

**Naturalidade e vínculos teóricos para a massa do
bóson de Higgs**

Alexandre Rodrigues Vieira

Agosto de 2012

Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG
Instituto de Ciências Exatas - ICEx
Programa de Pós Graduação em Física

Naturalidade e vínculos teóricos para a massa do bóson de Higgs

Alexandre Rodrigues Vieira

Orientador: Prof. Dra. Maria Carolina Nemes

Co-orientador: Prof. Dr. Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio

Dissertação apresentada à UNIVERSIDADE FEDERAL DE
MINAS GERAIS, como requisito parcial para a obtenção do
grau de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física Geral de Partículas e Campos

Agosto de 2012

Agradecimentos

-A Deus, pela oportunidade de ser Físico.

-À Carol e ao Marcos pela orientação e aprendizado.

-À minha mãe Márcia e ao meu pai Paulo pela formação e aos meus irmãos André e Thamires pela amizade.

-À Vanessa pelo apoio, amizade, compreensão e pela felicidade que ela tem me proporcionado.

-Aos amigos e colegas de trabalho do grupo de Teoria Quântica de Campos - Cabral, Helvécio, Adriano, Gustavo, Jean, Luelerson, Arthur, Yuri, Joilson e Gabriel - pelas discussões e sugestões que foram necessárias para o desenvolvimento meu e deste trabalho.

-À professora Brigitte da Universidade de Coimbra pelas discussões, sugestões e principalmente por me informar que eu estava fazendo contas no calibre inadequado.

-À Shirley e ao pessoal da biblioteca pela gentileza e folhas de rascunho.

-Aos amigos e colegas da sala de mestrado - Aloísio, Bárbara, Fábio, Henrique, Júlia, Leandra, Lucas, Marcus, Roberto e Rodolfo - pela boa convivência.

-Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

O problema da Naturalidade é uma consequência de teorias com campos escalares, como o Modelo Padrão. Nestas teorias, a correção para a massa da partícula escalar é proporcional à escala de energia ao quadrado e, conseqüentemente, pode ser arbitrariamente grande no limite ultravioleta. Contudo, o aparecimento desta escala de energia ao quadrado está relacionado com um esquema de regularização inadequado para o tratamento de uma integral quadraticamente divergente neste limite.

Neste trabalho, utilizamos a Regularização Implícita para regularizar correções a um loop para o propagador do Higgs e a arbitrariedade de integrais divergentes no limite ultravioleta para assegurar a ausência desta escala de energia ao quadrado por considerações físicas. Estas considerações físicas são escolhidas como Naturalidade e consistência da quebra da simetria de escala. Depois de mostrar que não há correção quadrática na energia para a massa do Higgs, consideramos as correções que não violam as considerações físicas para estimar o limite de validade da teoria de perturbação do Modelo Padrão e encontrar regiões limite que restringem valores para a massa do Higgs em um diagrama de massa do Higgs versus escala de energia.

Palavras-chaves: Naturalidade, problema da hierarquia, problema do ajuste fino, Regularização Implícita, massa do Higgs

Abstract

The Naturalness problem is a consequence of theories with scalar fields like the Standard Model. In these theories, the correction to the mass of the scalar is proportional to the energy scale squared and, consequently, this correction can be arbitrarily large in the ultraviolet limit. However, we argue this energy scale squared is related to an inadequate regularization scheme used to treat a quadratic divergent integral in that limit.

In this work, we use Implicit Regularization to regularize one loop corrections to the Higgs propagator and the arbitrariness of divergent integrals in the ultraviolet limit to assure the absence of that energy scale squared by physical considerations. These physical considerations are chosen to be Naturalness and consistency of scale symmetry breaking. After we show there is no quadratic correction in the energy scale to the Higgs mass, we consider the corrections which do not violate the physical considerations to estimate the limit of validity of perturbation theory of the Standard Model and to find bounds that restrict values to the Higgs mass in a diagram of Higgs mass versus energy scale.

Keywords: Naturalness, Hierarchy problem, Fine-tuning problem, Implicit Regularization, Higgs mass

Sumário

Resumo	I
Abstract	II
Lista de Tabelas	V
Lista de Figuras	VI
1 Introdução	1
2 Funções de Green	4
2.1 O funcional gerador das funções de Green	5
2.2 O funcional gerador dos campos livres	6
2.3 Teorema de Wick e funções de Green para campos interagentes	8
3 Métodos de Regularização e Renormalização	12
3.1 Regularização por cutoff e Renormalização On-Mass-Shell (OMS)	13
3.2 Regularização Implícita e Renormalização de Subtração Mínima (MS)	15
4 O setor Eletro-Fraco do Modelo Padrão	18
4.1 Teoria de calibre das interações eletro-fracas	19
4.2 Mecanismo de Higgs de quebra espontânea de simetria	23
4.3 Fixadores de calibre e fantasmas	26
5 Correções a 1 loop para o propagador do Higgs	30
5.1 Contribuições quadraticamente divergentes no ultravioleta	31
5.2 Contribuições logaritmicamente divergentes no ultravioleta e renormalização dos diagramas	33

<i>SUMÁRIO</i>	IV
6 Considerações de simetria e regiões possíveis para a massa	38
6.1 Simetrias e correções a um loop na QED	39
6.2 Simetria de escala e a correção a um loop para a massa do Higgs	41
6.3 Regiões possíveis para a massa do Higgs	43
7 Conclusão	48
A O funcional gerador do campo eletromagnético livre	49
B Integrais das seções 3.1 e 6.1	51
B.1 Como não regularizar a amplitude da eq. (6.7)	51
B.2 Integral da regularização da auto-energia do elétron	52
Referências Bibliográficas	54

Lista de Tabelas

5.1	Contribuições quadraticamente divergentes e finitas no UV para o propagador do Higgs.	36
5.2	Contribuições logaritmicamente divergentes e finitas no UV para o propagador do Higgs.	37

Lista de Figuras

2.1	Diagramas de Feynman da Função de Green da eq. (2.29)	10
3.1	Diagrama de Feynman do propagador do elétron.	13
5.1	Uma das correções para o propagador do Higgs.	32
5.2	Outra correção para o propagador do Higgs.	33
6.1	Diagrama do propagador do fóton.	40
6.2	Regiões excluídas para a massa do Higgs: a região azul e a região lilás excluem valores de m_H e Λ cuja correção δm é maior ou igual a 47% e 50% do valor de m_H , respectivamente.	45
6.3	Regiões excluídas para a massa do Higgs: a região marrom é a <i>vacuum stability bound</i> e a região verde é a <i>triviality bound</i> . A região azul e a região lilás correspondem a correções de massa maiores ou iguais a 47% e 50%, respectivamente.	47

Capítulo 1

Introdução

O Modelo Padrão das Partículas Elementares é uma teoria que descreve três das quatro interações fundamentais da natureza. A construção deste modelo requer a junção do mecanismo de Quebra Espontânea de Simetria com a invariância de calibre local da teoria. Isto é, o Modelo Padrão não massivo possui uma simetria $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$ que é espontaneamente quebrada em $SU_c(3) \times U_{EM}(1)$ quando o valor esperado do vácuo assume um valor crítico diferente de zero. Esta quebra de simetria dá origem as massas das partículas massivas que conhecemos e o mecanismo responsável por ela é o mecanismo de Higgs. Ele é fundamental para assegurar a renormalizabilidade e unitariedade desta teoria e ele prevê a existência da única partícula escalar do modelo, o bóson de Higgs.

Recentemente, foi encontrada uma evidência da existência do bóson de Higgs[1]. Contudo, esta não era a única peça que faltava para completar o Modelo Padrão. Este modelo não é uma teoria final das interações fundamentais porque não inclui a Gravitação e descreve apenas 5% da matéria do universo, a matéria composta por partículas que interagem com o bóson de Higgs. Além disso, existem alguns problemas em aberto com o modelo como o problema da violação de simetria CP na Cromo-dinâmica Quântica, conhecido como *strong CP problem*, e o problema da *Naturalidade*, proposto por Susskind [2] em 1979. Este último

é o problema que abordaremos neste trabalho.

Segundo Susskind, o Modelo Padrão não apresenta Naturalidade. Antes de falar sobre isto, vamos lembrar que em Física de Partículas o que chamávamos de *constante* em teorias clássicas não é mais constante. Quando realizamos um experimento em um acelerador de partículas, vemos que as constantes de acoplamento das interações e as massas de repouso de partículas variam com a energia. Contudo, esta variação deve ser pequena no sentido de que só conseguimos percebê-la se fizermos um experimento num acelerador e não em um laboratório de Física Básica. Por isso, dizemos que uma teoria apresenta *Naturalidade* quando *o comportamento do mundo em energias usuais não é extremamente sensível ao valor de um parâmetro microscópico* [3]. O setor de Higgs do Modelo Padrão aparenta não ter esta propriedade. Podemos ver isto via a massa corrigida do bóson de Higgs [4, 5, 7]

$$m_H^2 = m^2 + \delta m^2 = m^2 + \frac{3\Lambda^2}{8\pi^2 v^2} [m_Z^2 + 2m_W^2 + m^2 - 4m_t^2] + O(\ln \frac{\Lambda}{m}) \quad (1.1)$$

onde m_Z , m_W , m_H and m_t são as massas do Z^0 , W^\pm , Higgs e do quark top, respectivamente. Λ é o parâmetro microscópico responsável pela variação da massa com a energia.

Observe que neste caso não precisaríamos de realizar um experimento em uma energia tão alta (como as energias alcançadas pelo LHC) para evidenciar a variação da massa do Higgs com a energia. Ou seja, uma variação com o quadrado da energia é facilmente detectável. Por outro lado, uma variação com o logaritmo da energia não. Este problema não ocorre em outros setores do Modelo Padrão. Todas as outras massas e constantes de acoplamento variam de acordo com o logaritmo da escala de energia Λ . E isto nos diz que correções quânticas para estas constantes de acoplamento e massas são pequenas mesmo em altas energias.

Não obstante, se especularmos que o limite de validade do Modelo Padrão é a escala de Planck ($\sim 10^{19} \text{ GeV}$), onde os efeitos gravitacionais precisam ser considerados, poderíamos ter uma correção para o quadrado da massa nível árvore de até 10^{38} GeV^2 . Uma maneira de contornar este problema é o chamado ajuste fino. Isto é, como o valor medido em laboratório é m_H , a massa nível árvore m poderia ser tão grande quanto a correção dela de forma que elas se cancelem precisamente para resultar neste valor medido. Este ajuste fino é uma tentativa de preservar a hierarquia da teoria, ou seja, as massas de partículas da teoria

serem muito menores que o limite de validade dela ($\Lambda_{Max} \gg m_H$). Contudo, isto não é teoria de perturbação, pois não recuperamos o nível árvore ($m_H \approx m$) quando $\delta m^2 \ll m^2$.

A equação 1.1 nos diz que a ausência de Naturalidade e o conseqüente problema de ajuste fino é causado pelo δm^2 , que é proporcional à escala de energia ao quadrado. Por isso, propostas para eliminá-la tem sido apontadas na literatura. A primeira delas foi a de escolher a soma das massas entre colchetes da eq. (1.1) como zero [4]. Isto nos livra da escala de energia ao quadrado. Contudo, ganhamos um vínculo entre as massas que não é válido para uma energia qualquer [8, 9]. Tal vínculo tem sido utilizado para determinar a massa do bóson de Higgs [5]. O valor obtido neste caso, por volta de 317 GeV , difere muito do valor experimental anunciado [1] de 125 GeV .

Existem propostas mais sofisticadas como Super-simetria [6] e quebra dinâmica de simetria onde este problema não aparece. Contudo, neste trabalho vamos argumentar que o aparecimento desta escala de energia ao quadrado está relacionado com um método de regularização inadequado. Adotamos o ponto de vista sugerido por Jackiw, em [10], de que arbitrariedades são inerentes a cálculos perturbativos em Teoria Quântica de Campos. Por isso, diferentes métodos de regularização podem levar a respostas diferentes.

A maneira que fixamos estas arbitrariedades é via fenomenologia ou simetrias da lagrangiana da teoria. O caso da equação 1.1, por exemplo, foi obtido via um esquema de regularização que viola a consistência da quebra de simetria de escala da lagrangiana do setor de Higgs [8]. Neste trabalho, implementamos esta idéia até ordem de um loop e mostramos que para termos consistência na quebra de simetria de escala, termos quadráticos em Λ na correção da massa devem ser excluídos via escolha de uma constante arbitrária.

Depois de fazer estas considerações, podemos permitir o tamanho de correção de massa que quisermos, desde que este não viole a teoria de perturbação ($\delta m > m_H$). Para cada quantidade de correção, temos uma região limite para a massa do Higgs em um gráfico de massa do Higgs versus escala de energia. Comparamos estas regiões limites com as existentes na literatura [14, 15, 16].

Capítulo 2

Funções de Green

Em Física de Partículas estamos interessados em obter a amplitude de espalhamento \mathcal{M} para um certo processo que envolve as partículas e interações da teoria. Esta amplitude está relacionada com os elementos da matriz espalhamento S que, por sua vez, nos permite obter quantidades medidas em laboratório. Por exemplo, no caso da Eletrodinâmica Quântica, precisamos desta amplitude para obter a seção de choque de espalhamento. Outro exemplo é o da Teoria de calibre das Interações Fracas. Neste caso, precisamos da amplitude de espalhamento para obter a taxa de decaimento e o tempo de vida de uma certa partícula. Uma das maneiras de obter esta amplitude \mathcal{M} é construí-la a partir de um conjunto de regras tabeladas para cada Teoria Quântica de Campos, as chamadas Regras de Feynman. Uma outra maneira, a que faremos neste capítulo, é a de construir esta amplitude via funções de Green. Esta maneira nos permite não só construir as amplitudes, mas também obter as Regras de Feynman da teoria.

2.1 O funcional gerador das funções de Green

Uma Teoria de Campos é construída a partir de uma densidade de lagrangiana \mathcal{L} . Esta contém termos cinéticos dos campos da teoria e termos de interação entre estes. No caso de teorias de calibre, as teorias que descrevem as interações da natureza, os termos de interação são construídos exigindo que a teoria seja invariante de calibre e renormalizável. Existem outros termos de \mathcal{L} , chamados de termos de massa, que são introduzidos via quebra espontânea de simetria, como veremos no capítulo 4. Os termos cinéticos mais os termos de massa formam a densidade de lagrangiana livre, \mathcal{L}_F . Além de todos estes termos, no formalismo de quantização de campos por integrais de trajetória, existem mais alguns, chamados de termos de fonte. A lagrangiana total pode ser escrita da forma mais geral como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_S, \quad (2.1)$$

onde \mathcal{L}_F , \mathcal{L}_I e \mathcal{L}_S correspondem a densidade de lagrangiana livre, a de interação e a das fontes, respectivamente.

No caso da Eletrodinâmica Quântica (QED), a teoria das interações entre férmions de spin 1/2 e fótons, as densidades de lagrangiana livre e de interação são

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F(x) &= \bar{\psi}(x)(i\cancel{\partial} - m)\psi(x) - \frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu(x))(\partial^\nu A^\mu(x)) \\ \mathcal{L}_I(x) &= e_0 \bar{\psi}(x) \cancel{A}(x) \psi(x) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Temos uma fonte para cada campo: A fonte do campo vetorial deve ser um campo vetorial e as fontes dos campos espinores devem ser campos de Grassmann

$$\mathcal{L}_S(x) = J_\kappa(x)A^\kappa(x) + \bar{\sigma}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\sigma(x) \quad (2.3)$$

Uma vez construída a lagrangiana, podemos obter o funcional gerador das funções de Green da teoria como sendo a seguinte integral de trajetória

$$Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iS'} \quad (2.4)$$

onde $S' = \int d^4x \mathcal{L}$ e N é um fator de normalização escolhido tal que $Z[0, 0, 0] = 1$.

Com o funcional gerador, podemos obter as funções de Green de n pontos

$$G^{\mu\dots}(x_1, \dots, y_1, \dots, z_1, \dots) = (-1)^{\bar{n}} \left(\frac{1}{i}\right)^n \frac{\delta^n Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]}{\delta J_\mu(x_1) \dots \delta \bar{\sigma}(y_1) \dots \delta \sigma(z_1) \dots} \Big|_0 \quad (2.5)$$

onde \bar{n} é o número de campos adjuntos, n é o número total de campos e $|_0$ significa que vamos igualar as fontes a zero depois de fazer as derivadas funcionais.

Substituindo a eq. (2.4) na eq. (2.5), temos a função de Green da QED

$$G^{\mu\dots}(x_1, \dots, y_1, \dots, z_1, \dots) = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi [e^{iS} A^\mu(x_1) \dots \psi(y_1) \dots \bar{\psi}(z_1) \dots] \quad (2.6)$$

onde $S = \int d^4x (\mathcal{L}_F + \mathcal{L}_I)$ é a ação da QED. Porém, esta equação está escrita de uma maneira nada fácil de calcular. Nas próximas seções vamos reescrevê-la.

2.2 O funcional gerador dos campos livres

Precisamos ainda relacionar a função de Green da eq. (2.6) com a expansão em série perturbativa da constante de acoplamento e_0 . Para fazer isto, vamos primeiro relacionar o funcional gerador da teoria completa, eq. (2.4), com o funcional gerador dos campos livres $Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]$.

A exponencial $e^{iS'}$ da eq. (2.4) pode ser reescrita quando definimos o operador de interação da QED

$$I_\delta(x) = -\left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\sigma(x)}\right) \gamma_\mu \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\bar{\sigma}(x)}\right) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\right) \quad (2.7)$$

Podemos mostrar que

$$e^{I_\delta(x)} e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_F + \mathcal{L}_S)} = \mathcal{L}_I(x) e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_F + \mathcal{L}_S)} \quad (2.8)$$

Logo,

$$e^{ie \int d^4x I_\delta(x)} e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_F + \mathcal{L}_S)} = e^{i \int d^4x \mathcal{L}_I(x)} e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_F + \mathcal{L}_S)} = e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_F + \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_I)} = e^{iS'} \quad (2.9)$$

Finalmente, podemos substituir a eq. (2.9) na eq. (2.4) e obter a relação entre o funcional gerador da teoria completa e o funcional gerador dos campos livres

$$Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{ie \int d^4x I_\delta(x)} e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_F + \mathcal{L}_S)} = \frac{N_0}{N} e^{ie \int d^4x I_\delta(x)} Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] \quad (2.10)$$

onde N_0 é escolhido tal que $Z_0[0, 0, 0] = 1$.

Esta equação nos diz que para conhecer o funcional gerador da QED precisamos primeiro encontrar o funcional gerador dos campos livres $Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]$. Este último pode ser reescrito como o funcional gerador do campo eletromagnético livre vezes o funcional gerador do campo de espinor livre: $Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = Z_0[J_\kappa] Z_0[\sigma, \bar{\sigma}]$. No apêndice A está demonstrado

como encontrar o funcional gerador do campo eletromagnético livre. O funcional de A e o funcional do campo espinor livre são

$$\begin{aligned} Z_0[J_\kappa] &= e^{-\frac{i}{2} \int d^4x' d^4x'' J^\mu(x') D_{\mu\nu}(x'-x'') J^\nu(x'')} \\ Z_0[\sigma, \bar{\sigma}] &= e^{-i \int d^4x' d^4x'' \bar{\sigma}(x') S(x'-x'') \sigma(x'')} \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde $D_{\mu\nu}(x'-x'')$ e $S(x'-x'')$ são os propagadores do fóton e do elétron, respectivamente, no espaço das posições.

As funções de Green da teoria livre de interações é obtida através do funcional gerador dos campos livres

$$G_0^{\mu\dots}(x_1, \dots, y_1, \dots, z_1, \dots) = (-1)^{\bar{n}} \left(\frac{1}{i}\right)^n \frac{\delta^n Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]}{\delta J_\mu(x_1) \dots \delta \bar{\sigma}(y_1) \delta \sigma(z_1) \dots} \Big|_0 \quad (2.12)$$

Por exemplo, a função de Green de um ponto de um campo fermiônico é nula

$$\begin{aligned} G_0(x) &= (-1)^1 \left(\frac{1}{i}\right)^1 \frac{\delta Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]}{\delta \bar{\sigma}(x)} \Big|_0 = \\ &= Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}(x)} \int d^4x' d^4x'' \bar{\sigma}(x') S(x'-x'') \sigma(x'') \Big|_0 = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Pois,

$$\begin{aligned} &\frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}(x)} \int d^4x' d^4x'' \bar{\sigma}(x') S(x'-x'') \sigma(x'') = \\ &= \int d^4x' d^4x'' \delta(x'-x) S(x'-x'') \sigma(x'') = \int d^4x'' S(x-x'') \sigma(x'') \end{aligned} \quad (2.14)$$

Quando avaliamos a integral (2.14) para as fontes iguais a zero, a eq. (2.13) dá zero. Isto ocorre sempre que o número de campos n for ímpar. Porque neste caso a diferenciação funcional não remove todos os termos de fonte.

Outro exemplo é a função de Green de dois pontos de dois campos bosônicos

$$\begin{aligned} G_0^{\mu\nu}(x, y) &= (-1)^0 \left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{\delta^2 Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]}{J_\mu(x) J_\nu(y)} \Big|_0 = \\ &= \left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{-i}{2} Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] \frac{\delta^2}{J_\mu(x) J_\nu(y)} \int d^4x' d^4x'' J^\kappa(x') D_{\kappa\lambda}(x'-x'') J^\lambda(x'') \Big|_0 = \\ &= \frac{i}{2} Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \int d^4x' d^4x'' \left[\frac{\delta J^\kappa(x')}{\delta J^\nu(y)} D_{\kappa\lambda}(x'-x'') J^\lambda(x'') + J^\kappa(x') D_{\kappa\lambda}(x'-x'') \frac{\delta J^\lambda(x'')}{\delta J^\nu(y)} \right] \Big|_0 = \\ &= \frac{i}{2} Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \left[\int d^4x'' D_\lambda^\nu(y-x'') J^\lambda(x'') + \int d^4x' J^\kappa(x') D_\kappa^\nu(x'-y) \right] \Big|_0 = \\ &= i D^{\mu\nu}(x-y) = \overline{A^\mu(x) A^\nu(y)} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Este é o propagador do fóton no espaço das posições. Podemos representá-lo na notação de contração entre dois campos, como feito na última linha.

2.3 Teorema de Wick e funções de Green para campos interagentes

Vamos utilizar a seguinte notação para funções de Green

$$G^{\mu\dots}(x_1, \dots, y_1, \dots, z_1, \dots) = \langle A^\mu(x_1) \dots \psi(y_1) \dots \bar{\psi}(z_1) \dots \rangle \quad (2.16)$$

No caso das funções de Green da teoria livre (sem interação), vamos utilizar o sub-índice 0.

Utilizando esta notação, os exemplos da seção anterior, eqs. (2.13) e (2.15), podem ser escritos como

$$\begin{aligned} G_0(x) &= \langle \psi(x) \rangle_0 = 0 \\ G_0^{\mu\nu}(x, y) &= \overline{A^\mu(x) A^\nu(y)} = \langle A^\mu(x) A^\nu(y) \rangle_0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

O caso mais geral de uma função de Green para a teoria livre é dado pela eq. (2.12). Este é o resultado da n -ésima derivada funcional do funcional gerador de campos livres avaliada para as fontes iguais a zero. Porém, o cálculo de uma função de Green de muitos pontos, pela eq. (2.12), pode ser bastante tedioso e demorado. Por isso, para obter o mesmo resultado dado por esta equação podemos utilizar o teorema de Wick. Este teorema nos diz que a função de Green da teoria livre para um número qualquer de campos é igual a todas as contrações possíveis entre os campos. Ou seja,

$$\langle ABCD\dots WXYZ \rangle_0 = \overline{ABCD\dots WXYZ} + \overline{ABCD\dots WXYZ} + \dots \quad (2.18)$$

Cada uma das contrações é o propagador do ponto do espaço-tempo de um campo até o ponto do espaço-tempo do outro campo. Se o número de campos é ímpar, haverá sempre um campo que não está contraído na eq. (2.18) e o resultado é zero, pois a função de Green de um único campo é zero (eq. (2.17)).

Finalmente, precisamos descobrir as funções de Green da teoria com interação, ou seja, aquela dada pela eq. (2.6). Esta é a função de Green que precisamos para calcular amplitudes de espalhamento em Física de Partículas. Podemos obter estas funções de duas maneiras. A primeira delas, que não é a mais simples, é a de obter o funcional gerador da teoria interagente da eq. (2.10) utilizando o funcional gerador de campos livres dado pela eq. (2.11). Uma vez construído este funcional gerador Z , podemos utilizar a eq. (2.5) e calcular a função

de Green da teoria interagente para certo número de pontos. Porém, assim como o cálculo para a teoria livre (eq. (2.12)), este cálculo é tedioso para funções de muitos pontos. Por isso, vamos utilizar a outra maneira nesta seção para obter as funções de Green da teoria interagente. Começaremos escrevendo a função de Green da teoria livre como uma integral de trajetória. Para fazer isto, utilizamos a eq. (2.6) para $\mathcal{L}_I = 0$

$$\langle ABC\dots \rangle_0 = \frac{1}{N_0} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x \mathcal{L}_F} (ABC\dots) \quad (2.19)$$

A eq. (2.6) na notação desta seção pode ser escrita como

$$\langle ABC\dots \rangle = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x \mathcal{L}_F} e^{i \int d^4x \mathcal{L}_I} (ABC\dots) \quad (2.20)$$

Comparando (2.20) com (2.19), podemos escrever

$$\langle ABC\dots \rangle = \frac{N_0}{N} \langle e^{i \int d^4x \mathcal{L}_I} ABC\dots \rangle_0 \quad (2.21)$$

Onde N e N_0 são dados pelas eqs. (2.4) e (2.10), respectivamente

$$N = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_F + \mathcal{L}_I)} \quad (2.22)$$

$$N_0 = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x \mathcal{L}_F} \quad (2.23)$$

Comparando as duas últimas equações, podemos escrever

$$N = N_0 \langle e^{i \int d^4x \mathcal{L}_I} \rangle_0 \quad (2.24)$$

Substituindo (2.24) em (2.21), temos

$$\langle ABC\dots \rangle = \frac{\langle e^{i \int d^4x \mathcal{L}_I} ABC\dots \rangle_0}{\langle e^{i \int d^4x \mathcal{L}_I} \rangle_0} \quad (2.25)$$

Esta equação é o nosso resultado final. Significa que para conhecer as funções de Green da teoria interagente, precisamos apenas da lagrangiana de interação da teoria. A exponencial de (2.25) pode ser expandida

$$e^{i \int d^4x \mathcal{L}_I} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n [\mathcal{L}_I(x_1) \dots \mathcal{L}_I(x_n)] \quad (2.26)$$

Isto significa que a função de Green da teoria interagente é uma expansão em série perturbativa da constante de acoplamento da teoria. Isto é, substituímos (2.26) até a ordem desejada na eq. (2.25) e aplicamos o teorema de Wick (eq. (2.18)).

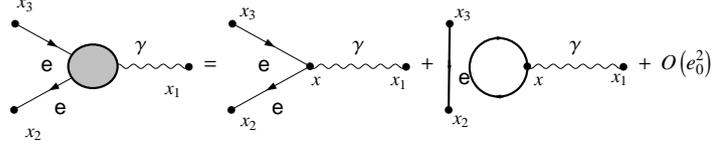


Figura 2.1: Diagramas de Feynman da Função de Green da eq. (2.29)

Como exemplo, vamos calcular a seguinte função de três pontos até 1ª ordem em e_0

$$\begin{aligned} \langle A^\mu(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3) \rangle &= \langle e^{i \int d^4x \mathcal{L}_I} A^\mu(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3) \rangle_0 = \\ &= \langle A^\mu(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3) \rangle_0 + i \int d^4x \langle \mathcal{L}_I(x) A^\mu(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3) \rangle_0 + O(e_0^2) \end{aligned} \quad (2.27)$$

O termo de ordem zero é zero porque o número de campos é ímpar. O integrando do termo de ordem 1 é calculado via teorema de Wick (2.18)

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}(x) A(x) \psi(x) A^\mu(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle_0 &= \overbrace{A^\nu(x) A^\mu(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x) \gamma_\nu \psi(x) \bar{\psi}(x_3)} + \\ &+ \overbrace{A^\nu(x) A^\mu(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x) \gamma_\nu \psi(x) \bar{\psi}(x_3)} \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde utilizamos o fato de que $\bar{\psi}(x)\gamma_\nu\psi(x)$ é um número e, portanto, comuta com os outros campos.

Temos então,

$$\begin{aligned} \langle A^\mu(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3) \rangle &= ie_0 \int d^4x iD^{\mu\nu}(x_1-x) iS(x_2-x) \gamma_\nu iS(x-x_3) + \\ &+ ie_0 \int d^4x iD^{\mu\nu}(x_1-x) iS(x-x) \gamma_\nu iS(x_2-x) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Estas funções de Green estão representadas em diagramas de Feynman na fig. 2.1. O segundo termo da eq. (2.29) corresponde a uma função de Green desconectada, como mostra a fig. 2.1. Estas funções de Green desconectadas correspondem a diagramas que já estão contidos nas funções de Green conectadas. Por isso, não é perda de informação desconsiderarmos estes diagramas desconectados. Podemos definir as funções de Green conectadas como

$$G_c^{\mu\dots}(x_1, \dots) = G^{\mu\dots}(x_1, \dots) - \sum (\text{diagramas desconectados}) \quad (2.30)$$

O resultado da função de Green conectada da eq. (2.29) pode ser reescrito no espaço dos momentos utilizando uma transformada de Fourier

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + p_3) G_c^\mu(p_1, p_2, p_3) = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + p_3) iD^{\mu\nu}(-p_1) iS(-p_2) [ie_0 \gamma_\nu] iS(p_3) \quad (2.31)$$

O termo entre colchetes é o vértice da QED e os propagadores são chamados de pernas do diagrama da fig. 2.1. A função delta do vértice assegura a conservação do quadrimomento.

A eq. (2.25) obviamente também pode ser aplicada para obter a função de Green de um determinado processo. Por exemplo, no caso do espalhamento Compton nível árvore, devemos calcular a função de Green conectada de quatro pontos $\langle A^\mu(x)A^\nu(y)\psi(z)\bar{\psi}(w) \rangle$ até ordem de e_0^2 . Depois de calcular esta função de Green, podemos utilizar o formalismo LSZ construído para este processo e obter o elemento da matriz espalhamento S . Como não vamos calcular nenhum espalhamento neste trabalho, não vamos falar sobre estes detalhes.

Capítulo 3

Métodos de Regularização e Renormalização

A função de Green para um determinado processo é uma expansão em ordem perturbativa da constante de acoplamento da teoria. Como vimos no capítulo anterior, esta função para um número arbitrário de campos pode ser escrita como

$$\langle ABC\dots \rangle = \frac{\langle e^{i \int d^4x \mathcal{L}_I(x)} (ABC\dots) \rangle_0}{\langle e^{i \int d^4x \mathcal{L}_I(x)} \rangle_0} \quad (3.1)$$

Se quisermos o propagador de uma partícula, escrevemos a função de Green de dois pontos e expandimos a exponencial até a ordem desejada. Vamos calcular, por exemplo, o propagador do elétron até segunda ordem em teoria de perturbação. Sabemos que a lagrangiana de interação da QED é $\mathcal{L}_I(x) = e_0 \bar{\psi}(x) \gamma^\mu A_\mu(x) \psi(x)$. Se expandirmos até segunda ordem, temos

$$\begin{aligned} \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle &= \frac{i \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle_0 + \frac{(ie_0)^2}{2} \langle \int d^4z d^4w \bar{\psi}(z) \gamma^\mu A_\mu(z) \psi(z) \bar{\psi}(w) \gamma^\nu A_\nu(w) \psi(w) \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle_0}{1 + \frac{(ie_0)^2}{2} \int d^4z d^4w \langle \bar{\psi}(z) \gamma^\mu A_\mu(z) \psi(z) \bar{\psi}(w) \gamma^\nu A_\nu(w) \psi(w) \rangle_0} = \\ &= i \overbrace{\psi(x) \bar{\psi}(y)} + (ie_0)^2 \int d^4z d^4w \overbrace{\psi(x) \bar{\psi}(z)} \gamma^\mu \overbrace{A_\mu(z) \psi(z) \bar{\psi}(w)} \gamma^\nu \overbrace{A_\nu(w) \psi(w) \bar{\psi}(y)} = \\ &= iS(x-y) + (ie_0)^2 \int d^4z d^4w iS(x-z) iD_{\mu\nu}(z-w) \gamma^\mu iS(z-w) \gamma^\nu iS(w-y) \quad (3.2) \end{aligned}$$

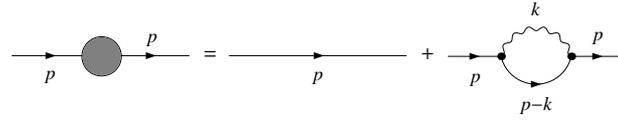


Figura 3.1: Diagrama de Feynman do propagador do elétron.

onde $S(x)$ e $D_{\alpha\beta}(x)$ são os propagadores do elétron e fóton no espaço das posições, respectivamente. Podemos usar a transformada de Fourier para obter o propagador de (3.3) no espaço dos momentos. Ao fazer isto, temos:

$$S(p) = \frac{i}{\not{p} - m_0 + i\epsilon} + \frac{i}{\not{p} - m_0 + i\epsilon} i e_0^2 \Sigma(p) \frac{i}{\not{p} - m_0 + i\epsilon} \quad (3.3)$$

onde

$$i e_0^2 \Sigma(p) = e_0^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \frac{2\not{p} - 2\not{k} - 4m_0}{(p-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon} \quad (3.4)$$

A fig. 3.1 é a representação em diagramas de Feynman da função de Green da eq. (3.3).

Podemos reescrever a eq. (3.3) utilizando a identidade

$$\frac{1}{A - B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \dots \quad (3.5)$$

Temos então

$$S(p) = \frac{i}{\not{p} - m_0 + e_0^2 \Sigma(p) + i\epsilon} + O(e_0^4) \quad (3.6)$$

Observe que o termo da eq. (3.4) é divergente no limite ultravioleta (UV), quando $k \rightarrow \infty$, por simples contagem de potências de k . Porém, este termo deveria ser uma correção de segunda ordem para o propagador do elétron e, conseqüentemente, seria uma correção a um loop para um processo que envolve este propagador, o espalhamento Compton por exemplo. Logo, esta correção não deve divergir. Neste capítulo mostraremos como tratar este problema.

3.1 Regularização por cutoff e Renormalização On-Mass-Shell (OMS)

A eq. (3.4) tende a infinito quando $k \rightarrow \infty$. Porém, uma quantidade que tende a infinito mais uma quantidade finita resulta em outra quantidade que continua tendendo a infinito.

Logo, o primeiro passo para tratar uma quantidade que tende a infinito em Teoria Quântica de Campos é o de separar a parte finita da parte que tende a infinito via um procedimento chamado de *Regularização*.

O método de regularização que vamos utilizar na eq. (3.4) é chamado de regularização por *cutoff*. Neste método, introduzimos os parâmetros λ e Λ no propagador do fóton:

$$\frac{1}{k^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon} \quad (3.7)$$

Desta forma separamos a parte divergente (no limite ultravioleta) da parte finita, assim como a parte divergente no limite do infravermelho ($k \rightarrow 0$), caso esta exista, também será separada da parte finita. Observe que no limite $\lambda \rightarrow 0$ e $\Lambda \rightarrow \infty$, recuperamos o propagador do fóton original. Após substituir o propagador do fóton pelo da eq. (3.7), resolvemos as integrais da eq. (3.4) (ver seção B.2 do apêndice B) e temos:

$$\Sigma(p)|_{\not{p}=m} = -\frac{3m}{8\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{m} \quad (3.8)$$

Este termo diverge no limite ultravioleta e é uma correção para o propagador do elétron na eq. (3.6). Contudo, o polo do propagador de uma partícula é físico, significa a massa do elétron medida no laboratório, ou seja, mesmo com esta correção precisamos manter $\not{p} = m$. Para fazer isto, vamos utilizar o método de *Renormalização On-Mass-Shell* definindo a massa do elétron medida em laboratório (massa física) como:

$$m = m_0 + \delta m \quad (3.9)$$

Logo, a massa física é a massa do elétron sem interagir mais uma correção devido à interação com o fóton ilustrada na fig. 3.1. Desta forma, se escolhermos

$$\delta m = \frac{3m_0^2}{8\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{m} \quad (3.10)$$

temos o polo do propagador como $\not{p} = m$ e removemos a quantidade divergente no ultravioleta do propagador quando adicionamos esta correção na massa.

A equação (3.10) nos diz que a massa física da eq. (3.9) varia com a escala de energia, o parâmetro Λ de (3.10). Ainda resta interpretar se a correção na massa é de fato uma correção uma vez que esta depende de um parâmetro que tende a infinito. Podemos nos perguntar em que escala de energia Λ temos $\delta m = O(m)$. Utilizando a eq. (3.10), encontramos que esta escala é

$$\Lambda = O\left(m e^{\frac{8\pi^2}{3e_0^2}}\right) \approx 10^{121} GeV \quad (3.11)$$

Esta escala de energia é extremamente maior que a escala alcançada atualmente pelo LHC (por volta de 10^4 GeV). Assim como neste caso, se $\Lambda \ll 10^{121} \text{ GeV}$ temos $\delta m \ll m$ e isto valida a teoria de perturbação, como observado, por exemplo, em [11].

3.2 Regularização Implícita e Renormalização de Subtração Mínima (MS)

Nesta seção, vamos regularizar o mesmo diagrama da seção anterior utilizando a Regularização Implícita [12]. Para isto, observe que podemos reescrever um dos denominadores da eq. (3.4) da seguinte forma

$$\frac{1}{(p-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon} = \frac{1}{k^2 - m_0^2} - \frac{p^2 - 2p \cdot k}{(k^2 - m_0^2)[(p-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon]} \quad (3.12)$$

Observe que se substituirmos (3.12) em (3.4) temos duas partes que divergem logicamente no limite ultravioleta e uma outra que é finita neste limite:

$$2e_0^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{\not{p} - 2m_0}{(k^2 + i\epsilon)(k^2 - m_0^2)} + \frac{2\not{k}p \cdot k}{(k^2 + i\epsilon)(k^2 - m_0^2)[(p-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon]} + \frac{[p^2(\not{p} - \not{k} - 2m_0) - 2k \cdot p(\not{p} - 2m_0)]}{(k^2 + i\epsilon)(k^2 - m_0^2)[(p-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon]} \right] \quad (3.13)$$

onde utilizamos que a integral de uma função ímpar de k é zero pois o intervalo de integração é simétrico.

O primeiro termo da eq. (3.13) pode ser reescrito como

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} - 2m_0}{(k^2 + i\epsilon)(k^2 - m_0^2)} = (\not{p} - 2m_0) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{(k^2 - m_0^2)^2} - \frac{m_0^2}{(k^2 + i\epsilon)(k^2 - m_0^2)^2} \right] \quad (3.14)$$

O segundo termo de (3.14) é finito no UV e o primeiro é uma integral divergente básica, isto é, ela não depende do momento externo

$$I_{log}(m_0^2) \equiv \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m_0^2)^2} \quad (3.15)$$

Podemos usar novamente (3.12) para reescrever o denominador do segundo termo de (3.13)

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2\not{k}p \cdot k}{(k^2 + i\epsilon)(k^2 - m_0^2)[(p-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon]} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2\not{k}p \cdot k}{(k^2 + i\epsilon)(k^2 - m_0^2)^2} + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2\not{k}p \cdot k(p^2 - 2p \cdot k)}{(k^2 + i\epsilon)(k^2 - m_0^2)^2[(p-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon]} \quad (3.16)$$

O segundo termo de (3.16) é finito no UV e o primeiro pode ser escrito como

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2\not{k}p \cdot k}{(k^2 + i\epsilon)(k^2 - m_0^2)^2} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{2\not{k}p \cdot k}{(k^2 - m_0^2)^3} - \frac{m_0^2(2\not{k}p \cdot k)}{(k^2 + i\epsilon)(k^2 - m_0^2)^3} \right] \quad (3.17)$$

O segundo termo de (3.17) é finito no UV e o primeiro é uma integral logaritmicamente divergente

$$2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}p \cdot k}{(k^2 - m_0^2)^3} = 2\gamma_\alpha p_\beta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha k^\beta}{(k^2 - m_0^2)^3} = 2\gamma_\alpha p_\beta I_{log}^{\alpha\beta}(m_0^2) \quad (3.18)$$

É possível mostrar que $I_{log}^{\alpha\beta}(m_0^2)$ pode ser reescrito como

$$I_{log}^{\alpha\beta}(m_0^2) = \frac{1}{4} [g^{\alpha\beta} I_{log}(m_0^2) - \Upsilon^{\alpha\beta}] \quad (3.19)$$

onde $\Upsilon^{\alpha\beta} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \frac{k^\beta}{(k^2 - m_0^2)^2}$ é um termo de superfície. Os termos de superfície da QED devem ser zero para garantir a invariância de rótulo [13].

Finalmente, a integral de (3.4) está regularizada

$$ie_0^2 \Sigma(p) = e_0^2 (\not{p} - 4m_0) I_{log}(m_0^2) + \text{parte finita no UV} \quad (3.20)$$

A escala do grupo de renormalização, que vamos chamar de μ , é introduzida utilizando a relação de escala

$$I_{log}(m_0^2) = I_{log}(\mu^2) + b \ln \frac{\mu^2}{m_0^2} \quad (3.21)$$

Vamos agora utilizar o método de *Subtração Mínima* (MS) para renormalizar o diagrama. Neste método, reescrevemos a função de Green (3.6) como

$$S(p) = \frac{iZ_2}{\not{p} - m_r + e_0^2 \Sigma_r(p) + i\epsilon} + O(e_0^4) \quad (3.22)$$

onde $Z_2 = 1 + ie_0^2 I_{log}(\mu^2)$, $m_r = Z_2(1 - 4ie_0^2 I_{log}(\mu^2))m_0$ são os contratermos utilizados para absorver a integral divergente e $\Sigma_r(p) = \frac{(\not{p} - 4m_0)}{16\pi^2} \ln \frac{\mu^2}{m_0^2} + \text{parte finita no UV}$.

Podemos obter a massa encontrando o polo do propagador de (3.22).

$$m - m_r + e_0^2 \left[\frac{(m - 4m_0)}{16\pi^2} \ln \frac{\mu^2}{m^2} + \text{parte finita no UV} \Big|_{\not{p}=m} \right] = 0 \quad (3.23)$$

onde utilizamos que $m = m_0 + O(e_0^2)$ para trocar m_0 por m .

No limite em que $\mu \rightarrow \infty$, o termo dominante em (3.23) nos dá

$$m = m_r + \frac{(3me_0^2)}{8\pi^2} \ln \frac{\mu}{m} \quad (3.24)$$

este é o mesmo resultado obtido na seção anterior para δm . Isto mostra a equivalência entre os métodos utilizados nas duas seções deste capítulo.

No capítulo 5 vamos utilizar o método de Regularização Implícita e o método de renormalização OMS, introduzidos neste capítulo, para tratar as correções a um loop para o propagador do Higgs.

Capítulo 4

O setor Eletro-Fraco do Modelo Padrão

O processo de unificação da teoria eletromagnética com a teoria das interações fracas começou a ser desenvolvido a partir dos trabalhos de Julian Schwinger [17], Salam e Ward [18] e Sheldon Glashow [19]. Contudo, a teoria unificada não estava completa porque era válida apenas a nível árvore. Ela deixava de ser válida para todas as ordens de teoria de perturbação quando os termos de massa dos mediadores (W^\pm e Z^0) eram introduzidos na lagrangiana. Mais tarde o modelo terminou de ser construído por Weinberg [20] e Salam [21] que trouxeram o mecanismo de Higgs de quebra espontânea de simetria para ser parte da teoria eletro-fracas. Neste mecanismo, os bósons de calibre e os férmions adquiriam massa quando a simetria da lagrangiana era espontaneamente quebrada e dessa forma a renormalizabilidade da teoria era mantida. Neste capítulo, vamos construir a teoria eletro-fracas como sendo invariante sob transformações de calibre $SU(2) \times U(1)$ e usar o mecanismo de Higgs para quebrar esta simetria.

4.1 Teoria de calibre das interações eletro-fracas

Vamos construir a lagrangiana para a teoria das interações fracas começando pelo termo cinético dos campos que sofrem ação desta força

$$\mathcal{L}_0(x) = i[\bar{\psi}_l(x)\not{\partial}\psi_l(x) + \bar{\psi}_{\nu_l}(x)\not{\partial}\psi_{\nu_l}(x)] \quad (4.1)$$

onde l e ν_l representam o lépton e o neutrino deste, respectivamente. A soma sobre os léptons ($l = e, \mu, \tau$) está implícita quando houver índices repetidos. Na verdade, esta não é a teoria completa. Os quarks também sofrem ação da força fraca e deveríamos incluir os termos correspondentes a estes em (4.1). Contudo, a idéia que seguiremos é a mesma para uma lagrangiana com mais férmions. A teoria completa está feita em [22] e é necessária esta versão para provar a renormalizabilidade da mesma [23].

Podemos escrever (4.1) em termos de campos quirais esquerdos e direitos

$$\mathcal{L}_0(x) = i[\bar{\Psi}_l^L(x)\not{\partial}\Psi_l^L(x) + \bar{\psi}_l^L(x)\not{\partial}\psi_l^L(x) + \bar{\psi}_{\nu_l}^R(x)\not{\partial}\psi_{\nu_l}^R(x)] \quad (4.2)$$

onde $\Psi_l^L(x) = \begin{pmatrix} \psi_{\nu_l}^L(x) \\ \psi_l^L(x) \end{pmatrix}$ é chamado de isospinor fraco.

A lagrangiana (4.2) é invariante sob a seguinte transformação global SU(2)

$$\begin{pmatrix} \Psi_l^{L'}(x) \\ \psi_{\nu_l}^{R'}(x) \\ \psi_l^{R'}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha_j\tau_j/2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_l^L(x) \\ \psi_{\nu_l}^R(x) \\ \psi_l^R(x) \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

onde $j = 1, 2, 3$, τ_j são as matrizes de Pauli e α_j são parâmetros reais.

Esta transformação leva a três correntes conservadas pelo teorema de Noether, chamadas de correntes de isospin fraco

$$J_j^\alpha(x) = \frac{1}{2}\bar{\Psi}_l^L(x)\gamma^\alpha\tau_j\Psi_l^L(x) \quad (4.4)$$

As seguintes combinações lineares de duas delas são chamadas de correntes leptônicas e estão relacionadas com a conservação do número leptônico

$$\begin{aligned} J^\alpha(x) &= 2[J_1^\alpha(x) - iJ_2^\alpha(x)] = \bar{\psi}_l(x)\gamma^\alpha(1 - \gamma_5)\psi_{\nu_l}(x) \\ J^{\alpha\dagger}(x) &= 2[J_1^\alpha(x) + iJ_2^\alpha(x)] = \bar{\psi}_{\nu_l}(x)\gamma^\alpha(1 - \gamma_5)\psi_l(x) \end{aligned} \quad (4.5)$$

esta corrente acopla léptons neutros (neutrinos) com léptons carregados.

A terceira corrente é chamada de corrente neutra porque acopla léptons carregados e léptons neutros

$$J_3^\alpha(x) = \frac{1}{2}\bar{\Psi}_l^L(x)\gamma^\alpha\tau_3\Psi_l^L(x) = -\frac{1}{2}[\bar{\psi}_{\nu_l}^L(x)\gamma^\alpha\psi_{\nu_l}^L(x) - \bar{\psi}_l^L(x)\gamma^\alpha\psi_l^L(x)] \quad (4.6)$$

A corrente neutra está relacionada com a corrente eletromagnética, $s^\alpha(x) = -e_0\bar{\psi}_l(x)\gamma^\alpha\psi_l(x)$, pela definição da corrente de hipercarga fraca

$$J_Y^\alpha(x) = \frac{s^\alpha(x)}{e_0} - J_3^\alpha(x) = -\frac{1}{2}\bar{\Psi}_l^L(x)\gamma^\alpha\Psi_l^L(x) - \bar{\psi}_l^R(x)\gamma^\alpha\psi_l^R(x) \quad (4.7)$$

Todas estas equações nos dará como os campos de (4.2) se transformam sob uma transformação global U(1). Para chegar nisto, vamos primeiramente obter as cargas de (4.6) e (4.7)

$$\begin{aligned} I_3^W &= \int d^3\mathbf{x}J_3^0(x) \\ Y &= \int d^3\mathbf{x}J_Y^0(x) = \frac{Q}{e_0} - I_3^W \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde $Q = \pm e_0$.

É possível encontrar os autovalores destes operadores de carga. O resultado é

$$\begin{aligned} I_3^W|l^-, L\rangle &= -\frac{1}{2}|l^-, L\rangle \\ I_3^W|\nu_l, L\rangle &= \frac{1}{2}|\nu_l, L\rangle \\ I_3^W|l^-, R\rangle &= 0 \\ I_3^W|\nu_l, R\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Utilizando as eqs. (4.8) e (4.9) podemos obter os autovalores da hipercarga fraca

$$\begin{aligned} Y|l^-, L\rangle &= -\frac{1}{2}|l^-, L\rangle \\ Y|\nu_l, L\rangle &= -\frac{1}{2}|\nu_l, L\rangle \\ Y|l^-, R\rangle &= -|l^-, R\rangle \\ Y|\nu_l, R\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Finalmente, utilizando (4.10), podemos obter a transformação global U(1) dos campos da teoria

$$\begin{pmatrix} \Psi_l^L(x) \\ \psi_{\nu_l}^R(x) \\ \psi_l^R(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\beta/2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_l^L(x) \\ \psi_{\nu_l}^R(x) \\ \psi_l^R(x) \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

onde β é um parâmetro real.

Agora que sabemos quais são as transformações globais da teoria, podemos generalizá-las para transformações locais e encontrar os termos de interação da teoria. O primeiro passo é fazer os parâmetros de (4.3) e (4.11) dependentes do espaço-tempo. As transformações (4.3) e (4.11) tornam-se

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Psi_l^L(x) \\ \psi_{\nu_l}^{R'}(x) \\ \psi_l^{R'}(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{ig\tau_j\omega_j(x)/2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_l^L(x) \\ \psi_{\nu_l}^R(x) \\ \psi_l^R(x) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \Psi_l^L(x) \\ \psi_{\nu_l}^{R'}(x) \\ \psi_l^{R'}(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{-ig'\theta(x)/2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ig'\theta(x)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_l^L(x) \\ \psi_{\nu_l}^R(x) \\ \psi_l^R(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde g e g' são parâmetros reais.

As transformações (4.12) não deixam a lagrangiana (4.2) invariante. Para obter uma lagrangiana invariante, precisamos substituir as derivadas ordinárias de $\Psi_l^L(x)$ e $\psi_l^R(x)$ pelas derivadas co-variantes destes

$$\begin{aligned} D^\mu \Psi_l^L(x) &= (\partial^\mu + \frac{ig}{2}\tau_j W_j^\mu(x) - \frac{ig'}{2}B^\mu(x))\Psi_l^L(x) \\ D^\mu \psi_l^R(x) &= (\partial^\mu - ig'B^\mu(x))\psi_l^R(x) \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde $W_j^\mu(x)$ e $B^\mu(x)$ são campos de calibre.

Em termos destas derivadas, podemos reescrever (4.2) como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_L(x) &= i[\bar{\Psi}_l^L(x)D\Psi_l^L(x) + \bar{\psi}_l^L(x)D\psi_l^L(x) + \bar{\psi}_{\nu_l}^R(x)\not{\partial}\psi_{\nu_l}^R(x)] = \\ &= i[\bar{\Psi}_l^L(x)\not{\partial}\Psi_l^L(x) + \bar{\psi}_l^L(x)\not{\partial}\psi_l^L(x) + \\ &+ \bar{\psi}_{\nu_l}^R(x)\not{\partial}\psi_{\nu_l}^R(x)] - gJ_i^\mu(x)W_{i\mu}(x) - g'J_Y^\mu(x)B_\mu(x) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Agora, se fizermos as transformações de (4.12) junto com as transformações infinitesimais dos campos de calibre

$$\begin{aligned} W_j^{\mu'}(x) &= W_j^\mu(x) - \partial^\mu\omega_j(x) - g\epsilon_{jkl}\omega_k(x)W_l^\mu(x) \\ B^{\mu'}(x) &= B^\mu(x) - \partial^\mu\theta(x), \end{aligned} \quad (4.15)$$

a lagrangiana (4.14) fica invariante. Dizemos que (4.14) é invariante sob transformações de calibre $SU(2) \times U(1)$.

Ainda precisamos reescrever (4.14) em termos dos campos conhecidos (A_μ , Z_μ e W_μ). Para isto, introduzimos as seguintes combinações lineares

$$\begin{aligned} W_\mu(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[W_{1\mu}(x) - iW_{2\mu}(x)] \\ W_{3\mu}(x) &= \cos\theta_W Z_\mu(x) + \text{sen}\theta_W A_\mu(x) \\ B_\mu(x) &= -\text{sen}\theta_W Z_\mu(x) + \cos\theta_W A_\mu(x) \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde θ_W é um dos parâmetros de *input* do modelo padrão (determinado pela seção de choque medida do espalhamento neutrino-elétron), chamado de ângulo de Weinberg.

O termo de interação da lagrangiana dos léptons (4.14) passa a ser escrito como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I &= -s^\mu(x)A_\mu(x) - \frac{g}{2\sqrt{2}}[J^{\mu\dagger}(x)W_\mu(x) + J^\mu(x)W_\mu^\dagger(x)] - \\ &\quad - \frac{g}{\cos\theta_W}[J_3^\mu(x) - \frac{s^\mu(x)}{e_0}\text{sen}^2\theta_W]Z_\mu(x) \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde as constantes de acoplamento estão relacionadas da forma $g\text{sen}\theta_W = g'\cos\theta_W = e_0$. A_μ , Z_μ e W_μ são os campos dos mediadores da teoria: fóton, Z^0 e W^\pm , respectivamente, e as correntes são as mesmas definidas anteriormente.

Podemos ainda acrescentar na lagrangiana (4.14) a lagrangiana dos termos cinéticos dos campos $B^\mu(x)$ e $W_j^\mu(x)$.

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4}B^{\mu\nu}(x)B_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{4}G_i^{\mu\nu}(x)G_{i\mu\nu}(x) \quad (4.18)$$

onde $B_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$ e $G_{i\mu\nu}(x) = \partial_\mu W_{i\nu}(x) - \partial_\nu W_{i\mu}(x) + g\epsilon_{ijk}W_{j\mu}(x)W_{k\nu}(x)$.

Esta lagrangiana também é invariante sob as transformações de (4.15). Em termos dos campos introduzidos em (4.16) temos

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{4}F_W^{\mu\nu}(x)F_{W\mu\nu}(x) - \frac{1}{4}F_Z^{\mu\nu}(x)F_{Z\mu\nu}(x) + \mathcal{L}_I^{BB} \quad (4.19)$$

onde $F^{\mu\nu}(x)$, $F_Z^{\mu\nu}(x)$ e $F_W^{\mu\nu}(x)$ são os tensores de campo do fóton, Z^0 e W^\pm , respectivamente, e \mathcal{L}_I^{BB} é o termo de interação entre eles.

Até agora construímos a lagrangiana da teoria eletrofraca tentando manter a invariância de calibre $SU(2) \times U(1)$. O nosso resultado final que é invariante sob esta transformação é $\mathcal{L}_L + \mathcal{L}_B$. Contudo, esta não é a teoria eletrofraca completa, pois ainda faltam os termos de massa dos mediadores massivos e dos léptons. Não acrescentamos estes termos ainda, pois estes não são invariantes sob transformações $SU(2) \times U(1)$. Poderíamos adicionar estes

termos de massa, mas a teoria seria válida apenas a nível árvore. Por isso, na próxima seção vamos usar o mecanismo de Higgs para introduzir os termos de massa sem invalidar a renormalizabilidade da teoria.

4.2 Mecanismo de Higgs de quebra espontânea de simetria

Vamos introduzir a lagrangiana do setor de Higgs na teoria eletrofraca

$$\mathcal{L}_H(x) = [D^\mu \Phi(x)]^\dagger [D_\mu \Phi(x)] - \mu^2 \Phi(x)^\dagger \Phi(x) - \frac{\lambda}{2} [\Phi(x)^\dagger \Phi(x)]^2$$

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

onde $D^\mu \Phi(x) = (\partial^\mu + \frac{ig}{2} \tau_j W_j^\mu(x) + ig' Y B^\mu(x)) \Phi(x)$ e o valor da hipercarga Y será determinado a seguir.

A lagrangiana (4.20) é invariante sob transformação de calibre $SU(2) \times U(1)$, ou seja, as transformações (4.15) mais a transformação do campo $\Phi(x)$

$$\Phi'(x) = e^{\frac{ig}{2} \tau_j \omega_j(x) + ig' Y \theta(x)} \Phi(x), \quad (4.21)$$

não alteram (4.20).

Os termos de massa aparecerão quando quebrarmos esta simetria introduzindo o mínimo do vácuo em (4.20). Para encontrar este mínimo, precisamos calcular a menor energia do Hamiltoniano. O Hamiltoniano de (4.20) pode ser escrito como

$$\mathcal{H}_H(x) = [D^\mu \Phi(x)]^\dagger [D_\mu \Phi(x)] + \mu^2 \Phi(x)^\dagger \Phi(x) + \frac{\lambda}{2} [\Phi(x)^\dagger \Phi(x)]^2 \quad (4.22)$$

O mínimo de (4.22) é o mesmo mínimo do potencial $V(\Phi) = \mu^2 \Phi(x)^\dagger \Phi(x) + \frac{\lambda}{2} [\Phi(x)^\dagger \Phi(x)]^2$ dado por

$$\Phi_0^\dagger(x) \Phi_0(x) = |\phi_0^+|^2 + |\phi_0^0|^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} \quad (4.23)$$

A eq. (4.23) corresponde a um círculo de valores mínimos do potencial para $\mu^2 < 0$. Podemos fixar um valor neste círculo escolhendo

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

O vácuo (4.24) não é invariante sob a transformação $SU(2) \times U(1)$. Quando introduzirmos este vácuo em (4.20), esta quebra de simetria será responsável pelo aparecimento dos

termos de massa. No entanto, um dos mediadores deve continuar sem massa, o fóton. Para conseguir isto, precisamos deixar o vácuo (4.24) invariante sob uma transformação de calibre eletromagnética $U(1)$. Isto é,

$$\Phi'_0 = e^{-iQ\theta(x)}\Phi_0 = e^{-i(Y+I_3^W)e_0\theta(x)}\Phi_0 = \Phi_0 \quad (4.25)$$

Vemos que para (4.25) ser satisfeita devemos ter $Y = \frac{1}{2}$, uma vez que $I_3^W = -\frac{1}{2}$ para a componente ϕ^0 de (4.20).

Ainda falta a lagrangiana que dará massa para os léptons. Esta lagrangiana é obtida via interações de Yukawa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{LH}(x) = & -g_l[\bar{\Psi}_l^L(x)\psi_l^R(x)\Phi(x) + \Phi^\dagger(x)\bar{\psi}_l^R(x)\Psi_l^L(x)] - \\ & -g_{\nu_l}[\bar{\Psi}_l^L(x)\psi_{\nu_l}^R(x)\tilde{\Phi}(x) + \tilde{\Phi}^\dagger(x)\bar{\psi}_{\nu_l}^R(x)\Psi_l^L(x)] \end{aligned} \quad (4.26)$$

onde $\tilde{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} \phi^{*0}(x) \\ -\phi^{*+}(x) \end{pmatrix}$, g_l e g_{ν_l} são as constantes de acoplamento das interações Yukawa.

A segunda linha da equação (4.26) corresponde a interação de Yukawa que dará massa para os neutrinos. Este termo é questionável, uma vez que ainda não se sabe os neutrinos são *neutrinos de Dirac* ou *neutrinos de Majorana*. Se o decaimento beta duplo sem neutrino ($2n \rightarrow 2p+2e^-$) for observado, teremos certeza de que os neutrinos são *neutrinos de Majorana* e o termo que introduzimos na equação (4.26) estará errado. Além disso, este termo não leva em conta um fenômeno conhecido como oscilação de neutrinos.

A lagrangiana (4.26) também é invariante sob transformações locais $SU(2) \times U(1)$. Quando introduzirmos o vácuo (4.24) nela, esta simetria será quebrada e ganharemos termos de massa para os léptons.

Finalmente, podemos escrever o campo de (4.20) em termos do vácuo (4.24)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \eta_1(x) + i\eta_2(x) \\ v + \sigma(x) + i\eta_3(x) \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

onde $\eta_i(x)$ são campos não físicos e $\sigma(x)$ é o campo de Higgs.

A simetria $SU(2) \times U(1)$ é quebrada quando substituimos (4.27) na lagrangiana (4.20). Mas, ao fazermos isto, aparecem termos dos campos não físicos $\eta_i(x)$ na lagrangiana. Por isso, vamos utilizar a eq. (4.21) para escolher um calibre em que estes três campos são zero.

Ou seja,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \sigma(x) \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

Este calibre é chamado de calibre unitário e a escolha deste é por razões interpretativas. Este calibre não serve para fazer contas além do nível árvore. Na próxima seção, vamos introduzir um fixador de calibre para estes fins e, ao fazer isto, a teoria volta a ter campos não físicos, os chamados fantasmas.

Substituindo (4.28) em (4.20) e utilizando a eq. (4.23), isto é, $\mu^2 = -\frac{v^2\lambda}{2}$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H = & \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)(\partial^\mu\sigma) + \mu^2\sigma^2 + \frac{g^2v^2}{4}W_\mu^\dagger W^\mu \\ & + \frac{v^2}{8}(gW_\mu^3 - g'B_\mu)^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.29)$$

Utilizando (4.16) e a relação entre as constantes g , g' e e_0 , podemos reescrever (4.29) como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H = & \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)(\partial^\mu\sigma) + \mu^2\sigma^2 + \frac{g^2v^2}{4}W_\mu^\dagger W^\mu \\ & + \frac{g^2v^2}{8\cos^2\theta_W}Z_\mu Z^\mu + \dots \end{aligned} \quad (4.30)$$

Os termos de massa da eq. (4.30) nos fornece as massas do Z^0 , W^\pm e Higgs como sendo

$$\begin{aligned} m_Z^2 &= \frac{g^2v^2}{4\cos^2\theta_W} \\ m_W^2 &= \frac{g^2v^2}{4} \\ m_H^2 &= -2\mu^2 = \lambda v^2 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Finalmente, substituímos (4.28) na lagrangiana de interação do Higgs com os léptons (4.26), e temos

$$\mathcal{L}_{LH}(x) = -\frac{g_l v}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_l(x)\psi_l(x) - \frac{g_l}{\sqrt{2}}\sigma(x)\bar{\psi}_l(x)\psi_l(x) - \frac{g_{\nu_l} v}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_{\nu_l}(x)\psi_{\nu_l}(x) - \frac{g_{\nu_l}}{\sqrt{2}}\sigma(x)\bar{\psi}_{\nu_l}(x)\psi_{\nu_l}(x) \quad (4.32)$$

Podemos ler a massa dos léptons e neutrinos como sendo $m_l = \frac{g_l v}{\sqrt{2}}$ e $m_{\nu_l} = \frac{g_{\nu_l} v}{\sqrt{2}}$, respectivamente.

4.3 Fixadores de calibre e fantasmas

O funcional gerador de campos de calibre, como o do fóton na eq. (2.11), geralmente não é bem definido (veja eq.(A.1)):

$$Z_0[J_\kappa] \propto \int \mathcal{D}A e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_F + \mathcal{L}_S)}. \quad (4.33)$$

Isto porque a integral funcional é realizada sobre todos os A^μ . Inclusive os que estão relacionados por uma transformação de calibre do tipo $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \omega(x)$ (caso abeliano). Isto significa que estamos somando mais A^μ 's do que o necessário. Por causa disso, a integral (4.33) pode divergir e, conseqüentemente, a função de Green (onde a Física está contida) também. Para evitar este problema, precisamos utilizar o método de Faddeev-Popov. Neste método, o funcional gerador (4.33) deve ser reescrito como

$$Z_0[J_\kappa] \propto \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_F + \mathcal{L}_S + \int d^4x' \eta_i(x) \frac{\delta f_i[A_i^\mu(x)]}{\delta \omega_j(x')} \tilde{\eta}_j(x'))} \prod_i \delta[f_i] \quad (4.34)$$

onde $f_i[A_i^\mu]$ é uma função definida por $f_i[A_i^\mu(x)] = \partial^\mu A_{i\mu}(x) - h_i(x)$, η e $\tilde{\eta}$ são campos de Grassmann. O termo $\frac{\delta f_i[A_i^\mu(x)]}{\delta \omega_j(x')}$ é o elemento do determinante de Faddeev-Popov. Vamos, por exemplo, calcular (4.34) para o caso do fóton na QED. Neste caso, temos apenas um campo A^μ e as relações

$$\begin{aligned} f[A^\mu(x)] &= \partial^\mu A_\mu(x) - h(x) \\ A^\mu(x) &= A^{(0)\mu}(x) - \partial^\mu \omega(x) \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde $A^{(0)\mu}(x)$ é o valor de $A^\mu(x)$ para $\omega(x) = 0$.

A derivada funcional no argumento da exponencial da eq. (4.34) pode ser calculada da seguinte forma (utilizando as eqs. (4.35))

$$\begin{aligned} \frac{\delta f[A^\mu(x)]}{\delta \omega(x')} &= \frac{\delta f[A^\mu(x)]}{\delta A^\nu(x)} \frac{\delta A^\nu(x)}{\delta \omega(x')} = \\ &= \frac{\delta f[A^\mu(x)]}{\delta A^\nu(x)} \frac{\delta A^\nu(x)}{\delta \omega(x)} \frac{\delta \omega(x)}{\delta \omega(x')} = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta_\nu^\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \delta(x - x') = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \delta(x - x') \end{aligned} \quad (4.36)$$

Substituindo (4.36) na integral em x' de (4.34), temos

$$- \int d^4x' \eta(x) \partial_\mu \partial^\mu \tilde{\eta}(x') \delta(x - x') = -\eta(x) \partial_\mu \partial^\mu \tilde{\eta}(x) \quad (4.37)$$

Integrando (4.37) em x , temos

$$- \int d^4x \eta(x) \partial_\mu \partial^\mu \tilde{\eta}(x) = -\eta(x) \partial^\mu \tilde{\eta}(x) |_{-\infty}^{\infty} + \int d^4x \partial_\mu \eta(x) \partial^\mu \tilde{\eta}(x) = \int d^4x \partial_\mu \eta(x) \partial^\mu \tilde{\eta}(x) \quad (4.38)$$

A eq. (4.38) nos deu mais um termo cinético: $\mathcal{L}_g = \partial_\mu \eta(x) \partial^\mu \tilde{\eta}(x)$. Este termo é a lagrangiana do fantasma do fóton.

Ainda temos que nos livrar da função delta na eq. (4.34). Para fazer isto, vamos multiplicar esta equação pela constante $c = \int \mathcal{D}h e^{-\int d^4x \frac{i}{2\xi} (h(x))^2}$

$$\begin{aligned} Z_0[J_\kappa] &\propto \int \mathcal{D}h \mathcal{D}A \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_F + \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_g - \frac{1}{2\xi} (h(x))^2)} \delta[\partial^\mu A_\mu(x) - h(x)] = \\ &= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_F + \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_g - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu(x))^2)} \propto \int \mathcal{D}A e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_F + \mathcal{L}_S - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu(x))^2)} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Como a integral $\int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\tilde{\eta} e^{\int d^4x \mathcal{L}_g}$ não depende de A^μ , ela pode ser absorvida na constante de normalização de Z na eq. (4.39). A nossa conclusão é: o método de Faddeev-Popov nos dá mais dois termos a serem acrescentados na lagrangiana, o termo dos fantasmas e o termo que fixa o calibre. Este último termo na eq. (4.39) é $\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu(x))^2$. É este termo (para $\xi = 1$, chamado de calibre de 't Hooft) que temos que adicionar na lagrangiana do fóton para calcular o funcional gerador do fóton da eq. (2.11) (veja apêndice A). Por outro lado, o termo do fantasma do fóton não precisou ser adicionado porque está na constante de normalização de Z .

Como vimos nas seções anteriores, a lagrangiana do modelo padrão contém quatro campos de calibre: o campo do fóton, o campo do bóson Z^0 e os campos dos bósons W^\pm . Por isso, devemos utilizar o método de Faddeev-Popov para este caso. Assim como no caso anterior, ganharemos mais dois termos na lagrangiana, \mathcal{L}_{gf} e \mathcal{L}_g . Além disso, vamos reescrever a lagrangiana da seção (4.2) em termos do fixador de calibre ξ . O calibre unitário da seção (4.2), utilizado para obter (4.28) e equivalente a uma escolha de $\xi \rightarrow \infty$, não é adequado para calcular funções de Green além do nível árvore. Vamos então voltar a eq. (4.27) e reescrevê-la

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} G^+(x) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \sigma(x) + iG^0(x)) \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

onde G^+ e G^0 são os campos dos bósons de Goldstone.

O termo fixador de calibre para este caso é¹

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\xi} \sum_{i=0}^3 f_i f_i \quad (4.41)$$

¹Em geral podemos introduzir um fixador de calibre ξ para cada campo de calibre. Mas, vamos utilizar a abordagem mais simples de introduzir o mesmo fixador para os quatro campos

As funções f_i são definidas por

$$\begin{aligned} f_0 &\equiv \partial^\mu B_\mu - i\xi g'(\Phi(x)Y\Phi_0 - \Phi_0^\dagger Y\Phi(x)) \\ f_i &\equiv \partial^\mu W_{i\mu} - \frac{i}{2}\xi g(\Phi^\dagger(x)\tau_i\Phi_0 - \Phi_0^\dagger(x)\tau_i\Phi(x)), \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (4.42)$$

Utilizando os valores da seção (4.2) na eq. (4.42), temos

$$\begin{aligned} f_0 &\equiv \partial^\mu B_\mu - \frac{1}{2}\xi g'vG^0 \\ f_3 &\equiv \partial^\mu W_{3\mu} + \frac{1}{2}\xi gvG^0 \\ f_2 &\equiv \partial^\mu W_{2\mu} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\xi gv(G^+ + G^-) \\ f_1 &\equiv \partial^\mu W_{1\mu} - \frac{i}{2\sqrt{2}}\xi gv(G^- - G^+) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Substituindo (4.43) em (4.41), utilizando a eq. (4.16) e integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{gf} &= \frac{1}{2\xi}Z_\mu^0\partial^\mu\partial^\nu Z_\nu^0 + \frac{1}{2\xi}A_\mu\partial^\mu\partial^\nu A_\nu + \frac{1}{\xi}W_\mu^+\partial^\mu\partial^\nu W_\nu^- - \frac{1}{2}\xi m_Z^2 G^0 G^0 - \\ &\quad - \xi m_W^2 G^+ G^- + \frac{1}{2}\sqrt{g^2 + g'^2}vZ_\mu^0\partial^\mu G^0 - \frac{i}{2}gv(W_\mu^+\partial^\mu G^- - W_\mu^-\partial^\mu G^+) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Podemos escrever a lagrangiana dos fantasmas como

$$\mathcal{L}_g = \int d^4x' [\eta_0(x)\frac{\delta f_0}{\delta\theta(x')}\tilde{\eta}_0(x) + \eta_j(x)\frac{\delta f_j}{\delta\omega_j(x')}\tilde{\eta}_j(x) + \eta_0(x)\frac{\delta f_0}{\delta\theta(x')}\tilde{\eta}_0(x) + \eta_i(x)\frac{\delta f_0}{\delta\omega_i(x')}\tilde{\eta}_0(x)] \quad (4.45)$$

onde $i, j = 1, 2, 3$.

De maneira análoga à eq. (4.16), podemos definir os fantasmas do Z^0 , fóton e dos W^\pm como, respectivamente,

$$\begin{aligned} \eta_Z &= \cos\theta_W\eta_3 - \sin\theta_W\eta_0 \\ \eta_A &= \sin\theta_W\eta_3 + \cos\theta_W\eta_0 \\ \eta_\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1 \mp i\eta_2) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Para obter a lagrangiana (4.45), precisamos calcular os elementos do determinante de Faddeev-Popov desta equação. Para calculá-los, precisamos primeiro saber como os campos variam com os parâmetros ω_i e θ da transformação de calibre $SU(2) \times U(1)$, uma vez que os f_i definidos por (4.42) são funções destes campos. Utilizando as eqs. (4.15) e (4.21), podemos escrever

$$\begin{aligned} W_j^\mu(x) &= W_j^{(0)\mu}(x) - \partial^\mu\omega_j(x) - g\epsilon_{jkl}\omega_k(x)W_l^\mu(x) \\ B^\mu(x) &= B^{(0)\mu}(x) - \partial^\mu\theta(x) \\ \Phi(x) &= e^{\frac{ig}{2}\tau_j\omega_j(x) + ig'Y\theta(x)}\Phi^{(0)}(x) \end{aligned} \quad (4.47)$$

onde o índice (0) indica o valor dos campos quando $\omega_j = \theta = 0$.

Vamos, por exemplo, calcular o elemento $\frac{\delta f_0}{\delta \theta(x')}$. Utilizando (4.42) e (4.47), temos

$$\begin{aligned} \frac{\delta f_0(B_\mu(x), \Phi(x))}{\delta \theta(x')} &= [\partial^\mu \frac{\delta B_\mu(x)}{\delta \theta(x)} - i\xi g' (\frac{\delta \Phi^\dagger(x)}{\delta \theta(x)} Y \Phi_0 - \Phi_0^\dagger(x) Y \frac{\delta \Phi(x)}{\delta \theta(x)})] \delta(x - x') = \\ &= -[\partial_\mu \partial^\mu + \xi g'^2 (\Phi^\dagger(x) Y Y \Phi_0 + \Phi_0^\dagger Y Y \Phi(x))] \delta(x - x') = \\ &= -[\partial_\mu \partial^\mu + \frac{\xi g'^2}{4} (v^2 + v\sigma(x))] \delta(x - x') \end{aligned} \quad (4.48)$$

Substituindo (4.48) e os outros elementos do determinante em (4.45), utilizando (4.46) e integrando em x' , escrevemos alguns termos da lagrangiana

$$\mathcal{L}_g(x) = \partial^\mu \eta_Z(x) \partial_\mu \tilde{\eta}_Z(x) - \xi m_Z^2 \eta_Z(x) \tilde{\eta}_Z(x) - \frac{\xi m_Z^2}{v} \eta_Z(x) \sigma(x) \tilde{\eta}_Z(x) + \dots \quad (4.49)$$

Ao contrário da QED, neste caso os fantasmas interagem com as partículas físicas da teoria e contribuem para as funções de Green. Em outras palavras, não podemos absorver a contribuição desta lagrangiana na constante de normalização do funcional gerador da teoria, como foi feito em (4.39).

Finalmente, podemos escrever a lagrangiana total do Modelo Padrão como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_L + \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_{LH} + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_g \quad (4.50)$$

Capítulo 5

Correções a 1 loop para o propagador do Higgs

Neste capítulo, vamos utilizar o método de Regularização Implícita do capítulo 3 para regularizar correções a um loop para o propagador do Higgs. Depois disso, vamos utilizar a renormalização *on-mass-shell* e encontrar uma correção para a massa do Higgs, que depende da escala de energia, assim como foi encontrado para o caso do elétron no capítulo 3.

A lagrangiana (4.50) contém termos de interação do Higgs com todas as partículas massivas da teoria, com os bósons de Goldstone e com os fantasmas dos bósons de calibre. Lembramos que (4.50) não é a versão mais completa do Modelo Padrão porque não inclui os quarks. Se incluirmos mais esta parte da lagrangiana, veremos que o Higgs interage com todos os quarks. Considerando todas essas interações, as correções a um loop para o propagador do Higgs totalizam 58 diagramas. Não vamos precisar calcular todos estes. Por exemplo, das interações do Higgs com os férmions do Modelo Padrão, vamos incluir apenas a interação deste com o férmion mais pesado, o quark top. A justificativa para isto é que o termo de interação do Higgs com um dos férmions (veja, por exemplo, a lagrangiana (4.32))

é proporcional a massa do férmion dividida pelo valor esperado do vácuo (v) e, por isso, se o férmion for leve, este termo é pequeno comparado com os vértices das outras interações. Além disso, podemos escolher o calibre de Landau ($\xi = 0$) e anular as interações do Higgs com os fantasmas dos bósons de calibre. Estas considerações diminuem o número de diagramas para 20.

5.1 Contribuições quadraticamente divergentes no ultravioleta

O método de Regularização Implícita do capítulo 3 consiste no uso de uma equação como a (3.12) até que a parte finita do diagrama seja separada das seguintes integrais divergentes básicas

$$\begin{aligned} I_{quad}(\mu^2) &= \int^\Lambda \frac{1}{(k^2 - \mu^2)} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \\ I_{log}(\mu^2) &= \int^\Lambda \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde μ é uma massa qualquer e o índice Λ indica que assumimos a existência de um regulador para fazer operações matemáticas com estas integrais que divergem no limite em que $k \rightarrow \infty$.

Vamos começar regularizando o diagrama com um loop do quark top da fig. 5.1. A função de Green deste diagrama no espaço dos momentos é

$$\frac{3m_t^2}{v^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left[\frac{i}{\not{k} - m_t} \frac{i}{(\not{k} - \not{p}) - m_t} \right] \quad (5.2)$$

Depois de tomar o traço de (5.2), temos

$$\frac{-12m_t^2}{v^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 - p \cdot k + m_t^2}{(k^2 - m_t^2)[(k - p)^2 - m_t^2]} \quad (5.3)$$

Podemos agora utilizar uma relação como a (3.12) para reescrever (5.3). Esta relação pode ser usada novamente até obtermos as integrais divergentes básicas (5.1), como foi feito na seção (3.2). O resultado desta regularização é

$$\begin{aligned} &\frac{-12m_t^2}{v^2} [I_{quad}(m_t^2) + \frac{1}{2}(4m_t^2 - p^2)I_{log}(m_t^2) - bp^2(Z_1(p^2, m_t^2) - Z_0(p^2, m_t^2) + 1) - \\ &\quad - 3bm_t^2 Z_0(p^2, m_t^2) + \frac{2p^4}{3m_t^2} b] \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde $b = \frac{i}{(4\pi)^2}$. $Z_0(p^2, m_t^2) = \int_0^1 \ln \left[\frac{m_t^2 - p^2 x(1-x)}{m_t^2} \right] dx$ e $Z_1(p^2, m_t^2) = \int_0^1 \ln \left[\frac{m_t^2 - p^2 x(1-x)}{m_t^2} \right] x dx$ são integrais finitas.

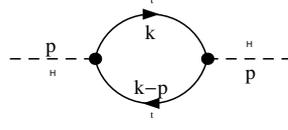


Figura 5.1: Uma das correções para o propagador do Higgs.

Como (5.4) é uma correção para o propagador do Higgs, devemos utilizar uma relação de escala para mudar o argumento das integrais divergentes básicas de (5.4), que está em função da massa do top (m_t), para ser função da massa do Higgs (m). Isto porque vamos introduzir a escala do grupo de renormalização reescrevendo as integrais $I_{quad}(m^2)$ e $I_{log}(m^2)$. Podemos fazer isto ganhando um termo logaritmicamente divergente no limite UV mais termos finitos neste limite

$$I_{quad}(m_t^2) = I_{quad}(m^2) + (m_t^2 - m^2)I_{log}(m^2) + b(m_t^2 - m^2) + bm_t^2 \ln\left(\frac{m^2}{m_t^2}\right) \quad (5.5)$$

As outras contribuições quadráticas já são integrais divergentes básicas tipo I_{quad} . Por isso, não precisamos utilizar uma equação como a (3.12) para separar estas integrais de uma parte finita. Mas precisamos utilizar a relação de escala (5.5) para deixar estes I_{quad} 's como função da massa m . A tabela (5.1) mostra o diagrama e o respectivo resultado deste.

A soma de todas essas contribuições é

$$\begin{aligned} & \frac{-6}{v^2}[m^2 + m_Z^2 + 2m_W^2 - 4m_t^2]I_{quad}(m^2) + \frac{3}{v^2}[m^4 - 2m_Z^4 - 4m_W^4 + 8m_t^4 + \\ & + (4m_W^2 - 8m_t^2 + 2m_Z^2)m^2](I_{log}(m^2) + b) - \frac{6bm_Z^4}{v^2} \ln\left(\frac{m^2}{m_Z^2}\right) - \frac{12bm_W^4}{v^2} \ln\left(\frac{m^2}{m_W^2}\right) + \frac{24bm_t^4}{v^2} \ln\left(\frac{m^2}{m_t^2}\right) - \\ & - \frac{12m_t^2}{v^2} \left[\frac{1}{2}(4m_t^2 - p^2)I_{log}(m_t^2) - bp^2(Z_1(p^2, m_t^2) - Z_0(p^2, m_t^2) + 1) - \right. \\ & \left. - 3bm_t^2 Z_0(p^2, m_t^2) + \frac{2p^4}{3m_t^2} b \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

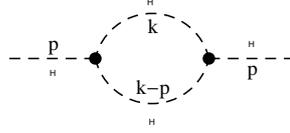


Figura 5.2: Outra correção para o propagador do Higgs.

5.2 Contribuições logaritmicamente divergentes no ultravioleta e renormalização dos diagramas

Vamos continuar o cálculo regularizando o diagrama ilustrado na fig. 5.2. A função de Green no espaço dos momentos para este loop é

$$\frac{9}{2}(\lambda v)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k-p)^2 - m^2} \quad (5.7)$$

onde m é a massa do Higgs e $\frac{9}{2}$ é um fator de simetria.

Utilizando a eq. (3.12), podemos reescrever (5.1) como

$$\begin{aligned} & \frac{9}{2}(\lambda v)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k-p)^2 - m^2} = \frac{9}{2}(\lambda v)^2 [I_{log}(m^2) - \\ & - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{p^2 - 2p \cdot k}{(k^2 - m^2)^2 [(k-p)^2 - m^2]}] = \frac{9}{2}(\lambda v)^2 [I_{log}(m^2) - bZ_0(p^2, m^2)] \end{aligned} \quad (5.8)$$

As outras correções do propagador são obtidas de maneira semelhante à (5.8). Além disso, precisamos utilizar uma relação de escala para trocar o argumento das integrais I_{log} como fizemos para as integrais I_{quad} da seção anterior

$$I_{log}(m_W^2) = I_{log}(m^2) + b \ln \frac{m^2}{m_W^2} \quad (5.9)$$

O resultado das regularizações está na tabela (5.2). As integrais finitas no ultravioleta desta tabela são dadas por: $Y_0(p^2, m^2) = \int_0^1 dx \ln \left[\frac{-p^2 x(1-x)}{m^2} \right]$, $A_0(p^2, m_Z^2) = \int_0^1 dx \ln \left[\frac{m_Z^2 - p^2(1-x)}{m_Z^2} \right]$ e $Z_0(p^2, m_Z^2) = \int_0^1 dx \ln \left[\frac{m_Z^2 - p^2 x(1-x)}{m_Z^2} \right]$.

A soma de todas estas contribuições é

$$\begin{aligned} & \frac{3}{v^2} [2m^4 + 4m_W^4 + 2m_Z^4 - m_Z^2 p^2 + 2m_W^2 p^2] I_{log}(m^2) + \frac{6b}{v^2} [2m_W^4 + m_W^2 p^2] \ln \left(\frac{m^2}{m_W^2} \right) + \\ & + \frac{3b}{v^2} [2m_Z^4 - m_Z^2 p^2] \ln \left(\frac{m^2}{m_Z^2} \right) - \frac{3m^4}{2v^2} b [Y_0(p^2, m^2) + 3Z_0(p^2, m^2)] - \frac{12m_W^4 b}{v^2} Z_0(p^2, m_W^2) - \\ & - \frac{6m_Z^4 b}{v^2} Z_0(p^2, m_Z^2) + \frac{3bp^2}{v^2} [m_Z^2 A_0(p^2, m_Z^2) - 2m_W^2 A_0(p^2, m_W^2)] - \frac{5bp^2}{2v^2} [m_Z^2 - 2m_W^2] \end{aligned} \quad (5.10)$$

Somando (5.6) com (5.10), temos a correção total a um loop para o propagador do Higgs

$$\begin{aligned} & \frac{-6}{v^2}[m^2 + m_Z^2 + 2m_W^2 - 4m_t^2]I_{quad}(m^2) + \frac{3}{v^2}[3m^4 + 6m_W^2 p^2 + m_Z^2 p^2 - 6m_t^2 p^2]I_{log}(m^2) + \\ & \quad + \text{termos finitos no UV} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Ainda não introduzimos a escala do grupo de renormalização. Vamos fazer isto utilizando as seguintes derivadas das integrais (5.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{log}(m^2)}{\partial m^2} &= -\frac{b}{m^2} \\ \frac{\partial I_{quad}(m^2)}{\partial m^2} &= I_{log}(m^2) \end{aligned} \quad (5.12)$$

A eq. (5.12) nos permite escrever

$$\begin{aligned} I_{log}(m^2) &= b[\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + c_1] \\ I_{quad}(m^2) &= b[c_2 \Lambda^2 + (1 + c_1)m^2 + m^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}] \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde c_2 e c_1 são constantes adimensionais.

Substituindo (5.13) em (5.11), temos

$$\begin{aligned} & \frac{-6bc_2}{v^2}[m^2 + m_Z^2 + 2m_W^2 - 4m_t^2](\Lambda^2 + m^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}) + \frac{3b}{v^2}[3m^4 + 6m_W^2 p^2 + m_Z^2 p^2 - \\ & \quad - 6m_t^2 p^2] \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \text{termos finitos no UV} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Vamos utilizar agora o método de renormalização OMS da seção (3.1). Neste esquema a massa do Higgs medida é dada por

$$m_H^2 = m^2 + \delta m^2 \quad (5.15)$$

onde $\delta m^2 = -iA$ e A é a eq. (5.14) para $p^2 = m_H^2$.

Os termos finitos no UV da eq. (5.14) contém partes reais e imaginárias. Se levarmos em conta a contribuição destes termos para a correção da massa, apenas as partes imaginárias contribuem para esta correção de acordo com o teorema óptico [24]. Pois desta forma, temos um δm^2 real.

Considerando os termos dominantes da correção para a massa, temos

$$\begin{aligned} \delta m^2 &= \frac{-3}{8\pi^2 v^2}[m^2 + m_Z^2 + 2m_W^2 - 4m_t^2](c_2 \Lambda^2 + m^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}) + \frac{3}{16\pi^2 v^2}[3m^4 + 6m_W^2 m_H^2 + \\ & \quad + m_Z^2 m_H^2 - 6m_t^2 m_H^2] \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Podemos utilizar que $m_H^2 = m^2 + O(\frac{3}{8\pi^2 v^2})$ para trocar m_H por m na eq. (5.16)

$$\begin{aligned} \delta m^2 = & \frac{-3c_2}{8\pi^2 v^2} [m_H^2 + m_Z^2 + 2m_W^2 - 4m_t^2] \Lambda^2 + \frac{3m_H^2}{16\pi^2 v^2} [m_H^2 + 2m_W^2 - m_Z^2 + 2m_t^2] \ln \frac{\Lambda^2}{m_H^2} + \\ & + O(\frac{9}{64\pi^4 v^4}) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Os termos que ganhamos ao fazer esta troca são da ordem de correções a 2-loops para a massa e por isso podemos desconsiderá-los.

Vemos que a eq. (1.1) é um caso particular de (5.17) para $c_2 = -1$. A eq. (1.1) é obtida via uma regularização por cutoff. No próximo capítulo, vamos argumentar que este método não pode ser usado porque viola a consistência da quebra da simetria de escala da lagrangiana (4.20).

Diagrama	Resultado da regularização
	$\frac{3\lambda}{2}I_{quad}(m^2)$
	$\frac{\lambda}{2}[I_{quad}(m^2) - m^2I_{log}(m^2) - bm^2]$
	$\lambda[I_{quad}(m^2) - m^2I_{log}(m^2) - bm^2]$
	$\frac{3m_Z^2}{v^2}[I_{quad}(m^2) + (m_Z^2 - m^2)I_{log}(m^2) + b(m_Z^2 - m^2) + bm_Z^2 \ln(\frac{m^2}{m_Z^2})]$
	$\frac{6m_W^2}{v^2}[I_{quad}(m^2) + (m_W^2 - m^2)I_{log}(m^2) + b(m_W^2 - m^2) + bm_W^2 \ln(\frac{m^2}{m_W^2})]$
	$\frac{36m_t^2}{v^2}[I_{quad}(m^2) + (m_t^2 - m^2)I_{log}(m^2) + b(m_t^2 - m^2) + bm_t^2 \ln(\frac{m^2}{m_t^2})]$
	$\frac{-9\lambda}{2}I_{quad}(m^2)$
	$\frac{-3\lambda}{2}[I_{quad}(m^2) - m^2I_{log}(m^2) - bm^2]$
	$-3\lambda[I_{quad}(m^2) - m^2I_{log}(m^2) - bm^2]$
	$\frac{-9m_Z^2}{v^2}[I_{quad}(m^2) + (m_Z^2 - m^2)I_{log}(m^2) + b(m_Z^2 - m^2) + bm_Z^2 \ln(\frac{m^2}{m_Z^2})]$
	$\frac{-18m_W^2}{v^2}[I_{quad}(m^2) + (m_W^2 - m^2)I_{log}(m^2) + b(m_W^2 - m^2) + bm_W^2 \ln(\frac{m^2}{m_W^2})]$

Tabela 5.1: Contribuições quadraticamente divergentes e finitas no UV para o propagador do Higgs.

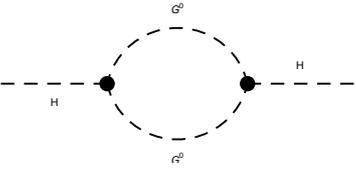
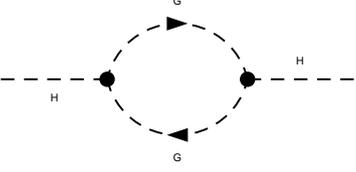
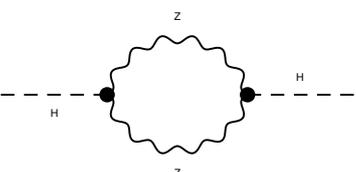
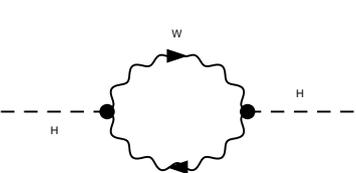
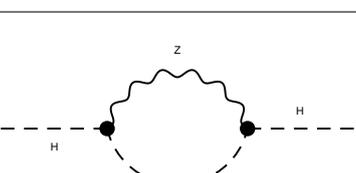
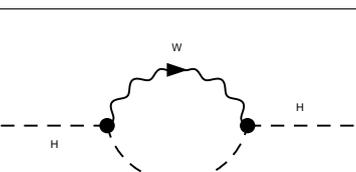
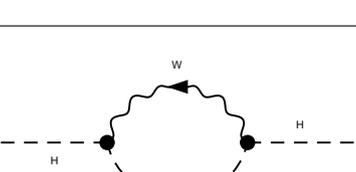
Diagrama	Resultado da regularização
	$\frac{m^4}{2v^2} [I_{log}(m^2) - bY_0(p^2, m^2)]$
	$\frac{m^4}{v^2} [I_{log}(m^2) - bY_0(p^2, m^2)]$
	$\frac{12m_W^4}{v^2} [I_{log}(m^2) + b \ln \frac{m^2}{m_W^2} - bZ_0(p^2, m_W^2)]$
	$\frac{6m_Z^4}{v^2} [I_{log}(m^2) + b \ln \frac{m^2}{m_Z^2} - bZ_0(p^2, m_Z^2)]$
	$-\frac{m_Z^2}{v^2} p^2 [3I_{log}(m^2) + 3b \ln \frac{m^2}{m_Z^2} + \frac{5b}{2} - 3bA_0(p^2, m_Z^2)]$
	$\frac{m_W^2}{v^2} p^2 [3I_{log}(m^2) + 3b \ln \frac{m^2}{m_W^2} + \frac{5b}{2} - 3bA_0(p^2, m_W^2)]$
	$\frac{m_W^2}{v^2} p^2 [3I_{log}(m^2) + 3b \ln \frac{m^2}{m_W^2} + \frac{5b}{2} - 3bA_0(p^2, m_W^2)]$

Tabela 5.2: Contribuições logaritmicamente divergentes e finitas no UV para o propagador do Higgs.

Capítulo 6

Considerações de simetria e regiões possíveis para a massa

Neste capítulo, vamos utilizar argumentos de simetria para mostrar quando alguns esquemas de regularização podem ou não ser utilizados. Na primeira seção, vamos mostrar que esquemas de regularizações inadequados (que quebram simetrias da lagrangiana) podem levar a um problema de ajuste fino para a massa do elétron ou a um termo de massa para o fóton. Considerando estes argumentos, vamos mostrar que o esquema de regularização por cutoff não pode ser utilizado para regularizar os loops do capítulo anterior (por isso utilizamos a Regularização Implícita) porque este esquema viola a consistência da quebra da simetria de escala da lagrangiana (4.20). Depois de fazer estas considerações, vamos utilizar a eq. (5.17) para encontrar regiões possíveis para a massa do Higgs em um diagrama de massa do Higgs versus escala de energia.

6.1 Simetrias e correções a um loop na QED

A regularização e renormalização da eq. (3.4) nos levou a uma correção para a massa nível árvore do elétron dada pela eq. (3.10). Em vez de aplicar os métodos de regularizações utilizados nesta seção, poderíamos analisar o comportamento da eq. (3.4) para $k \rightarrow \infty$. Isto nos diria que a correção para a massa do elétron seria proporcional à escala de energia Λ

$$\delta m \propto e_0^2 \int^\Lambda d^4k \frac{k}{k^4} \propto e_0^2 \Lambda \quad (6.1)$$

que também levaria a um problema de ajuste fino como o da eq. (1.1).

No entanto, nas seções (3.1) e (3.2) não encontramos o resultado de (6.1) mas $\delta m \propto e_0^2 m \ln \frac{\Lambda}{m}$. Isto porque um termo de correção como o da eq. (6.1) quebraria a simetria quiral da lagrangiana da QED (2.2). Sobre esta simetria, é possível mostrar que a lagrangiana (2.2) para $m \rightarrow 0$ é invariante sob a transformação

$$\psi'(x) = e^{i\alpha\gamma_5}\psi(x) \quad (6.2)$$

onde α é a constante de estrutura fina.

No caso com massa, a corrente conservada devido a esta transformação é quebrada por um termo proporcional à esta massa

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2im\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x) \quad (6.3)$$

onde para $m \rightarrow 0$ temos uma corrente conservada.

As correções quânticas para a massa do elétron também quebram a corrente (6.3)

$$\partial_\mu j_5^\mu|_{1-loop} = 2i\delta m\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x) \quad (6.4)$$

Contudo, devemos recuperar a simetria quando $m \rightarrow 0$. Logo, um termo como o da eq. (6.1) não é possível porque quebra a simetria quiral da lagrangiana mesmo quando $m \rightarrow 0$. Por outro lado, a correção (3.10) não quebra esta simetria porque é proporcional a m , de forma que, quando tomamos o limite $m \rightarrow 0$, recuperamos a conservação de j_5^μ mesmo com a correção a um loop. Esta simetria nos garante que não temos problema da Naturalidade e de ajuste fino para o caso do elétron.

Seguindo a mesma ideia, podemos nos perguntar se a regularização e renormalização da auto-energia do fóton contribuiriam para uma correção da massa deste, o que é fisicamente

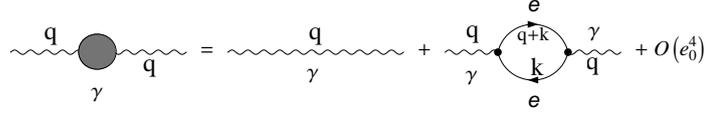


Figura 6.1: Diagrama do propagador do fóton.

inaceitável. O propagador do fóton até ordem de e_0^2 é (veja fig. 6.1)

$$D^{\mu\nu}(q) = -\frac{ig^{\alpha\beta}}{q^2 + i\epsilon} + \frac{-ig^{\alpha\mu}}{q^2 + i\epsilon} ie_0^2 \Pi_{\mu\nu}(q) \frac{-ig^{\nu\beta}}{q^2 + i\epsilon} + O(e_0^4) \quad (6.5)$$

onde

$$ie_0^2 \Pi^{\mu\nu}(q) = -e_0^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[(\not{q} + \not{k} + m)\gamma^\mu(\not{k} + m)\gamma^\nu]}{[(q+k)^2 - m^2][k^2 - m^2]} \quad (6.6)$$

Tomando o traço de (6.6) e utilizando parâmetros de Feynman, podemos reescrever esta equação como

$$ie_0^2 \Pi_{\mu\nu}(q) = -4e_0^2 \int_0^1 dx \left[\int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \left(\frac{2k'_\mu k'_\nu}{(k'^2 - \Delta)^2} - \frac{g_{\mu\nu}}{k'^2 - \Delta} \right) \right] + 8e_0^2 (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{x(1-x)}{(k'^2 - \Delta)^2} \quad (6.7)$$

onde $\Delta = -x(1-x)q^2 + m^2$ e $k' = k + xq$.

A seção B.1 do apêndice B mostra como não regularizar as integrais entre colchetes da eq. (6.7). Neste apêndice, utilizamos um esquema de regularização por cutoff e encontramos que o primeiro termo do resultado da primeira linha da eq. (6.7) é $-e_0^2 b g_{\mu\nu} \Lambda^2$. Para renormalizar uma contribuição como esta, precisaríamos de um termo de massa para o fóton na lagrangiana da QED e esta contribuição seria uma correção para essa massa. No entanto, um termo de massa na lagrangiana da QED quebra a invariância de calibre dela assim como a primeira linha da eq. (6.7) também quebra a invariância de calibre, pois a seguinte equação não é satisfeita se este termo não for nulo

$$q_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0 \quad (6.8)$$

Logo, podemos dizer que a simetria de calibre da QED garante que o fóton não terá massa devido a correções quânticas. Inspirados por estes argumentos de simetria que evitam correções indesejadas para a massa, podemos nos perguntar se existe alguma simetria que evita correções para a massa do Higgs como a da eq. (1.1). A resposta é existe e ela é a

super-simetria. Em uma versão super-simétrica do Modelo Padrão não teríamos correções quadráticas para a massa do Higgs. Uma correção quadrática com um loop fermiônico para o propagador do Higgs seria cancelada pela correção quadrática com o loop do respectivo bóson super-simétrico [25]. No entanto, podemos nos perguntar se existe outra simetria que evite correções quadráticas para a massa do Higgs. Na próxima seção vamos escolher esta simetria como a simetria de escala da lagrangiana (4.20).

6.2 Simetria de escala e a correção a um loop para a massa do Higgs

As transformações de escala são transformações no campo e no espaço-tempo da forma

$$\begin{aligned}x' &= e^\alpha x \\ \varphi'(x) &= e^{\alpha d} \varphi(e^\alpha x)\end{aligned}\tag{6.9}$$

onde α é um parâmetro real, φ é um campo qualquer (escalar, vetorial ou espinor) e d é a dimensão de escala deste.

Para um α infinitesimal, podemos mostrar que

$$\begin{aligned}\delta\varphi(x) &= \varphi'(x) - \varphi(x) = \alpha(d + x^\mu \partial_\mu)\varphi(x) \\ \delta(\partial^\mu \varphi(x)) &= \alpha(d + 1 + x^\nu \partial_\nu)\partial^\mu \varphi(x)\end{aligned}\tag{6.10}$$

Vamos, por exemplo, calcular como a seguinte lagrangiana muda sob a transformação (6.9)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \frac{\lambda}{2}\phi^4(x)\tag{6.11}$$

As eqs. (6.10) indicam que a mudança na lagrangiana (6.11) é dada por

$$\delta\mathcal{L} = \alpha(4 + x^\mu \partial_\mu)\mathcal{L} = \alpha\partial_\mu(x^\mu\mathcal{L})\tag{6.12}$$

como era de se esperar, uma vez que lagrangianas são campos escalares de dimensão de escala igual a 4.

A eq. (6.12) nos diz que existe uma corrente conservada para a transformação de escala (6.9) uma vez que a integral em d^4x de (6.12) dá zero. A transformação de escala para este

caso é uma simetria de (6.11). Contudo, se adicionarmos um termo de massa na lagrangiana (6.11), como $\mathcal{L}' = -\frac{1}{2}\mu_0^2\phi^2(x)$, ele muda da seguinte forma com a transformação de escala

$$\delta\mathcal{L}' = \alpha(4 + x^\mu\partial_\mu)\mathcal{L}' + \alpha\mu_0^2\phi^2(x) \quad (6.13)$$

E isto implica que a simetria de escala é quebrada pelo termo de massa

$$\int d^4x(\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}') = \alpha\partial_\mu J^\mu = \alpha\mu_0^2\phi^2(x) \quad (6.14)$$

Um termo de massa de uma lagrangiana quebra a simetria de escala dela porque ele é o único termo que não tem dimensão de escala igual a quatro. Da mesma forma, um termo de interação cuja constante de acoplamento tivesse dimensão de energia também quebraria invariância de escala.

É possível mostrar [26] que a corrente conservada para a lagrangiana (6.11), assim como para outras teorias, é $J^\mu = x_\nu\Theta^{\mu\nu}$. Onde $\Theta^{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento da teoria. Utilizando (6.14) temos que o traço deste tensor é zero para teorias não massivas: $\partial_\mu J^\mu = \partial_\mu x_\nu\Theta^{\mu\nu} = \Theta^\mu_\mu = 0$.

Utilizando estas ideias, podemos ver que o termo de massa da lagrangiana do setor de Higgs, $\mathcal{L}_{massa} = -\mu^2\Phi^\dagger(x)\Phi(x)$ (eq. (4.20)), é o termo que quebra a simetria de escala

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{massa} &= -\mu^2\Phi^\dagger(x)(\delta\Phi(x)) - \mu^2(\delta\Phi^\dagger(x))\Phi(x) = \alpha(4 + x^\mu\partial_\mu)\mathcal{L}' + \\ &+ 2\alpha\mu^2\Phi^\dagger(x)\Phi(x) \rightarrow \Theta^\mu_\mu = 2\mu^2\Phi^\dagger(x)\Phi(x) = -m^2\Phi^\dagger(x)\Phi(x) \end{aligned} \quad (6.15)$$

onde m é a massa do Higgs nível árvore. Podemos ver que a simetria de escala é exata no limite em que esta massa tende a zero.

A simetria de escala é quebrada também por correções quânticas pois estas fazem as massas e as constantes de acoplamento da teoria dependerem da escala de energia. Por exemplo, a lagrangiana (4.20) varia com a constante de acoplamento λ

$$\Lambda' = e^{-\alpha}\Lambda \quad (eq.(6.9)) \Rightarrow \Lambda' - \Lambda = -\alpha\Lambda + O(\alpha^2) \quad (6.16)$$

$$\lambda(\Lambda') = \lambda(\Lambda) + (\Lambda' - \Lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial\Lambda}|_{\Lambda'=\Lambda} \Rightarrow \quad (6.17)$$

$$\Rightarrow \delta\lambda = -\alpha\Lambda\frac{\partial\lambda(\Lambda)}{\partial\Lambda} = -\alpha\beta_\lambda \rightarrow \delta\mathcal{L}_H = -\alpha\beta_\lambda\frac{\partial\mathcal{L}_H}{\partial\lambda} \quad (6.18)$$

onde Λ é a escala de energia e β_λ é a função beta do grupo de renormalização.

Logo, podemos dizer que os termos que quebram a corrente J^μ a um loop são

$$\partial_\mu J^\mu = \Theta^\mu_\mu|_{1-loop} = \delta m^2|_{1-loop}\Phi^\dagger(x)\Phi(x) + \beta_\lambda|_{1-loop}\frac{\partial\mathcal{L}_H}{\partial\lambda} \quad (6.19)$$

Precisamos manter a quebra da simetria de escala pelo termo proporcional à função beta na eq. (6.19) no limite em que $m_H \rightarrow 0$. Por isso, um termo de correção para a massa quadrático em Λ , como o da eq. (1.1), está errado porque é uma quebra adicional da simetria de escala da lagrangiana neste limite. Assim como o caso da correção para a massa do elétron da seção anterior, podemos ter as correções proporcionais a $\ln \Lambda$ porque este termo tende a zero quando $m_H \rightarrow 0$ (eq. (5.17)).

Temos agora dois argumentos físicos para escolher as constantes arbitrárias da eq. (5.13). Um deles é escolher $c_2 = 0$ na eq. (5.17) para garantir a Naturalidade e, conseqüentemente, evitar o problema do ajuste fino. O segundo é fazer esta escolha para recuperar simetria de escala no limite em que $m_H \rightarrow 0$ e $\beta_\lambda \rightarrow 0$, assim como a simetria quiral é obtida no limite em que a massa do elétron tende a zero. A constante c_1 que foi agrupada na parte finita no UV da eq. (5.14) pode ser escolhida de forma que estes termos finitos também não quebrem a simetria de escala nestes limites.

Este argumento de usar simetria de escala da lagrangiana para eliminar a escala de energia ao quadrado foi proposto por [8]. Nesta referência, o autor argumenta que esta escala de energia ao quadrado é uma divergência espúria, ou seja, causada pelo uso de um método de regularização inadequado. A maneira que [8] sugere para eliminar esta divergência espúria é adicionando um contra-termo na lagrangiana para recuperar a simetria de escala que foi quebrada pelo uso da regularização por cutoff (esta regularização é a mesma que não deve ser utilizada para regularizar as integrais (6.7) porque quebra a simetria de calibre). No nosso caso, argumentamos que as integrais divergentes básicas da eq. (5.1) são arbitrárias e devem ser determinadas utilizando considerações físicas, a Naturalidade e a consistência da quebra da simetria de escala a nível quântico.

6.3 Regiões possíveis para a massa do Higgs

Nos resta agora as correções proporcionais ao logaritmo da escala de energia

$$\delta m^2 = \frac{3m_H^2}{16\pi^2 v^2} [m_H^2 + 2m_W^2 - m_Z^2 + 2m_t^2] \ln \frac{\Lambda^2}{m_H^2} \quad (6.20)$$

Podemos utilizar valores experimentais para as massas e, assim como feito na seção (3.1) para a QED, estimar o limite de validade da teoria de perturbação para o Modelo Padrão. Utilizando $m_t = 173 \text{ GeV}$, $m_W = 80.2 \text{ GeV}$, $m_Z = 91.2 \text{ GeV}$, $v = 246 \text{ GeV}$ e a massa do

Higgs recentemente descoberta, $m_H = 125 \text{ GeV}$, temos que $\delta m^2 = O(m_H^2)$ quando

$$\Lambda = O(m_H \sqrt{e^{\frac{16\pi^2 v^2}{3[m_H^2 + 2m_W^2 - m_Z^2 + 2m_t^2]}}}) \approx 10^{10} \text{ GeV} \quad (6.21)$$

Esta estimativa não é boa porque as massas também variam com a escala de energia Λ . Para incluir esta informação na eq. (6.20), podemos escrevê-la em termos das constantes de acoplamento do Modelo Padrão. O comportamento destas constantes com a escala de energia pode ser obtido por meio da respectiva função beta dela. Estas funções estão calculadas com precisão de 2-loops em [9].

Utilizando as relações entre massas e constantes de acoplamento da eq. (4.31) e a constante de acoplamento do Higgs com o top, $g_t = \frac{\sqrt{2}m_t}{v}$, podemos escrever

$$\frac{\delta m^2}{m_H^2} = \frac{3}{8\pi^2} \left[\frac{m_H^2}{v^2} + \frac{1}{4}g^2(\Lambda) - \frac{1}{4}g'^2(\Lambda) + g_t^2(\Lambda) \right] \ln \frac{\Lambda}{m_H} \quad (6.22)$$

onde $g^2(\Lambda)$, $g'^2(\Lambda)$ e $g_t^2(\Lambda)$ são as constantes dos acoplamentos $SU(2)$, $U(1)$ e Yukawa, respectivamente, introduzidas no capítulo 4.

Para resolver as funções beta de [9], utilizamos os valores iniciais $g^2(m_Z) = 0.42$, $g'^2(m_Z) = 0.13$, $g_s^2(m_Z) = 1.46$ e $g_t(m_t) = 1.01$. A um loop obtemos soluções analíticas para g e g' . Mas, a solução para g_t é numérica. Por isso, utilizamos o comando *NDSolve* do programa *Mathematica* para obter um conjunto de pontos soluções da equação. Em seguida este conjunto de pontos foi exportado para o programa *Origin* onde utilizamos o comando *Nonlinear Curve Fit* para obter uma curva $g_t = g_t(\Lambda)$.

Utilizando a eq. (6.22), o valor estimado para o limite de validade da teoria de perturbação é (utilizando $m_H = 125 \text{ GeV}$ e $v = 246 \text{ GeV}$)

$$\Lambda \approx 10^{16} \text{ GeV} \quad (6.23)$$

Este limite de validade é da ordem da escala de quebra da teoria de Grande Unificação Super-simétrica (GUT) ($\sim 10^{16} \text{ GeV}$). Ele seria extremamente menor se o primeiro termo da correção da massa do Higgs fosse proporcional à escala de energia ao quadrado. A referência [9] encontra $\Lambda_{Max} \approx 1.8 \text{ TeV}$ para $m_H = 260 \text{ GeV}$. Se quisermos utilizar um valor de massa do Higgs menor (mais próximo do experimental $\sim 130 \text{ GeV}$), teríamos que permitir uma correção de até dez vezes maior do que a massa para conseguir um limite de validade $\Lambda_{Max} \approx 2 \text{ TeV}$ [7]. E mesmo assim, a hierarquia da teoria ($m_H \ll \Lambda_{Max}$) não ficaria

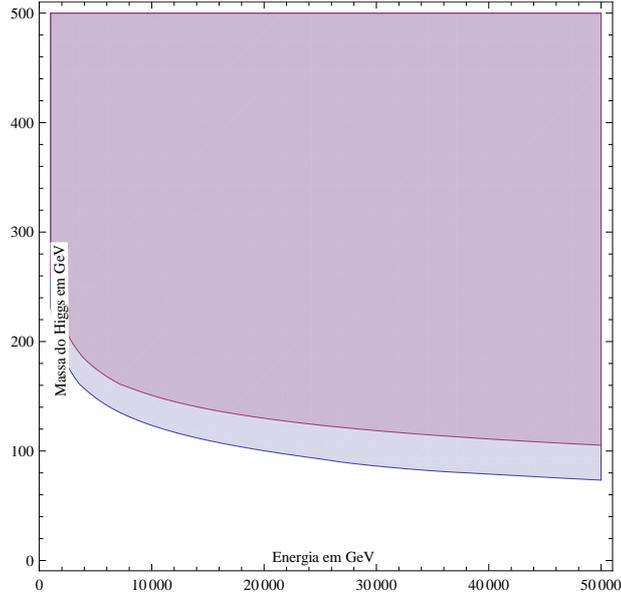


Figura 6.2: Regiões excluídas para a massa do Higgs: a região azul e a região lilás excluem valores de m_H e Λ cuja correção δm é maior ou igual a 47% e 50% do valor de m_H , respectivamente.

tão boa. A condição de Veltman [4] eliminaria este problema mas, nada nos garante que o vínculo entre massas que ela estabelece seja verdade.

A eq. (6.23) nos diz, com precisão de um loop, que a partir deste valor de energia a correção para a massa passa a ser maior do que a massa. Contudo, podemos excluir o tamanho de correção que quisermos, uma vez que não sabemos o valor dele (o valor medido em laboratório é a massa nível árvore mais todas as correções). Desta forma, eliminamos um conjunto de valores de m_H e Λ que permitem esta correção e correções maiores que esta. Para fazer isto, utilizamos o comando *RegionPlot* do programa *Mathematica* para "varrer" valores de Λ e m_H (nos intervalos $1 \text{ TeV} < \Lambda < 50 \text{ TeV}$ e $1 \text{ GeV} < m_H < 500 \text{ GeV}$) que levam a uma razão $\frac{\delta m^2}{m_H^2}$ maior que um parâmetro Δ . Além disso, como neste caso estamos varrendo valores não tão grandes de Λ (da ordem de alguns TeV's), consideramos as contribuições finitas no ultravioleta na correção da massa.

A fig. 6.2 mostra uma região azul ($\Delta = 0.22$) e uma região lilás ($\Delta = 0.25$) de valores proibidos para a massa do Higgs. Estas regiões excluem valores de Λ e m_H que levam a correções da massa maiores ou iguais a 47% e 50%, respectivamente.

Existem outras regiões conhecidas na literatura, como a *triviality bound* [14]. Ela é construída a partir da constante de acoplamento λ da auto-interação do Higgs, que a um

loop, considerando apenas as auto-interações do Higgs, é dada por

$$\lambda(\Lambda) = \frac{\lambda(v^2)}{1 - \frac{3}{4\pi^2}\lambda(v^2)\ln\frac{\Lambda^2}{v^2}} \quad (6.24)$$

A eq. (6.24) tem um pólo de Landau em $\Lambda_{Max} = ve^{\frac{2\pi^2 v^2}{3m_H^2}}$. Podemos de maneira semelhante a anterior, obter uma região que exclui valores de m_H e Λ tais que $\Lambda_{Max} \geq ve^{\frac{2\pi^2 v^2}{3m_H^2}}$, ou seja, valores que ultrapassam o limite de validade da teoria.

A função beta completa do acoplamento λ , isto é, a obtida considerando as auto-interações do Higgs e as interações dele com as partículas mais massivas, a um loop é dada por

$$16\pi^2\beta_\lambda = 12\lambda^2 - (3g'^2 + 9g^2 - 12g_t^2)\lambda + \frac{3}{4}g'^4 + \frac{3}{2}g'^2g^2 + \frac{9}{4}g^4 - 12g_t^4 \quad (6.25)$$

Se o termo dominante da eq. (6.25) for λ^2 temos como resultado a eq. (6.24). Mas, se g , g' e λ forem pequenos comparados a g_t , o termo dominante em (6.25) é

$$16\pi^2\beta_\lambda \approx -12g_t^4 \quad (6.26)$$

A solução para (6.26) é (considerando que g_t não varia muito com Λ)

$$\lambda(\Lambda) = \lambda(v) + \frac{-12g_t^4}{16\pi^2}\ln\frac{\Lambda}{v} \quad (6.27)$$

Contudo, precisamos manter $\lambda(\Lambda) > 0$ para que o vácuo de (4.23) exista, ou seja, seja um valor mínimo do Hamiltoniano. Logo, se exigirmos isto, ganhamos mais uma restrição para a massa chamada de *vacuum stability bound* [15]

$$m_H^2 > \frac{3g_t^4 v^2}{4\pi^2}\ln\frac{\Lambda}{v} \quad (6.28)$$

Uma análise mais completa da *vacuum stability bound* está feita em [15]. Vamos reproduzir o resultado destas referências para comparar com as regiões deste trabalho. A fig. 6.3 inclui estas regiões da literatura e as regiões da fig. 6.2.

Na fig. 6.3, podemos ver que a região azul (que exclui regiões de correção maiores ou iguais a 47%) encontra com a região marrom (*vacuum stability bound*) em um ponto que nos diz que por volta de 10 *TeV* a massa do Higgs está em torno de 122 *GeV* que felizmente é bem próximo do valor recentemente anunciado pelo CERN de 125 *GeV*. No caso da região lilás, que exclui correções maiores ou iguais a 50%, este valor de massa converge para 129 *GeV* em torno de 20 *TeV*.

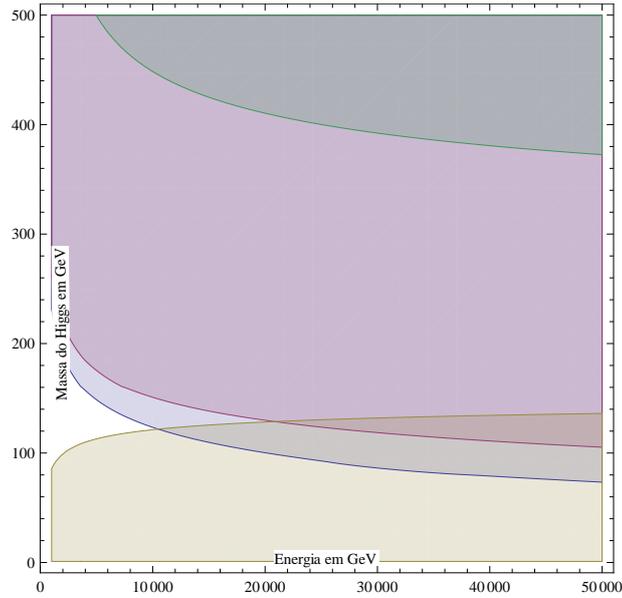


Figura 6.3: Regiões excluídas para a massa do Higgs: a região marrom é a *vacuum stability bound* e a região verde é a *triviality bound*. A região azul e a região lilás correspondem a correções de massa maiores ou iguais a 47% e 50%, respectivamente.

Existem trabalhos, como [16], que consideram correções proporcionais à escala de energia ao quadrado e permitem certas quantidades de ajuste fino. Isto leva a novas regiões proibidas para a massa. Em [16], para 10% de ajuste-fino, o valor da massa do Higgs fica em torno de 200 GeV em energias que o LHC opera. Contudo, esta região exclui o valor experimental esperado de 125 GeV e a correção da massa utilizada viola a consistência da quebra quântica de simetria de escala.

Capítulo 7

Conclusão

Os resultados apresentados mostram que se utilizarmos um esquema de regularização implícito e considerações físicas para eliminar arbitrariedades, a massa do Higgs não é mais extremamente sensível à altas escalas de energia. Consequentemente, o nível de confiança da teoria de perturbação do Modelo Padrão pode ser estendido para escalas de energia maiores do que 1 TeV. Nossos resultados não violam a quebra quântica da simetria de escala nem estragam a Naturalidade da teoria.

Apesar dos valores de correção para a massa não serem conhecidos, é possível estabelecer regiões limites para a massa se escolhermos $\delta m/m_H$. Valores de $\delta m/m_H \sim 0.5$ juntamente com a região da estabilidade do vácuo nos diz que o valor da massa do Higgs de $m_H = 125 \text{ GeV}$ é compatível com uma escala de energia da ordem de $10 - 20 \text{ TeV}$ para o aparecimento de nova física.

Apêndice A

O funcional gerador do campo eletromagnético livre

Temos que calcular o seguinte funcional gerador

$$Z_0[J_\kappa] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_F + \mathcal{L}_S)} \quad (\text{A.1})$$

onde $\mathcal{L}_F = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ e $\mathcal{L}_S = J_\kappa A^\kappa$.

É possível mostrar que se adicionarmos um termo $-\frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu)$ em \mathcal{L}_F as equações de Maxwell não se alteram (este termo deve ser adicionado para fixar o calibre). Temos com essa mudança $\int d^4x \mathcal{L}_F = -\int d^4x (\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu)) = -\frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\nu A^\mu)(\partial_\mu A^\nu) = \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu \partial_\nu \partial^\nu A^\mu$.

A ação pode então ser escrita como

$$S[J_\kappa] = \int d^4x (\frac{1}{2}A_\mu \partial_\nu \partial^\nu A^\mu + J_\kappa A^\kappa) \quad (\text{A.2})$$

O primeiro termo de (A.2) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} - \int d^4x A_\mu(x) \partial_\nu \partial^\nu A^\mu(x) &= -g^{\mu\nu} \int d^4x A_\mu(x) \int d^4x' \delta(x-x') \partial_\alpha^{x'} \partial^{x'\alpha} A_\nu(x') \\ &= \int d^4x d^4x' A_\mu(x) K^{\mu\nu}(x', x) A_\nu(x) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

onde $K^{\mu\nu}(x', x) = -g^{\mu\nu}\delta(x - x')\partial_\alpha^{x'}\partial^{x'\alpha}$ é o operador de onda simétrico.

Definimos o operador de onda inverso e o campo "shiftado" $A'_\mu(x)$ como

$$\int d^4x' K^{\mu\nu}(x, x') K_{\nu\tau}^{-1}(x', x'') = g_\nu^\mu \delta(x - x'') \quad (\text{A.4})$$

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \int d^4x' K_{\mu\nu}^{-1}(x, x') J^\nu(x') \quad (\text{A.5})$$

Substituímos (A.5) em (A.2), utilizamos (A.4) e temos

$$S[J_\kappa] = \frac{1}{2}[J^\kappa K_{\kappa\lambda}^{-1} J^\lambda] - \frac{1}{2}[A'_\mu K^{\mu\nu} A'_\nu] \quad (\text{A.6})$$

onde $[J^\kappa K_{\kappa\lambda}^{-1} J^\lambda] = \int d^4x d^4x' J^\kappa(x) K_{\kappa\lambda}^{-1}(x, x') J^\lambda(x')$

e $[A'_\mu K^{\mu\nu} A'_\nu] = \int d^4x d^4x' A'_\mu(x) K^{\mu\nu}(x, x') A'_\nu(x')$.

Substituindo (A.6) em (A.1), temos

$$Z_0[J_\kappa] = \frac{1}{N} e^{\frac{i}{2}[J^\kappa K_{\kappa\lambda}^{-1} J^\lambda]} \int \mathcal{D}A e^{-\frac{i}{2}[A'_\mu K^{\mu\nu} A'_\nu]} \quad (\text{A.7})$$

Utilizando a condição de normalização, $Z_0[0] = 1$, temos

$$Z_0[J_\kappa] = e^{\frac{i}{2}[J^\kappa K_{\kappa\lambda}^{-1} J^\lambda]} \quad (\text{A.8})$$

Podemos identificar o operador de onda inverso como a transformada de Fourier do propagador do fóton no espaço dos momentos

$$K_{\nu\tau}^{-1}(x', x'') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_{\nu\tau}(k) e^{-ik(x'-x'')} = -D_{\nu\tau}(x' - x'') \quad (\text{A.9})$$

Logo,

$$Z_0[J_\kappa] = e^{-\frac{i}{2}[J^\kappa D_{\kappa\lambda} J^\lambda]} = e^{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4x' J^\kappa(x) D_{\kappa\lambda}(x-x') J^\lambda(x')} \quad (\text{A.10})$$

Apêndice B

Integrais das seções 3.1 e 6.1

B.1 Como não regularizar a amplitude da eq. (6.7)

Podemos reescrever as integrais entre colchetes da eq. (6.7) da seguinte forma

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - \Delta)^2} - \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 - \Delta} \right) = g_{\mu\nu} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{k^2}{2(k^2 - \Delta)^2} - \frac{1}{k^2 - \Delta} \right) \quad (\text{B.1})$$

onde utilizamos que $4k_\mu k_\nu = g_{\mu\nu} k^2$.

Se quisermos integrar (B.1), devemos utilizar a rotação de Wick para passar as integrais do espaço de Minkowski para o espaço Euclideano. Esta rotação consiste em fazer as seguintes mudanças no quadrivetor k

$$\begin{aligned} k^0 &\rightarrow ik_E^0 \\ k^2 &\rightarrow -k_E^2 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Temos então

$$ig_{\mu\nu} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \left(\frac{-k_E^2}{2(k_E^2 + \Delta)^2} + \frac{1}{k_E^2 + \Delta} \right) \quad (\text{B.3})$$

Podemos integrar (B.3) supondo uma fronteira hipersférica de Raio Λ . Esta é a parte da regularização em que introduzimos o parâmetro de escala Λ . Não podemos integrar até

infinito porque a integral tende a infinito neste limite.

$$ig_{\mu\nu} \int d\Omega \int_0^\Lambda \frac{dk_E}{(2\pi)^4} \left(-\frac{k_E^5}{2(k_E^2 + \Delta)^2} + \frac{k_E^3}{k_E^2 + \Delta} \right) \quad (\text{B.4})$$

onde Ω é a "área" de uma esfera unitária quadridimensional.

Utilizando uma mudança de variável e integrando em Ω , temos:

$$bg_{\mu\nu} \int_\Delta^{\Lambda^2 + \Delta} du \left(-\frac{(u - \Delta)^2}{4u^2} + \frac{u - \Delta}{2u} \right) \quad (\text{B.5})$$

Integrando (B.5), temos

$$\frac{bg_{\mu\nu}}{4} (\Lambda^2 - \Delta + O(\frac{\Delta^2}{\Lambda^2})) \quad (\text{B.6})$$

Quando substituirmos (B.6) em (6.7), este termo dará uma correção quadrática para a massa do fóton, assim como a correção da massa do Higgs da eq. (1.1). Contudo, o fóton não tem massa e muito menos uma correção para ela. Logo, podemos dizer que o método de regularização utilizado nesta seção quebra a invariância de calibre da lagrangiana da QED e, por isso, não pode ser utilizado.

Da mesma forma, se tivéssemos utilizado este método de regularização para o I_{quad} da eq. (5.11), teríamos a eq. (1.1). Logo, este método de regularização também não pode ser utilizado neste caso porque viola a consistência da quebra de simetria de escala como visto na seção 6.2.

B.2 Integral da regularização da auto-energia do elétron

Substituindo (3.7) em (3.4), temos

$$\begin{aligned} ie_0^2 \Sigma(p) &= e_0^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon} \right] \frac{2\not{p} - 2\not{k} - 4m}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon} = \\ &= e_0^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[- \int_{\lambda^2}^{\Lambda^2} \frac{dt}{(k^2 - t + i\epsilon)^2} \right] \frac{2\not{p} - 2\not{k} - 4m}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

onde utilizamos que $m = m_0 + O(e_0^2)$ para trocar m_0 por m .

Podemos utilizar parâmetros de Feynman para reescrever o denominador de (B.7)

$$\frac{1}{(k^2 - t + i\epsilon)^2 [(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon]} = 2 \int_0^1 dz \frac{z}{[q^2 + p^2(1-z)z - (1-z)m^2 - tz + i\epsilon]^3} \quad (\text{B.8})$$

onde $q = k - p(1-z)$.

Podemos mudar de variável k para q e avaliar (B.7) em $\not{p} = m$. Temos então

$$ie_0^2 \Sigma(p)|_{\not{p}=m} = 4e_0^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz \int_{\lambda^2}^{\Lambda^2} dt \frac{z(\not{q} + m(2-z))}{[q^2 - (1-z)^2 m^2 - tz + i\epsilon]^3} \quad (\text{B.9})$$

O primeiro termo do numerador de (B.9) é um integrando ímpar em q e por isso a integral em q deste termo é zero. A outra integral que devemos resolver em q é

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[q^2 - s]^3} \quad (\text{B.10})$$

onde $s = (1 - z)^2 m^2 + tz - i\epsilon$.

Desta vez podemos utilizar o método da seção B.1 para calcular esta integral porque ela é finita no limite UV. Fazendo a rotação de Wick e mudando para coordenadas esféricas, obtemos o resultado de (B.10)

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[q^2 - s]^3} &= -i \int \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[q_E^2 + s]^3} = -i \int d\Omega \int_0^\infty \frac{dq_E}{(2\pi)^4} \frac{q_E^3}{[q_E^2 + s]^3} = \\ &= -b \int_s^\infty du \frac{u-s}{u^3} = -\frac{b}{2s} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Substituindo (B.11) em (B.9), temos

$$\begin{aligned} ie_0^2 \Sigma(p)|_{\not{p}=m} &= 2e_0^2 mb \int_0^1 dz (z^2 - 2z) \int_{\lambda^2}^{\Lambda^2} dt \frac{1}{(1-z)^2 m^2 + tz - i\epsilon} = \\ &= 2e_0^2 mb \int_0^1 dz (z - 2) \ln \frac{(1-z)^2 m^2 + z\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2} = -\frac{3ie_0^2 m}{8\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{m} + \text{termos finitos no UV} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

onde tomamos os limites $\lambda \rightarrow 0$ e $\epsilon \rightarrow 0$.

Referências Bibliográficas

- [1] S. Chatrchyan et al. [CMS collaboration], arXiv: 1207.7235 [hep-ex] (2012).
- [2] L. Susskind, *Physical Review D* **20**, 2619 (1979).
- [3] L. Susskind, *Physics Reports* **104**, 181 (1984).
- [4] M. Veltman, *Acta Physica Polonica B* **12**, 437 (1981).
- [5] G. L. Castro, J. Pestieau; *Modern Physics Letters A* **10**, 1155 (1995).
- [6] M. E. Peskin *European School of High-Energy Physics* ed N. Ellis and M. Neubert, CERN 97-03 (Geneva) 49-142 (1997).
- [7] J. R. Espinosa, *Acta Physica Polonica B* **38**, 567 (2006).
- [8] W. Bardeen, FERMILAB-CONF-95-391-T (1995).
- [9] M. Chaichian, R. G. Felipe, K. Huitu *Physics Letters B* **363**, 101 (1995).
- [10] R. Jackiw, *Int. J. Mod. Phys. A* **14**, 2011 (2000).
- [11] Franz Mandl, Graham Shaw, *Quantum Field Theory, 2nd edition*, (John Wiley & Sons, 2010).
- [12] O. A. Battistel, A. L. Mota, M. C. Nemes; *Modern physics letters A*, 1597 (1998).
- [13] L. C. Ferreira, A. L. Cherchiglia, Brigitte Hiller, Marcos Sampaio, M. C. Nemes; arXiv:1110.6186v3 [hep-th] (2012).
- [14] N. Cabibbo, L. Maiani, G. Parisi and R. Petronzio, *Nucl. Phys. B* **158**, 295 (1979); M. Lindner, *Z. Phys. C* **31**, 295 (1986).

- [15] A. Sirlin, R. Zucchini *Nuclear Physics B***266**, 389 (1986); J. Casas, J. Espinosa and M. Quiros, *Phys. Lett. B***382**, 374 (1996).
- [16] C. Kolda, H. Murayama, *Journal of High Energy Physics* 0007:035(2000).
- [17] J. Schwinger, *Annals of Physics***2**, 407 (1957).
- [18] A. Salam, J. C. Ward; *Il Nuovo Cimento***19**, 165 (1961).
- [19] S. Glashow, *Nuclear Physics B***22**, 579 (1961).
- [20] S. Weinberg, *Physical Review Letters***19**, 1264 (1967).
- [21] A. Salam, *In Elementary particle physics, Nobel Symp. No 8*, (N. Svartholm, 1968).
- [22] Stefan Pokorski, *Gauge Field Theories, 2nd edition*, (Cambridge University Press, 2000).
- [23] G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B***33**, 173 (1971); G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B***35**, 167 (1971).
- [24] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, (Westview Press, 1995).
- [25] Ian J. R. Aitchison, *Supersymmetry in particle Physics*, (Cambridge University Press, 2007).
- [26] C. G. Callan Jr., S. Coleman, R. Jackiw, *Annals of Physics* **59**, 42-73 (1970)