

**ANÁLISE DOS PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS DA MECÂNICA  
DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR USANDO A FORMULAÇÃO  
DUAL DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

**Sílvia Teixeira Andrade Amorim**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**"ANÁLISE DOS PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS DA MECÂNICA  
DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR USANDO A FORMULAÇÃO  
DUAL DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO"**

Silvia Teixeira Andrade

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:

---

Prof. Dr. Gabriel de Oliveira Ribeiro  
DEES-UFMG - (Orientador)

---

Prof. Dr. Fernando Amorim de Paula  
DEES - UFMG

---

Prof. Dr. Cláudio José Martins  
CEFET - MG

Belo Horizonte, 18 de setembro de 2006

Recolho  
nas trincas  
(de minha parede  
de minha pele  
em minha vida)  
os mapas de minha história.  
Cada um tece seu discurso  
de remendo.

Maria Auxiliadora Bahia.

Ao meu querido Rogério,  
sempre ao meu lado.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao meu orientador Prof. Gabriel que esteve sempre presente e de braços abertos durante esse longo caminho de descobertas e profundas aprendizagens. Que tanto me ensinou e me mostrou respostas diversas para cada questão, sempre abrindo espaço para novos desafios.

Ao Rogério pela cumplicidade, espera, paciência, carinho e amor. Pelo exemplo de pesquisador que me traz inspiração e admiração. Quero agradecer também a todos aqueles empurrõezinhos que realmente foram fundamentais.

Aos meus pais José Carlos e Magna, meus irmãos Bruno e Luísa que criaram um lugar, cada um a sua maneira, onde o conhecimento, a arte, a ciência e a música foram plenamente cultivados e valorizados, compartilhando sempre um olhar profundo e bom diante da vida.

Ao Martinzinho que está por perto em todos os momentos da minha vida.

À Maria Auxiliadora pelas palavras sábias e delicadas ao longo de tanto tempo.

Ao Marcello Cláudio que num momento de impasse foi tão importante e de uma enorme generosidade.

Ao professores do DEES, em especial ao prof. Fernando Amorim, pela competência, dedicação e incentivo a nós alunos.

Aos amigos do DEES que compartilharam tantas experiências e tão agradável convivência durante todo o curso. À Juliana Passagli por ser tão amiga e prestativa. Ao Paulo Guetti, pela presença constante e alegre.

Aos funcionários do DEES que gentilmente contribuíram no nosso dia a dia.

À CAPES pelo apoio financeiro.

## SUMÁRIO

<b>Lista de Figuras.....</b>	<b>i</b>
<b>Lista de Tabelas .....</b>	<b>iii</b>
<b>Lista de Abreviaturas .....</b>	<b>iv</b>
<b>Resumo.....</b>	<b>v</b>
<b>Abstract.....</b>	<b>vi</b>
<b>1 Introdução .....</b>	<b>1</b>
<b>2 Revisão Bibliográfica.....</b>	<b>4</b>
<b>3 Mecânica da Fratura - Conceitos Básicos.....</b>	<b>13</b>
3.1 Contexto Histórico.....	14
3.2 Modos de fratura.....	14
3.3 Campo de tensões na ponta da trinca.....	15
3.4 Campo de deslocamentos na ponta da trinca .....	19
3.5 Critério da energia .....	20
3.6 Integral J .....	20
<b>4 Equações Integrais de Contorno .....</b>	<b>23</b>
4.1 Problema elastostático linear .....	23
4.2 Equação integral de contorno .....	26
4.3 Equações integrais de contorno duais para a análise de problemas bidimensionais da MFEL.....	30
4.3.1 Equação integral de contorno para deslocamento.....	31

4.3.2	Equação integral de contorno para força de superfície.....	33
4.3.3	Equações integrais de contorno duais.....	34
<b>5</b>	<b>Algoritmos do Método dos Elementos de Contorno em Mecânica da Fratura Elástica Linear .....</b>	<b>36</b>
5.1	Discretização numérica.....	37
5.2	Tratamento das integrais singulares e hiper-singulares .....	41
5.3	Modelagem da trinca .....	47
5.4	Avaliação numérica dos parâmetros da MFEL.....	50
5.4.1	Técnica da extrapolação.....	52
5.4.2	Fórmula de deslocamento de um ponto .....	53
5.4.3	Uso de elementos “quarter point” .....	54
5.4.4	Subtração da singularidade na ponta da trinca.....	54
5.4.5	Integral J .....	56
5.5	Programa Computacional .....	57
<b>6</b>	<b>Resultados Numéricos .....</b>	<b>60</b>
6.1	Chapa com trinca centrada – Modo I.....	60
6.2	Chapa com trinca centrada - Modo II .....	70
6.3	Chapa com trinca centrada - Modo misto.....	73
<b>7</b>	<b>Conclusões .....</b>	<b>78</b>
<b>8</b>	<b>Referências Bibliográficas.....</b>	<b>80</b>
<b>Anexo A</b>	<b>.....</b>	<b>A-1</b>

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - Modos de Solicitação.....	15
FIGURA 2 - Referencial e estado de tensão na ponta da trinca. ....	16
FIGURA 3 - Chapa com trinca centrada. ....	16
FIGURA 4 - Curva da resistência residual versus tamanho da trinca .....	17
FIGURA 5 - Distribuição de tensões – Formação de zona plástica na ponta da trinca..	19
FIGURA 6 - Integral J. ....	21
FIGURA 7 - Representação da solução fundamental.....	24
FIGURA 8 - Geometria do problema .....	25
FIGURA 9 - Ponto fonte $x'$ no contorno envolto por um arco circular.....	27
FIGURA 10 - Definição de $\beta$ .....	39
FIGURA 11 - Geometria da trinca num plano infinito.....	31
FIGURA 12 - Contorno discretizado em elementos.....	38
FIGURA 13 - Elementos de contorno bidimensionais. ....	39
FIGURA 14 – Elementos de contorno quadráticos .....	49
FIGURA 15 - Discretização da trinca.....	50
FIGURA 16 - Elementos contínuos de ponta de trinca. ....	51
FIGURA 17 – Elementos descontínuos de ponta de trinca .....	52
FIGURA 18 - Elementos do tipo “QP”. ....	54
FIGURA 19 – Estrutura do Programa Computacional.....	58
FIGURA 20 – Geometria do problema – Exemplo 1 .....	61

FIGURA 21 – Elemento de ponta de trinca.....	63
FIGURA 22 – Estudo de $K_I$ em relação ao número de nós da trinca .....	64
FIGURA 23 – Estudo do erro percentual de $K_I$ .....	65
FIGURA 24 – Abertura máxima de trinca em relação ao número de nós de trinca.....	66
FIGURA 25 – Estudo do erro percentual da abertura máxima de trinca.....	66
FIGURA 26 – Estudo de $K_I$ em relação à variação da dimensão da trinca na chapa .....	67
FIGURA 27 – Erro percentual de $K_I$ na variação da dimensão da trinca na chapa .....	68
FIGURA 28 – Deslocamentos - eixo y - em pontos da trinca – $N=4$ .....	68
FIGURA 29 – Deslocamentos - eixo y - em pontos da trinca – $N=6$ .....	69
FIGURA 30 – Deslocamentos - eixo y - em pontos da trinca – $N=12$ .....	69
FIGURA 31 – Geometria do problema – Exemplo 2 .....	70
FIGURA 32 – Estudo de $K_{II}$ em relação ao número de nós da trinca.....	72
FIGURA 33 – Estudo do erro percentual de $K_{II}$ .....	72
FIGURA 34 – Geometria do problema – Exemplo 3 .....	73
FIGURA 35 – Estudo de $K_I$ em relação à variação da dimensão da trinca inclinada.....	75
FIGURA 36 – Erro percentual de $K_I$ na variação da dimensão da trinca inclinada .....	75
FIGURA 37 – Estudo de $K_{II}$ em relação à variação da dimensão da trinca inclinada....	76
FIGURA 38 – Erro percentual de $K_{II}$ na variação da dimensão da trinca inclinada.....	76
FIGURA 39 – Chapa com trinca inclinada - Estrutura deformada.....	77

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - $K_I$ – Trinca centrada.....	63
TABELA 2 - Abertura máxima da trinca – Trinca centrada .....	65
TABELA 3 – $K_I$ –Variação das dimensões da trinca – Trinca centrada.....	67
TABELA 4 – Deslocamentos dos nós da face da trinca.....	70
TABELA 5 – $K_{II}$ – Trinca centrada .....	71
TABELA 6 – $K_I$ e $K_{II}$ –Variação das dimensões da trinca – Trinca inclinada.....	74

## LISTA DE ABREVIATURAS

- EIC – Equação integral de contorno
- EPD – Estado plano de deformação
- EPT – Estado plano de tensão
- FIT – Fator de intensidade de tensão
- ISD – Identidade Somigliana de deslocamento
- MCR – Movimento de corpo rígido
- MEC – Método dos elementos de contorno
- MFEL – Mecânica da fratura elástica linear
- PFH – Parte finita de Hadamard
- QP – “Quarter point”
- VPC – Valor principal de Cauchy

## RESUMO

Este trabalho trata da implementação numérica da formulação das equações integrais de contorno para problemas bidimensionais da mecânica da fratura elástica linear (MFEL) por meio do método dos elementos de contorno dual. Para um ponto numa face da trinca considera-se a equação integral de contorno do deslocamento, enquanto no ponto correspondente da outra face considera-se a equação integral de contorno de força de superfície. As superfícies da trinca são modeladas com elementos quadráticos descontínuos para satisfazer às condições necessárias para a existência das integrais de valor principal e o requisito da suavidade da geometria. O tratamento das integrais singulares que aparecem no método é realizado por uma formulação analítica direta. Os fatores de intensidade de tensão (KI e KII) são avaliados por técnicas numéricas baseadas nos deslocamentos relativos dos nós da superfície da trinca, sendo elas: extrapolação dos deslocamentos e fórmula de deslocamento de um ponto. Os resultados apresentados no trabalho demonstram boa precisão das repostas numéricas do método implementado tanto para problemas de solitação no modo I ou modo II quanto para solitação envolvendo modo misto.

**Palavras-chaves:** Método dos Elementos de Contorno Dual, Mecânica da Fratura Elástica Linear, Integrais Singulares.

## ABSTRACT

This paper is concerned about the numerical implementation of the boundary integral equations to solve two-dimensional linear elastic fracture mechanics problems by means of the dual boundary element method. For a point in a crack face it is considered the displacement boundary integral equation while in the corresponding point of the other face it is considered the traction boundary integral equation. The crack surfaces are modeled with discontinuous quadratic boundary elements in order to satisfy the necessary conditions for the existence of the principal-value integrals and the requirement of the smoothness of geometry. The treatment of the singular integrals raised in this method is done by straightforward analytical formulation. The Stress intensity factors (KI e KII) are evaluated by numerical techniques based on relative displacements of the crack surface points such as: the displacement extrapolation and the one-point displacement formulae. The results presented in the work in such a way demonstrate a good numerical precision of the method implemented for problems of mode I or mode II of loading or involving mixed mode.

**Key-words:** Dual Boundary Element Method, Linear Elastic Fracture Mechanics, Singular Integrals.

# 1

## INTRODUÇÃO

As trincas, de alguma forma, estão presentes em todas as estruturas, por razões como o processo de fabricação das peças, as características de microestrutura dos materiais que as constituem, a forma de carregamento e utilização das mesmas e pelas características do meio ambiente no qual estão inseridas. O estudo do comportamento das trincas é de fundamental importância para a integridade das estruturas, pois a trinca pode se propagar causando a falha por fratura.

A mecânica da fratura surge após a segunda guerra mundial para tentar explicar grandes catástrofes ocorridas em estruturas de navios, locomotivas e aviões contendo trincas ou defeitos assemelhados, em níveis de tensões inferiores aos limites prescritos pelas normas. Os acidentes revelavam inadequações nos critérios e detalhes de projetos estruturais da época, que eram insuficientes na análise de estruturas propensas a ocorrência de trincas. Com isso a abordagem do projeto com base na mecânica da fratura começa a ganhar importância dentro do meio científico e conseqüentemente na aplicação prática, caracterizando-se como uma disciplina.

A mecânica da fratura procura entender o comportamento dos elementos estruturais contendo trincas, permitindo estimar sua vida útil, pois as trincas tendem a intensificar o campo de tensões e deformações nas regiões próximas às suas extremidades e reduzir a capacidade da peça de resistir à sollicitação.

A análise baseada na mecânica da fratura consiste em estudar o estado de tensões e deformações próximo à ponta da trinca, avaliar os parâmetros correspondentes e compará-los com a resistência do material à propagação da trinca. Os manuais de mecânica da fratura disponibilizam soluções para a determinação de diversos casos com diferentes geometrias e tipos de sollicitação de elementos estruturais contendo trincas. Entretanto, há casos em que só é possível determinar os parâmetros de sollicitação na trinca de forma aproximada, por meio dos métodos numéricos.

Os métodos numéricos empregados na análise estrutural atingiram um nível de desenvolvimento elevado, tornando-se ferramentas essenciais para os engenheiros de projetos e pesquisadores. Este fato veio como consequência natural do rápido desenvolvimento da tecnologia computacional, de novos métodos de modelagem e programas computacionais extremamente poderosos capazes de incluir considerações cada vez mais próximas da realidade. Além disso, as exigências do mundo atual priorizam os custos competitivos e os padrões de qualidade dos produtos, levando à necessidade de análises cada vez mais precisas e projetos otimizados, que só podem ser obtidos por meio de métodos numéricos e computacionais.

Em mecânica da fratura, várias técnicas numéricas vêm sendo usadas pelos pesquisadores. Dentre elas, o método dos elementos de contorno (MEC) é de longe considerado como a ferramenta numérica mais precisa e apropriada para a análise dos problemas de trinca da mecânica da fratura elástica linear (MFEL). Segundo CRUSE (1996) vários anos de pesquisas científicas em mecânica da fratura mostraram que a formulação das EIC e sua implementação por meio do MEC trouxeram importantes contribuições às análises da mecânica da fratura em duas e três dimensões. Entretanto, a solução para um problema de trinca qualquer não pode ser determinada com a aplicação direta da formulação clássica do MEC, pois a utilização da equação integral de contorno (EIC) em deslocamento para dois pontos coincidentes nas duas superfícies da trinca

gera equações idênticas nesses pontos, resultando então em um sistema de equações algébricas singular.

A fim de evitar tal problema, várias técnicas numéricas que se adaptavam ao MEC foram surgindo ao longo dos anos. Estas se tornaram bastante utilizadas, pois se adequavam a diferentes casos e considerações da MFEL. Dentro das alternativas usadas, o método dos elementos de contorno dual (MECD) apresenta um conjunto de vantagens como a simplicidade de utilização, a abrangência, a boa precisão de resultados, além de outras, que o tornam a ferramenta numérica mais utilizada na atualidade para tratar os problemas da mecânica da fratura.

Este trabalho tem como objetivo implementar um programa para análise de problemas elásticos lineares bidimensionais incluindo trincas no domínio, seguindo a formulação do MECD para a incorporação de trinca. Nesse sentido, propõe-se avaliar numericamente os fatores de intensidade de tensão (FIT) relativos aos modos I e II ( $K_I$  e  $K_{II}$ ).

No capítulo 2 é apresentada uma breve revisão bibliográfica a respeito das pesquisas realizadas sobre aplicações do MEC à mecânica da fratura. Os conceitos básicos sobre a mecânica da fratura, são vistos no capítulo 3 e no capítulo 4 descreve-se a formulação das EIC em elasticidade bidimensional e sua extensão ao problema de trincas, onde são encontradas as equações EIC duais. A apresentação dos algoritmos numéricos do MECD implementados e a obtenção numérica dos FIT são realizados no capítulo 5. O capítulo 6 contém alguns exemplos numéricos utilizados para validação dos algoritmos implementados demonstrando a eficiência da formulação dual. Por fim, as conclusões a respeito da formulação utilizada e dos exemplos estudados são apresentadas no capítulo 7.

# 2

## REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O MEC se estabeleceu como uma técnica eficaz e eficiente para a análise de problemas das mais diversas áreas da engenharia incluindo a área de mecânica da fratura. O método se baseia na EIC, obtida da transformação da equação diferencial parcial de um dado problema numa equação integral relacionando apenas os valores do contorno. A solução numérica do problema é obtida a partir da discretização da EIC. Geralmente os resultados obtidos para as tensões e deslocamentos em pontos internos de um problema da mecânica dos sólidos são muito precisos, pois a representação integral dessas grandezas proporciona uma modelagem contínua no interior do seu domínio, isto é na ausência de forças de volume, apenas o contorno do corpo é discretizado, ao invés do domínio (método dos elementos finitos).

Os fundamentos do MEC podem ser delineados pelas formulações matemáticas clássicas de FREDHOLM<sup>1</sup> apud JASWON e SYMM (1977) e MIKHILIN<sup>1</sup> apud

---

<sup>1</sup>FREDHOLM, I. *Sur une classe d'equations fonctionnelles*. Acta Mathematica, 27, 365-390, 1903.

ALIABADI (2002) na teoria de potencial e BETTI (1872)<sup>2</sup> apud ALIABADI (2002), SOMIGLIANA (1886)<sup>3</sup> apud ALIABADI (2002) e KUPRADZE<sup>4</sup> apud CRUSE (2003) em elasticidade.

O surgimento da formulação da EIC se deu na década de sessenta, tendo como pioneiros JASWON (1963) e SYMM (1963) que aplicaram as EIC para problemas bidimensionais da teoria de potencial. Os trabalhos de HESS e SMITH<sup>5</sup> apud JASWON e SYMM (1977) e MASSONET<sup>6</sup> apud CRUSE (2003) também desempenharam um papel importante no contexto das EIC. RIZZO (1967) apresentou a formulação do MEC para problemas bidimensionais de elasticidade e CRUSE (1969) apresentou essa formulação para problemas tridimensionais. O trabalho de LACHAT e WATSON (1976) contribuiu significativamente para tornar o MEC uma efetiva ferramenta numérica, pois adaptou a modelagem isoparamétrica usada no método dos elementos finitos para a formulação das EIC.

O MEC na mecânica da fratura é objeto de inúmeros trabalhos de investigação científica demonstrando consideráveis avanços. O primeiro trabalho sistemático da aplicação do MEC ao problema da mecânica da fratura se deu em CRUSE e VAN BUREN (1971), que aplicaram as EIC para a análise elástica tridimensional de tensões em corpos de prova contendo trinca de borda. Utilizaram a EIC para deslocamento na obtenção dos deslocamentos e forças de superfície no contorno, a partir da simetria do problema. Em etapa de pós-processamento, as tensões nos pontos internos foram obtidas por meio da forma discretizada da identidade Somigliana para tensão. Segundo CRUSE e VAN BUREN (1971) as soluções encontradas foram compatíveis com os resultados obtidos via método dos elementos finitos, apresentados por CHAN et al. (1968). CRUSE e VAN BUREN (1971) ainda apontaram pela primeira vez as deficiências matemáticas existentes na formulação do MEC para um problema de mecânica da fratura, no qual

---

<sup>1</sup> MIKHILIN, S.G., *Integral Equations*, Pergamon Press, London, 1957.

<sup>2</sup> BETTI, E., *Teoria dell elasticita*, II Nuovo Cienmento, 7-10, 1872

<sup>3</sup> SOMIGLIANA, C., *Sopra l'equilibrio di un corpo elástico isotropo*, II Nuovo Cienmento, 17-19, 1886.

<sup>4</sup> KUPRADZE, V. D., *Potential methods in the theory of elasticity*, Davey, New York, 1965.

<sup>5</sup> HESS, J.L., SMITH, A.M.O., *Calculation of potential flow about arbitrary bodies*. "Progress of Aeronautical Sciences,"v.8, (D. Kuchemann, Ed.), Pergamon, London.

<sup>6</sup> MASSONET, C. E., *Numerical use of integral procedures*, Stress Analysis, edited by O. C. Zienkiewicz and G. S. Hollister, J. Wiley, 1965

duas superfícies físicas idealmente ocupam o mesmo plano matemático. Adicionais neste problema de modelagem foram publicados em CRUZE (1972).

CRUZE (1972) mostrou que a aplicação direta do MEC ao problema elástico linear com trincas levava a uma singularidade no sistema de equações, aparecendo duas linhas idênticas na matriz dos coeficientes, devido às superfícies co-planares da trinca. Ainda neste trabalho, para contornar o problema encontrado, ele aproximou o formato da trinca por um entalhe arredondado. Nesse modelo tornou-se necessário um grande número de elementos na ponta da trinca, e mesmo assim os resultados obtidos não foram muito satisfatórios, deixando a questão da coincidência das faces da trinca ainda indeterminada. A partir daí, houve um crescente interesse dos diversos pesquisadores da área em solucionar o problema matemático existente na formulação do MEC para o problema de trincas. Sendo assim, formulações especiais foram desenvolvidas e implementadas por meio do MEC.

A primeira delas foi a técnica da função de Green (SNYDER e CRUZE, (1975)), que consiste em uma solução fundamental analítica complementar que é acrescentada na solução fundamental de Kelvin no MEC, não havendo necessidade de modelagem da trinca. Esses pesquisadores analisaram o comportamento de uma trinca reta, livre de tensões, em meios anisotrópicos bidimensionais. Este método, apesar de ter apresentado ótima precisão numérica, seria uma solução restrita apenas a problemas de geometrias muito simples de trincas retas em domínios bidimensionais. A partir disso, pode-se dizer que o trabalho de TELLES et al. (1995) teve uma expressiva contribuição no desenvolvimento e generalização desta formulação, pois criou um procedimento para se gerar numericamente as funções de Green em problemas envolvendo trincas simples ou múltiplas de geometria qualquer. Em TELLES e GUIMARÃES (2000) obtiveram-se resultados pela técnica da função de Green de alguns problemas gerais da MFEL de geometria qualquer, tais como simulação estática e dinâmica de trincas curvas, em duas e três dimensões. Problemas bidimensionais da MFEL de propagação de trincas baseados no procedimento da função numérica de Green foi assunto do trabalho de SILVEIRA et al. (2005), onde a função de Green é obtida numericamente pela EIC hiper-singular.

Uma alternativa, largamente utilizada, foi a técnica das multi-regiões (BLANDFORD et al. (1981)), na qual o corpo é dividido em regiões, cada uma contendo uma superfície da trinca. Esta foi a primeira técnica totalmente abrangente capaz de lidar com a coplanaridade das superfícies da trinca. Cada sub-região fica com uma superfície regular a ser avaliada e elas são ligadas pelas condições de equilíbrio de forças de superfície e compatibilidade de deslocamentos. BLANDFORD et al. (1981) utilizou essa técnica para simular o crescimento da trinca entre dois contornos. JIA et al. (1988) investigaram o problema elástico bidimensional de trincas para uma variedade de configurações de geometrias e carregamentos adotando a técnica de sub-regiões no caso de trincas em corpos infinitos. Em JIA et al. (1989), as sub-regiões são usadas para definir a trinca em um problema tridimensional de domínio infinito, usando uma sub-região externa fechada e mapeando o contorno interno da sub-região infinita. Este método descreve trincas de geometria qualquer, mas a desvantagem é que essas divisões produzem grandes sistemas de equações e no caso do problema de crescimento da trinca, para cada incremento de trinca a malha precisa ser refeita. A análise de estruturas contendo trincas múltiplas é também um grande problema numérico, pois à medida que o número de trincas cresce na região de interesse, o sistema de equações aumenta significativamente e o processo se torna inviável.

CROUCH (1976) e CROUCH e STARFIELD (1983) propuseram o método da descontinuidade de deslocamento em que a trinca é tratada como uma superfície única através da qual os deslocamentos são descontínuos, sendo necessário, portanto, apenas a discretização de uma das faces da trinca. O método é baseado em uma solução analítica obtida da solução de Kelvin para problemas de trincas de tamanhos arbitrários. DE MAGALHÃES (1999) implementou e testou o método da descontinuidade de deslocamento em sua dissertação de mestrado no programa de pós-graduação de Engenharia de Estruturas. O programa computacional elaborado foi capaz de fazer análises complexas de problemas da MFEL em domínios finitos, semi-infinitos ou infinitos e demonstrou a grande potencialidade do método.

CRUSE (1978) desenvolveu uma EIC adicional para possibilitar a solução do problema, isto é, com o intuito de suprir as deficiências da EIC primária, e obteve a EIC para força de superfície com base na identidade Somigliana para tensão. Concomitantemente,

vários autores obtêm as EIC baseadas no gradiente da função de campo, em diferentes áreas de aplicação. Tais equações são comumente chamadas de EIC hiper-singulares. O ingrediente essencial desse método e que já proporcionou consideráveis discussões na literatura, é a avaliação analítica das integrais singulares advindas da EIC para força de superfície. O trabalho de POLCH et al. (1987) levou a uma formulação da EIC para força de superfície em problemas de trincas que modelavam a trinca uma superfície única descontínua usando a identidade Somigliana de força de superfície. GRAY et al. (1990) fizeram uso da equação hiper-singular para analisar o problema da mecânica da fratura para elasticidade tridimensional e resolveu a equação hiper-singular baseando-se no trabalho de RUDOLPHI (1988), onde as integrais são tratadas em um processo de limite do interior do domínio. Essa era uma maneira de resolver o comportamento singular da ponta da trinca por funções de interpolação e um meio adequado de regularizar a EIC de força de superfície para uma boa modelagem da trinca. DOMÍNGUES e ARIZA (2000) abordaram da equação hiper-singular para o problema de trinca elástico tridimensional onde as integrais com núcleos hiper-singulares e fortemente singulares foram transformadas analiticamente em integrais de linha e de superfície, tornando-se fracamente singulares. Diferentes problemas de trincas retas e curvas em domínios finitos e infinitos foram analisados mostrando-se a generalidade e simplicidade do método. O trabalho de RANGELOV et al. (2003) investiga quais os parâmetros que controlam a precisão e a estabilidade da solução da EIC para força de superfície aplicada a problemas dinâmicos pela análise da MFEL de uma estrutura trincada com domínio finito.

A formulação do Método dos elementos de contorno dual (MECD) proposta por PORTELA et al. (1992) para problemas bidimensionais e MI e ALIABADI (1992) para problemas tridimensionais, vem se mostrando como um modelo geral, computacionalmente eficiente, para tratar problemas da mecânica dos sólidos sujeitos à ocorrência de trincas. Este método incorpora duas EIC independentes, com a equação de deslocamento aplicada em uma das faces da trinca e a equação de força de superfície na outra, solucionando o problema de trinca em uma única região. As incógnitas do problema são os deslocamentos relativos das faces da trinca e os valores do contorno externo. Uma grande vantagem da utilização do MECD está na análise dos problemas

de propagação da trinca, pois não é necessário o rearranjo da malha para cada extensão de trinca. Em PORTELA et al. (1993) um problema elástico de propagação da trinca em modo misto é simulado via MECD, a partir da análise de um incremento de extensão da trinca baseado no critério de tensão máxima, o qual é expresso em termos do FIT. Em MI e ALIABADI (1994), o MECD é aplicado para a análise do crescimento da trinca em um problema elástico tridimensional de modo misto. A extensão do problema de propagação de trincas ao problema dinâmico e elastoplástico é abordada respectivamente por FEDELINSKI et al. (1996) e por LEITAO et al. (1995). O comportamento não linear da propagação das trincas nas estruturas de concreto foi modelado pelo MECD em SALEH e ALIABADI (1995), onde o MECD se mostrou computacionalmente eficiente na simulação da propagação da trinca. Para resolver vários exemplos de problemas de trinca axissimétricos, LACERDA e WROBEL (2002) também utilizaram o método dual e compararam com as soluções analíticas ou pelas obtidas tanto pelo próprio MEC quanto pelo método dos elementos finitos e comprovaram mais uma vez sua eficácia.

No contexto da aplicação do MEC, duas EIC foram primeiramente apresentadas por WATSON (1986) em formulação baseada na equação de deslocamento e na derivada direcional desta equação. Para problemas tridimensionais na elasticidade, a formulação do MECD foi apresentada por GRAY et al. (1990). Ele desenvolveu uma técnica analítica baseada em um caminho de integração especial ao redor do ponto singular usando elementos triangulares lineares. CHEN e CHEN (1995) propuseram uma formulação diferente do MECD, na qual a EIC de deslocamento é aplicada somente no contorno externo do domínio do problema e a EIC de força de superfície em uma das faces da trinca. Nesta formulação, os deslocamentos relativos das faces da trinca são introduzidos ao invés dos deslocamentos. Isto reduz o número total de graus de liberdade e consequentemente o esforço computacional. Estes pesquisadores analisaram um problema bidimensional com trincas múltiplas.

A maior dificuldade do MECD está no tratamento das integrais definidas no sentido de valor principal de Cauchy (VPC) e de parte finita de Hadamard (PFH) presentes na EIC escrita para força de superfície, a equação hiper-singular. As condições necessárias para a existência dessas integrais são: a continuidade dos componentes dos deslocamentos

nos nós na EIC clássica e a continuidade das derivadas dos deslocamentos nos nós na EIC para força de superfície. Esses requisitos são atendidos em PORTELA et al. (1992) que adotou elementos descontínuos, para discretizar as duas faces da trinca, conseguindo bons resultados. A estratégia usada para modelar a trinca está descrita em PORTELA et al. (1992) e MI e ALIABADI (1994). WATSON (1986) utilizou elementos Hermitianos e pode atender as condições para existências das integrais singulares presentes nas EIC duais, apesar de não obter resultados muito precisos.

Outras contribuições para o MECD e também suas aplicações à mecânica da fratura podem ser vistos em PORTELA et al. (1991), CHEN e CHEN (1998), LIEBOWITZ et al. (1999), DELL'ERBA e ALIABADI (2000), CHEN et al. (2005). Uma revisão completa do método dual pode ser encontrada em ALIABADI (1997). Este trabalho apresenta os mais diversos tipos de problemas de trincas, como: o elastostático, termoelástico, elastodinâmico, problemas de materiais anisotrópicos, no concreto e de propagação da trinca. A partir da resolução de todos esses exemplos o autor demonstra a capacidade e a robustez do MECD.

Uma das razões principais da aplicação do MEC aos problemas da MFEL está na capacidade de avaliar seus principais parâmetros, os FIT, eficientemente e com boa precisão numérica. Os FIT caracterizam o campo de tensões e deformações ao redor da ponta da trinca e proporcionam um critério de resistência local. Esses fatores estão disponíveis na forma paramétrica para diversos problemas da MFEL com geometrias simples envolvendo várias formas de solicitação. Entretanto, para os casos mais gerais, com geometrias complexas e configurações de carregamentos arbitrárias, a determinação desses parâmetros é feita utilizando-se os métodos numéricos, como por exemplo, o MEC. A solução para os FIT é avaliada após determinados os campos de deslocamentos nas vizinhanças da ponta da trinca seja pelo método dual ou por um outro método numérico.

Os FIT podem ser numericamente computados através de diversas maneiras, tais como: pelas técnicas baseadas nos deslocamentos relativos das faces da trinca; técnica da extrapolação; utilização de elementos especiais de ponta de trinca, por exemplo, do tipo “quarter-point” (QP); as integrais independentes do caminho de integração, como a

integral J; métodos da energia; subtração da singularidade e funções peso. As descrições detalhadas de todas essas técnicas estão apresentadas em ALIABADI e HOOKE (1991).

A técnica da subtração da singularidade é um procedimento de regularização que utiliza uma solução singular particular do problema de trincas para introduzir o FIT como uma incógnita adicional. Esse procedimento foi utilizado na elasticidade bidimensional por ALIABADI et al. (1987) que obtiveram os FIT para os modos I e II de sollicitação. Foi também utilizada dentro do MECD em PORTELA et al. (1992) e em DE MATOS et al. (2004).

A integral J é um parâmetro que, assim como os FIT, avalia a sollicitação na ponta da trinca e na MFEL está diretamente relacionada a esses parâmetros. Essa integral vem sendo estudada por meio do MEC com aplicações diversas em mecânica da fratura. A avaliação da integral J no problema simétrico bidimensional de fechamento da trinca pode ser visto em KARAMI e FENNER (1986). ALIABADI (1990) aplicou a integral J para problemas bidimensionais da MFEL de modo misto de sollicitação. Este autor decompôs a integral J em componentes simétricos e anti-simétricos e obteve valores precisos para os FIT. PORTELA et al. (1993) analisaram o problema da propagação da trinca e para cada incremento de trinca, a técnica da integral J foi usada na determinação dos parâmetros da MFEL. SOLLERO e ALIABADI (1994) desenvolveram um método alternativo para decompor os FIT de modo misto da integral J na análise de problemas de compósitos laminados anisotrópicos. MAN et al. (1995) utilizaram a integral J de modo misto para estudar as forças de contato no comportamento da trinca. A aplicação da integral J ao problema de trinca elastodinâmico e termoelástico pode ser encontrada em FEDELINSKI (1996). A integral J para os problemas tridimensionais de modos mistos de carregamento se verifica em RIGBY e ALIABADI (1998).

Os elementos que conseguem refletir a singularidade do campo de tensões e deslocamentos na ponta da trinca garantem um considerável ganho de precisão numérica quando comparados aos elementos convencionais. Esses elementos são construídos usando-se funções de forma modificadas, geometria do elemento modificada ou ambos. O elemento especial mais comumente usado é o elemento do tipo QP introduzido no MEC por CRUSE e WILSON (1977). Eles analisaram o problema

simétrico de trinca reta em três dimensões e obtiveram resultados muito coerentes com valores de referência dos FIT. Outros elementos especiais de ponta de trinca são apresentados em ALIABADI (1985) e JIA et al. (1988). LIEBOWITZ et al. (1999) usaram elementos singulares para modelar a ponta da trinca, no problema de juntas em furos de parafusos em engenharia aeroespacial. MI e ALIABADI (1994) usaram elementos descontínuos tridimensionais para modelar a superfície da trinca. ARIZA et al. (1997) utilizaram um tipo de elemento singular da mecânica da fratura. JIA et al. (1988) desenvolveram um tipo de elemento para discretizar a trinca, baseado em elementos com ponto no centro para vários problemas de trinca.

Em DIRGANTARA e ALIABADI (2002), os FIT são avaliados, com base no método dual, pela técnica da extrapolação dos deslocamentos na superfície da trinca e pela integral J, para analisar diversas configurações de placas de largura finita, incluindo placa com trinca centrada, placa com trinca de borda e trincas emanando de furos, carregadas tanto à flexão quanto a tração. PORTELA e ALIABADI (1992) também utilizaram essas duas técnicas para estudar os casos clássicos de placa com uma trinca de borda e da placa com trinca poligonal e obtiveram resultados muito precisos.

WEARING e AHAMADI-BROOGHANI (1999) estudaram o problema da flexão de placas contendo trincas para diversas configurações de trincas e carregamentos. Para a determinação dos FIT utilizaram diversas técnicas numéricas, como a integral J, a técnica de extrapolação dos deslocamentos, a abordagem por elementos singulares QP e a técnica de extrapolação das tensões. A comparação dos resultados obtidos com resultados analíticos e respostas baseadas no método dos elementos finitos demonstrou boa aproximação. É importante citar o trabalho de ZHU e SMITH (1995) que usaram a técnica da extrapolação dos deslocamentos das faces da trinca para a obtenção dos FIT.

As pesquisas na área do MEC para os problemas da mecânica da fratura tiveram grandes avanços ao longo de todos esses anos e continua sendo um campo de pesquisa ainda com lacunas e muitas possibilidades de investigação científica. CRUSE (2003) demonstrou sua crença de estarmos próximos de obtermos uma formulação adequada para o problema da mecânica da fratura. Afirmou que depois de um longo período de trabalho é esperado que devamos ter um modelo eficiente para essa classe de problemas.

# 3

## **MECÂNICA DA FRATURA - CONCEITOS BÁSICOS**

Os estudos da mecânica da fratura foram desenvolvidos no momento em que os critérios convencionais de projeto de peças de engenharia mostravam-se insuficientes para explicar falhas nas estruturas, mesmo quando sujeitas a níveis de tensão muito abaixo dos considerados como admissíveis. Conforme BROEK (1986), a ocorrência de fratura sob baixas tensões em materiais frágeis levou ao desenvolvimento da mecânica da fratura.

A mecânica da fratura analisa o comportamento mecânico dos componentes estruturais na presença de trincas, buscando avaliar questões como: a resistência residual da peça em função do tamanho da trinca, o tamanho máximo de trinca tolerável para um dado carregamento, o tempo necessário para uma trinca inicial atingir um comprimento crítico, os defeitos iniciais admissíveis e a frequência de inspeção da peça em relação às trincas.

Nesse capítulo se faz uma introdução à mecânica da fratura dentro de seu contexto histórico e de alguns dos conceitos básicos da MFEL.

### **3.1 Contexto Histórico**

O primeiro estudo sistemático sobre a fratura foi realizado por GRIFFITH (1921), que com base nos trabalhos de INGLIS (1913) construiu uma teoria para fratura baseada nos princípios da energia, fazendo aplicações para o vidro que é um material frágil. Neste trabalho, afirmava-se que a trinca se propaga sob o efeito de tensões externas quando a variação da energia elástica armazenada no corpo é maior que a energia necessária à criação de novas superfícies. Salvo algumas contribuições como a de WESTERGAARD (1939), a mecânica da fratura permaneceu por algum tempo como uma curiosidade científica, sendo considerada irrelevante para o projeto estrutural. Entretanto, após a segunda guerra mundial, quando ocorreram grandes catástrofes devido às falhas por fratura em estruturas de navios, fuselagens de mísseis e outras, os estudos científicos da mecânica da fratura começaram a ganhar importância. IRWIN (1948) estendeu a teoria de Griffith para materiais dúcteis. Posteriormente, o trabalho de IRWIN (1957) permitiu uma grande evolução na teoria da mecânica da fratura. Ele demonstrou que a taxa de liberação de energia para a formação de novas superfícies é equivalente a um determinado estado de solitação crítico em pontos localizados próximos à ponta da trinca, criando o conceito de FIT. Esse coeficiente é usado desde então como um critério de resistência local aplicado à maioria dos problemas de fratura. Atualmente, depois de quatro décadas de desenvolvimento, a mecânica da fratura vem sendo incorporada aos critérios de projeto em estruturas e se tornou uma ferramenta essencial, no sentido de evitarem-se acidentes inesperados relativos ao colapso de componentes estruturais contendo trincas ou defeitos assemelhados.

### **3.2 Modos de fratura**

A trinca em um corpo sólido pode ser solicitada basicamente conforme os três modos indicados na FIGURA 1.

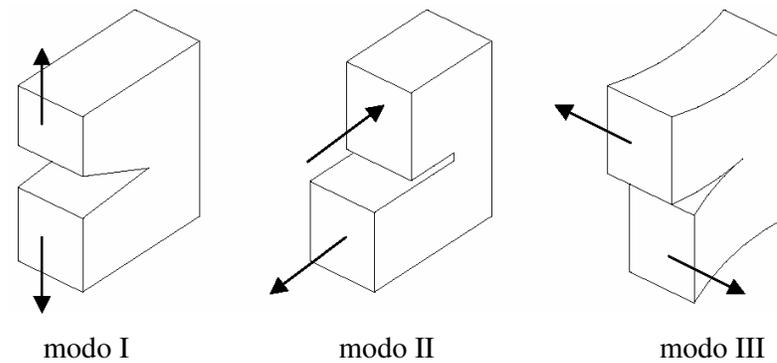


FIGURA 1 - Modos de Sollicitação

O modo I é denominado modo de abertura, cuja sollicitação ocorre na direção normal ao plano da trinca, sendo os deslocamentos dos pontos das faces da trinca também perpendiculares ao plano da trinca. A sollicitação por cisalhamento no plano da trinca resulta no modo II, denominado modo de deslizamento. Por outro lado, o modo III é caracterizado por sollicitação paralela ao plano da trinca (normal ao plano da chapa) sendo chamado de modo de rasgamento. Pode-se dizer que o modo I está presente na maioria das aplicações práticas, apesar dos outros modos de carregamento ou a combinação dos modos I e II também ocorrerem.

### 3.3 Campo de tensões na ponta da trinca

A distribuição das tensões na vizinhança da ponta da trinca (FIGURA 2), de acordo com a MFEL, pode sempre ser expressa por:

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (3.1)$$

onde  $K$  é o fator de intensidade de tensão,  $r$  a distância à ponta da trinca e  $f_{ij}$  funções conhecidas dependentes do ângulo  $\theta$ .

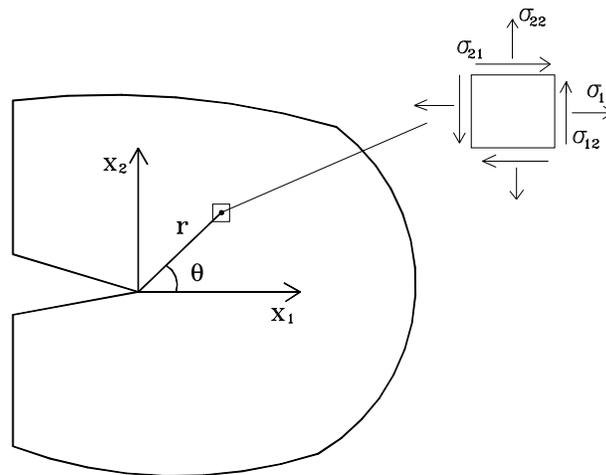


FIGURA 2 - Referencial e estado de tensão na ponta da trinca.

No domínio da MFEL, o campo de tensões e deformações fica inteiramente determinado quando o parâmetro  $K$  é conhecido. Em geral no modo I, o FIT é dado por:

$$K_I = \beta \sigma \sqrt{a} \quad (3.2)$$

tal que  $\sigma$  é a tensão remota aplicada na chapa,  $a$  o comprimento característico da trinca como mostra a FIGURA 3 e  $\beta$  um fator adimensional que depende da geometria do problema. O fator  $\beta$  pode ser encontrado em manuais específicos, como TADA (2000), para diversos tipos de geometrias e carregamentos.

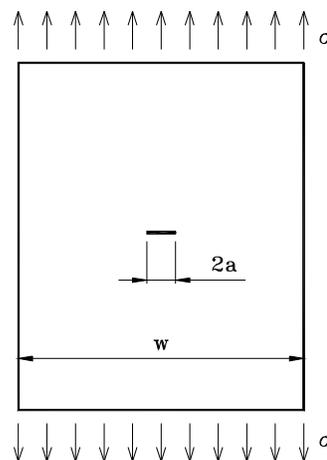


FIGURA 3 - Chapa com trinca centrada.

A fratura ocorre, ou seja, a trinca se propaga indefinidamente, quando  $K_I$  excede um valor crítico  $K_{Ic}$ , correspondente à resistência do material, propriedade denominada tenacidade à fratura. A tensão remota de fratura de uma peça é diretamente proporcional a este parâmetro e inversamente proporcional ao tamanho da trinca, como mostra o gráfico da FIGURA 4. Desta forma, materiais com baixa tenacidade à fratura ( $K_{Ic}$ ) conseguem suportar apenas pequenas trincas. Em relação à FIGURA 4, onde  $f_{ys}$  representa a tensão de escoamento do material, pode-se dizer também que, devido à presença da trinca, a resistência residual da estrutura vai decrescendo progressivamente com o aumento do comprimento da trinca, podendo ficar menor que sua tensão de projeto e, posteriormente, também menor que a solicitação devida ao carregamento de serviço. Nesse caso a fratura pode ocorrer até sob a tensão de serviço na estrutura.

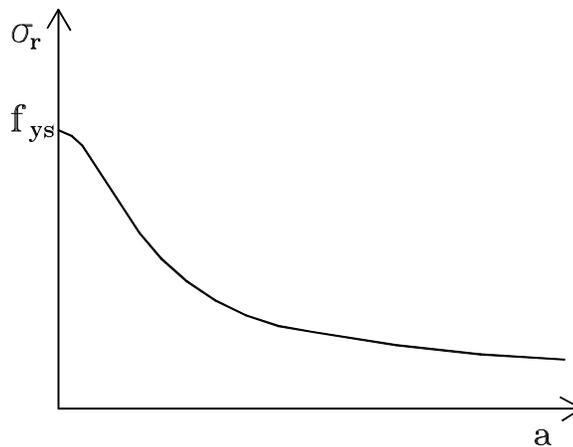


FIGURA 4 - Curva da resistência residual versus tamanho da trinca

As expressões para o campo de tensões na vizinhança da ponta da trinca para o problema bidimensional, desenvolvidas por IRWIN (1957), são soluções em termos de funções complexas de WESTERGAARD (1939) e para o modo I são expressas como:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \\
\sigma_{22} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \\
\sigma_{12} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Para o modo II, o campo de tensões é dado por:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left[ 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\
\sigma_{22} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left[ \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\
\sigma_{12} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right]
\end{aligned} \tag{3.4}$$

onde  $K_I$  e  $K_{II}$  são os FIT na ponta da trinca,  $r$  é a distância à ponta da trinca e  $\theta$  é o ângulo medido a partir do plano da trinca como mostrado na FIGURA 2. Em problemas com modos mistos de solicitação no domínio da MFEL, é válido o princípio de superposição dos efeitos.

O denominador das Eq. (3.3) e Eq. (3.4) revelam uma natureza singular no campo de tensões na ponta da trinca, isto é, quando  $r \rightarrow 0$ , as tensões tendem ao infinito. No caso de materiais dúcteis, o crescimento das tensões na ponta da trinca é limitado pela tensão de escoamento, ocorrendo então a plastificação dos pontos na região em volta da ponta da trinca (zona plástica,  $r_p$ ), conforme mostra a FIGURA 5. Sabe-se que, antes de ocorrer a propagação (separação física), há um consumo significativo de energia para promover a plastificação da ponta da trinca.

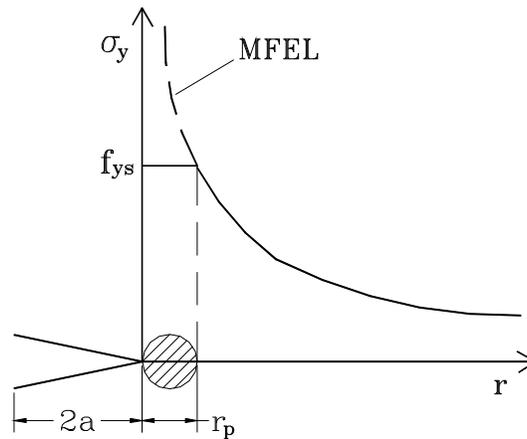


FIGURA 5 - Distribuição de tensões – Formação de zona plástica na ponta da trinca

### 3.4 Campo de deslocamentos na ponta da trinca

Assim como para as tensões, o campo de deslocamentos na vizinhança da ponta da trinca foi também determinado a partir da solução de WESTERGAARD (1939). Para os modos I e II de solitação estes campos são dados, respectivamente por:

$$u_1 = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ \frac{1}{2}(\kappa - 1) + \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (3.5)$$

$$u_2 = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \text{sen} \frac{\theta}{2} \left[ \frac{1}{2}(\kappa + 1) + \text{cos}^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$u_1 = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \text{sen} \frac{\theta}{2} \left[ \frac{1}{2}(\kappa + 1) + \text{cos}^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (3.6)$$

$$u_2 = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \text{cos} \frac{\theta}{2} \left[ \frac{1}{2}(\kappa - 1) + \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

onde  $K_I$  e  $K_{II}$  são os FIT do modo I e II, respectivamente, na ponta da trinca,  $r$  é a distância à ponta da trinca,  $\kappa = 3 - 4\eta$  para o estado plano de deformações (EPD)  $\eta = \nu$  e para o estado plano de tensões (EPT)  $\eta = \nu / (1 + \nu)$ ,  $G$  o módulo de elasticidade transversal e  $\theta$  é o ângulo medido a partir do plano da trinca como na FIGURA 2.

### 3.5 Critério da energia

O critério da energia (GRIFFITH (1921)) propõe que o crescimento da trinca ocorre se a energia necessária para a formação de novas superfícies puder ser liberada pelo sistema. Essa condição é dada pela relação:

$$\frac{dU}{da} = \frac{dW}{da} \quad (3.7)$$

sendo  $U$  a energia elástica disponível e  $W$  a energia de superfície necessária para a formação da trinca. Usualmente  $dU/da$  equivale a  $G$ , que é dita “taxa de liberação da energia” e  $dW/da$  equivale a variável  $R$  chamada “resistência à propagação da trinca”. A condição de energia na Eq. (3.7) enuncia que  $G$  deve ser pelo menos igual a  $R$  até que a propagação da trinca ocorra. Em geral, nos materiais dúcteis solicitados em EPT,  $R$  é dependente do tamanho da trinca. Assim, para a propagação da trinca ocorrer levando a peça à fratura, além do valor de  $G$  permanecer maior que  $R$  deve-se ter ainda a condição:

$$\frac{\partial G}{\partial a} \geq \frac{\partial R}{\partial a} ; \quad G \geq R \quad (3.8)$$

Quando  $R$  é constante, situação que ocorre no caso de EPD,  $G$  deve ultrapassar certo valor crítico  $G_{IC}$ .

### 3.6 Integral J

A integral J é uma integral de linha que não depende do caminho de integração, derivada do princípio da conservação de energia. Esta integral aplicada à mecânica da fratura (RICE (1968)), é definida ao longo de um contorno em volta da trinca, como mostrado na FIGURA 6, e representa a variação da energia potencial durante o crescimento da trinca, isto é:

$$J = \frac{dV}{da} \quad (3.9)$$

sendo  $V$  a energia potencial. Para um material elástico linear,  $J=G$ , sendo  $G$  a taxa de liberação de energia por unidade de comprimento de trinca, como apresentado anteriormente. Novamente a fratura irá ocorrer para certo valor crítico  $J_{IC}$  que é um parâmetro equivalente à  $K_{IC}$  e  $G_{IC}$ .

A expressão da integral  $J$  está dada abaixo, para uma trinca horizontal como a da FIGURA 6:

$$J = \int_{\Gamma_J} \left( W n_i - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) d\Gamma_J \quad (3.10)$$

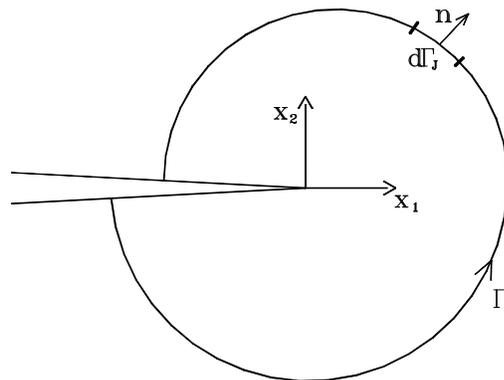


FIGURA 6 - Integral J.

onde  $W$  é a energia de deformação por unidade de volume,  $n_i$  é a componente normal ao caminho  $\Gamma_J$  na direção  $x_i$ ,  $t_i$  e  $u_i$  são as componentes internas dos deslocamentos e das forças de superfície respectivamente.

A integral  $J$  no domínio da MFEL se relaciona aos FIT  $K_I$  e  $K_{II}$  pela seguinte expressão:

$$J = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} \quad (3.11)$$

onde  $E'$  é o módulo de elasticidade  $E$  para o EPT e  $E' = E/(1-\nu)^2$  para o EPD.

# 4

## EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO

O presente capítulo apresenta brevemente as EIC clássicas para problemas bidimensionais da teoria da elasticidade. O foco principal é mostrar os principais passos para a obtenção das EIC de deslocamento e de força de superfície, que irão abordar os problemas de MFEL.

### 4.1 Problema elastostático linear

As EIC descrevem as incógnitas do problema em termos das grandezas do contorno satisfazendo de forma exata a equação diferencial que rege o problema. O problema de elasticidade bidimensional é representado pela equação diferencial de equilíbrio de Navier, escrita em termos dos deslocamentos como:

$$\frac{1}{1-2\nu} u_{j,jj} + u_{i,jj} + \frac{1}{G} b_i = 0 \quad (4.1)$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $G$  é o módulo de elasticidade transversal,  $u_{i,j}$  são as derivadas parciais do deslocamento  $u_i$  e  $b_i$  as forças de volume.

A solução da equação de Navier Eq. (4.1) para o problema elástico de domínio infinito com uma força unitária aplicada em  $X'$  é dita solução fundamental de Kelvin (FIGURA 7).

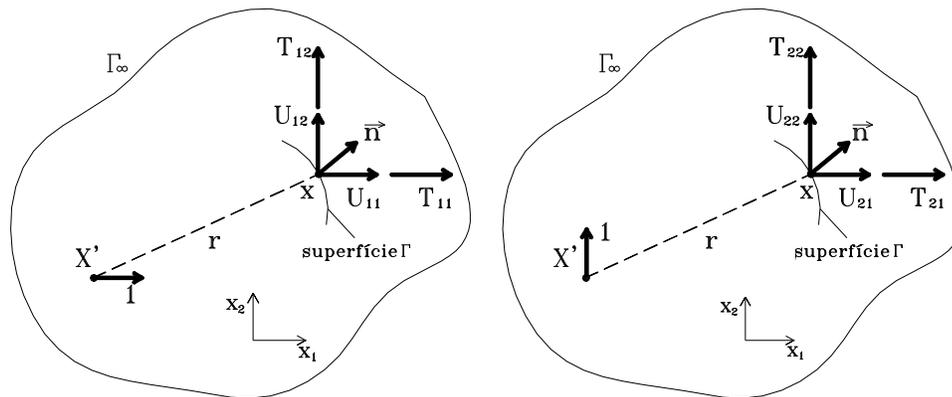


FIGURA 7 - Representação da solução fundamental

A força de volume  $b_i$  que aparece na Eq. (4.1) pode ser expressa como uma função delta de Dirac para representar uma força unitária, dada abaixo:

$$b_i = \Delta(X', x) \cdot e_i \quad \text{em } \Omega \quad (4.2)$$

onde  $\Delta(X', x)$  é a função delta de Dirac em sua forma vetorial e  $e_i$  são vetores unitários na direção dos eixos cartesianos  $x_i$ .

As soluções fundamentais de Kelvin para deslocamento e força de superfície em um ponto  $x$  (ponto campo), cujas componentes estão explicitamente indicadas na FIGURA 7, são dadas respectivamente pelas expressões:

$$U_{ij}(X', x) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{ij} + r_i r_j \right] \quad (4.3)$$

$$T_{ij}(X',x) = -\frac{1}{4\pi r(1-\nu)} \left\{ \frac{dr}{dn} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] - (1-2\nu)[n_j r_{,i} - n_i r_{,j}] \right\} \quad (4.4)$$

sendo  $r = r(X',x)$  a distância entre o ponto de aplicação da carga puntual, ponto fonte  $X'$ , e o ponto campo  $x$ ,  $r_{,j}$  a derivada de  $r$  em relação a  $x_j$ ,  $\delta_{ij}$  a função delta de Kronecker e  $dr/dn$  a derivada direcional de  $r$  em relação a  $n$  no ponto  $x$ , sendo  $n$  o vetor unitário normal à superfície considerada, no ponto  $x$ .

O problema elástico linear de domínio finito está representado na FIGURA 8, onde  $\Gamma$  é o contorno fechado do problema definido no domínio  $\Omega$ . No problema existem as condições de contorno:  $\Gamma_t$  que denotam um trecho do contorno onde as forças de superfície são prescritas e  $\Gamma_d$  que denotam o trecho do contorno com seus deslocamentos prescritos. Usualmente os problemas práticos possuem condições de contorno mistas, isto é, em alguns trechos do contorno são prescritos os deslocamentos, enquanto em outros trechos prescrevem-se as forças de superfície.

$$\Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma$$

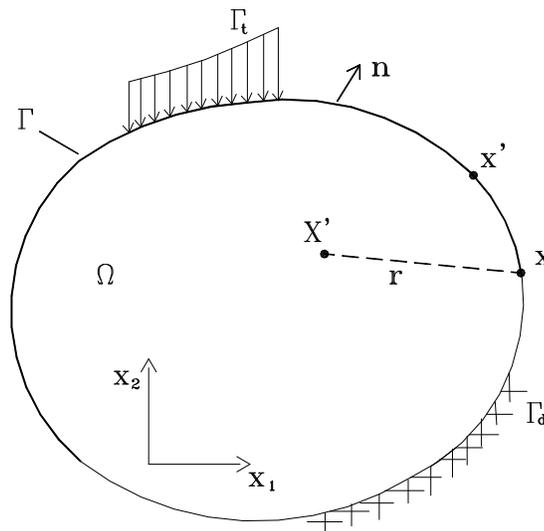


FIGURA 8 - Geometria do problema

## 4.2 Equação integral de contorno

A relação integral recíproca necessária para o desenvolvimento da EIC para problemas de elasticidade é dada pelo teorema do trabalho recíproco de Betti, que relaciona dois estados de tensão distintos, ambos supostos equilibrados, da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^2 d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^2 \varepsilon_{ij}^1 d\Omega \quad (4.5)$$

sendo que o índice 1 representa o problema de valor de contorno ao qual corresponde o estado de tensão  $\sigma_{ij}^1$ , e o índice 2 o problema cujo estado de tensão é  $\sigma_{ij}^2$ . O problema 2 será considerado como correspondente à solução fundamental.

Substituindo-se no lado esquerdo da Eq. (4.5), os tensores de deformação em termos de suas definições em deslocamento, fazendo-se uma integração por partes e aplicando o teorema da divergência tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{i,j}^* d\Omega = \int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma \quad (4.6)$$

onde o índice (\*) representa agora a solução fundamental. Analogamente, substituindo-se  $\sigma_{ij}^2$  no segundo membro da Eq. (4.5), tendo em vista a lei de Hooke e as relações deformação  $\times$  deslocamento escreve-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* u_{i,j} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \Delta(X', x) \cdot e_i \cdot u_i d\Omega \quad (4.7)$$

onde (\*) representa a solução fundamental.

A integral de domínio da expressão Eq. (4.7) fica reduzida a um termo livre de  $u_i$  avaliado em  $X'$  (ponto fonte), devido às propriedades da função delta de Dirac. Usando a terminologia da solução fundamental da Eq. (4.3) e Eq. (4.4) e reorganizando os termos, obtém-se a identidade Somigliana para deslocamentos (ISD):

$$u_i(X') = -\int_{\Gamma} T_{ij}(X',x)u_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} U_{ij}(X',x)t_j(x) d\Gamma(x) \quad (4.8)$$

onde  $T_{ij}(X',x)$  e  $U_{ij}(X',x)$  denotam a solução fundamental de Kelvin para deslocamentos representada pela Eq.(4.3) e de forças de superfície dada na Eq.(4.4), respectivamente. No ponto de contorno  $x$ ,  $u_j$  e  $t_j$  são as grandezas do contorno de deslocamentos e forças de superfície, respectivamente, que podem ser incógnitas ou prescritas. Essa equação representa os deslocamentos em um ponto interno  $X'$  em termos dos valores dos deslocamentos e das forças de superfície no contorno.

A solução para os deslocamentos nos pontos do contorno é obtida fazendo-se o ponto fonte tender ao contorno,  $X' \rightarrow x'$ , na ISD, Eq. (4.8). O processo de limites, de levar  $X'$  para o contorno, é ilustrado na FIGURA 9, onde este é alterado criando-se um trecho circular  $\Gamma'_\epsilon$  de raio  $\epsilon$ , para tratar as discontinuidades que aparecem nas integrais da Eq. (4.8).

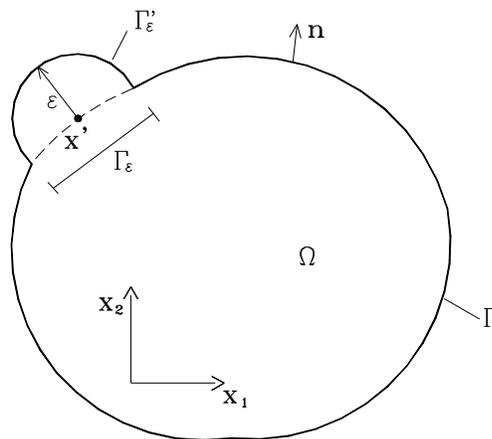


FIGURA 9 - Ponto fonte  $x'$  no contorno envolto por um arco circular.

Quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , a segunda integral da Eq. (4.8) pode ser escrita como:

$$\int_{\Gamma} U_{ij}(X',x) t_j(x) d\Gamma(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma'_\epsilon} U_{ij}(x',x) t_j(x) d\Gamma(x) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma'_\epsilon} U_{ij}(x',x) t_j(x) d\Gamma(x) \quad (4.9)$$

A segunda integral do segundo membro da Eq. (4.9) se anula, enquanto a primeira integral do segundo membro da Eq. (4.9) é fracamente singular devido ao núcleo logarítmico.

Considerando a primeira integral da ISD Eq. (4.8), no limite, para  $\epsilon \rightarrow 0$ , tem-se:

$$\int_{\Gamma} T_{ij}(X', x) u_j(x) d\Gamma(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} T_{ij}(x', x) u_j(x) d\Gamma(x) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} T_{ij}(x', x) u_j(x) d\Gamma(x) \quad (4.10)$$

Na Eq. (4.10) a primeira integral do lado direito é definida no sentido do valor principal de Cauchy (VPC) e a segunda integral é regularizada pelo primeiro termo da expansão de Taylor avaliada em  $x'$  que produz um termo livre em função dos deslocamentos. A EIC clássica para deslocamentos é então obtida, assumindo-se a continuidade de deslocamentos em  $x'$ :

$$C_{ij}(x') u_j(x') = - \int_{\langle \Gamma \rangle} T_{ij}(x', x) u_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} U_{ij}(x', x) t_j(x) d\Gamma(x) \quad (4.11)$$

Sendo  $\delta_{ij}$  a função delta de Kronecker. A integral cujo domínio de integração é representado por  $\langle \Gamma \rangle$ , é analisada no sentido do VPC, devido à presença do núcleo fortemente singular  $T_{ij}(x', x)$ . O parâmetro  $C_{ij}(x')$  é dado por  $1/2$  para um contorno suave.

A representação integral das tensões no ponto interno  $X'$  é obtida a partir da ISD no ponto  $x$ , pela aplicação das definições do tensor de deformações e da lei de Hooke, ficando expressa por:

$$\sigma_{ij}(X') = - \int_{\Gamma} S_{kij}(X', x) u_k(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} D_{kij}(X', x) t_k(x) d\Gamma(x) \quad (4.12)$$

Nesta equação  $S_{kij}(X', x)$  e  $D_{kij}(X', x)$  são combinações lineares das derivadas de  $T_{ij}(X', x)$  e  $U_{ij}(X', x)$ , apresentadas em Eq.(4.3) e Eq.(4.4) dadas, respectivamente, por:

$$D_{kij}(X', x) = \frac{I}{4\pi r(1-\nu)} \left[ (1-2\nu)(-r_{,k} \delta_{ij} + r_{,j} \delta_{ki} + r_{,i} \delta_{kj}) + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \quad (4.13)$$

$$S_{kij}(X', x) = \frac{\mu}{2\pi r^2(1-\nu)} \left[ 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left[ (1-2\nu)r_{,k} \delta_{ij} + \nu(r_{,j} \delta_{ik} + r_{,i} \delta_{jk}) - \right. \right. \\ \left. \left. 4r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] + 2\nu(n_i r_{,i} r_{,k} + n_j r_{,j} r_{,k}) + (1-2\nu)(2n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) \right. \\ \left. - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right] \quad (4.14)$$

Quando o ponto fonte se aproxima do contorno ( $X' \rightarrow x'$ ) e no limite do problema, quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , a segunda integral de Eq. (4.12) é escrita como:

$$\int_{\Gamma} D_{kij}(X', x) t_k(x) d\Gamma(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma\epsilon} D_{kij}(x', x) t_k(x) d\Gamma(x) + \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma\epsilon'} D_{kij}(x', x) t_k(x) d\Gamma(x) \quad (4.15)$$

A primeira integral do segundo membro de Eq. (4.15) resulta em uma integral definida no sentido de VPC e a segunda resulta em um termo livre, avaliado em  $x'$ , em função das tensões, que devem ser contínuas no sentido de Holder (COURANT e HILBERT (1962)).

Considerando agora a primeira integral de Eq. (4.12), levando-se o ponto fonte ao contorno, quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , tem-se:

$$\int_{\Gamma} S_{kij}(X', x) u_k(x) d\Gamma(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma\epsilon} S_{kij}(x', x) u_k(x) d\Gamma(x) + \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma\epsilon'} S_{kij}(x', x) u_k(x) d\Gamma(x) \quad (4.16)$$

Os termos do segundo membro de Eq. (4.16) contém hiper-singularidades da ordem de  $O(r^{-2})$ . Estes termos podem ser regularizados por expansão de Taylor, em relação ao ponto fonte, assumindo-se que as derivadas são contínuas no sentido de Holder. Produz-se então, um termo livre em função das tensões a partir da segunda integral do segundo membro da Eq. (4.16) e uma integral definida no sentido de parte finita de Hadamard

(PFH) a partir da primeira integral do segundo membro da Eq. (4.16). A EIC para tensões é escrita:

$$\frac{1}{2} \sigma_{ij}(x') = - \int_{\langle\langle \Gamma \rangle\rangle} u_k(x) S_{kij}(x',x) d\Gamma(x) + \int_{\langle \Gamma \rangle} t_k(x) D_{kij}(x',x) d\Gamma(x) \quad (4.17)$$

considerando o ponto  $x'$  em uma parte suave do contorno, sendo a primeira integral do segundo membro da Eq. (4.17) definida no sentido de PFH e a segunda integral da Eq. (4.17) definida no sentido de VPC.

A EIC para força de superfície para o ponto fonte sobre um contorno suave, obtida a partir da relação  $t_j = \sigma_{ij} n_i$  é dada por:

$$\frac{1}{2} t_j(x') = -n_i(x') \int_{\langle\langle \Gamma \rangle\rangle} u_k(x) S_{kij}(x',x) d\Gamma(x) + n_i(x') \int_{\langle \Gamma \rangle} t_k(x) D_{kij}(x',x) d\Gamma(x) \quad (4.18)$$

A integral cujo domínio de integração é representado por  $\langle \Gamma \rangle$ , é analisada no sentido do VPC enquanto a integral de domínio  $\langle\langle \Gamma \rangle\rangle$  possui um núcleo hiper-singular e é integrável no sentido de PFH.

### 4.3 Equações integrais de contorno duais para a análise de problemas bidimensionais da MFEL

O fato de duas superfícies ocuparem o mesmo lugar geométrico na definição de trinca fechada requer tratamentos matemáticos especiais na solução dos problemas elastostáticos sujeitos à presença desta descontinuidade. A geometria da trinca que proporciona uma singularidade no sistema de equações algébricos de MEC faz os problemas da mecânica da fratura estarem entre os mais difíceis de resolver com precisão numérica adequada. Segundo CRUSE (1988), este era considerado um problema terrivelmente mal ajustado, e por alguns anos os cientistas na área de elasticidade questionavam se sua solução poderia até mesmo ser considerada. A EIC aplicada às faces co-planares da trinca sofre degeneração, pois caso se aplicasse a EIC

de deslocamento para pontos geometricamente coincidentes em faces distintas da trinca, o sistema ficaria com equações idênticas para pontos fisicamente distintos.

Pretende-se mostrar abaixo o desenvolvimento matemático da aplicação da EIC padrão aos pontos da trinca, mostrando surgimento e a razão da singularidade do sistema de equações. Em seguida são mostradas as EIC duais capazes de solucionar a questão.

#### 4.3.1 Equação integral de contorno para deslocamento

Considera-se um problema de contorno externo  $\Gamma$ , contendo uma trinca representada pelo contorno  $\Gamma_c^+$  e  $\Gamma_c^-$ , sendo  $\Gamma_c^+$  o contorno superior da trinca e  $\Gamma_c^-$  o contorno inferior, e no processo limite as duas superfícies da trinca são definidas como  $\Gamma_c$ , conforme a FIGURA 10. A ISD do problema pode ser escrita como:

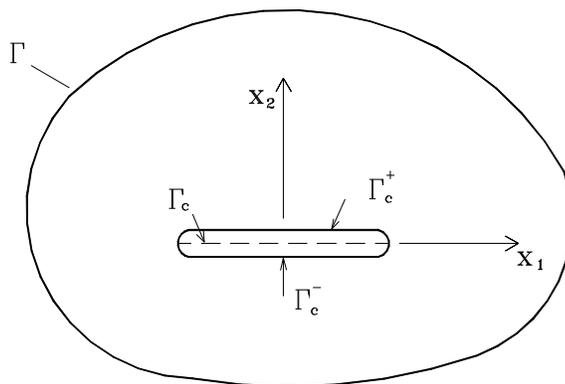


FIGURA 10 - Geometria da trinca num plano infinito.

$$u_i(X') = \int_{\Gamma \cup \Gamma_c^+ \cup \Gamma_c^-} U_{ij}(X', x) t_j(x) d\Gamma - \int_{\Gamma \cup \Gamma_c^+ \cup \Gamma_c^-} T_{ij}(X', x) u_j(x) d\Gamma \quad (4.19)$$

As soluções fundamentais  $U_{ij}(X', x)$  e  $T_{ij}(X', x)$  em Eq. (4.19) para a superfície da trinca  $\Gamma_c$  são simétricas e anti-simétricas, para  $\Gamma_c^+$  e  $\Gamma_c^-$ , respectivamente, isto é:

$$U_{ij}(x^+, x) = U_{ij}(x^-, x) \quad (4.20)$$

$$T_{ij}(x^+, x) = -T_{ij}(x^-, x) \quad (4.21)$$

A mudança de sinal nas forças de superfície na Eq. (4.21) se deve ao fato dos vetores unitários normais das faces da trinca serem opostos. Daí, considerando-se as relações entre os deslocamentos (Eq. (4.20)) e as forças de superfícies (Eq. (4.21)) nas faces opostas da trinca e levando ao processo limite, quando as superfícies da trinca são colapsadas, de forma que  $\Gamma_c^+ \equiv \Gamma_c^- \equiv \Gamma_c$ , a Eq. (4.19) é escrita:

$$\begin{aligned} u_i(X') = & \\ & \int_{\Gamma_c} U_{ij}(X', x) [t_j(x^+) + t_j(x^-)] d\Gamma - \int_{\Gamma_c} T_{ij}(X', x) [u_j(x^+) - u_j(x^-)] d\Gamma \quad (4.22) \\ & + \int_{\Gamma} U_{ij}(X', x) t_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} T_{ij}(X', x) u_j(x) d\Gamma(x) \end{aligned}$$

Considerando-se as superfícies da trinca como livres de forças ou apresentando forças de superfície iguais e opostas, tem-se a expressão para os pontos coincidentes da trinca:

$$t_j(x^+) = -t_j(x^-) \quad (4.23)$$

Com isto, anula-se a primeira integral da Eq. (4.22). Definindo-se os deslocamentos relativos como  $\Delta u_j(x) = u_j(x^+) - u_j(x^-)$ , esta mesma equação é reescrita:

$$\begin{aligned} u_i(X') = & \int_{\Gamma} U_{ij}(X', x) t_j(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij}(X', x) u_j(x) d\Gamma - \\ & \int_{\Gamma_c} T_{ij}(X', x) \Delta u_j(x) d\Gamma \quad (4.24) \end{aligned}$$

A EIC para a face superior da trinca é obtida quando  $X' \rightarrow x^+$  e fica:

$$\begin{aligned} C_{ij}(x^+) u_j(x^+) + C_{ij}(x^-) u_j(x^-) = & \int_{\Gamma} U_{ij}(x^+, x) t_j(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij}(x^+, x) u_j(x) d\Gamma \\ & + \int_{\langle \Gamma_c \rangle} T_{ij}(x^+, x) \Delta u_j(x) d\Gamma \quad (4.25) \end{aligned}$$

Nesta Eq. (4.25), existe um termo livre extra, além do presente na EIC clássica de deslocamento Eq. (4.11), o termo  $C_{ij}(x)u_j(x^-)$ . Este termo aparece devido à coincidência dos pontos de colocação  $x^+$  e  $x^-$  na face oposta da trinca  $\Gamma_c^-$ . Fazendo o ponto de colocação tender à face negativa da trinca, obtém-se uma equação idêntica a Eq. (4.25). Isto significa um sistema de equações singular, uma vez que existem duas vezes mais incógnitas em termos de deslocamento que equações independentes. Há um conjunto de linhas idênticas correspondentes à colocação em pontos coincidentes das superfícies opostas da trinca. Caso fossem eliminadas as linhas da matriz dos coeficientes correspondentes a uma das faces, o que representaria o ponto fonte circulando apenas em uma das faces da trinca, resultaria em um sistema de equações com menos equações independentes que incógnitas.

#### 4.3.2 Equação integral de contorno para força de superfície

Considerando mais uma vez o problema representado na FIGURA 10, pode-se escrever a EIC para força de superfície para pontos de colocação na face da trinca  $x^-$ , considerando um contorno suave, como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}t_j(x^-) - \frac{1}{2}t_j(x^+) = \\ -n_i(x^-) \int_{\langle\langle \Gamma \cup \Gamma_c^+ \cup \Gamma_c^- \rangle\rangle} u_k(x) S_{kij}(x^-, x) d\Gamma + n_i(x^-) \int_{\langle\langle \Gamma \cup \Gamma_c^+ \cup \Gamma_c^- \rangle\rangle} t_k(x) D_{kij}(x^-, x) d\Gamma \end{aligned} \quad (4.26)$$

Observando-se que  $n_i(x^-) = -n_i(x^+)$ , as soluções fundamentais  $D_{kij}(X', x)$  e  $S_{kij}(X', x)$  da Eq. (4.26) para a superfície da trinca  $\Gamma_c$  são simétricas e anti-simétricas, para  $\Gamma_c^+$  e  $\Gamma_c^-$ , respectivamente, tal que:

$$\begin{aligned} D_{kij}(x^+, x) &= D_{kij}(x^-, x) \\ S_{kij}(x^+, x) &= -S_{kij}(x^-, x) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Colapsando as duas superfícies da trinca tem-se, para as integrais da Eq. (4.26):

$$\int_{\langle\langle\Gamma \cup \Gamma_c^+ \cup \Gamma_c^-\rangle\rangle} u_k(x) S_{kij}(x^-, x) d\Gamma = \int_{\langle\langle\Gamma_c\rangle\rangle} [u_k(x^+) - u_k(x^-)] S_{kij}(x^-, x) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_k(x) S_{kij}(x^-, x) d\Gamma \quad (4.28)$$

$$\int_{\langle\Gamma \cup \Gamma_c^+ \cup \Gamma_c^-\rangle} t_k(x) D_{kij}(x^-, x) d\Gamma = \int_{\langle\Gamma_c\rangle} [t_k(x^+) + t_k(x^-)] D_{kij}(x^-, x) d\Gamma + \int_{\Gamma} t_k(x) D_{kij}(x^-, x) d\Gamma \quad (4.29)$$

Assume-se o equilíbrio de forças de superfície, de forma que  $t_j(x^+) = -t_j(x^-)$ , e definindo-se  $\Delta u_j(x) = u_j(x^+) - u_j(x^-)$ , a Eq. (4.26) pode ser reescrita como:

$$t_{ij}(x^-) + n_i(x^-) \int_{\langle\langle\Gamma_c\rangle\rangle} \Delta u_k(x) S_{kij}(x^-, x) d\Gamma + n_i(x^-) \int_{\langle\langle\Gamma\rangle\rangle} u_k(x) S_{kij}(x^-, x) d\Gamma = n_i(x^-) \int_{\langle\Gamma\rangle} t_k(x) D_{kij}(x^-, x) d\Gamma \quad (4.30)$$

A equação acima diferentemente de EIC para deslocamento pode ser usada para a solução de problemas de trincas sem grandes dificuldades. A solução é obtida em termos da descontinuidade de deslocamentos na superfície da trinca.

### 4.3.3 Equações integrais de contorno duais

As EIC duais para o problema da MFEL são então aplicadas às faces da trinca. Se a EIC para deslocamento for aplicada num ponto de colocação na face superior da trinca, em  $x^+$ , tem-se:

$$C_{ij}(x^+) u_j(x^+) + C_{ij}(x^-) u_j(x^-) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x^+, x) t_j(x) d\Gamma - \int_{\langle\Gamma\rangle} T_{ij}(x^+, x) u_j(x) d\Gamma \quad (4.31)$$

Quando a EIC para força de superfície for aplicada num ponto de colocação na face inferior, em  $x^-$ , ela pode ser escrita, considerando um contorno suave, como:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}t_j(x^-) - \frac{1}{2}t_j(x^+) &= -n_i(x^-) \int_{\langle\langle\Gamma\rangle\rangle} u_k(x) S_{kij}(x^-, x) d\Gamma + \\
n_i(x^-) \int_{\langle\Gamma\rangle} t_k(x) D_{kij}(x^-, x) d\Gamma &
\end{aligned}
\tag{4.32}$$

# 5

## **ALGORITMOS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO EM MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR**

Os problemas da mecânica da fratura apresentam complexidades consideráveis nos algoritmos numéricos devido à condição de singularidade das superfícies co-planares da trinca no caso do MEC. Na MFEL existe também a singularidade na ponta da trinca, com as tensões e as deformações tendendo ao infinito nos pontos que dela se aproximam. No entanto, os métodos numéricos são muito utilizados, uma vez que a solução analítica só é possível para problemas com geometrias e carregamentos específicos.

Neste trabalho, foi implementado o MECD baseado na formulação desenvolvida por PORTELA et al. (1992), onde se utilizam as EIC de deslocamento e força de superfície para resolver os problemas bidimensionais contendo trincas retas ou poligonais no domínio finito, de modos I, II ou modos mistos de sollicitação. Além disso, utilizou-se como referência, o programa desenvolvido por PORTELA e ALIABADI (1992) que é

baseado na formulação dual para problemas elásticos bidimensionais contendo trincas no domínio.

As implementações numéricas têm como ponto de partida o programa computacional desenvolvido por RIBEIRO (2003) baseado no MEC, usando formulações auto-regularizadas das EIC para problemas elásticos bidimensionais. No programa de RIBEIRO (2003) era possível resolver apenas o problema da mecânica da fratura em que o eixo de simetria fosse coincidente com a trinca, no modo I de solitação. Portanto, a implementação computacional realizada estendeu a capacidade do programa de RIBEIRO (2003) a casos gerais dessa classe de problemas, tornando possível a abrangência de problemas com diversas geometrias e configurações de carregamentos.

As principais características dos algoritmos implementados são descritas neste capítulo. É feito ainda um breve comentário sobre as principais sub-rotinas do programa computacional obtido com base nessas implementações.

## 5.1 Discretização numérica

O MEC consiste na discretização do contorno do problema em segmentos, denominados elementos de contorno, como mostra FIGURA 11, para solucionar as EIC de deslocamento e de força de superfície, Eq. (4.11) e Eq. (4.18), respectivamente. Para ilustrar tal procedimento apresenta-se a EIC clássica em termos de deslocamento, Eq. (4.11), escrita como:

$$C_{ij}(x')u_j(x') = -\sum_{n=1}^{N_e} \int_{\Gamma_n} T_{ij}(x',x)u_j(x) d\Gamma(x) + \sum_{n=1}^{N_e} \int_{\Gamma_n} U_{ij}(x',x)t_j(x) d\Gamma(x) \quad (5.1)$$

onde  $N_e$  é o número de elementos de contorno.

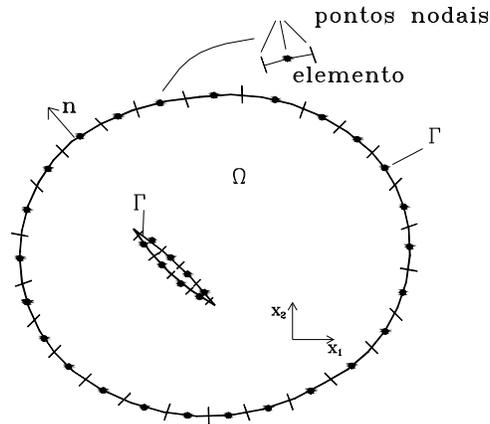


FIGURA 11 - Contorno discretizado em elementos.

Em cada elemento de contorno, a geometria e as variáveis do contorno são descritas por funções aproximadoras e são definidas em termos dos valores nodais como:

$$\begin{aligned}
 u_k(\xi) &= \sum_{\alpha=1}^m N_{\alpha}(\xi) u_k^{\alpha} \\
 t_k(\xi) &= \sum_{\alpha=1}^m N_{\alpha}(\xi) t_k^{\alpha} \\
 x_k(\xi) &= \sum_{\alpha=1}^m M_{\alpha}(\xi) x_k^{\alpha}
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

onde  $M$  e  $N$  são as funções de forma,  $u_k$ ,  $t_k$  e  $x_k$  são as componentes nodais do deslocamento, força de superfície e coordenadas, respectivamente e  $m$  o número de nós do elemento. Quando a mesma função de forma é usada para aproximar a geometria e as grandezas do contorno, os elementos são denominados elementos de contorno isoparamétricos. Os elementos de contorno isoparamétricos com funções de interpolação linear ( $m=2$ ), quadrática ( $m=3$ ), cúbica ( $m=4$ ) e quártica ( $m=5$ ), são denominados respectivamente elementos lineares, quadráticos, cúbicos e quárticos, conforme a FIGURA 12.

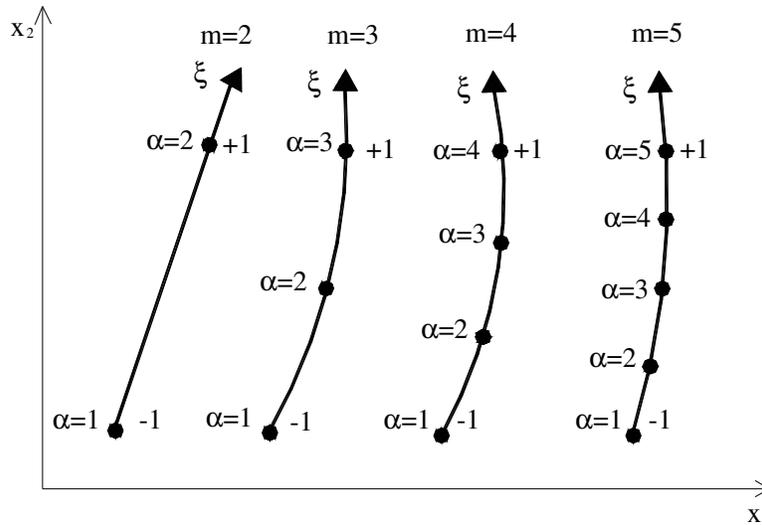


FIGURA 12 - Elementos de contorno bidimensionais.

Os algoritmos do método dos elementos de contorno implementados neste trabalho utilizam elementos de contorno isoparamétricos contínuos e descontínuos ambos com funções de interpolação quadráticas, seguindo a formulação proposta por PORTELA et al. (1992).

O parâmetro  $C_{ij}$  sendo expresso por advém do conceito de ângulo de varredura, igual a  $\frac{1}{2}$  para pontos situados sobre contorno suave,  $C_{ij}$  igual a 1 para pontos internos e 0 para pontos externos. Quando o ponto fonte estiver situado sobre pontos angulosos do contorno tal como indicado na Fig. 13, o valor de  $C_{ij}$  deverá ser determinado por meio de processo de limite indicado na segunda integral do segundo membro da Eq. (5.10).

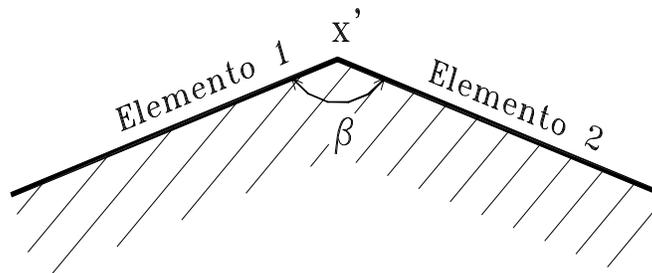


FIGURA 13 - Definição de  $\beta$

Com intuito de possibilitar a avaliação numérica ou mesmo analítica das integrais presentes na EIC, Eq. (5.1), faz-se necessária a transformação das coordenadas

cartesianas globais dos elementos em coordenadas adimensionais locais. Tendo em vista a utilização de integração numérica por meio de quadratura Gaussiana padrão ou para o desenvolvimento analítico das integrais, as coordenadas cartesianas dos nós dos elementos são parametrizadas em função das coordenadas dos nós de extremidade de forma que as coordenadas adimensionais assumam valores entre  $-1$  e  $1$ . O Jacobiano da transformação de coordenadas globais ( $x_i$ ) para coordenadas adimensionais intrínsecas ( $\xi$ ) é dado por:

$$J(\xi) = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} \quad (5.3)$$

Considerando as aproximações definidas em Eq. (5.2), a forma discretizada da EIC de deslocamento é dada por:

$$C_{ij}(x') u_j(x') + \sum_{n=1}^{Ne} \sum_{\alpha=1}^m P_{ij}^{n\alpha} u_j^{n\alpha} = \sum_{n=1}^{Ne} \sum_{\alpha=1}^m Q_{ij}^{n\alpha} t_j^{n\alpha} \quad (5.4)$$

onde  $Ne$  é o número de elementos de contorno e  $m$  o número de nós por elemento. Os coeficientes  $P_{ij}^{n\alpha}$  e  $Q_{ij}^{n\alpha}$  são integrais definidas em termos das coordenadas adimensionais locais, como:

$$P_{ij}^{n\alpha} = \int_{-1}^1 N_\alpha(\xi) \mathcal{I}_{ij}(x', x(\xi)) J^n(\xi) d\xi \quad (5.5)$$

$$Q_{ij}^{n\alpha} = \int_{-1}^1 N_\alpha(\xi) \mathcal{U}_{ij}(x', x(\xi)) J^n(\xi) d\xi$$

sendo  $J^n(\xi)$  o Jacobiano da transformação nos elementos de contorno.

A Eq. (5.4) e a Eq. (5.5) são avaliadas nos pontos nodais  $x^c$ , sendo  $c=1..M$  ( $M$  é o número total de nós). O duplo somatório na Eq. (5.4) deve ser avaliado tendo em vista que alguns nós são compartilhados por elementos consecutivos, e como  $u_j^{n\alpha}$  são definidos de forma única nestes nós, os deslocamentos podem ser combinados em cada nó. Faz-se um somatório sobre todos os nós e a Eq. (5.4) pode ser reescrita:

$$C_{ij}(x^c)u_j(x^c) + \sum_{\gamma=1}^M \bar{H}_{ij}^{c\gamma} u_j^\gamma = \sum_{n=1}^{Ne} \sum_{\alpha=1}^m G_{ij}^{cn\alpha} t_j^{cn\alpha} \quad (5.6)$$

onde  $\bar{H}_{ij}^{c\gamma}$  é formado a partir de  $P_{ij}^{n\alpha}$  e  $G_{ij}^{cn\alpha}$  equivale à  $Q_{ij}^{n\alpha}$ . Todos os termos em deslocamento da Eq. (5.6) são agrupados e escreve-se:

$$\sum_{\gamma=1}^M H_{ij}^{c\gamma} u_j^\gamma = \sum_{n=1}^{Ne} \sum_{\alpha=1}^m G_{ij}^{cn\alpha} t_j^{cn\alpha} \quad (5.7)$$

O sistema de equações expresso matricialmente é dado como:

$$[H] \{u\} = [G] \{t\} \quad (5.8)$$

sendo  $[H]$  e  $[G]$  matrizes cujos coeficientes são resultantes de integração conhecidas dos produtos das funções de forma, Jacobianos e soluções fundamentais do problema, associados a cada nó do contorno. Os vetores  $\{u\}$  e  $\{t\}$  contêm respectivamente, valores nodais de deslocamento e força no contorno que podem ser incógnitos ou prescritos, dependendo das condições de contorno especificadas no problema. Reagrupando-se os valores incógnitos em um vetor  $X$  e efetuando-se as operações relacionadas com os valores prescritos obtém-se um sistema de equações algébricas lineares, dado por:

$$A X = B \quad (5.9)$$

em que  $A$  é a matriz dos coeficientes,  $X$  é o vetor que contém  $u$  e  $t$  desconhecidos no contorno e  $B$  o vetor dos termos independentes decorrentes dos valores prescritos de  $u$  e  $t$ .

## 5.2 Tratamento das integrais singulares e hiper-singulares

A formulação dual do MEC implica na solução de integrais que possuem certas dificuldades de resolução, devido à presença de núcleos fortemente singulares e hiper-singulares. Essas integrais aparecem quando o ponto de integração está sobre o elemento a ser integrado e se tornam fortemente singulares devendo ser interpretadas no

sentido do VPC e hiper-singulares sendo interpretadas no sentido de PFH. Estas estão presentes nas EIC para deslocamento e força de superfície respectivamente.

As EIC duais de deslocamento, a Eq. (4.31), e de força de superfície, a Eq. (4.32), aplicadas ao elemento de trinca quando esta é livre de forças de superfície, como na maioria dos casos práticos, são simplificadas e dadas por:

$$C_{ij}(x')u_i(x') + \int_{\langle \Gamma_c \rangle} u_j(x) T_{ij}(x',x) = 0 \quad (5.10)$$

$$n_i(x') \int_{\langle\langle \Gamma_c \rangle\rangle} u_k(x) S_{kij}(x',x) d\Gamma(x) = 0 \quad (5.11)$$

Os resultados das integrais definidas no sentido de VPC e de PFH representam os termos da diagonal principal da matriz dos coeficientes. Sérias dificuldades aparecem quando esses termos são calculados explicitamente, mas elas podem ser ultrapassadas quando do uso da condição de movimento de corpo rígido (MCR). No caso do procedimento padrão do MEC, ou mesmo para a solução numérica da EIC para força de superfície de um determinado problema, geralmente usa-se a condição de MCR para resolver os termos singulares que aparecem na formulação.

O MCR, por definição, é a translação de um corpo sob a aplicação de forças externas, não havendo mudanças na distância relativa entre suas partículas, desde sua posição inicial até a final, BORESI E CHONG (1987). A condição de MCR implica em um campo de deslocamentos constante, definido ao longo do corpo, e as componentes de força de superfície nulas. Assumindo essa condição ao problema elástico linear avaliado pelo MECD tem-se para a Eq. (5.10)

$$C_{ij}(x') + \int_{\langle \Gamma \rangle} T_{ij}(x',x) d\Gamma(x) = 0 \quad (5.12)$$

enquanto a Eq. (5.11) fica:

$$n_i(x') \int_{\langle\langle \Gamma \rangle\rangle} S_{kij}(x',x) d\Gamma(x) = 0 \quad (5.13)$$

As equações Eq. (5.12) e Eq. (5.13) expressam o MCR que deve ser satisfeito pelas equações duais em todos os pontos de colocação. De acordo com a Eq. (5.12), o coeficiente  $C_{ij}$  não precisa ser determinado diretamente e quando esta equação é discretizada, o coeficiente  $C_{ij}$  juntamente com a integral de parte finita é obtido fazendo-se o somatório da linha da matriz dos coeficientes de Eq. (5.9) correspondentes.

No caso dos problemas da mecânica da fratura quando o ponto de colocação é colocado em um nó de trinca, existem sempre dois elementos, em faces opostas, que contém o ponto de colocação, pois as duas faces da trinca são discretizadas. Isto significa que ao longo da trinca as integrais de parte finita de Eq. (5.10) e Eq. (5.11) são requeridas duas vezes: uma no elemento que contém o ponto fonte e outra no elemento oposto que contém o nó coincidente com o ponto de colocação. O termo diagonal da matriz dos coeficientes de qualquer nó da trinca é simétrico ao seu nó oposto (tem mesmo valor absoluto, mas sinais contrários). Essa particularidade do MECD impede o uso da condição do MCR para a avaliação indireta dos termos diagonais da matriz dos coeficientes de influência Eq. (5.9), pois os termos se cancelarão mutuamente na soma dos termos da linha. Sendo assim, os termos diagonais correspondentes aos pontos de colocação nos nós da trinca, devem ser calculados diretamente pela expressão de  $C_{ij}$  e do VPC.

Neste trabalho, uma vez que o MECD invalida o uso da condição padrão de MCR para o cálculo dos termos da diagonal principal nos nós da trinca, as integrais singulares presentes nas EIC duais receberam um tratamento matemático analítico para sua regularização, baseado nos trabalhos de PORTELA et al. (1992) e ALIABADI e HOOKE (1991). No caso de pontos de colocação no contorno externo do problema, isto é em pontos não pertencentes à trinca, faz-se o uso da condição de MCR.

O procedimento matemático para a regularização das integrais de VPC e PFH será descrito, considerando-se o contorno de trinca  $\Gamma_c$ .

A integral de VPC da Eq. (5.10) pode ser expressa em termos de coordenadas locais do elemento como:

$$\int_{\langle \Gamma_c \rangle} T_{ij}(x', x) u_j(x) d\Gamma = \sum_{\gamma=1}^M u_j^\gamma \int_{-1}^1 \frac{f_{ij}^\gamma(\xi)}{\xi - \xi'} d\xi \quad (5.14)$$

sendo  $M$  o número de pontos de colocação por elemento,  $u_j^\gamma$  os valores nodais dos deslocamentos na direção  $j$ , e  $f_{ij}^\gamma(\xi)$  uma função regular em termos da coordenada paramétrica local  $\xi$  dada pelo produto da função de forma, da solução fundamental, do Jacobiano da transformação de coordenadas e da distância entre o ponto fonte e o ponto campo, escrita abaixo:

$$f_{ij}^\gamma(\xi) = N_\gamma(\xi) \cdot T_{ij}(x', x(\xi)) \cdot J(\xi) \cdot (\xi - \xi') \quad (5.15)$$

Fazendo-se a expansão em série de Taylor da função  $f_{ij}^\gamma(\xi)$  da Eq. (5.15) em torno do nó de colocação tem-se:

$$\int_{-1}^1 \frac{f_{ij}^\gamma(\xi)}{\xi - \xi'} d\xi = \int_{-1}^1 \frac{f_{ij}^\gamma(\xi) - f_{ij}^\gamma(\xi')}{\xi - \xi'} d\xi + \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\xi - \xi'} \quad (5.16)$$

A primeira integral de Eq. (5.16) é regular e a segunda pode ser integrada analiticamente da forma abaixo:

$$\int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\xi - \xi'} = \ln \left| \frac{1 - \xi'}{1 + \xi'} \right| \quad (5.17)$$

A integral no sentido de PFH presente na segunda equação de Eq. (5.11) pode ser expressa em termos de coordenadas locais como:

$$\int_{\langle \Gamma_c \rangle} S_{ijk}(x', x) u_k(x) d\Gamma = \sum_{\gamma=1}^M u_k^\gamma \int_{-1}^1 \frac{g_{ijk}^\gamma(\xi)}{(\xi - \xi')^2} d\xi \quad (5.18)$$

sendo  $g_{ijk}^\gamma(\xi)$ , uma função regular em termos da coordenada paramétrica local  $\xi$  dada pelo produto da solução fundamental, da função de forma, do Jacobiano da transformação de coordenadas e da distância ao quadrado entre o ponto fonte e o ponto campo, escrita abaixo:

$$g_{ijk}^{\gamma}(\xi) = N_{\gamma}(\xi) \cdot S_{ijk}(x', x(\xi)) \cdot J(\xi) \cdot (\xi - \xi')^2 \quad (5.19)$$

Fazendo-se a expansão em série de Taylor da função  $g_{ijk}^{\gamma}(\xi)$  de Eq. (5.19), em torno do ponto de colocação, tem-se:

$$\int_{-1}^1 \frac{g_{ijk}^{\gamma}(\xi)}{(\xi - \xi')^2} d\xi = \int_{-1}^1 \frac{g_{ijk}^{\gamma}(\xi) - g_{ijk}^{\gamma}(\xi') - g_{ijk}^{\gamma(1)}(\xi')(\xi - \xi')}{(\xi - \xi')^2} d\xi + g_{ijk}^{\gamma}(\xi') \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{(\xi - \xi')^2} + g_{ijk}^{\gamma(1)}(\xi') \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\xi - \xi'} \quad (5.20)$$

A primeira integral da Eq. (5.20) é regular e a terceira integral é idêntica à da Eq. (5.17).

A segunda integral da Eq. (5.20) pode também ser resolvida analiticamente como:

$$\int_{-1}^1 \frac{d\xi}{(\xi - \xi')^2} = -\frac{1}{1 + \xi'} - \frac{1}{1 - \xi'} \quad (5.21)$$

No trabalho de TEIXEIRA e DE PAULA (2001), o procedimento analítico e o embasamento matemático usados para fazer a regularização das integrais de VPC e PFH acima mostradas estão cuidadosamente detalhados.

As integrais regularizadas quando aplicadas ao problema de trinca reta ou de trinca poligonal, sendo a trinca discretizada por elementos retos, podem ser avaliadas analiticamente.

Na atual pesquisa estuda-se o problema de trinca reta ou poligonal, sendo a trinca discretizada em elementos quadráticos descontínuos. Considera-se, assim, um elemento quadrático descontínuo da face da trinca e que contém o ponto de colocação. O sistema de coordenadas paramétricas locais  $\xi$  é definido no intervalo  $-1 \leq \xi \leq +1$ , e  $\xi'$  representa o ponto de colocação nos nós da trinca. A integral definida no sentido de VPC de Eq. (5.10) é então expressa em coordenadas locais, para o elemento quadrático descontínuo, que será descrito posteriormente, como:

$$\int_{\langle \Gamma_c \rangle} T_{ij}(x', x) u_j(x) d\Gamma = u_j^\gamma \int_{-l}^l T_{ij}(\xi', x(\xi)) N_\gamma(\xi) J(\xi) d\xi = H_i^\gamma U^\gamma \quad (5.22)$$

onde  $U^\gamma$  representa as componentes nodais de deslocamento e  $J(\xi)$  é o Jacobiano da transformação. Como são usados elementos retos,  $J(\xi) = \ell/2$ , sendo  $\ell$  o comprimento do elemento, a matriz  $H_i^\gamma$  é dada como:

$$\overline{H}^\gamma = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{bmatrix} \int_{-l}^l \frac{N_\gamma}{\xi - \xi'} d\xi \quad (5.23)$$

Considerando as funções de forma  $N_\gamma$  para os elementos quadráticos descontínuos, as integrais impróprias de Eq. (5.23) são integradas analiticamente obtendo-se:

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \frac{N_1}{\xi - \xi'} d\xi &= \frac{3}{4} \left( \frac{\xi'(3\xi' - 2)}{2} \ln \left| \frac{1 - \xi'}{1 + \xi'} \right| + 3\xi' - 2 \right) \\ \int_{-l}^l \frac{N_2}{\xi - \xi'} d\xi &= \frac{1}{2} \left( \frac{(3\xi' - 2)(3\xi' - 2)}{2} \ln \left| \frac{1 + \xi'}{1 - \xi'} \right| - 9\xi' \right) \\ \int_{-l}^l \frac{N_3}{\xi - \xi'} d\xi &= \frac{3}{4} \left( \frac{\xi'(3\xi' + 2)}{2} \ln \left| \frac{1 - \xi'}{1 + \xi'} \right| + 3\xi' + 2 \right) \end{aligned} \quad (5.24)$$

A integral de PFH, na expressão matemática da Eq. (5.11), para o problema pode ser escrita como:

$$\int_{\langle\langle \Gamma_c \rangle\rangle} S_{ijk}(x', x) u_k(x) d\Gamma = u_k^\gamma \int_{-l}^l S_{ijk}(\xi', x(\xi)) N_\gamma(\xi) J(\xi) d\xi = \overline{H}_{ij}^\gamma U^\gamma \quad (5.25)$$

onde a matriz  $\overline{H}^\gamma$  é dada:

$$\overline{H}^\gamma = \frac{E}{4\pi(1-\nu)} \frac{2}{l} S' \int_{-l}^l \frac{N_\gamma}{(\xi - \xi')^2} d\xi \quad (5.26)$$

sendo

$$S' = \begin{bmatrix} +n_1(2n_2^2 + 1) & -n_2(-2n_3^2 + 1) \\ +n_1(2n_1^2 - 1) & -n_2(-2n_1^2 - 1) \\ -n_2(2n_1^2 - 1) & +n_1(-2n_2^2 + 1) \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

onde  $n_1$  e  $n_2$  são as componentes da normal ao elemento. A integral de Eq. (5.26) é integrável analiticamente, considerando as funções de forma  $N_\gamma$  para os elementos quadráticos descontínuos, e fica:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{N_1}{(\xi - \xi^*)^2} d\xi &= \frac{3}{4} \left( (3\xi'^* - 1) \ln \left| \frac{1 - \xi^*}{1 + \xi^*} \right| + \frac{6\xi'^*{}^2 - 2\xi'^* - 3}{\xi'^*{}^2 - 1} \right) \\ \int_{-1}^1 \frac{N_2}{(\xi - \xi^*)^2} d\xi &= \frac{1}{2} \left( 9\xi'^* \ln \left| \frac{1 + \xi^*}{1 - \xi^*} \right| - \frac{18\xi'^*{}^2 - 13}{\xi'^*{}^2 - 1} \right) \\ \int_{-1}^1 \frac{N_3}{(\xi - \xi^*)^2} d\xi &= \frac{3}{4} \left( (3\xi'^* + 1) \ln \left| \frac{1 - \xi^*}{1 + \xi^*} \right| + \frac{6\xi'^*{}^2 + 2\xi'^* - 3}{\xi'^*{}^2 - 1} \right) \end{aligned} \quad (5.28)$$

A solução das integrais singulares envolvidas nas EIC do problema da trinca reta fica completamente determinada pelas expressões desenvolvidas anteriormente. Tais expressões foram implementadas, a fim de garantir a solução dos problemas contendo trincas retas no domínio.

No caso do problema mais geral, considerando a trinca curva modelada com elementos também curvos, seria necessário desenvolvimento analítico. Atualmente não existem ainda trabalhos publicados nesse sentido, isto é, a complexidade dessa operação analítica restringe a formulação dual a casos de trinca reta ou trincas curvas discretizadas em elementos retos.

### 5.3 Modelagem da trinca

As integrais de PFH e de VPC exigem condições de continuidade de deslocamentos ou de suas derivadas, para sua existência. Para atender essas condições deve-se usar uma modelagem adequada da trinca. São adotados elementos isoparamétricos quadráticos contínuos e descontínuos na discretização das EIC conforme enunciado anteriormente. Os elementos quadráticos contínuos discretizam o contorno externo do problema e os

elementos quadráticos descontínuos foram usados para modelar a superfície da trinca, pois satisfazem as condições de continuidade para a existência da integral de PFH presente em Eq. (5.11) e o requisito de suavidade da geometria no ponto de colocação nesta mesma equação. A condição de existência da integral de VPC, presente em Eq. (5.10) e Eq. (5.11), fica também satisfeita com o uso de elementos descontínuos, uma vez que sua condição de continuidade é menos restritiva que a requerida para a existência da integral definida no sentido de PFH. Os elementos descontínuos evitam também o ponto de colocação na ponta da trinca, onde existe a singularidade do campo de tensões e deformações como visto no Capítulo 3.

O elemento quadrático descontínuo é obtido deslocando-se os nós extremos do elemento quadrático comum para um ponto no seu interior próximo a ele. Essa distância é representada pelo parâmetro  $\lambda$  na FIGURA 14, em coordenadas intrínsecas, caracterizando os nós funcionais e geométricos do elemento. Os elementos descontínuos permitem as descontinuidades de força de superfície facilitando os algoritmos numéricos do MEC.

As funções de aproximação usuais são reescritas de forma geral para elementos descontínuos quadráticos e são dadas por:

$$\begin{aligned} N_1 &= \xi \left( -\frac{I}{2\lambda} \xi + \frac{I}{2\lambda^2} \right) \\ N_2 &= \xi \left( 1 + \xi \frac{I}{\lambda^2} \right) \\ N_3 &= \xi \left( \frac{I}{2\lambda} + \xi \frac{I}{2\lambda^2} \right) \end{aligned} \quad (5.29)$$

Adotando-se  $\lambda$  nulo na Eq. (5.29) acima, obtêm-se as funções de forma usuais para elementos contínuos.

Segundo PORTELA et al. (1992), recomenda-se para  $\lambda$  o valor  $2/3$ , pois outros valores mostraram não ter um efeito significativo na solução. Assim os nós do elemento descontínuo foram posicionados nos pontos  $\xi = -2/3$ ,  $\xi = 0$  e  $\xi = +2/3$  e consequentemente as funções de forma se tornam:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \xi \left( \frac{9}{8} \xi - \frac{3}{4} \right) \\
 N_2 &= \xi \left( 1 - \frac{3}{2} \xi \right) \left( 1 + \frac{3}{2} \xi \right) \\
 N_3 &= \xi \left( \frac{9}{8} \xi + \frac{3}{4} \right)
 \end{aligned}
 \tag{5.30}$$

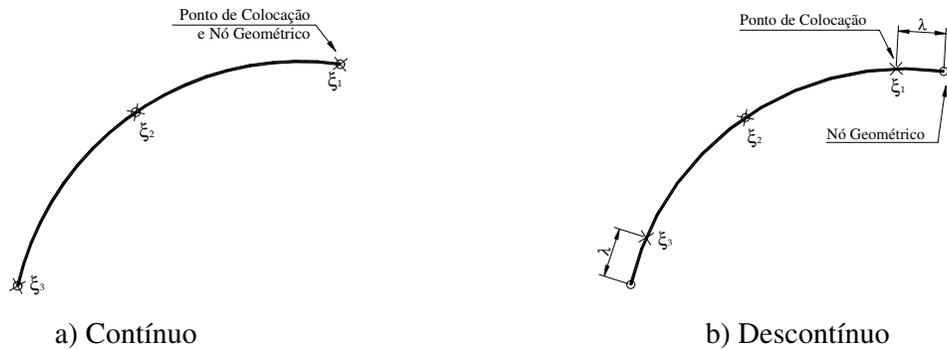


FIGURA 14 – Elementos de contorno quadráticos

A modelagem do problema de trinca como um todo está de acordo com a FIGURA 15. A EIC para força de superfície é aplicada nos pontos de colocação em um dos lados do contorno da trinca, enquanto para o outro lado da trinca é usada a EIC para deslocamento. Esta última é também aplicada no restante do contorno do problema. O contorno da trinca foi discretizado em elementos de contorno quadráticos descontínuos e as superfícies remanescentes do domínio do problema, são divididas por elementos de contorno quadráticos contínuos.

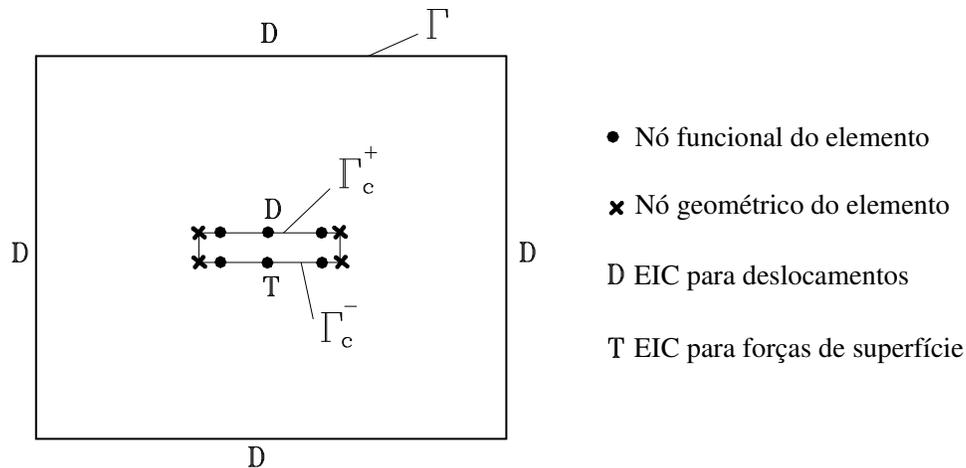


FIGURA 15 - Discretização da trinca

#### 5.4 Avaliação numérica dos parâmetros da MFEL

Uma das principais razões da vasta aplicação do MEC à mecânica da fratura está na possibilidade de se avaliar os FIT com grande precisão numérica e eficiência. Os FIT são determinados em etapa de pós-processamento, de posse da solução no contorno do problema.

Calculam-se os FIT através de técnicas baseadas nos valores dos deslocamentos relativos de pontos das faces da trinca próximos à ponta, os quais são fornecidos pelo programa computacional desenvolvido. Utilizam-se a técnica da extrapolação dos deslocamentos e a técnica de deslocamentos de um ponto, que consistem em relacionar expressões teóricas do campo de deslocamentos com os valores obtidos por algum método numérico, que no presente caso pelo MECD.

Para se escolher adequadamente os procedimentos para o cálculo de  $K_I$  e  $K_{II}$  na presente pesquisa científica, realizaram-se estudos a respeito das principais técnicas numéricas para o cálculo desses coeficientes e da viabilidade do uso de cada uma. Além disso, levou-se em conta a simplicidade e a facilidade na entrada de dados, juntamente com um desempenho numérico satisfatório. Optou-se por fazer uso das técnicas mais simples e versáteis, mas com uma modelagem adequada da trinca, utilizando-se elementos

descontínuos nos nós da trinca como mencionado anteriormente e evitando-se o ponto de colocação no ponto singular na ponta da trinca.

Além das técnicas numéricas implementadas no programa, serão descritas também outras técnicas no contexto do MEC usadas para a determinação de  $K_I$  e  $K_{II}$ . São elas: o uso de elementos especiais de ponta de trinca, os elementos do tipo QP, técnica da subtração da singularidade e a integral J que é um parâmetro alternativo para caracterizar a sollicitação à frente da trinca que em MFEL está explicitamente relacionada com os FIT através de expressões apropriadas.

Considera-se o campo de deslocamentos relativos na ponta da trinca apresentado em Eq. (3.5) e Eq. (3.6) e reescrito como abaixo, para pontos das faces superior e inferior da trinca em coordenadas polares ( $\theta = \pm\pi$ ):

$$u_2(\theta = \pi) - u_2(\theta = -\pi) = \frac{\kappa + 1}{G} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (5.31)$$

$$u_1(\theta = \pi) - u_1(\theta = -\pi) = \frac{\kappa + 1}{G} K_{II} \sqrt{\frac{r}{2\pi}}$$

onde  $K_I$  e  $K_{II}$  são os FIT na ponta da trinca,  $r$  é a distância da ponta da trinca,  $\theta$  é o ângulo medido a partir do plano da trinca como mostra a FIGURA 2,  $G$  o módulo de elasticidade transversal e  $\kappa = 3 - 4\eta$ , sendo  $\eta = \nu$  para o EPD e  $\eta = \nu / (1 + \nu)$  para o EPT.

Considera-se a FIGURA 16, onde o ponto A se refere à ponta da trinca, os pontos B e D estão na face superior da trinca, opostos aos pontos E e C, estão na face inferior da trinca e os pontos F e G estão situados à frente da trinca. As distâncias do ponto B, C e F às extremidades variam de acordo com o tipo de elemento usado:

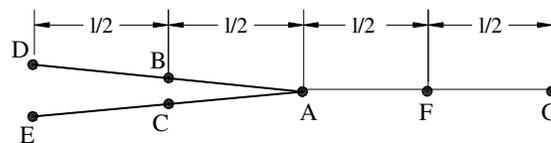


FIGURA 16 - Elementos contínuos de ponta de trinca.

### 5.4.1 Técnica da extrapolação

Os valores de  $K_I$  e  $K_{II}$  são calculados em pontos próximos a superfície da trinca e então, é feita uma extrapolação linear para a ponta da trinca. Para os pontos  $B$  e  $C$  e para os pontos  $D$  e  $E$  considerando o elemento quadrático contínuo ( $r = \ell / 2$ ) tem-se, para os FIT a partir das expressões de Eq. (5.31), respectivamente:

$$K_I^{BC} = \frac{2G}{\kappa+1} \sqrt{\frac{\pi}{\ell}} (u_2^B - u_2^C) \quad (5.32)$$

$$K_{II}^{BC} = \frac{2G}{\kappa+1} \sqrt{\frac{\pi}{\ell}} (u_1^B - u_1^C)$$

$$K_I^{DE} = \frac{G}{\kappa+1} \sqrt{\frac{2\pi}{\ell}} (u_2^D - u_2^E) \quad (5.33)$$

$$K_{II}^{DE} = \frac{G}{\kappa+1} \sqrt{\frac{2\pi}{\ell}} (u_1^D - u_1^E)$$

Fazendo a extrapolação linear para a ponta da trinca (ponto A), encontra-se o valor de  $K_I$  e  $K_{II}$ :

$$K_I = 2K_I^{BC} - K_I^{DE} \quad (5.34)$$

$$K_{II} = 2K_{II}^{BC} - K_{II}^{DE}$$

No caso de elementos quadráticos descontínuos retos, com os nós funcionais extremos localizados em pontos internos distantes de  $\ell / 6$  dos nós de extremidade, sendo  $\ell$  o comprimento do elemento. Os dois elementos em lados opostos que compartilham a ponta da trinca estão mostrados na FIGURA 17.

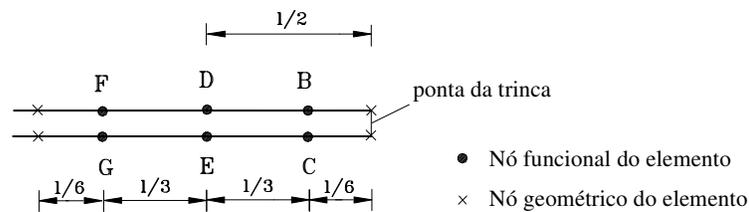


FIGURA 17 – Elementos descontínuos de ponta de trinca

Conforme descrito anteriormente o cálculo de  $K_I$  e  $K_{II}$  com base nos deslocamentos relativos dos nós do elemento próximo à ponta da trinca, de acordo com a FIGURA 17, é realizado pelas seguintes expressões:

$$K_I^{DE} = \frac{2G}{\kappa+1} \sqrt{\frac{\pi}{\ell}} (u_2^D - u_2^E) \quad (5.35)$$

$$K_{II}^{DE} = \frac{2G}{\kappa+1} \sqrt{\frac{\pi}{\ell}} (u_1^D - u_1^E)$$

$$K_I^{FG} = \frac{2G}{\kappa+1} \sqrt{\frac{3\pi}{5\ell}} (u_2^F - u_2^G) \quad (5.36)$$

$$K_{II}^{FG} = \frac{2G}{\kappa+1} \sqrt{\frac{3\pi}{5\ell}} (u_1^F - u_1^G)$$

sendo  $G$  o módulo de elasticidade transversal,  $\ell$  o comprimento do elemento e  $\kappa = 3-4\eta$ , sendo  $\eta = \nu$  para o EPD e  $\eta = \nu / (1+\nu)$  para o EPT. Usando-se as Eq. (5.35) e a Eq. (5.36) e fazendo-se a extrapolação dos deslocamentos para a ponta trinca tem-se:

$$K_I = \frac{G}{\kappa+1} \sqrt{\frac{\pi}{\ell}} \left[ 5(u_2^D - u_2^E) - \frac{3\sqrt{15}}{5} (u_2^F - u_2^G) \right] \quad (5.37)$$

$$K_{II} = \frac{G}{\kappa+1} \sqrt{\frac{\pi}{\ell}} \left[ 5(u_1^D - u_1^E) - \frac{3\sqrt{15}}{5} (u_1^F - u_1^G) \right]$$

#### 5.4.2 Fórmula de deslocamento de um ponto

A técnica de deslocamento de um ponto consiste em tomar o valor do deslocamento relativo em um par de pontos o mais próximo possível da ponta da trinca se utilizar as expressões de Eq. (5.31) para se calcular  $K_I$  e  $K_{II}$ . Levando-se em conta a FIGURA 17 determina-se os FIT para os nós adjacentes à ponta da trinca para o elemento quadrático descontínuo.

$$K_I^{BC} = \frac{2G}{\kappa+1} \sqrt{\frac{3\pi}{\ell}} (u_2^B - u_2^C) \quad (5.38)$$

$$K_{II}^{BC} = \frac{2G}{\kappa+1} \sqrt{\frac{3\pi}{\ell}} (u_1^B - u_1^C)$$

### 5.4.3 Uso de elementos “quarter point”

O elemento do tipo QP é uma alternativa para a modelagem das superfícies da trinca que consegue representar a singularidade dos campos de tensões e deslocamentos na ponta da trinca. Estes são elementos quadráticos que possuem o nó intermediário posicionado a um quarto do seu comprimento em relação a uma extremidade. Para modelar a trinca, os elementos do tipo QP são usados de acordo com a FIGURA 18.

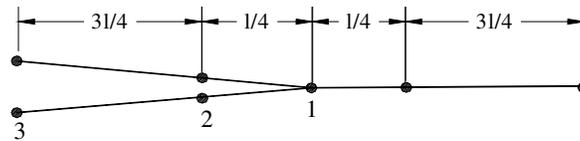


FIGURA 18 - Elementos do tipo “QP”.

O campo de deslocamentos parametrizado pelas funções de forma da Lagrange para esses elementos, em função de  $r$ , é dado por:

$$u = u^1 + (-3u^1 + 4u^2 - u^3) \sqrt{\frac{r}{l}} + 2(u^1 - 2u^2 + u^3) \left(\frac{r}{l}\right) \quad (5.39)$$

sendo  $r$  distância da ponta da trinca e  $u^1, u^2, u^3$  os deslocamentos nos nós e  $l$  o comprimento do elemento. A variável  $\sqrt{r}$  presente na Eq. (5.39) reproduz a singularidade dos campos elásticos na vizinhança da ponta da trinca, solucionando o problema na determinação dos FIT.

### 5.4.4 Subtração da singularidade na ponta da trinca

O campo de tensões e deslocamentos na vizinhança da ponta da trinca para um problema plano da MFEL para o modo I e II foi apresentada pelas Eq. (3.3) e Eq. (3.4) para as tensões e Eq. (3.4) e Eq. (3.5) para os deslocamentos. Verifica-se, como já dito anteriormente, que quando  $r \rightarrow 0$ , isto é, na região próxima à ponta da trinca tem-se um comportamento singular das tensões. Esta singularidade pode ser resolvida pela técnica da subtração da singularidade que consiste em se remover completamente o campo singular de forma que reste apenas um campo não singular para ser modelado numericamente.

O método da subtração da singularidade será descrito para um problema de trinca bidimensional elástico linear do modo I. Em geral, o campo de deslocamentos e de forças de superfície pode ser escrito:

$$\begin{aligned} u &= u^R + u^S \\ t &= t^R + t^S \end{aligned} \quad (5.40)$$

sendo  $u^R$  e  $t^R$  os campos regulares e  $u^S$  e  $t^S$  os campos singulares.

Os campos singulares de tensões e deslocamentos na ponta da trinca são conhecidos e obtidos na MFEL, como mostrado anteriormente. Com isso determinam-se os campos regulares, dados abaixo:

$$\begin{aligned} u^R &= u - u^S \\ t^R &= t - t^S \end{aligned} \quad (5.41)$$

Uma vez que a singularidade em  $t$  e  $u$  têm a mesma forma funcional que  $t^S$  e  $u^S$ , esses campos se cancelam através da escolha adequada de  $K_I$  nas expressões dos deslocamentos e forças de superfície. Levando estes novos campos na EIC, tem-se:

$$C_{ij}(x')u_j(x') = - \int_{\langle \Gamma \rangle} u_j^R(x) T_{ij}(x',x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} t_j^R(x) U_{ij}(x',x) d\Gamma(x) \quad (5.42)$$

As condições de contorno do problema analisado são também modificadas e carregam uma nova incógnita do problema, o parâmetro  $K_I$ . As novas condições de contorno são dadas abaixo:

$$\begin{aligned} \bar{u}^R &= \bar{u} - \bar{u}^S \\ \bar{t}^R &= \bar{t} - \bar{t}^S \end{aligned} \quad (5.43)$$

O sistema de equações do MEC, a partir da aplicação das condições de contorno regularizadas é dado por:

$$[A][X] = [B][Y] - [B][C]K_I \quad (5.44)$$

sendo  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  as matrizes dos coeficientes,  $\mathbf{X}$  o vetor contendo as incógnitas do contorno  $u^R$  ou  $t^R$ ,  $\mathbf{Y}$  o vetor contendo as condições de contorno prescritas  $\bar{u}$  ou  $\bar{t}$ ,  $\mathbf{C}$  o vetor contendo os componentes  $\bar{u}^S$  ou  $\bar{t}^S$  e  $K_I$  o FIT.

Este sistema contém uma incógnita a mais que o número de equações. E para resolver este problema deve-se reduzir de 1 o número de incógnitas fazendo  $t^R = 0$  na ponta da trinca.

A técnica descrita acima é válida para problemas simétricos bidimensionais, com uma ou mais trincas, sendo o eixo de simetria coincidente com o eixo das trincas. Para problemas planos não simétricos, onde devem ser determinados  $K_I$  e  $K_{II}$ , essa técnica é baseada nas funções de WILLIAMS (1952).

#### 5.4.5 Integral J

A implementação numérica da integral J é realizada a partir dos dados referentes ao campo elástico do problema, determinados por meio de métodos numéricos. Um contorno ao redor da trinca, isto é, o caminho de integração  $\Gamma_J$ , é definido como uma série de pontos internos ao corpo e o cálculo aproximado da integral J é realizado em cada um dos segmentos do contorno FIGURA 6. A integral J discretizada pode ser escrita em componentes cartesianas, como:

$$J = \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_{Ji}} \left\{ \frac{1}{2} [\sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{12}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} n_1 - [\sigma_{12} \sigma_{22} \sigma_{12}] \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{Bmatrix} \right\} d\Gamma \quad (5.45)$$

onde  $\sigma_{jk}$  e  $\varepsilon_{jk}$  são as componentes dos vetores de tensão e deformação, respectivamente e  $n_1$  a normal ao caminho de integração  $\Gamma_J$ . Uma vez que essas variáveis são conhecidas, deve-se apenas determinar as derivadas parciais do campo de deslocamentos em relação ao eixo  $x_1$ .

Como a integral J está relacionada com a variação da energia potencial, não é necessário tratar o problema dos campos de tensões e deformações singulares na ponta da trinca.

Isto é devido à pequena contribuição que os campos na ponta da trinca representam na energia de deformação total do corpo.

Em MFEL a integral J se relaciona com os FIT através da expressão de Eq. (3.11). Em PORTELA et al. (1992),  $K_I$  e  $K_{II}$  são determinados a partir desta relação, uma vez determinados os valores da integral J.

## 5.5 Programa Computacional

O programa computacional desenvolvido durante este trabalho permite ao usuário analisar problemas bidimensionais de MFEL, com modos I, II ou modos mistos de solitação. São obtidos deslocamentos e forças de superfície no contorno, as tensões e deslocamentos em pontos internos especificados pelo usuário, bem como alguns parâmetros representativos da MFEL. O algoritmo implementado se baseia na formulação dual do MEC.

O programa foi desenvolvido a partir do programa elaborado por RIBEIRO (2003) para a análise de problemas bidimensionais da teoria de elasticidade. Este é composto de 57 sub-rotinas ou funções incluindo a rotina principal, sendo 7 novas rotinas e 3 adaptadas ao problema da mecânica da fratura. A estrutura do programa é apresentada de forma esquemática na FIGURA 19. É feita a seguir uma breve descrição das sub-rotinas criadas ou modificadas para se adaptarem à formulação dual que compõem o programa. A descrição detalhada das rotinas anteriores que compõe o programa está mostrada em RIBEIRO (2003). A descrição do arquivo de entrada, as principais variáveis do programa implementado, bem como um esquema das principais sub-rotinas do programa são apresentados no Anexo A.

Na rotina principal (MAIN) são definidas as dimensões máximas das matrizes e vetores usados no programa. Esta rotina chama a sub-rotina BEM, que é a principal sub-rotina do programa. Dentro da BEM é chamada a sub-rotina BCREAD, onde são lidos todos os dados de entrada do problema. Nesta rotina, além de todos os dados já lidos no programa inicial, a presença da trinca juntamente com a quantidade de trincas presentes no problema, suas características geométricas, seus elementos e nós com indicadores da

face correspondente, os nós e elementos localizados na ponta da trinca, e outros dados necessários no processo se tornam conhecidos. Como dito anteriormente, os elementos que compõem a trinca são elementos quadráticos descontínuos. Esses elementos são gerados na BCREAD, onde são lidos os nós duplos na interseção entre um elemento e outro e em seguida as novas coordenadas dos nós são determinadas de forma que os nós geométricos sejam deslocados e se tornem os nós funcionais do elemento, internos ao domínio do elemento, sendo determinadas suas coordenadas intrínsecas e globais.

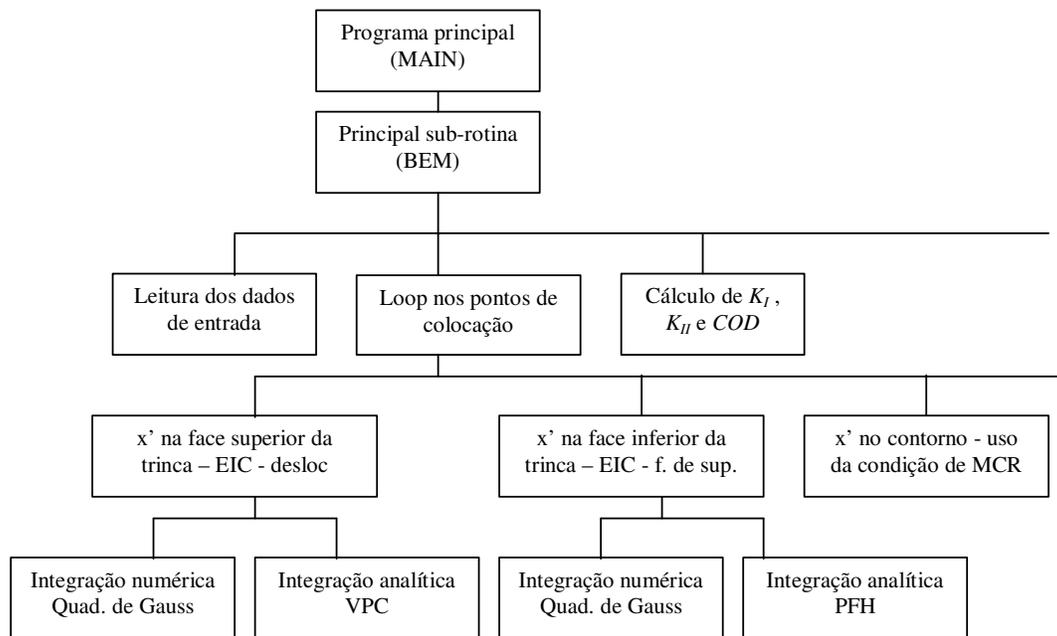


FIGURA 19 – Estrutura do Programa Computacional

Após a finalização da leitura de dados na BCREAD, é chamada a sub-rotina COLLOC onde é feito o ciclo sobre os pontos de colocação, sejam eles pertencentes ao contorno, ou à trinca. Faz-se um teste para saber se o ponto fonte pertence ao contorno externo do problema ou se este pertence à superfície da trinca. Quando este se localiza no contorno externo, a sub-rotina ADISSTAND é chamada e calculam-se numericamente as integrais de contorno nos elementos através da formulação clássica para deslocamentos, gerando desta forma os coeficientes da matriz e do vetor do sistema de equações do MEC, para as linhas correspondentes. Usa-se a condição de MCR na determinação dos termos singulares, pertencentes à diagonal principal da matriz  $[A]$ . As integrais de contorno são calculadas através da quadratura Gaussiana ou quadratura logarítmica quando o ponto fonte pertence ao elemento sob integração. Ainda na sub-rotina

COLLOC, quando o ponto de colocação pertence à trinca, realiza-se outro teste, no qual se obtém a informação de qual das faces da trinca pertence o ponto fonte. Caso este pertença à face superior da trinca, chama-se a sub-rotina ADISTAP. Nessa rotina é feito um somatório em todos os elementos do contorno e para cada um desses elementos é feito um teste que verifica se este contém ou não o ponto fonte ou seu correspondente na face oposta da trinca. A partir disso descobre-se qual o tipo de integração deve ser usada em determinado elemento. Caso o elemento contenha ponto fonte, ou contenha seu nó correspondente na outra face da trinca, a EIC para deslocamentos resulta em uma integral no sentido de VPC. Nesse caso, é chamada a sub-rotina ANTHAD onde a integral singular presente na EIC para deslocamentos é resolvida analiticamente, pela aplicação direta das fórmulas descritas anteriormente. Se o elemento não contém o ponto de colocação ou o seu coincidente na face oposta, a integral regular da EIC para deslocamento é efetuada na sub-rotina ADISDES através da quadratura Gaussiana. Voltando, à sub-rotina COLLOC, para o caso do ponto fonte estar na face inferior da trinca onde se aplica a EIC para força de superfície, chama-se a sub-rotina ADISCRAT. Faz-se um somatório dos elementos do contorno e testa-se a natureza desses elementos, quanto à singularidade. Quando o ponto fonte, ou seu correspondente coincide com um dos nós do elemento que está sendo integrado, a EIC para forças de superfície apresenta uma integral hiper-singular que é avaliada analiticamente na sub-rotina ANSAT. Quando o elemento que será integrado não contém o ponto fonte ou seu coincidente na face oposta, resolve-se a EIC para força de superfície que contém uma integral regular na sub-rotina ADISTRAC.

Após a montagem do sistema de equações, este é resolvido numericamente através do método de eliminação de Gauss como descrito anteriormente em RIBEIRO (2003), dentro da sub-rotina BEM. De posse dos resultados é gerado o arquivo de saída, onde são escritos os deslocamentos nodais no sistema global e local, as forças de superfície nos elementos, os parâmetros da mecânica da fratura:  $K_I$ ,  $K_{II}$  e o  $COD$ . Estes últimos são avaliados pela sub-rotina SIF, em uma etapa de pós-processamento, que é chamada da própria sub-rotina BEM, após a determinação de todas as incógnitas do contorno.

# 6

## RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos das análises de problemas bidimensionais da MFEL, por meio da formulação dual. Os problemas analisados englobam casos triviais cujas soluções se encontram nos manuais de mecânica da fratura tais como TADA (2000). O estudo dos problemas de mecânica da fratura pela formulação dual tem como intuito a avaliação da capacidade deste método diante das dificuldades envolvidas devido à geometria das trincas. O uso das técnicas baseadas nos deslocamentos relativos para a determinação de  $K_I$  e  $K_{II}$  são comparados com soluções conhecidas na literatura para testar a precisão dos resultados obtidos no programa computacional.

### 6.1 Chapa com trinca centrada – Modo I

O problema clássico da mecânica da fratura constituído por uma chapa retangular sujeita a tração simples, contendo uma trinca no centro é primeiramente analisado. Este possui eixo de simetria coincidente com a trinca e é possível analisá-lo pelo MEC

convencional. CRUSE (1988) analisa o problema desta maneira, isto é, via MEC lançando mão de sua geometria, onde apenas um quarto da placa é discretizado e as condições de contorno impostas adequadamente.

Estuda-se uma chapa fina de dimensões  $20 \times 40$  sujeita a uma tensão remota de tração  $\sigma=1000$ , com uma trinca centrada de comprimento  $2a=2$ . A geometria do problema está mostrada na FIGURA 20.

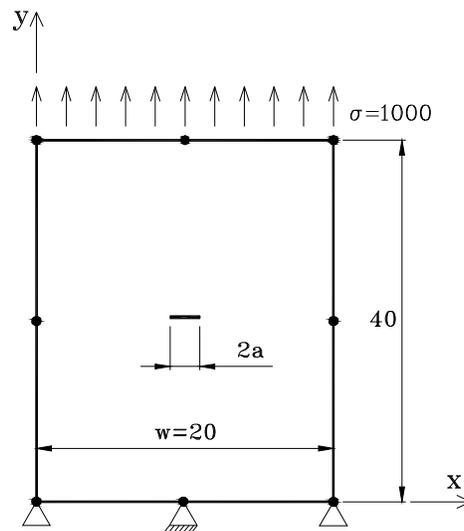


FIGURA 20 – Geometria do problema – Exemplo 1

Serão adotados como propriedades do material o módulo de elasticidade  $E=2,1 \times 10^6$  e o coeficiente de Poisson  $\nu=0,25$ , neste exemplo e nos seguintes. Por se tratarem de chapas finas, os problemas são caracterizados como EPT.

São analisados os seguintes parâmetros representativos de mecânica da fratura: os FIT  $K_I$  e  $K_{II}$ , e a abertura máxima da trinca  $COD_{max}$ . As técnicas adotadas são: a extrapolação dos deslocamentos e a técnica dos deslocamentos relativos em um ponto, para o nó da ponta da trinca e para o nó do meio do elemento da ponta da trinca, tendo em vista a determinação dos FIT. Para determinar  $COD_{max}$  calcula-se o deslocamento relativo entre os nós situados no centro da trinca. Os valores obtidos são comparados com os resultados paramétricos encontrados em TADA et al. (2000). Para o problema em estudo, FIGURA 20, o FIT e a abertura máxima da trinca são dados, respectivamente, por TADA et al. (2000) como:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \cdot \sqrt{\sec \frac{\pi a}{w}} \quad (6.1)$$

$$COD_{max} = \frac{4\sigma a}{E} \cdot \left\{ -0,071 - 0,535 \left( \frac{a}{b} \right) + 0,169 \left( \frac{a}{b} \right)^2 - 0,09 \left( \frac{a}{b} \right)^3 + 0,02 \left( \frac{a}{b} \right)^4 - 1,071 \frac{1}{a/b} \ln \left( 1 - \frac{a}{b} \right) \right\} \quad (6.2)$$

onde  $w$  é a largura da chapa, e  $b=w/2$ . Segundo TADA et al. (2000), a precisão da fórmula para cálculo do FIT, Eq. (6.1), é de 0,3% para valores de  $a/b \leq 0,7$ , e da fórmula para cálculo da abertura máxima da trinca Eq. (6.2) de 0,6% para qualquer valor de  $a/b$ .

A discretização do problema é feita por uma malha de 4, 30 e 120 elementos quadráticos contínuos no contorno externo e o contorno de trinca é dividido em malhas de 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 e 16 elementos quadráticos descontínuos. A convergência das grandezas do contorno externo é atingida com a malha de 30 elementos de contorno, já que não existe diferença percentual entre esta e a de 120 elementos conforme TABELA 1. Neste exemplo, a discretização do contorno externo em 4 elementos quadráticos contínuos também apresenta ótimos resultados para as grandezas do contorno. Em nenhuma das modelagens ocorre erro na interpolação da geometria do contorno externo e não existe erro na aproximação de suas grandezas, uma vez que as funções de interpolação utilizadas são quadráticas e nestes problemas os deslocamentos e forças de superfície têm variação de ordem inferior, ou seja, as aproximações dos valores do contorno por meio desses elementos seriam teoricamente suficientes para representar de forma exata a resposta destes problemas caso não houvesse erros de integração.

Os FIT para o modo I de solicitação foram calculados para o problema conforme descrito anteriormente, (utilizando as diversas malhas de elementos contínuos no contorno e descontínuos na trinca). Estes são apresentados na TABELA 1 para a chapa com trinca centrada, juntamente com os erros relativos dos FIT. Na TABELA 1  $N$  representa o número de elementos usados na discretização da trinca. Usa-se o símbolo  $K_I - PT$  para representar  $K_I$  determinado a partir dos deslocamentos relativos dos nós funcionais mais próximos à ponta da trinca conforme FIGURA 21 usando a expressão

da Eq (5.38). O símbolo  $K_I - MN$  denota o FIT avaliado a partir dos deslocamentos relativos do par de nós do meio do elemento de ponta de trinca, conforme a FIGURA 21 e pela Eq. (5.35). Finalmente, o símbolo  $K_I - Extrap$  significa o uso da técnica da extrapolação de deslocamentos mostrada na expressão da Eq. (5.37). O FIT de modo II de sollicitação,  $K_{II}$ , foi também calculado e apresentou resultado nulo, coerente com a chapa em estudo sujeita apenas a tração simples.

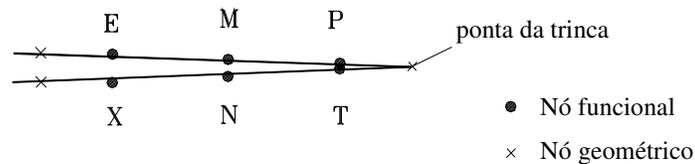


FIGURA 21 – Elemento de ponta de trinca

TABELA 1 -  $K_I$  – Trinca centrada

Discretização de contorno = 4 elementos - Dimensão da Trinca - $a/w=0,1$							
N	$k_I$ - refer	$k_I$ - Extrap.	%E	$k_I$ - PT	%E	$k_I$ - MN	%E
2	1783,467	2073,0	16,2	1866	4,6	1330	-25,4
4	1783,467	1888,0	5,9	1360	-23,7	1563	-12,4
6	1783,467	1863,0	4,5	1122	-37,1	1639	-8,1
8	1783,467	1855,0	4,0	976	-45,3	1676	-6,0
10	1783,467	1851,0	3,8	875	-50,9	1697	-4,8
12	1783,467	1847,0	3,6	800	-55,1	1710	-4,1
14	1783,467	1845,0	3,5	742	-58,4	1720	-3,6
16	1783,467	1846,0	3,5	694	-61,1	1729	-3,1
Discretização de contorno = 30 elementos - Dimensão da Trinca - $a/w=0,1$							
N	$k_I$ - refer	$k_I$ - Extrap.	%E	$k_I$ - PT	%E	$k_I$ - MN	%E
2	1783,467	2079	16,6	1871	4,91	1333	-25,3
4	1783,467	1893	6,1	1364	-23,52	1567	-12,1
6	1783,467	1868	4,7	1125	-36,92	1644	-7,8
8	1783,467	1860	4,3	978	-45,16	1680	-5,8
10	1783,467	1856	4,1	877	-50,83	1702	-4,6
12	1783,467	1852	3,8	802	-55,03	1714	-3,9
14	1783,467	1850	3,7	744	-58,28	1724	-3,3
16	1783,467	1851	3,8	694	-61,09	1733	-2,8
Discretização de contorno = 120 elementos - Dimensão da Trinca - $a/w=0,1$							
N	$k_I$ - refer	$k_I$ - Extrap.	%E	$k_I$ - PT	%E	$k_I$ - MN	%E
2	1783,467	2079	16,6	1871	4,91	1333	-25,3
4	1783,467	1893	6,1	1364	-23,52	1567	-12,1
6	1783,467	1868	4,7	1125	-36,92	1644	-7,8
8	1783,467	1860	4,3	978	-45,16	1680	-5,8
10	1783,467	1856	4,1	877	-50,83	1702	-4,6
12	1783,467	1852	3,8	802	-55,03	1714	-3,9
14	1783,467	1850	3,7	744	-58,28	1724	-3,3
16	1783,467	1851	3,8	694	-61,09	1733	-2,8

Pode-se observar que a técnica da extrapolação conduziu aos melhores resultados no cálculo de  $K_I$ . Para essa técnica, obteve-se erro médio em torno de 6% para as malhas mostradas na TABELA 1. A fórmula baseada no nó adjacente à trinca, representada por  $K_I - PT$  apresentou os piores resultados para a trinca com a malha mais refinada. Neste caso, a precisão no cálculo do FIT, não pode ser considerada eficiente, obtendo erros relativamente altos. Estes parecem estar relacionados com a proximidade da ponta da trinca, pois a cada discretização, a distância do nó funcional adjacente à extremidade da trinca vai diminuindo e o cálculo de  $K_I$  é realizado com base em resultados de deslocamentos relativos de um nó cada vez mais próximo do ponto singular. Esse deslocamento relativo vai diminuindo e tendendo a zero com o refinamento. Os resultados obtidos para o FIT de modo I por meio da técnica de deslocamentos relativos dos nós do meio do elemento adjacente à ponta da trinca, representado por  $K_I - MN$ , foram bastante precisos para as malhas mais refinadas.

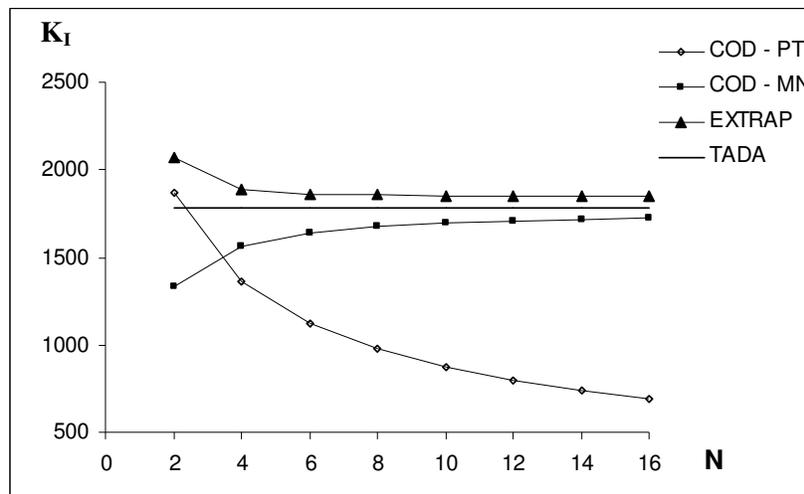


FIGURA 22 – Estudo de  $K_I$  em relação ao número de nós da trinca

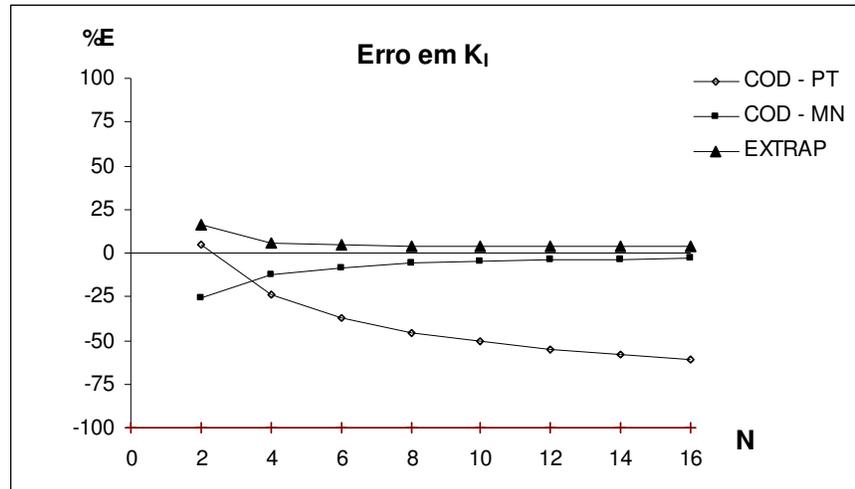


FIGURA 23 – Estudo do erro percentual de  $K_I$

Analisa-se a seguir a abertura relativa máxima da trinca, o  $COD_{max}$ , nos pontos do centro da trinca. A TABELA 2 mostra os valores deste parâmetro obtidos no programa e seus erros relativos aos valores encontrados por meio da Eq. (6.2). O contorno externo do problema é discretizado em 4, 30 e 120 elementos quadráticos contínuos e a trinca em  $N$  elementos quadráticos descontínuos, de acordo com a TABELA 2. O parâmetro  $COD_{max}$  apresentou boas respostas com erros relativos não significativos.

TABELA 2 - Abertura máxima da trinca – Trinca centrada

Discretização de contorno		4 elementos		30 elementos		120 elementos	
N	$COD_{max}$ ref.	$COD_{max}$	%E	$COD_{max}$	%E	$COD_{max}$	%E
2	0,00191	0,00211	10,3	0,00211	10,3	0,00211	10,3
4	0,00191	0,00194	1,4	0,00195	2,1	0,00195	2,1
6	0,00191	0,00195	2,1	0,00196	2,6	0,00191	0,0
8	0,00191	0,00194	1,6	0,00194	1,6	0,00194	1,6
10	0,00191	0,00194	1,6	0,00194	1,6	0,00194	1,6
12	0,00191	0,00193	1,0	0,00194	1,6	0,00194	1,6
14	0,00191	0,00193	1,0	0,00194	1,6	0,00194	1,6
16	0,00191	0,00193	1,0	0,00193	1,0	0,00193	1,0

A formulação dual mostra-se bastante eficiente na computação da abertura máxima de trinca no problema de trinca centrada. Uma vez que este parâmetro é avaliado a maiores distâncias da ponta da trinca que o FIT, espera-se que a do campo de tensão singular na ponta da trinca tenha menor influência na computação do mesmo. Além disso, este valor é obtido de forma direta através da solução do MECD, não envolvendo erros numéricos adicionais, como ocorre na obtenção de  $K_I$  através da extrapolação do

deslocamento e das outras técnicas usadas. A oscilação dos resultados, na discretização da trinca não é tão pronunciada quanto para a avaliação do FIT.

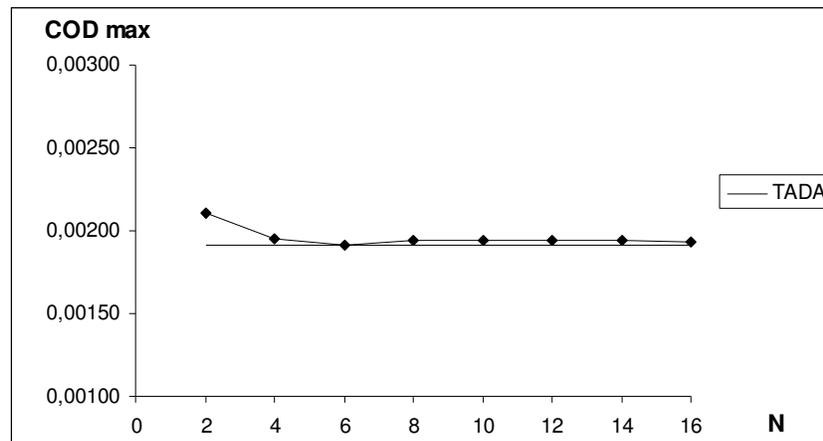


FIGURA 24 – Abertura máxima de trinca em relação ao número de nós de trinca

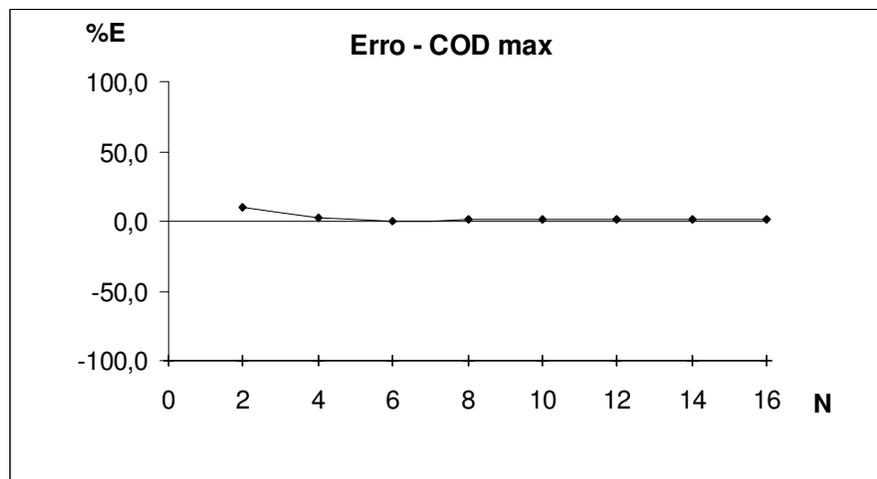


FIGURA 25 – Estudo do erro percentual da abertura máxima de trinca

Foram analisados casos de diferentes tamanhos de trinca, considerando-se os seguintes valores da relação entre comprimento da trinca e largura da chapa é:  $a/w = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$  e como aparece na FIGURA 20,  $h/w=2$ , sendo  $h$  a altura da chapa. O contorno foi discretizado com 30 elementos quadráticos e a trinca com 12 elementos quadráticos descontínuos. Aumenta-se a largura relativa da trinca na chapa e os resultados de  $K_I$  se comportam conforme apresentado na FIGURA 26. Novamente são analisadas as seguintes técnicas numéricas de obtenção de  $K_I$ : extrapolação de

deslocamentos, deslocamentos relativos no par de nós mais próximos à ponta de trinca e deslocamentos relativos dos nós do meio do elemento adjacente à ponta da trinca.

Foram determinados os erros percentuais para  $K_I$  com relação às soluções paramétricas encontradas em TADA (2000), sendo os valores apresentados na TABELA 3. Usa-se o símbolo  $COD - PT$  para representar  $K_I$  determinado a partir dos deslocamentos relativos do par de nós mais próximos a ponta da trinca como na Eq. (5.38), e o símbolo  $COD - MN$  para representar os nós  $K_I$  a partir do nó do meio do elemento adjacente à ponta de trinca conforme a Eq. (5.35), e o símbolo  $EXTRAP$  significa o uso da técnica da extrapolação de deslocamentos de acordo com a Eq. (5.37).

TABELA 3 –  $K_I$  – Variação das dimensões da trinca – Trinca centrada

	$K_I$	% E - $K_I$	$K_I$	% E - $K_I$	$K_I$	% E - $K_I$
<b>a/w</b>	<b>0,1</b>		<b>0,2</b>		<b>0,3</b>	
BROEK	1783,47		2521,12		3111,16	
COD - PT	802,00	-55,0	1636,00	-35,1	2536,00	-18,5
COD - MN	1714,00	-3,9	2473,00	-1,9	3130,00	0,6
EXTRAP	852,00	-52,2	2672,00	6,0	3381,00	8,7
<b>a/w</b>	<b>0,4</b>		<b>0,5</b>		<b>0,6</b>	
BROEK	3592,45		4115,88		4586,22	
COD - PT	3551,00	-1,2	4756,00	15,6	6283,00	37,0
COD - MN	3795,00	5,6	4545,00	10,4	5475,00	19,4
EXTRAP	4101,00	14,2	4914,00	8,1	5928,00	29,3

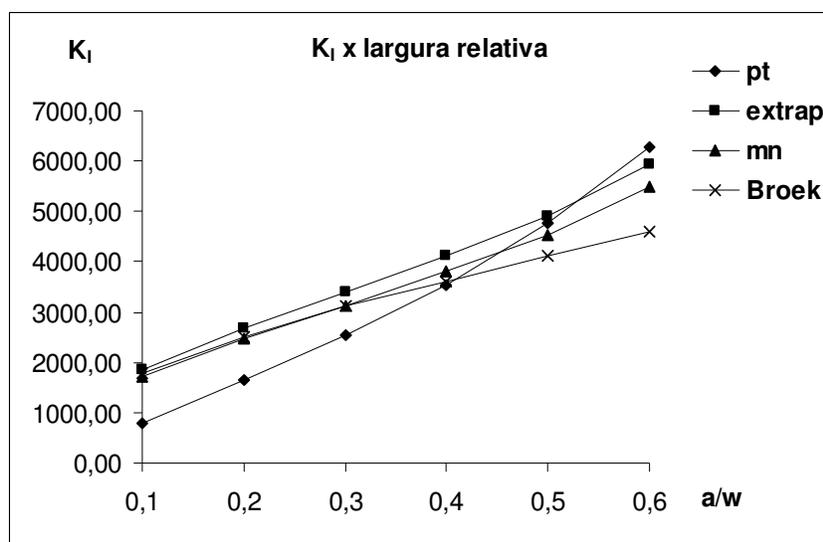


FIGURA 26 – Estudo de  $K_I$  em relação à variação da dimensão da trinca na chapa

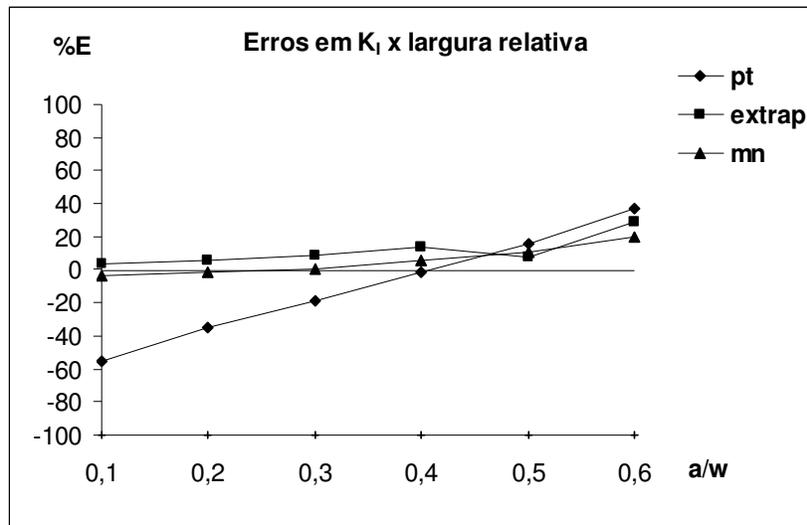


FIGURA 27 – Erro percentual de  $K_I$  na variação da dimensão da trinca na chapa

A partir da análise constata-se também uma perda de precisão nos resultados para as trincas com larguras relativas maiores que um certo valor,  $a/w = 0,6$ , como demonstram os gráficos das FIGURA 26 e FIGURA 27. Além disso o cálculo do FIT de modo I foi mais eficiente usando os deslocamentos relativos do nó do meio do elemento de ponta de trinca.

Na FIGURA 28, são mostradas as soluções para deslocamentos verticais em pontos na face da trinca, obtidas para a chapa com trinca centrada, adotando-se malhas com discretização de 4, 6 e 12 elementos quadráticos nas superfícies da trinca.

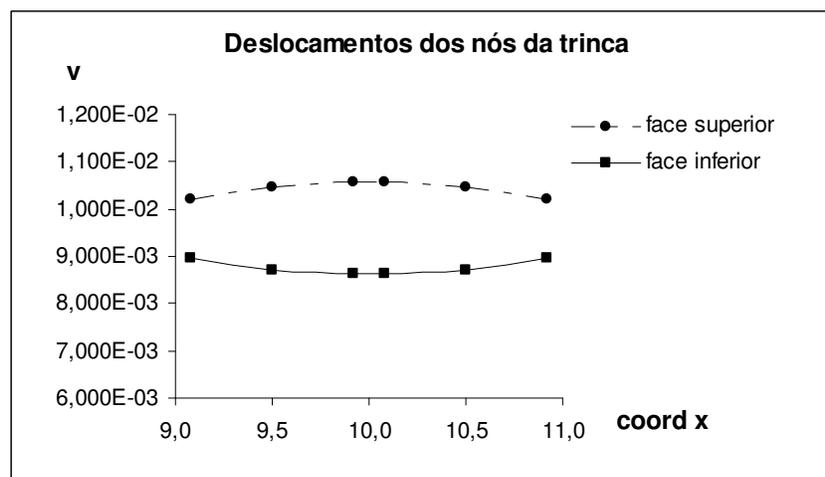
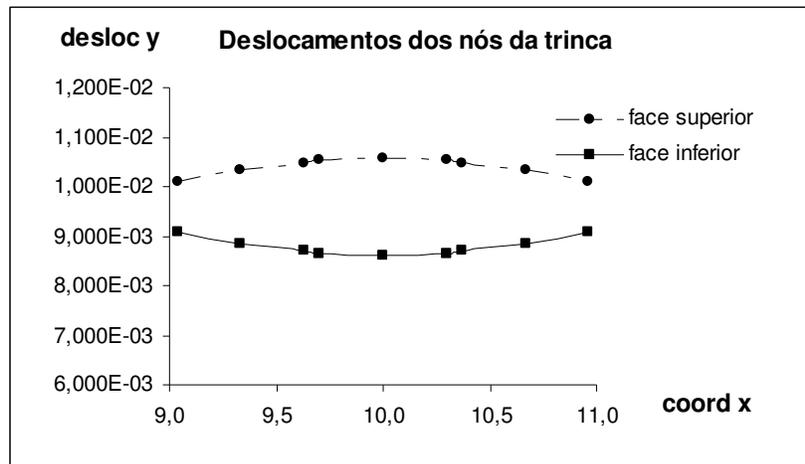
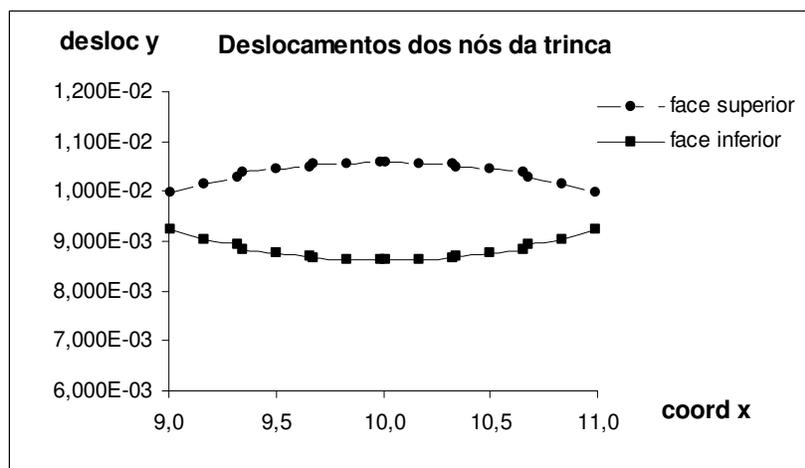


FIGURA 28 – Deslocamentos - eixo y - em pontos da trinca –  $N=4$

FIGURA 29 – Deslocamentos - eixo y - em pontos da trinca –  $N=6$ FIGURA 30 – Deslocamentos - eixo y - em pontos da trinca –  $N=12$ 

Os gráficos das FIGURA 28, FIGURA 29 e FIGURA 30 mostram a configuração da trinca posicionada no centro de uma chapa sujeita à tração simples. Os nós do centro da trinca são os que têm maior deslocamento relativo, como é esperado.

Na TABELA 4, os deslocamentos dos nós nas faces superior e inferior da trinca para a malha simples de 4 elementos são apresentados. Através desta mostra-se a simetria dos deslocamentos horizontais em relação ao centro da trinca coincidente com o centro da placa. Os deslocamentos verticais são coerentes com a modelagem do problema e imposição das condições de contorno.

TABELA 4 – Deslocamentos dos nós da face da trinca

4 elementos de trinca				
Nós	coord. x	coord. y	desloc. x	desloc. y
face superior	9,08	20,00	0,000389	0,010222
	9,50	20,00	0,000235	0,010474
	9,92	20,00	0,000073	0,010572
	10,08	20,00	-0,000073	0,010572
	10,50	20,00	-0,000235	0,010474
	10,92	20,00	-0,000389	0,010222
face inferior	10,92	20,00	-0,000390	0,008978
	10,50	20,00	-0,000236	0,008724
	10,08	20,00	-0,000074	0,008626
	9,92	20,00	0,000074	0,008626
	9,50	20,00	0,000236	0,008724
	9,08	20,00	0,000390	0,008978

## 6.2 Chapa com trinca centrada - Modo II

O problema de uma chapa com uma trinca de centro sujeita a tensão de cisalhamento puro, isto é, chapa com trinca no modo II de carregamento, será também analisada segundo os critérios da mecânica da fratura. A chapa de espessura unitária tem dimensões de  $20 \times 40$  e é sujeita a uma tensão remota de tração  $\tau=1000$  e a trinca tem comprimento  $2a=2$ . A geometria deste exemplo está mostrada na FIGURA 31.

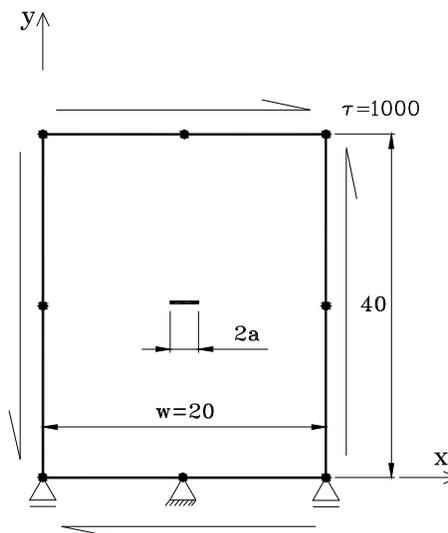


FIGURA 31 – Geometria do problema – Exemplo 2

Assim como no exemplo anterior, a discretização do contorno externo é feita por uma malha de 4, 30 e 120 elementos quadráticos contínuos e a trinca é dividida em 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 e 16 elementos quadráticos descontínuos. Observa-se, como no exemplo anterior, que a convergência das grandezas no contorno externo é atingida com a malha de 30 elementos de contorno. Sendo assim, neste caso, adota-se a malha de 30 elementos quadráticos contínuos para o contorno e a discretização da trinca varia segundo  $N$ , número de elementos quadráticos descontínuos. Os resultados numéricos para  $K_{II}$  estão listados na TABELA 5 juntamente com as soluções de referência. Os símbolos encontrados na TABELA 5  $K_{II} - PT$ ,  $K_{II} - MN$  e  $EXTRAP$  representam as técnicas usadas para o cálculo de  $K_{II}$ , sendo eles referente aos deslocamentos relativos nos pontos adjacentes à ponta da trinca, referente aos pontos vizinhos a esses pontos e por extrapolação de deslocamentos, respectivamente. Através da FIGURA 21 pode-se visualizar os pontos citados acima.

Observa-se que os valores de  $K_{II}$  na TABELA 5 mais próximos dos considerados como exatos foram conseguidos pelo uso da técnica da extrapolação. Através da técnica de deslocamentos relativos no nó adjacente de ponta de trinca obtidos valores muito precisos, no caso da trinca com apenas um elemento de contorno em cada face da trinca, todavia com a discretização da trinca houve total dispersão dos resultados. Verifica-se que os valores calculados de  $K_{II}$  variam bastante em relação aos valores de referência a partir de certo número de elementos de trinca. Por outra parte, o uso da técnica dos deslocamentos relativos, avaliada no nó do meio do elemento de ponta de trinca, obteve uma melhora nos resultados dos FIT de modo II para a trinca mais discretizada.

TABELA 5 –  $K_{II}$  – Trinca centrada

Discretização de contorno = 30 elementos - Dimensão da Trinca - $a/w=0,1$							
N	$k_{II}$ - refer	$k_{II}$ - Extrap.	%E	$k_{II}$ - PT	%E	$k_{II}$ - MN	%E
2	1772	1980,0	11,7	1783	0,6	1270	-28,3
4	1772	1804,0	1,8	1300	-26,6	1493	-15,7
6	1772	1781,0	0,5	1072	-39,5	1567	-11,6
8	1772	1773,0	0,1	933	-47,3	1602	-9,6
10	1772	1770,0	-0,1	837	-52,8	1622	-8,5
12	1772	1766,0	-0,3	765	-56,8	1635	-7,7
14	1772	1764,0	-0,5	709	-60,0	1644	-7,2
16	1772	1765,0	-0,4	664	-62,5	1653	-6,7

Considerando-se os gráficos das FIGURA 32 e FIGURA 33 pode-se observar mais uma vez que para o problema de modo II de solicitação, a técnica representada por *EXTRAP* foi a que apresentou os melhores resultados.

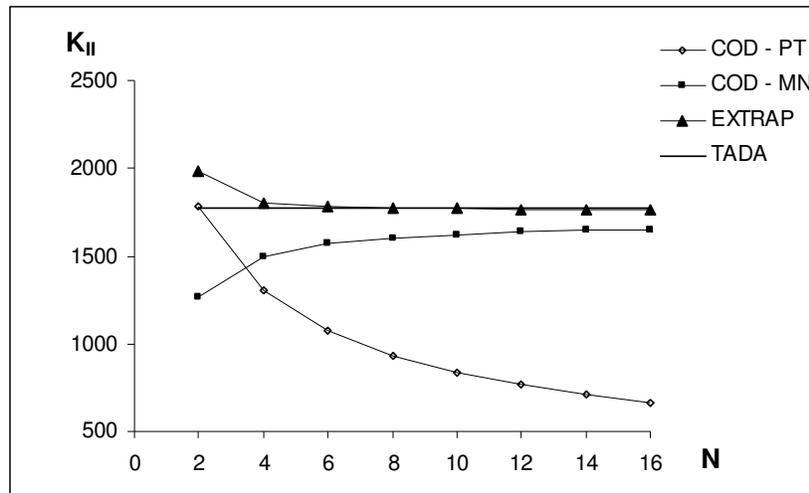


FIGURA 32 – Estudo de  $K_{II}$  em relação ao número de nós da trinca

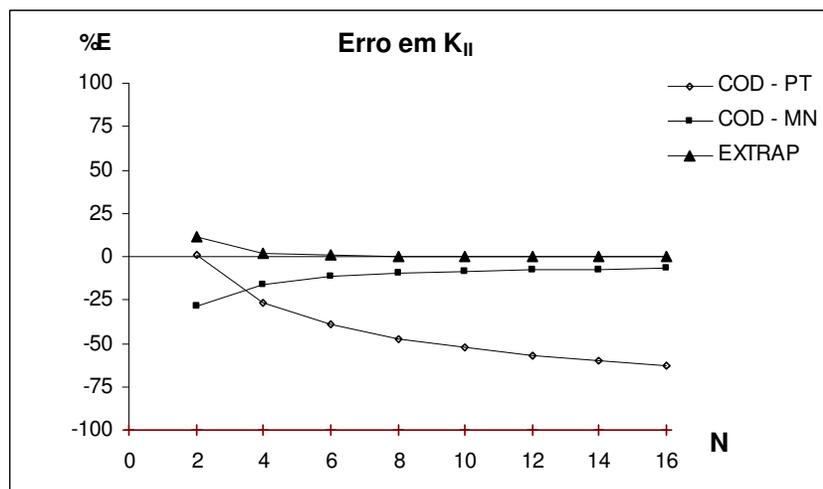


FIGURA 33 – Estudo do erro percentual de  $K_{II}$

Os deslocamentos verticais dos nós da trinca obtidos na saída do programa computacional foram bem próximos de zero, uma vez que a chapa está solicitada apenas à tensão de cisalhamento. Horizontalmente os nós das faces da trinca deslizam uns sobre os outros de um mesmo valor e na mesma direção e sentidos opostos.

### 6.3 Chapa com trinca centrada - Modo misto

Neste exemplo procura-se estudar uma chapa fina retangular de dimensões  $20 \times 40$ , sujeita à tensão remota de tração  $\sigma = 1000$ , com uma trinca inclinada em seu centro. A trinca tem comprimento  $2a = 2$  e forma um ângulo de  $45^\circ$  com a direção horizontal. Este exemplo, cuja geometria está apresentada na FIGURA 34, compreende o modo misto de sollicitação, onde ambos os parâmetros  $K_I$  e  $K_{II}$  são diferentes de zero.

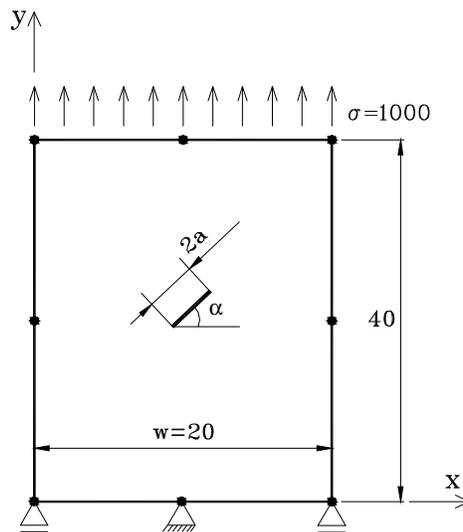


FIGURA 34 – Geometria do problema – Exemplo 3

Para resolver o problema uma malha de 42 elementos de contorno quadráticos foi usada, nos quais 30 elementos quadráticos contínuos discretizam o contorno externo e 12 elementos quadráticos descontínuos discretizam a trinca. Variam-se as dimensões da trinca na chapa, de forma que a relação entre as dimensões da trinca e da chapa ( $a/w$ ) aumenta gradualmente. Os resultados obtidos para  $K_I$  e  $K_{II}$  juntamente com o erro percentual destes coeficientes comparados aos valores de referência encontrados em ALIABADI e ROOKE (1991) estão apresentados na TABELA 6. Novamente, os símbolos desta TABELA 6 *COD – PT*, *COD – MN* e *EXTRAP* já foram explicitados anteriormente neste capítulo.

TABELA 6 –  $K_I$  e  $K_{II}$  – Variação das dimensões da trinca – Trinca inclinada

	$K_I$	$K_{II}$	% E - $K_I$	% E - $K_{II}$	$K_I$	$K_{II}$	% E - $K_I$	% E - $K_{II}$
<b>a/w</b>	<b>0,1</b>				<b>0,4</b>			
Ref.	<b>886</b>	<b>886</b>			<b>1772</b>	<b>1772</b>		
COD - PT	402,0	400,0	-54,6	-54,9	1822,0	1688,0	2,8	-4,7
COD - MN	860,0	855,0	-2,9	-3,5	1966,0	1803,0	10,9	1,7
EXTRAP	929,0	924,0	4,9	4,3	2117,0	1950,0	19,5	10,0
<b>a/w</b>	<b>0,2</b>				<b>0,5</b>			
Ref.	<b>1252,0</b>	<b>1252,0</b>			<b>1981,2</b>	<b>1981,2</b>		
COD - PT	827,0	809,0	-33,9	-35,4	2461,0	2177,0	24,2	9,9
COD - MN	1251,0	1223,0	-0,1	-2,3	2370,0	2077,0	19,6	4,8
EXTRAP	1351,0	1321,0	7,9	5,5	2541,0	2250,0	28,3	13,6
<b>a/w</b>	<b>0,3</b>				<b>0,6</b>			
Ref.	<b>1534,6</b>	<b>1534,6</b>			<b>2170,3</b>	<b>2170,3</b>		
COD - PT	1257,0	1235,0	-18,1	-19,5	3208,0	2713,0	47,8	25,0
COD - MN	1602,0	1524,0	4,4	-0,7	2837,0	2357,0	30,7	8,6
EXTRAP	1729,0	1647,0	12,7	7,3	3021,0	2562,0	39,2	18,1

Através dos gráficos das FIGURA 35, FIGURA 36, FIGURA 37 e FIGURA 38 podem-se visualizar as oscilações nos resultados para cada técnica usada na determinação dos parâmetros da mecânica da fratura quando se aumentam as dimensões relativas da trinca. Nota-se que a técnica de deslocamentos relativos nos nós MN da trinca apresentaram melhores resultados, tanto no cálculo de  $K_I$ , como no cálculo de  $K_{II}$ . Enquanto essa mesma técnica usada para os nós descontínuos de ponta de trinca, os nós PT, apresentaram os piores resultados dentre as três técnicas usadas. Esse fato deve ser devido à proximidade dos nós ao ponto singular na ponta da trinca. Como já dito anteriormente, a abordagem do problema por elementos singulares QP evita essa singularidade e poderia trazer melhores resultados para essa técnica, simplesmente pelo reposicionamento do nó do meio do elemento. Vários autores, tais como GRAY et al. (1990), ARIZA et al. (1997) e DOMÍNGUEZ et al. (2000) adotaram os elementos QP na análise de problemas bidimensionais e tridimensionais de mecânica da fratura, obtendo resultados muito próximos dos valores de referência utilizados.

Estes gráficos mostram também que os algoritmos numéricos implementados funcionam bem para trincas de menores dimensões relativas, isto é para valores de  $a/w$  de no máximo 0,3. Os problemas com trinca de dimensões maiores têm uma piora acentuada nas respostas para os FIT. Esse fato pode, talvez, ser explicado, pelo fato da trinca, de maior dimensão, estar sofrendo influência das respostas no contorno e por outro lado estar provocando alguma perturbação no contorno externo.

Observa-se que os erros percentuais encontrados na computação numérica de  $K_{II}$  foram menores que os de  $K_I$ , chegando a um máximo de 25%, para a trinca de maior largura relativa,  $a/w=0.6$ , apesar desses resultados também não serem satisfatórios. Como a trinca tem inclinação de  $45^\circ$  seria esperado que os valores de  $K_I$  e  $K_{II}$  fossem iguais.

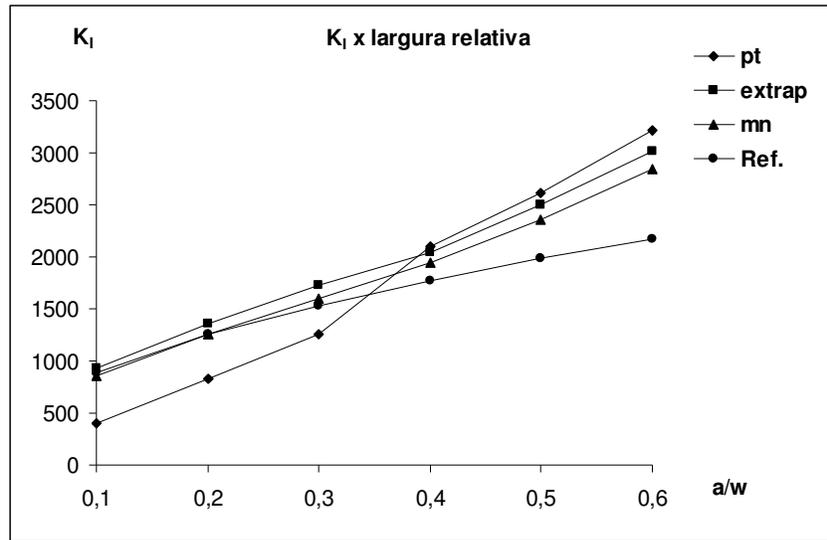


FIGURA 35 – Estudo de  $K_I$  em relação à variação da dimensão da trinca inclinada

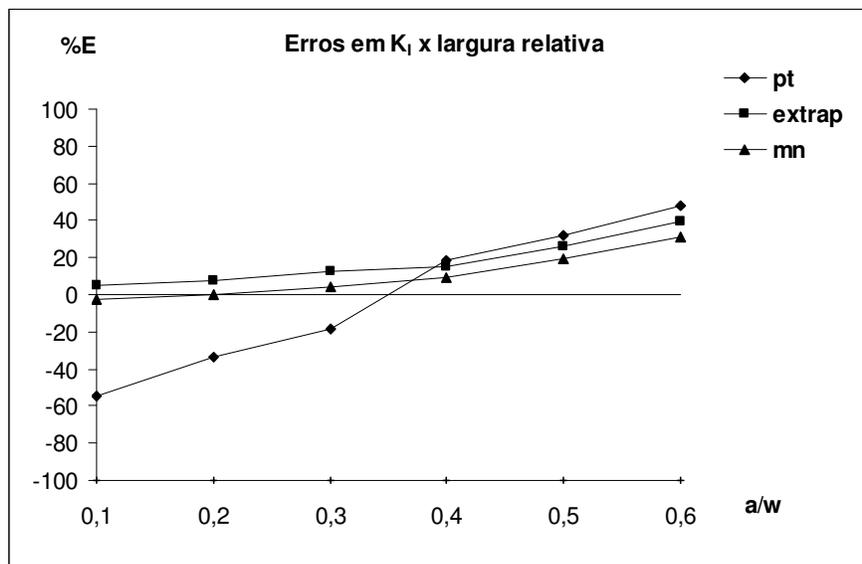


FIGURA 36 – Erro percentual de  $K_I$  na variação da dimensão da trinca inclinada

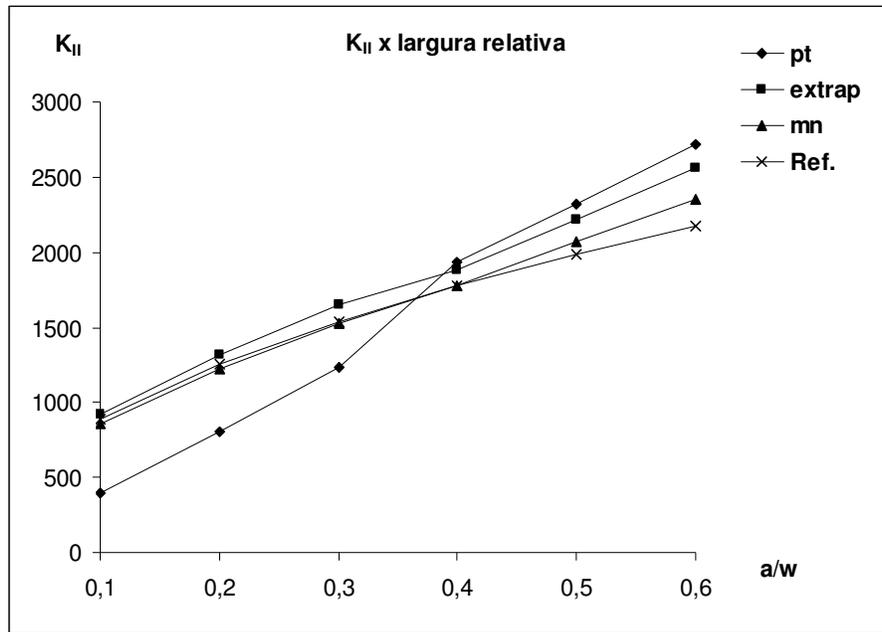


FIGURA 37 – Estudo de  $K_{II}$  em relação à variação da dimensão da trinca inclinada

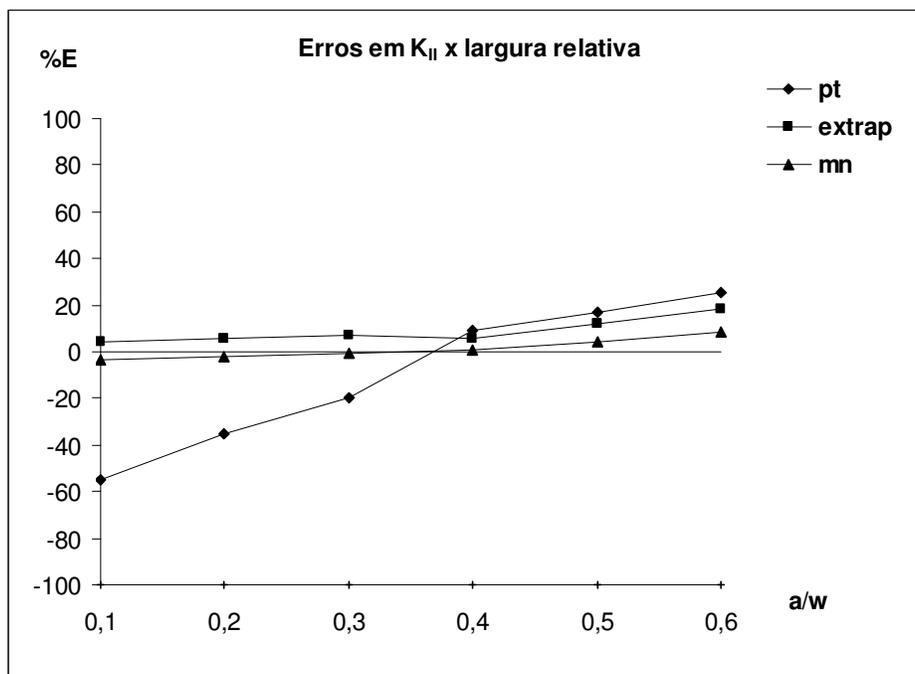


FIGURA 38 – Erro percentual de  $K_{II}$  na variação da dimensão da trinca inclinada

A FIGURA 39 mostra a estrutura inicial da chapa com trinca inclinada e a estrutura deformada para o caso  $a/w=0.6$ . O deslocamento vertical para a face inferior é negativo devido à posição do eixo local no sistema de coordenadas, pois fisicamente a trinca

como um todo se desloca no sentido positivo de  $x$  global, sendo que a face superior se desloca um pouco mais que a face inferior, de um valor equivalente à abertura da trinca. A face inferior se desloca então no sentido positivo de  $x$  no sistema global assim como a face superior. Horizontalmente as faces da trinca se deslocam para a direita, mas a de cima se desloca mais que a de baixo.

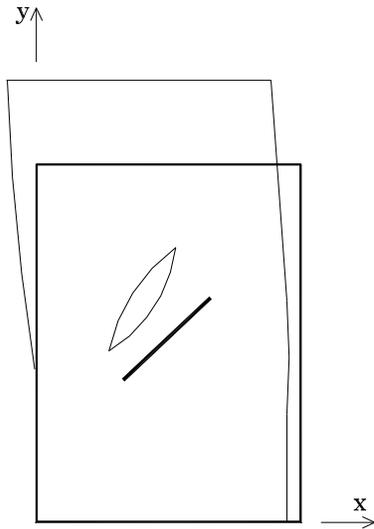


FIGURA 39 – Chapa com trinca inclinada - Estrutura deformada

# 7

## CONCLUSÕES

Adotou-se a formulação dual do MEC, a qual garante a solução de problemas contendo trincas no domínio, na medida em que utiliza EIC distintas para cada uma das superfícies da trinca, a saber, a EIC de deslocamento para um ponto e a EIC de força de superfície para o outro ponto correspondente na face oposta. Na implementação do MECD apresentam-se questões a serem analisadas: as integrais definidas no sentido de VPC e de PFH presentes nas EIC do deslocamento e da força de superfície, contendo núcleos fortemente singulares e hiper-singulares, respectivamente. Nos problemas relativos a domínios contendo trincas, não é possível a solução indireta das integrais de VPC e de PFH por meio do conceito de MCR. Assim adotou-se o procedimento analítico de regularização dessas integrais desenvolvido por PORTELA et al. (1992) na implementação do programa computacional. Esse procedimento é válido considerando elementos de trincas retos, tornando-se possível a solução de problemas da MFEL contendo trincas retas, poligonais ou trincas curvas modeladas com segmentos retos. Sendo assim, os algoritmos do MECD implementados possibilitaram a solução de diversos casos da MFEL incluindo os exemplos estudados: chapa tracionada com trinca centrada ou com trinca inclinada e chapa sujeita à tensão de cisalhamento simples com

trinca em seu centro. Além dos casos apresentados, vários outros exemplos foram testados e analisados através do programa computacional desenvolvido.

A formulação do MECD, com elementos contínuos no contorno e elementos descontínuos na trinca, conduziu a respostas em deslocamentos e tensões bastante precisas em todos os exemplos analisados. A adoção de elementos descontínuos na modelagem das superfícies da trinca proporcionou grandes vantagens, pois evitou os nós localizados nos pontos singulares de ponta da trinca e atendeu a condição de existência da integral de PFH, onde é requerida continuidade na derivada dos deslocamentos em todos os pontos de integração. Os resultados obtidos para os parâmetros  $K_I$  e  $K_{II}$  mostraram-se satisfatórios nos exemplos analisados. Foram usadas técnicas baseadas nos deslocamentos relativos entre os pontos das faces da trinca para a computação numérica dos FIT, baseadas nas expressões clássicas de deslocamentos de Irwin. Os resultados de  $K_I$  e  $K_{II}$  baseados nos deslocamentos relativos do ponto adjacente à ponta da trinca não apresentaram precisão suficiente mesmo para malhas bastante discretizadas. Tal fato está relacionado à imprecisão dos resultados dos deslocamentos relativos tanto menores quanto mais próximos estiverem da ponta da trinca, portanto mais susceptíveis a erros numéricos. Utilizando-se pontos relativamente mais distantes da ponta da trinca ou a técnica da extrapolação de deslocamentos obtém-se sensível melhoria de precisão dos valores dos FIT, tanto no modo I quanto de modo II. Notou-se também que, tanto para a chapa de trinca centrada como para a chapa de trinca inclinada, o aumento das dimensões relativas da trinca resultou em uma perda de precisão significativa nos FIT a partir de determinado tamanho de trinca, para uma mesma largura da chapa.

# 8

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALIABADI, M.H., *Evaluation of mixed mode stress intensity factors using path independent integral*, Proc. 12<sup>th</sup> Int. Conf. on Boundary Element Methods, Computational Mechanics Publications, Southampton, p.281-292, 1990.

ALIABADI, M.H., *A new generation of boundary element methods in fracture mechanics*, International Journal of Fracture, v. 86, p. 91-125, 1997.

ALIABADI, M.H. *The boundary element method Applications in Solids and Structures*, vol.2, 1.ed.,Wiley, 2002, 580p.

ALIABADI, M.H., ROOKE, D.P., CARTWRIGHT, D.J., *An improved boundary element formulation for calculating stress intensity factors: Application to aerospace structures*, Journal of Strain Analysis, v. 22, p. 203-207, 1987.

ALIABADI, M.H., ROOKE, D.P. *Numerical Fracture Mechanics*. 1<sup>a</sup> ed., Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1991, 276p.

ALIABADI, M.H., HALL, W.S., PHEMISTER, T.G. *Taylor expansions for singular kernels in boundary element method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 21, p. 2221-2236, 1985.

ARIZA, M. P., SÁEZ, A., DOMINGUEZ, J. *A Singular Element for Three-Dimensional Fracture Mechanics Analysis*, Engineering Analysis with Boundary Elements, v.20, p. 275-285, 1997.

- BLANDFORD, E.G., INGRAFFEA, A.R., LIGGET, J.A. *Two-dimensional stress intensity factor computations using boundary elements method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 17, p. 387-404, 1981.
- BORESI A.P., CHONG, K.P. *Elasticity in Engineering Mechanics*. 3<sup>rd</sup>ed. PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1987, 644p.
- BROEK, DAVID. *Elementary engineering fracture mechanics*, 4<sup>th</sup> ed. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1986, 516p.
- CHAN, S. K., TUBA, I. S., WILSON, W. K. *On the Finite Element Method in Linear Fracture Mechanics*, Scientific Paper 68-1D7-FMPWR-P1, Pittsburg: Westinghouse Research Laboratories, April – 1968.
- CHEN, J.T., WU, C.S., CHEN, K.H., *Dual integral formulation for determining the acoustic modes of a two-dimensional cavity with a degenerate boundary*, Engineering Analysis with Boundary Elements, v. 21, p. 105-116, 1998.
- CHEN, W.H., CHEN, T.C. *An efficient boundary element technique for a two dimensional fracture problem with multiple cracks*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 38, p. 1793-1756, 1995.
- CHEN, J.T., WU, C.S., CHEN, K.H., *A study of free terms for plate problems in the dual boundary integral equations*, Engineering Analysis with Boundary Elements, v. 29, p. 435-446, 2005.
- COURANT, R., HILBERT, D. *Methods of Mathematical Physics*. New York: John Wiley & Sons, 1962, 830p.
- CROUCH, S.L. *Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method* International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 10, p. 301-343, 1976.
- CROUCH, S.L., STARFIELD, A.M., *Boundary Element Methods in solid mechanics* George Allen and Unwin Publishers, London, 1983.
- CRUSE, T. A. *Numerical Solutions in Three Dimensional Elastostatics*, Int. J. Solids Structures, v.5, p.1259-1274, 1969.
- CRUSE, T.A *Numerical Evaluation of elastic stress intensity factor by the boundary-integral equation method* In: Swedlon, JL, ed. *The surface Crack: Physical Problems and Computational Solutions*. New York, 1972.
- CRUSE, T.A. *Two-Dimensional BIE Fracture Mechanics Analysis*, Applied. Mathematical Modeling, v.2, p.287-293, 1978.
- CRUSE, T.A. *Boundary element analysis in computational fracture mechanics*, 1<sup>st</sup> ed. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1988, 162 p.
- CRUSE, T.A. *BIE fracture mechanics: 25 years of developments*, Computational Mechanics, v.18, p. 1-11, 1996.

- CRUSE, T.A. *Boundary Integral Equations – A personal Review*, Electronic Journal of Boundary Elements, v.1, p.19-25, 2003.
- CRUSE, T.A., VANBUREN, W. *Three-Dimensional Elastic Stress Analysis of a Fracture Specimen with an Edge Crack*, International Journal of Fracture Mechanics, v.7, p.1-15, 1971.
- CRUSE, T.A., WILSON, R.B. *Boundary-integral equation method for elastic fracture mechanics analysis*, AFOSR-TR-780355, Pratt and Whitney Aircraft Group 1977.
- DE MAGALHÃES, A.G. *Aplicação do método da descontinuidade de deslocamentos na análise de problemas da mecânica da fratura, 1999*. 124 f. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais.
- DE MATOS, P.F.P., MOREIRA, P.M.G.P., PORTELA, A., DE CASTRO, P.M.S.T *Dual boundary element analysis of cracked plates: post-processing implementation of singularity technique*, Computers & Structures, v. 82, p. 1443-1449, 2004.
- DELL'ERBA, D.N., ALIABADI, M.H. *On the solution of three-dimensional thermoelastic mixed-mode edge crack problems by the dual boundary element method*, Engineering Fracture Mechanics, v.66, p.269-285, 2000
- DIRGANTARA, T., ALIABADI, M.H. *Stress intensity factors for cracks in thin plates*, Engineering Fracture Mechanics, v.69, p.1465-1486, 2002.
- DOMINGUES, J., ARIZA, M.P. *A direct traction BIE approach for three-dimensional crack problem*, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 23, p. 727-738, 2000.
- DOMINGUEZ, J., ARIZA, M. P., GALLEGO, R. *Flux and Traction Boundary Elements Without Hypersingular or Strongly Singular Integrals*. Int. J. Num. Meth. Eng., v.48, p.111-135, 2000.
- FEDELINSKI, P., ALIABADI, M.H., ROOKE, D.P. *Boundary element formulations for the dynamic analysis of cracked structures*, Engineering Analysis with Boundary Elements, p.45-56, 1996.
- GRAY, L. J., MARTHA, L. F., INGRAFFEA, A. R. *Hypersingular Integrals in Boundary Element Fracture Analysis*. Int. J. Num. Meth. Eng., v.29, p.1135-1158, 1990.
- GRIFFITH, A.A. *The phenomena of rupture and flow in solids*. Phil. Trans. Roy. Soc. London A221, pp. 163-197, 1921.
- INGLIS, C.E., *Stress in a plate due to the presence of cracks and sharp corners*, Transactions of the Institute of Naval Architects, Cleveland, v.55, p. 219-241, 1913.
- IRWIN, G.R., *Fracturing of Metals*, American Society for Metals, Cleveland, p. 147-166, 1948.
- IRWIN, G.R., *Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate*, Journal of Applied Mechanics, v. 24, p. 361-364, 1957.

- JASWON, M. A. *Integral Equation Methods in Potential Theory* In: The Royal Society. London: Royal Society, p. 23-32, 1963.
- JASWON, M.A., SYMM, G.T., *Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics*- Computational Mechanics and Applications- Academic Press, 1977, 287 p.
- JIA, Z.H., SHIPPY, D.J., RIZZO, F.J. *On The Computation of Two-Dimensional Stress Intensity Factors Using The Boundary Element Method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 26, p. 2739-2753, 1988.
- JIA, Z.H., RIZZO, F.J. SHIPPY, D.J., *Three-dimensional crack analysis using singular boundary elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 28, p. 2257-2273, 1989.
- KARAMI, G., FENNER, R.T. *Analysis of mixed mode fracture and crack closure using the boundary integral equation method*, International Journal of Fracture, v.26, p. 2739-2753, 1986.
- LACERDA, L.A., WROBEL, L.C. *A general boundary element method for axisymmetric crack analysis*, International Journal of Fracture, v.113, p. 267-284, 2002.
- LACHAT, J. C., WATSON, J. O. *Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations: A Formulation for Three Dimensional Elastostatics*. Int. J. Num. Meth. Eng., v.10, p.991-1005, 1976.
- LIEBOWITZ, H., SANDHU, J.D., MENANDRO, F.C.M. *A new singular boundary element for problems application to bolted joints*, Engineering Fracture Mechanics, v.62, p. 497-510, 1999.
- LEITÃO, V., ALIABADI, M.H., ROOKE, D.P. *The dual boundary formulation for elastoplastic fracture mechanics*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 38, p. 315-333, 1995.
- MAN, K., ALIABADI, M.H., ROOKE, D.P., *Stress intensity factors in the presence of contact stresses*, Engineering Fracture Mechanics, v.51, p. 591-601, 1995.
- MI, Y., ALIABADI, M.H. *Dual Boundary Element Method - three-dimensional fracture mechanics analysis*, Engineering Analysis, v. 10, p. 161-167, 1992.
- MI, Y., ALIABADI, M.H. *Three-dimensional crack growth simulation using BEM*, Computers & Structures, v. 52, p. 871-878, 1994.
- POLCH, E. Z., CRUSE, T. A., HUANG, C. J. *Traction BIE Solutions for Flat Cracks*. Comp. Mech., v.2, p.253-267, 1987.
- PORTELA, A., ALIABADI, M.H., ROOKE, D.P. *Efficient Boundary Element Analysis of Sharp Notched Plates* , International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 32, p. 445-470, 1991.

- PORTELA, A., ALIABADI, M.H., ROOKE, D.P. *The Dual Boundary Element Method Effective Implementation for Crack Problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 33, p. 1269-1287, 1992.
- PORTELA, A., ALIABADI, M.H., ROOKE, D.P., *Dual Boundary Element Incremental Analysis of Crack Propagation*, Computers & Structures, v. 46, pp. 237-247, 1993.
- RANGELOV, T.A., DINEVA, P.B., GROSS, D.C. *A hyper-singular traction boundary equation method for stress intensity factor computation in a finite cracked body*, Engineering Analysis with Boundary Elements, v.17, p.9-21, 2003.
- RIBEIRO, T.S.A. *Algoritmos não-singulares do método dos elementos de contorno para problemas bidimensionais de elasticidade*. 2003. 122 f. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais.
- RICE, J.R., *A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks*. Journal of Applied Mechanics., pp.379-386, 1968.
- RIGBY, R.H., ALIABADI, M.H. *Decomposition of the mixed-mode J-integral – Revised*, International Journal of Solids and Structures, v.35, p. 2073-2099, 1998.
- RIZZO, F. J. *An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics*. Quart. of Appl. Math., v.15, p.83-95, 1967
- RUDOLPHI, T. J., KRISHNASAMY, L.W., SCHMERR, W., RIZZO, F.J. *On the use of strongly singular integral equations for crack problems* Proc. Boundary Elements 10 Conference, Computational Mechanics, Southampton, p.249-263, 1988.
- SALEH, A.L., ALIABADI, M.H. *Crack growth analysis in concrete using boundary element method*. Engineering Fracture Mechanics, v. 25, p. 533-545, 1995.
- SILVEIRA, N.P.P., GUIMARÃES, S., TELLES J.C.F., *A numerical Green's function BEM formulation for crack growth simulation*. Engineering Analysis with Boundary Elements, v.29 p.978-985, 2005.
- SNYDER, M.D., CRUSE, T.A. *Boundary-integral analysis of anisotropic cracked plates*, International Journal of Fracture, v.11, p. 315-328, 1975.
- SOLLERO, P., ALIABADI, M.H. *Fracture mechanics analysis of anisotropic crack problems*, International Journal of Fracture, v.64, p. 269-284, 1994.
- SYMM, G. T. *Integral Equation Methods in Potential Theory II*. In: The Royal Society. London: Royal Society, p.33-46, 1963.
- TADA, H., PARIS, P. C., IRWIN, G. R. *The Stress Analysis of Cracks Handbook* .3rd ed. New York: The American Society of Mechanical Engineers, 2000. 677p.
- TELLES, J.F.C, CASTOR, G.S., GUIMARÃES, S. *A numerical Green's function approach for boundary elements applied to fracture mechanics*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 38, p. 3259-3274, 1995.

TELLES, J.F.C, GUIMARÃES, S. *Green's function: a numerical generation for fracture mechanics problems via boundary elements*, Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, v188, p. 847-858, 2000.

TEIXEIRA, M.C., DE PAULA, F.A. *Aplicação da equação hipersingular do MEC à mecânica da fratura bidimensional*, CILAMCE, 2001.

WATSON, J.O., *Hermitian Cubic and singular elements for plane strain* Developments in boundary element methods 4, Banerjee, P.K. and Watson, J.O., Elsevier Applied Science Publications, Barking, p. 1-28, 1986.

WEARING, J.L., AHAMADI-BROOGHANI, S.Y. *The Evaluation of Stress Intensity Factors in Plate Bending Problems Using the Dual Boundary Element Method*, Engineering Analysis with Boundary Elements, v. 23, p. 3-19, 1999.

WESTERGAARD, M.H. *Bearing pressures and cracks* Journal of Applied Mechanics, p. 49-53, 1939.

WILLIAMS, M.L., *Stress Singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension*. Journal of Applied Mechanics, v19, p. 526-528, 1952.

ZHU, W.X, SMITH, D.J. *On the use of displacement extrapolation to obtain crack tip singular stresses and stress intensity factors*. Engineering Fracture Mechanics, v. 51-3, p. 391-400, 1995.

## BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

ALIABADI, M.H, BREBBIA, C.A. *Advanced Formulations in Boundary Element Method*, Computational Mechanics Publications, p. 1-30, 1993.

BANERJEE, P.K., BUTTERFIELD, R. *Boundary Element Methods in Engineering Science*, McGraw-Hill Book Company (UK) Limited, p. 1-10, 1981.

BREBBIA, C. A., *Progress in Boundary Element Methods*. Pentech Press, London: Plymouth, p.54-100, 1984.

BREBBIA, C. A., DOMINGUEZ, J. *Boundary Element Methods – An Introductory Course*. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1989, 293p.

BREBBIA, C. A., TELLES, J. C. F., WROBEL, L. C. *Boundary Element Technique: Theory and Applications in Engineering*. Berlím: Springer-Verlag, 1984, 464p.

DOMINGUEZ, J., BREBBIA, C. A. *Boundary Elements: An Introductory Course*. 2ª ed. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1989.

ERNIAN, P. *A general boundary element analysis of 2-D linear elastic fracture mechanics*, International Journal of Fracture, vol.88, p. 41-59, 1997.

GUIMARÃES, SOLANGE. *Sobre o Método dos Elementos de Contorno Aplicado à Mecânica da Fratura*. 1992. 151 f., Tese (Doutorado) - COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro.

HUANG, Q., CRUSE, T.A. *Some Notes on Singular Integral Techniques in Boundary Element Analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 36, p. 2643-2659, 1993.

LUTZ, E., INGRAFFEA, A. R., GRAY, L. J. *Use of ‘Simple Solutions’ for Boundary Integral Methods in Elasticity and Fracture Analysis*. Int. J. Num. Meth. Eng., v.35, p.1735-1751, 1992.

MACIEL, DANIEL NELSON. *Determinação dos fatores de intensidade de tensão estáticos e dinâmicos via MEC com integração analítica em coordenadas locais*. 2003.

125 f. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

MUKHOPADHYAY, N.K., MAITI, S.K., KAKODKAR, A. *A review of SIF evaluation and modeling of singularities in BEM*, Computational Mechanics, v. 25, pp. 358-375, 2000

RUDOLPHI, T. J. *The Use of Simple Solutions in the Regularization of Hypersingular Boundary Integral Equations*. Mathl. Comput. Modelling, v.15, p.269-278, 1991.

SÁEZ, A., GALLEGO, R., DOMÍNGUEZ, J. *Hypersingular Quarter-Point Boundary Elements for Crack Problems*. Int. J. Num. Meth. Eng., v.38, p.1681-1701, 1995.

SMITH, R.N.L., *The solution of mixed mode fracture problems using the boundary element method*, Engineering Analysis, v. 5, p. 75-80, 1988.

SMITH, R.N.L., *The Boundary Element Method for the solution of two- and three-dimensional elastic crack problems*, Localized Damage Computer-Aided Assessment and Control, Portsmouth, UK, June, 1990.

WATSON, J.O., *Singular boundary elements for the analysis of cracks in plane strain*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 38, p. 2389-2411, 1995.

## ANEXO A

### DESCRIÇÃO DO ARQUIVO DE ENTRADA DE DADOS

A entrada de dados do programa é feita a partir de um arquivo de dados, o qual deve conter as seguintes informações:

- **Dados Gerais**

IKIND

IQKIND (somente informado se IKIND=0 ou 2)

ALFA (somente informado se IKIND=2)

IPS

NDIM

NPE

INO

INLOC

NUMNODE

NUMELEM

NUMP I

NDBC

NTBC

INDELCON

NCRACK

- **Dados de trinca (somente se NCRACK≠0)**

NNCRACK

NECRACK

NNPCRACK  
 NEPCRACK  
 NANCRACK (SUPERIOR) NANCRACK (INFERIOR)  
 INCRACKT (SUPERIOR) INCRACKT (INFERIOR)  
 INCRACKM (SUPERIOR) INCRACKM (INFERIOR)  
 INCRACKEE (SUPERIOR) INCRACKEE (INFERIOR)  
 INCRACKTM (SUPERIOR) INCRACKTM (INFERIOR)  
 INCRACKTE  
 NAEPCRACK

- **Coordenadas dos Nós Geométricos**

X Y Z INCRN INCRNF

- **Conectividade dos Elementos**

NCONN1 NCONN2 INCRE  
 NCONN1 NCONN2 NCONN3 INCRE  
 NCONN1 NCONN2 NCONN3 NCONN4 INCRE  
 NCONN1 NCONN2 NCONN3 NCONN4 NCONN5 INCRE

- **Deslocamentos Prescritos**

NUMNOD NUMDIR ZU

- **Forças de Superfície Prescritas**

NUMNOD NUMDIR ZT

- **Dados do Material**

ZNU

ZMU

- **Descontinuidade de Força de Superfície** (quando esta é prescrita com um valor em uma direção para um elemento e o deslocamento, ou outro valor para força de superfície é prescrito na mesma direção para outro elemento que compartilha o nó)

NUMDISC  
 IWHELM LPOS KDIRECT INODE TVALUE

- **Coordenadas dos Pontos Internos**

X Y Z

## Onde:

- **IKIND** – tipo de formulação adotada:
  - Formulação auto-regularizada do deslocamento: 0
  - Formulação auto-regularizada da força de superfície: 1
  - Formulação padrão com ponto fora: 2
  - Formulação padrão: 3

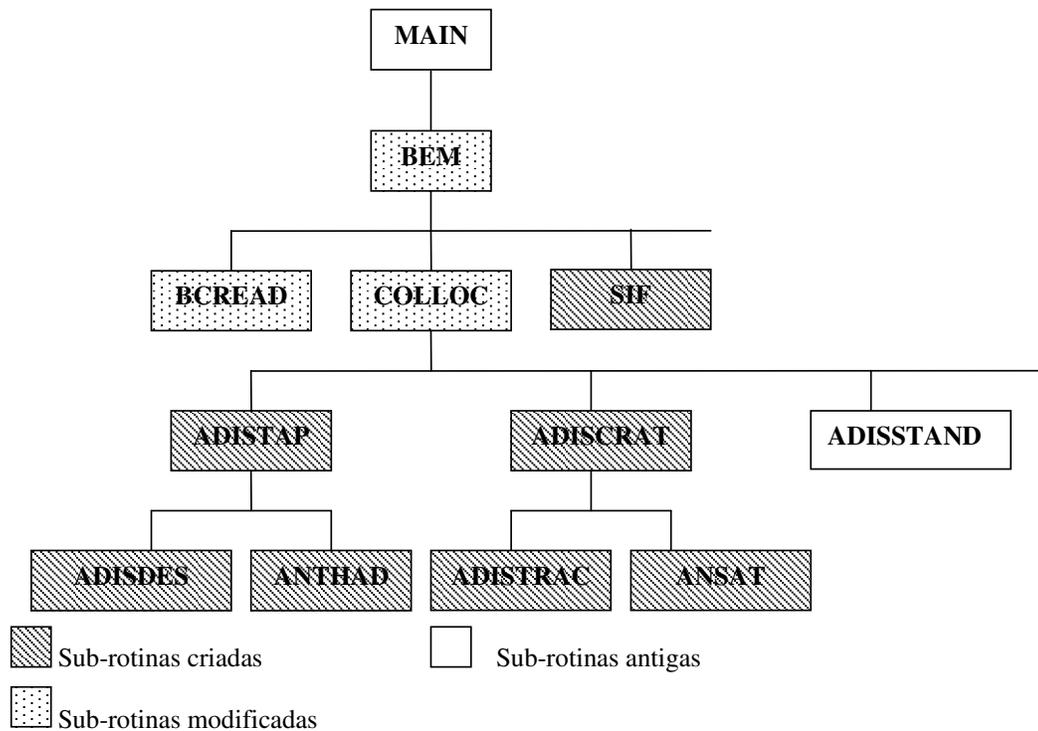
- IQKIND – sub-tipo da formulação:
  - Para IKIND=0:
    - Integral fracamente singular calculada através da transformação de Telles: 1
    - Integral fracamente singular calculada através de quadratura logarítmica: 2
  - Para IKIND=2:
    - Sem utilização da técnica de subelementação: 0
    - Com utilização da técnica de subelementação: 1
- ALFA – Valor de  $\alpha$  - Proporção do comprimento do elemento utilizada para locação dos pontos de colocação externos ao contorno
- IPS – Tipo de problema analisado:
  - Estado plano de tensão: 0
  - Estado plano de deformação: 1
- NDIM – Dimensão do problema (no caso, sempre 2)
- NPE – Número de nós por elemento (2, 3, 4 ou 5)
- INO – Número de pontos de integração global
- INLOC – Número de pontos de integração local (utilizado na integração dos elementos que contém o ponto de colocação)
- NUMNODE – Número de nós do contorno
- NUMELEM – Número de elementos de contorno
- NUMPI – Número de pontos internos
- NDBC – Número de componentes de deslocamento prescritas
- NTBC – Número de componentes de força de superfícies prescritas
- INDELCON – Indicador de elementos contínuos
- NCRACK – Indicador de trincas
- NANCRAK – Arranjo de nós das trincas
- INCRACKT – Indicador de nó de ponta de trinca
- NAECKRAK – Arranjo de elementos de trinca
- INCR – Indicador de nó de trinca
- INCRN – Indicador de nó de qual face da trinca
- INCRE – Indicador do tipo de elemento
- NCONN – Número do n-ésimo nó do elemento (numeração global)
- NUMNOD – Número do nó com deslocamento ou força de superfície prescritos
- NUMDIR – Direção do deslocamento ou força de superfície prescritos

- ZU – Valor do deslocamento prescrito no nó NUMNOD, na direção NUMDIR
- ZT – Valor da força de superfície prescrita no nó NUMNOD, na direção NUMDIR
- ZNU – Coeficiente de Poisson
- ZMU – Módulo de Elasticidade Transversal
- NUMDISC – Número de descontinuidades de força de superfície
- IWHELEM – Número do elemento que contém descontinuidade de força de superfície
- LPOS – Posição do nó que contém descontinuidade, em relação ao elemento.
- KDIRECT – Direção da descontinuidade de força de superfície (1 para x, 2 para y).
- INODE – Número do nó que contém a descontinuidade – Numeração Global
- TVALUE – Valor da descontinuidade de força de superfície

## VARIÁVEIS DO PROGRAMA

- NNPCRAK: Número de nós por trinca
- NANCRAK: Arranjos de nós de trinca
- INCRAK: Indicador de nó de ponta de trinca
- INCRACKM: Indicador de nó do meio da trinca
- INCRACKEE: Indicador de nó da extremidade oposta à ponta da trinca no elemento de ponta de trinca.
- INCRACKTM: Indicador de nó do meio do elemento de ponta de trinca.
- INCRE: Indicador de elemento de contorno ou de trinca
- INCRN: Indicador de nó de contorno ou de trinca
- NEPCRAK: Número de elementos por trinca
- NAECKRAK: Arranjos de elementos de trinca
- INCRNF: Indicador da face da trinca a qual pertence o nó
- NNCRAK: Número de nós de trinca total
- NECRAK: Número de elementos de trinca total
- INDELCON: Número de elementos contínuos

## ROTINAS DO PROGRAMA COMPUTACIONAL



**ADISTAP** – Ponto fonte na face superior de uma trinca.

**ADISCRAT** – Ponto fonte na face inferior de uma trinca.

**ANTHAD** – Ponto fonte na face superior de uma trinca e a integração no elemento que contém esse ponto.

**ANSAT** – Ponto fonte na face inferior de uma trinca e a integração no elemento que contém esse ponto.

**ADISSTAND** – Ponto fonte no contorno e a integração com o uso da condição padrão de MCR.

**ADISTRAC** – Ponto fonte na face inferior de uma trinca e a integração em outros elementos da mesma trinca ou em outra trinca ou no contorno.

**ADISDES** – Ponto fonte na face superior de uma trinca e a integração em outros elementos da mesma trinca, em outra trinca ou no contorno.

**SIF** – Cálculo de  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $COD$ .