

# Aspectos da Função Beta da Teoria de Yang-Mills Supersimétrica

Helvécio Geovani Fagnoli Filho

Orientadora: Profa. Maria Carolina Nemes

Coorientador: Prof. Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio

Tese apresentada à UNIVERSIDADE FEDERAL  
DE MINAS GERAIS, como requisito parcial para  
a obtenção do grau de doutor em Física.

Setembro de 2012

*À mamãe.*

# Agradecimentos

Na infância diante da mesma pergunta a resposta era uma só: ser cientista. Ainda sem saber o que esta palavra significava, era um sonho. Talvez uma ilusão de criança. Talvez. O sonho adormeceu. Já passado muito tempo ele desperta e percebe que o caminho, inconscientemente - será? -, trilhado conduziu à sua realização.

Grandes sonhos são para ser compartilhados e uma pessoa não é capaz de realizá-los sozinha. Por isso, agradeço muito a todos os que me ajudaram. É impossível mensurar o que cada um fez por mim e quantos o fizeram.

Mais uma vez, e sempre, agradeço a Deus pelas graças recebidas em todos os momentos da minha vida.

Agradeço muito a minha família, em especial a minha mãe Vera e aos meus irmãos Lú, Jô e Binho, pela presença, auxílio e alegrias constantes. Agradeço também ao meu amor Adriana por todo apoio.

Aos grandes amigos de Curvelo, Sete Lagoas, Belo Horizonte, do grupo de Teoria Quântica de Campos, da República dos Cones pelo companheirismo e convivência, afinal, “A gente não faz amigos, reconhece-os”.

A Carol e ao Marcos pela orientação e por todo estes anos de aprendizado.

Ao pessoal de Dresden pelo excelente acolhimento.

Agradeço também a todos os professores que me ajudaram a construir os degraus da infinita escada da educação.

Aos funcionários da UFMG pelo suporte essencial às nossas atividades.

Ao CNPq e a CAPES pelo apoio financeiro.

# Resumo

Desde os trabalhos pioneiros existe uma controvérsia sobre a origem das correções radiativas para a função beta da teoria de Yang-Mills supersimétrica. Em teorias supersimétricas as anomalias da corrente quirial e do traço do tensor energia-momento estão relacionadas. Enquanto a primeira obedece ao teorema de Adler-Bardeen e é exata em um laço, a segunda é proporcional à função beta e cálculos explícitos de  $\beta$  encontram contribuições de ordens mais altas. A este conflito dá-se o nome de problema da anomalia. Neste trabalho calculamos a função beta da teoria de Yang-Mills supersimétrica  $N = 1$  pura através da Regularização Implícita até dois laços. Apesar da parte divergente ultravioleta em dois laços ser nula encontramos um coeficiente da função beta de segunda ordem diferente de zero através da equação do grupo de renormalização. Esclarecemos o papel de divergências infravermelhas separando-as consistentemente das ultravioletas. De acordo com nossos cálculos, divergências infravermelhas fora da concha não têm nenhum papel na obtenção da função beta - como esperado. Entretanto, divergências infravermelhas na concha são importantes.

# Abstract

Since the pioneering works there exists a controversy about the origin of the radiative contributions to the supersymmetric Yang-Mills beta function. In supersymmetric theories the chiral anomaly and the trace anomaly are related. While the former is exact in one loop order due to the Adler-Bardeen theorem the latter is proportional to the beta function and explicit calculations of  $\beta$  find higher order contributions. This conflict is known as anomaly puzzle. In this work we calculate the pure  $N = 1$  supersymmetric Yang-Mills beta function up to two loops using Implicit Regularization. Despite the two-loop ultraviolet divergent piece being null we find a nonzero second order beta function coefficient through the renormalization group equation. We shed light on the infrared divergences role consistently separating them from the ultraviolet ones. According with our calculation, off-shell infrared divergences have no role obtaining the beta function - as one could expect. However on-shell infrared divergences are important.

# Sumário

Agradecimentos

Resumo

Abstract

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Teoria de Yang-Mills Supersimétrica <math>N = 1</math> no Superespaço</b>	<b>4</b>
2.1	Superespaço . . . . .	4
2.1.1	Supercampos . . . . .	7
2.2	Teoria de Yang-Mills Supersimétrica $N = 1$ . . . . .	8
2.3	Método do Campo de Fundo em Supersimetria . . . . .	9
2.4	Regras de Feynman Supersimétricas . . . . .	11
2.5	Exemplo do Uso das Regras de Feynman Supersimétricas . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Função Beta da Teoria de Yang-Mills Supersimétrica <math>N = 1</math></b>	<b>15</b>
3.1	Estado da Arte . . . . .	16
3.2	A Função $\beta$ em Regularização Implícita . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Conclusões</b>	<b>27</b>
<b>A</b>	<b>Regularização Implícita e Tratamento de Divergências Ultravioleta e Infravermelha</b>	<b>28</b>
A.1	Regularização de Divergências Ultravioletas . . . . .	29
A.2	Regularização de Divergências Infravermelhas . . . . .	30
<b>B</b>	<b>Tabela de Integrais</b>	<b>32</b>



# Capítulo 1

## Introdução

*“Se alguém se lisongeia de saber alguma coisa, este ainda não conheceu de que modo se deve saber.”*

1Cor 8,2

O Modelo Padrão (MP) das partículas elementares é uma teoria que foi construída para explicar toda a fenomenologia das interações eletromagnética, forte e fraca [1]. Apesar da extraordinária concordância entre os cálculos teóricos e as medições experimentais, surgiram alguns problemas com o MP. Por exemplo, o problema de ajuste fino e pequenos desvios experimentais em relação a previsão teórica (principalmente, nos chamados observáveis precisos eletrofracos) [2], [3].

Assim, com o intuito de tentar resolver estes problemas e de tentar englobar a interação gravitacional no modelo, novas teorias foram propostas. Dentre elas, a supersimetria [4]. Em poucas palavras, a supersimetria é baseada em uma transformação que relaciona os graus de liberdade bosônico e fermiônico. Um dos modelos supersimétricos mais estudado é o Modelo Padrão Supersimétrico Mínimo (MPSM) [5].

Até o momento as teorias alternativas ao MP não tiveram comprovação experimental expressiva. Porém, esta situação pode estar prestes a mudar. No final de 2009 entrou em funcionamento o Grande Colisor de Hádrons - LHC, na sigla inglesa. Este acelerador de partículas conseguirá atingir a escala de energia de TeV [2]. Com isso, os experimentos serão capazes de refutar ou validar teorias que vão além do Modelo



Padrão. Espera-se, por exemplo, medir a massa do bóson de Higgs mais leve e medir com mais precisão a massa do bóson  $W$  [2].

A fim de comparar com as medidas experimentais os cálculos teóricos perturbativos no MPSM têm que ser feitos, tipicamente, até dois laços. Para efetuar tais cálculos é necessário implementar algum esquema de regularização. O esquema mais usado em teorias quânticas de campos é, sem dúvida, a Regularização Dimensional (RD) [6] por ela preservar a simetria de calibre [6]. Porém, ela não preserva a supersimetria - pois, há um desbalanceamento entre os graus de liberdade bosônico e fermiônico - e, por isso, usa-se, predominantemente, uma extensão da RD: a Redução Dimensional (RED) [7]. Ainda assim, é sabido que há inconsistências no uso de regularizações dimensionais em teorias supersimétricas [8]. Apesar do progresso no uso da RED em supersimetria [9], [10] ainda não é consenso geral que ela é efetivamente consistente em ordens arbitrárias da expansão em laços.

Este foi um dos motivos que influenciou a construção de novos esquemas de regularização. Um destes é a Regularização Implícita (RI) que surgiu no final da década de 90 [11] como um esquema de regularização alternativo aos existentes com o objetivo de ser implementada em problemas nos quais os outros falham.

A ideia básica da RI é supor que existe alguma regularização para permitir a manipulação do integrando. Entretanto, nenhum regulador explícito é introduzido. As divergências são isoladas como integrais básicas nos momentos internos e não são calculadas. Assim, por exemplo, nenhuma modificação do espaço-tempo é necessária. Para mais detalhes sobre a implementação do método veja o apêndice A.

Para mostrar sua validade e/ou utilidade a RI precisou ser desenvolvida e passar por vários testes. Ela também foi aplicada em problemas para esclarecer cálculos ambíguos feitos através de outras regularizações. A generalização da RI para uma ordem arbitrária de laços foi feita em [12] para teorias escalares e em [13] para teorias de calibre abelianas. E, finalmente, em [14] todas estas generalizações foram sistematizadas e verificou-se que o método da Regularização Implícita está de acordo com a fórmula recursiva de Bogoliubov mostrando, assim, que a RI respeita unitariedade, localidade e invariância de Lorentz.

Além da importância para os cálculos fenomenológicos os esquemas de regularização são também relevantes do ponto de vista teórico. Às vezes, diferentes regu-

larizações resultam em conclusões totalmente opostas<sup>1</sup> e uma análise mais detalhada deve ser feita uma vez que a física por trás do cálculo não pode, obviamente, depender da regularização.

Um problema, por alguns relacionado a regularizações, é o chamado problema da anomalia. Em teorias supersimétricas a corrente quirial e o tensor energia-momento são membros de um mesmo supermultiplete, a supercorrente [16], que em nível clássico conserva-se. Efeitos quânticos quebram a simetria conservada e esta anomalia é proporcional à função beta. Isto implica que a anomalia da primeira componente da supercorrente, a corrente quirial, também é proporcional à função beta. Cálculos não perturbativos [17] e perturbativos [19] encontram correções radiativas de ordens mais altas para a função beta. Por outro lado, o teorema de Adler-Bardeen [18] afirma que a corrente quirial recebe contribuições apenas de um laço. Esta contradição é o chamado problema da anomalia - para mais detalhes veja o capítulo 3. Muitos trabalhos se propuseram a resolvê-lo [19]-[33]. O objetivo desta tese é contribuir para um melhor entendimento do problema.

Esta tese divide-se da seguinte maneira: no capítulo 2 apresentamos uma revisão da supersimetria  $N = 1$  no superespaço apenas para definir a notação e as equações mais relevantes para o trabalho. No capítulo 3 discutimos o problema da anomalia. É feita uma rápida revisão do problema na literatura e, em seguida, calculamos a função beta da teoria de Yang-Mills supersimétrica pura  $N = 1$  até dois laços através da Regularização Implícita. Por fim, no capítulo 4 expomos as conclusões do trabalho e nos apêndices mostramos alguns aspectos da RI tanto para divergências ultravioletas quanto para as infravermelhas.

---

<sup>1</sup>Para um interessante exemplo veja [15] e referências nele encontradas. Alguns autores encontram uma contribuição da interação gravitacional para a liberdade assintótica de teorias de calibre. Já outros afirmam que este resultado não é físico.

# Capítulo 2

## Teoria de Yang-Mills Supersimétrica $N = 1$ no Superespaço

*“Eu quase que nada não sei. Mas desconfio de muita coisa.”*

Guimarães Rosa

Neste capítulo apresentaremos uma sucinta formulação da teoria de Yang-Mills supersimétrica pura (sem matéria)  $N = 1$  [34] no superespaço. Maiores detalhes podem ser encontrados na literatura (por exemplo, [36], [37], [38]). A notação usada é semelhante à encontrada em [38] - uma exceção é a definição da métrica: utilizaremos a métrica majoritariamente negativa  $g_{ab} = \text{Diag}[1, -1, -1, -1]$ .

### 2.1 Superespaço

Uma das vantagens de trabalhar no formalismo do superespaço [39] é que a supersimetria é intrinsecamente manifestada. O superespaço é uma variedade de 8 dimensões: 4 coordenadas do espaço-tempo de Minkowski  $x_a$  e 4 coordenadas grassmannianas  $\theta_\alpha$

e  $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$  que satisfazem as relações de comutação e anticomutação:

$$[x_a, x_b] = 0 \quad (2.1)$$

$$[x_a, \theta_\alpha] = [x_a, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}] = 0 \quad (2.2)$$

$$\{\theta_\alpha, \theta_\beta\} = \{\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\} = \{\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\} = 0, \quad (2.3)$$

onde  $a = 0, 1, 2, 3$  e  $\theta_\alpha$  e  $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$  são espiniores de Weyl ( $\alpha = 1, 2$ ;  $\dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}$ ). Por definição,  $\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \equiv (\psi_\alpha)^\dagger$ .

Índices espinoriais são levantados e abaixados através das matrizes

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, temos, por exemplo,  $\psi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \psi_\beta$ .

Seguindo a notação de [38] definiremos o quadrado de um espinor de Weyl como:

$$\psi^2 = \frac{1}{2} \psi^\alpha \psi_\alpha$$

$$\bar{\psi}^2 = \frac{1}{2} \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}.$$

A derivada fermiônica é definida por:

$$\partial_\alpha \theta^\beta \equiv \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \theta^\beta = \delta_\alpha^\beta \quad (2.4)$$

$$\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \quad (2.5)$$

sendo  $\delta_\alpha^\beta$  e  $\delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}$  deltas de Kronecker. Enquanto que a integral de Berezin para uma variável de Grassmann é:

$$\int d\theta \theta = 1 \quad (2.6)$$

$$\text{e} \quad \int d\theta = 0. \quad (2.7)$$

Para duas variáveis de Grassmann temos

$$\int d\theta_1 d\theta_2 = 0, \quad (2.8)$$

$$\int d\theta_1 d\theta_2 \theta_1 = 0, \quad (2.9)$$

$$\int d\theta_1 d\theta_2 \theta_2 = 0 \quad (2.10)$$

$$\text{e } \int d\theta_1 d\theta_2 \theta_2 \theta_1 = 1. \quad (2.11)$$

$$(2.12)$$

Em algumas ocasiões utilizaremos as abreviações:

$$\int d^8 z \equiv \int d^4 x d^4 \theta \equiv \int d^4 x d^2 \theta d^2 \bar{\theta}. \quad (2.13)$$

As derivadas definidas acima não são invariantes sob as transformações de supersimetria:

$$x'^a = x^a - i (\epsilon^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^a \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^a \theta^\alpha) \quad (2.14)$$

$$\theta'^\alpha = \theta^\alpha + \epsilon^\alpha \quad (2.15)$$

$$\bar{\theta}'^{\dot{\alpha}} = \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} \quad (2.16)$$

onde  $\epsilon^\alpha$  é o parâmetro (global) da transformação. Devemos então definir derivadas covariantes do superspaço:

$$D_\alpha = \partial_\alpha + \frac{i}{2} \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^a \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_a \quad (2.17)$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + \frac{i}{2} \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^a \theta^\beta \partial_a \quad (2.18)$$

ou, no espaço dos momentos:

$$D_\alpha = \partial_\alpha + \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^a \bar{\theta}^{\dot{\beta}} p_a \quad (2.19)$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + \frac{1}{2} \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^a \theta^\beta p_a \quad (2.20)$$

onde  $\sigma^a = (1, \sigma^i)$ , sendo  $\sigma^i$  as matrizes de Pauli.

Pode-se mostrar que estas derivadas satisfazem as relações:

$$\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} = \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^a p_a \quad (2.21)$$

$$\{D_\alpha, D_\beta\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 0 \quad (2.22)$$

$$[D^\alpha, \bar{D}^2] = p_a (\sigma^a)^{\alpha\dot{\alpha}} \bar{D}_{\dot{\alpha}} \quad (2.23)$$

$$D^2 \bar{D}^2 D^2 = -p^2 D^2 \quad (2.24)$$

$$\bar{D}^2 D^2 \bar{D}^2 = -p^2 \bar{D}^2. \quad (2.25)$$

A função delta no espaço das variáveis de Grassmann é dada por:

$$\int d^4\theta_1 \delta^4(\theta_1 - \theta_2) f(\theta_1, \bar{\theta}_1) = f(\theta_2, \bar{\theta}_2).$$

Uma possível representação desta função é  $\delta^4(\theta) = \theta^2 \bar{\theta}^2$ . Algumas propriedades da função delta  $\delta_{12} \equiv \delta^4(\theta_1 - \theta_2)$  sob uma integral de momento são muito úteis ao usar as regras de Feynman supersimétricas da seção 2.4, a saber:

$$D_1^2 \bar{D}_1^2 \delta_{12} = 1 \quad (2.26)$$

$$\delta_{12} D^2 \bar{D}^2 \delta_{12} = \delta_{12} \bar{D}^2 D^2 \delta_{12} = \delta_{12} \frac{1}{2} D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha \delta_{12} = \delta_{12} \quad (2.27)$$

$$\delta_{12} \mathcal{O} \delta_{12} = 0 \quad (2.28)$$

sendo  $\mathcal{O}$  um operador que contém no máximo 3 fatores dentre as derivadas  $D_\alpha$  e/ou  $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ .

### 2.1.1 Supercampos

Supercampo é uma função  $\Phi$  das coordenadas do superespaço  $\Phi = \Phi(x_a, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$ . Como as variáveis  $\theta$  anticomutam estas funções possuem uma expansão em série de potências finita em  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = & f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi} + \theta\theta m(x) + \bar{\theta}\bar{\theta} n(x) + (\theta\sigma^a\bar{\theta})V_a(x) \\ & + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\psi(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}d(x). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Cada função do lado direito de (2.29) é um campo componente. O supercampo é uma forma compacta de escrever um multipletto de campos.

Supercampos vetoriais são funções que satisfazem a condição de hermiticidade:

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = \bar{V}(x, \theta, \bar{\theta}). \quad (2.30)$$

Por sua vez, campos  $\Phi$  que satisfazem

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0 \quad (2.31)$$

$$\text{ou } D_{\alpha}\bar{\Phi} = 0 \quad (2.32)$$

são chamados quirais ou antiquirais, respectivamente.

## 2.2 Teoria de Yang-Mills Supersimétrica $N = 1$

A versão supersimétrica da teoria de Yang-Mills [34] pura  $N = 1$  possui a seguinte ação:

$$S_{SYM} = \frac{1}{2g^2} \text{Tr} \int d^4x d^2\theta W^{\alpha} W_{\alpha}, \quad (2.33)$$

sendo  $g$  a constante de acoplamento de calibre e com a intensidade de campo supersimétrica não abeliana dada por

$$W_{\alpha} = i\bar{D}^2 (e^{-gV} D_{\alpha} e^{gV}) \quad (2.34)$$

em que  $V \equiv V^i T_i$  é um supercampo vetorial. Os geradores  $T_i$  do grupo de calibre satisfazem

$$[T_i, T_j] = i f_{ijk} T_k \quad (2.35)$$

$$f_{ijk} f_{ljk} = C_2(G) \delta_{il}. \quad (2.36)$$

onde  $f_{ijk}$  são as constantes de estrutura do grupo. Para uso posterior definimos  $C_A = C_2(G)$ .

A transformação local de calibre não abeliana é definida por:

$$(e^{gV})' = e^{ig\bar{\Lambda}} e^{gV} e^{-ig\Lambda} \quad (2.37)$$

com  $\Lambda \equiv \Lambda^i T_i$ ,  $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Lambda(x, \theta, \bar{\theta}) = 0$  e  $D_{\alpha}\bar{\Lambda}(x, \theta, \bar{\theta}) = 0$ .

De (2.37) e de sua definição conclui-se que o supercampo  $W_{\alpha}$  transforma-se como:

$$W'_{\alpha} = e^{ig\Lambda} W_{\alpha} e^{-ig\Lambda} \quad (2.38)$$

e, portanto, a ação (2.33) é invariante de calibre - ou seja, sob (2.37).

A transformação (2.37) induz uma transformação de  $V$ , com  $\Lambda$  infinitesimal,

$$\delta V = V' - V = i\mathcal{L}_{gV/2} [- (\bar{\Lambda} + \Lambda) + \coth \mathcal{L}_{gV/2} (\bar{\Lambda} - \Lambda)] \quad (2.39)$$

onde  $\mathcal{L}_Y X$  é a derivada de Lie de  $X$ :  $\mathcal{L}_Y X \equiv [Y, X]$  e  $\coth \mathcal{L}_Y$  deve ser entendido como a expansão formal em série de potências:  $x \coth(x) = 1 + \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + \dots$ .

As derivadas covariantes de calibre na representação quirial - com respeito a transformação  $\Lambda$  - são dadas por:

$$\nabla_\alpha = e^{-gV} D_\alpha e^{gV} \quad (2.40)$$

$$\nabla_{\dot{\alpha}} = \bar{D}_{\dot{\alpha}} \quad (2.41)$$

e na representação antiquiral - com respeito a transformação  $\bar{\Lambda}$  - por:

$$\bar{\nabla}_\alpha = D_\alpha \quad (2.42)$$

$$\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} = e^{gV} \bar{D}_{\dot{\alpha}} e^{-gV}. \quad (2.43)$$

O funcional gerador da teoria é:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}V e^{i(S_{SYM}(V) + S_F(J,V))} \quad (2.44)$$

sendo  $S_F(J, V) = \text{Tr} \int d^8z JV$  o termo de fonte e  $J$  um supercampo vetorial.

Assim como outras teorias de campo devemos fixar o calibre, e ao fazê-lo restaurar a unitariedade, introduzindo campos fantasmas - no nosso caso, supercampos fantasmas:  $c, c'$  (supercampos quirais) e  $\bar{c}, \bar{c}'$  (supercampos antiquirais) [38]. Seguindo um processo análogo ao usual [40] encontramos o funcional gerador

$$Z[J] = \int \mathcal{D}V \mathcal{D}c \mathcal{D}c' \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}\bar{c}' e^{i(S_{SYM} + S_F + S_{FC} + S_{FP})} \quad (2.45)$$

com os termos fixador de calibre e dos fantasmas de Fadeev-Popov

$$S_{FC} = -\frac{1}{\alpha} \text{Tr} \int d^8z D^2 V \bar{D}^2 V \quad (2.46)$$

$$S_{FP} = \text{Tr} \int d^8z (\bar{c}' + c') \mathcal{L}_{gV/2} [\bar{c} + c + \coth \mathcal{L}_{gV/2} (c - \bar{c})] \quad (2.47)$$

onde  $\alpha$  é o parâmetro de calibre.

## 2.3 Método do Campo de Fundo em Supersimetria

Quando fixamos o calibre de uma teoria a invariância de calibre do lagrangeano clássico é quebrada [38]. O método do campo de fundo [41],[42] é um formalismo



no qual a invariância de calibre do lagrangeano original é explicitamente mantida apesar da adição dos termos fixador de calibre e de fantasmas. E isto simplifica consideravelmente os cálculos.

Inicialmente introduzido para teorias de campos usuais<sup>1</sup> o método do campo de fundo foi estendido posteriormente para teorias supersimétricas [44]. A ideia do método é dividir o supercampo de calibre  $V_T$  em um campo quântico  $V$  e campos de fundo<sup>2</sup>  $\Omega$  e  $\bar{\Omega}$  de forma que o calibre de  $V$  é fixado e a invariância de calibre de  $\Omega$  e  $\bar{\Omega}$  é mantida explicitamente. Assim, a ação efetiva no método do campo de fundo - que é equivalente à usual [38] - é manifestamente invariante de calibre.

Na teoria de Yang-Mills supersimétrica esta divisão é dada por:

$$e^{gV_T} = e^{g\Omega} e^{gV} e^{g\bar{\Omega}}. \quad (2.48)$$

Sob simetrias de fundo estes campos transformam-se como:

$$e^{gV'} = e^{igK} e^{gV} e^{-igK}; \quad e^{g\Omega'} = e^{ig\bar{\Lambda}_0} e^{g\Omega} e^{-igK}; \quad e^{-ig\bar{\Omega}'} = e^{igK} e^{-g\bar{\Omega}} e^{-ig\Lambda_0} \quad (2.49)$$

com  $K = \bar{K}$  e  $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Lambda_0 = D_{\alpha}\bar{\Lambda}_0 = 0$  e sob simetrias quânticas como:

$$e^{gV'} = e^{ig\bar{\Lambda}} e^{gV} e^{-ig\Lambda}; \quad e^{g\Omega'} = e^{g\Omega}; \quad e^{g\bar{\Omega}'} = e^{g\bar{\Omega}} \quad (2.50)$$

com  $\nabla_{\alpha}\bar{\Lambda} = \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}\Lambda = 0$  e as derivadas covariantes de fundo definidas por:

$$\nabla_{\alpha} = e^{-g\Omega} D_{\alpha} e^{g\Omega} \quad (2.51)$$

$$\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} = e^{g\bar{\Omega}} \bar{D}_{\dot{\alpha}} e^{-g\bar{\Omega}}. \quad (2.52)$$

No método do campo de fundo as derivadas definidas em (2.40) e (2.41) - agora na chamada representação quiral de fundo - dividem-se como:

$$\nabla_{\alpha} = e^{-gV_T} D_{\alpha} e^{gV_T} = e^{-g\bar{\Omega}} e^{-gV} \nabla_{\alpha} e^{gV} e^{g\bar{\Omega}} \quad (2.53)$$

$$\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} = \bar{D}_{\dot{\alpha}} = e^{-g\bar{\Omega}} \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} e^{g\bar{\Omega}}. \quad (2.54)$$

Para quantizar a teoria de Yang-Mills supersimétrica com campo de fundo é necessário introduzir também os fantasmas de Nielsen-Kallosh  $\eta$  e  $\bar{\eta}$  [45], [46], [38].

<sup>1</sup>Para uma boa revisão veja [43].

<sup>2</sup>Supercampos e derivadas de fundo serão escritos em negrito.

Finalmente, a ação completa da teoria de Yang-Mills supersimétrica no método do campo de fundo é:

$$S = S_{SYM} + S_{FC} + S_{FP} + S_{NK} \quad (2.55)$$

$$S_{SYM} = -\frac{1}{2g^2} \text{Tr} \int d^8z (e^{-gV} \nabla^\alpha e^{gV}) \bar{\nabla}^2 (e^{-gV} \nabla_\alpha e^{gV}) \quad (2.56)$$

$$S_{FC} = -\frac{1}{\alpha} \text{Tr} \int d^8z (\nabla^2 V) (\bar{\nabla}^2 V) \quad (2.57)$$

$$S_{FP} = \text{Tr} \int d^8z (\bar{\mathbf{c}}' + \mathbf{c}') \mathcal{L}_{gV/2} [(\bar{\mathbf{c}} + \mathbf{c}) + \coth \mathcal{L}_{gV/2} (\mathbf{c} - \bar{\mathbf{c}})] \quad (2.58)$$

$$S_{NK} = \frac{1}{\alpha} \text{Tr} \int d^8z \bar{\eta} \eta \quad (2.59)$$

sendo  $\mathbf{c}, \mathbf{c}'$  e  $\eta$  covariantes de fundo quirais, ou seja,  $\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} \mathbf{c} = 0$  etc. Os fantasmas de Nielsen-Kallosh não acoplam com o campo quântico e, portanto, contribuem apenas em um laço devido à interação com o campo de fundo [47].

## 2.4 Regras de Feynman Supersimétricas

Uma das vantagens de trabalhar no formalismo do superespaço é que pode-se usar regras de Feynman supersimétricas. A dedução destas regras é similar à dedução das regras de Feynman de outras teorias de campos e pode ser encontrada nos livros textos (veja [36], por exemplo). Nesta seção apenas listamos as regras de Feynman supersimétricas geradas pela ação (2.55) que são importantes para o cálculo do presente trabalho:

(I) propagadores ( $V$  é um supercampo vetorial de calibre e  $\Phi$  um supercampo quiral de massa  $m$ ):

$$\langle V(1)V(2) \rangle = \frac{i}{p^2} \delta_{12} \quad (2.60)$$

$$\langle \bar{\Phi}(1)\Phi(2) \rangle = \frac{i}{p^2 - m^2} \delta_{12} \quad (2.61)$$

(II) os vértices são lidos diretamente do lagrangeano de interação. Para isto devemos expandir as exponenciais de (2.55) e expressar as derivadas covariantes em termos das derivadas  $D_\alpha$  e  $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ . Diferente de teorias de campos usuais, há um fator de  $\bar{D}^2$  ( $D^2$ ) para cada linha quiral (antiquiral) que compõe o vértice. Se o vértice

for puramente quiral omitimos um dos fatores  $\bar{D}^2$  ou  $D^2$ . E para linhas quirais ou antiquirais externas não escrevemos esses fatores.

(III) além de integrar no espaço dos momentos internos  $\int d^4k(2\pi)^{-4}$  para cada laço, integramos em  $d^4\theta$  em cada vértice. Há também o fator global de conservação de momento  $(2\pi)^4\delta(\sum p_{\text{externo}})$ .

(IV) para cada linha externa com momento  $p_i$  saindo multiplica-se a expressão do diagrama por  $\int d^4p_i(2\pi)^{-4}\Psi(p_i)$  onde  $\Psi(p_i)$  é o campo representado por essa linha.

(V) multiplica-se o diagrama pelo seu fator de simetria.

Após usar as regras de Feynman supersimétricas basta aplicar as identidades (2.21)-(2.28) e efetuar o cálculo das integrais nos momentos internos - devidamente regularizadas - para encontrar a ação efetiva perturbativamente.

## 2.5 Exemplo do Uso das Regras de Feynman Supersimétricas

Nesta seção apresentamos o cálculo de um diagrama de Feynman usando as regras apresentadas na seção anterior. Por simplicidade e praticidade - uma vez que o diagrama calculado nesta seção será útil para o próximo capítulo - calcularemos a correção de um laço da autoenergia de um campo vetorial  $V$  que se acopla com supercampos quiral  $\Phi$  e antiquiral  $\bar{\Phi}$  como:

$$if^{ijk}(\bar{\Phi}^i V^j \Phi^k)$$

sendo  $i, j, k$  índices do grupo de calibre.

O diagrama de um laço está representado na figura 2.1. Este cálculo pode ser encontrado em vários livros textos (por exemplo, [36], [38]).

Aplicando as regras da seção anterior e a equação (2.36):

$$A = -\frac{1}{2}C_A\delta^{ij} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} d^4\theta_1 d^4\theta_2 V^i(-p, \theta_1) \left[ \bar{D}_1^2 D_2^2 \frac{\delta_{12}}{k^2} \right] \left[ D_1^2 \bar{D}_2^2 \frac{\delta_{12}}{(p+k)^2} \right] V^j(p, \theta_2). \quad (2.62)$$

Usando as propriedades  $D_2^2\delta_{12} = D_1^2\delta_{12}$  e  $\bar{D}_2^2\delta_{12} = \bar{D}_1^2\delta_{12}$  e definindo

$$I(p^2) \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(k+p)^2} \quad (2.63)$$

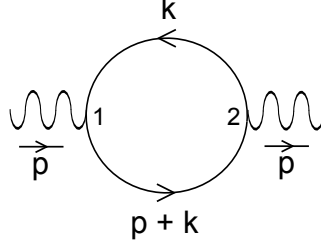


Figura 2.1: Correção de um laço da autoenergia de um supercampo vetorial devido à sua interação com supercampos quirais e antiquirais - representados pela linha não ondulada.

chegamos a

$$A = -\frac{1}{2}C_A \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} I(p^2) d^4\theta_1 d^4\theta_2 V^i(-p, \theta_1) [\bar{D}_1^2 D_1^2 \delta_{12}] [D_1^2 \bar{D}_1^2 \delta_{12}] V^i(p, \theta_2). \quad (2.64)$$

Sob integrais em  $\theta$  as derivadas  $D_\alpha$  e  $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$  podem ser integradas por partes - tomando o cuidado de incluir um sinal negativo ao “passar” a derivada por um número ímpar de operadores fermiônicos. Integrando o primeiro  $\bar{D}_1^2$  por partes temos:

$$A = -\frac{1}{2}C_A \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} I(p^2) d^4\theta_1 d^4\theta_2 [\bar{D}_1^2 V_1 (D_1^2 \delta_{12}) (D_1^2 \bar{D}_1^2 \delta_{12}) + \bar{D}_1^{\dot{\alpha}} V_1 (D_1^2 \delta_{12}) \bar{D}_{\dot{\alpha}} (D_1^2 \bar{D}_1^2 \delta_{12}) + V_1 (D_1^2 \delta_{12}) \bar{D}_1^2 (D_1^2 \bar{D}_1^2 \delta_{12})] V_2.$$

com as abreviações  $V_1 \equiv V^i(-p, \theta_1)$  e  $V_2 \equiv V^i(p, \theta_2)$ .

Integrando agora  $D_1^2$  por partes e usando as relações (2.21)-(2.25), (2.28),  $(D)^n = 0$  e  $(\bar{D})^n = 0$  para  $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ :

$$A = -\frac{1}{2}C_A \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} I(p^2) d^4\theta_1 d^4\theta_2 [D_1^2 \bar{D}_1^2 V_1 \delta_{12} D_1^2 \bar{D}_1^2 \delta_{12} V_2 + V_1 \delta_{12} D_1^2 \bar{D}_1^2 D_1^2 \bar{D}_1^2 \delta_{12} V_2 - D_1^\alpha \bar{D}_1^{\dot{\alpha}} V_1 \delta_{12} D_{1\alpha} \bar{D}_{1\dot{\alpha}} D_1^2 \bar{D}_1^2 \delta_{12} V_2].$$

Finalmente, através de (2.21), (2.25) e (2.27) e integrando em  $\theta_2$  encontramos:

$$A = -\frac{1}{2}C_A \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} I(p^2) d^4\theta V^i(-p, \theta) [\bar{D}^2 D^2 + \bar{D}^{\dot{\alpha}} D^\alpha (\sigma^a)_{\alpha\dot{\alpha}} k_a - k^2] V^i(p, \theta). \quad (2.65)$$

Acima integramos por partes mais uma vez para escrever  $V^i(-p, \theta)$  à esquerda.

De (2.23) podemos mostrar que:

$$\bar{D}^2 D^2 + \frac{1}{2} \bar{D}^{\dot{\alpha}} D^\alpha (\sigma^a)_{\alpha\dot{\alpha}} k_a = \frac{1}{2} D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha. \quad (2.66)$$

Usando esta identidade podemos simplificar a expressão (2.65):

$$A = -\frac{1}{4}C_A \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} I(p^2) d^4 \theta V^i(-p, \theta) [D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha - 2k^2] V^i(p, \theta). \quad (2.67)$$

Este é o resultado final. O segundo termo entre colchetes de (2.67) é uma divergência quadrática e é cancelado por um diagrama do tipo “tadpole” [38]. A ação da teoria de Yang-Mills dada por

$$\begin{aligned} S_{YM} &= \frac{1}{2g^2} \text{Tr} \int d^4 p d^2 \theta W^\alpha W_\alpha \\ &= \frac{1}{2g^2} \text{Tr} \int d^4 p d^4 \theta [V D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha V + \text{termos de ordens mais altas}] \end{aligned}$$

permite-nos, então, escrever (2.67) como

$$A = -\frac{1}{4}C_A \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} d^2 \theta W^\alpha(-p, \theta) W_\alpha(p, \theta) I(p^2). \quad (2.68)$$

# Capítulo 3

## Função Beta da Teoria de Yang-Mills Supersimétrica $N = 1$

*“Subiu a construção como se fosse máquina  
Ergueu no patamar quatro paredes sólidas  
Tijolo com tijolo num desenho mágico  
Seus olhos embotados de cimento e lágrima”*

Chico Buarque

No início dos estudos de teorias supersimétricas descobriu-se que a corrente quiral  $U(1)_R$  está no mesmo supermultiplete que o traço do tensor energia-momento  $T_\mu^\mu$  [16]. Assim, as anomalias quiral e do traço devem estar relacionadas. Pelo teorema de Adler-Bardeen [18]<sup>1</sup> a anomalia quiral recebe contribuições radiativas apenas de 1 laço. Portanto, pela observação anterior a anomalia do traço também deveria exaurir-se em 1 laço.

A anomalia do traço é geralmente proporcional à função beta

$$T_\mu^\mu = -\frac{\beta}{4g^4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.1)$$

onde  $\beta$  é a função beta do acoplamento de calibre  $g$  e  $F_{\mu\nu}$  o tensor intensidade de campo. Logo, a função  $\beta$  deveria receber contribuições somente de 1 laço. Entretanto, cálculos explícitos da função  $\beta$  encontram correções radiativas de ordens mais altas

---

<sup>1</sup>Estendido para teorias de Yang-Mills supersimétricas em [48].

[19]. De fato, usando cálculo de instantons derivou-se uma expressão exata para funções  $\beta$  de teorias supersimétricas [17]

$$\beta(g)_{NSVZ} = -\frac{1}{16\pi^2} \frac{3t_2(A) - \sum_i t_2(i)(1 - \gamma_i)}{1 - t_2(A)g^2/8\pi^2} \quad (3.2)$$

em que  $t_2(A)$  e  $t_2(i)$  são índices de Dynkin das representações adjunta e dos supercampos  $\Phi_i$  (de dimensão anômala  $\gamma_i$ ), respectivamente. Esta função ficou conhecida como beta de NSVZ.

Este é o chamado problema da anomalia. Vários trabalhos dedicaram-se a esclarecer e resolver o problema [19] - [33] (e referências neles encontradas). Na próxima seção apresentaremos alguns argumentos destes artigos relacionados ao problema da anomalia em teorias de Yang-Mills supersimétricas  $N = 1$ .

### 3.1 Estado da Arte

Além de divergências infravermelhas na concha [49] teorias de Yang-Mills supersimétricas no formalismo de supercampos sofrem com a presença adicional de divergências infravermelhas fora da concha. Apesar de se esperar que tais divergências - as fora da concha - não terem implicações físicas [50] elas devem ser separadas das ultravioletas antes da renormalização e este processo pode ser trabalhoso, como é o caso em regularizações dimensionais. Assim, em [19] os autores introduziram um fixador de calibre não local para remover as divergências infravermelhas fora da concha. Usando Redução Dimensional (RED) [7] e o método do campo de fundo calculou-se o coeficiente de 2 laços da função  $\beta$  da teoria de Yang-Mills supersimétrica  $N = 1$  (SYM) pura (sem matéria).

Já em [20] os autores introduziram a operação de subtração  $R^*$  [51] para remover as mesmas divergências infravermelhas. Eles encontraram o mesmo resultado de [19], mas argumentaram que a estrutura divergente encontrada é específica da regularização do superespaço por Redução Dimensional. E, então, conjecturaram que em regularizações que permanecem em 4 dimensões nenhuma divergência ocorreria além de 1 laço.<sup>2</sup>

Finalmente em [21] os mesmos autores abordaram o problema da anomalia - mais uma vez através da RED. Eles argumentam que no superespaço as exigências de que

---

<sup>2</sup>Na próxima seção verificaremos explicitamente esta conjectura em 2 laços.

apenas uma supercorrente contenha um tensor energia-momento que se conserva e uma corrente quirial que satisfaça o teorema de Adler-Bardeen não são compatíveis. E, assim, propõem duas supercorrentes: cada uma satisfazendo uma das duas exigências e, portanto, o conflito entre a função  $\beta$  e o teorema de Adler-Bardeen estaria resolvido.

Logo em seguida, foi apresentada uma nova solução para o problema [22]. Os autores distinguiram entre uma constante de acoplamento wilsoniana e uma constante de acoplamento física. A primeira aparece na ação efetiva de Wilson e é renormalizada apenas em 1 laço enquanto que a segunda aparece na ação efetiva irreduzível de uma partícula 1PI (ou gerador de vértices 1PI) e recebe contribuições de ordens mais altas. A diferença entre estas duas ações deve-se a efeitos infravermelhos. A partir de uma relação entre as duas constantes de acoplamento os autores rederivam a equação (3.2).

Em [23] o cálculo da função  $\beta$  da SYM pura até 2 laços foi feito usando uma generalização supersimétrica [52] da Regularização Analítica [53] encontrando um resultado de acordo com a literatura.

Já em [24] o mesmo cálculo foi feito através de uma extensão supersimétrica da expansão do núcleo de calor (*heat kernel*).

Em uma abordagem baseada em holomorfia os autores de [25] também obtêm a equação (3.2). De acordo com [25] há duas escolhas naturais para o lagrangeano definido em um corte<sup>3</sup>  $M$ : uma holomorfa na combinação  $\frac{1}{g_h^2} = \frac{1}{g^2} + \frac{i\theta}{8\pi^2}$  e outra com os termos cinéticos de todos os campos normalizados canonicamente - e, neste caso, a constante de acoplamento é chamada acoplamento canônico  $g_c$ . Eles mostram que ao mudar o corte de  $M$  para  $M'$  a constante de calibre holomorfa  $g_h$  recebe contribuições de 1 laço e  $g_c$  de todas as ordens - dadas por (3.2). Como os resultados foram obtidos ao mudar o corte de  $M$  para  $M'$  nenhuma referência ao setor infravermelho foi feita e, portanto, conclui-se que efeitos infravermelhos não são importantes contrariando o observado em [22].<sup>4</sup> As contribuições de ordens mais altas surgem em [25] como uma anomalia de reescalonamento ao se passar da constante holomorfa para a canônica. Na opinião dos autores, a solução proposta em [21] poderia ser uma resposta ao problema da anomalia, porém a distinção das duas supercorrentes é muito técnica e seus significados físicos não são totalmente claros.

Em [26] e [27] a autora estende a constante de acoplamento de calibre da SYM

---

<sup>3</sup>O corte  $M$  é definido regularizando a teoria  $N = 1$  usando teorias  $N = 4$  e  $N = 2$  finitas.

<sup>4</sup>Esta conclusão foi criticada em [31]. Veja mais adiante.



para um supercampo externo real. A equação (3.2) é novamente deduzida [26] e o coeficiente de 2 laços da função  $\beta$  é explicitamente calculado [27]. Neste contexto de constante de acoplamento local surge uma quebra anômala da supersimetria que gera o coeficiente da função  $\beta$  de 2 laços em termos do coeficiente de 1 laço da função  $\beta$  e do coeficiente da anomalia. Na análise da autora efeitos infravermelhos não têm nenhum papel - sendo que o essencial é a extensão para o acoplamento local. Ainda segundo ela, o estudo feito independe da noção de acoplamento wilsoniano e a reescala feita em [25] é dependente de esquemas.

Utilizando a Regularização Diferencial (RDif) [54] foi calculado em [28] o coeficiente de  $\beta$  de 2 laços. Este esquema não modifica a dimensão do espaço-tempo e possui uma escala em cada laço (por exemplo,  $M$  em 1 laço,  $M'$  em dois etc). De acordo com [28] tal coeficiente surge de uma escala ultravioleta que sobrevive em 2 laços apenas quando efeitos infravermelhos (na concha) são incluídos. Apesar de não existirem divergências em Regularização Diferencial, os autores associam o cancelamento da escala de 2 laços ( $M'$ ) com a conjectura comentada acima [20].

Através da regularização por Derivadas Covariantes Superiores (DCS) [55] (generalizada para supersimetria em [56] e [57]) calculou-se também o coeficiente de 2 laços da função  $\beta$  da SYM  $N = 1$  (com matéria, porém sem massa)<sup>5</sup> em [29]. As integrais necessárias para encontrar a função  $\beta$  são integrais de derivadas totais. E este fato poderia explicar a origem da função  $\beta_{NSVZ}$  que relaciona a função beta de  $n$  laços com a beta e as dimensões anômalas de laços anteriores.

Em uma tentativa de esclarecer alguns pontos do problema da anomalia o artigo [31] faz uma distinção entre duas correntes  $R'_\mu$  e  $R_\mu$ . Apenas a anomalia da segunda satisfaz o teorema de Adler-Bardeen enquanto que a anomalia da primeira é proporcional a função  $\beta$ . Os autores mostram que apesar de haver uma inconsistência no cálculo de [21], o resultado obtido em [21] para as duas supercorrentes está correto. Eles também argumentam que como a escolha de escala  $M$  em [25] é arbitrária o resultado de [25] depende de modos infravermelhos, assim como [22].

Ao nos depararmos com uma expressão exata para uma função  $\beta$  como a equação

---

<sup>5</sup>Em [30] utilizando a DCS calculou-se o coeficiente  $\beta_2$  de 2 laços da função  $\beta$  da eletrodinâmica supersimétrica  $N = 1$  encontrando  $\beta_2 = 0$ . Logo, em DCS não haveria o problema da anomalia (pelo menos em 2 laços). Já em RED  $\beta_2 \neq 0$  devido a inconsistências do esquema [8]. Assim, conclui o autor, se a  $\beta$  é calculada por uma regularização matematicamente consistente que não quebra a supersimetria não existe o problema da anomalia: a função  $\beta$  exaure-se em 1 laço.

(3.2) logo surge a pergunta: se acima de 2 laços a função  $\beta$  depende do esquema de regularização e renormalização em qual esquema esta expressão é válida? O trabalho [32] investiga este aspecto de (3.2) e encontra classes de esquemas cada um dos quais possuindo uma função  $\beta$  exata. Segundo os autores, o esquema que possui a  $\beta_{NSVZ}$  apesar de simples não tem nenhum apelo físico.<sup>6</sup> Eles discutem também a importância de realizar cálculos regularizando o infravermelho, pois, divergências infravermelhas podem, por exemplo, estragar argumentos baseados em holomorfia.

Recentemente, em [33] investigou-se qual função beta aparece na anomalia do traço (3.1). A validade de (3.1) depende da validade do princípio da ação quântica (PAQ) [59], [60] e a construção deste, por sua vez, depende da regularização e renormalização usada<sup>7</sup>. Usando a regularização<sup>8</sup>  $N = 4$  o autor encontra dois esquemas de renormalização: em um a função beta exaure em 1 laço e no outro ela é dada por  $\beta_{NSVZ}$ . No primeiro esquema pode-se usar diretamente o princípio da ação quântica e a anomalia do traço é proporcional a função beta de 1 laço. No segundo ao aplicar o PAQ deve-se levar em consideração a contribuição do regulador e, assim, encontra-se a mesma equação da anomalia do traço. Portanto, conclui o autor, a anomalia do traço é exata em 1 laço e é, então, consistente com o teorema de Adler-Bardeen, ou seja, não há o problema da anomalia. Este resultado poderia estar em conflito com o conceito de duas supercorrentes introduzido em [21]. Porém, o autor alega que enquanto a possibilidade dessas duas supercorrentes serem proporcionais não for descartada a existência de duas supercorrentes distintas não pode ser confirmada. Ele também argumenta que as duas anomalias de dilatação obtidas em [25] na verdade são a mesma (exata em 1 laço) e diferem devido, apenas, à ambiguidade da definição do tensor energia-momento. Ele obtém  $\beta_{NSVZ}$  sem considerações dos infinitos infravermelhos.

A figura 3.1 resume o que foi exposto nesta seção.

---

<sup>6</sup>Entretanto, pode-se relacionar o esquema de subtração mínima da regularização dimensional  $\overline{\text{DR}}$  com o esquema de NSVZ ordem a ordem [58].

<sup>7</sup>Por exemplo, mostrou-se que o princípio da ação quântica é válido no  $\overline{\text{DR}}$  [60]. No entanto, este esquema não preserva supersimetria.

<sup>8</sup>A mesma usada em [25] e [32].

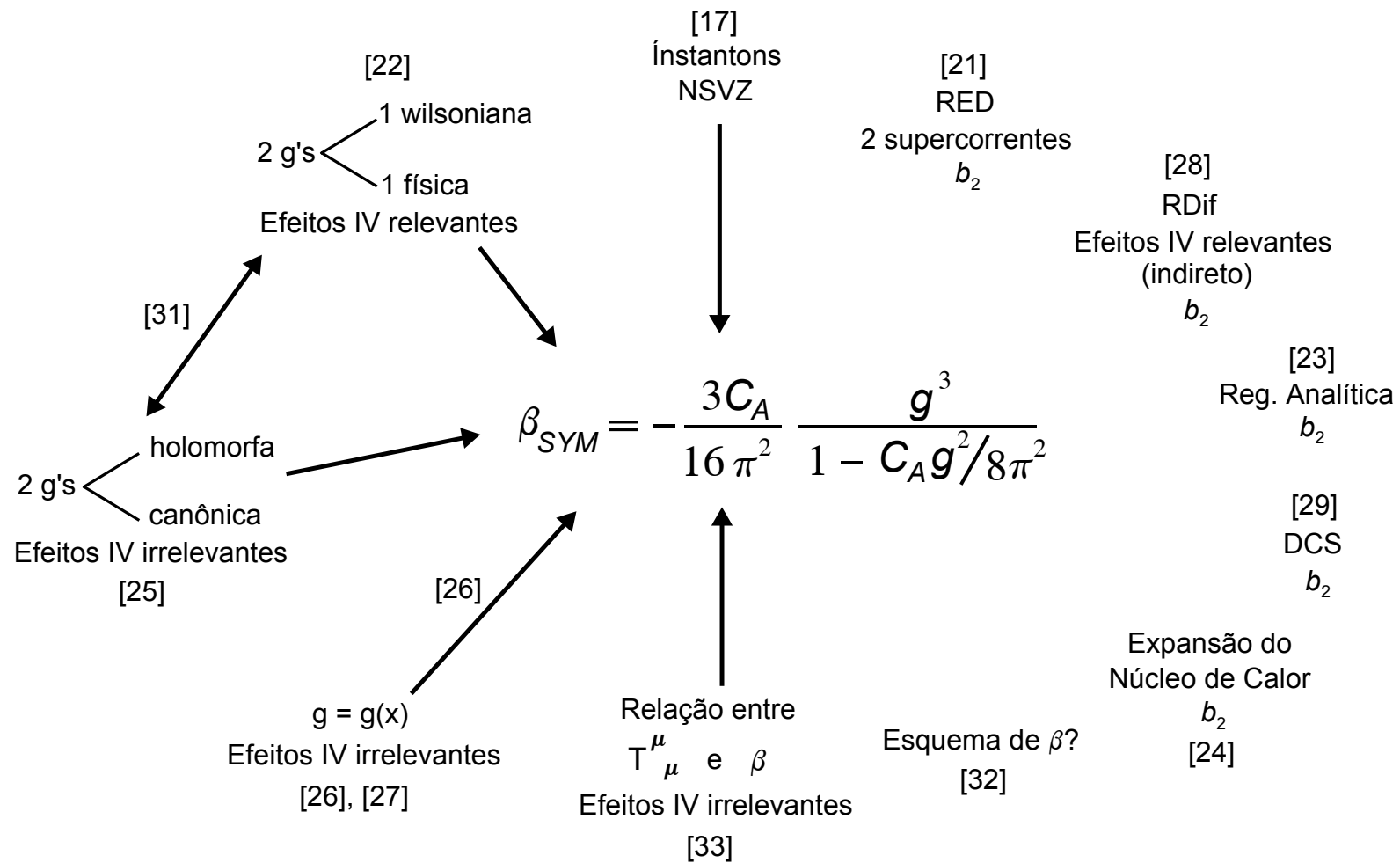


Figura 3.1: Representação diagramática que resume a seção 3.1. As setas apontando para a fórmula da função beta indicam que estes artigos derivaram esta equação. O termo  $b_2$  significa que os artigos relacionados calcularam o coeficiente de dois laços de  $\beta_{SYM}$ .

### 3.2 A Função $\beta$ em Regularização Implícita

Nesta seção apresentamos o cálculo da função  $\beta$  da teoria de Yang-Mills supersimétrica pura  $N = 1$  em Regularização Implícita [11] até dois laços. Para simplificar os cálculos usaremos o calibre de Feynman  $\xi = 0$ , onde  $\xi = \frac{1}{\alpha} - 1$ . Entretanto, como o parâmetro de calibre também é renormalizado e  $\gamma_\xi \equiv \frac{\partial \xi}{\partial \ln \lambda} = a_1 g^2 + \mathcal{O}(g^4)$  [28] devemos fazer o cálculo de 1 laço em um calibre arbitrário e só em 2 laços faremos  $\xi = 0$ .

As contribuições de um laço não nulas<sup>9</sup> são mostradas na figura 3.2. O diagrama da esquerda representa a contribuição dos campos fantasmas. Lembrando que supercampos fantasmas são quirais e antiquirais o cálculo deste diagrama é similar ao cálculo da seção 2.5. Como são 3 campos fantasmas ( $c$ ,  $c'$  e  $\eta$ ) e a contribuição deles é igual multiplicaremos o resultado do diagrama por 3. Usando o resultado (2.68) e efetuando um cálculo parecido com o da seção 2.5 para o segundo diagrama temos:

$$F_A = \frac{3}{4} C_A i \int d^4 p d^2 \theta \mathbf{W}^\alpha(-p, \theta) \mathbf{W}_\alpha(p, \theta) I(p^2) \quad (3.3)$$

$$F_B = i \frac{\xi}{4} C_A \int d^4 p d^2 \theta \mathbf{W}^\alpha(-p, \theta) \mathbf{W}_\alpha(p, \theta) p^2 U(p^2) \quad (3.4)$$

usando as definições (A.2) - sem massa - e (A.6). Como explicado no Apêndice A, o superescrito  $\Lambda$  indica que a integral está regularizada no limite ultravioleta e/ou infravermelho e, de agora em diante, adotaremos a notação  $\int_k \equiv \int^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$ .

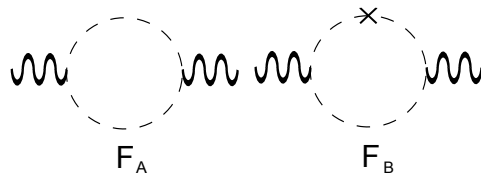


Figura 3.2: Diagramas de um laço da função de dois pontos. Linhas pontilhadas correspondem a supercampos fantasmas e linhas onduladas escuras correspondem a supercampos de fundo.

Por contagem de potências vemos que a primeira integral em  $k$  diverge apenas no limite ultravioleta enquanto que a segunda diverge apenas no infravermelho. Para

<sup>9</sup>Há um diagrama que contém um laço do campo de calibre. Porém, a expressão deste diagrama contém menos de 4 derivadas covariantes e pela propriedade (2.28) ela é igual a zero [47].

adiar o contato com esquemas de regularização infravermelha deixaremos as integrais divergentes no infravermelho na sua forma original. Já a integral  $I(p^2)$  foi calculada no apêndice A - equação (A.5).

Para uso posterior definiremos

$$I(p^2) = I_{log}(\lambda^2) - b \ln \left( -\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + 2b \quad (3.5)$$

$$\equiv I_{log}(\lambda^2) + I^{fin}(p^2, \lambda^2). \quad (3.6)$$

As contribuições de dois laços<sup>10</sup>, mostradas na figura 3.3, podem ser escritas, após o uso das regras de Feynman supersimétricas da seção 2.4 e dos passos da seção 2.5 (omitindo um fator comum  $\frac{-3g^2 C_A^2}{2}$ ), como

$$\begin{aligned} F_1 &= \int d^4p d^4\theta \overline{\mathbf{W}}^{\dot{\alpha}}(-p, \theta) \mathbf{W}^\alpha(p, \theta) \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^a \int_{k,q} \frac{(p-k)_a}{k^4(p-k)^2 q^2(k-q)^2} \\ F_2 &= \frac{1}{2} \int d^4\theta d^4p \Gamma^a(-p, \theta) \Gamma^b(p, \theta) \left[ p_a p_b \int_{k,q} \frac{1}{q^4(p+q)^2} \frac{1}{k^2(k+q)^2} \right. \\ &\quad \left. + 4 \int_{k,q} \frac{(p+q)_b q_a}{q^4(p+q)^2} \frac{1}{k^2(q+k)^2} \right] \\ F_3 &= \frac{1}{2} \int d^4\theta d^4p \Gamma^a(-p, \theta) \Gamma^b(p, \theta) \left[ \int_{k,q} \frac{(p+q)_a(p+k)_b}{q^2 k^2 (p+q)^2 (p+k)^2 (k-q)^2} \right. \\ &\quad \left. - \int_{k,q} \frac{(p+q)_a(p+k)_b}{(p+q+k)^2 (p+k)^2 q^2 k^2 (p+q)^2} \right] \\ F_4 &= -\frac{g_{ab}}{2} \int d^4\theta d^4p \Gamma^a(-p, \theta) \Gamma^b(p, \theta) \int_{k,q} \frac{1}{(q+k)^4 q^2 k^2}. \end{aligned}$$

Como comentado no início desta seção estamos usando o calibre de Feynman  $\xi = 0$ .  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_4$  são divergentes ultravioleta e infravermelho por contagem de potência e  $F_3$  é apenas divergente ultravioleta. Além disso,  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_4$  possuem subdivergências ultravioletas que precisam ser subtraídas.

Começemos o cálculo por  $F_1$ :

$$F_1 = \int d^4p d^4\theta \overline{\mathbf{W}}^{\dot{\alpha}}(-p, \theta) \mathbf{W}^\alpha(p, \theta) \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^a \int_k \frac{(p-k)_a}{k^4(p-k)^2} I(k^2).$$

A subdivergência ultravioleta é removida minimamente subtraindo  $I_{log}(\lambda^2)$  de  $I(k^2)$ . Definiremos  $F_1'$  fazendo a substituição  $I(k^2) \rightarrow I^{fin}(p^2, \lambda^2)$  na expressão acima. As-

<sup>10</sup>As contribuições de dois laços dos fantasmas anulam-se [19], [61].

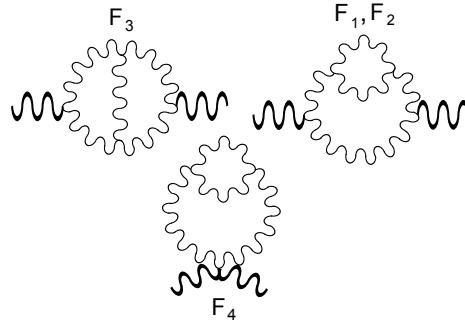


Figura 3.3: Diagramas de dois laços da função de dois pontos. Linhas onduladas escuras indicam supercampos de fundo e linhas onduladas claras correspondem a supercampos vetoriais de calibre.

sim, após o uso da identidade de Bianchi [61]  $\nabla^\alpha \mathbf{W}_\alpha = -\overline{\nabla^{\dot{\alpha}}} \overline{\mathbf{W}}_{\dot{\alpha}}$ ,  $F_1$  torna-se

$$F'_1 = \int d^4p d^2\theta \mathbf{W}^\alpha(-p, \theta) \mathbf{W}_\alpha(p, \theta) p^2 \left[ -\int_k \frac{I^{fin}(k^2, \lambda^2)}{k^4(p-k)^2} + \frac{b}{p^2} I^{fin}(p^2, \lambda^2) \right].$$

$F_2$  pode ser escrito da seguinte forma:

$$F_2 = \frac{1}{2} \int d^4\theta d^4p \Gamma^a(-p, \theta) \Gamma^b(p, \theta) \left[ p_a p_b \int_q \frac{I(q^2)}{q^4(p+q)^2} + 4p_b \int_q \frac{q_a I(q^2)}{q^4(p+q)^2} + 4 \int_q \frac{q_a q_b}{q^4(p+q)^2} I(q^2) \right]$$

e, novamente,  $F'_2$  é obtido de  $F_2$  substituindo  $I(q^2)$  por  $I^{fin}(q^2, \lambda^2)$ .

Consideremos agora  $F_3$  que não possui subdivergência. Fazendo algumas manipulações algébricas encontramos:

$$F'_3 \equiv F_3 = \frac{1}{2} \int d^4\theta d^4p \Gamma^a(-p, \theta) \Gamma^b(p, \theta) \left[ -\frac{p_a p_b}{2} J(p) + 2I_{ab} \right]$$

onde

$$I_{ab} = \int_k \int_q \frac{k_a q_b}{k^2 q^2 (k-p)^2 (k-q)^2 (q-p)^2}$$

e a integral finita  $J(p)$  é dada por [62]

$$J(p) = \int_k \int_q \frac{1}{k^2 q^2 (k-p)^2 (k-q)^2 (q-p)^2} = -\frac{6\zeta(3)}{(4\pi)^4 p^2}.$$

sendo  $\zeta(x)$  a função zeta de Riemann.

Após fazer a mudança de variáveis  $q \rightarrow q' = k + q$  na expressão de  $F_4$  podemos separá-la em uma parte ultravioleta e outra infravermelha multiplicando e dividindo por  $(p + q)^2$ . Assim:

$$F_4 = -\frac{g_{ab}}{2} \int d^4\theta d^4p \Gamma^a(-p, \theta) \Gamma^b(p, \theta) \left[ p^2 \int_q \frac{I(q^2)}{q^4(p+q)^2} + \int_q \frac{I(q^2)}{q^2(p+q)^2} + 2p_c \int_q \frac{q^c I(q^2)}{q^4(p+q)^2} \right].$$

$F'_4$  é obtido, como antes, trocando  $I(q^2)$  por  $I^{fin}(q^2, \lambda^2)$ .

No apêndice B listamos o resultado das integrais necessárias para o cálculo dos  $F'_i$ 's.

A soma parcial (usando os resultados do apêndice B)

$$F'_2 + F'_3 + F'_4 = \frac{1}{2} \int d^4\theta d^4p \Gamma^a(-p, \theta) \Gamma^b(p, \theta) (p_a p_b - p^2 g_{ab}) \left\{ \int_q \frac{I^{fin}(q^2, \lambda^2)}{q^4(p+q)^2} + \frac{b^2 \zeta(3)}{p^2} - \frac{2b}{p^2} \left( -b \ln \left( -\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + \frac{8}{3}b - \frac{b\pi^2}{36} \right) \right\} \quad (3.7)$$

é transversa, como deveria ser por causa da invariância de calibre que é explícita no método de campo de fundo - isso mostra que nosso cálculo é consistente. Logo, ela pode ser escrita em termos da ação clássica:

$$F'_2 + F'_3 + F'_4 = \frac{3}{4} \int d^2\theta d^4p \mathbf{W}^\alpha(-p, \theta) \mathbf{W}_\alpha(p, \theta) p^2 \left\{ \int_q \frac{I^{fin}(q^2, \lambda^2)}{q^4(p+q)^2} + \frac{b^2 \zeta(3)}{p^2} - \frac{2b}{p^2} \left( -b \ln \left( -\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + \frac{8}{3}b - \frac{b\pi^2}{36} \right) \right\}. \quad (3.8)$$

Agora podemos somar todas as contribuições para a função de dois pontos a dois laços

$$\sum_{i=1}^4 F'_i = \int d^2\theta d^4p \mathbf{W}^\alpha(-p, \theta) \mathbf{W}_\alpha(p, \theta) \left( -\frac{3g^2 C_A^2}{2} \right) \left[ -\frac{1}{4} p^2 \int_k \frac{I^{fin}(k^2, \lambda^2)}{k^4(p-k)^2} + \frac{b^2}{2} \ln \left( -\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + \frac{3}{4} b^2 \zeta(3) - 2b^2 + \frac{b^2 \pi^2}{24} \right]. \quad (3.9)$$

É importante notar que as divergências ultravioletas em dois laços se cancelaram na soma  $F'_1 + F'_2 + F'_3 + F'_4$  como conjecturado em [20]. Porém, isto não significa que o coeficiente de dois laços da função beta é zero. Para calculá-lo podemos usar a equação do grupo de renormalização. A função de Green de dois pontos renormalizada

(no ultravioleta), dada pelas contribuições de nível árvore, de um laço (3.3), (3.4) e de dois laços (3.9), é

$$G_{ren}^{(2)}(p^2) = \frac{1}{2g^2} + \frac{C_A}{4}i \left[ -3b \ln \left( -\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + 6b + \xi p^2 U(p^2) \right] - \frac{3g^2 C_A^2}{8} \left[ -2bp^2 U(p^2) + bp^2 U^{(2)}(p^2) + 2b^2 \ln \left( -\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - 8b^2 + 3b^2 \zeta(3) + \frac{b^2 \pi^2}{6} \right] \quad (3.10)$$

onde o primeiro termo do lado direito é a contribuição de nível árvore e  $U^{(2)}(p^2)$  é dado por

$$U^{(2)}(p^2) \equiv \int_k \frac{1}{k^4(k-p)^2} \ln \left( -\frac{k^2}{\lambda^2} \right). \quad (3.11)$$

Note que  $U^{(2)}(p^2)$  é divergente infravermelho fora da concha e contém ambas escalas infravermelha fora da concha  $\tilde{\lambda}$  (implicitamente) e ultravioleta  $\lambda$  (explicitamente) - veja apêndice A. Por construção elas são independentes. Deixaremos as divergências infravermelhas fora da concha representadas por  $U(p^2)$  e  $U^{(2)}(p^2)$  em suas formas integrais para mostrar que elas não contribuem de forma alguma para os coeficientes da função beta.

A função  $G_{ren}^{(2)}(p^2)$  obedece a equação do grupo de renormalização:

$$\left( \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \gamma_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) G_{ren}^{(2)}(p^2) \Big|_{\xi=0} = 0 \quad (3.12)$$

com  $\beta = \lambda \frac{\partial g}{\partial \lambda}$ . Usando a expressão  $\gamma_\xi = -\frac{3C_A}{(4\pi)^2} g^2 + \mathcal{O}(g^4)$  [28] e (3.10) podemos resolver a equação acima para  $\beta(g)$ . Escrevendo  $\beta(g) = b_1 g^3 + b_2 g^5 + \mathcal{O}(g^7)$  encontramos:

$$b_1 = -\frac{3}{4} \frac{C_A}{(4\pi)^2}, \quad (3.13)$$

$$b_2 = -\frac{3C_A^2}{8} \left[ bp^2 \lambda^2 \frac{\partial}{\partial \lambda^2} U^{(2)}(p^2) - 2b^2 + bp^2 U(p^2) \right]. \quad (3.14)$$

Note que o segundo termo do lado direito da equação (3.14) vem do termo proporcional a  $\ln(-p^2/\lambda^2)$  da última linha de (3.10). Os termos  $U^{(2)}(p^2)$  e  $U(p^2)$  são divergentes infravermelhos fora da concha. Porém,  $\lambda^2 \frac{\partial}{\partial \lambda^2} U^{(2)}(p^2) = -U(p^2)$  independentemente do esquema de regularização infravermelha e, portanto

$$b_2 = -\frac{3}{4} \frac{C_A^2}{(4\pi)^4}. \quad (3.15)$$



O valor encontrado concorda com valores da literatura (por exemplo, [19], [28]) e com a expansão em  $g$  da equação (3.2) para a teoria de Yang-Mills supersimétrica pura<sup>11</sup>:

$$\beta_{SYM} = -\frac{3C_A}{16\pi^2} \frac{g^3}{1 - C_A g^2/8\pi^2}. \quad (3.16)$$

É importante notar que o cancelamento ocorrido em (3.14) não depende da regularização infravermelha<sup>12</sup> e, já que apenas  $U^{(2)}(p^2)$  e  $U(p^2)$  são divergentes infravermelhos (fora da concha) os dois primeiros coeficientes da função beta são independentes destes infinitos infravermelhos.

No entanto, o termo do meio da equação (3.14), proporcional a  $b^2$ , é proveniente de um termo não local divergente infravermelho *na concha* proporcional a  $\ln(-p^2/\lambda^2)$  que multiplica os campos  $\mathbf{W}(p, \theta)$  e é integrado sobre todo o espaço de  $p$ . Assim, modos infravermelhos na concha contribuem para o coeficiente de dois laços da função beta. Isto pode acontecer em outras teorias supersimétricas [36].

---

<sup>11</sup>As normalizações usadas em [38] resultam em uma constante de acoplamento  $g$  diferente da usual  $g_{SYM}$  sendo  $g = \sqrt{2}g_{SYM}$  a relação entre ambas.

<sup>12</sup>De fato, em [63] foram exibidas duas regularizações infravermelhas: uma usando a massa como um regulador infravermelho e outra baseada no que foi exposto no apêndice A. Em ambos casos vimos, explicitamente, que tal cancelamento ocorreu.

# Capítulo 4

## Conclusões

*“Is this to end or just begin?”*

Led Zeppelin

Calculamos a função beta da teoria de Yang-Mills supersimétrica pura  $N = 1$  até dois laços usando a Regularização Implícita. Como fica claro na equação (3.14), divergências infravermelhas fora da concha cancelam-se automaticamente independente do esquema de regularização infravermelha (fora da concha) e, portanto, não há contribuições oriundas delas. Porém, modos infravermelhos na concha contribuem para o coeficiente de dois laços.

Como vimos, o cálculo da função beta da SYM até dois laços foi feito utilizando a parte finita da função de dois pontos. Vimos também que não há divergências ultravioletas em dois laços - o que está de acordo com a conjectura encontrada em [20]. Portanto, deve ser necessária alguma modificação no método do cálculo da função beta através de constantes de renormalização. Esta modificação pode estar relacionada com a presença de anomalias (como em [26]).

Portanto, uma possível extensão do trabalho apresentado seria o cálculo da função beta através de constantes de renormalização, pois, até onde sabemos, a Regularização Implícita é o único método de regularização em 4 dimensões que obteve explicitamente ambas partes divergente e finita em dois laços da função de dois pontos na teoria de Yang-Mills supersimétrica pura.

# Apêndice A

## Regularização Implícita e Tratamento de Divergências Ultravioleta e Infravermelha

*“Não se demonstra uma cocada, come-se. Comê-la é defini-la.”*

Machado de Assis

Em teoria quântica de campos as divergências ultravioletas (que surgem no limite em que o momento interno tende para infinito) são uma característica marcante da maioria dos modelos tratados. Os processos de regularização/renormalização lidam com estas divergências e a presença delas é importante, por exemplo, para o estudo de quebra anômala de simetria [50]. Algumas teorias não massivas possuem também divergências infravermelhas (quando o momento interno tende para zero) que, apesar de se acreditar serem espúrias [50], necessitam também de uma regularização.

É importante destacarmos que na literatura existem dois tipos de divergências infravermelhas: as divergências infravermelhas na concha de massa, que ocorrem quando o momento externo tende para zero, e as divergências infravermelhas fora da concha de massa, que surgem quando o momento interno tende para zero. Neste apêndice trabalharemos com as divergências fora da concha e, portanto, a omissão do termo “fora da concha” não gerará ambiguidade.

Apresentamos aqui uma breve exposição das prescrições da Regularização Implícita. Maiores detalhes podem ser encontrados, por exemplo, em [12] - [14], [64] e referências neles encontradas.

## A.1 Regularização de Divergências Ultravioletas

Para implementar a Regularização Implícita (RI) devemos supor que existe alguma regularização das amplitudes de Feynman que permita, assim, fazer manipulações do integrando.

Através do uso recursivo da identidade:

$$\frac{1}{(p_i - k)^2 - m^2} = \frac{1}{(k^2 - m^2)} - \frac{p_i^2 - 2p_i \cdot k}{(k^2 - m^2)[(p_i - k)^2 - m^2]} \quad (\text{A.1})$$

é possível isolar as divergências como integrais divergentes básicas (IDB) nos momentos internos. Aqui,  $p_i$  são momentos externos,  $k$  é um momento interno e  $m$  é um parâmetro de massa. Não é necessário calcular as IDBs e, com isto, nenhum regulador precisa ser implementado explicitamente - uma das vantagens da RI. Outra vantagem é que a dimensão do espaço-tempo não é modificada.

Analisemos a integral logicamente divergente ultravioleta:

$$I(p^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)((p - k)^2 - m^2 + i\epsilon)}, \quad (\text{A.2})$$

onde  $p$  é o momento externo e  $m$  um parâmetro de massa. No que segue omitiremos o termo  $i\epsilon$  dos propagadores, mas está assumida a sua presença. Usando (A.1) uma vez obtemos

$$I(p^2) = \int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} - \int_k^\Lambda \frac{p^2 - 2p \cdot k}{(k^2 - m^2)^2[(p - k)^2 - m^2]}. \quad (\text{A.3})$$

De agora em diante o superescrito  $\Lambda$  significa que a integral está regularizada no limite ultravioleta e/ou no infravermelho e, neste apêndice,  $\int_k \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$ .

O primeiro termo do lado direito da equação acima é independente do momento externo e pertence à classe das IDBs. Ele é chamado de  $I_{log}(m^2)$  e o deixamos (assim como as outras IDBs) nesta forma integral para evitar contato explícito com regularizações específicas. O segundo termo é finito e pode ser calculado da maneira usual.

Note que a massa é parte de  $I_{log}$ . Se a teoria é massiva, ela pode permanecer na definição de  $I_{log}$  e ser usada como uma escala do grupo de renormalização. Porém, se a teoria é não massiva,  $m$  tem um papel totalmente diferente. Ela representa um regulador infravermelho que deve ter o limite  $m \rightarrow 0$  tomado no final dos cálculos. Neste caso devemos substituir a massa em  $I_{log}$  por uma escala arbitrária  $\lambda$  a qual faz o papel de escala do grupo de renormalização. Com este intuito usamos outra identidade matemática:

$$I_{log}(m^2) = I_{log}(\lambda^2) + b \ln \left( \frac{\lambda^2}{m^2} \right), \quad (\text{A.4})$$

onde  $b \equiv \frac{i}{(4\pi)^2}$ .

Usando esta relação em (A.3) e tomando o limite  $m \rightarrow 0$  obtemos

$$I(p^2) = I_{log}(\lambda^2) - b \ln \left( -\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + 2b. \quad (\text{A.5})$$

## A.2 Regularização de Divergências Infravermelhas

A ideia da RI para lidar com divergências infravermelhas é fazer um tratamento análogo ao feito com divergências ultravioletas na seção anterior, mas no espaço das posições, como fica claro no exemplo a seguir [64].

Analisemos a integral de Feynman:

$$U(p^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4(p-k)^2}. \quad (\text{A.6})$$

Por contagem de potência  $U$  é (logaritmicamente) divergente no infravermelho e finita no ultravioleta. Para sermos capazes de utilizar todo o aparato desenvolvido para tratar integrais divergentes ultravioletas notamos que:

$$\frac{1}{(k^2 + i\epsilon)^2} = - \int^\Lambda d^4u e^{iku} \int^\Lambda \frac{d^4z}{(2\pi)^4} \frac{1}{(z^2 - i\epsilon)((z-u)^2 - i\epsilon)}, \quad (\text{A.7})$$

onde  $z$  e  $u$  são variáveis de posição e usamos a seguinte transformada de Fourier:

$$\int d^4x \frac{e^{ipx}}{x^2} = -i \frac{4\pi^2}{p^2}. \quad (\text{A.8})$$

A dependência explícita em  $i\epsilon$  no espaço das configurações também será omitida.

Note a grande semelhança entre a integral em  $z$  da equação (A.7) e a equação (A.2) - com  $m \rightarrow 0$ . Podemos, portanto, escrever o resultado direto desta integral

(o sinal oposto comparado com (A.5) deve-se às prescrições do  $i\epsilon$  nos espaços de configuração e de momento):

$$I(u^2) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_z^\Lambda \frac{1}{(z^2 - \mu^2)((z - u)^2 - \mu^2)} = -(\tilde{I}_{log}(\tilde{\lambda}^{-2}) - b \ln(-u^2 \tilde{\lambda}^2) + 2b). \quad (\text{A.9})$$

Entretanto, agora  $\tilde{I}_{log}(\tilde{\lambda}^{-2})$  é uma IDB infravermelha e (A.4) foi usada para eliminar  $\mu^2$  em favor da escala infravermelha  $\tilde{\lambda}$ .

Usando este resultado e (A.7) em (A.6) teremos

$$\begin{aligned} U &= - \int_k^\Lambda \frac{1}{(p - k)^2} \int^\Lambda d^4 u e^{iku} I(u^2) \\ &= - \frac{i}{(4\pi)^2} \int_k^\Lambda \int^\Lambda d^4 u \int^\Lambda d^4 x \frac{e^{i(p-k)x}}{x^2} e^{iku} I(u^2) \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2} \int^\Lambda d^4 u \frac{e^{-ipu}}{u^2} \left( \tilde{I}_{log}(\tilde{\lambda}^{-2}) - b \ln(-u^2 \tilde{\lambda}^2) + 2b \right) \\ &= \frac{1}{p^2} \left( \tilde{I}_{log}(\tilde{\lambda}^{-2}) + b \ln\left(-\frac{p^2}{\tilde{\lambda}^2}\right) + 2b \right). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

onde, além de (A.8), usamos outra transformada de Fourier:

$$\int d^4 x \frac{e^{ipx}}{x^2} \ln(-x^2 B^2) = i \frac{4\pi^2}{p^2} \ln\left(\frac{-p^2}{\bar{B}^2}\right) \quad (\text{A.11})$$

com  $\bar{B}^2 \equiv \frac{4}{e^{2\gamma}} B^2$  sendo  $\gamma = 0,5772\dots$  a constante de Euler-Mascheroni.

Enfatizamos que a extração e classificação de todas IDBs infravermelhas seguem a mesma estratégia: tomar a transformada de Fourier, resolver as integrais no espaço das configurações e tomar a transformada de Fourier inversa para o espaço dos momentos [64]. E como enfatizado em [28], introduzir uma escala infravermelha no espaço de Fourier transformado tem a vantagem de termos uma escala infravermelha a priori independente da escala ultravioleta.

# Apêndice B

## Tabela de Integrais

Neste apêndice apresentamos os resultados das integrais necessárias para este trabalho calculadas através da Regularização Implícita (detalhes sobre os cálculos podem ser encontrados nas referências do método dadas como, por exemplo, [13]). Termos de superfície foram omitidos, pois para implementar invariância de calibre (e de rotação de momentos) eles são sistematicamente igualados a zero ([13],[65]):

$$\begin{aligned}
 \int_q \frac{1}{q^2(q+p)^2} \ln\left(-\frac{q^2}{\lambda^2}\right) &= I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + b \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) - \frac{b}{2} \ln^2\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right), \\
 \int_q \frac{q^a}{q^4(q+p)^2} &= -b \frac{p^a}{p^2}, \\
 \int_q \frac{q^a}{q^4(q+p)^2} \ln\left(-\frac{q^2}{\lambda^2}\right) &= -b \frac{p^a}{p^2} \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right), \\
 \int_q \frac{q_a q_b}{q^4(q+p)^2} &= \frac{g_{ab}}{4} \left[ I_{log}(\lambda^2) - b \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) + 2b \right] + \frac{b p_a p_b}{2 p^2}, \\
 \int_q \frac{q_a q_b}{q^4(q+p)^2} \ln\left(-\frac{q^2}{\lambda^2}\right) &= \frac{g_{ab}}{4} \left[ I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{2} I_{log}(\lambda^2) - \frac{b}{2} \ln^2\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{b}{2} \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) + \frac{b}{2} \right] + \frac{p_a p_b}{p^2} \left[ \frac{b}{4} + \frac{b}{2} \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) \right], \\
 I_{ab} &= \int_k \int_q \frac{k_a q_b}{k^2 q^2 (k-p)^2 (k-q)^2 (q-p)^2} = \frac{g_{ab}}{4} \left[ b I_{log}(\lambda^2) - b^2 \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{p^2}{3} J(p) + \frac{11}{3} b^2 - b^2 \frac{\pi^2}{9} \right] + \frac{p_a p_b}{p^2} \left[ \frac{p^2}{3} J(p) - \frac{1}{6} b^2 + b^2 \frac{\pi^2}{36} \right],
 \end{aligned}$$

onde  $b \equiv \frac{i}{(4\pi)^2}$ ,  $I_{log}^{(2)}(\lambda^2) = \int_k \frac{1}{(k^2-\lambda^2)^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right)$  e  $I_{log}(\lambda^2) = \int_k \frac{1}{(k^2-\lambda^2)^2}$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] Burgess, C.; Moore, G. *The Standard Model: A Primer*, Cambridge University Press, 2007.
- [2] Heinemeyer, S.; Hollik, W.; Weiglein, G. Electroweak Precision Observables in the Minimal Supersymmetric Standard Model. *Phys. Rept.*, **425**, 265, (2006).
- [3] Hertzog, D. W.; Miller, J. P.; Rafael, E.; Roberts, B. L.; Stockinger, D. The physics Case for the New Muon (g-2) Experiment. *arXiv*: 0705.4617, (2007).
- [4] Gol'fand, Y. A.; Likhtman, E. P. Extension of the Algebra of Poincare Group Generators and Violation of p Invariance. *JETP Lett.*, **13**, 323, (1971).
- [5] Aitchison, I. *Supersymmetry in Particle Physics: An Elementary Introduction*, Cambridge University Press, 2007.
- [6] 't Hooft, G.; Veltman, M. J. G. Regularization and Renormalization of Gauge Fields. *Nucl. Phys. B*, **44**, 189, (1972).
- [7] Siegel, W. Supersymmetric Dimensional Regularization via Dimensional Reduction. *Phys. Lett. B*, **84**, 193, (1979).
- [8] Siegel, W. Inconsistency of Supersymmetric Dimensional Regularization. *Phys. Lett. B*, **94**, 37, (1980).
- [9] Stockinger, D. Regularization by Dimensional Reduction: Consistency, Quantum Action Principle, and Supersymmetry. *JHEP*, **0503**, 076, (2005).
- [10] Stockinger, D. Regularization of Supersymmetric Theories: Recent Progress. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, **157**, 136, (2006).



- [11] Battistel, O. A.; Mota, A. L.; Nemes, M. C. Consistency Conditions for 4-D Regularizations. *Mod. Phys. Lett. A*, **13**, 1597, (1998).
- [12] Pontes, C. R.; Nemes, M. C.; Baêta Scarpelli, A. P.; Sampaio, M. Implicit Regularization Beyond One-loop Order: Scalar Field Theories. *J. Phys. G*, **34**, 2215, (2007).
- [13] Dias, E. W.; Baêta Scarpelli, A. P.; Brito, L. C. T.; Sampaio, M.; Nemes, M. C. Implicit Regularization Beyond One Loop Order: Gauge Field Theories. *Eur. Phys. J. C*, **55**, 667, (2008).
- [14] Cherchiglia, A. L.; Sampaio, M.; Nemes, M. C. Systematic Implementation of Implicit Regularization for Multi-loop Feynman Diagrams. *Int. J. Mod. Phys. A*, **26**, 2591, (2011).
- [15] Felipe, J. C. C.; Brito, L. C. T.; Sampaio, M.; Nemes, M. C. Quantum Gravitational Contributions to the Beta Function of Quantum Electrodynamics. *Phys. Lett. B*, **700**, 86, (2011).
- [16] Ferrara, S.; Zumino, B.; Transformation Properties of the Supercurrent. *Nucl. Phys. B*, **87**, 207, (1975).
- [17] Novikov, V. A.; Shifman, M. A.; Vainshtein, A. I.; Zakharov, V. I. Exact Gell-Mann-Low Function of Supersymmetric Yang-Mills Theories from Instanton Calculus. *Nucl. Phys. B*, **229**, 381, (1983).
- [18] Adler, S. L.; Bardeen, W. A. Absence of Higher Order Corrections in the Anomalous Axial Vector Divergence Equation. *Phys. Rev.*, **182**, 1517, (1969).
- [19] Abbott, L. F.; Grisaru, M. T.; Zanon, D. Infrared Divergences and a Non-local Gauge for Superspace Yang-Mills Theory. *Nucl. Phys.*, **B244**, 454, (1984).
- [20] Grisaru, M. T.; Milewski, B.; Zanon, D. The Structure of UV Divergences in SSYM Theories. *Phys. Lett. B*, **155**, 357, (1985).
- [21] Grisaru, M. T.; Milewski, B.; Zanon, D. The Supercurrent and the Adler-Bardeen Theorem. *Nucl. Phys. B*, **266**, 589, (1986).

- [22] Shifman, M. A.; Vainshtein, A. I. Solution of the Anomaly Puzzle in SUSY Gauge Theories and the Wilson Operator Expansion. *Nucl. Phys. B*, **277**, 456, (1986). *Sov. Phys. JETP*, **64**, 428, (1986). *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **91**, 723, (1986).
- [23] Abdalla, E.; Jasinski, R. S. Analytic Supersymmetric Regularization for the Pure N=1 Pure Super-Yang-Mills Model. *Nucl. Phys. B*, **286**, 42, (1987).
- [24] Tan, S.; Helayël-Neto, J. A.; Smith, A. W. A Two-loop Investigation of the Chiral Anomaly Problem in N=1 Supersymmetric Gauge Theories. *SISSA Library*, **31/87/EP**, (1987).
- [25] Arkani-Hamed, N.; Murayama, H. Holomorphy, Rescaling Anomalies and Exact  $\beta$  Functions in Supersymmetric Gauge Theories. *JHEP*, **0006**, 030, (2000).
- [26] Kraus, E. An Anomalous Breaking of Supersymmetry in Supersymmetric Gauge Theories with Local Coupling. *Nucl. Phys. B*, **620**, 55, (2002).
- [27] Kraus, E. Calculating the Anomalous Supersymmetry Breaking in Super-Yang-Mills Theories with Local Coupling. *Phys. Rev. D*, **65**, 105003, (2002).
- [28] Mas, J.; Perez-Victoria, M.; Seijas, C. The Beta Function of N=1 SYM in Differential Renormalization. *JHEP*, **0203**, 049, (2002).
- [29] Pimenov, A. B.; Shevtsova, E. S.; Stepanyantz, K. V. Calculation of Two-loop  $\beta$ -function for General N=1 Supersymmetric Yang-Mills Theory with the Higher Covariant Derivative Regularization. *Phys. Lett. B*, **686**, 293, (2010).
- [30] Stepanyantz, K. V. Anomaly Problem in the N=1 Supersymmetric Electrodynamics as a Consequence of Inconsistency of the Dimensional Reduction Method. *Theor. Math. Phys.*, **140**, 939, (2004).
- [31] Huang, X.; Parker, L. Clarifying Some Remaining Questions in the Anomaly Puzzle. *Eur. Phys. J. C*, **71**, 1570, (2011).
- [32] Dine, M.; Festuccia, G.; Pack, L.; Park, C. S.; Ubaldi, L.; Wu, W. Supersymmetric QCD: Exact Results and Strong Coupling. *JHEP*, **1105**, 061, (2011).
- [33] Yonekura, K. On the Trace Anomaly and the Anomaly Puzzle in N=1 Pure Yang-Mills. *JHEP*, **1203**, 029, (2012).

- [34] Ferrara, S.; Zumino, B. Supergauge Invariant Yang-Mills Theories. *Nucl. Phys. B*, **79**, 413, (1974).
- [35] Salam, A.; Strathdee, J. On Superfields and Fermi-Bose Symmetry. *Phys. Rev. D*, **11**, 1521, (1975).
- [36] West, P. *Introduction to Supersymmetry and Supergravity*, 2<sup>a</sup> ed. World Scientific, 1990.
- [37] Müller-Kirsten, H. J. W.; Wiedemann, A. *Introduction to Supersymmetry*, 2<sup>a</sup> ed. World Scientific, 2010.
- [38] Gates Jr, S. J.; Grisaru, M. T.; Roček, M.; Siegel, W. *Superspace or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry*. Frontiers in Physics v. 58, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. 1983.
- [39] Salam, A.; Strathdee, J. Supergauge Transformations, *Nucl. Phys. B*, **76**, 477, (1974).
- [40] Peskin, M. E.; Schroeder, D. V. *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison Wesley, 1995.
- [41] DeWitt, B. S. Quantum Theory of Gravity. II. The Manifestly Covariant Theory. *Phys. Rev.*, **162**, 1195, (1967).
- [42] Abbott, L. F.; The Background Field Method Beyond One Loop. *Nucl. Phys. B*, **185**, 189, (1981).
- [43] Abbott, L. F. Introduction to the Background Field Method. *Acta Phys. Polon. B*, **13**, 33, (1982).
- [44] Grisaru, M. T.; Siegel, W. Supergravity: (II). Manifestly Covariant Rules and Higher-loop Finiteness. *Nucl. Phys. B*, **201**, 292, (1982). Erratum, *ibid.*, **206**, 496, (1982).
- [45] Nielsen, N. K. Ghost Counting in Supergravity. *Nucl. Phys. B*, **140**, 499, (1978).
- [46] Kallosh, R. E. Modified Feynman Rules in Supergravity. *Nucl. Phys. B*, **141**, 141, (1978).

- [47] Song, Y. S. *Differential Renormalization of Supersymmetric Gauge Theories in Superspace*. Tese de bacharelado, Massachusetts Institute of Technology, 1996.
- [48] Jones, D. R. T.; Leveille, J. P. Dimensional Regularization and the Two Loop Axial Anomaly in Abelian, Nonabelian and Supersymmetric Gauge Theories. *Nucl. Phys. B*, **206**, 473, (1982). Erratum, *ibid.*, **222**, 517, (1983).
- [49] Juer, J. W.; Storey, D. One Loop Renormalization of Superfield Yang-Mills Theories. *Nucl. Phys. B*, **216**, 185, (1983).
- [50] Jackiw, R. The Unreasonable Effectiveness of Quantum Field Theory. *70 Years of Quantum Mechanics*, (1996).
- [51] Chetyrkin, K. G.; Tkachov, F. V. Infrared R-operation and Ultraviolet Counterterms in the MS Scheme. *Phys. Lett. B*, **114**, 340, (1982).
- [52] Abdalla, E.; Abdalla, M. C. B. An Algorithm to Isolate Poles in Feynman Diagrams Preserving Background Gauge Invariance and Supersymmetry. *Nucl. Phys. B*, **266**, 423, (1986).
- [53] Speer, E. R. Lectures on Analytic Renormalization. *University of Maryland, Technical Report 73-067*, (1972).
- [54] Freedman, D. Z.; Johnson, K.; Latorre, J. I. Differential Regularization and Renormalization: a New Method of Calculation in Quantum Field Theory. *Nucl. Phys. B*, **371**, 353, (1992).
- [55] Slavnov, A. A. Invariant Regularization of Nonlinear Chiral Theories. *Nucl. Phys. B*, **31**, 301, (1971).
- [56] Krivoshchekov, V. K.; Invariant Regularization for Supersymmetric Gauge Theories. *Theor. Math. Phys.*, **36**, 745, (1978).
- [57] West, P. Higher Derivative Regulation of Supersymmetric Theories. *Nucl. Phys. B*, **268**, 113, (1986).
- [58] Jack, I.; Jones, D. R. T.; North, C. G. Scheme Dependence and the NSVZ Beta Function. *Nucl. Phys. B*, **486**, 479, (1997).

- [59] Lowenstein, J. H. Differential Vertex Operations in Lagrangian Field Theory. *Commun. Math. Phys.*, **24**, 1, (1971).
- [60] Breitenlohner, P.; Maison, D. Dimensional Renormalization and the Action Principle. *Commun. Math. Phys.*, **52**, 11, (1977).
- [61] Seijas, C. *The Beta Function of Gauge Theories at Two Loops in Differential Renormalization*. Tese de doutorado, Universidade Santiago de Compostela, 2007.
- [62] Rosner, J. L. Higher-order Contributions to the Divergent Part of  $Z_3$  in a Model Quantum Electrodynamics. *Annals Phys.*, **44**, 11, (1967).
- [63] Fargnoli, H. G.; Hiller, B.; Baêta Scarpelli, A. P.; Sampaio, M.; Nemes, M. C. Regularization Independent Analysis of the Origin of Two Loop Contributions to N=1 Super Yang-Mills Beta Function. *Eur. Phys. J. C*, **71**, 1633, (2011).
- [64] Fargnoli, H. G.; Baêta Scarpelli, A. P.; Brito, L. C. T.; Hiller, B.; Sampaio, M.; Nemes, M. C.; Osipov, A. A. Ultraviolet and Infrared Divergences in Implicit Regularization: A Consistent Approach. *Mod. Phys. Lett. A*, **26**, 289, (2011).
- [65] Ferreira, L. C.; Cherchiglia, A. L.; Hiller, B.; Sampaio, M.; Nemes, M. C. Momentum Routing Invariance in Feynman Diagrams and Quantum Symmetry Breakings. *Phys. Rev. D*, **86**, 025016, (2012).