

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA

**CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO  
EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

**ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DA PROPAGAÇÃO  
DE TRINCAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS  
DE CONTORNO**

**TESE DE DOUTORADO**

**2006**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**"ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DA PROPAGAÇÃO DE TRINCAS PELO  
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO"**

Marcello Cláudio Teixeira

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Doutor em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:

---

Prof. Dr. Fernando Amorim de Paula  
DEES - UFMG - (Orientador)

---

Prof. Dr. Gabriel de Oliveira Ribeiro  
DEES - UFMG

---

Prof. Dr. Ney Amorim Silva  
DEES - UFMG

---

Prof. Dr. Gray Farias Moita  
CEFET - MG

---

Prof. Dr. José Antonio Fontes Santiago  
COPPE - UFRJ

Belo Horizonte, 28 de dezembro de 2006

## **DEDICATÓRIA**

Ao Professor Joaquim Marcello Klein Teixeira, meu saudoso e querido pai, meu exemplo maior de vida. Do seu incentivo cotidiano, a minha obstinação para o término deste trabalho.

À minha querida mãe Amaryllis Coelho Teixeira, dez anos de ausência e saudade.

## **AGRADECIMENTOS**

À Maria Clara e Marcellinho, minha esposa e filho, pela compreensão e incentivo em todos estes anos de estudo intenso.

Aos meus irmãos Roque e Marthinha, pelo incentivo irrestrito nunca faltando o apoio nos momentos mais difíceis.

Ao Professor Fernando Amorim de Paula pela sábia e dedicada orientação, colocando o seu competente conhecimento com clareza e desprendimento. Agradeço, sobretudo, a amizade nestes anos todos, desde a dissertação de Mestrado.

**Marcello Claudio Teixeira**

**Dezembro/2006**

# SUMÁRIO

## Apresentação

<b>1</b>	<b>Introdução</b> .....	1
<b>1.1</b>	<b>Revisão Bibliográfica</b> .....	4
1.1.1	Mecânica da Fratura Elástica .....	4
1.1.2	Mecânica da Fratura Elastoplástica.....	9
1.1.3	Propagação de Trincas.....	11
<b>1.2</b>	<b>Organização do Trabalho</b> .....	18
<b>2</b>	<b>Mecânica da Fratura</b> .....	20
<b>2.1</b>	<b>Integral J</b> .....	23
<b>2.2</b>	<b>Critérios para Propagação das Trincas</b> .....	27
2.2.1	Critério da Tensão Principal Máxima.....	27
2.2.2	Critério da Densidade da Energia de Deformação Mínima.....	30
2.2.3	Outros Critérios.....	32
<b>2.3</b>	<b>Resumo</b> .....	35
<b>3</b>	<b>Equações Integrais para Elastoplasticidade</b> .....	36
<b>3.1</b>	<b>Equação Integral para Deslocamentos</b> .....	40
<b>3.2</b>	<b>Equação Integral da Derivada dos Deslocamentos</b> .....	42
<b>3.3</b>	<b>Equação Integral das Tensões e das Forças de Superfície</b> .....	43
<b>3.4</b>	<b>Integrais Singulares do Tipo Cauchy e sua Derivada</b> .....	47
<b>3.5</b>	<b>Comportamento Elastoplástico dos Materiais</b> .....	50
3.5.1	Lei de Endurecimento.....	52
3.5.2	Lei de Escoamento Plástico.....	55
3.5.3	Formulação Matricial.....	58
<b>3.6</b>	<b>Resumo</b> .....	62

<b>4 Método dos Elementos de Contorno Dual</b> .....	63
<b>4.1 Transformação das Equações Integrais em Sistema Algébrico</b> .....	65
<b>4.2 Elemento de Contorno com Função de Interpolação Quadrática</b> .....	68
<b>4.3 Célula Triangular Quadrática</b> .....	71
4.3.1 Funções de Interpolação.....	72
4.3.2 A Integral de Domínio da Equação dos Deslocamentos.....	75
4.3.3 A Integral de Domínio da Equação das Tensões.....	81
4.3.4 Exemplos de Aplicação para a Integração Semi-Analítica.....	87
<b>4.4 Algoritmo para Análise Não-Linear</b> .....	91
<b>4.5 Fator de Intensidade de Tensão</b> .....	94
<b>4.6 Propagação da Trinca por Fadiga</b> .....	96
<b>4.7 Programa de Computador</b> .....	99
<b>4.8 Resumo</b> .....	100
<b>5 Exemplos de Aplicação</b> .....	102
<b>5.1 Exemplo I – Chapa Retangular com Duas Trincas Horizontais</b> .....	103
<b>5.2 Exemplo II – Chapa Retangular com Uma Trinca Horizontal</b> .....	106
<b>5.3 Exemplo III – Chapa Retangular com Trinca Horizontal no Centro</b> ..	108
<b>5.4 Exemplo IV – Chapa Retangular com Trinca Inclinada</b> .....	111
<b>5.5 Exemplo V – Chapa Retangular com Trinca no Centro (a)</b> .....	114
<b>5.6 Exemplo VI – Chapa Retangular com Trinca no Centro (b)</b> .....	115
<b>5.7 Exemplo VII – Chapa Retangular com Trinca no Centro (c)</b> .....	117
<b>6 Conclusões e Trabalhos Futuros</b> .....	119
<b>7 Referências Bibliográficas</b> .....	122
<b>Anexo A</b> .....	140

**LISTA DE FIGURAS**

<b>Número</b>	<b>Legenda</b>	<b>Página</b>
2.1	Modos de Fratura I, II e III	22
2.2	Caminho de Integração da Integral J	24
2.3	Diagrama Tensão-Deformação Simplificado do Material	25
2.4	Campo de Tensões na Ponta da Trinca	28
3.1	Processo de Limite da Equação Integral de Contorno	38
3.2	Diagrama Tensão-Deformação do Material	51
3.3	Diagrama Tensão-Deformação Simplificado do Material	53
4.1	Célula Triangular com Ponto Fonte no Vértice	74
4.2	Célula Triangular com Ponto Fonte no Meio do Lado	74
4.3	Célula Triangular com Ponto Fonte Fora da Célula	80
4.4	Chapa Retangular e Tensão com Variação Linear	88
4.5	Chapa Retangular - Tensão com Variação Parabólica	89
4.6	Anel Circular com Tensão Inicial	91
4.7	Esquema do Algoritmo Não-Linear	94
4.8	Células na Ponta da Trinca	96
4.9	Esquema da propagação da trinca por fadiga	98
5.1	Chapa Retangular com Trincas nas Laterais – Ex I	102
5.2	Gráfico dos Fatores de Intensidade de Tensão	104
5.3	Detalhe da Plastificação – Exemplo I	105
5.4	Chapa Retangular com Uma Trinca na Lateral – Ex II	106

5.5	Gráfico dos Fatores de Intensidade de Tensão	107
5.6	. Detalhe da Plastificação – Exemplo II	108
5.7	Chapa Retangular com Trinca no Centro – Ex III	108
5.8	Detalhe da Plastificação – Exemplo III	109
5.9	Gráfico dos Fatores de Intensidade de Tensão	110
5.10	Chapa Retangular - Trinca Inclinada 45° Lateral – Ex IV	111
5.11	Gráfico dos Fatores de Intensidade de Tensão	112
5.12	Detalhe da Plastificação – Exemplo IV	113
5.13	Chapa Retangular com Trinca no Centro – Exemplo V	114
5.14	Gráfico do Fator de Intensidade de Tensão	115
5.15	Chapa Retangular com Trinca no Centro – Exemplo VI	115
5.16	Gráfico do Fator de Intensidade de Tensão	116
5.17	Chapa Retangular com Trinca no Centro – Exemplo VII	117
5.18	Gráfico do Fator de Intensidade de Tensão	118
A.1	Esquema da direção de propagação da trinca	155



**LISTA DE TABELAS**

<b>Número</b>	<b>Legenda</b>	<b>Página</b>
4.1	Tensões na direção $X$ – Chapa retangular submetida a tensão inicial com variação parabólica	88
4.2	Deslocamentos na direção $X$ - Anel circular submetido a tensão inicial	90
4.3	Tensões na direção $X$ - Anel circular submetido a tensão inicial	90
5.1	Fatores de intensidade de tensão – Plástico – Exemplo I	104
5.2	Fatores de Intensidade de tensão – Elástico - Exemplo I	104
5.3	Resistência residual e número de ciclos de carga – Plástico - Exemplo I	105
5.4	Resistência residual e número de ciclos de carga – Elástico - Exemplo I	105
5.5	Fatores de intensidade de tensão – Plástico - Ex II	106
5.6	Fatores de intensidade de tensão – Elástico – Ex II	106
5.7	Resistência residual e número de ciclos de carga – Plástico – Exemplo II	107
5.8	Resistência residual e número de ciclos de carga – Elástico - Exemplo II	107
5.9	Fatores de intensidade de tensão – Plástico - Ex III	109
5.10	Fatores de intensidade de tensão – Elástico - Ex III	109
5.11	Resistência residual e número de ciclos de carga – Plástico - Exemplo III	110
5.12	Resistência residual e número de ciclos de carga – Elástico – Exemplo III	110
5.13	Fatores de intensidade de tensão – Plástico - Ex IV	111
5.14	Fatores de intensidade de tensão – Elástico - Ex IV	111

5.15	Resistência residual e número de ciclos de carga – Plástico - Exemplo IV	112
5.16	Resistência residual e número de ciclos de carga – Elástico - Exemplo IV	113
5.17	Direção e comprimento da propagação – Elástico e Plástico – Exemplo IV	113
5.18	Fatores de intensidade de tensão–Elástico e Plástico - Exemplo V	114
5.19	Fatores de intensidade de tensão – Elástico e Plástico - Exemplo VI	116
5.20	Fatores de Intensidade de Tensão–Elástico e Plástico - Exemplo VII	117

**LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

CTOD	Deslocamento da Abertura da Ponta da Trinca
FIT	Fator de Intensidade de Tensão
IDE	Método da Integral de Domínio da Energia
MDD	Método da Descontinuidade do Deslocamento
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MECD	Método dos Elementos de Contorno Dual
MEF	Método dos Elementos Finitos
MFEL	Mecânica da Fratura Elástica Linear
MFEP	Mecânica da Fratura Elastoplástica
MSS	Método da Subtração da Singularidade

## LISTA DE SÍMBOLOS – LETRAS GREGAS

Símbolo	Discriminação
$\alpha$	Inclinação do diagrama tensão-deformação do trecho elástico; ponto campo
$\beta$	Inclinação do diagrama tensão-deformação do trecho plástico; incremento de carregamento
$\gamma$	Ponto fonte; origem do sistema local de coordenadas polares
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$d\lambda$	Multiplicador plástico
$\zeta$	Ponto no interior da célula
$\theta$	Ângulo de rotação entre os sistemas local e global
$\Phi$	Ângulo de atrito interno do material; parte do integrando que é função somente do ângulo $\Phi$ ; Funções de interpolação quadráticas no interior do elemento
$\kappa$	Parâmetro de endurecimento do material
$\mu$	$K_I / K_{II}$
$\nu$	Coefficiente de Poisson do material
$\xi$	Coordenadas locais triangulares
$\sigma$	Tensões normais
$\sigma_0$	Tensão de fluência do material; Tensão de escoamento uniaxial do material; Valores nodais das tensões
$\sigma_{ij,i}, \sigma_{ef}, \sigma_Y$	Componentes das derivadas espaciais do tensor de tensões; Tensão equivalente ou efetiva; Tensão de escoamento (Von Mises)
$\tau$	Tensões de cisalhamento
$r, \varphi$	Coordenadas polares
$\psi$	Funções de Interpolação para o elemento triangular quadrático; $\sigma_0 / \kappa$
$\Gamma$	Contorno do problema; Contorno arbitrário em torno da ponta da trinca
$\Omega$	Domínio do problema
$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta, \lambda, \rho, \chi$	Índices

## LISTA DE SÍMBOLOS – LETRAS ROMANAS

<b>Símbolo</b>	<b>Discriminação</b>
$a_{ij}$	Vetor de fluência
$A$	Matriz das incógnitas
$b_j$	Componentes das forças de volume
$c$	Coesão do material
$C_{ijkl}$	Tensor das constantes elásticas
$da/Dn$	Taxa de crescimento da trinca por fadiga
$E$	Módulo de elasticidade do material
$f$	Vetor dos elementos prescritos
$G$	Módulo de elasticidade transversal do material; Taxa de Liberação de Energia de Deformação Elástica
$H$	Matriz dos coeficientes de influência
$J$	Jacobiano de transformação de coordenadas
$K_I$	Fator de Intensidade de Tensão no modo I
$K_{II}$	Fator de Intensidade de Tensão no modo II
$K_{III}$	Fator de Intensidade de Tensão no modo III
$K_{Ic}$	Tenacidade à Fratura do material
$n$	Expoente de encruamento na deformação do material
$n_{1,2}$	Direções normal e tangencial ao contorno $\Gamma$
$N$	Número de ciclos
$P$	Valores nodais das forças de superfície
$R$	$\sigma_{min}/\sigma_{máx}$
$t_i$	Componentes das forças de superfície dos pontos do contorno $\Gamma$
$u_i$	Componentes dos deslocamentos
$U$	Valores nodais dos deslocamentos
$W_e$	Parcela elástica da Densidade da Energia de Deformação
$W_p$	Parcela elastoplástica da Densidade da Energia de Deformação

## LISTA DE SÍMBOLOS – TENSORES

Símbolo	Discriminação
$\varepsilon_{ij}$	Componentes das deformações
$\sigma_{ij}$	Componentes das tensões
$u_{ij}^*$	Tensor fundamental dos deslocamentos
$p_{ij}^*$	Tensor fundamental das forças de superfície
$\varepsilon_{ijk}^*$	Tensor fundamental de terceira ordem das deformações
$u_{ijk}^*$	Tensor fundamental de terceira ordem dos deslocamentos
$p_{ijk}^*$	Tensor fundamental de terceira ordem das forças de superfície
$\varepsilon_{ijkl}^*$	Tensor fundamental de quarta ordem das deformações
$\sigma_{ijk}^*$	Tensor fundamental de quarta ordem das tensões
$\hat{\varepsilon}^*$	Tensor de quarta ordem obtido a partir da derivada de $\varepsilon^*$

## RESUMO

O presente trabalho descreve a formulação e a implementação numérica do Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD), para problemas bidimensionais com comportamento elastoplástico, aplicado à propagação de trincas no modo misto. O MECD utiliza duas equações diferentes, uma para cada face da trinca. A equação integral de contorno para deslocamentos é aplicada em uma das faces, enquanto a equação integral de contorno para forças de superfície, conhecida como equação hipersingular, é aplicada à outra face. Para se evitar o ponto de colocação na ponta da trinca, quinas de trincas e cantos de trincas, ambas as superfícies da trinca são discretizadas com elementos de contorno quadráticos descontínuos, enquanto o elemento contínuo é utilizado nas demais partes do contorno.

O algoritmo não-linear para simulação do comportamento elastoplástico utiliza o processo das tensões iniciais, que permite tratar diversos critérios de escoamento de forma unificada e não inclui a restrição de incompressibilidade das deformações inelásticas. Para esta simulação as equações integrais apresentam uma integral de domínio na região onde se espera a plastificação. A discretização desta parte do domínio foi feita através de células triangulares quadráticas de lados retos. Para a integração das células foi utilizada a técnica da integração semi-analítica.

Para o cálculo dos Fatores de Intensidade de Tensão foi usada a Integral J, que é independente do caminho de integração. O cálculo foi feito de maneira direta porque a trajetória escolhida para a sua avaliação coincide com a fronteira da malha das células triangulares.

Nos exemplos de aplicação os resultados são comparados com os resultados elásticos e com resultados de trabalhos encontrados na literatura, mostrando a precisão e a consistência do método.

Palavras-Chave: Método dos Elementos de Contorno Dual, Elastoplasticidade, Integral J, Propagação de Trinca.

## ABSTRACT

The present work describes the formulation and numerical implementation of two-dimensional Dual Boundary Element Method to the analysis of elastoplastic fracture mechanics and its application to the fatigue crack growth. The dual equations of the method are the displacement and the traction boundary integral equations. When the displacement equation is applied on one of the crack surfaces and the traction equation on the other, general mixed-mode crack problems can be solved with a single-region formulation. In order to avoid collocation at crack tips, crack kinks and crack-edge corners, both crack surfaces are discretized with discontinuous quadratic boundary elements.

Several yield criteria in a unified form are used in association with the initial stress process to simulate the plastic behaviour, in a non-linear algorithm which does not include the assumption of incompressibility of the inelastic strain. The region expected to yield is discretized with internal quadratic triangular cells with flat sides. The computation of the domain integrals is carried out by a semi-analytical integration scheme.

The path-independent integral, the J-Integral, is used for evaluation of stress intensity factor. The calculation is straightforward, because chosen path is coincident with points in grid cells.

Different crack examples are presented to validate the procedure and the inelastic material behavior influence in the stress intensity factor value is compared with elastic and inelastic results found in the technical literature.

Key-words: Dual boundary element method, elastoplasticity, J-integral, crack growth



# 1

## INTRODUÇÃO

Devido à aplicação de cargas cíclicas ou à combinação de carga e corrosão, o comprimento da trinca existente em uma estrutura aumenta com o tempo. Este aumento implica em maior concentração de tensão em torno da ponta da trinca, causando, por sua vez, um aumento na velocidade de propagação e uma diminuição na resistência residual da estrutura. Após determinado tempo a resistência residual se torna tão baixa que a estrutura não pode mais suportar as cargas de serviço. Para se garantir com segurança a expectativa de vida útil da estrutura, é necessário conhecer a velocidade e trajetória da propagação e, também, como decresce a resistência residual. Segundo BROEK (1986) o objetivo da Mecânica da Fratura é desenvolver métodos para estimativa destas previsões e, também, estar em condições de responder às seguintes perguntas:

- Qual é a resistência residual em função do tamanho da trinca?
- Qual é o tamanho crítico da trinca?
- Qual é o tempo para uma trinca se propagar do seu início até o tamanho crítico?
- Qual o tamanho permitido de uma falha no início da vida útil da estrutura?
- Qual deve ser a frequência de inspeção para as trincas em uma estrutura?

Soluções analíticas capazes de responder a todas estas indagações são disponíveis apenas para um pequeno número de situações particulares de geometria e carregamento.

A utilização de métodos numéricos, confirmada por resultados experimentais, permite a análise geral do problema. O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é naturalmente o escolhido por sua precisão no tratamento de regiões de alta concentração de tensão.

A estimativa da vida útil de uma estrutura com trinca deve ser garantida sob condições de serviço e também na fase de projeto. Se a Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL) é utilizada nesta análise, mesmo com aplicação de cargas muito pequenas, a tensão na ponta da trinca tende para o infinito. O Fator de Intensidade de Tensão (FIT) é, então, definido como uma medida da intensidade de sollicitação na ponta da trinca. Como há uma forte concentração de tensões na ponta da trinca, forma-se uma zona de comportamento plástico nesta região. O campo de aplicação da MFEL depende do tamanho desta parte plastificada, ou seja, ela continua válida enquanto seu tamanho for pequeno em relação ao comprimento da trinca.

A trinca irá propagar se a liberação de energia elástica disponível para seu crescimento for maior que a energia exigida para formar a superfície trincada. Como o FIT está relacionado com a Taxa de Liberação de Energia Elástica  $G$ , pode-se afirmar que a trinca propagará quando o FIT se igualar à energia exigida para formar a trinca. Esta energia, que é uma constante do material, chama-se Tenacidade, e mede a resistência à propagação da trinca.

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) aplicado à Equação Integral de Contorno em deslocamento nas duas faces coincidentes de uma trinca gera uma singularidade no sistema de equações do método, como foi mostrado em CRUSE (1972). Para trincas com geometria simétrica é possível evitar esta situação pela imposição de condições de simetria, modelando, assim, somente uma face da trinca. Entretanto, para trincas assimétricas os problemas devem ser resolvidos de outra maneira. CRUSE e VAN BUREN (1971) exploraram a possibilidade de modelamento da trinca como um entalhe arredondado. Este modelo exigiu um número elevado de elementos na ponta do entalhe e a precisão para o FIT deixou a desejar (o erro ficou em torno de 14%).

O primeiro método largamente utilizado para tratar com duas superfícies de trinca coincidentes foi apresentado por BLANDFORD et al. (1981). Esta aproximação, que é baseada na técnica de sub-regiões, é geral e pode ser aplicada a problemas de mecânica da fratura simétrica e assimétrica, bi e tridimensionais. Esta formulação introduz uma interface artificial no corpo ligando a trinca ao contorno, delimitando duas sub-regiões, de tal maneira que cada face da trinca pertença a uma sub-região diferente. As duas sub-regiões são então ligadas pelas condições de equilíbrio das forças de superfície e compatibilidade dos deslocamentos. A principal dificuldade deste método é que o contorno adicional não é único impossibilitando a sua implementação em um procedimento automático. Além disso, o método gera um sistema de equações bem maior do que o estritamente necessário. Apesar destas desvantagens a técnica de sub-regiões foi largamente utilizada em problemas de trincas.

Depois PORTELA et al. (1992) desenvolveram o Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD) para problemas bidimensionais e MI e ALIABADI (1992) para tridimensionais, método que mostrou ser de aplicação geral e computacionalmente eficiente em análises da mecânica da fratura. Problemas gerais com modos de fratura combinados, chamados de modos mistos, podem ser resolvidos com o MECD com uma única região, quando a equação integral de contorno para deslocamentos é aplicada a uma das faces da trinca enquanto a equação de forças de superfície é aplicada à outra face. No contexto do MEC a formulação dual foi apresentada em primeiro lugar por WATSON (1986), em uma formulação baseada na equação dos deslocamentos e em sua derivada normal. A equação de contorno dual foi utilizada na Teoria de Potencial 3D por GRAY e GILES (1988), RUDOLPHI et al. (1988) e em elasticidade 3D por GRAY et al. (1990).

A principal dificuldade do MECD é o desenvolvimento de um procedimento de integração geral e preciso para as integrais do Valor Principal de Cauchy e da Parte Finita de Hadamard que aparecem na equação integral de contorno para forças de superfície, que é uma equação hipersingular. As condições necessárias para a existência destas integrais singulares, impõem certas restrições na escolha da função de forma para as superfícies da trinca. Na solução pelo Método da Colocação, a equação integral dos

deslocamentos exige continuidade das componentes dos deslocamentos nos pontos de colocação (nós) e a equação integral para forças de superfície exige a continuidade das derivadas dos deslocamentos nos nós. Estas exigências foram satisfeitas nos trabalhos de WATSON (1986 e 1995) adotando-se elementos Hermitianos. RUDOLPHI et al. (1988) mostraram oscilações inexplicáveis em seus resultados enquanto GRAY et al. (1990) desenvolveram um esquema baseado em um caminho de integração especial em torno do ponto singular para elementos triangulares lineares. As formulações de RUDOLPHI et al. (1988) e GRAY et al. (1990) foram aplicadas somente a trincas embutidas. Em PORTELA et al. (1992) e MI e ALIABADI (1992) ambas as superfícies da trinca foram discretizadas com elementos quadráticos descontínuos. Esta estratégia não só satisfaz automaticamente as condições necessárias para a existência das integrais de Hadamard, como também evita o problema do ponto de colocação nos vértices de trincas poligonais, arestas e cantos de trincas. Vários destes problemas foram resolvidos, incluindo trincas curvas, com resultados muito precisos.

Descrições detalhadas de algumas das formulações avançadas do MEC podem ser encontradas em ALIABADI e BREBBIA (1993).

## **1.1 Revisão Bibliográfica**

### **1.1.1 Mecânica da Fratura Elástica Linear**

A aplicação do MEC à Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL) está bem estabelecida e largamente utilizada. O método oferece clara vantagem sobre outros métodos como o Método dos Elementos Finitos na MFEL. Uma das principais razões desta vantagem é a possibilidade de cálculo dos parâmetros da MFEL na etapa de pós-processamento. Existem várias maneiras para avaliação destes parâmetros usando o MEC. As mais populares são as técnicas baseadas nos elementos Quarter-Point, nas integrais independentes do caminho de integração, como a Integral J, nos métodos de energia, no método da subtração de singularidade, no método das funções de ponderação e na equação integral auto-regularizada. À exceção da equação integral

auto-regularizada, descrições detalhadas destes métodos podem ser encontradas em ALIABADI e ROOKE (1991).

Os métodos que relacionam as forças de superfície na ponta da trinca com o fator de intensidade de tensão são mais eficientes que as fórmulas baseadas nos deslocamentos. SMITH e MASON (1987) demonstraram o uso de elementos quarter-point para trincas curvas. Uma comparação de métodos de avaliação do FIT a partir do elemento quarter-point é encontrada em SMITH (1988). Outros elementos especiais para a ponta da trinca são apresentados em ALIABADI (1985), JIA et al. (1988) para problemas bidimensionais, LUCHI e RIZZUTI (1987) para elementos contínuos em análise tridimensional, MI e ALIABADI (1994) para elementos descontínuos em 3D. A utilização de integrais de contorno independentes do caminho de integração é bastante popular no MEC, sendo uma delas a Integral J. BOISSENOT et al. (1974) mostraram o uso da Integral J para problemas simétricos 3D em Mecânica da Fratura. Depois, KISHITANI et al. (1983) e KARAMI e FENNER (1986) mostraram seu uso para vários problemas 2D simétricos. ISHIKAWA et al. (1980) apud ALIABADI e ROOKE (1991) aplicaram a Integral J e o MEC para problemas de trinca no modo misto, desacoplando-a em suas componentes simétrica e antimétrica. Mostrou ainda que valores precisos são obtidos para os modos I e II dos Fatores de Intensidade de Tensão. MAN et al. (1995) utilizaram a Integral J no modo misto para o estudo do efeito das forças de contato no comportamento da trinca. A aplicação da Integral J para problemas 3D no modo misto foi apresentada por RIGBY e ALIABADI (1993) e HUBER e KUHN (1994). SOLLERO e ALIABADI (1994) propuseram um método alternativo para o desacoplamento da Integral J para o modo misto baseado na relação abertura/deslizamento do deslocamento da trinca. SONI e STERN (1976) e STERN (1977) desenvolveram uma integral independente do caminho de integração e usaram o MEC para estimar o FIT para o modo misto. WEN et al. (1995 b) desenvolveram uma integral alternativa independente do caminho de integração para avaliação do FIT no modo misto. Eles utilizaram o Método dos Elementos de Contorno Indireto no cálculo dos valores dos deslocamentos e tensões internos. BAINBRIDGE et al. (1995) propuseram uma integral independente do caminho de integração para problemas tridimensionais. Esta integral utiliza soluções devido a uma força em um ponto na linha

de frente da trinca em forma circular como campo auxiliar. Fatores de intensidade de tensão foram calculados no modo misto com esta técnica.

Outra forma para cálculo do FIT é a partir da taxa de liberação da energia de deformação  $G$ , que exige várias iterações em problemas tridimensionais. CRUSE e MEYERS (1977) propuseram esta técnica para problemas 3D e limitaram a duas iterações, sendo a primeira na frente original e a outra na frente perturbada da trinca, obtida movendo-se todos os nós na frente da trinca radialmente ao longo da linha normal àquela frente. Eles usaram elementos triangulares lineares. TAN e FENNER (1979) usaram elementos retangulares quadráticos para representar a geometria e as funções incógnitas. A taxa de liberação da energia de deformação no MEC foi mostrada também em BONNET (1995).

Os métodos discutidos até agora são baseados na tentativa de modelar o comportamento singular das tensões próximo à ponta da trinca. O Método da Subtração da Singularidade (MSS) evita a necessidade desta tarefa, pois ele remove completamente o campo singular, levando a um campo não-singular para ser modelado numericamente. Esta aproximação foi introduzida por PAPAMICHEL e SYMM (1975) em problemas de potencial. XANTIS et al. (1981) usaram esta formulação para resolver os mesmos problemas, desta vez utilizando elementos quadráticos isoparamétricos. A extensão do método para elasticidade bidimensional foi apresentada por ALIABADI et al. (1987) e ALIABADI (1987), que obtiveram os fatores de intensidade de tensão para os modos I e II. Esta formulação foi estendida para entalhe V em placas por PORTELA et al. (1991). A aplicação do método a problemas 3D foi mostrada por ALIABADI e ROOKE (1989). Uma técnica equivalente ao MSS foi desenvolvida por SMITH e DELLA-VENTURA (1995). Neste estudo um método de superposição em duas etapas foi usado para se obter o fator de intensidade de tensão. O procedimento exigiu a solução completa do problema com a trinca e, também, a solução, na mesma malha, do problema com singularidade na ponta da trinca, em uma região infinita.

Quando a equação integral das tensões para os pontos internos é levada para o contorno através de um processo de limite, é necessário que as tensões ou as forças de superfície

nos pontos de colocação sejam contínuas no sentido de Hölder do tipo  $C^{1,\alpha}$ . Esta exigência representa uma séria dificuldade para o uso de discretizações do Método dos Elementos de Contorno padrão, que satisfazem somente a continuidade do tipo  $C^0$  das variáveis, nos extremos dos elementos de contorno. Por isso vários trabalhos foram publicados na direção do relaxamento das exigências de continuidade das variáveis nos nós de contorno. Entretanto, a necessidade de variáveis com continuidade do tipo  $C^{1,\alpha}$  foi bem estabelecida depois de rigorosas discussões por KRISHNASAMY et al. (1990), MARTIN e RIZZO (1996) e MARTIN et al. (1998). Ainda, HUANG e CRUSE (1994), CRUSE e RICHARDSON (1996), RICHARDSON et al. (1997) e RICHARDSON e CRUSE (1999) mostraram que as exigências de continuidade do tipo  $C^{1,\alpha}$  dos deslocamentos no contorno não são necessárias desde que, na solução analítica, as derivadas dos deslocamentos sejam contínuas nos pontos de colocação. Eles obtiveram resultados bem precisos para alguns tipos de problemas, com as condições de continuidade relaxadas não havendo, entretanto, uma prova desta convergência. Por outro lado, está claro que a condição  $C^{1,\alpha}$  é necessária para a existência do limite no contorno.

Para satisfazer as condições de continuidade das derivadas dos deslocamentos nos pontos de colocação no contorno foram propostas diversas estratégias. Algumas delas concentraram-se no uso de elementos especiais que incorporam a continuidade da derivada do deslocamento, como a apresentada por YOUNG (1996), onde são utilizados elementos de contorno contínuos e um esquema para isolar o termo hipersingular da equação integral das forças de superfície, empregando o Teorema de Stokes. Uma alternativa conceitualmente mais simples, baseada na utilização de elementos descontínuos, foi sugerida por PORTELA et al. (1992) para problemas bidimensionais e MI e ALIABADI (1992) para tridimensionais, como mencionado anteriormente. A desvantagem destes elementos descontínuos é que o tamanho do sistema de equações gerado pela malha em três dimensões é muito grande.

GALEGO e DOMINGUEZ (1996), para problemas bidimensionais e DOMINGUEZ et al. (2000), para problemas tridimensionais propuseram uma estratégia diferente, onde os

elementos são contínuos na representação clássica das variáveis, isto é, com nós nos extremos dos elementos. Entretanto, a colocação é feita em pontos dentro dos elementos onde a exigência de continuidade  $C^{1,\alpha}$  é satisfeita. As dificuldades produzidas pelas exigências de continuidade nos pontos de colocação são evitadas e o número de incógnitas nodais permanece a mesma como na formulação clássica. DOMINGUEZ et al. (2000) ressaltaram que o principal objetivo do trabalho não estava relacionado com a solução do problema de continuidade das variáveis do contorno e sim com a integração dos núcleos fortemente singulares e hipersingulares. CRUSE e RICHARDSON (1996) apresentaram uma formulação não-singular que evita este tipo de integração aproveitando idéias de soluções simples de RUDOLPHI et al. (1988).

GUIGGIANI et al. (1992) e MANTIC (1994) mostraram uma aproximação baseada na regularização através da expansão em série de Taylor dos deslocamentos em torno do ponto fonte, conforme proposto por ALIABADI et al. (1985). Neste método a regularização vem após a discretização e a integração é feita de uma maneira geral, o que exige uma complicada transformação de coordenadas. MI e ALIABADI (1992) utilizaram este método de integração para resolver problemas tridimensionais de mecânica da fratura pelo Método dos Elementos de Contorno Dual.

Uma alternativa atraente foi mostrada por HUANG e CRUSE (1994) que regularizaram a formulação integral, de forma localizada, antes da discretização, enquanto CRUSE e RICHARDSON (1996) o fizeram em todo o contorno. Para se conseguir esta regularização os integrandos são separados adequadamente em uma parte regular e outra parte singular. A parte singular do integrando é tratada de tal forma a permitir a aplicação do Teorema de Stokes cujo resultado é também uma integral regular. Desta forma as integrais fortemente singulares e hipersingulares desaparecem e as integrações numéricas utilizam apenas esquemas de Quadraturas Gaussianas padrão. RICHARDSON e CRUSE (1999) apresentaram uma formulação fracamente singular para a identidade de Somigliana auto-regularizada para tensões em toda a superfície do corpo. O algoritmo emprega elementos  $C^0$  padrão com interpolações de Lagrange e exclusivamente integrações gaussianas. Uma observação importante é a relação entre os integrandos da equação integral de contorno e as ordens adequadas das interpolações.



Resultados numéricos para problemas bidimensionais mostram que ordens de interpolação quárticas são necessárias para algoritmos empregando regularização em todo o contorno para se chegar a precisões equivalentes às aquelas obtidas em algoritmos de regularização local e ordem de interpolação quadrática.

Como discutido anteriormente, a aplicação padrão da formulação integral de contorno na mecânica da fratura tem uma degeneração matemática inerente devido às superfícies coincidentes das duas faces da trinca. Para evitar este problema CROUCH (1976) propôs uma equação integral indireta na qual as incógnitas são as diferenças dos deslocamentos entre a face superior e inferior da trinca e as soluções fundamentais se referem às descontinuidades dos deslocamentos. A aplicação do Método da Descontinuidade do Deslocamento (MDD) para problemas 3D é devido a WEAVER (1977). PARTHEYMÜLLER et al. (2000) compararam o Método da Descontinuidade do Deslocamento com a formulação básica do MECD para problemas tridimensionais. Eles concluíram que este método pode reduzir o tamanho do sistema de equações, desde que três das seis componentes das descontinuidades na trinca sejam incógnitas e não somente as descontinuidades dos deslocamentos. Se esta redução não é possível deve-se usar a formulação básica.

CISILINO e ORTIZ (2005) apresentaram a metodologia de elementos de contorno para análise 3D de interfaces de trinca com materiais diferentes. Eles utilizaram a técnica de sub-regiões para consideração das diferentes características dos materiais em ambos os lados da trinca. Os parâmetros da Mecânica da Fratura, como a Integral J e o FIT, foram calculados através do Método da Integral de Domínio da Energia (IDE).

### **1.1.2 Mecânica da Fratura Elastoplástica**

A MFEL pode ser aplicada com sucesso enquanto a zona plástica for pequena comparada com o tamanho da trinca. Na prática, a tensão aplicada deve estar abaixo de 66% da tensão de escoamento do material (critério de Feddersen). Se, entretanto, a zona plástica for grande comparada com o tamanho da trinca, a MFEL não é mais aplicável. Isto acontece em materiais de baixa tenacidade com trincas muito curtas (alta tensão à

fratura) ou em materiais de tenacidade muito alta. Tenacidade à Fratura é uma propriedade do material que mede a sua resistência à propagação da trinca.

As primeiras tentativas para a aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Mecânica da Fratura Elastoplástica (MFEP) foram feitas por MORJARIA e MUKERJEE (1981) e BANTHIA e MUKERJEE (1982-1983) que utilizaram a Função de Green, como uma parte complementar, somada à solução fundamental. Na solução fundamental resultante estão embutidas as influências da trinca existente. Esta técnica, apesar de precisa, se limita a trincas retas bidimensionais. Mais tarde CRUSE e POLCH (1986) melhoraram o modelamento da trinca, também com a Função de Green. TAN e LEE (1983) utilizaram a solução fundamental de Kelvin especificando condições de contorno apropriadas para a consideração da trinca. Como exemplo foi estudado um tubo de parede espessa com pressão interna contendo uma trinca radial. YONG e GUO (1992) também estudaram um tubo pressurizado de parede espessa com trincas radiais simétricas. HANTSCHER et al. (1990) consideraram o campo plástico na ponta da trinca através de elementos singulares especiais. LEITÃO et al. (1992) usaram o MEC para simular a propagação da trinca na presença de um campo de tensões residuais. LEITÃO et al. (1993) mostraram a eficiência do MEC calculando diversos fatores de intensidade de tensão através da Integral J.

Existem poucas publicações tratando de problemas elastoplásticos no modo misto. LEITÃO et al. (1995b-c) usaram a formulação elastoplástica do Método dos Elementos de Contorno Dual na propagação de trincas onde o algoritmo é baseado no alívio de pares de elementos, que se supõem em contato a priori, para a formação da trinca. Também estudaram a influência do contato entre suas faces no cálculo do fator de intensidade de tensão. CORRADI et al. (1996) apresentaram o MECD com a aproximação da rigidez variável. Nesta aproximação foi usado o critério de escoamento de Von Mises com encruamento na deformação, sendo as deformações iniciais definidas em função do fator de fluência escalar, que relaciona os incrementos de deformação plástica e o gradiente da função de escoamento. Este procedimento, que não é iterativo, tem como principal tarefa reduzir três das incógnitas, passando das deformações iniciais para o fator de fluência escalar. A sua principal vantagem, em

relação aos conhecidos algoritmos iterativos, aparece na solução de problemas com alta não-linearidade, cuja convergência exige um número bastante elevado de iterações. CISILINO (1997) apresentou a formulação, implementação e aplicação do MECD para problemas de trincas 3D com comportamento elástico e elastoplástico. Utilizou a técnica da descontinuidade do deslocamento com a finalidade de economizar memória computacional. A propagação da trinca foi simulada usando uma análise incremental baseada no critério da densidade de energia de deformação mínima e da Lei de Paris. O cálculo do Valor Principal de Cauchy na integração das células foi feito pelo método da expansão em série de Taylor. Os Fatores de Intensidade de Tensão nos modos I, II e III, para o caso elástico, foram obtidos através dos deslocamentos relativos entre as faces da trinca e para o inelástico através do Método da Integral de Domínio da Energia (IDE). Para o estudo elastoplástico da propagação da trinca foi considerado conhecido o caminho de propagação, como em LEITÃO et al. (1995c). CISILINO et al. (1998) e CISILINO e ALIABADI (1999) empregaram a IDE mostrando um exemplo de chapa com trinca no centro e estado plano de deformação e outro exemplo com trinca curva 3D.

### **1.1.3 Propagação de Trincas**

Existem dois aspectos principais na propagação de trinca por fadiga no modo misto: a direção e a velocidade da propagação da trinca.

Vários critérios foram propostos para a previsão da direção de propagação. O mais utilizado é o Critério da Tensão Tangencial Máxima, chamado de Critério MTS, devido a ERDOGAN e SIH (1963). Este critério afirma que a propagação da trinca começa a partir da ponta, na direção onde a tensão tangencial é máxima e quando esta tensão atinge um valor crítico, igual à tensão de fratura do teste de tração uniaxial. Este critério é bastante usado pela sua simplicidade e é confirmado em diversas observações experimentais, apesar de questionado em alguns trabalhos.

O Critério da Densidade da Energia de Deformação Mínima, chamado de Critério S, foi proposto por SIH (1974) e é baseado na densidade local do campo de energia, na região

da ponta da trinca. Supõe-se que a trinca propaga na direção onde a densidade da energia de deformação é mínima e quando este fator atinge um valor crítico. Este critério, que foi investigado por vários pesquisadores, tem a vantagem de ser simples na sua aplicação, além da facilidade de tratar as diversas situações de combinação de carregamento. Entretanto alguns resultados contraditórios são reportados na literatura.

O Critério J foi proposto por HELLEN e BLACKBURN (1975) e afirma que a trinca cresce na direção do vetor J que é dado por:

$$\mathbf{J} = J_I \mathbf{i} + J_{II} \mathbf{j} \quad (1.1)$$

Onde  $J_I$  e  $J_{II}$  são os valores desacoplados, para os modos I e II, da integral independente do caminho de integração J, e  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$  são os vetores unitários nas direções do eixo da trinca e perpendicular a ele, respectivamente. A fratura ocorre quando o vetor J atinge um valor crítico. Este critério apresenta resultados satisfatórios quando o carregamento predominante é do modo I, desviando-se significativamente dos resultados experimentais quando predominam as condições de carregamento no modo II.

O Critério da Densidade da Energia de Deformação Dilatacional, chamado Critério T, foi proposto por THEOCARIS e ADRIANOPOULOS (1982) que sugerem a separação da densidade de energia de deformação total em suas componentes distorcional e dilatacional. Este critério afirma que a trinca começa a propagar-se quando a energia de deformação dilatacional, em um ponto vizinho da ponta da trinca, atinge um valor crítico. Isto implica que a trinca propaga segundo a direção desta componente quando ela é máxima. O contorno elastoplástico, obtido a partir da condição de escoamento de Von Mises, deve ser usado para avaliar a energia de deformação dilatacional em torno da ponta da trinca e, por definição desta condição de escoamento, a parte distorcional da energia total é constante ao longo do contorno elastoplástico.

O Critério do Vetor Deslocamento da Ponta da Trinca, Critério CTD, proposto por LI (1989), é baseado no conceito de que o vetor deslocamento da ponta da trinca indica a direção da propagação por fadiga da trinca. Supõe-se que a trinca propaga-se segundo a direção deste vetor, que é definido como a soma dos vetores CTOD (vetor abertura

correspondente ao modo de fratura I) e CTSD (vetor deslizamento correspondente ao modo de fratura II). Os resultados obtidos têm boa concordância com os resultados experimentais.

Os Critérios do Fator da Tensão Tangencial e do Fator da Deformação Tangencial foram definidos por WU e LI (1989) e consideram que a trinca propaga segundo a direção do valor máximo de  $(r^{1/2} \sigma_{\theta})$  para o primeiro critério e  $(r^{1/2} \epsilon_{\theta})$  para o segundo, calculado no contorno elastoplástico, sendo  $r$  é a distância do ponto considerado à ponta da trinca.

O Critério da Deformação Tangencial Máxima foi proposto por CHAMBERS et al. (1991) e é baseado no conceito do mecanismo de arredondamento plástico da ponta na propagação da trinca. Os autores sugerem que o arredondamento esteja relacionado com a deformação tangencial plástica. Assim, supõe-se que as deformações tangenciais próximas à ponta da trinca, determinadas com base no comportamento elástico linear, são as mesmas que ocorrem na região plastificada, apesar das tensões estarem abaixo da tensão de escoamento. Seguindo procedimento análogo ao critério da tensão tangencial máxima, pode-se prever a direção da propagação por fadiga da trinca.

Entre os critérios mencionados, os Critérios da Tensão Tangencial Máxima e da Densidade da Energia de Deformação Mínima são os mais utilizados nos estudos de propagação de trincas, com carregamento no modo misto. As aplicações destes dois critérios foram estendidas para os carregamentos nos modos mistos I, II e III por CHEN et al. (1986), onde se reportou que o critério da densidade da energia de deformação mínima ofereceu melhores resultados que o critério da tensão tangencial máxima. Entretanto não há um único critério que dê resultados satisfatórios para todas as condições de carregamento.

RADAJ e ZHANG (1995) propuseram o critério do Processo da Zona de Fratura que consiste em hipóteses distintas para o aparecimento de trincas em materiais de comportamento frágil e dúctil. Para o comportamento frágil, a trinca se inicia no limite da zona de fratura em um ponto determinado pelo valor máximo da densidade de

energia de deformação dilatacional. A trinca é iniciada no valor crítico da primeira tensão principal e se propaga na direção perpendicular a esta tensão. Para o comportamento dúctil a trinca também se inicia no limite da zona de fratura em um ponto determinado pelo valor máximo da densidade de energia de deformação distorcional. A trinca é iniciada e se propaga como no comportamento frágil. Para a iniciação da trinca, o critério se mostrou conservativo em relação aos critérios convencionais.

SEWERYN (1998) propôs o critério da Taxa de Liberação de Energia de Deformação não-local para materiais com comportamento frágil, baseado na hipótese onde a propagação da trinca ocorre quando o valor máximo da função de abertura e deslizamento da taxa de liberação da energia de deformação atinge um valor crítico.

KHAN e KHRAISHEH (2000) apresentaram uma análise detalhada do aparecimento de trincas inclinadas, sob diferentes carregamentos, utilizando vários critérios. O critério da tensão tangencial máxima, originalmente proposto para materiais frágeis, foi modificado para ser usado em materiais dúcteis. Foi incorporado a este critério um raio variável, medido a partir da ponta da trinca, baseado no contorno elastoplástico de Von Mises. Eles concluíram que os dados experimentais não favorecem qualquer critério para todas as condições de carregamento.

SOH e BIAN (2001) estudaram o comportamento de uma placa retangular de liga de alumínio com uma trinca semi-elíptica inclinada submetida a carregamento axial, experimental e teoricamente. A inclinação da trinca em relação ao eixo do carregamento variou de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ . Os dois critérios mais comuns, Tensão Principal Máxima e Densidade de Energia de Deformação Mínima, foram modificados adotando-se o contorno elastoplástico de Von Mises. Os resultados obtidos usando-se estes critérios melhorados foram comparados com os critérios usuais e os resultados experimentais. Os autores concluíram que os resultados obtidos com os critérios de fratura modificados, são mais precisos do que aqueles obtidos pelos critérios usuais, quando comparados com resultados experimentais.

A estimativa da velocidade de propagação da trinca sob carregamento no modo misto é encontrada na literatura sob diversos enfoques. O primeiro estudo de propagação de trinca por fadiga no modo misto I e II é devido a IIDA e KOBAYASHI (1969).

A taxa de propagação de trinca por fadiga descrita por TANAKA (1974) usa uma equação similar à Lei de Paris e é função de um fator de intensidade de tensão efetivo:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_{\text{eff}})^m \quad (1.2)$$

onde  $\Delta K_{\text{eff}} = \left( \Delta K_I^4 + 8\Delta K_{II}^4 \right)^{0,25}$ , para carregamento misto dos modos I e II.

Este modelo é baseado na hipótese de que a trinca se propaga por fadiga quando a soma dos valores absolutos dos deslocamentos na região plástica atinge um valor crítico. Sob condições do modo misto supõe-se que as deformações devidas aos carregamentos nos modos I e II não são interativas. Ele sugeriu que este critério pode ser estendido para a combinação dos três modos de carregamento.

O Fator Densidade da Energia de Deformação foi utilizado por SIH e BARTHELEMY (1980) para correlacionar a velocidade de propagação da trinca no modo I a partir, também, de uma equação similar à equação de Paris. PATEL e PANDEY (1981) usaram o fator densidade de energia de deformação para estimar a velocidade de propagação da trinca com carregamento no modo misto.

O Modelo proposto por GAO et al. (1985) supõe que a propagação da trinca por fadiga é função da deformação plástica reversa na ponta da trinca e a velocidade é inversamente proporcional a ductibilidade à fratura.

DOWLING e BEGLEY (1976) usaram a Integral J para avaliar a velocidade de propagação da trinca no modo I. Este conceito foi estendido para análise da velocidade de propagação por fadiga de pequenas trincas com carregamento no modo misto por HOSHIDE e SOCIE (1987). Os autores afirmaram que é desejável relacionar diretamente a velocidade de propagação com o deslocamento da ponta da trinca.

Parâmetros adicionais são necessários para fazer a correlação, devido à dificuldade de medir os deslocamentos na ponta da trinca. Neste modelo a abertura e o deslizamento medidos a uma determinada distância atrás da ponta da trinca são os parâmetros que governam a propagação, que é expressa por uma equação do tipo da Lei de Paris. As estimativas resultaram em velocidades mais altas do que os dados experimentais.

O Fator Intensidade de Deformação Equivalente foi proposto por SOCIE et al. (1987) e relacionaram as variações máximas da deformação por cisalhamento e deformação normal, agindo no plano da variação máxima da deformação por cisalhamento.

CHEN e KEER (1991) utilizaram o modelo de Dugdale para relacionar a velocidade de propagação da trinca com os deslocamentos plásticos acumulados (abertura e deslizamento). As seguintes três hipóteses foram feitas: os efeitos de fechamento e ramificação devem ser desprezados; o deslocamento plástico acumulado total é a soma vetorial da abertura e deslizamento totais acumulados e as tensões de tração e de cisalhamento na região de escoamento satisfazem ao critério de Von Mises.

PLANK e KUHN (1999) utilizaram o critério da tensão tangencial máxima em corpos de prova de ligas de alumínio para estudar a propagação de trincas sob carregamento não proporcional no modo misto. Eles mostraram as condições para o aparecimento e propagação de trincas, concluindo que, sob o ponto de vista do mecanismo da fratura, não existiam hipóteses até aquele momento que explicassem as diferentes taxas de propagação das trincas submetidas a carregamentos nos modos de tração e cisalhamento.

A primeira tentativa de se modelar automaticamente a propagação de trincas no modo misto é devido a INGRAFFEA et al. (1987) para problemas bidimensionais. Eles usaram a técnica de sub-regiões e o critério da tensão circunferencial máxima para calcular a direção da propagação da trinca. A aplicação deste método para problemas 3D foi apresentada por GREESTLE (1986). O processo de propagação de trinca em materiais ortotrópicos foi apresentado por DOBLARE et al. (1990) que usaram a técnica de sub-regiões e elementos quarter-point. Propagações de trincas com sub-regiões foram



também desenvolvidas para problemas dinâmicos por GALLEGO e DOMINGUEZ (1992) que utilizaram a formulação dependente do tempo com elementos quarter-point. CEN e MAIER (1992) também utilizaram sub-regiões para análise de propagação de trincas em estruturas de concreto. Nesta formulação o modelo de trinca coesiva foi utilizado para simular a zona com fratura no concreto. Em análise incremental para propagação de trinca o método de sub-regiões não é facilmente implementado, pois o contorno adicional que liga a trinca ao contorno real não é único e deve ser introduzido repetidamente a cada extensão da trinca. PORTELA et al. (1993) e MI e ALIABADI (1994) e (1995) apresentaram uma aplicação do MECD para propagação de trinca no modo misto para problemas bi e tri dimensionais em mecânica da fratura elástica linear. Os processos de propagação de trinca foram simulados em análise incremental baseado no critério da tensão principal máxima para 2D e o critério da densidade da energia de deformação mínima para 3D. Em PORTELA et al. (1993), para cada extensão da trinca, o MECD foi aplicado em análise de tensão com uma única região e a técnica da Integral J para calcular o fator de intensidade de tensão. Como a extensão da trinca foi modelada com novos elementos descontínuos, nenhuma alteração na malha do contorno existente foi necessária, por causa da utilização de uma única região, propriedade intrínseca do MECD. Em propagação de trincas em 3D, entretanto, alguma alteração na malha é necessária. Um procedimento automático para este processo foi desenvolvido por ALIABADI e MI (1994). SALGADO e ALIABADI (1996) apresentaram a aplicação do MECD em estruturas enrijecidas. Eles simularam a propagação da trinca em painéis aeronáuticos reforçados por enrijecedores.

A extensão do MECD em propagação de trincas para análise elastoplástica bidimensional foi apresentada por LEITÃO et al. (1995 b e c) que utilizaram o processo das deformações iniciais com o critério de escoamento de Von Mises. Supondo que a trajetória da propagação da trinca seja conhecida a priori, é possível predeterminar não somente o domínio, mas também a discretização do contorno. A trinca, com a trajetória conhecida, propaga-se então, em uma direção entre células adjacentes. Considerou-se, também, o efeito do contato entre as faces da trinca para o estudo da influência do seu fechamento.

## 1.2 Organização do Trabalho

O objetivo deste trabalho é mostrar a propagação da trinca para o modo misto, através de uma análise elastoplástica bidimensional pelo Método dos Elementos de Contorno Dual. Os Fatores de Intensidade de Tensão são obtidos pelo cálculo da Integral J e a direção da propagação escolhida obedece ao critério da Tensão Principal Máxima. Outros critérios de propagação podem ser introduzidos com a modificação do cálculo do ângulo em função do FIT. A análise elastoplástica incorpora, de forma unificada, diversos critérios de escoamento.

O Capítulo 2 aborda os conceitos básicos da Mecânica da Fratura Elástica Linear e Elastoplástica, descrevendo seus parâmetros e aplicações. Mostra-se também como a Integral J deve ser utilizada para materiais inelásticos, onde a densidade da energia de deformação é igual à soma das parcelas elástica e plástica. Comparam-se diversos critérios de propagação de trincas encontrados na literatura, ressaltando-se suas vantagens e desvantagens.

No Capítulo 3 são apresentadas equações integrais de contorno para deslocamentos e forças de superfície, necessárias ao desenvolvimento do Método dos Elementos de Contorno Dual. As integrais de domínio são incorporadas às equações integrais estendendo-se, ambas, para o caso inelástico. Mostram-se as exigências para a existência da Parte Finita de Hadamard e do Valor Principal de Cauchy na equação integral hipersingular. Justifica-se o emprego da formulação em tensões iniciais para o cálculo elastoplástico, em comparação com a formulação em deformações iniciais. Desenvolve-se a equação da derivada dos deslocamentos nos pontos internos, utilizada na expressão da Integral J. Descreve-se, brevemente, o algoritmo empregado no cálculo das tensões nos pontos internos e no monitoramento da região plastificada.

No Capítulo 4 as equações integrais do MECD são discretizadas em elementos de contorno contínuos e descontínuos com função de interpolação quadrática para deslocamentos e tensões. A região do domínio onde se espera a plastificação é

discretizada em células triangulares com funções de interpolação quadráticas para deslocamentos e tensões. Os elementos de contorno e os lados das células internas são retos na sua geometria o que simplifica o cálculo do Jacobiano utilizado nas transformações de coordenadas dos sistemas local e global. A integração nas células é feita de forma semi-analítica que permite o emprego da Quadratura de Gauss padrão e o FIT é calculado de maneira desacoplada conforme sugerido por ALIABADI e ROOKE (1991). Em seguida as equações integrais são discretizadas para a formação do sistema de equações algébricas que é empregado no algoritmo elastoplástico. Finalmente mostra-se como a direção e velocidade de propagação da trinca são consideradas.

No Capítulo 5, sete exemplos de aplicação são mostrados. Nestes exemplos as chapas são feitas de material dúctil contendo trincas em arestas ou no centro da chapa. O primeiro consiste na análise de uma chapa contendo duas trincas horizontais começando nos pontos médios das arestas verticais. A análise é feita em apenas metade da chapa com a imposição das condições de simetria no eixo vertical. No segundo exemplo é analisada uma chapa similar à chapa do primeiro exemplo, com apenas uma trinca, retirando a simetria anterior. No terceiro exemplo a mesma chapa é analisada com uma trinca horizontal no centro, levando-se em consideração a simetria do problema. No quarto exemplo é analisada uma chapa retangular com uma trinca inclinada a  $45^\circ$ , começando em uma das arestas. Os resultados dos quatro exemplos são comparados com os resultados obtidos através das análises elásticas, para se observar a influência da região plastificada na ponta da trinca. Os três últimos exemplos correspondem à análise da plastificação na ponta da trinca de chapas estudadas em trabalhos encontrados na literatura. Os resultados são comparados com os resultados obtidos nesta Tese e, também, com outros modelos que levam em consideração a plastificação na ponta da trinca.

O Capítulo 6 traz as conclusões dos resultados obtidos e sugere possíveis caminhos para continuação da pesquisa em trabalhos futuros.

# 2

## MECÂNICA DA FRATURA

A Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL) trata da análise de tensões e deformações em corpos com trincas, quando ela se propaga de maneira instável, ocorrendo fratura frágil do ponto de vista macroscópico. Esta situação aparece, geralmente, em materiais de alta resistência mecânica e em materiais com estrutura cristalina cúbica em baixas temperaturas. Por outro lado, a Mecânica da Fratura Elastoplástica (MFEP) analisa as trincas que se propagam de maneira estável, antes da ruptura frágil.

A presença de trincas, mesmo que pequenas e não visíveis, podem levar à ruína estruturas aparentemente seguras. Este fenômeno foi pela primeira vez observado durante a II<sup>a</sup> Guerra Mundial, quando a ruptura de vários navios ocorrida frequentemente sob condições de baixas tensões e às vezes de maneira súbita era inexplicável. Pesquisas revelaram que os defeitos e concentrações de tensão foram os responsáveis pelas rupturas que aconteceram de maneira frágil e vieram acompanhadas de muito pouca deformação plástica. Estava evidente que a fratura frágil do aço, acontecida em baixas temperaturas, foi ocasionada pelas condições de tensão triaxiais a que estava submetido, parecidas com as que existem em entalhes e trincas. Sob estas

circunstâncias o aço estrutural pode se romper por clivagem, sem deformação plástica aparente. Por outro lado, acima de uma determinada temperatura, chamada de temperatura de transição, o aço se comporta de maneira dúctil. A fratura de metais por clivagem ocorre pela separação direta ao longo dos planos cristalográficos devido a uma simples quebra da ligação dos átomos. A principal característica é que ela está geralmente associada a um plano cristalográfico particular, que no aço se dá ao longo dos planos dos cubos de suas unidades celulares.

Este fato ficou mais evidente a partir do aumento do emprego do aço de alta resistência e também da utilização de métodos de análise de tensões mais sofisticados. A determinação mais confiável das tensões locais e conseqüentemente uma redução dos coeficientes de segurança permitiu uma grande economia de material na estrutura. Estes materiais têm baixa tenacidade, ou seja, pouca resistência à propagação de trincas, o que ocasiona baixa resistência residual, amplificando o efeito da presença de trincas. A ocorrência de ruptura em estruturas executadas sob estas circunstâncias incentivou o desenvolvimento da Mecânica da Fratura.

O campo elástico de tensões na ponta da trinca pode ser determinado em função do tamanho da trinca, da geometria da peça estudada e de um fator que mede a intensidade da sollicitação na ponta da trinca, chamado de Fator de Intensidade de Tensão (FIT). Um dado material pode resistir à propagação da trinca sem a ocorrência de fratura frágil enquanto o FIT estiver abaixo de um valor crítico  $K_{Ic}$ , que é uma propriedade do material, chamado de Tenacidade à Fratura.

Se a trinca em uma barra propaga de um pequeno comprimento  $da$ , enquanto o deslocamento é mantido constante, a rigidez da barra decresce. Isto resulta em um decréscimo  $dU$  da energia potencial, ou seja, há uma liberação de uma pequena quantidade  $dU$  de energia. A taxa de variação de energia potencial com o aumento na área da trinca é definida como a Taxa de Liberação de Energia de Deformação  $G$ :

$$G = -\frac{1}{t} \frac{dU}{da} \quad (2.1)$$

onde a variação da área da trinca é  $t(da)$  e o sinal negativo resulta em um valor positivo para  $G$ . Assim,  $G$  caracteriza a energia por unidade de área da trinca que é exigida para a sua propagação, sendo uma quantidade física fundamental para o controle do comportamento da trinca. Sendo  $K_I$  o Fator de Intensidade de Tensão para o modo de fratura de abertura, também chamado de modo I, pode-se escrever a quantidade  $G$  em função de  $K_I$ , para materiais linearmente elásticos e isotrópicos, segundo a expressão:

$$G = \frac{K_I^2}{E'} \quad (2.2)$$

sendo  $E$  o módulo de elasticidade do material,  $E' = E$  para estado plano de tensão,  $E' = E/(1-\nu^2)$  para estado plano de deformação. Os modos de fratura estão mostrados na FIG.2.1 a seguir.

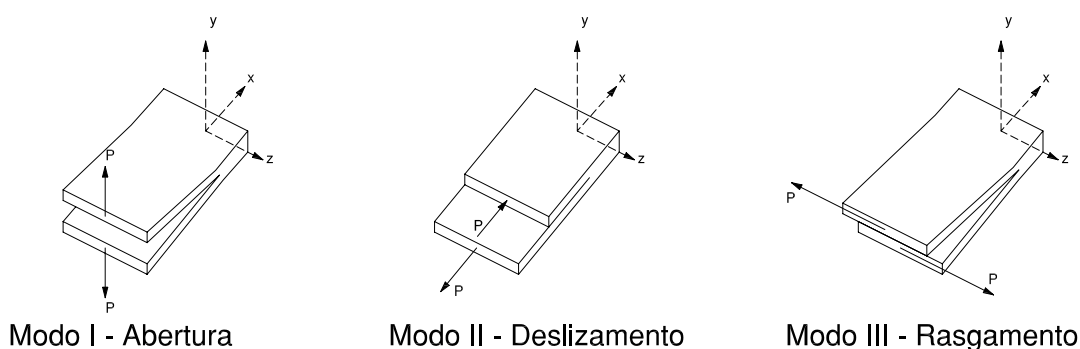


FIGURA 2.1 – Modos de Fratura I, II e III

Os Fatores de Intensidade de Tensão podem ser obtidos de várias maneiras. Com o emprego das técnicas baseadas na extrapolação dos deslocamentos ou tensões, os FIT são fáceis de calcular, mas exige um grande refinamento da malha na ponta da trinca para que tenham precisão satisfatória, o que é computacionalmente caro. Por outro lado, os métodos que se baseiam em uma aproximação de energia, evitam calcular o FIT utilizando valores das grandezas próximos à ponta da trinca, não sendo contaminados pela singularidade nesta região. O MEC é o método mais adequado para avaliação das integrais independentes do caminho de integração porque as tensões, deslocamentos e

derivadas dos deslocamentos nos pontos internos, são obtidos diretamente das suas equações integrais de contorno.

O campo de tensões próximo à ponta da trinca em materiais dúcteis é essencialmente de natureza tridimensional. Entretanto, os resultados obtidos considerando estruturas bidimensionais apresentaram bons resultados. No estudo de chapas com trincas os resultados para Estado Plano de Tensão e Estado Plano de Deformação tiveram boa precisão para valores de pontos com distância igual ou maior à metade da espessura da chapa, medida a partir da ponta da trinca, conforme demonstrado por SUBRAMANYA et al. (2005). Eles compararam estes resultados com aqueles obtidos a partir de análises dos campos de tensão 3D no modo misto, através do Método dos Elementos Finitos.

Quando há escoamento plástico na região em torno da ponta da trinca, os conceitos baseados puramente na Teoria da Elasticidade não são mais válidos, necessitando de expressões mais gerais para descrever adequadamente o comportamento do material. Neste trabalho a Teoria da Plasticidade incremental é empregada e o FIT calculado através da Integral J, independente do caminho de integração, que é válida para materiais elásticos não lineares. A extensão de sua utilização para materiais elastoplásticos é devidamente justificada, apesar de certas restrições, como se mostra mais adiante.

## **2.1 Integral J**

Os dois parâmetros mais utilizados na MFEP são a Integral J e o Deslocamento da Abertura da Ponta da Trinca (CTOD), que podem ser obtidos sem dificuldades nas avaliações numéricas usando o MEC. O CTOD, entretanto, tem a desvantagem de exigir um nível alto de refinamento da malha na ponta da trinca, para a obtenção de uma precisão adequada dos resultados. Por outro lado, a Integral J, sendo uma aproximação de energia, elimina a necessidade de resolver o problema local da ponta da trinca, desde que o caminho de integração mantém uma distância relativamente grande desta região. A Integral J, que é utilizada na tese, foi inicialmente desenvolvida para materiais

elásticos não-lineares cuja curva tensão-deformação é representada pela equação de Ramberg-Osgood:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left[ \frac{\sigma}{\sigma_0} \right]^n \quad (2.3)$$

$\sigma_0$  é a tensão de fluência e  $n$  é o expoente de encruamento na deformação.

A Integral J foi assim definida:

$$J = \int_{\Gamma} (W n_1 - t_i u_{i,1}) d\Gamma$$

sendo  $\Gamma$  um contorno arbitrário em torno da ponta da trinca começando e terminando em suas faces opostas e  $W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$  é a Densidade da Energia de Deformação.  $t_i$  e  $u_i$  são as componentes das forças de superfície e dos deslocamentos dos pontos do contorno  $\Gamma$  e  $n_1$  é a direção da normal ao contorno  $\Gamma$ . Os tensores das tensões  $\sigma_{ij}$  e das deformações  $\varepsilon_{ij}$  referem-se, também, aos pontos do contorno  $\Gamma$  e o eixo  $x_1$ , com origem na ponta da trinca, coincide com a direção da trinca, conforme FIG.2.2.

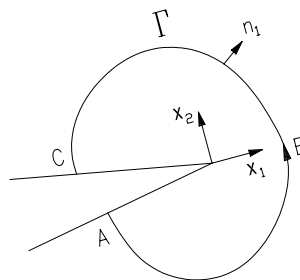


FIGURA 2.2 – Caminho de Integração da Integral J

Para o problema elastoplástico substitui-se a deformação total  $\varepsilon$  pela soma das parcelas elástica  $\varepsilon^e$  e plástica  $\varepsilon^p$ , obtendo-se a parcela elástica  $W_e$  e a parcela plástica  $W_p$ , da Densidade da Energia de Deformação:



$$W_e = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^e \quad ; \quad W_p = \int_0^\varepsilon \sigma_p^{eq} d\varepsilon_p^{eq} \quad (2.4)$$

onde  $\sigma_p^{eq}$  e  $d\varepsilon_p^{eq}$  são respectivamente a tensão equivalente e o incremento de deformação plástica equivalente. Levando a Eq.(2.4) na equação da Integral J obtém-se a expressão da Integral J para o caso inelástico, segundo LEITÃO e ALIABADI (1993):

$$J = \int_\Gamma (W_e n_1 - t_i u_{i,1}) d\Gamma + \int_\Gamma W_p n_1 d\Gamma \quad (2.5)$$

Se a Teoria da Plasticidade incremental é usada, então, o cálculo de  $J$  exige a avaliação de todas estas quantidades para acompanhar a história do carregamento. O contorno  $\Gamma$  é arbitrário porque a Integral J é independente do caminho de integração, mesmo para o caso inelástico. GEORGIADIS e GRENTZELOU (2006) provaram esta independência do caminho de integração utilizando a Teoria da Elasticidade Gradiente de Mindlin. Como  $\Gamma$  é arbitrário, escolhe-se, em geral, a trajetória circular. RICE (1968) mostrou que a Integral J, para materiais elásticos, é igual à Taxa de Liberação de Energia de Deformação Elástica  $G$  sendo, portanto, uma medida do Fator de Intensidade de Tensão, a partir da Eq.(2.2).

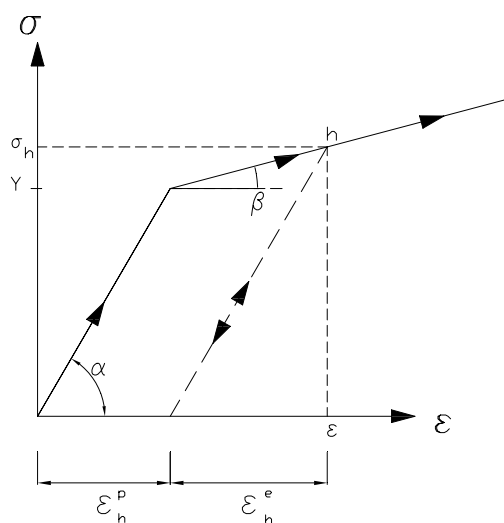


FIGURA 2.3 – Diagrama Tensão-Deformação Simplificado do Material

A curva tensão-deformação do comportamento de um material elástico não-linear supõe, no descarregamento, que o retorno à condição inicial percorre a mesma trajetória do carregamento. Entretanto, para o comportamento elastoplástico, o retorno se dá em trajetória linear, com inclinação igual ao módulo de elasticidade  $E$ , medido na origem do diagrama tensão-deformação do material. Para carregamento monotônico, pode-se afirmar que não existe diferença entre as duas situações.

Soluções analíticas, para comportamento elastoplástico, do Fator de Intensidade de Tensão não estão disponíveis na literatura. Entretanto, sob certas condições, a Integral  $J$  fornece valores da taxa de liberação da energia de deformação onde se incorpora os efeitos da plasticidade. A propriedade da independência do caminho é perdida se uma quantidade significativa de energia na região da ponta da trinca é convertida em energia inelástica ou quando o material é submetido a um processo de descarregamento. NGUYEN et al. (2005) propuseram o Método da Força Material para avaliar a taxa de liberação da energia e a taxa do trabalho de dissipação por fratura para materiais inelásticos usando o Método dos Elementos Finitos. Os autores mostraram que, para o caso especial onde a trinca se propaga com velocidade constante, a força de dissipação global iguala à taxa de trabalho da dissipação fazendo com que os Métodos da Força Material Global e da Integral  $J$  sejam equivalentes. Eles afirmaram que a aplicação da Integral  $J$  em elastoplasticidade, está limitada a carregamento monotônico de trincas estáticas, para evitar o descarregamento do material na zona plástica, ou com velocidade constante na propagação, independente da resposta do material. Outra justificativa para que a região imediatamente atrás da nova ponta não se descarregue de forma significativa foi dada por HUTCHINSON e PARIS (1979) *apud* BROEK (1986) sugerindo que a curva Propagação da Trinca  $\Delta a$  x Taxa de Liberação de Energia seja bastante inclinada e que o ligamento, distância entre a ponta da trinca e o contorno da peça, seja bem maior que  $\Delta a$ . Sugeriram também que o comprimento da propagação esteja limitado a 1 ou 2mm.

Várias integrais com caminho no domínio foram desenvolvidas para estender a aplicação da Integral  $J$  na MFEP sob condições gerais de carregamento. Estas integrais diferem principalmente na maneira de medir a energia, que é usada na definição do

tensor energia-momentum. Exemplos incluem a família de integrais  $T^*$  desenvolvida por BRUST et al. (1985-1986) e BRUST e ATLURI (1986), a Integral  $J^*$  de BLACKBURN (1972) e a Integral  $\hat{J}$  de KISHIMOTO et al. (1980), *apud* NGUYEN et al. (2005).

## 2.2 Critérios para Propagação das Trincas

Observou-se experimentalmente que a direção de propagação da trinca, para situações de carregamento no modo misto, não se dá obrigatoriamente segundo a direção original do eixo da trinca. Vários critérios são sugeridos na literatura para a direção da propagação. Os critérios mais conhecidos são: Critério da Tensão Principal Máxima e Critério da Taxa de Liberação da Energia de Deformação. Estes critérios podem ser melhorados incluindo-se o comportamento elastoplástico do material, que consiste na combinação do respectivo critério de escoamento, com os campos de tensões elásticas na região da ponta da trinca, as conhecidas equações de Westergaard. Este procedimento fornece a forma e as expressões das tensões na região plastificada. O critério para a direção da propagação é, então, aplicado à expressão destas tensões.

### 2.2.1 Critério da Tensão Principal Máxima

O critério da Tensão Principal Máxima considera que a propagação da trinca começa a partir da ponta, na direção perpendicular à tensão principal máxima e quando esta tensão atinge um valor crítico, igual à tensão de fratura do teste de tração uniaxial. O campo de tensões na ponta da trinca para materiais elásticos lineares, em coordenadas polares com origem na ponta da trinca e cujo eixo coincide com a direção do eixo da trinca, pode ser escrito:

$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \left[ \left\{ K_I \cos \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta) \right\} - \left\{ 3 K_{II} \sin \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta) \right\} \right]$$

$$\sigma_r = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \left[ \left\{ K_I \cos \frac{\theta}{2} (3 - \cos \theta) \right\} - \left\{ K_{II} \sin \frac{\theta}{2} (1 - 3 \cos \theta) \right\} \right] \quad (2.6)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \left[ \left\{ K_I \sin \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta) \right\} - \left\{ K_{II} \cos \frac{\theta}{2} (1 - 3 \cos \theta) \right\} \right]$$

onde  $K_I$  e  $K_{II}$  são os Fatores de Intensidade de Tensão nos modos de fratura I e II, respectivamente. O modo de fratura I refere-se à aplicação de um carregamento de tração perpendicular ao eixo da trinca, enquanto o modo II refere-se à análise da fratura submetida a cisalhamento puro, como mostrado na FIG.2.1. A combinação entre os dois modos é chamada de modo misto.

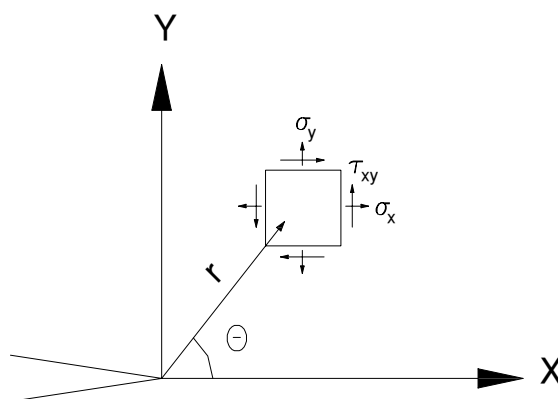


FIGURA 2.4 – Campo de Tensões na Ponta da Trinca

As direções dos eixos principais são aquelas onde a tensão de cisalhamento é nula, ou seja,  $\tau_{r\theta} = 0$ . Então, a partir da Eq.(2.6) referente a  $\tau_{r\theta}$ , com  $(1 + \cos \theta) = 2 \cos^2 \theta/2$ , tem-se:

$$K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1) = 0 \quad (2.7)$$

A solução desta equação é:

$$\theta_t = 2 \tan^{-1} \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left( \frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \right] \quad (2.8)$$

A Tenacidade à Fratura é obtida através de ensaios de laboratório executados com carregamento no modo I e em condições de Estado Plano de Deformação. Como é obtida no modo I a tenacidade é comumente chamada de  $K_{IC}$ . Ensaios executados para Estado Plano de Tensão são fortemente dependentes da espessura do corpo de prova e por isso prefere-se obter a tenacidade do material a partir de ensaios executados para Estado Plano de Deformação. O critério de fratura no modo I pode ser escrito como:  $K_I \geq K_{IC}$ . Utilizando-se a Eq.(2.7), com  $\theta = 0$ , tem-se  $K_{II} = 0$ , reproduzindo a situação do modo I puro e:

$$\sigma_1^I = \frac{K_{IC}}{\sqrt{2\pi r}} \quad (2.9)$$

O valor da tensão principal máxima é dado pela Eq.(2.6) com  $\theta = \theta_t$ , ou seja:

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos^2 \frac{\theta_t}{2} \left[ K_I \cos \frac{\theta_t}{2} - 3K_{II} \sin \frac{\theta_t}{2} \right] \quad (2.10)$$

Pode-se afirmar que, no modo misto, a fratura acontece quando a tensão principal máxima  $\sigma_1$  atinge o valor de  $\sigma_1^I$ . Igualando-se, então, as Eq.(2.9) e (2.10), tem-se:

$$K_{IC} = \cos^2 \frac{\theta_t}{2} \left[ K_I \cos \frac{\theta_t}{2} - 3K_{II} \sin \frac{\theta_t}{2} \right] \quad (2.11)$$

A expressão à direita do sinal de igualdade da Eq.(2.11) é conhecida como o Fator de Intensidade de Tensão no modo misto, ou seja:

$$K_{Ieq} = K_I \cos^3 \frac{\theta_t}{2} - 3K_{II} \cos^2 \frac{\theta_t}{2} \sin \frac{\theta_t}{2} \quad (2.12)$$

### 2.2.2 Critério da Densidade da Energia de Deformação Mínima

Este critério afirma que a trinca se propaga, desde sua extremidade, na direção ao longo da qual a densidade da energia de deformação atinge um valor mínimo e a fratura ocorre quando este fator atinge um valor crítico. Para material elástico linear a Densidade de Energia de Deformação é definida por:  $u = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}$  que expandindo, vem:

$$u = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2] - \frac{\nu}{E} [\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x] + \frac{1}{2G} [\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2] \quad (2.13)$$

Sendo:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xz} &= - \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \quad ; \quad \tau_{zx} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Para Estado Plano de Deformação  $\sigma_z = \nu [\sigma_x + \sigma_y]$  e para Estado Plano de Tensão  $\sigma_z = 0$ ;  $E$  é o módulo de elasticidade e  $G = E/[2(1+\nu)]$  é o módulo de elasticidade transversal do material. Levando a Eq.(2.12) na Eq.(2.11) vem:

$$u = \frac{dW}{dV} = \frac{S(\theta)}{r} = \frac{1}{r} \left( a_{11} \cdot K_I^2 + 2a_{12} \cdot K_I \cdot K_{II} + a_{22} \cdot K_{II}^2 \right) \quad (2.15)$$

onde:

$$a_{11} = \frac{1}{16G\pi} ((1 + \cos \theta) \cdot (\kappa - \cos \theta))$$

$$a_{12} = \frac{1}{16G\pi} \text{sen} \theta (2 \cos \theta - \kappa + 1)$$

$$a_{22} = \frac{1}{16G\pi} [(\kappa + 1) \cdot (1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta) \cdot (3 \cos \theta - 1)]$$

$\kappa = (3 - 4\nu)$  para Estado Plano de Deformação e  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  para Estado Plano de Tensão. A fratura ocorre na direção do valor mínimo de  $S(\theta)$ , então  $\theta_{min}$  é obtido a partir das seguintes relações:

$$\frac{dS}{d\theta} = 0; \quad \frac{d^2S}{d\theta^2} > 0$$

Então:

$$\begin{aligned} & [2(1 + \kappa)\mu] \tan^4 \frac{\theta}{2} + [2\kappa(1 - \mu^2) - 2\mu^2 + 10] \tan^3 \frac{\theta}{2} - 24\mu \tan^2 \frac{\theta}{2} + \\ & + [2\kappa(1 - \mu^2) + 6\mu^2 - 14] \tan \frac{\theta}{2} + 2(3 - \kappa)\mu = 0 \end{aligned}$$

$$[2(\kappa - 1)\mu] \text{sen} \theta - 8\mu \text{sen} 2\theta + [(\kappa - 1)(1 - \mu^2)] \cos \theta + [2(\mu^2 - 3)] \cos 2\theta > 0 \quad (2.16)$$

onde  $\mu = K_I / K_{II}$ . O critério para fratura no modo misto pode, então, ser escrito:

$$K_{Ieq} = \left\{ \frac{16G}{2(\kappa - 1)} \left( a_{11} - K_I^2 + 2a_{12} \cdot K_I \cdot K_{II} + a_{22} \cdot K_I^2 \right)_{\theta = \theta_m} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.17)$$

### 2.2.3 Outros Critérios

Neste trabalho é utilizado o Critério da Tensão Principal Máxima, mas outros critérios podem ser incluídos com facilidade pela substituição da maneira de se calcular o ângulo de propagação. Com esta finalidade, apresentam-se a seguir alguns critérios alternativos que incorporam o comportamento elastoplástico do material. Apesar de serem baseados nas expressões dos campos elásticos de tensão na região da ponta da trinca, eles consideram os efeitos da plasticidade através dos critérios de escoamento específicos. Observa-se, também, que a plasticidade está considerada na avaliação das tensões na região plastificada e, por consequência, dos Fatores de Intensidade de Tensão. KHAN e KHRAISHEH (2000) estudaram alguns destes critérios, enfatizando a necessidade de incluir características plásticas dos materiais, justificada pelos resultados mais precisos que foram obtidos. O desenvolvimento detalhado destas expressões se encontra no Anexo.

- **Critério da Tensão Principal Máxima modificado pelo Critério de Escoamento de Von Mises**

Segundo KHAN e KHRAISHEH (2000) o *Critério da Tensão Principal Máxima Modificado* considera que a propagação da trinca ocorre segundo a perpendicular à direção da tensão principal máxima avaliada no contorno elastoplástico segundo critério de escoamento de Von Mises. Combinando o critério de escoamento de Von Mises com as Eq.(2.6) chega-se à expressão da região plastificada em torno da ponta da trinca e às expressões que fornecem a direção da propagação da trinca:

$$\begin{aligned}
 & 12 \tan^6 \frac{\theta}{2} - 24\mu \tan^5 \frac{\theta}{2} + [3 + 16\mu^2] \tan^4 \frac{\theta}{2} - [(5 + 4\mu^2)\mu] \tan^3 \frac{\theta}{2} + \\
 & + 3\mu^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} - \frac{[(7 + 5\mu^2)\mu]}{2} \tan \frac{\theta}{2} - \frac{(9 + 5\mu^2)}{2} = 0
 \end{aligned} \tag{2.18}$$



$$\begin{aligned}
& (177 + 49\mu^2) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + (1269 + 621\mu^2) \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} - (255 - 425\mu^2) \operatorname{sen} \frac{5\theta}{2} + \\
& + (189 - 147\mu^2) \operatorname{sen} \frac{7\theta}{2} - \left[ (305 + 49\mu^2) \mu \right] \cos \frac{\theta}{2} - \left[ (423 - 207\mu^2) \mu \right] \cos \frac{3\theta}{2} + \quad (2.19) \\
& + \left[ (595 - 85\mu^2) \mu \right] \cos \frac{5\theta}{2} - \left[ (315 - 21\mu^2) \mu \right] \cos \frac{7\theta}{2} < 0
\end{aligned}$$

onde  $\mu = K_I / K_{II}$ . A solução da Eq.(2.18) fornece seis raízes sendo quatro complexas conjugadas e apenas duas raízes reais que, combinadas com a Eq.(2.19), fornecem o ângulo adequado para a propagação da trinca.

- **Cr terio da Tensão Principal Máxima modificado pelo Cr terio de Escoamento de Mohr-Coulomb**

Uma alternativa ao *Cr terio da Tensão Principal Máxima Modificado* considera que a propaga o da trinca ocorre segundo a perpendicular   dire o da tensão principal máxima avaliada no contorno elastoplástico segundo cr terio de escoamento de Mohr-Coulomb. O cr terio de escoamento de Mohr-Coulomb pode ser expresso por:

$$\tau_{r\theta} + \sigma_{\theta} \cdot \operatorname{tg} \Phi \leq c \quad \text{ou} \quad f_{r\theta} + f_{\theta} \cdot \operatorname{tg} \Phi \leq 2c\sqrt{2\pi r}$$

onde  $c$    a coesão,  $\Phi$    o ângulo de atrito interno do material e  $r$  representa a distância do contorno elastoplástico   ponta da trinca. Combinando o cr terio de escoamento de Mohr-Coulomb com as Eq.(2.4) chega-se   expressão da região plastificada em torno da ponta da trinca e  s express es que fornecem a dire o da propaga o da trinca:

$$6 \tan^4 \frac{\theta}{2} - 4\mu \tan^3 \frac{\theta}{2} + (\mu^2 + 9) \tan^2 \frac{\theta}{2} - 4\mu \tan \frac{\theta}{2} + (\mu^2 + 3) = 0 \quad (2.20)$$

$$12 \tan^3 \frac{\theta}{2} - 6\mu \tan^2 \frac{\theta}{2} + (\mu^2 + 9) \tan \frac{\theta}{2} - 2\mu < 0 \quad (2.21)$$

onde  $\mu = K_I / K_{II}$ . A solução da Eq.(2.20), combinada com a Eq.(2.21), fornece o ângulo adequado para a propagação da trinca.

- **Crítério da Densidade da Energia de Deformação Dilatacional Máxima**

Segundo KHAN e KHRAISHEH (2000) o *Crítério da Densidade da Energia de Deformação Dilatacional Máxima* considera que a propagação da trinca coincide com a direção da densidade de energia de deformação dilatacional máxima avaliada no contorno da energia de deformação distorcional constante em torno da ponta da trinca. Este critério utiliza o contorno elasto-plástico segundo critério de escoamento de Von Mises. Combinando a expressão da energia de deformação distorcional, que é constante no contorno elasto-plástico de Von Mises, com as Eq.(2.4), chega-se às expressões que fornecem a direção da propagação da trinca:

$$\begin{aligned} & \tan^5 \frac{\theta}{2} - 4\mu \tan^4 \frac{\theta}{2} + (5\mu^2 - 1) \tan^3 \frac{\theta}{2} + \frac{(3 - 5\mu^2)}{2} \tan^2 \frac{\theta}{2} + \\ & + \frac{(\mu^4 - 2\mu^2 - 1)}{2} \tan \frac{\theta}{2} + \frac{(1 + \mu^2)\mu}{2} = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} & (1 - 20\mu^2 - 52\mu^4) \cos \theta + [8(3 + 2\mu^2 - \mu^4)] \cos 2\theta - [3(3 - 12\mu^2 + \mu^4)] \cos 3\theta + \\ & + [2(13 + 5\mu^2)\mu] \operatorname{sen} \theta + [32(1 + \mu^2)\mu] \operatorname{sen} 2\theta - [6(5 - 3\mu^2)\mu] \operatorname{sen} 3\theta < 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde  $\mu = K_I / K_{II}$ . A solução da Eq.(2.22) combinada com a Eq.(2.23) fornece o ângulo adequado para a propagação da trinca.

### **2.3 Resumo**

Neste capítulo foram apresentados os fundamentos da Mecânica da Fratura e os conceitos da propagação de trinca. O conceito do Fator de Intensidade de Tensão foi introduzido para a MFEL. Foi mostrado que o FIT é um fator que mede a intensidade da sollicitação na ponta da trinca no contexto da MFEL, mas o seu emprego pode ser estendido para a MFEP. Foram descritos diversos critérios para a propagação da trinca, ressaltando-se, entretanto, que o Critério da Tensão Principal Máxima será o único critério a ser utilizado no restante da tese.

# 3

## EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA ELASTOPLASTICIDADE

Considerando-se um elemento infinitesimal em torno de um ponto dentro de um corpo, o equilíbrio estático de forças e momentos deve satisfazer à seguinte equação:

$$\sigma_{ij,i} + b_j = 0 \quad (3.1)$$

onde  $\sigma_{ij,i}$  são as componentes das derivadas espaciais do tensor de tensões  $\sigma_{ij}$ , ou seja,  $\sigma_{ij,i} = \partial\sigma_{ij} / \partial x_i$  e  $b_j$  representa as componentes das forças de volume. Se os deslocamentos do corpo são tais que os termos de segunda ordem podem ser desprezados, as deformações podem ser expressas pelo tensor de deformação infinitesimal de Cauchy:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.2)$$

Para um material elástico e isotrópico, no qual não há variação de temperatura, a Lei de Hooke, relacionando tensões e deformações, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = 2G \varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (3.3)$$

Substituindo-se a Eq.(3.2) na Eq.(3.3) têm-se as tensões em função das derivadas dos deslocamentos. Substituindo-se o resultado na Eq.(3.1) obtém-se a conhecida equação de Navier:

$$G u_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu} u_{k,kj} + b_j = 0 \quad (3.4)$$

Os problemas da Teoria da Elasticidade que obedecem a Eq.(3.4) e que têm condições de contorno conhecidas, podem ser representados por uma equação integral, como é mostrado a seguir.

Considera-se um corpo definido pelo seu contorno  $\Gamma$  e seu domínio  $\Omega$ , que está em estado de equilíbrio, com condições de contorno conhecidas de carga e deslocamento, representadas pelos tensores  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $u_i$ ,  $p_i$  e  $b_i$ . Supõe-se, também, um domínio  $\Omega^*$  com contorno  $\Gamma^*$ , que contenha o corpo  $\Omega + \Gamma$ , e que esteja em equilíbrio, representado pelos tensores  $\sigma_{ij}^*$ ,  $\varepsilon_{ij}^*$ ,  $u_i^*$ ,  $p_i^*$  e  $b_i^*$ . Se ambos os corpos têm as mesmas propriedades elásticas pode-se escrever a equação integral a partir da simetria dos tensores envolvidos:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega \quad (3.5)$$

Integrando por partes a equação Eq.(3.5) e tendo-se em conta a Eq.(3.1) e a Eq.(3.2) chega-se à expressão do segundo Teorema da Reciprocidade de Betti.

$$\int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega + \int_{\Gamma} p_i^* u_i d\Gamma = \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_i u_i^* d\Gamma \quad (3.6)$$

Supondo-se que as componentes das forças de volume  $b_i^*$  correspondem a uma força unitária  $P_i$  aplicada em um ponto  $s \in \Omega^*$ , em cada uma das três direções ortogonais, pode-se escrever:

$$b_j^* = \delta(s,q) P_j \quad (3.7)$$

onde  $\delta(s,q)$  representa a função Delta de Dirac,  $s$  é o ponto singular (ponto fonte) e  $q \in \Omega^*$  é o ponto campo. Tem-se, então, que:

$$\int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega = u_i(s) P_i \quad (3.8)$$

Se cada ponto de carga é considerado independentemente, pode-se escrever:

$$u_j^* = u_{ij}^*(s,q) P_i \quad e \quad p_j^* = p_{ij}^*(s,q) P_i \quad (3.9)$$

A partir do exposto acima a Eq.(3.6) passa a representar as três componentes independentes do deslocamento no ponto  $s$ , ou seja:

$$u_i(s) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s,Q) p_j(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s,Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(s,q) b_j(q) d\Omega(q) \quad (3.10)$$

onde  $s, q \in \Omega$  e  $S, Q \in \Gamma$ . A Eq.(3.10) é conhecida como Identidade de Somigliana para deslocamentos. Esta equação envolve valores para pontos no contorno, sendo necessário, portanto, a sua particularização para estes pontos.

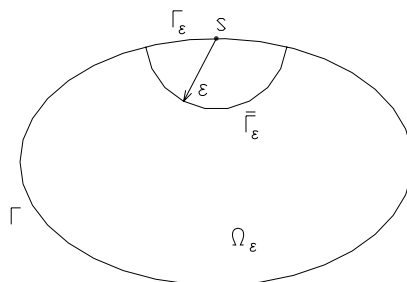


FIGURA 3.1 - Processo de Limite da Equação Integral de Contorno

O procedimento consiste em isolar-se o ponto fonte  $S$  pertencente ao contorno  $\Gamma$ , com um arco de círculo de raio  $\varepsilon$ , conforme FIG.3.1, e através de um processo de limite com  $\varepsilon \rightarrow 0$ , obter uma equação integral de contorno para deslocamentos:

$$C_{ij}(S)u_j(S) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(S,Q)u_j(Q)d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(S,Q)p_j(Q)d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(S,q)b_j(q)d\Omega(q) \quad (3.11)$$

A Eq.(3.11) fornece as relações que devem ser satisfeitas entre os deslocamentos e forças de superfície de um corpo elástico. Como não há uma solução analítica geral para a equação integral de contorno, uma aproximação numérica é a forma mais adequada para a solução do problema. A sua implementação consiste na discretização do contorno em uma série de elementos, nos quais os valores dos deslocamentos e forças de superfície no contorno são interpolados em função dos respectivos valores nos nós destes elementos. Os valores conhecidos são substituídos na equação integral de contorno e os valores desconhecidos formam um sistema de equações algébricas cuja solução resolve o problema. Este conjunto de procedimentos forma a base do Método dos Elementos de Contorno direto, cujas incógnitas são as suas variáveis físicas reais.

Na Teoria da Elasticidade consideram-se duas hipóteses: ao se retirar o carregamento de um corpo ele retorna ao estado inicial indeformado e as deformações dependem apenas das tensões finais aplicadas, não interessando a história do carregamento. Na Plasticidade estas hipóteses não são válidas. Quando se aplica um carregamento a uma amostra, elevando-se as tensões a valores que excedem o limite elástico do material, o estado final de deformação depende não somente das tensões finais, mas também da história da trajetória das tensões, a partir do início do escoamento. Ao se retirar o carregamento aplicado, ocorre uma deformação residual na amostra, não retornando ao estado inicial anterior à aplicação da carga. A deformação total é, então, a soma das deformações elástica e inelástica, ou seja:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^o \quad (3.12)$$

onde  $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$  representa a parte elástica da taxa da deformação total e  $\dot{\varepsilon}_{ij}^o$  representa a respectiva parte plástica. O  $(.)$  indica que o processo é incremental para se levar em conta a história do carregamento. A Eq.(3.5), que é válida para materiais elásticos, é escrita novamente na forma incremental:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^*(s, q) \dot{\varepsilon}_{ij}^e(q) d\Omega(q) = \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}(q) \varepsilon_{ij}^*(s, q) d\Omega(q) \quad (3.13)$$

Substituindo-se a Eq.(3.12) na Eq.(3.13), tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^*(s, q) \dot{\varepsilon}_{ij}(q) d\Omega(q) = \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}(q) \varepsilon_{ij}^*(s, q) d\Omega(q) + \int_{\Omega} \sigma_{ij}^*(s, q) \dot{\varepsilon}_{ij}^o(q) d\Omega(q) \quad (3.14)$$

As duas primeiras integrais da Eq.(3.14) são integradas por partes como foi feito na Eq.(3.5) e a última integral não sofre nenhuma alteração. A equação incremental resultante é análoga à Eq.(3.10), somando-se, agora, o termo inelástico:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(s) = & \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, Q) \dot{p}_j(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, Q) \dot{u}_j(Q) d\Gamma(Q) \\ & + \int_{\Omega} u_{ij}^*(s, q) \dot{b}_j(q) d\Omega(q) + \int_{\Omega} \sigma_{jki}^*(s, q) \dot{\varepsilon}_{jk}^o(q) d\Omega(q) \end{aligned} \quad (3.15)$$

A Eq.(3.15) é a Identidade de Somigliana para deslocamentos estendida para o caso inelástico que permite a consideração da história do carregamento, durante o processo incremental.

### 3.1 Equação Integral para Deslocamentos

A Equação Integral para pontos internos, estendida para o caso inelástico na formulação em deformações iniciais, na ausência de forças de volume, segundo TELLES (1983), como foi mostrado no item anterior, é dada por:



$$\begin{aligned} \dot{u}_i(s) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, Q) \dot{u}_j(Q) d\Gamma(Q) &= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, Q) \dot{p}_j(Q) d\Gamma(Q) \\ &+ \int_{\Omega} \sigma_{jki}^*(s, q) \dot{\varepsilon}_{jk}^o(q) d\Omega(q) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Levando-se em conta o Teorema da Reciprocidade de Betti para o termo inelástico, obtém-se a Identidade de Somigliana para problemas com tensões iniciais:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(s) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, Q) \dot{u}_j(Q) d\Gamma(Q) &= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, Q) \dot{p}_j(Q) d\Gamma(Q) \\ &+ \int_{\Omega} \varepsilon_{jki}^*(s, q) \dot{\sigma}_{jk}^o(q) d\Omega(q) \end{aligned} \quad (3.17)$$

As soluções fundamentais  $\dot{u}_{ij}^*$  e  $\dot{p}_{ij}^*$  representam os deslocamentos e forças de superfície na direção  $j$  no ponto campo  $Q$ , que corresponde a uma carga unitária aplicada na direção  $i$  no ponto fonte  $s$ . As últimas integrais das Eq.(3.16) e Eq.(3.17) referem-se às contribuições das deformações iniciais e das tensões iniciais no domínio  $\Omega$ , respectivamente. As integrais destas equações são regulares porque  $r \neq 0$ , onde  $r$  é a distância entre os pontos fonte e campo. De maneira análoga como foi obtida a Eq.(3.11), a Eq.(3.17) pode ser escrita para os pontos do contorno (ponto  $S$ ):

$$\begin{aligned} C_{ij}(S) \dot{u}_j(S) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(S, Q) \dot{u}_j(Q) d\Gamma(Q) &= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(S, Q) \dot{p}_j(Q) d\Gamma(Q) \\ &+ \int_{\Omega} \varepsilon_{jki}^*(S, q) \dot{\sigma}_{jk}^o(q) d\Omega(q) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Tem-se  $C_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij}$  para contornos suaves, mas o valor de  $C_{ij}$  depende da geometria local, em vértices com descontinuidade geométrica, onde o ponto fonte  $S$  está aplicado.  $\delta_{ij}$  representa o delta de Kronecker, ou seja, igual a zero se  $i \neq j$  e igual a um se  $i = j$ . As expressões dos tensores fundamentais  $p_{ij}^*$ ,  $u_{ij}^*$  e  $\varepsilon_{ijk}^*$  podem ser encontradas em TELLES (1983). A expressão de  $C_{ij}$  para vértices com descontinuidade geométrica pode ser vista em TEIXEIRA (1992) ou em VENTURINI (1983). A integral à esquerda do sinal de igualdade deve ser interpretada no sentido do *Valor Principal de Cauchy*.

### 3.2 Equação Integral da Derivada dos Deslocamentos

A equação integral da derivada dos deslocamentos nos pontos internos, estendida para o caso inelástico, é obtida a partir da Eq.(3.17). Quando se deriva a integral de domínio desta equação, aparece um termo livre, segundo o conceito de Mikhlin, como é mostrado a seguir. A existência do termo livre está justificada em TELLES (1983), PARTON e PERLIN (1982) ou MUSKHELISHVILI (1953).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{u}_i(s)}{\partial x_m} = & \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{ij}^*(s,q)}{\partial x_m} \dot{p}_j(q) d\Gamma(q) - \int_{\Gamma} \frac{\partial p_{ij}^*(s,q)}{\partial x_m} \dot{u}_j(q) d\Gamma(q) + \\ & + \int_{\Omega} \frac{\partial \varepsilon_{jki}^*(s,q)}{\partial x_m} \dot{\sigma}_{jk}^o(q) d\Omega(q) - \dot{\sigma}_{jk}^o(q) \int_{\Gamma_1} \varepsilon_{jki}^*(s,q) r_{,m} d\Gamma(q) \end{aligned} \quad (3.19)$$

A terceira integral da Eq.(3.19) deve ser interpretada no sentido do Valor Principal de Cauchy e o termo livre é calculado considerando-se  $\Gamma_1$  um círculo de raio unitário e centro no ponto fonte. Deve-se observar que a derivada do deslocamento é tomada em relação ao ponto fonte. Para estado plano de deformação o termo livre é expresso por:

$$- \dot{\sigma}_{jk}^o(q) \int_{\Gamma_1} \varepsilon_{jki}^*(s,q) r_{,m} d\Gamma(q) = \frac{1}{16(1-\nu)G} \left[ 2(3-4\nu) \dot{\sigma}_{im}^o(q) - \dot{\sigma}_{kk}^o(q) \right] \quad (3.20)$$

$G$  é o módulo de elasticidade transversal,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson do material e os índices valem 1 e 2 para problemas 2D. Na penúltima integral da Eq.(3.19), tem-se:

$$\frac{\partial \varepsilon_{jki}^*}{\partial x_m} = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)Gr^2} \left\{ \begin{aligned} & (1-2\nu) \left[ \delta_{km} \delta_{ij} + \delta_{jm} \delta_{ik} - 2r_{,k} r_{,m} \delta_{ij} - 2r_{,j} r_{,m} \delta_{ik} \right] \\ & - \delta_{im} \delta_{jk} - 8r_{,i} r_{,j} r_{,k} r_{,m} \\ & + 2 \left[ r_{,i} r_{,m} \delta_{jk} + r_{,j} r_{,k} \delta_{im} + r_{,i} r_{,k} \delta_{jm} + r_{,i} r_{,j} \delta_{km} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Para o cálculo da *Integral J* é necessário saber o valor das derivadas dos deslocamentos em pontos do domínio, o que faz a Eq.(3.19) particularmente importante.

### 3.3 Equação Integral das Tensões e das Forças de Superfície

Tendo-se em vista a Eq.(3.3), obtém-se a equação das tensões nos pontos internos a partir da Eq.(3.19), na ausência de forças de volume:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij}(s) + \int_{\Gamma} p_{ijk}^*(s, Q) \dot{u}_k(Q) d\Gamma(Q) &= \int_{\Gamma} u_{ijk}^*(s, Q) \dot{p}_k(Q) d\Gamma(Q) \\ &+ \int_{\Omega} \varepsilon_{ijkl}^*(s, q) \dot{\sigma}_{kl}^o(q) d\Omega(q) + g_{ij}(\dot{\sigma}_{kl}^o) \end{aligned} \quad (3.22)$$

As expressões dos tensores fundamentais  $p_{ijk}^*$ ,  $u_{ijk}^*$  e  $\varepsilon_{ijkl}^*$  e do termo livre  $g_{ij}$  são encontradas em TELLES (1983) ou em TEIXEIRA (1992). Para estender a Eq.(3.22) para o contorno, deve-se aplicar um processo de limite retirando-se um setor circular de raio  $\varepsilon$  e centro no ponto singular  $S$  pertencente ao contorno do corpo, conforme FIG.3.1. Como  $S \notin \Omega_{\varepsilon}$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon} + \bar{\Gamma}_{\varepsilon}} p_{ijk}^*(s, Q) \dot{u}_k(Q) d\Gamma(Q) &= \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon} + \bar{\Gamma}_{\varepsilon}} u_{ijk}^*(s, Q) \dot{p}_k(Q) d\Gamma(Q) \\ &+ \int_{\Omega} \varepsilon_{ijkl}^*(s, q) \dot{\sigma}_{kl}^o(q) d\Omega(q) + \bar{g}_{ij}(\dot{\sigma}_{kl}^o) \end{aligned} \quad (3.23)$$

$\bar{g}_{ij}(\dot{\sigma}_{kl}^o)$  é o resultado do processo de limite quando  $g_{ij}(\dot{\sigma}_{kl}^o)$  é levado para o contorno.

Para elasticidade bidimensional sabe-se que  $u_{ijk}^* = \mathcal{O}(1/r)$  e  $p_{ijk}^* = \mathcal{O}(1/r^2)$ . A Eq.(3.23) é expandida a seguir:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} p_{ijk}^*(s, Q) \dot{u}_k(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\bar{\Gamma}_{\varepsilon}} p_{ijk}^*(s, Q) \dot{u}_k(Q) d\Gamma(Q) &= \\ = \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} u_{ijk}^*(s, Q) \dot{p}_k(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\bar{\Gamma}_{\varepsilon}} u_{ijk}^*(s, Q) \dot{p}_k(Q) d\Gamma(Q) & \\ + \int_{\Omega} \varepsilon_{ijkl}^*(s, q) \dot{\sigma}_{kl}^o(q) d\Omega(q) + \bar{g}_{ij}(\dot{\sigma}_{kl}^o) & \end{aligned} \quad (3.24)$$

Toma-se, então, o limite quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  na Eq.(3.24), e obtém-se a expressão das tensões no contorno. Para um melhor entendimento do processo de limite, as integrais são avaliadas como mostrado a seguir. As duas primeiras integrais à direita do sinal de igualdade são:

$$I_D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u_{ijk}^*(S, Q) \dot{p}_k(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{ijk}^*(S, Q) \dot{p}_k(Q) d\Gamma(Q) \right\} \quad (3.25)$$

Os dois limites da Eq.(3.25) têm singularidades fortes da ordem de  $\nu^2(1/r)$ . O primeiro resulta em uma integral imprópria que é integrável no sentido do *Valor Principal de Cauchy*. O segundo pode ser regularizado com o primeiro termo da expansão em série de *Taylor* das forças de superfície em torno do ponto fonte, resultando em:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{ijk}^*(S, Q) \dot{p}_k(Q) d\Gamma(Q) \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{ijk}^*(S, Q) [\dot{p}_k(Q) - \dot{p}_k(S)] d\Gamma(Q) \right\} \quad (3.26)$$

$$+ \dot{p}_k(S) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{ijk}^*(S, Q) d\Gamma(Q) \right\}$$

A primeira integral à direita do sinal de igualdade se anula pela condição de continuidade das forças de superfície. Então:

$$I_D = \int_{\Gamma} u_{ijk}^*(S, Q) \dot{p}_k(Q) d\Gamma(Q) + C_{ijk}(S) \dot{p}_k(S) \quad (3.27)$$

onde:

$$C_{ijk}(S) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{ijk}^*(S, Q) d\Gamma(Q) \quad (3.28)$$

Da mesma forma, as integrais à esquerda do sinal de igualdade na equação (3.24) são:

$$I_E = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} p_{ijk}^*(S, Q) \dot{u}_k(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ijk}^*(S, Q) \dot{u}_k(Q) d\Gamma(Q) \right\} \quad (3.29)$$

Os dois limites da Eq.(3.29) contêm hipersingularidades da ordem de  $\mathcal{O}(1/r^2)$ . O segundo limite pode ser regularizado com os dois primeiros termos da expansão em série de *Taylor* dos deslocamentos em torno do ponto fonte, resultando em:

$$\begin{aligned} I_E = & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} p_{ijk}^*(S, Q) \dot{u}_k(Q) d\Gamma(Q) + \dot{u}_k(S) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ijk}^*(S, Q) d\Gamma(Q) + \\ & + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ijk}^*(S, Q) \left\{ \dot{u}_k(Q) - \dot{u}_k(S) - u_{k,m} [x_m(Q) - x_m(S)] \right\} d\Gamma(Q) + \\ & + \dot{u}_{k,m}(S) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ijk}^*(S, Q) [x_m(Q) - x_m(S)] d\Gamma(Q) \end{aligned} \quad (3.30)$$

O terceiro limite na Eq.(3.30) é integrável e se anula desde que a função  $\dot{u}_k$  preencha a condição de continuidade de Hölder. O segundo limite resulta em:

$$u_k(S) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ijk}^*(S, Q) d\Gamma(Q) = \dot{u}_k(S) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{B_{ijk}(S)}{\varepsilon} \quad (3.31)$$

onde  $B_{ijk}(S)$  é uma constante que depende da geometria local e das constantes elásticas do material. Finalmente o último limite leva a um salto na derivada dos deslocamentos, ou seja:

$$\dot{u}_{k,m}(S) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ijk}^*(S, Q) [x_m(Q) - x_m(S)] d\Gamma(Q) = \dot{u}_{k,m}(S) D_{ijkm}(S) \quad (3.32)$$

onde  $D_{ijkm}(S)$  é uma constante que depende das constantes elásticas do material e de transformações de coordenadas. Levando-se as Eq.(3.31) e (3.32) na Eq.(3.30) vem:

$$I_E = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} p_{ijk}^*(S, Q) \dot{u}_k(Q) d\Gamma(Q) + \dot{u}_k(S) \frac{B_{ijk}(S)}{\varepsilon} \right] + D_{ijkm}(S) \dot{u}_{k,m}(S) \quad (3.33)$$

O limite na Eq.(3.33) resulta em uma integral imprópria que pode ser integrada no sentido da *Parte Finita de Hadamard*. Este limite é finito, como será demonstrado no item 3.4, pois o segundo termo do limite, que é singular, cancela outro termo singular obtido a partir da expansão em série de Taylor do primeiro termo. Assim, a equação (3.33) pode ser reescrita, onde o símbolo  $\oint$  indica *Parte Finita de Hadamard*:

$$I_E = \oint_{\Gamma} p_{ijk}^*(S, Q) \dot{u}_k(Q) d\Gamma(Q) + D_{ijkm}(S) \dot{u}_{k,m}(S) \quad (3.34)$$

Levando as Eq.(3.27) e Eq.(3.34) na Eq.(3.24), vem:

$$\begin{aligned} -C_{ijk}(S) \dot{p}_k(S) + D_{ijkm}(S) \dot{u}_{k,m}(S) &= \oint_{\Gamma} u_{ijk}^*(S, Q) \dot{p}_k(Q) d\Gamma(Q) \\ - \oint_{\Gamma} p_{ijk}^*(S, Q) \dot{u}_k(Q) d\Gamma(Q) &+ \int_{\Omega} \varepsilon_{ijkl}^*(s, q) \dot{\sigma}_{kl}^o(q) d\Omega(q) + \bar{g}_{ij}(\dot{\sigma}_{kl}^o) \end{aligned} \quad (3.35)$$

A expressão à esquerda do sinal de igualdade, para contorno suave, vale  $\frac{1}{2} \dot{\sigma}_{ij}(S)$ , segundo CRUSE (1977). Então:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{\sigma}_{ij}(S) &= \oint_{\Gamma} u_{ijk}^*(S, Q) \dot{p}_k(Q) d\Gamma(Q) - \oint_{\Gamma} p_{ijk}^*(S, Q) \dot{u}_k(Q) d\Gamma(Q) \\ &+ \int_{\Omega} \varepsilon_{ijkl}^*(s, q) \dot{\sigma}_{kl}^o(q) d\Omega(q) + \bar{g}_{ij}(\dot{\sigma}_{kl}^o) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Voltando à Eq.(3.35), o termo independente  $\bar{g}_{ij}(\dot{\sigma}_{kl}^o)$  vale a metade daquele termo referente aos pontos internos,  $g_{ij}(\dot{\sigma}_{kl}^o)$ , porque é possível provar:

$$\dot{\sigma}_{kl}^o \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^* d\Gamma = \frac{1}{2} \dot{\sigma}_{kl}^o \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^* d\Gamma \quad (3.37)$$

Pode-se escrever, então, a Equação Integral para Tensões nos pontos do contorno, estendida para o caso inelástico:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{\sigma}_{ij}(S) + \oint_{\Gamma} p_{ijk}^*(S, Q) \dot{u}_k(Q) d\Gamma(Q) &= \oint_{\Gamma} u_{ijk}^*(S, Q) \dot{p}_k(Q) d\Gamma(Q) \\ &+ \int_{\Omega} \varepsilon_{ijkl}^*(S, q) \dot{\sigma}_{kl}^o(q) d\Omega(q) + \frac{1}{2} g_{ij}(\dot{\sigma}_{kl}^o) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Sabe-se que:  $p_i = \sigma_{ij} n_j$ . Então, a expressão final para a Equação Integral de Contorno para Forças de Superfície, estendida para o caso inelástico é:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{p}_i(S) = n_j \oint_{\Gamma} u_{ijk}^*(S, Q) \dot{p}_k(Q) d\Gamma(Q) - n_j \oint_{\Gamma} p_{ijk}^*(S, Q) \dot{u}_k(Q) d\Gamma(Q) \\ + n_j \int_{\Gamma} \varepsilon_{ijkl}^*(S, q) \dot{\sigma}_{kl}^o(q) d\Gamma(q) + \frac{1}{2} n_j g_{ij}(\dot{\sigma}_{kl}^o) \end{aligned} \quad (3.39)$$

As Eq.(3.18) e Eq.(3.39) constituem a base do Método dos Elementos de Contorno Dual, sendo que a Eq.(3.39) é conhecida como a equação hipersingular do MEC.

### 3.4 Integrais Singulares do Tipo Cauchy e sua Derivada

Justifica-se a seguir a afirmativa de que o limite da Eq.(3.33) resulta em uma integral imprópria e que este limite é finito. A integral pode ser reconhecida como uma *Integral do Tipo Cauchy*, ou seja:

$$I(x) = \int_a^b \frac{f(x)}{x-c} dx \quad (3.40)$$

onde  $a < c < b$ . Em primeiro lugar deve-se resolver a integral (3.26) fazendo-se  $f(x) = 1$ .

Então:

$$I(x) = \int_a^b \frac{dx}{x-c} \quad (3.41)$$

A integral (3.41) tem o ponto singular  $c$ . Deve-se, então, subdividi-la em duas outras integrais que não contêm o ponto singular e depois tomar o limite para incluir aquele ponto.

$$I(x) = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left[ \int_a^{c-\varepsilon_1} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon_2}^b \frac{dx}{x-c} \right] = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left\{ [Ln|x-c]|_a^{c-\varepsilon_1} + [Ln|x-c]|_{c+\varepsilon_2}^b \right\} \quad (3.42)$$

$$I(x) = Ln \left| \frac{b-c}{c-a} \right| + \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} Ln \left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right| ; \text{ Se } \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \Rightarrow \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} Ln \left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right| = 0$$

$$\text{Então} \quad I(x) = Ln \left| \frac{b-c}{c-a} \right| \quad \text{é o Valor Principal de Cauchy} \quad (3.43)$$

A integral original  $I(x)$  pode então ser resolvida:

$$I(x) = \int_a^b \frac{f(x)}{x-c} dx = \int_a^b \frac{f(x)-f(c)}{x-c} dx + f(c) \int_a^b \frac{dx}{x-c} \quad (3.44)$$

Se  $f(x)$  satisfaz a condição de Hölder, a integral singular  $I(x)$  existe no sentido do Valor Principal de Cauchy:

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x-c} dx = \int_a^b \frac{f(x)-f(c)}{x-c} dx + f(c) Ln \left| \frac{b-c}{c-a} \right| \quad (3.45)$$

A integral à direita do sinal de igualdade é uma integral regular.

Mostra-se, a seguir, a derivada da integral singular do Tipo Cauchy, e como a singularidade pode ser removida:

$$H(x) = \int_a^b \frac{f(x)}{(x-c)^2} dx$$



Da mesma forma que foi feito anteriormente, deve-se resolver a integral  $H(x)$  com  $f(x)=1$ . Isola-se o ponto singular  $c$ , como também foi feito anteriormente, dividindo-se a integral em duas outras integrais, em torno do ponto singular, e tomando-se o limite:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-c)^2} = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left[ \int_a^{c-\varepsilon_1} \frac{dx}{(x-c)^2} + \int_{c+\varepsilon_2}^b \frac{dx}{(x-c)^2} \right] \quad (3.46)$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-c)^2} = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left\{ \left[ -\frac{1}{x-c} \right]_a^{c-\varepsilon_1} + \left[ -\frac{1}{x-c} \right]_{c+\varepsilon_2}^b \right\} \quad (3.47)$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-c)^2} = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left[ \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{a-c} - \frac{1}{b-c} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right] \quad (3.48)$$

Fazendo-se  $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , vem:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-c)^2} = \left[ \frac{1}{a-c} - \frac{1}{b-c} \right] + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{2}{\varepsilon} \right] \quad (3.49)$$

A derivada da *Integral de Cauchy* pode, então, ser calculada:

$$H(x) = PF \int_a^b \frac{f(x)}{(x-c)^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{c-\varepsilon} \frac{f(x)}{(x-c)^2} dx + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{f(x)}{(x-c)^2} dx - 2 \frac{f(c)}{\varepsilon} \right] \quad (3.50)$$

onde *PF* significa *Parte Finita*. O termo  $2 \frac{f(c)}{\varepsilon}$  é subtraído de forma a eliminar a parte singular da integral. A integral  $H(x)$  pode ser regularizada com os dois primeiros termos da expansão em série de *Taylor*.

$$\begin{aligned}
H(x) = & \\
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} & \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} \frac{f(x) - f(c) - f'(c)[x-c]}{(x-c)^2} dx + f(c) \int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{(x-c)^2} + f'(c) \int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} \right\} + \\
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} & \left\{ \int_{c+\varepsilon}^b \frac{f(x) - f(c) - f'(c)[x-c]}{(x-c)^2} dx + f(c) \int_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-c)^2} + f'(c) \int_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-c} \right\} \\
& - 2 \frac{f(c)}{\varepsilon}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Então:

$$H(x) = \left\{ \int_a^b \frac{f(x) - f(c) - f'(c)[x-c]}{(x-c)^2} dx - f(c) \left[ \frac{1}{b-c} - \frac{1}{a-c} \right] + f'(c) \operatorname{Ln} \left| \frac{b-c}{c-a} \right| \right\} \tag{3.52}$$

onde o termo  $2 \frac{f(c)}{\varepsilon}$  foi cancelado com igual parcela, mas de sinal oposto, da expressão

$$f(c) \int_a^b \frac{f(x)}{(x-c)^2} dx . \text{ Desta forma justifica-se a dedução da equação (3.34).}$$

### 3.5 Comportamento Elastoplástico dos Materiais

O comportamento tensão-deformação dos materiais pode ser mostrado, de forma simplificada, a partir de um estado de tensões uniaxial como o ensaio de tração simples. A curva tensão-deformação obtida neste ensaio pode ser dividida em três trechos. O primeiro deles representa um comportamento elástico linear onde as tensões são proporcionais às deformações (trecho OE). O trecho seguinte corresponde a uma curva que representa um comportamento elástico não-linear (trecho EF). Isto quer dizer que, apesar das tensões e deformações não serem proporcionais, ainda assim a retirada do carregamento restitui o estado inicial indeformado. Neste trecho são válidas as equações da teoria da elasticidade devendo-se, entretanto, considerar a variação do módulo de elasticidade.

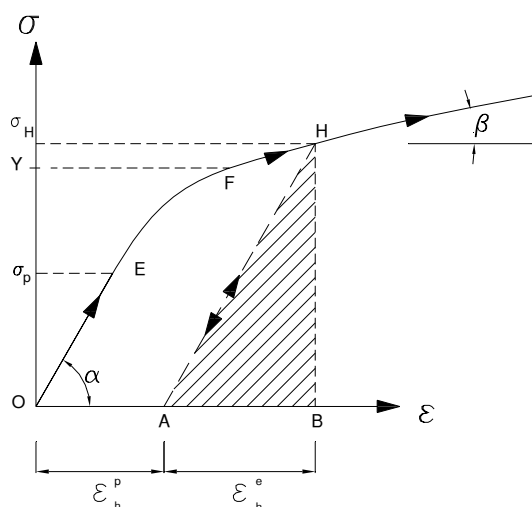


FIGURA 3.2 – Diagrama Tensão-Deformação do Material

O terceiro trecho refere-se ao domínio plástico (trecho FH), ou seja, deformações permanentes aparecem ao descarregar-se o corpo de prova. O aumento de tensões após o início do escoamento é chamado de encruamento ou endurecimento. Por outro lado, se houver diminuição de tensões após o início do escoamento este comportamento do material é chamado de enfraquecimento ou amolecimento.

No domínio elástico não há dissipação de energia no processo de descarregamento desde que todo o trabalho é restituído. Ao contrário, no domínio plástico, o trabalho restituído refere-se à área entre a vertical que passa no ponto considerado e a linha do descarregamento que, no diagrama tensão-deformação, é paralela à linha do carregamento elástico ( $\Delta AHB$ ). O restante do trabalho é dissipado concluindo-se que a dissipação de energia no domínio plástico é diferente de zero. São válidas, ainda, as equações de equilíbrio e compatibilidade usadas no regime elástico havendo, entretanto, a necessidade da reavaliação das relações tensão-deformação que determina a lei constitutiva dos materiais.

Observa-se que o limite elástico para um estado uniaxial de tensão é dado pelo valor da tensão de escoamento. Entretanto para um estado plano ou triplo de tensões o problema é bem mais complexo. A fronteira entre os domínios elástico e plástico não é mais definido por somente um valor de tensão. As componentes do estado de tensão são

combinadas dando origem a um valor único, conforme o critério de escoamento adotado, denominado tensão efetiva. O comportamento elastoplástico de um material é definido quando se conhece:

- a) a relação tensão-deformação na fase elástica;
- b) a superfície de escoamento que indica o início da fase plástica;
- c) uma lei de endurecimento ou enfraquecimento que estabelece as condições dos estados plásticos subseqüentes;
- d) uma lei de escoamento plástico relacionando os incrementos de deformação com as tensões e incrementos de tensão;

Para os materiais elásticos perfeitamente plásticos não é necessária a definição do item (c).

No regime elástico as tensões se relacionam com as deformações pela expressão:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.53)$$

onde  $\sigma_{ij}$  e  $\varepsilon_{ij}$  são as componentes das tensões e das deformações específicas respectivamente e  $C_{ijkl}$  é o tensor das constantes elásticas que, para materiais isotrópicos, é dado por:

$$C_{ijkl} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.54)$$

onde  $G$  e  $\nu$  são o módulo de elasticidade transversal e o coeficiente de Poisson do material respectivamente e  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker.

### 3.5.1 Lei de Endurecimento

Para os materiais que apresentam a característica de endurecimento haverá uma nova tensão de escoamento para um novo carregamento e esta situação é representada por uma nova superfície de escoamento. Desta forma são definidas as superfícies de escoamento subseqüentes, correspondentes aos vários carregamentos ocorridos. A

função e a superfície de escoamento são chamadas, para este caso, de função e superfície de carregamento. A posição da superfície de escoamento será, então, dependente do valor instantâneo do parâmetro de endurecimento  $\kappa$  que pode ser a deformação plástica volumétrica, o trabalho plástico realizado ou o índice de vazios, como é usual em solos.

A superfície de escoamento varia em tamanho e forma, de acordo com o estado de tensões. O aumento significará um endurecimento do material enquanto a diminuição o seu amolecimento. Em aplicações de plasticidade à mecânica dos solos, admite-se que durante o escoamento plástico, a superfície de carregamento expande-se ou contrai-se em relação à origem, mantendo a forma, o centro e a orientação da superfície de escoamento. Este comportamento é chamado de endurecimento ou enfraquecimento isotrópico. Outra possibilidade, menos comum, tem a superfície de carregamento com o mesmo tamanho, forma e orientação da superfície de escoamento. Entretanto ela sofre uma translação em relação à outra. Esse comportamento é chamado de endurecimento cinemático que permite a consideração do efeito Bauschinger. Após a primeira deformação plástica, os materiais podem perder a simetria da curva tensão-deformação e os níveis de escoamento à tração e à compressão ficam diferentes.

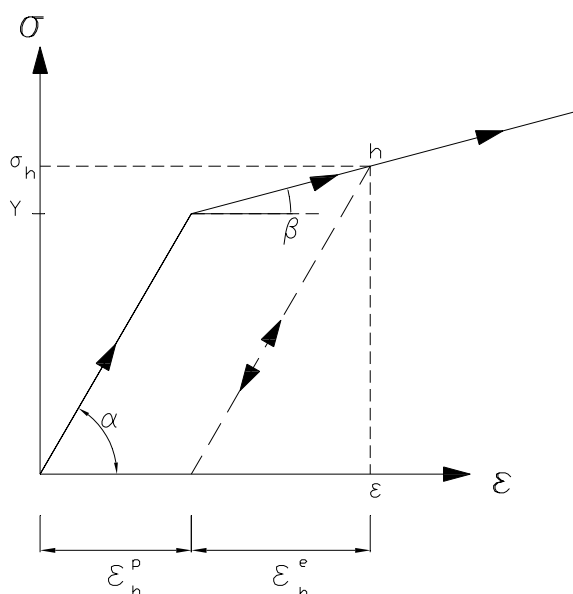


FIGURA 3.3 – Diagrama Tensão-Deformação Simplificado do Material

Será considerado neste trabalho um diagrama tensão-deformação simplificado com um trecho elástico e outro plástico com endurecimento linear. Para o trecho plástico a tensão  $\sigma_o$  tem um valor inicial igual à tensão de escoamento  $Y$  e varia de acordo com o aumento da deformação plástica  $\varepsilon^p$ , ou seja:

$$\sigma_o = Y + \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E}} \varepsilon^p \quad (3.55)$$

Sendo  $E = tg\alpha$  e  $E_T = tg\beta$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são as inclinações dos trechos elástico e plástico, respectivamente, no diagrama tensão-deformação, conforme FIG.3.3..

De uma forma mais geral pode-se relacionar o trabalho de endurecimento com a tensão de escoamento instantânea  $\sigma_o$ . O parâmetro de endurecimento  $\kappa$  representa o trabalho de endurecimento total:

$$\kappa = \int \sigma d\varepsilon^p \quad (3.56)$$

$$\sigma_o = \psi \left( \int \sigma d\varepsilon^p \right) \quad (3.57)$$

$$\frac{d\kappa}{d\varepsilon^p} = \sigma \Rightarrow \frac{d\kappa}{d\psi} = \frac{d\kappa}{d\varepsilon^p} \frac{d\varepsilon^p}{d\psi} \Rightarrow \frac{d\psi}{d\kappa} = \frac{1}{\sigma} \frac{d\psi}{d\varepsilon^p} = \frac{H'}{\sigma} \quad (3.58)$$

onde  $H'$  é a inclinação instantânea do diagrama tensão-deformação no regime plástico. Para o caso simplificado considerado nesta tese o trabalho de endurecimento é linear e o valor de  $H'$  é constante e vale:

$$H' = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E}} \quad (3.59)$$

### 3.5.2 Lei de Escoamento Plástico

A função de escoamento que determina o início do comportamento plástico do material tem a seguinte forma geral:

$$F(\sigma, \kappa) \leq 0 \quad (3.60)$$

Onde  $\kappa$  é o parâmetro de endurecimento do material obtido experimentalmente. Quando  $F(\sigma, \kappa) < 0$  o material se encontra no regime elástico e o ponto referente ao estado de tensões se coloca dentro da superfície de escoamento. O sinal de igualdade corresponde ao domínio plástico com o ponto referente ao estado de tensões sobre a superfície de escoamento. Para materiais com endurecimento, quando o ponto referente ao estado de tensões atinge a superfície de escoamento, ela se expande, fazendo com que este ponto permaneça sobre esta superfície.

Supondo-se a existência de uma função de potencial plástico  $Q$  que descreve o comportamento plástico do material, pode-se relacionar a direção dos vetores da deformação incremental plástica com o gradiente desta função. Como eles são perpendiculares, tem-se:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.61)$$

que é a lei do escoamento plástico não-associada ou regra de fluência não-associada. Quando as funções  $F$  e  $Q$  são as mesmas tem-se a lei do escoamento plástico associada ou regra de fluência associada:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.62)$$

que relaciona incrementos de deformação plástica com o gradiente da função de escoamento.  $d\lambda$  é um fator de proporcionalidade escalar, maior que zero, e que varia durante o processo de deformação, sendo chamado de *multiplicador plástico*.

Considerando o emprego da regra de fluência associada, algumas considerações mais detalhadas devem ser introduzidas. Devido à fluência plástica, alguns materiais apresentam um grau de endurecimento nesta fase e duas hipóteses foram feitas para definir este comportamento. Na primeira hipótese HILL *apud* DESAI E SIRIWARDANE (1984) supôs que o endurecimento depende somente do trabalho plástico e é independente da trajetória das deformações. A segunda hipótese supõe que a deformação plástica é a medida do endurecimento. Com relação à primeira hipótese, o trabalho de endurecimento obedece aos seguintes postulados, conhecidos como postulados de Drucker:

- a) Durante a aplicação das tensões, o trabalho feito pelas forças externas é positivo;
- b) Durante o ciclo de aplicação e remoção das tensões, o trabalho feito pelas forças externas é nulo ou positivo;

Para se estabelecer as expressões matemáticas relacionadas com os postulados acima, a partir de um estado de tensões  $\sigma_{ij}$ , considera-se um acréscimo de tensão  $d\sigma_{ij}$ , que causa um pequeno acréscimo de deformação  $d\varepsilon_{ij}$ . Então, de acordo com o primeiro postulado, tem-se:

$$d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \geq 0 \quad (3.63)$$

Mas a deformação total é a soma das deformações elástica e plástica, ou seja:

$$d\sigma_{ij} \left( d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \right) \geq 0 \quad (3.64)$$

O segundo postulado permite escrever:

$$d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (3.65)$$



Algumas condições adicionais devem ser satisfeitas para se garantir a descrição adequada do comportamento da deformação plástica e foram propostas por PRAGER *apud* DESAI e SIRIWARDANE (1984):

1. Condição de Continuidade: uma variação infinitesimal  $d\sigma_{ij}$  no estado de tensões  $\sigma_{ij}$ , causa um carregamento, um descarregamento ou um carregamento neutro, dependendo se a trajetória de tensões está dirigida para o interior, para exterior ou tangente à superfície de escoamento. Para se evitar descontinuidades nas relações tensão-deformação esta condição exige que o carregamento neutro não cause deformação plástica;
2. Condição de Unicidade: para um dado sistema de incrementos infinitesimais de forças, os incrementos de tensões e deformações resultantes são únicos;
3. Condição de Irreversibilidade: devido à irreversibilidade das deformações plásticas, o trabalho feito por elas é positivo, conforme Eq.(3.65);
4. Condição de Consistência: um carregamento a partir de um estado plástico causa outro estado plástico. Esta condição exige que o critério de escoamento seja satisfeito enquanto o material estiver em um estado plástico;

As condições de Prager e as hipóteses feitas levam a importantes restrições no comportamento elastoplástico de um material. A condição de continuidade exige que a componente tangencial da tensão não provoque deformação plástica, razão pela qual somente a componente normal à superfície de escoamento é responsável por essa deformação. Este fato obriga que o incremento de deformação plástica seja perpendicular à superfície de escoamento, no espaço de tensões instantâneo. No caso de um ponto singular ele deve estar entre as normais à esquerda e à direita deste ponto. Este fato é conhecido como *regra de normalidade*, representado pela Eq.(3.62). Outra conclusão importante a partir da condição de irreversibilidade é que a superfície de escoamento deve ser convexa em relação à origem do espaço de tensões, pois qualquer raio vetor para um ponto da superfície de escoamento, deve fazer um ângulo agudo com sua normal, para o exterior à superfície, naquele ponto. A prova matemática desta conclusão encontra-se em DESAI e SIRIWARDANE (1984).

Os postulados de Drucker e as condições de convexidade e normalidade são válidos somente para materiais com endurecimento ou elásticos-perfeitamente plásticos, chamados de materiais estáveis. Exclui-se, portanto, os materiais com amolecimento, que são chamados de materiais instáveis.

Quando se utiliza a regra de fluência associada, material elástico-perfeitamente plástico e critério de escoamento de Mohr-Coulomb observa-se o fenômeno da dilatância, que acompanha o cisalhamento de um solo com ângulo de atrito não nulo. A resistência ao cisalhamento é devida à coesão e ao ângulo de atrito interno, sendo que a parcela relativa ao atrito interno corresponde ao atrito interno propriamente dito e ao entrosamento entre as partículas. O aumento de volume durante o cisalhamento, que é a dilatância, é ocasionado pela parcela referente ao entrosamento.

### 3.5.3 Formulação Matricial

A Eq.(3.60) pode ser escrita na seguinte forma:

$$F(\sigma_{ij}, \kappa) = f(\sigma_{ij}) - \psi(\kappa) = 0 \quad (3.66)$$

Então:

$$dF = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} - \frac{\partial \psi}{\partial \kappa} d\kappa = 0 \quad (3.67)$$

Chamando-se:

$$a_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.68)$$

Pode-se escrever a Eq.(3.67) como:

$$a_{ij} d\sigma_{ij} - \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa} d\kappa = 0 \quad (3.69)$$

Onde  $a_{ij}$  é chamado de *vetor de fluência*. Da Eq.(3.58) vem:

$$d\kappa = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \quad (3.70)$$

$$a_{ij} d\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \quad (3.71)$$

Levando as Eq.(3.62) e Eq.(3.68) na Eq.(3.71), vem:

$$a_{ij} d\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa} \sigma_{ij} a_{ij} d\lambda \quad (3.72)$$

Sabe-se que:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \Rightarrow \varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p \quad (3.73)$$

Sendo  $\varepsilon_{ij}$  a deformação total, que corresponde à soma das deformações elástica  $\varepsilon_{ij}^e$  e plástica  $\varepsilon_{ij}^p$ . Das Eq.(3.53) e (3.73), vem:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p) \quad (3.74)$$

Levando a Eq.(3.74) na Eq.(3.72):

$$a_{ij} C_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p) = \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa} \sigma_{ij} a_{ij} d\lambda \quad (3.75)$$

Das Eq.(3.62), (3.68) e (3.75) pode-se escrever:

$$d\lambda = \frac{1}{\gamma'} a_{ij} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \quad (3.76)$$

onde:

$$\gamma' = a_{ij} C_{ijkl} a_{kl} + \frac{d\psi}{d\kappa} \sigma_{ij} a_{ij} \quad (3.77)$$

Como  $f(\sigma_{ij})$  é uma função homogênea de grau um pode-se aplicar o teorema de Euler, segundo OWEN e HINTON (1980):

$$\sigma_{ij} \frac{df}{d\sigma_{ij}} = f(\sigma_{ij}) \Rightarrow \sigma_{ij} a_{ij} = f(\sigma_{ij}) = \sigma_e \quad (3.78)$$

$f(\sigma_{ij})$  é uma função escalar de  $\sigma_{ij}$  e representa uma tensão equivalente ou efetiva  $\sigma_e$ . Esta tensão efetiva é que monitora o nível de tensões para a determinação do início do escoamento. Como consequência pode-se definir a deformação plástica equivalente ou efetiva  $\varepsilon_e^p$  cujo incremento produz um aumento na energia de deformação plástica como se segue:

$$\sigma_e d\varepsilon_e^p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = d\kappa \quad (3.79)$$

Levando a Eq.(3.78) na Eq.(3.77), vem:

$$\gamma' = a_{ij} C_{ijkl} a_{kl} + \frac{d\psi}{d\kappa} \sigma_e \quad (3.80)$$

Da Eq.(3.79) na Eq.(3.80):

$$\gamma' = a_{ij} C_{ijkl} a_{kl} + \frac{d\psi}{d\varepsilon_e^p} \quad (3.81)$$

Se  $\Psi$  é definido como a tensão de escoamento uniaxial, então:

$$\frac{d\psi}{d\varepsilon_e^p} = H' \quad (3.82)$$

como foi mostrado na Eq.(3.58). Levando-se as Eq.(3.68) e (3.62) na Eq.(3.74), vem:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - a_{kl} d\lambda) \quad (3.83)$$

Levando a Eq.(3.76) em (3.83), tem-se:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} \left( d\varepsilon_{kl} - \frac{a_{mn} C_{mnop} a_{op} d\varepsilon_{kl}}{\gamma'} \right) \quad (3.84)$$

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{ep} d\varepsilon_{kl} \quad (3.85)$$

onde:

$$C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl} - \frac{1}{\gamma'} C_{ijmn} a_{mn} a_{op} C_{opkl} \quad (3.86)$$

Para a formulação em tensões iniciais, a Eq.(3.86) deve ser modificada. As tensões plásticas são consideradas através de um campo de tensões iniciais, introduzido de maneira incremental. Tem-se que:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^e - \dot{\sigma}_{ij}^o \quad (3.87)$$

onde  $\dot{\sigma}_{ij}$  é a taxa de tensão real,  $\dot{\sigma}_{ij}^e$  e  $\dot{\sigma}_{ij}^o$  são as taxas das tensões elástica e inicial respectivamente. Mas:

$$d\sigma_{ij}^e = C_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \quad (3.88)$$

onde  $d\dot{\sigma}_{ij}^e$  é o incremento de tensão elástica. Então a Eq.(3.85) pode ser reescrita como:

$$d\sigma_{ij} = d\sigma_{ij}^e - \frac{1}{\gamma} C_{ijmn} a_{mn} a_{kl} d\sigma_{kl}^e \quad (3.89)$$

Estas expressões são válidas para o caso tridimensional. Para problemas de Estado Plano pode-se expressar o critério de escoamento e o vetor de fluência  $a_{ij}$  de forma unificada como foi sugerido por NAYAK e ZIENKIEWICZ (1972), levando-se em consideração que várias componentes se anulam. Todas as expressões podem ser encontradas em TEIXEIRA (1992) ou em OWEN e HINTON (1980).

### 3.6 Resumo

**Neste capítulo foram apresentadas as equações integrais para aplicação em problemas de elastoplasticidade. Foi feita uma breve descrição da obtenção das equações para deslocamentos, derivadas de deslocamentos e tensões nos pontos internos, indicando-se referências de publicações para desenvolvimento mais detalhado. As equações integrais para pontos internos foram estendidas para o contorno do corpo, resultando em integrais singulares, que devem ser interpretadas no sentido do Valor Principal de Cauchy e da Parte Finita de Hadamard. Foi feita uma breve descrição do comportamento elastoplástico dos materiais e de como ele será considerado no restante da tese. As equações do comportamento inelástico introduzidas na seção 3.5.3 serão utilizadas na implementação do procedimento iterativo incremental para solução do problema elastoplástico.**

# 4

## MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL

O Método dos Elementos de Contorno é uma técnica numérica adequada para o estudo de vários problemas encontrados na engenharia, como os de domínio infinito ou semi-infinito, e também em problemas onde aparecem altas concentrações de tensão. As soluções fundamentais podem satisfazer às condições de contorno para domínios infinitos e semi-infinitos evitando-se, assim, a discretização em contornos remotos. Não havendo interpolação nos pontos internos do domínio, as tensões e os deslocamentos nestes pontos são obtidos sem interpolações adicionais às já introduzidas no contorno. O método é atraente também por reduzir a dimensão do problema em uma unidade significando menores sistemas de equações algébricas e quantidade de dados de entrada reduzida quando comparados com o Método dos Elementos Finitos.

Na aplicação direta do MEC em problemas de Mecânica da Fratura surge uma matriz singular quando se escreve a equação integral para dois pontos de mesmas coordenadas embora em faces opostas da trinca. Como o caminho de integração é o mesmo para ambos, as respectivas linhas na matriz do sistema são iguais. Esta singularidade pode ser evitada colocando-se as interfaces da trinca em diferentes sub-regiões. A utilização desta técnica evita a singularidade da matriz dos coeficientes de influência, mas

introduz um contorno artificial nas interfaces das sub-regiões, com as respectivas interpolações, além de aumentar o número de incógnitas do problema.

Para se obter um sistema não singular com uma única região deve-se escrever a equação dos deslocamentos em uma face da trinca e a equação das forças de superfície para a outra face, evitando-se o aparecimento de duas linhas iguais no sistema de equações. A equação integral para as forças de superfície é a Equação Hipersingular do MEC. Esta abordagem, chamada de Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD), foi implementada por PORTELA et al. (1992). As Eq.(3.7) e Eq.(3.28) são as representações integrais para deslocamentos e forças de superfície no contorno e constituem a base do MECD. A Eq.(3.7) relaciona os deslocamentos e a Eq.(3.28) as forças de superfície, de um ponto  $S$  do contorno com todos os deslocamentos e forças de superfície sobre o contorno  $\Gamma$ . Além de utilizar uma região única, este procedimento é especialmente adequado no estudo da propagação de trincas. Quando se utilizam elementos descontínuos, estes novos elementos originários da propagação da trinca resultam em linhas e colunas adicionadas à matriz do sistema, mantendo aquelas já existentes antes da propagação. A técnica de sub-regiões, ao contrário, obriga a montagem de todo o sistema a cada extensão da trinca.

Na equação hipersingular aparece uma integral imprópria que é resolvida no sentido da Parte Finita de Hadamard, como foi mostrado no item 3.4. Para a existência desta parte finita deve ser verificada a condição de continuidade de Hölder para as forças de superfície. A utilização de elementos descontínuos preenche automaticamente esta exigência em pontos com angulosidades e na ponta da trinca.

A estratégia geral da discretização do problema estudado através do MECD pode ser resumida da seguinte forma:

- Os contornos da trinca são modelados com elementos quadráticos descontínuos;
- Elementos quadráticos contínuos são usados no restante do contorno da estrutura, exceto na interseção entre a trinca e a aresta, onde elementos descontínuos ou semi-descontínuos são exigidos nas arestas para se evitar o nó comum na interseção;



- A equação de deslocamentos, Eq.(3.7), é aplicada por colocação em uma das superfícies da trinca;
- A equação de forças de superfície, Eq.(3.28), é aplicada por colocação na outra superfície da trinca;
- A equação de deslocamentos, Eq.(3.7), é aplicada por colocação em todo o contorno que não coincida com a trinca;

#### 4.1 Transformação das Equações Integrais em Sistema Algébrico

Para a discretização das Eq.(3.7) e Eq.(3.28) o contorno  $\Gamma$  é aproximado por uma série de elementos e o domínio  $\Omega$  em células. No interior de cada elemento os deslocamentos e forças de superfície são expressos em termos de funções de interpolação quadráticas ( $\Phi$ ) e dos valores nodais ( $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{P}$ ). No interior das células as tensões iniciais são expressas em termos de funções de interpolação quadráticas ( $\Psi$ ) e dos valores nodais das tensões nas células ( $\sigma^0$ ). Para as funções de interpolação quadráticas utilizadas neste trabalho, cada célula tem seis nós, que são os vértices e os pontos médios dos lados. As integrais são calculadas numericamente formando um sistema de equações algébricas:

$$\mathbf{H}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{G}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{Q}\dot{\sigma}^0 \quad (4.1)$$

onde:

$$\mathbf{H} = \mathbf{C} + \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \Phi^T d\Gamma \right); \quad \mathbf{G} = \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \Phi^T d\Gamma \right) \text{ e} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{Q} = \sum_{j=1}^Z \left( \int_{\Omega_j} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \Psi^T d\Omega \right)$$

Ainda pode-se escrever de forma discretizada as integrais entre parênteses da Eq.(4.2):

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \Phi^T d\Gamma = \sum_{k=1}^K |J|_k W_k (\mathbf{p}^* \Phi^T)_k \quad ; \quad \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \Phi^T d\Gamma = \sum_{k=1}^K |J|_k W_k (\mathbf{u}^* \Phi^T)_k$$

$$\int_{\Omega_j} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \Psi^T d\Omega = \sum_{k=1}^K |J|_k W_k (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \Psi^T)_k \quad (4.3)$$

sendo  $N$  o número de elementos,  $Z$  o número de células e  $K$  o número de pontos de integração.  $W_k$  é o fator de peso associado aos pontos de integração e  $|J|$  o Jacobiano de transformação de coordenadas. O tensor  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^*$  é um tensor de quarta ordem.

Quando se utiliza a técnica da soma dos elementos da linha para determinação dos termos diagonais da matriz  $\mathbf{H}$  dos coeficientes de influência, as contribuições dos nós simétricos da trinca se anulam mutuamente (têm o mesmo valor absoluto, mas sinal contrário). Este fato deixa o elemento diagonal indeterminado impedindo a sua avaliação indireta através do movimento de corpo rígido. Portanto, os termos diagonais são calculados diretamente pela expressão do termo  $c_{ij}$  e do Valor Principal de Cauchy.

A utilização de elementos descontínuos nos nós da trinca, como mencionado anteriormente, evita o ponto de colocação em vértices com angulosidades, inclusive nas pontas das trincas, onde a condição de continuidade das forças de superfície não é atendida. Esta condição de continuidade é exigência para que exista a Parte Finita de Hadamard. No restante do contorno somente a equação dos deslocamentos é utilizada podendo, então, o elemento contínuo ser empregado.

A Eq.(3.22) pode ser discretizada de maneira análoga ao que foi feito para a equação integral dos deslocamentos, para um ponto de tensão  $s_i$ :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(s_i) = -\mathbf{H}' \dot{\mathbf{u}}^{(n)} + \mathbf{G}' \dot{\mathbf{p}}^{(n)} + \mathbf{Q}' \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{o(n)} + \mathbf{E}' \dot{\boldsymbol{\sigma}}^o(s_i) \quad (4.4)$$

onde:

$$\mathbf{H}' = \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}'^* \boldsymbol{\Phi}^T d\Gamma \right); \quad \mathbf{G}' = \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}'^* \boldsymbol{\Phi}^T d\Gamma \right);$$

$$\mathbf{Q}' = \sum_{j=1}^Z \left( \int_{\Omega_j} \boldsymbol{\varepsilon}'^* \boldsymbol{\Psi}^T d(\Omega) \right) \quad \text{e} \quad \mathbf{E}' = \mathbf{C}'(s_i)$$
(4.5)

Ao serem impostas as condições de contorno, os elementos das matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  multiplicados pelos valores prescritos de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{p}$ , são armazenados no vetor  $\mathbf{f}$ , enquanto os relacionados com os valores desconhecidos são armazenados na matriz  $\mathbf{A}$ , que multiplica o vetor das incógnitas  $\dot{\mathbf{y}}$ , ou seja:

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{f}} + \mathbf{Q} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^o$$
(4.6)

Agrupando-se de maneira similar os termos da Eq.(4.4), tem-se:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = -\mathbf{A}' \dot{\mathbf{y}} + \dot{\mathbf{f}}' + (\mathbf{Q}' + \mathbf{E}') \dot{\boldsymbol{\sigma}}^o$$
(4.7)

Pré-multiplicando a Eq.(4.6) por  $\mathbf{A}^{-1}$ , tem-se:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{f}} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^o$$
(4.8)

Levando-se a Eq.(4.8) na Eq.(4.7) e reagrupando, vem:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{Q}' + \mathbf{E}' - \mathbf{A}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q}) \dot{\boldsymbol{\sigma}}^o + \dot{\mathbf{f}}' - \mathbf{A}' \mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{f}}$$
(4.9)

Como no processo incremental e iterativo calculam-se as tensões elásticas dentro de cada incremento de carga e não as tensões verdadeiras, faz-se a seguinte substituição:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^e - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^o \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^e = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}^o$$
(4.10)

Da Eq.(4.10) na Eq.(4.9):

$$\dot{\sigma}^e = (\mathbf{Q}' + \mathbf{E}' - \mathbf{A}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q} + \mathbf{I}) \dot{\sigma}^o + \dot{\mathbf{f}}' - \mathbf{A}' \mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{f}} \quad (4.11)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade. Simplificando as notações das Eq.(4.8) e Eq.(4.11):

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{K} \dot{\sigma}^o + \dot{\mathbf{m}} \quad (4.12)$$

$$\dot{\sigma}^e = \mathbf{B} \dot{\sigma}^o + \dot{\mathbf{n}} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q} \ ; \ \dot{\mathbf{m}} = \mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{f}} \ ; \ \mathbf{B} = \mathbf{Q}' + \mathbf{E}' - \mathbf{A}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q} + \mathbf{I} \ ; \ \dot{\mathbf{n}} = \dot{\mathbf{f}}' - \mathbf{A}' \dot{\mathbf{m}} \quad (4.14)$$

As Eq.(4.11) e Eq.(4.13) relacionam as taxas de tensão nos nós de contorno e pontos internos, com as taxas de tensões iniciais correspondentes e a solução linear incremental. Notar que  $\dot{\mathbf{m}}$  e  $\dot{\mathbf{n}}$  representam a solução elástica do problema para um dado incremento de carregamento para incógnitas no contorno e tensões, respectivamente. Estas equações são usadas para a solução de problemas não-lineares utilizando-se o processo das tensões iniciais.

## 4.2 Elemento de Contorno com Função de Interpolação Quadrática

Os elementos de contorno podem ter diferentes funções de interpolação para expressar o comportamento dos deslocamentos e das forças de superfície entre seus nós. Os mais simples são aqueles com função de interpolação constante e linear. Neste trabalho serão utilizados elementos de contorno retos com função de interpolação quadrática para deslocamentos e tensões, que oferecem uma precisão maior que os elementos citados. Eles são retos para facilitar a integração analítica nos pontos com singularidade, pois o Jacobiano é igual à metade do seu comprimento, evitando-se, assim, procedimentos complexos de integração numérica. Nos elementos de trinca serão utilizados elementos retos descontínuos, mas com função de interpolação quadrática para deslocamentos e tensões. Estas funções são encontradas em diversas referências, como por exemplo,

PORTELA et al. (1992), onde também podem ser vistas as expressões das integrais singulares, calculadas de forma analítica. As funções de interpolação mostradas a seguir, para os elementos de contorno descontínuos, têm os nós funcionais posicionados no interior do elemento, distantes dos extremos de  $1/6$  do seu comprimento:

$$\Phi_1 = \xi \left( \frac{9}{8} \xi - \frac{3}{4} \right); \quad \Phi_2 = \left( 1 - \frac{3}{2} \xi \right) \left( 1 + \frac{3}{2} \xi \right); \quad \Phi_3 = \xi \left( \frac{9}{8} \xi + \frac{3}{4} \right) \quad (4.15)$$

Para este elemento a integral à esquerda do sinal de igualdade da Eq.(3.17) pode ser calculada, analiticamente, como se segue:

$$\int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, Q) \dot{u}_j(Q) d\Gamma(Q) = u_j^n \int_{-1}^{+1} p_{ij}^*(\xi', x(\xi)) \Phi_n(\xi) J(\xi) d\xi = h_i^n \dot{u}^n$$

onde  $u^n$  representa a componente nodal do deslocamento e  $J(\xi)$  é o Jacobiano de transformação de coordenadas. Para elementos retos  $J = \frac{1}{2} \ell$ , sendo  $\ell$  o comprimento do elemento.

$$h^n = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{bmatrix} \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi_n}{\xi - \xi'} d\xi$$

As integrais de parte finita de primeiro grau são:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi_1}{\xi - \xi'} d\xi &= \frac{3}{4} \left( \frac{\xi' (3\xi' - 2)}{2} \ln \left| \frac{1 - \xi'}{1 + \xi'} \right| + 3\xi' - 2 \right) \\ \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi_2}{\xi - \xi'} d\xi &= \frac{1}{2} \left( \frac{(3\xi' - 2)(3\xi' + 2)}{2} \ln \left| \frac{1 - \xi'}{1 + \xi'} \right| - 9\xi' \right) \\ \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi_3}{\xi - \xi'} d\xi &= \frac{3}{4} \left( \frac{\xi' (3\xi' + 2)}{2} \ln \left| \frac{1 - \xi'}{1 + \xi'} \right| + 3\xi' + 2 \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

A segunda integral à direita do sinal de igualdade da Eq.(3.36) pode, também, ser calculada, analiticamente:

$$\oint_{\Gamma} p_{ijk}^*(S, Q) \dot{u}_k(Q) d\Gamma(Q) = \dot{u}_k^n \oint_{-1}^{+1} \frac{\Phi_n}{(\xi - \xi')^2} d\xi = \hat{h}_{ij}^n \dot{u}^n$$

onde:

$$\hat{h}^n = \frac{E}{4\pi(1-\nu^2)} \frac{2}{\ell} \hat{S} \oint_{-1}^{+1} \frac{\Phi_n}{(\xi - \xi')^2} d\xi$$

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} +n_1(2n_2^2 + 1) & -n_2(-2n_2^2 + 1) \\ +n_1(2n_1^2 - 1) & -n_2(-2n_1^2 - 1) \\ -n_2(2n_2^2 - 1) & +n_1(-2n_2^2 + 1) \end{bmatrix}$$

$n_1$  e  $n_2$  são as componentes do vetor unitário normal ao elemento. As integrais de parte finita de segundo grau são integradas analiticamente:

$$\oint_{-1}^{+1} \frac{\Phi_1}{(\xi - \xi')^2} d\xi = \frac{3}{4} \left( (3\xi' - 1) \ln \left| \frac{1 - \xi'}{1 + \xi'} \right| + \frac{6\xi'^2 - 2\xi' - 3}{\xi'^2 - 1} \right)$$

$$\oint_{-1}^{+1} \frac{\Phi_2}{(\xi - \xi')^2} d\xi = \frac{1}{2} \left( 9\xi' \ln \left| \frac{1 - \xi'}{1 + \xi'} \right| - \frac{18\xi'^2 - 13}{\xi'^2 - 1} \right) \quad (4.17)$$

$$\oint_{-1}^{+1} \frac{\Phi_3}{(\xi - \xi')^2} d\xi = \frac{3}{4} \left( (3\xi' + 1) \ln \left| \frac{1 - \xi'}{1 + \xi'} \right| + \frac{6\xi'^2 + 2\xi' - 3}{\xi'^2 - 1} \right)$$

### 4.3 Célula Triangular Quadrática

A seguir são apresentadas as funções de interpolação quadráticas para elemento triangular com seis nós. Estes elementos são utilizados para avaliar as integrais de domínio que aparecem nas equações para deslocamentos e tensões do Método dos Elementos de Contorno para o caso inelástico, Eq.(3.4) e Eq.(3.8). Na formulação do método o algoritmo para solução é incremental e a discretização do domínio só é exigida na região onde se espera uma deformação plástica. Estas mesmas integrais aparecem em problemas elásticos com tensões ou deformações iniciais. Quando o ponto fonte coincide com um dos nós da célula triangular, a integral de domínio apresenta singularidades que podem ser avaliadas através de uma integração semi-analítica. A origem do sistema de coordenadas homogêneas  $(\xi_1, \xi_2)$  é colocada sobre o ponto fonte considerado e, se o ponto singular estiver em um dos vértices do elemento triangular, a integração é feita de uma única vez. Entretanto, se a singularidade estiver no interior de um dos lados, a célula é subdividida em duas partes e a integração é feita através da soma das duas parcelas referentes a cada subdivisão. Na equação de deslocamentos do método o integrando possui singularidade do tipo  $(1/r)$ , sendo  $r$  a distância entre os pontos campo do domínio e o ponto fonte, e na equação para as tensões o integrando possui singularidade do tipo  $(1/r^2)$ . Estes integrandos são expressos no sistema local de coordenadas polares  $(r, \varphi)$  e têm a forma  $(\Phi/r)$  e  $(\Phi/r^2)$ , sendo  $(\Phi)$  uma função apenas do ângulo  $\varphi$ . Quando o ponto fonte não coincide com o ponto campo a integral é regular e não apresenta qualquer dificuldade na sua avaliação. O esquema de integração semi-analítico consiste na integração analítica em relação a  $r$  e utilizando-se a *Quadratura de Gauss* padrão para a integração em relação a  $\varphi$ .

As funções de interpolação são de dois tipos, um referindo-se aos vértices do elemento e outro aos pontos internos de seus lados, e devem ser combinadas com as três posições possíveis do ponto fonte, o qual pode estar localizado no vértice do elemento, no interior de um de seus lados ou fora do elemento. Para validar as equações, os resultados obtidos são comparados com a solução analítica conhecida de um anel seccionado submetido a um campo de tensões iniciais no domínio. Resultados de

análises de duas chapas retangulares com tensões iniciais no seu interior, são comparados com esta técnica.

### 4.3.1 Funções de Interpolação

As funções de interpolação para o elemento triangular quadrático são obtidas a partir dos *Polinômios de Lagrange* para três pontos de valores  $[(x_i, f(x_i))]$ :

$$\begin{aligned}
 P_2(x) = & \sum_{i=0}^2 f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^2 \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = f(x_0) \frac{(x-x_1).(x-x_2)}{(x_0-x_1).(x_0-x_2)} \\
 & + f(x_1) \frac{(x-x_0).(x-x_2)}{(x_1-x_0).(x_1-x_2)} + f(x_2) \frac{(x-x_0).(x-x_1)}{(x_2-x_0).(x_2-x_1)}
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

No sistema de coordenadas triangulares  $(\xi_1, \xi_2)$  é válida a relação  $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$  e as expressões são obtidas de maneira que a função de interpolação tenha valor unitário em um ponto escolhido e nulo nos demais pontos. Levando-se, então, estas condições no *Polinômio de Lagrange* determinam-se as funções para o elemento triangular quadrático.

$$\begin{aligned}
 \Psi_1 &= \xi_1 (2\xi_1 - 1) & \Psi_4 &= 4 \xi_1 \xi_2 \\
 \Psi_2 &= \xi_2 (2\xi_2 - 1) & \Psi_5 &= 4 \xi_2 \xi_3 \\
 \Psi_3 &= \xi_3 (2\xi_3 - 1) & \Psi_6 &= 4 \xi_3 \xi_1
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Seja  $\gamma$  o ponto fonte (ponto de aplicação da carga unitária), onde se localiza a origem do sistema de coordenadas polares  $(r, \phi)$ . Como os lados da célula triangular quadrática são retos, as coordenadas triangulares homogêneas de um ponto  $\alpha(r, \phi)$  no interior da célula podem ser calculadas como a seguir, segundo BREBBIA e WALKER (1980) e BREBBIA et al. (1984):



$$\xi_{\rho} = \gamma_{\xi_{\rho}} + \frac{r}{2A}(b_{\rho} \cos \varphi + a_{\rho} \operatorname{sen} \varphi) \quad (4.20)$$

onde  $a_{\rho} = x_{\gamma} - x_{\beta}$  e  $b_{\rho} = y_{\beta} - y_{\gamma}$ , sendo  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  as coordenadas cartesianas dos vértices da célula. Os índices acima variam da seguinte forma:

$$\rho = 1, 2, 3 \Rightarrow \beta = 2, 3, 1 \Rightarrow \gamma = 3, 1, 2 \quad (4.21)$$

É importante esclarecer que  $\gamma_{\xi_{\rho}}$  é o valor de  $\xi_{\rho}$  no ponto singular  $\gamma$ , e pode ser calculado a partir das expressões:

$$\gamma_{\xi_{\rho}} = \frac{2A_{\rho}^0 + b_{\rho} x + a_{\rho} y}{2A} \quad \text{onde: } 2A_{\rho}^0 = x_{\beta} y_{\gamma} - x_{\gamma} y_{\beta} \quad (4.22)$$

$A = \frac{1}{2} (b_1 a_2 - b_2 a_1)$  é a área da célula e  $(x, y)$  são as coordenadas do ponto fonte. Definindo-se a distância  $R_{\rho}(\varphi)$  como sendo:

$$R_{\rho}(\varphi) = - \frac{2A}{b_{\rho} \cos \varphi + a_{\rho} \operatorname{sen} \varphi} \quad (4.23)$$

Pode-se, então, escrever novamente a equação (4.20) de forma simplificada:

$$\xi_{\rho} = \gamma_{\xi_{\rho}} - \frac{r}{R_{\rho}(\varphi)} \quad (4.24)$$

As funções de interpolação  $\Psi_{\alpha}$ , com  $\alpha = 1, 2, 3$ , referentes aos vértices da célula são dadas agora por:

$$\Psi_{\alpha} = \xi_{\alpha} (2\xi_{\alpha} - 1) = \gamma_{\xi_{\alpha}} (2\gamma_{\xi_{\alpha}} - 1) - (4\gamma_{\xi_{\alpha}} - 1) \frac{r}{R_{\alpha}(\varphi)} + \frac{2r^2}{R_{\alpha}^2(\varphi)} \quad (4.25)$$

e as funções de interpolação  $\Psi_\alpha$ , com  $\alpha = 4,5,6$ , referentes aos pontos médios dos lados da célula são dadas por:

$$\Psi_\alpha = 4\xi_\beta \xi_\eta = 4\gamma_{\xi_\beta} \cdot \gamma_{\xi_\eta} - 4 \left[ \frac{\gamma_{\xi_\beta} R_\beta(\varphi) + \gamma_{\xi_\eta} R_\eta(\varphi)}{R_\beta(\varphi) \cdot R_\eta(\varphi)} \right] r + \frac{4r^2}{R_\beta(\varphi) \cdot R_\eta(\varphi)} \quad (4.26)$$

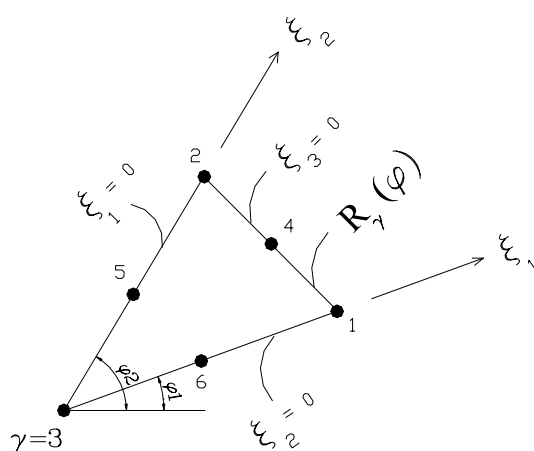


FIGURA 4.1 – Célula Triangular com Ponto Fonte no Vértice

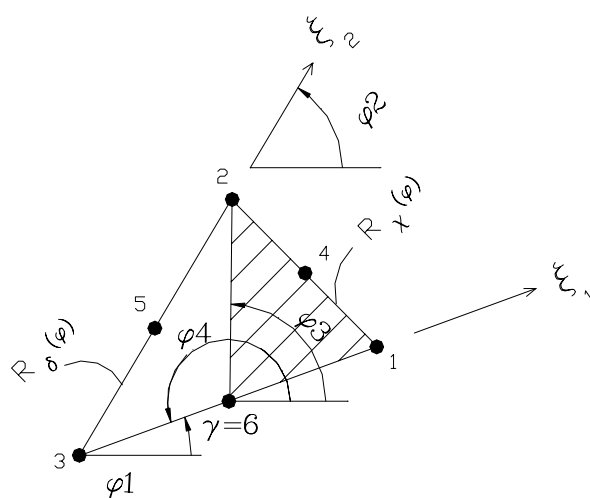


FIGURA 4.2 - Célula Triangular com Ponto Fonte no Meio do Lado

onde  $\alpha = 4, 5, 6 \rightarrow \beta = 1, 2, 3$  e  $\eta = 2, 3, 1$ . As Eq.(4.25) e Eq.(4.26) representam as funções de interpolação para o elemento triangular quadrático no sistema local em coordenadas polares.

### 4.3.2 A Integral de Domínio da Equação dos Deslocamentos

A integral de domínio da Eq.(4.2) é mostrada novamente a seguir:

$$\mathbf{Q} = \sum_{j=1}^Z \left( \int_{\Gamma_j} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^* \boldsymbol{\Psi}^T d\Omega \right), \quad \text{sendo:}$$

$$\int_{\Omega_j} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^* \boldsymbol{\Psi}^T d\Omega = \sum_{k=1}^K |J|_k W_k (\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^* \boldsymbol{\Psi}^T)_k$$

$Z$  é o número de células,  $K$  o número de pontos de integração,  $W_k$  o fator de peso associado,  $|J|_k$  o Jacobiano da transformação de coordenadas e  $\boldsymbol{\Psi}$  é a função de interpolação. No cálculo total de  $\mathbf{Q}$  cada célula contribuirá com uma matriz 2x18:

$$\mathbf{e} = \int_{\Omega_j} \left\{ \boldsymbol{\epsilon}^* \psi_1 \quad \boldsymbol{\epsilon}^* \psi_2 \quad \boldsymbol{\epsilon}^* \psi_3 \quad \boldsymbol{\epsilon}^* \psi_4 \quad \boldsymbol{\epsilon}^* \psi_5 \quad \boldsymbol{\epsilon}^* \psi_6 \right\} d\Omega \quad (4.27)$$

onde:

$$\boldsymbol{\epsilon}^* = \begin{bmatrix} * & * & * \\ \varepsilon_{111} & 2\varepsilon_{121} & \varepsilon_{221} \\ * & * & * \\ \varepsilon_{112} & 2\varepsilon_{122} & \varepsilon_{222} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Seja  $\mathbf{e}^\alpha = \int_{\Omega_j} \boldsymbol{\epsilon}^* \psi_\alpha d\Omega$  uma submatriz (2x3) de  $\mathbf{e}$ , com  $\alpha = 1, 2, \dots, 6$ . Para o cálculo da integral, define-se um sistema local de coordenadas polares  $(r, \varphi)$  com origem no ponto singular. Neste sistema de coordenadas pode-se escrever que  $\boldsymbol{\epsilon}^* = (1/r) \boldsymbol{\Phi}$ , onde  $\boldsymbol{\Phi}$  é função apenas de  $\varphi$ . Desprezando-se os termos de segunda ordem tem-se que  $d\Omega = r dr d\varphi$ :

$$\mathbf{e}^\alpha = \int_{\Omega_\Delta} \Phi \Psi_\alpha dr d\varphi$$

Considerando-se o ponto fonte no nó  $\gamma$  e a função de interpolação referente ao nó  $\alpha$  podem-se ter duas situações distintas:

- O nó  $\alpha$  (ponto campo) refere-se a um dos vértices da célula;
- O nó  $\alpha$  (ponto campo) refere-se a um dos nós internos dos lados da célula;

Combina-se uma destas situações com o nó  $\gamma$  se referindo a uma das três situações possíveis:

- O nó  $\gamma$  (ponto fonte) está localizado em um dos vértices da célula;
- O nó  $\gamma$  (ponto fonte) está localizado em um dos nós internos dos lados da célula;
- O nó  $\gamma$  (ponto fonte) está localizado em um nó que não pertence à célula;

Tem-se, portanto, seis situações diferentes a serem analisadas. Quando o ponto fonte está localizado no vértice da célula, a integração é feita de uma única vez (FIG. 4.1). Entretanto, quando o ponto fonte está localizado no interior de um dos lados, a célula é subdividida em duas partes e a integração é feita através da soma das duas parcelas referentes a cada subdivisão (FIG. 4.2).

Considera-se inicialmente o ponto fonte  $\gamma$  localizado em um dos vértices da célula e a função de interpolação  $\alpha$  referente, também, a um dos vértices da célula ( $\alpha = 1, 2, 3$ ). Então, isolando-se o ponto singular com um segmento de círculo de raio  $\varepsilon$  e considerando o limite para  $\varepsilon \rightarrow 0$ , conforme FIG. 4.1, tem-se:

$$\mathbf{e}^\alpha = \int_{\Omega_j} \Phi \Psi_\alpha dr d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Phi \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{R_\gamma(\varphi)} \Psi_\alpha dr \right] d\varphi \quad (4.29)$$

Levando-se a Eq.(4.25) na Eq.(4.29), vem:

$$\mathbf{e}^\alpha = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Phi \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{R_\gamma(\varphi)} \left[ \gamma_{\xi_\alpha} (2\gamma_{\xi_\alpha} - 1) - (4\gamma_{\xi_\alpha} - 1) \frac{r}{R_\alpha(\varphi)} + \frac{2r^2}{R_\alpha^2(\varphi)} \right] dr \right\} d\varphi$$

$$\mathbf{e}^\alpha = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Phi R_\gamma(\varphi) \left[ \gamma_{\xi_\alpha} (2\gamma_{\xi_\alpha} - 1) - \frac{4\gamma_{\xi_\alpha} - 1}{2} \left( \frac{R_\gamma(\varphi)}{R_\alpha(\varphi)} \right) + \frac{2}{3} \left( \frac{R_\gamma(\varphi)}{R_\alpha(\varphi)} \right)^2 \right] d\varphi \quad (4.30)$$

A seguir, considera-se o ponto fonte  $\gamma$  situado em um dos vértices da célula e a função de interpolação  $\alpha$  referente a um dos nós internos dos lados da célula. Nestes casos, os índices têm a seguinte variação:

$$\alpha = 4, 5, 6 \rightarrow \beta = 1, 2, 3 \text{ e } \eta = 2, 3, 1; \quad \gamma = 1, 2, 3; \quad \Psi_\alpha = 4\xi_\beta\xi_\eta.$$

Então, levando-se a Eq.(4.26) na Eq.(4.29), vem:

$$\mathbf{e}^\alpha = \int_{\Omega_j} \Phi (4\xi_\beta\xi_\eta) dr d\varphi$$

Então:

$$\mathbf{e}^\alpha = \int_{\Omega_j} \Phi \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{R_\gamma(\varphi)} \left[ \frac{4\gamma_{\xi_\beta} \cdot \gamma_{\xi_\eta} - 4 \left( \frac{\gamma_{\xi_\beta} R_\beta(\varphi) + \gamma_{\xi_\eta} R_\eta(\varphi)}{R_\beta(\varphi) \cdot R_\eta(\varphi)} \right) r + \frac{4r^2}{R_\beta(\varphi) \cdot R_\eta(\varphi)}} \right] dr \right\} d\varphi$$

$$\mathbf{e}^\alpha = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Phi \left[ \frac{4\gamma_{\xi_\beta} \gamma_{\xi_\eta} R_\gamma(\varphi) + \frac{2R_\gamma^2(\varphi)}{R_\beta(\varphi) \cdot R_\eta(\varphi)}}{\left( \frac{2R_\gamma(\varphi)}{3} - \gamma_{\xi_\beta} R_\beta(\varphi) - \gamma_{\xi_\eta} R_\eta(\varphi) \right)} \right] d\varphi \quad (4.31)$$

Observa-se que  $4\gamma_{\xi_\beta} \gamma_{\xi_\eta} = 0$  na equação (4.31) porque sempre tem um valor nulo de  $\gamma_\xi$ .

Considera-se, agora, o ponto fonte  $\gamma$  localizado no nó interno de um dos lados da célula. Para esta situação, conforme FIG.4.2, tem-se:

$$\mathbf{e}^\alpha = \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} \Phi \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{R_\chi(\varphi)} \Psi_\alpha dr \right] d\varphi + \int_{\varphi_3}^{\varphi_4} \Phi \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{R_\delta(\varphi)} \Psi_\alpha dr \right] d\varphi \quad (4.32)$$

Para a função de interpolação  $\alpha$  referente a um dos vértices da célula, levando-se (4.25) em (4.32), com  $\alpha = 1, 2, 3$  e  $\gamma = 4, 5, 6 \rightarrow \chi = 1, 2, 3$  e  $\delta = 2, 3, 1$ :

$$\mathbf{e}^\alpha = \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} \Phi \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{R_\chi(\varphi)} (2\xi_\alpha^2 - \xi_\alpha) dr \right] d\varphi + \int_{\varphi_3}^{\varphi_4} \Phi \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{R_\delta(\varphi)} (2\xi_\alpha^2 - \xi_\alpha) dr \right] d\varphi$$

Então:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^\alpha = & \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} \Phi R_\chi(\varphi) \left[ \gamma_{\xi_\alpha} (2\gamma_{\xi_\alpha} - 1) - \frac{(4\gamma_{\xi_\alpha} - 1) \left( \frac{R_\chi(\varphi)}{R_\alpha(\varphi)} \right) + \frac{2}{3} \left( \frac{R_\chi(\varphi)}{R_\alpha(\varphi)} \right)^2}{2} \right] d\varphi + \\ & + \int_{\varphi_3}^{\varphi_4} \Phi R_\delta(\varphi) \left[ \gamma_{\xi_\alpha} (2\gamma_{\xi_\alpha} - 1) - \frac{(4\gamma_{\xi_\alpha} - 1) \left( \frac{R_\delta(\varphi)}{R_\alpha(\varphi)} \right) + \frac{2}{3} \left( \frac{R_\delta(\varphi)}{R_\alpha(\varphi)} \right)^2}{2} \right] d\varphi \end{aligned} \quad (4.33)$$

Com a função de interpolação  $\alpha$  referente, também, a um dos nós internos dos lados da célula ( $\alpha = 4, 5, 6 \rightarrow \beta = 1, 2, 3$  e  $\eta = 2, 3, 1$ ):

$$\mathbf{e}^\alpha = \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} \Phi \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{R_\chi(\varphi)} (4\xi_\beta \xi_\eta) dr \right] d\varphi + \int_{\varphi_3}^{\varphi_4} \Phi \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{R_\delta(\varphi)} (4\xi_\beta \xi_\eta) dr \right] d\varphi \quad (4.34)$$

Observando-se as simplificações definidas na Eq.(4.23), repetidas a seguir:

$$R_\beta(\varphi) = -\frac{2A}{b_\beta \cos \varphi + a_\beta \sin \varphi} \quad ; \quad R_\chi(\varphi) = -\frac{2A}{b_\chi \cos \varphi + a_\chi \sin \varphi}$$

$$R_\delta(\varphi) = -\frac{2A}{b_\delta \cos \varphi + a_\delta \sin \varphi} \quad ; \quad R_\eta(\varphi) = -\frac{2A}{b_\eta \cos \varphi + a_\eta \sin \varphi}$$

e levando-se a Eq.(4.26) na Eq.(4.34), obtém-se:

$$\mathbf{e}^\alpha = \left[ \begin{array}{l} \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} \Phi \left\{ \begin{array}{l} 4\gamma_{\xi_\beta} \cdot \gamma_{\xi_\eta} R_\chi(\varphi) + \frac{2R_\chi^2(\varphi)}{R_\beta(\varphi)R_\eta(\varphi)} \\ \left[ \frac{2R_\chi(\varphi)}{3} - \gamma_{\xi_\beta} R_\beta(\varphi) - \gamma_{\xi_\eta} R_\eta(\varphi) \right] \end{array} \right\} d\varphi + \\ + \int_{\varphi_3}^{\varphi_4} \Phi \left\{ \begin{array}{l} 4\gamma_{\xi_\beta} \cdot \gamma_{\xi_\eta} R_\delta(\varphi) + \frac{2R_\delta^2(\varphi)}{R_\beta(\varphi)R_\eta(\varphi)} \\ \left[ \frac{2R_\delta(\varphi)}{3} - \gamma_{\xi_\beta} R_\beta(\varphi) - \gamma_{\xi_\eta} R_\eta(\varphi) \right] \end{array} \right\} d\varphi \end{array} \right] \quad (4.35)$$

Supõe-se, agora, o ponto fonte  $\gamma$  localizado fora da célula (FIG. 4.3):

$$\mathbf{e}^\alpha = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Phi \left[ \int_{R_\rho(\varphi)}^{R_\chi(\varphi)} \Psi_\alpha dr \right] d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\varphi_3} \Phi \left[ \int_{R_\rho(\varphi)}^{R_\delta(\varphi)} \Psi_\alpha dr \right] d\varphi \quad (4.36)$$

Os índices variam da seguinte maneira:  $\rho = 1,2,3 \rightarrow \chi = 2,3,1$  e  $\delta = 3,1,2$ . Considerando-se a função de interpolação referente a um dos vértices da célula, com  $\alpha=1, 2, 3$ , e levando-se a Eq.(4.25) na Eq.(4.36), tem-se:

$$\mathbf{e}^\alpha = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Phi \left\{ \int_{R_\rho(\varphi)}^{R_\chi(\varphi)} \left[ \gamma_{\xi_\alpha} (2\gamma_{\xi_\alpha} - 1) - (4\gamma_{\xi_\alpha} - 1) \frac{r}{R_\alpha(\varphi)} + \frac{2r^2}{R_\alpha^2(\varphi)} \right] dr \right\} d\varphi +$$

$$\int_{\varphi_2}^{\varphi_3} \Phi \left\{ \int_{R_\rho(\varphi)}^{R_\delta(\varphi)} \left[ \gamma_{\xi_\alpha} (2\gamma_{\xi_\alpha} - 1) - (4\gamma_{\xi_\alpha} - 1) \frac{r}{R_\alpha(\varphi)} + \frac{2r^2}{R_\alpha^2(\varphi)} \right] dr \right\} d\varphi$$

$$\mathbf{e}^\alpha = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Phi \left\{ \begin{aligned} & \gamma_{\xi_\alpha} (2\gamma_{\xi_\alpha} - 1) [R_\chi(\varphi) - R_\rho(\varphi)] - \frac{(4\gamma_{\xi_\alpha} - 1)}{2R_\alpha(\varphi)} [R_\chi^2(\varphi) - R_\rho^2(\varphi)] \\ & + \frac{2}{3R_\alpha^2(\varphi)} [R_\chi^3(\varphi) - R_\rho^3(\varphi)] \end{aligned} \right\} d\varphi + \quad (4.37) \\
 \int_{\varphi_2}^{\varphi_3} \Phi \left\{ \begin{aligned} & \gamma_{\xi_\alpha} (2\gamma_{\xi_\alpha} - 1) [R_\delta(\varphi) - R_\rho(\varphi)] - \frac{(4\gamma_{\xi_\alpha} - 1)}{2R_\alpha(\varphi)} [R_\delta^2(\varphi) - R_\rho^2(\varphi)] \\ & + \frac{2}{3R_\alpha^2(\varphi)} [R_\delta^3(\varphi) - R_\rho^3(\varphi)] \end{aligned} \right\} d\varphi$$

Considerando-se, finalmente, a função de interpolação  $\alpha$  referente a um dos nós internos aos lados da célula ( $\alpha = 4, 5, 6 \rightarrow \beta=1, 2, 3$  e  $\eta=2, 3, 1$ ) e levando-se (4.26) em (4.36):

$$\mathbf{e}^\alpha = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Phi \left\{ \begin{aligned} & 4\gamma_{\xi_\beta} \gamma_{\xi_\eta} [R_\chi(\varphi) - R_\rho(\varphi)] - 2 \left[ \frac{\gamma_{\xi_\beta} R_\beta(\varphi) + \gamma_{\xi_\eta} R_\eta(\varphi)}{R_\beta(\varphi) \cdot R_\eta(\varphi)} \right] \\ & [R_\chi^2(\varphi) - R_\rho^2(\varphi)] + \frac{4}{3R_\beta(\varphi) \cdot R_\eta(\varphi)} [R_\chi^3(\varphi) - R_\rho^3(\varphi)] \end{aligned} \right\} d\varphi + \quad (4.38) \\
 \int_{\varphi_2}^{\varphi_3} \Phi \left\{ \begin{aligned} & 4\gamma_{\xi_\beta} \gamma_{\xi_\eta} [R_\delta(\varphi) - R_\rho(\varphi)] - 2 \left[ \frac{\gamma_{\xi_\beta} R_\beta(\varphi) + \gamma_{\xi_\eta} R_\eta(\varphi)}{R_\beta(\varphi) \cdot R_\eta(\varphi)} \right] \\ & [R_\delta^2(\varphi) - R_\rho^2(\varphi)] + \frac{4}{3R_\beta(\varphi) \cdot R_\eta(\varphi)} [R_\delta^3(\varphi) - R_\rho^3(\varphi)] \end{aligned} \right\} d\varphi$$

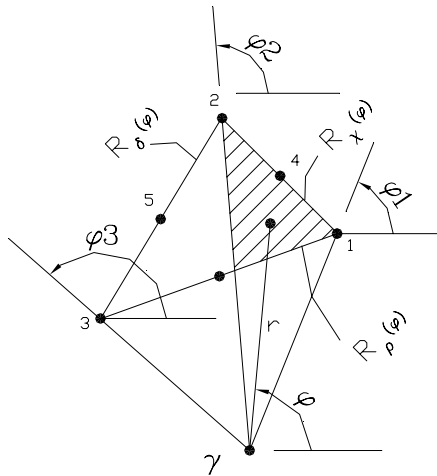


FIGURA 4.3 – Célula Triangular com Ponto Fonte Fora da Célula



É importante ressaltar que  $\gamma_{\xi\rho}$  é, ainda, o valor de  $\xi_{\rho}$  no ponto singular  $\gamma$  dado pela Eq.(4.22). Observa-se também que a Eq.(4.37) e a Eq.(4.38) reproduzem as equações anteriores quando se atribui o respectivo valor de  $\gamma_{\xi\rho}$  à situação desejada e sabendo-se que  $R_{\rho}(\varphi)=0$ . Resumindo, a Eq.(4.30) e a Eq.(4.31) são válidas para o ponto fonte  $\gamma$  localizado em um dos vértices da célula, a Eq.(4.33) e a Eq.(4.35) são válidas para o ponto fonte  $\gamma$  localizado em um nó interno de um dos lados e a Eq.(4.37) e a Eq.(4.38) para o ponto fonte fora da célula.

### 4.3.3 A Integral de Domínio da Equação das Tensões

A integral de domínio da Eq.(4.4) é mostrada novamente a seguir:

$$\mathbf{Q}' = \sum_{j=1}^Z \left( \int_{\Omega_j} \hat{\mathbf{e}}^* \Psi^T d\Omega \right), \text{ sendo: } \int_{\Omega_j} \hat{\mathbf{e}}^* \Psi^T d\Omega = \sum_{k=1}^K |J|_k W_k (\hat{\mathbf{e}}^* \Psi)_k$$

$Z$  é o número de células,  $K$  o número de pontos de integração,  $W_k$  o fator de ponderação associado,  $|J|_k$  o Jacobiano da transformação de coordenadas e  $\Psi$  é a função de interpolação. No cálculo total de  $\mathbf{Q}'$  cada célula contribuirá com uma matriz 3x18, que é dada por:

$$\mathbf{e} = \int_{\Omega_j} \left\{ \hat{\mathbf{e}}^* \psi_1 \quad \hat{\mathbf{e}}^* \psi_2 \quad \hat{\mathbf{e}}^* \psi_3 \quad \hat{\mathbf{e}}^* \psi_4 \quad \hat{\mathbf{e}}^* \psi_5 \quad \hat{\mathbf{e}}^* \psi_6 \right\} d\Omega \quad (4.39)$$

onde:

$$\hat{\mathbf{e}}^* = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1111}^* & 2\varepsilon_{1112}^* & \varepsilon_{1122}^* \\ \varepsilon_{1211}^* & 2\varepsilon_{1212}^* & \varepsilon_{1222}^* \\ \varepsilon_{2211}^* & 2\varepsilon_{2212}^* & \varepsilon_{2222}^* \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Seja  $'\mathbf{e}^\alpha = \int_{\Omega_j} '\hat{\boldsymbol{\xi}}^* \Psi_\alpha d\Omega$  uma submatriz (3x3) de  $'\mathbf{e}$ , com  $\alpha = 1, 2, \dots, 6$ . Para o cálculo da integral, define-se um sistema local de coordenadas polares  $(r, \varphi)$  com origem no ponto singular. Neste sistema de coordenadas pode-se escrever que  $'\hat{\boldsymbol{\xi}}^* = (1/r^2) \boldsymbol{\Phi}$ , onde  $\boldsymbol{\Phi}$  é função apenas de  $\varphi$ . Desprezando-se os termos de segunda ordem tem-se que  $d\Omega = r dr d\varphi$ :

$$'e^\alpha = \int_{\Omega_j} \frac{1}{r^2} \boldsymbol{\Phi} \Psi_\alpha r dr d\varphi = \int_{\Omega_j} \boldsymbol{\Phi} \Psi_\alpha \frac{dr}{r} d\varphi \quad (4.41)$$

Considera-se inicialmente o ponto fonte  $\gamma$  localizado em um dos vértices da célula e a função de interpolação  $\alpha$  referente, também, a um dos vértices da célula ( $\alpha = 1, 2, 3$ ). Então, isolando-se o ponto singular com um segmento de círculo de raio  $\varepsilon$  e considerando o limite para  $\varepsilon \rightarrow 0$ , conforme FIG. 4.1, tem-se:

$$'e^\alpha = \int_{\Omega_j} \boldsymbol{\Phi} \Psi_\alpha \frac{dr}{r} d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \boldsymbol{\Phi} \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{R_\gamma(\varphi)} \Psi_\alpha \frac{dr}{r} \right] d\varphi \quad (4.42)$$

Levando-se a Eq.(4.25) na Eq.(4.42), tem-se:

$$'e^\alpha = \begin{bmatrix} \gamma_{\xi_\alpha} (2\gamma_{\xi_\alpha} - 1) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \boldsymbol{\Phi} \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{R_\gamma(\varphi)} \frac{dr}{r} \right] d\varphi - \\ \frac{4\gamma_{\xi_\alpha} - 1}{R_\alpha(\varphi)} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \boldsymbol{\Phi} \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{R_\gamma(\varphi)} dr \right] d\varphi + \\ \frac{2}{R_\alpha^2(\varphi)} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \boldsymbol{\Phi} \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{R_\gamma(\varphi)} r dr \right] d\varphi \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

$$'e^\alpha = \left[ \begin{array}{l} \gamma_{\xi_\alpha} (2\gamma_{\xi_\alpha} - 1) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Phi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [Ln |R_\alpha(\varphi)| - Ln \varepsilon] d\varphi - \\ -(4\gamma_{\xi_\alpha} - 1) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Phi \left[ \frac{R_\gamma(\varphi)}{R_\alpha(\varphi)} \right] d\varphi + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Phi \left[ \frac{R_\gamma(\varphi)}{R_\alpha(\varphi)} \right]^2 d\varphi \end{array} \right] \quad (4.44)$$

Pelas condições intrínsecas de  $\Phi$  sabe-se que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (Ln \varepsilon) \int_0^{2\pi} \Phi d\varphi = 0$ . Então:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [Ln R_\alpha(\varphi) - Ln \varepsilon] \int_0^{2\pi} \Phi d\varphi = [Ln R_\alpha(\varphi)] \int_0^{2\pi} \Phi d\varphi \quad (4.45)$$

Da Eq.(4.45) na Eq.(4.44), vem:

$$'e^\alpha = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Phi \left\{ \gamma_{\xi_\alpha} (2\gamma_{\xi_\alpha} - 1) Ln R_\gamma - (4\gamma_{\xi_\alpha} - 1) \left[ \frac{R_\gamma}{R_\alpha} \right] + \left[ \frac{R_\gamma}{R_\alpha} \right]^2 \right\} d\varphi \quad (4.46)$$

Observar que a integração é feita em torno do ponto campo com  $\varphi$  variando de 0 a  $2\pi$ , devido a Eq.(4.45).

Considerando-se o ponto fonte  $\gamma$  localizado em um dos vértices da célula e a função de interpolação  $\alpha$  referente a um dos nós internos dos lados da célula, tem-se:

$$'e^\alpha = \int_{\Omega_j} \Phi \Psi_\alpha \frac{dr}{r} d\varphi = \int_{\Omega_j} \Phi (4\xi_\beta \xi_\eta) \frac{dr}{r} d\varphi$$

Levando-se a Eq.(4.26) na expressão acima, vem:

$$'e^\alpha = \int_{\Omega_j} \Phi \left[ \frac{4 \gamma_{\xi_\beta} \cdot \gamma_{\xi_\eta}}{r} - 4 \left( \frac{\gamma_{\xi_\beta} R_\beta(\varphi) + \gamma_{\xi_\eta} R_\eta(\varphi)}{R_\beta(\varphi) \cdot R_\eta(\varphi)} \right) + \frac{4r}{R_\beta(\varphi) \cdot R_\eta(\varphi)} \right] \frac{dr}{r} d\varphi$$

Então:

$$'e^\alpha = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Phi \left\{ 4 \left[ \frac{4\gamma_{\xi_\beta} \gamma_{\xi_\eta} \text{Ln} R_\gamma(\varphi) - \gamma_{\xi_\beta} R_\beta(\varphi) + \gamma_{\xi_\eta} R_\eta(\varphi)}{R_\beta(\varphi) \cdot R_\eta(\varphi)} \right] R_\gamma(\varphi) + \frac{2R_\gamma^2(\varphi)}{R_\beta(\varphi) \cdot R_\eta(\varphi)} \right\} d\varphi \quad (4.47)$$

Considera-se, agora, o ponto fonte  $\gamma$  localizado em um dos pontos médios dos lados da célula e a função de interpolação  $\alpha$  referente a um de seus vértices. Levando-se a Eq.(4.25) na Eq.(4.42), tendo-se em vista a FIG. 4.2, vem:

$$'e^\alpha = \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} \Phi \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\xi_\alpha} (2\gamma_{\xi_\alpha} - 1) \text{Ln} R_\eta(\varphi) - \\ (4\gamma_{\xi_\alpha} - 1) \frac{R_\eta(\varphi)}{R_\alpha(\varphi)} + \left[ \frac{R_\eta(\varphi)}{R_\alpha(\varphi)} \right]^2 \end{array} \right\} d\varphi \\ + \int_{\varphi_3}^{\varphi_4} \Phi \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\xi_\alpha} (2\gamma_{\xi_\alpha} - 1) \text{Ln} R_\beta(\varphi) - \\ (4\gamma_{\xi_\alpha} - 1) \frac{R_\beta(\varphi)}{R_\alpha(\varphi)} + \left[ \frac{R_\beta(\varphi)}{R_\alpha(\varphi)} \right]^2 \end{array} \right\} d\varphi \quad (4.48)$$

Considera-se, agora, o ponto fonte  $\gamma$  localizado em um dos nós internos e a função de interpolação  $\alpha$  referente, também, a um dos nós internos dos lados da célula. Tem-se então:

$$\alpha = 4, 5, 6 \rightarrow \beta = 1, 2, 3 \text{ e } \eta = 2, 3, 1; \gamma = 1, 2, 3 \rightarrow \chi = 1, 2, 3 \text{ e } \delta = 2, 3, 1$$

$$'e^\alpha = \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} \Phi \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{R_\chi(\varphi)} (4\xi_\beta \xi_\eta) \frac{dr}{r} \right\} d\varphi + \\ \int_{\varphi_3}^{\varphi_4} \Phi \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{R_\delta(\varphi)} (4\xi_\beta \xi_\eta) \frac{dr}{r} \right\} d\varphi \quad (4.49)$$

Levando-se a Eq.(4.26) na Eq.(4.49), tem-se:

$$\begin{aligned}
'e^\alpha = & \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} \Phi \left\{ \begin{aligned} & 4\gamma_{\xi_\beta}^\zeta \gamma_{\xi_\eta}^\zeta \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^{R_\chi} \frac{dr}{r} \right] - 4 \left[ \frac{\gamma_{\xi_\beta}^\zeta R_\beta(\varphi) + \gamma_{\xi_\eta}^\zeta R_\eta(\varphi)}{R_\beta(\varphi) \cdot R_\eta(\varphi)} \right] \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^{R_\chi} dr \right] + \\ & + \left[ \frac{4}{R_\beta(\varphi) \cdot R_\eta(\varphi)} \right] \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^{R_\chi} r dr \right] \end{aligned} \right\} d\varphi + \\
& + \int_{\varphi_3}^{\varphi_4} \Phi \left\{ \begin{aligned} & 4\gamma_{\xi_\beta}^\zeta \gamma_{\xi_\eta}^\zeta \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^{R_\delta} \frac{dr}{r} \right] - 4 \left[ \frac{\gamma_{\xi_\beta}^\zeta R_\beta(\varphi) + \gamma_{\xi_\eta}^\zeta R_\eta(\varphi)}{R_\beta(\varphi) \cdot R_\eta(\varphi)} \right] \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^{R_\delta} dr \right] + \\ & + \left[ \frac{4}{R_\beta(\varphi) \cdot R_\eta(\varphi)} \right] \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^{R_\delta} r dr \right] \end{aligned} \right\} d\varphi
\end{aligned} \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} \Phi 4\gamma_{\xi_\beta}^\zeta \gamma_{\xi_\eta}^\zeta \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^{R_\chi} \frac{dr}{r} \right] d\varphi = \\
& 4\gamma_{\xi_\beta}^\zeta \gamma_{\xi_\eta}^\zeta \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} \Phi \left[ \text{Ln } R_\chi - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Ln } \varepsilon \right] d\varphi
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Sabe-se que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\text{Ln } \varepsilon) \int_0^{2\pi} \Phi d\varphi = 0 \tag{4.52}$$

Então:

$$\begin{aligned}
& \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} \Phi 4\gamma_{\xi_\beta}^\zeta \gamma_{\xi_\eta}^\zeta \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^{R_\chi} \frac{dr}{r} \right] d\varphi = 4\gamma_{\xi_\beta}^\zeta \gamma_{\xi_\eta}^\zeta \\
& \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} \Phi \left( \text{Ln } R_\chi - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Ln } \varepsilon \right) d\varphi = 4\gamma_{\xi_\beta}^\zeta \gamma_{\xi_\eta}^\zeta \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} \Phi (\text{Ln } R_\chi) d\varphi
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Levando-se em (4.50), vem:

$$\begin{aligned}
'e^\alpha = & \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} \Phi \left\{ \begin{aligned} & 4\gamma_{\xi_\beta}^\zeta \gamma_{\xi_\eta}^\zeta \text{Ln } R_\chi + \\ & \frac{2 R_\chi(\varphi)}{R_\beta(\varphi) \cdot R_\eta(\varphi)} \left[ R_\chi(\varphi) - 2(\gamma_{\xi_\beta}^\zeta R_\beta(\varphi) + \gamma_{\xi_\eta}^\zeta R_\eta(\varphi)) \right] \end{aligned} \right\} d\varphi \\
& + \int_{\varphi_3}^{\varphi_4} \Phi \left\{ \begin{aligned} & 4\gamma_{\xi_\beta}^\zeta \gamma_{\xi_\eta}^\zeta \text{Ln } R_\delta + \\ & \frac{2 R_\delta(\varphi)}{R_\beta(\varphi) \cdot R_\eta(\varphi)} \left[ R_\delta(\varphi) - 2(\gamma_{\xi_\beta}^\zeta R_\beta(\varphi) + \gamma_{\xi_\eta}^\zeta R_\eta(\varphi)) \right] \end{aligned} \right\} d\varphi
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Sabendo-se que ( $A$ ) é a área da célula, observar que:

$$R_{\chi}(\varphi) = -\frac{2A}{b_{\chi}\cos\varphi+a_{\chi}\sin\varphi} \quad ; \quad R_{\delta}(\varphi) = -\frac{2A}{b_{\delta}\cos\varphi+a_{\delta}\sin\varphi}$$

A integração é feita em torno do ponto campo com  $\varphi$  variando de 0 a  $2\pi$  devido a Eq.(4.52).

Supõe-se, agora, o ponto fonte  $\gamma$  localizado fora da célula, segundo FIG. 4.3. Seja:

$$'e^{\alpha} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} \Phi \left[ \int_{R_{\rho}(\varphi)}^{R_{\chi}(\varphi)} \Psi_{\alpha} \frac{dr}{r} \right] d\varphi + \int_{\varphi_3}^{\varphi_2} \Phi \left[ \int_{R_{\rho}(\varphi)}^{R_{\delta}(\varphi)} \Psi_{\alpha} \frac{dr}{r} \right] d\varphi \quad (4.54)$$

Levando-se (4.25) em (4.54), vem:

$$'e^{\alpha} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} \Phi \left\{ \gamma_{\xi_a}^z (2\gamma_{\xi_a}^z - 1) \left[ \int_{R_{\rho}(\varphi)}^{R_{\chi}(\varphi)} \frac{dr}{r} \right] - \frac{4\gamma_{\xi_a}^z - 1}{R_{\alpha}(\varphi)} \left[ \int_{R_{\rho}(\varphi)}^{R_{\chi}(\varphi)} dr \right] + \frac{2}{R_{\alpha}(\varphi)} \cdot \left[ \int_{R_{\rho}(\varphi)}^{R_{\chi}(\varphi)} r dr \right] \right\} d\varphi \\ + \int_{\varphi_3}^{\varphi_2} \Phi \left\{ \gamma_{\xi_a}^z (2\gamma_{\xi_a}^z - 1) \left[ \int_{R_{\rho}(\varphi)}^{R_{\delta}(\varphi)} \frac{dr}{r} \right] - \frac{4\gamma_{\xi_a}^z - 1}{R_{\alpha}(\varphi)} \left[ \int_{R_{\rho}(\varphi)}^{R_{\delta}(\varphi)} dr \right] + \frac{2}{R_{\alpha}(\varphi)} \cdot \left[ \int_{R_{\rho}(\varphi)}^{R_{\delta}(\varphi)} r dr \right] \right\} d\varphi \quad (4.55)$$

$$'e^{\alpha} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} \Phi \left[ \frac{\gamma_{\xi_a}^z (2\gamma_{\xi_a}^z - 1) [Ln R_{\chi}(\varphi) - Ln R_{\rho}(\varphi)] - \frac{4\gamma_{\xi_a}^z - 1}{R_{\alpha}(\varphi)} [R_{\chi}(\varphi) - R_{\rho}(\varphi)] + \frac{R_{\chi}^2(\varphi) - R_{\rho}^2(\varphi)}{R_{\alpha}(\varphi)}}{R_{\alpha}(\varphi)} \right] d\varphi + \\ \int_{\varphi_3}^{\varphi_2} \Phi \left[ \frac{\gamma_{\xi_a}^z (2\gamma_{\xi_a}^z - 1) [Ln R_{\delta}(\varphi) - Ln R_{\rho}(\varphi)] - \frac{4\gamma_{\xi_a}^z - 1}{R_{\alpha}(\varphi)} [R_{\delta}(\varphi) - R_{\rho}(\varphi)] + \frac{R_{\delta}^2(\varphi) - R_{\rho}^2(\varphi)}{R_{\alpha}(\varphi)}}{R_{\alpha}(\varphi)} \right] d\varphi \quad (4.56)$$

Considerando-se, finalmente, a função de interpolação  $\alpha$  referente a um dos nós internos dos lados da célula, o ponto fonte  $\gamma$  fora dela e tendo-se em conta a Eq.(4.26), vem:

$$\begin{aligned}
'e^\alpha = & \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} \Phi \left[ \begin{aligned} & 4\gamma_{\xi_\beta}^\xi \gamma_{\xi_\eta}^\xi \left( \int_{R_\rho(\varphi)}^{R_\chi(\varphi)} \frac{dr}{r} \right) - 4 \left( \int_{R_\rho(\varphi)}^{R_\chi(\varphi)} dr \right) \frac{\gamma_{\xi_\beta}^\xi R_\beta(\varphi) + \gamma_{\xi_\eta}^\xi R_\eta(\varphi)}{R_\beta(\varphi) R_\eta(\varphi)} + \\ & \frac{4}{R_\beta(\varphi) R_\eta(\varphi)} \left( \int_{R_\rho(\varphi)}^{R_\chi(\varphi)} r dr \right) \end{aligned} \right] d\varphi + \\
& + \int_{\varphi_2}^{\varphi_3} \Phi \left[ \begin{aligned} & 4\gamma_{\xi_\beta}^\xi \gamma_{\xi_\eta}^\xi \left( \int_{R_\rho(\varphi)}^{R_\delta(\varphi)} \frac{dr}{r} \right) - 4 \left( \int_{R_\rho(\varphi)}^{R_\delta(\varphi)} dr \right) \frac{\gamma_{\xi_\beta}^\xi R_\beta(\varphi) + \gamma_{\xi_\eta}^\xi R_\eta(\varphi)}{R_\beta(\varphi) R_\eta(\varphi)} + \\ & \frac{4}{R_\beta(\varphi) R_\eta(\varphi)} \left( \int_{R_\rho(\varphi)}^{R_\delta(\varphi)} r dr \right) \end{aligned} \right] d\varphi
\end{aligned} \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned}
'e^\alpha = & \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Phi \left[ \begin{aligned} & 4\gamma_{\xi_\beta}^\xi \gamma_{\xi_\eta}^\xi \left[ \text{Ln}R_\chi(\varphi) - \text{Ln}R_\rho(\varphi) \right] - 4 \left[ R_\chi(\varphi) - R_\rho(\varphi) \right] \\ & \frac{\gamma_{\xi_\beta}^\xi R_\beta(\varphi) + \gamma_{\xi_\eta}^\xi R_\eta(\varphi)}{R_\beta(\varphi) R_\eta(\varphi)} \frac{2}{R_\beta(\varphi) R_\eta(\varphi)} \left[ R_\chi^2(\varphi) - R_\rho^2(\varphi) \right] \end{aligned} \right] d\varphi \\
& + \int_{\varphi_2}^{\varphi_3} \Phi \left[ \begin{aligned} & 4\gamma_{\xi_\beta}^\xi \gamma_{\xi_\eta}^\xi \left[ \text{Ln}R_\delta(\varphi) - \text{Ln}R_\rho(\varphi) \right] - 4 \left[ R_\delta(\varphi) - R_\rho(\varphi) \right] \\ & \frac{\gamma_{\xi_\beta}^\xi R_\beta(\varphi) + \gamma_{\xi_\eta}^\xi R_\eta(\varphi)}{R_\beta(\varphi) R_\eta(\varphi)} \frac{2}{R_\beta(\varphi) R_\eta(\varphi)} \left[ R_\delta^2(\varphi) - R_\rho^2(\varphi) \right] \end{aligned} \right] d\varphi
\end{aligned} \tag{4.58}$$

É importante ressaltar que  $\gamma_{\xi_\beta}$  e  $\gamma_{\xi_\eta}$  são, ainda, os valores das coordenadas triangulares dos respectivos pontos singulares. As Eq.(4.57) e Eq.(4.58) reproduzem as situações anteriores considerando-se o termo logarítmico como sendo  $\text{Ln}R_\chi$  ou  $\text{Ln}R_\delta$  e também os valores de  $R_\rho(\varphi)=0$ ,  $\gamma_{\xi_\beta}$  e  $\gamma_{\xi_\eta}$ .

#### 4.3.4 Exemplos de Aplicação para a Integração Semi-Analítica

Para verificação das expressões desenvolvidas são mostrados três exemplos de aplicação. O primeiro se refere a uma chapa retangular submetida à tensão inicial com variação linear ao longo do comprimento (FIG. 4.4). No segundo exemplo a mesma chapa retangular é submetida à tensão inicial com variação parabólica (FIG.4.5). Finalmente, o terceiro exemplo se refere a um anel em que uma pequena porção entre duas seções transversais adjacentes é retirada e as extremidades do anel são unidas novamente por solda, por exemplo. O anel obtido estará submetido a tensões iniciais mesmo na ausência de forças externas (FIG. 4.6).

#### 4.3.4.1 Chapa retangular submetida a tensão inicial com variação linear

Os deslocamentos na direção  $x$  nos nós 13 a 21 foram de 0,168 cm (solução analítica) e os resultados para as tensões na direção  $x$  foram exatos e iguais a zero em todos os pontos do contorno e em todos os pontos internos.

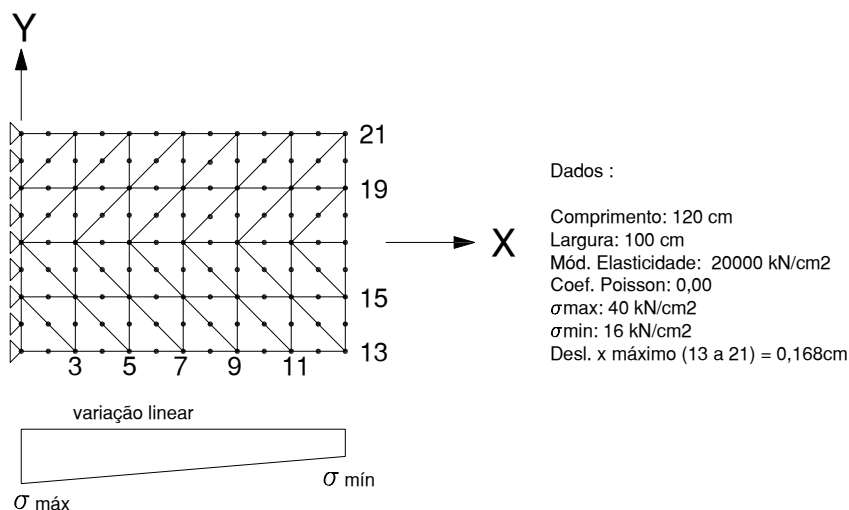


FIGURA 4.4 – Chapa Retangular e Tensão com Variação Linear

#### 4.3.4.2 Chapa retangular submetida a tensão inicial com variação parabólica

A mesma chapa retangular do exemplo anterior é submetida a uma tensão inicial com variação parabólica da forma:  $\sigma_x = x^2/600 - 0,40x + 40$ . Foram obtidos deslocamentos nos nós 13 a 21 de 0,1438 cm, iguais à solução analítica e os resultados para as tensões na direção  $x$ , nos pontos 13 a 21 e nos pontos internos, foram exatos e iguais a zero. Houve pequeno erro em alguns pontos do contorno. Na TAB.4.1 são listados os erros encontrados em pontos representativos, em relação à tensão inicial aplicada.

TABELA 4.1 – Tensões na direção  $X$

Elemento	Nó	Tensões	Vr Exato	Vr Calc.	Erro
3	5	26,667	0,00	-0,1167	0,44%
	6	24,167	0,00	0,0633	0,26%
	7	22,000	0,00	-0,1000	0,45%
5	9	18,667	0,00	0,0533	0,29%
	10	17,500	0,00	-0,0300	0,17%
	11	16,667	0,00	0,0433	0,26%



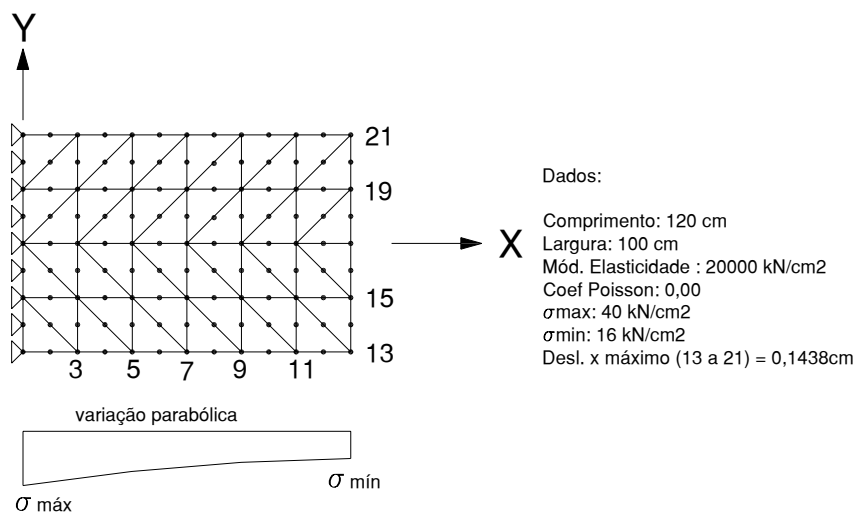


FIGURA 4.5 – Chapa Retangular - Tensão com Variação Parabólica

#### 4.3.4.3 Anel circular submetido a tensão inicial

O exemplo se refere a um anel em que uma pequena porção entre duas seções transversais adjacentes é retirada e as extremidades do anel são unidas novamente. O anel obtido estará submetido a tensões iniciais mesmo na ausência de forças externas. As expressões para as tensões internas resultantes são conhecidas. O anel, então, é submetido a estas tensões iniciais provocando os deslocamentos das seções adjacentes até coincidirem. Sendo  $a$  o raio interno e  $b$  o raio externo,  $E$  o módulo de elasticidade do material e  $\alpha$  o pequeno ângulo que mede a porção do anel que foi retirada, as tensões iniciais em um ponto sobre o raio  $r$ , podem ser calculadas através da seguinte expressão, segundo Timoshenko e Goodier (1980):

$$\sigma_r = -\frac{4M}{N} \left( \frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} \right); \quad \tau_{r\theta} = 0;$$

$$\sigma_{\theta} = -\frac{4M}{N} \left( -\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} + b^2 - a^2 \right) \quad (4.59)$$

$$M = -\frac{\alpha E (b^2 - a^2) - 4a^2 b^2 [\ln(b/a)]^2}{8\pi \cdot 2(b^2 - a^2)} ; N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left( \ln \frac{b}{a} \right)^2$$

Considerando-se a simetria em relação ao eixo OY, as condições de contorno foram introduzidas nos nós 37 a 41. Além destes vínculos, impediu-se, também, o deslocamento do nó 41 na direção Y, evitando-se o movimento de corpo rígido. Na TAB. 4.2 estão relacionados os deslocamentos na direção X dos nós onde a pequena porção do anel foi retirada, considerando-se a simetria. A malha para a estrutura simétrica mostrada na FIG.4.6 tem 72 células triangulares e 40 elementos de contorno. As tensões obtidas para a célula nº15 são mostradas na TAB.4.3, sendo os erros calculados em relação às tensões iniciais aplicadas.

TABELA 4.2 – Deslocamentos na direção X

Nó	Vr Exato	Vr Calc.	Erro
1	2,618	2,619	0,04%
2	2,814	2,814	0,00%
3	3,011	3,008	0,09%
4	3,207	3,203	0,12%
5	3,403	3,398	0,15%

TABELA 4.3 – Tensões Normais

Célula	Nó	Tensões	Vr Exato	Vr Calc.	Erro
15	6	24,96	0,00	0,15000	0,600%
	7	11,06	0,00	-0,00069	0,006%
	8	11,06	0,00	-0,00084	0,008%
	9	0,99	0,00	0,00060	0,060%
	10	0,99	0,00	0,00072	0,072%
	11	0,99	0,00	0,00085	0,085%

Dados:

Raio Interno : 100 cm  
 Raio Externo : 130 cm  
 Mód Elasticid. : 21000 kN/cm<sup>2</sup>  
 Ângulo  $\alpha$  : 3,0 graus  
 Coef. Poisson : 0,30

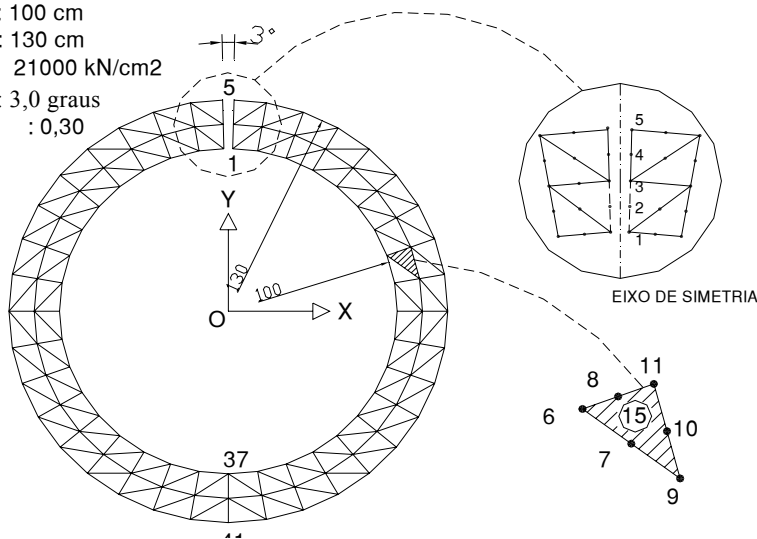


FIGURA 4.6 - Anel Circular com Tensão Inicial

#### 4.4 Algoritmo para Análise Não-Linear

Para a solução do problema elastoplástico, um algoritmo incremental e iterativo, baseado no processo das tensões iniciais, segundo OWEN e HINTON (1980), é empregado. O problema é resolvido linearmente para o carregamento total e esta é a única vez que o sistema é resolvido. Determina-se, então, o estado de tensões correspondente à fração do carregamento quando ocorre o primeiro escoamento. A partir daí, o carregamento excedente é aplicado de forma incremental até que todo ele esteja presente. Para cada incremento o estado de tensões, representado pela tensão efetiva, é monitorado pelo critério de escoamento escolhido. A tensão residual é reaplicada elasticamente de modo a evitar que a tensão efetiva fique fora da superfície de escoamento e que seja restaurado o equilíbrio. Isto provoca um novo campo de tensões residuais que é novamente verificado da mesma maneira anterior em um processo iterativo. Quando este campo de tensões residuais, em determinada iteração, puder ser desprezado em relação a uma tolerância especificada, o processo é interrompido e novo incremento de carga é aplicado.

**Quando todo o carregamento estiver instalado o problema está resolvido. As diversas etapas deste algoritmo são resumidas a seguir:**

- a) Calcula-se o incremento das tensões elásticas utilizando-se, para a primeira iteração:

$$\dot{\sigma}^e = \beta \dot{\mathbf{n}} \quad (4.60)$$

e para as demais iterações:

$$\dot{\sigma}^e = \mathbf{B} \dot{\sigma}^o \quad (4.61)$$

A parcela  $\dot{\mathbf{n}}$  que representa a solução elástica do problema vem multiplicada por um fator  $\beta$  que determina o incremento do carregamento. Para se evitar erros cumulativos esta parcela  $\beta \dot{\mathbf{n}}$  é aplicada na primeira iteração de todo incremento de carga;

- b) Calcula-se o incremento das tensões verdadeiras pela Eq.(3.73) ou Eq.(3.74) para cada iteração  $r$ :

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^{ep} \dot{\varepsilon}_{kl} = \dot{\sigma}_{ij}^e - \frac{1}{\gamma'} C_{ijmn} a_{mn} a_{kl} \dot{\sigma}_{kl}^e$$

- c) Verifica-se a convergência, comparando o valor de  $\varepsilon_e^p$  calculado e o seu valor acumulado na iteração corrente, para se saber se ele pode ser desprezado. Usando as Eq.(3.51), Eq.(3.57) e Eq.(3.68), vem:

$$\sigma_e \dot{\varepsilon}_e^p = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p$$

$$\sigma_e \dot{\varepsilon}_e^p = \sigma_{ij} \left[ d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right] = \sigma_{ij} d\lambda a_{ij}$$

Então:

$$\dot{\varepsilon}_e^p = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_e} d\lambda a_{ij}$$

onde  $\sigma_e$  é a tensão efetiva dada pelo critério de escoamento. Este item precisa ser explicado em mais detalhes para um melhor entendimento. Se a tensão efetiva é maior que a tensão de plastificação, a porção excedente é reduzida para a superfície de escoamento, permitindo-se que uma deformação plástica ocorra. Como esta redução leva o ponto resultante na direção tangente ao ponto considerado, uma discrepância razoável pode acontecer em regiões de grande curvatura desta superfície. Isto é evitado subdividindo-se a tensão efetiva excedente e reduzindo-se cada uma das subdivisões até a superfície de escoamento, como está mostrado na FIG.4.7. A precisão dependerá do valor de cada subdivisão.

- d) Calcula-se o incremento de tensões iniciais a partir da Eq.(3.78)

$$\dot{\sigma}_{ij}^o = \dot{\sigma}_{ij}^e - \dot{\sigma}_{ij} = \frac{1}{\gamma} C_{ijmn} a_{mn} a_{kl} \dot{\sigma}_{kl}^e$$

- e) Acumulam-se os valores das tensões iniciais e das tensões verdadeiras, para a iteração  $r$ :

$$[\dot{\sigma}_{ij}^o]_r = [\dot{\sigma}_{ij}^o]_{r-1} + [\dot{\sigma}_{ij}^o]_r$$

$$[\dot{\sigma}_{ij}]_r = [\dot{\sigma}_{ij}]_{r-1} + [\dot{\sigma}_{ij}^o]_r$$

- f) Continua o processo, para o nó seguinte, voltando ao item b), até que todos os nós sejam pesquisados.
- g) Volta ao item a) para nova iteração.

As iterações são repetidas até que se consiga a convergência em todos os pontos inelásticos passando-se, então, para novo incremento de carga.

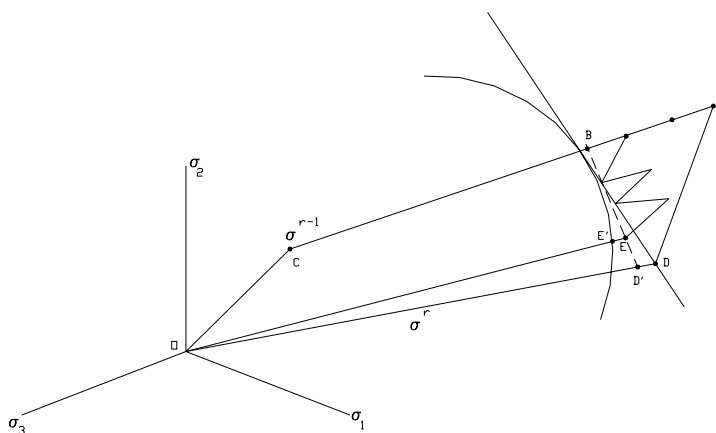


FIGURA 4.7 – Esquema do Algoritmo Não-Linear

O processo das tensões iniciais não inclui a restrição de incompressibilidade das deformações inelásticas que aparece no processo das deformações iniciais. Desta forma, além dos critérios de escoamento de Tresca e Von Mises, os critérios de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager também podem ser empregados.

#### 4.5 Fator de Intensidade de Tensão

A Integral J está relacionada com o FIT, em condições de estado plano de deformação, pela expressão:

$$J = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (4.62)$$

onde J é dado pela Eq.(2.2) e será repetida a seguir para melhor entendimento.

$$J = \int_{\Gamma} (W_e n_1 - t_i u_{i,1}) d\Gamma + \int_{\Gamma} W_p n_1 d\Gamma$$

ISHIKAWA et al. (1980) apud ALIABADI e ROOKE (1991) mostraram que é possível desacoplar a Integral J nas componentes dos modos de fratura I e II. Eles separaram as tensões, deformações, deslocamentos e forças de superfície, analiticamente, nas suas componentes, dentro de uma malha simétrica em uma região vizinha à ponta da trinca. Consideraram dois pontos  $P(x_1, x_2)$  e  $P'(x_1, -x_2)$ , simétricos em relação ao eixo da trinca, onde os parâmetros são calculados. Desde que a trajetória da integração seja simétrica em relação ao eixo da trinca, é possível fazer a seguinte decomposição no campo elástico:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^I \\ \sigma_{22}^I \\ \sigma_{12}^I \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} + \sigma_{11}' \\ \sigma_{22} + \sigma_{22}' \\ \sigma_{12} - \sigma_{12}' \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^{II} \\ \sigma_{22}^{II} \\ \sigma_{12}^{II} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{11}' \\ \sigma_{22} - \sigma_{22}' \\ \sigma_{12} + \sigma_{12}' \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} u_1^I \\ u_2^I \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 + u_1' \\ u_2 - u_2' \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} u_1^{II} \\ u_2^{II} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 - u_1' \\ u_2 + u_2' \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.63)$$

A Eq.(4.63) mostra a seguinte decomposição:  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II}$  e  $u_i = u_i^I + u_i^{II}$

As equações desacopladas para o cálculo do FIT de cada modo, independentemente, são:

$$J_I = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 \quad \text{e} \quad J_{II} = \frac{1-\nu^2}{E} K_{II}^2 \quad (4.64)$$

Neste trabalho a região vizinha à ponta da trinca é discretizada em células triangulares segundo FIG. 4.8. Como a Integral J é independente do caminho, pode-se escolher a trajetória mais conveniente. A escolha corresponde à última linha poligonal da malha, onde o termo plástico de J é nulo, pois não há plastificação, em razão da Eq.(4.45) ou Eq.(4.52). Observa-se que a simetria necessária para o desacoplamento dos Fatores de Intensidade de Tensão também é atendida.

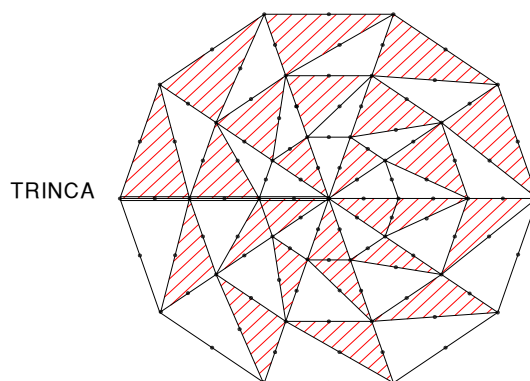


FIGURA 4.8 – Células na Ponta da Trinca

#### 4.6 Propagação da Trinca por Fadiga

De uma maneira geral existem duas técnicas distintas para previsão de propagação de trinca por fadiga:

- Previsão ciclo a ciclo;
- Estimativa através de valores característicos do FIT;

A primeira técnica é utilizada para previsão de propagação de trinca com carregamento de amplitude variável, enquanto a segunda é empregada para amplitude constante. Qualquer que seja o tipo do carregamento cíclico, os eventos mais significativos para o comportamento à fadiga do material, são os seus valores máximos e mínimos, isto é, o momento no qual se reverte a direção deste carregamento. Na ponta da trinca, por causa da singularidade do campo de tensão e de deformação, aparece a plasticidade reversa. Além disso, na história do carregamento no tempo, os valores extremos são caracterizados pela taxa do carregamento, que pode variar de uma maneira sistemática, senoidal, por exemplo, ou de uma maneira aleatória. Sendo os efeitos da fadiga diretamente dependentes do tempo, fadiga por corrosão, por exemplo, a taxa do carregamento tem que ser considerada, ou seja, os efeitos da forma da onda e da frequência cíclica. Entretanto se os efeitos não são diretamente dependentes do tempo a história do carregamento no tempo pode ser suficientemente descrita por uma série de máximos e mínimos e a carga na estrutura deve ser medida por um longo período para



ser mais representativa. O comprimento da trinca, depois de  $N$  ciclos, pode ser obtido por:

$$a_N = a_o + \sum_{i=1}^N \Delta a_i \quad (4.65)$$

com  $\Delta a_i = \frac{da}{dN}$  para  $\Delta K$  e  $R = \sigma_{min}/\sigma_{max}$  no ciclo  $i$  obtido como se fosse para carregamento com amplitude constante.

Previsões feitas através de valores de  $K$  são baseadas na similitude, ou seja, as mesmas condições no mesmo sistema causarão as mesmas conseqüências. A taxa de crescimento da trinca, para carregamento com amplitude constante, pode ser calculada através da relação empírica conhecida como Lei de Paris:

$$\frac{da}{dN} = C_p (\Delta K_e)^{m_p} \quad (4.66)$$

onde  $C_p$  e  $m_p$  são constantes do material obtidas experimentalmente.  $\Delta K_e$  é a variação do fator de intensidade de tensão equivalente obtido através dos valores máximos e mínimos dos fatores de intensidade de tensão dos modos I e II com o auxílio da Eq.(2.10) ou da Eq.(2.15).  $da/dN$  é a taxa do crescimento da trinca quando  $N \rightarrow 1$ . Para a maioria dos materiais  $m_p$  se encontra entre 3 e 5 e  $C_p$  depende fortemente do material.

Existem duas limitações para  $\Delta K_e$ . Se  $\Delta K_e$  é muito grande ocorre imediatamente a ruptura porque  $K_{max}$  excede a tenacidade à fratura do material  $K_{Ic}$ . Por outro lado se  $\Delta K_e$  é muito pequeno a trinca não se propagará. Há um valor inicial  $\Delta K_o$  onde a trinca só propagará se  $\Delta K_e > \Delta K_o$ . O resultado destas limitações é que  $da/dN$  e  $\Delta K_e$  podem ser representados pela FIG.4.9.

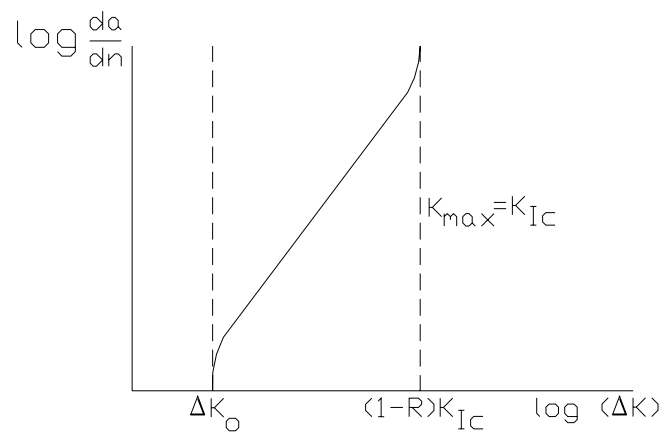


FIGURA 4.9. Esquema da propagação da trinca por fadiga

FORMAN et al. (1967) *apud* BROEK (1986) sugeriram uma taxa infinita de crescimento para tamanho crítico de trinca, ou seja, para  $K_{máx} = K_{Ic}$ . A equação é escrita por:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C_p (\Delta K_e)^{m_p} K_{máx}}{K_{Ic} - K_{máx}} \quad (4.67)$$

A fórmula acima não contempla a assíntota inferior que indica o início da propagação da trinca, ou mesmo, o início da trinca, onde  $da/dN \rightarrow 0$  quando  $\Delta K_e = \Delta K_0$ . Duas expressões que incluem as limitações mencionadas podem ser a de PRIDDLE e a de BRANCO et al. *apud* SCHUVE (1979), ou seja:

$$\frac{da}{dN} = C_p \left[ \frac{\Delta K_e - \Delta K_0}{K_{Ic} - K_{máx}} \right]^{m_p} ; \quad \frac{da}{dN} = C_p \left[ \frac{K_m \cdot \Delta K_e (\Delta K_e - \Delta K_0)}{K_{Ic}^2 - K_{máx}^2} \right]^{m_p} \quad (4.68)$$

Estas fórmulas não têm justificativas teóricas, sendo apenas ajustadas aos resultados obtidos em ensaios com corpos de prova em laboratório. As constantes do material são obtidas através de análise de regressão.

#### 4.7 Programa de Computador

O programa de computador utilizado para obtenção dos resultados, chamado de Programa *KLEIN*, foi desenvolvido pelo autor desta tese, a partir do programa para análise elástica bidimensional de Arthur Portela, para o Método dos Elementos de Contorno Dual. Foram acrescentadas diversas subrotinas para possibilitar a análise elastoplástica. O processo das tensões iniciais, empregado no algoritmo elastoplástico, exige a discretização de parte do domínio onde se espera a plastificação. Escolheu-se, então, a célula triangular quadrática, de lados retos, como descrita no item 4.3. Foi desenvolvida uma subrotina que cria a malha de células triangulares, em torno da ponta da trinca. A quantidade de células da malha depende do número NCEL de células em torno da ponta da trinca. Esta quantidade total é de  $(5 \cdot \text{NCEL})$  para cada ponta, sendo  $\text{NCEL}=10$  nos exemplos apresentados. A geometria simétrica da malha, em relação ao eixo da trinca, permite a verificação de problemas simétricos sem a introdução de erros adicionais. Durante a propagação da trinca a malha é deslocada para a nova ponta, não se armazenando os valores anteriores das deformações plásticas. Um novo problema é estudado com a nova posição da ponta. Justifica-se este procedimento porque a utilização da Integral J, em problemas elastoplásticos só é válida para carregamentos monotônicos e de velocidade de propagação constante, evitando-se o descarregamento. O comprimento da propagação é equivalente ao comprimento de quatro elementos da ponta da trinca. Como a malha se estende até o terceiro elemento não há nenhum ponto da nova malha que coincida com a anterior.

O programa original cria duas numerações distintas, uma fornecida pelo usuário com os nós nos extremos dos elementos de contorno, chamada de *malha geométrica*. Outra, a *malha funcional*, com os nós localizados no interior do elemento descontínuo e nos extremos dos elementos contínuos. No processo de integração, a colocação é feita no nó funcional, distante  $\frac{1}{6} L$  da ponta da trinca, sendo  $L$  o comprimento do elemento. Para a integração semi-analítica necessita-se do valor das tensões em cada um dos seis nós das células. O valor das tensões nos nós das células, que coincidem com a ponta da trinca, não pode ser obtido através das equações integrais, devido à singularidade no campo de tensões. Para evitar esta dificuldade foi feita uma extrapolação, na função de

interpolação, a partir dos valores dos nós funcionais. Os dois valores obtidos, um para cada face da trinca, correspondem aos valores assumidos para as células extremas. Para as demais células internas optou-se por uma interpolação trigonométrica destes dois valores.

Foi incorporada ao programa uma subrotina que permite a consideração de um campo de tensões iniciais no domínio, evitando-se a inclusão de contornos remotos para domínios infinitos.

A modificação mais significativa foi a inclusão das rotinas que permitem a análise elastoplástica do problema, seguindo os programas de OWEN e HINTON (1980). O programa permite a consideração de vários critérios de escoamento, de forma unificada, como foi sugerido por NAYAK e ZIENKIEWICZ (1972). Esta modificação alterou bastante a estrutura do programa original, porque a solução iterativa exige armazenagem diferente das matrizes, seguindo as expressões mostradas no item 4.4.

#### **4.8 Resumo**

Neste capítulo é apresentada a formulação do Método dos Elementos de Contorno Dual para análise elastoplástica de corpos com trincas. A formulação é geral e pode ser aplicada a problemas elastoplásticos no modo misto com uma única região. A existência das integrais de parte finita na equação integral de contorno para forças de superfície, exige a utilização de uma estratégia de modelamento das trincas com elementos descontínuos. O efeito do comportamento elastoplástico é representado pelo campo de tensões iniciais na região discretizada, com células triangulares quadráticas de lados retos. As integrais nas células são calculadas de forma semi-analítica, como mostradas na seção 4.3, onde todas as expressões são desenvolvidas detalhadamente, removendo-se a singularidade que aparece quando o ponto fonte está localizado em um de seus lados. O procedimento semi-analítico, devido à sua simplicidade, é utilizado mesmo quando o ponto fonte está localizado fora da célula. O algoritmo para solução do problema elastoplástico e o estudo da velocidade de propagação da trinca por fadiga são

brevemente descritos, devendo ser consultada a bibliografia indicada para estudos mais detalhados. Finalmente o programa de computador utilizado na solução dos exemplos mostrados no capítulo V é descrito.

# 5

## EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Os exemplos apresentados a seguir comprovam a eficiência do método e a consistência dos resultados. São mostrados quatro exemplos de propagação de trinca onde os Fatores de Intensidade de Tensão são calculados considerando-se o comportamento do material elástico e plástico. Depois são apresentados três exemplos da evolução da plastificação na ponta da trinca em função do aumento do carregamento. Todos os exemplos correspondem à análise de chapa retangular com uma ou duas trincas e levando-se em consideração as condições de simetria, de modo que nenhum dos problemas estudados tenha mais de uma ponta de trinca.

O primeiro exemplo é de uma chapa retangular com duas trincas horizontais na metade da altura das arestas. Na chapa atuam tensões verticais de tração auto-equilibradas. As condições de simetria são impostas no eixo vertical que passa no centro da chapa. A chapa é feita de aço e o critério de escoamento é o de Von Mises. O material foi considerado elástico-perfeitamente plástico. Compara-se a influência do aumento do comprimento da trinca nos resultados elásticos e plásticos.

O segundo exemplo estuda o comportamento de uma chapa retangular submetida a uma tensão uniforme de tração vertical. A chapa tem uma trinca horizontal na metade da altura de uma das arestas. A chapa tem as mesmas dimensões e características do exemplo anterior.

A mesma chapa dos dois exemplos anteriores é estudada no terceiro exemplo, mas agora com uma trinca central. Devido à simetria do problema, apenas a metade da chapa é considerada, com o eixo de simetria passando no centro da trinca.

O quarto exemplo estuda uma chapa retangular com tensões de tração vertical auto-equilibradas, aplicadas nos lados horizontais da chapa. A chapa contém uma trinca inclinada de  $45^\circ$ , que começa a 40% da altura, em uma das arestas. As características do material são as mesmas dos exemplos anteriores.

Os três exemplos finais correspondem à análise da plastificação na ponta da trinca de chapas estudadas em trabalhos encontrados na literatura. Os resultados são comparados com os resultados obtidos nesta Tese e, também, com outros modelos que levam em consideração a plastificação na ponta da trinca.

### 5.1 Exemplo I – Chapa retangular com duas trincas horizontais

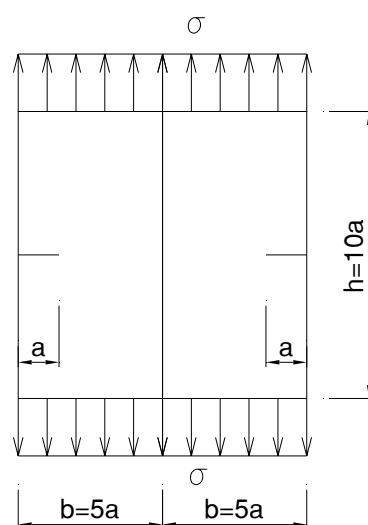


FIGURA 5.1 - Chapa retangular com trincas nas laterais

TABELA 5.1 – Fatores de Intensidade de Tensão – Plástico

KI-0 =	93,946	$\sigma^0 = 100$	$\sigma_Y = 550$
KII-0=	-1,045E-05	E = 210000	$\nu = 0,3$
KI-EQ-0	93,946	h=2,0    b = 1,0	a = 0,2
Increment	KI	KII	KI-Eq
0	1,000	-1,325E-07	1,000
1	1,229	-1,997E-05	1,229
2	1,454	1,312E-04	1,454
3	1,671	-2,362E-04	1,671
4	1,879	5,979E-04	1,879

TABELA 5.2 – Fatores de Intensidade de Tensão – Elástico

KI-0 =	93,946	$\sigma^0 = 100$	
KII-0	-1,045E-05	E = 210000	$\nu = 0,3$
KI-EQ-0	93,946		
Increment	KI	KII	KI-Eq
0	1,000	-1,325E-07	1,000
1	1,222	-5,038E-07	1,222
2	1,433	-1,025E-06	1,433
3	1,634	-1,391E-06	1,634
4	1,829	-1,653E-06	1,829

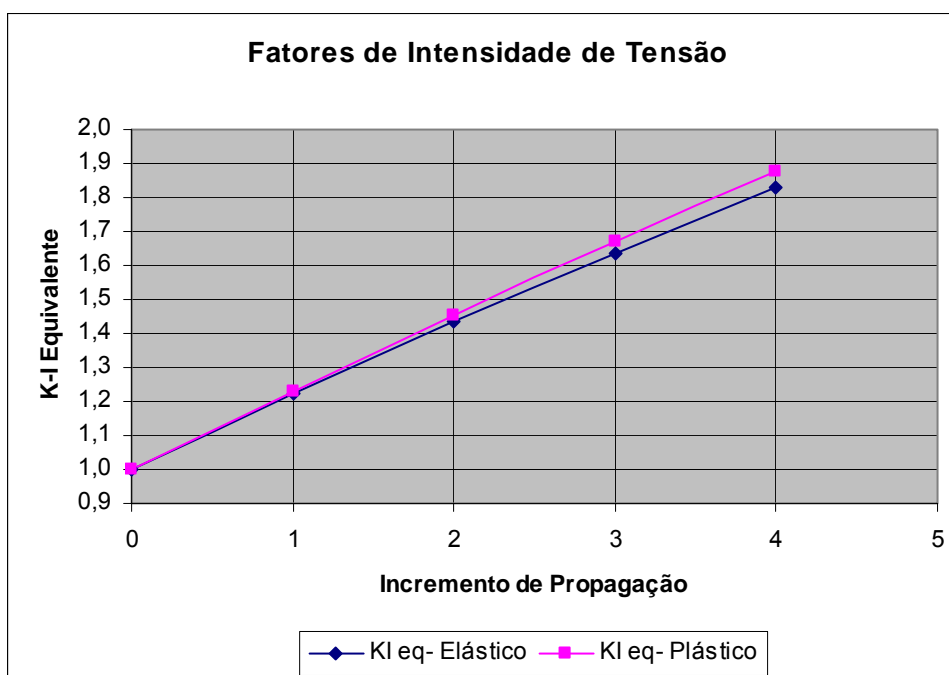


FIGURA 5.2 - Gráfico dos Fatores de Intensidade de Tensão



TABELA 5.3 – Resistência Residual e Número de Ciclos de Carga – Plástico

$\sigma_{\min}/\sigma_{\max} = 0,666$		$\sigma^o = 100$	Avanço: 0,08
Increment	RES-R	N-C-C	
0	1.0	0.0	
1	0.814	151033	
2	0.688	230982	
3	0.599	278561	
4	0,532	309499	

TABELA 5.4 – Resistência Residual e Número de Ciclos de Carga – Elástico

$\sigma_{\min}/\sigma_{\max} = 0,666$		$\sigma^o = 100$	Avanço: 0,08
Increment	RES-R	N-C-C	
0	1,0	0.0	
1	0,819	152005	
2	0,698	234376	
3	0,612	284796	
4	0,547	318292	

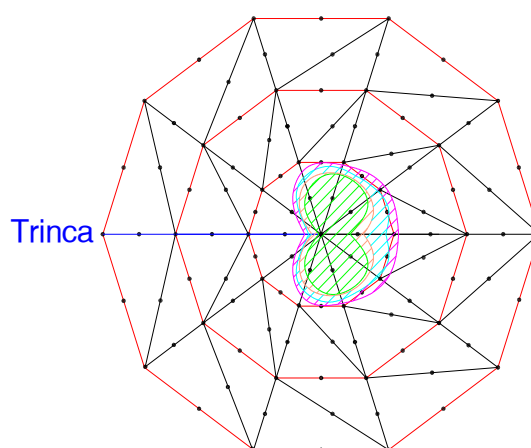


FIGURA 5.3 - Detalhe da Plastificação

No exemplo apresentado, para Estado Plano de Tensão, a tensão de escoamento monitora a região plastificada (destacada pelas hachuras), de tal maneira que esta região não tenha nenhum ponto na fronteira da malha de células. As curvas delimitam as regiões plastificadas nos diversos incrementos de propagação (total de 4). Devido à simetria do problema, a direção da propagação é horizontal. Mostram-se nas Tabelas 5.3 e 5.4 a perda de resistência da peça em função da propagação da trinca, considerando-se os comportamentos plástico e elástico, respectivamente. Observa-se que, a perda de

resistência da peça com comportamento plástico é maior que a perda com comportamento elástico.

## 5.2 Exemplo II – Chapa retangular com uma trinca horizontal

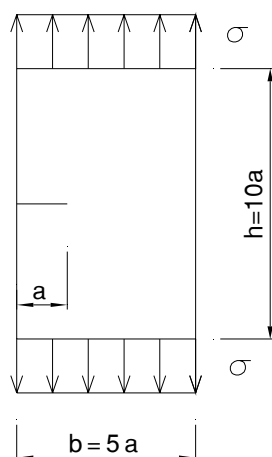


FIGURA 5.4 - Chapa retangular com uma trinca na lateral

TABELA 5.5 – Fatores de Intensidade de Tensão – Plástico

KI-0 =	109,3568	$\sigma^0 = 100$	$\sigma_Y = 650$
KII-0	-9,943E-05	E = 210000	$\nu = 0,3$
KI-EQ-0	109,3568	h=2,0    b = 1,0	a = 0,2
Increment	KI	KII	KI-EQ
0	1,000	-9,092E-07	1,000
1	1,386	-6,288E-05	1,386
2	1,909	3,797E-04	1,909
3	2,600	-5,225E-04	1,600

TABELA 5.6 – Fatores de Intensidade de Tensão – Elástico

KI-0 =	109,3568	$\sigma^0 = 100$	
KII-0	-9,943E-05	E = 210000	$\nu = 0,3$
KI-EQ-0	109,3568		
Increment	KI	KII	KI-EQ
0	1,000	-9,092E-07	1,000
1	1,373	-2,370E-06	1,373
2	1,863	-5,671E-06	1,863
3	2,544	-1,056E-05	2,544

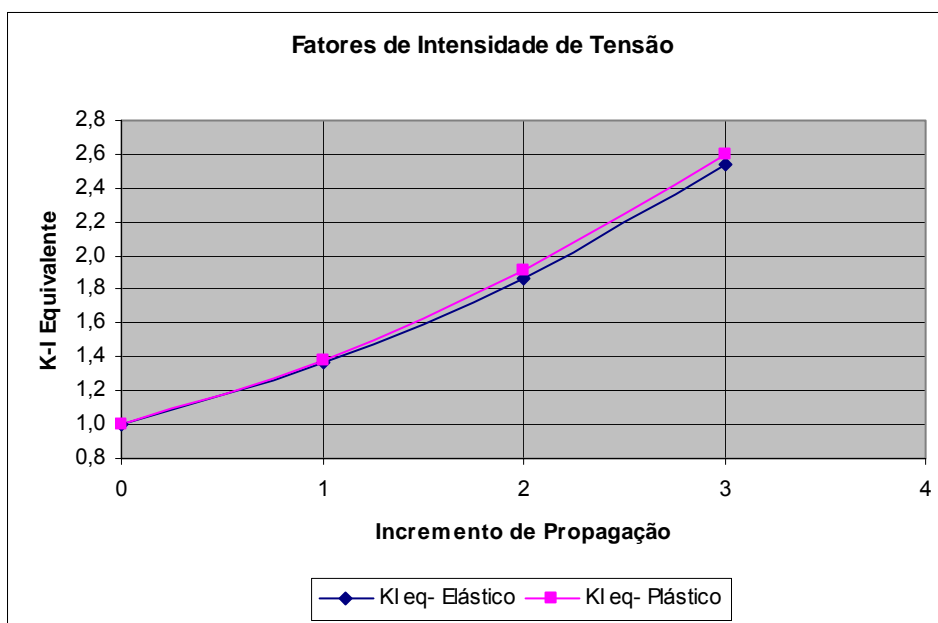


FIGURA 5.5 - Gráfico dos Fatores de Intensidade de Tensão

TABELA 5.7 – Resistência Residual e Número de Ciclos de Carga – Plástico

$\sigma_{\min}/\sigma_{\max} = 0,666$	$\sigma^0 = 100$	Avanço: 0,08
Increm	RES-R	N-C-C
0	1,000	0,000
1	0,722	48623
2	0,524	77565
3	0,385	95103

TABELA 5.8 – Resistência Residual e Número de Ciclos de Carga – Elástico

$\sigma_{\min}/\sigma_{\max} = 0,666$	$\sigma^0 = 100$	Avanço: 0,08
Increm	RES-R	N-C-C
0	1,000	0,000000
1	0,729	48522
2	0,537	77214
3	0,393	94436

No segundo exemplo, para Estado Plano de Tensão, o FIT é maior do que no exemplo anterior. Foi considerada uma tensão de escoamento  $\sigma_Y$  também maior do que no exemplo anterior, que impede a plastificação de pontos na fronteira da malha. O FIT com comportamento plástico é ligeiramente maior que o FIT com comportamento

elástico, como no exemplo anterior. Observar que os dois exemplos têm os mesmos dados, com condições de contorno diferentes. Devido à simetria, a direção da propagação é horizontal.

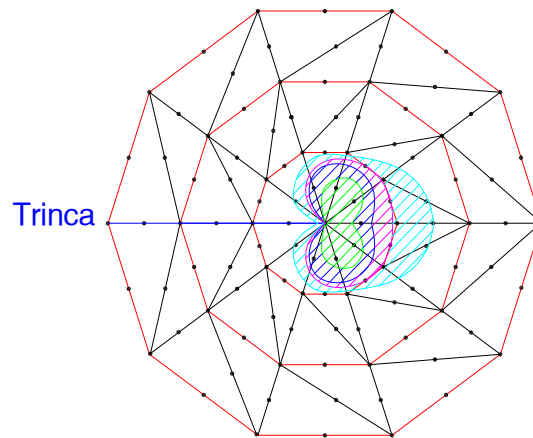


FIGURA 5.6 - Detalhe da Plastificação

### 5.3 Exemplo III – Chapa retangular com trinca horizontal no centro

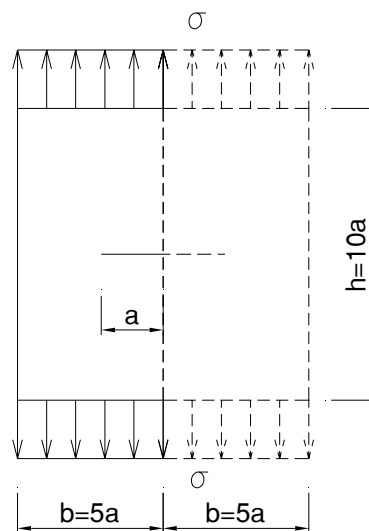


FIGURA 5.7 - Chapa retangular com trinca no centro

TABELA 5.9 – Fatores de Intensidade de Tensão – Plástico

KI-0 =	84,103	$\sigma^0 = 100$	$\sigma_Y = 500$
KII-0	2,147E-05	E = 210000	$\nu = 0,3$
KI-EQ-0	84,103	h=2,0	b = 1,0    a = 0.2
Increment	KI	KII	KI-Eq
0	1,000	8,369E-07	1,000
1	1,250	1,501E-05	1,250
2	1,529	-4,474E-05	1,529
3	1,824	2,123E-04	1,824

TABELA 5.10 – Fatores de Intensidade de Tensão – Elástico

KI-0 =	84,103	$\sigma^0 = 100$	
KII-0	2,147E-05	E = 210000	$\nu = 0,3$
KI-EQ-0	84,103		
Increment	KI	KII	KI-Eq
0	1,000	2,553E-07	1,000
1	1,240	5,208E-07	1,240
2	1,491	8,287E-07	1,491
3	1,766	1,023E-06	1,766

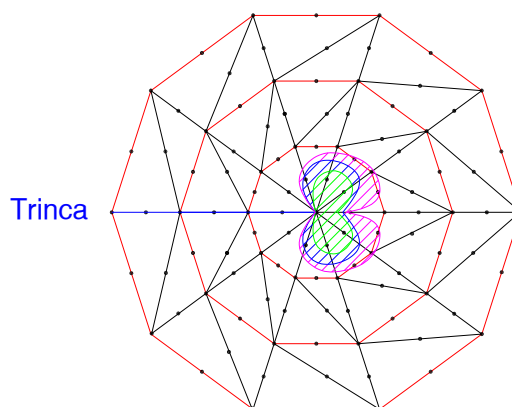


FIGURA 5.8 - Detalhe da Plastificação

O terceiro exemplo tem os mesmos dados dos dois exemplos anteriores, modificando-se apenas as condições de contorno e a tensão de escoamento  $\sigma_Y$ . A região plastificada é mostrada pela parte hachurada da FIG. 5.6 O FIT com comportamento plástico é, também, ligeiramente maior que o FIT com comportamento elástico. À medida que a trinca propaga a região plastificada aumenta, causando uma pequena influência sobre os resultados do FIT. A direção da propagação é horizontal devido à simetria do problema.

Mostram-se nas Tabelas 5.11 e 5.12 a perda de resistência da peça em função da propagação da trinca, considerando-se os comportamentos plástico e elástico, respectivamente. Observa-se que a perda de resistência da peça com comportamento plástico é maior que a perda com comportamento elástico.

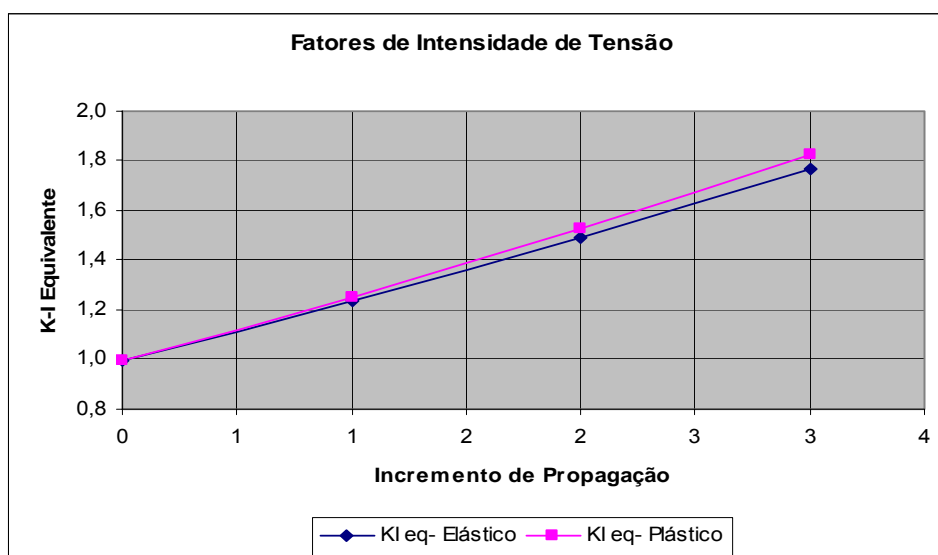


FIGURA 5.9 - Gráfico dos Fatores de Intensidade de Tensão

TABELA 5.11 – Resistência residual e número de ciclos de carga – Plástico

$\sigma_{\min}/\sigma_{\max}$	0,666	$\sigma^0 = 100$
Avanço	0,080	
Increm	RES-R	N-C-C
0	1,000	0,0000
1	0,800	213638
2	0,654	318461
3	0,548	373940

TABELA 5.12 – Resistência residual e número de ciclos de carga – Elástico

$\sigma_{\min}/\sigma_{\max}$	0,666	$\sigma^0 = 100$
Avanço	0,080	
Increm	RES-R	N-C-C
0	1,000	0,00
1	0,807	215529
2	0,670	325278
3	0,566	386043

#### 5.4 Exemplo IV – Chapa Retangular com Trinca Inclinada

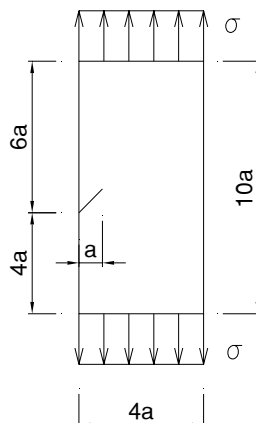


FIGURA 5.10 - Chapa retangular com trinca inclinada a 45° na lateral

TABELA 5.13 – Fatores de Intensidade de Tensão – Plástico

KI-0 =	151,625	$\sigma^0 = 100$	$\sigma_Y = 950$
KII-0	73,174	$E = 210000$	$\nu = 0,3$
KI-EQ-0	192,120	$h=2,5$	$b = 1,0$ $a = 0,25$
Increment	KI	KII	KI-Eq
0	0,789	0,381	1,000
1	1,550	1,207E-02	1,551
2	2,398	-8,964E-03	2,398
3	3,965	1,528E-02	3,966

TABELA 5.14 – Fatores de Intensidade de Tensão – Elástico

KI-0 =	151,625	$\sigma^0 = 100$	
KII-0	73,174	$E = 210000$	$\nu = 0,3$
KI-EQ-0	192,120		
Increment	KI	KII	KI-Eq
0	0,789	0,381	1,000
1	1,530	8,090E-03	1,530
2	2,332	-8,272E-03	2,332
3	3,788	1,119E-02	3,788

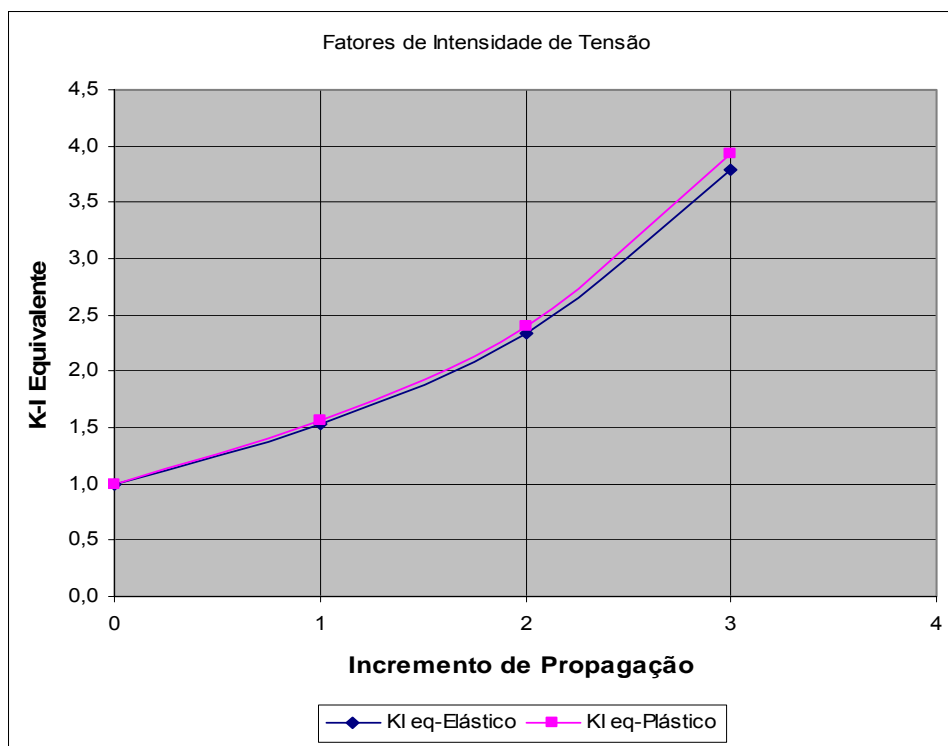


FIGURA 5.11 - Gráfico dos Fatores de Intensidade de Tensão

O quarto exemplo tem uma geometria diferente dos demais, que apresentaram aplicação do Modo de Fratura I puro. Este exemplo é uma aplicação no Modo de Fratura misto, para Estado Plano de Deformação, observando-se que a direção da propagação define-se logo no primeiro incremento, com o modo de fratura tendendo para o Modo I puro. A plastificação acontece após o primeiro incremento, e a direção da propagação não recebe influência significativa da plastificação. O FIT, ao contrário, sofre um maior acréscimo em relação ao FIT com comportamento elástico à medida que aumenta a região plastificada.

TABELA 5.15 – Resistência residual e número de ciclos de carga – Plástico

$\sigma_{\min}/\sigma_{\max}$	0,666	$\sigma^0 = 100$
Avanço	0,100	
Increment	RES-R	N-C-C
0	1,000	0,000
1	0,645	16516
2	0,417	19955
3	0,252	20740



TABELA 5.16 – Resistência residual e número de ciclos de carga – Elástico

$\sigma_{\min}/\sigma_{\max}$	0,666	$\sigma^0 = 100$
Avanço	0,100	
Increment	RES-R	N-C-C
0	1,000	0,00
1	0,654	16642
2	0,429	20271
3	0,264	21140

Mostram-se nas Tabelas 5.15 e 5.16 resistências residuais da peça, em função da propagação da trinca, considerando-se os comportamentos plástico e elástico, respectivamente. Indica-se também o número de ciclos de carga necessários para que haja cada uma das propagações da trinca.

TABELA 5.17 – Direção e comprimento da propagação – Elástico e Plástico

Avanço	0,100	
Increment	Direção	Comprim. Propag
0	0,000	0,0
1	-44,380	0,1
2	-0,892	0,2
3	0,428	0,3

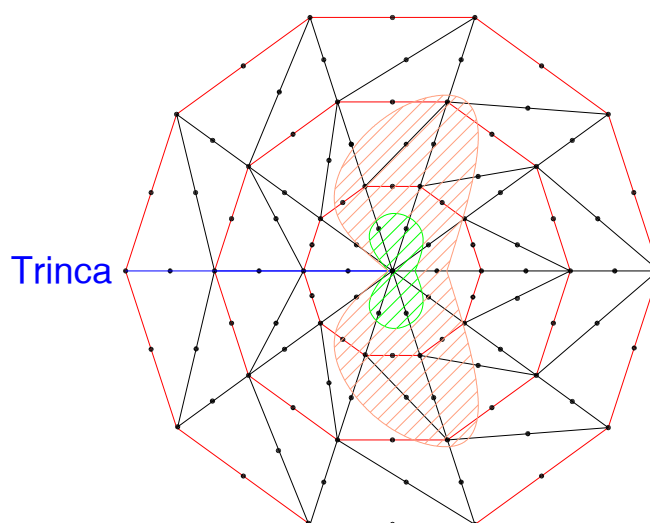


FIGURA 5.12 - Detalhe da Plastificação

### 5.5 Exemplo V – Chapa retangular com trinca no centro

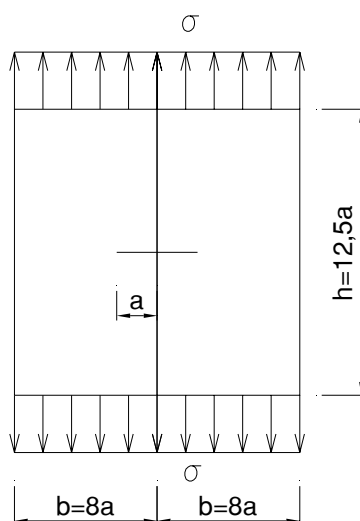


FIGURA 5.13 - Chapa retangular com trinca no centro

O quinto exemplo consiste na análise de uma chapa estudada por CISILINO (1997). Os resultados da Tabela 5.18 estão normalizados pelo valor  $\sigma_y \sqrt{\pi a}$  e mostram boa concordância com os valores encontrados na literatura. Os modelos analíticos baseados na plastificação da região da ponta de uma trinca em placa infinita, como Irwin, Dugdale e Burdekin e Stone podem ser vistos em ANDERSON (2000). Nesta mesma referência é observado que o modelo de Burdekin e Stone é o mais realista. O estudo é somente da plastificação, não havendo nenhuma propagação da trinca. A região plastificada é semelhante à região mostrada em CISILINO (1997) onde os valores do FIT não foram relacionados.

TABELA 5.18 – Fatores de Intensidade de Tensão–Elástico e Plástico

$\sigma/\sigma_Y$	$K_I$ normaliz (elástico)	$K_I$ normaliz (plástico) Klein	Irwin	Dugdale	Burdekin e Stone
0,168	0,175	0,175	0,178	0,178	0,176
0,300	0,313	0,313	0,328	0,332	0,319
0,364	0,380	0,386	0,407	0,414	0,391
0,432	0,451	0,463	0,495	0,511	0,470
0,500	0,522	0,546	0,589	0,621	0,553
0,540	0,564	0,588	0,647	0,693	0,604
0,568	0,593	0,623	0,689	0,749	0,641
Dados:	$h = 125$	$b = 80$	$a = 10$	$\sigma_y = 1000$	$E = 100.000$

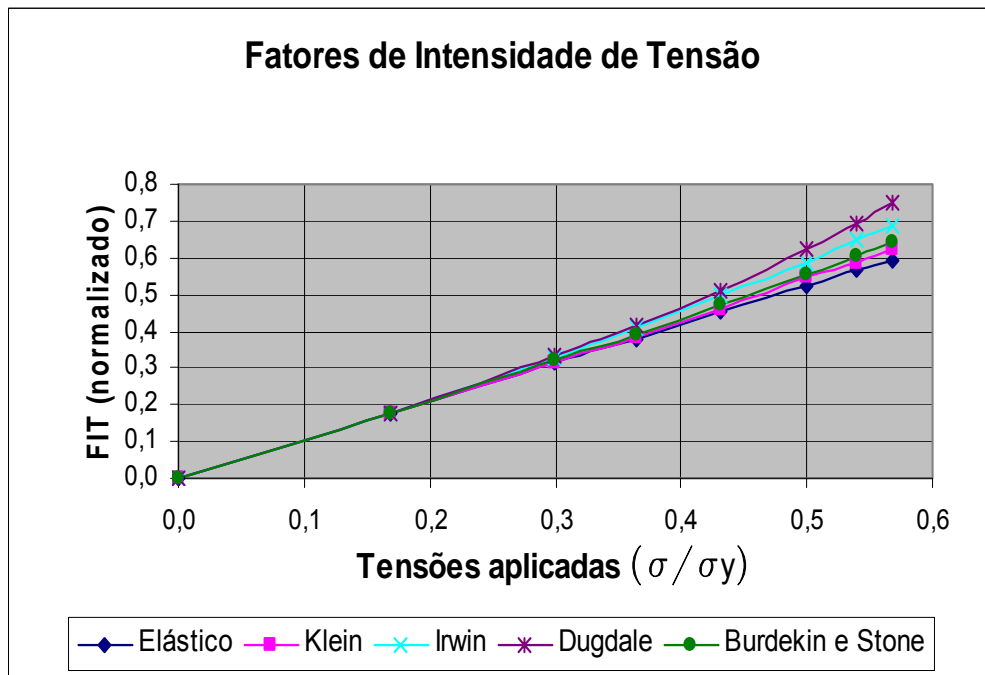


FIGURA 5.14 - Gráfico dos Fatores de Intensidade de Tensão

### 5.6 Exemplo VI – Chapa retangular com trinca no centro

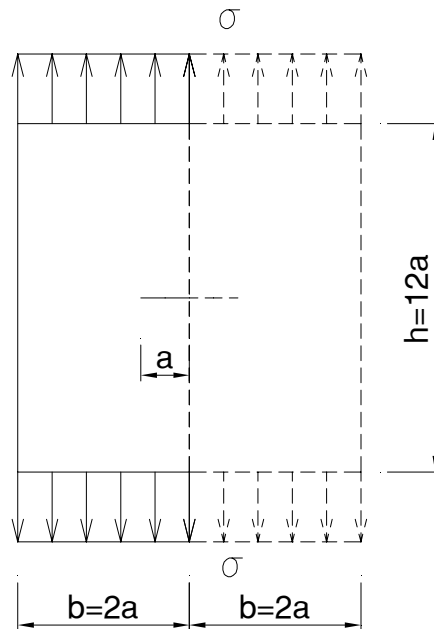


FIGURA 5.15 - Chapa Retangular com trinca no centro

TABELA 5.19 – Fatores de Intensidade de Tensão–Elástico e Plástico

$\sigma/\sigma_Y$	$K_I$ normaliz (elástico)	$K_I$ normaliz (plástico) Klein	$K_I$ normaliz (plástico) Cisilino 1999	Irwin	Dugdale	Burdekin e Stone
0,168	0,201	0,201	0,196	0,204	0,204	0,201
0,300*	0,360	0,360	0,351	0,379	0,379	0,364
0,364	0,436	0,447	0,430	0,473	0,473	0,446
0,432	0,518	0,539	0,509	0,579	0,583	0,537
0,500	0,599	0,626	0,595	0,693	0,708	0,631
0,540	0,647	0,674	0,644	0,765	0,791	0,690
0,568	0,681	0,708	0,684	0,817	0,854	0,732
Dados: h = 120      b = 20;      a = 10; $\sigma_Y = 1000$ ;      E = 100.000						
* valor referente a Cisilino (1999) foi trocado de $\sigma/\sigma_Y=0,364$ para $\sigma/\sigma_Y=0,300$						

O sexto exemplo consiste na análise de uma chapa estudada por CISILINO (1999), onde os valores elásticos apresentados são inferiores aos resultados mostrados nesta tese, em razão das diferentes malhas utilizadas em ambos os trabalhos (observar os valores para  $\sigma/\sigma_Y = 0,168$  na tabela acima). Entretanto, a relação entre os resultados elástico e plástico permanece a mesma. Os valores obtidos na Tese (*Klein*) concordam com os resultados do mencionado trabalho, mantendo-se a relação entre os valores com comportamento plástico e elástico. Os resultados da Tabela 5.19 estão normalizados pelo valor  $\sigma_Y \sqrt{\pi a}$ .

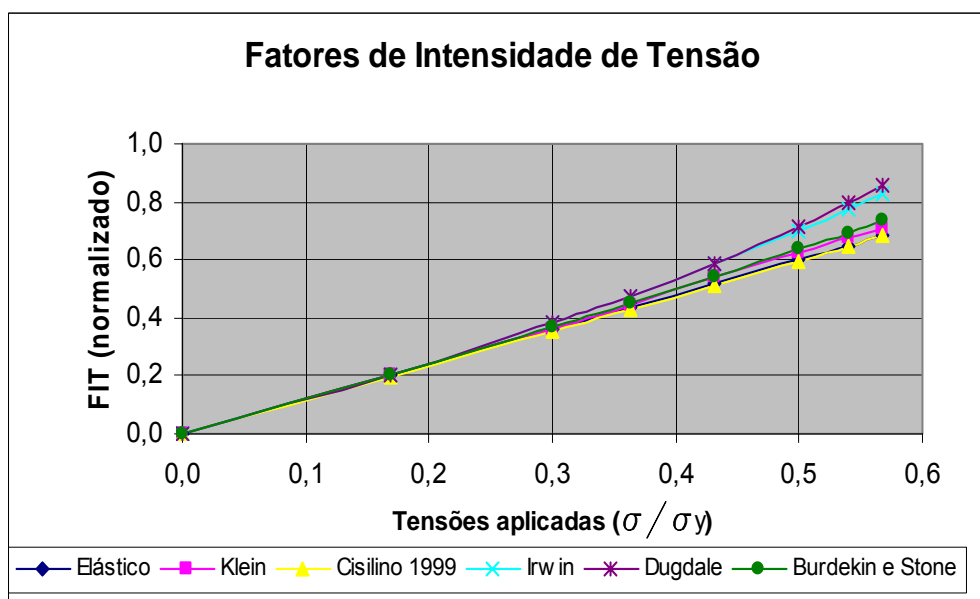


FIGURA 5.16 - Gráfico dos Fatores de Intensidade de Tensão

### 5.7 Exemplo VII – Chapa retangular com trinca no centro

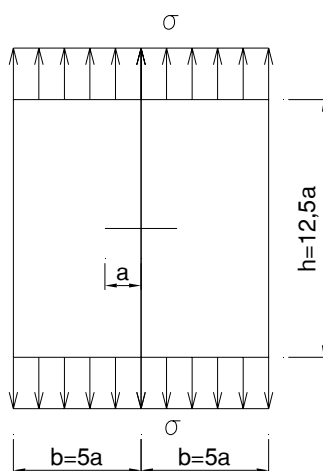


FIGURA 5.17 - Chapa Retangular com trinca no centro

O sétimo exemplo consiste na análise de uma chapa estudada por LEITÃO (1993). Os dados são mostrados na Tabela 5.20. Neste exemplo, a relação  $b/a$  é menor que a do exemplo V e maior que a do exemplo VI. Os valores têm boa concordância com o trabalho mencionado. Os valores foram normalizados por  $\sigma_y \sqrt{a}$ .

TABELA 5.20 – Fatores de Intensidade de Tensão–Elástico e Plástico

$\sigma/\sigma_Y$	$K_I$ normaliz (elástico)	$K_I$ normaliz (plástico) Klein	$K_I$ normaliz (plástico) Leitão 1993	Irwin	Dugdale	Burdekin e Stone
0,200	0,371	0,371	0,371	0,379	0,381	0,374
0,300	0,557	0,557	0,557	0,584	0,590	0,568
0,400	0,742	0,762	0,760	0,805	0,825	0,769
0,500	0,928	0,970	0,966	1,047	1,103	0,984
0,550	1,015	1,063	1,058	1,170	1,259	1,092
0,600	1,113	1,174	1,167	1,315	1,452	1,218
0,640	1,187	1,248	1,240	1,429	1,622	1,319
0,680	1,262	1,317	1,357	1,549	1,818	1,428
Dados: a = 40; b=200; $\sigma_Y = 1000$ ; E = 100.000						

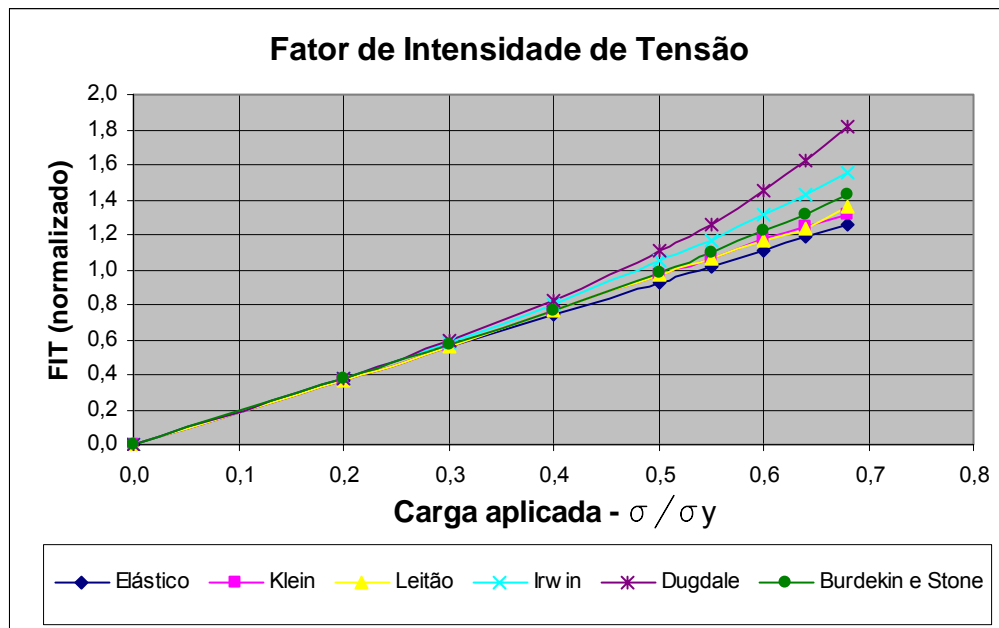


FIGURA 5.18 - Gráfico do Fator de Intensidade de Tensão

# 6

## CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O objetivo desta Tese foi formular e implementar o Método dos Elementos de Contorno Dual para a análise elasto-plástica bidimensional de propagação de trincas. O MECD foi escolhido por ser um método numérico adequado para estudo de problemas onde há altas concentrações de tensão. Além disso, o MECD trata de problemas de mecânica da fratura com ótima precisão utilizando apenas uma região. O emprego de elementos descontínuos na ponta da trinca permite que a sua propagação seja feita, atualizando as matrizes do sistema, apenas com a adição de linhas e colunas referentes aos novos elementos.

O cálculo dos Fatores de Intensidade de Tensão, através da Integral J, mostrou-se adequado por levar em conta a região plastificada, apesar de serem calculados em um caminho onde os pontos ainda não plastificaram. Nos exemplos apresentados a precisão e a consistência dos resultados foram confirmadas.

A integração semi-analítica para a célula triangular quadrática mostrou ser bastante precisa, evitando o emprego de células descontínuas que aumentam bastante o tamanho das matrizes envolvidas. Foram desenvolvidas as equações para a correta avaliação das

integrais de domínio que aparecem na formulação do MECD. Para o cálculo da integral  $J$ , foi levada em consideração a parcela referente à integral de domínio, da derivada da equação integral dos deslocamentos. Esta técnica semi-analítica evita as singularidades nas integrais de domínio e utiliza somente a integração numérica padrão.

Nos três últimos exemplos mostrou-se a influência da plastificação no cálculo do FIT. Observou-se que as curvas que consideram o comportamento plástico se afastam pouco, em relação àquelas que consideram apenas o comportamento elástico, nos níveis de tensão considerados neste trabalho, como também são os resultados encontrados na literatura. Comparou-se, também, com os resultados obtidos a partir de modelos analíticos baseados na plastificação da região da ponta de uma trinca em placa infinita. Os valores encontrados nesta Tese tendem para os valores obtidos pelo modelo de Burdekin e Stone, como está observado em CISILINO (1999) e ANDERSON (2000).

A simulação da propagação da trinca mostrou-se consistente com os resultados encontrados na literatura e, também, na comparação com os resultados para o comportamento elástico. Não houve desvio significativo das direções de propagação em relação ao problema elástico. A simetria dos três primeiros exemplos obriga que as direções entre as análises elástica e elastoplástica sejam as mesmas. No quarto exemplo, a influência da plastificação não foi significativa.

Em procedimentos anteriores encontrados na literatura, a direção da propagação da trinca é conhecida a priori, e é efetivada pela liberação de forças de contato entre faces de células. Nesta Tese a direção da propagação é obtida a partir dos FIT's específicos de cada situação estudada. A geometria da malha na frente da ponta da trinca e o seu automático deslocamento para a nova ponta após a propagação, também se mostraram efetivos. O critério de propagação utilizado, nos exemplos apresentados, foi o critério da tensão principal máxima. Outros critérios de propagação podem ser facilmente incluídos no programa de computador, como aqueles citados no item 2.2.



Como sugestão para futuras pesquisas indica-se a análise viscoplástica para propagação de trincas com o acompanhamento das deformações em função do tempo. Os modelos de plastificação não-associativos podem também ser incorporados ao estudo.

A continuação natural deste trabalho é a consideração da história do carregamento durante a propagação, o que permitirá a retirada das restrições aqui impostas. Processos de remanejamento de malha podem ser incluídos no programa além da extensão das malhas para regiões maiores. Na generalização do estudo podem-se incluir as forças de contato no início da trinca com o respectivo alívio das tensões na ponta, pelo efeito do *fechamento* e o cálculo da Integral J levando-se em conta o trabalho plástico, para trajetórias que coincidem com pontos de regiões plastificadas.

# 7

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aliabadi M.H. e Mi Y. - Application of the three-dimensional boundary element method to quasi-static and fatigue crack propagation - Handbook of fatigue crack propagation in metallic structures, Carpinteri A. (ed), Elsevier Acad Publ, Oxford, 397-432, 1994.

Aliabadi M.H. e Brebbia C.A. (eds) - Advances in Boundary Elements for Fracture Mechanics, Elsevier Applied Science Publications, 1993.

Aliabadi M.H. e Rooke D.P. - Numerical Fracture Mechanics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht and Computational Mechanics Publications, Southampton, 1991.

Aliabadi M.H. - Evaluation of mixed-mode stress intensity factor using a path independent integral - Boundary Elements XII, Tanaka M. et al (eds) Comp Mech Publ, Southampton, 281-291, 1990.

Aliabadi M.H. e Rooke D.P. - New procedure for calculating three-dimensional stress intensity factors using boundary elements -Advances in Boundary Elements, Brebbia C.A. (ed), Comput. Mech. Publ., Southampton, 3, 123-131, 1989.

Aliabadi M.H. - Enhanced boundary element method for determining fracture parameters - Numerical Methods in Fracture Mechanics Luxmoore T. and Owen R. (eds), Pineridge Press 27-39, 1987.

Aliabadi M.H., Rooke D.P. e Cartwright D.J. - Improvement boundary element formulation for calculating stress intensity factors: Application to aerospace structures - Journal of Strain Analysis 22, 285-304, 1987.

Aliabadi M.H. - Evaluation of stress intensity factors using the two-dimensional boundary element method, Report No EMR/10/2, Eng. Mat., University of Southampton, 1985.

Aliabadi M.H., Hall W.S. e Plemister T.G. – Taylor expansions for singular kernels in boundary element method - *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21, 2221-2236, 1985.

Anderson T.L. – *Fracture Mechanics, Fundamentals and Applications*, CRC Press, (2000).

Bainbridge C., Aliabadi M.H. e Rooke D.P. - Path independent integral for the calculation of stress intensity factors in three-dimensional bodies - *Boundary Elements Technologies X*, Aliabadi M.H., Brebbia C.A., Dular P. and Nicolet A. (eds), *Comput Mech Publ*, Southampton, 47-54, 1995.

Banithia V. e Mukerjee S. – Boundary element analysis of stresses in creeping plates with a crack – *Elastic-Plastic Fracture*, STP 803 – Sih CF and Gudas JP (eds), *ASTM – 637-653*, 1983.

Banithia V. e Mukerjee S. – Stresses and line integrals in the presence of cracks – *Res Mech* 15 – 151-158, 1982.

Blandford E. G., Ingraffea A. R. e Liggett J. A. - Two-dimensional stress intensity factor computations using boundary element method - *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol 17, 387-404, 1981.

Boissenot J.M., Lachat J.C. e Watson J.O. - Etude par équations intégrales d'une éprouvette - *CT15, Rev Phys Appl* 9, 611-615, 1974.

Bonnet M. - Computation of energy release rate using material differentiation of elastic BIE for 3D elastic fracture - *Engineering Analysis with Boundary Elements* 15, 137-150, 1995.

Brebbia C. A., Telles J. C. F. e Wrobel L.C., *Boundary Element Techniques – Theory and Applications in Engineering*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokio (1984).

Brebbia C.A. e Walker S., *Boundary Element Techniques in Engineering*, Newnes Butterworths, London (1980).

Broek D., *Elementary Engineering Fracture Mechanics*, Kluwer Academic Publishers (1986).

Cen Z. e Maier G. - Bifurcation and instabilities in fracture of cohesive-softening structures: A boundary element analysis - *Fatigue Fracture Eng. Mat. Structures* 15, 911-928, 1992.

Chambers A.C., Hyde T.H. e Webster J.J. – Mixed mode fatigue crack growth at 550°C under plane stress conditions in jethete M152 - *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 39, 603-619, 1991.

Chen W.R. e Keer L.M. – Fatigue crack growth in mixed mode loading – Journal of Engineering Materials Technologies, ASME Transactions, 113, 222-227, 1991.

Chen X.M., Jiao G.Q. e Cui Z.Y. – Application of combined mode fracture criterion to surface crack problems - Engineering Fracture Mechanics, Vol. 24, 127-144, 1986.

Cisilino A.P. e Aliabadi M. H. - Three-dimensional boundary element analysis of fatigue crack growth in linear and non-linear fracture problems - Engineering Fracture Mechanics, Vol. 63-6, 713-733, 1999.

Cisilino A.P., Aliabadi M. H. e Otegui J.L. – Energy domain integral applied to solve center and double-edge crack problems in three-dimensions – Theoretical and Applied Fracture Mechanics 29, 181-194, 1998.

Cisilino A.P. – Boundary element formulations for 3D analysis of fatigue crack growth in linear and non-linear fracture mechanics – Wessex Institute of Technology , PhD Thesis, University of Wales, 1997.

Corradi S., Aliabadi M.H. e Marchetti M. – A variable stiffness dual boundary element method for mixed-mode elastoplastic crack problems – Theoretical and Applied Fracture Mechanics 25, 43-49, 1996.

Crouch S.L. - Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method - International Journal for Numerical Methods in Engineering 10, 301-343, 1976.

Cruse T.A. e Richardson J.D. - Non-singular Somigliana stress identities in elasticity - International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol 39, 3273-3304, 1996.

Cruse T. A. e Polch E.Z. – Application of an elastoplastic boundary element method to some fracture mechanics problems - Engineering Fracture Mechanics 23, 1085-1096, 1990.

Cruse T. A., Mathematical Foundations of the Boundary-Integral Equation Method in Solid Mechanics, Report N° AFOSR-TR-77-1002, Pratt and Whitney Aircraft Group, 1977.

Cruse T.A. e Meyers G.J. - Three-dimensional fracture mechanics analysis - Journal of Structural Division 103, 309-320, 1977.

Cruse T. A. - Numerical evaluation of elastic stress intensity factors by the boundary-integral equation method - Surface cracks: Physical problems and computational solutions, Swedlow J. L. (ed), ASME, New York, 153-170, 1972.

Cruse T. A. e Van Buren W. – Three dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with a edge crack – International Journal of Fracture Mechanics 7, 1-15, 1971

Desai C.S. e Siriwardane H.J. – Constitutive laws for engineering materials – Prentice-Hall, Inc , Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.

Doblare M., Espiga F., Garcia L. e Alcanud M. - Study of crack propagation in orthotropic materials using the boundary element method - *Engineering Fracture Mechanics* 37, 953-967, 1990.

Dominguez J., Ariza M.P. e Gallego R. - Flux and traction boundary elements without hypersingular or strongly singular integrals - *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48, 111-135, 2000.

Dowling N.E. e Begley J.A. – Fatigue crack growth during gross plasticity and the J-integral – *Mechanics of Crack Growth*, ASTM STP 590, ASTM, Philadelphia-PA, 82-105, 1976.

Erdogan F. e Sih G.C. – On the crack extension in plates under plane loadings and transverse shear - *Journal of Basic Engineering*, ASME Transactions, 85, 519-525, 1963.

Gallego R., e Domínguez J. - Hypersingular BEM for transient elastodynamics - *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(10), 1681-1705, 1996.

Gallego R. e Dominguez J. - Dynamic crack propagation analysis by moving singular boundary elements - *Journal of Applied Mechanics* 59, 158-162, 1992.

Gao H., Alagok N., Brown M.W. e Miller K.J. – Growth of fatigue cracks under combined mode I and mode II loads – *Multiaxial Fatigue*, ASTM STP 853, ed K.J. Miller and M.W. Brown, ASTM, Philadelphia-PA, 184-202, 1985

Georgiadis H.G. e Grentzelou – Energy theorems and the J-integral in dipolar gradient elasticity - *International Journal of Solids and Structures* 43, 5690-5712, 2006

Gray L.J., Martha L.F. e Ingrassia A.R. - Hypersingular integrals in boundary element fracture analysis - *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 29, 1135-1158, 1990.

Gray L.J. e Giles G.E. - Application of thin cavity method to shield calculations in electroplating - *Boundary Element X*, Brebbia C.A.(ed), 2, Computational Mechanics Publications, Southampton, 441-452, 1988.

Grestle W.H. - Finite and boundary element modelling of crack propagation in two and three-dimensions using interactive computer graphics - PhD Thesis, Cornell University, Ithaca NY, 1986.

Guiggiani M., Krishnasamy G., Rudolphi T.J. e Rizzo F.J. - A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations - *ASME*, Vol 59, 604-614, 1992.

Hanstchel T., Brusch M., Kuna M. e Maschke H.G. – Solution of elastic-plastic crack problems by an advanced boundary element method – Numerical Methods in Fracture Mechanics, Luxmoore AR and Owen DRJ (eds), Pineridge Press, Swansea – 29-40, 1990.

Hellen T.K. e Blackburn W.S. – The calculation of stress intensity factors for combined tensile and shear loading – International Journal of Fracture, 11, 605-617, 1975.

Hoshide T. e Socie D.F. – Mechanics of mixed mode small fatigue crack growth - Engineering Fracture Mechanics, Vol. 26, 841-850, 1987.

Huang Q. e Cruse T.A. - On the non-singular traction-BIE in elasticity - International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37, 2041-2072, 1994.

Huber O. e Kuhn G. - Berechnung des J-integrals für 3d-Rissprobleme mittels Randelementmethode - ZAMM 74, T182-T184, 1994.

Iida S. e Kobayashi A.S. – Crack propagation rate in 7075-T6 plates under cyclic tensile and transverse shear loading – Journal of Basic Engineering, ASME Transactions, 91, 764-769, 1969.

Ingraffea A.R., Blandford G. e Liggett J.A. - Automatic modelling of mixed-mode fatigue and quasi-static crack propagation using the boundary element method - 14th Natl Symp on Fracture, ASTM STP 791, 1407-1426, 1987.

Jia Z.H., Shippy D.J. e Rizzo F.J. - Computation of two-dimensional stress intensity factors using the boundary element method - International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol 26, 2739-2753, 1988.

Karami G. e Fenner R.T. - Analysis of mixed mode fracture and crack closure using the boundary integral equation method - International Journal of Fracture 30, 13-29, 1986.

Khan S. M. A. e Khraisheh M. K. - Analysis of mixed mode crack initiation angles under various loading conditions - Engineering Fracture Mechanics, Vol. 67-5, 397-419, 2000.

Kishitani K., Hirai T. e Murakami K. - J-integral calculations with boundary elements - Boundary Elements, Brebbia C.A., Futagami T. and Tanaka M., Springer-Verlag, Berlin, 481-493, 1983.

Krishnasamy G., Schmerr L.W., Rudolphi T.J. e Rizzo F.J. - Hypersingular boundary integral equations: some applications in acoustic and elastic wave scattering - ASME, Vol 57, 404-414, 1990.

Leitão V., Aliabadi M. H., e Rooke D. P. - The Dual Boundary Element Formulation for Elastoplastic Fracture Mechanics - International Journal for Numerical Methods in Engineering, 38(2), 315-333, 1995.

Leitão V.M.A., Aliabadi M.H. e Rooke D.P. - Elastoplastic simulation of fatigue crack growth: dual boundary element formulation - *International Journal of Fatigue* 17, 353-363, 1995.

Leitão V.M.A., Aliabadi M.H. e Rooke D.P. - Elastoplastic Dual Boundary Elements: Application to crack-face contact - *International Journal of Computers and Structures* 54, 443-454, 1995.

Leitão V.M.A., Aliabadi M.H. e Rooke D.P. – Contour integrals for an elastoplastic boundary element method formulation – *International Journal of Fracture* 64, 97-103, 1993.

Leitão V.M.A., Aliabadi M.H. e Cook R. – Residual stress fields effect on fatigue crack growth – *Boundary Elements XIV*, 2, Brebbia C.A. (ed) Southampton and Elsevier Applied Science Publication, London, 331-349, 1992.

Leitão V.M.A., Aliabadi M.H. e Rooke D.P. – Boundary element analysis of fatigue crack growth in presence of residual stresses – *Localized Damage II*, 1, Aliabadi MH, Nisitani H and Cartwright DJ (eds), Southampton and Elsevier Applied Science Publication, Oxford, 489-510, 1992.

Li C. – Vector CTD criterion applied to mixed mode fatigue crack growth – *Fatigue Fracture Engineering Materials of Structures*, 12, 59-65, 1989.

Lucchi M.L. e Rizzuti S. - Boundary elements for three-dimensional elastic crack analysis - *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol 24, 2253-2271, 1987.

Man K., Aliabadi M.H. e Rooke D.P. - Stress intensity factors in the presence of contact stresses - *Engineering Fracture Mechanics* 51, 591-601, 1995.

Mantic V. - On computing boundary limiting values of boundary integrals with strongly singular and hypersingular kernels in 3D BEM for elastostatics - *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 115-134, Vol. 13, 1994.

Martin P. A., Rizzo F. J., e Cruse T. A., Smoothness-relaxation strategies for singular and hypersingular integral equations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42(5), 885-906, 1998.

Martin P. A. e Rizzo F. J., Hypersingular integrals: how smooth must the density be?, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(4), 687-704, 1996.

Mi Y. e Aliabadi M.H. - Automatic procedure for mixed-mode crack growth analysis - *Commun Numer Methods Eng* 11, 167-177, 1995.

Mi Y. e Aliabadi M.H. - Discontinuous crack-tip elements: application to 3D boundary element method - *International Journal of Fracture* 67, R67-R71, 1994.

- Mi Y. e Aliabadi M.H. - Three dimensional crack growth simulation using BEM - International Journal of Computers and Structures 52, 871-878, 1994.
- Mi Y. e Aliabadi M. H. - Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis - Engineering Analysis with Boundary Elements 10, 161-171, 1992.
- Morjaria M. e Mukerjee S. – Numerical analysis of planar time dependent inelastic deformation of plates with cracks by the boundary element method – International Journal of Solids and Structures 17, 127-143, 1981
- Muskhelishvili N.I. – Some basic problems of mathematical theory of elasticity – Noordhoff, Groningen, The Netherlands, 1953
- Nayak G.C. e Zienkiewicz O.C. – Elastoplastic stress analysis: a generalization for various constitutive relations including strain softening - International Journal for Numerical Methods in Engineering 5, 112-135, 1972.
- Nguyen T.D., Govindjee S., Klein P.A. e Gao H. – A material force method for inelastic fracture mechanics – Journal of Mechanics and Physics of Solids 53, 91-121, 2005.
- Owen D.R.J. e Hinton E. – Finite elements in plasticity: theory and practice – Pineridge Press Limited – Swansea – U.K., 1980.
- Papamichel N. e Symm G.T. - Numerical techniques for two-dimensional Laplacian problems - Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 6, 175-194, 1975.
- Partheymüller P., Haas M. e Kuhn G. - Comparison of the basic and the discontinuity formulation of the 3D-dual boundary element method - Engineering Analysis with Boundary Elements, 777-788, Vol. 24-10, 2000.
- Parton V.Z. e Perlin P.I. – Integral equations in elasticity – Mir Publishers, Moscow, 1982.
- Patel A.B. e Pandey P.K. – Fatigue crack growth under mixed mode loading – Fatigue Fracture Engineering Materials of Structures, 4, 65-77, 1981.
- Plank R, Kuhn G, Fatigue crack propagation under non-proportional mixed mode loading, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 62-2;3, 203-229, 1999.
- Portela A., Aliabadi M.H. e Rooke D.P. - Dual boundary element incremental analysis of crack propagation - Computers & Structures 46-2, 237-247, 1993.
- Portela A., Aliabadi M. H. e Rooke D. P. - Dual boundary element method: an efficient implementation for cracked problems - International Journal for Numerical Methods in Engineering 33, 1269-1287, 1992.



- Portela A., Aliabadi M.H. e Rooke D.P. - Efficient boundary element analysis of sharp notched plates - *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol 32, 445-470, 1991.
- Radaj D. e Zhang S. - Process zone fracture criteria for crack tips, *Engineering Fracture Mechanics* Vol. 50-1, 111-120, 1995.
- Richardson J.D. e Cruse T.A. - Weakly singular stress-BEM for 2D elastostatics - *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol 45, 13-35, 1999.
- Richardson J.D., Cruse T.A. e Huang Q. - On the validity of conforming BEM algorithms for hypersingular boundary integral equations - *Computational Mechanics* 20, 213-220, 1997.
- Rigby R.H. e Aliabadi M.H. - Mixed-mode J-integral method for analysis of 3D fracture mechanics - *Engineering Analysis with Boundary Elements* 11, 239-256, 1993.
- Rudolphi T.J., Krishnasamy G., Schmerr L.W. e Rizzo F.J. - Use of strongly singular integral equations for crack problems - *Boundary Element X*, Brebbia C.A.(ed), 2, Computational Mechanics Publications, Southampton, 249-264, 1988.
- Salgado N. e Aliabadi M.H. - Application of dual boundary element method to the analysis of cracked stiffened panels - *Engineering Fracture Mechanics* 54, 91-105, 1996.
- Schue J. – Four Lectures on Fatigue Crack Growth - *Engineering Fracture Mechanics* 11, 167-221, 1979.
- Seweryn A. - A non-local stress and strain energy release rate mixed mode fracture initiation and propagation criteria - *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 59-6, 737-760, 1998.
- Sih G.C. e Barthelemy B.M. – Mixed mode fatigue crack growth predictions - *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 13, 439-451, 1980.
- Sih G.C. – Strain energy density factor applied to mixed mode crack problems – *International Journal of Fracture*, 10, 305-321, 1974.
- Smith R.N.L. e Della-Ventura D. - Superposition method for the solution of crack problems - *Communications of Numerical Methods in Engineering* 32, 243-254, 1995.
- Smith R.N.L. - Solution of mixed-mode fracture problems using the boundary element method, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 5, 75-80, 1988.
- Smith R.N.L. e Mason J.C. - Boundary element method for curved crack problems in two-dimensions - *Boundary Elements IV*, Brebbia C.A. (ed), Springer-Verlag, Berlin, 472-484, 1987.

Socie D.F., Hua C.T. e Worthem D.W. –Mixed mode small crack growth – Fatigue Fracture Engineering Materials of Structures, 10, 1-16, 1987.

Soh A.K. e Bian L.C. - Mixed mode fatigue crack growth criteria - International Journal of Fatigue, Vol 23, 427-439, 2001.

Sollero P. e Aliabadi M.H. - Fracture mechanics analysis of anisotropic composite laminates by the boundary element method - International Journal of Fracture 64, 269-284, 1994.

Soni M.L. e Stern M. - Computation of stress intensity factors in fiber composite media using a contour integral method - International Journal of Fracture 12, 331-344, 1976.

Stern M. - Boundary integral representation for stress intensity factors - Recent Advances in Engineering Science 10th Anniversary Meeting, Boston, 125-132, 1977.

Subramanya H.Y., Viswanath S. e Narasimhan R. – A three-dimensional numerical study of mixed-mode (I and II) crack tip fields in elastic-plastic solids - International Journal of Fracture 136, 167-185, 2005.

Tan C.L. e Lee K.H. – Elastic-plastic stress analysis of a cracked thick-walled cylinder – Journal of Strain Analysis 50-57, 1983

Tan C.L. e Fenner R.T. - Elastic fracture mechanics analysis by the boundary integral equation method - Proceedings of Royal Society of London A369, 243-269, 1979.

Tanaka K. – Fatigue crack propagation from a crack inclined to the cyclic tensile axis - Engineering Fracture Mechanics, Vol. 6, 493-507, 1974.

Teixeira M.C. e De Paula, F.A.– Integração semi-analítica para elemento triangular quadrático – equação de tensões do MEC - VII Simpósio de Mecânica Computacional – SIMMEC, 2006.

Teixeira M.C. e De Paula, F.A.– Integração semi-analítica para elemento triangular quadrático – XXVI Congresso Ibero-Latino Americano de Mecânica Computacional em Engenharia – CILAMCE, 2005

Teixeira M. C. - Análise Elastoplástica de Túneis pelo Método dos Elementos de Contorno - Dissertação de Mestrado, Programa de Pós Graduação em Engenharia de Estruturas da UFMG (1992).

Telles J.C.F. - The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems - Springer-Verlag, Berlim, Heidelberg (1983).

Theocaris P.S. e Andrianopoulos N.P. – The T-criterion applied to ductile fracture – International Journal of Fracture, 20, R125-130, 1982.

Timoshenko, S.P. e Goodier, J.N., Teoria da Elasticidade, Editora Guanabara Dois, (1980).

Venturini W.S. – Boundary element method in geomechanics – Springer Verlag – Berlin, Heidelberg, 1983

Watson J.O. - Singular boundary elements for the analysis of cracks in plane strain - International Journal for Numerical Methods in Engineering 38, 2389-2411, 1995.

Watson J.O. - Hermitian cubic and singular elements for plane strain - Developments in boundary element methods 4, Banerjee P.K. and Watson J.O. (eds), Elsevier Applied Science Publications, Barking, 1-28, 1986.

Weaver J. - Three dimensional crack analysis - International Journal of Solids and Structures 13, 321-330, 1977.

Wen P.H., Aliabadi M.H. e Rooke D.P. - Contour integral for the evaluation of stress intensity factors - Appl Math Model 19, 450-455, 1995.

Wu X. e Li X. – Analysis and modification of fracture criteria for mixed mode crack- Engineering Fracture Mechanics, 34, 55-64, 1989.

Xanthis L.S., Bernal M.J.M. e Atkinson C. - Treatment of singularities in the calculation of stress intensity factors using the integral equation method - Appl. Mech. for Eng. 26, 285-304, 1981.

Yong J. e Guo W.G. – Calculation of  $J_1$  integral of thick walled tubes with one and two symmetric cracks by elastoplastic BEM – International Journal of Pressure Vessels and Piping 51, 143-154, 1992

Young A. - Single-domain boundary element method for 3D elastostatics crack analysis using continuous elements - International Journal for Numerical Methods in Engineering 39, 1265-1293, 1996.

## 9. BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

Alber M. e Hauptfleisch U. – Generation and visualization of microfractures in Carrara marble for estimation fracture toughness, fracture shear and fracture normal stiffness – Rock Mechanics and Mining Sciences, Vol. 36, 1065-1071, 1999

Aliabadi M.H. - Boundary element formulations in fracture mechanics - Appl Mech Review, ASME, Vol 50-2, 83-96, 1997.

Aliabadi M.H. e Cartwright D.J. - Boundary element analysis of strip yield cracks - Engineering Analysis with Boundary Elements, 9-12, Vol. 8-1, 1991.

Ang W.T. e Clements D.L. - Hypersingular integral equations for a thermoelastic problem of multiple planar cracks in an anisotropic medium - Engineering Analysis with Boundary Elements, 713-720, Vol. 23-9, 1999.

Ang W.T., Clements D.L. e Cooke T. - A hypersingular boundary integral equation for antiplane crack problems for a class of inhomogeneous anisotropic elastic materials - Engineering Analysis with Boundary Elements, 567-572, Vol. 23-7, 1999.

Ayari M. L. e Zhiming Y. - Maximum strain theory for mixed mode crack propagation in anisotropic solids - Engineering Fracture Mechanics Vol. 52-3, 389-400, 1995.

Bonnet M. - Boundary element based formulations for crack shape sensitivity analysis - Engineering Analysis with Boundary Elements, 347-362, Vol. 25-4/5, 2001.

Botta A.S., Venturini W.S. e Benallal A. - BEM applied to damage models emphasizing localization and associated regularization techniques - Engineering Analysis with Boundary Elements, 29, 814-827, 2005.

Brebbia C. A., The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, London (1984).

Campbell J. P. e Ritchie R. O. - Mixed-mode, high-cycle fatigue-crack growth thresholds in Ti-6Al-4V; I. A comparison of large- and short-crack behavior - Engineering Fracture Mechanics, Vol. 67-3, 209-227, 2000.

Cerrolaza M. e Garcia R. - Boundary elements and damage mechanics to analyze excavations in rock mass - Engineering Analysis with Boundary Elements, 1-16, Vol. 20-1, 1997.

Chang C. e Mear M.E. - Boundary element method for two-dimensional linear elastic fracture analysis - International Journal of Fracture 74, 219-251, 1995.

Chen J.T., Liang M.T. e Yang S.S. - Dual boundary integral equations for exterior problems, Engineering Analysis with Boundary Elements, 333-340, Vol. 16-4, 1995.

Chen W. H. e Chen T. C. - An Efficient Dual Boundary Element Technique for a Two-dimensional Fracture Problem with Multiple Cracks - International Journal for Numerical Methods in Engineering, 38(10), 1739-1756, 1995.

Chen Y. Z. - A survey of new integral equations in plane elasticity crack problem - Engineering Fracture Mechanics, 97-134, Vol. 51-1, 1995.

Chirino F. e Abascal R. - Dynamic and static analysis of cracks using the hypersingular formulation of the Boundary Element Method - International Journal for Numerical Methods in Engineering, 43(2), 365-388, 1998.

Chirino F., Gallego R., Sáez A. e Dominguez J. - A comparative study of the three boundary element approaches to transient dynamic crack problems - *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 13, 11-19, 1994.

Cisilino A.P. e Ortiz J. – Boundary element analysis of three-dimensional mixed-mode cracks via the interaction integral – *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194, 935-956, 2005.

Crouch S.L. e Starfield A.M. - *Boundary element methods in Solid Mechanics*, George Allen and Unwin Publ, London, 1983.

Cruse T.A. e Aithal R. - Non-singular boundary integral equation implementation - *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol 36, 237-254, 1993.

Cruse T.A. e Suwito W. - On the Somigliana stress identity in elasticity - *Computational Mechanics* Vol 11, 1-10, 1993.

Cruse T.A. e Raveendra S.T. - General procedure for fracture mechanics weight function evaluation based on the boundary element method - *Comput. Mech.* 3,157-166, 1988.

Cruse T.A., Two-dimensional BIE Fracture Mechanics Analysis, *Appl. Math. Modelling*, Vol 22, December (1978).

Cruse T.A. e Wilson T.A. - Boundary-integral equation method for elastic fracture mechanics analysis - AFSOR-TR-780355, Pratt and Whitney Aircraft Group, 1977.

Cruse T.A. - An improved boundary-integral equation method for three dimensional elastic stress analysis - *Computers & Structures*, Vol 4, 741-754, 1974.

Cruse T.A. - Application of the boundary-integral equation solution method in solid mechanics - *International Conference on Variational Methods in Engineering* 9, 1-29, Southampton, 1972.

Das S. - Numerical method for determination of source time functions for general three-dimensional rupture propagation - *Geophys Journal Royal Astronaut Soc* 62, 591-604, 1980.

Das S. e Aki K. - Numerical study of two-dimensional spontaneous rupture propagation - *Geophys Journal Royal Astronaut Soc* 42, 347-373, 1975.

De Paula F.A., Aliabadi M. H., *Boundary Element Analysis of Interface Cracks in Dissimilar Orthotropic Materials Using a Path Independent Contour Integral*, *Boundary Elements Engineering Analysis*, 359-366, 1997

De Rijck J. J. M. e Fawaz S. A. - Stress intensity factors and crack interaction in adjacent holes - *Engineering Fracture Mechanics*, Vol 68, 963-969, 2001.

Denda M. - Mixed Mode I, II and III analysis of multiple cracks in plane anisotropic solids by the BEM: a dislocation and point force approach - *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 267-278, Vol. 25-5/6, 2001.

Denda M. e Dong Y.F. - Analytical formulas for a 2-D crack tip singular boundary element for rectilinear cracks and crack growth analysis - *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35-49, Vol. 23-1, 1999.

Dirgantara T. e Aliabadi M.H. - Dual boundary element formulation for fracture mechanics analysis of shear deformable shells - *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, 7769-7800, 2001.

Dominguez J. e Ariza M.P. - A direct traction BIE approach for three-dimensional crack problems - *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 727-738, Vol. 24-10, 1999.

Dougherty J. D., Padovan J. e Srivatsan T. S. - Fatigue crack propagation and closure behavior of modified 1070 steel: finite element study - *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 56-2, 189-212, 1997.

Dougherty J.D., Srivatsan T.S. e Padovan J. - Fatigue crack propagation and closure behavior of modified 1070 steel: experimental results - *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 56-2, 167-187, 1997.

Dowling N. E., *Mechanical Behavior of Materials*, Prentice Hall (1999).

Fedelinski D.P., Aliabadi M.H. e Rooke D.P. - Time-domain DBEM for rapidly growing cracks - *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1555-1572, Vol. 40-9, 1997.

Fedelinski P., Aliabadi M.H. e Rooke D.P. - Boundary element formulations for the dynamic analysis of cracked structures - *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 45-56, Vol. 17-1, 1996.

Gájov F.D. – *Problemas de contorno* – Editorial Mir, Moscu, 1980.

Gangming L. e Yougyuan Z. - Improvement of singular element for crack problems in three-dimensional boundary element method - *Engineering Fracture Mechanics* 31, 993-999, 1988.

Frangi A., e Guiggiani M., - Boundary element analysis of Kirchhoff plates with direct evaluation of hypersingular integrals - *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(11), 1845-1863, 1999.

Guiggiani M. - Hypersingular formulation for boundary stress evaluation - *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 169-179, Vol. 13, 1994.

Guiggiani M. e Gigante A. - A general algorithm for multidimensional Cauchy principal value integrals in the boundary element method - *ASME*, Vol 57, 906-915, 1990.

- Guimarães S. e Telles J.C.F. - On the hyper-singular boundary-element formulation for fracture-mechanics applications - *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 353-363, Vol. 13, 1994.
- Guinea G. V., Planas J. e Elices M. - KI evaluation by the displacement extrapolation technique - *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 66-3, 243-255, 2000.
- Han C. e Kim K. S. - Time-dependent crack growth in stainless steel 304 in the plasticity-dominant Field - *Engineering Fracture Mechanics*, Vol 68, 39-52, 2001.
- He M. Y. e Hutchinson J. W. - Surface crack subject to mixed mode loading - *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 65-1, 1-14, 2000.
- Hong H. e Chen J. - Derivations of integral equations of elasticity - *Journal of Engineering Mechanics* 114, 1028-1044, 1988.
- Irwin G.R., Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate, *Journal of Applied Mechanics* Vol 24, September (1957).
- Jaswon M.A. - Integral equation methods in potential theory I - *Proceedings of the Royal Society* Vol 275, 23-32, London, 1963.
- Jaswon M.A. e Symm G.T. - Integral equation methods in potential theory and elastostatics - Academic Press, London, 1977.
- Jorge A.B., Ribeiro G.O., Cruse T.A. and Fisher T.S. - Self-regular boundary integral equation formulations for Laplace's equation in 2-D - *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol 51, 1-29, 2001.
- Li H. e Chandra N. - Analysis of crack growth and crack-tip plasticity in ductile materials using cohesive zone models - *International Journal of Plasticity* 19, 849-882, 2003.
- Lutz E.D., Ingraffea A.R. e Gray L.J. - Use of simple solutions for boundary integral methods in elasticity and fracture analysis - *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 35, 1737-1751, 1992.
- Magill M.A. e Zwerneman F.J. - An analysis of sustained mixed mode fatigue crack growth - *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 56-1, 9-24, 1997.
- Mantic V. e Paris F. - Symmetry properties of the kernels of the hypersingular integral and the corresponding regularized integral in the 2D Somigliana stress identity for isotropic materials - *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 163-168, Vol. 20-2, 1997.
- Marci G. - The Keff-concept: a unique and complete description of fatigue crack propagation - *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 55-1, 95-114, 1996.

Martinez J. e Dominguez J. - On the use of quarter-point boundary elements for stress intensity factor computations - *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol 20, 1941-1950, 1984.

Martinez M. e Aliabadi M.H. - Fracture Mechanics of bone using the dual boundary element method - *Simulation and Modeling in Bioengineering*, Cerrolaza M., Gugo D. and Brebbia C.A. (eds), *Comput Mech Publ*, Southampton, 175-188, 1996.

Mews H. - Calculation of stress intensity factors for various crack problems with the boundary element method - *Boundary Elements*, Brebbia C.A., Wendland W.L. and Kuhn G. (eds), *Springer Verlag*, 2, 259-278, 1987.

Mineur H. – *Techniques de Calcul Numérique – Paris et Liège – Librairie Polytechnique Ch. Béranger (1952)*

Mukherjee Yu Xie, Shah Ketan e Mukherjee Subrata - Thermoelastic fracture mechanics with regularized hypersingular boundary integral equations - *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 89-96, Vol. 23-1, 1999.

Narita F. e Shindo Y. - Mode I crack growth rate for yield strip model of a narrow piezoelectric ceramic body, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* - Vol. 36-1, 73-85, 2001.

Newman Jr J.C., Raju I.S., An Empirical Stress-Intensity Factor Equation for the Surface Crack, *Engin. Fracture Mechanics* - Vol 15 (1981).

Oller S. - *Fractura mecánica: un enfoque global - Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, España, 2001.*

Ortiz J., Cisilino A.P e Otegui J.L. - Boundary element analysis of fatigue crack propagation micromechanisms in austempered ductile iron - *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol 25, 467-473, 2001.

Paris P., Erdogan F., A Critical Analysis of Crack Propagation Laws, *Journal of Basic Engineering* - Vol 85 - (1983).

Paris P., Gomez R. E., Anderson W. E., A Rational Analytic Theory of Fatigue, *The Trend in Engineering* -Vol 13-N.1- January (1961).

Polch E.Z., Cruse T.A. e Huang C.J. - Traction BIE solutions for flat cracks - *Computational Mechanics* 2, 253-267, 1987.

Prado A. A., Telles J.C.F., Uma Formulação Hipersingular do Método dos Elementos de Contorno para Problemas Bidimensionais de Potencial, *Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional (1991).*



- Prasad N.N.V., Aliabadi M.H. e Rooke D.P. – Thermomechanical fatigue crack growth - *International Journal of Fatigue* 18, 349-361, 1996.
- Prasad N.N.V., Aliabadi M.H. e Rooke D.P. - Incremental crack growth in thermoelastic problems - *International Journal of Fracture* 66, R45-50, 1994.
- Qian C. F., Charles P. R. e Li J. C. M. - Effect of Mode II fatigue loading on Mode I fatigue growth, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 56-4, 593-602, 1997.
- Qian J. e Fatemi A. - Mixed mode fatigue crack growth: a literature survey - *Engineering Fracture Mechanics*, Vol 55 -6, 969-990, 1996
- Richardson J.D. e Cruse T.A. - Non-singular BEM for fracture modeling - *Computers & Structures* Vol 66-5, 695-703, 1998.
- Sáez A., Gallego R., e Domínguez J., Hypersingular Quarter-point Boundary Elements for Crack Problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(10), 1681-1701, 1995.
- Saleh A.L. e Aliabadi M.H. - Boundary element analysis of the pullout behavior of an anchor bolt embedded in concrete - *Mech Cohesive-Frictional Mat* 1, 235-250, 1996.
- Saleh L. e Aliabadi M. H. - Crack growth analysis in concrete using boundary element method - *Engineering Fracture Mechanics*, 533-545, Vol. 51-4, 1995.
- Salgado N. K. - Boundary Element Methods for Damage Tolerance Design of Aircraft Structures - Wessex Institute of Technology, PhD Thesis, University of Wales, 1996.
- Shao J.F., Hoxha D., Bart M., Homand F., Duveau G., Souley M. e Hoteit N. – Modelling of induced anisotropic damage in granites – *Rock Mechanics and Mining Sciences*, Vol. 36, 1001-1012, 1999
- Sladek V. e Sladek J. - Regularization of hypersingular integrals in BEM formulations using various kinds of continuous elements - *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 5-18, Vol. 17-1, 1996.
- Sollero P. e Aliabadi M.H. - Dual boundary element analysis of anisotropic crack problems - *Boundary Elements XVII*, Brebbia C.A., Kim S., Osswald T.A. and Power H. (eds), *Comput Mech Publ*, Southampton, 267-278, 1995.
- Swedlow J. L., On Griffith's Theory of Fracture, *Intern. Journal of Fracture Mechanics*, Vol 1 (1965).
- Symm G.T. - Integral equation methods in potential theory II - *Proceedings of the Royal Society* Vol 275, 33-46, London, 1963.

Teixeira M. C. e De Paula F. A. - Aplicação da equação hipersingular do MEC à mecânica da fratura bidimensional - XXII CILAMCE, Campinas, Brasil, CIL 448, 2001.

Telles J.C.F., Castor G.S e Guimarães S. - Hypersingular Green's function generation for fracture mechanics problems - Boundary Element Method XVI, Brebbia C.A. (ed), Comput. Mech. Publ., 443-452, 1994.

Tran D. K., Kobayashi A. S. e White K. W. - Crack growth in alumina at high temperature - Engineering Fracture Mechanics, Vol. 68-2, 149-161, 2001.

Vaughan H. - Crack propagation and the principal-tensile-stress criterion for mixed-mode loading - Engineering Fracture Mechanics, Vol. 59-3, 393-397, 1998.

Wang G. S. - An EPFM analysis of crack initiation, stable growth and instability - Engineering Fracture Mechanics, 261-282, Vol. 50-2, 1995

Wang G. S. - Post yield fatigue crack growth analyses - Engineering Fracture Mechanics, Vol. 64-1, 1-21, 1999.

Wang G.S. - Analysing the fatigue crack growth in structural details - Engineering Fracture Mechanics, Vol. 53-3, 345-361, 1996.

Wen P.H., Aliabadi M.H. e Rooke D.P. - Cracks in three dimensions: A dynamic dual boundary element analysis - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol 167, 139-151, 1998.

Wen P.H. e Aliabadi M.H.- Mixed-mode weight functions in three-dimensional fracture mechanics: Static - Engineering Fracture Mechanics, 59(5) 563-575, 1998.

Wen P.H., Aliabadi M.H. e Rooke D.P. - A contour integral for three-dimensional crack elastostatic analysis - Engineering Analysis with Boundary Elements, 101-111, Vol. 20-2, 1997.

Wen P.H., Aliabadi M.H. e Rooke D.P. - Three-dimensional dynamic weight functions for mixed-mode crack problems - Boundary Elements, Brebbia C.A., Martinez J. and Aliabadi M.H., Comput Mech Publ, Southampton, 419-427, 1996.

Wen P.H., Aliabadi M.H. e Rooke D.P. - An indirect boundary element method for three-dimensional dynamic fracture mechanics - Engineering Analysis with Boundary Elements, 351-362, Vol. 16-4, 1995.

Wilde A.J., Aliabadi M.H. e Power H. - Application of  $C^{(0)}$  continuous element to the evaluation of hypersingular integrals - Boundary Elements Communications 7, 109-114, 1996.

Wilde A.J. e Aliabadi M.H. - Dual boundary element method for geomechanics problems using continuous elements - Boundary Elements XVIII, Brebbis C.A.,

Martinez J. and Aliabadi M.H. (eds) Computational Mechanics Publications, Southampton, 449-464, 1996.

Young A. - Improved Numerical Method for the Traction Boundary Integral Equation by Application of Stoke's Theorem - International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40, 3141-3161, 1997.

Young A., Cartwright D.J. e Rooke D.P. - Boundary element method for analysing repair patches of cracked finite sheets - Aeronaut. J. 92, 416-421, 1988.

## ANEXO A

### CRITÉRIOS PARA PROPAGAÇÃO DE TRINCAS

1. Critério da Tensão Principal Máxima modificado pelo Critério de Escoamento de Von Mises

Segundo *Khan e Khraisheh (2000)* o Critério da Tensão Principal Máxima Modificado considera que a propagação da trinca ocorre segundo a perpendicular à direção da tensão principal máxima avaliada no contorno elastoplástico segundo critério de escoamento de Von Mises. Combinando o critério de escoamento de Von Mises com a equação (4) chega-se à expressão da região plastificada em torno da ponta da trinca. O contorno elastoplástico assim obtido pode ser expresso por:

$$r = \frac{(1+\nu)}{24\pi E T_{D,0}} \left[ (f_r + f_\theta)^2 - 3(f_r f_\theta - f_r^2) \right] \quad (\text{A.1})$$

onde  $r$  representa a distância do contorno elastoplástico à ponta da trinca.

$$T_{D,0} = \frac{(1+\nu)}{3E} \left[ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 \right] \quad (\text{A.2})$$

é a energia de deformação distorcional, constante ao longo do contorno elastoplástico de Von Mises e:

$$f_\theta(\theta) = \left[ \left\{ K_I \cos \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta) \right\} - \left\{ 3 K_{II} \sin \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta) \right\} \right]$$

$$f_r(\theta) = \left[ \left\{ K_I \cos \frac{\theta}{2} (3 - \cos \theta) \right\} - \left\{ K_{II} \sin \frac{\theta}{2} (1 - 3 \cos \theta) \right\} \right] \quad (\text{A.3})$$

$$f_{r\theta}(\theta) = \left[ \left\{ K_I \sin \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta) \right\} - \left\{ K_{II} \cos \frac{\theta}{2} (1 - 3 \cos \theta) \right\} \right]$$

Das equações anteriores vem:

$$\sigma_\theta = \sqrt{\frac{3ET_{D,0}}{(1+\nu)}} \frac{f_\theta}{\left[ (f_r + f_\theta)^2 - 3(f_r f_\theta - f_{r\theta}^2) \right]^{1/2}}$$

ou:

$$\sigma_\theta = \sqrt{\frac{3ET_{D,0}}{(1+\nu)}} \frac{f_\theta}{\sqrt{D}}, \quad \text{onde: } D = (f_r + f_\theta)^2 - 3(f_r f_\theta - f_{r\theta}^2)$$

$$(f_r + f_\theta)^2 = 4K_I^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 4K_{II}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 8K_I K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$f_r \cdot f_\theta = \left[ \begin{aligned} & K_I^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta) (3 - \cos \theta) + 3K_{II}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta) (1 - 3 \cos \theta) \\ & - 4K_I K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta) (1 - 3 \cos \theta) \end{aligned} \right]$$

$$(f_{r\theta})^2 = \left[ \begin{aligned} & K_I^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta)^2 + 3K_{II}^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} (1 - 3 \cos \theta)^2 - \\ & - 2K_I K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta) (1 - 3 \cos \theta) \end{aligned} \right]$$

Então:

$$D = \left[ \begin{aligned} & K_I^2 \left( 4 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 3 \cos^4 \frac{\theta}{2} \right) + K_{II}^2 \left( 9 \cos^4 \frac{\theta}{2} - 10 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 4 \right) + \\ & + 4K_I K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left( 3 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 2 \right) \end{aligned} \right]$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial \theta} &= K_I^2 \left( -4 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + 6 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2} \right) + K_{II}^2 \left( 10 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - 18 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2} \right) \\ &\quad - 4 K_I K_{II} \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} \cos^4 \frac{\theta}{2} + \frac{9}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ \frac{\partial D}{\partial \theta} &= 2 K_I^2 \left( 3 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2} - 2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) + 2 K_{II}^2 \left( 5 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - 9 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2} \right) \\ &\quad + 2 K_I K_{II} \left( 12 \cos^4 \frac{\theta}{2} - 13 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2 \right)\end{aligned}$$

O critério é expresso por:  $\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0$ , então:  $\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = \frac{\sqrt{D} \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} - f_\theta \frac{\partial(\sqrt{D})}{\partial \theta}}{D} = 0$

A condição é satisfeita se:  $\sqrt{D} \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} = f_\theta \frac{\partial(\sqrt{D})}{\partial \theta}$

$$\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} = -3 \cos \frac{\theta}{2} \left[ K_I \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + K_{II} - 3 K_{II} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$\frac{\partial(\sqrt{D})}{\partial \theta} = \frac{1}{2} (D)^{-1/2} \frac{\partial D}{\partial \theta} = \frac{1}{2\sqrt{D}} \frac{\partial D}{\partial \theta}$$

$$\sqrt{D} \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} = f_\theta \frac{1}{2\sqrt{D}} \frac{\partial D}{\partial \theta} \quad \therefore 2D \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} = f_\theta \frac{\partial D}{\partial \theta}$$

A condição acima representa o critério da *Tensão Principal Máxima Modificado*.

Então:

$$2. \left[ \begin{aligned} &K_I^2 \left( 4 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 3 \cos^4 \frac{\theta}{2} \right) + K_{II}^2 \left( 9 \cos^4 \frac{\theta}{2} - 10 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 4 \right) + \\ &+ 4 K_I K_{II} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left( 3 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 2 \right) \end{aligned} \right] x$$

$$x \left[ -3 \cos \frac{\theta}{2} \left( K_I \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + K_{II} - 3 K_{II} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] =$$

$$= \left[ 2 \cos \frac{\theta}{2} \left( K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - 3 K_{II} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) \right] x$$

$$2. \left[ \begin{aligned} & K_I^2 \left( 3 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2} - 2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) + \\ & + K_{II}^2 \left( 5 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - 9 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2} \right) + \\ & + K_I K_{II} \left( 12 \cos^4 \frac{\theta}{2} - 13 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2 \right) \end{aligned} \right]$$

Fazendo  $\mu = K_I/K_{II}$ , vem:

$$\left[ \mu^2 \left( 4 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 3 \cos^4 \frac{\theta}{2} \right) + 4 \mu \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left( 3 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 2 \right) + 9 \cos^4 \frac{\theta}{2} - 10 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$x \left[ -3 \mu \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + 9 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} - 3 \right] =$$

$$= \left[ 2 \mu \cos^2 \frac{\theta}{2} - 6 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right] x \left[ \begin{aligned} & \mu^2 \left( 3 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2} - 2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) + \\ & + \mu \left( 12 \cos^4 \frac{\theta}{2} - 13 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2 \right) + \\ & + \left( 5 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - 9 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned} \right]$$

$$\begin{aligned}
& \mu^3 \left( 3 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos^5 \frac{\theta}{2} - 8 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2} \right) + \\
& + \mu^2 \left( 48 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} - 45 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \cos^4 \frac{\theta}{2} - 24 \cos^6 \frac{\theta}{2} + 35 \cos^4 \frac{\theta}{2} - 16 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) + \\
& + \mu \left( \begin{array}{l} 63 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos^5 \frac{\theta}{2} - 94 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2} + 24 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \\ 108 \operatorname{sen}^3 \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2} - 72 \operatorname{sen}^3 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \end{array} \right) + \\
& + \left( 27 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \cos^4 \frac{\theta}{2} - 60 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} - 27 \cos^4 \frac{\theta}{2} - 6 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 24 \right) = 0
\end{aligned}$$

Dividindo por  $\cos^6(\theta/2)$  e sabendo-se que:

$$\sec^2 \frac{\theta}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + 1; \quad \sec^4 \frac{\theta}{2} = \operatorname{tg}^4 \frac{\theta}{2} + 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + 1; \quad \sec^6 \frac{\theta}{2} = \operatorname{tg}^6 \frac{\theta}{2} + 3 \operatorname{tg}^4 \frac{\theta}{2} + 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + 1$$

tem-se finalmente:

$$\begin{aligned}
& 12 \tan^6 \frac{\theta}{2} - 24 \mu \tan^5 \frac{\theta}{2} + [3 + 16 \mu^2] \tan^4 \frac{\theta}{2} - [(5 + 4 \mu^2) \mu] \tan^3 \frac{\theta}{2} + \\
& + 3 \mu^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} - \frac{[(7 + 5 \mu^2) \mu]}{2} \tan \frac{\theta}{2} - \frac{(9 + 5 \mu^2)}{2} = 0
\end{aligned} \tag{A.4}$$

e, para  $\frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta^2} < 0$ , deve-se ter também:

$$\begin{aligned}
& (177 + 49 \mu^2) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + (1269 + 621 \mu^2) \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} - (255 - 425 \mu^2) \operatorname{sen} \frac{5\theta}{2} + \\
& + (189 - 147 \mu^2) \operatorname{sen} \frac{7\theta}{2} - [(305 + 49 \mu^2) \mu] \cos \frac{\theta}{2} - [(423 - 207 \mu^2) \mu] \cos \frac{3\theta}{2} + \\
& + [(595 - 85 \mu^2) \mu] \cos \frac{5\theta}{2} - [(315 - 21 \mu^2) \mu] \cos \frac{7\theta}{2} < 0
\end{aligned} \tag{A.5}$$

A solução da equação (A.4) fornece seis raízes sendo quatro complexos conjugados e apenas duas raízes reais que, combinadas com a equação (A.5), fornece o ângulo adequado para a propagação da trinca.



## 2. Critério da Tensão Principal Máxima modificado pelo Critério de Escoamento de Mohr-Coulomb

Uma alternativa ao Critério da Tensão Principal Máxima Modificado considera que a propagação da trinca ocorre segundo a perpendicular à direção da tensão principal máxima avaliada no contorno elastoplástico segundo critério de escoamento de Mohr-Coulomb. O critério de escoamento de Mohr-Coulomb pode ser expresso por:

$$\tau_{r\theta} + \sigma_{\theta} \cdot \operatorname{tg} \Phi \leq c \quad \text{ou} \quad f_{r\theta} + f_{\theta} \cdot \operatorname{tg} \Phi \leq 2c\sqrt{2\pi r} \quad (\text{A.6})$$

onde  $c$  é a coesão,  $\Phi$  é o ângulo de atrito interno do material e  $r$  representa a distância do contorno elastoplástico à ponta da trinca.

$$2\sqrt{2\pi r} = \frac{1}{c} [f_{r\theta} + f_{\theta} \cdot \operatorname{tg} \Phi] \quad (\text{A.7})$$

Substituindo a equação (A.7) na equação (2.4), vem:

$$\sigma_{\theta} = c \left[ \frac{f_{\theta}}{f_{r\theta} + f_{\theta} \operatorname{tg} \Phi} \right] \quad (\text{A.8})$$

O critério é expresso por:  $\frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} = 0$ , então:

$$\frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} = c \left\{ \frac{\left[ f_{r\theta} + f_{\theta} \operatorname{tg} \Phi \right] \frac{\partial f_{\theta}}{\partial \theta} - f_{\theta} \left[ \frac{\partial f_{r\theta}}{\partial \theta} + \operatorname{tg} \Phi \cdot \frac{\partial f_{\theta}}{\partial \theta} \right]}{\left[ f_{r\theta} + f_{\theta} \operatorname{tg} \Phi \right]^2} \right\} = 0$$

A condição é satisfeita se:  $[f_{r\theta} + f_{\theta} \cdot \text{tg}\Phi] \frac{\partial f_{\theta}}{\partial \theta} - f_{\theta} \left[ \frac{\partial f_{r\theta}}{\partial \theta} + \text{tg}\Phi \cdot \frac{\partial f_{\theta}}{\partial \theta} \right] = 0$

Pode-se escrever após a simplificação:  $f_{r\theta} \frac{\partial f_{\theta}}{\partial \theta} - f_{\theta} \frac{\partial f_{r\theta}}{\partial \theta} = 0$

$$\frac{\partial f_{\theta}}{\partial \theta} = -3 \cos \frac{\theta}{2} \left[ K_I \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + K_{II} - 3 K_{II} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$\frac{\partial f_{r\theta}}{\partial \theta} = K_I \left( 3 \cos^3 \frac{\theta}{2} - 2 \cos \frac{\theta}{2} \right) + K_{II} \left( 9 \sin^3 \frac{\theta}{2} - 7 \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

Então:

$$\begin{aligned} & K_I^2 \left( -6 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^4 \frac{\theta}{2} - 6 \cos^6 \frac{\theta}{2} + 4 \cos^4 \frac{\theta}{2} \right) + \\ & + K_{II}^2 \left( \begin{array}{l} 54 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^4 \frac{\theta}{2} - 18 \cos^4 \frac{\theta}{2} - 36 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 12 \cos^2 \frac{\theta}{2} - \\ - 42 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 54 \sin^4 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{array} \right) + K_I K_{II} \\ & \left( \begin{array}{l} 18 \sin^3 \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2} - 6 \sin \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2} - 18 \sin \frac{\theta}{2} \cos^5 \frac{\theta}{2} + 12 \sin \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2} - \\ - 18 \sin^3 \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2} + 14 \sin \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2} + 18 \sin \frac{\theta}{2} \cos^5 \frac{\theta}{2} - 12 \sin \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2} \end{array} \right) = 0 \end{aligned}$$

Fazendo  $\mu = K_I/K_{II}$  e dividindo-se por  $\cos^6(\theta/2)$ , vem:

$$\begin{aligned} & \mu^2 \left( -6 \text{tg}^2 \frac{\theta}{2} - 6 + 4 \sec^2 \frac{\theta}{2} \right) + 8 \mu \text{tg} \frac{\theta}{2} \sec^2 \frac{\theta}{2} + \\ & + \left( 54 \text{tg}^2 \frac{\theta}{2} - 18 \sec^2 \frac{\theta}{2} - 36 \text{tg}^2 \frac{\theta}{2} \sec^2 \frac{\theta}{2} + 12 \sec^4 \frac{\theta}{2} - \right. \\ & \left. - 42 \text{tg}^2 \frac{\theta}{2} \sec^2 \frac{\theta}{2} + 54 \text{tg}^4 \frac{\theta}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Sabendo-se que  $\sec^2 \frac{\theta}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + 1$  e  $\sec^4 \frac{\theta}{2} = \operatorname{tg}^4 \frac{\theta}{2} + 2\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + 1$ , vem:

$$\begin{aligned} & \mu^2 \left( -6\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} - 6 + 4\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + 4 \right) + \mu \left( 8\operatorname{tg}^3 \frac{\theta}{2} + 8\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) + \\ & + \left( 54\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} - 18\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} - 18 - 78\operatorname{tg}^4 \frac{\theta}{2} - 78\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right. \\ & \left. + 12\operatorname{tg}^4 \frac{\theta}{2} + 24\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + 12 + 54\operatorname{tg}^4 \frac{\theta}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

tem-se finalmente:

$$6 \tan^4 \frac{\theta}{2} - 4\mu \tan^3 \frac{\theta}{2} + (\mu^2 + 9) \tan^2 \frac{\theta}{2} - 4\mu \tan \frac{\theta}{2} + (\mu^2 + 3) = 0 \quad (\text{A.9})$$

e, para  $\frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta^2} < 0$ , deve-se ter também:

$$12 \tan^3 \frac{\theta}{2} - 6\mu \tan^2 \frac{\theta}{2} + (\mu^2 + 9) \tan \frac{\theta}{2} - 2\mu < 0 \quad (\text{A.10})$$

A solução da equação (A.9) combinada com a equação (A.10), fornece o ângulo adequado para a propagação da trinca.

### 3. Critério da Densidade da Energia de Deformação Dilatacional Máxima

Segundo Khan e Khraisheh (2000) o *Critério da Densidade da Energia de Deformação Dilatacional Máxima* considera que a propagação da trinca ocorre segundo a perpendicular à direção da densidade de energia de deformação dilatacional máxima avaliada no contorno da energia de deformação distorcional constante em torno da ponta da trinca. Este critério utiliza o contorno elastoplástico segundo critério de escoamento de Von Mises e pode ser expresso por:

$$\frac{\partial T_v}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 T_v}{\partial \theta^2} < 0 \quad (\text{A.11})$$

onde  $T_v$  é a energia de deformação dilatacional e é definida por:

$$T_v = \frac{(1-2\nu)}{6E} (\sigma_\theta + \sigma_r)^2 \quad (\text{A.12})$$

A energia de deformação distorcional  $T_D$  é dada por:

$$T_D = \frac{(1+\nu)}{3E} \left[ (\sigma_\theta + \sigma_r)^2 - 3(\sigma_\theta \sigma_r - \tau_{r\theta}^2) \right] \quad (\text{A.13})$$

A energia de deformação distorcional  $T_D$  é constante ao longo do contorno elastoplástico e pode, portanto, ser considerada uma constante do material chamada de  $T_{D,0}$ . Combinando o critério de escoamento de Von Mises com a equação (2.2) chega-se à expressão da região plastificada em torno da ponta da trinca. O contorno elastoplástico assim obtido pode ser expresso por:

$$r = \frac{(1+\nu)}{24\pi E T_{D,0}} \left[ (f_\theta + f_r)^2 - 3(f_\theta f_r - f_{r\theta}^2) \right] \quad (\text{A.14})$$

onde  $r$  representa a distância do contorno elastoplástico à ponta da trinca.

$$T_{D,0} = \frac{(1+\nu)}{24\pi E r} \left[ (f_\theta + f_r)^2 - 3(f_\theta f_r - f_{r\theta}^2) \right] \quad (\text{A.15})$$

é a energia de deformação distorcional, constante no contorno elastoplástico de Von Mises e:

$$f_\theta(\theta) = \left[ \left\{ K_I \cos \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta) \right\} - \left\{ 3K_{II} \sin \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta) \right\} \right]$$

$$f_r(\theta) = \left[ \left\{ K_I \cos \frac{\theta}{2} (3 - \cos \frac{\theta}{2}) \right\} - \left\{ K_{II} \sin \frac{\theta}{2} (1 - 3 \cos \theta) \right\} \right] \quad (\text{A.16})$$

$$f_{r\theta} = \left[ \left\{ K_I \sin \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta) \right\} - \left\{ K_{II} \cos \frac{\theta}{2} (1 - 3 \cos \theta) \right\} \right]$$

Das equações (2.4) e (A.14) a (A.16) vem:

$$T_v = \frac{(1-2\nu)T_{D,0}}{2(1+\nu)} \left[ \frac{(f_\theta + f_r)^2}{(f_\theta + f_r)^2 - 3(f_\theta f_r - f_{r\theta}^2)} \right] = \frac{(1-2\nu)T_{D,0}}{2(1+\nu)} \left[ \frac{N}{D} \right] \quad (\text{A.17})$$

$$N = (f_\theta + f_r)^2 = 4K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} + 4K_{II} \sin^2 \frac{\theta}{2} - 8K_I K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$D = K_I^2 (4 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 3 \cos^4 \frac{\theta}{2}) + K_{II}^2 (9 \cos^4 \frac{\theta}{2} - 10 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 4) \\ - 4K_I K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} (3 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 2)$$

$$\frac{\partial T_v}{\partial \theta} = \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)} T_{D,0} \left[ \frac{D \frac{\partial N}{\partial \theta} - N \frac{\partial D}{\partial \theta}}{D^2} \right] = 0$$

Para que a condição acima seja satisfeita é necessário que:  $D \frac{\partial N}{\partial \theta} = N \frac{\partial D}{\partial \theta}$

$$\frac{\partial N}{\partial \theta} = -4K_I^2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + 4K_{II}^2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - 4K_I K_{II} (\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2})$$

$$\frac{\partial D}{\partial \theta} = 2K_I^2 (3 \sin \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2} - 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}) + \\ 2K_{II}^2 (5 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - 9 \sin \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2}) + 2K_I K_{II} (12 \cos^4 \frac{\theta}{2} - 13 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2)$$

Então:

$$\begin{aligned}
 & \left[ K_I^2 \left( 4 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 3 \cos^4 \frac{\theta}{2} \right) + K_{II}^2 \left( 9 \cos^4 \frac{\theta}{2} - 10 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 4 \right) + \right. \\
 & \quad \left. + 4 K_I K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left( 3 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 2 \right) \right] x \\
 & x 4 \left[ K_I^2 \left( -\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) + K_{II}^2 \left( \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) - K_I K_{II} \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] = \\
 & = 4 \left[ K_I^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + K_{II}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 2 K_I K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right] x \\
 & 2. \left[ K_I^2 \left( 3 \sin \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2} - 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) + K_{II}^2 \left( 5 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - 9 \sin \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + K_I K_{II} \left( 12 \cos^4 \frac{\theta}{2} - 13 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2 \right) \right]
 \end{aligned}$$

ou:

$$\begin{aligned}
 & K_I^4 \left( -3 \sin \frac{\theta}{2} \cos^5 \frac{\theta}{2} \right) + K_{II}^4 \left( 18 \sin \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2} - 6 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - 9 \sin \frac{\theta}{2} \cos^5 \frac{\theta}{2} \right) \\
 & + K_I^2 K_{II}^2 \left( 36 \sin \frac{\theta}{2} \cos^5 \frac{\theta}{2} - 30 \sin \frac{\theta}{2} \right) + K_I^3 K_{II} \left( 15 \cos^4 \frac{\theta}{2} - 18 \cos^6 \frac{\theta}{2} \right) + \\
 & + K_I K_{II}^3 \left( 30 \cos^6 \frac{\theta}{2} - 57 \cos^4 \frac{\theta}{2} + 24 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Fazendo  $\mu = K_I/K_{II}$ , vem:

$$\begin{aligned}
 & -3\mu^4 \sin \frac{\theta}{2} \cos^5 \frac{\theta}{2} + \mu^3 \left( 15 \cos^4 \frac{\theta}{2} - 18 \cos^6 \frac{\theta}{2} \right) + \\
 & + \mu^2 \left( 36 \sin \frac{\theta}{2} \cos^5 \frac{\theta}{2} - 30 \sin \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2} \right) + \mu \left( 30 \cos^6 \frac{\theta}{2} - 57 \cos^4 \frac{\theta}{2} + 24 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\
 & + \left( 18 \sin \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2} - 6 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - 9 \sin \frac{\theta}{2} \cos^5 \frac{\theta}{2} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Dividindo por  $\cos^6(\theta/2)$  e sabendo-se que:

$$\sec^2 \frac{\theta}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + 1; \quad \sec^4 \frac{\theta}{2} = \operatorname{tg}^4 \frac{\theta}{2} + 2\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + 1; \quad \sec^6 \frac{\theta}{2} = \operatorname{tg}^6 \frac{\theta}{2} + 3\operatorname{tg}^4 \frac{\theta}{2} + 3\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + 1$$

tem-se finalmente:

$$\begin{aligned} & \tan^5 \frac{\theta}{2} - 4\mu \tan^4 \frac{\theta}{2} + (5\mu^2 - 1) \tan^3 \frac{\theta}{2} + \frac{(3 - 5\mu^2)}{2} \tan^2 \frac{\theta}{2} + \\ & + \frac{(\mu^4 - 2\mu^2 - 1)}{2} \tan \frac{\theta}{2} + \frac{(1 + \mu^2)\mu}{2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

e, para  $\frac{\partial^2 T_v}{\partial \theta^2} < 0$ , deve-se ter também:

$$\begin{aligned} & (1 - 20\mu^2 - 52\mu^4) \cos \theta + [8(3 + 2\mu^2 - \mu^4)] \cos 2\theta - [3(3 - 12\mu^2 + \mu^4)] \cos 3\theta \\ & + [2(13 + 5\mu^2)\mu] \sin \theta + [32(1 + \mu^2)\mu] \sin 2\theta - [6(5 - 3\mu^2)\mu] \sin 3\theta < 0 \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

A solução da equação (A.18) combinada com a equação (A.19) fornece o ângulo adequado para a propagação da trinca.

#### 4. Critério da Densidade da Energia de Deformação Mínima modificado pelo Critério de Escoamento de Mohr-Coulomb

Outra alternativa ao Critério da Densidade de Energia de Deformação Mínima considera que a propagação da trinca ocorre segundo a perpendicular à direção da densidade de energia de deformação mínima avaliada no contorno elastoplástico segundo critério de escoamento de Mohr-Coulomb. No item 3 a energia de deformação foi separada em suas componentes *dilatacional* e *distorcional*, sabendo-se que, para o critério de escoamento de Von Mises, a parcela correspondente à energia de deformação distorcional é constante. Como no critério de escoamento de Mohr-Coulomb não há a

exigência de incompressibilidade na deformação, a expressão da energia de deformação não pode ser separada. Este critério é expresso por:

$$\tau_{r\theta} + \sigma_{\theta} \cdot \operatorname{tg} \Phi \leq c \quad \text{ou} \quad f_{r\theta} + f_{\theta} \cdot \operatorname{tg} \Phi \leq 2c\sqrt{2\pi r} \quad (\text{A.20})$$

onde  $c$  é a coesão e  $\Phi$  é o ângulo de atrito interno do material. Tendo-se em vista as equações (2.2) e (A.3), o contorno elastoplástico assim obtido pode ser expresso por:

$$2\sqrt{2\pi r} = \frac{1}{c} [f_{r\theta} + f_{\theta} \cdot \operatorname{tg} \Phi] \quad (\text{A.21})$$

onde  $r$  representa a distância do contorno elastoplástico à ponta da trinca.

Tendo em vista que:  $W = \int_V \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} dV$  e  $u = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}$ , tem-se:

$$u = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2E} [\sigma_r^2 + \sigma_{\theta}^2] - \frac{\nu}{E} [\sigma_r \cdot \sigma_{\theta}] + \frac{1}{2\mu} [\tau_{r\theta}^2] \quad (\text{A.21})$$

A condição para que  $u$  seja mínimo é:

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{c}{2E} \left[ \frac{D^2 \frac{\partial N}{\partial \theta} - 2DN \frac{\partial D}{\partial \theta}}{D^4} \right] = \frac{c}{2E} \left[ \frac{D \frac{\partial N}{\partial \theta} - 2N \frac{\partial D}{\partial \theta}}{D^3} \right] = 0$$

Para que a condição acima seja satisfeita é necessário que:  $D \frac{\partial N}{\partial \theta} - 2N \frac{\partial D}{\partial \theta} = 0$  (A.22)

onde:  $N = (f_r + f_{\theta})^2 + 2(1 + \nu) \left( f_{r\theta}^2 - f_r f_{\theta} \right)$  e  $D = (f_{r\theta} + f_{\theta} \operatorname{tg} \Phi)$

Então:



$$N = \left\{ \begin{array}{l} 8K_I^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[ 2 - (1 + \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] + \\ 8K_{II}^2 \left[ 3(1 + \nu) \cos^4 \frac{\theta}{2} - 2(2 + \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2 \right] + \\ 32K_I K_{II} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left[ (1 + \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right] \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial \theta} = & 16K_I^2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left[ (1 + \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right] + \\ & 16K_{II}^2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left[ (2 + \nu) - 3(1 + \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2 \right] + \\ & + 16K_I K_{II} \left[ 4(1 + \nu) \cos^4 \frac{\theta}{2} - (5 + 3\nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 1 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D = & 2K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[ \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + \operatorname{tg} \Phi \cos \frac{\theta}{2} \right] - \\ & K_{II} \left[ 4 \cos \frac{\theta}{2} - 6 \cos^3 \frac{\theta}{2} + 6 \operatorname{tg} \Phi \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial \theta} = & K_I \left[ \cos^3 \frac{\theta}{2} - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - 3 \operatorname{tg} \Phi \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] + \\ & + K_{II} \left[ 9 \operatorname{sen}^3 \frac{\theta}{2} - 7 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} - 9 \operatorname{tg} \Phi \cos^3 \frac{\theta}{2} + 6 \operatorname{tg} \Phi \cos \frac{\theta}{2} \right] \end{aligned}$$

Dividindo-se  $N$  e  $\partial N/\partial \theta$  por  $[K_{II}^2 \cdot \cos^4(\theta/2)]$ ,  $D$  e  $\partial D/\partial \theta$  por  $[K_{II} \cdot \cos^3(\theta/2)]$  e fazendo-se  $\mu = K_I/K_{II}$ , vem:

$$\begin{aligned} & \left\{ \mu \left[ 2 \tan \frac{\theta}{2} + 2 \tan \Phi \right] + \left[ 2 - 6 \operatorname{tg} \Phi \cos \frac{\theta}{2} - 4 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] \right\} x \\ & \left\{ \mu^2 \left[ \nu \tan \frac{\theta}{2} - \tan^3 \frac{\theta}{2} \right] + \mu \left[ \tan^4 \frac{\theta}{2} - 3(1 + \nu) \tan^2 \frac{\theta}{2} + \nu \right] \right. \\ & \left. + \left[ (2 + \nu) \tan^3 \frac{\theta}{2} - (1 + 2\nu) \tan \frac{\theta}{2} \right] \right\} = \\ & = \left\{ \mu \left[ 1 - 3 \tan \Phi \tan \frac{\theta}{2} - 2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] + \left[ 2 \tan^3 \frac{\theta}{2} + 6 \operatorname{tg} \Phi \tan^2 \frac{\theta}{2} - 7 \tan \frac{\theta}{2} - 3 \tan \Phi \right] \right\} x \\ & x \left\{ \mu^2 \left[ 2 \tan^2 \frac{\theta}{2} + (1 - \nu) \right] + \mu \left[ 4\nu \tan \frac{\theta}{2} - 4 \tan^3 \frac{\theta}{2} \right] + \left[ 2 \tan^4 \frac{\theta}{2} - 2\nu \tan \frac{\theta}{2} + (1 + \nu) \right] \right\} \end{aligned}$$

e finalmente:

$$\begin{aligned}
& 4 \tan^7 \frac{\theta}{2} - [8\mu - 12 \operatorname{tg}\Phi] \tan^6 \frac{\theta}{2} + [6\mu^2 - 24 \operatorname{tg}\Phi \mu - 6] \tan^5 \frac{\theta}{2} - \\
& - [2\mu^3 - 16 \operatorname{tg}\Phi \mu^2 - 2(6-\nu)\mu - 6(1-\nu)\operatorname{tg}\Phi] \tan^4 \frac{\theta}{2} - \\
& - [4 \operatorname{tg}\Phi \mu^3 + 8\mu^2 + 10(1-\nu) \operatorname{tg}\Phi \mu + 6(1-\nu)] \tan^3 \frac{\theta}{2} + \\
& + [6(1-\nu) \operatorname{tg}\Phi \mu^2 - 6(1-3\nu)\mu] \tan^2 \frac{\theta}{2} - \\
& - [(3-\nu) \operatorname{tg}\Phi \mu^3 + 7(1-\nu)\mu^2 + (1+5\nu) \operatorname{tg}\Phi \mu + (5-3\nu)] \tan \frac{\theta}{2} + \\
& + [(1-\nu)\mu^3 - (3-\nu)\operatorname{tg}\Phi \mu^2 + (1-\nu)\mu - 3(1+\nu)] = 0
\end{aligned} \tag{A.23}$$

O valor de  $\theta$  procurado além de ser uma raiz da equação (A.23) deve satisfazer à equação seguinte:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} > 0 \tag{A.24}$$

Portanto, a solução da equação (A.23) combinada com a equação (A.24) fornece o ângulo adequado para a propagação da trinca.

## 5. Algoritmo para Correção da Direção da Propagação da Trinca

O critério da Tensão Principal Máxima não considera a discretização da extensão da trinca. O ângulo  $\theta_t$  indica a direção da tangente local na ponta da trinca e deve ser corrigido para se levar em conta o comprimento do incremento. A referida correção,

segundo PORTELA et al. (1993), pode ser feita através de um procedimento iterativo que é descrito a seguir:

1. Dar um acréscimo ao comprimento da trinca de  $\Delta a$  na direção  $\theta_i^n$  e calcular o novo fator de intensidade de tensão;
2. Com o novo fator de intensidade de tensão calcular a nova tangente  $\theta_i^{n+1}$  com a eq. (6);
3. Definir o ângulo de correção  $\beta_i^n = \theta_i^{n+1}/2$ ;
4. Calcular o ângulo corrigido da extensão da trinca  $\theta_{i+1}^n = \theta_i^n + \beta_i^n$  e retornar ao passo 1.

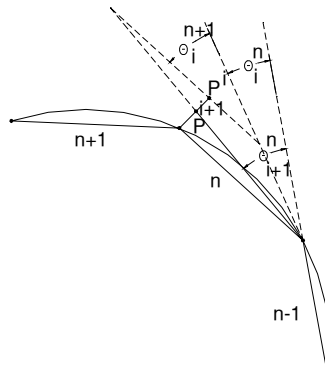


FIGURA A.1 - Esquema da direção de propagação da trinca

O procedimento é repetido até que a convergência seja obtida para o ângulo  $\theta$ . Mostra-se que, no limite, quando o incremento da extensão da trinca  $\Delta a$  tende para zero, o ângulo de correção  $\beta$  também tende para zero e, portanto, a direção da extensão da trinca tende para a direção da tangente ao caminho da trinca.