

# Anomalia de escala e invariância de calibre em eletrodinâmica quântica: um estudo diagramático

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Joilson Silva Porto

Orientador: Prof. Dr. Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio

Co-orientadora: Profa. Dra. Maria Carolina Nemes

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da  
Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do  
título de Mestre em Física.

Agosto de 2012

# Agradecimentos

Aos meus pais, Delio e Neusa, por tudo.

Ao Marcos Sampaio e à Carolina Nemes pela orientação e pelo aprendizado.

Aos membros da banca: Alex Blin, Brigitte Hiller e Luiz Cleber T. Brito, pelas valiosas sugestões e correções à dissertação.

Ao grupo de Teoria Quântica de Campos da UFMG; aos colegas de pos-graduação, em especial aos amigos: Debarba, Arthur, Lucas e Gabriel, pelas correções e sugestões ao texto; aos meus familiares e a todos os meus amigos.

Aos professores e funcionários da UFMG e da UESB que de alguma forma me ajudaram a chegar até aqui.

À CAPES pelo apoio financeiro.

# Resumo

Simetria sob dilatação a nível clássico acontece se a lagrangiana é livre de parâmetros dimensionais. A corrente de Noether associada a esta simetria é conhecida como corrente de dilatação. A quebra quântica da corrente de dilatação (anomalia de escala) está relacionada com o traço do tensor energia-momento, por esta razão ela é conhecida também como anomalia do traço.

Neste trabalho calculamos perturbativamente, em ordem de um laço, a anomalia do traço da eletrodinâmica quântica sem massa. O propósito foi estudar a relação entre a dilatação e identidades de Ward de calibre em conexão com a invariância de rótulo dos momentos, tendo em mente uma análise similar feita para a anomalia de Adler-Bardeen-Bell-Jackiw. Realizamos os cálculos de maneira independente de regularização a fim de excluir anomalias espúrias.

# Abstract

Symmetry under dilatation appears at classical level should a Lagrangian be free of dimensionful constants. The Noether current associated to this symmetry is called dilatation current. Quantum symmetry breaking of dilation current (scaling anomaly) is related to the trace of the energy momentum tensor. For this reason it is also known as trace anomaly.

In this work we calculate perturbatively, at one loop order, the trace anomaly of massless quantum electrodynamics. The purpose is to study the interplay between dilation and gauge Ward identities in connection with momentum routing invariance bearing in mind a similar analysis done for the Adler-Bardeen-Bell-Jackiw anomaly. We perform the calculations in a regularization independent fashion in order to exclude spurious anomalies.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Anomalias em TQC</b>	<b>9</b>
2.1	Simetrias e Leis de Conservação . . . . .	9
2.1.1	Correntes Conservadas . . . . .	10
2.2	Anomalias . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Anomalia de Escala</b>	<b>15</b>
3.1	Simetria de Escala . . . . .	15
3.2	Corrente de Dilatação . . . . .	18
3.2.1	Relação com o Tensor Energia-momento Simétrico . . . . .	23
3.2.2	Eletrodinâmica Quântica (EDQ) . . . . .	25
3.3	Quebra Anômala da Simetria de Escala . . . . .	27
3.4	IW da Corrente de Dilatação . . . . .	28
3.4.1	IW Para Funções de 2 Pontos . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Cálculo da Anomalia a um Laço por Regularização Implícita</b>	<b>33</b>
4.1	Método . . . . .	34
4.1.1	Renormalização e Invariância de Calibre . . . . .	34
4.2	Cálculo da Anomalia . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>40</b>
<b>A</b>	<b>Tensor de Belinfante</b>	<b>41</b>
A.1	Caso geral . . . . .	41
A.2	EDQ . . . . .	42

<b>B</b>	<b>Dedução da IW da Dilatação</b>	<b>46</b>
<b>C</b>	<b>Cálculo das Amplitudes da IW</b>	<b>52</b>
C.1	Cálculo de $\Delta_{\mu\nu}$ . . . . .	52
C.2	Cálculo de $\left(2 - p\frac{\partial}{\partial p}\right)\tilde{\Pi}_{\mu\nu}$ . . . . .	75
<b>D</b>	<b>Resultados e Identidades Utilizados</b>	<b>78</b>
D.1	Identidades Utilizadas . . . . .	78
D.2	Exemplo de Termo de Superfície . . . . .	79
D.3	Integrais do $\Pi_{\mu\nu}$ . . . . .	80

# Capítulo 1

## Introdução

As simetrias desempenham um papel fundamental na física e em especial em teoria quântica de campos (TQC), onde elas são essenciais na compreensão ou mesmo na construção de teorias. Neste contexto um resultado importante é o *teorema de Noether* que relaciona a cada simetria uma lei de conservação. Como exemplo temos a simetria ou invariância de um sistema por uma translação espaço-temporal que leva a conservação do quadrivetor momento-energia.

Surge então o importante tema das *quebras de simetrias* que está relacionado com progressos em TQC. Elas podem ser classificadas em três classes: *Quebra explícita*, que acontece, por exemplo, quando a simetria de uma lagrangiana sob alguma transformação é quebrada pela adição de um termo que não é invariante sob esta transformação; *quebra espontânea*, onde existe simetria das leis dinâmicas, mas somente configurações assimétricas são possíveis para o sistemas, geralmente devido a instabilidade das configurações simétricas; e *quebra quântica* que acontece com o processo de quantização da teoria e é conhecida também como *quebra anômala* [1,2]. A expressão quebra anômala surgiu por que acreditava-se que uma simetria existente a nível clássico deveria existir também a nível quântico, mas isso nem sempre acontece, pois certas simetrias são quebradas pela quantização [2]. O termo responsável pela quebra da simetria, quando esta é estudada pela lei de conservação clássica via teorema de Noether, porém num formalismo quântico (através de Identidades de Ward por exemplo), é denominado *anomalia*.

Sabemos hoje que quebras quânticas são importantes e que muitas vezes salvam modelos que possuiriam, sem elas, simetrias indesejáveis ou não observadas experi-

mentalmente. Ou, no caso da simetria quebrada ser indispensável para o modelo, o conhecimento da anomalia e o mecanismo necessário para restaurar a simetria cria restrições ao modelo que podem resultar em importantes previsões teóricas. Existe um exemplo importante no modelo padrão, onde vários tipos de campos fermiônicos são necessários para descrever quarks e léptons e onde a simetria quiral para estes campos assegura a invariância de calibre da teoria, que é uma invariância indispensável para a mesma. Assim a descoberta da anomalia quiral e o cuidadoso ajuste das cargas destes férmions para que em conjunto esta anomalia desaparecesse resultou na previsão teórica das cargas deles (veja em [2] uma explicação mais detalhada).

No tratamento perturbativo das interações em TQC, o aparecimento de anomalias é consequência das divergências que ocorrem neste método (especificamente dos infinitos no ultravioleta que surgem nos cálculos perturbativos) e que precisam ser regularizadas e renormalizadas, ou seja, elas são consequência dos infinitos que surgem na descrição matemática da teoria e da forma de tratá-los. Mas as anomalias são importantes para a física, já que resultam delas a explicação de vários fenômenos. Desta forma, podemos reconhecê-las como uma qualidade positiva que resulta do aspecto divergente da TQC e uma justificativa para a validade do processo de regularização e renormalização das teorias. Este é um ponto de vista defendido, por exemplo, por Jackiw [2].

Para tratar anomalias com cálculos perturbativos em TQC é necessário ter um cuidado especial em distinguir anomalias espúrias, que são aquelas que surgem no cálculo, mas que podem ser removidas por uma renormalização adequada, de anomalias físicas, que são as verdadeiras anomalias da teoria. Neste sentido a regularização implícita (RI) [3–9] é uma esquema adequado já que não utiliza um regulador explícito que é a origem das anomalias espúrias.

A anomalia de escala, que é o tema deste trabalho, é a anomalia que quebra a simetria sob transformação de escala (ou dilatação) nas coordenadas espaço-temporais e existe em teorias descritas por lagrangianas que não dependem de parâmetros dimensionais. Do ponto de vista físico a anomalia de escala é importante, pois em muitos casos a simetria de escala representaria um problema, já que geralmente quando se muda a escala de um sistema espera-se que sua descrição também mude<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Para exemplificar podemos pensar na teoria de renormalização onde a constante de acoplamento da teoria estudada depende da escala de renormalização, ou escala de massa, e que, portanto,



Esta anomalia é também conhecida por anomalia do traço devido a sua relação com o traço do tensor energia-momento e o seu estudo, de um modo geral e para algumas teorias específicas, pode ser encontrado por exemplo em [10–16]. Aqui vamos estudá-la no âmbito da eletrodinâmica quântica (EDQ) e utilizar a RI para tratá-la em teoria de perturbação.

Faremos uma breve discussão sobre simetrias e anomalias no capítulo 2; discutiremos a simetria e a anomalia de escala no âmbito da EDQ no capítulo 3 e calcularemos a anomalia utilizando RI no capítulo 4. Conclusões serão apresentadas no capítulo 5 e logo após encontram-se alguns apêndices (A, B, C e D) com cálculos e demonstrações necessários.

Usaremos em todo o texto unidades naturais<sup>2</sup>, onde  $\hbar = c = 1$ ,  $\hbar$  é escolhido como unidade de ação e  $c$  (velocidade da luz) como unidade de velocidade, ou seja,  $[S] = [v] = 1$ . Neste sistema a unidade de qualquer grandeza pode ser expressa em potências de unidade de massa. Utilizaremos a convenção que índices gregos variam de 0 a 3, latinos de 1 a 3, e índices repetidos indicam uma soma. A métrica utilizada é  $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$  e  $g_{\mu\nu} = 0$  se  $\mu \neq \nu$ .

Utilizaremos nesta dissertação conceitos e ferramentas da TQC sendo necessário ao leitor ter algum conhecimento na área para melhor compreendê-lo. A fundamentação teórica básica e os conceitos utilizados podem ser encontrados em livros textos como as referências [14, 17–22].

---

tem um valor diferente para cada escala de energia.

<sup>2</sup>Veja por exemplo [17].

# Capítulo 2

## Anomalias em TQC

### 2.1 Simetrias e Leis de Conservação

Em geral, as leis da física podem ser compreendidas através de formulações matemáticas que envolvem a ação  $S$ , definida por  $S = \int d^4x \mathcal{L}$ , onde  $\mathcal{L}$  é a densidade de lagrangiana que descreve o sistema. Através dela são obtidas as equações de movimento pelo princípio de Hamilton, as leis de conservação pelo teorema de Noether e a transição da física clássica para a física quântica pelo formalismo de integral de trajetória<sup>1</sup> [14].

Na física clássica, quando alguma transformação é feita no sistema sem que se altere a ação, as leis físicas, que neste caso são as equações de movimento, permanecem inalteradas. Assim, o sistema é invariante sob tal transformação e dizemos então que existe uma simetria, onde estamos nos referindo a simetrias das leis físicas.

Em teoria clássica de campos a densidade de lagrangiana é função de campos e de suas derivadas, geralmente a lagrangiana não depende explicitamente das coordenadas, e os campos são funções das coordenadas

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x)). \quad (2.1)$$

Assim, uma transformação que caracteriza uma simetria pode ser uma transformação nas coordenadas e nos campos ou somente nos campos.

As transformações dos campos podem ser globais, em que o parâmetro que caracteriza a transformação não depende das coordenadas; ou locais, em que este

---

<sup>1</sup>Esta transição também pode ser feita por quantização canônica que é um formalismo hamiltoniano.

parâmetro depende das coordenadas. Um exemplo são as transformações de fase para o campo  $\psi$ , global  $\psi(x) \rightarrow e^\alpha \psi(x)$ , com  $\alpha$  constante; e local  $\psi(x) \rightarrow e^{\alpha(x)} \psi(x)$ , com  $\alpha$  dependendo das coordenadas  $x_\mu$ .

Existem também transformações espaço-temporais, que são transformações nas coordenadas que induzem também transformações nos campos. Estas podem ser transformações discretas, como transformações de reversão espacial  $(x_i, t) \rightarrow (-x_i, t)$  ou inversão temporal  $(x_i, t) \rightarrow (x_i, -t)$ ; ou transformações contínuas, que de um modo geral tem a forma

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu(x), \quad (2.2)$$

onde  $x'(x)$  significa que as novas coordenadas são funções das antigas. Esta última classe inclui várias transformações importantes como as transformações de Lorentz, as translações, etc., bem como a transformação de escala

$$x_\mu \rightarrow \lambda x_\mu, \quad (2.3)$$

que é a transformação fundamental para este trabalho, e sobre a qual faremos um estudo mais detalhado no próximo capítulo.

Um resultado de fundamental importância para o que estudaremos a seguir é o teorema de Noether, que relaciona simetrias a leis de conservação. Este teorema afirma que para cada simetria da ação, excluindo aquelas por transformações discretas, existe uma lei de conservação correspondente.

Uma lei de conservação pode ser representada pela equação de continuidade

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (2.4)$$

onde a corrente  $j^\mu$  é conhecida como corrente de Noether. O teorema de Noether nos fornece também a corrente  $j^\mu$  em termos dos parâmetros que definem a transformação em questão e dos campos envolvidos na lagrangiana do sistema.

Discutiremos na próxima seção alguns exemplos de correntes sem, no entanto, demonstra-las, pois nossa intenção é apenas fazer uma rápida introdução ao tema<sup>2</sup>.

### 2.1.1 Correntes Conservadas

Considere a lagrangiana de Dirac

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi, \quad (2.5)$$

---

<sup>2</sup>As demonstrações podem ser encontradas em vários livros-textos como em [17-21].

onde  $\psi$  é o espinor de Dirac,  $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ ,  $\gamma^\mu$  são as matrizes de Dirac e  $m$  é a massa do elétron.<sup>3</sup>

Um exemplo importante de corrente conservada nesta teoria é a corrente vetorial

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad (2.6)$$

cuja conservação está associada a transformação de fase global  $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi$ . Existem vários outros exemplos, vamos discutir dois casos gerais que vão ser úteis ao longo do texto.

### Tensor Energia-Momento

Uma translação infinitesimal é definida pela transformação nas coordenadas  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu$  e nos campos  $\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x') = \Phi(x)$  [17]. Resulta do teorema de Noether que cada componente  $\mu$  do tensor  $\Theta^{\mu\nu}$  definido por<sup>4</sup>

$$\Theta^{\mu\nu} = \Pi^\mu \partial^\nu \Phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad \text{com} \quad \Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)}, \quad (2.7)$$

é a corrente conservada associada a simetria da translação da componente  $\mu$  de  $x^\mu$  e obedece a equação da continuidade (se o sistema for simétrico sob esta transformação)

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0. \quad (2.8)$$

Na definição (2.7) os campos  $\Phi(x)$ 's podem ser escalares, vetoriais ou espinoriais<sup>5</sup>. Se existir mais de um tipo de campo (escalar e espinor por exemplo) devemos fazer uma soma em todos os campos no termo<sup>6</sup>  $\Pi^\mu \partial^\nu \Phi$ , bem como em termos análogos ao longo do texto.

Para entendermos o significado físico de  $\Theta^{\mu\nu}$  identificamos as cargas de Noether como sendo  $\int d^3x \Theta^{0\nu}$ , pois de (2.8)  $\frac{\partial \Theta^{0\nu}}{\partial t} + \frac{\partial \Theta^{i\nu}}{\partial x^i} = 0$ , ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d^3x \Theta^{0\nu} = - \int d^3x \frac{\partial \Theta^{i\nu}}{\partial x^i}, \quad (2.9)$$

<sup>3</sup>Para detalhes sobre estas definições veja [17–19, 21] por exemplo.

<sup>4</sup>Para demonstração veja por exemplo [20].

<sup>5</sup>Onde omitimos os índices para facilitar a notação, mas estes serão explicitados quando necessário.

<sup>6</sup>Se a lagrangiana estudada depender dois campos  $\psi$  e  $\phi$ , por exemplo, este termo será  $\Pi_\psi^\mu \partial^\nu \psi + \Pi_\phi^\mu \partial^\nu \phi$ .

mas

$$\Theta^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Phi)} \partial^0 \Phi - \mathcal{L}, \quad (2.10)$$

é a densidade de hamiltoniano do sistema, e

$$\Theta^{0i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Phi)} \partial^i \Phi, \quad (2.11)$$

é a densidade de momento canônico. O quadrivetor de energia-momento  $P^\mu$  pode assim ser definido em função do tensor  $\Theta^{\mu\nu}$

$$P^\mu \equiv \int d^3x \Theta^{0\mu}, \quad (2.12)$$

e com isso  $\Theta^{\mu\nu}$  é chamado de tensor energia-momento.

É importante observar que existe uma liberdade na definição deste tensor, pois pode ser somado um termo a ele sem alterar as equações (2.8) e (2.12). Esta liberdade é usada por exemplo para simetrizá-lo, já que ele nem sempre é simétrico. A dedução do tensor simétrico e uma discussão sobre a liberdade citada para a definição do tensor energia-momento encontram-se no apêndice A.

### Tensor Densidade de Momento Angular

As transformações infinitesimais de Lorentz são definidas por  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu{}_\nu x^\nu$ , com  $\epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}$ . A transformação para os campos pode ser escrita de um modo geral por [17]

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x') = \Phi(x) + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \Phi(x), \quad (2.13)$$

onde  $S^{\mu\nu}$  é a matriz de spin do campo e depende das propriedades de transformação deste. Estas propriedades devem ser tais que mantenham a simetria sob transformações de Lorentz para que a teoria seja relativística. Assim, impondo a invariância de Lorentz obtemos a matriz  $S^{\mu\nu}$  para cada campo.

O tensor que representa a corrente de Noether associada a simetria sob esta transformação é dado por<sup>7</sup>

$$\mathcal{M}^{\rho\mu\nu} = \Pi^\rho S^{\mu\nu} \Phi + x^\mu \Theta^{\rho\nu} - x^\nu \Theta^{\rho\mu}, \quad (2.14)$$

que obedece a equação de continuidade

$$\partial_\rho \mathcal{M}^{\rho\mu\nu} = 0, \quad (2.15)$$

---

<sup>7</sup>Para demonstração veja por exemplo [20].

e as quantidades conservadas associadas são

$$M^{\mu\nu} = \int d^3x \mathcal{M}^{0\mu\nu}. \quad (2.16)$$

O tensor  $\mathcal{M}^{\rho\mu\nu}$  é chamado de tensor de densidade de momento angular, pois  $M^{ij}$  é o operador momento angular do campo.

## 2.2 Anomalias

Numa teoria clássica uma simetria pode ser representada pela lei de conservação associada, ou seja, pela equação da continuidade (2.4), pois a validade da equação implica na existência da simetria. Em TQC a equação da continuidade para uma corrente implica numa *identidade de Ward* (IW), associada a mesma corrente, mas que relaciona funções de Green. Assim, uma simetria pode ser verificada em TQC através da IW correspondente, e a violação da IW da corrente clássica (que é conhecida por alguns autores como IW ingênua) significa a quebra da simetria.

Para ilustrar, considere a corrente  $j_\mu^5 = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5\psi$ , conhecida como corrente axial, onde  $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$  e  $\psi$  é um campo espinorial. Esta corrente é conservada se o férmion  $\psi$  for não massivo e tem a IW associada dada por

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda} = 2mT_{\mu\nu}, \quad (2.17)$$

onde  $T_{\mu\nu\lambda}$  e  $T_{\mu\nu}$  são amplitudes no espaço dos momentos e  $q$  é um dos momentos envolvidos no processo em questão. A demonstração para a conservação desta corrente é feita utilizando as equações de movimento, e para a IW (2.17) utilizando essa lei de conservação, e assim esta é a IW da corrente clássica. Estas demonstrações estão feitas no capítulo 4 da referência [23]. Aqui vamos apenas citar os resultados para exemplificar uma anomalia. Nesta referência está demonstrado também que quando as mesmas amplitudes são calculadas diretamente pelas regras de Feynman se obtém

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda} = 2mT_{\mu\nu} + \mathcal{A}_{\mu\nu}, \quad (2.18)$$

onde

$$\mathcal{A}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}k_1^\alpha k_2^\beta, \quad (2.19)$$

é a anomalia em questão, sendo  $k_1$  e  $k_2$  momentos de partículas envolvidas no processo.

No próximo capítulo iremos estudar a anomalia de escala seguindo estes mesmos passos: Primeiro obteremos a IW associada a simetria e depois calcularemos as amplitudes relacionadas diretamente pelas regras de Feynman para obter a anomalia. Assim, estudaremos a anomalia apenas do ponto de vista da teoria de perturbação. Existe, no entanto, vários métodos de estudo de anomalias, muitos dos quais incluem modernas áreas da matemática como geometria diferencial, co-homologia e topologia. Estes métodos podem ser encontradas, por exemplo, na referência [23] que enfatiza tais métodos matemáticos e fala sobre os várias aspectos das anomalias em TQC. Já a referência [24] trata especificamente do método de Fijikawa, método este que utiliza a formulação da integral de trajetória da teoria quântica e mostra que, nesta formulação, cada anomalia surge pelo fato da medida da integral de trajetória não ser invariante sob a transformação relacionada.

# Capítulo 3

## Anomalia de Escala

### 3.1 Simetria de Escala

Seguindo a discussão do capítulo anterior sobre simetrias, vamos estudar a transformação de escala e mostrar que ela resulta em uma simetria da ação quando a lagrangiana não depender de parâmetros dimensionais.

Podemos representar a transformação de escala nas coordenadas por

$$x \rightarrow x' = e^\epsilon x, \quad (3.1)$$

com  $\epsilon$  real. O conjunto das transformações deste tipo forma um grupo contínuo abeliano<sup>1</sup>.

Para descobrir qual é a transformação nos campos, começaremos considerando campos clássicos. Considerando  $\Phi$  um campo genérico<sup>2</sup>, podemos representar a transformação correspondente a (3.1) para  $\Phi$  como

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x') = T(\epsilon)\Phi(x), \quad (3.2)$$

onde  $T(\epsilon)$  é uma representação do grupo de transformações de escala para os campos, já que esta transformação deve fazer parte também de um grupo contínuo e depender do mesmo parâmetro  $\epsilon$ . Assim, podemos representar a transformação

---

<sup>1</sup>Duas transformações quaisquer do grupo são sempre comutativas:  $e^{\epsilon_1}e^{\epsilon_2} = e^{\epsilon_2}e^{\epsilon_1}$ .

<sup>2</sup>Que pode ser campo escalar, espinorial ou vetorial, onde devemos utilizar matrizes ou índices de Lorentz quando for o caso. Vamos omitir os índices para simplificar a notação, utilizando-os somente quando necessário.



por<sup>3</sup>  $T(\epsilon) = \exp(\epsilon D)$ , mas veremos que para uma lagrangiana clássica independente de parâmetros dimensionais teremos simetria se escolhermos a matriz  $D$  tal que multiplique cada campo bosônico por -1 e fermiônico por -3/2. Desta forma, para simplificar, vamos escrever  $T(\epsilon) = \exp(-\epsilon d_\Phi)$ , onde  $d_\Phi$  assumirá um valor específico para cada campo<sup>4</sup>. Assim reescrevemos (3.2) como

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x') = \exp(-\epsilon d_\Phi) \Phi(x). \quad (3.3)$$

Vejam os um exemplo de como uma teoria pode ser invariante sob esta transformação. Considere a densidade de lagrangiana de Maxwell sem fonte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (3.4)$$

onde  $F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$  e  $A^\mu = (\phi, \vec{A})$  é o potencial eletromagnético.

Após a transformação,

$$S \rightarrow S' = \int d^4x' \mathcal{L}(A'_\nu(x'), \partial'_\mu A'_\nu(x')), \quad (3.5)$$

com  $\partial'_\mu = e^{-\epsilon} \partial_\mu$  e  $A'_\nu(x') = e^{-d_\epsilon} A_\nu(x)$ , ou seja,  $F'^{\mu\nu} = e^{-(d+1)\epsilon} F^{\mu\nu}$ ,

$$\begin{aligned} S' &= e^{4\epsilon} \int d^4x \left( e^{-(2+2d)\epsilon} \left(-\frac{1}{4}\right) F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \\ &= e^{(-2d+2)\epsilon} S, \end{aligned} \quad (3.6)$$

e assim  $A_\nu$  deve se transformar com  $d = 1$  para esta teoria ser invariante de escala.

Podemos obter a transformação para campos quânticos postulando que o valor esperado de um operador deve se transformar da mesma forma que a grandeza clássica relacionada [19]. Considerando  $|\alpha'\rangle = U(\epsilon)|\alpha\rangle$  a transformação de um vetor de estado no espaço de Hilbert, onde  $U(\epsilon)$  deve ser um operador linear e unitário<sup>5</sup> ( $U^\dagger = U^{-1}$ ), obtemos

$$\langle\beta|\Phi(x)|\alpha\rangle \rightarrow \langle\beta'|\Phi(x')|\alpha'\rangle = \exp(-\epsilon d_\Phi) \langle\beta|\Phi(x)|\alpha\rangle, \quad (3.7)$$

---

<sup>3</sup>Aqui assumimos a propriedade de uma transformação do grupo de Lie poder ser representado pela exponencial da álgebra de Lie correspondente. Para detalhes veja por exemplo [20].

<sup>4</sup>Isto equivale a supor que a transformação seja linear que é o caso de todos os campos que iremos tratar neste trabalho. Veja na seção 2.4 da referência [16] um exemplo de uma transformação de escala não linear.

<sup>5</sup>Para conservar a norma.

que resulta em

$$\Phi(x) \rightarrow U^{-1}(\epsilon)\Phi(x')U(\epsilon) = \exp(-\epsilon d_\Phi)\Phi(x), \quad (3.8)$$

ou

$$U(\epsilon)\Phi(x)U^{-1}(\epsilon) = \exp(\epsilon d_\Phi)\Phi(x'). \quad (3.9)$$

Para o caso de campos livres, podemos obter a dimensão de escala usando as relações de comutação para tempos iguais que estes devem obedecer [14]. Para um campo escalar  $\phi$  e um espinor  $\Psi$  as relações são<sup>6</sup>

$$[\phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{y}, t)] = i\delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (3.10)$$

e

$$\{\Psi(\vec{x}, t), \bar{\Psi}(\vec{y}, t)\} = \gamma^0\delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.11)$$

Multiplicando as equações (3.10) e (3.11) pela esquerda por  $U$  e pela direita por  $U^{-1}$ , usando (3.9), e impondo que elas sejam invariantes, obtemos

$$\begin{aligned} [U\phi(\vec{x}, t)U^{-1}, U\dot{\phi}(\vec{y}, t)U^{-1}] &= [U\phi(\vec{x}, t)U^{-1}, \frac{\partial}{\partial t}(U\phi(\vec{y}, t)U^{-1})] \\ &= \exp((2d_\phi + 1)\epsilon)[\phi(\vec{x}', t'), \frac{\partial}{\partial t'}\phi(\vec{y}', t')] \\ &= \exp((2d_\phi + 1)\epsilon)i\delta(\vec{x}' - \vec{y}'), \end{aligned} \quad (3.12)$$

mas como  $\delta(ax_i) = \frac{1}{|a|}\delta(x_i)$ , ou seja,  $\delta(\vec{x}' - \vec{y}') = \delta(e^\epsilon\vec{x} - e^\epsilon\vec{y}) = e^{-3\epsilon}\delta(\vec{x} - \vec{y})$ ,

$$[U\phi(\vec{x}, t)U^{-1}, U\dot{\phi}(\vec{y}, t)U^{-1}] = \exp((2d_\phi - 2)\epsilon)i\delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (3.13)$$

e obtemos

$$d_\phi = 1 \quad (3.14)$$

para que a relação (3.10) volte a ser satisfeita.

Analogamente,

$$\{U\Psi(\vec{x}, t)U^{-1}, U\bar{\Psi}(\vec{y}, t)U^{-1}\} = \{U\Psi(\vec{x}, t)U^{-1}, U\Psi^\dagger(\vec{y}, t)\gamma^0U^{-1}\}, \quad (3.15)$$

com

$$\begin{aligned} U\Psi^\dagger\gamma^0U^{-1} &= U\Psi^\dagger U^{-1}U\gamma^0U^{-1} = U\Psi^\dagger U^\dagger U\gamma^0U^{-1} \\ &= (U\Psi U^\dagger)^\dagger U\gamma^0U^{-1} = (U\Psi U^{-1})^\dagger\gamma^0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

---

<sup>6</sup>Veja por exemplo [17].

obtemos

$$\begin{aligned}
\{U\Psi(\vec{x}, t)U^{-1}, U\bar{\Psi}(\vec{y}, t)U^{-1}\} &= \exp(2d_\Psi\epsilon) \left\{ \Psi(\vec{x}', t'), \bar{\Psi}(\vec{y}', t') \right\} \\
&= \exp(2d_\Psi\epsilon)\delta(\vec{x}' - \vec{y}') \\
&= \exp((2d_\Psi - 3)\epsilon)\delta(\vec{x} - \vec{y})
\end{aligned} \tag{3.17}$$

e

$$d_\Psi = 3/2. \tag{3.18}$$

A unidade da lagrangiana deve ser  $[\mathcal{L}] = [m]^4$ , pois  $S = \int d^4x\mathcal{L}$  e  $[x_i] = [x_0] = [m]^{-1}$ . Podemos então saber a unidade dos campos observando a unidade dos termos cinéticos da lagrangiana, que para campos escalares tem a forma  $\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$ , e para campos espinoriais,  $i\bar{\Psi}\not{\partial}\Psi$ <sup>7</sup>, e assim

$$[\phi] = [m]^1 \quad \text{e} \quad [\Psi] = [m]^{\frac{3}{2}}. \tag{3.19}$$

Comparando com  $d_\phi$  e  $d_\Psi$ , observamos que a dimensão de escala do campo é igual a dimensão de unidade (potência da unidade de massa de sua unidade).

Observando a equivalência entre dimensão de unidade e dimensão de escala para os campos é possível concluir que a ação de uma teoria descrita por uma densidade de lagrangiana que não possui termos dimensionais será invariante de escala, pois cada termo da densidade de lagrangiana vai ser escalonada por um mesmo fator ( $\lambda^4$  se  $x \rightarrow \lambda x$ ) após a transformação, que vai ser compensado pela medida de integração ( $d^4x \rightarrow \lambda^{-4}d^4x$ ) na expressão da ação  $S$ . Já quando existir termos com parâmetros dimensionais na lagrangiana a ação não será mais invariante devido a estes termos que vão ser escalonados por um fator diferente (por exemplo  $m^2\phi^2 \rightarrow \lambda^2m^2\phi^2$ ).

## 3.2 Corrente de Dilatação

A corrente de dilatação é a corrente de Noether associada a simetria de escala. Para obtê-la, vamos considerar o teorema de Noether, que pode ser estudado como segue (em uma versão simples e própria para teoria de campos<sup>8</sup>).

<sup>7</sup> $\not{\partial} \equiv \gamma^\mu B_\mu$ , onde  $\gamma^\mu$  são matrizes de Dirac (veja (2.5)).

<sup>8</sup>Para discussão completa veja por exemplo [20].

Usando as equações de Euler-Lagrange<sup>9</sup>, obtemos a variação da lagrangiana  $\delta\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu\Phi)$  para uma transformação do tipo  $\Phi(x) \rightarrow \Phi(x) + \delta\Phi(x)$  como sendo

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi}\delta(\partial_\mu\Phi) = (\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi})\delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi}\partial_\mu(\delta\Phi), \quad (3.20)$$

onde foi usado que  $\delta(\partial_\mu\Phi) = \partial_\mu(\delta\Phi)$ , pois a variação  $\delta\Phi$  que estamos considerando é independente das coordenadas<sup>10</sup>. Assim

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu(\Pi^\mu\delta\Phi), \quad (3.21)$$

onde  $\Pi^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}$  é o quadrimomento conjugado ao campo  $\Phi$ .

Se para tal transformação a variação da lagrangiana, obtida agora sem o uso das equações de Euler-Lagrange, pode ser escrita como uma quadridivergência

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu\mathcal{F}^\mu, \quad (3.22)$$

então, subtraindo a equação (3.22) da (3.21), concluímos que a corrente  $J^\mu$  definida por

$$J^\mu = \Pi^\mu\delta\Phi - \mathcal{F}^\mu, \quad (3.23)$$

obedecerá a equação da continuidade

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (3.24)$$

A corrente  $J^\mu$  é conhecida como corrente de Noether associada a transformação e sua componente  $J^0$  conhecida como densidade<sup>11</sup> de carga de Noether.

A condição (3.22) é equivalente a invariância da ação, pois

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \partial_\mu\mathcal{F}^\mu \quad (3.25)$$

leva a

$$S \rightarrow S + \int d^4x \partial_\mu\mathcal{F}^\mu, \quad (3.26)$$

---

<sup>9</sup> $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi} = 0$ , para demonstração veja [20].

<sup>10</sup>Estamos considerando variação no mesmo ponto, ou seja,  $\delta\Phi(x) \equiv \Phi'(x) - \Phi(x)$ , e assim,  $\delta(\partial_\mu\Phi(x)) = \partial_\mu\Phi'(x) - \partial_\mu\Phi(x) = \partial_\mu\delta\Phi(x)$ .

<sup>11</sup>Sua integral no volume é uma quantidade conservada no tempo de acordo com a equação da continuidade.

e podemos desprezar o termos de superfície<sup>12</sup>  $\int d^4x \partial_\mu \mathcal{F}^\mu$ . Temos assim a relação entre cada simetria (invariância da ação) e a lei de conservação correspondente (equação da continuidade).

Podemos estudar uma transformação de escala infinitesimal usando  $e^\epsilon = 1 + \epsilon$  (desprezando  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ ) e reescrevendo a equação (3.9) como

$$\begin{aligned} U(\epsilon)\Phi(x)U^{-1}(\epsilon) &= \exp(\epsilon d_\Phi)\Phi(e^\epsilon x) \\ &= (1 + \epsilon d_\Phi)\left(\Phi(x) + ((1 + \epsilon)x_\mu - x_\mu)\partial^\mu\Phi(x)\right) \\ &= \Phi(x) + \epsilon(d_\Phi + x_\mu\partial^\mu)\Phi(x), \end{aligned} \quad (3.27)$$

que nos fornece

$$\delta\Phi(x) = U(\epsilon)\Phi(x)U^{-1}(\epsilon) - \Phi(x) = \epsilon(d_\Phi + x_\mu\partial^\mu)\Phi(x). \quad (3.28)$$

Vamos assumir que se a lagrangiana não conter nenhum termo dimensional a variação de cada termo vai ser do tipo

$$\delta\mathcal{L}_a = \epsilon(4 + x_\mu\partial^\mu)\mathcal{L}_a = \epsilon\partial^\mu(x_\mu\mathcal{L}_a), \quad (3.29)$$

onde o índice “a” se refere a cada termo da lagrangiana. Este resultado será demonstrado para a lagrangiana de interesse, mas podemos justificar essa suposição pelo fato que uma variação deste tipo deixa a ação invariante e está de acordo com o que foi discutido (final da seção 3.1 p.18) que ela deve mesmo ser invariante para lagrangianas sem termos dimensionais.

Vejamus como exemplo uma lagrangiana que contenha um termo do tipo  $\mathcal{L}_b = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi$ . A variação  $\delta\mathcal{L}_b$  pode ser calculada usando

$$\delta\mathcal{L}_b = \frac{\partial\mathcal{L}_b}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}_b}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) = \frac{\partial\mathcal{L}_b}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi), \quad (3.30)$$

e como  $\delta\phi$  é independente das coordenadas<sup>13</sup>,  $\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu\delta\phi$ , ou,

$$\begin{aligned} \delta(\partial_\mu\phi) &= \partial_\mu(\epsilon(d_\phi + x_\nu\partial^\nu)\phi(x)) = \epsilon(d_\phi + 1 + x_\nu\partial^\nu)\partial_\mu\phi \\ &= \epsilon(2 + x_\nu\partial^\nu)\partial_\mu\phi, \end{aligned} \quad (3.31)$$

---

<sup>12</sup>Os campos devem ser funções bem comportadas no infinito para descrever entidades físicas.

<sup>13</sup>Veja nota 10 da página anterior.

onde usamos  $d_\phi = 1$  obtido anteriormente (veja equação (3.14)), e como  $\frac{\partial \mathcal{L}_b}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi$  obtemos

$$\delta \mathcal{L}_b = \partial^\mu \phi (\epsilon(2 + x_\nu \partial^\nu) \partial_\mu \phi) = \epsilon(2\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + x^\nu (\partial^\mu \phi) (\partial_\nu \partial_\mu \phi)), \quad (3.32)$$

mas

$$\partial_\nu (\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi) = (\partial_\nu \partial^\mu \phi) \partial_\mu \phi + \partial^\mu \phi (\partial_\nu \partial_\mu \phi) = 2\partial^\mu \phi (\partial_\nu \partial_\mu \phi), \quad (3.33)$$

e assim

$$\delta \mathcal{L}_b = \frac{1}{2} \epsilon (4 + x^\nu \partial_\nu) (\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi) = \epsilon (4 + x^\nu \partial_\nu) \mathcal{L}_b = \epsilon \partial_\nu (x^\nu \mathcal{L}_b). \quad (3.34)$$

Se calcularmos  $\delta \mathcal{L}_a$  para cada termo “a” que seja independente de parâmetro dimensional obteremos uma variação na forma do resultado (3.34).

Um exemplo mais geral pode ser feito considerando um termo que contenha  $\mathbb{A} \bar{\psi} \psi$  (veja logo após as equações (2.5) e (3.4) respectivamente as definições de  $A^\mu$  e  $\psi$ ) que tem dimensão de escala 4. A variação deste termo vai ser

$$\begin{aligned} \delta(\mathbb{A} \bar{\psi} \psi) &= \delta(\mathbb{A}) \bar{\psi} \psi + \mathbb{A} \delta(\bar{\psi}) \psi + \mathbb{A} \bar{\psi} \delta(\psi) \\ &= ((1 + x^\nu \partial_\nu) \mathbb{A}) \bar{\psi} \psi + \mathbb{A} ((\frac{3}{2} + x^\nu \partial_\nu) \bar{\psi}) \psi + \mathbb{A} \bar{\psi} ((\frac{3}{2} + x^\nu \partial_\nu) \psi) \\ &= (4 + x^\nu \partial_\nu) (\mathbb{A} \bar{\psi} \psi). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Generalizando este resultado, vemos que a variação de cada termo será igual ao termo multiplicado pela esquerda por  $(d_{\text{termo}} + x^\nu \partial_\nu)$ , e como termos sem parâmetros dimensionais tem dimensão de escala igual a dimensão de massa que é igual a 4, a variação total de uma lagrangiana independente de parâmetros dimensionais vai ser

$$\delta \mathcal{L} = \epsilon \partial_\nu (x^\nu \mathcal{L}). \quad (3.36)$$

A relação acima satisfaz a condição (3.22) com

$$\mathcal{F}^\mu = \epsilon x^\mu \mathcal{L} \quad (3.37)$$

e portanto tem uma corrente de Noether definida por (3.23), (3.28) e (3.37) como sendo

$$\begin{aligned} J^\mu &= \Pi^\mu \delta \Phi - \mathcal{F}^\mu = \epsilon (\Pi^\mu (d_\Phi + x_\nu \partial^\nu) \Phi - x^\mu \mathcal{L}) \\ &= \epsilon (\Pi^\mu d_\Phi \Phi + x_\nu (\Pi^\mu \partial^\nu \Phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L})). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Como  $\epsilon$  é um parâmetro arbitrário podemos definir  $\mathcal{D}^\mu = \epsilon^{-1} J^\mu$ , e usar a definição do tensor energia-momento canônico (veja equação (2.7) )  $\Theta^{\mu\nu} = \Pi^\mu \partial^\nu \Phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$  para obter

$$\mathcal{D}^\mu = \Pi^\mu d_\Phi \Phi + x_\nu \Theta^{\mu\nu}. \quad (3.39)$$

Assim, o vetor  $\mathcal{D}^\mu$ , conhecido como corrente de dilatação, é a corrente de Noether associada a simetria de escala e satisfaz a equação da continuidade

$$\partial_\mu \mathcal{D}^\mu = 0. \quad (3.40)$$

Uma consideração importante deve ser feita a respeito de quando existir algum termo dependente de parâmetro dimensional (como a massa por exemplo). Neste caso a variação da lagrangiana não vai ser mais uma quadridivergência como em (3.36). Se conseguirmos escrevê-la como uma quadridivergência somada a um termo  $\mathcal{A}$

$$\delta \mathcal{L} = \epsilon \partial_\nu (x^\nu \mathcal{L}) + \epsilon \mathcal{A}, \quad (3.41)$$

então a equação da continuidade para  $\mathcal{D}^\mu$  não será mais válida, mas se transformará em

$$\partial_\mu \mathcal{D}^\mu = \mathcal{A}, \quad (3.42)$$

pois dos resultados e definições anteriores sabemos que

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu (\Pi^\mu \delta \Phi), \quad (3.43)$$

e

$$\delta \mathcal{L} = \epsilon \partial_\nu (x^\nu \mathcal{L}) + \epsilon \mathcal{A} = \partial_\nu \mathcal{F}^\nu + \epsilon \mathcal{A} \quad (3.44)$$

com

$$J^\mu \equiv \Pi^\mu \delta \Phi - \mathcal{F}^\mu \quad \text{e} \quad \mathcal{F} \equiv \epsilon x^\mu \mathcal{L}, \quad (3.45)$$

e assim,

$$\partial_\mu (\Pi^\mu \delta \Phi) = \partial_\nu \mathcal{F}^\nu + \epsilon \mathcal{A}, \quad \text{ou,} \quad \partial_\mu J^\mu = \epsilon \mathcal{A}, \quad (3.46)$$

que com

$$\mathcal{D}^\mu \equiv \epsilon^{-1} J^\mu, \quad (3.47)$$

demonstra o resultado (3.42).

Vejamos como exemplo a lagrangiana de Klein-Gordon

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \mu^2\phi^2) = \mathcal{L}_b + \mathcal{L}_c \quad (3.48)$$

em que  $\mathcal{L}_b = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi$ ,  $\mathcal{L}_c = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2$ ,  $\phi$  é um campo escalar real e  $\mu$  a massa associada a este campo. Da equação (3.34) sabemos que  $\delta\mathcal{L}_b = \epsilon\partial_\nu(x^\nu\mathcal{L}_b)$  e calculando  $\delta\mathcal{L}_c$ ,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_c &= \frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) = \frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial\phi}\delta\phi \\ &= -\epsilon(\mu^2\phi)(d_\phi + x^\nu\partial_\nu)\phi = -\epsilon(d_\phi\mu^2\phi^2 + \mu^2\phi x^\nu\partial_\nu\phi), \end{aligned} \quad (3.49)$$

que usando  $d_\phi = 1$  do resultado (3.14), e  $\partial_\nu\phi^2 = 2\phi\partial_\nu\phi$ , resulta em

$$\delta\mathcal{L}_c = \epsilon(4 + x^\nu\partial_\nu)(-\frac{1}{2}\mu^2\phi^2) + \mu^2\phi^2 = \epsilon(4 + x^\nu\partial_\nu)(\mathcal{L}_c) + \mu^2\phi^2. \quad (3.50)$$

Assim,  $\mathcal{A} = \mu^2\phi^2$  e usando (3.42) obtemos

$$\partial_\mu\mathcal{D}^\mu = \mu^2\phi^2, \quad (3.51)$$

de onde pode-se concluir que a quadridivergência da corrente de dilatação é proporcional ao termo da lagrangiana que contém parâmetro dimensional. Este resultado particular é observado em outras lagrangianas também, como é o caso da lagrangiana da eletrodinâmica que iremos estudar em seguida.

### 3.2.1 Relação com o Tensor Energia-momento Simétrico

O tensor energia-momento canônico  $\Theta_{\mu\nu} = \Pi_\mu\partial_\nu\Phi - g_{\mu\nu}\mathcal{L}$  não é simétrico, mas pode ser simetrizado e o tensor simétrico conhecido como tensor de Belinfante<sup>14</sup> é definido por

$$T_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu} + \partial^\rho f_{\mu\nu\rho} \quad (3.52)$$

com

$$f_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}(\Pi_\rho S_{\mu\nu}\Phi - \Pi_\mu S_{\rho\nu}\Phi + \Pi_\nu S_{\mu\rho}\Phi), \quad (3.53)$$

---

<sup>14</sup>Veja o apêndice A.



onde  $S_{\mu\nu}$  é a matriz de spin do campo  $\Phi$  definida pela transformação infinitesimal de Lorentz do campo.

Existe ainda um outro tensor energia-momento (conhecido na literatura por *improved energy-momentum tensor*), que foi proposto por Callan, Coleman e Jackiw [25] e é definido por

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{6}(\partial_\mu\partial_\nu - g_{\mu\nu}\partial^2)\phi. \quad (3.54)$$

Este nos interessa por possibilitar uma expressão simples para a corrente de dilatação dada por  $\mathcal{D}^\mu = x_\nu \mathcal{T}^{\nu\mu}$ . Note que este tensor é diferente do simétrico  $T_{\mu\nu}$  apenas por um fator que depende somente de campos escalares  $\phi$ 's, mas como neste trabalho vamos estudar o caso de uma lagrangiana que depende de campos espinoriais ( $\psi$ ) e vetoriais ( $A_\mu$ ), mas não de campos escalares, nos limitaremos a demonstrar que para o nosso caso podemos escrever

$$\mathcal{D}_\mu = x^\nu T_{\nu\mu}, \quad (3.55)$$

que leva ao importante resultado

$$\begin{aligned} \partial_\mu \mathcal{D}^\mu &= g_{\nu\mu} T^{\mu\nu} + x_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} \\ &= T_\mu^\mu, \end{aligned} \quad (3.56)$$

onde foi usado  $\partial_\mu T^{\nu\mu} = 0$ , que deve ser satisfeito já que  $T^{\nu\mu}$  é um tensor energia-momento (ver demonstração no apêndice A).

A equação (3.56) identifica a quadridivergência da corrente de dilatação com o traço do tensor energia-momento simétrico e é um resultado que será muito útil neste trabalho.

Para demonstrar o resultado (3.55) segue da definição de  $\mathcal{D}^\mu$  (3.39) e de  $T^{\mu\nu}$  (3.52) que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\mu &= \Pi^\mu d_\Phi \Phi + x_\nu \Theta^{\mu\nu} = \Pi^\mu d_\Phi \Phi + x_\nu (T^{\mu\nu} - \partial_\rho f^{\mu\nu\rho}) \\ &= x_\nu T^{\mu\nu} + \Pi^\mu d_\Phi \Phi + g_{\rho\nu} f^{\mu\nu\rho} - \partial_\rho (x_\nu f^{\mu\nu\rho}). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Mas como  $f^{\mu\nu\rho}$  é anti-simétrico na troca de  $\mu$  por  $\rho$ , o termo  $\partial_\rho (x_\nu f^{\mu\nu\rho})$  vai ser zero quando for aplicado a quadridivergência  $\partial_\mu$ . Logo, podemos redefinir  $\mathcal{D}^\mu$  como

$$\mathcal{D}^\mu = x_\nu T^{\mu\nu} + \Pi^\mu d_\Phi \Phi + g_{\rho\nu} f^{\mu\nu\rho}, \quad (3.58)$$

e este vai ter a mesma quadridivergência do anterior que é o que nos interessa. Vamos mostrar na próxima seção que para os campos  $\psi$  e  $A_\nu$  teremos a relação

$$\Pi^\mu d_\Phi \Phi + g_{\rho\nu} f^{\mu\nu\rho} = 0, \quad (3.59)$$

garantindo o resultado desejado para  $\mathcal{D}^\mu$  (3.55).

### 3.2.2 Eletrodinâmica Quântica (EDQ)

Vamos estudar a corrente de dilatação e sua relação com o tensor energia momento para o caso da EDQ. Vários dos resultados utilizados nesta seção estão demonstrados no apêndice A.

Considere a densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m + e\cancel{A})\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (3.60)$$

que é a soma da lagrangiana de Dirac (2.5) com a lagrangiana de Maxwell (3.4) e o termo de interação

$$\mathcal{L}_I = e\bar{\psi}\cancel{A}\psi, \quad (3.61)$$

onde  $e$  é a carga (em módulo) do elétron. A construção de (3.60) pode ser feita impondo que a teoria seja invariante sob transformação de calibre ( $\psi \rightarrow e^\alpha\psi$  e  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha$ , com  $\alpha = \alpha(x)$ )<sup>15</sup>.

Para a lagrangiana (3.60) temos os seguintes resultados:

- Para o campo vetorial  $A_\nu$

$$\Pi_A^{\nu\lambda} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\lambda)} = F^{\lambda\nu}, \quad d_A = 1, \quad f_A^{\mu\nu\rho} = F^{\mu\rho}A^\nu, \quad (3.62)$$

e assim

$$\begin{aligned} \Pi_A^{\nu\lambda}d_A A_\lambda + g_{\rho\nu}f_A^{\mu\nu\rho} &= F^{\lambda\nu}A_\lambda + g_{\rho\nu}F^{\mu\rho}A^\nu \\ &= F^{\lambda\nu}A_\lambda - F^{\rho\mu}A_\rho = 0, \end{aligned} \quad (3.63)$$

onde foi usado que  $F^{\rho\mu} = -F^{\mu\rho}$ , demonstrando que o resultado (3.59) é válido para este campo.

---

<sup>15</sup>Para detalhes veja por exemplo [17–19,21]

- Para os campos espinoriais  $\psi$  e  $\bar{\psi}$

$$\Pi_{\psi}^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}, \quad \Pi_{\bar{\psi}}^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\bar{\psi})} = 0, \quad d_{\psi} = 3/2, \quad (3.64)$$

$$f_{\psi}^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{4}i\bar{\psi}(\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - g^{\rho\mu}\gamma^{\nu} - g^{\rho\nu}\gamma^{\mu} + g^{\mu\nu}\gamma^{\rho})\psi, \quad (3.65)$$

e assim

$$\begin{aligned} \Pi_{\psi}^{\mu}d_{\psi}\psi + g_{\rho\nu}f_{\psi}^{\mu\nu\rho} &= \frac{3}{2}i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi + g_{\rho\nu}\left(\frac{1}{4}i\bar{\psi}(\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - g^{\rho\mu}\gamma^{\nu} - g^{\rho\nu}\gamma^{\mu} + g^{\mu\nu}\gamma^{\rho})\psi\right) \\ &= \frac{3}{2}i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi + \frac{1}{4}i\bar{\psi}(\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}\gamma_{\rho} - g^{\rho\mu}\gamma_{\rho} - g_{\rho}^{\mu}\gamma^{\rho} + g^{\mu\nu}\gamma_{\nu})\psi \\ &= \frac{3}{2}i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi + \frac{1}{4}i\bar{\psi}(-2\gamma^{\mu} - \gamma^{\mu} - 4\gamma^{\mu} + \gamma^{\mu})\psi \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.66)$$

onde foi usado a identidade  $\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}\gamma_{\rho} = -2\gamma^{\mu}$ , demonstrando que o resultado (3.59) é válido também para estes campos.

Desta forma, para esta lagrangiana, a equação (3.55) é satisfeita e temos a relação entre a equação de continuidade para a corrente de dilatação e o tensor energia-momento simétrico (3.56)

$$\partial_{\mu}\mathcal{D}^{\mu} = T_{\mu}^{\mu}, \quad (3.67)$$

onde  $T^{\mu\nu}$  é o tensor de Belinfante da eletrodinâmica que é dado por<sup>16</sup>

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \frac{1}{4}i(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial^{\nu}\psi - (\partial^{\nu}\bar{\psi})\gamma^{\mu}\psi + \bar{\psi}\gamma^{\nu}\partial^{\mu}\psi - (\partial^{\mu}\bar{\psi})\gamma^{\nu}\psi) \\ &\quad + F^{\lambda\mu}F_{\lambda}^{\nu} + \frac{1}{2}e\bar{\psi}(\gamma^{\nu}A^{\mu} + \gamma^{\mu}A^{\nu})\psi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Vamos agora calcular explicitamente  $T_{\mu}^{\mu}$ ,

$$\begin{aligned} T_{\mu}^{\mu} &= \frac{1}{4}i(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - (\partial_{\mu}\bar{\psi})\gamma^{\mu}\psi + \bar{\psi}\gamma_{\mu}\partial^{\mu}\psi - (\partial^{\mu}\bar{\psi})\gamma_{\mu}\psi) \\ &\quad + F^{\lambda\mu}F_{\mu\lambda} + \frac{1}{2}e\bar{\psi}(\gamma_{\mu}A^{\mu} + \gamma^{\mu}A_{\mu})\psi - g_{\mu}^{\mu}\mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2}i(\bar{\psi}\not{\partial}\psi - (\partial_{\mu}\bar{\psi})\gamma^{\mu}\psi) - F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + e\bar{\psi}\not{A}\psi \\ &\quad - 4(\bar{\psi}(i\not{\partial} - m + e\not{A})\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) \\ &= -\frac{7}{2}i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - \frac{1}{2}i(\partial_{\mu}\bar{\psi})\gamma^{\mu}\psi - 3e\bar{\psi}\not{A}\psi + 4m\bar{\psi}\psi, \end{aligned} \quad (3.69)$$

<sup>16</sup>A demonstração deste tensor encontra-se na seção A.2 do apêndice A.

e usando as equações de Euler-Lagrange para  $\bar{\psi}$ ,  $i\cancel{D}\psi = -(e\cancel{A} - m)\psi$ , e para  $\psi$ ,  $i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu = \bar{\psi}(e\cancel{A} - m)$ , obtemos

$$\begin{aligned} T_\mu^\mu &= \frac{7}{2}\bar{\psi}(e\cancel{A} - m)\psi - \frac{1}{2}\bar{\psi}(e\cancel{A} - m)\psi - 3e\bar{\psi}\cancel{A}\psi + 4m\bar{\psi}\psi \\ &= m\bar{\psi}\psi, \end{aligned} \quad (3.70)$$

observando que este é um resultado clássico já que usamos as equações de Euler-Lagrange, e com ele podemos escrever a quadridivergência da corrente de dilatação da eletrodinâmica como sendo

$$\partial_\mu\mathcal{D}^\mu = m\bar{\psi}\psi. \quad (3.71)$$

Veremos na próxima seção que este resultado é diferente quando a lagrangiana é renormalizada, onde podem surgir termos adicionais no lado direito desta equação.

### 3.3 Quebra Anômala da Simetria de Escala

Em uma teoria renormalizada a constante de acoplamento  $g$  depende da escala de energia. Neste caso devemos esperar que uma teoria invariante de escala não seja mais invariante depois da renormalização devido a sua dependência da constante de acoplamento, pois se considerarmos a mesma teoria em escalas diferentes a constante de acoplamento deve mudar [21].

Para ter uma intuição de como a simetria é quebrada podemos pensar que

$$x \rightarrow x' = e^\epsilon x \Rightarrow \mu \rightarrow \mu' = e^{-\epsilon} \mu, \quad (3.72)$$

onde foi usado que a escala de renormalização  $\mu$ , que tem dimensão de massa  $[\mu] = [m]$ , será escalonada com o inverso da transformação de  $x$  (já que comprimento tem dimensão de  $[m]^{-1}$ ). E assim

$$g \rightarrow g' = g + (\mu' - \mu) \frac{\partial g}{\partial \mu} \approx g - \epsilon\beta, \quad (3.73)$$

onde  $\beta = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu}$  é uma função do grupo de renormalização<sup>17</sup>.

---

<sup>17</sup>Veja por exemplo [21].

A lagrangiana vai sofrer uma variação adicional, devido a variação de  $g$ , do tipo  $-\epsilon\beta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g}$  que é responsável pela quebra da simetria. Isto é apenas uma discussão intuitiva, pois supomos aqui que os campos renormalizados se transformem da mesma maneira que os campos nus. Existe uma discussão que em baixas ordens de teoria da perturbação pode-se explicar a anomalia supondo que a dimensão de escala do campo é alterada pela interação tornando-se a dimensão do campo livre somada a dimensão anômala. Não vamos entrar em detalhes desta discussão, mas ela pode ser encontrada em [11].

Nosso objetivo é calcular o termo anômalo com cálculos perturbativos usando a IW relacionada a equação de continuidade desta simetria. Vamos deduzir a IW da dilatação a nível clássico, isto é, a identidade que equivale a corrente ser conservada, e calculando explicitamente os termos desta identidade obteremos o termo que quebra a identidade, e que, por consequência, quebra a simetria.

### 3.4 IW da Corrente de Dilatação

Vamos estudar a IW associada a corrente de dilatação que é obtida como resultado de (3.42)

$$\partial_\mu\mathcal{D}^\mu = T_\mu^\mu, \quad (3.74)$$

onde

$$\mathcal{D}_\mu = x^\nu T_{\nu\mu}, \quad (3.75)$$

é a corrente de Noether associada a transformação de escala. A equação (3.74) representa uma simetria a nível clássico se  $T_\mu^\mu = 0$  que é o caso quando a lagrangiana que descreve a teoria não contém parâmetros dimensionais como vimos nas seções anteriores. A IW da corrente de dilatação que relaciona funções de Green no espaço dos momentos é

$$-iG_T^{(n)}(0, p_1, \dots, p_{n-1}) = (n(d_\Phi - 4) + 4 - \sum_k^{n-1} p_k \frac{\partial}{\partial p_k}) G^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}), \quad (3.76)$$

cuja demonstração encontra-se no apêndice B, onde  $G(\{p\})$  e  $G_T(k, \{p\})$  são funções de Green no espaço dos momentos definidas por

$$(2\pi)^4 \delta\left(\sum_{k=1}^n p_k\right) G^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}) \\ = \int d^4x_1 \dots d^4x_n \exp\left(i \sum_{k=1}^n p_k x_k\right) G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \quad (3.77)$$

e

$$(2\pi)^4 \delta\left(k + \sum_{k=1}^n p_k\right) G^{(n)}(k, p_1, \dots, p_{n-1}) \\ = \int d^4y d^4x_1 \dots d^4x_n \exp\left(i\left[ky + \sum_{k=1}^n p_k x_k\right]\right) G^{(n)}(y, x_1, \dots, x_n) \quad (3.78)$$

sendo as respectivas funções de Green no espaço das coordenadas definidas matematicamente por

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle 0|T \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n)|0\rangle \quad (3.79)$$

e

$$G_T^{(n)}(y, x_1, \dots, x_n) \equiv \langle 0|T T_\mu^\mu(y) \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n)|0\rangle, \quad (3.80)$$

onde o  $T$  que aparece a esquerda dos campos nas equações acima é o ordenamento temporal e  $|0\rangle$  é o estado fundamental da teoria com interação. O parâmetro  $d_\Phi$  na equação (3.76) é a dimensão de escala de cada campo na função de Green (3.79) e o termo  $4 + n(d_\Phi - 4)$  é igual a dimensão de massa da função de Green no espaço dos momentos como podemos verificar da expressão (3.77). Então, por analogia, podemos esperar que esta identidade para funções de vértice  $\Gamma_T^{(n)}(k, p_1, \dots, p_n)$  e  $\Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$  será

$$-i\Gamma_T^{(n)}(0, p_1, \dots, p_{n-1}) = \left(4 - nd_\Phi - \sum_k^{n-1} p_k \frac{\partial}{\partial p_k}\right) \Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}), \quad (3.81)$$

já que as funções de vértice  $\Gamma^{(n)}(p)$  são definidas<sup>18</sup> como as funções de Green conexas retirando-se os propagadores das pernas externas, onde as funções de Green conexas são as funções de Green considerando unicamente os diagramas de Feynman conexos,

$$\Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}) \equiv \prod_i [\Delta'_F(p_i)]^{-1} G_{con}^n(p_1, \dots, p_{n-1}), \quad (3.82)$$

---

<sup>18</sup>Veja [18]

onde  $\Delta'_F(p_i)$  representa o propagador do campo, e assim a dimensão de cada função de vértice é  $(n(d_\Phi - 4) + 4) - (2d_\Phi - 4)n = 4 - nd_\Phi$ .

A equação (3.81) é um resultado a nível clássico se usarmos  $T_\mu^\mu = m\bar{\psi}\psi$  (3.70), que foi obtido usando as equações de Euler-Lagrange. Ela representa a simetria de escala no caso em que a teoria não tem parâmetro dimensional como discutido acima, que implica  $m \rightarrow 0$ , e que deve ser quebrada pela renormalização já que esta introduz um parâmetro dimensional. Vamos calcular na próxima seção a IW para  $n = 2$ .

### 3.4.1 IW Para Funções de 2 Pontos

Vamos estudar a IW para o caso da função de Green na teoria da EDQ com  $n = 2$  e campos externos  $A_\nu$

$$G_{\mu\nu}^{(2)}(x, y) = \langle 0|T A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle \quad (3.83)$$

que é o propagador do fóton com correções radiativas, e a função de Green análoga envolvendo o operador  $T_\mu^\mu$

$$G_{T\mu\nu}^{(2)}(z, x, y) = \langle 0|T T_\lambda^\lambda(z)A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle. \quad (3.84)$$

Da equação (3.76) temos

$$-iG_{T\mu\nu}^{(2)}(0, p) = (2(d_A - 4) + 4 - p\frac{\partial}{\partial p})G_{\mu\nu}^{(2)}(p), \quad (3.85)$$

que usando  $d_A = 1$  (resultado (3.14)) resulta em

$$-iG_{T\mu\nu}^{(2)}(0, p) = (-2 - p\frac{\partial}{\partial p})G_{\mu\nu}^{(2)}(p). \quad (3.86)$$

Podemos obter a IW da dilatação relacionando funções de vértice. Para o caso em questão, como a função de Green de 2 pontos não tem diagramas desconexos, a função de vértice<sup>19</sup> é obtida por

$$G^{\mu\nu}(p) = D^{\mu\lambda}(p)\Gamma^{\lambda\rho}(p)D^{\rho\nu}(p), \quad (3.87)$$

---

<sup>19</sup>A função de vértice é definida como a função de Green conexa, isto é, sem as contribuições dos diagramas desconexos, retirando-se dela os propagadores externos.

onde

$$D^{\mu\nu}(p) = -\frac{ig^{\mu\nu}}{p^2} \quad (3.88)$$

é o propagador do fóton. Podemos definir a função de vértice análoga para  $G_T(p)$  como

$$G_T^{\mu\nu}(p) = D^{\mu\lambda}(p)\Gamma_T^{\lambda\rho}(0,p)D^{\rho\mu}(p). \quad (3.89)$$

Observe que

$$p\frac{\partial}{\partial p}D^{\mu\nu}(p) = -\frac{ig^{\mu\nu}}{p^2}(2p^2) = 2D^{\mu\nu}(p) \quad (3.90)$$

e

$$\begin{aligned} p\frac{\partial}{\partial p}G^{\mu\nu}(p) &= \left(p\frac{\partial}{\partial p}D^{\mu\lambda}(p)\right)\Gamma^{\lambda\rho}(p)D^{\rho\mu}(p) \\ &\quad + D^{\mu\lambda}(p)\left(p\frac{\partial}{\partial p}\Gamma^{\lambda\rho}(p)\right)D^{\rho\mu}(p) \\ &\quad + D^{\mu\lambda}(p)\Gamma^{\lambda\rho}(p)\left(p\frac{\partial}{\partial p}D^{\rho\mu}(p)\right) \\ &= 4D^{\mu\lambda}(p)\Gamma^{\lambda\rho}(p)D^{\rho\mu}(p) + D^{\mu\lambda}(p)\left(p\frac{\partial}{\partial p}\Gamma^{\lambda\rho}(p)\right)D^{\rho\mu}(p). \end{aligned} \quad (3.91)$$

Usando estes resultados em (3.85), obtemos

$$-i\Gamma_{T\mu\nu}^{(2)}(0,p) = (2d_A - p\frac{\partial}{\partial p})\Gamma_{\mu\nu}^{(2)}(p), \quad (3.92)$$

que usando o resultado  $d_A = 1$  (3.14) resulta em

$$\Gamma_{T\mu\nu}^{(2)}(0,p) = i(2 - p\frac{\partial}{\partial p})\Gamma_{\mu\nu}^{(2)}(p). \quad (3.93)$$

A equação acima está de acordo com o resultado para funções de vértice de  $n$  pontos (3.81) do capítulo anterior.

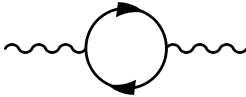
Podemos reescrever (3.93) como

$$\Delta_{\mu\nu}(0,p,-p) = (2 - p\frac{\partial}{\partial p})\Pi_{\mu\nu}(p,-p), \quad (3.94)$$

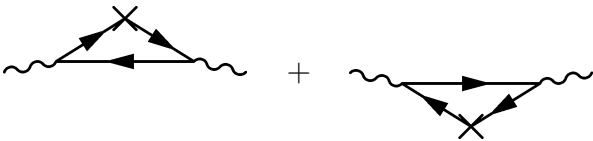


onde  $\Pi_{\mu\nu}(p, -p) \equiv i\Gamma_{\mu\nu}^{(2)}(p)$  e  $\Delta_{\mu\nu}(0, p, -p) \equiv \Gamma_T^{(2)}(0, p)$ .

Estas amplitudes são representadas a um laço em diagramas de Feynman como segue.

$$-i\Pi_{\mu\nu} \equiv \text{diagrama de um laço} \quad (3.95)$$


e

$$\Delta_{\mu\nu} \equiv \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} \quad (3.96)$$


A justificativa para o segundo diagrama ter esta forma é que a função  $G_T^{\mu\nu}(0, p)$ , correspondente a esta amplitude e que é a transformada de Fourier da função de 3 pontos  $G_T(x, y, z)$ , é análoga a função de Green  $G_{\mu\nu}(p)$ , porém com um dos momentos iguais a zero e com o vértice correspondente gerado pelo operador  $T_\mu^\mu = m\bar{\psi}\psi$  em vez de  $j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  que gera os outros vértices (veja equações (3.78) e (3.80)). Podemos assim usar as regras de Feynman para os últimos gráficos incluindo o termo  $im$  para o vértice marcado com  $X$  em analogia com  $ie\gamma^\mu$  dos vértices da QED.

## Capítulo 4

# Cálculo da Anomalia a um Laço por Regularização Implícita

Para calcular as amplitudes envolvidas na equação (3.94) é preciso utilizar algum esquema de regularização e renormalização. Como discutido anteriormente, este processo quebra a simetria de escala com a introdução de um parâmetro dimensional na lagrangiana, parâmetro este conhecido como escala de renormalização, necessária em qualquer esquema de renormalização. Esta quebra de simetria se caracteriza pela violação da IW da dilatação que pode ser identificada por um termo extra na equação (3.94) que é a nossa anomalia.

Realizamos o cálculo de ambos os lados da equação (3.94) separadamente, a nível de um laço, no limite  $m \rightarrow 0$  que é o caso em que existe simetria a nível clássico, e desta forma obtivemos a anomalia. Utilizamos a regularização implícita (RI) [3–5, 7–9], onde um dos passos deste esquema equivale a parametrizar as divergências de forma independente de regularização evitando o surgimento de anomalias espúrias, que são apenas um defeito do cálculo e que podem ser eliminados por uma renormalização adequada, não tendo assim significado físico. Faremos uma breve descrição do método e logo após apresentaremos os resultados com discussões das passagens importantes do cálculo, cujos detalhes encontram-se no apêndice C.

## 4.1 Método

A ideia principal da RI é separar as integrais divergentes em integrais finitas e integrais que não dependem do momento externo. Isto é feito por meio de manipulações matemáticas, onde podemos assumir que existe um regulador implícito para justificar a manipulação das divergências, mas separando-as como descrito acima elas não precisarão ser avaliadas depois, pois podemos absorvê-las pela definição das constantes de renormalização.

Faremos tal manipulação aplicando (quantas vezes for necessário até isolar todas divergências) a identidade

$$\begin{aligned} \frac{1}{[(k+p)^2 - m^2]} &= \frac{k^2 - m^2}{k^2 - m^2} \frac{1}{[(k+p)^2 - m^2]} = \frac{(k+p)^2 - m^2 - 2kp - p^2}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]} \\ &= \frac{1}{(k^2 - m^2)} - \frac{p^2 + 2kp}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

nas integrais divergentes, onde  $p$  é o momento externo e  $k$  o momento interno que será integrado. Desta forma não introduzimos nenhum regulador explicitamente nos cálculos, evitando contaminar a parte finita das amplitudes.

### 4.1.1 Renormalização e Invariância de Calibre

Como exemplo vamos estudar a renormalização do tensor polarização do vácuo  $\Pi_{\mu\nu}$ , onde omitiremos os detalhes dos cálculos, pois estes podem ser encontrados nos trabalhos [4, 6]. Apresentaremos apenas as passagens importantes para a compreensão do método e discutiremos também o papel da invariância de calibre.

Usando as regras de Feynman em (3.95), obtemos

$$-i\Pi_{\mu\nu} = - \int_k Tr\{e\gamma_\mu S(k)e\gamma_\nu S(k+p)\}, \quad (4.2)$$

onde  $S(k) = \frac{i}{\not{k} - m}$  é o propagador do fermion e  $\int_k \equiv \int d^4k/(2\pi)^4$ .

Após tomar o traço, manipular devidamente e utilizar a identidade (4.1), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\Pi_{\mu\nu}}{4ie^2} &= 2 \int_k \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} - g_{\mu\nu} \int_k \frac{k^2}{(k^2 - m^2)^2} + m^2 g_{\mu\nu} \int_k \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \\
&\quad - p^2 \int_k \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} + 8p^\alpha p^\beta \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^4} - 2p^\alpha p_\nu \int_k \frac{k_\alpha k_\mu}{(k^2 - m^2)^3} \\
&\quad - 2p^\alpha p_\mu \int_k \frac{k_\alpha k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} - p^2 g_{\mu\nu} \int_k \frac{k^2}{(k^2 - m^2)^3} - 4g_{\mu\nu} p_\alpha p_\beta \int_k \frac{k^2 k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^4} \\
&\quad + 2g_{\mu\nu} p_\alpha p_\beta \int_k \frac{k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^3} - \frac{b}{3} (p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) \cdot \\
&\quad \cdot \left( \frac{1}{3} + \frac{(2m^2 + p^2)}{p^2} Z_0(p^2; m^2) \right) \\
&= \tilde{\Pi}_{\mu\nu} + 4 \left( \Upsilon_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} p^2 \Upsilon_{\mu\nu}^0 + \frac{1}{3} p^\alpha p^\beta \Upsilon_{\mu\nu\alpha\beta}^0 - p^\alpha p_\mu \Upsilon_{\nu\alpha}^0 - \frac{1}{2} p^\alpha p^\beta g_{\mu\nu} \Upsilon_{\alpha\beta}^0 \right)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

com

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu} = \frac{4}{3} (p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) \left( I_{\log}(m^2) - b \left( \frac{1}{3} + \frac{(2m^2 + p^2)}{p^2} Z_0(p^2; m^2) \right) \right), \tag{4.4}$$

onde

$$Z_0(p^2; m^2) = \int_0^1 dz \ln \left[ \frac{p^2 z(z-1) + m^2}{m^2} \right], \tag{4.5}$$

$$b \equiv \frac{i}{(4\pi)^2}, \tag{4.6}$$

$\Upsilon_{\mu\nu}^2$ ,  $\Upsilon_{\mu\nu}^0$  e  $\Upsilon_{\mu\nu\alpha\beta}^0$  são diferenças de integrais com mesmo grau de divergência e  $I_{\log}$  é logaritmicamente divergente. Estas integrais não dependem do momento externo  $p$  e estão listadas na seção D.3 do apêndice D.

Um resultado importante em RI é que os termos  $\Upsilon_{\mu\nu}^2$ ,  $\Upsilon_{\mu\nu}^0$  e  $\Upsilon_{\mu\nu\alpha\beta}^0$  são termos de superfície (veja um exemplo na seção D.2 do apêndice D), e que eles são arbitrários e dependentes de regularização. A demonstração e discussão destes resultados pode ser encontrada em [4–7], em [9] é mostrado ainda que termos de superfícies em RI, como os citados acima, estão conectados com os rótulos dos momentos e que a invariância de rótulo é uma condição necessária para assegurar a invariância de calibre. Veremos a seguir que para o nosso caso estes termos de superfície devem ser nulos para manter uma IW de calibre.

Assumindo a arbitrariedade dos termos de superfície podemos escrever (4.4) como

$$\frac{\Pi_{\mu\nu}}{4ie^2} = \tilde{\Pi}_{\mu\nu} + (\alpha_1 m^2 g_{\mu\nu} + \alpha_2 p^2 g_{\mu\nu} + \alpha_3 p_\mu p_\nu) \quad (4.7)$$

sendo os  $\alpha$ 's constantes arbitrárias. Mas a invariância de calibre da EDQ implica que o tensor de polarização do vácuo deve satisfazer a condição<sup>1</sup>

$$p_\mu \Pi^{\mu\nu}(p) = 0, \quad (4.8)$$

e assim os  $\alpha$ 's devem ser nulos.

A escala do grupo de renormalização, que chamaremos de  $\lambda$ , é introduzida em RI pela identidade (veja detalhes em [5, 6, 8])

$$I_{\log}(m^2) = I_{\log}(\lambda^2) + b \ln\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right). \quad (4.9)$$

Para renormalizar, vamos utilizar o contratermo<sup>2</sup>  $i(p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu)(Z_3 - 1)$ , onde  $Z_3$  é definido pela renormalização do campo  $A^\mu$ ,

$$A^\mu = Z_3^{\frac{1}{2}} A_r^\mu, \quad (4.10)$$

e assim, obtemos

$$Z_3 = 1 + \frac{4}{3} i I_{\log}(\lambda^2) \quad (4.11)$$

e

$$\Pi_{\mu\nu}^r = \tilde{\Pi}_{\mu\nu} + i(p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu)(Z_3 - 1), \quad (4.12)$$

que é o tensor polarização do vácuo renormalizado.

## 4.2 Cálculo da Anomalia

Para obter a anomalia de escala calcularemos primeiro o lado esquerdo da equação (3.94), obtido este resultado usaremos o resultado de  $\Pi_{\mu\nu}$  para calcular o lado direito.

<sup>1</sup>Pois esta é a IW associada a invariância de calibre. Veja [21] por exemplo.

<sup>2</sup>Veja a seção *Renormalization of Quantum Electrodynamics* em [21].

Usando as regras de Feynman em (3.96), obtemos

$$\Delta_{\mu\nu} = -2 \int_k Tr\{e\gamma_\mu S(k)e\gamma_\nu S(k+p)mS(k+p)\}, \quad (4.13)$$

que após tomar o traço e devidas manipulações (veja detalhes na seção C.1 do apêndice C) resulta em (C.10)

$$\Delta_{\mu\nu} = 8ie^2 m^2 (4\Theta_{\mu\nu}^{(0)}(m^2) - g_{\mu\nu} I_{log}(m^2)) + \Delta'_{\mu\nu} \quad (4.14)$$

onde

$$\Theta_{\mu\nu}^{(0)}(m^2) = \int_k \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3}, \quad I_{log}(m^2) = \int_k \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \quad (4.15)$$

são integrais divergentes que não dependem do momento externo  $p$ , e  $\Delta'_{\mu\nu}$  é composto apenas por integrais finitas (veja equação (C.12)). Após alguns cálculos, que incluem parametrizações de Feynman, resolução de algumas integrais e a expansão (veja equação (C.32))

$$\ln\left(\frac{m^2 - p^2 y(1-y)}{m^2}\right) = \ln\left(\frac{-p^2}{m^2}\right) + \ln(y(1-y)) + \mathcal{O}(m^2), \quad (4.16)$$

obtemos que a parte finita será de ordem  $m$

$$\Delta'_{\mu\nu} = \mathcal{O}(m), \quad (4.17)$$

e como estamos interessados no limite  $m \rightarrow 0$  podemos escrever (4.14) como

$$\Delta_{\mu\nu} = 8ie^2 m^2 (4\Theta_{\mu\nu}^{(0)}(m^2) - g_{\mu\nu} I_{log}(m^2)) + \mathcal{O}(m). \quad (4.18)$$

Note que o termo entre parênteses é uma diferença entre duas integrais com o mesmo grau de divergência. Estas integrais estão relacionadas, como demonstrado na seção D.2 do apêndice D, pela identidade (D.12)

$$4\Theta_{\mu\nu}^{(0)}(m^2) = g_{\mu\nu} I_{log}(m^2) - \Upsilon_{\mu\nu}^0(m^2), \quad (4.19)$$

onde

$$\Upsilon_{\mu\nu}^0(m^2) = \int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[ \frac{k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} \right]. \quad (4.20)$$

Usando esta relação, obtemos

$$\Delta_{\mu\nu} = 8ie^2m^2\Upsilon_{\mu\nu}^0(m^2) + \mathcal{O}(m). \quad (4.21)$$

Para fazer o limite  $m \rightarrow 0$  temos que usar a massa renormalizada já que a massa nua é infinita em teoria de perturbação. Assim, utilizando o resultado que  $\Upsilon_{\mu\nu}^0$  é finito como discutido anteriormente, obtemos

$$\Delta_{\mu\nu}^r(p, m = 0) = 0. \quad (4.22)$$

Para calcular  $(2 - p\frac{\partial}{\partial p})\Pi_{\mu\nu}^r$  note que (veja (C.134) e (C.135))

$$(2 - p\frac{\partial}{\partial p})p^2 = (2 - p\frac{\partial}{\partial p})p^\alpha p_\beta = 0, \quad (4.23)$$

e como  $Z_3$  não depende de  $p$ , obtemos

$$\begin{aligned} (2 - p\frac{\partial}{\partial p})\Pi_{\mu\nu}^r &= (2 - p\frac{\partial}{\partial p})\left(\tilde{\Pi}_{\mu\nu} + i(p^2g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu)(Z_3 - 1)\right) \\ &= (2 - p\frac{\partial}{\partial p})\tilde{\Pi}_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Utilizando o  $\tilde{\Pi}_{\mu\nu}$  da seção anterior (que foi obtido em [5,6]), obtemos (veja (4.4))

$$(2 - p\frac{\partial}{\partial p})\tilde{\Pi}_{\mu\nu} = \frac{4}{3}bie^2 \left( (p^2g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) \left( -4\frac{m^2}{p^2}Z_0 + \left(\frac{2m^2}{p^2} + 1\right)Z'_0 \right) \right), \quad (4.25)$$

onde  $b \equiv \frac{i}{(4\pi)^2}$ ,  $Z'_0 \equiv p\frac{\partial}{\partial p}Z_0$ ,  $Z_0(p^2; m^2) \equiv \int_0^1 dz \ln \left[ \frac{p^2z(z-1)+m^2}{m^2} \right]$ .

Usando a expansão (4.16),

$$(2 - p\frac{\partial}{\partial p})\tilde{\Pi}_{\mu\nu} = -\frac{e^2}{6\pi^2}(p^2g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) + \mathcal{O}(m), \quad (4.26)$$

e tomando o limite  $m \rightarrow 0$ , obtemos

$$(2 - p\frac{\partial}{\partial p})\Pi_{\mu\nu}^r(p, m = 0) = \frac{e^2}{6\pi^2}(p_\mu p_\nu - p^2g_{\mu\nu}). \quad (4.27)$$

Usando este resultado e (4.22), obtemos

$$\Delta_{\mu\nu}^r(p, m = 0) - (2 - p\frac{\partial}{\partial p})\Pi_{\mu\nu}^r(p, m = 0) = -\frac{e^2}{6\pi^2}(p_\mu p_\nu - p^2g_{\mu\nu}), \quad (4.28)$$

que é portanto a anomalia de escala para IW de dilatação (3.94) a um laço.

Foi discutido anteriormente que esta anomalia é consequência da introdução da escala de renormalização na lagrangiana no processo de renormalização. Na seção anterior vimos que esta escala foi introduzida na renormalização do  $\Pi_{\mu\nu}$ , e assim os parâmetros envolvidos no resultado devem ser os parâmetros renormalizados. Concluimos então que a dependência da anomalia na escala de renormalização está na constante de acoplamento renormalizada

$$e = e(\lambda), \tag{4.29}$$

onde  $\lambda$  é a escala de renormalização na RI (veja equação (4.9)).

Nosso resultado para a anomalia (4.28) está de acordo com o resultado existente na literatura calculado por outros métodos que pode ser encontrado, por exemplo, em [12] e [15] .



# Capítulo 5

## Conclusão

Nosso objetivo principal foi estudar a anomalia de escala na EDQ e calculá-la utilizando a RI. Para atingir tal objetivo o primeiro passo foi entender a anomalia em questão. Começamos estudando a simetria de escala, onde vimos que, a nível clássico, ela é uma simetria de teorias descritas por uma lagrangiana que não depende de parâmetros dimensionais. Neste ponto surgiu uma evidência que sugere que esta não deve ser uma simetria a nível quântico, já que em uma teoria renormalizada a constante de acoplamento envolvida deve depender da escala de energia, e desta forma a descrição do sistema deve depender da escala em que se estuda o mesmo. Em seguida obtivemos a corrente de dilatação e sua relação com o traço do tensor energia-momento de Belinfante (equação (3.67)) para o caso da EDQ. Este resultado foi útil para obter a IW da dilatação, possibilitando um estudo diagramático da simetria. Calculando cada amplitude envolvida na IW, a um laço por RI, mostramos que a IW não é válida a nível quântico e obtivemos a anomalia (equação (4.28)).

No cálculo das amplitudes assumimos que os termos de superfície são finitos e arbitrários, que é um resultado demonstrado em trabalhos sobre RI, para cancelá-los como forma de garantir a invariância de calibre da teoria. Cancelados estes termos arbitrários não tivemos que lidar com nenhuma anomalia espúria na obtenção da anomalia demonstrando que a RI é um método adequado para tratar este tipo de problema.

# Apêndice A

## Tensor de Belinfante

### A.1 Caso geral

Se definirmos um tensor  $T^{\mu\nu}$  por

$$T^{\mu\nu} \equiv \Theta^{\mu\nu} + \partial_\rho f^{\mu\nu\rho}, \quad (\text{A.1})$$

onde  $f^{\mu\nu\rho}$  é anti-simétrico nos índices  $(\mu\rho)$ , e  $\Theta^{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento canônico (2.7), temos que  $T^{\mu\nu}$  também obedece a equação de continuidade

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.2})$$

e como  $\int d^3x \partial_\rho f^{0\nu\rho} = -\int d^3x \partial_0 f^{0\nu 0} - \int d^3x \partial_i f^{0\nu i} = -\partial_0 \int d^3x f^{0\nu 0} = 0$ ,

$$P^\mu = \int d^3x T^{0\mu} \quad (\text{A.3})$$

e  $T^{\mu\nu}$  tem as mesmas características que definem  $\Theta^{\mu\nu}$  e existe assim uma liberdade na definição do tensor energia-momento.

Podemos usar esta liberdade para obter um tensor simétrico. Impomos que ele seja simétrico e substituímos (A.1) nas equações (2.14) e (2.15)

$$\mathcal{M}^{\rho\mu\nu} = \Pi^\rho S^{\mu\nu} \Phi + x^\mu (T^{\rho\nu} - \partial_\lambda f^{\rho\nu\lambda}) - x^\nu (T^{\rho\mu} - \partial_\lambda f^{\rho\mu\lambda}) \quad (\text{A.4})$$

e

$$\partial_\rho \mathcal{M}^{\rho\mu\nu} = \partial_\rho (\Pi^\rho S^{\mu\nu} \Phi) + T^{\mu\nu} - \partial_\lambda f^{\mu\nu\lambda} - T^{\nu\mu} + \partial_\lambda f^{\nu\mu\lambda} = 0, \quad (\text{A.5})$$

assim obtemos

$$\partial_\rho (f^{\mu\nu\rho} - f^{\nu\mu\rho}) = \partial_\rho (\Pi^\rho S^{\mu\nu} \Phi). \quad (\text{A.6})$$

Uma solução possível é

$$f^{\mu\nu\rho} - f^{\nu\mu\rho} = \Pi^\rho S^{\mu\nu} \Phi, \quad (\text{A.7})$$

com ela podemos escrever (trocando  $\mu \leftrightarrow \rho$  em (A.7))

$$f^{\rho\nu\mu} - f^{\nu\rho\mu} = \Pi^\mu S^{\rho\nu} \Phi \quad (\text{A.8})$$

e (trocando  $\nu \leftrightarrow \rho$  em A.7)

$$f^{\mu\rho\nu} - f^{\rho\mu\nu} = \Pi^\nu S^{\mu\rho} \Phi, \quad (\text{A.9})$$

e obtemos então (somando A.7 - A.8 + A.9 e usando  $f^{\mu\rho\nu} = -f^{\nu\rho\mu}$ )

$$f^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2} (\Pi^\rho S^{\mu\nu} \Phi - \Pi^\mu S^{\rho\nu} \Phi + \Pi^\nu S^{\mu\rho} \Phi). \quad (\text{A.10})$$

Assim

$$T^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \partial_\rho f^{\mu\nu\rho}, \quad (\text{A.11})$$

com  $f^{\mu\nu\rho}$  definido por (A.10), é o tensor de Energia-Momento simétrico conhecido como tensor de Belinfante [14, 18].

## A.2 EDQ

Considere a seguinte densidade de lagrangiana (3.60)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m + e\gamma^\mu A_\mu)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (\text{A.12})$$

As equações de Euler-Lagrange<sup>1</sup> para ela resultam nas equações de Dirac e de Maxwell com fonte:

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - \bar{\psi}(e\gamma^\mu A_\mu - m) = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi + (e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi = 0 \quad (\text{A.14})$$

e

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} - e\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = 0. \quad (\text{A.15})$$

---

<sup>1</sup>Veja por exemplo [17, 20].

O tensor energia-momento canônico (2.7) para esta lagrangiana é

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} \partial^\nu \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \bar{\psi}} \partial^\nu \bar{\psi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\lambda} \partial^\nu A_\lambda - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (\text{A.16})$$

mas sendo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} = i\bar{\psi}\gamma^\mu, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \bar{\psi}} = 0 \quad (\text{A.17})$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\lambda} &= \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \partial_\mu A_\lambda} [(\partial_\beta A_\alpha - \partial_\alpha A_\beta)(\partial^\beta A^\alpha - \partial^\alpha A^\beta)] \\ &= -\frac{1}{2}(\delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\lambda - \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\lambda) F^{\beta\alpha} = -\frac{1}{2}(F^{\mu\lambda} - F^{\lambda\mu}) \\ &= F^{\lambda\mu}, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

usando (A.17) e (A.18) em (A.16) obtemos o tensor energia-momento canônico da eletrodinâmica

$$\Theta^{\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial^\nu \psi + F^{\lambda\mu} \partial^\nu A_\lambda - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (\text{A.19})$$

Vamos obter o tensor de Belinfante (A.11) para esta lagrangiana, mas para simplificar as contas podemos definir  $f^{\mu\nu\rho}$  (A.10) como

$$f^{\mu\nu\rho} = f_\psi^{\mu\nu\rho} + f_A^{\mu\nu\rho}, \quad (\text{A.20})$$

onde  $f_\psi^{\mu\nu\rho}$  é calculado usando apenas os espinores de Dirac  $\psi$  e  $\bar{\psi}$ , e  $f_A^{\mu\nu\rho}$  usando o potencial vetor  $A^\mu$ . O tensor simétrico será então dado por

$$T^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \partial_\rho f_\psi^{\mu\nu\rho} + \partial_\rho f_A^{\mu\nu\rho}. \quad (\text{A.21})$$

Para calcular  $f_\psi^{\mu\nu\rho}$  sabemos que numa transformação de Lorentz infinitesimal o campo  $\psi$  se transforma com [17]

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \psi(x) + \frac{1}{8}\epsilon_{\mu\nu}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\psi(x), \quad (\text{A.22})$$

que comparando com a equação (2.13) nos fornece

$$S^{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (\text{A.23})$$

Usando este resultado em (A.10),

$$f_\psi^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{8}i\bar{\psi}(\gamma^\rho[\gamma^\mu, \gamma^\nu] - \gamma^\mu[\gamma^\rho, \gamma^\nu] + \gamma^\nu[\gamma^\mu, \gamma^\rho])\psi \quad (\text{A.24})$$

com

$$\begin{aligned} \gamma^\rho[\gamma^\mu, \gamma^\nu] - \gamma^\mu[\gamma^\rho, \gamma^\nu] + \gamma^\nu[\gamma^\mu, \gamma^\rho] &= \gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu + \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho \\ &+ \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho - \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu = 2\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu - 2g^{\rho\mu}\gamma^\nu - 2g^{\rho\nu}\gamma^\mu + 2g^{\mu\nu}\gamma^\rho \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

obtemos

$$f_\psi^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{4}i\bar{\psi}(\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu - g^{\rho\mu}\gamma^\nu - g^{\rho\nu}\gamma^\mu + g^{\mu\nu}\gamma^\rho)\psi \quad (\text{A.26})$$

e

$$\partial_\rho f_\psi^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{4}i[\partial_\rho(\bar{\psi}\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu\psi) - \partial^\mu(\bar{\psi}\gamma^\nu\psi) - \partial^\nu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) + g^{\mu\nu}\partial_\rho(\bar{\psi}\gamma^\rho\psi)]. \quad (\text{A.27})$$

Usando as equações de Dirac (A.13) e (A.14),

$$\partial_\rho(\bar{\psi}\gamma^\rho\psi) = -i\bar{\psi}(e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi + i\bar{\psi}(e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi = 0 \quad (\text{A.28})$$

e

$$\partial_\rho(\bar{\psi}\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu\psi) = (\partial_\rho\bar{\psi})\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu\psi + \bar{\psi}\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\rho\psi, \quad (\text{A.29})$$

onde usando que  $\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu = 2g^{\mu\rho}\gamma^\nu - \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu = 2g^{\mu\rho}\gamma^\nu - 2g^{\rho\nu}\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho$ , ficamos com

$$\begin{aligned} \partial_\rho(\bar{\psi}\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu\psi) &= (\partial_\rho\bar{\psi})\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\partial_\rho\psi + 2\bar{\psi}\gamma^\nu\partial^\mu\psi - 2\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi \\ &= -i\bar{\psi}(e\gamma^\rho A_\rho - m)\gamma^\mu\gamma^\nu\psi + i\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu(e\gamma^\rho A_\rho - m)\psi + 2\bar{\psi}\gamma^\nu\partial^\mu\psi - 2\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi \\ &= -ei\bar{\psi}A_\rho(2g^{\mu\rho}\gamma^\nu - 2g^{\rho\nu}\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho)\psi + ei\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho A_\rho\psi + 2\bar{\psi}\gamma^\nu\partial^\mu\psi - 2\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi \\ &= ei\bar{\psi}(-2A^\mu\gamma^\nu + 2A^\nu\gamma^\mu)\psi + 2\bar{\psi}\gamma^\nu\partial^\mu\psi - 2\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi, \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

assim, substituindo (A.29) e (A.30) em (A.28),

$$\begin{aligned} \partial_\rho f_\psi^{\mu\nu\rho} &= \frac{1}{4}i\hbar[\bar{\psi}\gamma^\nu\partial^\mu\psi - (\partial^\mu\bar{\psi})\gamma^\nu\psi - 3\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi - (\partial^\nu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi] \\ &+ \frac{1}{2}e\bar{\psi}(\gamma^\nu A^\mu - \gamma^\mu A^\nu)\psi. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Para calcular agora  $f_A^{\mu\nu\rho}$  sabemos que para uma transformação infinitesimal de Lorentz o campo  $A^\mu$  se transforma com  $A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x') = A^\mu(x) + \epsilon^\mu{}_\nu A^\nu(x)$ , que comparando com (2.13) obtemos  $\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}S_{\lambda\nu}^{\alpha\beta}g^{\lambda\mu} = \epsilon^\mu{}_\nu$ , ou seja,

$$\epsilon_{\alpha\beta}S_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = 2\epsilon_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} - \epsilon_{\nu\mu} = \epsilon_{\alpha\beta}(\delta_\nu^\alpha\delta_\mu^\beta - \delta_\mu^\alpha\delta_\nu^\beta) \quad (\text{A.32})$$

e

$$S_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\beta - \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta. \quad (\text{A.33})$$

Usando (A.33) e (A.18) em (A.10),

$$\begin{aligned} f_A^{\mu\nu\rho} &= \frac{1}{2}[(F^{\rho\nu} A^\mu - F^{\rho\mu} A^\nu) - (F^{\mu\nu} A^\rho - F^{\mu\rho} A^\nu) + (F^{\nu\rho} A^\mu - F^{\nu\mu} A^\rho)] \\ &= F^{\mu\rho} A^\nu \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

e usando (A.15)

$$\partial_\rho f_A^{\mu\nu\rho} = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A^\nu + F^{\mu\rho}\partial_\rho A^\nu. \quad (\text{A.35})$$

Finalmente usando este resultado e o resultado para  $f_\psi^{\mu\nu\rho}$  (A.31), obtemos o tensor de energia-momento simétrico da eletrodinâmica

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \Theta^{\mu\nu} + \partial_\rho f_\psi^{\mu\nu\rho} + \partial_\rho f_A^{\mu\nu\rho} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi + F^{\lambda\mu}\partial^\nu A_\lambda - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \\ &\quad + \frac{1}{4}i[\bar{\psi}\gamma^\nu\partial^\mu\psi - (\partial^\mu\bar{\psi})\gamma^\nu\psi - 3\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi - (\partial^\nu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi] \\ &\quad + \frac{1}{2}e\bar{\psi}(\gamma^\nu A^\mu - \gamma^\mu A^\nu)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A^\nu + F^{\mu\lambda}\partial_\lambda A^\nu \\ &= \frac{1}{4}i[\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi - (\partial^\nu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^\nu\partial^\mu\psi - (\partial^\mu\bar{\psi})\gamma^\nu\psi] \\ &\quad + F^{\lambda\mu}F^\nu{}_\lambda + \frac{1}{2}e\bar{\psi}(\gamma^\nu A^\mu + \gamma^\mu A^\nu)\psi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}. \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

# Apêndice B

## Dedução da IW da Dilatação

Para obter a IW da corrente de dilatação usaremos o formalismo de integral de trajetória<sup>1</sup>. Neste formalismo o funcional gerador das funções de Green é dado por

$$W[J] = \rho \int \mathcal{D}\Phi \exp \left( i \int d^4x (\mathcal{L}(x) + J(x)\Phi(x)) \right), \quad (\text{B.1})$$

onde  $\rho$  é um fator de normalização. A função de Green

$$G^{(N)}(x_1, \dots, x_N) \equiv \langle 0|T \Phi(x_1)\dots\Phi(x_N)|0\rangle \quad (\text{B.2})$$

é obtida pela relação

$$G^{(N)}(x_1, \dots, x_N) = (-i)^N \frac{\delta^N}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_N)} W(J) \Big|_{J=0}. \quad (\text{B.3})$$

A transformação

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi(x) + \delta\Phi(x) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \delta\mathcal{L} \quad (\text{B.4})$$

---

<sup>1</sup>Faremos uma dedução que não é rigorosa, existem problemas, por exemplo, em supor que  $\mathcal{D}\Phi$  é invariante sob a transformação. O método Fujikawa para tratar anomalias utiliza o fato de que  $\mathcal{D}\Phi$  não é invariante (veja [23, 24]). Mas no nosso caso queremos obter apenas a IW "clássica", pois a anomalia obteremos estudando a IW por teoria de perturbação.

que, considerando  $\mathcal{D}\Phi' = \mathcal{D}\Phi$ , leva a

$$\begin{aligned}
& \int \mathcal{D}\Phi \exp \left( i \int d^4x [\mathcal{L}(x) + J(x)\Phi(x)] \right) \\
&= \int \mathcal{D}\Phi \exp \left( i \int d^4x [\mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x) + J(x)(\Phi(x) + \delta\Phi(x))] \right) \\
&= \int \mathcal{D}\Phi (1 + i \int d^4y [\delta\mathcal{L}(y) + J(y)\delta\Phi(y)]) \exp \left( i \int d^4x [\mathcal{L}(x) + J(x)\Phi(x)] \right), \tag{B.5}
\end{aligned}$$

ou,

$$\int d^4y \int \mathcal{D}\Phi [\delta\mathcal{L}(y) + J(y)\delta\Phi(y)] \exp \left( i \int d^4x [\mathcal{L}(x) + J(x)\Phi(x)] \right) = 0, \tag{B.6}$$

Derivando funcionalmente o integrando em relação a  $J(x_1), J(x_2), \dots$ , até  $J(x_N)$ ,

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \int \mathcal{D}\Phi [\delta\mathcal{L}(y) + J(y)\delta\Phi(y)] \exp \left( i \int d^4x [\mathcal{L}(x) + J(x)\Phi(x)] \right) \\
&= \delta(y - x_1) \int \mathcal{D}\Phi \delta\Phi(x_1) \exp \left( i \int d^4x [\mathcal{L}(x) + J(x)\Phi(x)] \right) \\
&+ i \int \mathcal{D}\Phi [\delta\mathcal{L}(x) + J(x)\delta\Phi(x)] \Phi(x_1) \exp \left( i \int d^4x [\mathcal{L}(x) + J(x)\Phi(x)] \right), \tag{B.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta^2}{\delta J(x_2)\delta J(x_1)} \int \mathcal{D}\Phi [\delta\mathcal{L}(x) + J(x)\delta\Phi(x)] \exp \left( i \int d^4x [\mathcal{L}(x) + J(x)\Phi(x)] \right) \\
&= i\delta(y - x_1) \int \mathcal{D}\Phi \delta\Phi(x_1)\Phi(x_2) \exp \left( i \int d^4x [\mathcal{L}(x) + J(x)\Phi(x)] \right) \\
&+ i\delta(y - x_2) \int \mathcal{D}\Phi \delta\Phi(x_2)\Phi(x_1) \exp \left( i \int d^4x [\mathcal{L}(x) + J(x)\Phi(x)] \right) \\
&+ (i)^2 \int \mathcal{D}\Phi [\delta\mathcal{L}(x) + J(x)\delta\Phi(x)] \Phi(x_1)\Phi(x_2) \exp \left( i \int d^4x [\mathcal{L}(x) + J(x)\Phi(x)] \right), \tag{B.8}
\end{aligned}$$



...

Assim,

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta^N}{\delta J(x_1)\dots\delta(x_N)} \left[ \int d^4y \int \mathcal{D}\Phi [\delta\mathcal{L}(y) + J(y)\delta\Phi(y)] \exp \left( i \int d^4x [\mathcal{L}(x) \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + J(x)\Phi(x) \right] \right) \Bigg|_{J=0} \\
& = \int d^4y \left[ (i)^{N-1} \sum_{k=0}^N \delta(y-x_k) \int \mathcal{D}\Phi \Phi(x_1)\dots\delta\Phi(x_k)\dots\Phi(x_N) \exp \left( i \int d^4x \mathcal{L} \right) \right. \\
& \qquad \qquad \left. + (i)^N \int \mathcal{D}\Phi \delta\mathcal{L}(y)\Phi(x_1)\dots\Phi(x_N) \exp \left( i \int d^4x \mathcal{L} \right) \right] = 0, \quad (\text{B.9})
\end{aligned}$$

ou,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^N \int \mathcal{D}\Phi \Phi(x_1)\dots\delta\Phi(x_k)\dots\Phi(x_N) \exp \left( i \int d^4x \mathcal{L} \right) \\
& = -i \int d^4y \int \mathcal{D}\Phi \delta\mathcal{L}(y)\Phi(x_1)\dots\Phi(x_N) \exp \left( i \int d^4x \mathcal{L} \right). \quad (\text{B.10})
\end{aligned}$$

Vamos escrever a variação da lagrangiana como em (3.41)

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \mathcal{F}^\mu + \mathcal{A} \quad (\text{B.11})$$

e assim ficamos com

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^N \int \mathcal{D}\Phi \Phi(x_1)\dots\delta\Phi(x_k)\dots\Phi(x_N) \exp \left( i \int d^4x \mathcal{L} \right) \\
& = -i \int d^4y \int \mathcal{D}\Phi \frac{\partial}{\partial y^\mu} \mathcal{F}^\mu(y)\Phi(x_1)\dots\Phi(x_N) \exp \left( i \int d^4x \mathcal{L} \right) \\
& \qquad - i \int d^4y \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{A}(y)\Phi(x_1)\dots\Phi(x_N) \exp \left( i \int d^4x \mathcal{L} \right). \quad (\text{B.12})
\end{aligned}$$

Para o caso da transformação de escala  $\mathcal{A} = T_\mu^\mu$ . Usando este resultado e desprezando o termo de superfície na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned}
& i \sum_{k=0}^N \int \mathcal{D}\Phi \Phi(x_1)\dots\delta\Phi(x_k)\dots\Phi(x_N) \exp \left( i \int d^4x \mathcal{L} \right) \\
& = \int d^4y \int \mathcal{D}\Phi T_\mu^\mu(y)\Phi(x_1)\dots\Phi(x_N) \exp \left( i \int d^4x \mathcal{L} \right) \quad (\text{B.13})
\end{aligned}$$

Mas de (B.3) obtemos a expressão para uma função de Green no formalismo funcional como sendo

$$G^{(N)}(x_1, \dots, x_N) = \rho \int \mathcal{D}\Phi \Phi(x_1) \dots \Phi(x_N) \exp \left( i \int d^4x \mathcal{L} \right), \quad (\text{B.14})$$

então

$$\begin{aligned} \int d^4y \langle 0|T T_\mu^\mu(y) \Phi(x_1) \dots \Phi(x_N)|0 \rangle &= i \sum_{k=1}^N \langle 0|T \Phi(x_1) \dots \delta\Phi(x_k) \dots \Phi(x_N)|0 \rangle \\ &= iNd_\Phi \langle 0|T \Phi(x_1) \dots \Phi(x_N)|0 \rangle + i \sum_{k=1}^N \langle 0|T \Phi(x_1) \dots \left( x_k^\mu \frac{\partial}{\partial x_k^\mu} \Phi(x_k) \right) \dots \Phi(x_N)|0 \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

onde usamos  $\delta\Phi$  da transformação de escala para os campos (3.28)  $\delta\Phi = (d_\phi + x^\mu \partial_\mu)\Phi$ . Desejamos retirar as derivadas para fora do ordenamento temporal. Para o caso de  $N = 2$  observando que

$$\begin{aligned} \langle 0|T x_1^\mu \frac{\partial}{\partial x_1^\mu} \Phi(x_1) \Phi(x_2)|0 \rangle + \langle 0|T \Phi(x_1) x_2^\mu \frac{\partial}{\partial x_2^\mu} \Phi(x_2)|0 \rangle \\ = \left( x_1^\mu \frac{\partial}{\partial x_1^\mu} + x_2^\mu \frac{\partial}{\partial x_2^\mu} \right) \langle 0|T \Phi(x_1) \Phi(x_2)|0 \rangle - x_1^0 \delta(x_1^0 - x_2^0) [\Phi(x_1), \Phi(x_2)] \\ - x_2^0 \delta(x_2^0 - x_1^0) [\Phi(x_2), \Phi(x_1)] \\ = \left( x_1^\mu \frac{\partial}{\partial x_1^\mu} + x_2^\mu \frac{\partial}{\partial x_2^\mu} \right) \langle 0|T \Phi(x_1) \Phi(x_2)|0 \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

onde usamos que  $T \Phi(x_1) \Phi(x_2) = \theta(x_1 - x_2) \Phi(x_1) \Phi(x_2) + \theta(x_2 - x_1) \Phi(x_2) \Phi(x_1)$ , sendo  $\theta$  a função degrau. Podemos generalizar para N qualquer, pois os termos vão se cancelar em pares como no caso acima. Assim reescrevemos (B.15) como

$$\int d^4y \langle 0|T T_\mu^\mu(y) \Phi(x_1) \dots \Phi(x_N)|0 \rangle = i \left( Nd_\Phi + \sum_{k=1}^N x_k^\mu \frac{\partial}{\partial x_k^\mu} \right) \langle 0|T \Phi(x_1) \dots \Phi(x_N)|0 \rangle. \quad (\text{B.17})$$

A equação (B.17) é a identidade de Ward da corrente de dilatação que relaciona funções de Green no espaço das coordenadas. Para obter a mesma identidade relacionando funções de Green no espaço dos momentos, usamos a definição de função

de Green neste espaço

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta\left(\sum_{k=1}^N p_k\right) G^{(N)}(p_1, \dots, p_{N-1}) \\ = \int d^4 x_1 \dots d^4 x_N \exp\left(i \sum_{k=1}^N p_k x_k\right) G^{(N)}(x_1, \dots, x_N), \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

que é a transformada de Fourier das funções de Green no espaço das coordenadas, onde o delta de Dirac assegura a conservação do momento e da energia. Podemos definir analogamente a função de Green

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta\left(k + \sum_{k=1}^N p_k\right) G^{(N)}(k, p_1, \dots, p_{N-1}) \\ = \int d^4 y d^4 x_1 \dots d^4 x_N \exp\left(i\left[ky + \sum_{k=1}^N p_k x_k\right]\right) G^{(N)}(y, x_1, \dots, x_N) \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

como a transformada de Fourier de

$$G_T^{(N)}(y, x_1, \dots, x_N) \equiv \langle 0 | T T_\mu^\mu(y) \Phi(x_1) \dots \Phi(x_N) | 0 \rangle. \quad (\text{B.20})$$

Usando estas definições com  $k = 0$  em (B.19), podemos reescrever (B.17) como

$$\begin{aligned} -i(2\pi)^4 \delta\left(\sum_{k=1}^N p_k\right) G^{(N)}(0, p_1, \dots, p_{N-1}) = Nd_\Phi (2\pi)^4 \delta\left(\sum_{k=1}^N p_k\right) G^{(N)}(p_1, \dots, p_{N-1}) \\ + \int d^4 x_1 \dots d^4 x_N \exp\left(i \sum_{k=1}^N p_k x_k\right) \left(\sum_{k=1}^N x_k^\mu \frac{\partial}{\partial x_k^\mu}\right) G^{(N)}(x_1, \dots, x_N). \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Integrando esta equação em  $d^4 p_N$  e multiplicando por  $\frac{1}{(2\pi)^4}$

$$\begin{aligned} -iG_T^{(N)}(0, p_1, \dots, p_{N-1}) = Nd_\Phi G^{(N)}(p_1, \dots, p_{N-1}) \\ + \int d^4 x_1 \dots d^4 x_{N-1} \exp\left(i \sum_{k=1}^{N-1} p_k x_k\right) \left(\sum_{k=1}^{N-1} x_k^\mu \frac{\partial}{\partial x_k^\mu} G^{(N)}(x_1, \dots, x_{N-1}, x_N = 0)\right), \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

mas note que

$$\begin{aligned}
& p_j \frac{\partial}{\partial p_j} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_N \exp \left( i \sum_k p_k x_k \right) \langle 0|T \Phi(x_1) \dots \Phi(x_N)|0 \rangle \\
&= \int d^4 x_1 \dots d^4 x_N p_j x_j \exp \left( i \sum_k p_k x_k \right) \langle 0|T \Phi(x_1) \dots \Phi(x_N)|0 \rangle \\
&= \int d^4 x_1 \dots d^4 x_N \left[ x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \exp \left( i \sum_k p_k x_k \right) \right] \langle 0|T \Phi(x_1) \dots \Phi(x_N)|0 \rangle \\
&= \int d^4 x_1 \dots d^4 x_N \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ x_j \exp \left( i \sum_k p_k x_k \right) \langle 0|T \Phi(x_1) \dots \Phi(x_N)|0 \rangle \right] \\
&\quad - 4 \int d^4 x_1 \dots d^4 x_N \exp \left( i \sum_k p_k x_k \right) \langle 0|T \Phi(x_1) \dots \Phi(x_N)|0 \rangle \\
&\quad - \int d^4 x_1 \dots d^4 x_N \exp \left( i \sum_k p_k x_k \right) x_j \frac{\partial}{\partial x_j} [\langle 0|T \Phi(x_1) \dots \Phi(x_N)|0 \rangle], \quad (\text{B.23})
\end{aligned}$$

Aplicando o resultado acima para as  $N - 1$  integrais restantes e desprezando os termos de superfície, obtemos

$$\begin{aligned}
- iG_T^{(N)}(0, p_1, \dots, p_{N-1}) &= N d_\Phi G^{(N)}(p_1, \dots, p_{N-1}) \\
&\quad + (-4(N-1) - \sum_k^{N-1} p_k \frac{\partial}{\partial p_k}) G^{(N)}(p_1, \dots, p_{N-1}), \quad (\text{B.24})
\end{aligned}$$

ou

$$- iG_T^{(N)}(0, p_1, \dots, p_{N-1}) = (N(d_\Phi - 4) + 4 - \sum_k^{N-1} p_k \frac{\partial}{\partial p_k}) G^{(N)}(p_1, \dots, p_{N-1}), \quad (\text{B.25})$$

que é a identidade de Ward da corrente de dilatação ou identidade de Ward do traço por relacionar a função de Green de  $n$  pontos com a função de Green relacionada ao traço do tensor energia-momento como um operador.

# Apêndice C

## Cálculo das Amplitudes da IW

### C.1 Cálculo de $\Delta_{\mu\nu}$

Vamos calcular

$$\Delta_{\mu\nu} = -2 \int_k Tr\{e\gamma_\mu S(k)e\gamma_\nu S(k+p)mS(k+p)\}, \quad (C.1)$$

onde

$$\begin{aligned} S(k) &= \frac{i}{\gamma_\mu k^\mu - m} = i \frac{\gamma_\nu k^\nu + m}{(\gamma_\mu k^\mu - m)(\gamma_\nu k^\nu + m)} \\ &= i \frac{\gamma_\nu k^\nu + m}{k^2 - m^2} \end{aligned} \quad (C.2)$$

é o propagador do férmion. Assim

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu} &= 2ie^2 m \int_k Tr \left[ \gamma_\mu \left( \frac{\gamma_\rho k^\rho + m}{k^2 - m^2} \right) \gamma_\nu \left( \frac{\gamma_\sigma (k+p)^\sigma + m}{(k+p)^2 - m^2} \right) \left( \frac{\gamma_\lambda (k+p)^\lambda + m}{(k+p)^2 - m^2} \right) \right] \\ &= 2ie^2 m \int_k \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]^2} Tr \left[ \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\lambda k^\rho (k+p)^\sigma (k+p)^\lambda \right. \\ &\quad + \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\sigma k^\rho (k+p)^\sigma m + \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\lambda k^\rho m (k+p)^\lambda \\ &\quad + \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu k^\rho m^2 + \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\lambda m (k+p)^\sigma (k+p)^\lambda \\ &\quad \left. + \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\sigma m (k+p)^\sigma m + \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda m^2 (k+p)^\lambda + \gamma_\mu \gamma_\nu m^3 \right], \end{aligned} \quad (C.3)$$

como o traço de um número ímpar de matrizes  $\gamma$  é igual a zero, ficamos com

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu} &= 2i(em)^2 \int_k \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]^2} Tr \left\{ 2\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\sigma k^\rho (k+p)^\sigma \right. \\ &\quad \left. + \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\lambda (k+p)^\sigma (k+p)^\lambda + \gamma_\mu \gamma_\nu m^2 \right\} \end{aligned} \quad (C.4)$$

e usando (D.5) e (D.6)

$$Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4g_{\mu\nu} \quad e \quad Tr(\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\lambda) = 4(g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\nu}g_{\rho\lambda} + g_{\mu\lambda}g_{\rho\nu}), \quad (C.5)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu} &= 2i(em)^2 \int_k \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]^2} \{8(g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\nu}g_{\rho\lambda} \\ &\quad + g_{\mu\lambda}g_{\rho\nu})k^\rho(k+p)^\lambda + 4(g_{\mu\nu}g_{\sigma\lambda} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda} + g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma})(k+p)^\sigma(k+p)^\lambda \\ &\quad + 4m^2g_{\mu\nu}\} \\ &= 2i(em)^2 \int_k \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]^2} \{8[k_\mu(k+p)_\nu - g_{\mu\nu}k(k+p) \\ &\quad + k_\nu(k+p)_\mu] + 4[g_{\mu\nu}(k+p)^2 - (k+p)_\mu(k+p)_\nu + (k+p)_\nu(k+p)_\mu] \\ &\quad + 4g_{\mu\nu}m^2\} \\ &= 2i(em)^2 \int_k \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]^2} \{8[2k_\mu k_\nu + k_\mu p_\nu + k_\nu p_\mu \\ &\quad - g_{\mu\nu}(k^2 + kp)] + 4g_{\mu\nu}(k^2 + 2kp + p^2) + 4g_{\mu\nu}m^2\} \\ &= 2i(em)^2 \int_k \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]^2} \{16k_\nu k_\mu \\ &\quad + 8(k_\mu p_\nu + k_\nu p_\mu) + g_{\mu\nu}(-4k^2 + 4p^2 + 4m^2)\} \\ &= 8i(em)^2 \int_k \left\{ \frac{4k_\mu k_\nu + 2(k_\nu p_\mu + k_\mu p_\nu)}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]^2} \right. \\ &\quad \left. - g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{[(k+p)^2 - m^2]^2} - \frac{p^2}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 - m^2]^2} \right] \right\}. \quad (C.6) \end{aligned}$$

Usando na parte divergente as identidades

$$\begin{aligned} \frac{1}{[(k+p)^2 - m^2]} &= \frac{k^2 - m^2}{k^2 - m^2} \frac{1}{[(k+p)^2 - m^2]} = \frac{(k+p)^2 - m^2 - 2kp - p^2}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]} \\ &= \frac{1}{(k^2 - m^2)} - \frac{p^2 + 2kp}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]} \quad (C.7) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{[(k+p)^2 - m^2]^2} &= \left[ \frac{1}{k^2 - m^2} - \frac{p^2 + 2kp}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]} \right]^2 \\ &= \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} - 2 \frac{p^2 + 2kp}{(k^2 - m^2)^2[(k+p)^2 - m^2]} \\ &\quad + \frac{(p^2 + 2kp)^2}{(k^2 - m^2)^2[(k+p)^2 - m^2]^2} \quad (C.8) \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_{\mu\nu}}{8ie^2m^2} = & \int_k \left\{ \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} - \frac{8k_\nu k_\mu (p^2 + 2kp)}{(k^2 - m^2)^3 [(k+p)^2 - m^2]} \right. \\ & + \frac{4k_\nu k_\mu (p^2 + 2kp)^2}{(k^2 - m^2)^3 [(k+p)^2 - m^2]^2} + \frac{2(k_\nu p_\mu + k_\mu p_\nu)}{(k^2 - m^2) [(k+p)^2 - m^2]^2} \\ & - g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} - \frac{2(p^2 + 2kp)}{(k^2 - m^2)^2 [(k+p)^2 - m^2]} \right. \\ & \left. \left. + \frac{(p^2 + 2kp)^2}{(k^2 - m^2)^2 [(k+p)^2 - m^2]^2} - \frac{p^2}{(k^2 - m^2) [(k+p)^2 - m^2]^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

ou

$$\Delta_{\mu\nu} = 8ie^2m^2 (4\Theta_{\mu\nu}^{(0)}(m^2) - g_{\mu\nu} I_{\log}(m^2)) + \Delta'_{\mu\nu}, \quad (\text{C.10})$$

onde

$$\Theta_{\mu\nu}^{(0)}(m^2) = \int_k \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} \quad \text{e} \quad I_{\log}(m^2) = \int_k \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \quad (\text{C.11})$$

são as integrais divergentes que não dependem do momento externo  $p$  como desejávamos, e

$$\Delta'_{\mu\nu} = 8ie^2m^2 [-8I_{\mu\nu}^1 + 4I_{\mu\nu}^2 + 2I_{\mu\nu}^3 + g_{\mu\nu}(2I_4 - I_5 + p^2 I_6)] \quad (\text{C.12})$$

é a parte finita com

$$I_{\mu\nu}^1 \equiv \int_k \frac{(p^2 + 2pk)k_\nu k_\mu}{(k^2 - m^2)^3 [(k+p)^2 - m^2]}, \quad I_{\mu\nu}^2 \equiv \int_k \frac{(p^2 + 2kp)^2 k_\nu k_\mu}{(k^2 - m^2)^3 [(k+p)^2 - m^2]^2}, \quad (\text{C.13})$$

$$I_{\mu\nu}^3 \equiv \int_k \frac{p_\nu k_\mu + p_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2) [(k+p)^2 - m^2]^2}, \quad I_4 \equiv \int_k \frac{(p^2 + 2pk)}{(k^2 - m^2)^2 [(k+p)^2 - m^2]}, \quad (\text{C.14})$$

$$I_5 \equiv \int_k \frac{(p^2 + 2pk)^2}{(k^2 - m^2)^2 [(k+p)^2 - m^2]^2}, \quad \text{e} \quad I_6 \equiv \int_k \frac{1}{(k^2 - m^2) [(k+p)^2 - m^2]^2}. \quad (\text{C.15})$$

Usando a identidade (D.12) em (C.10), ficamos com

$$\Delta_{\mu\nu} = -8ie^2 m^2 \Upsilon_{\mu\nu}^0(m^2) + \Delta'_{\mu\nu}, \quad (\text{C.16})$$

onde

$$\Upsilon_{\mu\nu}^0(m^2) = \int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[ \frac{k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} \right]. \quad (\text{C.17})$$

Para calcular a parte finita  $\Delta'_{\mu\nu}$ , faremos a parametrização de Feynman nas integrais  $I_{\mu\nu}^1, I_{\mu\nu}^2, I_{\mu\nu}^3, I_4, I_5$  e  $I_6$  usando a identidade (D.1). Não calcularemos estas integrais até o final, mas apenas mostraremos que elas são de ordem maior que  $m^{-2}$ , e assim  $\Delta'_{\mu\nu} = 0$  no limite  $m \rightarrow 0$ .

### Cálculo da integral $I_6$

Usando  $A = (k^2 + m^2)$ ,  $s = 1$ ,  $B = [(k + p)^2 - m^2]$ ,  $n = 2$  em (D.1) para calcular  $I_6$  (C.15)

$$\begin{aligned} I_6 &= \int_k \int_0^1 dx dy \frac{\delta(x + y - 1)y}{[x(k^2 - m^2) + y((k + p)^2 - m^2)]^3} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)\Gamma(1)} \\ &= \int_k \int_0^1 dy \frac{2y}{[(1 - y)(k^2 - m^2) + y(k^2 + p^2 + 2kp - m^2)]^3} \\ &= \int_0^1 dy \int_k \frac{2y}{(k^2 - m^2 + 2kpy + p^2y)^3}. \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Fazendo a mudança de variável

$$k \rightarrow k' = k + py \Rightarrow k = k' - py, \quad (\text{C.19})$$

$$\begin{aligned} k^2 - m^2 + 2kpy + p^2y &= k'^2 - 2k'py + p^2y^2 - m^2 + 2(k' - py)py + p^2y \\ &= k'^2 - (m^2 - p^2y(1 - y)) = k'^2 - \Lambda^2, \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

onde

$$\Lambda^2 \equiv m^2 - p^2y(1 - y), \quad (\text{C.21})$$



obtemos

$$I_6 = \int_0^1 dy \int_{k'} \frac{2y}{(k'^2 - \Lambda^2)^3}. \quad (\text{C.22})$$

Usando (D.2), obtemos

$$I_6 = \int_0^1 dy 2y \frac{i(-1)^3}{(4\pi)^2} \frac{1}{2\Lambda^2} = -b \int_0^1 dy \frac{y}{\Lambda^2} \quad (\text{C.23})$$

com

$$b \equiv \frac{i}{(4\pi)^2}. \quad (\text{C.24})$$

Para resolver esta integral usaremos

$$\Sigma^2 \equiv \frac{\Lambda^2}{m^2} \quad (\text{C.25})$$

e

$$\frac{d}{dy} \Sigma^2 = \frac{d}{dy} \left[ \frac{m^2 + p^2 y(y-1)}{m^2} \right] = \frac{p^2}{m^2} (2y-1) \quad (\text{C.26})$$

$$\frac{1}{\Lambda^2} = \frac{1}{m^2 \Sigma^2}, \quad \text{mas} \quad \frac{d}{dy} \ln(\Sigma^2) = \frac{1}{\Sigma^2} \frac{d}{dy} \Sigma^2 = \frac{p^2}{m^2} (2y-1) \frac{1}{\Sigma^2} \quad (\text{C.27})$$

ou

$$\frac{1}{\Lambda^2} = \frac{1}{m^2} \left[ \frac{m^2}{p^2(2y-1)} \frac{d}{dy} \ln(\Sigma^2) \right] = \frac{1}{p^2(2y-1)} \frac{d}{dy} \ln(\Sigma^2). \quad (\text{C.28})$$

Usando este resultado em (C.23)

$$\begin{aligned} I_6 &= -b \int_0^1 dy \frac{y}{\Lambda^2} = \frac{-b}{p^2} \int_0^1 dy \frac{y}{2y-1} \frac{d}{dy} \ln(\Sigma^2) \\ &= -\frac{b}{p^2} \left( \left[ \frac{y}{2y-1} \ln(\Sigma^2) \right]_0^1 - \int_0^1 dy \left[ \frac{d}{dy} \frac{y}{2y-1} \right] \ln(\Sigma^2) \right), \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

mas como  $\Lambda^2 = m^2 - p^2 y(1-y)$  (C.20) e  $\Sigma^2 = \frac{m^2 - p^2 y(1-y)}{m^2}$  o primeiro termo da equação acima se anula nos limites e obtemos

$$I_6 = \frac{b}{p^2} \int_0^1 dy \left[ \frac{d}{dy} \frac{y}{2y-1} \right] \ln(\Sigma^2). \quad (\text{C.30})$$

Como estamos interessados no limite  $m \rightarrow 0$  vamos expandir  $\ln(\Sigma^2)$  em potências de  $m^2$

$$\ln(\Sigma^2) = \ln\left(\frac{p^2 y(y-1) + m^2}{m^2}\right) = \ln\left(\frac{p^2 y(y-1)}{m^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{m^2}{-p^2 y(1-y)}\right) \quad (\text{C.31})$$

e como  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ ,

$$\ln(\Sigma^2) = \ln\left(\frac{-p^2}{m^2}\right) + \ln(y(1-y)) + \mathcal{O}(m^2), \quad (\text{C.32})$$

obtemos então

$$\begin{aligned} I_6 &= \frac{b}{p^2} \left[ \ln\left(\frac{-p^2}{m^2}\right) \int_0^1 dy \left[ \frac{d}{dy} \frac{y}{2y-1} \right] \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 dy \left[ \frac{d}{dy} \frac{y}{2y-1} \right] \ln(y(1-y)) \right] + \mathcal{O}(m^2) \\ &= \frac{b}{p^2} \left[ \ln\left(\frac{-p^2}{m^2}\right) + c_{6.1} \right] + \mathcal{O}(m^2), \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

com

$$c_{6.1} \equiv \int_0^1 dy \left[ \frac{d}{dy} \frac{y}{2y-1} \right] \ln(y(1-y)). \quad (\text{C.34})$$

### Cálculo da integral $I_5$

Usando  $A = k^2 - m^2$ ,  $s = 2$ ,  $B = (k+p)^2 - m^2$ ,  $n = 2$  em (D.1) para calcular  $I_5$ (C.15)

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_k \int_0^1 dx dy \frac{\delta(x+y-1) xy (p^2 + 2kp)^2}{(x(k^2 - m^2) + y[(k+p)^2 - m^2])^4} \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(2)\Gamma(2)} \\ &= 6 \int_0^1 dy \int_k \frac{(1-y)y(p^2 + 2kp)^2}{((1-y)(k^2 - m^2) + y[k^2 + 2kp + p^2 - m^2])^4}. \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

Fazendo a mudança (C.19), o denominador desta integral muda como em (C.20) e o numerador com

$$\begin{aligned}
(p^2 + 2kp)^2 &= (p^2 + 2p(k' - py))^2 = p^4 + 4p^2p(k' - py) + 4(pk' - p^2y)^2 \\
&= p^4 + 4p^2pk' - 4p^4y + 4(pk')^2 - 8p^2pk'y + 4p^4y^2 \\
&= p^4(1 - 4y + 4y^2) + p^2pk'(4 - 8y) + 4(pk')^2 \\
&= p^4(1 - 2y)^2 + 4(1 - 2y)p^2pk' + 4(pk')^2.
\end{aligned} \tag{C.36}$$

Assim

$$\begin{aligned}
I_5 &= 6 \int_0^1 dy y(1 - y) \left( (1 - 2y)^2 p^4 \int_{k'} \frac{1}{[k'^2 - \Lambda^2]^4} + 4(1 - 2y)p^2 p^\lambda \int_{k'} \frac{k'_\lambda}{[k'^2 - \Lambda^2]^4} \right. \\
&\quad \left. + 4p^\lambda p^\rho \int_{k'} \frac{k'_\lambda k'_\rho}{[k'^2 - \Lambda^2]^4} \right),
\end{aligned} \tag{C.37}$$

Usando (D.2) e (D.3), obtemos

$$\int_k \frac{1}{[k^2 - \Lambda^2]^4} = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{6} \frac{1}{\Lambda^4} = \frac{b}{6} \frac{1}{\Lambda^4} \tag{C.38}$$

e

$$\int_k k^\lambda k^\rho \frac{1}{[k^2 - \Lambda^2]^4} = -\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{g^{\lambda\rho}}{12} \frac{1}{\Lambda^2} = \frac{-b}{12} \frac{g^{\lambda\rho}}{\Lambda^2}, \tag{C.39}$$

e como

$$\int_k \frac{k^\lambda}{[k^2 - \Lambda^2]^n} = 0, \tag{C.40}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
I_5 &= 6 \int_0^1 dy y(1 - y) \left( (1 - 2y)^2 p^4 \frac{b}{6} \frac{1}{\Lambda^4} - 4p^2 \frac{b}{12} \frac{1}{\Lambda^2} \right) \\
&= b \int_0^1 dy y(1 - y) \left( (1 - 2y)^2 \frac{p^4}{\Lambda^4} - 2 \frac{p^2}{\Lambda^2} \right).
\end{aligned} \tag{C.41}$$

Usando novamente  $\Sigma^2 \equiv \frac{\Lambda^2}{m^2}$  (C.25),

$$\frac{1}{\Lambda^4} = \frac{1}{m^4 \Sigma^4}, \quad \text{mas} \quad \frac{d}{dy} \frac{1}{\Sigma^2} = \frac{-1}{\Sigma^4} \frac{d}{dy} \Sigma^2 = \frac{-1}{\Sigma^4} \frac{p^2}{m^2} (2y - 1) \tag{C.42}$$

ou

$$\frac{1}{\Lambda^4} = \frac{1}{m^4} \left[ \frac{-m^2}{p^2(2y-1)} \right] \frac{d}{dy} \frac{1}{\Sigma^2} \quad (\text{C.43})$$

usando este resultado e (C.28) em (C.41),

$$\begin{aligned} I_5 &= b \int_0^1 dy y(1-y) \left[ (1-2y)^2 p^4 \left( \frac{-1}{m^2 p^2 (2y-1)} \frac{d}{dy} \frac{1}{\Sigma^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2p^2 \left( \frac{1}{p^2(2y-1)} \left[ \frac{d}{dy} \ln \Sigma^2 \right] \right) \right] \\ &= b \int_0^1 dy y(1-y) \left[ (1-2y) \frac{p^2}{m^2} \frac{d}{dy} \frac{1}{\Sigma^2} - \frac{2}{(2y-1)} \left( \frac{d}{dy} \ln \Sigma^2 \right) \right] \\ &= b \left[ \frac{p^2}{m^2} I_{5.1} + I_{5.2} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

onde

$$I_{5.1} \equiv \int_0^1 dy y(1-y)(1-2y) \frac{d}{dy} \frac{1}{\Sigma^2} \quad (\text{C.45})$$

e

$$I_{5.2} \equiv -2 \int_0^1 \frac{y(1-y)}{2y-1} \left( \frac{d}{dy} \ln \Sigma^2 \right). \quad (\text{C.46})$$

Mas

$$\begin{aligned} I_{5.1} &= \left[ (y-y^2)(1-2y) \frac{1}{\Sigma^2} \right] \Big|_0^1 - \int_0^1 dy [(1-2y)^2 - 2(y-y^2)] \frac{1}{\Sigma^2} \\ &= - \int_0^1 dy [(1-2y)^2 - 2(y-y^2)] \frac{1}{\Sigma^2}, \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

usando (C.28),

$$\begin{aligned} I_{5.1} &= - \int_0^1 dy [(1-2y)^2 - 2(y-y^2)] \frac{m^2}{p^2(2y-1)} \frac{d}{dy} \ln \Sigma^2 \\ &= \frac{-m^2}{p^2} \left( \left[ \frac{[(1-2y)^2 - 2(y-y^2)] \ln \Sigma^2}{(2y-1)} \right] \Big|_0^1 \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 \frac{d}{dy} \left[ (2y-1) - 2 \frac{y-y^2}{2y-1} \right] \ln \Sigma^2 \right) \\ &= \frac{m^2}{p^2} \int_0^1 \left[ \frac{d}{dy} \left( (2y-1) - 2 \frac{y-y^2}{2y-1} \right) \right] \ln \Sigma^2, \end{aligned} \quad (\text{C.48})$$

e usando (C.32),

$$\begin{aligned}
I_{5.1} &= \frac{m^2}{p^2} \left[ \ln \left( \frac{-p^2}{m^2} \right) \int_0^1 dy \left[ \frac{d}{dy} \left( (2y-1) - 2 \frac{y-y^2}{2y-1} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 dy \frac{d}{dy} [(1-2y)^2 - 2(y-y^2)] \ln(y(1-y)) + \mathcal{O}(m^2) \right] \\
&= \frac{m^2}{p^2} \left[ 2 \ln \left( \frac{-p^2}{m^2} \right) + \int_0^1 dy \frac{d}{dy} [(1-2y)^2 - 2(y-y^2)] \ln(y(1-y)) \right] \\
&\quad + \mathcal{O}(m^2); \tag{C.49}
\end{aligned}$$

e

$$I_{5.2} = -2 \int_0^1 \frac{y(1-y)}{2y-1} \left( \frac{d}{dy} \ln \Sigma^2 \right) = 2 \int_0^1 dy \frac{d}{dy} \frac{y(1-y)}{2y-1} \ln \Sigma^2, \tag{C.50}$$

e usando (C.32),

$$\begin{aligned}
I_{5.2} &= 2 \ln \left( \frac{-p^2}{m^2} \right) \int_0^1 dy \frac{d}{dy} \frac{y(1-y)}{2y-1} + 2 \int_0^1 dy \frac{d}{dy} \frac{y(1-y)}{2y-1} \ln(y(1-y)) \\
&\quad + \mathcal{O}(m^2) \\
&= 2 \int_0^1 dy \frac{d}{dy} \frac{y(1-y)}{2y-1} \ln(y(1-y)) + \mathcal{O}(m^2). \tag{C.51}
\end{aligned}$$

Usando estes resultados em (C.44), obtemos

$$\begin{aligned}
I_5 &= b \left[ \frac{p^2}{m^2} \left( \frac{m^2}{p^2} \int_0^1 dy \frac{d}{dy} [(1-2y)^2 - 2(y-y^2)] \ln(y(1-y)) \right) \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{m^2}{p^2} \ln \left( \frac{-p^2}{m^2} \right) + \left( 2 \int_0^1 dy \frac{d}{dy} \frac{y(1-y)}{2y-1} \ln(y(1-y)) \right) \right] + \mathcal{O}(m^2) \\
&= -2b \ln \left( \frac{-p^2}{m^2} \right) + bc_{5.1} + \mathcal{O}(m^2), \tag{C.52}
\end{aligned}$$

com

$$c_{5.1} \equiv \int_0^1 dy \left( \frac{d}{dy} [(1-2y)^2 - 2(y-y^2)] + 2 \frac{d}{dy} \frac{y(1-y)}{2y-1} \right) \ln(y(1-y)). \tag{C.53}$$

#### Cálculo da integral $I_4$

Usando  $A = k^2 - m^2$ ,  $s = 2$ ,  $B = (k+p)^2 - m^2$ ,  $n = 1$  em (D.1) para calcular  $I_4$  (C.14),

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_k \int_0^1 dx dy \frac{\delta(x+y-1)x(p^2+2kp)}{(x(k^2-m^2)+y[(k+p)^2-m^2])^3} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(1)\Gamma(2)} \\
&= 2 \int_0^1 dy \int_k \frac{(1-y)(p^2+2kp)}{((1-y)(k^2-m^2)+y[k^2+2kp+p^2-m^2])^3}.
\end{aligned} \tag{C.54}$$

Fazendo a mudança (C.19), o denominador desta integral muda como em (C.20) e o numerador com

$$p^2 + 2kp = p^2 + 2(k' - py)p = p^2(1 - 2y) + 2k'p, \tag{C.55}$$

e assim,

$$\begin{aligned}
I_4 &= 2 \int_0^1 dy \int_{k'} \frac{(1-y)[(1-2y)p^2 + 2k'p]}{[k'^2 - \Lambda^2]^3} \\
&= 2 \int_0^1 dy (1-y)p^2(1-2y) \int_k \frac{1}{[k^2 - \Lambda^2]^3},
\end{aligned} \tag{C.56}$$

usando (D.2),

$$I_4 = 2 \int_0^1 dy (1-y)p^2(1-2y) \frac{-b}{2\Lambda^2} = -b \int_0^1 dy \frac{(1-y)p^2(1-2y)}{\Lambda^2}, \tag{C.57}$$

usando (C.28),

$$\begin{aligned}
I_4 &= -b \int_0^1 dy (1-y)(1-2y)p^2 \left[ \frac{1}{p^2(2y-1)} \frac{d}{dy} \ln(\Sigma^2) \right] \\
&= b \int_0^1 dy (1-y) \frac{d}{dy} \ln(\Sigma^2) \\
&= b \left[ (1-y) \ln(\Sigma^2) \right] \Big|_0^1 + b \int_0^1 dy \ln(\Sigma^2) = b \int_0^1 dy \ln(\Sigma^2),
\end{aligned} \tag{C.58}$$

usando (C.32),

$$\begin{aligned}
I_4 &= b \left( \ln \left( \frac{-p^2}{m^2} \right) + \int_0^1 dy \ln(y(1-y)) \right) + \mathcal{O}(m^2) \\
&= b \left( \ln \left( \frac{-p^2}{m^2} \right) + c_{4.1} \right) + \mathcal{O}(m^2),
\end{aligned} \tag{C.59}$$

com

$$c_{4.1} \equiv \int_0^1 dy \ln(y(1-y)). \tag{C.60}$$

### Cálculo da integral $I_{\mu\nu}^3$

Usando  $A = k^2 - m^2$ ,  $s = 1$ ,  $B = (k + p)^2 - m^2$ ,  $n = 2$  em (D.1) para calcular  $I_{\mu\nu}^3$  (C.14),

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu}^3 &= \int_k \int_0^1 dx dy \frac{\delta(x + y - 1) y (p_\nu k_\mu + p_\mu k_\nu)}{(x(k^2 - m^2) + y[(k + p)^2 - m^2])^3 \Gamma(2)\Gamma(1)} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)\Gamma(1)} \\ &= 2 \int_0^1 dy \int_k \frac{y (p_\nu k_\mu + p_\mu k_\nu)}{((1 - y)(k^2 - m^2) + y[k^2 + 2kp + p^2 - m^2])^3}. \end{aligned} \quad (\text{C.61})$$

Fazendo a mudança (C.19), o denominador desta integral muda como em (C.20) e o numerador com

$$p_\nu k_\mu + p_\mu k_\nu = p_\nu k'_\mu + p_\mu k'_\nu - 2p_\mu p_\nu y, \quad (\text{C.62})$$

e assim,

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu}^3 &= 2 \int_0^1 dy \int_{k'} \frac{y (p_\nu k'_\mu + p_\mu k'_\nu - 2p_\mu p_\nu y)}{(k'^2 - \Lambda^2)^3} \\ &= -4 \int_0^1 dy y^2 p_\mu p_\nu \int_k \frac{1}{(k^2 - \Lambda^2)^3}, \end{aligned} \quad (\text{C.63})$$

usando (D.2),

$$I_{\mu\nu}^3 = 2b p_\mu p_\nu \int_0^1 dy \frac{y^2}{\Lambda^2}, \quad (\text{C.64})$$

usando (C.28),

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu}^3 &= 2b p_\mu p_\nu \int_0^1 dy \frac{y^2}{p^2(2y - 1)} \frac{d}{dy} \ln(\Sigma^2) \\ &= 2b \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \left( \left[ \frac{y^2}{2y - 1} \ln(\Sigma^2) \right] \Big|_0^1 - \int_0^1 dy \left( \frac{d}{dy} \frac{y^2}{2y - 1} \right) \ln(\Sigma^2) \right) \\ &= -2b \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \int_0^1 dy \left( \frac{d}{dy} \frac{y^2}{2y - 1} \right) \ln(\Sigma^2), \end{aligned} \quad (\text{C.65})$$

usando (C.32),

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}^3 &= -2b \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \left( \ln \left( \frac{-p^2}{m^2} \right) \int_0^1 dy \left( \frac{d}{dy} \frac{y^2}{2y-1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 dy \left( \frac{d}{dy} \frac{y^2}{2y-1} \right) \ln(y(1-y)) + \mathcal{O}(m^2) \right) \\
&= b \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \left[ -2 \ln \left( \frac{-p^2}{m^2} \right) + c_{3.1} \right] + \mathcal{O}(m^2)
\end{aligned} \tag{C.66}$$

com

$$c_{3.1} \equiv -2 \int_0^1 dy \left( \frac{d}{dy} \frac{y^2}{2y-1} \right) \ln(y(1-y)). \tag{C.67}$$

### Cálculo da integral $I_{\mu\nu}^2$

Usando  $A = k^2 - m^2$ ,  $s = 3$ ,  $B = (k+p)^2 - m^2$ ,  $n = 2$  em (D.1) para calcular  $I_{\mu\nu}^2$  (C.13),

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}^2 &= \int_k \int_0^1 dx dy \frac{\delta(x+y-1) x^2 y (p^2 + 2kp)^2 k_\mu k_\nu}{(x(k^2 - m^2) + y[(k+p)^2 - m^2])^5} \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(3)\Gamma(2)} \\
&= 12 \int_0^1 dy \int_k \frac{(1-y)^2 y (p^2 + 2kp)^2 k_\mu k_\nu}{((1-y)(k^2 - m^2) + y[k^2 + 2kp + p^2 - m^2])^5}.
\end{aligned} \tag{C.68}$$

Fazendo a mudança (C.19), o denominador desta integral muda como em (C.20) e o numerador com

$$\begin{aligned}
(p^2 + 2kp)^2 k_\mu k_\nu &= [p^2 - 2p(k' - py)]^2 [(k' - py)_\mu (k' - py)_\nu] \\
&= [p^4(1-2y)^2 + 4(1-2y)p^2pk' + 4(k'p)^2] \cdot \\
&\quad \cdot [k'_\mu k'_\nu - y(k'_\mu p_\nu + k'_\nu p_\mu) + y^2 p_\mu p_\nu] \\
&= p^4(1-2y)^2 k'_\mu k'_\nu + y^2 p^4(1-2y)^2 p_\mu p_\nu \\
&\quad - 4y(1-2y)p^2pk'(k'_\mu p_\nu + k'_\nu p_\mu) + 4(k'p)^2 k'_\mu k'_\nu \\
&\quad + 4y^2(k'p)^2 p_\mu p_\nu + \text{termos com n}^\circ \text{ ímpar de } k' \text{'s},
\end{aligned} \tag{C.69}$$



onde os termos com número ímpares de  $k$ 's serão anulados quando fizermos a integral em  $d^4k'$ . Obtemos então

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}^2 &= 12 \int_0^1 dy y(1-y)^2 \left[ 4p^\lambda p^\sigma \int_k \frac{k_\lambda k_\sigma k_\mu k_\nu}{(k^2 - \Lambda^2)^5} + p^4(1-2y)^2 \int_k \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \Lambda^2)^5} \right. \\
&\quad \left. - 4y(1-2y)p^2 p^\lambda \left( p_\nu \int_k \frac{k_\lambda k_\mu}{(k^2 - \Lambda^2)^5} + (\mu \leftrightarrow \nu) \right) \right. \\
&\quad \left. + 4y^2 p_\mu p_\nu p^\lambda p^\sigma \int_k \frac{k_\lambda k_\sigma}{(k^2 - \Lambda^2)^5} + y^2 p^4(1-2y)^2 p_\mu p_\nu \int_k \frac{1}{(k^2 - \Lambda^2)^5} \right].
\end{aligned}$$

Usando (D.4),

$$\int_k \frac{k_\lambda k_\sigma k_\mu k_\nu}{(k^2 - \Lambda^2)^5} = \frac{-b}{4!} \frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4} (g_{\lambda\sigma} g_{\mu\nu} + g_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu} + g_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma}); \quad (\text{C.70})$$

usando (D.3),

$$\int_k \frac{k_\lambda k_\sigma}{(k^2 - \Lambda^2)^5} = \frac{b}{24} \frac{g_{\lambda\sigma}}{2} \frac{1}{\Lambda^4} = \frac{b}{48} \frac{g_{\lambda\sigma}}{\Lambda^4}; \quad (\text{C.71})$$

e usando(D.2),

$$\int_k \frac{1}{(k^2 - \Lambda^2)^5} = \frac{-b}{12} \frac{1}{\Lambda^6}. \quad (\text{C.72})$$

Com estes resultados em (C.70) obtemos

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}^2 &= 12 \int_0^1 dy y(1-y)^2 \left[ 4p^\lambda p^\sigma \left( \frac{-b}{4!} \frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4} (g_{\lambda\sigma} g_{\mu\nu} + g_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu} + g_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma}) \right) \right. \\
&\quad \left. + p^4(1-2y)^2 \left( \frac{b}{48} \frac{g_{\mu\nu}}{\Lambda^4} \right) - 4y(1-2y)p^2 p^\lambda \left( p_\nu \left( \frac{b}{48} \frac{g_{\lambda\mu}}{\Lambda^4} \right) + (\mu \leftrightarrow \nu) \right) \right. \\
&\quad \left. + 4y^2 p_\mu p_\nu p^\lambda p^\sigma \left( \frac{b}{48} \frac{g_{\lambda\sigma}}{\Lambda^4} \right) + y^2 p^4(1-2y)^2 p_\mu p_\nu \left( \frac{-b}{12} \frac{1}{\Lambda^6} \right) \right] \\
&= \int_0^1 dy y(1-y)^2 \left[ \frac{-b}{2} \frac{1}{\Lambda^2} (g_{\mu\nu} p^2 + 2p_\mu p_\nu) + p^4(1-2y)^2 \frac{b}{4} \frac{g_{\mu\nu}}{\Lambda^4} \right. \\
&\quad \left. - 8y(1-2y)p^2 p_\mu p_\nu \frac{b}{4} \frac{1}{\Lambda^4} + y^2 p^2 p_\mu p_\nu \frac{b}{\Lambda^4} - y^2 p^4(1-2y)^2 p_\mu p_\nu \frac{b}{\Lambda^6} \right] \\
&= b \int_0^1 dy y(1-y)^2 \left[ g_{\mu\nu} \left( \frac{-1}{2} \frac{p^2}{\Lambda^2} + \frac{(1-2y)^2}{4} \frac{p^4}{\Lambda^4} \right) \right. \\
&\quad \left. + p_\mu p_\nu \left( \frac{-1}{\Lambda^2} + [-2y(1-2y) + y^2] \frac{p^2}{\Lambda^4} - y^2(1-2y)^2 \frac{p^4}{\Lambda^6} \right) \right] \\
&= b \left[ g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} I_{2.1} + \frac{1}{4} I_{2.2} \right) + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} (-I_{2.1} + I_{2.3} + I_{2.4}) \right], \quad (\text{C.73})
\end{aligned}$$

onde

$$I_{2.1} \equiv -p^2 \int_0^1 dy y(1-y)^2 \frac{1}{\Lambda^2}, \quad (\text{C.74})$$

$$I_{2.2} \equiv p^4 \int_0^1 dy y(1-y)^2(1-2y)^2 \frac{1}{\Lambda^4}, \quad (\text{C.75})$$

$$\begin{aligned} I_{2.3} &\equiv p^4 \int_0^1 dy y(1-y)^2 [-2y(1-2y) + y^2] \frac{1}{\Lambda^4} \\ &= p^4 \int_0^1 dy y(1-y)^2 (-2y + 5y^2) \frac{1}{\Lambda^4}, \end{aligned} \quad (\text{C.76})$$

$$I_{2.4} \equiv -p^6 \int_0^1 dy y^3(1-y)^2(1-2y)^2 \frac{1}{\Lambda^6}. \quad (\text{C.77})$$

Usando (C.28) em (C.74),

$$\begin{aligned} I_{2.1} &= -p^2 \int_0^1 dy y(1-y)^2 \frac{1}{p^2(2y-1)} \frac{d}{dy} \ln(\Sigma^2) \\ &= \int_0^1 dy \left( \frac{d}{dy} \frac{y(1-2y)^2}{2y-1} \right) \ln(\Sigma^2), \end{aligned} \quad (\text{C.78})$$

e usando (C.32),

$$\begin{aligned} I_{2.1} &= \ln \left( \frac{-p^2}{m^2} \right) \int_0^1 dy \left( \frac{d}{dy} \frac{y(1-2y)^2}{2y-1} \right) \\ &\quad + \int_0^1 dy \left( \frac{d}{dy} \frac{y(1-2y)^2}{2y-1} \right) \ln(y(1-y)) + \mathcal{O}(m^2) \\ &= \ln \left( \frac{-p^2}{m^2} \right) + \int_0^1 dy \left( \frac{d}{dy} \frac{y(1-2y)^2}{2y-1} \right) \ln(y(1-y)) + \mathcal{O}(m^2); \end{aligned} \quad (\text{C.79})$$

Usando (C.43) em (C.75),

$$\begin{aligned} I_{2.2} &= p^4 \int_0^1 dy y(1-y)^2(1-2y)^2 \left( \frac{1}{m^4} \left[ \frac{-m^2}{p^2(2y-1)} \right] \frac{d}{dy} \frac{1}{\Sigma^2} \right) \\ &= \frac{p^2}{m^2} \left( \left[ \frac{y(1-y)^2(1-2y)}{\Sigma^2} \right] \Big|_0^1 - \int_0^1 dy \left( \frac{d}{dy} [y(1-y)^2(1-2y)] \right) \frac{1}{\Sigma^2} \right) \\ &= -\frac{p^2}{m^2} \int_0^1 dy \left( \frac{d}{dy} [y(1-y)^2(1-2y)] \right) \frac{1}{\Sigma^2}, \end{aligned} \quad (\text{C.80})$$

usando (C.28),

$$\begin{aligned}
I_{2.2} &= - \int_0^1 dy \left( \frac{d}{dy} [y(1-y)^2(1-2y)] \right) \frac{1}{(2y-1)} \frac{d}{dy} \ln(\Sigma^2) \\
&= \int_0^1 dy \left( \frac{1}{(2y-1)} \frac{d}{dy} [y(1-y)^2] \right) \frac{d}{dy} \ln(\Sigma^2) \\
&= \left[ \left( \frac{1}{(2y-1)} \frac{d}{dy} [y(1-y)^2] \right) \ln(\Sigma^2) \right] \Big|_0^1 \\
&\quad - \int_0^1 dy \left[ \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{(2y-1)} \frac{d}{dy} [y(1-y)^2] \right) \right] \ln(\Sigma^2) \\
&= - \int_0^1 dy \left[ \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{(2y-1)} \frac{d}{dy} [y(1-y)^2] \right) \right] \ln(\Sigma^2), \tag{C.81}
\end{aligned}$$

e usando (C.32),

$$\begin{aligned}
I_{2.2} &= - \ln \left( \frac{-p^2}{m^2} \right) \int_0^1 dy \left[ \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{(2y-1)} \frac{d}{dy} [y(1-y)^2] \right) \right] \\
&\quad + \int_0^1 dy \left[ \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{(2y-1)} \frac{d}{dy} [y(1-y)^2] \right) \right] \ln(y(1-y)^2) + \mathcal{O}(m^2) \tag{C.82}
\end{aligned}$$

Usando (C.43) em (C.76),

$$\begin{aligned}
I_{2.3} &= p^4 \int_0^1 dy y(1-y)^2 (-2y+5y^2) \frac{1}{m^2} \left[ \frac{-1}{p^2(2y-1)} \right] \frac{d}{dy} \frac{1}{\Sigma^2} \\
&= \frac{p^2}{m^2} \left[ y(1-y)^2 (-2y+5y^2) \frac{-1}{(2y-1)} \frac{1}{\Sigma^2} \right] \Big|_0^1 \\
&\quad - \frac{p^2}{m^2} \int_0^1 dy \left[ \frac{d}{dy} \left( y(1-y)^2 (-2y+5y^2) \frac{-1}{(2y-1)} \right) \right] \frac{1}{\Sigma^2} \\
&= \frac{p^2}{m^2} \int_0^1 dy \left[ \frac{d}{dy} \frac{y(1-y)^2 (-2y+5y^2)}{(2y-1)} \right] \frac{1}{\Sigma^2}, \tag{C.83}
\end{aligned}$$

usando (C.28),

$$\begin{aligned}
I_{2.3} &= \frac{p^2}{m^2} \int_0^1 dy \left[ \frac{d}{dy} \frac{y(1-y)^2(-2y+5y^2)}{2y-1} \right] \left[ \frac{m^2}{p^2(2y-1)} \frac{d}{dy} \ln(\Sigma^2) \right] \\
&= \left[ \left[ \frac{d}{dy} \frac{y(1-y)^2(-2y+5y^2)}{2y-1} \right] \frac{1}{(2y-1)} \ln(\Sigma^2) \right] \Big|_0^1 \\
&\quad - \int_0^1 dy \left[ \frac{d}{dy} \left( \left[ \frac{d}{dy} \frac{y(1-y)^2(-2y+5y^2)}{2y-1} \right] \frac{1}{(2y-1)} \right) \right] \ln(\Sigma^2) \\
&= - \int_0^1 dy \left[ \frac{d}{dy} \left( \left[ \frac{d}{dy} \frac{y(1-y)^2(-2y+5y^2)}{2y-1} \right] \frac{1}{(2y-1)} \right) \right] \ln(\Sigma^2) \quad (C.84)
\end{aligned}$$

usando (C.32),

$$\begin{aligned}
I_{2.3} &= - \ln \left( \frac{-p^2}{m^2} \right) \int_0^1 dy \left[ \frac{d}{dy} \left( \left[ \frac{d}{dy} \frac{y(1-y)^2(-2y+5y^2)}{2y-1} \right] \frac{1}{(2y-1)} \right) \right] \\
&\quad - \int_0^1 dy \left[ \frac{d}{dy} \left( \left[ \frac{d}{dy} \frac{y(1-y)^2(-2y+5y^2)}{2y-1} \right] \frac{1}{(2y-1)} \right) \right] \ln(y(1-y)) \\
&\quad + \mathcal{O}(m^2); \quad (C.85)
\end{aligned}$$

Para resolver (C.77) usaremos novamente  $\Sigma^2 \equiv \frac{\Lambda^2}{m^2}$  (C.25), e

$$\frac{1}{\Lambda^6} = \frac{1}{m^6 \Sigma^6}, \quad \text{mas,} \quad \frac{d}{dy} \frac{1}{\Sigma^4} = \frac{-2}{\Sigma^6} \frac{d}{dy} \Sigma^2 = \frac{-2}{\Lambda^2} \frac{p^2}{m^2} (2y-1) \quad (C.86)$$

ou

$$\frac{1}{\Lambda^6} = \frac{1}{m^6} \left[ \frac{-m^2}{2p^2(2y-1)} \right] \frac{d}{dy} \frac{1}{\Sigma^4}. \quad (C.87)$$

usando este resultado em (C.77),

$$\begin{aligned}
I_{2.4} &= -p^6 \int_0^1 dy y^3 (1-y)^2 (1-2y)^2 \frac{1}{m^4} \left[ \frac{-1}{2p^2(2y-1)} \right] \frac{d}{dy} \frac{1}{\Sigma^4} \\
&= \frac{p^4}{m^4} \left[ y^3 (1-y)^2 (1-2y)^2 \frac{1}{2(2y-1)} \frac{1}{\Sigma^4} \right] \Big|_0^1 \\
&\quad - \frac{p^4}{m^4} \int_0^1 dy \left[ \frac{d}{dy} \left( y^3 (1-y)^2 (1-2y)^2 \frac{1}{2(2y-1)} \right) \right] \frac{1}{\Sigma^4} \\
&= \frac{p^4}{2m^4} \int_0^1 dy \left[ \frac{d}{dy} \left( y^3 (1-y)^2 (1-2y) \right) \right] \frac{1}{\Sigma^4} \quad (C.88)
\end{aligned}$$

usando (C.43)

$$\begin{aligned}
I_{2.4} &= \frac{p^4}{2m^4} \int_0^1 dy \left[ \frac{d}{dy} \left( y^3(1-y)^2(1-2y) \right) \right] \left[ \frac{-m^2}{p^2(2y-1)} \right] \frac{d}{dy} \frac{1}{\Sigma^2} \\
&= \frac{-p^2}{2m^2} \left[ \left[ \frac{d}{dy} \left( y^3(1-y)^2(1-2y) \right) \right] \frac{-1}{(2y-1)} \frac{1}{\Sigma^2} \right] \Big|_0^1 \\
&\quad + \frac{p^2}{2m^2} \int_0^1 dy \left[ \frac{d}{dy} \left( \left[ \frac{d}{dy} \left( y^3(1-y)^2(1-2y) \right) \right] \frac{-1}{(2y-1)} \right) \right] \frac{1}{\Sigma^2},
\end{aligned} \tag{C.89}$$

mas

$$\begin{aligned}
&\left[ \left[ \frac{d}{dy} \left( y^3(1-y)^2(1-2y) \right) \right] \frac{-1}{(2y-1)} \frac{1}{\Sigma^2} \right] \Big|_0^1 \\
&= \left[ \left[ \left( 3y^2(1-y)^2(1-2y) - 2y^3(1-y)(1-2y) - 2y^4(1-y)^2 \right) \right] \frac{-1}{(2y-1)} \frac{1}{\Sigma^2} \right] \Big|_0^1 \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{C.90}$$

ou

$$I_{2.4} = \frac{p^2}{2m^2} \int_0^1 dy \left[ \frac{d}{dy} \left( \left[ \frac{d}{dy} \left( y^3(1-y)^2(1-2y) \right) \right] \frac{-1}{(2y-1)} \right) \right] \frac{1}{\Sigma^2} \tag{C.91}$$

usando (C.28)

$$\begin{aligned}
I_{2.4} &= \frac{p^2}{2m^2} \int_0^1 dy \left[ \frac{d}{dy} \left( \left[ \frac{d}{dy} \left( y^3(1-y)^2(1-2y) \right) \right] \frac{-1}{(2y-1)} \right) \right] \frac{m^2}{p^2(2y-1)} \frac{d}{dy} \ln(\Sigma^2) \\
&= \left[ \left[ \frac{d}{dy} \left( \left[ \frac{d}{dy} \left( y^3(1-y)^2(1-2y) \right) \right] \frac{-1}{(2y-1)} \right) \right] \frac{1}{(2y-1)} \ln(\Sigma^2) \right] \Big|_0^1 \\
&\quad - \int_0^1 dy \left( \frac{d}{dy} \left[ \frac{d}{dy} \left( \left[ \frac{d}{dy} \left( y^3(1-y)^2(1-2y) \right) \right] \frac{-1}{(2y-1)} \right) \frac{1}{(2y-1)} \right] \right) \ln(\Sigma^2) \\
&= \int_0^1 dy \left( \frac{d}{dy} \left[ \frac{d}{dy} \left( \left[ \frac{d}{dy} \left( y^3(1-y)^2(1-2y) \right) \right] \frac{1}{(2y-1)} \right) \frac{1}{(2y-1)} \right] \right) \ln(\Sigma^2) \\
&= \int_0^1 dy f_{2.4}(y) \ln(\Sigma^2),
\end{aligned} \tag{C.92}$$

com

$$f_{2.4}(y) \equiv \left( \frac{d}{dy} \left[ \frac{d}{dy} \left( \left[ \frac{d}{dy} \left( y^3(1-y)^2(1-2y) \right) \right] \frac{1}{(2y-1)} \right) \frac{1}{(2y-1)} \right] \right). \tag{C.93}$$

Usando (C.32),

$$I_{2.4} = \ln\left(\frac{-p^2}{m^2}\right) \int_0^1 dy f_{2.4}(y) + \int_0^1 dy f_{2.4}(y) \ln(y(1-y)) + \mathcal{O}(m^2). \quad (\text{C.94})$$

Com os resultados (C.79),(C.82),(C.85) e (C.94) em (C.73) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{I_{\mu\nu}^2}{b} &= g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} I_{2.1} + \frac{1}{4} I_{2.2} \right) + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} (-I_{2.1} + I_{2.3} + I_{2.4}) \\ &= g_{\mu\nu} \ln\left(\frac{-p^2}{m^2}\right) \int_0^1 dy \left[ \frac{1}{2} f_{2.1}(y) + \frac{1}{4} f_{2.2}(y) \right] \\ &\quad + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \ln\left(\frac{-p^2}{m^2}\right) \int_0^1 dy \left[ -f_{2.1}(y) + f_{2.3}(y) + f_{2.4}(y) \right] \\ &\quad + g_{\mu\nu} \int_0^1 dy \left[ \frac{1}{2} f_{2.1}(y) + \frac{1}{4} f_{2.2}(y) \right] \ln(y(1-y)) \\ &\quad + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \int_0^1 dy \left[ -f_{2.1}(y) + f_{2.3}(y) + f_{2.4}(y) \right] \ln(y(1-y)) + \mathcal{O}(m^2) \\ &= \ln\left(\frac{-p^2}{m^2}\right) \int_0^1 dy \left( g_{\mu\nu} f_{2.a}(y) + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} f_{2.b}(y) \right) \\ &\quad + \int_0^1 dy \left[ g_{\mu\nu} f_{2.a}(y) + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} f_{2.b}(y) \right] \ln(y(1-y)) + \mathcal{O}(m^2), \end{aligned} \quad (\text{C.95})$$

onde

$$f_{2.a}(y) \equiv \frac{1}{2} f_{2.1}(y) + \frac{1}{4} f_{2.2}(y), \quad (\text{C.96})$$

$$f_{2.b}(y) \equiv -f_{2.1}(y) + f_{2.3}(y) + f_{2.4}(y), \quad (\text{C.97})$$

$$f_{2.1}(y) \equiv \frac{d}{dy} \frac{y(1-2y)^2}{2y-1}, \quad (\text{C.98})$$

$$f_{2.2}(y) \equiv \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{(2y-1)} \frac{d}{dy} [y(1-y)^2] \right), \quad (\text{C.99})$$

e

$$f_{2.3}(y) \equiv \frac{d}{dy} \left( \left[ \frac{d}{dy} \frac{y(1-y)^2(-2y+5y^2)}{2y-1} \right] \frac{1}{(2y-1)} \right) \quad (\text{C.100})$$

Podemos ainda reescrever (C.95) como

$$I_{\mu\nu}^2 = b \left( \ln \left( \frac{-p^2}{m^2} \right) \left[ c_{2.1} g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} c_{2.2} \right] + g_{\mu\nu} c_{2.3} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} c_{2.4} \right) + \mathcal{O}(m^2) \quad (\text{C.101})$$

com

$$c_{2.1} \equiv \int_0^1 dy f_{2.a}(y), \quad c_{2.2} \equiv \int_0^1 dy f_{2.b}(y), \quad (\text{C.102})$$

$$c_{2.3} \equiv \int_0^1 dy f_{2.a}(y) \ln(y(1-y)), \quad c_{2.4} \equiv \int_0^1 dy f_{2.b}(y) \ln(y(1-y)), \quad (\text{C.103})$$

### Cálculo da integral $I_{\mu\nu}^1$

Usando  $A = k^2 - m^2$ ,  $s = 3$ ,  $B = (k+p)^2 - m^2$ ,  $n = 1$  em (D.1) para calcular  $I_{\mu\nu}^1$  (C.13),

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu}^1 &= \int_k \int_0^1 dx dy \frac{\delta(x+y-1) x^2 (p^2 + 2kp) k_\mu k_\nu}{(x(k^2 - m^2) + y[(k+p)^2 - m^2])^4} \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(3)\Gamma(1)} \\ &= 3 \int_0^1 dy \int_k \frac{(1-y)^2 (p^2 + 2kp) k_\mu k_\nu}{((1-y)(k^2 - m^2) + y[k^2 + 2kp + p^2 - m^2])^4}. \end{aligned} \quad (\text{C.104})$$

Fazendo a mudança (C.19), o denominador desta integral muda como em (C.20) e o numerador com

$$\begin{aligned} (p^2 + 2kp) k_\mu k_\nu &= [p^2 + 2p(k' - py)] [(k' - py)_\mu (k' - py)_\nu] \\ &= [p^2(1-2y) + 2pk'] [k'_\mu k'_\nu - y(k'_\mu p_\nu + k'_\nu p_\mu) + y^2 p_\mu p_\nu] \\ &= p^2(1-2y)(k'_\mu k'_\nu + y^2 p_\mu p_\nu) - 2ypk'(k'_\mu p_\nu + k'_\nu p_\mu) \\ &\quad + \text{termos com n}^\circ \text{ ímpar de } k' \text{'s}, \end{aligned} \quad (\text{C.105})$$

onde os termos com número ímpares de  $k'$ 's serão anulados quando fizermos a integral em  $d^4 k'$ . Obtemos então

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu}^1 &= 3 \int_0^1 dy (1-y)^2 \left[ (1-2y)p^2 \int_k \frac{k_\mu k_\nu}{[k^2 - \Lambda^2]^4} - 2yp^\lambda \left( p_\nu \int_k \frac{k_\lambda k_\mu}{[k^2 - \Lambda^2]^4} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\nu \leftrightarrow \mu) \right) + (1-2y)y^2 p^2 p_\mu p_\nu \int_k \frac{1}{[k^2 - \Lambda^2]^4} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.106})$$

Usando (D.2),

$$\int_k \frac{1}{[k^2 - \Lambda^2]^4} = \frac{b}{6} \frac{1}{\Lambda^4} \quad (\text{C.107})$$

usando (D.3),

$$\int_k \frac{k_\mu k_\nu}{[k^2 - \Lambda^2]^4} = \frac{g_{\mu\nu}}{2} \left( \frac{-b}{6\Lambda^2} \right) = \frac{-b}{12} \frac{g_{\mu\nu}}{\Lambda^2}, \quad (\text{C.108})$$

e com estes resultados obtemos

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu}^1 &= 3 \int_0^1 dy (1-y)^2 \left[ (1-2y)p^2 \frac{-b}{12} \frac{g_{\mu\nu}}{\Lambda^2} - 2yp^\lambda \left( p_\nu \frac{-b}{12} \frac{g_{\lambda\mu}}{\Lambda^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\nu \leftrightarrow \mu) \right) + (1-2y)y^2 p^2 p_\mu p_\nu \frac{b}{6} \frac{1}{\Lambda^4} \right] \\ &= b \int_0^1 dy \left[ \frac{g_{\mu\nu}}{4} (1-y)^2 (1-2y) \frac{-p^2}{\Lambda^2} \right. \\ &\quad \left. + p_\mu p_\nu \left( (1-y)^2 y \frac{1}{\Lambda^2} + (1-y)^2 y^2 (1-2y) \frac{p^2}{2\Lambda^4} \right) \right] \\ &= b [g_{\mu\nu} I_{1.1} + p_\mu p_\nu (I_{1.2} + I_{1.3})], \end{aligned} \quad (\text{C.109})$$

onde

$$I_{1.1} \equiv -\frac{p^2}{4} \int_0^1 dy (1-y)^2 (1-2y) \frac{1}{\Lambda^2}, \quad (\text{C.110})$$

$$I_{1.2} \equiv \int_0^1 dy (1-y)^2 y \frac{1}{\Lambda^2}, \quad (\text{C.111})$$

$$I_{1.3} \equiv \frac{p^2}{2} \int_0^1 dy (1-y)^2 y^2 (1-2y) \frac{1}{\Lambda^4}. \quad (\text{C.112})$$

Usando (C.28) para calcular (C.110),

$$\begin{aligned} I_{1.1} &= \frac{-p^2}{4} \int_0^1 dy (1-y)^2 (1-2y) \frac{1}{p^2(2y-1)} \frac{d}{dy} \ln(\Sigma^2) \\ &= \frac{1}{4} \left[ (1-y)^2 \ln(\Sigma^2) \right] \Big|_0^1 \\ &\quad - \frac{1}{4} \int_0^1 dy \left[ \frac{d}{dy} (1-y)^2 \right] \ln(\Sigma^2) \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 dy \left[ \frac{d}{dy} (1-y)^2 \right] \ln(\Sigma^2), \end{aligned} \quad (\text{C.113})$$



usando (C.32),

$$\begin{aligned}
I_{1.1} &= \ln\left(\frac{-p^2}{m^2}\right) \int_0^1 dy \left[ \frac{d}{dy} (1-y)^2 \right] + \int_0^1 dy \frac{y-1}{2} \ln(y(1-y)) + \mathcal{O}(m^2). \\
&= -\ln\left(\frac{-p^2}{m^2}\right) + \int_0^1 dy \frac{y-1}{2} \ln(y(1-y)) + \mathcal{O}(m^2).
\end{aligned} \tag{C.114}$$

Usando (C.28) para calcular (C.111)

$$\begin{aligned}
I_{1.2} &= \int_0^1 dy (1-y)^2 y \frac{1}{p^2(2y-1)} \frac{d}{dy} \ln(\Sigma^2) \\
&= \frac{-1}{p^2} \left[ \int_0^1 dy \frac{(1-y)^2 y}{(2y-1)} \ln(\Sigma^2) \right] \Big|_0^1 \\
&\quad + \frac{1}{p^2} \int_0^1 dy \left( \frac{d}{dy} \frac{(1-y)^2 y}{(2y-1)} \right) \ln(\Sigma^2) \\
&= \frac{1}{p^2} \int_0^1 dy \left( \frac{d}{dy} \frac{(1-y)^2 y}{(2y-1)} \right) \ln(\Sigma^2),
\end{aligned} \tag{C.115}$$

usando (C.32),

$$\begin{aligned}
I_{1.2} &= \frac{1}{p^2} \ln\left(\frac{-p^2}{m^2}\right) \int_0^1 dy \left( \frac{d}{dy} \frac{(1-y)^2 y}{(2y-1)} \right) \\
&\quad + \frac{1}{p^2} \int_0^1 dy \left( \frac{d}{dy} \frac{(1-y)^2 y}{(2y-1)} \right) \ln(y(1-y)) + \mathcal{O}(m^2) \\
&= \frac{1}{p^2} \int_0^1 dy \left( \frac{d}{dy} \frac{(1-y)^2 y}{(2y-1)} \right) \ln(y(1-y)) + \mathcal{O}(m^2).
\end{aligned} \tag{C.116}$$

Usando (C.43) para calcular (C.112)

$$\begin{aligned}
I_{1.3} &= \frac{p^2}{2} \int_0^1 dy (1-y)^2 y^2 (1-2y) \frac{1}{m^2} \left[ \frac{-1}{p^2(2y-1)} \right] \frac{d}{dy} \frac{1}{\Sigma^2} \\
&= \frac{1}{2m^2} \left[ (1-y)^2 y^2 (1-2y) \frac{-1}{(2y-1)} \frac{1}{\Sigma^2} \right] \Big|_0^1 \\
&\quad - \frac{1}{2m^2} \int_0^1 dy \left[ \frac{d}{dy} \left( (1-y)^2 y^2 \right) \right] \frac{1}{\Sigma^2} \\
&= \frac{-1}{2m^2} \int_0^1 dy \left[ \frac{d}{dy} \left( (1-y)^2 y^2 \right) \right] \frac{1}{\Sigma^2},
\end{aligned} \tag{C.117}$$

usando (C.28),

$$\begin{aligned}
I_{1.3} &= \frac{-1}{2m^2} \int_0^1 dy \left[ \frac{d}{dy} \left( (1-y)^2 y^2 \right) \right] \frac{m^2}{p^2(2y-1)} \frac{d}{dy} \ln(\Sigma^2) \\
&= \frac{-1}{2p^2} \left[ \left[ \frac{d}{dy} \left( (1-y)^2 y^2 \right) \right] \frac{1}{(2y-1)} \ln(\Sigma^2) \right] \Big|_0^1 \\
&\quad + \frac{1}{2p^2} \int_0^1 dy \left[ \frac{d}{dy} \left( \left[ \frac{d}{dy} \left( (1-y)^2 y^2 \right) \right] \frac{1}{(2y-1)} \right) \right] \ln(\Sigma^2) \\
&= \frac{1}{p^2} \int_0^1 dy f_{1.3}(y) \ln(\Sigma^2), \tag{C.118}
\end{aligned}$$

com

$$f_{1.3}(y) \equiv \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{dy} \left( \left[ \frac{d}{dy} \left( (1-y)^2 y^2 \right) \right] \frac{1}{(2y-1)} \right) \right]. \tag{C.119}$$

Usando (C.32),

$$I_{1.3} = \frac{1}{p^2} \ln \left( \frac{-p^2}{m^2} \right) \int_0^1 dy f_{1.3}(y) + \frac{1}{p^2} \int_0^1 dy f_{1.3}(y) \ln(y(1-y)) + \mathcal{O}(m^2). \tag{C.120}$$

Usando os (C.114), (C.116), (C.120) em (C.109) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{I_{\mu\nu}^1}{b} &= g_{\mu\nu} I_{1.1} + p_\mu p_\nu (I_{1.2} + I_{1.3}) \\
&= \ln \left( \frac{-p^2}{m^2} \right) \left[ -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \int_0^1 dy f_{1.3}(y) \right] \\
&\quad + \int_0^1 dy \left[ g_{\mu\nu} f_{1.1}(y) + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} (f_{1.2}(y) + f_{1.3}(y)) \right] \ln(y(1-y)) + \mathcal{O}(m^2)
\end{aligned} \tag{C.121}$$

com

$$f_{1.1}(y) \equiv \frac{y-1}{2}, \tag{C.122}$$

e

$$f_{1.2}(y) \equiv \frac{d}{dy} \frac{(1-y)^2 y}{(2y-1)}. \tag{C.123}$$

Podemos reescrever (C.121) como

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}^1 &= b \left[ \ln \left( \frac{-p^2}{m^2} \right) \left( -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} c_{1.1} \right) \right. \\
&\quad \left. + g_{\mu\nu} c_{1.2} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} c_{1.3} \right] + \mathcal{O}(m^2)
\end{aligned} \tag{C.124}$$

onde

$$c_{1.1} \equiv \int_0^1 dy f_{1.3}(y), \quad (\text{C.125})$$

$$c_{1.2} \equiv \int_0^1 dy f_{1.1}(y) \ln(y(1-y)), \quad (\text{C.126})$$

$$c_{1.3} \equiv \int_0^1 dy (f_{1.2}(y) + f_{1.3}(y)) \ln(y(1-y)). \quad (\text{C.127})$$

### Resultado da parte finita de $\Delta_{\mu\nu}$

Com os resultados (C.33), (C.52), (C.59), (C.66), (C.101) e (C.124) em (C.12) obtemos

$$\begin{aligned} \Delta'_{\mu\nu} &= 8ie^2 m^2 \left[ -8I_{\mu\nu}^1 + 4I_{\mu\nu}^2 + 2I_{\mu\nu}^3 + g_{\mu\nu}(2I_4 - I_5 + p^2 I_6) \right] \\ &= 8ie^2 m^2 b \left[ \ln\left(\frac{-p^2}{m^2}\right) \left( -8 \left[ -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} c_{1.1} \right] + 4 \left[ c_{2.1} g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} c_{2.2} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \left[ -2 \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] + g_{\mu\nu} [2 + 2 + 1] \right) - 8 \left[ g_{\mu\nu} c_{1.2} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} c_{1.3} \right] \right. \\ &\quad \left. + 4 \left[ g_{\mu\nu} c_{2.3} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} c_{2.4} \right] + 2 \left[ \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} c_{3.1} \right] + g_{\mu\nu} [2c_{4.1} - c_{5.1} + c_{6.1}] \right] + \mathcal{O}(m^2) \\ &= 8ie^2 m^2 b \left[ \ln\left(\frac{-p^2}{m^2}\right) \left[ g_{\mu\nu}(13 + 4c_{2.1}) + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} (-8c_{1.1} + 4c_{2.2} - 4) \right] \right. \\ &\quad \left. + g_{\mu\nu} (-8c_{1.2} + 4c_{2.3} + 2c_{4.1} - c_{5.1} + c_{6.1}) + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} (-8c_{1.3} + 4c_{2.4} + 2c_{3.1}) \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(m^2) \\ &= \mathcal{O}(m), \end{aligned} \quad (\text{C.128})$$

onde os  $c_{ij}$ 's são constantes definidas por (C.34),(C.53),(C.60),(C.67),(C.103),(C.102), (C.127),(C.126) e (C.125).

## C.2 Cálculo de $\left(2 - p \frac{\partial}{\partial p}\right) \tilde{\Pi}_{\mu\nu}$

De (4.24) sabemos que

$$\left(2 - p \frac{\partial}{\partial p}\right) \Pi_{\mu\nu}^r = \left(2 - p \frac{\partial}{\partial p}\right) \tilde{\Pi}_{\mu\nu}. \quad (\text{C.129})$$

com

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu} = \frac{4}{3} (p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) \left( I_{\log}(m^2) - b \left( \frac{1}{3} + \frac{(2m^2 + p^2)}{p^2} Z_0(p^2; m^2) \right) \right), \quad (\text{C.130})$$

onde

$$Z_0(p^2; m^2) = \int_0^1 dz \ln \left[ \frac{p^2 z(z-1) + m^2}{m^2} \right], \quad (\text{C.131})$$

$$b \equiv \frac{i}{(4\pi)^2}, \quad (\text{C.132})$$

e

$$I_{\log}(m^2) = \int_k \frac{1}{(k^2 - m^2)^2}. \quad (\text{C.133})$$

Podemos então usar que

$$\begin{aligned} \left(2 - p \frac{\partial}{\partial p}\right) p^2 &= 2p^2 - p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} g^{\sigma\rho} p_\sigma p_\rho = 2p^2 - p^\mu g^{\sigma\rho} (g_{\mu\sigma} p_\rho + p_\sigma g_{\mu\rho}) \\ &= 2p^2 - 2p^\mu p_\mu = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.134})$$

e

$$\left(2 - p \frac{\partial}{\partial p}\right) p^\rho p^\sigma = 2p^\rho p^\sigma - p_\mu (g^{\rho\mu} p^\sigma + p^\rho g^{\sigma\mu}) = 0 \quad (\text{C.135})$$

assim

$$\begin{aligned} \left(2 - p \frac{\partial}{\partial p}\right) \tilde{\Pi}_{\mu\nu} &= \frac{4}{3} (p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) \left( -p \frac{\partial}{\partial p} \right) \left( -b \frac{(2m^2 + p^2)}{p^2} Z_0(p^2; m^2) \right) \\ &= b \frac{4}{3} (p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) \left( (2m^2 p \frac{\partial}{\partial p} \frac{1}{p^2}) Z_0 + \left( \frac{2m^2}{p^2} + 1 \right) p \frac{\partial}{\partial p} Z_0 \right). \end{aligned} \quad (\text{C.136})$$

Como  $p \frac{\partial}{\partial p} p^2 = g^{\rho\sigma} p_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} p_\rho p_\sigma = 2p^2$ ,

$$p \frac{\partial}{\partial p} \frac{1}{p^2} = p_\mu \left( -\frac{1}{p^4} \frac{\partial}{\partial p_\mu} (p^2) \right) = \frac{-2}{p^2}, \quad (\text{C.137})$$

e definindo  $Z'_0 \equiv p \frac{\partial}{\partial p} Z_0$ , obtemos

$$(2 - p \frac{\partial}{\partial p}) \tilde{\Pi}_{\mu\nu} = b \frac{4}{3} (p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) \left( -4 \frac{m^2}{p^2} Z_0 + \left( \frac{2m^2}{p^2} + 1 \right) Z'_0 \right). \quad (\text{C.138})$$

Vamos usar a expansão de  $\ln(\Sigma^2)$  (C.32), onde  $\Sigma^2 = \frac{p^2 z(z-1)+m^2}{m^2}$ ,

$$\ln(\Sigma^2) = \ln \left( \frac{-p^2}{m^2} \right) + \ln(z(1-z)) + \mathcal{O}(m^2) \quad (\text{C.139})$$

em  $Z_0$ , para fazer o limite  $m \rightarrow 0$ , assim

$$Z_0 = \ln \left( \frac{-p^2}{m^2} \right) + \int_0^1 dz \ln(z(1-z)) + \mathcal{O}(m^2), \quad (\text{C.140})$$

mas

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz \ln(z(1-z)) &= [z \ln(z(1-z))]_0^1 - \int_0^1 dz \frac{z(2z-1)}{z(1-z)} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [z \ln(z(1-z))]_{\epsilon}^{1+\epsilon} + \int_1^0 dx \frac{2x+1}{x} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( (1+\epsilon) \ln((1+\epsilon)(-\epsilon)) - \epsilon \ln(\epsilon(1-\epsilon)) \right) \\ &\quad - 2 + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [ \ln(x) ]_{1+\epsilon}^{\epsilon} \\ &= -2 + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \ln \left( \frac{-\epsilon^3 - \epsilon^2}{1+\epsilon} \right) + \epsilon \ln \left( \frac{-\epsilon^2 - \epsilon}{\epsilon - \epsilon^2} \right) \right) \\ &= -2 + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( -\ln \left( \frac{1+\epsilon}{-\epsilon^3 - \epsilon^2} \right) \right) = -2, \end{aligned} \quad (\text{C.141})$$

assim, desprezando  $\mathcal{O}(m^2)$ ,

$$Z_0 = \ln \left( \frac{-p^2}{m^2} \right) - 2 \quad (\text{C.142})$$

e

$$Z'_0 = p \frac{\partial}{\partial p} Z_0 = \frac{1}{p^2} p \frac{\partial}{\partial p} (p^2) = 2. \quad (\text{C.143})$$

Com estes resultados em (C.136), obtemos então

$$\begin{aligned}
(2 - p \frac{\partial}{\partial p}) \tilde{\Pi}_{\mu\nu} &= \frac{4}{3} b i e^2 (2(p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu)) + \mathcal{O}(m) \\
&= -\frac{8}{3} \frac{1}{(4\pi)^2} e^2 (p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) + \mathcal{O}(m) \\
&= -\frac{e^2}{6\pi^2} (p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) + \mathcal{O}(m). \tag{C.144}
\end{aligned}$$

# Apêndice D

## Resultados e Identidades Utilizados

### D.1 Identidades Utilizadas

As identidades abaixo, que foram utilizadas nos cálculos, podem ser encontradas em livros textos como [21].

$$\frac{1}{A^s B^n} = \int_0^1 dx dy \frac{\delta(x+y-1) x^{s-1} y^{n-1} \Gamma(s+n)}{(xA+yB)^{s+n} \Gamma(s)\Gamma(n)}, \quad (\text{D.1})$$

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \Delta)^m} = \frac{i(-1)^m}{(4\pi)^2} \frac{1}{(m-1)(m-2)} \frac{1}{\Delta^{m-2}}, \quad (\text{D.2})$$

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l_\lambda l_\rho}{(l^2 - \Delta)^m} = \frac{i(-1)^{m-1}}{(4\pi)^2} \frac{1}{(m-1)(m-2)(m-3)} \frac{1}{\Delta^{m-2}} \frac{g_{\lambda\rho}}{2}, \quad (\text{D.3})$$

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l_\lambda l_\rho l_\mu l_\nu}{(l^2 - \Delta)^m} = \frac{i(-1)^m \Gamma(m-4)}{(4\pi)^2 \Gamma(m)} \frac{1}{\Delta^{m-4}} \frac{1}{4} g_{\{\lambda\sigma} g_{\mu\nu\}}, \quad (\text{D.4})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4g_{\mu\nu}, \quad (\text{D.5})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\lambda) = 4(g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\nu}g_{\rho\lambda} + g_{\mu\lambda}g_{\rho\nu}), \quad (\text{D.6})$$

$$g_{\{\mu\nu}g_{\alpha\beta\}} \equiv g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}, \quad (\text{D.7})$$

## D.2 Exemplo de Termo de Superfície

Considere

$$\frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[ \frac{k_\nu}{(k^2 - m^2)^A} \right] = \frac{1}{(k^2 - m^2)^A} g_{\mu\nu} + k_\nu \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[ \frac{1}{(k^2 - m^2)^A} \right], \quad (\text{D.8})$$

mas

$$\begin{aligned} k_\nu \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[ \frac{1}{(k^2 - m^2)^A} \right] &= -A(k^2 - m^2)^{-(A+1)} k_\nu \frac{\partial}{\partial k_\mu} (g^{\rho\lambda} k_\rho k_\lambda - m^2) \\ &= \frac{-2A k_\nu k_\mu}{(k^2 - m^2)^{(A+1)}}, \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

assim

$$\frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[ \frac{k_\nu}{(k^2 - m^2)^A} \right] = \frac{1}{(k^2 - m^2)^A} g_{\mu\nu} - \frac{2A k_\nu k_\mu}{(k^2 - m^2)^{(A+1)}}. \quad (\text{D.10})$$

Usando  $A = 2$  e integrando em  $d^4k$ , obtemos

$$\int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[ \frac{k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} \right] = g_{\mu\nu} \int_k \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} - 4 \int_k \frac{k_\nu k_\mu}{(k^2 - m^2)^3}, \quad (\text{D.11})$$

ou

$$\Theta_{\mu\nu}^{(0)}(m^2) = \frac{1}{4} [g_{\mu\nu} I_{\log}(m^2) - \Upsilon_{\mu\nu}^0(m^2)], \quad (\text{D.12})$$

com

$$\Theta_{\mu\nu}^{(0)}(m^2) = \int_k \frac{k_\nu k_\mu}{(k^2 - m^2)^3}, \quad (\text{D.13})$$

$$I_{\log}(m^2) = \int_k \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \quad (\text{D.14})$$

e

$$\Upsilon_{\mu\nu}^0(m^2) = \int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[ \frac{k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} \right]. \quad (\text{D.15})$$



### D.3 Integrais do $\Pi_{\mu\nu}$

$$\Upsilon_{\mu\nu}^2 = g_{\mu\nu} I_{quad}(m^2) - 2\Theta_{\mu\nu}^{(2)}, \quad (\text{D.16})$$

$$\Upsilon_{\mu\nu}^0 = g_{\mu\nu} I_{log}(m^2) - 4\Theta_{\mu\nu}^{(0)}, \quad (\text{D.17})$$

$$\Upsilon_{\mu\nu\alpha\beta}^2 = g_{\{\mu\nu} g_{\alpha\beta\}} I_{quad}(m^2) - 8\Theta_{\mu\nu\alpha\beta}^{(2)}, \quad (\text{D.18})$$

$$\Upsilon_{\mu\nu\alpha\beta}^0 = g_{\{\mu\nu} g_{\alpha\beta\}} I_{log}(m^2) - 24\Theta_{\mu\nu\alpha\beta}^{(0)}, \quad (\text{D.19})$$

$$\Theta_{\mu\nu}^{(0)}(m^2) = \int_k \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3}, \quad (\text{D.20})$$

$$\Theta_{\mu\nu}^{(2)}(m^2) = \int_k \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2}, \quad (\text{D.21})$$

$$\Theta_{\mu\nu\alpha\beta}^{(0)}(m^2) = \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^4}, \quad (\text{D.22})$$

$$\Theta_{\mu\nu\alpha\beta}^{(2)}(m^2) = \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^3}, \quad (\text{D.23})$$

$$I_{log}(m^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2}, \quad (\text{D.24})$$

$$I_{quad}(m^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)}. \quad (\text{D.25})$$

# Referências Bibliográficas

- [1] Francois Gieres. About symmetries in physics. 1997. [arXiv:hep-th/9712154](#).
- [2] R. Jackiw. The Unreasonable effectiveness of quantum field theory. 1996. [arXiv:hep-th/9602122](#).
- [3] O. A. Battistel and M. C. Nemes. Consistency in regularizations of the gauged NJL model at the one loop level. *Phys. Rev. D*, 59:055010, Feb 1999. [arXiv:hep-th/9811154](#), [doi:10.1103/PhysRevD.59.055010](#).
- [4] A. P. Baêta Scarpelli, M. Sampaio, and M. C. Nemes. Consistency relations for an implicit n-dimensional regularization scheme. *Phys. Rev. D*, 63:046004, Jan 2001. [arXiv:hep-th/0010285](#), [doi:10.1103/PhysRevD.63.046004](#).
- [5] A. P. B. Scarpelli, M. Sampaio, M. C. Nemes, and B. Hiller. Chiral anomaly and CPT invariance in an implicit momentum space regularization framework. *Phys. Rev. D*, 64:046013, Jul 2001. [arXiv:hep-th/0102108](#), [doi:10.1103/PhysRevD.64.046013](#).
- [6] Antônio Paulo Baêta Scarpelli. *Arbitrariedades em um Método de Regularização no Espaço dos Momentos n-dimensional*. PhD thesis, UFMG, March 2001.
- [7] Leonardo A.M. Souza, Marcos Sampaio, and M.C. Nemes. Arbitrary parameters in implicit regularization and democracy within perturbative description of 2-dimensional gravitational anomalies. *Physics Letters B*, 632(5–6):717 – 724, 2006. [arXiv:hep-th/0510017](#), [doi:10.1016/j.physletb.2005.11.006](#).
- [8] M. Sampaio, A. P. Baêta Scarpelli, B. Hiller, A. Brizola, M. C. Nemes, and S. Gobira. Comparing implicit, differential, dimensional, and Bogolubov-

- Parasiuk-Hepp-Zimmermann renormalization. *Phys. Rev. D*, 65:125023, Jun 2002. [arXiv:hep-th/0203261](#), [doi:10.1103/PhysRevD.65.125023](#).
- [9] L. C. Ferreira, A. L. Cherchiglia, Brigitte Hiller, Marcos Sampaio, and M. C. Nemes. Momentum routing invariance in Feynman diagrams and quantum symmetry breakings. *Phys. Rev. D*, 86:025016, Jul 2012. [arXiv:1110.6186](#), [doi:10.1103/PhysRevD.86.025016](#).
- [10] Curtis G. Callan. Broken scale invariance in scalar field theory. *Phys. Rev. D*, 2:1541–1547, Oct 1970. [doi:10.1103/PhysRevD.2.1541](#).
- [11] Sidney Coleman and Roman Jackiw. Why dilatation generators do not generate dilatations. *Annals of Physics*, 67(2):552 – 598, 1971. [doi:10.1016/0003-4916\(71\)90153-9](#).
- [12] Michael S. Chanowitz and John Ellis. Canonical trace anomalies. *Phys. Rev. D*, 7:2490–2506, Apr 1973. [doi:10.1103/PhysRevD.7.2490](#).
- [13] Stephen L. Adler, John C. Collins, and Anthony Duncan. Energy-momentum-tensor trace anomaly in spin-1/2 quantum electrodynamics. *Phys. Rev. D*, 15:1712–1721, Mar 1977. [doi:10.1103/PhysRevD.15.1712](#).
- [14] S. Pokorski. *Gauge Field Theories*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2000.
- [15] Jian-Wei Cui, Yong-Liang Ma, and Yue-Liang Wu. Explicit derivation of the QED trace anomaly in symmetry-preserving loop regularization at one-loop level. *Phys. Rev. D*, 84:025020, Jul 2011. [arXiv:1103.2026](#), [doi:10.1103/PhysRevD.84.025020](#).
- [16] S. Coleman. *Aspects of Symmetry: Selected Erice Lectures of Sidney Coleman*. Cambridge University Press, 1988.
- [17] Mandl F. and Shaw G. *Quantum Field Theory 2<sup>o</sup> Edition*. WILEY, 2010.
- [18] M.O.C. Gomes. *Teoria quântica dos campos*. EDUSP, 2002.
- [19] W. Greiner and J. Reinhardt. *Field Quantization*. Springer, 1996.

- [20] R. Aldrovandi and J. G. Pereira. *Notes for a Course on Classical Fields*. August 2008. Available from: <http://www.ift.unesp.br/users/jpereira/classnotes.html>.
- [21] M.E. Peskin and D.V. Schroeder. *An Introduction To Quantum Field Theory*. Advanced Book Program. Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [22] G.B. Arfken, H.J. Weber, and F.E. Harris. *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*. Academic Press, 2012.
- [23] R.A. Bertlmann. *Anomalies in Quantum Field Theory*. International Series of Monographs on Physics. Oxford University Press, 2000.
- [24] K. Fujikawa and H. Suzuki. *Path Integrals and Quantum Anomalies*. International Series of Monographs on Physics. Clarendon Press, 2004.
- [25] Curtis G Callan Jr., Sidney Coleman, and Roman Jackiw. A new improved energy-momentum tensor. *Annals of Physics*, 59(1):42 – 73, 1970. doi:10.1016/0003-4916(70)90394-5.