

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**MECANISMOS COOPERATIVOS: ADOTANDO ESTRATÉGIAS
DIFERENTES CONTRA Oponentes Distintos no Dilema do
PRISIONEIRO**

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Física.

LUCAS LAGES WARDIL

Orientador: Jafferson K. L. da Silva

Belo Horizonte
11 de fevereiro de 2012

Abstract

The emergence of cooperation has been widely studied in the context of game theory with populations structured on graphs. Usually the individuals adopt one strategy against all their neighbors. But what does happen if the players adopt simultaneously different strategies against each one of their opponents, not just a single one? Here we study this question in the prisoner dilemma scenario structured on different graph topologies (ring, square lattice, random graphs and scale-free networks). We show that if an update rule is defined in which the players replace the strategy that furnishes the smallest payoff, a punishment response mechanism against defectors without imputing cost to the punishers appears, cooperation dominates and, even if the tendency of defection is huge, cooperation still remains alive. This was established by analytical arguments and numerical simulation. We also derive a mean-field approximation for a well-mixed population. In another context, we study a repeated public good game where the players can leave the game with a fixed probability. We show that if the probability of staying is large enough cooperation thrives.

Resumo

A cooperação tem sido amplamente estudada no contexto da teoria evolutiva de jogos em populações estruturadas em redes de interação. Nos modelos usuais os indivíduos adotam uma mesma estratégia contra todos os seus vizinhos. Mas o que acontece quando os jogadores adotam estratégias diferentes contra oponentes diferentes? Nós estudamos essa questão no contexto do dilema do prisioneiro em populações estruturadas em redes com diversas topologias (anel, rede quadrada, grafos aleatórios e redes do tipo sem escala). Nós mostramos que, se uma regra de atualização em que os jogadores trocam a estratégia que fornece o pior ganho é utilizada, um mecanismo de punição contra os não cooperadores surge, a cooperação domina e, mesmo se a tendência de não cooperar é alta, a cooperação é mantida na população. Tais resultados foram obtidos através de argumentos analíticos e de simulações numéricas. Além disso os resultados foram corroborados por uma aproximação de campo médio para populações em que todos interagem com todos. Em outro contexto, nós estudamos um jogo repetido de bens públicos em que os jogadores podem abandonar o jogo com uma probabilidade fixa. Nesse jogo mostramos que, se a probabilidade de permanecer jogando é alta, a cooperação é favorecida.

Agradecimentos

Em particular, agradeço profundamente

ao Jafferson, por ter sido exemplo de como confiar nas próprias idéias, de como buscar um equilíbrio na relação família-ciência, de como não se deixar iludir pelos encantos da vaidade intelectual e de como ser feliz fazendo ciência;

I thank prof. Christoph Hauert for being a model of how to look for beauty in what we are doing, for being a model of how to achieve a good balance between enjoying other aspects of life and doing research and for all happy moments with his family during my internship in the University of British Columbia;

ao meus pais, Ricardo e Rosana, em particular à minha mãe, por ter adiado o sonho de se dedicar intensamente aos estudos para que cinco filhos fossem maravilhosamente educados;

a Thaíse, minha querida companheira, que está me ajudando a não fazer da ciência um manto de proteção à minha insegurança, mas me ensinado a obter ciência do amor que aquece e mantém a vida;

aos órgãos financiadores, CNPq, FAPEMIG e CAPES, que canalizam os recursos do nosso país para que nós possamos revertê-los em outro benefícios.

Sumário

1	Introdução	1
2	Teoria Evolutiva de Jogos	4
2.1	Evolução: seleção natural de Darwin	4
2.1.1	Reprodução	6
2.1.2	Seleção I: a equação do replicador	6
2.1.3	Seleção II: mutações	8
2.2	Teoria de Jogos	11
2.2.1	Jogos de dois jogadores e duas estratégias	12
2.2.2	Jogos envolvendo N jogadores: o jogo de bens públicos	17
2.2.3	Forma geral dos jogos e teorema de Nash	18
2.3	Evolução e teoria de jogos	19
2.3.1	Dedução da equação do replicador via campo médio em processos microscópicos	21
2.3.2	Probabilidade de fixação de um mutante	23
2.3.3	Simulações computacionais	26
2.4	Cooperação	26
2.4.1	Vírus: bacteriófagos $\Phi 6$	28
2.4.2	Monera: <i>Pseudomonas</i>	29
2.4.3	Protista: <i>Dictyostelium discoideum</i>	30
2.4.4	Os insetos sociais	30
2.4.5	Os seres humanos	31
2.5	Evolução genética e cultural	32
3	Mecanismos cooperativos	34
3.1	Seleção de parentesco e seleção de grupo	34

3.2	Reciprocidade direta	36
3.3	Reciprocidade indireta	41
3.4	Reciprocidade de rede	43
4	Estratégias diferentes contra oponentes distintos	51
4.1	O modelo	51
4.2	Propriedades gerais do modelo <i>DO</i>	55
4.3	Rede quadrada	56
4.3.1	Variação da regra de imitação	63
4.3.2	Variação do tamanho e da condição inicial	65
4.3.3	Atualização assíncrona	66
4.4	Anel	67
5	Aproximação de campo médio numa população bem-misturada	71
5.1	Atualização assíncrona	74
5.2	Atualização síncrona	81
6	Ganho cumulativo e ganho efetivo em redes heterogêneas	83
6.1	Construção das redes heterogêneas	84
6.2	Evolução da cooperação no modelo <i>DO</i>	85
7	Cooperação em jogos de bens públicos	95
7.1	O modelo	96
7.2	Aproximação de campo médio e análise dos resultados	97
8	Conclusão e perspectivas futuras	104
	Apêndice A: Redes	106
	Conceitos elementares	106
	Redes livre de escala	108
	A propriedade “livre de escala”	108
	Apêndice B: Algoritmos	110
	Referências Bibliográficas	115

Lista de Figuras

2.1	Representação do simplex S_2	9
2.2	Representação do simplex S_3	10
2.3	Representação das soluções da equação do replicador no caso de duas estratégias.	21
2.4	Representação da solução da equação do replicador para o dilema do prisioneiro dado pela matriz de ganho 2.54.	27
3.1	Representação das soluções da equação do replicador na presença de reciprocidade direta. . .	40
3.2	Representação da solução da equação do replicador na presença de reciprocidade indireta. . .	43
3.3	Estrutura espacial com condição periódica de contorno em que cada jogador é representado por uma célula e interage com as 8 células vizinhas.	45
3.4	Os nós representam os jogadores que interagem com os vizinhos dados pela rede de interação.	45
3.5	Fração de cooperadores ρ em função da tendência de desertar b numa rede quadrada.	47
3.6	Valor crítico de b em função do parâmetro ξ numa rede quadrada.	48
3.7	Fração de cooperadores ρ em função da tendência de desertar b para diferentes tipos de redes no caso de ganho cumulativo.	49
3.8	Fração de cooperadores ρ em função da tendência de desertar b para diferentes tipos de redes no caso de ganho cumulativo efetivo.	50
4.1	Representação das estratégias no modelo Usual (esquerda) e no modelo DO (direita).	52
4.2	Cálculo do ganho cumulativo do jogador 1.	53
4.3	Ilustração do processo de imitação.	54
4.4	Punição dos desertores no modelo DO.	56
4.5	Rede quadrada de tamanho $L = 4$ com condições periódicas de contorno. Cada jogador possui 4 vizinhos mais próximos.	57

4.6	Cooperatividade média no regime estacionário F_c em função da tendência de desertar b no modelo Usual e no modelo DO para rede quadrada com $L = 100$ e $\epsilon = 0,01$, com atualização síncrona.	58
4.7	Evolução temporal da cooperatividade média e da fração de interações do tipo (D, D) no modelo DO para $b = 2,0$. A rede é quadrada com $L = 100$, $\epsilon = 0,01$ e a atualização é síncrona.	59
4.8	Aglomerado de cooperadores (nós preenchidos) e probabilidades de transição relativas a um nó da terceira classe (nó com preenchimento preto).	60
4.9	Cooperatividade média no regime estacionário dos nós dentro do aglomerado de tamanho $S \times S$ como função da tendência de desertar b	61
4.10	Cooperatividade média no regime estacionário F_c em função da probabilidade de erro p_e na rede quadrada.	63
4.11	Cooperatividade média no regime estacionário F_c em função da tendência de desertar b para os modelos Usual, DO, DO-A e DO-B.	64
4.12	Cooperatividade média no regime estacionário F_c em função do tamanho da rede L para $b = 1,05$ e $b = 4,0$	65
4.13	Cooperatividade média no regime estacionário F_c em função da probabilidade inicial de cooperação p_0	66
4.14	Cooperatividade média no regime estacionário F_c em função de alguns valores da tendência de desertar b no modelo DO para rede quadrada com $L = 100$ e $\epsilon = 0,01$, com atualização assíncrona.	67
4.15	Cooperatividade média F_c no regime estacionário no anel em função da tendência de deserção b . Os parâmetros são $N = 10000$ e $\epsilon = 0,01$	68
4.16	Aglomerados de cooperadores para os modelos Usual e DO. O ganho cumulativo de cada jogador é mostrado junto a cada nó.	69
4.17	Cooperatividade média no regime estacionário F_c em função da probabilidade de erro p_e para $b = 1,01$, $b = 2,0$ e $b = 4,0$ no anel. Os parâmetros são $N = 10000$ e $\epsilon = 0,01$	70
5.1	Regime final da cooperatividade média da população no tempo t $\bar{f}_c(t)$ no caso de atualização síncrona para $b = 2,0$. Na figura são mostrados os resultados da simulação computacional (linha contínua) e do campo médio (linha pontilhada) dado pelas equações 5.21 e 5.22.	72

5.2	Regime inicial da cooperatividade média da população no tempo t no caso de atualização síncrona para $b = 2,0$. Na figura são mostrados os resultados da simulação computacional (linha contínua) e do campo médio (linha pontilhada).	73
5.3	Evolução temporal da cooperatividade média da população no tempo t no caso de atualização assíncrona para $b = 2,0$. Na figura são mostrados os resultados da simulação computacional (linha contínua) e do campo médio (linha pontilhada) dado pela equação 5.18.	74
5.4	Inverso do tempo médio T em que a cooperatividade média da população atinge o seu valor mínimo em função do tamanho da rede N para $b = 2,0$	75
5.5	Quantidade de interações de cada tipo em torno no jogador foco F em uma população de tamanho $N + 1 = 9$	76
5.6	Ilustração da transição $(D, D) \rightarrow (C, C)$ entre dois jogadores x e y que ocorre na atualização síncrona. Os jogadores x e y imitam simultaneamente a estratégia C de algum de seus vizinhos. A estratégia C é colocada na interação (D, D) entre os jogadores x e y	81
6.1	Ilustração simplificada do algoritmo gerador das redes.	85
6.2	Redes de tamanho $N = 100$ geradas pelo algoritmo de Redner e Krapivsk para $r = 0,0$, $r = 0,5$ e $r = 1,0$	85
6.3	Cooperatividade média no regime estacionário F_c em função da tendência de desertar b no caso assíncrono com os ganhos cumulativo e efetivo.	87
6.4	Cooperatividade média no regime estacionário F_c em função da tendência de desertar b no caso síncrono para $r = 0,5$	88
6.5	Cooperatividade média no regime estacionário F_c em função de r no caso síncrono.	89
6.6	Evolução da cooperação numa rede do tipo estrela usada na aproximação do caso $r = 1,0$	90
6.7	O nó H representa um nó muito conectado e o nó L um nó pouco conectado.	91
6.8	Medida auxiliar A_i no caso síncrono para $b = 2,0$. Os resultados no caso de ganho cumulativo (efetivo) são mostrados na figura da esquerda (direita).	92
6.9	Cooperatividade média no regime estacionário F_c em função da probabilidade inicial de cooperação p_0 para $b = 2,0$. Os resultados no caso de ganho cumulativo (efetivo) são mostrados na figura da esquerda (direita)	93
6.10	Cooperatividade média no regime estacionário F_c em função da probabilidade de erro p_e no caso de ganho efetivo para $b = 1,05$	94

6.11	Cooperatividade média no regime estacionário F_c em função da probabilidade de erro p_e no caso de ganho efetivo para $b = 3, 0$	94
6.12	Cooperatividade média no regime estacionário F_c em função da probabilidade de erro p_e no caso de ganho cumulativo para $b = 1, 05$	94
6.13	Cooperatividade média no regime estacionário F_c em função da probabilidade de erro p_e no caso de ganho cumulativo para $b = 3, 0$	94
7.1	Probabilidade de fixação z_1^{ws} em função da probabilidade de se jogar a próxima rodada w	98
7.2	Diagrama de fase $R \times w$. A região em que a cooperação (deserção) é favorecida está representada em azul (vermelho). Os parâmetros são $N = 100$, $M = 10$ e $s = 0, 01$	102
7.3	Efeito de tamanho pequeno. Os parâmetros são $N = 100$, $M = 10$ e $s = 0, 01$	103
A-1	Representação gráfica de um grafo não direcionado (esquerda) e de um grafo direcionado (direita).	106
B-1	Esquema dos algoritmos utilizados no modelo DO.	111

Lista de Tabelas

3.1	Confronto das estratégias <i>ALLC</i> e <i>ALLD</i> em m rodadas do dilema do prisioneiro.	36
6.1	Cooperatividade média no regime estacionário F_c para condições iniciais diferentes adotadas pelos seis nós iniciais definidos no algoritmo de construção da rede.	93

Capítulo 1

Introdução

A cooperação é um comportamento em que o cooperador se sujeita a um custo para gerar um benefício para um ou mais indivíduos [1]. Este comportamento está presente em todo o reino animal. Por exemplo, quando um macaco da espécie *Chlorocebus pygerythrus* avista um predador, ele começa a gritar de modo a avisar os demais companheiros, o que atrai a atenção do predador em direção a ele. Dessa forma a emissão do alarme aumenta a chance de sobrevivência dos demais membros da comunidade em detrimento do indivíduo que emite o alarme [2]. Em várias espécies de pássaros, alguns indivíduos abdicam temporariamente da procriação para cuidar dos descendente de outro casal [3]. Numa colméia as operárias abdicam da função de reprodução para cuidarem dos descendentes da rainha. Diferentemente dos demais animais, a espécie humana apresenta formas mais complexas de cooperação. Desde o elaborado sistema de divisão do trabalho a um simples ato de ajudar um estranho, a cooperação é um ingrediente essencial na formação e sustentação de uma sociedade [4].

Na teoria de evolução, os benefícios e custos da cooperação são traduzidos em termos de sucesso reprodutivo, seja em termos da reprodução biológica da espécie ou em termos da reprodução cultural de idéias e comportamentos [5]. Como a cooperação é onerosa para o cooperador, a cooperação teria uma chance menor de se espalhar na população e o resultado seria a eliminação dos comportamentos cooperativos. Contudo a cooperação é ubíqua na natureza. Esse fato levou Darwin a considerar os comportamentos cooperativos como um dos maiores desafios em sua teoria.

Na maioria das espécies os cooperadores direcionam os benefícios da cooperação preferencialmente aos próprios parentes [6]. Como a chance de que um parente exiba o mesmo comportamento cooperativo é alta, um cooperador estaria ajudando outro indivíduo que também é cooperador, ao invés de ajudar um estranho que seria potencialmente um não cooperador. Esse mecanismo é chamado de seleção de

parentesco e garante que, diante da seleção natural, a cooperação possa ser mantida. No caso da espécie humana, a seleção de parentesco não é suficiente para explicar a manutenção da cooperação, pois os seres humanos não cooperam somente com parentes e a propagação dos comportamentos dá-se não somente através da reprodução biológica, mas também através da transmissão cultural. Um dos principais mecanismos na espécie humana é a reciprocidade direta [7]: eu te ajudo se você me ajudar. A reciprocidade deu origem a vários mecanismos de recompensa e punição, que funcionam como incentivos à cooperação [8, 9]. A reciprocidade também pode ser indireta. Ela ocorre quando um indivíduo coopera para manter uma boa reputação, o que pode atrair atos cooperativos de terceiros [10]. Esses mecanismos requerem uma capacidade cognitiva maior e, portanto, praticamente não estão presentes nas outras espécies. Um outro mecanismo é chamado de reciprocidade de rede [11]. Os indivíduos interagem numa rede social de forma que os comportamentos cooperativos são dirigidos somente para as pessoas que estão conectadas ao cooperador. Esse mecanismo permite a formação de aglomerados de cooperadores, o que possibilita a restrição dos benefícios somente aos cooperadores, com a consequente exclusão dos não cooperadores.

A evolução da cooperação pode ser analisada com o formalismo da teoria evolutiva de jogos [12]. A teoria evolutiva de jogos é a união da teoria de jogos, que surgiu no contexto de economia, e a teoria de seleção natural de Darwin. Um jogo de cooperação, usualmente chamado de Dilema do Prisioneiro, é essencialmente uma interação entre dois ou mais indivíduos que adotam as estratégias de cooperar ou de não cooperar. O ganho de cada jogador depende de qual estratégia é adotada por ele e pelos demais. Para se estudar a evolução da cooperação numa população, considera-se que cada indivíduo pode adotar as estratégias de cooperação ou de não cooperação e que, de acordo com o ganho proveniente das interações, as estratégias dos jogadores mais bem sucedidos espalham-se na população [11].

Nos modelos usuais da teoria evolutiva de jogos assume-se que cada jogador adota a mesma estratégia em relação a todos oponentes. Na presente tese estudamos a situação em que cada jogador pode adotar estratégias diferentes contra oponentes distintos. Estudamos esse modelo, o qual chamamos de modelo DO (do inglês “Distinguishing the Opponents”), no contexto de reciprocidade de rede com várias topologias. Além desse problema, estudamos o problema da cooperação no caso em que mais de dois jogadores estão envolvidos na interação, o que é chamado de jogo de bens públicos [13].

A presente tese é organizada da seguinte forma. No capítulo 2 os conceitos da teoria evolutiva de jogos são introduzidos. O dilema do prisioneiro é definido em termos da teoria de jogos e o processo evolutivo da cooperação é definido em termos da regra de imitação. No capítulo 3 alguns mecanismos responsáveis pela cooperação, como a seleção de parentesco e os mecanismos de reciprocidade, são descritos em detalhes. No capítulo 4 a definição do modelo DO é introduzida e o modelo é estudado numa rede quadrada e num

anel. No capítulo 5 uma aproximação analítica do tipo campo médio é desenvolvida para o modelo DO. No capítulo 6 duas formas distintas de se calcular o sucesso de um jogador são analisadas no contexto de redes heterogêneas (as definições formais da teoria de redes são apresentadas no apêndice A). Um modelo de interação em jogos de bens públicos é analisado através de uma aproximação de campo médio no capítulo 7. Nossas conclusões são apresentadas no último capítulo.

Capítulo 2

Teoria Evolutiva de Jogos

Nesse capítulo serão introduzidas as duas bases teóricas da teoria evolutiva de jogos: a teoria de evolução de Darwin e a teoria de jogos. Com a teoria de jogos formaliza-se comportamentos individuais que recebem o nome de estratégias. Com a teoria evolutiva de jogos estuda-se a evolução da fração de estratégias em uma população sujeita a processos envolvendo a seleção natural de Darwin. Em posse do formalismo matemático da teoria evolutiva de jogos, estudaremos a evolução das estratégias cooperativas em população. Este capítulo está baseado nas referências [1] e [11].

2.1 Evolução: seleção natural de Darwin

Uma população é um grupo de indivíduos de uma única espécie que vivem e se reproduzem numa área geográfica particular [14]. Indivíduos de uma mesma espécie são similares, mas não são necessariamente idênticos. Por exemplo, os pássaros estudados por Charles Darwin, em sua viagem a bordo do navio Beagle em 1831, possuíam vários tipos de bicos, apesar de serem da mesma espécie. Darwin notou que, diante de uma mesma situação ambiental, indivíduos diferentes podem se comportar de maneira diferente. No caso dos pássaros, ele notou que alguns tipos de bicos eram mais apropriados para aquisição de determinados tipos de alimentos e concluiu que a simples presença dessas variedades permitia uma competição em que “o mais forte seria o vencedor” (*the struggle for life*). Esse cenário foi denominado seleção natural.

A seleção natural é o resultado lógico de quatro princípios apresentados por Darwin [15], em sua obra “A Origem das Espécies”:

1. Os indivíduos de uma espécie são variáveis.
2. Algumas dessas variações são passadas para a prole.

3. Em cada geração, o número de filhos produzidos é maior do que os que sobrevivem.
4. A sobrevivência e a reprodução dos indivíduos não é aleatória: os indivíduos que sobrevivem e se reproduzem em maior número são aqueles que possuem as variações mais favoráveis. Eles são selecionados naturalmente.

Com a descoberta dos mecanismos genéticos responsáveis pela hereditariedade, os mecanismos da seleção natural tornaram-se mais claros [14]. Cada indivíduo possui um código genético que contém informações necessárias para o seu desenvolvimento. Essa informação encontra-se codificada no DNA. O DNA é uma fita longa, composta de nucleotídeos, que possui segmentos com informações para a produção de proteínas. Esses segmentos são chamados de **genes**. Um mesmo gene pode se apresentar com pequenas variações, que são chamadas de **alelos** do gene. O conjunto de genes de um organismo é chamado de **genoma** e o conjunto específico de alelos que formam o genoma de um indivíduo é chamado de **genótipo**. O comportamento e a aparência dos indivíduos são chamados de **fenótipo**. A relação entre a informação contida no genótipo e o fenótipo dos indivíduos é complexa, pois depende da interação entre vários genes, entre os genes e as células vizinhas, entre os genes e o meio ambiente, dentre outros fatores. Cada fenótipo confere aos indivíduos uma maior ou menor habilidade de se reproduzir e de sobreviver no seu ambiente. Essa habilidade é chamada de **aptidão**. Quando um indivíduo se reproduz, o material genético dos pais é transferido para os filhos. Apesar da transmissão ser executada com pouquíssimos erros, mutações, recombinações e outros processos podem resultar em alguns genes nos filhos que são diferentes dos originais nos progenitores. Como resultado desses erros na transmissão, os indivíduos numa população são variáveis em praticamente todas as características. Quando uma característica confere ao seu portador um aumento na aptidão em comparação com outro não portador dessa característica, diz-se que essa característica é uma **adaptação**. Portanto, os indivíduos melhor adaptados ao meio, por se reproduzirem mais, ou por sobreviverem mais, são naturalmente selecionados, e a composição da população sofre modificações, passando a exibir um maior número de indivíduos portadores da característica melhor adaptada.

A evolução Darwiniana requer uma população de indivíduos que se reproduzem, seja sexuada ou assexuadamente. Como na reprodução pode ocorrer mutação, novas variedades podem surgir na espécie. Como decorrência da competição entre diferentes indivíduos, surge o fenômeno da seleção. Reprodução, mutação e seleção são alguns dos ingredientes essenciais para um modelo evolutivo. No presente trabalho, somente modelos de reprodução assexuada serão estudados.

2.1.1 Reprodução

Um dos processos de reprodução que pode ser representado por uma equação bem simples é a reprodução de seres unicelulares, como as bactérias. Se $x(t)$ é a quantidade de células no tempo t e r é a taxa de crescimento per capita, a lei de crescimento pode ser escrita como

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = rx. \quad (2.1)$$

Se a quantidade inicial de células é dada por $x_0 = x(0)$, a solução da equação acima é dada por

$$x(t) = x_0 e^{rt}. \quad (2.2)$$

Nesse modelo simples, as bactérias se reproduzem e a população cresce indefinidamente. Pode-se acrescentar ao modelo a taxa de mortalidade, ou mesmo um limite para o tamanho da população, resultando, por exemplo, na equação logística [1].

2.1.2 Seleção I: a equação do replicador

A seleção opera sempre que diferentes tipos de indivíduos se reproduzem com taxas diferentes. Suponha que existam dois tipos de indivíduos: tipo A e tipo B . Seja $N_A(t)$ a quantidade de indivíduos do tipo A e $N_B(t)$ a quantidade do tipo B , ambas no tempo t . Nesse problema define-se a aptidão como a taxa de reprodução per capita. Se a é a taxa de reprodução do tipo A e b é a taxa de reprodução do tipo B , a lei de crescimento para as subpopulações A e B pode ser escrita como

$$\dot{N}_A = aN_A, \quad (2.3)$$

$$\dot{N}_B = bN_B. \quad (2.4)$$

Denotando $\rho(t) = N_A(t)/N_B(t)$ como a razão entre as quantidades de A e B , tem-se que

$$\dot{\rho} = (a - b)\rho. \quad (2.5)$$

Se a condição inicial é dada por $\rho_0 = N_A(0)/N_B(0)$, a solução da equação é dada por

$$\rho(t) = \rho_0 e^{(a-b)t}. \quad (2.6)$$

Portanto se $a > b$ o tipo A cresce mais rapidamente do que o tipo B , significando que a seleção favorece o tipo A , ou, em outras palavras, o tipo A é mais bem adaptado do que o tipo B .

Agora vamos calcular a dinâmica das frações relativas $x(t)$ e $y(t)$, que são dadas por

$$x(t) = \frac{N_A(t)}{N_A(t) + N_B(t)} \quad \text{e} \quad (2.7)$$

$$y(t) = \frac{N_B(t)}{N_A(t) + N_B(t)}. \quad (2.8)$$

É fácil verificar que a variação da quantidade total $N(t) = N_A(t) + N_B(t)$ é dada por

$$\dot{N} = \phi N, \quad (2.9)$$

onde $\phi = ax + by$ é a aptidão média da população. Como

$$\dot{x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{N_A}{N} \right) = \frac{\dot{N}_A N - N_A \dot{N}}{N^2}, \quad (2.10)$$

tem-se que

$$\dot{x} = x(a - \phi), \quad (2.11)$$

$$\dot{y} = y(b - \phi), \quad (2.12)$$

Já que $y = 1 - x$, o sistema de duas equações pode ser reduzido a uma única equação,

$$\dot{x} = x(1 - x)(a - b). \quad (2.13)$$

Para estudar o comportamento deste sistema dinâmico ($\dot{x} = f(x)$), inicialmente determina-se os pontos fixos (ou de equilíbrio) definidos por $\dot{x} = 0$. A estabilidade linear é determinada por $\frac{df(x)}{dx}$ avaliada nos pontos fixos. Se $\frac{df(x)}{dx} > 0$ tem-se um ponto fixo repelente, já que uma condição inicial levemente afastada do ponto fixo se afastará ainda mais com o passar do tempo. Por outro lado, se $\frac{df(x)}{dx} < 0$, o ponto fixo será um atrator, já que condições iniciais levemente afastadas do atrator convergirão para ele.

Os dois únicos pontos de equilíbrio da equação 2.13 são $x = 0$ e $x = 1$. Se $a > b$, $x = 1$ é atrator e $x = 0$ é repelente. Se $a < b$, $x = 1$ é repelente e $x = 0$ é atrator. Isso significa que se numa população existe uma mistura de A e B , a fração de A cresce se a aptidão de A é maior do que a aptidão de B de

forma que, no equilíbrio, tem-se somente indivíduos do tipo A . O inverso ocorre caso a aptidão de A seja menor do que a aptidão de B .

As equações 2.11 e 2.12 podem ser estendidas para o caso de seleção entre n tipos diferentes. Seja $x_i(t)$ a fração de indivíduos do tipo i . A estrutura da população é dada pelo vetor $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, sendo $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Se a aptidão do tipo i é dada pela constante f_i , a aptidão média da população é dada por

$$\phi = \sum_{i=1}^n x_i f_i. \quad (2.14)$$

A dinâmica de seleção pode ser escrita como

$$\dot{x}_i = x_i(f_i - \phi), \quad (2.15)$$

com $i = 1, \dots, n$. Essa equação é conhecida como **equação do replicador**.

O conjunto de pontos em R^n , onde R representa o conjunto dos números reais, com a propriedade $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ é chamado de simplex S_n . As órbitas da equação do replicador na presença de n estratégias encontram-se no simplex S_n . Usualmente, a fim de se visualizar as soluções nos casos $n = 2$ e $n = 3$, representa-se o simplex como um segmento de reta no caso $n = 2$ e como um triângulo no caso $n = 3$, conforme mostrado nas figuras 2.1 e 2.2, respectivamente. Formalmente, a representação do simplex S_2 através de um segmento de reta de tamanho unitário pode ser definida pela aplicação bijetiva $H : S_2 \rightarrow [0, 1]$, onde H é dada por

$$H(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1^2 + (1 - x_2)^2}{2} \right)^{1/2}. \quad (2.16)$$

De maneira análoga, para os demais valores de n , o simplex $S_n \subset R^n$ pode ser representado por uma estrutura mais simples em R^{n-1} .

A dinâmica de seleção contém ingredientes suficientes para descrever o processo de sobrevivência do mais bem adaptado. Contudo, se uma população contém somente indivíduos do mesmo tipo, a dinâmica de seleção diz que a população permanece nessa mesma configuração para sempre. Por isso é preciso incorporar o processo de mutação para completar a formalização das equações evolutivas.

2.1.3 Seleção II: mutações

Os indivíduos de uma espécie apresentam variabilidade genética, ocasionada pelos erros de transmissão do material genético na reprodução. Seja $i = 1, \dots, n$ as possíveis variações de uma espécie. Seja q_{ij} a probabilidade de que o tipo i se transforme no tipo j , devido aos erros na reprodução, de forma que

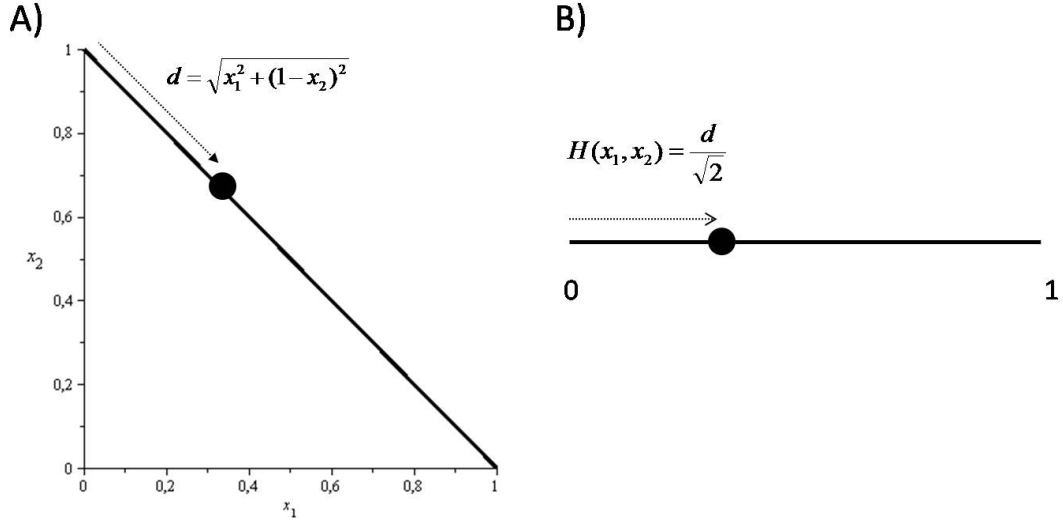


Figura 2.1: Representação do simplex S_2 . (A) Os pontos tais que $x_1 + x_2 = 1$ formam um segmento de reta em R^2 . O simplex S_2 é a estrutura unidimensional imersa no espaço euclidiano R^2 . (B) O simplex pode ser representado pelo intervalo real $[0, 1]$, onde um ponto $x \in [0, 1]$, com $x = H(x_1, x_2)$, representa a configuração $(x_1, x_2) = (x, 1 - x)$ em R^2 .

$\sum_{j=1}^n q_{ij} = 1$. Seja f_i a aptidão de um indivíduo do tipo i . A dinâmica de seleção pode ser escrita como

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n x_j f_j q_{ji} - \phi x_i. \quad (2.17)$$

O termo $x_j f_j q_{ji}$ representa a reprodução de um indivíduo do tipo j , cuja taxa é dada por $x_j f_j$, vezes a probabilidade de que o tipo j se transforme no tipo i . Se $q_{ji} = \delta_{ij}$, essa equação é igual à equação 2.15. Apesar do termo ϕx_i ser não linear em x , essa equação possui uma solução explícita. Primeiramente, define-se

$$\psi(t) = \int_0^t \phi(s) ds. \quad (2.18)$$

Em seguida, note que

$$\dot{x}_i + \phi x_i = e^{-\psi} \frac{d(x_i e^{\psi})}{dt}. \quad (2.19)$$

Definindo a variável auxiliar $X_i(t)$, dada por

$$X_i(t) = x_i(t) e^{\psi(t)}, \quad (2.20)$$

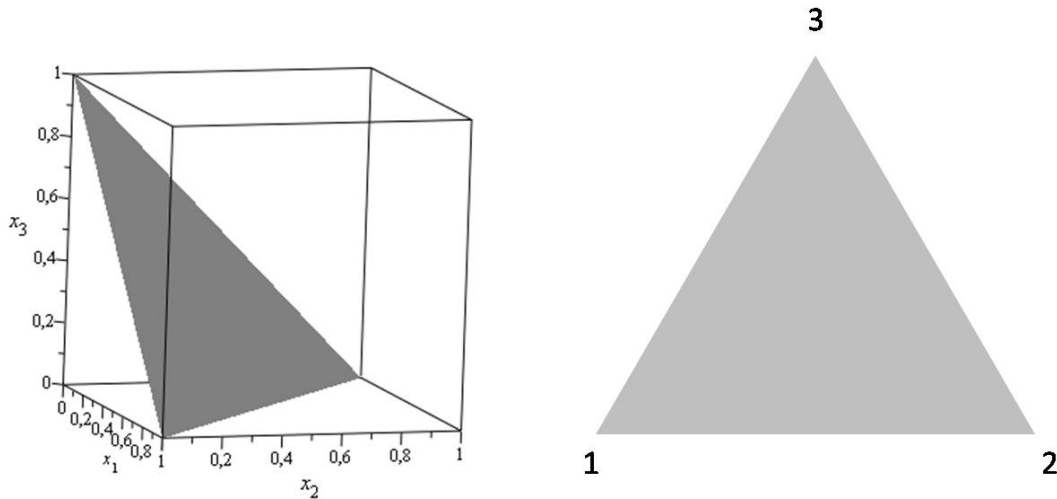


Figura 2.2: Representação do simplex S_3 . Os pontos tais que $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ formam um segmento de plano em R^3 . O simplex S_3 é a estrutura bidimensional imersa no espaço euclidiano R^3 . Os vértices 1, 2 e 3 do triângulo representam as configurações da população em que $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 1$, respectivamente.

tem-se que a equação 2.17 é equivalente a

$$\dot{X}_i = \sum_{j=1}^n X_j f_j q_{ji}, \quad (2.21)$$

com $j = 1, \dots, n$. Essa equação é linear e possui solução obtida por técnicas padrões.

Considere o caso simples em que a aptidão do tipo 1 seja $f_1 > 1$, ao passo que a aptidão dos demais tipos seja igual a 1. Seja q a probabilidade da reprodução do tipo 1 não sofrer erros. Por conseguinte, $1 - q$ é a probabilidade de se gerar um tipo mutante. Se a probabilidade do tipo mutante se transformar no tipo 1 for negligenciada (num modelo de mutação pontual, em que se considera a probabilidade de que cada base do DNA sofra uma mutação, essa hipótese é razoável), a equação 2.17 transforma-se em

$$\dot{x}_1 = x_1(f_1 q - \phi), \quad (2.22)$$

$$\dot{x}_m = x_1 f_1 (1 - q) + x_m - \phi x_m, \quad (2.23)$$

em que x_1 é a fração do tipo 1 e x_m é a soma da fração dos mutantes. Como $x_1 + x_m = 1$, tem-se que

$$\dot{x}_1 = x_1[f_1 q - 1 - x_1(f_1 - 1)]. \quad (2.24)$$

Se $f_1q > 1$, o ponto de equilíbrio, que é estável, é dado por

$$x_1^* = \frac{f_1q - 1}{f_1 - 1}. \quad (2.25)$$

Nesse caso é possível haver coexistência do tipo 1 com os demais tipos. Contudo, se $f_1q < 1$, x_1 converge para zero e o tipo 1 desaparece da população.

Antes de se considerar a união da teoria evolutiva com a teoria de jogos, é necessária a introdução de alguns conceitos fundamentais da teoria de jogos.

2.2 Teoria de Jogos

A teoria de jogos foi elaborada inicialmente por John von Neumann e Oskar Morgenstern, publicada no livro *The Theory of Games and Economic Behavior* [16], para tratar matematicamente o comportamento humano em situações de decisões estratégicas na área da economia. Eles definiram o conceito de jogo como sendo qualquer interação entre agentes governada por um conjunto de regras especificando os possíveis movimentos para cada participante e um conjunto de resultados para cada possível combinação de movimentos. De acordo com R. Aumann (prêmio Nobel de economia em 2005) e S. Hart [17],

“A Teoria de Jogos pode ser vista como uma espécie de guarda-chuva ou teoria de ‘campo unificado’ para o lado racional das ciências sociais...[a Teoria de Jogos] desenvolve metodologias que se aplicam em princípio a todas as situações que envolvem interações.”

A economia é repleta de situações que envolvem decisões estratégicas, as quais raramente se dão de forma independente das decisões de outras pessoas. Quando o resultado das escolhas depende das interações entre os indivíduos, a teoria de jogos entra em cena com uma abordagem matemática que permite elucidar a seguinte questão: supondo que cada indivíduo gostaria de ganhar o máximo possível, quais são os possíveis resultados do jogo que são consistentes com essa hipótese [18]? A teoria de jogos propõe uma série de refinamentos para responder essa pergunta, mas foi o matemático John Nash que elaborou o resultado mais importante, cuja generalidade permitiu que a teoria de jogos se estendesse para vários ramos das ciências sociais. John Nash provou um teorema que envolve um conceito de solução conhecido como equilíbrio de Nash. Nessa seção apresentaremos o formalismo matemático que possibilita abordar essa questão.

2.2.1 Jogos de dois jogadores e duas estratégias

Inicialmente alguns jogos que funcionam como modelos padrões serão discutidos. Note que o nome dos jogos é apenas figurativo, pois o que interessa é a estrutura das estratégias e dos ganhos representados no jogo.

2.2.1.1 Dilema do prisioneiro

No jogo conhecido como Dilema do Prisioneiro [1], duas pessoas são suspeitas de terem cometido um crime em conjunto. Os suspeitos são confinados em quartos diferentes e não podem se comunicar. Como a polícia não tem provas suficientes para condená-los, a polícia propõe um acordo para cada um dos suspeitos: confesse o crime, seja testemunha e ganhe a liberdade. Se um prisioneiro confessa enquanto o outro não confessa, o que confessou é solto e o que não confessou é preso por 10 anos. Se ambos confessam, cada um fica preso por 7 anos. Se nenhum confessa, ambos ficam presos por um ano, pois não foi possível provar nada contra nenhum deles. Pode-se organizar os resultados de cada combinação das escolhas na chamada **matriz de ganho**:

		Suspeito 2	
		silenciar	confessar
Suspeito 1	silenciar	-1	-10
	confessar	0	-7

Essa matriz de ganho representa o ganho do suspeito 1 para cada atitude do suspeito 2. Se o suspeito 2 permanece em silêncio e o suspeito 1 também permanece em silêncio, então o suspeito 1 fica preso por um ano (ganho negativo igual a -1). Se o suspeito 2 permanece em silêncio e o suspeito 1 confessa, então o suspeito 1 é solto (ganho igual a 0). Se o suspeito 2 confessa e o suspeito 1 permanece em silêncio, então o suspeito 1 fica preso por dez anos (ganho negativo igual a -10). Se o suspeito 2 confessa e o suspeito 1 também confessa, então o suspeito 1 fica preso por sete anos (ganho negativo igual a -7). Para obter o ganho do suspeito 2, basta inverter os papéis e utilizar a matriz de ganho do suspeito 1 de maneira análoga.

O que cada prisioneiro deve fazer? Para responder essa questão, a teoria de jogos baseia-se em três hipóteses [18]: (i) os jogadores são instrumentalmente racionais, isto é, buscam maximizar os ganhos; (ii) ambos os jogadores sabem que o outro jogador é instrumentalmente racional; (iii) ambos sabem as regras do jogo, isto é, conhecem todas as estratégias disponíveis e a tabela dos ganhos. Como os jogadores não podem se comunicar, a decisão de um não influencia a decisão do outro. É como se a decisão fosse

simultânea. Se o oponente permanece em silêncio, é melhor confessar, pois dessa forma se é solto ao invés de se ficar preso por 1 ano. Se o oponente confessa, é melhor confessar, pois dessa forma fica-se preso por apenas 7 anos ao invés de ficar preso por 10 anos. Note que, independentemente da escolha do oponente, a melhor escolha é confessar. Se ambos os jogadores agem racionalmente, no sentido de maximizar os ganhos, e ambos raciocinam da mesma forma sem cometer erros, o resultado final será aquele em que ambos os prisioneiros confessam, ficando ambos presos por 7 anos.

A situação em que ambos os prisioneiros confessam define uma situação de equilíbrio em que nenhum jogador tem incentivo unilateral de mudar de estratégia para aumentar o seu ganho. Se somente um dos prisioneiros resolvesse ficar em silêncio, ele seria prejudicado, pois ficaria preso por dez anos ao invés de sete. Esse equilíbrio é chamado de equilíbrio de Nash. Note que se ambos tivessem cooperado entre si e permanecido em silêncio, ambos teriam sido presos por apenas um ano. O dilema surge pois os prisioneiros obteriam um benefício maior se eles cooperassem entre si, mas tão logo um dos prisioneiros resolvesse cooperar com o outro, ele estaria sujeito a ser traído e sofrer a pena máxima. O dilema do prisioneiro é a metáfora desse tipo de dilema social.

2.2.1.2 Jogo da caça ao veado

No jogo conhecido como caça ao veado (*stag-hunt game* [13]), duas pessoas, os jogadores, precisam caçar para obter alimento. Cada jogador tem a opção de caçar um veado ou uma lebre. Se um jogador decide capturar uma lebre, ele o pode fazer sozinho. O fato de uma pessoa ter capturado uma lebre não exclui a possibilidade da outra também capturar uma lebre. Contudo para capturar o veado é preciso a ação conjunta dos dois caçadores. Se os dois caçadores decidem caçar o veado, ambos são bem sucedidos e ganham um valor igual a 10, que pode ser a quantidade de dias em que haverá alimento disponível. Se um dos caçadores decide caçar lebre e o outro decide caçar veado, o que decidiu caçar a lebre ganha 2 e o que decidiu caçar o veado ganha 0. Se ambos decidirem caçar lebre, cada um ganha 2. A matriz de ganho é dada por

		Jogador 2	
		veado	lebre
Jogador 1	veado	10	0
	lebre	2	2

Se o oponente decide caçar veado, o outro jogador será mais bem sucedido se também caçar veado. Mas se o oponente decide caçar lebre, o outro jogador será mais bem sucedido se caçar lebre. A opção

em que se ganha mais é fazer exatamente o que o oponente está fazendo. O jogo da caça ao veado é a metáfora das situações em que, para se conseguir o ganho máximo, é necessário coordenar a ação dos jogadores.

2.2.1.3 Jogo do falcão e pomba

Esse jogo representa uma briga fictícia entre duas espécies: falcão (F) e uma pomba (P) [1]. O falcão sempre aceita a luta ao passo que a pomba sempre desiste de brigar. O benefício de vencer a disputa é b e o custo devido à briga é $-c$. Se dois falcões se encontram, ambos aceitam a briga e um deles acaba vencendo a briga. Como ambos os falcões são igualmente fortes, cada um vence a luta com probabilidade $1/2$. Portanto o ganho de cada falcão é $(b-c)/2$. Quando um falcão encontra uma pomba, a pomba desiste de lutar. O ganho do falcão nessa situação é igual a b e o da pomba é igual a 0 . Nesse caso não há custo algum, pois não houve briga. Quando duas pombas se encontram, uma delas se retira primeiro, deixando a outra com todos os benefícios da vitória. Como cada uma das pombas se retira com probabilidade $1/2$, o ganho de cada uma será $b/2$. Novamente não há custo algum, pois não houve briga. A matriz de ganhos é dada por

		Jogador 2	
		F	P
Jogador 1	F	$\frac{b-c}{2}$	b
	P	0	$\frac{b}{2}$

Considere que $b < c$. Se o oponente adota F , é melhor adotar P . Se o oponente adota P é melhor adotar F .

2.2.1.4 Representação normal para o caso de dois jogadores

A representação de um jogo na forma normal contém (i) os jogadores, (ii) as estratégias possíveis e (iii) os ganhos auferidos por cada jogador, os quais dependem das combinações de estratégias. Denotemos por $n = 1, 2$ os jogadores e por $\Gamma = \{A, B\}$ o conjunto de estratégias disponível para os jogadores, com $s_n \in \Gamma$ sendo um elemento arbitrário desse conjunto. (s_1, s_2) é o perfil de estratégias dos dois jogadores e $u_n(s_1, s_2)$ é a função que determina o ganho do jogador n . Define-se o jogo como a estrutura $G = \{1, 2; \Gamma; u_1, u_2\}$.

Os exemplos apresentados nessa seção correspondem aos jogos simétricos de dois jogadores com duas estratégias disponíveis. Os possíveis perfis de estratégias são (A, A) , (A, B) , (B, A) e (B, B) . O perfil

(A, B) significa que o jogador 1 adota a estratégia A e o jogador 2 adota a estratégia B . Para cada um desses perfis, o jogador 1 possui um ganho definido pela função $u_1 : \{(A, A), (A, B), (B, A), (B, B)\} \rightarrow R$, em que R é o conjunto dos números reais. O valor $u_1(A, B)$ é o ganho do jogador 1 quando o jogador 1 adota a estratégia A e o jogador 2 adota a estratégia B . O valor $u_2(A, B)$ é o ganho do jogador 2 quando o jogador 1 adota a estratégia A e o jogador 2 adota a estratégia B . Esses valores podem ser convenientemente representados pela matriz de ganho do jogador 1

		Jogador 2	
		A	B
Jogador 1	A	$u_1(A, A)$	$u_1(A, B)$
	B	$u_1(B, A)$	$u_1(B, B)$

e pela matriz de ganho do jogador 2

		Jogador 1	
		A	B
Jogador 2	A	$u_2(A, A)$	$u_2(B, A)$
	B	$u_2(A, B)$	$u_2(B, B)$

Note que nos exemplos dessa seção, tem-se que $u_1(A, A) = u_2(A, A)$, $u_1(B, B) = u_2(B, B)$, $u_1(A, B) = u_2(B, A)$ e $u_1(B, A) = u_2(A, B)$. Os jogos em que os elementos da matriz de ganho possuem essa propriedade são chamados de jogos simétricos. Nesse caso é suficiente representar somente a matriz de ganho de um dos jogadores, pois o ganho do outro jogador é obtido apenas trocando os papéis dos jogadores. Um jogo simétrico entre dois jogadores com duas estratégias disponíveis fica bem representado pela matriz de ganho

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\
 \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}
 \end{array} \tag{2.26}$$

em que $a = u_1(A, A)$, $b = u_1(A, B)$, $c = u_1(B, A)$ e $d = u_1(B, B)$. Um jogador que adota a estratégia A ganha a se o oponente adota a estratégia A e ganha b se o oponente adota a estratégia B . Um jogador que adota a estratégia B ganha c se o oponente adota a estratégia A e ganha d se o oponente adota a estratégia B .

2.2.1.5 Equilíbrio de Nash

O equilíbrio de Nash é dado pela situação em que nenhum jogador tem incentivo unilateral de mudar de estratégia e aumentar o seu ganho. O equilíbrio de Nash é definido, em primeiro lugar, em termos do conceito da função “melhor resposta”, isto é, qual é a melhor resposta face à estratégia escolhida pelo oponente? Esse conceito formaliza a hipótese fundamental de que o ser humano realiza suas escolhas de forma a maximizar o seu ganho: se uma opção oferece um ganho maior, então essa opção será a escolhida em detrimento das demais [18]. Dessa forma a matriz de ganho deve representar todos os possíveis ganhos que influenciam a escolha dos jogadores. Indivíduos que agem assim são chamados de indivíduos instrumentalmente racionais. A segunda hipótese em que se baseia o equilíbrio de Nash é a de que ambos os jogadores sabem que o outro jogador também é instrumentalmente racional. Dessa forma, se eu sou instrumentalmente racional e sei que meu oponente também é instrumentalmente racional, isso significa que ambos tentaremos obter o maior ganho possível no jogo. A terceira hipótese é a de que ambos os jogadores conhecem a matriz de ganho e as estratégias disponíveis para ambos. O equilíbrio de Nash acontece na situação em que ambos os jogadores adotam a estratégia que é a melhor resposta para a estratégia do oponente.

Definição 1 (Equilíbrio de Nash) *Um perfil de estratégias (s_1^*, s_2^*) é um **equilíbrio de Nash** se, e somente se, cada estratégia s_1^* e s_2^* é a melhor resposta (BR) para a estratégia do outro jogador,*

$$s_1^* = BR(s_2^*), \quad s_2^* = BR(s_1^*). \quad (2.27)$$

A função melhor resposta $BR(s_2)$ fornece a estratégia s_1 que maximiza o valor de $u_1(s_1, s_2)$, dado que a estratégia s_2 esteja fixa. Da mesma forma, a função $BR(s_1)$ fornece a estratégia s_2 que maximiza o valor de $u_2(s_1, s_2)$, dado que a estratégia s_1 esteja fixa.

Nos jogos simétricos é usual definir o equilíbrio de Nash simétrico. Um perfil de estratégia (s_1^*, s_2^*) é um **equilíbrio de Nash simétrico** se, e somente se, $s_1^* = s_2^*$. Nesse caso diz-se que a estratégia s_1^* é um equilíbrio de Nash simétrico.

Em termos da matriz de ganho 2.26, a condição para que cada uma das estratégias seja um equilíbrio simétrico de Nash é dada por

- A é um equilíbrio simétrico de Nash se $a \geq c$
- B é um equilíbrio simétrico de Nash se $d \geq b$

Em outras palavras, suponha que $a \geq c$ e que ambos os jogadores adotam A , isto é, que o perfil de estratégias é (A, A) . Se somente um dos jogadores mudar para a estratégia B , ele passará a ganhar c . Como $a \geq c$, é melhor permanecer com a estratégia A . É nesse sentido que o perfil (A, A) é um equilíbrio. Note que na definição do equilíbrio de Nash não se leva em consideração a possibilidade de que ambos os jogadores mudem ao mesmo tempo de estratégia, como, por exemplo, se eles entrassem em comum acordo.

No dilema do prisioneiro, se A representa a estratégia de permanecer em silêncio e B representa a estratégia de confessar, somente B é um equilíbrio de simétrico de Nash. No jogo da caça ao veado, se A representa a estratégia de caçar veado e B representa a estratégia de caçar lebre, tem-se que tanto A como B são equilíbrios simétricos de Nash.

No jogo falcão e pomba, se A representa a estratégia falcão e B representa a estratégia pomba, os equilíbrios de Nash são (A, B) e (B, A) , pois a melhor resposta é fazer exatamente o oposto do oponente. Note que essas duas soluções de equilíbrio não são simétricas. Contudo pode-se definir uma **estratégia mista**, em que se adota A com probabilidade p e B com probabilidade $1 - p$, com $p \in [0, 1]$. O ganho de uma estratégia p_1 contra uma estratégia p_2 é definido como sendo o ganho médio, e é dado por

$$E(p_1, p_2) = \frac{b}{2}(1 + p_1 - p_2 - \frac{c}{b}p_1p_2). \quad (2.28)$$

A estratégia $p^* = b/c$ é tal que $E(p^*, p^*) = E(p, p^*)$ para todo p . Como nenhum jogador possui incentivo unilateral para mudar da estratégia p^* , tem-se que p^* é um equilíbrio simétrico de Nash.

2.2.2 Jogos envolvendo N jogadores: o jogo de bens públicos

O dilema do prisioneiro, o jogo da caça ao veado e o jogo falcão e pomba envolvem apenas dois jogadores. A teoria de jogos formaliza uma grande diversidade de situações, como, por exemplo, jogos que envolvem mais de duas pessoas. Considere a seguinte situação, envolvendo N jogadores, conhecido como jogo de bens públicos [13]. A cada jogador é oferecida a oportunidade de contribuir com uma quantia d em dinheiro. O administrador do jogo recolhe a contribuição dos jogadores que decidiram contribuir. Em seguida o administrador multiplica a quantia total coletada por um fator R , com $1 \leq R \leq N$, e redistribui a quantia igualmente para todos os participantes do jogo, inclusive para os que não contribuíram. Se N_C jogadores contribuíram, o montante das contribuições é igual a dN_C . Após a multiplicação pelo fator R , o montante é distribuído uniformemente e cada jogador recebe do administrador uma quantia igual a RdN_C/N . Note que os jogadores que contribuíram foram sujeitos a um gasto igual a d . Portanto o ganho

final dos que contribuíram é igual a $RdN_C/N - d$, ao passo que o ganho final dos que não contribuíram é RdN_C/N . A estratégia de contribuir é classificada como cooperação e a estratégia de não contribuir é classificada como deserção.

O ganho de cada jogador é completamente definido pela sua estratégia e pela quantidade total de cooperadores N_C . Um cooperador, o jogador X, ganha $RdN_C/N - d$. Se o jogador X decidir não contribuir e se os demais jogadores permanecerem com as mesmas estratégias, o jogador X passa a ganhar $Rd(N_C - 1)/N$, pois a quantidade total de cooperadores diminuiu em uma unidade. Note que $Rd(N_C - 1)/N > RdN_C/N - d$ para qualquer valor de N_C . Dessa forma, dado que as estratégias dos demais jogadores estão fixas, a melhor resposta é não contribuir. O equilíbrio de Nash no jogo de bens públicos é aquele em que todos os jogadores não contribuem e cada jogador fica apenas com a quantidade inicial d . Mas se todos os jogadores cooperassem, cada um receberia $Rd - d$, o que seria melhor do que ganhar somente d . Novamente, existe um dilema: a solução dada pelo equilíbrio de Nash fornece um ganho menor do que o ganho caso os jogadores cooperassem. O jogo de bens públicos é a generalização do dilema do prisioneiro para o caso de mais de dois jogadores.

2.2.3 Forma geral dos jogos e teorema de Nash

A forma mais geral de um jogo pode envolver mais de dois jogadores, com cada jogador podendo adotar estratégias que estão disponíveis somente para ele e com funções de ganho diferentes para cada jogador. De uma forma geral, denotemos por $n = 1, \dots, N$ os jogadores; por $\Gamma_n = \{e_{n1}, \dots, e_{nQ}\}$ o conjunto de estratégias disponíveis para o jogador n , com $s_n \in \Gamma_n$ sendo um elemento arbitrário desse conjunto; por (s_1, \dots, s_N) o perfil de estratégias de todos os jogadores; e por $u_n(s_1, \dots, s_N)$ a função que determina o ganho do jogador n . Define-se o jogo como a estrutura $G = \{1, \dots, N; \Gamma_1, \dots, \Gamma_N; u_1, \dots, u_N\}$.

Com a forma geral dos jogos, incluindo-se as estratégias mistas nas quais cada estratégia é assumida com certa probabilidade, pode-se enunciar o teorema de Nash [11].

Teorema 1 (Nash 1950) *Em um jogo de n jogadores na forma normal $G = \{1, \dots, N; \Gamma_1, \dots, \Gamma_N; u_1, \dots, u_N\}$, se N é finito e Γ_i é finito para todo i , então existe ao menos um equilíbrio de Nash, possivelmente envolvendo estratégias mistas.*

Esse resultado é muito geral, pois existe uma grande variedade de situações que podem ser mapeadas no formalismo da teoria de jogos e, de acordo com o teorema, sempre existe uma solução de equilíbrio na qual nenhum dos jogadores tem incentivo unilateral de mudar de estratégia.

2.3 Evolução e teoria de jogos

John Maynard Smith introduziu o conceito de jogos na teoria evolutiva em seu livro “*Evolution and the Theory of Games*” [12], em que ele ilustrou a idéia com o seguinte exemplo. Imagine dois animais disputando um recurso. O recurso pode ser, por exemplo, o domínio de um território mais favorável. A posse do recurso aumenta a aptidão do detentor em b . Suponha que o animal que viva no habitat mais favorável produza, em média, 5 filhos, e o animal no habitat menos favorável produza 3 filhos. Portanto a posse do recurso aumenta a aptidão em $b = 2$. Para disputar o território, os animais podem aceitar ou abandonar a luta pelo território. As estratégias disponíveis são lutar (L) ou não lutar (NL). Essa situação é análoga ao jogo falcão e pomba, em que c reflete a diminuição da quantidade de filhos devidos aos danos provenientes da disputa. Nesse modelo simplificado, os ganhos na aptidão são representados pela seguinte matriz

$$\begin{array}{cc|cc}
 & & L & NL \\
 L & & \frac{1}{2}(b-c) & b \\
 NL & & 0 & \frac{b}{2}
 \end{array} \tag{2.29}$$

A disputa representada por esse jogo se dá entre dois indivíduos da mesma espécie. Suponha que as estratégias L e NL sejam determinadas geneticamente e que a mesma estratégia seja passada para a prole. Agora considere uma população de indivíduos adotando L ou NL . Ocasionalmente esses animais podem confrontar-se dois a dois disputando algum recurso. Suponha que os confrontos sejam aleatórios. Como resultado desses confrontos, a aptidão de cada animal será alterada. Seja x_L a fração de animais adotando a estratégia L e x_{NL} a fração de animais adotando a estratégia NL . Como os confrontos são aleatórios, a aptidão média de um indivíduo do tipo L e de um indivíduo do tipo NL são dadas por

$$f_L = f_0 + \frac{1}{2}(b-c)x_L + bx_{NL}, \tag{2.30}$$

$$f_{NL} = f_0 + \frac{b}{2}x_{NL}. \tag{2.31}$$

Nessas expressões o termo f_0 refere-se à aptidão basal, que nesse modelo é igual para todos os indivíduos. Como decorrência dos confrontos, animais com estratégias diferentes possuem taxas de reprodução diferentes. Portanto as estratégias mais bem adaptadas espalham-se na população através da seleção natural. Note que a aptidão de uma determinada estratégia depende da fração das estratégias presentes na população. Uma população desse tipo, em que os indivíduos interagem aleatoriamente é chamada de

população **bem misturada** (*well-mixed*).

De uma forma geral, no caso de duas estratégias A e B , sempre que o ganho na aptidão depende da interação entre pares, pode-se escrever os ganhos na forma matricial

$$\begin{array}{cc|cc}
 & & A & B \\
 A & \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline \end{array} & & \\
 B & \begin{array}{|c|c|} \hline c & d \\ \hline \end{array} & &
 \end{array} \tag{2.32}$$

Se x_A e x_B são as frações dos tipos A e B , respectivamente, com $x_A + x_B = 1$, e se os indivíduos interagem dois-a-dois de forma aleatória, a aptidão média pode ser escrita como

$$f_A = f_0 + ax_A + bx_B, \tag{2.33}$$

$$f_B = f_0 + cx_A + dx_B. \tag{2.34}$$

Na ausência de mutações, inserindo essas expressões na equação 2.15, tem-se que

$$\dot{x}_A = x_A(1 - x_A)[(a - b - c + d)x_A + b - d]. \tag{2.35}$$

As órbitas dessa equação encontram-se no simplex S_1 , que é o intervalo real $[0, 1]$. A análise das órbitas é mostrada na figura 2.3. Dependendo dos valores na matriz de ganho, as soluções da equação 2.35 são divididas em cinco classes:

1. A domina B , se $a > c$ e $b > d$. Numa população, esses valores implicam que a aptidão de A é sempre maior do que a de B . Portanto a seleção favorece o tipo A e o resultado final é uma população contendo somente indivíduos do tipo A , $x_A = 1$.
2. B domina A , se $a < c$ e $b < d$. Numa população, esses valores implicam que a aptidão de B é sempre maior do que a de A . Portanto a seleção favorece o tipo B e o resultado final é uma população contendo somente indivíduos do tipo B , $x_A = 0$.
3. A e B são bi-estáveis, se $a > c$ e $b < d$. Nesse caso a dinâmica depende da condição inicial. Existe um equilíbrio instável no interior do simplex $[0, 1]$ dado por $x^* = (d - b)/(a - b - c + d)$. Se $x_A(0) < x^*$, o resultado final é uma população contendo somente indivíduos do tipo A , $x_A = 1$. Se $x_A(0) > x^*$, o resultado final é uma população contendo somente indivíduos do tipo B , $x_A = 0$.

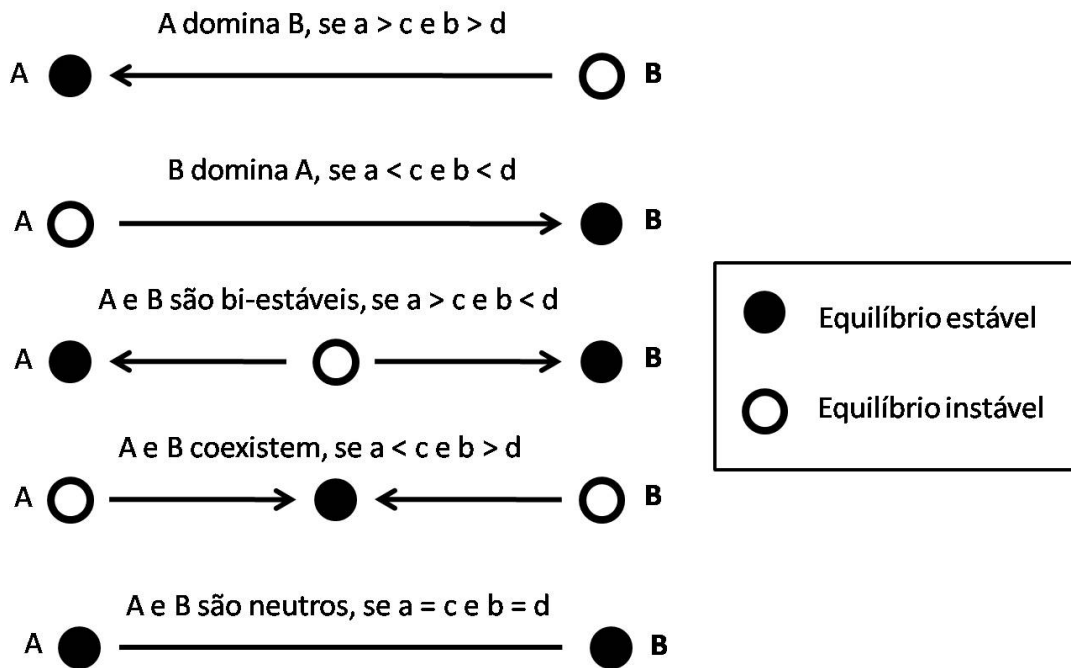


Figura 2.3: Representação das soluções da equação do replicador no caso de duas estratégias, A e B . Cada caso é determinado pelos parâmetros a , b , c , e d dados na matriz de ganho. Figura extraída de [1].

4. A e B coexistem, se $a < c$ e $b > d$. Existe um equilíbrio estável dado por x^* e o resultado final é sempre uma população composta por A e B .
5. A e B são neutros, se $a = c$ e $b = d$. Nesse caso a seleção não altera a composição inicial da população.

2.3.1 Dedução da equação do replicador via campo médio em processos microscópicos

A equação do replicador é obtida fazendo-se uma aproximação de campo médio no processo microscópico conhecido como regra da imitação. Suponha que numa população cada indivíduo possa escolher uma dentre m estratégias, a saber $\{e_1, \dots, e_m\}$, e que x_i é a fração de indivíduos adotando a estratégia e_i . Em cada intervalo de tempo um indivíduo escolhido aleatoriamente seleciona, também aleatoriamente, um indivíduo modelo na população e imita a estratégia do indivíduo modelo com certa probabilidade. A probabilidade de que num intervalo de tempo δt um indivíduo mude da estratégia e_j para e_i é dada por

$x_j x_i g_{ij} \delta t$, em que g_{ij} é a probabilidade de imitação. A equação de taxa é dada por

$$x_i(t + \delta t) - x_i(t) = \sum_{j=1}^N g_{ij} x_i x_j \delta t - \sum_{j=1}^N g_{ji} x_i x_j \delta t. \quad (2.36)$$

No limite $\delta t \rightarrow 0$, tem-se que

$$\dot{x}_i = x_i \sum_{j=1}^N (g_{ij} - g_{ji}) x_j. \quad (2.37)$$

Supondo que os jogadores interajam aleatoriamente entre si, se f_i é o ganho médio de um jogador adotando a estratégia e_i , a taxa g_{ij} que fornece a equação do replicador é dada por

$$g_{ij} = [f_i - f_j]_+, \quad (2.38)$$

em que $[x]_+ = x$ se $x > 0$ e $[x]_+ = 0$ se $x < 0$. Essa taxa de imitação é proporcional à diferença dos ganhos médios, o que quer dizer que as estratégias mais bem sucedidas são imitadas numa taxa maior. Substituindo a equação 2.38 na equação 2.37, tem-se que

$$\dot{x}_i = x_i \sum_{j=1}^N (f_i - f_j) x_j. \quad (2.39)$$

Como $\phi = \sum_{j=1}^N x_j f_j$ e $\sum_j x_j = 1$, obtém-se a equação do replicador na mesma forma da equação 2.15,

$$\dot{x}_i = x_i [f_i - \phi], \quad (2.40)$$

com $i = 1, \dots, m$.

O processo de imitação descreve como as estratégias se propagam através da aprendizagem social: uma estratégia que confere sucesso é imitada numa taxa maior. Outra forma de se modelar a propagação das estratégias é através de um processo de nascimento e morte, conhecido como processo de Moran, que será descrito na seção 2.3.2. Utilizando técnicas da física estatística, pode-se deduzir uma equação de campo médio para o processo de Moran [19], que é dada por

$$\dot{x}_i = \frac{1}{\phi} x_i [f_i - \phi], \quad (2.41)$$

onde f_i é a aptidão média de um indivíduo adotando a estratégia e_i e ϕ é a aptidão média. Essa equação é conhecida como equação do replicador ajustada.

Na seção 2.5 as diferenças entre o processos de imitação e o processo de Moran serão discutidos detalhadamente no contexto da evolução biológica e cultural. O fato importante é que ambos os processos modelam a evolução das estratégias numa população, sendo que as estratégias mais bem sucedidas propagam-se numa taxa maior.

2.3.2 Probabilidade de fixação de um mutante

Em uma população de tamanho finito suponha que as estratégias A e B estejam disponíveis e que todos os indivíduos sejam do tipo B . Se ocorrer uma mutação e um indivíduo tornar-se do tipo A , qual é a probabilidade de que esse tipo mutante se espalhe e domine a população? Essa probabilidade é chamada de probabilidade de fixação de um mutante do tipo A . Nessa seção vamos descrever com detalhes um processo de nascimento e morte, conhecido como processo de Moran, e derivar a expressão da probabilidade de fixação de um mutante [1].

Seja N o tamanho da população, i a quantidade de indivíduos adotando a estratégia A e $N - i$ a quantidade adotando B . O processo de Moran é definido no espaço $i = 0, \dots, N$. A cada intervalo de tempo, um indivíduo é aleatoriamente selecionado para morrer e outro indivíduo, com probabilidade proporcional à aptidão, é escolhido para reproduzir, gerando um filho. O filho adota a mesma estratégia do progenitor, pois a estratégia é um comportamento transmitido geneticamente. Dessa forma o tamanho da população permanece fixo. A aptidão é determinada pelo ganho proveniente do jogo.

Considere um jogo entre duas estratégias, A e B , com a matriz de ganho dada por

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\
 \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{array}{|cc|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}
 \end{array} \tag{2.42}$$

Vamos calcular o ganho médio de cada jogador. Suponha que os indivíduos interajam aleatoriamente dois a dois. A probabilidade de que um indivíduo do tipo A interaja com outro indivíduo também do tipo A é $(i - 1)/(N - 1)$. Já a probabilidade de que um indivíduo do tipo A interaja com algum indivíduo do tipo B é $(N - i)/(N - 1)$. Um indivíduo do tipo B interage com outro indivíduo também do tipo B com probabilidade $(N - i - 1)/(N - 1)$. Finalmente a probabilidade de que um indivíduo do tipo B interaja com algum indivíduo do tipo A é $i/(N - 1)$. O ganho médio de um indivíduo do tipo A é

$$F_i = \frac{a(i - 1) + b(N - i)}{N - 1}, \tag{2.43}$$

e o ganho médio de um indivíduo do tipo B é

$$G_i = \frac{ci + d(N - i - 1)}{N - 1}. \quad (2.44)$$

Note que o ganho médio depende da quantidade i de indivíduos do tipo A .

Em geral não se espera que o ganho proveniente do jogo seja o principal fator na determinação da aptidão. Por isso normalmente utiliza-se um parâmetro s , com $0 \leq s \leq 1$, que controla a intensidade do impacto do jogo no processo de seleção. As expressões da aptidão passam a ser escritas como

$$f_i = 1 - s + sF_i, \quad (2.45)$$

$$g_i = 1 - s + sG_i. \quad (2.46)$$

Se $s = 0$, o jogo não contribui em nada e ambos os tipos reproduzem-se com a mesma taxa. Se $s = 1$, a aptidão é inteiramente determinada pelo jogo. Se $s \ll 1$, obtem-se o limite de seleção fraca. Os termos f_i e g_i governam a taxa de reprodução dos tipos A e B , respectivamente.

Em cada passo, pode ser que um indivíduo do tipo B seja selecionado aleatoriamente para morrer, o que ocorre com probabilidade $(N - i)/N$, e que um indivíduo do tipo A reproduza, o que ocorre com probabilidade $if_i/(if_i + (N - 1)g_i)$. Nesse caso a variável de estado i sofre a transição $i \rightarrow i + 1$. A probabilidade dessa transição é dada por

$$p_{i,i+1} = \frac{if_i}{if_i + (N - 1)g_i} \frac{N - i}{N}. \quad (2.47)$$

Da mesma forma, a probabilidade de transição $i \rightarrow i - 1$ é dada por

$$p_{i,i-1} = \frac{(N - i)g_i}{if_i + (N - 1)g_i} \frac{i}{N}. \quad (2.48)$$

A probabilidade de que o estado não seja alterado é dada por

$$p_{i,i} = 1 - p_{i,i+1} - p_{i,i-1}. \quad (2.49)$$

Como em cada passo a variável i só pode variar em uma unidade, as demais probabilidades de transição são todas nulas. Note que se todos os indivíduos são do mesmo tipo, a população permanece inalterada, pois no processo que estamos definindo não há mutação. Portanto, se a população encontra-se no estado

$i = 0$ ou no estado $i = N$, ela permanece nesse estado para sempre. Os estados $i = 0$ e $i = N$ são chamados estados absorventes e $p_{0,0} = p_{N,N} = 1$.

Se z_i é a probabilidade de se alcançar o estado N partindo do estado i , tem-se que

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 \\ z_i &= p_{i,i-1}z_{i-1} + (1 - p_{i,i+1} - p_{i,i-1})z_i + p_{i,i+1}z_{i+1} \\ z_N &= 1 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Essa relação de recorrência pode ser resolvida analiticamente. Definamos as variáveis auxiliares $y_i = z_i - z_{i-1}$ e $\gamma_i = p_{i,i-1}/p_{i,i+1}$. Reorganizando os termos da equação 2.50, tem-se que

$$y_{i+1} = \gamma_i y_i. \quad (2.51)$$

Segue-se que $y_1 = z_1$, $y_2 = \gamma_1 z_1$, $y_3 = \gamma_1 \gamma_2 z_1$, ... Somando-se todas essas expressões tem-se que

$$y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_N = z_1 + \gamma_1 z_1 + \gamma_1 \gamma_2 z_1 + \dots + \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{N-1} z_1 = z_1 \left(1 + \sum_{j=1}^{N-1} \prod_{k=1}^j \gamma_k \right) \quad (2.52)$$

Note que $\sum_{i=1}^N y_i = z_N - z_0 = 1$. Portanto tem-se que

$$z_1 = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{N-1} \prod_{k=1}^j \gamma_k}. \quad (2.53)$$

A probabilidade z_1 é a probabilidade de que, se a população estiver no estado $i = 1$, ela atinja o estado $i = N$. Em outras palavras, se uma população de tamanho N possui $N - 1$ indivíduos do tipo B e um indivíduo do tipo A , a probabilidade de que, devido ao processo de nascimento e morte, o tipo A se espalhe por toda a população é dada por z_1 . A probabilidade z_1 é a probabilidade de fixação de um mutante do tipo A .

Se $s = 0$, a probabilidade de fixação de um mutante é dada por $z_1 = 1/N$ (basta colocar $s = 0$ na equação 2.53). Nesse caso todos os indivíduos possuem a mesma taxa de reprodução e o processo de seleção natural é neutro. Se $s \neq 0$, a estratégia mutante pode conferir ao indivíduo portador uma taxa de reprodução diferenciada. Se a probabilidade de fixação do mutante for $z_1 > 1/N$, diz-se que a seleção favorece o tipo mutante. Se a probabilidade de fixação do mutante for $z_1 < 1/N$, diz-se que a seleção inibe o tipo mutante [1].

2.3.3 Simulações computacionais

A teoria descrita na subseção 2.3.1 assume que os indivíduos interagem aleatoriamente dois a dois. Nesse caso abordagens do tipo campo médio fornecem equações como a equação do replicador e a expressão analítica da probabilidade de fixação de um mutante. Contudo, se a complexidade do modelo for maior, os modelos de evolução podem ser estudados somente através de simulações computacionais. Um caso simples em que as simulações computacionais são requeridas é quando os jogadores interagem com vizinhos dados por uma rede de interação [11].

Como as simulações dependem do caso que está sendo estudado, a descrição detalhada dos processos e de suas implementações serão apresentados nos capítulos 4, 5, 6 e 7.

2.4 Cooperação

O ato cooperativo pode ser representado como a doação de um benefício b que gera um custo c para o doador. O comportamento cooperativo é muitas vezes chamado de comportamento altruísta. Se numa interação entre dois indivíduos o indivíduo X adota o ato cooperativo e o indivíduo Y somente recebe os benefícios do ato cooperativo, em geral diz-se que o indivíduo X coopera com o indivíduo Y e o indivíduo Y não coopera com o indivíduo X . Na literatura biológica, diz-se que o indivíduo X é altruísta em relação ao Y [20]. À parte dessas discussões semânticas, a estratégia definida pelo ato cooperativo é chamada de cooperação (C) e a estratégia em que não se coopera é chamada de deserção (D). Quando dois cooperadores encontram-se, ambos ganham $b - c$. Quando um cooperador encontra com um desertor, o primeiro ganha $-c$ e o segundo ganha b . Quando dois desertores encontram-se, ambos ganham 0. Os ganhos podem ser representados pela matriz de ganho [21]

$$\begin{array}{cc|cc}
 & & C & D \\
 C & \begin{array}{|c|c|} \hline b-c & -c \\ \hline \end{array} & & \\
 D & \begin{array}{|c|c|} \hline b & 0 \\ \hline \end{array} & &
 \end{array} \tag{2.54}$$

Essa matriz pertence à classe do dilema do prisioneiro, cuja forma geral é da forma [1]

$$\begin{array}{cc|cc}
 & & C & D \\
 C & \begin{array}{|c|c|} \hline R & S \\ \hline \end{array} & & \\
 D & \begin{array}{|c|c|} \hline T & P \\ \hline \end{array} & &
 \end{array} \tag{2.55}$$

com $T > R > P > S$. O valor de T representa a tentação de desertar (*temptation*), R representa a recompensa resultante da cooperação mútua (*reward*), P representa a punição por ambos os jogadores terem desertado (*punishment*) e S representa a exploração do desertor (*sucker*). Na literatura da área, utiliza-se formas diferentes da matriz de ganho para estudar diferentes aspectos dos problemas pertencentes à classe do dilema do prisioneiro. Outra matriz muito utilizada é da forma [22]

$$\begin{array}{cc|cc}
 & & C & D \\
 C & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} & & \\
 D & \begin{array}{|c|c|} \hline b & 0 \\ \hline \end{array} & &
 \end{array} \tag{2.56}$$

Nessa forma simplificada, pode-se estudar o efeito do parâmetro b , que é interpretado como a tendência de desertar. Essa matriz é uma situação que é usualmente chamada de dilema do prisioneiro fraco [11], pois tem-se que $P = S$.

Como foi visto na subseção 2.2.1.1, a estratégia de deserção é um equilíbrio de Nash. Agora considere uma população bem misturada em que somente as estratégias C e D estejam disponíveis e considere a matriz de ganho 2.54. Se x é a fração de cooperadores em que os indivíduos interagem dois a dois de forma aleatória, o ganho médio de um cooperador e de um desertor são dados por

$$f_C = (b - c)x - c(1 - x) \quad \text{e} \quad f_D = bx.$$

Inserindo essas expressões na equação 2.15, tem-se que

$$\dot{x} = x(1 - x)(-c). \tag{2.57}$$

Note que o estado $x = 1$ é um repelente ao passo que $x = 0$ é um atrator. Portanto, numa população em que os indivíduos interagem aleatoriamente, a cooperação é eliminada, como mostrado na figura 2.4. Note

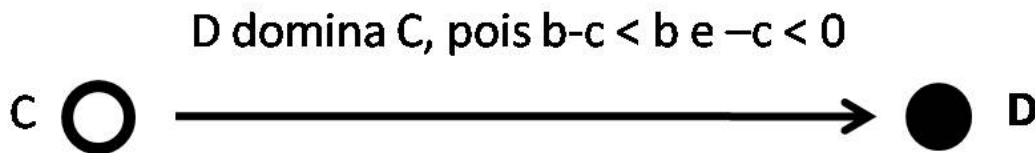


Figura 2.4: Representação da solução da equação do replicador para o dilema do prisioneiro dado pela matriz de ganho 2.54.

que tanto a teoria de jogos como a equação do replicador fornecem resultados coerentes: a deserção é um

equilíbrio de Nash e é um atrator da dinâmica em populações bem misturadas. Essa coerência reflete o resultado geral que diz que todo equilíbrio de Nash está associado a um ponto de equilíbrio na equação do replicador [23].

Com o que foi apresentado até a presente seção, a teoria evolutiva de jogos está em desacordo com a natureza, que exibe inúmeros casos de cooperação. Isso significa que mecanismos extras devem estar atuando no processo evolutivo. Antes de descrevermos os mecanismos adicionais responsáveis pela manutenção da cooperação, o que será feito no capítulo 3, alguns exemplos de cooperação que ocorrem na natureza serão descritos na próxima seção.

2.4.1 Vírus: bacteriófagos $\Phi 6$

Os bacteriófagos são vírus que infectam bactérias. Os vírus são compostos por DNA, ou RNA, envoltos numa cápsula protéica. Eles necessitam de um hospedeiro para se reproduzirem, pois misturam o seu próprio material genético ao material genético do hospedeiro a fim de utilizarem o aparato de replicação do hospedeiro. Quando o DNA do hospedeiro é replicado, os trechos do DNA viral são também replicados. Dessa forma, além de novos filamentos de DNA, ou RNA, as proteínas necessárias para formar novas cápsulas são também produzidas pelo hospedeiro. Em um experimento realizado com o bacteriófago $\Phi 6$ (composto por RNA) [24], foi verificada a existência de linhagens do bacteriófago $\Phi 6$ que não apresentam as sequências que codificam as proteínas. Essas linhagens, chamadas de ΦH , só conseguem se reproduzir na presença das linhagens com RNA completo. Quando ambas as linhagens infectam a mesma célula, a linhagem com RNA completo possibilita a produção das proteínas que são utilizadas por ambas linhagens. Contudo a linhagem ΦH se reproduz mais rapidamente, devido a fatores como a presença de sequências que possibilitam o processamento final preferencial da cápsula. A linhagem $\Phi 6$ produz matéria-prima que é explorada pela linhagem ΦH , sem que essa pague custo algum pela produção da matéria-prima. Nesse sentido, a linhagem $\Phi 6$ adota um comportamento cooperativo e é explorada pela linhagem ΦH . Quando ambas as linhagens infectam a mesma bactéria, foi verificado que a taxa de reprodução das linhagens ΦH depende da fração de ΦH na população. Representando a taxa de reprodução em termos da matriz de ganho foi possível inferir a matriz de ganho

$$\begin{array}{cc|cc}
 & & \Phi 6 & \Phi H \\
 \Phi 6 & & 1 & 0,65 \\
 \Phi H & & 1,99 & 0,83
 \end{array} \tag{2.58}$$

Essa é matriz de ganho pertence à classe do dilema do prisioneiro, sendo a linhagem $\Phi 6$ correspondente à estratégia cooperativa e a linhagem ΦH correspondente à estratégia não cooperativa.

2.4.2 Monera: *Pseudomonas*

O ferro é um elemento essencial na nutrição da bactéria patogênica do gênero *Pseudomonas* [25–27]. Contudo o ferro (FeIII) é altamente insolúvel, o que torna difícil a sua captação. O primeiro passo para a assimilação do ferro é a sua solubilização. Uma das formas possíveis de se obter a solubilização é através da ligação entre o átomo de ferro e outra molécula, produzida pela própria bactéria, usualmente chamada de sideróforo (no grego, “carregador de ferro”). O sideróforo se liga ao ferro e, através de receptores na membrana, ocorre a entrada do composto sideróforo-ferro no interior célula. A produção do sideróforo e dos receptores de membrana pela bactéria é regulada pela disponibilidade de ferro no meio externo: se o ferro encontra-se escasso, o sistema de captação é ativado.

O sideróforo ao ser liberado pode ser utilizado por qualquer bactéria que possua o sistema de captação de ferro. O sideróforo é um bem público, que está sujeito a exploração por indivíduos que não produzem o bem público. Uma bactéria que não produz sideróforo pode, sem custo algum, captar ferro à custa de outra bactéria que produz sideróforo. Dessa forma a produção de sideróforo é uma estratégia cooperativa, pois gera benefícios para outros indivíduos, ao passo que a não produção de sideróforo é uma estratégia não cooperativa, pois os jogadores que a utilizam recebem benefícios gerados por outros indivíduos sem pagar custo algum.

Ambas as estratégias são encontradas entre as bactérias do gênero *Pseudomonas*. As linhagens que não produzem sideróforos podem ser encontradas no fígado de pacientes com fibrose cística, ao passo que as linhagens que produzem sideróforos são as mais comuns. A fim de verificar a viabilidade evolutiva da produção de sideróforo, foram realizados alguns experimentos [26]. Nesses experimentos, a taxa reprodutiva de duas linhagens da bactéria *Pseudomonas aeruginosa*, a linhagem selvagem, que produz sideróforo, e a linhagem mutante, que não produz sideróforo, foram estudadas em diferentes regimes diferentes de concentração de ferro. No regime de alta concentração de ferro, a monocultura da linhagem mutante apresentou uma taxa de reprodução maior do que a monocultura da linhagem selvagem. No regime de baixa concentração de ferro, a monocultura da linhagem mutante apresentou uma taxa de reprodução menor do que a monocultura da linhagem selvagem. Esses resultados mostram que existe um custo para a produção de sideróforo e que sua produção é benéfica em regimes de falta de ferro. Na terceira parte do experimento, colocou-se a linhagem mutante juntamente com a linhagem selvagem e verificou-se que a taxa de reprodução da linhagem mutante é maior, o que mostra a exploração do

siderósforo produzido pela linhagem selvagem.

2.4.3 Protista: *Dictyostelium discoideum*

A espécie *Dictyostelium discoideum* é a ameba social mais estudada [28–30]. O seu habitat é o solo e ela se alimenta de bactérias. Quando há alimento suficiente, as amebas vivem como seres unicelulares. Na falta de alimento, as amebas se agregam formando um organismo multicelular e iniciam um processo de diferenciação celular. Parte das células –amebas– se transformam em um caule, enquanto a outra parte se transforma em um aglomerado de esporos, que são sustentados pelo caule. Esse novo organismo é chamado de corpo frutificante. Na ausência de alimentos, a ameba pode iniciar outros ciclos, como a formação de microcistos e macrocistos. Aqui enfocaremos o processo em que há a formação do corpo frutificante.

A formação do corpo frutificante é uma estratégia que a ameba desenvolveu para se manter viva em ambientes sem nutrientes. Como as amebas vivem no solo, o fato de os esporos serem sustentados por um caule facilita a dispersão dos esporos através de animais, micro-artrópodos e anelídeos, que transitam sob a superfície do solo. Devido ao ambiente hostil, as células do caule acabam morrendo, ao passo que as células que se transformaram em esporos podem encontrar um novo ambiente e retomar o ciclo de vida unicelular. Dessa forma as células que se transformam em esporos podem se reproduzir ao passo que as que se transformam em caule morrem. Em outras palavras, as amebas que formam o caule se sacrificam para que as outras, que formam os esporos, sobrevivam.

Algumas linhagens de amebas podem apresentar um comportamento que lhes facilita a transformação em esporos, deserção, ao passo que outras linhagens transformam-se preferencialmente em células do caule, cooperação. Dessa forma as amebas que compõem o caule cooperam com as amebas desertoras que compõem os esporos. Em um experimento [31] estudou-se a competição entre linhagens extraídas de seus habitat naturais. Sob a condição de falta de alimento, uma série de experimentos em que duas linhagens diferentes foram colocadas para competir em um mesmo ambiente mostraram a presença de linhagens que contribuíam mais para a formação dos esporos do que para a formação do caule.

2.4.4 Os insetos sociais

As formigas, as abelhas e as vespas pertencem à classe *Hymenoptera*. Esses animais vivem em sociedades caracterizadas pela eusocialidade. A eusocialidade é caracterizada pela presença de indivíduos especialistas na execução de determinadas tarefas e que ajudam na reprodução de outros indivíduos [32]. De forma

simplificada, é como se houvessem dois tipos de indivíduos. Os indivíduos do tipo A se reproduzem e o indivíduos do tipo B não se reproduzem. O tipo B ajuda na criação dos filhos do tipo A executando tarefas essenciais, como coleta de alimentos e manutenção da colméia ou formigueiro, ao passo que o tipo A apenas se dedica à reprodução. O tipo B é visto como cooperador e o tipo A como não cooperador.

No caso da abelha *Apis mellifera* existem 3 funções diferentes, que são executadas pela rainha, pelas operárias e pelos zangões. A abelha rainha possui a função reprodutora. As operárias coletam o alimento e cuidam da manutenção da colméia. Os zangões realizam a função de macho reprodutor. O problema da cooperação surge na explicação de como uma sociedade com essa divisão de trabalho pode surgir. As operárias garantem a taxa de reprodução das rainhas pagando um altíssimo custo evolutivo: elas não se reproduzem. Nesse sentido, a estratégia adotada pelas operárias é vista como cooperativa, pois elas pagam um custo reprodutivo para gerar um benefício reprodutivo para a rainha e os zangões [33].

2.4.5 Os seres humanos

Um ato cooperativo ocorre quando um indivíduo se sujeita a um custo para fornecer um benefício a uma outra pessoa. Os custos e benefícios relacionam-se aos recursos - como dinheiro, tempo, trabalho e comida - que estão envolvidos na interação. A cooperação pode ocorrer entre familiares, amigos ou mesmo entre estranhos. Comportamentos cotidianos, como dar carona para um amigo, emprestar algo para o vizinho, fazer comida para uma pessoa doente, participar de programas de reciclagem, compartilhar o alimento com outros, fazem parte de uma imensa lista de comportamentos que podem ser classificados como cooperativos [34].

O estudo empírico da cooperação entre os seres humanos é realizado por disciplinas como a antropologia, sociologia e a economia. Essas disciplinas possuem seus métodos próprios, como os estudos etnográficos [35, 36]. Em teoria de jogos, os experimentos econômicos são os estudos quantitativos mais utilizados. Esses experimentos não tentam reproduzir situações reais, com a imensa quantidade de efeitos psicológicos e culturais. Abstrai-se esses fatores e tenta-se focar nos comportamentos simples. O jogo de bem público, descrito na seção 2.2.2, é um exemplo de experimento para estudar o comportamento cooperativo dos seres humanos. Em um dos primeiros experimentos de jogos de bem público [37, 38], 256 jovens com idades entre 15 e 17 anos foram divididos em 64 grupos de 4 pessoas cada. A cada um foi dado uma quantidade de 5 dólares. Qualquer valor entre 0 e 5 dólares poderia ser investido no bem público. Obteve-se que aproximadamente 57% dos recursos foram investidos no bem público. Esse foi um dos primeiros resultados que indicaram que a solução racional proposta pela teoria de jogos, a de que não contribuir é a melhor solução, não é a solução escolhida de fato pelas pessoas. Vários experimentos como

esse foram realizados e vários mecanismos foram propostos para explicar o surgimento da cooperação. Alguns desses mecanismos serão descritos no capítulo 3.

2.5 Evolução genética e cultural

O modelo tradicional para o desenvolvimento de um comportamento baseia-se no fato de que o animal adquire os comportamentos típicos da sua espécie através da maturação dos programas embutidos no seu material genético (os instintos) juntamente com a exploração do ambiente [39]. Os comportamentos são transmitidos geneticamente de forma que os indivíduos com características melhor adaptadas reproduzem-se numa taxa maior. À medida que a capacidade cognitiva se desenvolveu, os animais adquiriram a capacidade de aprendizagem social. A aprendizagem social pode ser definida como uma mudança no cérebro produzida por uma experiência derivada da influência de outros indivíduos da mesma espécie [39]. Com isso os comportamentos podem ser transmitidos de um indivíduo para outro através do fenômeno da aprendizagem social, constituindo um processo de evolução cultural [40]. A aprendizagem social nos animais é um pouco restrita e passível de alguns debates conceituais [39, 41], mas entre os seres humanos, a aprendizagem social é extremamente importante. Os seres humanos aprendem socialmente de várias formas. Duas delas têm sido mais estudadas: transmissão por conformismo [42–44] e imitação de indivíduos bem sucedidos [45]. Na transmissão por conformismo, copia-se o comportamento da maioria. No outro caso, imita-se o comportamento dos indivíduos que, no comportamento em questão, são bem sucedidos.

No caso dos animais mais simples, a evolução no nível genético é suficiente para explicar a cooperação. No caso dos seres humanos, somente a base genética é insuficiente, sendo necessário introduzir o processo de evolução cultural [4, 5]. Alguns estudos indicam que a evolução da cooperação entre os seres humanos evolui essencialmente devido à transmissão cultural e que a variação genética entre povos de culturas diferentes é insuficiente para explicar as diferenças culturais [46].

Nos modelos da teoria evolutiva de jogos, tanto a evolução biológica como a evolução cultural podem ser modelados. O processo de nascimento e morte é uma forma de representar a evolução genética. Os indivíduos se reproduzem a uma taxa proporcional à aptidão e, como a prole herda a mesma estratégia, as estratégias podem se espalhar na população. O processo de imitação é uma forma de representar a evolução cultural. No processo de imitação não há nascimento e morte de indivíduos. As estratégias se espalham na população simplesmente devido ao processo de imitação dos jogadores mais bem sucedidos, onde o sucesso é medido pelo ganho cumulativo proveniente das interações. Note que tanto na evolução

biológica como na cultural, as estratégias que conferem um ganho maior possuem uma taxa de reprodução maior. Portanto existe um processo análogo à seleção natural ocorrendo no nível cultural [5, 47].

A regra da imitação baseia-se no fato de os indivíduos apresentarem uma tendência a imitar o comportamento dos jogadores mais bem sucedidos [34, 45]. O sucesso é relacionado aos ganhos provenientes das interações. Se um jogador adota cooperação e o seu ganho é alto, isso pode significar para outro jogador que adotar cooperação é uma boa estratégia. Esse processo de aprendizagem social baseia-se também em outro fato, o de que os seres humanos têm uma racionalidade limitada [18]. Se os seres humanos fossem perfeitamente racionais, no sentido apresentado na seção 2.2, a deserção seria sempre a estratégia adotada, pois a deserção é um equilíbrio de Nash. Contudo, dificilmente os indivíduos conseguem identificar as situações, mapeá-las formalmente como um dilema do prisioneiro, enumerar todas as possíveis estratégias e definir a estratégia que é um equilíbrio de Nash, além de serem fortemente influenciados por emoções. Para compensar a racionalidade limitada, os seres humanos desenvolveram regras heurísticas que os orientam no processo de aprendizagem [34]. A regra de imitação é um desses processos heurísticos.

Capítulo 3

Mecanismos cooperativos

A análise da equação do replicador e da teoria de jogos no estudo do dilema do prisioneiro fornecem o mesmo resultado: a deserção é a estratégia dominante. Contudo a cooperação é um comportamento que está presente em praticamente todos os reinos animais, incluindo os seres humanos. Por isso surge a questão: quais mecanismos são capazes de sustentar a cooperação dado que ela é onerosa para o cooperador? Essa é a pergunta fundamental no problema da cooperação. Nesse capítulo alguns mecanismos que são capazes de promover a cooperação são apresentados. Em particular descreveremos cinco mecanismos que foram sintetizados por M. A. Nowak [21] e, mais recentemente, por M. A. Nowak e R. Highfield [48] (seleção de parentesco, seleção de grupo, reciprocidade direta, reciprocidade indireta e reciprocidade de rede).

3.1 Seleção de parentesco e seleção de grupo

O conceito de seleção de parentesco surgiu pela primeira vez na obra *A Origem das Espécies*, de Charles Darwin. Em suas observações sobre os insetos sociais, o fato de existir castas de insetos que são estéreis, como as abelhas operárias, parecia ser um problema insuperável para sua teoria, como ele próprio menciona em sua obra:

“one especial difficult, which at first appeared to me insuperable, and actually fatal to my whole theory.”

Darwin elaborou suas primeiras explicações dos comportamentos sociais a partir de observações de seleção artificial:

“Thus, a well-flavoured vegetable is cooked, and the individual is destroyed; but the horticulturist sows seeds of the same stock, and confidently expects to get nearly the same variety...”

De forma similar, a natureza talvez pudesse selecionar as variedades altruístas que direcionam o benefício para os familiares. Apesar dessa analogia, a explicação para os comportamentos altruístas, como a esterilidade, foi relegado para a posteridade.

O mecanismo em que o benefício de um comportamento altruísta é dirigido somente para os familiares foi chamado de **seleção de parentesco**, termo cunhado por J.M. Smith [49]. Esse mecanismo baseia-se no fato de que indivíduos ligados por parentesco possuem uma chance maior de compartilhar os genes responsáveis pelo comportamento altruísta. Dessa forma, se o doador altruísta diminui a sua aptidão em prol de um parente, a aptidão do parente será aumentada. Isso significa que o gene altruísta se espalhará na população não por causa da maior aptidão do doador altruísta, mas por causa da maior aptidão do parente altruísta. Se o indivíduo altruísta beneficiasse um indivíduo sem nenhum grau de parentesco, a chance de que ambos possuam os mesmos genes altruístas é menor. Nesse caso a aptidão do altruísta diminuiria, a aptidão do não altruísta aumentaria e, como consequência, a frequência do gene altruísta na população diminuiria.

Um dos primeiros modelos de seleção de parentesco capaz de formular condições quantitativas para a seleção de comportamentos altruístas foi elaborado por W.D. Hamilton [6], em 1964. Em seu modelo de genética de populações, em que b é o benefício, c é o custo do ato altruístico e r é a fração média de genes idênticos por descendência entre dois indivíduos numa população, um comportamento altruísta é favorecido se

$$r > \frac{c}{b}.$$

Para que numa população o coeficiente de parentesco r fosse suficientemente alto, Hamilton sugeriu dois mecanismos possíveis: dispersão limitada e discriminação de parentes [6]. Na dispersão limitada, a prole permanece perto dos familiares e os indivíduos que interagem entre si são todos familiares uns dos outros. Na discriminação de parentes, os indivíduos podem distinguir um parente de um não parente. Esses mecanismos, apesar de terem sido observados em várias espécies [50–53], tem sido alvo de alguns debates, que, na maioria dos casos, são puramente semânticos [53, 54] e, em outros casos, são devidos a interpretações erradas das evidências empíricas [55].

Em todos os casos que são explicados pela seleção de parentesco, o aspecto fundamental é o fato de que indivíduos altruístas interagem mais entre si do que com indivíduos não altruístas [56]. Quando isso ocorre, a aptidão dos altruístas é maior do que a aptidão dos não altruístas. Por exemplo, se uma população é

dividida em grupos, os indivíduos pertencentes a um grupo composto somente por cooperadores possuem uma aptidão maior do que os indivíduos pertencentes a um grupo composto somente por desertores. Se tal separação ocorre, o surgimento da cooperação pode ser favorecido. O impacto da estrutura de grupo é chamado de **seleção de grupos** [57–59]. A relação entre a seleção de parentesco e a seleção de grupos é campo de intenso debate [60–63], em que, por um lado, defende-se que seleção de grupo e a seleção por parentesco são processos distintos e, por outro lado, argumenta-se que são dois conceitos para um único processo.

3.2 Reciprocidade direta

A reciprocidade direta é o mecanismo presente no caso em que a interação entre dois jogadores é composta por múltiplas rodadas, sendo que em cada rodada pode-se adotar cooperação (C) ou deserção (D) [1]. Considere a matriz de ganho do dilema do prisioneiro referente a uma única rodada,

$$\begin{array}{cc|cc}
 & & C & D \\
 C & \boxed{R} & \boxed{S} & \\
 D & \boxed{T} & \boxed{P} &
 \end{array} \tag{3.1}$$

com $T > R > P > S$. Suponha que os dois jogadores joguem m vezes o dilema do prisioneiro e que as estratégias disponíveis sejam cooperar em todas as rodadas (essa estratégia é chamada de $ALLC$) e desertar em todas as rodadas (essa estratégia é chamada de $ALLD$). Os possíveis resultados da interação entre essas estratégias são

	m vezes					m vezes			
$ALLC$	C	C	...	C	$ALLC$	C	C	...	C
$ALLC$	C	C	...	C	$ALLD$	D	D	...	D
	m vezes					m vezes			
$ALLD$	D	D	...	D	$ALLD$	D	D	...	D
$ALLD$	D	D	...	D					

Tabela 3.1: Confronto das estratégias $ALLC$ e $ALLD$ em m rodadas do dilema do prisioneiro.

A matriz que representa o ganho total após as m rodadas é dada por

$$\begin{array}{cc|cc}
 & & ALLC & ALLD \\
 ALLC & \boxed{mR} & \boxed{mS} & \\
 ALLD & \boxed{mT} & \boxed{mP} &
 \end{array} \tag{3.2}$$

Considere agora a estratégia em que se coopera na primeira rodada e, nas rodadas subsequentes, faça exatamente o que o oponente fez na rodada anterior. Essa estratégia é chamada de *TFT* (do inglês *tit for tat*). Suponha que as estratégias *TFT* e *ALLD* estejam disponíveis e que os jogadores jogam m vezes. Os possíveis resultados da interação entre essas duas estratégias é

<i>TFT</i>	C	C	...	C	<i>TFT</i>	C	D	...	D
<i>TFT</i>	C	C	...	C	<i>ALLD</i>	D	D	...	D

<i>ALLD</i>	D	D	...	D
<i>ALLD</i>	D	D	...	D

A matriz que representa o ganho total após as m rodadas é dada por

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \text{TFT} & \text{ALLD} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \text{TFT} \\ \text{ALLD} \end{array} & \begin{array}{|cc|}
 \hline
 & \begin{array}{cc} mR & S + (m - 1)P \end{array} \\
 \hline
 & \begin{array}{cc} T + (m - 1)P & mP \end{array} \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array} \tag{3.3}$$

Considere o caso em que $m > (T - P)/(R - P)$. Se o oponente adota *TFT*, a melhor resposta é também adotar *TFT*. Se o oponente adota *ALLD*, a melhor resposta é adotar *ALLD*, pois $P > S$. Apesar da cooperação não ser a única boa resposta, ao menos existe um cenário em que ela é uma boa resposta. Na análise do dilema do prisioneiro apresentada na seção 2.2.1.1, a única boa resposta é a deserção. O fato de existirem múltiplas rodadas possibilita a criação de estratégias que condicionam o comportamento de um jogador em relação ao outro, gerando reciprocidade entre os jogadores. Essa reciprocidade, chamada de reciprocidade direta, cria um ambiente em que a cooperação pode existir.

No dilema do prisioneiro repetido, a quantidade de estratégias é enorme. Suponha que dois jogadores joguem o dilema do prisioneiro m vezes. Uma estratégia determinística é definida como a regra que determina o que fazer na rodada $n + 1$ dado cada possível combinação de resultados ocorridos nas rodadas $1 \dots n$. Por exemplo, em cada rodada cada jogador poder adotar C ou D . Se e_1 é a estratégia adotada pelo jogador 1 e e_2 é a estratégia adotada pelo jogador 2, denotemos por $e_1 e_2$ a combinação de estratégias em uma dada rodada. As possíveis combinações de resultados dos dois jogadores são CC , DD , CD e DC . Uma estratégia que considera somente a rodada anterior prescreve, para cada um desses quatro resultados possíveis, a decisão de cooperar ou não na próxima rodada. Portanto existem $2^4 = 16$ estratégias que consideram somente a rodada anterior. De maneira geral, existem 2^{4^m} estratégias que consideram as últimas m rodadas.

Existe um problema no que foi exposto até agora. Por que um indivíduo racional adotaria a estratégia *TFT* durante as m rodadas? Suponha, inicialmente, que dois jogadores joguem o dilema do prisioneiro m vezes e que a quantidade de rodadas seja de conhecimento comum dos dois jogadores. Como ambos sabem que após a m -ésima rodada o jogo terminará, na última rodada a deserção é um equilíbrio de Nash no dilema do prisioneiro repetido. Se na última rodada a deserção é a solução esperada, na $(m - 1)$ -ésima rodada não há incentivo para mútua cooperação e, novamente, a deserção é a melhor resposta para cada jogador. Seguindo esse argumento conclui-se que, no caso em que dois jogadores se encontram repetidas vezes, a deserção em todas as rodadas é a estratégia vencedora. Portanto a solução em que ambos os jogadores desertam em todas as rodadas é um equilíbrio de Nash [1]. Note que esse argumento se baseia no fato de que ambos os jogadores sabem com certeza a quantidade de rodadas em que ele se enfrentarão. Contudo, em experimentos realizados com seres humanos, a solução baseada no argumento indutivo é raramente adotada [64], pois os participantes dos experimentos cooperam em várias rodadas. O que acontece de fato é que grande parte das interações entre os seres humanos se dão em grupos em que as pessoas se encontram repetidas vezes, de forma que há a possibilidade de interação com o mesmo parceiro no futuro. Isso acrescenta à psicologia do indivíduo o efeito conhecido como a sombra do futuro [65]. Portanto, mesmo que numa sequência de m rodadas os jogadores saibam que após a m -ésima rodada o jogo termina, a emoção determinada pela sombra do futuro faz com que eles se comportem como se pudessem interagir novamente no futuro, o que inviabiliza a solução dada pelo argumento indutivo. Uma maneira de se formalizar a possibilidade de interações futuras é definir uma probabilidade w de que haja uma próxima rodada. Nesse caso a quantidade esperada de rodadas é igual a $\bar{m} = 1/(1 - w)$. O ganho esperado dos jogadores é dado pela matriz 3.3 substituindo-se m por \bar{m} . Sob o efeito da sombra do futuro o argumento indutivo não é mais válido e a cooperação pode ser estabelecida através de estratégias como a *TFT*.

Como a quantidade de estratégias nos jogos repetidos é muito grande, explorar analiticamente todas as possibilidades é extremamente difícil. O cientista político Robert Axelrod criou um torneio em que as pessoas podiam submeter estratégias para o dilema do prisioneiro repetido [65]. A quantidade de rodadas não foi informada a fim de se evitar o argumento indutivo. A idéia do torneio era a de colocar cada par de estratégias para jogar o dilema do prisioneiro repetido. Todas as estratégias se enfrentariam. O ganho obtido em cada jogo seria somado de modo que, no final, cada estratégia possuiria o ganho total resultante dos confrontos repetidos com cada uma das demais estratégias. A estratégia vencedora seria a que acumulasse o maior ganho. Para surpresa geral, a estratégia vencedora era extremamente simples. A grande vencedora foi a *TFT*. O mais curioso é que Axelrod realizou um segundo torneio e novamente a

TFT foi a grande vencedora.

A reciprocidade direta é um mecanismo que se estabelece no nível da interação entre dois jogadores. O que acontece numa população em que os indivíduos interagem aleatoriamente dois a dois quando as interações entre os indivíduos são do tipo em que há reciprocidade direta? Em outras palavras, o que ocorre numa população bem misturada sujeita à seleção quando cada interação é composta por rodadas repetidas do dilema do prisioneiro? Para ilustrar a dinâmica evolutiva, vamos estudar a evolução da estratégia *TFT* em uma população em que outras duas estratégias estão presentes, *ALLC* e *ALLD* [23].

Consideremos uma população em que os indivíduos interagem aleatoriamente. Em cada interação o jogo do dilema do prisioneiro repetido é jogado. Ao invés de se fixar a quantidade de rodadas, suponha que, após uma rodada, outra rodada aconteça com probabilidade $w < 1$. A probabilidade de que o jogo tenha $n + 1$ rodadas é dada por $w^n(1 - w)$ (a rodada inicial seguida de n rodadas). O valor esperado da quantidade de rodadas é

$$1(1 - w) + 2w(1 - w) + \dots + nw^{n-1}(1 - w) + \dots = \frac{1}{1 - w}.$$

Suponha que em cada ato cooperativo o cooperador forneça um benefício b e pague um custo c . Em um confronto *ALLC* v.s. *ALLC*, ambos os jogadores cooperam. Portanto em cada rodada o ganho de cada jogador é igual a $b - c$. Como o valor esperado da quantidade de rodadas é igual a $1/(1 - w)$, o ganho cumulativo resultante de um confronto *ALLC* v.s. *ALLC* é igual a $(b - c)/(1 - w)$. No confronto *ALLC* v.s. *ALLD*, em cada rodada o ganho da estratégia *ALLC* é igual a $-c$, de forma que o ganho cumulativo é igual a $-c/(1 - w)$. Procedendo de maneira análoga, pode-se obter a matriz de ganho por rodada que é dada por

	ALLC	ALLD	TFT	
ALLC	$b - c$	$-c$	$b - c$	(3.4)
ALLD	b	0	$b(1 - w)$	
TFT	$b - c$	$-c(1 - w)$	$b - c$	

Na matriz acima o termo $(1 - w)^{-1}$ foi omitido, isto é, apenas o ganho médio por rodada está representado.

Suponha que as estratégias se espalhem de acordo com a regra da imitação. Dessa forma a dinâmica macroscópica é dada pela equação do replicador 2.15. Sejam x , y e z as frequências de *ALLC*, *ALLD* e *TFT*, respectivamente, com $x + y + z = 1$. A equação do replicador é dada por

$$\dot{x} = x(f_x - \phi),$$

$$\dot{y} = y(f_y - \phi),$$

$$\dot{z} = y(f_z - \phi),$$

em que $f_x = (b - c)x - cy + (b - c)z$, $f_y = bx + b(1 - w)z$ e $f_z = (b - c)x - c(1 - w)y + (b - c)z$ são os ganhos médios de cada estratégia e $\phi = xf_x + yf_y + zf_z$ é o ganho médio de um jogador na população. Note que o termo $(1 - w)^{-1}$ que foi omitido na matriz de ganho apenas introduz um fator constante na escala de tempo.

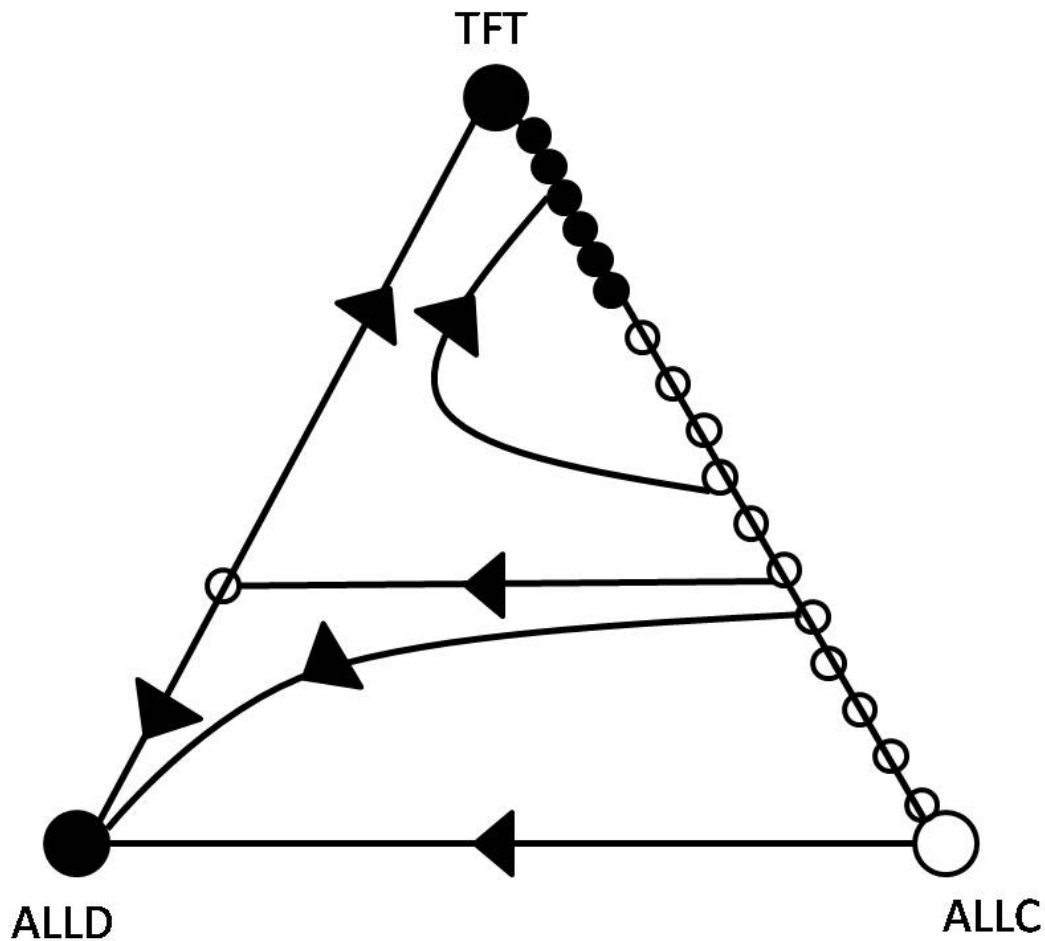


Figura 3.1: Representação das soluções da equação do replicador na presença de reciprocidade direta. Os círculos preenchidos representam pontos fixos estáveis e os círculos não preenchidos pontos fixos instáveis. As estratégias presentes são: cooperação em todas as rodadas (*ALLC*), deserção em todas as rodadas (*ALLD*) e reciprocidade direta (*TFT*). Se $w > c/b$, dependendo da condição inicial, a cooperação domina a população. Figura extraída do livro [23].

Se $w > c/b$, a solução analítica é mostrada na fig. 3.1. Na região em que $z = 0$, isto é, quando só

há indivíduos adotando *ALLC* e *ALLD*, a população converge para o estado em que só há *ALLD*. Na região em que $x = 0$, isto é, quando só há indivíduos adotando *ALLD* e *TFT*, se $w > c/b$ existe um ponto de equilíbrio instável dado por

$$\hat{x} = 0, \quad \hat{y} = 1 - \hat{z}, \quad \hat{z} = \frac{(1-w)c}{w(b-c)}.$$

Se w é próximo de 1, o valor de \hat{z} é bem pequeno. Isso significa que basta uma pequena quantidade de *TFT* para que a estratégia *TFT* espalhe na população. Em outras palavras, se a chance de haver interações futuras é alta, $w \sim 1$, a cooperação é altamente favorecida, pois a quantidade de condições iniciais que convergem para uma população composta somente pelas estratégias *ALLC* e *TFT* aumenta. Note que, como a *TFT* começa com cooperação, as interações entre *ALLC* e *TFT* são de cooperação. Portanto uma população composta somente por jogadores adotando *ALLC* e *TFT* pode ser caracterizada como cooperativa.

Como vimos, o espaço das estratégias para o dilema do prisioneiro repetido é imenso. A grande parte dos estudos foram concentrados nas estratégias que consideram apenas o resultado da rodada anterior [66–73]. Esses estudos são todos feitos seguindo o paradigma de colocar as estratégias numa população e sujeitá-las a um processo de seleção, estudando-se, em cada caso, as condições em que a cooperação emerge.

3.3 Reciprocidade indireta

A reciprocidade indireta é o mecanismo presente no caso em que um indivíduo joga múltiplas rodadas com oponentes diferentes em cada rodada. Da mesma forma que na reciprocidade direta, cada jogador joga m rodadas e em cada rodada pode adotar cooperação (C) ou deserção (D).

A análise da reciprocidade indireta será restrita a um subconjunto das estratégias possíveis, conforme descrito por K. Sigmund [23]. Nesse subconjunto considera-se que a estratégia de um jogador X na rodada n pode ser condicionada a partir de duas informações: (i) o que aconteceu com o próprio jogador X na rodada $n - 1$ ou (ii) o que o oponente do jogador X na rodada n fez na rodada $n - 1$ em relação a algum outro jogador. O primeiro caso é chamado de reciprocidade extraviada (*misguided reciprocity*). O jogador A coopera com o jogador X na rodada $n - 1$ e, agindo por reciprocidade, o jogador X coopera com outro jogador C na rodada n . O segundo caso é chamado de reciprocidade vicária (*vicarious reciprocity*). O jogador X decide se coopera ou não com o jogador C na rodada n condicionado à informação do jogador C ter cooperado ou não na rodada $n - 1$. No caso da reciprocidade extraviada, o comportamento

humano é justificado pela presença de emoções que ativam processos fisiológicos [74–76], como a emoção de gratidão [77, 78]. No caso da reciprocidade vicária, os jogadores baseiam suas decisões no que os oponentes fizeram com os outros. Dependendo do que o oponente fez, ele pode ser julgado como bom ou ruim, o que vai alterar o comportamento dos demais jogadores em relação a ele. A reciprocidade vicária é baseada, portanto, na formação de reputação e confiança [79, 80]. Ter uma boa reputação pode atrair atos cooperativos.

Para ilustrar a dinâmica evolutiva na presença de reciprocidade indireta, vamos analisar o tipo mais simples de estratégia que considera a reciprocidade vicária [81]. Novamente o cooperador fornece um benefício b e paga um custo $-c$, ao passo que o desertor pode receber o benefício sem pagar custo algum. A dinâmica evolutiva decorre do seguinte processo microscópico. Os jogadores são pareados de forma aleatória e jogam uma rodada do dilema do prisioneiro. Os jogadores são misturados e novamente pareados, jogando mais uma rodada do jogo. Esse procedimento se repete m vezes. Cada jogador possui um ganho acumulado durante as m rodadas. Em seguida um evento de nascimento e morte ocorre e novamente joga-se m rodadas. No processo de nascimento, um jogador é escolhido com probabilidade proporcional ao ganho total que o jogador acumulou ao longo de sua vida. Esse jogador gera um descendente que adota a mesma estratégia. No processo de morte um jogador é aleatoriamente escolhido para ser substituído pelo novo jogador. Dessa forma o tamanho da população permanece fixo. Considerando uma população grande, a chance de que dois jogadores se encontrem mais de uma vez é extremamente pequena. Cada jogador adota uma dentre três estratégias: *ALLC*, *ALLD* e *REC*. Um jogador adotando *ALLC* coopera sempre e um jogador adotando *ALLD* deserta sempre. Um jogador adotando *REC* sabe, com probabilidade q , o que o oponente fez na rodada anterior (através de observação direta ou através de espalhamento de rumores). Ele coopera se o oponente tiver cooperado na rodada anterior e não coopera caso o oponente não tenha cooperado na rodada anterior. Caso o jogador adotando *REC* não tenha informação sobre a reputação do oponente, o que ocorre com probabilidade $1 - q$, ele sempre coopera. O jogador adotando *REC* sempre coopera na primeira rodada. Note que o fato de um jogador ter cooperado na rodada anterior o define como de boa reputação. Sejam x , y e z as frações de jogadores adotando as estratégias *ALLC*, *ALLD* e *REC*, respectivamente. A solução da equação do replicador para esse processo está representada na figura 3.2. Se $q < c/b$, o resultado final é uma população composta somente por desertores, isto é, $y = 1$ é um atrator global. Se $q > c/b$, existe uma linha de pontos fixos, a saber $z = c/bq$. Dependendo da condição inicial é possível haver coexistência das três estratégias. Note que, quanto menor o valor de c/bq , maior é a quantidade de órbitas que convergem para o estado cooperativo. Em outras palavras, quanto maior o conhecimento da reputação alheia ou quanto menor a relação custo benefício do ato cooperativo,

maior será a cooperação na população [23].

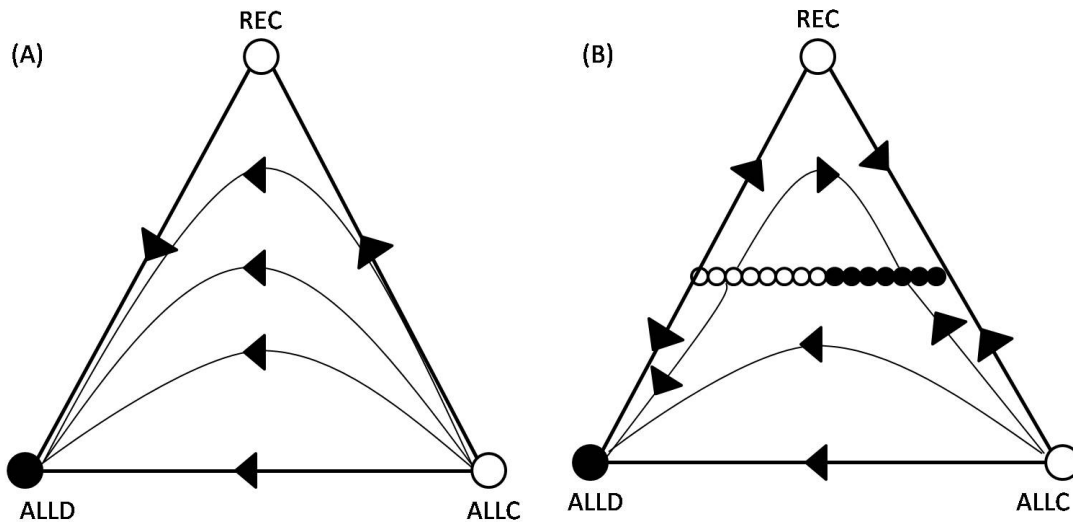


Figura 3.2: Representação da solução da equação do replicador na presença de reciprocidade indireta. Os círculos preenchidos representam pontos fixos estáveis e os círculos não preenchidos pontos fixos instáveis. As estratégias presentes são: cooperação (*ALLC*), deserção (*ALLD*) e reciprocidade indireta (*REC*). Na figura (A) tem-se $q < c/b$ e os desertores dominam a população. Na figura (B) tem-se $q > c/b$ e existe um segmento de pontos fixos no interior do simplex. Nesse caso é possível haver coexistência das três estratégias. Figura extraída do artigo [81].

Na estratégia *REC* adota-se cooperação se o oponente tiver boa reputação e deserção se o oponente tiver má reputação. Mas a recusa de cooperar por parte do jogador *REC* tem como consequência torná-lo um jogador com má reputação, o que diminui a chance de ele receber benefícios. Outra forma de se avaliar a reputação consiste-se em diferenciar o ato não cooperativo que é justificável do que é injustificável. Por exemplo, um jogador que não coopera com um jogador de má reputação pode adquirir uma boa reputação. Um modelo simples de sistemas morais que define o que é uma boa reputação e prescreve o que fazer dada a reputação do oponente foi estudado considerando-se modelos binários, em que cada jogador é julgado simplesmente como bom ou mal. Esses sistemas morais binários são divididos em dois módulos: o módulo de avaliação e o módulo de ação. No módulo de avaliação, o jogador *C* observa a interação entre os jogadores *A* e *B* e julga os jogadores *A* e *B* em termos de bom ou mal. No módulo de ação, o jogador decide cooperar ou não com o oponente dependendo de sua avaliação do oponente [82].

3.4 Reciprocidade de rede

A reciprocidade de rede é o mecanismo presente quando os jogadores interagem com oponentes fixos dados por uma rede de interação. Os jogadores são colocados nos nós de uma rede de interação e cada jogador

joga o dilema do prisioneiro com cada um dos vizinhos determinados pela rede de interação.

O primeiro modelo introduzido para mostrar que a estrutura espacial pode sustentar a cooperação foi proposto por Nowak e May, em 1992 [83]. Nesse modelo os jogadores são colocados num arranjo bi-dimensional, como na figura 3.3. Cada jogador pode adotar C ou D . Em cada rodada, cada jogador joga o dilema do prisioneiro fraco com seus 8 vizinhos, acumulando o ganho proveniente dessas 8 interações. O ganho total é chamado de **ganho cumulativo**. Em cada interação, a matriz de ganho do dilema do prisioneiro é dada por

$$\begin{array}{cc|cc}
 & & C & D \\
 C & \boxed{1} & \boxed{0} & \\
 D & \boxed{b} & \boxed{0} &
 \end{array} \tag{3.5}$$

onde a tendência à deserção b é tal que $b > 1$. Após todos os jogadores terem jogado com seus vizinhos, todos os jogadores imitam simultaneamente a estratégia do vizinho que possui o maior ganho cumulativo. Se todos os vizinhos possuem um ganho cumulativo menor, o jogador permanece com a mesma estratégia. O ganho cumulativo é igualado a zero e todos os jogadores jogam com seus vizinhos, reiniciando o processo de imitação. Essas regras especificam um autômata celular determinístico. Esse modelo, proposto por M. A. Nowak e R. May, foi estudado detalhadamente [83] e verificou-se que a cooperação e a deserção podem coexistir, apresentando uma dinâmica extremamente rica. Para se ter uma idéia dos mecanismos envolvidos na manutenção da cooperação nesse modelo, considere o caso em que uma população de cooperadores é invadida por um único desertor, como mostrado na figura 3.3. Inicialmente o desertor obtém um ganho igual a $8b$, pois ele interage com 8 vizinho que são cooperadores. No passo seguinte, todos os cooperadores que são vizinhos do desertor adotam D , pois o ganho dos cooperadores é igual a 7 e $8b > 7$ (por definição $b > 1$), dando origem a um aglomerado 3×3 de desertores. Contudo, no passo seguinte, se $5b < 6$, o aglomerado 3×3 volta ao seu tamanho original, composto por apenas um único desertor. A condição $b < 6/5$ garante que todos os 9 desertores no aglomerado 3×3 tenham ao menos um vizinho adotando C que seja o mais bem sucedido. Baseando-se nesse tipo de argumento, Nowak e May analisaram a evolução da cooperação em seu modelo para todos os valores de b .

A característica essencial da reciprocidade de rede é a formação de aglomerados de cooperadores. Quando a estratégia C é imitada, ela se espalha formando um aglomerado de cooperadores que colaboram entre si. Com isso os cooperadores podem vir a ser mais bem sucedidos do que os desertores. Outra característica interessante é a punição indireta dos desertores. Quando um jogador X que adota C imita a estratégia D de um jogador Y , o ganho cumulativo do jogador Y diminui. O jogador Y é indiretamente punido.

8	8	8	8	8
8	7	7	7	8
8	7	8b	7	8
8	7	7	7	8
8	8	8	8	8

↔

7	6	5	6	7
6	5b	3b	5b	6
5	3b	0	3b	5
6	5b	3b	5b	6
7	6	5	6	7

Figura 3.3: Estrutura espacial com condição periódica de contorno em que cada jogador é representado por uma célula e interage com as 8 células vizinhas. A cor branca representa a cooperação e a cor cinza a deserção. Os ganhos cumulativos estão representados em cada célula. Na figura da esquerda, um desertor invade a população de cooperadores. Como o desertor possui o maior ganho, todos os vizinhos imitam a deserção, formando o aglomerado 3×3 de desertores, representado na figura da direita. Nessa nova configuração, todos os desertores na borda do aglomerado possuem pelo menos um vizinho cooperador que possui um ganho cumulativo maior. Os desertores imitam a cooperação e a configuração retorna ao estado original representado na figura da esquerda.

A partir do modelo proposto por Nowak e May, uma série de estudos teóricos sobre a evolução da cooperação na presença de reciprocidade de rede foi iniciada. O principal programa de estudo foi a análise do impacto da topologia da rede na evolução da cooperação, adotando-se modelos em que as estratégias que oferecem um ganho maior se espalham numa taxa maior. Novamente, a fim de manter a clareza da presente tese, vamos nos restringir aos modelos que envolvem o processo de imitação.

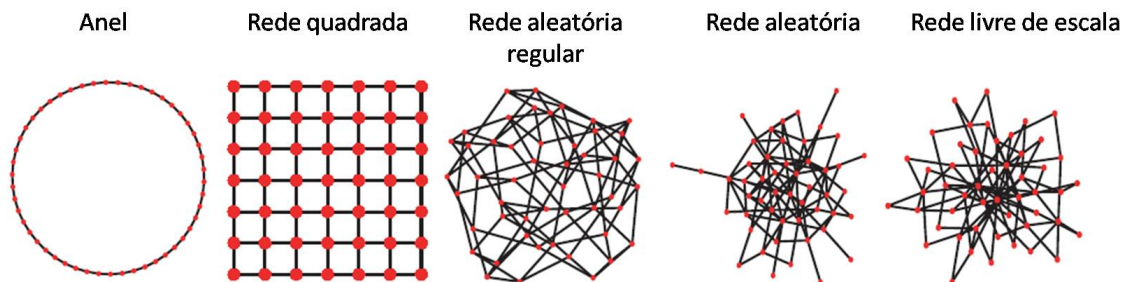


Figura 3.4: Os nós representam os jogadores que interagem com os vizinhos dados pela rede de interação. (a) Anel unidimensional, cada jogador possui dois vizinhos. (b) Rede quadrada, cada jogador possui quatro vizinhos. (c) Rede aleatória regular, todos os jogadores possuem a mesma quantidade de vizinhos, que são dados aleatoriamente. (d) Rede aleatória, a quantidade de vizinhos é dada pela distribuição de Poisson. (e) Rede livre de escala, a quantidade de vizinhos é dada por uma lei de potência. Figura extraída do artigo [84]

Num modelo na rede quadrada, G. Szabó e C. Toke [85,86] utilizaram uma regra de imitação estocástica, o que permitiu que eles estudassem a transição da fase em que só há cooperadores para a fase em

que só há desertores. Os jogadores são colocados nos nós de uma rede quadrada de tamanho L . Cada jogador adota C ou D e interage com 4 vizinhos. Em cada interação, o ganho é dado pela matriz 3.5. O ganho cumulativo do jogador X é a soma dos ganhos obtidos em cada uma das quatro interações, sendo denotado como Π_X . Em cada unidade de tempo, um jogador X é selecionado aleatoriamente. O jogador X escolhe um dos quatro vizinhos de forma aleatória, a saber o jogador Y . Com probabilidade dada por

$$p = \frac{1}{1 + \exp(-(\Pi_Y - \Pi_X)/\xi)}$$

o jogador X imita a estratégia que o jogador Y está usando. Com essa medida de probabilidade, as estratégias que conferem um maior ganho cumulativo são imitadas mais frequentemente. O parâmetro ξ controla a intensidade de seleção. Se ξ é infinito, a estratégia é imitada com probabilidade $p = 0,5$. Se ξ é zero, a estratégia do oponente é imitada somente se o ganho cumulativo do oponente é maior. Dessa forma ξ controla a intensidade de seleção. A condição inicial é adotar C com probabilidade 0.5. A cooperatividade da população é medida pela fração de jogadores ρ que adotam a estratégia C . A figura 3.5 mostra como a fração de cooperadores varia com a tendência de desertar b para alguns valores de ξ .

Pode-se notar que só existe cooperação para valores de b abaixo de um valor crítico $b_{cr}(\xi)$, que depende de ξ . O gráfico de $b_{cr}(\xi)$ é mostrado na figura 3.6 e pode ser visto como um diagrama de fase.

O impacto de topologias mais complexas foi amplamente estudado devido ao crescente conjunto de evidências de que as interações entre os seres humanos são descritas por redes complexas, como as redes livres de escala [87–94]. Em redes livre de escala a distribuição de conectividade é dada por uma lei de potência do tipo $P(k) \approx k^{-\gamma}$, em que k é a conectividade e $P(k)$ é a probabilidade de que um nó aleatoriamente escolhido tenha conectividade k (veja a definição de distribuição de conectividade no apêndice A). As redes livre de escala são caracterizadas pela presença de nós altamente conectados, chamados de *hubs*, juntamente com nós pouco conectados. Nessas redes a evolução da cooperação foi estudada por F.C. Santos e J. M. Pacheco [95, 96]. Da mesma forma que nas redes regulares, cada jogador joga com seus vizinhos e obtém um ganho cumulativo. Note que os jogadores que possuem maior conectividade obtém um ganho maior. A regra de atualização das estratégias é semelhante à anterior. Um jogador X seleciona um de seus vizinhos, a saber o jogador Y . Caso o ganho cumulativo de Y , Π_Y , seja maior do que o ganho cumulativo de X , Π_X , então o jogador X imita a estratégia do jogador Y com probabilidade dada por

$$p = \frac{\Pi_X - \Pi_Y}{bk_{max}},$$

em que $k_{max} = \max(k_X, k_Y)$, sendo k_X e k_Y a conectividade dos jogadores X e Y , respectivamente.

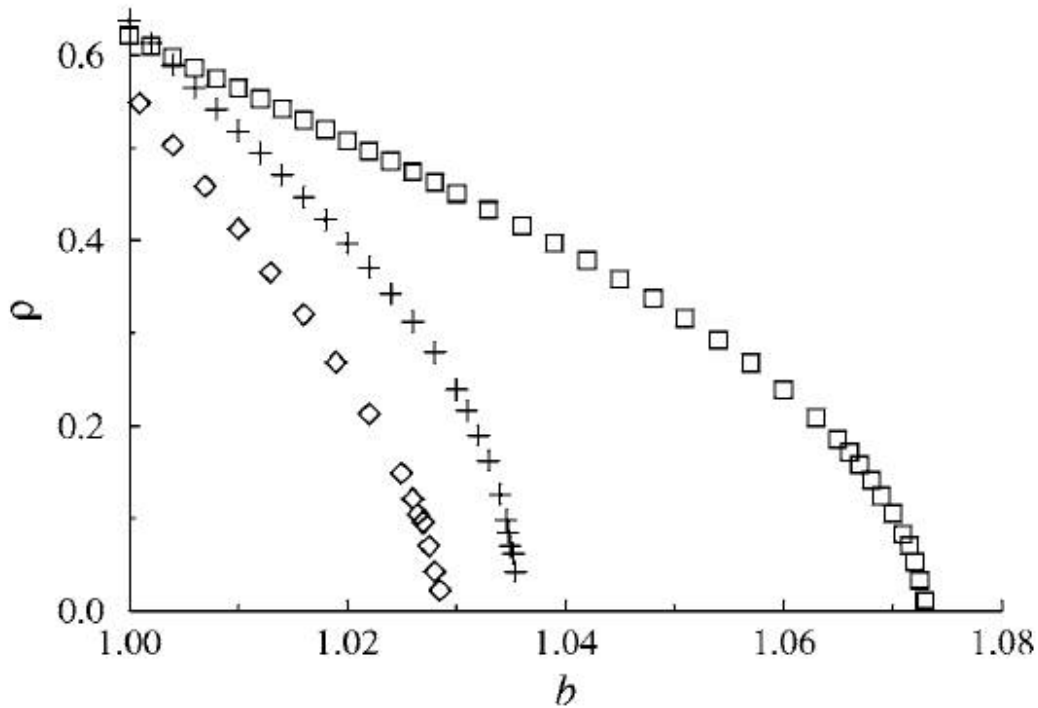


Figura 3.5: Fração de cooperadores ρ em função da tendência de desertar b numa rede quadrada para diferentes valores de ξ : $\xi = 0,1$ (cruzes), $\xi = 0,4$ (quadrados) e $\xi = 1,2$ (losangos). Figura extraída do artigo [85].

Caso contrário o jogador X permanece com a mesma estratégia. O fator bk_{max} dividindo a expressão garante a normalização. A fração de cooperadores no regime estacionário ρ em função do parâmetro b é mostrada na figura 3.7 para redes regulares, aleatórias, aleatórias livre de escala (gerada por um processo de homogeneização da rede livre de escala gerada pelo modelo Barabasi-Albert) e redes livre de escala geradas pelo modelo Barabasi-Albert. Note que a cooperação é maior nas redes livre de escala geradas pelo modelo Barabási-Albert [94].

Nas redes livre de escala, os jogadores que possuem muitos vizinhos obtêm um ganho cumulativo muito grande em comparação com os jogadores que possuem poucos vizinhos. Isso ocorre pois o ganho cumulativo é simplesmente a soma dos ganhos em cada interação. Com a regra da imitação os nós mais conectados são imitados com muito mais frequência, pois o ganho cumulativo deles é muito maior do que o dos demais nós. Se o ganho cumulativo for dividido pela quantidade de interações, obtém-se o **ganho efetivo** [97,98]. Se Π_X é o ganho cumulativo do jogador X e k_X é quantidade de vizinhos do jogador X , então o ganho efetivo é dado por $\tilde{\Pi}_X = \Pi_X/k_X$. A figura 3.8 mostra os resultados para redes heterogêneas do tipo livre de escala quando o ganho efetivo é usado ao invés do ganho cumulativo no

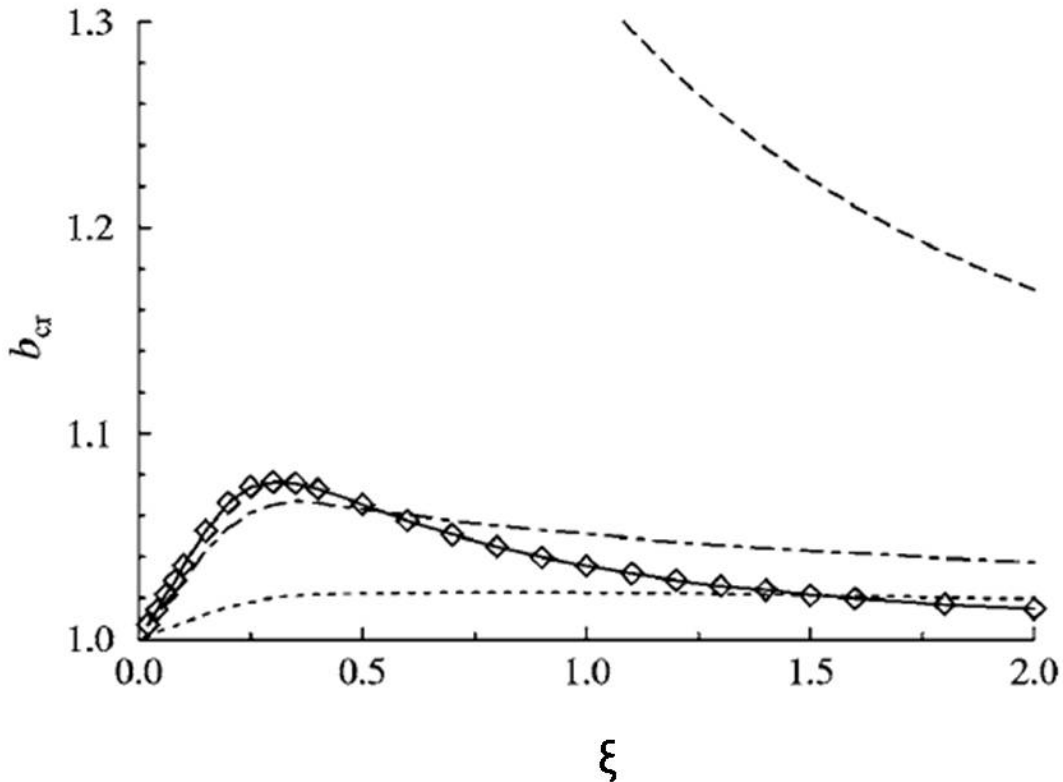


Figura 3.6: Valor crítico de b em função do parâmetro ξ numa rede quadrada. Os losangos representam os resultados da simulação computacional e as linhas pontilhadas representam diferentes formas de aproximações de campo médio. Figura extraída do artigo [85].

modelo proposto por F.C. Santos e J. M. Pacheco [95–97]. Note que com o ganho efetivo a cooperação em redes heterogêneas é drasticamente reduzida. Se o ganho efetivo é utilizado, os nós muito conectados não exercem mais o papel preponderante no processo de imitação. É como se a heterogeneidade fosse suavizada e a rede se comportasse mais como uma rede regular [98].

As redes heterogêneas variam em diversas características, como a conectividade média, as correlações entre as conectividades dos nós, o coeficiente de aglomeração, dentre outros fatores (veja o apêndice A). Em modelos similares aos introduzidos nessa seção, o impacto dessas diversas características na evolução da cooperação foi amplamente estudado [99–102], bem como o efeito de diversos outros mecanismos, como a mobilidade dos jogadores na rede [103–105] e a adição e remoção de ligações [106].

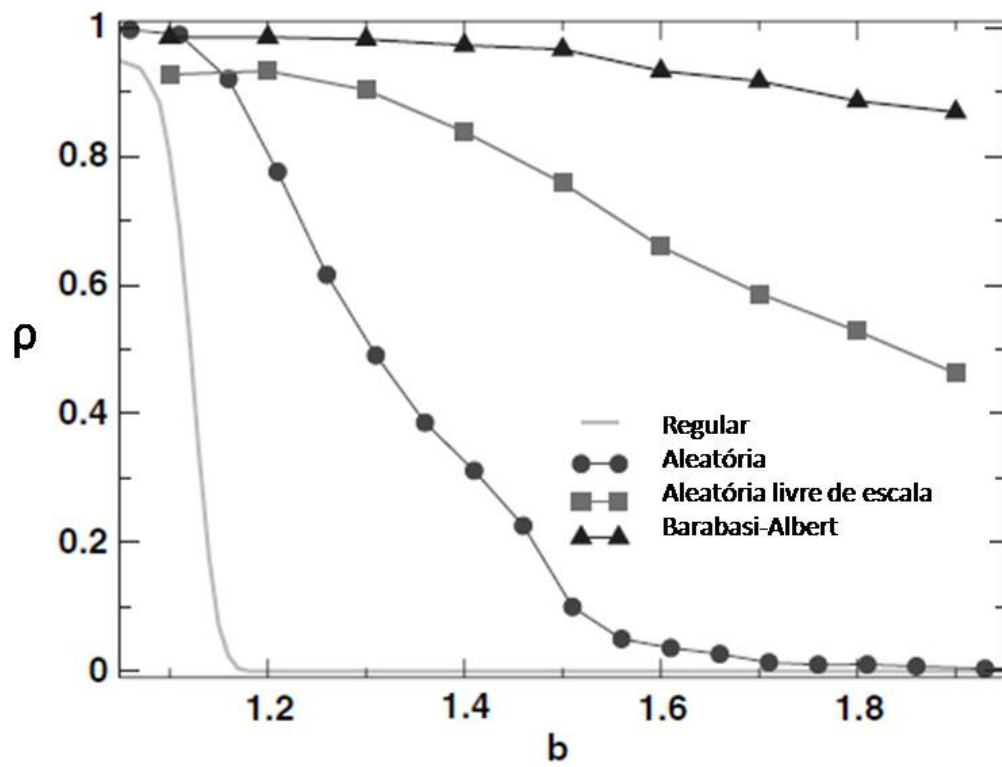


Figura 3.7: Fração de cooperadores ρ em função da tendência de desertar b para diferentes tipos de redes no caso de ganho cumulativo. Figura extraída do artigo [95].

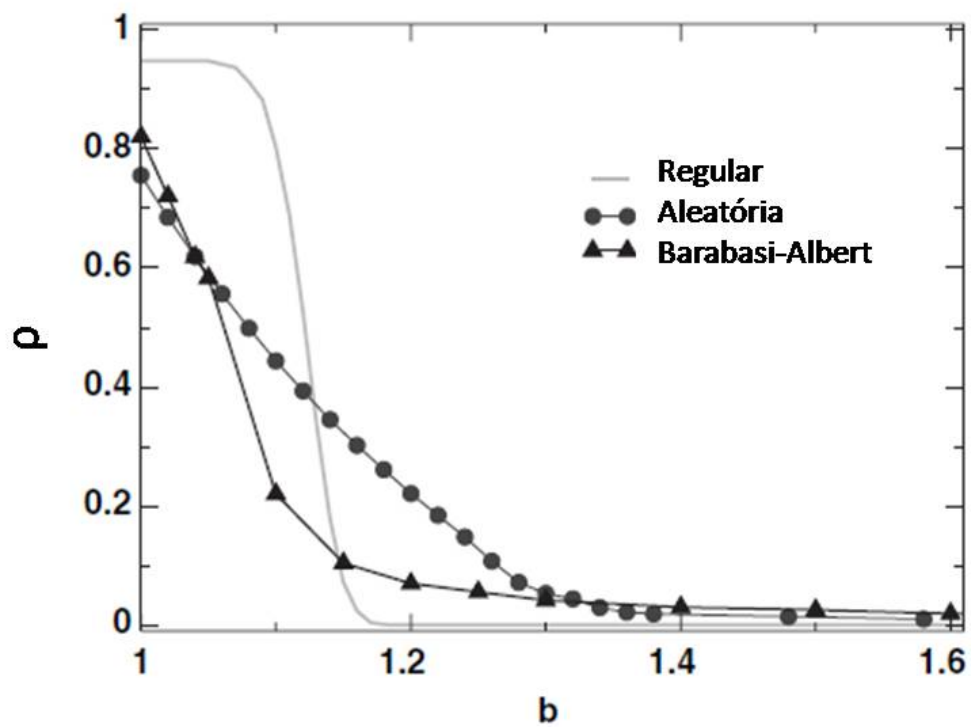


Figura 3.8: Fração de cooperadores ρ em função da tendência de desertar b para diferentes tipos de redes no caso de ganho cumulativo efetivo. Figura extraída do artigo [95].

Capítulo 4

Estratégias diferentes contra oponentes distintos

A emergência de cooperação entre os indivíduos de uma população tem sido estudada no contexto da teoria evolutiva de jogos. A grande questão é explicar como a cooperação pode ser mantida se ela é onerosa para o cooperador. Como visto no capítulo 3, a reciprocidade de rede é um dos mecanismos capazes de sustentar a cooperação. Nos modelos usuais de reciprocidade de rede, os jogadores adotam sempre uma estratégia única em relação a todos os oponentes. Se um jogador coopera, ele coopera com todos os seus vizinhos. Em nosso modelo os jogadores adotam estratégias diferentes em relação a cada oponente [107]. Os jogadores são colocados numa rede e interagem somente com os vizinhos mais próximos dados pela rede. Ao invés de adotar simplesmente C ou D contra todos os oponentes, pode-se adotar C ou D de forma distinta em relação a cada oponente. A dinâmica evolutiva é implementada de forma análoga aos modelos usuais. Cada jogador joga o dilema do prisioneiro com cada vizinho obtendo um ganho cumulativo. O ganho cumulativo é traduzido em taxa de reprodução de forma que, através de uma regra de imitação, as estratégias adotadas pelos indivíduos de maior sucesso possam se espalhar na população. O nosso modelo será chamado de modelo DO (do inglês *Distinguishing the Opponents*) e o modelo usual, em que cada jogador adota uma estratégia única, será chamado simplesmente de modelo Usual.

4.1 O modelo

Numa população de tamanho N , os oponentes de cada jogador são determinados por uma rede de interação. Se o jogador j possui k_j vizinhos, a estratégia do jogador j é dada por $(S_{j,j_1}, \dots, S_{j,j_{k_j}})$, em

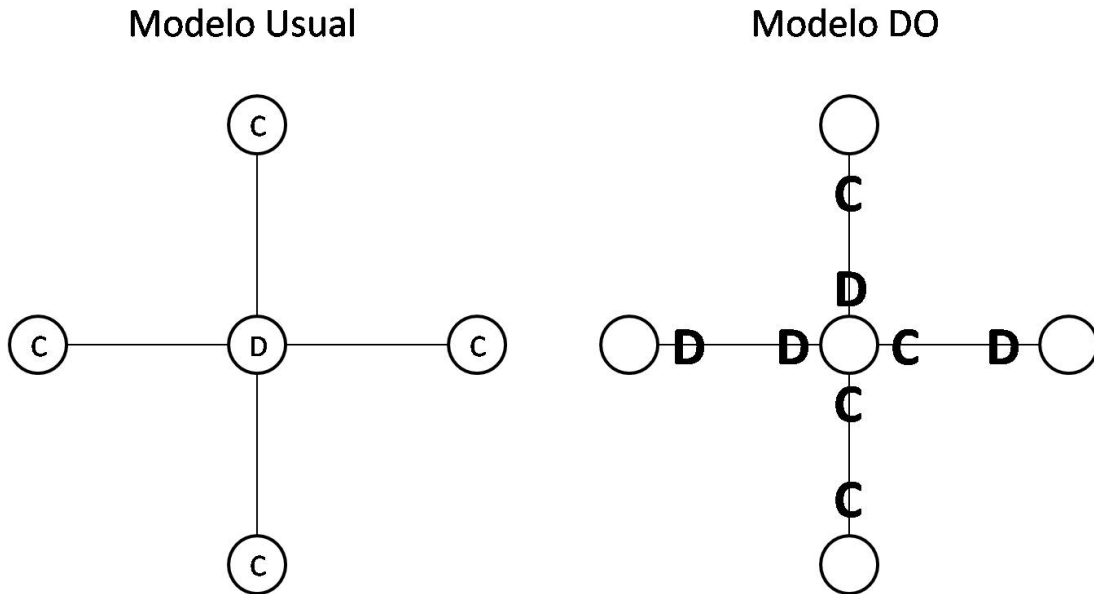


Figura 4.1: Representação das estratégias no modelo Usual (esquerda) e no modelo DO (direita). No modelo Usual os jogadores adotam a mesma estratégia contra todos os vizinhos. No modelo DO os jogadores adotam estratégias diferentes contra oponentes distintos.

que $S_{j,j_s} \in \{C, D\}$ é a estratégia que o jogador j adota em relação ao oponente j_s . Se em uma dessas interações o jogador j adota C contra um oponente i que adota D , denotamos essa interação por $(S_{j,i}, S_{i,j}) = (C, D)$. A figura 4.1 ilustra a diferença entre o modelo Usual e o modelo DO. Em cada interação, os dois jogadores envolvidos na interação jogam o dilema do prisioneiro, cuja matriz de ganho é dada por

$$\begin{array}{cc|cc} & & C & D \\ \hline C & 1 & 0 & \\ \hline D & b & \epsilon & \\ \hline \end{array} \tag{4.1}$$

em que $b > 1$ e $\epsilon \ll 1$. Nessa versão cada jogador recebe 1 se houver cooperação mútua, ϵ se houver deserção mútua; o cooperador recebe 0 se o oponente for um desertor e o desertor recebe b se o oponente for um cooperador. O parâmetro b é interpretado como intensidade da tendência de desertar. Quanto maior o valor de b , mais vantajoso é explorar um cooperador. Cada jogador joga uma rodada com cada um dos seus vizinhos mais próximos. O ganho cumulativo de cada jogador é a soma do ganho proveniente de cada um dos jogos realizados com os seus vizinhos durante uma única rodada. A figura 4.2 ilustra o cálculo do ganho cumulativo.

O ganho cumulativo de um jogador x , a ser denotado por Π_x , é interpretado como o sucesso do jogador x . A dinâmica evolutiva é implementada de forma que as estratégias adotadas pelos jogadores com maior

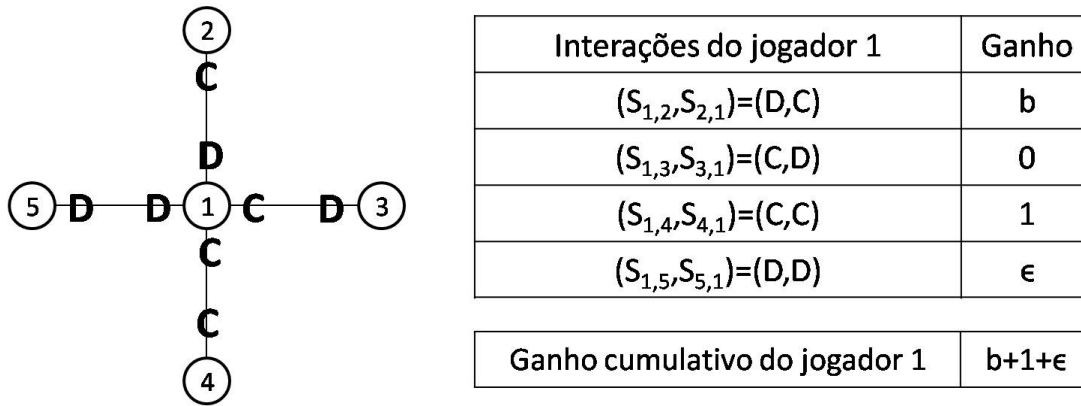


Figura 4.2: Cálculo do ganho cumulativo do jogador 1. A tabela mostra o ganho obtido em cada uma das interações do jogador 1. O ganho cumulativo do jogador 1 é a soma dos ganhos em cada uma das 4 interações.

sucesso são imitadas com maior frequência. Cada jogador seleciona um vizinho de forma aleatória¹. Suponha que o jogador x selecione o jogador y . Essa interação é dada por $(S_{x,y}, S_{y,x})$. No nosso modelo, assume-se que o jogador x possui duas informações sobre o jogador y : (i) a estratégia $S_{y,x}$ que o jogador y adota em relação ele e (ii) o ganho cumulativo Π_y do jogador y . Se o ganho cumulativo do jogador y for alto, isso indica que o jogador y está sendo bem sucedido na escolha de suas estratégias. Então, se $\Pi_y > \Pi_x$, o jogador x imita a estratégia $S_{y,x}$ que o jogador y está adotando contra ele com probabilidade

$$p = \frac{\Pi_y - \Pi_x}{bk_{max}},$$

em que $k_{max} = \max(k_x, k_y)$. Se $\Pi_y \leq \Pi_x$, o jogador x permanece com as mesmas estratégias. Como o jogador x interage com k_x oponentes e em cada uma dessas interações ele adota C ou D , se o jogador x decide imitar a estratégia $S_{y,x}$ que o jogador y está adotando em relação a ele, o jogador x precisa decidir em qual das k_x interações ele irá implementar a estratégia $S_{y,x}$. Em nosso modelo, adotamos um processo em que o jogador escolhe a interação que fornece a menor contribuição ao ganho cumulativo. Se mais de uma interação fornece a menor contribuição, um dessas interações é selecionada aleatoriamente. As interações possíveis são (C, D) , (D, D) , (C, C) e (D, C) . Em cada uma dessas interações, o jogador x recebe 0, ϵ , 1 e b , respectivamente. Portanto a interação que fornece a menor contribuição é a (C, D) . Se o jogador x não tiver nenhuma interação do tipo (C, D) , então a pior interação passa a ser a (D, D) , e assim por diante. Por exemplo, se o jogador x imita a estratégia D de algum vizinho, primeiramente ele irá substituir a estratégia C utilizada em alguma das interações do tipo (C, D) ; se não houver nenhuma

¹O termo aleatório será usado sempre que quisermos nos referir a uma variável aleatória com distribuição uniforme

interação desse tipo, ele irá substituir a estratégia D utilizada em alguma das interações do tipo (D, D) , o que, de fato, não altera em nada o seu contexto, e assim por diante. A figura 4.3 ilustra o processo de imitação e implementação da estratégia imitada.

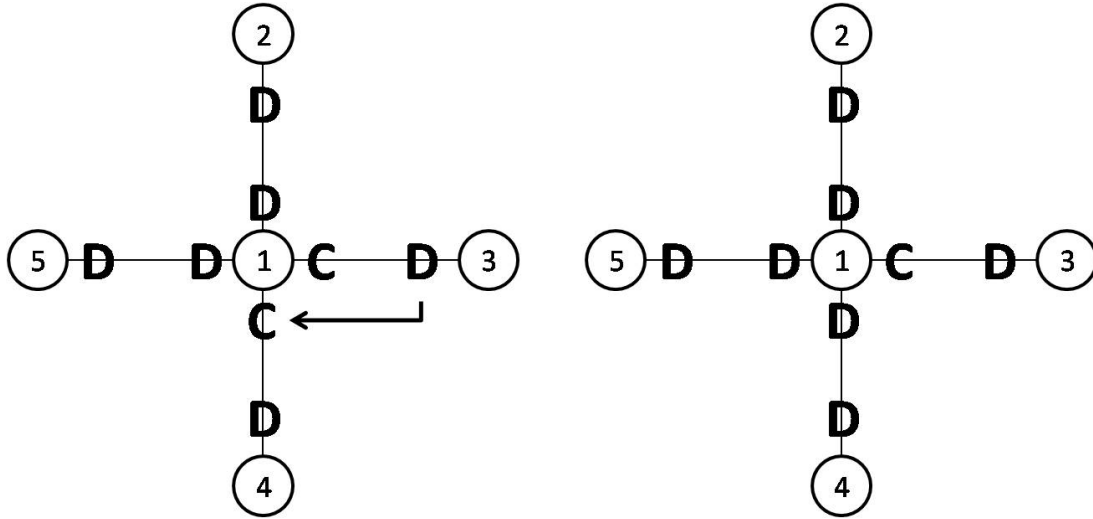


Figura 4.3: Ilustração do processo de imitação. O jogador 1 imita a estratégia D do jogador 3. A interação que fornece a menor contribuição para o ganho cumulativo do jogador 1 é do tipo (C, D) , que ocorre nas interações com os jogadores 3 e 4. O jogador 1 sorteia aleatoriamente uma dessas duas interações e substitui a estratégia C pela D . Nessa figura a interação aleatoriamente escolhida é a com o jogador 4.

Os modelos serão analisados basicamente via simulação computacional. Um exemplo típico dos algoritmos utilizados, escritos em Fortran, encontra-se no Apêndice B. O processo de atualização das estratégias pode ser síncrono ou assíncrono. No caso síncrono, todos os jogadores realizam a atualização ao mesmo tempo. Cada passo de Monte Carlo (MCS) da simulação é realizado da seguinte forma. Primeiramente, no tempo t , todos os jogadores jogam o dilema do prisioneiro com seus vizinhos utilizando as estratégias adotadas no tempo $t - 1$, obtendo o ganho cumulativo. Em seguida, todos os jogadores atualizam suas estratégias utilizando a configuração das estratégias no tempo $t - 1$. Após todos os jogadores terem atualizado simultaneamente suas estratégias, tem-se a nova configuração de estratégias referente ao tempo t . No caso assíncrono, no tempo t , todos os jogadores jogam o dilema do prisioneiro com seus vizinhos utilizando as estratégias adotadas no tempo $t - 1$, obtendo o ganho cumulativo. Um jogador é selecionado aleatoriamente para realizar o processo de atualização. Após esse jogador ter atualizado sua estratégia, o ganho cumulativo de cada jogador é atualizado e um novo jogador é selecionado aleatoriamente. Um passo de Monte Carlo no caso assíncrono é composto por N etapas de escolha de um jogador. Note que o ganho cumulativo de um jogador no tempo t é a soma dos ganhos considerando somente os ganhos no tempo t .

O nível de cooperação na população pode ser medido pela cooperatividade média dos jogadores no regime estacionário e será denotado por F_c . Seja $n_c(i, t)$ a quantidade de estratégias C utilizadas pelo jogador i no tempo t , em que $0 \leq n_c(i, t) \leq k_i$. A cooperatividade do jogador i no tempo t é dada por

$$f_c(i, t) = n_c(i, t)/k_i.$$

A cooperatividade média da população no tempo t é dada por

$$\bar{f}_c(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_c(i, t).$$

Descartando o tempo transiente necessário para alcançar o regime estacionário, realiza-se um média temporal de $\bar{f}_c(t)$ em $N_t = 1000$ MCS. Dessa forma a cooperatividade média no regime estacionário é dada por

$$F_c = \frac{1}{N_t} \sum_t \bar{f}_c(t).$$

Como a configuração inicial das estratégias é dada por uma distribuição de probabilidades, por exemplo, a estratégia em cada interação de um jogador é C com probabilidade 0,5, realiza-se uma segunda média sobre 100 amostras iniciais diferentes.

4.2 Propriedades gerais do modelo DO

O modelo DO possui algumas propriedades gerais que são independentes da topologia da rede, pois decorrem diretamente da regra de atualização das estratégias. A primeira propriedade é a manutenção das cooperações mútuas. No modelo DO as cooperações mútuas não são desfeitas. Se o jogador x possui uma interação do tipo (C, C) , a única forma dele interromper essa cooperação mútua é se ele imitar uma estratégia D de algum vizinho mais próximo. Mas se algum vizinho estiver adotando D , isso significa que o jogador x está envolvido em pelo menos uma interação do tipo (C, D) ou (D, D) . Essas duas interações fornecem uma contribuição menor do que a interação (C, C) para o ganho cumulativo. Dessa forma, ao imitar uma estratégia D , o jogador x irá sempre colocar a nova estratégia na interação (C, D) ou na interação (D, D) , deixando as interações (C, C) a salvo.

A segunda propriedade é a punição dos desertores. Se o jogador x está sendo explorado pelo jogador y numa interação do tipo (C, D) , essa exploração será neutralizada se o jogador x imitar uma estratégia do tipo D e implementá-la na interação com o jogador y . A transição $(C, D) \rightarrow (D, D)$ é vista como

uma punição ao jogador y . Nos modelos usuais, quando um cooperador x imita um vizinho y que adota D , o ganho de y é diminuído, já que o jogador x parou de cooperar. Nesse sentido, o jogador y é punido. Contudo o jogador x , ao mudar para D , começa a explorar seus vizinhos cooperadores. No modelo Usual as cooperações mútuas não são mantidas, apesar do vizinho y ser punido. No modelo DO o desertor pode ser punido e as cooperações mútuas podem ser mantidas, como pode ser visto na figura 4.4.

A terceira propriedade é a relação entre a sincronicidade da atualização e a propagação da cooperação: para que uma nova cooperação mútua surja é necessário que dois jogadores possuindo uma interação do tipo (D, D) imitem simultaneamente uma estratégia C e coloquem-na no lugar da estratégia D adotada na interação entre eles. Se numa interação do tipo $(S_x, S_y) = (D, D)$ entre o jogador x e o jogador y , somente o jogador x substituir D por C , o jogador x possuirá uma nova interação $(S_x, S_y) = (C, D)$ e o jogador y possuirá uma nova interação $(S_y, S_x) = (D, C)$. O próximo evento mais provável é que o jogador x puna o jogador y e a interação $(S_x, S_y) = (C, D)$ seja modificada novamente para $(S_x, S_y) = (D, D)$. Contudo, se na interação (D, D) ambos os jogadores substituírem simultaneamente D por C , é possível que uma nova cooperação mútua surja, através da transição $(D, D) \rightarrow (C, C)$. Como a atualização simultânea só é possível na atualização síncrona, a sincronicidade na atualização é uma condição essencial para o alto nível de cooperatividade obtido no modelo DO.

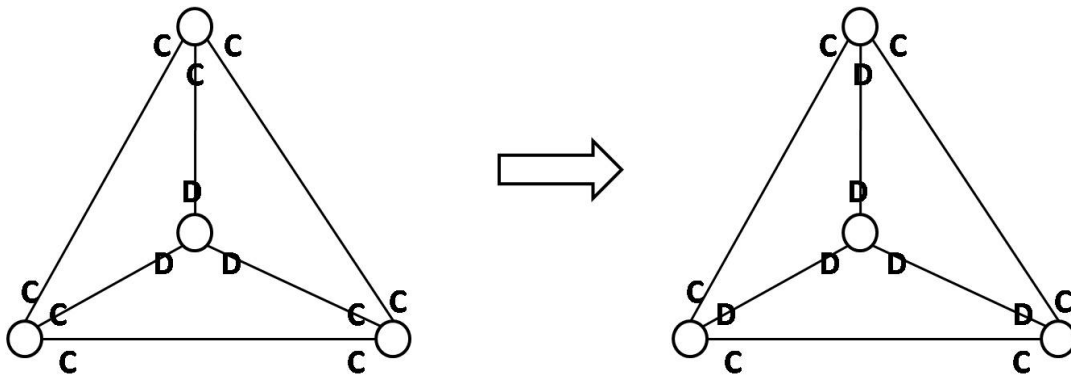


Figura 4.4: Punição dos desertores no modelo DO. Se um jogador começa a explorar os vizinhos cooperadores, inicialmente o ganho cumulativo do explorador aumenta. Como consequência os vizinhos imitam a estratégia D e colocam-na exatamente na interação com o explorador. Dessa forma somente o explorador é punido e as demais cooperações mútuas são mantidas.

4.3 Rede quadrada

Vamos agora estudar a evolução da cooperação numa população estruturada numa rede quadrada. Numa rede quadrada, cada jogador possui 4 vizinhos mais próximos, como mostrado na figura 4.5. Consideramos

condições periódicas de fronteira, o que torna a rede quadrada, na realidade, um toro reticulado. A rede quadrada de tamanho L é um arranjo $L \times L$. Isso significa que o tamanho da população é igual a L^2 .

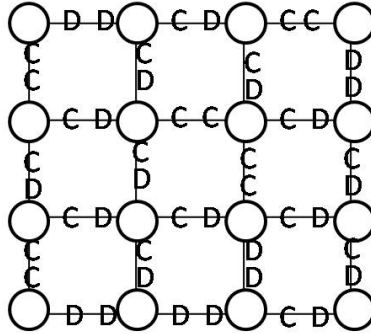


Figura 4.5: Rede quadrada de tamanho $L = 4$ com condições periódicas de contorno. Cada jogador possui 4 vizinhos mais próximos.

No caso de uma rede com $L = 100$, estudamos a evolução da cooperação na região $1 < b \leq 5$, com $\epsilon = 0,01$. Como configuração inicial, cada jogador coopera com probabilidade 0,5 em cada interação. A figura 4.6 mostra a cooperatividade média em função da tendência de desertar b no modelo DO e no modelo Usual com atualização síncrona, obtidos via simulação (o apêndice B descreve um código típico escrito em Fortran utilizado nas simulações). No modelo Usual, a cooperação só é mantida para valores pequenos de b . A deserção domina a população se $b > 1,1$ [86].

Já no modelo DO, a cooperatividade é total se $1 < b \leq 3$ e decai para um valor intermediário se $b > 3$. Em geral, quanto maior o valor de b , maior é o ganho cumulativo dos jogadores que adotam D . Dessa forma é esperado que a cooperatividade média diminua à medida que b aumenta. O modelo DO, portanto, é um mecanismo que promove a cooperação em situações que o modelo Usual não é capaz. Analisemos os mecanismos responsáveis pelo alto nível de cooperatividade no modelo DO com atualização síncrona.

O fato de as cooperações mútuas não serem desfeitas introduz um limite inferior de 0,25 para a cooperatividade média, já que a fração média de cooperações mútuas presentes na configuração inicial é igual a 0,25. Dessa forma, para quaisquer valores de b tem-se que $F_c > 0,25$. Resta-nos entender como é que novas cooperações surgem. O processo de crescimento da cooperatividade ocorre em duas etapas: (i) inicialmente as explorações são punidas, dando origem a um aumento das interações (D, D) e, após a punição de grande parte das explorações, (ii) as interações do tipo (D, D) se transformam em (C, C) à medida que dois vizinhos substituem simultaneamente a estratégia D por C na interação entre eles. Analisemos cada uma dessas etapas detalhadamente. No processo inicial de punição realizado por um jogador x , na média, as primeiras interações que são modificadas são do tipo (C, D) , pois elas fornecem ao

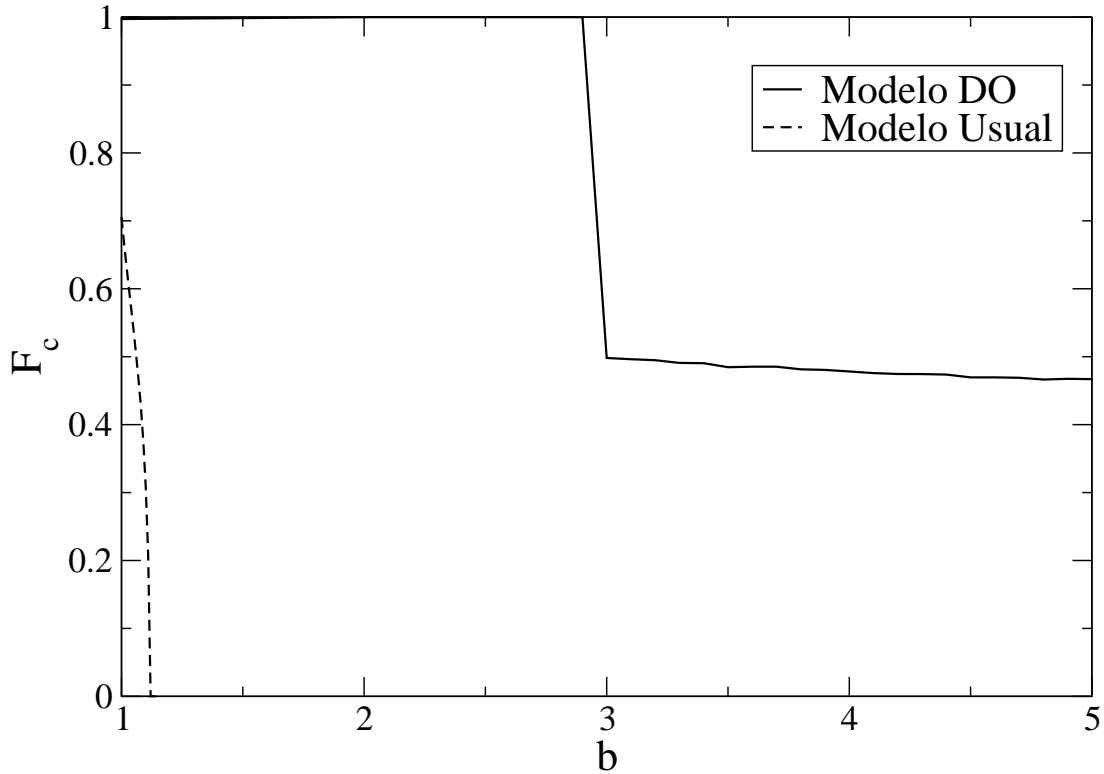


Figura 4.6: Cooperatividade média no regime estacionário F_c em função da tendência de desertar b no modelo Usual e no modelo DO para rede quadrada com $L = 100$ e $\epsilon = 0,01$, com atualização síncrona.

jogador x o menor ganho possível. Dessa forma a quantidade de interações do tipo (D, D) aumenta. Se um jogador imita a estratégia C mas ele ainda possui interações do tipo (C, D) , nada irá ser modificado. É preciso primeiramente que as explorações sejam punidas. De fato, como mostrado na figura 4.7, a cooperatividade começa a aumentar justamente quando a fração de interações do tipo (D, D) atinge um pico. Agora analisemos a segunda etapa, em que ocorre a transição $(D, D) \rightarrow (C, C)$. Conforme foi dito na seção 4.2, se na interação (D, D) ambos os jogadores substituírem simultaneamente D por C , é possível que uma nova cooperação mútua surja, através da transição $(D, D) \rightarrow (C, C)$. Dessa forma, após as explorações terem sido punidas, novas cooperações mútuas começam a ser formadas e a cooperatividade na população aumenta.

Como se pode notar na figura 4.6, a cooperatividade depende da tendência de desertar b . Isso se deve à dinâmica dos aglomerados de cooperadores. A característica básica da reciprocidade de rede é a

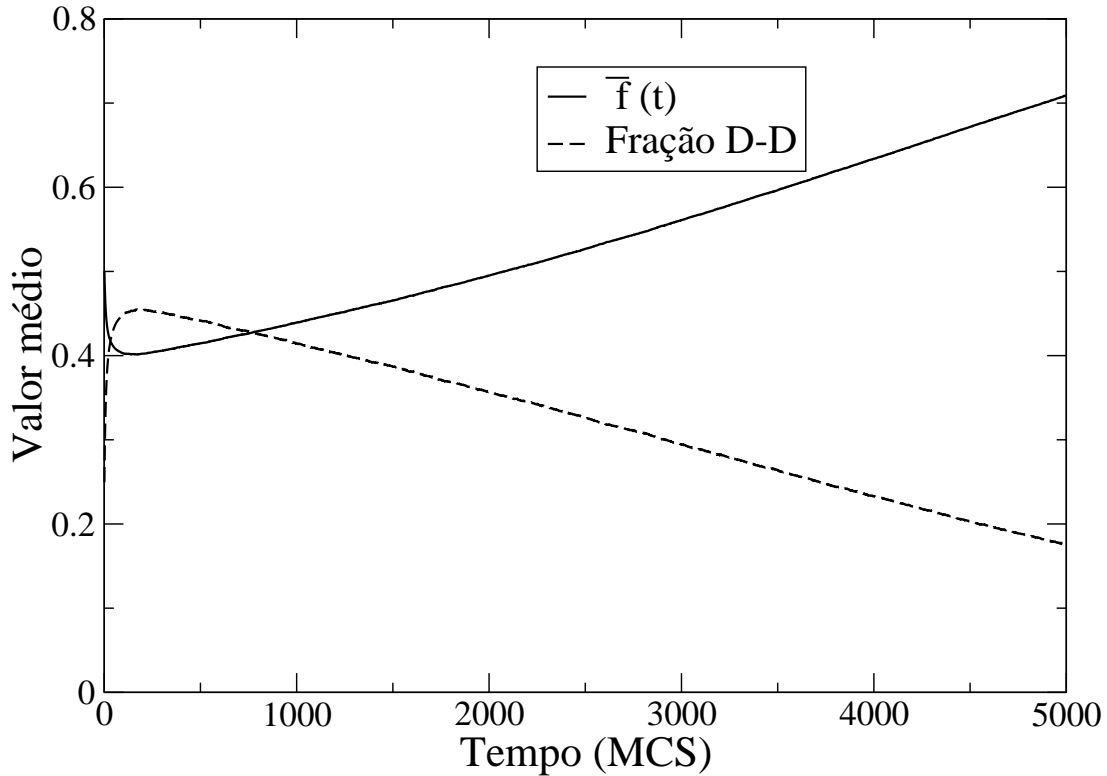


Figura 4.7: Evolução temporal da cooperatividade média e da fração de interações do tipo (D, D) no modelo DO para $b = 2, 0$. A rede é quadrada com $L = 100$, $\epsilon = 0, 01$ e a atualização é síncrona.

formação de aglomerados de cooperadores, que se ajudam mutuamente a ponto de conseguirem ser mais bem sucedidos do que os desertores. Seguindo o mesmo tipo análise de aglomerados que é realizado no modelo Usual [108], consideremos um aglomerado de cooperadores como mostrado na figura 4.8 e seja $\epsilon = 0$. Pela propriedade geral do modelo DO, as cooperações mútuas na região interna do aglomerado não são desfeitas. Já na região de interface com os exploradores, os cooperadores possuem um ganho cumulativo igual a 3, ao passo que os exploradores na interface possuem um ganho cumulativo igual a b . Se $1 < b \leq 3$, os cooperadores na interface possuem um ganho cumulativo maior do que os exploradores. Nesse caso a estratégia C pode ser copiada pelos exploradores e o aglomerado de cooperações mútuas pode eventualmente crescer. Se $b > 3$, os cooperadores na interface podem copiar a estratégia D dos exploradores. Contudo a única interação que será modificada é a interação na interface, que ficará oscilando entre (C, D) e (D, D) . Dessa forma, se $b > 3$, o aglomerado de cooperação não pode ser

completamente desfeito, mas também não pode crescer. Esse é o motivo pelo qual a cooperatividade média da população cai bruscamente quando $b > 3$, como pode ser visto na figura 4.6. A cooperatividade média dos jogadores no interior de um aglomerado de tamanho $S \times S$ pode ser calculada aproximadamente para $b > 3$ e $\epsilon = 0$,

$$F_{c,S} = 1 - \frac{1}{S} + \frac{-b + \sqrt{b^2 + 8(b-2)} + (S-2)}{(b-2)S^2}. \quad (4.2)$$

Na figura 4.9, o gráfico de $F_{c,S}$ é mostrado juntamente com os resultados da simulação. Note que a cooperatividade decai lentamente se b aumenta.

Transição da terceira classe

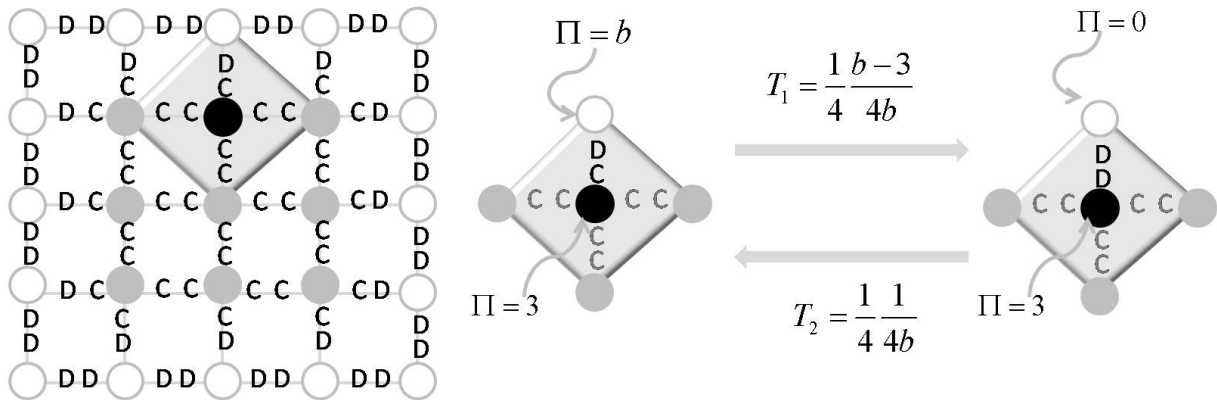


Figura 4.8: Aglomerado de cooperadores (nós preenchidos) e probabilidades de transição relativas a um nó da terceira classe (nó com preenchimento preto). Um nó da terceira classe pode imitar a estratégia D do vizinho explorador (nó sem preenchimento), realizando a transição $(C, D) \rightarrow (D, D)$. O ganho cumulativo do nó é igual a 3 e o do vizinho explorador é b . A probabilidade de ocorrer essa transição é T_1 . No cálculo de T_1 tem-se que o explorador é escolhido com probabilidade $1/4$, que a diferença dos ganhos cumulativos é igual a $b - 3$ e que o fator de normalização é $4b$. Se um nó da terceira classe adota D na interação com o vizinho explorador, ele pode imitar a estratégia C de algum vizinho cooperador dentro do aglomerado, realizando a transição $(D, D) \rightarrow (C, D)$. O ganho cumulativo do nó é igual a 3 e o do vizinho cooperador é igual a 4. A probabilidade de ocorrer essa transição é dada por T_2 . Π representa o ganho cumulativo.

A dedução da equação 4.2 ilustra o procedimento típico para a aproximação analítica que mostraremos no capítulo 5. Na figura 4.8, os nós pertencentes ao aglomerado de cooperação pertencem a três classes distintas. Na primeira classe estão os nós no interior do aglomerado, que possuem somente vizinhos cooperadores. Na segunda classe, estão os nós de quina, que possuem dois vizinhos exploradores. Na terceira classe estão os nós na interface fora da quina, que possuem somente um vizinho explorador. Vamos analisar o comportamento dos nós da terceira classe. Nessa classe a estratégia que os nós adotam em relação ao explorador oscila entre C e D . Um nó dessa classe possui um ganho cumulativo igual a 3.

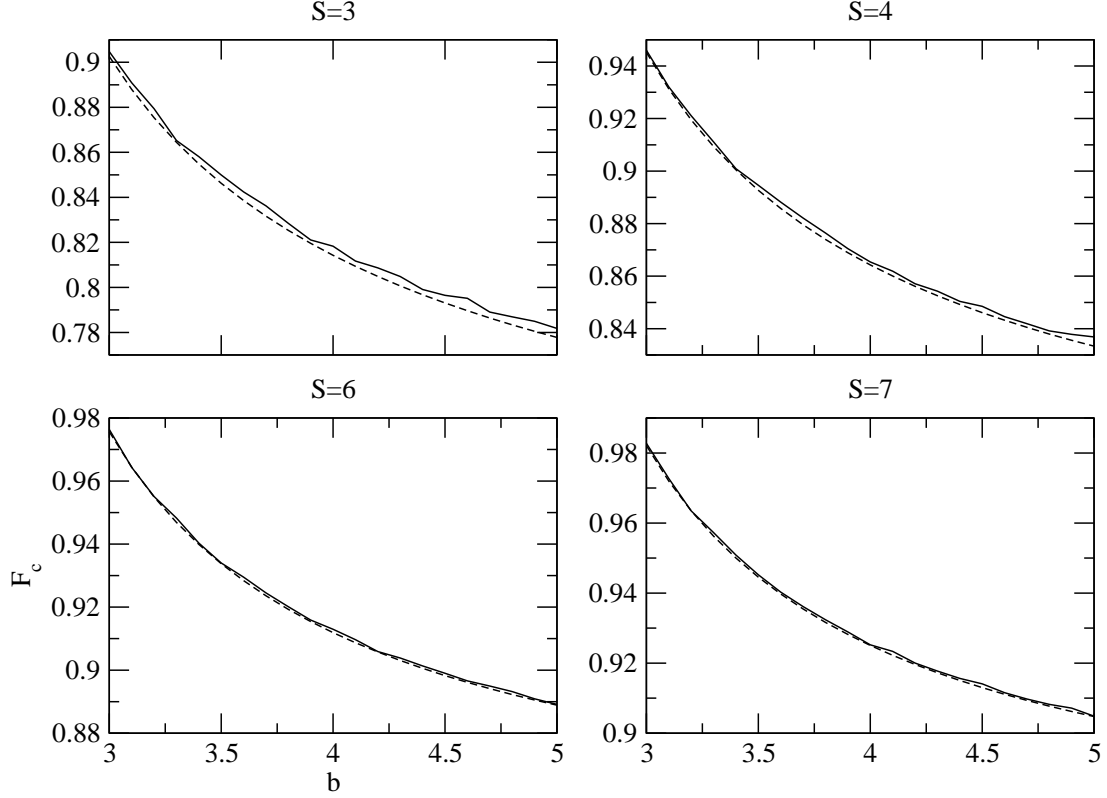


Figura 4.9: Cooperatividade média no regime estacionário dos nós dentro do aglomerado de tamanho $S \times S$ como função da tendência de desertar b . A linha tracejada representa a aproximação analítica e a linha contínua é uma interpolação dos resultados obtidos via simulação.

A figura 4.8 mostra essa transição juntamente com a probabilidade de transição. Se ρ_3 é a probabilidade de que um nó da terceira classe adote C , a variação dessa probabilidade é dada pela equação

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_3}{dt} &= T_2(1 - \rho_3) - T_1\rho_3 \\ &= \frac{1}{16b}(1 - \rho_3) - \frac{b-3}{16b}\rho_3. \end{aligned}$$

No equilíbrio tem-se que

$$0 = \frac{1}{16b}(1 - \rho_{st}) - \frac{b-3}{16b}\rho_{st}. \quad (4.3)$$

No equilíbrio, a fração ρ_3^{st} é dada por

$$\rho_3^{st} = \frac{1}{b-2}. \quad (4.4)$$

Num aglomerado de tamanho S , existem S^2 nós, dos quais $4(S - 2)$ são da terceira classe. A cooperatividade média dos nós da terceira classe é $(3 + \rho_3^{st})/4$. Portanto a contribuição para a cooperatividade média dos nós do aglomerado é igual a

$$\frac{4(S - 2)}{S^2} \frac{3 + \rho_3^{st}}{4}. \quad (4.5)$$

Se ρ_2 é a probabilidade de que um nó da segunda classe adote C , seguindo um procedimento análogo ao caso da terceira classe, tem-se que

$$\frac{d\rho_2}{dt} = \frac{1}{16b} \left(\rho_2(1 - \rho_2) + (1 - \rho_2)^2 - (b - 2)\rho_2^2 - \frac{1}{2}(b - 2) \right). \quad (4.6)$$

No equilíbrio tem-se que

$$\rho_2^{st} = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 8(b - 2)}}{2(b - 2)}. \quad (4.7)$$

Num aglomerado de tamanho S existem 4 nós da segunda classe, sendo que cada um possui duas interações com vizinhos exploradores. A cooperatividade média dos nós da segunda classe é $(2 + 2\rho_2^{st})/4$. Portanto a contribuição para a cooperatividade média dos nós do aglomerado é igual a

$$\frac{4}{S^2} \frac{2 + 2\rho_2^{st}}{4}. \quad (4.8)$$

Os demais nós dentro do aglomerado de cooperação não variam as suas estratégias. Num aglomerado de tamanho S existem $(S - 2)^2$ nós da primeira classe. A contribuição para a cooperatividade média dos nós do aglomerado é igual a

$$\frac{(S - 2)^2}{S^2}. \quad (4.9)$$

Somando as expressões 4.5, 4.8 e 4.9 obtém-se a cooperatividade média dos nós de uma aglomerado de tamanho S para $b > 3$, que é dada pela equação 4.2.

No modelo DO assume-se que os jogadores, ao julgarem a pior interação, não cometem erros. Em geral, a probabilidade de erro é um parâmetro importante a ser analisado. Suponha que cada jogador, ao escolher a interação em que irá colocar a estratégia imitada, escolha a interação que de fato fornece o pior ganho com probabilidade $1 - p_e$ e, com probabilidade p_e , escolha uma interação de forma aleatória. p_e representa a probabilidade de erro no julgamento da pior interação. Dizemos que o modelo DO é robusto na presença de erros se a cooperatividade média no caso $p_e \neq 0$ não difere muito da cooperatividade média no caso $p_e = 0$. A figura 4.10 mostra a cooperatividade média para vários valores de p_e e b . Se $b = 1$, o modelo DO é de fato robusto: se $p_e \leq 0,1$ a cooperatividade média não varia significativamente.

Isso significa que, numa população com $N = 10000$ indivíduos, se em cada passo de Monte Carlo 1000 jogadores cometerem erros, ainda assim a alta cooperatividade é mantida. Se $b = 2$, a cooperatividade é robusta para probabilidades menores do que 0,001. Já para $b = 4$, a cooperatividade é reduzida mesmo quando a probabilidade de erros é extremamente pequena. Portanto pode-se concluir que o modelo *DO* é robusto a erros se a tendência de desertar for baixa.

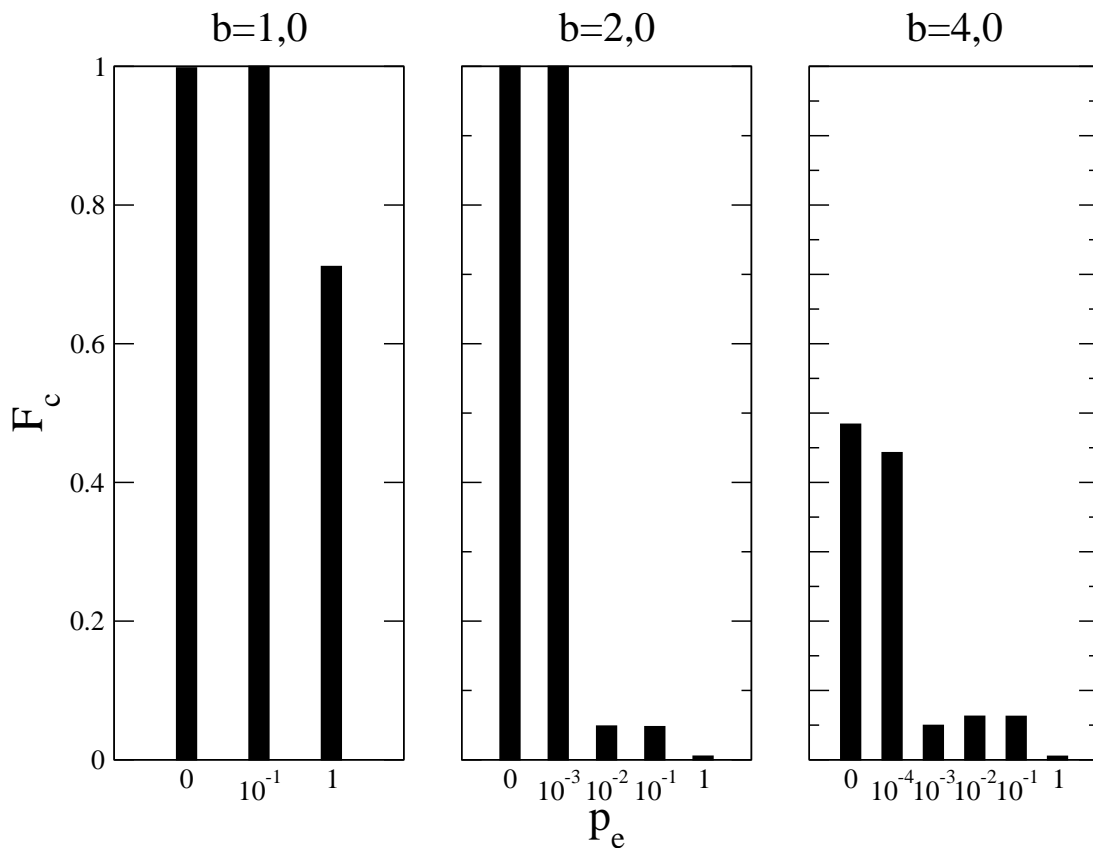


Figura 4.10: Cooperatividade média no regime estacionário F_c em função da probabilidade de erro p_e na rede quadrada.

4.3.1 Variação da regra de imitação

O processo em que cada jogador seleciona um vizinho, compara os ganhos cumulativos e imita a estratégia do vizinho caso o vizinho possua um ganho maior, é usado em vários modelos na teoria evolutiva de jogos. Como no modelo *DO* um jogador x adota k_x estratégias diferentes, mas imita somente uma estratégia,

não existe uma forma única de se realizar a imitação. Nós estudamos outras duas variações da regra de imitação, que chamaremos de modelo DO-A e modelo DO-B. Ambos os modelos diferem do modelo DO apenas na forma com que cada jogador implementa a estratégia imitada.

No modelo DO-A, um jogador x com k_x interações imita a estratégia de um jogador y e coloca a estratégia $S_{y,x}$ no lugar de uma estratégia escolhida aleatoriamente dentre as k_x interações. Essa variação representa o caso extremo do modelo DO na presença de erros, quando $p_e = 1$. No modelo DO-B, o jogador x imita a estratégia de um jogador y e coloca a estratégia $S_{y,x}$ exatamente no lugar da estratégia $S_{x,y}$. Isto é, o jogador x altera somente a interação com o jogador que está sendo imitado. A cooperatividade média nesses modelos, obtidas via simulação é mostrada na figura 4.11, juntamente com os resultados do modelo DO e do modelo Usual.

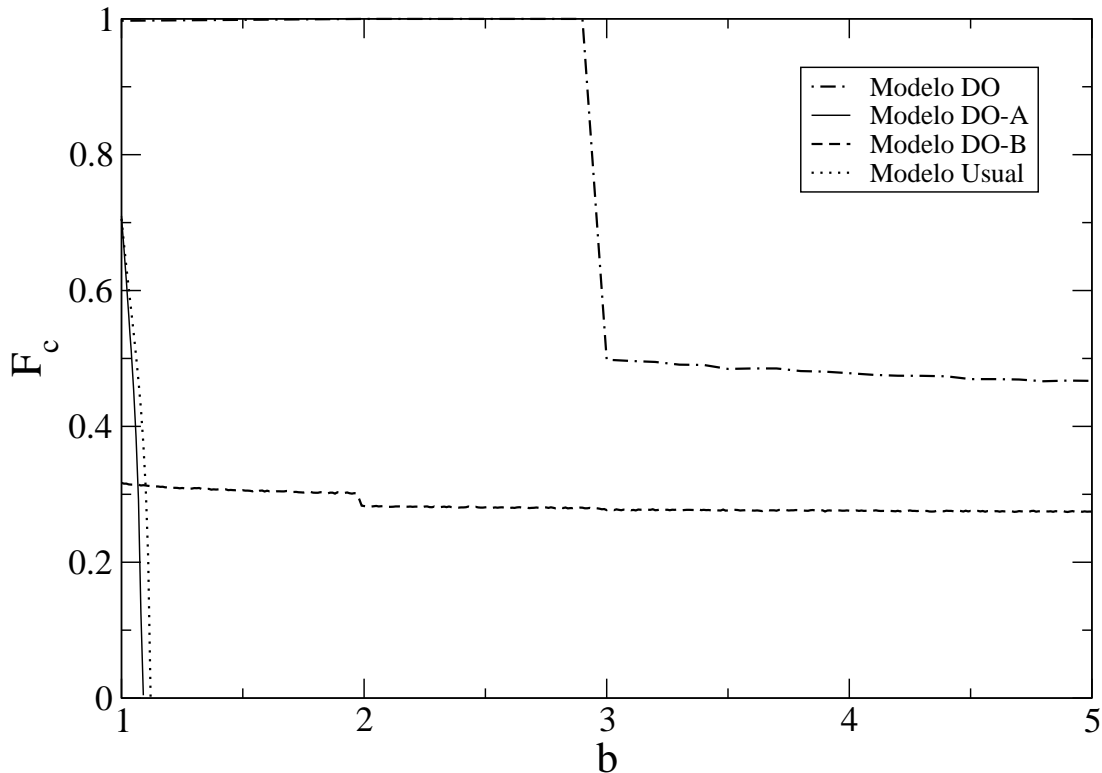


Figura 4.11: Cooperatividade média no regime estacionário F_c em função da tendência de desertar b para os modelos Usual, DO, DO-A e DO-B.

O modelo DO-A comporta-se de forma similar ao modelo Usual. Isso ocorre pois os jogadores que

adotam D possuem, na média, um ganho maior. Como as cooperações mútuas podem ser desfeitas, o jogador que imita uma estratégia D e substitui uma interação do tipo (C, C) por uma (D, C) tem o seu ganho cumulativo aumentado. Dessa forma, a estratégia D espalha-se facilmente na população. Já no modelo DO-B, o comportamento é trivial. Se um jogador x imita a estratégia de um jogador y na interação (S_x, S_y) , essa interação se torna (S_y, S_y) e permanece nessa configuração sem ser alterada. Assim, além das cooperações mútuas iniciais, cuja fração é em torno de 25%, algumas interações do tipo (C, D) se transformam em (C, C) . Por isso a cooperatividade assume um valor um pouco superior a 25%.

4.3.2 Variação do tamanho e da condição inicial

Os resultados do modelo DO dependem pouco do tamanho da rede. A figura 4.12 mostra a cooperatividade média para redes quadradas de tamanho $L = 10, 20, 40, 100$ com $b = 1,05$ e $b = 4$.

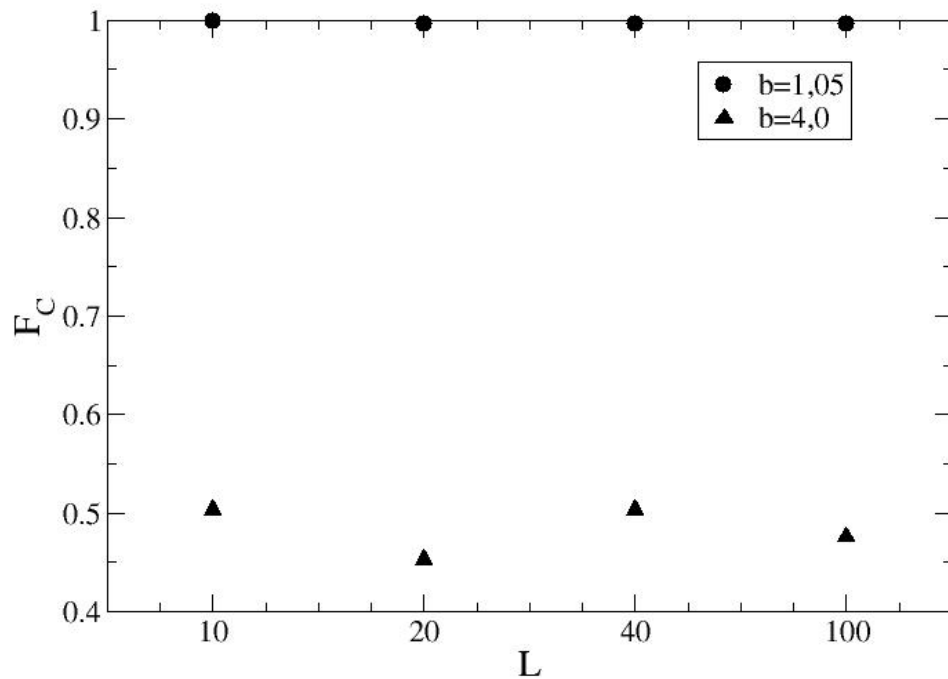


Figura 4.12: Cooperatividade média no regime estacionário F_c em função do tamanho da rede L para $b = 1,05$ e $b = 4,0$.

Em todos os resultados analisado até aqui, usamos como condição inicial 50% de cooperação. Isto é, em cada uma de suas interações os jogadores adotam C com probabilidade $p_0 = 0,5$. Como a fração

inicial de cooperações mútuas impõem um limite inferior para a cooperatividade média, é evidente que se p_0 aumenta, a cooperatividade média também aumenta. Como o principal mecanismo responsável pela manutenção da cooperação é a formação de aglomerados de cooperação, se p_0 é pequeno, o tamanho dos aglomerados de cooperação pode não ser grande o suficiente para que a cooperação possa se espalhar. A figura 4.13 mostra a cooperatividade média para diferentes valores de p_0 e b . Note que para $b = 1$ a cooperatividade média é igual a um se $p_0 \geq 0.4$ e para $b = 4$ a cooperação é igual a um somente quando p_0 é praticamente igual a um.

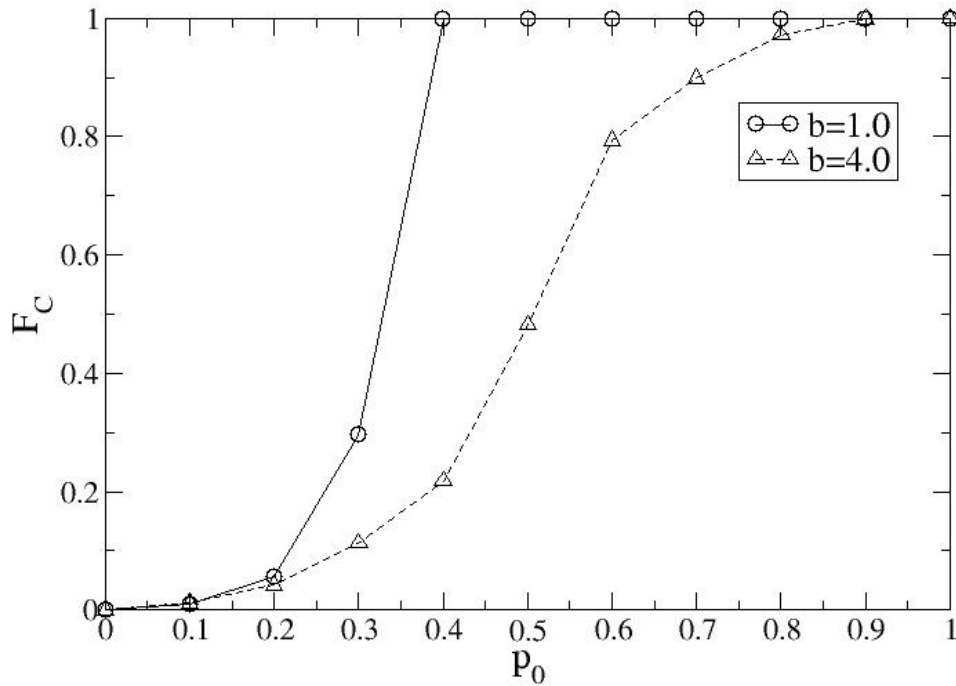


Figura 4.13: Cooperatividade média no regime estacionário F_c em função da probabilidade inicial de cooperação p_0 .

4.3.3 Atualização assíncrona

No caso em que a atualização é assíncrona, a cooperação no modelo DO não se espalha na população, pois a transição $(D, D) \rightarrow (C, C)$ não ocorre, conforme foi explicado na seção 4.2. A cooperatividade média no regime estacionário F_c em função de alguns valores da tendência de desertar b para o modelo DO numa rede quadrada é mostrado na figura 4.14. Note que F_c se mantém próximo a 0,25, pois as cooperações

que se mantém no regime estacionário são somente as cooperação mútuas iniciais (como a probabilidade inicial de cooperação é 0,5, a fração inicial de cooperações mútuas é 0,25).

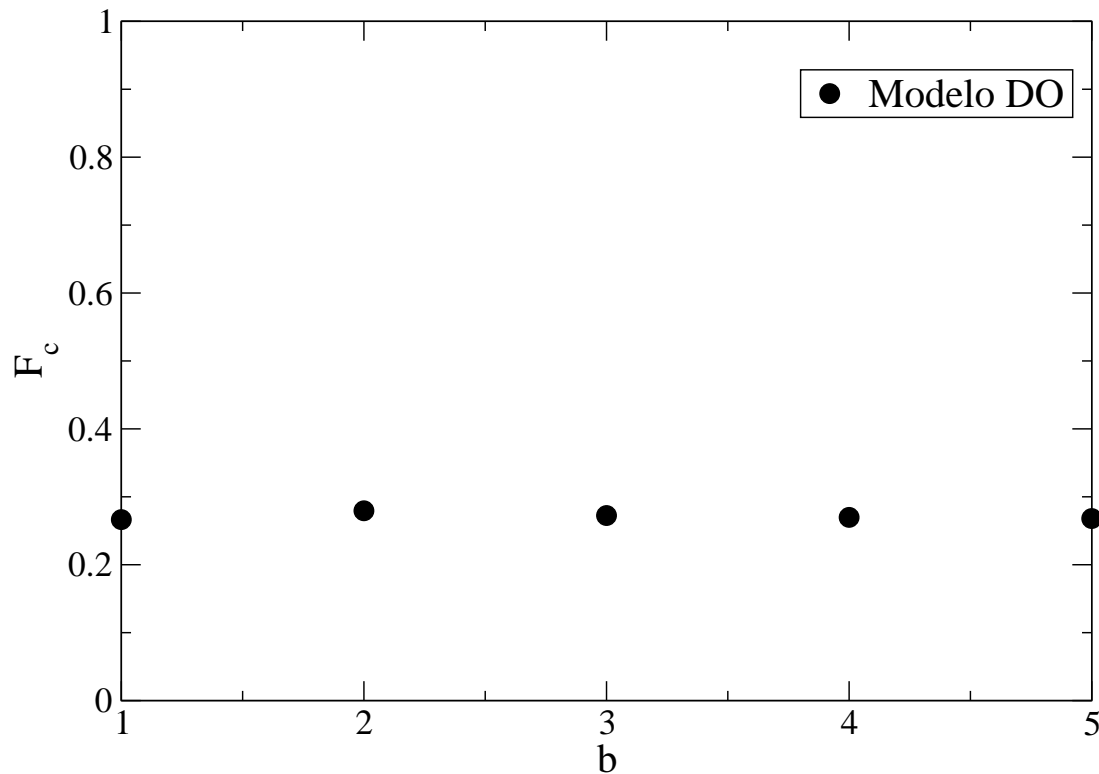


Figura 4.14: Cooperatividade média no regime estacionário F_c em função de alguns valores da tendência de desertar b no modelo DO para rede quadrada com $L = 100$ e $\epsilon = 0,01$, com atualização assíncrona.

4.4 Anel

O modelo DO com atualização síncrona foi estudado numericamente num anel. A cooperatividade média num anel com 10000 sítios é mostrada na figura 4.15 como função de b . No modelo DO a cooperatividade média permanece próxima ao limite inferior dado pela fração inicial de cooperação mútua ao passo que no modelo Usual a cooperação é extinta.

Novamente analisamos a expansão de aglomerados de cooperadores, conforme ilustrado na figura 4.16. Note que no modelo DO não é possível que a cooperação seja imitada, pois o ganho cumulativo dos indivíduos que adotam C e que se encontram na interface é menor do que o ganho do jogador que adota

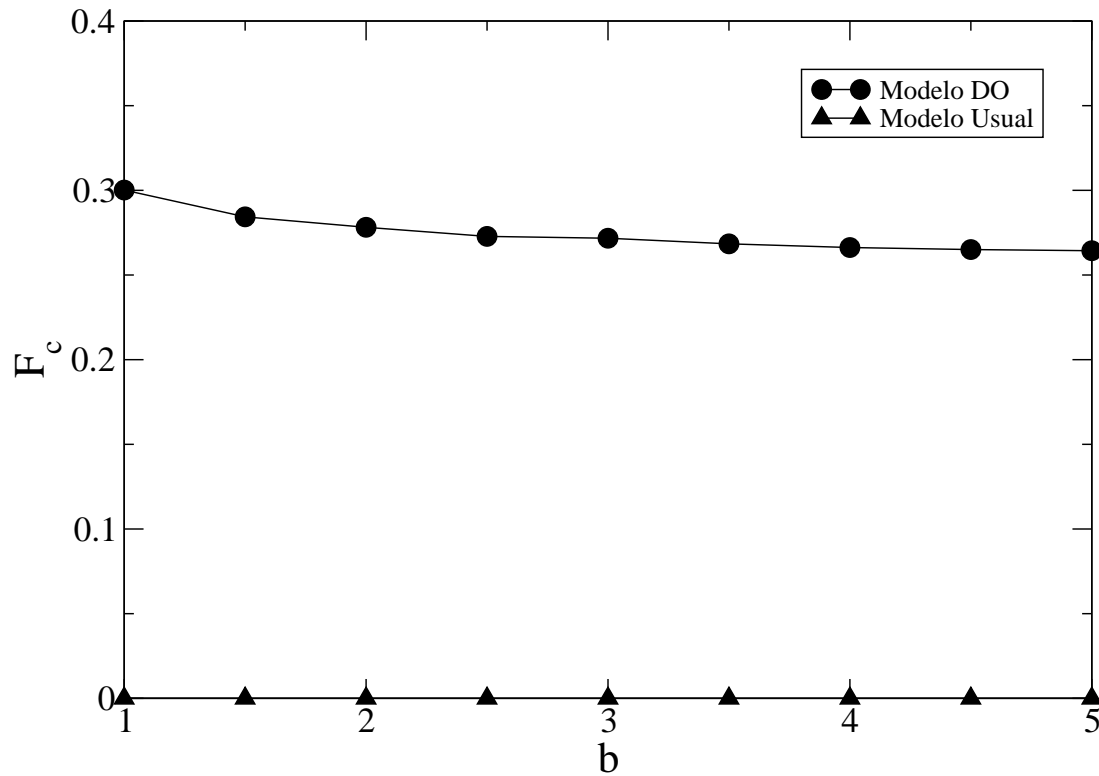


Figura 4.15: Cooperatividade média F_c no regime estacionário no anel em função da tendência de deserção b . Os parâmetros são $N = 10000$ e $\epsilon = 0,01$.

D. Em contrapartida, devido ao fato de as cooperações mútuas não serem desfeitas, a cooperatividade média da população é mantida em um nível um pouco superior a 25%. No caso do modelo Usual, é fácil ver que a cooperação é extinta, pois um desertor sempre obtém um ganho maior do que um cooperador.

Na presença de erros, a cooperação no anel é menos robusta do que na rede quadrada, como pode ser visto na figura 4.17.

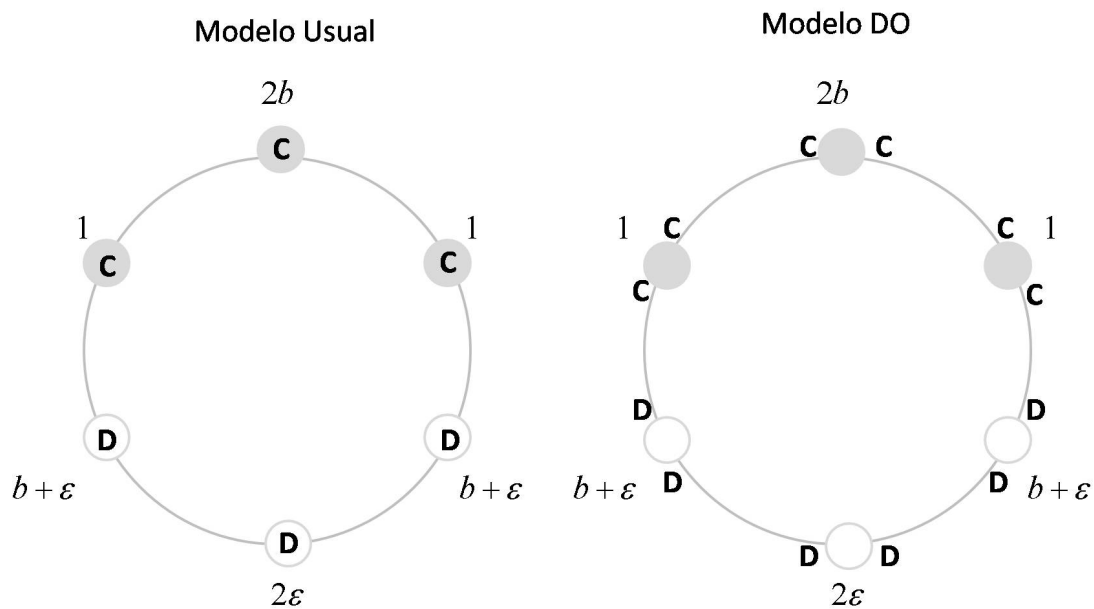


Figura 4.16: Aglomerados de cooperadores para os modelos Usual e DO. O ganho cumulativo de cada jogador é mostrado junto a cada nó.

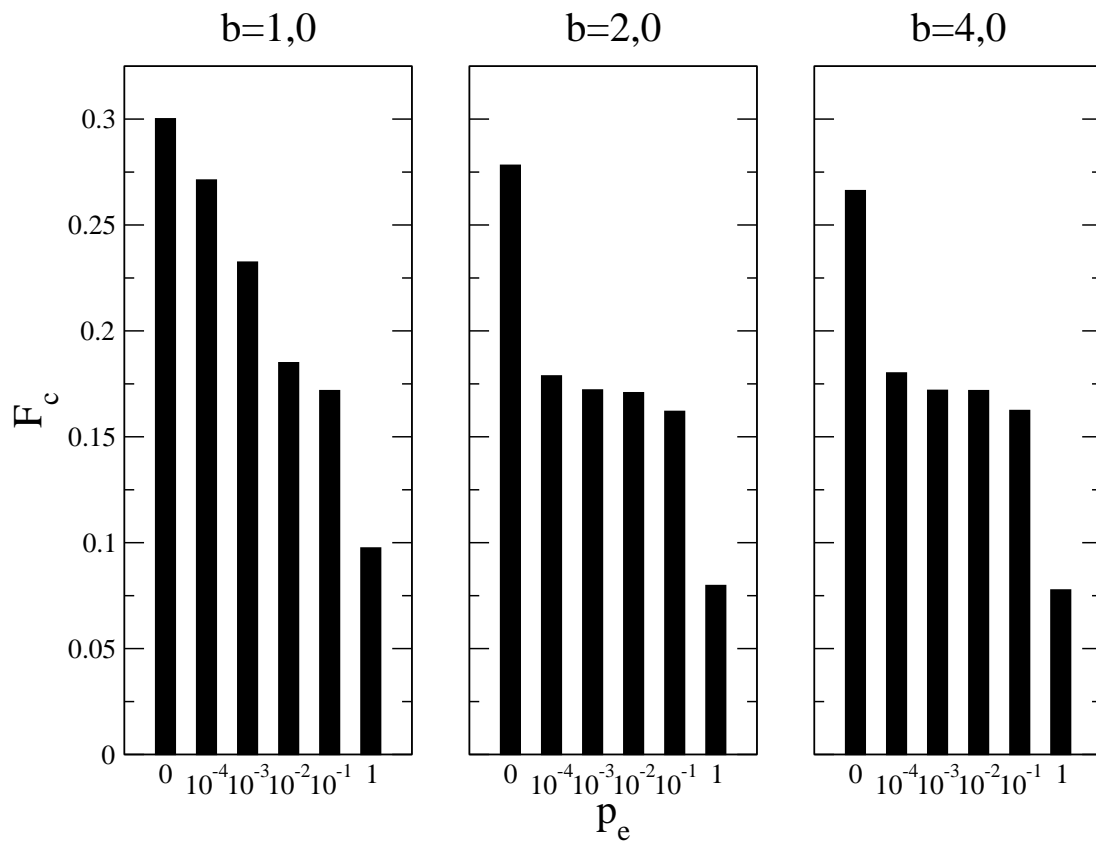


Figura 4.17: Cooperatividade média no regime estacionário F_c em função da probabilidade de erro p_e para $b = 1,01$, $b = 2,0$ e $b = 4,0$ no anel. Os parâmetros são $N = 10000$ e $\epsilon = 0,01$.

Capítulo 5

Aproximação de campo médio numa população bem-misturada

Em uma população bem misturada, cada jogador pode interagir com todos os demais. No contexto de reciprocidade de rede, uma população bem misturada é formalizada em termos de um grafo completo, isto é, um grafo em que todos os nós estão conectados entre si. Nesse capítulo estudaremos o modelo DO com os jogadores colocados num grafo completo e desenvolveremos uma aproximação de campo médio para as atualizações assíncrona e síncrona juntamente com os resultados de simulações de Monte Carlo [109].

As simulações foram realizadas para uma rede de tamanho $N = 40$. Apesar de serem redes pequenas, elas apresentam o mesmo comportamento de redes maiores, como foi verificado nas simulações para alguns casos particulares. A evolução da cooperação é medida em termos da cooperatividade média da população no tempo t , que é dada por

$$\bar{f}_c(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_c(i, t), \quad (5.1)$$

onde $f_c(i, t)$ foi definido na seção 4.1 do capítulo anterior. Como a condição inicial é cooperar em cada interação com probabilidade igual a 0,5, na simulação computacional o valor de $\bar{f}_c(t)$ é obtido através de 100 médias em diferentes realizações da condição inicial.

No caso da atualização síncrona, a cooperatividade média da população no regime estacionário é igual a um para qualquer valor de b . A evolução da cooperatividade média da população é mostrada na figura 5.1. Quando a população começa a evoluir a partir da condição inicial, em que se coopera com probabilidade 0,5, a cooperatividade média passa por dois regimes. No regime inicial, as explorações são neutralizadas e a cooperatividade média assume um valor próximo ao limite inferior dado pelas cooperações mútuas iniciais, como pode ser visto na figura 5.2. No regime final, mostrado na figura 5.1, a cooperatividade

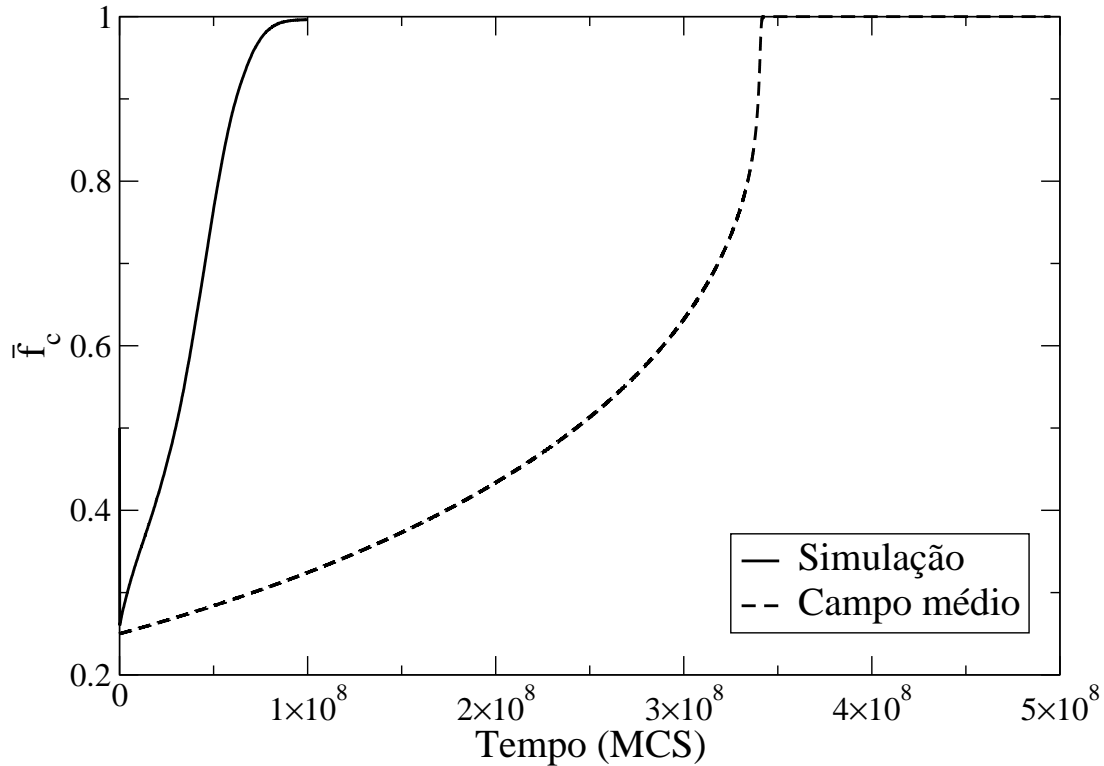


Figura 5.1: Regime final da cooperatividade média da população no tempo $t \bar{f}_c(t)$ no caso de atualização síncrona para $b = 2, 0$. Na figura são mostrados os resultados da simulação computacional (linha contínua) e do campo médio (linha pontilhada) dado pelas equações 5.21 e 5.22.

aumenta devido à presença da transição $(D, D) \rightarrow (C, C)$ e atinge o valor do regime estacionário, que é igual a 1.

No caso da atualização assíncrona, a cooperatividade média da população no regime estacionário assume um valor próximo ao do limite inferior dado pelas cooperações iniciais mútuas para qualquer valor de b . A evolução da cooperatividade média da população é mostrada na figura 5.3. Isso ocorre porque na atualização assíncrona a transição $(D, D) \rightarrow (C, C)$ não acontece.

O tempo de simulação para se alcançar o regime estacionário no caso de redes grandes é muito longo. O tempo em que a população permanece no regime inicial na atualização síncrona aumenta com o tamanho da população. Como no regime inicial a cooperatividade média da população aproxima-se do valor mínimo próximo a 25%, pode-se calcular o tempo T necessário para que a cooperatividade atinja o seu valor mínimo em função do tamanho N da população. A relação entre $1/T$ e N é mostrado na figura 5.4.

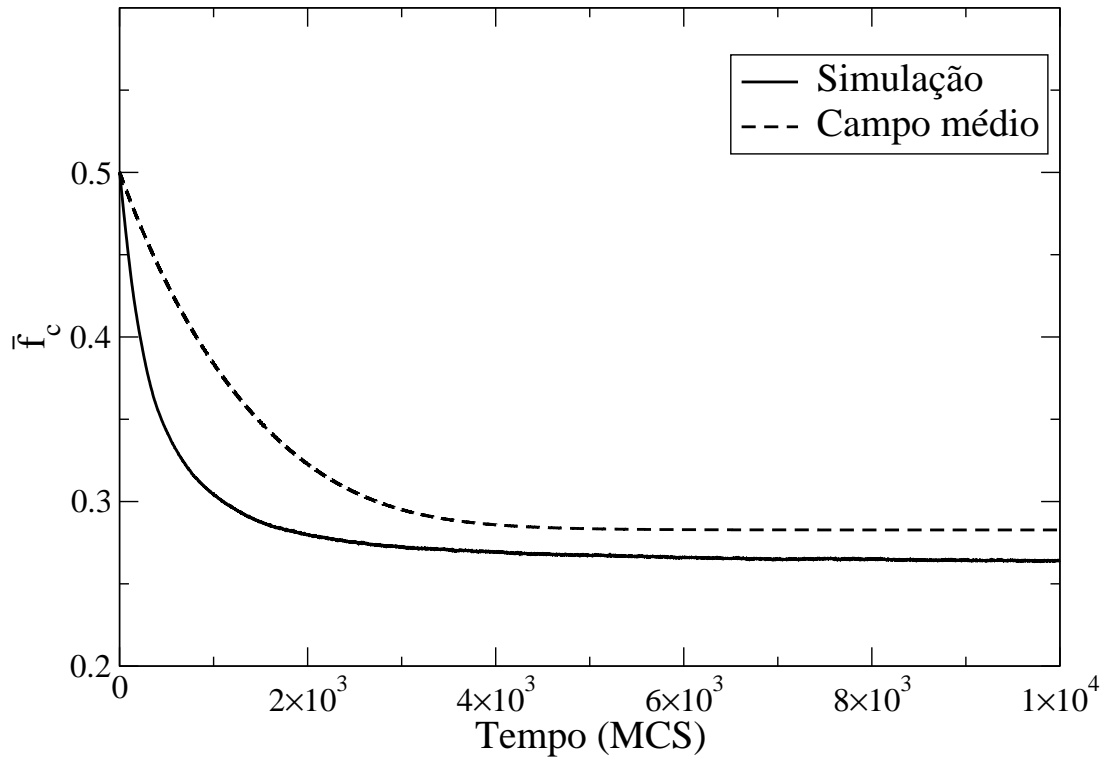


Figura 5.2: Regime inicial da cooperatividade média da população no tempo t no caso de atualização síncrona para $b = 2, 0$. Na figura são mostrados os resultados da simulação computacional (linha contínua) e do campo médio (linha pontilhada).

Note que quando N aumenta, a fração $1/T$ assume valores cada vez menores, indicando que o tempo fica cada vez maior. Por outro lado, se N é grande, mas finito, a cooperatividade começa a aumentar após o regime inicial.

No modelo DO os resultados da aproximação de campo médio ajustam-se bem aos resultados da simulação. No caso assíncrono, a aproximação é ótima e, no caso síncrono, a aproximação é boa no regime inicial e, no regime final, coincide apenas com a solução estacionária. Apesar da rede ser completa— todos os nós conectados entre si— a aproximação de campo médio para o modelo DO analisa grandezas vinculadas às ligações e não aos nós. Dessa forma não é de se esperar que, como o grafo é completo, a aproximação forneça resultados exatos. Nas próximas seções iremos deduzir as equações de taxa através de aproximações do tipo campo médio para os casos assíncrono e síncrono.

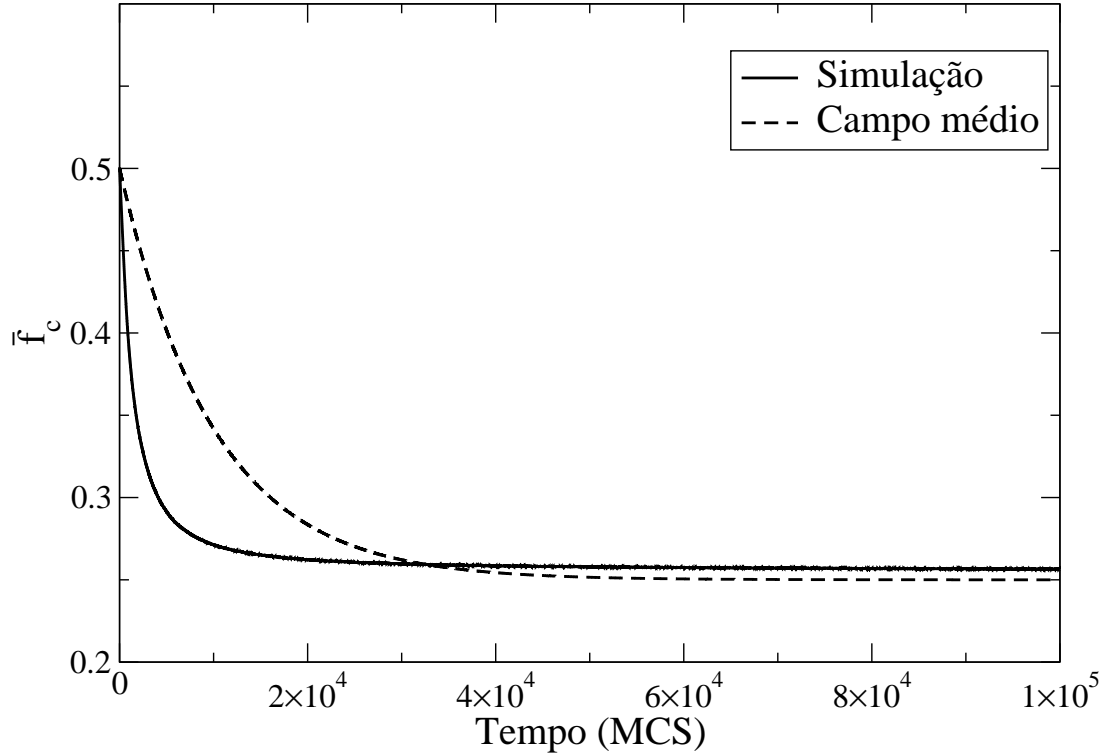


Figura 5.3: Evolução temporal da cooperatividade média da população no tempo t no caso de atualização assíncrona para $b = 2, 0$. Na figura são mostrados os resultados da simulação computacional (linha contínua) e do campo médio (linha pontilhada) dado pela equação 5.18.

5.1 Atualização assíncrona

Consideremos uma população de tamanho $N + 1$. Se numa interação o jogador i adota a estratégia A e o jogador j adota a estratégia B , em que $A, B \in \{C, D\}$, diz-se que o jogador i possui uma interação do tipo $(S_{i,j}, S_{j,i}) = (A, B)$. Seja $N_{AB}(i, t)$ a quantidade de interações do tipo (A, B) que o jogador i possui no tempo t . A concentração local $x_{AB}(i, t)$ é dada por

$$x_{AB}(i, t) = N_{AB}(i, t)/N. \quad (5.2)$$

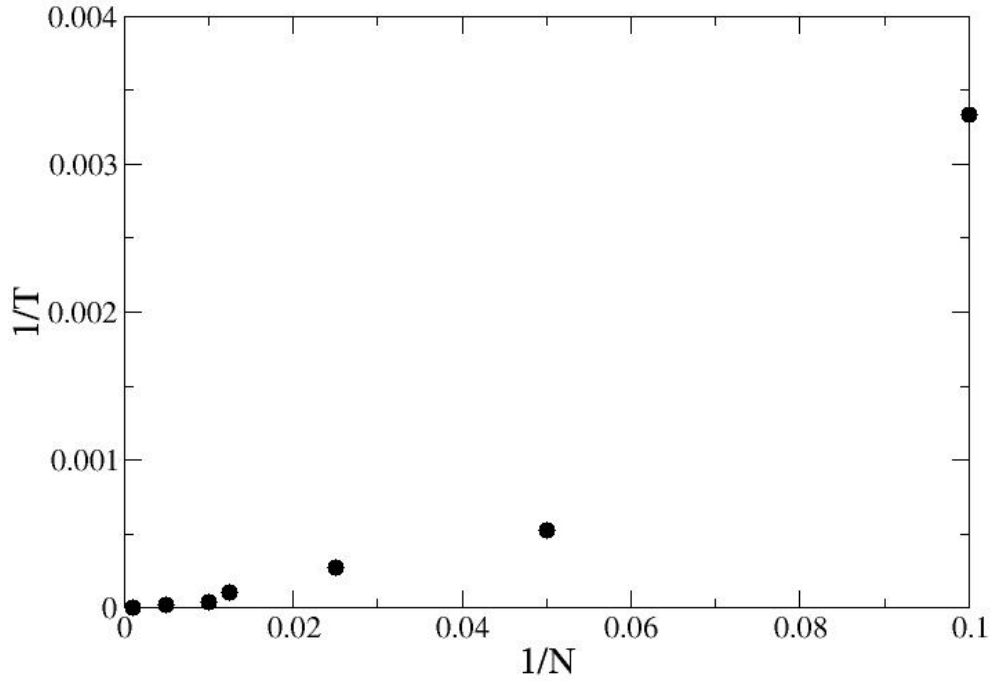


Figura 5.4: Inverso do tempo médio T em que a cooperatividade média da população atinge o seu valor mínimo em função do tamanho da rede N para $b = 2, 0$.

Note que a quantidade de interações é dividida por N , pois o jogador i possui N interações. A concentração global de (A, B) no tempo t é, portanto, dada por

$$x_{AB}(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} x_{AB}(i, t). \quad (5.3)$$

A partir das concentrações pode-se obter a cooperatividade média da população no tempo t , que é dada por

$$\begin{aligned} \bar{f}_c(t) &= \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} f_c(i, t) \\ &= \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} [x_{CC}(i, t) + x_{CD}(i, t)] \\ &= x_{CC}(t) + x_{CD}(t). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Consideremos um jogador típico, que chamaremos de jogador foco (jogador F). Vamos analisar a dinâmica das concentrações locais $x_{CD}(F, t)$, $x_{DD}(F, t)$, $x_{CC}(F, t)$ e $x_{DC}(F, t)$. Sejam $k_1 = N_{CD}(F, t)$, $k_2 = N_{DD}(F, t)$, $k_3 = N_{CC}(F, t)$ e $k_4 = N_{DC}(F, t)$. Note que $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = N$. A configuração do jogador foco é dada pelo vetor $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3, k_4)$, em que $k_4 = N - k_1 - k_2 - k_3$, como pode ser visto na figura 5.5. Assumamos que a probabilidade de que uma das interações do jogador foco seja do tipo (A, B) seja dada pela concentração global $x_{AB}(t)$. Para simplificar a notação, sempre que possível, vamos omitir o argumento t . A probabilidade de que o nó foco esteja numa configuração $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3, k_4)$ é dada por

$$\Pi(\vec{k}) = \frac{N!}{k_1!k_2!k_3!(N - k_1 - k_2 - k_3)!} x_{CD}^{k_1} x_{DD}^{k_2} x_{CC}^{k_3} x_{DC}^{N - k_1 - k_2 - k_3}. \quad (5.5)$$

Os demais jogadores são considerados como jogadores de campo médio. A configuração desses jogadores é igual a $N(x_{CD}, x_{DD}, x_{CC}, x_{DC})$. O próximo passo é deduzir as expressões das taxas de variação das concentrações locais $x_{CD}(F)$, $x_{DD}(F)$, $x_{CC}(F)$ e $x_{DC}(F)$.

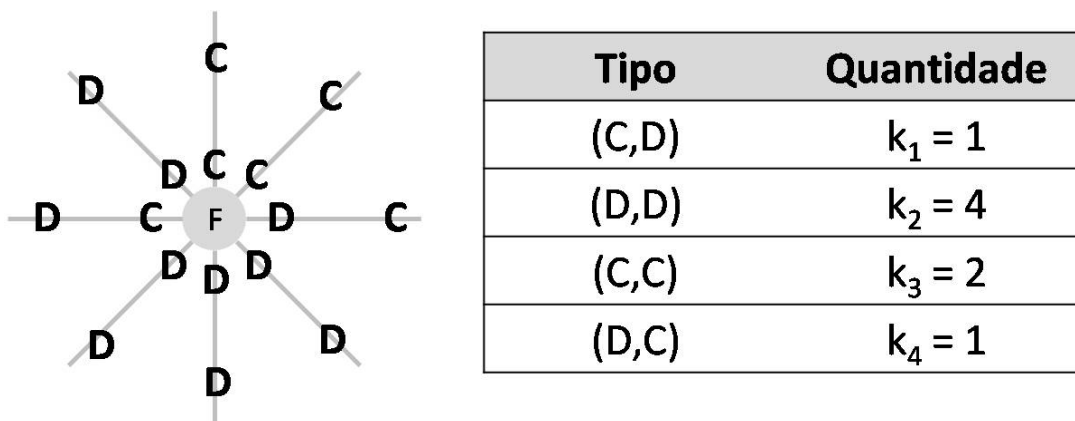


Figura 5.5: Quantidade de interações de cada tipo em torno no jogador foco F em uma população de tamanho $N + 1 = 9$.

Vamos deduzir a taxa de aumento de $x_{DD}(F)$. Apenas para manter a notação suficientemente clara, na interação (D, D) a primeira entrada refere-se à estratégia adotada pelo jogador foco e a segunda entrada à estratégia adotada pelo oponente. Se o jogador foco está na configuração \vec{k} , o seu ganho cumulativo é dado por

$$PF(\vec{k}) = (N - k_1 - k_2 - k_3)b + k_3 + k_2\epsilon, \quad (5.6)$$

pois ele possui $(N - k_1 - k_2 - k_3)$ interações do tipo (D, C) , k_3 interações do tipo (C, C) e k_2 interações do tipo (D, D) . Existe apenas uma transição que aumenta a quantidade de (D, D) : $(C, D) \rightarrow (D, D)$. Essa transição ocorre quando o jogador foco imita a estratégia D de algum oponente. A interação associada ao

oponente que foi imitado pode ser do tipo (i) (C, D) ou (ii) (D, D) . Consideremos primeiramente o caso (i). Como o jogador foco escolhe o oponente a ser imitado de forma aleatória, esse oponente está envolvido numa interação do tipo (C, D) com probabilidade k_1/N . O oponente associado à interação (C, D) possui um ganho cumulativo dado por

$$PO(C, D) = b + (N - 1)(x_{DC}b + x_{CC} + x_{DD}\epsilon), \quad (5.7)$$

pois o oponente possui na média uma interação do tipo (D, C) , $(N - 1)x_{DC}$ do tipo (D, C) , $(N - 1)x_{CC}$ do tipo (C, C) e $(N - 1)x_{DD}$ do tipo (D, D) . A probabilidade de se imitar a estratégia D do oponente associado à interação (C, D) é dada por

$$p = \frac{\Theta[PO(C, D) - PF(\vec{k})]}{bN}, \quad (5.8)$$

em que $\Theta(x) = x$, se $x > 0$, e $\Theta(x) = 0$, caso contrário. A taxa média de aumento em uma unidade das interações do tipo (D, D) para o jogador foco é dada por

$$W_{CD}^+ = \sum_{k_1=0}^N \sum_{k_2=0}^{N-k_1} \sum_{k_3=0}^{N-k_1-k_2} \frac{k_1}{N} \frac{\Theta[PO(C, D) - PF(\vec{k})]}{bN} \Pi(\vec{k}). \quad (5.9)$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio, pode-se obter a taxa de aumento das interações (D, D) devido ao caso (ii), que é dada por

$$W_{DD}^+ = \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^{N-k_1} \sum_{k_3=0}^{N-k_1-k_2} \frac{k_2}{N} \frac{\Theta[PO(D, D) - PF(\vec{k})]}{bN} \Pi(\vec{k}). \quad (5.10)$$

Nessa notação o índice CD em W_{CD}^+ significa que a estratégia D é imitada de um oponente associado a uma interação (C, D) . O mesmo vale para o significado do índice DD .

O mesmo tipo de análise é utilizado para se calcular a taxa de decrescimento de $x_{DD}(F)$. Existe apenas uma transição que faz essa quantidade decair: $(D, D) \rightarrow (C, D)$. Essa transição ocorre quando o jogador foco imita a estratégia C de algum oponente. A estratégia C pode ser imitada de uma interação do tipo (i) (C, C) ou (ii) (D, C) . No caso (i), como o jogador foco escolhe o oponente a ser imitado de forma aleatória, esse oponente está envolvido numa interação do tipo (C, C) com probabilidade k_3/N . O jogador foco não pode ter nenhuma interação do tipo (C, D) , pois nesse caso essa seria a interação de menor ganho e a estratégia C , ao ser colocada nessa interação, em nada alteraria a configuração do jogador foco. Portanto tem-se que $k_1 = 0$ na expressão de $\Pi(\vec{k})$, que pode ser simplificada para a forma

$\tilde{\Pi}(\vec{k})$ dada por

$$\tilde{\Pi}(\vec{k}) = \sum_{k_1=0}^N \Pi(\vec{k}) = \frac{N!}{k_2!k_3!(N-k_2-k_3)!} x_{DD}^{k_2} x_{CC}^{k_3} x_{DC}^{N-k_2-k_3}. \quad (5.11)$$

A taxa de decréscimo no caso (i) é dada por

$$W_{CC}^- = \sum_{k_2=1}^N \sum_{k_3=0}^{N-k_2} \frac{k_3}{N} \frac{\Theta[PO(C, C) - PF(\vec{k})]}{bN} \tilde{\Pi}(\vec{k}). \quad (5.12)$$

Da mesma forma, a taxa de decréscimo no caso (ii) é dada por

$$W_{DC}^- = \sum_{k_2=1}^N \sum_{k_3=0}^{N-k_2} \frac{N-k_2-k_3}{N} \frac{\Theta[PO(D, C) - PF(\vec{k})]}{bN} \tilde{\Pi}(\vec{k}). \quad (5.13)$$

O índice CC em W_{CC}^- significa que a estratégia C é imitada de um oponente associado a uma interação do tipo (C, C) . O índice (D, C) tem um significado análogo. Note que em W_{DC}^- tem-se que $k_2 \neq 0$, pois o jogador foco deve ter pelo menos uma interação do tipo (D, D) para que essa taxa não seja igual a zero.

Como a população é do tipo bem misturada, todos os nós possuem o mesmo comportamento típico. Portanto pode-se dizer que $x_{DD}(F) = x_{DD}$, isto é, a concentração local é igual à concentração global. As taxas de variação que foram calculadas referem-se à variação em uma unidade da quantidade de (D, D) adotada pelo jogador foco. Quando a quantidade de (D, D) varia em uma unidade, a concentração x_{DD} varia em $1/N$. Portanto, para se obter a taxa de variação global x_{DD} , deve-se dividir a taxa de variação local por N . Além disso, quando o jogador foco aumenta ou diminui a quantidade de (D, D) , o mesmo ocorre para o oponente envolvido na interação que foi modificada. Portanto é preciso multiplicar por 2 a taxa de variação local. A derivada temporal de x_{DD} é dada por

$$\frac{dx_{DD}}{dt} = 2 \frac{1}{N} (W_{CD}^+ + W_{DD}^+ - W_{CC}^- - W_{DC}^-). \quad (5.14)$$

Como a atualização é assíncrona, as interações (C, C) não são nem desfeitas e nem criadas, de acordo com o que foi explicado na seção 4.2. Portanto x_{CC} não varia no tempo,

$$\frac{dx_{CC}}{dt} = 0. \quad (5.15)$$

Finalmente como as concentrações globais são normalizadas e $x_{CD} = x_{DC}$, tem-se que

$$x_{CD} = \frac{1}{2}(1 - x_{DD} - x_{CC}). \quad (5.16)$$

Essas equações fornecem a solução de campo médio para o modelo DO numa população bem misturada. A equação 5.14 pode ser simplificada se substituirmos k_1 , k_2 e k_3 , no argumento da função $\Theta(x)$, pelos valores de campo médio. Por exemplo, na equação que define W_{CD}^+ , o argumento da função $\Theta(x)$ é $PO(C, D) - PF(\vec{k})$. Realizando a simplificação tem-se que $PO(C, D) - PF(\vec{k}) = b$, pois

$$\begin{aligned} PO(C, D) - PF(\vec{k}) &= [b + (N - 1)(x_{DC}b + x_{CC} + x_{DD}\epsilon)] - [(N - k_1 - k_2 - k_3)b + k_3 + k_2\epsilon] \\ &= [b + (N - 1)(x_{DC}b + x_{CC} + x_{DD}\epsilon)] - [(N - 1)(x_{DC}b + x_{CC} + x_{DD}\epsilon)] \\ &= b. \end{aligned}$$

Portanto

$$\Theta(PO(C, D) - PF(\vec{k})) \approx b. \quad (5.17)$$

A equação que define W_{CD}^+ torna-se

$$\begin{aligned} W_{CD}^+ &= \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=0}^{N-k_1} \sum_{k_3=0}^{N-k_1-k_2} \frac{N!}{k_1!k_2!k_3!(N-k_1-k_2-k_3)!} \frac{k_1}{N^2} x_{CD}^{k_1} x_{DD}^{k_2} x_{CC}^{k_3} x_{DC}^{N-k_1-k_2-k_3} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{k_1=0}^N \frac{N!}{(N-k_1)!k_1!} k_1 x_{CD}^{k_1} (1-x_{CD})^{N-k_1} \\ &= \frac{x_{CD}}{N} \end{aligned}$$

As equações que definem W_{DD}^+ , W_{CC}^- e W_{DC}^- podem ser simplificadas de maneira análoga. A equação 5.14, após a simplificação torna-se

$$\frac{dx_{DD}}{dt} = 2 \frac{1}{N^2} \left\{ x_{CD} + x_{DD} \frac{\epsilon}{b} [1 - (1 - x_{CD})^{N-1}] - \frac{x_{CC}}{b} [(1 - x_{CD})^{N-1} - (x_{CC} + x_{DC})^{N-1}] \right\} \quad (5.18)$$

Essa equação pode ser resolvida numericamente. A solução numérica é mostrada na figura 5.3, juntamente com o resultado da simulação computacional.

A fim de se obter uma solução aproximada da equação 5.18, consideremos uma aproximação para a órbita próxima à condição inicial. Como a condição inicial é de 50% de cooperação, tem-se que inicialmente $x_{CC}(0) = x_{DD}(0) = x_{CD}(0) = 0,25$. Enquanto a órbita permanece próxima à condição inicial, os termos dentro dos parênteses na equação 5.18 valem, aproximadamente, $(1 - x_{CD})^{N-1} = 0,75^{N-1}$ e $(x_{CC} + x_{DC})^{N-1} = 0,5^{N-1}$. Se N é grande, esses termos são pequenos, ao menos no regime inicial.

Descartando esses termos pequenos, a equação 5.18 pode ser simplificada para

$$\frac{dx_{DD}}{dt} = 2\frac{1}{N^2}(x_{CD} + \frac{\epsilon}{b}x_{DD}). \quad (5.19)$$

A solução da equação 5.19 é dada por

$$\begin{aligned} x_{DD}(t) &= x_{DD}(0) + \frac{\frac{\epsilon}{b}x_{DD}(0) + x_{CD}(0)}{\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{b}} \left[1 - \exp\left(-\frac{2}{N^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{b}\right)t\right) \right], \\ x_{CC}(t) &= x_{CC}(0), \\ x_{CD}(t) &= \frac{1}{2}(1 - x_{DD}(t) - x_{CC}(0)). \end{aligned}$$

Se $\epsilon = 0$, apenas por simplicidade, a solução estacionária da equação 5.19 é dada por

$$\begin{aligned} x_{DD}^{\infty} &= x_{DD}(0) + 2x_{CD}(0), \\ x_{CC}^{\infty} &= x_{CC}(0), \\ x_{CD}^{\infty} &= x_{DC}^{\infty} = 0. \end{aligned}$$

Para a condição inicial de 50% de cooperação, o que equivale a $x_{CC}(0) = x_{DD}(0) = x_{CD}(0) = 0,25$, tem-se $x_{DD}^{\infty} = 0,75$ e $x_{CC}^{\infty} = 0,25$.

Note que a equação 5.19 é uma aproximação da equação 5.18 válida somente para as órbitas próximas à condição inicial. Agora vamos mostrar que a solução estacionária da equação 5.19 é também uma boa aproximação para a solução estacionária da equação 5.18. Em outras palavras, vamos mostrar que $x_{DD}^{\infty} = 0,75$ e $x_{CC}^{\infty} = 0,25$ é também uma boa aproximação da solução estacionária da equação 5.18. Para isso note que quando $x_{DD} \approx 0,75$, $x_{CD} \approx 0,00$ e $x_{CC} \approx 0,25$, tem-se que o único termo relevante na equação 5.18 é

$$-\frac{2}{N^2} \frac{x_{CC}}{b} (1 - x_{CD})^{N-1} \approx 1.$$

Nesse caso a derivada de x_{DD} é negativa. Quando x_{DD} decai, x_{CD} aumenta e o termo $(1 - x_{CD})^{N-1}$ torna-se irrelevante. Nesse caso a derivada de x_{DD} passa a ser positiva. Vê-se que x_{DD} sofre apenas pequenas oscilações em torno do valor $x_{DD} = 0,75$. Portanto a solução estacionária da equação 5.19 é também uma boa aproximação da solução estacionária da equação 5.18. Como

$$\bar{f}_c^{\infty} = x_{CC}^{\infty} + x_{CD}^{\infty} = 0,25,$$

onde

$$\bar{f}_c^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{f}_c(t),$$

vê-se que esse resultado analítico de fato aproxima o resultado das simulações computacionais do modelo assíncrono. Além do mais pode-se notar que o valor da cooperatividade média no regime estacionário não depende da tendência de desertar b .

5.2 Atualização síncrona

Na atualização síncrona a transição $(D, D) \rightarrow (C, C)$ é possível. Essa transição ocorre quando dois jogadores imitam simultaneamente a estratégia C e colocam essa estratégia numa interação (D, D) comum a ambos, conforme ilustrado na figura 5.6. Como as cooperações mútuas não podem ser desfeitas no

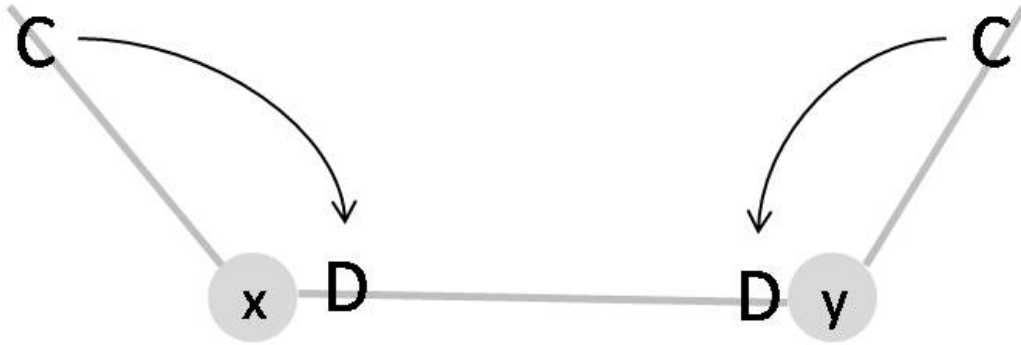


Figura 5.6: Ilustração da transição $(D, D) \rightarrow (C, C)$ entre dois jogadores x e y que ocorre na atualização síncrona. Os jogadores x e y imitam simultaneamente a estratégia C de algum de seus vizinhos. A estratégia C é colocada na interação (D, D) entre os jogadores x e y .

modelo DO, a variação de x_{CC} é positiva e é dada aproximadamente por

$$\frac{dx_{CC}}{dt} = \frac{2}{N^2 x_{DD}} (W_{CC}^- + W_{DC}^-)^2. \quad (5.20)$$

Os termos W_{CC}^- e W_{DC}^- são os mesmos do caso assíncrono. Esses termos referem-se à transição $(D, D) \rightarrow (C, D)$. Suponha que a interação entre os jogadores x e y seja do tipo $(S_{x,y}, S_{y,x}) = (D, D)$ e que ambos realizem simultaneamente a transição $(D, D) \rightarrow (C, D)$ na interação entre eles. O resultado final é a transição $(D, D) \rightarrow (C, C)$. Mas note que, se o jogador x realiza essa transição, o jogador y poderia ter escolhido outra interação do tipo (D, D) para colocar a estratégia C . O jogador y escolhe a interação com o jogador x com probabilidade $1/(N x_{DD})$. O termo $(W_{CC}^- + W_{DC}^-)$ é elevado ao quadrado pois é preciso

que ambos os jogadores x e y imitem a estratégia C . Novamente as taxas devem ser multiplicadas por $2/N$. A variação de x_{DD} é dada pelas mesmas equações do caso assíncrono. Com as mesmas aproximações realizadas no caso assíncrono, as equações para x_{CC} e x_{DD} são dadas por

$$\frac{dx_{CC}}{dt} = 2 \frac{1}{x_{DD} N^4} \left\{ \frac{x_{CC}}{b} [(1 - x_{CD})^{N-1} - (x_{CC} + x_{DC})^{N-1}] \right\}^2, \quad (5.21)$$

$$\frac{dx_{DD}}{dt} = 2 \frac{1}{N^2} \left\{ x_{CD} + x_{DD} \frac{\epsilon}{b} [1 - (1 - x_{CD})^{N-1}] - \frac{x_{CC}}{b} [(1 - x_{CD})^{N-1} - (x_{CC} + x_{DC})^{N-1}] \right\}. \quad (5.22)$$

Pode-se ver na equação 5.21 que a derivada de x_{CC} é muito menor do que a derivada de x_{DD} . De fato, no regime inicial, x_{CC} praticamente não aumenta, pois os termos na equação são praticamente nulos, já que $(1 - x_{CD})^{N-1} = (0,75)^{N-1}$ e $(x_{CC} + x_{DC})^{N-1} = (0,5)^{N-1}$ são extremamente pequenos e a equação é dividida por N^4 . Contudo, quando x_{DD} aumenta e x_{CD} diminui, o termo $(1 - x_{CD})^{N-1}$ aproxima-se de um e x_{CC} começa a crescer até $x_{CC} = 1$. Como as cooperações mútuas não são desfeitas, a órbita assume o valor estacionário $x_{CC}^\infty = 1$ e $x_{DD}^\infty = x_{CD}^\infty = 0$. Portanto tem-se dois regimes: o regime inicial, quando x_{CC} é mantido praticamente constante com valores próximos ao seu valor inicial e o regime final, quando x_{CC} começa a crescer e assume o valor limite $x_{CC}^\infty = 1$. A solução estacionária do caso síncrono é, portanto, dada por

$$\begin{aligned} x_{CC}^\infty &= 1, \\ x_{CD}^\infty &= x_{DC}^\infty = x_{DD}^\infty = 0. \end{aligned}$$

Como

$$\bar{f}_c^\infty = x_{CC}^\infty + x_{CD}^\infty = 1,$$

vê-se que a solução no regime estacionário coincide com o resultado das simulações computacionais. As figuras 5.2 e 5.1 mostram a solução numérica das equações 5.22 e 5.21, juntamente com os resultados das simulações computacionais.

Capítulo 6

Ganho cumulativo e ganho efetivo em redes heterogêneas

No mecanismo de reciprocidade de rede os indivíduos interagem com parceiros dados pela rede de interação, ao invés de interagirem de forma aleatória. No capítulo 4 o modelo DO foi estudado numa rede quadrada e num anel. No capítulo 5 o modelo DO foi estudado numa população bem misturada. Contudo as redes sociais que determinam as interações entre os seres humanos são bastante heterogêneas, sendo várias delas redes livre de escala (veja a descrição detalhada de rede livre de escala no apêndice A). Nas redes livre de escala, existem nós altamente conectados, os *hubs*, convivendo com nós pouco conectados. A análise das redes de autores de jornais científicos, das redes de atores de filme, das redes de contatos sexuais, das redes de chamadas de telefones, das redes de emails e a da estrutura da WWW mostraram que essas redes são aproximadamente do tipo livre de escala [110–119].

No caso em que os indivíduos interagem em redes heterogêneas, como as redes livre de escala, os jogadores possuem quantidades diferentes de interações. Um jogador muito conectado interage muito mais do que um jogador pouco conectado. Se em cada interação o jogador joga o dilema do prisioneiro, o sucesso de um jogador com muitos vizinhos é proveniente de duas fontes: a estratégia utilizada por ele e a grande quantidade de interações. A fim de reduzir essa sobreposição de informações, pode-se utilizar o ganho efetivo, que é obtido dividindo-se o ganho cumulativo pela quantidade de interações. No presente capítulo, estudaremos o efeito do ganho efetivo, em comparação com o ganho cumulativo, no modelo DO em redes heterogêneas [120].

6.1 Construção das redes heterogêneas

Um dos modelos de redes heterogêneas mais estudado é o modelo de rede livre de escala proposto por R. Albert e A.L. Barabási [94]. Esse modelo fornece um algoritmo de crescimento de rede em que a cada passo um novo nó é adicionado à rede sendo ligado preferencialmente aos nós com maior conectividade. A configuração final é uma distribuição de conectividade do tipo lei de potência, $P(k) \sim k^{-3}$, em que k é a conectividade e $P(k)$ é a probabilidade de que um nó aleatoriamente escolhido tenha conectividade k (veja a definição da distribuição de conectividade no apêndice A).

Nós geramos as redes heterogêneas através de um algoritmo elaborado por P. L. Krapivsky and S. Redner [121, 122]. Esse algoritmo, além de gerar uma rede livre de escala do tipo Albert-Barabási, possibilita-nos controlar a preponderância dos *hubs* na topologia da rede variando um parâmetro. A rede é iniciada com seis nós, cada um com dois vizinhos. No próximo passo, um novo nó x é criado e é ligado a dois nós. Os dois nós que recebem as ligações do nó x são chamados de antecessores do nó x (cada um dos seis nós dados na condição inicial possuem dois vizinhos que são, por definição, os seus antecessores). O dois antecessores do nó x são escolhidos da seguinte forma. Escolhe-se dois nós aleatoriamente, a saber os nós y_1 e y_2 . Com probabilidade $1 - r$, a primeira ligação do nó x permanece conectada ao nó y_1 e, com probabilidade r , redireciona-se esta ligação para um dos antecessores do nó y_1 . Da mesma forma, com probabilidade $1 - r$, a segunda ligação do nó x permanece conectada ao nó y_2 e, com probabilidade r , redireciona-se esta ligação para um dos antecessores do nó y_2 . Esse processo é repetido até se alcançar a quantidade N de nós. A figura 6.1 ilustra simplificada o processo de construção da rede.

O parâmetro r controla o quanto as ligações são redirecionadas para os antecessores. Se $r = 0$ as ligações são feitas aleatoriamente. Nesse caso a distribuição de conectividades é do tipo exponencial [121],

$$P(k) = 2^{-k}.$$

Se $r = 0,5$, a combinação da ligação aleatória e do redirecionamento para os antecessores é tal que a rede é do tipo livre de escala, onde a distribuição de conectividades é do tipo lei de potência, idêntica à do modelo Barabási-Albert [121],

$$P(k) = \frac{k^{-3}}{2}.$$

Se $r = 1$, as ligações novas são sempre redirecionadas para os antecessores. Nesse caso todas as ligações são redirecionadas para os seis nós presentes na condição inicial, que se tornam nós super conectados e os demais nós permanecem somente com duas ligações. Dessa forma, variando r de zero a um, pode-se

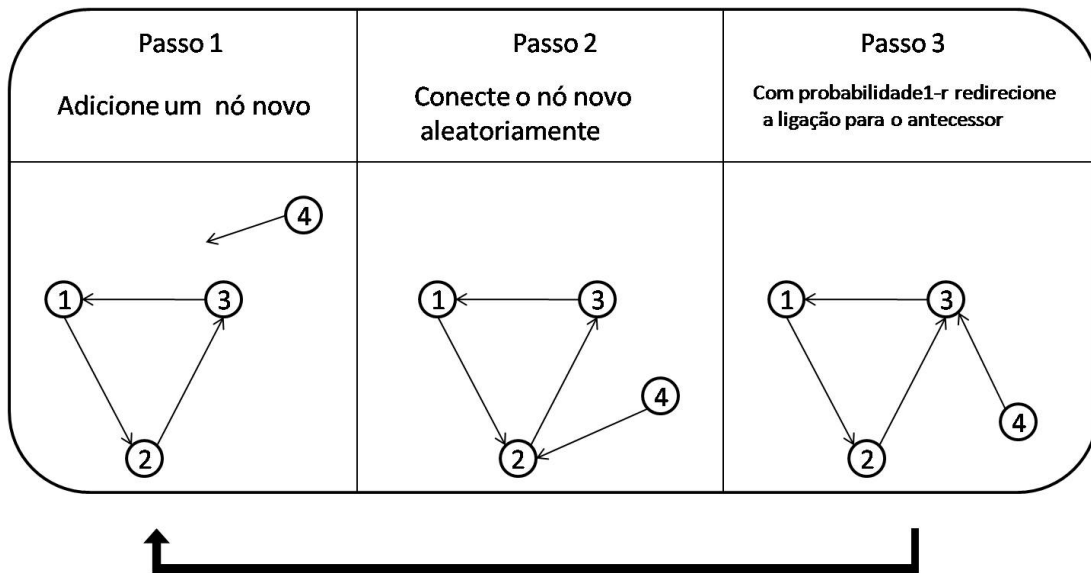


Figura 6.1: Ilustração simplificada do algoritmo gerador das redes. No passo 1 o nó 4 é criado com uma ligação. No passo 2, escolhe-se aleatoriamente um dos nós já existentes para ser ligado ao nó 4, no caso, o nó 2. No passo 3, com probabilidade r redireciona-se a ligação do nó 4 para o antecessor do nó 2, que é o nó 3. Um novo nó é criado e o processo se repete até que tamanho N da rede seja alcançado. A direção das ligações serve apenas para indicar o antecessor.

variar a preponderância dos *hubs* na rede heterogênea. A figura 6.2 ilustra as redes geradas com $r = 0,0$, $r = 0,5$ e $r = 1,0$.

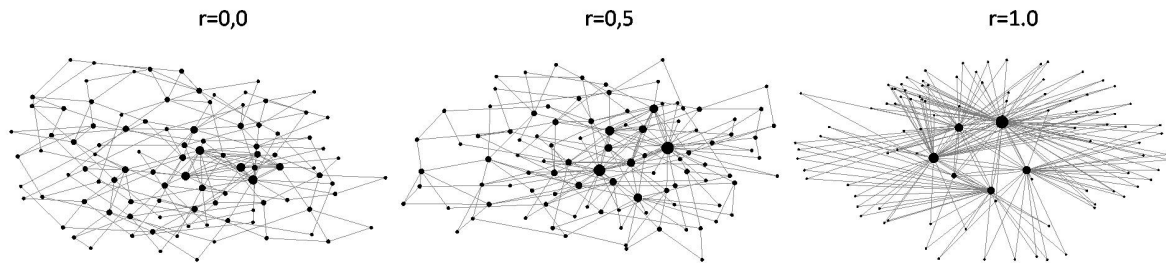


Figura 6.2: Redes de tamanho $N = 100$ geradas pelo algoritmo de Redner e Krapivsk para $r = 0,0$, $r = 0,5$ e $r = 1,0$. Note que quando r se aproxima de um, as ligações ficam mais concentradas em torno dos alguns poucos nós, que são chamados de *hubs*. O tamanho dos nós representa a conectividade do nó. Visualização gerada pelo software Pajek [123].

6.2 Evolução da cooperação no modelo DO

Nessa seção será analisado o efeito da topologia de redes heterogêneas no modelo DO. Os jogadores são colocados nos nós de uma rede heterogênea, obtidas através do algoritmo de Redner e Krapivsky. O dilema

do prisioneiro, caracterizado pela matriz de ganho mais simples (ver equação 4.1), é jogado com cada um dos vizinhos, com $\epsilon = 0,001$ e $b > 1$. O ganho cumulativo de um jogador é a soma dos ganhos obtidos em cada interação, da mesma forma como foi explicado no capítulo 4. O ganho efetivo de um jogador é o ganho cumulativo dividido pela conectividade do jogador. Como em redes heterogêneas o ganho cumulativo difere do ganho efetivo, a evolução da cooperação será estudada em dois cenários distintos: ganho cumulativo e ganho efetivo. Novamente implementa-se a evolução da cooperação de acordo com o modelo DO e cada jogador escolhe um dos vizinhos para ser imitado e escolhe a pior interação para colocar a estratégia imitada. Como configuração inicial, cada jogador coopera com probabilidade 0,5 em cada interação. A cooperatividade média F_c é calculada da mesma forma que no capítulo 4. Os resultados que se seguem foram obtidos para redes de tamanho $N = 100$. Para redes maiores, os resultados são qualitativamente os mesmos.

No caso de atualização assíncrona, a cooperatividade média no regime estacionário F_c é praticamente a mesma para todos os valores de r , como pode ser visto na figura 6.3 para os casos de ganho cumulativo e efetivo. Isso se deve ao fato de que na atualização assíncrona a cooperatividade média permanece próxima ao valor dado pela fração inicial de cooperações mútuas, já que as transições $(D, D) \rightarrow (C, C)$ não ocorrem. Como o efeito da topologia na atualização assíncrona é pequeno, a análise no restante desse capítulo será restrita à atualização síncrona.

No caso da atualização síncrona, a figura 6.4 mostra a cooperatividade média no regime estacionário em função de b para $r = 0,5$, considerando os modelos Usual e DO com ganhos cumulativo e efetivo. O primeiro resultado interessante do modelo DO é que a cooperatividade é mantida em nível alto ao se variar a tendência de desertar b , independentemente se o ganho considerado é o cumulativo ou o efetivo. Isto não ocorre no modelo Usual. Note que no modelo Usual a cooperatividade é drasticamente reduzida se o ganho efetivo é utilizado [97,98], conforme visto na seção 3.4.

O segundo resultado interessante é que no modelo DO com ganho cumulativo a cooperatividade média no regime estacionário não varia muito em função de b ao passo que com o ganho efetivo a cooperatividade diminui se b aumenta, como também pode ser visto na figura 6.4. Já no modelo Usual com ganho efetivo, a dinâmica é similar à dinâmica em uma rede regular, como a rede quadrada estudada no capítulo 4, em que a cooperatividade diminui à medida que b aumenta.

A principal característica topológica que é afetada ao se variar o parâmetro r é a proeminência dos nós altamente conectados. A figura 6.5 mostra a cooperatividade média no regime estacionário em função de r para $b = 1,05$ e $b = 2,0$. Note que a cooperatividade decai à medida que r aumenta e que, quando $r = 1$, a cooperatividade no cenário de ganho cumulativo é maior do que no de ganho efetivo. Para r próximo de

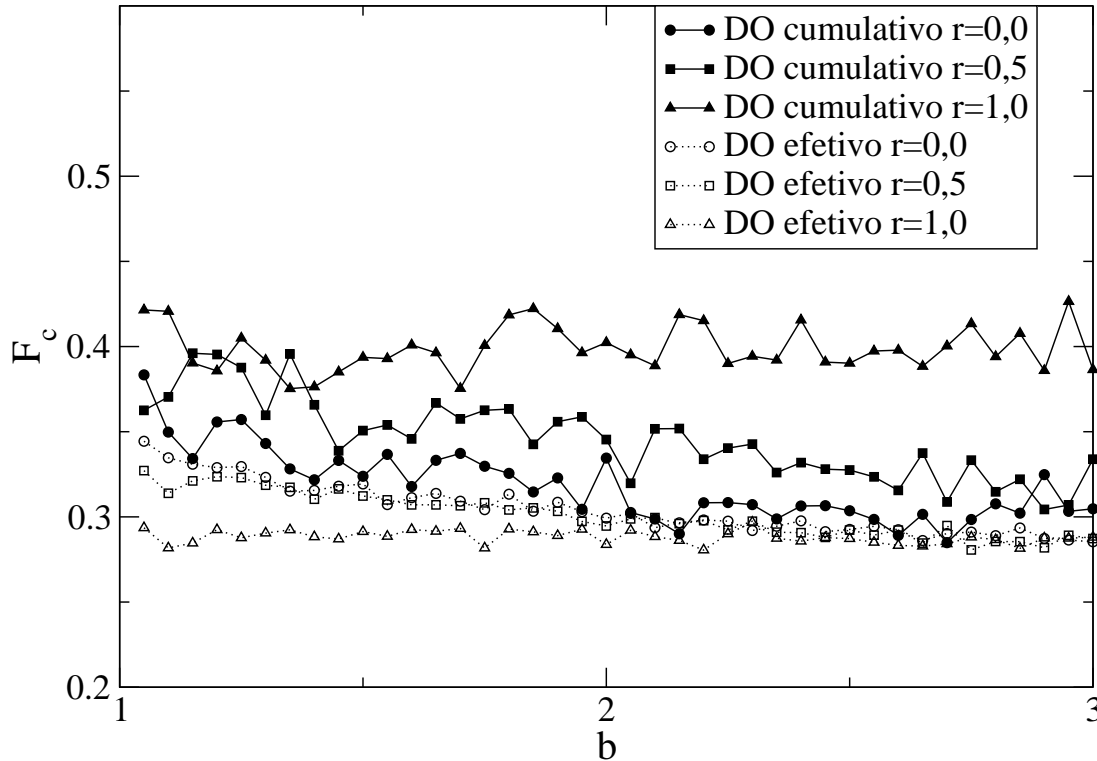


Figura 6.3: Cooperatividade média no regime estacionário F_c em função da tendência de desertar b no caso assíncrono com os ganhos cumulativo e efetivo.

um, os seis nós iniciais compõem um núcleo que atrai praticamente todas as ligações. Essa configuração pode ser aproximada por uma rede do tipo estrela (veja a figura 6.6). A rede do tipo estrela de tamanho N é uma rede em que um único nó central, o *hub*, está ligado a $N - 1$ nós periféricos. No cenário de ganho cumulativo, o nó central possui sempre o maior ganho cumulativo, qualquer que seja o valor de b . O nó central é sempre imitado e nunca imita ninguém. Portanto cada nó periférico irá copiar a estratégia que o nó central adota. Como o nó central adota cooperação com probabilidade 0,5 em cada interação, metade dos nós periféricos irão adotar cooperação e a outra metade deserção. O resultado final é que a cooperatividade média no regime estacionário no caso de ganho cumulativo é dada por $F_c = 0,5$. A figura 6.6 ilustra esse processo. No cenário de ganho efetivo, o nó central não possui a mesma proeminência. Se o nó central adota C numa interação em que o nó periférico adota D , o ganho efetivo do nó periférico é igual a b ao passo que o ganho efetivo do nó central é menor do que b . Dessa forma o nó central irá imitar a estratégia D dos nós periféricos exploradores. Da mesma forma, se o nó central adota D numa interação

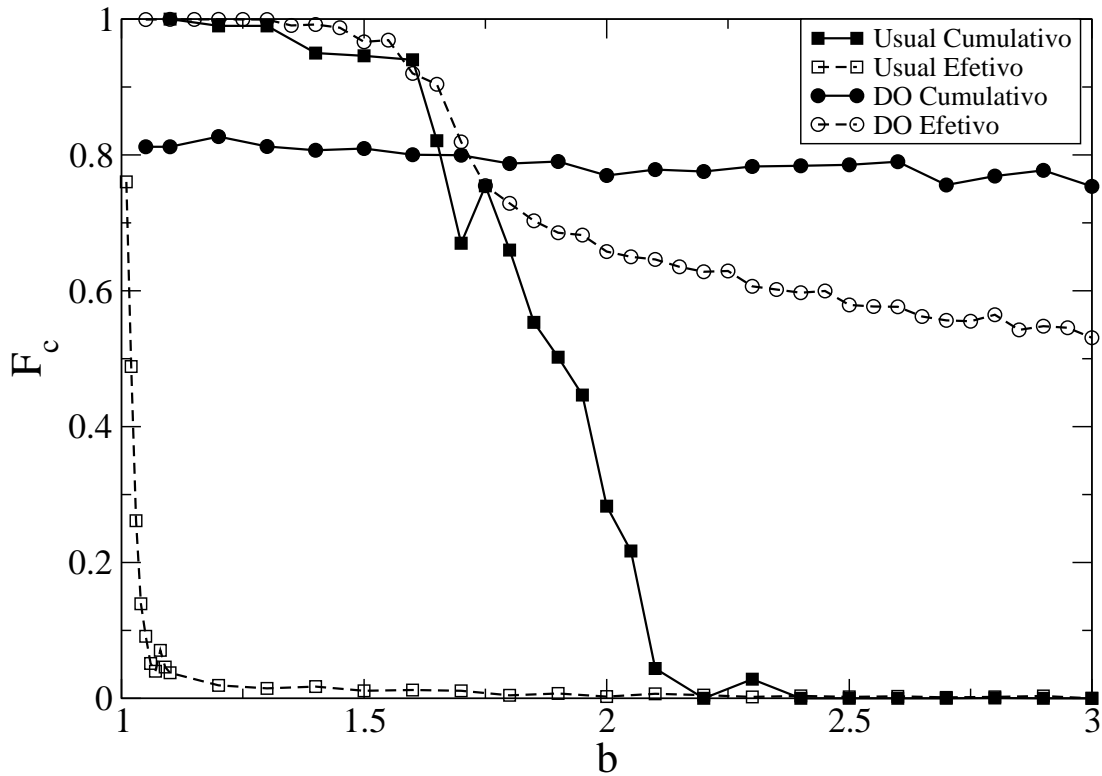


Figura 6.4: Cooperatividade média no regime estacionário F_c em função da tendência de desertar b no caso síncrono para $r = 0,5$.

em que o nó periférico adota C , o ganho efetivo do nó periférico é zero ao passo que o ganho efetivo do nó central é maior do que zero. Dessa forma o nó periférico irá imitar a estratégia D do nó central. O resultado final é que somente as cooperações mútuas iniciais são mantidas e a cooperatividade média no caso de ganho efetivo é dada por $F_c = 0,25$. Portanto, quando r é próximo de um, a cooperatividade média é maior no caso de ganho cumulativo, o que está de acordo com os resultados da simulação.

A fim de se entender a variação da cooperatividade em função de r para $r \neq 1$, é preciso analisar a evolução temporal da cooperatividade média. A característica geral da evolução temporal do modelo DO, como mostrada no capítulo 4, é que inicialmente as explorações são punidas e as interações do tipo (C, D) transformam-se em (D, D) , com todas as interações do tipo (C, C) mantidas. Nesse regime inicial, a maioria dos nós com alta conectividade possuem um ganho efetivo aproximadamente igual a $(1 + 3\epsilon)/4$, pois, na média, $1/4$ de suas interações são do tipo (C, C) e $3/4$ são do tipo (D, D) . Já os nós com baixa

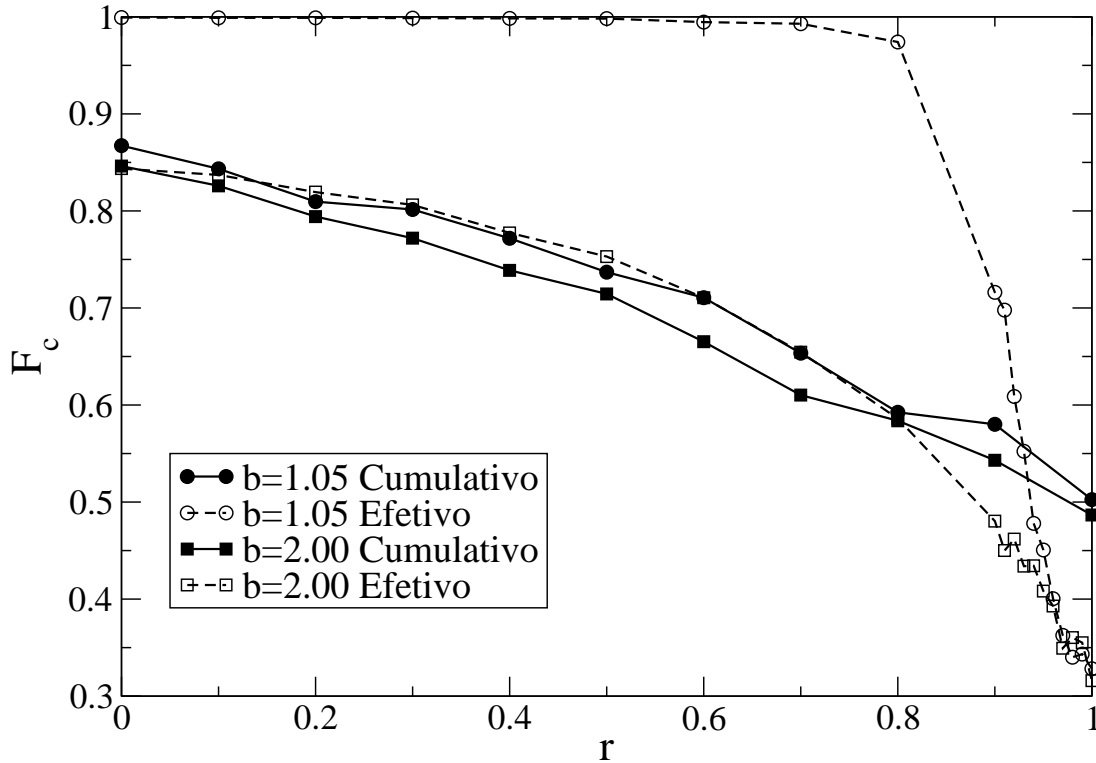


Figura 6.5: Cooperatividade média no regime estacionário F_c em função de r no caso síncrono.

conectividade podem possuir um ganho efetivo maior. Por exemplo, um nó com apenas duas interações, (C, C) e (D, D) , possui um ganho efetivo igual a $1/2$. Após esse regime inicial, o evento que desencadeia o aumento de cooperatividade média é a transição $(D, D) \rightarrow (C, C)$, que ocorre quando dois vizinhos que interagem numa interação (D, D) imitam simultaneamente a estratégia C e a colocam na interação entre eles. À medida que r aumenta, a maior parte dos nós estão conectados aos *hubs*, de forma que um dos nós que precisa fazer a transição $(D, D) \rightarrow (C, C)$ é, provavelmente, um nó pouco conectado que precisa imitar a estratégia C de um *hub*, como pode ser visto na figura 6.7. Mas essa imitação não ocorrerá, pois os *hubs* possuem um ganho efetivo menor nesse estágio inicial da evolução temporal. Portanto à medida que r aumenta a transição $(D, D) \rightarrow (C, C)$ ocorre cada vez menos. No caso do ganho cumulativo, o argumento é o mesmo, exceto pelo fato de que nesse caso o ganho cumulativo do *hub* é maior. A fim de se verificar a validade desse argumento no caso das redes estudadas, definamos a medida auxiliar A_i . O primeiro passo para definirmos a medida é ordenar os nós em termos de suas conectividades: o nó na

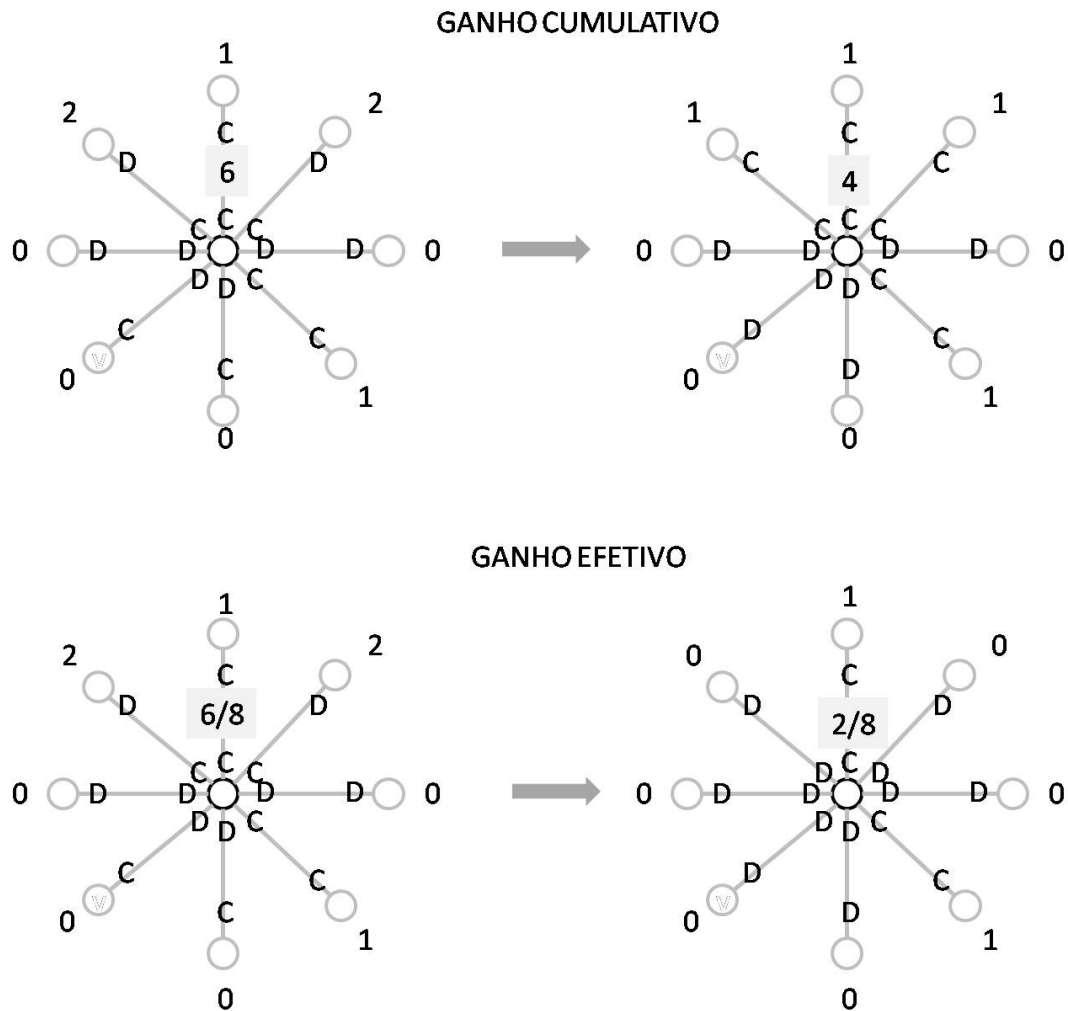


Figura 6.6: Evolução da cooperação numa rede do tipo estrela usada na aproximação do caso $r = 1, 0$. Os ganhos cumulativos e efetivos para $b = 2$ e $\epsilon = 0$ estão mostrados. Note que no cenário de ganho cumulativo, o nó central possui o maior ganho e é imitado pelos nós periféricos. Já no cenário de ganho efetivo o nó central pode imitar alguns nós periféricos.

primeira posição é o nó de maior conectividade, o nó na segunda posição é o nó com a segunda maior conectividade, e assim por diante. Dessa forma A_i é o valor da medida auxiliar para o nó que ocupa a i -ésima posição. Seja $A_i(t)$ a fração de cooperação disponível para ser imitada no tempo t pelo jogador na i -ésima posição. Definimos a medida $A_i(t)$ como a fração de vizinhos do jogador na i -ésima posição que adotam C e que possuem um ganho maior do que o jogador na i -ésima posição. Nessas interações a estratégia C pode ser imitada pelo jogador na i -ésima posição. Como a presente análise é feita no regime inicial da evolução temporal, faz-se uma média de $A_i(t)$ nos 10^4 primeiros passos de Monte Carlo. A_i é a média temporal nesse intervalo inicial. Os resultados para $r = 0.0$ e $r = 1.0$ são mostrados na figura

6.8. Pode-se ver que a distinção entre os seis nós mais conectados e os demais nós é mais fraca para $r = 0.0$ do que para $r = 1.0$. Isso significa que, à medida que r aumenta, é mais difícil dois nós imitarem simultaneamente a estratégia C na interação compartilhada por eles.

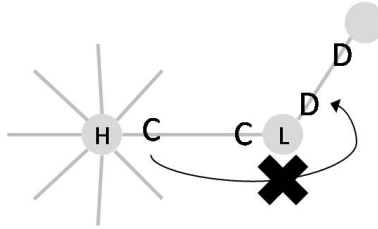


Figura 6.7: O nó H representa um nó muito conectado e o nó L um nó pouco conectado. Quando r é próximo de um, a maioria das interações é entre um nó muito conectado e um nó pouco conectado. No cenário de ganho efetivo, no regime inicial o nó H possui um ganho menor do que o nó L . Nesse caso o nó H não será imitado pelo nó L . Dessa forma a transição $(D, D) \rightarrow (C, C)$, representada na figura, não ocorre, pois seria necessário que o nó L imitasse o nó H .

Como as cooperações mútuas iniciais não são desfeitas, a probabilidade inicial de cooperação afeta fortemente o resultado final. Seja p_0 a probabilidade inicial de se adotar cooperação em alguma interação. Como a probabilidade de que dois vizinhos adotem C na interação entre eles é igual a p_0^2 , tem-se que p_0^2 é um limite inferior para a fração de cooperação. Portanto, se p_0 aumenta é evidente que a cooperatividade média no regime estacionário também aumenta. A figura 6.9 mostra a cooperatividade média para os ganhos cumulativo e efetivo para $b = 2,0$. Em acordo com os resultados do caso $p_0 = 0,5$, para um mesmo valor de p_0 , a cooperatividade diminui à medida que r aumenta.

Até aqui a probabilidade inicial p_0 é a mesma para todos os nós. No modelo Usual em redes heterogêneas, foi mostrado que se os *hubs* são mais cooperativos, a cooperatividade no regime estacionário é maior [124]. No modelo DO ocorre o mesmo fenômeno. No algoritmo usado para construir as redes, os seis nós iniciais atraem a maior parte das ligações à medida que r aproxima-se de um. Mantendo os demais nós com $p_{0,nh} = 0,5$ (o índice nh refere-se aos nós que não são *hubs*), estudamos três condições iniciais diferentes adotadas pelos seis nós iniciais: (i) $p_{0,h} = 1,0$, (ii) $p_{0,h} = 0,5$ e (iii) $p_{0,h} = 0,0$. Aqui o índice h refere-se aos seis nós iniciais. A cooperatividade média no regime estacionário para $r = 0,5$ e $r = 1,0$, com $b = 2,0$, é mostrada na tabela 6.1. Da mesma forma que no modelo Usual, se os *hubs* são mais cooperativos a cooperatividade no regime estacionário é maior.

Assim como no capítulo 4, estudamos a robustez em relação a erros no julgamento da pior ligação.

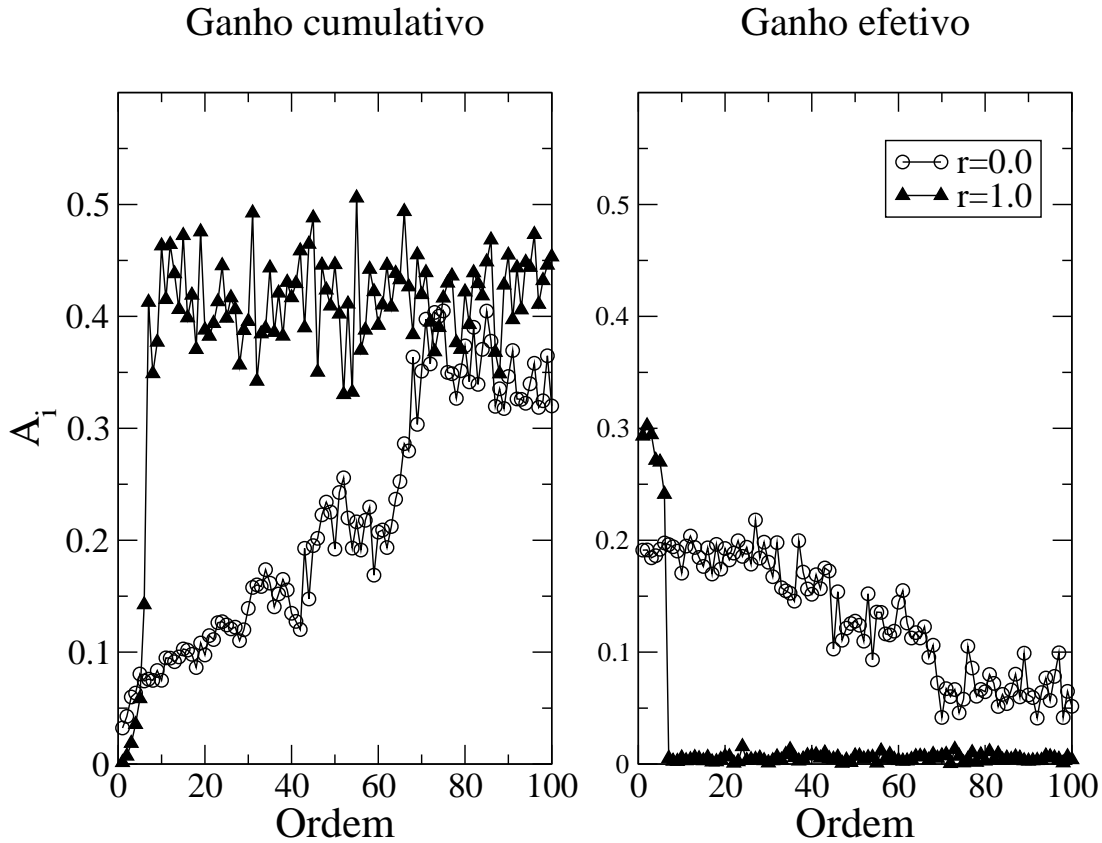


Figura 6.8: Medida auxiliar A_i no caso síncrono para $b = 2, 0$. Os resultados no caso de ganho cumulativo (efetivo) são mostrados na figura da esquerda (direita).

Cada jogador escolhe a pior ligação com probabilidade $1 - p_e$ e escolhe aleatoriamente uma ligação com probabilidade p_e . Os resultados para $b = 1, 05$ e $b = 3, 0$ são mostrados na figuras 6.10 e 6.11 no caso de ganho efetivo. Note que para $b = 1, 05$ a cooperatividade média é robusta ao passo que para $b = 3, 0$ não é robusta. No caso do ganho cumulativo, os resultados são análogos, como pode ser visto nas figuras 6.12 e 6.13. Na presença de erros, as cooperações mútuas podem ser desfeitas. Para se ter cooperação, a taxa de recuperação das cooperações mútuas precisa ser maior do que a taxa em que a estratégia D é imitada. Como a taxa em que D é imitada é maior quando b é grande, a robustez da cooperatividade média decai quando b aumenta. Pelo mesmo motivo de que quando r aproxima-se de um é mais difícil haver a transição $(D, D) \rightarrow (C, C)$, se r aumenta a robustez da cooperatividade diminui.

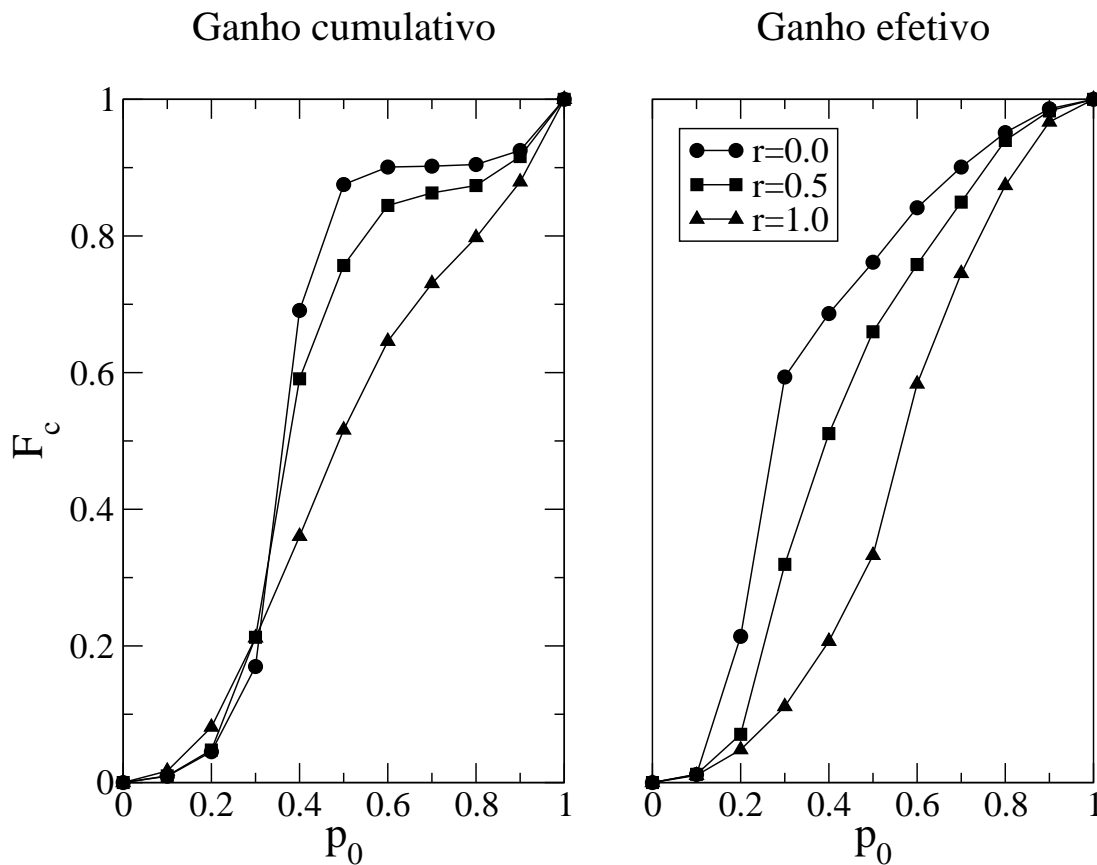


Figura 6.9: Cooperatividade média no regime estacionário F_c em função da probabilidade inicial de cooperação p_0 para $b = 2,0$. Os resultados no caso de ganho cumulativo (efetivo) são mostrados na figura da esquerda (direita)

	Ganho cumulativo		Ganho efetivo	
	$r=0,5$	$r=1,0$	$r=0,5$	$r=1,0$
$p_{0,h} = 1,0$	0,77	0,76	0,77	0,76
$p_{0,h} = 0,5$	0,76	0,51	0,66	0,32
$p_{0,h} = 0,0$	0,26	0,00	0,59	0,00

Tabela 6.1: Cooperatividade média no regime estacionário F_c para condições iniciais diferentes adotadas pelos seis nós iniciais definidos no algoritmo de construção da rede. $p_{0,h}$ é a probabilidade com que cada um dos seis nós iniciais adota cooperação.

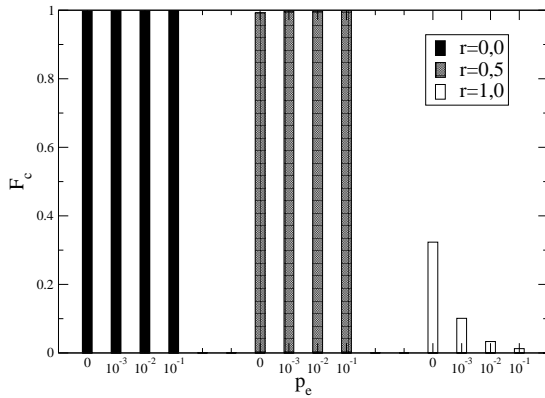


Figura 6.10: Cooperatividade média no regime estacionário F_c em função da probabilidade de erro p_e no caso de ganho efetivo para $b = 1,05$.

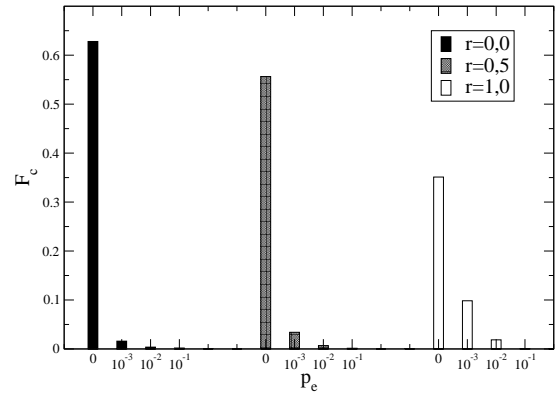


Figura 6.11: Cooperatividade média no regime estacionário F_c em função da probabilidade de erro p_e no caso de ganho efetivo para $b = 3,0$.

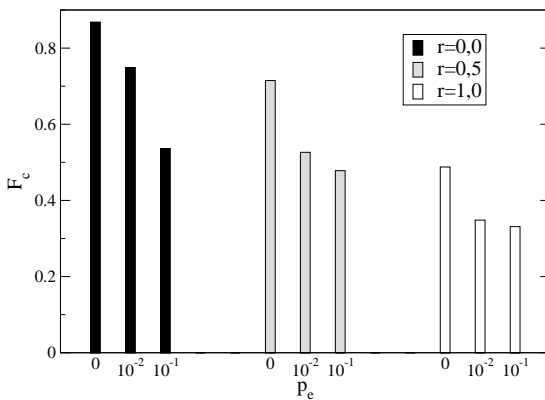


Figura 6.12: Cooperatividade média no regime estacionário F_c em função da probabilidade de erro p_e no caso de ganho cumulativo para $b = 1,05$.

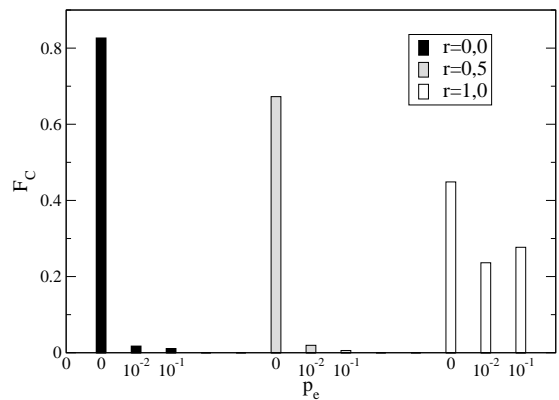


Figura 6.13: Cooperatividade média no regime estacionário F_c em função da probabilidade de erro p_e no caso de ganho cumulativo para $b = 3,0$.

Capítulo 7

Cooperação em jogos de bens públicos

Em 1968 G. Hardin recolocou em cenário o problema da tragédia das pessoas comuns [125]. A tragédia das pessoas comuns consiste na super exploração de um recurso, que pode ser usado por uma comunidade como, por exemplo, um pasto comunitário para alimentar o gado. Suponha que todas as pessoas tenham acesso a esse recurso. Se cada pessoa decidir explorar o recurso ao máximo, ele será super explorado e se esgotará. A única forma de evitar a tragédia é se cada um cooperar e diminuir o uso do recurso a fim de preservá-lo. Mas se todos diminuem o uso, abre-se a oportunidade para algum indivíduo egoísta aumentar a exploração do recurso, haja vista que o aumento de um único explorador não apresenta ameaça de esgotamento. Contudo, se todos os indivíduos tentarem maximizar os seus ganho de forma egoísta, o resultado final é a tragédia dos comuns: o esgotamento do recurso.

O dilema social presente na tragédia das pessoas comuns é o mesmo do dilema do prisioneiro. A solução que maximiza o ganho individual é a de não cooperação. Contudo, se todos não cooperam, o ganho final é menor do que se todos tivessem cooperado. A forma mais comum de se modelar dilemas sociais que envolvem mais de dois jogadores é com o jogo de bens públicos, apresentado da seção 2.2.2. De forma similar ao dilema do prisioneiro, todos os mecanismos apresentados no capítulo 3 são capazes de sustentar a cooperação em jogos de bem público.

Em geral os jogadores participam do jogo de bens públicos de forma compulsória, não há a opção de se abster do jogo. Por outro lado, se a estratégia de não jogar está disponível, foi mostrado que a cooperação é fortalecida [126–130]. Uma das formas de se modelar o mecanismo de abstenção consiste em estudar o jogo de bens públicos na presença de três estratégias: cooperação, deserção e estratégia solitária [129]. Numa população de tamanho N , são selecionados M jogadores aleatoriamente para jogar o jogo de bens públicos. Os jogadores que adotam cooperação e deserção participam do jogo. Os jogadores que adotam

a estratégia solitária optam por, ao invés de jogar o jogo, receber um pequeno ganho fixo. Dessa forma a quantidade de participantes pode ser menor do que M . Estudando a equação do replicador, verificou-se que cooperação e deserção podem coexistir na população [129]. Outra forma de se modelar é através de jogos de bens públicos de múltiplas rodadas em que é possível abandonar o jogo na dependência da estratégia dos oponentes. Em um desses modelos, estuda-se o dilema do prisioneiro¹ repetido na presença de uma estratégia em que é possível abandonar o jogo caso o oponente tenha desertado na rodada anterior [126]. Novamente a coexistência entre cooperadores e desertores é observada.

Nesse capítulo estudaremos a evolução da cooperação num jogo de bens públicos com múltiplas rodadas na presença de somente duas estratégias: cooperação e deserção. Cada jogador permanece para jogar a próxima rodada com uma probabilidade fixa que independe da estratégia do jogador. Ao contrário dos modelos anteriores, a opção de deixar o jogo não é condicionada ao comportamento dos demais jogadores e quando o jogador decide não jogar mais, ele não recebe nenhum ganho extra.

7.1 O modelo

Uma rodada do jogo de bens públicos é jogada por M participantes. A cada participante é dado uma quantidade em dinheiro, que assumiremos igual a 1 UM (unidade monetária). Cada participante tem duas opções: contribuir ou não com 1 UM. A quantidade total das contribuições é multiplicada por um fator R e depois distribuída igualmente entre todos os participantes, mesmo entre os que não contribuíram. Esse procedimento define uma rodada do jogo de bens públicos. A estratégia de contribuir é vista como uma cooperação e a estratégia de não contribuir como uma deserção.

Em nosso modelo, o jogo de bens públicos é jogado inicialmente por M indivíduos, aleatoriamente escolhidos em uma população de tamanho N . Uma vez que o grupo de M indivíduos é selecionado, serão jogadas múltiplas rodadas do jogo de bens públicos. Apenas duas estratégias estão disponíveis: cooperar (C) ou desertar (D). Cada jogador joga a próxima rodada com probabilidade w , com $w < 1$. Se o jogador deixar o jogo, ele não retorna mais. O jogo é iniciado com M participantes e é encerrado quando a quantidade de participantes é menor do que 2. Seja M_n a quantidade de jogadores participando do jogo na rodada n e k_n a quantidade de cooperadores na rodada n . O ganho de um cooperador e o ganho de um desertor na rodada n são dados por

$$g_C^n = \frac{Rk_n}{M_n}, \quad (7.1)$$

¹O dilema do prisioneiro é um jogo de bens públicos envolvendo apenas dois jogadores.

$$g_D^n = \frac{Rk_n}{M_n} + 1. \quad (7.2)$$

Os jogadores que participam do jogo acumulam o ganho proveniente de cada rodada. Os jogadores que não estão entre os M selecionados possuem ganho cumulativo igual a zero.

Seguindo o procedimento usual da teoria evolutiva de jogos, o ganho cumulativo é interpretado em termos do sucesso reprodutivo – aptidão. Como o ganho proveniente do jogo não é o único fator determinante do sucesso reprodutivo, considera-se que a aptidão de um jogador é dada por $1 - s + s\sigma$, em que σ é o ganho cumulativo do jogador e $s \ll 1$ é a intensidade de seleção. Note que se $s = 0$ não há seleção e todos os indivíduos reproduzem-se com a mesma taxa. O modelo de evolução da população é o processo de Moran [1]. Após o término das múltiplas rodadas (que ocorre quando a quantidade de participantes é menor do que dois), um indivíduo é aleatoriamente escolhido para morrer e um outro indivíduo é escolhido na população total para reproduzir com probabilidade proporcional à sua aptidão $1 - s + s\sigma$. O novo indivíduo adota a mesma estratégia de seu progenitor. Após o evento de nascimento e morte, o ganho cumulativo de todos os jogadores é igualado a zero e novamente M jogadores são aleatoriamente selecionados para jogar as múltiplas rodadas do jogo de bens públicos.

A fim de se verificar se a seleção natural favorece a cooperação, pode-se calcular a probabilidade de que um único cooperador se espalhe na população de desertores. Essa probabilidade é dada pela probabilidade de fixação de um cooperador, conforme visto no seção 2.3.2. Se a seleção não favorece nem a cooperação e nem a deserção, a probabilidade de fixação é dada por $z_1 = 1/N$. Por outro lado, se $s \neq 0$, diz-se que a cooperação é favorecida pela seleção se $z_1 > 1/N$ e é inibida pela seleção se $z_1 < 1/N$ [1].

7.2 Aproximação de campo médio e análise dos resultados

Os resultados da probabilidade de fixação para seleção fraca z_1^{ws} obtidos via simulação computacional estão mostrados na figura 7.1, juntamente com os resultados da aproximação de campo médio. Note que para w pequeno a probabilidade de fixação é próxima ao valor do caso neutro ($s = 0$) e, à medida que w aproxima-se de um a probabilidade de fixação aumenta. A dependência em R é tal que se R diminui a probabilidade de fixação também diminui. Portanto para aumentar a cooperação numa população, o ambiente tem que ser tal que os jogadores permaneçam jogando por mais tempo, mesmo que na presença inicial de vários desertores. O resultado é interessante, pois poder-se-ia pensar que não importa o quanto um cooperador permanece jogando, os desertores sempre se sairiam melhor.

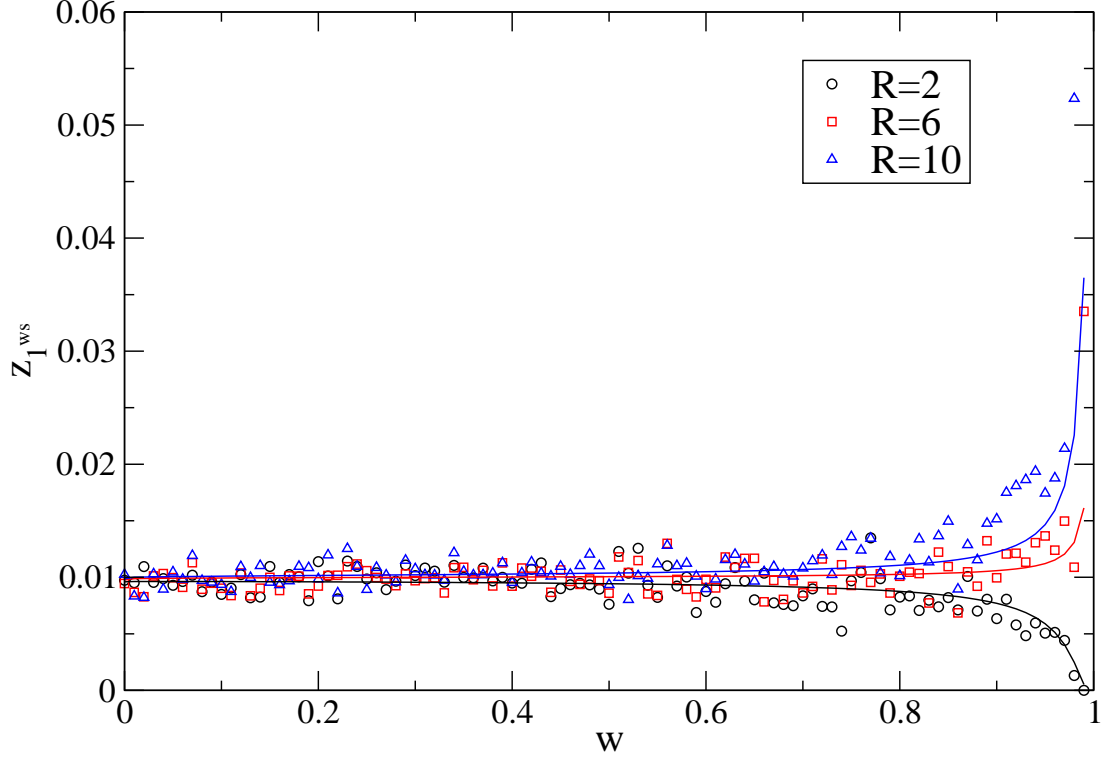


Figura 7.1: Probabilidade de fixação z_1^{ws} em função da probabilidade de se jogar a próxima rodada w . Os símbolos referem-se aos resultados da simulação e a linha contínua refere-se à aproximação de campo médio no regime de seleção fraca. Os parâmetros são $N = 100$, $M = 10$ e $s = 0,01$.

No processo de Moran a probabilidade de fixação de um único cooperador é dada por

$$z_1 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{N-1} \prod_{n_c=1}^k \frac{1-s+s\pi_C(n_c)}{1-s+s\pi_D(n_c)}}, \quad (7.3)$$

em que π_C é o ganho cumulativo médio de um cooperador numa população em que há n_c cooperadores. Em nosso modelo as expressões de $\pi_C(n_c)$ e $\pi_D(n_c)$ não podem ser calculadas exatamente, mas somente através de uma aproximação de campo médio.

Na aproximação de campo médio, primeiramente calcula-se a probabilidade de haver k cooperadores no grupo de tamanho M que foi selecionado aleatoriamente na primeira rodada, que é dada pela distribuição

hipergeométrica

$$H(k, M, n_c, N) = \frac{\binom{n_c}{k} \binom{N - n_c}{M - k}}{\binom{N}{M}}. \quad (7.4)$$

O ganho médio dos cooperadores na primeira rodada, considerando a população inteira, é a soma dos ganhos dos jogadores que participam do jogo, com peso dado pela probabilidade dada pela equação 7.4, dividido pela quantidade total de cooperadores na população n_c , a saber

$$\pi_C^1 = \sum_{k=0}^M H(k, M, n_c, N) \frac{kR}{M} \frac{k}{n_c} \quad (7.5)$$

$$= \frac{R}{N} \left[1 + (n_c - 1) \frac{M - 1}{N - 1} \right]. \quad (7.6)$$

Nessa expressão k é a quantidade de cooperadores no grupo de tamanho M , kR/M é o ganho de cada cooperador. Analogamente, o ganho médio dos desertores é dado por

$$\pi_D^1 = \frac{M}{N - n_c} \left[1 + (R - 1) \frac{n_c}{N} \right] - \frac{n_c}{N - n_c} \pi_C^1. \quad (7.7)$$

Como os jogadores permanecem para a próxima rodada com probabilidade w , a quantidade média de participantes é dada pela relação $M_n = wM_{n-1}$. Como $M_1 = M$, tem-se que

$$M_n = Mw^{n-1}. \quad (7.8)$$

A probabilidade de sair do jogo é a mesma tanto para os cooperadores como para os desertores. Portanto a probabilidade de que haja k cooperadores na rodada n é dada pela distribuição hipergeométrica para um grupo de tamanho M_n . Com isso o ganho médio dos cooperadores e dos desertores é obtido substituindo M por M_n nas equações 7.5 e 7.7. Isto é,

$$\pi_C^n = \frac{R}{N} \left[1 + (n_c - 1) \frac{M_n - 1}{N - 1} \right], \quad (7.9)$$

$$\pi_D^n = \frac{M_n}{N - n_c} \left[1 + (R - 1) \frac{n_c}{N} \right] - \frac{n_c}{N - n_c} \pi_C^n. \quad (7.10)$$

O jogo termina quando há menos do que dois jogadores, isto é, quando $M_n = Mw^{n-1} = 2$. Para $0 < w < 1$, $M_n = 2$ se, e somente se, $n^* = 1 + \ln(2/M)/\ln(w)$. Se $w = 0$ tem-se que $n^* = 1$. O ganho

cumulativo médio após n^* rodadas é dado por

$$\begin{aligned}\pi_C &= \sum_{n=1}^{n^*} \pi_C^n \\ &= \frac{R}{N} n^* \left(1 - \frac{n_c - 1}{N - 1}\right) + \frac{R}{N} \frac{n_c - 1}{N - 1} M \frac{w^{n^*} - 1}{w - 1},\end{aligned}\quad (7.11)$$

$$\pi_D = \frac{M}{N - n_c} M \frac{w^{n^*} - 1}{w - 1} \left(1 + (R - 1) \frac{n_c}{N}\right) - \frac{n_c}{N - n_c} \pi_C. \quad (7.12)$$

No limite de intensidade fraca a probabilidade de fixação pode ser simplificada para

$$z_1^{ws} = \frac{sz}{(1 + sz)^N + sv - 1}, \quad (7.13)$$

em que

$$\begin{aligned}v &= \pi_C - \pi_D \\ &= \frac{1}{N(N - 1)} \left(-Nrn^* + M \frac{w^{n^*} - 1}{w - 1} (N + r - 1)\right).\end{aligned}\quad (7.14)$$

O gráfico da equação 7.14 é mostrado juntamente com os resultados da simulação. A equação 7.14 é obtida notando que na equação 7.3, no limite de seleção fraca $s \ll 1$ tem-se que

$$\frac{1 - s + s\pi_C(n_c)}{1 - s + s\pi_D(n_c)} \approx 1 + s(\pi_C - \pi_D). \quad (7.15)$$

e que

$$\pi_C - \pi_D = \frac{1}{N(N - 1)} \left[-NRn^* + M \frac{w^{n^*} - 1}{w - 1} (N + R - 1)\right]. \quad (7.16)$$

Gostaríamos de derivar analiticamente qual deve ser a relação entre R e w para que a cooperação seja favorecida no regime de seleção fraca. Em outras palavras, queremos achar as condições em que a desigualdade

$$z_1^{ws} > \frac{1}{N} \quad (7.17)$$

é válida. Substituindo a equação 7.13 na equação 7.17 obtém-se

$$Nsz > (1 + sz)^N + sz + 1. \quad (7.18)$$

Se $N \gg 1$ tem-se que

$$Nsz > (1 + sz)^N + sz. \quad (7.19)$$

Se $s < 1/(n^*(M - R))$, a equação 7.19 é válida se, e somente se, $z > 0$, o que é equivalente a

$$\pi_C > \pi_D. \quad (7.20)$$

Usando as equações 7.11 e 7.12, a relação $\pi_C > \pi_D$ pode ser reescrita na forma

$$M \frac{w^{n^*} - 1}{w - 1} < \frac{NRn^*}{N + R - 1}. \quad (7.21)$$

A desigualdade 7.3 define duas regiões no espaço de parâmetros $R \times w$. Em uma das regiões, a cooperação é favorecida pela seleção, $z_1^{ws} > 1/N$. Na outra região, a cooperação é inibida pela seleção, $z_1^{ws} < 1/N$. Isso pode ser interpretado como um diagrama de fase. Na figura 7.3 é mostrado diagrama de fase no limite de seleção fraca. Note que para R pequeno, a cooperação é sempre inibida. Para valores intermediários de R , existe uma transição de inibição da cooperação para o favorecimento da cooperação.

Note que se $\pi_C > \pi_D$, deve-se ter $\pi_C^n > \pi_D^n$ para algum n . A desigualdade $\pi_C^n > \pi_D^n$ pode ser reescrita como

$$M_n < \frac{NR}{N + R - 1}, \quad (7.22)$$

sendo satisfeita se $n > n^\dagger$, onde

$$n^\dagger = 1 + \frac{\ln\left(\frac{1}{M} \frac{NR}{N+R-1}\right)}{\ln(w)}. \quad (7.23)$$

Portanto se $1 \leq n \leq n^\dagger$, o ganho médio dos desertores é maior do que o dos cooperadores. Mas se $n^\dagger < n \leq n^*$, o ganho médio dos cooperadores é maior do que o dos desertores. Como N é grande a desigualdade 7.22 é simplificada para

$$M_n < R. \quad (7.24)$$

Isso significa que a cooperação é vantajosa a partir do momento em que o tamanho do grupo é menor do que R . O impacto do efeito de tamanho pequeno pode ser medido pela fração média de rodadas em que o tamanho do grupo é menor do que R . Essa fração é dada por

$$t_{>} = \frac{n^* - n^\dagger}{n^*}. \quad (7.25)$$

Na figura 7.3 é mostrado o impacto do efeito de tamanho pequeno. Na região em que a probabilidade de

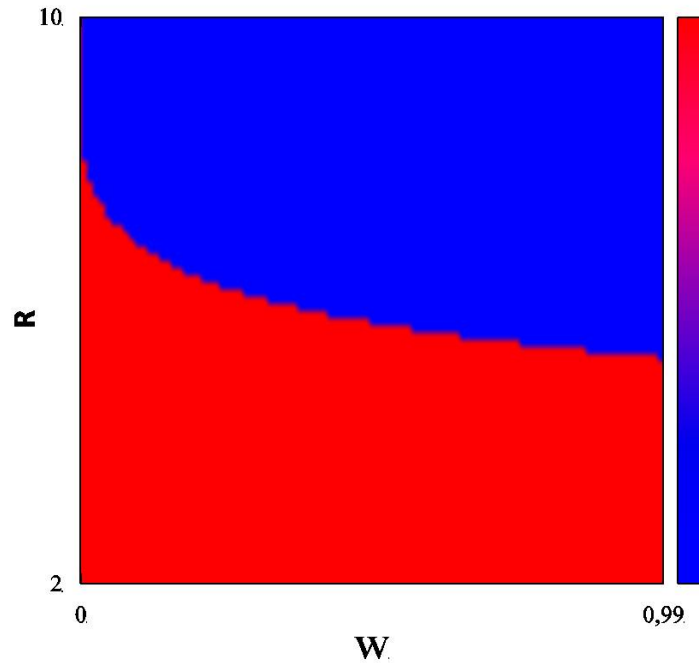


Figura 7.2: Diagrama de fase $R \times w$. A região em que a cooperação (deserção) é favorecida está representada em azul (vermelho). Os parâmetros são $N = 100$, $M = 10$ e $s = 0,01$.

fixação é alta, pode-se ver que esse efeito é de fato significativo.

Note que quando w se aproxima de um, a quantidade de rodadas e o valor absoluto do ganho dos jogadores aumentam. Como estamos interessados no regime de seleção fraca, não só s , mas também o produto $s(\pi_C - \pi_D)$ deve ser pequeno para que a equação 7.15 seja correta. Portanto para cada s existe um valor máximo de w tal que a aproximação de campo médio fornecida pela equação 7.13 é boa.

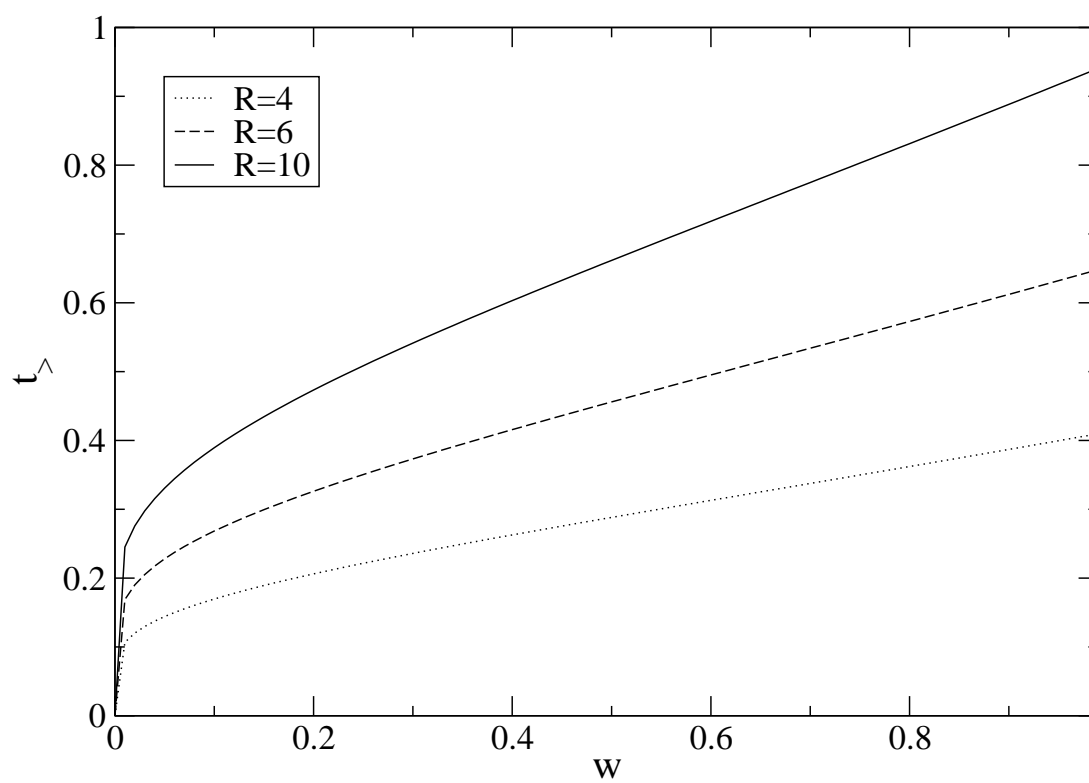


Figura 7.3: Efeito de tamanho pequeno. Os parâmetros são $N = 100$, $M = 10$ e $s = 0,01$.

Capítulo 8

Conclusão e perspectivas futuras

No modelo DO estudamos a evolução da cooperação no contexto da reciprocidade de rede. Nos modelos usuais cada jogador adota a mesma estratégia contra todos os oponentes. Com o modelo DO estudamos o mecanismo em que se adota estratégias diferentes contra oponentes distintos. Se os jogadores imitam a estratégia dos vizinhos bem sucedidos e utilizam-na na interação que fornece o pior ganho, nós verificamos que a cooperação pode ser mantida mesmo quando a tendência de desertar é alta. Verificamos também que quando a estratégia imitada é colocada na ligação com o jogador imitado, a cooperação média assume um valor próximo ao da quantidade de cooperações mútuas iniciais. O modelo DO apresenta uma propriedade que é independente da topologia: a manutenção das cooperações mútuas. Como decorrência dessa propriedade, a cooperatividade média da população possui sempre um limite inferior dado pela fração inicial de cooperações mútuas. Juntamente a esse mecanismo, vimos que há uma punição dos desertores sempre que um desertor é imitado. Além disso as propriedades do modelo DO são robustas a erros quando a tendência de desertar é pequena.

Estudamos o efeito da topologia na evolução do modelo DO. No capítulo 4 estudamos o efeito de uma rede quadrada e de um anel. Nesse capítulo mostramos que a cooperação é máxima se a tendência de desertar é menor do que um valor limite e diminui após esse valor limite, mas nunca é menor do que a fração de cooperação mútua inicial. Além do mais verificamos que a cooperatividade é robusta na presença de erros no julgamento da pior ligação. No capítulo 5 estudamos a evolução da cooperação numa rede em que todos interagem com todos. Nesse caso obtivemos equações do tipo campo médio cuja solução coincidiu com os resultados da simulação no caso de atualização assíncrona e, no caso da atualização síncrona, coincidiu com os resultados da simulação somente no regime inicial, fornecendo, no regime final, o resultado estacionário. No capítulo 6 estudamos o efeito de redes heterogêneas nos cenários de ganho

cumulativo e ganho efetivo. Ao contrário dos modelos usuais em redes heterogêneas, verificamos que com o ganho efetivo a cooperação é mantida em redes heterogêneas mesmo quando a tendência de desertar é alta.

No modelo DO concluímos que, para que a cooperação atinja valores altos, é necessário sincronidade na atualização. Verificamos que com a atualização assíncrona, a cooperatividade média da população no regime estacionário é decorrente das cooperações mútuas iniciais que não são desfeitas. Nesse caso não é possível que uma interação do tipo (D, D) se transforme em (C, C) , pois essa transição exige sincronidade dos vizinhos. Já com a atualização síncrona, a cooperatividade é bem maior, pois é possível haver a transição de (D, D) para (C, C) . No caso síncrono a evolução da cooperação depende da topologia da rede de interações, o que não ocorre no caso assíncrono.

No contexto de jogos de bens públicos estudamos também um modelo em que os participantes podem abandonar o jogo com uma probabilidade fixa. Nesse caso verificamos que se a probabilidade de deixar o jogo é pequena, a cooperação pode ser favorecida. Esse resultado foi analisado através de uma aproximação do tipo campo médio.

A análise do modelo DO permitiu-nos elaborar um novo modelo que incorpora a possibilidade de se adotar estratégias diferentes em relação a indivíduos distintos e que incorpora a característica dinâmica das redes de interação: novas interações podem ser criadas e outras podem ser desfeitas. Esse modelo nos permite avaliar empiricamente a evolução do sistema de recompensa na rede de citações de artigos científicos. Esse modelo começou a ser desenvolvido com a colaboração do prof. Christoph Hauert, da University of British Columbia, em Vancouver. As perspectivas futuras desse trabalho são as de melhor compreender o efeito chamado de *Mathew effect*, que diz que quem possui sucesso atrai mais sucesso, na dinâmica de citações sob a ótica da teoria evolutiva de jogos.

Apêndice A: Redes

Conceitos elementares

Uma rede é um objeto matemático conhecido como grafo [131].

Grafo: um grafo G é um par ordenado de conjuntos disjuntos (V, L) tal que L é um subconjunto do conjunto de pares não ordenados de V . O conjunto V é chamado de conjunto dos vértices e o conjunto L de conjunto das ligações. Diz-se que um elemento (v_1, v_2) de L liga os vértices v_1 e v_2 e que v_1 e v_2 são vértices adjacentes. Duas ligações são adjacentes se elas compartilham um mesmo vértice.

O conjunto L de ligações pode ser considerado um conjunto de pares ordenados quando então se têm um grafo direcionado. A figura A-1 ilustra o conceito de grafo.

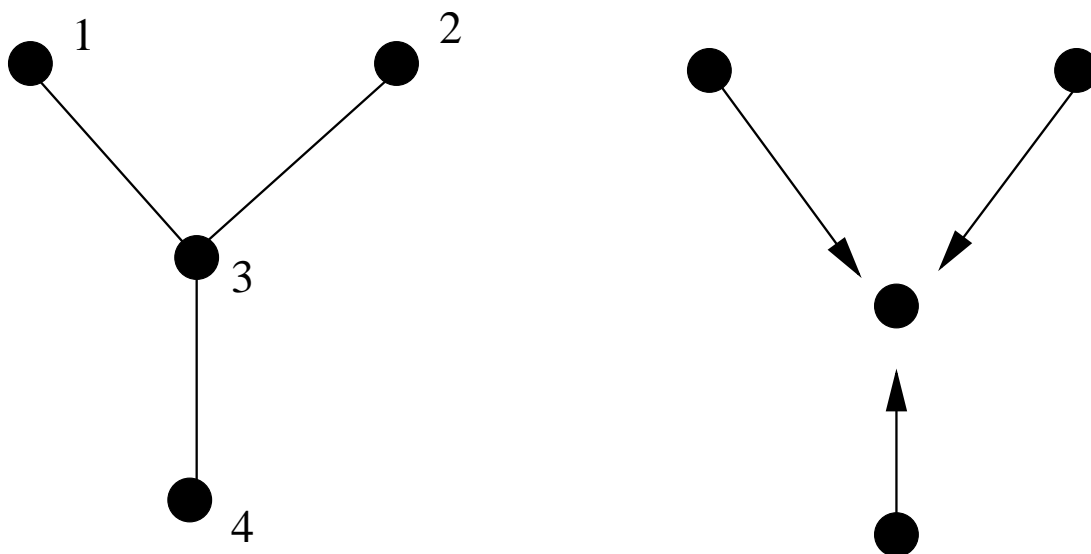


Figura A-1: Representação gráfica de um grafo não direcionado (esquerda) e de um grafo direcionado (direita). Os círculos representam os vértices e os segmentos de reta representam as ligações. Os números referem-se aos nós.

Algumas observações em relação à terminologia. Os termos **grafo** e **rede** serão usados como sinônimos. Topologia é outro termo que será usado indiscriminadamente. Qualquer referência a topologia implicará apenas a menção à estrutura de conexões entre os nós, sem nenhum outro compromisso maior com a teoria matemática de topologia.

A informação topológica de uma rede pode ser completamente representada pela matriz de adjacência.

Matriz de adjacência: é a matriz que contém a informação sobre as ligações entre os pares de nós (i, j) .

Os elementos $a_{i,j}$ assumem os seguintes valores: $a_{i,j} = 1$ se o par (i, j) pertence ao conjunto L das ligações e $a_{i,j} = 0$ caso contrário. Se a rede contém N nós, a matriz é $N \times N$.

Note que múltiplas ligações não estão sendo consideradas (um mesmo par de vértices com mais de uma ligação entre eles). É evidente que a matriz é simétrica, $a_{i,j} = a_{j,i}$, se a rede é não direcionada. No caso de um grafo direcionado, se houver uma ligação do vértice i para o vértice j , então $a_{i,j} = 1$. Como ilustração, a matriz de adjacência do grafo não direcionado da figura A-1 é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A-1})$$

Várias medidas podem ser calculadas a partir da matriz de adjacência. Uma medida importante é o número de conexões de um vértice. No caso de uma rede não direcionada, o número de conexões, ou **conectividade**, ou ainda grau do vértice é a quantidade de ligações de que o vértice participa. A partir da matriz de adjacência, a conectividade k_i i é

$$k_i = \sum_{j=1}^N a_{i,j}.$$

Assim, considerando o grafo não direcionado da figura A-1, tem-se que $k_1 = k_2 = k_4 = 1$ e $k_3 = 3$. No caso de uma rede direcionada, a quantidade de ligações que incidem em um vértice ou que partem do mesmo quantifica medidas de conectividade distintas, $k_{in,i}$ e $k_{out,i}$, respectivamente.

A conectividade da rede pode ser caracterizada por uma medida global, i.e., referente à rede, e não a um nó: a distribuição de conectividade.

Distribuição de conectividade: é a probabilidade de se ter um vértice com uma dada conectividade.

Se o número de vértices N for grande o suficiente, então a distribuição de conectividade total da rede será

$$P(k) = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \delta_{k_s, k}, \quad (\text{A-2})$$

em que $\delta_{k_s, k}$ é o delta de Kronecker ($\delta_{i, j} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{i, j} = 0$ se $i \neq j$). Novamente é possível definir a distribuição de conectividade em uma rede direcionada de maneira a distinguir as ligações que chegam a um vértice ou partem do mesmo. Seja k_{in} a quantidade de ligações que apontam na direção de um dado vértice e k_{out} a quantidade de ligações que partem desse mesmo vértice. Define-se $P(k_{in})$ e $P(k_{out})$ de maneira análoga à distribuição total e esta se relaciona às anteriores através de $P(k) = P(k_{in}) + P(k_{out})$.

Outra medida importante é o coeficiente de aglomeração (em inglês *clustering coefficient*).

Coeficiente de aglomeração: caracteriza a densidade de conexões em torno de um vértice.

Consideremos uma rede não direcionada e fixemos um nó i . Seja z_i a quantidade de vértices adjacentes a esse nó e y_i a quantidade de ligações existentes entre esses vértices adjacentes. Se todos os vizinhos estivessem ligados, a quantidade de ligações L_{max} seria a combinação de z_i nós dois a dois,

$$L_{max} = \binom{z_i}{2} = z(z-1)/2,$$

pois ligações de um vértice consigo mesmo não estão sendo consideradas. Como nem todas as ligações entre os vizinhos estão presentes, a densidade de ligações em torno de um vértice i será

$$C_i = \frac{2y_i}{z_i(z_i - 1)}.$$

Se a rede for suficientemente grande, é possível definir a distribuição dos coeficientes de aglomeração. O valor médio do coeficiente é, portanto, uma caracterização de quão aglomerados são os ambientes locais de uma rede.

Redes livre de escala

A propriedade “livre de escala”

Basicamente uma rede livre de escala [88–92, 94, 132, 133] é identificada pela sua distribuição de conectividades, que é da forma

$$P(k) \sim k^{-\gamma}. \quad (\text{A-3})$$

Note que a conectividade média depende do expoente γ ,

$$\bar{k} = \sum_{k=1}^{\infty} k k^{-\gamma} \propto \int_1^{\infty} k^{-\gamma+1} dk = \frac{k^{-\gamma+2}}{-\gamma+2} \Big|_1^{\infty}.$$

Se a restrição de que a conectividade média seja finita for imposta, então deve-se ter $\gamma > 2$, que é a condição para que a série $\bar{k} = \sum_{k=1}^{\infty} k k^{-\gamma}$ convirja.

O termo livre de escala vem do fato de essa distribuição não apresentar um valor característico de k , isto é, a distribuição não possui uma escala característica. Isso pode ser evidenciado ao se comparar essa distribuição com uma do tipo Poisson, em que a maioria dos nós possuem conectividade em torno do valor médio. Como em uma rede livre de escala os nós com conectividade alta estão presentes juntamente com os nós de conectividade baixa, não há um valor característico de k , enquanto em uma distribuição do tipo Poisson é improvável que haja nós com conectividades diferentes do valor médio. No caso de Poisson o valor médio é o valor característico e no caso livre de escala não há valor característico.

Apêndice B: Algoritmos

As simulações foram escritas na linguagem Fortran 90. Os algoritmos baseiam-se no esquema mostrado na figura B-1. Um exemplo típico de um código de implementação do modelo DO numa rede quadrada é mostrado a seguir. Esse código lê as informações topológicas de uma rede quadrada; implementa a condição inicial de cooperação; evolui a configuração das estratégias de acordo com o modelo DO e calcula a cooperatividade média no regime estacionário.

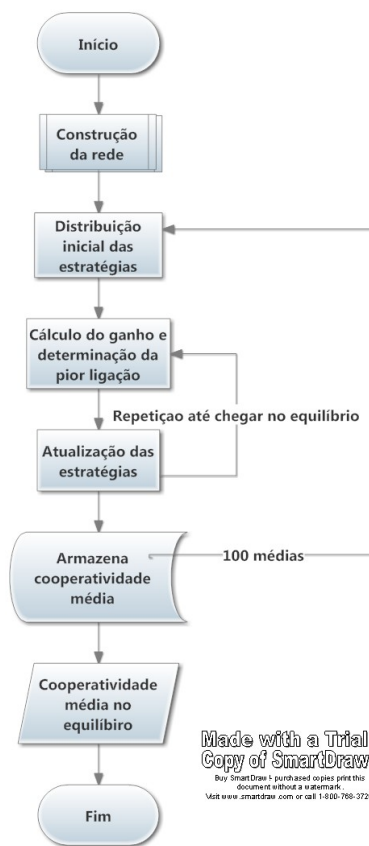


Figura B-1: Esquema dos algoritmos utilizados no modelo DO.


```

C                                     endif
C.....                               aux5=apont(aux5)
C                                     25   continue
C   CALCULA OS GANHOS CUMULATIVOS DE TODOS OS NÓS E ARMAZENA A PIOR LIGAÇÃO   if(cont2.eq.4) ncc=ncc+1
C                                     24   continue
do 18 i=1,sz                           ncp=ncp+nc
  pay(i)=0d0                             nccp=nccp+ncc
  aux1=inic(i)                           end if
  pmin=1.0d3                              C
  ind=0                                   C.....
do 19 j=1,4                              C
  auxr=0d0                                C   INÍCIO DA ATUALIZAÇÃO SÍNCRONA
  if((state(aux1).eq.1).and.(state(apont2(aux1)).eq.1)) then C
    pay(i)=pay(i)+1d0                     do 21 v=1,sz
    auxr=1d0                               chos=v
  end if                                  call urand(iy,rand)
  if((state(aux1).eq.0).and.(state(apont2(aux1)).eq.1)) then C
    pay(i)=pay(i)+1d0*b                   C   ESCOLHE UM VIZINHO DO NO XHOS PARA SER COMPARADO
    auxr=b                                 C
  end if                                  aux2=idint(rand*4)+1
  if((state(aux1).eq.0).and.(state(apont2(aux1)).eq.0)) then C
    pay(i)=pay(i)+1d-2                   aux1=inic(chos)
    auxr=1d-2                             do 12 i=1,aux2
  end if                                  aux1=apont(aux1)
  if(DABS(pmin-auxr).lt.zero) then        12   continue
    marc(ind+1)=aux1                     neigh=lista(aux1,2)
    ind=ind+1                             C
  end if                                  C   COMPARA-SE O GANHO CUMULATIVO
  if((pmin-auxr).gt.zero) then           C
    ind=0                                  if((pay(neigh)-pay(chos)).gt.zero) then
    marc(ind+1)=aux1                       prob=(pay(neigh)-pay(chos))/(b*4d0)
    ind=ind+1                              call urand(iy,rand)
    pmin=auxr                              if(rand.le.prob) then
  end if                                  state2(vmin(chos))=state(apont2(aux1))
  aux1=apont(aux1)                         end if
19   continue                             end if
  call urand(iy,rand)                       21   continue
  aux2=idint(rand*ind)+1                   C
  vmin(i)=marc(aux2)                       C.....
18   continue                              C
C                                           C
C.....                                     C.....
C                                           C.....
C   ARMAZENA A COOPERATIVIDADE MÉDIA NO REGIME ESTACIONÁRIO C
  if(gen.gt.(tmax-1000)) then
    nc=0
    ncc=0
do 24 i=1,sz
  aux5=inic(i)
  cont2=0
do 25 j=1,4
  if(state(aux5).eq.1) then
    nc=nc+1
    cont2=cont2+1

```

C CALCULO DOS DAS MEDIAS E DOS DESVIOS PADRÕES

C

```

do i=1,qe1
  ncs(i)=ncs(i)/(1d3*n2link*qe2)
  nccs(i)=nccs(i)/(1d3*s*z*qe2)
enddo
vmc1=0d0
vmc2=0d0
vmcc1=0d0
vmcc2=0d0
do i=1,qe1
  vmc1=vmc1+ncs(i)
  vmc2=vmc2+ncs(i)*ncs(i)
  vmcc1=vmcc1+nccs(i)
  vmcc2=vmcc2+nccs(i)*nccs(i)
enddo
vmc1=vmc1/(1d0*qe1)
vmc2=vmc2/(1d0*qe1)
sigc=dsqrt(vmc2-vmc1**2)
vmcc1=vmcc1/(1d0*qe1)
vmcc2=vmcc2/(1d0*qe1)
sigcc=dsqrt(vmcc2-vmcc1**2)
write(95,81) b,vmc1,sigc,vmcc1,sigcc
81 format(d15.8,3x,2(d15.8,1x))
22 continue
endfile 95
close(90,status="keep")
close(91,status="keep")
close(94,status="keep")
close(95,status="keep")
stop
end

```

C

C.....

C subroutine urand(iy,rand)

c

```

PERIODO 2{31}-1
integer*4 iy
integer*4 ia,ic,m2
real*8 rand
parameter(m2=1073741824)
parameter(ia=843314861)
parameter(ic=453816693)
iy=iy*ia*ic
IF(iy.lt.0) THEN
  iy=(iy+m2)+m2
ENDIF
rand=float(iy)*real(.5/m2)
return
end

```

Referências Bibliográficas

- [1] M.A. Nowak. *Evolutionary Dynamics: Exploring the Equations of Life*. Havard Press, 2007.
- [2] R.M. Seyfarth, D.L. Cheney, and P. Marler. Monkey responses to three different alarm calls: evidence of predator classification and semantic communication. *Science*, 210:801–803, 1980.
- [3] S.P. Sharp, A. McGowan, M.J. Wood, and B.J. Hatchwel. Learned kin recognition cues in a social bird. *Nature*, 434:1127–1130, 2005.
- [4] E. Fehr and U. Fischbacher. The nature of human altruism. *Nature*, 425:785–791, 2003.
- [5] R.T. Boyd. *Not by genes alone*. The University of Chicago Press, 2005.
- [6] W.D. Hamilton. The genetical evolution of social behavior. *J. Theor. Biol.*, 7:1–16, 1964.
- [7] R.L. Trivers. The evolution of reciprocal altruism. *Q Rev. Biol.*, 46:35–57, 1971.
- [8] E. Fehr and S. Gächter. Altruistic punishment in humans. *Nature*, 415:137–140, 2002.
- [9] K. Sigmund, C. Hauert, and M.A. Nowak. Reward and punishment. *PNAS*, 98:10757–10762, 2001.
- [10] M.A. Nowak and K. Sigmund. Evolution of indirect reciprocity. *Nature*, 437:1291–1298, 2005.
- [11] G. Szabó and G. Fáth. Evolutionary games on graphs. *Phys. Rep.*, 446:97–216, 2007.
- [12] J.M. Smith. *Evolution and the Theroy of Games*. Cambridge University Press, 1993.
- [13] R. Gibbons. *A Primer in Game Theory*. Harvester Wheatsheaf, 1992.
- [14] S. Freeman and J.C. Herron. *Evolutionary Analysis*. Prentice Hall, 2001.
- [15] C. Darwin. *A origem das espécies*. Martin Claret, 2004.
- [16] J. von Neumann and O.Morgenstern. *The Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1944.

- [17] R. Aumann and S. Hart. *Handbook of Game Theory*. Amsterdam: North-Holland, 1992.
- [18] S.P. Hargreaves and Y. Varoufakis. *Game Theory: a Critical Introduction*. Routledge, 1995.
- [19] A. Trausen, J.C. Claussen, and C. Hauert. Evolutionary dynamics: from finite to infinite populations. *Phys. Rev. Lett*, 95:238701, 2005.
- [20] R. Bshary. Cooperation between unrelated individuals—a game theoretical approach. *In: Animal Behavior: Evolution and Mechanisms*, Edited by P. Kappeler:213–240, 2010.
- [21] M.A. Nowak. Five rules for the evolution of cooperation. *Science*, 314:1560–1563, 2006.
- [22] M.A. Nowak and R. M. May. Evolutionary games and spatial chaos. *Nature*, 359:826–829, 1992.
- [23] K. Sigmund. *The Calculus of Selfishness*. Princeton University Press, 2009.
- [24] P.E. Turner and L. Chao. Prisoner’s dilemma in RNA virus. *Nature*, 398:441–443, 1999.
- [25] M.L. Guerinet. Microbial iron transport. *Annu. Rev. Microbiol.*, 48:743–772, 1994.
- [26] C. Ratledge and L.G. Dover. Iron metabolism in pathogenic bacteria. *Annu. Rev. Microbiol.*, 54:881–941, 2000.
- [27] A.S. Griffin, S.A. West, and A. Buckling. Cooperation and competition in pathogenic bacteria. *Nature*, 430:1024–1027, 2004.
- [28] R.H. Kessin. *Dictyostelium: Evolution, Cell Biology, and the Development of Multicellularity*. Cambridge University Press, 2001.
- [29] D.C. Queller, E. Ponte, S. Bozzaro, and J.E. Strassmann. Single-gene greenbeard effects in the social amoeba *Dictyostelium discoideum*. *Science*, 299:105–106, 2003.
- [30] S. A. Frank. Mutual policing and repression of competition in the evolution of cooperative groups. *Nature*, 377:520–522, 1995.
- [31] J.E. Strassmann, Y. Zhu, and D.C. Queller. Altruism and social cheating in the social amoeba *Dictyostelium discoideum*. *Nature*, 408:965–967, 2000.
- [32] E. O Wilson. *Sociobiology*. Harvard University Press, 1975.
- [33] F.L.W. Ratnieks and T. Wenseleers. Altruism in insect societies and beyond: voluntary or enforced? *Trends. Ecol. Evol.*, 23:45–52, 2007.

- [34] J. Henrich and N. Henrich. Culture, evolution and the puzzle of human cooperation. *Cognitive System Research*, 7:220–245, 2006.
- [35] H. Kaplan, K. Hill, and M. Hurtado. *Fitness, foraging and food sharing among the Aché*. In: *Risk and Uncertainty in Tribal and Peasant Economies*. Westview Press, 1990.
- [36] T.W. Smith. Altruism in contemporary america: a report from the national altruism study. *National Opinion Research Center/University of Chicago*, 2003.
- [37] G. Marwell and R. Ames. Experiments on the provision of public goods I: resources, interest, group size, and the free-rider problem. *Am. J. Sociol.*, 84:1335–1360, 1979.
- [38] G. Marwell and R. Ames. Experiments on the provision of public goods II: provision points, stakes, experience, and the free-rider problem. *Am. J. Sociol.*, 85:926–937, 1980.
- [39] C.P. van Schaik. *Social learning and culture in animals*. In: *Animal Behavior: Evolution and Mechanisms*. Springer, 2010.
- [40] R.T. Boyd, P.J. Richerson, and J. Henrich. *Cultural evolution of human cooperation*. In: *Genetic and Cultural Evolution of Cooperation*. The MIT Press, 2006.
- [41] M. Tomasello. *Why we cooperate*. MIT Press, 2009.
- [42] R. Boyd and P.J. Richerson. *Culture and the Evolutionary Process*. University of Chicago Press, 1985.
- [43] J. Henrich and R. Boyd. The evolution of conformist transmission and the emergence of between-group differences. *Evol. Hum. Behav.*, 19:215–242, 1998.
- [44] T. Kameda and D. Nakanishi. Cost-benefit analysis of social cultural learning in a non-stationary uncertain environment: an evolutionary simulation and an experiment with humans subjects. *Evol. Hum. Behav.*, 23:373–393, 2002.
- [45] J. Henrich and F. Gil-White. The evolution of prestige: freely conferred deference as a mechanism for enhancing the benefits of cultural transmission. *Evol. Hum. Behav.*, 22:165–196, 2001.
- [46] A.V. Bell, P.J. Richerson, and R. McElreath. Culture rather than genes provides greater scope for the evolution of large-scale human prosociality. *PNAS*, 106:17671–17674, 2009.

- [47] B. A. Mello, V. M. C. E. S. Souza, D. O. Cajueiro, and R.F.S. Andrade. Network evolution based on minority game with herding behavior. *Eur. Phys. J. B*, 76:147–156, 2010.
- [48] M.A. Nowak and R. Highfield. *SuperCooperators: Altruism, Evolution, and Why We Need Each Other to Succeed*. Free Press, 2011.
- [49] M. Smith. Group selection and kin selection. *Nature*, 201:1145–1147, 1964.
- [50] A.S. Griffin, S.A. West, and A. Buckling. Cooperation and competition in pathogenic bacteria. *Nature*, 430:1024–1027, 2004.
- [51] A.S. Griffin and S.A. West. Kin discrimination and the benefit of helping in cooperatively breeding vertebrates. *Science*, 302:634–636, 2003.
- [52] A. Gardner and S.A. West. Greenbeards. *Evolution*, 64:25–38, 2009.
- [53] D.J. Penn and J.G. Frommen. Kin recognition: an overview of conceptual issues, mechanisms and evolutionary theory. *In: Animal Behavior: Evolution and Mechanisms*, Edited by P. Kappeler:55–85, 2010.
- [54] S.A. West, A.S. Griffin, and A. Gardner. Social semantics: altruism, cooperation, mutualism, strong reciprocity and group selection. *J. Evol. Biol.*, 20(2):415–432, 2007.
- [55] A.S. Griffin and S.A. West. Kin selection: fact or fiction. *Trends in Ecology and Evolution*, 17:15–21, 2002.
- [56] J.A. Fletcher and M. Doebeli. A simple and general explanation for the evolution of altruism. *Proc. R. Soc. B*, 276:13–19, 2009.
- [57] D.S. Wilson. A theory of group selection. *PNAS*, 72:143–146, 1975.
- [58] J.M. Smith. Group selection. *Q. Rev. Biol.*, 51:277–283, 1976.
- [59] A. Trausen and M.A. Nowak. Evolution of cooperation by multilevel selection. *PNAS*, 103:10952–10955, 2006.
- [60] M. Kohn. The needs of many. *Nature*, 456:296–299, 2008.
- [61] M.A. Nowak, C.E. Tarnita, and E.O. Wilson. The evolution of eusociality. *Nature*, 466:1057–1062, 2010.

- [62] P. Abbot et al. Inclusive fitness and eusociality. *Nature*, 471:E1–E4, 2011.
- [63] L. Lehmann, L. Keller, S. West, and D. Roze. Group selection and kin selection: two concepts but one process. *PNAS*, 104:6736–6739, 2007.
- [64] J. Andreoni and J.H. Miller. Rational cooperation in the finitely repeated prisoner’s dilemma: experimental evidence. *Econ. J.*, 103:570–585, 1993.
- [65] R. Axelrod. *The Evolution of Cooperation*. Basic Books, 1984.
- [66] M.A. Nowak and K. Sigmund. Tit for tat in heterogeneous populations. *Nature*, 355:250–252, 1992.
- [67] M.A. Nowak and K. Sigmund. Game-dynamical aspects of the prisoner’s dilemma. *Appl. Math. Comput.*, 30:191–213, 1989.
- [68] M.A. Nowak and K. Sigmund. Oscillations in the evolution of reciprocity. *J. Theor. Biol.*, 137:21–26, 1989.
- [69] M.A. Nowak and K. Sigmund. The evolution of stochastic strategies in the prisoner’s dilemma. *Acta Appl. Math*, 20:247–265, 1990.
- [70] M. Posch. Win-stay lose-shift strategie for repeated games - memory length, aspiration levels and noise. *J. Theor. Biol.*, 198:183–195, 1999.
- [71] M. Nowak and K. Sigmund. A strategy of win-stay lose-shift that outperforms tit-for-tat in the prisoner’s dilemma game. *Nature*, 364:56–58, 1993.
- [72] M. A. Pereira, A. S. Martinez, and A. L. Espíndola. Prisoner’s dilemma in one-dimensional cellular automata: visualization of evolutionary patters. *Int. J. Mod. Phys. C*, 19:187, 2008.
- [73] M. A. Pereira and A. S. Martinez. Pavlovian prisoner’s dilemma analytical results, the quasi-regular phase and spatio-temporal patterns. *J. Theor. Biol.*, 265:346–358, 2010.
- [74] A.G. Sanfey et al. The neural basis of economic decision-making in the ultimatum game. *Science*, 305:1755–1758, 2003.
- [75] J.K. Rilling et al. A neural basis for social cooperation. *Neuron*, 35:395–405, 2002.
- [76] E. Fehr. The neural basis of altruistic punishment. *Science*, 305:1254–1258, 2004.
- [77] M.Y. Bartlett and D. DeSteno. Gratitude and prosocial behavior, helping when it costs you. *Psychol. Sci.*, 17:319–325, 2006.

- [78] M.A. Nowak and S. Roch. Upstream reciprocity and the evolution of gratitude. *Proc. R. Soc. B*, 274:605–609, 2007.
- [79] G.E. Bolton, A.E. E. Katok, and Ockenfels. How effective are electronic reputation mechanisms? An experimental investigation. *Manage Sci.*, 50:1587–1602, 2004.
- [80] P. Resnick, R. Zeckhauser, E. Friedman, and K. Kuwabara. Reputation systems. *Commun. ACM*, 43:45–48, 2000.
- [81] H. Brandt and K. Sigmund. Indirect reciprocity, image scoring, and moral hazard. *PNAS*, 10:2266–2670, 2005.
- [82] H. Brandt and K. Sigmund. The logic of reprobation: assessment and action rules for indirect reciprocity. *J. Theor. Biol.*, 231:475–486, 2004.
- [83] M.A. Nowak and R. M. May. The spatial dilemmas of evolution. *Int. J. of Bifurcat. Chaos*, 3:35–78, 1993.
- [84] H. Ohtsuki, C. Hauert, E. Lieberman, and M.A. Nowak. A simple rule for the evolution of cooperation on graphs and social networks. *Nature*, 441:502–505, 2006.
- [85] G. Szabó, J. Vukov, and A. Szolnoki. Phase diagrams for an evolutionary prisoner’s dilemma game on two-dimensional lattices. *Phys. Rev. E*, 72:047107, 2005.
- [86] G. Szabó and C. Toke. Evolutionary prisoner’s dilemma game on square lattice. *Phys. Rev. E*, 58:69–73, 1998.
- [87] J.F.F. Mendes and S.N. Dorogovtsev. *Evolution of Networks, From Biological Nets to the Internet and WWW*. Oxford University Press, 2003.
- [88] R. Albert, H. Jeong, and A.-L. Barabási. Diameter of the world wide web. *Nature*, 401:130–131, 1999.
- [89] R. Albert, A.-L. Barabási, H. Jeong, and G. Bianconi. Power-law distribution of the world wide web. *Science*, 287:2115a, 2000.
- [90] A.-L. Barabási. The physics of the web. *Phys. World*, July 2001.
- [91] Z.N. Oltvai and A.-L. Barabási. Life’s complexity pyramid. *Science*, 298:763–764, 2002.

- [92] S.-H. Yook, H. Jeong, and A.-L. Barabási. Modeling the internet's large-scale topology. *PNAS*, 99:13382–13386, 2002.
- [93] A.-L. Barabási et al. On the topology of the scientific collaboration networks. *Physica A*, 311:590–614, 2002.
- [94] A.-L. Barabási and Réka Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286:509–512, 1999.
- [95] F.C. Santos and J.M. Pacheco. A new route to the evolution of cooperation. *J. Evol. Biol.*, 19:726–733, 2006.
- [96] F.C. Santos and J.M. Pacheco. Scale-free networks provide a unifying framework for the emergence of cooperation. *Phys. Rev. Lett.*, 95:098104, 2005.
- [97] F.C. Santos and J.M. Pacheco. A new route to the evolution of cooperation. *J. Evol. Biol.*, 19:726–733, 2006.
- [98] A. Szolnoki, M. Perc, and Z. Danku. Towards effective payoffs in the prisoner's dilemma game on scale-free networks. *Physica A*, 387:2075–2082, 2008.
- [99] A. Pusch, S. Weber, and M. Porto. Impact of topology on the dynamical organization of cooperation in the prisoner's dilemma game. *Phys. Rev. E*, 77:036120, 2008.
- [100] J. Gómez-Gardeñes, M. Campillo, L.M. Floría, and Y. Moreno. Dynamical organization of cooperation in complex topologies. *Phys. Rev. Lett.*, 98:108103, 2007.
- [101] Z. Rong, X. Li, and X. Wang. Roles of mixing patterns in cooperation on a scale-free networked game. *Phys. Rev. E*, 76:027101, 2007.
- [102] S. Assenza, J. Gómez-Gardeñes, and V. Latora. Enhancement of cooperation in highly clustered scale-free networks. *Phys. Rev. E*, 78:017101, 2008.
- [103] M.H. Vainstein and J.J. Arenzon. Disordered environments in spatial games. *Phys. Rev. E*, 64:051905, 2001.
- [104] M.H. Vainstein, A.T.C. Silva, and J.J. Arenzon. Does mobility decrease cooperation? *J. Theor. Biol.*, 244:722–728, 2007.

- [105] Z. Wang, Z. Wang, X. Zhu, and J.J. Arenzon. Cooperation and age structure in spatial games. *Phys. Rev. E*, in press:–, 2012.
- [106] M. Perc and A. Szolnoki. Coevolutionary games: A mini review. *BioSystems*, 99:109–125, 2010.
- [107] L. Wardil and J. K. L. da Silva. Adoption of simultaneous different strategies against different opponents enhances cooperation. *EPL*, 86:38001, 2009.
- [108] C. Hauert. Fundamental clusters in spatial 2x2 games. *Proc. R. Soc. Lond. B*, 268:761–769, 2001.
- [109] L. Wardil and J. K. L. da Silva. Distinguishing the opponents promotes cooperation in well-mixed populations. *Phys. Rev. E*, 81:036115, 2010.
- [110] A. Broader et al. Graph structure in the web. *Comput. Netw.*, 33:309, 2000.
- [111] M.E.J. Newman. Small worlds: the structure of scientific collaboration networks. *PNAS*, 98:404, 2001.
- [112] R. Kumar et al. The web as a graph. *Proceedings of the 19th ACM Symposium on Principles of Database Systems*, -:1–10, 2000.
- [113] S. Redner. How popular is your paper? *Eur. Phys. J. B*, 23:267, 1998.
- [114] D.M. Penock et al. Winners don't take all: characterising the competition for links on the web. *PNAS*, 99:5207, 2002.
- [115] L. Barabási A. Evolution of the social network os scientific collaborations. *Physica A*, 311:590, 2002.
- [116] F. Lijeros et al. The web of human sexual contacts. *Nature*, 411:907, 2001.
- [117] J.M. Montoya and R.V. Solé. Small world patterns in food webs. *J. Teor. Biol.*, 214:405, 2002.
- [118] W. Aiello, F. Chung, and L. Lu. A random graph model for massive graphs. *Proceedings of the Thity-second Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, -:171180, 2000.
- [119] H. Ebel, L.-I. Mielsch, and S Bornholdt. Scale-free topology of e-mail networks. *Phys. Rev. E*, 66, 2002.
- [120] L. Wardil and J. K. L. da Silva. The evolution of cooperation in heterogeneous networks when opponents can be distinguished. *J. Phys. A*, 44:345101, 2011.

- [121] P.L. Krapivsky and S. Redner. Organization of growing random network. *Phys. Rev. E*, 63:066123, 2001.
- [122] P.L. Krapivsky and S. Redner. Finiteness and fluctuations in growing networks. *J. Phys. A Math. Gen.*, 35:9517, 2002.
- [123] W. de Nooya, A. Mrvar, and V. Batagelj. *Exploratory Social Network Analysis with Pajek*. Cambridge University Press, 2005.
- [124] X. Chen X, F. Fu, and L. Wang. Influence of different initial distributions on robust cooperation in scale-free networks: a comparative study. *Phys. Lett. A*, 372:1161, 2008.
- [125] G. Hardin. The tragedy of the commons. *Science*, 162:1243–1248, 1968.
- [126] S.S. Izquierdo, L.R. Izquierdo, and F. Vega-Redondo. The option to leave: conditional dissociation in the evolution of cooperation. *J. Theor. Biol.*, 267:76–84, 2010.
- [127] C.A. Aktipis. Know when to walk away: contingent movement and the evolution of cooperation. *J. Theor. Biol.*, 231:249–260, 2004.
- [128] J.M. McNamara, Z. Bartaa, L. Fromhage, and A.I. Houston. The coevolution of choosiness and cooperation. *Nature*, 451:189–192, 2008.
- [129] C. Hauert, S. De Monte, J. Hofbauer, and K. Sigmund. Volunteering as red queen mechanism for cooperation in public goods games. *Science*, 296:1129–1132, 2002.
- [130] H. Brandt, C. Hauert, and K. Sigmund. Punishing and abstaining for public goods. *PNAS*, 103:495–497, 2006.
- [131] B. Bollobás. *Graph Theory, an Introductory Course*. Springer-Verlag, 1985.
- [132] H. Jeong, B. Tombor, R. Albert, Z.N. Oltvai, and A.-L. Barabási. The large-scale organization of metabolic networks. *Nature*, 407:651–654, 2000.
- [133] D.J. Watts and S.H. Strogatz. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, 393:440–442, 1998.