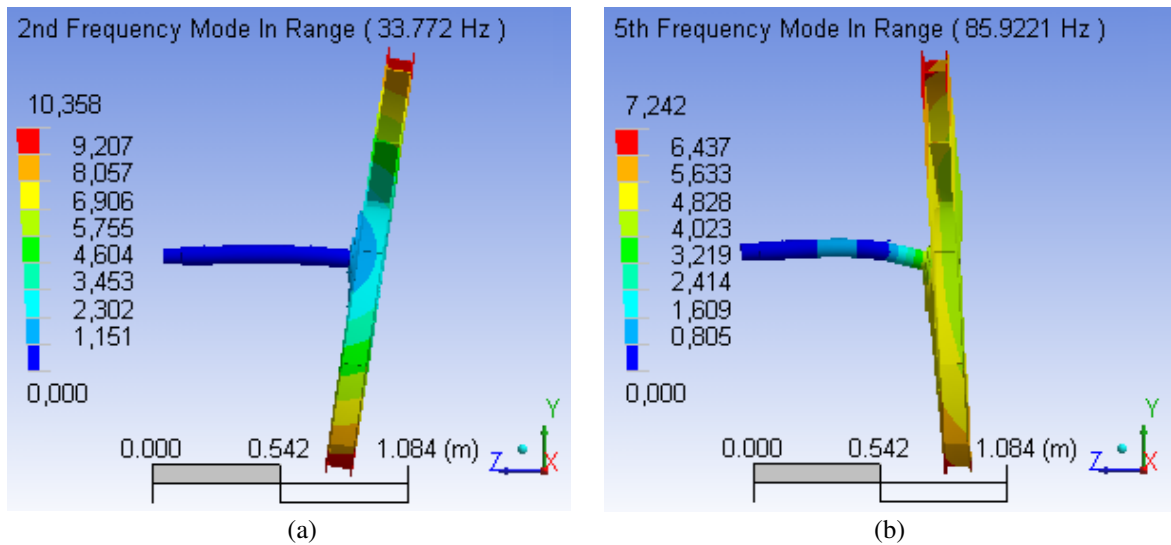


FIGURA 4.28 – (a) Primeiro e (b) Segundo Modos de Vibração do Rotor do Soprador c/ Vel. de 200 rad/s

Com o rotor operando a 300 rad/s, obtém-se a primeira frequência natural igual a 46,8 Hz, referente ao primeiro modo de vibração, conforme FIG. 4.29-a, e a segunda frequência natural igual a 87,9 Hz, referente ao segundo modo de vibração, conforme FIG. 4.29-b.

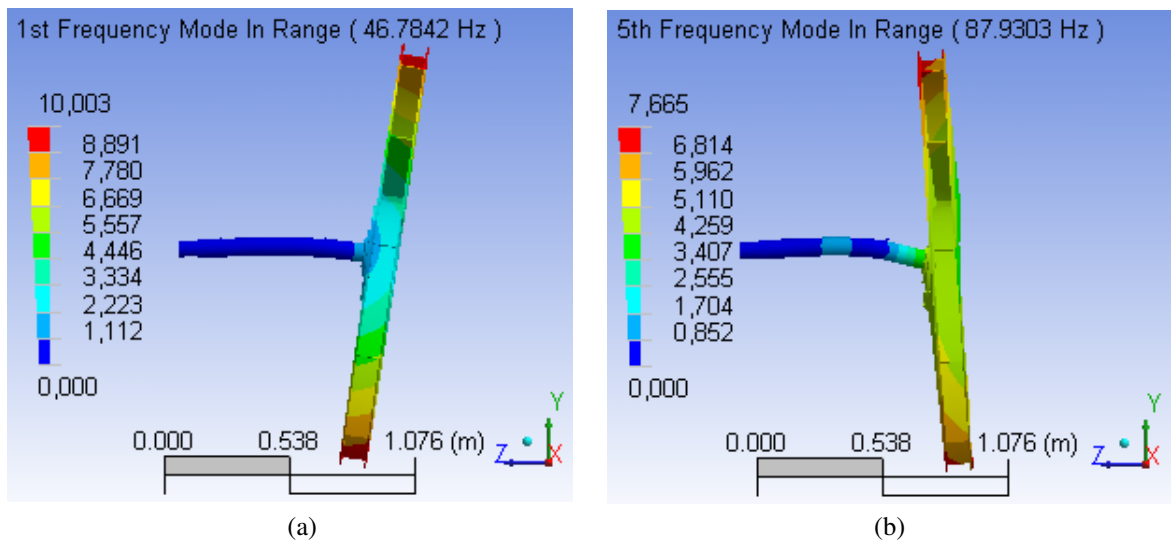


FIGURA 4.29 – (a) Primeiro e (b) Segundo Modos de Vibração do Rotor do Soprador c/ Vel. de 300 rad/s

Observa-se que a primeira frequência encontrada pelo procedimento de elementos finitos com a velocidade de 300 rad/s é a primeira frequência natural, a qual passou a ser menor que a frequência associada ao modo de rotação, que aparece como segunda frequência encontrada igual a 47,7 Hz.

Na TAB. 4.13, são apresentados os resultados comparativos das frequências naturais obtidos pelo procedimento analítico e pelo método de elementos finitos para o rotor do soprador com as velocidades de rotação de 0, 100, 200 e 300 rad/s.

TABELA 4.13  
Frequências Naturais do Procedimento Analítico e MEF do Rotor do Soprador

Velocidade do rotor (rad/s)	Analítico		MEF		Diferença	
	1ª FN (Hz)	2ª FN (Hz)	1ª FN (Hz)	2ª FN (Hz)	1ª FN (%)	2ª FN (%)
0	17,0	85,9	16,4	82,5	3,5	4,0
100	34,7	89,5	22,3	83,1	34,7	7,2
200	53,9	97,8	33,8	85,9	37,3	12,2
300	66,1	115,3	46,8	87,9	29,2	23,8

Aplicando os valores no Diagrama de Campbell, obtém-se a comparação dos dois modelos para cálculo das frequências naturais, conforme FIG. 4.30.

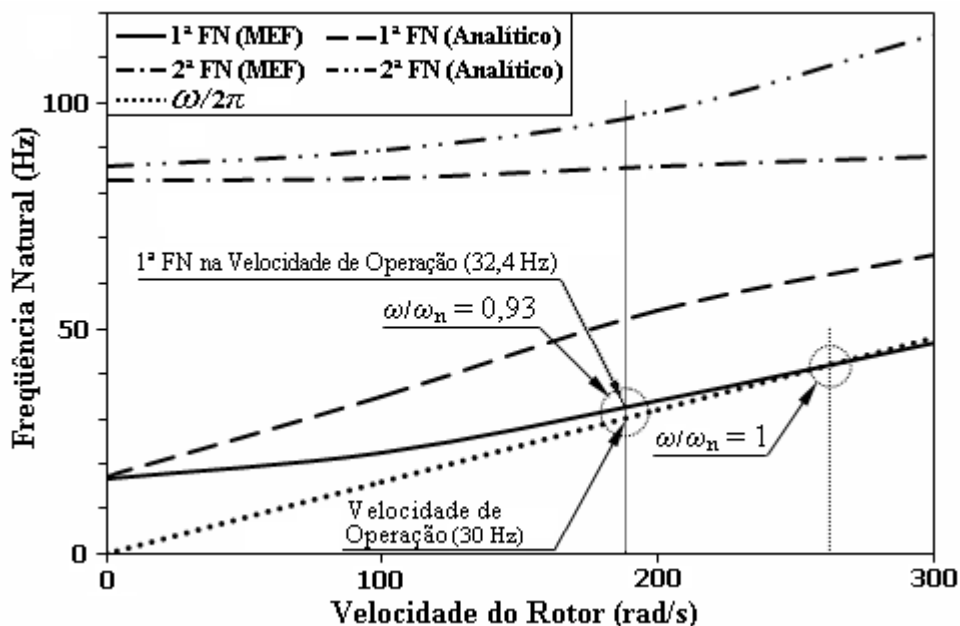


FIGURA 4.30 – Diagrama de Campbell e Velocidades Críticas do Rotor para os dois Procedimentos





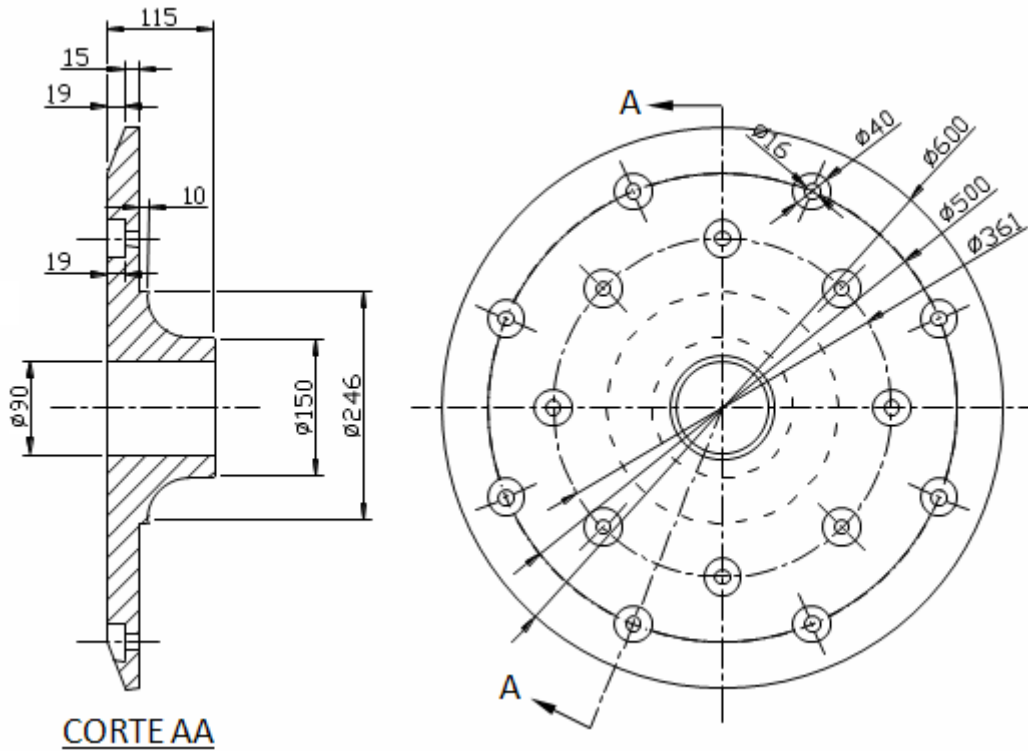


FIGURA 4.32 – Flange Proposto no Terceiro Procedimento para Melhoria

A malha padrão gerada automaticamente pelo método de elementos finitos é utilizada para os três estudos realizados, conforme TAB. 4.14. Os demais parâmetros utilizados para obtenção da frequência natural são os mesmos utilizados pela análise do rotor original.

TABELA 4.14

Parâmetros da Malha do MEF para Análise da Melhoria

Denominação	Parâmetros		
	1º Procedimento	2º Procedimento	3º Procedimento
Número de nós	81087	82635	88942
Número de elementos	44973	45705	49062

Para o primeiro estudo, obtém-se a primeira frequência natural igual a 34,7 Hz, referente ao primeiro modo de vibração, conforme FIG. 4,33-a. Para o segundo estudo, obtém-se a primeira frequência natural igual a 40,6 Hz, referente ao primeiro modo de

vibração, conforme FIG. 4.33-b. Para o terceiro estudo, obtém-se a primeira frequência natural igual a 43,8 Hz, referente ao primeiro modo de vibração, conforme FIG. 4.33-c.

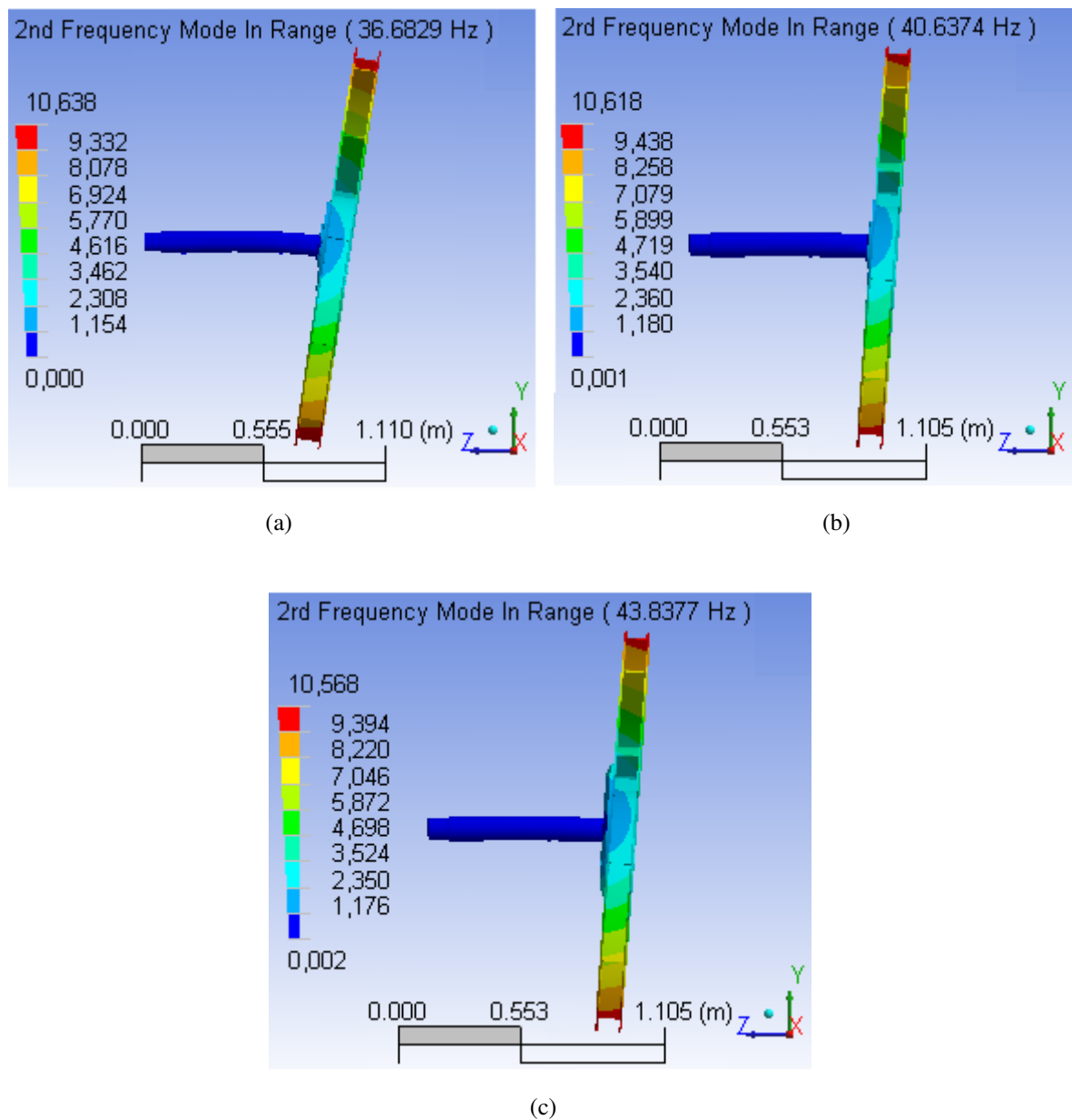


FIGURA 4.33 – 1ª Frequência Natural dos Procedimentos de Melhoria do Rotor – (a) Primeiro Estudo, (b) Segundo Estudo e (c) Terceiro Estudo

Na TAB. 4.15, são apresentados os resultados da primeira frequência natural obtidas pelas três análises de modificações no rotor, na rotação de 1800 RPM, bem como a relação entre a frequência de operação  $\omega$  com a frequência natural  $\omega_n$ .

TABELA 4.15

Frequências Naturais Fundamentais obtidas pelo MEF dos três Estudos a 1800 RPM

Procedimentos	1ª Frequência Natural (Hz)	$\omega/\omega_h$
1º	36,7	0,82
2º	40,6	0,74
3º	43,8	0,68

O terceiro estudo apresenta o melhor resultado para operação na rotação a 1800 RPM, pois essa velocidade encontra-se abaixo de 70% da primeira frequência natural. Essa terceira proposta de melhoria consiste no re-projeto proposto para melhoria do soprador.

Para obtenção do diagrama de Campbell, obtêm-se os resultados das 1ª e 2ª frequências naturais com o rotor proposto para melhoria, nas velocidades de rotação de 0, 100, 200 e 300 rad/s conforme TAB. 4.16.

TABELA 4.16

Frequências Naturais obtidas pelo MEF do Rotor Proposto para Melhoria

Velocidade do rotor (rad/s)	1ª Frequência Natural (Hz)	2ª Frequência Natural (Hz)
0	33,63	130,89
100	36,78	131,53
200	44,87	133,22
300	55,63	135,78

Com os valores das frequências naturais nas velocidades de rotação do rotor de 0 a 300 rad/s, obtêm-se o diagrama de Campbell conforme FIG.4.34.

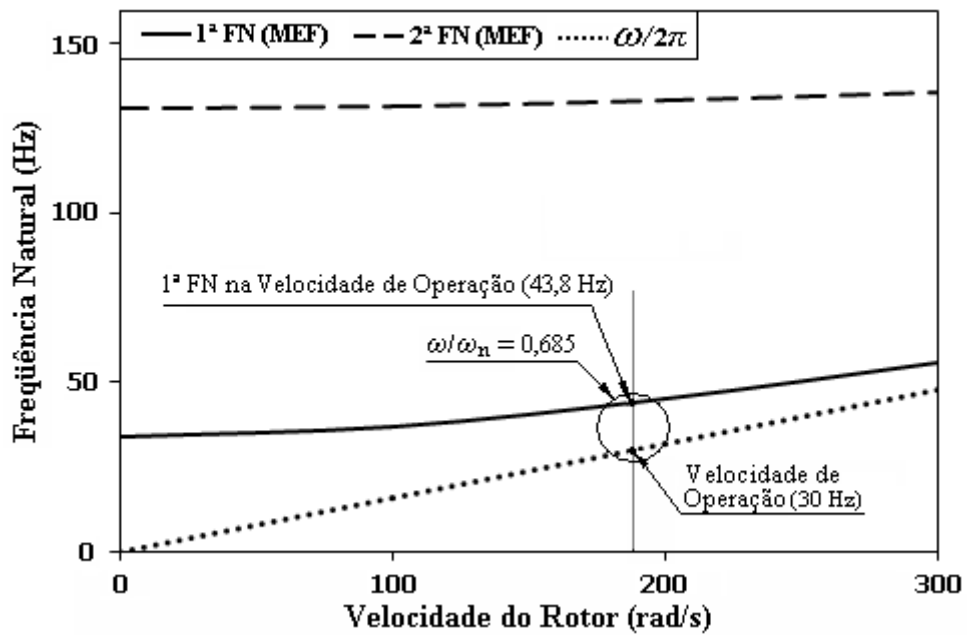


FIGURA 4.34 – Diagrama de Campbell do Rotor Proposto para Melhoria

Verifica-se pelo diagrama de Campbell, o afastamento considerável da primeira frequência natural da velocidade de operação. A análise acima de 300 rad/s para determinação do ponto crítico ( $\omega/\omega_n = 1$ ) foi desprezada por não ser faixa de interesse para análise do rotor.

Na montagem do novo rotor proposto pela análise de melhoria do projeto, rebaixa-se a base metálica em 30 mm para manter a linha de centro do rotor, modificam-se os assentos dos mancais na base e utilizam-se as caixas de mancais do tipo SNH 524 com rolamentos 22224-EK montados com bucha cônica.

## 5 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Esse trabalho apresenta o estudo do comportamento dinâmico de rotores em balanço de sopradores industriais utilizando procedimentos analíticos, experimentais e computacionais. As frequências naturais e os modos de vibração do sistema rotativo, composto pelo conjunto eixo-impelidor suportado em sistema elástico de suporte, permitem avaliar algumas de suas características dinâmicas importantes e fornecem dados relevantes para uma melhor compreensão dos fenômenos envolvidos.

Os resultados obtidos no trabalho mostram claramente as limitações dos modelos simplificados de rotores em balanço, principalmente de ventiladores e exaustores industriais. A hipótese de disco rígido, classicamente utilizada na modelagem do impelidor de turbomáquinas, pode afetar de forma significativa a análise da resposta dinâmica do conjunto rotativo. A flexibilidade de impelidores tem grande influência na resposta dinâmica de rotores em balanço, tanto quanto os efeitos giroscópicos. Enquanto os momentos giroscópicos têm efeito enrijecedor sobre o mapa de frequências naturais, a flexibilidade atua em sentido oposto.

Outra hipótese simplificadora, utilizada freqüentemente na análise dinâmica de sistemas rotativos, diz respeito á desconsideração dos efeitos elásticos do sistema de suporte. Não somente a flexibilidade dos mancais deve estar incluída na análise de muitas máquinas rotativas industriais, mas também é extremamente importante considerar as propriedades elásticas da base e da fundação no modelo, que é o caso do rotor de soprador industrial analisado nesse trabalho.

Uma outra consideração importante extraída a partir desse trabalho é a necessidade de testes experimentais de vibração, em máquinas rotativas industriais vitais para todo processo metal-mecânico, conjuntamente com o desenvolvimento de análises computacionais de rotores. Informações sobre as características dinâmicas do sistema rotativo, que podem ser obtidas experimentalmente por meio de testes de batida e testes de vibração em velocidade constante, trazem subsídios para a construção de modelos analítico-computacionais mais precisos para a descrição do comportamento dinâmico de rotores.

O resultado mais relevante obtido pelo estudo realizado nesse trabalho é a confirmação da influência da flexibilidade do impelidor na resposta vibratória de rotores em balanço. Portanto, na análise dinâmica de rotores em balanço de turbomáquinas, é imprescindível a modelagem dos discos rotativos como corpos deformáveis. Outro aspecto que pode ser destacado é a necessidade de melhorar a modelagem do sistema de suporte de eixos rotativos, cujas propriedades elásticas têm influência significativa sobre as frequências naturais e os modos de vibração do conjunto.

O desenvolvimento desse estudo tem impacto tecnológico extremamente importante para o re-projeto de rotores de sopradores industriais. Os procedimentos analítico-numéricos utilizados anteriormente, na análise desse tipo de sistema rotativo, indicavam que o seu comportamento dinâmico estava dentro de parâmetros aceitáveis de operação. Essas análises prévias desconsideravam a dinâmica completa do impelidor no estudo da resposta vibratória dos sopradores. Com a realização do estudo apresentado nesse trabalho, as predições do comportamento dinâmico do rotor do soprador se aproximaram da realidade em campo, que mostrava problemas operacionais graves devido às vibrações excessivas na velocidade nominal de operação.

Algumas sugestões para trabalhos futuros podem ser efetuadas ao final desse estudo. A carência de procedimentos de elementos finitos específicos para a análise dinâmica de rotores flexíveis faz com que o desenvolvimento de procedimentos computacionais, que contemplem a modelagem completa dos componentes rotativos, a modelagem tanto de mancais de rolamento quanto de deslizamento e a modelagem da base-fundação da máquina, se torne uma tarefa importante para o avanço da área de pesquisas em rotores em balanço. Outra alteração importante no estudo desenvolvido nesse trabalho seria o melhoramento da análise da influência da temperatura sobre as propriedades do sistema rotativo. Nesse trabalho, as propriedades elásticas são estimadas à temperatura constante. Uma última recomendação para estudos similares da dinâmica de máquinas rotativas seria o levantamento mais detalhado de características dinâmicas de cada componente do sistema. Informações do eixo, do impelidor, dos mancais e da base podem melhorar substancialmente a representatividade do modelo de rotor em balanço.

## ABSTRACT

This work deals with a study of the dynamic behavior of overhung rotors running below the first critical speed, which are supported by roller bearings. A special case of overhung rotor, which consists of an industrial blower for reheating furnace, is selected for this study. The selected rotor is supported on roller bearings, which are mounted on metallic base installed on a concrete foundation. Some important dynamic aspects of the overhung rotor behavior are analyzed by using both analytical-experimental and computational procedures.

The experimental study is performed on a blower rotor, which has been used to feed combustion air into industrial furnace, that rotates at 1,800 rpm. The rotor is driven by an electrical motor of 150 hp, and has the blowing capacity of 11,300 Nm<sup>3</sup>/h at pressure of 850 mmH<sub>2</sub>O and temperature of 250° C. Bump tests and constant speed vibration tests are performed on this rotor at several operating conditions, rendering the frequency spectra and the Bode diagrams associated with the rotating system vibratory response.

Moreover, a computational procedure based on the finite element method is implemented to estimate the natural frequencies of overhung rotors supported on elastic bearings. The Campbell diagram is employed to compute the rotor critical speeds. The finite element modeling includes the blower impeller elastic flexibility, which has a strong influence on the dynamic response of the rotating system. The numerical results rendered in this work show that the impeller gyroscopic moments and flexibility dominate the blower rotor dynamic response in the speed range near the first critical speed.

*Keywords: Overhung rotors, Gyroscopic moments, Campbell diagram, Impeller dynamics.*



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Almeida, M. T., Vibrações Mecânicas para Engenheiros, Edgard Blucher, São Paulo, 1987.
- Busse, L., Heiberger D., Mannheim, Wey, J., Aspects of Shaft Dynamics for Industrial Turbines, Brown Boveri Review, vol. 67. 1980 pp. 292-299.
- Childs, D.W., Graviss, K., A Note on Critical-Speed Solutions for Finite-Element-Based Rotor Models, Transactions of the ASME, American Society of Mechanical Engineers, April 1982, pp. 412-416.
- Childs, D.W., Turbomachinery RotorDynamics, McGraw-Hill, EUA, 1993.
- Den, H. J. P., Mechanical Vibrations, McGraw-Hill Book Company, Inc, 1956.
- Faria, M. T. C., Análise de Mancais para Turbomáquinas, I Seminário de Mini-jatos. Belo Horizonte.2001. pp.1-12.
- Faria, M. T. C., Estudos de comportamento dinâmico de rotores flexíveis assimétricos através do método de elementos finitos, Dissertação de Mestrado, Florianópolis, SC, 1990.
- Gmür, T. C., Rodrigues, J. D., Shaft Finite Elements for Rotor Dynamics Analysis, Transactions of the ASME, Journal of Vibrations and Acoustics, October 1991, pp.482-493.
- Groehs, A. G., Mecânica Vibratória, Editora Unisinos, São Leopoldo, RS, 2001.
- Gunter, E.J., Jr., Dynamic Stability of Rotor-Bearing Systems, Publicação NASA SP-113, EUA, 1966.
- Lalanne M., Ferraris, G. Rotordynamics Prediction in Engineering, John Wiley & Sons Ltd., New York 1990.

Meirovitch, L. Elements of Vibration Analysis. McGraw Hill, New York, USA., 1986.

Miranda, W.M., Machado, L.H.J., Faria, M.T.C., Some Insights into Dynamic Response of Flexible Rotors Supported on Fluid Film Bearings, Proc. 18th International Congress of Mechanical Engineering, Ouro Preto, Brasil, 2005, 8p.

Nelson, H. D., A Finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory, ASME Journal of Mechanical Design, vol 102.1980. pp. 793-803.

Nelson, H.D., McVaugh, J.M., The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements, ASME J Eng of Ind, 1976, pp.593-600.

Özgülven, H. N., Özkan, Z. L., Whirl Speeds and Unbalance Response of Multibearing Rotors Using Finite Elements, Transactions of the ASME, American Society of Mechanical Engineers, January 1984, pp. 72-79.

Rao, S. S., Mechanical Vibration. 2nd. Ed. Addison-Wesley. 1990. 718p.

Rahl, R. L., Booker, J. F., A Finite Element Model for Distributed Parameter Turborotor Systems, Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry, February 1972, pp. 126-132.

Rouch, K. E., Kao, J. S., Dynamic Reduction in Rotor Dynamics by the Finite Element Method, Transactions of the ASME, American Society of Mechanical Engineers, April 1980, pp.360-368.

Santos, H.L.V., Dinâmica de rotores, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2003.

Sotelo Jr, J., França, L. N. F., Introdução às Vibrações Mecânicas, Edgard Blucher, São Paulo, 2006.

Sternlicht, B., Lewis, P., Vibration Problems With High-Speed Turbomachinery, ASME J of Eng for Industry, 1968, pp. 174-186.

Thomson, W. T., Theory of vibration with applications, Englewood cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1972.

Vance, J. W., Rotordynamics of Turbomachinery, Wiley-Interscience Publication, 1988. 387p.

Vinaud, F. J., Aplicação de metodologias numéricas para a análise de dinâmica de rotores, Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, DF, 2005.

Zorzi, E. S. & Nelson, H. D., Finite Element Simulation of Rotor-Bearing Systems With Internal Damping, Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Power, January 1977, pp. 71-76.

## ANEXO A

### A.1 Análise de mudanças geométricas do rotor

Na análise de mudanças geométricas do rotor, há a necessidade de análise do flange acoplado ao impelidor sem o eixo, a fim de avaliar a influência do movimento relativo do impelidor em relação ao eixo. A análise do flange acoplado ao impelidor, desconsiderando o eixo do rotor, equivale à análise do conjunto com eixo e mancais rígidos.

#### A.1.1 Modelagem do flange original acoplado ao impelidor

Na modelagem do flange acoplado ao impelidor para análise, utiliza-se o impelidor original e o flange original sem a presença do eixo.

Estima-se a malha padrão gerada automaticamente pelo método de elementos finitos para o flange acoplado ao impelidor conforme TAB. A.1.

TABELA A.1

Parâmetros da Malha do MEF do Flange Original acoplado ao Impelidor

Denominação	Parâmetros
Tipo de malha	Padrão
Número de nós	58353
Número de elementos	28698

O anel interno do flange tem restrições de movimento em todas as direções, exceto o movimento de rotação. Os demais parâmetros utilizados para obtenção da frequência natural são extraídos da análise do rotor original.

O primeiro modo de vibração e a primeira frequência natural do flange acoplado ao impelidor, em repouso e com velocidade de 1800 RPM, são apresentados nas FIG. A.1-a e A.1-b e valem, respectivamente, 30,4641 Hz e 46,9805 Hz.

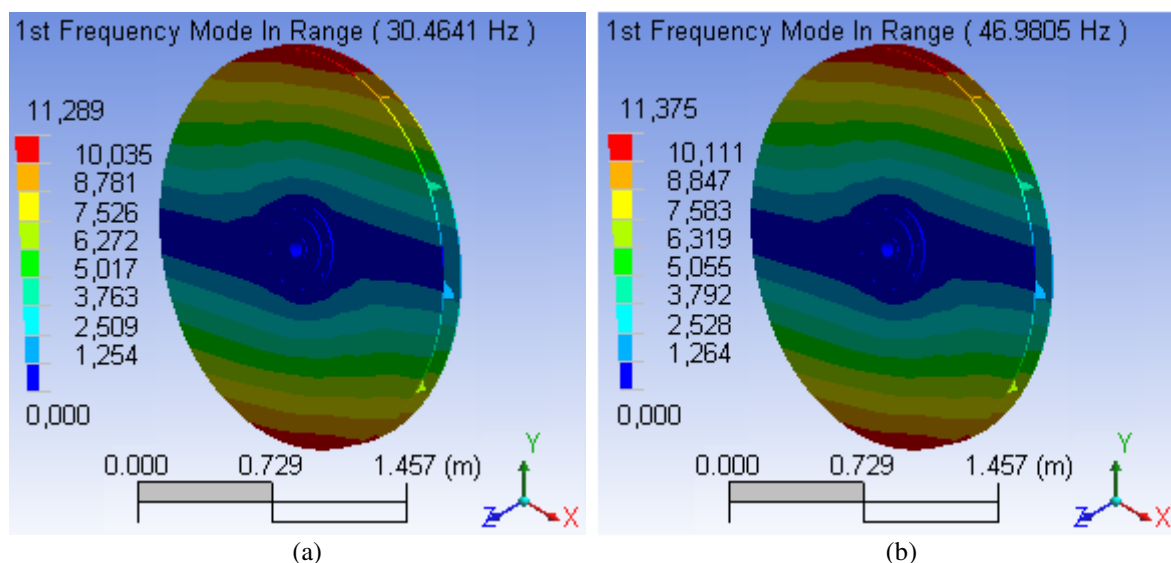


FIGURA A.1 – Primeiro Modo de Vibração do Flange Original Acoplado ao Impelidor – (a) em Repouso  
(b) Velocidade de 1800 RPM

Pela análise, o aumento do diâmetro do eixo original, como forma de elevação de rigidez, não altera significativamente a frequência natural. O valor mais alto de frequência natural com eixo de grande diâmetro não ultrapassa 46,98 Hz a 1800 RPM.

### A.1.2 Modelagem do flange modificado acoplado ao impelidor

Na modelagem do flange acoplado ao impelidor, utilizam-se o impelidor original e o flange modificado, desconsiderando-se o eixo.

A malha padrão gerada automaticamente pelo método de elementos finitos é utilizada para a análise do flange acoplado ao impelidor, conforme TAB. A.2.

TABELA A.2

Parâmetros da Malha do MEF do Flange Modificado acoplado ao Impelidor

Denominação	Parâmetros
Tipo de malha	Padrão
Número de nós	65075
Número de elementos	32775

O anel interno do flange tem restrições de movimento em todas as direções, exceto o movimento de rotação. Os demais parâmetros utilizados para obtenção da frequência natural são extraídos da análise do rotor original.

O primeiro modo de vibração e a primeira frequência natural do flange modificado acoplado ao impelidor, com a velocidade nula e com 1800 RPM, são apresentados nas FIG. A.2-a e A.2-b e valem, respectivamente, 59,8632 Hz, e 67,6278 Hz.

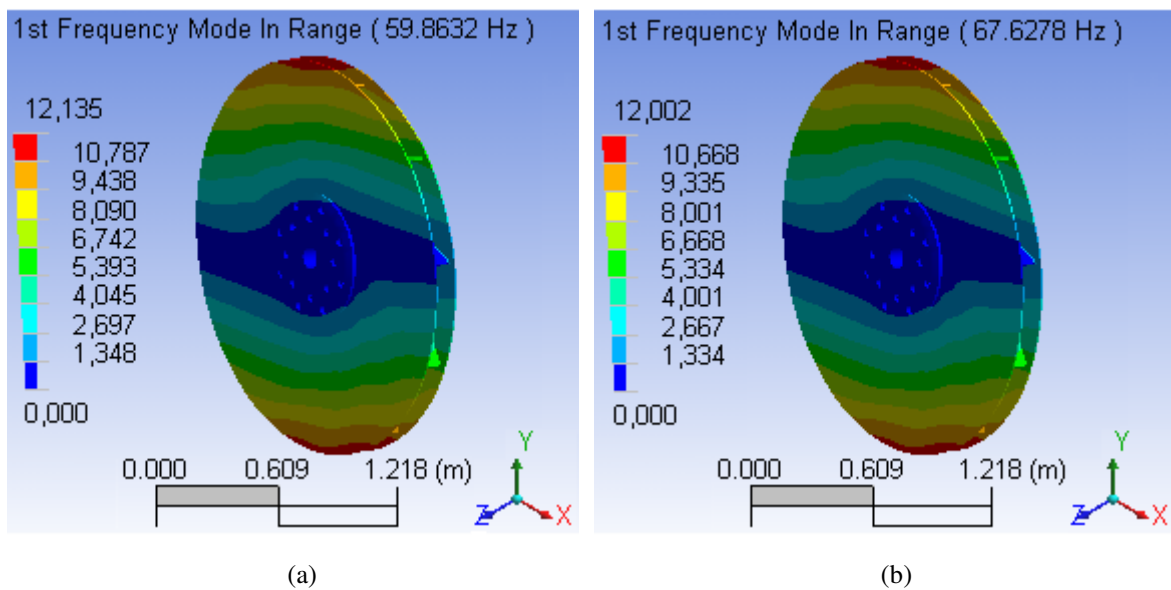


FIGURA A.2 – Primeiro Modo de Vibração do Flange Modificado Acoplado ao Impelidor – (a) em Repouso  
(b) Velocidade de 1800 RPM

Pela análise, o enrijecimento do rotor pela modificação do flange e pelo aumento do diâmetro do eixo produz um resultado considerado satisfatório. O valor máximo atingido pela primeira frequência natural é de 67,63 Hz a 1800 RPM.