

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**UMA FERRAMENTA 3D, VIA WEB, PARA
DIMENSIONAMENTO DE SEÇÕES RETANGULARES DE
CONCRETO ARMADO COM ESBOÇO DA ARMADURA**

AUTOR: ROGÉRIO PEDROSA SALES

ORIENTADOR: PROF. DR. JOSÉ MÁRCIO FONSECA CALIXTO

2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**"UMA FERRAMENTA 3D, VIA WEB, PARA DIMENSIONAMENTO
DE SEÇÕES RETANGULARES DE CONCRETO ARMADO COM
ESBOÇO DA ARMADURA"**

Rogério Pedrosa Sales

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. José Marcio Fonseca Calixto
DEES - UFMG - (Orientador)

Prof. Dr. Sebastião Salvador Real Pereira
DEES - UFMG

Prof. Dr. Giuseppe Barbosa Guimarães
PUC - RJ

Belo Horizonte, 28 de abril de 2010

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dr. José Calixto pelos ensinamentos, orientação e apoio, ao Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG que contribuiu para o aprimoramento do meu aprendizado e aos professores do Curso que contribuíram com seus comentários e sugestões para aprimoramento do mesmo.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	1
1.1	Justificativa.....	2
1.2	Objetivo.....	2
1.3	Estrutura da Dissertação.....	3
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
2.1	Linguagens de Programação	5
2.1.1	HTML – Hypertext Mark-up Language.....	5
2.1.2	Java.....	6
2.1.3	Java 3D.....	7
2.2	Ferramentas existentes, via <i>web</i> , para ensino e aprendizagem de concreto armado.....	7
3	METODOLOGIA	11
3.1	Hipóteses de Cálculo.....	12
3.2	Flexão normal simples de seções retangulares.....	14
3.2.1	Procedimento de dimensionamento – Critérios da NBR 6118 (2007)	14
3.2.2	Prescrições da NBR 6118 (2003).....	24
3.3	Flexão normal composta de seções retangulares.....	27
3.3.1	Procedimento de dimensionamento – Armaduras assimétricas	27
3.3.2	Procedimento de dimensionamento – Armaduras simétricas.....	39
3.3.3	Prescrições complementares da NBR 6118.....	48
3.4	Cisalhamento de seções retangulares	50
3.4.1	Tensões de Cisalhamento	50
3.4.2	Hipóteses Básicas	52

3.4.3	Prescrições gerais da NBR 6118 (2007).....	53
3.4.4	Verificação do estado limite último	55
3.4.5	Prescrições complementares da NBR 6118.....	64
4	APRESENTAÇÃO DOS PROGRAMAS.....	65
4.1	Introdução.....	65
4.2	Programa para Dimensionamento de Seções Retangulares Solicitadas à Flexão Normal Simples	66
4.3	Programa para Dimensionamento de Seções Retangulares Solicitadas à Flexão Normal Composta.....	73
4.4	Programa para Dimensionamento de Seções Retangulares Solicitadas ao Cisalhamento	80
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	85
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	87

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 - <i>Applet</i> para o dimensionamento de seções retangulares em concreto armado sujeitas à flexão normal simples (VERZENHASSI et al. 2004)	8
FIGURA 2.2 - <i>Applet</i> para dimensionamento de seções de concreto armado solicitadas à flexão normal composta (VERZENHASSI, 2005).	9
FIGURA 2.3 – <i>Applet</i> para o dimensionamento de vigas sujeitas ao Cisalhamento (ASSIS e BITTENCOURT, 2003)	10
FIGURA 3.1 – Domínios de estado limite último de uma seção transversal	12
FIGURA 3.2 – Diagrama parábola-retângulo da distribuição de tensões na seção de concreto.....	13
FIGURA 3.3 – Diagrama tensão-deformação para aços de armadura passiva.....	14
FIGURA 3.4 – Seção retangular à flexão normal simples	14
FIGURA 3.5 - Diagrama de deformação na armadura dupla	20
FIGURA 3.6 – Dimensionamento à flexão normal simples em seções retangulares	23
FIGURA 3.7 - Distribuição transversal das armaduras longitudinais	26
FIGURA 3.8 – Seção retangular de concreto armado	27
FIGURA 3.9 – Diagrama de deformações e equilíbrio de forças na seção de concreto (primeiro caso)	29
FIGURA 3.10 - Diagrama de deformações e equilíbrio de forças na seção de concreto (segundo caso).....	32
FIGURA 3.11 - Diagrama de deformações e equilíbrio de forças na seção de concreto (terceiro caso).....	34
FIGURA 3.12 – Seção retangular de concreto armado com armadura distribuída (terceiro caso)	36
FIGURA 3.13 - Diagrama de deformações e equilíbrio de forças na seção de concreto (quarto caso).....	37
FIGURA 3.14 – Seção retangular de concreto armado com armadura distribuída (quarto caso)	38

FIGURA 3.15 – Algoritmo computacional para dimensionamento de seções retangulares de concreto com armadura simétrica sujeitas a esforços de flexão normal composta (Parte 1/7).....	41
FIGURA 3.16 – Algoritmo computacional para dimensionamento de seções retangulares de concreto com armadura simétrica sujeitas a esforços de flexão normal composta (Parte 2/7).....	42
FIGURA 3.17 – Algoritmo computacional para dimensionamento de seções retangulares de concreto com armadura simétrica sujeitas a esforços de flexão normal composta (Parte 3/7).....	43
FIGURA 3.18 – Algoritmo computacional para dimensionamento de seções retangulares de concreto com armadura simétrica sujeitas a esforços de flexão normal composta (Parte 4/7).....	44
FIGURA 3.19 – Algoritmo computacional para dimensionamento de seções retangulares de concreto com armadura simétrica sujeitas a esforços de flexão normal composta (Parte 5/7).....	45
FIGURA 3.20 – Algoritmo computacional para dimensionamento de seções retangulares de concreto com armadura simétrica sujeitas a esforços de flexão normal composta (Parte 6/7).....	46
FIGURA 3.21 – Algoritmo computacional para dimensionamento de seções retangulares de concreto com armadura simétrica sujeitas a esforços de flexão normal composta (Parte 7/7).....	47
FIGURA 3.22 - Grampo	49
FIGURA 3.23 - Viga de seção retangular submetida à flexão normal simples (estádio I).....	50
FIGURA 3.24 – Viga-parede isostática.....	52
FIGURA 3.25 – Consolo curto	52
FIGURA 3.26 - Modelo de funcionamento de viga como treliça	53
FIGURA 3.27 - Diagonal comprimida do concreto	57
FIGURA 3.28 - Diagonal tracionada da armadura transversal.....	60
FIGURA 3.29 - Valores de τ_{cl}	63
FIGURA 4.1 - <i>Applet</i> para o dimensionamento de seções retangulares em concreto armado solicitadas à flexão normal simples	67

FIGURA 4.2 – Exemplo de dimensionamento de uma seção solicitada à flexão normal simples.....	69
FIGURA 4.3 – Apresentação do detalhamento da seção da viga em 3D.....	70
FIGURA 4.4 - Apresentação do detalhamento da viga após alteração do valor da altura útil (d).....	71
FIGURA 4.5 - Apresentação do detalhamento da viga rotacionada em 3D.....	72
FIGURA 4.6 - Apresentação do detalhamento de uma seção de uma viga solicitada por momento fletor negativo.....	73
FIGURA 4.7 - <i>Applet</i> para o dimensionamento de seções retangulares em concreto solicitadas à flexão normal composta.....	74
FIGURA 4.8 - Exemplo de dimensionamento de uma seção retangular solicitada à flexão normal composta com armadura não-simétrica.....	76
FIGURA 4.9 - Apresentação do detalhamento da viga em 3D.....	77
FIGURA 4.10 - Exemplo de dimensionamento de uma viga solicitada à flexão normal composta com armadura simétrica.....	78
FIGURA 4.11 - Apresentação do detalhamento do pilar com armadura simétrica em 3D.....	79
FIGURA 4.12 - Apresentação do detalhamento do pilar após alteração do valor da altura útil (d).....	80
FIGURA 4.13 - <i>Applet</i> para o dimensionamento ao cisalhamento de seções retangulares em concreto armado.....	81
FIGURA 4.14 - Exemplo de dimensionamento ao cisalhamento de uma seção retangular em concreto armado.....	83
FIGURA 4.15 - Apresentação do detalhamento da viga em 3D.....	84

LISTA DE TABELAS

TABELA 3.1 - Valores de K_L sem a consideração da ductilidade.....	18
TABELA 3.2 - Valores finais de K_L , com a consideração da ductilidade.....	19
TABELA 3.3 - Valores das relações entre d e d' , para se ter $\phi = 1$ (nível de tensão em A's)	21
TABELA 3.4 - Taxas mínimas de armadura de flexão para vigas	24
TABELA 3.5 – Valores máximos de k_L para assegurar ductilidade.....	31
TABELA 3.6 – Valores de $\rho_{w,\min}$	54
TABELA 3.7 – Valores de τ_{wd2} (Modelo I).....	56
TABELA 3.8 – Valores de τ_{c0}	59
TABELA 3.9 – Valores de $\tau_{wd,\min}$ para o Modelo I.....	61
TABELA 3.10 – Valores de τ_{wd2} (Modelo II)	62

RESUMO

Com o desenvolvimento tecnológico, a utilização de computadores no setor educacional se expandiu e, com ela, vários sistemas foram criados para as diferentes áreas de conhecimento. Nas disciplinas da área de engenharia de estruturas isto não é diferente: muitos professores disponibilizam para seus alunos programas de computadores que realizam os cálculos necessários. Porém, estes são sistemas comerciais destinados ao profissional da área e não ao aprendiz. Neste sentido e também com a finalidade de auxiliar o ensino das disciplinas de concreto armado, esta dissertação apresenta ferramentas computacionais, com acesso pela Internet, para o dimensionamento e esboço do detalhamento de seções retangulares de concreto armado solicitadas à flexão normal simples, à flexão normal composta e ao cisalhamento. No dimensionamento adotaram-se os critérios e prescrições da NBR 6118 (2007). Em todos os casos, o esboço do detalhamento utiliza uma ferramenta dinâmica em 3D que permite aos usuários visualizar a seção dimensionada de diferentes ângulos.

Palavras-chave: Ensino de engenharia, concreto armado, ensino a distância, web.

ABSTRACT

The technological development has expanded the use of computers in education worldwide. In structural engineering courses it is no different: many professors provide their students computer programs which help them do the necessary calculations to solve problems. However, these programs are designed for professional engineers and not students. In this scenario and also to assist professors teach reinforced concrete courses, this dissertation presents computational tools, accessed at Internet, for designing and detailing rectangular reinforced concrete sections subjected to bending, combined flexure and axial forces and shear. NBR 6118 (2007) criteria are employed herein. A dynamic 3D tool is used in the detailing scheme which allows students view the designed concrete sections from different angles.

Keywords: Engineering education, reinforced concrete design, e-learning, web.

1

INTRODUÇÃO

Nas disciplinas de Concreto Armado pertencentes aos currículos dos cursos de Engenharia Civil, os professores freqüentemente se deparam com problemas no aprendizado dos alunos. Estes problemas estão relacionados à falta de motivação, ao ingresso do aluno com deficiências nos conhecimentos básicos e à dificuldade de visualização dos processos e resultados. Muitas são as dificuldades para demonstrar, por exemplo, o comportamento de uma estrutura de concreto sujeita a alguma solicitação.

Em geral, o conteúdo das disciplinas de Concreto Armado é abordado com a apresentação sistemática de conceitos e cálculos que demandam a absorção de uma grande quantidade de informações por parte dos alunos bem como a visualização de efeitos e fenômenos a que são submetidas as estruturas de concreto. Destaca-se, portanto, a importância do desenvolvimento de novos mecanismos para auxiliar a prática docente destas disciplinas com a finalidade de minimizar os problemas citados.

Para ministrar as disciplinas da área de engenharia de estruturas, alguns professores disponibilizam para os alunos programas para computadores e calculadoras que realizam os cálculos necessários. Porém, estes são sistemas comerciais destinados ao

profissional da área e não ao aprendiz. O resultado dos cálculos é apresentado por esses programas sob a forma de tabelas com grande quantidade de números a serem analisados. Logo, os alunos são treinados a analisar os resultados sem os relacionar ao comportamento físico da estrutura, não sendo capazes de desenvolver a habilidade de síntese, essencial para o profissional atuante na área de engenharia.

1.1 Justificativa

Com o desenvolvimento tecnológico, a utilização dos computadores no setor educacional se expandiu e, com ela, a criação de sistemas para as diferentes áreas de conhecimento. O desenvolvimento de sistemas educacionais se distingue das outras aplicações por possuírem algumas peculiaridades que devem ser consideradas durante o seu desenvolvimento sendo, a principal delas, os aspectos pedagógicos que, por possuírem um alto grau de subjetividade intrínseco ao processo de ensino-aprendizagem, às vezes tornam complicado o seu mapeamento digital (ALMEIDA, 2004).

Diante destas dificuldades é importante que se faça uma revisão na metodologia de ensino das disciplinas da área de estruturas com a finalidade de proporcionar formas alternativas para a construção do saber. Com a finalidade de oferecer subsídios de auxílio ao professor das disciplinas de concreto armado, este trabalho propõe o planejamento, desenvolvimento e implantação de um ambiente de ensino-aprendizagem que será disponibilizado para a *web*.

1.2 Objetivo

O objetivo desta dissertação é a implementação de uma ferramenta, via *web*, para o dimensionamento e o esboço tridimensional de seções retangulares em concreto armado. Esta ferramenta deverá ser funcional para o ensino e a aprendizagem de dimensionamento de estruturas de concreto armado.

Para o correto esboço deste detalhamento de estruturas de concreto armado, os seguintes aspectos serão considerados:

- Barras longitudinais para os esforços de flexão e de tração/compressão;
- Barras transversais para os esforços cisalhantes;
- A correta proporção entre as dimensões do elemento estrutural e das barras de aço definidas pelo usuário;
- Prescrições da Norma NBR-6118/2003 em relação ao detalhamento de elementos lineares (capítulo 18 desta norma).

Para o desenvolvimento deste trabalho, é importante a consideração de aspectos relacionados à ergonomia computacional de modo a garantir uma boa interação entre o usuário e o sistema.

1.3 Estrutura da Dissertação

A dissertação está dividida em cinco capítulos. Este primeiro capítulo apresenta uma introdução referente ao uso de ferramentas computacionais para o auxílio do ensino/aprendizado, englobando ainda a justificativa e objetivo do trabalho.

O capítulo 2 apresenta os recursos computacionais utilizados para o desenvolvimento das ferramentas para o dimensionamento e esboço do detalhamento de seções de concreto armado. Ainda nesse capítulo são apresentadas ferramentas existentes, via *web*, para ensino e aprendizagem de concreto armado.

O capítulo 3 aborda a metodologia de cálculo para o dimensionamento de peças de concreto armado submetidas aos esforços de flexão normal simples, flexão normal composta e cisalhamento, todas elas obedecendo às prescrições da Norma NBR 6118 (2003).

No capítulo 4 encontra-se a descrição dos três programas computacionais desenvolvidos neste trabalho, com acesso via *web*, para o dimensionamento e esboço do detalhamento das seções de concreto armado. O primeiro deles refere-se a peças solicitadas à flexão

normal simples, o segundo para solicitações de flexo-compressão e, por último, para o cisalhamento.

Por fim, o capítulo 5 apresenta as considerações finais e sugestões para trabalhos futuros.

2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Linguagens de Programação

Para o desenvolvimento da ferramenta computacional para visualização 3D será necessária a utilização de alguns recursos e ferramentas tecnológicas que suportem desenvolvimento para *web*. As linguagens de programação escolhidas para a implementação das páginas e dos módulos (*applets* e módulos de computação gráfica) serão HTML, Java e Java3D. Neste subitem, são descritas sucintamente cada uma destas ferramentas a serem utilizadas.

2.1.1 HTML – Hypertext Mark-up Language

A HTML (HyperText Markup Language, que significa Linguagem de Marcação de Hipertexto) é uma linguagem de marcação utilizada para produzir páginas na *web*. Uma linguagem de marcação é um conjunto de códigos aplicados a um texto ou a dados com o fim de adicionar informações particulares sobre esse texto ou dado ou sobre trechos específicos. Documentos HTML podem ser interpretados por navegadores ou *browsers*, como o *Microsoft Internet Explorer* ou o *Fire Fox*.

2.1.2 Java

A linguagem Java começou a ganhar reconhecimento em 1995 quando seus recursos para implementação de páginas *web* foram apresentados ao público. Agora aplicações poderiam ser executadas dentro dos *browsers* nos *applets Java* e tudo seria disponibilizado pela Internet instantaneamente. Foi o estático HTML dos *browsers* que promoveu a rápida disseminação da dinâmica tecnologia Java. Em pouco tempo o número de usuários cresceu rapidamente e grandes fornecedores de tecnologia anunciaram suporte para a tecnologia Java. Hoje é uma referência no mercado de desenvolvimento de software. Java tornou-se popular pelo seu uso na Internet e hoje possui seu ambiente de execução presente em *web browsers*, *mainframes*, *SOs*, celulares, *palmtops*, entre outros.

Algumas vantagens da linguagem Java podem ser citadas:

- Programação orientada a objeto;
- Sintaxe similar a Linguagem C/C++ e, principalmente, a C#;
- Recursos de Rede - possui extensa biblioteca de rotinas que facilitam a cooperação com protocolos TCP/IP, como HTTP e FTP;
- Segurança - pode executar programas via rede com restrições de execução;
- Portabilidade - Independência de plataforma - "*write once, run anywhere*".

Diferentemente das linguagens convencionais, que são compiladas para código nativo, a linguagem Java é compilada para um *bytecode* que é executado por uma máquina virtual (JVM - *Java Virtual Machine*). Essa implementação, no entanto, tem algumas limitações intrínsecas. A pré-compilação exige tempo, o que faz com que programas Java demorem um tempo significativamente maior para começarem a funcionar. Soma-se a isso o tempo de carregamento da máquina virtual. Isso não é um grande problema para programas que rodam em servidores e que deveriam ser inicializados apenas uma vez. Muitas pessoas acreditam que por causa desse processo, o código interpretado Java tem baixo desempenho, mas isso não é verdade. Novos avanços têm tornado o compilador dinâmico (JVM), em muitos casos, mais eficiente que o compilador estático.

A linguagem Java permite a implementação de programas que podem ser executados em páginas *web*, denominados *applets*. Os *applets* são anexados em uma página *web* através de instruções em HTML.

2.1.3 Java 3D

Um dos métodos para apresentar modelos de visualização em 3D via *web* é a utilização das bibliotecas Java3D. Java 3D é uma API (*Application Programming Interface*, ou Interface de Programação de Aplicativos) 2D e 3D para a linguagem Java baseada em grafos de cena. Ela foi construída tendo como base o OpenGL, com a diferença de que a estrutura de grafo de cena traz às aplicações o paradigma da programação orientada a objetos, como o polimorfismo, para a criação de aplicações em ambientes tridimensionais.

O grafo de cena é estruturado como uma árvore contendo vários elementos que ditam o modo como a cena será construída e exibida, além de comportamentos que poderão ser observados ao longo do tempo, como animações, respostas a interação do usuário, e colisões dentre outros.

Tendo em vista as facilidades atuais torna-se bastante viável a utilização destes recursos para a educação em engenharia. Estes recursos gráficos podem ser de grande ajuda para as disciplinas de concreto armado dos cursos de engenharia civil e arquitetura, pois oferecem maior flexibilidade em visualização de dados e motivação para o aprendizado.

2.2 Ferramentas existentes, via *web*, para ensino e aprendizagem de concreto armado

Mediante tantos atributos vantajosos da Internet como ferramenta de auxílio na relação ensino/aprendizagem, as universidades e escolas se propuseram a oferecer aos estudantes possibilidades de navegar pela Internet através de uma variedade de recursos tais como suportes hipermídia com acesso *on-line* a bancos de dados e sistemas de simulação.

Nesse sentido, diversos trabalhos e estudos foram feitos ou vêm sendo desenvolvidos. Iniciado a partir de coordenação da PUC-Rio e com a colaboração de diversas universidades (UFAL, UFMG, UFPR e USP), o Projeto e-Tools visa o desenvolvimento de objetos educacionais para uma rede de ensino e aprendizagem em engenharia de estruturas. Esses objetos são elementos de uma nova metodologia de ensino e aprendizagem baseada no uso do computador e da Internet. A FIGURA 2.1 apresenta um *applet* com um objeto educacional para o dimensionamento de seções retangulares de concreto armado solicitadas à flexão normal simples, elaborado por VERZENHASSI *et al.* (2004) sob a orientação do Prof. Sérgio Scheer. A FIGURA 2.2 ilustra um *applet* para o dimensionamento de seções de concreto armado solicitadas à flexão normal (VERZENHASSI, 2005).

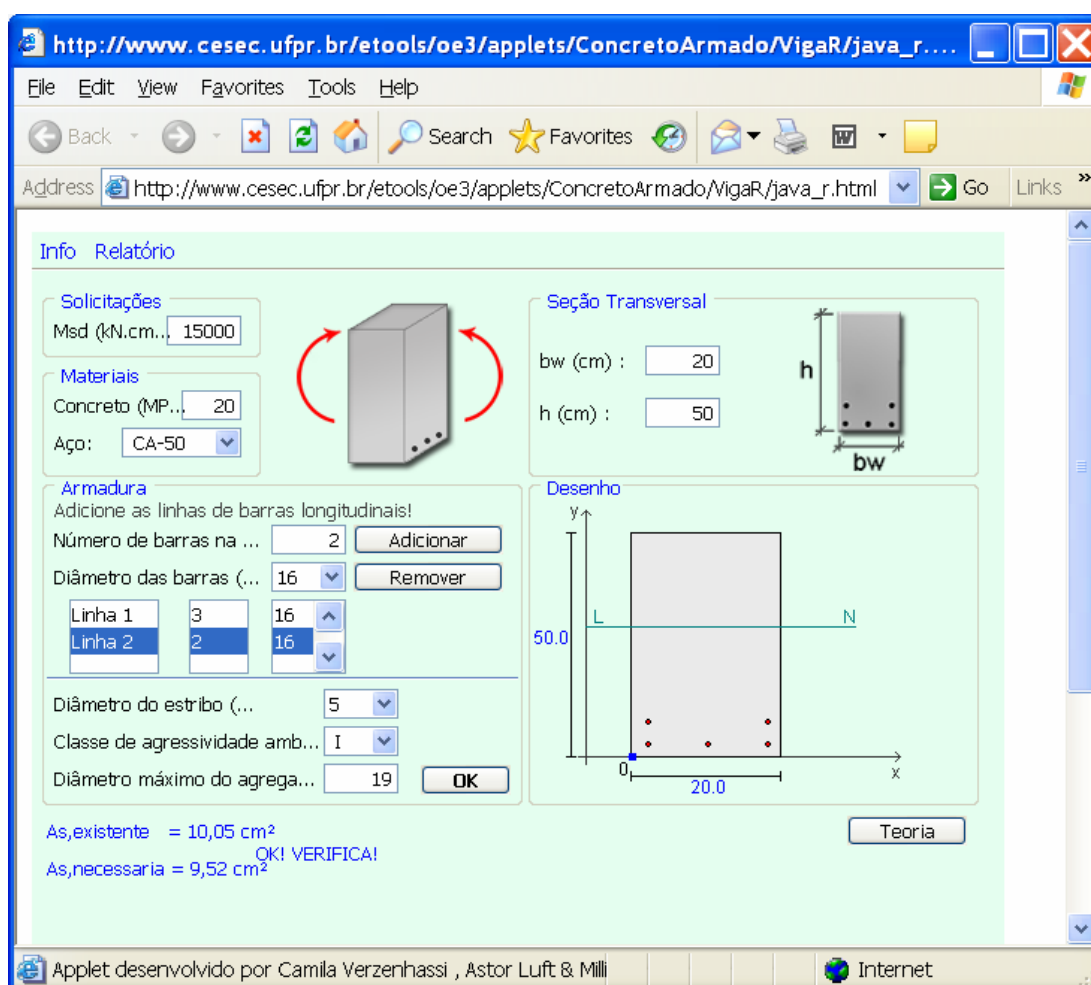


FIGURA 2.1 - *Applet* para o dimensionamento de seções retangulares em concreto armado sujeitas à flexão normal simples (VERZENHASSI *et al.* 2004)

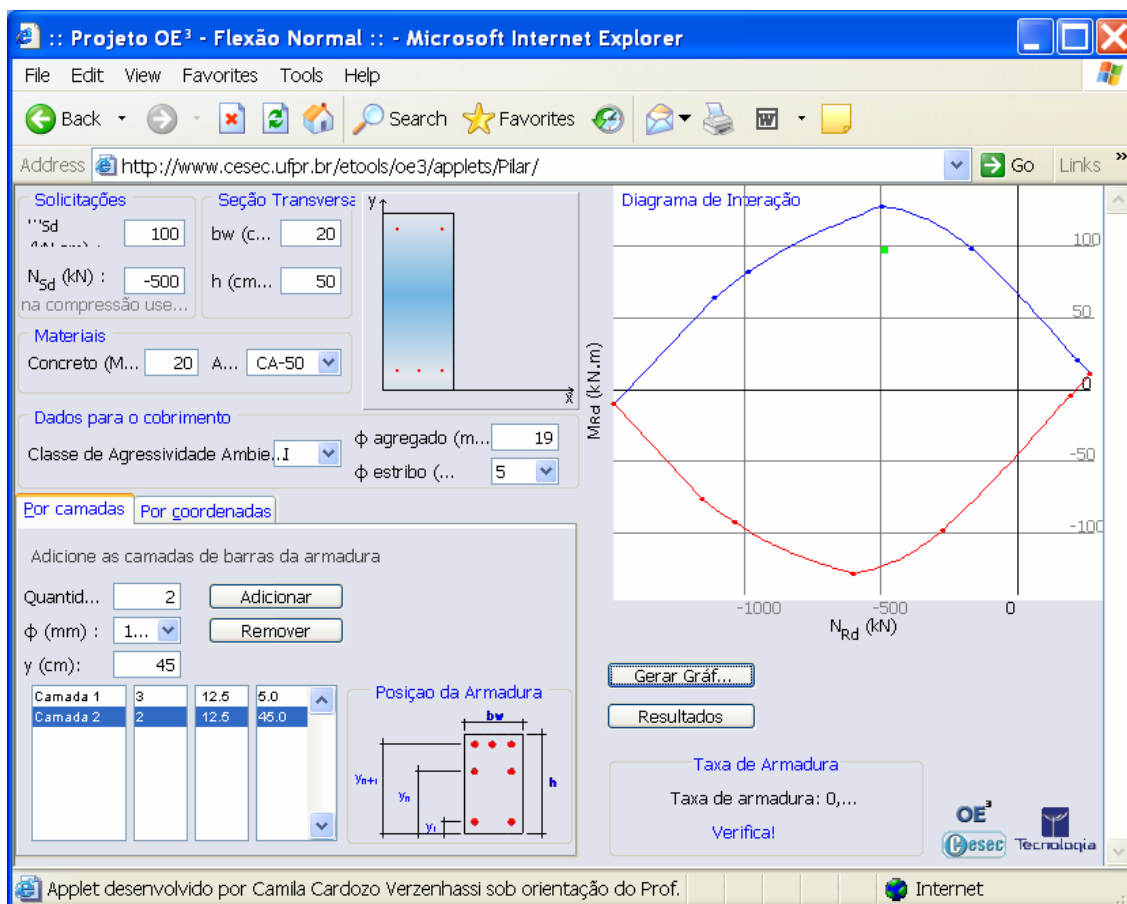


FIGURA 2.2 - *Applet* para dimensionamento de seções de concreto armado solicitadas à flexão normal composta (VERZENHASSI, 2005).

ASSIS e BITTENCOURT (2002) desenvolveram diversos hipertextos, animações e *applets* para serem disponibilizados na Internet e também em CD-ROM enfocando tópicos selecionados das disciplinas Concreto Armado e Protendido, voltados ao ensino de alunos de graduação. Segundo Assis, o uso de recursos multimídia no ensino de disciplinas da Engenharia de Estruturas tem trazido benefícios aos alunos, ao ajudá-los a visualizar várias situações teóricas importantes e fomentar a capacidade de procurar informações e transformá-las em conhecimento. A FIGURA 2.3 ilustra um *applet* para o dimensionamento de vigas solicitadas ao cisalhamento.

http://www.lmc.ep.usp.br/pesquisas/TecEdu/java/cis/Cisalhamento.htm - Windows Internet Explorer

http://www.lmc.ep.usp.br/pesquisas/TecEdu/java/cis/Cisalhamento.htm

Dimensionamento: Cisalhamento

Carregamentos

$V_k = 70.0$ kN $T_k = 6.0$ kN.m
 $\gamma_f = 1.4$

Geometria (cm)

$b = 20.0$
 $h = 30.0$
 $d = 27.0$ $0.9 h$
 $c_1 = 3.0$ $0.1 h$

Concreto (MPa)

$f_{ck} = 25.0$ $\gamma_c = 1.4$
 $f_{ctk} = 1.795$ $0.21 f_{ck}^{2/3}$

Aço

CA-25 CA-50 CA-60
 $\gamma_s = 1.15$

Escolha o Modelo de Cálculo

Modelo de Cálculo 1 Modelo de Cálculo 2
 $\theta = 45.0$ Graus

Força cortante e Momento Torçor

Vista Lateral: $V_d = 98.0$ kN, $\sigma_c = 0.82$ kN/cm²

Vista Superior: $T_d = 8.40$ kN.m, $\sigma_c = 0.42$ kN/cm²

$h_e = 6.00$ cm ; $u = 76.00$ cm
 $A_{s1} = 2.18$ cm²
 $\frac{V_d + T_d}{V_{Rd2} T_{Rd2}} = \frac{98.0 + 8.4}{234.3 + 16.2} = 0.94 \leq 1$
 $\rho_{sw} = 0.411 > \rho_{sw,min} = 0.103$
 $A_{90}/s = 2.67 + 2.87 = 5.55$ cm²/m (cortante e torção - 1 ramo)

$\sigma_c > 0.67 \sigma_{c,max} \therefore s_{max} = 0.3 d = 8.1$ cm
 $s_{max} \leq 20$ cm OK!
 $s_{min} = 4$ cm = $3 (\varnothing \text{ vibrador}) + 1$ (folga)
 $\varnothing_{t,max} = 0.1 b = 20.0$ mm
 $\varnothing_{t,min} = 5$ mm

\varnothing_t (mm)	A_{s1} (cm ²)	A_{90} (cm ²)	s (cm)
5.0	0.2	0.2	5
6.3	0.315	0.315	8

Autoria: Túlio N. Bittencourt e Wayne S. Assis Desenvolvimento: William M. Fujinohara Copyright © 2003 - EPUISD - Todos os direitos reservados.

Done Internet | Protected Mode: Off 100%

FIGURA 2.3 – *Applet* para o dimensionamento de vigas sujeitas ao Cisalhamento (ASSIS e BITTENCOURT, 2003)

Atualmente já existem diversos objetos educacionais voltados ao ensino de engenharia de estruturas. No entanto, a visualização das peças estruturais como vigas e pilares ainda está restrita a imagens em duas dimensões apresentadas de modo estático na maioria das vezes.

3

METODOLOGIA

Neste trabalho foram adotados os métodos de cálculo para o dimensionamento de peças estruturais em concreto armado obedecendo às prescrições da Norma NBR 6118 (2003).

Dentre os esforços solicitantes, o momento fletor é, em condições normais, o esforço preponderante no dimensionamento de peças estruturais como lajes e vigas. Normalmente o momento fletor atua em conjunto com a força cortante. Neste capítulo são apresentadas as metodologias para o dimensionamento de seções de concreto armado submetidas à flexão normal simples, flexão normal composta e ao cisalhamento, assim como as prescrições normativas referentes ao detalhamento e às disposições construtivas para cada caso.

- A distribuição das tensões do concreto na seção se faz de acordo com o diagrama parábola-retângulo da FIGURA 3.2. Permite-se a substituição desse diagrama pelo retângulo de altura $0,8x$, com a seguinte tensão:

- I. $\frac{0,85 \cdot f_{ck}}{\gamma_c}$, no caso da largura da seção, medida paralelamente à linha neutra, não diminuir a partir desta para a borda comprimida;
- II. $\frac{0,80 \cdot f_{ck}}{\gamma_c}$, caso contrário.

A resistência à tração do concreto é desprezada.

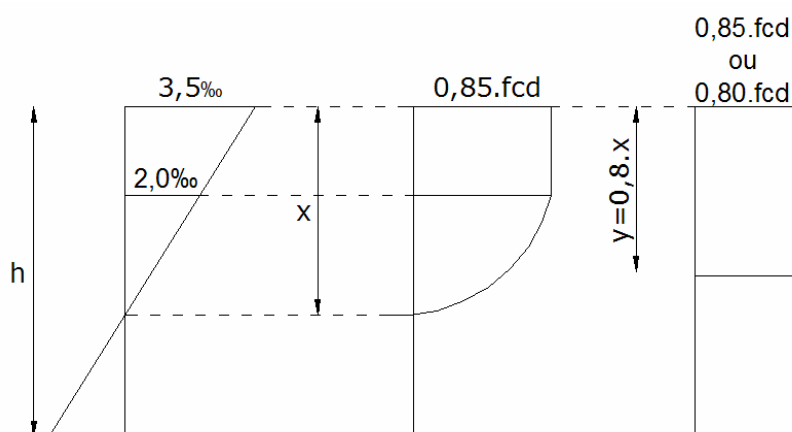


FIGURA 3.2 – Diagrama parábola-retângulo da distribuição de tensões na seção de concreto

- A tensão na armadura é a correspondente à deformação determinada de acordo com as alíneas anteriores e obtida na diagrama tensão–deformação correspondente à classe do aço (FIGURA 3.3).

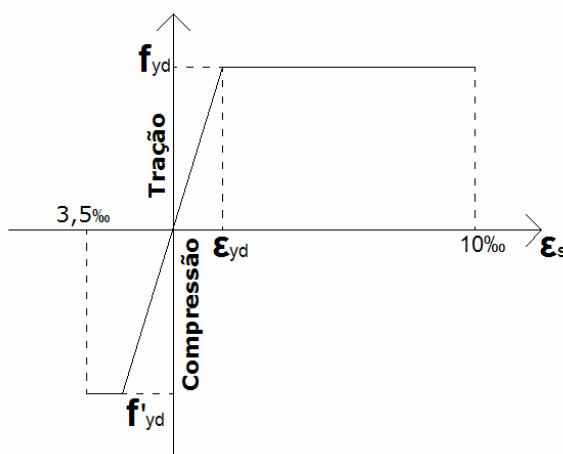


FIGURA 3.3 – Diagrama tensão-deformação para aços de armadura passiva

3.2 Flexão normal simples de seções retangulares

3.2.1 Procedimento de dimensionamento – Critérios da NBR 6118 (2007)

Segundo Tepedino (apud SILVA 2005), “no caso da seção retangular, pode-se, sem erro considerável e obtendo-se grande simplificação, adotar, para os domínios 2 e 3 (seção subarmada ou normalmente armada), o diagrama retangular para as tensões no concreto”, representado na FIGURA 3.4.

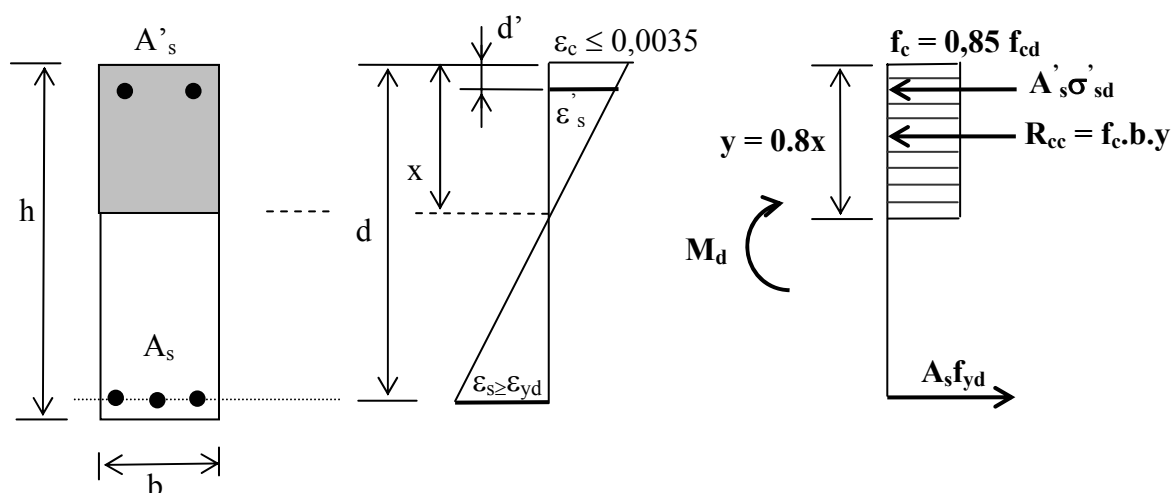


FIGURA 3.4 – Seção retangular à flexão normal simples

Para que a tensão σ_{sd} na armadura tracionada seja igual a f_{yd} , é necessário e suficiente que a profundidade relativa da linha neutra (x/d) seja menor ou igual à profundidade relativa limite do domínio 3, dada por:

$$\xi_{3,lim} = \left(\frac{x}{d} \right)_{3,lim} = \frac{0,035}{\varepsilon_{yd} + 0,035} \quad (3.1)$$

com ε_{yd} , deformação de cálculo ao escoamento da armadura, dada por $\varepsilon_{yd} = f_{yd} / E_s$.

De acordo com a FIGURA 3.4 pode-se escrever as seguintes equações de equilíbrio:

$$\sum M_{As} = 0 \Rightarrow M_d = R_{cc} \cdot (d - y/2) + A'_s \cdot \sigma'_{sd} \cdot (d - d') \quad (3.2)$$

$$\sum F_h = 0 \Rightarrow N_d = 0 = R_{cc} + A'_s \cdot \sigma'_{sd} - A_s \cdot f_{yd} \quad (3.3)$$

Ao dividir todos os termos da equação (3.2), de equilíbrio em termos de momentos, por uma quantidade que tem a mesma dimensão de um momento, como o termo $f_c \cdot b \cdot d^2$, obtém-se uma equação de equilíbrio em termos adimensionais, que depois de substituído o valor de $R_{cc} = f_c \cdot b \cdot y$ e cancelados os valores iguais no numerador e denominador fica:

$$K = K' + \frac{A'_s \sigma'_{sd}}{f_c b d} \left(1 - \frac{d'}{d} \right) \quad (3.4)$$

com

$$K = \frac{M_d}{f_c b d^2} \quad (3.5)$$

$$K' = \frac{f_c b y \left(d - \frac{y}{2} \right)}{f_c b d^2} = \frac{y}{d} \left(1 - \frac{y}{2d} \right) = \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (3.6)$$

Nestas expressões K é o parâmetro adimensional que mede a intensidade do momento fletor solicitante (externo) de cálculo enquanto K' é também um parâmetro adimensional que mede a intensidade do momento fletor resistente (interno) de cálculo devido ao concreto comprimido. O terceiro termo de (3.4) mede a intensidade do momento fletor resistente (interno) de cálculo devido à armadura A'_s , comprimida.

Na equação (3.6), α é o valor da profundidade relativa da linha neutra referente ao diagrama retangular simplificado de tensões no concreto, ou seja:

$$\alpha = \left(\frac{y}{d} \right) = 0,8 \left(\frac{x}{d} \right) = 0,8 \xi \quad (3.7)$$

A equação (3.6) representa uma equação do segundo grau em α e, portanto, conforme (3.7), em função da incógnita x (profundidade da linha neutra), que quando resolvida fornece as duas raízes do problema, sendo o valor aplicável no caso dado por:

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - 2K'} \quad (3.8)$$

Voltando-se à equação (3.4), multiplicando-se e dividindo-se o último termo simultaneamente por f_{yd} , obtém-se a expressão para o cálculo da armadura comprimida A'_s :

$$A'_s = \frac{f_c b d K - K'}{f_{yd} \left(1 - \frac{d'}{d} \right)} \div \phi \quad (3.9)$$

onde ϕ representa o nível de tensão na armadura comprimida, dada por:

$$\phi = \sigma'_{sd} / f_{yd} \leq 1 \quad (3.10)$$

A partir da equação de equilíbrio (3.3) determina-se a armadura de tração A_s dada por:

$$A_s = \frac{f_c b y}{f_{yd}} + \frac{A'_s \sigma'_{sd}}{f_{yd}} \quad (3.11)$$

Multiplicando-se e dividindo-se simultaneamente o segundo termo de (3.11) por d e substituindo a relação σ'_{sd} / f_{yd} do terceiro termo pela equação (3.10), obtém-se:

$$A_s = \frac{f_c b d y}{f_{yd} d} + A'_s \phi \quad (3.12)$$

De (3.7) e (3.8) sabe-se que $\alpha = \left(\frac{y}{d}\right) = 1 - \sqrt{1 - 2k'}$ que levado em (3.12) fornece:

$$A_{s1} = \frac{f_c b d}{f_{yd}} (1 - \sqrt{1 - 2K'}) \quad (3.13)$$

$$A_{s2} = A'_s \phi = \frac{f_c b d}{f_{yd}} \frac{K - K'}{1 - \frac{d'}{d}} \quad (3.14)$$

e
$$A_s = A_{s1} + A_{s2} \quad (3.15)$$

Uma vez calculada a armadura A_s , com sua parcela A_{s2} pode-se obter a armadura A'_s , dada por:

$$A'_s = A_{s2} / \phi \quad (3.16)$$

As expressões (3.13) a (3.16) são as utilizadas para o cálculo da armadura de flexão em vigas com seção retangular.

A armadura de compressão A'_s , nem sempre é necessária para equilibrar o momento externo M_d (representado adimensionalmente por K), que nesse caso será equilibrado internamente apenas pelo momento devido ao concreto comprimido (representado adimensionalmente por K'). A única possibilidade matemática de se ter armadura A'_s , nula e conseqüentemente também A_{s2} , é fazer em (3.9) ou em (3.14) $K = K'$. Essa igualdade tem uma explicação física coerente com a situação de **armadura simples** (sem armadura de compressão), ou seja, quando o momento externo M_d , (K) for equilibrado pelo momento interno devido ao concreto comprimido, (K'), isto é $K = K'$, não sendo necessário armadura de compressão.

Conforme visto anteriormente na equação (3.1), a máxima profundidade relativa da linha neutra para se ter seção subarmada ou normalmente armada é a correspondente ao limite do domínio 3. Com essa profundidade limite obtém-se o máximo momento interno resistente K'_L , que deve ser equilibrado pelo momento externo limite K_L . Para essa situação limite, a partir da equação (3.6), obtém-se:

$$K_L = K'_L = \alpha_L (1 - \alpha_L / 2) \quad (3.17)$$

com

$$\alpha_L = (y/d)_L = 0,8 \cdot (x/d)_L = 0,8 \cdot \xi_{3,lim} \quad (3.18)$$

O valor de $\xi_{3,lim}$ depende do tipo de aço empregado. A TABELA 3.1 (SILVA 2005) apresenta esses valores bem como as demais grandezas utilizadas no cálculo.

TABELA 3.1 - Valores de K_L sem a consideração da ductilidade

Aço	f_{yd} (kN/cm ²)	ϵ_{yd} (‰)	$\xi_{3,lim}$ (x/d) _{3,lim}	α_L	K_L
CA-25	21,74	1,035	0,772	0,617	0,427
CA-50	43,48	2,070	0,628	0,503	0,376
CA-60	52,17	2,484	0,585	0,468	0,358

A relação $\xi = (x/d)$, além de satisfazer ao limite estabelecido em (3.1), deve também atender aos limites fixados no item 14.6.4.3 da NBR 6118 (2003) que, para melhoria da ductilidade, fixa a profundidade relativa limite em:

$$\xi_{lim} = (x/d)_{lim} \leq 0,50 \quad \text{para concretos com } f_{ck} \leq 35 \text{ MPa} \quad (3.19)$$

$$\xi_{lim} = (x/d)_{lim} \leq 0,40 \quad \text{para concretos com } f_{ck} > 35 \text{ MPa}$$

Observando-se a TABELA 3.1, nota-se que todos os valores de $\xi_{3,lim}$ são superiores aos das equações (3.19) e que, portanto, para se atender às prescrições de melhoria de ductilidade das vigas deve-se ter os seguintes valores de K_L (TABELA 3.2), que agora não mais dependem do tipo de aço, mas sim apenas da resistência f_{ck} do concreto, menor ou maior que **35 MPa**.

TABELA 3.2 - Valores finais de K_L , com a consideração da ductilidade

f_{ck}	K_L
≤ 35 MPa	0,320
> 35 MPa	0,269

A partir da equação (3.5) e considerando os valores limites da TABELA 3.2 obtém-se:

$$M_{d,L} = K_L \cdot (f_c \cdot b \cdot d^2) \quad (3.20)$$

$$d_L = \sqrt{\frac{M_d}{K_L f_c b}} \quad (3.21)$$

onde:

- $M_{d,L}$ é o máximo momento fletor de cálculo resistido com **armadura simples**
- d_L é a altura útil mínima necessária para resistir ao M_d com **armadura simples**

Caso o momento de cálculo atuante seja maior que $M_{d,L}$ ou ainda que a altura útil seja menor que d_L , o que significa em ambos, $K > K_L$, torna-se necessário para o equilíbrio a utilização de armadura de compressão A'_s . Essa situação, com a utilização simultânea de armadura de tração A_s e de compressão A'_s , caracteriza seções dimensionadas à flexão com **armadura dupla**.

Na situação de armadura dupla $K > K_L$ ($M_d > M_{d,L}$), basta fazer nas equações de dimensionamento à flexão em seções retangulares, equações (3.13) a (3.16), $K' = K_L$. Essa igualdade significa fisicamente que o momento interno resistente referente ao concreto comprimido K' é igual ao máximo momento fletor de cálculo resistido com armadura simples K_L . Essa parcela do momento total será resistida pelo concreto comprimido e pela armadura tracionada A_{s1} . A diferença ($M_d - M_{d,L}$), que em termos adimensionais fica ($K - K_L$), será absorvida pela parcela da armadura de tração A_{s2} e pela armadura de compressão A'_s .

No cálculo da armadura A'_s , aparece o nível de tensão ϕ na armadura comprimida, que normalmente vale **1**, ou seja, $\sigma'_{sd} = f_{yd}$. A tensão na armadura comprimida σ'_{sd} é função da deformação ϵ'_{sd} , que por sua vez depende da profundidade relativa da linha neutra $\xi = (x/d)$. Na situação de armadura dupla (onde $A'_s \neq 0$), essa profundidade relativa é constante e igual a $\xi_{lim} = (x/d)_{lim}$ dado na equação (3.19), para cada uma das duas faixas de resistência do concreto ($f_{ck} \leq 35$ MPa ou $f_{ck} > 35$ MPa).

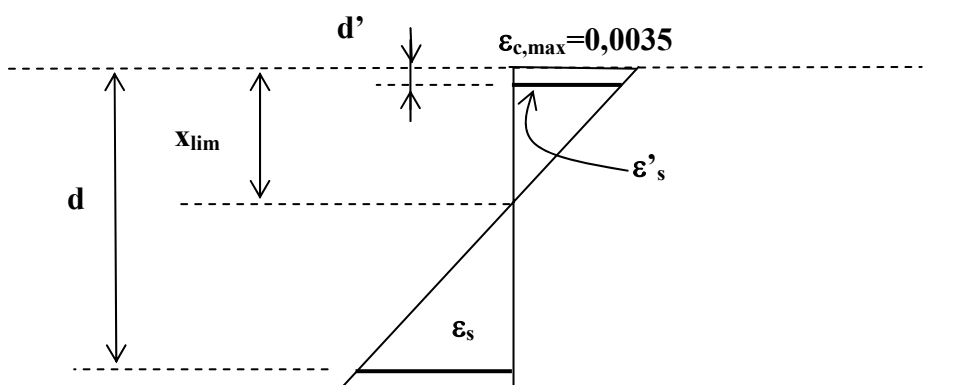


FIGURA 3.5 - Diagrama de deformação na armadura dupla

Considerando os valores limites da equação (3.19) nota-se que ambos, $(x/d)=0,4$ e $(x/d)=0,5$, são menores que os valores de $\xi_{3,lim} = (x/d)_{3,lim}$ da TABELA 3.2 para as três categorias de aço CA-25, CA-50 e CA-60. Além disso, o valor da profundidade relativa do domínio 2 é dado por $\xi_{2,lim} = (x/d)_{2,lim} = (3,5 / 13,5) = 0,259$. Pode-se concluir, portanto, que para as três categorias de aços empregados em peças de concreto armado, a profundidade relativa limite que define a armadura dupla estará no domínio 3, ou seja:

$$\xi_{2,lim} = 0,259 < \xi_{lim} = (x/d)_{lim} < \xi_{3,lim} \quad (3.22)$$

A definição do ELU para o domínio 3 é $\epsilon_{c,max} = 3,5 \%$, conforme indicado na FIGURA 3.5. A deformação ϵ'_s pode ser calculada a partir da seguinte equação, retirada por semelhança de triângulos na FIGURA 3.5:

$$\frac{\varepsilon'_s}{x_{\text{lim}} - d'} = \frac{0,035}{x_{\text{lim}}} \quad (3.23)$$

$$\varepsilon'_s = \frac{x_{\text{lim}} - d'}{x_{\text{lim}}} \times 0,035 = \frac{\left(\frac{x}{d}\right)_{\text{lim}} - \frac{d'}{d}}{\left(\frac{x}{d}\right)_{\text{lim}}} \times 0,035 \quad (3.24)$$

Caso ε'_s seja menor que o valor da deformação de cálculo correspondente ao escoamento ε_{yd} , a tensão σ'_{sd} é obtida pela aplicação da Lei de Hooke, $\sigma'_{sd} = E_s \cdot \varepsilon'_s$, o que implica em valor de ϕ menor que 1. Caso contrário $\sigma'_{sd} = f_{yd}$, o que implica em $\phi = 1$. Fazendo $\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd}$ em (3.23) obtém-se a inequação (3.25) que expressa a relação (d'/d) abaixo da qual se tem $\phi = 1$:

$$\left(\frac{d'}{d}\right) \leq \left(\frac{x}{d}\right)_{\text{lim}} \times \left(1 - \frac{\varepsilon_{yd}}{0,035}\right) \quad (3.25)$$

A TABELA 3.3 apresenta os valores entre d e d' para se ter o nível de tensão ϕ igual a 1 na armadura de compressão.

TABELA 3.3 - Valores das relações entre d e d' , para se ter $\phi = 1$
(nível de tensão em A's)

Aço	$f_{ck} \leq 35 \text{ MPa}$ $(x/d)_{\text{lim}} \leq 0,5$		$f_{ck} > 35 \text{ MPa}$ $(x/d)_{\text{lim}} \leq 0,40$	
	$(d'/d) \leq$	$(d'/d) \geq$	$(d'/d) \leq$	$(d'/d) \geq$
CA-25	0,352	2,840	0,282	3,550
CA-50	0,204	4,896	0,163	6,121
CA-60	0,145	6,893	0,116	8,616

Os valores da TABELA 3.3 são as relações usuais para vigas de concreto armado, ou seja, geralmente o nível de tensão na armadura comprimida é igual a 1. No entanto, para situações pouco comuns, não contempladas na TABELA 3.3, o valor de $\phi = \sigma'_{sd} / f_{yd} \leq 1$, pode ser obtido com $\sigma'_{sd} = E_s \cdot \varepsilon'_s \leq f_{yd}$, a partir da equação (3.23):

$$\varphi = \frac{\left(\frac{x}{d}\right)_{\text{lim}} - \frac{d'}{d}}{\left(\frac{x}{d}\right)_{\text{lim}}} \times \frac{0,035 \times E_s}{f_{yd}} \leq 1 \quad (3.26)$$

Todo o dimensionamento de seções retangulares submetidas à flexão normal simples encontra-se de forma resumida na FIGURA 3.6.

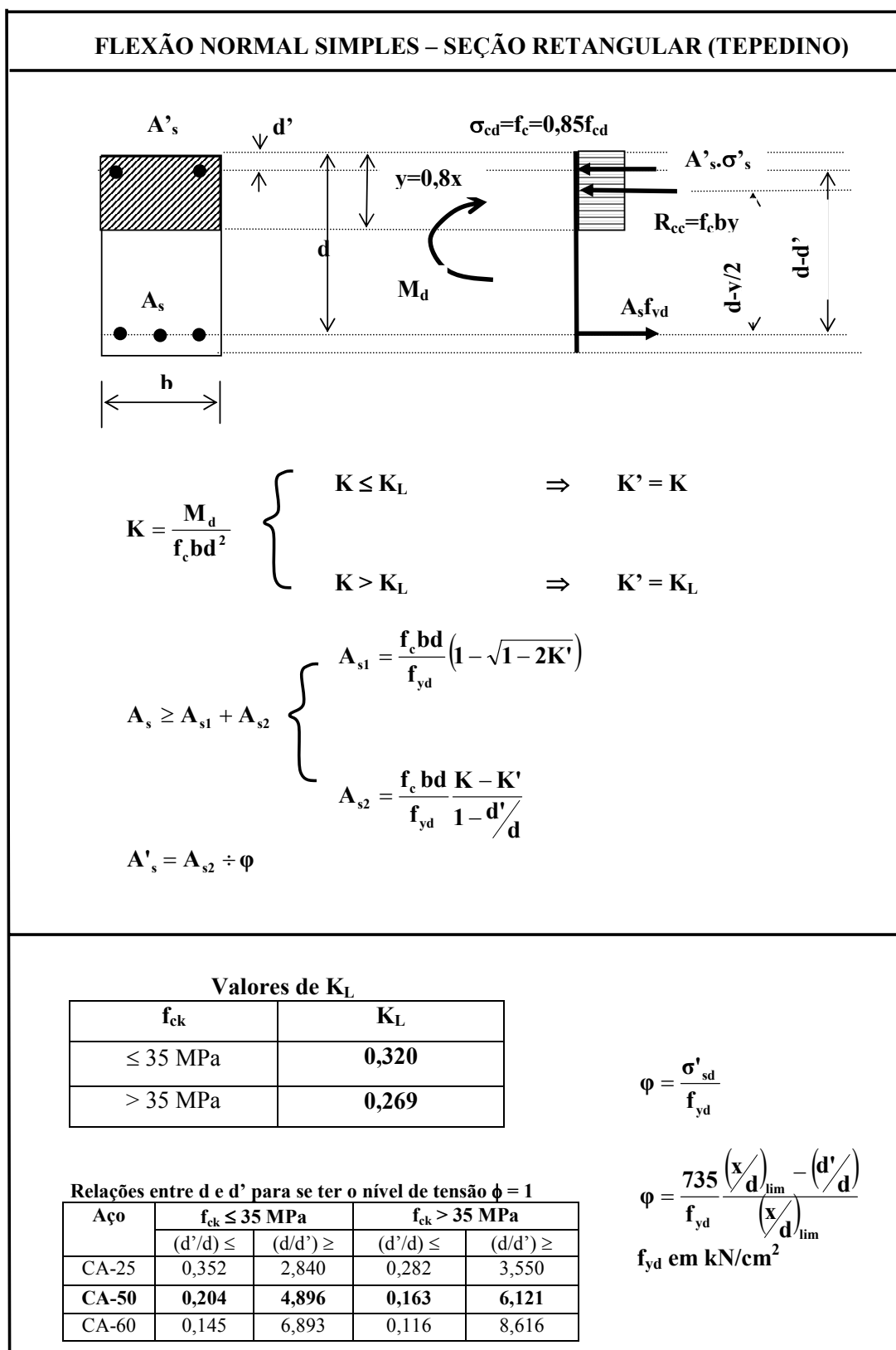


FIGURA 3.6 – Dimensionamento à flexão normal simples em seções retangulares

3.2.2 Prescrições da NBR 6118 (2003)

Armadura longitudinal mínima de tração

De acordo com o item 17.3.5.2 da NBR-6118 (2003), a armadura mínima de tração, em elementos estruturais armados ou protendidos deve ser determinada pelo dimensionamento da seção a um momento fletor mínimo dado pela expressão a seguir, respeitada a taxa mínima absoluta de **0,15 %**:

$$M_{d,min} = 0,8 \cdot W_0 \cdot f_{ctk,sup} \quad (3.27)$$

onde:

- W_0 é o modulo de resistência da seção transversal bruta de concreto, relativo à fibra mais tracionada;
- $f_{ctk,sup}$ é a resistência característica superior do concreto à tração dada por $f_{ctk,sup} = 1,3 \cdot f_{ctm} = 0,39 \cdot (f_{ck})^{2/3}$ com f_{ck} em MPa.

O dimensionamento para $M_{d,min}$ deve ser considerado atendido se forem respeitadas as taxas de armadura da TABELA 3.4 abaixo.

TABELA 3.4 - Taxas mínimas de armadura de flexão para vigas

Forma da seção	Valores de $\rho_{min}^{1)} = (A_{s,min} / A_c) - \%$							
	f_{ck} (MPa) ω_{min}	20	25	30	35	40	45	50
Retangular	0,035	0,150	0,150	0,173	0,201	0,230	0,259	0,288

¹⁾ Os valores de ρ_{min} estabelecidos nesta tabela pressupõem o uso de aço CA-50, $\gamma_c=1,4$ e $\gamma_s=1,15$. Caso esses fatores sejam diferentes, ρ_{min} deve ser calculado com base no valor de ω_{min} dado.

A taxa mecânica mínima de armadura longitudinal de flexão para vigas, ω_{\min} , que aparece na TABELA 3.4, é dada por:

$$\omega_{\min} = \frac{A_{s,\min} f_{yd}}{A_c f_{cd}} = \rho_{\min} \frac{f_{yd}}{f_{cd}} \quad (3.28)$$

De (3.28) pode-se obter ρ_{\min} a partir do valor dado de ω_{\min} :

$$\rho_{\min} = \frac{f_{cd}}{f_{yd}} \omega_{\min} \quad (3.29)$$

Os valores da TABELA 3.4 foram obtidos para aço **CA-50**, $\gamma_c=1,4$ e $\gamma_s=1,15$. Como exemplo para esses valores, a taxa mínima para seção retangular com concreto $f_{ck}=30$ MPa, fica:

$$\rho_{\min} = (30/1,4) \times 0,035 / (500/1,15) = 0,00173 = \mathbf{0,173 \%} \quad (3.30)$$

Para outros valores de tipo de aço ou de coeficientes de ponderações dos materiais, não se pode usar a TABELA 3.4, devendo-se calcular a taxa mínima pela equação (3.29), que é o caso por exemplo, das lajes, onde se usa normalmente aço **CA-60**.

Área máxima das armaduras de tração e compressão

A soma das armaduras de tração e de compressão ($A_s + A'_s$) não deve ter valor maior que $4\%A_c$, calculada na região fora da zona de emendas.

Distribuição transversal das armaduras longitudinais

O espaçamento mínimo livre entre as faces das barras longitudinais, medido no plano da seção transversal conforme mostra a TABELA 3.4, deve ser igual ou superior ao maior dos seguintes valores:

- na direção horizontal (a_h)
 - 20 mm;
 - diâmetro da barra ϕ_{long} [NBR 7480 (2007)], do feixe ou da luva;
 - 1,2 vez o diâmetro máximo do agregado;

- na direção vertical (a_v)
 - 20 mm
 - diâmetro da barra ϕ_{long} [NBR 7480 (2007)], do feixe ou da luva;
 - 0,5 vez o diâmetro máximo do agregado.

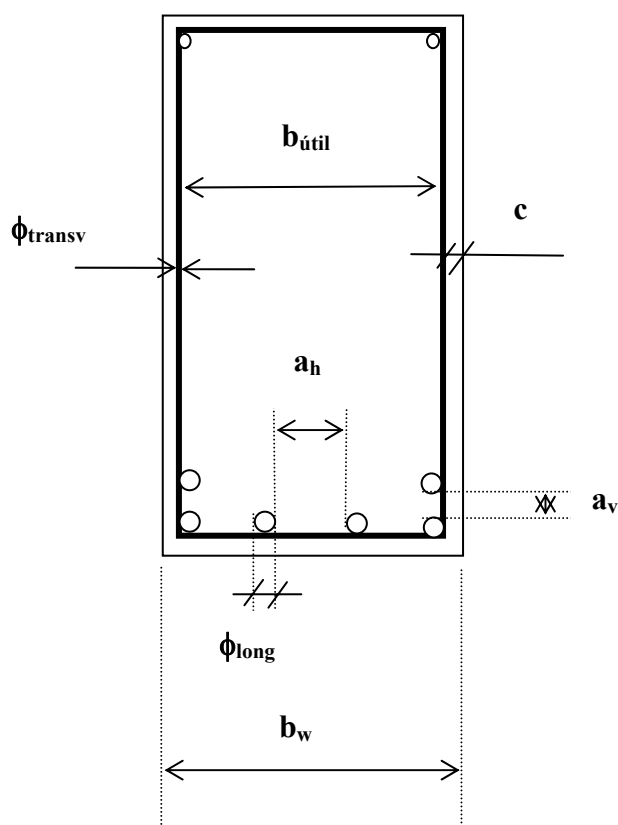


FIGURA 3.7 - Distribuição transversal das armaduras longitudinais

Com base na TABELA 3.4, a largura útil ($b_{\text{útil}}$) da viga fica igual a:

$$b_{\text{útil}} = b_w - 2 \cdot (c + \phi_{\text{transv}}) \quad (3.31)$$

onde:

- c é o cobrimento nominal da armadura
- ϕ_{transv} é o diâmetro da armadura transversal (estribo)

Desta forma, o número máximo de barras longitudinais com diâmetro ϕ_{long} que cabem em uma mesma camada, atendendo ao espaçamento horizontal a_h especificado acima, fica:

$$n_{\text{barras/camada}} \leq \frac{b_{\text{útil}} + a_h}{a_h + \phi_{\text{long}}} \quad (3.32)$$

Adota-se como valor final do número de barras por camada, a parcela inteira do número calculado em (3.32).

3.3 Flexão normal composta de seções retangulares

3.3.1 Procedimento de dimensionamento – Armaduras assimétricas

Definições

Seja uma seção retangular qualquer de concreto armado, cujas características geométricas estão representadas na FIGURA 3.8.

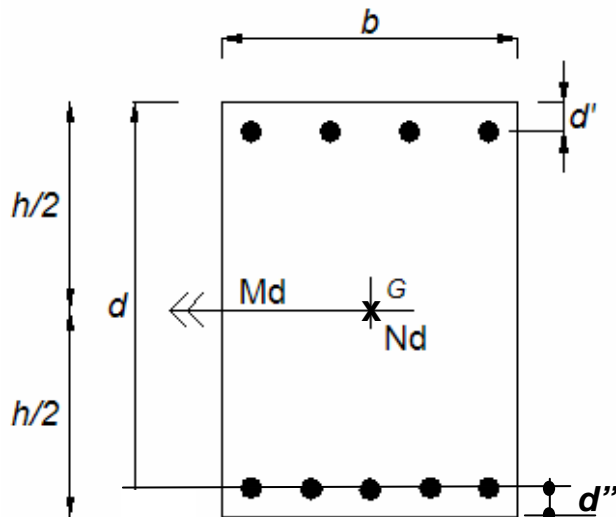


FIGURA 3.8 – Seção retangular de concreto armado

Os elementos indicados têm as seguintes denominações:

b = largura;

h = altura total;

d = altura útil;

A_s = armadura de tração (ou menos comprimida);

A'_s = armadura de compressão (ou mais comprimida);

N_d = força normal última de cálculo; será considerada positiva, quando de compressão; e

M_d = momento fletor último de cálculo.

Observe-se que **d'** é a “distância entre o centro da armadura **A'_s** e a borda mais próxima”. Não deve ser confundido com o “COBRIMENTO”, e definido como a distância entre as superfícies do concreto e as barras da armadura. A distância (**h - d**) entre o centro da armadura **A_s** e a borda que lhe é próxima dar-se-á pela designação **d''**, sendo freqüentemente diferente de **d'**.

Simplificações

No caso da seção retangular, é altamente conveniente adotar o diagrama simplificado retangular para as tensões do concreto. Essa simplificação facilita extremamente a análise e a formulação do problema apesar de introduzir um erro de pequeno significado nos resultados.

Primeiro Caso

De acordo com CALIXTO *et al.*, considerar-se-á como primeiro caso aquele em que existe ao menos uma armadura tracionada, podendo haver ou não uma armadura de compressão, como ilustra a FIGURA 3.9.

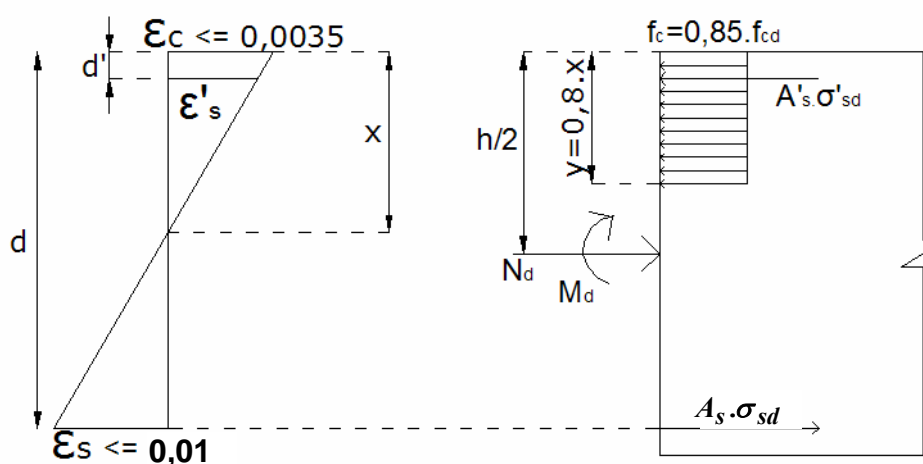


FIGURA 3.9 – Diagrama de deformações e equilíbrio de forças na seção de concreto (primeiro caso)

Podem-se armar as seguintes equações de equilíbrio:

$$N_d = (f_c \cdot b \cdot y) + (A'_s \cdot \sigma'_{sd}) - (A_s \cdot \sigma_{sd}) \quad (3.33)$$

$$N_d \cdot \left(d - \frac{h}{2} \right) + M_d = (f_c \cdot b \cdot y) \cdot \left(d - \frac{y}{2} \right) + (A'_s \cdot \sigma'_{sd}) \cdot (d - d') \quad (3.34)$$

Dividindo ambos os lados da equação (3.33) por $f_c \cdot b \cdot d^2$ teremos:

$$k = \frac{N_d \cdot \left(d - \frac{h}{2} \right) + M_d}{f_c \cdot b \cdot d^2} = \alpha \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{A'_s \cdot f_{yd}}{f_c \cdot b \cdot d} \cdot \varphi \cdot \left(1 - \frac{d'}{d} \right) \quad (3.35)$$

onde k é o parâmetro adimensional que mede a intensidade do momento fletor solicitante (externo) de cálculo e

$$\alpha = \frac{y}{d} = \frac{0,8 \cdot x}{d} \quad (3.36)$$

$$\varphi = \frac{\sigma'_{sd}}{f_{yd}} \quad (3.37)$$

Fazendo $\alpha \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = k'$, onde k' é o parâmetro adimensional que mede a intensidade do momento fletor interno resistido pelo bloco comprimido de concreto, a área de armadura de compressão A'_s fica dada por :

$$A'_s = \frac{f_c \cdot b \cdot d}{f_{yd}} \cdot \frac{k - k'}{\left(1 - \frac{d'}{d}\right)} \cdot \frac{1}{\phi} \quad (3.38)$$

Esta última expressão mostra que somente haverá necessidade de armadura de compressão A'_s se $k > k'$, nunca podendo ser $k < k'$.

A **NBR 6118** prescreve que para assegurar a ductilidade das estruturas nas regiões de apoios das vigas e/ou pilares ou de ligações com outros elementos estruturais, a posição da linha neutra no **ELU** deve obedecer aos seguintes limites:

- $x/d \leq 0,50$ para concretos com $f_{ck} \leq 35$ MPa;
- $x/d \leq 0,40$ para concretos com $f_{ck} > 35$ MPa.

Portanto existe um limite para a relação x/d e conseqüentemente um valor limite para o parâmetro adimensional k' , denominado k_L , correspondente ao máximo momento interno resistente pelo bloco comprimido de concreto que assegure ductilidade na ruptura. Se não vejamos:

$$\alpha = \frac{y}{d} = \frac{0,8 \cdot x}{d} \quad \therefore \quad \alpha_L \leq 0,8 \left(\frac{x}{d} \right)_{\text{máximo}} \quad (3.39)$$

e

$$k' \leq \alpha_L \cdot \left(1 - \frac{\alpha_L}{2}\right) = k_L \quad (3.40)$$

A TABELA 3.5 apresenta os valores finais de k_L .

TABELA 3.5 – Valores máximos de k_L para assegurar ductilidade

f_{ck}	k_L
$\leq 35 \text{ MPa}$	0,320
$> 35 \text{ MPa}$	0,269

Assim, caso se tenha, no cálculo, $k \leq k_L$, faremos $k' = k$ na equação (3.38), ou seja, não existe necessidade de armadura de compressão. Caso contrário faremos $k' = k_L$ nesta mesma equação sendo, portanto, A'_s diferente de zero.

Respeitando-se os limites acima para o valor de k' , assegura-se a ductilidade e a seção será sempre sub-armada. Seção sub-armada é aquela seção para a qual o aço escoava antes da ruptura do concreto à compressão. Nessas condições, $\sigma_{sd} = f_{yd}$ na equação (3.33), que após um rearranjo de termos fica igual:

$$A_s = \left(\frac{f_c b d \alpha - N_d}{f_{yd}} \right) + \varphi \cdot A'_s = A_{s1} + A_{s2} \quad (3.41)$$

onde

$$A_{s1} = \frac{f_c b d \alpha - N_d}{f_{yd}} = \frac{f_c b d (1 - \sqrt{1 - 2k'}) - N_d}{f_{yd}} \quad (3.42)$$

$$A_{s2} = \varphi \cdot A'_s = \left(\frac{f_c b d}{f_{yd}} \right) \cdot \left(\frac{k - k'}{1 - d'/d} \right) \quad (3.43)$$

O valor de φ pode ser tabelado, para as diversas qualidades de aço, em função de ϵ'_s e, portanto, de x/d' ou y/d' .

Deve ser notado na equação (3.41) que o valor de A_s pode, em determinadas circunstâncias, ser negativo, o que contraria a hipótese inicial de existir ao menos uma armadura de tração. Caso isto ocorra deve-se passar ao caso seguinte.

Segundo Caso

Conforme mostra a FIGURA 3.10, este caso corresponde à hipótese na qual o equilíbrio da seção pode ser conseguido apenas com a compressão do concreto, em parte da seção, e da armadura A'_s . Chega-se a este quando, no cálculo pelo caso anterior, conclui-se que $A_s < 0$.

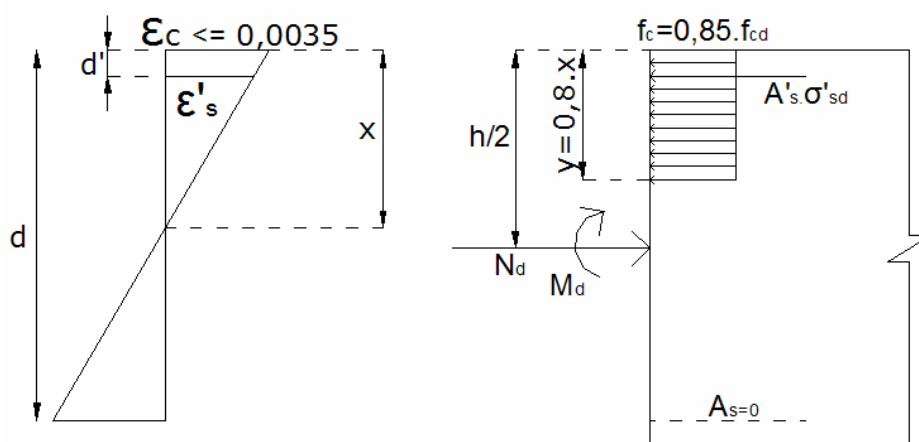


FIGURA 3.10 - Diagrama de deformações e equilíbrio de forças na seção de concreto (segundo caso)

As equações de equilíbrio são:

$$N_d = (f_c \cdot b \cdot y) + (A'_s \cdot \sigma'_{sd}) \quad (3.44)$$

$$N_d \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) - M_d = f_c \cdot b \cdot y \cdot \left(\frac{y}{2} - d' \right) \quad (3.45)$$

Transformando esta última equação tem-se:

$$y = d' + \sqrt{(d')^2 + 2 \cdot \left[\frac{N_d \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) - M_d}{f_c \cdot b} \right]} \leq h \quad (3.46)$$

Na equação acima, deve-se ter $y \leq h$ por razões óbvias. No limite, a seção de concreto já estará totalmente comprimida. Caso se obtenha $y > h$ em deve-se passar ao caso seguinte.

Com o valor obtido de y , a área de armadura comprimida A'_s é dada por:

$$A'_s = \frac{(N_d - f_c \cdot b \cdot y)}{\varphi \cdot f_{yd}} \quad (3.47)$$

e A_s será sempre igual a zero.

Eventualmente, pode-se obter $A'_s < 0$. Isto significa que, em teoria, nenhuma armação será necessária, bastando a seção de concreto, parcialmente comprimida, para equilibrar os esforços solicitantes. Nestas condições deve ser adotada a armadura mínima para peças comprimidas fixada em Norma.

Terceiro Caso

Este caso (FIGURA 3.11) trata da hipótese na qual o concreto está totalmente comprimido e existem duas armaduras (A_s e A'_s) ambas também comprimidas. Chega-se a este caso quando, no cálculo pelo caso anterior, conclui-se que $y > h$.

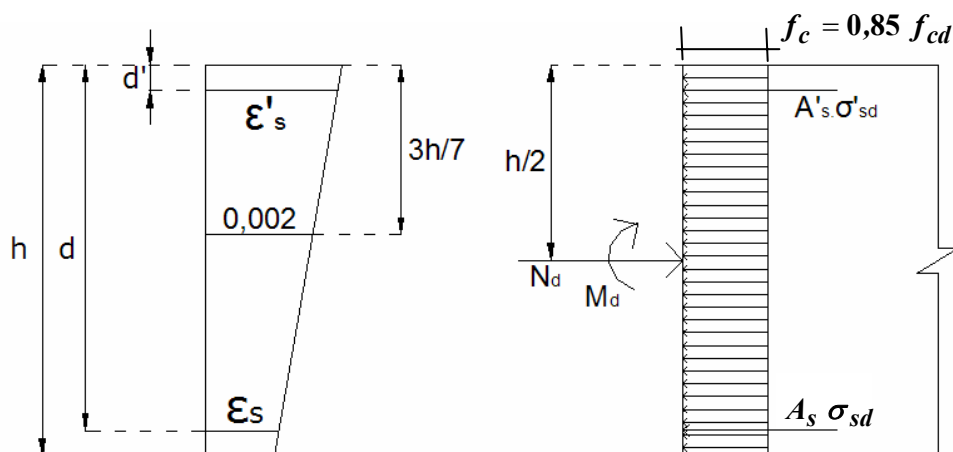


FIGURA 3.11 - Diagrama de deformações e equilíbrio de forças na seção de concreto (terceiro caso)

As equações de equilíbrio são:

$$N_d = (f_c \cdot b \cdot h) + (A'_s \cdot \sigma'_{sd}) + (A_s \cdot \sigma_{sd}) \quad (3.48)$$

$$M_d = A'_s \cdot \sigma'_{sd} \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) - A_s \cdot \sigma_{sd} \left(d - \frac{h}{2} \right) \quad (3.49)$$

Neste caso ocorre uma indefinição na posição da linha neutra, que pode ser qualquer, desde que $x > 1,25 h$ e que as armaduras sejam suficientes para atender às equações acima. O diagrama de deformação (FIGURA 3.11), que corresponde ao domínio 5 (ver FIGURA 3.1), mostra que as tensões σ_{sd} e σ'_{sd} a que estão submetidas as armaduras dependem dos respectivos alongamentos ϵ_{sd} e ϵ'_{sd} , que por sua vez são funções da posição da linha neutra. Como existem mais incógnitas que equações, haverá, pois, uma infinidade de soluções de equilíbrio, das quais, naturalmente, a mais interessante seria aquela que minimizasse a soma $A_s + A'_s$.

A fim de simplificar a análise, adotar-se-á para $y/h > 1$ a linha neutra no infinito, ou seja, seção uniformemente comprimida, com $\epsilon_c = \epsilon_{sd} = \epsilon'_{sd} = 0,002$. Tal simplificação, que levanta a indeterminação e facilita substancialmente a análise, justifica-se pelos fatos de ser estreita a faixa de variação possível em termos de

excentricidade da solicitação, significando pequena incidência de casos desta natureza, e de ser pequeno e favorável à segurança o excesso obtido que, em geral, não ultrapassa em 2% o mínimo possível da soma das armaduras.

Resolvendo, agora, o sistema de equações acima para A_s e A'_s com suposição de que

$\sigma_{sd} = \sigma'_{sd} = \phi f_{yd}$ teremos:

$$A_s = \frac{(N_d - f_c \cdot b \cdot h) \cdot \left(\frac{h}{2} - d'\right) - M_d}{\phi \cdot f_{yd} \cdot (d - d')} \quad (3.50)$$

$$A'_s = \frac{(N_d - f_c \cdot b \cdot h) \cdot \left(d - \frac{h}{2}\right) + M_d}{\phi \cdot f_{yd} \cdot (d - d')} \quad (3.51)$$

Ainda dentro deste caso de solicitação existe uma variante aliás, de bastante interesse prático, no arranjo da armadura, consistindo em considerá-la não concentrada junto às bordas mas, conforme a FIGURA 3.12, composta por uma parcela A^0_s , centrada, e uma outra ΔA_s que reforça apenas a borda mais comprimida.

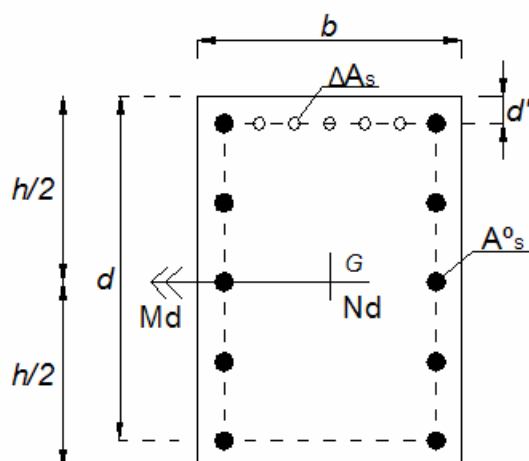


FIGURA 3.12 – Seção retangular de concreto armado com armadura distribuída
(terceiro caso)

Esta forma de calcular e distribuir a armadura é, via de regra, mais conveniente e econômica, para um tipo de solicitação muito freqüente em edifícios (pilares sujeitos à compressão N_d com pequena excentricidade). As equações de equilíbrio ficam:

$$N_d = (f_c \cdot b \cdot h) + (A_s^{\circ} + \Delta A_s) \cdot \sigma'_{sd} \quad (3.52)$$

$$M_d = \Delta A_s \cdot \sigma'_{sd} \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) \quad (3.53)$$

Resolvidas estas equações temos:

$$A_s^{\circ} = \left[N_d - f_c \cdot b \cdot h - \frac{M_d}{\left(\frac{h}{2} - d' \right)} \right] \cdot \left(\frac{1}{\varphi \cdot f_{yd}} \right) \quad (3.54)$$

$$\Delta A_s = \left[\frac{M_d}{\left(\frac{h}{2} - d' \right)} \right] \cdot \left(\frac{1}{\varphi \cdot f_{yd}} \right) \quad (3.55)$$

Quarto Caso

Trata-se da hipótese, pouco comum, mas possível, de estar a seção totalmente tracionada em flexão composta. Chega-se a ela ao obter-se $k < 0$ no primeiro caso. A seção funcionará como sendo constituída apenas pela armadura; o concreto em nada ajudará visto estar totalmente fissurado (FIGURA 3.13). Seria o caso de um tirante com carga N_d (negativa = tração) excêntrica.

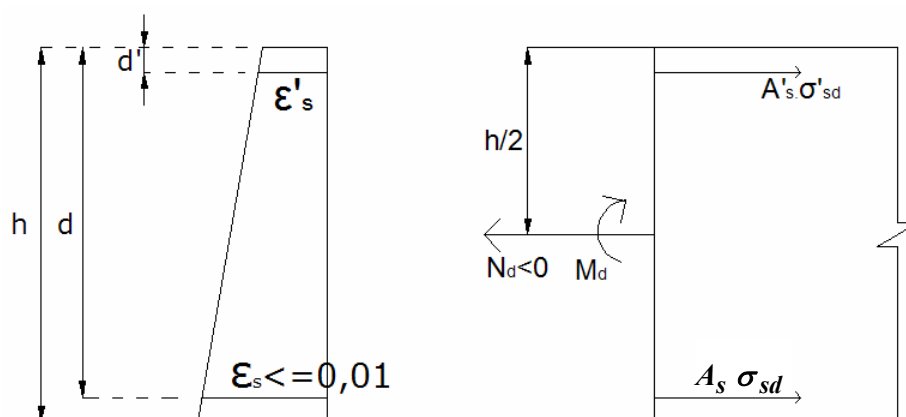


FIGURA 3.13 - Diagrama de deformações e equilíbrio de forças na seção de concreto (quarto caso)

Analogamente ao terceiro caso, a seção será considerada uniformemente tracionada com $\epsilon_s = \epsilon'_s = \epsilon_{yd}$ e, conseqüentemente, $\sigma_{sd} = \sigma'_{sd} = f_{yd}$. Esta solução alia a simplicidade à economia, pois minimiza a soma $A_s + A'_s$.

As equações de equilíbrio são:

$$|N_d| = (A_s + A'_s) \cdot f_{yd} \quad (3.56)$$

$$Md = A_s \cdot f_{yd} \cdot \left(d - \frac{h}{2}\right) - A'_s \cdot f_{yd} \cdot \left(\frac{h}{2} - d'\right) \quad (3.57)$$

Resolvidas, dão:

$$A_s = \frac{|N_d| \cdot \left(\frac{h}{2} - d'\right) + M_d}{f_{yd} \cdot (d - d')} \quad (3.58)$$

$$A'_s = \frac{|N_d| \cdot \left(\frac{h}{2} - d'\right) - M_d}{f_{yd} \cdot (d - d')} \quad (3.59)$$

A variante, análoga àquela apresentada para o terceiro caso, é aqui também cabível e igualmente conveniente: uma armadura composta de uma parcela A_s^o centrada e outra ΔA_s , agora reforçando a borda mais tracionada (fig.10).

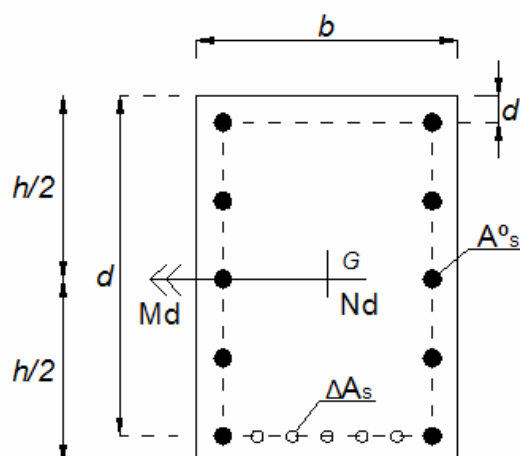


FIGURA 3.14 – Seção retangular de concreto armado com armadura distribuída (quarto caso)

As equações de equilíbrio são:

$$|N_d| = (A_s^o + \Delta A_s) \cdot f_{yd} \quad (3.60)$$

$$M_d = \Delta A_s \cdot f_{yd} \cdot \left(d - \frac{h}{2}\right) \quad (3.61)$$

Resolvidas, dão:

$$A_s^o = \frac{|N_d| - \left[\frac{M_d}{\left(d - \frac{h}{2}\right)} \right]}{f_{yd}} \quad (3.62)$$

$$\Delta A_s = \frac{\left[\frac{M_d}{\left(d - \frac{h}{2}\right)} \right]}{f_{yd}} \quad (3.63)$$

3.3.2 Procedimento de dimensionamento – Armaduras simétricas

O procedimento utilizado para o dimensionamento de seções retangulares com armaduras simétricas e sujeitas a flexão normal composta é iterativo; portanto, ele foi desenvolvido por meio de algoritmos. A FIGURA 3.15 à FIGURA 3.21 apresentam o algoritmo computacional para o cálculo das armaduras de aço nestas seções. A notação utilizada no algoritmo computacional está apresentada a seguir:

- A_c = área da seção transversal de concreto, em cm^2 ;
- A_s = área total da armadura de longitudinal, em cm^2 ;
- A_{s1} = área da armadura longitudinal superior, em cm^2 ;
- A_{s2} = área da armadura longitudinal inferior, em cm^2 ;
- b = largura da seção transversal de concreto, em cm;
- d = altura útil da seção transversal de concreto, em cm;
- d' = distância do CG da armadura à borda mais próxima da seção, em cm;
- f_c = resistência à compressão do concreto, em kN/cm^2 ;
- f_{yd} = tensão de escoamento de cálculo da armadura, em kN/cm^2 ;
- h = altura total da seção transversal de concreto, em cm;
- M_d = momento de cálculo aplicado na seção, em $\text{kN}\cdot\text{cm}$;
- N_d = força normal de cálculo, em kN, aplicada na seção; será positiva se de compressão e negativa caso contrário;

- R_{cc} = resultante de compressão no concreto;
- R_{s1d} = resultante de tração na armadura superior;
- R_{s2d} = resultante de tração na armadura inferior;
- x = profundidade da linha neutra, em cm;
- x_1 = posição inicial da linha neutra no domínio 1 (seção toda tracionada);
- x_2 = posição final da linha neutra no domínio 5 (seção toda comprimida);
- x_{23} = posição da linha neutra no limite entre os domínios 2 e 3;
- x_{34} = posição da linha neutra no limite entre os domínios 3 e 4;
- ϵ_{1d} = deformação de cálculo na armadura superior;
- ϵ_{2d} = deformação de cálculo na armadura inferior;
- ϵ_c = deformação de cálculo no concreto;
- ϵ_{yd} = deformação de escoamento de cálculo da armadura;

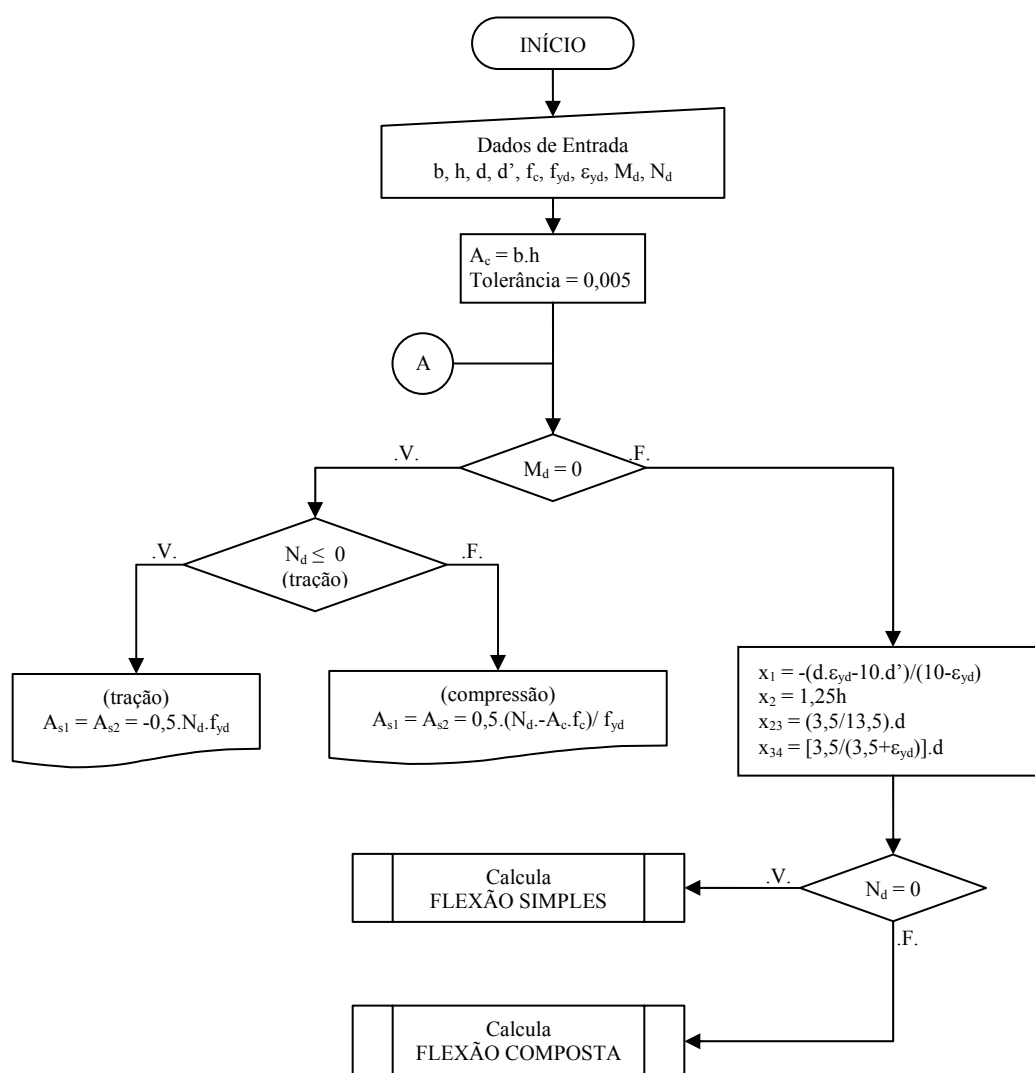


FIGURA 3.15 – Algoritmo computacional para dimensionamento de seções retangulares de concreto com armadura simétrica sujeitas a esforços de flexão normal composta (Parte 1/7).

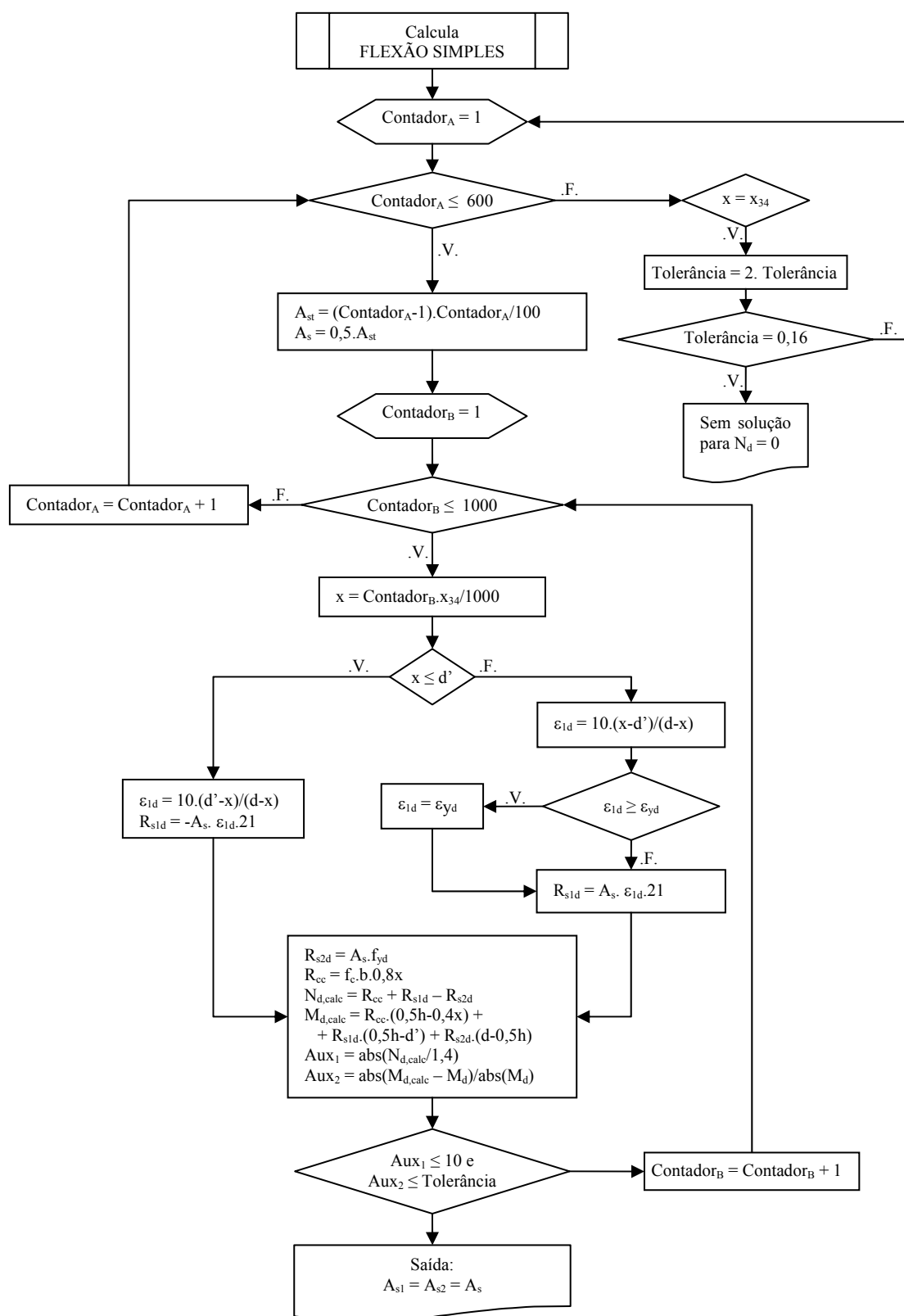


FIGURA 3.16 – Algoritmo computacional para dimensionamento de seções retangulares de concreto com armadura simétrica sujeitas a esforços de flexão normal composta (Parte 2/7).

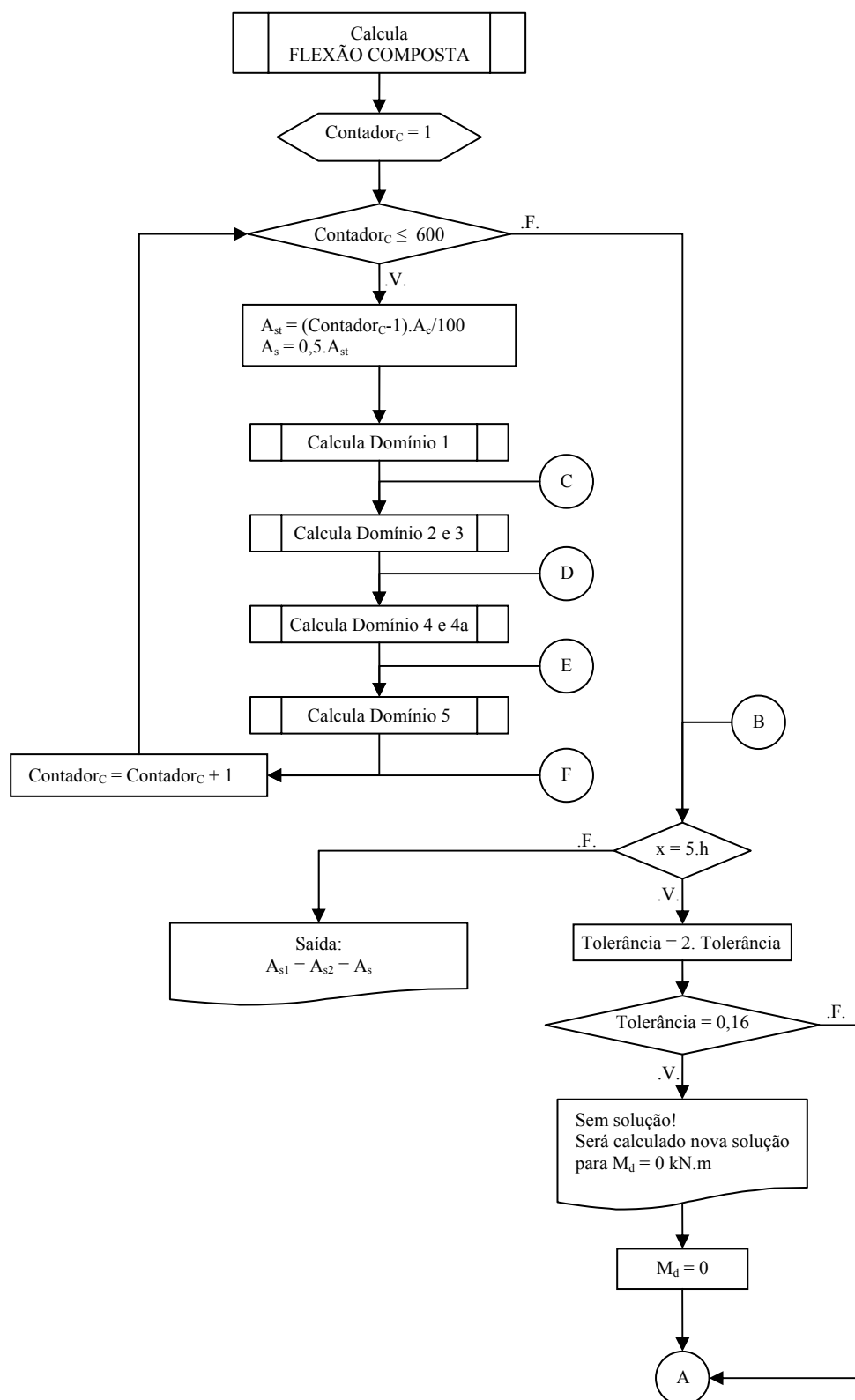


FIGURA 3.17 – Algoritmo computacional para dimensionamento de seções retangulares de concreto com armadura simétrica sujeitas a esforços de flexão normal composta (Parte 3/7).

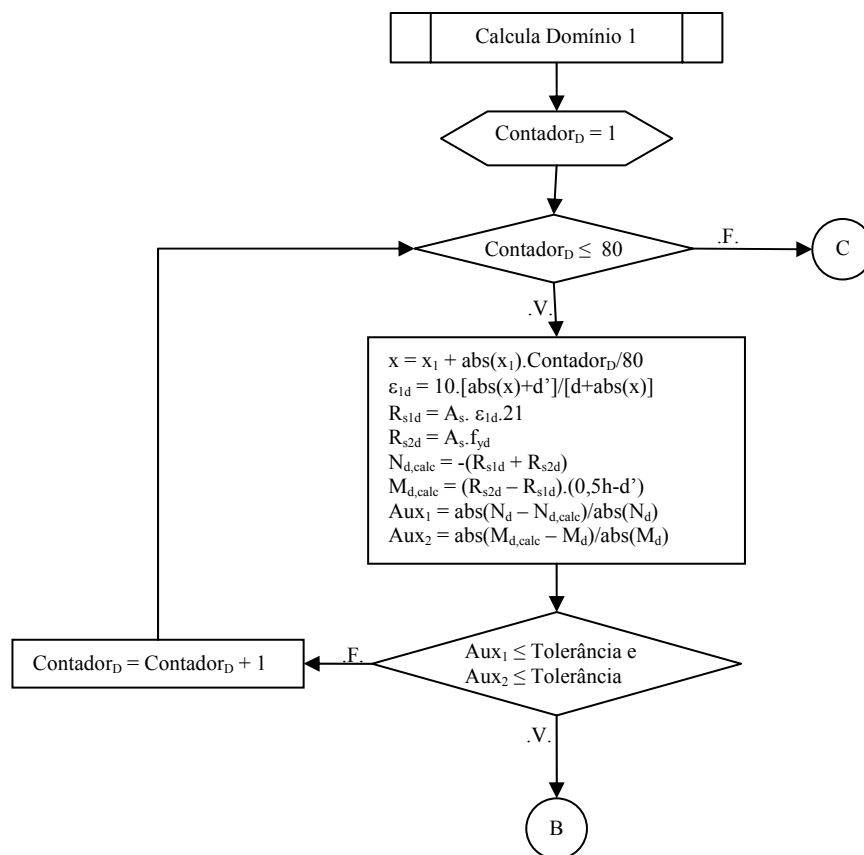


FIGURA 3.18 – Algoritmo computacional para dimensionamento de seções retangulares de concreto com armadura simétrica sujeitas a esforços de flexão normal composta (Parte 4/7).

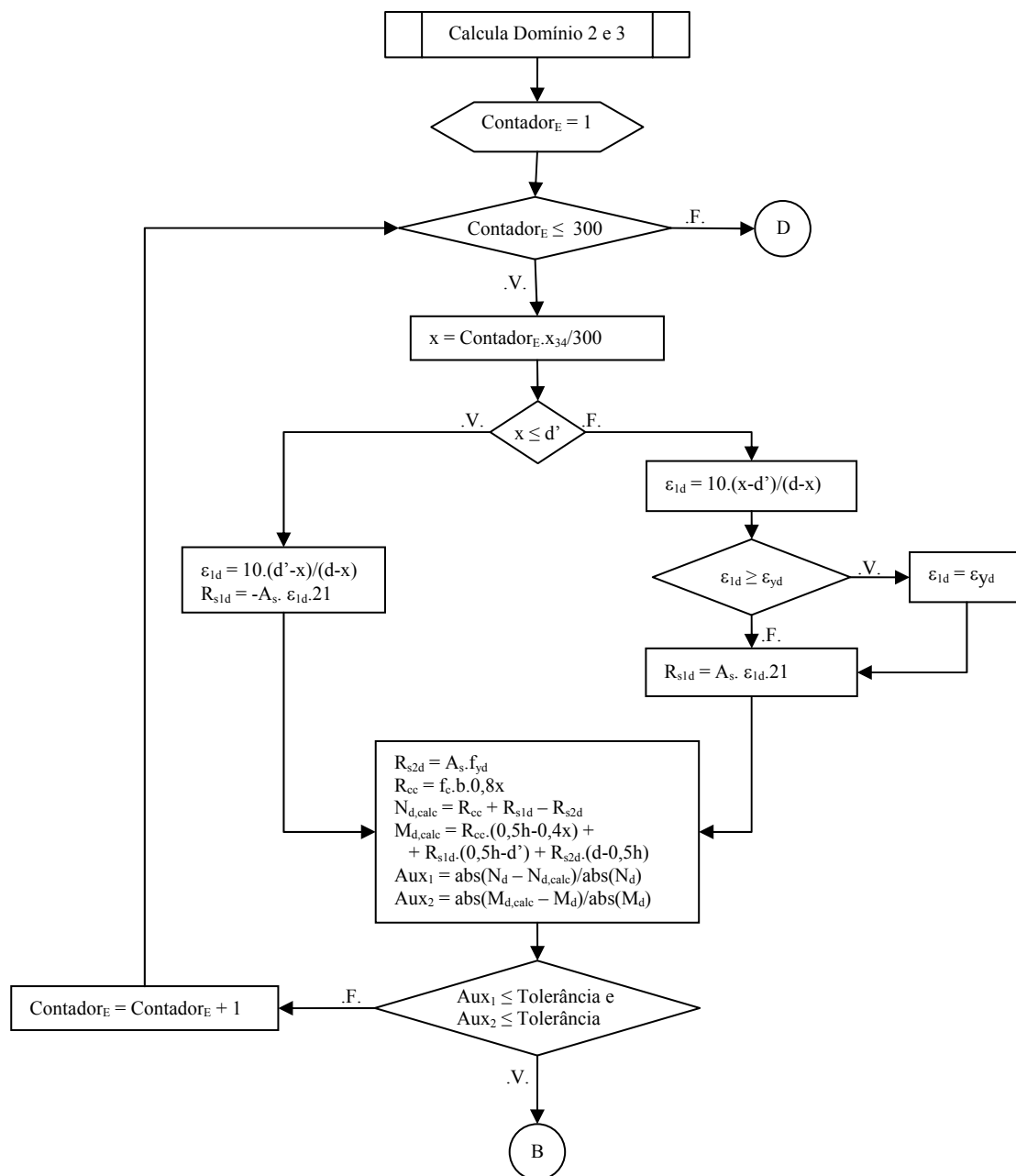


FIGURA 3.19 – Algoritmo computacional para dimensionamento de seções retangulares de concreto com armadura simétrica sujeitas a esforços de flexão normal composta (Parte 5/7).

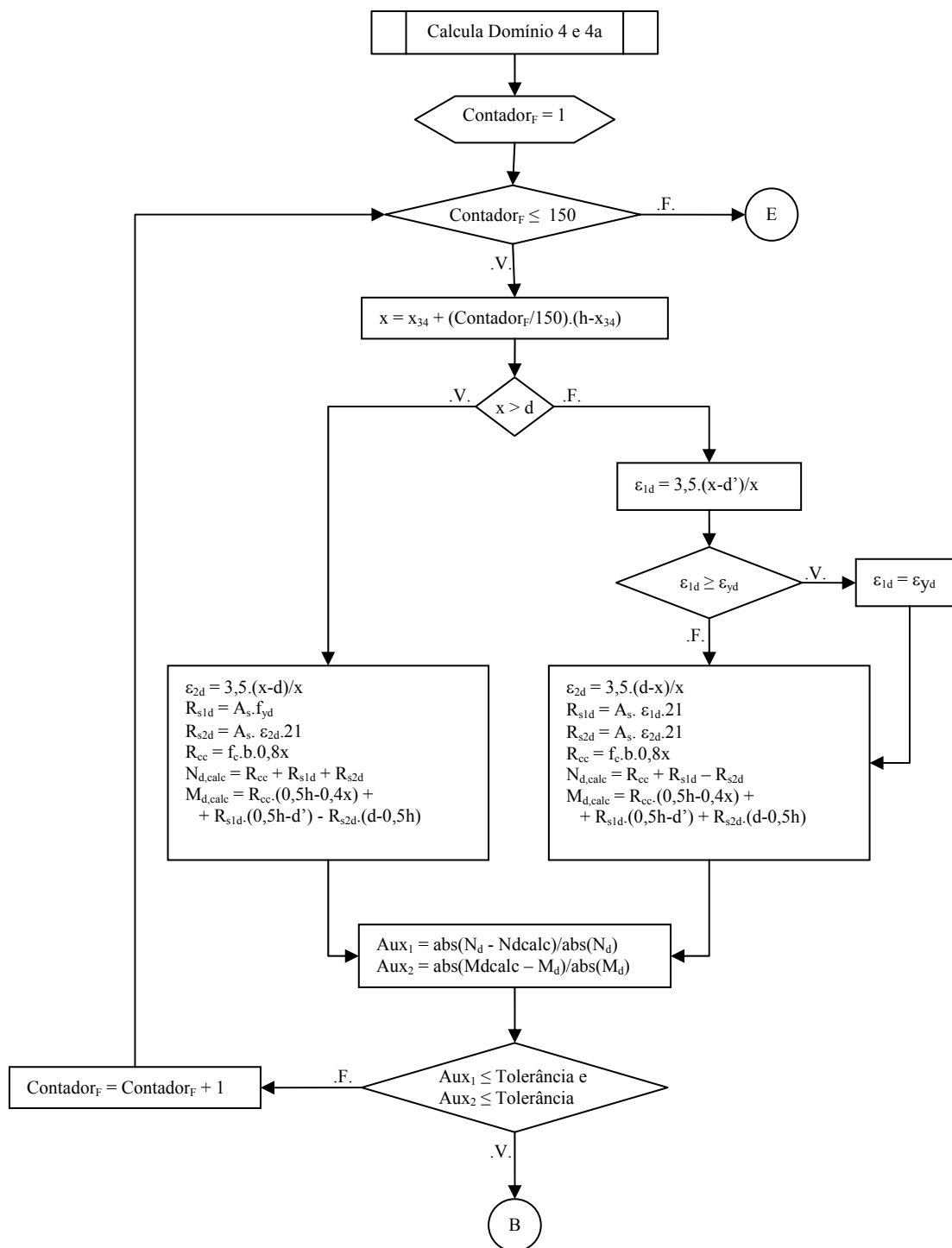


FIGURA 3.20 – Algoritmo computacional para dimensionamento de seções retangulares de concreto com armadura simétrica sujeitas a esforços de flexão normal composta (Parte 6/7).

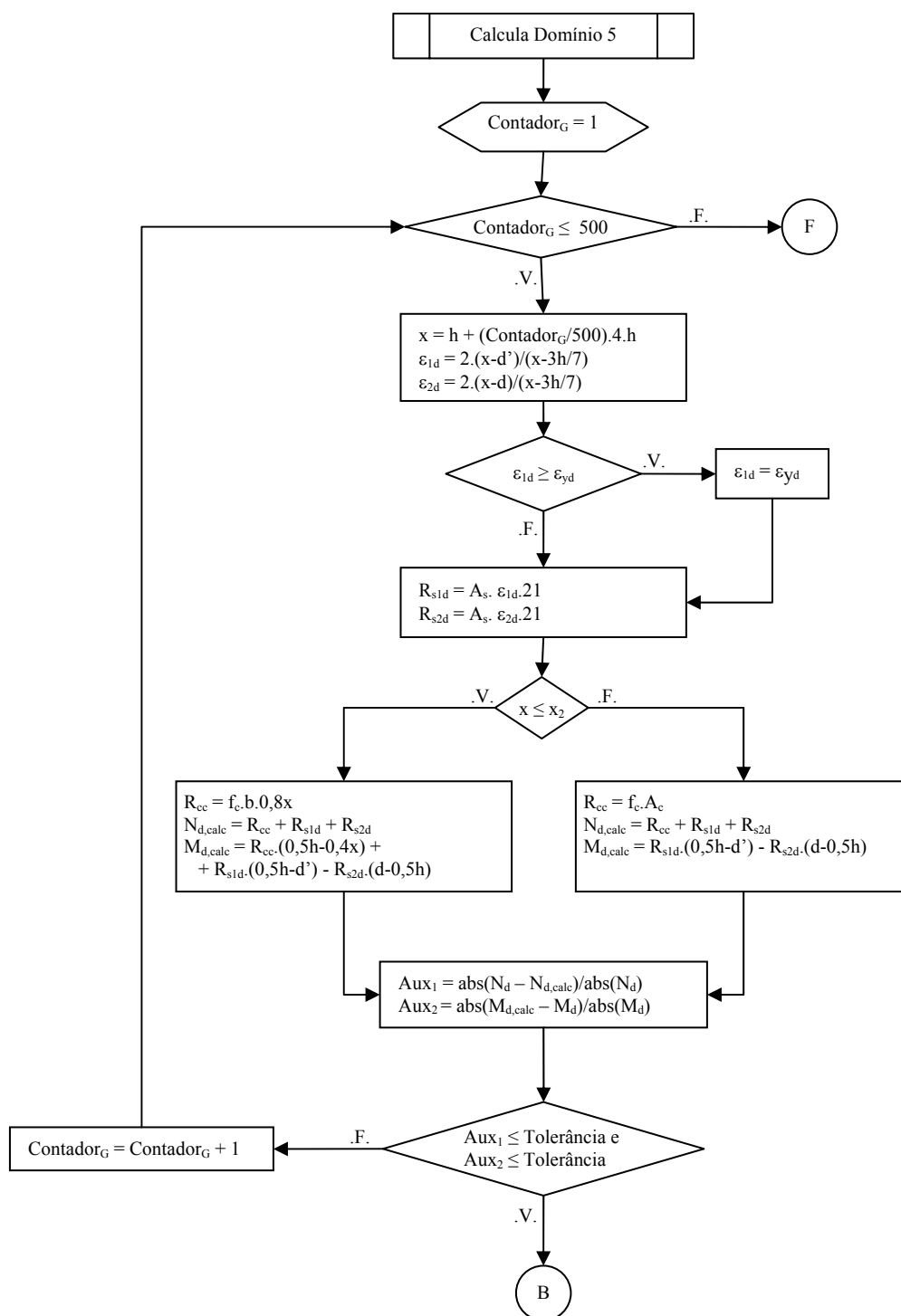


FIGURA 3.21 – Algoritmo computacional para dimensionamento de seções retangulares de concreto com armadura simétrica sujeitas a esforços de flexão normal composta (Parte 7/7).

3.3.3 Prescrições complementares da NBR 6118

Para seções não essencialmente comprimidas (domínios 1 a 4), as prescrições complementares da NBR 6118 são as mesmas para o caso da flexão normal simples (item 3.2.2).

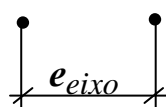
No caso de seções essencialmente comprimidas, a NBR 6118 apresenta as prescrições descritas a seguir.

Armadura Longitudinal

- $10 \text{ mm} \leq \phi_{\text{barra longitudinal}} \leq (1/8)$ da menor dimensão da seção transversal.
- A área mínima de armadura A_s deverá ser:

$$A_{s,\min} = 0,15 \frac{N_d}{f_{y,d}} \geq 0,004 A_c \quad \text{onde } A_c = \text{área da seção real.}$$

- A área máxima de armadura A_s deverá ser sempre $\leq 0,08 (A_c)_{\text{real}}$ mesmo nas regiões de emenda por traspasse.
- Distribuição transversal da armadura longitudinal:
 - Em seções poligonais, deve existir pelo menos uma barra em cada vértice; em seções circulares, no mínimo seis barras distribuídas ao longo do perímetro;
 - O espaçamento mínimo livre entre as faces das barras longitudinais, medido no plano da seção transversal, deve ser igual ou superior ao maior dos seguintes valores: 20 mm, diâmetro da barra ou do feixe ou da luva e 1,2 vez o diâmetro máximo do agregado;
 - O espaçamento máximo entre eixos das barras longitudinais, ou de centros de feixes de barras, deve ser menor ou igual a duas vezes a menor dimensão (b) da seção no trecho considerado, sem exceder 40 cm.



$$e_{eixo} \leq \begin{cases} 40 \text{ cm} \\ 2 b \end{cases}$$

Armadura Transversal

A armadura transversal de pilares, constituída por estribos, deve ser colocada em toda a altura do pilar, sendo obrigatória sua colocação na região de cruzamento com vigas e lajes.

- $\phi_{estribo} \geq \begin{cases} 5 \text{ mm} \\ \frac{1}{4} \phi_{barra \text{ longitudinal}} \end{cases}$
- O espaçamento longitudinal (s) entre estribos, medido na direção do eixo do pilar, para garantir o posicionamento e impedir a flambagem das barras longitudinais, deve ser igual ou inferior ao menor dos seguintes valores:
 - $s \leq \begin{cases} 20 \text{ cm;} \\ \text{menor dimensão da seção;} \\ 12 \phi_{long} \text{ para CA 50, } 24 \phi_{long} \text{ para CA 25} \end{cases}$
- Os estribos garantem contra a flambagem as barras longitudinais situadas em seus cantos e as por eles abrangidas, situadas no máximo à distância de $20 \phi_{estribo}$ do canto, se nesse trecho de comprimento $20 \phi_{estribo}$ não houver mais de duas barras, não contando a do canto. Quando houver mais de duas barras nesse trecho ou barra fora dele, deve haver estribos suplementares ou grampos.

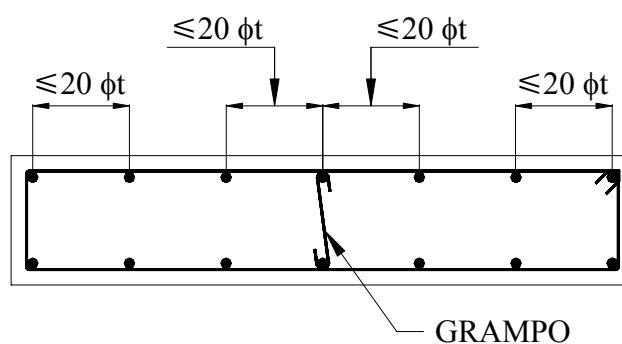


FIGURA 3.22 - Grampo

3.4 Cisalhamento de seções retangulares

3.4.1 Tensões de Cisalhamento

Considere-se apenas por simplicidade, uma seção retangular submetida à flexão normal simples e inicialmente com o concreto ainda não fissurado, ou seja estágio I (FIGURA 3.23). Conforme as hipóteses da Resistência dos Materiais, o diagrama de tensões de cisalhamento (ou tangenciais) e o diagrama de tensões normais estão indicados respectivamente nas FIGURA 3.23b e FIGURA 3.23c. Na FIGURA 3.23b, τ representa a tensão de cisalhamento para pontos distantes y e da linha neutra LN dada por:

$$\tau = V \cdot Q / (b_w \cdot I) \quad (3.64)$$

onde V é a força cortante atuante na seção transversal, Q e I são, respectivamente, o momento estático da área A_1 acima de y e o momento de inércia da seção, ambos em relação à linha neutra LN.

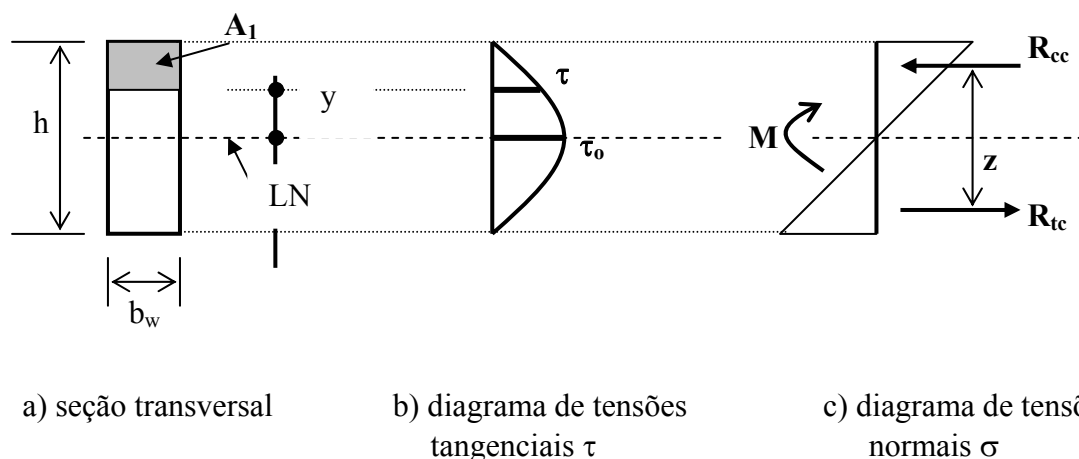


FIGURA 3.23 - Viga de seção retangular submetida à flexão normal simples (estádio I)

O valor de τ atinge o seu valor máximo τ_0 , quando $y = 0$, ou seja, na linha neutra. Nessas condições, para um diagrama linear de tensões normais, conforme a FIGURA 3.23c, a relação (I/Q_0) representa o braço de alavanca z , entre as resultantes de compressão R_{cc} e de tração R_{tc} no concreto, podendo a equação (3.64) ser reescrita como:

$$\tau_0 = V \cdot Q_0 / (b_w \cdot I) = V / b_w \cdot (I/Q_0) = V / (b_w \cdot z) \quad (3.65)$$

As equações (3.64) e (3.65) foram obtidas com as hipóteses da Resistência dos Materiais considerando-se material homogêneo, ou seja, concreto não fissurado, sendo portanto só aplicáveis no estágio I, situação de ocorrência pouco comum para peças de concreto armado.

Considerando-se agora o concreto já fissurado, funcionando no estágio II, as equações (3.64) e (3.65) serão válidas desde que se despreze a resistência do concreto tracionado abaixo da LN, considere distribuição linear de tensões de compressão no concreto e, além disso, que a armadura de tração A_s seja homogeneizada para uma nova área equivalente em concreto igual a $(\alpha_e A_s)$, com α_e igual a relação entre os módulos de elasticidade do aço e do concreto. Nesse caso, ainda conforme as hipóteses da Resistência dos Materiais para materiais compostos, a determinação da LN, que coincide com a profundidade da área comprimida, é obtida pela igualdade entre os momentos estáticos dessa área e da área tracionada $(\alpha_e A_s)$ em relação à LN.

O dimensionamento no estado limite último para flexão normal simples, estágio III, pressupõe diagrama parabólico (simplificado em retangular) de tensões de compressão no concreto oriundas do momento fletor de cálculo M_d , de modo que não valem mais as equações (3.64) e (3.65), caso se pretenda obter com as mesmas o braço de alavanca z , como relação entre I e Q_o . No entanto a equação (3.65) continua válida desde que se adote para z no estado limite último, o mesmo valor já obtido no dimensionamento à flexão, ou seja:

$$z = d - 0,4.x = K_z \cdot d \quad (3.66)$$

No intuito de simplificar o cálculo adota-se um valor médio para K_z conforme a **NBR 6118** (2003) igual a **0,9**, ficando portanto a tensão máxima de cisalhamento, equação (3.65), agora na situação de cálculo, dada por:

$$\tau_{od} = V_d / (b_w \cdot 0,9.d) = 1,11 \cdot V_d / (b_w \cdot d) \quad (3.67)$$

onde τ_{od} e V_d são, respectivamente a tensão máxima de cisalhamento e a força cortante de cálculo.

Define-se a partir da equação (3.67) uma tensão convencional de cisalhamento de cálculo, dada por:

$$\tau_{wd} = V_d / (b_w \cdot d) \quad (3.68)$$

que não tem significado físico, apenas servirá de referência para verificações futuras da resistência da peça ao cisalhamento. Já a tensão dada pela equação (3.67) tem significado físico, representando a máxima tensão de cisalhamento na seção transversal, que pode ser reescrita conforme (3.68) como:

$$\tau_{od} = 1,11 \cdot \tau_{wd} \quad (3.69)$$

3.4.2 Hipóteses Básicas

- As prescrições que se seguem aplicam-se a elementos lineares, armados ou protendidos, submetidos à força cortante, eventualmente combinados com outros esforços.
- Não se aplicam, portanto, a elementos de volume (ex.: bloco de fundação), lajes (tratada separadamente), vigas parede e consolos curtos.

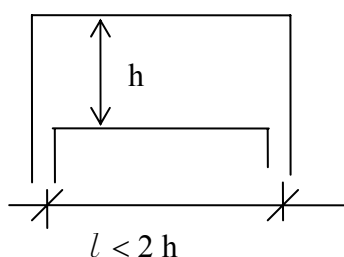


FIGURA 3.24 – Viga-parede isostática

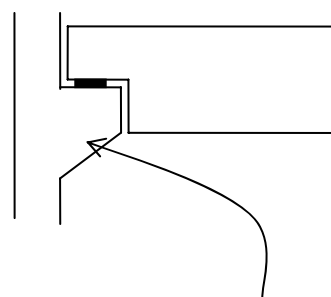


FIGURA 3.25 – Consolo curto

As condições fixadas pela NBR-6118 (2007) admitem dois modelos de cálculo em função da inclinação das “bielas” de compressão, conforme a FIGURA 3.26, que pressupõem a analogia com o modelo em treliça de banzos paralelos, associados a mecanismos resistentes complementares desenvolvidos no interior do elemento estrutural, representado por uma componente adicional denominada V_c .

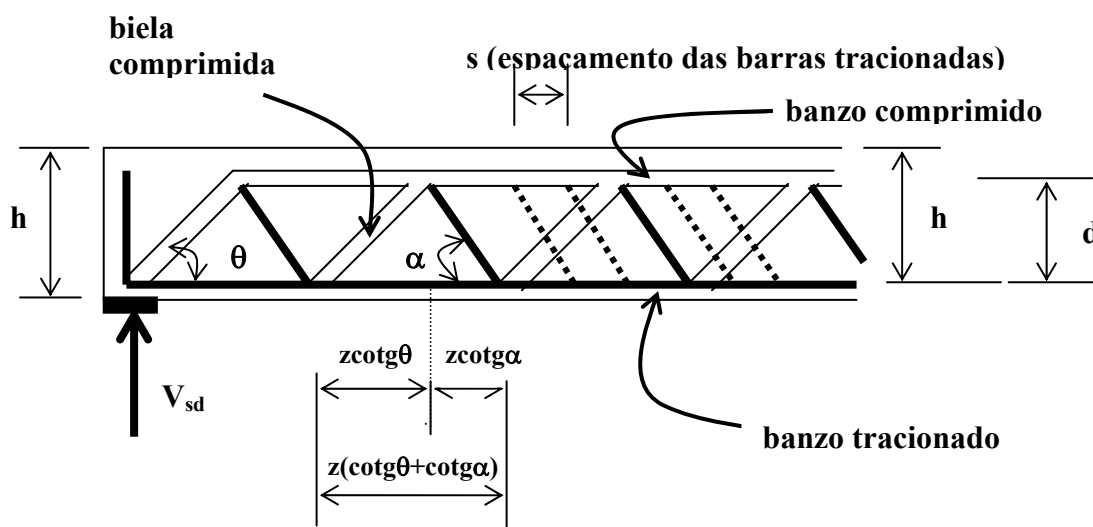


FIGURA 3.26 - Modelo de funcionamento de viga como treliça

3.4.3 Prescrições gerais da NBR 6118 (2007)

Vigas submetidas à força cortante devem conter armadura transversal mínima $A_{sw,min}$ constituída por estribos com taxa geométrica dada por:

$$\rho_{sw} = (A_{sw,min} / b_w \cdot s \cdot \text{sen}\alpha) > 0,2 \cdot f_{ctm} / f_{yw} \quad (3.70)$$

onde b_w é a largura média da alma, s é o espaçamento longitudinal dos estribos inclinados de um ângulo α , f_{ctm} é a resistência média à tração do concreto e f_{yw} é resistência ao escoamento do aço da armadura transversal.

A resistência média à tração f_{ctm} é dada no item 8.2.5 da NBR 6118 (2007). A resistência à tração indireta $f_{ct,sp}$ e a resistência à tração na flexão $f_{ct,f}$ devem ser obtidas em ensaios realizados de acordo as normas **NBR 7222** e **NBR 12142**, respectivamente.

A resistência à tração direta f_{ct} pode ser dada por:

$$f_{ct} = 0,9 \cdot f_{ct,sp} = 0,7 \cdot f_{ct,f} \quad (3.71)$$

ou na falta de ensaios para obtenção de $f_{ct,sp}$ e $f_{ct,f}$, pode ser avaliado o seu valor médio ou característico por meio das seguintes equações:

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot f_{ck}^{(2/3)} \quad (3.72)$$

$$f_{ctk,inf} = 0,7 \cdot f_{ctm} \quad (3.73)$$

$$f_{ctk,sup} = 1,3 \cdot f_{ctm} \quad (3.74)$$

onde f_{ck} e f_{ctm} são expressos em **MPa**.

A resistência ao escoamento do aço da armadura transversal A_{sw} é dada por:

$$f_{ywk} = f_{yk} \quad \Rightarrow \quad \text{estribos} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \leq 500 \text{ MPa} \quad (3.75)$$

$$f_{ywk} = 0,7 \cdot f_{yk} \quad \Rightarrow \quad \text{barras dobradas} \quad (3.76)$$

$$f_{ywd} = f_{yd} \quad \Rightarrow \quad \text{estribos} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \leq 435 \text{ MPa} \quad (3.77)$$

$$f_{ywd} = 0,7 \cdot f_{yd} \quad \Rightarrow \quad \text{barras dobradas} \quad (3.78)$$

A partir das equações (3.70) e (3.72) para espaçamento $s = 100 \text{ cm}$ e estribos verticais, $\alpha = 90^\circ$, obtém-se:

$$A_{sw,min} \geq (b_w \cdot 100 \cdot 1) \cdot (0,2 \cdot 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3}) / 500 = \rho_{w,min} \cdot b_w \quad (3.79)$$

onde $\rho_{w,min}$ é a taxa mínima de armadura transversal, constituída por estribos, dada por:

$$\rho_{w,min} = 0,012 \cdot f_{ck}^{(2/3)} \quad (3.80)$$

A partir da equação (3.80), com f_{ck} expresso em **MPa** pode-se tabelar o valor de $\rho_{w,min}$:

TABELA 3.6 – Valores de $\rho_{w,min}$

f_{ck} (MPa)	$\rho_{w,min}$
15	0,073
20	0,088
25	0,103
30	0,116
35	0,128

3.4.4 Verificação do estado limite último

Cálculo da resistência

A resistência de uma viga, numa determinada seção transversal, deve ser considerada satisfatória quando verificadas simultaneamente as ruínas por esmagamento da biela comprimida – equação (3.81) – e a ruptura da armadura transversal tracionada – equação (3.82) –, traduzidas pelas seguintes condições:

$$V_{Sd} \leq V_{Rd2} \quad (3.81)$$

$$V_{Sd} \leq V_{Rd3} = V_c + V_{sw} \quad (3.82)$$

onde

- V_{Rd2} é a força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína das diagonais comprimidas, obtida de acordo o modelo de cálculo I ou II descritos adiante.
- $V_{Rd3} = V_c + V_{sw}$ é a força cortante de cálculo, relativa à ruína por tração diagonal; V_c é a parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares ao de treliça e V_{sw} é a parcela resistida pela armadura transversal, ambas obtidas de acordo o modelo de cálculo I ou II descritos adiante.

Modelo de cálculo I

O modelo de cálculo I admite diagonais de compressão inclinadas de θ igual a 45° em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural e admite ainda que a parcela complementar V_c tenha valor constante, independente de V_{Sd} .

Verificação da compressão diagonal do concreto

$$V_{Rd2} = 0,27 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d = \tau_{wd2} \cdot b_w \cdot d \quad (3.83)$$

onde

$$\alpha_{v2} = (1 - f_{ck} / 250) \quad (f_{ck} \text{ em MPa}) \quad (3.84)$$

$$\tau_{wd2} = 0,27 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \quad (3.85)$$

Vale frisar que embora para o cálculo de α_{v2} a unidade utilizada seja o **MPa**, para a obtenção do esforço V_{Rd2} em **kN**, deve-se transformar o τ_{wd2} para **kN/cm²**.

Analogamente a tensão convencional de cisalhamento τ_{wd} , equação (3.68), τ_{wd2} representa a tensão máxima convencional de cisalhamento, de tal forma que para se verificar a resistência da diagonal comprimida, equação (3.81), escrita em termos de esforços, basta atender à seguinte expressão, escrita em termos de valores convencionais de tensão de cisalhamento:

$$\tau_{wd} \leq \tau_{wd2} \quad (3.86)$$

TABELA 3.7 – Valores de τ_{wd2} (Modelo I)

f_{ck} (MPa)	τ_{wd2} (MPa)
15	$0,181 \cdot f_{ck} = 2,72$
20	$0,177 \cdot f_{ck} = 3,55$
25	$0,174 \cdot f_{ck} = 4,34$
30	$0,170 \cdot f_{ck} = 5,09$
35	$0,166 f_{ck} = 5,81$

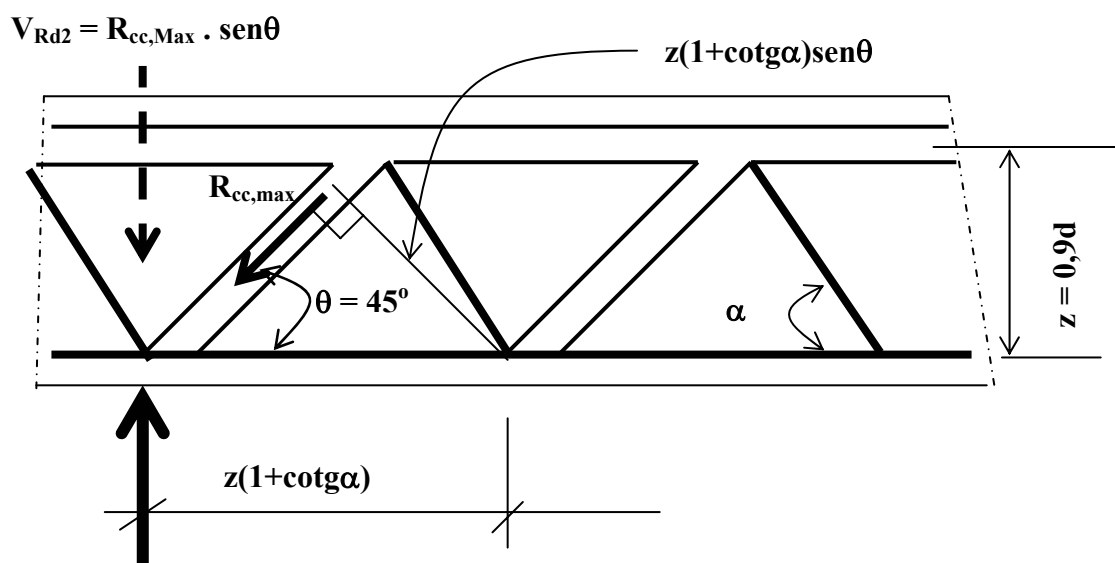


FIGURA 3.27 - Diagonal comprimida do concreto

Da FIGURA 3.27 nota-se que a resistência máxima na diagonal comprimida, $R_{cc,max}$, pode ser dada por:

$$R_{cc,max} = \sigma_{cc,max} \cdot b_w \cdot z \cdot (1 + \cotg\alpha) \cdot \text{sen}\theta \quad (3.87)$$

onde $\sigma_{cc,max}$ é a tensão normal máxima na diagonal comprimida de concreto.

$$V_{sd} = V_{Rd2} = R_{cc,max} \cdot \text{sen}\theta = \sigma_{cc,max} \cdot b_w \cdot 0,9 \cdot d \cdot (1 + \cotg\alpha) \cdot \text{sen}^2\theta \quad (3.88)$$

De (3.83) e (3.88) com $\theta = 45^\circ$, obtém-se:

$$\tau_{wd2} \cdot (b_w \cdot d) = \sigma_{cc,max} \cdot 0,45 \cdot (1 + \cotg\alpha) \cdot (b_w \cdot d) \quad (3.89)$$

$$\sigma_{cc,max} = \tau_{wd2} / 0,45 \cdot (1 + \cotg\alpha) \quad (3.90)$$

$$\sigma_{cc,max} = \begin{cases} 2,22 \cdot \tau_{wd2} & \text{para } \alpha = 90^\circ \\ 1,11 \cdot \tau_{wd2} & \text{para } \alpha = 45^\circ \end{cases} \quad (3.91)$$

com os valores de τ_{wd2} dados na TABELA 3.7, obtém-se os valores da tensão máxima de compressão na diagonal comprimida para $\alpha = 90^\circ$ e $\alpha = 45^\circ$.

Dividindo-se a equação (3.88) por $(b_w \cdot d)$ chega-se ao valor da tensão convencional de cisalhamento τ_{wd2} . A tensão máxima de compressão $\sigma_{cc,max}$ na biela de concreto quando tracionada transversalmente é igual a $0,6 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd}$. Para $\theta = 45^\circ$ e $\alpha = 90^\circ$ chega-se a expressão (3.85) dada pela NBR 6118.

Cálculo da armadura transversal

Da equação (3.82) $V_{Rd3} = V_c + V_{sw}$, a primeira parcela correspondente à força cortante resistente absorvida por mecanismos complementares ao de treliça, que é dada no modelo I por:

- $V_c = 0$ nos elementos estruturais tracionados quando a LN se situa fora da seção;
- $V_c = V_{c0}$ na flexão normal simples e na flexo-tração com a LN cortando a seção;
- $V_c = V_{c0} \cdot (1 + M_0 / M_{Sd,max}) \leq 2 \cdot V_{c0}$ na flexo-compressão, sendo M_0 o valor do momento fletor que anula a tensão normal de compressão na borda da seção e $M_{Sd,max}$ o momento fletor de cálculo.

com

$$V_{c0} = 0,6 \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot d = \tau_{c0} \cdot b_w \cdot d \quad (3.92)$$

para

$$f_{ctd} = f_{ctk,inf} / \gamma_c \quad (3.93)$$

onde $f_{ctk,inf}$ é dada na eq. (3.73) e tomando-se para o coeficiente de ponderação do concreto $\gamma_c=1,4$, a tensão convencional de cisalhamento correspondente aos mecanismos complementares, τ_{c0} , pode ser dada pela seguinte expressão:

$$\tau_{c0}^* = 0,6 \cdot f_{ctd} = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} \cdot / 1,4 \quad (\text{MPa}) \quad (3.94)$$

com

$$\tau_{c0} = \tau_{c0}^* / 10 = 0,009 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad (\text{kN/cm}^2) \quad (3.95)$$

onde τ_{c0}^* e τ_{c0} representam a mesma tensão convencional expressa em **MPa** e **kN/cm²**, respectivamente. Na equação (3.95) deve-se usar f_{ck} em **MPa**, para se obter τ_{c0} em **kN/cm²**.

TABELA 3.8 – Valores de τ_{c0}

f_{ck} (MPa)	τ_{c0} (kN/cm ²)
15	0,0547
20	0,0663
25	0,0769
30	0,0869
35	0,0963

Da equação (3.82) a parcela resistida pela armadura transversal tracionada V_{sw} é determinada conforme o esquema mostrado na fig. 5.6.

$$V_{Rd3} = V_c + V_{sw} = V_c + R_{St} \operatorname{sen}\alpha$$

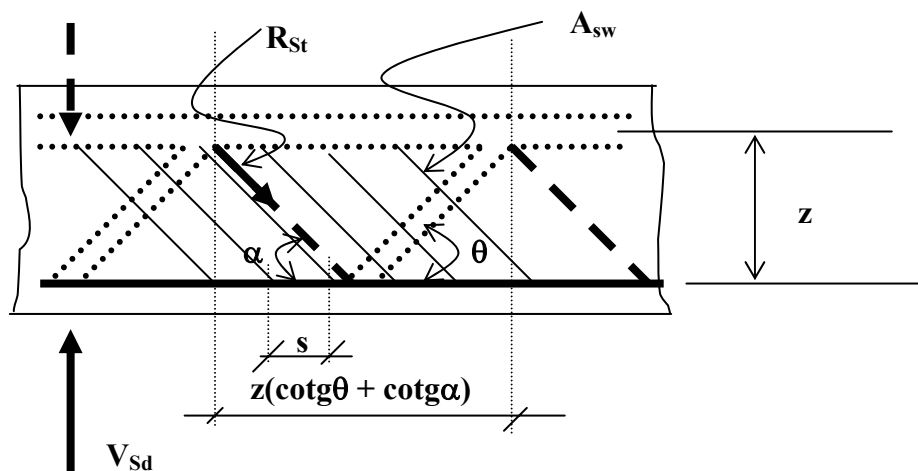


FIGURA 3.28 - Diagonal tracionada da armadura transversal

Para $\theta = 45^\circ$ estabelecido no modelo I, obtém-se:

$$V_{sw} = R_{St} \cdot \operatorname{sen}\alpha = (A_{sw} / s) \cdot z \cdot (1 + \operatorname{cotg}\alpha) \cdot f_{ywd} \cdot \operatorname{sen}\alpha \quad (3.96)$$

De (3.96) com $z=0,9.d$, considerando-se estribos verticais ($\alpha = 90^\circ$) para vigas submetidas à flexão normal simples ($V_c = V_{c0}$), a equação (3.82), $V_{Sd} \leq V_c + V_{sw}$, dividida por $(b_w \cdot d)$ para transformar esforços em tensões convencionais de cisalhamento fica:

$$\tau_{wd} \leq \tau_{c0} + (A_{sw} / s) \cdot 0,9.d \cdot 43,5 / (b_w \cdot d) \quad (3.97)$$

com

$$(A_{sw} / s) \geq [(\tau_{wd} - \tau_{c0}) / 39,15] \cdot b_w = \rho_w^* \cdot b_w \quad (\text{cm}^2 / \text{cm}) \quad (3.98)$$

Para $s=100 \text{ cm}$ a taxa ρ_w^* se transforma na taxa ρ_w dada por :

$$\rho_w = 100 \cdot \rho_w^* = 100 \cdot (\tau_{wd} - \tau_{c0}) / 39,15 \quad (3.99)$$

e finalmente

$$A_{sw} \geq \rho_w \cdot b_w \quad (\text{cm}^2 / \text{m}) \quad (3.100)$$

Fazendo na equação (3.99) $\rho_w = \rho_{w,\min} = 0,012 \cdot f_{ck}^{2/3}$ obtém-se um valor mínimo de τ_{wd} , para o modelo I, abaixo do qual a colocação da armadura mínima $A_{sw,\min} = \rho_{w,\min} \cdot b_w$,

absorve a totalidade do esforço de cisalhamento. Assim substituindo-se o valor de τ_{c0} pela equação (3.95), obtém-se:

$$\tau_{wd,min} = (39,15/100) \cdot 0,012 \cdot f_{ck}^{2/3} + 0,009 \cdot f_{ck}^{2/3} = 0,0137 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad (3.101)$$

TABELA 3.9 – Valores de $\tau_{wd,min}$ para o Modelo I

F_{ck} (MPa)	$\tau_{wd,min}$ (kN/cm ²)
15	0,083
20	0,101
25	0,117
30	0,132

Modelo de cálculo II

O modelo de cálculo II admite diagonais de compressão inclinadas de θ , em relação ao eixo longitudinal da peça, variando livremente entre 30° e 45°. Admite ainda que a parcela complementar V_c sofra redução com o aumento de V_{sd} .

Verificação da compressão diagonal do concreto

$$V_{Rd2} = 0,54 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \cdot \text{sen}^2\theta \cdot (\text{cotg}\alpha + \text{cotg}\theta) = \tau_{wd2} \cdot b_w \cdot d \quad (3.102)$$

Com α_{v2} dado na equação (3.84) e τ_{wd2} dado por:

$$\tau_{wd2} = 0,54 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot \text{sen}^2\theta \cdot (\text{cotg}\alpha + \text{cotg}\theta) \quad (3.103)$$

Para estribos verticais, ou seja $\alpha = 90^\circ$, os valores de τ_{wd2} são dados na TABELA 3.10.

TABELA 3.10 – Valores de τ_{wd2} (Modelo II)

f_{ck} (MPa)	τ_{wd2} (MPa)	
	$\theta = 30^\circ$	$\theta = 45^\circ$
15	$0,157 \cdot f_{ck} = 2,35$	$0,181 \cdot f_{ck} = 2,72$
20	$0,154 \cdot f_{ck} = 3,07$	$0,177 \cdot f_{ck} = 3,55$
25	$0,150 \cdot f_{ck} = 3,76$	$0,174 \cdot f_{ck} = 4,34$
30	$0,147 \cdot f_{ck} = 4,41$	$0,170 \cdot f_{ck} = 5,09$

Cálculo da armadura transversal

$$V_{Rd3} = V_c + V_{sw} \quad (3.104)$$

onde:

- $V_c = 0$ nos elementos estruturais tracionados quando a LN se situa fora da seção
- $V_c = V_{c1}$ na flexão normal simples e na flexo-tração com a LN cortando a seção
- $V_c = V_{c1} \cdot (1 + M_0 / M_{Sd,max}) < 2 \cdot V_{c1}$ na flexo-compressão, sendo M_0 o valor do momento fletor que anula a tensão normal de compressão na borda da seção e $M_{Sd,max}$ o momento fletor de cálculo.

Com

- $V_{c1} = V_{c0}$ quando $V_{Sd} \leq V_{c0}$
- $V_{c1} = 0$ quando $V_{Sd} = 0$, interpolando-se linearmente para valores intermediários

Definindo-se analogamente uma tensão convencional de cisalhamento proveniente de V_{c1} , tem-se:

$$\tau_{c1} = V_{c1} / (b_w \cdot d) \quad (3.105)$$

Os valores de V_{c1} , ou os correspondentes valores de τ_{c1} , equação (3.106), podem ser representados na FIGURA 3.29:

$$\tau_{c1} = \tau_{c0} \left[1 - (\tau_{wd} - \tau_{c0}) / (\tau_{wd2} - \tau_{c0}) \right] \quad (3.106)$$

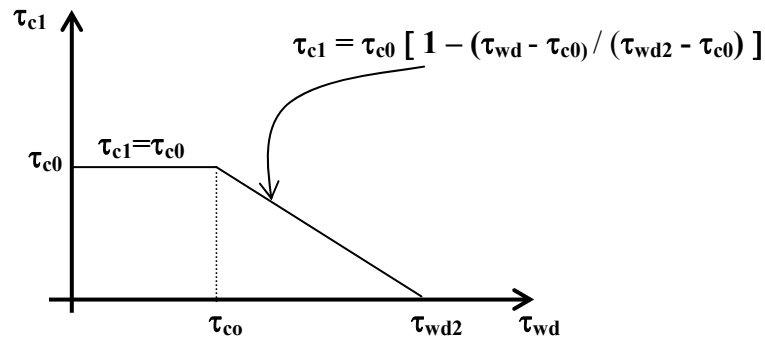


FIGURA 3.29 - Valores de τ_{c1}

A parcela de tração absorvida pela armadura transversal V_{sw} é dada por:

$$V_{sw} = (A_{sw} / s) \cdot z \cdot (\cotg\theta + \cotg\alpha) \cdot f_{ywd} \cdot \text{sen}\alpha \quad (3.107)$$

De (3.82), $V_{sd} \leq V_c + V_{sw}$, dividindo-se por $b_w \cdot d$, fazendo-se em (3.107) $z = 0,9 \cdot d$, $\alpha = 90^\circ$ e $s = 100 \text{ cm}$, obtém-se a equação para a armadura transversal A_{sw} .

$$A_{sw} \geq \rho_w \cdot b_w \quad (\text{cm}^2 / \text{m}) \quad (3.108)$$

$$\rho_w = 100 \cdot (\tau_{wd} - \tau_{c1}) / (39,15 \cdot \cotg\theta) \quad (3.109)$$

com τ_{c1} dado de acordo a FIGURA 3.29.

Deslocamento do diagrama de momentos fletores:

São mantidas as condições estabelecidas no modelo I, sendo o deslocamento do diagrama de momentos fletores no modelo II, dado por:

$$a_z = 0,5 \cdot d \cdot (\cotg\theta - \cotg\alpha) \quad (3.110)$$

onde

- $a_z \geq 0,5 \cdot d$, no caso geral;
- $a_z \geq 0,2 \cdot d$, para estribos inclinados de 45° .

3.4.5 Prescrições complementares da NBR 6118

- diâmetro da armadura transversal A_{sw} $\theta_t \geq 5 \text{ mm}$
 $\theta_t \leq b_w/10$
- espaçamento máximo dos estribos
para $\tau_{wd} \leq 0,67 \cdot \tau_{wd2}$ $s_{max} = 0,6 \cdot d \leq 30 \text{ cm}$
para $\tau_{wd} > 0,67 \cdot \tau_{wd2}$ $s_{max} = 0,3 \cdot d \leq 20 \text{ cm}$
- A armadura transversal A_{sw} pode ser constituída por estribos ou pela combinação de estribos e barras dobradas, entretanto essas últimas não devem suportar mais do que 60% do esforço total resistido pela armadura.

4

APRESENTAÇÃO DOS PROGRAMAS

4.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados três programas computacionais com acesso via web implementados para o dimensionamento e esboço do detalhamento de seções retangulares em concreto armado. O primeiro detalha peças submetidas à flexão normal simples, o segundo para peças submetidas à flexão normal composta e, por último, peças solicitadas ao cisalhamento.

Todas as ferramentas acima citadas foram desenvolvidas utilizando-se a linguagem de programação JAVA e foram compiladas na forma de *Applet* para possibilitar o acesso pela Internet. Um dos fatores que motivou a escolha desta linguagem como base para a implementação dos programas foi a sua **portabilidade**, ou seja, os programas podem ser executados em qualquer computador independentemente de qual sistema operacional esteja instalado. Para isso, os programas compilados em JAVA são executados por uma máquina virtual (JVM - *Java Virtual Machine*). Caso o computador não tenha o JVM instalado, é necessário instalá-lo antes de executar os programas. O JVM pode ser baixado diretamente no sítio da *Sun* gratuitamente: http://www.java.com/pt_BR/

4.2 Programa para Dimensionamento de Seções Retangulares Solicitadas à Flexão Normal Simples

O programa para dimensionamento de seções retangulares de concreto armado solicitadas à flexão normal simples é voltado para o auxílio do ensino aos alunos de engenharia civil e arquitetura durante os primeiros contatos com a disciplina de Concreto Armado. A FIGURA 4.1 apresenta a tela inicial do programa. O endereço para acesso ao programa é: <http://concweb.lcc.ufmg.br/flexaosimples/>

NBR 6118 Flexão Simples - Dimensionamento

Seção Transversal da Viga

Moment M

AS'

AS

d'

d

b

Dados Geométricos

$b =$ cm $h =$ cm

$d =$ cm $d' =$ cm

Concreto

$f_{ck} =$ MPa $\gamma_c =$

Aço

Aço tipo: CA-25 CA-50 CA-60

$\gamma_s =$

Carregamento

$M =$ kN.cm $\gamma_f =$

Resultados do Dimensionamento

$M_d =$ kN.cm $f_{yd} =$ kN/cm² $f_c =$ kN/cm²

$K =$ $K_{lim} =$

Área de Armadura

$A_s =$ cm²

$A_{s\prime} =$ cm²

Memória de Cálculo

Barras de Aço Adotadas

Armadura tracionada: Diam. = mm

Armadura comprimida: Diam. = mm

Estribo: Diam. = mm

Cobrimento da armadura: $c =$ cm

FIGURA 4.1 - *Applet* para o dimensionamento de seções retangulares em concreto armado solicitadas à flexão normal simples

Para efetuar algum dimensionamento, devem-se fornecer os dados geométricos da seção, características do concreto e do aço, o momento fletor solicitante e os coeficientes de majoração da carga e de minoração da resistência do concreto e do aço. Os momentos fletores podem ser positivos ou negativos.

Como exemplo, considere uma viga de concreto armado com seção transversal de 20 cm de largura e 40 cm de altura tendo uma seção solicitada por um momento fletor 14000 kN.cm. Será adotado o concreto de resistência característica à compressão de 25 MPa e o aço da armadura do tipo CA-50. Inicialmente, será considerada uma altura útil d igual a 35 cm. Esta altura irá depender do diâmetro das barras de aço adotadas, da sua

disposição e da altura de cobrimento. Na etapa de esboço do detalhamento da viga o programa irá calcular a altura útil de acordo com o detalhamento adotado para comparação com a altura útil adotada inicialmente.

Após inserir os dados no programa, deve-se pressionar o botão EXECUTAR para que o dimensionamento seja realizado. A entrada de dados com o resultado do dimensionamento no programa está mostrada na FIGURA 4.2. Como resultado, são apresentadas as principais informações, como as áreas de armadura tracionada A_s e comprimida A'_s bem como um resumo dos cálculos efetuados pelo programa no campo Memória de Cálculo. Neste exemplo, obteve-se a área de aço tracionada $A_s = 15,68 \text{ cm}^2$ e área de aço comprimida $A'_s = 5,90 \text{ cm}^2$.

ConcWeb - Flexão Simples - Windows Internet Explorer

http://concweb.kc.ufmg.br/flexaosimples/

File Edit View Favorites Tools Help

Favorites ConcWeb - Flexão Simples

NBR 6118 Flexão Simples - Dimensionamento

Seção Transversal da Viga

Dados Geométricos

b = 20 cm h = 40 cm
d = 35 cm d' = 5 cm

Concreto

f_{ck} = 25 MPa γ_c = 1,4

Aço

Aço tipo: CA-25 CA-50 CA-60

γ_s = 1,15

Carregamento

M = 14000 KN.cm γ_f = 1,4

Resultados do Dimensionamento

M_d = 19600,00 KN.cm f_{yd} = 43,48 KN/cm² f_c = 1,52 KN/cm²

K = 0,527 K_{lim} = 0,320

Área de Armadura

A_s = 15,68 cm²
A_{s'} = 5,90 cm²

Memória de Cálculo

- M_d = M * γ_f = 19600,00 KN.cm
- f_{yd} = f_y / γ_s = 43,48 KN/cm²
- f_c = 0,85 * f_{ck} / γ_c = 1,52 KN/cm²
- k = M_d / f_c * b * d² = 0,527
- Valores para K limite:
k_{lim} = 0,320, para f_{ck} menor ou igual a 35 Mpa
k_{lim} = 0,269, para f_{ck} maior que 35 Mpa
- Como k = 0,527 é maior que k_{lim} = 0,320,
Haverá Armadura Dupla!

Barras de Aço Adotadas

Armadura tracionada: Diam. = mm
Armadura comprimida: Diam. = mm
Estribo: Diam. = mm
Cobrimento da armadura: c = cm

FIGURA 4.2 – Exemplo de dimensionamento de uma seção solicitada à flexão normal simples.

Para prosseguir ao detalhamento da seção da viga, devem-se fornecer os diâmetros das barras de aço longitudinal a serem adotadas para resistir aos esforços de flexão. O diâmetro do estribo e o cobrimento da armadura são necessários para o cálculo da altura útil real bem como para o esboço do detalhamento da seção.

Neste exemplo, considere que sejam adotadas barras de aço tracionadas de 20 mm de diâmetro, barras comprimidas de 16 mm, estribos de 6,3 mm e espessura de cobrimento de 3 cm. Após inserir esses dados, deve-se pressionar o botão VISUALIZAR

RESULTADOS para que seja apresentada, em 3D, uma parte da viga incluindo a seção analisada com a armadura detalhada, conforme ilustrado na FIGURA 4.3.

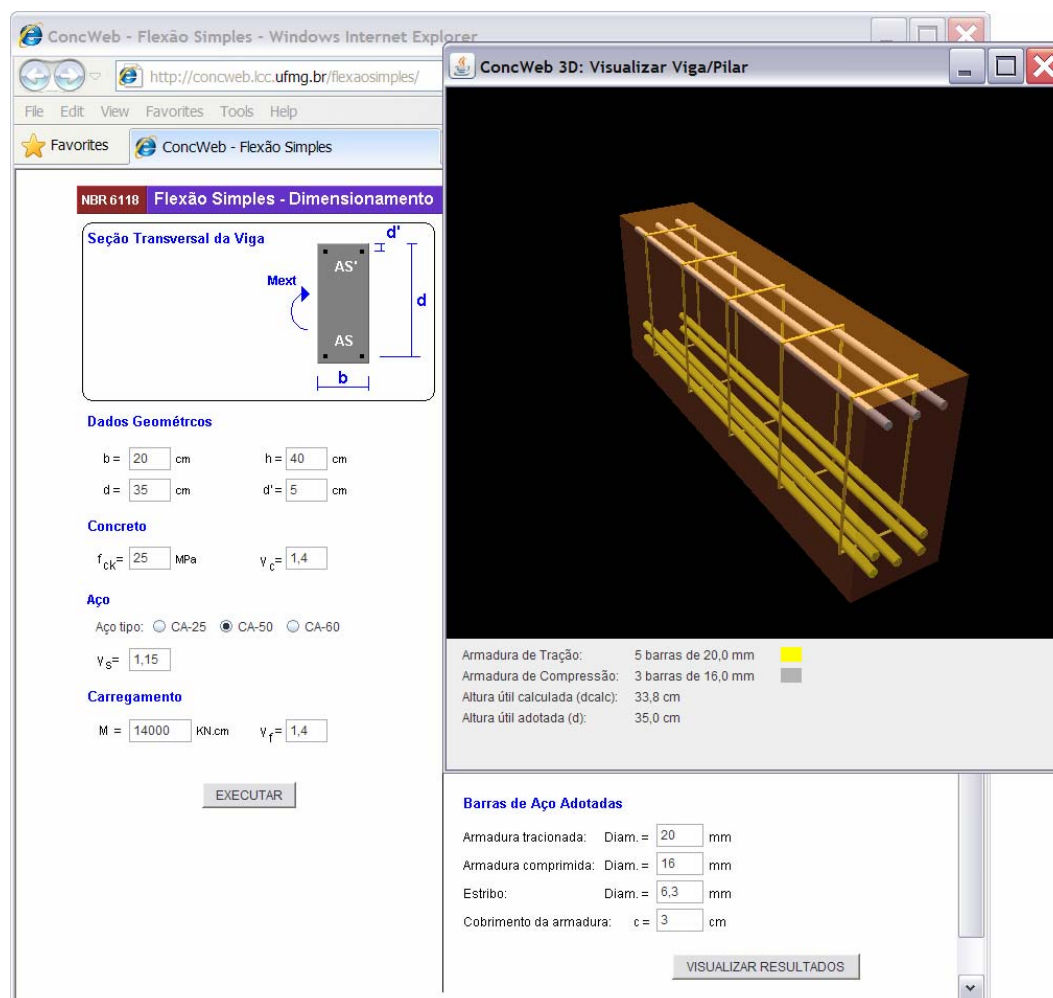


FIGURA 4.3 – Apresentação do detalhamento da seção da viga em 3D.

Na janela de visualização da viga, são apresentadas algumas informações como a quantidade e o diâmetro das barras de aço adotadas e a altura útil calculada e a adotada. A quantidade de barras é calculada com base nas áreas de aço obtidas (As, As' ou áreas mínimas). A informação da altura útil calculada é importante para se comparar com aquela adotada inicialmente nos cálculos. Se a diferença entre as duas for maior que 5%, será exibida uma mensagem para adotar um novo valor de altura útil de modo a se ter um resultado coerente com o detalhamento adotado. Neste exemplo, a altura útil adotada foi de 35 cm e a altura útil calculada pelo programa foi de 33,8 cm. Para

corrigir a altura útil, deve-se sair da janela de visualização dos resultados e alterar o valor da altura útil d . Sempre após alterar qualquer dado de entrada no programa, deve-se pressionar o botão EXECUTAR. A FIGURA 4.4 ilustra o detalhamento da viga após a correção da altura útil adotada. Observe agora que, com a redução da altura útil d adotada, houve um acréscimo das áreas de aço tracionada e comprimida. Conseqüentemente houve um aumento do número de barras de aço na viga, gerando um novo valor de altura útil calculada.

The screenshot displays the 'Flexão Simples - Dimensionamento' window in a web browser. The interface is divided into several sections:

- Seção Transversal da Viga:** A diagram showing a rectangular cross-section with width b , total height h , and effective depth d . The reinforcement areas are labeled AS' (top) and AS (bottom).
- Dados Geométricos:** Input fields for $b = 20$ cm, $h = 40$ cm, $d = 33,8$ cm, and $d' = 5$ cm.
- Concreto:** Input fields for $f_{ck} = 25$ MPa and $\gamma_c = 1,4$.
- Aço:** Radio buttons for steel type (CA-25, CA-50, CA-60) and $\gamma_s = 1,15$.
- Carregamento:** Input fields for $M = 14000$ kN.cm and $\gamma_f = 1,4$.
- EXECUTAR:** A button to execute the calculation.
- Resultados do Dimens:** Calculated values: $M_d = 19600,00$ kN.cm, $K = 0,565$, $A_s = 16,23$ cm², and $A_{s'} = 6,79$ cm².
- Memória de Cálculo:** A list of calculation steps, including $M_d = M \cdot \gamma_f = 19600$, $f_{yd} = f_y / \gamma_s = 43,48$, $f_c = 0,85 \cdot f_{ck} / \gamma_c$, $k = M_d / f_c \cdot b \cdot d^2$, and the selection of reinforcement based on k limits.
- Barras de Aço Adotadas:** Selected reinforcement: Armadura tracionada: Diam. = 20 mm; Armadura comprimida: Diam. = 16 mm; Estribo: Diam. = 6,3 mm; Cobrimento da armadura: $c = 3$ cm.
- 3D Visualization:** A 3D model of the beam showing the reinforcement bars. A callout box provides details: Armadura de Tração: 6 barras de 20,0 mm; Armadura de Compressão: 4 barras de 16,0 mm; Altura útil calculada (falc): 33,4 cm; Altura útil adotada (d): 33,8 cm.
- VISUALIZAR RESULTADOS:** A button to view the results.

FIGURA 4.4 - Apresentação do detalhamento da viga após alteração do valor da altura útil (d).

A parte da viga apresentada na janela pode ser rotacionada para uma melhor visualização das barras de aço. Pressionando-se o botão do mouse sobre a janela de visualização da viga, consegue-se rotacioná-la e, ao se pressionar qualquer outra tecla, a viga será mostrada na posição inicial.

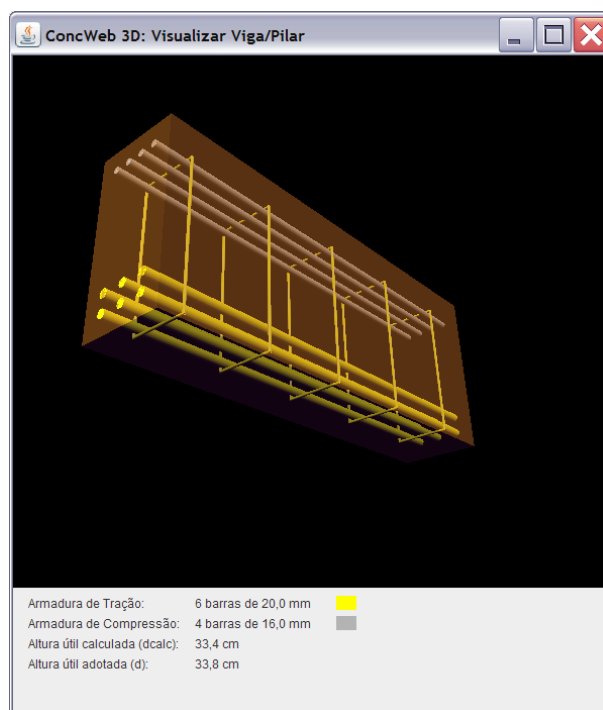


FIGURA 4.5 - Apresentação do detalhamento da viga rotacionada em 3D.

O programa para dimensionamento de peças solicitadas à flexão normal simples possibilita a entrada de momentos fletores positivos e negativos. Continuando o dimensionamento desta mesma viga, analisa-se a seguir uma seção na qual o momento fletor atuante é igual a $-14000 \text{ kN}\cdot\text{cm}$. O resultado obtido será o mesmo em relação às áreas de aço tracionadas e comprimidas; porém o detalhamento destas barras será o inverso em função do sinal do momento fletor, conforme ilustra a FIGURA 4.6.

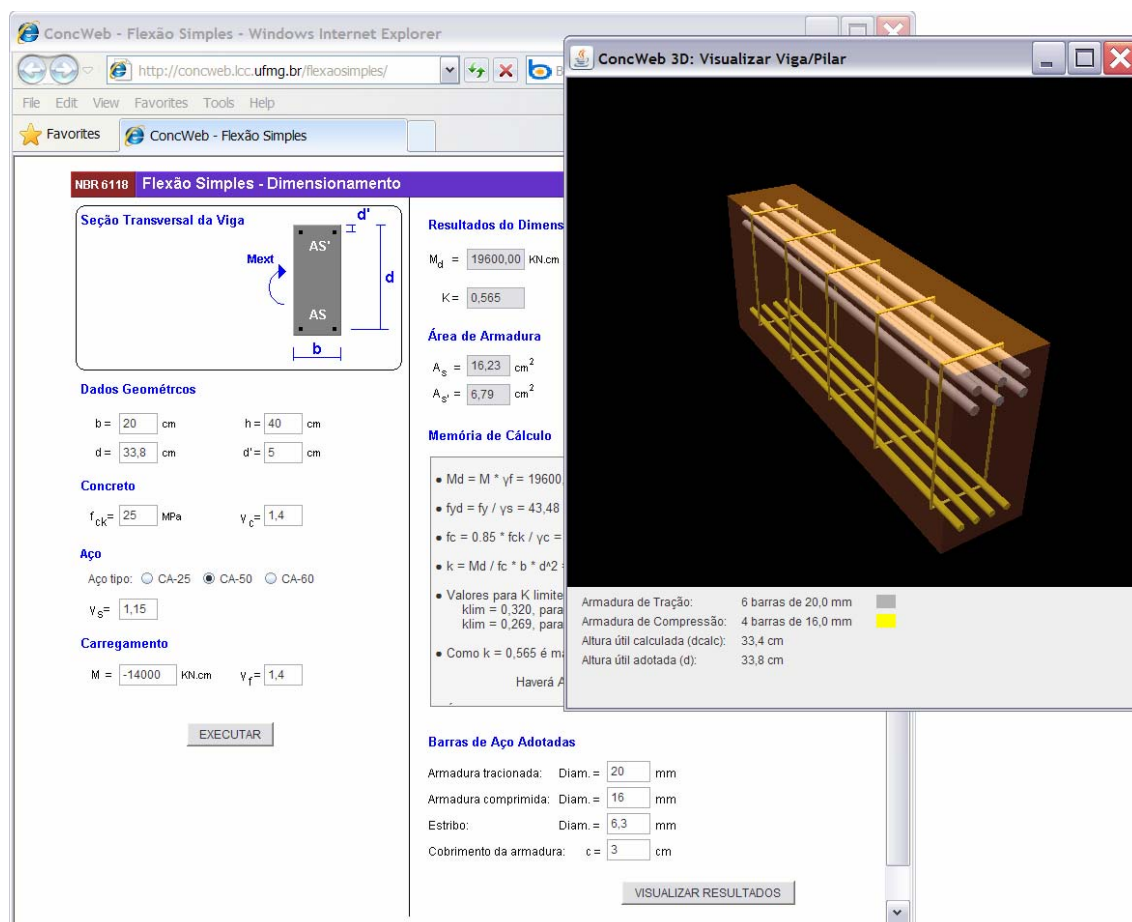


FIGURA 4.6 - Apresentação do detalhamento de uma seção de uma viga solicitada por momento fletor negativo.

Para efetuar qualquer alteração nos dados iniciais, deve-se sempre pressionar o botão EXECUTAR para que o programa efetue os novos cálculos.

4.3 Programa para Dimensionamento de Seções Retangulares Solicitadas à Flexão Normal Composta

O programa para dimensionamento de peças em concreto armado solicitadas à flexão normal composta pode ser usado para o dimensionamento de vigas e pilares. A FIGURA 4.7 apresenta a tela inicial do programa. O endereço para acesso ao programa é: <http://concweb.lcc.ufmg.br/flexaonormal/>

ConcWeb - Flexão Normal Composta - Dimensionamento

Seção Transversal

Next

d'

d

b

Dados Geométricos

$b =$ cm $h =$ cm

$d =$ cm $d' =$ cm

Concreto

$f_{ck} =$ MPa $v_c =$ 1,4

Aço

Aço tipo: CA-25 CA-50 CA-60

$v_s =$ 1,15

Tipo de Armadura

Simétrica Não Simétrica

Carregamento

$M =$ KN.cm $v_f =$ 1,4

$N =$ KN ($N(+)$ = compressão)

EXECUTAR

Resultados do Dimensionamento

$M_d =$ KN.cm $f_{yd} =$ KN/cm² $f_c =$ KN/cm²

$N_d =$ KN $K =$ $K_{lim} =$

Área de Armadura

$A_s =$ cm²

$A_{s'} =$ cm²

Memória de Cálculo

Barras de Aço Adotadas

Armadura inferior: Diam. = mm

Armadura superior: Diam. = mm

Estribo: Diam. = mm

Cobrimento da armadura: $c =$ cm

FIGURA 4.7 - *Applet* para o dimensionamento de seções retangulares em concreto solicitadas à flexão normal composta

O programa para o dimensionamento de seções retangulares solicitadas à flexão normal composta é semelhante ao programa para flexão normal simples. Basicamente, a diferença entre os dois está na opção de escolha do tipo de armadura simétrica ou não simétrica.

Para efetuar algum dimensionamento, devem-se fornecer os dados geométricos da peça, características do concreto e do aço, o momento fletor e a força axial solicitantes e os coeficientes de majoração da carga e de minoração da resistência do concreto e do aço. A opção pelo tipo de armadura simétrica e não-simétrica irá influenciar no

detalhamento da peça. Normalmente, sugere-se que os pilares tenham armadura simétrica.

Neste programa, os momentos fletores devem ser sempre positivos. Esforços axiais positivos representam forças de compressão e negativos de tração.

Como exemplo, considere os mesmos dados do exemplo apresentado no item 4.2, ou seja, uma peça de concreto armado de 20 cm de largura e 40 cm de altura solicitada por um momento fletor 14000 kN.cm, concreto de resistência característica à compressão de 25 MPa e o aço da armadura do tipo CA-50 e altura útil d igual a 35 cm. A estes dados, acrescenta-se uma força axial de compressão de 100 kN. Inicialmente, será adotada armadura não-simétrica.

Após inserir os dados no programa, deve-se pressionar o botão EXECUTAR para que o dimensionamento seja realizado. A entrada de dados com o resultado do dimensionamento no programa está mostrada na FIGURA 4.8. Neste exemplo, obteve-se a área de aço tracionada $A_s = 14,07 \text{ cm}^2$ e área de aço comprimida $A'_s = 7,51 \text{ cm}^2$. Comparando-se com o exemplo do item 4.2, observa-se que, ao aplicar uma força de compressão, a área de aço tracionada A_s diminuiu e a área de aço comprimida A'_s aumentou.

ConcWeb - Flexão Normal Composta - Windows Internet Explorer

http://concweb.kcc.ufmg.br/flexaonormal/

Favorites ConcWeb - Flexão Normal Composta

NBR 6118 Flexão Normal Composta - Dimensionamento

Seção Transversal

Dados Geométricos

b = 20 cm h = 40 cm
d = 35 cm d' = 5 cm

Concreto

f_{ck} = 25 MPa γ_c = 1,4

Aço

Aço tipo: CA-25 CA-50 CA-60
 γ_s = 1,15

Tipo de Armadura

Simétrica Não Simétrica

Carregamento

M = 14000 KN.cm γ_f = 1,4
N = 100 KN (N(+)= compressão)

EXECUTAR

Resultados do Dimensionamento

M_d = 19600,00 KN.cm f_{yd} = 43,48 KN/cm² f_c = 1,52 KN/cm²
 N_d = 140,00 KN K = 0,584 K_{lim} = 0,320

Área de Armadura

A_s = 14,07 cm²
 $A_{s'}$ = 7,51 cm²

Memória de Cálculo

Armadura Não-Simétrica
Cálculo por processo Analítico

- $M_d = M \cdot \gamma_f = 19600,00$ KN.cm
- $N_d = N \cdot \gamma_f = 140,00$ KN
- $f_{yd} = f_y / \gamma_s = 43,48$ KN/cm²
- $f_c = 0,85 \cdot f_{ck} / \gamma_c = 1,52$ KN/cm²

--- 1o CASO ---

- Valores para k e k':

$$k = \frac{[N_d \cdot (d - h/2) + M_d]}{(f_c \cdot b \cdot d^2)}$$
 $k = 0,584$
- Para $k > k_{lim}$, $k' = k_{lim}$
- Para $k < k_{lim}$, $k' = k$

Barras de Aço Adotadas

Armadura inferior: Diam. = mm
Armadura superior: Diam. = mm
Estribo: Diam. = mm
Cobrimento da armadura: c = cm

VISUALIZAR RESULTADOS

FIGURA 4.8 - Exemplo de dimensionamento de uma seção retangular solicitada à flexão normal composta com armadura não-simétrica.

Assim como no exemplo do item 4.2, considere que sejam adotadas barras de aço tracionadas de 20 mm de diâmetro, barras comprimidas de 16 mm, estribos de 6,3 mm e espessura de cobrimento de 3 cm. Após inserir esses dados, deve-se pressionar o botão VISUALIZAR RESULTADOS para que seja apresentada, em 3D, uma parte da viga com a armadura detalhada, conforme ilustrado na FIGURA 4.9.

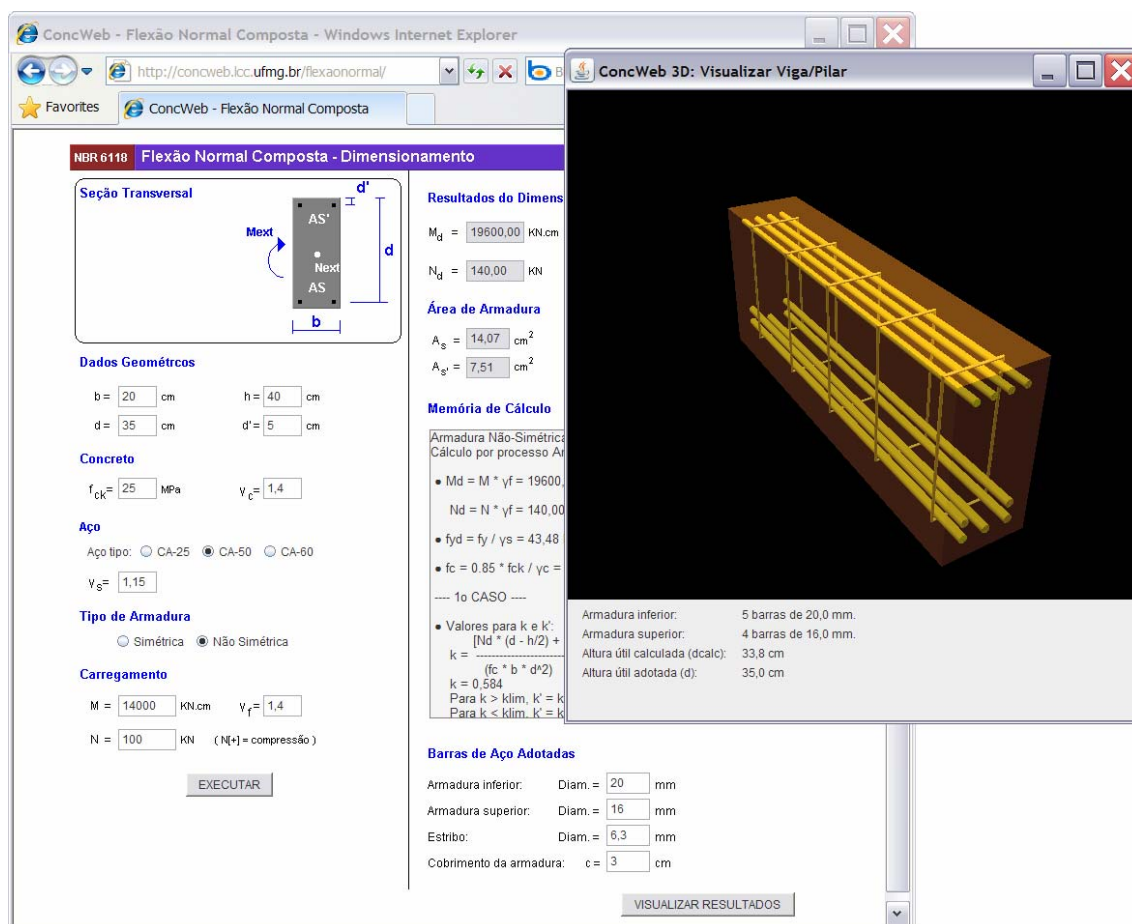


FIGURA 4.9 - Apresentação do detalhamento da viga em 3D.

Assim como no programa de flexão normal simples, na janela de visualização da viga, são apresentadas algumas informações como a quantidade e o diâmetro das barras de aço adotadas e a altura útil calculada e a adotada.

Agora, considere que a peça deste exemplo seja um pilar e que se deseja adotar armadura simétrica no seu detalhamento. Nesta condição, deve-se selecionar a opção Armadura Simétrica na janela principal do programa e novamente pressionar o botão EXECUTAR. A FIGURA 4.10 ilustra os resultados obtidos.

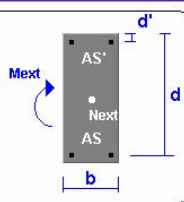
ConcWeb - Flexão Normal Composta - Windows Internet Explorer

http://concweb.kcc.ufmg.br/flexaonormal/

Favorites ConcWeb - Flexão Normal Composta

NBR 6118 Flexão Normal Composta - Dimensionamento

Seção Transversal



Dados Geométricos

b = 20 cm h = 40 cm
d = 35 cm

Concreto

$f_{ck} = 25$ MPa $\gamma_c = 1,4$

Aço

Aço tipo: CA-25 CA-50 CA-60
 $\gamma_s = 1,15$

Tipo de Armadura

Simétrica Não Simétrica

Carregamento

M = 14000 KN.cm $\gamma_f = 1,4$
N = 100 KN (N(+) = compressão)

EXECUTAR

Resultados do Dimensionamento

$M_d = 19600,00$ KN.cm $f_{yd} = 43,48$ KN/cm² $f_c = 1,52$ KN/cm²
 $N_d = 140,00$ KN K = $K_{lim} =$

Área de Armadura

$A_s = 13,16$ cm²
 $A_{s'} = 13,16$ cm²

Memória de Cálculo

Armadura Simétrica
Cálculo por processo iterativo e Aproximado

- $N_d = 140,00$ kN
 $N_{dcalc} = 139,60$ kN
- $M_d = 19600,00$ kN.cm
 $M_{dcalc} = 19538,86$ kN.cm
- Distância x da LN = 9,46 cm
- $A_s1 = A_s2 = 13,16$ cm²
 Taxa da armadura total = $2 \cdot A_s1 / A_c = 3,29\%$
- Tolerância = 0,50%

Barras de Aço Adotadas

Armaduras inf/sup: Diam. = mm
Estribo: Diam. = mm
Cobrimento da armadura: c = cm

VISUALIZAR RESULTADOS

FIGURA 4.10 - Exemplo de dimensionamento de uma viga solicitada à flexão normal composta com armadura simétrica.

Considere, agora, que sejam adotadas barras de aço de 20 mm de diâmetro, estribos de 6,3 mm e espessura de cobrimento de 3 cm. Após inserir esses dados e pressionar o botão VISUALIZAR RESULTADOS, será apresentada a janela com o pilar em 3D, conforme ilustrado na FIGURA 4.11.

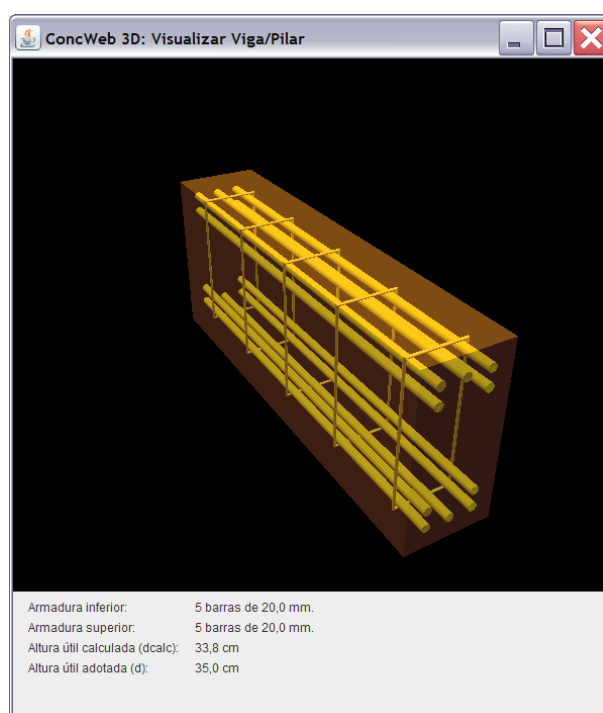


FIGURA 4.11 - Apresentação do detalhamento do pilar com armadura simétrica em 3D.

Para refinar os resultados, pode-se corrigir a altura útil adotada para $d=33,8$ cm conforme apresentado na janela de visualização em 3D (ver FIGURA 4.11) e recalcular. Os novos resultados estão apresentados na FIGURA 4.12. Reduzindo-se a altura útil, como era de se esperar, houve um acréscimo nas áreas de aço. Neste exemplo, no entanto, este acréscimo não foi suficiente para ter que aumentar a quantidade de barras de aço.

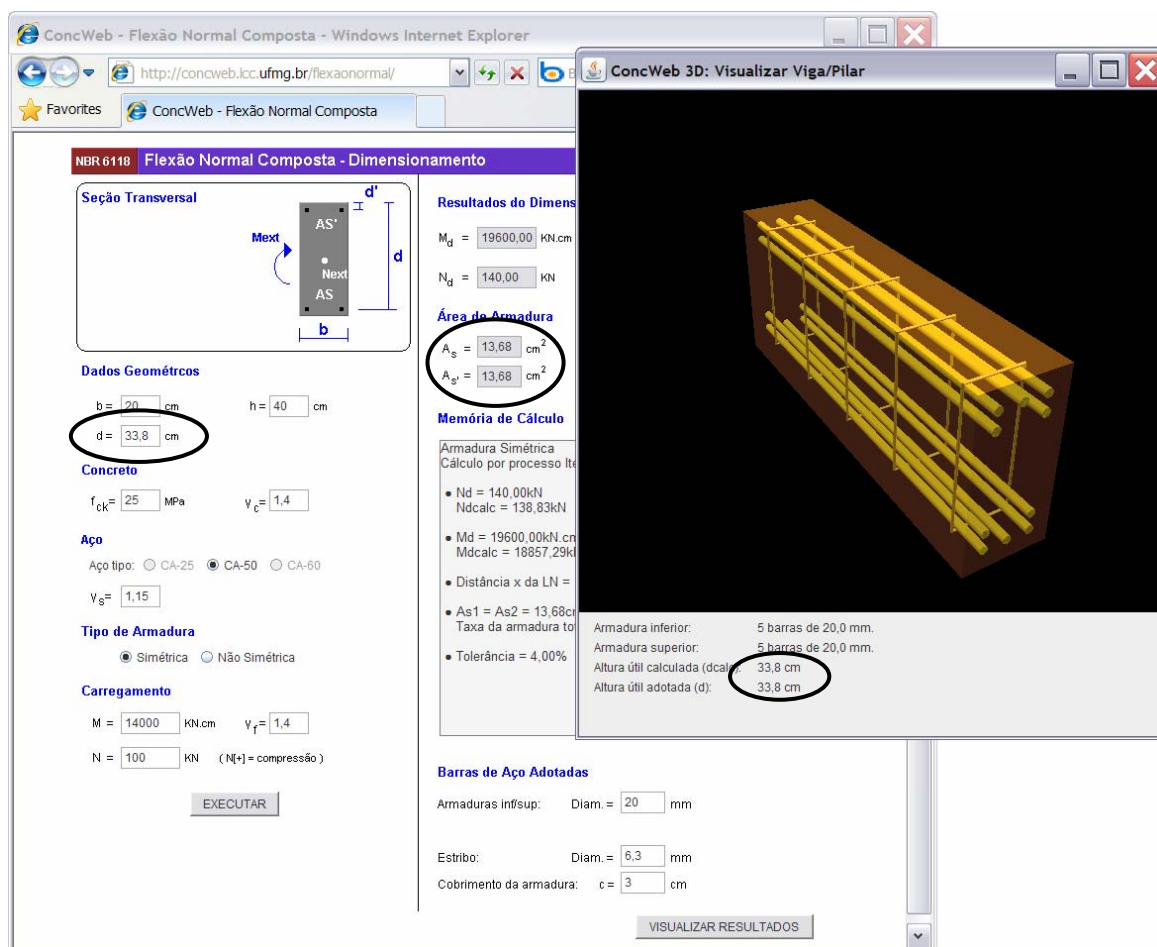


FIGURA 4.12 - Apresentação do detalhamento do pilar após alteração do valor da altura útil (d).

4.4 Programa para Dimensionamento de Seções Retangulares Solicitadas ao Cisalhamento

O programa para dimensionamento de seções retangulares em concreto armado solicitadas ao cisalhamento pode ser usado para o dimensionamento de vigas e pilares. A FIGURA 4.13 apresenta a tela inicial do programa. O endereço para acesso ao programa é: <http://concweb.lcc.ufmg.br/cisalhamento/>

FIGURA 4.13 - *Applet* para o dimensionamento ao cisalhamento de seções retangulares em concreto armado

O programa de dimensionamento ao cisalhamento em seções retangulares segue a mesma filosofia apresentada anteriormente para as situações de flexão normal simples e normal composta. A entrada de dados se inicia com as informações da geometria da seção em análise, das propriedades do concreto e do aço utilizados, do valor do esforço cortante na seção e dos coeficientes de majoração da carga e de minoração da resistência dos materiais.

O dimensionamento permite ainda a escolha entre os Modelos I e II adotados pela NBR 6118 (2007). Para o modelo I basta especificar o ângulo θ igual a 45° . No caso do modelo II o valor deste ângulo deve estar no intervalo $30^\circ \leq \theta < 45^\circ$.

Como exemplo, considere os mesmos dados do exemplo apresentado no item 4.2, ou seja, uma seção de concreto armado de 20 cm de largura e 40 cm de altura solicitada por um esforço cortante 100 kN. O concreto tem resistência característica à compressão de 25 MPa e o aço empregado é do tipo CA-50. A altura útil d da seção é igual a 35 cm e deseja-se empregar o modelo I (θ igual a 45°) da NBR 6118 (2007).

Após inserir os dados no programa, deve-se pressionar o botão EXECUTAR para que o dimensionamento seja realizado. A entrada de dados com o resultado do dimensionamento no programa está mostrada na FIGURA 4.14. Neste exemplo, obteve-se a área de aço para armadura transversal $A_{sw} = 6,29 \text{ cm}^2/\text{m}$.

ConcWeb - Cisalhamento - Dimensionamento

Seção Transversal da Viga

Diagrama de uma seção transversal retangular de uma viga com largura bw e altura útil d . Uma força cortante V atua para baixo no centro da seção, e a armadura transversal ASw é representada por uma linha horizontal dentro da seção.

Dados Geométricos

$bw = 20$ cm $h = 40$ cm
 $d = 35$ cm
 $\alpha = 90$ graus $\theta = 45$ graus

Concreto

$f_{ck} = 25$ MPa $\gamma_c = 1,4$

Aço

Aço tipo: CA-25 CA-50 CA-60
 $\gamma_s = 1,15$

Carregamento

$V = 100$ KN $\gamma_f = 1,4$

EXECUTAR

Resultados do Dimensionamento

$V_d = 140,00$ KN $V_{sw} = 86,14$ KN
 $V_{Rd2} = 303,75$ KN $A_{sw} = 6,29$ cm²/m
 $V_{c0} = 53,86$ KN $p_{min} = 0,00103$
 $V_c = 53,86$ KN $A_{smin} = 2,05$ cm²/m

Área de Armadura

$A_{sw} = 6,29$ cm²/m

Memória de Cálculo

- $V_{sd} = V_s \cdot \gamma_f = 140,00$ KN
- $V_{Rd2} = \tau_{wd2} \cdot bw \cdot d = 303,75$ KN
Onde:
 $\tau_{wd2} = 0,54 \cdot \alpha_2 \cdot f_{cd} \cdot \sin^2(\theta) \cdot (\cotg \alpha + \cotg \theta)$
 $\alpha_2 = (1 - f_{ck}/250)$, f_{ck} em MPa
- $V_{c0} = \tau_{c0} \cdot bw \cdot d = 53,86$ KN
- Como θ é igual a 45: $V_c = V_{c0}$
Logo: $V_c = 53,86$ KN
- O valor de f_{ywd} será o menor entre os valores:
 $f_{ywd}/\gamma_s = 43,48$ KN/cm² e $43,48$ KN/cm²
Logo, $f_{ywd} = 43,48$ KN/cm²

Barras de Aço Adotadas

Armadura inferior: Diam. = mm
Armadura superior: Diam. = mm
Estribo: Diam. = mm
Cobrimento da armadura: $c =$ cm

VISUALIZAR RESULTADOS

FIGURA 4.14 - Exemplo de dimensionamento ao cisalhamento de uma seção retangular em concreto armado

Para prosseguir com o esboço do detalhamento da seção, devem-se fornecer os diâmetros das barras da armadura longitudinal, o diâmetro do estribo e a espessura do cobrimento. Estas informações são necessárias para o cálculo da altura útil real da seção.

Para o exemplo em questão, foram adotadas barras de 20 mm de diâmetro para a armadura longitudinal inferior, de 16 mm para a armadura superior, estribos de 6,3 mm de diâmetro e espessura de cobrimento igual a 3 cm. Após inserir esses dados, deve-se pressionar o botão VISUALIZAR RESULTADOS para que seja apresentada em 3D,

uma parte da peça incluindo a seção analisada com a armadura detalhada, conforme ilustrado na FIGURA 4.15.

The screenshot shows the ConcWeb software interface. The main window is titled 'ConcWeb - Cisalhamento - Dimensionamento' and contains the following sections:

- Seção Transversal da Viga:** A diagram of a rectangular cross-section with width b_w and height d . A shear force V is applied downwards, and the shear area A_{Sw} is indicated.
- Dados Geométricos:**
 - $b_w = 20$ cm, $h = 40$ cm
 - $d = 35$ cm
 - $\alpha = 90$ graus, $\theta = 45$ graus
- Concreto:**
 - $f_{ck} = 25$ MPa, $\gamma_c = 1,4$
- Aço:**
 - Aço tipo: CA-25 CA-50 CA-60
 - $\gamma_s = 1,15$
- Carregamento:**
 - $V = 100$ kN, $\gamma_f = 1,4$
- EXECUTAR** button.
- Resultados do Dimensionamento:**
 - $V_d = 140,00$ kN
 - $V_{Rd2} = 303,75$ kN
 - $V_{c0} = 53,86$ kN
 - $V_c = 53,86$ kN
 - Área de Armadura:** $A_{sw} = 6,29$ cm²/m
- Memória de Cálculo:**
 - $V_{sd} = V_s \cdot \gamma_f = 140,00$ kN
 - $V_{rd2} = \tau_{wd2} \cdot b_w \cdot d = 303,75$ kN
 - Onde: $\tau_{wd2} = 0,54 \cdot \alpha^2 \cdot f_{cd} \cdot \alpha^2 = (1-f_{ck}/250) \cdot f_{ck} \cdot \alpha^2$
 - $V_{c0} = \tau_{c0} \cdot b_w \cdot d = 53,86$ kN
 - Como θ é igual a 45: $V_c = V_{c0} = 53,86$ kN
 - O valor de f_{wyd} será o menor de $f_{yk}/\gamma_s = 43,48$ kN/cm² e $f_{yk}/\gamma_s = 43,48$ kN/cm²
- Barras de Aço Adotadas:**
 - Armadura inferior: Diam. = 20 mm
 - Armadura superior: Diam. = 16 mm
 - Estribo: Diam. = 6,3 mm
 - Cobrimento da armadura: $c = 3$ cm
- VISUALIZAR RESULTADOS** button.

The secondary window, 'ConcWeb 3D: Visualizar Viga/Pilar', displays a 3D model of the beam with its reinforcement bars highlighted in yellow. The model shows a rectangular cross-section with longitudinal bars and stirrups. Below the 3D model, the following information is displayed:

- Estribos: Barras de 6,3 mm espaçadas a cada 9,9 cm.
- Altura útil calculada (dcalc): 35,4 cm
- Altura útil adotada (d): 35,0 cm

FIGURA 4.15 - Apresentação do detalhamento da viga em 3D.

Assim como nos programas de flexão, na janela de visualização da seção, são apresentadas algumas informações como o diâmetro e o espaçamento dos estribos bem como a altura útil calculada e a adotada.

5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a finalidade de auxiliar o ensino e a aprendizagem das disciplinas de concreto armado, foram desenvolvidas, neste trabalho, três ferramentas computacionais, com acesso via web, para o dimensionamento e o esboço do detalhamento de seções de concreto armado, solicitadas à flexão normal simples, à flexão normal composta e ao cisalhamento. Os endereços de acesso na Internet são:

- <http://concweb.lcc.ufmg.br/flexaosimples/>
- <http://concweb.lcc.ufmg.br/flexaonormal/>
- <http://concweb.lcc.ufmg.br/cisalhamento/>

Essas ferramentas foram desenvolvidas utilizando-se a linguagem de programação JAVA e foram compiladas na forma de *applets* para possibilitar o acesso pela Internet. Para utilização dos *applets*, é necessária a instalação, no computador do usuário, da máquina virtual do JAVA (JVM - Java Virtual Machine). Caso o computador não tenha o JVM, deve-se instalá-lo antes de executar os programas. O JVM pode ser obtido gratuitamente do sítio da Sun no seguinte endereço: http://www.java.com/pt_BR/

Espera-se que estas ferramentas sejam adotadas nas disciplinas de concreto armado dos cursos de engenharia civil e arquitetura e que com elas o ensino e aprendizagem destes conteúdos se tornem mais amigáveis.

Sugestões para estudos futuros incluem:

- acompanhamento e avaliação do desempenho dos alunos com a utilização destas ferramentas;
- desenvolvimento de novas ferramentas de dimensionamento e esboço de detalhamento para seções submetidas, por exemplo, a flexão oblíqua composta e torção.

6

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Gláucia N; CALIXTO, José M.; MAIA, Elizabeth V.; RODRIGUES, Frederico (2004). **Concepção e implementação de um ambiente virtual de ensino-aprendizagem para as disciplinas de concreto armado**. In: XXXII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia – COBENGE, Brasília, DF, 2004.

ASSIS, Wayne Santos (2002). **Utilização de recursos multimídia no ensino de concreto armado e protendido**. Dissertação de Mestrado - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

ASSIS, Wayne Santos; BITTENCOURT, Túlio N. **Dimensionamento: Cisalhamento**. Disponível em <<http://www.lmc.ep.usp.br/pesquisas/TecEdu/java/cis/cisalhamento.htm>>. Acesso em 16/06/2009.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT), “**NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento**”, Rio de Janeiro, 2007.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT), “**NBR 7222: Argamassa e concreto - Determinação da resistência à tração por compressão diametral de corpos-de-prova cilíndricos**”, Rio de Janeiro, 1994.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT), “**NBR 7480: Aço destinado a armaduras para estruturas de concreto armado – Especificação**”, 2007.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT), “**NBR 12142: Concreto - Determinação da resistência à tração na flexão em corpos-de-prova**”, Rio de Janeiro, 1991.

CALIXTO, J. M., TEPEDINO, J. M., SILVA, M. D. e CHAVES, R. A., **Notas de Concreto Armado II**, Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.

GAMA, Carmem Lúcia Graboski; SCHEER, Sérgio (2004). **Objetos educacionais hipermedidáticos na educação de engenharia, sua contribuição e usabilidade**. In: XXXII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia – COBENGE, Brasília, DF, 2004.

LUFT, Astor; VERZENHASSI, Camila; ABE, Millian Sanae; SCHEER, Sérgio (2004). **Viga Retangular**. Disponível em http://www.cesec.ufpr.br/etools/oe3/applets/ConcretoArmado/frame_vigaR.html. Acesso em 16/06/2009.

SILVA, Ney Amorim (2005). **Notas de Concreto Armado I**. Belo Horizonte, Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia, 2005.

VERZENHASSI, Camila; SCHEER, Sérgio (2005). **Flexão Normal**. Disponível em <http://www.cesec.ufpr.br/etools/oe3/applets/Pilar/>. Acesso em 16/06/2009.