

**Aspectos da dinâmica de emaranhamento em
sistemas multipartidos e o interferômetro
Mach–Zehnder com discriminador de que–caminho.**

José Geraldo Gonçalves de Oliveira Júnior

Setembro de 2011

Aspectos da dinâmica de emaranhamento em sistemas multipartidos e o interferômetro Mach–Zehnder com discriminador de que–caminho.

José Geraldo Gonçalves de Oliveira Júnior

Orientadora: Profa. Maria Carolina Nemes

Co-Orientador: Prof. José Geraldo Peixoto de Faria

Tese apresentada à UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, como requisito parcial para a obtenção do grau de DOUTOR EM FÍSICA.

Setembro de 2011

A Lùà e a Bela.

DESCOBRIMENTO

Abancado à escrivaninha em São Paulo
Na minha casa da rua Lopes Chaves
De supetão senti um friúme por dentro.
Fiquei trêmulo, muito comovido
Com um livro palerma olhando pra mim.

Não vê que me lembrei que lá no norte, meu Deus!
Muito longe de mim
Na escuridão ativa da noite que caiu
Um homem pálido magro de cabelo escorrendo nos olhos,
Depois de fazer uma pele com a borracha do dia,
Faz pouco se deitou, está dormindo.

Este homem é brasileiro que nem eu.

Mário de Andrade

A TRISTE PARTIDA

Setembro passou, com outubro e novembro
Já tamo em dezembro
Meu Deus, que é de nós?
Assim fala o pobre do seco Nordeste,
Com medo da peste,
Da fome feroz.

A treze do mês ele fez a experiência,
Perdeu sua crença
Nas pedras de sá.
Mas nôta experiência com gosto se agarra,
Pensando na barra
Do alegre Natá.

Rompeu-se o Natá, porém barra não veio,
O só, bem vermeio
Nasceu munto além.
Na copa da mata, buzina a cigarra,
Ninguém vê a barra,
Pois barra não tem.

Sem chuva na terra descamba janêro,
Depois, feverêro
E o mêrmo verão.
Entonce o rocêro, pensando consigo,
Dis: isso é castigo!
Não chove mais não!

Apela pra março, que é o mês preferido
Do Santo querido,
Senhô São José.
Mas nada de chuva! Tá tudo sem jeito,
Lhe foge do peito
O resto da fé.

Agora pensando segui ôtra tria,
Chamando a famia
Começa a dizê:
Eu Vendo meu burro, meu jeque e o cavalo,
Nós vamo a São Palo
Vivê ou morrê.

Nós vamo a São Palo, que a coisa tá feia;
Por terras aleia
Nós vamo vagá
Se o nosso destino não for tão mesquinho,
Pro mêrmo cantinho
Nós torna a vortá.

E vende o seu burro, o jumento e o cavalo,
Inté mêrmo o galo
Vendêro também,
Pois logo aparece feliz fazendêro,
Por pôco dinheiro
Lhe compra o que tem.

Em riba do carro se junta a famia;
Chegou o triste dia,
Já vai viajá.
A seca terrive, que tudo devora,
Lhe bota pra fora
Da terra natá.

O carro já corre no topo da serra.
Oiando pra terra,
Seu berço, seu lá,
Aquele nortista, partido de pena,
De longe inda acena:
Adeus, Ceará!

No dia seguinte, já tudo enfadado,
E o carro embalado,
Veloz a corrê,
Tão triste, coitado, falando saudoso,
Um fio choroso
Escrama, a dizê:

– De pena e sodade, papai, sei que eu morro!
Meu pobre cachorro,
Quem dá de come?
Já ôto pergunta: – Mãezinha, e meu gato?
Com fome sem trato,
Mimi vai morrê!

E a linda pequena, tremendo de medo:
– Mamãe, meus brinquedos!
Meu pé de fulô!
Meu pé de rosêra, coitado, ele seca!
E a minha boneca
Também lá ficou.

E assim vão deixando, com choro e gemido,
Do berço querido
O céu lindo e azu.
Os pais, pesaroso, nos fio pensando,
E o carro rodando
Na estrada do Su.

Chegaro em São Palo sem cobre, quebrado.
O pobre, acanhado,
Percura um patrão.
Só vê cara estranha, da mais feia gente,
Tudo é diferente
Do caro torrão.

Trabaia dois ano, três ano e mais ano,
E sempre no prano
De um dia inda vim.
Mas nunca ele pode, só veve devendo,
E assim vai sofrendo
Tormento sem fim.

Se arguma notícia das banda do Norte
Tem ele por sorte
O gosto de uvi,
Lhe bate no peito sodade de móio,
E as água dos óio
Começa a caí.

Do mundo afastado, sofrendo desprezo,
Ali veve preso,
Devendo ao patrão.
O tempo rolando, vai dia, vem dia,
E aquela famia
Não vorta mais não!

Distante da terra tão seca mais boa,
Exposto à garoa,
A lama e o paú,
Faz pena o nortista, tão forte, tão bravo,
Vivê como escravo
Nas terra do Su.

Patativa do Assaré

AGRADECIMENTOS

De início, quero agradecer profundamente a minha amiga e orientadora Carolina por tudo que fez por mim. O seu apoio, ajuda, insistência e compreensão vão muito além das linhas desta tese e a física que me ensinou. Toda e qualquer palavra de agradecimento que eu tente escrever aqui não representará, nem de perto, toda a gratidão que trago no peito e, muitas vezes, no meu silêncio. Humildemente solicito que aceite um simples “*muito obrigado Carol!*”. Me considero um privilegiado por trabalhar contigo que é exemplo de pessoa, profissional e amiga. Obrigado por sempre me sugerir/trazer problemas intimamente ligados aos fundamentos da mecânica quântica. Estes problemas me permitiram aprender física e a respeitá-la. Tudo bem que eles tiravam a minha “paz” e muitas vezes não conseguia pensar em mais nada além de tentar achar uma resposta. Mas, segundo você mesma, ser físico é ser assim... é pensar em física mesmo quando não se tem um artigo nas mãos, ou um livro ou uma caneta e papéis. Se ser físico é ser isso, então acho que comecei a engatinhar nessa área do conhecimento. MUITO OBRIGADO CAROL!

Na sequência não posso deixar de falar de Peixoto de Faria, mais conhecido simplesmente como Zé. Valeu Zé! Valeu mesmo meu amigo! Bem, do jeito que o Zé é e com a humildade que lhe é peculiar, ao ler esta parte dos agradecimentos corre o risco de franzir a testa, formar um tênue sinal de sorriso no rosto, balançar levemente a cabeça em sinal de negação e, após uma pausa de cinco segundos, pensar: “*Obrigado pelo que? Eu não fiz nada!*”. É, acho que acontecerá isto! Na verdade sou capaz de apostar 10 cervejas e uma porção de costelinhas fritas acompanhadas com torresmos e mandioquinha¹ frita. Obrigado pela dedicação e paciência que teve comigo durante todo este tempo, desde os tempos da Iniciação Científica na UESC em 2003 e 2004. Bem Zé, já são aproximadamente oito anos que venho aprendendo contigo e sei que ainda tenho muito o que aprender. Obrigado meu amigo pela calma, atenção e precisão durante as nossas conversas, sempre ensinando de forma humilde e solícita. Valeu Zé!

Às minhas filhas Luana e Isabela, agradeço a vocês apenas por existirem. Tenho a mais transparente convicção de que sem a existência de vocês eu não chegaria até aqui, nunca! A você Luana que chegou a minha vida quando eu tinha dezessete anos, obrigado por enfrentar comigo todas as dificuldades que bateram à nossa porta. Sempre simples, aguerrida, amorosa, feliz e compreendendo todas as horas, dias, meses e anos de minha ausência em prol dos nossos sonhos. Jijuji, esses dias estão acabando! Parece que tudo terminará como planejamos. A Isabela, ou melhor a Isa-a-Bela, muito obrigado por chegar a minha vida em um momento muito difícil. Você me fez, com o seu nascimento, recomeçar e reerguer a cabeça. A cada seis meses te espero ansiosamente e minha vida se renova.

¹O que em BH chamam de mandioca na minha Bahêa (sim, na Bahia chamamos nosso estado de Bahêa!) chamamos de aimpim.

Agradeço também aos meus pais por todo cuidado e amor que tiveram comigo em todos os momentos. Obrigado por tudo que fizeram e representam pra mim. Em especial a minha mãe, por também ser mãe da minha filha. Por ser uma gerreira na labuta da vida e por nunca esmorecer diante das dificuldades mais árduas.

Às minhas irmãs Déa e Kau, ao meus irmãos Teu, Gete e Bel, aos meus sobrinhos Pili-Jones, Xande, João, Gabriel e Miguel e a minha sobrinha Tai. Obrigado por nunca me deixaram sozinho e por serem um exemplo de família simples e amorosa. Eu nada seria sem vocês e vou logo avisando: Estou voltando pra casa!

Ao tentar agradecer meus amigos sei que cometerei injustiças, mesmo tentando não ser injusto. Isso porque não conseguirei citar todos aqui. Logo, peço antecipadamente o perdão dos que aqui não citei. Contudo, não posso deixar de lembrar de alguns. Um agradecimento especial vai para Prof. Marcos Donizeti Sampaio, Guto Gliter Blue (Animal Taylor), André Morrison, Negão Hetfield, Mailton Dulodo, Salsinha, Maurição-Lapero, Marvan, Mauro Kvera, Roy Corrosive, Super-Man, Neil, Tchê (spin-down), Tanus (spin-up), Debarba, Negão, Coronel André, Capitão Irismar, Jonathan Butkov, Masan, Medeirão, Ara, Magneto, São, Isa, Bahia Júnior, Adécio, Romeu, Júlia, Andrezão Magrin, Guila Abreu, A-Lôra, Jaque, Lucaix, Alexandre, Gabriel, Lequinho, Vivi, Gustavão e Moizas (Moisés). Obrigado pela amizade, convívio e palavras de incentivo.

Não posso deixar de agradecer a todos os meus colegas de trabalho no CFP/UFRB. Em especial, agradeço aos meus colegas da Área Física e Sociedade que, dentro das possibilidades, sempre me ajudaram para contribuir com a conclusão desta tese.

Ao CNPq, pelo parcial apoio financeiro que foi absolutamente necessário.

RESUMO

Nesta tese o emaranhamento e a dualidade onda-partida são os temas principais de estudo. Para examinar alguns dos aspectos e características do emaranhamento, analisamos sistemas de três e quatro partes constituídos por átomos e pelo campo eletromagnético. A interação átomo-campo é dada pelo modelo de Jaynes-Cummings. De início mostramos que existe uma ligação direta entre o emaranhamento residual e a morte súbita de emaranhamento quando a interação entre os sistemas é do tipo troca de excitações. Como extensão, estudamos um sistema dinâmico de quatro partes e mostramos que havendo morte súbita haverá um emaranhamento que não pode ser contabilizado apenas via o emaranhamento das bipartições. Estudamos ainda os aspectos geométricos relativos à dinâmica do emaranhamento e mostramos que existe uma manifestação geométrica da morte súbita. Na sequência, neste mesmo modelo de quatro partes, ao intervir na dinâmica com medidas tipo Zeno, mostramos que a dinâmica de emaranhamento é alterada e com isso torna-se possível “congelar”, aumentar e reviver o emaranhamento. Contudo, a possibilidade de aumentar e reviver o emaranhamento está vinculada a existência de MSE em alguma partição. Fizemos ainda uma investigação sobre a dualidade onda-partícula considerando uma partícula quântica que atravessa um interferômetro equipado com um marcador de caminho. Neste trabalho, quantificamos a qualidade da ponta de prova e mostramos sua conexão com a quantidade de informação de que-caminho que ficou disponível. Percebemos que quando a ponta de prova é incapaz de disponibilizar a informação de que-caminho então será um sistema que possui apenas comportamento tipo corpúsculo. Encontramos limites para um bom (regime quântico) ou um mal (regime clássico) discriminador de que-caminho. Aplicamos nossos resultados a um experimento de complementaridade na borda quântico-clássico onde a ponta de prova transita do regime quântico ao clássico. Mostramos que as imperfeições experimentais influem na conclusão tirada acerca do limite clássico. Em seguida, analisamos as zonas de Ramsey onde nossos resultados fornecem uma simples interpretação. Neste caso, o limite clássico da ponta de prova é alcançado mediante a dinâmica fonte+dissipação que “varre” a informação de que-caminho e a “leva” para um sistema com infinitos graus de liberdade deixando-a completamente indisponível.

ABSTRACT

We investigate aspects, in various contexts, of entanglement and the wave particle duality. We show that the dynamics of tripartite systems which interact via one excitation exchange leads to a direct connection between entanglement sudden death and the appearance of genuine entanglement. We also show that this is valid (not with the same generality) also for a four partite system in the context of the double Jaynes–Cummings model. Moreover we show that the entanglement dynamics in this case can be completely expressed in geometrical terms. Using the same system we show that by performing adequate Zeno like measurements it is possible to freeze, increase, or even revive the initial entanglement. This intriguing result is also associated to entanglement sudden death. As far as wave particle duality and entanglement are concerned we studied a particle going through an interferometer equipped with a which–way device. We quantified the quality of the probe and exhibit its connection with the availability of the which–way information provided by the probe system. When the probe system information is unaccessible only the particle character will be observed. We obtain limits for a good (quantum regime) and for a bad (classical regime) which–way detector (probe system). We used our results to interpret a recent experiment set up to test the quantum–classical border where the probe covers from the quantum to the classical limit. We showed that the experimental errors influenced the conclusion inferred from the data about having achieved the classical limit. Finally we analyze the Ramsey zones from the point of view of our findings and provide for a transparent physical interpretation. In this case the classical limit of the probe system is reached due to a source plus strong dissipation dynamics, which swaps which–way information to a system containing an infinite number of degrees of freedom, making thus sure that any which–way information becomes unavailable.

INTRODUÇÃO

As bases da teoria quântica, tal como entendida hoje, foram estabelecidas por volta de 1925, após um intrincado processo que evoluiu durante o quarto de século que se seguiu ao trabalho de Planck de 1900. Talvez a maneira mais sucinta e precisa de resumir esse processo é considerá-lo como um desvencilhamento progressivo das bases cinemáticas da teoria clássica (posição, momento e observáveis bem definidos, cuja aferição experimental era trivial no sentido de não alterar o observável a ser entendido). As bases da cinemática da teoria clássica são, portanto, extremamente afeitas a conceitos do senso comum, tais como localidade, para citar o mais importante neste contexto. A construção de uma nova cinemática, que se fez necessária para dar conta dos vários e bem sucedidos fenômenos que vieram na contramão do senso comum, envolveu entidades abstratas tais como função de onda, que substituiu a caracterização do estado clássico, e operadores para representarem observáveis. Para exemplificar, podemos pensar que, em contraste com a descrição clássica, a descrição quântica de uma única partícula – mesmo quando perfeitamente conhecida – é dada como uma distribuição de algo que tem carácter de probabilidade e que não possui uma “posição” bem definida. O elemento fundamental que levantou inúmeras controvérsias, debatidas desde o nascimento da teoria quântica até os dias atuais, é o carácter linear do espaço vetorial (dotado de um produto escalar) onde habitam os estados quânticos (funções de onda) e de sua dinâmica correspondente (equação de Schrödinger). Dois dos principais fenômenos da mecânica quântica, a saber: a *complementaridade* e o *emaranhamento*, são frontalmente contraditórios com os conceitos clássicos ou do senso comum e são consequências inexoráveis da linearidade inerente à cinemática e dinâmica quânticas.

A complementaridade ou “Princípio da Complementaridade” foi enunciado por Bohr [1] ao discorrer sobre sistemas atômicos e seu comportamento dual, semelhante a de uma onda ou a de um corpúsculo, dependendo da “pergunta” que se faça à partícula quântica num determinado experimento. Como a partícula quântica pode ter um comportamento dual, a complementaridade de Bohr ficou conhecida como dualidade onda-partícula. Um exemplo que ilustra bem o comportamento dual de uma partícula quântica é o experimento de dupla-fenda quando atravessada por um elétron (partícula quântica), como didaticamente mostra a ref. [2]. Ao se enviar uma coleção de elétrons (um-a-um) percebe-se, em um anteparo após as fendas, um padrão de interferência típico de fenômenos ondulatórios. Contudo, ao tentar medir por qual fenda seguiu o elétron o padrão de interferência desaparece e o que encontramos é um comportamento corpuscular do elétron. Esse efeito foi tema de profundas discussões entre Bohr e Einstein [3] sobre problemas epistemológicos da mecânica quântica. Na abordagem dada em [2, 3], argumenta-se que o processo de se descobrir por qual fenda passou o elétron é uma medida da posição. Logo, como consequência do princípio da indeterminância de Heisenberg, ou princípio da incerteza, o momento de cada elétron

ficaria indeterminado² e isso justificaria o desaparecimento do padrão de interferência. Contudo trabalhos recentes [4, 5] mostram que o desaparecimento das franjas de interferência pode acontecer independente de medida da posição, *i.e.*, podem não ser consequências do princípio da incerteza. Um experimento interessante foi realizado por Bertet *et.al* [6] onde eles modelam um interferômetro Mach–Zehnder equipado com um marcador de caminho em um experimento com átomos de dois níveis e campos em cavidades supercondutoras. Nesse experimento o marcador de caminho não realiza uma medida de posição e pode ser tanto quântico quanto clássico. Um dos resultados deste trabalho é que as franjas de interferência desaparecem completamente quando a partícula que irá interferir está maximamente emaranhada com o marcador de caminho que, neste caso, é quântico.

Quanto ao emaranhamento, foi primeiramente trazido à discussão por Einstein, Podolski e Rosen [7] e desde então não deixou de ser investigado. Sobre o emaranhamento talvez o ideal seja citar, na sua forma traduzida, as primeiras linhas da ref. [8] de Schrödinger³:

Quando dois sistemas, cujos estados conhecemos através de seus representantes (i.e., funções ψ) entram em interação física temporária e depois de um tempo de influência mútua os sistemas voltam a se separar, então eles não podem mais ser descritos da mesma forma que anteriormente, a saber, associando a cada um seu próprio representante. Eu não chamaria a isso “um” mas “o” traço característico da mecânica quântica, que abriga o seu afastamento completo das linhas de pensamento clássicas. Através da interação os dois representantes (funções ψ) se tornaram emaranhados.

Para exemplificar, ou talvez provocar, idéias sobre as possibilidades que a linearidade do espaço vetorial da mecânica quântica pode produzir, Schrödinger [9] propôs o paradoxo do gato afirmando⁴:

²Neste caso, o momento de cada elétron poderia assumir qualquer valor com igual probabilidade.

³Do inglês: *When two systems, of which we know the states by their respective representatives, enter into temporary physical interaction due to known forces between them, and when after a time of mutual influence the systems separate again, then they can no longer be described in the same way as before, viz. by endowing each of them with a representative of its own. I would not call that “one” but rather “the” characteristic trait of quantum mechanics, the one that enforces its entire departure from classical lines of thought. By the interaction the two representatives (or ψ -functions) have become entangled.*

⁴Do inglês: *One can even set up quite ridiculous cases. A cat is penned up in a steel chamber, along with the following diabolical device (which must be secured against direct interference by the cat): in a Geiger counter, there is a tiny bit of radioactive substance, so small, that perhaps in the course of one hour one of the atoms decays, but also, with equal probability, perhaps none; if it happens, the counter tube discharges and through a relay releases a hammer which shatters a small flask of hydrocyanic acid. If one has left this entire system to itself for an hour, one would say that the cat still lives if meanwhile no atom has decayed. The ψ -function of the entire system would express this by having in it the living and the dead cat (pardon the expression) mixed or smeared out in equal parts.*

Pode-se até mesmo criar casos completamente ridículos. Um gato é colocado em uma câmara de aço, junto com o seguinte dispositivo diabólico (que deve ser protegido contra a interferência direta do gato): em um contador Geiger, há um pouco de substância radioativa, tão pouco, que talvez no decorrer de uma hora um dos átomos decaia, mas também, com igual probabilidade, talvez não; se isso acontecer, o contador de descargas do tubo através de um relé libera um martelo e quebra um pequeno frasco de ácido cianídrico. Se alguém tem deixado todo este sistema por si mesmo durante uma hora, pode-se dizer que o gato ainda vive se, entretanto, nenhum átomo decaiu. A função ψ de todo o sistema expressaria isso por ter nela o gato vivo e morto (perdão a expressão) misturada ou espalhada em partes iguais.

Este experimento de pensamento (*gedanken experiment*) deixa evidente a perplexidade que o próprio Schrödinger tinha com relação a teoria que ajudou significativamente a desenvolver. Isso porque a estrutura linear do espaço onde a mecânica quântica acontece permitia, *a priori*, um objeto clássico (o gato) estar emaranhado com um quântico (o átomo que pode decair). Nesta direção, foram relatadas duas experiências (de uma longa série) envolvendo a preparação e observação de fenômenos considerados “exóticos” do tipo de superposições coerentes de estados quânticos (conhecido popularmente como o paradoxo do gato de Schrödinger). Essas experiências foram realizadas em Bolder, Colorado, por Monroe *et.al.* [10] e em Paris, França, por Brune *et.al.* [11]. Essas experiências permitiram mostrar as consequências desse carácter tão “quântico”, a linearidade, provocando a existência de superposições coerentes de dois estados quânticos referentes a um único objeto. Atualmente o emaranhamento vem se mostrando ser um recurso valioso nos processos da informação e computação quântica [12], que vão desde a teleportação de estado quânticos [13] até criptografia quântica [14]. Além disso o emaranhamento assume lugar de destaque nos processos de decoerência de sistemas quânticos e no entendimento da transição quântico-clássico [15, 16].

Desde a criação da mecânica quântica, a complementaridade e o emaranhamento estiveram no centro de acirrados debates envolvendo Bohr, Einstein, de Broglie, Heisenberg e Schrödinger [17]. Essas características são dois dos principais problemas no que se refere à interpretação da mecânica quântica, que, desde a sua concepção, mostrou-se (de acordo com Einstein) uma teoria impressionante no que se refere a explicação dos fenômenos que observamos e previsões nela baseadas. Embora não bem compreendida em seus fundamentos, a mecânica quântica foi utilizada por muitas décadas, durante as quais os debates sobre suas características mais fundamentais acima citadas foram relativamente relegadas a um segundo plano, em parte, pela dificuldade técnica de serem testadas.

Dado o exposto, esperamos ter deixado claro o contexto atual dos problemas de fundamentos da mecânica quântica. Além de seu interesse *per se*, existe grande motivação tecnológica para sua investigação.

Em um primeiro momento, o objetivo desta tese é contribuir para elucidar questões acerca das características do emaranhamento em sistemas (com poucos e muito q-bits) que interagem via um hamiltoniano que troca excitações. No primeiro capítulo encontramos uma ligação direta entre emaranhamento residual e desaparecimento súbito do emaranhamento. Nesta contribuição, estudamos aspectos da distribuição dinâmica de emaranhamento em sistemas compostos de três partes usando dois sistemas físicos que pertencem a uma classe geral de estados para a qual Coffman *et.al.* [18] provaram uma relação de “conservação” de emaranhamento onde há um emaranhamento residual, *i.e.*, um emaranhamento que necessariamente envolve as três partes. Mostramos que, para duas subclasses de sistemas de interesse físico direto, existe uma relação estreita entre o fenômeno conhecido como morte súbita [19] de emaranhamento em uma ou duas das “bipartições” e o surgimento do emaranhamento genuíno. Embora nenhuma relação matemática sólida exista para sistemas de 4 partes, um estudo de modelo nos leva a sugerir que a morte súbita de emaranhamento também em sistemas maiores está relacionada com o aparecimento de emaranhamento genuíno. Uma contribuição seguinte, descrita no segundo capítulo, surgiu como uma consequência do trabalho descrito anteriormente. Na parte que envolve o modelo Jaynes–Cummings [20], estudamos os aspectos geométricos relativos à dinâmica, novamente para a mesma classe de interesse físico geral, e tentamos compreender a morte súbita do emaranhamento de um ponto de vista geométrico. Percebemos que os gráficos entre os emaranhamentos de pares de q-bits quase sempre são cônicas, elipses ou retas (elipse com excentricidade 1). O conjunto de todas as possíveis trajetórias num diagrama que envolve o emaranhamento entre os pares de q-bits, define uma superfície. Ao estender essas idéias encontramos desigualdades que definem uma hipersfera em um espaço onde os eixos de coordenadas são os emaranhamentos entre pares de qubits. Nesse espaço, todas as curvas paramétricas de emaranhamento estarão no interior ou na superfície da hipersfera. Já no terceiro capítulo, estudamos os efeitos e consequências sobre o emaranhamento quando um sistema de prova atua sobre uma das partições realizando medições. Mostramos que é possível “congelar”, aumentar e reviver o emaranhamento via medidas tipo o Efeito Zeno [21] quando o sistema de prova age de maneira conveniente sobre uma das partições do sistema.

Em um segundo momento, como expomos no quarto capítulo, estudamos um problema que ilustra a preocupação demonstrada por Bohr no que se refere à universalidade da teoria quântica, *i.e.*, um carácter universal apenas poderá ser atribuído à teoria quântica se um princípio de complementaridade puder também ser estabelecido para o sistema de prova (medidor). Claramente este não constitui um problema simples uma vez que medir um sistema implica, necessariamente, interagir com o mesmo. Como consequência disso, os dois sistemas ficarão emaranhados. Para compreender esse problema que envolve simultaneamente a complementaridade e emaranhamento, estudamos o problema de uma partícula quântica que atravessa um interferômetro Mach–Zehnder (veja [22] para revisão) equipado com uma ponta de prova capaz de obter e armazenar a informação de por qual caminho seguiu a partícula. Mostramos que a qualidade da ponta de prova está diretamente relacionada como

a quantidade da informação de que-caminho disponível em seus estados. Percebemos que quando a ponta de prova é incapaz de disponibilizar a informação o sistema possui apenas comportamento tipo corpúsculo. De outro modo, quando for maximamente capaz de disponibilizar a informação, então será um autêntico q-bit. Sobre a complementaridade da ponta de prova, construímos, via argumentos físicos, a grandeza $\mathcal{P}_{(2)}$ que quantifica suas características tipo corpúsculo e na sequência encontramos $\mathcal{V}_{(2)}$ que quantifica as características tipo onda. Em complemento, encontramos uma relação de complementaridade entre $\mathcal{P}_{(2)}$ e o emaranhamento $C_{(1,2)}$. Ao analisar $\mathcal{P}_{(2)}$, $\mathcal{V}_{(2)}$ e $C_{(1,2)}$ encontramos limites onde a ponta de prova pode ser considerada com um bom (regime quântico) ou um mal (regime clássico) discriminador de que-caminho. Além disso mostramos que o ingrediente chave para a transição quântico-clássico não é necessariamente a informação gerada, mas sim a sua disponibilidade. Para ilustrar nosso estudo, aplicamos nossos resultados a um experimento de complementaridade na borda quântico-clássico. Nesse experimento [6] a ponta de prova transita do regime quântico ao clássico de maneira suave e o efeito dessa transição é verificada medindo a visibilidade das franjas de interferência atômica. Mostramos que as imperfeições experimentais contribuem para a conclusão de limite clássico em [6]. Em seguida, analisamos as zonas de Ramsey onde nossos resultados fornecem uma simples interpretação. Neste caso, o limite clássico da ponta de prova é alcançado porque a dinâmica da fonte+dissipação sobre o estado do campo no interior da zona de Ramsey retira a informação de que-caminho que estaria disponível no interior da cavidade e a “leva” para um sistema com infinitos graus de liberdade deixando-a completamente indisponível.

No quinto capítulo trazemos uma discussão geral acerca dos nossos resultados. A tese está organizada de uma maneira onde cada capítulo é autoconsciente contendo sua própria introdução, desenvolvimento, conclusão e bibliografia. Organizamos desta maneira por uma questão de escolha e por acreditar que essa foi uma melhor forma de abordar cada assunto.

Bibliografia

- [1] N. Bohr, *Nature*, **121**, 580 (1928).
- [2] R. P. Feynman, R. B. Leighton and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics* (Addison–Wesley, Reading, Massachusetts, Second Printing – 1966), Vol. 3.
- [3] N. Bohr, in *Albert Einstein: Philosopher Scientist* (ed. Schilpp, P. A.) 200–241 (Library of Living Philosophers, Evanston, 1949); reprinted in *Quantum Theory and Measurement* (eds J. A. Wheeler, and W. H. Zurek) 9–49 (Princeton Univ. Press, Princeton, 1983).
- [4] M. Scully, B. G. Englert, and H. Walther, *Nature*, **351**, 111(1991).
- [5] B.–G. Englert , *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 2154(1996).
- [6] P. Bertet, S. Osnaghi, A. Rauschenbeutel, G. Nogues, A. Auffeves, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Nature*, **411**, 166(2002).
- [7] A. Einstein, E. Podolsky, and N. Rosen, *Phys. Review*, **47**, 777 (1935).
- [8] E. Schrödinger, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **31**, 555 (1935).
- [9] E. Schrödinger, *Die Naturwissenschaften*, **23**, 807 (1935); reprinted in *Quantum Theory and Measurement* (eds J. A. Wheeler, and W. H. Zurek) 152–167 (Princeton Univ. Press, Princeton, 1983).
- [10] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King e D. J. Wineland, *Science*, **272**, 1131 (1996).
- [11] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maître, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond e S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 4887 (1996).
- [12] M. Nielsen, and I. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2000).
- [13] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres e W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 1895 (1993).
- [14] C. Bennett e G. Brassard, *Proceedings of IEEE Conference on Computers, Systems, and Signal Processing*, Bangalore, Índia, p. 175 (IEEE, New York, 1984). Disponível em www.research.ibm.com/people/b/bennetc

- [15] S. Haroche, *Phys. Today*, **51**, 36 (1998).
- [16] W. H. Zurek, *Phys. Today*, **44**, 10 (1991).
- [17] A. Einstein, *Proceedings of the Fifth Solvay Conference*, p. 253, Paris, Gauthier–Villars, 1928.
- [18] V. Coffman, J. Kundu, and W. K. Wootters, *Phys. Rev. A*, **61**, 052306(2006).
- [19] T. Yu, and J. Eberly, *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 140404 (2004).
- [20] E. Jaynes, and F. Cummings, *Proc. IEEE*, **51**, 89 (1963).
- [21] P. Facchi e S. Pascazio, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **41** 493001 (2008).
- [22] P. Busch, and C. Shilladay, *Phys. Reports*, **435**, 1-31(2006).

Conteúdo

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	iv
Introdução	v
1 Emaranhamento residual e morte súbita: uma conexão direta	1
1.1 Introdução	1
1.2 Sistemas de três partes: emaranhamento residual <i>vs.</i> MSE	3
1.3 Emaranhamento residual e MSE: uma conjectura	7
1.4 Conclusões	12
2 Geometria na dinâmica de emaranhamento no modelo de Jaynes–Cummings duplo.	15
2.1 Introdução	15
2.2 O modelo físico	17
2.3 Dinâmica de emaranhamento no diagrama $C_{ij} \times C_{kl}$	18
2.3.1 Para o estado inicial $ \psi_0\rangle$	19
2.3.2 Para o estado inicial $ \phi_0\rangle$	24
2.4 A superfície de emaranhamento	28
2.5 hiperesfera da dinâmica de emaranhamento	30
2.6 Conclusões	32
3 Protegendo, aumentando e revivendo o emaranhamento	35
3.1 Introdução	35
3.2 Protegendo o emaranhamento	36
3.3 Aumentando o emaranhamento	38
3.4 Revivendo o emaranhamento	39
3.5 Conclusões	41

4	Características microscópicas e macroscópicas de uma ponta de prova	44
4.1	Introdução	44
4.2	A relação de complementaridade	47
4.3	O Mach–Zehnder equipado com uma ponta de prova	48
4.3.1	Caracterizando a ponta de prova	50
4.3.2	A complementaridade do q-bit	52
4.3.3	A complementaridade da ponta de prova	53
4.3.4	Uma análise sobre a acessibilidade da informação: o comportamento quântico e clássico da ponta de prova	57
4.4	Um experimento de complementaridade com um interferômetro na fronteira quântico–clássico	58
4.5	A Zona de Ramsey	59
4.6	Conclusões	62
5	Discussão Geral	66

Lista de Figuras

1.1	O sistema ABC está inicialmente no estado puro $ \psi_0\rangle = AB\rangle C\rangle$, com A e B inicialmente emaranhados e fatorados de C . Então uma interação unitária entre A e C é iniciada e haverá uma dinâmica de emaranhamento no sistema tripartite que deverá obedecer a eq.(1.1).	4
1.2	Gráficos para o estado (1.12) com $\beta = 3/\sqrt{10}$ e $\alpha = 1/\sqrt{10}$. Figura da esquerda: Concorrências entre as bipartição e entre A e BC . Em azul C_{AB} , em vermelho C_{AC} , em verde C_{BC} e em preto $C_{A(BC)}$. Figura da direita: Concorrências quadráticas entre A e B , A e C , entre A e BC e do emaranhamento residual. Em azul C_{AB}^2 , em vermelho C_{AC}^2 , em preto $C_{A(BC)}^2$ e em verde τ_{ABC}	6
1.3	Gráficos para o estado (1.19) com $\beta = 3/\sqrt{10}$ e $\alpha = 1/\sqrt{10}$. Figura da esquerda: Concorrências das bipartições AB e AC e entre A e BC . Em azul C_{AB} , em vermelho C_{AC} e em preto $C_{A(BC)}$. Figura da direita: Concorrências quadráticas entre A e B , A e C , entre A e BC e do emaranhamento residual. Em azul C_{AB}^2 , em vermelho C_{AC}^2 , em preto $C_{A(BC)}^2$ e em verde τ_{ABC}	7
1.4	A partição AB compartilha C_0 de emaranhamento entre os seus constituinte e está fatorada de CD . A interage localmente com C via o MJC e o mesmo para B e D . Quando a interações nas partições AC e BD for estabelecida, haverá uma distribuição dinâmica do emaranhamento em todo o sistema.	8

- 1.5 Aqui utilizamos o vínculo $|\xi(t)|^2 + |\chi(t)|^2 = 1$ para escrever as concorrências (1.46 – 1.54) em função de $z = |\chi(t)|$ que está limitado no intervalo $0 \leq z \leq 1$ e fizemos $\beta = 101\sqrt{5}/250$ e $\alpha = 11\sqrt{95}/250$ no estado (1.45). **Figura da esquerda:** Em azul $C_{A(BCD)}$, em vermelho C_{AC} , em preto C_{AD} e em verde C_{AB} . Apenas nas partições AB e AD ocorre MSE. Quando $1/2 - \sqrt{1/4 - |\alpha/\beta|^2} < |\chi(t)|^2 < 1/2 + \sqrt{1/4 - |\alpha/\beta|^2}$, com $|\beta| > 2|\alpha|$, teremos $C_{AD} = 0$. Já quando $|\alpha/\beta| < |\chi(t)|^2$ teremos $C_{AB} = 0$. Desta maneira, quando $|\alpha/\beta| < |\chi(t)|^2 < 1/2 + \sqrt{1/4 - |\alpha/\beta|^2}$ teremos $C_{AB} = 0$ e $C_{AD} = 0$ ao mesmo tempo. **Figura da direita:** Em azul $C_{A(BCD)}^2$ que terá um comportamento suave quando cresce ou decresce, porque representa todo o emaranhamento que A possui com BCD incluindo o emaranhamento vindo da interação. Em vermelho temos $C_{AB}^2 + C_{AC}^2 + C_{AD}^2$ que inicialmente decresce devido a diminuição seguida de MSE nas partições AB e AD . Em seguida cresce porque o emaranhamento fornecido pela interação na partição AC torna-se significativa. E em preto temos E_{ABCD} onde é fácil observar que seu pico está deslocado para a esquerda dos outros gráficos. Isso se dá quando o emaranhamento entre AB e AD estão desaparecendo e o emaranhamento em AC ainda não se tornou significativa. Após a MSE em AB e AD o emaranhamento da dinâmica em AC torna-se saliente e então a curva de E_{ABCD} volta a diminuir. 11
- 2.1 Uma figura esquemática do JCD. Na partição da esquerda (direita) há o átomo “A” (“B”) interagindo com a cavidade “a” (“b”), respectivamente, e não há interação entre as partições “Aa” e “Bb”. 17
- 2.2 Gráfico da reta $C_{AB} \times C_{ab}$ com $\alpha = \pi/4, \pi/6, \pi/8, \pi/10$ e $\pi/12$ para as cores preta, azul, vermelho, marrom e verde, respectivamente. 19
- 2.3 Gráfico da reta $C_{Aa} \times C_{Bb}$ com $\alpha = \pi/4, \pi/6, \pi/8, \pi/10$ e $\pi/12$ para as cores preta, azul, vermelho, marrom e verde, respectivamente. A curva fina e tracejada na cor violeta é a reta $C_{Aa} + C_{Bb} = 1$ 20
- 2.4 Gráfico da semi-elipse $C_{AB(ab)} \times C_{Bb}$ com $\alpha = \pi/4, \pi/6, \pi/8, \pi/10$ e $\pi/12$ para as cores preta, azul, vermelho, marrom e verde, respectivamente. 20
- 2.5 Gráfico da semi-elipse $C_{AB(ab)} \times C_{Aa}$ com $\alpha = \pi/4, \pi/6, \pi/8, \pi/10$ e $\pi/12$ para as cores preta, azul, vermelho, marrom e verde, respectivamente. A curva fina e tracejada na cor violeta é a semi-circunferência $C_{AB(ab)}^2 + C_{Aa}^2 = 1$ 21
- 2.6 Gráfico da semi-circunferência $C_{AB(ab)} \times C_{aB(Ab)}$ com $\alpha = \pi/4, \pi/6, \pi/8, \pi/10$ e $\pi/12$ para as cores preta, azul, vermelho, marrom e verde, respectivamente. 21
- 2.7 Gráfico da reta $C_{aB(Ab)} \times C_{Aa}$ com $\alpha = \pi/4, \pi/6, \pi/8, \pi/10$ e $\pi/12$ para as cores preta, azul, vermelho, marrom e verde, respectivamente. A curva fina e tracejada na cor violeta é o círculo $(2C_{Aa} - 1)^2 + (2C_{aB(Ab)})^2 = 1$ 22
- 2.8 Gráfico da reta $C_{Ab(aB)} \times C_{Bb}$ com $\alpha = \pi/4, \pi/6, \pi/8, \pi/10$ e $\pi/12$ para as cores preta, azul, vermelho, marrom e verde, respectivamente. A curva fina e tracejada na cor violeta é o círculo $(2C_{Bb} - 1)^2 + (2C_{Ab(aB)})^2 = 1$ 22

2.9	Gráfico da parábola $C_{ab} \times C_{AB}$ com $\alpha = 3\pi/10, \pi/4, \pi/5$ e $\pi/6$ para as cores azul, vermelho, marrom e verde, respectivamente. Para $0 < \alpha < \arctan(1/2)$ não haverá gráfico neste diagrama.	25
2.10	Em vermelho (azul) o gráfico de C_{AB} (C_{ab}), respectivamente, para $\alpha = \arctan(1/2)$	26
2.11	Em preto (azul) o gráfico de C_{AB} (C_{ab}) para $\alpha = \pi/9 < \arctan(1/2)$, respectivamente. Já em verde (vermelho) o gráfico de C_{AB} (C_{ab}) para $\alpha = \pi/5 > \arctan(1/2)$, respectivamente.	26
2.12	Gráfico da elipse $C_{Aa(Bb)} \times (C_{AB} - C_{ab})$ com $\alpha = \pi/4, \pi/6, \pi/8, \pi/10$ e $\pi/12$ para as cores preto, azul, vermelho, marrom e verde, respectivamente.	27
2.13	Gráfico da parábola $C_{Aa(Bb)} \times (C_{AB} + C_{ab})$ com $\alpha = 3\pi/10, \pi/4, \pi/6, \arctan(1/2)$ e $\arctan(1/3)$ para as cores preto, azul, vermelho, marrom e verde, respectivamente.	28
2.14	Gráfico da parábola $C_{Aa(Bb)} \times C_{Ab(aB)}$ com $\alpha = \pi/3, 3\pi/10, \pi/4, \pi/6, \arctan(1/2)$ e $\arctan(1/3)$ para as cores preto, azul, vermelho, marrom, verde e laranja, respectivamente.	29
2.15	Gráfico do diagrama $C_{AB} \times C_{Aa} \times C_{Ab}$ para o átomo A e estado inicial (2.2). Da curva superior para a inferior, temos $\alpha = \pi/4, \pi/6, \pi/8, \pi/10$ e $\pi/12$	29
2.16	Superfície de emaranhamento para o átomo A no diagrama $C_{AB} \times C_{Aa} \times C_{Ab}$ para o estado inicial (2.2).	30
2.17	Gráfico do diagrama $C_{AB} \times C_{Aa} \times C_{Ab}$ para o átomo A e estado inicial (2.8), com $\alpha = \pi/4, \pi/6, \pi/8, \pi/10$ e $\pi/12$	30
2.18	Superfície de emaranhamento para o átomo A no diagrama $C_{AB} \times C_{Aa} \times C_{Ab}$ para o estado inicial (2.8).	31
3.1	Concorrência C_N^- (vermelho) e C_N^+ (azul) como uma função de N para $\tau = \pi/2gN$. Aqui fizemos $C_0 = 0.8$	38
3.2	Concorrência sem medições (C_f^+) como uma função de gt e C_0 para estados iniciais $(\alpha_0 1, 1\rangle_{AB} + \beta_0 0, 0\rangle_{AB}) 00\rangle_{ab}$ com $ \alpha_0 > \beta_0 $	40
3.3	Concorrência (C_1^+) após uma simples medida sobre ab com resultado nulo, como uma função de $g\tau$ e C_0 para estados iniciais $(\alpha_0 1, 1\rangle_{AB} + \beta_0 0, 0\rangle_{AB}) 00\rangle_{ab}$ com $ \alpha_0 > \beta_0 $	40
3.4	Em vermelho o tempo τ (3.13) de se realizar a primeira medida para obter emaranhamento máximo na partição AB . Em azul o tempo t_{sd} (3.14) que acontece a morte súbita do emaranhamento na partição AB . Podemos observar que em $C_0 = 4/5$ temos $\tau = t_{sd}$, na região $C_0 < 4/5$ temos $\tau > t_{sd}$ e quando $C_0 > 4/5$ temos $\tau < t_{sd}$. Pode-se então perceber que quando $ \alpha_0 > \beta_0 $ e $C_0 < 4/5$, ao medir ab no tempo τ dado pela equação (3.13) o emaranhamento de AB será “trazido à vida” e com valor máximo.	41

- 4.1 REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DE UM INTERFERÔMETRO DE MACH–ZEHNDER: Uma partícula é enviada para atravessar o interferômetro que está equipado com uma ponta de prova. De início um divisor de feixes “distribui” a partícula de entrada em duas alternativas possíveis. Após o primeiro divisor de feixes a partícula interage e se emaranha com uma ponta de prova. Uma diferença de fase Φ entre os caminhos é considerada. Depois, a partícula encontra um segundo divisor de feixes que “mistura” as alternativas de “caminhos” e, em seguida, emerge do interferômetro sendo medida no detector D 49
- 4.2 CARACTERÍSTICA DA PONTA DE PROVA: A curva preta é $\mathcal{V}_{(2)}$, a vermelha é $\mathcal{P}_{(2)}$ e a azul é $C_{(1,2)}$. As linhas verticais localizam os pontos $\mathcal{D} = 1/\sqrt{2}$, $\mathcal{D} = 2/(\sqrt{5} + 1)$ e $\mathcal{D} \approx 0.42878$. Nós assumimos que a ponta de prova está nos domínios da física clássica quando suas características corpusculares tornam-se dominantes $\mathcal{P}_{(2)} \geq C_{(1,2)}$ fornecendo $0 \leq \mathcal{D} \leq 2/(\sqrt{5} + 1)$. Contudo, uma forte condição pode ser tomada quando $\mathcal{P}_{(2)} \geq \mathcal{V}_{(2)} + C_{(1,2)}$ produzindo $0 \leq \mathcal{D} \lesssim 0.42878$. É interessante notar que na região onde a ponta de prova está nos domínios da física clássica, a visibilidade $\mathcal{V}_{(1)}$ da partícula sofre uma variação de $\Delta\mathcal{V}_{(1)} \approx 0.15$ que é significativa. Entretanto, em aparatos experimentais que possam reproduzir esses resultados existirão imperfeições experimentais η e a variação resultante das medidas será $\Delta\bar{\mathcal{V}}_{(1)} = \eta\Delta\mathcal{V}_{(1)}$. Dependendo do valor de η a variação $\Delta\bar{\mathcal{V}}_{(1)}$ poderá estar contido entre as barras de erros das medidas. Isso ocultará os efeitos da informação de *que-caminho* armazenada na ponta de prova e reforçará a idéia do seu comportamento clássico. 57

- 4.3 **Transcrição da legenda original em [11]. i) Figura da esquerda:** Mach–Zehnder and Ramsey versions of Bohr’s experiment. **a**, In the Mach–Zehnder, the particle trajectory is separated by beam splitter B_1 into paths a and b , folded by mirrors M and M' and recombined by beam splitter B_2 into detector D . The other output port (dashed arrow) is not used. A dephasing element tunes the relative phase ϕ between the paths. B_1 rotates around an axis perpendicular to the interferometer plane, crossing it at the centre O of the B_1MB_2M' square. A spring provides a restoring force. The moving assembly is initially in its ground state of motion. If B_1 has a large mass, fringes are visible (dotted lines in inset). If B_1 is microscopic, its recoil records the reflection of the particle into path b , washing out the fringes (solid lines). **b**, Ramsey set-up. A Rydberg atom’s state is split by microwave pulse R_1 into two energy levels e and g , then recombined by pulse R_2 downstream, before being detected by field-ionization in D . We use a mixed representation combining real space with the space of the atomic energy states. The beam-splitting effect, a spatial separation in the Mach–Zehnder, is now an internal mixture of states. Interferences are obtained in the probability for finding the atom in g . A field pulse between R_1 and R_2 tunes the relative phase ϕ of the interfering amplitudes (Stark effect). If the R_1 field, stored in a long-damping-time cavity C , is macroscopic, Ramsey fringes are visible (dotted line in the inset). If the R_1 field is microscopic, its photon number records information about the atom’s path, suppressing the interference (solid line). The gaussian mode of the cavity field is represented schematically; the part where the atom is resonant is shaded. The cavity mode waist and the R_1 – R_2 distance are exaggerated. **ii) Figura da direita:** From quantum to classical interferometer. **a**, Ramsey interference signal recorded for various mean photon numbers N in the R_1 pulse. The progressive evolution from the quantum to the classical beam–splitter case is clearly observed. **b**, Fringe contrast as a function of the mean photon number N in R_1 . The points are experimental. The line represents the theoretical variation of the modulus of the beam–splitter final states scalar product, multiplied by a fixed factor η that accounts for interferometer imperfections. 60
- 4.4 Gráficos das nossas expressões teóricas em função do número médio de fótons N no interior da primeira cavidade. PARA O ÁTOMO: a curva com círculos é a visibilidade e a com quadrados a concorrência. A reta vertical localiza o ponto $\mathcal{D} = 1/\sqrt{2}$. PARA O CAMPO: a curva com círculos (quadrados) é a visibilidade (concorrência). Já a curva lisa é a predictibilidade. As retas verticais localizam os pontos $\mathcal{D} = 1/\sqrt{2}$ e $\mathcal{D} = 2/(1 + \sqrt{5})$ 61

Capítulo 1

Emaranhamento residual e morte súbita: uma conexão direta

Neste capítulo nós mostramos que para uma classe particular de estados iniciais de um sistema de três partes, $|AB\rangle|C\rangle$ onde $|AB\rangle$ é um estado emaranhado com interação unitária entre AC existe emaranhamento residual se morte súbita de emaranhamento ocorre em alguma partição. Contudo, para sistemas de quatro partes de estado $|AB\rangle|C\rangle|D\rangle$, o aparecimento de emaranhamento residual não está condicionado à morte súbita do emaranhamento. Nós só podemos dizer que se a morte súbita do emaranhamento ocorre, em alguma partição, certamente haverá emaranhamento residual.

1.1 Introdução

Em um trabalho seminal, Einstein, Podolsky, and Rosen [1] levantaram questões intrigantes onde o emaranhamento assumia uma posição de destaque. Com esse trabalho, os autores trouxeram pela primeira vez o emaranhamento para o debate científico e desde então esta propriedade não deixou de ser investigada [2]. Atualmente o emaranhamento vem despertando grande interesse da comunidade científica, pois tem se mostrado um valioso recurso nos processos da informação e computação quântica [3]. A menor quantidade de informação quântica é o q-bit¹ e são “codificados” no estado físico de um sistema quântico simples denominado “portador” de q-bit. No âmbito da óptica quântica os portadores de q-bits, em geral, são átomos e o campo eletromagnético (CEM). Porém, é de costume nos artigos que tratam do assunto chamar de q-bit o próprio portador. Aqui neste texto não fugiremos da “regra” e daqui para diantes chamaremos de q-bit o próprio portador.

De maneira geral pode-se dizer que a informação quântica preocupa-se com as características, propriedades e armazenamento da quantidade de *informação* codificada em sistemas quânticos. Já a computação quântica estuda as possibilidades de processá-la, explorando as propriedades quânticas de superposição e emaranhamento, objetivando a realização

¹Abreviação e tradução da expressão em inglês *quantum bit*.

de tarefas consideradas impossíveis por meios clássicos [3, 4]. Mas, a realização destas tarefas se processa via manipulação e interação de uma dada coleção de q -bits. Em vista disso, para a informação e computação quântica, torna-se necessário conhecer as características ou propriedades do emaranhamento presente numa dada coleção de q -bits e, além disso, estudar o modo como tal emaranhamento pode estar distribuído entre as partições da coleção. Desta maneira, o estudo da dinâmica e distribuição do emaranhamento em sistemas sejam constituídos átomos e CEM mostra-se como uma ferramenta importante na contribuição para o avanço da informação quântica e, conseqüentemente, no entendimento de características que habitam os fundamentos da mecânica quântica.

Sobre a distribuição de emaranhamento, Coffman *et. al.* [5] estudaram um sistema de três q -bits, chamados de A , B e C , onde existe um emaranhamento distribuído em todo o sistema. Nesse trabalho eles mostraram que o emaranhamento entre A e BC se distribui em três quantidades, *i.e.*: i) entre A com B ; ii) entre A com C ; iii) e uma quantidade entre A e BC que não pode ser contabilizada pelo emaranhamento de A com B e C separadamente. A esta ultima quantidade de emaranhamento eles chamaram de *emaranhamento residual*. Este resultado para sistemas de três q -bits é ainda hoje o mais geral disponível para o propósito de compreender e quantificar a distribuição de emaranhamento. Enquanto isso, recentemente, Życzkowski *et. al.* [6], ao considerar uma dinâmica unitária entre dois q -bits onde um deles é submetido a ação periódica de um meio ambiente, mostraram que o emaranhamento entre os q -bits pode desaparecer subitamente. Seguindo na mesma direção, Yu *et. al.* [7], ao estudarem dois q -bits inicialmente emaranhados que podem decair livremente, mostraram que a decoerência causada por flutuações do vácuo afeta as coerências locais e o emaranhamento de formas diferentes. Como conseqüência, as coerências locais desaparecem assintoticamente e o emaranhamento subitamente em tempo finito. Na sequência, Almeida *et. al.* [8], num experimento de óptica usando fótons gêmeos, simularam a dinâmica de um q -bit que pode decair livremente e “mediram” os resultados teóricos de [7], atestando que as coerências locais decaem assintoticamente e o emaranhamento pode desaparecer em tempo finito. desde então, essa característica dinâmica de desaparecimento súbito do emaranhamento ficou conhecida como *morte súbita de emaranhamento* [6, 7, 8, 9] (daqui para frente chamaremos de MSE). A MSE pode resultar de dinâmicas não unitárias como nas referências [6] e [7] ou também de dinâmicas unitárias, como por exemplo no caso das refs. [10, 11, 12] onde dois átomos inicialmente emaranhados interagem localmente com um CEM no interior de cavidades via o modelo de Jaynes–Cummings [13] (daqui para frente chamaremos de MJC). Neste mesmo modelo de evolução unitária, Sainz *et. al.* [14] encontraram um emaranhamento invariante sob evolução e concluem que o emaranhamento se distribui sobre todos os graus de liberdade do sistema que se emaranham através da interação. Este resultado indica que as correlações quânticas presentes em sistemas fechados devem se conservar havendo uma redistribuição de emaranhamento a medida que o sistema evolui. Ou seja, o emaranhamento pode migrar de uma partição para outra conservando o emaranhamento inicial fornecido ao sistema. De imediato surge a seguinte questão: em sistemas que evoluem unitariamente, qual é a relação

entre o emaranhamento residual e a MSE? A proposta do presente trabalho é responder esta pergunta. Nós mostramos que o emaranhamento residual está intimamente relacionado à MSE para uma classe de estados de interesse à informação e computação quântica. Estudos mais gerais acerca da distribuição de emaranhamento para sistemas muitas partes podem ser encontradas nas refs. [15, 16], mas nenhum trata a questão do emaranhamento genuíno ou MSE.

1.2 Sistemas de três partes: emaranhamento residual *vs.* MSE

Considere um sistema de três q-bits A , B e C onde há emaranhamento distribuído em todo o sistema. Coffman *et. al.* [5] mostraram que existe emaranhamento residual que não pode ser contabilizado quando se particiona o sistema, *i.e.*, o emaranhamento de A com BC se manifesta de três formas: *i)* A emaranhando com B ; *ii)* A emaranhado com C ; e *iii)* existe um emaranhamento em ABC que não pode ser contabilizado pelo emaranhamento de A com B e C separadamente. Ou seja:

$$C_{A(BC)}^2 = C_{AB}^2 + C_{AC}^2 + \tau_{ABC} \quad (1.1)$$

onde τ_{ABC} é o emaranhamento residual tripartite e $C_{i(j)}$ é a concorrência entre as partições i e j . Além disso eles perceberam que τ_{ABC} é invariante e uma equação idêntica a (1.1) pode ser mostrada ao se estudar o emaranhamento de B ou C com as outras partições. Para chegar a esse resultado os autores consideraram o estado puro arbitrário

$$|\xi\rangle = \sum_{ijk=0}^1 a_{ijk} |i\rangle|j\rangle|k\rangle \quad , \quad (1.2)$$

no espaço de hilbert $2 \otimes 2 \otimes 2$, e mediante a definição de concorrência [17, 18] mostraram a igualdade (1.1). Este resultado tem um carácter geral e todos os sistemas físicos puros emaranhados que possam ser mapeados em um problema de três q-bits deverão obedecer (1.1).

Agora vamos considerar um sistema de três q-bits A , B e C num estado inicial $|\psi_0\rangle = |AB\rangle \otimes |C\rangle$ onde A e B estão emaranhados e com concorrência inicial C_0 , como mostra a Figura 1.1. Neste caso, por (1.1) temos no instante inicial que

$$C_{A(BC)} = C_{AB} = C_0 \quad (1.3)$$

e

$$C_{AC} = \tau_{ABC} = 0 \quad . \quad (1.4)$$

Considere também que os q-bits A e C possam interagir unitariamente. Ao “ligar” a interação A e C irão se emaranhar dinamicamente e A ficará menos emaranhado com B , como

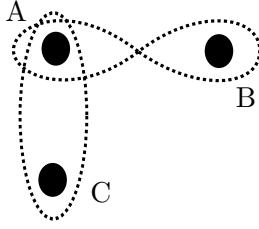


Figura 1.1: O sistema ABC está inicialmente no estado puro $|\psi_0\rangle = |AB\rangle|C\rangle$, com A e B inicialmente emaranhados e fatorados de C . Então uma interação unitária entre A e C é iniciada e haverá uma dinâmica de emaranhamento no sistema tripartite que deverá obedecer a eq.(1.1).

consequência da monogamia de emaranhamento [19]. Durante a evolução temporal as partições AB e C interagem e conforme C_{AB} decresça (cresça) em função do tempo teremos C_{AC} e C_{BC} aumentando (diminuindo), respectivamente. Este é um exemplo típico onde a eq. (1.1) precisa ser obedecida ao longo de toda a dinâmica. Portanto, é possível que, além de C_{AB} , C_{AC} e C_{BC} , apareça um τ_{ABC} em algum momento da evolução. Assim, para sistemas onde a partição AC admite interação entre seus constituintes e compartilha C_0 de emaranhamento com B , temos dois casos para a dinâmica do emaranhamento: *i*) não existe MSE; *ii*) existe MSE em pelo menos uma das partições. No primeiro caso (*i*), com troca de excitação entre A e C , Chan *te. al.* [11] mostrou que

$$C_{AB}^2 + C_{BC}^2 = C_0 \quad . \quad (1.5)$$

Além deste resultado temos que [5]

$$C_{B(AC)}^2 = C_{AB}^2 + C_{BC}^2 + \tau_{ABC} \quad (1.6)$$

deve ser obedecida. Logo temos

$$C_{B(AC)}^2 = C_0^2 + \tau_{ABC} \quad . \quad (1.7)$$

Desde que por hipótese não há MSE e B não interage com a partição AC , então teremos $C_{B(AC)} = C_0$ durante todo o tempo e $\tau_{ABC} = 0$. Agora, o que acontece quando uma das partições sofre MSE? No segundo caso (*ii*), dado a interação entre A e C o emaranhamento C_{AC} não desaparece subitamente. Por isso, a MSE apenas pode ocorrer nas partições AB e BC . Vamos considerar primeiro que durante um intervalo de tempo a MSE ocorra na partição AB . Durante a janela de tempo em que $C_{AB} = 0$, a eq.(1.1) fornece

$$C_{A(CB)}^2 = C_{AC}^2 + \tau_{ABC} \quad . \quad (1.8)$$

Contudo, C perceberá A no estado de mistura

$$\rho_A = \text{tr}_B(|AB\rangle\langle AB|) \quad (1.9)$$

e sua capacidade de emaranhar com A dependerá de como A está emaranhado com B e também do tipo de interação. Sabendo que $C_{A(BC)} \geq C_{AC}$ [5] durante toda a evolução, no

intervalo de tempo em que $C_{AB} = 0$ deveremos ter $\tau_{ABC} \neq 0$, caso contrário as eqs. (1.1) e (1.8) não seriam satisfeitas. A mesma análise é válida quando MSE ocorre na partição BC , quando analisamos (1.6). O caso em que há uma janela de tempo onde simultaneamente ocorre MSE nas partições AB e BC torna-se trivial, ao observar (1.6) que da $C_{B(AC)} = \tau_{ABC}$.

As considerações acima não deixam dúvidas de que o aparecimento de MSE em um sistema de três q-bits tem uma conexão muito íntima com o emaranhamento residual.

Um exemplo concreto é o sistema tripartite estudado na ref. [12], que consiste de dois átomos (A e B) e uma cavidade (C). Apenas um dos átomos, por exemplo o átomo A , interage com a cavidade C . O outro átomo B cumpre o único propósito de permitir um estado emaranhado inicial com A . A interação entre A e C é ressonante e via o MJC que possui hamiltoniano de interação dado por

$$H_I = \hbar g(c^\dagger \sigma_-^A + c \sigma_+^A) \quad , \quad (1.10)$$

onde g é uma constante de acoplamento, c (c^\dagger) é o operador que aniquila (cria) uma excitação em C e $\sigma_-^A = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|$ ($\sigma_+^A = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|$) desexcita (excita) o estado atômico, respectivamente. Considere o estado inicial dos átomos dado por

$$|AB\rangle_\psi = \beta |\uparrow\downarrow\rangle + \alpha |\downarrow\uparrow\rangle \quad (1.11)$$

e a cavidade C no estado de vácuo $|C\rangle_0 = |0\rangle$, com $|\beta|^2 + |\alpha|^2 = 1$. Para esse estado inicial $|AB\rangle_\psi|C\rangle_0$ o estado evoluído será

$$|ABC\rangle_t^{(0)} = [\beta \cos(gt) |\uparrow\downarrow\rangle + \alpha |\downarrow\uparrow\rangle] |0\rangle - i\beta \sin(gt) |\downarrow\downarrow\rangle |1\rangle \quad . \quad (1.12)$$

Para quantificar o emaranhamento entre A e BC do estado acima, usaremos a concorrência na sua forma $2\sqrt{\det \rho_A}$ [5], onde $\rho_A = \text{tr}_{BC}(|ABC\rangle\langle ABC|_t)$. Já para o emaranhamento entre A e B e entre A e C usaremos a concorrência que é definida nas refs. [17, 18] como

$$C_\rho = \max\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\} \quad (1.13)$$

onde os λ_i 's são os autovalores da matriz $\rho(\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$ organizada na forma decrescente, σ_y sendo uma das matrizes de Pauli e ρ^* o complexo conjugado de ρ . Para o estado (1.12) as concorrências das bipartições serão

$$C_{AB} = C_0 |\cos gt| \quad (1.14)$$

$$C_{AC} = |\beta|^2 |\sin 2gt| \quad (1.15)$$

$$C_{BC} = C_0 |\sin gt| \quad (1.16)$$

onde $C_0 = 2|\beta\alpha|$ é o emaranhamento inicial na partição AB . Ao observar as eq. (1.14 – 1.16) fica claro que não há MSE em nenhuma partição, como pode ser visto na Figura 1.2. Pode-se perceber também que $C_{AB}^2 + C_{BC}^2 = C_0^2$ e, por (1.6), devemos ter $\tau_{ABC} = 0$ como discutido acima. Já o emaranhamento entre A e BC será

$$C_{A(BC)} = 2\sqrt{|\beta|^2 \cos^2 gt (|\alpha|^2 + |\beta|^2 \sin^2 gt)} \quad (1.17)$$

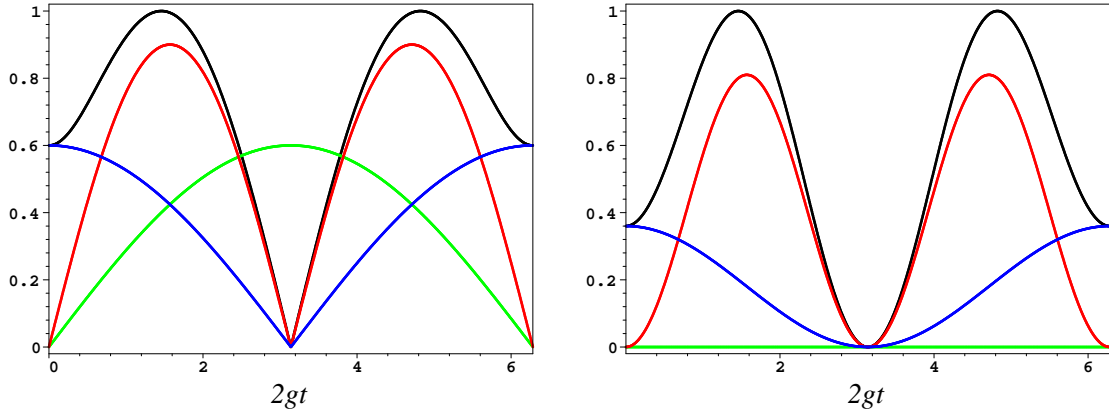


Figura 1.2: Gráficos para o estado (1.12) com $\beta = 3/\sqrt{10}$ e $\alpha = 1/\sqrt{10}$. **Figura da esquerda:** Concorrências entre as bipartição e entre A e BC . Em azul C_{AB} , em vermelho C_{AC} , em verde C_{BC} e em preto $C_{A(BC)}$. **Figura da direita:** Concorrências quadráticas entre A e B , A e C , entre A e BC e do emaranhamento residual. Em azul C_{AB}^2 , em vermelho C_{AC}^2 , em preto $C_{A(BC)}^2$ e em verde τ_{ABC} .

que pode ser reescrito como

$$C_{A(BC)} = \sqrt{C_{AB}^2 + C_{AC}^2} \quad (1.18)$$

deixando claro, ao relembrar (1.1), que $\tau_{ABC} = 0$.

Em seguida, nós consideramos um estado inicial para o qual a dinâmica leva a MSE em alguma partição. Isso acontecerá, *e.g.*, se a cavidade contém uma excitação inicialmente, $|C\rangle_1 = |1\rangle$. Para o estado inicial $|AB\rangle_\psi |C\rangle_1$ o estado evoluído será

$$|ABC\rangle_t^{(1)} = [\beta \cos(\sqrt{2}gt) |\uparrow\downarrow\rangle + \alpha \cos(gt) |\downarrow\uparrow\rangle] |1\rangle - i[\alpha \sin(gt) |\uparrow\uparrow\rangle |0\rangle + \beta \sin(\sqrt{2}gt) |\downarrow\downarrow\rangle |2\rangle] \quad (1.19)$$

Para este estado inicial (1.19) a concorrência das bipartições serão

$$C_{AB} = C_0 \max\{0, |\cos(gt) \cos(\sqrt{2}gt)| - |\sin(gt) \sin(\sqrt{2}gt)|\} \quad (1.20)$$

$$C_{AC} = \left| |\alpha|^2 |\sin(2gt)| - |\beta|^2 |\sin(2\sqrt{2}gt)| \right| \quad (1.21)$$

$$C_{BC} = C_0 \left| |\sin(gt) \cos(\sqrt{2}gt)| - |\cos(gt) \sin(\sqrt{2}gt)| \right| \quad (1.22)$$

havendo desaparecimento abrupto do emaranhamento na partição AB , como observado na Figura 1.3. Pode-se notar que B não interage com C , mas eles se emaranham mediante a interação na partição AC . No presente caso, o entrelaçamento entre A e BC será

$$C_{A(BC)} = 2\sqrt{\left(|\alpha|^2 \sin^2(gt) + |\beta|^2 \cos^2(\sqrt{2}gt)\right) \left(|\alpha|^2 \cos^2(gt) + |\beta|^2 \sin^2(\sqrt{2}gt)\right)} \quad (1.23)$$

e que, ao observar as eqs. (1.20 – 1.22), percebemos não é possível escrever a eq. (1.23) na forma (1.18). Com isso teremos $C_{A(BC)}^2 \geq C_{AB}^2 + C_{AC}^2$ e

$$\tau_{ABC} \geq 0 \quad (1.24)$$

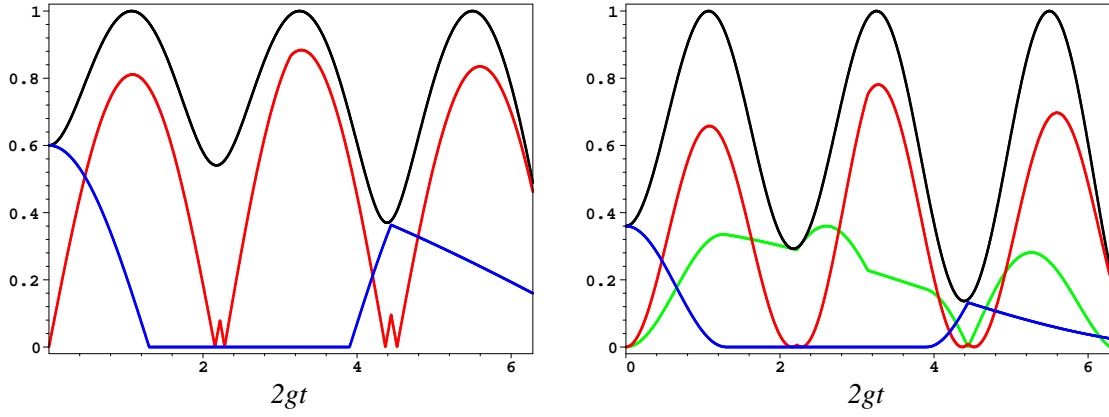


Figura 1.3: Gráficos para o estado (1.19) com $\beta = 3/\sqrt{10}$ e $\alpha = 1/\sqrt{10}$. **Figura da esquerda:** Concorrências das bipartições AB e AC e entre A e BC . Em azul C_{AB} , em vermelho C_{AC} e em preto $C_{A(BC)}$. **Figura da direita:** Concorrências quadráticas entre A e B , A e C , entre A e BC e do emaranhamento residual. Em azul C_{AB}^2 , em vermelho C_{AC}^2 , em preto $C_{A(BC)}^2$ e em verde τ_{ABC} .

A desigualdade acima reflete o principal objetivo do presente trabalho. Ao observar a Figura 1.3, podemos notar que o emaranhamento residual existe mesmo antes da MSE entre A e B . Nossa interpretação deste resultado é a que segue: as correlações quânticas entre A e B desaparecem por um intervalo de tempo e são distribuídas em todo o sistema contribuindo para o emaranhamento residual.

Podemos também considerar o estado inicial para AB como sendo

$$|AB\rangle_\phi = \beta|\uparrow\uparrow\rangle + \alpha|\downarrow\downarrow\rangle \quad (1.25)$$

e a cavidade C no vácuo ou com uma excitação. Porém os resultados são os mesmo que encontramos para $|AB\rangle_\psi$.

1.3 Emaranhamento residual e MSE: uma conjectura

Vamos considerar agora um sistema de quatro partes A , B , C e D onde inicialmente existe um emaranhamento C_0 na partição AB . Considere também que A interage localmente com C e B com D , como mostra a Figura 2.4. Mais concretamente, nós consideramos dois átomos A e B compartilhando um emaranhamento C_0 e a partição C consistindo de N osciladores no vácuo, o mesmo para D . A interação local entre A e C será descrita pelo hamiltoniano

$$H_{AC} = \frac{\hbar\omega_A}{2}\sigma_z^A + \hbar\sum_{k=1}^N\omega_k c_k^\dagger c_k + \hbar\sum_{k=1}^N g_k (c_k^\dagger \sigma_-^A + c_k \sigma_+^A) \quad , \quad (1.26)$$

onde, como antes, g_k é uma constante de acoplamento entre o átomo e o k -ésimo oscilador de C , c_k (c_k^\dagger) é o operador que aniquila (cria) uma excitação no k -ésimo oscilador de C e $\sigma_-^A = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|$ ($\sigma_+^A = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|$) desexcita (excita) o estado atômico, respectivamente. Estrutura similar teremos para B e D .

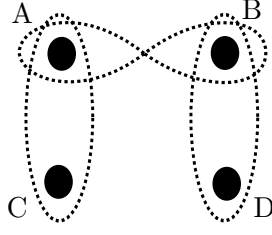


Figura 1.4: A partição AB compartilha C_0 de emaranhamento entre os seus constituinte e está fatorada de CD . A interage localmente com C via o MJC e o mesmo para B e D . Quando a interações nas partições AC e BD for estabelecida, haverá uma distribuição dinâmica do emaranhamento em todo o sistema.

O estado fundamental de AC , $|\downarrow\rangle \prod_{k=1}^N |0_k\rangle$, não evolui no tempo. Contudo, o estado inicial contendo uma excitação, $|\uparrow\rangle \prod_{k=1}^N |0_k\rangle$, evolui para o estado

$$|\gamma(t)\rangle = \xi(t)|\uparrow\rangle|\tilde{0}\rangle + \chi(t)|\downarrow\rangle|\tilde{1}\rangle \quad (1.27)$$

onde $\xi(t)$ e $\chi(t)$ são funções a determinar que dependem de N e definimos os estados coletivos unitários

$$|\tilde{0}\rangle = \prod_{k=1}^N |0_k\rangle \quad (1.28)$$

$$|\tilde{1}\rangle = (1/\chi(t)) \sum_{k=1}^N \lambda_k(t) |1_k\rangle \quad (1.29)$$

com os vínculos $|\chi(t)|^2 = \sum_{k=1}^N |\lambda_k(t)|^2$ e $|\xi(t)|^2 + |\chi(t)|^2 = 1$. Ao observar a eq. (1.27) podemos considerar a evolução de 1 q-bit mais N outros como uma evolução entre 2 q-bits, onde um deles é um q-bit coletivo.

Quando $N = 1$ teremos na partição AC e BD o MJC, que no caso ressonante, fornece para as funções $\xi(t)$ e $\chi(t)$

$$\xi(t) = \cos(gt) \quad (1.30)$$

$$\chi(t) = -i \sin(gt) \quad (1.31)$$

Neste caso o sistema $ABCD$ é conhecido como Jaynes–Cummings duplo [10, 14].

De outro modo, quando $N \rightarrow \infty$ o sistema C será um reservatório no vácuo e A sofrerá uma dinâmica de decaimento livre como estudado em [7, 8, 20]. Neste caso teremos

$$\xi(t) \rightarrow e^{-\gamma t/2} \quad (1.32)$$

$$\chi(t) \rightarrow \sqrt{1 - e^{-\gamma t}} \quad (1.33)$$

onde γ é uma constante de amortecimento.

Agora, vamos considerar os átomos preparados, como antes, em $|AB\rangle_\psi$ e os $2N$ osciladores no vácuo. O estado inicial global será

$$|ABCD\rangle_\psi = [\beta|\uparrow\downarrow\rangle_{AB} + \alpha|\downarrow\uparrow\rangle_{AB}] \prod_{k=1}^N |0_k\rangle_C |0_k\rangle_D \quad (1.34)$$

que, de acordo a eq. (1.27), evoluirá para

$$|\Psi_t\rangle = \beta|\gamma(t)\rangle_{AC}|\downarrow\tilde{0}\rangle_{BD} + \alpha|\downarrow\tilde{0}\rangle_{AC}|\gamma(t)\rangle_{BD} \quad . \quad (1.35)$$

Neste caso as concorrências de cada par de subsistemas serão

$$C_{AB} = C_0|\xi(t)|^2 \quad (1.36)$$

$$C_{AC} = 2|\beta|^2|\xi(t)\chi(t)| \quad (1.37)$$

$$C_{AD} = C_0|\xi(t)\chi(t)| \quad (1.38)$$

$$C_{BC} = C_0|\xi(t)\chi(t)| \quad (1.39)$$

$$C_{BD} = 2|\alpha|^2|\xi(t)\chi(t)| \quad (1.40)$$

$$C_{CD} = C_0|\chi(t)|^2 \quad . \quad (1.41)$$

Observando as eqs. (1.36 – 1.41), e lembrando que a interação nas partições AC e BD é contínua e que troca excitações, devemos esperar que não ocorra MSE em qualquer das partições do sistema $ABCD$. Podemos agora calcular a concorrência entre A e BCD . Como o estado (1.35) é puro ainda vale $C_{A(BCD)} = 2\sqrt{\det(\rho_A)}$, onde $\rho_A = \text{tr}_{BCD}(|\Psi_t\rangle\langle\Psi_t|)$. Assim teremos

$$C_{A(BCD)} = 2|\beta\xi(t)|\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2|\chi(t)|^2} \quad (1.42)$$

e com uma álgebra simples podemos reescrevê-la como

$$C_{A(BCD)} = \sqrt{C_{AB}^2 + C_{AC}^2 + C_{AD}^2} \quad , \quad (1.43)$$

i.e., para o estado inicial $|AB\rangle_\psi$ para os átomos e os $2N$ osciladores no vácuo o emaranhamento entre A e BCD é distribuído nas partições de dois q-bits AB , AC e AD . Não existe emaranhamento em partições envolvendo um número maior de q-bits que não possa ser contabilizado pelo emaranhamento entre cada par de q-bits separadamente e, portanto, nenhum emaranhamento equivalente ao emaranhamento residual definido para sistemas de três q-bits.

Uma situação diferente surge ao considerar o estado inicial

$$|AB\rangle_\phi = \beta|\uparrow\uparrow\rangle + \alpha|\downarrow\downarrow\rangle \quad (1.44)$$

para os átomos e os $2N$ osciladores no vácuo. De maneira semelhante ao caso anterior, esse estado evolui para o estado

$$|\Phi_t\rangle = \beta|\gamma(t)\rangle_{AC}|\gamma(t)\rangle_{BD} + \alpha|\downarrow\tilde{0}\rangle_{AC}|\downarrow\tilde{0}\rangle_{BD} \quad . \quad (1.45)$$

É bem conhecido que nesta condição inicial, para $N = 1$ [10, 14] e $N \rightarrow \infty$ [7, 8, 20], ocorre MSE em alguma partição quando $|\beta| > |\alpha|$. Nós focamos a atenção no emaranhamento que

A compartilha com o resto do sistema. O emaranhamento entre A e cada q-bit e entre A e BCD será

$$C_{AB} = 2|\beta\xi(t)^2| \max\{0, |\alpha| - |\beta\chi(t)^2|\} \quad (1.46)$$

$$C_{AD} = 2|\beta\xi(t)\chi(t)| \max\{0, |\alpha| - |\beta\xi(t)\chi(t)|\} \quad (1.47)$$

$$C_{AC} = 2|\beta^2\xi(t)\chi(t)| \quad (1.48)$$

$$C_{A(BCD)} = 2|\beta\xi(t)|\sqrt{|\beta\chi(t)|^2 + |\alpha|^2} \quad (1.49)$$

Pode-se perceber claramente que o emaranhamento nas partições AB e AD podem desaparecer subitamente. Na partição AB ocorrerá MSE no tempo t tal que $|\chi(t)|^2 = |\alpha/\beta|$ e teremos $C_{AB} = 0$ sempre que

$$|\chi(t)|^2 \geq \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| \quad (1.50)$$

Em AD o MSE ocorrerá no tempo t tal que $|\chi(t)|\sqrt{1 - |\chi(t)|^2} = |\alpha/\beta|$ e teremos $C_{AD} = 0$ quando

$$|\chi(t)|\sqrt{1 - |\chi(t)|^2} \geq \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| \quad (1.51)$$

onde usamos que $|\xi(t)| = \sqrt{1 - |\chi(t)|^2}$. Ao solucionar a desigualdade (1.51) encontramos

$$\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|^2} < |\chi(t)|^2 < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|^2} \quad (1.52)$$

que impõe a condição $|\beta| > 2|\alpha|$. Então, ao observar as desigualdades (1.50) e (1.52), podemos perceber que quando

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| \leq |\chi(t)|^2 \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|^2} \quad (1.53)$$

com a condição $|\beta| > 2|\alpha|$, teremos $C_{AB} = 0$ e $C_{AD} = 0$ ao mesmo tempo. Logo, quando o estado inicial (1.44) for tal que $|\beta| > 2|\alpha|$, então a eq. (1.53) define um intervalo de tempo onde $C_{AB} = 0$ e $C_{AD} = 0$ ao mesmo tempo, como mostra a Figura 1.5.

O emaranhamento entre A e BCD pode ser reescrito como

$$C_{A(BCD)}^2 = C_{AC}^2 + C_0^2|\xi(t)|^2 \quad (1.54)$$

que é válida durante toda evolução. A relação acima claramente mostra que o emaranhamento que A compartilha com o restante do sistema é dividido em duas partes *i*) uma local em AC devido a interação unitária e *ii*) que é espalhada sobre todo o sistema.

Podemos agora definir a quantidade E_{ABCD} , que é positiva semidefinida como mostrado em [15, 16], em analogia ao emaranhamento residual de um sistema de três q-bits. E_{ABCD} representa a quantidade de emaranhamento entre A e BCD que não pode ser contabilizada

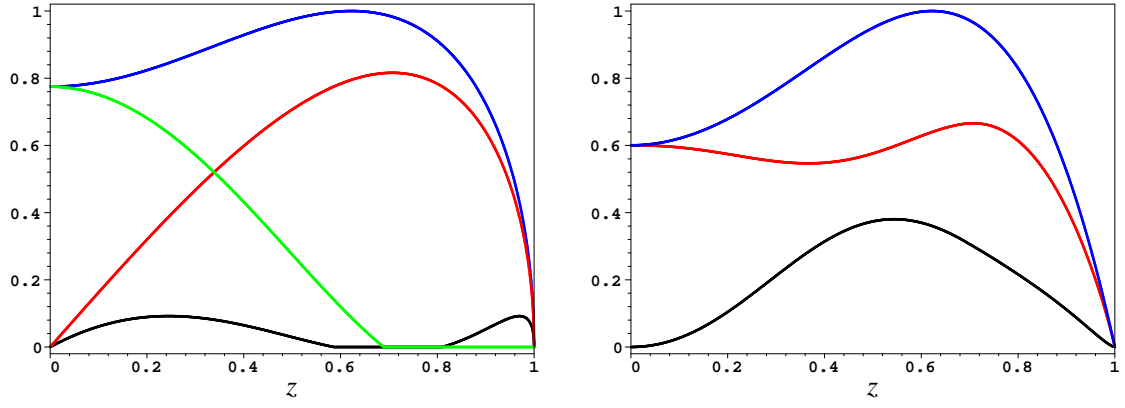


Figura 1.5: Aqui utilizamos o vínculo $|\xi(t)|^2 + |\chi(t)|^2 = 1$ para escrever as concorrências (1.46 – 1.54) em função de $z = |\chi(t)|$ que está limitado no intervalo $0 \leq z \leq 1$ e fizemos $\beta = 101\sqrt{5}/250$ e $\alpha = 11\sqrt{95}/250$ no estado (1.45). **Figura da esquerda:** Em azul $C_{A(BCD)}$, em vermelho C_{AC} , em preto C_{AD} e em verde C_{AB} . Apenas nas partições AB e AD ocorre MSE. Quando $1/2 - \sqrt{1/4 - |\alpha/\beta|^2} < |\chi(t)|^2 < 1/2 + \sqrt{1/4 - |\alpha/\beta|^2}$, com $|\beta| > 2|\alpha|$, teremos $C_{AD} = 0$. Já quando $|\alpha/\beta| < |\chi(t)|^2$ teremos $C_{AB} = 0$. Desta maneira, quando $|\alpha/\beta| < |\chi(t)|^2 < 1/2 + \sqrt{1/4 - |\alpha/\beta|^2}$ teremos $C_{AB} = 0$ e $C_{AD} = 0$ ao mesmo tempo. **Figura da direita:** Em azul $C_{A(BCD)}^2$ que terá um comportamento suave quando cresce ou decresce, porque representa todo o emaranhamento que A possui com BCD incluindo o emaranhamento vindo da interação. Em vermelho temos $C_{AB}^2 + C_{AC}^2 + C_{AD}^2$ que inicialmente decresce devido a diminuição seguida de MSE nas partições AB e AD . Em seguida cresce porque o emaranhamento fornecido pela interação na partição AC torna-se significativo. E em preto temos E_{ABCD} onde é fácil observar que seu pico está deslocado para a esquerda dos outros gráficos. Isso se dá quando o emaranhamento entre AB e AD estão desaparecendo e o emaranhamento em AC ainda não se tornou significativo. Após a MSE em AB e AD o emaranhamento da dinâmica em AC torna-se saliente e então a curva de E_{ABCD} volta a diminuir.

pelo emaranhamento de A com B , C e D separadamente, *i.e.*: $E_{ABCD} = C_{A(BCD)}^2 - [C_{AB}^2 + C_{AC}^2 + C_{AD}^2]$, que nos fornece

$$E_{ABCD} = C_0^2 |\xi(t)|^2 - [C_{AB}^2 + C_{AD}^2] \quad . \quad (1.55)$$

Curiosamente este emaranhamento estará presente durante toda a evolução para qualquer valor de β e α no estado (1.45). Isto significa que para o estado inicial $|AB\rangle_\phi$ dos átomos sempre haverá emaranhamento entre A e BCD que não pode ser contabilizado pelo emaranhamento de A com B , C e D separadamente. Isto não é verdade para o estado inicial $|AB\rangle_\psi$ dos átomos onde temos $E_{ABCD} = 0$ e todo emaranhamento entre A e BCD pode ser contabilizado pelo emaranhamento entre A com B , C e D separadamente. Quando $|\beta| > 2|\alpha|$ no estado inicial (1.44) teremos um intervalo de tempo Δt , definido pela eq. (1.53), em que $C_{AB} = 0$ e $C_{AD} = 0$, como discutido mais acima. Nesta situação teremos

$$E_{ABCD} = C_0^2 |\xi(t)|^2 \quad (1.56)$$

que representará o emaranhamento que está distribuído em todo o sistema e que não é

contabilizado pelos emaranhamentos da bipartições AB , AC e AD .

1.4 Conclusões

Mostramos que em sistemas de três q -bits, submetidos a interação local entre subsistemas, o emaranhamento residual está intimamente conectado com a MSE. Mostramos também que a MSE é uma condição suficiente para a redistribuição do emaranhamento de duas partes para um emaranhamento do sistema como um todo.

Para o caso de sistemas com quatro partes (simples e complexos), também sujeitos a interação local, o mesmo tipo de relação entre emaranhamento residual e MSE ocorre. Uma conjectura natural nesta altura: será este um mecanismo geral segundo o qual o entrelaçamento flui de partições envolvendo dois q -bits para outras que envolvem um número maior de q -bits? Esta é a nossa crença, baseada no fato de que ele pode ser rigorosamente provado para sistemas de três q -bits e exemplos de vários tipos envolvendo quatro qubits se comportam da mesma maneira. Provar esta conjectura é um programa de pesquisa interessante e desafiador.

Bibliografia

- [1] A. Einstein, E. Podolsky, and N. Rosen, *Phys. Review*, **47**, 777 (1935).
- [2] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, *Rev. Mod. Phys.*, **81**, 865 (2009).
- [3] M. Nielsen, and I. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2000).
- [4] J. Preskill, *Lectures Notes in Quantum Information and Computation*, available at URL <http://www.theory.caltech.edu/~preskill/ph229>.
- [5] V. Coffman, J. Kundu, and W. K. Wootters, *Phys. Rev. A*, **61**, 052306(2006).
- [6] K. Zyczkowski, P. Horodecki, M. Horodecki, and R. Horodecki, *Phys. Rev. A*, **65**, 012101 (2001).
- [7] T. Yu, and J. Eberly, *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 140404 (2004).
- [8] M. Almeida, F. de Melo, M. Hor-Meyll, A. Salles, S. Walborn, P. Ribeiro, and L. Davidovich, *Science*, **316**, 579 (2007).
- [9] T. Yu, and J. H. Eberly, *Science*, **323**, 598 (2009).
- [10] M. Yönaç, T. Yu, and J. Eberly, *J. Phys. B: At. Mol. Phys.*, **39**, S621 (2006).
- [11] S. Chan, M. Reid, and Ficek, *J. Phys. B: At. Mol. Phys.*, **43**, 215505 (2010).
- [12] Zhi-Jian Li, Jun-Qi Li, Yan-Hong Jin and Yi-Hang Nie, *J. Phys. B: At. Mol. Phys.*, **40**, 3401 (2007).
- [13] E. Jaynes, and F. Cummings, *Proc. IEEE*, **51**, 89 (1963).
- [14] I. Sainz, and G. Björk, *Phys. Rev. A*, **76**, 042313 (2007).
- [15] T. J. Osborne and F. Verstraete, *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 220503 (2006).
- [16] J. S. Kim, A. Das, and B. C. Sanders, *Phys. Rev. A*, **79**, 012329 (2009).
- [17] S. Hill e W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.*, **78**, 5022 (1997).

- [18] W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 2245(1998).
- [19] D. Yang, *Phys. Let. A*, **360**, 249 (2006); M. P. Seevinck, *Quantum Inf. Process.*, **9**, 273 (2010).
- [20] C. López, G. Romero, F. Lastra, E. Solano, and J. Retamal, *Phys. Rev. Let.*, **101**, 080503 (2008).

Capítulo 2

Geometria na dinâmica de emaranhamento no modelo de Jaynes–Cummings duplo.

Neste capítulo estudamos a característica geométrica da dinâmica de emaranhamento entre pares de q-bits evoluindo de acordo ao modelo Jaynes–Cummings duplo (JCD). Ao considerar inicialmente as cavidades no vácuo e os átomos nos estados emaranhados $|\psi_0\rangle = \cos\theta|10\rangle + \sin\theta|01\rangle$ ou $|\phi_0\rangle = \cos\theta|11\rangle + \sin\theta|00\rangle$, nós mostramos, ao variar $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, que a dinâmica do emaranhamento entre o i -ésimo q-bit e os demais q-bits j , k e l fecha uma superfície tridimensional em um diagrama $C_{ij} \times C_{ik} \times C_{il}$, onde C_{mn} é a concorrência entre os q-bits m e n . Quando o estado inicial dos átomos for $|\psi_0\rangle$, projeções desta superfície em um diagrama $C_{ij} \times C_{ik}$ serão cônicas. Outras curvas envolvendo pares de q-bits diferentes, $C_{ij} \times C_{kl}$, também serão cônicas. Porém, quando o estado inicial for $|\phi_0\rangle$, as curvas podem ser mais complexas. Encontramos desigualdades limitando a soma das concorrências ao quadrado de cada bipartição e mostramos que a morte súbita de emaranhamento está intimamente conectada ao tamanho do raio médio de uma hiperesfera.

2.1 Introdução

Recentemente, modelos para sistemas bipartidos, simples ou complexos, que interagem via um hamiltoniano que troca excitações entre as partes vem se mostrando extremamente úteis no que disrespeito à compreensão da dinâmica de emaranhamento. Essa compreensão é fundamental para a concretização dos processos da informação quântica que permutam correlações, além de aprofundar nosso conhecimento sobre os aspectos mais fundamentais da mecânica quântica. Nessa direção, recentes trabalhos estudaram o desaparecimento em tempo finito do emaranhamento [1], o surgimento súbito do emaranhamento [2], o controle da dinâmica de emaranhamento [3] e a distribuição de emaranhamento [4], para citar alguns. Neste modelo bipartido onde existe troca de excitações, dois sistemas em particular ganha-

ram destaque. Em um deles as partições do sistema são constituídas por dois átomos isolados que possuem algum emaranhamento inicial e duas cavidades no vácuo onde cada átomo interage com uma cavidade através do modelo Jaynes–Cummings (JC) [5] e tal sistema ficou conhecido como Jaynes–Cummings duplo (JCD). No segundo modelo as partições são constituídas por dois átomos não interagentes e inicialmente emaranhados onde ambos interagem com o mesmo modo da cavidade no modelo Tavis–Cummings [6]. Apesar de aparentemente simples, esses modelos apresentam uma dinâmica muito rica do emaranhamento entre as partições destacando-se o desaparecimento do emaranhamento nas partições durante um tempo finito [7, 8, 9], as relações entre energia pureza e emaranhamento [10, 11], emaranhamento invariante [12] e o estudo dos aspectos gerais da distribuição do emaranhamento [13, 14, 15, 16].

No presente trabalho, estudamos as relações que surgem naturalmente entre os emaranhamentos de cada bipartição do modelo JCD. Para a medida de emaranhamento usamos a concorrência [17]. Nesse modelo consideramos dois átomos idênticos de dois níveis nomeados de “ A ” e “ B ” que estão inicialmente emaranhados e duas cavidades no estado fundamental chamados de “ a ” e “ b ”. O átomo “ A ” (“ B ”) interage ressonante e localmente com a cavidade “ a ” (“ b ”) via o modelo JC [5], respectivamente. Em seguida evoluímos unitariamente o sistema global. Para dado instante de tempo t qualquer tomamos o traço parcial sobre as variáveis de dois subsistemas quaisquer e determinamos o emaranhamento entre os dois subsistemas remanescentes. Com esse procedimento determinamos as seis concorrências possíveis, a saber: C_{Aa} , C_{Ab} , C_{AB} , C_{ab} , C_{aB} e C_{Bb} , e analisamos a dinâmica e as relações existentes entre elas. Nós mostramos que, ao considerar o estado inicial dos átomos sendo $|\psi_0\rangle = \cos \alpha |10\rangle + \sin \alpha |01\rangle$, as relações entre as concorrências descrevem uma cônica em um diagrama $C_{ij} \times C_{kl}$, com ij e kl iguais a Aa , Ab , AB , ab , aB e Bb . De outro modo, quando consideramos o estado $|\phi_0\rangle = \cos \alpha |11\rangle + \sin \alpha |00\rangle$ inicialmente nos átomos, percebemos que os gráficos nos diagramas $C_{ij} \times C_{kl}$, em geral, não seguem uma forma simples e sendo uma cônica apenas em alguns casos. Em todos os casos onde uma cônica é encontrada, a sua excentricidade pode ser escrita como uma função do módulo da média inicial do observável σ_z^A , *i.e.*, $\mathcal{P}_0 = \left| \text{tr}(\sigma_z^A \rho_0) \right|$. Se o estado atômico for $|\psi_0\rangle$, \mathcal{P}_0 fornece a probabilidade da excitação ser encontrada em apenas uma das duas partições Aa ou Bb . Por outro lado se o estado inicial for $|\phi_0\rangle$, \mathcal{P}_0 não terá a mesma interpretação. Nesse estudo usamos a grandeza \mathcal{P}_0 por possuir uma estreita relação com o emaranhamento [18]. Em complemento, num diagrama $C_{AB} \times C_{Aa} \times C_{Ab}$ construímos uma superfície da dinâmica de emaranhamento entre pares de q-bits entre A e os outros do sistema. Percebemos que a dinâmica do emaranhamento que A compartilha com outros q-bits, para cada α , descreve um caminho sobre esta superfície. Estendendo as mesmas idéias para “dimensões” maiores, encontramos uma desigualdade envolvendo uma soma do quadrado das concorrências entre pares de q-bits. Esta soma define uma hipersfera onde a dinâmica do emaranhamento entre os pares de q-bits possui uma trajetória que estará sobre ou dentro da hipersfera.

O presente capítulo está organizado como segue: na seção 2.2 apresentamos o modelo

que vamos tratar, o JCD, sua evolução e o quantificador de emaranhamento utilizado; em seguida, na seção 2.3, determinamos os emaranhamentos, fazemos gráficos de curvas no diagrama $C_{ij} \times C_{kl}$ e descrevemos suas características/comportamento em função de \mathcal{P}_0 ; já na seção 2.4 mostramos a existência de uma superfície de emaranhamento para a dinâmica aos pares de emaranhamento que envolva o mesmo q-bit e justificamos porque as curvas dos diagramas $C_{ij} \times C_{kl}$ estarão sobre essa superfície; sobre a hipersfera tratamos na seção 2.5 onde encontramos uma desigualdade que contém a dinâmica de emaranhamento de todos os pares de q-bits; e na seção 2.6 encerramos o trabalho com as conclusões.

2.2 O modelo físico

Considere um sistema composto de dois átomos idênticos de dois níveis (“A” e “B”) e duas cavidades idênticas (“a” e “b”). O átomo “A” (“B”) interage ressonantemente com o campo no interior da cavidade “a” (“b”), respectivamente, via modelo JC [5] governada pelo hamiltoniano

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\omega b^\dagger b + \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z^A + \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z^B + \hbar g(a^\dagger\sigma_-^A + a\sigma_+^A) + \hbar g(b^\dagger\sigma_-^B + b\sigma_+^B) \quad (2.1)$$

onde a^\dagger (b^\dagger) e a (b) são os operadores *criação* e *aniquilação* do campo no interior da cavidade a (b), respectivamente, e σ_-^i , σ_+^i e σ_z^i são as matrizes de Pauli do i -ésimo átomo, com $i = A, B$. Por simplicidade, fizemos as cavidades ressonantes com os átomos. Assim a frequência do campo no interior de cada cavidade é igual a frequência de transição atômica dos seus dois níveis internos.

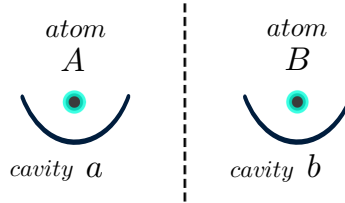


Figura 2.1: Uma figura esquemática do JCD. Na partição da esquerda (direita) há o átomo “A” (“B”) interagindo com a cavidade “a” (“b”), respectivamente, e não há interação entre as partições “Aa” e “Bb”.

Nesse trabalho consideramos as cavidades inicialmente no vácuo $|00\rangle$ e algum emaranhamento entre os átomos. Neste momento considere o estado inicial do sistema sendo

$$|\bar{\psi}_0\rangle = \cos\alpha|10\rangle|00\rangle + \sin\alpha|01\rangle|00\rangle \quad . \quad (2.2)$$

Como essa dinâmica conserva o número de excitações, o estado final em um determinado tempo t será da forma

$$|\psi_t\rangle = x_1(t)|10\rangle|00\rangle + x_2(t)|01\rangle|00\rangle + x_3(t)|00\rangle|10\rangle + x_4(t)|00\rangle|01\rangle \quad . \quad (2.3)$$

A solução dos coeficientes será fornecida pela equação de Schrödinger, $i\hbar|\dot{\psi}_t\rangle = H|\psi_t\rangle$, mais as condições de contorno $x_1(0) = \cos \alpha$, $x_2(0) = \sin \alpha$, $x_3(0) = 0$ e $x_4(0) = 0$. Isso nos fornece

$$x_1(t) = \cos \alpha \cos(gt) \quad (2.4)$$

$$x_2(t) = \sin \alpha \cos(gt) \quad (2.5)$$

$$x_3(t) = -i \cos \alpha \sin(gt) \quad (2.6)$$

$$x_4(t) = -i \sin \alpha \sin(gt) \quad (2.7)$$

Considere também o estado inicial

$$|\bar{\phi}_0\rangle = \cos \alpha |11\rangle|00\rangle + \sin \alpha |00\rangle|00\rangle \quad (2.8)$$

E como no caso anterior, podemos determinar o estado evoluído que será

$$\begin{aligned} |\phi_t\rangle = & y_1(t)|11\rangle|00\rangle + y_2(t)|00\rangle|00\rangle + y_3(t)|10\rangle|01\rangle + \\ & + y_4(t)|01\rangle|10\rangle + y_5(t)|00\rangle|11\rangle \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde

$$y_1(t) = e^{-i\omega t} \cos \alpha \cos^2(gt) \quad (2.10)$$

$$y_2(t) = e^{i\omega t} \sin \alpha \quad (2.11)$$

$$y_3(t) = -i e^{-i\omega t} \cos \alpha \sin(gt) \cos(gt) \quad (2.12)$$

$$y_4(t) = -i e^{-i\omega t} \cos \alpha \sin(gt) \cos(gt) \quad (2.13)$$

$$y_5(t) = -e^{-i\omega t} \cos \alpha \sin^2(gt) \quad (2.14)$$

Podemos observar que, em um tempo t imediatamente após a $t = 0$, o estado (2.3) e (2.9) deverá possuir emaranhamento entre todas as partições. Estudaremos o emaranhamento entre dois q-bits (A , B , a e b) e suas relações. Para isso usaremos como quantificador de emaranhamento a concorrência [17] que é definida como

$$C = \max\left[0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\right] \quad (2.15)$$

onde λ_i são os auto-valores da matriz $\rho(\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$ organizados de maneira decrescente em (2.15).

2.3 Dinâmica de emaranhamento no diagrama $C_{ij} \times C_{kl}$

Para encontrar o estado da partição AB , por exemplo, realizamos o traço parcial no subsistema restante ab no estado (2.3), ou seja: $\rho_{AB}(t) = \text{tr}_{ab}(|\psi_t\rangle\langle\psi_t|)$. Com o mesmo procedimento podemos determinar os estado reduzidos de todos os pares de q-bits Aa , Ab , AB , ab , aB e Bb . Em seguida, determinamos cada concorrência C_{ij} .

2.3.1 Para o estado inicial $|\psi_0\rangle$

Neste caso obtemos

$$C_{AB} = |\sin 2\alpha| \cos^2(gt) \quad (2.16)$$

$$C_{ab} = |\sin 2\alpha| \sin^2(gt) \quad (2.17)$$

$$C_{Aa} = \cos^2 \alpha |\sin(2gt)| \quad (2.18)$$

$$C_{Ab} = |\sin 2\alpha \sin(gt) \cos(gt)| \quad (2.19)$$

$$C_{aB} = |\sin 2\alpha \sin(gt) \cos(gt)| \quad (2.20)$$

$$C_{Bb} = \sin^2 \alpha |\sin(2gt)| \quad (2.21)$$

Analizamos a estrutura geométrica da dinâmica de emaranhamento em um diagrama $C_{ij} \times C_{kl}$. Com esse intuito, primeiro observamos que comanda a eq.(2.16) com a eq.(2.17), teremos

$$C_{AB} + C_{ab} = C_0 \quad (2.22)$$

com $C_0 = |\sin 2\alpha|$ sendo a concorrência inicial do sistema e contida na partição AB . Pode-

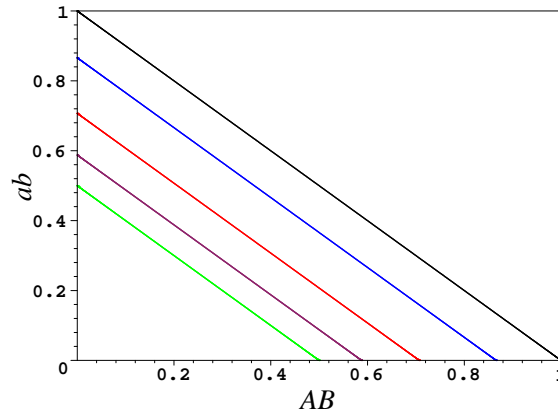


Figura 2.2: Gráfico da reta $C_{AB} \times C_{ab}$ com $\alpha = \pi/4, \pi/6, \pi/8, \pi/10$ e $\pi/12$ para as cores preta, azul, vermelho, marrom e verde, respectivamente.

mos perceber que essa equação define uma reta em um diagrama $C_{AB} \times C_{ab}$, como notado na figura 2.2. Esta reta possuirá o coeficiente linear constante e igual à C_0 , inclinação igual a -1 e a reta (2.22) com $C_0 = 1$ será o limite superior. Desta maneira as retas (2.22), para $\alpha \in (0, \pi/2)$, preencherão todo o triângulo formado pelos eixos C_{AB} , C_{ab} e a reta $C_{AB} + C_{ab} = 1$. Analisando agora as eqs. (2.19) e (2.20) percebemos que elas satisfazem

$$C_{Ab} = C_{aB} \quad (2.23)$$

que evidencia uma simetria do sistema e também defini uma reta crescente, que passa pela origem do diagrama $C_{Ab} \times C_{aB}$ e que faz um ângulo de 45° com os eixos. Dividindo (2.18) por (2.21) facilmente encontramos

$$C_{Aa} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} C_{Bb} \quad (2.24)$$

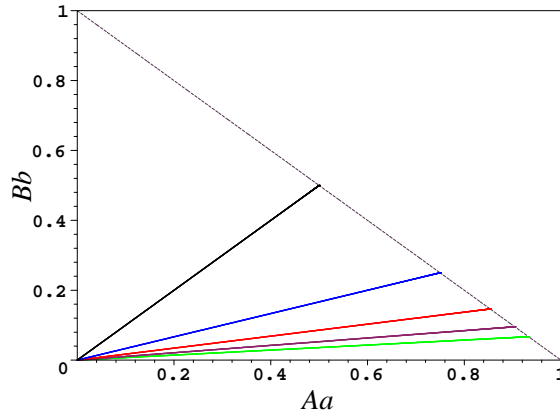


Figura 2.3: Gráfico da reta $C_{Aa} \times C_{Bb}$ com $\alpha = \pi/4, \pi/6, \pi/8, \pi/10$ e $\pi/12$ para as cores preta, azul, vermelho, marrom e verde, respectivamente. A curva fina e tracejada na cor violeta é a reta $C_{Aa} + C_{Bb} = 1$.

que é uma reta no diagrama $C_{Aa} \times C_{Bb}$ passando pela origem e com coeficiente angular $\cos^2 \alpha / \sin^2 \alpha$, como mostra a figura 2.3. Para $0 < \alpha < \pi/2$ as retas (2.24) estarão limitadas na região entre as retas $C_{Aa} = 0$, $C_{Bb} = 0$ e $C_{Aa} + C_{Bb} = 1$. Observe que as equações (2.22 – 2.24) definem uma reta no seu respectivo diagrama $C_{ij} \times C_{kl}$ e a reta $C_{Aa} + C_{Bb} = 1$ é um limite superior não havendo caminhos no diagrama além dessa curva.

Usando o mesmo procedimento, e com algumas simplificações, encontramos outros casos (elipses, circunferências e retas) que organizamos como segue:

1. Concorrência entre os átomos (ou cavidades) *versus* concorrência entre um dos átomos e a cavidade que o contém:

a) $C_{AB(ab)} \times C_{Bb}$:

$$\frac{(C_{AB(ab)} - C_0/2)^2}{C_0^2/4} + \frac{C_{Bb}^2}{\sin^4 \alpha} = 1 \quad (2.25)$$

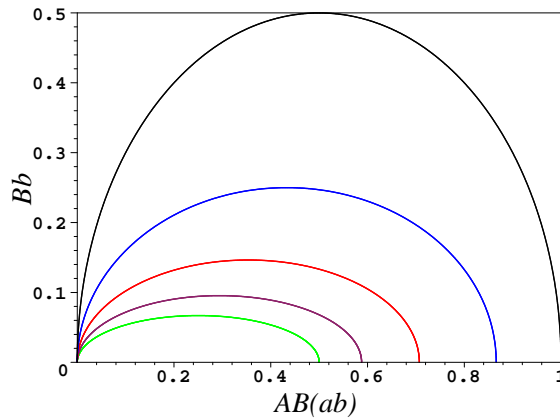


Figura 2.4: Gráfico da semi-elipse $C_{AB(ab)} \times C_{Bb}$ com $\alpha = \pi/4, \pi/6, \pi/8, \pi/10$ e $\pi/12$ para as cores preta, azul, vermelho, marrom e verde, respectivamente.

b) $C_{AB(ab)} \times C_{Aa}$:

$$\frac{(C_{AB(ab)} - C_0/2)^2}{C_0^2/4} + \frac{C_{Aa}^2}{\cos^4 \alpha} = 1 \quad (2.26)$$

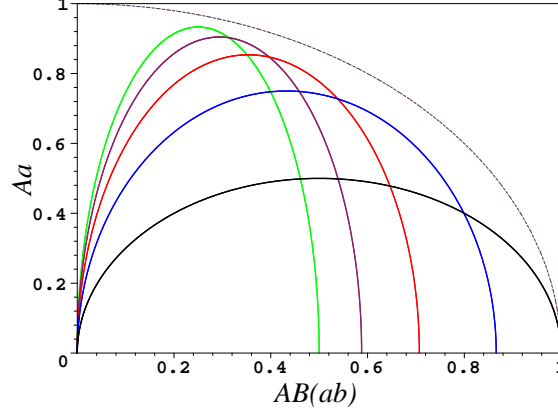


Figura 2.5: Gráfico da semi-elipse $C_{AB(ab)} \times C_{Aa}$ com $\alpha = \pi/4, \pi/6, \pi/8, \pi/10$ e $\pi/12$ para as cores preta, azul, vermelho, marrom e verde, respectivamente. A curva fina e tracejada na cor violeta é a semi-circunferência $C_{AB(ab)}^2 + C_{Aa}^2 = 1$.

2. Concorrência entre os átomos (ou cavidades) *versus* concorrência entre um dos átomos e a cavidade que não o contém:

$$(C_{AB(ab)} - C_0/2)^2 + (C_{aB(Ab)})^2 = C_0^2/4 \quad (2.27)$$

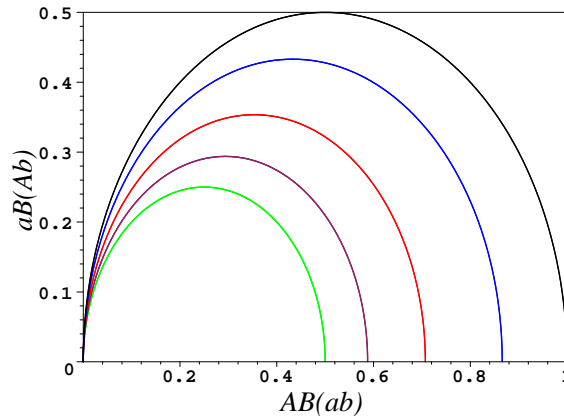


Figura 2.6: Gráfico da semi-circunferência $C_{AB(ab)} \times C_{aB(Ab)}$ com $\alpha = \pi/4, \pi/6, \pi/8, \pi/10$ e $\pi/12$ para as cores preta, azul, vermelho, marrom e verde, respectivamente.

3. Concorrência entre um átomo e a cavidade que não o contém *versus* concorrência entre um átomo e a cavidade que o contém:

a) $C_{aB(Ab)} \times C_{Aa}$:

$$C_{aB(Ab)} = \frac{|\sin 2\alpha|}{2 \cos^2 \alpha} C_{Aa} \quad (2.28)$$

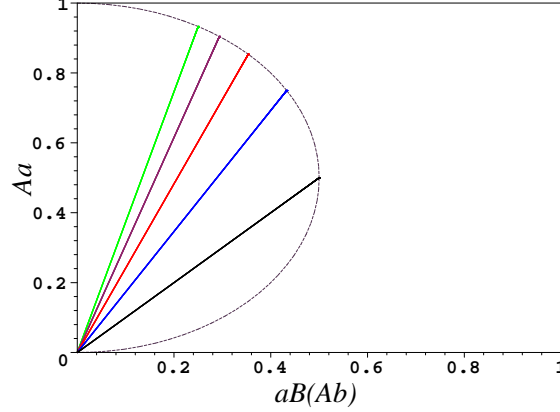


Figura 2.7: Gráfico da reta $C_{aB(Ab)} \times C_{Aa}$ com $\alpha = \pi/4, \pi/6, \pi/8, \pi/10$ e $\pi/12$ para as cores preta, azul, vermelho, marrom e verde, respectivamente. A curva fina e tracejada na cor violeta é o círculo $(2C_{Aa} - 1)^2 + (2C_{aB(Ab)})^2 = 1$.

b) $C_{Ab(aB)} \times C_{Bb}$:

$$C_{Ab(aB)} = \frac{|\sin 2\alpha|}{2 \sin^2 \alpha} C_{Bb} \quad (2.29)$$

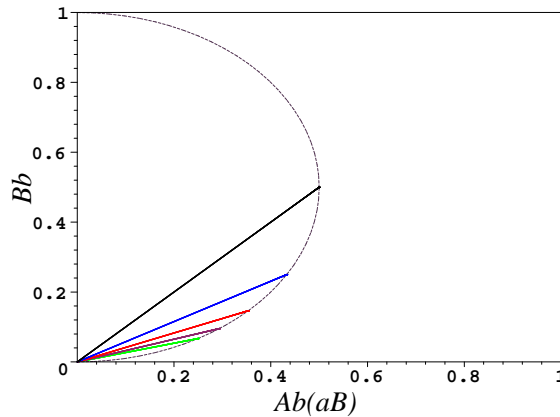


Figura 2.8: Gráfico da reta $C_{Ab(aB)} \times C_{Bb}$ com $\alpha = \pi/4, \pi/6, \pi/8, \pi/10$ e $\pi/12$ para as cores preta, azul, vermelho, marrom e verde, respectivamente. A curva fina e tracejada na cor violeta é o círculo $(2C_{Bb} - 1)^2 + (2C_{Ab(aB)})^2 = 1$.

Para interpretar melhor as expressões (2.25 – 2.29) e suas figuras (2.4 – 2.8), torna-se instrutivo usar o módulo do valor médio inicial de σ_z^A ,

$$\mathcal{P}_0 = \left| \text{tr}(\sigma_z^A \rho_0) \right| \quad (2.30)$$

que informará se a excitação inicial está ou não distribuída igualmente entre os átomos e conseqüentemente entre as partições Aa e Bb . Usaremos essa grandeza por ser mensurável (o módulo da média de um observável), local e por possuir uma estreita relação com a concorrência [18]. Para $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ teremos $\mathcal{P}_0 = |\cos(2\alpha)|$, ficando claro que $C_0^2 + \mathcal{P}_0^2 = 1$. Observe que quando $\mathcal{P}_0 = 0$ a excitação estará igualmente distribuída entre as partições Aa e Bb e o emaranhamento inicial é máximo na partição AB . De outro modo, se $\mathcal{P}_0 = 1$ não haverá emaranhamento inicial entre os átomos e não teremos a informação se a excitação está na partição Aa ou Bb . Quando $0 < \mathcal{P}_0 < 1$, a excitação estará mais “localizada” em uma das partições, mas não saberemos em qual. Neste caso os átomos estarão com algum emaranhamento entre 0 e 1.

Fazendo uso de \mathcal{P}_0 , pode-se escrever a excentricidade das elipses (2.25) e (2.26) como sendo

$$\epsilon = \sqrt{\frac{2\mathcal{P}_0}{1 + \mathcal{P}_0}} \quad (2.31)$$

Também podemos determinar a distância f do foco ao centro de cada elipse. Para a elipse (2.25) a distância do foco $f^{(a)}$ ao seu centro será

$$f_{\leq}^{(a)} = \sqrt{\frac{\mathcal{P}_0(1 \mp \mathcal{P}_0)}{2}} \quad (2.32)$$

onde $f_{<}^{(a)}$ é o foco quando $0 < \alpha < \pi/4$ e $f_{>}^{(a)}$ para $\pi/4 < \alpha < \pi/2$. Já a elipse (2.26) possuirá foco $f^{(b)}$ como sendo

$$f_{\geq}^{(b)} = \sqrt{\frac{\mathcal{P}_0(1 \mp \mathcal{P}_0)}{2}} \quad (2.33)$$

onde $f_{<}^{(b)}$ é o foco quando $0 < \alpha < \pi/4$ e $f_{>}^{(b)}$ para $\pi/4 < \alpha < \pi/2$, que é o inverso de (2.32). Isso acontece porque o emaranhamento entre as partições Aa e Bb é gerado pela evolução JC e não pelo recurso inicial de emaranhamento fornecido a AB . O emaranhamento gerado pelo JC depende da “quantidade” de excitação que será compartilhada entre o átomo e o campo. Dessa maneira, quando $0 < \alpha < \pi/4$ a excitação, por (2.3), possuirá uma maior probabilidade de ser encontrada na partição Aa . Com isso o emaranhamento gerado pelo JC na partição Aa será maior que na Bb . Isso é o que está representado na figura 2.5, onde C_{Aa} atinge valores maiores que 0.5 para $0 < \alpha < \pi/4$. Neste caso o emaranhamento na partição Bb possui valores menores que 0.5, como podemos observar na figura 2.4. A mesma análise é válida para o caso contrário, onde $\pi/4 < \alpha < \pi/2$. De outro modo, para um $\alpha \in (0, \pi/2)$ a excentricidade das elipses (2.25) e (2.26) são idênticas, como mostra (2.31), mas os focos f^a e f^b não possuirão o mesmo valor e direção, excetuando o caso $\alpha = \pi/4$ onde teremos

círculos nos dois casos. Por exemplo, para $\alpha = \pi/6$ teremos $f^b = \sqrt{3}f^a$, onde f^a (f^b) está sobre o eixo horizontal (vertical), respectivamente.

Já o segundo caso, equação (2.27), são circunferências de raio $C_0/2$ e a semi-circunferência com $\alpha = \pi/4$ ($C_0 = 1$) é a curva limitante e só haverá curvas abaixo. De uma maneira mais geral pode-se dizer que a curva definida no seu respectivo diagrama $C_{ij} \times C_{kl}$ sempre estará limitada pela semi-circunferência $C_{ij}^2 + C_{kl}^2 = C_0^2$.

Os casos das equações (2.28) e (2.29), são retas onde sua inclinação depende do emaranhamento inicial contido nos átomos. Como fizemos anteriormente, podemos escrever tal inclinação como função de \mathcal{P}_0 . Para a eq.(2.28) a inclinação $m^{(a)}$ pode ser escrita como

$$m_{\leq}^{(a)} = \left[\frac{1 - \mathcal{P}_0}{1 + \mathcal{P}_0} \right]^{\pm 1/2}, \quad (2.34)$$

onde $m_{<}^{(a)}$ é a inclinação quando $0 < \alpha < \pi/4$ e $m_{>}^{(a)}$ para $\pi/4 < \alpha < \pi/2$. Já a reta eq.(2.29) terá, por sua vez, a inclinação

$$m_{\geq}^{(b)} = \left[\frac{1 - \mathcal{P}_0}{1 + \mathcal{P}_0} \right]^{\pm 1/2}, \quad (2.35)$$

onde, como no caso acima, $m_{<}^{(b)}$ é a inclinação quando $0 < \alpha < \pi/4$ e $m_{>}^{(b)}$ para $\pi/4 < \alpha < \pi/2$, que é o inverso de (2.34). Esse efeito também é devido ao emaranhamento fornecido pelo JC como já discutimos anteriormente para o caso das elipses (2.25) e (2.26).

2.3.2 Para o estado inicial $|\phi_0\rangle$

Considere agora que os átomos, no tempo inicial igual a zero, se encontrava no estado (2.8). Após um intervalo de tempo t o sistemas terá evoluído para o estado (2.9). De posse do estado global e tomando os devidos traços parciais, como na seção anterior, determinamos as concorrências de cada par de q-bits. Teremos então

$$C_{AB} = \max[0, C_0 \cos^2(gt) - \gamma_t] \quad (2.36)$$

$$C_{ab} = \max[0, C_0 \sin^2(gt) - \gamma_t] \quad (2.37)$$

$$C_{Aa} = \cos^2(\alpha) |\sin(2gt)| \quad (2.38)$$

$$C_{Ab} = \max[0, \frac{1}{2}C_0 |\sin(2gt)| - \gamma_t] \quad (2.39)$$

$$C_{aB} = \max[0, \frac{1}{2}C_0 |\sin(2gt)| - \gamma_t] \quad (2.40)$$

$$C_{Bb} = \cos^2(\alpha) |\sin(2gt)|, \quad (2.41)$$

onde $\gamma_t = \frac{1}{2} \cos^2(\alpha) \sin^2(2gt)$. Pode-se perceber que para $0 < \alpha < \pi/4$ teremos morte súbita [1] ou nascimento súbito de emaranhamento [2] quando a concorrência envolver um q-bit da partição Aa com outro da Bb .

Para o estado (2.9), temos algumas situações interessantes devido a simetria do sistema. Note que a partição Aa e Bb terão o mesmo valor de \mathcal{P}_0 . Logo, o emaranhamento fornecido

pelo JC á Aa ou Bb é o mesmo. Observe que $C_{Aa} = C_{Bb}$. Isso não seria verdade se a constante de acoplamento de cada JC fosse diferente. Devido à essa mesma simetria teremos também $C_{Ab} = C_{Ba}$. Essas relações definem retas (de maneira semelhante ao caso da eq.(2.23)) nos seus respectivos diagramas. Os demais diagramas $C_{ij} \times C_{kl}$, para o estado inicial (2.8), sempre seguem caminhos bem definidos, porém nem sempre simples. O caso mais interessante, e também mais simples, é o diagrama $C_{ab} \times C_{AB}$. Para perceber isso, considere um instante de tempo onde as concorrências C_{AB} e C_{ab} são diferentes de zero ao mesmo tempo. Nesse momento, por simplificação, podemos escrever $C_{AB} = C_0 \cos^2(gt) - \gamma_t$ e $C_{ab} = C_0 \sin^2(gt) - \gamma_t$. Perceba que com uma álgebra simples podemos escrever $[C_0 - (C_{AB} + C_{ab})]/\cos^2(\alpha) = \sin^2(2gt)$ e $(C_{AB} - C_{ab})^2/C_0^2 = \cos^2(2gt)$ que somadas nos fornecem

$$\frac{(C_{AB} - C_{ab})^2}{C_0^2} + \frac{C_0 - (C_{AB} + C_{ab})}{\cos^2(\alpha)} = 1 \quad . \quad (2.42)$$

A equação acima é uma parábola com o eixo de simetria à 45° do eixo horizontal (C_{ab}). Sobre o eixo de simetria o vértice v estará a uma distância da origem $v_{\leq} = C_0 - (1 \pm \mathcal{P}_0)/2$ e o foco f a uma distância $f_{\leq} = C_0 \mp \mathcal{P}_0$, onde, como antes, o sub-índice $< (>)$ refere-se ao estado inicial (2.8) com $0 < \alpha < \pi/4$ ($\pi/4 < \alpha < \pi/2$), respectivamente. Como há morte súbita de emaranhamento nas partições AB e ab sempre que $0 < \alpha < \pi/4$, então só haverá um seguimento de parábola no diagrama $C_{ab} \times C_{AB}$ se o vértice v assumir valores positivos sobre o eixo de simetria. De outro modo quando o vértice estiver na origem ou assumir valores negativos, não teremos um trecho da parábola e só haverá retas $C_{AB} = 0$ ou $C_{ab} = 0$. Observe a Figura 2.9 para melhor visualização. Para $\alpha = \arctan(1/2)$ teremos

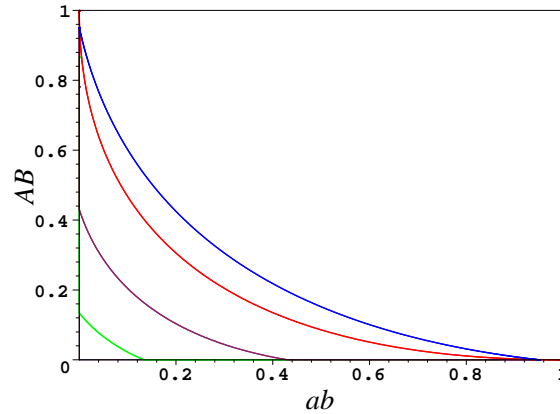


Figura 2.9: Gráfico da parábola $C_{ab} \times C_{AB}$ com $\alpha = 3\pi/10, \pi/4, \pi/5$ e $\pi/6$ para as cores azul, vermelho, marrom e verde, respectivamente. Para $0 < \alpha < \arctan(1/2)$ não haverá gráfico neste diagrama.

$v = 0$ e quando o emaranhamento em uma das partições desaparece a da outra surge, como podemos perceber na Figura 2.10. Seguindo o mesmo raciocínio, fica claro que para $0 < \alpha < \arctan(1/2)$ ($\arctan(1/2) < \alpha < \pi/2$) o emaranhamento em AB desaparece antes (depois) que surja em ab , respectivamente. Observe a Figura 2.11.

Um outro diagrama aparece quando somamos a expressão $(C_{AB} - C_{ab})^2/C_0^2 = \cos^2(2gt)$

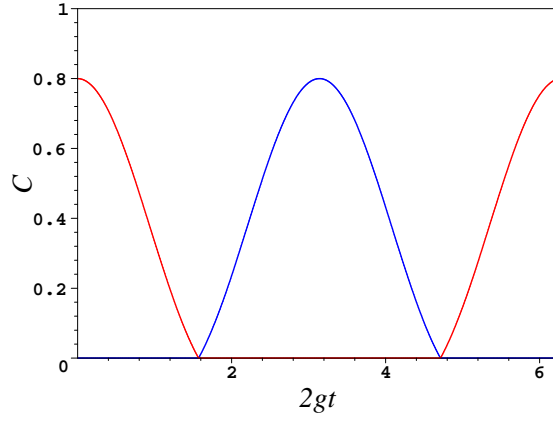


Figura 2.10: Em vermelho (azul) o gráfico de C_{AB} (C_{ab}), respectivamente, para $\alpha = \arctan(1/2)$.

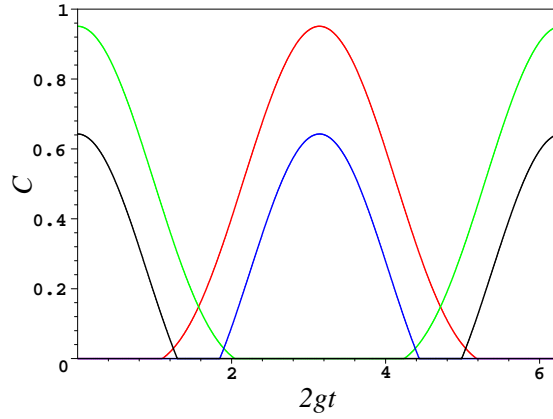


Figura 2.11: Em preto (azul) o gráfico de C_{AB} (C_{ab}) para $\alpha = \pi/9 < \arctan(1/2)$, respectivamente. Já em verde (vermelho) o gráfico de C_{AB} (C_{ab}) para $\alpha = \pi/5 > \arctan(1/2)$, respectivamente.

com o quadrado da equação (2.38) ou (2.41). Isso também nos fornece uma elipse de expressão

$$\frac{(C_{AB} - C_{ab})^2}{C_0^2} + \frac{C_{Aa(Bb)}^2}{\cos^4 \alpha} = 1 \quad (2.43)$$

No diagrama $(C_{AB} - C_{ab}) \times C_{Aa(Bb)}$ sempre teremos um seguimento da elipse (2.43) por que o emaranhamento em Aa não desaparece subitamente. Para $0 < \alpha < \arctan(1/2)$ o semi-eixo maior estará paralelo à $C_{Aa(Bb)}$, quando $\alpha = \arctan(1/2)$ teremos uma circunferência e para $\arctan(1/2) < \alpha < \pi/2$ o semi-eixo maior estará paralelo à $C_{AB} - C_{ab}$. Com isso a excentricidade fica sendo

$$\bar{\epsilon} = \begin{cases} \sqrt{\frac{5\mathcal{P}_0 - 3}{(1 + \mathcal{P}_0)}}, & \text{se } 0 < \alpha < \alpha_0 \\ \sqrt{\frac{3 - 5\mathcal{P}_0}{4(1 - \mathcal{P}_0)}}, & \text{se } \alpha_0 < \alpha < \pi/4 \\ \sqrt{\frac{3 + 5\mathcal{P}_0}{4(1 + \mathcal{P}_0)}}, & \text{se } \pi/4 < \alpha < \pi/2 \end{cases} \quad (2.44)$$

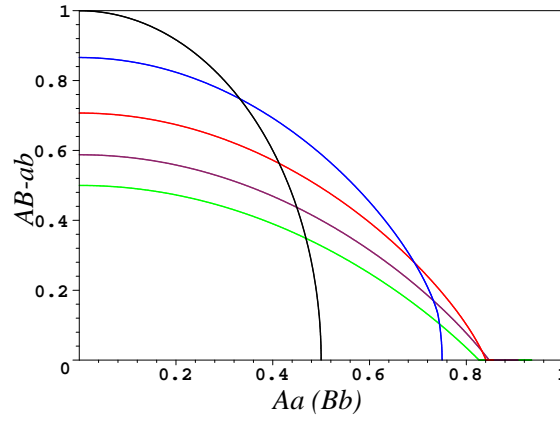


Figura 2.12: Gráfico da elipse $C_{Aa(Bb)} \times (C_{AB} - C_{ab})$ com $\alpha = \pi/4, \pi/6, \pi/8, \pi/10$ e $\pi/12$ para as cores preto, azul, vermelho, marrom e verde, respectivamente.

onde fizemos $\alpha_0 = \arctan(1/2)$. Já a distância focal será

$$\bar{f} = \begin{cases} \sqrt{(5\mathcal{P}_0 - 3)(1 + \mathcal{P}_0)}/2, & \text{se } 0 < \alpha < \alpha_0 \\ \sqrt{(3 - 5\mathcal{P}_0)(1 + \mathcal{P}_0)}/2, & \text{se } \alpha_0 < \alpha < \pi/4 \\ \sqrt{(3 + 5\mathcal{P}_0)(1 - \mathcal{P}_0)}/2, & \text{se } \pi/4 < \alpha < \pi/2 \end{cases} . \quad (2.45)$$

Observe que quando $\alpha = \alpha_0$ teremos $\mathcal{P}_0 = 3/5$ e $\bar{f} = 0$ e a elipse torna-se uma semi-circunferência. Perceba que para $0 < \alpha < \alpha_0$ o emaranhamento de AB desaparece antes do surgimento de emaranhamento em ab . Porém o emaranhamento de Aa é fornecido pelo JC e não permanece nulo em algum intervalo de tempo finito. Como resultado haverá uma janela de tempo em que $C_{AB} - C_{ab}$ será nula mas o emaranhamento entre Aa não. Desta maneira C_{Aa} assumirá valores maiores que $C_{AB} - C_{ab}$ e teremos o semi-eixo maior paralelo a C_{Aa} . Vale lembrar que a quantidade $C_{AB} - C_{ab}$ pode assumir valores positivos e negativos, mas como módulo limitado a 1. Assim, na Figura 2.12, teremos uma “reflexão” das curvas em relação ao eixo $C_{Aa(Bb)}$.

Considere $[C_0 - (C_{AB} + C_{ab})]/\cos^2(\alpha) = \sin^2(2gt)$ obtida anteriormente. Agora, podemos identificar essa expressão com o quadrado de (2.38) ou (2.41). O resultado será uma parábola de equação

$$(C_{AB} + C_{ab}) = C_0 - \frac{C_{Aa(Bb)}^2}{\cos^2 \alpha} \quad (2.46)$$

onde seu vértice \tilde{v} e foco \tilde{f} estão localizados sobre o eixo $(C_{AB} + C_{ab})$ nos pontos dados por $\tilde{v} = \{0, \sqrt{1 - \mathcal{P}_0}\}$ e $\tilde{f}_{\lessgtr} = \{0, \sqrt{1 - \mathcal{P}_0} - (1 \pm \mathcal{P}_0)\}$ onde, como antes, o sub-índice $< (>)$ é para $0 < \alpha < \pi/4$ ($\pi/4 < \alpha < \pi/2$), respectivamente. Sempre teremos um trecho dessa parábola no diagrama $(C_{AB} + C_{ab}) \times C_{Aa(Bb)}$, pois o seu vértice está limitado entre 0 e 1. Temos também que $(C_{AB} + C_{ab})$ não assumirá valores nulos para $\alpha_0 < \alpha < \pi/2$ e isso fará com que a parábola não toque o eixo $C_{Aa(Bb)}$ nesses casos, como mostra a Figura 2.13.

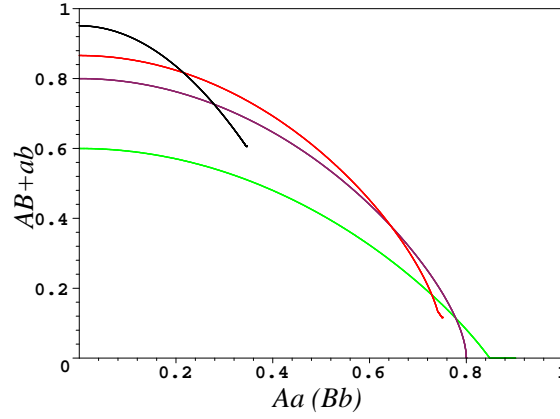


Figura 2.13: Gráfico da parábola $C_{Aa(Bb)} \times (C_{AB} + C_{ab})$ com $\alpha = 3\pi/10, \pi/4, \pi/6, \arctan(1/2)$ e $\arctan(1/3)$ para as cores preto, azul, vermelho, marrom e verde, respectivamente.

Da equação (2.38) ou (2.41) pode-se escrever $|\sin(2gt)| = C_{Aa(Bb)} \cos^2 \alpha$ e substituir em (2.39) ou (2.40). Com algumas simplificações chega-se na expressão

$$C_{Ab(aB)} + \frac{1}{2 \cos^2 \alpha} \left(C_{Aa(Bb)} - \frac{C_0}{2} \right)^2 = \frac{C_0^2}{8 \cos^2 \alpha} \quad (2.47)$$

que, como em casos anteriores, também é uma parábola que possuirá vértice \check{v} e foco \check{f} que estarão localizados nos pontos

$$\check{v}_{\leq} = \left\{ \frac{\sqrt{1 - \mathcal{P}_0^2}}{2}, \frac{(1 \mp \mathcal{P}_0)}{2} \right\}$$

$$\check{f}_{\leq} = \left\{ \frac{\sqrt{1 - \mathcal{P}_0^2}}{2}, \frac{\mp \mathcal{P}_0}{2} \right\}$$

onde os sub-índices seguem a notação de antes. A parábola da equação (2.47) tocará duas vezes no eixo $C_{Aa(Bb)}$ quando $0 < \alpha \leq \alpha_0$. Isso acontece porque para $0 < \alpha < \alpha_0$ haverá morte súbita de emaranhamento para $C_{Ab(aB)}$. Já para $\alpha_0 < \alpha < \pi/2$ não haverá morte súbita e o segmento de parábola só tocará no eixo $C_{Aa(Bb)}$ na origem, como mostra a Figura 2.14.

2.4 A superfície de emaranhamento

Na seção anterior exploramos os diagramas $C_{ij} \times C_{kl}$ para dois estados iniciais diferentes. Contudo, como o modelo físico aqui utilizado evolui unitariamente e sabendo que nesse modelo existe um invariante de emaranhamento [12], torna-se instrutivo analisar em o diagrama $C_{ij} \times C_{ik} \times C_{il}$ para o i -ésimo q-bit. Primeiro analisaremos tal diagrama para o átomo A . Para o estado inicial (2.2) as concorrências entre o átomo A e os demais q-bits são fornecidas pelas equações (2.16), (2.18) e (2.19). Fazendo os gráficos paramétricos dessas concorrências teremos curvas, para um determinado valor de α , num diagrama $C_{AB} \times C_{Aa} \times C_{Ab}$, como mostra a Figura 2.15. Claramente as projeções dessas curvas nos planos $C_{AB} \times C_{Aa}$,

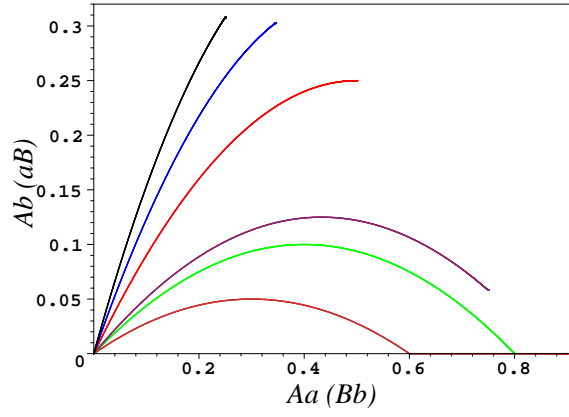


Figura 2.14: Gráfico da parábola $C_{Aa(Bb)} \times C_{Ab(aB)}$ com $\alpha = \pi/3, 3\pi/10, \pi/4, \pi/6, \arctan(1/2)$ e $\arctan(1/3)$ para as cores preto, azul, vermelho, marrom, verde e laranja, respectivamente.

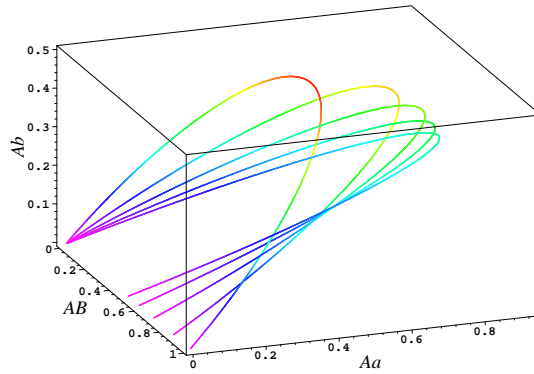


Figura 2.15: Gráfico do diagrama $C_{AB} \times C_{Aa} \times C_{Ab}$ para o átomo A e estado inicial (2.2). Da curva superior para a inferior, temos $\alpha = \pi/4, \pi/6, \pi/8, \pi/10$ e $\pi/12$.

$C_{AB} \times C_{Ab}$ e $C_{Aa} \times C_{Ab}$ serão os gráficos traçados nas Figuras 2.5, 2.6 e 2.7, respectivamente. Ou seja, o gráfico do diagrama $C_{ij} \times C_{ik}$ que envolve o i -ésimo q-bit é, na verdade, a projeção no plano $C_{ij} \times C_{ik}$ da curva $C_{ij} \times C_{ik} \times C_{il}$. Agora se traçarmos todas as possíveis curvas (variando α de 0 a $\pi/2$) do diagrama $C_{AB} \times C_{Aa} \times C_{Ab}$ teremos uma superfície nesse espaço, como mostra a Figura 2.16. Um ponto sobre essa superfície nos informa quanto de emaranhamento há em cada uma das partições AB , Aa e Ab . Se agora considerarmos o estado inicial (2.8) e traçarmos os gráficos paramétricos, para determinados valores de α , num diagrama $C_{AB} \times C_{Aa} \times C_{Ab}$, também teremos, de maneira análoga, curvas nesse diagrama, como mostra a Figura 2.17, onde suas projeções em cada plano $C_{Aj} \times C_{Ak}$ fornecerão as curvas desse respectivo diagrama. Como no caso anterior podemos traçar todas as possíveis curvas no diagrama $C_{AB} \times C_{Aa} \times C_{Ab}$ variando α de 0 a $\pi/2$ e encontraremos uma superfície, veja a Figura 2.18. Um ponto nessa superfície também fornece quanto de emaranhamento há em cada uma das partições AB , Aa e Ab .

Essas mesmas conclusões também são válidas para B , a e b . Logo, de maneira mais geral, podemos dizer que toda e qualquer trajetória nos diagramas $C_{ij} \times C_{ik}$, $C_{ij} \times C_{il}$ e $C_{ik} \times C_{il}$ pertencerão à superfície em $C_{ij} \times C_{ik} \times C_{il}$ e serão projeções em seus respectivos planos, onde i, j, k e l são os 4 q-bits (A, B, a e b) do sistema. De outro modo, um ponto sobre essa

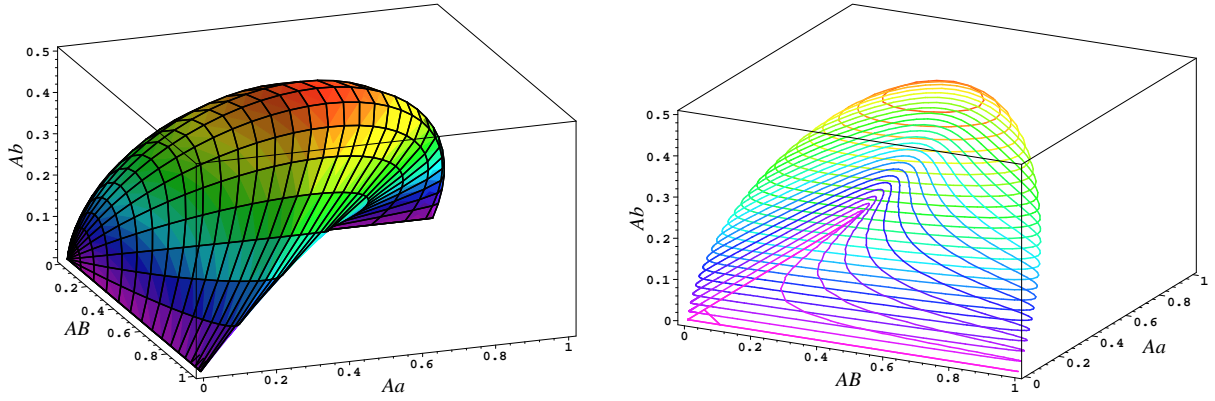


Figura 2.16: Superfície de emaranhamento para o átomo A no diagrama $C_{AB} \times C_{Aa} \times C_{Ab}$ para o estado inicial (2.2).

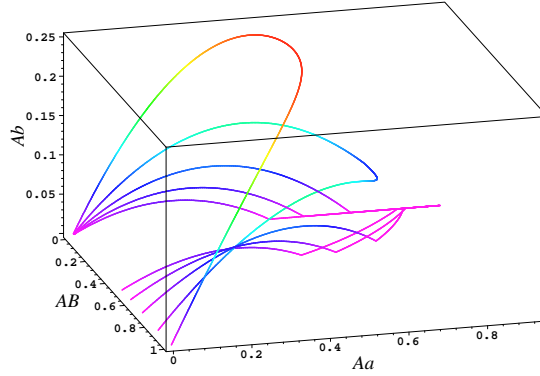


Figura 2.17: Gráfico do diagrama $C_{AB} \times C_{Aa} \times C_{Ab}$ para o átomo A e estado inicial (2.8), com $\alpha = \pi/4, \pi/6, \pi/8, \pi/10$ e $\pi/12$.

superfície informará os valores de C_{ij} , C_{ik} e C_{il} .

2.5 hiperesfera da dinâmica de emaranhamento

Faremos uso de um resultado já observado em [4] e [15], onde mostra-se que para o estado inicial (2.2) temos $C_{AB}^2 + C_{Ab}^2 + C_{aB}^2 + C_{ab}^2 = C_0^2$. Sem perda de generalidade, podemos somar em ambos os lados o termo $C_{Aa}^2 + C_{Bb}^2$ o que fornece $C_{AB}^2 + C_{Ab}^2 + C_{aB}^2 + C_{ab}^2 + C_{Aa}^2 + C_{Bb}^2 = C_0^2 + (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha) \sin^2(2gt)$. Esta última expressão pode ser transformada na desigualdade $C_{AB}^2 + C_{Ab}^2 + C_{aB}^2 + C_{ab}^2 + C_{Aa}^2 + C_{Bb}^2 < C_0^2 + (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha)$. Agora, fazendo uso de simples relações trigonométricas e lembrando da definição de \mathcal{P}_0 , podemos reescrever esta equação como

$$C_{AB}^2 + C_{Ab}^2 + C_{aB}^2 + C_{ab}^2 + C_{Aa}^2 + C_{Bb}^2 \leq 1 + \frac{C_0^2}{2} \quad (2.48)$$

que é uma hiperesfera de raio maior $\sqrt{(2 + C_0^2)/2}$ em um espaço onde os eixos são as concorrências entre os pares de q-bits. Por outro lado, podemos generalizar a desigualdade acima para

$$C_0^2 \leq C_{AB}^2 + C_{Ab}^2 + C_{aB}^2 + C_{ab}^2 + C_{Aa}^2 + C_{Bb}^2 \leq 1 + \frac{C_0^2}{2} \quad (2.49)$$

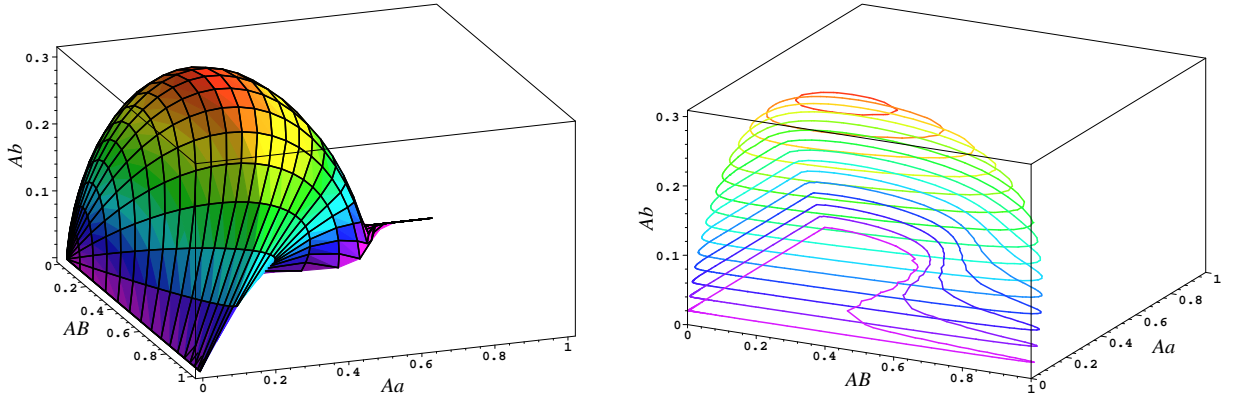


Figura 2.18: Superfície de emaranhamento para o átomo A no diagrama $C_{AB} \times C_{Aa} \times C_{Ab}$ para o estado inicial (2.8).

que define uma região limitada (uma casca–hiperesférica) dentro da hiperesfera, definida pela eq. (2.48). Assim, qualquer curva em um diagrama onde os eixos são concorrências entre pares de q–bits e o estado inicial é (2.2) estará ou sobre a superfície ou no interior da casca–hiperesférica (2.49). Assim, podemos especular que, da mesma maneira que as curvas nos diagramas $C_{ij} \times C_{ik}$ são projeções de curvas na superfície $C_{ij} \times C_{ik} \times C_{il}$, a superfície definida em $C_{ij} \times C_{ik} \times C_{il}$ é uma projeção de uma hiperesfera que está em um espaço de dimensão maior.

Podemos fazer a mesma análise para o estado inicial (2.8). Contudo, neste caso [4, 15] nós temos apenas que a desigualdade $0 \leq C_{AB}^2 + C_{Ab}^2 + C_{aB}^2 + C_{ab}^2 \leq C_0^2$ e, como feito anteriormente, podemos em ambos os lados somar o termo $C_{Aa}^2 + C_{Bb}^2 = [1 + \cos(2\alpha)]^2 \sin^2(2gt)/2$. Com uma simples algebra é facil expressar o resultado desta soma em forma da desigualdade $0 \leq C_{AB}^2 + C_{Ab}^2 + C_{aB}^2 + C_{ab}^2 + C_{Aa}^2 + C_{Bb}^2 \leq C_0^2 + [1 + \cos(2\alpha)]^2/2$. Sabemos que \mathcal{P}_0 é igual a $\cos(2\alpha)$ se $0 < \alpha < \pi/4$ e $-\cos(2\alpha)$ se $\pi/4 \leq \alpha \leq \pi/2$. Usando isso e $C_0^2 + \mathcal{P}_0^2 = 1$, podemos reescrever a desigualdade como

$$0 \leq C_{AB}^2 + C_{Ab}^2 + C_{aB}^2 + C_{ab}^2 + C_{Aa}^2 + C_{Bb}^2 \leq 1 + \frac{C_0^2}{2} \pm \mathcal{P}_0 \quad (2.50)$$

onde no lado direito desta equação temos $(1+C_0^2/2+\mathcal{P}_0)$ quando $0 < \alpha < \pi/4$ e $(1+C_0^2/2-\mathcal{P}_0)$ quando $\pi/4 \leq \alpha \leq \pi/2$. Dessa desigualdade deve ser válida durante toda evolução e, em um espaço definido pelos eixos correspondendo às concorrências C_{ij} , nós temos que o raio desta hiperesfera é dado por

$$R_{\gtrless} = \sqrt{1 + \frac{C_0^2}{2} \pm \mathcal{P}_0} \quad (2.51)$$

onde temos $R_{>}$ ($R_{<}$) quando $0 < \alpha < \pi/4$ ($\pi/4 \leq \alpha \leq \pi/2$), respectivamente. Vale ressaltar que para $0 < \alpha < \pi/4$ haverá morte súbita do emaranhamento em alguma partição. Por outro lado, para $\pi/4 \leq \alpha \leq \pi/2$ não haverá morte súbita em nenhuma partição. Assim, temos $R_{>}$ quando existe morte súbita e do contrário teremos $R_{<}$. Note que para $0 < \alpha < \arctan(1/2)$ existirá um intervalo de tempo $\Delta\tau = [\arccos(\sqrt{\tan \alpha}) - \arcsin(\sqrt{\tan \alpha})]/g$ onde $C_{AB} = C_{ab} = C_{Ab} = C_{aB} = 0$ (como observado em [2]). Desde que a hiperesfera é

definida pelas concorrências entre pares de q-bits, seria intuitivo esperar, nesta condição e durante o intervalo de tempo $\Delta\tau$, obter $R_<$ no lugar de $R_>$ visto que apenas C_{Aa} e C_{Bb} são diferentes de zero. O fato de que o raio médio da hiperesfera aumenta é uma consequência do emaranhamento dinâmico C_{Aa} e C_{Bb} . Quando $0 < \alpha < \pi/4$ o emaranhamento das partições Aa e Bb atinge valores máximos entre $1/2$ e 1 . Assim, o valor máximo de $C_{Aa}^2 + C_{Bb}^2$ será entre $1/2$ e 2 , contribuindo substancialmente para a desigualdade (2.50).

2.6 Conclusões

Percebemos que os gráficos entre as concorrências de pares de q-bits, num diagrama $C_{ij} \times C_{kl}$, são sempre cônicas, elipses ou retas (elipse com excentricidade 1), quando consideramos o estado inicial para os átomos é $|\psi_0\rangle$. No caso do estado inicial dos átomos sendo $|\phi_0\rangle$ nem sempre o gráfico possui uma forma simples e alguns deles também são cônicas. Sempre foi possível descrever as propriedades das cônicas como uma função da quantidade local $\mathcal{P}_0 = |\langle \sigma_z^A \rangle|$ e do emaranhamento inicial C_0 .

O conjunto de todas as possíveis trajetórias no diagrama $C_{ij} \times C_{ik} \times C_{il}$, que envolve o emaranhamento entre os pares de q-bits i com j , k e l , define uma superfície nesse diagrama. Quando os átomos estiverem nos estados iniciais $|\psi_0\rangle$ ou $|\phi_0\rangle$ e as cavidades em $|00\rangle$, haverá uma curva paramétrica entre pares de q-bits $C_{ij} \times C_{kl}$ que estará sobre a superfície $C_{ij} \times C_{ik} \times C_{il}$.

Ao estender essas idéias encontramos uma desigualdade que define uma hiperesfera em um espaço onde os eixos de coordenadas são as concorrências entre pares de qubits. Nesse espaço, toda curva paramétrica em um diagrama $C_{ij} \times C_{kl}$ estará no interior ou na superfície da hiperesfera. De outro modo podemos interpretar as desigualdades (2.49) e (2.50) como relações de distribuição de emaranhamento, no sentido de [19]. Como o lado direito das equações (2.49) e (2.50) são constantes, então possui uma analogia com o invariante de emaranhamento em [12], pois quando o emaranhamento diminui em uma das partições de dois q-bits deve aparecer em outra. Indo na direção da distribuição de emaranhamento, as cônicas por nós encontradas também podem ser interpretadas como uma relação de distribuição de emaranhamento. Devido a forma quadrática de (2.49) e (2.50), fica mais imediata a interpretação como uma hiperesfera. Podemos especular que, da mesma maneira que as curvas nos diagramas $C_{ij} \times C_{ik}$ são projeções de curvas na superfície $C_{ij} \times C_{ik} \times C_{il}$, a superfície definida em $C_{ij} \times C_{ik} \times C_{il}$ é uma projeção de uma hiperesfera que está em um espaço de dimensão maior.

Bibliografia

- [1] K. Zyczkowski, P. Horodecki, M. Horodecki, and R. Horodecki, *Phys. Rev. A*, **65**, 012101 (2001);
T. Yu, and J. Eberly, *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 140404 (2004);
M. Santos, P. Milman, L. Davidovich, and N. Zagury, *Phys. Rev. A*, **73**, 040305 (2006);
T. Yu, *Phys. Lett. A*, **361**, 287 (2007);
Y.J. Zhang, Z.X. Man, and Y.J. Xia, *J. Phys. B: At. Mol. Phys.*, **42**, 095503 (2009).
- [2] C. López, G. Romero, F. Lastra, E. Solano, and J. Retamal, *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 080503 (2008).
- [3] J.S. Zhang, and J.B. Xu, *Opt. Commun.*, **282**, 3652 (2009).
- [4] S. Chan, M. Reid, and Ficek, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **43**, 215505 (2010).
- [5] E. Jaynes, and F. Cummings, *Proc. IEEE*, **51**, 89 (1963).
- [6] M. Tavis, and F. Cummings, *Phys. Rev.*, **170**, 379 (1968).
- [7] M. Yönaç, T. Yu, and J. Eberly, *J. Phys. B: At. Mol. Phys.*, **39**, S621 (2006).
- [8] H.T. Cui, K. Li, and X.X. Yi, *Phys. Lett. A*, **365**, 44 (2007).
- [9] Z.X. Man, Y.J. Xia, and N. An, *J. Phys. B: At. Mol. Phys.*, **41**, 085503 (2008).
- [10] D. McHugh, M. Ziman, and V. Bužek, *Phys. Rev. A*, **74**, 042303 (2006).
- [11] D. Cavalcanti, J. G. Oliveira Jr., J. G. Peixoto de Faria, M. Terra Cunha, and M. França Santos, *Phys. Rev. A*, **74**, 042328 (2006).
- [12] I. Sainz, and G. Björk, *Phys. Rev. A*, **76**, 042313 (2007).
- [13] M. Yönaç, T. Yu, and J. Heberly, *J. Phys. B: At. Mol. Phys.*, **40**, S45 (2007).
- [14] J.L. Guo, and H.S. Song, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **41**, 085302 (2008).
- [15] S. Chan, M. Reid, and Z. Ficek, *J. Phys. B: At. Mol. Phys.*, **42**, 065507 (2009).
- [16] Z.X. Man, Y.J. Xia, and N.B. An, *Eur. Phys. J. D*, **53**, 229 (2009).

- [17] W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 2245(1998).
- [18] M. Jakob, and J. Bergou, *quant-ph/0302075* (2003).
- [19] V. Coffman, J. Kundu, and W. K. Wootters, *Phys. Rev. A*, **61**, 052306(2006).

Capítulo 3

Protegendo, aumentando e revivendo o emaranhamento

Neste capítulo, propomo uma estratégia não só para proteger, mas também para aumentar e reviver o emaranhamento em um modelo Jaynes–Cummings duplo (JCD). Nós mostramos que tais características surpreendentes surgem quando medições tipo Zeno são realizadas durante o processo dinâmico.

3.1 Introdução

Hoje em dia, dado o avanço impressionante da tecnologia, os físicos são capazes de observar o entrelaçamento em seus laboratórios [1, 2, 3, 4] e também mostram que ela representa um ingrediente chave para várias aplicações tecnológias importantes, por exemplo, o desenvolvimento da informação quântica [5], que está intimamente ligada ao controle e manipulação do emaranhamento. Em um recente trabalho medições tipo Zeno tem sido utilizadas para proteger um estado emaranhado de seu ambiente [6]. Atualmente, no âmbito da informação quântica, o efeito Zeno Quântico (EZQ) vem sendo utilizado como uma ferramenta para prevenir erros [7, 8, 9, 10, 11], para criar estados quânticos [12], preservação de estados [13] e controlar a decoerência [14, 15, 16].

No presente capítulo, nós mostramos, no contexto do modelo Jaynes–Cummings duplo [17], resultados intrigantes advindo da combinação de emaranhamento dinâmico e medições tipo Zeno. Os resultados são estratégias para controlar e aumentar o emaranhamento, mesmo depois da morte súbita (induzindo o renascimento). Nós mostramos que medidas tipo Zeno, na dinâmica do JCD, pode aumentar o emaranhamento do estado inicial entre os átomos

$$|\phi_+\rangle_{AB} = \alpha_0|1, 1\rangle_{AB} + \beta_0|0, 0\rangle_{AB} \quad , \quad (3.1)$$

com $|\alpha_0| > |\beta_0|$, levando-o para o estado de Bell, mesmo após o tempo de destruição das correlações quânticas como quantificadas pela concorrência (morte súbita). O sucesso deste procedimento está condicionadp ao resultado da medida. Nós também mostramos que EZQ pode inibir a dinâmica de emranhamento no JCD.

3.2 Protegendo o emaranhamento

Vamos considerar, como no capítulo 2 e esquematizado na figura 2.1, um sistema de quatro q-bits $ABab$ onde A (B) é um átomo de dois níveis que interage ressonantemente com o campo no interior da cavidade a (b) via um modelo JC de hamiltoniano (2.1), respectivamente. Se o estado inicial do sistema for

$$|\varphi\rangle_0 = |\phi_+\rangle_{AB}|0,0\rangle_{ab} \quad ,$$

e considerando $|\alpha_0|^2 + |\beta_0|^2 = 1$, o estado evoluído, na representação de interação, será

$$|\varphi\rangle_t = |\phi_+(t)\rangle_{AB}|0,0\rangle_{ab} + |\chi(t)\rangle_{ABab} \quad (3.2)$$

onde

$$\begin{aligned} |\phi_+(t)\rangle_{AB} &= \alpha_t|1,1\rangle_{AB} + \beta_0|0,0\rangle_{AB} \\ |\chi(t)\rangle_{ABab} &= -\alpha_0 b(t) \left[ia(t)(|1,0\rangle_{AB}|0,1\rangle_{ab} + |0,1\rangle_{AB}|1,0\rangle_{ab}) + b(t)|0,0\rangle_{AB}|1,1\rangle_{ab} \right] \quad , \end{aligned}$$

com $\alpha_t = \alpha_0 a^2(t)$, $a(t) = \cos(gt)$ e $b(t) = \sin(gt)$. Note que em $t = \pi/2g$ existe uma troca de emaranhamento onde AB estará no vácuo e ab emaranhados, ou seja:

$$|\phi_+\rangle_{AB}|0,0\rangle_{ab} \longrightarrow e^{i\pi}|0,0\rangle_{AB}|\phi_+\rangle_{ab}$$

onde $|\phi_-\rangle_{ab} = \alpha_0|1,1\rangle_{ab} - \beta_0|0,0\rangle_{ab}$.

Neste momento vamos considerar um sistema de sonda, que chamaremos de M , composto de N subsistemas de dois níveis todos preparados no estado fundamental, *i.e.*, $|0\rangle_M = \bigotimes_{k=1}^N |0_M^{(k)}\rangle$. O sistema de sonda irá interagir N vezes com ab e ao término o sistema $ABab$ terá evoluído por um tempo $T = N\tau$. Após cada janela de tempo τ um subsistema de M irá interagir de forma impulsiva com ab e realizará uma medida onde discriminará duas possibilidades: *i)* existe excitação em ab e *ii)* não existe excitação em ab . Em seguida o subsistema de M será medido e manteremos apenas os resultados nulos, *i.e.*, com o sistema M desexcitado.

A interação impulsiva entre o k -ésimo subsistema de M e ab será dependente do tempo e sua ação se limita ao instante $t = k\tau$. O hamiltoniano dessa evolução será

$$H_{imp}(t) = \hbar \delta(t - k\tau) \frac{\pi}{2} \Gamma_k \quad (3.3)$$

onde $\delta(x)$ é a função delta de Dirac e

$$\Gamma_k = |0,0\rangle\langle 0,0|_{ab} \otimes |0_M^{(k)}\rangle\langle 0_M^{(k)}| + (\mathbf{1}_{ab} - |0,0\rangle\langle 0,0|_{ab}) \otimes (|0_M^{(k)}\rangle\langle 1_M^{(k)}| + |1_M^{(k)}\rangle\langle 0_M^{(k)}|) \quad .$$

O operador unitário desta interação impulsiva em $t = k\tau$ será

$$\begin{aligned} U_{imp}(k\tau) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{k\tau-\epsilon}^{k\tau+\epsilon} H_{imp}(t') dt'\right) \\ &= \exp(-i\pi\Gamma_k/2) \\ &= \mathbf{1}_{ab} \otimes \mathbf{1}_M^{(k)} - \Gamma_k^2 + e^{-i\pi/2}\Gamma_k \quad . \end{aligned} \quad (3.4)$$

Com isso, em $t = \tau$ o estado global do sistema $ABab$ irá interagir com o primeiro subsistema de M . O processo de interação impulsiva entre $ABab$ e M se dará como segue:

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle_\tau |0_M^{(1)}\rangle &\rightarrow U_{imp}(\tau) |\varphi\rangle_\tau |0_M^{(1)}\rangle \\ &\rightarrow e^{-i\pi/2} (|\phi_+\rangle_{AB} |0,0\rangle_{ab} |0_M^{(1)}\rangle + |\chi(\tau)\rangle_{ABab} |1_M^{(1)}\rangle) \quad . \end{aligned}$$

Então a interação seguida de medição, onde manteremos apenas o resultado nulo, fornecerá um estado não normalizado de $ABab$ dado por

$$|\tilde{\varphi}\rangle_\tau = \langle 0_M^{(1)} | U_{imp}(\tau) |\varphi\rangle_\tau |0_M^{(1)}\rangle$$

que após a normalização fica

$$|\varphi\rangle_\tau = \frac{1}{\sqrt{|\alpha_\tau|^2 + |\beta_0|^2}} (\alpha_\tau |1,1\rangle_{AB} + \beta_0 |0,0\rangle_{AB}) |0,0\rangle_{ab} \quad (3.5)$$

onde desconsideramos a fase global $e^{-i\pi/2}$. Após a sequência das N interações mantendo apenas os resultados nulos, *i.e.*, sem excitação em ab , o estado de $ABab$ no tempo T torna-se

$$|\varphi\rangle_T = \frac{1}{\sqrt{|\alpha_T|^2 + |\beta_0|^2}} (\alpha_T |1,1\rangle_{AB} + \beta_0 |0,0\rangle_{AB}) |0,0\rangle_{ab} \quad (3.6)$$

com $\tau = T/N$, $\alpha_T = \alpha_0 \cos^{2N}(g\tau)$ e fixamos o tempo total da evolução sendo $T = \pi/2g$ que é o tempo onde há a transferência de emaranhamento.

O emaranhamento inicial do subsistema AB , quantificado pela concorrência, será

$$C_0 = 2|\alpha_0\beta_0|$$

e após as N medidas o emaranhamento em AB torna-se

$$C_N = \frac{2|\alpha_T\beta_0|}{|\alpha_T|^2 + |\beta_0|^2} \quad . \quad (3.7)$$

Fixando T e fazendo o limite de $N \rightarrow \infty$ nas eqs. (3.6) e (3.7), podemos observar a inibição da dinâmica, *i.e.*,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\varphi\rangle_T = |\phi_+\rangle_{AB} |0,0\rangle_{ab}$$

e

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C_N = C_0 \quad .$$

O vetor de estado do sistema após as N medidas tende a seu estado inicial quando $N \rightarrow \infty$ e, conseqüentemente, a concorrência vai para o seu valor inicial. Portanto no limite $N \rightarrow \infty$ de EZQ a dinâmica de emaranhamento no JC pode ser “congelada” preservando o emaranhamento inicial entre as partes. Os cálculos mostram que emaranhamento inicial contido em umas das partições do sistema pode ser mantido como constante. Além disso, também é possível transferir esse entrelaçamento para a partição ab , inicialmente fatorada, e preservar o emaranhamento por lá.

3.3 Aumentando o emaranhamento

Observando a eq. (3.6) é fácil perceber que o coeficiente do estado $|1, 1\rangle_{AB}$ pode ser manipulado. Isso nos fornece uma maneira e as condições para que o aumento do emaranhamento desse sistema seja possível, mesmo após a morte súbita.

Relembrando que $C_0 = 2|\alpha_0\beta_0|$ e que $|\alpha_0|^2 + |\beta_0|^2 = 1$, podemos escrever:

$$|\alpha_0| = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1-C_0^2}{4}}} & ; |\alpha_0| \geq |\beta_0| \\ \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1-C_0^2}{4}}} & ; |\alpha_0| \leq |\beta_0| \end{cases} . \quad (3.8)$$

Substituindo (3.8) na eq. (3.7), e após alguma álgebra, podemos escrever a concorrência C_N como uma função da concorrência inicial e do número de medidas, como segue:

$$C_N^\pm = \begin{cases} C_N^+ & ; |\alpha_0| \geq |\beta_0| \\ C_N^- & ; |\alpha_0| \leq |\beta_0| \end{cases} \quad (3.9)$$

onde

$$C_N^\pm = \frac{2C_0 \cos^{2N}(g\tau)}{1 + \cos^{4N}(g\tau) \mp \sqrt{1 - C_0^2}[1 - \cos^{4N}(g\tau)]} . \quad (3.10)$$

As funções C_N^+ e C_N^- mostram um comportamento similar com $N \rightarrow \infty$, as duas tendem ao valor da concorrência inicial. Contudo, devido ao sinal que se inverte no denominador, seu comportamento é completamente diferente quando N é finito, como mostra a figura 3.1.

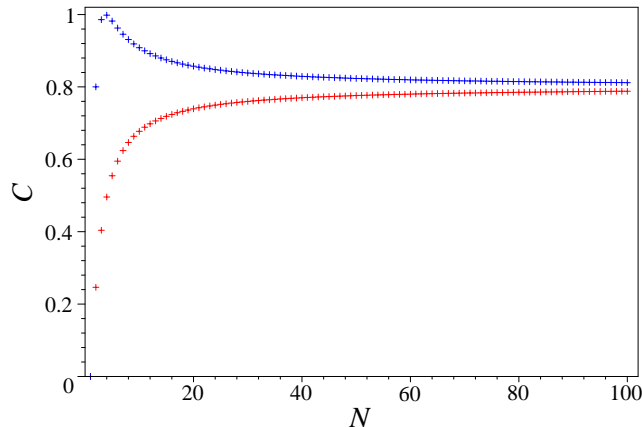


Figura 3.1: Concorrência C_N^- (vermelho) e C_N^+ (azul) como uma função de N para $\tau = \pi/2gN$. Aqui fizemos $C_0 = 0.8$.

Se apenas uma medida é feita em $\tau = \pi/2g$, nenhuma inibição pode ser observada e o emaranhamento é completamente transferido para o sistema ab . Nesta situação a concorrência do sistema AB é nula e as duas curvas na figura 3.1 começam do zero. Com N aumentando C_N^- cresce suavemente tendendo a C_0 quando $N \rightarrow \infty$. Desta maneira, concluímos que para o estado inicial com $|\alpha_0| \leq |\beta_0|$, o efeito de “congelar” o emaranhamento é o único que pode ser induzido.

Por outro lado, a função C_N^+ mostra um interessante efeito além de “congelar” o emaranhamento. Quando o estado inicial respeita a relação $|\alpha_0| > |\beta_0|$, a concorrência do sistema AB pode ir além do seu valor inicial e pode se tornar mais próximo do seu valor máximo. Isso é melhor percebido ao observar o coeficiente α_T , na eq. (3.6), que pode diminuir quando N cresce e quando seu valor em módulo se aproxima de $|\beta_0|$ a concorrência aumenta. No caso ideal, quando $|\alpha_T| = |\beta_0|$ a concorrência é máxima ($C_N^+ = 1$).

Também é possível trazer a superposição $\alpha_0|1, 1\rangle + \beta_0|0, 0\rangle$ para o estado estado maximamente emaranhado

$$\frac{|1, 1\rangle + e^{-i\theta}|0, 0\rangle}{\sqrt{2}} \quad (3.11)$$

com apenas uma única medida, onde θ é uma fase relativa entre α_0 e β_0 . O procedimento é simples, onde deixamos o sistema evoluir livremente e realizamos a medição sobre o sistema ab no tempo

$$t = \frac{1}{g} \arccos(\sqrt{|\beta_0/\alpha_0|})$$

momento em que $|\alpha_0 \cos^2(gt)| = |\beta|$. Selecionando o estado com resultado nulo, teremos o estado (3.11) preparado no sistema AB . Esse procedimento é condicionado ao resultado da medida e pode ser realizado até mesmo após a morte súbita do emaranhamento entre AB como mostraremos a seguir.

3.4 Revivendo o emaranhamento

O desaparecimento súbito do emaranhamento, chamado de morte súbita, para o estado inicial (3.1) com $|\alpha_0| > |\beta_0|$ no contexto do JCD é bem conhecido [18]. Para mostrar este efeito, encontramos a expressão para a concorrência (C_f) do subsistema AB para o estado global evoluindo sem interferência externa, como uma função da concorrência inicial,

$$C_f^\pm(t) = \max(0, \Lambda_t^\pm) \quad , \quad (3.12)$$

onde

$$\Lambda_t^\pm = \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - C_0^2}} \cos^2(gt) \left(\sqrt{1 \mp \sqrt{1 - C_0^2}} - \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - C_0^2}} \sin^2(gt) \right) \quad .$$

Podemos notar que para tempos

$$t_{sd} = \frac{1}{g} \arcsin \left(\frac{\sqrt[4]{1 - \sqrt{1 - C_0^2}}}{\sqrt[4]{1 + \sqrt{1 - C_0^2}}} \right) \quad , \quad (3.13)$$

que são menores que o tempo $T = \pi/2g$ onde ocorre a transferência de emaranhamento para ab , haverá morte súbita de emaranhamento em AB para C_f^+ , como ilustrado na figura 3.2.

Contudo, com uma simples medida em ab no tempo τ tal que

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1}{g} s \arccos\left(\sqrt{|\beta_0/\alpha_0|}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{C_0}{1 + \sqrt{1 - C_0^2}}\right)\end{aligned}\quad (3.14)$$

obtemos como resultado um estado em AB máximamente emaranhado, como ilustrado na figura 3.3.

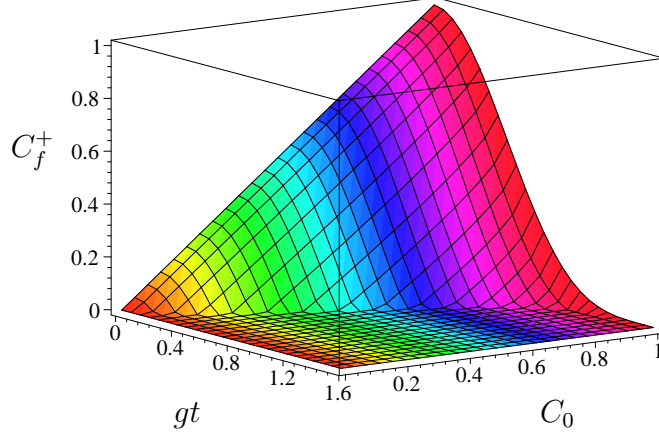


Figura 3.2: Concorrência sem medições (C_f^+) como uma função de gt e C_0 para estados iniciais $(\alpha_0|1, 1\rangle_{AB} + \beta_0|0, 0\rangle_{AB})|00\rangle_{ab}$ com $|\alpha_0| > |\beta_0|$.

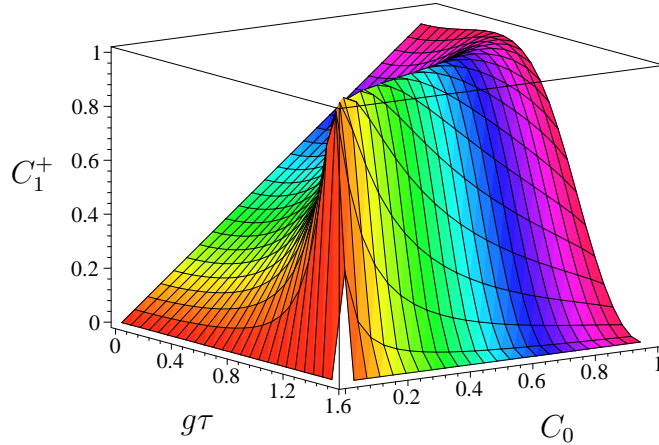


Figura 3.3: Concorrência (C_1^+) após uma simples medida sobre ab com resultado nulo, como uma função de $g\tau$ e C_0 para estados iniciais $(\alpha_0|1, 1\rangle_{AB} + \beta_0|0, 0\rangle_{AB})|00\rangle_{ab}$ com $|\alpha_0| > |\beta_0|$.

Note que, ao observar a figura 3.2, a concorrência é zero após o tempo t_{sd} (3.13) da morte súbita de emaranhamento. Entretanto, ao observar a figura 3.3, de maneira surpreendente, podemos perceber que existem muitas situações onde o tempo τ de realizar a medida sobre ab é maior que o tempo t_{sd} da morte súbita do emaranhamento em AB . Nesta circunstância, imediatamente antes de realizar a medida sobre ab no tempo τ o subsistema A está desemaranhado de B e após a medida A estará maximamente emaranhado com B . Assim, as

correlações quânticas na partição AB são “trazidas à vida” por uma única medida realizada não necessariamente no momento imediatamente após à morte súbita.

Pode-se perceber, ao analisar as eqs. (3.13) e (3.14), que

$$\begin{aligned} C_0 < 4/5 &\implies \tau > t_{sd} \\ C_0 = 4/5 &\implies \tau = t_{sd} \\ C_0 > 4/5 &\implies \tau < t_{sd} \end{aligned} \tag{3.15}$$

como mostra a figura 3.4. A razão para isto é que, após a morte súbita e antes do tempo

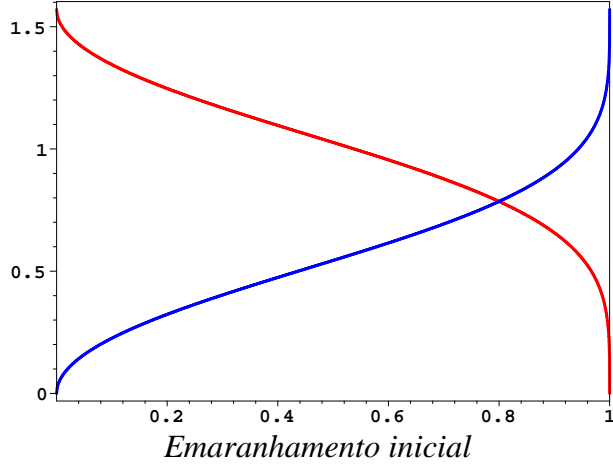


Figura 3.4: Em vermelho o tempo τ (3.13) de se realizar a primeira medida para obter emaranhamento máximo na partição AB . Em azul o tempo t_{sd} (3.14) que acontece a morte súbita do emaranhamento na partição AB . Podemos observar que em $C_0 = 4/5$ temos $\tau = t_{sd}$, na região $C_0 < 4/5$ temos $\tau > t_{sd}$ e quando $C_0 > 4/5$ temos $\tau < t_{sd}$. Pode-se então perceber que quando $|\alpha_0| > |\beta_0|$ e $C_0 < 4/5$, ao medir ab no tempo τ dado pela equação (3.13) o emaranhamento de AB será “trazido à vida” e com valor máximo.

Quando há a transferência total de C_0 para o sistema ab , não existe emaranhamento em AB , mas as excitações não foram completamente transferidas para ab . Então, se realizamos uma medição em ab , e obtemos um resultado nulo, um estado com emaranhamento finito é preparado em AB . É possível até mesmo “ressuscitar” o emaranhamento para o valor máximo ($C_1^+ = 1$), superando C_0 , se a medição for realizada em $\tau = (1/g) \arccos\left(\sqrt{|\beta_0/\alpha_0|}\right)$.

3.5 Conclusões

Nós mostramos que QEZ pode ser usado como uma ferramenta para inibir a dinâmica de emaranhamento no contexto do JCD. Nós também mostramos que medidas tipo Zeno são capazes de aumentar (condicionalmente) o emaranhamento do estado $(\alpha_0|1, 1\rangle_{AB} + \beta_0|0, 0\rangle_{AB})|00\rangle_{ab}$ com $|\alpha_0| > |\beta_0|$ e aplicar este procedimento para evitar o desaparecimento súbito observado em outros resultados [18]. “Congelar” o emaranhamento é possível para todos os estados de Bell, contudo sem nenhum aumento.

Bibliografia

- [1] A. Aspect, J. Dalibard e G. Roger, *Phys. Rev. Lett.***49**, 1804 (1982).
- [2] A. Auffeves, P. Maioli, T. Meunier, S. Gleyzes, G. Nogues, M. Brune, J. M. Raimond and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.*, **91**, 230405 (2003).
- [3] A. Rauschenbeutel, P. Bertet, S. Osnaghi, G. Nogues, M. Brune, J. M. Raimond e S. Haroche, *Phys. Rev. A*, **64**, 050301(R) (2001).
- [4] R. McDermott, R. W. Simmonds, M. Steffen, K. B. Cooper, K. Cicak, K. D. Osborn, Seongshik Oh, D. P. Pappas e J. M. Martinis, *Science*, **307**, 1299 (2005).
- [5] M. A. Nielsen e I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2000).
- [6] S. Maniscalco, F. Francica, R. L. Zaffino, N. Lo Gullo e F. Plastina, *Phys. Rev. Lett.*, **100**, 090503 (2008).
- [7] Chui-Ping Yang, Shih-I Chu e S. Han, *Phys. Rev. A*, **66**, 034301 (2002).
- [8] L. Vaidman, L. Goldenberg e S. Wiesner, *Phys. Rev. A*, **54**, R1745 (1996).
- [9] Lu-Ming Duan e Guang-Can Guo, *Phys. Rev. A*, **57**, 2399 (1998).
- [10] WonYoung Hwang, Hyukjae Lee, Doyeol (David) Ahn e Sung Woo Hwang, *Phys. Rev. Lett.*, **62**, 062305 (2000).
- [11] N. Erez, Y. Aharonov, B. Reznik e L. Vaidman, *Phys. Rev. A*, **69**, 062315 (2004).
- [12] M. Zhang e L. You, *Phys. Rev. Lett.*, **91**, 230404 (2003).
- [13] D. Dhar, L. K. Grover e S. M. Roy, *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 100405 (2006).
- [14] O. Hosten, M. T. Rakher, J. T. Barreiro, N. A. Peters e P. G. Kwiat, *Nature* (London), **439**, 949 (2006).
- [15] J. D. Franson, B. C. Jacobs e T. B. Pittman, *Phys. Rev. A*, **70**, 062302 (2004).
- [16] P. Facchi, S. Tasaki, S. Pascazio, H. Nakazato, A. Tokuse e D. A. Lidar, *Phys. Rev. A*, **71**, 022302 (2005).

[17] I. Sainz e G. Björk, *Phys. Rev. A*, **76**, 042313 (2007).

[18] M. Yönaç, T. Yu e J. H. Eberly, *J. Phys. B*, **39**, S621 (2006).

Capítulo 4

Características microscópicas e macroscópicas de uma ponta de prova

Neste capítulo, estudamos um interferômetro equipado com uma ponta de prova capaz de obter e armazenar a informação por qual caminho seguiu uma partícula quântica que o atravessa. Analisamos as características de natureza ondulatória e corpuscular da ponta de prova ao desenvolver a relação de dualidade correspondente. Os resultados permitem caracterizar os regimes quântico e clássico da ponta de prova. Em complemento mostramos que o ingrediente chave para a transição quântico-clássico não é necessariamente a informação gerada pela interação entre a partícula e a ponta de prova, mas sim a sua disponibilidade. Como exemplo, descrevemos um experimento de complementaridade realizado recentemente e, em seguida, analisamos as zonas de Ramsey onde nossos resultados fornecem uma simples interpretação.

4.1 Introdução

A complementaridade e o emaranhamento exercem papel central na mecânica quântica e distinguem o mundo dos fenômenos quânticos da realidade macroscópica da física clássica. Durante a criação da mecânica quântica, essas características estiveram no centro de acirrados debates envolvendo Bohr, Einstein, de Broglie, Heisenberg e Schrödinger [1].

O conceito de complementaridade, conforme concebido por Bohr [2] na época, era ilustrado com exemplos em que ora a partícula quântica se comportava como um corpúsculo e ora como uma onda. Este exemplos enfatizavam a posição e o momento da partícula quântica. Essa concepção foi identificada com a chamada “dualidade onda-partícula”. Hoje, no entanto, o conceito de complementaridade adquiriu um carácter mais geral: dois observáveis são considerados complementares se o conhecimento preciso de um deles implica que a medida do outro fornecerá todos os resultados possíveis com igual probabilidade. Já o emaranhamento foi primeiramente trazido à discussão por Einstein, Podolski e Rosen [3] e desde então não deixou de ser investigado (veja, por exemplo, [4] e referências lá contidas). Sobre o emaran-

hamento talvez o ideal seja citar, na sua forma traduzida, as primeiras linhas da ref. [5] de Schrödinger: *Quando dois sistemas, cujos estados conhecemos através de seus representantes (i.e., funções ψ) entram em interação física temporária e depois de um tempo de influência mútua os sistemas voltam a se separar, então eles não podem mais ser descritos da mesma forma que anteriormente, a saber, associando a cada um seu próprio representante. Eu não chamaria a isso “um” mas “o” traço característico da mecânica quântica, que abriga o seu afastamento completo das linhas de pensamento clássicas. Através da interação os dois representantes (funções ψ) se tornaram emaranhados*¹. Assim, o emaranhamento “surge” de uma interação entre dois sistemas e, como consequência, cada constituinte do sistema composto estará correlacionado quanticamente com o resto do sistema.

Nos últimos anos houve muitos trabalhos que objetivaram testar a complementaridade e suas consequências, *e.g.*, em experimentos de fenda dupla [6], com o apagador quântico [7, 8, 9], com interferometria em cavidades [10, 11] e interferometria com feixe atômico [12], para citar alguns. Recentemente Mandel [13] verificou que a visibilidade \mathcal{V} das franjas de interferência de uma partícula quântica guarda uma relação com o que chamou de *indistinguibilidade intrínseca* \mathbf{I} dos “caminhos”² à disposição da partícula. Essa relação foi determinada em forma da desigualdade $\mathcal{V} \leq \mathbf{I}$. Em um modelo interferométrico de duas partículas emaranhadas, Jaeger *et. al.* [14, 15] mostraram duas relações de complementaridade³, a saber: 1^a) quando as partículas não estão emaranhadas a máxima informação por qual caminho seguiu a primeira partícula, grandeza definida como distinguibilidade máxima $\max(D)$ entre os caminhos, e sua visibilidade \mathcal{V}_1 obedecem à igualdade $\max(D)^2 + \mathcal{V}_1^2 = 1$; e 2^a) para o caso onde as partículas estão emaranhadas, a visibilidade conjunta \mathcal{V}_{12} entre as duas partículas e a visibilidade \mathcal{V}_1 da primeira partícula também guardam uma relação em forma da desigualdade $\mathcal{V}_{12}^2 + \mathcal{V}_1^2 \leq 1$. Pouco tempo depois, Englert [16], usando como modelo um interferômetro tipo Mach–Zehnder (veja a ref. [17] para uma revisão) equipado com uma ponta de prova que tenta discriminar o caminho seguido pela partícula, demonstra que a visibilidade \mathcal{V} das franjas de interferência da partícula que atravessa o Mach–Zehnder e a quantidade de informação disponibilizada pela ponta de prova sempre satisfazem a desigualdade $\mathcal{D}^2 + \mathcal{V}^2 \leq 1$, onde \mathcal{D} é uma medida quantitativa de quão *distinguíveis* são os estados da ponta de prova e lhe foi atribuído [16] a interpretação física do quanto da informação de que-caminho se tornou disponível na ponta de prova⁴. No atual estado-da-arte, Jakob

¹Do inglês: *When two systems, of which we know the states by their respective representatives, enter into temporary physical interaction due to known forces between them, and when after a time of mutual influence the systems separate again, then they can no longer be described in the same way as before, viz. by endowing each of them with a representative of its own. I would not call that “one” but rather “the” characteristic trait of quantum mechanics, the one that enforces its entire departure from classical lines of thought. By the interaction the two representatives (or ψ -functions) have become entangled.*

²Chamamos de “caminhos” as alternativas que a partícula possui para atravessar um dado interferômetro.

³Aqui usamos o termo complementaridade no seu sentido literal, onde duas grandezas são complementares quando o conhecimento de uma implica no desconhecimento completo da outra.

⁴Daqui para frente, chamaremos \mathcal{D} de *distinguibilidade* dos estados da ponta de prova e terá um papel central nos nossos resultados.

et. al. [18] mostraram que a dualidade onda-partícula de um sistema de dois níveis guarda uma relação intrínseca com o emaranhamento que tal sistema possui com outro similar. Em outras palavras eles mostraram que, para um estado puro arbitrário de dois q-bits, a relação de complementaridade é dada por

$$C^2 + \mathcal{V}_k^2 + \mathcal{P}_k^2 = 1 \quad (4.1)$$

para qualquer um dos dois q-bits ($k = 1, 2$), sendo C a concorrência [19, 20] entre os q-bits e \mathcal{V}_k (\mathcal{P}_k) a visibilidade (previsibilidade⁵) do k -ésimo q-bit, respectivamente. Como o emaranhamento se mantém inalterado sob transformações unitárias locais [4], torna-se imperativo que a grandeza $\mathcal{V}_k^2 + \mathcal{P}_k^2$ também o seja. Define-se, então, a quantidade

$$\mathcal{S}_k^2 = \mathcal{V}_k^2 + \mathcal{P}_k^2 \quad (4.2)$$

que é chamada de *relação de dualidade* [16, 18] da k -ésima partícula. Muito recentemente houve uma proposta experimental [21], na forma de circuitos quânticos, para testar a *complementaridade* bipartite. Além disso, usando fótons gêmeos, medidas foram realizadas [22] e atestaram a Eq.(4.1). Apesar desse trabalho seminal, relativamente pouca investigação se fez acerca da Eq.(4.1) que mostra explicitamente uma conexão entre a dualidade onda-partícula de Bohr e o emaranhamento de Schrödinger. Se considerarmos um sistema suficientemente simples como um interferômetro Mach-Zehnder equipado com uma ponta de prova quântica, podemos ainda pensar em investigar uma outra questão levantada por Bohr [23], em suas correspondências com colegas, de que o medidor deveria ser tratado quanticamente. Neste capítulo, temos dois objetivos: o primeiro é, no contexto descrito acima, *i.e.*, um Mach-Zehnder equipado com uma ponta de prova, obter cada termo da relação de dualidade (4.2) para a ponta de prova, que será o detector quântico. Nosso outro objetivo é usar esses conceitos que vamos construir para analisar um experimento recente, suficientemente simples em sua concepção, que pode ser modelado exatamente com os ingredientes que necessitamos: um átomo, que pode ser considerado como um q-bit, e uma ponta de prova caracterizada por um campo coerente que pode ser ajustado experimentalmente no interior de uma cavidade supercondutora. O objetivo do referido trabalho é a investigação da complementaridade e sua relação com a transição quântico-clássico que, em [11], pode ser feita suavemente apenas aumentando a intensidade do campo. A transição quântico-clássico é refletida pelo aumento do contraste das franjas de interferência com o aumento da intensidade do campo. Uma análise teórica desse mesmo aparato pode ser feita analisando cada termo da Eq. (4.1) tanto para o q-bit quanto para a ponta de prova. Aqui, neste capítulo, nós realizamos esta tarefa e caracterizamos as consequências da acessibilidade da informação, bem como suas implicações, quantificadas pela distinguibilidade \mathcal{D} entre os estados superpostos do sistema que sai de um regime microscópico para o macroscópico. Com isso, acreditamos extrair um comportamento de cada termo da relação de complementaridade (4.1) na interface clássico-quântico. Para atingir esse objetivo, estudamos um experimento onde uma partícula quântica atravessa um

⁵Muitas vezes chamada de *previsibilidade*.

interferômetro de Mach–Zehnder equipado com uma ponta de prova que obtém e armazena a informação do caminho pelo qual seguiu a partícula. Mostramos que se a ponta de prova aumentar continuamente as suas características clássicas a visibilidade das franjas de interferência entre os caminhos seguidos pela partícula fica cada vez mais acentuada, mesmo havendo considerável emaranhamento entre a partícula e a ponta de prova. Como veremos, esse efeito torna evidente a importância da acessibilidade da informação (o valor de \mathcal{D}) e não apenas a sua geração. Na sequência, revelamos que no limite em que a ponta de prova é clássica a informação por qual caminho seguiu a partícula fica inacessível. Neste limite, haverá apenas o termo corpuscular da relação de complementaridade da ponta de prova. Como aplicação dos nossos resultados, descrevemos o experimento de complementaridade realizado em cavidades de microndas [11] onde o campo no interior de uma cavidade com alto fator qualidade Q faz o papel da ponta de prova podendo transitar realisticamente do regime microscópico (com baixo número médio de fótons) para o regime macroscópico (com “grande” número médio de fótons). Na sequência, analisamos qualitativamente as zonas de Ramsey [24] que foram tratadas de maneira analítica em [25] e numericamente em [26]. Porém, acreditamos que nossos resultados permitem uma interpretação simples sobre a física das Zonas de Ramsey, onde um fóton (em média) interage classicamente com um átomo de dois níveis, isto é, sem haver emaranhamento entre as partes.

4.2 A relação de complementaridade

Considere um sistema bipartite onde cada uma das partes é constituída por um sistema de dois níveis. Os subsistemas serão denominados de r e s . Um estado geral desse sistema pode ser representado pelo vetor de estado

$$|Q\rangle = a|0_r 0_s\rangle + b|0_r 1_s\rangle + c|1_r 0_s\rangle + d|1_r 1_s\rangle \quad , \quad (4.3)$$

com $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$ para garantir que $\langle Q|Q\rangle = 1$. O emaranhamento entre as partes do estado global (4.3) pode ser quantificado pela concorrência [19, 20] que é definida como

$$C = \langle Q^* | \sigma_y^{(r)} \otimes \sigma_y^{(s)} | Q \rangle \quad , \quad (4.4)$$

onde $\langle Q^* |$ é complexo conjugado de $\langle Q |$ e $\sigma_y^{(k)} = -i|1_k\rangle\langle 0_k| + i|0_k\rangle\langle 1_k|$, com $k = r, s$. Usando a Eq.(4.4), o emaranhamento entre os q-bits r e s será

$$C = 2|ad - bc| \quad . \quad (4.5)$$

Podemos, agora, nos perguntar sobre a *coerência* que os estados $|0_k\rangle$ e $|1_k\rangle$, do k -ésimo q-bit, possuirão entre si. Essa grandeza é relevante porque exprime a capacidade que o estado possui de auto-interferir. Por exemplo, se $|0_k\rangle$ e $|1_k\rangle$ forem identificados com duas alternativas de um interferômetro, então essa coerência pode ser quantificada pela visibilidade \mathcal{V} das franjas

de interferência, definida como [27]

$$\mathcal{V} = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} , \quad (4.6)$$

onde I_M e I_m são as intensidades máxima e mínima do padrão de interferência em torno de um ponto. Assim, a coerência ou visibilidade é um quantificador da característica ondulatória do sistema em questão. A coerência do k -ésimo q-bit é definida como [13, 16, 18]

$$\mathcal{V}_k = 2|\langle Q|\sigma_+^{(k)}|Q\rangle| , \quad (4.7)$$

onde $\sigma_+^{(k)} = |1_k\rangle\langle 0_k|$. A coerência de cada q-bit r e s será

$$\mathcal{V}_r = 2|ac^* + bd^*| \quad (4.8)$$

$$\mathcal{V}_s = 2|ab^* + cd^*| . \quad (4.9)$$

Seguindo na mesma linha, podemos encontrar a *predictibilidade* que é definida como o valor absoluto da diferença entre a probabilidade do k -ésimo q-bit estar no estado $|1_k\rangle$ e a probabilidade de estar em $|0_k\rangle$. Com isso, a predictibilidade é escrita como

$$\mathcal{P}_k = |\langle Q|\sigma_{z,k}|Q\rangle| , \quad (4.10)$$

onde $\sigma_z^{(k)} = |1_k\rangle\langle 0_k| - |0_k\rangle\langle 1_k|$. Se, como antes, os estados $|0_k\rangle$ e $|1_k\rangle$ forem identificados com duas alternativas de um interferômetro, então a predictibilidade [16, 18] será uma medida quantitativa, *a priori*, da probabilidade que a partícula possui de ter passado por apenas uma alternativa. Em um experimento interferométrico, a predictibilidade quantifica a característica corpuscular do q-bit e, localmente, será complementar à visibilidade. A predictibilidade para os q-bits r e s será

$$\mathcal{P}_r = ||a|^2 - |d|^2 + |b|^2 - |c|^2| , \quad (4.11)$$

$$\mathcal{P}_s = ||a|^2 - |d|^2 + |c|^2 - |b|^2| . \quad (4.12)$$

Com uma álgebra simples pode-se mostrar que

$$\mathcal{S}_k^2 + C^2 = 1 , \quad (4.13)$$

onde \mathcal{S}_k , como definido em (4.2), é a dualidade onda-partícula da k -ésima partícula e C é a concorrência (4.5). Na linguagem da informação quântica [28], podemos dizer que a concorrência é invariante por operação unitária local. Como consequência, para manter a igualdade (4.13), a dualidade \mathcal{S}_k^2 também é um invariante por operações unitárias locais.

4.3 O Mach–Zehnder equipado com uma ponta de prova

Para alcançar os nossos objetivos enviaremos uma partícula que irá atravessar um interferômetro Mach–Zehnder equipado com um discriminador de que-caminho, nomeada ponta

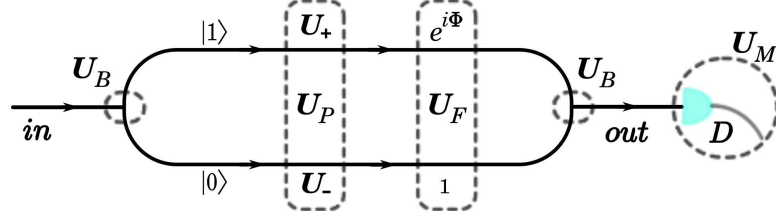


Figura 4.1: REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DE UM INTERFERÔMETRO DE MACH-ZEHNDER: Uma partícula é enviada para atravessar o interferômetro que está equipado com uma ponta de prova. De início um divisor de feixes “distribui” a partícula de entrada em duas alternativas possíveis. Após o primeiro divisor de feixes a partícula interage e se emaranha com uma ponta de prova. Uma diferença de fase Φ entre os caminhos é considerada. Depois, a partícula encontra um segundo divisor de feixes que “mistura” as alternativas de “caminhos” e, em seguida, emerge do interferômetro sendo medida no detector D .

de prova, no estado inicial $|m\rangle$. Esse interferômetro possuirá divisores de feixes perfeitos, como mostra a Figura 4.1. De início um divisor de feixes perfeito, representado pelo operador

$$U_B = (\mathbf{1} - i\sigma_y) \otimes \mathbf{1}/\sqrt{2} \quad ,$$

“distribui” a partícula de entrada em duas alternativas possíveis. O vetor $|1\rangle$ ($|0\rangle$) representa a situação em que a partícula seguiu pelo braço superior (inferior), respectivamente. Após o primeiro divisor de feixes a partícula interage com uma ponta de prova e o operador

$$U_P = |1\rangle\langle 1| \otimes U_+ + |0\rangle\langle 0| \otimes U_-$$

é responsável pela interação com $U_{\pm}|m\rangle = |m_{\pm}\rangle$ e $U_{\pm}U_{\pm}^{\dagger} = \mathbf{1}$. A diferença de fase entre os caminhos é modelada pelo operador

$$U_F = (e^{i\Phi}|1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 0|) \otimes \mathbf{1} \quad .$$

Depois, a partícula encontra um segundo divisor de feixes, idêntico ao primeiro, que “mistura” as alternativas de “caminhos” e, em seguida, a partícula emerge do interferômetro e é medida no detector D . A ação do detector será modelada pelo operador

$$U_M = |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbf{1} \quad .$$

No procedimento de extração e armazenamento da informação por qual caminho seguiu a partícula, a ponta de prova irá se emaranhar com a partícula resultando numa espécie de par Einstein–Podolsky–Rosen [3]. Isso se configura num sistema bipartite definido no espaço de Hilbert $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$, onde o primeiro subsistema em $\mathcal{H}^{(1)}$ possui dois níveis e está emaranhado com um segundo sistema em $\mathcal{H}^{(2)}$. Em nosso problema, o segundo sistema será uma ponta de prova.

4.3.1 Caracterizando a ponta de prova

Considere que a partícula tenha sido preparada em

$$|\psi_+\rangle = \frac{|1\rangle + |0\rangle}{\sqrt{2}} \quad (4.14)$$

e a ponta de prova em $|m\rangle$. Com isso, o estado inicial global do sistema será

$$|\psi_0\rangle = \frac{(|1\rangle + |0\rangle)}{\sqrt{2}} \otimes |m\rangle \quad . \quad (4.15)$$

Após o primeiro divisor de feixes a partícula irá “encontrar” com a ponta de prova e haverá a interação entre os subsistemas. O estado global do sistema será

$$U_P U_B |\psi_0\rangle = |0\rangle \otimes |m_-\rangle \quad (4.16)$$

e podemos nos perguntar qual a probabilidade \mathcal{O}_+ da ponta de prova ser encontrada em $|m_+\rangle$. Essa probabilidade será

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_+ &= \langle 0| \otimes \langle m_-| (\mathbf{1} \otimes |m_+\rangle \langle m_+|) |0\rangle \otimes |m_-\rangle \\ &= |\langle m_-|m_+\rangle|^2 \quad . \end{aligned} \quad (4.17)$$

Isso significa que a ponta de prova evoluiu para $|m_-\rangle$, porém tem uma probabilidade não nula de ser encontrada em $|m_+\rangle$. O mesmo aconteceria se o estado inicial global fosse

$$|\bar{\psi}_0\rangle = \frac{(|1\rangle - |0\rangle)}{\sqrt{2}} \otimes |m\rangle \quad . \quad (4.18)$$

Nesse segundo caso, a probabilidade \mathcal{O}_- da ponta de prova ser encontrada em $|m_-\rangle$ será $\mathcal{O}_- = |\langle m_-|m_+\rangle|^2$. Como $\mathcal{O}_+ = \mathcal{O}_-$, podemos definir uma grandeza

$$\mathcal{O} = |\langle m_-|m_+\rangle|^2 \quad (4.19)$$

que pode ser interpretada como a imperfeição da ponta de prova, pois mede a probabilidade de haver um erro na discriminação de caminho. Como consequência, e de maneira complementar a \mathcal{O} , podemos definir uma grandeza

$$\mathcal{Q} = 1 - |\langle m_-|m_+\rangle|^2 \quad (4.20)$$

que nos fornecerá a medida da qualidade da ponta de prova e será a probabilidade de haver um acerto na discriminação de caminho. Assim, uma ponta de prova perfeita ($\mathcal{Q} = 1$) possuirá seus estados totalmente distinguíveis ($|\langle m_-|m_+\rangle| = 0$) e, como veremos mais adiante, a informação de *que-caminho* será totalmente acessível e sendo suficiente para arruinar a visibilidade das franjas de interferência entre os caminhos seguidos pela partícula. De outro modo, quando a ponta de prova for completamente imperfeita ($\mathcal{O} = 1$) os seus estados serão indistinguíveis ($|\langle m_-|m_+\rangle| = 1$) e nenhuma informação de *que-caminho*, se gerada, estará disponível. Logo, a partícula estará livre para retornar a interferir e apresentará visibilidade

máxima que depende apenas das suas condições iniciais. Para uma ponta de prova com $0 < \mathcal{Q} < 1$ teremos a geração de informação e o acesso a tal informação será mais difícil quanto menor for \mathcal{Q} . Neste caso o padrão de interferência entre os caminhos seguidos pela partícula apresentará uma visibilidade intermediária entre zero e seu máximo. Neste caso, a partícula passa a ter a possibilidade de interferência, porém de maneira parcial. Isso significa, como veremos mais a frente de uma maneira mais quantitativa, que gerar a informação por qual caminho seguiu a partícula não é suficiente para destruir o padrão de interferência.

Neste momento, cabe uma justificativa acerca da nossa afirmação, logo acima, sobre a disponibilidade da informação contida na ponta de prova. Para isso, torna-se instrutivo calcularmos a “distância traço” (do inglês *trace distance*) entre os estados $\rho_+ = |m_+\rangle\langle m_+|$ e $\rho_- = |m_-\rangle\langle m_-|$ da ponta de prova. Faremos isso porque a distância do traço mede o quão ortogonais, e conseqüentemente distinguíveis, dois estados podem ser. Essa medida é definida como [28]

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \text{tr}\{|\rho_+ - \rho_-|\} \quad , \quad (4.21)$$

onde valor absoluto de um operador A é definido como $|A| = \sqrt{A^\dagger A}$. Se $\mathcal{D} = 1$ ($\mathcal{D} = 0$) então ρ_+ é completamente distinguível (indistinguível) de ρ_- , respectivamente. No caso onde $0 < \mathcal{D} < 1$, haverá uma sobreposição entre ρ_+ e ρ_- e a distinção entre os estados torna-se mais difícil quanto menor for \mathcal{D} . Com isso pode-se perceber que a distância traço é uma medida quantitativa da distinguibilidade dos estados da ponta de prova e, como definido em [16], fornecerá a quantidade da informação de que-caminho que estará disponível na ponta de prova. Daqui em diante, chamaremos a distância traço entre os estados da ponta de prova de *distinguibilidade*. No nosso caso, a distinguibilidade será

$$\mathcal{D} = \sqrt{1 - |\langle m_- | m_+ \rangle|^2} \quad (4.22)$$

que pode ser reescrita como

$$\mathcal{D} = \sqrt{\mathcal{Q}} \quad . \quad (4.23)$$

Esta última equação justifica a nossa afirmação, feita mais acima, acerca da disponibilidade da informação contida na ponta de prova ao analisar as grandezas \mathcal{Q} e \mathcal{O} por nós definida. Se $\mathcal{D} = \sqrt{\mathcal{Q}}$ é uma medida quantitativa da informação disponível na ponta de prova, então de imediato podemos concluir que $\mathcal{I} = \sqrt{\mathcal{O}}$ possuirá a interpretação inversa, isto é, será uma medida quantitativa da informação armazenada na ponta de prova que não estará disponível, ou seja: é uma medida quantitativa da informação que não pode ser acessada. Nessa notação podemos dizer que uma ponta de prova perfeita (imperfeita), com $\mathcal{D} = 1$ ($\mathcal{I} = 1$), é aquela que deixa completamente disponível (indisponível) a informação por qual caminho seguiu a partícula.

4.3.2 A complementaridade do q-bit

Antes de estudar os termos que irão compor a complementaridade da ponta de prova, precisaremos antes encontrar as da partícula. De maneira geral podemos escrever o estado inicial de todo o sistema como

$$\rho_0 = \frac{1}{2} \{ \mathbf{1} + \mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \} \otimes |m\rangle\langle m| \quad (4.24)$$

onde, $\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = (\sigma_x^{(1)}, \sigma_y^{(1)}, \sigma_z^{(1)})$ são as matrizes de Pauli, $\mathbf{u}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ é o vetor de Bloch do estado da partícula com $|\mathbf{u}_0| = 1$ e $|m\rangle\langle m|$ o estado inicial da sonda. O estado da partícula imediatamente antes do segundo divisor de feixes será

$$\tilde{\rho}_{(1)} = \text{tr}_{(2)} \{ U_F U_P U_B \rho_0 U_B^\dagger U_P^\dagger U_F^\dagger \} \quad (4.25)$$

e a sua *predictibilidade*, definida de maneira semelhante à Eq.(4.10), será

$$\mathcal{P}_{(1)} = |\text{tr}(\tilde{\rho}_{(1)} \sigma_z)| \quad (4.26)$$

$$= |x_0| \quad (4.27)$$

que é idêntica à *predictibilidade a priori* \mathcal{P}_0 ⁶. O estado da partícula após o segundo divisor de feixes será

$$\rho_{(1)} = \text{tr}_{(2)} \{ U_B U_F U_P U_B \rho_0 U_B^\dagger U_P^\dagger U_F^\dagger U_B^\dagger \} \quad (4.28)$$

Agora, se a partícula for detectada em D e se variarmos a fase Φ , perceberemos uma franja de interferência com visibilidade definida pela Eq. (4.6). A intensidade I , das frajas de interferência, será proporcional a

$$\begin{aligned} I &\propto \text{tr} \{ U_M \rho_{(1)} U_M^\dagger \} \\ &\propto 1 + (z_0 + iy_0) \langle m_+ | m_- \rangle e^{-i\Phi} + (z_0 - iy_0) \langle m_- | m_+ \rangle e^{i\Phi} \quad (4.29) \end{aligned}$$

De posse da equação acima, podemos usar a definição (4.6) e encontrar a visibilidade que será

$$\mathcal{V}_{(1)} = \mathcal{V}_0 \mathcal{I} \quad (4.30)$$

onde $\mathcal{V}_0 = \sqrt{y_0^2 + z_0^2}$ é a *visibilidade a priori*⁷. Observe que $\mathcal{V}_{(1)}$ depende diretamente da indisponibilidade \mathcal{I} da informação contida na ponta de prova. Isso significa que a geração da informação de que-caminho é uma condição necessária para “destruir” o padrão de interferência, porém não é suficiente. Além de gerar a informação torna-se imperativo a sua total acessibilidade para que não apresente franjas de interferência. Como consequência,

⁶A *predictibilidade a priori* é aquela quando o interferômetro não está equipado com a ponta de prova. Neste caso teremos $\mathcal{P}_0 = |x_0|$.

⁷A *visibilidade a priori* é aquela na ausência do discriminador de caminho. Nesta situação é fácil perceber que $\mathcal{V}_0 = \sqrt{y_0^2 + z_0^2}$ e conseqüentemente $\mathcal{P}_0^2 + \mathcal{V}_0^2 = 1$.

ao fazer uma análise intuitiva, podemos conjecturar que o emaranhamento entre q-bit + ponta de prova será uma função da disponibilidade da informação e atingirá seu máximo quando $\mathcal{D} = 1$. De fato o emaranhamento entre o q-bit e a ponta de prova, quantificado pela concorrência [19, 20], será

$$C_{(1,2)} = \mathcal{V}_0 \mathcal{D} \quad (4.31)$$

ficando fácil verificar que $\mathcal{S}_{(1)}^2 + C_{(1,2)}^2 = 1$, onde $\mathcal{S}_{(1)}^2 = \mathcal{P}_{(1)}^2 + \mathcal{V}_{(1)}^2$ é a relação de dualidade onda-partícula do q-bit. Pode-se perceber que quando a quantidade de informação disponível na ponta de prova cresce suavemente de zero até um (inicialmente $\mathcal{D} = 0$ e crescendo até $\mathcal{D} = 1$), a visibilidade da q-bit deixa de ser \mathcal{V}_0 e diminui até atingir o valor nulo. Em contrapartida, o emaranhamento vai de zero para o seu valor máximo \mathcal{V}_0 .

4.3.3 A complementaridade da ponta de prova

Como discutido mais acima, para que a ponta de prova tenha a faculdade de obter e armazenar a informação por qual caminho seguiu o q-bit, se faz necessária uma interação. Essa interação, como observado por Schrödinger [5], irá emaranhar o sistema partícula + ponta de prova resultando numa espécie de par Einstein-Podolsky-Rosen [3].

A nossa ponta de prova, *a priori*, é um sistema que é descrito pelas leis da mecânica quântica. Uma consequência imediata é de que exista uma relação de complementaridade (4.1) para a ponta de prova. Se para o q-bit a relação de complementaridade é

$$\mathcal{S}_{(1)}^2 + C_{(1,2)}^2 = 1 \quad , \quad (4.32)$$

então haverá uma relação análoga para a ponta de prova dada por

$$\mathcal{S}_{(2)}^2 + C_{(1,2)}^2 = 1 \quad , \quad (4.33)$$

onde, da mesma maneira que aquela dada para a partícula, *i.e.*, $\mathcal{S}_{(2)}^2$ será a dualidade onda-partícula da ponta de prova definida como

$$\mathcal{S}_{(2)}^2 = \mathcal{P}_{(2)}^2 + \mathcal{V}_{(2)}^2 \quad . \quad (4.34)$$

A grandeza \mathcal{P} deverá expressar as características tipo corpúsculo da ponta de prova e, por sua vez, \mathcal{V} deverá revelar as características tipo onda. Como a concorrência $C_{(1,2)}$ é a mesma nas duas equações (4.32) e (4.33), então podemos concluir que

$$\mathcal{S}_{(2)}^2 = \mathcal{S}_{(1)}^2 \quad . \quad (4.35)$$

Essa equação é um vínculo importante, pois basta quantificar apenas uma grandeza de (4.34), *e.g.* a característica corpuscular \mathcal{P} , e ao usar o vínculo (4.35) conseguimos quantificar completamente cada parte da Eq. (4.34).

A característica tipo corpúsculo

O estado da ponta de prova imediatamente antes a detecção da partícula em D será

$$\begin{aligned}\rho_{(2)} &= \text{tr}_{(1)}\{U_B U_F U_P U_B \rho_0 U_B^\dagger U_P^\dagger U_F^\dagger U_B^\dagger\} \\ &= \frac{1}{2}(1 - x_0)|m_+\rangle\langle m_+| + \frac{1}{2}(1 + x_0)|m_-\rangle\langle m_-| \quad .\end{aligned}\quad (4.36)$$

Se $x_0 = 1$ ($x_0 = -1$) a partícula passará pelo “braço” superior (inferior) do interferômetro e o estado final da ponta de prova será $|m_+\rangle\langle m_+|$ ($|m_-\rangle\langle m_-|$), respectivamente. De outro modo se $\pm x_0 = 0$ a partícula terá probabilidade $1/2$ de ter “passado” por cada caminho do interferômetro e o estado da ponta de prova estará numa mistura estatística completa entre os estados $|m_+\rangle\langle m_+|$ e $|m_-\rangle\langle m_-|$. Os operadores $\Pi_\pm = |m_\pm\rangle\langle m_\pm|$ são projetores e as suas médias $\langle \Pi_\pm \rangle = \text{tr}(\rho_{(2)} \Pi_\pm)$ serão as probabilidades de encontrar a ponta de prova em $|m_\pm\rangle$, respectivamente. O nosso objetivo nesta seção é de encontrar uma grandeza $\mathcal{P}_{(2)}$ que consiga quantificar o quanto de características tipo partícula uma ponta de prova nos estado $\rho_{(2)}$ possui. Para isso, faremos algumas considerações ou fixaremos alguns vínculos que tal grandeza precisará obedecer, *i.e.*:

1. Como $\langle \Pi_\pm \rangle$ são grandezas que não trazem em si efeitos de auto-interferência (característica tipo onda) ou de correlações quânticas não locais (emaranhamento), então podemos assumir que as médias $\langle \Pi_\pm \rangle$ manterão uma relação direta com $\mathcal{P}_{(2)}$ que quantifica o comportamento tipo corpúsculo da ponta de prova.
2. De maneira semelhante à *predictibilidade* da partícula, queremos $\mathcal{P}_{(2)} = 0$ quando $\langle \Pi_\pm \rangle = 1/2$ e $\mathcal{P}_{(2)} = 1$ quando $\langle \Pi_\pm \rangle = 1$.
3. Outro vínculo interessante é que $\mathcal{P}_{(2)}$ possua a interpretação de *predictibilidade* quando a ponta de prova for perfeita, pois neste limite seus estados são ortogonais.

Todas essas condições ou vínculos serão satisfeitas quando

$$\mathcal{P}_{(2)} = |1 - 2\langle \Pi_\pm \rangle| \quad (4.37)$$

acrescido da troca $\pm x_0 \rightarrow |x_0|$. Cabe aqui analisar o efeito físico que está por trás da troca $\pm x_0 \rightarrow |x_0|$ no cálculo da Eq.(4.37). Tal troca de um carácter condicional a $\mathcal{P}_{(2)}$, ou seja: $\mathcal{P}_{(2)}$ quantificará a comportamento tipo corpúsculo da ponta de prova uma vez que não se sabe, *a priori*, por qual caminho a partícula possui maior probabilidade de seguir. Assim, da construção acima obtemos

$$\mathcal{P}_{(2)} = \mathcal{O} + \mathcal{P}_{(1)}\mathcal{Q} \quad , \quad (4.38)$$

onde é fácil perceber que $0 \leq \mathcal{P}_{(2)} \leq 1$. Essa última expressão irá nos informar acerca das características corpusculares da ponta de prova, *i.e.*, quantifica o quanto a ponta de prova se comportará classicamente. É curioso observar que há duas contribuições. A primeira sempre existirá, pois só depende da própria imperfeição \mathcal{O} que, por sua vez, foi interpretada como

a probabilidade de erro da ponta de prova ao tentar discriminar o caminho seguido pela partícula. Contudo, é importante lembrar que na seção 4.3.1 a grandeza \mathcal{O} é a probabilidade da ponta de prova ser encontrada em $|m_+\rangle$ ($|m_-\rangle$) uma vez que sabemos que a partícula passou pelo caminho $|0\rangle$ ($|1\rangle$) do interferômetro e que a ponta de prova estaria no estado $|m_-\rangle$ ($|m_+\rangle$), respectivamente. Porém, no cálculo de $\mathcal{P}_{(2)}$ essa informação é “apagada” ao trocar $\pm x_0 \rightarrow |x_0|$. Desta maneira, o termo \mathcal{O} da Eq.(4.38) é uma probabilidade de encontrar a ponta de prova em apenas um dos seus estados, mas que tem como sua origem a imperfeição da ponta de prova. O segundo termo depende da probabilidade $\mathcal{P}_{(1)}$ da partícula ter seguido por apenas um caminho do interferômetro e da qualidade \mathcal{Q} da ponta de prova que foi interpretada como a probabilidade de acerto na discriminação do caminho seguido pela partícula. Podemos interpretar o produto $\mathcal{P}_{(1)}\mathcal{Q}$ como a probabilidade que a ponta de prova possuirá de ser encontrada em apenas um dos seus estados, mas com origem na capacidade de acerto da ponta de prova. Logo, interpretamos $\mathcal{P}_{(2)}$ como a probabilidade total de se encontrar a ponta de prova em apenas um dos seus estados com a condição de não ter o conhecimento, *a priori*, por qual caminho a partícula possui maior probabilidade de seguir. É curioso observar que a ponta de prova se encontrava inicialmente em um estado puro não-superposto. Logo, se, após uma interação emaranhadora entre a ponta de prova e uma partícula quântica, $\mathcal{P}_{(2)}$ for a probabilidade (condicionada como discutido acima) de se encontrar a ponta de prova em apenas um dos seus estados então podemos interpretar $\mathcal{P}_{(2)}$ como a probabilidade da ponta de prova permanecer em um estado que não seja uma superposição. Como um sistema clássico não se superpõe ao ser submetido a uma interação emaranhadora com um sistema quântico, então $\mathcal{P}_{(2)}$ realmente quantificará o comportamento tipo corpúsculo (característica de sistemas clássicos) da ponta de prova. Observe que no limite em que a ponta de prova é completamente imperfeita, temos $\mathcal{P}_{(2)} = 1$ e os seus estados diferem apenas por uma fase. Neste caso afirmamos que a ponta de prova é puramente clássica, pois se manteve inalterada após ter sido submetida a uma interação emaranhadora com um sistema quântico. De outro modo, quando for perfeita, temos $\mathcal{P}_{(2)} = \mathcal{P}_{(1)}$, exibindo características tipo corpúsculo ($\mathcal{P}_{(2)} \neq 0$) e também estando o mais emaranhado possível com a partícula. Nessa situação, a ponta de prova será um bom discriminador de que-caminho e arruinará a visibilidade as franjas do padrão de interferência entre os caminhos $|1\rangle$ e $|0\rangle$. De maneira alternativa e trazendo um novo olhar sobre o carácter de corpúsculo da ponta de prova, podemos reescrever a Eq. (4.38) como

$$\mathcal{P}_{(2)} = 1 - (1 - \mathcal{P}_{(1)})\mathcal{D}^2 \quad . \quad (4.39)$$

O fator $(1 - \mathcal{P}_{(1)})$ quantifica a incerteza quanto ao caminho “seguido” pela partícula. Por outro lado, \mathcal{D} mede a distinguibilidade dos estados finais da ponta de prova. Para um valor fixo de \mathcal{D} , o “poder” de prever o estado final da ponta de prova diminui à medida que a incerteza $(1 - \mathcal{P}_{(1)})$ cresce. O produto $(1 - \mathcal{P}_{(1)})\mathcal{D}^2$ quantifica o montante da contribuição vinda das características tipo onda da ponta de prova e das correlações não-locais do sistema global partícula+ponta de prova produzidos pela interação emaranhadora, *i.e.*: se $\mathcal{P}_{(2)}$ é a

probabilidade condicional de se encontrar a ponta de prova em um estado não-superposto então $1 - \mathcal{P}_{(2)} = (1 - \mathcal{P}_{(1)})\mathcal{D}^2$ terá uma interpretação complementar e será a probabilidade condicional da ponta de prova estar em um estado superposto (de um ou dois sistemas). De fato, com uma pouco de álgebra simples, pode-se mostrar que

$$(1 - \mathcal{P}_{(1)})\mathcal{D}^2 = \frac{C_{(1,2)}^2}{1 + \mathcal{P}_{(1)}} \quad , \quad (4.40)$$

e substituindo a Eq. (4.40) na (4.39), encontramos

$$\mathcal{P}_{(2)} + \frac{C_{(1,2)}^2}{1 + \mathcal{P}_{(1)}} = 1 \quad , \quad (4.41)$$

que traz em si uma relação de complementaridade entre a característica de corpúsculo da ponta de prova (quantificando quão clássica é a ponta de prova) e seu emaranhamento com a partícula. Esta relação de complementaridade não é no sentido da complementaridade onda-partícula de Bohr, mas no sentido de que quando a característica de corpúsculo da ponta de prova for máxima ($\mathcal{P}_{(2)} = 1$) não haverá emaranhamento ($C_{(1,2)} = 0$) e vice-versa. Podemos observar que quando $C_{(1,2)} = 1$ teremos $\mathcal{V}_0 = \mathcal{D} = 1$ o que implica em $\mathcal{P}_{(1)} = \mathcal{O} = 0$ e conseqüentemente em $\mathcal{P}_{(2)} = 0$.

A característica ondulatória

Como discutido antes, agora fica imediato a determinação de uma quantidade $\mathcal{V}_{(2)}$ que forneça as características ondulatórias da ponta de prova. Ao substituir a Eq.(4.38) na (4.35), assumindo que $\mathcal{S}_{(2)}^2 = \mathcal{P}_{(2)}^2 + \mathcal{V}_{(2)}^2$, encontraremos

$$\mathcal{V}_{(2)} = (1 - \mathcal{P}_{(1)}) \mathcal{D} \sqrt{1 - \mathcal{D}^2} \quad , \quad (4.42)$$

ficando fácil verificar que, por construção, $\mathcal{P}_{(2)}^2 + \mathcal{V}_{(2)}^2 + C_{(1,2)}^2 = 1$. Uma vez que $0 \leq \mathcal{D} \leq 1$, o produto $\mathcal{D} \sqrt{1 - \mathcal{D}^2}$ varia entre 0 e 1/2. Dois diferentes valores de \mathcal{D} estarão associados a um determinado valor deste produto. Assim, temos $\mathcal{V} = 0$ tanto para uma sonda perfeita (que iremos associar com um regime quântico extremo) quanto para uma imperfeita (regime clássico extremo). Quando a sonda é perfeita, ela pode se emaranhar com a partícula e o estado global do sistema é um autêntico par Einstein-Podolsky-Rosen [3]. No limite oposto o estado da ponta de prova permanece inalterada e, portanto, nenhuma característica quântica, de qualquer tipo, estará presente. Um fato bastante curioso, indo na contramão da intuição, vem à tona ao observar que sempre $\mathcal{V}_{(2)} \leq C_{(1,2)}$, onde a igualdade só é alcançada no caso trivial $\mathcal{P}_{(2)} = 1$. Essa desigualdade indica que as características tipo onda, aqui representadas por $\mathcal{V}_{(2)}$, sempre serão menores que o emaranhamento. Logo, a característica de corpúsculo e a capacidade de se emaranhar da ponta de prova assumirão lugar de destaque na sua relação de complementaridade e no comportamento da ponta de prova. De uma maneira quantitativa, é isso que a equação (4.41) está representando.

Apesar das definições para o caráter cospuscular (seção anterior) e ondulatorio (aqui apresentada) serem baseadas em limites desejáveis, o julgamento de sua adequação física será sua compatibilidade (ou não) com resultados experimentais.

4.3.4 Uma análise sobre a acessibilidade da informação: o comportamento quântico e clássico da ponta de prova

Com uma álgebra simples podemos perceber que a indisponibilidade da informação pode ser escrita como

$$\mathcal{I} = \sqrt{\mathcal{S}_{(2)}^2 - (\mathcal{P}_0 \mathcal{D})^2} \quad . \quad (4.43)$$

Desta maneira, para um estado arbitrário da partícula, a disponibilidade da informação de *que-caminho* será mínima ($\mathcal{I} = 1$) quando $\mathcal{S}_{(2)} = \mathcal{P}_{(2)} = 1$, ou seja, quando a ponta de prova for completamente imperfeita e desprovida de comportamento quântico. Neste caso, o regime clássico extremo é atingido e a sonda apresenta apenas característica de corpúsculo no sentido discutido anteriormente. Por outro lado, a informação acessível será máxima ($\mathcal{I} = 0$) quando $\mathcal{S}_{(2)} = \mathcal{P}_{(2)} = |x_0|$ e o seu comportamento será completamente quântico. Note que $\mathcal{D} = C_{(1,2)}$ quando a partícula é preparada em um estado que satisfaz $\mathcal{P}_{(1)} = 0$. Neste caso, podemos definir uma boa ponta de prova quando $\mathcal{D} > \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{D} > 1/\sqrt{2}$, ou seja: sua imperfeição será menor do que $1/2$. O limite oposto, isto é, $\mathcal{D} < \mathcal{I}$ é uma condição fraca uma vez que haverá uma região de $2/(1 + \sqrt{5}) < C_{(1,2)} < 1/\sqrt{2}$, onde $C_{(1,2)} \geq \mathcal{P}_{(2)} \geq \mathcal{V}_{(2)}$, como mostrado na figura 4.2. Assim, uma definição mais forte para uma má ponta de prova

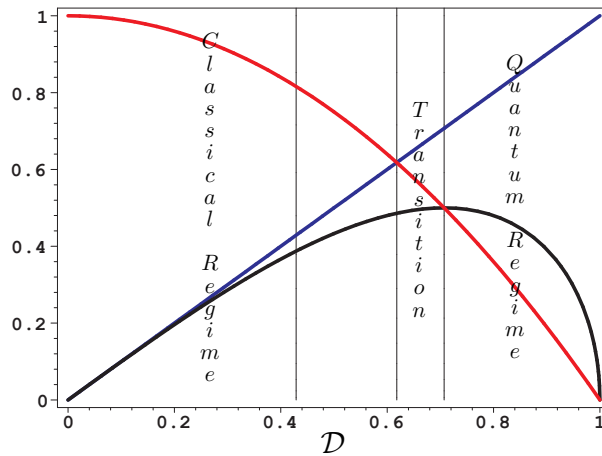


Figura 4.2: CARACTERÍSTICA DA PONTA DE PROVA: A curva preta é $\mathcal{V}_{(2)}$, a vermelha é $\mathcal{P}_{(2)}$ e a azul é $C_{(1,2)}$. As linhas verticais localizam os pontos $\mathcal{D} = 1/\sqrt{2}$, $\mathcal{D} = 2/(\sqrt{5} + 1)$ e $\mathcal{D} \approx 0.42878$. Nós assumimos que a ponta de prova está nos domínios da física clássica quando suas características corpusculares tornam-se dominantes $\mathcal{P}_{(2)} \geq C_{(1,2)}$ fornecendo $0 \leq \mathcal{D} \leq 2/(\sqrt{5} + 1)$. Contudo, uma forte condição pode ser tomada quando $\mathcal{P}_{(2)} \geq \mathcal{V}_{(2)} + C_{(1,2)}$ produzindo $0 \leq \mathcal{D} \lesssim 0.42878$. É interessante notar que na região onde a ponta de prova está nos domínios da física clássica, a visibilidade $\mathcal{V}_{(1)}$ da partícula sofre uma variação de $\Delta\mathcal{V}_{(1)} \approx 0.15$ que é significativa. Entretanto, em aparatos experimentais que possam reproduzir esses resultados existirão imperfeições experimentais η e a variação resultante das medidas será $\Delta\bar{\mathcal{V}}_{(1)} = \eta\Delta\mathcal{V}_{(1)}$. Dependendo do valor de η a variação $\Delta\bar{\mathcal{V}}_{(1)}$ poderá estar contido entre as barras de erros das medidas. Isso ocultará os efeitos da informação de *que-caminho* armazenada na ponta de prova e reforçará a idéia do seu comportamento clássico.

é $\mathcal{P}_{(2)} > C_{(1,2)} \longrightarrow C_{(1,2)} < 2/(\sqrt{5} + 1)$.

4.4 Um experimento de complementaridade com um interferômetro na fronteira quântico-clássico

Recentemente Bertet *et. al.* [11], implementaram um interferômetro de Mach-Zehnder com discriminador de *que-caminho* em cavidades de microondas supercondutoras. A primeira cavidade, com um alto fator de qualidade ($Q \approx 1 \times 10^8$), possui um campo no seu interior que funciona como o primeiro divisor de feixes e marcador de *que-caminho*. Em seguida o átomo viaja até a segunda cavidade, que possui baixo fator de qualidade ($Q \approx 1 \times 10^3$), e o campo em seu interior executa o papel do segundo divisor de feixes. Durante o vôo atômico entre o primeiro e o segundo divisor de feixes uma fase relativa ϕ entre os estados atômicos é adquirida. Nas cavidades supercondutoras o medidor de *que-caminho* (um estado coerente $|\alpha\rangle$) sai do limite microscópico ($|\alpha|^2 \approx 0$) para o macrocópico ($|\alpha|^2 \approx 12.8$). Nesse trabalho, a primeira cavidade é preparada em um estado coerente $|\alpha\rangle$ e, em seguida, um átomo de Rydberg no estado excitado $|e\rangle$ é enviado. O átomo sofre um pulso $\pi/2$ e o estado final entre o átomo e o campo no interior da primeira cavidade torna-se

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle|\alpha_+\rangle + |g\rangle|\alpha_-\rangle) \quad , \quad (4.44)$$

com

$$|\alpha_+\rangle = \sqrt{2} \left[\sum_n C_n \cos(\Omega\sqrt{n+1}t_\alpha) |n\rangle \right]$$

e

$$|\alpha_-\rangle = \sqrt{2} \left[\sum_n C_n \sin(\Omega\sqrt{n+1}t_\alpha) |n+1\rangle \right] \quad ,$$

onde $C_n = e^{-|\alpha|^2/2} \alpha^n / \sqrt{n!}$, Ω é a frequência de Rabi no vácuo e t_α é determinado solucionando a equação

$$\sum_n |C_n|^2 \cos^2(\Omega\sqrt{n+1}t_\alpha) = 1/2 \quad ,$$

sendo o tempo necessário para o átomo sofrer um pulso $\pi/2$. Em seguida o átomo passa pela segunda cavidade (uma Zona de Ramsey) sofrendo um segundo pulso $\pi/2$ e acumulando uma diferença de fase⁸ Φ evoluindo para

$$|\psi_f\rangle = \frac{1}{2} \left(|e\rangle|\alpha_+\rangle - e^{i\Phi} |e\rangle|\alpha_-\rangle + |g\rangle|\alpha_+\rangle + e^{i\Phi} |g\rangle|\alpha_-\rangle \right) \quad . \quad (4.45)$$

Em seguida, o átomo é medido no estado $|g\rangle$ e, ao variar Φ , um padrão de interferência é formado. Partindo da definição (4.6), a visibilidade das franjas de interferência é obtido. Cabe observar que o estado (4.45) é um caso particular do estado

$$\rho = U_B U_F U_P U_B \rho_0 U_B^\dagger U_P^\dagger U_F^\dagger U_B^\dagger$$

⁸A fase relativa Φ é proporcional ao tempo de vôo atômico no interior da cavidade e a desintonia entre a frequência de transição atômica e a frequência do campo.

na saída do Mach–Zehnder equipado com uma ponta de prova discutido antes. Assim, fazendo $\mathbf{u}_0 = \{0, 0, 1\}$ no estado inicial (4.24), identificando $|m_{\pm}\rangle = |\alpha_{\pm}\rangle$, $|1\rangle = |e\rangle$ e $|0\rangle = |g\rangle$ teremos

$$|\psi_f\rangle\langle\psi_f| = U_B U_F U_P U_B \rho_0 U_B^\dagger U_P^\dagger U_F^\dagger U_B^\dagger \quad . \quad (4.46)$$

Isso nos permite “herdar” todos os resultados já discutidos e aplicar ao átomo (partícula quântica) e campo (ponta de prova) do experimento realizado em [11].

No seu trabalho, Bertet *et. al.* relatam que, no limite microscópico ($|\alpha|^2 \approx 0$) da ponta de prova, a visibilidade das franjas de interferência é nula e aumenta continuamente quando a ponta de prova vai para um limite macroscópico ($|\alpha|^2 \approx 12.8$), como mostra a Figura 4.3 retirada de [11]. No limite microscópico ($|\alpha|^2 \ll 1$) temos $|m_+\rangle \approx |0\rangle$ e $|m_-\rangle \approx |1\rangle$, então $\mathcal{V}_{(1)} \approx 0$ ($\mathcal{D} \approx 1$) e o campo guarda de maneira acessível a informação de *que-caminho*. De outro modo, há o limite macroscópico ($|\alpha|^2 \gg 1$) que fornece uma grande visibilidade ($\mathcal{D} \approx 0$). De acordo ao modelo desenvolvido na seção anterior, poderíamos dizer que Bertet *et. al.*, ao medirem o comportamento de $\mathcal{V}_{(1)}$, conseguem observar, de maneira indireta, a transição da predominância de características puramente quânticas do medidor ($C_{(1,2)} \geq \mathcal{S}_{(2)}$ e $C_{(1,2)} \geq \mathcal{V}_{(2)} \geq \mathcal{P}_{(2)}$) para as clássicas ($\mathcal{P}_{(2)} \geq C_{(1,2)} \geq \mathcal{V}_{(2)}$), como mostra a Figura 4.4. Nesse caso, devido ao alto Q da cavidade, poderíamos chamar o medidor de clássico quando $N \gg 1$ ou quando $\Delta\bar{\mathcal{V}}_{(1)} \approx 0.12$ (com $\eta = 0.75$) for da ordem ou menor que as barras de erros das medidas. Outro fator que contribui nessa direção é a barra de erro na determinação no número médio de fótons N . Como o tempo t_α do pulso $\pi/2$ sobre o átomo depende de N , então um erro na determinação de N implica em um erro na medida da visibilidade.

Um caso interessante pode surgir se o medidor estiver submetido a uma dinâmica que varra a informação de *que-caminho* para um sistema auxiliar que a torne de impossível acesso. Isso é o que acontece com as Zonas de Ramsey revisitadas a seguir.

4.5 A Zona de Ramsey

A Zona de Ramsey é uma cavidade com baixo fator de qualidade ($Q \approx 1 \times 10^3$) e isso fornece um tempo de relaxação T_r muito curto (menor do que 10ns) [11, 29] para o campo de microondas ($\sim 50\text{GHz}$) aí armazenado. Devido ao seu baixo fator de qualidade, a Zona de Ramsey precisa ser continuamente abastecida por uma fonte ressonante com a cavidade. A sua dinâmica, na representação de interação e na ausência de átomos em seu interior, é governada pela equação mestra

$$\dot{\rho} = -i[Fa^\dagger + F^*a, \rho] + \mathcal{L}\rho \quad , \quad (4.47)$$

onde $\mathcal{L}\bullet = k(2a \bullet a^\dagger - \{a^\dagger a, \bullet\})$ é o dissipador que modela as perdas da cavidade e k é a constante de decaimento que é inversamente proporcional ao tempo de relaxação T_r . Sua solução (veja em [30]) será

$$\rho = D(\beta_t) \left[e^{\mathcal{L}t} \rho(0) \right] D^\dagger(\beta_t) \quad (4.48)$$

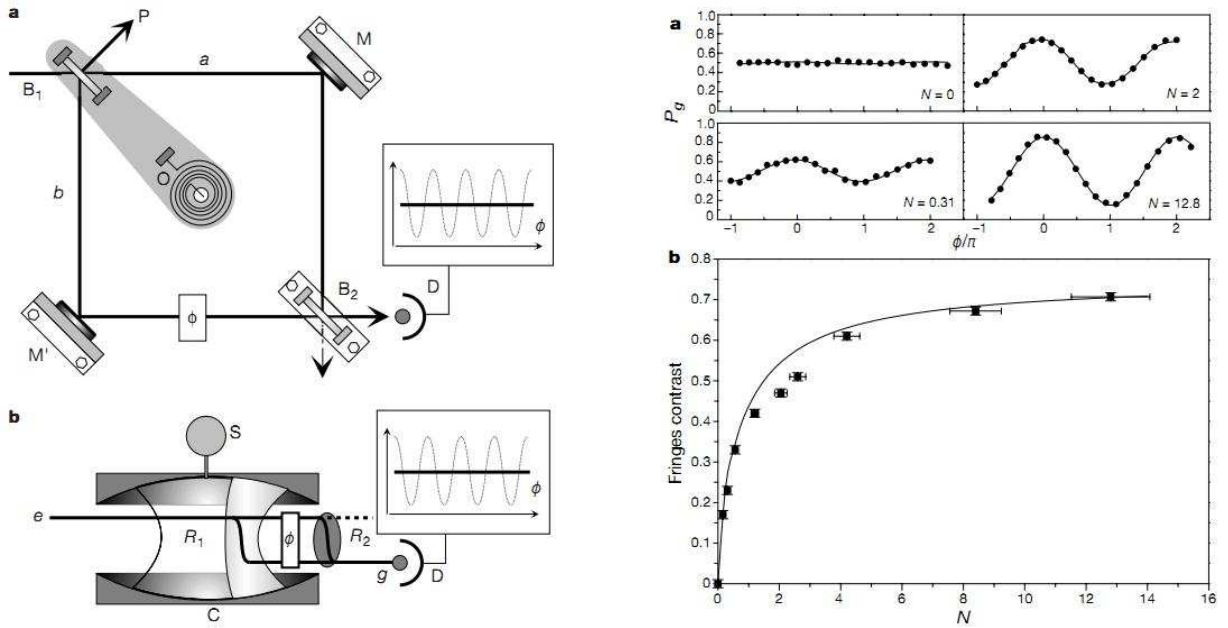


Figura 4.3: **Transcrição da legenda original em [11]. i) Figura da esquerda:** Mach–Zehnder and Ramsey versions of Bohr’s experiment. **a**, In the Mach–Zehnder, the particle trajectory is separated by beam splitter B_1 into paths a and b , folded by mirrors M and M' and recombined by beam splitter B_2 into detector D . The other output port (dashed arrow) is not used. A dephasing element tunes the relative phase ϕ between the paths. B_1 rotates around an axis perpendicular to the interferometer plane, crossing it at the centre O of the B_1MB_2M' square. A spring provides a restoring force. The moving assembly is initially in its ground state of motion. If B_1 has a large mass, fringes are visible (dotted lines in inset). If B_1 is microscopic, its recoil records the reflection of the particle into path b , washing out the fringes (solid lines). **b**, Ramsey set-up. A Rydberg atom’s state is split by microwave pulse R_1 into two energy levels e and g , then recombined by pulse R_2 downstream, before being detected by field-ionization in D . We use a mixed representation combining real space with the space of the atomic energy states. The beam-splitting effect, a spatial separation in the Mach–Zehnder, is now an internal mixture of states. Interferences are obtained in the probability for finding the atom in g . A field pulse between R_1 and R_2 tunes the relative phase ϕ of the interfering amplitudes (Stark effect). If the R_1 field, stored in a long-damping-time cavity C , is macroscopic, Ramsey fringes are visible (dotted line in the inset). If the R_1 field is microscopic, its photon number records information about the atom’s path, suppressing the interference (solid line). The gaussian mode of the cavity field is represented schematically; the part where the atom is resonant is shaded. The cavity mode waist and the R_1 – R_2 distance are exaggerated. **ii) Figura da direita:** From quantum to classical interferometer. **a**, Ramsey interference signal recorded for various mean photon numbers N in the R_1 pulse. The progressive evolution from the quantum to the classical beam–splitter case is clearly observed. **b**, Fringe contrast as a function of the mean photon number N in R_1 . The points are experimental. The line represents the theoretical variation of the modulus of the beam–splitter final states scalar product, multiplied by a fixed factor η that accounts for interferometer imperfections.

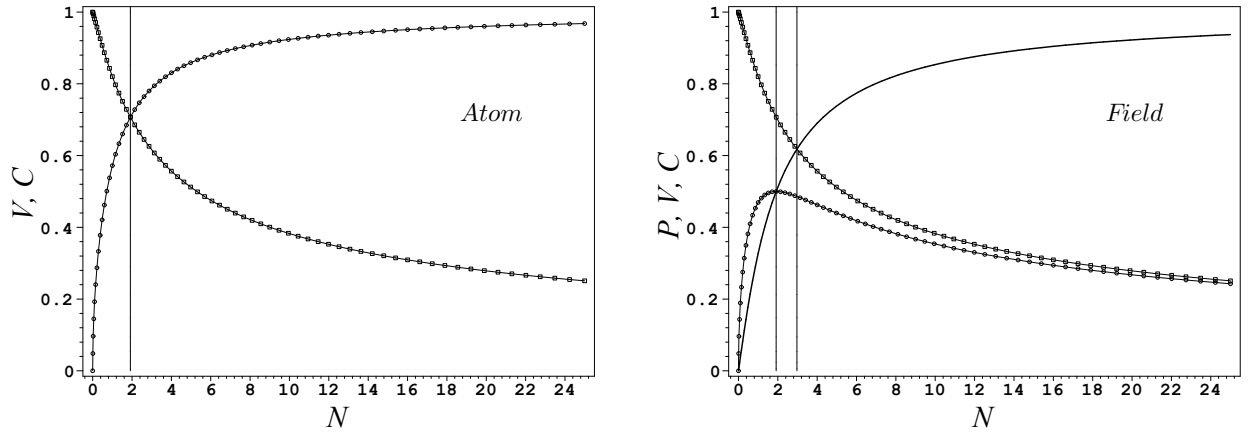


Figura 4.4: Gráficos das nossas expressões teóricas em função do número médio de fótons N no interior da primeira cavidade. PARA O ÁTOMO: a curva com círculos é a visibilidade e a com quadrados a concorrência. A reta vertical localiza o ponto $\mathcal{D} = 1/\sqrt{2}$. PARA O CAMPO: a curva com círculos (quadrados) é a visibilidade (concorrência). Já a curva lisa é a predictibilidade. As retas verticais localizam os pontos $\mathcal{D} = 1/\sqrt{2}$ e $\mathcal{D} = 2/(1 + \sqrt{5})$.

onde $\beta_t = -iF(1 - e^{-kt})/k$ e $D(\lambda) = e^{\lambda a^\dagger - \lambda^* a}$ é o operador deslocamento. Considerando que o estado inicial da Zona de Ramsey é o vácuo, então $e^{\mathcal{L}t}|0\rangle\langle 0| = |0\rangle\langle 0|$ e para tempos suficientemente longos ($t \gg T_r$) o estado estacionário será $\rho = |\beta\rangle\langle\beta|$, com $\beta = -iF/k$ e $|\beta|^2 \approx 1$, como percebido em [25].

Considere um átomo de dois níveis $|e\rangle$ (estado excitado) e $|g\rangle$ (estado fundamental) com frequência de transição atômica ω_{eg} ressonante com o campo na Zona de Ramsey. Considere também que esse átomo foi preparado no estado $|e\rangle$ e enviado para interagir ressonantemente com o campo da Zona de Ramsey. Para valores típicos para as velocidades de vôo atômico, o tempo dessa interação t_i é de poucos μs , *e.g.*, para $v \approx 500\text{m/s}$ teremos $t_i \approx 1\mu\text{s}$ [11]. Como aproximação, considere o tempo de interação t_i entre átomo e campo seja pequeno o suficiente para supor que a dinâmica da fonte+dissipação da Zona de Ramsey possa ser desconsiderada. Ao abrigo dessa hipótese, o estado átomo-campo imediatamente após a interação será

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle|\beta_+\rangle + |g\rangle|\beta_-\rangle) \quad (4.49)$$

com

$$|\beta_+\rangle = \sqrt{2} \left[\sum_n \tilde{C}_n \cos(\tilde{\Omega}\sqrt{n+1}t_\beta) |n\rangle \right]$$

e

$$|\beta_-\rangle = \sqrt{2} \left[\sum_n \tilde{C}_n \sin(\tilde{\Omega}\sqrt{n+1}t_\beta) |n+1\rangle \right]$$

onde $\tilde{C}_n = e^{-1/2}\beta^n/\sqrt{n!}$, $\tilde{\Omega}$ é a frequência de Rabi no vácuo e t_β o tempo necessário para o átomo sofrer um pulso $\pi/2$ definido por $\sum_n |\tilde{C}_n|^2 \cos^2(\tilde{\Omega}\sqrt{n+1}t_\beta) = 1/2$. Essa situação é idêntica ao caso tratado na seção anterior.

Como a Zona de Ramsey possui em média um fóton em seu interior, então seria de se esperar que o seu campo tivesse uma predominância de características quânticas ($C_{(1,2)} \geq \mathcal{S}_{(2)}$ e $C_{(1,2)} \geq \mathcal{V}_{(2)} \geq \mathcal{P}_{(2)}$) e fosse um bom marcador de *que-caminho* se emaranhando de maneira significativa com o átomo tornando a informação acessível. Contudo, daremos aqui uma interpretação física do porque isso não acontece.

Imediatamente após a saída do átomo, a dinâmica da fonte e a dissipação passam a atuar no estado do campo. Tomando o traço parcial de $|\phi\rangle\langle\phi|$ nas variáveis atômicas, o estado do campo após a passagem do átomo será

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{2}(|\beta_+\rangle\langle\beta_+| + |\beta_-\rangle\langle\beta_-|) \quad .$$

A dinâmica fonte+dissipação da Zona de Ramsey atuará sobre o estado $\tilde{\rho}$, evoluindo-o para

$$\bar{\rho}_\tau = D(\beta_\tau) \left[e^{\mathcal{L}\tau} \tilde{\rho} \right] D^\dagger(\beta_\tau) \quad , \quad (4.50)$$

onde $\beta_\tau = -iF(1 - e^{-k\tau})/k$. Devemos, agora, lembrar que a constante de decaimento k é inversamente proporcional a T_r . Isso nos fornece uma constante de dissipação muito grande $k \approx 10^8$. Como consequência, para tempos τ da ordem ou maiores que 10^{-6} s teremos $k\tau \gg 1$. Isso significa que para $\tau \gtrsim 10^{-6}$ s a ação do termo de dissipação $e^{\mathcal{L}\tau}$ sobre o estado $\tilde{\rho}$ resultará rapidamente no estado de vácuo e o estado $\rho = |\beta\rangle\langle\beta|$ da Zona de Ramsey é restaurado. Com isso, num intervalo de tempo curto (da ordem de $1\mu\text{s}$) a informação de *que-caminho* contida no interior da Zona de Ramsey é varrida para os infinitos osciladores do banho tornando-a inacessível. De outra maneira, para tempos dessa ordem o átomo terá se afastado da cavidade de 0.5mm ao considerar a velocidade atômica de $\approx 500\text{m/s}$.

Assim, o campo sai rapidamente (quase que instantaneamente) de uma predominância de características quânticas onde era, *a priori*, uma boa ponta de prova para uma situação onde só há característica de corpúsculo com $\mathcal{P}_{(2)} = 1$ e $\mathcal{D} = 0$. Isso sugere a interpretação de que a dinâmica átomo-campo nas Zonas de Ramsey se processa de forma a considerar o campo puramente clássico durante todo o tempo, pois o efeito conjunto de fonte+dissipação nessa cavidades de baixo Q varre a informação de *que-caminho* armazenada na cavidade e a transfere para um sistema com infinitos graus de liberdade tornando-a indisponível ao mesmo tempo que restaura o campo no interior da cavidade. Isso sugere que sistemas que não armazenam e nem disponibilizam a informação de sua interação com um sistema quântico, seja por suas propriedades intrínsecas seja por uma dinâmica auxiliar, podem ser considerados clássicos porque atuam sobre o sistema quântico sem se emaranhar. O resultado final é uma operação unitária local devido a interação sem disponibilização de informação acerca do sistema quântico em questão.

4.6 Conclusões

Neste trabalho estudamos um interferômetro Mach-Zehnder equipado com uma ponta de prova capaz de obter e armazenar a informação por qual caminho seguiu uma partícula

quântica que o atravessa. Para a partícula encontramos cada termo da sua relação de complementaridade $\mathcal{P}_{(1)}^2 + \mathcal{V}_{(1)}^2 + C_{(1,2)}^2 = 1$. Para a ponta de prova, através de argumentos simples, quantificamos a sua imperfeição \mathcal{O} e a sua qualidade \mathcal{Q} . Mostramos que a qualidade \mathcal{Q} está diretamente relacionada à distinguibilidade \mathcal{D} dos estados da ponta de prova que, na ref. [16], foi interpretada como a quantidade da informação de que-caminho disponível na ponta de prova. Como consequência, definimos \mathcal{I} que tem interpretação contrária a \mathcal{D} e está relacionada com a imperfeição da ponta de prova. Mostramos que quando $\mathcal{D} = 0$ a ponta de prova é um sistema que possui apenas comportamento tipo corpúsculo e quando $\mathcal{D} = 1$ é um autêntico q-bit. Para a complementaridade da ponta de prova, construímos, via argumentos físicos, a grandeza $\mathcal{P}_{(2)}$ que quantifica suas características tipo corpúsculo. Determinamos também uma relação de complementaridade entre $\mathcal{P}_{(2)}$ e o emaranhamento $C_{(1,2)}$. Como a dualidade onda-partícula da partícula quântica é igual a da ponta de prova, *i.e.*, $\mathcal{S}_{(1)}^2 = \mathcal{S}_{(2)}^2$, encontramos $\mathcal{V}_{(2)}$ que quantifica as características tipo onda da ponta de prova. Na sequência, ao analisar $\mathcal{P}_{(2)}$, $\mathcal{V}_{(2)}$ e $C_{(1,2)}$ encontramos limites onde a ponta de prova pode ser considerada com um bom (regime quântico) ou um mal (regime clássico) discriminador de que-caminho. Em complemento mostramos que o ingrediente chave para a transição quântico-clássico não é necessariamente a informação gerada pela interação entre a partícula e a ponta de prova, mas sim a sua disponibilidade.

Para ilustrar nosso estudo, aplicamos nossos resultados a um experimento de complementaridade que modela um interferômetro Mach-Zehnder num experimento com átomos de Rydberg e cavidades de microondas. Nesse experimento [11] a ponta de prova transita do regime quântico ao clássico de maneira suave e o efeito dessa transição é verificada medindo a visibilidade das franjas de interferência atômica. Ao aplicar nossos resultados, conseguimos descrever o experimento em sua totalidade e mostramos que mesmo para altas visibilidades o sistema ainda apresenta muitas características quânticas, *e.g.*, grande emaranhamento. Mostramos que as imperfeições experimentais contribuem para a conclusão de limite clássico em [11]. Em seguida, analisamos as zonas de Ramsey onde nossos resultados fornecem uma simples interpretação. Neste caso, o limite clássico da ponta de prova é alcançado porque a dinâmica da fonte+dissipação sobre o estado do campo no interior da zona de Ramsey retira a informação de que-caminho que estaria disponível no interior da cavidade e a “leva” para um sistema com infinitos graus de liberdade deixando-a completamente indisponível.

Nós acreditamos que o modelo aqui estudado pode explicar porque objetos quânticos, como fótons, cruzam aparelhos macroscópicos, sofrendo evolução unitária, na ausência completa de emaranhamento, por exemplo, fótons e divisores de feixes de fótons ou fótons e placas de um quarto de onda, para citar alguns.

Bibliografia

- [1] A. Einstein, *Proceedings of the Fifth Solvey Conference*, p. 253, Paris, Gauthier–Villars, 1928.
- [2] N. Bohr, *Nature*, **121**, 580 (1928).
- [3] A. Einstein, E. Podolsky, and N. Rosen, *Phys. Review*, **47**, 777 (1935).
- [4] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, *Rev. Mod. Phys.*, **81**, 865(2009).
- [5] E. Schrödinger, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **31**, 555 (1935).
- [6] W. Wootters, and W. Zurek, *Phys. Rev. D*, **19**, 473 (1979).
- [7] M. Scully, and K. Drühl, *Phys. Rev. A*, **25**, 2208(1982).
- [8] M. Scully, B. G. Englert, and H. Walther, *Nature*, **351**, 111(1991).
- [9] S. Walborn, M. Cunha, S. Pádua, and C. Monken, *Phys. Rev. A*, **65**, 033818(2002).
- [10] M. Scully , and H. Walther, *Phys. Rev. A*, **39**, 5229(1989).
- [11] P. Bertet, S. Osnaghi, A. Rauschenbeutel, G. Nogues, A. Auffeves, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Nature*, **411**, 166(2002).
- [12] S. Dürr, T. Nonn, and G. Rempe, *Nature*, **395**, 33(1998).
- [13] L. Mandel, *Optics Letters*, **16**, 1882(1991).
- [14] G. Jaeger, M. Horne, and A. Shimony, *Phys. Rev. A*, **48**, 1023(1993).
- [15] G. Jaeger, A. Shimony, and L. Vaidman *Phys. Rev. A*, **51**, 54(1995).
- [16] B.–G. Englert , *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 2154(1996).
- [17] P. Busch, and C. Shilladay, *Phys. Reports*, **435**, 1-31(2006).
- [18] M. Jakob, and J. Bergou, *Opt. Commun*, **283**, 827(2010).
- [19] S. Hill e W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.*, **78**, 5022 (1997).

- [20] W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 2245(1998).
- [21] F. de Melo, S. Walborn, J. Bergou, and L. Davidovich, *Phys. Rev. Lett.*, **98**, 250501(2007).
- [22] A. Salles, F. de Melo, M. P. Almeida, M. Hor–Meyll, S. Walborn, P. Ribeiro, and L. Davidovich, *Phys. Rev. A*, **78**, 022322(2008).
- [23] N. Bohr, in *Albert Einstein: Philosopher Scientist* (ed. Schilpp, P. A.) 200–241 (Library of Living Philosophers, Evanston, 1949); reprinted in *Quantum Theory and Measurement* (eds J. A. Wheeler, and W. H. Zurek) 9–49 (Princeton Univ. Press, Princeton, 1983).
- [24] N. F. Ramsey, *Molecular Beams*, (Oxford Univ. Press, Oxford, 1985).
- [25] J. I. Kim, K. M. Fonseca Romero, A. M. Horiguti, L. Davidovich, M. C. Nemes, and A. F. R. de Toledo Piza, *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 4737 (1999).
- [26] E. Mascarenhas, and M. F. Santos, *Phys. Rev. A*, **79**, 023836 (2009).
- [27] L. Mandel, and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, (Cambridge University Press, 1995).
- [28] M. Nielsen, and I. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2000).
- [29] J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, *Rev. Mod. Phys.*, **73**, 565 (2001).
- [30] J. G. Peixoto de Faria and M. C. Nemes, *Phys. Rev. A*, **69**, 063812 (2004).

Capítulo 5

Discussão Geral

Nesta tese investigamos duas das propriedades mais instigantes da mecânica quântica: o princípio da complementaridade de Bohr e sua recente generalização, que contempla tanto a dualidade onda-partícula, características de uma função de onda de uma partícula, quanto o emaranhamento. Ambos aspectos tem suas raízes nas propriedades estruturais da linearidade da mecânica quântica.

Acreditamos que, de certa forma, é o que acontece no problema que estudamos no primeiro capítulo. Lá, quando fazemos uma abordagem dinâmica relativa à relação de distribuição de emaranhamento para três q-bits, surge naturalmente uma ligação direta entre a morte súbita de emaranhamento (MSE) e o emaranhamento genuíno (EG), onde a MSE é uma condição suficiente para a redistribuição do emaranhamento contido em cada duas partes indo para um emaranhamento do sistema como um todo. Para um sistema $2 \otimes 2 \otimes 2 \otimes 2$ mostramos que não existe EG quando não há MSE para uma condição inicial de grande interesse físico. Como complemento percebemos que na presença de MSE o emaranhamento entre um q-bit e todos os outros não pode ser contabilizado apenas nas bipartições de dois q-bits. Em seguida, no segundo capítulo, quando também estudamos um sistema $2 \otimes 2 \otimes 2 \otimes 2$, percebemos que há uma estrutura geométrica do emaranhamento devido a dinâmica e condições iniciais. Para um estado inicial em que durante toda a evolução não haverá MSE, encontramos curvas simples (elipses, parábolas e retas) entre as concorrências de dois q-bits. Além disso mostramos que estas curvas estão sobre uma superfície de emaranhamento e que a dinâmica do emaranhamento entre pares de q-bits está encerrada em uma hipersfera. No caso em que há MSE nem sempre as curvas entre as concorrências possuem uma forma simples, mas quando há será uma cônica e que podem ser interrompidas devido a MSE. Também neste caso há uma superfície de emaranhamento e a dinâmica do emaranhamento entre pares de q-bits continua limitada numa hipersfera. Contudo, devido a MSE, o raio da hipersfera não é único podendo ser maior (menor) quando ocorre (não ocorre) a MSE em alguma partição, respectivamente. Esses resultados mostram quanto as características do emaranhamento é sensível o modo da evolução. Ainda nesta direção e confirmando essas conclusões, estudamos as consequências sobre o emaranhamento quando há intervenções sobre a dinâmica do sistema, *i.e.*, analisamos como a dinâmica do emaranhamento é alterada quando há um

sistema externo que realiza medições (de maneira conveniente) sobre o sistema de interesse. Neste caso estudamos condições iniciais que apresentam MSE durante a evolução e os que não apresentam. Em ambos os casos mostramos que a dinâmica de emaranhamento pode ser “congelada” e o emaranhamento preservado em seus q-bits de origem quando medidas tipo Zeno são realizadas. Porém quando realizamos as medidas percebemos que apenas a condição inicial que apresenta MSE pode ter seu emaranhamento aumentado e até mesmo “ressuscitado”. Nesta condição inicial mostramos que podemos conduzir o estado a um estado de Bell, que é maximamente emaranhado, com apenas uma medida. Acreditamos que este efeito tem como origem a condição inicial e o subespaço de Hilbert que é acessado pela dinâmica. No quarto e último trabalho focamos na relação entre emaranhamento e a dualidade onda-partícula. Aqui estudamos dois sistemas (uma partícula quântica e um sistema de prova) que *a priori* se emaranham. A partícula é permanentemente quântica enquanto o sistema de prova possui a “liberdade” de transitar continuamente entre o regime da física quântica e o da física clássica. Bohr acreditava que a teoria quântica só poderia ter um carácter universal se um princípio de complementaridade puder também ser estabelecido para o sistema de prova (medidor). Neste trabalho tentamos realizar este feito. No dia a dia atuais a relação de complementaridade, para sistemas de dois níveis, une o emaranhamento com a dualidade onda-partícula que são, talvez, as duas características mais fundamentais de sistemas quânticos. No caso do limite quântico os nossos resultados mostram que a ponta de prova torna-se um q-bit. No limite clássico percebemos que, como esperado, a ponta de prova só terá comportamento de corpúsculo. Contudo, esta característica corpúscular está intimamente ligada ao comportamento clássico e devemos lembrar, neste momento, que sistemas clássicos também podem se interferir como é o caso de ondas eletromagnéticas clássicas. Mostramos que a geração da informação de que-caminho, devido a interação partícula-medidor, não é o fator crucial no processo de medição. Percebemos que a geração da informação é uma condição necessária, mas não suficiente. Além de gerar a informação por qual caminho seguiu a partícula, o medidor precisa deixá-la disponível. Se o medidor for tal que a informação após gerada esteja disponível, então o medidor é quântico e é caracterizado como um bom marcador de caminho. De outro modo havendo a geração da informação mas de maneira inacessível, neste caso o marcador é clássico e é caracterizado como um mal marcador de caminho. Apesar das definições trazidas por nós neste trabalho serem baseadas em limites desejáveis, o julgamento de sua adequação física será sua compatibilidade (ou não) com resultados experimentais. Embora nossos resultados porventura possam necessitar de um amadurecimento teórico ou conceitual mais apurado, até o presente nossa interpretação e definições para a ponta de prova conseguem reproduzir os experimentos e sistemas físicos apresentados na literatura. Como exemplo, aplicamos nossos resultados a um experimento de complementaridade na fronteira quântico-clássico modelado num experimento com átomos de Rydberg e cavidades de microondas e em seguida aplicamos nossos resultados às zonas de Ramsey onde nossos resultados fornecem uma interpretação qualitativa.