

RAPHAEL REIS MAURO DE CASTRO

**SISTEMAS EIXO-RAIO DE ALOCAÇÃO SIMPLES:
MODELOS E ALGORITMOS**

Belo Horizonte
03 de dezembro de 2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

**SISTEMAS EIXO-RAIO DE ALOCAÇÃO SIMPLES:
MODELOS E ALGORITMOS**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Produção.

RAPHAEL REIS MAURO DE CASTRO

Belo Horizonte
03 de dezembro de 2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

FOLHA DE APROVAÇÃO

Sistemas Eixo-Raio de Alocação Simples:
Modelos e Algoritmos

RAPHAEL REIS MAURO DE CASTRO

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Ph. D. RICARDO SARAIVA DE CAMARGO – Orientador
Universidade Federal de Minas Gerais

Ph. D. GILBERTO DE MIRANDA JÚNIOR – Co-orientador
Universidade Federal de Minas Gerais

Ph. D. MAURÍCIO CARDOSO DE SOUZA
Universidade Federal de Minas Gerais

Ph. D. RICARDO POLEY MARTINS FERREIRA
Universidade Federal de Minas Gerais

Belo Horizonte, 03 de dezembro de 2010

Resumo

Neste trabalho, sete implementações do método de decomposição de Benders são apresentadas para a resolução do problema de localização de concentradores com alocação simples não capacitados, sendo três implementações do método original e outras quatro implementações através de variações do método propostas na literatura. Esse problema consiste em determinar quantos concentradores instalar e como alocar os clientes aos mesmos, de forma a minimizar o custo total. As implementações com variações do método de decomposição de Benders mostraram-se bastante competitivas frente à implementação clássica do método e ao modelo original implementado via CPLEX.

Palavras-chaves: Redes eixo-raio, Decomposição de Benders; Alocação Simples

Abstract

In this paper, seven variants of the Benders decomposition method are presented to solve the single allocation hub location problem, where three of them use the classic method and four use Benders variations method available in literature. This problem consists in determining the optimal number of hubs to be installed and how the clients are allocated to this installed hubs in order to minimize the total cost. The Benders variations method has demonstrated to be very effective when compared to the classic method and with CPLEX.

Keywords: Hub-and-spoke networks; Benders decomposition; Single allocation

Aos meus pais, Geraldo e Rosana, meus heróis por toda a vida.

“Em uma espécie não é o mais forte que sobrevive, nem o mais inteligente, mas o que melhor se adapta às mudanças.”
(Charles Darwin)

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a **Deus**, meu companheiro e parceiro de todos os momentos.

Aos meus pais, Geraldo e Rosana, pelo apoio constante nos meus desafios e pelo eterno amor. Ao meu irmão e minha noiva, Igor e Keila, pelo apoio e paciência. Ao Prof^o Ricardo Saraiva de Camargo, pela sua paciênte orientação, conselhos sábios e sugestões valorosas que fizeram este momento tornar-se realidade. Ao Prof^o Gilberto de Miranda Jr, por ter sempre ajudado e valorizado meu trabalho. Aos professores, funcionários e colegas do Departamento de Engenharia de Produção.

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 2 | Exame da Literatura | 4 |
| 2.1 | Tipos de Sistemas Eixo-Raio | 4 |
| 2.1.1 | Problemas do tipo eixo-raio com p concentradores medianos | 4 |
| 2.1.2 | Problemas do tipo eixo-raio com p concentradores centrais | 5 |
| 2.1.3 | Problemas do tipo eixo-raio com concentradores cobertos | 6 |
| 2.1.4 | Problemas com custo fixo de instalação | 6 |
| 2.2 | Formulações Matemáticas | 7 |
| 2.2.1 | Formulação de Skorin-Kapov et al. | 7 |
| 2.2.2 | Formulação de Ernst e Krishnamoorthy | 8 |
| 2.2.3 | Formulação de Ebery | 9 |
| 2.3 | O Método de Decomposição de Benders | 9 |
| 2.3.1 | <i>Ponto Interior</i> | 12 |
| 2.3.2 | Pré-Processamento | 12 |
| 2.3.3 | Branch and Cut | 13 |
| 3 | Localização de Concentradores com Alocação Simples | 15 |
| 3.1 | Formulação de Decomposição de Benders | 16 |
| 3.1.1 | Problema Mestre e Subproblema | 16 |
| 3.1.2 | Formulação de decomposição de Benders Clássico | 18 |
| 3.1.3 | Formulação de decomposição de Benders Multicorte | 19 |
| 3.2 | Aplicação do Ponto Interior | 20 |
| 3.3 | Formulação de Benders - modelos comparativos | 21 |
| 3.3.1 | Subproblema de Ernst e Krishnamoorthy (1999) | 21 |
| 3.3.2 | Subproblema de Ebery (2001) | 22 |
| 3.4 | Branch and Cut baseado em Decomposição de Benders | 22 |
| 3.4.1 | Formulação de Branch and Cut baseado em decomposição de Benders | 23 |
| 4 | Resultados Computacionais | 24 |
| 4.1 | Implementação Benders Clássico | 24 |
| 4.2 | Implementação Benders com Variações - Pré-Processamento e Core Point | 28 |
| 4.3 | Implementação de Branch and Cut baseado em decomposição de Benders | 31 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.4 | Análise de esforço computacional | 33 |
| 4.5 | Conclusão dos resultados | 35 |
| 4.5.1 | Desafiando a formulação de Skorin-Kapov (1996) | 37 |
| 5 | Conclusão | 40 |
| | Referências Bibliográficas | 41 |

Lista de Figuras

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Exemplos de alocação simples e alocação múltipla | 2 |
| 3.1 | Exemplo de localização de concentradores com atribuição simples | 15 |
| 4.1 | Quantidade de testes com melhor tempo de processamento | 25 |
| 4.2 | Média do número de iterações utilizadas para convergência do método ou até 5 horas de processamento | 27 |
| 4.3 | Média do GAP de convergência quando atingido o limite de tempo de 5 horas de processamento | 27 |
| 4.4 | Quantidade de testes com melhor tempo de processamento | 28 |
| 4.5 | Média do GAP de convergência quando atingido o limite de tempo de 5 horas de processamento | 30 |
| 4.6 | Média do número de iterações utilizadas para convergência do método ou até 5 horas de processamento | 30 |
| 4.7 | Quantidade de testes com melhor tempo de processamento | 31 |
| 4.8 | Média do tempo de processamento versus média do GAP | 33 |
| 4.9 | Média do tempo utilizado para convergência do método de decomposição de Benders Clássico | 34 |
| 4.10 | Média do tempo utilizado para convergência do método de decomposição de Benders com variações | 34 |
| 4.11 | GAP entre a solução encontrada na formulação relaxada e a solução ótima | 35 |
| 4.12 | Média do tempo utilizado para convergência da implementação utilizando-se o modelo de Skorin-Kapov | 36 |
| 4.13 | Exemplo de convergência da instância AP60.4 | 36 |
| 4.14 | Tempo de processamento <i>versus</i> GAP de convergência | 39 |

Lista de Tabelas

| | | |
|-----|--|----|
| 4.1 | Resultados dos testes efetuados através de Benders Clássico | 26 |
| 4.2 | Resultados dos testes efetuados através de Benders com variações | 29 |
| 4.3 | Resultados dos testes efetuados através de Branch and Cut baseado em decomposição de Benders | 32 |
| 4.4 | Testes extras para a implementação do modelo de Skorin-Kapov aplicado em decomposição de Benders com variações | 38 |

Capítulo 1

Introdução

“Escuta e serás sábio. O começo da sabedoria é o silêncio.”

Pitágoras

Diversos exemplos de redes estão presentes diariamente na vida das pessoas. Como exemplos de redes temos: redes de relacionamento, telecomunicações, de tráfego (aéreo, marítimo e terrestre), redes de computadores, redes de dados e diversas outras. Cada rede, em linhas gerais, intercomunica dois ou mais pontos, distantes entre si, classificados como origem e destino, de forma a criar um fluxo tangível (ex. fluxo de pessoas) ou intangível (ex. fluxo de informações). A configuração da rede, ou seja, a quantidade de pontos interligados e a sua disposição, caracteriza-se pela demanda.

Vários tipos de redes foram criadas para atender os requisitos de fluxos de cada configuração. Uma delas é a rede logística do tipo eixo-raio ou, em inglês, *hub-and-spoke networks*, a qual é formada por concentradores (*hubs*) e nós, ou pontos de origem e demanda, os quais são conectados por raios (*spokes*). Essa configuração diminui a quantidade de ligações diretas entre nós, onde alguns nós escolhidos estrategicamente são configurados como concentradores e, a partir deles, ramificam-se raios para os pontos de origem e demanda.

Redes do tipo eixo-raio são muito utilizadas em sistemas logísticos de transporte. Nestas redes, transportadoras de cargas podem, por exemplo, recolher cargas em caminhões menores e transportar até os concentradores. Nestes pontos, cargas chegando de diferentes regiões são consolidadas por semelhança de destino e transportadas até outros concentradores ou até aos seus respectivos destinos. Normalmente, o transporte entre concentradores é feito por caminhões maiores ou por outros meios de transporte como ferroviário e aéreo.

Na determinação de um fluxo entre um ponto de origem e um ponto de destino, os raios de conexão entre esses pontos estão conectados a pelo menos um concentrador. Como um concentrador pode receber conexões de vários nós, o valor de carga acumulado gera um fluxo intenso para outro concentrador. O fluxo recebido em um concentrador é distribuído para os pontos de destino. A vantagem dessa configuração está em concentrar um intenso fluxo entre os *hubs*. Dessa forma, é possível realizar um mix de cargas ou informações oriundas de diversos pontos de origem. Esse mix é transportado para outro concentrador, o qual distribuirá entre os pontos de destino. Utiliza-se da economia de escala na acentuação de

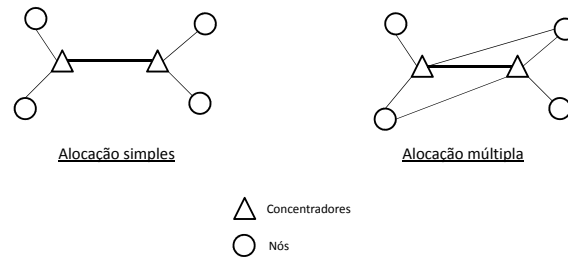


Figura 1.1: Exemplos de alocação simples e alocação múltipla

fluxo entre concentradores uma vez que é possível aglomerar cargas para cada transporte enviado. A economia de escala é ainda mais acentuada quando pontos de origem são também considerados pontos de demanda, ou seja, é possível enviar uma determinada carga a um nó ou concentrador e retornar com outra, criando um fluxo de cargas em ambos os sentidos para um mesmo transportador. Ainda assim, a aglomeração de cargas nos concentradores permite reduzir consideravelmente o custo operacional da rede e oferecer um serviço que seja rápido, barato e que atenda as exigências de prazo de entrega (Kimms, 2006).

Por outro lado, para aplicações em redes de telecomunicações, os custos de instalação e de interconexão dos concentradores e a ligação desses aos pontos de demanda, são ordens de grandeza maior do que o custo de transporte. Isto acontece devido ao baixo custo operacional da rede uma vez instalada (Camargo et al., 2006).

As vantagens da utilização destes tipos de redes são, principalmente, a redução dos custos de transporte em função da economia de escala obtida, diminuição dos custos de instalação, aumento da eficiência logística e do desempenho do sistema (Kara e Tansel, 2003).

Existem duas configurações básicas de alocação dos pontos de origem e de destino aos concentradores instalados. Estas configurações se diferenciam na quantidade de concentradores conectados a um nó. No primeiro caso, chamado de sistema de Alocação Simples ou *Single Allocation*, cada ponto de origem ou de destino é conectado a apenas um concentrador. No segundo caso, chamado de Alocação Múltipla ou *Multiple Allocation*, cada ponto de origem ou de destino pode ser conectado a mais de um concentrador. Um exemplo pode ser visualizado na figura 1.1.

Esse trabalho propõe a utilização do método de decomposição de Benders (Benders (1962)) para a resolução das formulações propostas por Skorin-Kapov et al. (1996); Ernst e Krishnamoorthy (1999); Ebery (2001). Esses autores testaram suas formulações através de implementação via CPLEX. Propõe-se também, variações do método de decomposição de Benders original, com implementações propostas por Birge e Louveaux (1988), Magnanti e Wong (1981) e Papadakis (2008). Essas variações buscam melhorar o método proposto e, como demonstrado nos resultados, resolver as instâncias testes em tempo inferior aos efetuados com o CPLEX e

também com demandas superiores aos não resolvidos também pelo CPLEX. A economia de escala gerada pelo intenso fluxo entre os concentradores é a característica fundamental que permite e a utilização deste tipo de rede logística.

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

No capítulo 2, é apresentado um exame da literatura, mostrando a taxinomia da área, as principais formulações matemáticas e alguns dos métodos de resolução do problema de localização de concentradores de alocação simples em redes do tipo eixo-raio.

No capítulo 3, algoritmos especializados, baseado no método de decomposição de Benders, são aplicados na resolução do problema.

No capítulo 4, os resultados computacionais demonstram que o método de decomposição de Benders, quando implementado com variações propostas nesse trabalho, possui maior eficiência do que a aplicação de Benders clássico. De um total de 40 testes, um dos métodos implementados possui 38 resultados com menor tempo de processamento em comparação com o CPLEX.

O capítulo 5 encerra o trabalho, apresentando as conclusões e os comentários finais.

Capítulo 2

Exame da Literatura

“Uma longa caminhada inicia-se com um simples passo.”

Provérbio Chinês

Neste capítulo são apresentadas as principais formulações matemáticas para o problema de localização de concentradores com atribuição simples, assim como uma breve discussão de algumas formulações de resolução existentes na literatura. Serão comentados testes efetuados na literatura através de instâncias CAB e AP. Essas instâncias representam, respectivamente, o conjunto de dados baseado em uma linha aérea de transporte de passageiros dos Estados Unidos da América, em inglês *Civil Aeronautics Board*, e rotas do serviço postal Australiano, em inglês *Australia Post*.

2.1 Tipos de Sistemas Eixo-Raio

Na literatura, existem diversos e importantes trabalhos de redes do tipo eixo-raio publicados, os quais tiveram uma grande expansão em números de publicações a partir de 2001 (Kara e Alumur, 2008). Seja p a quantidade de concentradores estudados e α o desconto dado no custo do fluxo de transporte entre os concentradores. Esta área de pesquisa possui quatro macro campos: problemas do tipo eixo-raio com p concentradores medianos, problemas do tipo eixo-raio com p concentradores centrais, problemas do tipo eixo-raio com concentradores cobertos, e problemas de alocação de concentradores com custos fixos. Em cada macro grupo, metodologias e conceitos são diferenciados em relação ao tipo de alocação (simples ou múltipla) dos pontos de demandas aos concentradores. Neste trabalho, foca-se no exame da literatura de sistemas de alocação simples.

2.1.1 Problemas do tipo eixo-raio com p concentradores medianos

Os problemas do tipo eixo-raio com p concentradores medianos, ou em inglês *p-hub median*, com alocação simples, são utilizados para minimizar o custo total de transporte de forma a atender os pontos de demanda, localizando exatamente p concentradores medianos. Campbell (1994b) é um dos primeiros autores a formular esse problema propondo uma formulação de

programação matemática a qual possui $(n^4 + n^2 + n)$ variáveis, das quais $(n^2 + n)$ são variáveis binárias e $(n^4 + 2n^2 + n + 1)$ restrições com variáveis contínuas, onde n representa as dimensões das variáveis estudadas. Formulações semelhantes são propostas por Skorin-Kapov et al. (1996), onde a formulação inteira do problema é constituída por: $(n^4 + n^2)$ variáveis das quais n^2 são binárias e $(2n^3 + n^2 + n + 1)$ são contínuas.

O’Kelly et al. (1996) também apresenta formulações semelhantes às de Campbell (1994b). O que se destaca em seu trabalho é a discussão referente à sensibilidade das soluções em relação ao fator de desconto (α).

Ernst e Krishnamoorthy (1996) ainda propoem uma formulação linear inteira com uma quantidade menor de variáveis e restrições. Os autores tratam o problema de forma interessante. Através de restrições de balanceamento de fluxos, eles hierarquizam o desenho da rede em três níveis: coleta, transporte e distribuição. Na modelagem utilizada para observar o funcionamento do serviço postal Australiano, fatores de custos representados por X, α e γ , são usados para indicar custos diferenciados na coleta, transporte e entrega.

A formulação possui $(n^3 + n^2)$ variáveis das quais n^2 são binárias e $(2n^3 + n + 1)$ são restrições contínuas. Ernst e Krishnamoorthy (1998) ainda usam esta formulação em um algoritmo baseado em *branch-and-bound* obtendo bons resultados.

Outra formulação, específica para a localização de dois ou três concentradores, foi feita por Ebery (2001) possuindo tempos computacionais de resolução, em pacotes de otimização, menores do que a formulação de Ernst e Krishnamoorthy (1996). Ele utiliza $O(n^2)$ variáveis e $O(n^2)$ restrições.

As duas primeiras heurísticas utilizadas para resolver problemas do tipo eixo-raio com p concentradores medianos com alocação simples foram propostas por O’Kelly (1987). Na primeira heurística, a demanda do nó é assegurada pelo concentrador mais próximo, já a segunda heurística, que apresentou melhores resultados de valor da função objetivo, aloca a demanda do nó ao segundo concentrador mais próximo.

Klincewicz (1991) e Klincewicz (1992) desenvolveram heurísticas baseadas no método de busca tabu e GRASP (*Greedy Randomized Search Procedure*) obtendo resultados melhores dos que os conseguidos por O’Kelly (1987). Em ambas as heurísticas ele aloca a demanda do nó ao concentrador mais próximo.

Skorin-Kapov e Skorin-Kapov (1994) também utilizam um modelo de busca tabu onde comparam através das instâncias CAB seus resultados com os de Klincewicz (1991, 1992) e O’Kelly (1987), porém com um resultado superior.

Ernst e Krishnamoorthy (1996) também possuem resultados comparáveis aos de Skorin-Kapov e Skorin-Kapov (1994) usando *simulated annealing*. Eles realizaram testes com instâncias CAB e também com as instâncias do serviço postal Australiano, porém ficam restritos a problemas menores de $n = 50$, onde n é o número de nós a serem analisados.

2.1.2 Problemas do tipo eixo-raio com p concentradores centrais

Os problemas do tipo eixo-raio com p concentradores centrais, ou em inglês *p-hub center* são mais aplicados quando o tempo de deslocamento é um fator crítico, como no caso de

transporte de produtos perecíveis (Campbell, 1994a). Em sua discussão, ele definiu três tipos de problema *p-hub center*. O primeiro minimiza o custo máximo entre origem e destino, o segundo minimiza o custo máximo para qualquer *link* disponível e o terceiro minimiza o custo máximo de movimentação entre o concentrador e o par origem/destino.

Kara e Tansel (2003) apresentam uma formulação linear superior às de Campbell (1994a) que utilizam $(n^2 + 1)$ variáveis das quais n^2 são binárias e $(n^3 + n^2 + n + 1)$ restrições contínuas.

Campbell et al. (2002) desenvolveram uma formulação com uma nova variável r . Essa variável representa o custo máximo de coleta ou distribuição entre o concentrador k e os nós atrelados a ele. Utilizando uma análise computacional e instâncias CAB e AP, os resultados de Campbell et al. (2002) são superiores aos de Kara e Tansel (2003).

A primeira heurística desenvolvida para o problema em questão foi apresentada por Pamuk (2001). Eles utilizam busca tabu na formulação com bons resultados. Campbell et al. (2007) e Ernst et al. (2009) apresentam formulações para o problema de alocação simples tanto para os casos de problemas capacitados quanto não-capacitados.

2.1.3 Problemas do tipo eixo-raio com concentradores cobertos

Os problemas do tipo eixo-raio com concentradores cobertos, ou em inglês *p-hub covering*, definem que a demanda de um ponto é coberta (atendida), se o ponto estiver a menos de uma distância especificada de um concentrador que possui a capacidade para servi-lo. Campbell (1994a) é o primeiro a desenvolver formulações nessa área minimizando o custo de se instalar um concentrador e maximizando as demandas atendidas pelo concentrador. Kara e Tansel (2003) apresentam modelos com um número maior de variáveis, porém com tempos computacionais melhores.

Semelhante ao trabalho de Campbell et al. (2002), uma formulação para alocação simples de *p-hub covering* foi proposta em Campbell et al. (2005) obtendo tempos computacionais mais satisfatórios que o trabalho de Kara e Tansel (2003). Hamacher e Meyer (2006) ainda comparam diversas formulações e desigualdades válidas.

2.1.4 Problemas com custo fixo de instalação

Os problemas de localização de concentradores considerando o custo de instalação determinam os números de concentradores a serem instalados a partir da matriz de custos. O'Kelly (1992) é um dos primeiros a considerar o custo fixo em sua formulação, definindo o problema como um problema inteiro quadrático. Com o objetivo de atender demandas de problemas de alocação simples e múltipla, Campbell (1994b) apresenta a formulação de alocação simples/múltipla e capacitada/não-capacitada.

O problema de alocação simples não-capacitado também foi estudado por Abdinnour-Helm e Venkataramanan (1998) através de uma formulação inteira quadrática baseada na idéia de fluxos de multiprodutos na rede, utilizando procedimentos de *branch and bound* para obtenção do *upper bound*.

Abdinnour-Helm e Venkataramanan (1998) propuseram uma heurística híbrida baseada

em algoritmos genéticos e busca tabu. Cada ponto de demanda é alocado ao concentrador mais próximo e esta se torna uma solução inicial para o algoritmo de busca tabu que gera posteriormente outras alocações. Porém, soluções melhores em tempo de processamento e qualidade foram propostas por Topcuoglu et al. (2005) através de um modelo baseado em algoritmos genéticos. Cunha e Silva (2007), através de um modelo híbrido de algoritmos genéticos e *simulated annealing*, encontram soluções ainda mais satisfatórias que Abdinnour-Helm e Venkataramanan (1998) e Topcuoglu et al. (2005). Chen (2007) também usou uma heurística híbrida baseado em *simulated annealing*, busca tabu e procedimentos de melhoria, obtendo um bom desempenho. Há também trabalhos que consideram restrições de capacidade nos concentradores a serem instalados (Aykin (1994); Ernst e Krishnamoorthy (1999); Labbé M. (2005)).

2.2 Formulações Matemáticas

As formulações aqui apresentadas para o problema de localização de concentradores com atribuição simples (PLCAS), são baseadas nas seguintes definições: sejam N o conjunto de pontos de demanda e K o conjunto de pontos candidatos a se instalar um concentrador, tal que $K \subseteq N$. Normalmente, $K \subset N$, mas vai-se considerar aqui que todos os pontos de origem e de destino são candidatos potenciais a se instalar um concentrador. Para qualquer par de pontos i e j ($i, j \in N \mid i \neq j$), têm-se $w_{ij} \geq 0$, a demanda do ponto i para o ponto j que deve ser roteada através de um ou dois concentradores instalados. Normalmente, têm-se $w_{ij} \neq w_{ji}$. Sejam também z_{ik} a variável binária de decisão de alocação de um nó i a um concentrador k , f_k o custo de instalação de um concentrador no ponto $k \in K$, e c_{ijkm} , o custo unitário de transporte do ponto i até j roteado via os concentradores instalados em k e m ($i, j \in N$ e $k, m \in K$), nesta ordem. Se apenas um concentrador for usado, então têm-se $k = m$. Considere ainda O_i como toda a demanda originada no nó i , e D_i como todo o fluxo com destino ao nó i .

2.2.1 Formulação de Skorin-Kapov et al.

A formulação de Skorin-Kapov et al. (1996) pode ser dada por, onde x_{ijkm} representam as rotas originadas em i e com destino a j utilizando os concentradores k e m :

$$\min \sum_{k \in K} f_k z_{kk} + \sum_{i \in N} \sum_{k \in K} (O_i + D_i) c_{ik} z_{ik} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} \alpha w_{ij} c_{km} x_{ijkm} \quad (2.1)$$

sujeito a:

$$\sum_{k \in K} z_{ik} = 1 \quad \forall i \in N \quad (2.2)$$

$$z_{ik} \leq z_{kk} \quad \forall i \in N, k \in K \quad (2.3)$$

$$\sum_{m \in K} x_{ijkm} = z_{ik} \quad \forall i, j \in N, k \in K \quad (2.4)$$

$$\sum_{k \in K} x_{ijkm} = z_{jm} \quad \forall i, j \in N, m \in K \quad (2.5)$$

$$z_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N, k \in K \quad (2.6)$$

$$x_{ijkm} \geq 0 \quad \forall i, j \in N, k, m \in K \quad (2.7)$$

A função objetivo (2.1) minimiza os custos de instalação e de transporte das demandas. A restrição (2.2) assegura que todo nó $i \in N$ é alocado a apenas um concentrador. A restrição (2.3) garante que um ponto $i \in N$ só poderá ser alocado a um concentrador $k \in K$ se o mesmo estiver instalado. A restrição (2.4) garante que as rotas originadas em $i \in N$ e passando primeiramente pelo concentrador instalado em $k \in K$ existirão apenas se o ponto $i \in N$ estiver alocado ao concentrador instalado em $k \in K$. De forma semelhante, as rotas que terminam em $j \in N$ passando por último pelo concentrador instalado em $m \in K$ só existirão se o destino $j \in N$ for alocado ao concentrador instalado em $m \in K$, quarta restrição.

2.2.2 Formulação de Ernst e Krishnamoorthy

Ernst e Krishnamoorthy (1999) propõem a seguinte formulação, onde y_{ikm} representa o fluxo total de i roteado entre os concentrador k e m :

$$\min \sum_{k \in K} f_k z_{kk} + \sum_{i \in N} \sum_{k \in K} (O_i + D_i) c_{ik} z_{ik} + \sum_{i \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} \alpha c_{km} y_{ikm} \quad (2.8)$$

sujeito a:

$$\sum_{k \in K} z_{ik} = 1 \quad \forall i \in N \quad (2.9)$$

$$z_{ik} \leq z_{kk} \quad \forall i \in N, k \in K \quad (2.10)$$

$$\sum_{m \in K} y_{ikm} - \sum_{m \in K} y_{imk} = O_i z_{ik} - \sum_{j \in N} w_{ij} z_{jk} \quad \forall i \in N, k \in K \quad (2.11)$$

$$\sum_{m \in K} y_{ikm} = O_i z_{ik} \quad \forall i \in N, k \in K \quad (2.12)$$

$$z_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N, k \in K \quad (2.13)$$

$$y_{ikm} \geq 0 \quad \forall i \in N, k, m \in K \quad (2.14)$$

As equações dessa formulação são semelhantes às anteriores, porém a equação (2.11) representa a conservação de fluxo nos concentradores. Inicialmente, essa formulação foi proposta por Ernst e Krishnamoorthy (1996), sofreu pequenas modificações e então reescrita em Ernst e Krishnamoorthy (1999). No entanto, qualquer uma das formulações está incorreta. A restrição(2.11) não garante que o fluxo de entrada em um nó é igual ao fluxo de saída. Sendo assim, de forma a corrigir o modelo, a restrição (2.12) é inserida, porém sua eficiência em tempo de processamento é prejudicada. Observe que neste caso, o limite de capacidade da restrição (2.12) é dado apenas por O_i . Em outras casos poderíamos também acrescentar nesta restrição um incremento de D_i , dependendo da aplicação do modelo.

2.2.3 Formulação de Ebery

Ebery (2001) propõe uma formulação de apenas $O(n)^2$ variáveis e restrições, onde q_{ik} representa o custo de transferência de fluxo do nó i utilizando o concentrador k :

$$\min \sum_{k \in K} f_k z_{kk} + \sum_{i \in N} \sum_{k \in K} (O_i + D_i) c_{ik} z_{ik} + \sum_{i \in N} \sum_{k \in K} q_{ik} \quad (2.15)$$

sujeito a:

$$\sum_{k \in K} z_{ik} = 1 \quad \forall i \in N \quad (2.16)$$

$$z_{ik} \leq z_{kk} \quad \forall i \in N, k \in K \quad (2.17)$$

$$q_{ik} \geq \alpha \sum_{j \in N} \sum_{m \in K} w_{ij} c_{km} (z_{jm} + z_{ik} - 1) \quad \forall i \in N, k \in K \quad (2.18)$$

$$z_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N, k \in K \quad (2.19)$$

$$q_{ik} \geq 0 \quad \forall i \in N, k \in K \quad (2.20)$$

A função objetivo (2.15) minimiza os custos de instalação e de transporte das demandas. As equações dessa formulação também são semelhantes às anteriores, porém a restrição (2.18) afirma que q_{ik} deve ser pelo menos o custo de transferência do fluxo originado no nó i via concentrador k se, e somente se, o nó i está alocado ao concentrador k (zero caso contrário).

2.3 O Método de Decomposição de Benders

O método de decomposição de Benders (Benders (1962)) é um procedimento utilizado na resolução de problemas de programação linear inteira mista e não linear. Na abordagem, o problema original é decomposto em dois mais simples: (i) o problema mestre, uma versão relaxada do problema original possuindo o conjunto de variáveis inteiras juntamente com suas respectivas restrições e uma variável contínua adicional; e (ii) o subproblema, o problema

original com os valores das variáveis inteiras temporariamente fixadas pelo problema mestre. A formulação proposta por Benders resolve cada um dos dois problemas mais simples de forma iterativa. A cada ciclo, uma nova restrição, conhecida como corte de Benders, é adicionada ao problema mestre. Essa nova restrição, originada a partir da resolução do dual do subproblema, permite estimar limites inferiores para o problema original. O algoritmo cicla até que as funções objetivo do problema mestre e do subproblema sejam iguais. Ao final do processo, tem-se a solução ótima do problema linear inteiro misto original. A eficiência computacional da decomposição de Benders na resolução de alguns problemas de larga escala pode ser verificada no trabalho pioneiro de Geoffrion e Graves (1974), na resolução de problemas estocásticos de transporte e localização de França e Luna (1982), no problema de sequenciamento aéreo integrado de Papadakos (2008) e, mais recentemente, na resolução de problemas de localização de concentradores em redes do tipo eixo-raio com alocação múltipla de Camargo et al. (2006). De forma genérica, dado a formulação abaixo:

$$\min c^T x + \bar{c}^T y \quad (2.21)$$

sujeito a:

$$Ax + By \geq b \quad (2.22)$$

$$Dy \geq \bar{b} \quad (2.23)$$

$$x \geq 0 \quad (2.24)$$

$$y \geq 0 \text{ e inteiro} \quad (2.25)$$

onde A é uma matriz $m \times n$, x e c são vetores de tamanho n , representando as variáveis contínuas e os custos associados a estas. As matrizes B e D têm tamanho igual a $m \times p$ e a $q \times p$, respectivamente, enquanto y e \bar{c} são vetores de tamanho p , representando as variáveis inteiras e os custos associados a estas. Finalmente, os vetores b e \bar{b} possuem dimensão m e q . Este problema pode ser expresso como :

$$\min_{y \in Y} \{ \bar{c}^T y + \min_{x \geq 0} \{ c^T x : Ax \geq b - By \} \} \quad (2.26)$$

onde $Y = \{y \mid Dy \geq \bar{b}, y \geq 0 \text{ e inteiro}\}$

Observando a minimização interna, tem-se um problema de programação linear que pode ser dualizado através da associação das variáveis duais u às restrições $Ax \geq b - By$, obtendo-se:

$$\max_{u \geq 0} \{ (b - By)^T u : A^T u \leq c \} \quad (2.27)$$

Este problema é conhecido como o subproblema de decomposição de Benders. Através da teoria da dualidade, as formulações duais e primais podem ser usadas de forma intercalada, logo pode-se escrever (2.26) como:

$$\min_{y \in Y} \{ \bar{c}^T y + \max_{u \geq 0} \{ (b - By)^T u : A^T u \leq c \} \} \quad (2.28)$$

O subproblema da decomposição de Benders possui uma característica interessante. Sua região de viabilidade independe da escolha das variáveis y . Então, definindo-se o conjunto $\Omega = \{u \mid A^T u \leq c\}$ como sendo o espaço de viabilidade do subproblema dual e assumindo que Ω é não-vazio, caso contrário o problema primal seria inviável ou ilimitado, têm-se que Ω é composto de pontos extremos $u^i (\forall i = 1, \dots, N)$, i. e. representando soluções duais limitadas, e raios extremos $u^r (\forall r = 1, \dots, Q)$, i. e. representando soluções duais ilimitadas. A presença de soluções duais ilimitadas é indesejada uma vez que é o resultado de problemas primais inviáveis. Como Ω é um poliedro e possui um número finito de geradores, pode-se então eliminar os valores de y que geram tais soluções considerando explicitamente as seguintes restrições obtidas do lema de Farkas:

$$(b - By)^T u^r \leq 0 \quad \forall r = 1, \dots, Q \quad (2.29)$$

O problema (2.28) pode ser agora reformulado obtendo-se:

$$\min \bar{c}^T y + \max\{(b - By)^T u^i : i = 1, \dots, N\} \quad (2.30)$$

sujeito a:

$$(b - By)^T u^r \leq 0 \quad r = 1, \dots, Q \quad (2.31)$$

$$y \in Y \quad (2.32)$$

A solução do problema interno de maximização corresponde a um dos pontos extremos de Ω . Este problema de maximização pode ser substituído na formulação acima com o auxílio de uma variável contínua η . O seguinte problema mestre da decomposição de Benders é obtido.

$$\min \bar{c}^T y + \eta \quad (2.33)$$

sujeito a:

$$\eta \geq (b - By)^T u^i \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (2.34)$$

$$(b - By)^T u^r \leq 0 \quad \forall r = 1, \dots, Q \quad (2.35)$$

$$y \in Y \quad (2.36)$$

A princípio, o problema mestre é resolvido apenas com o conjunto Y de restrições. A cada ciclo, resolve-se o problema mestre obtendo-se configurações temporárias das variáveis y . A cada configuração, um subproblema é resolvido, podendo-se obter ou um raio extremo, ou um ponto extremo. Completa-se assim um ciclo ou uma iteração do método de decomposição de Benders. A solução ótima do problema mestre fornece um limite inferior, enquanto a conjunção de soluções do problema mestre e do primal do subproblema provê um limite superior do problema original. O problema mestre e o subproblema são resolvidos de forma cíclica até os limites inferior e superior convergirem, obtendo-se então a solução ótima do problema original. Neste trabalho, para o problema de localização de concentradores de atribuição simples, o método de decomposição de Benders é apresentado na resolução da formulação de Skorin-Kapov et al. (1996), Ernst e Krishnamoorthy (1999) e Ebery (2001).

2.3.1 Ponto Interior

Magnanti e Wong (1981) notaram que quando o subproblema é degenerado - não possui uma única solução u - existe um conjunto de diferentes cortes que podem potencialmente serem gerados. Portanto, eles formularam um problema que gera o corte mais forte possível, onde a força de dois cortes são comparadas de acordo com a definição abaixo:

Definição 1. Um corte correspondente a $u_1 \in U$, domina o correspondente $u_2 \in U$, se: $(b - y)^T u_1 \geq (b - y)^T u_2, \forall y \in Y$

com desigualdade em pelo menos um ponto $y \in Y$. De forma semelhante, diz-se que u_1 domina u_2 .

Definição 2. Um corte é pareto ótimo se ele não é dominado por nenhum outro corte. De forma semelhante, o ponto \mathbf{u} correspondente àquele corte é chamado pareto ótimo. Magnanti-Wong formularam um problema que gera um corte pareto ótimo utilizando a noção de ponto interior, ou em inglês *core point*. Um ponto $y^0 \in ri(Y_c)$ é um *core point* de Y , onde $ri(S)$ e S^c são o interior relativo e a casca convexa do conjunto $S \subseteq \mathfrak{R}^k$ respectivamente. Seja y^0 um *core point* de Y , e considere \bar{u} a solução ótima do subproblema dual abaixo:

$$\max z(u) = (b - \bar{y})^T u \quad (2.37)$$

sujeito a:

$$A^T u \leq c \quad (2.38)$$

então a solução ótima do problema de Magnanti-Wong (2.39) - (2.41):

$$\max (b - y_0)^T \mathbf{u} \quad (2.39)$$

sujeito a:

$$(b - \bar{y})^T u = z(\bar{u}) \quad (2.40)$$

$$A^T u \leq c \quad (2.41)$$

é um pareto ótimo.

2.3.2 Pré-Processamento

Se relaxamos as restrições de integralidade sobre as variáveis y , e prosseguirmos com a abordagem de decomposição, obtemos a solução da relaxação linear do problema original. No entanto, todos os cortes obtidos são válidos para o problema inteiro original. Uma vez que a resolução da relaxação linear é muito mais rápida em comparação com o problema inteiro, torna-se interessante resolver a versão relaxada primariamente, a fim de obter um primeiro conjunto de cortes a serem aplicados na decomposição do problema inteiro. Esta primeira série de cortes reduz o número de iterações necessárias para convergência do problema inteiro e compensa no tempo gasto na resolução de todo o problema relaxado, deixando o processo

mais eficiente. Essa idéia, foi sugerida pela primeira vez por McDaniel e Devine (1977) sendo utilizada em nossas implementações.

2.3.3 Branch and Cut

Analisando-se a forma geométrica de um problema linear de minimização com duas variáveis tem-se:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq 0 \quad (2.42)$$

Essa desigualdade representa um semi-plano. Em um programa linear, tem-se um conjunto de desigualdades que devem ser satisfeitas ao mesmo tempo. Geometricamente, isso equivale à interseção dos semi-planos. Assim, o espaço de soluções é representado por um polígono convexo, ou para dimensões maiores, poliedros convexos. Além disso, a função objetivo é da forma:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \quad (2.43)$$

Variando-se o valor de z , essa equação representa uma família de retas paralelas, e o objetivo é encontrar a reta para a qual z seja mínimo. Para dimensões maiores, a função objetivo é um hiperplano. A solução ótima de um programa linear está em um vértice do poliedro. Para um programa linear inteiro, tem-se a restrição de que as variáveis são inteiras. Considera-se o conjunto P de pontos de coordenadas inteiras que são viáveis para o problema. Define-se a envoltória convexa como o menor polígono que contém P . Para problemas NP-difíceis, não se pode encontrar todas as desigualdades que definem a envoltória convexa em tempo polinomial a menos que $P = NP$, já que do contrário poderia-se resolver o modelo como um programa linear (sem as restrições de integralidade) em tempo polinomial. Entretanto, só o fato de aproximar a formulação da envoltória convexa já é interessante para o algoritmo de *Branch and Bound*. Lembrando que em cada nó é resolvida a relaxação linear do modelo, ou seja, remover suas restrições de integralidade. O valor obtido, chamado limitante dual, é usado para realizar podas por limitantes na árvore: se a relaxação for maior ou igual à melhor solução conhecida até agora, então não é necessário explorar sua subárvore, uma vez que o limitante dual é sempre menor ou igual ao valor de qualquer solução obtida nessa subárvore. Aproximar a formulação da envoltória, tende a aumentar o valor da relaxação linear nos nós, que por sua vez tende a aumentar o número de podas por limitantes, melhorando o desempenho do algoritmo. Para isso precisa-se encontrar desigualdades válidas e que aproximem o modelo da envoltória convexa. Porém, o número dessas desigualdades pode ser muito grande, tornando a resolução da relaxação linear muito lenta, sem contar que algumas das desigualdades podem ser irrelevantes para diminuir o valor do limitante dual. A ideia é adicionar tais desigualdades apenas por demanda, através de algoritmos de plano de corte, ou seja, utilizar retas que "cor-

tem o ponto fora", resultados que não satisfazem as restrições. Essa reta, chamada de plano de corte, nada mais é do que uma desigualdade que é satisfeita por todos os pontos viáveis e não é satisfeita pelo ponto que se quer remover. Às vezes, decidir se uma desigualdade representa um plano de corte é NP-difícil. O que se faz em geral é encontrar famílias de desigualdades válidas a priori e, ao resolver a relaxação linear em cada nó do *Branch and Bound*, verifica se a solução ótima encontrada viola alguma dessas desigualdades. Em caso positivo, insere-se a nova restrição no modelo e resolve-se a relaxação linear novamente, repetindo o processo enquanto consegue-se o melhor limitante dual. Ao mudar de nó no algoritmo, descarta-se os planos de corte adicionados. O *Branch and Bound* onde aplica-se algoritmos de plano de corte é chamado de *Branch and Cut*. Estudos têm sido feitos recentemente sobre as propriedades de poliedros de problemas de localização de concentradores. Labbé M. (2005) estudou as propriedades do poliedro para *Uncapacitated Single Allocation Hub Location Problem* e apresentou uma formulação de *branch and cut* baseado nesses resultados. Labbé M. (2008) explorou a árvore de *branch and cut* através da busca pela melhor escolha, ou *best-first search*.

Capítulo 3

Localização de Concentradores com Alocação Simples

“A imaginação é mais importante que o conhecimento.”

Albert Einstein

No presente capítulo, três formulações eficientes, baseadas no método de decomposição de Benders (Benders, 1962), são apresentados para resolver o problema de localização de concentradores com alocação simples. Esse tipo de problema pode ser exemplificado na figura 3.1. Observe que a partir do momento que concentradores são alocados, o fluxo torna-se mais claro e eficiente.

O desenho das redes consiste basicamente na resolução de dois tipos de problemas: o

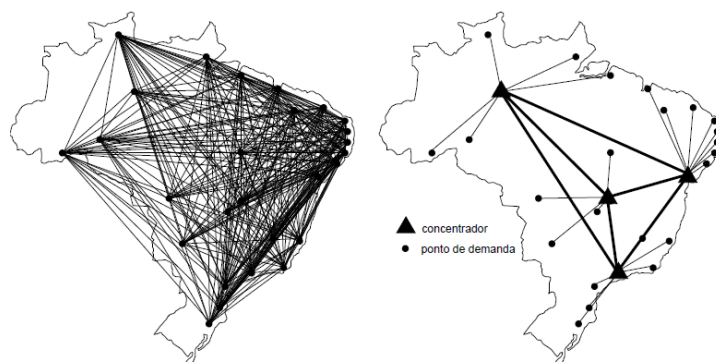


Figura 3.1: Exemplo de localização de concentradores com atribuição simples

primeiro é um problema de localização que envolve a instalação de facilidades que atuarão como concentradores e a ligação entre elas, isto é, os eixos; enquanto que o segundo é um problema de atribuição, ou seja, como as origens e os destinos das demandas são alocados

(ligados) aos concentradores instalados, isto é, a formação dos raios. Apesar das semelhanças, os problemas do tipo eixo-raio distinguem-se dos problemas clássicos de localização. Nestes, geralmente, os pontos de demandas são atendidos, total ou parcialmente, por facilidades a serem localizadas. Enquanto, que naqueles, as demandas ocorrem entre pares de origem-destino. Nestes casos, a função dos concentradores não é o atendimento das demandas, mas o de funcionar como centros de comutação ou concentração de fluxo. Os concentradores permitem assim a consolidação, seguida de um redirecionamento e, posteriormente, de uma separação dos fluxos; sendo portanto facilidades intermediárias no caminho entre os diversos pares de origem-destino.

Apesar da existência de diversos métodos propostos para a resolução do problema em questão, os métodos escolhidos para comparação neste trabalho foram selecionados pelo seu comportamento agressivo frente ao problema de localização de concentradores, como visto nos periódicos que descrevem a eficiência desses métodos.

As três formulações desenvolvidos são baseados na versão do método de decomposição de Benders. As formulações propostos resolvem o problema original de forma iterativa: em um nível superior, conhecido como problema mestre (PM), as decisões de localização de concentradores são realizadas, isto é, os "eixos" são instalados, enquanto, que em um nível inferior chamado de subproblema (SP), a determinação dos "raios" é escolhida. O primeiro é um problema inteiro misto de programação matemática, enquanto que o segundo é um problema de transporte com variáveis contínuas.

Este capítulo está organizado na seguinte forma: a seção 3.1 descreve o funcionamento do método de decomposição de Benders. A seção 3.2 demonstra um exemplo de variação do método de Benders enquanto, na seção 3.3, diferentes métodos de resolução do problema de alocação de concentradores são analisados e comparados. Por fim, a seção 3.4 demonstra uma aplicação de *Branch and Cut* baseado em decomposição de Benders.

3.1 Formulação de Decomposição de Benders

A chave para uma boa implementação do método de decomposição de Benders está em ter uma formulação matemática com um bom limite de programação linear, em ajustar o corte de Benders e resolver o subproblema de forma eficiente e rápida.

3.1.1 Problema Mestre e Subproblema

A formulação (2.1) - (2.7), proposta por Skorin-Kapov et al. (1996), possui uma forte relaxação linear, importante fator para a integralidade do método. Em outras palavras, fixando-se um $z = z^h$ viável, em uma dada iteração h do algoritmo, o seguinte problema linear primal é obtido:

$$\min \sum_{i \in N} \sum_{j \in N, j > i} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K, m \neq k} \alpha c_{km} x_{ijkm} \quad (3.1)$$

sujeito a:

$$\sum_{m \in K} x_{ijkm} = z_{ik}^h \quad \forall i, j \in N : i < j \quad k \in K \quad (3.2)$$

$$\sum_{m \in K} x_{ijkm} = z_{jk}^h \quad \forall i, j \in N : i < j \quad k \in K \quad (3.3)$$

$$z_{ik} \geq 0 \quad \forall i \in N \quad k \in K \quad (3.4)$$

Através da função objetivo dual da formulação (3.1) - (3.4), pode-se construir uma restrição conhecida como corte de Benders que é adicionada ao problema mestre a cada iteração. Associando então as variáveis duais u_{ijk} e v_{ijk} às restrições (3.2) e (3.3), respectivamente, tem-se o seguinte problema linear dual para iteração h , ou também chamado de subproblema:

$$\max \sum_{k \in K} u_{ijk} z_{ik}^h + \sum_{k \in K} v_{ijk} z_{jk}^h \quad (3.5)$$

sujeito a:

$$u_{ijk} + v_{ijm} \leq \alpha w_{ij} c_{km} \quad \forall k, m \in K : k \neq m \quad (3.6)$$

$$u_{ijk} + v_{ijk} \leq 0 \quad \forall k \in K \quad (3.7)$$

$$u_{ijk}, v_{ijk} \in \Re \quad \forall k \in K \quad (3.8)$$

A partir da função objetivo dual (3.5), dado que os valores das variáveis duais de uma dada iteração h tenham sido calculados, pode-se construir a seguinte restrição (3.9), conhecida como corte de Benders, a ser adicionada ao problema mestre.

$$\eta - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N | j < i} \sum_{k \in K} u_{ijk}^h z_{ik} \geq \sum_{i \in N} \sum_{j \in N | j > i} \sum_{k \in K} v_{ijk}^h z_{jk} \quad \forall h \in H \quad (3.9)$$

onde u_{ijk}^h e v_{ijk}^h são os valores ótimos duais obtidos após a resolução do subproblema em uma dada iteração h e $\eta \geq 0$ é um subestimador do custo de transporte. Portanto, o problema mestre é dado por:

$$\min \eta + \sum_{k \in K} f_k z_{kk} + \sum_{i \in N} \sum_{k \in K, k \neq i} c_{ik} (O_i + D_i) z_{ik} \quad (3.10)$$

sujeito a:

$$\eta \geq \sum_{i \in N} \sum_{j > i} \sum_{k \in K} u_{ijk}^h z_{ik} + \sum_{i \in N} \sum_{j > i} \sum_{k \in K} v_{ijk}^h z_{jk} \quad \forall h \in H \quad (3.11)$$

$$\sum_{k \in K} z_{ik} = 1 \quad \forall i \in N \quad (3.12)$$

$$z_{ik} \leq z_{kk} \quad \forall i \in N \quad k \in K \quad (3.13)$$

$$z_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N \quad k \in K \quad (3.14)$$

$$\eta \geq 0 \quad (3.15)$$

onde H é o número máximo de iterações do algoritmo.

3.1.2 Formulação de decomposição de Benders Clássico

A formulação baseada no método de decomposição clássica de Benders é formalmente organizado abaixo, onde LS é o limite superior, LI é o limite inferior, z^*_{PM} e z^*_{SP} são as soluções ótimas obtidas resolvendo-se o problema mestre e o subproblema correntes, respectivamente:

Formulação - BENDERS CLÁSSICO

PASSO 1 Faça $LS = +\infty$, $LI = -\infty$.

PASSO 2 Se $LS = LI$, **PARE** Fim da execução, a solução ótima do problema original (2.3)-(2.9) foi obtida.

PASSO 3 Resolva o problema mestre (3.10) - (3.15), obtendo z^*_{PM} e os valores ótimos das variáveis inteiras y .

PASSO 4 Faça $LI = z^*_{PM}$ e atualize os valores de y no subproblema dual (3.5)-(3.8).

PASSO 5 Resolva o subproblema dual (3.5) - (3.8), obtendo z^*_{SP} e os valores ótimos das variáveis duais.

PASSO 6 Adicione o novo corte de Benders ao problema mestre (3.10) - (3.15) usando (3.9).

PASSO 7 Se $z^*_{SP} + \sum_k f_k z_{kk} + \sum_i \sum_{k \neq i} c_{ik} (O_i + D_i) z_{ik} < LS$, faça $LS = z^*_{SP} + \sum_k f_k z_{kk} + \sum_i \sum_{k \neq i} c_{ik} (O_i + D_i) z_{ik} < LS$. Vá para o **PASSO 2**.

Toda solução gerada pelo problema mestre é viável para o problema original. Então, as soluções obtidas pelo problema mestre são limites inferiores do valor da função objetivo do problema original, formulação (2.1) - (2.7). Este limite inferior é melhorado a cada nova adição do corte de Benders (3.9). Ao convergir para o limite superior, tem-se a solução ótima do problema original. A eficiência computacional da formulação acima depende principalmente de três questões:

(i) o número de iterações necessárias para convergência global;

(ii) o tempo gasto na resolução do subproblema em cada iteração;
 (iii) o tempo e o esforço computacional demandados para resolução do problema mestre.
 Uma maneira de abordar a questão (i) é adicionar mais de um corte de Benders por iteração. Isso pode ser feito quando:

- (a) o problema dual (3.5) - (3.8) possui múltiplas soluções ótimas e consegue-se adicionar cortes que não são dominados por nenhuma outra restrição presente no problema mestre.
 (b) quando se consegue reformular o corte de Benders, decompondo-o. As restrições (3.9) podem ser decompostas para cada par (i, j) , originando novos cortes por iteração.

3.1.3 Formulação de decomposição de Benders Multicorte

O subproblema (3.5) - (3.8) pode ser dividido em problemas menores, um para cada par i, j . Explorando esse fato, o corte de Benders (3.9) pode ser reformulado, como proposto por (Birge e Louveaux, 1988), originando o seguinte conjunto de cortes de Benders (3.16) por iteração.

$$\eta_{ij} - \sum_{k \in K} u_{ijk}^h z_{ik} \geq \sum_{k \in K} v_{ijk}^h z_{jk} \quad \forall i, j \in N, h = 1, \dots, H \quad (3.16)$$

O problema mestre agora é dado por:

$$\min \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \eta_{ij} + \sum_{k \in K} f_k z_{kk} + \sum_{i \in N} \sum_{k \neq i} c_{ik} (O_i + D_i) z_{ik} \quad (3.17)$$

sujeito a:

$$\eta_{ij} \geq \sum_{k \in K} u_{ijk}^h z_{ik} + \sum_{k \in K} v_{ijk}^h z_{jk} \quad \forall i, j \in N, h = 1, \dots, H \quad (3.18)$$

$$\sum_{k \in K} z_{ik} = 1 \quad \forall i \in N \quad (3.19)$$

$$z_{ik} \leq z_{kk} \quad \forall i \in N, k \in K \quad (3.20)$$

$$z_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N, k \in K \quad (3.21)$$

$$\eta_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in N \quad (3.22)$$

onde u_{ijk}^h e v_{ijk}^h continuam sendo os valores ótimos das variáveis duais da iteração h e η_{ij} são os subestimadores do custo de transporte para o par $i - j$. A formulação de decomposição de Benders multicorte é organizado da seguinte forma:

Formulação - BENDERS MULTICORTE

PASSO 1 Faça $LS = +\infty$, $LI = -\infty$.

PASSO 2 Se $LS = LI$, **PARE** Fim da execução, a solução ótima do problema original (2.1) - (2.7) foi obtida.

PASSO 3 Resolva o problema mestre (3.10) - (3.15), obtendo z^*_{PM} e os valores ótimos das variáveis inteiras y .

PASSO 4 Faça $LI = z^*_{PM}$ e atualize os valores de y no subproblema dual (3.5) - (3.8).

PASSO 5 Resolva o subproblema dual (3.5) - (3.8), obtendo z^*_{SP} e os valores ótimos das variáveis duais.

PASSO 6 Adicione o novo corte de Benders ao problema mestre (3.10) - (3.15) usando o conjunto de restrições (3.16).

PASSO 7 Se $z^*_{SP} + \sum_k f_k z_{kk} + \sum_i \sum_{k \neq i} c_{ik} (O_i + D_i) z_{ik} < LS$, faça $LS = z^*_{SP} + \sum_k f_k z_{kk} + \sum_i \sum_{k \neq i} c_{ik} (O_i + D_i) z_{ik} < LS$. Vá para o **PASSO 2**.

O problema mestre (3.17) - (3.22) têm um número muito grande de restrições quando comparado ao método de decomposição de Benders clássico. Entretanto, espera-se que o número de iterações seja menor (Birge e Louveaux, 1988; Nemhauser e Wolsey, 1988). Neste trabalho, é adotado a formulação de Benders multicorte para implementação do método.

3.2 Aplicação do Ponto Interior

O cenário de Magnanti e Wong (1981) possui dois subproblemas para serem resolvidos em cada iteração. O primeiro é o dual do subproblema comum de um dado vetor $z \in Z$ que geram variáveis duais ótimas $(u, v)^h \in U$, enquanto o segundo subproblema seleciona o valores duais para o pareto-ótimo de um *core point* $z^0 \in ri(Z^c)$. Mais recentemente, Papadakos (2008) demonstrou que o dual do subproblema não tem necessariamente que ser resolvido para encontrar o corte de pareto-ótimo de Benders. Neste contexto, a reformulação do subproblema Skorin-Kapov et. al. (1996) é dado por:

$$\max \sum_{k \in K} u_{ijk} z_{ik}^0 + \sum_{m \in K} v_{ijm} z_{jm}^0 \quad (3.23)$$

sujeito a:

$$u_{ijk} + v_{ijk} \leq (w_{ij} + w_{ji}) \alpha c_{km} \quad \forall k, m \in K \quad (3.24)$$

$$u_{ijk} \in \mathfrak{R} \quad \forall k \in K \quad (3.25)$$

$$v_{ijm} \in \mathfrak{R} \quad \forall m \in K \quad (3.26)$$

Este problema depende apenas do *core point* z^0 e não dos valores de z^h dados pelo problema mestre. Contudo, assim como mostrado por Papadakos (2008) não existem métodos práticos para encontrar bons *core point*, mas apenas aproximações. Papadakos (2008) provou que para um dado valor inicial *core point* $z^0 \in ri(Z^c)$ e $z \in Z$, qualquer combinação convexa de z^0 em z é também um *core point*. Dados os resultados apresentados por Papadakos (2008), escolheu-se a aproximação dada pelo esquema abaixo:

$$z_{ik}^0 = \lambda z_{ik}^0 + (1 - \lambda)z_{ik}^h \quad \forall i \in N, k \in K, h \in H \quad (3.27)$$

onde $0 < \lambda < 1$, mas $\lambda = 1/2$ dados empiricamente os melhores resultados. A idéia desta estratégia é inicialmente enriquecer o problema mestre com "bons" cortes de Benders, sem resolver misturado o problema mestre inteiro, mas apenas a parte linear.

3.3 Formulação de Benders - modelos comparativos

O problema mestre é um conjunto de variáveis inteiras do problema original tratado de forma relaxada. Os modelos de Skorin-Kapov et al. (1996) (2.1) - (2.7), Ernst e Krishnamoorthy (1999) (3.28) - (3.31) e Ebery (2001) (3.33) - (3.35) diferem-se quanto às variáveis contínuas (3.11), logo podemos considerar que a formulação do problema mestre (3.10), (3.12) - (3.15), será a mesma para os três modelos. Desde já, é esperado um desempenho pior dos próximos modelos em função da potencialidade da formulação, porém para análise comparativa e motivação para futuras variações do método, os testes e implementações serão efetuados.

3.3.1 Subproblema de Ernst e Krishnamoorthy (1999)

Utilizando o mesmo princípio mostrado em (3.1) - (3.9), é possível gerar o subproblema do modelo de Ernst e Krishnamoorthy (1999), o qual é representado abaixo:

$$\max \sum_{i \in N} \sum_{k \in K} (O_i z_{ik}^h u_{ik} + O_i z_{ik}^h v_{ik}) - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} w_{ij} z_{jk}^h u_{ik} \quad (3.28)$$

sujeito a:

$$u_{ik} - u_{im} + v_{ik} \leq \alpha c_{km} \quad \forall i \in N, k, m \in K \quad (3.29)$$

$$u_{ik} \in \mathfrak{R} \quad \forall i, k \in K \quad (3.30)$$

$$v_{ik} \in \mathfrak{R} \quad \forall i, k \in K \quad (3.31)$$

A equação (3.28) maximiza a "eficiência" do sistema, no entanto, essa utiliza o fluxo de demanda entre os nós i e j e o custo desta alocação. O limitador de eficiência é representado por (3.29) enquanto as restrições (3.30) e (3.31) são de integralidade do sistema.

O corte de Benders determinado pelo subproblema do modelo de Ernst e Krishnamoorthy (1999) é dado por:

$$\eta \geq \sum_{i \in N} \sum_{k \in K} O_i (u_{ijk}^h + v_{ik}^h) z_{ik} - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} w_{ij} u_{ik}^h + z_{jk} \quad \forall h \in H \quad (3.32)$$

3.3.2 Subproblema de Ebery (2001)

O modelo de Ebery (2001) possui uma restrição que representa o custo de transferência de fluxo, logo, o subproblema possui uma restrição dual representado por γ . Essa restrição determina se existe ou não o ganho sob um determinado fluxo. O subproblema é representado abaixo.

$$\max \sum_{i \in N} \sum_{k \in K} \gamma_{ik} \left(\sum_{j \in N} \sum_{m \in K} \alpha w_{ij} c_{km} (z_{jm}^h + z_{ik}^h - 1) \right) \quad (3.33)$$

sujeito a:

$$\gamma_{ik} \leq 1 \quad \forall i \in N, k \in K \quad (3.34)$$

$$\gamma_{ik} \geq 0 \quad \forall i \in N, k \in K \quad (3.35)$$

O corte de Benders, para este caso, é determinado como:

$$\eta \geq \sum_{i \in N} \sum_{k \in K} \gamma_{hik} \left(\sum_{j \in N} \sum_{m \in K} \alpha_{ijk}^h w_{ij} c_{km} (z_{jm} + z_{ik} - 1) \right) \quad (3.36)$$

3.4 Branch and Cut baseado em Decomposição de Benders

A formulação de Ebery (2001) ((2.15) - (2.20)), possui uma relaxação de programação linear pobre. Como forma de aperfeiçoar, podemos estender a formulação utilizando variáveis extras $x_{ijkm} \geq 0$ representando o percentual de fluxo da demanda w_{ij} que utiliza os concentradores $k - m$, nas restrições:

$$\sum_{m \in K} x_{ijkm} = z_{ik} \quad \forall i, j \in N, k \in K \quad (3.37)$$

$$\sum_{k \in K} x_{ijkm} = z_{jm} \quad \forall i, j \in N, m \in K \quad (3.38)$$

$$\sum_{m \in K} x_{ijkm} + \sum_{k \in K} x_{ijmk} \leq z_{kk} \quad \forall i, j \in N, k \in K \quad (3.39)$$

$$\sum_{j \in N | j \neq i} \sum_{m \in K | m \neq k} \alpha c_{km} x_{ijkm} = q_{ik} \quad \forall i \in N, k \in K \quad (3.40)$$

$$0 \leq x_{ijkm} \leq 1 \quad \forall i, j \in N : i \neq j, k, m \in K \quad (3.41)$$

As restrições (3.37) - (3.38) e (3.39) são baseadas na formulação de Skorin-Kapov et al. (1996) e Hamacher et al. (2004) respectivamente, enquanto a restrição (3.40) é o acoplamento entre q_{ik} e as variáveis x_{ijkm} . A formulação (2.15) - (2.20) juntamente com as restrições (3.37) - (3.41) possuem agora uma relaxação de programação linear justa, mas um número muito grande de variáveis e restrições. Em outras palavras, este modelo tornou-se tão grande que de

propósito geral *solvers* comerciais são incapazes de resolver os casos até de tamanho médio. Uma maneira de superar esta situação é decompor esta formulação em pequenas formulações por meio de um algoritmo de *branch and cut* com base na decomposição de Benders.

3.4.1 Formulação de Branch and Cut baseado em decomposição de Benders

O método de decomposição de Benders (Benders (1962)) pode ser usado para superar o grande número de variáveis da formulação detalhada acima. Vetores q e z satisfazem (2.16) - (2.20) definindo soluções viáveis para o problema de localização de concentradores com alocação simples não capacitado se, e somente se, existe um vetor x no poliedro definido por (3.37) - (3.41). Utilizando-se do Lema de *Farkas*, inequações lineares podem ser usadas para impor a existência de tais soluções. Associando variáveis duais u_{ijk} , v_{ijm} , w_{ijk} e γ_{ik} às restrições (3.37) - (3.40) respectivamente, tem-se que o poliedro (3.37) - (3.41) é não vazio se e somente se a função objetivo de (3.42) - (3.48) é não negativo.

$$\max \sum_{i \in N} \sum_{k \in K} \left(\gamma_{ik} q_{ik} + \sum_{j \in N} (u_{ijk} z_{ik} + v_{ijk} z_{jk} + \omega_{ijk} z_{kk}) \right) \quad (3.42)$$

s. t.:

$$u_{ijk} + v_{ijm} + (w_{ij} + w_{ji}) \alpha_{ckm} \gamma_{ik} - \omega_{ijk} - \omega_{ijm} \geq 0 \quad \forall i, j \in N : i \neq j, k, m \in K, k \neq m \quad (3.43)$$

$$u_{ijk} + v_{ijk} - \omega_{ijk} \geq 0 \quad \forall i, j \in N : i \neq j, k \in K \quad (3.44)$$

$$u_{ijk} \in \mathbb{R} \quad \forall i, j \in N : i \neq j, k \in K \quad (3.45)$$

$$v_{ijm} \in \mathbb{R} \quad \forall i, j \in N : i \neq j, m \in K \quad (3.46)$$

$$\omega_{ijk} \geq 0 \quad \forall i, j \in N : i \neq j, k \in K \quad (3.47)$$

$$\gamma_{ik} \in \mathbb{R} \quad \forall i \in N, k \in K \quad (3.48)$$

Em outras palavras, ao invés de resolver (2.15) - (2.20) juntamente com as restrições (3.37) - (3.41) com um *solver* de propósito geral, pode-se resolver a relaxação de programação linear de (2.15) - (2.20) iterativamente. Em cada iteração a formulação é enriquecida pela adição da desigualdade (3.49):

$$\sum_{i \in N} \sum_{k \in K} \left(\gamma_{ik} q_{ik} + \sum_{j \in N} (u_{ijk} z_{ik} + v_{ijk} z_{jk} + \omega_{ijk} z_{kk}) \right) \geq 0 \quad (3.49)$$

Capítulo 4

Resultados Computacionais

Neste capítulo é realizado a análise dos resultados da implementação da formulação proposta por Skorin-Kapov et al. (1996), Ernst e Krishnamoorthy (1999) e Ebery (2001) para resolução do problema de localização de concentradores com atribuição simples. Para isso, utilizou-se o método de Decomposição de Benders Benders (1962) de forma clássica e com variações, propostas por McDaniel e Devine (1977) e Magnanti e Wong (1981), além da resolução pelo método CPLEX. Os testes computacionais foram realizados usando o conjunto padrão de instâncias da literatura: AP do serviço Postal Australiano (Ernst e Krishnamoorthy, 1996, 1999). As instâncias AP foram testadas gerando-se de 10 até 100 pontos de demanda. Muitos estudos da literatura (O’Kelly e Bryan, 1998; Elhedhli e Hu (2005); Ebery et al., 2000; Boland et al. (2004)) usam essas instâncias para medir o desempenho dos métodos de resolução. As 40 instâncias geradas foram nomeadas $APn.\alpha$, indicando a origem dos dados usados, o número de pontos de demanda n , e o desconto usado α . O símbolo α pode assumir valores iguais a 2, 4, 6 e 8 significando descontos de 20%, 40%, 60% e 80%, respectivamente, ou seja, o desconto é representado por um escalar $0 \leq \alpha \leq 1$. Os testes computacionais foram realizados em um HP com processador AMD Turion X2 e 4 Gbyte de memória RAM, executado pelo sistema operacional Linux. Todos os algoritmos foram codificados em C++, utilizou-se o CPLEX 7.0, usando a configuração padrão de instalação, para resolver os problemas mestres. Um limite de 5 horas de execução de máquina foi estabelecido como um critério adicional de parada. No total foram realizados 280 testes esclarecidos abaixo.

4.1 Implementação Benders Clássico

Para algoritmos de problemas do tipo eixo-raio, a figura 4.1 demonstra a quantidade de testes que obtiveram menor tempo de processamento. Os testes foram realizados através do modelo monolítico de Skorin-Kapov via CPLEX, e pelo método de decomposição de Benders clássico da formulação proposta por Skorin-Kapov et al. (1996), Ernst e Krishnamoorthy (1999) e Ebery (2001).

Observa-se um melhor desempenho do modelo monolítico através da resolução pelo CPLEX. A tabela 4.1 retrata os testes executados para as instâncias consideradas. São eles: mono-

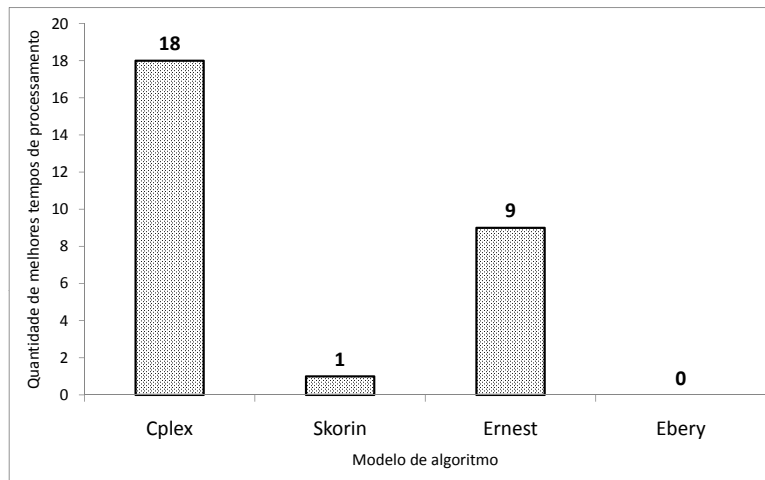


Figura 4.1: Quantidade de testes com melhor tempo de processamento

lítico via CPLEX, implementação de Benders Clássico dos modelos de Skorin-Kapov (1996), Ernst e Krishnamoorthy (1999) e Ebery (2001). As indicações com letra P, significam que o teste ultrapassou o tempo limite de 5 horas de processamento e foi interrompido, gerando um GAP de convergência demonstrado na coluna ao lado. Na tabela 4.1, as indicações com a sigla MEMO, simboliza que a memória de processamento do computador não foi suficiente para dar andamento ao processamento e por isso parada. Os resultados são representados pelo tempo de processamento em segundos, número de iterações e GAP de convergência em porcentagem.

Explorando-se os resultados em número de iterações, a figura 4.2 demonstra a média de iterações utilizadas em cada algoritmo resolvido pelo método de decomposição de Benders clássico. As características de cada modelo de algoritmo, quantidade de variáveis inteiras ou reais e quantidade de restrições determinam as iterações necessárias para a convergência do método.

Avaliando-se o GAP de convergência gerado, no limite de 5 horas de processamento, a figura 4.3 demonstra a média em percentual de GAP dos 3 modelos utilizados para aplicação do método de decomposição de Benders. Observa-se que o número de iterações utilizadas para convergência não está diretamente ligado à eficiência do modelo. Adotando-se o modelo implementado de Ebery, como exemplo, visualiza-se um baixo número de iterações utilizadas, porém com um alto percentual de GAP gerado devido à não convergência dos testes no tempo determinado.

Tabela 4.1: Resultados dos testes efetuados através de Benders Clássico

| Instância | CPLEX | | SKORIN | | ERNEST | | | EBERY | | |
|-----------|-----------|-----------|---------------------|--------|-----------|---------------------|-------|-----------|---------------------|-------|
| | Tempo (s) | Tempo (s) | Número de iterações | GAP | Tempo (s) | Número de iterações | GAP | Tempo (s) | Número de iterações | GAP |
| AP10.2 | 0,02 | 0,04 | 4 | 0% | 0,05 | 6 | 0% | 0,13 | 5 | 0% |
| AP10.4 | 0,02 | 0,09 | 6 | 0% | 0,06 | 6 | 0% | 0,12 | 4 | 0% |
| AP10.6 | 0,03 | 0,04 | 3 | 0% | 0,01 | 3 | 0% | 0,1 | 3 | 0% |
| AP10.8 | 0,02 | 0,04 | 3 | 0% | 0,02 | 3 | 0% | 0,09 | 3 | 0% |
| AP20.2 | 7,86 | 5,86 | 20 | 0% | 9,42 | 29 | 0% | 11,99 | 12 | 0% |
| AP20.4 | 1,95 | 3,49 | 11 | 0% | 6,82 | 19 | 0% | 24,28 | 8 | 0% |
| AP20.6 | 1,33 | 1,37 | 6 | 0% | 1,82 | 8 | 0% | 26,39 | 6 | 0% |
| AP20.8 | 1,2 | 0,98 | 5 | 0% | 0,2 | 4 | 0% | 13,17 | 5 | 0% |
| AP30.2 | 23,03 | 21,4 | 26 | 0% | 4,44 | 15 | 0% | 136,28 | 7 | 0% |
| AP30.4 | 58,64 | 293,07 | 85 | 0% | 504,8 | 121 | 0% | 10707,75 | 7 | 0% |
| AP30.6 | 45,77 | 145,55 | 42 | 0% | 183,42 | 52 | 0% | 11384,28 | 8 | 0% |
| AP30.8 | 40,18 | 110,69 | 34 | 0% | 128,28 | 44 | 0% | P | 8 | 0,05% |
| AP40.2 | 119,15 | 126,99 | 34 | 0% | 120,05 | 38 | 0% | 17904,6 | 6 | 0,00% |
| AP40.4 | 186,47 | 1301,61 | 92 | 0% | 2347,69 | 131 | 0% | P | 5 | 0,07% |
| AP40.6 | 355,85 | P | 187 | 0,52% | P | 190 | 0,59% | MEMO | - | - |
| AP40.8 | 474,29 | P | 142 | 0,85% | P | 143 | 1,36% | MEMO | - | - |
| AP50.2 | 290,22 | 270,78 | 41 | 0% | 106,26 | 35 | 0% | P | 7 | 0,04% |
| AP50.4 | 568,04 | 4235,31 | 105 | 0% | 1847,85 | 80 | 0% | MEMO | - | - |
| AP50.6 | 1943,57 | P | 104 | 2,25% | P | 126 | 2,49% | MEMO | - | - |
| AP50.8 | 3528,18 | P | 81 | 6,02% | P | 107 | 4,36% | MEMO | - | - |
| AP60.2 | 209,21 | 171,93 | 18 | 0% | 60,66 | 18 | 0% | P | 6 | 0,05% |
| AP60.4 | 480,72 | 1466,4 | 61 | 0% | 858,5 | 62 | 0% | MEMO | - | - |
| AP60.6 | 1309,44 | P | 102 | 0,32% | 14350,69 | 139 | 0% | MEMO | - | - |
| AP60.8 | 2650,41 | P | 71 | 2,23% | P | 102 | 0,86% | MEMO | - | - |
| AP70.2 | MEMO | 534,45 | 31 | 0% | 81,4 | 24 | 0% | P | 5 | 0,06% |
| AP70.4 | MEMO | P | 151 | 0,02% | P | 204 | 0,17% | MEMO | - | - |
| AP70.6 | MEMO | P | 72 | 3,46% | P | 105 | 2,45% | MEMO | - | - |
| AP70.8 | MEMO | P | 48 | 7,49% | P | 80 | 4,91% | MEMO | - | - |
| AP80.2 | MEMO | 1230,83 | 35 | 0% | 159,52 | 22 | 0% | MEMO | - | - |
| AP80.4 | MEMO | P | 100 | 0,85% | P | 143 | 0,46% | MEMO | - | - |
| AP80.6 | MEMO | P | 54 | 4,79% | P | 74 | 2,55% | MEMO | - | - |
| AP80.8 | MEMO | P | 38 | 8,23% | P | 57 | 5,42% | MEMO | - | - |
| AP90.2 | MEMO | 14508,4 | 153 | 0% | 6125,22 | 122 | 0% | MEMO | - | - |
| AP90.4 | MEMO | P | 80 | 1,43% | P | 100 | 0,95% | MEMO | - | - |
| AP90.6 | MEMO | P | 56 | 4,95% | P | 70 | 3,52% | MEMO | - | - |
| AP90.8 | MEMO | P | 39 | 10,40% | P | 52 | 6,89% | MEMO | - | - |
| AP100.2 | MEMO | P | 119 | 0,62% | P | 172 | 0,13% | MEMO | - | - |
| AP100.4 | MEMO | P | 66 | 3,10% | P | 86 | 1,89% | MEMO | - | - |
| AP100.6 | MEMO | P | 45 | 5,95% | P | 62 | 4,50% | MEMO | - | - |
| AP100.8 | MEMO | P | 39 | 10,34% | P | 72 | 5,60% | MEMO | - | - |

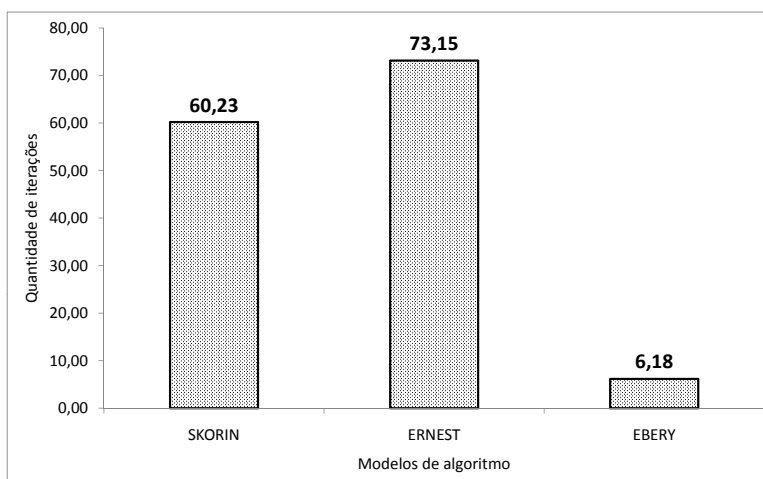


Figura 4.2: Média do número de iterações utilizadas para convergência do método ou até 5 horas de processamento

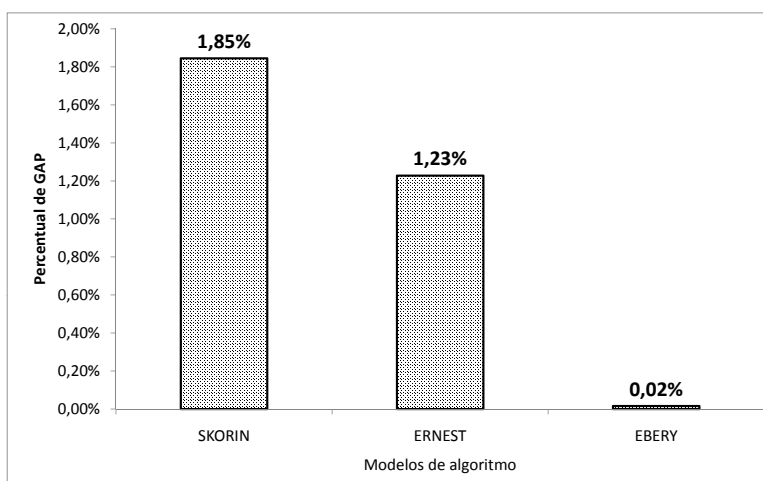


Figura 4.3: Média do GAP de convergência quando atingido o limite de tempo de 5 horas de processamento

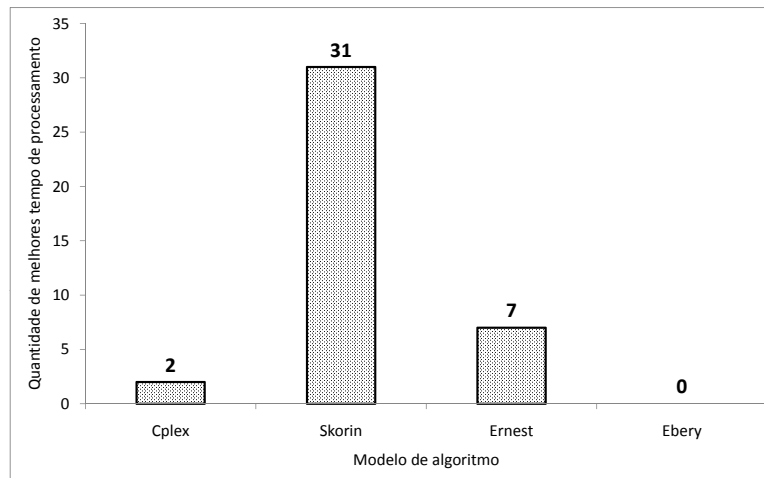


Figura 4.4: Quantidade de testes com melhor tempo de processamento

4.2 Implementação Benders com Variações - Pré-Processamento e Core Point

Analisa-se neste momento, a implementação da formulação proposta por Skorin-Kapov (1996), Ernst e Krishnamoorthy (1999) e Ebery (2001), através da decomposição de Benders com variações, ou seja, com a aplicação do pré-processamento proposto por McDaniel e Devine (1977) e Core Point proposto por Magnanti-Wong (1981) e bem aplicado por Papadakos (2008). Foram utilizadas as mesmas instâncias e o mesmo computador para realização dos testes. Da mesma forma, a figura 4.4 demonstra a quantidade de testes que obtiveram menor tempo de processamento.

Destaca-se claramente que, para as 40 instâncias testadas, o modelo implementado de Skorin-Kapov obteve 31 melhores resultados quando comparado aos demais métodos. Essa característica dá-se pela boa relaxação linear do modelo quando aplicado ao método de decomposição de Benders com variações.

Observa-se na tabela 4.2 os resultados de todos os testes realizados com o método de decomposição de Benders com variações. Destaca-se nesses resultados que o modelo implementado de Skorin-Kapov não obteve nenhum GAP de convergência, uma vez que, em todas as instâncias o modelo obteve convergência total antes de 5 horas de processamento. A média de GAP dos modelos utilizados pode ser observada na figura 4.5

Avaliando-se o número de iterações utilizadas pelos modelos, a maior variação dos atuais testes, em relação ao Benders classico está no modelo implementado de Skorin-Kapov. Os demais modelos mantiveram-se sem variações relevantes. Estas variações podem ser observadas na figura 4.6.

Tabela 4.2: Resultados dos testes efetuados através de Benders com variações

| Instância | CPLEX | | | | SKORIN | | | ERNEST | | | EBERY | | |
|-----------|-----------|-----------|---------------------|-------|-----------|---------------------|-------|-----------|---------------------|--------|-----------|---------------------|-----|
| | Tempo (s) | Tempo (s) | Número de iterações | GAP | Tempo (s) | Número de iterações | GAP | Tempo (s) | Número de iterações | GAP | Tempo (s) | Número de iterações | GAP |
| AP10.2 | 0,02 | 0,1 | 4 | 0% | 0,06 | 5 | 0% | 0,08 | 4 | 0% | | | |
| AP10.4 | 0,02 | 0,07 | 5 | 0% | 0,08 | 5 | 0% | 0,075 | 2 | 0% | | | |
| AP10.6 | 0,03 | 0,03 | 2 | 0% | 0,01 | 3 | 0% | 0,02 | 2 | 0% | | | |
| AP10.8 | 0,02 | 0,02 | 1 | 0% | 0,01 | 1 | 0% | 0,015 | 1 | 0% | | | |
| AP20.2 | 7,86 | 1,92 | 9 | 0% | 8,42 | 23 | 0% | 5,17 | 9 | 0% | | | |
| AP20.4 | 1,95 | 0,9 | 5 | 0% | 4,46 | 13 | 0% | 2,68 | 6 | 0% | | | |
| AP20.6 | 1,33 | 0,31 | 2 | 0% | 0,34 | 4 | 0% | 0,325 | 5 | 0% | | | |
| AP20.8 | 1,2 | 0,18 | 1 | 0% | 0,03 | 1 | 0% | 0,105 | 3 | 0% | | | |
| AP30.2 | 23,03 | 5,37 | 7 | 0% | 5,36 | 14 | 0% | 5,365 | 5 | 0% | | | |
| AP30.4 | 58,64 | 12,32 | 13 | 0% | 282,42 | 82 | 0% | 303,37 | 6 | 0% | | | |
| AP30.6 | 45,77 | 6,31 | 8 | 0% | 34,73 | 24 | 0% | 41,676 | 6 | 0% | | | |
| AP30.8 | 40,18 | 7,75 | 9 | 0% | 41,44 | 27 | 0% | 49,728 | 6 | 0,00% | | | |
| AP40.2 | 119,15 | 18,62 | 7 | 0% | 62,02 | 28 | 0% | 1052,66 | 3 | 0,00% | | | |
| AP40.4 | 186,47 | 26,17 | 10 | 0% | 877,06 | 80 | 0% | 6709,99 | 5 | 0,00% | | | |
| AP40.6 | 355,85 | 42,66 | 14 | 0,00% | P | 188 | 0,18% | P | 4 | 7,68% | | | |
| AP40.8 | 474,29 | 82,77 | 18 | 0,00% | P | 145 | 0,45% | P | 6 | 8,35% | | | |
| AP50.2 | 290,22 | 40,31 | 7 | 0% | 83,73 | 30 | 0% | P | 6 | 0,04% | | | |
| AP50.4 | 568,04 | 35,85 | 6 | 0% | 609,79 | 45 | 0% | P | 5 | 0,98% | | | |
| AP50.6 | 1943,57 | 162,5 | 17 | 0,00% | P | 131 | 1,20% | 8135,11 | 4 | 0,00% | | | |
| AP50.8 | 3528,18 | 177,24 | 16 | 0,00% | P | 96 | 2,19% | 15565,41 | 4 | 0,00% | | | |
| AP60.2 | 209,21 | 60,14 | 5 | 0% | 34,04 | 13 | 0% | 17066,78 | 5 | 0% | | | |
| AP60.4 | 480,72 | 71,65 | 6 | 0% | 455,26 | 44 | 0% | P | 3 | 4,47% | | | |
| AP60.6 | 1309,44 | 95,05 | 8 | 0,00% | 5024,95 | 92 | 0% | P | 4 | 7,30% | | | |
| AP60.8 | 2650,41 | 133,27 | 10 | 0,00% | P | 108 | 0,32% | P | 3 | 10,95% | | | |
| AP70.2 | MEMO | 96,77 | 4 | 0% | 73,45 | 22 | 0% | P | 4 | 1,32% | | | |
| AP70.4 | MEMO | 138,52 | 6 | 0,00% | P | 181 | 0,13% | P | 3 | 4,70% | | | |
| AP70.6 | MEMO | 261,23 | 10 | 0,00% | P | 105 | 1,62% | P | 4 | 8,71% | | | |
| AP70.8 | MEMO | 1526,35 | 38 | 0,00% | P | 71 | 3,86% | P | 4 | 12,49% | | | |
| AP80.2 | MEMO | 182,28 | 4 | 0% | 128,11 | 19 | 0% | P | 3 | 3,70% | | | |
| AP80.4 | MEMO | 268,36 | 6 | 0,00% | P | 154 | 0,09% | P | 3 | 7,76% | | | |
| AP80.6 | MEMO | 320,44 | 7 | 0,00% | P | 90 | 1,43% | P | 4 | 11,70% | | | |
| AP80.8 | MEMO | 935,51 | 16 | 0,00% | P | 58 | 2,97% | P | 4 | 12,73% | | | |
| AP90.2 | MEMO | 532,04 | 7 | 0% | 3991,65 | 94 | 0% | P | 4 | 4,30% | | | |
| AP90.4 | MEMO | 542 | 7 | 0,00% | P | 116 | 0,49% | P | 3 | 9,32% | | | |
| AP90.6 | MEMO | 838,59 | 10 | 0,00% | P | 79 | 2,16% | P | 4 | 12,48% | | | |
| AP90.8 | MEMO | 2474,3 | 23 | 0,00% | P | 55 | 4,45% | P | 4 | 16,15% | | | |
| AP100.2 | MEMO | 973,61 | 8 | 0,00% | P | 164 | 0,10% | P | 4 | 5,18% | | | |
| AP100.4 | MEMO | 1532,42 | 12 | 0,00% | P | 93 | 1,02% | P | 5 | 10,92% | | | |
| AP100.6 | MEMO | 1992,98 | 14 | 0,00% | P | 69 | 2,80% | P | 5 | 13,74% | | | |
| AP100.8 | MEMO | 5967,89 | 35 | 0,00% | P | 47 | 4,75% | P | 4 | 14,50% | | | |

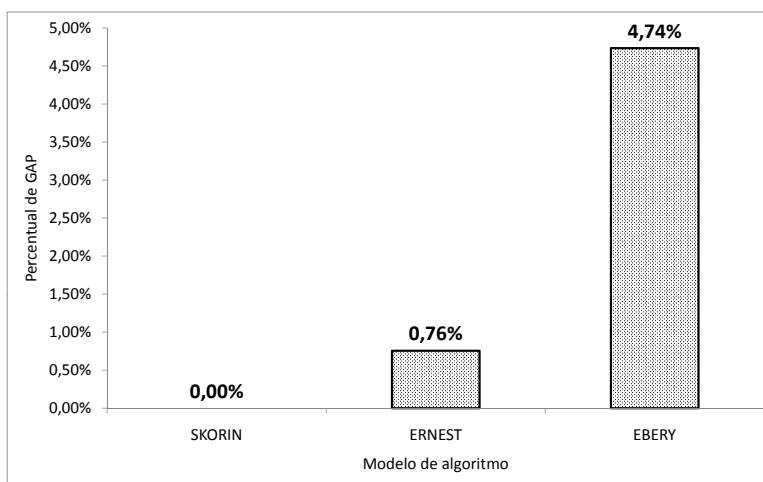


Figura 4.5: Média do GAP de convergência quando atingido o limite de tempo de 5 horas de processamento

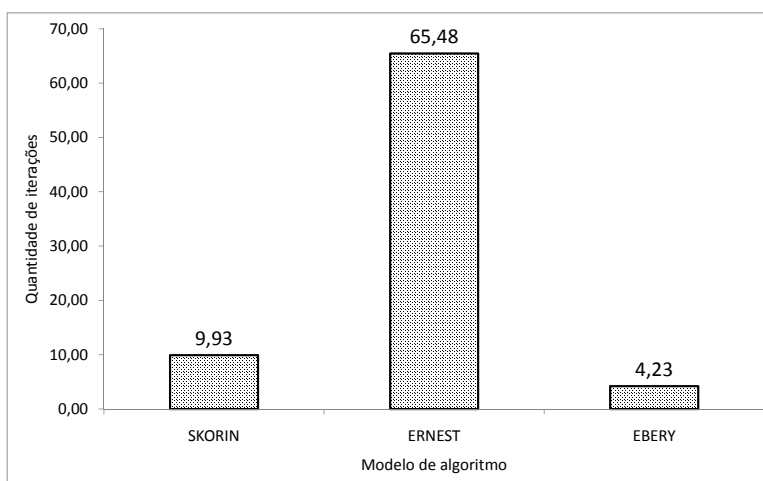


Figura 4.6: Média do número de iterações utilizadas para convergência do método ou até 5 horas de processamento

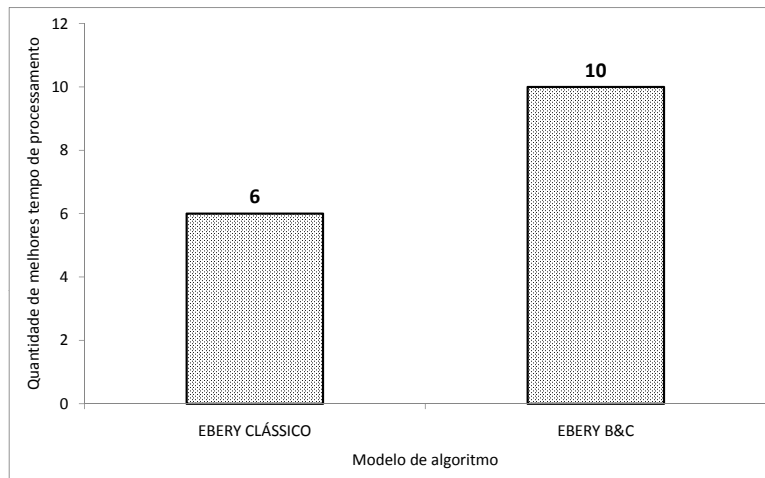


Figura 4.7: Quantidade de testes com melhor tempo de processamento

4.3 Implementação de Branch and Cut baseado em decomposição de Benders

Com o propósito de investigar o comportamento do modelo proposto por Ebery (2001) com a inserção de restrições propostas por Skorin-Kapov et al. (1996), que caracterizam uma formulação mais justa, essas modificações foram implementadas e testadas. A figura 4.7 faz uma comparação entre os melhores tempos de processamento entre a implementação do modelo de Ebery clássico (modelo proposto por Ebery (2001) implementado com decomposição de Benders clássico), e o modelo implementado de Ebery *Branch and Cut* (modelo proposto por Ebery (2001) implementado via *Branch and Cut* baseado em decomposição de Benders). Em todos os testes realizados, o modelo implementado com *Branch and Cut* obteve 10 melhores resultados em tempo de processamento em relação ao modelo implementado com Benders Clássico.

A tabela 4.3 demonstra os resultados obtidos para os testes propostos. Esta divide-se em 7 colunas que representam respectivamente: instâncias de teste, tempo de processamento para o modelo de Ebery implementado com decomposição de Benders, GAP gerado quando atingido o tempo limite de processamento, tempo de processamento para o modelo de Ebery implementado com Branch and Cut, tempo utilizado para 10 cortes de pré-processamento, GAP entre o resultado do pré-processamento e o resultado ótimo, e o GAP gerado quando atingido o tempo limite de processamento.

A figura 4.8 resume os resultados descritos na tabela 4.3 e compara a média do tempo de processamento para as implementações propostas, como também, a média do GAP de convergência. Neste caso, foi acrescentado para comparação os resultados obtidos pela im-

Tabela 4.3: Resultados dos testes efetuados através de Branch and Cut baseado em decomposição de Benders

| Instância | EBERY CLÁSSICO | | EBERY COM BRANCH AND CUT | | | |
|-----------|-----------------|-------|--------------------------|-----------------------------|-------------|-------|
| | Tempo Total (s) | GAP | Tempo Total (s) | Tempo Pré-processamento (s) | GAP INICIAL | GAP |
| AP10.2 | 0,13 | 0% | 0,34 | 0,32 | 0% | 0% |
| AP10.4 | 0,12 | 0% | 0,26 | 0,23 | 0% | 0% |
| AP10.6 | 0,10 | 0% | 0,14 | 0,12 | 0% | 0% |
| AP10.8 | 0,09 | 0% | 0,10 | 0,08 | 0% | 0% |
| AP20.2 | 11,99 | 0% | 30,84 | 7,28 | 0,53% | 0% |
| AP20.4 | 24,28 | 0% | 7,84 | 7,49 | 0% | 0% |
| AP20.6 | 26,39 | 0% | 3,70 | 3,37 | 0% | 0% |
| AP20.8 | 13,17 | 0% | 3,05 | 2,74 | 0% | 0% |
| AP30.2 | 136,28 | 0% | 187,05 | 35,45 | 0,46% | 0% |
| AP30.4 | 10707,75 | 0% | 716,94 | 39,88 | 1,52% | 0% |
| AP30.6 | 11384,28 | 0% | 205,47 | 34,96 | 1,70% | 0% |
| AP30.8 | P | 0,05% | 146,41 | 33,73 | 1,74% | 0% |
| AP40.2 | 17904,60 | 0% | 1738,06 | 132,95 | 0,76% | 0% |
| AP40.4 | P | 0,07% | 13159,83 | 139,48 | 2,55% | 0% |
| AP40.6 | MEMO | - | 15439,56 | 146,29 | 3,89% | 0% |
| AP40.8 | MEMO | - | P | 140,33 | 7,67% | 0,10% |
| AP50.2 | P | 0,04% | P | 393,89 | 0,85% | 0% |
| AP50.4 | MEMO | - | P | 402,78 | 2,39% | 0,02% |
| AP50.6 | MEMO | - | P | 416,17 | 6,41% | 0,03% |
| AP50.8 | MEMO | - | P | 452,91 | 9,94% | 0,04% |
| AP60.2 | P | 0,05% | 15078,65 | 996,82 | 0,69% | 0% |
| AP60.4 | MEMO | - | P | 928,20 | 0,89% | 0,01% |
| AP60.6 | MEMO | - | P | 972,94 | 2,23% | 0,02% |
| AP60.8 | MEMO | - | P | 858,12 | 5,67% | 0,03% |
| AP70.2 | P | 0,06% | P | 2642,28 | 1,41% | 0,01% |
| AP70.4 | MEMO | - | P | 2048,90 | 2,04% | 0,02% |
| AP70.6 | MEMO | - | P | 2166,82 | 4,83% | 0,04% |
| AP70.8 | MEMO | - | P | 1997,34 | 10,22% | 0,05% |
| AP80.2 | MEMO | - | MEMO | - | - | - |
| AP80.4 | MEMO | - | MEMO | - | - | - |
| AP80.6 | MEMO | - | MEMO | - | - | - |
| AP80.8 | MEMO | - | MEMO | - | - | - |
| AP90.2 | MEMO | - | MEMO | - | - | - |
| AP90.4 | MEMO | - | MEMO | - | - | - |
| AP90.6 | MEMO | - | MEMO | - | - | - |
| AP90.8 | MEMO | - | MEMO | - | - | - |
| AP100.2 | MEMO | - | MEMO | - | - | - |
| AP100.4 | MEMO | - | MEMO | - | - | - |
| AP100.6 | MEMO | - | MEMO | - | - | - |
| AP100.8 | MEMO | - | MEMO | - | - | - |

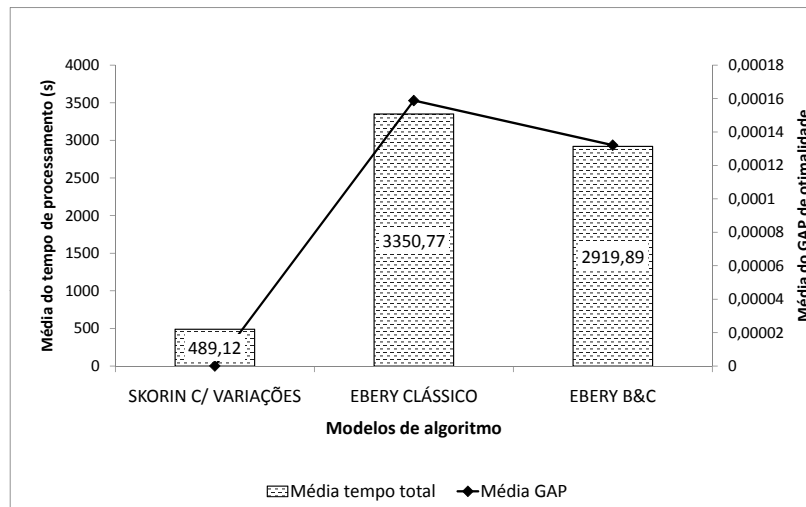


Figura 4.8: Média do tempo de processamento versus média do GAP

plementação do modelo de Skorin-Kapov et al. (1996) através de decomposição de Benders com variações. Em suma, o objetivo de melhorar os resultados da implementação do modelo de Ebery (2001), através da aplicação de *Branch and Cut* foi atingido, porém, como visto na figura 4.8, os resultados da implementação do modelo de Skorin-Kapov et al. (1996) via decomposição de Benders com variações são consideravelmente melhores.

4.4 Análise de esforço computacional

Analisa-se nesta seção o esforço computacional utilizado para a realização dos testes em função do desconto α aplicado ao modelo. Primeiramente, na aplicação do método de decomposição de Benders clássico, a figura 4.9 demonstra para cada modelo implementado nos testes, ou seja, CPLEX, Skorin-Kapov, Ernst e Ebery, a média do tempo utilizado para convergência nas instâncias com desconto de 20%, 40%, 60% e 80%.

Observa-se que à medida que se aumentam os descontos, o esforço computacional é maior. Quanto maior o desconto dado, maior a dificuldade na escolha de alocação de concentradores.

A figura 4.10 demonstra os resultados obtidos, em sua média, do tempo de processamento para o método de Benders com variações. Comparando-se os resultados da implementação do modelo de Skorin-Kapov et al. (1996) com decomposição de Benders clássico e Benders com variações, na figura 4.11, pode-se avaliar o menor esforço computacional gasto pela aplicação de Skorin-Kapov. Porém, o esforço computacional mantém-se aumentando à medida que aumentam-se os descontos aplicados.

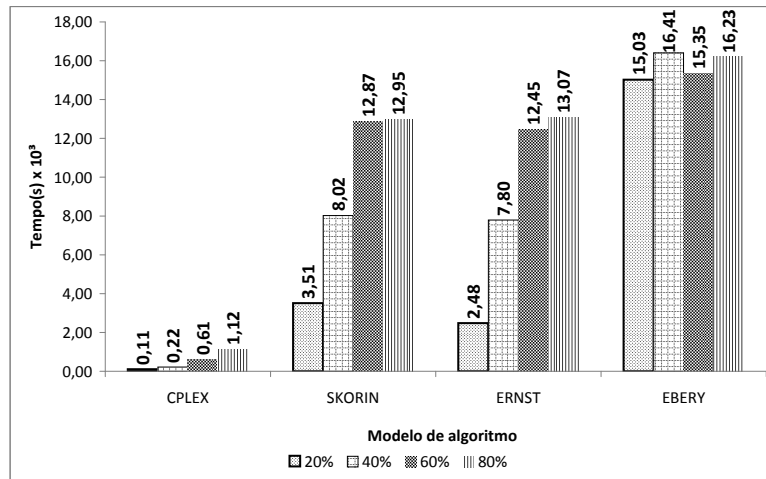


Figura 4.9: Média do tempo utilizado para convergência do método de decomposição de Benders Clássico

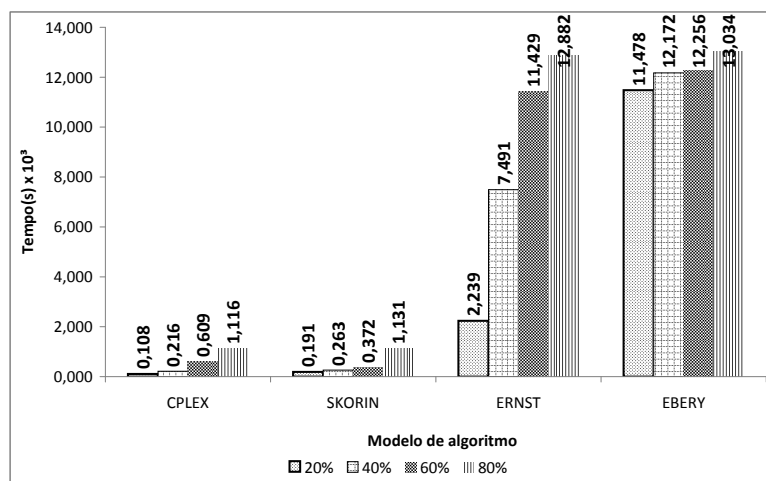


Figura 4.10: Média do tempo utilizado para convergência do método de decomposição de Benders com variações

| Instâncias | Formulação relaxada | | |
|------------|---|--|--|
| | Formulação de Skorin % para atingir f(ótimo) | Formulação de Ernst % para atingir f(ótimo) | Formulação de Ebery % para atingir f(ótimo) |
| AP10.2 | 0,000% | 0,8200% | 8,6629% |
| AP10.4 | 0,000% | 0,9642% | 13,5799% |
| AP10.6 | 0,000% | 0,0000% | 13,6776% |
| AP10.8 | 0,000% | 0,0000% | 13,6776% |
| AP20.2 | 0,484% | 1,8467% | 11,6806% |
| AP20.4 | 0,000% | 1,2621% | 17,9853% |
| AP20.6 | 0,000% | 2,8425% | 19,8267% |
| AP20.8 | 0,000% | 0,0000% | 19,8267% |
| AP30.2 | 0,046% | 0,8454% | 13,0582% |
| AP30.4 | 0,523% | 2,0176% | 23,3831% |
| AP30.6 | 0,000% | 1,1690% | 28,5834% |
| AP30.8 | 0,000% | 1,3364% | 33,2733% |
| AP40.2 | 0,000% | 1,0991% | 13,0880% |
| AP40.4 | 0,000% | 1,6472% | 23,6260% |
| AP40.6 | 0,000% | 2,3756% | 32,7265% |
| AP40.8 | 0,038% | 2,6844% | 39,2660% |

Figura 4.11: GAP entre a solução encontrada na formulação relaxada e a solução ótima

4.5 Conclusão dos resultados

Conclui-se com os resultados obtidos que, quando acrescentam-se variações na formulação original do método de decomposição de Benders, os resultados tornam-se extremamente competitivos. Porém, um cuidado a ser tomado, é a escolha de uma formulação com boas características de relaxação linear. Neste caso, o modelo de Skorin-Kapov mostrou-se bastante competitivo. A eficiência de relaxação linear pode ser comparada na figura 4.11. Foram realizados testes com 10 a 50 pontos de demanda desconsiderando as restrições de integralidade, ou seja, essas restrições passaram a ser maiores ou iguais a zero. Dessa forma, um percentual para o alcance da solução ótima foi obtido. Como comentado anteriormente, a formulação de Skorin-Kapov possui os menores percentuais, caracterizando uma formulação com boas características de relaxação linear.

Analisando-se a média do tempo de processamento entre o modelo de Skorin-Kapov, resolvido em sua forma monolítica via CPLEX e, através da decomposição de Benders clássico e com variações, pode ser analisado na figura 4.12. Observe que a média do tempo utilizado em Benders com variações é menor que a média do tempo utilizado pelo CPLEX. Convém lembrar que, para as 40 instâncias utilizadas, Benders com variações convergiu em todos os testes, o que não aconteceu com o método via CPLEX. Destaca-se que na literatura, até então, instâncias acima de 100 nós, ou pontos de demanda, não eram passíveis de resolução.

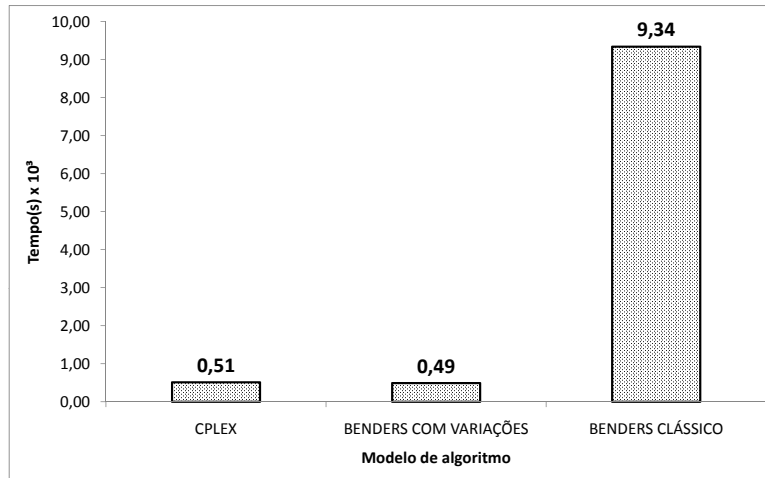


Figura 4.12: Média do tempo utilizado para convergência da implementação utilizando-se o modelo de Skorin-Kapov

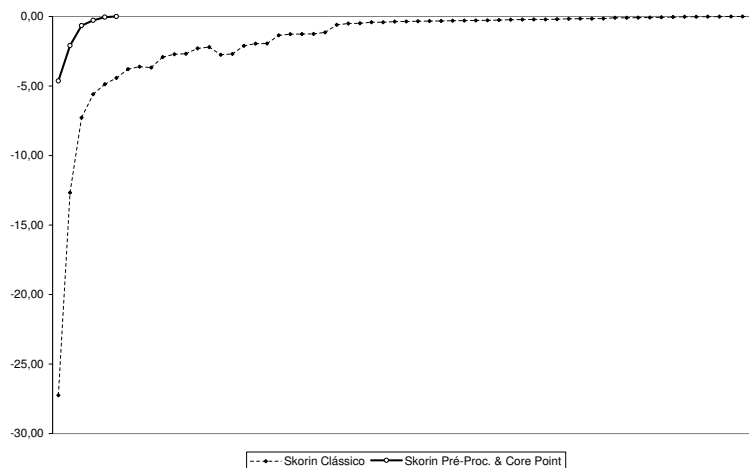


Figura 4.13: Exemplo de convergência da instância AP60.4

Para efeito de apontar o comportamento da convergência nos dois métodos de Benders utilizados, observe o exemplo AP60.4 onde a implementação de Benders com variações mostra-se mais eficiente em comparação com a implementação de Benders Clássico. Como já foi estudado no exame da literatura, através do pré-processamento o algoritmo inicia sua abordagem já com um ganho em relação à forma convencional e, pelos fortes cortes gerados pela comparação efetuada no método de *core point*, a convergência é extremamente rápida, figura 4.13.

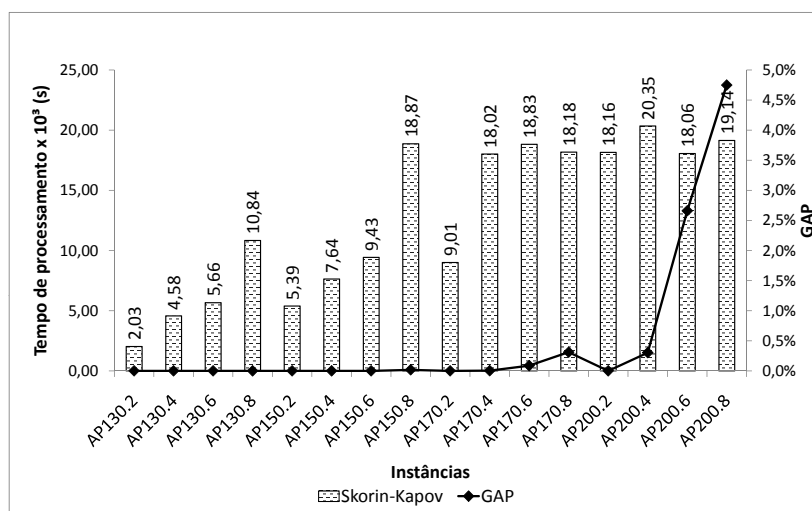
4.5.1 Desafiando a formulação de Skorin-Kapov (1996)

Analizando os gráficos e tabelas, conclui-se que os testes através da decomposição de Benders com variações, possuem bons resultados em tempo de processamento e convergência. Como forma de desafiar o modelo que demonstrou-se mais eficiente nesta implementação, testes extras foram efetuados com instâncias de 130, 150, 170 e 200 nós, utilizando a mesma variação de descontos. A tabela 4.4 demonstra os resultados alcançados em tempo de processamento, número de iterações e GAP de convergência para a implementação do modelo de Skorin-Kapov et al. (1996) aplicado a decomposição de Benders com variações. O tempo limite de 5 horas de processamento foi instituído como segundo critério de parada.

Os resultados da tabela podem ser visualizados na figura 4.14. Os resultados de tempo de processamento e GAP atingidos podem ser visualizados através dos dois eixos verticais do gráfico. Nota-se que o percentual de GAP atingido começa a se tornar relevante apenas na instância de 200 nós, o que prova uma excelente performance do método proposto.

Tabela 4.4: Testes extras para a implementação do modelo de Skorin-Kapov aplicado em decomposição de Benders com variações

| Instâncias | Skorin-Kapov | | |
|------------|--------------|---------------------|--------|
| | Tempo (s) | Número de iterações | GAP |
| AP130.2 | 2026,90 | 5 | 0,000% |
| AP130.4 | 4575,08 | 11 | 0,000% |
| AP130.6 | 5664,12 | 12 | 0,000% |
| AP130.8 | 10841,97 | 20 | 0,000% |
| AP150.2 | 5393,25 | 7 | 0,000% |
| AP150.4 | 7639,01 | 9 | 0,000% |
| AP150.6 | 9430,92 | 10 | 0,000% |
| AP150.8 | 18870,88 | 18 | 0,017% |
| AP170.2 | 9007,60 | 6 | 0,000% |
| AP170.4 | 18020,87 | 11 | 0,003% |
| AP170.6 | 18831,92 | 11 | 0,086% |
| AP170.8 | 18184,37 | 10 | 0,310% |
| AP200.2 | 18155,09 | 6 | 0,000% |
| AP200.4 | 20345,74 | 6 | 0,302% |
| AP200.6 | 18060,72 | 5 | 2,660% |
| AP200.8 | 19144,56 | 5 | 4,750% |

Figura 4.14: Tempo de processamento *versus* GAP de convergência

Capítulo 5

Conclusão

O objetivo central deste trabalho foi estudar os problemas de localização de concentradores com atribuição simples. O método de decomposição de Benders foi implementado na sua forma clássica ou original, assim como proposto por Benders (1962), e com variações, como proposto por McDaniel e Devine (1977), Magnanti-Wong (1981) e Papadakos (2008). Os resultados computacionais obtidos demonstram que os algoritmos desenvolvidos são competitivos quando comparados a qualidade da solução obtida e ao tamanho dos problemas resolvidos.

Conclui-se que o método de decomposição de Benders tornou-se competitivo a partir do momento que variações da sua forma original foram implementadas. Porém, bons resultados são alcançados a partir de modelos que possuem uma boa relaxação linear.

Neste trabalho foram realizados 336 testes computacionais como forma de comparar os resultados dos modelos estudados e, principalmente, demonstrar excelente performance do modelo proposto por Skorin-Kapov et al..

Referências Bibliográficas

- Abdinnour-Helm, S. e Venkataramanan, M. A. (1998). Solution approaches to the hub location problems. *Annals of Operations Research*, 78:31–50.
- Aykin, T. (1994). Lagrangian relaxation based approaches to capacitated hub-and-spoke network design problem. *European Journal of Operational Research*, 79:501–523.
- Benders, J. F. (1962). Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerisch Mathematik*, 4:238–252.
- Birge, J. R. e Louveaux, F. V. (1988). A multicut algorithm for two-stage stochastic linear programs. *European Journal of Operational Research*, 34:384–392.
- Boland, N.; Krishnamoorthy, M.; Ernst, A. e Ebery, J. (2004). Preprocessing and cutting for multiple allocation hub location problem. *European Journal of Operational Research*, 155:638–653.
- Camargo, R. S. d.; Miranda Jr, G. e Luna, H. P. (2006). Benders decomposition for the uncapacitated multiple allocation hub location problem. *Computers & Operations Research*.
- Campbell, J. F. (1994a). Integer programming formulations of discrete hub location problems. *European Journal of Operational Research*, 72:387–405.
- Campbell, J. F. (1994b). A survey of network hub location. *Studies in Locational Analysis*, 6:31–49.
- Campbell, J. F.; Ann, M.; J.Lowe e Li, Z. (2007). The p-hub center allocation problem. *European Journal of Operations Research*, 176:819–835.
- Campbell, J. F.; Ernst, A. T. e Krishnamoorthy, M. (2002). Hub location problems. In Drezner, Z. e Hamacher, H. W., editores, *Facility Location*, pp. 373–407. Springer.
- Campbell, J. F.; Ernst, A. T. e Krishnamoorthy, M. (2005). Hub arc location problems: Part i - introduction on results. *Management Science*, 51(10):1540–1555.
- Chen, J. (2007). A hybrid algorithm for the uncapacitated single allocation hub location problem - a bi-criteria approach. *Omega*, 35:211–220.

- Cunha, C. e Silva, M. (2007). A genetic algorithm for the problem of configuring a hub-and-spoke network for a ltl trucking company in brazil. *European Journal of Operations Research*, 179:747–758.
- Ebery, J. (2001). Solving large single allocation p-hub problems with two or three hubs. *European Journal of Operational Research*, 128:447–458.
- Elhedhli, S. e Hu, F. X. (2005). Hub-and-spoke network design with congestion. *Computers & Operations Research*. To appear.
- Ernst, A.; Hamacher, H.; Jiang, H.; Krishnamoorthy, M. e Woeginger, G. (2009). Uncapacitated single and multiple allocation p-hub center problems. *Computer & Operations Research*, 36(7):2230–2241.
- Ernst, A. T. e Krishnamoorthy, M. (1996). Efficient algorithms for the uncapacitated single allocation p-hub median problem. *Location Science*, 4:139–154.
- Ernst, A. T. e Krishnamoorthy, M. (1998). Exact and heuristic algorithms for the uncapacitated multiple allocation p-hub median problem. *European Journal of Operational Research*, 104:100–112.
- Ernst, A. T. e Krishnamoorthy, M. (1999). Solution algorithms for the capacitated single allocation hub location problem. *Annals of Operations Research*, 86:141–159.
- França, P. e Luna, H. (1982). Solving stochastic transportation-location problem by generalized benders decomposition. *Transportation Science*, 16(2):113–126.
- Geoffrion, A. M. e Graves, G. W. (1974). Multicommodity distribution system design by benders decomposition. *Management Science*, 20:822–844.
- Hamacher, H. e Meyer, T. (2006). Hub coverand hub center problems. *Technical Report 98, FB Mathematik, TU Kaiserslautern*.
- Hamacher, H. W.; Labbé, M.; Nickel, S. e Sonneborn, T. (2004). Adapting polyhedral properties from facility to hub location problems. *Discrete Applied Mathematics*, 145:104–116.
- Kara, B. Y. e Alumur, S. (2008). Network hub location problems: The state of the art. *European Journal of Operational Research*, 190:1–21.
- Kara, B. Y. e Tansel, B. C. (2003). The latest arrival hub location problem. *Management Science*, 47:1408–1420.
- Kimms, A. (2006). Economies of scale in hub and spoke network design models: We have it all wrong. In Morlock, M.; Schwindt, C.; Trautmann, N. e Zimmermann, J., editores, *Perspectives on Operations Research*, pp. 293–317. Wiesbaden.
- Klincewicz, J. G. (1991). Heuristics for the p-hub location problem. *European Journal of Operational Research*, 53:25–37.

- Klincewicz, J. G. (1992). Avoiding local optima in the p -hub location problem using tabu search and grasp. *Annals of Operations Research*, 40:283–302.
- Labbé M., Yaman H., G. E. (2005). A branch and cut algorithm for the hub location problems with single assignment. *Mathematical Programming*, 102:371–405.
- Labbé M., Y. H. (2008). Solving the hub location problem in a star-star network. *InterScience*. DOI 10.1002/net.
- Magnanti, T. L. e Wong, R. T. (1981). Accelerating benders decomposition: Algorithmic enhancement and model selection criteria. *Operations Research*, 29(3):464–483.
- McDaniel, D. e Devine, M. (1977). A modified Benders partitioning algorithm for mixed integer programming. *Management Science*, 24(3):312–319.
- O’Kelly, M. E. (1987). A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities. *European Journal of Operational Research*, 32:393–404.
- O’Kelly, M. E. (1992). Hub facility location with fixed cost. *Regional Science*, 71(3):293–306.
- O’Kelly, M. E.; Bryan, D. L.; Skorin-Kapov, D. e Skorin-Kapov, J. (1996). Hub network design with single and multiple allocation: A computational study. *Location Science*, 4(3):125–138.
- Pamuk (2001). A solution to the hub center problem via a single-relocation algorithm with tabu search. *Springer*, 33(5):399–411.
- Papadakos, N. (2008). Practical enhancements to the magnanti-wong method. *Operations Research*, 36:444–449.
- Skorin-Kapov, D. e Skorin-Kapov, J. (1994). On tabu search for the location of interacting hub facilities. *European Journal of Operational Research*, 73:501–508.
- Skorin-Kapov, D.; Skorin-Kapov, J. e O’Kelly, M. (1996). Tight linear programming relaxations of uncapacitated p -hub median problems. *European Journal of Operational Research*, 94:582–593.
- Topcuoglu, H.; Corut, F.; Ermis, M. e Yilmaz, G. (2005). Solving the uncapacitated hub location problem using genetic algorithms. *Computer and OR*, 32(4):967–984.