

BRUNO BATISTA MELIN

**ANÁLISE DAS OPÇÕES REAIS DE UM EMPREENDIMENTO
DE MINERAÇÃO UTILIZANDO SIMULAÇÃO DE MONTE
CARLO**

**Belo Horizonte
Departamento de Engenharia de Produção
Escola de Engenharia
Universidade Federal de Minas Gerais
2008**

BRUNO BATISTA MELIN

**ANÁLISE DAS OPÇÕES REAIS DE UM EMPREENDIMENTO
DE MINERAÇÃO UTILIZANDO SIMULAÇÃO DE MONTE
CARLO**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia de Produção, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção.

Área de Concentração: Produto e Trabalho

Orientador: Prof. Antônio Sérgio de Souza

Universidade Federal de Minas Gerais

**Belo Horizonte
Departamento de Engenharia de Produção
Escola de Engenharia
Universidade Federal de Minas Gerais
2008**

BRUNO BATISTA MELIN

**ANÁLISE DAS OPÇÕES REAIS DE UM EMPREENDIMENTO
DE MINERAÇÃO UTILIZANDO SIMULAÇÃO DE MONTE
CARLO**

Dissertação de mestrado defendida junto ao Curso de Mestrado em Engenharia da Produção da Faculdade de Engenharia da UFMG, aprovada pela banca examinadora:

Prof. Antônio Sérgio de Souza
Universidade Federal de Minas Gerais
Orientador

Prof. Carlos Patricio Samanez
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Prof. Leonardo Pereira Santiago
Universidade Federal de Minas Gerais

Belo Horizonte, 27 de março de 2008

**Departamento de Engenharia de Produção
Escola de Engenharia
Universidade Federal de Minas Gerais**

Às minhas duas princesas, Lu e Marina.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que me incentivaram ao longo deste período de dedicação ao mestrado.

Ao Antônio Sérgio, amigo e orientador, que me estimulou a fazer o mestrado, orientou na escolha do tema e, principalmente, dedicou tempo e paciência nas discussões sobre a dissertação.

Ao Stéfano Angioletti, por abrir as portas da empresa em que trabalha, por seu entusiasmo, amizade e dedicação para elucidar os aspectos técnicos e gerenciais do objeto de estudo.

Ao Prof. Leonardo Santiago, pelas orientações sobre o tema de Opções Reais e por estar sempre disponível.

Agradeço a todos os professores do curso de Engenharia de Produção da UFMG, pelos ensinamentos passados e por tornar menos limitada minha visão sobre a Engenharia de Produção.

À banca examinadora, que me honrou ao aceitar o convite para avaliar esta dissertação.

Agradeço a minha esposa, Luciana, por me apoiar nos momentos de desalento e à pequena Marina, que me dá tantas alegrias.

Obrigado a todos!

“O senhor mire e veja... o mais importante e bonito do mundo é isto: as pessoas não estão prontas, não foram terminadas, mas estão sempre mudando. Afinam e desafinam. Verdade maior que a vida pôde nos ensinar”.
(Guimarães Rosa)

RESUMO

Empreendimentos de mineração envolvem investimento de grande montante de capital e estão sujeitos a um nível elevado de incerteza, principalmente relativa a preços dos metais e à taxa de câmbio. Neste contexto, a análise tradicional de Fluxo de Caixa Descontado tende a subestimar o valor do projeto. A Análise de Opções Reais surge como uma técnica mais adequada de avaliação, por incorporar o valor da flexibilidade gerencial em condições de incerteza ao valor do empreendimento. Este estudo avalia a exploração de uma reserva de zinco e cobre para venda do concentrado desses metais sob a ótica de Opções Reais. O modelo desenvolvido considera duas opções européias: abandono e expansão. O método numérico utilizado é a simulação de Monte Carlo. São criadas e comparadas três alternativas de tratamento da incerteza: modelagem do preço do zinco como um Movimento Browniano Geométrico; modelagem do preço do zinco como um Processo de Reversão à Média; e modelagem do preço de cada metal da reserva como um Processo de Reversão à Média, além da modelagem da taxa de câmbio como um Movimento Browniano Geométrico. O valor obtido a partir da Análise de Opções Reais é comparado com o gerado por meio da análise de Fluxo de Caixa Descontado, indicando o valor agregado pela flexibilidade gerencial. Demonstra-se que a Análise de Opções Reais, por considerar o valor das ações contingenciais existentes em um projeto, pode levar a decisões diferentes das propostas pelas técnicas tradicionais, além de fornecer *insights* sobre a estratégia de implantação do projeto.

Palavras-chave: opções reais, simulação de Monte Carlo, avaliação de investimentos, mineração.

ABSTRACT

Mining projects demand large capital expenditure and are subject to high uncertainty, related to metal price and exchange rate. In this context, the traditional Discounted Cash Flow analysis tends to underestimate the value of the project. Real Options Analysis incorporates the value of managerial flexibility in uncertain conditions and, therefore, is a better suited valuation technique. This study values a project that consists of the exploration of a zinc and copper mine and the concentration of these metals based on the Real Option Analysis. The Real Options model incorporates two European options: abandonment and expansion. The numerical method used was the Monte Carlo simulation. Three alternatives to treat the uncertainty were created and compared: modeling of the zinc price as a Geometric Brownian Motion; modeling of the zinc price as a Mean Reverting Process; and modeling each metal price as a Mean Reverting Process, plus modeling the exchange rate as a Geometric Brownian Motion. This study's contribution is to demonstrate that Real Options Analysis, by considering the value of the contingent options existent in a project, can lead to different decisions compared to that obtained by the traditional analysis. Furthermore it gives insights about the implementation strategy of the project.

Key-words: real options, Monte Carlo simulation, investment valuation, mining.

SUMÁRIO

| | |
|--|----|
| Lista de Tabelas..... | 11 |
| Lista de Quadros..... | 12 |
| Lista de Figuras..... | 13 |
| Lista de Gráficos..... | 14 |
| Lista de Abreviaturas e Siglas..... | 16 |
| 1 Introdução | 17 |
| 1.1 Justificativa..... | 17 |
| 1.2 Enunciado do problema..... | 18 |
| 1.3 Objetivos | 18 |
| 1.4 Hipótese..... | 19 |
| 1.5 Organização da dissertação | 19 |
| 2 Opções financeiras | 21 |
| 2.1 Conceitos e propriedades | 21 |
| 2.2 Precificação de opções | 25 |
| 2.2.1 Portfolio equivalente | 25 |
| 2.2.2 Equação de Black & Scholes | 28 |
| 2.2.3 Árvore Binomial..... | 28 |
| 3 Opções Reais | 31 |
| 3.1 Limitações das técnicas tradicionais de avaliação de investimentos | 31 |
| 3.2 Opções Reais – conceitos..... | 32 |
| 3.3 Limitações da analogia..... | 37 |
| 3.4 Tipos de Opções Reais | 39 |
| 3.5 Evolução da utilização de Opções Reais..... | 42 |
| 3.6 Evidências do valor das Opções Reais..... | 43 |
| 4 Planejamento sob incerteza | 45 |
| 4.1 Os fundamentos..... | 45 |
| 4.2 O Espaço de opções de Luehrman | 47 |
| 4.3 A Matriz de Opções Reais de Crescimento de Smit e Trigeorgis | 50 |
| 4.4 A abordagem integrada de planejamento e controle de investimentos | 51 |
| 5 Processos estocásticos | 54 |
| 5.1 Conceito | 54 |

| | | |
|---------|---|-----|
| 5.2 | Caminho Aleatório (Random Walk) | 55 |
| 5.3 | Processo de Wiener ou Movimento Browniano..... | 57 |
| 5.4 | Movimento Browniano com Tendência (Brownian Motion with Drift)..... | 58 |
| 5.5 | Movimento Browniano Geométrico..... | 59 |
| 5.6 | Processo de Reversão à Média | 61 |
| 5.7 | Processos estocásticos utilizados na modelagem de preços de commodities | 64 |
| 6 | Métodos numéricos de precificação de opções | 67 |
| 6.1 | Introdução..... | 67 |
| 6.2 | Soluções analíticas | 69 |
| 6.3 | Método das Diferenças Finitas | 69 |
| 6.4 | Programação Dinâmica | 72 |
| 6.5 | Simulação de Monte Carlo | 74 |
| 6.5.1 | Avaliação de opções americanas com Simulação de Monte Carlo | 75 |
| 6.5.1.1 | Aproximações paramétricas | 76 |
| 6.5.1.2 | Método da Árvore Aleatória | 77 |
| 6.5.1.3 | Método da Partição do Espaço de Estados..... | 79 |
| 6.5.1.4 | Método da Malha Estocástica | 80 |
| 6.5.1.5 | Métodos baseados em regressão | 81 |
| 7 | Apresentação do estudo de caso..... | 82 |
| 7.1 | A Indústria de mineração no Brasil..... | 82 |
| 7.2 | Cenário mundial: aumento de consumo e preços elevados..... | 83 |
| 7.3 | O empreendimento | 87 |
| 7.3.1 | Processo produtivo | 88 |
| 7.3.2 | Riscos do empreendimento | 89 |
| 7.3.3 | Etapas de exploração (redução de riscos privados)..... | 90 |
| 7.4 | Metodologia de análise..... | 91 |
| 7.4.1 | Elaboração da planilha de fluxo de caixa do empreendimento | 92 |
| 7.4.2 | Modelagem das variáveis de entrada como processos estocásticos..... | 93 |
| 7.4.3 | Modelagem das Opções Reais..... | 94 |
| 7.4.4 | Simulação de Monte Carlo | 95 |
| 7.4.5 | Análise de sensibilidade | 96 |
| 8 | Simulação das variáveis de entrada..... | 98 |
| 8.1 | Levantamento do histórico de preços..... | 98 |
| 8.2 | Estimativa dos parâmetros do Movimento Browniano Geométrico | 100 |

| | | |
|-----|--|-----|
| 8.3 | Estimativa dos Parâmetros do Processo de Reversão à Média | 104 |
| 8.4 | Estimativa dos parâmetros em condições neutras ao risco | 108 |
| 9 | Resultados | 112 |
| 9.1 | Simulação I1 | 112 |
| 9.2 | Simulação I2..... | 116 |
| 9.3 | Simulação I3..... | 119 |
| 9.4 | Comparação de resultados..... | 125 |
| 9.5 | Análise de sensibilidade | 127 |
| 10 | Conclusão | 138 |
| | Referências | 140 |
| | Anexo 1 – Planilhas de simulação de processos estocásticos | 144 |
| | Anexo 2 – Planilhas de simulação do empreendimento..... | 147 |
| | Anexo 3 – Lema de Ito..... | 150 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|---|-----|
| Tabela 1 – Valor das opções de crescimento | 44 |
| Tabela 2 – Minerais com maior crescimento de produção em 2006..... | 83 |
| Tabela 3 – Projeção de preço de metais | 86 |
| Tabela 4 – Correlação de preços de metais da reserva..... | 100 |
| Tabela 5 – Tabela base para estimativa dos parâmetros do MBG do zinco..... | 101 |
| Tabela 6 – Parâmetros do MBG do zinco e do cobre..... | 101 |
| Tabela 7 – Tabela base para estimativa dos parâmetros do PRM do zinco | 105 |
| Tabela 8 – Parâmetros do PRM dos metais..... | 107 |
| Tabela 9 – Estimativa da <i>convenience yield</i> do zinco | 111 |
| Tabela 10 – Parâmetros de simulação do preço do zinco – MBG | 112 |
| Tabela 11 – Parâmetros de simulação do preço do zinco – PRM | 116 |
| Tabela 12 – Parâmetros de simulação dos preços dos metais | 119 |
| Tabela 13 – Parâmetros de simulação da taxa de câmbio | 120 |
| Tabela 14 – Comparação do valor do projeto obtido em cada modelo..... | 125 |

LISTA DE QUADROS

| | |
|---|----|
| Quadro 1 – Retorno de posições básicas em opções..... | 22 |
| Quadro 2 – Posições de uma opção em termos do <i>payoff</i> | 23 |
| Quadro 3 – Variáveis que afetam o valor de opções..... | 23 |
| Quadro 4 – Paralelo entre opções financeiras e opções reais..... | 33 |
| Quadro 5 – Tipos de Opções Reais | 40 |
| Quadro 6 – Classificação de opções reais segundo Trigeorgis | 46 |
| Quadro 7 – Comparativo das técnicas de valoração de opções..... | 68 |
| Quadro 8 – Alternativas de modelagem da incerteza..... | 91 |
| Quadro 9 – Modelos de análise utilizados | 92 |
| Quadro 10 – Fórmulas de <i>payoff</i> das opções..... | 94 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|-----|
| Figura 1 – Relação entre o valor da opção de compra e o preço do ativo-objeto | 24 |
| Figura 2 – Relação entre o valor da opção de venda e o preço do ativo-objeto..... | 25 |
| Figura 3 – Assimetria na distribuição de probabilidades do VPL de um projeto introduzida por Opções Reais | 34 |
| Figura 4 – Valor da flexibilidade | 35 |
| Figura 5 – Relação entre tipo de projeto, incerteza e tipo de análise..... | 36 |
| Figura 6 – Efeito da concorrência e da exclusividade sobre o timing de opções reais | 47 |
| Figura 7 – Espaço de Opções | 48 |
| Figura 8 – Matriz de Opções de Crescimento | 50 |
| Figura 9 – Abordagem integrada de planejamento e controle de oportunidades de investimento | 51 |
| Figura 10 – Utilização de controles contábeis cruzados para acompanhamento de resultados | 52 |
| Figura 11 – Modelo de orçamentação estratégica de capital | 53 |
| Figura 12 – Técnicas de precificação de opções mais empregadas | 67 |
| Figura 13 – Grid de diferenças finitas | 70 |
| Figura 14 – Representação esquemática de um grid da árvore binomial..... | 73 |
| Figura 15 – Geração dos valores terminais da variável estocástica através de simulação..... | 74 |
| Figura 16 – Aproximação paramétrica de uma fronteira de exercício de uma dimensão..... | 77 |
| Figura 17 – Exemplo de árvore aleatória | 78 |
| Figura 18 – Construção da malha estocástica | 80 |
| Figura 19 – Fluxograma do processo produtivo..... | 89 |
| Figura 20 – Seqüência de análise | 92 |
| Figura 21 – Representação esquemática da planilha de fluxo de caixa do empreendimento .. | 93 |
| Figura 22 – Etapas da Simulação de Monte Carlo | 95 |
| Figura 23 – Análise de regressão de dx e x_{t-1} para o zinco | 106 |
| Figura 24 – Resultados da simulação do VPL do projeto sem flexibilidade – I1 | 113 |
| Figura 25 – Resultado da simulação do VPL do projeto com flexibilidade – I1 | 114 |
| Figura 26 – Preço do zinco e fluxo de caixa no 16º trimestre..... | 114 |
| Figura 27 – Resultados da simulação do VPL do projeto sem flexibilidade – I2..... | 117 |
| Figura 28 – Resultado da simulação do VPL do projeto com flexibilidade – I2..... | 117 |
| Figura 29 – Resultados da simulação dos preços dos metais – I3..... | 120 |
| Figura 30 – Resultados da simulação do VPL do projeto sem flexibilidade – I3..... | 122 |
| Figura 31 – VPL tradicional e VPL expandido..... | 138 |
| Figura 32 – Planilha de simulação do caminho aleatório de tempo e estado discretos..... | 144 |
| Figura 33 – planilha de simulação do caminho aleatório de tempo discreto e estado contínuo | 144 |
| Figura 34 – Planilha de simulação do Movimento Browniano com Tendência | 145 |
| Figura 35 – Planilha de simulação do Movimento Browniano Geométrico | 145 |
| Figura 36 – Planilha de simulação do Processo de Reversão à Média | 146 |
| Figura 37 – Planilha de modelagem da incerteza conforme modelo I1 | 147 |
| Figura 38 – Planilha de modelagem da incerteza conforme modelo I2..... | 148 |

LISTA DE GRÁFICOS

| | |
|---|-----|
| Gráfico 1 – Simulação do Caminho Aleatório de Tempo e Estado Discretos | 56 |
| Gráfico 2 – Simulação do Caminho Aleatório de Tempo Discreto e Estado Contínuo..... | 57 |
| Gráfico 3 – Simulação do Movimento Browniano com Drift..... | 59 |
| Gráfico 4 – Simulação do Movimento Browniano Geométrico com Drift..... | 61 |
| Gráfico 5 – Simulação de um Processo de Reversão à Média | 63 |
| Gráfico 6 – Simulação de PRM com η variados..... | 63 |
| Gráfico 7 – Evolução do preço do zinco | 84 |
| Gráfico 8 – Evolução do preço do cobre..... | 84 |
| Gráfico 9 – Evolução do preço do ouro | 85 |
| Gráfico 10 – Evolução do preço da prata | 85 |
| Gráfico 11 – Histórico do preço spot do zinco..... | 98 |
| Gráfico 12 – Histórico do preço spot dos metais | 99 |
| Gráfico 13 – Resultados da regressão Zn-Cu..... | 99 |
| Gráfico 14 – Projeção do valor esperado e do intervalo de confiança para o preço do Zn.... | 102 |
| Gráfico 15 – Simulação da evolução do preço do zinco – MBG..... | 103 |
| Gráfico 16 – Simulação da evolução do preço do cobre – MBG..... | 104 |
| Gráfico 17 – Regressão dx versus x_{t-1} para o zinco..... | 106 |
| Gráfico 18 – Simulação do preço do zinco segundo o PRM | 108 |
| Gráfico 19 – Resultado da simulação do preço do zinco – I1 | 112 |
| Gráfico 20 – Relação entre o preço do zinco e o fluxo de caixa no 16º trimestre – I1 | 115 |
| Gráfico 21 – Relação entre o preço do zinco e o exercício de opções – I1 | 115 |
| Gráfico 22 – Resultado da simulação do preço do zinco – I2..... | 116 |
| Gráfico 23 – Preço do zinco no 16º trimestre – I2 | 118 |
| Gráfico 24 – Relação entre o preço do zinco e o exercício de opções – I2..... | 118 |
| Gráfico 25 – Relação entre o valor das opções e o preço do zinco no 16º trimestre – I2..... | 119 |
| Gráfico 26 – Resultados da simulação da taxa de câmbio | 121 |
| Gráfico 27 – Resultados da simulação dos fluxos de caixa trimestrais – I3 | 121 |
| Gráfico 28 – Resultado da simulação do VPL do projeto com flexibilidade – I3 | 123 |
| Gráfico 29 – Relação entre o valor das opções e o fluxo de caixa no 16º trimestre – I3..... | 124 |
| Gráfico 30 – Opção selecionada em função do fluxo de caixa no 16º trimestre – I3 | 124 |
| Gráfico 31 – Preço spot do zinco | 125 |
| Gráfico 32 – Análise de Sensibilidade – O_1 | 127 |
| Gráfico 33 – Gráfico de tornado – O_1 | 128 |
| Gráfico 34 – Relação valor da opção O_1 e preço inicial | 128 |
| Gráfico 35 – Relação valor da opção O_1 e velocidade de reversão à média..... | 129 |
| Gráfico 36 – Relação valor da opção O_1 e volatilidade | 129 |
| Gráfico 37 – Análise de Sensibilidade – O_2 | 130 |
| Gráfico 38 – Gráfico de tornado – O_2 | 130 |
| Gráfico 39 – Relação valor da opção O_2 e $P(t=0)$ | 131 |
| Gráfico 40 – Relação valor da opção O_2 e velocidade de reversão à média | 131 |
| Gráfico 41 – Relação valor da opção O_2 e volatilidade | 132 |
| Gráfico 42 – Análise de sensibilidade da opção completa..... | 132 |
| Gráfico 43 – Gráfico de tornado da opção completa | 133 |
| Gráfico 44 – Relação valor da opção completa e o preço inicial..... | 133 |
| Gráfico 45 – Relação valor da opção completa e velocidade de reversão à média..... | 134 |

| | |
|--|-----|
| Gráfico 46 – Relação valor da opção completa e volatilidade | 134 |
| Gráfico 47 – Análise de sensibilidade de O_1 em relação ao investimento | 135 |
| Gráfico 48 – Relação valor de O_1 e o investimento | 135 |
| Gráfico 49 – Análise de sensibilidade de O_2 em relação ao investimento | 136 |
| Gráfico 50 – Relação valor da opção de abandono e investimento | 136 |
| Gráfico 51 – Análise de sensibilidade da opção completa em relação ao investimento | 137 |
| Gráfico 52 – Relação valor da opção completa e investimento | 137 |

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AOR – Análise de Opções Reais

CAPM – Capital Assets Pricing Model

DNPM – Departamento Nacional de Produção Mineral

EDP – Equações Diferenciais Parciais

FCD – Fluxo de Caixa Descontado

IBRAM – Instituto Brasileiro de Mineração

LME – London Metals Exchange

MAD – Market Asset Disclaimer

MBG – Movimento Browniano Geométrico

NTN-F – Notas do Tesouro Nacional – Série F

PPA – Plano Plurianual de Governo

PIB – Produto Interno Bruto

PRM – Processo de Reversão à Média

VPL – Valor Presente Líquido

VPLq – Quociente de Valor Presente Líquido (relação valor-custo)

1 Introdução

1.1 Justificativa

O setor de mineração foi considerado pelo governo brasileiro, no PPA 2004-2007, um dos três pilares de sustentação do desenvolvimento do país, particularmente devido à contribuição do setor para a redução da vulnerabilidade externa da economia brasileira. A participação da mineração na economia brasileira, notadamente na balança comercial, tem aumentado significativamente nos últimos anos. Em 2000, a participação do setor no PIB era de 2,57%. Em 2005, alcançou 4,89%. No ano de 2006, o setor contribuiu com 26,9% do valor exportado pelo Brasil e com 21,3% da balança comercial brasileira (DNPM, 2007).

O aumento da demanda por *commodities* minerais decorrente do crescimento da economia mundial, particularmente devido à construção das infra-estruturas chinesa e indiana, elevou os preços a patamares extremamente elevados. O Brasil, com sua vocação para o negócio de *commodities*, tem tirado proveito desse aumento de consumo. A indústria extrativa mineral apresentou crescimento de 9,8% em 2005 e de 6% em 2006. Neste mesmo período, o PIB brasileiro cresceu apenas 2,9% e 3,7%. O investimento previsto no setor, para o período de 2007 a 2011, é de US\$28 bilhões ou 5,6 bilhões de dólares por ano.

Em nível mundial, o setor de mineração tem passado por um processo longo de consolidação e poucos *players* detêm a maior parte da produção dos minérios mais importantes. Entretanto, com a elevação de preços, reservas de menor porte e que eram consideradas economicamente inviáveis tornaram-se economicamente atrativas, viabilizando a entrada no negócio de mineradoras de porte menor. Mas os preços de *commodities* são cíclicos e tendem a voltar a um patamar de equilíbrio, na medida em que os produtores realizam novos investimentos e os níveis de produção e demanda tornam-se mais equilibrados. Além disso, os preços são sujeitos a alta volatilidade, principalmente em um contexto de baixos estoques, como o atual. Assim, as empresas de menor porte, que não têm os ganhos de escala dos grandes conglomerados, devem adotar estratégias que permitam o aproveitamento dos períodos de alta de preço e minimizem as perdas quando o ciclo se reverte.

Em um ambiente sujeito a alta volatilidade, que envolve investimentos elevados e onde há margem para a flexibilidade gerencial, a Análise de Opções Reais (AOR) surge como um instrumento financeiro adequado para auxiliar a tomada de decisões.

1.2 Enunciado do problema

A utilização dos métodos tradicionais de avaliação de empreendimentos, representados pelas técnicas de Fluxo de Caixa Descontado (FCD), subestima o valor de projetos ao não considerar o valor agregado pela flexibilidade gerencial em condições de incerteza de mercado. Pretende-se estudar se a Análise de Opções Reais, por contemplar esse fator, gera uma estimativa de valor superior à dos métodos tradicionais.

1.3 Objetivos

O objetivo geral desta dissertação é aplicar a Análise de Opções Reais, utilizando o método numérico de Simulação de Monte Carlo para avaliar um empreendimento real de mineração e demonstrar que a existência de opções reais eleva o valor do projeto.

Os objetivos específicos são:

- Modelar os preços de *commodities* metálicas segundo processos estocásticos (Movimento Browniano Geométrico e Processo de Reversão à Média) e identificar o processo mais adequado ao contexto em que se insere o projeto;
- Facilitar a incorporação da metodologia de Opções Reais nas práticas organizacionais, por meio do desenvolvimento de uma planilha que parta da técnica de Fluxo de Caixa Descontado já incorporada à prática das empresas e agregue a Análise de Opções Reais, permitindo a comparação de resultados das duas técnicas, a partir dos mesmos dados de entrada;
- Criar um modelo de Simulação de Monte Carlo que permita incorporar várias fontes de incerteza na análise e comparar seus resultados com os obtidos por um modelo que considera apenas uma única fonte de incerteza.

1.4 Hipótese

Quando um empreendimento está sujeito a condições de incerteza (medida pela volatilidade de seu retorno) e há espaço para a flexibilidade gerencial, a estimativa de valor gerada pela Análise de Opções Reais é superior à obtida pelas técnicas de Fluxo de Caixa Descontado.

1.5 Organização da dissertação

No Capítulo 2, descrevem-se os fundamentos de Opções Financeiras. Apresentam-se as variáveis que afetam o valor das opções e seus efeitos. Aborda-se o conceito de portfólio equivalente e seu uso na valoração de opções. Por último, exploram-se os dois métodos tradicionais de precificação de opções: a equação de Black & Scholes (1973) e a Árvore Binomial, desenvolvida por Cox, Ross e Rubinstein (1979).

No Capítulo 3, apresenta-se o conceito de Opções Reais e descrevem-se os principais tipos de opção real. Faz-se um paralelo com as opções financeiras e são apresentadas as limitações dessa analogia. Descrevem-se as situações em que é recomendável a aplicação da Análise de Opções Reais (AOR) no lugar da análise do Fluxo de Caixa Descontado (FCD). Em seguida, discorre-se sobre a evolução do uso da AOR e são apresentados estudos empíricos que evidenciam a existência do valor das opções em ativos reais.

Vários autores (MYERS, 2001; LUEHRMAN, 1998; SMIT; TRIGEORGIS, 2006; KASANEN; TRIGEORGIS, 1993) preocuparam-se com a forma de incorporação da AOR ao dia-a-dia das empresas. Surgiram, então, modelos de planejamento sob incerteza, que introduzem a técnica nas atividades de planejamento, orçamento e controle. O capítulo 4 apresenta o conceito de portfólio de opções reais, criado por Myers e os modelos que buscaram incorporar as opções reais à rotina das organizações.

O capítulo 5 apresenta uma revisão bibliográfica sobre processos estocásticos. Descrevem-se os diversos processos – Movimento Browniano Simples, Movimento Browniano Geométrico, Processo de Reversão à Média – e apresentam-se as equações que permitem simular o

comportamento de variáveis que seguem esses processos. Além disso, são apresentados exemplos de uso de processos estocásticos na avaliação de projetos da área de mineração.

Uma revisão bibliográfica sobre os métodos numéricos empregados na estimativa de valor de opções reais é realizada no capítulo 6. São apresentadas as principais equações fechadas, os métodos de Árvore Multinomial, o Método das Diferenças Finitas e a Simulação de Monte Carlo.

O Capítulo 7 contém a descrição do caso analisado e da metodologia utilizada na avaliação do empreendimento, considerando as 3 alternativas de modelagem da incerteza empregadas.

As técnicas de estimativa dos parâmetros dos processos estocásticos utilizados na simulação das variáveis de entrada, os valores obtidos e as equações empregadas na simulação são apresentados no Capítulo 8.

O capítulo 9 contém a análise de resultados. Para cada modelo de simulação empregado, é apresentado o valor do projeto com e sem flexibilidade gerencial, além do valor das opções. Em seguida, analisa-se a sensibilidade do valor das opções reais e do projeto em relação às variáveis de entrada.

O capítulo 10 apresenta as conclusões e recomendações de pesquisas relacionadas ao tema estudado.

2 Opções financeiras

2.1 Conceitos e propriedades

A AOR se desenvolveu a partir dos modelos de análise de contratos de opções sobre ações ou outros títulos financeiros. Por isso, no texto a seguir, são apresentadas as definições relativas a opções financeiras. Posteriormente, essas definições são estendidas para o contexto de opções reais. Optou-se por manter certos termos em inglês por serem consolidados na literatura.

“Uma opção é um contrato entre duas partes, que dá a seu comprador um direito, mas não uma obrigação, de comercializar uma quantidade fixa de determinado ativo a um preço estabelecido em ou antes de determinada data” (MINARDI, 2004, p.25).

Há dois tipos de opção (MINARDI, 2004; HULL, 2005):

- Opções de compra (*call*): dão a seu detentor o direito de comprar uma quantidade predeterminada de um ativo por um preço especificado em contrato (preço de exercício) definido em (ou antes de) uma data de exercício estipulada (data de vencimento ou de maturidade da opção).
- Opções de venda (*put*): dão a seu detentor o direito de vender uma quantidade predeterminada de um ativo por um preço de exercício em (ou antes da) data de maturidade.

Quanto à data de exercício, as opções podem ser classificadas em:

- Opções Americanas: podem ser exercidas a qualquer momento até a data de vencimento.
- Opções Européias: só podem ser exercidas na data de vencimento.

O investidor pode assumir duas posições ao negociar opções:

- Posição comprada (*long*): o investidor adquire uma opção, obtendo o direito, mas não a obrigação de exercê-la na (ou antes da) data de vencimento.
- Posição vendida (*short*): o investidor emite (vende) uma opção, recebendo uma quantia na venda, mas assume a obrigação potencial futura de comprar (ou vender) o ativo pelo preço de exercício, se o comprador desejar exercer a opção.

Os resultados financeiros das duas partes de um contrato de opção são diametralmente opostos. Se o comprador tem resultado positivo, o vendedor tem perdas e vice-versa. O quadro 1 apresenta as quatro posições básicas em opções e o retorno (*payoff*) para exercício imediato, que é função do preço do ativo (S_t) e do preço de exercício da opção (X).

Quadro 1 – Retorno de posições básicas em opções

| Posição | Retorno (<i>Payoff</i>) | Gráfico do Retorno (<i>Payoff</i>) |
|--|--|--------------------------------------|
| Compra de opção de compra (<i>Long in a call</i>) | $\max (S_t - X, 0)$ | |
| Compra de opção de venda (<i>Long in a put</i>) | $\max (X - S_t, 0)$ | |
| Venda de opção de compra (<i>Short in a call</i>) | $-\max (S_t - X, 0) = \min (X - S_t, 0)$ | |
| Venda de opção de venda (<i>Short in a put</i>) | $-\max (X - S_t, 0) = \min (S_t - X, 0)$ | |

Fonte: adaptado de Hull, 2005

O índice t da variável S_t denota que o valor do ativo varia com o tempo, ao passo que o preço de exercício (X) é constante. Os gráficos mostram a variação do retorno em face de variações no valor do ativo-objeto, sem considerar os custos de comercialização. A relação entre o valor

do ativo (S_t) e o preço de exercício (X) pode levar uma opção a três situações em termos de geração de caixa.

Quadro 2 – Posições de uma opção em termos do *payoff*

| Situação | Descrição | Call | Put |
|--|--|-----------|-----------|
| Dentro do dinheiro (<i>in the money</i>) | Gera fluxo de caixa positivo a seu titular se for exercida imediatamente | $S_t > X$ | $S_t < X$ |
| No dinheiro (<i>at the money</i>) | Gera fluxo de caixa nulo a seu titular se for exercida imediatamente | $S_t = X$ | $S_t = X$ |
| Fora do dinheiro (<i>out of the money</i>) | Gera fluxo de caixa negativo a seu titular se for exercida imediatamente | $S_t < X$ | $S_t > X$ |

Uma opção de compra de um lote de ações está sendo oferecida a um preço acima ou abaixo do que realmente vale? Daqui a um mês, esse valor será maior ou menor? Esse é o tipo de pergunta mais instigante a respeito de opções. O valor de uma opção é afetado por seis variáveis. O quadro 3 apresenta o efeito de cada uma delas no valor de uma opção de compra (C) e de uma opção de venda (P), de acordo com Hull (2005).

Quadro 3 – Variáveis que afetam o valor de opções

| Variável | | Impacto no valor da opção | | |
|---------------------------------|----------|---------------------------|--------------------------------|---|
| Preço corrente do ativo | S | C | $S \uparrow - C \uparrow$ | O <i>payoff</i> de uma opção de compra é $\max(S-X,0)$, logo quanto maior o preço do ativo-objeto, maior o valor da opção de compra. |
| | | P | $S \uparrow - P \downarrow$ | O <i>payoff</i> de uma opção de venda é $\max(X-S,0)$, assim quanto maior for S, menor o valor da opção de venda. |
| Preço de exercício | X | C | $X \uparrow - C \downarrow$ | O <i>payoff</i> de uma opção de compra é $\max(S-X,0)$, logo quanto maior o preço do exercício, menor o valor da opção de compra. |
| | | P | $X \uparrow - P \uparrow$ | O <i>payoff</i> de uma opção de venda é $\max(X-S,0)$, logo quanto maior for X, maior o valor da opção de venda. |
| Prazo até o vencimento da opção | τ | C | $\tau \uparrow - C \uparrow$ | Quanto maior o prazo para o vencimento da opção, mais tempo há para que ocorram fatos que afetem o preço do ativo. Como o titular não exerce a opção no caso de retorno negativo, o tempo até o vencimento aumenta o valor das opções de compra e de venda. Opções que geram dividendos são uma exceção a essa regra, pois a opção de vida mais longa pode ter seu valor reduzido pela distribuição do dividendo. |
| | | P | $\tau \uparrow - P \uparrow$ | |
| Volatilidade do preço do ativo | σ | C | $\sigma \uparrow - C \uparrow$ | Quanto maior a volatilidade, maior a probabilidade de o ativo apresentar retorno positivo elevado ou retorno muito negativo. Como o dono da opção não a exerce no caso de retorno negativo, a volatilidade aumenta o valor da opção de compra e de venda. |
| | | P | $\sigma \uparrow - P \uparrow$ | |
| Taxa de juro livre de risco | r | C | $r \uparrow - C \uparrow$ | Quando a taxa de juro aumenta, a taxa de crescimento do preço da ação tende a crescer também, mas o valor presente do fluxo de caixa futuro se reduz. O primeiro efeito eleva o valor da opção de compra e o segundo diminui. Como o primeiro efeito é predominante em relação ao segundo, o valor da <i>call</i> aumenta com o aumento da taxa de juro livre de risco. |

| | | | | |
|---|---|---|-----------------------------|---|
| | | P | $r \uparrow - P \downarrow$ | O aumento da taxa de crescimento do preço da ação e a redução do valor presente do fluxo de caixa futuro tendem a reduzir o valor da opção de venda. |
| Dividendos esperados durante a vida restante da opção | d | C | $d \uparrow - C \downarrow$ | Após a distribuição de dividendos, o preço unitário do ativo cai no montante do dividendo pago por unidade. Se não houver ajuste, quanto maior o dividendo, menor será o valor da opção de compra, que é dado por $\max(S-X;0)$ |
| | | P | $d \uparrow - P \uparrow$ | Pelo mesmo motivo, o valor da opção de venda cresce com a distribuição de dividendos. |

O valor total de uma opção é dado pela soma de seu valor intrínseco e de seu valor tempo. O valor intrínseco corresponde ao máximo entre zero e o fluxo de caixa gerado caso a opção seja exercida imediatamente (QUADRO 1). O valor tempo está relacionado à probabilidade de se obter um fluxo de caixa superior ao do exercício imediato da opção em algum instante futuro, até a data de vencimento da opção. Na data de expiração, o valor tempo é igual a zero (HULL, 2005).

A figura 1 apresenta o formato característico da curva de valor de uma opção de compra (C), em uma data qualquer menor ou igual à data de vencimento, que é uma função do preço do ativo-objeto (S) na data específica, do tempo para a maturidade (τ) e do preço de exercício (X). São apresentados, também, os limites para o valor da opção. O limite superior é dado pelo preço do ativo-objeto (S), que é alcançado quando $\tau \rightarrow \infty$. Como o investidor não é obrigado a exercer a opção, o limite inferior é o valor intrínseco da opção dado por $\max(S-X,0)$. A curva de valor da opção se situa acima da reta S-X devido ao valor tempo (TRIGEORGIS, 1996).

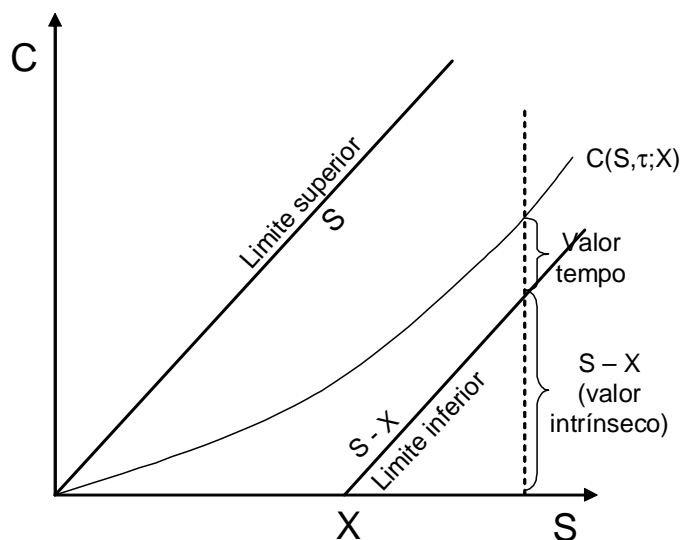


Figura 1 – Relação entre o valor da opção de compra e o preço do ativo-objeto
 Fonte: adaptada de TRIGEORGIS, 1996

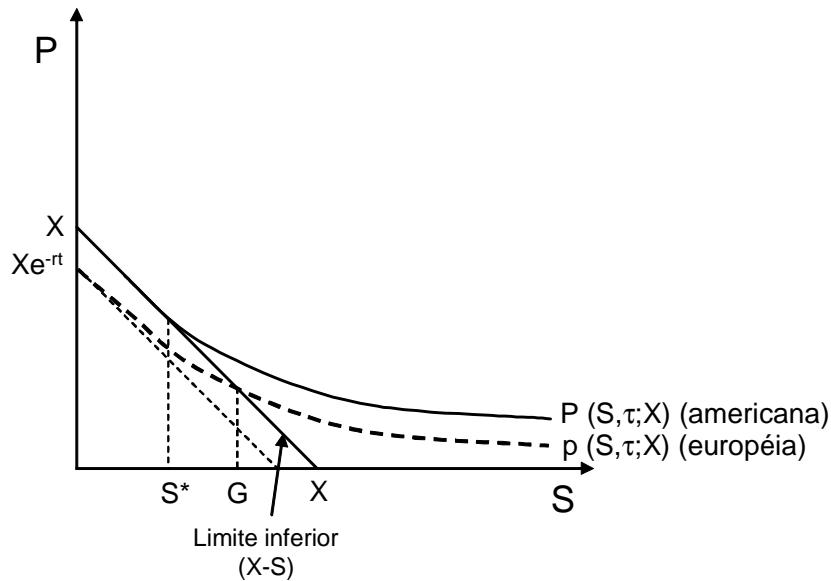


Figura 2 – Relação entre o valor da opção de venda e o preço do ativo-objeto
 Fonte: adaptada de TRIGEORGIS, 1996

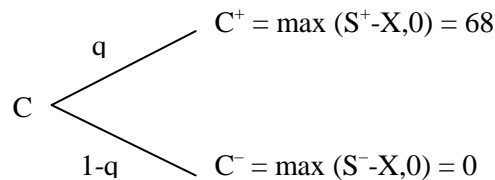
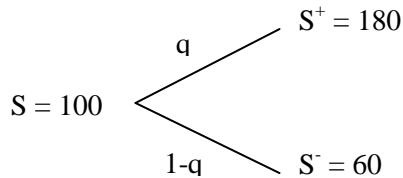
A figura 2 apresenta a curva de valor de uma opção de venda e o limite inferior de valor. O limite inferior é dado por $\max(X-S, 0)$, que é o *payoff* de exercício imediato. Quando o preço do ativo-objeto atinge um nível crítico ($S < S^*$) o valor da *put* passa a ser igual ao valor de exercício imediato, o que leva ao exercício antes do vencimento. Como a *put* americana vale mais que a *put* europeia, quando o preço do ativo-objeto é baixo ($S < G$), esta tem valor menor que $X-S$ e, quando $S = 0$, seu valor é Xe^{-rt} , isto é, o valor presente do preço de exercício, descontado a uma taxa livre de risco, pois a opção só será exercida no futuro (TRIGEORGIS, 1996).

2.2 Precificação de opções

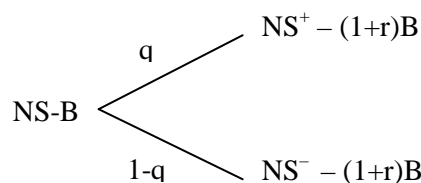
2.2.1 Portfolio equivalente

A precificação de opções sempre foi um enorme desafio, até que Black e Scholes (1973) identificaram a possibilidade de construir um portfolio que gere o mesmo retorno que uma opção em qualquer estado, denominado portfolio equivalente. Se os retornos são os mesmos, o valor da opção deve ser igual ao valor do portfolio equivalente, que é conhecido. Esse portfolio é composto de N ações de um ativo-objeto e de um empréstimo de uma quantia $\$B$ remunerado à taxa livre de risco.

Trigeorgis (1996) apresenta o seguinte exemplo para ilustrar o mecanismo de precificação de opções. Suponhamos que o preço de uma ação seja \$100 e que, no próximo período, possa valer \$180 com probabilidade q ou \$60 com probabilidade $1-q$. O preço de exercício (X) é \$112 e a taxa livre de risco (r) é 0,08. As representações gráficas dos estados atual e futuro da ação e do valor da opção na data de vencimento são:



O investimento na compra de uma opção é equivalente à compra de um determinado número de ações (N), com uma parte da quantia tomada emprestada (a ser paga no próximo período). No pior caso, com a venda das ações pelo seu valor mínimo, obtém-se um ganho nulo, exatamente como no investimento na opção. Se, por outro lado, a ação se valorizar, o empréstimo será pago e haverá uma sobra ou ganho. Se esse ganho for igual ao ganho proporcionado pelo investimento na opção, o retorno da carteira será igual ao da opção, possibilitando determinar o valor atual (C) da opção. Sendo N a quantidade de ações a serem compradas, graficamente os estados atual e futuro da carteira seriam:



Onde S é o preço atual da ação, N o número de ações e r a taxa de juros a ser paga sobre o empréstimo de B . Como o portfólio deve gerar o mesmo retorno que a opção, temos:

$$NS^+ - (1+r)B = C^+ \quad \text{e} \quad [\text{eq. 1}]$$

$$NS^- - (1+r)B = C^- \quad [\text{eq. 2}]$$

Resolvendo o sistema com duas equações, tem-se:

$$N = \frac{C^+ - C^-}{S^+ - S^-} = \frac{68 - 0}{180 - 60} = 0,57 \text{ ações} \quad [\text{eq. 3}]$$

$$B = \frac{S^-C^+ - S^+C^-}{(S^+ - S^-)(1+r)} = \frac{60 \times 68 - 180 \times 0}{(180 - 60)(1,08)} = \$31,48 \quad [\text{eq. 4}]$$

O número de ações do ativo-objeto (N) que é necessário comprar para criar o portfolio equivalente é denominado taxa de *hedge* da opção e é obtido dividindo o *spread* de preço da opção pelo *spread* de preço da ação (eq. 3).

Substituindo N e B na equação $C = NS - B$, temos:

$$C = NS - B = 0,57 \times 100 - 31,48 = 25,19 \quad [\text{eq. 5}]$$

A equação $C = NS - B$ pode ser rearranjada para $NS - C = B$. Isto é, criando-se um portfolio composto por N ações do ativo-objeto e da venda de uma opção de compra, gera-se um retorno de $(1+r)B$ no período seguinte, independente de haver um aumento ou uma redução no preço do ativo.

$$\begin{array}{rcl}
 & & \text{NS}^+ - C^+ = (1+r)B \\
 & \nearrow q & 0,56(180) - 68 = 34 \\
 \text{NS} - C = B & & \\
 & \searrow 1-q & \text{NS}^- - C^- = (1+r)B \\
 0,56(100) - 25,19 = 31,48 & & 0,56(60) - 0 = 34
 \end{array}$$

Se o preço da ação for mínimo, ganha-se na venda da opção de compra. Se for máximo, perde-se na venda da opção. Os resultados opostos da venda da opção de compra e de detenção da ação geram uma situação de risco nulo. Isto permite que a taxa de juros usada para o cálculo do valor da opção seja a taxa livre de risco, cujo *proxy* é a taxa paga por títulos públicos de longo prazo. Ao se construir um *hedge* para o investimento, pode-se calcular o valor da opção assumindo que estamos em um mundo livre de risco. Sendo o retorno do ativo dado por u e d calculado pelas equações 6 e 7,

$$u = \frac{S^+}{S} = \frac{180}{100} = 1,8 \quad [\text{eq. 6}]$$

$$d = \frac{S^-}{S} = \frac{60}{100} = 0,6 \quad [\text{eq. 7}]$$

existe um número p que, se utilizado para ponderar os retornos do ativo, gera um retorno igual à taxa livre de risco.

$$p u + (1-p) d = 1+r \quad [\text{eq. 8}]$$

p é denominado probabilidade neutra ao risco, embora não seja realmente uma medida de probabilidade. No exemplo acima, a probabilidade neutra ao risco é calculada por:

$$p = \frac{(1+r) - d}{u - d} = \frac{1,08 - 0,6}{1,8 - 0,6} = \frac{0,48}{1,2} = 0,4 \quad [\text{eq. 9}]$$

Assim, ponderando-se o retorno da opção em função de p , o retorno esperado da opção deve ser igual à taxa livre de risco.

$$\frac{pC^+ + (1-p)C^-}{C} = 1 + r \quad [\text{eq. 10}]$$

Uma opção de venda pode ser precificada de maneira semelhante, alterando-se o portfolio equivalente para a venda de N ações do ativo-objeto e a tomada de um empréstimo de $\$B$ à taxa livre de risco.

2.2.2 Equação de Black & Scholes

Em 1973, Fischer Black e Miron Scholes, utilizando o conceito de portfolio equivalente, desenvolveram um modelo para precificação de opções européias sobre um ativo que não distribui dividendos. Nesse modelo, o preço da ação segue um processo estocástico denominado Movimento Browniano Geométrico. A equação de Black e Scholes é dada por (MINARDI, 2004):

$$C(S, \tau; X) = S N(d_1) - Xe^{-r\tau} N(d_2) \quad [\text{eq. 11}]$$

Onde

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad [\text{eq. 12}]$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \quad [\text{eq. 13}]$$

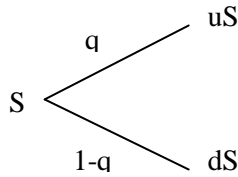
$N(d)$ é a distribuição normal padronizada cumulativa. $N(d_1)$ corresponde ao número de ações do portfolio equivalente $Xe^{-r\tau}N(d_2)$ ao montante tomado emprestado (TRIGEORGIS, 1996).

2.2.3 Árvore Binomial

Posteriormente, em 1979, Cox, Ross e Rubinstein desenvolveram um modelo onde o processo estocástico de tempo contínuo (Movimento Browniano Geométrico) é substituído por um de

tempo discreto, o processo binomial multiplicativo ou caminho aleatório (*random walk*), que, no limite, quando o número de intervalos tende ao infinito, aproxima-se da solução dada pela equação de Black & Scholes. Esse modelo é denominado Árvore Binomial.

De acordo com o caminho aleatório, o preço do ativo (S) pode aumentar, sendo multiplicado por um fator u , para uS , com probabilidade q ou reduzir para dS , com probabilidade $1-q$. Esse movimento pode ser representado graficamente por:



Os fatores u e d representam a taxa logarítmica (ou continuamente composta) de retorno do ativo, sendo $d = 1/u$. Para evitar arbitragem sem risco, $u > 1 + r > d$. Para que haja convergência, no limite, quando n tende ao infinito, entre o processo binomial discreto e o Movimento Browniano, os parâmetros u e d devem ser (TRIGEORGIS, 1996):

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad [\text{eq. 14}]$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad [\text{eq. 15}]$$

Onde:

σ : desvio-padrão instantâneo do retorno do ativo,

Δt : incremento de tempo.

Substituindo u e d nas equações de cálculo do número de ações (eq. 3) e do valor de empréstimo do portfolio equivalente (eq. 4), tem-se:

$$N = \frac{C^+ - C^-}{S^+ - S^-} = \frac{C^+ - C^-}{uS - dS} = \frac{C^+ - C^-}{(u - d)S} \quad [\text{eq. 16}]$$

$$B = \frac{S^- C^+ - S^+ C^-}{(S^+ - S^-)(1+r)} = \frac{dS C^+ - uS C^-}{(uS - dS)(1+r)} = \frac{dC^+ - uC^-}{(u - d)(1+r)} \quad [\text{eq. 17}]$$

A probabilidade neutra ao risco, p , é dada por:

$$p = \frac{(1+r) - d}{u - d} \quad [\text{eq. 18}]$$

O valor da opção é dado por:

$$C = \frac{pC^+ + (1-p)C^-}{1+r} \quad [\text{eq. 19}]$$

Estendendo-se o modelo de um período para múltiplos períodos (n), temos a fórmula geral multiplicativa binomial de precificação de opções (COX et al., 1979).

$$C = \frac{\sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} \max(u^j d^{n-j} S - E, 0)}{(1+r)^n} \quad [\text{eq. 20}]$$

Segundo Trigeorgis (1996), a primeira parte da equação é a fórmula da distribuição binomial, que fornece a probabilidade do preço do ativo dar j saltos para cima em n passos, com probabilidade neutra ao risco p. O termo de maximização da equação fornece o valor da opção na data de expiração condicionada à ocorrência de j saltos para cima segundo o fator u e n-j movimentos descendentes de acordo com o fator d. O somatório de todos os possíveis valores da opção na data de vencimento multiplicados pela probabilidade de ocorrência nos dá o valor na data final, que é descontado à taxa livre de risco por n períodos.

3 Opções Reais

3.1 Limitações das técnicas tradicionais de avaliação de investimentos

A técnica de avaliação de investimentos mais empregada no mundo corporativo é o fluxo de caixa descontado (FCD). Sua aplicação consiste na identificação de um cenário esperado, na estimativa dos fluxos de caixa periódicos e no emprego de uma taxa de desconto associada ao risco do projeto para calcular o valor presente do ativo. A técnica de FCD considera que a empresa irá seguir uma estratégia estática de operação até o término do empreendimento. Em mercados estáveis, onde as previsões e os cenários elaborados pelos analistas são confiáveis e as estratégias estabelecidas na etapa de planejamento podem ser implementadas como originalmente concebidas, essa técnica suporta adequadamente a tomada de decisões dos gerentes (AMRAN; KULATILAKA, 2000).

Entretanto, nas últimas décadas, os mercados têm se mostrado altamente voláteis, a competição acirrada tem levado as empresas a lançar novos produtos e a desenvolver novas tecnologias com uma frequência muito maior do que no passado. Esse tipo de investimento está sujeito a uma incerteza significativa. A técnica de FCD, por não considerar as incertezas de mercado e os possíveis cursos de ação que a gerência pode tomar em função da evolução dos acontecimentos, não gera resultados adequados à tomada de decisão para esse tipo de investimento (AMRAN; KULATILAKA, 2000).

Outra deficiência da técnica de FCD é o fato de seu resultado se basear apenas no fluxo de caixa imediato do projeto em análise, sem levar em conta que esse projeto pode servir de base para o surgimento de novas oportunidades de investimento, denominadas opções de crescimento (KESTER, 2001). Desta forma, há uma tendência de as empresas que adotam o FCD como ferramenta de análise financeira privilegiarem projetos de retorno rápido em detrimento daqueles que criam vantagens competitivas e garantem a sustentação do negócio no longo prazo. Esse foco no curto prazo causado pela utilização de um instrumento financeiro inadequado foi apontado por Myers (2001) como uma das causas da perda de competitividade de indústria americana na década de 80.

O investimento em um projeto tem a característica de ser irreversível (*sunk cost*), isto é, não é possível, em caso de desistência, recuperar todo o montante aportado. Esse fato, aliado à incerteza em relação a variáveis-chaves do fluxo de caixa do projeto leva à existência de valor na possibilidade de se adiar a realização do investimento. Assim, a possibilidade de realização do investimento em algum momento além do atual tem valor superior à implementação imediata do projeto. Segundo Dixit e Pindyck (2001), quando uma empresa realiza um investimento irreversível está, na verdade, matando uma opção, isto é, desiste da possibilidade de aguardar novas informações que podem afetar positivamente seu valor. O valor dessa opção de adiamento também não é captado pela técnica de FCD.

O descompasso entre a teoria de finanças e a de planejamento estratégico fez com que houvesse um distanciamento das duas disciplinas. Os estrategistas das empresas ao se depararem com projetos estratégicos de VPL negativo utilizavam argumentos qualitativos como a criação de vantagem competitiva ou a existência de benefícios intangíveis para justificar sua implementação, descartando os resultados gerados pelas análises financeiras (MYERS, 2001).

A utilização de Análise de Sensibilidade e de Cenários, de Simulação de Monte Carlo e de Árvores de Decisão buscou contornar as restrições da análise de FCD. Entretanto elas também apresentavam suas limitações. A Análise de Sensibilidade, a Análise de Cenários e a Simulação de Monte Carlo buscam incorporar a incerteza no modelo de análise, mas não consideram a flexibilidade gerencial, isto é, a possibilidade de tomar ações corretivas ao longo do projeto. Já as Árvores de Decisão falham ao utilizar a mesma taxa de desconto para trazer a valor presente fluxos de caixa gerados por cursos de ação que apresentam riscos distintos. A utilização de taxas de desconto diferentes para cada ramo da Árvore de Decisão torna extremamente complexa sua utilização (COPELAND; ANTIKAROV, 2002; MINARDI, 2004).

3.2 Opções Reais – conceitos

A AOR consiste na aplicação dos conceitos e técnicas utilizados na precificação de opções financeiras para avaliar investimentos em ativos reais como projetos e empresas. Traçando um

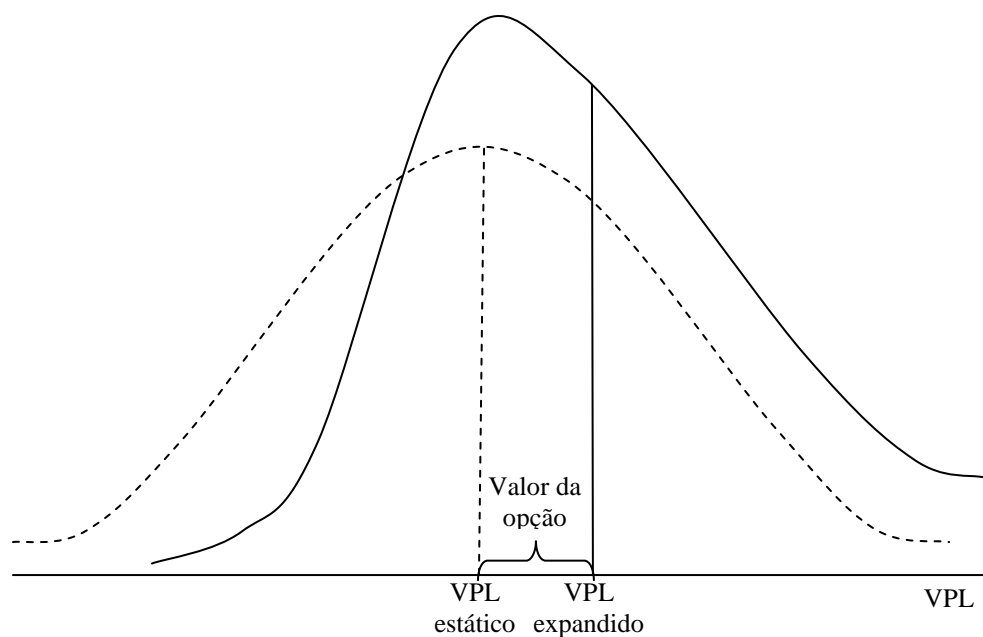
paralelo entre o investimento em um projeto e uma opção financeira, pode-se dizer que o projeto corresponde a uma opção de compra cujo preço de exercício é o investimento necessário para realizá-lo. O quadro a seguir apresenta um paralelo entre opções financeiras e opções reais.

Quadro 4 – Paralelo entre opções financeiras e opções reais

| Opção de compra em uma ação | | Opção real em um projeto | |
|------------------------------------|-----------------------------|---|--|
| Valor presente da ação | $S \Rightarrow V$ | Valor presente dos fluxos de caixa esperados | |
| Preço de exercício | $X \Rightarrow I$ | Investimento | |
| Tempo para expiração | $t \Rightarrow t$ | Tempo até o desaparecimento da oportunidade | |
| Volatilidade do preço da ação | $\sigma \Rightarrow \sigma$ | Incerteza do valor do projeto devido à volatilidade dos fluxos de caixa | |
| Taxa de juro livre de risco | $r \Rightarrow r$ | Taxa de juro livre de risco | |

Fonte: Adaptada de PARK; HERATH, 2000

A flexibilidade gerencial permite tomar ações em resposta a mudanças de mercado ou a iniciativas de concorrentes. Podem-se aproveitar condições ambientais favoráveis e elevar o valor presente dos fluxos de caixa esperados do projeto, por meio de uma expansão, por exemplo. Em condições desfavoráveis, podem-se limitar possíveis perdas tomando ações como a redução de escala, a interrupção ou o abandono do projeto. Essa flexibilidade gerencial, que se assemelha a uma opção financeira, introduz uma assimetria na distribuição de probabilidades do valor presente líquido (VPL) de um empreendimento. Desta forma, pode-se dizer que um projeto possui um valor expandido que corresponde à soma do valor da opção a seu VPL estático (TRIGEORGIS; MASON, 2001). A figura 3 representa esse efeito.



$$\text{VPL expandido} = \text{VPL estático} + \text{Valor da Opção}$$

Figura 3 – Assimetria na distribuição de probabilidades do VPL de um projeto introduzida por Opções Reais
 Fonte: TRIGEORGIS, 1996

A AOR leva a valores substancialmente diferentes dos gerados pelas técnicas de FCD quando 3 fatores se combinam (COPELAND; ANTIKAROV, 2002):

- Incerteza elevada: quando a incerteza é baixa, a probabilidade de ocorrência de cenários distintos do previsto é pequena, logo não haverá necessidade de se lançar mão da flexibilidade gerencial.
- Existência de flexibilidade gerencial: se não há alternativas de ação a serem tomadas na ocorrência de condições diferentes das previstas inicialmente, não haverá opções que possam aumentar o valor do projeto.
- VPL do projeto próximo de zero: se o valor presente do projeto for muito negativo, a flexibilidade provavelmente não será suficiente para viabilizar o projeto. Em casos de VPL altamente positivos, o projeto é aprovado mesmo sem a incorporação de opções na análise.

| | | | |
|---|-------|--|------------------------------------|
| Flexibilidade (capacidade de reagir) | Alta | Flexibilidade de valor moderado | Flexibilidade de valor alto |
| | Baixa | Flexibilidade de valor baixo | Flexibilidade de valor moderado |
| | | Baixa | Alta |
| | | Incerteza (probabilidade de receber novas informações) | |

Figura 4 – Valor da flexibilidade

Fonte: Adaptada de COPELAND; ANTIKAROV, 2002

De acordo com a figura acima, a AOR e o FCD devem ser vistos como ferramentas complementares de auxílio à tomada de decisão. A análise de fluxo de caixa descontado sendo utilizada em condições de baixa incerteza e pouca flexibilidade gerencial e a AOR em situações de grande volatilidade e onde há possibilidade de ações contingentes por parte da gerência (MILLER; PARK, 2002).

Além da questão da flexibilidade gerencial aliada à incerteza, há outros fatores que podem auxiliar na decisão da utilização da AOR: quando há decisões de investimento contingentes, quando vale a pena esperar por novas informações para não incorrer em investimentos irreversíveis, quando o valor parece estar mais relacionado a opções futuras de crescimento do que ao fluxo de caixa imediato do investimento, quando é possível realizar correções de rumo durante a evolução do empreendimento (AMRAM; KULATILAKA, 1999b).

Park e Herath (2000) propuseram classificar os projetos em termos da incerteza relacionada a eles e em relação à sua vinculação ao negócio atual (*core business*) ou a oportunidades de crescimento. As técnicas de FCD seriam aplicáveis a projetos de baixa incerteza relacionados ao *core business*, por outro lado, os projetos de incerteza elevada e que estão voltados para novas oportunidades devem ser avaliados pela AOR. A figura a seguir representa essa classificação.

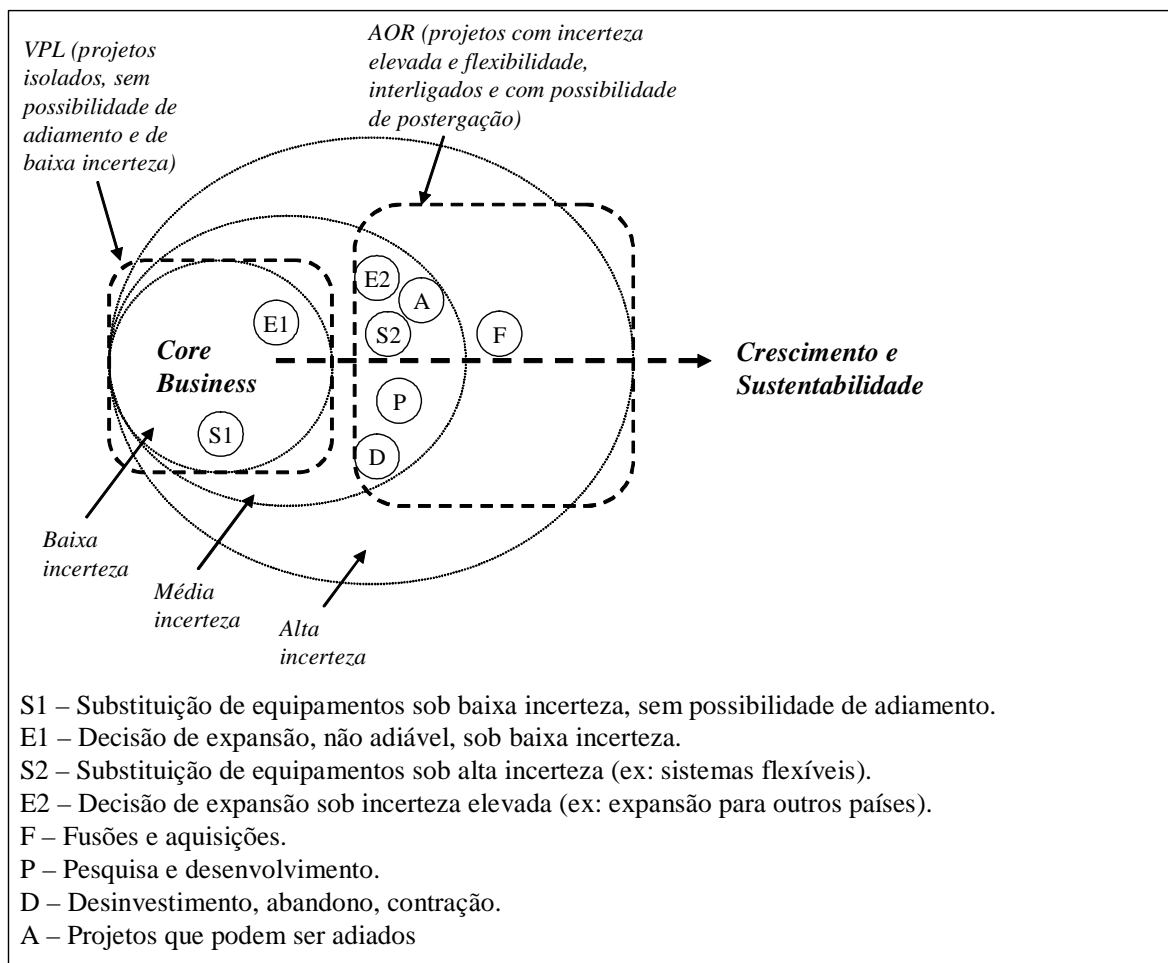


Figura 5 – Relação entre tipo de projeto, incerteza e tipo de análise
 Fonte: adaptada de PARK; HERATH, 2000

Os riscos a que um projeto de investimento está sujeito podem ser classificados em riscos de mercado e em riscos privados. Riscos de mercado são aqueles que estão refletidos no valor de um instrumento financeiro negociado no mercado. O risco relacionado ao preço de *commodities*, por exemplo, pode ser obtido por meio de dados de contratos futuros. Riscos privados são aqueles próprios do investimento em análise, como, por exemplo, o risco de a reserva mineral ser menor ou de os custos de exploração serem superiores ao previsto. Amram e Kulatilaka (2000) consideram que a Análise de Opções Reais só é aplicável quando os riscos de mercado são preponderantes em relação aos riscos privados, pois nesse caso é possível replicar o portfólio. Essa hipótese restringe a aplicação da AOR, mas os autores argumentam que o mercado financeiro está cada vez mais abrangente, incorporando novos tipos de risco e ampliando o campo de aplicação da AOR. Outros autores, como Copeland e Antikarov (2002) relaxaram essa restrição ao assumirem que o projeto sem flexibilidade pode ser utilizado como ativo subjacente da opção.

Pode-se considerar que os resultados obtidos pela análise de FCD seriam iguais aos gerados pela AOR quando o projeto não apresenta opções. Por isso, a AOR é um instrumento de análise financeira superior, pois permite avaliar uma gama muito mais variada de projetos. A AOR quebra um paradigma da análise financeira ao fazer com que a incerteza seja vista como um fator positivo, que pode ser explorado para geração de ganhos significativos. Além disso, a AOR força o analista a identificar as opções (flexibilidade gerencial) existentes em um projeto e auxilia na criação de um roteiro de ações futuras, reforçando o conceito de gerenciamento continuado do projeto (TRIGEORGIS, 1996). Outra grande vantagem é a substituição de estimativas subjetivas do corpo técnico da empresa por medidas objetivas do mercado financeiro (AMRAM; KULATILAKA, 1999a).

3.3 Limitações da analogia

A analogia entre opções reais e financeiras permite estimar o valor daquelas, utilizando técnicas de precificação de opções financeiras. Entretanto, há algumas propriedades das opções financeiras que não são observadas no caso de opções reais. Ao analisar os resultados gerados pela AOR, deve-se levar em conta a existência dessas limitações. Miller e Park (2002) apresentaram uma análise dessas diferenças.

- Processos estocásticos:

Na análise de opções financeiras que têm como ativo-objeto uma ação, o retorno da ação é modelado como um MBG. O retorno de ativos reais pode apresentar comportamento mais complexo, exigindo a adoção de processos estocásticos alternativos.

- Ativo-objeto:

Uma das premissas da precificação de opções financeiras é a possibilidade de negociar o ativo-objeto em um mercado eficiente. Entretanto a maioria dos ativos reais não é negociada, assim algumas premissas adicionais são utilizadas para permitir o uso da técnica para avaliar opções reais.

Trigerogis propõe utilizar um ativo financeiro gêmeo (*twin security*) altamente correlacionado no cálculo do valor da opção e considerar esse fato ao interpretar os resultados. Na prática, o ativo gêmeo é utilizado em três situações: na análise de empreendimentos envolvendo recursos naturais devido à existência do mercado futuro; na avaliação de uma área de negócio quando há uma empresa do mesmo setor com ações negociadas em bolsa; quando o projeto contribui significativamente para o valor de mercado da empresa e, assim, pode-se utilizar a ação da própria empresa como ativo financeiro gêmeo. Quando essas condições não são atendidas, devem-se adotar duas outras premissas. Mason e Merton presumem que o valor do ativo deve ser tratado como se fosse negociado no mercado. Como o ativo real contribui para o valor de uma empresa com ações no mercado, o ativo pode ser tratado como se fosse ele mesmo negociado. Assim, o valor do ativo real pode ser usado como ativo financeiro gêmeo. Copeland e Antikarov afirmam que o valor do ativo real é perfeitamente correlacionado com ele mesmo e, por isso, é a melhor estimativa não tendenciosa do valor de mercado do ativo real se este fosse negociado. Assim, o valor do ativo real (projeto sem flexibilidade) pode ser usado como ativo-objeto. (MILLER; PARK, 2002)

- Risco e taxa de desconto:

Na precificação de opções financeiras, parte-se da premissa de que é possível criar um portfólio equivalente que funciona como *hedge* do valor da opção. Assim, pode-se utilizar a taxa livre de risco como taxa de desconto. Como o ativo real não é negociado, essa premissa é prejudicada. Hull e White (apud MILLER; PARK, 2002) argumentam que, se o ativo não é negociado, deve-se adicionar um prêmio de risco (relacionado à volatilidade do ativo e ao preço de mercado do risco) à taxa de desconto.

Segundo a teoria financeira, riscos privados podem ser eliminados pela adoção de um portfólio diversificado. Entretanto, na análise de opções reais, quando os riscos privados são significativos, utilizar a taxa de desconto livre de risco superestima o valor do empreendimento. Assim, a parte privada do risco deve ser descontada a uma taxa maior.

- Volatilidade:

Muitos ativos reais não possuem informações sobre seu retorno histórico, inviabilizando uma medida direta da volatilidade. As alternativas utilizadas são a utilização de dados do ativo

financeiro gêmeo, a geração de uma estimativa de volatilidade do projeto em análise por meio de Simulação de Monte Carlo, equações que estimam a volatilidade do retorno do projeto a partir de dados da volatilidade do preço do produto.

- Preço e data de exercício

Em opções financeiras, o preço de exercício corresponde a uma única parcela fixa, a ser desembolsada de imediato. Em opções reais, o preço de exercício pode corresponder a vários desembolsos ao longo do tempo. Além disso, o valor investido pode estar sujeito a incertezas técnicas e de mercado. A data de exercício de opções reais pode não ser conhecida com antecedência, pode ser dependente do exercício de outra opção real ou da resolução de riscos privados ou de mercado.

- Dividendos:

Em opções financeiras, o dividendo pago é conhecido com antecedência ou pode ser modelado como um pagamento contínuo ao longo da vida da opção. No caso de opções reais, a quantidade e o momento de distribuição de dividendos (geração de fluxos de caixa positivos) podem ser desconhecidos ou dependentes de riscos privados e de mercado.

Essas diferenças são limitações à analogia entre opções reais e financeiras, mas não inviabilizam a AOR, se levarmos em conta que o objetivo é ter um instrumento financeiro mais completo de auxílio à tomada de decisão e não precificar opções com precisão “cirúrgica”.

3.4 Tipos de Opções Reais

Ao avaliar um investimento, o analista deve ser capaz de traduzir as flexibilidades gerenciais existentes em termos da terminologia de opções financeiras. Deve-se selecionar o tipo de opção financeira (*call*, *put*, americana, européia) e as variáveis utilizadas na precificação de opções (ativo-objeto, preço de exercício, tempo de maturidade, volatilidade, etc) devem ser identificadas e quantificadas. A literatura apresenta uma relação extensa de aplicações de

opções reais e analogias com as opções financeiras. Os tipos mais comuns, segundo Trigeorgis (1996) estão sintetizados no quadro a seguir.

Quadro 5 – Tipos de Opções Reais

| Tipo | Descrição | Utilização | Analogia com Opções Financeiras |
|---|---|---|---|
| Opção de diferimento | Uma empresa detém o direito sobre terrenos, recursos naturais ou outro ativo de valor e pode aguardar algum tempo para verificar se as condições de mercado tornam viável a implementação do empreendimento (um imóvel, uma fábrica, uma mina ou estação de extração de petróleo, por exemplo). | Indústrias de extração de recursos naturais, empreendimentos imobiliários, agropecuária e produção de papel e celulose. | <ul style="list-style-type: none"> • Tipo de opção: call americana. • Ativo-objeto: valor presente dos fluxos de caixa esperados do projeto (V). • Preço de exercício: investimento (I) • Payoff na data de vencimento: $\max(V, I)$ |
| Opção de investimento em estágios (<i>time to build</i>) | O investimento é realizado em estágios, formando uma série de desembolsos. Tem-se a opção de abandono caso novas informações sejam desfavoráveis. | Indústrias intensivas em P&D, especialmente as farmacêuticas; projetos de longo prazo e intensivos em capital (construção de grande porte ou usinas de geração de energia); investimentos em <i>start-ups</i> . | <ul style="list-style-type: none"> • Tipo de opção: composta onde a cada estágio corresponde uma opção de compra no valor presente dos fluxos de caixa seguintes. • Ativo-objeto: valor presente dos fluxos de caixa esperados dos estágios seguintes (V). • Preço de exercício: investimento no estágio em análise (I). • Payoff na data de vencimento: $\max(V-I, 0)$ |
| Opção de alteração da escala de operação (expansão, contração, fechamento e reabertura) | Expansão da produção ou aceleração do uso de recursos em condições de mercado favoráveis. Redução da escala em condições desfavoráveis. Em casos extremos, interrupção e retomada da produção. | Indústrias de recursos naturais (ex: mineração), planejamento e construção de fábricas em indústrias cíclicas, setor de moda, setor de bens de consumo, empreendimentos imobiliários comerciais. | <p>Opção de expansão:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Opção de compra para adquirir capacidade adicional, pagando um preço de exercício. • $V + \max(xV-I, 0)$ <p>Opção de contração:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Opção de venda de parte da escala do projeto original. O preço de exercício está relacionado à economia de custos potencial (IC). • $\max(IC - cV, 0)$. <p>Opção de fechamento e reabertura:</p> <ul style="list-style-type: none"> • A operação em cada ano pode ser vista como uma opção de compra da receita do ano (R) pagando os custos variáveis de operação (IV) como preço de exercício. • $\max(R-IV, 0)$ |

| | | | |
|---------------------------------|--|--|---|
| Opção de abandono | Abandono do empreendimento, com venda dos ativos no mercado de segunda mão, quando as condições de mercado se deterioram significativamente. | Indústrias de capital intensivo (ex: empresas aéreas, ferrovias), serviços financeiros, introdução de novos produtos em mercados incertos. | <ul style="list-style-type: none"> • Tipo de opção: put americana. • Ativo-objeto: valor do projeto (V). • Preço de exercício: valor de revenda do projeto ou do melhor uso alternativo (A). • $V + \max(A-V,0) = \max(V,A)$ |
| Opção de substituição | Possibilidade de alteração do mix de produtos em função de variações de preço e demanda (flexibilidade de produto) ou possibilidade de alteração de insumos em função de variações de preço (flexibilidade de processo). | Alteração de produtos: bens produzidos em pequenos lotes ou sujeitos a demanda volátil (ex: equipamentos eletrônicos de consumo, brinquedos, papéis especiais, peças de maquinário, automóveis). Alteração de insumos: fábricas dependentes de matérias-primas de preços voláteis que possuem substitutos (energia elétrica, química, produtos agrícolas). Fábricas com fornecedores alternativos para o mesmo insumo. | <ul style="list-style-type: none"> • Tipo de opção: portfolio de opções de compra e venda americanas que permite trocar a um custo fixo entre 2 modos de operação. • Ativo-objeto: valor adicional gerado pela substituição de insumos/ produtos. • Preço de exercício: custo de substituição (ex: setup de equipamentos). |
| Opções de crescimento | Quando um investimento (ex: P&D, aquisição de direito de exploração de reservas de petróleo, sistemas de informação) é pré-requisito ou faz parte de uma cadeia de projetos inter-relacionados e abre oportunidades de crescimento futuro (ex: novos produtos ou processos, reservas de petróleo, acesso a novos mercados, fortalecimento de competências essenciais). | Indústrias de infra-estrutura ou de alta tecnologia, P&D (indústrias que geram múltiplos produtos ou aplicações a partir de uma linha de pesquisa), operações multinacionais, fusões e aquisições. | <ul style="list-style-type: none"> • O investimento inicial pode ser visto como uma opção de compra das oportunidades de crescimento futuras. |
| Opções com interações múltiplas | Opções de alavancagem em condições favoráveis e de proteção em condições adversas estão presentes em conjunto. O valor do conjunto de opções pode diferir da soma dos valores isolados devido à interação entre elas. | Projetos reais na maioria das indústrias | <ul style="list-style-type: none"> • Opção composta. |

Fonte: Adaptado de TRIGEORGIS, 1996

3.5 Evolução da utilização de Opções Reais

Os anos 80 presenciaram, no meio acadêmico, o desenvolvimento de modelos e a crescente utilização das técnicas de opções financeiras para avaliar investimentos em ativos reais. Mas foi na década de 90 que o interesse do mundo corporativo no assunto se intensificou. Nesse período muitos livros foram publicados, conferências realizadas e artigos de aplicações práticas escritos. Atualmente, pode-se afirmar que a Análise de Opções Reais tem uma penetração sólida apesar de limitada nas empresas (TRIAN TIS, 2001). A limitação da aplicação de AOR nas empresas se deve à complexidade dos modelos de valoração inicialmente empregados e da exigência de conhecimento de matemática avançada. Segundo Amram e Kulatilaka (1999a), “a complexidade das ferramentas tem obscurecido o poder da idéia”. O emprego da AOR tem aumentado nos últimos anos em função da disseminação do uso de planilhas eletrônicas em computadores pessoais, da utilização do modelo de Árvore Binomial que pode ser facilmente criado em planilhas e da proposta de flexibilização da exigência de haver um ativo subjacente negociado no mercado feita por alguns autores. Um exemplo dessa flexibilização é a metodologia *Market Asset Disclaimer* (MAD) proposta por Copeland e Antikarov (2002) que considera que o valor do projeto sem flexibilidade pode ser utilizado como ativo subjacente.

Triantis (2001) realizou uma pesquisa com 39 profissionais (média e alta gerência) de 34 empresas de 7 setores distintos que tinham algum contato com a Análise de Opções Reais. Nessa pesquisa, ele identificou que as empresas que têm mais interesse na AOR têm algumas características em comum: operam em setores que envolvem investimentos elevados com retorno incerto (petróleo, gás natural, farmacêutico, entre outros), seus setores de atuação passaram por mudanças estruturais significativas (energia elétrica), são indústrias relacionadas à engenharia, onde o uso de técnicas analíticas sofisticadas é costumeiro. A aplicação de AOR foi mais bem sucedida em empresas com processos formais de avaliação de investimentos sob incerteza. Empresas em que a avaliação é relativamente informal, em que a incerteza é tratada simplesmente com um aumento da taxa de desconto tendem a desistir da utilização da técnica. Outra observação interessante é que o interesse sobre a técnica vem de profissionais envolvidos com desenvolvimento de negócios, planejamento estratégico, operações ou marketing e não da área financeira.

Triantis (2001) classificou a forma de utilização de Opções Reais pelas empresas em 3 grupos:

- Opções Reais como uma maneira de pensar: a AOR é utilizada como uma linguagem que permite estruturar e comunicar problemas de decisão de maneira qualitativa.
- Opções Reais como uma ferramenta analítica: modelos de opções reais são utilizados para avaliar projetos com características de opções conhecidas e bem especificadas.
- Opções Reais como um processo organizacional: a AOR é utilizada como parte de um processo mais amplo, como uma ferramenta estratégica para identificar e explorar opções estratégicas.

3.6 Evidências do valor das Opções Reais

Kester (2001) comparou o valor de mercado de empresas de diversos segmentos e o valor estimado a partir do fluxo de caixa gerado por elas (TAB. 1). O valor de mercado corresponde ao valor total das ações em bolsa. Para estimar o valor através da técnica de fluxo de caixa descontado, o autor considerou que o fluxo de caixa do ano analisado seria perpétuo e constante. Para obter o VPL, foram utilizadas taxas de desconto arbitrárias (15% e 25%). Os resultados indicaram que o valor de mercado era sistematicamente superior ao valor estimado via fluxo de caixa descontado. Segundo o autor, a diferença entre as duas medidas é uma estimativa do valor das opções de crescimento que essas empresas possuíam. O estudo também verificou que a participação do valor das opções de crescimento no valor total é superior nas empresas que atuam em setores mais dinâmicos. Como a pesquisa foi realizada com dados de empresas já consolidadas, pode-se inferir que a participação da opção de crescimento em empresas novas é ainda maior, pois é comum haver lançamentos de ações de empresas em fase de crescimento em que o valor das opções representa praticamente a totalidade do seu valor de mercado.

Outra evidência do valor das opções reais foi apontada por Dixit e Pindyck (2001). Os autores identificaram que empresas permanecem operando mesmo assumindo perdas por um período longo. Apesar de a análise de FCD recomendar o encerramento das operações, as empresas não o fazem porque incorreriam em uma perda irreversível de ativos tangíveis e intangíveis. Os autores afirmam que continuar em operação preserva a opção e mantém o capital intacto, permitindo obter lucro quando as condições de mercado melhoram. Por outro lado, o efeito de

histerese também ocorre no sentido inverso. Há uma defasagem entre o momento em que determinado mercado passa a ser lucrativo e o de entrada das empresas. Esse efeito foi observado pelos autores na defasagem de cerca de três anos entre a valorização do dólar no início dos anos 80 e o aumento das importações dos Estados Unidos e na manutenção do valor de importações por um período após a desvalorização do dólar no final da década.

Tabela 1 – Valor das opções de crescimento

| | Valor de mercado (US\$ MM) | Valor estimado pelo fluxo de caixa (US\$ MM) | | Valor estimado das Opções de Crescimento (US\$ MM) | | Valor Opções / Valor Mercado (%) | |
|-----------------------------------|-------------------------------|--|-----------------------|---|-----------------------|--|-----------------------|
| | | TD ₁ (15%) | TD ₂ (25%) | TD ₁ (15%) | TD ₂ (25%) | TD ₁ (15%) | TD ₂ (25%) |
| Eletrônica | | | | | | | |
| Motorola | 5250 | 1400 | 840 | 3850 | 4410 | 73 | 84 |
| Genrad | 550 | 113 | 68 | 437 | 482 | 79 | 88 |
| RCA | 2200 | 1600 | 960 | 600 | 1240 | 27 | 56 |
| Computadores e periféricos | | | | | | | |
| Apple Computer | 2000 | 660 | 396 | 1340 | 1604 | 67 | 80 |
| Digital Equipment | 5690 | 1900 | 1140 | 3790 | 4550 | 67 | 80 |
| IBM | 72890 | 36433 | 21860 | 36457 | 51030 | 50 | 70 |
| Química | | | | | | | |
| Celanese | 1010 | 520 | 312 | 490 | 698 | 49 | 69 |
| Monsanto | 4260 | 2733 | 1640 | 1527 | 2620 | 36 | 62 |
| Union Carbide | 4350 | 1867 | 1120 | 2483 | 3230 | 57 | 74 |
| Pneus e Borracha | | | | | | | |
| Firestone | 1090 | 587 | 352 | 503 | 738 | 46 | 68 |
| Goodyear | 2520 | 2000 | 1200 | 520 | 1320 | 21 | 52 |
| Uniroyal | 400 | 313 | 188 | 87 | 212 | 22 | 53 |
| Alimentos | | | | | | | |
| Carnation | 1790 | 1367 | 820 | 423 | 970 | 24 | 54 |
| Consolidated Foods | 1190 | 1140 | 684 | 50 | 506 | 4 | 43 |
| General Foods | 2280 | 2113 | 1268 | 167 | 1012 | 7 | 44 |

Fonte: adaptada de KESTER, 2001

4 Planejamento sob incerteza

4.1 Os fundamentos

Myers foi o primeiro a utilizar o termo opções reais para designar as oportunidades de investimento e a propor que o planejamento estratégico seja visto como o gerenciamento de um portfólio de opções reais. Esse gerenciamento consiste na aquisição de opções reais (oportunidades de investimento), manutenção das opções promissoras, exercício de opções quando a incerteza se resolve de forma positiva, e abandono, quando o desenrolar dos fatos leva à perda de valor da oportunidade.

Kester (2001) classificou as opções reais de acordo com três perspectivas: a possibilidade de diferimento, a exclusividade de exercício e a interação com outras oportunidades de investimento.

- Possibilidade de diferimento:
 - Opções de exercício imediato: oportunidades de investimento que devem ser implementadas imediatamente, porque estão muito dentro do dinheiro ou porque o risco de perda de valor devido à interação competitiva é alto;
 - Opções diferíveis: devido à incerteza relacionada à oportunidade, há valor em aguardar o desenrolar dos fatos para exercê-la ou não.
- Exclusividade de exercício:
 - Opções exclusivas: o detentor da oportunidade tem exclusividade pelo menos temporária sobre ela (patentes, direitos minerais, oportunidades relacionadas a vantagens competitivas da empresa);
 - Opções compartilhadas: a oportunidade pode ser explorada por várias empresas (concorrência para exploração de reservas de petróleo, concorrência para concessão de serviços públicos, expansão para novos mercados em setores de alta concorrência).
- Interação com outras oportunidades de investimento:
 - Opções simples: correspondem a projetos cujos benefícios futuros são provenientes simplesmente de seus fluxos de caixa (por exemplo, projetos de redução de custos, manutenção e substituição de equipamentos);

- Opções compostas: projetos cujos benefícios incluem a abertura de novas oportunidades de investimento, chamadas de opções de crescimento (projetos de pesquisa e desenvolvimento, expansão em um mercado existente, entrada em novos mercados, aquisições).

Baseado nesse trabalho, Trigeorgis (1988) propôs a classificação das opções em oito tipos. As técnicas de Fluxo de Caixa Descontado são adequadas à análise apenas do primeiro tipo: opções exclusivas, simples e de exercício imediato.

Quadro 6 – Classificação de opções reais segundo Trigeorgis

| Tipo de Opção | | | | Exemplo |
|---------------|---------------|----------|-----------|---|
| Opção Real | Exclusiva | Simples | Imediata | Manutenção de rotina |
| | | | Diferível | Modernização da fábrica |
| | | Composta | Imediata | Contrato de franquia imediato |
| | | | Diferível | P&D de um único produto |
| | Compartilhada | Simples | Imediata | Lance para aquisição dos ativos de uma empresa do mesmo ramo de atuação |
| | | | Diferível | Lançamento de novo produto (com substitutos) |
| | | Composta | Imediata | Lance para aquisição de uma empresa não relacionada |
| | | | Diferível | Oportunidade de entrada em um novo mercado geográfico |

Fonte: Adaptado de TRIGEORGIS, 1988

Para avaliar o tempo adequado para exercer uma opção, Kester (2001) elaborou uma matriz que permite classificar as opções em termos de sua exclusividade e do nível de concorrência relacionado a ela (FIG. 6). Em função dessas duas variáveis, pode-se definir uma estratégia quanto ao *timing* adequado para o exercício da opção.

| | | |
|--|-----------------------------|--|
| <p>Há risco de antecipação, mas o poder de mercado de empresas dominantes aumenta o potencial de apropriação do valor de opções exercidas por elas.</p> <p>Tendência a reter as opções até que concorrentes mais fracos a exerçam.</p> | <i>Concorrência baixa</i> | <p>Empresas dominantes são capazes de apropriar-se do valor total das opções.</p> <p>Como não há risco de antecipação, as opções devem ser mantidas até a expiração.</p> |
| <p><i>Opções compartilhadas</i></p> <p>Baixa capacidade de apropriação do valor de uma oportunidade de investimento por uma única empresa.</p> <p>Exercício rápido de opções por razões defensivas ou de antecipação</p> | <i>Concorrência intensa</i> | <p><i>Opções exclusivas</i></p> <p>Não há risco de antecipação completa, mas há risco de erosão do valor devido à atividade competitiva.</p> <p>Tendência a exercer opções antecipadamente para evitar erosão de valor</p> |

Figura 6 – Efeito da concorrência e da exclusividade sobre o timing de opções reais
Fonte: Kester, 2001

4.2 O Espaço de opções de Luehrman

Em mercados competitivos, não é possível formular uma estratégia de longo prazo e segui-la cegamente. Na medida em que se progride na implementação da estratégia, aprende-se sobre as condições do negócio, ações dos concorrentes, qualidade dos planos e deve-se responder com flexibilidade ao aprendizado. Neste contexto, deve-se evitar estratégias que restringem o campo de ação dos gerentes. A boa estratégia é aquela que define diretrizes gerais nas quais as decisões futuras se basearão, deixando espaço para a flexibilidade e o aprendizado. Em termos financeiros, esse tipo de estratégia pode ser visualizado como uma série de opções, ao invés de uma série de fluxos de caixa estáticos. O estrategista, observando as diretrizes gerais, deve ser capaz de acompanhar ativamente o desenvolvimento das oportunidades de investimento (opções reais), buscar meios de influenciar o valor das opções em aberto e exercê-las no *timing* correto (LUEHRMAN, 1998b).

Para auxiliar a tomada de decisões em relação às oportunidades de investimento, Luehrman (1998b) propõe posicionar as opções reais em um diagrama denominado Espaço de Opções. O diagrama baseia-se em duas métricas: o VPLq (ou relação valor-custo), que incorpora ao valor presente líquido tradicional (VPL) o acréscimo de valor devido à possibilidade de diferimento do projeto; e a volatilidade, que é uma medida do risco relacionado ao valor

futuro do ativo. O valor da opção cresce com o aumento das duas variáveis. Matematicamente, as duas métricas são dadas por (LUEHRMAN, 1998a):

$$VPLq = S / VP(X) \quad [\text{eq. 21}]$$

$$\text{Volatilidade} = \sigma\sqrt{t} \quad [\text{eq. 22}]$$

Onde:

- S: valor presente dos fluxos de caixa do projeto
- VP(X): valor presente do preço de exercício (investimento): $VP(X) = X / (1+r_f)^t$
- r_f : taxa livre de risco
- σ : desvio-padrão do retorno do projeto
- t: tempo para a expiração da opção

Os projetos são representados por dois círculos concêntricos plotados no diagrama. O círculo escuro representa o valor do ativo-objeto (S) e o círculo claro o preço de exercício (X). Projetos *in the money* têm o círculo escuro maior do que o claro. Opções compostas podem ser representadas por círculos ligados por linhas.

Diferentemente da análise de VPL, onde há apenas duas decisões possíveis, investir ou não investir, o espaço de opções é dividido em 6 regiões, como pode ser observado na figura a seguir, e cada uma dessas regiões enseja uma ação diferente.

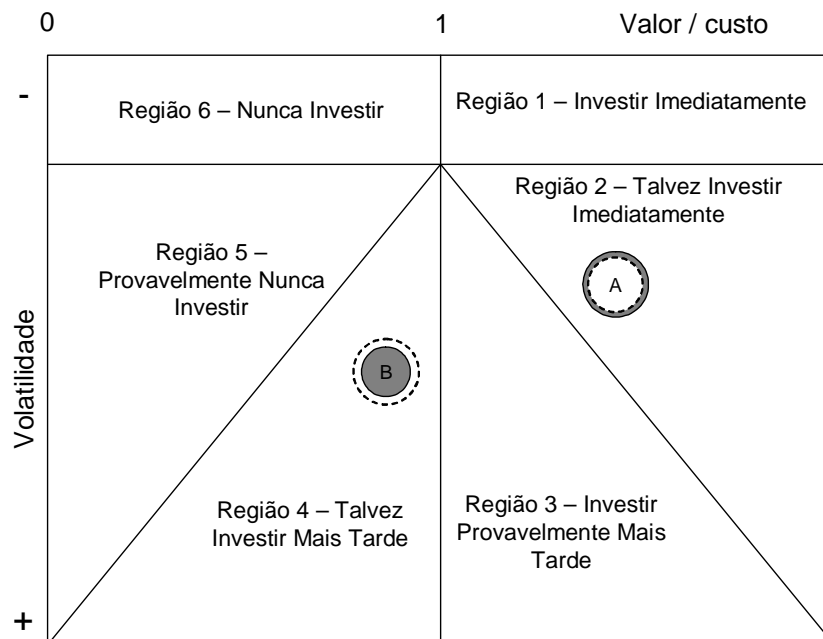


Figura 7 – Espaço de Opções
Fonte: Adaptada de LUEHRMAN, 1998b

No alto do diagrama, está a região de baixa volatilidade. A baixa volatilidade pode estar relacionada à baixa incerteza dos fluxos de caixa ou, o que é mais freqüente, ao escasso tempo para que a opção se expire. A decisão, nesse caso, é investir imediatamente, quando a relação valor-custo é maior que 1 ou nunca investir.

À direita do diagrama e abaixo da região de baixa volatilidade, estão os projetos cuja relação valor-custo é maior do que 1, mas que ainda podem ser postergados. A linha diagonal separa os projetos *in the money* ($VPL > 0$), situados na região 2, e os projetos *out of the money* ($VPL < 0$), situados na região 3. Os projetos da região 2, se exercidos imediatamente, geram resultado positivo, mas há um valor adicional devido à opção de diferimento. Mas o exercício pode ser antecipado em função de interações competitivas. Os projetos da região 3, apesar de apresentarem VPL negativo, são promissores, mas ainda não podem ser implementados. Deve-se aguardar a chegada de novas informações para decidir sobre seu exercício.

O lado esquerdo do diagrama contém os projetos menos promissores, cuja relação valor-custo é menor que 1. Os projetos da região 5 têm baixa probabilidade de serem exercidos porque a incerteza é baixa, logo a chance de uma reversão de valor é pequena. Na região 4, por outro lado, apesar de serem projetos de VPL negativo, a elevada incerteza pode fazer com que, no futuro, as condições do ambiente se alterem positivamente, tornando-os interessantes.

Com o tempo, as opções tendem a subir no diagrama, devido à redução do tempo para a expiração da opção ou devido à redução da volatilidade, e caminhar para a esquerda, por causa da redução do valor de diferimento, que faz parte do cálculo do VPLq. O estrategista deve tomar ações no sentido inverso, buscando preservar ou aumentar o valor das opções. As ações que podem ser tomadas para melhorar o VPLq são as tradicionais, que visam melhorar os fluxos de caixa futuros do projeto ou reduzir o investimento inicial. A busca da melhoria do valor da opção por meio do aumento da volatilidade leva a ações mais inusitadas, como a substituição do equipamento original do projeto por outro mais caro, mas mais flexível ou a escolha de um projeto de custo fixo mais alto, que, a princípio, reduz o VPL do projeto, mas que fornece uma alavancagem operacional.

Segundo Luehrman (1998b), o diagrama ajuda os estrategistas a imaginarem o efeito de variáveis externas e de ações gerenciais sobre as oportunidades de investimento, ao mesmo

tempo em que assegura o alinhamento com o mercado financeiro, tornando as disciplinas de finanças e estratégia mais próximas.

4.3 A Matriz de Opções Reais de Crescimento de Smit e Trigeorgis

Smit e Trigeorgis (2006), partindo do modelo proposto por Luehrman e do conceito de Opções de Crescimento criado por Kester e incorporando o efeito de interações estratégicas, criaram a Matriz de Opções Reais de Crescimento (*Real Option Growth Matrix – ROG*) apresentada na figura 8. A matriz, como no modelo de Luehrman, é dividida em 6 regiões e as oportunidades de investimento são representadas por dois círculos concêntricos que representam o valor do ativo-objeto e o preço de exercício. A diferença está nas métricas utilizadas em cada eixo. No eixo horizontal da matriz, está o VPL dos fluxos de caixa do projeto (VPL_{base}). No eixo vertical está o valor presente das opções de crescimento (VPOC). A soma dos valores nas duas dimensões fornece o VPL expandido:

$$VPL_{expandido} = VPL_{base} + VPOC \quad [eq. 23]$$

Além disso, Smit e Trigeorgis (2006) propõem que os efeitos da interação estratégica sejam analisados por meio da Teoria dos Jogos e representados na Matriz de Opções de Crescimento. Quando o valor de uma opção é compartilhado entre concorrentes, os círculos são divididos, mostrando a parte de valor que cabe a cada um.

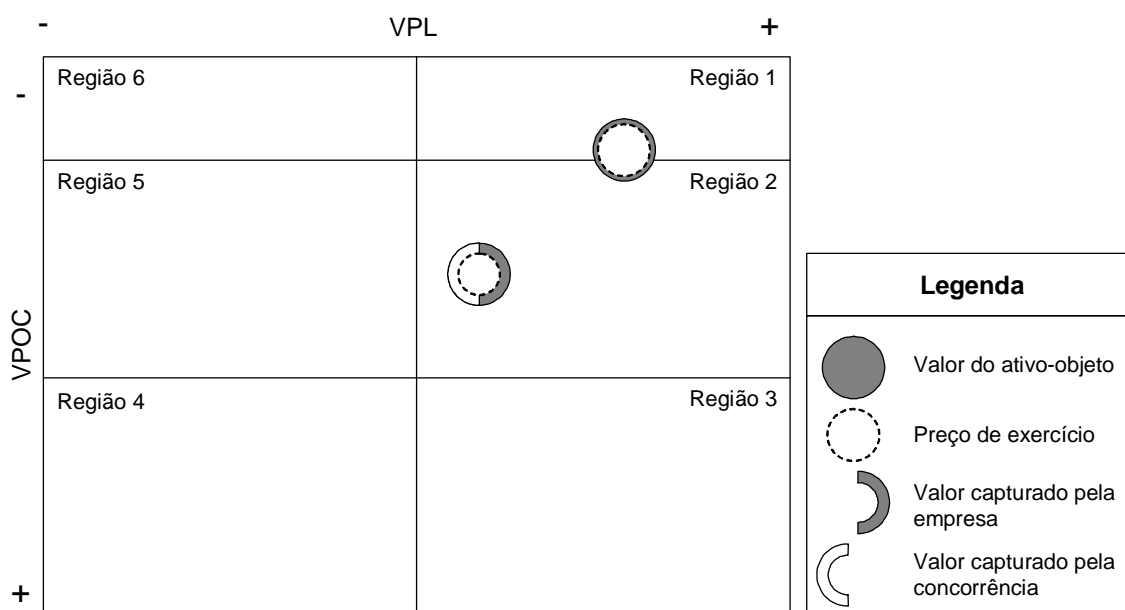


Figura 8 – Matriz de Opções de Crescimento

Fonte: Adaptada de Smit e Trigeorgis, 2006

Quando se avalia a carteira de projetos de investimentos de uma empresa, deve-se coletar os dados necessários para realizar a AOR e aplicar a metodologia. Mas, se a intenção é avaliar empresas com ações negociadas em bolsa, as métricas da matriz ROG podem ser obtidas diretamente a partir de dados do mercado. Assim, o valor do eixo horizontal pode ser obtido calculando-se o valor presente da perpetuidade do fluxo de caixa atual da empresa (V). O valor das opções de crescimento (eixo y) é obtido subtraindo o valor encontrado para o eixo x do valor de mercado (P) da empresa ($VPOC = P - V$). Dividindo-se os dois valores pelo valor de mercado, obtém-se a proporção de valor decorrente do fluxo de caixa atual e a proporção originada pelas opções de crescimento.

4.4 A abordagem integrada de planejamento e controle de investimentos

A adoção de uma nova metodologia de planejamento de oportunidades estratégicas de investimento, que aproxima a análise financeira da estratégia traz benefícios à tomada de decisões das empresas. Mas o benefício é limitado se a nova forma de planejamento não for acompanhada de modificações nos métodos de acompanhamento e controle e nos instrumentos de incentivo ao corpo gerencial. Kasanen e Trigeorgis (1993) desenvolveram uma estrutura integrada de planejamento e controle de investimentos estratégicos baseada na Análise de Opções Reais, compreendendo as dimensões de planejamento, controle e incentivo.

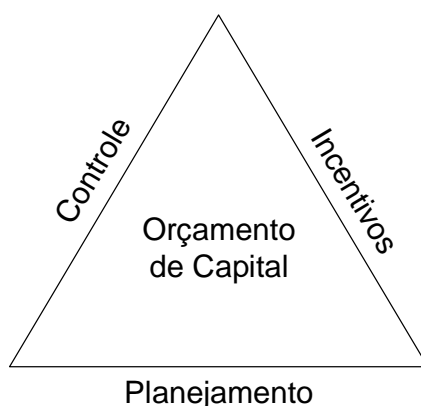


Figura 9 – Abordagem integrada de planejamento e controle de oportunidades de investimento

Fonte: Adaptada de Kasanen; Trigeorgis, 1993

A fase de planejamento segue a lógica discutida anteriormente, que considera as oportunidades de investimento como um portfólio de opções reais. O produto dessa etapa é a estratégia de maximização de valor, que contém o mix ótimo de investimentos.

Os instrumentos financeiros utilizados na seleção dos projetos, a Análise de Opções Reais e o cálculo do VPL, não são observáveis no curto prazo. Isto dificulta o acompanhamento da execução da estratégia de maximização de valor. Ao mesmo tempo, os controles contábeis normalmente utilizados, como o retorno sobre os ativos (ROA), não são medidas completas de maximização de valor. A solução encontrada por Kasanen e Trigeorgis (1993) foi utilizar um conjunto de indicadores contábeis cruzados, que, ao serem monitorados ao mesmo tempo, permitem verificar a aderência da execução à estratégia originalmente traçada.

A idéia consiste na seleção de indicadores contábeis que funcionem como freios uns dos outros, evitando que a perseguição de um indicador possa levar à perda de valor. Por exemplo, o indicador de retorno sobre ativos pode levar o tomador de decisão a reduzir os investimentos, para, diminuindo o denominador, alcançar a meta especificada. Por outro lado, um indicador de taxa de crescimento pode levar o gerente a buscar o aumento de faturamento às custas da margem de lucro. Entretanto, a utilização conjunta desses dois indicadores, estabelecendo faixas aceitáveis de resultados para cada um, fará com que a interseção dessas faixas contenha a estratégia de maximização de valor (FIG. 10). Para isto, é necessário trabalhar com o conceito de folga gerencial, isto é, não se estabelece a meta no ponto de máximo do indicador, mas em uma faixa inferior ao máximo.

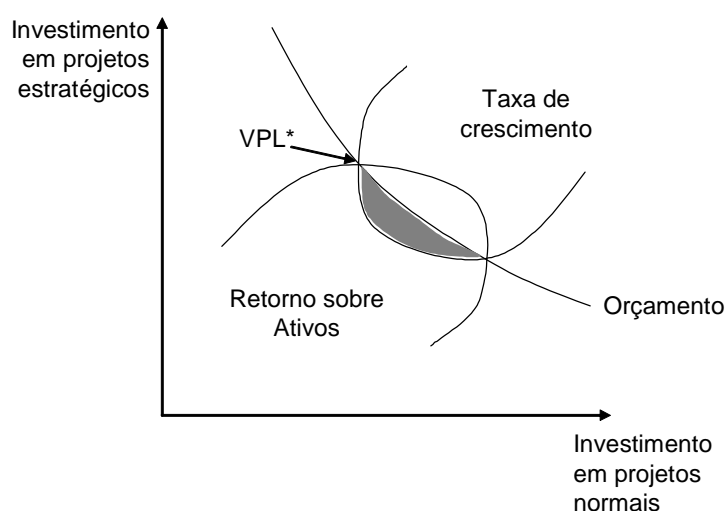


Figura 10 – Utilização de controles contábeis cruzados para acompanhamento de resultados
Fonte: KASANEN; TRIGEORGIS, 1993

O nível de folga a ser utilizado dependerá do nível de incerteza e da qualidade do corpo gerencial da empresa. Em condições de incerteza elevada, um corpo gerencial criativo e competente pode trabalhar com um nível maior de folga para aproveitar as oportunidades que surgirão quando a incerteza se resolver. Em um ambiente estável ou quando a equipe gerencial não está preparada para atuar com um grau de liberdade maior, deve-se trabalhar com folgas menores, reduzindo a margem de atuação da equipe.

Com a utilização de índices contábeis, gerados rotineiramente pela empresa, o estabelecimento de um plano de incentivos alinhado à estratégia de maximização de valor é facilitado.

Em um ambiente dinâmico, novas oportunidades surgem e planos devem ser revisados ou abandonados. Os instrumentos de controle e incentivo devem garantir que o corpo gerencial tenha liberdade para realizar o gerenciamento ativo do portfolio de opções. Se mudanças significativas de ambiente ocorrem ou opções importantes, que alteram as alternativas remanescentes, são exercidas ou criadas, a estratégia inicial de maximização de valor deve ser modificada e um novo conjunto de objetivos de controle deve ser disponibilizado para os gerentes de nível inferior, contingente ao exercício das opções principais. Esse mecanismo de *feedback* fecha o ciclo do modelo de planejamento e controle de oportunidades de investimento estratégicas (Fig. 11).

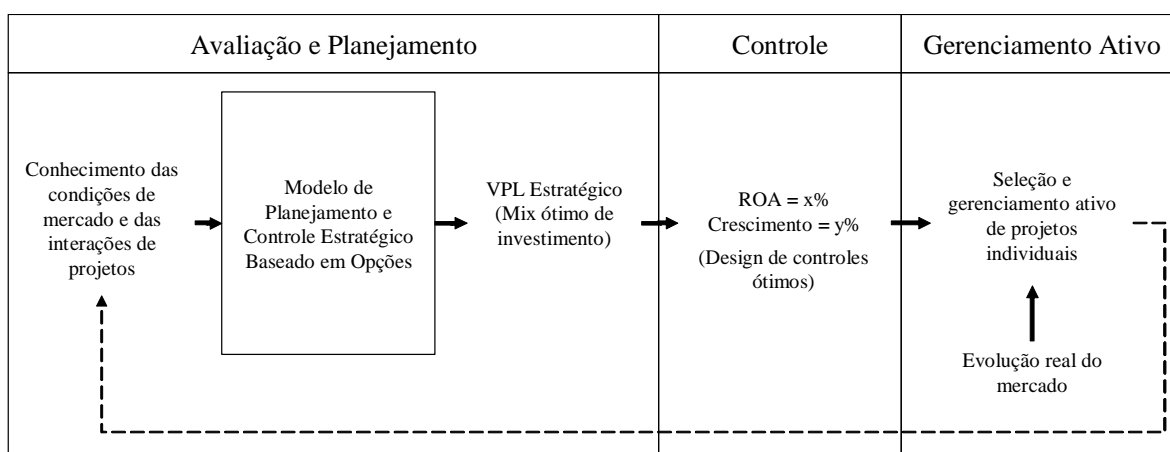


Figura 11 – Modelo de orçamentação estratégica de capital
 Fonte: KASANEN; TRIGEORGIS, 1993

5 Processos estocásticos

5.1 Conceito

Bertsekas e Tsitsiklis (2000) definem um processo estocástico como “um modelo matemático de um experimento probabilístico que evolui com o tempo e gera uma seqüência de valores numéricos... Cada valor numérico da seqüência é modelado por uma variável aleatória, logo um processo estocástico é simplesmente uma seqüência (finita ou infinita) de variáveis aleatórias”. Os processos estocásticos são utilizados em uma variedade de áreas como telecomunicações, controle automático, economia, etc. Especificamente na área econômica, processos estocásticos são usados para gerar uma seqüência de preços de ativos financeiros ou não como ações, títulos públicos, preços de *commodities*, valores presentes de fluxos de caixa de projetos, entre outros.

Historicamente, o primeiro trabalho que discute preços e processos estocásticos é devido ao matemático francês Bachelier (1870-1946), que modelou os preços na bolsa de Paris como um processo de caminho aleatório (*Random Walk*). Posteriormente, vários autores estudaram o assunto, suportando a hipótese de não-previsibilidade dos preços, frustrando toda e qualquer tentativa de buscar no passado padrões e informações que possam ser utilizados para obter ganhos futuros adicionais. Essa é a chamada Hipótese de Eficiência Fraca do Mercado.

Uma categoria particular de processos estocásticos são os processos de Markov. A característica principal desses processos é que o evento futuro apresenta uma dependência probabilística com o passado, resumida no estado atual da variável. Isto é, o valor seguinte da variável depende apenas de seu valor atual, não importando a seqüência de valores anteriores ao estado atual. Matematicamente, essa propriedade é representada por:

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij} \quad [\text{eq. 24}]$$

A propriedade é válida para qualquer valor de n , i e j e para qualquer seqüência i_0, \dots, i_{n-1} de estados passados. Os processos de Markov são coerentes com a Hipótese da Eficiência Fraca do Mercado citada anteriormente.

Na Análise de Opções Reais, a abordagem mais comum consiste em modelar o valor do ativo objeto como um processo que tenha a característica de ser markoviano e compará-lo com o preço de exercício para obter o *payoff* da opção. Pode-se, também, utilizando a técnica de Simulação de Monte Carlo, modelar uma ou mais variáveis de entrada do fluxo de caixa de um projeto ou empreendimento (preços de produtos, preços de insumos, demanda de produtos, etc.) e, a cada rodada de simulação, obter o valor do ativo-objeto na data de maturidade da opção e compará-lo com o preço de exercício.

5.2 Caminho Aleatório (*Random Walk*)

O Caminho Aleatório é um dos processos estocásticos mais simples e corresponde a uma variável aleatória x_t que se inicia em um valor conhecido (x_0) e, em intervalos discretos de tempo, dá saltos para cima ou para baixo, independentes entre si, de acordo com uma distribuição de probabilidades (DIXIT; PINDYCK, 1994).

O modelo mais simples é o Caminho Aleatório de Tempo e Estado Discretos. Nesse processo, x_t começa em um valor conhecido x_0 e, em intervalos de tempo discretos, dá saltos de valores fixos para cima ou para baixo, com probabilidade p e $q = (1-p)$. A evolução de x_t é dada por:

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t \quad [\text{eq. 25}]$$

Onde ε_t é a variável aleatória que nos dá a distribuição de probabilidades dos saltos.

O gráfico 1 representa simulações de realizações (uma realização de um processo estocástico é uma seqüência de valores no tempo) de um processo estocástico que segue o modelo do Caminho Aleatório de Tempo e Estado Discretos no qual $x_0 = 0$, o tamanho dos saltos $\varepsilon_t = [1; -1]$ e $p = q = 1/2$.

Caminho Aleatório de Tempo e Estado Discretos

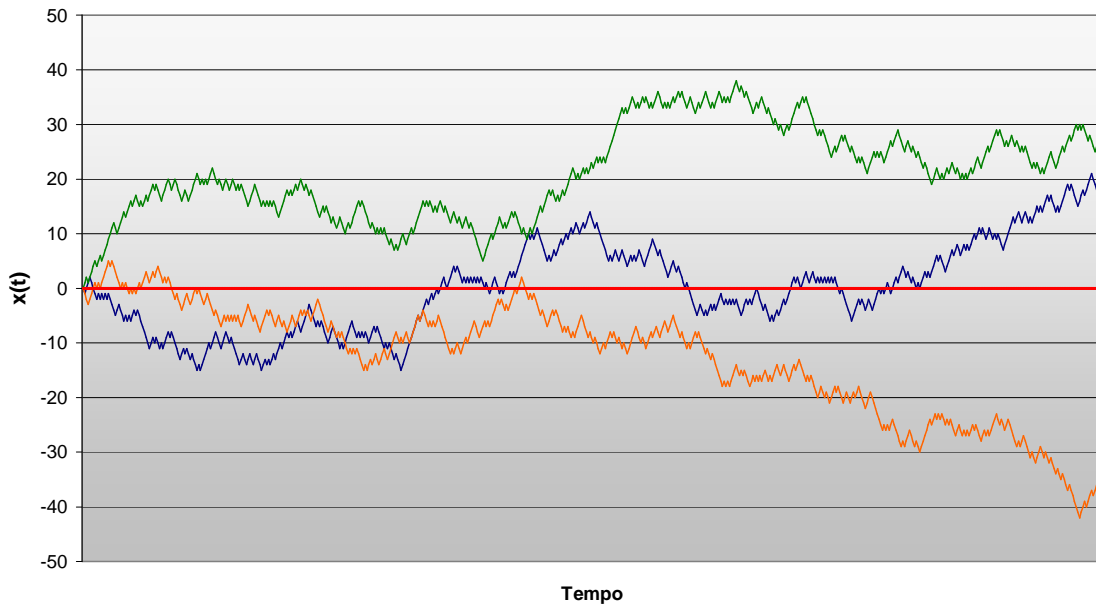


Gráfico 1 – Simulação do Caminho Aleatório de Tempo e Estado Discretos

No exemplo apresentado, como $p = q$, o valor esperado de x é zero. Entretanto, se $p > q$, x tenderá a crescer com o tempo. Caso contrário, x decrescerá. Nesse caso, temos um Caminho Aleatório com Tendência (*Random Walk with Drift*).

Uma generalização desse primeiro modelo consiste em considerar que o tamanho dos saltos dados segue uma distribuição contínua de probabilidades. Assim, temos um processo estocástico de tempo discreto e estado contínuo. O gráfico 2 apresenta a simulação de um caminho aleatório desse tipo, cujo salto segue uma distribuição normal padronizada, $\varepsilon_t \sim N(0;1)$.

Caminho Aleatório de Tempo Discreto e Estado Contínuo

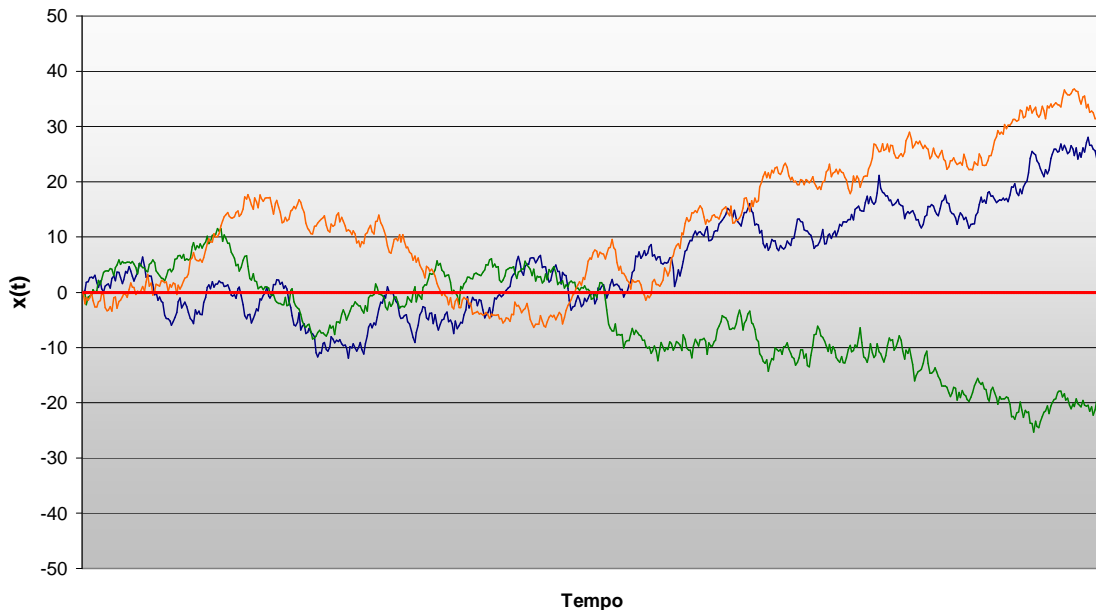


Gráfico 2 – Simulação do Caminho Aleatório de Tempo Discreto e Estado Contínuo

5.3 Processo de Wiener ou Movimento Browniano

Segundo Dixit e Pindyck (1994), o processo de Wiener é um processo estocástico de tempo contínuo, que pode ser considerado uma versão em tempo contínuo de um caminho aleatório.

O processo de Wiener possui 3 propriedades:

- a. É um processo de Markov: a distribuição de probabilidades de valores futuros depende apenas do valor atual da variável.
- b. Os incrementos são independentes: a distribuição de probabilidades da mudança da variável em qualquer intervalo de tempo é independente de qualquer outro intervalo de tempo.
- c. Mudanças no processo são normalmente distribuídas em qualquer intervalo de tempo finito e a variância cresce linearmente com o intervalo de tempo.

A equação que rege uma variável aleatória $z(t)$ que segue um processo de Wiener é:

$$dz = \varepsilon_t \sqrt{dt} \quad [\text{eq. 26}]$$

A variável ε_t é serialmente não correlacionada e segue uma distribuição normal padronizada.

O valor esperado e a variância de dz são $E[dz] = 0$ e $\text{Var}[dz] = dt$. Como a variância de dz

crece linearmente com o tempo, o processo de Wiener é dito não estacionário. A escolha de Δz proporcional a $\sqrt{\Delta t}$ e não a Δt permite que os parâmetros estatísticos média e variância relativos à variação do preço do ativo no tempo não dependam de instantes específicos de tempo.

5.4 Movimento Browniano com Tendência (*Brownian Motion with Drift*)

Segundo Dixit e Pindyck (1994), o processo de Wiener é utilizado como elemento de construção de processos estocásticos mais complexos. O Movimento Browniano com Tendência é um exemplo. A equação que descreve esse processo é:

$$dx = \alpha dt + \sigma dz \quad [\text{eq. 27}]$$

Pode-se subdividir este modelo em duas partes. Uma parte é previsível e determinística (αdt) e nos dá uma medida de crescimento (*drift*) ou de variação média do preço do ativo por unidade de tempo. A outra parte é aleatória (σdz) e nos fornece a volatilidade do preço do ativo por unidade de tempo. α é o parâmetro de *drift* e σ é o parâmetro de variância (ou volatilidade).

Uma característica do Movimento Browniano é que ele apresenta incrementos independentes, isto é, as distribuições de probabilidades das variações no processo para intervalos de tempo não superpostos são independentes. Em termos financeiros, isto significa que uma grande variação no preço de um ativo em um mês não implica que, no próximo mês, ela seja baixa ou continue alta.

Como a média de dx é relacionada a t e a variância a $t^{1/2}$, no curto prazo o Movimento Browniano com Tendência é dominado pela volatilidade e no longo prazo pela tendência ou *drift*. O gráfico 3 apresenta as simulações de três realizações de um Movimento Browniano com *Drift* cujos parâmetros são $\alpha = 0,025$ e $\sigma = 0,25$.

Movimento Browniano com Drift



Gráfico 3 – Simulação do Movimento Browniano com Drift

Em qualquer intervalo de tempo Δt , Δx é normalmente distribuída. O valor esperado e a variância são dados por $E[\Delta x] = \alpha \Delta t$ (linha reta da figura) e $\text{Var}[\Delta x] = \sigma^2 \Delta t$. O fato de Δx seguir uma distribuição normal prejudica a modelagem de preços segundo este processo estocástico, pois há probabilidade de ocorrência de preços negativos. Além disso, a modelagem do retorno relativo, isto é, de dx/x é mais útil do que utilizar o retorno absoluto (dx). A utilização do Movimento Browniano Geométrico permite superar essas limitações (Dias, 1996).

5.5 Movimento Browniano Geométrico

O Movimento Browniano Geométrico (MBG) é o processo estocástico mais utilizado para modelar variáveis econômicas como preços de ações, taxas de juros e preços de produtos. O MBG é regido pela seguinte equação, onde α (taxa de *drift*) e σ (taxa de variância) são constantes:

$$dx = \alpha x dt + \sigma x dz \quad [\text{eq. 28}]$$

Uma propriedade importante do MBG é que a variação relativa ($\Delta x/x$), dada pela equação abaixo, segue um Movimento Browniano Simples e é normalmente distribuída.

$$dx / x = \alpha dt + \sigma dz \quad [\text{eq. 29}]$$

Como:

$$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x} dx = \frac{dx}{x} \quad [\text{eq. 30}]$$

Pode-se afirmar que o incremento de $\ln(x)$ segue um Movimento Browniano Simples e é normalmente distribuído e a variação absoluta de x , Δx , terá distribuição lognormal. Essa propriedade torna o MBG adequado para modelar preços de ativos, pois impede a ocorrência de preços negativos.

De acordo com o Lema de Ito, apresentado em maior detalhe no anexo, a diferencial dF é dada por:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (dx)^2 \quad [\text{eq. 31}]$$

Aplicando o Lema de Ito em $F(x) = \ln(x)$, temos:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{x} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

Substituindo na equação anterior, temos:

$$dF = \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2x^2} (dx)^2 \quad [\text{eq. 32}]$$

Substituindo $dx = \alpha x dt + \sigma x dz$ na equação, temos:

$$dF = \frac{1}{x} (\alpha x dt + \sigma x dz) - \frac{1}{2x^2} (\alpha^2 x^2 dt^2 + 2\alpha\sigma dt dz x^2 + \sigma^2 x^2 dz^2) \quad [\text{eq. 33}]$$

Como $dt dz = 0$, $(dt)^2 = 0$ e $(dz)^2 = dt$, temos:

$$dF = \alpha dt + \sigma dz - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \quad [\text{eq. 34}]$$

Assim, o incremento de $\ln(x)$ é dado pelo seguinte Movimento Browniano Simples com *Drift*:

$$d \ln(x) = \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dz \quad [\text{eq. 35}]$$

Segundo Dixit e Pindyck (1994), se $x(0) = x_0$, o valor esperado e a variância de x_t são dados por:

$$E[x_t] = x_0 e^{\alpha t} \quad [\text{eq. 36}]$$

$$\text{Var}(x_t) = x_0^2 e^{2\alpha t} (e^{\sigma^2 t} - 1) \quad [\text{eq. 37}]$$

Como pode ser observado na equação 36, se α é positivo, o valor esperado crescerá exponencialmente com o tempo. A variância também cresce com o tempo. O gráfico 4 apresenta a simulação de um MBG. A linha vermelha representa $E[x_t]$.

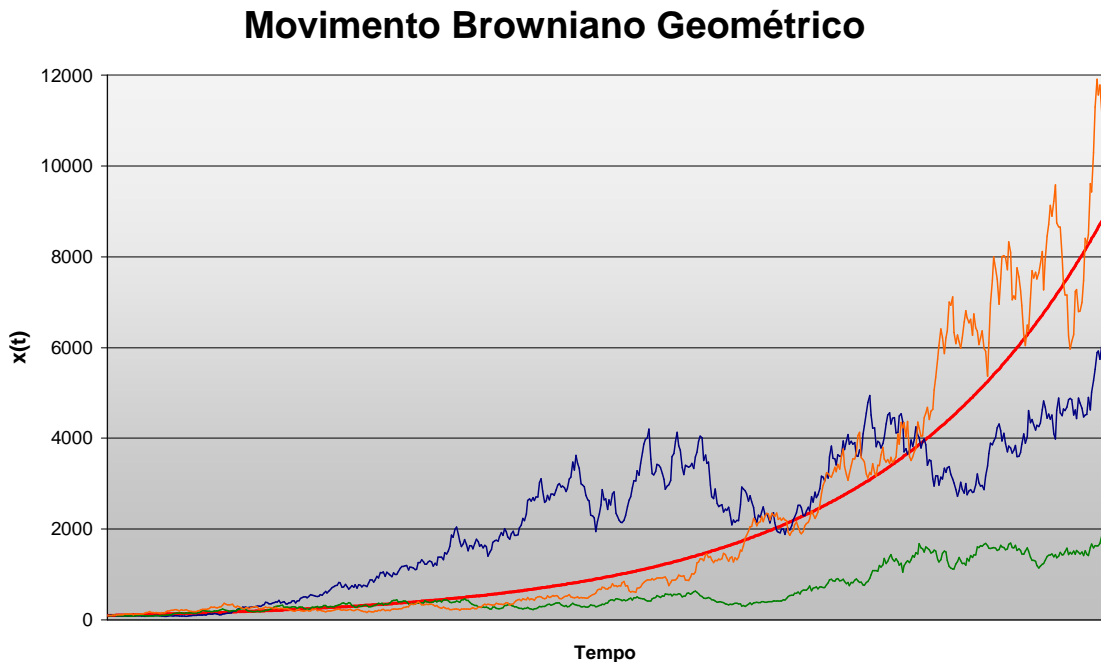


Gráfico 4 – Simulação do Movimento Browniano Geométrico com Drift

5.6 Processo de Reversão à Média

O Processo Autorregressivo de Primeira Ordem (AR1) é um processo estocástico de tempo discreto e estado contínuo que tem uma característica peculiar: a variável que segue esse processo tende a retornar ao valor esperado de longo prazo. Por isso é classificado como um processo de reversão à média (DIXIT; PINDYCK, 1994). A equação que modela esse processo é:

$$dx = \delta + \rho x_{t-1} + \varepsilon_t \quad [\text{eq. 38}]$$

Onde δ é uma constante, ρ é uma constante cujo valor é $-1 < \rho < 1$, e ε é uma variável aleatória que segue uma distribuição normal com média igual a zero. O processo é estacionário e o valor esperado de x_t no longo prazo é $\delta/(1-\rho)$.

O processo de reversão à média (PRM) em tempo contínuo mais simples é o processo de Ornstein-Uhlenbeck, dado pela seguinte equação:

$$dx = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma dz \quad [\text{eq. 39}]$$

Onde η é a velocidade de reversão, \bar{x} é o valor médio de longo prazo, isto é, o nível para o qual x tende a se reverter e σ é a volatilidade.

Essa equação é a versão em tempo contínuo do Processo AR1 com os seguintes parâmetros: $\delta = \bar{x}(1 - e^{-\eta})$ e $\rho = (e^{-\eta} - 1)$ (DIXIT; PINDYCK, 1994).

$$x_t - x_{t-1} = \bar{x}(1 - e^{-\eta}) + (e^{-\eta} - 1)x_{t-1} + \varepsilon_t \quad [\text{eq. 40}]$$

Onde ε_t segue uma distribuição normal com média zero e variância igual a:

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2\eta}(1 - e^{-2\eta}) \quad [\text{eq. 41}]$$

Nesse processo, os incrementos de x não são independentes, pois dependem da distância entre seu valor atual e o valor médio de longo prazo. Quanto mais distante do valor de longo prazo, maior tende a ser a variação. Além disso, se o valor atual é superior ao valor de longo prazo, x tende a se reduzir, caso contrário, tende a crescer.

O valor esperado é dado por:

$$E[x_t] = \bar{x} + (x_0 - \bar{x})e^{-\eta t} = x_0 e^{-\eta t} + \bar{x}(1 - e^{-\eta t}) \quad [\text{eq. 42}]$$

Dias (1996), analisando a equação do valor esperado, afirma que este corresponde a um valor intermediário entre x_0 e \bar{x} , ponderado por uma taxa de decaimento ($e^{-\eta t}$).

A variância de $(x_t - \bar{x})$ é:

$$\text{Var}[x_t - \bar{x}] = \frac{\sigma^2}{2\eta}(1 - e^{-2\eta t}) \quad [\text{eq. 43}]$$

Para valores elevados de t , o valor esperado de x tende a \bar{x} e a variância tende a $\sigma^2/2\eta$. Valores elevados da velocidade de reversão à média levam a variância a aproximar-se de zero. Por outro lado, se $\eta \rightarrow 0$, o processo torna-se um Movimento Browniano Simples e a variância passa a ser $\sigma^2 t$.

O gráfico 5 apresenta a simulação de um PRM com $\eta = 0,05$, $\sigma = 0,05$, $x_0 = 2$ e $\bar{x} = 1$. O gráfico 6 apresenta simulações de processos de reversão à média com diferentes velocidades

de reversão à média (η). Pode-se observar que para η elevado, os valores de x tendem a ficar muito próximos do valor de longo prazo. Já para valores baixos de η , os pontos tendem a se distanciar.

Processo de Reversão à Média

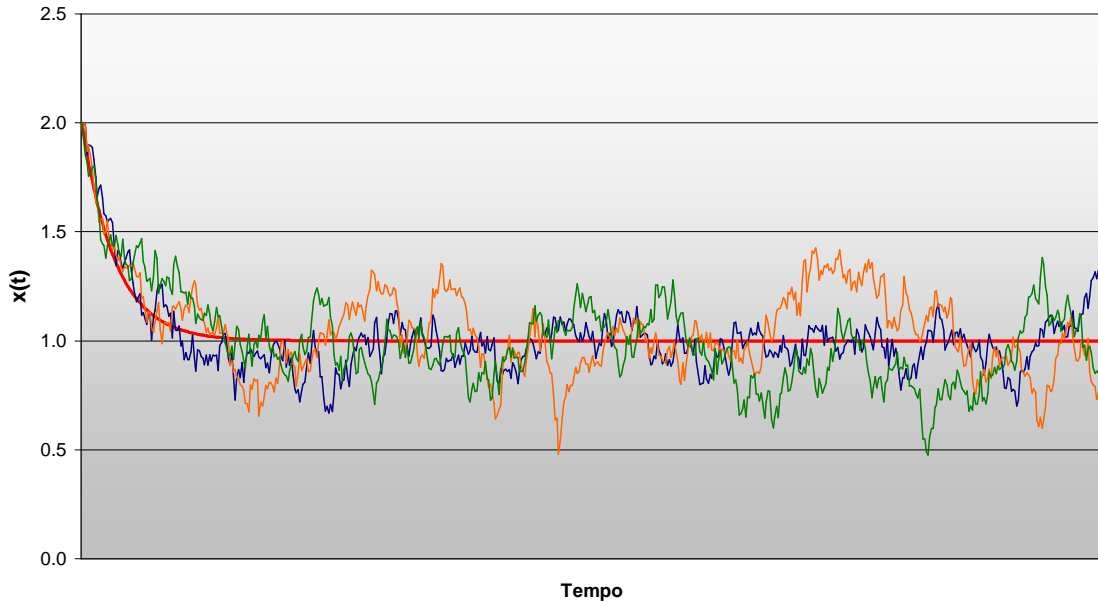


Gráfico 5 – Simulação de um Processo de Reversão à Média

Processo de Reversão à Média

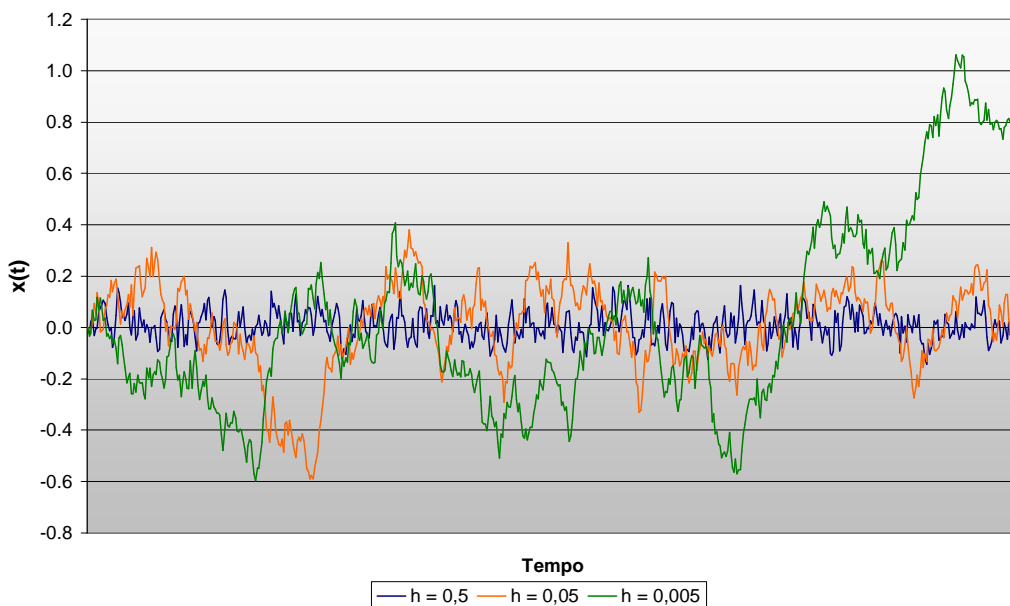


Gráfico 6 – Simulação de PRM com η variados

Como a variável x , que segue o processo de Ornstein-Uhlenbeck, tem distribuição normal e pode assumir valores negativos, ela não é a mais adequada para representar o preço de *commodities*. Assim, é necessário realizar uma transformação de forma que haja uma relação entre o preço (P) e $\ln(x)$. Dias (1995) propõe criar uma relação entre x e P de forma que a média de preços resultante da simulação seja igual à exponencial da média simulada de x .

$$E[P_t] = e^{E[x_t]} \quad [\text{eq. 44}]$$

Como a exponencial de uma distribuição normal adiciona a metade da variância à média de uma distribuição log-normal, a relação entre P_t e x_t é:

$$P_t = e^{x_t - 0,5\text{Var}[x_t]} = e^{x_t - (1 - e^{-2\eta}) \frac{\sigma^2}{4\eta}} \quad [\text{eq. 45}]$$

5.7 Processos estocásticos utilizados na modelagem de preços de *commodities*

O Movimento Browniano Geométrico é o processo estocástico de utilização mais difundida na avaliação de opções financeiras e reais. A equação de Black & Scholes (1973), utilizada na precificação de opções financeiras européias, parte do pressuposto de que o preço da ação segue o MBG. Segundo Trigeorgis (1996), a suposição de que o preço da ação segue um processo de Markov, isto é, de que para prever o futuro do preço da ação basta conhecer o preço atual, não importando os preços anteriores, é consistente com a forma fraca da hipótese de eficiência de mercados (*weak form of the efficient-markets hypothesis*). O método numérico mais empregado na precificação de opções financeiras ou reais, européias ou americanas, a Árvore Binomial desenvolvida por Cox, Ross & Rubinstein (1979), também pressupõe que o valor do ativo-objeto segue o MBG. Na avaliação de empreendimentos relacionados a *commodities*, há inúmeros estudos que utilizam o MBG. Esse é o caso do estudo das opções de abertura, fechamento e abandono de uma mina de cobre realizado por Brennan & Schwartz (1985), um dos mais citados na literatura.

Entretanto, segundo Dixit e Pindyck (1994), o MBG tende a se distanciar significativamente do seu valor inicial, o que pode ser realista no caso de ativos especulativos, como preços de ações, mas não no caso de *commodities*, onde o preço tenderia, no longo prazo, a se aproximar dos custos marginais de produção. Esse comportamento é mais bem modelado por

um Processo de Reversão à Média. Entretanto, é difícil estatisticamente comprovar que determinada variável se comporta segundo o PRM e rejeitar a hipótese do comportamento segundo o MBG. De acordo com Dixit e Pindyck (1994), testes para verificar se determinada variável econômica segue ou não um PRM demandam séries históricas muito longas. Testes realizados com dados de 120 anos indicam que os preços de petróleo e cobre se comportam como PRM com velocidades de reversão muito lentas. Entretanto, testes com dados de 30 a 40 anos não permitem chegar a essa conclusão. Portanto, os autores consideram que o analista deve se basear em conceitos teóricos de comportamento de preços, como os mecanismos de oferta e demanda, no lugar de testes estatísticos. Dias (2005) afirma que o MBG pode ser inadequado quando o preço à vista da *commodity* está muito distante do nível de equilíbrio de longo prazo, sendo preferível, nessas condições, utilizar o PRM.

O estudo de Schwartz (1997) sobre o comportamento estocástico de preços de *commodities* (cobre, petróleo e ouro) indicou que há uma forte reversão à média nos preços das *commodities* comerciais, mas não no preço do ouro. Schwartz utiliza o seguinte argumento a favor do uso do PRM: “em condições de equilíbrio, espera-se que, quando os preços estão relativamente altos, a oferta aumente, pois produtores de custo mais elevado da *commodity* irão entrar no mercado ocasionando uma pressão de redução dos preços. Inversamente, quando os preços estão relativamente baixos, a oferta irá cair, pois os produtos de alto custo irão sair do mercado, gerando uma pressão por alta nos preços. O impacto dos preços relativos na oferta da *commodity* vai induzir à reversão à média de seu preço”. Nesse estudo, Schwartz compara 3 modelos: no primeiro modelo, o logaritmo do preço da *commodity* segue um Processo de Reversão à Média simples (esse é o modelo utilizado nesta dissertação); o segundo modelo considera dois fatores estocásticos seguindo o PRM: o preço e a taxa de conveniência (*convenience yield*); o terceiro modelo inclui um terceiro fator estocástico que também segue o PRM: a taxa de juros instantânea. Segundo Schwartz, os dois últimos modelos são mais adequados para prever o comportamento de preços de *commodities*.

As *commodities* comerciais (zinco, cobre, petróleo) têm um comportamento que pode ser modelado pelo PRM, entretanto o MBG é mais adequado para a modelagem do preço de metais utilizados como ativos financeiros (como o ouro). Sabour e Poulin (2006), ao aplicarem o método de Simulação de Monte Carlo com Mínimos Quadrados (*Least-Squares Monte Carlo Method*) para avaliar o valor da flexibilidade operacional de uma mina multi-

metais, adotaram o MBG para modelar os preços de ouro, prata e paládio e o PRM para níquel, cobre, cobalto e platina.

6 Métodos numéricos de precificação de opções

6.1 Introdução

Os métodos de solução de problemas de opções reais podem ser subdivididos em três tipos: equações diferenciais parciais, programação dinâmica e simulação. Para cada método, há uma ou mais técnicas matemáticas correspondentes. As mais comuns são apresentadas na figura 12 (AMRAN; KULATILAKA, 1999b). Conhecendo-se as características de cada técnica, suas vantagens e desvantagens (QUADRO 7), pode-se selecionar a mais adequada ao problema e ser atacado.

| Método de solução | Técnicas matemáticas mais comuns |
|--------------------------------|--|
| Equações Diferenciais Parciais | Soluções / Aproximações Analíticas |
| | Método das Diferenças Finitas |
| Programação Dinâmica | Árvores Multinomiais (<i>Lattices</i>) |
| Simulação | Simulação de Monte Carlo |

Figura 12 – Técnicas de precificação de opções mais empregadas

O método de solução a partir de equações diferenciais parciais (EDP) consiste em expressar o valor da opção segundo uma equação diferencial parcial sujeita a condições de contorno. A EDP é uma equação matemática que relaciona a variação de valor da opção a variações observáveis no mercado de títulos financeiros. As condições de contorno fornecem o valor da opção em pontos extremos, como na data de maturidade, no limite superior e no limite inferior. Observadas premissas restritivas, alguns modelos podem ser calculados por meio de soluções analíticas. Entretanto, modelos mais complexos são solucionados por meio da técnica de diferenças finitas. Essa técnica consiste em aproximar a EDP por meio de um conjunto de equações de diferença, válidas para pequenos intervalos. Essas equações são solucionadas na data de maturidade da opção e, por meio de um processo recursivo, são obtidas soluções para os períodos anteriores, até o momento inicial.

Nos métodos de programação dinâmica, os valores que o ativo-objeto pode alcançar durante a vida da opção e suas probabilidades (neutras ao risco) são gerados, formando um reticulado (*lattice*). O *payoff* da opção é calculado na data de maturidade e, de maneira recursiva, a cada intervalo de tempo, o exercício antecipado da opção é comparado com o valor presente de manutenção da opção em aberto. O procedimento é repetido até se chegar ao tempo inicial.

Nos modelos de simulação, utilizando-se a equação de um processo estocástico que descreve o comportamento do valor do ativo-objeto e um gerador de números aleatórios, criam-se inúmeras trajetórias de evolução do ativo-objeto do momento presente até a data de maturidade da opção. A solução ótima é obtida no final de cada trajetória e o *payoff* calculado. O valor da opção é obtido tomando-se a média aritmética dos *payoffs* e descontando à taxa livre de risco para obter o valor presente da opção.

Quadro 7 – Comparativo das técnicas de valoração de opções

| Técnica | Vantagens | Desvantagens |
|--|--|---|
| Soluções Analíticas | <ul style="list-style-type: none"> – Forma simples e rápida de obter o valor da opção. | <ul style="list-style-type: none"> – Premissas são muito restritivas; – Distanciamento em relação às situações práticas. |
| Diferenças Finitas | <ul style="list-style-type: none"> – Permite a análise quando há um conjunto de valores iniciais; – Acurácia matemática. | <ul style="list-style-type: none"> – Pouco intuitiva; – Complexidade de cálculo aumenta rapidamente com o número de fontes de incerteza. |
| Árvores Multinomiais (<i>Lattices</i>) | <ul style="list-style-type: none"> – Intuitiva; – Trata as características do ativo-objeto e da opção de maneira transparente; – Permite visualizar os valores intermediários do ativo-objeto e da opção; – Flexibilidade (permite incorporar estruturas complexas de decisão, relacionamentos complexos entre o valor do ativo-objeto e da opção e formas complicadas de dividendos); – Facilidade de implementação. | <ul style="list-style-type: none"> – Considera apenas um valor inicial para o ativo-objeto; – Não permite trabalhar com várias fontes de incerteza. |
| Simulação de Monte Carlo | <ul style="list-style-type: none"> – Permite modelar relacionamentos complexos entre o valor da opção e do ativo-objeto; – Permite modelar várias fontes de incerteza e processos estocásticos complexos; – Pode solucionar opções dependentes da trajetória do ativo-objeto (<i>path-dependent options</i>). | <ul style="list-style-type: none"> – Não é muito adequada para opções do tipo americano, opções embutidas (<i>nested</i>) ou seqüências de opções. |

6.2 Soluções analíticas

Nas soluções analíticas, o valor da opção é dado por uma equação como uma função direta dos *inputs*. A solução analítica mais conhecida é a equação de Black & Scholes para opções de compra e venda europeias. Em alguns casos, uma EDP modificada é utilizada para obter uma aproximação analítica para o valor da opção (AMRAN; KULATILAKA, 1999b).

Miller e Park (2002) citam 4 equações principais:

- A equação de Black & Scholes: utilizada para avaliar opções de compra ou de venda europeias sem distribuição de dividendos ou com dividendos constantes e proporcionais ao valor do ativo-objeto.
- Equação de Margrabe: utilizada para avaliar a substituição de um ativo por outro. A diferença em relação à equação de Black & Scholes é que nesta o preço de exercício é determinístico e naquela o preço de exercício é tratado como uma variável estocástica;
- Equação de Geske: avalia opções compostas com preço de exercício determinístico, utilizada quando há decisões de investimento sequenciais.
- Equação de Carr: avalia opções compostas com preço de exercício estocástico.

6.3 Método das Diferenças Finitas

O método das diferenças finitas aproxima as equações diferenciais parciais que descrevem a dinâmica de valor da opção através de um conjunto de equações de diferença, válidas em pequenos intervalos. São estabelecidas condições de contorno para os valores extremos do ativo-objeto (na data de maturidade, nos limites superior e inferior). A solução parte dos *payoffs* na data de maturidade e, por meio de um método recursivo, as equações dos intervalos anteriores são solucionadas até o momento inicial (CORTAZAR, 2001).

Nesse método, é criado um *grid* do espaço de estados (por exemplo: preço da ação ou valor do ativo-objeto) versus tempo. O tempo até a maturidade, T , é dividido em N intervalos de comprimento $K = \Delta t = T/N$, o espaço de estados é dividido em M subintervalos de tamanho $H = \Delta S = S_{\max}/M$, onde S_{\max} é um limite superior razoável para o preço da ação (ou valor do

ativo). O valor do ativo é dado por $S = i\Delta S$, no tempo $t = j\Delta t$, isto é, o ponto (i,j) do *grid* $(i=1,2,\dots,n)$; $(j=1,2,\dots,m)$. O valor da opção $F(S,t)$ correspondente é $F_{ij} = F(i\Delta S, j\Delta t)$.

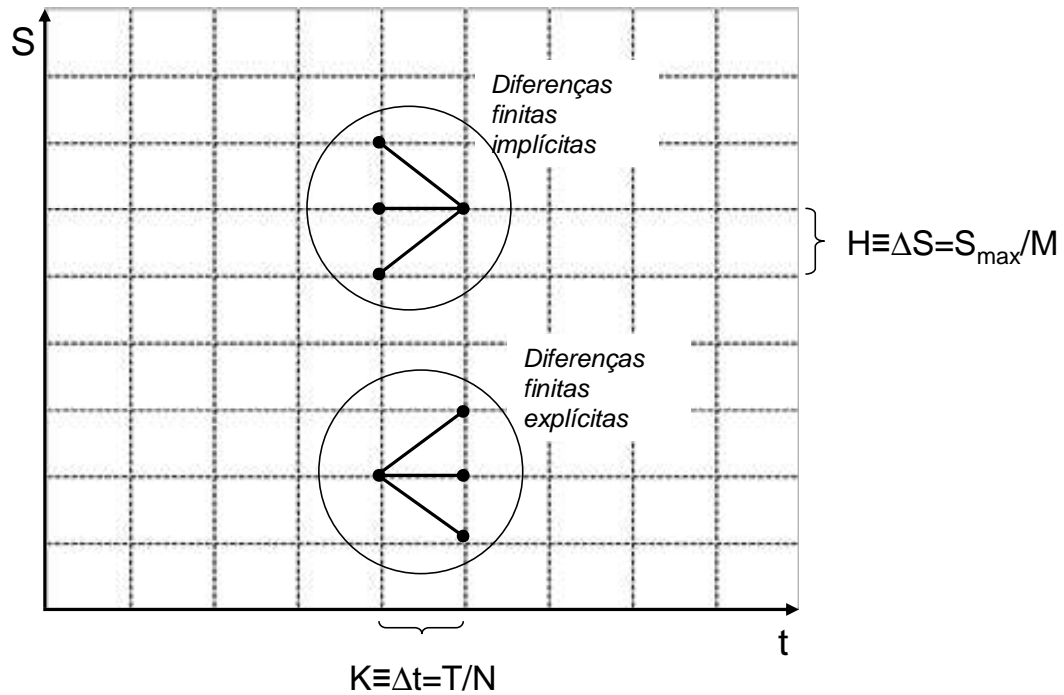


Figura 13 – Grid de diferenças finitas

Para ilustrar a técnica, Trigeorgis (1996) analisa uma opção de venda americana de uma ação que não distribui dividendos, cuja equação diferencial é dada por:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{SS} + rSF_S + F_t - rF = 0 \quad [\text{eq. 46}]$$

Onde $F_S \equiv \partial F/\partial S$, $F_{SS} \equiv \partial^2 F/\partial S^2$, $F_t \equiv \partial F/\partial t$. Sujeita às seguintes condições de contorno:

- | | |
|--|-------------------|
| $F(S,T) = \max(X-S, 0)$ | condição terminal |
| $F(0,T) = X$ | limite inferior |
| $F(S,T)/S \rightarrow 0$ quando $S \rightarrow \infty$ | limite superior |

Diferenças finitas implícitas:

No método de diferenças finitas implícitas, o valor da opção em $t+1$ (conhecido) é relacionado a três valores desconhecidos em t , conforme apresentado no detalhe da figura 13. As derivadas parciais são aproximadas pelas seguintes diferenças finitas:

$$F_S = \frac{F_{i+1,j} - F_{i-1,j}}{2H} + O(\Delta t^2) \quad [\text{eq. 47}]$$

$$F_{SS} = \frac{F_{i+1,j} - 2F_{i,j} + F_{i-1,j}}{H^2} + O(H^2) \quad [\text{eq. 48}]$$

$$F_t = \frac{F_{i,j+1} - F_{i,j}}{K} + O(\Delta t) \quad [\text{eq. 49}]$$

Substituindo as aproximações na equação diferencial parcial, obtém-se:

$$c_i^+ F_{i+1,j} + c_i^0 F_{i,j} + c_i^- F_{i-1,j} = F_{i,j+1} \quad [\text{eq. 50}]$$

Onde:

$$c_i^+ \equiv -\frac{1}{2}(\sigma^2 i + r) i K$$

$$c_i^0 \equiv 1 + (\sigma^2 i + r) K$$

$$c_i^- \equiv -\frac{1}{2}(\sigma^2 i - r) i K$$

Essa expressão dá a relação entre 3 valores de opção desconhecidos em $t = j$ ($F_{i+1,j}$, $F_{i,j}$, $F_{i-1,j}$) e um valor conhecido em $t = j+1$ ($F_{i,j+1}$). c_i^+ , c_i^0 e c_i^- podem ser vistas como probabilidades de transição para chegar no estado i em $t = j+1$ a partir dos estados $i+1$, i e $i-1$ em $t = j$. Este sistema pode ser solucionado recursivamente, começando na condição terminal $j = N$ e voltando para trás até $j = 0$.

A relação apresentada acima pode ser expressa em notação matricial:

$$C F_j = F_{j+1} \quad \text{ou} \quad F_j = C^{-1} F_{j+1}$$

Solucionando-se o sistema de equações, o resultado é comparado com o valor do exercício antecipado. Se o exercício antecipado for maior do que $F_{i,j}$, o valor do exercício substitui $F_{i,j}$. O processo é repetido até $j = 0$, quando são obtidos os valores iniciais da opção, inclusive o valor inicial desejado.

Diferenças finitas explícitas:

No caso das diferenças finitas explícitas, as equações diferenciais parciais são substituídas por diferenças finitas em $(i,j+1)$ no lugar de (i,j) . As aproximações de diferenças finitas são:

$$F_s = \frac{F_{i+1,j+1} - F_{i-1,j+1}}{2H} + O(\Delta t^2) \quad [\text{eq. 51}]$$

$$F_{ss} = \frac{F_{i+1,j+1} - 2F_{i,j+1} + F_{i-1,j+1}}{H^2} + O(H^2) \quad [\text{eq. 52}]$$

$$F_t = \frac{F_{i,j+1} - F_{i,j}}{K} + O(\Delta t) \quad [\text{eq. 53}]$$

Substituindo as aproximações na equação diferencial parcial, obtém-se:

$$F_{i,j} = p_i^+ F_{i+1,j+1} + p_i^0 F_{i,j+1} + p_i^- F_{i-1,j+1} \quad [\text{eq. 54}]$$

Onde:

$$p_i^+ \equiv \frac{1}{2}(\sigma^2 i + r) i K = -c_i^+$$

$$p_i^- \equiv \frac{1}{2}(\sigma^2 i - r) i K = -c_i^-$$

$$p_i^0 \equiv 1 - \sigma^2 i^2 K = 1 - (p_i^+ + p_i^-)$$

Essa expressão é a relação entre um valor de opção desconhecido ($F_{i,j}$) e três valores conhecidos ($F_{i+1,j+1}$, $F_{i,j+1}$, $F_{i-1,j+1}$). Como os dados foram obtidos na iteração anterior, basta solucionar uma equação simples. Os coeficientes p_i^+ , p_i^0 e p_i^- são como probabilidades neutras ao risco de que a variável de estado passe para um estado superior, mantenha-se no estado atual ou passe para um estado inferior no próximo período. A equação é solucionada iterativamente da condição terminal até $t=0$.

Brennan e Schwartz (2001) propõem realizar uma transformação logarítmica da EDP de Black-Scholes fazendo $x \equiv \ln(S)$. Desta forma, no método de diferenças finitas implícitas, a matriz C torna-se independente do estado i e sua inversa só precisa ser calculada uma vez. No caso do método de diferenças finitas explícitas, os coeficientes p_i^+ , p_i^0 e p_i^- tornam-se independentes do estado i, além disso, a estabilidade do método é garantida pela escolha adequada dos intervalos H e K.

6.4 Programação Dinâmica

A técnica de programação dinâmica mais empregada é a árvore multinomial. Essa abordagem aproxima o processo estocástico de tempo contínuo seguido pelo valor do ativo-objeto por um

processo estocástico discreto, multinomial multiplicativo. Os valores que o ativo-objeto pode obter ao longo da vida da opção e suas probabilidades são representados em uma árvore (ou *grid*). O valor da opção é obtido realizando um cálculo recursivo a partir dos nós finais da árvore (MILLER; PARK, 2002).

O primeiro modelo desenvolvido e o mais empregado é a Árvore Binomial criada por Cox, Ross e Rubinstein (1979). Outros modelos, adequados à análise de opções mais complexas, como opções compostas, que permitem modelar mais de uma fonte de incerteza ou adequados a outros processos estocásticos foram desenvolvidos posteriormente.

Na Árvore Binomial, o processo estocástico de tempo contínuo (MBG) é substituído por um de tempo discreto, o processo binomial multiplicativo ou caminho aleatório (*random walk*). Nesse processo, o valor do ativo-objeto, em intervalos de tempo Δt , dá saltos para cima segundo um fator u e para baixo segundo um fator d , com probabilidades neutras ao risco, p e $1-p$, respectivamente, formando um *grid* como o da figura a seguir.

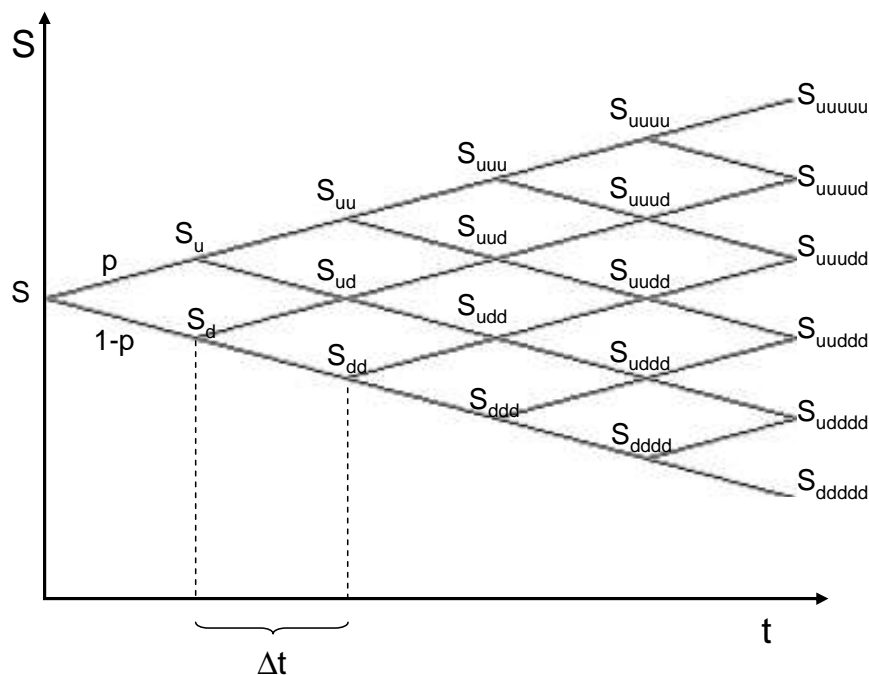


Figura 14 – Representação esquemática de um grid da árvore binomial

Para que haja convergência, no limite, quando Δt tende a zero, entre o processo binomial discreto e o Movimento Browniano Geométrico, os parâmetros u e d devem ser:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad [\text{eq. 55}]$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad [\text{eq. 56}]$$

O valor da opção é calculado segundo a fórmula geral multiplicativa binomial de precificação de opções.

$$C = \frac{\sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} \max(u^j d^{n-j} S - E, 0)}{(1+r)^n} \quad [\text{eq. 57}]$$

Onde a probabilidade neutra ao risco, p , é dada por:

$$p = \frac{(1+r) - d}{u - d} \quad [\text{eq. 58}]$$

6.5 Simulação de Monte Carlo

Na Simulação de Monte Carlo, o processo estocástico de tempo contínuo de cada variável aleatória é aproximado por um processo de tempo discreto. O tempo até a maturidade da opção é dividido em N intervalos de mesmo tamanho $K = \Delta t = T/N$. A cada intervalo de tempo, é gerado um número aleatório, que é substituído na equação do processo, gerando o valor simulado da variável estocástica. Assim, a cada rodada de simulação, é gerada uma trajetória, é obtido o valor terminal da variável estocástica (S_T) e o valor (*payoff*) da opção na data de maturidade é calculado (TRIGEORGIS, 1996).

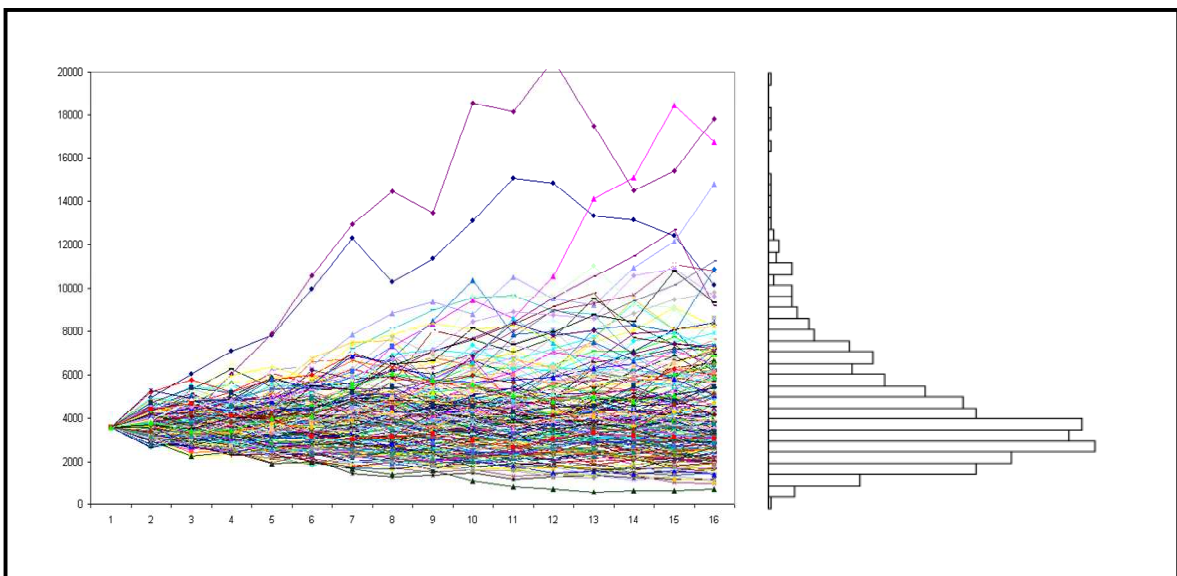


Figura 15 – Geração dos valores terminais da variável estocástica através de simulação

Ao final da simulação, tem-se inúmeras trajetórias (normalmente acima de 1.000) da variável estocástica, formando uma distribuição de valores terminais, como apresentado na figura 15.

Como os parâmetros do processo estocástico são obtidos em condições de certeza equivalente, o valor da opção é calculado tirando-se a média aritmética dos *payoffs* simulados e trazendo a valor presente, descontando à taxa livre de risco (BOYLE, 1977).

$$F = e^{-rt} \hat{E}(F_T) \quad [\text{eq. 59}]$$

Onde:

$\hat{E}(F_T)$: é o valor esperado da opção obtido na simulação neutra ao risco.

A acurácia da simulação depende do número de trajetórias e valores terminais do ativo-objeto gerados. O desvio-padrão da estimativa de valor da opção (F) é dado por s/\sqrt{n} , onde s é o desvio-padrão dos valores da opção estimado a partir das rodadas de simulação, assim um grande número de rodadas de simulação é necessário para obter uma acurácia razoável (BOYLE, 1977).

Podem ser empregadas técnicas de redução da variância para modificar o problema original e reduzir o número de rodadas. Boyle (1977) propõe duas técnicas. A técnica da variável de controle (*control-variate technique*) utiliza um problema similar, mais simples e que tem uma solução analítica e usa essa solução para aumentar a acurácia do problema mais complexo. Já a abordagem da variável antitética (*antithetic variate*) explora a correlação negativa entre duas estimativas. Nessa técnica, para cada número aleatório u_i , gerado a partir do intervalo (0,1), gera-se um segundo número aleatório (1- u_i). Se a covariância de $g(u)$ e $g(1-u)$ for negativa, obtém-se uma estimativa menor de variância do que uma estimativa independente.

6.5.1 Avaliação de opções americanas com Simulação de Monte Carlo

Enquanto as opções européias têm uma data fixa de exercício, as opções americanas podem ser exercidas a qualquer momento até sua expiração. No caso de opções européias, basta obter o *payoff* da opção na data de maturidade e trazer a valor presente. Para opções americanas, o procedimento é bem mais complexo. É necessário identificar a regra ótima de exercício para, em seguida, obter o valor do *payoff* descontado. Essa característica faz com que os métodos

de Árvores Multinomiais e Diferenças Finitas, que partem da data de maturidade da opção e, por meio de um procedimento recursivo, vão obtendo os valores em períodos anteriores até o tempo inicial, sejam os mais indicados para avaliar opções americanas. Entretanto, esses métodos não comportam a análise de problemas com múltiplas variáveis de estado. A Simulação de Monte Carlo, por adotar um procedimento que parte do valor inicial para simular os valores dos períodos seguintes, não se mostrou, inicialmente, adequada à análise de opções americanas. A necessidade de aproveitar a flexibilidade e a capacidade de incorporar várias fontes de incerteza da Simulação de Monte Carlo na análise de opções americanas fez com que, a partir da década de 90, surgissem vários métodos que contornavam essa limitação da técnica.

Glasserman (2004) classifica os métodos nas seguintes categorias: Aproximações Paramétricas, Método da Árvore Aleatória, Partição do Espaço de Estados, Método da Malha Estocástica e Métodos Baseados em Regressão. A seguir, é apresentada uma descrição introdutória desses métodos.

6.5.1.1 Aproximações paramétricas

Ao invés de buscar o valor ótimo da opção em todo o espaço de estados, essa técnica propõe identificar o valor ótimo em uma classe paramétrica, reduzindo o problema do ponto ótimo de parada (exercício) a um problema de otimização de dimensões finitas. Essa redução pode ser obtida pela consideração de uma classe paramétrica de regiões de exercício ou de regras de parada (exercício) (GLASSERMAN, 2004). Em um problema unidimensional, a criação de regiões paramétricas corresponde à substituição da curva que representa a fronteira de exercício por alguns segmentos de reta (FIG. 16).

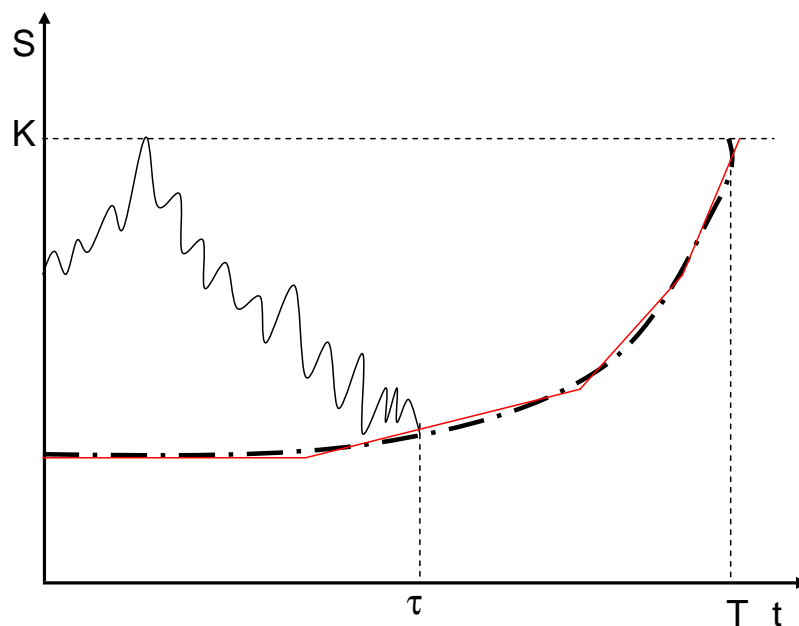


Figura 16 – Aproximação paramétrica de uma fronteira de exercício de uma dimensão
 Fonte: GLASSERMAN, 2004

Como o valor da opção é contínuo em torno da fronteira, ele não é muito sensível à posição exata da fronteira de exercício, assim uma aproximação grosseira da fronteira resulta em uma boa aproximação do valor da opção (GLASSERMAN, 2004).

Em problemas que envolvem várias dimensões, a região ótima de exercício pode não ter uma estrutura simples, dificultando sua parametrização.

6.5.1.2 Método da Árvore Aleatória

Esse método, proposto por Broadie e Glasserman (1997), simula uma árvore de trajetórias do ativo-objeto de acordo com seu processo estocástico. A partir de X_0 , simulam-se b nós. Para cada nó X_{1i} , simulam-se mais b nós e assim por diante, formando uma árvore como a da figura 17.

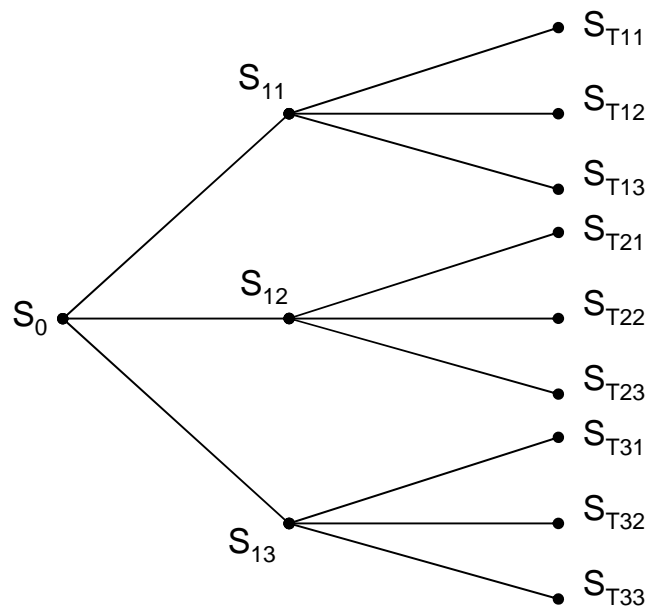


Figura 17 – Exemplo de árvore aleatória
 Fonte: BROADIE; GLASSERMAN, 1997

O método produz duas estimativas, uma com viés para mais e outra para menos, mas que convergem para o valor real. O resultado é apresentado tomando-se o limite inferior do intervalo de confiança da estimativa com viés para menos e o limite superior do intervalo de confiança da estimativa com viés para mais. O intervalo resultante contém o valor desejado com probabilidade de pelo menos 90%. Esse intervalo de confiança é válido, mas conservador. A precisão aumenta com o número de nós da árvore e com o número de simulações em cada nó.

A estimativa com viés para mais é obtida calculando-se o *payoff* nos nós terminais da árvore, originados do mesmo nó do período anterior ($T-1$), tirando-se a média aritmética e considerando-se esse o *payoff* de continuação do nó em $T-1$. Em seguida, compara-se o *payoff* do exercício imediato com o valor de continuação. O procedimento é repetido até o nó inicial.

Já a estimativa com viés para menos segue uma lógica ligeiramente diferente. Toma-se a média dos valores simulados do ativo-objeto na data de maturidade provenientes do mesmo nó em $T-1$ e calcula-se o *payoff* a partir dessa média. Esse valor é comparado com o de exercício imediato do nó anterior. Segue-se essa lógica até $t = 0$.

A principal desvantagem do método de árvore aleatória é que a demanda computacional cresce exponencialmente com o número de datas de exercício, limitando sua aplicação a poucas datas (em torno de 5) (GLASSERMAN, 2004).

6.5.1.3 Método da Partição do Espaço de Estados

Nesse método, em cada data de exercício (t_i), o espaço de estados é subdividido em partições (A_{ij}). Em seguida, simulam-se inúmeras trajetórias (X) para o ativo-objeto. A partir dessas trajetórias, estimam-se as probabilidades de transição (p_{jk}^i) de uma partição (j) em $t=i$ para outra (k) em $t=i+1$. O valor do *payoff* em cada partição (h_{ij}) é calculado pela média dos *payoffs* das trajetórias que interceptaram a partição. A partir da data de exercício imediatamente anterior à expiração da opção ($t = T-1$), calcula-se o valor da opção em cada partição comparando-se o *payoff* de exercício imediato com o valor de continuação (eq. 60). O procedimento é repetido até $t=0$ (BARRAQUAND; MARTINEAU, 1995; BOYLE et al., 1997; GLASSERMAN, 2004).

$$V_{ij} = \max \left\{ h_{ij}, \sum_{k=1}^{b_{i+1}} p_{jk}^i V_{i+1,k} \right\} \quad [\text{eq. 60}]$$

Onde:

V_{ij} : valor da opção na partição j em t_i

h_{ij} : *payoff* do exercício imediato na partição j em t_i

p_{jk}^i : probabilidade de transição da partição j para a partição k

$V_{i+1,k}$: valor da opção na partição k em t_{i+1}

Como o método seleciona uma única variável de estado para particionar o espaço de estados, pode não haver convergência de resultados quando há setores disjuntos de exercício ótimo (BROADIE; GLASSERMAN apud CORTAZAR et al., 1999). Visando uma solução para esse problema, Raymar e Zwetcher citados em Cortazar et al. (1999) propõem realizar a partição considerando duas dimensões.

O método de Barraquand e Martineau é utilizado por Cortazar e Schwartz (1998) para avaliar um campo de petróleo não explorado. Nesse modelo, a incerteza é descrita por um processo estocástico de dois fatores (preço *spot* do petróleo e *convenience yield*). A variável de estado

utilizada para realizar a partição foi o valor do campo de petróleo desenvolvido. Cortazar *et al.* (1999) analisam o mesmo problema utilizando o modelo de Raymar e Zwetcher, particionando o espaço de estados de acordo com o valor do campo de petróleo desenvolvido e com a *convenience yield*.

6.5.1.4 Método da Malha Estocástica

O primeiro passo é simular diversas trajetórias independentes do processo estocástico (X_0, X_1, \dots, X_m). Em seguida, interconectam-se todos os nós de intervalos de tempo consecutivos, conforme mostra a figura 18. A cada conexão de nós é associado um peso (BROADIE; GLASSERMAN, 1997; BOYLE et al. 1997; GLASSERMAN, 2004).

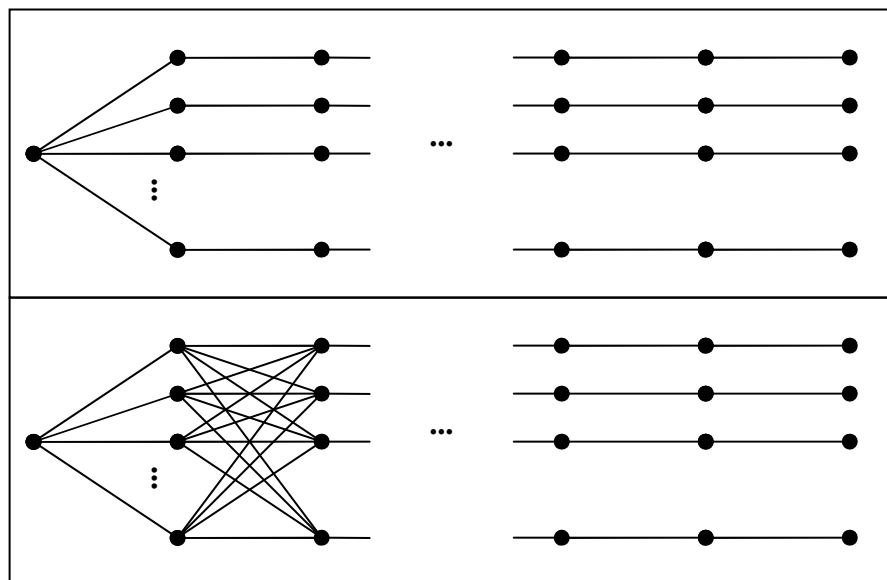


Figura 18 – Construção da malha estocástica
Fonte: GLASSERMAN, 2004

O valor da opção é obtido por meio de um procedimento de programação dinâmica. O valor nos nós terminais é obtido pela equação de *payoff* da opção. Nos nós anteriores, compara-se o *payoff* imediato com o valor de continuação, que corresponde à média dos valores dos nós consecutivos, ponderada pelos pesos associados às transições do nó em análise para esses nós. Segue-se essa lógica até chegar ao período inicial.

6.5.1.5 Métodos baseados em regressão

O método consiste em simular trajetórias das variáveis de estado do ativo-objeto, e, em seguida, partindo da data de expiração até a data de início da opção, comparar o valor de exercício imediato com o valor de continuação. O valor de continuação é obtido realizando-se uma regressão (normalmente seguindo a técnica de mínimos quadrados), utilizando os dados de todas as trajetórias simuladas, onde x corresponde ao valor da variável de estado em $t=i$ e y corresponde ao valor de continuação em $t=i+1$. Uma questão chave para a obtenção de uma boa estimativa do valor da opção é a escolha das funções base a serem usadas na regressão. Além disso, à medida que o número de dimensões do vetor de estados do ativo-objeto cresce, também aumenta a quantidade necessária de funções para realizar a regressão (LONGSTAFF; SCHWARTZ, 2001).

A grande vantagem do método baseado em regressão é a possibilidade de analisar opções que envolvem várias fontes de incerteza de forma rápida (GLASSERMAN, 2004).

Sabour e Poulin (2006) compararam os resultados obtidos pelo Método de Regressão com os do estudo de Brennan e Schwartz para uma mina de cobre. O valor da mina e os preços limites para exercício das opções foram semelhantes, indicando a validade do método. No mesmo artigo, os autores aplicaram o método na avaliação de uma mina multi-metals com sete fontes de incerteza.

7 Apresentação do estudo de caso

7.1 A Indústria de mineração no Brasil

A mineração é um dos setores produtivos mais importantes do Brasil. A exportação de *commodities* minerais é um dos principais fatores de superávit da balança comercial do país e, conseqüentemente, de redução da vulnerabilidade externa da economia brasileira. O país está entre os grandes *players* mundiais do setor.

A participação da mineração na economia brasileira tem aumentado significativamente nos últimos anos. Em 2000, a participação do setor no PIB era de 2,57%. Em 2005, alcançou 4,89%. O setor contribui com 26,9% do valor exportado pelo Brasil. As exportações do setor em 2006 foram de US\$40,1 bilhões e as importações totalizaram US\$ 28,3 bilhões, o que corresponde a um superávit comercial de US\$ 11,8 bilhões ou 21,3% da balança comercial brasileira. O minério de ferro é o principal produto de exportação da indústria extrativa mineral brasileira, correspondendo a 49,9% do total exportado pelo setor, seguido do petróleo (38,5%), rochas ornamentais e de revestimento (4,4%) e do cobre (2,8%) (DNPM, 2007).

A economia mundial tem apresentado um crescimento elevado e constante nos últimos anos (5,4% em 2006), impulsionado pelo crescimento dos países emergentes, capitaneado por China e Índia e sustentado pelo crescimento lento, mas contínuo, da Europa (MACQUARIE, 2007). A China, um país em processo de construção de sua infra-estrutura em ritmo acelerado, tem levado a um forte aumento do consumo de *commodities* minerais.

O Brasil, com sua vocação para o negócio de mineração, tem tirado proveito desse aumento de consumo. A indústria extrativa mineral apresentou crescimento de 9,8% em 2005 e de 6% em 2006. Resultado muito superior ao obtido pelo PIB nacional: 2,94% em 2005 e 3,7% em 2006. O investimento previsto para o setor para o período de 2007 a 2011 é de US\$28 bilhões ou 5,6 bilhões de dólares por ano. O fluxo de comércio internacional, obtido pela soma de exportações e importações, foi de US\$68,4 bilhões em 2006, o que significou um crescimento de 27,9% em relação a 2005. Entre os minerais não-ferrosos, os de maior crescimento em

2006 foram o cobre, a bauxita e o zinco. Entre os minerais ferrosos, o minério de ferro, o manganês e o nióbio apresentaram aumento significativo de produção (DNPM, 2007).

Tabela 2 – Minerais com maior crescimento de produção em 2006

| Mineral | Produção 2006 (mil t) | Crescimento da Produção (%) |
|------------------|----------------------------------|--|
| Cobre | 148 | 11,1 |
| Bauxita | 22.100 | 8,8 |
| Zinco | 185 | 8,5 |
| Minério de ferro | 317.800 | 13,3 |
| Manganês | 4.300 | 11,1 |
| Nióbio | 71 | 21,7 |

Fonte: DNPM, 2007

O Brasil é o 16º maior produtor mundial de cobre. Sua produção passou de 30 mil t em 2001 para 148 mil t em 2006. Projetos de grande porte em andamento farão com que o Brasil se torne autosuficiente em cobre, gerando excedente exportável em curto espaço de tempo.

A produção de zinco tem forte correlação com a indústria de aço (chapas galvanizadas). Atualmente, o Brasil é importador líquido do metal, mas sua produção tem apresentado crescimento contínuo nos últimos anos.

7.2 Cenário mundial: aumento de consumo e preços elevados

A partir de 2004, houve uma escalada dos preços das *commodities* minerais, impulsionada pelo crescimento das economias emergentes, principalmente da China, como pode ser visto nos gráficos 7 a 10. Segundo empresas especializadas, o efeito de investimentos especulativos sobre os preços não é significativo, a razão da alta é o descompasso entre demanda e oferta. A situação atual do setor é de elevada taxa de utilização da capacidade instalada e de baixos níveis de estoque. Isto leva a uma maior sensibilidade do mercado a pequenas oscilações de oferta e demanda, causando elevada volatilidade de preços.

Empresas especializadas projetam que, pelo menos nos próximos anos, os preços da maioria das *commodities* se manterão elevados, devido ao baixo nível de estoque e ao tempo de maturação de projetos de expansão de capacidade das grandes empresas. Segundo o FMI, o momento e a velocidade de reversão de preços são incertos.

**Preço Spot LME - Zinco
US\$/t**

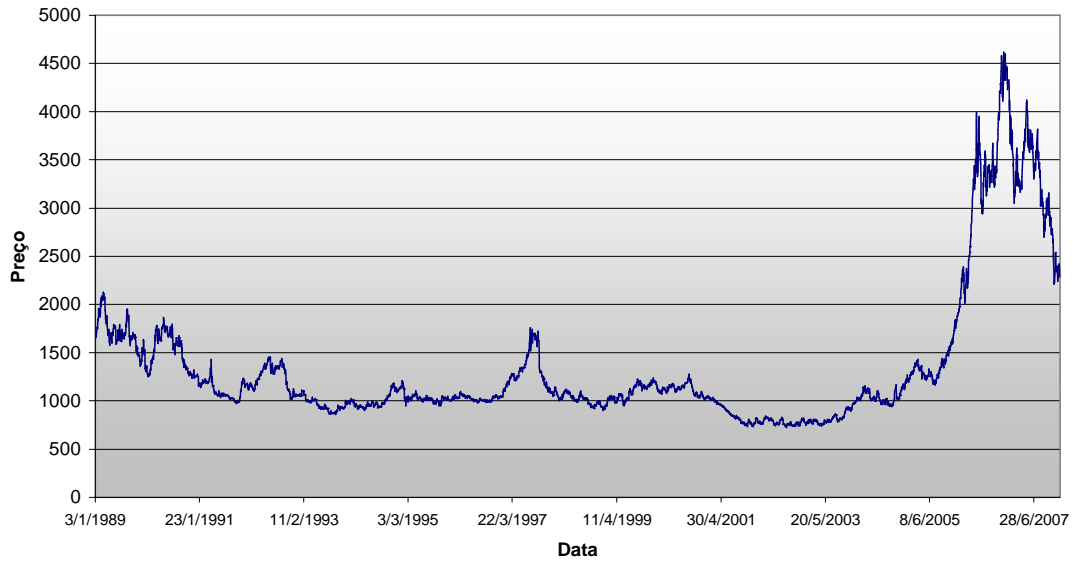


Gráfico 7 – Evolução do preço do zinco
Fonte: LME, 2007

**Preço Spot LME - Cobre
US\$/t**



Gráfico 8 – Evolução do preço do cobre
Fonte: LME, 2007

**Preço Spot London Fix - Ouro
US\$/oz**



Gráfico 9 – Evolução do preço do ouro
Fonte: KITCO, 2007

**Preço Spot London Fix - Prata
US\$/oz**

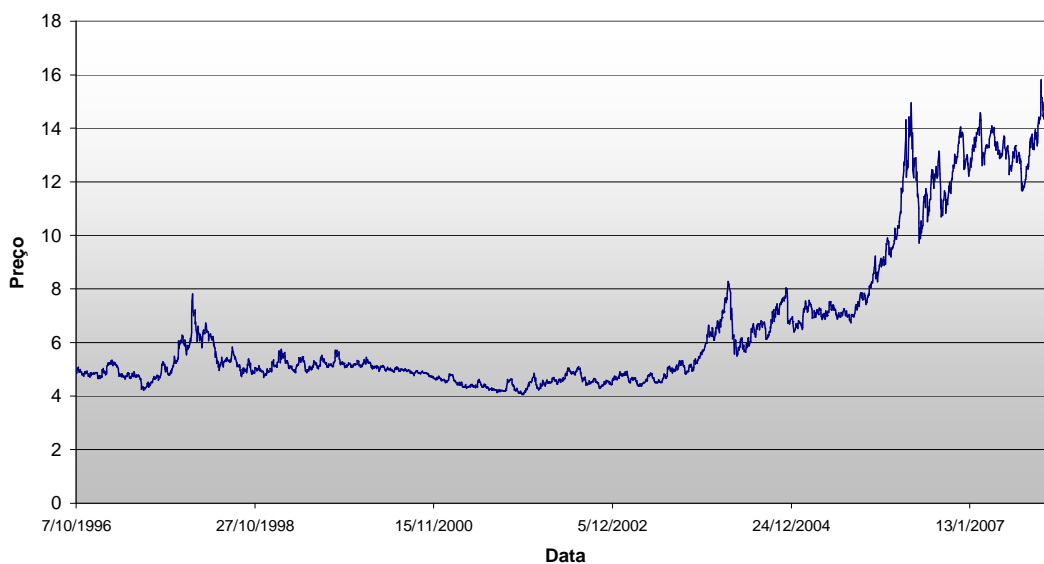


Gráfico 10 – Evolução do preço da prata
Fonte: KITCO, 2007

O preço do cobre sofreu um aumento de 81% de 2005 para 2006, mantendo-se nesse patamar em 2007, mas com alta volatilidade. Empresas especializadas têm elevado as projeções de

preços do metal para 2008 e 2009, considerando que há pouca probabilidade dos estoques se reconstituírem antes de 2010 (IBRAM, 2007).

O preço do zinco apresentou crescimento ainda mais elevado entre 2005 e 2006 (137%), mas com forte redução ao longo do ano de 2007. Espera-se uma redução a partir de 2008. No longo prazo, deve haver uma redução do fornecimento devido ao esgotamento de algumas minas de grande porte (IBRAM, 2007).

O comportamento de metais preciosos como o ouro e a prata é afetado por variáveis distintas das que atuam sobre as *commodities*. A relação entre capacidade produtiva e demanda para consumo é substituída pela comparação do investimento nos metais em relação a outros ativos financeiros. O elevado crescimento da economia tem levado a uma procura por esses metais como forma de diversificação de investimentos.

A tabela a seguir apresenta a previsão realizada em julho de 2007 por uma empresa especializada para o preço dos metais a serem extraídos no projeto analisado.

Tabela 3 – Projeção de preço de metais

| Ano | Zinco (US\$/t) | Cobre (US\$/t) | Ouro (US\$/oz) | Prata (US\$/oz) |
|------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| 2007 | 3879 | 7295 | 679 | 13,65 |
| 2008 | 2931 | 7383 | 658 | 11,00 |
| 2009 | 2755 | 7273 | 605 | 11,00 |
| 2010 | 2645 | 6612 | 605 | 11,00 |
| 2011 | 1873 | 6392 | 605 | 11,00 |
| LT | 1763 | 3967 | 605 | 11,00 |

Fonte: Raymond James, 2007

Em função dessa forte elevação dos preços de *commodities*, reservas que antes eram consideradas inviáveis devido à pequena escala, ao baixo teor de metais ou ao custo elevado de exploração têm se tornado atrativas. Entretanto, os empreendedores, cientes da volatilidade dos preços, tendem a esperar que estes subam a tal ponto que o risco de haver uma inversão de cenário seja baixo.

Nas análises de viabilidade, essas empresas empregam taxas de desconto elevadas para incorporar o efeito do risco de mercado. O emprego desse raciocínio torna as decisões conservadoras e oportunidades de investimento lucrativas são descartadas. A utilização de um instrumento financeiro mais adequado a ambientes de incerteza elevada e flexibilidade

gerencial pode contribuir significativamente para a melhora da tomada de decisões nessas empresas.

7.3 O empreendimento

O empreendimento objeto do estudo de caso consiste na exploração de uma mina de zinco e cobre e no beneficiamento desses minérios. Os produtos vendidos são os concentrados de zinco e de cobre, que contém também ouro e prata. Toda a produção de zinco é vendida para uma empresa que produz lingotes do metal. O contrato entre as duas empresas atrela o preço de venda ao preço *spot* do metal publicado pela *London Metals Exchange* – LME. Nos contratos de venda, existe um escalador que estabelece um desconto adicional proporcional ao preço de mercado estabelecido pela LME, desde que ultrapasse limites máximos ou mínimos ao redor de um preço histórico determinado. Esse escalador acaba reduzindo a volatilidade do preço do cobre para as minas. O concentrado de cobre, ouro e prata é exportado para um *trader*. O contrato segue uma lógica semelhante ao de venda do zinco.

A mina é situada no estado do Mato Grosso, a propriedade compreende o direito mineral de uma área de 875 ha e o direito de exploração de uma área adjacente de 10.000 ha. A empresa também solicitou o direito de exploração de mais três áreas próximas, cobrindo um total de 20.667 ha. Essa é uma indicação da existência de opções reais de crescimento, que podem alterar significativamente o valor do empreendimento.

O empreendimento foi subdividido em 2 etapas. A primeira etapa corresponde à exploração de uma reserva de 1,1 milhão de toneladas de minério durante 4 anos. Estudos geológicos baseados em normas aceitas pelos meios acadêmicos e econômicos permitem estimar com relativa precisão os teores de metal da reserva e os custos de produção. A segunda etapa corresponde à exploração por mais 2 anos de uma reserva de 500 mil toneladas, adjacente à primeira. Em função da proximidade das duas frentes de lavra, pode-se considerar que as características das reservas e os custos de produção sejam semelhantes nas duas frentes. Um estudo geológico a ser realizado na segunda reserva fornecerá informações mais precisas sobre quantidades e teores e servirá de base para a realização de ajustes no processo de lavra e

beneficiamento. Há a possibilidade de aumentar a capacidade do processo de concentração do minério, o que reduziria o tempo de exploração da 2ª reserva para 1 ano e meio.

7.3.1 Processo produtivo

A primeira etapa do processo é a extração do minério da mina. A mina é subterrânea e o método de lavra empregado é o de corte e enchimento. A capacidade de extração é de 22.500 t/mês. O minério com granulometria entre 1 e 12 polegadas é, em seguida, transportado por caminhão até a planta de beneficiamento, onde é acumulado em um estoque regulador. A função desse estoque, além de armazenar minério em quantidade suficiente para evitar rupturas de produção, é garantir um teor de metais relativamente constante para que a etapa de flotação opere com estabilidade.

A primeira etapa do beneficiamento é a britagem em quatro estágios. Os dois primeiros utilizam britadores de mandíbula e os dois últimos de cone. Ao término da britagem, o minério apresenta granulometria inferior a 11 mm. A moagem é realizada em moinhos de bola. 80% do material apresenta granulometria inferior a 150 mesh.

A flotação consiste em etapas de desbaste e separação através de células e limpeza através de colunas e é capaz de produzir os concentrados de zinco e cobre (com ouro e prata). O rejeito passa pelo processo de *back fill*, que consiste em uma bateria de hidrociclones que separa o material fino, enviado a uma barragem de rejeitos, do material grosso, que é utilizado para fazer o enchimento da mina.

Os concentrados de zinco e cobre passam por processos distintos de filtragem, em filtros prensa, para redução da umidade e depois seguem para a expedição. O concentrado de zinco é transportado por caminhão até a planta de refino do cliente e o concentrado de cobre é destinado à exportação.

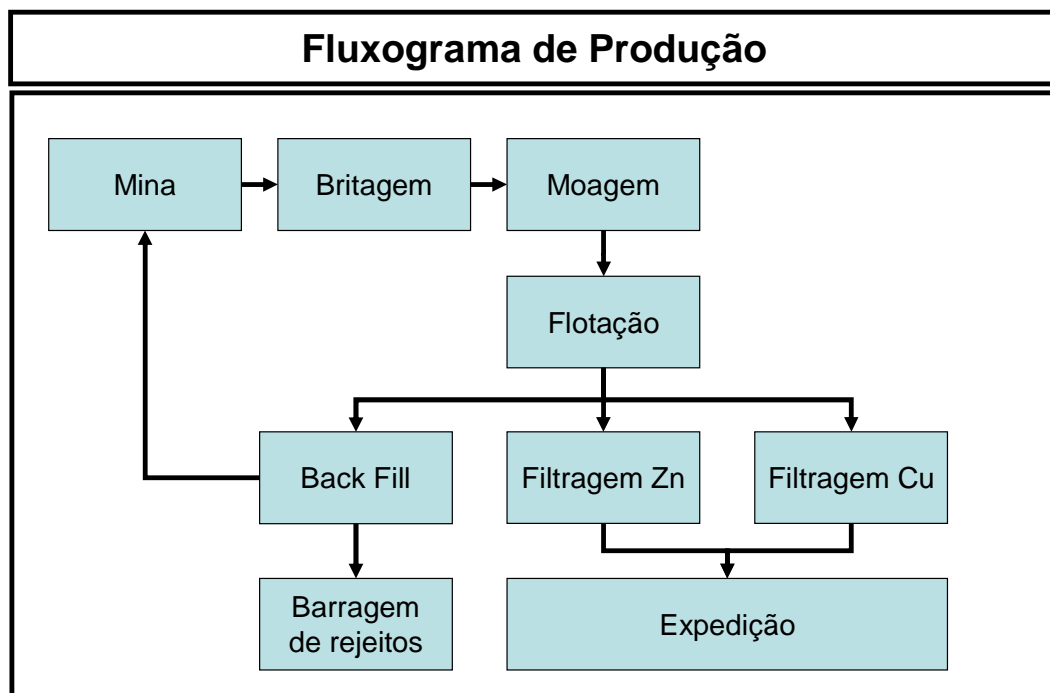


Figura 19 – Fluxograma do processo produtivo

7.3.2 Riscos do empreendimento

Os riscos envolvidos em um empreendimento podem ser classificados em privados ou de mercado. Riscos privados são aqueles relacionados exclusivamente à empresa. Os riscos de mercado estão relacionados às condições econômicas e afetam todas as empresas. Os riscos privados, ao contrário dos riscos de mercado, podem ser mitigados pela formação de um portfólio diversificado de ativos.

Os principais riscos de mercado relacionados ao empreendimento em análise são o preço dos metais, a demanda e a taxa de câmbio. Para minimizar esse tipo de risco, a empresa pode lançar mão de diversas opções como utilizar contratos de *hedge* tanto para o preço quanto para o câmbio, incluir cláusulas contratuais que garantam a compra do produto e que fixem limites mínimos e máximos para os preços. No caso desse empreendimento, optou-se por utilizar uma cláusula contratual que institui fatores de desconto no caso de elevação significativa de preços e fatores de prêmio no caso de preços muito baixos, reduzindo a exposição às flutuações de preço dos metais.

Os riscos privados estão relacionados ao tamanho da reserva, ao teor de metal no minério, aos custos de extração e beneficiamento e à taxa de recuperação dos metais no processo de beneficiamento. Para minimizá-los, a empresa de mineração realiza estudos geológicos e técnicos.

7.3.3 Etapas de exploração (redução de riscos privados)

A análise de uma área de interesse (*green field*) começa com a exploração geofísica, que pode compreender uma exploração aérea, isto é, um sobrevôo pela área de interesse para identificar características que indiquem a possibilidade de presença de minerais, e uma exploração em solo. Encontrada uma anomalia, pode-se realizar uma exploração geoquímica de solo ou de leito de rio. Constatada a presença de minerais, a área passa a ser denominada um *brown field*.

Caso as primeiras explorações identifiquem as anomalias como alvos, elas serão tratadas por um método de exploração mais preciso conhecido por sondagem roto percursiva. São feitos furos de sondagem na rocha para coleta de amostras do mineral (testemunho). O material coletado é submetido a testes de bancada para levantamento de teores de metais. Sondagens adicionais permitem estimar a extensão da reserva e a quantidade de minério. Em paralelo, são realizados estudos de pré-viabilidade. Indicada a viabilidade do empreendimento, é comum abrir a mina para realizar uma lavra experimental. O material extraído é levado para a realização de testes em escala piloto. A partir dos testes, podem-se definir parâmetros do processo de beneficiamento e estimar a taxa de recuperação dos metais. Nesse ponto, é possível elaborar estudos econômicos de viabilidade com maior precisão.

Cada etapa de exploração envolve o desembolso de valores significativos, que vão aumentando à medida que se aprofundam os testes. Assim, em cada etapa, uma análise de pré-viabilidade econômica deve ser conduzida, combinando dados técnicos e financeiros para decidir sobre a continuidade ou não da exploração.

7.4 Metodologia de análise

O objetivo deste estudo é comparar o valor estimado do projeto por meio das técnicas de Fluxo de Caixa Descontado (FCD) e da Análise de Opções Reais (AOR) e estimar o valor adicionado pela flexibilidade gerencial.

A incerteza foi incorporada na análise por meio da modelagem dos preços dos metais e da taxa de câmbio como processos estocásticos. Foram adotadas três formas de modelar a incerteza:

Quadro 8 – Alternativas de modelagem da incerteza

| | Incerteza | Modelagem | Pressupostos |
|----|---|---------------------------------|--|
| I1 | <ul style="list-style-type: none"> • Preço do zinco | MBG | <ul style="list-style-type: none"> • Os preços de todos os metais da reserva são perfeitamente correlacionados ao preço do zinco, que é a principal fonte de receita do projeto. • O preço do zinco segue um Movimento Browniano Geométrico. • A taxa de câmbio é determinística. |
| I2 | <ul style="list-style-type: none"> • Preço do zinco | PRM | <ul style="list-style-type: none"> • Os preços de todos os metais da reserva são perfeitamente correlacionados ao preço do zinco, que é a principal fonte de receita do projeto. • O preço do zinco segue um Processo de Reversão à Média. • A taxa de câmbio é determinística. |
| I3 | <ul style="list-style-type: none"> • Preço do zinco • Preço do cobre • Preço do ouro • Preço da prata • Taxa de câmbio | PRM PRM PRM PRM MBG | <ul style="list-style-type: none"> • Cada metal segue um processo estocástico de reversão à média independente. • A taxa de câmbio segue um Movimento Browniano Geométrico. |

Serão utilizadas duas técnicas de valoração do projeto. A técnica de FCD gerará um resultado que corresponderá ao projeto sem flexibilidade, para o qual não há cursos de ação alternativos a serem seguidos em função da evolução das variáveis de entrada. A AOR gerará o resultado do projeto com flexibilidade. Combinando-se as três alternativas de modelagem da incerteza com as duas técnicas de valoração de projetos, conforme exposto no quadro 9, são obtidos seis resultados distintos. A partir desses resultados, será realizada uma análise do impacto da técnica de precificação e da estratégia de modelagem de incerteza adotadas sobre o valor do projeto e sobre a decisão a ser tomada. Os resultados obtidos serão comparados com estimativas de bancos e instituições especializadas na análise do mercado de *commodities*.

Quadro 9 – Modelos de análise utilizados

| | I1 | I2 | I3 |
|------------|-----------|-----------|-----------|
| FCD | FCD-I1 | FCD-I2 | FCD-I3 |
| AOR | AOR-I1 | AOR-I2 | AOR-I3 |

O modelo de análise do empreendimento pode ser subdividido nas seguintes etapas:

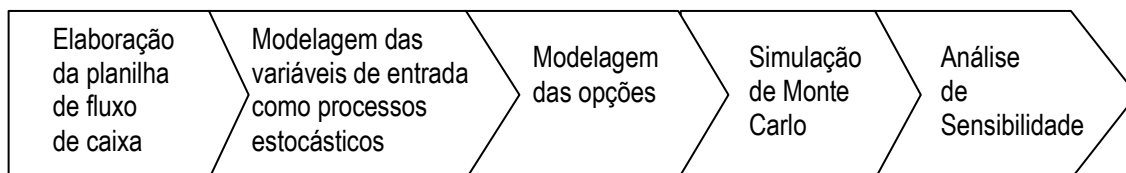


Figura 20 – Seqüência de análise

7.4.1 Elaboração da planilha de fluxo de caixa do empreendimento

O fluxo de caixa do empreendimento foi subdividido em trimestres. As variáveis aleatórias do fluxo de caixa são os preços dos metais e a taxa de câmbio. A receita bruta foi estimada baseando-se na quantidade de minério processada, no teor de metais do minério, na eficiência da etapa de concentração e no preço dos metais de cada concentrado vendido. Para obter a receita líquida, foram considerados os descontos contratuais, *royalties*, os impostos sobre vendas e despesas comerciais.

Os custos de produção foram desmembrados em custos fixos e variáveis de mineração e de beneficiamento. Os valores foram estimados de acordo com a experiência da empresa em projetos semelhantes. Além dos custos de produção foram estimadas despesas indiretas do projeto. Como a planilha foi elaborada em dólar, o efeito da taxa de câmbio foi calculado pela multiplicação da variação da taxa pelos custos. A figura a seguir é uma representação esquemática da planilha utilizada.

O investimento para explorar a 1ª reserva foi estimado em US\$ 21,7 milhões e compreende dispêndios com pesquisas geológicas da reserva, aquisição de equipamentos, gastos pré-operacionais e investimentos de manutenção das instalações durante a exploração da mina. O investimento necessário para explorar a 2ª reserva consiste em pesquisas geológicas e preparação da mina para exploração e é avaliado em US\$ 1,5 MM. O investimento para aumento de capacidade de beneficiamento é avaliado em mais US\$ 1,5 MM.

| | Reserva 1 | | | | | | Reserva 2 | | | | | |
|------------------------------------|-----------|--------|--------|--------|-----|---------|-----------|---------|---------|---------|-----|---------|
| | TRIM 1 | TRIM 2 | TRIM 3 | TRIM 4 | ... | TRIM 16 | TRIM 17 | TRIM 18 | TRIM 19 | TRIM 20 | ... | TRIM 24 |
| Preços | | | | | | | | | | | | |
| Preço Zn (US\$/t) | 3590 | 3424 | 3272 | 3133 | ... | | | | | | | |
| Preço Cu (US\$/t) | 7730 | 7400 | 7095 | 6814 | ... | | | | | | | |
| Preço Ag (US\$/oz) | 12.47 | 12.01 | 11.59 | 11.22 | ... | | | | | | | |
| Preço Au (US\$/oz) | 651 | 641 | 631 | 622 | ... | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | |
| Dados de produção | | | | | | | | | | | | |
| Minério processado | 68589 | 68589 | 68589 | 68589 | | | | | | | | |
| Teor de metais | ... | | | | | | | | | | | |
| Metal contido no minério | | | | | | | | | | | | |
| % concentração | | | | | | | | | | | | |
| Metal contido no concentrado | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | |
| Dados de receita | | | | | | | | | | | | |
| Receita bruta | | | | | | | | | | | | |
| Deduções | | | | | | | | | | | | |
| Impostos sobre vendas | | | | | | | | | | | | |
| Despesas de Marketing e Vendas | | | | | | | | | | | | |
| Royalties | | | | | | | | | | | | |
| Receita líquida | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | |
| Dados de custo | | | | | | | | | | | | |
| Custos fixos de mineração | | | | | | | | | | | | |
| Custos variáveis de mineração | | | | | | | | | | | | |
| Custos fixos de beneficiamento | | | | | | | | | | | | |
| Custos variáveis de beneficiamento | | | | | | | | | | | | |
| Despesas gerais e administrativas | | | | | | | | | | | | |
| Despesas ambientais | | | | | | | | | | | | |
| Despesas de overhead | | | | | | | | | | | | |
| Impostos sobre o lucro | | | | | | | | | | | | |
| Efeito da taxa de câmbio | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | |
| Fluxo de caixa livre | | | | | | | | | | | | |

Figura 21 – Representação esquemática da planilha de fluxo de caixa do empreendimento

Como os preços foram simulados em ambiente neutro ao risco, a taxa livre de risco foi utilizada na estimativa do valor presente dos fluxos de caixa. O valor de juros pagos pela NTN-F de 08/2007 com vencimento em 2017 (11,31%) foi utilizado como taxa livre de risco, descontada a inflação de 3,50% projetada para 2007 conforme o Relatório de Inflação do Banco Central, tem-se $r_f = 7,55\%$.

7.4.2 Modelagem das variáveis de entrada como processos estocásticos

Os preços dos metais e a taxa de câmbio foram definidos como variáveis aleatórias e sua modelagem foi realizada de acordo com as três estratégias I1, I2 e I3 apresentadas anteriormente. O detalhamento dessa modelagem é apresentado no capítulo 8. As demais variáveis de entrada, relacionadas a aspectos técnicos e de custos do projeto foram consideradas determinísticas devido ao maior grau de certeza que o corpo técnico possui em relação a elas.

7.4.3 Modelagem das Opções Reais

O projeto sem flexibilidade corresponde à exploração das 2 reservas, totalizando 6 anos de exploração, mantendo a capacidade da planta de beneficiamento constante. Foram criadas 2 opções europeias, cujas datas de maturidade são o início do 17º trimestre.

- Opção A: interromper a exploração quando a 1ª reserva se esgotar e não desembolsar o investimento de US\$ 1,5 milhões necessários à exploração da 2ª reserva;
- Opção B: investir mais US\$ 1,5 milhões para expandir a capacidade de beneficiamento dos minérios, aumentando a geração de fluxo de caixa e reduzindo em 2 trimestres o tempo de exploração da 2ª reserva.

O valor da opção em $t = 16$, em cada rodada de simulação foi obtido por meio do seguinte *payoff*:

$$\max (X_1 - S_1, S_2 - X_2, 0) \quad [\text{eq. 61}]$$

Onde:

Quadro 10 – Fórmulas de *payoff* das opções

| | Opção A | Opção B |
|-------------------------------|--|---|
| Descrição | Interrupção do projeto ao término da exploração da 1ª reserva | Exploração da 2ª reserva com aumento de capacidade de beneficiamento |
| Tipo de Opção Real | Abandono | Expansão |
| Analogia com Opção Financeira | Opção de Venda Europeia | Opção de Compra Europeia |
| Ativo-objeto | S_1 (VP dos fluxos de caixa da 2ª etapa em $t = 16$) | S_2 (VP da diferença do fluxo de caixa com aumento da capacidade de beneficiamento em $t = 16$) |
| Preço do exercício | X_1 (Investimento necessário para a implantação da 2ª etapa em $t = 16$) | X_2 (Investimento adicional para expansão da capacidade de beneficiamento em $t = 16$) |
| Equação | $\max (X_1 - S_1, 0)$ | $\max (S_2 - X_2, 0)$ |

O valor da opção em $t = 0$ é obtido descontando-se o *payoff* à taxa livre de risco:

$$VP_{opção} = \frac{\max(X_1 - S_1, S_2 - X_2, 0)}{(1 + r_f)^{16}} \quad [\text{eq. 62}]$$

O VPL do projeto com flexibilidade em cada rodada é dado pelo VPL do projeto sem flexibilidade (VPL_1) mais o valor da opção em $t = 0$.

$$VPL_{\text{expandido}} = VPL_1 + \frac{\max(X_1 - S_1, S_2 - X_2, 0)}{(1 + r_f)^{16}} \quad [\text{eq. 63}]$$

O VPL do projeto com flexibilidade e o valor da opção são obtidos pela média aritmética das 1000 rodadas de simulação.

7.4.4 Simulação de Monte Carlo

A simulação de Monte Carlo dos fluxos de caixa trimestrais do projeto foi realizada utilizando-se o software @risk. A lógica utilizada é representada pela figura a seguir.

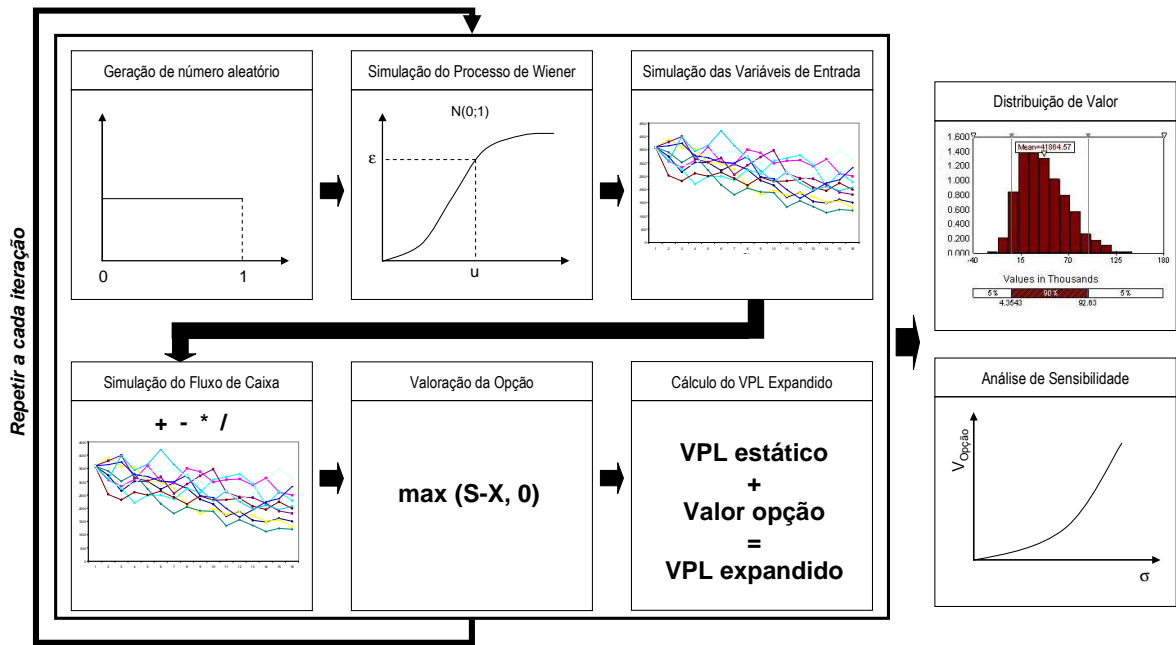


Figura 22 – Etapas da Simulação de Monte Carlo

Em cada rodada de simulação, gera-se um número aleatório para cada uma das variáveis de entrada do modelo em cada um dos 16 trimestres do período de exploração da 1ª reserva. Utilizando o número aleatório gerado, extrai-se o valor de ϵ de uma distribuição normal padronizada, esse valor é utilizado para simular o incremento de Wiener ($dz = \epsilon\sqrt{dt}$).

O incremento de Wiener simulado em cada trimestre é utilizado na equação do processo estocástico de cada uma das variáveis de entrada, para gerar o valor de cada variável em cada

trimestre. A partir dos valores de entrada, obtém-se o fluxo de caixa de cada um dos 16 trimestres da etapa inicial, por meio das relações matemáticas da planilha de fluxo de caixa.

Para estimar os fluxos de caixa da 2ª etapa do empreendimento, foi adotada a seguinte lógica em relação às variáveis de entrada. O valor obtido na simulação de cada variável em $t = 16$ foi adotado como o preço inicial para a 2ª etapa. Em seguida, foram calculados os valores esperados dos processos estocásticos para $t = 17$ a $t = 24$ (período de exploração da 2ª frente de lavra), partindo do preço inicial definido. O fluxo de caixa de cada período foi, então, obtido, utilizando a mesma lógica de cálculo da planilha de fluxo de caixa da 1ª etapa. Os fluxos de caixa gerados foram trazidos para o valor presente em $t = 16$.

Foram realizadas 1.000 simulações do fluxo de caixa do empreendimento. Em cada simulação foram geradas as seguintes variáveis de saída:

- VPL da 1ª alternativa sem flexibilidade – exploração da 1ª reserva;
- VPL da 2ª alternativa sem flexibilidade – exploração das 2 reservas;
- VPL da 3ª alternativa sem flexibilidade – exploração das 2 reservas com expansão de capacidade;
- VP em $t = 16$ dos fluxos de caixa gerados pela exploração da 2ª reserva;
- VP em $t = 16$ dos fluxos de caixa gerados pela exploração da 2ª reserva com expansão de capacidade.

A partir desses dados, é possível estimar o *payoff* de cada opção e selecionar a alternativa de maior VPL em cada rodada de simulação: o projeto sem flexibilidade, a opção de abandono ou a opção de expansão de capacidade. O VPL expandido do projeto e o valor da opção são obtidos pela média aritmética das 1000 rodadas de simulação.

7.4.5 Análise de sensibilidade

A análise de sensibilidade foi realizada para o modelo AOR-I3, que trata cada variável de entrada como um processo estocástico distinto. A análise de sensibilidade permitiu avaliar o impacto dos parâmetros dos processos estocásticos no valor das opções de abandono e expansão. Os parâmetros analisados foram o preço inicial dos metais, a taxa de reversão à

média e a volatilidade dos preços. Além disso, foi analisada a sensibilidade do valor da opção a variações no valor do investimento (preço de exercício).

8 Simulação das variáveis de entrada

8.1 Levantamento do histórico de preços

O principal metal da reserva é o zinco, mas também é extraído cobre e, na extração do cobre, são obtidos também ouro e prata. O chumbo também está presente na reserva. Assim, foi levantado o histórico de preços dos 5 metais. No caso do zinco, do cobre e do chumbo, foram obtidos dados diários de 1989 a 2007 da Bolsa de Metais de Londres (*London Metals Exchange – LME*). Para o ouro e a prata, os dados também são diários, compreendem o período de 1997 a 2007 e correspondem a cotações do mercado de futuros de Nova York. Os valores foram corrigidos pela inflação ao consumidor dos Estados Unidos, conforme dados do *U.S Department of Labor – Bureau of Labor Statistics*. O gráfico 11 apresenta a evolução do preço *spot* do zinco (nominal e corrigido pela inflação). O gráfico 12 apresenta os preços dos 5 metais corrigidos pela inflação. No eixo principal estão zinco, cobre e chumbo, no eixo secundário o ouro e a prata (cujo preço foi multiplicado por 100 para fins de visualização).

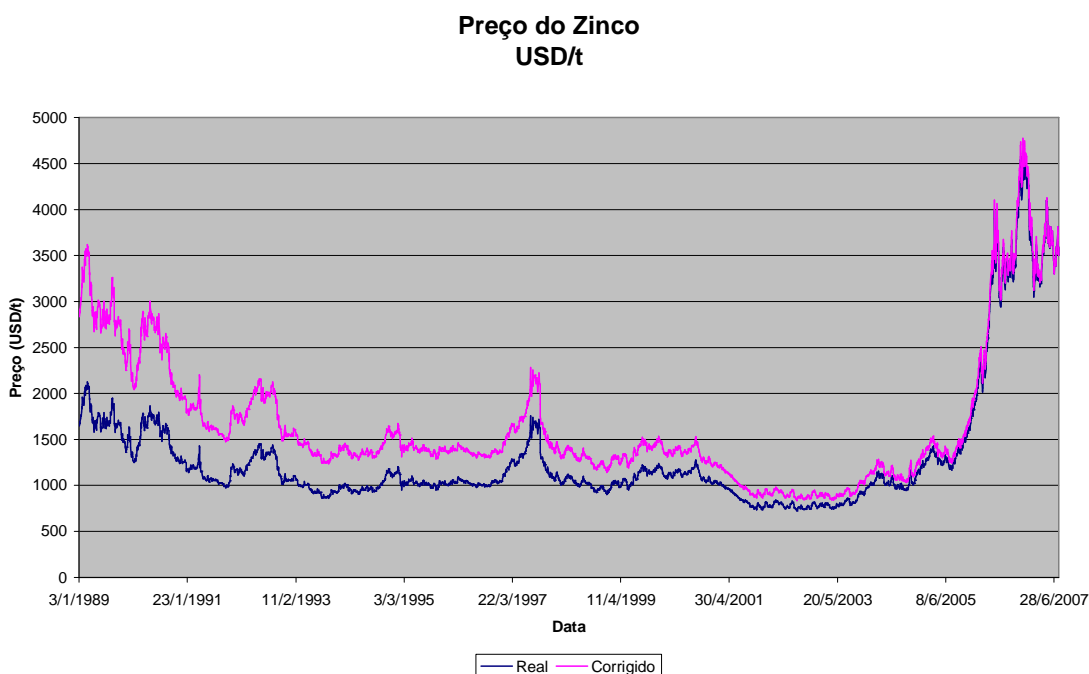


Gráfico 11 – Histórico do preço spot do zinco

Preço de Metais

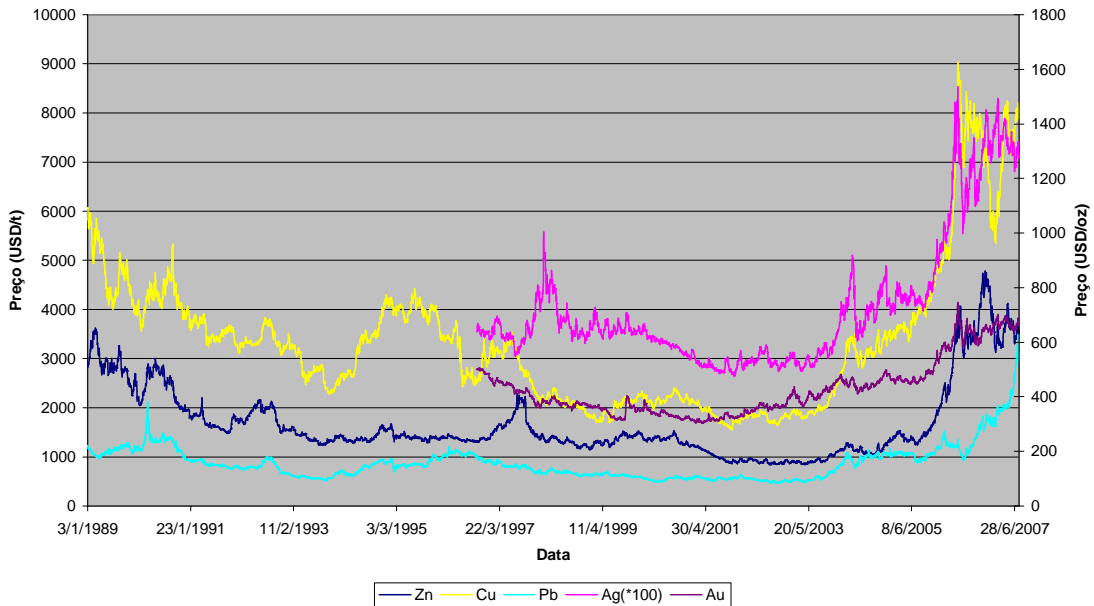


Gráfico 12 – Histórico do preço spot dos metais

Como pode ser observado, o preço dos diversos metais segue um comportamento semelhante, o que indica a existência de alta correlação entre eles. Para verificar esse fato, foram feitas análises de correlação e de regressão entre os preços dos diferentes metais (GRAF. 13). Os resultados são sintetizados na tabela 4.

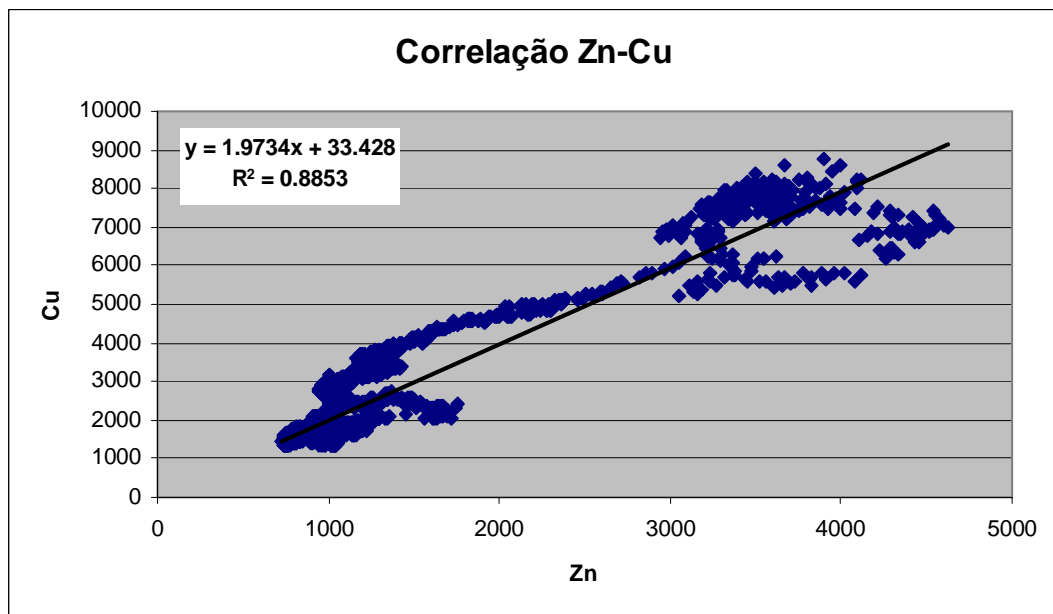


Gráfico 13 – Resultados da regressão Zn-Cu

Tabela 4 – Correlação de preços de metais da reserva

| Metais | Correlação de Preços (R²) |
|----------------|---|
| Zinco – Cobre | 0,89 |
| Zinco – Chumbo | 0,71 |
| Zinco – Prata | 0,88 |
| Zinco – Ouro | 0,77 |
| Cobre – Prata | 0,91 |
| Cobre – Ouro | 0,91 |
| Prata – Ouro | 0,90 |

A análise indicou uma forte correlação entre os preços dos diversos metais, principalmente entre zinco e cobre e entre cobre, prata e ouro. Isto indica que uma avaliação do empreendimento via Análise de Opções Reais utilizando o preço do zinco (que é a principal fonte de receita do projeto) como variável de entrada e utilizando coeficientes que relacionem o preço do zinco ao dos outros metais é uma boa aproximação. Essa estratégia permite utilizar métodos numéricos mais simples como a Árvore Binomial (no caso de adoção do MBG) ou Árvore Trinomial (se adotado o PRM).

8.2 Estimativa dos parâmetros do Movimento Browniano Geométrico

Como apresentado no item 5.5, o Movimento Browniano Geométrico (MBG) é representado pela seguinte equação:

$$dP = \alpha P dt + \sigma P dz \quad [\text{eq. 64}]$$

Onde:

P: preço do ativo

dP: variação do preço

α : termo de drift

σ : volatilidade

dz: incremento de Wiener ($dz = \varepsilon \sqrt{dt}$) onde $\varepsilon \sim N(0;1)$

α e σ são constantes

Para estimar os parâmetros da equação do MBG, é interessante utilizar a relação entre a variável P e seu logaritmo natural que segue o Movimento Browniano Simples (vide item 5.5).

$$dx = d(\ln P) = (\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2) dt + \sigma dz \quad [\text{eq. 65}]$$

ou,

$$dx = \alpha' dt + \sigma dz \quad [\text{eq. 66}]$$

A média dos valores de $\ln P_t - \ln P_{t-1}$ nos dá uma estimativa de α' ($\alpha' = \alpha - \frac{1}{2} \sigma^2$) e o desvio padrão de $\ln P_t - \ln P_{t-1}$ fornece a estimativa da volatilidade σ (HULL, 2005). Para obter o parâmetro α do MBG basta substituir o valor de σ em $(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2)$. Na estimativa dos parâmetros do MBG para o zinco, foram tomados os dados diários do preço *spot* do metal de janeiro de 1989 a julho de 2007, corrigidos pela inflação. Em seguida, foi calculado o valor de $\ln(P_t)$ para cada observação e foi obtida a diferença $\ln P_t - \ln P_{t-1}$, conforme a tabela a seguir.

Tabela 5 – Tabela base para estimativa dos parâmetros do MBG do zinco

| t | Data | P _{Zn} | F = ln(P _{Zn}) | dF |
|------|-----------|-----------------|--------------------------|--------|
| 0 | 3/1/1989 | 2890 | 7,969 | |
| 1 | 4/1/1989 | 2915 | 7,978 | 0,009 |
| 2 | 5/1/1989 | 2907 | 7,975 | -0,003 |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| 4686 | 30/7/2007 | 3500 | 8,160 | -0,006 |
| 4687 | 31/7/2007 | 3590 | 8,186 | 0,026 |

A partir desses dados foram obtidos os parâmetros diários de α e σ . Para obter os parâmetros em outro intervalo de tempo, basta multiplicar α por Δt e σ por $\sqrt{\Delta t}$. Os parâmetros anuais são obtidos fazendo Δt igual ao número de dias de negociação do metal em um ano (251 dias). Os parâmetros obtidos para os metais são apresentados na tabela 6.

Tabela 6 – Parâmetros do MBG do zinco e do cobre

| Metal | Dia | | | Trimestre | | Ano | |
|-------|------------------------|-----------------------------|----------------------|-----------------------------|----------------------|-----------------------------|----------------------|
| | $\alpha - 1/2\sigma^2$ | Volatilidade (σ_d) | Drift (α_d) | Volatilidade (σ_t) | Drift (α_t) | Volatilidade (σ_a) | Drift (α_a) |
| Zn | 0,000046 | 0,0161 | 0,000176 | 12,75% | 1,10% | 25,51% | 4,42% |
| Cu | 0,000064 | 0,0163 | 0,000197 | 12,93% | 1,24% | 25,86% | 4,95% |
| Ag | 0,000258 | 0,0173 | 0,000407 | 13,69% | 2,56% | 27,37% | 10,22% |
| Au | 0,000106 | 0,0099 | 0,000155 | 7,87% | 0,97% | 15,74% | 3,90% |

O valor esperado e o desvio-padrão de P são dados pelas equações abaixo:

$$E[P_t] = P_0 e^{\alpha t} \quad [\text{eq. 67}]$$

$$\sigma[P_t] = P_0 e^{\alpha t} \sqrt{(e^{\sigma^2 t} - 1)} \quad [\text{eq. 68}]$$

No caso de uma distribuição normal, o intervalo de confiança é dado por:

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \sigma \quad [\text{eq. 69}]$$

Substituindo os valores de $E[P_t]$ e $\sigma[P_t]$ e realizando algumas transformações, os limites do intervalo de confiança podem ser calculados por:

$$P_0 e^{\alpha t} e^{\pm z_{\alpha/2} \sigma \sqrt{t}} \quad [\text{eq. 70}]$$

O gráfico 14 apresenta a evolução do preço do zinco de 1989 a 2007 e a projeção do valor médio e dos limites inferior e superior do intervalo de confiança de 95%, iniciando-se a projeção em 2002.

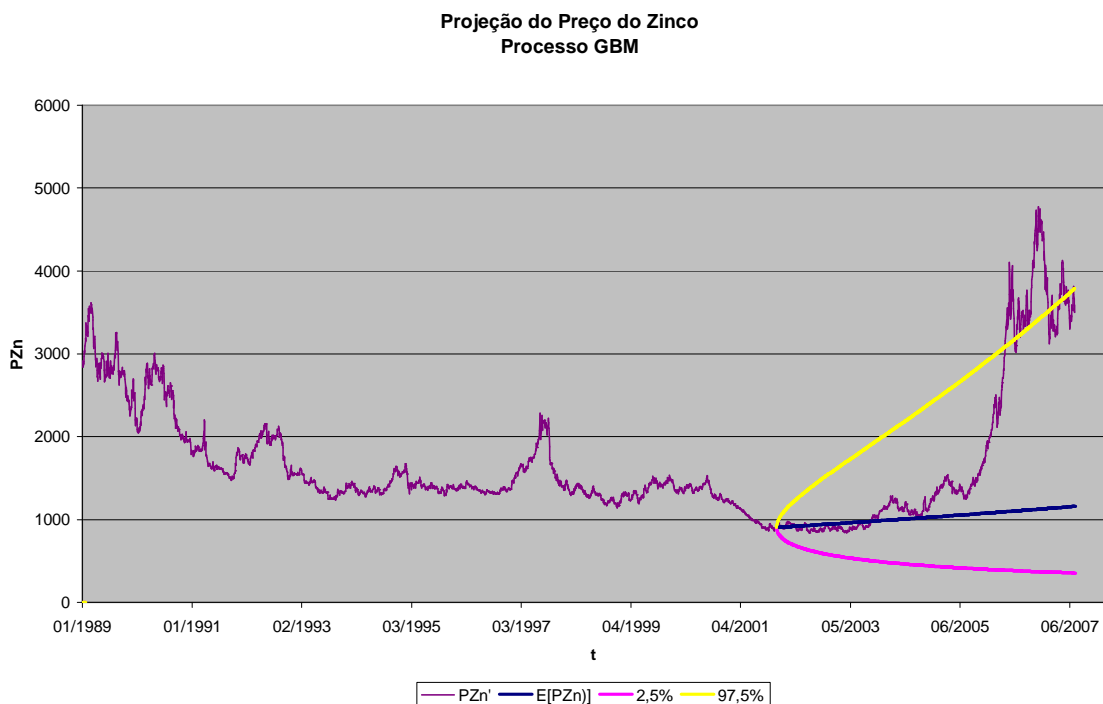


Gráfico 14 – Projeção do valor esperado e do intervalo de confiança para o preço do Zn

Para simular a evolução do preço de um ativo, é necessário obter uma equação que relacione o preço em $t+1$ com o preço no instante anterior t . Dada a equação do Movimento Browniano Simples que descreve o comportamento de $\ln(P)$, podemos obter a equação que descreve o comportamento de P com a seguinte transformação (DIAS, 1995; FRANCISCO, 2007).

$$d[\ln(P)] = \ln(P_{t+1}) - \ln(P_t) = \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2\right) dt + \sigma dz \quad [\text{eq. 71}]$$

$$e^{\ln(P_{t+1}) - \ln(P_t)} = e^{\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dz} \quad [\text{eq. 72}]$$

$$\frac{P_{t+1}}{P_t} = e^{\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dz} \quad [\text{eq. 73}]$$

Como $dz = \sqrt{\Delta t} \varepsilon = \sqrt{\Delta t} N(0;1)$, temos:

$$P_{t+1} = P_t e^{\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} N(0;1)} \quad [\text{eq. 74}]$$

A partir da equação acima, basta utilizar um gerador de números aleatórios, obter o valor correspondente em uma distribuição normal padronizada cumulativa – $N(0;1)$ – e substituí-lo na equação do MBG cujos parâmetros foram estimados.

Nos gráficos 15 e 16, foram realizadas simulações dos preços de zinco e cobre, adotando-se intervalos trimestrais, iniciando a série em agosto de 2007. Foram geradas 5 simulações de evolução do preço de cada metal. São apresentadas também as curvas do valor esperado e dos limites do intervalo de confiança de 95% para o zinco e para o cobre. As equações utilizadas na simulação foram:

$$\text{Zinco} \quad P_{t+1} = P_t e^{0,00291 + 0,128N(0;1)}$$

$$\text{Cobre} \quad P_{t+1} = P_t e^{0,00401 + 0,129N(0;1)}$$

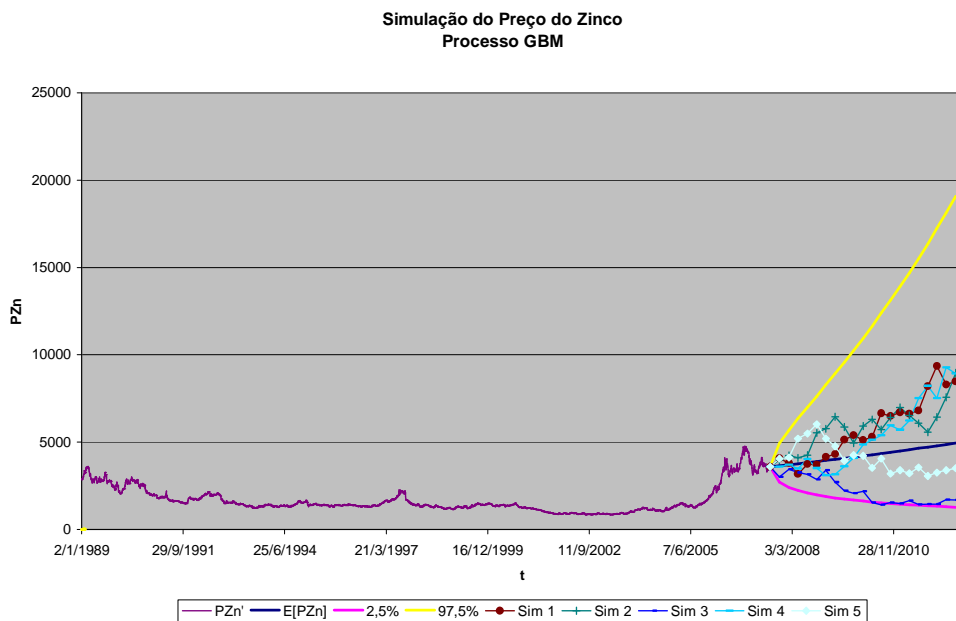


Gráfico 15 – Simulação da evolução do preço do zinco – MBG

Simulação do Preço do Cobre
Processo GBM

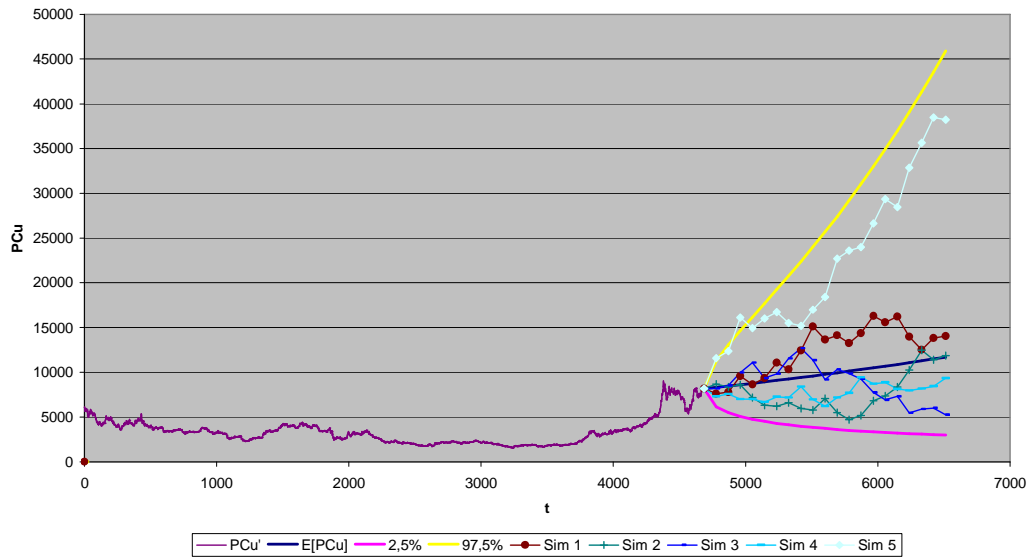


Gráfico 16 – Simulação da evolução do preço do cobre – MBG

O termo de *drift* do MBG faz com que a variável estocástica siga uma tendência ao longo de toda a sua trajetória. No caso do zinco e do cobre, o valor do termo de *drift* é positivo. Como dito anteriormente, essa tendência de crescimento pode não representar adequadamente variáveis como os preços de *commodities*, que tendem a reverter para um nível de equilíbrio em função das forças de oferta e procura. Quando o ponto de partida da simulação é um preço que já está acima do nível de equilíbrio, como no caso ilustrado, o MBG tende a superestimar tanto o valor esperado quanto a volatilidade do preço (DIAS, 2005). Esse fato pode ser observado nos gráficos apresentados.

8.3 Estimativa dos Parâmetros do Processo de Reversão à Média

Como apresentado no item 5.6, o processo de reversão à média em tempo contínuo mais simples é conhecido como processo de Ornstein-Uhlenbeck e é dado pela equação a seguir.

$$dx = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma dz \quad [\text{eq. 75}]$$

Onde:

η : velocidade de reversão

\bar{x} : nível de equilíbrio de x

σ : volatilidade

dz : incremento do processo de Wiener

Vimos anteriormente que o Processo Regressivo de Primeira Ordem – AR1 é a versão em tempo discreto da equação de Ornstein-Uhlenbeck. Como a simulação é realizada em intervalos discretos de tempo, utiliza-se o processo AR1 com os parâmetros $\delta = \bar{x}(1 - e^{-\eta})$ e $\rho = (e^{-\eta} - 1)$ como aproximação do PRM.

$$x_t - x_{t-1} = \bar{x}(1 - e^{-\eta\Delta t}) + (e^{-\eta\Delta t} - 1)x_{t-1} + \varepsilon_t \quad [\text{eq. 76}]$$

Onde:

ε_t segue uma distribuição normal com média zero e desvio-padrão σ_ε .

$$\sigma_\varepsilon^2 = (1 - e^{-2\eta}) \sigma^2 / 2\eta$$

Para estimar os parâmetros da reversão à média, deve-se realizar a seguinte regressão:

$$x_t - x_{t-1} = a + b x_{t-1} + \varepsilon_t \quad [\text{eq. 77}]$$

Onde x_t é o logaritmo natural do preço do metal. A tabela a seguir mostra os dados utilizados na regressão a partir dos preços do zinco.

Tabela 7 – Tabela base para estimativa dos parâmetros do PRM do zinco

| T | P _{Zn} | x _{t-1} = ln(PZn _{t-1}) | x _t = ln(PZn _t) | dx |
|------|-----------------|--|--|--------|
| 0 | 2890 | 7,969 | 7,978 | 0,009 |
| 1 | 2915 | 7,978 | 7,975 | -0,003 |
| 2 | 2907 | 7,975 | 7,951 | -0,024 |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| 4684 | 3663 | 8,206 | 8,166 | -0,040 |
| 4685 | 3520 | 8,166 | 8,160 | -0,006 |

Os valores de \bar{x} , η e σ podem ser obtidos de acordo com as fórmulas abaixo, decorrentes da equação do processo AR1 (DIAS, 1995; COSTA, 2007).

$$\bar{x} = -\frac{\bar{x}(1 - e^{-\eta\Delta t})}{-(e^{-\eta\Delta t} - 1)} = -\frac{\bar{x}(1 - e^{-\eta\Delta t})}{1 - e^{-\eta\Delta t}} = -\frac{a}{b} \quad [\text{eq. 78}]$$

$$\eta = -\ln(e^{-\eta}) = -\ln[1 + (e^{-\eta\Delta t} - 1)] = -\ln(1 + b) \quad [\text{eq. 79}]$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2\eta}{1 - e^{-2\eta}}} \sigma_\varepsilon = \sqrt{\frac{-2\eta}{e^{-2\eta} - 1}} \sigma_\varepsilon = \sqrt{\frac{2\ln(e^{-\eta\Delta t} - 1 + 1)}{(e^{-\eta\Delta t} - 1 + 1)^2 - 1}} \sigma_\varepsilon = \sqrt{\frac{2\ln(1 + b)}{(1 + b)^2 - 1}} \sigma_\varepsilon \quad [\text{eq. 80}]$$

Onde σ_ε é o erro da regressão. A unidade das variáveis é a mesma da série temporal utilizada na regressão. Para obter os parâmetros em outro intervalo de tempo, basta multiplicar η por Δt e σ por $\sqrt{\Delta t}$.

A seguir, são apresentados o gráfico (GRAF. 17) e os resultados da análise de regressão (FIG. 23) utilizados na obtenção dos parâmetros do PRM para o preço do zinco.

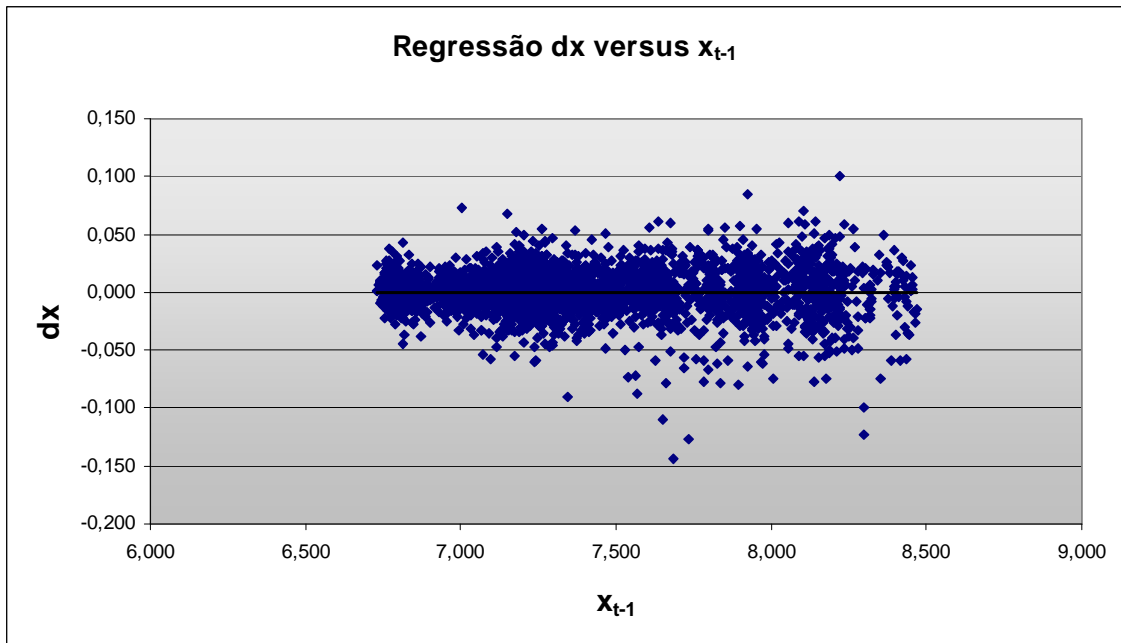


Gráfico 17 – Regressão dx versus x_{t-1} para o zinco

Regression Analysis: dPt versus Pt-1

The regression equation is
 $dPt = 0.00453 - 0.000613 Pt-1$

| Predictor | Coef | SE Coef | T | P |
|-----------|------------|-----------|-------|-------|
| Constant | 0.004529 | 0.004606 | 0.98 | 0.326 |
| Pt-1 | -0.0006127 | 0.0006264 | -0.98 | 0.328 |

S = 0.01630 R-Sq = 0.0% R-Sq(adj) = 0.0%

Analysis of Variance

| Source | DF | SS | MS | F | P |
|----------------|------|-----------|-----------|------|-------|
| Regression | 1 | 0.0002541 | 0.0002541 | 0.96 | 0.328 |
| Residual Error | 4684 | 1.2439417 | 0.0002656 | | |

Figura 23 – Análise de regressão de dx e x_{t-1} para o zinco

$$\bar{x} = -0,00453/0,000613 = 7,39$$

$$\eta = -\ln(1+0,000613) = 0,000613$$

$$\sigma = 0,0163 \sqrt{\frac{2\ln(1+0,000613)}{(1+0,000613)^2 - 1}} = 0,0163$$

Esses valores correspondem a um intervalo de tempo de 1 dia de negociação. Transformando para parâmetros anuais, tem-se: $\bar{x} = 7,39$, $\eta = 15,4\%$, $\sigma = 25,8\%$. A tabela a seguir apresenta os parâmetros obtidos para os 4 metais do estudo.

Tabela 8 – Parâmetros do PRM dos metais

| Metal | Resultados da Regressão | | | Parâmetros (1 dia) | | | Parâmetros (1 ano) | | |
|-------|-------------------------|----------|--------|--------------------|----------|------------|--------------------|----------|------------|
| | A | b | s | \bar{x} | η_d | σ_d | \bar{P} | η_a | σ_a |
| Zn | 0,00453 | -0,00061 | 0,0163 | 7,39 | 0,000613 | 0,0163 | 1623 | 15,38% | 25,83% |
| Cu | 0,00426 | -0,00052 | 0,0163 | 8,15 | 0,000523 | 0,0163 | 3447 | 13,13% | 25,83% |
| Ag | 0,00215 | -0,00098 | 0,0173 | 2,19 | 0,000980 | 0,0173 | 8,97 | 24,61% | 27,39% |
| Au | 0,00214 | -0,00034 | 0,0099 | 6,33 | 0,000338 | 0,0099 | 562 | 8,49% | 15,74% |

Para simular $x_t = \ln(P_t)$ basta transferir o termo x_{t-1} para o lado direito da equação do processo AR1.

$$x_t = x_{t-1}e^{-\eta\Delta t} + \bar{x}(1 - e^{-\eta\Delta t}) + \sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}}N(0,1) \quad [\text{eq. 81}]$$

De acordo com a equação 45, a relação entre P_t e x_t é dada por:

$$P_t = e^{x_t - 0,5\text{Var}[x_t]} = e^{x_t - (1 - e^{-2\eta})\frac{\sigma^2}{4\eta}} \quad [\text{eq. 82}]$$

Assim, para simular $P(t)$, basta simular $x(t)$, utilizando um gerador de números aleatórios, transformando-os em amostras de uma distribuição normal padronizada e substituindo os valores na equação de $x(t)$. Em seguida, utiliza-se a equação 82 para obter os valores de P_t . Pode-se, também, simular P_t diretamente, substituindo a equação 81 na equação 82 (DIAS, 1995; COSTA, 2007).

$$P(t) = e^{\ln(P_{t-1})e^{-\eta\Delta t} + \ln(\bar{P})(1 - e^{-\eta\Delta t}) - (1 - e^{-2\eta})\frac{\sigma^2}{4\eta} + \sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}}N(0,1)} \quad [\text{eq. 83}]$$

Segundo Dias (1995), os 4 termos da equação acima podem ser interpretados da seguinte maneira: os 2 primeiros são termos de *drift*, que ponderam o valor inicial e o valor de equilíbrio. O terceiro é o ajuste da relação entre P_t e x_t . O quarto é o termo estocástico. O valor esperado do preço da *commodity*, é dado pela seguinte equação:

$$E[P_T] = e^{x^{(0)}e^{-\eta T} + \bar{x}(1 - e^{-\eta T})} \quad [\text{eq. 84}]$$

O gráfico 18 apresenta o valor esperado do preço do zinco e 5 simulações da sua evolução segundo o PRM, adotando-se intervalos trimestrais. Nessa projeção, o valor inicial do preço do zinco é 3590 US\$/t e o valor de equilíbrio é 1623 US\$/t.

Simulação do Preço do Zinco
Processo Reversão à Média

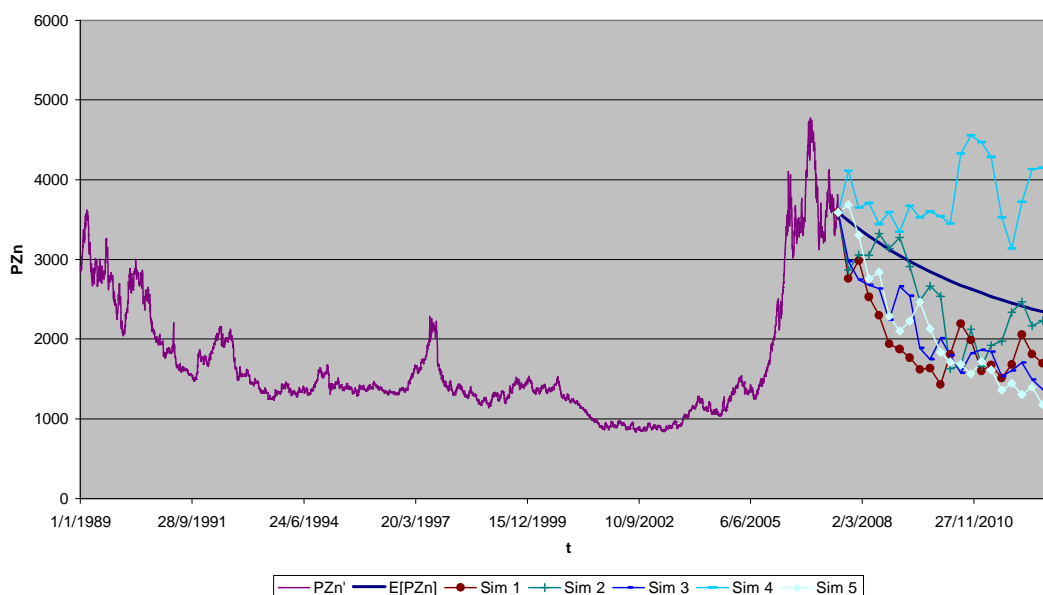


Gráfico 18 – Simulação do preço do zinco segundo o PRM

A projeção de preços de metais do boletim de maio de 2007 do banco Morgan Stanley foi utilizada para realizar uma comparação dos preços simulados pelo MBG e pelo PRM com a previsão de especialistas do mercado. O boletim do banco Morgan Stanley prevê uma redução do preço do zinco de 1,60 US\$/lb (ou 3.524 US\$/t) em 2007 para 0,90 US\$/lb (ou 1.982 US\$/t) até 2011. No caso do cobre, a previsão é de baixar de 3,05 US\$/lb (6.718 US\$/t) para 1,90 US\$/lb (4.185 US\$/t). A simulação de preços com o MBG segue na direção contrária dessas previsões, pois o valor esperado dos preços se eleva com o tempo. Já o PRM gera valores coerentes com a visão dos especialistas do setor.

8.4 Estimativa dos parâmetros em condições neutras ao risco

Em uma análise de Fluxo de Caixa Descontado, quando o preço do ativo-objeto é simulado utilizando-se o *drift* (taxa de crescimento) real, os fluxos de caixa futuros são descontados utilizando-se a taxa de desconto ajustada ao risco (μ). Entretanto, a taxa de desconto ajustada ao risco de um derivativo é diferente da utilizada para seu ativo-objeto. Para lidar com a dificuldade de definição da taxa de desconto de uma opção, a solução é simular o preço do ativo-objeto em condições neutras ao risco, realizando um ajuste na equação do processo estocástico que descreve a evolução do preço do ativo. Esse ajuste corresponde a subtrair um

prêmio de risco da taxa de crescimento (*drift*) da equação do processo estocástico (TRIGEORGIS, 1996).

O prêmio de risco é o retorno esperado acima da taxa livre de risco ao se investir em um ativo.

$$PR_i = \mu_i - r \quad [\text{eq. 85}]$$

Onde:

PR_i : prêmio de risco do ativo i ,

μ_i : retorno esperado total do ativo i , inclusive dividendos ($\mu_i = \alpha + D$),

r : taxa livre de risco.

O preço de mercado do risco (λ) é o retorno esperado acima da taxa livre de risco por unidade de risco. O prêmio de risco é dado pela multiplicação do preço de mercado do risco pela volatilidade do ativo ($PR_i = \lambda_i \sigma_i$). Logo o prêmio de risco é dado por:

$$PR_i = (\alpha_i + D_i) - r = \lambda_i \sigma_i \quad [\text{eq. 86}]$$

De acordo com o Capital Assets Pricing Model (CAPM), o risco de um ativo pode ser obtido através da correlação de seu retorno com o retorno de mercado (ρ_{im}).

$$\lambda_i = \lambda_m \rho_{im} \quad [\text{eq. 87}]$$

Assim, o prêmio de risco pode ser obtido por: $PR_i = \lambda_m \rho_{im} \sigma_i$.

No caso deste projeto, o prêmio de risco foi calculado pela diferença entre o retorno médio do mercado de ações americano e a taxa livre de risco dos Estados Unidos, multiplicada pelo beta do setor de mineração nos Estados Unidos.

$$PR = (r_m - r_f) \beta = 4,16\% \times 0,93 = 3,87\% \quad [\text{eq. 88}]$$

Se os termos da equação 86 são rearranjados temos: $\alpha_i - (\lambda_i \sigma_i) = r - D_i$. Isto é, o *drift* real menos o prêmio de risco é igual à taxa livre de risco menos os dividendos distribuídos. No caso de *commodities*, o rendimento de dividendos (*dividend yield*) é substituído pela

convenience yield (δ), que representa os benefícios líquidos advindos da posse física da *commodity* (TRIGEORGIS, 1996).

Assim, no caso do MBG, a equação a ser utilizada na simulação de preços de *commodities* em condições neutras ao risco passa a ser:

$$P_{t+1} = P_t e^{\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} N(0;1)} \quad [\text{eq. 89}]$$

No caso do PRM, o termo de *drift* é $\eta(\bar{x} - x)$. O *dividend yield* é dado por $\delta = \mu - \alpha = \mu - \eta(\bar{x} - x)$. A taxa de crescimento em condições neutras ao risco é:

$$r - \delta = r - [\mu - \eta(\bar{x} - x)] = \eta(\bar{x} - x) - (\mu - r) = \eta \left[\left(\bar{x} - \frac{\mu - r}{\eta} \right) - x \right] \quad [\text{eq. 90}]$$

Comparando a equação 90 com o termo de *drift* original, verifica-se que é subtraído um prêmio de risco ($\mu - r$) dividido pela taxa de reversão à média (η) do valor de longo prazo $\bar{x} = \ln(\bar{P})$. Substituindo esse termo na equação de simulação do PRM, obtém-se (DIAS, 1995):

$$x_t = x_{t-1} e^{-\eta\Delta t} + \left(\bar{x} - \frac{\mu - r}{\eta} \right) (1 - e^{-\eta\Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}} N(0,1) \quad [\text{eq. 91}]$$

Para o caso de se simular o logaritmo do preço e depois converter para $P(t)$. Ou, caso se opte por simular $P(t)$ diretamente, utiliza-se a equação abaixo.

$$P(t) = e^{\ln(P_{t-1})e^{-\eta\Delta t} + \left(\ln(\bar{P}) - \frac{\mu - r}{\eta} \right) (1 - e^{-\eta\Delta t}) - (1 - e^{-2\eta\Delta t}) \frac{\sigma^2}{4\eta} + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}} N(0,1)} \quad [\text{eq. 92}]$$

O valor da *convenience yield* de uma *commodity* pode ser estimado a partir do preço de contratos futuros de diferentes datas de maturidade. Um contrato futuro é o mesmo que uma venda ou compra diferida. O preço futuro f_t é o preço que faria com que o valor do contrato futuro no tempo t (F_t) fosse zero para as duas partes. Assim, o valor presente de um contrato futuro cujo valor na maturidade é $F_T = V_T - I$, é dado por (TRIGEORGIS, 1996):

$$F = e^{-rt} \hat{E}(V_T - I) = e^{-rt} (Ve^{\hat{\alpha}t} - Ie^{-rt}) \quad [\text{eq. 93}]$$

Onde:

V_T : valor do preço spot na data de maturidade,

I : preço a ser pago na entrega da *commodity*.

Como a taxa esperada de crescimento (*drift*) é dada por: $\hat{\alpha} = \alpha - RP = \alpha - \lambda\sigma = r - \delta$, o valor do contrato futuro pode ser obtido por:

$$F = e^{-rt}Ve^{(r-\delta)t} - Ie^{-rt} = Ve^{-\hat{\alpha}t} - Ie^{-rt} \quad [\text{eq. 94}]$$

Para que F seja igual a zero, o preço a ser pago na entrega da *commodity* (I) deve ser:

$$f = \hat{E}(V_T) = Ve^{\hat{\alpha}t} = Ve^{(\alpha-\lambda\sigma)t} = Ve^{(r-\delta)t} \quad [\text{eq. 95}]$$

Tomando-se os preços de dois contratos futuros com datas de maturidades diferentes, temos $f_1 = Ve^{\hat{\alpha}t_1}$ e $f_2 = Ve^{\hat{\alpha}t_2}$.

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{Ve^{\hat{\alpha}t_2}}{Ve^{\hat{\alpha}t_1}} = \frac{e^{\hat{\alpha}t_2}}{e^{\hat{\alpha}t_1}} \quad [\text{eq. 96}]$$

$$\ln\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = \hat{\alpha}t_2 - \hat{\alpha}t_1 \quad [\text{eq. 97}]$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\ln(f_2 / f_1)}{t_2 - t_1} \quad [\text{eq. 98}]$$

Assim, a partir do histórico de preços de contratos futuros de duas datas de maturidade distintas, utilizando a equação 98, é calculada a taxa de crescimento em condições neutras ao risco e, conseqüentemente, a *convenience yield* da *commodity* (TRIGEORGIS, 1996). A seguir é apresentada a estimativa de δ para o zinco (TAB. 9).

Tabela 9 – Estimativa da *convenience yield* do zinco

| Data | Preços | | | | Drift neutro ao risco | | |
|--------------|----------|----------|----------|----------|-----------------------|--------|---------|
| | Spot | 3 meses | 15 meses | 27 meses | 15m-3m | 27m-3m | 27m-15m |
| 2/jan/07 | 4.259,00 | 4.179,50 | 3.728,00 | 3.322,00 | -0,010 | -0,010 | -0,010 |
| 3/jan/07 | 4.014,00 | 3.981,00 | 3.623,00 | 3.273,00 | -0,008 | -0,008 | -0,008 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 30/ago/07 | 3.019,00 | 3.010,00 | 2.842,00 | 2.655,00 | -0,005 | -0,005 | -0,006 |
| 31/ago/07 | 3.070,00 | 3.075,00 | 2.888,00 | 2.693,00 | -0,005 | -0,006 | -0,006 |
| Média | - | - | - | - | -0,008 | -0,009 | -0,010 |

O *drift* neutro ao risco é de 0,9% ao mês ou 10,32% ao ano. Considerando uma taxa livre de risco de 11,31% ao ano (incluída a inflação), a *convenience yield* é de 0,99% ao ano. Para o cobre, o valor encontrado foi de 2,29% ao ano.

9 Resultados

9.1 Simulação I1

Na simulação I1, o preço do zinco foi modelado como um MBG. Os preços dos demais metais foram calculados a partir das equações de regressão em relação ao preço do zinco. Os parâmetros utilizados na simulação do preço do zinco são apresentados na tabela 10.

Tabela 10 – Parâmetros de simulação do preço do zinco – MBG

| Variável | | Unidade | Zn |
|----------------------|----------|---------|--------|
| Preço inicial | P(t=0) | USD/t | 3590 |
| Volatilidade | σ | %aa | 25.83% |
| Taxa livre de risco | r | %aa | 7.73% |
| Convenience Yield | d | %aa | 1.18% |
| Taxa neutra ao risco | r-d | %aa | 6.55% |

O gráfico 19 apresenta os resultados da simulação do preço do zinco. A linha amarela corresponde ao valor esperado. A faixa vermelha compreende 95% das observações (ou 2 desvios-padrão), a faixa verde contém 99,7% das observações (3σ). Como pode ser observado na figura, ao utilizar o MBG como processo estocástico, o preço do zinco e a volatilidade tendem a se elevar com o tempo.

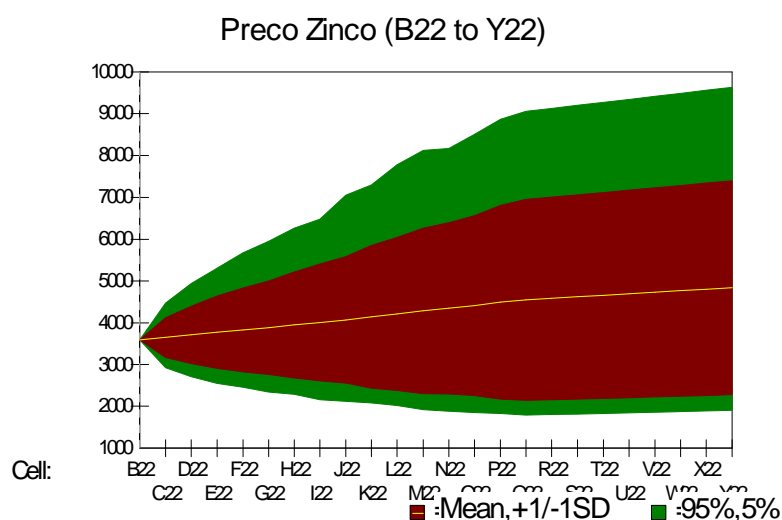


Gráfico 19 – Resultado da simulação do preço do zinco – II

Foram consideradas 3 alternativas de projeto sem flexibilidade. A exploração da 1ª reserva, a exploração das 2 reservas e a exploração das 2 reservas com aumento da capacidade de

beneficiamento na fase de exploração da 2ª reserva. Os histogramas a seguir apresentam os resultados obtidos com a simulação.

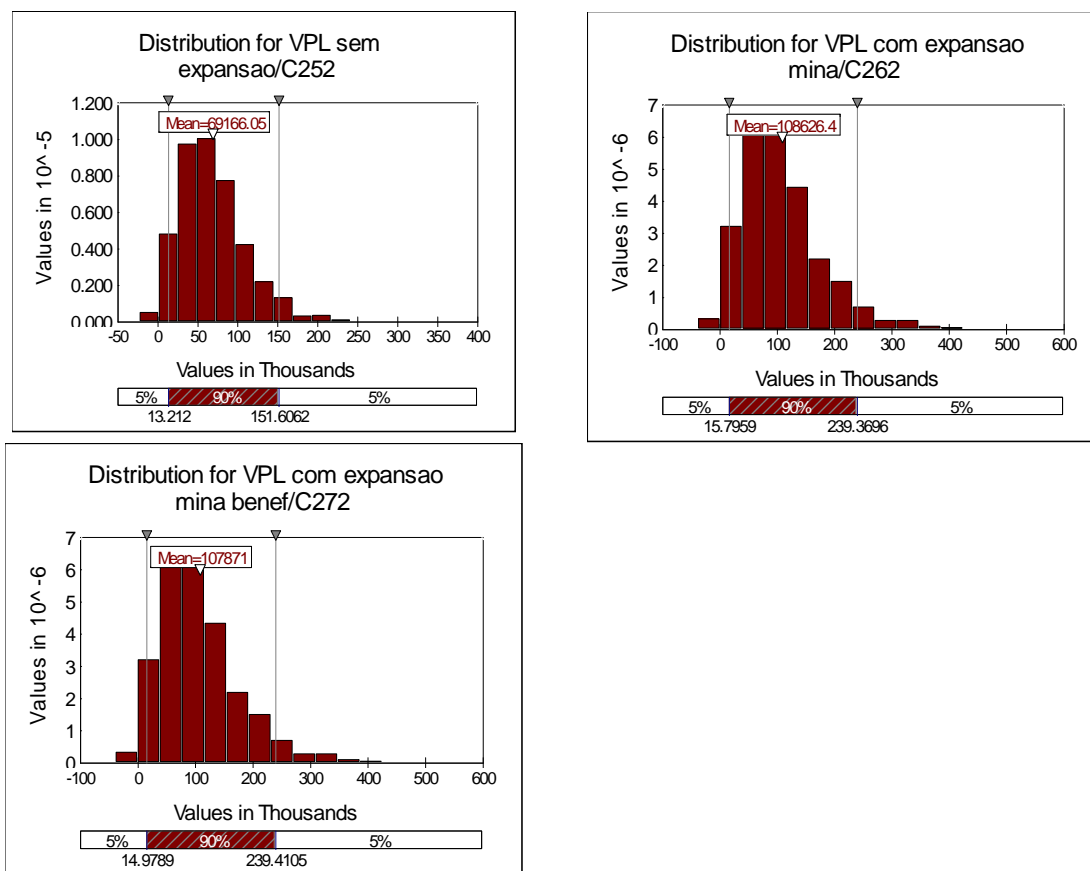


Figura 24 – Resultados da simulação do VPL do projeto sem flexibilidade – II

Todas as alternativas apresentaram retorno elevado, com probabilidade baixíssima de retorno negativo. O VPL da exploração das 2 reservas é 57% superior ao de exploração apenas da 1ª reserva. Esse resultado é esperado, pois o cenário esperado na época de exploração da 2ª reserva é de preços mais elevados do que os atuais. O VPL da 3ª alternativa é ligeiramente inferior ao da 2ª. Isto ocorre porque a antecipação de fluxos de caixa promovida pela expansão da capacidade de beneficiamento não é suficiente para cobrir o investimento. Além disso, em um cenário de elevação de preços, essa antecipação não é tão vantajosa.

Ao considerar que o preço do zinco segue o MBG, o projeto torna-se tão atrativo que as opções praticamente não agregam valor ao projeto, conforme apresentado nos histogramas da figura 25.

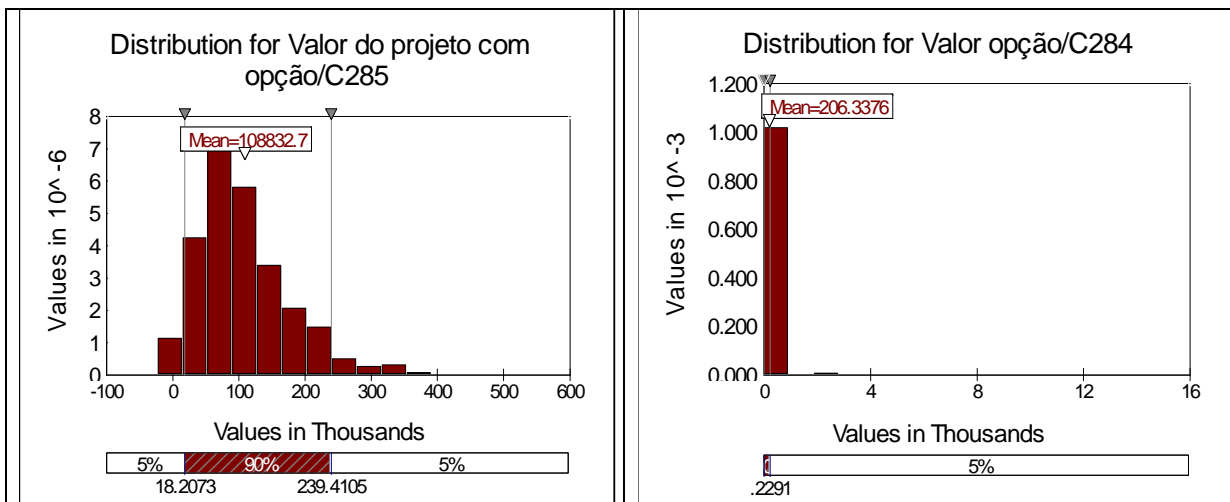


Figura 25 – Resultado da simulação do VPL do projeto com flexibilidade – II

Na data de maturidade das opções (16º trimestre de operação), o preço médio do zinco é de US\$4549/t e o fluxo de caixa esperado é de US\$ 7,5 milhões. Apenas 2% das simulações geraram fluxo de caixa negativo.

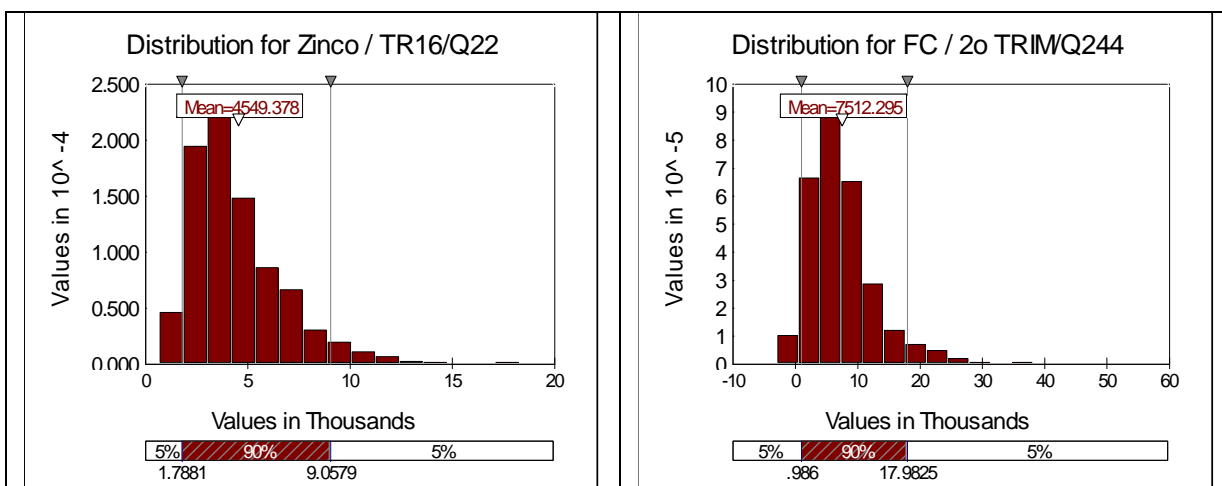


Figura 26 – Preço do zinco e fluxo de caixa no 16º trimestre

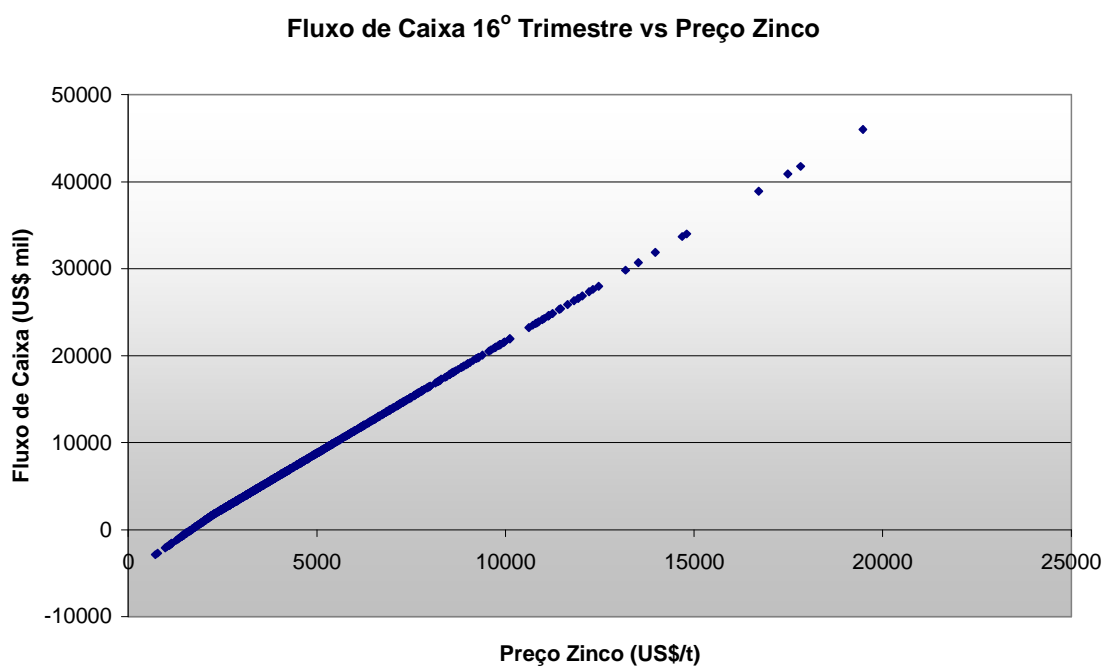


Gráfico 20 – Relação entre o preço do zinco e o fluxo de caixa no 16º trimestre – II

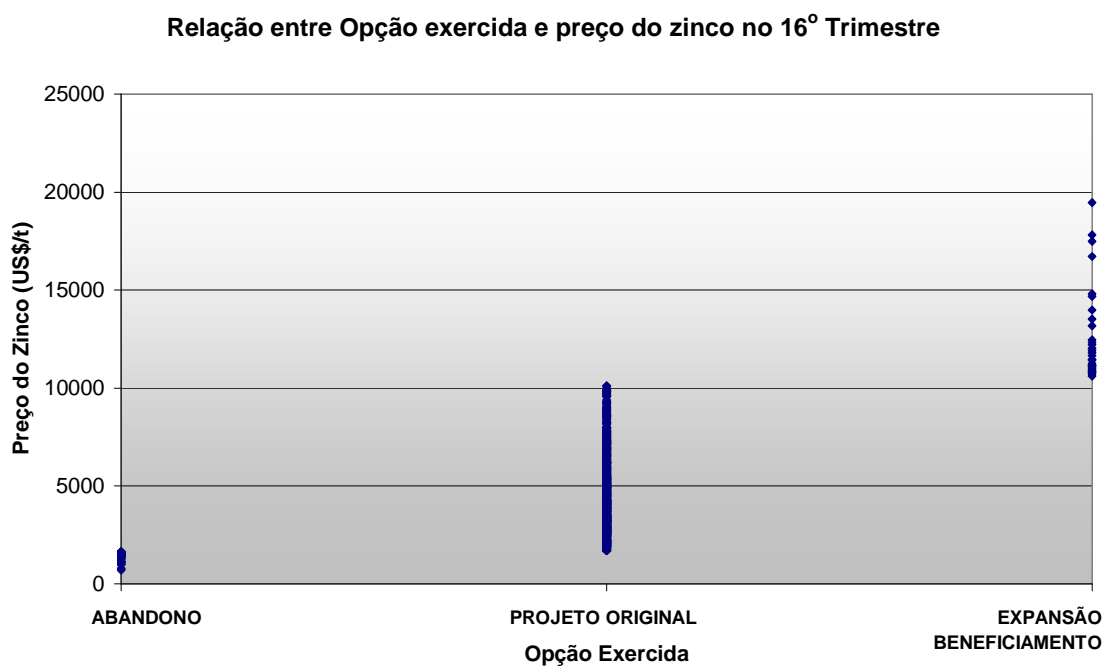


Gráfico 21 – Relação entre o preço do zinco e o exercício de opções – II

A opção de não expandir só é exercida para preços abaixo de 1690 US\$/t. Isto equivale a apenas 4% das rodadas de simulação. Em 93% das simulações, na faixa de 1690 a 10500, o projeto é implementado conforme planejado originalmente. A opção de expandir a planta de beneficiamento só é exercida para preços superiores a 10500, ou 3% das simulações. Segundo o MBG, a flexibilidade gerencial praticamente não agrega valor ao projeto.

9.2 Simulação I2

Na simulação I2, o preço do zinco foi modelado como um PRM. Os preços dos demais metais são perfeitamente correlacionados ao preço do zinco. Os parâmetros utilizados na simulação do preço do zinco são apresentados na tabela 11.

Tabela 11 – Parâmetros de simulação do preço do zinco – PRM

| Variável | | Unidade | Zn |
|------------------------------------|-----------|----------------|--------|
| Preço inicial | $P(t=0)$ | USD/t | 3590 |
| Volatilidade | σ | %aa | 25.83% |
| Velocidade de reversão à média | η | %aa | 15.38% |
| Taxa livre de risco | r | %aa | 7.73% |
| Meia vida | H | anos | 4.51 |
| Preço médio de equilíbrio | P' | USD/t - USD/oz | 1623 |
| | $\ln(P')$ | - | 7.3919 |
| Taxa de desconto ajustada ao risco | μ | %aa | 11.60% |
| Prêmio de risco | $\mu-r$ | %aa | 3.87% |

O preço do zinco, simulado como um PRM, tende a um valor de equilíbrio inferior ao valor atual. Por isso, o valor esperado (linha amarela) decresce com o tempo. As faixas vermelha e verde dão uma idéia da volatilidade do preço. Esta tende a aumentar no início e, depois, se estabilizar.

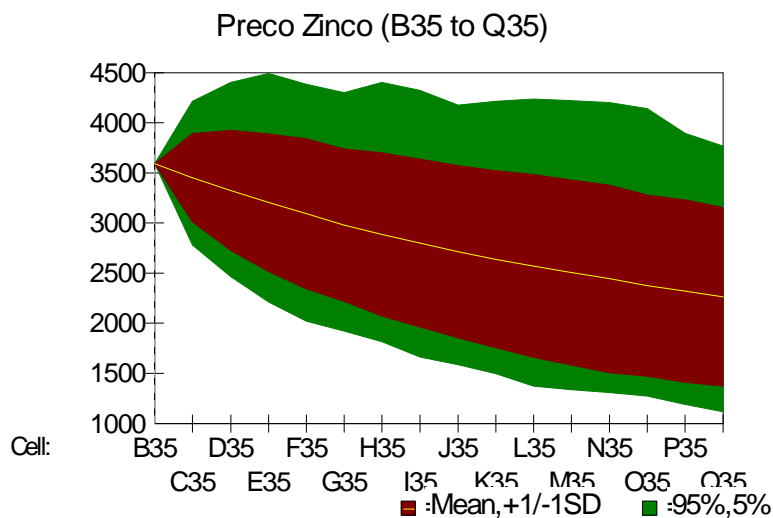


Gráfico 22 – Resultado da simulação do preço do zinco – I2

O VPL médio simulado das três alternativas é positivo, mas muito abaixo do valor obtido na simulação I1. Além disso, a probabilidade de ocorrência de valores negativos não é desprezível. A alternativa de maior VPL continua sendo a exploração das 2 reservas, sem aumento da capacidade de beneficiamento, mas a diferença de valor em relação às outras alternativas é pequena: 14% superior à exploração apenas da 1ª reserva e 0,3% melhor que a exploração das 2 reservas com expansão da capacidade de beneficiamento.

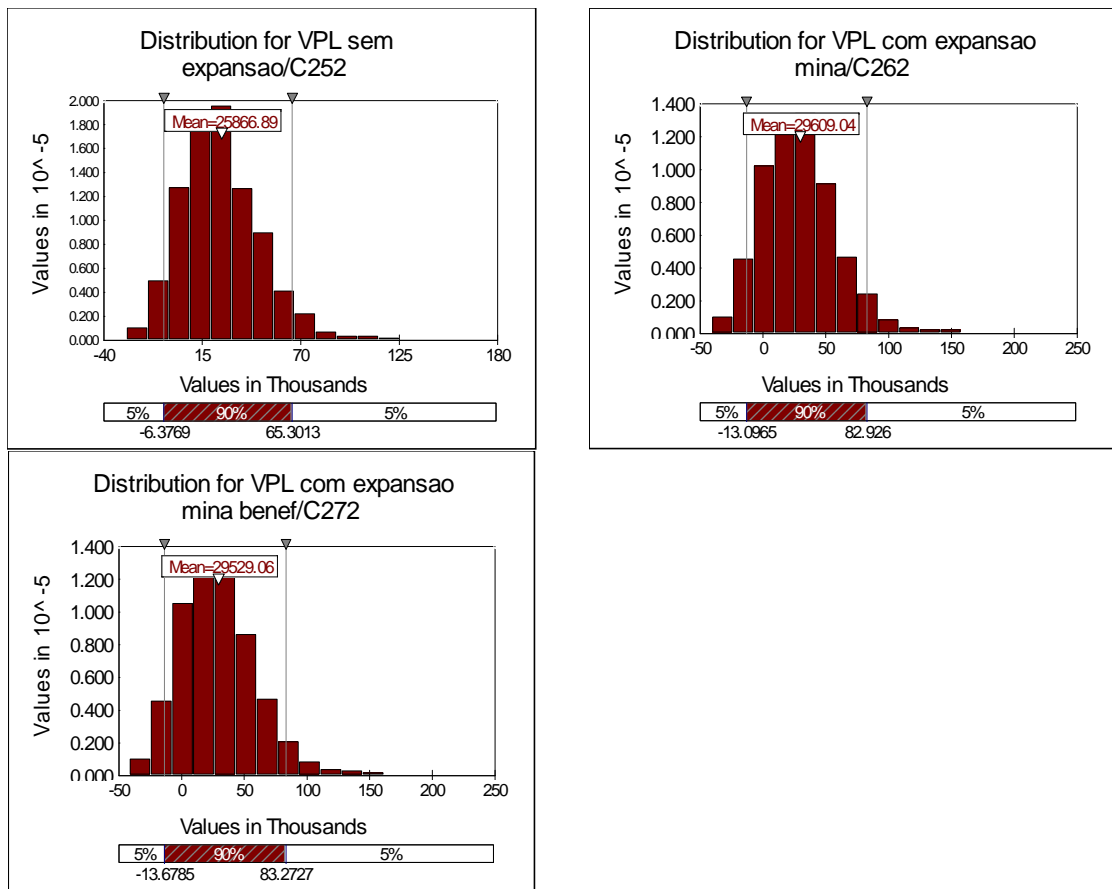


Figura 27 – Resultados da simulação do VPL do projeto sem flexibilidade – I2

A flexibilidade gerencial já agrega 7% ao valor do projeto sem flexibilidade, gerando um valor expandido de US\$ 31,7 milhões.

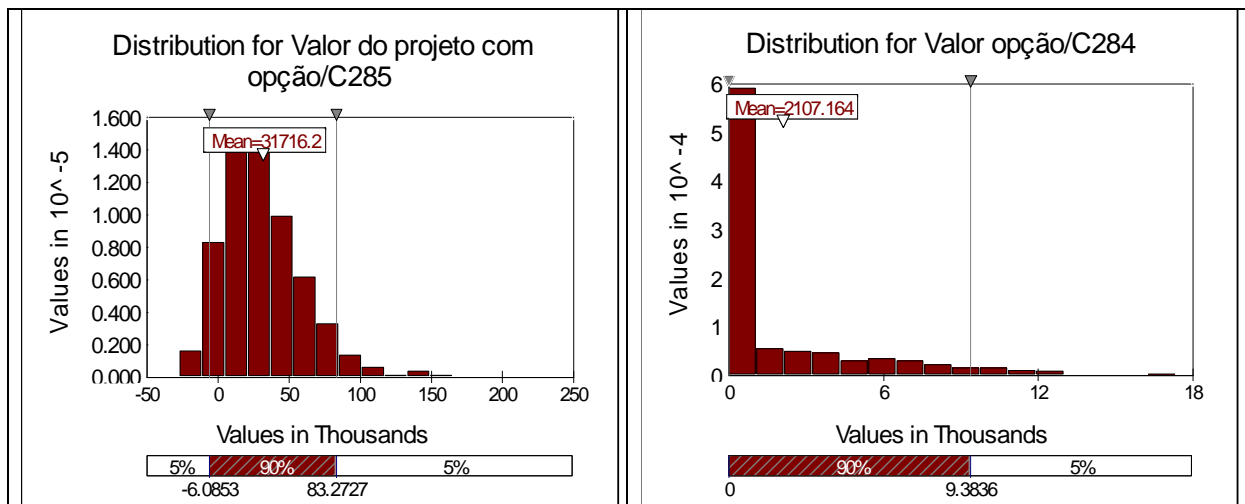


Figura 28 – Resultado da simulação do VPL do projeto com flexibilidade – I2

A opção de não expandir é exercida sempre que o preço do zinco no 16º trimestre é inferior a US\$1880/t (GRAF. 24). Isto ocorreu em 38% das rodadas de simulação. Quando o preço do

zinco se situa na faixa de US\$1880/t a US\$2180/t (13% das simulações), as duas reservas são exploradas sem expansão de capacidade de processamento. A partir de US\$2180/t (49% das rodadas), é exercida a opção de expandir a mina e a planta de beneficiamento. A faixa de preços em que não é exercida nenhuma opção é muito estreita, o que indica que a flexibilidade é importante para o projeto.

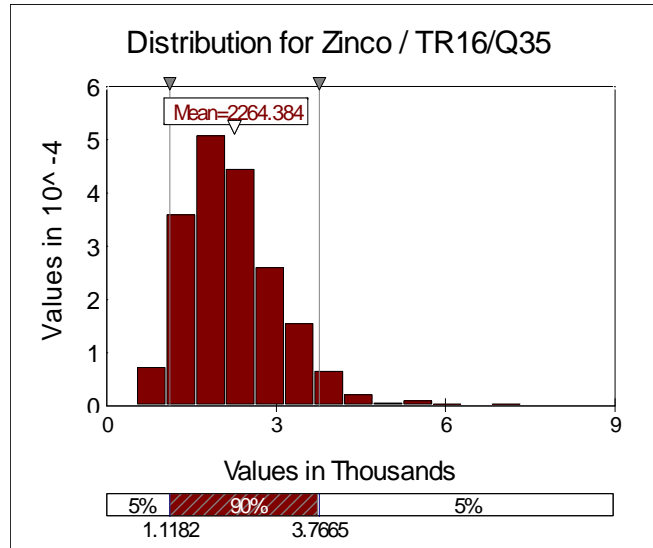


Gráfico 23 – Preço do zinco no 16º trimestre – I2

Opção Exercida em Função do Preço do Zinco no 16º Trimestre

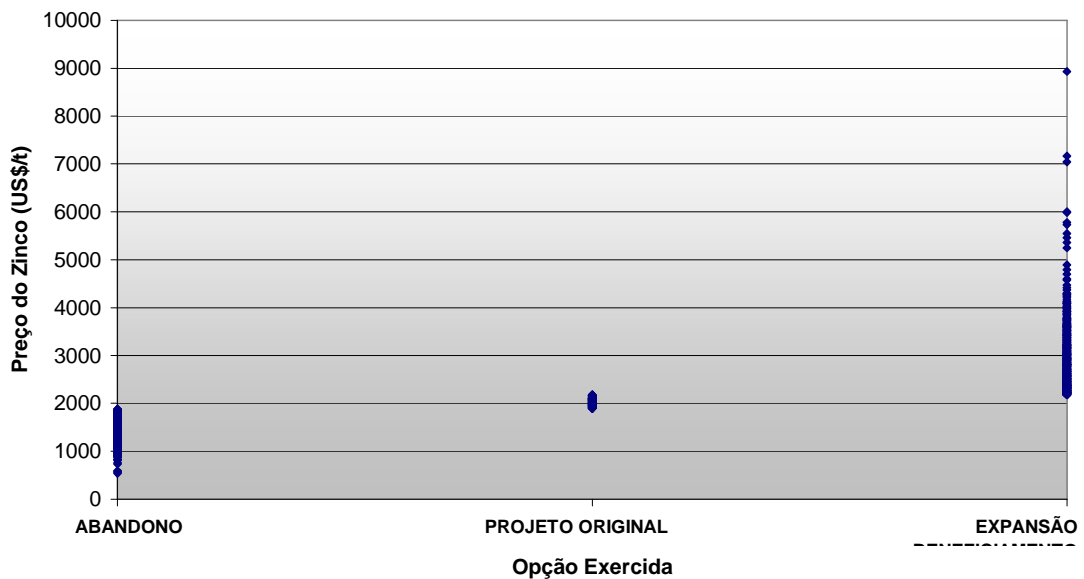


Gráfico 24 – Relação entre o preço do zinco e o exercício de opções – I2

De acordo com o gráfico 25, a opção de não expandir (0) apresenta valor elevado quando o preço do zinco é muito baixo, pois evita que sejam gerados fluxos de caixa negativos durante o período de exploração da 2ª reserva. Já o valor da opção de expandir a planta de

beneficiamento (2), apresenta uma inclinação menor porque seu benefício está em acelerar a geração de fluxo de caixa, não apresentando grande diferença em relação à exploração da 2ª reserva sem expansão.

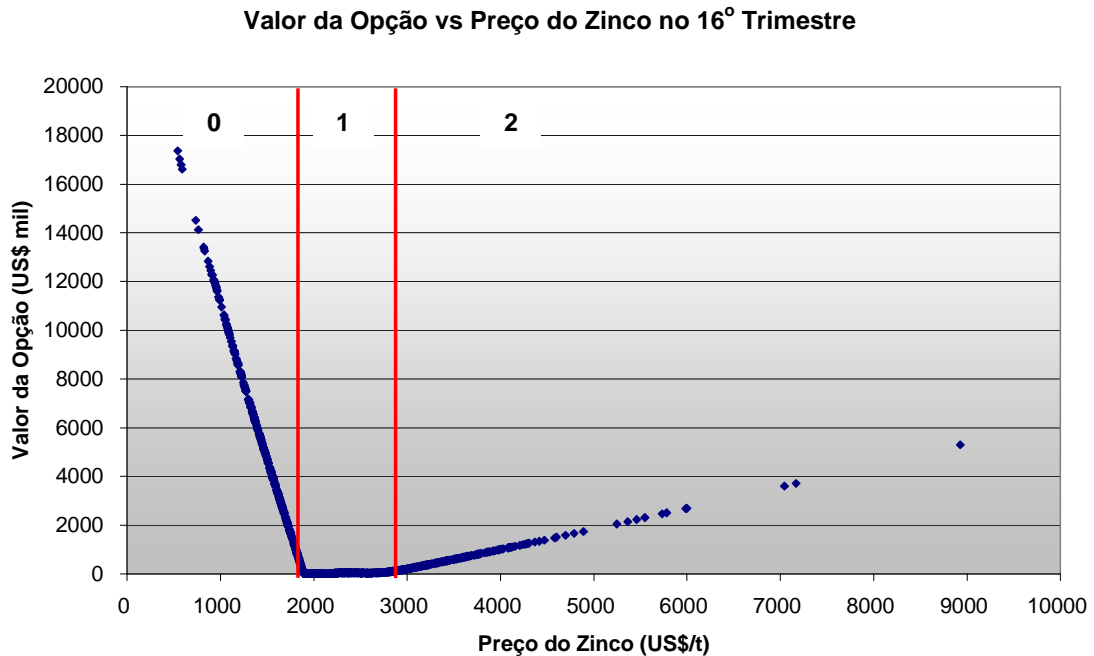


Gráfico 25 – Relação entre o valor das opções e o preço do zinco no 16º trimestre – I2

9.3 Simulação I3

Nessa simulação, os preços dos quatro metais da reserva foram modelados como Processos de Reversão à Média distintos e a taxa de câmbio foi modelada como um MBG. Os parâmetros utilizados para simular os preços dos metais são apresentados na tabela a seguir:

Tabela 12 – Parâmetros de simulação dos preços dos metais

| Variável | | Unidade | Zn | Cu | Ag | Au |
|------------------------------------|-----------|----------------|--------|--------|--------|--------|
| Preço inicial | P(t=0) | USD/t | 3590 | 7730 | 12.47 | 651 |
| Volatilidade | σ | %aa | 25.83% | 25.86% | 27.39% | 15.74% |
| Velocidade de reversão à média | η | %aa | 15.38% | 13.13% | 24.61% | 8.49% |
| Taxa livre de risco | r | %aa | 7.73% | 7.73% | 7.73% | 7.73% |
| Meia vida | H | anos | 4.51 | 5.28 | 2.82 | 8.16 |
| Preço médio de equilíbrio | P' | USD/t - USD/oz | 1623 | 3447 | 8.97 | 562 |
| | $\ln(P')$ | - | 7.3919 | 8.1453 | 2.1939 | 6.3314 |
| Taxa de desconto ajustada ao risco | μ | %aa | 11.60% | 11.60% | 11.60% | 11.60% |
| Prêmio de risco | $\mu-r$ | %aa | 3.87% | 3.87% | 3.87% | 3.87% |

No caso da taxa de câmbio, os parâmetros são:

Tabela 13 – Parâmetros de simulação da taxa de câmbio

| Variável | | Câmbio |
|---------------------|----------|--------|
| Taxa de crescimento | α | 0.005 |
| Volatilidade | σ | 0.073 |

O comportamento simulado dos preços dos metais pode ser observado nos gráficos a seguir (FIG. 29), que apresentam o valor esperado e os intervalos de confiança para 1 e 2 desvios-padrão. O formato descendente da curva é coerente com o fato de os preços iniciais estarem acima do preço médio de equilíbrio de longo prazo. Outro comportamento esperado do PRM é o aumento da volatilidade em um primeiro momento para uma posterior estabilização, conforme se observa nas curvas apresentadas.

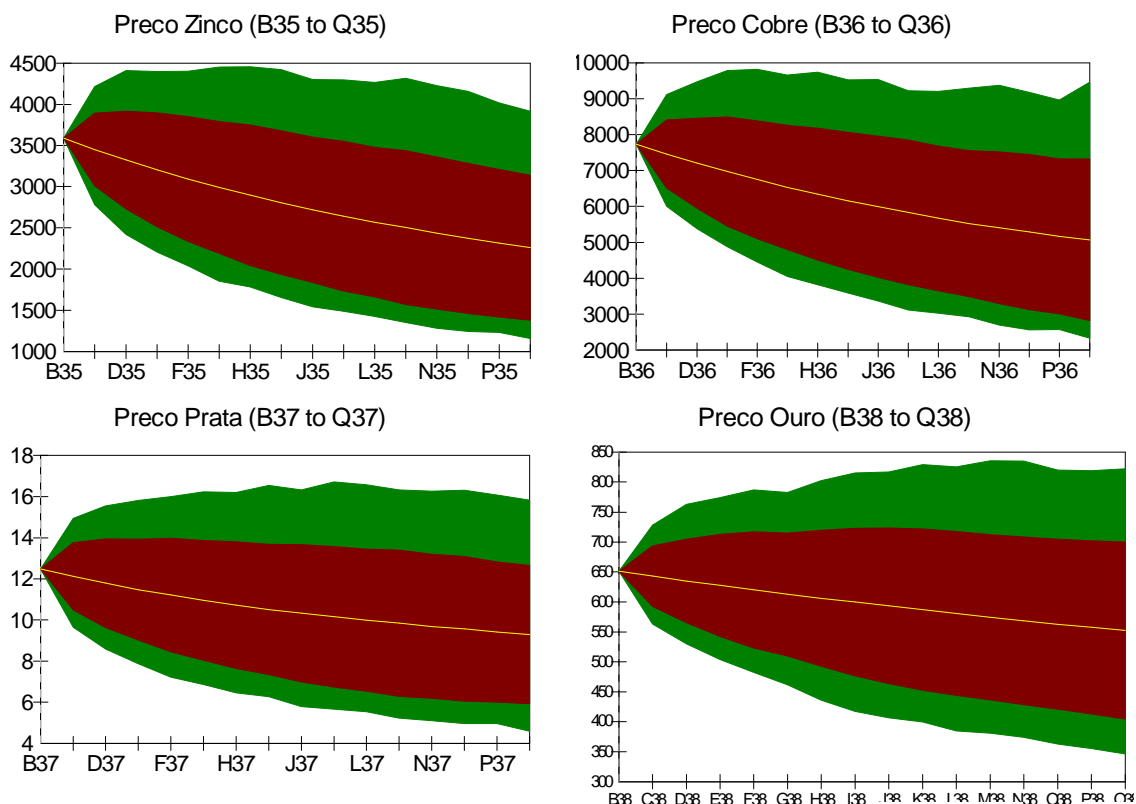
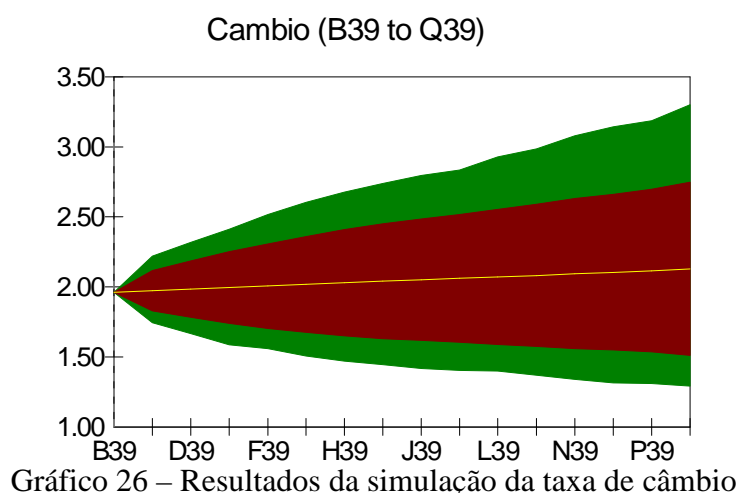
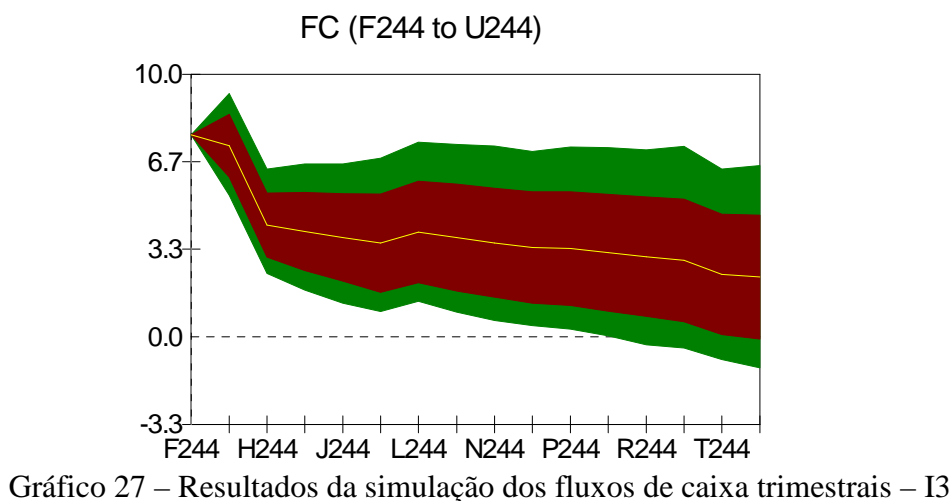


Figura 29 – Resultados da simulação dos preços dos metais – I3

A simulação da evolução da taxa de câmbio já apresenta um resultado distinto (GRAF. 26). O valor esperado do dólar é ascendente e a volatilidade aumenta com o tempo, conforme preconizado pelo MBG.



Uma classe de variáveis de saída da simulação são os fluxos de caixa dos 16 trimestres de operação do empreendimento (GRAF. 27), cujo valor esperado decresce com o tempo, em função da redução gradual dos preços dos metais. A queda brusca do resultado do 2º para o 3º trimestre e a queda mais suave que ocorre no final do período simulado são decorrentes da previsão de redução do teor dos metais com a mudança da frente de extração do minério. O pequeno aumento que ocorre por volta do 7º trimestre é em razão do término de uma obrigação para com o cliente do empreendimento decorrente de cláusula contratual.



A análise do fluxo de caixa descontado indica que a melhor alternativa é a exploração das 2 reservas, sem aumento da capacidade de beneficiamento, apesar de a diferença em relação à alternativa que considera a maior capacidade da planta de beneficiamento ser irrisória (FIG. 30).

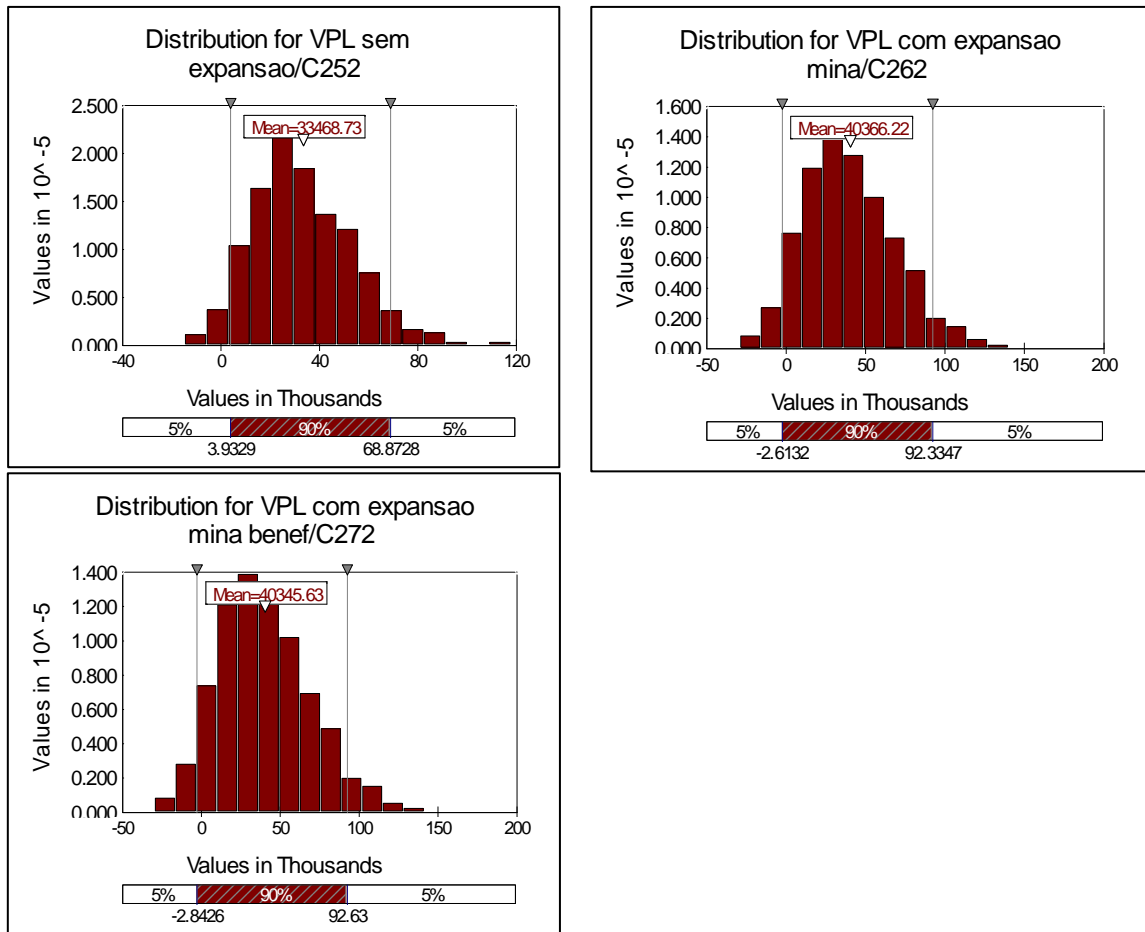


Figura 30 – Resultados da simulação do VPL do projeto sem flexibilidade – I3

Comparando-se o resultado dessa simulação com o da anterior, verifica-se que a suposição de que os preços dos metais são perfeitamente correlacionados reduz o valor simulado em 27%. Isto ocorre porque a equação de regressão do preço do cobre em função do preço do zinco leva a um preço inicial do cobre inferior ao utilizado na simulação I3. A razão dessa discrepância é o pico no preço do cobre no final da série de dados históricos.

O valor do projeto considerando a flexibilidade gerencial é de US\$ 41,9 MM. O valor da opção pode ser calculado por:

$$VPL_{\text{expandido}} = VPL + V_{\text{opção}}$$

$$V_{\text{opção}} = 41,865 - 40,366 = 1,499.$$

Como pode ser observado no histograma (GRAF. 28), a opção altera o formato da curva, criando uma assimetria. Essa assimetria é consequência de não se exercer a opção de expansão em cenários negativos de preços e câmbio, evitando grandes perdas e de exercê-la em condições favoráveis, aumentando o ganho do projeto original.

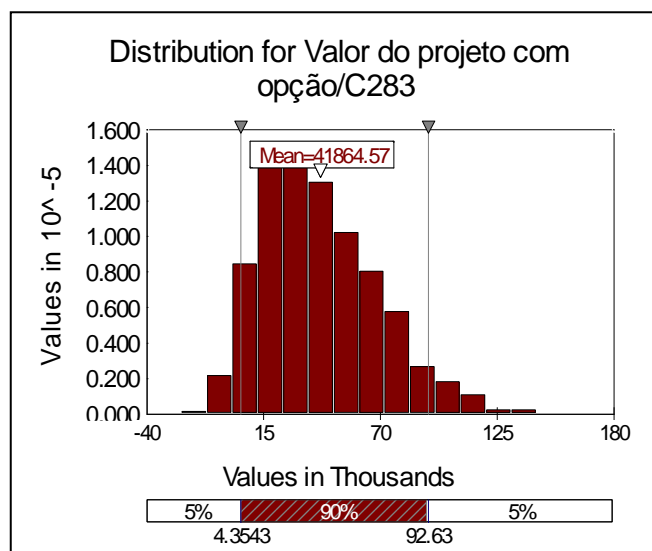


Gráfico 28 – Resultado da simulação do VPL do projeto com flexibilidade – I3

O gráfico 29 mostra a relação entre o valor da flexibilidade gerencial e o valor do fluxo de caixa do último trimestre da 1ª fase do empreendimento. Pode-se observar que para valores negativos do fluxo de caixa o valor da opção é elevado, pois se evitaria a realização do investimento na expansão da mina e a sua exploração com preços de metais muito baixos. Por outro lado, valores muito altos do fluxo de caixa levam a valores positivos para a opção, pois pode-se optar por expandir a capacidade de beneficiamento e aumentar a rapidez com que a receita é obtida. Como a opção de aumento da capacidade de beneficiamento tem pouca diferença em relação ao projeto original, o valor da opção é baixo, mesmo para cenários de preços elevados de metais. Valores de fluxo de caixa entre 0 e 4 milhões levam a valores próximos de zero para a opção, indicando que esta não seria exercida.

Analisando sob a ótica de opções reais, chega-se a uma conclusão diferente sobre a forma de conduzir o empreendimento. Segundo essa abordagem, deve-se iniciar o empreendimento investindo o necessário para explorar a 1ª reserva operando com capacidade de beneficiamento de 270 mil t/ano. No 4º ano, quando o minério da 1ª reserva estiver se esgotando, dependendo dos preços dos metais e da taxa de câmbio, deve-se escolher uma dentre 3 opções: encerrar o projeto, iniciar a exploração da 2ª reserva ou realizar a exploração da 2ª reserva em ritmo mais acelerado, com a expansão da capacidade de beneficiamento.

Valor da Opção em função do FC no 16º Trimestre

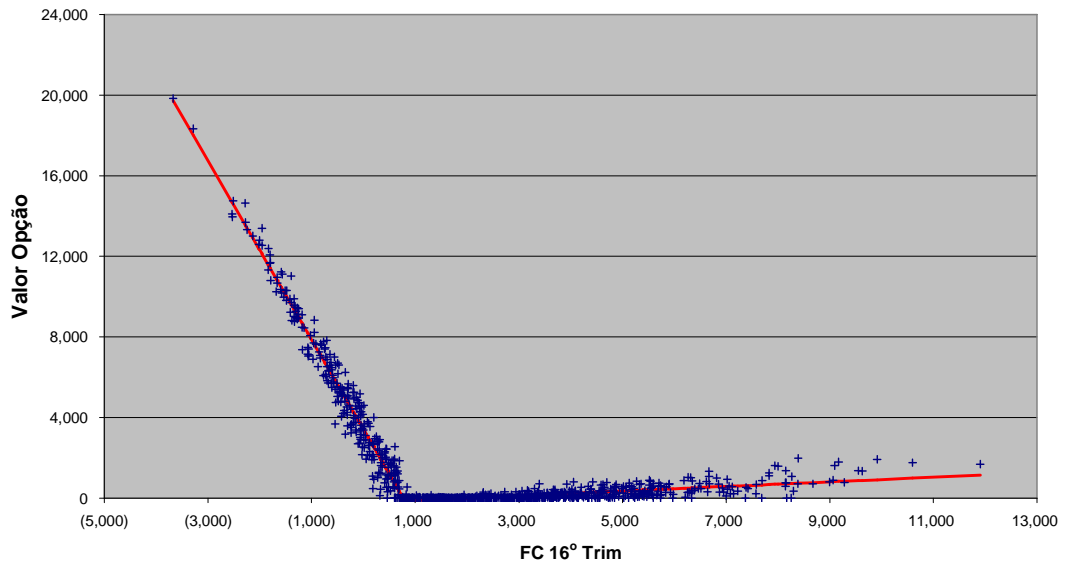


Gráfico 29 – Relação entre o valor das opções e o fluxo de caixa no 16º trimestre – I3

Como pode ser observado no gráfico 30, a análise de opções reais sugere que não se deve expandir o empreendimento quando o fluxo de caixa no último trimestre da 1ª fase for inferior a 500 mil dólares. Entre 500 mil e 1 milhão de fluxo de caixa, há uma transição entre não expandir e realizar a expansão sem aumento de capacidade de beneficiamento. Entre 1 milhão e 3 milhões de fluxo de caixa, a opção de expansão sem aumento de capacidade é a mais apropriada. A partir de 3 milhões, o aumento de capacidade é a opção preponderante.

Relação entre o FC do 16º Trimestre e a Opção Seleccionada

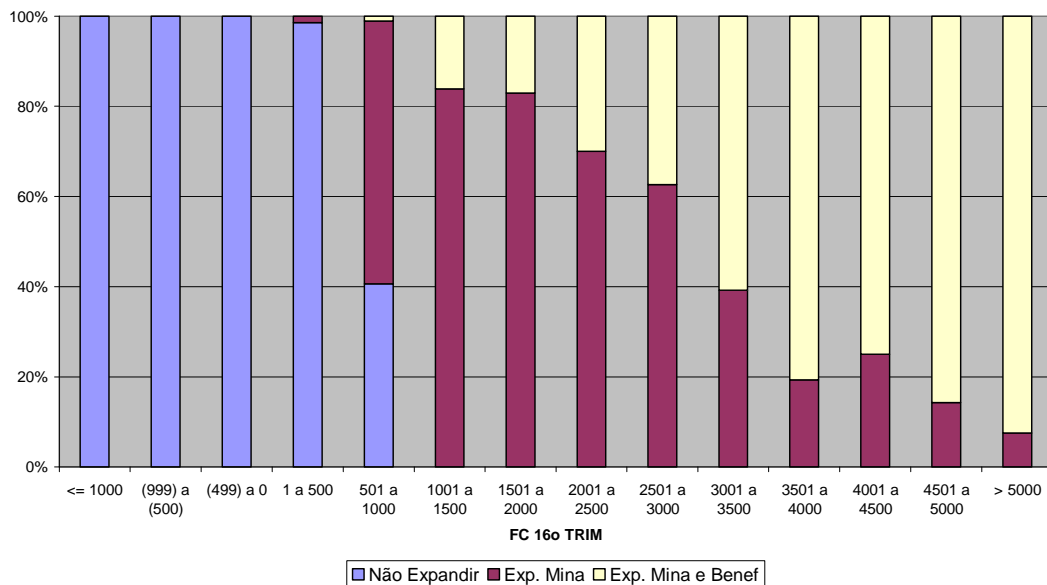


Gráfico 30 – Opção seleccionada em função do fluxo de caixa no 16º trimestre – I3

9.4 Comparação de resultados

Os modelos de análise utilizados geraram resultados significativamente diferentes entre si. A modelagem de preços como MBG leva a valores extremamente elevados, enquanto que as duas abordagens que adotam o PRM geram resultados mais baixos. A AOR gera valores ligeiramente superiores aos obtidos com a técnica de FCD. A tabela 14 sintetiza os resultados obtidos para cada um dos modelos de análise propostos.

Tabela 14 – Comparação do valor do projeto obtido em cada modelo
(valores em US\$ milhões)

| | I1 | I2 | I3 |
|------------|-----------|-----------|-----------|
| FCD | 108,6 | 29,6 | 40,4 |
| AOR | 108,8 | 31,7 | 41,9 |

Para comparar os resultados previstos pelo modelo de simulação I1, que utiliza o MBG para descrever o comportamento do preço do zinco, principal metal da reserva, com os modelos I2 e I3, que se baseiam no PRM, foram obtidos dados sobre o preço do zinco 6 meses após a data de realização da simulação (GRAF. 31).



Gráfico 31 – Preço spot do zinco

A linha vermelha representa a última data utilizada na simulação (31/07/2007). Como pode ser observado, a partir dessa data, até o fim de 2007, o preço do zinco apresentou um viés de

baixa. Esse período é muito curto para definir uma tendência, mas é uma indicação de que o MBG pode superestimar o preço do metal e, conseqüentemente, o valor do empreendimento. Para um projeto de prazo relativamente curto (em torno de 5 anos), o efeito desses 6 meses é significativo.

Outro fator que leva à rejeição do MBG são as projeções de instituições financeiras especializadas em *commodities* minerais. Os relatórios dessas empresas indicam uma tendência de redução do preço dos metais ao longo dos próximos anos. O valor de longo prazo projetado para o zinco é aproximadamente a metade do valor atual (o que é condizente com o preço médio de equilíbrio do PRM).

Enquanto o modelo I2 atrela o preço dos outros metais da reserva ao preço do zinco, modelado como um PRM. O modelo I3 adota um PRM distinto para cada metal, além de modelar a taxa de câmbio como um MBG.

A simulação I3 chega a um valor expandido de aproximadamente US\$ 42 milhões, e um valor de opção de US\$ 1,5 milhões. No modelo I2, o valor expandido é de cerca de US\$ 32 milhões e a flexibilidade gerencial é de US\$ 2,3 milhões. Essa diferença elevada do valor do projeto é devida ao valor inicial do preço do cobre utilizado nos 2 modelos. Ao calcular o preço do cobre a partir da equação de regressão deste com o preço do zinco, o resultado é um preço inicial mais baixo do metal, se comparado com o preço utilizado na simulação I3, que parte dos dados históricos. Como o cobre representa algo em torno de 27% da receita bruta do projeto, essa subestimação leva a um valor presente significativamente inferior. Partindo-se de um preço mais baixo do cobre, a opção de não explorar a 2ª reserva será exercida em um maior número de rodadas de simulação, isso explica o valor mais elevado da opção obtido no modelo I2.

Como a receita decorrente da comercialização do cobre é significativa, a modelagem do preço desse metal é mais adequada do que atrelá-lo ao preço do zinco. Assim, conclui-se que o modelo I3 é o mais indicado para analisar o projeto.

9.5 Análise de sensibilidade

Foi realizada uma análise de sensibilidade para o modelo I3. Essa análise consistiu na avaliação do impacto de variações do preço inicial do metal – $P(t=0)$, da velocidade de reversão à média (η), da volatilidade (σ) e do preço de exercício das opções (investimento) no valor da opção de expandir a mina e o processo de beneficiamento (O_1) e da opção de não expandir (O_2).

Como é esperado, o valor de O_1 cresce com o aumento do preço inicial dos metais. A inclinação da curva aumenta até atingir o patamar 40% superior ao valor utilizado na simulação. A partir desse ponto, a inclinação é aproximadamente constante. O valor de O_1 também cresce com o aumento da volatilidade, pois isto implica maior probabilidade de ocorrerem preços elevados dos metais, o que levaria ao exercício da opção. A velocidade de reversão à média tem efeito contrário sobre o valor de O_1 , pois quanto maior η , mais rápido os preços convergem para o nível médio de equilíbrio, que é inferior ao nível de preços em $t=0$ (GRAF. 32).

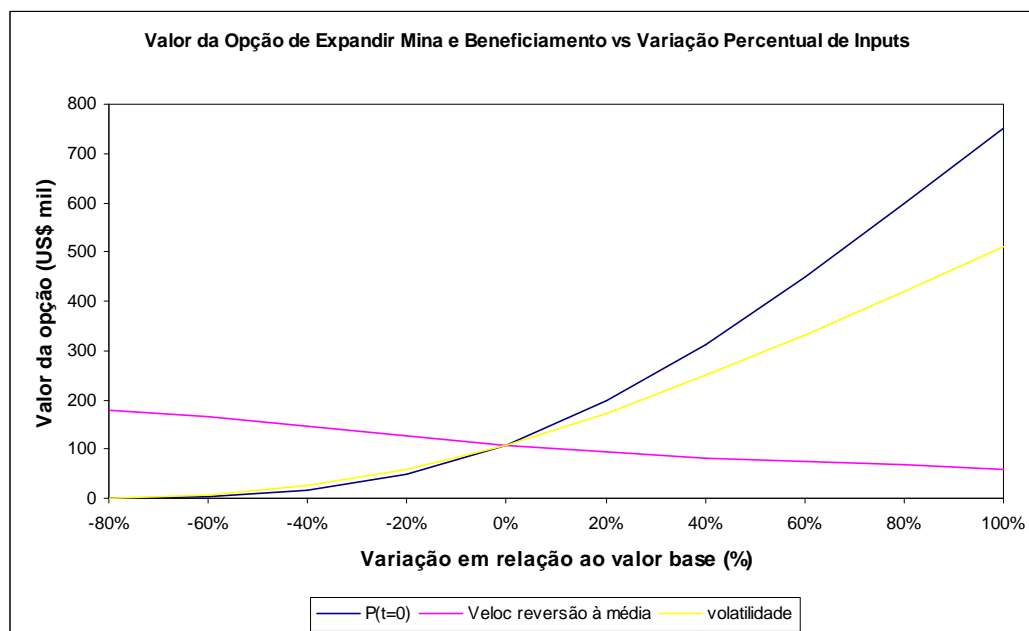


Gráfico 32 – Análise de Sensibilidade – O_1

O gráfico de tornado (GRAF. 33) mostra que o preço inicial dos metais é a variável que exerce maior influência sobre o valor de O_1 , seguida da volatilidade. A velocidade de reversão à média tem um impacto significativamente menor.

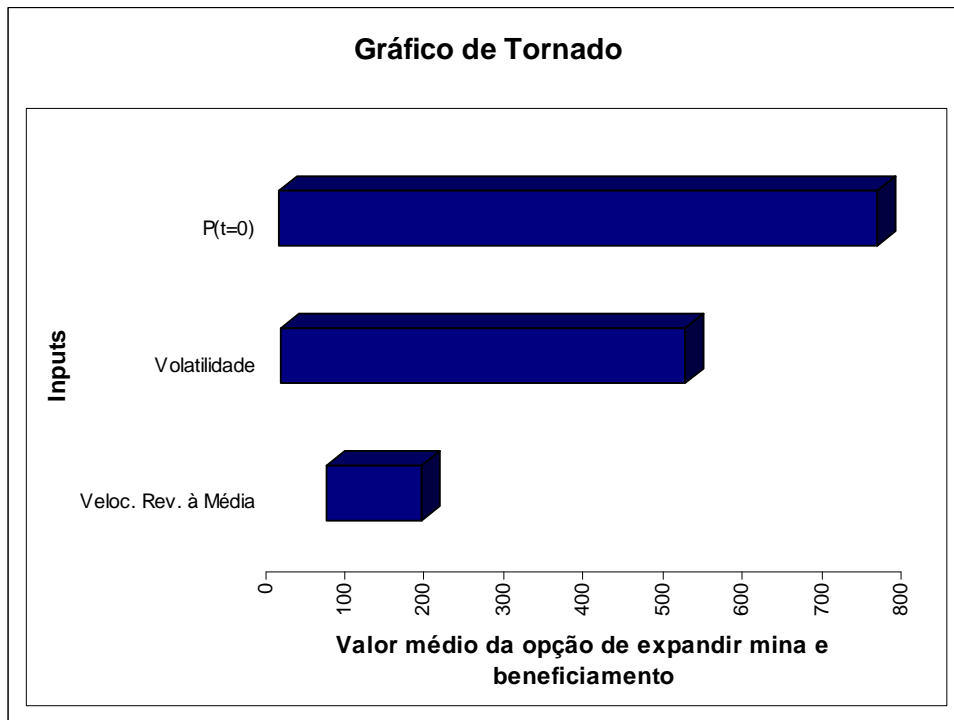


Gráfico 33 – Gráfico de tornado – O_1

A probabilidade de não exercer a opção O_1 considerando os preços iniciais utilizados na simulação é de aproximadamente 60%. Essa probabilidade cai para 20% caso os preços iniciais sejam o dobro do utilizado. No nível de preços utilizados, a probabilidade de essa opção valer mais de 2 milhões de US\$ é insignificante.

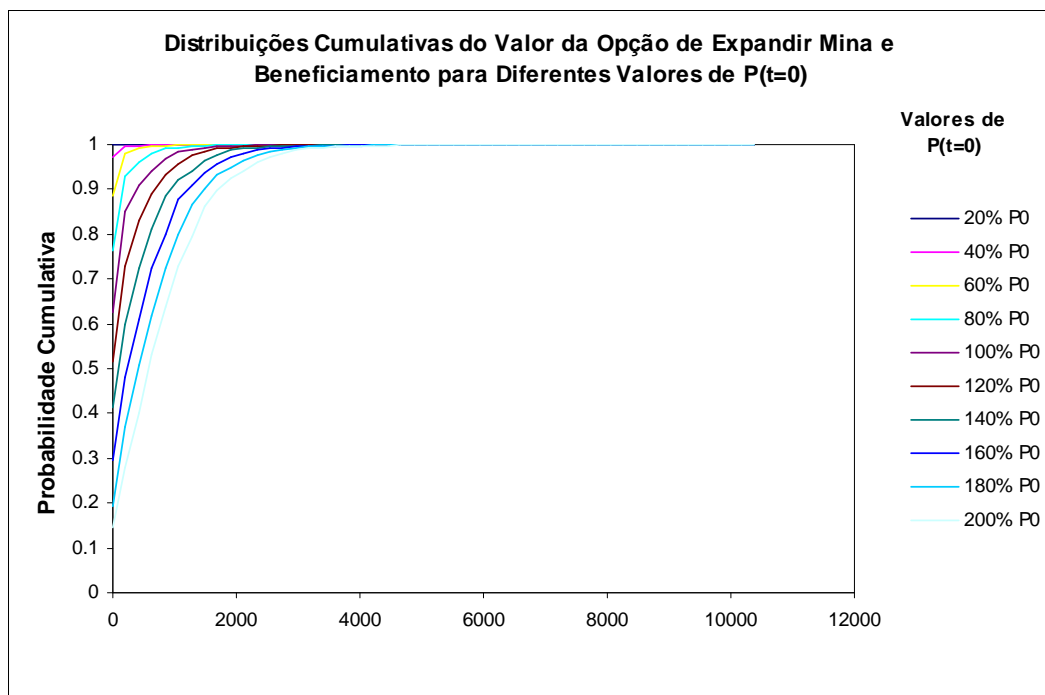


Gráfico 34 – Relação valor da opção O_1 e preço inicial

Os gráficos 35 e 36 mostram que o efeito de variações em η e σ sobre a probabilidade de exercer a opção e sobre seu valor é menos significativo se comparado com o efeito de $P(t=0)$.

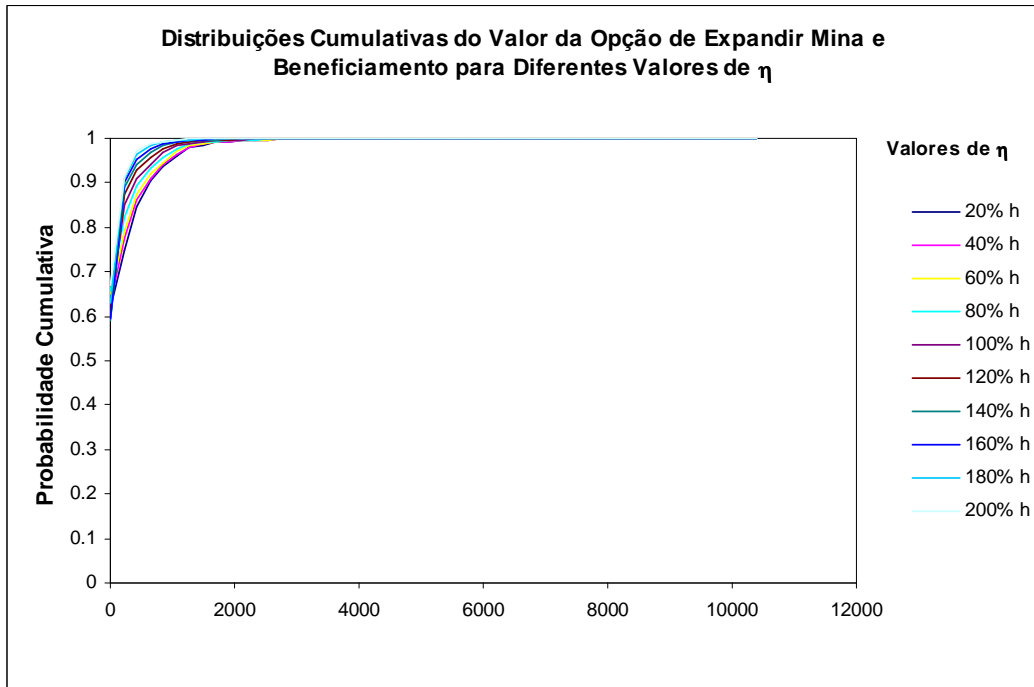


Gráfico 35 – Relação valor da opção O_1 e velocidade de reversão à média

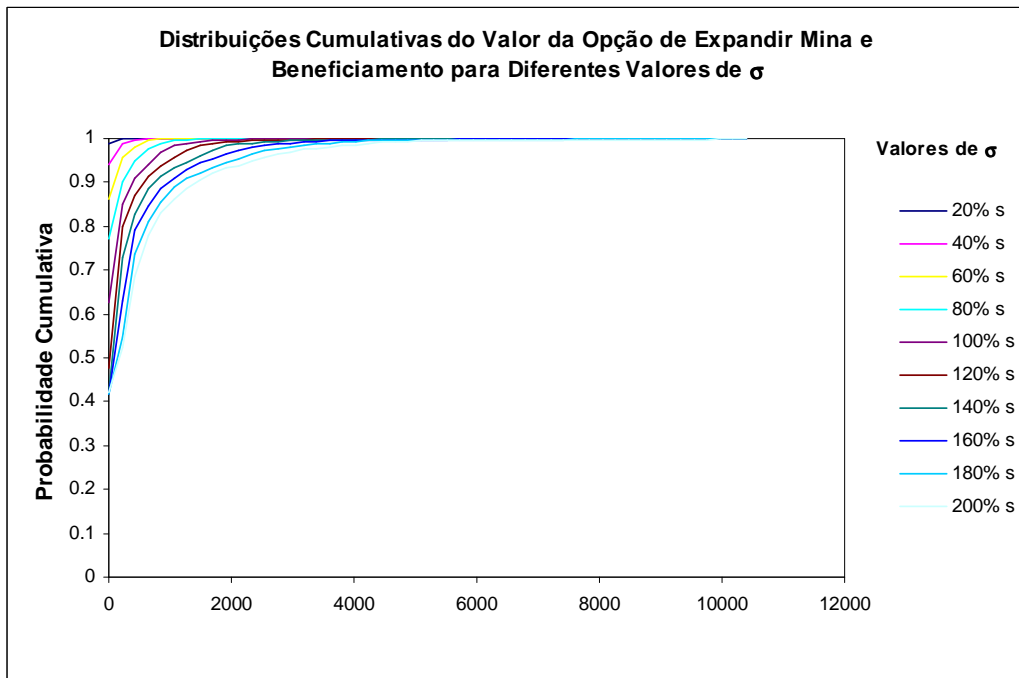


Gráfico 36 – Relação valor da opção O_1 e volatilidade

Como é esperado, o valor da opção de não expandir a mina (O_2) diminui com o aumento do preço inicial dos metais. O aumento da volatilidade faz com que haja maior probabilidade de ocorrência de valores muito baixos de preço, logo eleva o valor da opção. Já a velocidade de

reversão à média tem efeito positivo, mas pouco significativo (GRAF. 37). O efeito do preço inicial dos metais se sobressai em relação às outras variáveis (GRAF. 38). Uma redução de 20% em $P(t=0)$ eleva o valor da opção em aproximadamente US\$ 1 milhão.

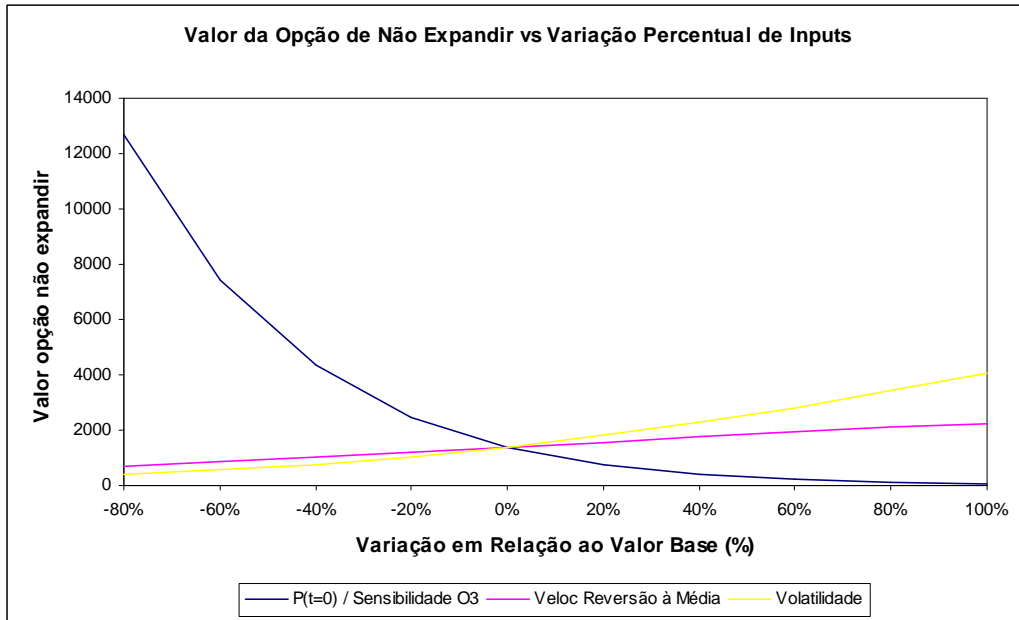


Gráfico 37 – Análise de Sensibilidade – O₂

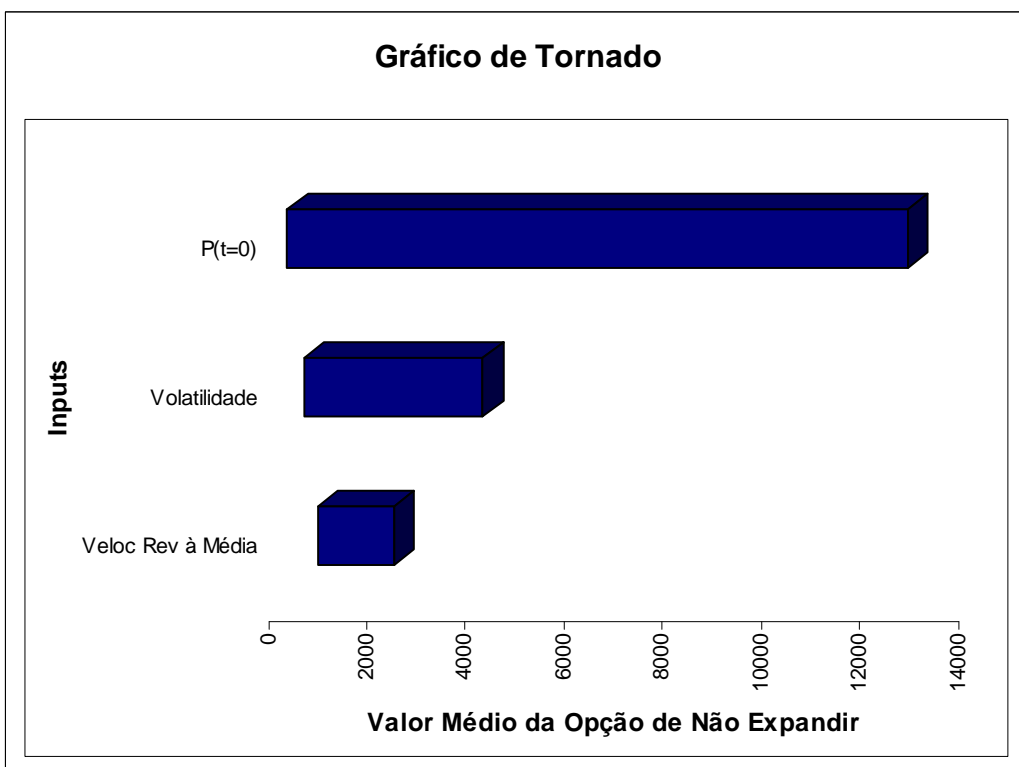


Gráfico 38 – Gráfico de tornado – O₂

No nível atual de preços, a probabilidade de exercer a opção O₂, isto é, de não expandir o projeto é de menos de 30%. Essa probabilidade aumenta para 60% caso o preço inicial dos

metais seja 60% do valor utilizado na simulação (GRAF. 39). O efeito de variações na volatilidade e na velocidade de reversão à média é menos significativo, como pode ser observado pela proximidade das diversas curvas traçadas (GRAF. 40 e GRAF. 41).

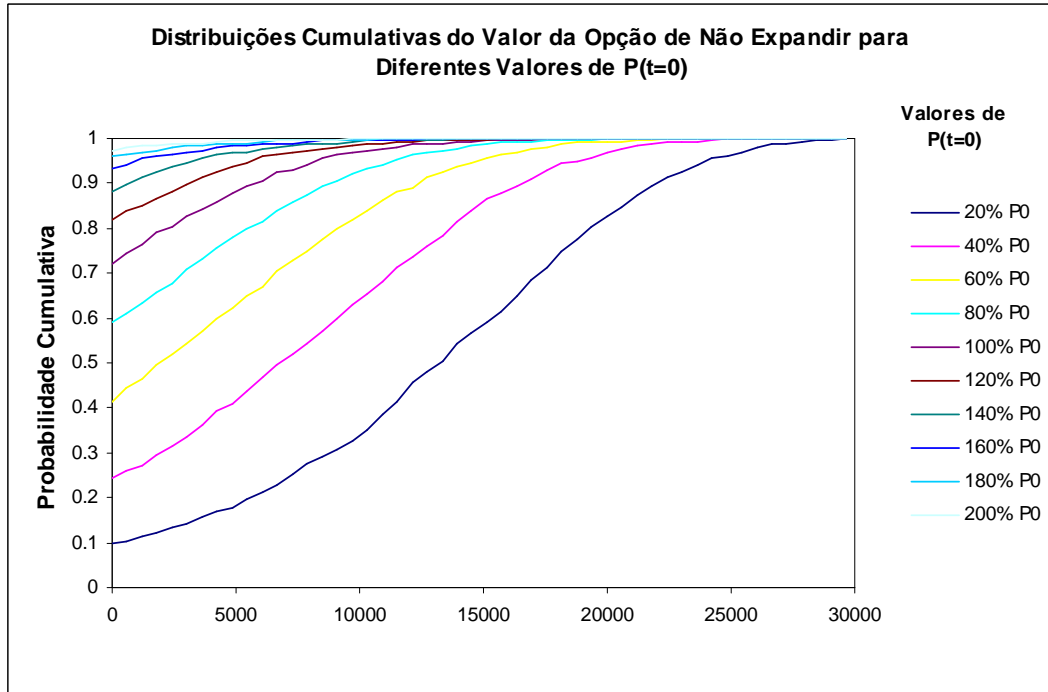


Gráfico 39 – Relação valor da opção O_2 e $P(t=0)$

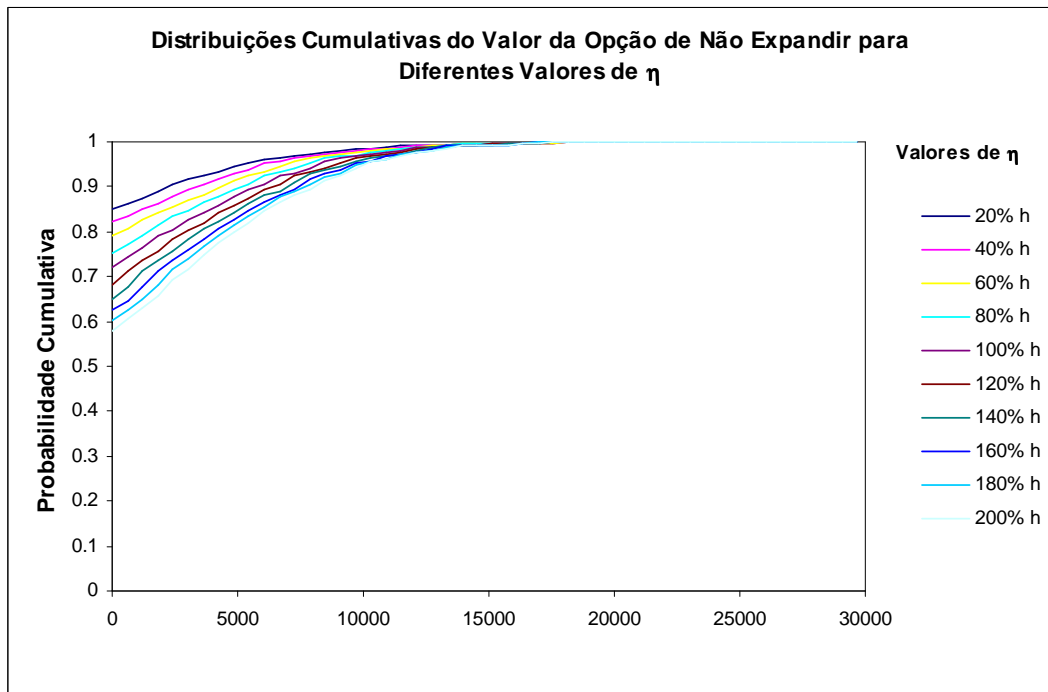


Gráfico 40 – Relação valor da opção O_2 e velocidade de reversão à média

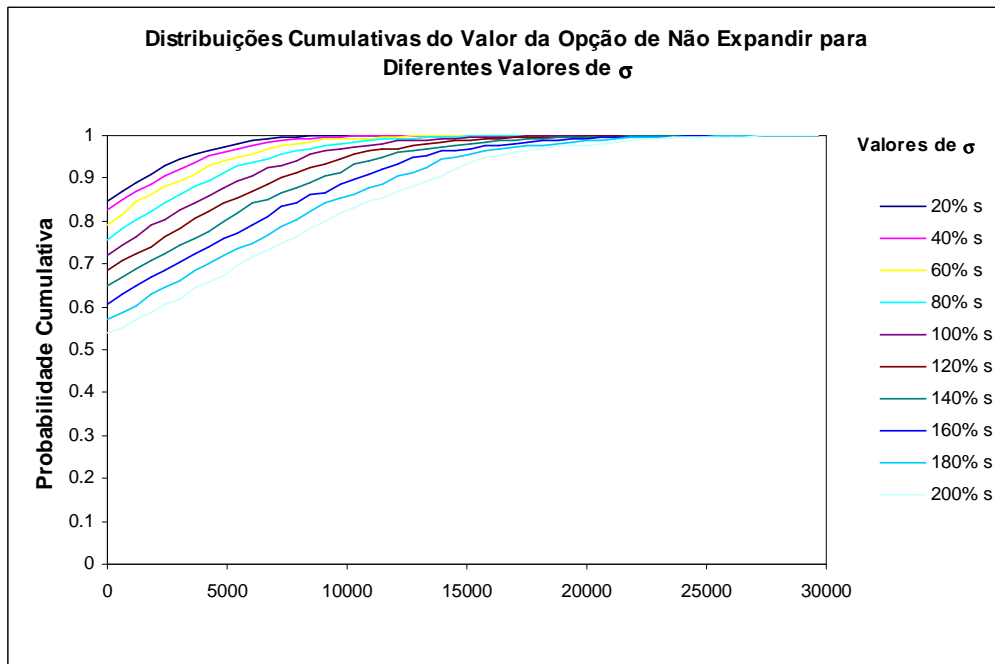


Gráfico 41 – Relação valor da opção O_2 e volatilidade

Por último, analisa-se a sensibilidade do valor conjunto das duas opções em relação às variáveis de entrada. Pode-se observar que a figura (GRAF. 42) se assemelha à análise de sensibilidade para a opção de abandono (O_2), demonstrando que esta prepondera em relação à opção de expansão da capacidade de beneficiamento (O_1). O gráfico de tornado (GRAF. 43) demonstra que o preço inicial tem impacto maior do que o das outras variáveis de entrada.

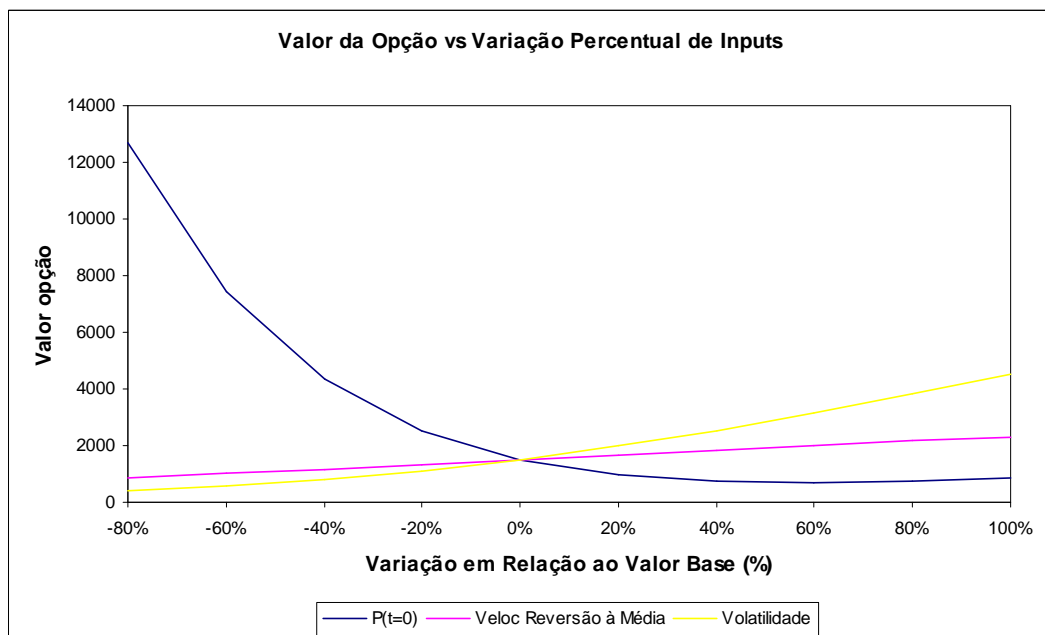


Gráfico 42 – Análise de sensibilidade da opção completa

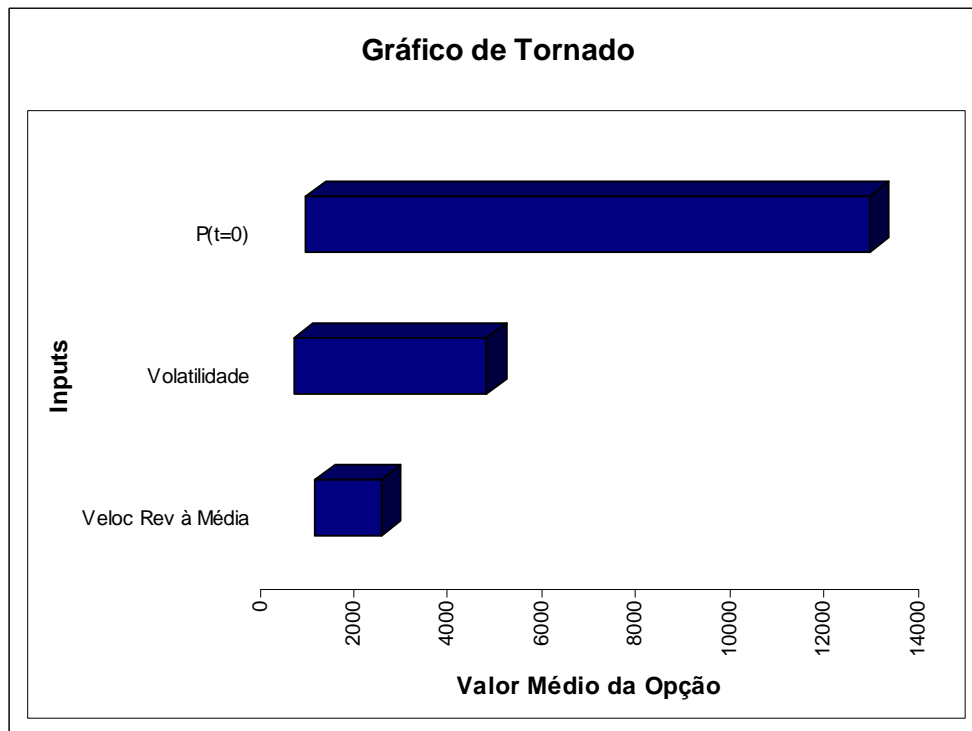


Gráfico 43 – Gráfico de tornado da opção completa

Com o nível de preços utilizado na simulação, a probabilidade de não exercer a opção é de aproximadamente 40%. Essa figura mostra que o valor da flexibilidade gerencial é maior quando os preços são mais baixos, quando a opção de abandono é exercida. Preços elevados levam a exercer a opção de expansão da capacidade, que tem valor mais baixo (GRAF. 44).

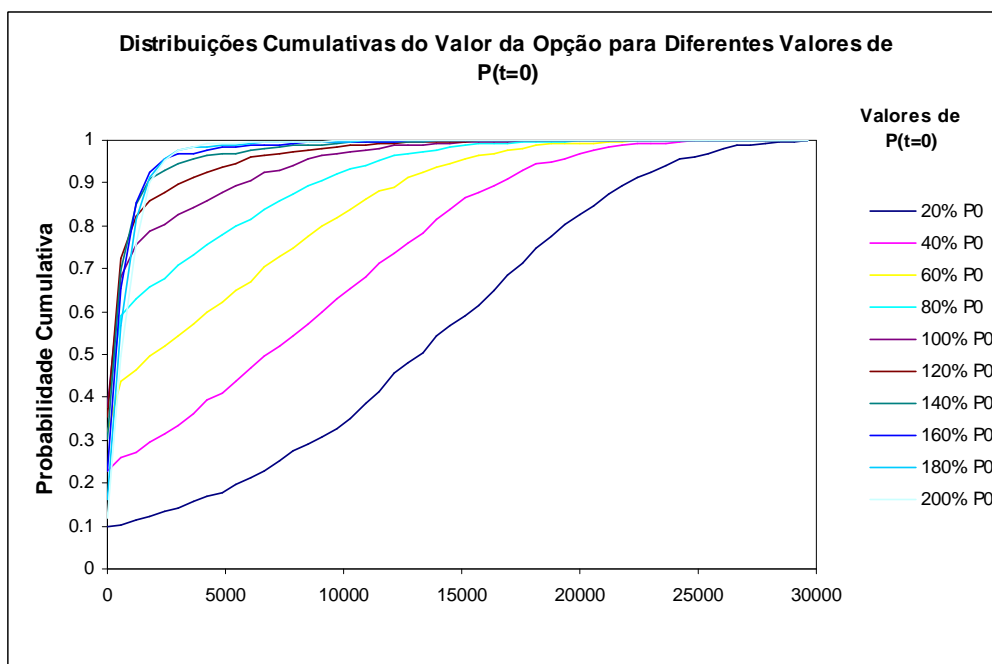


Gráfico 44 – Relação valor da opção completa e o preço inicial

Os gráficos 45 e 46 mostram o efeito mais modesto de η e σ sobre o valor da opção completa.

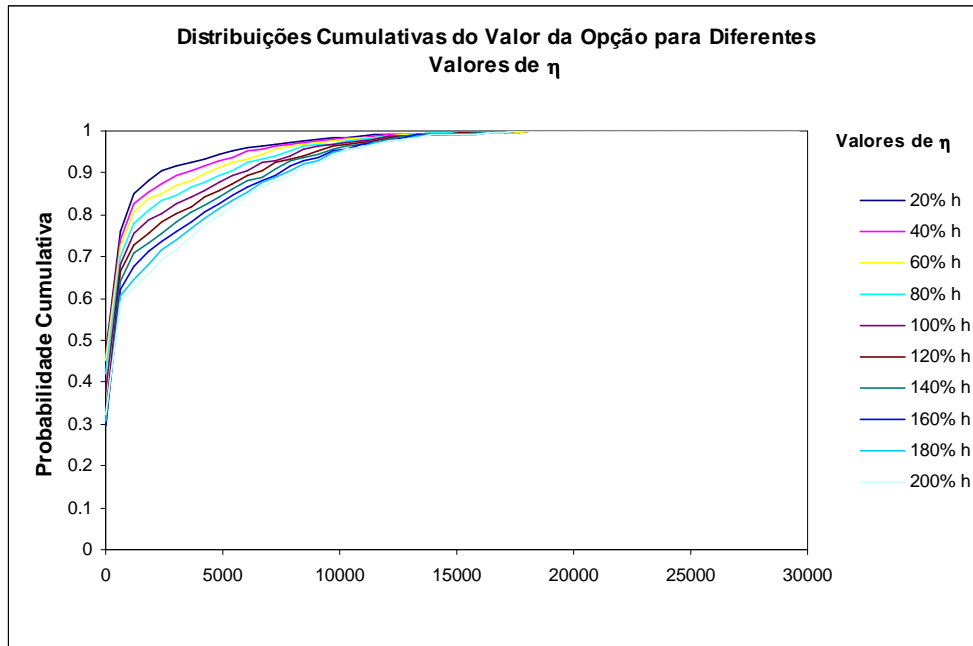


Gráfico 45 – Relação valor da opção completa e velocidade de reversão à média

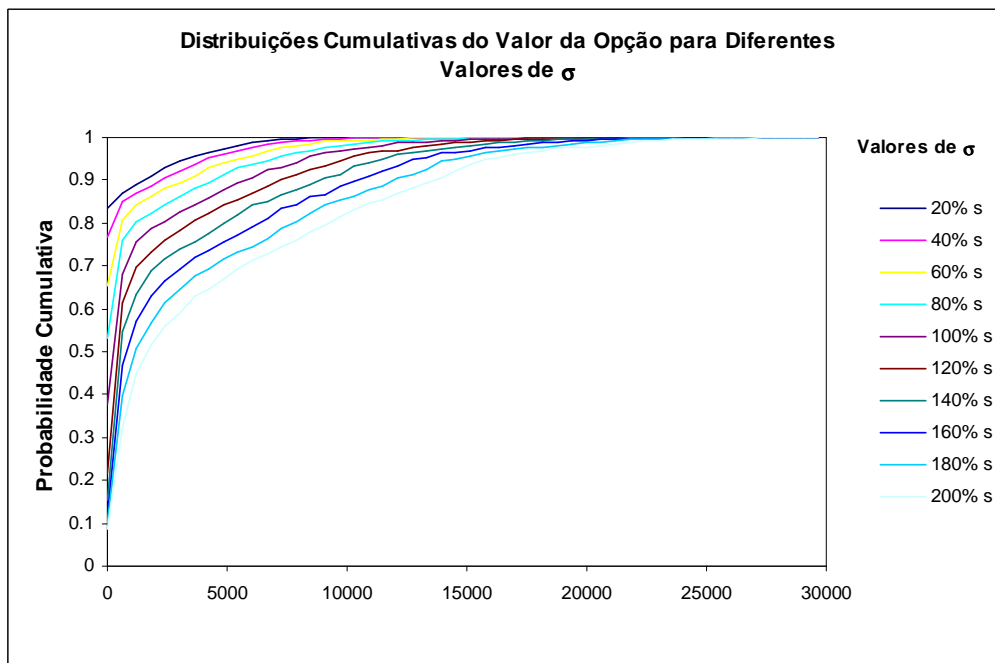


Gráfico 46 – Relação valor da opção completa e volatilidade

O gráfico 47 mostra que o aumento do valor do investimento em 100% praticamente anula o valor da opção de expansão da capacidade de beneficiamento. A probabilidade de exercer O_1 com o investimento previsto é de 40%. Reduzindo-se o investimento pela metade, a probabilidade de exercício da opção sobe para mais de 90%. O aumento de 50% reduz a probabilidade para menos de 10% (gráfico 48).

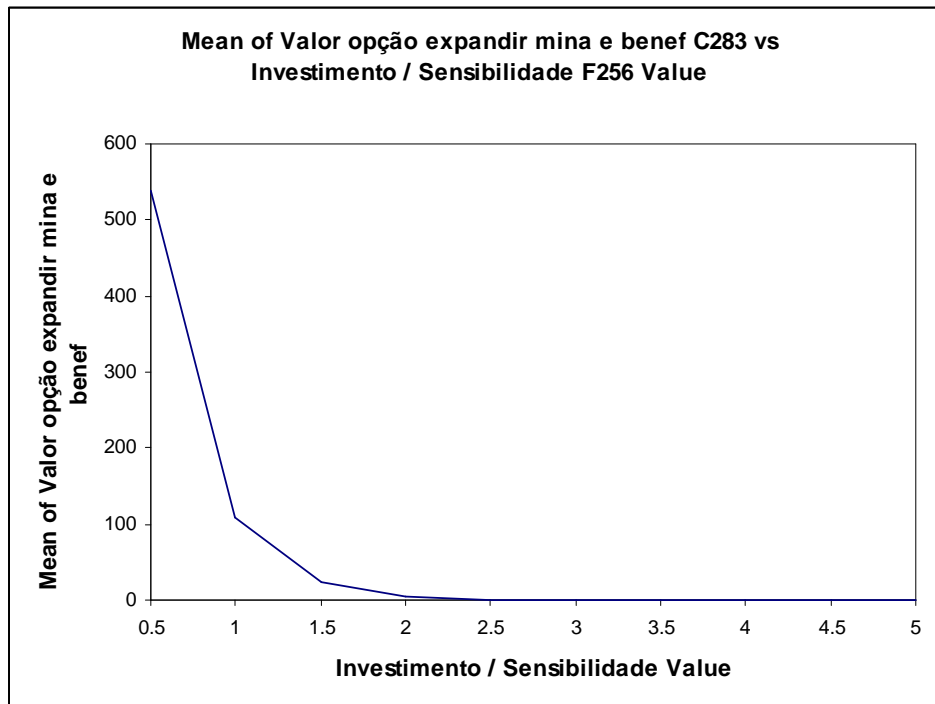


Gráfico 47 – Análise de sensibilidade de O_1 em relação ao investimento

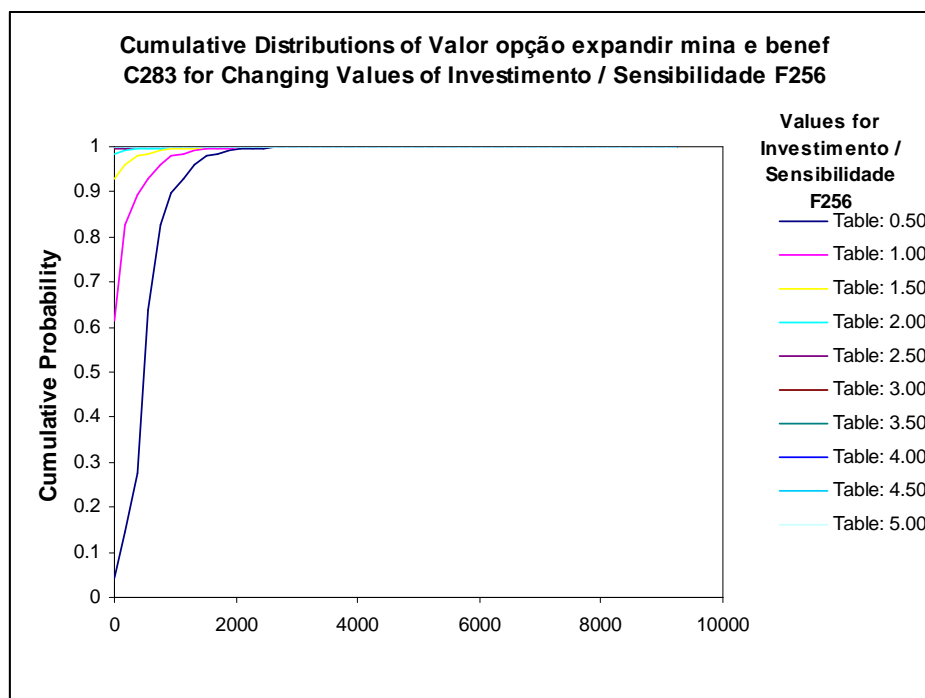


Gráfico 48 – Relação valor de O_1 e o investimento

O efeito do investimento sobre a opção de abandono é apresentado nos gráficos 49 e 50. Logicamente, o valor da opção aumenta com o aumento do investimento. Mas o efeito de uma variação de 50% para mais ou para menos afeta pouco a probabilidade de exercício e o valor da opção.

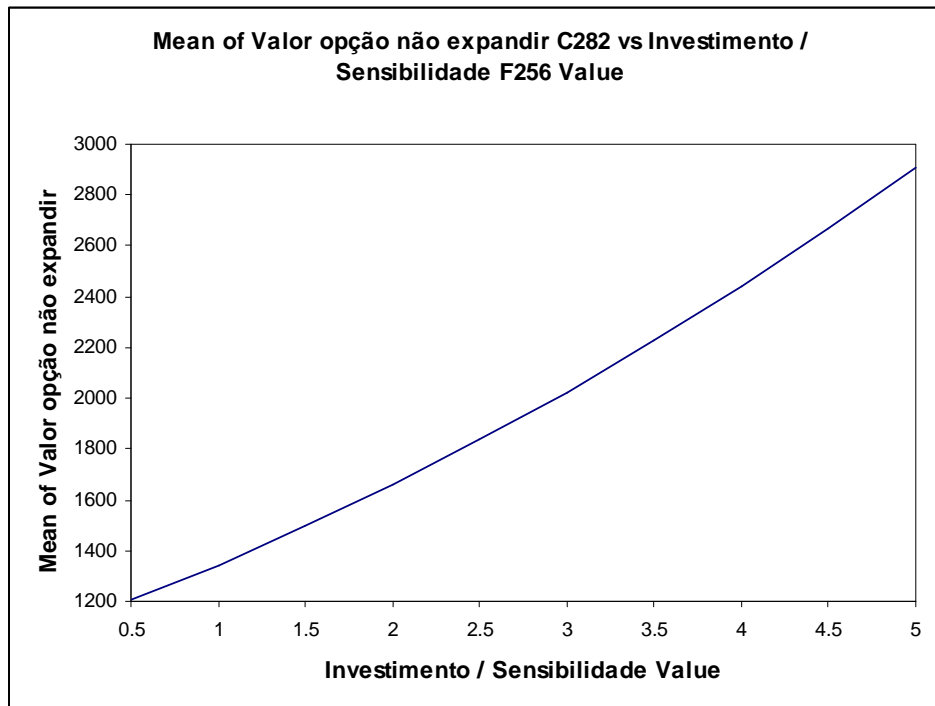


Gráfico 49 – Análise de sensibilidade de O₂ em relação ao investimento

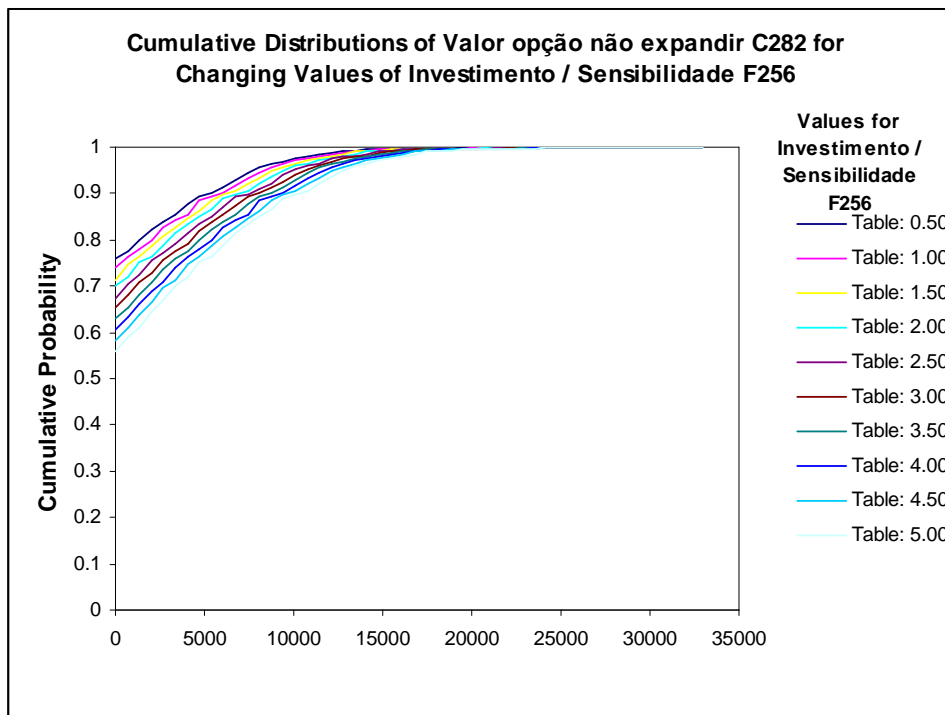


Gráfico 50 – Relação valor da opção de abandono e investimento

Os gráficos 51 e 52 mostram o efeito do investimento sobre o valor da opção completa. Verifica-se uma composição do efeito sobre as duas opções. Um investimento mais baixo eleva o valor da opção devido ao efeito da opção de expansão. Um valor mais alto de

investimento também aumenta o valor da opção, mas devido ao exercício da opção de abandono.

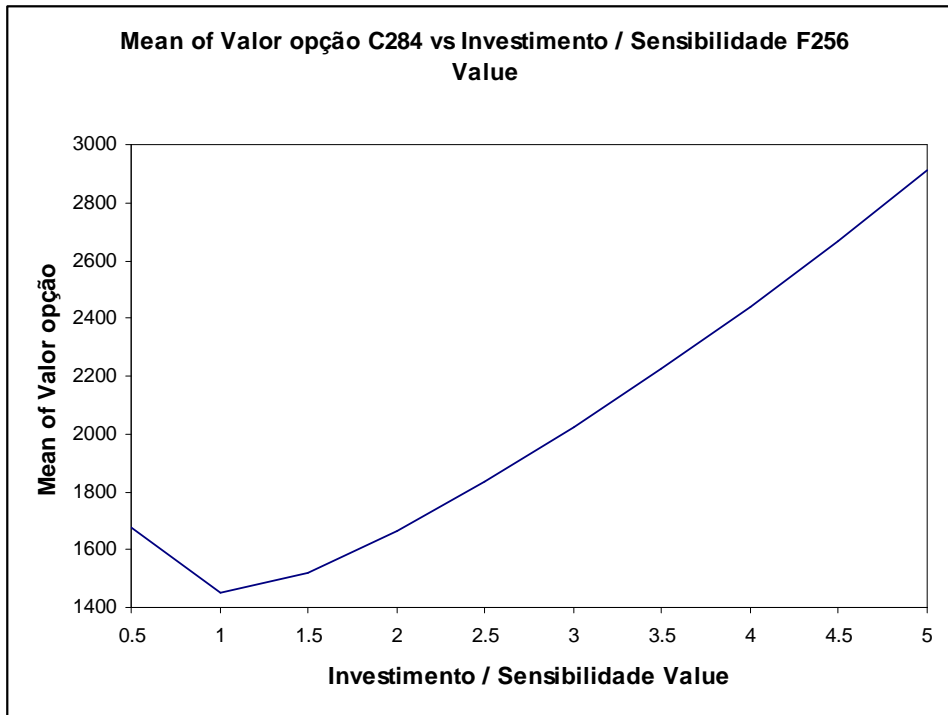


Gráfico 51 – Análise de sensibilidade da opção completa em relação ao investimento

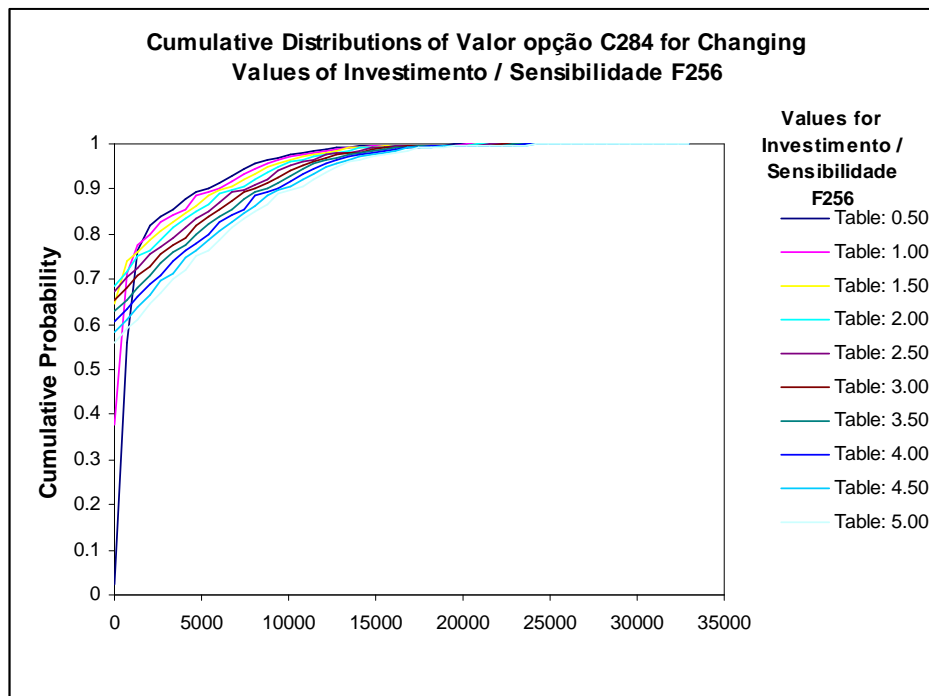


Gráfico 52 – Relação valor da opção completa e investimento

Como as duas opções são exercidas em contextos distintos, pode-se dizer que o valor das duas pode ser somado para obter o valor da opção completa.

10 Conclusão

O projeto abordado neste estudo se caracteriza por apresentar uma incerteza elevada, devido à volatilidade dos preços das *commodities* produzidas. Entretanto o cenário de preços elevados, que torna o projeto extremamente atrativo, faz com que o valor das opções identificadas seja baixo em relação ao valor do empreendimento sem flexibilidade. Assim, a hipótese de que as opções reais elevam o valor do empreendimento é verificada, mas o valor expandido do projeto é pouco superior ao valor obtido pela análise de VPL tradicional (FIG. 31).

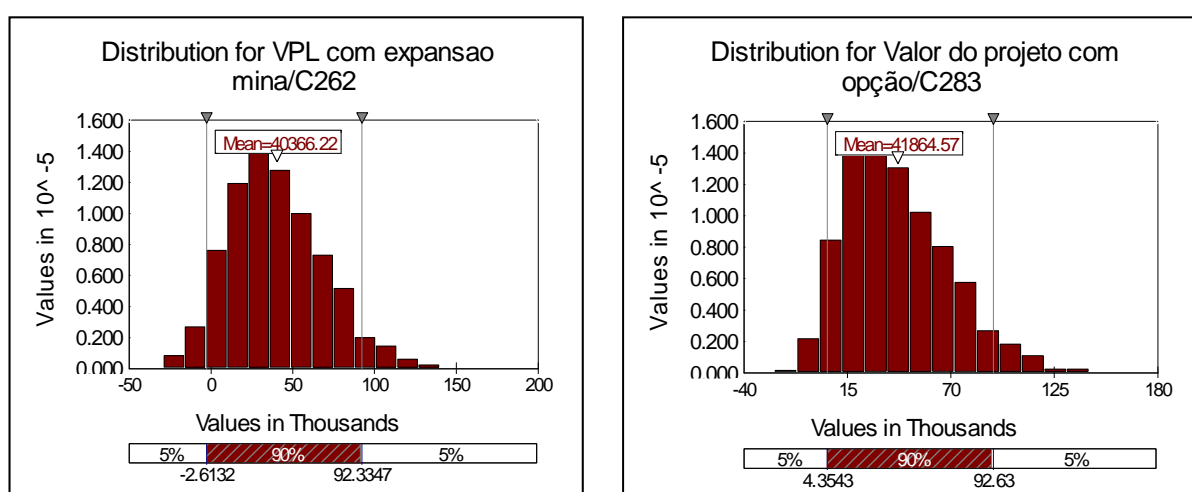


Figura 31 – VPL tradicional e VPL expandido

O baixo investimento necessário para expandir a operação para a 2ª reserva, isto é, o baixo preço de exercício reduz o valor da opção de abandono. Já a pequena diferença dos fluxos de caixa decorrentes do aumento da capacidade de beneficiamento torna pequeno o valor da opção de expansão.

Apesar do baixo valor agregado pelas opções, a análise de opções reais indicou mudanças na estratégia de exploração das reservas. A análise de VPL tradicional indicou que o melhor projeto seria o investimento na exploração das 2 reservas. Já a AOR demonstrou que é melhor investir na exploração da 1ª reserva e esperar novas informações relativas à evolução do preço das *commodities* antes de investir na exploração da 2ª reserva.

O estudo apresenta algumas limitações, que servem de sugestões para trabalhos futuros. Em primeiro lugar, o modelo desenvolvido não trata a incerteza técnica, relacionada ao tamanho

da 2ª reserva, aos teores de minério e aos custos de exploração. Essa incerteza pode trazer impacto significativo no valor do empreendimento e das opções.

Outra limitação é a premissa de que as opções são européias. Inicialmente, considerava-se que a Simulação de Monte Carlo só era apropriada à avaliação desse tipo de opção. Entretanto, a partir dos anos 90, surgiram técnicas que a adaptaram à análise de opções americanas. A análise das opções de abandono e expansão considerando-as como opções americanas pode elevar seus valores e, conseqüentemente, o valor expandido do projeto, além de fornecer informações sobre o tempo adequado ao exercício da opção.

Por último, as séries históricas de preços das *commodities* metálicas utilizadas na obtenção dos parâmetros dos processos estocásticos são relativamente pequenas (18 anos para cobre e zinco e 10 anos para ouro e prata).

A disseminação do uso da AOR nas empresas depende da criação de estratégias de incorporação dessa técnica nas suas atividades planejamento de longo prazo, orçamento e controle. Há espaço para a realização de estudos que identifiquem os meios mais adequados de introdução da AOR na rotina organizacional das empresas brasileiras. Isso envolve o tratamento, buscando a simplificação, de temas complexos envolvendo conceitos estatísticos e financeiros e a adoção de métodos numéricos que requeiram menos conhecimentos de matemática avançada. Envolve também a adaptação das metodologias tradicionais de orçamento de capital, alterando a forma de classificar as oportunidades de investimento e de selecionar aquelas que merecem a aplicação da AOR.

Referências

AMRAN, M.; KULATILAKA, N. **Strategy and shareholder value creation: the real options frontier**. Journal of Applied Corporate Finance, v.13, n.2, 2000, p.15-28.

AMRAN, M.; KULATILAKA, N. **Disciplined decisions: aligning strategy with the financial markets**. Harvard Business Review, jan-feb 1999a, p.95-104.

AMRAN, M.; KULATILAKA, N. **Real Options: managing strategic investment in an uncertain world**. Boston: Harvard Business School Press, 1999b.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Relatório de inflação: junho / 2007**. Relatório de Inflação, v.9, n.2, 2007. Disponível em: <bacen.gov.br>. Acesso em: 20 de agosto de 2007.

BERTSEKAS, D.; TSITSIKLIS, J. **Introduction to probability – class notes**. Boston: MIT, 2000.

BIELSKI, W.; CATALANO, S. P. **Morgan Stanley research: metals & mining**. Morgan Stanley & Co. International, may/2007.

BARRAQUAND, J.; MARTINEAU, D. **Numerical valuation of high dimensional multivariate american securities**. Journal of Financial and Quantitative Analysis, v.30, n.3, 1995, p.383-405.

BLACK, F.; SCHOLES, M. **The pricing of options and corporate liabilities**. Journal of Political Economy, v.81, n.3, p.637-654, may/jun. 1973.

BOYLE, P. P.; **Options: a Monte Carlo approach**. Journal of Financial Economics, v.4, p.323-338, 1977.

BOYLE, P.; BROADIE, M; GLASSERMAN, P. **Monte Carlo methods for security pricing**. Journal of Economic Dynamics and Control, v.21, 1997, p.1267-1321.

BROADIE, M.; GLASSERMAN, P. **Pricing american-style securities using simulation**. Journal of Economics Dynamics and Control, v.21, 1997.

BRENNAN, M. J.; SCHWARTZ, E. S. Finite difference methods and jump processes arising in the pricing of contingent claims: a synthesis. In: SCHWARTZ, E. S.; TRIGEORGIS, L. (Ed.) **Real Options and investment under uncertainty: classical readings and recent contributions**. Cambridge: The MIT Press, 2001, p.559-570.

BRENNAN, M. J.; SCHWARTZ, E. S. **Evaluating natural resource investments**. Journal of Business, v.58, n.2, 1985.

COPELAND, T; ANTIKAROV, V. **Opções Reais: um novo paradigma para reinventar a avaliação de investimentos**. Rio de Janeiro: Campus, 2002.

CORTAZAR, G. Simulation and numerical methods in Real Options valuation. In: SCHWARTZ, E. S.; TRIGEORGIS, L. (Ed.) **Real Options and investment under uncertainty: classical readings and recent contributions**. Cambridge: The MIT Press, 2001, p.601-620.

CORTAZAR, G.; ACOSTA, P.; OSORIO, M. **Monte Carlo evaluation of natural resource investments**. Working Paper, 1999.

CORTAZAR, G; SCHWARTZ, E. S. **Monte Carlo evaluation model of an undeveloped oil field**. Journal of Energy Finance & Development, v.3, n.1, p.73-84, 1998.

COSTA, L. A. **Avaliação econômica do projeto GTL: uma aplicação da teoria de Opções Reais com processo de reversão à média**. Dissertação (Mestrado), Departamento de Engenharia Industrial, PUC-RIO, Rio de Janeiro, 2007.

COX, J. *et al.* **Option pricing: a simplified approach**. Journal of Financial Economics, v.7, p.229-263, 1979.

DIAS, M. A. G. **Investimento sob incerteza em exploração e produção de petróleo**. Dissertação (Mestrado), Departamento de Engenharia Industrial, PUC-RIO, Rio de Janeiro, 1996.

DIAS, M. A. G. **Opções Reais híbridas com aplicações em petróleo**. Tese (Doutorado), Departamento de Engenharia Industrial, PUC-RIO, Rio de Janeiro, 2005.

DIAS, M. A. G. **Real Options in petroleum**. 1995. Disponível em: <www.puc-rio.br/marco.ind/>. Acesso em: 05/08/2007.

DIXIT, A. K.; PINDYCK, R. S. **Investment under uncertainty**. New Jersey: Princeton University Press, 1994.

DIXIT, A. K.; PINDYCK, R. S. The options approach to capital investment. In: SCHWARTZ, E. S.; TRIGEORGIS, L. (Ed.) **Real Options and investment under uncertainty: classical readings and recent contributions**. Cambridge: The MIT Press, 2001, p.61-78.

DNPM - DEPARTAMENTO NACIONAL DE PRODUÇÃO MINERAL. **Informe mineral: desenvolvimento & economia mineral – 1º semestre de 2007**. Brasília, 2007.

DNPM – DEPARTAMENTO NACIONAL DE PRODUÇÃO MINERAL. **Panorama mineral**. Brasília, 2007.

FRANCISCO, M. L. **A importância da flexibilidade gerencial na análise de investimentos usando TOR da planta GTL**. Dissertação (Mestrado), Departamento de Engenharia Industrial, PUC-RIO, Rio de Janeiro, março, 2007.

GLASSERMAN, P. **Monte Carlo methods in financial engineering**. New York: Springer-Verlag, 2004, pp.596.

HULL, J. C. **Fundamentos dos mercados futuros e de opções**. São Paulo: Bolsa de Mercadorias e Futuros, 2005.

IBRAM – Instituto Brasileiro de Mineração. **Instituto Brasileiro de Mineração**. Disponível em: <www.ibram.org.br>. Acesso em: 17/01/2008.

KASANEN, E.; TRIGEORGIS, L. Flexibility, synergy, and control in strategic investment planning. In: AGGARWAL, R. (Ed.) **Capital budgeting under uncertainty**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1993, p.208-231.

KESTER, W. C. Today's options for tomorrow's growth. In: SCHWARTZ, E. S.; TRIGEORGIS, L. (Ed.) **Real Options and investment under uncertainty: classical readings and recent contributions**. Cambridge: The MIT Press, 2001, p.33-45.

KITCO PRECIOUS METALS. **Past historical London fix**. Disponível em: <<http://www.kitco.com/gold.londonfix.html>>. Acesso em: 18/01/2008.

LONDON METALS EXCHANGE. **Market data**. Disponível em: <<http://www.lme.com/dataprices.asp>>. Acesso em: 18/01/2008.

LONGSTAFF, F. A.; SCHWARTZ, E. S. **Valuing American options by simulation: a simple least-squares approach**. The Review of Financial Studies, v.14, n.1, 2001, p.113-147.

LUEHRMAN, T. A. **Investment opportunities as Real Options: getting started on the numbers**. Harvard Business Review, jul-aug., 1998a, p.51-67.

LUEHRMAN, T. A. **Strategy as a portfolio of Real Options**. Harvard Business Review, sep-oct., 1998b, p.89-99.

MACQUARIE GROUP LIMITED. **Macquarie research commodities**. May 30, 2007. Australia.

MILLER, L. T.; PARK, C. S. **Decision making under uncertainty – Real Options to the rescue?** The Engineering Economist, v.47, n.2, 2002, p.105-149.

MINARDI, A. M. A. F. **Teoria de Opções aplicada a projetos de investimento**. São Paulo: Editora Atlas; 2004.

MINARDI, A. M. A. F. **Teoria de Opções aplicada a projetos de investimento**. RAE – Revista de Administração de Empresas, v.40, n.2, Abr/Jun 2000, p.74-79.

MINISTÉRIO DA FAZENDA – SECRETARIA DO TESOURO NACIONAL. **Preços e taxas dos títulos públicos disponíveis para compra**. Disponível em: http://www.tesouro.fazenda.gov.br/tesouro_direto/consulta_titulos/consultatitulos.asp. Acesso em: 20 de agosto de 2007.

MYERS, S. C. Finance theory and financial strategy. In: SCHWARTZ, E. S.; TRIGEORGIS, L. (Ed.) **Real Options and investment under uncertainty: classical readings and recent contributions**. Cambridge: The MIT Press, 2001, p.19-32.

PARK, C. S.; HERATH, H. S. B. **Exploiting uncertainty – investment opportunities as Real Options: a new way of thinking in engineering economics.** The Engineering Economist, v.45, n.1, 2000, p.1-36.

RAYMOND JAMES EQUITY RESEARCH. **Base metals: commodity pricing update – change to short and long-term estimates.** July, 2007.

SABOUR, S. A. A.; POULIN, R. **Valuing real capital investments using the least-squares Monte Carlo method.** The Engineering Economist, v.51, n.2, p.141-160, 2006.

SCHWARTZ, E. S. **The stochastic behavior of commodity prices: implications for valuation and hedging.** The Journal of Finance, v.52, n.3, July, 1997.

SMIT, H. T. J.; TRIGEORGIS, L. **Strategic planning: valuing and managing portfolios of Real Options.** R&D Management, v.36, n.4, 2006, p.403-419.

TRIANI, A. **Real Options: state of the practice.** Journal of Applied Corporate Finance, v.14, n.2, 2001, p.8-24.

TRIGEORGIS, L. **Real Options: managerial flexibility and strategy in resource allocation.** Cambridge: The MIT Press, 1996.

TRIGEORGIS, L. **A conceptual options framework for capital budgeting.** Advances in Futures and Options Research, v.3, 1988, p.145-167.

TRIGEORGIS, L.; MASON, S. P. Valuing managerial flexibility. In: SCHWARTZ, E. S.; TRIGEORGIS, L. (Ed.) **Real Options and investment under uncertainty: classical readings and recent contributions.** Cambridge: The MIT Press, 2001, p.47-60.

U.S DEPARTMENT OF LABOR – Bureau of Labor Statistics. **Consumer price indexes.** Disponível em: <<http://www.bls.gov/cpi/home.htm>>. Acesso em: 20 de agosto de 2007.

Anexo 1 – Planilhas de simulação de processos estocásticos

Neste anexo, são apresentadas as planilhas empregadas na simulação dos processos estocásticos (gráficos do capítulo 5). Nessas planilhas, aplicou-se a função de geração de números aleatórios do Excel. As fórmulas utilizadas são apresentadas em comentários da planilha.

Planilha 1 – Caminho Aleatório de Tempo e Estado Discretos

Neste exemplo, ε_t pode assumir os valores 1 e -1, com probabilidades $p = q = \frac{1}{2}$. Adotou-se a seguinte lógica, gera-se um número aleatório entre 0 e 1, se o número for menor que 0,5, $\varepsilon_t = -1$, caso contrário, $\varepsilon_t = 1$. O valor de $x_{t+1} = x_t + \varepsilon_t$.

| | A | B | C | D | E | F | G |
|----|--------------|----------|-----------------------------------|------------------|------------------|---|---|
| 1 | Tempo | x | ε_t | Aleatório | | | |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0.767 | | | |
| 3 | 2 | 1 | 1 | 0.707 | =ALEATÓRIO() | | |
| 4 | 3 | 2 | -1 | 0.391 | | | |
| 5 | 4 | 1 | 1 | 0.704 | | | |
| 6 | 5 | 2 | -1 | | =SE(D2<0,5;-1;1) | | |
| 7 | 6 | 1 | 1 | 0.303 | | | |
| 8 | 7 | 2 | 1 | 0.922 | | | |
| 9 | 8 | 3 | -1 | 0.143 | | | |
| 10 | 9 | 2 | 1 | 0.583 | | | |
| 11 | 10 | 3 | -1 | 0.084 | | | |

Figura 32 – Planilha de simulação do caminho aleatório de tempo e estado discretos

Planilha 2 – Caminho Aleatório de Tempo Discreto e Estado Contínuo

Neste caso, ε_t segue uma distribuição normal padronizada. A fórmula utilizada fornece o número ao qual corresponde a probabilidade acumulada simulada pelo número aleatório.

| | A | B | C | D | E | F |
|----|--------------|----------|-----------------------------------|------------------|-------------------|---|
| 1 | Tempo | x | ε_t | Aleatório | | |
| 2 | 1 | 0.000 | -1.382 | | | |
| 3 | 2 | -1.382 | 0.359 | | =INV.NORM(D3;0;1) | |
| 4 | 3 | -1.023 | 1.162 | 0.877 | | |
| 5 | 4 | 0.139 | -1.552 | 0.060 | | |
| 6 | 5 | -1.413 | -1.319 | 0.094 | | |
| 7 | 6 | -2.732 | -1.833 | 0.033 | | |
| 8 | 7 | -4.565 | 0.026 | 0.510 | | |
| 9 | 8 | -4.539 | 1.038 | 0.850 | | |
| 10 | 9 | -3.501 | -0.057 | 0.477 | | |

Figura 33 – planilha de simulação do caminho aleatório de tempo discreto e estado contínuo

Planilha 3 – Movimento Browniano com Tendência

Nessa planilha, ε_t é obtido da mesma maneira que na planilha anterior e o valor substituído na equação do Movimento Browniano com Tendência ($dx = \alpha dt + \sigma dz$), onde $dz = \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$. Como $\Delta t = 1$, $x_{t+1} = x_t + \alpha + \sigma \varepsilon_t$.

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|--------------|----------|-----------------------------------|------------------|---|----------|---------|
| 1 | Tempo | x | ε_t | Aleatório | | | |
| 2 | 1 | 0 | 0.201 | 0.580 | | α | 0.02500 |
| 3 | 2 | 0.075 | 1.771 | 0.962 | | σ | 0.25000 |
| 4 | 3 | 0.543 | 1.157 | 0.424 | | | |
| 5 | 4 | 0.279 | 1.457 | 0.424 | | | |
| 6 | 5 | 0.004 | 1.285 | 0.901 | | | |
| 7 | 6 | 0.350 | -0.590 | 0.278 | | | |
| 8 | 7 | 0.228 | -0.596 | 0.276 | | | |
| 9 | 8 | 0.104 | 0.580 | 0.719 | | | |

Figura 34 – Planilha de simulação do Movimento Browniano com Tendência

Planilha 4 – Movimento Browniano Geométrico

No MBG, a variação da variável x é dada por $dx = \alpha x dt + \sigma x dz$. Assim, basta obter o valor de ε_t como nas planilhas anteriores e substituí-lo na equação citada acima. No caso da planilha elaborada, como $\Delta t = 1$, $x_{t+1} = \alpha x_t + \sigma x_t \varepsilon_t$.

| | A | B | C | D | E | F | G |
|----|--------------|----------|-----------------------------------|------------------|---|----------|---------|
| 1 | Tempo | x | ε_t | Aleatório | | | |
| 2 | 1 | 100 | 0.665 | 0.747 | | | |
| 3 | 2 | 104.739 | 0.403 | 0.578 | | α | 1.00750 |
| 4 | 3 | 106.760 | 0.403 | 0.578 | | σ | 0.06000 |
| 5 | 4 | 105.615 | 1.448 | 0.926 | | | |
| 6 | 5 | 115.585 | -0.792 | 0.214 | | | |
| 7 | 6 | 110.956 | -0.770 | 0.221 | | | |
| 8 | 7 | 106.664 | 0.186 | 0.574 | | | |
| 9 | 8 | 108.653 | 0.968 | 0.833 | | | |
| 10 | 9 | 115.778 | -0.756 | 0.225 | | | |

Figura 35 – Planilha de simulação do Movimento Browniano Geométrico

Planilha 5 – Processo de Reversão à Média

Nessa planilha, ε_t é obtido da mesma maneira que na planilha anterior e o valor substituído na equação do Processo de Reversão à Média, $dx = \eta (\bar{x} - x) + \sigma dz$, onde $dz = \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$. Como $\Delta t = 1$, $x_{t+1} = x_t + \eta (\bar{x} - x) + \sigma \varepsilon_t$.

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|--------------|----------|-----------|------------------|---|----------|------|
| 1 | Tempo | x | et | Aleatório | | | |
| 2 | 1 | 2 | -1.304 | 0.096 | | σ | 0.05 |
| 3 | 2 | 1.885 | 1.440 | 0.925 | | x | 1 |
| 4 | 3 | 1.913 | 3.350 | 1.000 | | γ | 0.05 |
| 5 | 4 | 2.034 | -0.575 | 0.283 | | | |
| 6 | 5 | 1.836 | 1.015 | 0.415 | | | |
| 7 | 6 | 1.742 | | | | | |
| 8 | 7 | 1.685 | -0.804 | 0.211 | | | |
| 9 | 8 | 1.610 | 0.888 | 0.813 | | | |

| | |
|----------------------------------|--|
| =B6+\$G\$4*(\$G\$3-B6)+\$G\$2*C6 | |
|----------------------------------|--|

Figura 36 – Planilha de simulação do Processo de Reversão à Média

Anexo 2 – Planilhas de simulação do empreendimento

Neste anexo, são apresentadas as planilhas utilizadas na simulação do empreendimento, de acordo com os três modelos de simulação propostos:

- I1: preço do zinco modelado como um MBG;
- I2: preço do zinco modelado como um PRM;
- I3: preço de cada metal modelado como um PRM e taxa de câmbio como um MBG.

Nas simulações, foi empregado o aplicativo @risk dentro do ambiente do Microsoft Excel.

Modelo I1

Neste modelo, o preço do zinco segue um Movimento Browniano Geométrico e pode ser simulado por meio da equação 74.

$$P_{t+1} = P_t e^{\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} N(0;1)}$$

O valor de $\varepsilon_t \sim N(0;1)$ é simulado para cada intervalo de tempo por meio da função do @risk: RiskNormal(0;1). O resultado é substituído na equação acima, como pode ser visto na figura 37.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|----|-----------------------------|------------------------|----------------|--|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 1 | Parâmetros | | | | | | | | |
| 2 | Variável | Unidade | Zn | | | | | | |
| 3 | Preço inicial | P(t=0) | USD/t | 3590 | | | | | |
| 4 | Volatilidade | σ | %aa | 25.83% | | | | | |
| 5 | Taxa livre de risco | r | %aa | 7.73% | | | | | |
| 6 | Convenience Yield | d | %aa | 1.18% | | | | | |
| 7 | Taxa neutra ao risco | r-d | %aa | 6.55% | | | | | |
| 8 | Taxa neutra ao risco | r-d | %trim | 1.60% | | | | | |
| 9 | Volatilidade | σ | %trim | 12.92% | | | | | |
| 10 | | $\alpha - 1/2\sigma^2$ | | 0.76% | | | | | |
| 11 | | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | |
| 13 | | 2007 | 2007 | 2008 | 2008 | 2008 | 2008 | 2009 | 2009 |
| 14 | Incremento de Wiener | 3o TRIM | 4o TRIM | 1o TRIM | 2o TRIM | 3o TRIM | 4o TRIM | 1o TRIM | 2o TRIM |
| 15 | | TR1 | TR2 | =RiskNormal(0; 1) | TR5 | TR6 | TR7 | TR8 | |
| 16 | Zinco N(0;1) | 0 | 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 17 | | | | | | | | | |
| 18 | | 2007 | 2007 | 2008 | 2008 | 2008 | 2008 | 2009 | 2009 |
| 19 | Preço | 3o TRIM | 4o TRIM | 1o TRIM | 2o TRIM | 3o TRIM | 4o TRIM | 1o TRIM | 2o TRIM |
| 20 | | TR1 | TR2 | TR3 | TR4 | TR5 | TR6 | TR7 | TR8 |
| 21 | Ano | 0.00 | 0.25 | =RiskOutput("Preço Zinco";2) + B22*EXP(\$D\$10+\$D\$9*C16) | | | | | |
| 22 | Zinco | 3590 | 3618 | | | | | | |
| 23 | Cobre | 7118 | 7172 | =RiskOutput("Preço Prata";1) + 0.0028*C22 + 2.4474 | | | | | |
| 24 | Prata | 12.50 | 12.58 | | | | | | |
| 25 | Ouro | 636 | 639 | 642 | 646 | 649 | 652 | 658 | 659 |
| 26 | Câmbio | 1.962 | 1.967 | 1.973 | 1.978 | 1.984 | 1.990 | 1.995 | 2.001 |

Figura 37 – Planilha de modelagem da incerteza conforme modelo I1

O preço dos outros metais é calculado por meio da equação de regressão linear que relaciona seu preço ao preço do zinco. Na figura é apresentada a equação para o preço da prata.

Modelo I2

Neste modelo, o logaritmo do preço do zinco, $x = \ln(P_t)$, segue um Processo de Reversão à Média e é simulado por meio da equação 81.

$$x_t = x_{t-1}e^{-\eta\Delta t} + \bar{x}(1 - e^{-\eta\Delta t}) + \sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}}N(0,1)$$

A simulação do valor de $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ segue a lógica apresentada anteriormente. O resultado é substituído na equação acima. Para obter o valor de P_t , utiliza-se a equação 82.

$$P_t = e^{x_t - (1 - e^{-2\eta t})\frac{\sigma^2}{4\eta}}$$

A planilha apresentada na figura 38 é uma adaptação da planilha criada por Dias (1995). A adaptação realizada foi a utilização da função normal padronizada para geração aleatória de ε_t .

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | |
|----|------------------------------------|----------------|----------------|--|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----|
| 1 | Parâmetros | | | | | | | | | |
| 2 | Variável | Unidade | Zn | | | | | | | |
| 3 | Preço inicial | P(t=0) | USDA | 3590 | | | | | | |
| 4 | Volatilidade | σ | %aa | 25.83% | | | | | | |
| 5 | Velocidade de reversão à média | η | %aa | 15.38% | | | | | | |
| 6 | Taxa livre de risco | r | %aa | 7.73% | | | | | | |
| 7 | Meia vida | H | anos | 4.51 | | | | | | |
| 8 | Preço médio de equilíbrio | P' | USDA - US\$ | 1623 | | | | | | |
| 9 | | $\ln(P')$ | | 7.3919 | | | | | | |
| 10 | Taxa de desconto ajustada ao risco | μ | %aa | 11.60% | | | | | | |
| 11 | Prêmio de risco | $\mu-r$ | %aa | 3.87% | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | | |
| 13 | Incremento de Wiener | 2007 | 2007 | 2008 | 2008 | 2008 | 2008 | 2009 | 2009 | |
| 14 | | 3o TRIM | 4o TRIM | 1o TRIM | 2o TRIM | 3o TRIM | 4o TRIM | 1o TRIM | 2o TRIM | |
| 15 | | TR1 | TR2 | TR3 | TR4 | TR5 | TR6 | TR7 | TR8 | |
| 16 | Zinco N(0,1) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 21 | | | | | | | | | | |
| 22 | x(t) | 2007 | 2007 | 2008 | 2008 | 2008 | 2008 | 2009 | 2009 | |
| 23 | | 3o TRIM | 4o TRIM | 1o TRIM | 2o TRIM | 3o TRIM | 4o TRIM | 1o TRIM | 2o TRIM | |
| 24 | | TR1 | TR2 | TR3 | TR4 | TR5 | TR6 | TR7 | TR8 | |
| 25 | Ano | 0.00 | 0.25 | =B26*EXP(-D\$5*(C25-B25))+ | | | | | | 75 |
| 26 | Zinco | 8.186 | 8.146 | (\$D\$9-\$D\$11/\$D\$5)*(1-EXP(-D\$5*(C25-B25)))+ | | | | | | 89 |
| 30 | | | | D\$4*(((1-EXP(-2*D\$5*(C25-B25)))/(2*D\$5))^0.5)*C16 | | | | | | |
| 31 | | | | | | | | | | |
| 32 | Preço | 2007 | 2007 | 2008 | 2008 | 2008 | 2008 | 2009 | 2009 | |
| 33 | | 3o TRIM | 4o TRIM | 1o TRIM | 2o TRIM | 3o TRIM | 4o TRIM | 1o TRIM | 2o TRIM | |
| 34 | | TR1 | TR2 | TR3 | TR4 | TR5 | TR6 | TR7 | TR8 | |
| 35 | Ano | 0.00 | 0.25 | =EXP(C26-(1-EXP(-2*D\$5*C34))*D\$4^2/(4*D\$5)) | | | | | | 75 |
| 36 | Zinco | 3590 | 3424 | | | | | | | 81 |
| 37 | Cobre | 7118 | 6789 | | | | | | | 24 |
| 38 | Prata | 12.50 | 12.03 | 11.61 | 11.22 | 10.86 | 10.53 | 10.23 | 9.95 | |
| 39 | Ouro | 636 | 616 | 598 | 582 | 567 | 553 | 540 | 528 | |
| 40 | Câmbio | 1.962 | 1.967 | 1.973 | 1.978 | 1.984 | 1.990 | 1.995 | 2.001 | |
| 41 | Δ Câmbio | 0.00% | 0.28% | 0.56% | 0.84% | 1.12% | 1.40% | 1.69% | 1.97% | |

Figura 38 – Planilha de modelagem da incerteza conforme modelo I2

Modelo I3

No Modelo I3, os preços de todos os metais seguem um Processo de Reversão à Média. A lógica de simulação é a mesma do modelo anterior. Nessa planilha, foram gerados valores aleatórios de ε_t para cada metal e para a taxa de câmbio em cada trimestre. Essa planilha também se baseou no modelo criado por Dias (1995).

Já a taxa de câmbio segue um Movimento Browniano Geométrico. A lógica de simulação é a mesma adotada no modelo I1 para o preço do zinco.

Anexo 3 – Lema de Ito

De acordo com Dixit e Pindyck (1994), o processo de Ito corresponde a uma generalização do movimento Browniano simples com tendência, dado pela seguinte equação:

$$dx = a(x,t) dt + b(x,t) dz \quad [\text{eq. 99}]$$

Onde dz é o incremento do processo de Wiener e $a(x,t)$ e $b(x,t)$ são funções não aleatórias conhecidas. A equação indica que os coeficientes de *drift* e de variância são funções do estado atual e do tempo. Os termos $a(x,t)$ e $b^2(x,t)$ são denominados taxa de *drift* instantânea e taxa de variância instantânea, respectivamente.

O processo de Ito é contínuo no tempo, mas não é diferenciável, assim, para diferenciar e integrar funções do processo de Ito é necessário utilizar o lema de Ito. O lema de Ito pode ser compreendido como uma expansão de uma série de Taylor (DIXIT; PINDYCK, 1994). Supondo que $x(t)$ segue um processo de Ito e considerando que $F(x,t)$ é duas vezes diferenciável em x e uma em t , se quisermos encontrar a diferencial total dessa função, podemos defini-la em termos das variações de primeira ordem de x e t :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial t} dt \quad [\text{eq. 100}]$$

Se quisermos inserir termos de ordem superior em x , temos:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (dx)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} (dx)^3 + \dots \quad [\text{eq. 101}]$$

No limite, os termos de ordem superior podem ser descartados e a equação se resume a:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (dx)^2 \quad [\text{eq. 102}]$$

Substituindo a equação do processo de Ito em $(dx)^2$, temos:

$$(dx)^2 = [a(x,t)dt + b(x,t)dz]^2 = a^2(x,t)(dt)^2 + 2a(x,t)b(x,t)dtdz + b^2(x,t)(dz)^2 \quad [\text{eq. 103}]$$

Quando o intervalo de tempo tende a zero, $dtdz \rightarrow 0$, $dt^2 \rightarrow 0$ e $(dz)^2 = dt$ assim:

$$(dx)^2 = b^2(x,t) dt. \quad [\text{eq. 104}]$$

Substituindo os valores de dx e $(dx)^2$ na equação, temos:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} [a(x,t)dt + b(x,t)dz] + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} b^2(x,t)dt \quad [\text{eq. 105}]$$

Separando os termos em dt , temos:

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + a(x,t) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(x,t) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] dt + b(x,t) \frac{\partial F}{\partial x} dz \quad [\text{eq. 106}]$$