

# Caracterização de Meios Ópticos Despolarizantes

Dissertação de Mestrado

Érico Luiz Martins Reis

Orientador: Carlos Henrique Monken

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Agosto de 2012

# Agradecimentos

Agradeço a todos que de alguma forma me ajudaram a ter ao menos a intenção de concluir essa dissertação. Em especial, agradeço:

Ao professor Carlos Monken, que me acolheu num momento difícil e acreditou que era possível terminar um trabalho num curto período de tempo.

Aos meus pais Tânia e Jaime, pelo apoio incondicional e pela compreensão nos momentos de ausência.

Aos meus irmãos Lívia e André, pelo companheirismo e pelo suporte dado nos momentos de dificuldade.

À Gláucia, por sua compreensão e carinho nos momentos em que eu menos merecia, mas mais precisava. Também por ser uma ótima revisora.

Ao meu amigo-irmão Lucas Nézio, por sua sincera amizade e por acrescentar sabedoria em minha vida.

Ao amigo André Tanus, por sua disponibilidade e atenção, e também por ser um excelente revisor. Aos colegas do Grupo de Infoquant, pelas ótimas discussões e sugestões.

Ao Marcelo Guimarães, pelos longos dias de apoio e paciência no laboratório de simulação. Obrigado por me ensinar o significado do altruísmo.

Ao Mateus e ao Marco Túlio, por suas solícitudes e destrezas em sanar minhas dúvidas mais pontuais. Ao professor Marcelo França, por me proporcionar bons momentos de discussões. Ao professor Marcelo Terra Cunha, por ter me permitido frequentar as esclarecedoras reuniões de informação quântica nas quartas à noite. A todo grupo do Enlight, pelas ótimas reuniões de grupo.

A todos os colegas da sala de mestrado, pelos ótimos momentos de convivência. Em especial, Amanda, Emilson e Diego, por se preocuparem comigo e quererem o melhor para mim.

Ao professor André Ferlauto, pelo apoio que me deu no início de minha jornada científica.

Ao professor João Plascak, por seus ensinamentos e por ter me fortalecido enquanto pesquisador e pessoa.

A todos os professores da minha formação acadêmica, em especial, ao

professor Mário Sérgio, pelas excelentes aulas e também por se preocupar comigo.

Aos professores Gabriel Franco e Raphael Drumond, pelas excelentes sugestões que fizeram para essa dissertação.

A todos os colegas do departamento de física, pelos bons momentos que tive.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro.

A todos os familiares e amigos que torceram por mim.

Meu mais sincero Obrigado!

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Formalismo de Mueller-Jones</b>	<b>4</b>
2.1	Estado de polarização . . . . .	4
2.1.1	Vetor de Jones . . . . .	4
2.1.2	Matriz de coerência . . . . .	6
2.1.3	Vetor de Stokes . . . . .	8
2.2	Meios ópticos e transformações polarimétricas . . . . .	11
2.2.1	Espalhamento . . . . .	11
2.2.2	Meios ópticos não-despolarizantes . . . . .	12
2.2.2.1	Matriz de Jones . . . . .	12
2.2.2.2	Matriz de Mueller-Jones . . . . .	13
2.2.3	Meios ópticos despolarizantes . . . . .	14
2.2.3.1	Matriz de Mueller . . . . .	15
2.2.3.2	Meios ópticos não-despolarizantes em paralelo	15
2.2.3.3	Ensemble de meios ópticos não-despolarizantes	17
<b>3</b>	<b>Decomposição da matriz de Mueller</b>	<b>19</b>
3.1	Bases matriciais . . . . .	19
3.1.1	Base canônica . . . . .	20
3.1.2	Base de Pauli . . . . .	22
3.2	Da matriz de Mueller para matriz hermitiana $H$ . . . . .	22
3.2.1	A matriz $\mathcal{M}$ . . . . .	22
3.2.2	A matriz hermitiana $H$ . . . . .	23
3.3	Decomposição em matrizes de Mueller-Jones . . . . .	27
3.3.1	Decomposição espectral de $H$ . . . . .	28
3.3.2	Da matriz $M$ para matrizes $M_J$ . . . . .	28
3.4	Decomposição da matriz de coerência . . . . .	32

<b>4</b>	<b>Funções do espectro</b>	<b>34</b>
4.1	Índice de despolarização . . . . .	34
4.1.1	Forma quadrática . . . . .	35
4.1.2	Medidas de despolarização . . . . .	35
4.1.3	Índice de despolarização e pureza . . . . .	39
4.2	Entropia . . . . .	40
4.3	Câmara de Weyl . . . . .	41
4.4	Funções concavidade . . . . .	42
4.4.1	Concavidade aritmética . . . . .	43
4.4.2	Concavidade geométrica . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Diagrama de fases</b>	<b>46</b>
5.1	O índice de despolarização e a entropia dos meios ópticos espalhadores de luz . . . . .	46
5.1.1	Experimentos de despolarização . . . . .	47
5.1.2	O diagrama experimental $E_M \times D_M$ . . . . .	47
5.2	Caracterização pelas concavidades . . . . .	48
5.2.1	Concavidade aritmética . . . . .	51
5.2.1.1	A partição da câmara de Weyl . . . . .	52
5.2.1.2	O diagrama $E_M \times D_M \times C_A$ . . . . .	53
5.2.2	Concavidade geométrica . . . . .	55
5.2.2.1	A partição da câmara de Weyl . . . . .	56
5.2.2.2	O diagrama $E_M \times D_M \times C_G$ . . . . .	57
	<b>Considerações finais</b>	<b>58</b>

# Resumo

Estudamos o problema da caracterização das transformações de estados de polarização da luz espalhada por meios despolarizantes através do formalismo de Mueller. Por meio da decomposição da matriz de Mueller em soma convexa de matrizes de Mueller-Jones, estudamos as propriedades espectrais dessa decomposição e sua relação com o preenchimento do diagrama *Entropia*  $\times$  *Índice de despolarização* dos meios ópticos.

# Abstract

We studied the problem of characterization of the polarization states transformations of scattered light by depolarizing media by Mueller formalism. By decomposition of the Mueller matrix in convex sum of Mueller-Jones matrix, we studied the spectral properties of this decomposition and its relation to the filling of the *Entropy*  $\times$  *Index of depolarization* diagram of optical media.

# Capítulo 1

## Introdução

A maior parte do formalismo que nos permite representar os estados de polarização da luz foi introduzida no século XIX, mas, a expansão da óptica polarimétrica iniciou-se realmente com o desenvolvimento de sofisticados sistemas tecnológicos como o laser e a fibra óptica. A exploração da informação polarimétrica do campo eletromagnético tem sido amplamente desenvolvida em várias áreas de pesquisa como: sistemas de telecomunicação (fibras ópticas) [1], astronomia [2], biologia [3], etc.

Em 1852, George Stokes estabeleceu uma descrição algébrica para um estado de polarização introduzindo quatro parâmetros que possuem dimensão de energia e ficaram conhecidos como parâmetros de Stokes [4]. Essa representação é interessante, pois nos permite lidar com estados completamente polarizados, estados parcialmente polarizados e até mesmo, estados despolarizados. Esse formalismo é completo<sup>1</sup>. Outro formalismo completo é a representação do estado de polarização da luz via matriz de coerência [5].

Em 1892, H. Poincaré usou os vetores de Stokes para demonstrar que o espaço dos estados de polarização da luz pode ser representado por uma esfera [6].

Do ponto de vista das transformações nos estados de polarização, a interação entre o campo eletromagnético e um material homogêneo pode ser descrita pelo formalismo de Jones. Entre 1941 e 1947, R. Clark Jones [7], baseado na natureza vetorial do estado de polarização, estabeleceu que os operadores que representam as transformações polarimétricas impostas pelos sistemas ópticos ao feixe de luz, eram descritos por matrizes complexas  $2 \times 2$ . Uma desvantagem desse formalismo refere-se à impossibilidade de se representar sistemas ópticos que geram despolarização.

---

<sup>1</sup>Completo porque permite representar qualquer estado de polarização, inclusive os parcialmente polarizados.



O método mais poderoso para tratar sistemas despolarizantes foi desenvolvido por F. Perrin [8] e H. Mueller [9] e ficou conhecido como formalismo das matrizes de Mueller ou ainda, formalismo de Mueller-Stokes. A matriz de Mueller é capaz de representar a transformação polarimétrica sofrida por qualquer onda eletromagnética, em qualquer meio, através de um tratamento linear.

Como as mudanças no estado de polarização de um feixe de luz serão objeto de nosso estudo, vamos definir primeiramente o que é um feixe de luz. Podemos dizer que ele consiste em um grande número de ondas emitidas por uma fonte emissora de luz. Cada átomo da fonte produz uma onda que possui uma orientação<sup>2</sup> particular do vetor campo elétrico. A direção de polarização de cada onda individualmente é definida como a direção em que o campo elétrico está vibrando.

Quando um feixe de luz incide num material ele pode ser espalhado pelas moléculas (e elétrons) do mesmo. Devido à variedade estrutural dos meios ópticos existentes na natureza, é possível fazer uma classificação desses via espalhamento, uma vez que meios ópticos distintos podem causar efeitos de espalhamento diferentes para um mesmo feixe de luz incidente [11].

Nesta dissertação apresentaremos uma maneira de caracterizar meios ópticos despolarizantes. Para conseguirmos um entendimento um pouco mais amplo do assunto dividimos o estudo da seguinte maneira:

- No capítulo 2, primeiramente, veremos as formas de representar o estado de polarização de um feixe de luz. Logo em seguida, obteremos as formas de representar as transformações polarimétricas que um meio óptico pode impor a um feixe de luz que incide sobre ele.
- No capítulo 3, veremos que é possível decompor a matriz de Mueller que representa um meio óptico, numa soma convexa de matrizes que representam meios ópticos não-despolarizantes. Também veremos como decompor a matriz de coerência.
- No capítulo 4, derivaremos funções que nos auxiliarão a entender as propriedades dos meios ópticos despolarizantes.
- No capítulo 5, primeiramente, apresentaremos os resultados da investigação experimental [11] que motivou o estudo dessa dissertação, principalmente o diagrama  $(E_M \times D_M)$ .

---

<sup>2</sup> Que corresponde a diferentes vibrações atômicas [10].

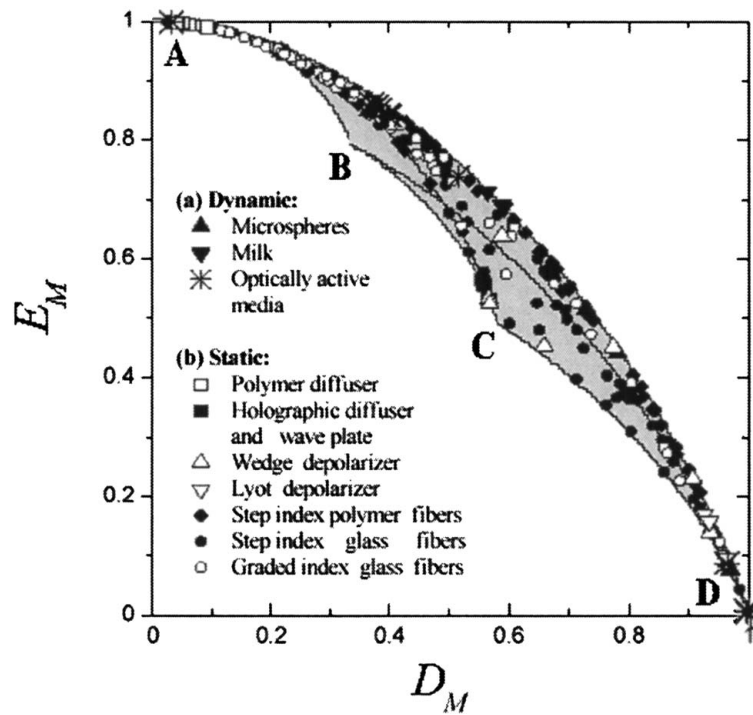


Figura 1.1: Diagrama  $E_M \times D_M$  obtido experimentalmente.

Nesse diagrama existe uma região teoricamente permitida mas que na prática não é preenchida. Nossa motivação era entender o porquê desse não-preenchimento. Assim, por último, expomos nossa contribuição para caracterização de meios ópticos despolarizantes e o entendimento do diagrama.

# Capítulo 2

## Formalismo de Mueller-Jones

Neste capítulo delimitaremos os preceitos básicos para o entendimento das transformações polarimétricas. Seguiremos, principalmente, o roteiro apresentado em [12].

### 2.1 Estado de polarização

#### 2.1.1 Vetor de Jones

O estado de polarização de um feixe de luz que propaga na direção  $z$  é dado pela evolução temporal do campo elétrico perpendicular à direção de propagação desse feixe. Seja  $\mathbf{E}(z, t)$  o vetor<sup>1</sup> campo elétrico de uma onda plana monocromática propagando em um meio isotrópico num instante de tempo  $t$  e num ponto do espaço com coordenadas  $(x, y, z)$ ; sendo  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  e  $\mathbf{e}_z$  os vetores ortonormais do sistema de referência.

As componentes do vetor campo elétrico no plano perpendicular à direção de propagação da onda são:

$$E_x(z, t) = A_x \cos(kz - \omega t + \beta_x), \quad (2.1a)$$

$$E_y(z, t) = A_y \cos(kz - \omega t + \beta_y), \quad (2.1b)$$

onde  $k = 2\pi/\lambda_0$  é o vetor de onda e  $\lambda_0$  é o comprimento de onda;  $\omega = 2\pi\nu$  é a frequência angular de oscilação do campo e  $\nu$  é a frequência natural;  $\beta_x$  e  $\beta_y$  são fatores de fase;  $A_x$  e  $A_y$  são as amplitudes de oscilação do campo elétrico.

No caso de luz quase-monocromática, isto é, quando a largura de dispersão  $\Delta\nu$  é pequena em relação à frequência central do perfil do espectro, as

---

<sup>1</sup>Sempre que houverem vetores eles estarão em negrito.

componentes do campo elétrico podem ser expressas como:

$$E_x(z, t) = A_x \cos(\bar{k}z - \bar{\omega}t + \beta_x(t)), \quad (2.2a)$$

$$E_y(z, t) = A_y \cos(\bar{k}z - \bar{\omega}t + \beta_y(t)), \quad (2.2b)$$

onde  $\bar{k}$  e  $\bar{\omega}$  são valores médios de  $k$  e  $\omega$ .

No estudo da polarização, sob as condições de quase-monocromaticidade, é muito vantajoso usar a representação das componentes do campo elétrico como variáveis complexas, em que a parte real dessas variáveis é a quantidade física real que está sendo representada [10].

Sejam  $\eta_x(t)$  e  $\eta_y(t)$  as representações complexas das duas componentes ortogonais do campo elétrico,

$$\eta_x(t) = A_x(t)e^{i(u(t)+\beta_x(t))}, \quad (2.3a)$$

$$\eta_y(t) = A_y(t)e^{i(u(t)+\beta_y(t))}, \quad (2.3b)$$

em que,  $u(t) = \bar{k}z - \bar{\omega}t$ .

Essas duas componentes podem ser dispostas na forma de um vetor  $\boldsymbol{\eta}(t) \in \mathbb{C}^2$ ,

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \begin{pmatrix} \eta_x(t) \\ \eta_y(t) \end{pmatrix} = e^{i(u(t)+\beta_x(t))} \begin{pmatrix} A_x(t) \\ A_y(t)e^{i(\beta_y(t)-\beta_x(t))} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Desconsiderando a fase global (que não tem significado físico para o entendimento do estado de polarização do feixe) podemos definir o *vetor instantâneo de Jones*:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(t) = \begin{pmatrix} A_x(t) \\ A_y(t)e^{i\beta(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_0(t) \\ \mathcal{E}_1(t) \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

onde  $\beta(t) = \beta_y(t) - \beta_x(t)$  é a fase relativa entre as componentes. Perceba que a partir de agora vamos nos referir as componentes ortogonais  $x$  e  $y$ , pelos subíndices 0 e 1, respectivamente. Essa troca é interessante já que mais adiante esses subíndices serão usados em índices de somatórios.

Esse vetor inclui toda informação relativa à evolução temporal do campo elétrico, e é dito *instantâneo* porque a amplitude e a fase relativa são variáveis dependentes do tempo.

Quando

$$\frac{A_y(t)}{A_x(t)} = \text{constante} \quad \text{e} \quad \beta(t) = \text{constante}, \quad (2.6)$$

ou seja, a relação entre as componentes não varia no tempo e por isso a oscilação do campo elétrico é estável a ponto de descrever uma **elipse de**

**polarização** bem definida (como representado na figura 2.1), define-se o chamado **vetor de Jones**, dado por:

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y e^{i\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_0 \\ \mathcal{E}_1 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

dessa forma, o vetor de Jones é útil para representar estados de polarização da luz quando essa está totalmente polarizada, ou seja, a polarização não depende do tempo<sup>2</sup>.

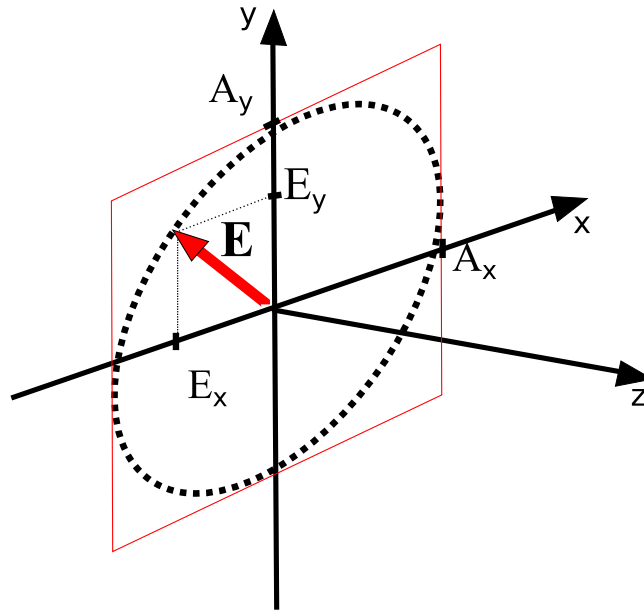


Figura 2.1: A elipse que representa a polarização.

### 2.1.2 Matriz de coerência

Existem estados de polarização (e esses são a maioria) que não podem ser representados por meio de um vetor de Jones e por isso, faz-se necessário conseguir uma outra forma de representação que também identifique completamente esses estados. Veremos que existe uma representação matricial, **matriz de coerência**, que identifica todos os estados de polarização.

Para ganharmos uma noção intuitiva da representação via matriz de coerência, comecemos a abordagem por meio de um exemplo. Consideremos

<sup>2</sup>Veremos no decorrer do capítulo que a existência de luz parcialmente polarizada pode ser entendida desconsiderando dependências no tempo, quando imaginarmos um feixe de luz como resultado de uma soma estatística de outros feixes.

um feixe de luz despolarizado, o que significa que a posição do vetor campo elétrico é indeterminada, isto é, tem igual probabilidade de estar em qualquer ponto no plano de oscilação<sup>3</sup>. Consequentemente, sua projeção num dos eixos desse plano (eixo  $x$ ) num longo intervalo de tempo, será tantas vezes positiva quanto negativa. O mesmo ocorre com a projeção no eixo perpendicular (eixo  $y$ ). Assim, num intervalo de tempo suficientemente longo, esperamos que a média temporal seja nula, *i.e.*,

$$\langle \mathcal{E}_0(t) \rangle = 0, \quad (2.8a)$$

$$\langle \mathcal{E}_1(t) \rangle = 0, \quad (2.8b)$$

onde  $\langle \cdot \rangle$  representa a média temporal<sup>4</sup>. Em contrapartida, a intensidade<sup>5</sup> de luz em cada uma das componentes  $x$  e  $y$  é sempre positiva, tal que suas médias temporais nunca serão nulas, e por isso, esperamos que as intensidades das componentes  $x$  e  $y$  sejam iguais na média,

$$\langle \mathcal{E}_0(t) \mathcal{E}_0^*(t) \rangle = \langle \mathcal{E}_1(t) \mathcal{E}_1^*(t) \rangle = \frac{\mathcal{I}}{2}, \quad (2.9)$$

em que definimos  $\mathcal{I} \equiv \langle \mathcal{E}_0(t) \mathcal{E}_0^*(t) \rangle + \langle \mathcal{E}_1(t) \mathcal{E}_1^*(t) \rangle$  como a intensidade total do feixe.

Uma vez que o feixe de luz é despolarizado, as componentes do campo elétrico são descorrelacionadas, daí seu valor médio temporal ser dado por:

$$\langle \mathcal{E}_0(t) \mathcal{E}_1^*(t) \rangle = 0 = \langle \mathcal{E}_1(t) \mathcal{E}_0^*(t) \rangle. \quad (2.10)$$

É conveniente considerar os resultados dessas correlações como componentes de uma matriz,

$$\frac{\mathcal{I}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Numa situação em que existem correlações entre as componentes do vetor campo elétrico  $\langle \mathcal{E}_0(t) \mathcal{E}_1^*(t) \rangle \neq 0$  e  $\langle \mathcal{E}_1(t) \mathcal{E}_0^*(t) \rangle \neq 0$ , também podemos inferir uma matriz quadrada  $2 \times 2$  para representar o estado de polarização desse feixe. Essa matriz é chamada de matriz de coerência  $\Phi$  e contém toda informação mensurável com respeito ao estado de polarização do feixe de luz,

<sup>3</sup>Plano perpendicular a direção de propagação da onda.

<sup>4</sup>A média temporal é dada por,  $\langle X(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$ .

<sup>5</sup>Valor do fluxo de energia por unidade de área por unidade de tempo numa dada região do espaço.

incluindo intensidade. Sua representação é dada por uma matriz hermitiana  $2 \times 2$  e é definida como:

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv \langle \mathcal{E}(t) \otimes \mathcal{E}^\dagger(t) \rangle \\ &= \begin{pmatrix} \langle \mathcal{E}_0(t) \mathcal{E}_0^*(t) \rangle & \langle \mathcal{E}_0(t) \mathcal{E}_1^*(t) \rangle \\ \langle \mathcal{E}_1(t) \mathcal{E}_0^*(t) \rangle & \langle \mathcal{E}_1(t) \mathcal{E}_1^*(t) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{00} & \Phi_{01} \\ \Phi_{10} & \Phi_{11} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$\mathcal{E}$  é o vetor de Jones instantâneo da onda,  $\mathcal{E}^\dagger$  é o conjugado transposto de  $\mathcal{E}$ ,  $\otimes$  é o produto de Kronecker.

A matriz  $\Phi$  é caracterizada por seus dois autovalores serem não-negativos<sup>6</sup>. Esse vínculo é condição necessária e suficiente para que uma matriz qualquer  $2 \times 2$  hermitiana seja uma matriz de coerência, isto é, represente um estado de polarização de um feixe de luz.

### 2.1.3 Vetor de Stokes

Veremos agora, que a matriz de coerência  $\Phi$  pode ser expressa como uma combinação linear de coeficientes reais, na base de Pauli que é composta pelas três matrizes de Pauli e a matriz identidade  $2 \times 2$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{(0)} &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma_{(1)} &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \sigma_{(2)} &\equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_{(3)} &\equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Esse conjunto de matrizes linearmente independentes constituem uma base adequada para o espaço das matrizes hermitianas  $2 \times 2$ . Assim,

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 S_\mu \sigma_\mu, \quad (2.14)$$

explicitamente,

$$\Phi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S_0 + S_1 & S_2 - iS_3 \\ S_2 + iS_3 & S_0 - S_1 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

em que os coeficientes  $S_\mu$  são reais e dados por

$$S_\mu = Tr\{\Phi \sigma_\mu\}, \quad (2.16)$$

com  $\mu = 0, 1, 2$  e  $3$ .

---

<sup>6</sup> $\lambda_0 = 0$  e  $\lambda_1 = \langle |\mathcal{E}_0(t)|^2 + |\mathcal{E}_1(t)|^2 \rangle \geq 0$ .

Relacionando as equações 2.12 e 2.15 vemos que,

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \langle \mathcal{E}_0(t) \mathcal{E}_0^*(t) \rangle + \langle \mathcal{E}_1(t) \mathcal{E}_1^*(t) \rangle, \\
 S_1 &= \langle \mathcal{E}_0(t) \mathcal{E}_0^*(t) \rangle - \langle \mathcal{E}_1(t) \mathcal{E}_1^*(t) \rangle, \\
 S_2 &= \langle \mathcal{E}_0(t) \mathcal{E}_1^*(t) \rangle + \langle \mathcal{E}_1(t) \mathcal{E}_0^*(t) \rangle, \\
 S_3 &= i(\langle \mathcal{E}_0(t) \mathcal{E}_1^*(t) \rangle - \langle \mathcal{E}_1(t) \mathcal{E}_0^*(t) \rangle).
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

A partir dessas igualdades podemos dar uma interpretação física para esses parâmetros  $\{S_\mu\}$ ,

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \mathcal{I}, \\
 S_1 &= \mathcal{I}_H - \mathcal{I}_V, \\
 S_2 &= \mathcal{I}_+ - \mathcal{I}_-, \\
 S_3 &= \mathcal{I}_R - \mathcal{I}_L,
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

em que  $\mathcal{I}$  é a intensidade total do feixe e  $\mathcal{I}_\mu$ , com  $\mu = \{H, V, +, -, R, L\}$  são as intensidades de luz do feixe com polarizações lineares: horizontal, vertical,  $45^\circ$ ,  $-45^\circ$ , e circulares: direita e esquerda, respectivamente. Perceba, portanto, que esses parâmetros são grandezas mensuráveis.

Ao conjunto  $\{S_0, S_1, S_2, S_3\}$  dá-se o nome de parâmetros de Stokes. Organizados na forma de um vetor, constituem o chamado vetor de Stokes  $\mathbf{S}$ ,

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}, \tag{2.19}$$

que pode ser escrito na forma,

$$\mathbf{S} = \mathcal{I} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}, \tag{2.20}$$

onde  $\mathbf{r}$  é o vetor que determina univocamente os ângulos  $\theta$ , com  $(0 \leq \theta \leq \pi)$  e  $\varphi$ , com  $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ , e é dado por:

$$\mathbf{r} \equiv P \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sen } \theta \cos \varphi \\ \text{sen } \theta \text{ sen } \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

em que  $P \equiv |\mathbf{r}|$  é o grau de polarização do estado, definido como:

$$P \equiv \frac{(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)^{1/2}}{S_0}. \tag{2.22}$$



Nessa segunda abordagem, podemos definir uma representação geométrica (figura 2.2) do espaço de estados de polarização, a esfera de Poincaré. Pontos na superfície da esfera representam estados totalmente polarizados (estados puros) e pontos no interior da esfera representam estados parcialmente polarizados (estados mistos). A origem representa o estado despolarizado.

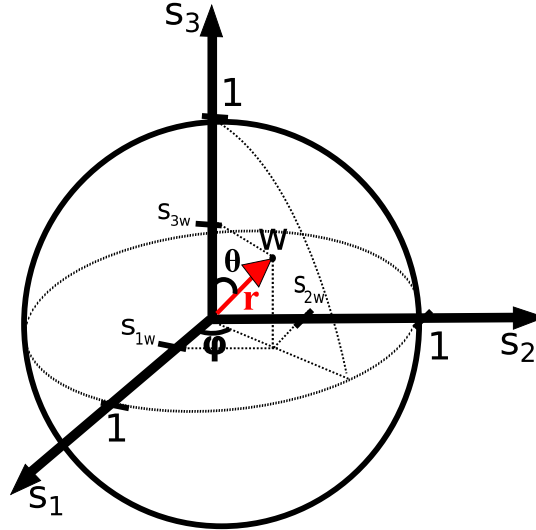


Figura 2.2: A esfera de Poincaré.

Outra característica interessante desses parâmetros vem das restrições impostas pelas desigualdades,

$$S_0 \geq 0, \quad S_0^2 \geq S_1^2 + S_2^2 + S_3^2, \quad (2.23)$$

que são equivalentes a condição de não-negatividade<sup>7</sup> de  $\Phi$ .

Por fim, uma última peculiaridade. Se associarmos à matriz de coerência  $\Phi$  um vetor coluna  $\phi$  na forma:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \Phi_{00} \\ \Phi_{01} \\ \Phi_{10} \\ \Phi_{11} \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

poderemos relacionar as componentes desse vetor com os parâmetros de Stokes  $\mathbf{S}$ , através da matriz  $\Lambda$ ,

$$\mathbf{S} = \Lambda\phi, \quad (2.25)$$

<sup>7</sup>A não-negatividade fica explícita no capítulo 3.

em que

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Uma vez que  $\Phi \equiv \langle \mathcal{E}(t) \otimes \mathcal{E}^\dagger(t) \rangle$  temos que,

$$\phi \equiv \langle \mathcal{E}(t) \otimes \mathcal{E}^*(t) \rangle. \quad (2.27)$$

e assim, a relação (2.25) fica:

$$S = \Lambda \langle \mathcal{E}(t) \otimes \mathcal{E}^*(t) \rangle. \quad (2.28)$$

## 2.2 Meios ópticos e transformações polarimétricas

Agora que já aprendemos como representar um estado de polarização de um feixe de luz, podemos buscar uma representação para a interação de um feixe de luz com um sistema óptico e entender como o estado de polarização do feixe é modificado. Vale observar que nessa abordagem apenas nos ateremos aos sistemas ópticos passivos<sup>8</sup> e ainda, que as transformações são todas lineares.

### 2.2.1 Espalhamento

Quando um feixe de luz incide num material ele pode ser **espalhado** pelas moléculas (e elétrons) do mesmo. Se o **espalhamento** ocorre, o estado de polarização do feixe de luz de saída **pode ser diferente** do estado de polarização do feixe de luz de entrada.

---

<sup>8</sup>Sistemas que não amplificam a intensidade da luz incidente.

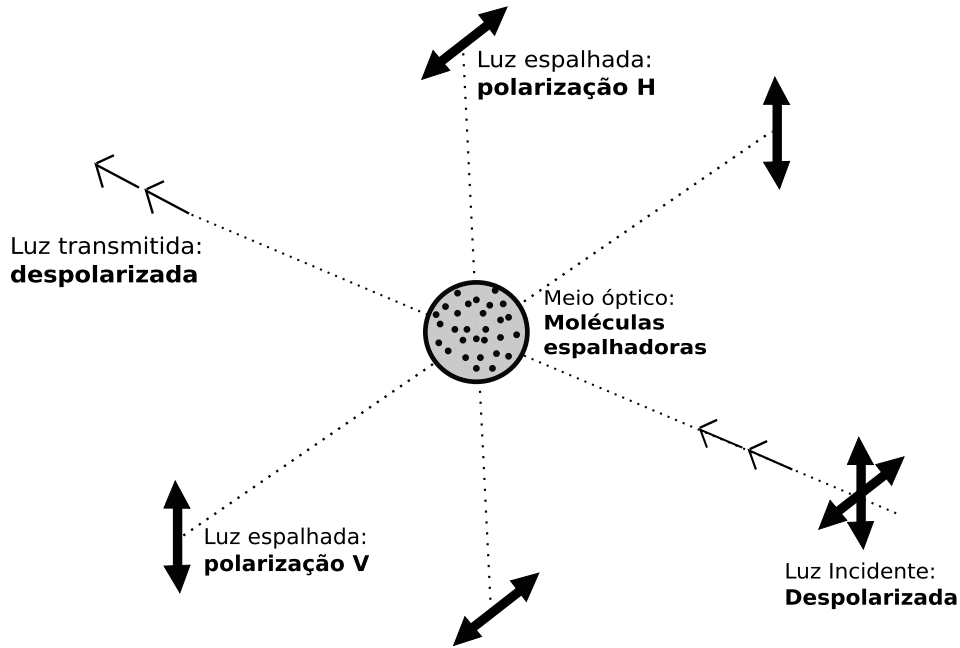


Figura 2.3: Espalhamento de um feixe de luz despolariada em um meio óptico.

## 2.2.2 Meios ópticos não-despolarizantes

Nessa secção apresentaremos o formalismo de Mueller-Jones, que está limitado a sistemas ópticos não-despolarizantes.

### 2.2.2.1 Matriz de Jones

A transformação linear que as componentes do campo elétrico sofrem devido à interação com o meio é representada pela matriz de Jones  $J$ , uma matriz complexa  $2 \times 2$ .

Quando o feixe de entrada é totalmente polarizado (representado pelo vetor de Jones  $\mathcal{E}(t)$ ) a transformação polarimétrica que o meio impõe a ele é dada por:

$$\mathcal{E}'(t) = J\mathcal{E}(t), \quad (2.29)$$

onde  $\mathcal{E}'(t)$  corresponde ao vetor de Jones do feixe emergente (figura 2.4).

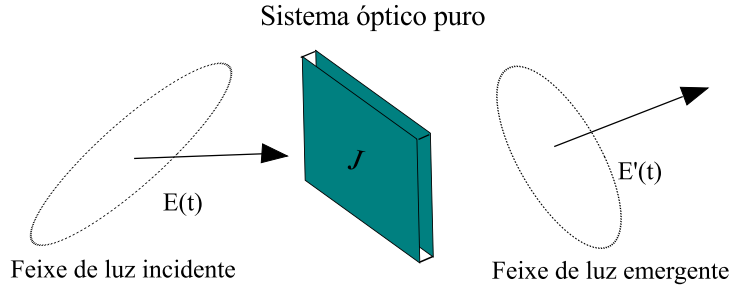


Figura 2.4: Interação polarimétrica num sistema óptico determinístico.

Quando o estado de polarização do feixe incidente é qualquer (representado pela matriz de coerência  $\Phi$ ), usando a relação existente entre a matriz de coerência e o vetor de Jones instantâneo (2.12) encontramos a representação para a transformação polarimétrica imposta pelo meio ( $J$ ) a esse feixe:

$$\begin{aligned}
 \Phi' &= \langle \mathcal{E}'(t) \otimes \mathcal{E}'^\dagger(t) \rangle \\
 &= \langle J\mathcal{E}(t) \otimes (J\mathcal{E}(t))^\dagger \rangle \\
 &= J \langle \mathcal{E}(t) \otimes \mathcal{E}^\dagger(t) \rangle J^\dagger \\
 &= J\Phi J^\dagger,
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

na segunda linha supomos que o sistema óptico  $J$  não muda no tempo.

Finalizando, uma característica dos meios ópticos não-despolarizantes é **não diminuir o grau de polarização** dos feixes de luz totalmente polarizados que incidem sobre eles. Feixes parcialmente polarizados podem ter seu grau de polarização aumentado ou diminuído por esses meios.

### 2.2.2.2 Matriz de Mueller-Jones

Em correspondência com a transformação  $\Phi \rightarrow \Phi'$ , os vetores de Stokes transformam-se na forma  $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}'$  em que,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}' &= \Lambda \langle \mathcal{E}'(t) \otimes \mathcal{E}'^*(t) \rangle \\
 &= \Lambda \langle (J\mathcal{E}(t)) \otimes (J\mathcal{E}^*(t)) \rangle \\
 &= \Lambda \langle (J \otimes J^*)(\mathcal{E}(t) \otimes \mathcal{E}^*(t)) \rangle \\
 &= \Lambda (J \otimes J^*) \langle \mathcal{E}(t) \otimes \mathcal{E}^*(t) \rangle \\
 &= \Lambda (J \otimes J^*) \Lambda^{-1} \mathbf{S} \\
 &= M_J \mathbf{S},
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

onde na primeira e na penúltima igualdade usamos a equação (2.25) e na última identificamos  $M_J \equiv \Lambda(J \otimes J^*)\Lambda^{-1}$  como a matriz de Mueller-Jones do meio.

Uma forma clara de ver que  $M_J \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  é calcular cada um de seus componentes. Sabemos que,

$$\begin{aligned}
S'_\mu &= Tr\{\sigma_{(\mu)}\Phi'\} \\
&= Tr\{\sigma_{(\mu)}J\Phi J^\dagger\} \\
&= Tr\{\sigma_{(\mu)}J\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^3 S_\nu\sigma_{(\nu)}J^\dagger\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^3 Tr\{\sigma_{(\mu)}J\sigma_{(\nu)}J^\dagger\}S_\nu \\
&= \sum_{\nu=0}^3 [M_J]_{\mu\nu}S_\nu,
\end{aligned} \tag{2.32}$$

onde

$$\begin{aligned}
[M_J]_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{2}Tr\{\sigma_{(\mu)}J\sigma_{(\nu)}J^\dagger\} \\
&= \frac{1}{2}\{\sigma_{(\mu)}, J\sigma_{(\nu)}J^\dagger\},
\end{aligned} \tag{2.33}$$

é um elemento da matriz  $M_J$  que é real pois,

$$\begin{aligned}
[M_J]_{\mu\nu}^* &= \frac{1}{2}\{\sigma_{(\mu)}, J\sigma_{(\nu)}J^\dagger\}^* \\
&= \frac{1}{2}\{J\sigma_{(\nu)}J^\dagger, \sigma_{(\mu)}\} \\
&= \frac{1}{2}Tr\{J\sigma_{(\nu)}J^\dagger\sigma_{(\mu)}\} \\
&= \frac{1}{2}Tr\{\sigma_{(\mu)}J\sigma_{(\nu)}J^\dagger\} \\
&= [M_J]_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{2.34}$$

onde foi usada a propriedade cíclica do traço:  $Tr\{AB\} = Tr\{BA\}$ .

Por fim, salientemos que a representação da transformação polarimétrica que um meio óptico não-despolarizante impõe a um feixe de luz via matriz de Mueller-Jones é equivalente a representação via matriz de Jones.

### 2.2.3 Meios ópticos despolarizantes

Nesta secção veremos a forma mais geral de representar a transformação polarimétrica que um meio óptico impõe a um feixe de luz, em seguida,

veremos dois exemplos a fim de evidenciar a natureza estatística da chamada matriz de Mueller.

### 2.2.3.1 Matriz de Mueller

Em geral, um sistema óptico pode exibir heterogeneidades espaciais que podem causar efeitos espalhadores que por sua vez podem produzir despolarização. Consequentemente, sistemas desse tipo não podem ser representados por matrizes de Jones (ou matrizes de Mueller-Jones). Como representar esses sistemas? Como representar a transformação polarimétrica que um **meio óptico qualquer** (não-despolarizante ou despolarizante) impõe a um feixe de luz com um estado de polarização qualquer?

A resposta é,

$$\mathbf{S}' \equiv M\mathbf{S}, \quad (2.35)$$

onde  $M$  é qualquer matriz de elementos reais  $4 \times 4$  que transforma um estado de polarização  $\mathbf{S}$  em outro estado de polarização  $\mathbf{S}'$ , e que tenha, como veremos mais adiante na secção 3.3.2, a matriz hermitiana  $H$  construída a partir dela, positiva semi-definida.

$M$  é chamada de **matriz de Mueller** e é a forma mais geral, no âmbito da polarização, de representar a transformação polarimétrica imposta por um meio óptico a um feixe de luz.

### 2.2.3.2 Meios ópticos não-despolarizantes em paralelo

Um tipo de meio óptico despolarizante é aquele composto por meios ópticos não-despolarizantes (cada componente tem uma matriz de Jones bem definida).

Quando um feixe de luz incide sobre esse meio ele é compartilhado entre os diferentes elementos e o feixe emergente é o resultado da soma dos feixes emergentes de cada parcela (veja figura 2.5). Em outras palavras, podemos entender esse meio óptico despolarizante como combinação paralela<sup>9</sup> de componentes determinísticos.

---

<sup>9</sup>Paralelas porque os sistemas ópticos compartilham o mesmo feixe de luz incidente simultaneamente.

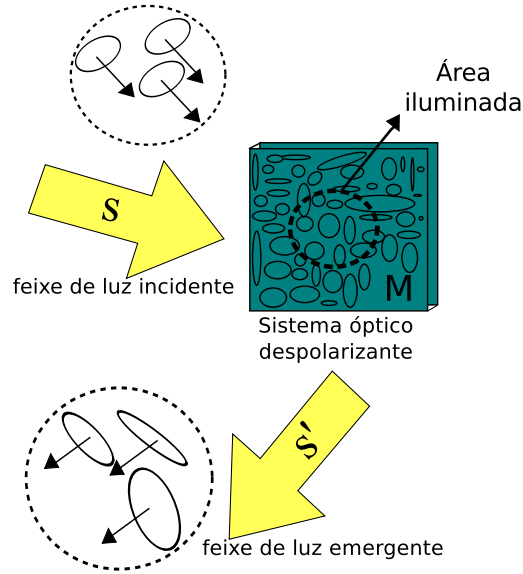


Figura 2.5: Transformação polarimétrica: Meio óptico despolarizante composto por meios ópticos não-despolarizantes.

Denotaremos por  $\mathcal{I}_n$  a intensidade da fração de luz que interage com o  $n$ -ésimo elemento do sistema. A razão entre  $\mathcal{I}_n$  e intensidade total de luz  $\mathcal{I}$  é dada pelo coeficiente  $p_n$ , tal que

$$p_n = \frac{\mathcal{I}_n}{\mathcal{I}}, \quad \sum_n p_n = 1, \quad (2.36)$$

com  $p_n \geq 0$ .

Agora denotaremos por  $J_n$  e  $M_{J_n}$ , as respectivas matrizes de Jones e de Mueller-Jones que representam o  $n$ -ésimo elemento que compõe o sistema. Assim, o vetor de Jones do feixe luminoso que emerge de cada elemento  $n$  é dado por:

$$\mathcal{E}'_n(t) = J_n[\sqrt{p_n}\mathcal{E}(t)], \quad (2.37)$$

em que  $\mathcal{E}(t)$  é o *vetor instantâneo de Jones* do feixe de luz incidente, e  $\mathcal{E}'_n(t)$  é o *vetor instantâneo de Jones* do feixe de luz emergente do  $n$ -ésimo

componente. O vetor de Stokes correspondente é dado por

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}'_n &= \Lambda \langle \mathcal{E}'_n(t) \otimes \mathcal{E}'_n{}^*(t) \rangle \\
&= \Lambda \langle (J_n \sqrt{p_n} \mathcal{E}(t)) \otimes (J_n \sqrt{p_n} \mathcal{E}^*(t)) \rangle \\
&= \Lambda \langle p_n (J_n \otimes J_n^*) (\mathcal{E}(t) \otimes \mathcal{E}^*(t)) \rangle \\
&= p_n \Lambda (J_n \otimes J_n^*) \langle \mathcal{E}(t) \otimes \mathcal{E}^*(t) \rangle \\
&= p_n [\Lambda (J_n \otimes J_n^*) \Lambda^{-1}] \mathbf{S} \\
&= p_n M_{J_n} \mathbf{S},
\end{aligned} \tag{2.38}$$

onde na penúltima igualdade usamos a equação (2.28) e na última identificamos  $M_{J_n} \equiv \Lambda (J_n \otimes J_n^*) \Lambda^{-1}$  como a matriz de Mueller-Jones o  $n$ -ésimo elemento determinístico do meio.

O estado de polarização do feixe resultante que emerge é obtido pela superposição incoerente<sup>10</sup> dos feixes emergentes de cada elemento, tal que o vetor de Stokes resultante é dado por,

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}' &= \sum_n \mathbf{S}'_n \\
&= \sum_n p_n M_{J_n} \mathbf{S} \\
&= M \mathbf{S},
\end{aligned} \tag{2.39}$$

onde  $M = \sum_n p_n M_{J_n}$  é a dita matriz de Mueller do meio.

### 2.2.3.3 Ensemble de meios ópticos não-despolarizantes

Na secção 2.2.3.2, obtivemos a matriz de Mueller do meio despolarizante considerando que ele era composto por um conjunto paralelo de elementos. Obteríamos o mesmo resultado se considerássemos esse meio óptico como um *ensemble de meios ópticos não-despolarizantes*, tal que cada realização  $n$  do ensemble, é caracterizada por uma matriz de Jones  $J_n$  (ou matriz de Mueller-Jones  $M_J$ ) bem definida, que ocorre com probabilidade  $p_n$ . Assim, a matriz de Mueller do meio será a média desse ensemble.

Como a média num *ensemble* é dada por:

$$\langle x \rangle_e \equiv \sum_n p_n x_n, \tag{2.40a}$$

$$\sum_n p_n = 1, \text{ com } p_n \geq 0, \tag{2.40b}$$

---

<sup>10</sup>Superposição de ondas eletromagnéticas num ponto do espaço que têm campos elétricos oscilando sem correlação temporal.



teremos que a matriz de Mueller do meio será:

$$M \equiv \langle M_J \rangle_e = \Lambda \langle J_n \otimes J_n^* \rangle_e \Lambda^{-1}. \quad (2.41)$$

O exemplo das secções 2.2.3.2 e 2.2.3.3 serve de base para evidenciar a interpretação estatística que podemos dar a matriz de Mueller. Imaginar um meio óptico despolarizante como uma soma convexa de meios ópticos não-despolarizantes será útil para entender as implicações da despolarização e caracterizar o conjunto dos meios ópticos.

# Capítulo 3

## Decomposição da matriz de Mueller

Neste capítulo apresentaremos uma síntese do trabalho exposto em [13]. Faremos uma exposição algébrica do formalismo de Mueller-Stokes. Para um estudo mais aprofundado veja [14], [15], [16] e [17].

Na primeira parte faremos uma revisão de algumas noções básicas de álgebra linear. Na segunda, veremos uma possível decomposição da matriz de Mueller e da matriz de coerência.

Os índices latinos  $i, j, l, \dots$ , que assumirão os valores 0 ou 1, serão usados, predominantemente, para referenciar elementos de matrizes  $2 \times 2$ . Já os índices gregos  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , usaremos para referenciar as componentes de vetores de 4 entradas ou elementos de matrizes  $4 \times 4$  e eles poderão assumir os valores 0, 1, 2 ou 3. Quando os índices estiverem entre parêntesis, *i.e.*,  $\sigma_{(\alpha)}$ , queremos indicar que esse é um elemento de um conjunto (no exemplo dado queremos dizer que  $\sigma_{(\alpha)} \in \{\sigma_{(0)}, \sigma_{(1)}, \sigma_{(2)}, \sigma_{(3)}\}$ ). Quando utilizarmos esses índices para outros propósitos que não os mencionados acima deixaremos explícito.

### 3.1 Bases matriciais

Nesta secção formalizaremos duas maneiras de representar matrizes complexas  $2 \times 2$  e também a relação que existe entre as representações.

### 3.1.1 Base canônica

Seja  $A \in \mathbf{C}^{2 \times 2}$ . Em termos de seus elementos  $[A]_{ij} = a_{ij}$ , a matriz  $A$  fica,

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

Existe uma correspondência bijetiva [18] entre uma matriz complexa  $2 \times 2$  e um vetor complexo de quatro componentes  $\mathbf{a} \in \mathbf{C}^4$ , fazendo

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

e

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{10} \\ a_{11} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Essa regra é bem simples e pode ser estendida para matrizes  $n \times n$  definindo a relação,

$$a_{ij} \equiv a_{ni+j}, \quad (3.4)$$

para  $i, j = 0, \dots, n-1$ .

Quando um vetor  $\mathbf{a} \in \mathbf{C}^4$  está na forma (3.3), estamos implicitamente assumindo que suas componentes  $a_\mu \in \mathbf{C}$ , estão sendo expressas na base canônica  $\{e_{(\mu)}\}$  de  $\mathbf{C}^4$ ,

$$\mathbf{a} = a_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Analogamente, quando escrevemos a matriz  $A \in \mathbf{C}^{2 \times 2}$  na forma (3.2), também fica implícito que ela está escrita na base canônica.

$$\begin{aligned} A &= a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\equiv \sum_{\mu=0}^3 a_\mu \epsilon_{(\mu)}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

com  $\epsilon_{(\mu)} \in \mathbf{C}^{2 \times 2}$  igual a:

$$\epsilon_{(0)} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{(1)} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{(2)} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{(3)} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Assim, os números  $\{a_\mu\}$ , são as componentes da matriz  $A$  na base  $\{\epsilon_{(\mu)}\}$ .

Vamos introduzir agora uma norma com respeito ao espaço vetorial  $\mathbf{C}^{n \times n}$ . Primeiro definiremos um produto escalar entre duas matrizes complexas  $n \times n$  quaisquer  $Q$  e  $B$ , como:

$$\{Q, B\} = Tr\{Q^\dagger B\} = \sum_{i,j=0}^n q_{ij}^* b_{ij}, \quad (3.8)$$

$Q^\dagger$  denota o conjugado hermitiano de  $Q$ . Além disso, uma vez que  $\{Q, B\}^* = \sum_{i,j=0}^n (q_{ij}^* b_{ij})^* = \sum_{i,j=0}^n q_{ij} b_{ij}^* = Tr\{B^\dagger Q\}$  temos que,  $\{Q, B\}^* = \{B, Q\}$ . Assim, a norma fica:

$$\{Q, Q\} = Tr\{Q^\dagger Q\} = \sum_{i,j=0}^n q_{ij}^* q_{ij} = \sum_{i=0}^n |q_{ii}|^2. \quad (3.9)$$

Através do cálculo direto vemos que a base  $\{\epsilon_{(\mu)}\}$  é ortonormal com respeito ao produto escalar definido na equação (3.8):

$$\begin{aligned} \{\epsilon_{(\mu)}, \epsilon_{(\nu)}\} &= Tr\{\epsilon_{(\mu)}^\dagger \epsilon_{(\nu)}\} \\ &= \delta_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

em que  $\delta_{\mu\nu}$  é o delta de Kronecker.

Utilizando a equação (3.8), também fica fácil calcular as componentes da matriz  $A$  com respeito à base  $\{\epsilon_{(\mu)}\}$ ,

$$\begin{aligned} \{\epsilon_{(\mu)}, A\} &= \{\epsilon_{(\mu)}, \sum_{\nu=0}^3 a_\nu \epsilon_{(\nu)}\} \\ &= \sum_{\nu=0}^3 a_\nu \{\epsilon_{(\mu)}, \epsilon_{(\nu)}\} \\ &= a_\mu \in \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

### 3.1.2 Base de Pauli

Outra base que usaremos ao longo do capítulo é chamada base de Pauli, apresentada na equação (2.13).

Aplicando o produto escalar definido em (3.8) temos que

$$\begin{aligned} \{\sigma_{(\mu)}, \sigma_{(\nu)}\} &= Tr\{\sigma_{(\mu)}^\dagger \sigma_{(\nu)}\} \\ &= 2\delta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

O conjunto das matrizes de Pauli também é uma base para  $\mathbf{C}^{2 \times 2}$ , e podemos relacioná-la com a base  $\{\epsilon_{(\mu)}\}$ . Para isso calculemos as componentes  $[\sigma_{(\alpha)}]_\mu$  da matriz  $\sigma_{(\alpha)}$  com respeito à base  $\{\epsilon_{(\mu)}\}$ .

$$\begin{aligned} [\sigma_{(\alpha)}]_\mu &= \{\epsilon_{(\mu)}, \sigma_{(\alpha)}\} \\ &= Tr\{\epsilon_{(\mu)}^\dagger \sigma_{(\alpha)}\} \\ &= V_{\mu\alpha}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

na última linha definimos uma matriz de transformação  $4 \times 4$   $V$ , em que  $V_{\mu\alpha} \equiv Tr\{\epsilon_{(\mu)}^\dagger \sigma_{(\alpha)}\}$ . Em forma matricial,

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Lambda^\dagger. \quad (3.14)$$

onde  $\Lambda$  é a mesma matriz definida na equação (2.26) do capítulo 2. Vale observar que as colunas de  $V$  são vetores ortogonais entre si dois a dois.

## 3.2 Da matriz de Mueller para matriz hermitiana $H$

A matriz de Mueller  $M$  não possui, em geral, nenhuma propriedade de simetria interessante. Entretanto, é possível extrair dela (com o auxílio de uma matriz intermediária  $\mathcal{M}$ ) uma matriz hermitiana  $H$ .

### 3.2.1 A matriz $\mathcal{M}$

Vimos nas equações (2.28) e (2.25) que  $\phi \equiv \langle \mathcal{E}(t) \otimes \mathcal{E}^*(t) \rangle$  e  $\mathbf{S} = \Lambda \langle \mathcal{E}(t) \otimes \mathcal{E}^*(t) \rangle$  respectivamente. Também vimos, na equação (2.35), que  $\mathbf{S}' \equiv M\mathbf{S}$ .

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}' &\equiv M\mathbf{S} \\ &= M\Lambda\langle\mathcal{E}(t) \otimes \mathcal{E}^*(t)\rangle \\ &= M\Lambda\phi. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Como

$$\begin{aligned} \mathbf{S}' &= \Lambda\langle\mathcal{E}'(t) \otimes \mathcal{E}'^*(t)\rangle \\ &= \Lambda\phi', \end{aligned} \quad (3.16)$$

temos assim que

$$\Lambda\phi' = M\Lambda\phi. \quad (3.17)$$

Multiplicando ambos os lados por  $\Lambda^{-1}$  temos,

$$\Lambda^{-1}\Lambda\phi' = \phi' = \Lambda^{-1}M\Lambda\phi. \quad (3.18)$$

Podemos definir  $\mathcal{M} \in \mathbf{C}^{4 \times 4}$  tal que,

$$\mathcal{M} \equiv \Lambda^{-1}M\Lambda. \quad (3.19)$$

Ressaltamos que, assim como a matriz de Mueller  $M$ , a matriz  $\mathcal{M}$  contém toda informação do espalhamento.

Invertendo a equação (3.19) temos,

$$M = \Lambda\mathcal{M}\Lambda^{-1}. \quad (3.20)$$

Uma última observação, juntando as equações (3.19), (3.18) e (3.20) temos que,

$$\phi' = \mathcal{M}\phi, \quad (3.21a)$$

$$\phi' = \Lambda^{-1}M\Lambda\phi = \frac{1}{2}\Lambda^\dagger M\Lambda\phi, \quad (3.21b)$$

onde usamos que  $\Lambda^{-1} = \frac{1}{2}\Lambda^\dagger$ .

### 3.2.2 A matriz hermitiana $H$

A matriz  $\mathcal{M}$  não necessariamente é hermitiana, pois

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^\dagger &= \frac{1}{2}(\Lambda^\dagger M\Lambda)^\dagger \\ &= \frac{1}{2}\Lambda^\dagger M^\dagger \Lambda, \end{aligned} \quad (3.22)$$

e em geral,  $M^\dagger \neq M$ .

Mas podemos definir uma matriz hermitiana  $\mathcal{H}$  a partir de  $\mathcal{M}$ , da seguinte forma:

$$\mathcal{H} \equiv \text{Per}[\mathcal{M}], \quad (3.23)$$

onde  $\text{Per}[\cdot]^1$  é um operador linear de remodelamento.

Para entendermos a ação desse operador é conveniente escrever os elementos da matriz  $\mathcal{M}$  em termos de 4 índices:

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathcal{M}_{mnpq}, \quad (3.25)$$

onde  $\alpha = 2m + n$  e  $\beta = 2p + q$ .

Assim,

$$\mathcal{H} = \text{Per}[\mathcal{M}] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{H}_{npmq} = \mathcal{M}_{nmpq}, \quad (3.26)$$

onde os índices  $p$  e  $m$  foram trocados. Vale observar que o carácter hermitiano de  $\mathcal{H}$  ainda não é evidente.

Com  $\mathcal{H}$  definido dessa forma podemos escrever  $\mathcal{M}$  da seguinte maneira:

$$\mathcal{M} = \sum_{\mu, \nu=0}^3 \mathcal{H}_{\nu\mu} (\epsilon_{(\mu)} \otimes \epsilon_{(\nu)}), \quad (3.27)$$

em que  $\{\epsilon_{(\mu)} \otimes \epsilon_{(\nu)}\}$  é uma base para  $\mathbb{C}^{4 \times 4}$ .

Sabidas essas informações, calculemos um elemento  $M_{\mu\nu}$  da matriz de

---

1

$$\text{Per} \left[ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ j & k & l & m \\ n & o & p & q \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a & b & e & f \\ c & d & g & h \\ j & k & n & o \\ l & m & p & q \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Mueller. Pela equação (3.20) temos que  $M = \Lambda \mathcal{M} \Lambda^{-1}$ , assim,

$$\begin{aligned}
 M_{\mu\nu} &= [\Lambda \mathcal{M} \Lambda^{-1}]_{\mu\nu} \\
 &= \frac{1}{2} [\Lambda \mathcal{M} \Lambda^\dagger]_{\mu\nu} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=0}^3 \Lambda_{\mu\alpha} \mathcal{M}_{\alpha\beta} \Lambda_{\beta\nu}^\dagger \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=0}^3 V^*_{\alpha\mu} \mathcal{M}_{\alpha\beta} V_{\beta\nu} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=0}^3 [\sigma^*(\mu)]_\alpha \mathcal{M}_{\alpha\beta} [\sigma(\nu)]_\beta \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{m, n, p, q=0}^1 [\sigma^*(\mu)]_{mn} \mathcal{M}_{mnpq} [\sigma(\nu)]_{pq} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{m, n, p, q=0}^1 [\sigma^*(\mu)]_{mn} \mathcal{H}_{nmpq} [\sigma(\nu)]_{pq},
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

onde usamos que  $\alpha = 2m + n$  e  $\beta = 2p + q$  e também que  $\mathcal{H}_{nmpq} = \mathcal{M}_{mnpq}$ .

Usando a relação de completeza,

$$\sum_{\mu=0}^3 [\sigma^*(\mu)]_{ij} [\sigma(\mu)]_{kl} = 2\delta_{ik}\delta_{jl}, \tag{3.29}$$

podemos inferir que,

$$\begin{aligned}
 \sum_{\mu, \nu=0}^3 M_{\mu\nu} [\sigma^*(\mu)]_{ki} [\sigma(\nu)]_{jl} &= \frac{1}{2} \sum_{m, n, p, q=0}^1 \sum_{\mu, \nu=0}^3 \mathcal{H}_{nmpq} [\sigma^*(\mu)]_{ki} [\sigma(\mu)]_{mn} [\sigma^*(\nu)]_{pq} [\sigma(\nu)]_{jl} \\
 &= 2 \sum_{m, n, p, q=0}^1 \mathcal{H}_{nmpq} \delta_{mk} \delta_{ni} \delta_{pj} \delta_{ql} \\
 &= 2\mathcal{H}_{ijkl}.
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Como,

$$\begin{aligned}
 [\sigma^*(\mu)]_{ki} [\sigma(\nu)]_{lj} &= [\sigma(\mu)]_{ik} [\sigma^*(\nu)]_{jl} \\
 &= (\sigma(\mu) \otimes \sigma^*(\nu))_{ijkl},
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

temos portanto que,

$$\mathcal{H}_{ijkl} = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=0}^3 M_{\mu\nu} (\sigma(\mu) \otimes \sigma^*(\nu))_{ijkl}. \tag{3.32}$$



Usando as relações  $\gamma = 2i + j$  e  $\tau = 2k + l$ , obtemos,

$$\mathcal{H}_{\gamma\tau} = \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu=0}^3 M_{\mu\nu} (\sigma_{(\mu)} \otimes \sigma_{(\nu)}^*)_{\gamma\tau}. \quad (3.33)$$

Em forma matricial temos,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu=0}^3 M_{\mu\nu} (\sigma_{(\mu)} \otimes \sigma_{(\nu)}^*). \quad (3.34)$$

Ressaltamos que essa relação é válida para qualquer meio óptico, não-despolarizante ou despolarizante.

Agora, o carácter hermitiano de  $\mathcal{H}$  fica evidente pois  $M \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  e  $\{\sigma_{(\mu)} \otimes \sigma_{(\nu)}^*\}$  forma uma base hermitiana para  $\mathbb{C}^{4 \times 4}$ .

A relação entre  $\mathcal{H}$  e  $M$  é linear porém complicada. Podemos escrever a relação entre as componentes de  $\mathcal{H}$  em termos das componentes de  $M$  explicitamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{00} &= \frac{1}{2}(M_{00} + M_{01} + M_{10} + M_{11}), \\ \mathcal{H}_{01} &= \frac{1}{2}(M_{02} + iM_{03} + M_{12} + iM_{13}), \\ \mathcal{H}_{02} &= \frac{1}{2}(M_{20} + M_{21} - iM_{30} - iM_{31}), \\ \mathcal{H}_{03} &= \frac{1}{2}(M_{22} + iM_{23} - iM_{32} + M_{33}), \end{aligned} \quad (3.35a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{10} &= \frac{1}{2}(M_{02} - iM_{03} + M_{12} - iM_{13}), \\ \mathcal{H}_{11} &= \frac{1}{2}(M_{00} - M_{01} + M_{10} - M_{11}), \\ \mathcal{H}_{12} &= \frac{1}{2}(M_{22} - iM_{23} - iM_{32} - M_{33}), \\ \mathcal{H}_{13} &= \frac{1}{2}(M_{20} - M_{21} - iM_{30} + iM_{31}), \end{aligned} \quad (3.35b)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{20} &= \frac{1}{2}(M_{20} + M_{21} + iM_{30} + iM_{31}), \\
\mathcal{H}_{21} &= \frac{1}{2}(M_{22} + iM_{23} + iM_{32} - M_{33}), \\
\mathcal{H}_{22} &= \frac{1}{2}(M_{00} + M_{01} - M_{10} - M_{11}), \\
\mathcal{H}_{23} &= \frac{1}{2}(M_{02} - M_{03} + iM_{12} - iM_{13}),
\end{aligned} \tag{3.35c}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{30} &= \frac{1}{2}(M_{22} - iM_{23} + iM_{32} + M_{33}), \\
\mathcal{H}_{31} &= \frac{1}{2}(M_{20} - M_{21} + iM_{30} - iM_{31}), \\
\mathcal{H}_{32} &= \frac{1}{2}(M_{02} - iM_{03} - M_{12} + iM_{13}), \\
\mathcal{H}_{33} &= \frac{1}{2}(M_{00} - M_{01} - M_{10} + M_{11}),
\end{aligned} \tag{3.35d}$$

Das relações acima vemos que

$$Tr\{\mathcal{H}\} = 2M_{00}. \tag{3.36}$$

É comum, por uma questão de conveniência, redefinir  $\mathcal{H}$  como

$$H \equiv \frac{1}{2M_{00}}\mathcal{H} = \frac{1}{4M_{00}} \sum_{\mu, \nu=0}^3 M_{\mu\nu}(\sigma_{(\mu)} \otimes \sigma_{(\nu)}^*). \tag{3.37}$$

Assim, segue que  $Tr\{H\} = 1$  sempre.

Por fim, a equação (3.27) fica:

$$\mathcal{M} = 2M_{00} \sum_{\mu, \nu=0}^3 H_{\nu\mu}(\epsilon_{(\mu)} \otimes \epsilon_{(\nu)}). \tag{3.38}$$

### 3.3 Decomposição em matrizes de Mueller-Jones

Nesta secção mostraremos que uma matriz de Mueller  $M$  pode ser escrita como uma soma convexa de pelo menos 4 matrizes de Mueller-Jones.

Exploraremos hermiticidade da matriz  $H$  e da relação estabelecida na secção 3.2.2 entre  $M$  e  $H$ .

### 3.3.1 Decomposição espectral de $H$

Uma vez que  $H$  é hermitiana, pode ser diagonalizada. Sejam então  $\{\mathbf{u}_{(0)}, \mathbf{u}_{(1)}, \mathbf{u}_{(2)}, \mathbf{u}_{(3)}\}$  os quatro autovetores de  $H$  associados com os quatro autovalores reais  $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ , respectivamente. Assim,

$$H\mathbf{u}_{(\alpha)} = \lambda_\alpha \mathbf{u}_{(\alpha)} \quad \alpha = 0, 1, 2 \text{ e } 3. \quad (3.39)$$

Como é sempre possível construir uma base ortonormal para uma matriz hermitiana, assumiremos que

$$\{\mathbf{u}_{(\alpha)}, \mathbf{u}_{(\beta)}\} = \sum_{\mu=0}^3 [\mathbf{u}_{(\alpha)}^*]_\mu [\mathbf{u}_{(\beta)}]_\mu = \delta_{\alpha\beta}. \quad (3.40)$$

Pelo teorema espectral podemos escrever  $H$  na forma:

$$H = \sum_{\mu=0}^3 \lambda_\mu \Omega_{(\mu)}, \quad (3.41)$$

onde definimos os projetores<sup>2</sup>  $\Omega_{(\mu)} \equiv \mathbf{u}_{(\mu)} \mathbf{u}_{(\mu)}^\dagger$ .

### 3.3.2 Da matriz $M$ para matrizes $M_J$

Chegaremos agora no resultado principal do capítulo. Uma vez que,

$$\begin{aligned} M &= \Lambda \mathcal{M} \Lambda^{-1} \\ &= 2M_{00} \sum_{\mu, \nu=0}^3 H_{\nu\mu} \Lambda(\epsilon_{(\mu)} \otimes \epsilon_{(\nu)}) \Lambda^{-1} \\ &= M_{00} \sum_{\mu, \nu=0}^3 H_{\nu\mu} \Gamma_{(\nu\mu)}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

onde usamos a equação (3.38) e definimos as matrizes

$$\Gamma_{(\nu\mu)} \equiv 2\Lambda(\epsilon_{(\mu)} \otimes \epsilon_{(\nu)}) \Lambda^{-1} = \Lambda(\epsilon_{(\mu)} \otimes \epsilon_{(\nu)}) \Lambda^\dagger. \quad (3.43)$$

As matrizes  $\Gamma_{(\nu\mu)}$  formam uma base ortogonal não-hermitiana listada na tabela 3.1.

---

<sup>2</sup>Por isso,

$$\{\Omega_{(\alpha)}, \Omega_{(\beta)}\} = \delta_{\alpha\beta}.$$

	0	1	2	3
0	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ i & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & i & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ i & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -i & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & -i & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & -1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & -i & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -i & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & -1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

 Tabela 3.1: A base  $\Gamma_{(\nu\mu)}$ .

Lembrando ainda que

$$H_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=0}^3 \lambda_{\alpha} [\Omega_{(\alpha)}]_{\mu\nu}, \quad (3.44)$$

vemos que

$$\begin{aligned} M &= M_{00} \sum_{\alpha,\mu,\nu=0}^3 \lambda_{\alpha} [\Omega_{(\alpha)}]_{\mu\nu} \Gamma_{(\nu\mu)} \\ &= \sum_{\alpha=0}^3 \lambda_{\alpha} M_{J(\alpha)}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde definimos **quatro matrizes de Mueller-Jones**  $M_{J(\alpha)}$  como:

$$M_{J(\alpha)} = M_{00} \sum_{\mu,\nu=0}^3 [\Omega_{(\alpha)}]_{\mu\nu} \Gamma_{(\nu\mu)}. \quad (3.46)$$

Essa decomposição é o principal resultado do capítulo. Vale ressaltar que  $\lambda_{\alpha} \geq 0$  com  $\alpha = 0, 1, 2$  e  $3$ , é condição necessária e suficiente para que a matriz de Mueller  $M$  represente um sistema físico realizável [19] [20], e ainda, como  $Tr\{H\} = 1 \Rightarrow \sum_{\alpha=0}^3 \lambda_{\alpha} = 1$ .

As matrizes  $\{M_{J(\alpha)}\}$  são reais, pois

$$\begin{aligned}
 M_{J(\alpha)}^* &= M_{00} \sum_{\mu, \nu=0}^3 [\Omega_{(\alpha)}^*]_{\mu\nu} \Gamma_{(\nu\mu)}^* \\
 &= M_{00} \sum_{\mu, \nu=0}^3 [\Omega_{(\alpha)}]_{\nu\mu} \Gamma_{(\mu\nu)} \\
 &= M_{J(\alpha)},
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

uma vez que  $\Omega_{(\alpha)}$  é hermitiana<sup>3</sup> e  $\Gamma_{(\nu\mu)}^* = \Gamma_{(\mu\nu)}$ .

Sabe-se que  $Tr\{M^\dagger M\} = 4M_{00}^2$  é condição necessária e suficiente [21][22] para que uma matriz de Mueller  $M$  seja também matriz de Mueller-Jones. Mostraremos, então, que as matrizes  $\{M_{J(\alpha)}\}$  são realmente matrizes de Mueller-Jones. Para isso, precisamos de alguns resultados. O primeiro é

$$[\Gamma_{(\nu\mu)}]_{00} = \delta_{\nu\mu}, \tag{3.48}$$

o que pode ser imediatamente verificado na tabela 3.1.

O segundo diz respeito à ortogonalidade das matrizes  $\{\Gamma_{(\nu\mu)}\}$ , que também pode ser verificada usando a tabela 3.1.

$$\{\Gamma_{(\nu\mu)}, \Gamma_{(\gamma\tau)}\} = 4\delta_{\nu\gamma}\delta_{\mu\tau}. \tag{3.49}$$

---

3

$$\begin{aligned}
 \Omega_{(\mu)} &\equiv \mathbf{u}_{(\mu)} \mathbf{u}_{(\mu)}^\dagger \\
 &= \mathbf{u}_{(\mu)}^\dagger \mathbf{u}_{(\mu)} \\
 &= \Omega_{(\mu)}^\dagger.
 \end{aligned}$$

O terceiro vem das equações (3.46) e (3.48),

$$\begin{aligned}
 [M_{J(\alpha)}]_{00} &= M_{00} \sum_{\mu, \nu=0}^3 [\Omega_{(\alpha)}]_{\mu\nu} [\Gamma_{(\nu\mu)}]_{00} \\
 &= M_{00} \sum_{\mu, \nu=0}^3 [\Omega_{(\alpha)}]_{\mu\nu} \delta_{\nu\mu} \\
 &= M_{00} \sum_{\mu=0}^3 [\Omega_{(\alpha)}]_{\mu\mu} \\
 &= M_{00} \sum_{\mu=0}^3 U_{\mu\alpha} U_{\alpha\mu}^\dagger \\
 &= M_{00} \sum_{\mu=0}^3 U_{\mu\alpha} U_{\mu\alpha}^* \\
 &= M_{00}.
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

O quarto, diz respeito a ortogonalidade das matrizes  $\{M_{J(\alpha)}\}$ :

$$\begin{aligned}
 \{M_{J(\alpha)}, M_{J(\beta)}\} &= Tr\{M_{J(\alpha)}^\dagger M_{J(\beta)}\} \\
 &= M_{00}^2 \sum_{\mu, \nu, \gamma, \tau=0}^3 [\Omega_{(\alpha)}]_{\mu\nu} [\Omega_{(\beta)}]_{\gamma\tau} Tr\{\Gamma_{(\nu\mu)} \Gamma_{(\gamma\tau)}\} \\
 &= M_{00}^2 \sum_{\mu, \nu, \gamma, \tau=0}^3 [\Omega_{(\alpha)}]_{\mu\nu} [\Omega_{(\beta)}]_{\gamma\tau} \delta_{\mu\gamma} \delta_{\nu\tau} \\
 &= M_{00}^2 \sum_{\mu, \nu=0}^3 [\Omega_{(\alpha)}^\dagger]_{\nu\mu} [\Omega_{(\beta)}]_{\mu\nu} \\
 &= M_{00}^2 Tr\{\Omega_{(\alpha)}^\dagger, \Omega_{(\beta)}\} \\
 &= M_{00}^2 \{\Omega_{(\alpha)}, \Omega_{(\beta)}\} \\
 &= 4M_{00}^2 \delta_{\alpha\beta},
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

onde exploramos o fato das matrizes  $\{\Omega_{(\alpha)}\}$  serem hermitianas e ortogonais entre si.

Por isso, em nosso caso,

$$Tr\{M_{J(\alpha)}^\dagger M_{J(\alpha)}\} = 4M_{00}^2 = 4[M_{J(\alpha)}]_{00}^2, \tag{3.52}$$

e com isso, vemos que  $\{M_{J(\alpha)}\}$  são matrizes de Mueller-Jones genuínas.

### 3.4 Decomposição da matriz de coerência

Na secção anterior aprendemos a decompor a matriz de Mueller  $M$ , que-remos agora ver se é possível uma decomposição da matriz de coerência  $\Phi'$ . Com essa finalidade, vejamos uma nova forma de representação para matrizes  $\{M_{J(\alpha)}\}$ .

$$\begin{aligned}
 M_{J(\alpha)} &= \sum_{\mu, \nu=0}^3 [\Omega(\alpha)]_{\mu\nu} \Gamma(\nu\mu) \\
 &= 2 \sum_{\alpha, \mu, \nu=0}^3 [\mathbf{u}(\alpha)]_{\mu} [\mathbf{u}^*(\alpha)]_{\nu} \Lambda(\epsilon(\mu) \otimes \epsilon^*(\nu)) \Lambda^{-1} \\
 &= 2 \sum_{\alpha, \mu, \nu=0}^3 \Lambda([\mathbf{u}(\alpha)]_{\mu} \epsilon(\mu) \otimes [\mathbf{u}^*(\alpha)]_{\nu} \epsilon^*(\nu)) \Lambda^{-1} \\
 &= \sum_{\alpha=0}^3 \Lambda(J(\alpha) \otimes J^*(\alpha)) \Lambda^{-1},
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

onde definimos quatro matrizes  $2 \times 2$   $J(\alpha)$ , como matrizes de Jones, dadas por:

$$J(\alpha) \equiv \sqrt{2} \sum_{\mu=0}^3 [\mathbf{u}(\alpha)]_{\mu} \epsilon(\mu), \tag{3.54}$$

pois dessa maneira as matrizes de Mueller-Jones  $\{M_{J(\alpha)}\}$  assumem a forma apresentada na equação (2.31).

Como vimos,  $M = \sum_{\alpha=0}^3 \lambda_{\alpha} M_{J(\alpha)}$  e  $M_{J(\alpha)} = \sum_{\alpha=0}^3 \Lambda(J(\alpha) \otimes J^*(\alpha)) \Lambda^{-1}$ , portanto, podemos inferir que

$$M = \sum_{\alpha=0}^3 \lambda_{\alpha} \Lambda(J(\alpha) \otimes J^*(\alpha)) \Lambda^{-1}. \tag{3.55}$$

Uma vez que  $\phi' = \Lambda^{-1} M \Lambda \phi$ , como estabelecido na equação (3.21b) temos que,

$$\begin{aligned}
 \phi' &= \sum_{\alpha=0}^3 \lambda_{\alpha} \Lambda^{-1} \Lambda(J(\alpha) \otimes J^*(\alpha)) \Lambda^{-1} \Lambda \phi \\
 &= \sum_{\alpha=0}^3 \lambda_{\alpha} (J(\alpha) \otimes J^*(\alpha)) \phi,
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

portanto, uma componente  $\phi'_\tau$  de  $\phi'$  é dada por:

$$\phi'_\tau = \sum_{\alpha,\beta=0}^3 \lambda_\alpha [(J_{(\alpha)} \otimes J_{(\alpha)}^*)]_{\tau\beta} \phi_\beta, \quad (3.57)$$

fazendo  $\tau = 2i + j$  e  $\beta = 2k + l$  podemos usar a relação entre  $\phi$  e  $\Phi$  estabelecida na equação (2.24). Assim,

$$\begin{aligned} \Phi'_{ij} &= \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{i,j,k,l=0}^1 \lambda_\alpha [(J_{(\alpha)} \otimes J_{(\alpha)}^*)]_{ijkl} \Phi_{kl} \\ &= \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{i,j,k,l=0}^1 \lambda_\alpha [J_{(\alpha)}]_{ik} [J_{(\alpha)}^*]_{jl} \Phi_{kl} \\ &= \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{i,j,k,l=0}^1 \lambda_\alpha [J_{(\alpha)}]_{ik} [J_{(\alpha)}^\dagger]_{lj} \Phi_{kl} \\ &= \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{i,j,k,l=0}^1 \lambda_\alpha [J_{(\alpha)}]_{ik} \Phi_{kl} [J_{(\alpha)}^\dagger]_{lj}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Em forma matricial,

$$\Phi' = \sum_{\alpha=0}^3 \lambda_\alpha J_{(\alpha)} \Phi J_{(\alpha)}^\dagger. \quad (3.59)$$

Dessa forma, também, encontramos uma decomposição para  $\Phi'$ .

Vale observar que se  $\lambda_\alpha \geq 0$ , poderemos escrever

$$\begin{aligned} \Phi' &= \sum_{\alpha=0}^3 \lambda_\alpha J_{(\alpha)} \Phi J_{(\alpha)}^\dagger \\ &= \sum_{\alpha=0}^3 (\sqrt{\lambda_\alpha} J_{(\alpha)}) \Phi (\sqrt{\lambda_\alpha} J_{(\alpha)}^\dagger) \\ &= \sum_{\alpha=0}^3 A_{(\alpha)} \Phi A_{(\alpha)}^\dagger, \end{aligned} \quad (3.60)$$

onde definimos  $A_{(\alpha)} = \sqrt{\lambda_\alpha} J_{(\alpha)}$ . Na óptica quântica e informação quântica essa decomposição é conhecida como “Decomposição de Kraus” [23].



# Capítulo 4

## Funções do espectro

Vimos que num processo onde um feixe de luz totalmente polarizado incide sobre um dado sistema óptico e é espalhado, o feixe resultante pode estar totalmente polarizado, se o meio óptico for do tipo determinístico (representado por uma matriz de Mueller-Jones), ou então ele será o resultado de uma superposição incoerente de vários feixes totalmente polarizados e conseqüentemente, estará parcialmente polarizado ou até mesmo totalmente despolarizado.

Uma vez que a despolarização ocorre, seria interessante quantificá-la, saber o quanto um meio espalhador pode ser despolarizante.

Nesse capítulo definiremos grandezas que nos auxiliarão a quantificar o poder despolarizador do meio. Deduziremos e estudaremos as principais características de funções como o índice de despolarização e a entropia. Veremos que sob certas condições ambos são funções apenas de um espectro (uma distribuição de probabilidades).

Introduziremos a câmara de Weyl que nos será útil no entendimento do diagrama de fases dos meios despolarizantes.

Por fim, apresentaremos a função concavidade, que nos auxiliará no futuro a classificar as distribuições de probabilidades (espectros) como côncavas, neutras ou convexas.

### 4.1 Índice de despolarização

Nessa secção seguiremos os passos dados por [24] para definirmos o índice de despolarização. Basicamente, estudaremos o poder despolarizador de um meio para um conjunto de estados de polarização puros (feixes de luz completamente polarizados). Sabido o efeito do meio em cada um desses estados faremos então uma média aritmética e dela definiremos o índice de despola-

rização. Ao final, veremos que esse índice pode ser visto como uma medida de pureza.

### 4.1.1 Forma quadrática

Como vimos, o formalismo de Mueller-Stokes nos permite estudar completamente as propriedades de polarização de qualquer sistema óptico [25]. Dada a matriz de Mueller do sistema óptico, podemos derivar parâmetros úteis como o índice de despolarização,  $D_M$ , que nos dá a medida “média” do poder de despolarização de um sistema óptico. Para sistemas ópticos não-despolarizantes temos  $D_M = 1$ , enquanto que, para o despolarizador ideal temos  $D_M = 0$ .

Consideremos o vetor de Stokes  $\mathbf{S}$  com elementos  $S_\mu$  com  $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ . Podemos definir uma forma quadrática  $F$  positiva semi-definida associada a  $\mathbf{S}$  como:

$$F = S_0^2 - S_1^2 - S_2^2 - S_3^2, \quad (4.1)$$

que corresponde a intensidade total de luz ao quadrado menos a intensidade de luz polarizada ao quadrado. Podemos relacioná-la com grau de polarização definido na relação (2.22),

$$P = \left(1 - \frac{F}{S_0^2}\right)^{1/2}. \quad (4.2)$$

Mais adiante veremos a utilidade dessa relação.

### 4.1.2 Medidas de despolarização

A representação linear para o processo em que um feixe de luz com vetor de Stokes  $\mathbf{S}$  incide sobre um meio óptico, é espalhado e o feixe de luz de saída tem vetor de Stokes  $\mathbf{S}'$ , é escrita na forma:

$$\mathbf{S}' = M\mathbf{S}. \quad (4.3)$$

Todas as propriedades de polarização de um sistema óptico  $\mathcal{O}$  podem ser descritas pela matriz de Mueller  $M$  com elementos  $M_{\mu\nu}$  com  $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$ .

Na ausência de campos magnéticos, se a direção dos feixes de luz incidente e de saída são invertidas, a matriz de Mueller  $M_I$  que descreverá o sistema  $\mathcal{O}$  nesse caso, está relacionada<sup>1</sup> com  $M$  por

$$M_I = QM^TQ, \quad (4.4)$$

---

<sup>1</sup>Veja [26].

onde  $M^T$  é a matriz transposta de  $M$  e  $Q = \text{diag}\{1, 1, 1, -1\}$ .

Daqui em diante vamos nos referir a  $M$  e  $QM^TQ$ , respectivamente, como as matrizes de Mueller direta e inversa do sistema óptico  $\mathcal{O}$ . A distinção dessas duas matrizes que representam o mesmo sistema óptico é relevante para que nenhuma direção seja privilegiada e o efeito médio de qualquer propriedade do sistema fique bem definido.

A fim de compreender o poder de despolarização do meio, consideremos o conjunto dos vetores de Stokes  $\mathbf{S}_{pi}$  e  $\mathbf{S}_{ni}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{p1} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{S}_{p2} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{S}_{p3} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{S}_{n1} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{S}_{n2} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{S}_{n3} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Os vetores de Stokes  $\mathbf{S}_{pi}$  e  $\mathbf{S}_{ni}$  correspondem aos estados ( $H, +, R$ ) e ( $V, -, L$ ) a feixes de luz totalmente polarizados, pois suas formas quadráticas são

$$F_{pi} = 0, \quad F_{ni} = 0, \quad (4.6)$$

com  $i = 1, 2$  e  $3$ .

Primeiro, vejamos o efeito do sistema óptico  $\mathcal{O}$  no sentido direto, quando um feixe de luz incidente com estado de polarização pertencente ao conjunto dos vetores acima. Os vetores de Stokes do feixes espalhados serão dados por,

$$\mathbf{S}'_{pi} = M\mathbf{S}_{pi}, \quad (4.7a)$$

$$\mathbf{S}'_{ni} = M\mathbf{S}_{ni}. \quad (4.7b)$$

Suas formas quadráticas correspondentes são:

$$F'_{pi} = M_{00}^2 + M_{0i}^2 + 2M_{00}M_{0i} - \sum_{j=0}^3 (M_{j0}^2 + M_{ji}^2 + 2M_{j0}M_{ji}), \quad (4.8a)$$

$$F'_{ni} = M_{00}^2 + M_{0i}^2 - 2M_{00}M_{0i} - \sum_{j=0}^3 (M_{j0}^2 + M_{ji}^2 - 2M_{j0}M_{ji}). \quad (4.8b)$$

Assim, podemos definir a forma quadrática  $F'_D$  como média aritmética das formas quadráticas estabelecidas em (4.8a) e (4.8b),

$$F'_D \equiv \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 (F'_{pi} + F'_{ni}). \quad (4.9)$$

Por fim, vemos que  $F'_D$  pode ser escrito na forma,

$$F'_D = M_{00}^2 + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 M_{0i}^2 - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 M_{i0}^2 - \frac{1}{3} \sum_{i,j=1}^3 M_{ij}^2. \quad (4.10)$$

O parâmetro  $F'_D$  representa o valor médio das diferenças entre o quadrado da intensidade total da luz de saída e o quadrado da intensidade da luz de saída que está totalmente polarizada, obviamente, para luz incidente com vetores de Stokes  $\mathbf{S}_{pi}$  ou  $\mathbf{S}_{ni}$ .

Examinando as desigualdades

$$F'_{pi} \geq 0, \quad F'_{ni} \geq 0, \quad (4.11a)$$

$$F'_D \geq 0, \quad (4.11b)$$

podemos escrever que

$$F'_D = 0 \Leftrightarrow F'_{pi} = F'_{ni} = 0. \quad (4.12)$$

Esse resultado mostra que  $F'_D = 0$  é uma condição necessária e suficiente, para que o sistema óptico  $\mathcal{O}$  não despolarize feixes incidentes com vetores de Stokes  $\mathbf{S}_{pi}$  e  $\mathbf{S}_{ni}$ . Entretanto, essa afirmação não garante que feixes de luz totalmente polarizados com vetores de Stokes diferentes de  $\mathbf{S}_{pi}$  e  $\mathbf{S}_{ni}$  não serão despolarizados por  $\mathcal{O}$ .

Consideremos, agora, o sentido inverso. As formas quadráticas associadas aos vetores de Stokes

$$\mathbf{S}''_{pi} = QM^T Q \mathbf{S}_{pi}, \quad (4.13a)$$

$$\mathbf{S}''_{ni} = QM^T Q \mathbf{S}_{ni}, \quad (4.13b)$$

são respectivamente,

$$F''_{pi} = M_{00}^2 + M_{0i}^2 + 2M_{00}M_{0i} - \sum_{j=0}^3 (M_{j0}^2 + M_{ji}^2 + 2M_{j0}M_{ji}), \quad (4.14a)$$

$$F''_{ni} = M_{00}^2 + M_{0i}^2 - 2M_{00}M_{0i} - \sum_{j=0}^3 (M_{j0}^2 + M_{ji}^2 - 2M_{j0}M_{ji}). \quad (4.14b)$$

Analogamente à definição de  $F'_D$  podemos definir a forma quadrática  $F''_D$  como,

$$F''_D = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 (F''_{pi} + F''_{ni}). \quad (4.15)$$

Portanto,

$$F''_D = M_{00}^2 + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 M_{0i}^2 + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 M_{i0}^2 - \frac{1}{3} \sum_{i,j=1}^3 M_{ij}^2. \quad (4.16)$$

Tendo considerado o efeito do sistema óptico nos dois sentidos e definido as respectivas formas quadráticas, dos valores médios  $F'_D$  e  $F''_D$ , podemos derivar uma nova forma quadrática  $F_D$ , também positiva semi-definida:

$$F_D = \frac{1}{2} (F'_D + F''_D). \quad (4.17)$$

Combinando as equações (4.12) e (4.16), temos que,

$$F_D = \frac{1}{3} [4M_{00}^2 - \sum_{i,j=0}^3 M_{ij}^2], \quad (4.18)$$

ou ainda

$$F_D = \frac{1}{3} [4M_{00}^2 - \Gamma^2(M)] \equiv \frac{1}{3} [4M_{00}^2 - \Gamma^2(QM^TQ)], \quad (4.19)$$

em que,

$$\Gamma(M) = \Gamma(QM^TQ) = [Tr\{M^T M\}]^{1/2} = \left[ \sum_{i,j=0}^3 M_{ij}^2 \right]^{1/2}, \quad (4.20)$$

é uma norma positiva semi-definida associada com  $M$  (ou  $QM^TQ$ ).

Invertendo (4.19), podemos inferir que

$$\Gamma^2(M) = 4M_{00}^2 - 3F_D. \quad (4.21)$$

Como  $\Gamma(M) = 2M_{00}$  é uma condição necessária e suficiente<sup>2</sup> para  $M$  (ou  $QM^TQ$ ) ser não-despolarizante (determinístico), podemos deduzir que essa condição é equivalente a  $F_D(M) = 0$ . Assim, o parâmetro  $F_D(M)$  pode

---

<sup>2</sup>Veja [22].

ser interpretado como um “fator de despolarização” de  $\mathcal{O}$ , pois dá o valor “médio” da despolarização produzido pelo sistema óptico  $\mathcal{O}$ .

Na introdução da secção vimos que para um dado estado de polarização, podemos associar a ele duas grandezas relevantes: o grau de polarização  $P$  e a forma quadrática positiva semi-definida  $F$ , do feixe de luz. Uma vez que conseguimos a forma quadrática positiva semi-definida  $F_D$  associada ao sistema óptico  $\mathcal{O}$ , da mesma maneira podemos definir um “grau de polarização” para o meio, o denominaremos por índice de despolarização  $D_M$  de  $\mathcal{O}$ . Ele é escrito na forma:

$$D_M = \left( \frac{\Gamma^2(M) - M_{00}^2}{3M_{00}^2} \right)^{1/2}, \quad (4.22)$$

ou

$$D_M = \left( 1 - \frac{F_D}{M_{00}^2} \right)^{1/2}. \quad (4.23)$$

É interessante observar que os valores de  $F_D$  e  $D_M$  são limitados da forma:

$$0 \leq F_D \leq M_{00}^2, \quad (4.24a)$$

$$0 \leq D_M \leq 1. \quad (4.24b)$$

Os valores  $F_D = 0$  e  $D_M = 1$  correspondem a meios ópticos não-despolarizantes e  $F_D = M_{00}^2$  e  $D_M = 0$  correspondem ao despolarizador ideal.

### 4.1.3 Índice de despolarização e pureza

Como vimos, o estado de polarização de um feixe de luz pode ser completamente polarizado, despolarizado ou ainda o meio termo, parcialmente polarizado. Por isso, é interessante introduzir uma grandeza que quantifique o quanto um dado estado está próximo de estados completamente polarizados, ou seja, definir um critério de pureza.

Para os sistemas ópticos essa lógica também permanece. Podemos dizer que sistemas puros são aqueles que não causam despolarização, são determinísticos, e um meio óptico qualquer pode ser classificado quanto à sua pureza, ou ao quanto está distante de um sistema puro.

Veremos aqui, que o índice de despolarização é uma medida de pureza.

A pureza é definida como

$$P_u(M) = \sum_{\mu=0}^3 \lambda_{\mu}^2, \quad (4.25)$$

em que  $M$  é a matriz de Mueller do sistema óptico, quando essa está decomposta na forma proposta na secção 3.3. Podemos relacionar  $P_u(M)$  com a norma  $\Gamma(M)$  estabelecida na secção 4.1.2,

$$P_u(M) = \sum_{\mu=0}^3 \lambda_{\mu}^2 = \frac{1}{4M_{00}^2} \text{Tr}\{M^T M\} = \frac{1}{4M_{00}^2} \Gamma^2(M), \quad (4.26)$$

e portanto,

$$D_M(M) = \left( \frac{4P_u(M) - 1}{3} \right)^{1/2}. \quad (4.27)$$

Ou seja, o índice despolarização é uma função da pureza.

## 4.2 Entropia

Já vimos que um sistema óptico qualquer pode ser compreendido como que composto por um ensemble de sistemas ópticos determinísticos, cada sistema  $\alpha$  do ensemble sendo caracterizado por uma matriz de Jones  $T^{(\alpha)}$  bem definida, e associamos a ela uma probabilidade  $\lambda_{\alpha}$  de ocorrência.

Dessa forma, um sistema óptico também pode ser associado a uma distribuição de probabilidades  $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  proveniente de sua decomposição. Daí podemos fazer uma conexão com a teoria de informação clássica.

Um conceito fundamental da teoria de informação clássica é o de *entropia de Shannon*<sup>3</sup>. Suponha que se saiba o valor de uma variável aleatória  $X$ . A entropia de Shannon quantifica informação média obtida quando sabido o valor de  $X$ . Uma interpretação alternativa é que a entropia de  $X$  mede a incerteza sobre  $X$  antes de sua medida. Essas duas visões são complementares: podemos ver a entropia como uma medida da incerteza antes de conhecermos o valor de  $X$  ou como uma medida da quantidade de informação após o conhecimento de  $X$ .

Intuitivamente, o conteúdo de informação de uma variável aleatória não deve depender dos rótulos atribuídos a seus diferentes valores. Por exemplo, espera-se que uma variável aleatória que toma os valores “cara” e “coroa” com respectivas probabilidades  $1/4$  e  $3/4$  contenha a mesma informação que outra variável aleatória com valores “0” ou “1”, também com probabilidades  $1/4$  e  $3/4$ . Por isso, a entropia de uma variável aleatória é definida em função das diferentes probabilidades dos diferentes valores que a variável assume, sem ser influenciada pelos rótulos dos valores.

<sup>3</sup>Para uma leitura mais aprofundada veja [27] e [28].

Assim, dada a matriz de Mueller  $M$ , com decomposição

$$M = \sum_{\mu=0}^3 \lambda_{\mu} M_{J(\mu)}, \quad (4.28)$$

podemos inferir uma entropia de Shannon associada a ela na forma:

$$E_M = E_M(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \equiv - \sum_{\mu=0}^3 \lambda_{\mu} \log_4 \lambda_{\mu}, \quad (4.29)$$

onde  $\log_4$  é o logaritmo tomado na base 4. Convencionou-se ainda que para  $\lambda_{\mu} = 0$  temos  $0 \log_4 0 \equiv 0$ .

### 4.3 Câmara de Weyl

Uma outra forma de organizar nossas impressões a respeito do espaço de estados dos meios despolarizantes, é através da construção do simplexo<sup>4</sup> do espaço de estados.

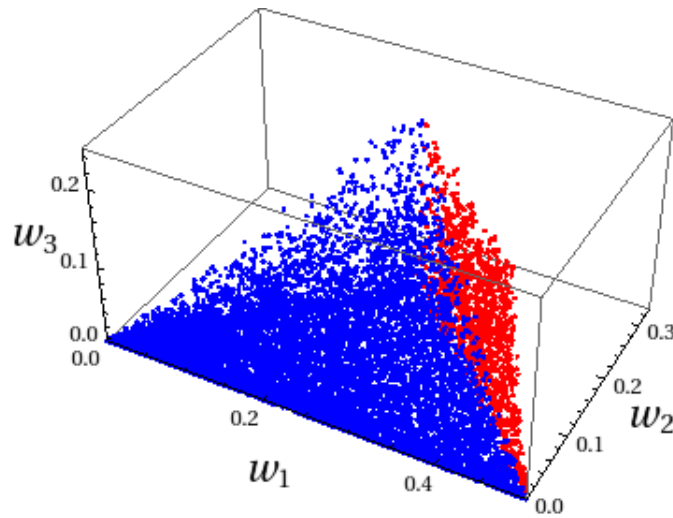


Figura 4.1: Simplexo.

Cada vértice do tetraedro na figura 4.1 representa um sistema óptico não-despolarizante, ou seja, cada um possui como representação linear uma matriz de Mueller-Jones.

<sup>4</sup>Conjunto dos conjuntos (finitos) de números positivos que somam para 1.



Uma vez que os rótulos dos autovalores  $\{\lambda_\mu\}$  com  $(\mu = 0, 1, 2, 3)$  não são importantes, mas as magnitudes sim, a representação via simplexo torna-se redundante. Para corrigir isso, fazemos uma partição no simplexo chamada de câmara de Weyl [18]. Nela não há redundâncias, pois todos espectros de mesma “magnitude” são representados por um único ponto. Lembrando que o estado de um sistema óptico despolarizante é representado por seu espectro  $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , um ponto na câmara de Weyl (que será indexado por  $(w_0, w_1, w_2, w_3)$ , onde as componentes  $w_\mu$  estão rotuladas em ordem de magnitude); Por exemplo,  $(1, 0, 0, 0)$  irá representar simultaneamente os estados  $(1, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 0)$  e  $(0, 0, 0, 1)$ ; assim fica clara a eliminação das redundâncias.

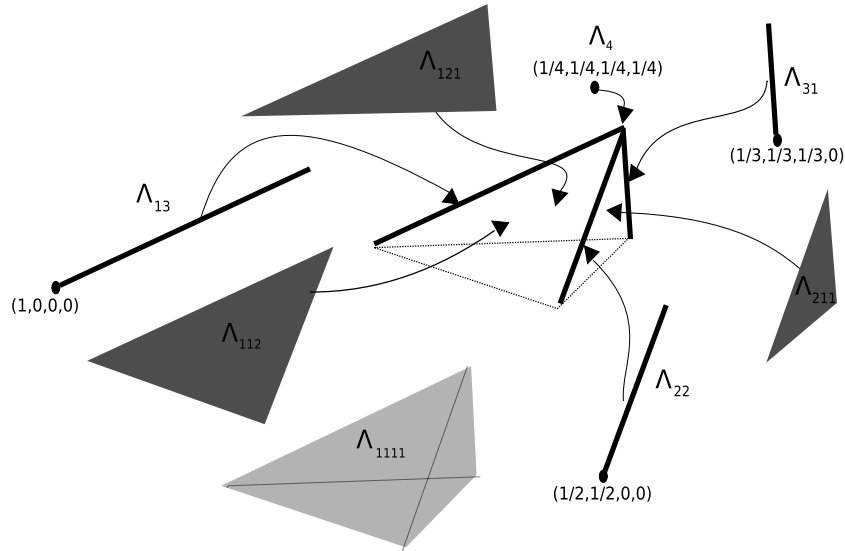


Figura 4.2: Decomposição da câmara de Weyl.

As partes da câmara de Weyl podem ser vistas na figura 4.2, e seus rótulos estão indicados na tabela 4.1.

## 4.4 Funções concavidade

Como vimos, a um sistema óptico qualquer sempre podemos associar uma matriz de Mueller  $M$ . Vimos também que, por sua vez, essa matriz pode ser

Tabela 4.1: Rótulos das partições da câmara de Weyl

Rótulo	Subespaço	Parte da câmara de Weyl
$W_4$	$w_0 = w_1 = w_2 = w_3$	Vértice superior
$W_{1111}$	$w_0 > w_1 > w_2 > w_3$	Interior e a face da base
$W_{112}$	$w_0 > w_1 > w_2 = w_3$	Faces laterais sem as arestas e os vértices
$W_{121}$	$w_0 > w_1 = w_2 > w_3$	
$W_{211}$	$w_0 = w_1 > w_2 > w_3$	
$W_{13}$	$w_0 > w_1 = w_2 = w_3$	Arestas laterais com os vértices da base
$W_{31}$	$w_0 = w_1 = w_2 > w_3$	
$W_{22}$	$w_0 = w_1 > w_2 = w_3$	

decomposta numa soma convexa de pelo menos 4 matrizes de Mueller-Jones  $M_J$  ortogonais entre si, de forma que forma-se um sistema estocástico de alternativas clássicas, caracterizado pelo espectro dos autovalores da matriz de Mueller.

Dada uma distribuição de probabilidades (ou espectro), no nosso caso um conjunto de 4 números reais positivos  $e = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  ordenados de forma decrescente, tal que  $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$  em que  $\lambda_0$  representa a probabilidade da matriz de Mueller-Jones  $M_{J_0}$  mais provável de ocorrer,  $\lambda_1$  a probabilidade da segunda matriz de Mueller-Jones  $M_{J_1}$  mais provável de ocorrer,  $\lambda_2$  da terceira mais provável de ocorrer e  $\lambda_3$  está associada a matriz de Mueller-Jones  $M_{J_3}$  menos provável de ocorrer. Essa interpretação vem de considerarmos um sistema óptico qualquer como um ensemble de sistemas determinísticos.

A fim de dividir o conjunto dos espectros em três grupos vamos introduzir duas funções que chamaremos de funções concavidade.

Suas definições são bem simples. Começaremos com a seguinte associação,  $f(n) = \lambda_n$ , onde  $n$  é a posição do autovalor  $\lambda$  na sequência decrescente do espectro.

#### 4.4.1 Concavidade aritmética

Para definirmos a concavidade aritmética primeiramente definiremos a função derivada discreta de um elemento do espectro,

$$f'(n) = \frac{f(n + \frac{\Delta n}{2}) - f(n - \frac{\Delta n}{2})}{\Delta n}, \quad (4.30)$$

a partir dessa definição passamos para a função derivada segunda discreta:

$$\begin{aligned}
 f''(n) &= \frac{f'(n + \frac{\Delta n}{2}) - f'(n - \frac{\Delta n}{2})}{\Delta n} \\
 &= \frac{(f(n + \Delta n) - f(n)) - (f(n) - f(n - \Delta n))}{\Delta n^2} \\
 &= \frac{f(n + \Delta n) + f(n - \Delta n) - 2f(n)}{\Delta n^2},
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

fazendo  $\Delta n = 1$  (escolha bem natural pois temos variáveis discretas), temos,

$$f''(n) = f(n + 1) + f(n - 1) - 2f(n). \tag{4.32}$$

Vale ressaltar que uma das propriedades da derivada segunda é a de medir a concavidade de uma dada função.

Assim, a partir dessas definições podemos inferir o que chamaremos de função concavidade aritmética. Para um dado espectro  $e = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ , já em ordem decrescente, podemos calcular  $f''(n)$  dos elementos  $n = 1$  e  $n = 2$ ,

$$f''(1) = f(2) + f(0) - 2f(1), \tag{4.33a}$$

$$f''(2) = f(3) + f(1) - 2f(2). \tag{4.33b}$$

Somando essas duas equações teremos,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_A(e) &\equiv f''(1) + f''(2) \\
 &= f(2) + f(0) - 2f(1) + f(3) + f(1) - 2f(2) \\
 &= f(0) + f(3) - (f(1) + f(2)).
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

É conveniente redefinir a função  $C_A(e) \equiv 1/2\mathcal{C}_A(e)$  tal que,

$$\begin{aligned}
 C_A(e) &\equiv \frac{f(0) + f(3)}{2} - \frac{f(1) + f(2)}{2} \\
 &= \frac{\lambda_0 + \lambda_3}{2} - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}.
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Com isso a função  $C_A(e)$  fica igual a uma diferença de médias aritméticas e assim, fica evidente o porquê de a denominarmos como concavidade aritmética.

Percebendo que,  $\sum_{n=0}^3 f(n) = \sum_{n=0}^3 \lambda_n = 1$  nos deparamos com uma forma simples de enxergar os tipos de espectros diferenciados por essa função,

$$C_A(e) = \frac{1}{2} - (\lambda_1 + \lambda_2). \tag{4.36}$$

Com essa caracterização, podemos distinguir 3 tipos de espectros:

$$\lambda_1 + \lambda_2 \leq \frac{1}{2} \longrightarrow C_A(\lambda_1, \lambda_2) \leq 0, \quad (4.37a)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{2} \longrightarrow C_A(\lambda_1, \lambda_2) = 0, \quad (4.37b)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 \geq \frac{1}{2} \longrightarrow C_A(\lambda_1, \lambda_2) \geq 0, \quad (4.37c)$$

com concavidade aritmética **Negativa**, **Nula** e **Positiva**, respectivamente.

#### 4.4.2 Concavidade geométrica

Na secção anterior definimos uma função que nada mais é do que a média aritmética de  $\lambda_0$  e  $\lambda_3$  menos a média aritmética de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Nessa secção vamos definir como medida de concavidade a diferença das médias geométricas de  $\lambda_0$  e  $\lambda_3$ , e  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ .

A função concavidade geométrica é definida da seguinte forma:

$$C_G(e) = C_G(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sqrt{\lambda_0 \lambda_3} - \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}. \quad (4.38)$$

Novamente teremos os três tipos de espectros: com concavidade geométrica **Negativa**, **Nula** ou **Positiva**.

# Capítulo 5

## Diagrama de fases

Iniciamos o capítulo mostrando os resultados da investigação experimental [11] que motivou a escrita dessa dissertação. Ao final, apresentaremos algumas sugestões para o entendimento das dúvidas levantadas nessa investigação.

### 5.1 O índice de despolarização e a entropia dos meios ópticos espalhadores de luz

O estado de polarização de um feixe de luz pode ser classificado quanto à sua entropia  $E_C$  e seu grau de polarização  $P_C$ . Onde essas quantidades estão relacionadas por uma função :  $E_C(P_C)$ . Por exemplo, luz polarizada  $P_C = 1$  tem  $E_C = 0$ , enquanto luz parcialmente polarizada  $0 \leq P_C < 1$  tem  $1 \geq E_C > 0$ .

Quando um feixe de luz polarizado incide sobre um meio óptico e o feixe de saída está parcialmente polarizado, esse meio é dito despolarizante. Um valor médio do poder de despolarização do meio é dado pelo cálculo do chamado índice de despolarização  $D_M$ . Meios não despolarizantes são caracterizados por  $D_M = 1$ , enquanto os meios despolarizantes são da forma  $0 \leq D_M < 1$ . Um processo de espalhamento despolarizante sempre é acompanhado por um aumento da entropia<sup>1</sup> do feixe da luz de saída, em que o aumento se deve a interação do campo com o meio.

---

<sup>1</sup>Como um feixe de luz com estado de polarização qualquer sempre pode ser entendido como uma soma convexa de feixes totalmente polarizados, pelos mesmos princípios estabelecidos na secção 4.2 também podemos estabelecer uma entropia para um feixe de luz.

O valor médio da entropia que um meio despolarizante pode adicionar à entropia do feixe de luz incidente é dado pela entropia  $E_M$ . Meios não despolarizantes são caracterizados por  $E_M = 0$ , enquanto meios despolarizantes são caracterizados por  $0 < E_M \leq 1$ .

### 5.1.1 Experimentos de despolarização

A investigação experimental [11] mostrou que existe uma relação entre  $E_M$  e  $D_M$ , válida para uma ampla gama de meios espalhadores de luz. Viu-se que  $E_M$  está relacionado com  $D_M$  por uma função multi-valorada que cobre todo regime óptico, dos sistemas puros até os que causam despolarização total.

A relação entre  $E_M$  e  $D_M$  mostrou-se universal e a partir dela estabeleceu-se uma forma simples de caracterizar as propriedades de polarização de qualquer meio óptico, e ainda conseguiu-se uma forma consistente de verificar experimentalmente as matrizes de Mueller medidas.

Vale ressaltar que os resultados encontrados se aplicam aos processos de espalhamento, tanto clássicos quanto quânticos, e por isso, podem tornar-se relevantes para aplicações na óptica quântica, onde a despolarização ocorre devido a perda de coerência.

### 5.1.2 O diagrama experimental $E_M \times D_M$

Com a finalidade de obter a matriz de Mueller efetiva do meio, e assim derivar o índice de despolarização  $D_M$  e a entropia de polarização ( $E_M$ ) do meio espalhador, seguiu-se um processo padrão de tomografia de processo. A luz era preparada em quatro estados de polarização, lineares (V,H,+) e circular (R), e espalhada pelos diversos meios ópticos, dessa forma construía-se a matriz de Mueller do meio. Da matriz construída extraía-se o espectro através da decomposição em matrizes de Mueller-Jones. Com o espectro computava-se a entropia de despolarização do meio  $E_M$  e o índice de despolarização  $D_M$ . Por fim, construía-se o diagrama  $E_M \times D_M$  apresentado na figura 5.1.

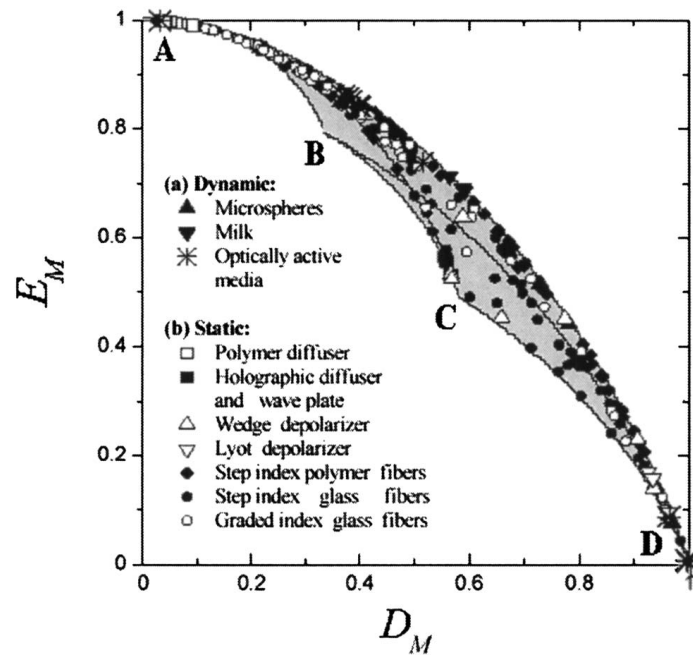


Figura 5.1: Diagrama  $E_M \times D_M$  obtido experimentalmente, apresentado em [11].

## 5.2 Caracterização pelas concavidades

Observando a figura 5.1 percebe-se que há uma região não preenchida (que denominaremos por região *Proibida*). Entretanto, a previsão teórica era de que toda região em cinza poderia ser preenchida, de modo que, qualquer meio espalhador com entropia e índice de despolarização na região cinza era fisicamente realizável.

A motivação inicial deste trabalho era compreender o porquê disso acontecer. Por que aquela região não era preenchida? Ou pelo menos diferenciá-la da região preenchida.

Primeiramente, buscávamos alguma relação que talvez estivesse sendo violada e que quando compreendida proibiria a realizabilidade desse tipo de espalhamento.

Tentamos abordar o problema com alguns preceitos quânticos, mas não conseguimos inferir nada conclusivo. Quanto mais nos aprofundamos no assunto mais víamos que a possível explicação não se vislumbrava simples, foi então que mudamos o foco da abordagem e passamos a buscar alguma função que apenas diferenciasses as duas regiões, *Proibida* e *Permitida*. Para

isso, nosso primeiro passo foi reproduzir o diagrama  $E_M \times D_M$  através de simulações. Como existe uma relação de se e somente se (veja [19][20]) entre a **realizabilidade** do espalhamento óptico e o espectro da decomposição da matriz de Mueller ser **necessariamente** não negativo, a fim de preencher “todo” o diagrama de fases fizemos um sorteio de quatro números positivos que somavam 1.

O sorteio era efetuado da seguinte maneira:  $\lambda_0 = \text{RandomReal}[0, 1]$ ,  $\theta = \pi \text{RandomReal}[0, 1]$ ,  $\phi = 2\pi \text{RandomReal}[0, 1]$ , onde  $\text{RandomReal}[0, 1]$  é igual a número real aleatório no intervalo  $[0, 1]$ ;

$$\lambda_1 = \text{sen}^2 \theta \cos^2 \phi (1 - \lambda_0), \quad (5.1)$$

$$\lambda_2 = \text{sen}^2 \theta \text{sen}^2 \phi (1 - \lambda_0), \quad (5.2)$$

$$\lambda_3 = \cos^2 \theta (1 - \lambda_0). \quad (5.3)$$

Claramente,  $\sum_{\alpha=0}^3 \lambda_\alpha = 1$ .

Com esse procedimento conseguimos um conjunto de espectros do tipo  $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ . Coletamos um conjunto de 30000 espectros desse tipo. Associamos a cada um deles as funções entropia e índice de despolarização e por fim, plotamos os gráfico  $E_M \times D_M$ . Sem exceções, toda região, teoricamente, fisicamente realizável foi preenchida, como mostrado na figura 5.2.

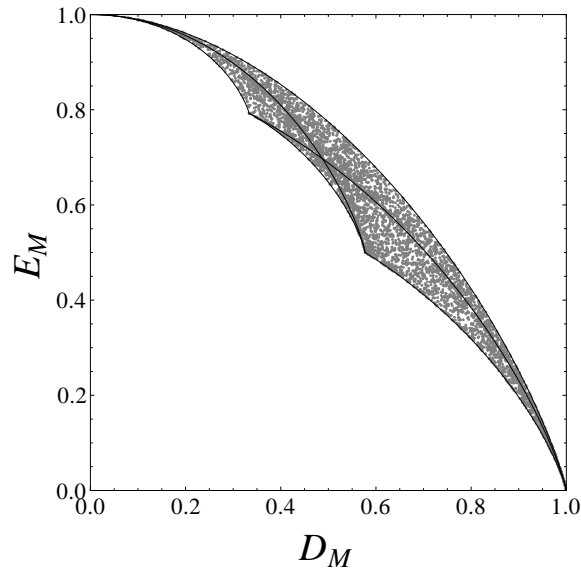


Figura 5.2:  $E_M \times D_M$ .

Analisando o diagrama da figura 5.3 vemos que os subespaços dos contornos [29], promovem, necessariamente, uma mudança nos perfis dos espec-



tos quando transitamos da região *Proibida* para a região *Permitida*. Assim, pensar em mudança na concavidade dos espectros parece ser bem razoável.

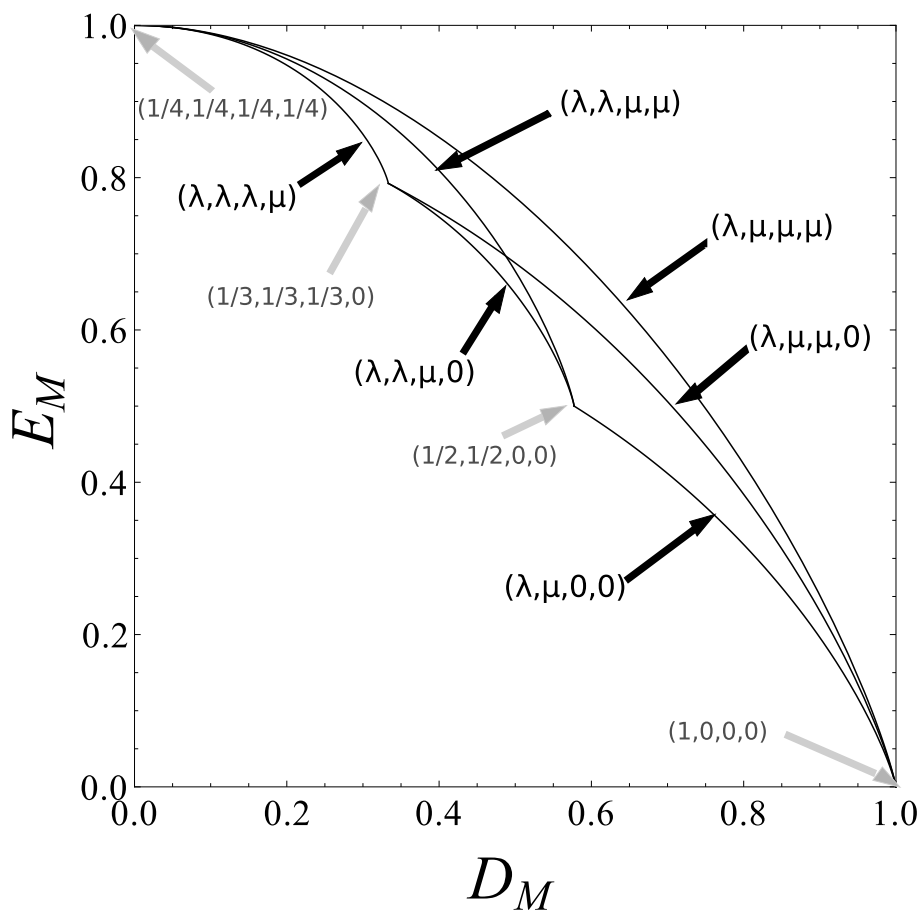


Figura 5.3: Os subespaços de  $E_M \times D_M$ , onde  $\lambda \geq \mu$ .

### 5.2.1 Concavidade aritmética

Depois de alguns testes vimos que a função concavidade aritmética  $C_A(e) = 1/2 - (\lambda_1 + \lambda_2)$  apresentada na secção 4.4.1, distingue as duas regiões. (figuras 5.4 e 5.5)

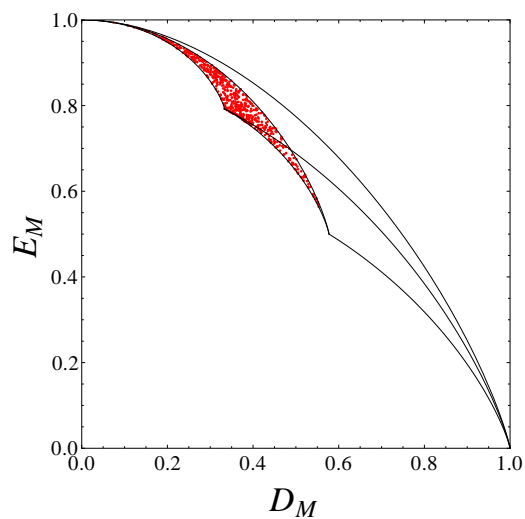


Figura 5.4: Espectros com concavidade aritmética **Negativa**.

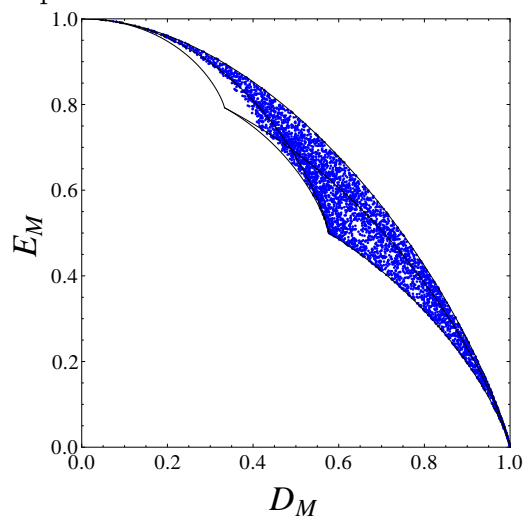


Figura 5.5: Espectros com concavidade aritmética **Positiva**.

Vê-se claramente que os meios espalhadores da região proibida são caracterizados **predominantemente** por terem **concavidade aritmética negativa** e que os meios espalhadores da região permitida são caracterizados **necessariamente** por espectros com **concavidade aritmética positiva**.

### 5.2.1.1 A partição da câmara de Weyl

Construindo a câmara de Weyl do sistema (figura 5.6), percebemos que, o que fizemos foi introduzir uma partição nessa câmara.

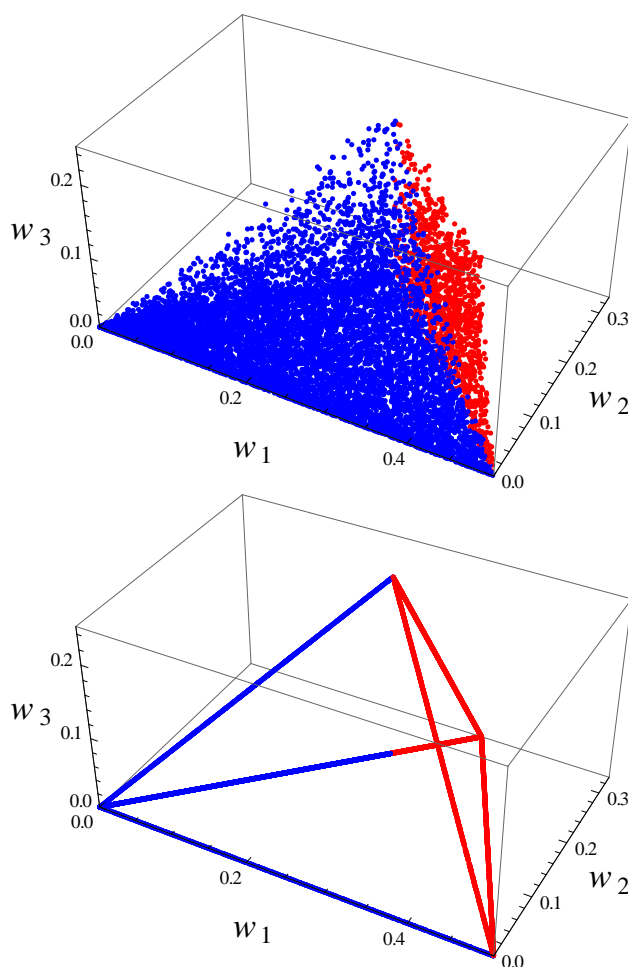


Figura 5.6: Câmara de Weyl dividida pela função concavidade aritmética.

5.2.1.2 O diagrama  $E_M \times D_M \times C_A$

Podemos, por fim, observar o diagrama  $E_M \times D_M \times C_A$  nas figuras 5.7 e 5.8.

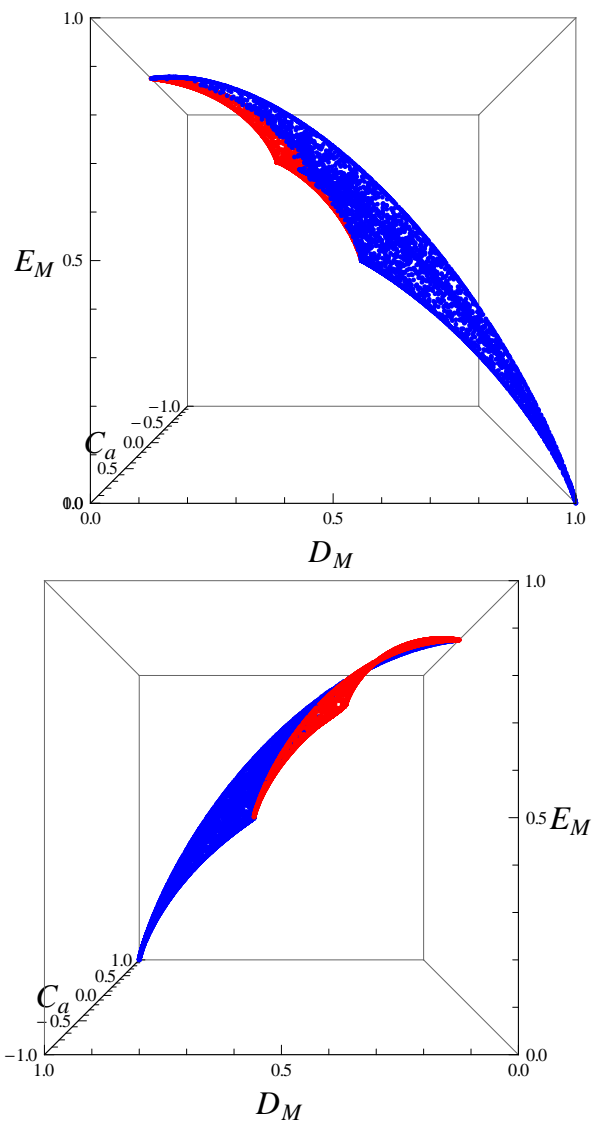


Figura 5.7:  $E_M \times D_M \times C_A$ .

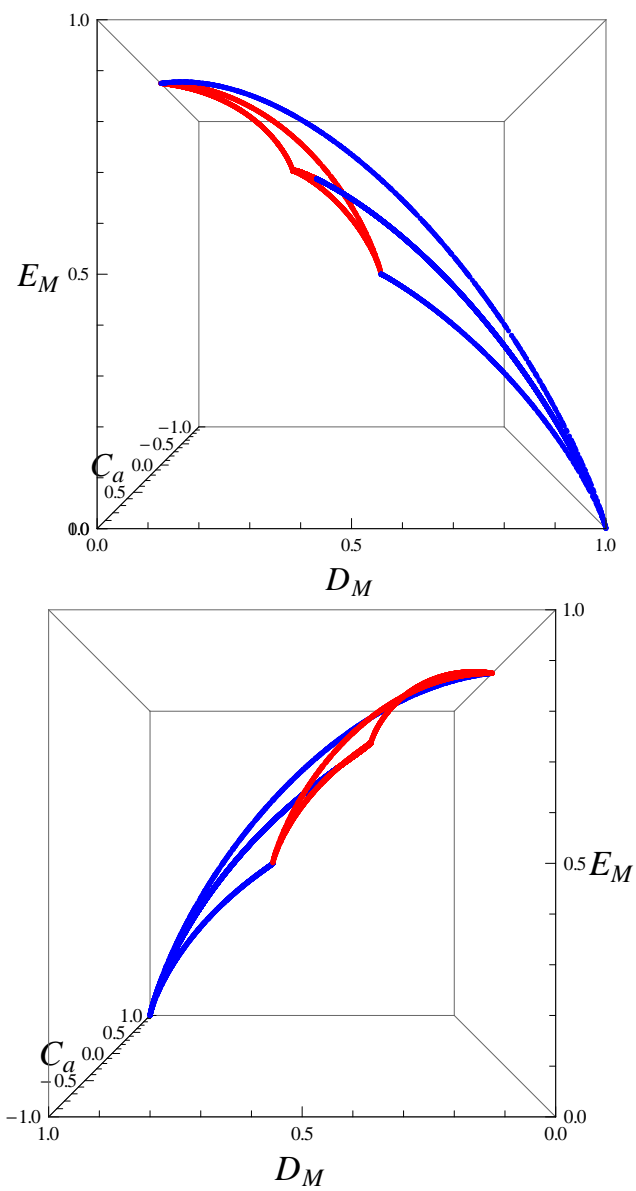


Figura 5.8: Os contornos de  $E_M \times D_M \times C_A$ .

### 5.2.2 Concavidade geométrica

Utilizando a concavidade geométrica  $C_G(e) \equiv \sqrt{\lambda_0\lambda_3} - \sqrt{\lambda_1\lambda_2}$ , definida na secção 4.4.2, também é possível fazer uma diferenciação dos espectros dos sistemas ópticos.

Nas figuras 5.9 e 5.10 vê-se que, **necessariamente** todos os espectros com concavidade geométrica **positiva** localizam-se na região *Permitida*. Já os espectros com concavidade geométrica **negativa** estão em **todo diagrama**, nas regiões *Permitida* e *Proibida*.

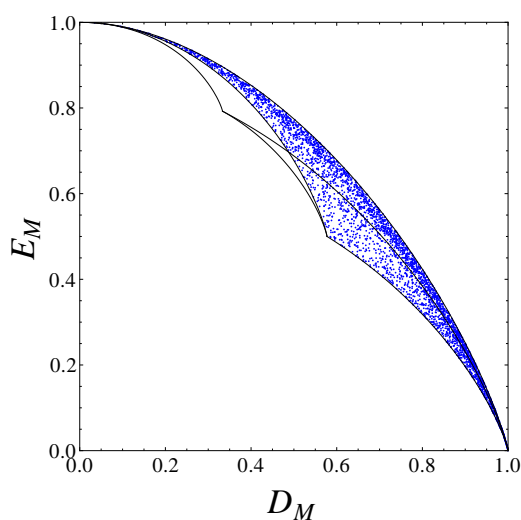


Figura 5.9: Espectros com concavidade geométrica **Positiva**.

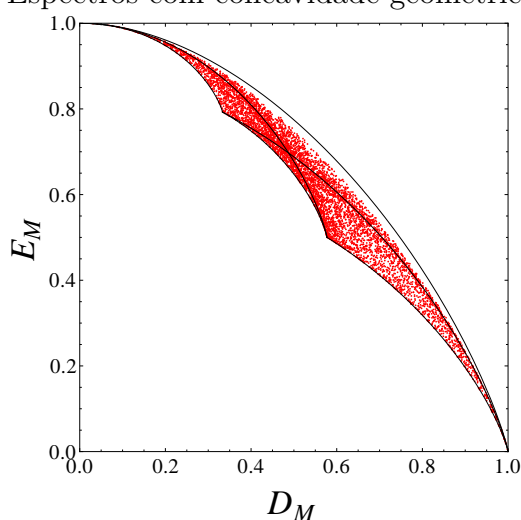


Figura 5.10: Espectros com concavidade geométrica **Negativa**.

### 5.2.2.1 A partição da câmara de Weyl

Observando a câmara de Weyl do sistema (figura 5.11), vemos que a diferenciação dos espectros pela função concavidade geométrica também introduz uma divisão nessa câmara.

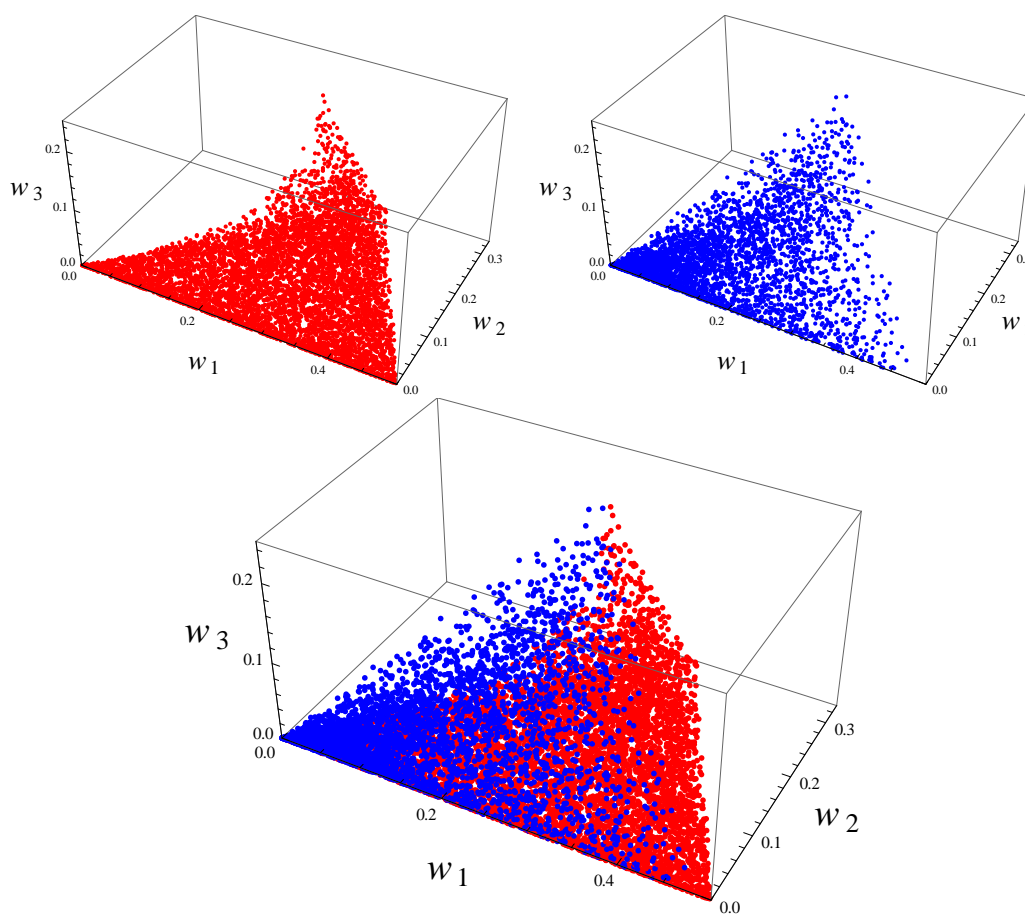


Figura 5.11: A câmara de Weyl dividida pela função concavidade geométrica. Concavidade negativa em vermelho e concavidade positiva em azul.

5.2.2.2 O diagrama  $E_M \times D_M \times C_G$

Também, por fim, podemos observar o diagrama  $E_M \times D_M \times C_G$  na figura 5.12.

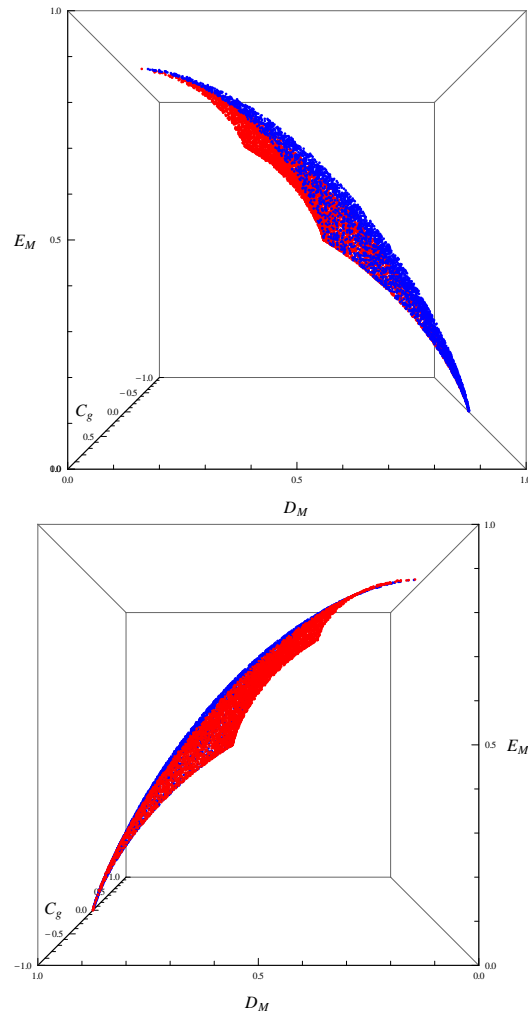


Figura 5.12:  $E_M \times D_M \times C_G$ .



## Considerações finais

Começamos a dissertação apresentando uma maneira de representar o estado de polarização de um feixe de luz. Vimos que existem três tipos de estados, os totalmente polarizados, os parcialmente polarizados e os despolarizados. Em seguida, conseguimos uma representação linear para a mudança na polarização que um meio óptico puro causa num feixe polarizado. Vimos depois que existem meios ópticos que causam despolarização e conseguimos também uma representação linear para transformação polarimétrica que eles impõem aos feixes de luz.

No capítulo de álgebra linear formalizamos a descrição do processo de despolarização. Vimos que é possível decompor a matriz de Mueller de um sistema óptico qualquer, numa soma convexa de pelo menos 4 matrizes de Mueller-Jones ortogonais, e através desse processo extrair 3 grandezas: a entropia que o meio óptico acrescenta ao feixe ( $E_M$ ), o índice de despolarização ( $D_M$ ) e a concavidade da distribuição do meio óptico ( $C_A$  ou  $C_G$ ). Com essas três grandezas pudemos situar um meio óptico qualquer no diagrama de fases ( $E_M \times D_M \times C_A$ ) ou ( $E_M \times D_M \times C_G$ ).

O objetivo inicial dessa dissertação era compreender por que no diagrama  $E_M \times D_M$ , obtido experimentalmente, existia uma região que teoricamente poderia ser preenchida, mas que na prática não era. Infelizmente não conseguimos uma resposta. Assim, o problema continua em aberto.

Nossa contribuição foi modesta, apenas conseguimos duas funções que aparentemente diferenciam os perfis dos espectros dos meios ópticos.

A função concavidade aritmética se mostrou interessante para diferenciar a região *Proibida* da região *Permitida* no diagrama de fases  $E_D \times D_M$ . Espectros com concavidade aritmética negativa, necessariamente, localizavam-se na região *Proibida* e espectros com concavidade aritmética positiva predominantemente estavam na região *Permitida*. Isso nos faz inferir que apenas os espectros com concavidade positiva são realizáveis na natureza, e daí surge uma desvantagem. Examinando a figura 5.1 vê-se que não há indícios de invasão dos espectros realizáveis na região *Proibida*, no entanto, isso era previsto pela caracterização via essa concavidade.

A vantagem da função concavidade geométrica é situar muito bem os espectros de concavidade positiva. Diferenciados por ela, todos localizam-se na região *Permitida*. Sua desvantagem é de também permitir a existência de espectros com concavidade negativa na região *Permitida*.

Apesar de não chegarmos num resultado conclusivo, apresentamos duas formas possíveis de caracterizar os espectros de meios ópticos despolarizantes. Ambas tem suas vantagens e desvantagens e só uma verificação experimental poderá julgar a validade de uma ou de outra.

# Referências Bibliográficas

- [1] I. P. Kaminow, “Polarization in optical fibers,” *IEEE J. Quantum Electron.* *QE-17*, 15–22 (1981).
- [2] K. Kawabata, D. Coffeen, J. Hansen, W. Lane, M. Sato, e L. D. Travis, “Cloud and Haze Properties from Pioneer Venus Polarimetry,” *JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH*, *VOL. 85, NO. A13*, *PP. 8129-8140* (1980).
- [3] W. M. McClain, W.-H. Jeng, B. Pati, Y. Shi, e D. Tian, “Measurement of the Mueller scattering matrix by use of optical beats from a Zeeman laser,” *Applied Optics*, *Vol. 33, Issue 7*, *pp. 1230-1241* (1994).
- [4] G. Stokes, “On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources,” *Trans. Cambridge Phil. Soc.* *9 (1852)*, 399–416 (1948).
- [5] M. Born e E. Wolf, *Principles of Optics*. Pergamon Press, New-York, 1983.
- [6] H. Poincaré, *Theorie Mathematique de la Lumiere*. vol. II, Gautier-Villars, 1892.
- [7] R. C. Jones, “A New Calculus for the Treatment of Optical Systems III. The Sohncke Theory of Optical Activity,” *J.O.S.A.*, *Vol. 31, Issue 7*, *pp. 488-493* (1941).
- [8] F. Perrin, “Polarization of Light Scattered by Isotropic Opalescent Media,” *J. Chem. Phys.* *10*, 415 (1942).
- [9] H. Mueller, “The foundations of optics,” *J. Opt. Soc. Am.* *38*, 661 (1948).
- [10] G. R. Fowles, *Introduction to modern optics*. DOVER PUBLICATIONS, I. C., NEW YORK, 1989.

- [11] G. Puentes, D. Voigt, A. Aiello, e J. P. Woerdman, *Experimental observation of universality in depolarized light scattering*. 2005.
- [12] J. J. Gil, "Polarimetric characterization of light and media," *The European Physical Journal Applied Physics*, 40 , pp 1-47 (2007).
- [13] A. Aiello e J. Woerdman, "Linear Algebra for Mueller Calculus," *arXiv:math-ph/0412061v3* (2006).
- [14] R. W. Schmieder, "Stokes-Algebra Formalism," *J. Opt. Soc. Am.* 59, 297-302 (1969).
- [15] S. R. Cloude, "Group theory and polarisation algebra," *Optik* 75, 26-36 (1986).
- [16] K. Kim, L. Mandel, e E. Wolf, "Relationship between Jones and Mueller matrices for random media," *J. Opt. Soc. A* 4, 433-437 (1987).
- [17] D. G. M. Anderson e R. Barakat, "Necessary and sufficient conditions for a Mueller matrix to be derivable from a Jones matrix," *J. Opt. Soc. A* 11, 2305-2319 (1994).
- [18] I. Bengtsson e K. Zyczkowski, *GEOMETRY OF QUANTUM STATES, An Introduction to Quantum Entanglement*. Cambridge University Press, 2006.
- [19] R. Simon, "The connection between mueller and jones matrices of polarization optics," *OPTICS COMMUNICATIONS, Volume 42, number 5* (1982).
- [20] B. N. Simon, S. Simon, N. Mukunda, F. Gori, M. Santarsiero, R. Borghi, e R. Simon, "A complete characterization of pre-Mueller and Mueller matrices in polarization optics," *J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 27, No. 2* (2010).
- [21] J. J. Gil, "Characteristic properties of Mueller matrices," *J. Opt. Soc. Am. A / Vol. 17, No. 2* (2000).
- [22] J. Gil e E. Bernabeu, "Polarization of Light Scattered by Isotropic Opalescent Media," *Optical Acta*, 32, 259 (1985).
- [23] A. Aiello, G. Puentes, e J. P. Woerdman, "Linear optics and quantum maps," *arXiv:quant-ph/0611179v1* (2006).

- [24] J. J. Gil e E. Bernabeu, “Depolarization and Polarization indices of an optical system,” *OPTICA ACTA*, VOL.33,NO.2, 185-189 (1986).
- [25] H. C. Van de Hulst, *Light scattering by small particles*. Wiley, NEW YORK, 1967.
- [26] Z. Sekera, “Polarization of Light Scattered by Isotropic Opalescent Media,” *J. Opt. Soc. Am.* , 56 1732 (1966).
- [27] M. A. Nielsen e I. L. Chuang, *Computação quântica e informação quântica*. Bookman, 2005.
- [28] B. N. B. Lima, L. M. Cioletti, M. O. T. Cunha, e G. A. Braga, *Entropia: introdução à teoria matemática da (des)informação*. II Bienal da SBM, 2004.  
<http://www.mat.ufmg.br/~tcunha/entropia.pdf>.
- [29] A. Aiello e J. P. Woerdman, “Physical Bounds to the Entropy-Depolarization Relation in Random Light Scattering,” *Phys. Rev. Lett.* (2005).  
<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.94.090406>.