

***O MÉTODO DA ENERGIA APLICADO À  
FLAMBAGEM LATERAL COM TORÇÃO  
DE VIGAS DE AÇO***

Ana Lydia Fernandes dos Reis

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

***O MÉTODO DA ENERGIA APLICADO À FLAMBAGEM  
LATERAL COM TORÇÃO DE VIGAS DE AÇO***

Ana Lydia Fernandes dos Reis

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de “Mestre em Engenharia de Estruturas”.

Comissão julgadora:

---

Prof. Dr. Ricardo Hallal Fakury  
EE-UFGM - (Orientador)

---

Prof. Dr. Eduardo de Miranda Batista  
COPPE -UFRJ

---

Prof. Dr. Armando Cesar Campos Lavall  
EE-UFGM

Belo Horizonte, 14 de agosto de 1996

A meus pais

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por tudo.

Ao Professor Ricardo Hallal Fakury pela orientação competente e dedicada, o incentivo e a amizade que foram imprescindíveis para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus pais por todo o amor, carinho e apoio recebido durante toda a minha vida.

Ao Alcides que, com paciência, amor e incentivo, contribuiu para amenizar os dias difíceis.

Aos meus avós, irmãos e cunhados que sempre me deram seu apoio incondicional.

Aos professores, funcionários e colegas do DEES pela convivência agradável neste tempo de relacionamento. Em especial, aos professores Armando Cesar Campos Lavall e Ramon Pereira da Silva, pela ajuda inestimável, e às queridas Iracema e Ângela, pelo carinho e presteza em ajudar. Também ao pessoal do LAMEC pelo auxílio computacional.

Ao pessoal da DSS e do Aikido pelas horas de descontração e lazer, sem as quais seria muito penoso realizar este trabalho.

Ao CNPq pela bolsa de estudo, que possibilitou a dedicação integral ao trabalho.

## RESUMO

Quando as ações aplicadas atingem certa intensidade, as barras de aço submetidas à flexão podem flambar, em um processo que envolve translação perpendicular ao plano das ações e rotação em torno do eixo longitudinal que passa pelo centro de torção da seção transversal. O fenômeno recebe a denominação de flambagem lateral com torção e se constitui em um estado limite último relacionado à instabilidade. A norma brasileira, NBR 8800/86, a especificação americana, AISC/LRFD, o regulamento europeu, ENV 1993-1-1, e a maior parte das especificações de projeto de estruturas de aço fornecem procedimentos para determinação da resistência nominal ao momento fletor, com relação a este estado limite, que dependem fundamentalmente da obtenção do valor correto do momento crítico elástico. No entanto, estas especificações, e mesmo a literatura técnica especializada, não contêm informações que permitam a obtenção deste momento crítico para uma enorme gama de situações. Este trabalho apresenta um procedimento numérico, baseado no método da energia, e implementado através de um programa computacional, para se obter valores bastante precisos do momento crítico elástico considerando situações gerais de carregamento, incluindo cargas estabilizantes e desestabilizantes, de condições de contorno nos planos de flexão e de flambagem, incluindo seções internas contidas lateralmente e de seções transversais, incluindo a possibilidade de se ter recortes nas mesas, aberturas na alma e lamelas. Diversos casos são analisados e os resultados são comparados com os obtidos por soluções apresentadas pela literatura técnica especializada e pelas especificações de projeto.

## **ABSTRACT**

When a beam bent about its greatest axis moment of inertia, lateral deflection and twisting will occur when the applied load reaches its critical value, unless the beam is provided with properly spaced and designed lateral bracings or the cross section is torsionally stiff. For a perfectly straight beam, the critical load corresponds to the point of bifurcation of equilibrium when out-of-plane bending and twisting deformations become the stable configuration of the member. The phenomenon is an ultimate limit state termed lateral-torsional buckling. The brazilian code NBR 8800/86, the american specification AISC/LRFD, the european prestandard ENV 1993-1-1, and most of the specifications for the design of steel structures recommend the use of approximate expressions to obtain the value of the nominal strength of bending moment in the elastic range. In these expressions beams with non-prismatic sections cannot be analyzed, the applied load and the presence of stabilizing and non-stabilizing load are not properly considered and the boundary conditions are limited to the case of constrained torsion and the translation in the buckling plane while the rotation and the warping are hold free. This study presents a numerical procedure, based on energy method, to obtain accurate results for the elastic nominal strength to the lateral-torsional buckling, considering many different situations of loading, including stabilizing and non-stabilizing load, boundary conditions, including the case when the rotation in the buckling plane and the warping are constrained, and variation of the moment of inertia, with doubly-symmetric and singly-symmetric cross section, and with coped beams and beams with reinforcement or with web openings. Several cases are analyzed and the results are compared with those proposed by the design specifications for steel structures and technical literature.

## SUMÁRIO

|   |    |
|---|----|
| 1. INTRODUÇÃO .....   | 01 |
| 1.1. Considerações Gerais.....  | 01 |
| 1.1.1. <i>Os Estados Limites nas Vigas de Aço</i> .....               | 01 |
| 1.1.2. <i>A Flambagem Lateral com Torção</i> .....                    | 03 |
| 1.2. Histórico.....   | 07 |
| 1.3. Tratamento Normatizado da Flambagem Lateral com Torção .....     | 11 |
| 1.3.1. <i>Procedimento Proposto pelo AISC/LRFD [62]</i> .....         | 11 |
| 1.3.2. <i>Procedimento Proposto pela NBR 8800 [63]</i> .....          | 15 |
| 1.3.3. <i>Procedimento Proposto pelo ENV 1993-1-1 [64]</i> .....      | 17 |
| 1.3.4. <i>Estudo Comparativo</i> .....                                | 23 |
| 1.4. Proposta de Trabalho .....                                       | 25 |
| 2. MÉTODO DA ENERGIA .....  | 27 |
| 2.1. Introdução .....   | 27 |
| 2.2. Premissas Básicas .....  | 28 |
| 2.3. Energia de Deformação .....                                      | 30 |
| 2.4. Energia Potencial .....  | 32 |
| 2.4.1. <i>Cargas Transversais nos Deslocamentos de 1ª Ordem</i> ..... | 33 |
| 2.4.2. <i>Cargas Transversais nos Deslocamentos de 2ª Ordem</i> ..... | 34 |
| 2.4.3. <i>Expressão da Energia Potencial</i> .....                    | 37 |
| 2.5. Energia Potencial Total.....                                     | 37 |
| 2.6. Escolha das Funções $\mu_D$ e $\phi$ .....                       | 38 |
| 2.7. Contribuição do Segmento $i$ para a Expressão de $\Pi$ .....     | 41 |
| 2.8. Montagem da Matriz.....  | 44 |
| 3. AUTOMATIZAÇÃO PARA DETERMINAÇÃO DO MOMENTO CRÍTICO .....           | 47 |
| 3.1. Considerações Iniciais .....                                     | 47 |
| 3.2. Entrada de Dados .....   | 48 |
| 3.3. Cálculo .....  | 51 |
| 3.3.1. <i>Divisão dos Segmentos</i> .....                             | 51 |
| 3.3.2. <i>Propriedades Geométricas</i> .....                          | 52 |

|  |     |
|--|-----|
| 3.3.3. Esforços Solicitantes .....   | 53  |
| 3.3.4. Determinante .....  | 53  |
| 3.4. Saída de Resultados .....   | 54  |
| 3.5. Exemplos .....  | 55  |
| 3.5.1. Viga com Contenção Lateral Interna .....  | 55  |
| 3.5.2. Viga com Abertura na Alma .....   | 64  |
| 3.5.3. Viga em Balanço .....   | 67  |
| 4. APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS.....   | 70  |
| 4.1. Introdução .....  | 70  |
| 4.2. Casos de Carregamento e Condições de Contorno .....   | 71  |
| 4.3. Vigas com Seção I Bissimétrica .....  | 72  |
| 4.3.1. Comparação com Resultados Obtidos pelo AISC/LRFD [62], NBR 8800 [63],<br>ENV 1993-1-1 [64] e Kirby e Nethercot [65] ..... | 72  |
| 4.3.2. Resultados Apresentados por Chen e Lui [30] e pelo ENV 1993-1-1 [64] .....  | 74  |
| 4.3.2.1. Vigas biapoiadas com cargas transversais aplicadas e alternativa S .....  | 74  |
| 4.3.2.2. Vigas em balanço .....  | 78  |
| 4.3.2.3. Vigas biapoiadas para alternativa R .....   | 80  |
| 4.3.2.4. Vigas biapoiadas com outras condições de contorno .....   | 83  |
| 4.3.2.5. Alternativa de cálculo para a resistência nominal em regime elástico, $M_{cr}$ .....                                    | 87  |
| 4.3.2.6. Conjunto de resultados obtidos pelo Programa MCE .....  | 94  |
| 4.4. Vigas com Outras Seções Transversais .....  | 98  |
| 4.5. Vigas com Contenção Lateral Interna .....   | 101 |
| 4.6. Vigas com Lamela .....  | 104 |
| 4.7. Vigas com Recortes nas Mesas .....  | 107 |
| 4.7.1. Efeito do Comprimento da Viga .....   | 108 |
| 4.7.2. Efeito do Comprimento do Recorte .....  | 110 |
| 4.7.3. Efeito da Profundidade do Recorte .....   | 112 |
| 4.8. Vigas com Aberturas na Alma .....   | 114 |
| 4.8.1. Fórmula Apresentada por Darwin [56] .....   | 114 |
| 4.8.2. Resultados Apresentados por Thevendran e Shanmugam [57] .....   | 116 |
| 4.8.2.1. Viga biapoiada .....  | 117 |
| 4.8.2.2. Viga em balanço .....   | 118 |



|   |     |
|---|-----|
| 5. CONCLUSÕES .....   | 119 |
| 5.1. Considerações Gerais.....  | 119 |
| 5.2. Vigas com Seção I Duplamente Simétrica .....                                 | 120 |
| 5.2.1. <i>Sobre o AISC/LRFD [62], a NBR 8800 [63] e o ENV 1993-1-1 [64]</i> ..... | 120 |
| 5.2.2. <i>Resultados de Chen e Lui [30]</i> .....                                 | 122 |
| 5.2.3. <i>Conjunto de Resultados Obtidos pelo Programa MCE</i> .....              | 124 |
| 5.3. Vigas com Seções Transversais Diferentes do I Duplamente Simétrico.....      | 125 |
| 5.4. Vigas com Contenção Lateral Interna .....                                    | 126 |
| 5.5. Vigas com Variação de Seção Transversal.....                                 | 127 |
| 5.5.1. <i>Vigas com Lamelas</i> .....   | 127 |
| 5.5.2. <i>Vigas com Recortes nas Mesas</i> .....                                  | 128 |
| 5.5.3. <i>Vigas com Aberturas na Alma</i> .....                                   | 130 |
| 5.8. Análise Global e Sugestões .....   | 131 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....   | 133 |
| BIBLIOGRAFIA .....  | 142 |

## LISTA DE FIGURAS

|   |    |
|---|----|
| 1.1 - Flambagem lateral com torção .....  | 03 |
| 1.2 - Modos de flambagem de uma viga de seção I, conforme as condições de contorno.....   | 04 |
| 1.3 - Situação de momento fletor mais desfavorável.....   | 05 |
| 1.4 - Cargas estabilizantes e desestabilizantes.....  | 05 |
| 1.5 - Variação na seção transversal.....  | 06 |
| 1.6 - Imperfeições geométricas .....  | 06 |
| 1.7 - Resistência nominal $M_n$ em função do índice de esbeltez $\lambda$ e de $C_b$ .....  | 13 |
| 1.8 - Resistência nominal ao momento fletor de acordo com a NBR 8800 [63].....  | 16 |
| 1.9 - Resistência nominal, $M_n$ em função do parâmetro $\bar{\lambda}_{LT}$ .....  | 18 |
| 1.10 - Convenção de sinais para determinação de $y_D$ .....   | 20 |
| 1.11 - Comparação entre os valores da resistência nominal à flambagem lateral com torção .....  | 24 |
| 2.1 - Sistemas de eixos adotados com seus sentidos positivos.....   | 28 |
| 2.2 - Variação da tensão de torção livre ao longo da espessura do elemento.....   | 30 |
| 2.3 - Deslocamento em 2ª ordem devido à aplicação de uma carga concentrada .....  | 34 |
| 2.4 - Deslocamento em 2ª ordem de um elemento de volume $dz.dA$ .....   | 35 |
| 2.5 - Segmento genérico $i$ .....   | 39 |
| 2.6 - Momento fletor solicitante $M_x$ no segmento $i$ .....  | 42 |
| 2.7 - Esquema da montagem da matriz global da viga, através da superposição das matrizes dos segmentos (adaptado da referência 17)..... | 46 |
| 3.1 - Aberturas na alma.....  | 49 |
| 3.2 - Determinação do carregamento e do multiplicador crítico .....   | 50 |
| 3.3 - Divisão dos segmentos .....   | 52 |
| 3.4 - (a): forma usual de armazenamento, (b): matriz banda (adaptado da referência 71).....   | 54 |
| 3.5 - Viga VS 300x36 com contenção lateral interna.....   | 55 |
| 3.6 - Viga VS 300x36 com abertura na alma.....  | 64 |
| 3.7 - Viga VS 300x36 em balanço.....  | 67 |
| 4.1 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 09 - S da Tabela 4.1 .....   | 75 |
| 4.2 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 06 - S da Tabela 4.1 .....   | 76 |

|   |    |
|---|----|
| 4.3 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 12 - <i>S</i> da Tabela 4.1 .....  | 77 |
| 4.4 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 15 - <i>C</i> da Tabela 4.1 .....  | 78 |
| 4.5 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 16 - <i>C</i> da Tabela 4.1 .....  | 79 |
| 4.6 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 01 da Tabela 4.1 .....   | 81 |
| 4.7 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 09 - <i>R</i> da Tabela 4.1.....   | 82 |
| 4.8 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 06 - <i>R</i> da Tabela 4.1.....   | 83 |
| 4.9 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 09 da Tabela 4.1 para a situação<br>de rotação em torno do eixo longitudinal, deslocamento lateral e empenamento<br>impedidos e rotação no plano de flambagem livre.....   | 84 |
| 4.10 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 06 da Tabela 4.1 para a situação<br>de rotação em torno do eixo longitudinal, deslocamento lateral e empenamento<br>impedidos e rotação no plano de flambagem livre.....  | 85 |
| 4.11 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 09 da Tabela 4.1 para a situação<br>de rotação em torno do eixo longitudinal, deslocamento lateral e rotação no<br>plano de flambagem impedidos e empenamento livre ..... | 86 |
| 4.12 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 06 da Tabela 4.1 para a situação<br>de rotação em torno do eixo longitudinal, deslocamento lateral e rotação no<br>plano de flambagem impedidos e empenamento livre ..... | 86 |
| 4.13 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 06 - <i>S</i> da Tabela 4.4.....  | 89 |
| 4.14 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 06 - <i>R</i> da Tabela 4.4.....  | 90 |
| 4.15 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 07 - <i>S</i> da Tabela 4.4.....  | 90 |
| 4.16 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 07 - <i>R</i> da Tabela 4.4.....  | 91 |
| 4.17 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 08 - <i>S</i> da Tabela 4.4.....  | 91 |
| 4.18 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 08 - <i>R</i> da Tabela 4.4.....  | 92 |
| 4.19 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 09 - <i>S</i> da Tabela 4.4.....  | 92 |
| 4.20 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 09 - <i>R</i> da Tabela 4.4.....  | 93 |
| 4.21 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 10 - <i>S</i> da Tabela 4.4.....  | 93 |
| 4.22 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 10 - <i>R</i> da Tabela 4.4.....  | 94 |
| 4.23 - $C_{bS}$ para cargas aplicadas no nível do centro de torção e para atuação apenas<br>de momento fletor (nos casos 01 a 14, $L = L_b$ ) .....   | 95 |
| 4.24 - $C_{bS}$ para cargas aplicadas na mesa inferior (nos casos 06 a 14, $L = L_b$ ) .....  | 96 |
| 4.25 - $C_{bS}$ para cargas aplicadas na mesa superior (nos casos 06 a 14, $L = L_b$ ) .....  | 97 |

|   |     |
|---|-----|
| 4.26 - Seções transversais consideradas: (a) I monossimétrico, (b) T, (c) U,<br>(d) retangular cheia e (e) caixão .....       | 98  |
| 4.27 - Coeficiente $C_{bs}$ em função de $L$ para a seção I monossimétrica.....   | 100 |
| 4.28 - Coeficiente $C_{bs}$ em função de $L$ para a seção T.....  | 100 |
| 4.29 - Posição da contenção lateral interna .....   | 101 |
| 4.30 - Vão da viga e seção transversal considerados na verificação de viga com<br>contenção lateral interna.....              | 101 |
| 4.31 - Momento crítico, $M_{cr}$ , em função da posição da contenção lateral interna, $a$ ....                                | 102 |
| 4.32 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 09 da Tabela 4.1 considerando<br>contenção lateral no meio do vão ..... | 103 |
| 4.33 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 06 da Tabela 4.1 considerando<br>contenção lateral no meio do vão ..... | 104 |
| 4.34 - Vão da viga e seção transversal considerados na verificação de viga com<br>lamela .....                                | 105 |
| 4.35 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 01 da Tabela 4.1 considerando<br>lamela na mesa superior .....          | 105 |
| 4.36 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 09 da Tabela 4.1 considerando<br>lamela na mesa superior .....          | 106 |
| 4.37 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 06 da Tabela 4.1 quando existe<br>lamela na mesa superior .....         | 106 |
| 4.38 - Efeito do comprimento do recorte .....   | 107 |
| 4.39 - Efeito do vão para o caso 01 da Tabela 4.1 .....   | 109 |
| 4.40 - Efeito do vão para o caso 09 da Tabela 4.1 .....   | 109 |
| 4.41 - Efeito do comprimento do recorte para o caso 01 da Tabela 4.1 considerando<br>recorte na mesa superior.....            | 110 |
| 4.42 - Efeito do comprimento do recorte para o caso 01 da Tabela 4.1 considerando<br>recorte nas duas mesas .....             | 111 |
| 4.43 - Efeito do comprimento do recorte para o caso 09 da Tabela 4.1 considerando<br>recorte na mesa superior.....            | 111 |
| 4.44 - Efeito do comprimento do recorte para o caso 09 da Tabela 4.1 considerando<br>recorte nas duas mesas .....             | 112 |
| 4.45 - Efeito da profundidade do recorte para o caso 01 da Tabela 4.1 .....   | 113 |
| 4.46 - Efeito da profundidade do recorte para o caso 09 da Tabela 4.1 .....   | 113 |

|  |     |
|--|-----|
| 4.47 - Aberturas consideradas para o cálculo .....   | 115 |
| 4.48 - Dimensões das seções transversais consideradas: (a) I bissimétrico e<br>(b) retangular cheia..... | 116 |
| 4.49 - Posições das aberturas para metade da viga biapoiada (adaptado da referência<br>57).....          | 117 |
| 4.50 - Posições das aberturas para viga em balanço (adaptado da referência 57).....                      | 118 |

## LISTA DE TABELAS

|  |     |
|--|-----|
| 1.1 - Valores dos fatores $C_1$ , $C_2$ e $C_3$ correspondentes aos valores de $K$ , para os casos de momentos nas extremidades e de cargas transversais .....   | 21  |
| 4.1 - Casos de carregamento e condições de contorno .....  | 71  |
| 4.2 - Coeficientes $C_b$ obtidos pelos processos das especificações [62, 63, 64], da equação de Kirby e Nethercot [64], e coeficientes $C_{bs}$ obtidos pelo Programa MCE, para os casos da Tabela 4.1 ..... | 73  |
| 4.3 - Fatores de comprimento efetivo para balanços com várias condições de contorno.....   | 80  |
| 4.4 - Valores dos coeficientes $C_1$ e $C_2$ da equação (4.24), para cálculo da resistência à flambagem elástica de vigas (adaptado da referência 24).....   | 88  |
| 4.5 - Coeficientes $C_{bs}$ para as seções U, retangular cheia e caixão obtidos utilizando-se o Programa MCE.....  | 99  |
| 4.6 - Valores do momento crítico para diversos casos de aberturas na alma .....  | 115 |
| 4.7 - Valores da carga crítica para o caso de viga biapoiada.....  | 117 |
| 4.8 - Valores da carga crítica para o caso de viga em balanço .....  | 118 |

## LISTA DE SÍMBOLOS

|           |  |
|-----------|--|
| $a_0$     | comprimento da abertura  |
| $A_r$     | área do reforço da abertura  |
| $B$       | bimomento  |
| $b_f$     | largura da mesa da seção transversal   |
| $C$       | situação de condição de contorno com vínculo de garfo na extremidade inicial e deslocamentos ( $\phi$ , $\mu$ , $\phi'$ e $\mu'$ ) livres na extremidade final do comprimento destravado, para os casos de viga em balanço |
| $C_1$     | fator dependente do carregamento e das condições de contorno nas extremidades do comprimento destravado  |
| $C_2$     | fator dependente da posição de atuação das cargas verticais em relação ao centro de torção   |
| $C_3$     | fator dependente do carregamento e das condições de contorno nas extremidades do comprimento destravado  |
| $C_4$     | fator que relaciona $C_1$ e $C_2$  |
| $C_b$     | fator de momento equivalente que relaciona $M_{cr}$ e $M_{0cr}$ , nos casos de diagrama de momento fletor não uniforme   |
| $C_{bs}$  | fator de momento equivalente que relaciona $M_{cr}$ e $M_{0cr}$ , nos casos de diagrama de momento fletor não uniforme e variação nas condições de contorno  |
| $C_{bs1}$ | fator de momento equivalente que relaciona $M_{cr}$ e $M_{0cr1}$ , nos casos de diagrama de momento fletor não uniforme e variação nas condições de contorno   |
| $C_w$     | momento de inércia setorial ou constante de empenamento  |
| $d$       | altura da seção transversal  |
| $D$       | centro de torção   |
| $e$       | excentricidade   |
| $E$       | módulo de elasticidade longitudinal, para o aço: $E = 205000$ MPa  |
| $f_b$     | tensão normal  |
| $f_r$     | tensão residual  |
| $f_v$     | tensão de cisalhamento   |
| $f_{vt}$  | tensão de torção uniforme  |
| $f_y$     | limite de escoamento do aço  |
| $G$       | módulo de elasticidade transversal, para o aço: $G = 0,385 E$  |

|            |  |
|------------|--|
| $h_0$      | altura da abertura   |
| $I_t$      | momento de inércia à torção  |
| $I_x$      | momento de inércia em relação ao eixo $x$  |
| $I_y$      | momento de inércia em relação ao eixo $y$  |
| $K$        | fator de comprimento efetivo referente à rotação da extremidade no plano de flambagem                                |
| $K_w$      | fator de comprimento efetivo referente ao empenamento da extremidade   |
| $k_y$      | coordenada do ponto de Kindem na direção do eixo $y$   |
| $L$        | vão da viga  |
| $l_0$      | distância do centro da abertura à extremidade da viga  |
| $L_b$      | comprimento do trecho sem contenção à flambagem lateral com torção (comprimento destravado)                          |
| $M$        | momento fletor   |
| $M_{0cr}$  | momento crítico para a situação de flexão uniforme e extremidades com vínculo de garfo                               |
| $M_{0cr1}$ | momento crítico para a situação de flexão uniforme, seção transversal prismática e extremidades com vínculo de garfo |
| $M_1$      | menor momento fletor, em valor absoluto, que atua nas extremidades do comprimento destravado                         |
| $M_2$      | maior momento fletor, em valor absoluto, que atua nas extremidades do comprimento destravado                         |
| $M_A$      | momento fletor, em valor absoluto, a 1/4 do comprimento destravado   |
| $M_B$      | momento fletor, em valor absoluto, no ponto médio do comprimento destravado  |
| $M_C$      | momento fletor, em valor absoluto, a 3/4 do comprimento destravado   |
| $M_{cr}$   | momento crítico (resistência nominal em regime elástico)   |
| $M_t$      | momento de torção uniforme   |
| $M_{max}$  | momento fletor máximo, em valor absoluto, no comprimento destravado  |
| $M_n$      | resistência nominal ao momento fletor  |
| $M_{pl}$   | momento de plastificação   |
| $M_r$      | momento fletor correspondente ao início do escoamento, incluindo ou não o efeito de tensões residuais                |
| $M_x$      | momento fletor em relação ao eixo $x$  |
| $M_y$      | momento fletor em relação ao eixo $y$  |



|          |  |
|----------|--|
| $P$      | carga concentrada  |
| $P_{cr}$ | carga crítica concentrada  |
| $q$      | carga distribuída  |
| $q_{cr}$ | carga crítica distribuída  |
| $r$      | coordenada que parte do esqueleto, perpendicularmente a ele  |
| $R$      | situação de condição de contorno com vínculo rígido nas duas extremidades do comprimento destravado, para os casos de viga biapoiada, apoiada e engastada, e biengastada   |
| $s$      | coordenada ao longo do esqueleto   |
| $S$      | situação de condição de contorno com vínculo de garfo nas duas extremidades do comprimento destravado, para os casos de viga biapoiada, apoiada e engastada, e biengastada |
| $S_x$    | momento estático em relação ao eixo $x$  |
| $t$      | espessura de um elemento de seção transversal genérico   |
| $T$      | energia potencial dos esforços externos ou energia potencial   |
| $T_1$    | parcela da energia potencial devida à carga transversal nos deslocamentos de 1ª ordem  |
| $T_2$    | parcela da energia potencial devida à carga transversal nos deslocamentos de 2ª ordem  |
| $T_3$    | parcela da energia potencial devida à carga transversal nos deslocamentos de 2ª ordem, através das tensões relativas a esta carga, em 1ª ordem                             |
| $t_w$    | espessura da alma da seção transversal   |
| $U$      | energia potencial dos esforços internos ou energia de deformação   |
| $U_w$    | constante de Vlasov  |
| $V$      | força cortante   |
| $w$      | área setorial  |
| $W$      | parâmetro igual a $\sqrt{(\pi^2 E C_w / L_b^2 GJ)}$  |
| $W_c$    | parâmetro igual a $\sqrt{(\pi^2 E C_w / L^2 GJ)}$ para vigas em balanço e vigas com contenção lateral interna  |
| $W_x$    | módulo resistente elástico em relação ao eixo $x$  |
| $x$      | eixo principal de inércia que define a seção transversal   |

|               |   |
|---------------|---|
| $x_D$         | coordenada $x$ do centro de torção  |
| $X_{LT}$      | fator de redução para a flambagem lateral com torção calculado pelo ENV 1993-1-1                    |
| $y$           | eixo principal de inércia que define a seção transversal  |
| $y_D$         | coordenada $y$ do centro de torção  |
| $z$           | eixo longitudinal   |
| $\alpha_{LT}$ | fator de imperfeição para a flambagem lateral com torção calculado pelo ENV 1993-1-1                |
| $\phi$        | rotação em torno do eixo que passa pelo centro de torção, paralelo ao eixo $z$                      |
| $\lambda$     | parâmetro ou índice de esbeltez   |
| $\lambda_p$   | parâmetro ou índice de esbeltez correspondente à plastificação                                      |
| $\lambda_r$   | parâmetro ou índice de esbeltez correspondente ao início do escoamento, com ou sem tensão residual  |
| $\mu$         | deslocamento na direção do eixo $x$   |
| $\mu_D$       | deslocamento do centro de torção na direção do eixo $x$   |
| $\nu$         | deslocamento na direção do eixo $y$   |
| $\nu_D$       | deslocamento do centro de torção na direção do eixo $y$   |
| $\Pi$         | energia potencial total   |
| $\psi$        | coeficiente que relaciona os momentos fletores aplicados nas extremidades do comprimento destravado |
| $\sigma_{cr}$ | tensão crítica de flambagem elástica  |
| $\omega$      | empenamento   |

## **1. INTRODUÇÃO**

### **1.1. Considerações Gerais**

#### **1.1.1. *Os Estados Limites nas Vigas de Aço***

As estruturas devem possuir características de resistência e rigidez de forma a terem comportamento adequado durante sua vida útil. Para isto, é necessário que não sejam atingidos os chamados estados limites, ou seja, que as respostas da estrutura não ultrapassem determinados valores além dos quais ela deixa de atender as funções para as quais foi projetada. Os estados limites são divididos em duas categorias: estados limites de utilização e estados limites últimos.

Os estados limites de utilização relacionam-se ao desempenho da estrutura no que se refere ao conforto físico e psicológico das pessoas que a ocupam, e à integridade dos materiais a ela ligados. Nas vigas de aço de edifícios, os estados limites de utilização mais comuns são as deformações elevadas, elásticas ou permanentes, e vibrações inaceitáveis.

Os estados limites últimos são aqueles relacionados ao esgotamento da capacidade portante da estrutura, o que significa que sua ocorrência está associada a um colapso parcial ou total. Nas vigas de aço de edifícios, os estados limites últimos que acontecem com mais frequência são:

- a plastificação total de uma ou mais seções transversais (formação de rótulas plásticas);
- a flambagem local da mesa comprimida, referida usualmente pela sigla FLM;
- a flambagem local da alma, referida usualmente pela sigla FLA;
- a flambagem lateral com torção, referida usualmente pela sigla FLT.

A rigor, só ocorrerá o colapso por formação de rótulas plásticas quando estas forem em número suficiente para tornar a viga hipostática. No entanto, quando não se está efetuando uma análise plástica, ainda pouco comum na prática, a formação de uma única rótula plástica em vigas com quaisquer condições de contorno é associada ao colapso por mudar seu grau de indeterminação cinemática.

A flambagem local da mesa comprimida e da alma ocorrem quando a viga possui estes componentes do perfil com esbeltez acima de determinados valores limites, normalmente fornecidos na literatura técnica especializada e nas normas ou especificações de projeto de estruturas de aço.

A flambagem lateral com torção é um processo de instabilidade que envolve uma flexão lateral, perpendicular ao plano do carregamento, caracterizado pelo deslocamento  $\mu(z)$  do centro de torção, e uma torção caracterizada pela rotação  $\phi(z)$ , conforme mostra a figura 1.1.

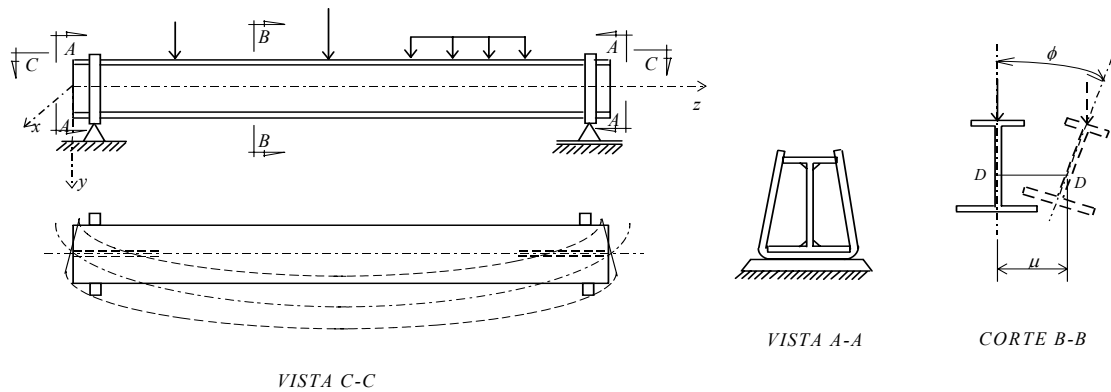


Figura 1.1 - Flambagem lateral com torção.

Este trabalho se limitará ao estudo do estado limite último de flambagem lateral com torção.

### 1.1.2. A Flambagem Lateral com Torção

A resistência nominal à flambagem lateral com torção,  $M_n$ , depende de vários fatores, entre os quais merecem destaque:

#### a) o comprimento do trecho sem contenção à flambagem lateral com torção

O comprimento do trecho sem contenção à flambagem lateral com torção, denominado comprimento destravado, é inversamente proporcional ao valor da resistência nominal, e pode determinar se o fenômeno se dará em regime elástico ou inelástico, ou ainda sua impossibilidade de ocorrência, em virtude de formação anterior de rótulas plásticas.

#### b) as condições de contorno que apresentam as seções com restrição à flambagem lateral com torção

Os quatro deslocamentos mais importantes, que podem ser impedidos em uma seção transversal restringindo a possibilidade de ocorrência da flambagem lateral com torção são, a rotação  $\phi$  e o empenamento  $\omega$ , que é uma função de  $\phi'$ , decorrentes da torção, o deslocamento do centro de torção no plano perpendicular ao de flexão,  $\mu$ , e a curvatura correspondente,  $\mu'$ . Quanto maior o número destes deslocamentos

impedidos, maior também será a resistência da viga. Na prática, na maioria das vezes, as condições de contorno costumam apresentar as seguintes características:

- todos os deslocamentos ( $\phi$ ,  $\omega$ ,  $\mu$  e  $\mu'$ ) impedidos, em um tipo de restrição à flambagem lateral com torção denominado de “vínculo rígido”;
- os deslocamentos  $\phi$  e  $\mu$  impedidos e  $\omega$  e  $\mu'$  liberados, em um tipo de restrição à flambagem lateral com torção denominado de “vínculo de garfo”.

A figura 1.2 apresenta os modos de flambagem, em planta, de uma viga de seção I com estes dois tipos de condições de contorno em ambas as suas extremidades do comprimento destravado.

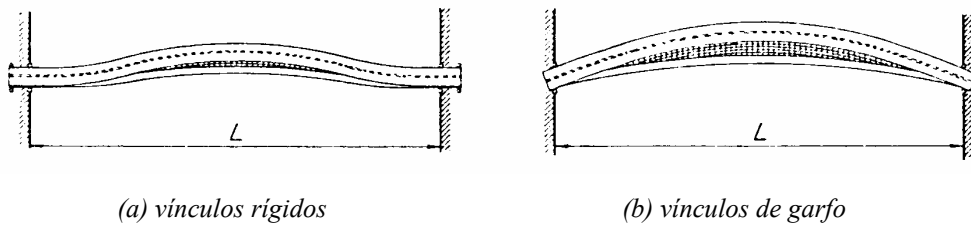


Figura 1.2 - Modos de flambagem de uma viga de seção I, conforme as condições de contorno.

c) *a seção transversal da viga*

Pode-se ter uma seção transversal mais ou menos resistente à flambagem lateral com torção, ou mesmo seções que não sofram este tipo de instabilidade, como por exemplo, os perfis I fletidos apenas em torno do eixo de menor inércia ou perfis tubulares de seção circular.

d) *a variação do momento fletor*

A situação mais desfavorável é aquela em que o momento fletor é constante ao longo da viga (figura 1.3), uma vez que causa compressão de mesma magnitude em uma parte da seção transversal ao longo de todo o comprimento da viga. Todas as outras situações em que o momento fletor é variável são mais favoráveis.

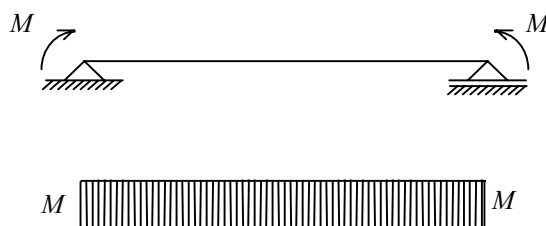


Figura 1.3 - Situação de momento fletor mais desfavorável.

e) *a existência de cargas transversais estabilizantes ou desestabilizantes*

As cargas estabilizantes são aquelas situadas em nível diferente do centro de torção e que tendem a reduzir a torção após a ocorrência da flambagem lateral, aumentando a resistência da viga a este tipo de instabilidade (figura 1.4.a). As desestabilizantes, ao contrário, são aquelas situadas em nível diferente do centro de torção e cujas linhas de ação se afastam deste ponto durante o fenômeno, aumentando a torção e reduzindo a resistência da viga (figura 1.4.c). Se as cargas se situam no nível do centro de torção e suas linhas de ação passam por ele, elas não são nem estabilizantes nem desestabilizantes (figura 1.4.b). Na prática, situações usuais de cargas estabilizantes e desestabilizantes ocorrem quando estas são aplicadas nas faces inferior e superior da seção transversal da viga, respectivamente.

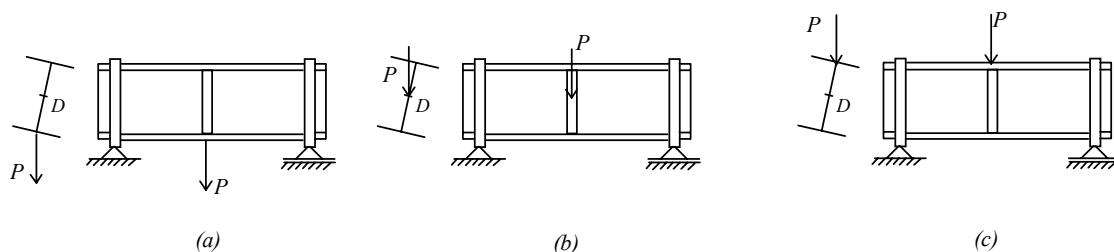


Figura 1.4 - Cargas estabilizantes e desestabilizantes.

f) *tensões residuais*

A magnitude e a distribuição das tensões residuais influem na antecipação ou retardamento da passagem da flambagem lateral com torção do regime elástico para o inelástico. Muitas vezes as tensões residuais são tratadas na bibliografia técnica como “imperfeições do material”.

g) *variação na seção transversal da viga em virtude de recortes nas mesas, aberturas na alma ou lamelas*

Os recortes nas mesas das vigas (figura 1.5.a), para facilitar sua ligação a outros componentes da estrutura, podem reduzir significativamente a resistência nominal da viga à flambagem lateral com torção. As aberturas na alma (figura 1.5.b), usadas por exemplo para passagem de dutos, também podem reduzir esta resistência. Ao contrário, lamelas colocadas junto a uma ou ambas as mesas da viga (figura 1.5.c) contribuem no sentido de aumentar esta resistência.

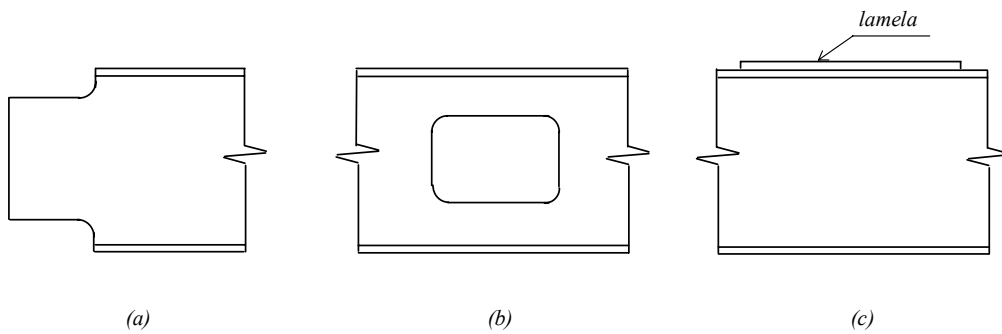


Figura 1.5 - Variação na seção transversal.

h) *imperfeições geométricas*

Por imperfeições geométricas entende-se tanto a excentricidade da linha de ação das cargas em relação ao centro de torção (figura 1.6.a), quanto uma rotação inicial (figura 1.6.b) ou curvatura inicial (figura 1.6.c) da barra.

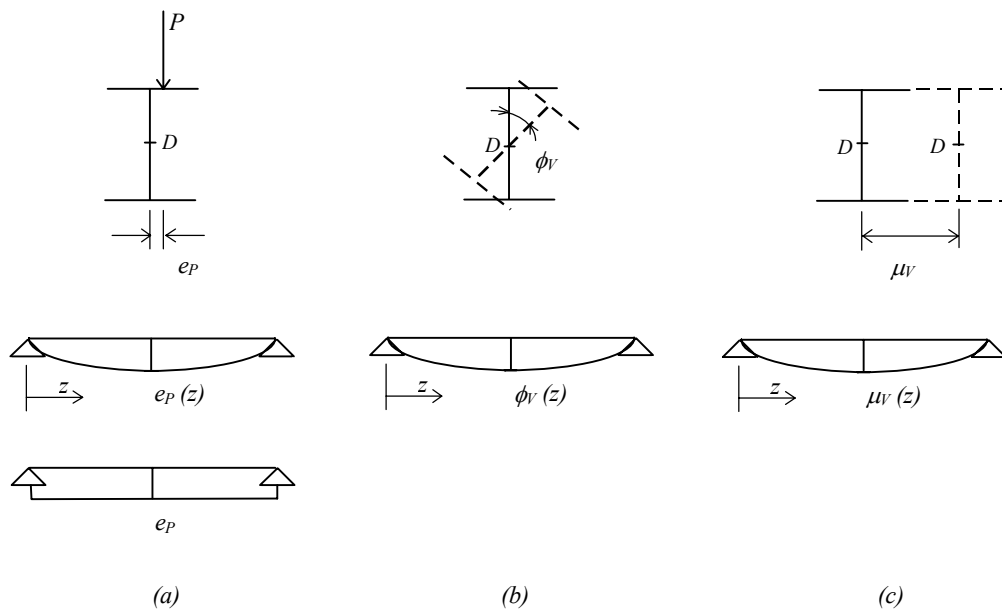


Figura 1.6 - Imperfeições geométricas.



## 1.2. Histórico

A determinação da resistência nominal ao momento fletor para o estado limite último de flambagem lateral com torção vem sendo estudada intensivamente desde a metade do século XIX. De acordo com Procter [1], as primeiras pesquisas relacionadas à flambagem lateral com torção foram feitas por Fairbairn e datam de 1854. Nestas pesquisas, Fairbairn já concluía que se a mesa comprimida tivesse espessura e largura superiores à mesa tracionada, sua resistência à flambagem lateral com torção seria maior. Posteriormente, resultados de ensaios em vigas de aço, obtidos por Burr (1884), Marburg (1909) e Moore (1910), levaram a fórmulas de projeto que mostravam a resistência nominal ao momento fletor como função do índice de esbeltez  $\lambda$  da mesa comprimida em relação ao eixo central de inércia situado no plano de flexão. Em 1899, Prandtl [2] apresentou uma solução teórica para o problema da flambagem elástica de vigas com seção transversal retangular, para vários tipos de carregamento e condições de contorno. Mais ou menos na mesma época, Michell [3] apresentou uma solução similar para o caso de vigas, também com seções transversais retangulares, simplesmente apoiadas submetidas a momento fletor constante.

O primeiro resultado para o valor da resistência nominal à flambagem lateral com torção de uma viga de seção I, em regime elástico, foi obtido por Timoshenko, entre os anos de 1906 e 1910, quando publicou vários artigos sobre o assunto na Rússia e Alemanha. Posteriormente, entre 1951 e 1961, foram feitas revisões destes trabalhos, pelo próprio Timoshenko [4, 5] e por Bleich [6]. Nesta mesma época, Vlasov [7] e Winter [8] trabalharam na busca de soluções para vigas simplesmente apoiadas, sujeitas à flambagem lateral com torção, considerando diferentes condições de contorno.

Ainda por volta da metade do século XX, vários outros pesquisadores se dedicaram a procurar soluções numéricas para o problema de flambagem lateral com torção, entre eles, Massonet [9], Horne [10], Salvadori [11] e Galambos [12]. Mais recentemente, em 1988, Gellin e Lee [13], Pandey e Sherbourne [14] e De Jong [15] apresentaram um método de energia alternativo para determinação da carga de flambagem lateral com torção. Uma comparação deste método com o método clássico pode ser vista em Pi et al. [16]. Rachid [17], em 1976, desenvolveu um trabalho em que o método da energia

era utilizado para formular um programa computacional que permitia a obtenção do carregamento crítico de instabilidade em seções prismáticas.

Em 1951, o Column Research Council iniciou a primeira de uma série de pesquisas sobre o assunto. Nesta mesma época, Salvadori [18] apresentou uma solução aproximada para obtenção do valor da carga elástica de flambagem lateral com torção de vigas contínuas. Ele propôs que cada tramo fosse considerado como uma viga simplesmente apoiada. A carga crítica do sistema seria considerada igual à menor carga crítica dos tramos isolados. Esta solução só seria válida se nos apoios houvesse vínculo de garfo.

Para casos de carregamento diferentes da situação de flexão pura, diversos métodos de obtenção da resistência nominal foram desenvolvidos a partir de 1950, os quais podem ser vistos em várias publicações [19, 20, 21, 22, 23, 24]. Para o caso de vigas sujeitas a carregamentos aplicados abaixo e acima do nível do centro de torção (cargas estabilizantes e desestabilizantes), tem-se mais recentemente os trabalhos de Nethercot e Rockey [25] e Nethercot [26], os quais consideram diferentes condições de contorno nas extremidades do comprimento destravado. No caso de vigas em balanço, têm-se os estudos de Anderson e Trahair [27], Nethercot [28] e Poley [29]. Muitos desses casos foram também apresentados por Chen e Lui [30].

Em 1977, Ojalvo e Chambers [31] apresentaram um trabalho onde são consideradas novas variáveis que influenciam o fenômeno da flambagem lateral com torção, entre elas, a presença de enrijecedores que impedem o empenamento das seções transversais em posições críticas. Foram feitos outros trabalhos nesta época relacionados ao assunto, por Vacharajittiphan e Trahair [32], Heins e Potocko [33] e Szewczak et al. [34].

Na década de 70, foram desenvolvidas também, pesquisas para se avaliar a resistência nominal à flambagem lateral com torção em vigas contínuas (Vacharajittiphan e Trahair [35], Nethercot [36], Trahair [37, 38, 39], Hartmann [40]), nas quais recomenda-se um método de solução simples e conservador, baseado na semelhança dos modos de flambagem de vigas contínuas e vigas simples.

Também na década de 70, para a análise inelástica da flambagem lateral com torção, têm-se o trabalho de Fukumoto e Kubo [41], que utiliza o Método das Diferenças Finitas. Entretanto, este método não é suficientemente geral para englobar as diversas situações que ocorrem na prática. Por esta razão, outros autores desenvolveram estudos utilizando o Método da Matriz de Transferência. Entre eles, Unger [42], que fez uso da matriz de transferência derivada do método de Runge-Kutta, e Yoshida e Imoto [43], que derivaram a matriz de transferência diretamente da solução geral das equações diferenciais e utilizaram um procedimento numérico para determinação da resistência à flambagem lateral com torção de vigas considerando vários tipos de condições de contorno.

Ainda para flambagem lateral com torção em regime inelástico, têm-se os estudos de Fukumoto e Galambos [44], em 1966, onde foi analisado o caso de vigas sujeitas a momento aplicado em apenas uma extremidade, considerando a influência das tensões residuais. No caso de momento fletor aplicado nas duas extremidades, Galambos [45] apresentou um método de solução baseado na determinação da redução das rigidezes lateral e de torção após o início do escoamento, incluindo também o efeito das tensões residuais, e propôs uma fórmula simplificada, que reduz consideravelmente o trabalho computacional. Em 1971, Hartmann [46], fez um estudo da derivação das equações diferenciais de compatibilidade e de equilíbrio dos nós internos, que são necessárias ao estudo da flambagem de vigas parcialmente escoadas, tendo seções transversais com pelo menos um eixo de simetria. As equações foram derivadas baseando-se no conceito do módulo tangente. Lay e Galambos [47], em 1966, examinaram o desempenho das contenções laterais em regime inelástico.

Para uma quantificação do efeito das contenções laterais na resistência nominal elástica, Zuk [48], em 1956, estudou oito casos de vigas e colunas. Alguns dos casos foram resolvidos diretamente das equações diferenciais, enquanto outros foram resolvidos aproximadamente pelo método da energia.

Lee e Galambos [49], em 1962, apresentaram os resultados de uma série de ensaios feitos para se estudar o comportamento de vigas curtas. Os objetivos deste estudo foram a determinação do máximo espaçamento entre seções com contenção à flambagem

lateral com torção, para que a instabilidade não pudesse ocorrer, em vigas sujeitas a momento constante e, o estudo da resistência pós-flambagem nestas vigas.

No caso de contenção lateral contínua de vigas, estudos realizados entre 1963 e 1985 com métodos teóricos de análise e ensaios utilizando-se diafragmas resistentes à cortante foram apresentados por Lawson e Nethercot [50], Apparao et al. [51], Pincus [52], Errera [53] e Pincus e Fischer [54] entre outros.

Para a análise de vigas com variação na geometria, têm-se os trabalhos de Cheng et al. [55], de 1988, entre outros, onde são analisados os efeitos de recortes nas mesas para facilitar a ligação da viga a outros elementos da estrutura sobre o valor da resistência nominal ao momento fletor. O estudo é feito considerando-se os diversos tamanhos de recorte em relação ao comprimento da viga. Em 1990, Darwin [56] propôs uma fórmula para o modificar o momento de inércia à torção, de maneira a considerar a redução na resistência de vigas com abertura na alma. Também Thevendran e Shanmugan [57], em 1991, fizeram um estudo em que mostraram como as aberturas na alma de vigas submetidas a momento fletor influem na resistência nominal. Eles levaram em consideração a variação na posição das aberturas ao longo do comprimento da viga, e situações em que se tem mais de uma abertura na alma.

Em 1992, Shen e Zhang [58] propuseram um procedimento em que se utiliza o método dos elementos finitos para análise não linear da estabilidade de barras de aço, considerando condições de contorno e seções transversais quaisquer, as tensões residuais e as imperfeições geométricas. Os resultados obtidos foram comparados com os resultados de outros métodos numéricos e dados experimentais. Nesta mesma direção, têm-se também os trabalhos de Lu et al. [59] e Ding e Shen [60]. Para o estudo da influência de imperfeições geométricas, pode-se citar também o estudo de Guo e Chen [61].

### **1.3. Tratamento Normalizado da Flambagem Lateral com Torção**

A seguir são descritos os procedimentos utilizados pela especificação americana, AISC/LRFD [62], pela norma brasileira para projeto de estruturas de aço de edifícios,

NBR 8800 [63] e pelo regulamento europeu ENV 1993-1-1 [64], para determinação da resistência nominal ao momento fletor para o estado limite último de flambagem lateral com torção e é feita uma breve comparação entre eles.

### 1.3.1 Procedimento Proposto pelo AISC/LRFD [62]

O valor da resistência nominal ao momento fletor, em relação ao estado limite último de flambagem lateral com torção, nos casos de vigas com seção I duplamente simétrica, sujeitas à flexão pura em relação ao eixo perpendicular à alma, em regime elástico, é baseado na equação clássica desenvolvida por Timoshenko e Gere [5] para a situação em que as extremidades do comprimento destravado apresentam vínculo de garfo:

$$M_{0cr} = \frac{\pi}{L_b} \sqrt{E I_y G I_t + \left(\frac{\pi E}{L_b}\right)^2 I_y C_w} \quad (1.1)$$

onde  $L_b$  é a distância entre duas seções contidas lateralmente (comprimento destravado),  $E$  o módulo de elasticidade longitudinal do aço,  $G$  o módulo de elasticidade transversal do aço,  $I_y$  o momento de inércia em relação ao eixo no plano da alma,  $I_t$  o momento de inércia à torção e  $C_w$  a constante de empenamento.

Para as situações onde o diagrama de momento fletor varia entre as seções contidas lateralmente, o AISC/LRFD [62] propõe que o valor da resistência nominal seja dado por:

$$M_n = C_b M_{0cr} \quad (1.2)$$

onde  $M_{0cr}$  é dado pela equação (1.1) e  $C_b$  é um fator de modificação para diagramas de momento não uniforme, ou simplesmente fator de momento equivalente, igual a:

$$C_b = \frac{12,5 M_{max}}{2,5 M_{max} + 3 M_A + 4 M_B + 3 M_C} \quad (1.3)$$

onde  $M_{max}$  é o maior momento fletor no comprimento destravado,  $M_A$  o momento fletor a 1/4 do comprimento destravado,  $M_B$  o momento fletor no ponto médio do comprimento destravado e  $M_C$  o momento fletor a 3/4 do comprimento destravado,

todos em valor absoluto. Esta equação do fator de momento equivalente foi levemente ajustada a partir da seguinte fórmula empírica, proposta por Kirby e Nethercot [65]:

$$C_b = \frac{12}{3 (M_A / M_{max}) + 4 (M_B / M_{max}) + 3 (M_C / M_{max}) + 2} \quad (1.4)$$

Se o parâmetro de esbeltez da viga,  $\lambda$ , definido como a relação entre o comprimento destravado  $L_b$  e o raio de giração em relação ao eixo situado no plano da alma ( $r_y$ ) seja menor que um valor limite  $\lambda_r$ , dado por

$$\lambda_r = \frac{0,707 \beta_1}{M_r} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{4 \beta_2}{\beta_1^2} M_r^2}} \quad (1.5)$$

onde  $M_r$  é o momento fletor correspondente ao início do escoamento, igual a

$$M_r = (f_y - f_r) W_x \quad (1.6)$$

sendo  $f_y$  o limite de escoamento do aço,  $f_r$  a tensão residual de compressão na mesa comprimida, igual a  $70 \text{ MPa}$  para perfis laminados e  $115 \text{ MPa}$  para perfis soldados e  $W_x$  o módulo resistente elástico, e  $\beta_1$  e  $\beta_2$  dados por

$$\beta_1 = \pi \sqrt{G E} \sqrt{I_t A} \quad (1.7)$$

$$\beta_2 = \frac{\pi^2 E}{4 G} \cdot \frac{A (d - t_f)^2}{I_t} \quad (1.8)$$

e maior que outro limite  $\lambda_p$ , igual a

$$\lambda_p = 1,75 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (1.9)$$

a flambagem lateral com torção ocorrerá em regime inelástico, e a resistência nominal é dada simplificada pela equação de uma reta que une os pontos  $(M_{pl}, \lambda_p)$  e  $(M_r, \lambda_r)$ , fatorada por  $C_b$  e limitada em  $M_{pl}$ , ou seja:

$$M_n = C_b \left[ M_{pl} - (M_{pl} - M_r) \left( \frac{\lambda - \lambda_p}{\lambda_r - \lambda_p} \right) \right] \leq M_{pl} \quad (1.10)$$

onde  $M_{pl}$  é o momento de plastificação da viga. Se  $\lambda$  não superar  $\lambda_p$ , a seção mais solicitada torna-se uma rótula plástica antes que possa ocorrer flambagem lateral com torção na viga, e se  $\lambda$  for maior que  $\lambda_r$ , a flambagem ocorrerá em regime elástico e a resistência nominal recebe a denominação de momento crítico elástico ou simplesmente momento crítico, sendo representada por  $M_{cr}$ .

A figura 1.7 ilustra a variação da resistência nominal ao momento fletor  $M_n$  em função do índice de esbelteza  $\lambda$  e do valor de  $C_b$ .

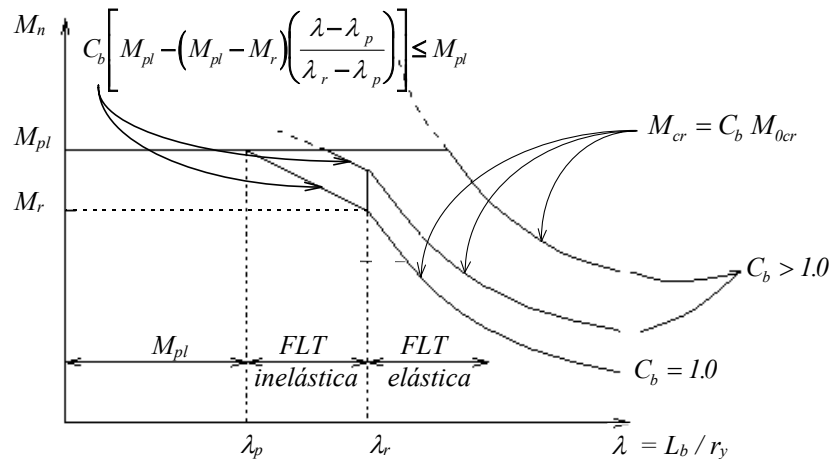


Figura 1.7 - Resistência nominal  $M_n$  em função do índice de esbelteza  $\lambda$  e de  $C_b$ .

Em complementação à seção I duplamente simétrica, o AISC/LRFD [62] também apresenta equações que fornecem  $M_{ocr}$ ,  $\lambda$ ,  $\lambda_p$  e  $\lambda_r$  dos seguintes perfis:

- I com um eixo de simetria no plano médio da alma fletidos em torno do eixo de maior inércia;
- U fletidos em torno do eixo de maior inércia;

- seções cheias retangulares fletidas em torno do eixo de maior inércia;
- caixão duplamente simétricos fletidos em torno do eixo de maior inércia.

Assim, a resistência nominal destes perfis pode ser também determinada, uma vez que o AISC/LRFD [62] permite, também para eles, a adoção das equações (1.2) e (1.10) para se obter as resistências nominais em regimes elástico e inelástico, respectivamente, e da equação (1.3) para se obter o fator de momento equivalente  $C_b$ .

O AISC/LRFD [62] estabelece também que:

- $C_b$  pode ser tomado igual a 1,0 para todos os casos, obtendo-se desta forma, valores muitas vezes bastante favoráveis à segurança;
- para balanços onde a extremidade livre não está contida lateralmente, os valores de  $C_b$  devem ser obrigatoriamente tomados igual a 1,0.

O procedimento apresenta as seguintes limitações:

- somente fornece bons resultados se as seções com contenção lateral tiverem vínculo de garfo, uma vez que equação (1.3), que define  $C_b$ , foi desenvolvida prevendo apenas esta situação;
- não considera a atuação de cargas estabilizantes ou desestabilizantes;
- não prevê qualquer variação de seção transversal;
- no caso de vigas com contenção lateral interna, não considera comportamento de peça contínua no plano de flambagem (cada trecho sem contenção lateral é analisado separadamente);
- não considera as imperfeições geométricas.



### 1.3.2. Procedimento Proposto pela NBR 8800 [63]

O procedimento proposto para determinação da resistência nominal ao momento fletor de vigas com seção I duplamente simétrica, pela NBR 8800 [63], é similar àquele do AISC/LFRD [62], conforme mostra a figura 1.8, com as seguintes modificações:

- o fator de momento equivalente  $C_b$  deve ser tomado conservativamente igual à unidade, exceto para casos de variação linear do diagrama de momento fletor, quando usa-se a equação proposta por Salvadori [11]:

$$C_b = 1,75 + 1,05 \left( \frac{M_1}{M_2} \right) + 0,3 \left( \frac{M_1}{M_2} \right)^2 \leq 2,3 \quad (1.11)$$

onde  $M_1$  e  $M_2$  representam, respectivamente, o menor e o maior dos momentos fletores, em valor absoluto, que atuam nas extremidades do comprimento destravado. A relação  $(M_1/M_2)$  tem sinal positivo quando os momentos provocam curvatura reversa, e negativo quando provocam curvatura simples;

- o parâmetro de esbeltez  $\lambda_r$  é corrigido pelo fator  $C_b$ , e igual a

$$\lambda_r = \frac{0,707 C_b \beta_1}{M_r} \sqrt{I + \sqrt{I + \frac{4 \beta_2}{C_b^2 \beta_1^2} M_r^2}} \quad (1.12)$$

onde  $M_r$  é dado pela expressão (1.6), com a tensão residual de valor igual a  $115 \text{ MPa}$  para perfis laminados e soldados, e  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são dados pelas expressões (1.7) e (1.8), respectivamente;

- para  $\lambda$  entre  $\lambda_p$  e  $\lambda_r$ , a flambagem lateral com torção ocorre em regime inelástico, e a resistência nominal é dada simplificada pela equação de uma reta que une os pontos  $(M_{pl}, \lambda_p)$  e  $(M_r, \lambda_r)$ :

$$M_n = M_{pl} - (M_{pl} - M_r) \left( \frac{\lambda - \lambda_p}{\lambda_r - \lambda_p} \right) \quad (1.13)$$

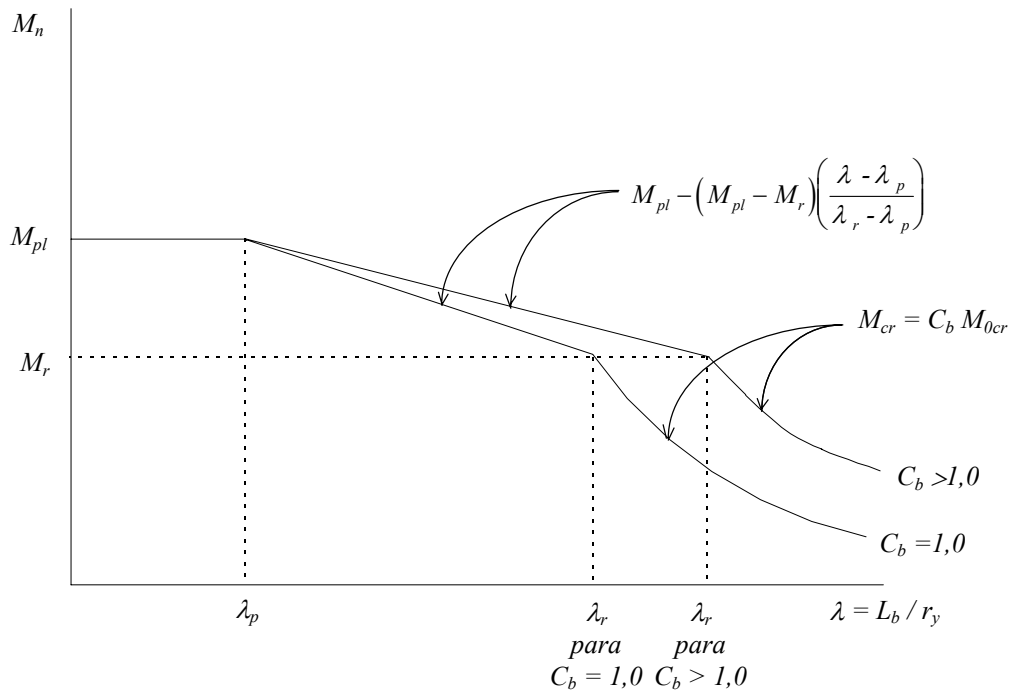


Figura 1.8 - Resistência nominal ao momento fletor de acordo com a NBR 8800 [63].

As limitações que o procedimento da NBR 8800 [63] possui são iguais às do AISC/LRFD [62].

### 1.3.3. Procedimento Proposto pelo ENV 1993-1-1 [64]

O cálculo da resistência nominal ao momento fletor, considerando-se apenas o estado limite último de flambagem lateral com torção, é dado através da equação:

$$M_n = X_{LT} M_{pl} \quad (1.14)$$

onde  $X_{LT}$  é um fator de redução dado por:

$$X_{LT} = \frac{1}{\phi_{LT} + \sqrt{\phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2}} \leq 1 \quad (1.15)$$

sendo

$$\phi_{LT} = 0,5 \left[ 1 + \alpha_{LT} (\bar{\lambda}_{LT} - 0,2) + \bar{\lambda}_{LT}^2 \right] \quad (1.16)$$

Nesta expressão,  $\alpha_{LT}$  é um fator de imperfeição, cujos valores são 0,21 para seções laminadas e 0,49 para seções soldadas, obtidos a partir de ensaios e análises numéricas, e

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{M_{pl}}{M_{cr}}} \quad (1.17)$$

onde  $M_{cr}$  é o momento crítico elástico para flambagem lateral com torção.

O ENV 1993-1-1 [64] determina também, que se  $\bar{\lambda}_{LT} \leq 0,4$ , não é necessária nenhuma verificação no que diz respeito à flambagem lateral com torção.

A figura 1.9 ilustra os valores de  $M_n$  em função de  $\bar{\lambda}_{LT}$ .

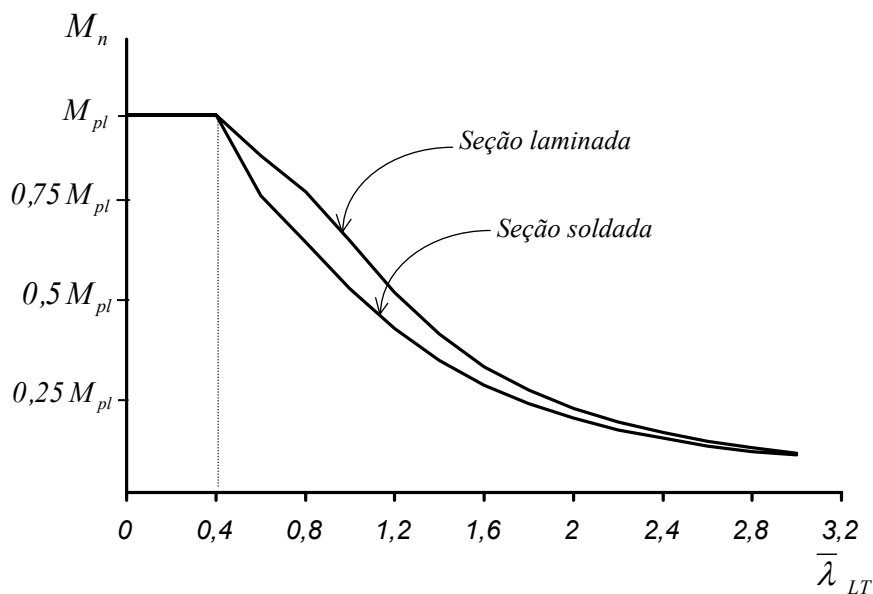


Figura 1.9 - Resistência nominal,  $M_n$  em função do parâmetro  $\bar{\lambda}_{LT}$ .

A determinação do momento crítico elástico  $M_{cr}$ , é dada no Anexo F do ENV 1993-1-1 [64], através de fórmulas que levam em conta o tipo de seção transversal, o

carregamento, que pode inclusive ser estabilizante ou desestabilizante, e as condições de contorno, conforme segue:

- para vigas com seção transversal duplamente simétrica e uniforme, com mesas iguais, sujeitas a momento uniforme e carregamento passando pelo centro de torção, para vínculos de garfo nas extremidades do comprimento destravado  $L_b$ , o momento crítico elástico é dado por

$$M_{cr} = \frac{\pi^2 E I_y}{L_b^2} \sqrt{\frac{C_w}{I_y} + \frac{L_b^2 G I_t}{\pi^2 E I_y}} \quad (1.18)$$

- para vigas com seção transversal simétrica em relação ao eixo de menor inércia, o momento crítico elástico é dado pela fórmula geral:

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 E I_y}{(KL_b)^2} \left\{ \sqrt{\left(\frac{K}{K_w}\right)^2 \frac{C_w}{I_y} + \frac{(KL_b)^2 G I_t}{\pi^2 E I_y} + (C_2 y_g - C_3 y_j)^2} - (C_2 y_g - C_3 y_j) \right\} \quad (1.19)$$

onde,  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são fatores que dependem do carregamento e das condições de contorno nas extremidades,  $K$  e  $K_w$  são fatores de comprimento efetivo e  $y_g$  e  $y_j$  são dados respectivamente por

$$y_g = y_a - y_D \quad (1.20)$$

sendo  $y_a$  a coordenada do ponto de aplicação da carga e  $y_D$  a coordenada do centro de torção, e

$$y_j = y_D - \frac{0,5}{I_x} \int_A (y^2 + x^2) y dA \quad (1.21)$$

O fator de comprimento efetivo  $K$  refere-se à rotação das extremidades do comprimento destravado no plano de flambagem. Se a rotação for livre nas duas extremidades,  $K=1,0$ , se for impedida,  $K=0,5$ , e se for livre em uma extremidade e impedida na outra,  $K=0,7$ . De forma semelhante, o fator  $K_w$  refere-se ao empenamento. Se o empenamento for livre nas duas extremidades,  $K_w=1,0$ , se for impedido,  $K_w=0,5$ , e se for livre em uma extremidade e impedido na outra,  $K_w=0,7$ . A menos que seja feito algum tipo de fixação que impeça o empenamento,  $K_w$  deve ser tomado igual à unidade.

Os valores de  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são dados na Tabela 1.1, considerando vários casos de carregamento e os vários valores de  $K$ . Para os casos em que só existam momentos fletores aplicados nas extremidades do comprimento destravado, e em que  $K=1,0$ , o valor de  $C_1$ , para qualquer razão entre os momentos aplicados, é dado por

$$C_1 = 1,88 - 1,40\psi + 0,52\psi^2 \leq 2,70 \quad (1.22)$$

onde  $\psi$  é um coeficiente que relaciona o menor e o maior momento fletor nas extremidades do comprimento destravado (ver Tabela 1.1).

Para cargas transversais,  $y_g$  é positivo quando as cargas estiverem aplicadas acima do nível do centro de torção. De maneira mais geral, ele é positivo quando a linha de ação da carga agir no sentido do centro de torção, a partir do ponto de aplicação.

Ao se determinar  $y_j$ , convencionou-se que, para perfis I monossimétricos,  $y_D$  é positivo quando a mesa com maior valor de  $I_y$  estiver comprimida no ponto de maior momento fletor (figura 1.10.a), e para perfis T, quando a mesa estiver comprimida (figura 1.10.b).

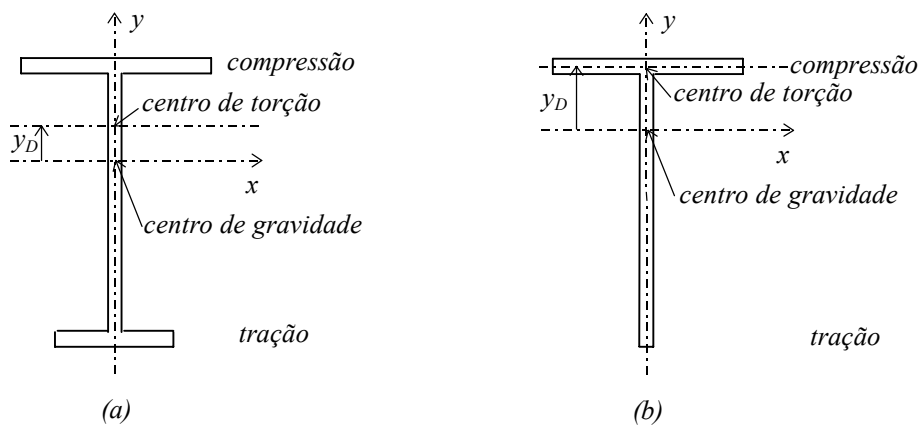


Figura 1.10 - Convenção de sinais para determinação de  $y_D$ .



- para vigas com seção transversal uniforme duplamente simétrica,  $y_j = 0$ , e:

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 E I_y}{(KL_b)^2} \left\{ \sqrt{\left(\frac{K}{K_w}\right)^2 \frac{C_w}{I_y} + \frac{(KL_b)^2 G I_t}{\pi^2 E I_y}} + (C_2 y_g)^2 - C_2 y_g \right\} \quad (1.23)$$

Se estiverem aplicados momentos nas extremidades,  $C_2 = 0$ , e se estiverem aplicadas cargas transversais passando pelo centro de torção,  $y_g = 0$ . Nestes casos:

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 E I_y}{(KL_b)^2} \sqrt{\left(\frac{K}{K_w}\right)^2 \frac{C_w}{I_y} + \frac{(KL_b)^2 G I_t}{\pi^2 E I_y}} \quad (1.24)$$

Quando  $K = K_w = 1,0$ , e:

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 E I_y}{L_b^2} \sqrt{\frac{C_w}{I_y} + \frac{L_b^2 G I_t}{\pi^2 E I_y}} \quad (1.25)$$

- para vigas com seção transversal I uniforme monossimétrica com mesas desiguais:

$$C_w = \beta_f (1 - \beta_f) I_y h_s^2 \quad (1.26)$$

onde

$$\beta_f = \frac{I_{fc}}{I_{fc} + I_{ft}} \quad (1.27)$$

sendo  $I_{fc}$  o momento de inércia da mesa comprimida em relação ao menor eixo da seção,  $I_{ft}$  o momento de inércia da mesa tracionada em relação ao menor eixo da seção e  $h_s$  a distância entre os centros de cisalhamento das mesas. Para  $y_j$  pode ser feita a seguinte aproximação:

$$y_j = \begin{cases} 0,8 (2\beta_f - 1) h_s / 2 & \text{quando } \beta_f > 0,5 \\ 1,0 (2\beta_f - 1) h_s / 2 & \text{quando } \beta_f < 0,5 \end{cases} \quad (1.28)$$

No caso de seções com a mesa comprimida enrijecida:



$$y_j = \begin{cases} 0,8 (2\beta_f - 1) (1 + h_L / h) h_s / 2 & \text{quando } \beta_f > 0,5 \\ 1,0 (2\beta_f - 1) (1 + h_L / h) h_s / 2 & \text{quando } \beta_f < 0,5 \end{cases} \quad (1.29)$$

onde  $h_L$  é a profundidade do enrijecedor.

O procedimento apresenta as seguintes limitações:

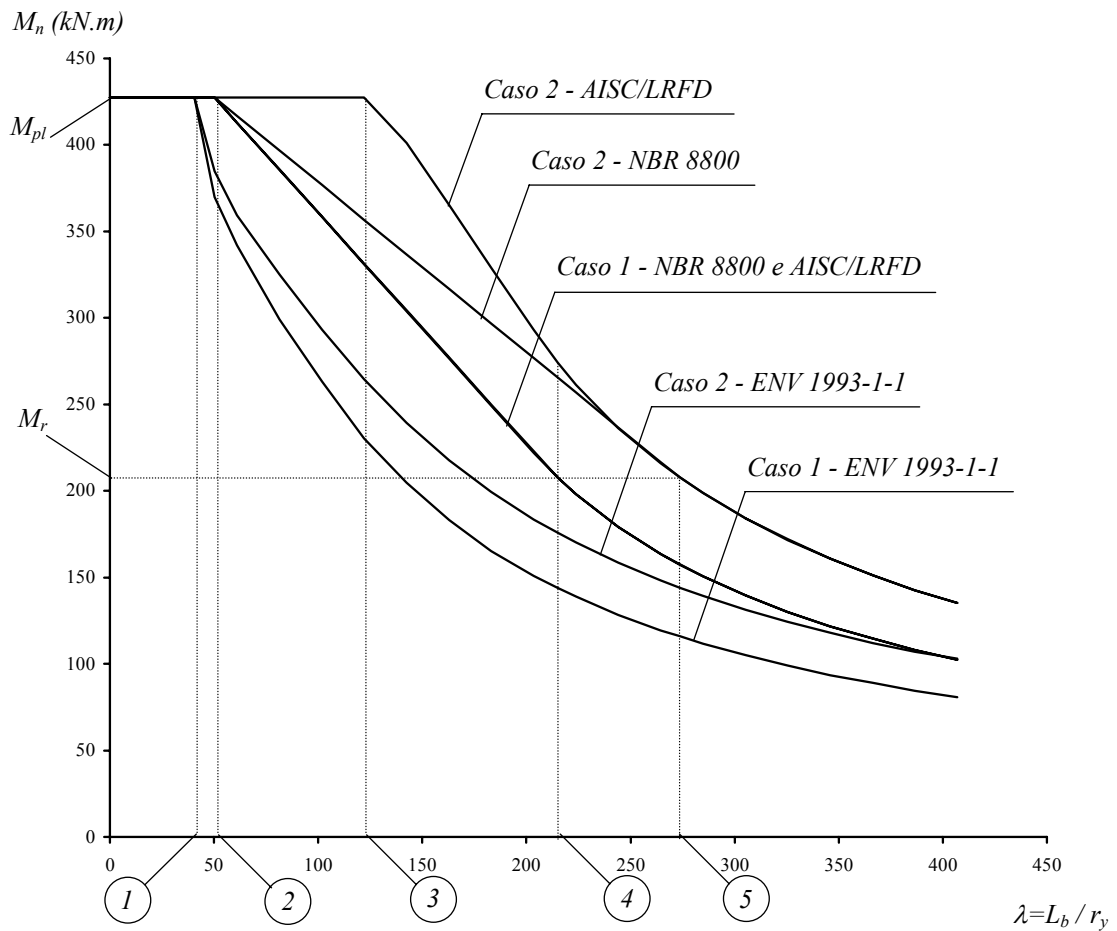
- as situações de carregamento e de condições de contorno no plano de flexão e de flambagem restringem-se aos casos apresentados na Tabela 1.1;
- não prevê qualquer variação na seção transversal;
- no caso de vigas com contenção lateral interna, não considera comportamento de peças contínuas no plano de flambagem;
- não considera vigas em balanço.

#### 1.3.4. Estudo Comparativo

Para efeito de comparação, foram determinadas as resistências nominais ao momento fletor de uma viga com seção I duplamente simétrica, soldada, com altura igual a 400 mm, largura das mesas igual a 200 mm e espessuras das mesas e da alma iguais a 19 mm e 8 mm, respectivamente, em função de  $\lambda = L_b / r_y$ , através dos procedimentos propostos pelo AISC/LRFD [62], NBR 8800 [63] e ENV 1993-1-1 [64]. As seções contidas lateralmente apresentam vínculo de garfo. O limite de escoamento do aço foi tomado igual a 250 MPa. Os resultados estão mostrados na figura 1.11. Tomaram-se dois carregamentos, a saber:

- *Caso 1*: flexão pura, o que significa tomar  $C_b = 1,00$  pelo AISC/LRFD [62] e pela NBR 8800 [63], e  $M_{cr}$  pela equação (1.18) no ENV 1993-1-1 [64];

- *Caso 2*: carregamento hipotético, aplicado no nível do centro de torção, que proporciona  $C_b = 1,32$  pelo AISC/LRFD [62] e pela NBR 8800 [63], e  $M_{cr}$  pela equação (1.24), com  $C_1 = 1,32$  e  $K = K_w = 1$  no ENV 1993-1-1 [64].



- 1 - Valor de  $\lambda$  correspondente a  $\bar{\lambda}_{LT}$  do ENV 1993-1-1 igual a 0,4.
- 2 - Valor de  $\lambda_p$  para NBR 8800 e AISC/LRFD.
- 3 - Valor de  $\lambda$  abaixo do qual ocorre plastificação total da seção transversal, para Caso 2 - AISC/LRFD.
- 4 - Valor de  $\lambda_r$  para Caso 1 - NBR 8800 e Casos 1 e 2 - AISC/LRFD.
- 5 - Valor de  $\lambda_r$  para o Caso 2 - NBR 8800.

Figura 1.11 - Comparação entre valores da resistência nominal à flambagem lateral com torção.

Os valores obtidos pelo processo do ENV 1993-1-1 [64] são os mais conservativos, por considerar as influências das imperfeições geométricas, descritas no item 1.1.2, o que as outras duas especificações não fazem.

#### **1.4. Proposta de Trabalho**

Conforme se viu nos procedimentos propostos pelo AISC/LRFD [62], NBR 8800 [63] e ENV 1993-1-1 [64], a determinação correta da resistência nominal ao momento fletor depende fundamentalmente de se ter o valor do momento crítico de flambagem lateral com torção em regime elástico,  $M_{cr}$ . No entanto, a determinação de  $M_{cr}$  para diversas situações de carregamento, condições de contorno no plano de flambagem ou relacionadas à flambagem lateral com torção e variação da seção transversal, não pode ser feita de forma rápida e objetiva com base nas especificações de projeto de estruturas de aço e nem com base em dados fornecidos pela literatura técnica específica. Tem-se, nestes casos, a necessidade de se recorrer a programas comerciais de custo elevado, com alto tempo de processamento, normalmente com entradas de dados pouco otimizadas e que exigem conhecimentos específicos.

Para procurar solucionar este problema, neste trabalho será apresentado um processo de análise em que se utilizará o método dos elementos finitos em sua formulação energética, que permite obter valores de  $M_{cr}$  bastante precisos, considerando quaisquer condições de contorno no plano de flexão e relacionadas à flambagem lateral com torção, a possibilidade de atuação de cargas transversais em nível coincidente ou diferente do centro de torção (cargas estabilizantes ou desestabilizantes), vigas com contenções laterais internas que se comportam como peças contínuas no plano de flambagem, vigas com variação na seção transversal em função de lamelas, aberturas na alma ou recortes nas mesas para ligação. Este processo de análise será denominado neste trabalho de método da energia.

Como o processo é adequado à automatização, será desenvolvido um programa computacional em linguagem Turbo-Pascal, com entrada de dados interativa ou por arquivo, para obtenção de  $M_{cr}$  dos seguintes perfis:

- I com dois eixos de simetria ou com um eixo de simetria no plano médio da alma, fletidos em torno do eixo de maior inércia;
- U não sujeitos à torção fletidos em torno do eixo de maior inércia;
- seções cheias retangulares fletidas em torno do eixo de maior inércia;
- caixão duplamente simétricos fletidos em torno do eixo de maior inércia;
- T com um eixo de simetria no plano médio da alma, fletidos em torno do eixo perpendicular à alma.

Estes perfis, com os eixos de flexão citados, representam todos aqueles relacionados no Anexo D da NBR 8800 [63], suscetíveis ao estado limite último de flambagem lateral com torção.

Os resultados fornecidos pelo programa serão comparados com aqueles obtidos pelo AISC/LRFD [62], NBR 8800 [63] e ENV 1993-1-1 [64], para casos previstos por estas especificações e também com casos existentes na literatura técnica. Serão ainda fornecidos resultados que não constam de nenhuma especificação.

## 2. MÉTODO DA ENERGIA

### 2.1. Introdução

Na determinação do carregamento que provoca a flambagem lateral com torção de vigas, considerando-se análise estática, duas formas de energia se envolvem no problema: a energia potencial dos esforços internos ou energia de deformação ( $U$ ), e a energia potencial dos esforços externos ou simplesmente energia potencial ( $T$ ). A energia potencial total do sistema ( $\Pi$ ) é dada pela soma destas duas parcelas de energia, ou seja:

$$\Pi = U + T \quad (2.1)$$

Utilizando-se o Princípio da Conservação da Energia, uma vez que o sistema em questão é conservativo, percebe-se que tais grandezas se interagem de maneira a manter constante sua energia total, ou seja, a diminuição da energia de deformação implica no aumento da energia potencial e vice-versa, de modo que não há variação na energia total. Logo:

$$\delta \Pi = \delta U + \delta T = 0 \quad (2.2)$$

Consegue-se assim, através do cálculo variacional, minimizar a energia potencial total e com isso chegar às soluções pretendidas.

## 2.2. Premissas Básicas

Tendo por base os trabalhos de Rachid [17], Rachid e Mori [66], Laier e Barreiro [67] e Palermo [68], é desenvolvida a expressão da energia potencial total de uma viga para o caso da flambagem lateral com torção. Para isto, serão adotadas as seguintes premissas (figura 2.1):

- a espessura  $t_i$  é muito menor se comparada com as dimensões da seção transversal e estas são bastante menores que o comprimento da viga;
- a seção não se deforma em seu plano;
- o sistema de eixos  $xyz$  é escolhido de forma que a viga tenha sua seção transversal definida pelos eixos centrais de inércia  $x$  e  $y$ . O seu comprimento será definido ao longo do eixo longitudinal  $z$ , que passa pelo centro de gravidade da seção transversal. Além disso, tem-se uma coordenada  $s$  ao longo do esqueleto (linha que passa pela espessura média da seção transversal) e permite-se que a espessura  $t_i$  possa variar com  $s$ . O centro de torção é definido por  $D$ , de coordenadas  $x_D$  e  $y_D$ ;

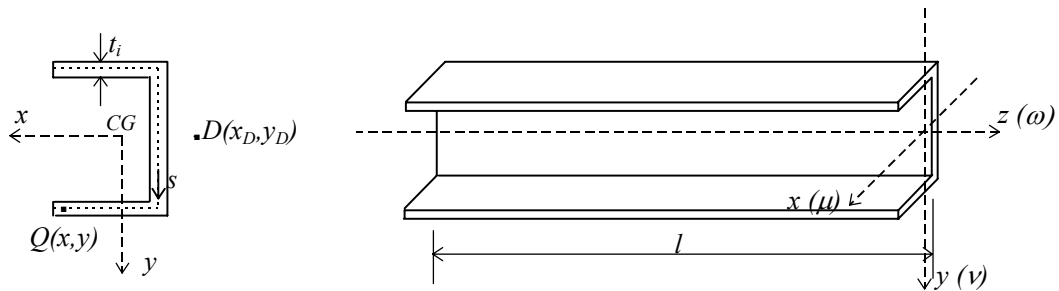


Figura 2.1 - Sistemas de eixos adotados com seus sentidos positivos.

- os deslocamentos possíveis de ocorrer são a rotação da seção transversal em torno do eixo longitudinal, paralelo ao eixo  $z$ , que passa pelo centro de torção ( $\phi$ ), a translação horizontal na direção do eixo  $x$  ( $\mu$ ), a translação vertical na direção do eixo  $y$  ( $\nu$ ) e o empenamento ( $\omega$ ), que é função da derivada primeira de  $\phi$ ;

- para um ponto qualquer da seção transversal,  $Q$ , que tenha coordenadas genéricas  $(x,y)$ , os deslocamentos são dados em função dos deslocamentos do centro de torção  $D (\mu_D, \nu_D)$  e do giro  $\phi$ , que caracterizam a posição deformada,

$$\mu = \mu_D - (y - y_D)\phi \quad (2.3)$$

e

$$\nu = \nu_D + (x - x_D)\phi \quad (2.4)$$

Para o estudo da flambagem lateral com torção, interessará apenas o deslocamento  $\mu$  dado pela expressão (2.3), que relaciona a translação horizontal na direção do eixo  $x$  ( $\mu_D$ ) com a rotação em torno do eixo longitudinal que passa por  $D$  ( $\phi$ ). Deve-se ressaltar ainda que, devido ao fato da seção ser indeformável em seu plano, passa-se a ter movimento de corpo rígido no plano  $xy$  e os deslocamentos são função apenas de  $z$ , ou seja,  $\mu_D(z)$  e  $\phi(z)$ ;

- só serão permitidos carregamentos transversais ou momentos fletores que causem flexão no plano definido pelos eixos  $y$  e  $z$ , e além disso, as forças transversais devem ter sua linha de ação passando pelo centro de torção;
- os esforços solicitantes a serem considerados são o esforço cortante, o momento fletor e o bimomento;
- as tensões internas consideradas no estudo da estabilidade, segundo a teoria de Vlasov [69] são a tensão normal ( $f_b$ ) e a tensão de cisalhamento ( $f_v$ ). A tensão normal, em teoria de 2<sup>a</sup> ordem e pequenos deslocamentos, é dada por:

$$f_b = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x + \frac{B}{C_w} w \quad (2.5)$$

onde  $M_x$  e  $I_x$  são, respectivamente, o momento fletor e o momento de inércia em relação ao eixo  $x$ ,  $M_y$  é o momento fletor, em 2<sup>a</sup> ordem, em relação ao eixo  $y$ ,  $I_y$  é o momento de inércia em relação ao eixo  $y$ ,  $B$  é o bimomento,  $C_w$  é o momento de

inércia setorial ou constante de empenamento e  $w$  é a área setorial, dada em função da coordenada  $s$ .

A tensão de cisalhamento a ser considerada é apenas aquela decorrente da torção uniforme, ou torção de Saint Venant, ( $f_{vl}$ ), uma vez que, as parcelas da tensão de cisalhamento oriundas da flexão e da flexo-torção são desprezíveis. Portanto:

$$f_{vl} = \frac{2 M_t}{I_t} r \quad , \quad (2.6)$$

onde  $M_t$  é o momento de torção uniforme em 2ª ordem,  $I_t$  é o momento de inércia à torção e  $r$  é a ordenada que parte do esqueleto, perpendicularmente a ele, de forma que a tensão varie linearmente até a borda do elemento, conforme é mostrado na figura 2.2.

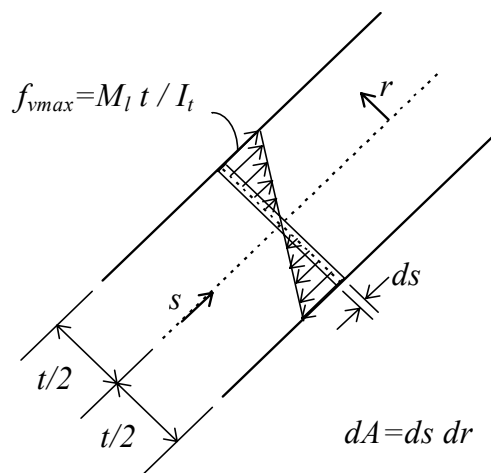


Figura 2.2 - Variação da tensão de torção livre ao longo da espessura do elemento.

### 2.3. Energia de Deformação

A única contribuição que se tem para esta parcela da energia, é a do trabalho realizado pelas forças internas segundo os deslocamentos decorrentes da deformação da estrutura. Isto porque, conforme pode-se perceber, o trabalho resultante do movimento de corpo rígido não irá influir nos resultados, uma vez que os esforços internos são autoequilibrados (ações e reações entre elementos adjacentes). A expressão da energia



de deformação é portanto, igual à expressão do trabalho para um elemento infinitesimal de volume  $dV$ , sujeito à tensões normais e de cisalhamento, e é dada por:

$$dU = \frac{1}{2}(f_b \varepsilon + f_{vl} \gamma_l) dV \quad (2.7)$$

Integrando-se no volume e aplicando-se as relações da lei de Hooke, chega-se a:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left( \frac{f_b^2}{E} + \frac{f_{vl}^2}{G} \right) dV \quad (2.8)$$

Substituindo-se  $f_b$  pela expressão (2.5) e  $f_{vl}$  pela expressão (2.6), e retirando-se os termos constantes das integrais, obtém-se

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \frac{M_x^2}{E I_x^2} \left( \int_A y^2 dA \right) + \frac{M_y^2}{E I_y^2} \left( \int_A x^2 dA \right) + \frac{B^2}{E C_w^2} \left( \int_A w^2 dA \right) \right] dz + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{4 M_t^2}{G I_t^2} \left( \int_s^{-t/2}^{t/2} r^2 dr ds \right) dz \quad (2.9)$$

Resolvendo-se a integral em  $r$  do termo entre parêntesis da segunda parcela, tem-se

$$\int_s^{-t/2}^{t/2} r^2 dr ds = \int_s \frac{r^3}{3} \Big|_{-t/2}^{t/2} ds = \int_s \frac{t^3}{12} ds = \frac{1}{4} \int_s \frac{t^3}{3} ds \quad (2.10)$$

Por definição,

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad (2.11)$$

$$I_y = \int_A x^2 dA \quad (2.12)$$

$$C_w = \int_A w^2 dA \quad (2.13)$$

e

$$I_t = \int_s \frac{t^3}{3} ds \quad (2.14)$$

Portanto a expressão (2.9) pode ser escrita na forma

$$U = \frac{I}{2} \int_0^l \left( \frac{M_x^2}{E I_x} + \frac{M_y^2}{E I_y} + \frac{B^2}{E C_w} + \frac{M_t^2}{G I_t} \right) dz \quad (2.15)$$

Como os esforços correspondem aos deslocamentos, são válidas as relações:

$$M_x = -E I_x v_D'' \quad (2.16)$$

$$M_y = -E I_y \mu_D'' \quad (2.17)$$

$$B = E C_w \phi'' \quad (2.18)$$

e

$$M_t = G I_t \phi' \quad (2.19)$$

Relembrando que, para a flambagem lateral com torção, apenas os deslocamentos de translação horizontal ( $\mu_D$ ) e rotação ( $\phi$ ) são importantes, pode-se desconsiderar o termo envolvendo o momento fletor em relação ao eixo  $x$  ( $M_x$ ), pois este esforço levaria a deslocamentos de translação vertical ( $v_D$ ). Portanto, levando (2.17) a (2.19) na expressão (2.15), chega-se finalmente à expressão da energia de deformação

$$U = \frac{I}{2} \int_0^l \left[ E I_y (\mu_D'')^2 + E C_w (\phi'')^2 + G I_t (\phi')^2 \right] dz \quad (2.20)$$

## 2.4. Energia Potencial

Contribui para a energia potencial o trabalho realizado pela ação das forças externas, que pode ser dividido em duas parcelas: uma primeira devida ao trabalho das forças externas nos deslocamentos correspondentes em 1ª ordem, e uma segunda parcela devida ao trabalho destas mesmas forças externas nos deslocamentos de 2ª ordem.

Para facilitar o desenvolvimento da expressão da energia potencial, os termos das duas parcelas serão analisados separadamente e, no final, suas contribuições serão somadas.

### 2.4.1. Cargas Transversais nos Deslocamentos de 1ª Ordem

Conforme o item 2.2, somente serão consideradas forças transversais atuando na direção do eixo  $y$  de modo que a flexão será sempre no plano  $yz$ . Além disso, apenas forças concentradas ( $P$ ) e forças distribuídas ( $q$ ) serão previstas.

Para se analisar o trabalho realizado pela ação destas forças, considerando-se os deslocamentos em 1ª ordem, primeiramente aplica-se uma força concentrada  $P_i$ , distanciada do nível do centro de torção de um valor  $e_i$ . Os deslocamentos do ponto de aplicação da força serão os deslocamentos do centro de torção  $D$ .

A parcela da energia devida à ação de todas as forças concentradas, considerando-se a contribuição do trabalho no deslocamento do centro de torção, é dada por

$$T_l^{(P)} = -\sum P_i v_{Di} \quad (2.21)$$

Para as forças distribuídas, o desenvolvimento é feito de maneira análoga, chegando-se assim à seguinte expressão para a energia potencial decorrente do trabalho das forças atuantes:

$$T_l = T_l^{(P)} + T_l^{(q)} = -\sum P_i v_{Di} - \int_0^l q v_D dz \quad (2.22)$$

De acordo com Rachid [17], aplicando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais às cargas que estão atuando nos deslocamentos do centro de torção, sendo  $M_x$  o esforço interno correspondente, e efetuando-se o cálculo necessário, tem-se que:

$$-\sum P_i v_{Di} - \int_0^l q v_D dz = \int_0^l M_x (v_D'' + \mu_D'' \phi) dz \quad (2.23)$$

Como apenas os termos em  $\mu_D$  e  $\phi$  são relevantes para o presente estudo, e substituindo a expressão anterior na expressão (2.22), chega-se à parcela da energia potencial devida à contribuição das cargas transversais:

$$T_l = \int_0^l M_x \mu_D'' \phi dz \quad (2.24)$$

#### **2.4.2. Cargas Transversais nos Deslocamentos de 2ª Ordem**

Neste caso, para se considerar o trabalho realizado pela ação destas forças, nos deslocamentos correspondentes em 2ª ordem, será usado o mesmo procedimento do item 2.4.1. Assim, aplicando-se uma força concentrada  $P_i$ , excêntrica em relação ao centro de torção de um valor  $e_i$ , obtém-se o deslocamento em 2ª ordem mostrado na figura 2.3.

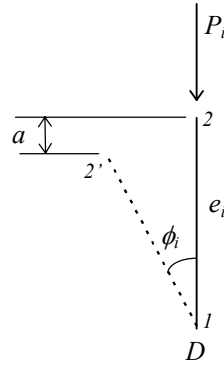


Figura 2.3 - Deslocamento em 2ª ordem devido à aplicação de uma força concentrada.

O deslocamento  $a$ , na direção da força, é dado por:

$$a = (1 - \cos \phi_i) e_i = 2 \left( \sin \frac{\phi_i}{2} \right)^2 e_i \quad (2.25)$$

onde, fazendo-se as aproximações para ângulos pequenos, tem-se:

$$a = \frac{e_i (\phi_i)^2}{2} \quad (2.26)$$

A energia devida à ação das forças concentradas é dada por:

$$T_2^{(P)} = - \sum \frac{P_i e_i (\phi_i)^2}{2} \quad (2.27)$$

Desenvolvendo-se os termos para as forças distribuídas, chega-se à seguinte expressão para a energia potencial decorrente do trabalho das forças atuantes em deslocamentos de 2ª ordem:

$$T_2 = T_2^{(P)} + T_2^{(q)} = - \sum \frac{P_i e_i (\phi_i)^2}{2} - \frac{I}{2} \int_0^l q e (\phi)^2 dz \quad (2.28)$$

Além disso, conforme Rachid e Mori [66], existe ainda uma contribuição destas forças transversais correspondente aos deslocamentos em 2ª ordem, porém, esta parcela será analisada através da tensão relativa a elas, em 1ª ordem. Neste caso, os momentos fletores e o bimomento decorrentes desta tensão serão relacionados com os carregamentos aplicados. De acordo com o item 2.2, só serão permitidos carregamentos transversais ou momentos fletores que causem flexão no plano definido pelos eixos  $yz$ , com o que a sollicitação de momento fletor em relação ao eixo  $y$  ( $M_y$ ) será sempre nula em 1ª ordem, e apenas a parcela do momento  $M_x$  da tensão de normal  $f_b$  irá contribuir para a expressão da energia potencial.

Ao se considerar a deformação proveniente da atuação destes esforços, verifica-se que um elemento de volume  $dz.dA$  (figura 2.4.a) sofre os deslocamentos  $\mu$  e  $\nu$  dados pelas expressões (2.3) e (2.4), de modo que sua configuração passa a ser aquela mostrada na figura 2.4.b.

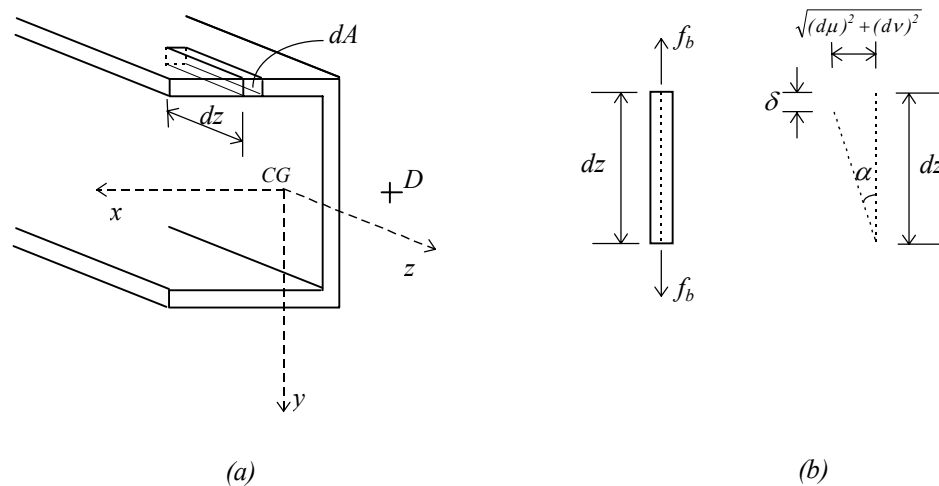


Figura 2.4 - Deslocamentos em 2ª ordem de um elemento de volume  $dz.dA$ .

A inclinação  $\alpha$  do elemento, é dada por:

$$\alpha = \frac{\sqrt{(d\mu)^2 + (d\nu)^2}}{dz} = \sqrt{\mu'^2 + \nu'^2} \quad (2.29)$$

e o deslocamento  $\delta$  na direção  $z$ , por

$$\delta = (1 - \cos \alpha) dz = 2 (\sin \alpha / 2)^2 dz \quad (2.30)$$

Utilizando-se a teoria de pequenos deslocamentos, pode-se aproximar o seno pelo próprio ângulo, ou seja:

$$\delta = \frac{\alpha^2}{2} dz \quad (2.31)$$

e levando as relações (2.29) em (2.31), tem-se que

$$\delta = \frac{[\mu'_D - (y - y_D)\phi']^2 + [v'_D + (x - x_D)\phi']^2}{2} dz \quad (2.32)$$

A energia, considerando-se o trabalho das tensões  $f_b$ , devido ao momento fletor  $M_x$  e ao bimomento,  $B$ , durante o deslocamento  $\delta$ , é dada então por:

$$T_3 = \int_0^l \int_A f_b dA \delta = \int_0^l \int_A \left( \frac{M_x}{I_x} y + \frac{B}{C_w} w \right) dA \delta \quad (2.34)$$

Fazendo-se as substituições e simplificações adequadas, chega-se a

$$T_3 = \frac{l}{2} \int_0^l \left[ 2 M_x (k_y - y_D) + \frac{U_w}{C_w} B \right] (\phi')^2 dz \quad (2.35)$$

onde,

$$k_y = \frac{l}{2 I_x} \int_A y (x^2 + y^2) dA \quad (2.36)$$

que é a coordenada do ponto de Kindem na direção do eixo  $y$ , e  $U_w$  é a constante de Vlasov, dada por

$$U_w = \int_A w (x^2 + y^2) dA \quad (2.37)$$

Esta característica geométrica da seção se anula para seções que tenham pelo menos um eixo de simetria, o que ocorre no caso dos perfis que serão estudados neste trabalho (ver item 1.4). Portanto, esta parcela da energia potencial será desconsiderada nos cálculos subsequentes, e a energia potencial passa a ser:

$$T_3 = \frac{I}{2} \int_0^l 2 M_x (k_y - y_D) (\phi')^2 dz \quad (2.38)$$

### 2.4.3. Expressão da Energia Potencial

Somando-se as parcelas desenvolvidas nos itens 2.4.1 e 2.4.2, obtém-se a energia potencial dos esforços externos, dada por:

$$T = \frac{I}{2} \int_0^l [2 M_x (k_y - y_D) (\phi')^2 + 2 M_x \mu_D'' \phi - q e (\phi)^2] dz - \frac{I}{2} \sum P_i e_i (\phi_i)^2 \quad (2.39)$$

### 2.5. Energia Potencial Total

A energia potencial total ( $\Pi$ ) é dada pela soma da energia de deformação ( $U$ ), fornecida pela expressão (2.20), com a energia potencial ( $T$ ), apresentada na expressão (2.39). Portanto, tem-se:

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{I}{2} \int_0^l [E I_y (\mu_D'')^2 + E C_w (\phi'')^2 + G I_t (\phi')^2 + 2 M_x (k_y - y_D) (\phi')^2 + 2 M_x \mu_D'' \phi - \\ - q e (\phi)^2] dz - \frac{I}{2} \sum P_i e_i (\phi_i)^2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Ou, na forma de funcional:

$$\Pi = \int_0^l F(\mu_D'', \phi, \phi', \phi'') dz - \frac{I}{2} \sum P_i e_i (\phi_i)^2 \quad (2.41)$$

onde

$$\begin{aligned} F(\mu_D'', \phi, \phi', \phi'') = \frac{I}{2} [E I_y (\mu_D'')^2 + E C_w (\phi'')^2 + G I_t (\phi')^2 + 2 M_x (k_y - y_D) (\phi')^2 + \\ + 2 M_x \mu_D'' \phi - q e (\phi)^2] \end{aligned} \quad (2.42)$$

Aplicando-se as equações de Euler, do Cálculo Variacional, dadas para o caso em estudo por:

$$\frac{\partial F}{\partial \mu_D} - \left( \frac{\partial F}{\partial \mu_D'} \right)' + \left( \frac{\partial F}{\partial \mu_D''} \right)'' = 0 \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} - \left( \frac{\partial F}{\partial \phi'} \right)' + \left( \frac{\partial F}{\partial \phi''} \right)'' = 0 \quad (2.44)$$

no funcional da energia potencial total, dada pela expressão (2.42), chegam-se às equações diferenciais do problema (admitindo-se seção transversal constante)

$$E I_y \mu_D^{IV} + (M_x \phi)'' = 0 \quad (2.45)$$

$$E C_w \phi^{IV} - G I_t \phi'' - 2 (k_y - y_D) (M_x \phi')' - q e \phi + M_x \mu_D'' = 0 \quad (2.46)$$

As soluções dessas equações diferenciais são dadas pelas funções  $\mu_D(z)$  e  $\phi(z)$ , as quais tornam a energia potencial total ( $\Pi$ ) estacionária. Entretanto, a resolução destas equações é bastante trabalhosa, sendo interessante muitas vezes recorrer às funções de Bessel. Na prática, no entanto, costuma-se evitar este tipo de solução.

Neste trabalho será utilizado o processo de Rayleigh-Ritz, com o qual se consegue contornar a resolução das equações através da escolha de funções aproximadoras para  $\mu_D(z)$  e  $\phi(z)$ , sendo estas funções dependentes de alguns parâmetros. Com isso a energia total fica expressa em termos destes parâmetros, e o problema resume-se em encontrar o extremo de uma função de um número finito de variáveis. O único cuidado a se tomar com relação a este método de resolução fica por conta da escolha conveniente das funções aproximadoras, uma vez que as mesmas devem satisfazer as condições de contorno para cada caso particular.

Além disso, sabe-se que a utilização deste processo em problemas de 1<sup>a</sup> espécie (bifurcação) conduz a um sistema de equações homogêneas nos parâmetros, e a obtenção da carga crítica aproximada é dada com a anulação do determinante dos coeficientes dessas equações.

## 2.6. Escolha das Funções $\mu_D$ e $\phi$

Serão adotadas funções contínuas e válidas para um segmento de viga, pois desta forma é possível se evitar o problema das condições de contorno, uma vez que as integrações



serão independentes das particularidades de cada caso, as quais serão introduzidas apenas na automatização do método.

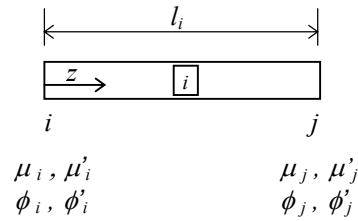


Figura 2.5 - Segmento genérico  $i$ .

Um segmento genérico  $i$  é apresentado na figura 2.5, onde as extremidades correspondem aos nós  $i$  e  $j$ , sendo  $j=i+1$  e  $l_i$  o seu comprimento. Os deslocamentos de cada nó, tomados em relação ao centro de torção, são as translações horizontais na direção do eixo  $x$  ( $\mu_i$  e  $\mu_j$ ), as derivadas destas translações ( $\mu'_i$  e  $\mu'_j$ ), as rotações da seção ( $\phi_i$  e  $\phi_j$ ) e as derivadas destas rotações ( $\phi'_i$  e  $\phi'_j$ ). Estes deslocamentos são os parâmetros que definirão a elástica.

A função a ser adotada para as translações horizontais  $\mu_D$  é da forma polinomial, dada por

$$\mu_D = a z^3 + b z^2 + c z + d \quad (2.47)$$

e as condições de contorno a serem impostas, de modo a que ela atenda aos parâmetros pré-escolhidos, são

- para  $z=0$  :  $\mu_D = \mu_i$

$$\mu'_D = \mu'_i$$

- para  $z=l_i$  :  $\mu_D = \mu_j$

$$\mu'_D = \mu'_j$$

Derivando-se a expressão (2.47) e aplicando-se as condições de contorno apresentadas, determinam-se as expressões de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ :

$$a = \frac{(\mu_i' + \mu_j')}{l_i^2} - \frac{2(\mu_j - \mu_i)}{l_i^3} \quad (2.48)$$

$$b = \frac{3(\mu_j - \mu_i)}{l_i^2} - \frac{(2\mu_i' + \mu_j')}{l_i} \quad (2.49)$$

$$c = \mu_i' \quad (2.50)$$

e

$$d = \mu_i \quad (2.51)$$

Substituindo as expressões (2.48) a (2.51) na expressão (2.47) e efetuando-se as derivadas necessárias para a integração de  $\Pi$ , tem-se

$$\mu_D = \left[ \frac{(\mu_i' + \mu_j')}{l_i^2} - \frac{2(\mu_j - \mu_i)}{l_i^3} \right] z^3 + \left[ \frac{3(\mu_j - \mu_i)}{l_i^2} - \frac{(2\mu_i' + \mu_j')}{l} \right] z^2 + \mu_i' z + \mu_i \quad (2.52)$$

$$\mu_D' = 3 \left[ \frac{(\mu_i' + \mu_j')}{l_i^2} - \frac{2(\mu_j - \mu_i)}{l_i^3} \right] z^2 + 2 \left[ \frac{3(\mu_j - \mu_i)}{l_i^2} - \frac{(2\mu_i' + \mu_j')}{l} \right] z + \mu_i' \quad (2.53)$$

$$\mu_D'' = 6 \left[ \frac{(\mu_i' + \mu_j')}{l_i^2} - \frac{2(\mu_j - \mu_i)}{l_i^3} \right] z + 2 \left[ \frac{3(\mu_j - \mu_i)}{l_i^2} - \frac{(2\mu_i' + \mu_j')}{l} \right] \quad (2.54)$$

Para as rotações  $\phi$ , a função aproximadora também é do tipo polinomial, e os cálculos são feitos como para as translações  $\mu_D$ , chegando-se a

$$\phi = \left[ \frac{(\phi_i' + \phi_j')}{l_i^2} - \frac{2(\phi_j - \phi_i)}{l_i^3} \right] z^3 + \left[ \frac{3(\phi_j - \phi_i)}{l_i^2} - \frac{(2\phi_i' + \phi_j')}{l} \right] z^2 + \phi_i' z + \phi_i \quad (2.55)$$

$$\phi' = 3 \left[ \frac{(\phi_i' + \phi_j')}{l_i^2} - \frac{2(\phi_j - \phi_i)}{l_i^3} \right] z^2 + 2 \left[ \frac{3(\phi_j - \phi_i)}{l_i^2} - \frac{(2\phi_i' + \phi_j')}{l} \right] z + \phi_i' \quad (2.56)$$

$$\phi'' = 6 \left[ \frac{(\phi_i' + \phi_j')}{l_i^2} - \frac{2(\phi_j - \phi_i)}{l_i^3} \right] z + 2 \left[ \frac{3(\phi_j - \phi_i)}{l_i^2} - \frac{(2\phi_i' + \phi_j')}{l} \right] \quad (2.57)$$

## 2.7. Contribuição do Segmento $i$ para a Expressão de $\Pi$

As expressões (2.52) a (2.57) são levadas na expressão (2.40), e as integrais são efetuadas, no intervalo de comprimento  $l_i$ , de maneira a se encontrar a energia potencial total do segmento ( $\Pi_i$ ), dependente apenas dos parâmetros  $\mu_i, \mu_j, \mu'_i, \mu'_j, \phi_i, \phi_j, \phi'_i$  e  $\phi'_j$ . Portanto, realizando-se as integrações separadamente:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{1}{2} \int_0^{l_i} E I_y (\mu_D'')^2 dz &= \frac{E I_y}{2} \left[ \frac{12}{l_i^3} (\mu_i^2 - 2\mu_i \mu_j + \mu_j^2) + \frac{4}{l_i} (\mu_i'^2 + \mu_i' \mu_j' + \mu_j'^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{12}{l_i^2} (\mu_i \mu_i' + \mu_i \mu_j' - \mu_j \mu_i' - \mu_j \mu_j') \right] \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{1}{2} \int_0^{l_i} E C_w (\phi'')^2 dz &= \frac{E C_w}{2} \left[ \frac{12}{l_i^3} (\phi_i^2 - 2\phi_i \phi_j + \phi_j^2) + \frac{4}{l_i} (\phi_i'^2 + \phi_i' \phi_j' + \phi_j'^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{12}{l_i^2} (\phi_i \phi_i' + \phi_i \phi_j' - \phi_j \phi_i' - \phi_j \phi_j') \right] \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{1}{2} \int_0^{l_i} G I_t (\phi')^2 dz &= \frac{G I_t}{2} \left[ \frac{6}{5l_i} (\phi_i^2 - 2\phi_i \phi_j + \phi_j^2) + \frac{l_i}{15} (2\phi_i'^2 - \phi_i' \phi_j' + 2\phi_j'^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5} (\phi_i \phi_i' + \phi_i \phi_j' - \phi_j \phi_i' - \phi_j \phi_j') \right] \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\bullet \quad \frac{1}{2} \int_0^{l_i} 2 M_x (k_y - y_D) (\phi')^2 dz \quad (2.61)$$

O momento fletor  $M_x$  também é uma função de  $z$ , uma vez que ele corresponde à sollicitação em um ponto qualquer, devida à atuação de uma força transversal distribuída, a uma distância  $z$  da origem do segmento  $i$ , conforme é mostrado na figura 2.6, ou seja

$$M_x = M_i + V_i z - \frac{q_i}{2} z^2 \quad (2.62)$$

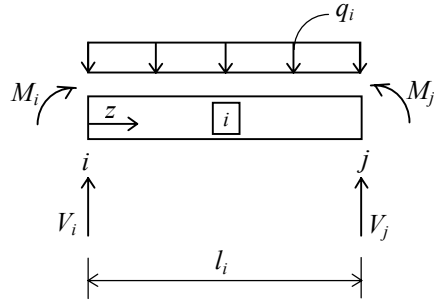


Figura 2.6 - Momento fletor solicitante  $M_x$  no segmento  $i$ .

onde  $M_i$  e  $V_i$  são, respectivamente, o momento fletor e o esforço cortante na seção  $i$ , e  $q_i$  é a força transversal distribuída no segmento. Portanto, as parcelas da integral devidas ao momento fletor  $M_x$  serão dadas em função da equação (2.62). Desta forma a expressão (2.61) pode ser reescrita como a soma das seguintes parcelas

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{l_i} 2 M_i (k_y - y_D) (\phi')^2 dz = M_i (k_y - y_D) \left[ \frac{6}{5 l_i} (\phi_i^2 - 2\phi_i \phi_j + \phi_j^2) + \right. \\ \left. + \frac{l_i}{15} (2\phi_i'^2 - \phi_i' \phi_j' + 2\phi_j'^2) + \frac{1}{5} (\phi_i \phi_i' + \phi_i \phi_j' - \phi_j \phi_i' - \phi_j \phi_j') \right] \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{l_i} 2 V_i (k_y - y_D) z (\phi')^2 dz = V_i (k_y - y_D) \left[ \frac{3}{5} (\phi_i^2 - 2\phi_i \phi_j + \phi_j^2) + \right. \\ \left. + \frac{l_i^2}{30} (\phi_i'^2 - \phi_i' \phi_j' + 3\phi_j'^2) + \frac{l_i}{5} (\phi_i \phi_i' - \phi_j \phi_i') \right] \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_0^{l_i} 2 \frac{q_i}{2} (k_y - y_D) z^2 (\phi')^2 dz = -\frac{q_i}{2} (k_y - y_D) \left[ \frac{12 l_i}{35} (\phi_i^2 - 2\phi_i \phi_j + \phi_j^2) + \right. \\ \left. + \frac{l_i^3}{105} (2\phi_i'^2 - 3\phi_i' \phi_j' + 9\phi_j'^2) + \frac{l_i^2}{35} (5\phi_i \phi_i' - 2\phi_i \phi_j' - 5\phi_j \phi_i' + 2\phi_j \phi_j') \right] \end{aligned} \quad (2.65)$$

- $\frac{1}{2} \int_0^{l_i} 2 M_x \mu_D'' \phi dz \quad (2.66)$

Novamente, substituir-se-á o momento fletor  $M_x$  pela expressão (2.62), de modo que a expressão (2.66) passa a ser dada pela soma das seguintes integrais

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{l_i} 2 M_i \mu_D'' \phi dz = M_i & \left[ \frac{6}{5 l_i} (-\phi_i \mu_i + \phi_i \mu_j + \phi_j \mu_i - \phi_j \mu_j) + \frac{1}{10} (-\phi_i \mu_j' + \right. \\ & + \phi_j \mu_i' - \phi_i' \mu_i + \phi_i' \mu_j - \phi_j' \mu_i + \phi_j' \mu_j) + \frac{l_i}{30} (-4\phi_i' \mu_i' + \phi_i' \mu_j' + \phi_j' \mu_i' - \\ & \left. - 4\phi_j' \mu_j') + \frac{11}{10} (-\phi_i \mu_i' + \phi_j \mu_j') \right] \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{l_i} 2 V_i z \mu_D'' \phi dz = V_i & \left[ \frac{1}{10} (-\phi_i \mu_i + \phi_i \mu_j - 11\phi_j \mu_i + 11\phi_j \mu_j) + \right. \\ & + \frac{l_i}{10} (-2\phi_i \mu_i' + \phi_i \mu_j' + 2\phi_j \mu_i' + 3\phi_j \mu_j' - \phi_j' \mu_i + \phi_j' \mu_j) + \\ & \left. + \frac{l_i^2}{30} (-\phi_i' \mu_i' + \phi_i' \mu_j' - 3\phi_j' \mu_j') \right] \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_0^{l_i} 2 \frac{q_i}{2} z^2 \mu_D'' \phi dz = -\frac{q_i}{2} & \left[ \frac{l_i}{35} (\phi_i \mu_i - \phi_i \mu_j + 34\phi_j \mu_i - 34\phi_j \mu_j) + \right. \\ & + \frac{l_i^2}{210} (-11\phi_i \mu_i' + 17\phi_i \mu_j' + 46\phi_j \mu_i' + 158\phi_j \mu_j' + 3\phi_i' \mu_i - 3\phi_i' \mu_j - \\ & \left. - 18\phi_j' \mu_i + 18\phi_j' \mu_j) + \frac{l_i^3}{210} (-2\phi_i' \mu_i' + 5\phi_i' \mu_j' - 2\phi_j' \mu_i' - 16\phi_j' \mu_j') \right] \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad -\frac{1}{2} \int_0^{l_i} q_i e_i (\phi)^2 dz = -\frac{q_i e_i}{2} & \left[ \frac{l_i}{35} (13\phi_i^2 + 9\phi_i \phi_j + 13\phi_j^2) + \frac{l_i^3}{210} (2\phi_i'^2 - \right. \\ & \left. - 3\phi_i' \phi_j' + 2\phi_j'^2) + \frac{l_i^2}{210} (22\phi_i \phi_i' - 13\phi_i \phi_j' + 13\phi_j \phi_i' - 22\phi_j \phi_j') \right] \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\bullet \quad -\frac{1}{2} \sum_i P_i e_i (\phi_i)^2 = -\frac{1}{2} (P_i e_i \phi_i^2 + P_j e_j \phi_j^2) \quad (2.71)$$

A energia potencial total ( $\Pi$ ) é dada então pelo somatório das energias potenciais ( $\Pi_i$ ) de cada elemento, ou seja

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \Pi_i \quad (2.72)$$

onde  $n$  é o número de segmentos em que a viga foi dividida. Desta maneira, a energia passa a ser uma função quadrática dos  $4(n+1)$  parâmetros  $\mu_i, \mu'_i, \phi_i, \phi'_i$  com  $i=1,2,\dots,n+1$ , referentes às seções transversais que delimitam os  $n$  segmentos.

No equilíbrio, a energia é estacionária, e pode-se estabelecer que

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mu_i} = 0 \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mu'_i} = 0 \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \phi_i} = 0 \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \phi'_i} = 0 \quad (2.76)$$

Constitui-se desta forma um sistema de  $4(n+1)$  equações lineares e homogêneas, e o carregamento que conduz ao valor nulo do determinante da matriz dos coeficientes é aquele que causa a flambagem lateral com torção da barra. Essa matriz pode ser escrita condensadamente como:

$$[A] = \left[ \begin{array}{c} \partial^2 \Pi \\ \partial g_i \partial g_j \end{array} \right] \quad (2.77)$$

onde  $g$  representa qualquer um dos parâmetros  $\mu$  ou  $\phi$ .

## 2.8. Montagem da Matriz

A matriz dos coeficientes, para um segmento  $i$ , é apresentada a seguir. Esta matriz é simétrica, de tamanho  $8 \times 8$ , onde cada linha corresponde a uma das equações dadas pelas expressões (2.73) a (2.76), e cada coluna contém os coeficientes do mesmo parâmetro.



Para a montagem da matriz global da viga, é feita uma superposição das matrizes dos vários segmentos, de maneira que os nós correspondentes às seções intermediárias se compatibilizem. A matriz formada tem tamanho  $4(n+1) \times 4(n+1)$ , e todos os elementos diferentes daqueles oriundos das matrizes dos segmentos, são nulos. A configuração da matriz superposta é mostrada na figura 2.7.

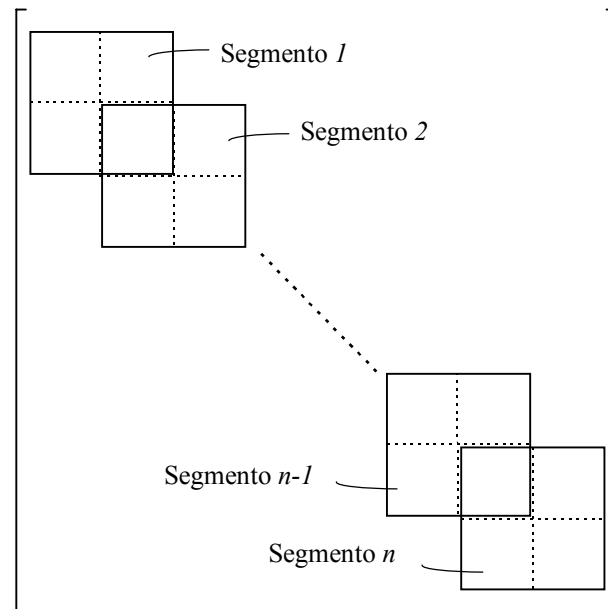


Figura 2.7 - Esquema da montagem da matriz global da viga, através da superposição das matrizes dos segmentos (adaptado da referência 17).

De posse da matriz acima e através da implementação automática do método descrito neste capítulo, fica relativamente simples a determinação do carregamento crítico para o estado limite último de flambagem lateral com torção.



### **3. AUTOMATIZAÇÃO PARA DETERMINAÇÃO DO MOMENTO CRÍTICO**

#### **3.1. Considerações Iniciais**

O processo proposto apresenta facilidade de implementação automatizada e fornece, para casos de instabilidade elástica, resultados considerados bastante precisos. Assim sendo, foi desenvolvido um programa para micro-computadores em linguagem Turbo-Pascal, versão 7.0, que possibilita o cálculo do carregamento crítico elástico para a flambagem lateral com torção de vigas de aço. São tratados perfis com as seções transversais citadas no item 1.4 com quaisquer condições de contorno nos planos de flexão e de flambagem, vigas com variações de inércia, como aquelas provocadas por lamelas, aberturas na alma e recortes nas mesas para ligações, e é permitida a atuação de ações estabilizantes ou desestabilizantes. Além do carregamento crítico, o programa fornece coeficientes compatíveis com os de normas e especificações de projeto de estruturas de aço, facilitando análises e estudos comparativos.

O programa desenvolvido, que será denominado Programa MCE, pode ser considerado dividido em três grandes partes. A primeira consiste da entrada dos dados relativos ao problema que se quer analisar, a segunda do procedimento de cálculo, onde todas as verificações necessárias são feitas levando-se em conta as particularidades de cada caso, e a última da montagem de um arquivo com os resultados. Cada uma destas partes são detalhadas nos itens seguintes.

#### **3.2. Entrada de Dados**

Visando a facilidade de utilização do programa, permitiu-se a opção de se ter a entrada de dados interativa e amigável ou por arquivo. Em ambos os casos, é necessário fornecer o nome do arquivo de dados, sem que se coloque sua extensão, pois mesmo no caso da entrada ser interativa, o programa gera o arquivo com todos os dados. Assim, se for necessário fazer alguma alteração, a mesma pode ser feita no arquivo, evitando-se a repetição da entrada de dados via teclado. Os arquivos de dados têm extensão *.dat*.

As informações que o programa necessita são:

- a identificação da viga;
- as unidades a serem utilizadas, *N* ou *kN* para as forças e *mm* ou *cm* para os comprimentos;
- o vão da viga, independentemente de qualquer apoio ou contenção lateral intermediária, pois os mesmos serão considerados posteriormente;
- o tipo de seção transversal, podendo-se escolher entre perfis I com dois eixos de simetria ou com um eixo de simetria no plano médio da alma, perfis U não sujeitos à torção, seções retangulares cheias, e perfis caixão duplamente simétricos, todos fletidos em torno do eixo de maior inércia, e ainda perfis T com um eixo de simetria no plano médio da alma, fletidos em torno do eixo perpendicular à alma;
- as dimensões do perfil escolhido;
- a existência ou não de recortes, aberturas ou lamelas. Caso existam, deve-se indicar o número de ocorrências, suas posições na viga e as dimensões. No caso dos recortes e lamelas, deve-se ainda determinar em qual mesa estão ou se existem em ambas. Para as aberturas, prevê-se a possibilidade delas serem retangulares ou circulares, excêntricas ou concêntricas, com ou sem reforços na alma, quando então deve-se fornecer os dados geométricos adicionais (figura 3.1);

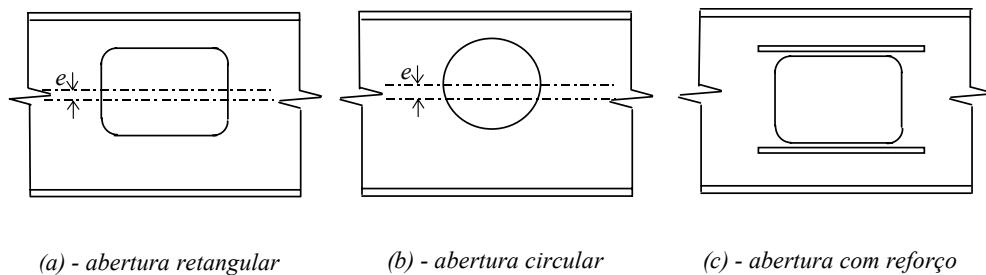


Figura 3.1 - Aberturas na alma.

- o carregamento atuante, onde são previstas cargas concentradas, cargas distribuídas e momentos aplicados. Em todos os casos deve-se fornecer a posição de atuação na viga e a intensidade. Além disso, nos dois primeiros casos, é necessário fornecer a posição em relação ao centro de torção (excentricidade), uma vez que estão sendo consideradas as possibilidades de ocorrência de forças estabilizantes e desestabilizantes;
- a existência ou não de apoios e contenções laterais intermediárias, indicando, para os casos em que existir, sua posição na viga;
- as condições de contorno nas extremidades da viga, bem como nas seções onde existirem apoios ou contenções laterais internas. Os vínculos são definidos por meio dos deslocamentos que eles impedem. Quando o deslocamento for livre, deve-se adotar um código 0 e quando for impedido, adota-se 1. Estes deslocamentos foram descritos no item 1.1.2.

No que se refere à intensidade das ações, deve-se esclarecer que a referência ao carregamento crítico será feita em função de um multiplicador crítico. Assim, entram-se com os valores reais das ações, mesmo quando atuarem tipos diferentes de carregamentos. O programa identificará a menor carga concentrada atuante, tomando-a como referência, adotando internamente um valor unitário para ela e um valor proporcional para as demais. Partindo-se de um valor nulo para as ações, vai-se incrementando o carregamento, mantendo-se as proporções, até que o carregamento crítico seja atingido. Quando isto ocorrer, a razão entre o valor da carga de referência e o seu valor crítico é o multiplicador crítico, e todas as outras cargas são relacionadas a

ele. Caso não existam cargas concentradas atuando na viga, a menor carga distribuída é tomada como referência, e se estas também não estiverem atuando, toma-se o menor momento fletor aplicado.

Seja por exemplo, o caso mostrado na figura 3.2, onde atuam duas cargas concentradas de valores  $5,0\text{ kN}$  e  $10,0\text{ kN}$ , uma carga distribuída em toda a viga de  $25,0\text{ kN/m}$  e um momento fletor aplicado na extremidade inicial de  $15,0\text{ kN.m}$ . A carga concentrada de  $5,0\text{ kN}$  é tomada como referência, e as outras como uma razão desta. Em seguida as cargas são zeradas, e incrementadas proporcionalmente, até que o determinante da matriz se anule. Imaginando-se, por exemplo, que o valor da carga de referência neste instante seja de  $15,0\text{ kN}$ , tem-se que o multiplicador crítico é igual a 3, ou seja, o carregamento crítico para este exemplo é dado por duas cargas concentradas de  $15,0\text{ kN}$  e  $30,0\text{ kN}$  respectivamente, uma carga distribuída de  $75,0\text{ kN/m}$ , e um momento fletor aplicado de  $45,0\text{ kN.m}$ .

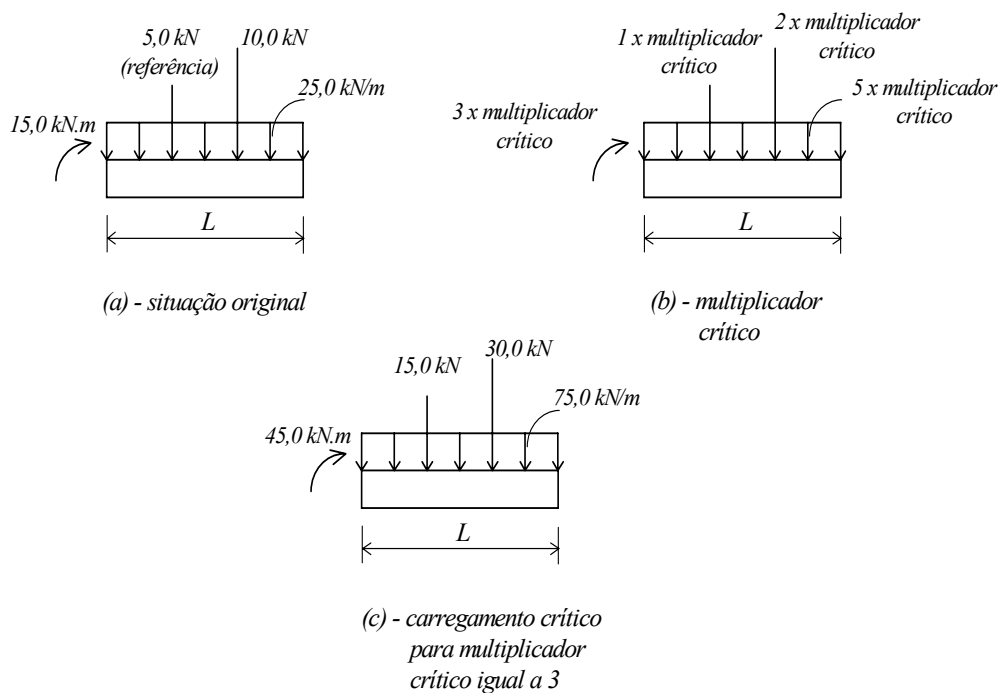


Figura 3.2 -Determinação do carregamento e do multiplicador crítico.

### 3.3. Cálculo

Conforme mostrou-se no capítulo anterior, o cálculo do carregamento crítico implica em se anular o determinante da matriz dos coeficientes apresentada no item 2.8. Para isso, é necessário que a viga seja dividida em segmentos, e que, para cada segmento, sejam calculadas suas propriedades geométricas e os esforços solicitantes nas extremidades. Além disso, deve-se usar um processo incremental para o carregamento, até que seja atingido o valor que causa a flambagem lateral com torção.

A divisão da viga e o cálculo das propriedades geométricas são feitos apenas uma vez, e mantêm-se constantes durante os cálculos do determinante da matriz. Entretanto, a cada vez que o carregamento é incrementado, deve-se atualizar os valores dos esforços solicitantes.

Após encontrada a carga crítica de flambagem lateral com torção e, conseqüentemente, o momento crítico  $M_{cr}$ , o processo é repetido de modo a se encontrar o valor de  $M_{0cr}$ , ou seja, o momento crítico para a situação de flexão pura e extremidades com vínculo de garfo. Para isto, o carregamento real é trocado por momentos fletores de valores iguais e sentidos contrários atuando nas extremidades da viga, e as condições de contorno nas extremidades são trocadas por vínculos de garfo. Este procedimento tem por objetivo obter, através da relação  $M_{cr} / M_{0cr}$ , um valor relativamente correto do fator de momento equivalente  $C_b$ , definido no AISC/LRFD [62] e na NBR 8800 [63].

Algumas particularidades dos procedimentos envolvidos neste cálculo estão explicados nos itens subsequentes.

### **3.3.1. Divisão dos Segmentos**

Inicialmente é feita uma divisão grosseira da viga, considerando as seções onde houverem mudanças na geometria, ou seja, no início e no fim de recortes, de aberturas e de lamelas (figura 3.3.a), as seções onde houverem cargas e momentos aplicados (figura 3.3.b) e as seções onde houver algum deslocamento impedido no plano de flexão ou de flambagem (figura 3.3.c).

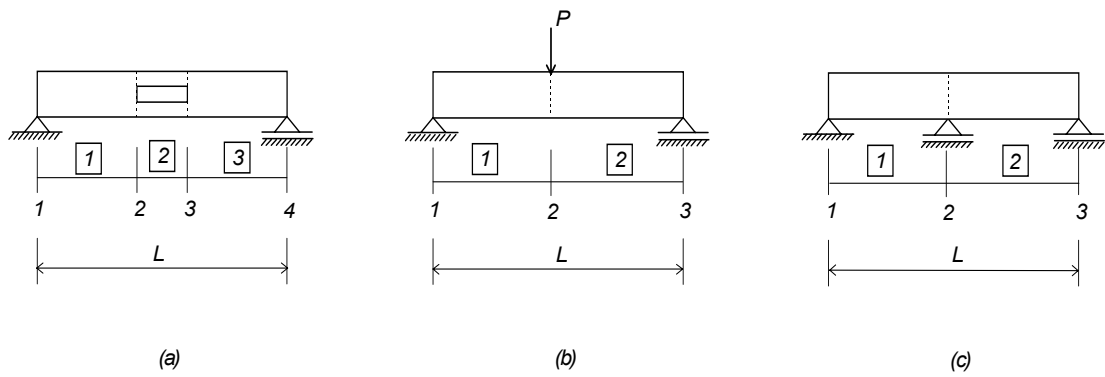


Figura 3.3 - Divisão dos segmentos.

Essa primeira divisão é feita para se evitar a execução de cálculos desnecessários. Um exemplo pode ser visto pela figura 3.3.a, onde apesar de se ter variação da seção transversal na viga, no segmento ela é constante. Portanto pode-se calcular as propriedades geométricas apenas para os três segmentos. Daí a importância do armazenamento das posições de mudança de segmento.

Em seguida, cada segmento é subdividido, de forma a melhorar a precisão dos resultados e manter compatíveis seus comprimentos. Para que não haja uma variação grande nestes comprimentos, o menor deles é automaticamente subdividido em dez partes, e os outros em um número de partes equivalentes, limitadas em vinte. Diversos processamentos foram feitos, tendo-se constatado que este procedimento conduz a resultados bastante bons.

### 3.3.2. Propriedades Geométricas

O cálculo das propriedades geométricas é feito de maneira automática, utilizando-se apenas as dimensões da seção e as variações de geometria existentes. Para esta automatização, foi necessário fazer o computador “entender” como eram as seções transversais em cada trecho da viga.

O procedimento utilizado foi baseado no trabalho de Tamagna e Hennemann [70], no qual foi desenvolvido um programa para cálculo das propriedades geométricas

dividindo a seção em elementos. Neste trabalho, a principal preocupação é a sistemática da entrada dos elementos componentes da seção transversal, onde existe uma regra de entrada dos nós que definem cada elemento. Em seguida os elementos são tratados separadamente, tomando-se a formulação relativa ao cálculo das propriedades geométricas em função das distâncias aos eixos e centros principais da seção inteira.

Para o programa desenvolvido, foi necessário fazer algumas adaptações, uma vez que seria bastante complicado entrar com os nós da seção transversal ao invés da largura e espessura dos elementos, como se optou por fazer. A dificuldade está principalmente no fato de que são permitidas mudanças na geometria, e ficaria muito trabalhoso fornecer as posições dos nós para todas as seções existentes. A solução encontrada foi fornecer uma regra de leitura interna para o programa, dependente apenas do tipo da seção e do elemento que se está calculando, pois para cada elemento estão armazenadas as informações relativas à existência de recortes, lamelas e aberturas.

### **3.3.3. Esforços Solicitantes**

Para o cálculo dos esforços solicitantes que atuam nas extremidades de cada segmento da viga, foi desenvolvida uma sub-rotina para o programa, baseada em Gere e Weaver [71], que calcula os valores dos momentos fletores e forças cortantes nas seções extremas de cada elemento da viga. Estes esforços solicitantes são atualizados a cada iteração, considerando-se os valores das ações atuantes.

### **3.3.4. Determinante**

Após o cálculo dos esforços solicitantes é feita a montagem da matriz dos elementos e o cálculo do determinante. Para reduzir a quantidade de memória alocada, optou-se por um processo otimizado de cálculo, onde a matriz é armazenada em forma de banda, reduzindo-se as dimensões de  $4(n+1) \times 4(n+1)$ , figura 3.4.a, para  $4(n+1) \times 8$ , figura 3.4.b, onde  $n$  é o número de segmentos em que a viga foi dividida. Após montada esta matriz, é aplicada uma rotina de fatoração, também baseada em Gere e Weaver [71], que utiliza o processo de Cholesky modificado. O determinante é dado pela multiplicação dos elementos da primeira coluna desta matriz banda fatorada.

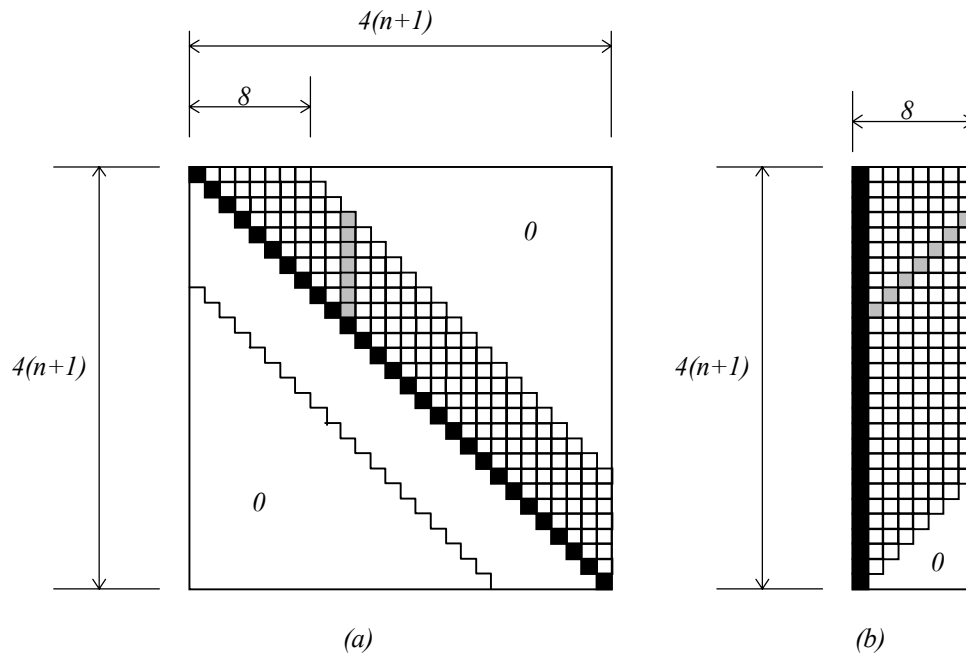


Figura 3.4 - (a): forma usual de armazenamento, (b): matriz banda (adaptado da referência 71).

### 3.4. Saída de Resultados

Os resultados são fornecidos em forma de arquivo, com extensão *.out*, onde novamente são apresentados os dados do problema para conferência, o carregamento já com seus valores críticos, o multiplicador crítico, o momento crítico  $M_{cr}$  para a situação real e sua posição na viga, o momento crítico  $M_{0cr}$  para flexão pura e vínculo de garfo nas extremidades e o coeficiente  $C_{bs} = M_{cr} / M_{0cr}$ . Se a viga possuir variação na seção transversal, são fornecidos também o momento crítico  $M_{0cr1}$  onde se supõe a viga com seção prismática, e o coeficiente  $C_{bs1} = M_{cr} / M_{0cr1}$ .

Deve-se destacar que o coeficiente  $C_{bs}$  fornecido pelo programa pode diferir do coeficiente  $C_b$  apresentado nos itens 1.3.1 e 1.3.2. Isto porque ele é resultado de um processo de cálculo mais rigoroso, e leva em conta fatores como as condições de contorno reais e a posição da carga aplicada em relação ao centro de torção.

O coeficiente  $C_{bs1}$  é determinado para se poder avaliar as situações em que existam variações na geometria da viga, e apenas nestas circunstâncias. Quando houverem lamelas, aberturas na alma ou recortes nas mesas para ligações, é feita uma comparação da situação real, através do valor do coeficiente  $C_{bs}$  (calculado pela relação entre o



momento crítico real,  $M_{cr}$ , e o momento crítico de referência  $M_{0cr}$  que considera a viga com variação na seção transversal), com o valor do coeficiente  $C_{bs1}$ , que é calculado pela relação entre o momento crítico real,  $M_{cr}$ , e o momento crítico de referência  $M_{0cr1}$ , que não considera a variação na seção. Deste modo, consegue-se quantificar o aumento ou a redução da resistência nominal ao momento fletor da viga.

### 3.5. Exemplos

Serão apresentados três exemplos, com o objetivo de ilustrar o que foi relatado neste capítulo, e também a utilização do programa. No primeiro exemplo, são mostradas as telas de entrada interativa do programa, e nos dois outros, apenas o arquivo de entrada, com a sequência descrita no item 3.2.

#### 3.5.1. Viga com Contenção Lateral Interna

Viga I metálica biapoiada, perfil VS 300x36, com 4 m de vão, submetida a uma carga concentrada de 10,0 kN aplicada no meio do vão no nível do centro de torção. Existem contenções laterais nas extremidades e na seção média da viga em vínculo de garfo (figura 3.5).

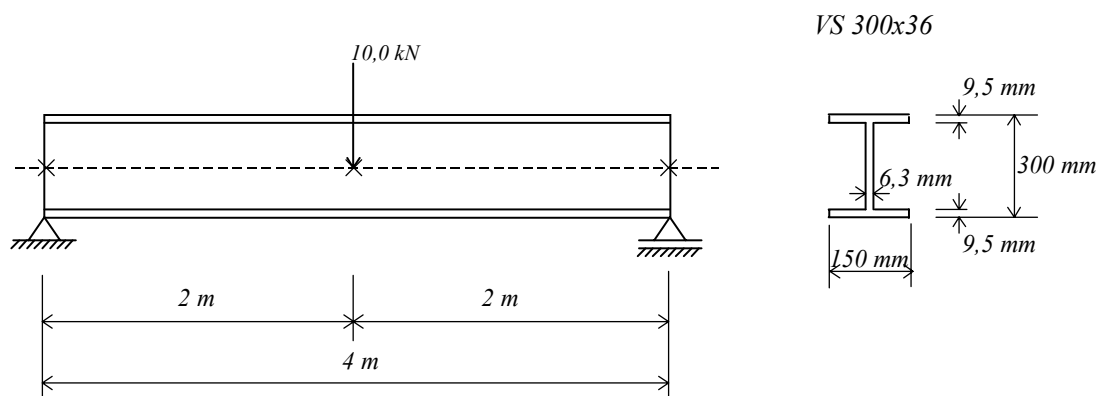
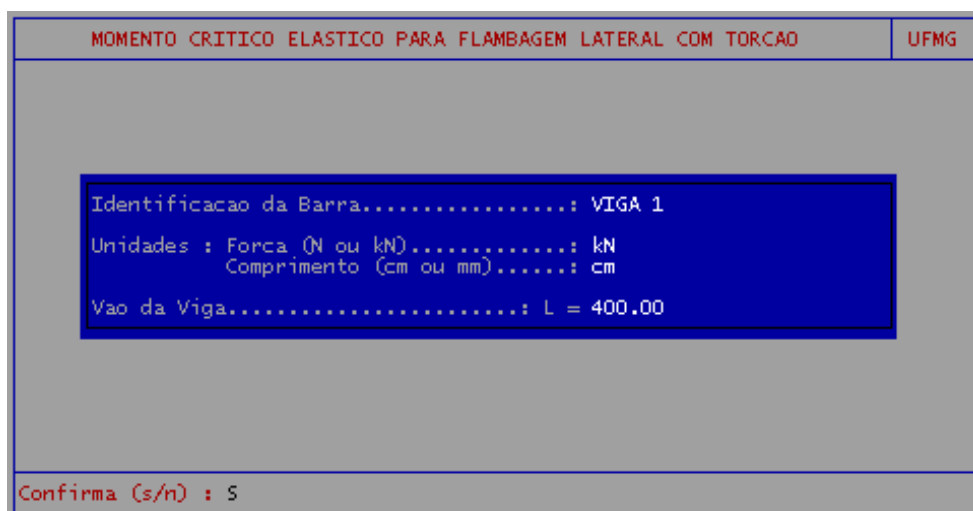
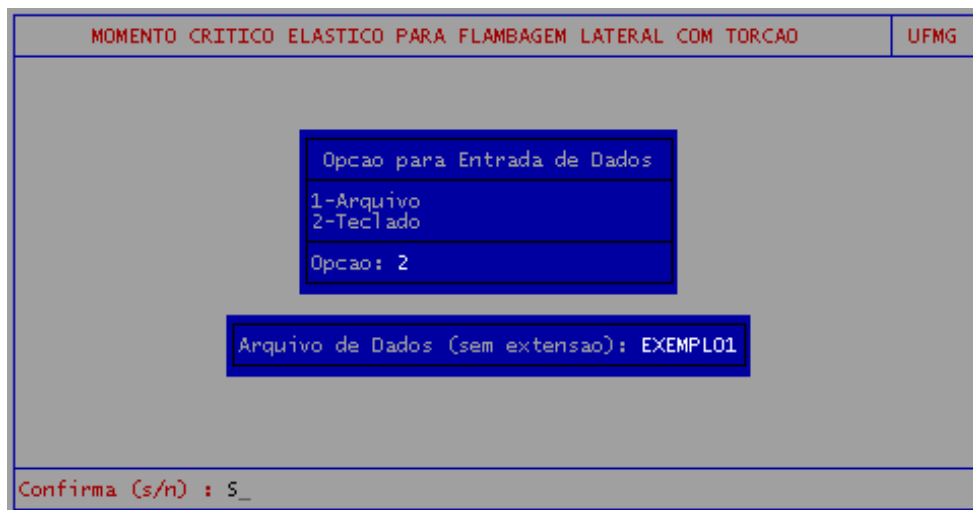
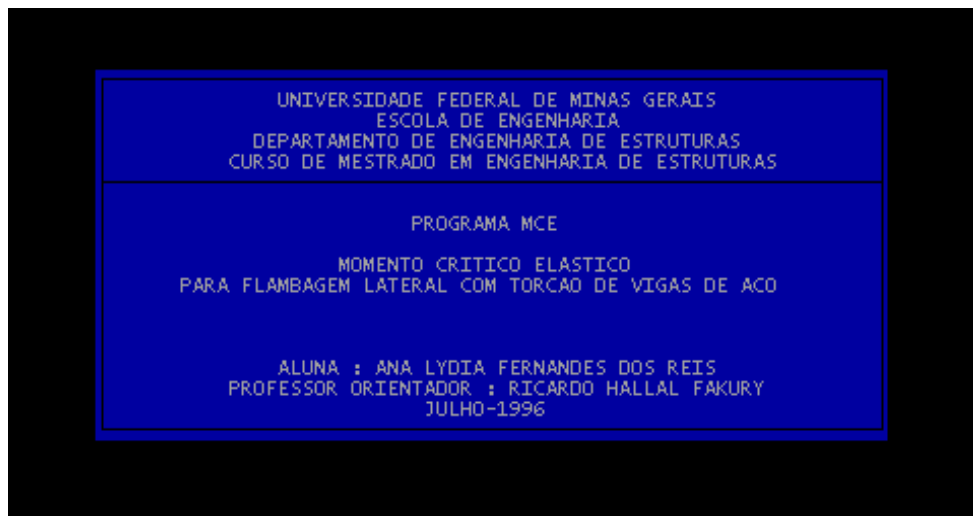
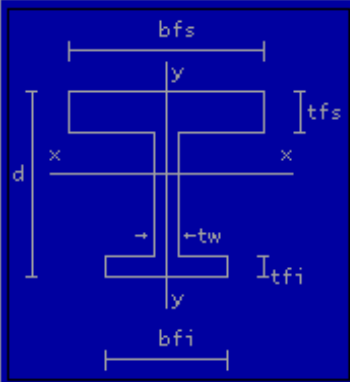


Figura 3.5 - Viga VS 300x36 com contenção lateral interna.

Mostram-se a seguir as telas da entrada de dados interativa:



| MOMENTO CRITICO ELASTICO PARA FLAMBAGEM LATERAL COM TORCAO   | UFMG |
|--|------|
| <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px auto; width: 80%;"> <p style="text-align: center;">Tipo de Secao Transversal</p> <p>1 - Secao I ou H<br/>           2 - Secao T<br/>           3 - Secao [<br/>           4 - Secao Retangular Cheia<br/>           5 - Secao Caixa</p> <p>Opcao: 1</p> </div> |      |
| Confirma (s/n) : S   |      |

| MOMENTO CRITICO ELASTICO PARA FLAMBAGEM LATERAL COM TORCAO   | UFMG  |
|--|---|
| <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px auto; width: 20%;">           Unidades: kN e cm         </div>   |   |
| <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px auto; width: 80%;"> <p style="text-align: center;">Dimensoes</p> <p>d....= 30.0000<br/>           tw...= 0.6300<br/>           bfs...= 15.0000<br/>           tfs...= 0.9500<br/>           bfi...= 15.0000<br/>           tfi...= 0.9500</p> </div> |  |
| Confirma (s/n) : S   |   |

| MOMENTO CRITICO ELASTICO PARA FLAMBAGEM LATERAL COM TORCAO   | UFMG |
|--|------|
| <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px auto; width: 80%;"> <p style="text-align: center;">Recortes nas Mesas</p> <p>S/N: N</p> </div> |      |
| Confirma (s/n) : S   |      |

| MOMENTO CRITICO ELASTICO PARA FLAMBAGEM LATERAL COM TORCAO  | UFMG |
|---|------|
| <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px auto; width: 80%;"> <p style="text-align: center;">Aberturas na Alma</p> <p>S/N: N</p> </div> |      |
| <p>Confirma (s/n) : S</p>   |      |

| MOMENTO CRITICO ELASTICO PARA FLAMBAGEM LATERAL COM TORCAO  | UFMG |
|---|------|
| <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px auto; width: 80%;"> <p style="text-align: center;">Lamelas</p> <p>S/N: N</p> </div> |      |
| <p>Confirma (s/n) : S_</p>  |      |

| MOMENTO CRITICO ELASTICO PARA FLAMBAGEM LATERAL COM TORCAO   | UFMG |
|--|------|
| <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px auto; width: 80%;"> <p style="text-align: center;">Cargas Concentradas</p> <p>Existem cargas concentradas aplicadas na viga (S/N): S</p> <p>Numero de cargas concentradas.....: 1</p> </div> |      |
| <p>Confirma (s/n) : S</p>  |      |

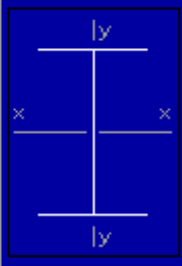
| MOMENTO CRITICO ELASTICO PARA FLAMBAGEM LATERAL COM TORCAO   | UFMG |
|--|------|
| <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;">Unidades: kN e cm</div>  |      |
| <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> <p style="text-align: center;">Carga Concentrada 1</p>           Coordenada...: z = 200.00<br/>           Valor.....: P = 10.00<br/>           Excentric...: ep = 0.00         </div> |      |
| ATENCAO: ep negativo para cargas atuando acima do eixo de flexao   |      |

| MOMENTO CRITICO ELASTICO PARA FLAMBAGEM LATERAL COM TORCAO  | UFMG |
|---|------|
| <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> <p style="text-align: center;">Cargas Distribuidas</p>           Existem cargas distribuidas aplicadas na viga (S/N): N         </div> |      |
| Confirma (s/n) : S_   |      |

| MOMENTO CRITICO ELASTICO PARA FLAMBAGEM LATERAL COM TORCAO  | UFMG |
|---|------|
| <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> <p style="text-align: center;">Momentos Aplicados</p>           Existem momentos aplicados na viga (S/N): N         </div> |      |
| Confirma (s/n) : S_   |      |

| MOMENTO CRITICO ELASTICO PARA FLAMBAGEM LATERAL COM TORCAO  | UFMG |
|---|------|
| <p>Secoes Internas</p> <p>Existem secoes contidas lateralmente entre apoios (S/N): S<br/>           Numero de secoes contidas lateralmente entre apoios....: 1<br/>           Existem apoios intermediarios na viga (S/N).....: N</p> |      |
| Confirma (s/n) : S  |      |

| MOMENTO CRITICO ELASTICO PARA FLAMBAGEM LATERAL COM TORCAO  | UFMG                      |                                       |  |        |                           |   |        |
|---|---------------------------|---------------------------------------|--|--------|---------------------------|---|--------|
| <p>Unidades: kN e cm</p>  |                           |                                       |  |        |                           |   |        |
| <table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2">Secoes Internas Contidas Lateralmente</th> </tr> <tr> <th>Numero</th> <th>Coordenada Longitudinal z</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">200.00</td> </tr> </tbody> </table> |                           | Secoes Internas Contidas Lateralmente |  | Numero | Coordenada Longitudinal z | 1 | 200.00 |
| Secoes Internas Contidas Lateralmente   |                           |                                       |  |        |                           |   |        |
| Numero  | Coordenada Longitudinal z |                                       |  |        |                           |   |        |
| 1   | 200.00                    |                                       |  |        |                           |   |        |
| Confirma (s/n) : S  |                           |                                       |  |        |                           |   |        |

| MOMENTO CRITICO ELASTICO PARA FLAMBAGEM LATERAL COM TORCAO   | UFMG |                            |   |                                 |   |                           |   |                                    |   |   |   |                  |   |
|--|------|----------------------------|---|---------------------------------|---|---------------------------|---|------------------------------------|---|---|---|------------------|---|
| <p>Unidades: kN e cm</p>   |      |                            |   |                                 |   |                           |   |                                    |   |   |   |                  |   |
| <p>Condicoes de Contorno: z = 0.00 cm<br/>(0-Livre / 1-Impedido)</p> <table border="1"> <tbody> <tr> <td>Deslocamento vertical.....</td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> <tr> <td>Rotacao em torno do eixo x.....</td> <td style="text-align: center;">0</td> </tr> <tr> <td>Deslocamento lateral.....</td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> <tr> <td>Rotacao no plano de flambagem.....</td> <td style="text-align: center;">0</td> </tr> <tr> <td>Rotacao em torno do centro de torcao.....</td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> <tr> <td>Empenamento.....</td> <td style="text-align: center;">0</td> </tr> </tbody> </table> |      | Deslocamento vertical..... | 1 | Rotacao em torno do eixo x..... | 0 | Deslocamento lateral..... | 1 | Rotacao no plano de flambagem..... | 0 | Rotacao em torno do centro de torcao..... | 1 | Empenamento..... | 0 |
| Deslocamento vertical.....   | 1    |                            |   |                                 |   |                           |   |                                    |   |   |   |                  |   |
| Rotacao em torno do eixo x.....  | 0    |                            |   |                                 |   |                           |   |                                    |   |   |   |                  |   |
| Deslocamento lateral.....  | 1    |                            |   |                                 |   |                           |   |                                    |   |   |   |                  |   |
| Rotacao no plano de flambagem.....   | 0    |                            |   |                                 |   |                           |   |                                    |   |   |   |                  |   |
| Rotacao em torno do centro de torcao.....  | 1    |                            |   |                                 |   |                           |   |                                    |   |   |   |                  |   |
| Empenamento.....   | 0    |                            |   |                                 |   |                           |   |                                    |   |   |   |                  |   |
|   |      |                            |   |                                 |   |                           |   |                                    |   |   |   |                  |   |
| Confirma (s/n) : S_  |      |                            |   |                                 |   |                           |   |                                    |   |   |   |                  |   |

| MOMENTO CRITICO ELASTICO PARA FLAMBAGEM LATERAL COM TORCAO     |   | UFMG |
|--|---|------|
| Unidades: kN e cm  |   |      |
| Condiçoes de Contorno: z = 200,00 cm<br>(0-Livre / 1-Impedido) |   |      |
| Deslocamento vertical.....                                     | 0 |      |
| Rotacao em torno do eixo x.....                                | 0 |      |
| Deslocamento lateral.....                                      | 1 |      |
| Rotacao no plano de flambagem.....                             | 0 |      |
| Empenamento.....   | 0 |      |
| Confirma (s/n) : 5   |   |      |

| MOMENTO CRITICO ELASTICO PARA FLAMBAGEM LATERAL COM TORCAO     |   | UFMG |
|--|---|------|
| Unidades: kN e cm  |   |      |
| Condiçoes de Contorno: z = 400,00 cm<br>(0-Livre / 1-Impedido) |   |      |
| Deslocamento vertical.....                                     | 1 |      |
| Rotacao em torno do eixo x.....                                | 0 |      |
| Deslocamento lateral.....                                      | 1 |      |
| Rotacao no plano de flambagem.....                             | 0 |      |
| Empenamento.....   | 0 |      |
| Confirma (s/n) : 5   |   |      |

Arquivo de saída dos resultados:

Identificacao da Barra.....: VIGA 1

Unidades : Forca.....= kN

Comprimento.....= cm

Perfil I

Dimensoes: d.....= 30.00 cm

tw.....= 0.63 cm

bfs.....= 15.00 cm

tfs.....= 0.95 cm

bfi.....= 15.00 cm

tfi.....= 0.95 cm

Propriedades Geometricas

-elemento 1 (z = 0.00 cm a z = 200.00 cm) :

momento de inercia x.....: lx = 7302.0056 cm<sup>4</sup>

momento de inercia y.....: ly = 534.9803 cm<sup>4</sup>

momento de inercia a torcao.....: It = 10.9950 cm<sup>4</sup>

constante de empenamento.....: Cw = 112740.0996 cm<sup>6</sup>

coord. do ponto de Kindem y.....: Ky = 0.0000 cm

dist. do centro de torcao ao

centro de gravidade.....: yo = 0.0000 cm

-elemento 2 (z = 200.00 cm a z = 400.00 cm):

momento de inercia x.....: lx = 7302.0056 cm<sup>4</sup>

momento de inercia y.....: ly = 534.9803 cm<sup>4</sup>

momento de inercia a torcao.....: It = 10.9950 cm<sup>4</sup>

constante de empenamento.....: Cw = 112740.0996 cm<sup>6</sup>

coord. do ponto de Kindem y.....: Ky = 0.0000 cm

dist. do centro de torcao ao

centro de gravidade.....: yo = 0.0000 cm

Vao da Viga.....= 400.00 cm

-Nao existem recortes nas mesas

-Nao existem aberturas na alma

-Nao existem lamelas

Cargas Concentradas:

-numero de cargas concentradas.....= 1

-carga concentrada 1:

\*posicao.....= 200.00 cm

\*valor da carga critica.....= 781.52 kN

\*excentricidade.....= 0.00 cm

-Nao existem cargas distribuidas

-Nao existem momentos aplicados

Secoes Internas com Restricao a Flambagem Lateral com Torcao:

-numero de secoes.....= 1

-Nao existem apoios intermediarios



#### Condições de Contorno

-posição..... = 0.00 cm  
\*deslocamento vertical.....: impedido  
\*rotação em torno do eixo x.....: livre  
\*deslocamento lateral.....: impedido  
\*rotação no plano de flambagem.....: livre  
\*rotação em torno do centro de torção: impedida  
\*empenamento.....: livre  
-posição..... = 200.00 cm  
\*deslocamento vertical.....: livre  
\*rotação em torno do eixo x.....: livre  
\*deslocamento lateral.....: impedido  
\*rotação no plano de flambagem.....: livre  
\*rotação em torno do centro de torção: impedida  
\*empenamento.....: livre  
-posição..... = 400.00 cm  
\*deslocamento vertical.....: impedido  
\*rotação em torno do eixo x.....: livre  
\*deslocamento lateral.....: impedido  
\*rotação no plano de flambagem.....: livre  
\*rotação em torno do centro de torção: impedida  
\*empenamento.....: livre

Multiplicador Crítico..... = 78.15177998

Momento Crítico.....:  $M_{cr} = 78151.78 \text{ kN.cm}$

Posição do Momento Crítico.....:  $z_{cr} = 200.00 \text{ cm}$

Momento Crítico p/ Flexão Pura e Extremidades com Vínculo de Garfo.....:  $M_{ocr} = 42169.01 \text{ kN.cm}$

$C_{bs} = M_{cr}/M_{ocr}$ ..... = 1.8533

### 3.5.2. Viga com Abertura na Alma

Viga I metálica biapoiada, perfil VS 300x36, com 4 m de vão, submetida a uma carga distribuída de 50,0 kN/m aplicada no meio do vão no nível do centro de torção. A viga possui uma abertura não excêntrica na alma, com centro coincidente com o centro do vão da viga, sem reforço. As extremidades possuem vínculo de garfo (figura 3.6).

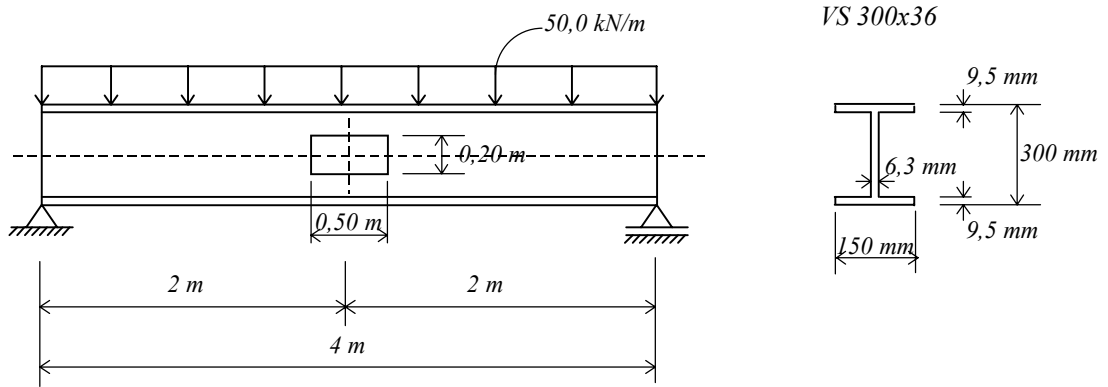


Figura 3.6 - Viga VS 300x36 com abertura na alma.

Arquivo de entrada de dados:

```

VIGA 2
kN
cm
400.00
1
30.00 0.63 15.00 0.95 15.00 0.95
N
S
1
1
175.00 225.00 5.00 5.00
N
N
N
S
1
0.00 400.00 0.50 0.00
N
N
N
1 0 1 0 1 0
1 0 1 0 1 0

```

Arquivo de saída de resultados:

Identificacao da Barra.....: VIGA 2

Unidades : Forca.....= kN  
 Comprimento.....= cm

Perfil I  
 Dimensoes: d.....= 30.00 cm  
 tw.....= 0.63 cm  
 bfs.....= 15.00 cm  
 tfs.....= 0.95 cm

bfi..... = 15.00 cm  
tfi..... = 0.95 cm

#### Propriedades Geometricas

- elemento 1 (z = 0.00 cm a z = 175.00 cm):
  - momento de inercia x.....: lx = 7302.0056 cm<sup>4</sup>
  - momento de inercia y.....: ly = 534.9803 cm<sup>4</sup>
  - momento de inercia a torcao.....: lt = 10.9950 cm<sup>4</sup>
  - constante de empenamento.....: Cw = 112740.0996 cm<sup>6</sup>
  - coord. do ponto de Kindem y.....: Ky = 0.0000 cm
  - dist. do centro de torcao ao centro de gravidade.....: yo = 0.0000 cm
- elemento 2 (z = 175.00 cm a z = 225.00 cm):
  - momento de inercia x.....: lx = 6882.0056 cm<sup>4</sup>
  - momento de inercia y.....: ly = 534.5636 cm<sup>4</sup>
  - momento de inercia a torcao.....: lt = 9.3281 cm<sup>4</sup>
  - constante de empenamento.....: Cw = 112740.0996 cm<sup>6</sup>
  - coord. do ponto de Kindem y.....: Ky = -0.0000 cm
  - dist. do centro de torcao ao centro de gravidade.....: yo = -0.0000 cm
- elemento 3 (z = 225.00 cm a z = 400.00 cm):
  - momento de inercia x.....: lx = 7302.0056 cm<sup>4</sup>
  - momento de inercia y.....: ly = 534.9803 cm<sup>4</sup>
  - momento de inercia a torcao.....: lt = 10.9950 cm<sup>4</sup>
  - constante de empenamento.....: Cw = 112740.0996 cm<sup>6</sup>
  - coord. do ponto de Kindem y.....: Ky = 0.0000 cm
  - dist. do centro de torcao ao centro de gravidade.....: yo = 0.0000 cm

Vao da Viga..... = 400.00 cm

-Nao existem recortes nas mesas

#### Aberturas:

- numero de aberturas..... = 1
- abertura 1:
  - \*retangular
  - \*posicao inicial..... = 175.00 cm
  - posicao final..... = 225.00 cm
  - \*altura do T superior..... = 5.00 cm
  - altura do T inferior..... = 5.00 cm
  - \*sem reforco

-Nao existem lamelas

-Nao existem cargas concentradas

#### Cargas Distribuidas:

- numero de cargas distribuidas..... = 1
- carga distribuida 1:
  - \*posicao inicial..... = 0.00 cm
  - posicao final..... = 400.00 cm
  - \*valor da carga critica..... = 0.70 kN/cm
  - \*excentricidade..... = 0.00 cm

-Nao existem momentos aplicados

-Nao existem secoes internas com restricao a flambagem lateral com torcao

-Nao existem apoios intermediarios

#### Condicoes de Contorno

- posicao.....= 0.00 cm
- \*deslocamento vertical.....: impedido
- \*rotacao em torno do eixo x.....: livre
- \*deslocamento lateral.....: impedido
- \*rotacao no plano de flambagem.....: livre
- \*rotacao em torno do centro de torcao: impedida
- \*empenamento.....: livre
- posicao.....= 400.00 cm
- \*deslocamento vertical.....: impedido
- \*rotacao em torno do eixo x.....: livre
- \*deslocamento lateral.....: impedido
- \*rotacao no plano de flambagem.....: livre
- \*rotacao em torno do centro de torcao: impedida
- \*empenamento.....: livre

Multiplicador Critico.....= 1.40939486

Momento Critico.....:  $M_{cr} = 14093.95 \text{ kN.cm}$

Posicao do Momento Critico.....:  $z_{cr} = 200.00 \text{ cm}$

Momento Critico p/ Flexao Pura e Extremidades com Vinculo de Garfo.....:  $M_{ocr} = 12455.90 \text{ kN.cm}$

$C_{bs} = M_{cr}/M_{ocr}..... = 1.1315$

Momento Critico p/ Viga Prismatica, Submetida a Flexao Pura e Extremidades com Vinculo de Garfo.....:  $M_{ocr1} = 12458.24 \text{ kN.cm}$

$C_{bs1} = M_{cr}/M_{ocr1}..... = 1.1313$

### 3.5.3. Viga em Balanço

Viga I metálica em balanço, perfil VS 300x36, com 4 m de vão, submetida a uma carga concentrada de 10,0 kN aplicada na extremidade livre no nível do centro de torção. A extremidade engastada possui vínculo rígido (figura 3.7).

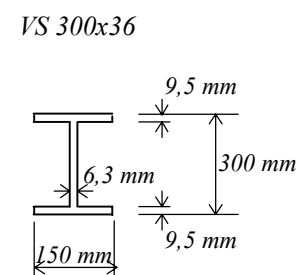
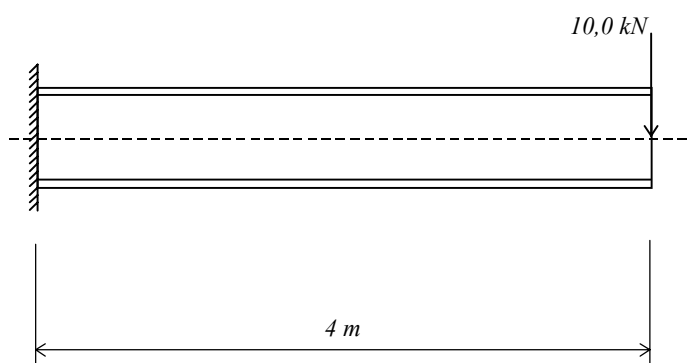


Figura 3.7 - Viga VS 300x36 em balanço.

Arquivo de entrada de dados:

```
VIGA 3
kN
cm
400.00
1
30.00 0.63 15.00 0.95 15.00 0.95
N
N
N
S
1
400.00 10.00 0.00
N
N
N
N
1 1 1 1 1 1
0 0 0 0 0 0
```

Arquivo de saída de resultados:

Identificacao da Barra.....: VIGA 3

Unidades : Forca.....= kN  
Comprimento.....= cm

Perfil I

Dimensoes: d.....= 30.00 cm  
tw.....= 0.63 cm  
bfs.....= 15.00 cm  
tfs.....= 0.95 cm  
bfi.....= 15.00 cm  
tfi.....= 0.95 cm

Propriedades Geometricas

-elemento 1 (z = 0.00 cm a z = 400.00 cm):  
momento de inercia x.....:  $I_x = 7302.0056 \text{ cm}^4$   
momento de inercia y.....:  $I_y = 534.9803 \text{ cm}^4$   
momento de inercia a torcao.....:  $I_t = 10.9950 \text{ cm}^4$   
constante de empenamento.....:  $C_w = 112740.0996 \text{ cm}^6$   
coord. do ponto de Kindem y.....:  $K_y = 0.0000 \text{ cm}$   
dist. do centro de torcao ao  
centro de gravidade.....:  $y_o = 0.0000 \text{ cm}$

Vao da Viga.....= 400.00 cm

-Nao existem recortes nas mesas

-Nao existem aberturas na alma

-Nao existem lamelas

Cargas Concentradas:

- numero de cargas concentradas.....= 1
- carga concentrada 1:
  - \*posicao.....= 400.00 cm
  - \*valor da carga critica.....= 53.00 kN
  - \*excentricidade.....= 0.00 cm

-Nao existem cargas distribuidas

-Nao existem momentos aplicados

-Nao existem secoes internas com restricao a flambagem lateral com torcao

-Nao existem apoios intermediarios

Condicoes de Contorno

- posicao.....= 0.00 cm
  - \*deslocamento vertical.....: impedido
  - \*rotacao em torno do eixo x.....: impedida
  - \*deslocamento lateral.....: impedido
  - \*rotacao no plano de flambagem.....: impedida
  - \*rotacao em torno do centro de torcao: impedida
  - \*empenamento.....: impedida
- posicao.....= 400.00 cm
  - \*deslocamento vertical.....: livre
  - \*rotacao em torno do eixo x.....: livre
  - \*deslocamento lateral.....: livre
  - \*rotacao no plano de flambagem.....: livre
  - \*rotacao em torno do centro de torcao: livre
  - \*empenamento.....: livre

Multiplicador Critico.....= 5.29960399

Momento Critico.....:  $M_{cr} = 21198.42 \text{ kN.cm}$

Posicao do Momento Critico.....:  $z_{cr} = 0.00 \text{ cm}$

Momento Critico p/ Flexao Pura e Extremidades com Vinculo de Garfo.....:  $M_{ocr} = 12458.37 \text{ kN.cm}$

$C_{bs} = M_{cr}/M_{ocr}.....= 1.7015$

## **4. APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS**

### **4.1. Introdução**

Para que pudessem ser mostradas todas as potencialidades do Programa MCE, foi feito um grande número de processamentos, procurando cobrir situações diversas.

Foram analisados os casos de vigas de seção I bissimétrica, a mais utilizada na prática, quando o carregamento atua no nível do centro de torção, no nível da mesa inferior, e no nível da mesa superior. Os resultados foram apresentados de maneira a ser possível uma comparação com aqueles fornecidos pela especificação americana AISC/LRFD [62], pela Norma Brasileira NBR 8800 [63], pelo Anexo F da especificação europeia ENV 1993-1-1 [64], por Kirby e Nethercot [65], e por Chen e Lui [30], onde são mostrados os resultados de diversos pesquisadores, entre eles, Nethercot e Rockey [25] e Nethercot [26, 28]. Outros resultados que cobrem uma enorme gama de situações foram também obtidos com o Programa MCE, e embora não houvessem informações disponíveis para comparações, são também fornecidos em forma de gráficos.

Além da seção I bissimétrica foram analisados os perfis citados no item 1.4 previstos pela NBR 8800 [63], para os casos de carregamento atuando no nível do centro de torção. Os resultados obtidos foram apresentados paralelamente aos valores fornecidos pelas especificações já mencionadas.

Para as variações de condições de contorno, foram observadas situações em que ocorrem contenções laterais internas ao longo do comprimento da viga, além de casos de vínculos rígidos para efeito da flambagem lateral com torção.

Considerou-se também os casos com variação de geometria na seção transversal, onde foram analisadas vigas com lamelas de reforço soldadas às mesas, vigas com recortes nas extremidades para ligação, e vigas com aberturas na alma.

Comentários e conclusões a respeito dos resultados obtidos serão feitos no capítulo 5.

#### 4.2. Casos de Carregamento e Condições de Contorno

Os casos de carregamento e condições de contorno no plano de flexão analisados estão apresentados na Tabela 4.1.

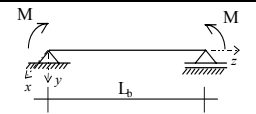
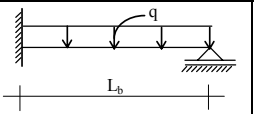
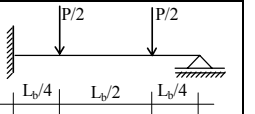
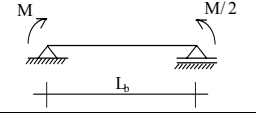
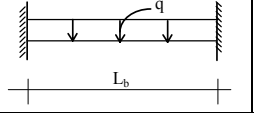
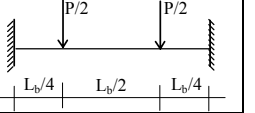
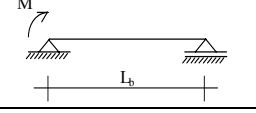
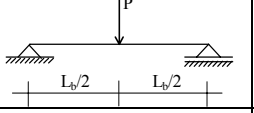
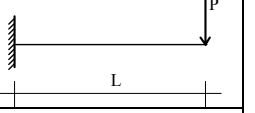
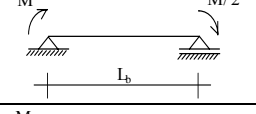
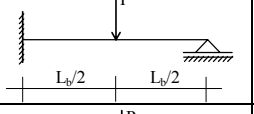
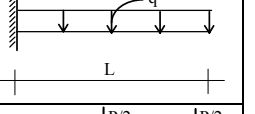
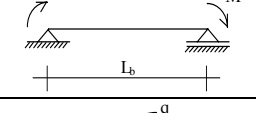
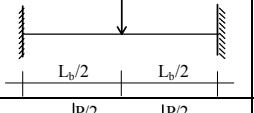
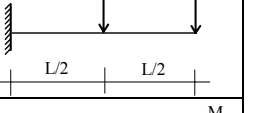
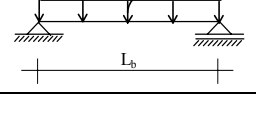
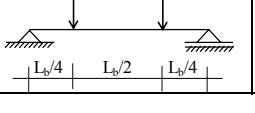
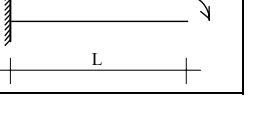
|    |   |    |  |    |   |
|----|---|----|--|----|---|
| 01 |  | 07 |  | 13 |  |
| 02 |  | 08 |  | 14 |  |
| 03 |  | 09 |  | 15 |  |
| 04 |  | 10 |  | 16 |  |
| 05 |  | 11 |  | 17 |  |
| 06 |  | 12 |  | 18 |  |

Tabela 4.1 - Casos de carregamento e condições de contorno.

Serão consideradas as seguintes possibilidades de condições de contorno quanto à flambagem lateral com torção:



- para as vigas com apoios nas duas extremidades:
  - vínculos de garfo nas duas extremidades. Estes casos serão referidos pelo número do caso, dado na Tabela 4.1, seguido da letra *S* (alternativa *S*);
  - vínculos rígidos em ambas as extremidades. Estes casos serão referidos por seu número, dado na Tabela 4.1, seguido da letra *R* (alternativa *R*);
- para as vigas em balanço, vínculo rígido na extremidade inicial (onde há o engaste no plano de flexão) e deslocamentos ( $\phi$ ,  $\mu$ ,  $\omega$  e  $\mu'$ ) livres na extremidade final. Estes casos serão referidos pelo número do caso apresentado na Tabela 4.1 seguido da letra *C* (alternativa *C*).

Verifica-se que nas vigas com apoios nas duas extremidades (casos 01 a 14), o vão  $L$  é igual ao comprimento destravado  $L_b$ .

### 4.3. Vigas com Seção I Bissimétrica

Para as vigas com seção I bissimétrica, foram estudados todos os casos apresentados na Tabela 4.1. Os resultados obtidos foram mostrados juntamente com os valores fornecidos ao se utilizar os processos das especificações de projeto e de Kirby e Nethercot [65], descritos nos itens 1.3.1, 1.3.2 e 1.3.3, e os valores apresentados no trabalho de Chen e Lui [30], através de gráficos.

#### 4.3.1. Comparação com Resultados Obtidos pelo AISC/LRFD [62], NBR 8800 [63], ENV 1993-1-1 [64] e por Kirby e Nethercot [65]

Utilizando-se as formulações apresentadas para o cálculo do coeficiente  $C_b$ , foram obtidos os valores mostrados na Tabela 4.2, para todos os casos da Tabela 4.1, alternativa *S* dos casos 01 a 14 e *C* dos casos 15 a 18. Para o AISC/LRFD [62], Kirby e Nethercot [65] e a NBR 8800 [63] foram utilizadas, respectivamente, as equações (1.3), (1.4) e (1.11). Para o ENV 1993-1-1 [64], tem-se  $C_b = C_l$ , com  $C_l$  dado na Tabela 1.1, uma vez que estão sendo considerados os casos de momentos fletores aplicados nas extremidades do comprimento destravado ou cargas transversais aplicadas no nível do

centro de torção e condições de contorno correspondentes à alternativa *S*. Nesta mesma tabela, são mostrados os valores do coeficiente  $C_{bs}$ , obtidos pelo Programa MCE.

| Caso - Alternativa | AISC/LRFD | Kirby e Nethercot | NBR 8800 | ENV 1993-1-1 | Programa MCE |
|--------------------|-----------|-------------------|----------|--------------|--------------|
| 01 - <i>S</i>      | 1,00      | 1,00              | 1,00     | 1,00         | 1,00         |
| 02 - <i>S</i>      | 1,35      | 1,37              | 1,30     | 1,32         | 1,32         |
| 03 - <i>S</i>      | 1,67      | 1,71              | 1,75     | 1,88         | 1,84         |
| 04 - <i>S</i>      | 2,17      | 2,29              | 2,30     | 2,70         | 2,56         |
| 05 - <i>S</i>      | 2,27      | 2,40              | 2,30     | 2,75         | 2,74         |
| 06 - <i>S</i>      | 1,14      | 1,14              | 1,00     | 1,13         | 1,14         |
| 07 - <i>S</i>      | 2,08      | 2,18              | 1,00     | --           | 2,27         |
| 08 - <i>S</i>      | 2,38      | 2,53              | 1,00     | 2,57         | 2,61         |
| 09 - <i>S</i>      | 1,32      | 1,33              | 1,00     | 1,37         | 1,36         |
| 10 - <i>S</i>      | 1,71      | 1,76              | 1,00     | --           | 1,82         |
| 11 - <i>S</i>      | 1,92      | 2,00              | 1,00     | 1,57         | 1,72         |
| 12 - <i>S</i>      | 1,00      | 1,00              | 1,00     | 1,05         | 1,04         |
| 13 - <i>S</i>      | 1,95      | 2,04              | 1,00     | --           | 2,41         |
| 14 - <i>S</i>      | 2,14      | 2,25              | 1,00     | --           | 3,11         |
| 15 - <i>C</i>      | 1,00      | 1,00              | 1,00     | --           | 1,71         |
| 16 - <i>C</i>      | 1,00      | 1,00              | 1,00     | --           | 3,32         |
| 17 - <i>C</i>      | 1,00      | 1,00              | 1,00     | --           | 2,35         |
| 18 - <i>C</i>      | 1,00      | 1,00              | 1,00     | --           | 0,52         |

Tabela 4.2 - Coeficientes  $C_b$  obtidos pelos processos das especificações [62, 63, 64], da equação de Kirby e Nethercot [65], e coeficiente  $C_{bs}$  obtido pelo Programa MCE, para os casos da Tabela 4.1.

#### **4.3.2. Comparação com Resultados Apresentados por Chen e Lui [30] e pelo ENV 1993-1-1 [64]**

#### 4.3.2.1. Vigas biapoiadas com cargas transversais aplicadas e alternativa S

Chen e Lui [30] mostraram que nos casos de vigas biapoiadas submetidas à atuação de uma carga concentrada na seção central do comprimento destravado, caso 09 da Tabela 4.1 e alternativa S, ou seja, vínculo de garfo nas duas extremidades, o momento crítico é dado por:

$$M_{cr} = \frac{P_{cr} L_b}{4} = C_b M_{0cr} \quad (4.1)$$

onde  $P_{cr}$  é a carga crítica de flambagem lateral com torção,  $M_{0cr}$  é dado pela equação (1.1) e  $C_b$  é fornecido de forma aproximada por:

$$C_b = \begin{cases} AB & \text{para cargas atuando na mesa inferior} \\ A & \text{para cargas atuando no nível do centro de torção} \\ A / B & \text{para cargas atuando na mesa superior} \end{cases} \quad (4.2)$$

Esta forma de cálculo de  $C_b$ , em função dos parâmetros  $A$  e  $B$  é aproximada e foi proposta por Nethercot e Rockey [25] e será utilizada em todos os cálculos posteriores. Os valores  $A$  e  $B$ , para o caso em estudo, também definidos por Nethercot e Rockey [25], são iguais a:

$$A = 1,35 \quad (4.3)$$

$$B = 1 + 0,649 W - 0,180 W^2 \quad (4.4)$$

onde  $W^2 = (\pi^2 E C_w / L_b^2 G J)$ .

Chen e Lui [30] apresentam os valores de  $P_{cr}$  obtidos através da solução aproximada proposta por Nethercot e Rockey [25], através de um gráfico, onde são plotados também os valores da solução teórica (equação clássica de Timoshenko e Gere [5]). De modo a tornar possível uma comparação, os valores fornecidos pelo Programa MCE são plotados no mesmo gráfico, apresentado na figura 4.1. Nesta mesma figura, são apresentados ainda os resultados obtidos ao se utilizar o processo do ENV 1993-1-1 [64], uma vez que nesta especificação são previstos os casos de carregamento atuando

acima ou abaixo do centro de torção, e condições de contorno para flambagem lateral com torção em que as extremidades são rígidas (alternativa *R*), o que não ocorre com o AISC/LRFD [62] e a NBR 8800 [63].

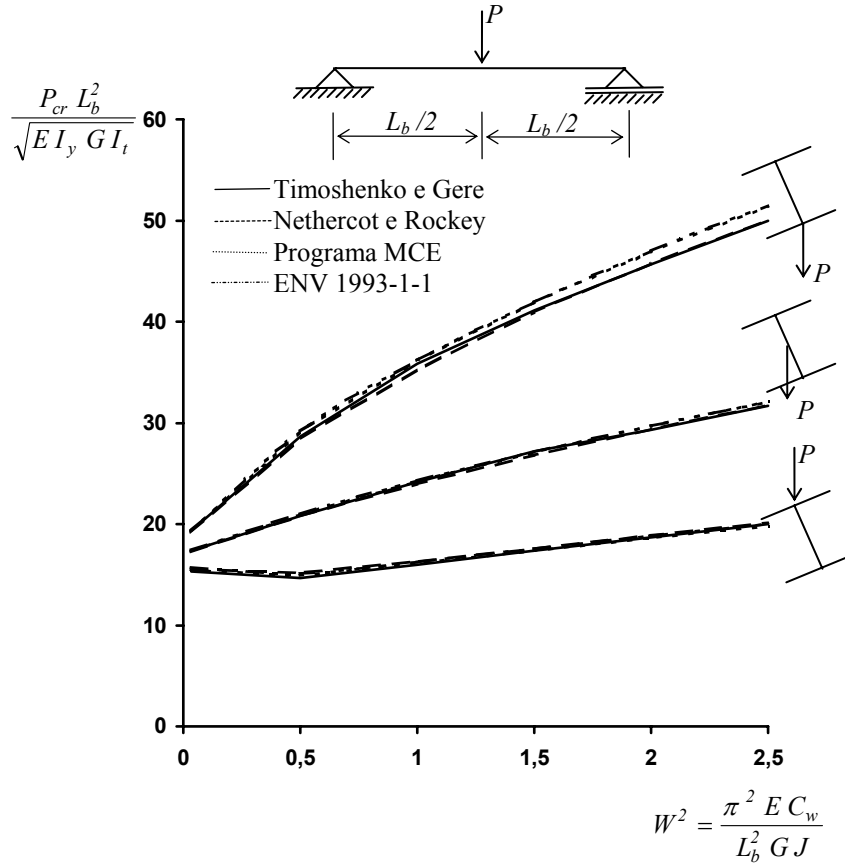


Figura 4.1 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 09 - S da Tabela 4.1.

Para as vigas biapoiadas sujeitas à atuação de carga distribuída ao longo do comprimento destravado, caso 06 da Tabela 4.1 e alternativa *S*, o momento crítico é dado por:

$$M_{cr} = \frac{q_{cr} L_b^2}{8} = C_b M_{0cr} \quad (4.5)$$

onde  $q_{cr}$  é a carga crítica de flambagem lateral com torção e  $C_b$  é dado da mesma forma aproximada, proposta por Nethercot e Rockey [25] e apresentada na expressão (4.2). Agora, porém, os valores dos parâmetros *A* e *B* são:

$$A = 1,12 \quad (4.6)$$

$$B = I + 0,535 W - 0,154 W^2 \quad (4.7)$$

Os valores de  $q_{cr}$  obtidos através da solução de Nethercot e Rockey [25] são apresentados em função de  $W^2$ , em gráfico, onde novamente são plotados os valores da solução teórica, do ENV 1993-1-1 [64] e os valores fornecidos pelo Programa MCE (figura 4.2).

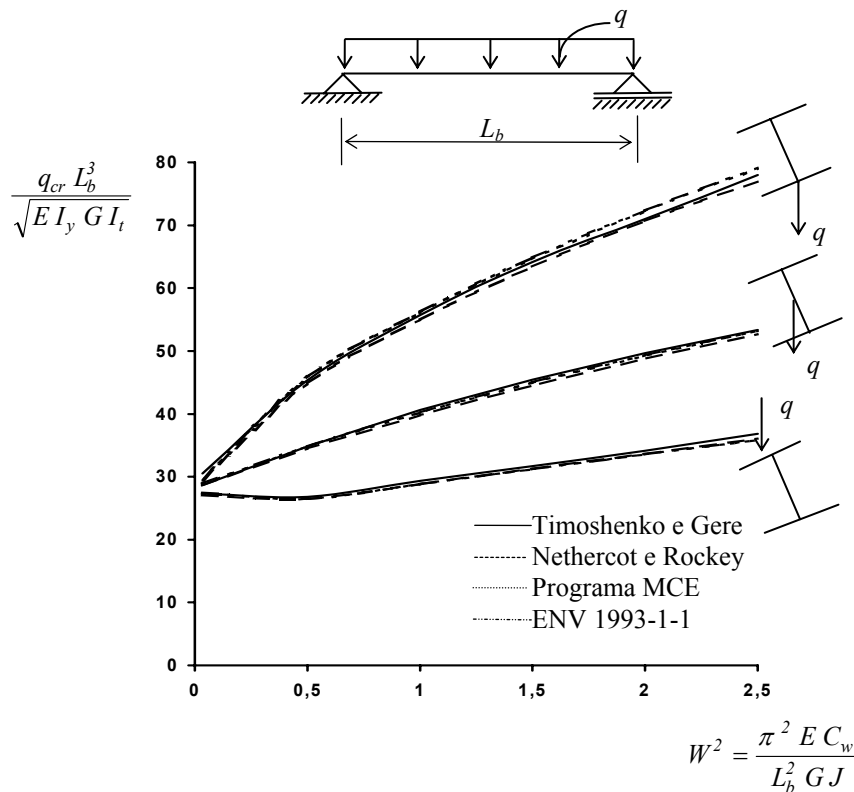


Figura 4.2 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 06 - S da Tabela 4.1.

No caso de vigas biapoiadas sujeitas à atuação de duas cargas concentradas, conforme mostra a figura 4.3, caso 12 da Tabela 4.1, alternativa S, o momento crítico é dado por:

$$M_{cr} = P_{cr} L_l = C_b M_{0cr} \quad (4.8)$$

Os valores de  $A$  e  $B$ , agora propostos por Nethercot [26], são:

$$A = I + \left( \frac{L_l}{L_b} \right)^2 \quad (4.9)$$

$$B = 1 + 1,636 W - 0,465 W^2 \quad (4.10)$$

Nas equações (4.8) e (4.9),  $L_l$  é a distância de cada carga ao apoio mais próximo, no caso 12 da Tabela 4.1 igual a  $L_b/4$ . Os valores de  $P_{cr}$  obtidos através da solução de Nethercot [26], são plotados em função de  $W^2$ , juntamente com os valores fornecidos pelo ENV 1993-1-1 [64] e pelo Programa MCE (figura 4.3).

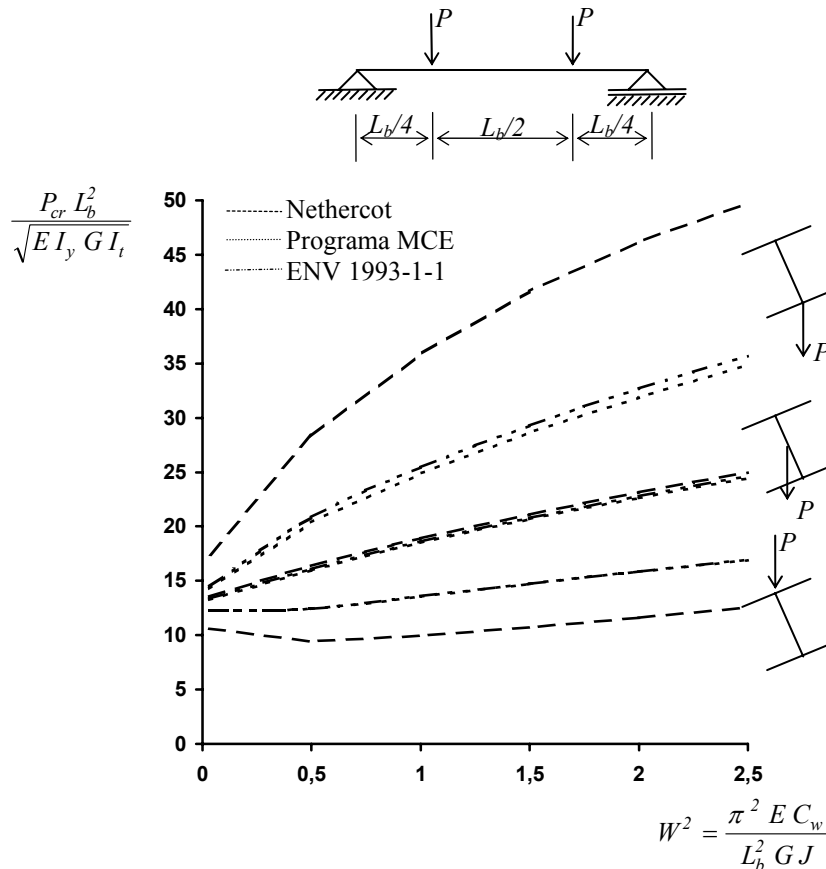


Figura 4.3 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 12 - S da Tabela 4.1.

#### 4.3.2.2. Vigas em balanço

Para vigas em balanço, no caso em que a extremidade engastada tem vínculo rígido e a extremidade livre não possui nenhuma restrição à flambagem lateral com torção, alternativa C, descrita no item 4.2, a resistência nominal, para o caso de momento fletor uniforme causado por um binário  $M_0$  aplicado na extremidade livre, pode ser obtida,

segundo Chen e Lui [30], pela equação (1.1), considerando-se o comprimento destravado  $L_b$  igual a  $2L$ .

Para vigas em balanço com carga concentrada aplicada na extremidade livre, caso 15 da Tabela 4.1, e viga em balanço com carga distribuída ao longo do vão, caso 16 da Tabela 4.1, Chen e Lui [30] apresentam valores de  $M_{cr}$ , obtidos através de procedimentos numéricos propostos por Anderson e Trahair [27] e Nethercot [28]. Para estes dois casos, os resultados de Chen e Lui [30] e os obtidos com o Programa MCE são plotados em um gráfico que relaciona a carga crítica em função de  $W_c^2$  (figuras 4.4 e 4.5), onde  $W_c^2 = (\pi^2 E C_w / L_b^2 G J)$ .

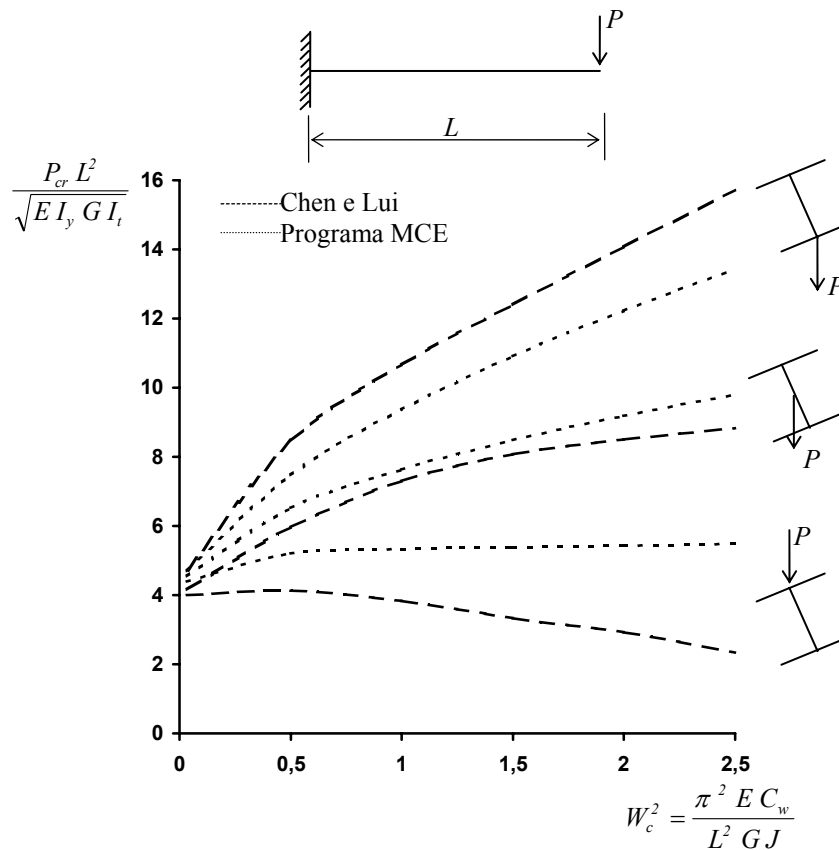


Figura 4.4 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 15 - C da Tabela 4.1.

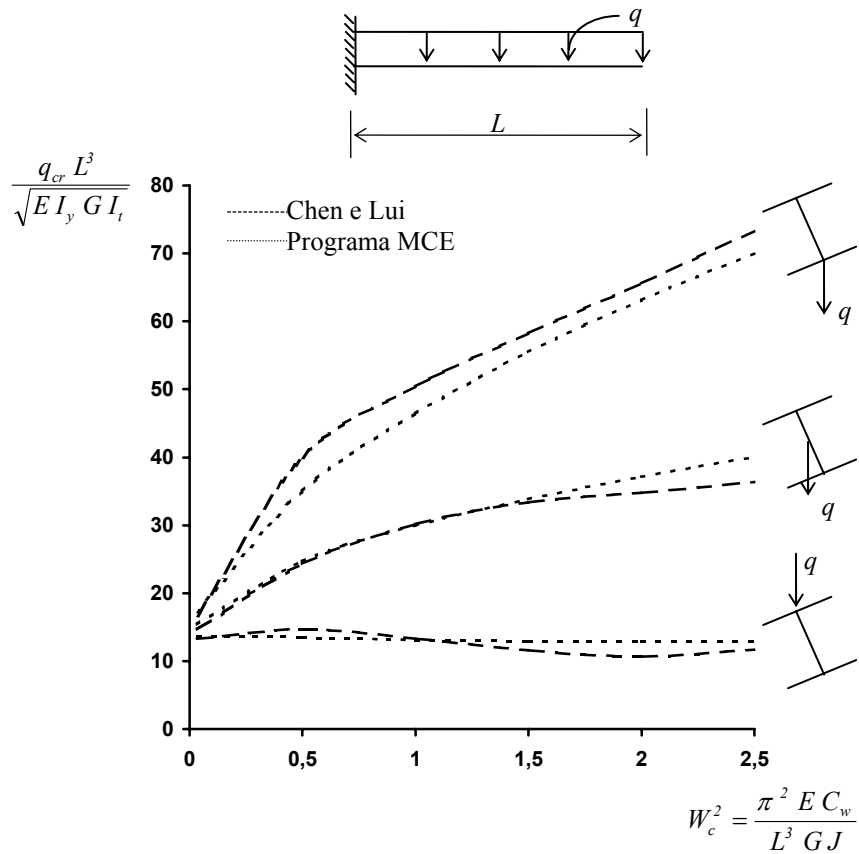


Figura 4.5 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 16 - C da Tabela 4.1.

Nos casos em que ocorrem outras condições de contorno, Nethercot [28] mostra que a equação (1.1) pode ser usada. O valor do comprimento destravado  $L_b$ , porém, passa a ser dado por um comprimento efetivo  $KL$ , onde o fator  $K$  varia de acordo com as condições de contorno, conforme é mostrado na Tabela 4.3. Os valores apresentados nesta tabela são válidos apenas para os casos de carga concentrada na extremidade livre e carga distribuída.



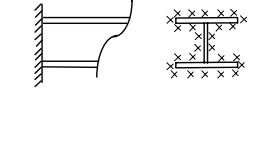
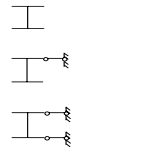
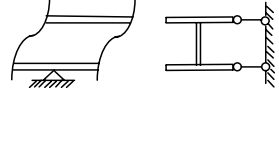
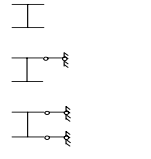
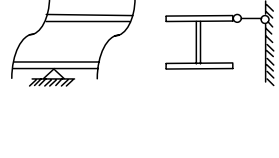
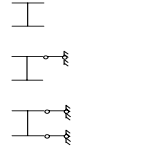
| Condições de Contorno   |   | Comprimento Efetivo    |                       |
|---|---|------------------------|-----------------------|
| Extremidade apoiada   | Extremidade livre   | Carga na mesa superior | Todos os outros casos |
|  |  | 1,4 L                  | 0,8 L                 |
|   |   | 1,4 L                  | 0,7 L                 |
|   |   | 0,6 L                  | 0,6 L                 |
|  |  | 2,5 L                  | 1,0 L                 |
|   |   | 2,5 L                  | 0,9 L                 |
|   |   | 1,5 L                  | 0,8 L                 |
|  |  | 7,5 L                  | 3,0 L                 |
|   |   | 7,5 L                  | 2,7 L                 |
|   |   | 4,5 L                  | 2,4 L                 |

Tabela 4.3 - Fatores de comprimento efetivo para balanços com várias condições de contorno.

#### 4.3.2.3. Vigas biapoiadas e alternativa *R*

Considerando agora as condições de contorno relacionadas à alternativa *R*, ou seja, vínculos rígidos nas duas extremidades, Chen e Lui [30] apresentam os valores da resistência nominal, para os casos de momento fletor uniforme ao longo da viga, carga concentrada no meio do vão e carga distribuída ao longo da viga.

Para momento fletor uniforme ao longo do vão, caso 01 da Tabela 4.1 e alternativa *R*, segundo Chen e Lui [30], a equação (1.1) permanece válida, e o comprimento destravado  $L_b$  passa a ser igual a um comprimento efetivo de  $L/2$ , ou seja,  $K=1/2$ . O gráfico do momento crítico em função de  $W^2$  é apresentado na figura 4.6, onde são mostrados também os valores obtidos pelo Programa MCE e pelo ENV 1993-1-1 [64]. Apenas para referência, vê-se ainda nesta figura os valores do momento crítico para a condição de contorno correspondente à alternativa *S*.

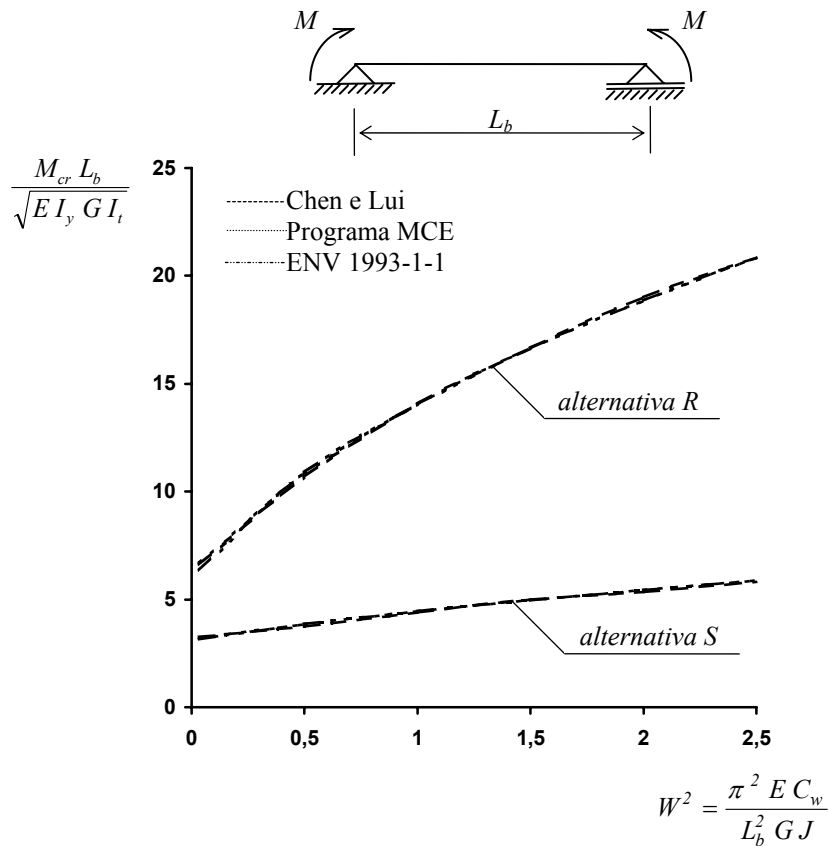


Figura 4.6 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 01 da Tabela 4.1.

Para os casos de vigas biapoiadas submetidas à atuação de carga concentrada na seção central, caso 09 da Tabela 4.1 e alternativa R, o momento crítico permanece o mesmo apresentado na equação (4.1). Os valores de  $A$  e  $B$  que definem  $C_{bs}$  de forma aproximada, segundo Chen e Lui [30], são:

$$A = 1,916 + 1,851 W - 0,424 W^2 \quad (4.11)$$

$$B = 1 + 0,923 W - 0,466 W^2 \quad (4.12)$$

Os valores de  $P_{cr}$  são plotados em função de  $W^2$ , para a solução aproximada de Chen e Lui [30] e para o Programa MCE (figura 4.7), além dos resultados do ENV 1993-1-1 [64].

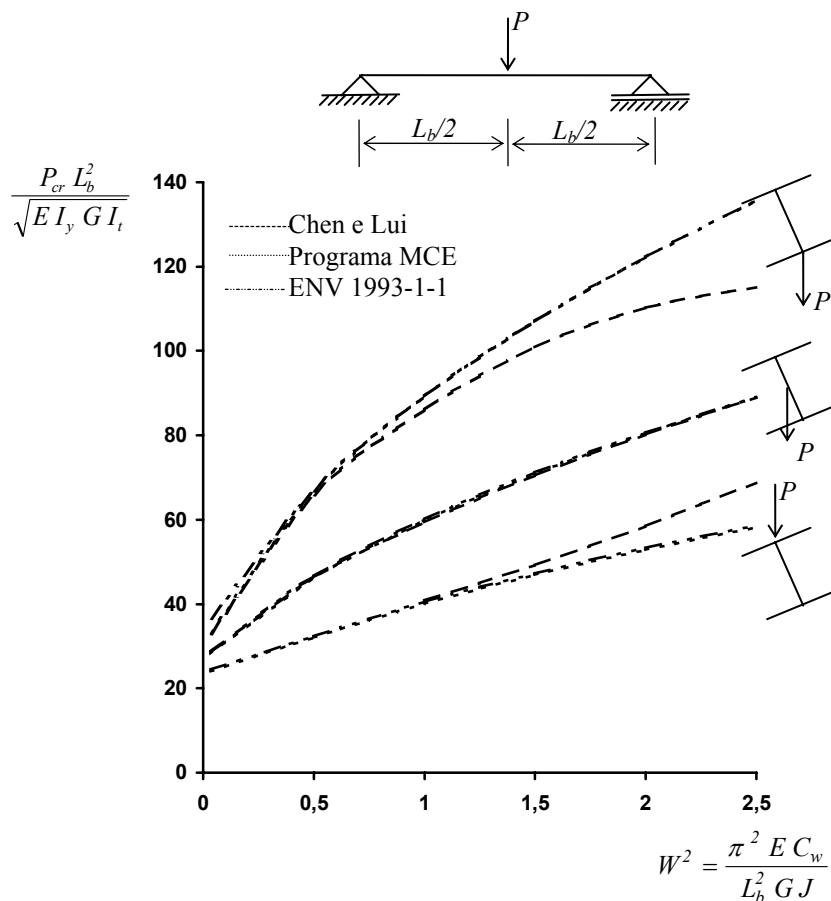


Figura 4.7 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 09 - R da Tabela 4.1.

Para as vigas biapoimadas sujeitas à atuação de carga distribuída ao longo do vão, caso 06 da Tabela 4.1 e alternativa R, o momento crítico é dado pela equação (4.5). Neste caso, os valores de  $A$  e  $B$ , propostos por Chen e Lui [30], são dados por:

$$A = 1,643 + 1,771 W - 0,405 W^2 \quad (4.13)$$

$$B = 1 + 0,625 W - 0,339 W^2 \quad (4.14)$$

O gráfico correspondente a esta situação é apresentado na figura 4.8.

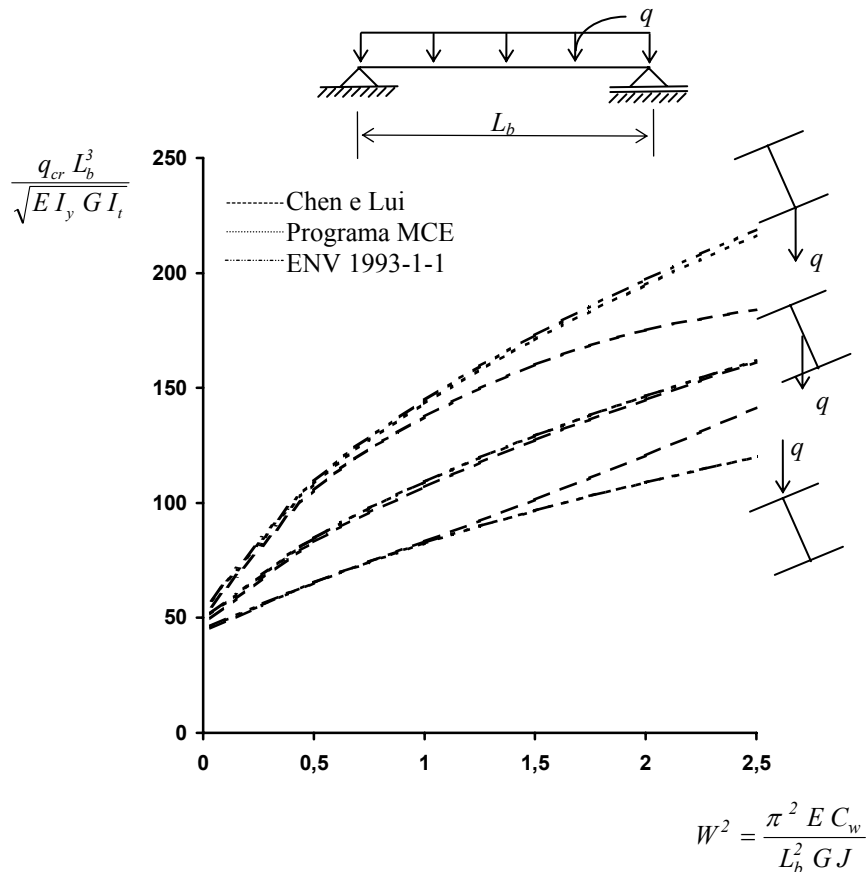


Figura 4.8 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 06 - R da Tabela 4.1.

#### 4.3.2.4. Vigas biapoiadas com outras condições de contorno

Chen e Lui [30] apresentam também resultados para os casos de carga concentrada no meio do vão e carga distribuída ao longo da viga, para as situações de rotação em torno do eixo longitudinal, deslocamento lateral e empenamento impedidos e rotação no plano de flambagem livre, e de rotação em torno do eixo longitudinal, deslocamento lateral e rotação no plano de flambagem impedidos e empenamento livre, em ambas as extremidades.

Para a primeira situação de condição de contorno, os valores de  $A$  e  $B$ , propostos agora por Nethercot e Rockey [25], são:

$$A = 1,43 + 0,463 W + 0,485 W^2 \quad (4.15)$$

$$B = 1 + 0,619 W - 0,317 W^2 \quad (4.16)$$

para o caso de carga concentrada aplicada no meio do vão, e

$$A = 1,2 + 0,402 W + 0,416 W^2 \quad (4.17)$$

$$B = 1 + 0,571 W - 0,225 W^2 \quad (4.18)$$

para o caso de carga distribuída. Os gráficos representativos destes casos, onde aparecem também os resultados obtidos com o Programa MCE, são apresentados nas figuras 4.9 e 4.10, respectivamente.

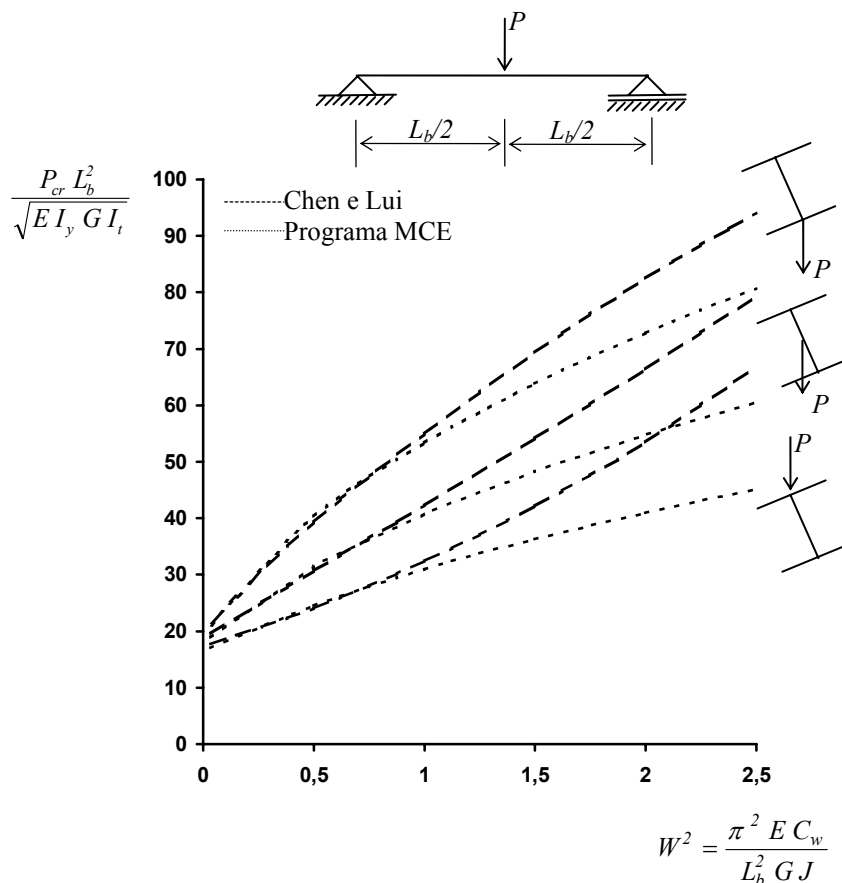


Figura 4.9 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 09 da Tabela 4.1 para a situação de rotação em torno do eixo longitudinal, deslocamento lateral e empenamento impedidos e rotação no plano de flambagem livre.

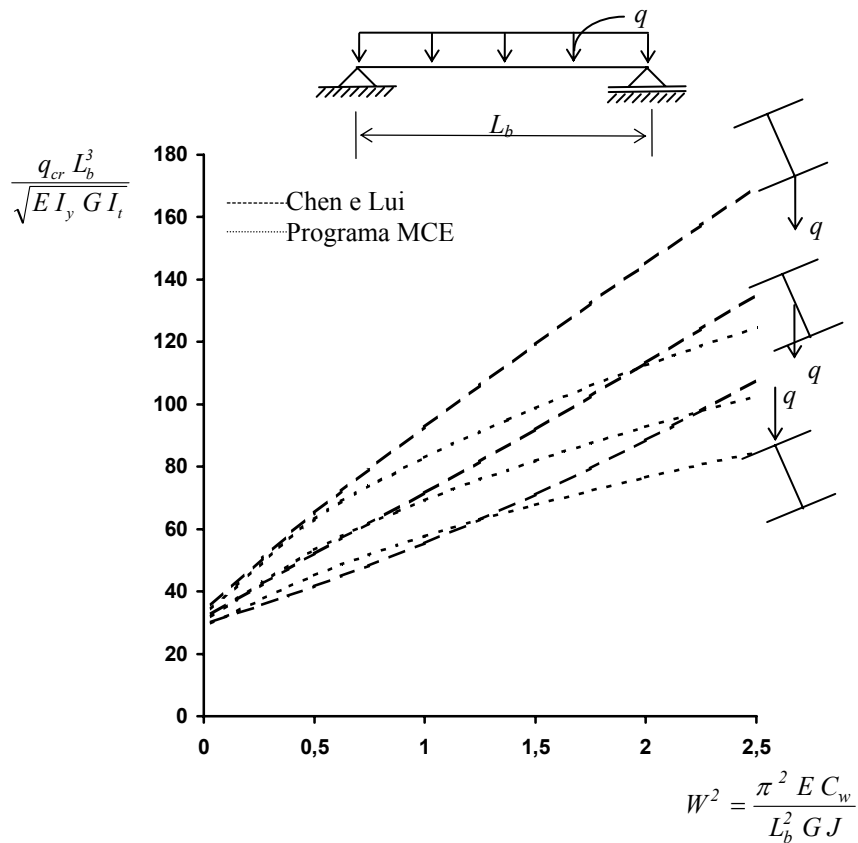


Figura 4.10 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 06 da Tabela 4.1 para a situação rotação em torno do eixo longitudinal, deslocamento lateral e empenamento impedidos e rotação no plano de flambagem livre.

Para a outra condição de contorno, os valores de  $A$  e  $B$  são, respectivamente, para o caso de carga concentrada aplicada no meio do vão e para o caso de carga distribuída:

$$A = 2,0 + 0,304 W - 0,074 W^2 \quad (4.19)$$

$$B = 1 + 1,047 W - 0,207 W^2 \quad (4.20)$$

e

$$A = 1,9 + 0,006 W - 0,120 W^2 \quad (4.21)$$

$$B = 1 + 0,806 W - 0,100 W^2 \quad (4.22)$$

Os gráficos são apresentados nas figuras 4.11 e 4.12.

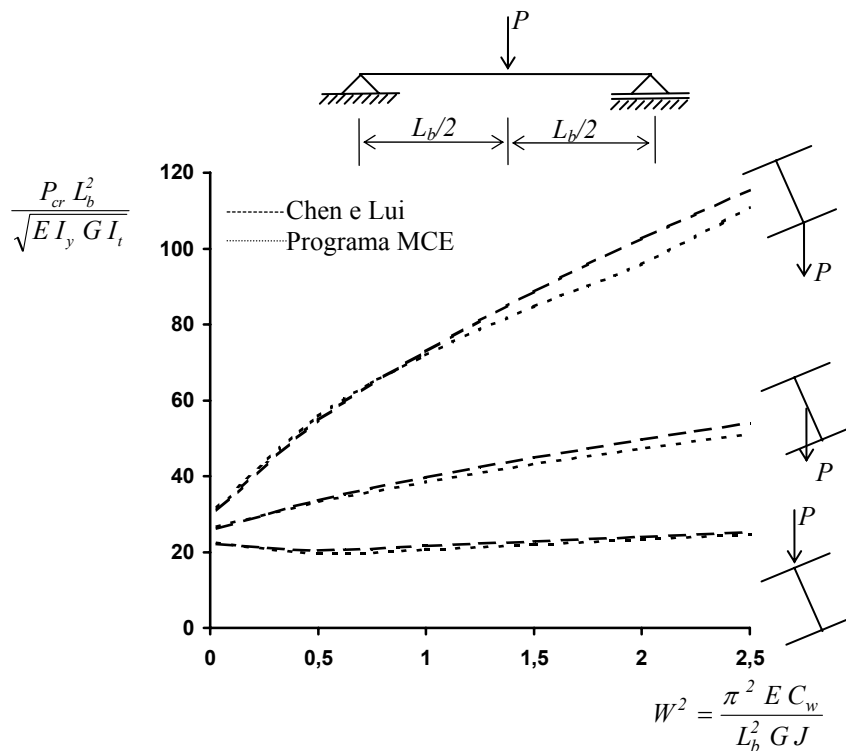


Figura 4.11 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 09 da Tabela 4.1 para a situação de rotação em torno do eixo longitudinal, deslocamento lateral e rotação no plano de flambagem impedidos e empenamento livre.

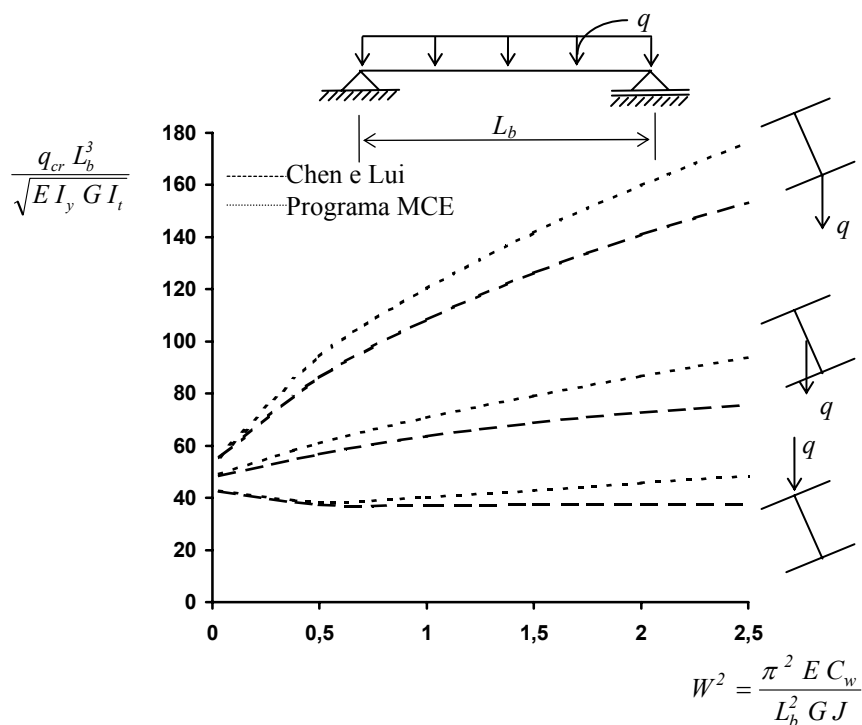


Figura 4.12 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 06 da Tabela 4.1 para a situação de rotação em torno do eixo longitudinal, deslocamento lateral e rotação no plano de flambagem impedidos e empenamento livre.

#### 4.3.2.5. Alternativa de cálculo para a resistência nominal em regime elástico, $M_{cr}$

Chen e Lui [30] apresentam um método alternativo, inicialmente proposto por Clark e Hill [24] e recomendado por Johnston [72], para o cálculo aproximado do momento crítico,  $M_{cr}$ , de vigas compostas por seções I duplamente simétricas, e condições de contorno de alternativas  $S$ ,  $R$  e  $C$ , descritas anteriormente. Por este método tem-se:

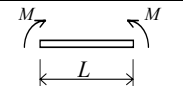
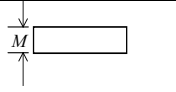
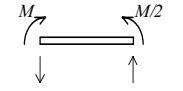
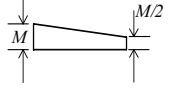
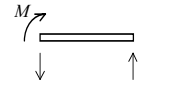
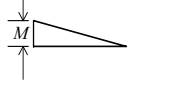
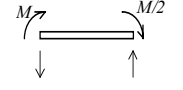
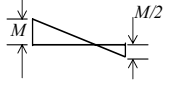
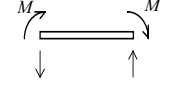
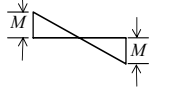
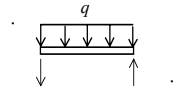
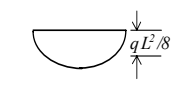
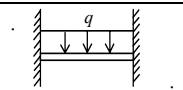
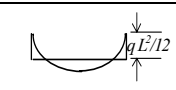
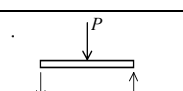
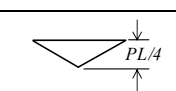
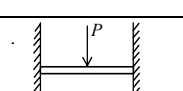
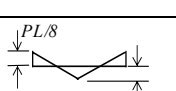
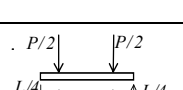
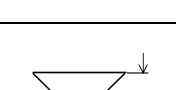
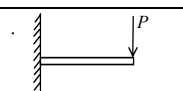
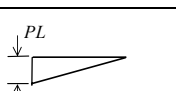
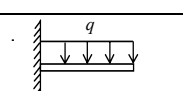
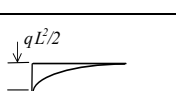
$$M_{cr} = \frac{C_4}{L} \sqrt{E I_y G I_t} \quad (4.23)$$

onde

$$C_4 = C_1 \frac{\pi}{K} \left\{ \sqrt{\left[ 1 + \left( \frac{\pi}{KL} \right)^2 \left( \frac{E C_w}{G I_t} \right) (C_2^2 + 1) \right]} \pm C_2 \left( \frac{\pi}{KL} \right) \sqrt{\frac{E C_w}{G I_t}} \right\} \quad (4.24)$$

Os coeficientes  $K$ ,  $C_1$  e  $C_2$  são mostrados na Tabela 4.4 em função das condições de contorno para flambagem lateral com torção.  $C_1$  leva em conta o tipo de carregamento e a condição de contorno, e  $C_2$ , a posição de atuação das cargas verticais com relação ao centro de torção. O sinal (+) na equação (4.24) é usado para cargas aplicadas na mesa inferior e o sinal (-), para cargas aplicadas na mesa superior. Para apenas momentos aplicados nas extremidades, ou cargas aplicadas no nível do centro de torção, o coeficiente  $C_2$  é nulo e  $C_1$  equivale a  $C_b$ . Este método serviu de base para o método proposto pelo ENV 1993-1-1 [64] para determinação do momento crítico e descrito no item 1.3.3.



| Caso  | Carregamento  | Diagrama de Momentos  | Condição de contorno | Valores dos Coeficientes |                        |       |
|---|---|---|----------------------|--------------------------|------------------------|-------|
|   |   |   |                      | $K$                      | $C_1$                  | $C_2$ |
| Vigas impedidas de deslocar lateralmente nas duas extremidades do vão |   |   |                      |                          |                        |       |
| 01  |    |    | $S$                  | 1,0                      | 1,00                   | --    |
|   |   |   | $R$                  | 0,5                      | 1,00                   | --    |
| 02  |    |    | $S$                  | 1,0                      | 1,31-1,32 <sup>a</sup> | --    |
|   |   |   | $R$                  | 0,5                      | 1,30-1,32 <sup>a</sup> | --    |
| 03  |    |    | $S$                  | 1,0                      | 1,77-1,86 <sup>a</sup> | --    |
|   |   |   | $R$                  | 0,5                      | 1,78-1,85 <sup>a</sup> | --    |
| 04  |    |    | $S$                  | 1,0                      | 2,33-2,62 <sup>a</sup> | --    |
|   |   |   | $R$                  | 0,5                      | 2,29-2,55 <sup>a</sup> | --    |
| 05  |    |    | $S$                  | 1,0                      | 2,56-2,74 <sup>a</sup> | --    |
|   |   |   | $R$                  | 0,5                      | 2,23-2,58 <sup>a</sup> | --    |
| 06  |    |    | $S$                  | 1,0                      | 1,13                   | 0,45  |
|   |   |   | $R$                  | 0,5                      | 0,97                   | 0,29  |
| 07  |   |   | $S$                  | 1,0                      | 1,30                   | 1,55  |
|   |   |   | $R$                  | 0,5                      | 0,86                   | 0,82  |
| 08  |  |  | $S$                  | 1,0                      | 1,35                   | 0,55  |
|   |   |   | $R$                  | 0,5                      | 1,07                   | 0,42  |
| 09  |  |  | $S$                  | 1,0                      | 1,70                   | 1,42  |
|   |   |   | $R$                  | 0,5                      | 1,04                   | 0,84  |
| 10  |  |  | $S$                  | 1,0                      | 1,04                   | 0,42  |
| Vigas em balanço  |   |   |                      |                          |                        |       |
| 11  |  |  | $C$                  | 1,0                      | 1,28-1,71 <sup>a</sup> | 0,64  |
| 12  |  |  | $C$                  | 1,0                      | 2,05-3,42 <sup>a</sup> |       |

<sup>a</sup> Valores mínimos aplicáveis a vigas com resistência ao empenamento desprezível, fornecendo tensões de flambagem favoráveis à segurança para todos os tipos de vigas.

Tabela 4.4 - Valores dos coeficientes  $C_1$  e  $C_2$  da equação (4.24), para cálculo da resistência à flambagem elástica de vigas (adaptado da referência 24).

Para os casos 06 a 10 da Tabela 4.4, foram calculados os valores do coeficiente  $C_b$  obtidos pelo método descrito, através da divisão do valor da equação (4.24) pelo valor da equação (1.1), em função de  $W^2$ , definido anteriormente. Os resultados estão plotados nas figuras 4.13 a 4.22, juntamente com os valores de  $C_{bs}$  obtidos pelo Programa MCE e os valores obtidos através do procedimento do ENV 1993-1-1 [64], dividindo o valor da equação (1.23) pelo da equação (1.1). Para o caso 10, alternativa R, apenas o ENV 1993-1-1 [64] fornece os valores de  $K$ ,  $C_1$  e  $C_2$ .

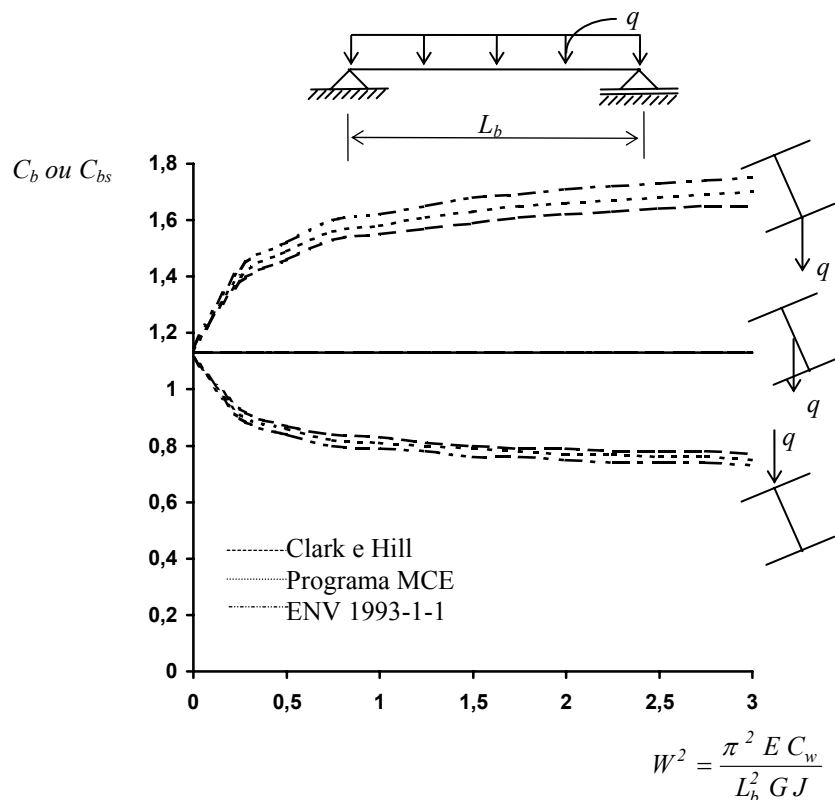


Figura 4.13 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 06 - S da Tabela 4.4.

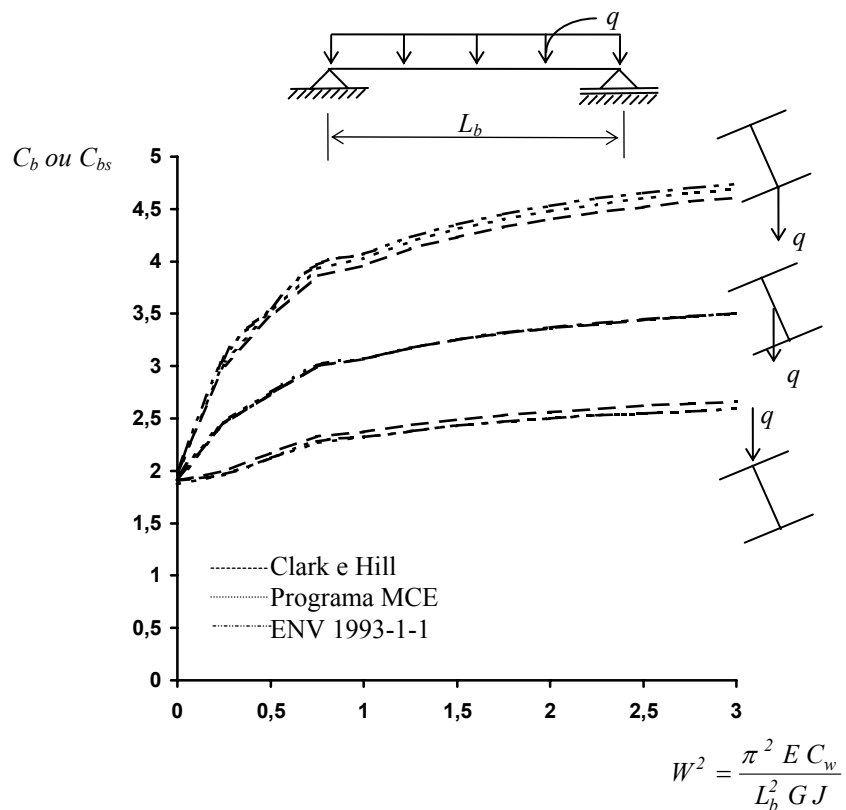


Figura 4.14 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 06 - R da Tabela 4.4.

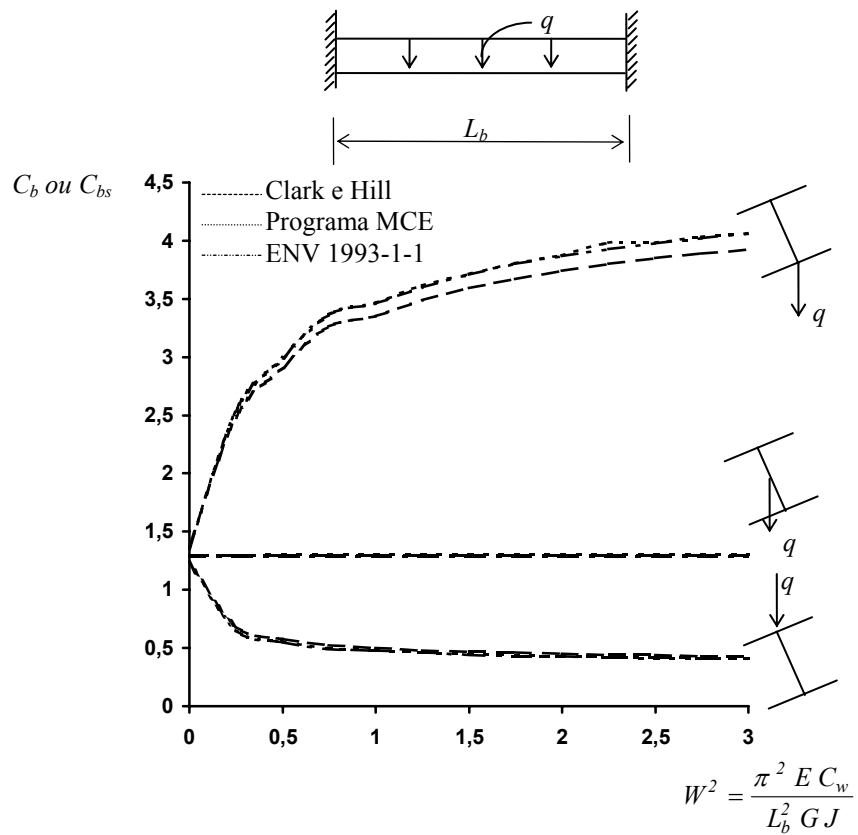


Figura 4.15 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 07 - S da Tabela 4.4.

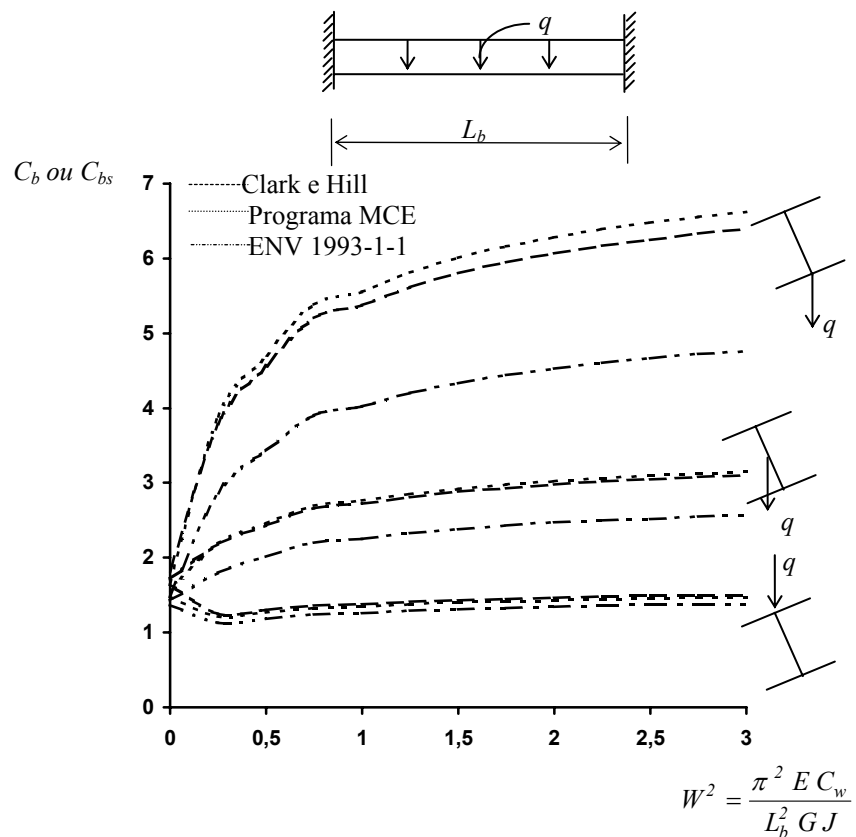


Figura 4.16 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 07 - R da Tabela 4.4.

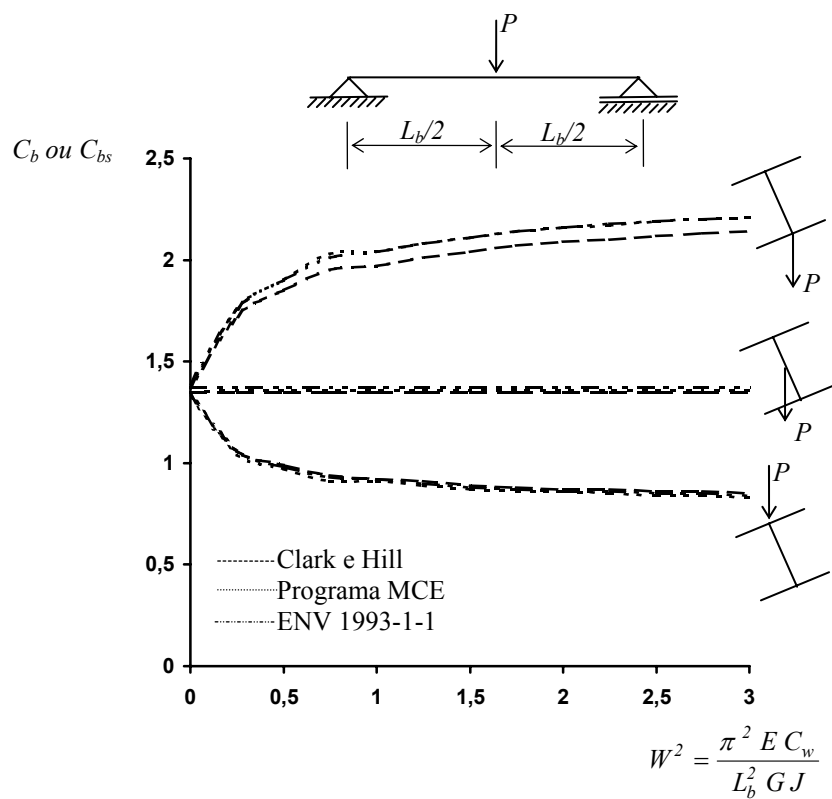


Figura 4.17 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 08 - S da Tabela 4.4.

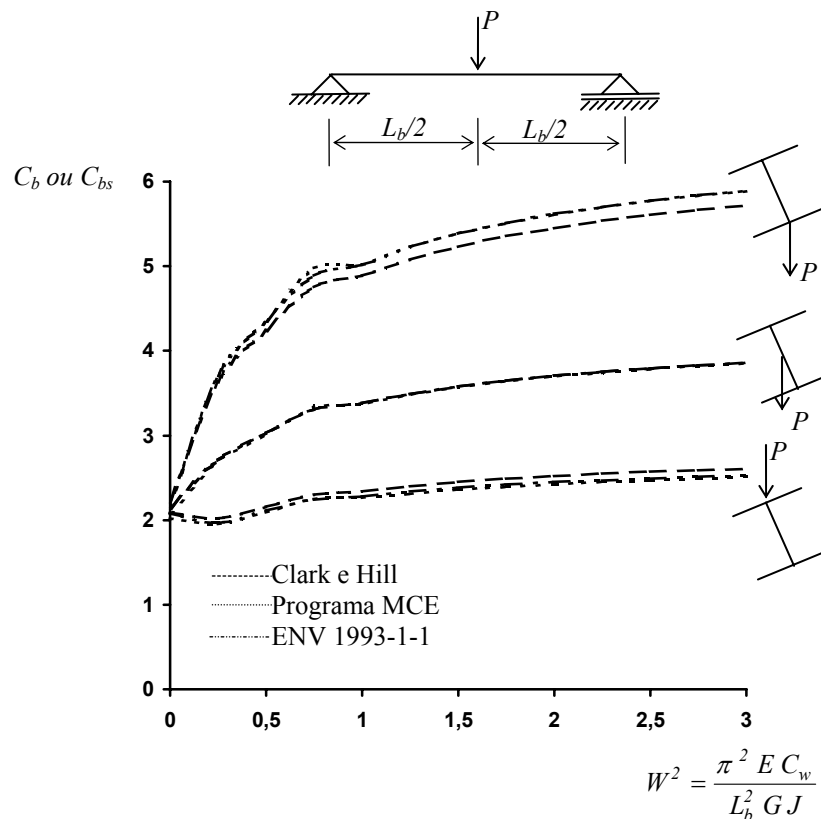


Figura 4.18 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 08 - R da Tabela 4.4.

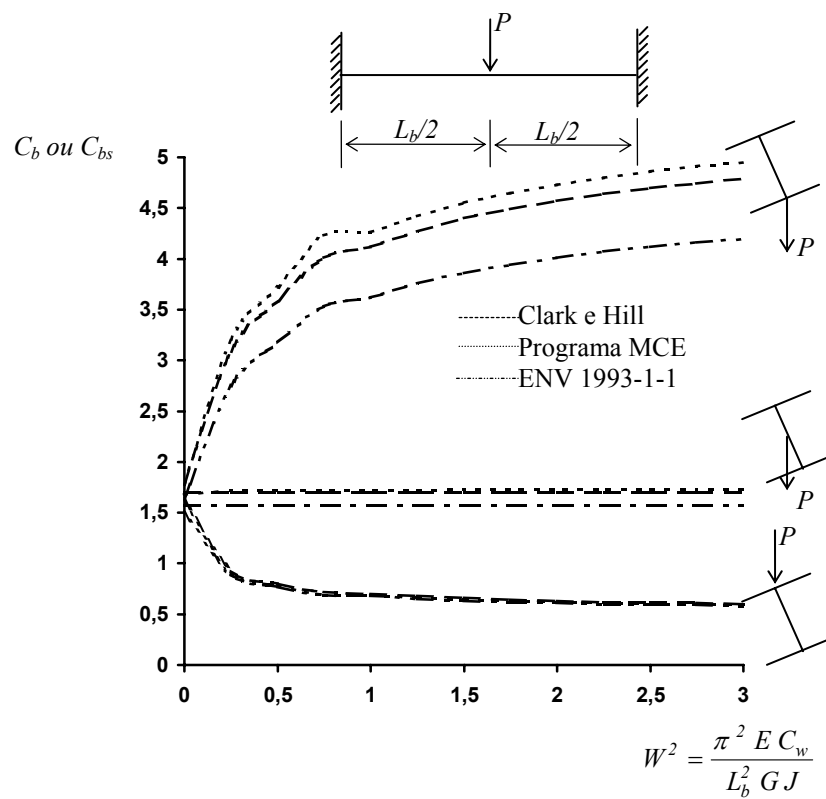


Figura 4.19 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 09 - S da Tabela 4.4.

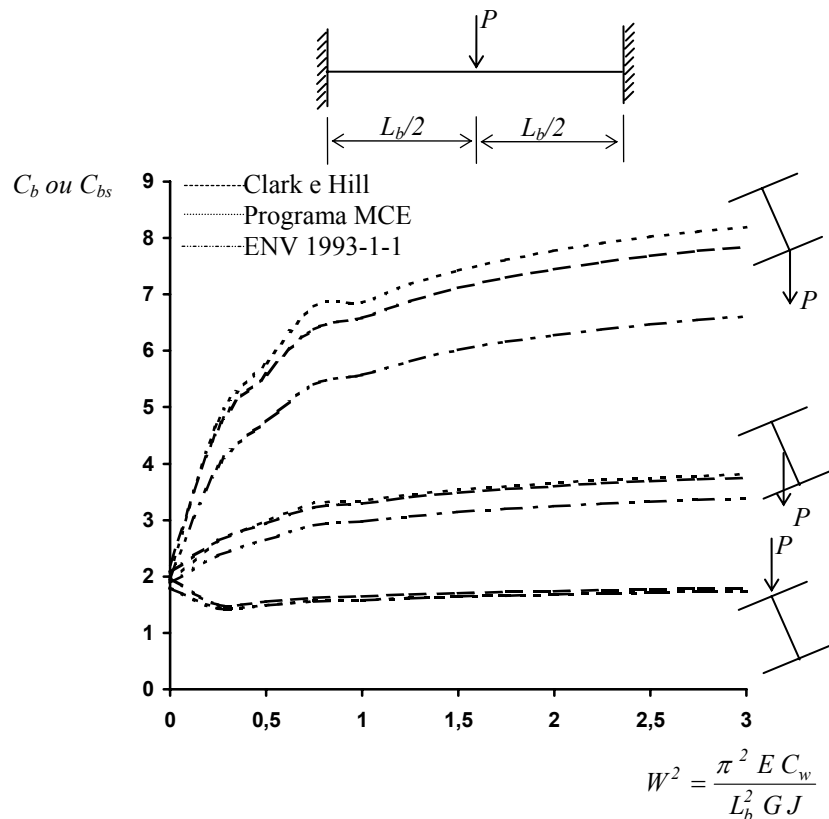


Figura 4.20 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 09 - R da Tabela 4.4.

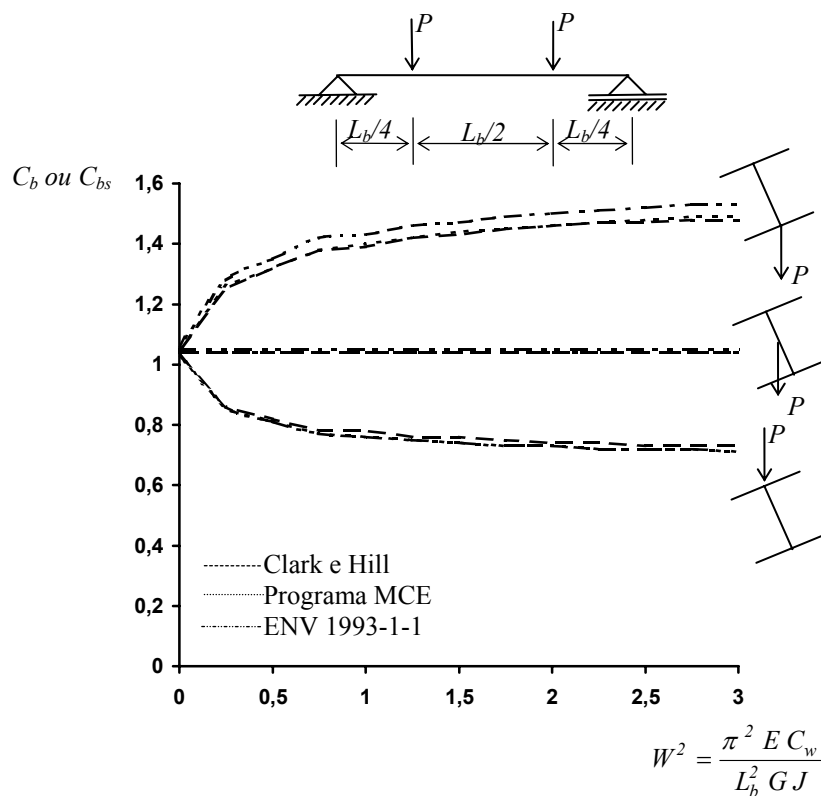


Figura 4.21 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 10 - S da Tabela 4.4.

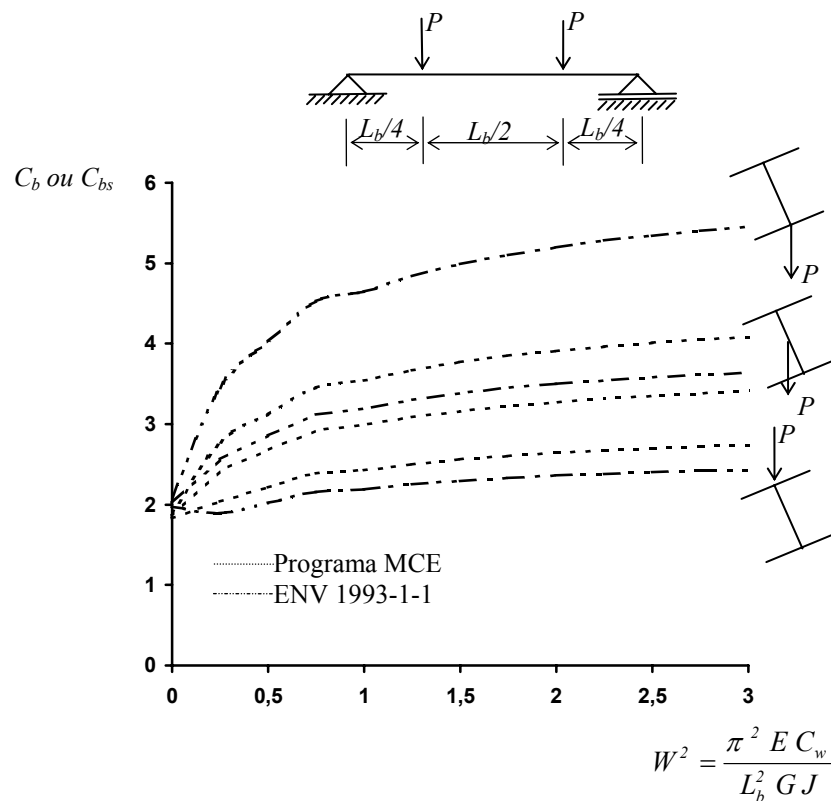


Figura 4.22 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 10 - R da Tabela 4.4.

#### 4.3.2.6. Conjunto de resultados obtidos pelo Programa MCE

Nas figuras 4.23 a 4.25 são mostrados na forma de gráficos, a variação do coeficiente  $C_{bs}$ , obtida pelo Programa MCE, em função de  $(\pi^2 E C_w / L^2 GJ)$ , para todos os casos apresentados na Tabela 4.1, respectivamente para os casos em que só atuam momentos fletores e para as cargas aplicadas no nível do centro de torção, para as cargas aplicadas na face inferior da viga e para as cargas aplicadas na face superior. São cobertas, sempre que aplicáveis, as alternativas *S*, *R* e *C*. Pode-se notar que na alternativa *S* e carga aplicada no nível do centro de torção (figura 4.23), os valores de  $C_{bs}$  são praticamente constantes e obviamente correspondem aos valores apresentados na última coluna da Tabela 4.2.

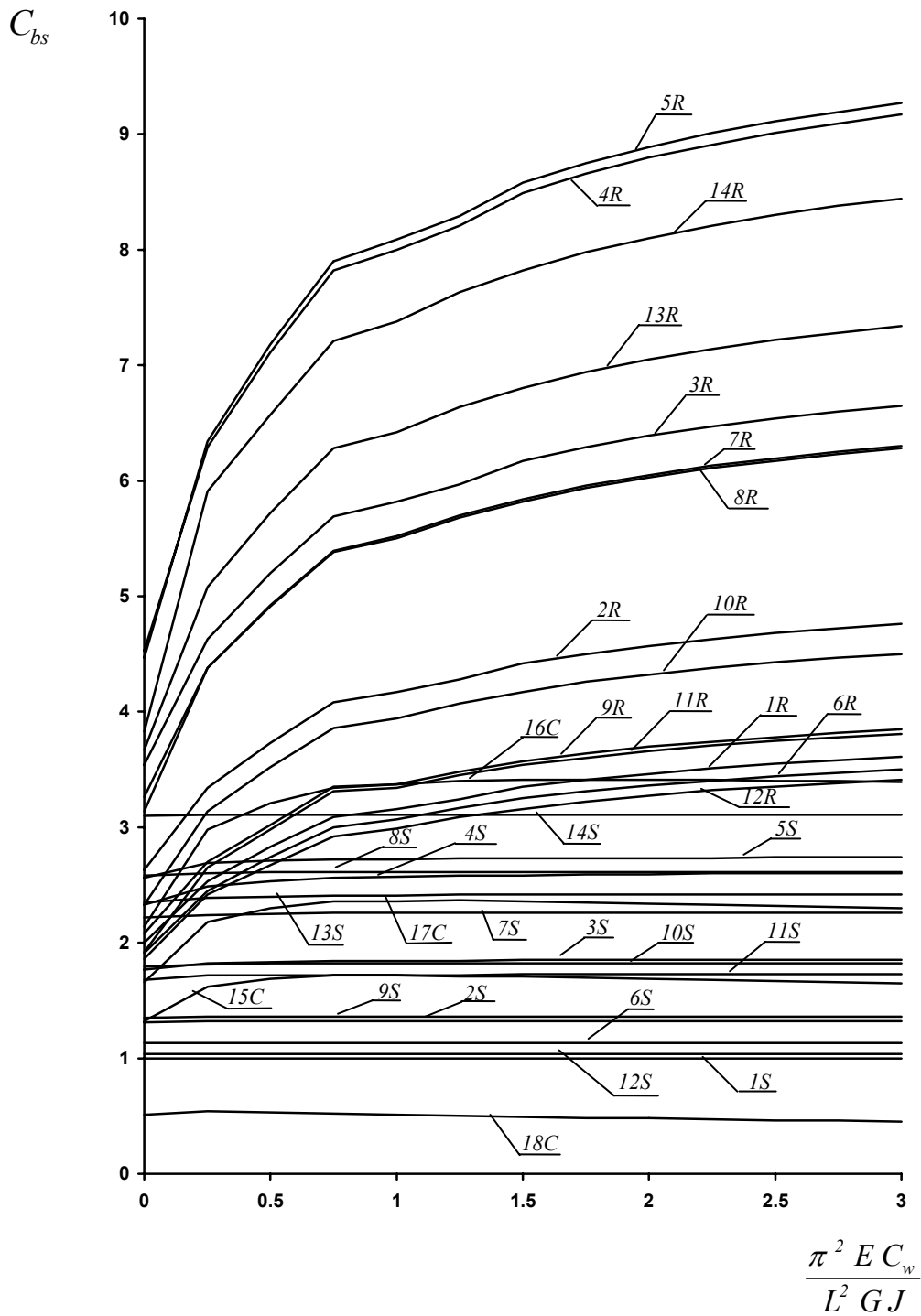


Figura 4.23 -  $C_{bs}$  para cargas aplicadas no nível do centro de torção e para atuação apenas de momento fletor (nos casos 01 a 14,  $L = L_b$ ).



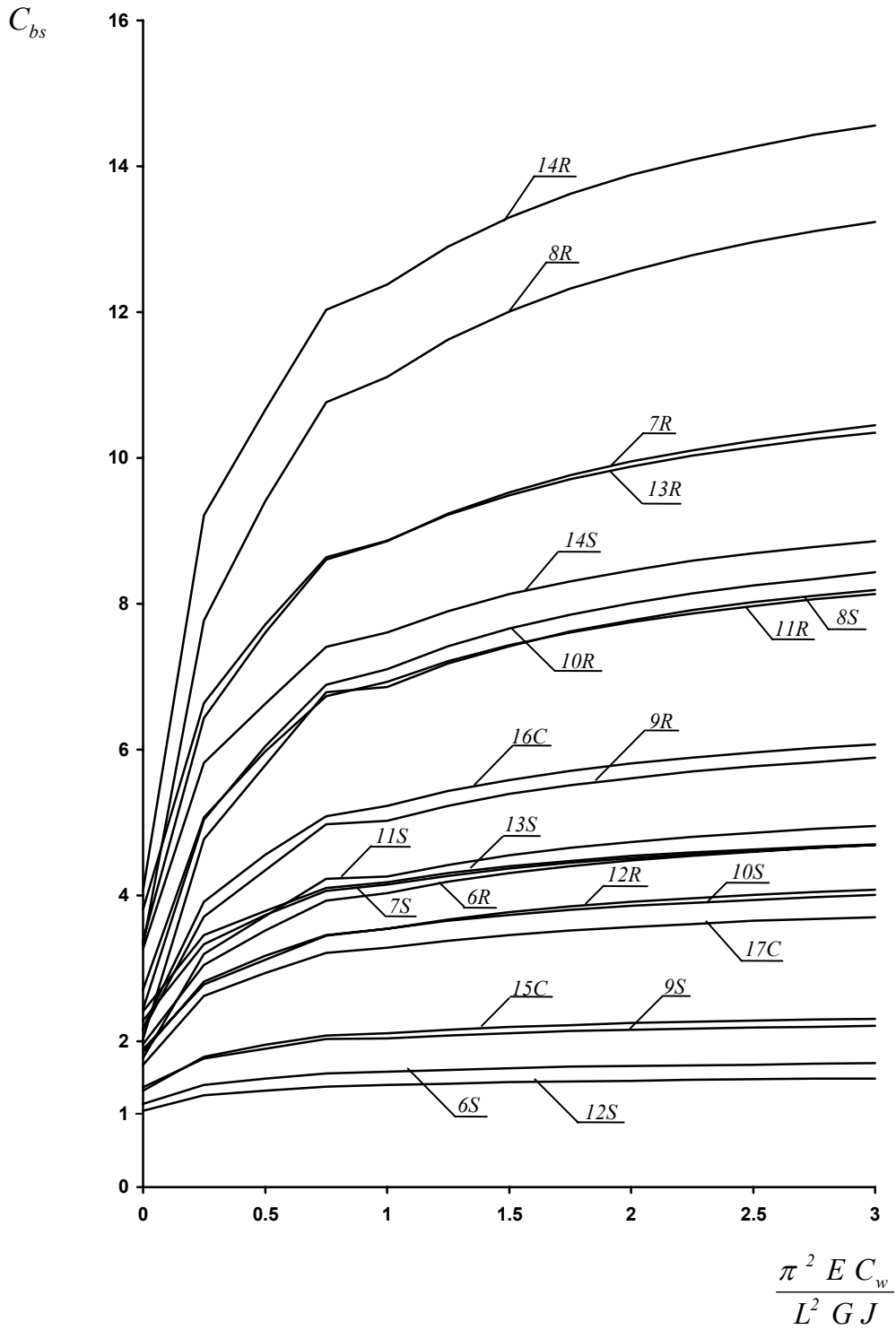


Figura 4.24 -  $C_{bs}$  para cargas aplicadas na mesa inferior (nos casos 06 a 14,  $L = L_b$ ).

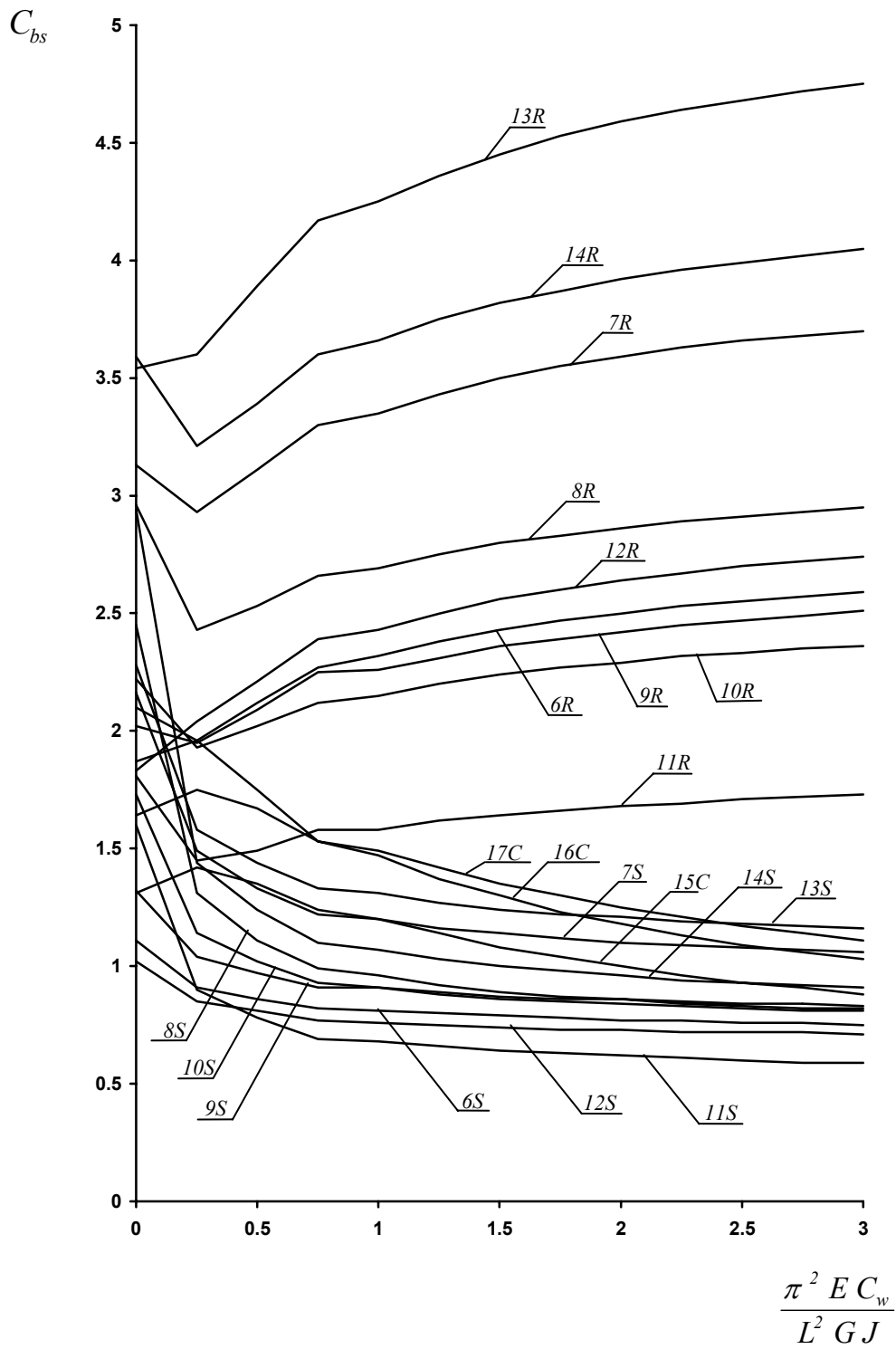


Figura 4.25 -  $C_{bs}$  para cargas aplicadas na mesa superior (nos casos 06 a 14,  $L = L_b$ ).

#### 4.4. Vigas com Outras Seções Transversais

Para as vigas com seção transversal I monossimétrica, seção T, seção U, seção retangular cheia e seção caixão, foram estudados os casos 01, 03, 05, 06, 08, 09 e 11 apresentados na Tabela 4.1, para cargas transversais atuando apenas no nível do centro de torção. Foram obtidos valores para os coeficientes  $C_{bs}$ , à medida em que se variava o vão da viga, os quais estão apresentados em gráficos. As seções transversais utilizadas estão mostradas na figura 4.26.

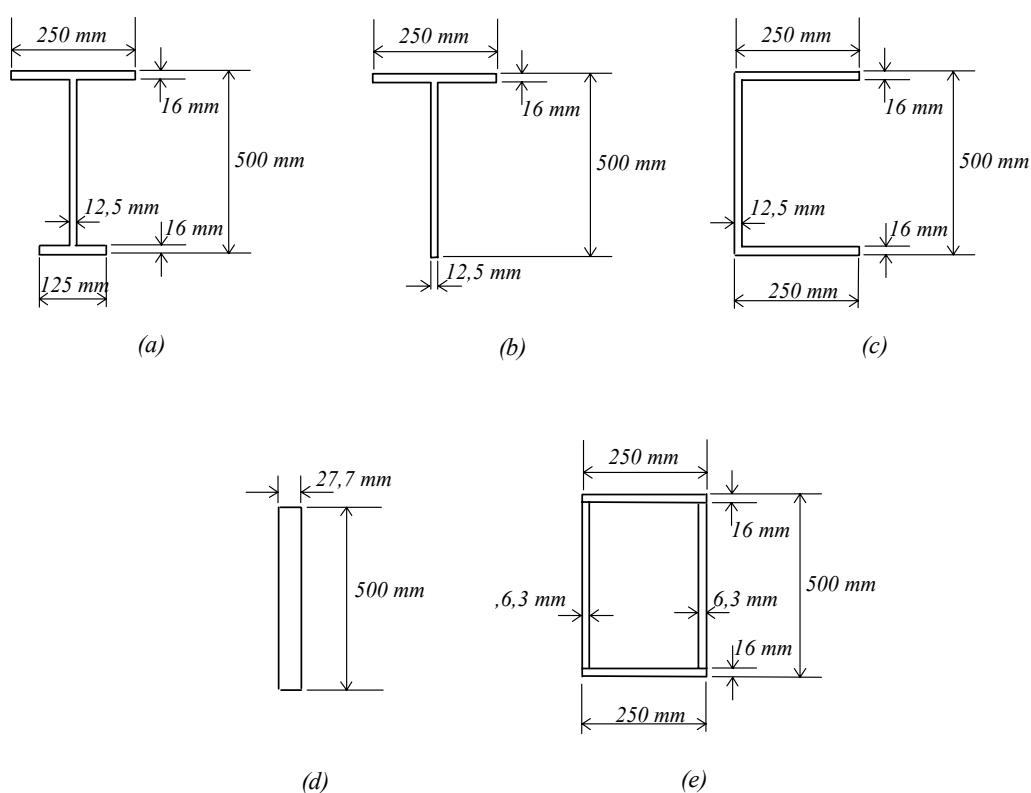


Figura 4.26 - Seções transversais consideradas: (a) I monossimétrico, (b) T, (c) U, (d) retangular cheia e (e) caixão.

Utilizando-se o Programa MCE, calculou-se os valores de  $C_{bs}$  em função do comprimento destravado, fazendo-se com que o mesmo variasse de 2m a 20m.

A seção U apresentou valores de  $C_{bs}$  constantes, independentemente do comprimento destravado, os quais estão mostrados na Tabela 4.5. Os valores apresentados pelas

seções retangular cheia e caixão foram praticamente iguais e também constantes, e estão mostrados ainda na Tabela 4.5.

| Caso | Seção U | Seções Retangular cheia e Caixão |
|------|---------|----------------------------------|
| 01   | 1,00    | 1,00                             |
| 03   | 1,84    | 1,77                             |
| 05   | 2,72    | 2,56                             |
| 06   | 1,13    | 1,13                             |
| 08   | 2,61    | 2,58                             |
| 09   | 1,36    | 1,35                             |
| 11   | 1,72    | 1,68                             |

Tabela 4.5 - Coeficientes  $C_{bs}$  para as seções U, retangular cheia e caixão obtidos utilizando-se o Programa MCE.

Pode-se verificar que os valores apresentados para a seção U são praticamente idênticos aos valores da seção I bissimétrica, dados na última coluna da Tabela 4.2.

Para a seção I monossimétrica, os valores do coeficiente  $C_{bs}$  variaram em função do vão da viga, no caso igual ao comprimento destravado, da maneira apresentada na figura 4.27, e os valores correspondentes à seção T na figura 4.28.

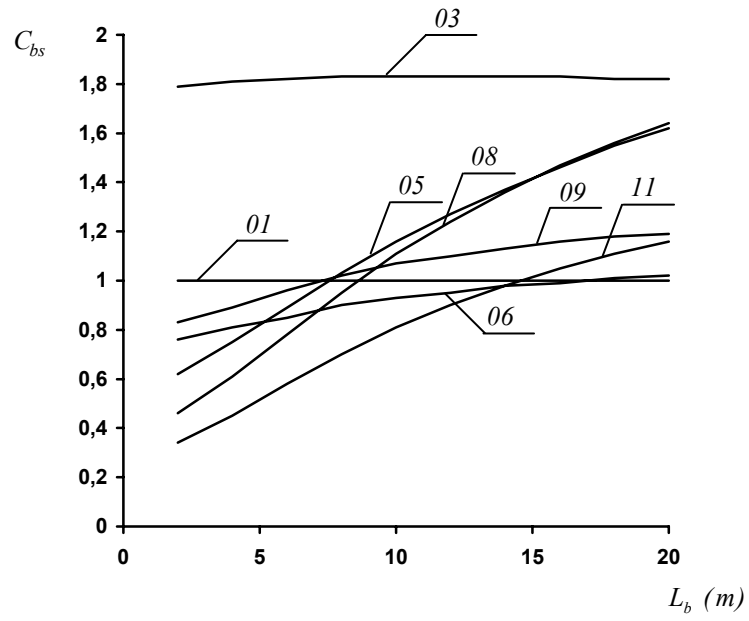


Figura 4.27 - Coeficiente  $C_{bs}$  em função de  $L_b$  para a seção I monossimétrica.

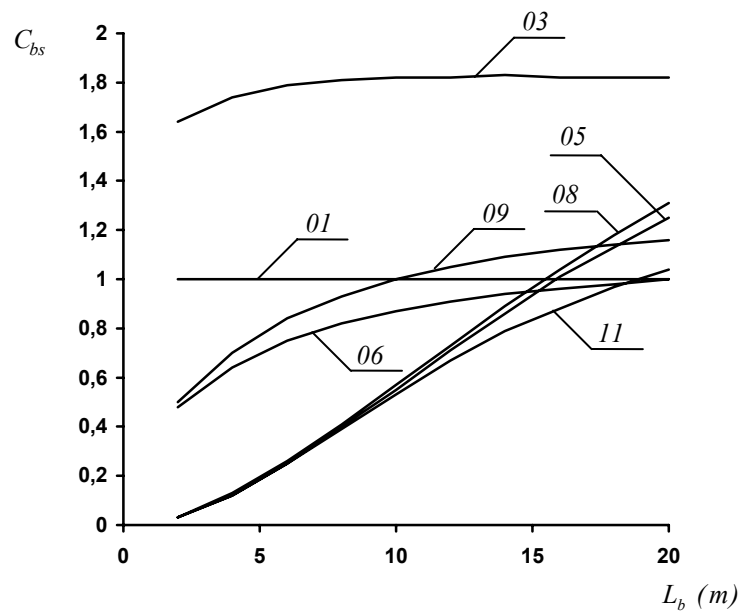


Figura 4.28 - Coeficiente  $C_{bs}$  em função de  $L_b$  para a seção T.

#### 4.5. Vigas com Contenção Lateral Interna

Foram estudados os casos de vigas com seção I duplamente simétrica com uma seção interna contida lateralmente com vínculo de garfo. A posição desta seção contida, definida por  $a$ , variou ao longo do comprimento da viga, de modo a se determinar como tal restrição afeta o valor do momento crítico (figura 4.29).

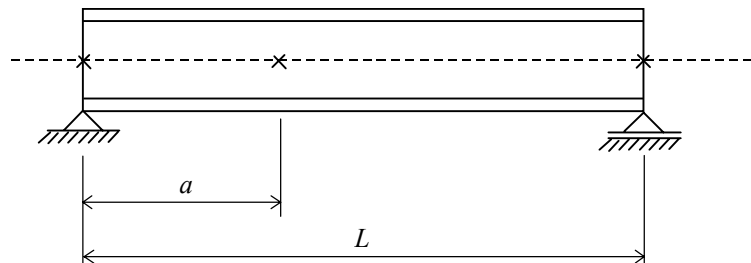


Figura 4.29 - Posição da contenção lateral interna.

Foram consideradas as seguintes possibilidades de carregamento: momentos iguais aplicados nas extremidades, carga distribuída ao longo do comprimento da viga e carga concentrada no meio do vão, respectivamente casos 01, 06 e 09 da Tabela 4.1, e alternativa  $S$ . Para os casos 06 e 09, as cargas foram supostas aplicadas no nível do centro de torção. A seção transversal adotada e o vão da viga estão mostrados na figura 4.30, e os valores obtidos para o momento crítico,  $M_{cr}$ , na figura 4.31, onde eles são plotados em função da posição da contenção lateral interna,  $a$ .

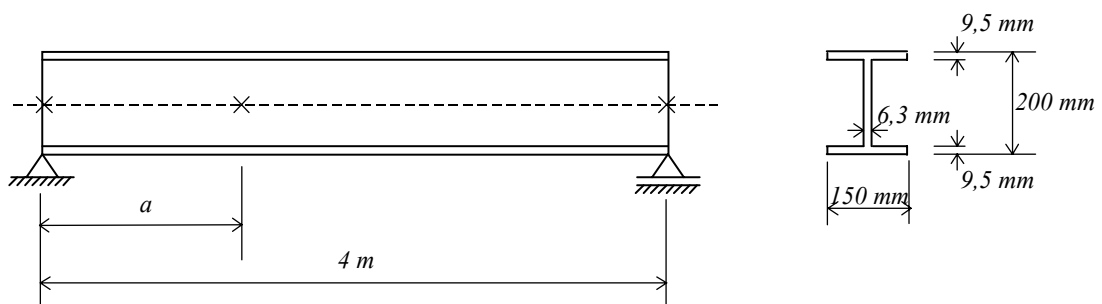


Figura 4.30 - Vão da viga e seção transversal considerados na verificação de viga com contenção lateral interna.

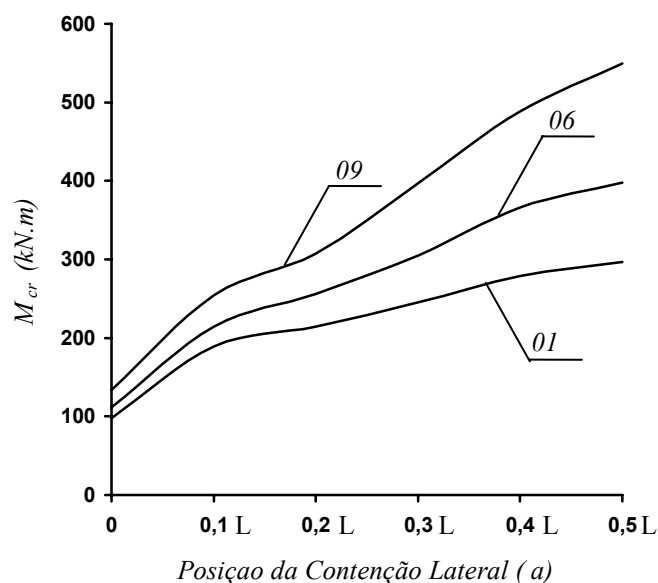


Figura 4.31 - Momento crítico,  $M_{cr}$ , em função da posição da contenção lateral interna,  $a$ .

Foram estudadas também duas situações apresentadas por Chen e Lui [30], considerando-se vigas com contenção lateral interna no meio do vão. Na primeira tem-se uma carga concentrada aplicada no meio do vão, caso 09 da Tabela 4.1, e na segunda uma carga distribuída ao longo do comprimento da viga, caso 06 da Tabela 4.1. As condições de contorno correspondem à alternativa *S*. As cargas atuam no nível do centro de torção, na mesa inferior e na mesa superior.

Novamente são utilizadas as equações (4.1), (4.2) e (4.5), sendo os valores de  $A$  e  $B$  dados por

$$A = 2,95 + 4,070 W_c - 1,143 W_c^2 \quad (4.25)$$

$$B = 1 \quad (4.26)$$

para o caso de carga concentrada aplicada no meio do vão, e

$$A = 2,093 + 3,117 W_c - 0,947 W_c^2 \quad (4.27)$$

$$B = 1,073 + 0,044 W_c \quad (4.28)$$

para o caso de carga distribuída ao longo do vão.

Os gráficos representativos destas duas situações aparecem, respectivamente, nas figuras 4.32 e 4.33. Para a carga concentrada aplicada na seção central, os valores obtidos, como era de se esperar, em função desta seção estar contida lateralmente, foram iguais para as três posições de aplicação, portanto só está representada uma curva para cada método de resolução.

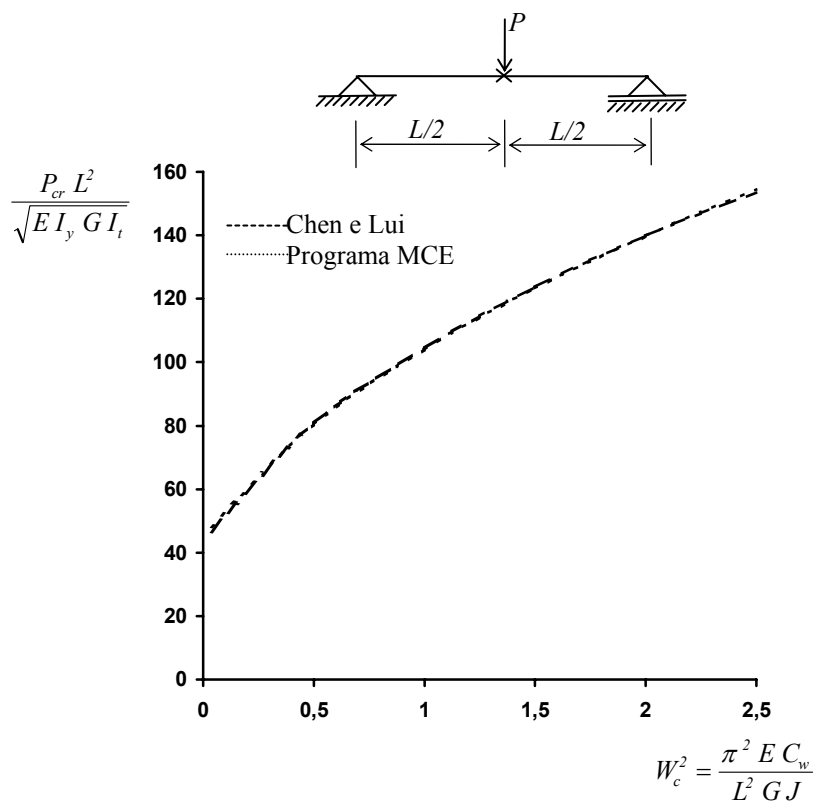


Figura 4.32 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 09 da Tabela 4.1 considerando contenção lateral no meio do vão.



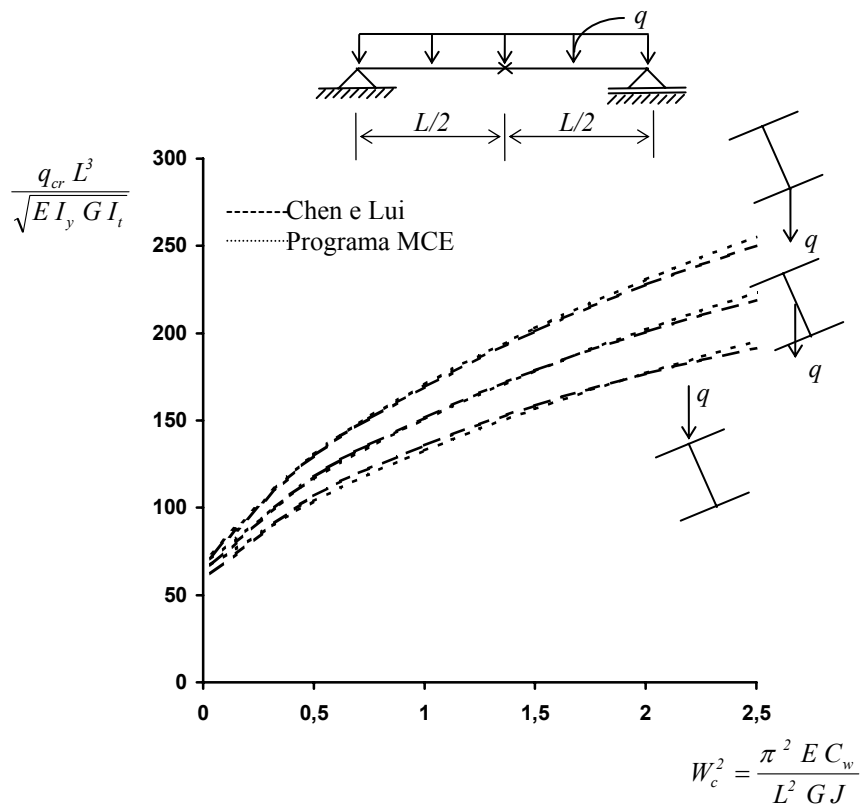


Figura 4.33 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 06 da Tabela 4.1 considerando contenção lateral no meio do vão.

#### 4.6. Vigas com Lamela

Para se estudar como a utilização de lamelas influi na resistência nominal ao momento fletor, em regime elástico, considerando-se o estado limite último de flambagem lateral com torção, tomou-se uma viga de seção I bissimétrica com uma chapa soldada na mesa superior, com espessura e largura iguais às deste último elemento.

Inicialmente calculou-se o valor do multiplicador crítico para a viga sem lamela. Em seguida, calcularam-se os multiplicadores críticos para o comprimento da lamela variando de  $0,1L$  até  $L$ , ou seja, até que toda a mesa estivesse coberta, e finalmente calculou-se o multiplicador crítico para uma viga monossimétrica na qual a mesa superior possuísse espessura igual à soma da espessura da lamela e a espessura da mesa original.

Os carregamentos analisados foram: viga com momento fletor uniforme, viga com carga distribuída em todo o vão e viga com carga concentrada aplicada no meio do vão, respectivamente casos 01, 06 e 09 da Tabela 4.1. As condições de contorno correspondem à alternativa *S*. A seção transversal e o vão da viga são mostrados na figura 4.34.

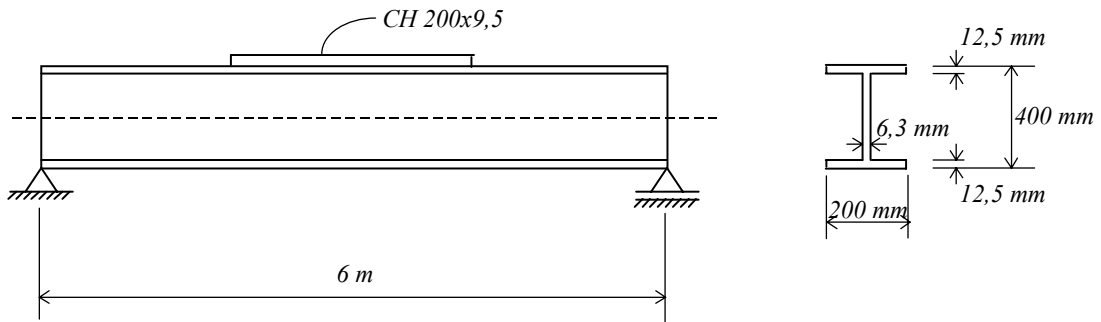


Figura 4.34 - Vão da viga e seção transversal considerados na verificação de viga com lamela.

Os resultados estão apresentados nas figuras 4.35 a 4.37, onde são plotados os valores dos multiplicadores críticos em função da variação do comprimento da chapa de reforço.

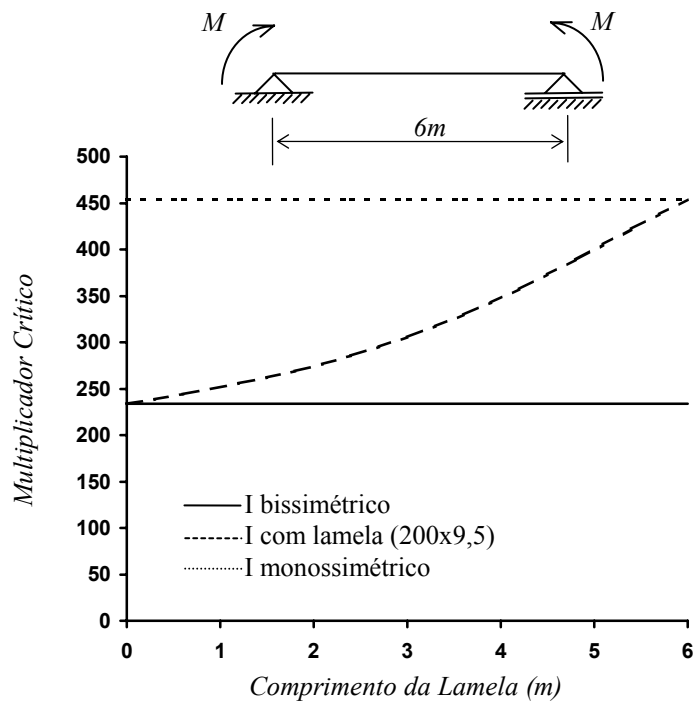


Figura 4.35 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 01 da Tabela 4.1 considerando lamela na mesa superior.

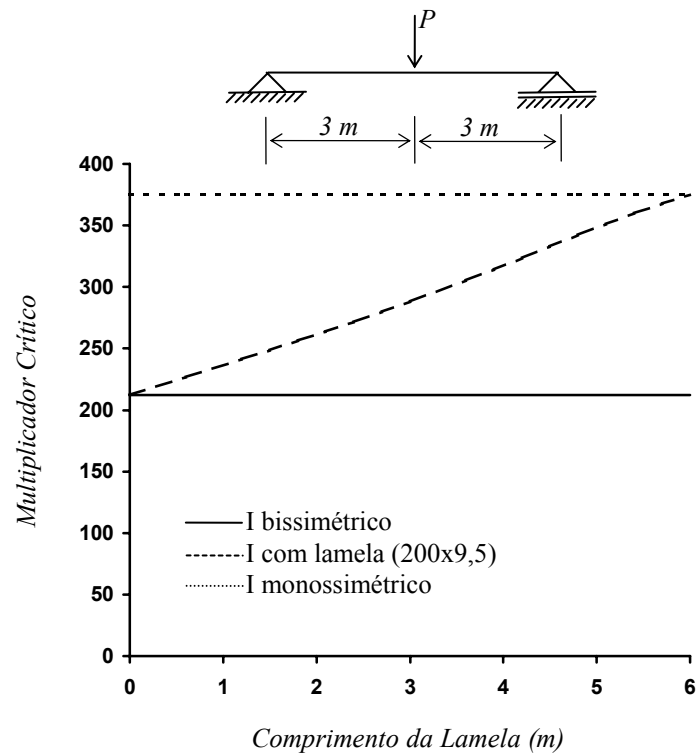


Figura 4.36 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 09 da Tabela 4.1 considerando lamela na mesa superior.

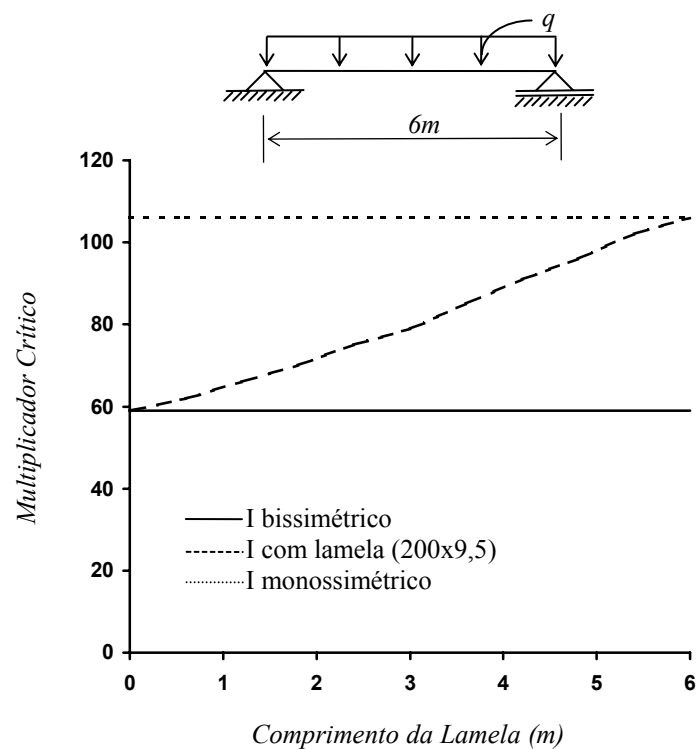


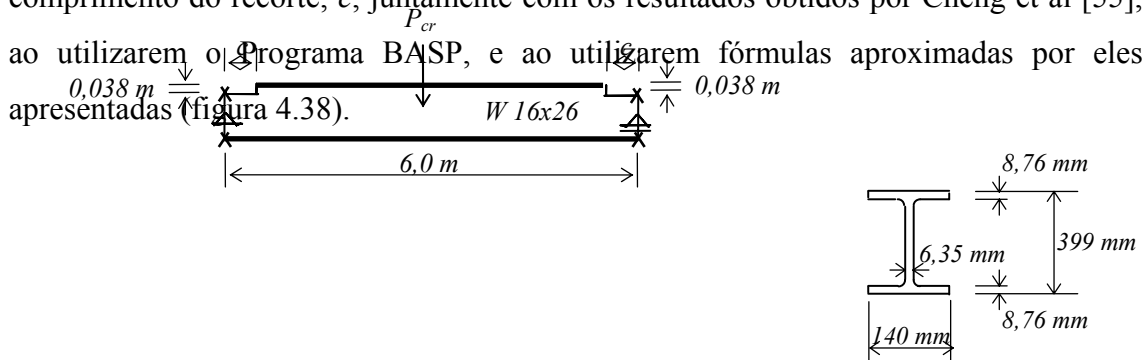
Figura 4.37 - Gráfico comparativo dos resultados para o caso 06 da Tabela 4.1 considerando lamela na mesa superior.

#### 4.7. Vigas com Recortes nas Mesas

Muitas vezes é necessário que se façam recortes nas mesas de vigas com seção I, de maneira a possibilitar sua ligação a outros elementos da construção. Estes recortes influem na resistência nominal à flambagem lateral com torção em regime elástico, principalmente se forem feitos na mesa comprimida.

Baseando-se nos estudos feitos por Cheng et al [55], analisou-se o caso de uma viga de seção W16x26, vão igual a 6,0 m e condições de contorno nas extremidades referentes à alternativa S. A situação de carregamento corresponde ao caso 09 da Tabela 4.1, e a carga está aplicada no nível do centro de torção.

De modo a verificar qual a influência do comprimento dos recortes na mesa superior (mesa comprimida), em ambas as extremidades do vão, foram calculados os valores críticos da carga transversal aplicada. Estes valores são plotados em função do comprimento do recorte,  $c$ , juntamente com os resultados obtidos por Cheng et al [55], ao utilizarem o Programa BASTP, e ao utilizarem fórmulas aproximadas por eles apresentadas (figura 4.38).



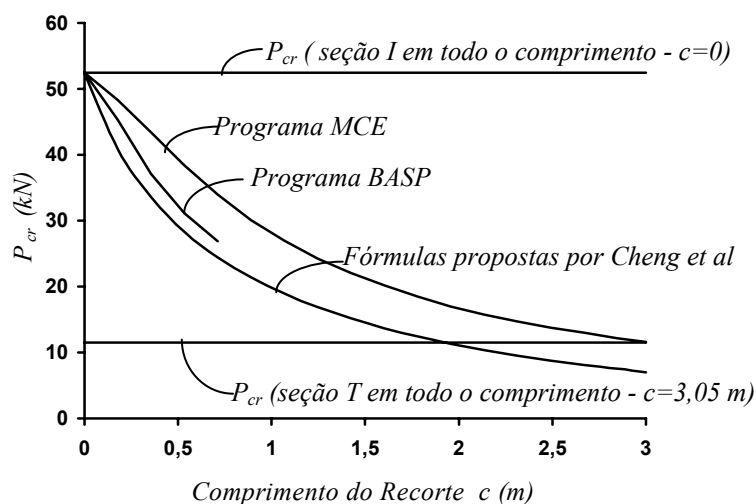


Figura 4.38 - Efeito do comprimento do recorte.

Além disso, foram feitos outros estudos, onde são analisadas as influências da variação do comprimento da viga, mantendo-se fixas as dimensões do recorte, da variação do comprimento do recorte, mantendo-se fixos o comprimento da viga e a profundidade do recorte, e da variação da profundidade do recorte, mantendo-se fixas as outras duas variáveis. Consideraram-se as possibilidades de recorte na mesa comprimida e nas duas mesas, sempre em ambas as extremidades.

A viga analisada tem seção *VS 400x58 (400x200x12,5x6,3)* e condições de contorno nas extremidades correspondentes à alternativa *S*. As situações de carregamento previstas correspondem aos casos de momento fletor uniforme e de carga concentrada aplicada no meio do vão, respectivamente, casos 01 e 09 da Tabela 4.1, sendo que para este último caso a carga atua no nível do centro de torção.

#### 4.7.1. Efeito do Comprimento da Viga

As dimensões do recorte são mantidas fixas, sendo seu comprimento igual a *0,20 m* e sua profundidade igual a *0,04 m*. O comprimento da viga varia de *2,0 m* até *10,0 m*. Os gráficos apresentados nas figuras 4.39 e 4.40 relacionam os multiplicadores críticos com o vão, para os dois casos de carregamento considerados. Para efeito de comparação, vê-se também o multiplicador crítico para o caso em que não há recorte.

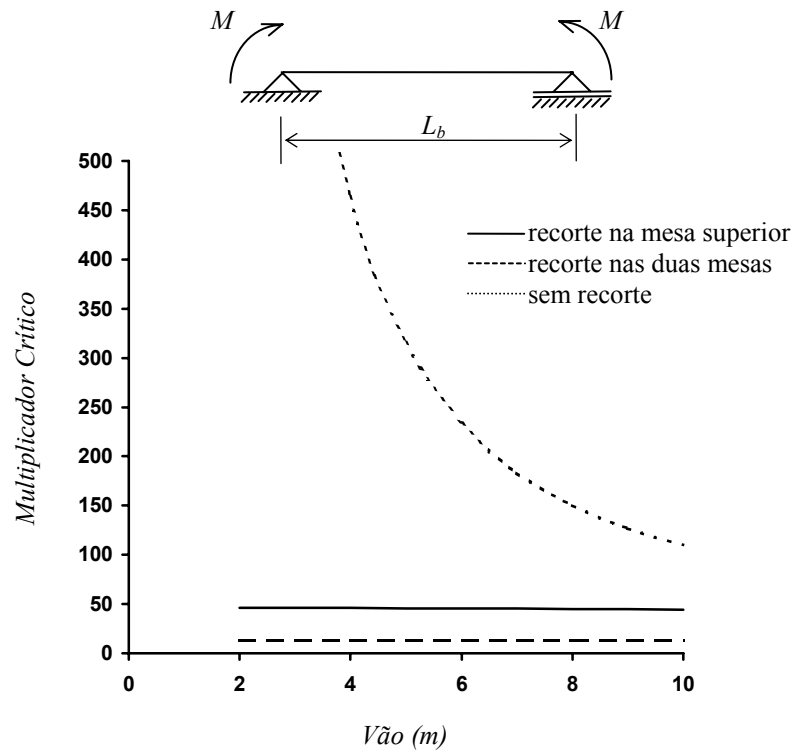


Figura 4.39 - Efeito do vão para o caso 01 da Tabela 4.1.

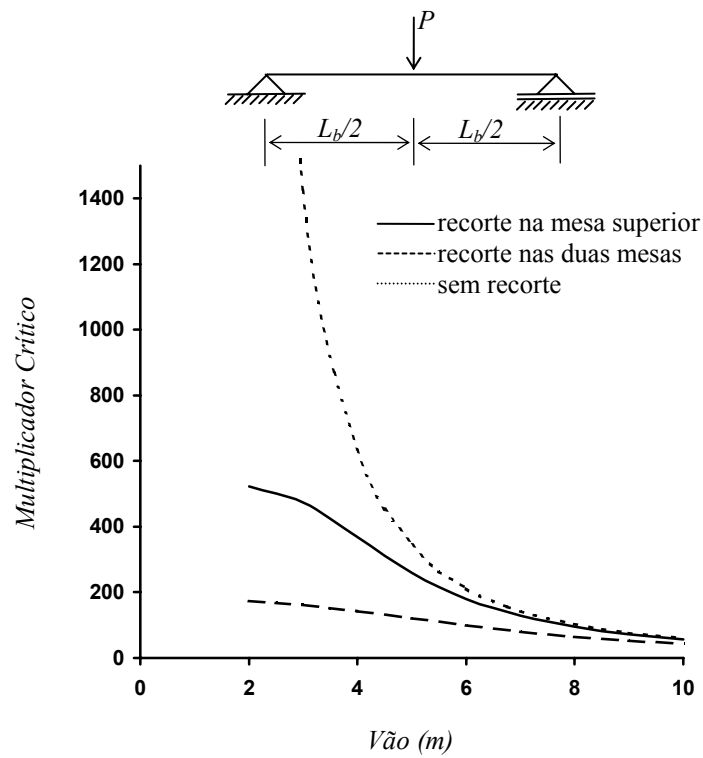


Figura 4.40 - Efeito do vão para o caso 09 da Tabela 4.1.

#### 4.7.2. Efeito do Comprimento do Recorte

Neste caso, ainda para viga com seção *VS 400x58 (400x200x12,5x6,3)*, comprimento de  $6\text{ m}$ , e condições de contorno nas extremidades correspondentes à alternativa *S*, fez-se o comprimento do recorte variar, desde a situação de viga sem recorte até as situações em que toda a mesa superior estivesse recortada, como um T invertido, e em que as duas mesas estivessem recortadas, como se a seção fosse uma chapa de espessura igual à espessura da alma. A profundidade permaneceu igual a  $0,04\text{ m}$ . Os gráficos relativos às situações de recorte na mesa superior e de recorte nas duas mesas, para o caso 01 da Tabela 4.1 estão apresentados nas figuras 4.41 e 4.42 respectivamente. Para o caso 09 da Tabela 4.1, os gráficos correspondentes às duas situações estão apresentados nas figuras 4.43 e 4.44.

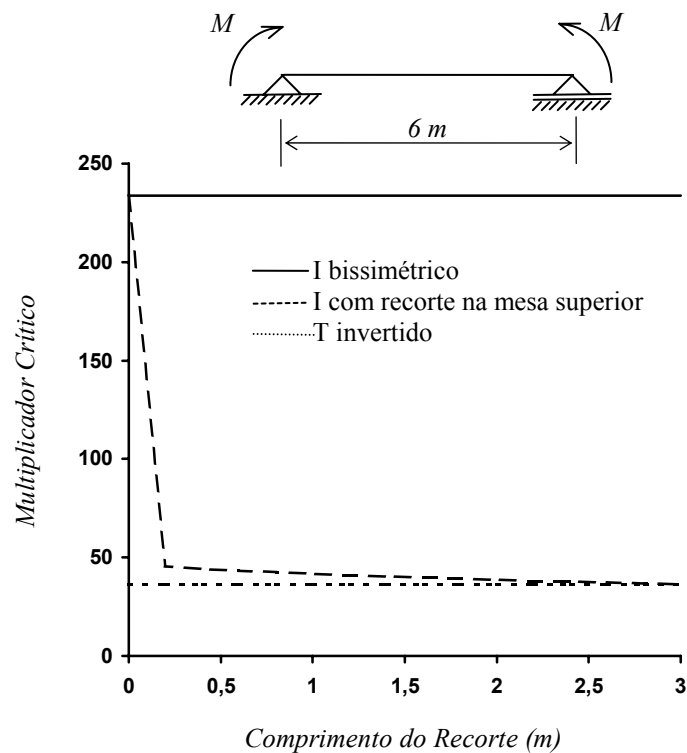


Figura 4.41 - Efeito do comprimento do recorte para o caso 01 da Tabela 4.1, considerando recorte na mesa superior.

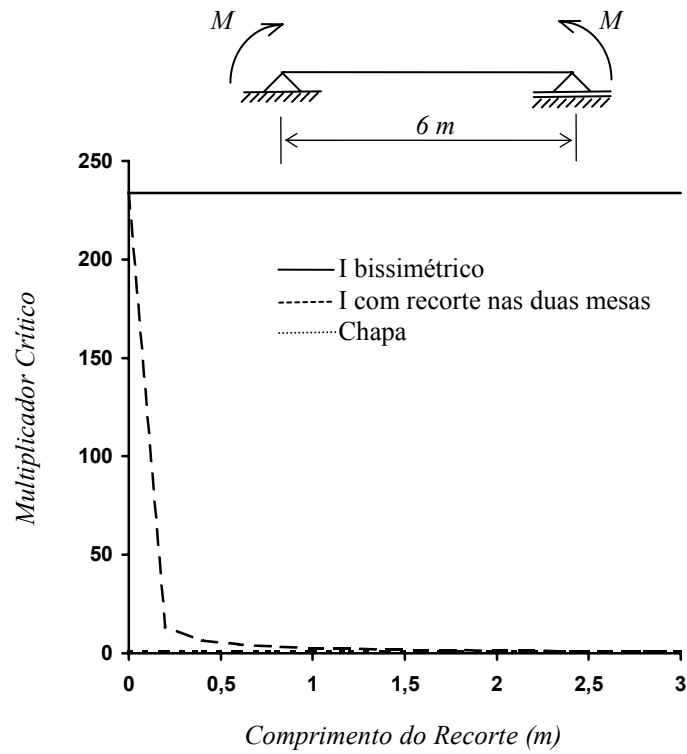


Figura 4.42 - Efeito do comprimento do recorte para o caso 01 da Tabela 4.1, considerando recorte nas duas mesas.

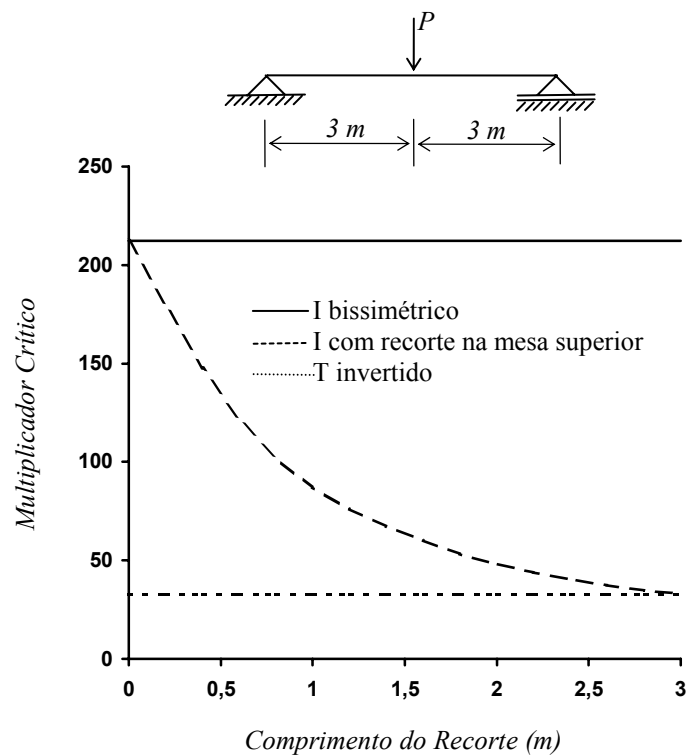


Figura 4.43 - Efeito do comprimento do recorte para o caso 09 da Tabela 4.1, considerando recorte na mesa superior.



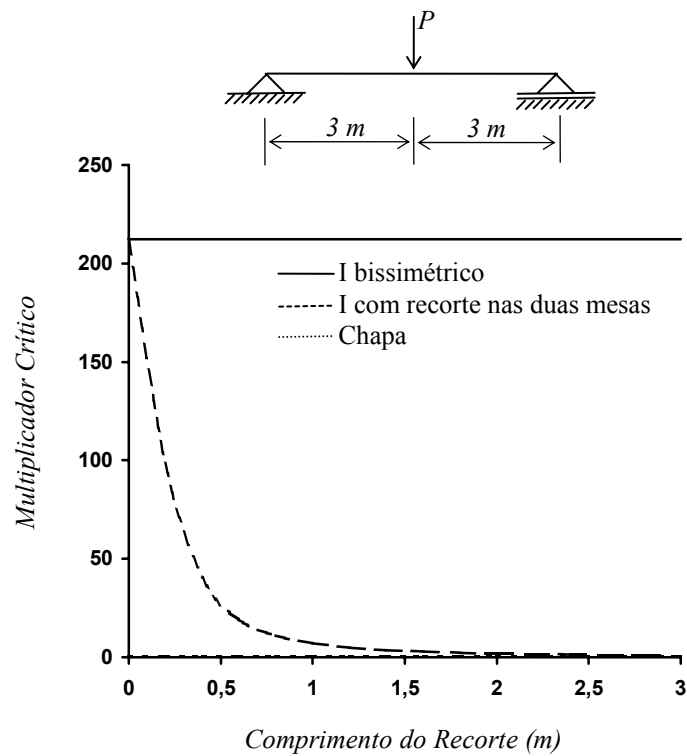


Figura 4.44 - Efeito do comprimento do recorte para o caso 09 da Tabela 4.1, considerando recorte nas duas mesas.

#### 4.7.3. Efeito da Profundidade do Recorte

Para esta verificação fez-se a profundidade do recorte variar desde uma viga sem recorte, ou seja, profundidade igual a  $0\text{ m}$ , até um quinto da altura total da viga. O vão da viga foi mantido fixo igual a  $6,0\text{ m}$  e o comprimento do recorte igual a  $0,20\text{ m}$ . Novamente, a seção considerada foi *VS 400x58 (400x200x12,5x6,3)* e as condições de contorno nas extremidades correspondem à alternativa *S*.

Os gráficos relativos ao recorte na mesa superior e ao recorte nas duas mesas, para o caso 01 da Tabela 4.1, estão apresentados na figura 4.45 e para o caso 09 da Tabela 4.1, na figura 4.46.

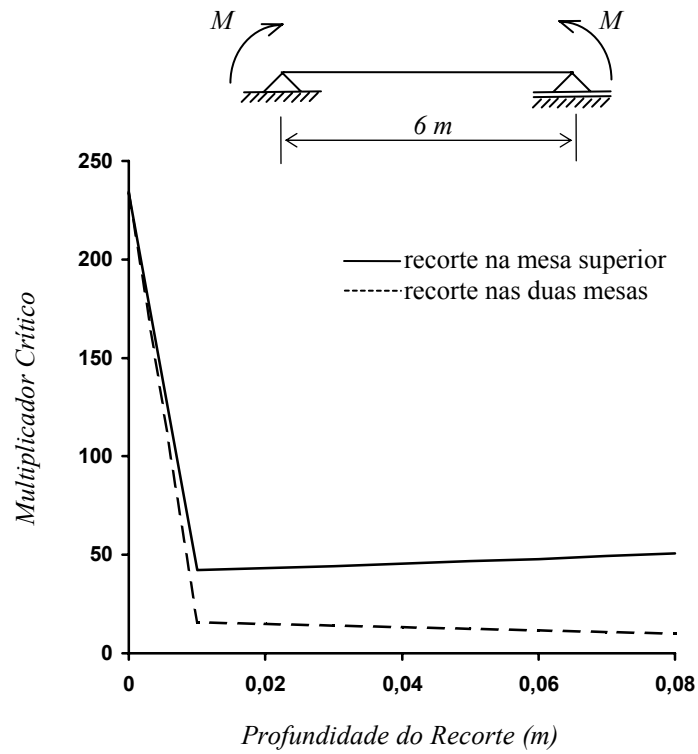


Figura 4.45 - Efeito da profundidade do recorte para o caso 01 da Tabela 4.1.

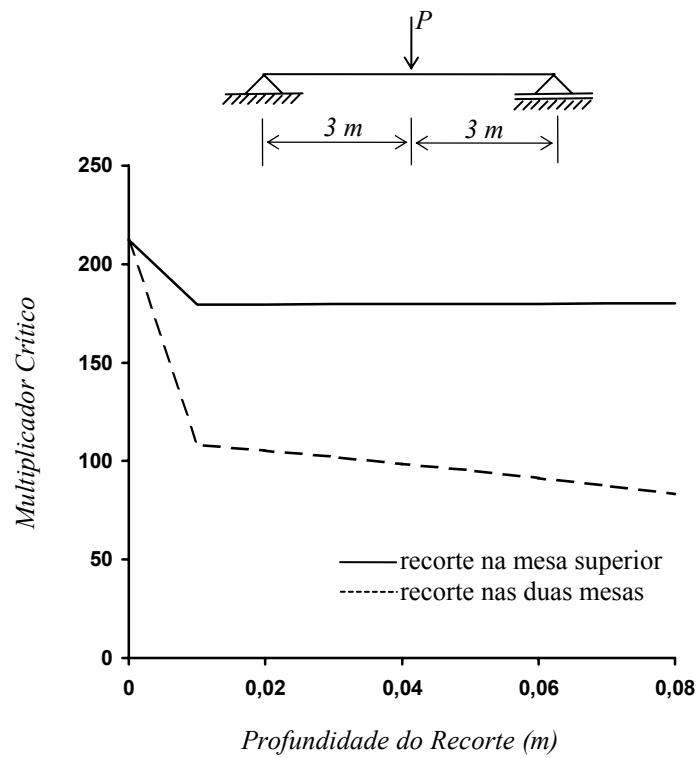


Figura 4.46 - Efeito da profundidade do recorte para o caso 09 da Tabela 4.1.

#### 4.8. Vigas com Aberturas na Alma

As vigas de edifícios muitas vezes possuem aberturas na alma para colocação de equipamentos, passagem de dutos, inspeção da estrutura e vários outros fins. Entretanto, a presença destas aberturas reduz a resistência nominal da viga, inclusive no que diz respeito à flambagem lateral com torção.

De maneira a avaliar como as aberturas influenciam o valor da resistência nominal à flambagem lateral com torção em regime elástico foram analisadas algumas situações representativas. Primeiramente foi estudado o caso de uma viga com aberturas dispostas ao longo do seu comprimento, e o resultado foi comparado com aquele obtido ao se utilizar uma fórmula simplificada proposta por Darwin [56]. Em seguida, foram feitas comparações com resultados obtidos por Thevendran e Shanmugam [57].

##### 4.8.1. Fórmula Apresentada por Darwin [56]

De acordo com Darwin [55], em vigas de aço com seção transversal I uniforme, duplamente simétrica, com aberturas na alma sem reforço ou aberturas na alma com reforço, a resistência nominal à flambagem lateral com torção é determinada da forma convencional, apenas multiplicando-se o momento de inércia à torção  $I_t$  por:

$$\left[ I - \left( \frac{a_o}{L_b} \right) \frac{h_o t_w - 2 A_r}{t_w (d + 2 b_f)} \right] \quad (4.29)$$

onde  $a_o$  e  $h_o$  são o comprimento e a altura da abertura, respectivamente,  $t_w$  é a espessura da alma,  $d$  é a altura da seção transversal,  $b_f$  é a largura das mesas e  $A_r$  é a área do reforço (para vigas com reforço apenas de um lado da alma,  $A_r$  deve ser tomado igual a zero).

A viga analisada possui vão de  $12,60 \text{ m}$ , com extremidades com vínculo de garfo, e está submetida a um carregamento distribuído em todo seu comprimento, caso 06 da Tabela 4.1, atuando no nível do centro de torção. A seção transversal é um perfil I duplamente simétrico, soldado, com altura igual a  $450 \text{ mm}$ , larguras das mesas igual a  $200 \text{ mm}$  e espessuras das mesas e da alma iguais a  $19 \text{ mm}$  e  $6,3 \text{ mm}$ , respectivamente. Foram

previstas 9 aberturas na alma em posições diferentes, porém simétricas em relação ao meio do vão, colocadas separadamente ou em conjunto (figura 4.47), e foram admitidos dois tamanhos para elas:  $0,45\text{ m} \times 0,20\text{ m}$  e  $0,90\text{ m} \times 0,30\text{ m}$ . Em ambos os casos, o centro da abertura coincide com o centro de gravidade da seção transversal.

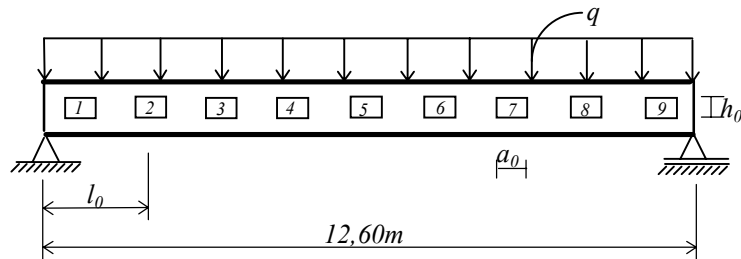


Figura 4.47 - Aberturas consideradas para o cálculo.

Os resultados obtidos com o Programa MCE estão apresentados na Tabela 4.6, onde também são mostrados os resultados obtidos ao se utilizar a equação (4.29), de Darwin [56], que corrige o momento de inércia à torção.

|                        |                                   | Momento Crítico (kN.m) |                      |
|------------------------|-----------------------------------|------------------------|----------------------|
|                        |                                   | Dimensão da abertura   | Dimensão da abertura |
|                        |                                   | 0,45m x 0,30m          | 0,90m x 0,30m        |
| Programa<br>MCE        | Sem abertura                      | 192,76                 | 192,76               |
|                        | Abertura 1 - $l_0 = 0,90\text{m}$ | 192,66                 | 192,42               |
|                        | Abertura 2 - $l_0 = 2,25\text{m}$ | 192,43                 | 192,44               |
|                        | Abertura 3 - $l_0 = 3,60\text{m}$ | 192,58                 | 192,55               |
|                        | Abertura 4 - $l_0 = 4,95\text{m}$ | 192,73                 | 192,55               |
|                        | Abertura 5 - $l_0 = 6,30\text{m}$ | 192,75                 | 192,74               |
|                        | Aberturas 1 e 9                   | 192,57                 | 192,22               |
|                        | Aberturas 1,2,8,9                 | 192,43                 | 191,78               |
|                        | Aberturas 1 a 3 e 7 a 9           | 192,34                 | 191,51               |
|                        | Aberturas 1 a 4 e 6 a 9           | 192,31                 | 191,42               |
|                        | Aberturas 1 a 9                   | 192,30                 | 191,41               |
| Fórmula de Darwin [56] |                                   | 191,51                 | 188,59               |

Tabela 4.6 - Valores do momento crítico para diversos casos de aberturas na alma.

#### 4.8.2. Resultados Apresentados por Thevendran e Shanmugam [57]

No trabalho de Thevendran e Shanmugam [57] é proposto um método numérico para determinação da resistência à flambagem lateral com torção de vigas delgadas contendo aberturas na alma ao longo do comprimento destravado, além de serem apresentados resultados de ensaios.

São verificados os casos de vigas biapoiadas e vigas em balanço, submetidas a cargas concentradas aplicadas no nível do centro de torção, casos 09 e 15 da Tabela 4.1 e alternativas *S* e *C*, respectivamente. O material utilizado possui módulo de elasticidade longitudinal igual a  $2,860 \text{ N/mm}^2$  e coeficiente de Poisson igual a  $0,36$ . As seções transversais consideradas são: I bissimétrico e seção retangular cheia cujas dimensões são mostradas na figura 4.51.

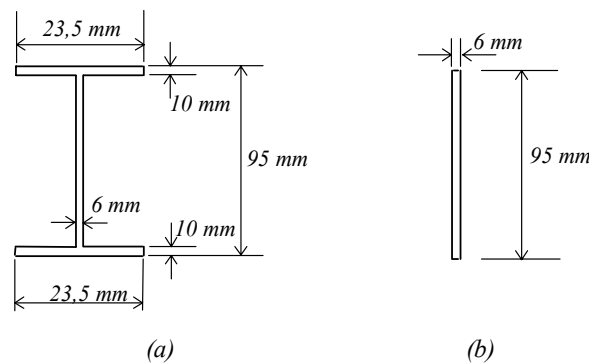


Figura 4.48 - Dimensões das seções transversais consideradas: (a) I bissimétrico e (b) retangular cheia.

As aberturas são centradas em relação ao centro de gravidade da seção transversal e podem ter formato circular ou retangular. Para as aberturas circulares são previstos dois diâmetros:  $25 \text{ mm}$  e  $38 \text{ mm}$ , e para as aberturas retangulares duas dimensões:  $62,5 \text{ mm} \times 25 \text{ mm}$  e  $62,5 \text{ mm} \times 50 \text{ mm}$ .

Os resultados obtidos através do ensaio, do método proposto por Thevendran e Shanmugam [57], e do Programa MCE, são mostrados a seguir.

#### 4.8.2.1. Viga biapoçada

Neste caso, as posições da abertura ao longo do comprimento da viga é mostrado apenas para metade do vão, devido a simetria (figura 4.49), e os resultados são apresentados na Tabela 4.7.

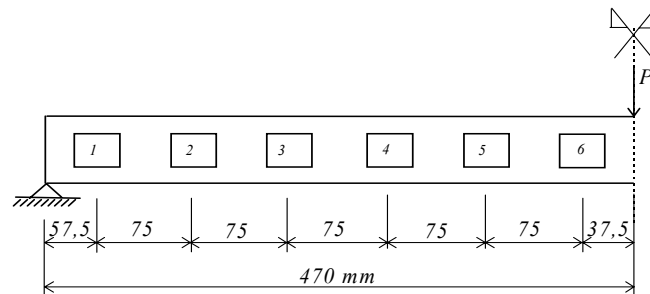


Figura 4.49 - Posições das aberturas para metade da viga biapoçada (adaptado da referência 57).

Os resultados, obtidos pelos três processos, estão apresentados na Tabela 4.7, para aberturas isoladas e combinações de posições de aberturas.

|                            | Seção I bissimétrica |              |               | Seção Retangular Cheia |              |               |
|----------------------------|----------------------|--------------|---------------|------------------------|--------------|---------------|
|                            | $P_{EXP}$ (N)        | $P_{TS}$ (N) | $P_{MCE}$ (N) | $P_{EXP}$ (N)          | $P_{TS}$ (N) | $P_{MCE}$ (N) |
| Sem abertura               | 707,8                | 675,6        | 769,5         | 91,2                   | 87,5         | 89,7          |
| Abertura 1 - 62,5x50       | 683,7                | 659,2        | 750,7         | 80,3                   | 78,4         | 76,3          |
| Abertura 3 - 62,5x50       | 687,7                | 622,2        | 753,4         | 77,0                   | 76,8         | 74,9          |
| Abertura 6 - 62,5x50       | 688,7                | 669,0        | 759,2         | 59,3                   | 61,9         | 63,3          |
| Abertura 1 - 62,5x25       | 689,6                | 667,1        | 757,7         | 86,2                   | 83,4         | 85,7          |
| Abertura 3 - 62,5x25       | 693,6                | 668,5        | 759,3         | 86,7                   | 83,1         | 85,4          |
| Abertura 6 - 62,5x25       | 698,7                | 672,3        | 763,0         | 80,9                   | 78,7         | 80,8          |
| Abertura 1,3,6 - 62,5x50   | 667,1                | 640,3        | 725,6         | 52,7                   | 51,8         | 48,8          |
| Abertura 1,3,6 - 62,5x25   | 684,7                | 657,0        | 741,6         | 74,0                   | 72,1         | 74,1          |
| Abertura 1 a 6 - 62,5x50   | 637,7                | 606,0        | 684,8         | 31,4                   | 33,6         | 34,5          |
| Abertura 1 a 6 - 62,5x25   | 674,9                | 640,1        | 715,5         | 54,9                   | 60,6         | 64,0          |
| Abertura 1,3,6 - $\phi$ 38 | 696,5                | 663,0        | 758,4         | 80,5                   | 75,2         | 74,5          |
| Abertura 1,3,6 - $\phi$ 25 | 700,9                | 671,5        | 764,7         | 86,8                   | 82,4         | 84,2          |

Tabela 4.7 - Valores da carga crítica para viga biapoçada.

Nesta tabela, entende-se por  $P_{EXP}$  a carga crítica obtida através de ensaios,  $P_{TS}$  a carga crítica obtida pelo processo proposto por Thevendran e Shanmugam [57], e por  $P_{MCE}$  a carga crítica obtida pelo Programa MCE.

#### 4.8.2.2. Viga em balanço

Na figura 4.50 pode ser vistas as posições da abertura ao longo do comprimento da viga.

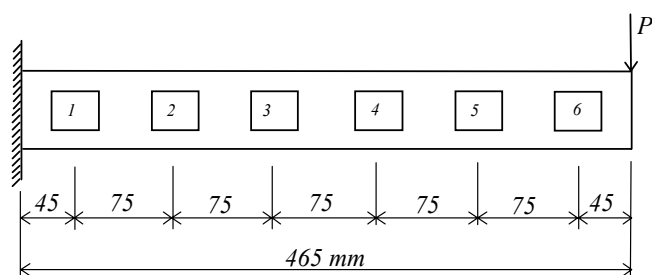


Figura 4.50 - Posições das aberturas para viga em balanço (adaptado da referência 57).

|                            | Seção I bissimétrica |              |               | Seção Retangular Cheia |              |               |
|----------------------------|----------------------|--------------|---------------|------------------------|--------------|---------------|
|                            | $P_{EXP}$ (N)        | $P_{TS}$ (N) | $P_{MCE}$ (N) | $P_{EXP}$ (N)          | $P_{TS}$ (N) | $P_{MCE}$ (N) |
| Sem abertura               | 681,1                | 677,6        | 760,6         | 86,0                   | 84,7         | 89,0          |
| Abertura 1 - 62,5x50       | 636,7                | 648,2        | 725,7         | 55,3                   | 60,6         | 55,8          |
| Abertura 3 - 62,5x50       | 658,3                | 662,2        | 745,8         | 65,5                   | 65,6         | 64,6          |
| Abertura 6 - 62,5x50       | 663,0                | 674,3        | 760,2         | 84,9                   | 83,6         | 86,7          |
| Abertura 1 - 62,5x25       | 657,3                | 657,7        | 738,6         | 77,9                   | 74,3         | 76,6          |
| Abertura 3 - 62,5x25       | 665,1                | 668,9        | 751,3         | 80,9                   | 78,1         | 80,4          |
| Abertura 6 - 62,5x25       | 666,1                | 672,0        | 760,4         | 85,8                   | 84,4         | 87,5          |
| Abertura 1,3,6 - 62,5x50   | 656,3                | 633,4        | 711,5         | 50,7                   | 49,6         | 46,2          |
| Abertura 1,3,6 - 62,5x25   | 666,1                | 650,7        | 729,4         | 72,7                   | 69,2         | 71,3          |
| Abertura 1 a 6 - 62,5x50   | 481,7                | 605,0        | 677,5         | 28,4                   | 32,6         | 33,4          |
| Abertura 1 a 6 - 62,5x25   | 577,8                | 636,5        | 707,7         | 63,8                   | 58,9         | 62,0          |
| Abertura 1,3,6 - $\phi$ 38 | 677,9                | 656,7        | 748,2         | 76,1                   | 72,8         | 71,6          |
| Abertura 1,3,6 - $\phi$ 25 | 680,8                | 665,2        | 755,3         | 83,2                   | 79,6         | 81,5          |

Tabela 4.8 - Valores da carga crítica para viga em balanço.

## 5. CONCLUSÕES

### 5.1. Considerações Gerais

De acordo com o que foi mostrado nos itens 1.3.1, 1.3.2 e 1.3.3, quanto mais preciso for o valor do momento crítico elástico  $M_{cr}$  para o ENV 1993-1-1 [64], ou do coeficiente  $C_b$  para o AISC/LRFD [62] e a NBR 8800 [63], mais correto será o valor da resistência nominal ao momento fletor para o estado limite último de flambagem lateral com torção obtido ao se fazer uso dos procedimentos destas três especificações de projeto de estruturas de aço, independentemente da instabilidade ocorrer em regime elástico ou inelástico. No entanto, nestes mesmos itens, viu-se que estas especificações, tomadas como referência neste trabalho, apresentam uma série de limitações que tornam, para diversas situações, impossível obter valores precisos de  $M_{cr}$  e  $C_b$ , e muitas vezes, até obter qualquer valor para estas grandezas. A literatura técnica especializada também apresenta enormes lacunas no que se refere à determinação de  $M_{cr}$  e  $C_b$ .

Ao se usar o Programa MCE, desenvolvido no presente trabalho, todas as limitações quanto à determinação de  $M_{cr}$  e  $C_b$  deixam de existir, uma vez que ele permite:

- qualquer carregamento na viga;
- qualquer condição de contorno no plano de flexão;
- qualquer condição de contorno para flambagem lateral com torção;



- a atuação de cargas estabilizantes ou desestabilizantes;
- variação da seção transversal, em função de recortes nas mesas, aberturas na alma ou lamelas;
- a consideração de comportamento de peça contínua no plano de flambagem nas vigas com contenções laterais internas;

Além disso, os resultados são obtidos com rapidez e objetividade, e mostraram-se plenamente confiáveis, com as concordâncias constatadas nas inúmeras comparações feitas no capítulo precedente. A entrada de dados do programa é simples e, a critério do usuário, pode ser por arquivo ou interativa, e a saída de resultados de imediata compreensão.

## **5.2. Vigas com Seção I Duplamente Simétrica**

### **5.2.1. Sobre o AISC/LRFD [62], a NBR 8800 [63] e o ENV 1993-1-1 [64]**

Analisando-se os resultados obtidos para o momento crítico,  $M_{cr}$ , com o AISC/LRFD [62], a NBR 8800 [63] e o ENV 1993-1-1 [64] e comparando-os com os obtidos pelo Programa MCE para os casos 01 a 14, alternativa S, e 15 a 18, alternativa C, para seção I bissimétrica e cargas transversais aplicadas, quando existentes, no nível do centro de torção, os quais são mostrados na Tabela 4.2, pode-se concluir que:

- quando não há cargas transversais aplicadas (casos 01 a 05), os resultados não diferem muito, com o ENV 1993-1-1 [64] manifestando uma tendência em apresentar valores um pouco superiores e mais próximos de Programa MCE;
- quando há cargas transversais aplicadas e apoios nas duas extremidades do comprimento destravado no plano de flexão (casos 06 a 14), os valores da NBR

8800 [63] são muito favoráveis à segurança, pois ela recomenda adotar sempre  $C_b$  igual a 1,00. Isto equivale igualar estes casos com a situação mais desfavorável possível, em que a viga está solicitada por um momento fletor constante em todo seu comprimento;

- comparando-se os valores fornecidos pela equação empírica de Kirby e Nethercot [65], equação (1.4), com os resultados obtidos pelo AISC/LRFD [62], equação (1.3), percebe-se que os primeiros são ligeiramente superiores, o que demonstra uma posição conservadora da especificação americana, uma vez que a equação por ela adotada foi baseada na própria equação de Kirby e Nethercot [65];
- considerando-se os valores fornecidos pelo Programa MCE para os casos 01 a 14 da Tabela 4.1, nota-se que:
  - em todos os casos eles superam os valores obtidos pela NBR 8800 [63];
  - apenas nos casos 02 e 11, os valores de  $C_b$  calculados pelo AISC/LRFD [62] e por Kirby e Nethercot [65], são maiores que os valores de  $C_{bs}$  do Programa MCE, mesmo assim em no máximo 12%;
  - em todos os casos eles são praticamente iguais aos valores do ENV 1993-1-1 [63], exceto no caso 11, quando a especificação europeia apresenta valores mais conservadores, e no caso 04, valores um pouco maiores;
- na maior parte dos casos cobertos pelo ENV 1993-1-1 [64], que não são muitos, os valores fornecidos por esta especificação se apresentam maiores que os da NBR 8800 [63] e do AISC/LRFD [62], e bem próximos dos valores do Programa MCE. A diferença está, principalmente, no fato de que o ENV 1993-1-1 [63] utiliza equações mais gerais e precisas;
- para vigas em balanço (casos 15 a 18), exceto o ENV 1993-1-1 [63], que não considera esta possibilidade, as outras duas especificações adotam  $C_b = 1,00$ . Para os casos 15, 16 e 17, tal procedimento conduz a resultados bastante favoráveis à segurança, mas para o caso 18, o resultado fica contrário à segurança.

Dentre as três especificações discutidas no presente trabalho, apenas o ENV 1993-1-1 [64] considera situações, embora poucas, em que cargas transversais estão aplicadas na mesa inferior ou mesa superior, e condições de contorno correspondentes à alternativa *R* (vínculos rígidos) nas duas extremidades do comprimento destravado. Nos itens 4.3.2.1, 4.3.2.3 e 4.3.2.5, pode ser constatado que os valores do momento crítico fornecidos pelo ENV 1995-1-1 [64], variável em função do parâmetro  $W^2 = (\pi^2 E C_w / L_b^2 GJ)$ , praticamente coincidem com os fornecidos pelo Programa MCE.

### **5.2.2. Resultados de Chen e Lui [30]**

Chen e Lui [30] adotam o procedimento aproximado desenvolvido por Nethercot e Rockey [25] para se determinar o valor do fator de momento equivalente  $C_b$  quando atuam cargas concentradas ao longo do comprimento destravado no nível da mesa inferior, superior ou no nível do centro de torção. Este procedimento está resumido na expressão (4.2), onde são envolvidas duas variáveis,  $A$  e  $B$ , e para cada caso analisado, são apresentadas equações e valores para elas. Para a maior parte dos casos apresentados por Chen e Lui [30], foram calculados os valores de  $C_{bs}$  pelo Programa MCE, e ambos os resultados plotados conjuntamente. Além disso, quando possível, foram também plotados os valores de  $C_b$ , obtidos de acordo com o ENV 1993-1-1 [64] (quociente entre o momento crítico elástico obtido por esta especificação para o caso em análise e o momento crítico elástico dado pela equação (1.1)) e, os valores obtidos através da equação clássica de Timoshenko e Gere [5].

Para vigas biapoiadas, considerando-se a alternativa *S*, e os casos de carregamento 09 e 06 da Tabela 4.1 (figuras 4.1 e 4.2), observou-se que todos os quatro métodos de obtenção do fator de momento equivalente apresentaram valores praticamente iguais. Entretanto, para o caso 12 (figura 4.3), os valores de três destes métodos (uma vez que não foi fornecido o resultados para a equação clássica de Timoshenko e Gere [5]) concordaram apenas para cargas atuando no nível do centro de torção. Para cargas atuando nas mesas superior e inferior, somente os valores do ENV 1993-1-1 [63] e do Programa MCE foram coincidentes. Observou-se que para cargas aplicadas na mesa inferior, os valores obtidos pelo método aproximado estão contra a segurança,

superando os resultados dos outros dois métodos, e nos casos de cargas aplicadas na mesa superior, favoráveis à segurança.

Ainda para vigas biapoiadas, considerando-se agora a alternativa *R* para os casos 09 e 06 da Tabela 4.1 (figuras 4.7 e 4.8), observa-se que para cargas aplicadas no nível do centro de torção, os valores dos três métodos coincidem. Para as outras duas possibilidades quanto ao nível de aplicação das cargas, apenas os valores do Programa MCE e do ENV 1993-1-1 [64] apresentaram boa concordância. Para cargas atuando na mesa inferior, os resultados do método aproximado proposto por Chen e Lui [30] são conservadores se comparados com os valores obtidos pelos outros dois métodos (Programa MCE e ENV 1993-1-1 [64]), inversamente ao que ocorre para cargas atuando na mesa superior, quando então os resultados do método aproximado ficaram contra a segurança.

Prosseguindo no estudo de vigas biapoiadas, foram analisados os mesmos casos 09 e 06 da Tabela 4.1, porém agora, com diferentes condições de contorno (figuras 4.9 a 4.12). Permitindo-se que a rotação no plano de flambagem ficasse livre, com a rotação em torno do eixo longitudinal, o deslocamento lateral e o empenamento impedidos, obtiveram-se valores contra a segurança pelo método aproximado de Chen e Lui [30], quando comparado com os de Programa MCE, para as três posições de aplicação da carga em relação ao nível do centro de torção. Ao se permitir que o empenamento ficasse livre, com a rotação em torno do eixo longitudinal, o deslocamento lateral e a rotação no plano de flambagem impedidos, observou-se que para o caso 09 os valores obtidos pelo método aproximado ficaram ligeiramente contra a segurança. Para o caso 06, ocorreu o inverso, quando então, os resultados apresentados pelo método aproximado mostraram-se conservadores.

Nas vigas em balanço, casos 15 e 16 da Tabela 4.1, Chen e Lui [30] fornecem resultados provenientes de procedimentos numéricos. Fazendo-se uma comparação destes valores com aqueles obtidos pelo Programa MCE (figuras 4.4 e 4.5), percebe-se que, para o caso 15 existe uma maior diferença nos resultados do que no caso 16. Para cargas aplicadas na mesa inferior, os valores obtidos pelo procedimento numérico

superam os do Programa MCE. Para cargas aplicadas no nível do centro de torção e na mesa superior, os valores do procedimento numérico são conservadores.

Chen e Lui [30] também apresentam o método alternativo para obtenção do momento crítico elástico proposto por Clark e Hill [24] e recomendado por Johnston [72] (item 4.3.2.5). Como este método serviu de base para o ENV 1993-1-1 [64], os resultados por ele apresentados são bastante semelhantes aos obtidos por esta especificação. Como vantagens, o método alternativo apresenta resultados bastante precisos, como se pode constatar na comparação com os resultados obtidos pelo Programa MCE (figura 4.13 a 4.22), possibilidade de cargas atuarem no nível das mesas superior e inferior e de se ter as alternativas *S* e *R*, e como desvantagens, os poucos casos de carregamento cobertos, limitados aos da Tabela 4.4.

### **5.2.3. Conjunto de Resultados Obtidos pelo Programa MCE**

Observando-se os gráficos de  $C_{bs}$  apresentados nas figuras 4.23 a 4.25, verifica-se que:

- para cargas atuando ao nível do centro de torção, todos os casos, exceto o 18, apresentaram valores maiores que 1,00. Para a alternativa *S*, os valores são praticamente constantes, e para a alternativa *R*, eles variam não apenas em função do comprimento da viga  $L$  (nos casos 01 a 14,  $L$  é igual ao comprimento destravado  $L_b$ ), mas também em função das propriedades geométricas da seção transversal. Em cada caso, os valores correspondentes à alternativa *R* superam significativamente os valores da alternativa *S*;
- para cargas atuando na mesa inferior, os valores de  $C_{bs}$  são sempre maiores que aqueles de cargas atuando no nível do centro de torção, e em nenhum caso existem valores menores que a unidade. Isto se deve ao fato de que as cargas possuem um efeito estabilizante, aumentando a resistência à flambagem lateral com torção;
- para cargas atuando na mesa superior, os valores de  $C_{bs}$  são menores que os correspondentes à situação de cargas atuando no nível do centro de torção. Além

disso, para quase todos os casos da alternativa *S* e balanços, obtém-se valores menores que 1,00. Entretanto, para a alternativa *R*, todos os resultados superam a unidade.

Uma conclusão interessante é que a utilização dos métodos propostos pela NBR 8800 [63] e mesmo pelo AISC/LRFD [62] para determinação de  $C_b$  pode levar a resultados que não contrariam a segurança para cargas transversais aplicadas no nível da mesa superior (desestabilizantes), desde que se tenham condições de contorno correspondentes à alternativa *R*. Isto porque estes métodos, embora formulados para cargas aplicadas no nível do centro de torção, se baseiam nas condições de contorno correspondentes à alternativa *S*, bastante mais favoráveis. A utilização de tais métodos para cargas aplicadas no nível do centro de torção e alternativa *R* e no nível da mesa inferior, alternativas *S* e *R*, obviamente conduziram a resultados bastante favoráveis à segurança, levando portanto, a um consumo excessivo de material.

### **5.3. Vigas com Seções Transversais Diferentes do I Duplamente Simétrico**

A norma brasileira, NBR 8800[63], e a especificação americana, AISC/LRFD [62], não fazem restrição à utilização do fator de momento equivalente determinado pelas equações (1.11) e (1.3), respectivamente, para qualquer uma das seções transversais por elas consideradas. Já a especificação européia, ENV 1993-1-1 [64], faz uma distinção na formulação, de maneira a se considerar a seção transversal e o eixo de flexão.

Para se verificar se esta hipótese de um fator único, independentemente da seção transversal, não conduz a resultados incorretos, determinou-se o valor do coeficiente  $C_{bs}$  com o Programa MCE para todas as seções transversais previstas pela NBR 8800 [63], sujeitas à flambagem lateral com torção, fazendo-se com que o comprimento destravado da viga,  $L_b$ , variasse de 2 m até 20 m. Foram considerados os casos de carregamento 01, 03, 05, 06, 08, 09 e 11 da Tabela 4.1, com alternativa *S*, para cargas transversais atuando apenas no nível do centro de torção.

Para a seção U os valores obtidos foram praticamente os mesmos da seção I bissimétrica, independentemente do vão da viga. A mesma coisa se verificou para as

seções retangular cheia e caixão (Tabela 4.5). Além disso, os valores para estas seções transversais ficaram muito próximos, o que permite afirmar que, na prática, o valor do coeficiente  $C_{bs}$  é único para todas estas seções.

Para as seções T e I monossimétrica fletidas em torno do eixo perpendicular à alma, os resultados obtidos com o Programa MCE variaram com o comprimento destravado (figuras 4.27 e 4.28), exceto para o caso 01, quando o valor de  $C_{bs}$  se manteve constante e igual a 1,00, como era esperado. Para o caso 03, todos os valores ficaram acima da unidade e praticamente constantes. Nos outros casos, foram obtidos valores de  $C_{bs}$  menores que 1,00 para determinados valores de  $L_b$ , principalmente quando  $L_b$  é pequeno. Nos casos 05, 08 e 11 ocorre uma inversão no diagrama de momentos fletores, fazendo com que a parte inferior da seção transversal, menos resistente à flambagem lateral com torção (ver figura 4.26.b e 4.26.c), fique comprimida em certos trechos, o que explica os baixos valores de  $C_{bs}$ .

Pode-se concluir que se a seção transversal é simétrica em relação ao eixo de flexão, os valores de  $C_b$  fornecidos pela NBR 8800 [63] e AISC/LRFD [62] são sempre válidos, mas se não forem simétricos em relação ao eixo de flexão, tais valores poderão estar significativamente contra a segurança.

#### **5.4. Vigas com Contenção Lateral Interna**

Para se analisar como a posição de uma contenção lateral interna, em vínculo de garfo, afeta o valor do momento crítico,  $M_{cr}$ , estudou-se uma viga biapoiada, na qual esta posição variou de  $01 L$  até  $05 L$ . Os casos de carregamento considerados foram 01, 06 e 09 da Tabela 4.1, com alternativa  $S$ , para cargas transversais atuando no nível do centro de torção.

Analisando-se os resultados fornecidos pelo Programa MCE, considerando-se as três situações de carregamento (figura 4.31), observa-se que, à medida em que a contenção interna desloca-se da extremidade para o centro da viga, há um aumento considerável na resistência ao momento fletor para a flambagem lateral com torção. Para o caso 01, considerando uma contenção lateral interna no meio do vão, ocorre um aumento de

aproximadamente 3 vezes no valor da resistência, de 4 vezes para o caso 06 e de 5 vezes para o caso 09.

Foram ainda comparados os resultados aproximados apresentados por Chen e Lui [30], para os casos 06 e 09 da Tabela 4.1 e alternativa *S*, com a seção central contida lateralmente, com cargas transversais atuando nos níveis da mesa superior, inferior e centro de torção, com aqueles fornecidos pelo Programa MCE. Verificou-se uma concordância muito boa (figuras 4.32 e 4.33).

## **5.5. Vigas com Variação de Seção Transversal**

### **5.5.1. Vigas com Lamelas**

De modo a se estudar como a utilização de lamelas nas mesas influi na resistência ao momento fletor da viga, colocou-se uma lamela na mesa superior (mesa comprimida) da seção transversal de uma viga com seção I duplamente simétrica. Permitiu-se que esta lamela variasse, simetricamente em relação ao centro do vão, desde a situação de comprimento igual a zero, ou seja, de um I bissimétrico simples, até a situação de comprimento igual ao comprimento da viga, correspondente a uma seção I monossimétrica em que a espessura da mesa superior é igual à soma das espessuras da lamela e da mesa superior.

Considerando-se os mesmos casos 01, 06 e 09 da Tabela 4.1 e alternativa *S*, obteve-se os gráficos mostrados nas figuras 4.35 a 4.37. Nota-se que houve um aumento na resistência da peça ao se aumentar o comprimento lamela, de modo que o multiplicador crítico variou do valor correspondente à seção I bissimétrica ao correspondente à seção monossimétrica, como se esperava.

### **5.5.2. Vigas com Recortes nas Mesas**

Analisou-se a influência de recortes feitos na mesas, nas extremidades do comprimento destravado, sobre o valor do momento crítico elástico.



Para isto, foram tomados os valores apresentados por Cheng et al [55], tanto aqueles obtidos pelo Programa BASP, como os obtidos por um método simplificado por eles proposto. Estes resultados foram plotados juntamente com os valores obtidos pelo Programa MCE para o caso de uma seção I bissimétrica com uma carga concentrada aplicada na seção central, no nível do centro de torção, com o comprimento do recorte variando de um valor nulo até cobrir todo o comprimento da viga. Os resultados encontrados com o Programa MCE, pareceram ser bastante consistentes, variando do valor correspondente à seção bissimétrica ao correspondente à seção T invertida. Para o Programa BASP, só foram calculados valores até determinado comprimento do recorte. Comparando-se estes resultados com os do Programa MCE, percebe-se que os primeiros se apresentaram conservadores. Analisando-se agora, os valores obtidos pelo método simplificado, nota-se que o mesmo se mostrou o mais conservador dos três, e além disso, forneceu resultados inconsistentes para comprimento dos recortes acima de  $1,8\text{ m}$  (figura 4.38), valor muito acima do usual.

Além disso, foram analisadas as influências da variação do comprimento da viga, mantendo-se fixas as dimensões do recorte, da variação do comprimento do recorte, mantendo-se fixos o comprimento da viga e a profundidade do recorte, e da variação da profundidade do recorte, mantendo-se fixas as outras duas variáveis, tomando-se os casos de carregamento 01 e 09 da Tabela 4.1 e alternativa *S*, com a carga transversal aplicada no nível do centro de torção. Analisando-se os gráficos mostrados nas figuras 4.39a 4.46, percebe-se que:

- ao se considerar o efeito do comprimento da viga, para o caso 01 (figura 4.39), o valor do multiplicador crítico manteve-se praticamente constante, ou seja, não houve influência significativa do recorte ao se variar o vão. Entretanto, percebe-se que a resistência diminuiu em aproximadamente 3 vezes da situação de recorte na mesa superior para a situação de recorte nas duas mesas. Para o caso 09 (figura 4.40), ocorreu uma perda acentuada na resistência ao se aumentar o vão, sendo a resistência para  $L_b = 2\text{ m}$  até 5 vezes maior que a resistência para  $L_b = 10\text{ m}$ , considerando-se recorte apenas na mesa superior. Para recortes nas duas mesas, esta

diminuição na resistência foi mais suave, sendo que para  $L_b = 2 m$  ela é 2 vezes maior que para  $L_b = 10 m$ ;

- para a verificação do efeito do comprimento dos recortes, para o caso 01 (figuras 4.41 e 4.42), percebeu-se uma queda brusca na resistência ao se fazer recorte apenas na mesa superior e nas duas mesas. No caso 09 (figura 4.43 e 4.44), a variação na resistência foi mais suave. Nos dois casos de carregamento, os resultados apresentaram o comportamento esperado, variando da situação de viga sem recortes nas mesas até a de viga com as mesas totalmente recortadas;
- quanto ao efeito da profundidade do recorte, ocorreu uma queda brusca na resistência ao se fazerem os recortes, para os dois casos de carregamento. No caso 01 (figura 4.45), a perda na resistência com o aumento da profundidade dos recortes foi bastante brusca tanto para recortes apenas na mesa superior quanto para recortes nas duas mesas. No caso 09 (figura 4.46), esta perda foi suave para recortes na mesa superior e um pouco mais pronunciada para recortes nas duas mesas. Observou-se também que, para recortes nas duas mesas, sempre ocorreu perda na resistência com o aumento da profundidade dos recortes.

### **5.5.3. Vigas com Aberturas na Alma**

Para se avaliar como as aberturas na alma influem no valor do momento crítico, foi estudada uma viga com aberturas variando ao longo de seu comprimento destravado, e os resultados comparados com aqueles obtidos utilizando-se a equação proposta por Darwin [56]. A viga considerada, bem como as posições das aberturas, pode ser vista na figura 4.47.

A equação (4.29), de Darwin [56], é válida para aberturas em qualquer posição ao longo do comprimento destravado, sem se levar em consideração o número destas aberturas. Observando-se os resultados apresentados na Tabela 4.6, nota-se que:

- praticamente não há variação na resistência da viga, comparando-se a situação de viga sem abertura com a situação de viga com aberturas em qualquer posição ou quantidade. Tal conclusão permanece válida, independentemente das dimensões das aberturas;
- os resultados obtidos pelo Programa MCE estão muito próximos dos valores obtidos ao se utilizar a equação de Darwin [56].

Além disso, foram verificados os casos de vigas com aberturas apresentados por Thevendran e Shanmugam [57]. Foram consideradas uma viga biapoada (figura 4.49), e uma viga em balanço (figura 4.50), ambas com aberturas na alma em vários pontos do comprimento destravado. As seções transversais estão mostradas na figura 4.48, e permitiu-se que as aberturas fossem circulares ou retangulares.

Os resultados apresentados (Tabelas 4.7 e 4.8) correspondem a valores experimentais, valores obtidos por método proposto pelos autores e valores obtidos pelo Programa MCE. Fazendo-se uma comparação, pode-se afirmar que os resultados apresentados pelo Programa MCE ficaram próximos dos outros dois.

## **5.8. Análise Global e Sugestões**

Tendo-se em mente os objetivos iniciais do estudo proposto, que foram o desenvolvimento de um método de determinação da carga crítica elástica para flambagem lateral com torção de vigas de aço, considerando situações quaisquer de carregamento, geometria e condições de contorno, sua implementação através de um programa computacional, e uma avaliação dos resultados obtidos, torna-se possível agora fazer uma análise global do trabalho realizado.

Considerando-se os processamentos executados com o Programa MCE, descritos no capítulo 4, percebe-se que os mesmos foram bastante ilustrativos, abrangendo um

número muito grande e diversificado de situações. Além disso, observando-se as análises feitas, nota-se que os resultados foram excelentes quando comparados com os da literatura existente e bastante significativos quando comparados com os de normas e especificações de projeto. Isto demonstra que o método escolhido e a maneira como ele foi desenvolvido e implementado atingiram os resultados esperados.

Contudo, verificou-se que alguns itens merecem um estudo mais aprofundado, os quais serão apresentados apenas como sugestão para futuras pesquisas. Além disso, existem assuntos correlatos para os quais seria interessante um desenvolvimento semelhante ao que foi apresentado aqui. Portanto, sugere-se:

- estudo detalhado do momento crítico dos perfis cujo eixo de flexão não é um eixo de simetria;
- estudo de outras seções transversais previstas pela NBR 8800 [63], diferentes do I bissimétrico, para cargas atuando na mesa superior e na mesa inferior, incluindo seções em que o eixo de flexão não é um eixo de simetria;
- análise de vigas com contenção lateral interna e com variação na geometria, seja pelo uso de lamelas de reforço, pelo uso de recortes nas extremidades ou de aberturas na alma, para as outras seções transversais previstas na NBR 8800 [63] além da seção I bissimétrica.

Sugere-se ainda, por meio de uma complementação do Programa MCE ou utilizando um outro programa que faça uso do método dos elementos finitos, a determinação numérica do valor da resistência nominal à flambagem lateral com torção de vigas com qualquer seção transversal, variável ou não, em regimes elástico e inelástico, considerando as imperfeições geométricas e tensões residuais. No caso de perfis soldados de fabricação brasileira, feitos com chapas cortadas a maçarico, seria importante considerar suas tensões residuais próprias, que são diferentes das tensões residuais dos perfis laminados e soldados de fabricação americana ou européia, estes últimos normalmente produzidos com chapas laminadas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Procter, A.N., *Laterally Unsupported Beams*, Journal of Structural Engineering, Vol. 10, No. 7, July, 1932, p. 274.
- [2] Prandtl, L., *Kipperscheinungen*, Dissertation, Munich, 1899.
- [3] Michell, A.G.M., *Elastic Stability of Long Beams under Transverse Forces*, Phil. Mag., Vol. 48, 1899, p. 298.
- [4] Timoshenko, S.P., *History of the Strength of Materials*, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [5] Timoshenko, S.P., and Gere, J.M., *Theory of Elastic Stability*, 2nd. Ed., Engineering Societies Monographs, McGraw-Hill, New York, 1961.
- [6] Bleich, F., *Buckling Strength of Metal Structures*, Engineering Societies Monographs, McGraw-Hill, New York, 1952 (Prepared in cooperation with Column Research Council.)
- [7] Vlasov, V.Z., *Thin-Walled Elastic Beams*, 2nd. Ed., Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem, Israel, 1961.
- [8] Winter, G., *Strength of Slender Beams*, Transactions, ASCE, Vol. 109, 1944, pp. 1165-1182.
- [9] Massonnet, C., *Buckling of Thin-Walled Bars with Open Cross Section*, Hommage de la Faculté des Sc. Appl. University of Liège, à l'A.I.Lg. G. Thone, editor (in French), 1947, pp. 135-146.
- [10] Horne, M.R., *The Flexural-Torsional Buckling of Members of Symmetric I-Section under Combined Thrust and Unequal Terminal Moments*, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. Vol. 7, Part 4, 1954, pp. 410-426.

- [11] Salvadori, M.G., *Lateral Buckling of I-Beams*, ASCE Transaction. Vol. 120, 1955, pp. 1165-1177.
- [12] Galambos, T.V., *Structural Members and Frames*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1968.
- [13] Gellin, S., and Lee, G.C., *Finite Elements Available for the Analysis of Noncurved Thin-Walled Structures*, "Finite Elements Analysis of Thin-Walled Structures", J. W. Bull, Ed., Elsevier Applied Science, London, U.K., 1988, pp. 1-45.
- [14] Pandey, M.D., and Sherbourne, A.N., *Elastic, Lateral-Torsional Stability of Beams: General Considerations*, Journal of Structural Engineering., ASCE, 116 (2), 1990, pp. 317-335.
- [15] De Jong, H., *An Approach to More Complicated Lateral-Buckling Problems*, J. Constr. Steel Res., 16 (3), 1990, pp. 231-246.
- [16] Pi, Y.L., Trahair, N.S., and Rajasekaran, S., *Energy Equation for Beam Lateral Buckling*, Journal of Structural Engineering, Vol. 118, No. 6, June, 1992, pp. 1462-1479.
- [17] Rachid, M., *Instabilidade de Barras de Seção Delgada*, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, São Carlos, 1976. (Tese de Doutorado)
- [18] Salvadori, M.G., *Lateral Buckling of Beams of Rectangular Cross Section Under Bending and Shear*, Proceedings of the First U.S. Congress of Applied Mechanics, ASME, New York, 1951, p. 403.
- [19] Brown, P.T., and Trahair, N.S., *Finite Integral Solution of Differential Equations*, Civil Engineering Transactions. Institute of Engineers, Australia, CE10, No. 2, October, 1968, pp. 193-196.

- [20] Barsoum, R.S., and Gallagher, R.H., *Finite Element Analysis of Torsional and Torsional-Flexural Stability Problems*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 2, 1970, pp. 335-352.
- [21] Powell, G., and Klingner, R., *Elastic Lateral Buckling of Steel Beams*, Journal of the Structural Division. ASCE, Vol. 96, No. ST9, 1970, pp. 1919-1932.
- [22] Nethercot, D.A., and Rockey, K.C., *Finite Element Solutions for the Buckling of Columns and Beams*, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 13, 1971, pp. 945-949.
- [23] Lee, G.C., *A Survey of Literature on the Lateral Instability of Beams*, Welding Research Council Bulletin, No. 60, August, 1960.
- [24] Clark, J.W., and Hill, H.N., *Lateral Buckling of Beams*, Journal of the Structural Division. ASCE, Vol. 86, No. ST7, July, 1960, pp. 175-196.
- [25] Nethercot, D.A., and Rockey, K.C., *A Unified Approach to the Elastic Lateral Buckling of Beams*, The Structural Engineer. Vol. 49, No. 7, July, 1971, pp. 321-330.
- [26] Nethercot, D.A., *Elastic Lateral Buckling of Beams*, Chapter 1 in the book: "Beams and Beam-Columns - Stability and Strength". R. Narayanan, editor. Elsevier Applied Science Publishers, London and New York, 1983.
- [27] Anderson, J.M., and Trahair, N.S., *Stability of Monosymmetric Beams and Cantilevers*, Journal of the Structural Division. ASCE, Vol. 98, No. ST1, January, 1972, pp. 269-286.
- [28] Nethercot, D.A., *The Effective Lengths of Cantilevers as Governed by Lateral Buckling*, The Structural Engineer. Vol. 51, No. 5, May, 1973, pp. 161-168.

- [29] Poley, S., *Lateral Buckling of Cantilevered I-Beams Under Uniform Load*, Transactions of the ASCE, Vol. 121, 1956, p. 786.
- [30] Chen, W.F., and Lui, E.M., *Structural Stability-Theory and Implementation*, Elsevier Science Publishing, 1987, Chap. 5.
- [31] Ojalvo, M., and Chambers, R.S., *Effects of Warping Restraints on I-Beam Buckling*, Journal of the Structural Division. ASCE, Vol. 103, No. ST12, 1977, pp. 2351-2360.
- [32] Vacharajittiphan, P., and Trahair, N.S., *Warping and Distortion of I-Section Joints*, Journal of the Structural Division. ASCE, Vol. 100, No. ST3, 1974, pp. 547-564.
- [33] Heins, C.P., and Potocko, R.A., *Torsional Stiffening of I-Girder Webs*, Journal of the Structural Division. ASCE, Vol. 105, No. ST8, 1979, pp. 1689-1700.
- [34] Szewczak, R.M., Smith, E.A., and DeWolf, J.T., *Beams with Torsional Stiffeners*, Journal of the Structural Division. ASCE, Vol. 109, No. ST7, 1983, pp. 1635-1647.
- [35] Vacharajittiphan, P., and Trahair, N.S., *Analysis of Lateral Buckling in Plane Frames*, Journal of the Structural Division. ASCE, Vol. 101, No. ST7, 1975, pp. 1497-1516.
- [36] Nethercot, D.A., *Buckling of Laterally and Torsionally Restrained Beams*, Journal of the Engineering Mechanics Division. ASCE, Vol. 99, No. EM4, 1973, pp. 773-792.
- [37] Trahair, N.S., *Elastic Stability of Continuous Beams*, Journal of the Structural Division. ASCE, Vol. 95, No. ST6, June, 1969, pp. 1295-1312.
- [38] Trahair, N.S., *Lateral Buckling of Beams and Beam-Columns*, in "Theory of Beam-Columns", Vol. 2, W. F. Chen and T. Astuta, McGraw-Hill, New York, 1977, Chap. 3.



- [39] Trahair, N.S., *The Behaviour and Design of Steel Structures*, Chapman & Hall, London, 1977.
- [40] Hartmann, A.J., *Elastic Lateral Buckling of Continuous Beams*, Journal of the Structural Division. ASCE, Vol. 93, No. ST4, 1967, pp. 11-28.
- [41] Fukumoto, Y., and Kubo, M., *Lateral Buckling Strength of Beams with Bracing System*, (in Japanese) Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers, No. 196, December, 1971, pp. 19-28.
- [42] Unger, B., *Elastisches Kippen von beliebig gelagerten und aufgehängten Durchlaufträgern mit einfach-symmetrischem, in Trägerachse veränderlichem Querschnitt unter Verwendung einer Abwandlung des Reduktionsverfahrens als Lösungsmethode*, Der Stahlbau, Heft 5, 1969, pp. 135-142, Heft 6, 1969, pp. 181-184.
- [43] Yoshida, H., and Imoto, Y., *Inelastic Lateral Buckling of Restrained Beams*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 99, No. EM2, April, 1973, pp. 343-366.
- [44] Fukumoto, Y., and Galambos, T.V., *Inelastic Lateral-Torsional Buckling of Beam-Columns*, Journal of the Structural Division ASCE, Vol. 92, No. ST2, April, 1966, pp. 41-61.
- [45] Galambos, T.V., *Inelastic Lateral Buckling of Beams*, Journal of the Structural Division ASCE, Vol. 89, No. ST5, October, 1963, pp. 217-242.
- [46] Hartmann, A.J., *Inelastic Flexural-Torsional Buckling*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 97, No. EM4, Proc. Paper 8294, August, 1971, pp. 1103-1119.

- [47] Lay, M.G., and Galambos, T.V., *Bracing Requirements for Inelastic Steel Beams*, Journal of the Structural Division ASCE, Vol. 92, No. ST2, April, 1966, pp. 207-228.
- [48] Zuk, W., *Lateral Bracing Forces on Beams and Columns*, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 82, No. EM3, July, 1956, pp. 1032-1-16.
- [49] Lee, G.C., and Galambos, T.V., *Post-Buckling Strength of Wide-Flange Beams*, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 88, No. EM1, February, 1962, pp. 59-75.
- [50] Lawson, R.M., and Nethercot, D.A., *Lateral Stability of I-Beams Restrained by Profiled Sheeting*, The Structural Engineer, Vol. 63B, No. 1, March, 1985.
- [51] Apparao, T.V.S.R., Errera, S.J., and Fisher, G.P., *Columns Braced by Girts and a Diaphragm*, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 95, No. ST5, May, 1969, pp. 965-990.
- [52] Pincus, G., *The Performance of Columns and Beams Continuously Braced with Diaphragms*, thesis presented to Cornell University, in 1963, in partial fulfillment for the degree of Doctor of Philosophy.
- [53] Errera, S.J., Pincus, G., and Fisher, G.P., *Columns and Beams Braced by Diaphragms*, Journal of the Structural Division ASCE, Vol. 93, No. ST1, February, 1967, pp. 295-318.
- [54] Pincus, G., and Fisher, G.P., *Behaviour of Diaphragm-Braced Columns and Beams*, Journal of the Structural Division ASCE, Vol. 92, No. ST2, April, 1966, pp. 323-350.
- [55] Cheng, J.R., Yura, J.A. and Johnson, C.P., *Lateral Buckling of Coped Steel Beams*, Technical papers. Journal of Structural Engineer, Vol. 114, No. 1, January, 1988.

- [56] Darwin, D., *Steel and Composite Beams with Web Openings*, Steel Design Series No. 2, American Institute of Steel Construction, Chicago, 1990.
- [57] Thevendran, V. e Shanmugam, N. E., *Lateral Buckling of Doubly Symmetric Beams Containing Openings*, Journal of Engineering Mechanics. ASCE, Vol. 117, No. 7, July, 1991, 1427-1441.
- [58] Shen, Z., and Zhang, Q., *Nonlinear Stability Analysis of Steel Members by Finite Element Method*, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 118, No. 3, March 1992, pp. 445-461.
- [59] Lu, L.-W., Shen, S., Shen,Z., and Hu, X., *Theory of Stability of Steel Structural Members*, Chinese Architectural Industrial Publishing House, Beijing, China (in chinese), 1983.
- [60] Ding, K., and Shen, Z., *Finite Element Solution of the Elastic Plastic Lateral Buckling of Thin-Walled Members*, J. Tongji Univ., 1(14), (in chinese), 1986.
- [61] Guo, Y., and Chen, S., *Elasto-Plastic Post-Buckling Interaction Analysis of Cold-Formed Sections by Finite Strip Method*, Stability of Metal Structures, Proc. Fourth Int. Colloquium on Structural Stability, Asian Section, beijing, China, 1989.
- [62] Manual of Steel Construction, *Load and Resistance Factor Design*, 2nd ed., American Institute of Steel Construction, Chicago, 1994.
- [63] Associação Brasileira de Normas Técnicas, *Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios - NBR 8800*, Rio de Janeiro, 1986.
- [64] European Committee for Standardization - *Eurocode 3: Design of Steel Structures* - Bruxelas, 1992
- [65] Kirby, P.A. and Nethercot, D.A., *Design for Structural Stability*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1979.

- [66] Rachid, M. e Mori, D.D., *Instabilidade: Flambagem de Barras de Seção Delgada por Torção e Flexão*, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, São Carlos, 1993.
- [67] Laier, J.E. e Barreiro, J.C., *Complementos de Resistência dos Materiais*, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, São Carlos, 1983.
- [68] Palermo Jr., L., *Esforços de Flexão e Flexo-Torção em Teoria de Segunda Ordem*, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, São Carlos, Julho 1985. (Dissertação de Mestrado)
- [69] Vlasov, V.Z., *Pieces Longues en Voiles Mincees*, 10<sup>a</sup> ed. Trad. de G. Smirnoff, Paris, Eyrolles, 1962.
- [70] Tamagna, A. e Hennemann, J., *Propriedades Geométricas de Seções Abertas de Pequena Espessura*, Escola de Engenharia do Rio Grande do Sul-UFRGS, Porto Alegre, Janeiro 1983, CT-36.
- [71] Gere, J. M. e Weaver Jr., W., *Matrix Analysis of Framed Structures*, 3rd ed., Van Nostrand Reinhold, New York, 1990.
- [72] Johnston, B.G., *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*, Ed. Structural Stability Research Council, 3rd ed., John Wiley & Sons Inc., New York, 1976.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Anderson, J.M., and Trahair, N.S., *Stability of Monosymmetric Beams and Cantilevers*, Journal of the Structural Division. ASCE, Vol. 98, No. ST1, January, 1972, pp. 269-286.
- [2] Apparao, T.V.S.R., Errera, S.J., and Fisher, G.P., *Columns Braced by Girts and a Diaphragm*, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 95, No. ST5, May, 1969, pp. 965-990.
- [3] Associação Brasileira de Normas Técnicas, *Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios - NBR 8800*, Rio de Janeiro, 1986.
- [4] Austin, W.J., Yegian, S., and Tung, T.P., *Lateral Buckling of Elastically End-Restrained I-Beams*, Separate No. 673, Proceedings of the ASCE, Vol. 81, 1955.
- [5] Barsoum, R.S., and Gallagher, R.H., *Finite Element Analysis of Torsional and Torsional-Flexural Stability Problems*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 2, 1970, pp. 335-352.
- [6] Bleich, F., *Buckling Strength of Metal Structures*, Engineering Societies Monographs, McGraw-Hill, New York, 1952 (Prepared in cooperation with Column Research Council.)
- [7] Brown, P.T., and Trahair, N.S., *Finite Integral Solution of Differential Equations*, Civil Engineering Transactions. Institute of Engineers, Australia, CE10, No. 2, October, 1968, pp. 193-196.
- [8] Chen, W.F., and Atsuta, T., *Theory of Beam-Columns*, Vol. 2, "Space Behaviour and Design". McGraw-Hill, New York, 1977.
- [9] Chen, W.F., and Lui, E.M., *Structural Stability-Theory and Implementation*, Elsevier Science Publishing, 1987, Chap. 5.

- [10] Cheng, J.R., and Yura, J.A., *Lateral Buckling Tests on Coped Steel Beams*, Technical papers. Journal of Structural Engineer, Vol. 114, No. 1, January, 1988.
- [11] Cheng, J.R., Yura, J.A. and Johnson, C.P., *Lateral Buckling of Coped Steel Beams*, Technical papers. Journal of Structural Engineer, Vol. 114, No. 1, January, 1988.
- [12] Clark, J.W., and Hill, H.N., *Lateral Buckling of Beams*, Journal of the Structural Division. ASCE, Vol. 86, No. ST7, July, 1960, pp. 175-196.
- [13] Clark, J.W., and Hill, H.N., *Lateral Buckling of Beams and Girders*, Transactions ASCE, Vol. 127, No. ST7, Part II, July, 1962, 180-201.
- [14] Clark, J.W., and Jombock, J.R., *Lateral Buckling I-Beams Subjected to Unequal End Moments*, Journal of the Engineering Mechanics Division. ASCE, Vol. 83, No. EM3, July, 1957, Paper. No. 1291.
- [15] Clark, J.W., and Knoll, A.H., *Effect of Deflection on Lateral Buckling Strength*, paper to be presented at Chicago Meeting of the ASCE, February, 1958.
- [16] Darwin, D., *Steel and Composite Beams with Web Openings*, Steel Design Series No. 2, American Institute of Steel Construction, Chicago, 1990.
- [17] De Jong, H., *An Approach to More Complicated Lateral-Buckling Problems*, J. Constr. Steel Res., 16 (3), 1990, pp. 231-246.
- [18] de Vries, K., *Strength of Beams as Determined by Lateral Buckling*, Transactions ASCE, Vol. 112, 1947, p. 1245.
- [19] de Vries, K., *Discussion of Lateral Torsional Strength*, The Philosophy of Column Design, Column Research Council, 1954, p. 37.

- [20] Dibley, J.E., *Lateral Torsional Buckling of I-Sections in Grade 55 Steel*, Proc. Inst. Civil Eng., Vol. 43, August, 1969, pp. 599-627.
- [21] Ding, K., and Shen, Z., *Finite Element Solution of the Elastic Plastic Lateral Buckling of Thin-Walled Members*, J. Tongji Univ., 1(14), (in chinese), 1986.
- [22] Dougherty, B.K., *Buckling of Web Post in Perforated Beams*, Journal of the Structural Division ASCE, Vol. 107, No. ST3, March, 1981, 507-519.
- [23] Dumont, C., and Hill, H.N., *The Lateral Stability of Deep Rectangular Beams*, Technical Note 601, NACA, 1937.
- [24] Dumont, C., and Hill, H.N., *Lateral Stability of Equal Flanged Aluminum Alloy I-Beams Subjected to Pure Bending*, Technical Note 770, NACA, 1940.
- [25] Errera, S.J., Pincus, G., and Fisher, G.P., *Columns and Beams Braced by Diaphragms*, Journal of the Structural Division ASCE, Vol. 93, No. ST1, February, 1967, pp. 295-318.
- [26] European Committee for Standardization - *Eurocode 3: Design of Steel Structures* - Bruxelles, 1992
- [27] Flint, A.R., *The Stability and Strength of Slender Beams*, Engineering, Vol. 170, December, 1950, p. 545.
- [28] Flint, A.R., *The Influence of Restraints on the Stability of Beams*, Structural Engineer, Vol. 29, September, 1951, pp. 235-246.
- [29] Flint, A.R., *The Lateral Stability of Unrestrained Beams*, Engineering, Vol. 173, January, 1952, p. 65.

- [30] Fukumoto, Y., and Galambos, T.V., *Inelastic Lateral-Torsional Buckling of Beam-Columns*, Journal of the Structural Division ASCE, Vol. 92, No. ST2, April, 1966, pp. 41-61.
- [31] Fukumoto, Y., and Kubo, M., *Lateral Buckling Strength of Beams with Bracing System*, (in Japanese) Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers, No. 196, December, 1971, pp. 19-28.
- [32] Galambos, T.V., *Inelastic Lateral Buckling of Beams*, Journal of the Structural Division ASCE, Vol. 89, No. ST5, October, 1963, pp. 217-242.
- [33] Galambos, T.V., *Structural Members and Frames*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1968.
- [34] Gatewood, B., *Buckling Loads for Beams of Variable Cross Section Under Combined Loads*, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 22, 1955, p. 281.
- [35] Gellin, S., and Lee, G.C., *Finite Elements Available for the Analysis of Noncurved Thin-Walled Structures*, "Finite Elements Analysis of Thin-Walled Structures", J. W. Bull, Ed., Elsevier Applied Science, London, U.K., 1988, pp. 1-45.
- [36] Gere, J. M. e Weaver Jr., W., *Matrix Analysis of Framed Structures*, 3rd ed., Van Nostrand Reinhold, New York, 1990.
- [37] Goodier, J.N., *Flexural-Torsional Buckling of Bar of Open Section*, Bulletin No. 28, Cornell University Engineering Experiment Station, 1942.
- [38] Guo, Y., and Chen, S., *Elasto-Plastic Post-Buckling Interaction Analysis of Cold-Formed Sections by Finite Strip Method*, Stability of Metal Structures, Proc. Fourth Int. Colloquium on Structural Stability, Asian Section, Beijing, China, 1989.
- [39] Hartmann, A.J., *Elastic Lateral Buckling of Continuous Beams*, Journal of the Structural Division. ASCE, Vol. 93, No. ST4, 1967, pp. 11-28.



- [40] Hartmann, A.J., *Inelastic Flexural-Torsional Buckling*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 97, No. EM4, Proc. Paper 8294, August, 1971, pp. 1103-1119.
- [41] Hechtman, R.A., Hattrup, J.S., Styer, E.F., and Tiedermann, J.L., *Lateral Buckling of Rolled Steel Beams*, Proceedings of the ASCE, Vol. 81, 1955, Paper No. 797.
- [42] Heins, C.P., and Potocko, R.A., *Torsional Stiffening of I-Girder Webs*, Journal of the Structural Division. ASCE, Vol. 105, No. ST8, 1979, pp. 1689-1700.
- [43] Hill, H.N., *Lateral Stability of Unsymmetrical I-Beams*, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 9, 1942, p. 175.
- [44] Hill, H.N., *Lateral Buckling of Channels and Z-Beams*, Transactions of the ASCE, Vol. 119, 1954, p. 829.
- [45] Horne, M.R., *The Flexural-Torsional Buckling of Members of Symmetric I-Section under Combined Thrust and Unequal Terminal Moments*, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. Vol. 7, Part 4, 1954, pp. 410-426.
- [46] Ings, N.L., and Trahair, N.S., *Beam and Column Buckling Under Directed Loading*, Journal of the Structural Engineering ASCE, Vol. 113, No. 6, 1987, pp 1251-1263.
- [47] Johnston, B.G., *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*, Ed. Structural Stability Research Council, 3rd ed., John Wiley & Sons Inc., New York, 1976.
- [48] Kerensky, O.A., Flint, A.R., and Brown, W.C., *The Basis for Design of Beams and Plate Girders in the Revised British Standard 153*, Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part III, Vol. 5, 1956, p. 396.

- [49] Kirby, P.A. and Nethercot, D.A., *Design for Structural Stability*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1979.
- [50] Kitipornchai, S., and Trahair, N.S., *Inelastic Buckling of Simply Supported Steel I-Beams*, Journal of the Structural Division ASCE, Vol. 101, No. ST7, 1975, pp. 1333-1347.
- [51] Laier, J.E. e Barreiro, J.C., *Complementos de Resistência dos Materiais*, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, São Carlos, 1983.
- [52] Lawson, R.M., and Nethercot, D.A., *Lateral Stability of I-Beams Restrained by Profiled Sheeting*, The Structural Engineer, Vol. 63B, No. 1, March, 1985.
- [53] Lay, M.G., and Galambos, T.V., *Bracing Requirements for Inelastic Steel Beams*, Journal of the Structural Division ASCE, Vol. 92, No. ST2, April, 1966, pp. 207-228.
- [54] Lee, G.C., *A Survey of Literature on the Lateral Instability of Beams*, Welding Research Council Bulletin, No. 60, August, 1960.
- [55] Lee, G.C., *A Survey of Literature on the Lateral Stability of Beams*, Bulletin, Welding Research Council, No. 63, August, 1963, pp. 50-59.
- [56] Lee, G.C., and Galambos, T.V., *Post-Buckling Strength of Wide-Flange Beams*, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 88, No. EM1, February, 1962, pp. 59-75.
- [57] Lu, L.-W., Shen, S., Shen,Z., and Hu, X., *Theory of Stability of Steel Structural Members*, Chinese Architectural Industrial Publishing House, Beijing, China (in chinese), 1983.
- [58] Manual of Steel Construction, *Load and Resistance Factor Design*, 2nd ed., American Institute of Steel Construction, Chicago, 1994.

- [59] Massey, C., *Lateral Bracing Force of Steel I Beams*, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 88, No. EM6, December, 1962, pp. 89-113.
- [60] Massonnet, C., *Buckling of Thin-Walled Bars with Open Cross Section*, Hommage de la Faculté des Sc. Appl. University of Liège, à l'A.I.Lg. G. Thone, editor (in French), 1947, pp. 135-146.
- [61] Masur, E.F., and Milbradt, K.P., *Collapse Strength of Redundant Beams After Lateral Buckling*, Journal of the Applied Mechanics, ASME, June, 1957, p. 283.
- [62] Michell, A.G.M., *Elastic Stability of Long Beams under Transverse Forces*, Phil. Mag., Vol. 48, 1899, p. 298.
- [63] Nethercot, D.A., *The Effective Lengths of Cantilevers as Governed by Lateral Buckling*, The Structural Engineer. Vol. 51, No. 5, May, 1973, pp. 161-168.
- [64] Nethercot, D.A., *Buckling of Laterally and Torsionally Restrained Beams*, Journal of the Engineering Mechanics Division. ASCE, Vol. 99, No. EM4, 1973, pp. 773-792.
- [65] Nethercot, D.A., *Elastic Lateral Buckling of Beams*, Chapter 1 in the book: "Beams and Beam-Columns - Stability and Strength". R. Narayanan, editor. Elsevier Applied Science Publishers, London and New York, 1983.
- [66] Nethercot, D.A., and Rockey, K.C., *Finite Element Solutions for the Buckling of Columns and Beams*, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 13, 1971, pp. 945-949.
- [67] Nethercot, D.A., and Rockey, K.C., *A Unified Approach to the Elastic Lateral Buckling of Beams*, The Structural Engineer. Vol. 49, No. 7, July, 1971, pp. 321-330.

- [68] Nethercot, D.A., and Trahair, N.S., *Design of Laterally Unsupported Beams*, Chapter 3 in the book: "Beams and Beam-Columns - Stability and Strength". R. Narayanan, editor. Elsevier Applied Science Publishers, London and New York, 1983.
- [69] Nylander, H., *Torsion, Bending and Lateral Buckling of I-Beams*, Bulletin No. 22, Division of Building Statics and Structural Engineering, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 1956.
- [70] O'Connor, C., Goldsmith, P.R., and Ryall, J.T., *The Reinforcement of Slender Steel Beams to Improve Beam Buckling Strength*, Civil Eng. Trans., Austr., Vol. CE7, No. 11, April, 1965, pp 29-36.
- [71] Ojalvo, M., and Chambers, R.S., *Effects of Warping Restraints on I-Beam Buckling*, Journal of the Structural Division. ASCE, Vol. 103, No. ST12, 1977, pp. 2351-2360.
- [72] Palermo Jr., L., *Esforços de Flexão e Flexo-Torção em Teoria de Segunda Ordem*, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, São Carlos, Julho 1985. (Dissertação de Mestrado)
- [73] Pandey, M.D., and Sherbourne, A.N., *Elastic, Lateral-Torsional Stability of Beams: General Considerations*, Journal of Structural Engineering., ASCE, 116 (2), 1990, pp. 317-335.
- [74] Pettersson, O., *Combined Bending and Torsion of I-Beams of Monosymmetrical Cross Section*, Bulletin No. 10, Division of Building Statics and Structural Engineering, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 1952.
- [75] Pi, Y.L., Trahair, N.S., and Rajasekaran, S., *Energy Equation for Beam Lateral Buckling*, Journal of Structural Engineering, Vol. 118, No. 6, June, 1992, pp. 1462-1479.

- [76] Pincus, G., *The Performance of Columns and Beams Continuously Braced with Diaphragms*, thesis presented to Cornell University, in 1963, in partial fulfillment for the degree of Doctor of Philosophy.
- [77] Pincus, G., and Fisher, G.P., *Behaviour of Diaphragm-Braced Columns and Beams*, Journal of the Structural Division ASCE, Vol. 92, No. ST2, April, 1966, pp. 323-350.
- [78] Poley, S., *Lateral Buckling of Cantilevered I-Beams Under Uniform Load*, Transactions of the ASCE, Vol. 121, 1956, p. 786.
- [79] Poowannachaiikul, T., and Trahair, N.S., *Inelastic Buckling of Continuous Steel I-Beams*, Civil Engrg. Trans., Institution of Engineers, Vol. 18, No. 2, 1976, pp. 134-139.
- [80] Powell, G., and Klingner, R., *Elastic Lateral Buckling of Steel Beams*, Journal of the Structural Division. ASCE, Vol. 96, No. ST9, 1970, pp. 1919-1932.
- [81] Prandtl, L., *Kipperscheinungen*, Dissertation, Munich, 1899.
- [82] Procter, A.N., *Laterally Unsupported Beams*, Journal of Structural Engineering, Vol. 10, No. 7, July, 1932, p. 274.
- [83] Queiroz, G., *Elementos das Estruturas de Aço*, 4<sup>a</sup> ed., 1993.
- [84] Rachid, M., *Instabilidade de Barras de Seção Delgada*, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, São Carlos, 1976. (Tese de Doutorado)
- [85] Rachid, M. e Mori, D.D., *Instabilidade: Flambagem de Barras de Seção Delgada por Torção e Flexão*, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, São Carlos, 1993.

- [86] Redwood, R.G., *Design of I-Beams with Web Perforations*, Chapter 4 in the book: “Beams and Beam-Columns - Stability and Strength”. R. Narayanan, editor. Elsevier Applied Science Publishers, London and New York, 1983.
- [87] Roberts, T.M., *Instability, Geometric Non-Linearity and Collapse of Thin-Walled Beams*, Chapter 5 in the book: “Beams and Beam-Columns - Stability and Strength”. R. Narayanan, editor. Elsevier Applied Science Publishers, London and New York, 1983.
- [88] Salmon, C.G., and Johnson, J.E., *Steel Structures, Design and Behaviour*, Ed. Harper & Row, New York, 1990.
- [89] Salvadori, M.G., *Lateral Buckling of Beams of Rectangular Cross Section Under Bending and Shear*, Proceedings of the First U.S. Congress of Applied Mechanics, ASME, New York, 1951, p. 403.
- [90] Salvadori, M.G., *Lateral Buckling of I-Beams*, ASCE Transaction. Vol. 120, 1955, pp. 1165-1177.
- [91] Salvadori, M.G., *Lateral Buckling of Eccentrically Loaded I-Columns*, Transactions ASCE, Vol. 121, 1956, pp. 1163-1178.
- [92] Schmidt, L.C., *Restraints Against Elastic Lateral Buckling*, Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE, Vol. 91, No. EM6, December, 1965, pp. 1-10.
- [93] Schrader, R.K., *Discussion of Paper by G. Winter*, Transactions ASCE, Vol. 108, 1943, p.261.
- [94] Shen, Z., and Zhang, Q., *Nonlinear Stability Analysis of Steel Members by Finite Element Method*, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 118, No. 3, March 1992, pp. 445-461.

- [95] Solvey, J., *The Lateral Stability of Uniform Elastic Beams*, Aust. Aeron. Res. Comm. Rep., ACA-60, May, 1959.
- [96] Szewczak, R.M., Smith, E.A., and DeWolf, J.T., *Beams with Torsional Stiffeners*, Journal of the Structural Division. ASCE, Vol. 109, No. ST7, 1983, pp. 1635-1647.
- [97] Tamagna, A. e Hennemann, J., *Propriedades Geométricas de Seções Abertas de Pequena Espessura*, Escola de Engenharia do Rio Grande do Sul-UFRGS, Porto Alegre, Janeiro 1983, CT-36.
- [98] Taylor Jr., A.C., and Ojalvo, M., *Torsional Restraint of Lateral Buckling*, Journal of the Structural Division ASCE, Vol. 92, No. ST2, April, 1966, pp. 115-129.
- [99] Thevendran, V. e Shanmugam, N. E., *Lateral Buckling of Doubly Symmetric Beams Containing Openings*, Journal of Engineering Mechanics. ASCE, Vol. 117, No. 7, July, 1991, 1427-1441.
- [100] Timoshenko, S.P., *History of the Strength of Materials*, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [101] Timoshenko, S.P., and Gere, J.M., *Theory of Elastic Stability*, 2nd. Ed., Engineering Societies Monographs, McGraw-Hill, New York, 1961.
- [102] Trahair, N.S., *The Effective Length of Simply Supported Rolled Steel Joists*, J. Inst. Eng. Austr., Vol. 35, No. 6, June, 1963, pp. 121-125.
- [103] Trahair, N.S., *Stability of I-Beams with Elastic End Restraints*, J. Inst. Eng. Austr., Vol. 37, No. 6, June, 1965, pp. 157-168.
- [104] Trahair, N.S., *Elastic Stability of I-Beams Elements in Rigid-Jointed Structures*, J. Inst. Eng. Austr., Vol. 38, No. 7-8, July-August, 1966, pp. 171-180.

- [105] Trahair, N.S., *Elastic Stability of Propped Cantilevers*, Civil Eng. Trans., Austr., Vol. CE10, No. 1, April, 1968, pp. 94-100.
- [106] Trahair, N.S., *Interaction Buckling of Narrow Rectangular Continuous Beams*, Civil Eng. Trans., Austr., Vol. CE10, No. 2, October, 1968, pp. 167-172.
- [107] Trahair, N.S., *Elastic Stability of Continuous Beams*, Journal of the Structural Division. ASCE, Vol. 95, No. ST6, June, 1969, pp. 1295-1312.
- [108] Trahair, N.S., *Lateral Buckling of Beams and Beam-Columns*, in “Theory of Beam-Columns”, Vol. 2, W. F. Chen and T. Astuta, McGraw-Hill, New York, 1977, Chap. 3.
- [109] Trahair, N.S., *The Behaviour and Design of Steel Structures*, Chapman & Hall, London, 1977.
- [110] Trahair, N.S., *Inelastic Lateral Buckling of Beams*, Chapter 2 in the book: “Beams and Beam-Columns - Stability and Strength”. R. Narayanan, editor. Elsevier Applied Science Publishers, London and New York, 1983.
- [111] Unger, B., *Elastisches Kippen von beliebig gelagerten und aufgehängten Durchlaufträgern mit einfach-symmetrischem, in Trägerachse veränderlichem Querschnitt unter Verwendung einer Abwandlung des Reduktionsverfahrens als Lösungsmethode*, Der Stahlbau, Heft 5, 1969, pp. 135-142, Heft 6, 1969, pp. 181-184.
- [112] Vacharajittiphan, P., and Trahair, N.S., *Warping and Distortion of I-Section Joints*, Journal of the Structural Division. ASCE, Vol. 100, No. ST3, 1974, pp. 547-564.
- [113] Vacharajittiphan, P., and Trahair, N.S., *Analysis of Lateral Buckling in Plane Frames*, Journal of the Structural Division. ASCE, Vol. 101, No. ST7, 1975, pp. 1497-1516.



- [114] Vlasov, V.Z., *Thin-Walled Elastic Beams*, 2nd. Ed., Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem, Israel, 1961.
- [115] Vlasov, V.Z., *Pieces Longues en Voiles Minces*, 10<sup>a</sup> ed. Trad. de G. Smirnoff, Paris, Eyrolles, 1962.
- [116] Winter, G., *Lateral Stability of Unsymmetrical I-Beams and Trusses in Bending*, Transactions ASCE, Vol. 108, 1943, p. 247.
- [117] Winter, G., *Strength of Slender Beams*, Transactions, ASCE, Vol. 109, 1944, pp. 1165-1182.
- [118] Woolcock, S.T., and Trahair, N.S., *Post-Buckling Behaviour of Determinated 5Beams*, J. Engrg. Mech. Div., ASCE, Vol. 100, No. 2, 1974, pp. 151-171.
- [119] Yoshida, H., and Imoto, Y., *Inelastic Lateral Buckling of Restrained Beams*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 99, No. EM2, April, 1973, pp. 343-366.
- [120] Zuk, W., *Lateral Bracing Forces on Beams and Columns*, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 82, No. EM3, July, 1956, pp. 1032-1-16.